

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANDRÉ JUDÁ CORRÊA DE ANDRADE

**UMA NOVA TÉCNICA PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS SETORIALMENTE
HOMOGÊNEOS POR MEIO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
APLICADA A PROBLEMAS DE LAPLACE**

VITÓRIA

2016

ANDRÉ JUDÁ CORRÊA DE ANDRADE

**UMA NOVA TÉCNICA PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS SETORIALMENTE
HOMOGÊNEOS POR MEIO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
APLICADA A PROBLEMAS DE LAPLACE**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto

VITÓRIA

2016

Aos meus amados pais, Marisa e Salié.

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas tornaram possível a realização deste trabalho e agradeço a cada uma delas esta ajuda. Mesmo que mínimo, o suporte de cada um de vocês me auxiliou muito.

Agradeço a minha família, meu pai e minha mãe, sempre fontes de inspiração. Cada palavra de vocês é uma motivação a mais para seguir em frente, tanto profissionalmente, quanto pessoalmente.

Agradeço a minha esposa Carol, cuja alegria e empenho em seus trabalhos acadêmicos me inspiram, me ensinam. Afinal, foi motivado pelo seu apoio que consegui iniciar estes estudos, me manter empenhado com os trabalhos e finalmente terminar mais esse ciclo. Somos uma família de dois e meio, junto com Bitá. Como costumamos dizer: “Muito ajuda quem não atrapalha...”.

Aos colegas que fiz nessa etapa, Abraão Lemos e Hércules Barcelos, sou muito grato pela ajuda de vocês, no apoio na realização das matérias, nas discussões iniciais do meu trabalho e na obtenção de dados. Ao professor Carlos Loeffler, pela orientação dedicada, pelas excelentes discussões acadêmicas e pela paciência.

Agradeço o apoio do meu gerente Juventino Barros e à Petrobras, por possibilitarem que parte do meu tempo fosse dedicado a esse projeto, sem esse apoio este caminho seria bem mais difícil.

“E no fim de nossa viagem, voltaremos ao nosso ponto de partida e teremos a impressão de vê-lo pela primeira vez.”

T. S. Eliot

RESUMO

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) tem excelente desempenho nas aplicações em que o campo de variáveis é escalar e estacionário. No entanto, há uma gama de problemas nas ciências exatas e na engenharia que são sabidamente difíceis de serem resolvidos pelo MEC. Entre estes, estão os problemas fisicamente não homogêneos, onde as propriedades físicas podem variar localmente ou setorialmente. Para esses problemas, as formulações de domínio, como os Métodos de Elementos Finitos (MEF), Volumes Finitos (MVF) ou mesmo Diferenças Finitas (MDF), apresentam vantagens consideráveis. Entretanto, mesmo para estes casos, é possível obter formulações consistentes para o MEC, como a técnica das Sub-Regiões. Neste trabalho, apresenta-se uma técnica alternativa, dentro do escopo do MEC, para a resolução de problemas setorialmente homogêneos a partir da Equação de Laplace. Esta nova formulação é testada através de simulações e comparada com a técnica das sub-regiões, tendo como referência resultados analíticos e de outros métodos de domínio usualmente utilizados (MEF e MVF). Os resultados revelam-se bastante favoráveis à nova formulação e indicam que a técnica pode ser facilmente utilizada e replicada nos problemas em que as propriedades físicas do domínio variam setorialmente.

PALAVRAS-CHAVE: Método dos Elementos de Contorno. Homogeneidade Setorial. Equação de Laplace.

ABSTRACT

The Boundary Element Method (BEM) has excellent performance in applications where the variable field is scalar and stationary. However, there is a wide range of issues in science and engineering that are difficult to solve by the BEM. Among these issues, there are the non-homogeneous media problems, where the physical properties vary locally. In these kind of problems, the domain techniques, such as Finite Element Method (FEM), Finite Volume Method (FVM) or Finite Difference Method (FDM), present considerable advantages. However, even for these cases, it is possible to obtain consistent formulations for BEM, as the technique of sub-regions. This work presents an alternative technique within the BEM scope, for the resolution of non-homogeneous media problems given by the Laplace Equation. This new formulation is tested by simulations and compared with the sub-region technique, analytical results and other domain methods (FEM and FVM). The presented technique shows good results, indicating that the new formulation technique can be easily used and replicated in problems where the media presents non-homogeneous physical properties.

KEYWORDS: Boundary Element Method. Non-homogeneous Media. Laplace Equation.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	8
1.1. OBJETIVO	9
1.2. METODOLOGIA.....	9
1.3. RESUMO BIBLIOGRÁFICO	10
2. PROBLEMAS DE CAMPO ESCALAR	11
2.1. HISTÓRICO	12
2.2. EQUACIONAMENTO	13
2.3. PROBLEMAS FISICAMENTE HOMOGENEOS E NÃO-HOMOGENEOS	15
3. O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	16
3.1. INTRODUÇÃO.....	16
3.2. SUB-REGIÕES	20
4. NOVA FORMULAÇÃO PARA O MEC	23
4.1. DESENVOLVIMENTO DA FORMULAÇÃO	25
4.2. ASPECTOS MATRICIAIS	28
5. SIMULAÇÕES NUMÉRICA	30
5.1. EXEMPLO 1	31
5.2. EXEMPLO 2.....	35
5.3. EXEMPLO 3.....	39
5.4. EXEMPLO 4.....	41
6. CONCLUSÕES	45
REFERÊNCIAS	47

1. INTRODUÇÃO

A modelagem matemática e numérica de fenômenos físicos e problemas das ciências e engenharias está em estágio muito avançado. Devido aos avanços na capacidade computacional, problemas com milhões de graus de liberdade podem ser resolvidos de forma muito rápida. As aplicações vão das mais diversas, desde modelos de comportamento mecânico dos materiais, indo por simulações de reservatórios de petróleo, previsões climáticas e meteorológicas até estruturas mais complexas e de engenharia de ponta, como de carros de fórmula 1 e veículos espaciais.

No curto prazo, a humanidade depende da utilização do petróleo para manter seu padrão de qualidade de vida, seja no seu uso como fonte de energia ou como matéria-prima base na indústria petroquímica. Neste campo, as pesquisas envolvendo melhores modelagens de reservatórios de petróleo se tornam uma necessidade para o melhor dimensionamento e eficiência na sua exploração.

Reservatórios de petróleo são regiões que apresentam características que variam ponto a ponto e não necessariamente tem um modelo contínuo de suas propriedades. Ladopoulos (2011) faz um breve resumo dos trabalhos realizados em soluções de problemas de engenharia de reservatório de petróleo utilizando o Método de Elementos de Contorno, aplicando-o em domínios heterogêneo e em regime permanente. Este é um dos exemplos na área de engenharia onde se encontram problemas nos quais o domínio não se apresenta com características uniformes, homogêneas.

Para uma modelagem matemática de um problema, podem-se utilizar modelos cuja formulação esteja baseada em equações diferenciais ou em equações integrais. Pela matemática, ambas as formulações são equivalentes, visto que são representações locais e globais, respectivamente, do mesmo fenômeno (LIU, 2009). A partir destas duas formulações, a depender da característica do problema, pode-se resolver analiticamente (na grande maioria dos casos, possíveis em problemas simples do ponto de vista da geometria e condições de contorno) ou buscar uma solução numérica. Dos diversos métodos numéricos utilizados para a resolução dos modelos matemáticos (Figura 1), pode-se diferenciá-los em métodos de domínio e métodos de contorno. Destacam-se pelo lado dos métodos de discretização do domínio, o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Volumes Finitos (MVF) e o Método das Diferenças Finitas (MDF); estes mais conhecidos e difundidos, tanto academicamente quanto comercialmente. Do lado do métodos que utilizam

a discretização do contorno, o mais conhecido é o Método dos Elementos de Contorno (MEC), em suas diversas formulações.

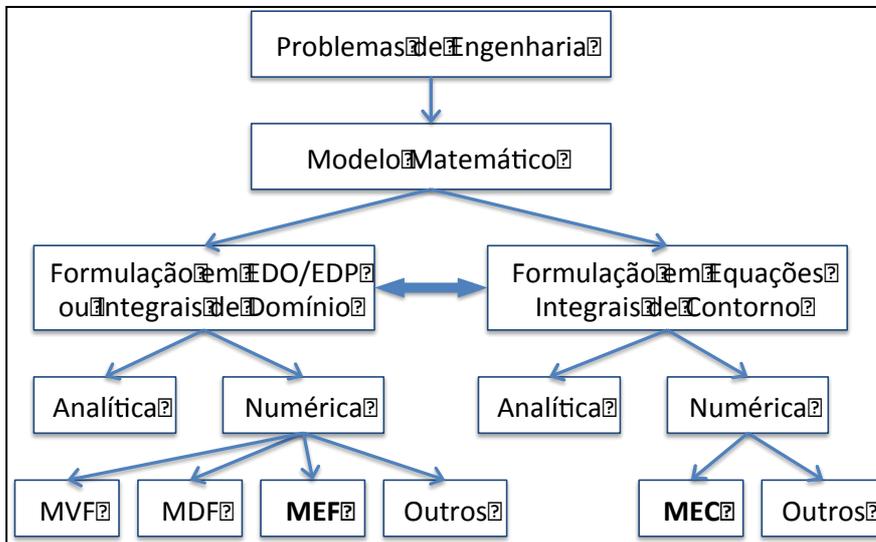


Figura 1 – Modelos numéricos comumente utilizados para solução de problemas de engenharia.

Fonte: Liu (2009).

Nota: Adaptado pelo autor.

1.1. OBJETIVO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma alternativa, dentro do escopo do Método dos Elementos de Contorno, que seja mais adequada para a resolução de problemas com homogeneidade setorial.

Os objetivos específicos são apresentados a seguir:

- Apresentar o desenvolvimento desta formulação alternativa;
- Realizar simulações numéricas de problemas-teste através da formulação proposta;
- Analisar os dados e discutir os resultados.

1.2. METODOLOGIA

Através de uma abordagem matemática, a partir da Equação de Laplace, são abordados problemas com geometria e carregamentos simples em que as propriedades físicas estão dispersas em setores distintos no domínio. Utilizando o Método dos Elementos de Contorno como método discreto de solução, esses problemas são resolvidos numericamente por meio da nova formulação e pela técnica das sub-regiões. Esses resultados são

comparados com resultados analíticos ou obtidos por outros métodos já utilizados de forma consagrada na literatura, como o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Volumes Finitos. A comparação é realizada através da avaliação do erro relativo cometido pelos métodos utilizados, tomando como base de comparação o resultado analítico do problema (quando existente) ou os valores de referência obtidos com a utilização de outros métodos.

1.3. RESUMO BIBLIOGRÁFICO

Segundo Cheng e Cheng (2005), o nome “Métodos dos Elementos de Contorno - MEC”, em inglês *Boundary Element Method - BEM*, pode ser utilizado como referência a todos os métodos numéricos para resolução de equações diferenciais em que se consegue reduzir a malha do domínio para uma malha no seu contorno. Neste contexto e ao longo do anos, foram produzidos inúmeros trabalhos relativos ao método (CHENG; CHENG, 2005). Cheng e Cheng (2005) apresentam em seus trabalho a evolução do MEC desde os primeiros progressos na Teoria do Potencial, passando pelas Fórmulas de Green até chegar nas formulações integrais, características do método.

O MEC encontra diversas aplicações nos campos de elasticidade, transferência de calor, problemas de difusão, escoamento potencial, mecânica da fratura, propagação de ondas mecânicas, análise modal e comportamento de materiais compósitos (PAIVA; SOLLERO; ALBUQUERQUE, 2011). Liu et al (2011) também apresentam em seu trabalho um histórico tanto da evolução do método, apresentando métodos de solução rápida, quanto das aplicações emergentes do método (modelagem de sistemas micro eletromecânicos, compósitos reforçados com fibras, materiais inteligentes, ondas eletromagnéticas).

Em relação aos métodos de discretização do domínio, o MEC tem as seguintes vantagens: redução do problema em uma dimensão, o método numérico gera sistemas lineares menores, melhor precisão dos resultados, método mais adequado para resolução de problemas com domínio aberto (infinito ou semi-infinito) e de concentração de tensões (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1996) e resolução simultânea da variável básica e sua derivada. As desvantagens aparecem quando o domínio analisado é esbelto (menor relação entre contorno e área ou volume do domínio) ou quando existe a necessidade de representar com precisão as ações de domínio. Outro obstáculo é que o sistema linear gerado pelo processo de discretização produz uma matriz cheia e não simétrica, o que dificulta e torna oneroso o seu processo de resolução computacional, quando comparados aos outros métodos que geram matrizes esparsas.

2. PROBLEMAS DE CAMPO ESCALAR

Por vezes, muitos fenômenos apresentam similaridade quanto ao formato das equações características que os descrevem. Dentre estas, a Equação de Laplace é uma das mais conhecidas no campo dos fenômenos físicos que podem ser representados através de grandezas escalares.

A Equação de Laplace é utilizada para modelar fenômenos que podem ser representados como funções de campo escalar, como escoamentos potenciais, processos de difusão, certos problemas simples de elasticidade (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1996) e modelagem da transferência de calor em regime permanente ou transiente (INCROPERA; DEWITT, 2011).

