

ADRIANO MESQUITA OLIVEIRA

OBJETOS ASTROFÍSICOS COMPACTOS:
UM TESTE PARA AS TEORIAS
ALTERNATIVAS DA GRAVITAÇÃO

Vitória
2016

Adriano Mesquita Oliveira

Objetos astrofísicos compactos:
Um teste para teorias alternativas da
gravitação

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, para a obtenção do Título de Doutor em Física, na Área de Cosmologia e Gravitação.

Orientador: Júlio César Fábris

Co-Orientador: Hermano E. S. Velten

Vitória - ES

2016

Adriano Mesquita Oliveira

Objetos astrofísicos compactos: Um teste para teorias alternativas da gravitação

104 páginas

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo. Departamento de Física.

1. Cosmologia e Gravitação
2. Relatividade Geral
3. Modelos Alternativos para a Gravitação
4. Objetos astrofísicos compactos

I. Universidade Federal do Espírito Santo. Programa de Pós-Graduação em Física. Departamento de Física.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr.

Júlio Cesar Fabris

Prof. Dr.

Hermano Endlich Schneider Velten

Prof. Dr.

Winfried Ernst Wilhelm Zimdahl

Prof. Dr.

Sérgio José Barbosa Duarte

Prof. Dr.

Jorge Ernesto Horvath

*Dedico este trabalho,
à pequena Laura.*

O homem é um

‘‘nada do ponto de vista do infinito universo,
um tudo do ponto de vista do nada.’’

Blaise Pascal

Agradecimentos

O ser humano, enquanto indivíduo, é um ser sociável e influenciável. Assim, tudo aquilo que nos cerca tem a capacidade de ser moldado e de nos moldar. Nesse sentido, o que sou, como sou e quem sou, traz parte daqueles que cruzaram, de alguma forma, o meu caminho. Muitos destes mostram-me o que não quero ser e outros modificaram, mesmo que minimamente, minha forma de pensar e de agir. Independente da contribuição essas pessoas colaboraram para minha formação social, intelectual e espiritual. Por isso, gostaria de agradecer a todos que passaram por minha vida durante os anos por mim vividos até este momento, que termino de escrever esta seção da tese. A todos vocês meus mais sinceros agradecimentos. Vocês são parte deste trabalho. Contudo, poucas dessas pessoas permanecem, isso é fato! Menor ainda é o número daquelas que torcem pelo nosso sucesso individual. Esses torcedores, o decimo-segundo jogador, mesmo em momentos que tudo parecia não funcionar ou que aparentemente era impossível de ser resolvido, eles estavam ali incentivando e acalmando, jogando junto. Por isso esses personagens merecem destaque, são eles:

Meus pais, Seu Mário e Dona Tereza, que foram os primeiros professores que tive. Aqueles a quem Deus concedeu minha guarda durante minha passagem pela Terra, meus eternos educadores e os maiores colaboradores para formação do meu caráter. Sempre presentes e dispostos a fazer o possível, e as vezes o impossível, para dar condições para que eu chegasse até aqui. Vocês são meu tudo, obrigado por todo amor incondicional.

Minha madrinha, Ana Neri, tão presente e atuante. De fato uma segunda mãe. Sempre disposta a socorrer-me como pôde. Esse momento também é seu, obrigado por tudo.

Meu irmão Rafael, meu melhor amigo e parceiro de todas as horas, que juntamente com sua esposa, Giovana, conceberam a linda Gabriela (minha amada afilhada), muito obrigado.

Minha esposa e filha, Lindinalva e Laura, tudo isso é por nossa família. Obrigado por

estarem ao meu lado e por suportarem, juntamente comigo, os momentos difíceis no andamento deste nosso projeto.

Meu padrinho, tios, tias e primos. Amo todos vocês.

Prof. Júlio Fabris, orientador, obrigado por compartilhar comigo seus conhecimentos, por acreditar que eu seria capaz de terminar o doutorado, pelos encaminhamentos e por dar-me a chance de fazer pesquisa novamente. Certamente muitos outros trabalhos virão. Ainda tenho muito para aprender com você.

Hermano, um amigo da graduação que tornou-se o co-orientador (diria eu orientador, também) deste trabalho. Sem você esse trabalho não teria nem iniciado, quem dirá terminado. Você, meu amigo, foi a pessoa que permitiu o término deste doutorado, obrigado por aceitar o desafio. Saiba que torço pelo seu sucesso, como sei que torce pelo meu. Tenho a certeza de que continuará a me apoiar e incentivar.

Todos meus amigos, não citarei nomes para não cometer a injustiça de esquecer de alguém. Desde os amigos de infância, que decidiram manter contato através das rodas de bate papo presencial semanal e os que por algum motivo tiveram de se afastar. Passando pelos amigos que fiz no UP, com quem aprendi a arte de ensinar. Chegando até os amigos atuais do IFES e os novos/velhos amigos do mestrado/doutorado. Vocês ajudaram a lapidar minha personalidade e ajudaram em muitas discussões. Não chegaria aqui sem a ajuda de vocês. Por isso gostaria de compartilhar com vocês essa alegria de terminar este trabalho.

à Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo (FAPES) que através da bolsa de doutoramento, cadastrada com o Processo 41811399/08, financiou esta pesquisa. A UFES e o IFES, pelo espaço e recursos disponibilizados para o bom andamento do doutorado. Essas instituições foram fundamentais para a boa execução deste trabalho.

Deus nosso Pai, muito obrigado pelo sopro da vida e por permitir que todas essas pes-

soas/instituições pudessem colaborar com este trabalho. Louvado seja o Teu nome!

Resumo

As estrelas de nêutrons são estruturas compactas cuja força de atração gravitacional é sustentada pela degenerescência dos nêutrons e outras forças de repulsão entre os núcleons que compõe o interior dessas estruturas. O nascimento dessa estrutura coincide com o fim do processo de fusão nuclear e é posterior a uma grande explosão, chamada de Super-Nova. O constituinte material do interior destas, encontra-se em condições extremas onde a densidade em seu interior pode atingir a ordem da densidade de saturação nuclear. Nesse contexto o uso da teoria da relatividade geral torna-se essencial. Em geral, a teoria de Einstein em conjunto com uma equação de estado apropriada é usada para descrever as situações de equilíbrio estelar. Contudo, a falta de conhecimento sobre o comportamento da matéria em tais condições extremas, bem como da física real por trás desta situação, permite o uso de teorias alternativas para a gravitação para descrever tais estrelas. Nesse contexto, nesta tese, fez-se um estudo das consequências (na estrutura da estrela de nêutrons) quando utiliza-se teorias alternativas para as teorias de Newton e de Einstein. Desse modo, aqui (i) fez-se estudo de teorias alternativas para a implementação de correções relativísticas a nível Newtoniano, (ii) propõe uma possível limitação para o parâmetro de Rastall e uma solução de vácuo para essa teoria e (iii) fez-se uma análise da relevância dos diferentes termos da equação de TOV padrão, através de uma parametrização “ad hoc”.

Palavras-chave: Cosmologia, Gravitação, Relatividade Geral, Teorias modificadas, Neo-Newtoniana, Rastall, Estrela de nêutrons.

Abstract

Neutron stars are compact objects in which gravitational forces are supported by neutron degenerescence and other repulsive forces among nucleons, which compose the inner of these structures. This structure borns with the end of nuclear fusion process followed by a exploding process, called supernova. In addition, its inner matter components are said to be under extreme conditions. The density in such structures is of order of nuclear saturation. In this context the use of general relativity is essential. In general, Einsteins theory together with an appropriate equation of state is used to describe the equilibrium os such stars. However, the lack of proper knowledge on the matter behavior under such extreme conditions (and the actual physics behind this situation), makes room to use alternatives gravity theories to describe such stars. In this context, in this thesis we will study the consequences (concerning the neutron star structure) when we use some alternatives to the Newtonss and Einsteins theories. Thus we i) study an alternative for implementing relativistic corrections at the Newtonian level, ii) propose a possible limitation for Rastalls parameter and the vacuum solution for this theory and iii) analyse the relevance of the different terms of the standrd TOV equation via a proposed ad hoc parameterization.

Keywords: Cosmology, Gravitation, General Relativity, Alternatives Theory, Neo-Newtonian, Rastall, Neutron Stars.

Lista de Figuras

2.1	Imagem retirada do site asd.gsfc.nasa.gov/blueshift/wp-content/uploads/2015/11/GR_Centennial_Timeline.png . Essa figura mostra os testes gravitacionais ao qual a teoria da relatividade geral foi submetida e o ano em que eles foram realizados.	8
2.2	Dados da missão Planck, retirados do site https://www.nasa.gov/mission_pages/planck/news/planck20130321.html#.Vq-8AFz06Jc . Nele é apresentado a distribuição da densidade total do universo.	9
2.3	O transporte paralelo de um vetor em um espaço curvo. O vetor é transportado ciclicamente do ponto A, passando por N e por B. Esse transporte, faz com que o vetor sofra uma mudança de direção, representada pelo ângulo α . Imagem retirada do site wikiwand.com/es/Derivada_covariante	12
2.4	Essa figura apresenta as possíveis configurações de uma estrela compacta. A linha contínua representa a região onde existe estabilidade. Já a tracejada representa as regiões instáveis.	24
3.1	Um exemplo do diagrama H-R para parte das estrelas observáveis. Em destaque estão aquelas mais próximas do Sol. Imagem retirada de http://astro.if.ufrgs.br/estrelas/diagramaHR.jpg	26
3.2	Ilustração das diferentes regiões internas de uma estrela de nêutrons.	30
3.3	Imagem retirada do site www.stellarcollapses.org . Aqui pode-se ver os dados observacionais para as massas de algumas estruturas estelares.	33

3.4	Apresentação do diagrama $M - R$ para diferentes EoS de matéria hadrônica em preto e quarks em verde. São indicadas as regiões de pressão finita e causalidade. As curvas em laranja mostram o contorno $\mathcal{R}_\infty = \mathcal{R}(1 - 2GM/\mathcal{R}c^2)^{-1/2}$	35
3.5	Essa figura foi construída utilizando as equações (3.7) e (3.4). Ela ilustra a forma quadrática e cúbica, respectivamente, das funções p/p_c e M/M_{tot}	37
3.6	Essa figura foi construída utilizando o programa obtido em mathworld.wolfram.com/Lane-EmdenDifferentialEquation.html . Nela é apresentada as curvas para diferentes valores de n , sendo a linha preta o resultado para $n=0$, a vermelha para $n=1$, a amarela para $n=2$, etc.	49
3.7	Comparação dos dados e as curvas teóricas para a pressão como uma função da densidade de massa para alguns modelos de EoS.	54
4.1	Utilizando o programa obtido <i>LaneEmdenNeo.nb</i> pode-se mostrar as curvas para diferentes valores de n . A linha em preto é o resultado para $n=0$, a vermelha para $n=1$, a amarela para $n=2$, etc.	60
4.2	Utilizando o programa obtido <i>LaneEmdenNeo.nb</i> pode-se mostrar as curvas para diferentes valores de n . A linha em preto expressão os resultados para LE-Newton e as linhas em vermelho LE-NeoNew, onde utilizou-se um valor de $\beta = 1$	63
4.3	Aqui é apresentado o diagrama $M - R$ para uma estrela de puro nêutron sem interação modelada via gás de Fermi.	64
4.4	Comparativo entre as diferentes definições de massa, para uma estrela de nêutrons de puro nêutron, sem interação, modelada via gás de Fermi ideal. Note como que o incremento no termo da pressão permite a existência de estrela mais massivas.	65
4.5	Comparativo entre as diferentes definições de massa, para uma estrela de nêutrons de puro nêutron, com interação nucleon-nucleon, modelada via gás de Fermi. Note como que o incremento no termo da pressão permite a existência de estrela mais massivas.	66

5.1	Diagrama $M - R$ para uma estrela de nêutron com interação usando o método Prakash.	83
5.2	Diagrama $M - R$ para diferentes valores de η no modelo BSk19.	84
5.3	Diagrama $M - R$ para diferentes valores de η no modelo BSk20.	84
5.4	Diagrama $M - R$ para diferentes valores de η no modelo BSk21.	85
6.1	O diagrama Massa-raio é apresentado para os parâmetros α ; β ; χ ; σ	91

Sumário

1	Introdução	2
2	A Teoria da Relatividade Geral	7
2.1	Elementos da Relatividade Geral	11
2.2	A métrica estática de uma esfera isotrópica	16
2.3	A Solução de Schwarzschild	17
2.4	Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff	19
2.5	O Limite Newtoniano	22
3	Estrela de nêutrons: nascimento e interior	25
3.1	A Estrutura da Estrela de Nêutrons	30
3.2	Equações de Estado	32
3.2.1	Densidade Constante	36
3.2.2	O Limite da Massa	38

3.3	Modelo de Gás de Fermi	39
3.4	Fluido Politrópico	42
3.4.1	A Estabilidade Estelar	43
3.4.2	A Equação de Lane-Emden	48
3.4.3	Relação Massa vs. Raio	49
3.5	Equações de Estado Unificadas	51
4	Estruturas Compactas Neo-Newtoniana	55
4.1	Um pouco de Cosmologia	56
4.2	O Equilíbrio Hidrostático	58
4.3	Lane-Emden Modificada	59
4.4	Diagrama $M - R$	62
5	A Gravidade Rastall	68
5.1	As Novas Equações de Campo	69
5.2	Modificações na Solução de Schwarzschild	70
5.3	O Equilíbrio Hidrostático	75
5.4	Mudanças na Termodinâmica	79
5.5	Diagrama $M - R$	82

	1
6 Parametrização de TOV	87
6.1 A Equação de Equilíbrio	88
6.2 Diagrama Massa-Raio	89
7 Conclusão	92

Capítulo 1

Introdução

A teoria da relatividade geral (TRG) é a teoria que melhor descreve os fenômenos gravitacionais. Nesse contexto, a teoria Newtoniana (TN) torna-se o limite para campos fracos e de baixas velocidades desta teoria mais geral. Sendo assim, os resultados previstos pela TRG estão em ótima concordância com os dados observacionais coletados principalmente a partir do início do século passado. Contudo, para que a teoria proposta por Einstein possa descrever corretamente os fenômenos observacionais, como a expansão acelerada do universo e a curva de rotação das galáxias espirais, é necessário introduzir constituintes exóticos, como matéria escura e energia escura. A ignorância acerca das propriedades físicas e da natureza da parcela escura do universo, favorecem o uso das chamadas teorias Alternativas (TAs). Desse modo, espera-se que todos os testes astronômicos disponíveis sejam satisfeitos pelo modelo de gravidade adotado. Dentre os testes destaca-se a necessidade de prever a existência de estrelas estáveis e compactas, que é o foco desta tese. Atualmente, sabe-se que existem estruturas compactas com massas de $\sim 2M_{\odot}$, onde $M_{\odot} = 1.99 \times 10^{33}$ g é a massa do Sol. Logo, espera-se que o modelo gravitacional escolhido possa prever a existência de tais objetos.

Nesse contexto, objetos como as estrelas de nêutrons, que são estruturas altamente relativísticas, tornam-se importantes para o estudo do comportamento da matéria em si-

tuações extremas ou para testar as teorias gravitacionais alternativas [1]. Vale ressaltar que a relevância dos termos de correção relativísticos é medida através do termo de compactação $C = 2GM/R$, aqui escrito em unidades de c^2 ; note que, G é a constante gravitacional universal de Newton, enquanto que M e R são, respectivamente, a massa e o raio da estrutura compacta. Assim, quando $C \ll 1$ o formalismo Newtoniano pode ser utilizado de forma satisfatória, enquanto que, quando $C \sim 10^{-1}$ já se faz necessário uma abordagem relativística. Além disso, outro fator importante é a pressão central dessas estruturas cuja intensidade é extremamente elevada (e depende da equação de estado), de modo que seus efeitos para a gravidade não podem ser desprezados. Devido às condições extremas experimentadas nessas estruturas, alguns efeitos gravitacionais relacionados a efeitos de campos ou curvaturas, que não são observados nos testes convencionais, a nível de Sistema Solar, podem surgir. Ou seja, pode haver alguma informação relevante para a gravitação, escondida em locais onde as quantidades físicas, como pressão e densidade, são extremas. Desse modo, esses objetos tornam-se ideais para testar as teorias gravitacionais. Mas para que os resultados sejam mais consistentes é necessário obter mais informações (e mais precisas) sobre essas estruturas. Para exemplificar o atual estado da arte sobre a massa de estrelas compactas, solicita-se ao leitor que veja a figura (3.3) na seção (3.1).