Assim, se o campo vetorial em regime permanente oriundo do gradiente de uma função escalar $u(x, y)$, apresenta seu divergente nulo em todos os pontos deste domínio, que se apresenta sem fontes ou sorvedouros, sua modelagem matemática (Equação de Laplace) é expressa, em duas dimensões, por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = u_{,ii} = \nabla^2 u = 0 \quad (1)$$

Para que o problema linear seja bem posto, é preciso apenas estabelecer condições de contorno. As condições de contorno elementares são de dois tipos: essenciais (condição de Dirichlet), quando os valores da função básica são conhecidos, e naturais (condição de Neumann), quando suas derivadas com relação à normal exterior são prescritas em parte do contorno. Uma condição de contorno representada por uma combinação linear das condições de contorno de Neumann e Dirichlet é chamada de condição de Robin. As condições de contorno elementares são representadas a seguir para um domínio genérico Ω com contorno Γ , onde $\Gamma = \Gamma_q + \Gamma_u$:

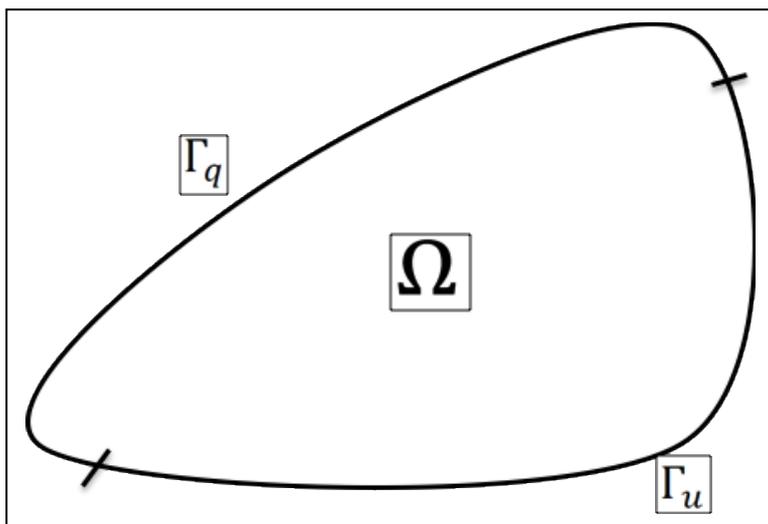


Figura 2 – Domínio genérico com condições de contorno.
 Fonte: Elaborado pelo autor.

$$u(x, y) = \bar{u}(x, y) \text{ prescrito em } \Gamma_u \quad (\text{condição de Dirichlet}) \quad (2)$$

$$q(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = \bar{q}(x, y) \text{ prescrito em } \Gamma_q \quad (\text{condição de Neumann}) \quad (3)$$

Na equação (3), q significa a derivada do potencial u com relação à normal externa ao contorno, aqui simbolizada por n .

2.1. HISTÓRICO

As forças de campo podem ser descritas como resultados das interações provenientes da presença no espaço de corpos que interagem a distância, como presença de massas (no caso da gravitação) e presença de cargas elétricas (no caso de campos elétricos). Ao longo dos anos foi observado que a formulação diferencial utilizada para a descrição destes problemas de campo (Equação de Laplace) também descrevia bem o fluxo de calor em regime permanente em sólidos homogêneos e o escoamento em regime permanente de fluidos ideais e correntes elétricas, aparecendo também na descrição matemática do comportamento de sólidos elásticos, como torção em barras prismáticas e certos problemas axissimétricos (KELLOGG, 1929; TIMOSHENKO; GOODIER, 1970). Assim, o aparecimento da Equação de Laplace nas diversas áreas e disciplinas das ciências físicas e engenharias foi reforçando o conceito de se haver uma equação mais geral que poderia descrever diversos fenômenos, partindo de um mesmo princípio.

2.2. EQUACIONAMENTO

Esta equação mais geral, voltada a problemas escalares, é chamada de equação de campo escalar generalizada, sendo apresentada em trabalhos de Loeffler (1992) e Bulcão (1999). Ela pode ser representada através da seguinte equação:

$$\left(K_{ij}(X)u_{,j}(X) \right)_{,i} - \lambda D^n(u(X)) = p(X) \quad (4)$$

Na equação anterior, $X = X(x_1, x_2)$, K_{ij} é um diádico que representa as propriedades físicas, u é o potencial ou a variável de interesse, λ é um escalar, D^n é um operador diferencial representando as derivadas temporais, p representa uma função escalar conhecida associada a ações internas ao domínio, que não depende do potencial u .

Com o operador diferencial representando uma derivada temporal de segunda ordem, a equação representa modelos dinâmicos:

$$\left(K_{ij}u_{,j} \right)_{,i} - \lambda \ddot{u} = p \quad (5)$$

A equação (5) representa problemas de propagação de ondas acústicas, e por isso é conhecida como a Equação de Onda.

Quando o operador diferencial representa uma derivada de primeira ordem, a equação resultante representa problemas que variam no tempo, representando modelos transientes e aperiódicos devido ao forte amortecimento:

$$\left(K_{ij}u_{,j} \right)_{,i} - \lambda \dot{u} = p \quad (6)$$

A equação (6) pode representar problemas de difusão ao longo do tempo, como transferência de calor em regime transiente.

Nos problemas onde o operador diferencial representa uma derivada de ordem zero, a equação pode representar problemas dinâmicos nos quais a dependência no tempo foi retirada, conforme ocorre quando se aplicam técnicas matemáticas como a Transformada de Laplace ou Fourier. Tais problemas representam uma resposta estacionária em função do valor de λ e das condições de contorno ou ações do domínio:

$$(K_{ij}u_j)_i - \lambda u = p \quad (7)$$

Quando a função escalar p for nula, a equação é chamada de Equação de Helmholtz:

$$(K_{ij}u_j)_i - \lambda u = 0 \quad (8)$$

A Equação de Helmholtz, quando λ representa um valor desconhecido, representa problemas onde se deseja encontrar um conjunto de valores de λ , os autovalores, que estão associados a um conjunto de possíveis configurações do sistema, expressas pelos valores de u , os chamados auto vetores. O conjunto de autovalores e auto vetores representa um sistema em auto-equilíbrio na ausência de solicitações externas.

A partir da equação (7), quando o valor de λ for nulo, a equação é chamada de Equação de Poisson, representando problemas estacionários sujeitos a ação de domínio, representada pela função escalar p :

$$(K_{ij}u_j)_i = p \quad (9)$$

Sem o termo que representa as ações de domínio, a equação fica da seguinte forma:

$$(K_{ij}u_j)_i = 0 \quad (10)$$

Considerando a aplicação da equação a problemas bidimensionais e as propriedades físicas homogêneas, a equação representa a Equação de Laplace:

$$Ku_{,ii} = 0 \quad (11)$$

A Equação de Laplace é a equação mais simples na Teoria de Campo Escalar. Nos problemas representados por essa equação, as ações externas atuam apenas no contorno. Assim, essas ações, que não são apresentadas explicitamente na equação, são expressas como condições de contorno do problema.

2.3. PROBLEMAS FISICAMENTE HOMOGENEOS E NÃO-HOMOGENEOS

Partindo da Equação de Laplace, equação (11), K representa as propriedades do domínio em estudo. Ao se considerar o domínio com propriedades isotrópicas, diz-se que o problema é fisicamente homogêneo. Porém, caso haja consideração de que as propriedades materiais de um domínio variem, a modelagem do problema deve ser realizada a partir da equação (10), considerando-se conhecida a forma de variação ao longo de todo o domínio. Há casos em as propriedades variam em função da própria variável básica, mas esses casos, chamados de não-lineares, não são aqui abordados.

Nos problemas em que a propriedade K varia apenas de forma espacial (problemas lineares), diz-se que o problema é fisicamente não-homogêneo. Nos casos onde a propriedade K tem valores constantes, porém em diferentes setores macroscópicos do domínio, diz-se que o problema apresenta homogeneidade setorial. Nesta classe de problemas, os métodos numéricos de domínio se adaptam facilmente, pois em cada subdivisão do domínio pode-se modelar a propriedade K com um valor constante. Porém existe relativa dificuldade em modelar essa classe de problemas através de métodos que utilizam a discretização do contorno.

A técnica das sub-regiões é uma alternativa já utilizada no âmbito do Método dos Elementos de Contorno, onde as regiões de propriedades distintas têm suas matrizes montadas de forma independente e o sistema de equações para todo o domínio é montado a partir de um subconjunto de equações geradas em cada sub-região, utilizando condições de compatibilidade e equilíbrio em suas interfaces (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1996). Outra possibilidade, utilizando o Método dos Elementos de Contorno, seria a utilização da formulação Quase-Dupla Reciprocidade (LOEFFLER; MANSUR, 2003), onde a formulação do MEC é trabalhada no seu equacionamento, introduzindo uma aproximação nos termos integrais de derivada espacial de primeira ordem. Santolin (2006) apresenta esta formulação aplicada a problemas dinâmicos em meios heterogêneos, porém em situações nas quais as propriedades físicas variam gradativamente.

3. O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

A seguir, apresenta-se o desenvolvimento matemático do método dos elementos de contorno aplicado à Equação de Laplace para um domínio com propriedades físicas homogêneas.

3.1. INTRODUÇÃO

Considerando a equação de Laplace, onde $u(X)$ é um potencial escalar e a propriedade física $K(X)$ varia no domínio Ω bidimensional:

$$Ku_{,ii} = 0 \quad (12)$$

Embora pudesse ser eliminada, por questões de estratégia visando futuras deduções, a propriedade K permanecerá no equacionamento.

Realiza-se a ponderação desta equação, multiplicando ambos os lados por uma função conhecida u^* , que também significa fisicamente um potencial, e integra-se a mesma no domínio Ω . Logo a seguir, a função u^* será melhor explicada, no sentido de que ela é uma solução fundamental correlata. A equação integral resultante é representada da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} Ku_{,ii}u^*d\Omega = 0 \quad (13)$$

Com vistas ao melhor entendimento da formulação proposta neste trabalho, é importante interpretar a equação (13). Ao se tomar a equação diferencial de governo, multiplicá-la pela função auxiliar e integrá-la no domínio, está se estabelecendo uma sentença matemática relacionada fisicamente à energia do sistema. Considerando, por exemplo, que o potencial u significa temperatura, a equação (13) representa o equilíbrio de energia térmica no sistema. Isto ficará mais claro no decorrer da dedução da forma integral inversa do Método dos Elementos de Contorno.

Através da propriedade da integração por partes, pode-se desmembrar a parcela da esquerda da equação 13 em duas parcelas:

$$\int_{\Omega} Ku_{,ii}u^*d\Omega = \int_{\Omega} (Ku_{,i}u^*)_{,i}d\Omega - \int_{\Omega} u_{,i}(Ku^*)_{,i}d\Omega \quad (14)$$

Assim, a equação fica denominada como Forma Integral Fraca:

$$\int_{\Omega} (Ku_{,i}u^*)_{,i}d\Omega - \int_{\Omega} u_{,i}(Ku^*)_{,i}d\Omega = 0 \quad (15)$$

A primeira parcela da equação (15) pode ser trabalhada através do Teorema da Divergência, onde se transforma uma integral de domínio em uma integral de contorno. Na segunda parcela, pode-se continuar a desenvolver os algebrismos por meio da regra do produto:

$$\int_{\Gamma} Ku_{,i}n_iu^*d\Gamma - \int_{\Omega} u_{,i}K_{,i}u^*d\Omega - \int_{\Omega} u_{,i}u^*_{,i}Kd\Omega = 0 \quad (16)$$

Na equação anterior, n_i é o vetor normal unitário externo ao contorno. Pode-se utilizar novamente a integração por partes na terceira parcela:

$$\int_{\Gamma} Ku_{,i}n_iu^*d\Gamma - \int_{\Omega} u_{,i}K_{,i}u^*d\Omega - \int_{\Omega} (Kuu^*_{,i})_{,i}d\Omega + \int_{\Omega} u(u^*_{,i}K)_{,i}d\Omega = 0 \quad (17)$$

A terceira parcela da equação (17) também pode ser trabalhada através do Teorema da Divergência, onde novamente substitui-se uma integral de domínio por uma de contorno. Na quarta parcela continua-se o desenvolvimento matemático através da regra do produto:

$$\int_{\Gamma} Ku_{,i}n_iu^*d\Gamma - \int_{\Omega} u_{,i}K_{,i}u^*d\Omega - \int_{\Gamma} Kuu^*_{,i}n_id\Gamma + \int_{\Omega} uu^*_{,ii}Kd\Omega + \int_{\Omega} uu^*_{,i}K_{,i}d\Omega = 0 \quad (18)$$

A segunda e quinta parcelas envolvem derivadas da propriedade K. Nos problemas homogêneos estes termos são cancelados, pois não há variação contínua desta propriedade no domínio. Resta então a seguinte equação:

$$\int_{\Gamma} Ku_{,i}n_iu^*d\Gamma - \int_{\Gamma} Kuu^*_{,i}n_id\Gamma + \int_{\Omega} uu^*_{,ii}Kd\Omega = 0 \quad (19)$$

Na equação (19) tem-se dois termos a serem calculados no contorno e um termo a ser calculado no domínio. Este termo do domínio pode ser trabalhado por meio da escolha apropriada da função u^* .

A função u^* , denominada solução fundamental, é a solução de um problema correlato num domínio infinito, onde uma ação externa é concentrada num ponto ξ do domínio. Esta função tem as seguintes propriedades:

$$u_{,ii}^* = -\Delta(\xi; X) \quad (20)$$

Sendo $\Delta(\xi; X)$ a função delta de Dirac.

A solução fundamental u^* para casos bidimensionais é apresentada a seguir:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r(\xi; X)) \quad (21)$$

E sua derivada q^* :

$$q^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (22)$$

Substituindo (20) na equação (19) e utilizando a seguinte propriedade da função Delta de Dirac, tem-se:

$$\int_{\Omega} f(x) \Delta(\xi; X) d\Omega = -c(\xi) f(\xi), \quad (23)$$

Na equação (23), $c(\xi)$ é uma função dependente da posição do ponto ξ em relação ao domínio Ω e, quando no contorno de Ω , dependente da suavidade deste contorno onde ξ esta posicionado (BREBBIA; WALKER, 1980).

$$c(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{se } \xi \notin \Omega \\ \frac{\alpha}{2\pi}, & \text{se } \xi \in \Gamma \\ 1, & \text{se } \xi \in \Omega \text{ (ponto interno)} \end{cases} \quad (24)$$

Onde α é o ângulo interno no ponto de contorno em que ξ está posicionado. Para ξ posicionado em contorno suaves $c=1/2$ ($\alpha = \pi$).

Daí, a equação (19) resulta na Forma Integral Inversa:

$$\int_{\Gamma} K u_{,i} n_i u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} K u u_{,i}^* n_i d\Gamma - u(\xi) c(\xi) K(\xi) = 0 \quad (25)$$

Alternativamente, pela simplificação dos termos da derivada na direção normal:

$$\int_{\Gamma} K q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} K u q^* d\Gamma - u(\xi) c(\xi) K(\xi) = 0 \quad (26)$$

A Forma Integral Inversa (equação 26) é a formulação matemática base para o desenvolvimento discreto do Método dos Elementos de Contorno. A partir desta equação pode-se proceder ao processo de discretização do contorno, escolhendo adequadamente pontos onde posicionar ξ de forma a se obter um sistema de equações que resolva as incógnitas no contorno – os pontos nodais. Ao mesmo tempo, é preciso também arbitrar uma aproximação para o campo de variáveis (u e q) entre os nós gerados pela discretização.

Através das condições de contorno do problema, os pontos onde são dados as condições de contorno na variável básica (u), calcula-se a sua derivada (q) e nos pontos onde são dadas as condições de contorno na derivada da variável básica (q), calcula-se a variável básica (u). Ressalta-se que u^* e sua derivada (q^*) são funções conhecidas, a partir da equação (21), e não incógnitas.

O sistema linear gerado pela discretização do contorno é um sistema que tem incógnitas tanto na variável básica quanto na sua derivada, tendo a seguinte representação matricial:

$$K[H]\{U\} = K[G]\{Q\} \quad (27)$$

Sendo $[H]$ e $[G]$ matrizes $n \times n$ e $\{U\}$ e $\{Q\}$ vetores de tamanho n , sendo n o número de pontos nodais do contorno.

Uma das características do MEC é que as matrizes H e G , geradas no processo de discretização, são matrizes cheias e não-simétricas, diferente de outros métodos que geram matrizes esparsas. Essa característica influencia no desempenho dos métodos de resolução dos sistemas lineares gerados.

De acordo com a prescrição das condições de contorno, pode haver permutações das posições dos elementos deste sistema, separando as incógnitas (valores da variável básica ou sua derivada) para um lado do sistema linear e os valores prescritos para o outro. Como o sistema gerado é função tanto dos valores prescritos da variável básica (em uma parte do

contorno) quanto de sua derivada (no restante do contorno), o sistema linear traz a vantagem do cálculo simultâneo das incógnitas tanto da variável básica quanto de sua derivada.

Voltando a questão da interpretação física do sistema final de equações gerado pelo MEC, agora fica mais claro que a equação (26) representa o equilíbrio de energia no sistema, indicando a equivalência entre a energia difusiva acumulada de forma conservativa e o trabalho das ações externas – que podem ser visualizadas como fluxos de calor – nele aplicadas. Estando o sistema em equilíbrio, a energia difusiva é igual ao trabalho dos fluxos externos. A soma deles é nula; é isto que se deve interpretar do que está expresso na equação (13).

Enquanto no Método dos Elementos Finitos as expressões matriciais resultantes representam o equilíbrio newtoniano, deduzidas a partir de princípios de minimização de energia (REDDY, 1993), no MEC o lado direito da equação (26) representa claramente trabalho dos fluxos externos sobre o sistema.

Este significado físico associado ao balanço energético do sistema é usado mais tarde na apresentação da formulação proposta.

3.2. SUB-REGIÕES

O método das sub-regiões é utilizado dentro do MEC como alternativa para resolução de problemas onde há homogeneidade setorial (BREBBIA; WALKER, 1980). A Figura 3 ilustra um domínio Ω com duas sub-regiões com propriedades distintas, K_1 em Ω_1 e K_2 em Ω_2 .

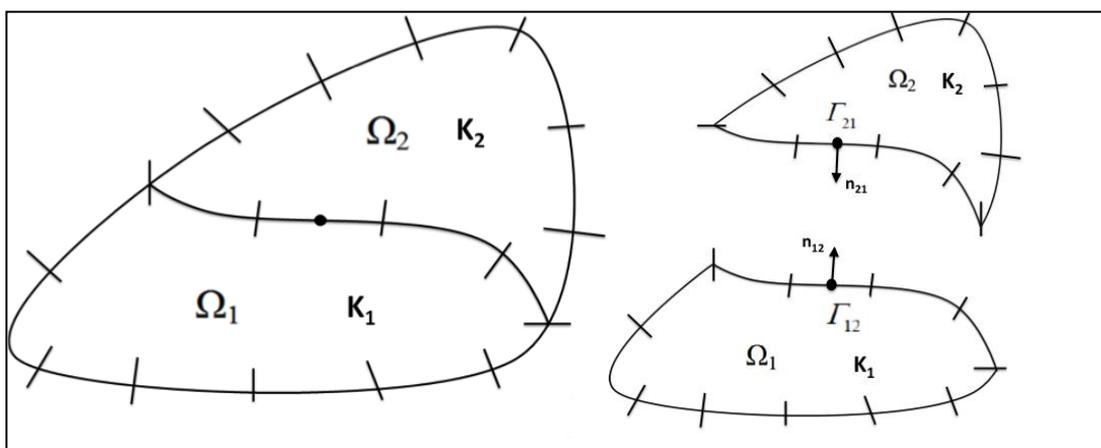


Figura 3 – Sub-regiões e condições de acoplamento.
Fonte: Elaborado pelo autor.

O sistema de equações resultante é formado pela adição dos sistemas isolados referentes a cada sub-região. As equações que permitem este acoplamento em conjunto são as condições de compatibilidade e equilíbrio na interface entre as sub-regiões. Por exemplo, em cada ponto comum na interface de duas sub-regiões, conforme Figura 3, tem-se:

Condição de compatibilidade: $u_{12} = u_{21}$.

Condição de equilíbrio: $q_{12} = -\frac{K_2}{K_1} q_{21}$.

Podem ser definidos da seguinte forma os potenciais nodais e fluxos, conforme apresentado por Brebbia e Dominguez (1996):

U^1, Q^1 - potencial nodal e fluxo ($q_1 = K_1 \frac{\partial u}{\partial n}$) no contorno Γ_{11}

U_I^1, Q_I^1 - potencial nodal e fluxo na interface Γ_{12} , considerando que eles pertencem a Ω_1 .

U^2, Q^2 - potencial nodal e fluxo ($q_2 = K_2 \frac{\partial u}{\partial n}$) no contorno Γ_{22}

U_I^2, Q_I^2 - potencial nodal e fluxo na interface Γ_{21} , considerando que eles pertencem a Ω_2 .

O sistema de equações correspondente a sub-região Ω_1 pode ser escrito como:

$$[H^1 \quad H_I^1] \begin{Bmatrix} U^1 \\ U_I^1 \end{Bmatrix} = [G^1 \quad G_I^1] \begin{Bmatrix} Q^1 \\ Q_I^1 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

E para a sub-região Ω_2 :

$$[H^2 \quad H_I^2] \begin{Bmatrix} U^2 \\ U_I^2 \end{Bmatrix} = [G^2 \quad G_I^2] \begin{Bmatrix} Q^2 \\ Q_I^2 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Aplicando as condições de compatibilidade e equilíbrio na interface:

$$U_I^1 = U_I^2 = U_I \quad (30)$$

$$Q_I^1 = -Q_I^2 = Q_I \quad (31)$$

Combinando os sistemas de equações:

$$\begin{bmatrix} H^1 & H_1^1 & 0 \\ 0 & H_1^2 & H^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^1 \\ U_1 \\ U^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & G_1^1 & 0 \\ 0 & -G_1^2 & G^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q^1 \\ Q_1 \\ Q^2 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

Uma característica da matriz resultante deste sistema é ser uma matriz em banda e que quanto mais interfaces existem no domínio, mais zeros haverá na matriz.

4. NOVA FORMULAÇÃO PARA O MEC

A abordagem via sub-regiões impõe cada subdomínio sendo examinado de modo estanque. Seu acoplamento ao domínio como um todo é feito através das condições de continuidade e equilíbrio, conforme apresentado no capítulo anterior.

Aqui é apresentada uma abordagem alternativa à técnica de sub-regiões, que se aplica aos problemas onde as propriedades físicas são dispersas em setores específicos do domínio.

Considere a seguinte figura a seguir, em que a homogeneidade das propriedades físicas é setorial e K define as propriedades relativas aos domínios representados por Ω , onde $\Omega = \Omega_1 + \Omega^i$:

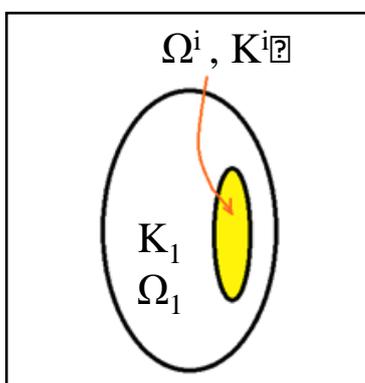


Figura 4 – Modelo de heterogeneidade.
 Fonte: Andrade, Loeffler e Mansur (2015).
 Nota: Adaptado pelo autor.

A partir da definição de integral, como uma soma no contínuo, e suas propriedades:

$$\int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega_1} d\Omega + \int_{\Omega^i} d\Omega \quad (33)$$

Considere a seguinte expressão para mostrar o algebrismo da técnica:

$$\int_{\Omega} K d\Omega = 0 \quad (34)$$

$$\int_{\Omega} K d\Omega = \int_{\Omega_1} K d\Omega + \int_{\Omega^i} K d\Omega = 0 \quad (35)$$

Como K é constante, com diferentes valores, dentro de cada domínio Ω_1 e Ω^i :

$$\int_{\Omega_1} K_1 d\Omega + \int_{\Omega^i} K^i d\Omega = 0 \quad (36)$$

E chamando $K^* = K^i - K_1$, para facilitar o desenvolvimento:

$$\int_{\Omega_1} K_1 d\Omega + \int_{\Omega^i} K^i d\Omega = \int_{\Omega_1} K_1 d\Omega + \int_{\Omega^i} (K_1 + K^*) d\Omega = 0 \quad (37)$$

$$\int_{\Omega_1} K_1 d\Omega + \int_{\Omega^i} K_1 d\Omega + \int_{\Omega^i} K^* d\Omega = \int_{\Omega} K_1 d\Omega + \int_{\Omega^i} K^* d\Omega = 0 \quad (38)$$

Resulta em:

$$\int_{\Omega} K d\Omega = \int_{\Omega} K_1 d\Omega + \int_{\Omega^i} K^* d\Omega = 0 \quad (39)$$

Na figura a seguir ilustra-se a ideia expressa na equação anterior:

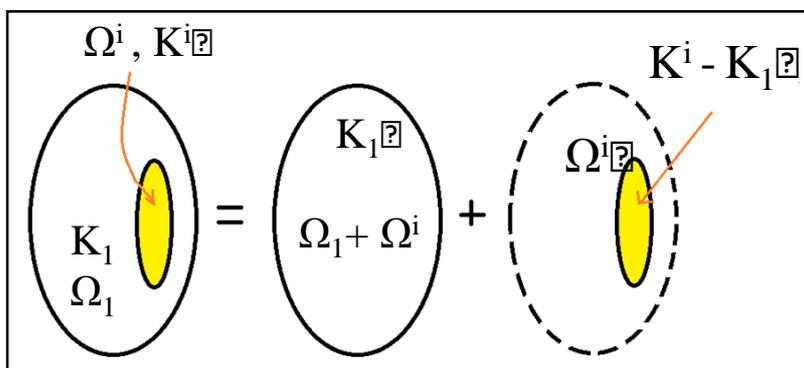


Figura 5 – Procedimento proposto.