A linha de investigação mais usada, do ponto de vista astrofísico de estrelas compactas, fixa a teoria da gravitação, comumente utiliza-se a TRG, e trabalha com diferentes equações de estado para o interior estelar. Apesar dos resultados, obtidos via experimentos laboratoriais, terem avançado ao ponto de atualmente predizerem, de forma satisfatória, o comportamento da matéria, para densidades $\sim 10^{12}$ — 10^{14} g cm $^{-3}$, ainda não se conhece com exatidão o comportamento da matéria em regiões onde a densidade alcança $\sim 10^{15}$ g cm $^{-3}$. Essa ordem de grandeza é compatível com a densidade de saturação nuclear e, por sua vez, deve ser a densidade média da região central da estrela de neutrons.

Uma vez que o uso da TRG no contexto cosmológico necessita de constituintes como a matéria e energia escuras, que ainda não foram detectadas, tem-se uma motivação para

TAs, que devem reduzir a dependência de tais constituintes. No contexto astrofísico, para as equações de estado obtidas a partir dos estudos laboratoriais na Terra em conjunto com a TRG, encontra-se predições de massa para as estrelas de nêutrons muito menor do que os valores inferidos pelas observações. Isso pode ser outro indício de que a gravidade pode apresentar um comportamento diferente daquele previsto pela TRG em condições extremas. Ainda vale salientar que a falta de conhecimento sobre o comportamento da gravidade nessas situações pode ser um fator que motiva o uso de teorias de gravidade modificada. Nesse sentido, nessa tese, serão estudadas estruturas compactas estáveis, com foco nas estrelas de nêutrons, no âmbito dessas teorias.

O primeiro modelo de gravidade modificada a ser tratado aqui será obtido através de uma modificação na teoria de Newton, conhecida como Teoria neo-Newtoniana (TnN) [2, 3]. Na verdade, a TnN é uma modificação da forma usual da hidrodinâmica Newtoniana quando o fluido encontra-se sobre a ação da força gravitacional. Esse modelo modificado, em sua origem, tem como objetivo fazer com que uma teoria tipo-Newton apresente uma dinâmica, para o universo, exatamente como a teoria da TRG o faz. Uma vez que a cosmologia newtoniana é muito limitada, fala-se, assim, em uma cosmologia neo-Newtoniana. Isto porque a TnN é capaz de descrever fielmente a expansão do universo homogêneo e isotrópico prevista pela TRG. Contudo, o princípio da equivalência deixa de ser válido e as densidades de massa gravitacional passiva e massa gravitacional ativa são transformadas, respectivamente, da seguinte forma: $\rho_p \rightarrow \rho + p$ e $\rho_a \rightarrow \rho + 3p$ (sendo ρ a densidade do fluido e p a sua pressão, em unidades de c^2).

Apesar da formulação Newtoniana descrever de forma satisfatória estruturas como as Anãs Brancas, via equação de Lane-Emden, sabe-se que estrelas extremamente compactas, como estrelas de nêutrons, só podem ser descritas pela TRG. Nesse sentido, uma questão pode ser levantada: como a teoria neo-Newtoniana descreve uma estrutura estática e esférica? Estrela de nêutrons poderia ser descrita por essa teoria neo-Newtoniana? Com a finalidade de responder essas questões, estudou-se as modificações que uma teoria neo-Newtoniana traz para a equação de Lane-Emden. E, o estudo sobre a estrela de nêutrons,

mostrou que essa teoria prevê a existência de uma massa máxima. Note que este resultado é característico da TRG. Esse sucesso da TnN, prever a existência de uma massa máxima para a estrela de nêutrons, permite interpretar a TnN como uma primeira aproximação para o estudo dessas estruturas. Salienta-se que este é um importante resultado desta tese.

Outro modelo abordado nessa tese é uma generalização para a TRG, conhecida como Gravidade Rastall [4]. Nesse contexto, a curvatura do espaço-tempo modifica a equação de Einstein e gera uma quebra nas leis de conservação convencionais, quando o espaço tem uma curvatura diferente de zero. Essa teoria, proposta na década de 1970, permaneceu por muito tempo esquecida e apenas nos últimos anos os estudos desta teoria, no contexto cosmológico, voltaram a ser abordadas. Contudo, esta é a primeira vez que as ideias de Rastall são utilizadas para estudar a estrutura de objetos compactos, o que permitiu limitar o parâmetro livre da teoria entre $(1 - 1.1)$, principal contribuição desta tese. Nesse sentido, serão feitas duas abordagens: uma para a obtenção do diagrama massa - raio, que permite limitar o parâmetro livre da teoria; e outra para determinar as soluções de vácuo para um espaço-tempo curvo ao redor de um objeto central. Para a TRG essa é a solução de Schwarzschild, em Rastall a solução encontrada é do tipo Schwarzschild de-Sitter (ou Schwarzschild anti-de-Sitter).

Por fim, uma parametrização da equação Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) será proposta. Aqui serão tratados, de uma forma geral, todos os modelos cuja equação de equilíbrio têm a mesma estrutura que a TOV. Assim, será possível verificar a influência que cada termo desta equação de equilíbrio tem para o diagrama massa-raio das estrelas de nêutrons.

Para mostrar esses resultados optou-se por dividir a tese da seguinte forma: no capítulo 2, será apresentada uma breve revisão do ferramental matemático básico necessário para deduzir a equação de equilíbrio hidrostático, para uma estrutura esférica, isotrópica e estática; no capítulo 3, uma discussão acerca da estrutura de uma estrela de nêutrons,

será apresentada, bem como algumas das soluções já conhecidas. Nesse capítulo, será discutido sobre os possíveis constituintes para cada região da estrela e é finalizado com uma discussão sobre os modelos unificados, que descrevem as regiões mais internas da estrela com uma única equação de estado; O capítulo 4 traz uma modificação da gravidade newtoniana aplicada a estruturas compactas, com foco na estrela de nêutrons; No capítulo 5 as estrelas de nêutrons são abordadas do ponto de vista de uma generalização da TRG. No capítulo 6, é discutida uma parametrização para a equação TOV; e o capítulo 7 finaliza a tese trazendo as conclusões e algumas propostas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

A Teoria da Relatividade Geral

A teoria da relatividade geral (TRG), proposta por A. Einstein em 1915, está fundamentada no princípio da equivalência e no limite de velocidade imposto pela teoria da relatividade restrita (TRR), onde o maior valor possível é a velocidade da luz no vácuo (c), que é constante e está de acordo com a teoria de Maxwell. A equação diferencial, tensorial, quadri-dimensional, que relaciona geometria e matéria, é o ferramental matemático que sustenta esta teoria. Atualmente a TRG é aceita pela comunidade científica como a teoria mais correta para descrever os fenômenos gravitacionais, uma vez que, ela tem concordado, de forma satisfatória, com os testes astronômicos [5, 6], tais como: teste da órbita, ondas gravitacionais, buracos negros, desvio para o vermelho gravitacional, sinal de radar, desvio da luz e giroscópio; a figura (2.1) ilustra esses testes. Desse modo, com esse ferramental, é possível modelar o universo conhecido utilizando uma teoria física sólida. Por exemplo, para um espaço-tempo homogêneo e isotrópico as equações de campo de Einstein dão origem às equações de Friedmann, que descrevem a evolução do universo. Tal modelo aplica-se muito bem para a época dominada pela radiação e pela matéria.

Porém com a grande quantidade de dados coletados, principalmente a partir dos anos 1990¹, vê-se a necessidade de introduzir um setor escuro, matéria escura e energia escura,

¹Um breve histórico da cosmologia do século XX pode ser encontrada em



Figura 2.1: Imagem retirada do site asd.gsfc.nasa.gov/blueshift/wp-content/uploads/2015/11/GR_Centennial_Timeline.png. Essa figura mostra os testes gravitacionais ao qual a teoria da relatividade geral foi submetida e o ano em que eles foram realizados.

para que a teoria proposta por Einstein possa ser ajustada aos dados de: curva de rotação das galáxias espirais, idade das estruturas mais antigas e evolução do universo, ou seja, a taxa acelerada com a qual o universo está se expandindo. O setor escuro é chamado assim por não emitir nenhum tipo de radiação. Além disso, as observações têm indicado que a maior parte, cerca de 95%, do constituinte material do universo é composto por esse setor escuro. Uma ilustração da distribuição de matéria do universo é apresentada na figura (2.2). Os dados utilizados para construção do gráfico são da missão Planck.

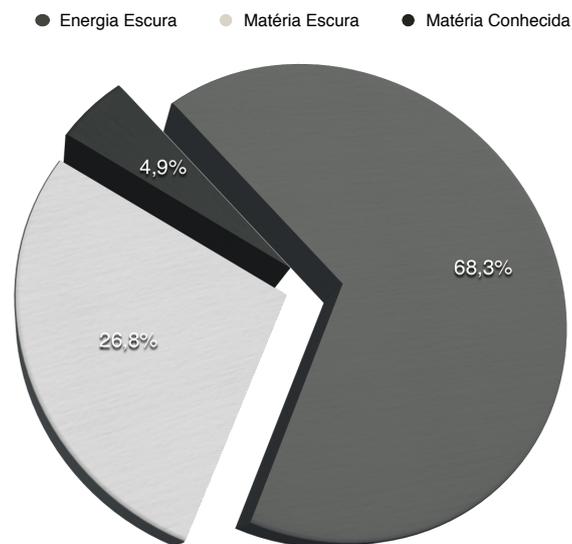


Figura 2.2: Dados da missão Planck, retirados do site https://www.nasa.gov/mission_pages/planck/news/planck20130321.html#.Vq-8AFz06Jc. Nele é apresentado a distribuição da densidade total do universo.

A matéria escura, além de não emitir radiação, deve interagir fracamente com a matéria. Os áxions, neutrinos e neutralinos (WIMPs) são alguns dos candidatos mais comuns nesse contexto. Pode-se encontrar uma discussão sobre esse assunto nos trabalhos [7, 8, 9]. Por outro lado, o candidato a energia escura mais comum é a constante cosmológica²

²www.cosmosecontexto.org.br/?p=1246.

A constante cosmológica Λ foi introduzida pela primeira vez na teoria com a finalidade de descrever um universo estático, do modo que Einstein acreditava ser.

Um dos projetos que investiga as consequências da Energia Escura na formação de estruturas, através de simulações numéricas é o DEUS, do inglês “Dark Energy Universe Simulation”. Visite o site www.deus-consortium.org para maiores detalhes.

[10]. O modelo cosmológico que incorpora a matéria escura fria (não relativística) e a constante cosmológica é chamado de Λ CDM. Este modelo é, atualmente, tido como o modelo cosmológico padrão (MCP) e descreve de forma satisfatória a existência e a estrutura da radiação cósmica de fundo, a distribuição das galáxias em estruturas de larga escala, a abundância dos elementos leves e a expansão acelerada do universo. Os parâmetros para este modelo cosmológico podem ser encontrados no trabalho [11].

Apesar do modelo Λ CDM resolver os problemas acima citados, outros são gerados, tais como: (i) não é conhecida a natureza do setor escuro; (ii) a discrepância entre os valores previstos, para a constante cosmológica, pela teoria quântica de campos e pela cosmologia, que se diferenciam por um fator 10^{120} ; e outros como o problema da planicidade (do inglês “*flatness problem*”) e o problema do horizonte. Paralelamente ao MCP tem-se vários modelos alternativos, que tem como objetivo minimizar os problemas acima citados. Para isso, modificações nas equações de campo de Einstein (ou na Ação de Einstein-Hilbert) são propostas. Esses modelos dão origem ao que se conhece como teorias alternativas (TAs) para a gravitação. Alguns desses modelos, no contexto cosmológico, estão amplamente difundidos e seus resultados também estão de acordo com os dados observacionais. O sucesso dos modelos alternativos como a Teoria Brans-Dicke [12] e Teorias $f(R)$ [13], vem do fato de eles reduzirem a contribuição do setor escuro. Há outras propostas de modificação da gravidade, como a gravidade Rastall [4, 14] e outras [15, 16, 17, 18]. Ressalta-se que algumas dessas teorias foram propostas quase que simultaneamente com a TRG.

Uma vez que nesta tese pretende-se aplicar as TAs às estruturas compactas, será apresentado, neste capítulo, as expressões que descrevem as regiões internas e externas, de uma estrutura isotrópica e compacta numa configuração de equilíbrio estático, no contexto da TRG (a discussão dessas estruturas em TAs será feita mais adiante). Desse modo, será dado ênfase aos elementos da teoria de Einstein que são relevantes para este fim. Estudos mais aprofundados, sobre a TRG, podem ser encontrados na vasta literatura sobre o assunto [19, 20, 21]. Enquanto que, estudos da TRG aplicada a estruturas compactas

[22, 23, 24].

2.1 Elementos da Relatividade Geral

Na TRG a trajetória descrita por uma partícula (com ou sem massa) depende da geometria local do espaço-tempo por onde ela se desloca. A grandeza que define tal geometria é chamada de tensor métrico ($g_{\mu\nu}$), sendo μ e ν índices relacionados com as coordenadas quadri-dimensionais. Desse modo, a distância infinitesimal (ds) entre dois pontos no espaço-tempo, está relacionada com a métrica de uma região, ou seja,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad , \quad (2.1)$$

sendo x^μ a representação da quadri-coordenada, com o índice $\mu = (0, 1, 2, 3)$, onde $\mu = 0$ denota a coordenada temporal e $\mu = (1, 2, 3) \equiv i$ denotam as coordenadas espaciais.

Quando o espaço é curvo, o transporte paralelo de um vetor faz com que suas componentes sejam alteradas. Por exemplo, ao transferir um vetor em torno de uma área infinitesimal curva, fazendo-o retornar ao ponto de partida, suas componentes assumem valores diferentes daqueles que tinha antes da transferência. Isso ocorre pois ao deslizar um vetor de um ponto a outro, de modo que seu ângulo com relação à tangente da curva seja constante (o que é chamado de *transporte paralelo*), verifica-se uma diferença entre o vetor original e o vetor deslizado. Uma representação gráfica desta situação está ilustrada na figura (2.3). Nesse caso, um vetor é transportado sobre um percurso ANBA, saindo e retornando ao ponto A. Quando o vetor original é comparado com aquele que foi transportado, verifica-se que existe um desvio angular α entre eles. A diferença, citada neste parágrafo, deve ser proporcional ao tensor de Riemann,

$$R^\rho_{\mu\sigma\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu,\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma,\nu} + \Gamma^\rho_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \quad , \quad (2.2)$$

onde $(,_\mu)$ denota a derivada convencional com relação a uma das coordenadas, ou seja, $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Já $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ representa a conexão afim, que é introduzida na teoria para que as equações de

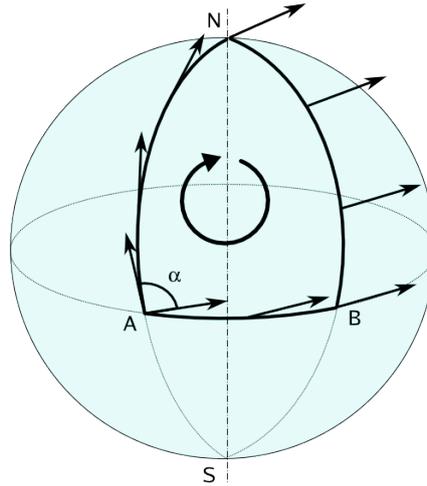


Figura 2.3: O transporte paralelo de um vetor em um espaço curvo. O vetor é transportado ciclicamente do ponto A, passando por N e por B. Esse transporte, faz com que o vetor sofra uma mudança de direção, representada pelo ângulo α . Imagem retirada do site wikiwand.com/es/Derivada_covariante.

movimento (como será mostrado a seguir) possam ser escritas corretamente, além disso, as conexões estão relacionadas com as transformações de coordenadas.