Fonte: Andrade, Loeffler e Mansur (2015).

Nota: Adaptado pelo autor.

Na presente formulação, com base na equação (38), diferentemente do que se faz nas subregiões, o domínio envolvente Ω ($\Omega = \Omega_1 + \Omega^i$) não precisa ter subtraído qualquer parte, conforme ilustra a Figura 5; além disso, cada domínio se mantém com propriedades homogêneas. Na próxima seção é desenvolvida a formulação do MEC partir da equação (38).

4.1. DESENVOLVIMENTO DA FORMULAÇÃO

A partir da Equação de Laplace (vide equação 13), utilizando a geometria apresentada na Figura 4 em conjunto com a ideia apresentada na equação (38), desenvolve-se a formulação proposta:

$$\int_{\Omega} K_1 u_{,jj} u^* d\Omega + \int_{\Omega_i} K^* u^i_{,jj} u^* d\Omega = 0 \quad (40)$$

O subscrito i enfatiza que se trata de valores do potencial referentes ao contorno interno. Ressalta-se então que, nesta formulação, os pontos fonte internos devem figurar explicitamente no sistema matricial do MEC. Usualmente, tais pontos fonte são tratados como dados de entrada para o reuso da equação integral e cálculo das variáveis de estado no interior do domínio, isto após a solução do sistema matricial dado pela equação (26).

A primeira parcela do lado esquerdo da equação (39) pode ser desenvolvida conforme procedimentos normais do MEC, assim:

$$\int_{\Omega} K_1 u_{,jj} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} K_1 q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} K_1 u q^* d\Gamma - u(\xi) c(\xi) K_1(\xi) \quad (41)$$

Desenvolvendo a segunda parcela da equação (39) de forma similar:

$$\int_{\Omega_i} K^* u^i_{,jj} u^* d\Omega = \int_{\Gamma_i} K^* q^i u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_i} K^* u^i q^* d\Gamma - u^i(\xi) c^i(\xi) K^*(\xi) \quad (42)$$

No desenvolvimento da formulação proposta, o valor de $c(\xi)$ na equação (42) é dependente da forma como setor interno (Ω^i) se localiza em relação ao domínio (Ω), ou seja, se há ou não pontos de interseção entre os contornos. No caso do contorno interno Γ^i estar completamente envolvido pelo contorno Γ , os pontos fontes ξ são posicionados exclusivamente no contorno externo Γ e o valor de $c(\xi)$ é nulo. É o caso mostrado na Figura 6. Note que a caracterização do contorno Γ^i é feita pelas coordenadas destes pontos.

Já no caso de haver interseção entre os contornos dos dois domínios considerados, conforme mostrado na Figura 7, o valor de $c(\xi)$ vai depender da suavidade do contorno nos pontos de interseção.

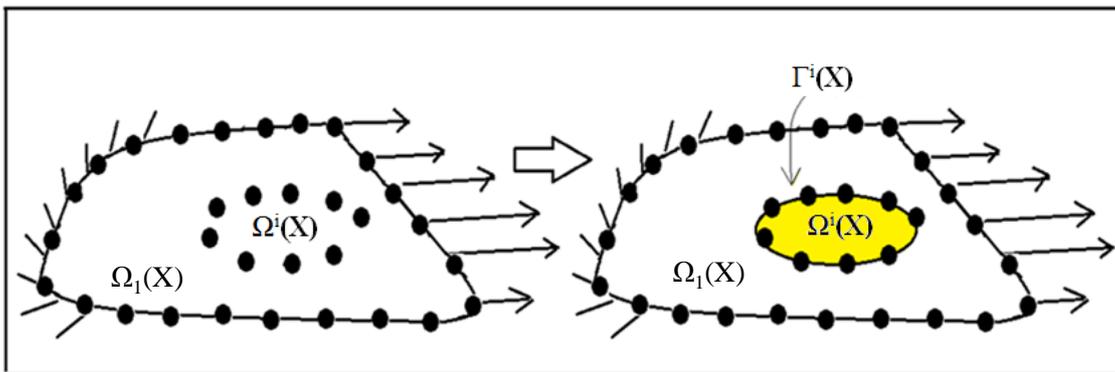


Figura 6 – Ilustração de um setor restrito Ω^i totalmente imerso no domínio Ω , onde $\Omega = \Omega_1 + \Omega^i$.

Fonte: Andrade, Loeffler e Mansur (2015).

Nota: Adaptado pelo autor.

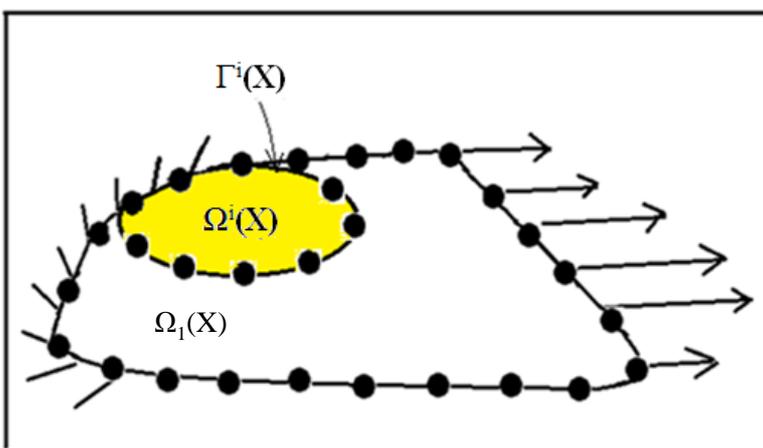


Figura 7 – Ilustração de um setor restrito Ω^i que tem interseção com o contorno Γ .

Fonte: Andrade, Loeffler e Mansur (2015).

Nota: Adaptado pelo autor.

Por conveniência, considere o caso dado na Figura 6, onde o valor de $c(\xi)$ na equação (42) é zero, pois ξ está localizado externamente ao contorno Γ^i . Não há perda de generalidade procedendo desta forma. Assim, a partir das equações (41) e (42):

$$\int_{\Gamma} qu^* d\Gamma - \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma - u(\xi)c(\xi) = -\frac{K^*}{K_1} \left(\int_{\Gamma^i} q^i u^* d\Gamma - \int_{\Gamma^i} u^i q^* d\Gamma \right) \quad (43)$$

Pode-se interpretar o lado direito dessa última equação através dos princípios de energia, pois as suas duas integrais representam, respectivamente, contribuições de energia vindas dos fluxos atuantes e da energia difusiva do setor interno. Tais contribuições afetam o balanço de energia total, em que também as parcelas difusiva e de fluxo relacionadas ao contorno envolvente Γ precisam ser contabilizadas. Poder-se-ia expressar a influência do setor

heterogêneo no domínio completo através da energia difusiva ou dos fluxos; contudo é muito mais simples transportar a influência do setor interno através da energia difusiva, que vem expressa em termos dos potenciais u^i , do que pelos fluxos q^i .

Assim, por conveniência, neste modelo proposto, a energia armazenada proveniente do setor heterogêneo é dada apenas pelos potenciais internos u^i . Desse modo, apenas uma parcela do lado direito da equação (42) é computada:

$$\int_{\Gamma} qu^* d\Gamma - \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma - u(\xi)c(\xi) = \frac{K^*}{K_1} (\int_{\Gamma_i} u^i q^* d\Gamma) \quad (44)$$

Em forma matricial, pode-se representar da seguinte forma:

$$[H]\{U\} = [G]\{Q\} + [H^i]\{U^i\} \quad (45)$$

O modelo proposto apresenta-se similar às formulações do MEC que descrevem problemas nos quais existe uma ação de domínio atuante num setor exclusivo, como apresentado a seguir na Figura 8 e cuja formulação matemática é apresentada na equação (46). Esta influência de ação do domínio, localizada em Ω^i , também deve ser transportada para o contorno externo do domínio Ω .

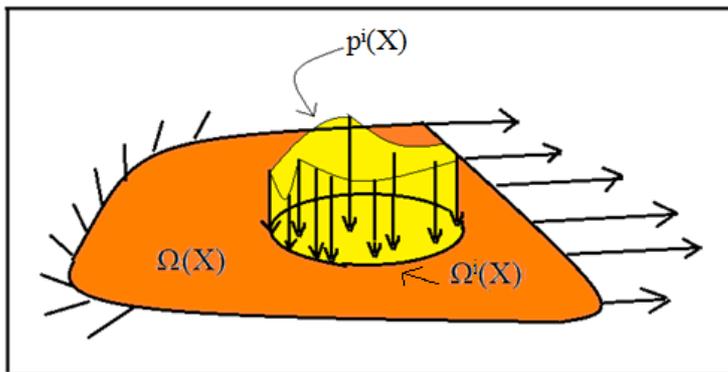


Figura 8 – Ilustração de um setor restrito Ω^i onde atua uma ação de domínio.

Fonte: Andrade, Loeffler e Mansur (2015).

Nota: Adaptado pelo autor.

$$\int_{\Gamma} qu^* d\Gamma - \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma - u(\xi)c(\xi) = -\frac{1}{K_1} (\int_{\Omega^i} p^i u^* d\Gamma) \quad (46)$$

Neste caso, governado pela Equação de Poisson, o lado direito da equação (46) pode ser computado por diversos artifícios do MEC, como integração por células (BREBBIA;

WALKER, 1980), formulação por Dupla Reciprocidade (PARTRIDGE; BREBBIA; WROBEL, 1992) ou por nova formulação que realiza integração direta com o uso de funções de base radial denominada DIBEM (LOEFFLER; CRUZ; BULCÃO, 2015).

Após o processo de discretização, a forma matricial da equação (46) fica representada de forma similar à equação (45):

$$[H]\{U\} = [G]\{Q\} - \{P^i\} \quad (47)$$

No caso do problema de Poisson, a ação de domínio é conhecida e sua influencia no domínio completo é representada pelo vetor $\{P^i\}$. Este é um vetor de energia, que representa o trabalho de forças de corpo no sistema como um todo. Para que este efeito, localizado, seja transportado para o domínio completo, é necessário realizar integrações no domínio interno (Ω_i) com os pontos fonte localizados no contorno externo. É o mesmo que ocorre na formulação proposta.

4.2. ASPECTOS MATRICIAIS

Os pontos internos que envolvem o contorno interno Γ^i devem ser representados no sistema matricial do MEC, representando valores incógnitos de potencial, tal como ocorre na Dupla-reciprocidade e na DIBEM para melhorar a qualidade da interpolação das ações de domínio (LOEFFLER; CRUZ; BULCÃO, 2015).

Conforme exposto, sendo a energia proveniente do setor heterogêneo representada pela energia difusiva, o acoplamento do sistema completo de equações é facilitada, pois é realizada através dos valores dos potenciais nos pontos internos, ao invés de seus fluxos. Gera-se uma matriz setorial H^i que pode ser facilmente contabilizada no sistema final. Nela aparecem explicitamente os pontos internos incógnitas no sistema final de equações, ou seja:

$$\begin{bmatrix} H_{cc} & 0 \\ H_{ic} & H_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{cc} & 0 \\ G_{ic} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_c \\ q_i \end{Bmatrix} + [H^i]\{U^i\} \quad (48)$$

A parcela do lado direito da equação (44) é referente ao domínio Ω^i , e são conectadas ao domínio completo Ω através da integração realizada no contorno Γ^i com os pontos fonte localizados no contorno externo Γ . Assim leva-se a informação do contorno interno Γ^i ao externo Γ .

Representando matricialmente:

$$\begin{bmatrix} H_{cc} & H_{ci} \\ H_{ic} & H_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{cc} & 0 \\ G_{ic} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_c \\ q_i \end{Bmatrix} \quad (49)$$

A matriz H_{ci} representa os coeficientes gerados pela integração do contorno interno Γ^i com os pontos fontes localizados no contorno externo Γ . Assim é realizada a transmissão da informação do setor Ω^i para o domínio completo Ω .

5. SIMULAÇÕES NUMÉRICA

Para possibilitar a comparação entre a nova formulação apresentada e o método das sub-regiões no MEC, foram realizadas diversas simulações para comparação dos resultados em termos de erros relativos. Os exemplos simulados têm geometria regular e carregamento simples, utilizando a Equação de Laplace como modelo matemático (sem ações de domínio) e contendo um ou mais setores com propriedades físicas distintas. Quando não há solução analítica para o problema, os resultados são comparados com outros métodos numéricos disponíveis e bastante utilizados na academia, como o MVF e o MEF.

Os valores de erros foram calculados para cada simulação realizada, sendo que, quando utilizado resultados analíticos como referência, a formula de erro é a seguinte:

$$\text{Erro} = \sum_{n=1}^N \frac{|u_{\text{analitico}} - u_{\text{simulado}}|}{N * \text{valor max}(u_{\text{analitico}})} \quad (50)$$

Quando a referência utilizada for outro método, a formula do erro é a apresentada a seguir:

$$\text{Erro} = \sum_{n=1}^N \frac{|u_{\text{referência}} - u_{\text{simulado}}|}{N * \text{valor max}(u_{\text{referência}})} \quad (51)$$

5.1. EXEMPLO 1

A primeira simulação apresenta um domínio com dois setores com propriedades distintas. A geometria do problema, assim como as condições de contorno e os valores das propriedades de cada setor são mostrados conforme Figura 9.

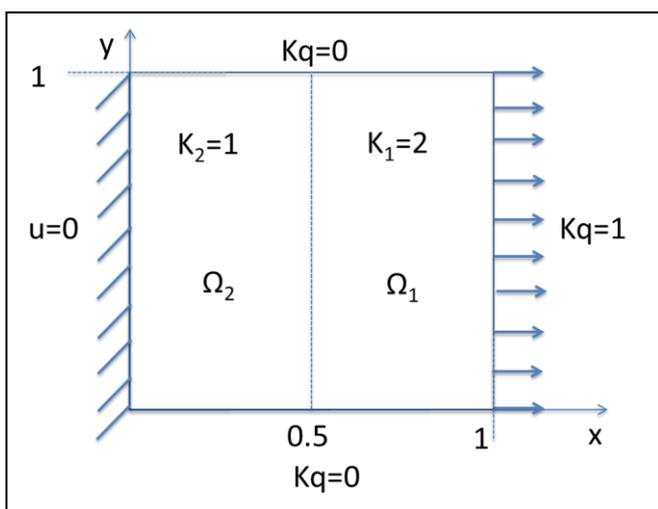


Figura 9: Domínio com setores Ω_1 e Ω_2 .

Fonte: Elaborado pelo autor.

Devido a sua simplicidade, este problema pode ser resolvido analiticamente, sendo a expressão dada a seguir:

$$u(x) = \begin{cases} \text{se } x < 0,5 & u(x) = x/K_2 \\ \text{se } x \geq 0,5 & u(x) = 0,5 + (x - 0,5)/K_1 \end{cases} \quad (52)$$

A geometria foi simulada no programa de elementos de contorno com os seguintes números de elementos: 8, 16, 32, 64 e 128.

Primeiramente, os resultados de potencial gerados através da técnica das sub-regiões, usando elementos constantes, foram comparados com os valores analíticos para esta geometria. Os valores analíticos e os resultados gerados pela técnica das sub-regiões são plotados para diferentes malhas nas Figuras 10 e 11:

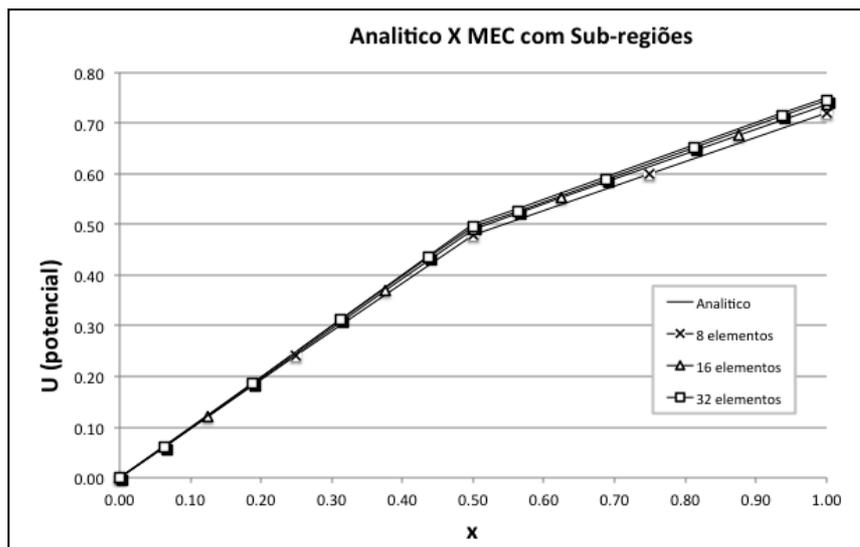


Figura 10: Comparação entre potencial analítico e pelo MEC (Sub-região) para 8, 16 e 32 elementos.
Fonte: Elaborado pelo autor.

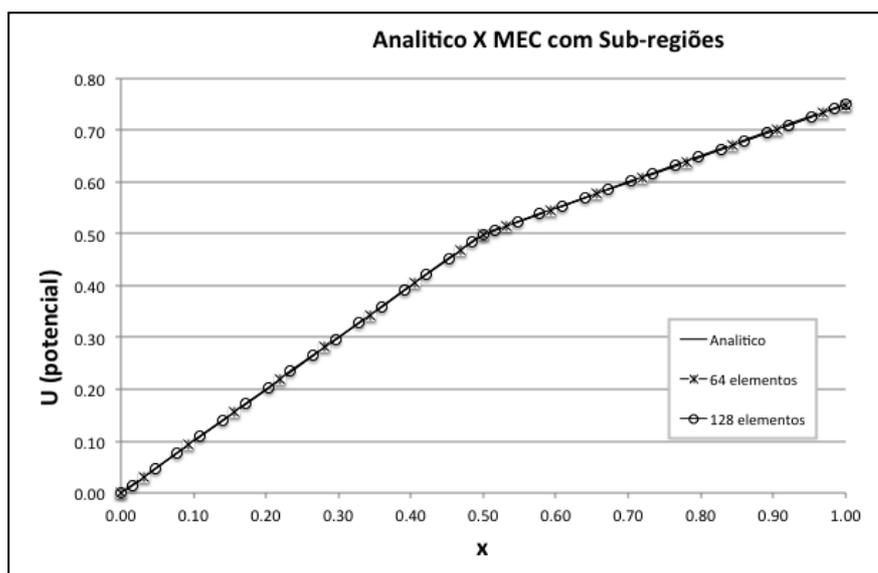


Figura 11: Comparação entre potencial analítico e pelo MEC (Sub-região) para 64 e 128 elementos.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Nas figuras que seguem, são mostradas as simulações realizadas através da nova formulação do MEC para a geometria e carregamentos apresentados. Os valores do potencial analítico e os resultados gerados pela nova formulação são plotados, conforme Figuras 12 e 13:

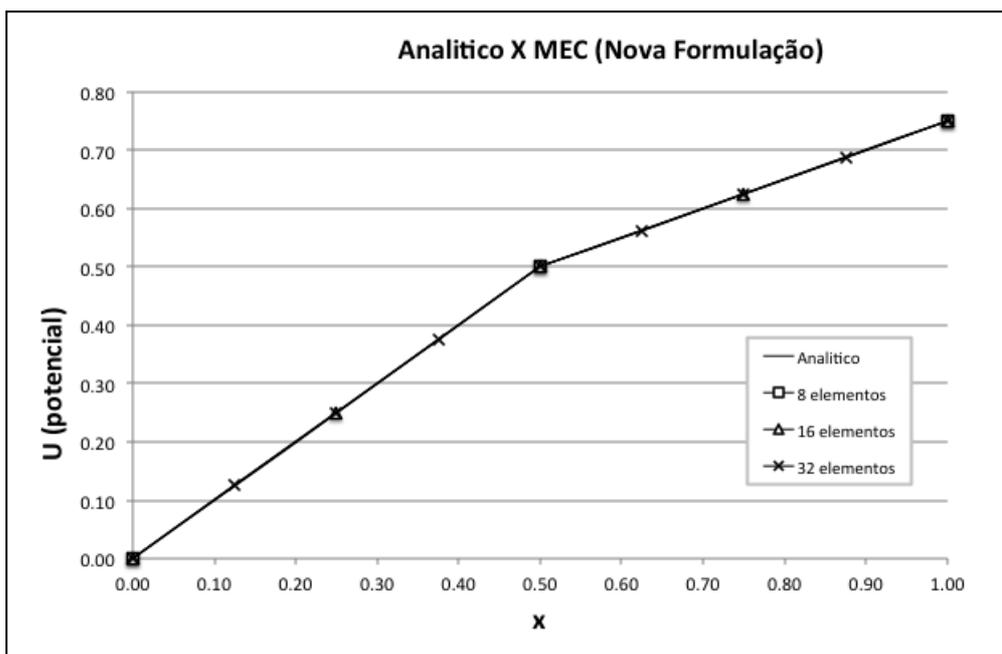


Figura 12: Comparação entre potencial analítico e pelo MEC (Nova Formulação) para 8, 16 e 32 elementos.
Fonte: Elaborado pelo autor.

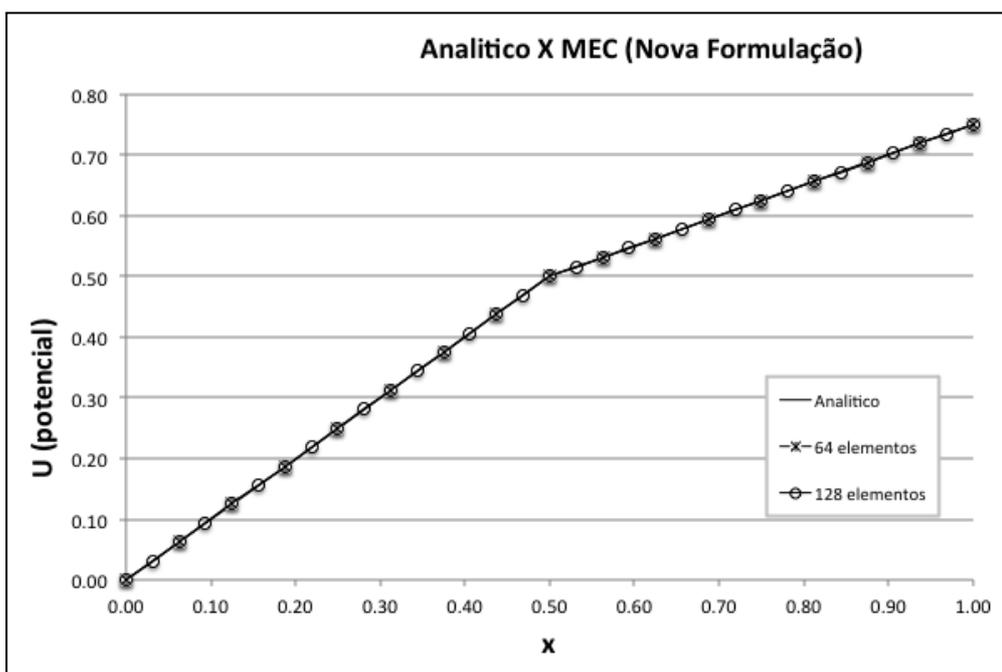


Figura 13: Comparação entre potencial analítico e pelo MEC (Nova Formulação) para 64 e 128 elementos.
Fonte: Elaborado pelo autor.

O erro relativo entre os resultados analíticos e os valores simulados pelas técnicas de sub-região e nova formulação foram calculados conforme equação (50) e são apresentados na Figura 14:

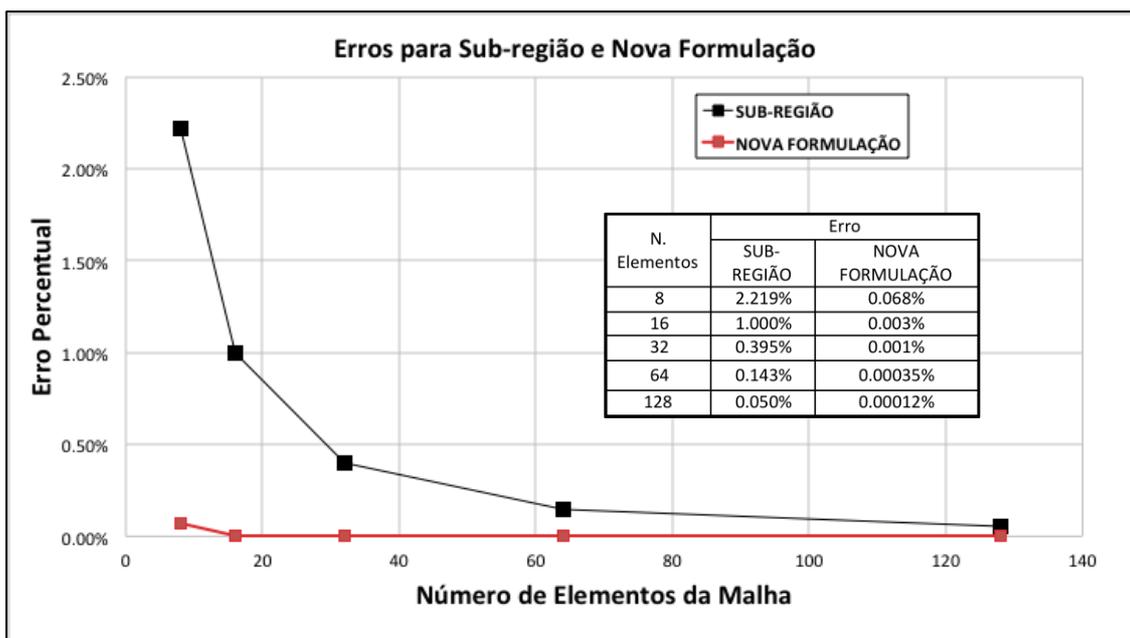


Figura 14: Erro relativo X Numero de Elementos da malha para Sub-Região e Nova Formulação.
Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir dos resultados apresentados na Figura 14 é possível evidenciar que, para ambas as técnicas, o valor do erro diminui com o aumento do numero de elementos da malha, o que é esperado com o aumento da discretização. Porém, o ponto de maior relevância é a curva de erros observada para a nova formulação. Mesmo com uma discretização grosseira, os valores de erro relativos são muito reduzidos. Essa tendência se mantém com o aumento do numero de elementos. Em que pese o fato de se usar o elemento constante para a simulação com sub-regiões, observa-se uma vantagem absoluta da nova formulação em relação à técnica de sub-regiões com relação a precisão dos resultados.