Uma mudança de coordenadas, em um espaço quadri-dimensional, pode ser escrita da seguinte forma

$$dx'^{\rho} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \quad , \quad (2.3)$$

sendo a linha (') utilizada para diferenciar os sistemas de coordenadas. Da forma que a expressão está apresentada, a transformação é de um sistema de coordenadas sem linha (x^{μ}) para um sistema de coordenadas com linha (x'^{ρ}). Além disso, a relação acima expressa a forma com que um vetor se transforma. Assim, a primeira derivada em relação a uma grandeza u parametrizada na direção do movimento da partícula, é

$$\frac{dx'^{\rho}}{du} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{dx^{\mu}}{du} \quad . \quad (2.4)$$

Contudo, a segunda derivada de x^{μ} não se transformará como um vetor, como pode ser visto quando se deriva, com relação a u , a equação acima,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x'^{\rho}}{du^2} &= \frac{d}{du} \left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{dx^{\mu}}{du} \right) \\ &= \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{d^2 x^{\mu}}{du^2} + \frac{\partial^2 x'^{\rho}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{dx^{\mu}}{du} \frac{dx^{\nu}}{du} \quad . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Para que a segunda derivada se transforme como um vetor, como deve ser, é necessário cancelar o segundo termo do lado direito da equação. Desse modo, é necessário introduzir o conceito de conexão $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(x)$. Essa grandeza, que não é um tensor, pode ser interpretada como o quão um referencial desvia-se de um referencial inercial. Nesse caso,

$$\Gamma_{\sigma\rho}^{\tau} = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}} . \quad (2.6)$$

Isso faz com que a equação de movimento para a partícula seja

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{du^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{du} \frac{dx^{\nu}}{du} = 0 . \quad (2.7)$$

Conclui-se então que a conexão se faz necessária para que a equação de movimento seja escrita corretamente em sua forma covariante, como dito anteriormente. Por outro lado, utilizando o fato de que um escalar deve ser invariante por transporte paralelo, tem-se que

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) , \quad (2.8)$$

que também é conhecido como Símbolo de Christoffel. Ressalta-se ainda que existe uma simetria entre os índices inferiores dessa conexão, ou seja, $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$, como pode ser visto na equação (2.8).

Outra aplicação da conexão afim está na definição das derivadas covariantes, aqui representadas por (;),

$$V_{;\nu}^{\mu} \equiv V_{,\nu}^{\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} V^{\lambda} , \quad (2.9)$$

onde V^{μ} é uma grandeza vetorial qualquer.

Retomando a discussão sobre curvatura, pode-se utilizar a métrica para baixar o índice ρ , na equação (2.2),

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} R_{\sigma\mu\nu}^{\lambda} . \quad (2.10)$$

Ao somar as permutações cíclicas dos três índices finais, tem-se a seguinte identidade

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0 . \quad (2.11)$$

Por outro lado, contraindo um dos índices do tensor de Riemann, sem auxílio da métrica, obtém-se o tensor de Ricci

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma} , \\ &= \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma_{\sigma\mu}^{\sigma} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} . \end{aligned} \quad (2.12)$$

esta grandeza carrega consigo informações sobre a curvatura do espaço. Com o auxílio da métrica, obtém-se o escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_{\mu}^{\mu} . \quad (2.13)$$

Utilizando a identidade de Bianchi, que são satisfeitas pelas derivadas covariantes do tensor de curvatura

$$R_{\rho\sigma\mu\nu;\tau} + R_{\rho\sigma\nu\tau;\mu} + R_{\rho\sigma\tau\mu;\nu} = 0 , \quad (2.14)$$

em conjunto com a equação (2.11) e organizando em termos do tensor e escalar de Ricci, obtém-se que

$$\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right]_{;\mu} = 0 . \quad (2.15)$$

O tensor de geométrico de Einstein ($G_{\mu\nu}$) é definido como o termo que satisfaz a identidade $(G^{\mu\nu})_{;\mu} = 0$, ou seja,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R . \quad (2.16)$$

Essa é a parte geométrica da equação de Einstein, que pode ser obtida via cálculo variacional, utilizando o princípio de mínima ação para uma ação do tipo Einstein-Hilbert

$$S_g \propto \int d^4x \sqrt{-g} R , \quad (2.17)$$

onde g é o determinante do tensor métrico. Adicionado-se os efeitos de matéria na ação, a ação total (S_T) pode ser escrita como

$$S_T = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int \mathcal{L}_m d^4x \sqrt{g} , \quad (2.18)$$

sendo o segundo termo da soma uma contribuição do constituinte material, G a constante gravitacional de Newton e \mathcal{L}_m a Lagrangiana do campo de matéria. Então, aplicando o princípio de mínima ação em S_T , tem-se que

$$\delta S_T = \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - 8\pi G T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (2.19)$$

com

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu, \alpha}} \right] \right\} \quad (2.20)$$

sendo o tensor energia-momento. Note que o segundo termo do lado direito desta equação é um termo de superfície. Esta grandeza carrega consigo as informações do constituinte material local. Comumente, na ausência de cisalhamento e trocas de calor internas ao fluido, a caracterização do fluido passa por escrevê-lo como campos de velocidade u^μ e em termos das variáveis termodinâmicas associadas ao fluido, pressão p e densidade de energia total ϵ . Desse modo, o tensor energia-momento para um fluido perfeito é expressa por

$$T^{\mu\nu} \equiv (\epsilon + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \quad . \quad (2.21)$$

Ainda nesse contexto e supondo que o sistema esteja isolado, a derivada covariante deste tensor comumente é nula, ou seja,

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = T^{\mu\nu}_{;\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} T^{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}_{\nu\alpha} T^{\alpha\mu} = 0 \quad , \quad (2.22)$$

que está diretamente relacionado com as leis físicas de conservação.

Por fim, como uma consequência direta do princípio variacional, obtido da equação (2.19), tem-se que

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \quad . \quad (2.23)$$

Essa é a equação de Einstein e revela que a deformação na geometria ($G_{\mu\nu}$) está diretamente relacionada com a concentração de matéria ($T_{\mu\nu}$) em determinada região do espaço. Atualmente essa relação entre geometria e matéria é a lei física utilizada para descrever os fenômenos gravitacionais.

2.2 A métrica estática de uma esfera isotrópica

Uma métrica esférica, estática e isotrópica, pode ser escrita a partir de um elemento de linha, dado por

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad , \quad (2.24)$$

onde $B(r)$ e $A(r)$ são funções apenas de r . Desse modo, o tensor métrico terá as seguintes componentes

$$\begin{aligned} g_{tt} &= B(r) \quad , \quad g_{rr} = -A(r) \quad , \quad g_{\theta\theta} = -r^2 \quad , \quad g_{\phi\phi} = -r^2 \sin^2\theta \quad \text{e} \\ g_{\mu\nu} &= 0 \quad \text{se} \quad \mu \neq \nu \quad . \end{aligned} \quad (2.25)$$

Vale ressaltar que, existem outras formas de escrever essa métrica, como por exemplo, definindo-se $B(r) = e^{2\Psi(r)}$ e $A(r) = e^{2\Phi(r)}$. Mais adiante essa forma será utilizada para facilitar a comparação com o potencial Newtoniano.

As conexões, por sua vez, são determinadas a partir da equação (2.8) em conjunto com a métrica. Assim, os termos não nulos são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \frac{B'}{2B} \quad , \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{B'}{2A} \quad , \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{A'}{2A} \quad , \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r} \quad , \\ \Gamma_{\phi\theta}^\phi &= -\cot\theta \quad , \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{A} \quad , \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{r}{A} \sin^2\theta \quad , \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta \quad , \end{aligned} \quad (2.26)$$

nesse contexto as linhas denotam as derivadas com relação a coordenada radial (r). Com isso, para um espaço-tempo estático, esférico e isotrópico, tem-se que as componentes do tensor de Ricci são

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \frac{B''}{2A} - \frac{B'}{4A} \left\{ \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right\} + \frac{B'}{rA} \quad , \\ R_{rr} &= -\frac{B''}{2B} + \frac{B'}{4B} \left\{ \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right\} + \frac{A'}{rA} \quad , \\ R_{\theta\theta} &= 1 + \frac{r}{2A} \left\{ \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right\} - \frac{1}{A} \quad , \\ R_{\phi\phi} &= R_{\theta\theta} \sin^2\theta \quad . \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.3 A Solução de Schwarzschild

Para uma região de vácuo, a densidade de energia e a pressão são nulas. Desse modo, o tensor energia-momento e, conseqüentemente, o tensor geométrico de Einstein também o são. De fato, para o caso de interesse, o raio da estrela (\mathcal{R}) é determinado na transição de p e $\epsilon \neq 0$ (dentro da estrela) para $p = \epsilon = 0$ (fora da estrela). Desse modo, a solução de Schwarzschild deve descrever a região externa da estrutura estelar que, por sua vez, é tão importante quanto a solução interior. Utilizando o fato de que o tensor energia-momento é nulo no exterior da estrela, a equação de Einstein é escrita como

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad . \quad (2.28)$$

Contraindo os índices com auxílio da métrica, tem-se que

$$R = 2R \quad , \quad (2.29)$$

o que permite concluir que o escalar de curvatura é nulo ($R = 0$), assim como o tensor de Ricci, ou seja, $R_{\mu\nu} = 0$; esse é um resultado direto da equação (2.28). Então, utilizando essa identidade, tem-se que a soma de $g^{tt}R_{tt}$ com $g^{rr}R_{rr}$ resultará em

$$\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = 0 \quad . \quad (2.30)$$

Integrando a equação acima, encontra-se uma relação entre B e A ,

$$B = \frac{K_1}{A} \quad , \quad (2.31)$$

onde K_1 é uma constante de integração que pode ser suprimida fazendo-se uma mudança de coordenadas do tipo $t \rightarrow K_1^{1/2}t$. Desse modo pode ser assumida como igual a 1, assim será assumido nas próximas equações.

Utilizando a componente $\theta - \theta$ do tensor de Ricci, dado por (2.27), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(rB) &= 1 \quad , \\ B &= 1 + \frac{K_2}{r} \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde K_2 é outra constante de integração, mais adiante será mostrado que $K_2 = -2GM$ em unidades de c^2 . Assim, assumindo as considerações anteriores, tem-se que

$$B = \frac{1}{A} = 1 - \frac{2GM}{r} \quad (r > \mathcal{R}) \quad , \quad (2.33)$$

sendo M a massa interna ao raio da estrela \mathcal{R} . Desse modo, a solução geral de vácuo para as equações de Einstein, ou seja, na região externa de uma distribuição de matéria esférica e estática, é dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (r > \mathcal{R}) \quad . \quad (2.34)$$

Desse modo, a solução de Schwarzschild conduz às seguintes componentes métricas,

$$\begin{aligned} g_{tt} &= B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} \quad , \quad (r > \mathcal{R}) \quad , \\ g_{rr} &= A(r) = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \quad , \quad (r > \mathcal{R}) \quad , \\ g_{\theta\theta} &= -r^2 \quad , \quad g_{\phi\phi} = -r^2 \sin^2 \theta \quad \text{e} \\ g_{\mu\nu} &= 0 \quad \text{se} \quad \mu \neq \nu \quad . \end{aligned} \quad (2.35)$$

Note que a métrica de Schwarzschild apresenta uma singularidade em $r = r_S \equiv 2GM$. Esse raio r_S é chamado de raio de Schwarzschild, ou singularidade, ou horizonte. Contudo, essa singularidade pode ser excluída através de uma redefinição da métrica, para maiores detalhes veja [25, 26]. De fato, se $r_S < \mathcal{R}$ o r_S não terá nenhum significado especial, como ocorre no caso da estrela de nêutrons. Por outro lado, quando $r_S > \mathcal{R}$, o objeto compacto se encontra completamente colapsado, na forma conhecida como Buraco Negro. Uma particularidade dessas estruturas é que quando uma partícula se encontra em $r < r_S$ ela não consegue escapar; isso ocorre pois a velocidade de escape nessa região é superior a velocidade da luz.

2.4 Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Agora, utilizando as equações obtidas nas seções anteriores é possível determinar o comportamento na parte interna de uma distribuição de matéria com simetria esférica e isotrópica. Note que, nessa região a curvatura é não nula, diferente do que ocorre no caso da solução de Schwarzschild. Sendo assim, o escalar de curvatura,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{tt} R_{tt} + g^{rr} R_{rr} + g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} \quad ,$$

é dado por

$$R = \frac{B''}{AB} - \frac{B'}{2AB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{2}{rA} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A} \right) \quad . \quad (2.36)$$

E o tensor geométrico de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad ,$$

tem as seguintes componentes

$$\begin{aligned} G_{tt} &= \frac{A'B}{rA^2} + \frac{B}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A} \right) \quad , \\ G_{rr} &= \frac{B'}{rB} - \frac{A}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A} \right) \quad , \\ G_{\theta\theta} &= \frac{r^2 B''}{2AB} - \frac{r^2 B'}{4AB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) \quad , \\ G_{\phi\phi} &= G_{\theta\theta} \sin^2 \theta \quad , \end{aligned} \quad (2.37)$$

note que este tensor é diagonal, o que caracteriza um espaço isotrópico. Por sua vez, as componentes do tensor energia-momento, para a quadri-velocidade $u^\mu = (B, 0, 0, 0)$, serão dadas por

$$T_{tt} = \epsilon B \quad , \quad T_{rr} = pA \quad , \quad T_{\theta\theta} = pr^2 \quad \text{e} \quad T_{\phi\phi} = pr^2 \sin^2 \theta \quad . \quad (2.38)$$

Assim, combinando o tensor geométrico com o tensor energia-momento, obtém-se as

equações de campo de Einstein

$$\begin{aligned} \frac{A'B}{rA^2} + \frac{B}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A}\right) &= 8\pi GB\epsilon \quad , \\ \frac{B'}{rB} - \frac{A}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A}\right) &= 8\pi GAp \quad , \\ \frac{r^2 B''}{2AB} - \frac{r^2 B'}{4AB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) &= 8\pi Gr^2 p \quad . \end{aligned} \quad (2.39)$$

Observe que as componentes angulares são idênticas, motivo pelo qual tem-se apenas três equações.

Manipulando a componente temporal da equação de campo, obtém-se que

$$A(r) = \left(1 - \frac{2GM(r)}{r}\right)^{-1} \quad , \quad (2.40)$$

sendo

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \epsilon(r) dr' \quad , \quad (2.41)$$

a definição de massa gravitacional (ou massa-energia) interna ao raio r . No caso não relativístico esta será a massa total da estrela. Contudo, no contexto da TRG, M tem contribuições de massa e de campo. Note que existe uma interação mútua de massa-energia e espaço-tempo, inseparável na TRG. Ao longo deste trabalho M (massa gravitacional, ou massa-energia) será chamado simplesmente de massa. Por outro lado, a massa da totalidade de núcleos em uma estrela será chamada de massa de bárions. Se a diferença entre a massa gravitacional (massa) e a massa de bárions for negativa, esta corresponderá a energia de ligação gravitacional da estrela, que será da ordem de 100 MeV por nucleon, para estrelas próximas da massa limite.

Manipulando a componente radial e utilizando (2.40), obtém-se uma expressão para o potencial gravitacional

$$\frac{B'(r)}{2B(r)} \equiv \Psi'(r) = \frac{GM(r)}{r^2} \left(1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)}\right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{r}\right)^{-1} \quad , \quad (2.42)$$

onde foi utilizada a relação $B = e^{2\Psi}$. Note que, nos termos entre parênteses foram isoladas as contribuições relativísticas, deixando explícita a parte “Newtoniana” (GM/r^2). Por

comparação direta, verifica-se que Ψ está diretamente ligado a um potencial efetivo, nesse caso, relativístico.

Utilizando a identidade da derivada covariante do tensor energia-momento

$$T^{\mu r}_{;\mu} = 0 \quad ,$$

tem-se que

$$\Psi'(r) = -\frac{p'(r)}{\epsilon(r) + p(r)} \quad . \quad (2.43)$$

Por fim, comparando as equações (2.42) e (2.43) tem-se que

$$p'(r) = -\frac{GM(r)\epsilon(r)}{r^2} \left(1 + \frac{p(r)}{\epsilon(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)}\right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{r}\right)^{-1} \quad . \quad (2.44)$$

Essa é a equação de equilíbrio hidrostático para uma distribuição de matéria com simetria esférica, isotrópica e estática. Dela conclui-se que a pressão é uma função monótona decrescente, do centro da estrela até a sua borda, ao menos nos casos em que os termos entre parênteses em (2.44) são positivos. Tal afirmativa é válida para estruturas em que $2GM/\mathcal{R} < 8/9$ (onde \mathcal{R} é o raio da estrela) ou qualquer região em que $2GM(r)/r < 1$; que estão diretamente relacionadas com a estabilidade da estrela de nêutrons, assim tal estrutura se encaixa nessa situação, ou seja, $p' < 0$.

A equação (2.44) em conjunto com a equação

$$dM(r) = 4\pi\epsilon r^2 \quad , \quad (2.45)$$

são chamadas de equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff [27, 28]. Cujas soluções, dependendo da equação de estado, serão chamadas de estrela de nêutrons (que é o foco desta tese). Contudo, para que seja possível resolver o sistema de equações diferenciais acopladas, é necessário estabelecer uma relação entre p e ϵ . No próximo capítulo, alguns candidatos para descrever o interior dessa estrutura compacta serão apresentadas. Mas antes, será discutido o limite de baixas velocidades e de campos fracos.