5.2. EXEMPLO 2

Neste exemplo, utilizou-se uma configuração geométrica com duas regiões com propriedades distintas, uma imersa na outra. A Figura 15, a seguir, mostra a geometria simulada com as condições de contorno utilizadas.

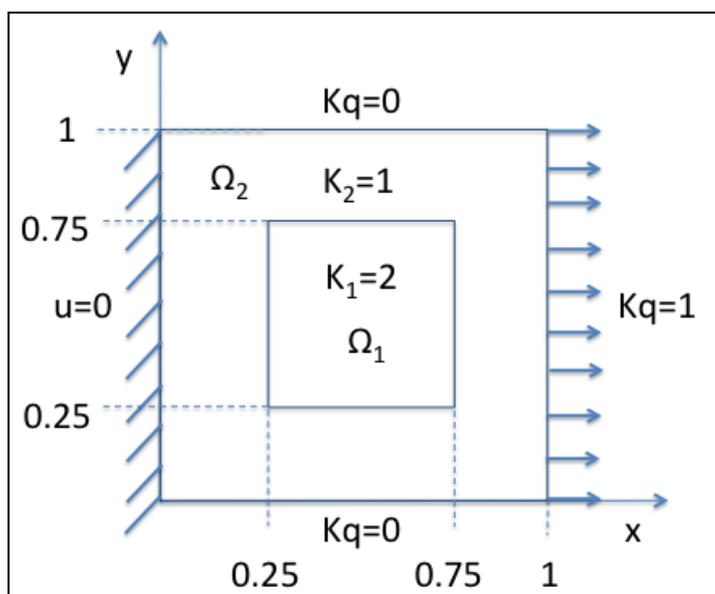


Figura 15: Domínio Ω_2 com setor Ω_1 .
Fonte: Elaborado pelo autor.

Este exemplo é bem representativo para a comparação entre as técnicas do MEC visto o setor heterogêneo (Ω_1) estar totalmente imerso no domínio Ω_2 . Devido à geometria bidimensional e as diferentes propriedades físicas dos setores, este problema não tem solução analítica simples. A solução de referência utilizada foi obtida por simulações realizadas através do Método dos Elementos Finitos (MEF) utilizando uma malha estruturada com 1.681 nós e 3.200 elementos.

Para as simulações com a técnica das sub-regiões foram realizadas simulações com 12, 32, 64 e 128 elementos de contorno. Os resultados foram comparados com as simulações realizadas através do Método dos Elementos Finitos (MEF), ao longo de uma linha do domínio em $y=1$, os valores comparados são mostrados nas Figuras 16 e 17.

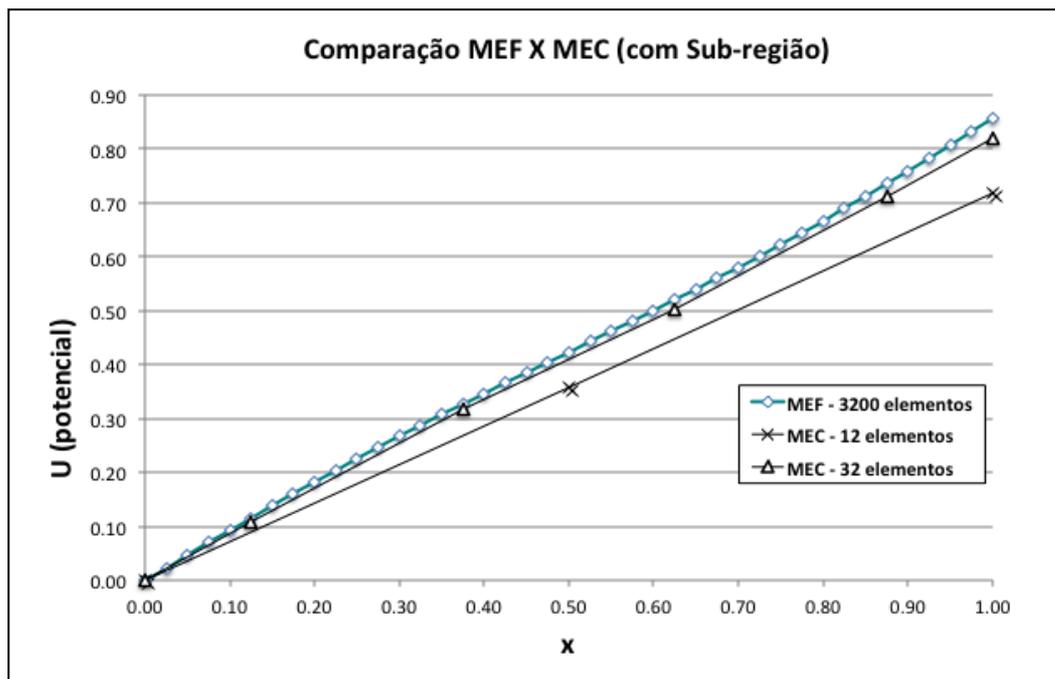


Figura 16: Comparação entre potencial pelo MEF e pelo MEC (Sub-região) para 12 e 32 elementos. Fonte: Elaborado pelo autor.

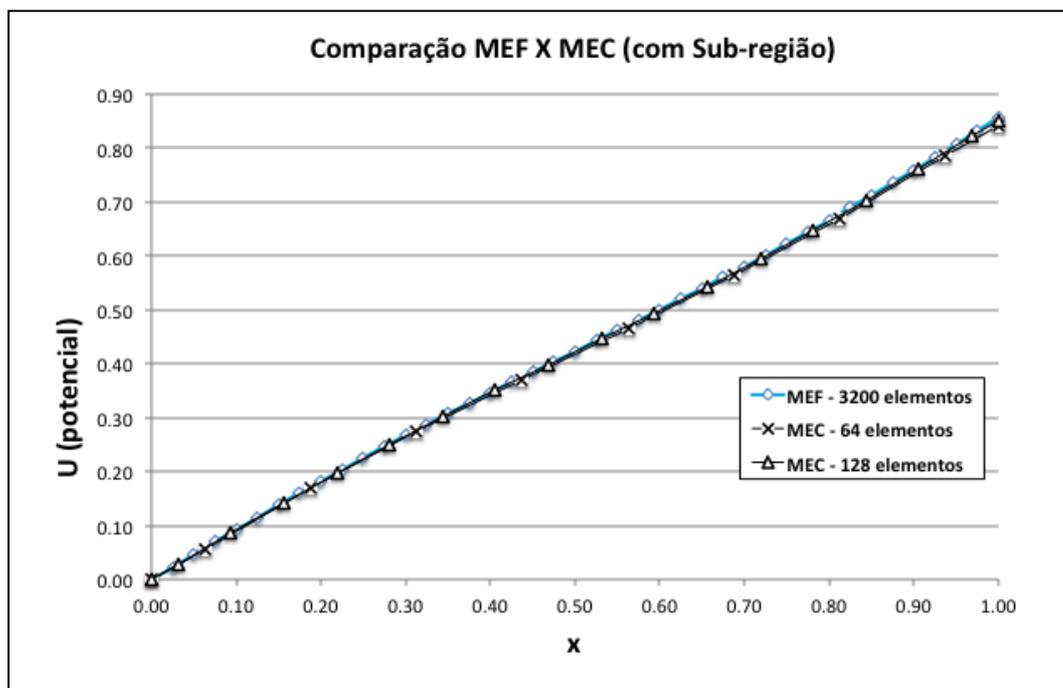


Figura 17: Comparação entre potencial pelo MEF e pelo MEC (Sub-região) para 64 e 128 elementos. Fonte: Elaborado pelo autor.

As simulações foram realizadas através da nova formulação do MEC para a geometria e carregamentos apresentados na Figura 15. Foram realizadas simulações para 16, 32, 64 e 128 elementos. Os valores do potencial analítico e os resultados gerados pela nova formulação são plotados nas Figuras 18 e 19.

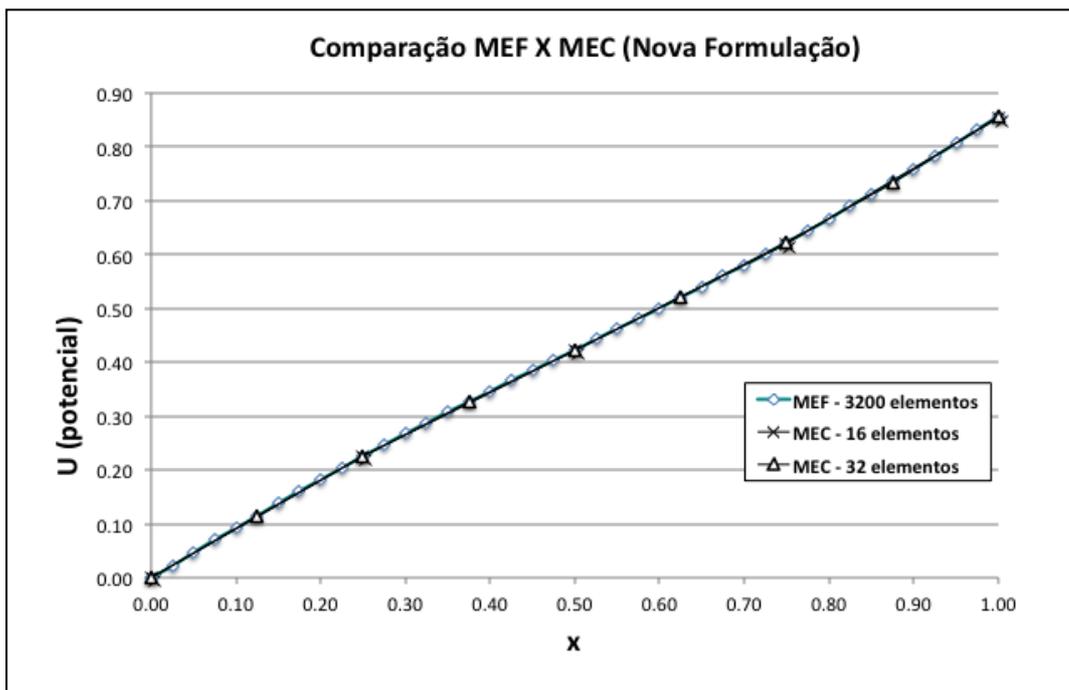


Figura 18: Comparação entre potencial pelo MEF e pelo MEC (Nova Formulação) para 16 e 32 elementos.
Fonte: Elaborado pelo autor.

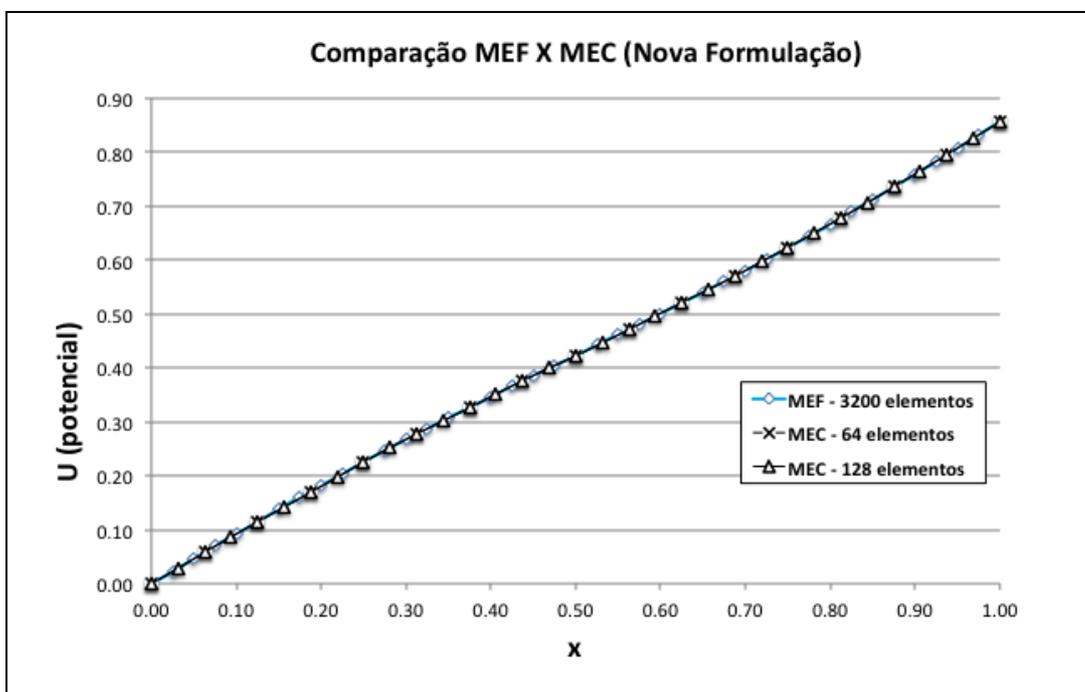


Figura 19: Comparação entre potencial pelo MEF e pelo MEC (Nova Formulação) para 64 e 128 elementos.
Fonte: Elaborado pelo autor.