2.5 O Limite Newtoniano

Apesar das limitações inerentes ao uso da teoria de Newton, seus resultados são satisfatórios quando as velocidades são baixas e os campos são fracos. No contexto estelar, estruturas semelhantes ao nosso Sol, onde o termo $2GM_{\odot}/R_{\odot} \sim 4.3 \times 10^{-6}$ e $p \ll \epsilon$ (sendo M_{\odot} a massa solar e R_{\odot} o raio solar) pode ser descrita de forma satisfatória pela teoria de Newton. Sendo assim, espera-se que a TRG possa, nessas condições, trazer resultados idênticos aos previstos pela teoria newtoniana, como de fato ocorre.

No limite em que $p \ll \epsilon$ e $Gm(r)/c^2 \ll r$ a equação (2.44) é reduzida a equação de equilíbrio hidrostático de Newton, uma vez que as correções da TRG podem ser desprezadas. De outro modo, pode-se impor que a teoria de Newton é válida no limite de campo fraco,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu} \quad , \quad |\phi_{\mu\nu}| \ll 1 \quad , \quad (2.46)$$

o que significa dizer que o espaço-tempo é aproximadamente plano e uma expansão ($\phi_{\mu\nu}$) em torno da métrica de Minkowski ($\eta_{\mu\nu}$) pode ser utilizada. Desse modo, o elemento de linha será dado por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 + \phi_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad . \quad (2.47)$$

sendo $c^2 \phi_{00}/2 = \Psi$ o potencial de Newton, e utilizando o limite de baixas velocidades,

$$v \ll c \quad . \quad (2.48)$$

Assim, as equações que descrevem o comportamento do fluido dinâmico com interação gravitacional podem ser escritas como

$$\partial_t \epsilon + \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{v}) = 0 \quad , \quad (2.49)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = -\frac{1}{\epsilon} \vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \Psi \quad , \quad (2.50)$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{4\pi G}{c^2} \epsilon \quad . \quad (2.51)$$

Para uma condição de equilíbrio hidrostático, a força resultante sobre qualquer ponto interno a estrela deve ser nula, assim $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ e portanto

$$-\frac{1}{\epsilon}\vec{\nabla}p = \vec{\nabla}\Psi \quad . \quad (2.52)$$

Assumindo-se uma distribuição de matéria com simetria esférica e que as grandezas ϵ , p e Ψ devem depender apenas da coordenada radial r , simplifica-se a equação anterior para

$$-\frac{1}{\epsilon}\frac{dp}{dr} = \frac{d\Psi}{dr} \quad , \quad (2.53)$$

que é a equação de equilíbrio hidrostático, no contexto Newtoniano. Note que essa equação é o análogo da equação (2.42) para baixas energias. Vale ressaltar que, para outros modelos de gravidade, as correções podem ser interpretadas como modificações do potencial Ψ .

Escrevendo a equação de Poisson, em coordenadas esféricas, e utilizando a equação (2.53) tem-se que

$$-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{\epsilon}\frac{dp}{dr}\right] = \frac{4\pi G}{c^2}\epsilon \quad , \quad (2.54)$$

e reorganizando os termos,

$$p'(r) = -\frac{GM(r)\epsilon(r)}{c^2r^2} \quad \text{e} \quad M'(r) = \frac{4\pi}{c^2}\epsilon(r)r^2 \quad . \quad (2.55)$$

A equação de equilíbrio acima descreve a estrutura estável de uma anã branca, ou de uma estrela da Sequência Principal, de forma satisfatória. Contudo, estruturas extremamente compactas, como as estrelas de nêutron, precisam das correções relativísticas (em geral). A figura (2.4), retirada do livro [23], mostra os limites onde existem regiões de estabilidade para as anãs brancas e para as estrelas de nêutrons.

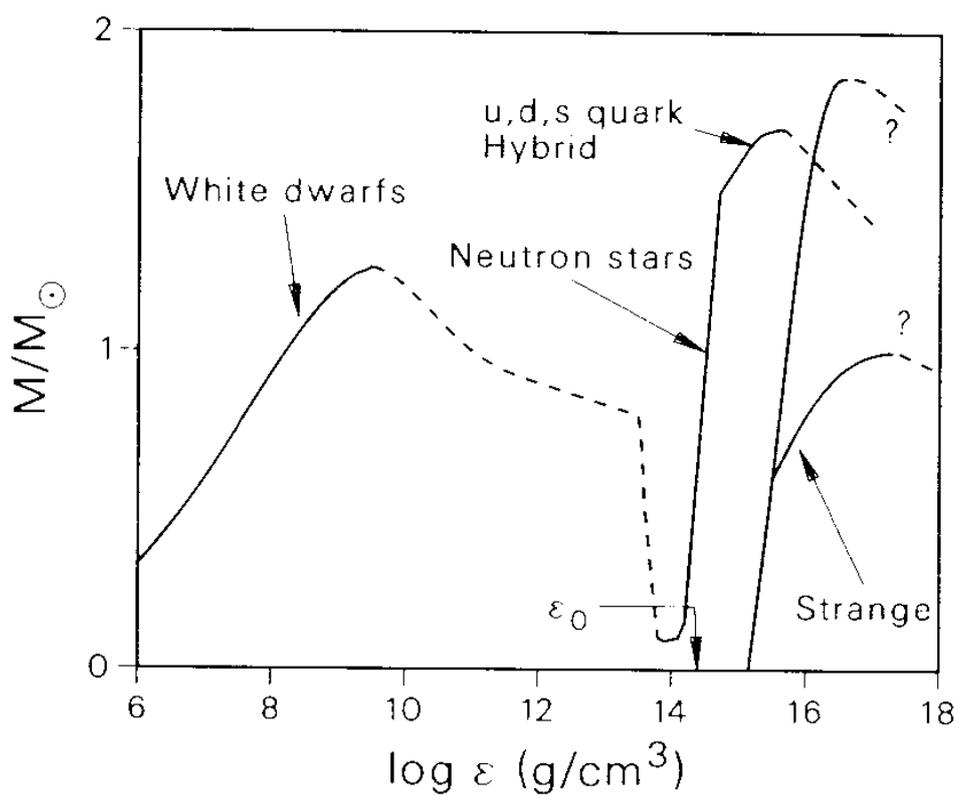


Figura 2.4: Essa figura apresenta as possíveis configurações de uma estrela compacta. A linha contínua representa a região onde existe estabilidade. Já a tracejada representa as regiões instáveis.

Capítulo 3

Estrela de nêutrons: nascimento e interior

De forma simplificada¹ é possível descrever a estrela como uma estrutura esférica cujo aumento da pressão interna, causado pelo calor produzido durante a fusão nuclear, equilibra a auto-atração gravitacional. Essa suposição tornou-se possível a partir de 1920, quando Eddington mostrou que a teoria de Einstein explica a produção de energia de uma estrela. Através da equação

$$E = mc^2 \quad ,$$

onde m é a massa aniquilada no processo de fusão nuclear e c é a velocidade da luz no vácuo. Desse modo, é possível explicar o surgimento da radiação emitida pelas estrelas e o longo período de tempo de brilho dessas estruturas. Por exemplo, durante o processo de fusão de dois átomos de Hidrogênio gerando um átomo de Hélio, verifica-se um déficit de cerca de 0.7% de matéria que, de acordo com a hipótese de Eddington, deve ser emitido na forma de energia.

Assim a quantidade de radiação emitida pelas estrelas traz informações relevantes sobre

¹Um estudo introdutório sobre o nascimento, vida e morte da estrela pode ser encontrado em [29].

essas estruturas. Nesse contexto, algumas das informações mais relevantes sobre as estrelas podem ser obtidas a partir do diagrama H-R, que é uma espécie de mapa das estrelas em função de sua luminosidade. Esse nome faz menção aos cientistas E. Hertzsprung e H. N. Russell que, de forma independente, colocaram em um gráfico as medidas de luminosidade e temperatura das estrelas conhecidas. Um exemplo, deste diagrama, pode ser visto na figura (3.1), onde é mostrado que grande parte das estrelas observáveis, cerca de 90% delas, estão dentro de uma região chamada de Sequência Principal. Outras três regiões

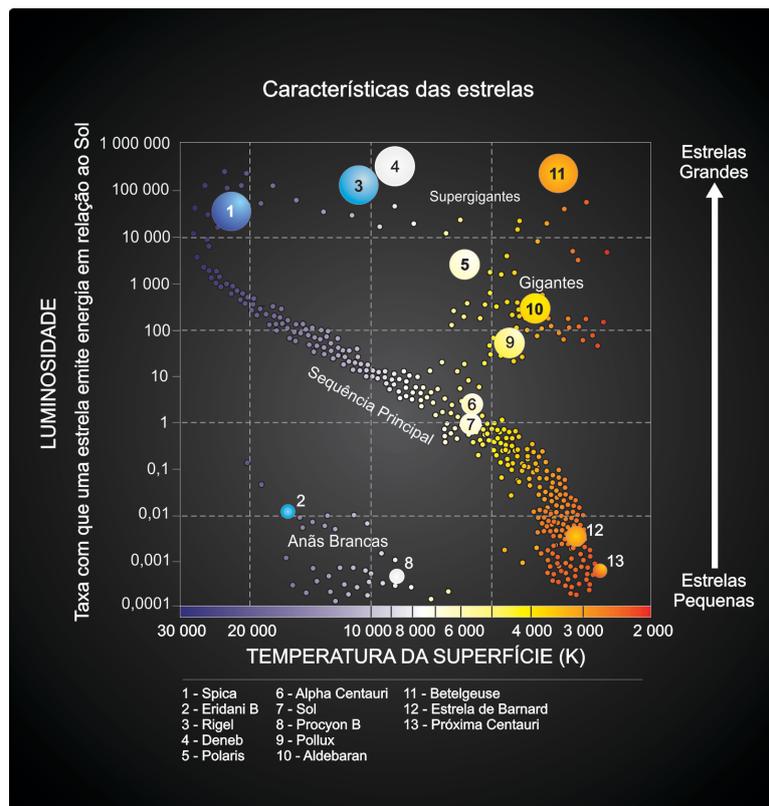


Figura 3.1: Um exemplo do diagrama H-R para parte das estrelas observáveis. Em destaque estão aquelas mais próximas do Sol. Imagem retirada de <http://astro.if.ufrgs.br/estrelas/diagramaHR.jpg>.

estão destacadas nesta figura, acima da Sequência Principal tem-se as estrelas Gigantes e Super Gigantes e abaixo estão as Anãs Brancas. Como abordado no capítulo anterior, a teoria newtoniana descreve de forma satisfatória as situações de equilíbrio das estrelas nessas quatro regiões. As correções relativísticas serão relevantes para estruturas cujo termo de compactação $C = 2GM/R$, em unidades de c^2 , é da ordem de $\sim 10^{-1}$, que é o caso das estrelas de nêutrons.

Desse modo, da lei de Stefan-Boltzmann,

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad , \quad (3.1)$$

onde L é a luminosidade, R é o raio da estrela, T é a temperatura efetiva e σ é a constante de Stefan-Boltzmann; verifica-se que quanto maior a luminosidade de uma estrela, maior será o seu raio, quando a temperatura é mantida constante. Ou seja, uma estrela com temperatura igual a temperatura do Sol e com uma luminosidade de $10^4 L_{\odot}$ tem raio $10^2 R_{\odot}$, sendo L_{\odot} e R_{\odot} a luminosidade e o raio do Sol, respectivamente. Outra informação trazida pelo diagrama H-R é que, durante o período de vida da estrela na Sequência Principal, sua massa cresce no mesmo sentido da luminosidade. Assim, tem-se um indicativo de que a massa deve ser um parâmetro fundamental durante o período que a estrela passa nessa fase. Em geral, as estrelas têm massas que podem variar entre 0.08 e 100 massas solares (a massa do Sol é $M_{\odot} = 1.9891 \times 10^{30}$ kg) e suas temperaturas efetivas estão entre 2500K e 30000K.

Além disso, a massa da estrela também influencia o tempo de vida na sequência principal. Uma possível estimativa desse tempo pode ser feita através de um balanço entre a reserva energética, que é proporcional a massa da estrela, e a energia gasta por ela, que é proporcional a sua luminosidade. A relação entre a massa e a luminosidade, é dada por

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\alpha} \quad ,$$

sendo que $\alpha = 2$ para estrelas de baixa massa, $\alpha = 4$ para estrelas do tipo solar e $\alpha = 3$ para estrelas massivas. Assim, utilizando a relação anterior,

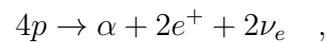
$$t_{\text{vida}} \propto \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{1-\alpha} \quad .$$

Portanto, a evolução estelar, ou de outra forma, a trajetória da estrela dentro do diagrama H-R, será determinada por sua massa.

Em resumo, uma estrela experimenta várias situações de equilíbrio durante sua vida e estas, por sua vez, dependem da massa da estrela. Quanto menor a massa, menor a

luminosidade, menor o tempo de vida na sequência principal e mais lento é o processo de evolução. Por exemplo, as Anãs Brancas de Hélio, cuja massa é menor que $1.0M_{\odot}$, o tempo para atingir o equilíbrio hidrostático é na faixa de ~ 14 bilhões de anos, essa estrutura ganha esse nome pois não consegue fundir o Hélio.

A vida da estrela na sequência principal é caracterizada pelo processo de fusão nuclear. No primeiro estágio, a estrela funde seus átomos Hidrogênio, transformando-os em Hélio, através de uma transformação do tipo



onde p indica prótons, α indica átomo de Hélio duplamente ionizado, e^+ indica pósitron e ν_e indica neutrino do elétron. Essa reação promove a liberação de 7 MeV/nucleon. Existem outras transformações possíveis, essa é apenas uma das possibilidades, para maiores detalhes veja [29]. Após esse período a estrutura estelar entra na primeira fase de contração até atingir uma nova situação de equilíbrio hidrostático. Isso ocorre pois a pressão de radiação, gerada durante a fusão, não pode mais sustentar a atração gravitacional. Sendo assim, tem-se uma redução no volume estelar, o que reinicia fusão do hidrogênio nas camadas mais externas e inicia, também, a fusão do átomo de Hélio no centro da estrela, através da reação



sendo que C indica o átomo de carbono e γ é um tipo de fóton. Em seguida, se a estrela for massiva o suficiente, inicia-se a fusão do Carbono gerando Silício e depois do Silício gerando Ferro. O núcleo de Ferro tem elevado grau de estabilidade, uma vez que o limite de energia máxima de ligação por nucleon é atingido (8.8 MeV). Além disso, o processo de fusão deste núcleo é endotérmico (absorve energia) causando, desse modo, uma instabilidade no sistema estelar e levando a estrela ao colapso. Ou seja, a formação do Ferro marca o fim das reações de fusão e o princípio da morte estelar.

Durante o processo de fusão, uma estrela com massa intermediária, ou seja, inferior a $\sim 8M_{\odot}$, na fase de queima do hélio perde grande parte de sua massa, ficando com um

caroço de energia com menos de $\sim 1M_{\odot}$ que esfria e contrai até atingir raio da ordem de 10^2 km e uma densidade de $10^6 - 10^8$ g/cm³. Com o fim do processo de fusão, tal estrutura tem uma redução da distância entre os elétrons até a ordem do comprimento de onda de de Broglie. Nessa situação os elétrons estão em um regime degenerado, onde as partículas já não podem mais mover-se livremente e o espaço de fase é restrito aos estados de energia cada vez mais elevados. Neste caso, o equilíbrio hidrostático é atingido quando a pressão do gás de elétrons degenerados equilibra a auto-atração gravitacional, formando assim uma anã branca. Já que não há mais fusão nuclear nessas estruturas, a estrela esfria lentamente até não emitir radiação no visível, nesse estágio ela torna-se uma anã negra. O primeiro a determinar o valor máximo para a massa de uma anã branca foi Chandrasekhar. Na ocasião obteve um valor de

$$M_{Ch} = 1.44M_{\odot} \quad , \quad (3.2)$$

utilizando um modelo estelar com um caroço de Ferro.

Por outro lado, se a estrela tiver massa entre $10 - 40 M_{\odot}$ o processo de fusão vai até a formação do ferro, contudo a degenerescência eletrônica não consegue interromper a contração gravitacional e a estrela morre de um modo explosivo. Durante o encolhimento do núcleo os elétrons são engolidos pelos prótons, através do processo Urca [30]. A destruição dos elétrons reduz a pressão central, fazendo com que o caroço seja implodido até atingir a densidade do núcleo atômico $\sim 10^{15}$ g/cm³. Tal evento gera uma onda de choque que expelle as camadas mais externas com velocidades de $\sim 10^5$ km/s e gera uma luminosidade de $\sim 10^{10}L_{\odot}$, assim surge uma supernova. Se a estrela tiver uma massa de $10-15M_{\odot}$, o caroço terá $\sim 1M_{\odot}$ e se torna uma estrela de nêutrons, situação onde a degenerescência do nêutron, em conjunto com a repulsão entre os nucleons, equilibra a gravidade. Estrelas mais massivas, devem colapsar completamente e terminam como um buraco negro. Nesse trabalho será tratado somente as situações onde a estrutura evolui para uma estrela de nêutrons.