O erro relativo entre os resultados obtidos através do MEF e os valores simulados pelas técnicas de sub-região e nova formulação foram calculados conforme equação (51) e são apresentados na Figura 20.

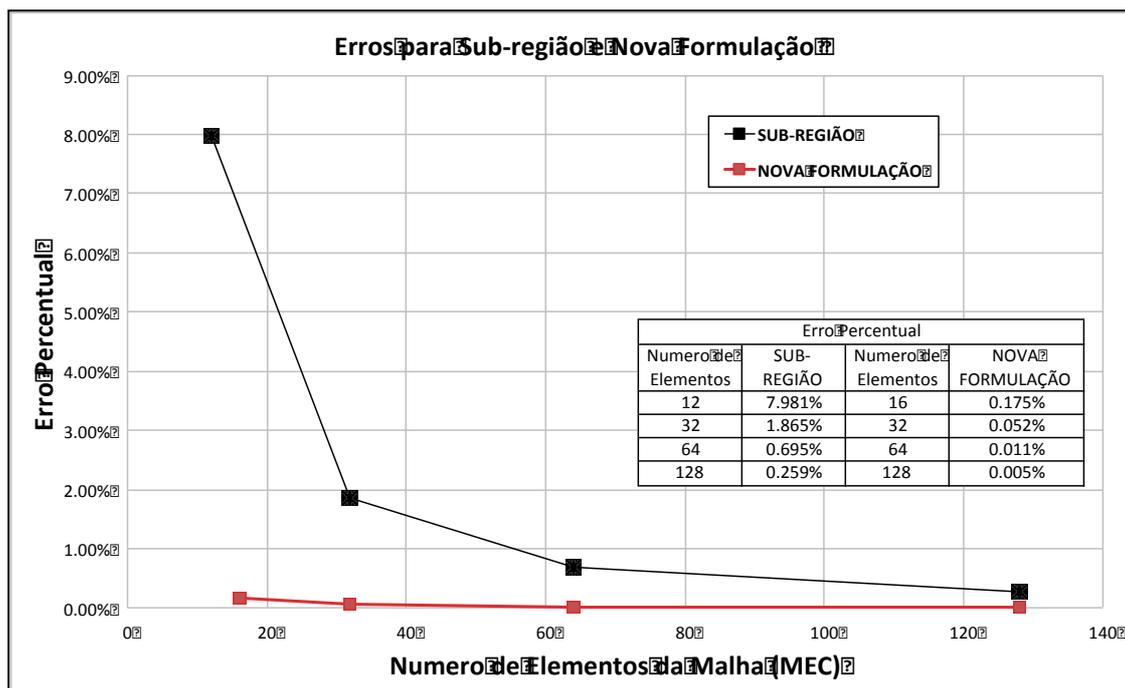


Figura 20: Erro relativo X Numero de Elementos da malha para Sub-Região e Nova Formulação.
Fonte: Elaborado pelo autor.

O resultado apresentado na Figura 20 é similar ao encontrado no exemplo anterior. Para ambas as técnicas, o valor do erro diminui com o aumento do numero de elementos da malha, como esperado devido ao aumento da quantidade de pontos nodais. Porém, novamente, o ponto de maior relevância é a curva de erros observado para a nova formulação. Mesmo com uma baixa discretização, os valores de erro relativos são muito baixos. Essa tendência se mantém com o aumento do numero de elementos.

Ressalta-se que este exemplo, por conta da sua bidimensionalidade, é numericamente mais difícil do que o anterior. Observa-se que enquanto a malha com pouco refinamento do MEF com sub-regiões teve um pequeno afastamento da curva de referência no exemplo 1 (seção 5.1), o mesmo já não ocorreu neste. Para melhor visualização do desempenho dos métodos nos dois exemplos, podem-se comparar os resultados apresentados nas Figuras 14 e 20. Os erros da técnica de sub-regiões cresceram significativamente, enquanto os erros da técnica proposta permaneceram no mesmo patamar.

5.3. EXEMPLO 3

Neste exemplo, resolveu-se um problema que possui três setores com propriedades distintas. A Figura 21, abaixo, mostra a geometria simulada com as condições de contorno utilizadas.

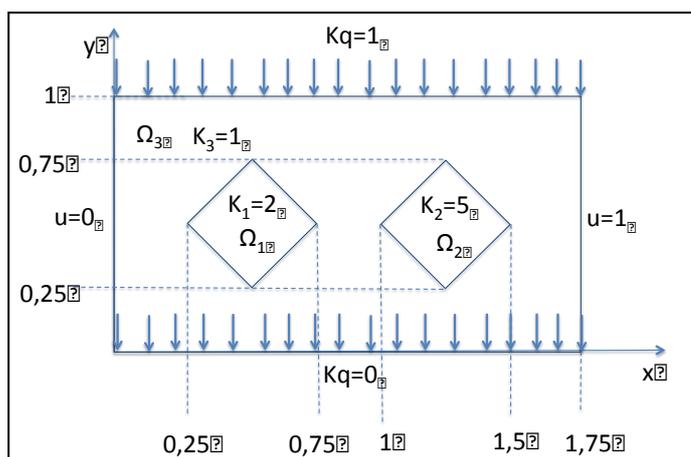


Figura 21: Domínio com setores Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 .

Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste exemplo a solução de referência utilizada foi obtida por simulações realizadas através do Método dos Volumes Finitos (MVF), utilizando uma malha estruturada de elementos retangulares com 1.664 elementos.

Para as simulações com a técnica das sub-regiões foram realizadas simulações com 38 e 76 elementos de contorno. Os resultados foram comparados com as simulações realizadas através do Método dos Volumes Finitos (MVF), ao longo de uma linha no domínio em $y=0$, os valores comparados são mostrados na Figura 22.

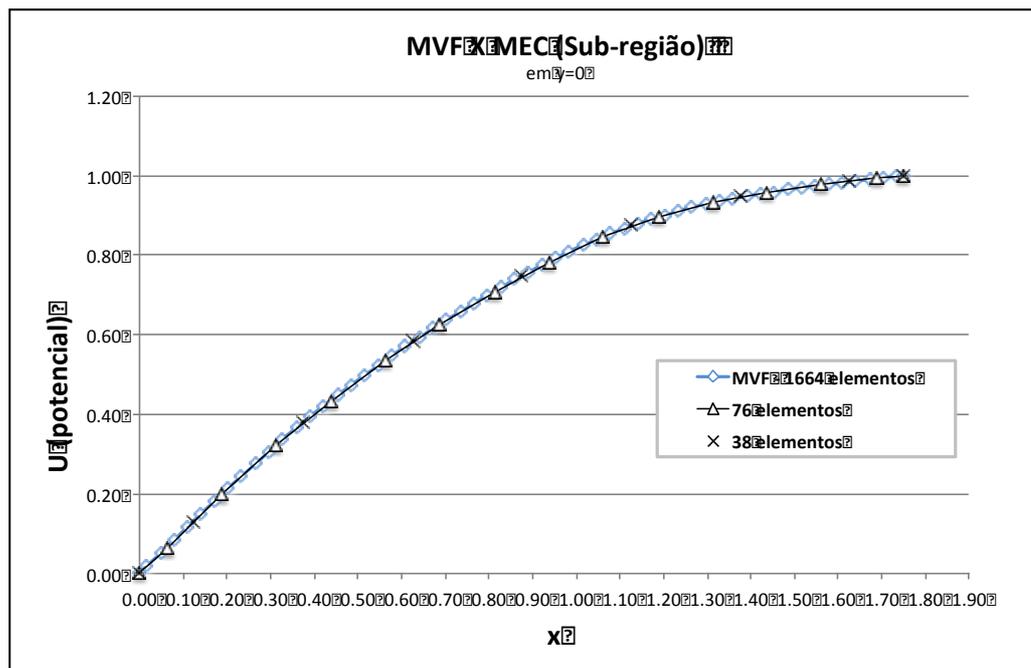


Figura 22: Comparação entre potencial pelo MVF e pelo MEC (Sub-região) para 38 e 76 elementos.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Para as simulações com a nova formulação foram realizadas simulações com 22 e 44 elementos de contorno. Os resultados foram comparados com as simulações realizadas através do Método dos Volumes Finitos (MVF), ao longo de uma linha do domínio em $y=0$, os valores comparados são mostrados na figura a seguir.

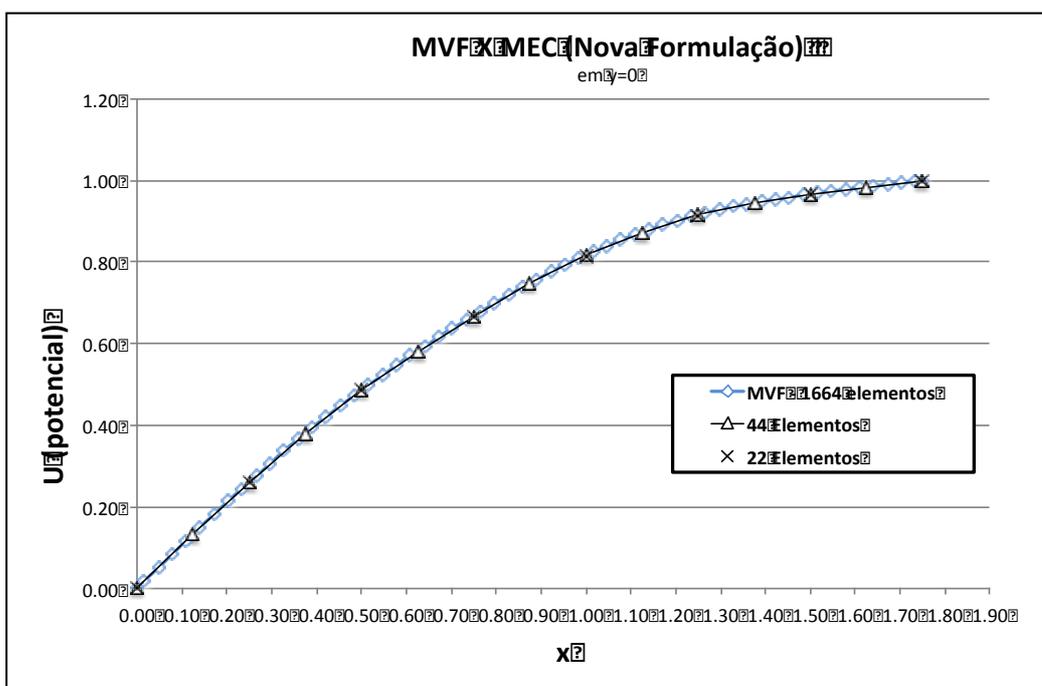


Figura 23: Comparação entre potencial pelo MVF e pelo MEC (Nova Formulação) para 22 e 44 elementos.
Fonte: Elaborado pelo autor.

O erro relativo entre os resultados obtidos através do MVF e os valores simulados pelas técnicas de sub-região e nova formulação foram calculados conforme equação (51) e são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Apresentação de erros relativos para Sub-região e Nova Formulação.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Erro Percentual			
Número de Elementos	SUB-REGIÃO	Número de Elementos	NOVA FORMULAÇÃO
38	0,180%	22	0,119%
76	0,062%	44	0,037%

O resultado apresentado nas Figuras 22 e 23 permite visualizar que ambas as técnicas se aproximam muito do valor de referência, mesmo com a malha com poucos elementos é possível observar concordância entre as técnicas do MEC e os valores de referência do MVF.

Os distintos valores de pontos nodais foram introduzidos propositadamente devido ao fato de que o programa com a técnica de sub-regiões clássica emprega elementos constantes, enquanto o programa em que a técnica proposta está implementada com elementos lineares.

Mais uma vez, mesmo sendo este exemplo bem mais complicado, pode-se observar que os resultados de ambas as técnicas se aproximam bastante do valor de referência, subsidiando bem a utilização de ambas nesta classe de problemas.

Os valores de erros apresentados na Tabela 1 são mais de referência, para apontar o baixo valor de erro relativo encontrado para ambas as técnicas, do que para comparar se uma técnica se sobressai à outra, mas pode-se perceber que a técnica proposta tem um desempenho ligeiramente melhor.

5.4. EXEMPLO 4

Neste exemplo, também foi simulado um problema que possui três setores com propriedades distintas, porém com carregamento mais elaborado nas condições de contorno. A Figura 23, a seguir, mostra a geometria simulada com as condições de contorno utilizadas.

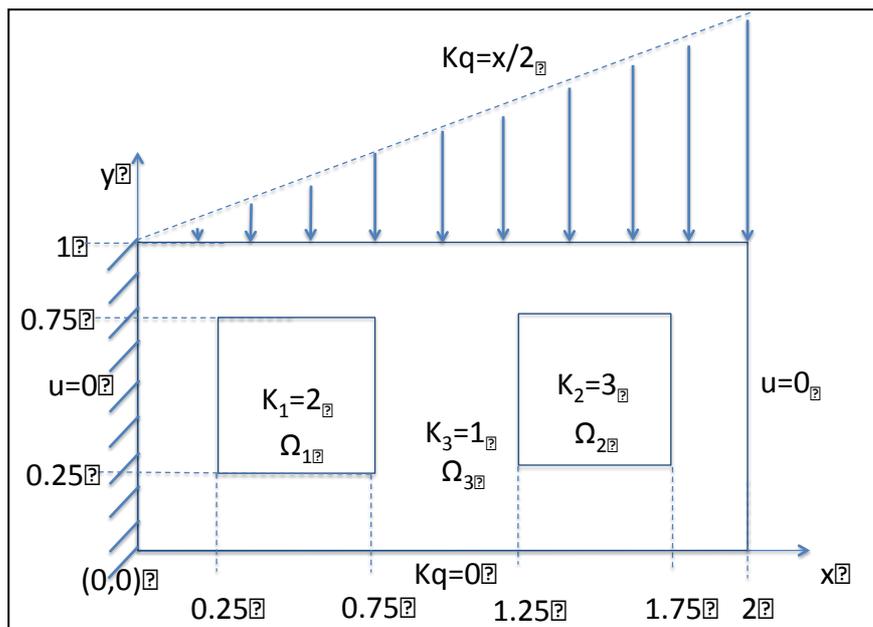


Figura 24: Domínio com setores Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 .
Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste exemplo a solução de referência utilizada foi obtida por simulações realizadas através do Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizando uma malha de 6400 elementos.

Para as simulações com a técnica das sub-regiões foram realizadas simulações com 56 e 112 elementos de contorno. Os resultados foram comparados com as simulações realizadas através do Método dos Elementos Finitos (MEF), ao longo de uma linha do domínio em $y=1$, os valores comparados são mostrados na Figura 25.

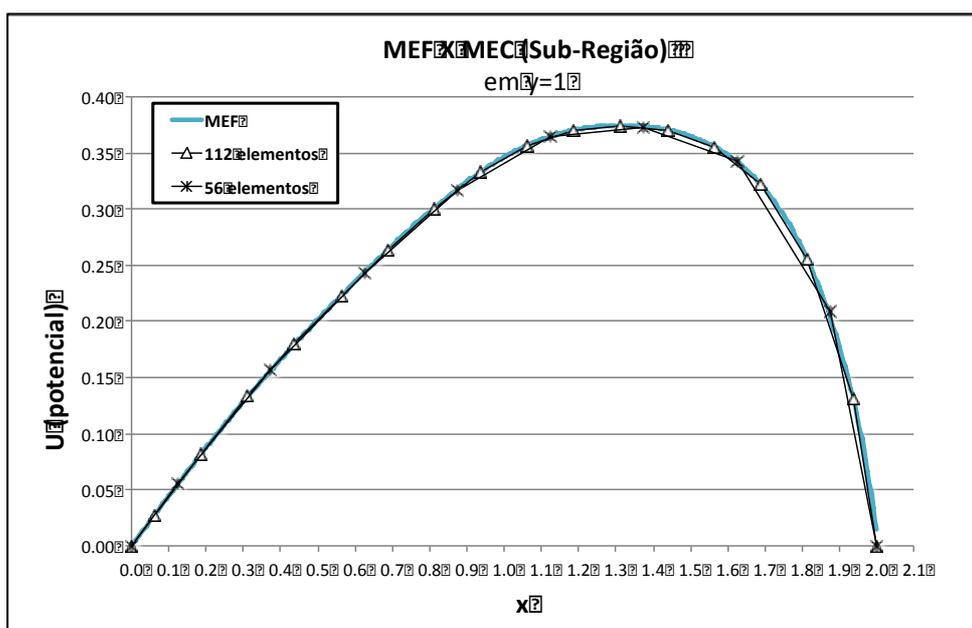


Figura 25: Comparação entre potencial pelo MEF e pelo MEC (Sub-região) para 56 e 112 elementos.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Para as simulações com a nova formulação foram realizadas simulações com 48 e 120 elementos de contorno. Os resultados foram comparados com as simulações realizadas através do Método dos Elementos Finitos (MEF), ao longo de uma linha do domínio em $y=1$, os valores comparados são mostrados na Figura 26.

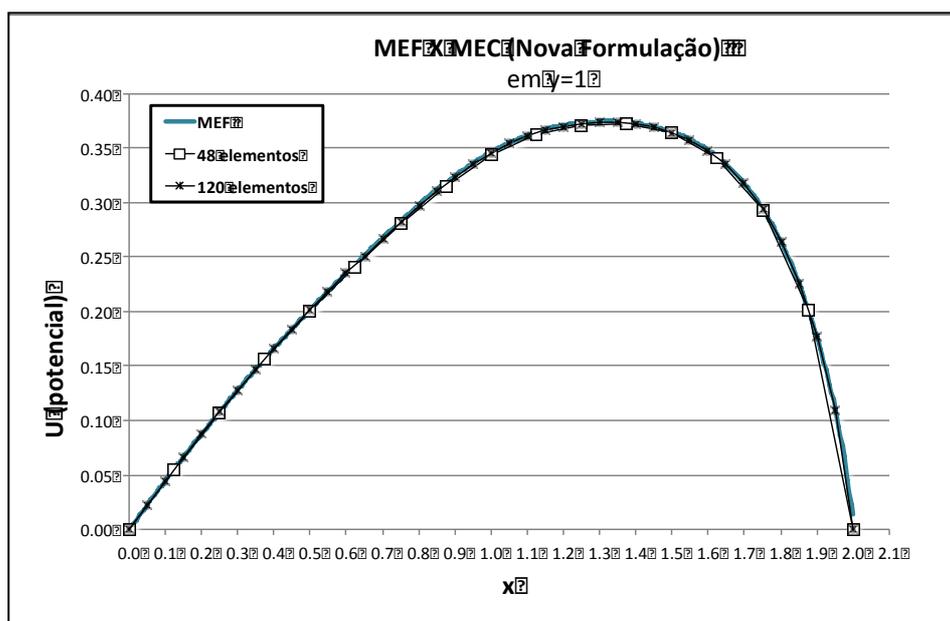


Figura 26: Comparação entre potencial pelo MEF e pelo MEC (Nova Formulação) para 48 e 120 elementos.
Fonte: Elaborado pelo autor.

O erro relativo entre os resultados obtidos através do MEF e os valores simulados pelas técnicas de sub-região e nova formulação foram calculados conforme equação (51) e são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2: Apresentação de erros relativos para Sub-região e Nova Formulação.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Erro Percentual			
Número de Elementos	SUB-REGIÃO	Número de Elementos	NOVA FORMULAÇÃO
56	0,640%	48	0,389%
112	0,304%	120	0,214%

O resultado apresentado nas Figuras 25 e 26 permite visualizar que ambas as técnicas do MEC estão muito próximas do valor de referência do MEF.

Os distintos valores de pontos nodais foram introduzidos propositalmente devido ao

fato de que o programa com a técnica de sub-regiões clássica emprega elementos constantes, enquanto o programa em que a técnica proposta está implementada com elementos lineares.

Os valores da Tabela 2 apresentam baixos valores de erro percentual para ambas as técnicas e, do mesmo modo conforme observado anteriormente, apresentam a tendência de diminuição do erro relativo com o aumento da discretização. Pela inspeção dos resultados, pode-se concluir um melhor desempenho para a nova formulação do que para a técnica das sub-regiões.

Observa-se que os resultados de ambas as técnicas se aproximam bastante do valor de referência, subsidiando bem a utilização de ambas nesta classe de problemas. A nova formulação igualmente comportou-se bem neste exemplo, visto os baixos valores de erros apresentados.

6. CONCLUSÕES

A partir das simulações realizadas e das comparações feitas tanto com a técnica das sub-regiões do MEC quanto dos valores de referências obtidos através de outros métodos numéricos, é possível verificar que a nova formulação apresentada pode ser facilmente aplicada como uma ferramenta alternativa dentro escopo do Método dos Elementos de Contorno.

Nos exemplos apresentados no capítulo anterior foi possível visualizar que, em comparação à técnica das sub-regiões, a nova formulação se mostrou superior em todos os casos. Deve-se pesquisar a ordem de interpolação empregada nos programas utilizados, o programa com a técnica de sub-regiões clássica emprega elementos constantes, enquanto o programa em que a técnica proposta está implementada com elementos lineares. Os erros relativos para cada um dos exemplos foi sempre menor para o caso da nova formulação, e, mesmo para os resultados com malhas menos refinadas, o erro relativo já era obtido com valores reduzidos.

A partir dos resultados e análises apresentadas, os objetivos deste trabalho em relação à nova formulação foram atingidos. Foi possível apresentar o desenvolvimento da formulação, dando um entendimento básico da ideia física contida no equacionamento. Através das simulações confirmou-se a eficácia numérica desta nova alternativa dentro do MEC.

Contudo, além da boa precisão, o novo esquema proposto para o MEC mostra uma enorme vantagem em termos de implementação computacional e de entrada de dados devido a sua extrema simplicidade. Para implementar o modelo, é necessário apenas criar uma nova matriz H^i , referida a energia contida nos setores internos.

Como uma vantagem final, o presente método não introduz aproximação adicional no modelo numérico, que no caso da técnica clássica de sub-regiões está relacionada com a interpolação adicional sobre os elementos de interfaces do contorno interno.

Existe nesta nova técnica um potencial significativo no que tange a futuras aplicações, de grande interesse e complexidade, particularmente na análise elasto-plástica e na dinâmica estrutural.

O procedimento não cria qualquer impedimento para a implementação de procedimentos auxiliares como a Técnica da Dupla Reciprocidade, o DIBEM ou qualquer outro programa adequado para abordar estas classes mais avançadas de problemas.

Como este trabalho teve como escopo o estudo da Equação de Laplace em duas

dimensões, trabalhos futuros podem ser realizados tratando de equações escalares correlatas, como a Equação de Poisson e a Equação de Helmholtz, que pertencem a Equação de Campo Escalar Generalizada.

REFERÊNCIAS

- 1 ANDRADE, A. J. C; LOEFFLER, C. F. ; MANSUR, W. J. Solução de Problemas Setorialmente Homogêneos através do Método dos Elementos de Contorno. In: III CMACSE Congresso de Matemática Aplicada e Computacional Sudeste. **Anais...** Vitória-ES, 2015.
- 2 BULCÃO, A. **Formulação do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade Usando Elementos de Ordem Superior Aplicada a Problemas de Campo Escalar Generalizado.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade federal do Espírito Santo, Vitoria, 1999.
- 3 BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary elements: an introductory course.** WIT press, 1996.
- 4 BREBBIA, C. A; WALKER, S. **Boundary element techniques in engineering.** Elsevier, 1980.
- 5 CHENG, A. H. D.; CHENG, D. T. Heritage and early history of the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 29, n. 3, p. 268-302, 2005.
- 6 INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P. **Fundamentals of heat and mass transfer.** John Wiley & Sons, 2011.
- 7 KELLOGG, O. D. **Foundations of potential theory**, 1929.
- 8 LADOPOULOS, E. G. Petroleum reservoir engineering by non-linear singular integral equations. **Mechanical Engineering Research**, v. 1, n. 1, p. 2, 2011.
- 9 LIU, Y. **Fast multipole boundary element method: theory and applications in engineering.** Cambridge university press, 2009.
- 10 LIU, Y. J. et al. Recent advances and emerging applications of the boundary element method. **Applied Mechanics Reviews**, v. 64, n. 3, p. 030802, 2011.
- 11 LOEFFLER, C. F. Modelos Mecânicos Derivados da Equação de Campo Escalar Generalizada. **Revista Militar de Ciência e Tecnologia**, v. 10, 24-38, 1992.
- 12 LOEFFLER, C. F.; MANSUR, W. J.. Quasi-Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Incompressible Flow: Application to the Diffusive-Advective Equation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. V. 58, Issue 8, p. 1167-1186, John Wiley and Sons, 2003.
- 13 LOEFFLER, C. F.; CRUZ, A. L.; BULCÃO, A. Direct Use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 50, pp. 97-108, 2015.

- 14 PAIVA, W. P.; SOLLERO, P.; ALBUQUERQUE, E. L. Modal analysis of anisotropic plates using the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 35, n. 12, p. 1248-1255, 2011.V
- 15 PARTRIDGE P. W.; BREBBIA C. A.; WROBEL L.C. **The dual reciprocity boundary element method**. 1st ed.. London, UK: Computational Mechanics Pub. and Elsevier Applied Science; 1992.
- 16 REDDY, J. N. **An introduction to the finite element method**. New York: McGraw-Hill, 1993.
- 17 SANTOLIN, W. D. **Análise dinâmica de problemas escalares não homogêneos através do método dos elementos de contorno**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade federal do Espírito Santo, Vitória, 2006.
- 18 TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER J.N. **Theory of Elasticity**. McGrawhill Kogakusha, New York, 1970.