3.1 A Estrutura da Estrela de Nêutrons

A estrela de nêutrons é uma estrutura compacta, com densidades da ordem da densidade nuclear ($\sim 10^{15} \text{ g/cm}^3$) e cujo colapso gravitacional é sustentado pela degenerescência do nêutron. O nascimento de tal estrutura coincide com o fim do processo de fusão nuclear que ocorre no centro da estrela. Teoricamente, dividi-se a estrutura interna em diferentes camadas, como mostra a figura (3.2), retirada do trabalho [22]. Estas, por sua vez, podem ser sub-divididas, como sugere [24].

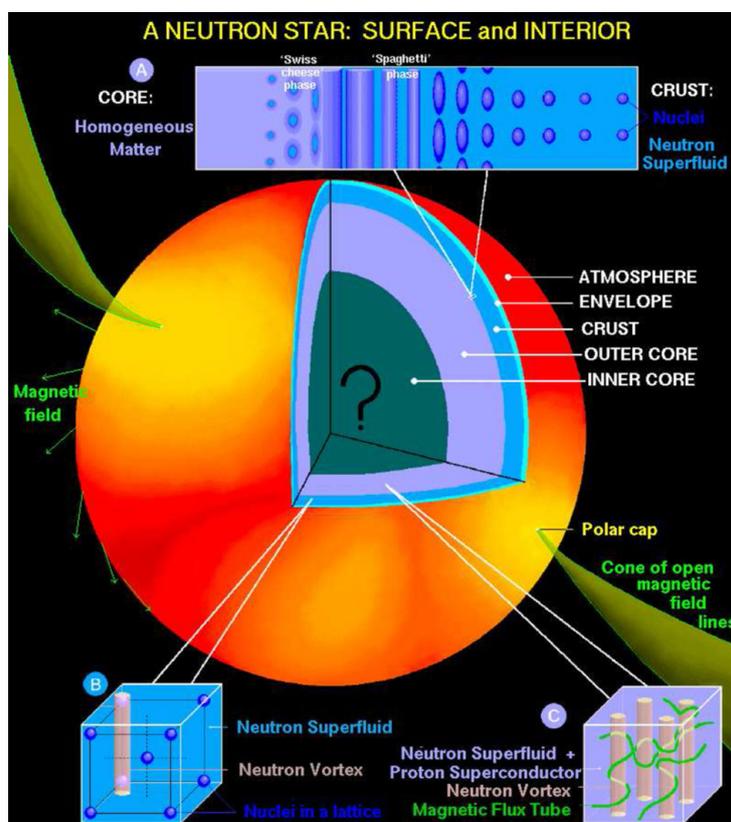


Figura 3.2: Ilustração das diferentes regiões internas de uma estrela de nêutrons.

A região mais externa da estrela de nêutrons é chamada de *Atmosfera*. Apesar de ter somente alguns centímetros de tamanho, desempenha um papel fundamental para as observações. É dessa região que provêm, se não toda, grande parte da radiação detectada, que é muito semelhante a radiação de corpo negro. Essa radiação contém informações

sobre os parâmetros da superfície da estrela, tais como: temperatura efetiva, gravidade, composição química e intensidade do campo magnético; além disso, contém informações sobre a massa e o raio da estrela de nêutrons. O *Envelope* é basicamente um tipo gás ionizado (plasma) interno à atmosfera e comporta-se como um isolante térmico que impossibilita as trocas de calor entre a atmosfera e as regiões mais internas da estrela. A temperatura, dessa região, depende de como ocorreu a evolução da estrela. Indo para as regiões mais internas, a primeira região sólida é atingida. Essa região é chamada de *Manto* e é dominada por núcleos de átomos cuja interação predominante é a coulombiana. A região do manto exterior assemelha-se ao interior de uma anã branca, onde os átomos têm número atômico $Z \simeq 56$. Já os átomos do manto interior apresentam massas maiores que aqueles encontrados no manto exterior. Além disso, no manto interior, tem-se um excesso de nêutrons e os núcleos, que deveriam apresentar simetria esférica, são deformados devido as elevadas densidades, podendo assim assumir formas de varetas e placas, essa fase é comumente chamada de “fase de pasta”. Por fim, na parte mais interna da estrela tem-se a *Crosta* e o *Núcleo*. Nessas regiões a densidade pode atingir um terço da densidade de saturação ($\rho_S \simeq 2.7 \times 10^{14}$ g/cm³). A provável diferença entre as duas regiões deve-se ao contraste entre a fase homogênea da crosta e a fase não homogênea do núcleo exterior. A matéria nessas regiões deve ser neutra, ou seja, o número de prótons deve ser igual ao número de elétrons. Contudo, há grandes incertezas sobre os constituintes destas regiões mais internas do núcleo. Nesse sentido, algumas hipóteses tem sido utilizada para descrever tal região, por exemplo: considerá-la como uma extensão do núcleo exterior, ou como uma mistura de nucleons e matéria estranha como híperons, ou um condensado de Pion, ou condensado de Kaon (condensado de Bose-Einstein), ou gás de quarks (up, down e strange) livres. Por outro lado, tais incertezas sobre o meio material que compõe o núcleo interior não podem afetar a estrutura estelar, uma vez que esta é controlada pela equação TOV. Mas isso não reduz a importância da busca por determinar a matéria que compõe essa região. Uma vez que o papel dessa região é fundamental e influenciará diretamente na escolha da equação de estado que descreve a estrutura estelar.

Nesse contexto, alguns autores têm se preocupado em estabelecer a relação entre a pressão

e a densidade de energia dos constituintes que compõe o interior de estruturas compactas, utilizando por exemplo: “bag model MIT”, Cromodinâmica Quântica (QCD) ou o modelo Nambu-Jona-Lasinio (NJL), veja [31, 32]. Outros trabalhos, por outro lado, têm sugerido modificações na gravidade que descrevem a estrutura estelar, por exemplo, utilizando: Brans-Dicke [33], Teorias Escalares-Tensoriais [34, 35], TeVeS [36], Gravidade Rastall [37] e uma aproximação newtoniana [38].

Com base nisso, pode-se fixar um modelo de gravidade, TRG por exemplo, para determinar a relação massa-raio para algumas propostas de equação de estado, isso possibilita comparar os resultados teóricos, obtidos por vários modelos dessas equações, com os dados observacionais. Ou, utilizar outra possibilidade, onde fixa-se a equação de estado e modifica-se a gravidade. Desse modo, as estrelas de nêutrons podem ser utilizadas para testar a estrutura da matéria em situações extremas ou para testar os modelos de gravidade. Aqui será mantido o foco na segunda possibilidade, onde uma equação de estado é escolhida para construir um diagrama massa-raio ($M - R$), usando alguns modelos de gravidade alternativa. Em seguida, compara-se os resultados com as medidas de massa e raio estimadas para sistemas binários observados, que podem ser encontrados em www.stellarcollapses.org e está apresentada na figura (3.3).

3.2 Equações de Estado

Para as situações onde a temperatura estelar é baixa o suficiente ao ponto de tornar-se desprezível, isso ocorre quando sua temperatura é muito menor que a energia de Fermi, e o equilíbrio da interação fraca existe, o aspecto relevante da equação de estado, utilizada para determinar a estrutura da estrela de nêutrons, é a relação entre a pressão p e a densidade de massa ρ , ou a densidade de energia associada $\epsilon \equiv \rho c^2$. Essa relação, $p(\rho)$, é chamada de equação de estado da matéria densa do interior da estrela de nêutrons e é essencial para estabelecer as situações de equilíbrio da estrutura estelar. A estrela é modelada com a escolha de uma equação de estado em conjunto com um modelo de

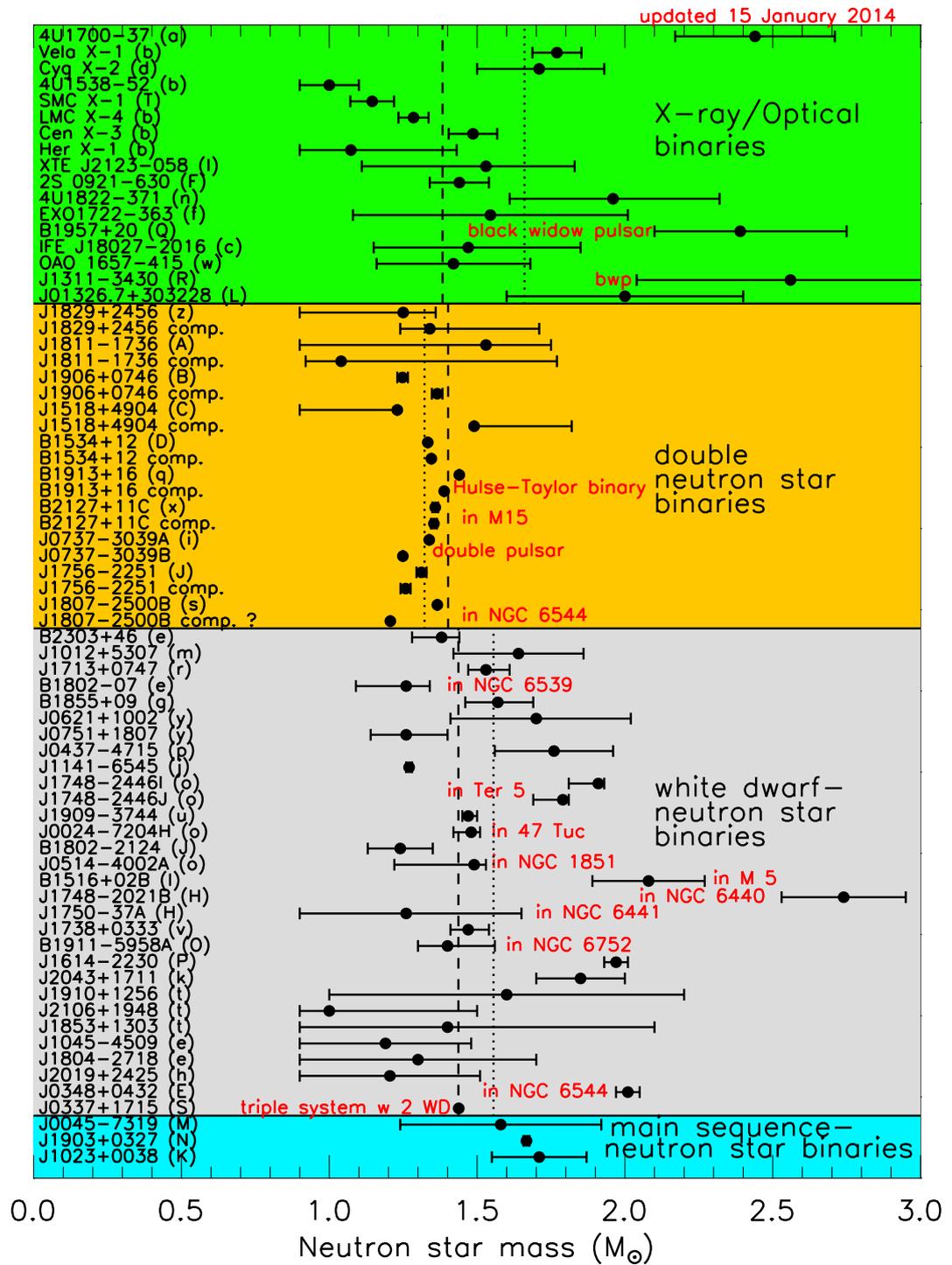


Figura 3.3: Imagem retirada do site www.stellarcollapses.org. Aqui pode-se ver os dados observacionais para as massas de algumas estruturas estelares.

gravidade, aplicada a uma geometria esférica e estática, que é o caso de interesse desta tese. O sistema de equações acopladas é utilizado para obter valores de massa e de raio da estrutura compacta, para diferentes valores de densidade central. Esses resultados são expostos em um plano cartesiano, chamado de diagrama $M - R$, que possibilita analisar a estabilidade das estruturas previstas pelo modelo estelar escolhido.

Os laboratórios que têm testado as propriedades nucleares, bem como os estudos teóricos, da matéria composta unicamente por nêutrons, indicam que o limite da matéria que constitui a estrela de nêutron é próxima a densidade de saturação, usualmente expressa como a densidade de bárions ($n_s \simeq 0.16$ bárions fm^{-3}), densidade de massa ($\rho_s \simeq 2.7 \times 10^{14} \text{gcm}^{-3}$) ou densidade de energia ($\epsilon_s \simeq 150 \text{ MeV fm}^{-3}$). Sendo assim, para estabelecer uma relação que permita descrever o constituinte interno da estrela de nêutrons de forma exata, é necessário utilizar uma teoria de interação entre partículas de vários corpos, uma vez que, a estrela de nêutrons tem densidades $\gtrsim \rho_s$. Já que esta teoria não é bem conhecida, a determinação da equação de estado para as regiões internas da estrela de nêutrons não são determinadas de forma exata.

Geralmente, a equação de estado é subdividida em função do limite estrutural da estrela. Para baixas densidades, que tem como caso limite $p = 0$, denomina-se como EoS² *suave*, ou como EoS *dura*, para altas densidades (tendo como limite $dp/d\epsilon = (c_s/c)^2 = 1$, onde c_s é a velocidade adiabática do som), que maximiza a razão massa-raio [39]. As situações intermediárias são chamadas de EoS *moderadas*. Dependendo da dureza da EoS diferentes valores para a massa máxima são obtidos, podendo chegar a $\sim 1.4M_\odot$ para a EoS suave e $\sim 2.5M_\odot$ para a EoS dura. O trabalho [40] mostra o diagrama $M - R$ para algumas EoS, veja a figura (3.4). Cada uma das curvas foi obtida resolvendo a equação (2.44) para diferentes equações de estado, assinalada na figura. No diagrama ilustrado, pode-se observar EoS suaves (como é o caso da GS1), EoS moderadas (por exemplo a AP4) e EoS duras (como a MSO). Nela, comprova-se o favorecimento às EoS moderadas e duras, uma vez que as EoS suaves não prevêem estruturas com massas $\sim 2M_\odot$, como indicam

²O termo EoS vem do inglês *Equation of State*.

as observações. A grande quantidade de candidatos para descrever a estrutura material

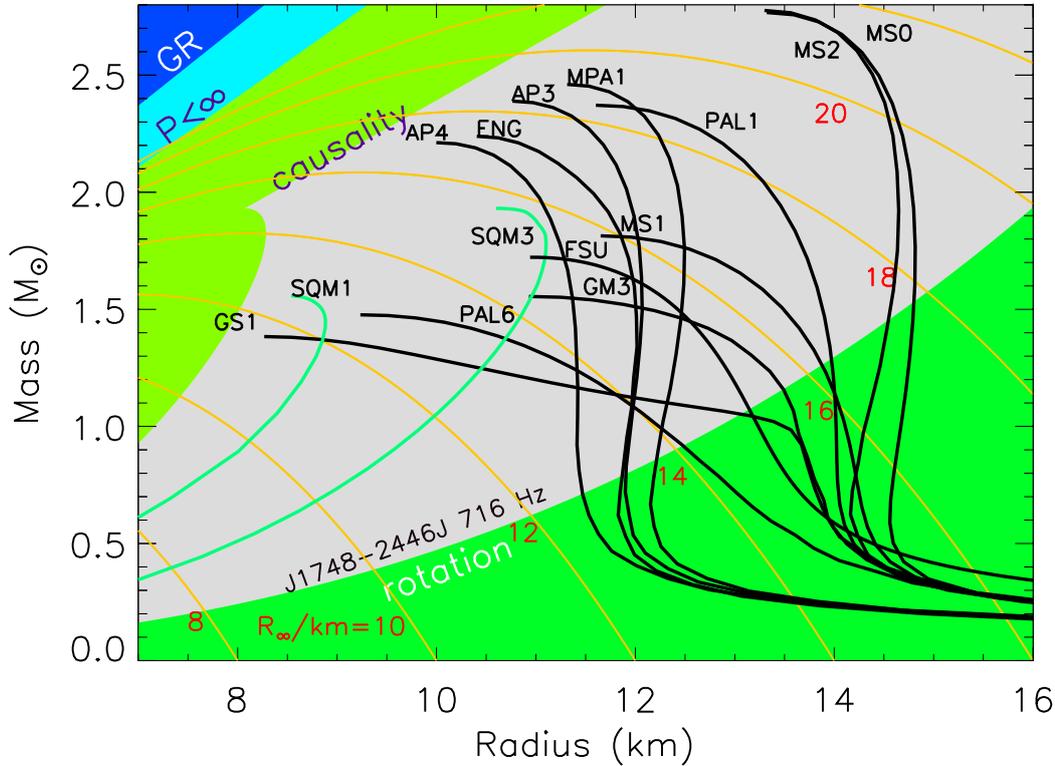


Figura 3.4: Apresentação do diagrama $M-R$ para diferentes EoS de matéria hadrônica em preto e quarks em verde. São indicadas as regiões de pressão finita e causalidade. As curvas em laranja mostram o contorno $\mathcal{R}_\infty = \mathcal{R}(1 - 2GM/\mathcal{R}c^2)^{-1/2}$.

interna das estrelas de nêutrons está relacionado com as incertezas acerca dos constituintes internos que devem compor tais estruturas.

A fim de testar a influência da gravidade modificada na estrutura estelar, bem como, nos valores de massa máxima (e do raio relacionado), escolheu-se utilizar EoS mais realistas, como a família BSk (que não está ilustrada na figura (3.4)). Contudo, como uma primeira abordagem será discutido alguns modelos mais simples.

3.2.1 Densidade Constante

Sob o argumento de que a densidade de energia de uma estrela de nêutrons deve variar pouco na direção radial, pode-se modelar o interior estelar como uma distribuição uniforme de massa (energia), ou seja, a densidade de energia é aproximadamente constante. Assim, a densidade para qualquer ponto será

$$\epsilon(r) = \begin{cases} \epsilon_0, & \text{se } r \leq \mathcal{R} \\ 0, & \text{se } r > \mathcal{R} \end{cases} \quad (3.3)$$

aqui $r = \mathcal{R}$ representa o limite da estrela. Tal consideração impõe que a estrela seja constituída por um fluido incompressível, somente assim sua estrutura pode ser sustentada, o que torna esse modelo não real. Por outro lado, esse modelo permite obter um limite para a razão massa-raio, necessário para determinar o valor máximo do desvio para o vermelho da radiação emitida pela estrela, para maiores detalhes veja [19].

Utilizando a equação (3.3), a massa de uma estrela pode ser escrita como

$$M(r) = \frac{4\pi\epsilon_0}{3c^2} r^3 \quad (r \leq \mathcal{R}) \quad . \quad (3.4)$$

Já a pressão interna, em um contexto de gravidade newtoniana, será dada por

$$p(r) = \frac{2\pi G\epsilon_0^2}{3c^2} (\mathcal{R}^2 - r^2) \quad , \quad (3.5)$$

onde utilizou-se a condição de contorno que limita a estrela, $p(\mathcal{R}) = 0$. Assim, a pressão central da estrela, obtida fazendo $p(r = 0) = p_c$, será

$$p_c = \frac{2\pi G\epsilon_0^2}{3c^2} \mathcal{R}^2 = G \left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/3} \left(\frac{\epsilon_0}{c^2}\right)^{4/3} (M_{\text{tot}} c^2)^{2/3} \quad , \quad (3.6)$$

com $M_{\text{tot}} = M(r = \mathcal{R})$ sendo a massa interna ao raio \mathcal{R} da estrela. Com isso pode-se escrever a pressão interna em termos da pressão central e do raio da estrela. Desse modo,

$$\frac{p}{p_c} = 1 - \left(\frac{r}{\mathcal{R}}\right)^2 \quad . \quad (3.7)$$

A figura (3.5) apresenta o comportamento da pressão e da massa total, normalizadas em termos da pressão central e da massa total da estrela. Observe que nesse caso particular

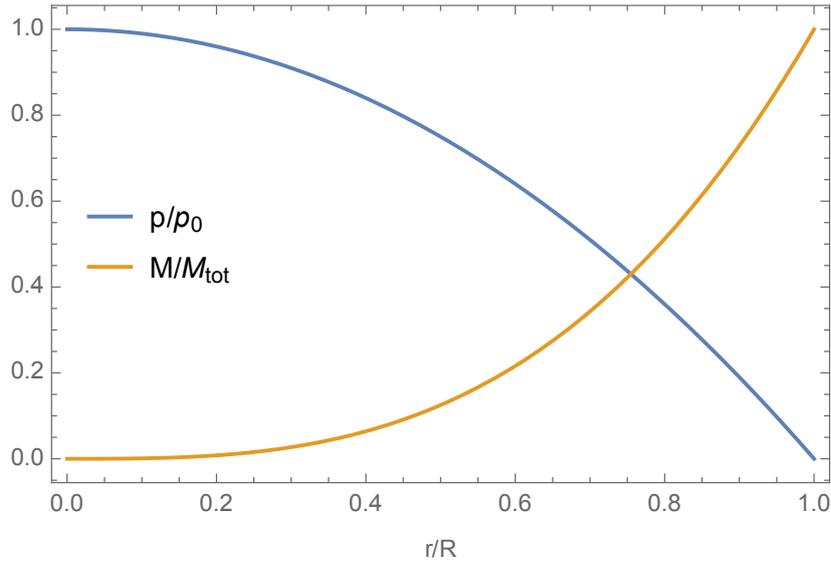


Figura 3.5: Essa figura foi construída utilizando as equações (3.7) e (3.4). Ela ilustra a forma quadrática e cúbica, respectivamente, das funções p/p_c e M/M_{tot} .

a pressão comporta-se como uma função do segundo grau decrescente em relação ao raio e a massa comporta-se como uma função do terceiro grau crescente, nessa região.

Contudo, como discutido anteriormente, a estrela de nêutrons é uma estrutura relativística. Desse modo, utilizando a equação de equilíbrio hidrostático relativístico, dada por (2.44), em conjunto com (3.3), tem-se que a pressão na região interna a estrela será dada por

$$p(r) = \epsilon_0 \left[\frac{(1 - 2GM/c^2\mathcal{R})^{1/2} - (1 - 2GMr^2/c^2\mathcal{R}^3)^{1/2}}{(1 - 2GMr^2/c^2\mathcal{R}^3)^{1/2} - 3(1 - 2GM/c^2\mathcal{R})^{1/2}} \right] . \quad (3.8)$$

Assim, utilizando a condição para determinar a pressão central ($p_0 = p(r = 0)$),

$$p_c = \epsilon_0 \left[\frac{1 - (1 - 2GM/c^2\mathcal{R})^{1/2}}{3(1 - 2GM/c^2\mathcal{R})^{1/2} - 1} \right] . \quad (3.9)$$

Esse resultado permite concluir que a pressão central diverge quando

$$\begin{aligned} 3(1 - 2GM/c^2\mathcal{R})^{1/2} &= 1 \quad , \\ \frac{2GM}{c^2} &= \frac{8}{9}\mathcal{R} \quad . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Consequentemente a estrutura estelar só existe se $M < \frac{4}{9} \frac{\mathcal{R}}{Gc^2}$. Então, a massa máxima

($M_{\text{máx}}$) permitida para estruturas desse tipo é

$$M_{\text{máx}} \propto \epsilon_0^{-1/2} \quad , \quad (3.11)$$

para obter este resultado basta substituir o extremo superior da massa, mostrado acima, em $M(r = \mathcal{R})$, dado pela equação (3.4).

Sendo assim, para uma esfera estática na TRG, assumindo-se qualquer $\epsilon(r)$ não negativo e que decresce de forma monótona com relação a r , $d\epsilon/dr \leq 0$, tem-se que: (i) Para uma estrela cujo raio é fixo (\mathcal{R}), a massa máxima possível é dada por uma densidade de energia uniforme e (ii) a massa máxima existe independente da EoS adotada, uma vez que ela existe para um fluido incompressível, veja pg. 129 [41].

3.2.2 O Limite da Massa

Outra relação entre a pressão e a densidade diferente da abordada na seção anterior, foi sugerida por Bethe-Bayn-Pethick-Suterland-Siemens (BPS) [43]. A EoS BPS foi utilizada para encontrar o limite superior da massa máxima da estrela de nêutrons[42]. Nesse caso, para regiões de baixa densidade, tem-se que

$$\begin{aligned} \epsilon(n) &= \frac{1}{2} \left[\epsilon_f - p_f + (\epsilon_f + p_f) \left(\frac{n}{n_f} \right)^{1/2} \right] \quad , \\ p(n) &= \epsilon(n) - \epsilon_f + p_f \quad , \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde subscrito f denota o ponto de encontro entre o limite causal³ e BPS. Essa EoS incorpora as condições de equilíbrio e conecta as regiões de altas e baixas densidade de forma contínua.

Para um $\frac{\epsilon_f}{c^2} = 4.636 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ e $p_f = 6.1 \times 10^{32} \text{ dina cm}^{-2}$ [23]

$$M = 3.14M_{\odot} \quad \text{e} \quad R = 13.4 \text{ km} \quad . \quad (3.13)$$

³O limite causal é atingido quando a velocidade de propagação da informação tende à velocidade da luz.

Desse modo, qualquer outra equação de estado deverá fornecer massa inferior a esta.

Por outro lado, o limite inferior pode ser obtido através de um modelo de gás degenerado de nêutrons relativísticos, como mostrado no trabalho [27], resultando em uma massa máxima (e raio correspondente) de

$$M_{\text{máx}} = 0.71M_{\odot} \quad , \quad \mathcal{R} = 9.5 \text{ km} \quad . \quad (3.14)$$

para uma densidade central de $\frac{\epsilon_c}{c^2} = 5 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$. A seguir será abordado o modelo de gás de Fermi, que é necessário para descrever o fluido de nêutrons em questão.

3.3 Modelo de Gás de Fermi

Nesse modelo de fluido, o equilíbrio estelar é estabelecido devido à degenerescência de elétrons (para as anãs brancas) ou dos nêutrons (para as estrelas de nêutrons). Diante disso, uma hipótese é considerar que a estrela contém apenas férmions não interagentes (o que simplifica o modelo) e, no contexto microscópico, impor que não haja decaimento beta (situação conhecida como equilíbrio beta). Contudo, essa forma de modelar o constituinte material da estrela não descreve uma situação física real, uma vez que estruturas reais apresentam características que impossibilitam tratar seus constituintes internos como um único fluido, resultado das diferentes regiões abordadas na seção anterior. Todavia o modelo em questão funciona como uma boa aproximação para o fluido interestelar, além de ter grande utilidade por: tornar a abordagem matemática mais simples, facilitando os ajustes das dimensões das grandezas; permitir discutir algumas das características que diferenciam as duas estruturas compactas, anãs brancas e a estrela de nêutrons; facilitar a comparação entre os diferentes modelos gravitacionais a ser testado com a estrela de nêutrons (um dos objetivos desta tese).

Modelar o constituinte material da estrela como um gás ideal de férmion degenerado,

faz com que o princípio de exclusão de Pauli⁴ e os postulados da relatividade especial⁵ sejam respeitados. Ainda, permite que as interações entre as partículas do fluido sejam desconsideradas e torna todos os estados quânticos, até o nível de Fermi, ocupados.

Uma vez que o estado degenerado só é alcançado para baixas temperaturas, ao ponto que elas sejam muito menores que a energia de Fermi ($T \ll E_F$), a abordagem do problema torna-se mais simples. Pois assim, as temperaturas do sistema tornam-se finitas, o que simplifica as expressões. De fato tal hipótese pode ser considerada no problema em questão. Note que para a estrela de nêutrons a temperatura e a energia de Fermi são, respectivamente, $T \sim 1$ MeV e $E_F \sim 10^3$ MeV⁶. O mesmo ocorre para as anãs brancas, onde $T \sim 10^7$ Kelvin e $E_F \sim 6 \times 10^9$ Kelvin.

Nesse contexto, assumindo que $\hbar = c = 1$, tem-se que, para cada tipo de férmion, a densidade de partículas (ρ), a densidade de energia (ϵ) e a pressão (p) serão dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{g}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk \quad , \\ \epsilon &= \frac{g}{2\pi^2} \int_0^{k_F} \sqrt{k^2 + m^2} k^2 dk \quad , \\ p &= \frac{1}{3} \frac{g}{2\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m^2}} k^2 dk \quad ,\end{aligned}\tag{3.15}$$

onde g é o grau de liberdade (degenerescência) de cada férmion, e corresponde a quantidade de spin $\pm 1/2$ que cada férmion pode ter, e k_F é o momentum de Fermi. Para maiores detalhes ver seção 3.9.2 [23].

⁴O princípio de exclusão de Pauli estabelece que dois férmions não podem ocupar o mesmo estado quântico.

⁵A Relatividade Especial está fundamentada em dois postulados: (i) Todas as leis físicas são válidas para qualquer referencial inercial e (ii) A velocidade da luz no vácuo é constante e igual a c para qualquer referencial inercial.

⁶Note que: 1 MeV $\sim 10^{10}$ Kelvin.

Resolvendo a integração e fazendo $g = 2$, tem-se que

$$\begin{aligned}\rho_i &= \frac{k_{F,i}}{3\pi^2} \quad , \\ \epsilon_i &= \frac{1}{4\pi^2} \left[\mu_i k_{F,i} \left(\mu_i^2 - \frac{1}{2} m_i^2 \right) - \frac{1}{2} m_i^4 \ln \left(\frac{\mu_i + k_{F,i}}{m_i} \right) \right] \quad , \\ p_i &= \frac{1}{12\pi^2} \left[\mu_i k_{F,i} \left(\mu_i^2 - \frac{5}{2} m_i^2 \right) + \frac{3}{2} m_i^4 \ln \left(\frac{\mu_i + k_{F,i}}{m_i} \right) \right] \quad ,\end{aligned}\quad (3.16)$$

sendo o índice $i = (p, e, n)$ a representação para: prótons, elétrons e nêutrons; e

$$\mu_i = \sqrt{m_i^2 + k_{F,i}^2} \quad ,\quad (3.17)$$

a representação para a energia de Fermi, que também pode ser interpretada como o potencial químico da partícula i . $k_{F,i}$, por sua vez, representa o momentum de Fermi para a partícula i . Utilizando a equação (3.16) é possível escrever $k_{F,i}$ em termos ρ_i , o que permitirá escrever ϵ_i e p_i como uma função de ρ_i . Desse modo, a densidade total de energia, utilizando o método do multiplicador de Lagrange para um estado de mínima energia, será dada por

$$\epsilon(\rho_p, \rho_e, \rho_n) = \epsilon(\rho_p) + \epsilon(\rho_e) + \epsilon(\rho_n) \quad .\quad (3.18)$$

Enquanto que a condição de neutralidade irá impor que

$$\rho_e = \rho_p \quad .\quad (3.19)$$

Ainda, assumindo-se que a densidade de bárions (ρ_B) seja constante, tem-se que

$$\rho_B = \rho_p + \rho_n \quad ,\quad (3.20)$$

e conseqüentemente

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e \quad .\quad (3.21)$$

Para o limite de altas densidades ($k_{F,i} \gg m_i$), tem-se que

$$\begin{aligned}\epsilon_i &\approx \frac{1}{4\pi^2} \left[k_{F,i}^4 - \frac{1}{2} m_i^4 \ln \left(\frac{2k_{F,i}}{m_i} \right) \right] \quad , \\ p_i &\approx \frac{1}{12\pi^2} \left[k_{F,i}^4 + \frac{3}{2} m_i^4 \ln \left(\frac{2k_{F,i}}{m_i} \right) \right] \quad ,\end{aligned}\quad (3.22)$$

dentro do limite adotado, o termo logarítmico é muito menor que $k_{F,i}^4$, sendo assim este pode ser desprezado. Desse modo,

$$\epsilon_i \rightarrow 3p_i \approx \frac{(3\pi^2\rho_i)^{4/3}}{4\pi^2} . \quad (3.23)$$

Por outro lado, para o limite de baixas densidades ($k_{F,i} \ll m_i$),

$$\begin{aligned} \epsilon_i &\approx \frac{m_i^4}{\pi^2} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{k_{F,i}}{m_i} \right)^3 + \frac{1}{10} \left(\frac{k_{F,i}}{m_i} \right)^5 - \frac{1}{56} \left(\frac{k_{F,i}}{m_i} \right)^7 + \frac{1}{144} \left(\frac{k_{F,i}}{m_i} \right)^9 \right] , \\ p_i &\approx \frac{m_i^4}{3\pi^2} \left[\frac{1}{5} \left(\frac{k_{F,i}}{m_i} \right)^5 - \frac{1}{14} \left(\frac{k_{F,i}}{m_i} \right)^7 + \frac{1}{24} \left(\frac{k_{F,i}}{m_i} \right)^9 \right] , \end{aligned}$$

as séries podem ser travadas na ordem de $k_{F,i}^5$, assim:

$$\begin{aligned} \epsilon_i &\approx \rho_i m_i + \frac{(3\pi^2\rho_i)^{5/3}}{10\pi^2 m_i} , \\ p_i &\approx \frac{(3\pi^2\rho_i)^{5/3}}{15\pi^2 m_i} . \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.4 Fluido Politrópico

Nos dois limites, abordados acima, um gás composto por férmions pode ser tratado como um fluido politrópico, ou seja,

$$p = \kappa \rho^\gamma , \quad (3.25)$$

sendo p a pressão (em unidades de $ergs/cm^3$), κ é uma constante que ajustará as dimensões e $\rho = \epsilon/c^2$ é a densidade de massa energia.

Além disso, como foi discutido acima, o gás de Fermi pode ser uma boa aproximação no que tange a descrição de fluidos de elétrons ou de nucleons. Um dos resultados mais importantes no contexto de estruturas compactas, pode ser obtido utilizando as simplificações citadas acima em conjunto com a equação de Newton, para o equilíbrio.

As estruturas estelares sustentadas pela degenerescência dos elétrons, são conhecidas como anãs brancas. Para essas estruturas as densidades são menores que o limiar do nêutron

($\sim 1.25 \times 10^7$ g/cm³), ou seja, não há produção de nêutrons. Nesse regime, o termo de pressão será dominado pelos elétrons, uma vez que

$$\frac{p_e}{p_p} = \frac{m_p}{m_e} \gg 1 \quad . \quad (3.26)$$

Por outro lado, os elétrons quase não têm influência sobre a densidade de energia, pois

$$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_p} = \frac{m_e}{m_p} \ll 1 \quad . \quad (3.27)$$

Os dois resultados anteriores saem direto da equação (3.24). Assim, o gás é composto apenas por prótons e elétrons não relativísticos e apresenta $p_e \ll \epsilon_e \ll \epsilon_{p,N}$. Sendo assim, $p_{\text{tot}} \ll \epsilon_{\text{tot}}$, e por sua vez, as correções relativísticas são desprezíveis. Desse modo, o modelo de Newton torna-se uma proposta aceitável para descrever tais estruturas, como sugerido anteriormente.

3.4.1 A Estabilidade Estelar

O princípio de Le Châtelier é um critério para estabilidade e diz que: “qualquer inhomogeneidade que possa vir a surgir em um sistema, induzirá um processo que tenderá a eliminar a inhomogeneidade”, seção (8.4) do livro [44]. Caso isso não ocorra o equilíbrio é dito instável. Nesta situação a estrela não pode suportar a auto-gravidade, fazendo assim com que ela entre em colapso gravitacional, resultando em um buraco negro. Além disso, espera-se que o fluido respeite a condição de causalidade. Esta última condição, implica que

$$\frac{dp}{d\rho} > 0 \quad , \quad (3.28)$$

onde $v_s^2 \equiv \frac{dp}{d\rho}$. Da relação entre massa e energia de Einstein, $E = mc^2$, pode-se escrever que $\epsilon = \rho c^2$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\rho} &= \frac{dp}{d\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\rho} = \frac{dp}{dk} \frac{dk}{d\epsilon} c^2 \quad , \\ &= \frac{c^2}{3} \frac{k^2}{k^2 + (mc)^2} \end{aligned} \quad (3.29)$$

para um gás de Fermi. Para obter a segunda igualdade, mostrada acima, foi utilizado a equação (3.15). Desse modo, para que a condição de causalidade seja mantida,

$$0 < \frac{k^2}{3(k^2 + (mc^2))} < 1 \quad . \quad (3.30)$$

Note que, o lado esquerdo da equação (3.29) é igual ao quadrado da velocidade da luz. Isso coloca um limite superior para $\frac{1}{c^2} \frac{dp}{d\rho}$, que deve ser menor que a unidade.

Por outro lado, do princípio de Le Châtelier, tem-se que um incremento infinitesimal na densidade deve ocasionar um aumento da pressão a fim de que o equilíbrio seja restabelecido. Desse modo, se $\rho \rightarrow \rho + \delta\rho$ então $p \rightarrow p + \delta p$. Uma forma simples de abordar tais perturbações, pode ser alcançada a partir de uma teoria Newtoniana. Assim, para uma perturbação na direção radial, espera-se que a força resultante comporte-se como uma força restauradora, análogo a um sistema massa-mola,

$$M\ddot{\delta r} = -K\delta r \quad , \quad (3.31)$$

onde M é a massa total do corpo e K absorve, convenientemente, todas as constantes. Além disso, deve ser uma quantidade positiva.

Numa situação de equilíbrio hidrostático, para qualquer r , as “densidades” das forças gravitacional ($f_g = F_g/V$) e de pressão de radiação ($f_p = \nabla p$) são iguais. Ao perturbar o raio de modo que $r \rightarrow r + \delta r$ a densidade será modificada $\rho \rightarrow \rho + \delta\rho$,

$$\begin{aligned} \rho + \delta\rho &= \frac{M}{\frac{4}{3}\pi(r + \delta r)^3} \quad , \\ \rho\left(1 + \frac{\delta\rho}{\rho}\right) &= \frac{3M}{4\pi r^3\left(1 + \frac{\delta r}{r}\right)^3} \quad , \\ \rho(1 + \delta) &= \frac{3M}{4\pi r^3} \left(1 + \frac{\delta r}{r}\right)^{-3} \quad , \end{aligned}$$

sendo $\delta = \frac{\delta\rho}{\rho}$ o contraste de densidade. Aplicando-se a expansão em série de Taylor, no lado direito da equação, tem-se

$$\rho(1 + \delta) = \frac{3M}{4\pi r^3} \left(1 - 3\frac{\delta r}{r}\right) \quad ,$$

note que $\rho = \frac{3M}{4\pi r^3}$. Desse modo, uma perturbação na direção radial, causa uma redução três vezes maior que a flutuação do raio, ou seja

$$\delta = -3\frac{\delta r}{r} . \quad (3.32)$$

No caso de um fluido politrópico, a pressão será afetada por um fator 3γ . Como pode ser visto a seguir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \rho} &\simeq \frac{\delta p}{\delta \rho} , \\ \delta p &= \frac{\partial p}{\partial \rho} \delta \rho , \end{aligned} \quad (3.33)$$

para $p = k\rho^\gamma$,

$$\begin{aligned} \delta p &= \frac{\gamma p}{\rho} \delta \rho , \\ \frac{\delta p}{p} &= -3\gamma \frac{\delta r}{r} . \end{aligned} \quad (3.34)$$

A consequência das flutuações na densidade, pressão e raio, é uma perturbação da força, correspondentes, em torno de uma situação de equilíbrio. Por isso $f \rightarrow f + \delta f$, para f_p e f_g . Com isso,

$$\begin{aligned} f_p + \delta f_p &= \frac{p + \delta p}{r + \delta r} , \\ \frac{p}{r} + \delta f_p &\simeq \frac{p}{r} \left(\frac{1 + \frac{\delta p}{p}}{1 + \frac{\delta r}{r}} \right) , \\ \frac{p}{r} + \delta f_p &\simeq \frac{p}{r} \left(1 + \frac{\delta p}{p} \right) \left(1 + \frac{\delta r}{r} \right)^{-1} , \\ \frac{p}{r} + \delta f_p &\simeq \frac{p}{r} \left(1 + \frac{\delta p}{p} \right) \left(1 - \frac{\delta r}{r} \right) , \end{aligned}$$

expandindo em série, tem-se que

$$\frac{p}{r} + \delta f_p \simeq \frac{p}{r} \left(1 + \frac{\delta p}{p} - \frac{\delta r}{r} + O[2] \right) ,$$

substituindo a equação (3.34) na equação acima e mantendo apenas perturbações em primeira ordem, tem-se que

$$\begin{aligned}
 \delta f_p &\simeq \frac{p}{r} \left(-3\gamma \frac{\delta r}{r} - \frac{\delta r}{r} \right) , \\
 \delta f_p &\simeq -f_p (3\gamma + 1) \frac{\delta r}{r} , \\
 \frac{\delta f_p}{f_p} &\simeq -(3\gamma + 1) \frac{\delta r}{r} .
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Por outro lado, a perturbação no termo correspondente a interação gravitacional será

$$\begin{aligned}
 f_g + \delta f_g &= \frac{4\pi G}{3} \rho^2 (1 + \delta)^2 \left(1 + \frac{\delta r}{r} \right) r , \\
 f_g + \delta f_g &= f_g (1 + 2\delta) \left(1 + \frac{\delta r}{r} \right) , \\
 1 + \frac{\delta f_g}{f_g} &= \left(1 + 2\delta + \frac{\delta r}{r} + O[2] \right) , \\
 \frac{\delta f_g}{f_g} &= -5 \left(\frac{\delta r}{r} \right) ,
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

onde foi mantida apenas perturbações de primeira ordem e utilizou-se a equação (3.32).

Impondo a condição de equilíbrio $f_p = f_g$ e subtraindo (3.35) e (3.36), resultará em

$$\begin{aligned}
 \delta f_p - \delta f_g &= -(1 + 3\gamma) f_p \frac{\delta r}{r} - \left(-5 f_g \frac{\delta r}{r} \right) , \\
 &= 3 \left(\gamma - \frac{4}{3} \right) f_g \frac{\delta r}{r} .
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Por uma comparação direta com a condição de restituição (3.31),

$$K = 3 \left(\gamma - \frac{4}{3} \right) f_g , \tag{3.38}$$

e para que K seja positivo, $\gamma > 4/3$. Desse modo, fluidos politrópicos com $\gamma \leq 4/3$ são instáveis, ou seja, causam um colapso gravitacional na estrela. Assim como, no caso de matéria rígida $\gamma = 1$. Por isso, uma estrela de nêutrons estável com baixa densidade, cujo fluido material é o gás de Fermi, deve ter $\gamma = 5/3$. Desse modo, existe um momento de Fermi máximo para o constituinte estelar de modo que a estabilidade seja mantida.

Uma outra forma de obter o resultado apresentado acima, seria

$$\begin{aligned} f_g &= f_p \quad , \\ \frac{GM}{r} &= \frac{p}{\rho} \quad , \end{aligned}$$

para um fluido politrópico, tem-se que

$$\frac{M}{r} = k\rho^{\gamma-1} \quad ,$$

como $M = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$, fazendo k absorver todas as constantes, isolando r e substituindo na equação acima

$$\begin{aligned} M \left(\frac{\rho}{M} \right)^{1/3} &= k\rho^{\gamma-1} \quad , \\ M &= k\epsilon^{\frac{3}{2}(\gamma-\frac{4}{3})} \quad . \end{aligned} \quad (3.39)$$

Sendo assim, para que

$$\frac{\partial M}{\partial \epsilon} = 0 \quad , \quad (3.40)$$

$\gamma = 4/3$, que é um ponto instável. Desse modo, toda a discussão apresentada anteriormente, acerca do limite de γ torna-se válida aqui. Note que, essa condição está ligada à massa máxima da estrela. Que por sua vez está relacionada a uma densidade central (ϵ_c) bem específica. Para qualquer incremento, a partir deste valor de ϵ_c , a estrela entrará em colapso gravitacional, levando-a à condição de um buraco negro. Ou seja, mesmo para valores finitos de ϵ_c pode haver instabilidade estelar.

Desse modo, outra forma de escrever a condição de estabilidade é

$$\frac{dM}{d\epsilon} > 0 \quad . \quad (3.41)$$

Note que apesar deste resultado vir de condições bem particulares, no que tange a escolha do fluido e do modelo gravitacional, a condição de estabilidade apresentada acima deve ser válida para qualquer que seja o modelo adotado, tanto para a gravidade quanto para o fluido.

3.4.2 A Equação de Lane-Emden

Outro importante resultado que pode ser obtido a partir das EoS politrópicas, aplicadas a estrelas, é a equação de Lane-Emden. Utilizando a equação de equilíbrio hidrostático Newtoniana, a definição de massa e supondo que o constituinte material estelar é um fluido politrópico; obtém-se uma equação diferencial que permite obter soluções analíticas para alguns casos particulares, veja [45] para maiores detalhes.

A derivada da EoS politrópica, com relação a r , é

$$\frac{dp}{dr} = \kappa\gamma\rho^{\gamma-1}\frac{d\rho}{dr} \quad .$$

Desse modo a equação (2.54) pode ser rescrita da seguinte forma

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{\rho} \kappa\gamma\rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr} \right] = -4\pi G\rho \quad . \quad (3.42)$$

Fazendo as seguintes mudanças de variáveis,

$$\begin{aligned} \rho &= \lambda\theta^n \quad , \\ \gamma &= \frac{n+1}{n} \quad , \end{aligned} \quad (3.43)$$

sendo λ a densidade central, ou seja, $\rho(\theta \rightarrow 0) = \rho_0 = \lambda$; e substituindo-as na equação (3.42), tem-se que

$$\left[\frac{\kappa(n+1)\lambda^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G} \right] \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d\theta}{dr} \right] = -\theta^n \quad . \quad (3.44)$$

Redefinindo,

$$\alpha^2 = \left[\frac{\kappa(n+1)\lambda^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G} \right] \quad \text{e} \quad \xi = \frac{r}{\alpha} \quad , \quad (3.45)$$

então,

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right] = -\theta^n \quad , \quad (3.46)$$

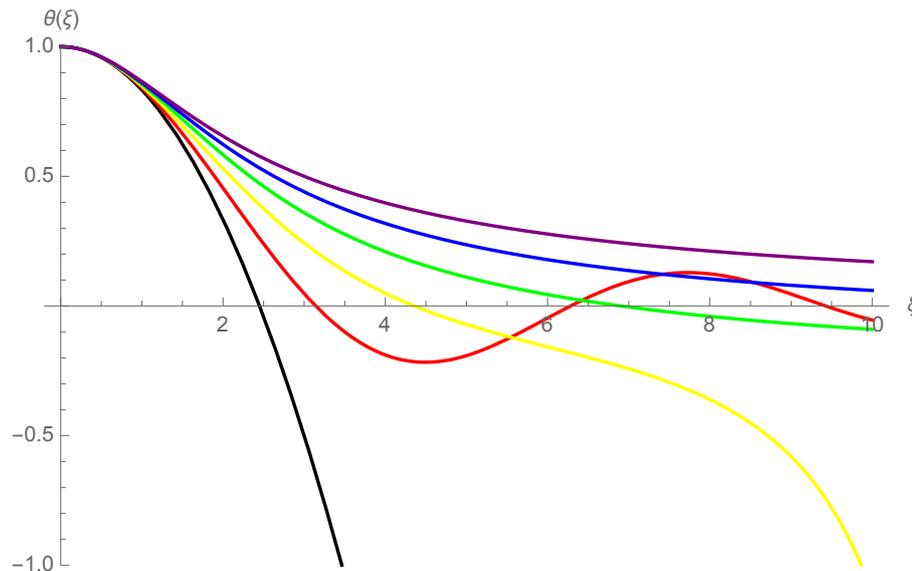


Figura 3.6: Essa figura foi construída utilizando o programa obtido em mathworld.wolfram.com/Lane-EmdenDifferentialEquation.html. Nela é apresentada as curvas para diferentes valores de n , sendo a linha preta o resultado para $n=0$, a vermelha para $n=1$, a amarela para $n=2$, etc.

essa é a equação de Lane-Emden. Pode-se utilizar alguns artifícios matemáticos para escrevê-la de outras formas, a ref. [45] traz detalhes sobre esse ponto.

A figura (3.6) mostra a solução numérica para diferentes valores de n . O ponto onde a curva toca pela primeira vez o eixo ξ está relacionado com o maior raio que a estrela pode ter, nessa situação $\xi = \xi_1$. Note que para cada valor n , o valor de ξ_1 muda, ou seja, o raio da estrela depende de n . A seguir será mostrada essa dependência explicitamente. Por exemplo, para $n = 0$ o valor de $\xi_1 \simeq 2.4$, para $n = 1$ o valor de $\xi_1 \simeq 3.2$, etc.

3.4.3 Relação Massa vs. Raio

Para reescrever a função massa em termos das variáveis θ , n , ξ e α , utiliza-se a definição de massa,

$$\frac{dM}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad ,$$

em conjunto com as equações (3.43), (3.45) e (3.46). Após algumas manipulações algébricas, obtém-se que,

$$\frac{dM}{d\xi} = -4\pi\lambda\alpha^3 \frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right] .$$

Integrando de $\xi = 0$ a $\xi = \xi_1$ e utilizando a condição de contorno $M(0) = 0$, tem-se que

$$M(\xi_1) = -4\pi\lambda^{\frac{3-n}{2n}} \left[\frac{\kappa(n+1)}{4\pi G} \right]^{3/2} \xi_1^2 \frac{d\theta}{d\xi_1} , \quad (3.47)$$

pode-se escrever a massa em termos de γ . Desse modo,

$$M(\xi_1) = -4\pi\lambda^{\frac{3}{2}(\gamma-4/3)} \left[\frac{\kappa\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right]^{3/2} \xi_1^2 \frac{d\theta}{d\xi_1} . \quad (3.48)$$

Espera-se que a derivada $\frac{d\theta}{d\xi_1}$ seja negativa, pois a massa deve ser positiva.

O raio da estrela pode ser obtido da definição de $\xi \rightarrow \xi_1$,

$$\begin{aligned} R &= \xi_1 \lambda^{\frac{1-n}{2n}} \left[\frac{\kappa(n+1)}{4\pi G} \right]^{1/2} , \\ R &= \xi_1 \left[\frac{\kappa\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right]^{1/2} \lambda^{\frac{\gamma-2}{2}} . \end{aligned} \quad (3.49)$$

Assim, a relação massa-raio é obtida utilizando (3.47) em conjunto com (3.49),

$$M = 4\pi\lambda R^3 \left(\frac{1}{\xi_1} \left| \frac{d\theta}{d\xi_1} \right| \right) . \quad (3.50)$$

Uma tabela de n , ξ_1 e $\frac{d\theta}{d\xi_1}$ pode ser obtida, resolvendo a equação diferencial (3.46). Desse modo, obtém-se a curva massa-raio característica para diversos valores de n .

Quando $n \rightarrow 3$ ($\gamma \rightarrow 4/3$) a estrela se aproxima de um regime relativístico, onde $k_{Fi} \gg m_i$, e instável, como discutido anteriormente. No limite em que $n = 3$, a massa não depende da densidade central, como pode ser visto na equação (3.47). Por outro lado, utilizando a equação (3.49), verifica-se que $R \sim \lambda^{-1/3}$. Já no caso não relativístico ($k_{Fi} \ll m_i$), $\gamma = 5/3$. Assim, M e R terão as seguintes dependências com relação a densidade central, $M \sim \lambda^{2/3}$ e $R \sim \lambda^{-1/6}$. Contudo um resultado mais realista pode ser obtido quando é considerado a interação nucleon-nucleon, conhecida como método Prakash [46]. Para

essa situação $\gamma = 2$ e os dados têm indicado que esse valor, de fato, descreve a estrela de nêutrons de forma mais realista [22]. Nessa última situação, $M \sim \lambda$ e R não depende da densidade central. Mais adiante essas EoS serão utilizadas para mostrar as possíveis situações de equilíbrio para a estrela de nêutrons.

3.5 Equações de Estado Unificadas

Como discutido anteriormente, a estrela de nêutrons apresenta diferentes regiões internas cujos constituintes materiais são bem característicos. Desse modo, cada região (ou de outro modo, cada faixa de densidade de energia) deve ser descrita por uma EoS diferente. As regiões mais internas (núcleo e caroço) podem ser descritas de diferentes formas, uma vez que não há dados que permitam determinar com precisão o constituinte material que os compõe. Os trabalhos [22, 40] servem como exemplos onde diferentes tipos de EoS são utilizadas para descrever cada uma dessas regiões. Para esses modelos, a interface de conexão entre o núcleo e o caroço é estabelecida “ad hoc”. Uma outra abordagem é utilizar uma única EoS para descrever todo interior estelar, ou seja, a EoS descreve o núcleo interno e externo e o caroço interno e externo, além das transições entre elas. Nesse contexto, os modelos são chamados de EoS unificadas. Em geral, as EoSs são calculadas para alguns valores específicos de densidade e pressão. Uma forma de generalizar a EoS, de modo que estudos mais completos possam ser feitos, faz-se necessário elaborar uma representação dessa equação na forma analítica, que é obtida através de um ajuste entre uma forma funcional para $p(\epsilon)$ e os pontos obtidos através dos cálculos citados anteriormente. Como por exemplo, pode-se citar: a representação analítica para os modelos FPS [47], SLy4 [48] e BSk. Uma aplicação da EoS SLy em estrelas de nêutrons em um contexto de gravidade modificada pode ser encontrado em [49]. Nesta tese, será utilizada a EoS BSk para impor limites ao parâmetro livre da Gravidade Rastall.

A representação analítica BSk é um modelo de EoS unificada. Essa forma de modelar a estrutura interna da estrela foi proposta pelo grupo de Brussels-Montreal [50] generali-

zando a força efetiva *Skyrme*, que tem sido ajustada de forma satisfatória aos dados de massa. O trabalho [51] propõe uma forma analítica para a matéria nuclear fria chamada de BSk e está fundamentada no trabalho [47], onde a EoS SLy04 foi testada no contexto de estrela de nêutrons. A forma analítica para a EoS BSk apresenta 23 coeficientes que são determinados via ajuste entre a curva teórica e os dados coletados nos laboratórios. Para esse caso em particular, redefiniu-se $\xi = \log(\rho/g \text{ cm}^{-3})$ e $\zeta = \log(P/\text{dyne cm}^{-2})$, com log sendo \log_{10} , a parametrização para $p(\rho)$ utilizada foi

$$\begin{aligned} \zeta = & \frac{a_1 + a_2\xi + a_3\xi^3}{1 + a_4\xi} \{ \exp [a_5(\xi - a_6)] + 1 \}^{-1} \\ & + (a_7 + a_8\xi) \{ \exp [a_9(a_6 - \xi)] + 1 \}^{-1} \\ & + (a_{10} + a_{11}\xi) \{ \exp [a_{12}(a_{13} - \xi)] + 1 \}^{-1} \\ & + (a_{14} + a_{15}\xi) \{ \exp [a_{16}(a_{17} - \xi)] + 1 \}^{-1} \\ & + \frac{a_{18}}{1 + [a_{19}(\xi - a_{20})]^2} + \frac{a_{21}}{1 + [a_{22}(\xi - a_{23})]^2} \quad , \end{aligned} \quad (3.51)$$

os parâmetros a_i são dados na Tabela 3.1. Sendo assim, cada EoS BSk é obtida por um ajuste específico, isso pode ser visto na figura (3.7), retirada de [51]. Nela é apresentada uma comparação entre as EoS e suas respectivas representações analíticas. Na parte superior desta figura é apresentada uma aproximação da curva teórica com os dados. Já na parte inferior pode-se ver o desvio entre os dados e a curva teórica.

Através de uma breve comparação entre a representação apresentada na equação (3.51) e a SLy4 (do artigo [47]), pode-se ver que a única modificação entre os dois modelos é o surgimento dos termos $a_{18} - a_{21}$. A inclusão desses termos melhora a aproximação entre a curva teórica e os dados.

As EoS podem ser caracterizadas por sua “dureza”, como citado anteriormente. Quanto mais “dura” a EoS mais massa a estrela pode ter para um determinado raio. Desse modo, escolheu-se três formas para as EoS: BSk19, BSk20 e BSk21; que correspondem, respectivamente, às EoS astrofísicas: suaves, moderadas e duras; que por sua vez, se relacionam com: FPS [52, 53], APR [54] e V18 [55]. Para maiores detalhes veja [51].

Tabela 3.1: Parametros da equação (3.51).

i	a_i		
	BSk19	BSk20	BSk21
1	3.916	4.078	4.857
2	7.701	7.587	6.981
3	0.00858	0.00839	0.00706
4	0.22114	0.21695	0.19351
5	3.269	3.614	4.085
6	11.964	11.942	12.065
7	13.349	13.751	10.521
8	1.3683	1.3373	1.5905
9	3.254	3.606	4.104
10	-12.953	-22.996	-28.726
11	0.9237	1.6229	2.0845
12	6.20	4.88	4.89
13	14.383	14.274	14.302
14	16.693	23.560	22.881
15	-1.0514	-1.5564	-1.7690
16	2.486	2.095	0.989
17	15.362	15.294	15.313
18	0.085	0.084	0.091
19	6.23	6.36	4.68
20	11.68	11.67	11.65
21	-0.029	-0.042	-0.086
22	20.1	14.8	10.0
23	14.19	14.18	14.15

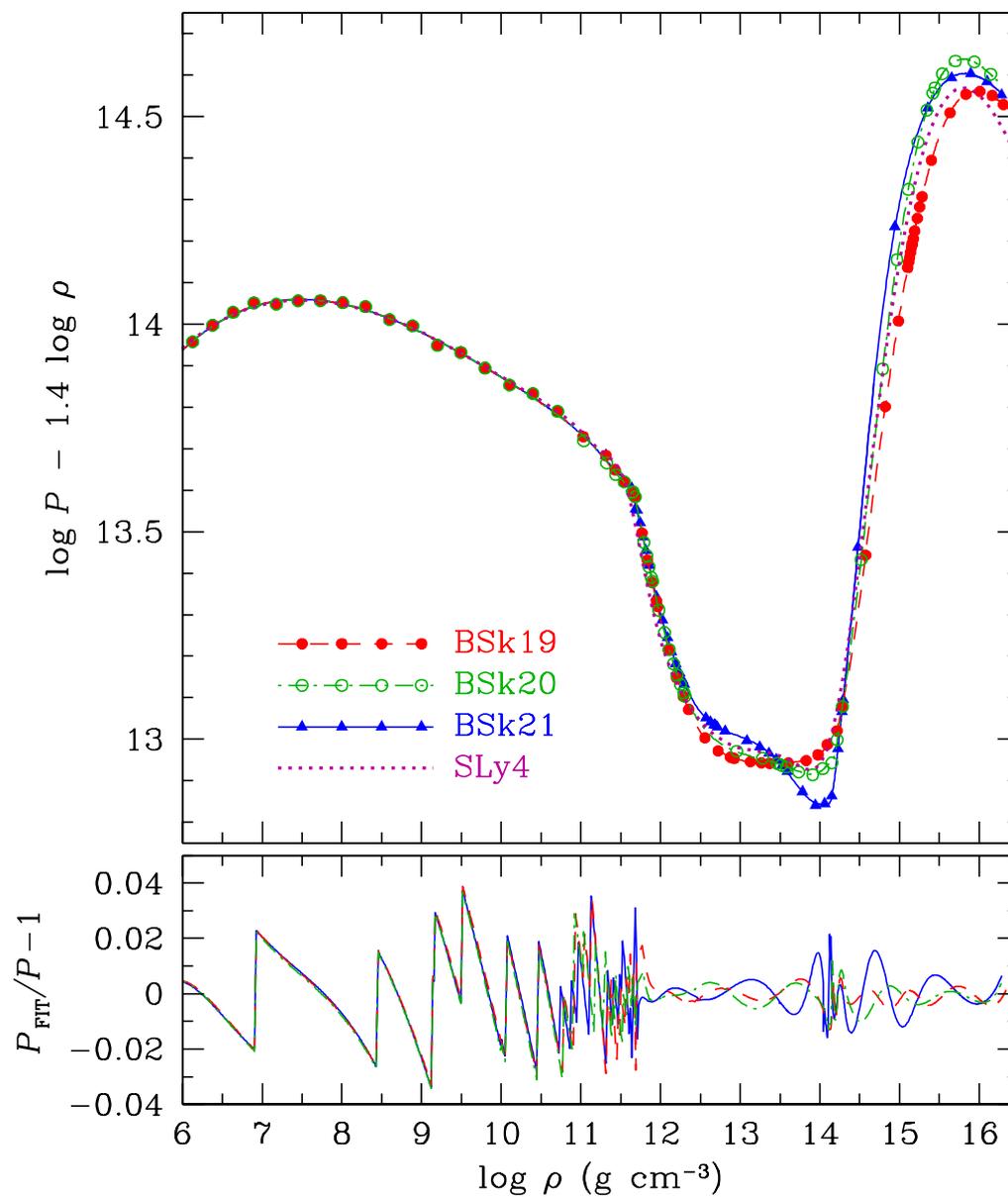


Figura 3.7: Comparação dos dados e as curvas teóricas para a pressão como uma função da densidade de massa para alguns modelos de EoS.

Capítulo 4

Estruturas Compactas

Neo-Newtoniana

O início do século *XX* marcou uma mudança de paradigma científico. As leis de Newton, que até aquele momento, eram a melhor forma para explicar os fenômenos relativos ao movimento dos corpos, dava espaço à teoria da relatividade restrita e geral, em 1905 e 1915, respectivamente. Agora o formalismo newtoniano é “apenas” o limite para baixas velocidades e campos fracos dessa nova teoria. Com isso, surgem algumas mudanças substanciais: (i) a teoria da relatividade restrita impõe a existência de uma velocidade limite, denominada c (velocidade da luz no vácuo, que é constante), ou seja, nada na natureza pode se propagar com velocidade superior a c — isso causa uma mudança na forma “Galileana” de ver o mundo (onde o tempo e espaço são absolutos) e (ii) a teoria da relatividade geral substitui a ideia de força pela deformação do espaço-tempo. Contudo, por de trás deste conceito simples, onde a matéria deforma o espaço, há um ferramental matemático complexo, fundamentado na geometria Riemanniana, álgebra tensorial, variedades, espaço-tangente e espaço-tempo quadri-dimensional, por exemplo, o que torna o seu entendimento complexo. Um exemplo disso foi apresentado no capítulo 2.

Porém, em muitos casos pode-se buscar formulações mais simples e menos pretensiosas para descrever alguns fenômenos físicos. Isso não é diferente no contexto da astrofísica e da cosmologia, ambas serão discutidas ao longo deste capítulo. Por ora será mantido o foco no contexto cosmológico, uma vez que este é o que motiva as modificações neo-Newtonianas, que redefine a massa inercial e gravitacional afim de ajustar o resultado Newtoniano com aquele obtido via relatividade geral. Essa discussão será abordada na próxima seção.

4.1 Um pouco de Cosmologia

Nos anos de 1930, E.A. Milne e W.H. McCrea, com os trabalhos [56, 17], mostraram que a dinâmica do Universo poderia ser descrita por um formalismo Newtoniano. Contudo, apenas na segunda metade do século XX, com os trabalhos [2, 3], foi sugerida modificações na teoria Newtoniana (TN) afim de que esta incorporasse os efeitos da pressão na gravitação. Essa teoria modificada é conhecida como teoria neo-Newtoniana (TnN). Agora a equação de Friedmann que descreve a aceleração do Universo, comumente obtida utilizando a teoria da relatividade geral (TRG), pode ser obtida utilizando um formalismo matemático mais simples. Os autores do trabalho [57] fazem uma discussão didática sobre o assunto.

A equação que descreve corretamente a dinâmica do Universo é obtida, via TRG, aplicando as equações (2.22) e (2.23) a um modelo de universo isotrópico, em expansão e cuja distribuição de matéria é homogênea, cujo elemento de linha é definido pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW),

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right\} . \quad (4.1)$$

Aqui, o parâmetro k é um indicador da seção espacial a tempo constante (quando $k = 0$ o espaço é euclidiano, $k = 1$ uma tri-esfera e $k = -1$ uma tri-pseudo esfera), a é o fator de escala e é uma função do tempo e $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2$. Já o conteúdo material, para

um fluido perfeito, é dado pelo tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p/c^2) u^\mu u^\nu - p g_{\mu\nu} \quad . \quad (4.2)$$

Desse modo as componente tipo-tempo e tipo-espaço da equação de Einstein serão

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a} = \frac{8\pi G\rho}{3} \quad , \quad (4.3)$$

$$-\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = -\frac{8\pi Gp}{c^2} \quad , \quad (4.4)$$

que, quando combinadas, descrevem a aceleração do Universo em termos de ρ e p

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) \quad . \quad (4.5)$$

Note que, para resolver a equação diferencial acima é necessário escolher uma relação entre a pressão (p) e a densidade (ρ), ou seja, uma EoS $p = p(\rho)$. Ao inserir a EoS na lei de conservação do tensor energia-momento, é possível obter o comportamento da densidade e determinar a dinâmica do Universo.

Contudo, um fluido dinâmico newtoniano com interação gravitacional é regido pelas equações (2.49)—(2.51), em conjunto com a Lei de Hubble ($\vec{v} = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r}$), onde $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$. Para esse caso, ao substituir a Lei de Hubble na equação de Euler antes de combiná-la com a equação de Poisson, pode-se mostrar que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho \quad . \quad (4.6)$$

Esse resultado descreve a evolução do Universo para a teoria Newtoniana, que nesse contexto é chamada de Cosmologia Newtoniana. Comparando a equação anterior com (4.5), conclui-se que a Cosmologia Newtoniana descreve somente a fase dominada pela matéria (onde $p = 0$), período em que ocorre a formação de estruturas como galáxias, por exemplo, deixando de fora outras épocas, onde $p \neq 0$. Isso ocorre pois, independente da pressão do fluido e impondo somente que $p = p(t)$ (o que leva $\nabla p = 0$) o resultado será sempre o mostrado acima.

Então, se o interesse é, utilizando um formalismo Newtoniano, encontrar uma solução válida para qualquer p , torna-se necessário modificar as equações da dinâmica do fluido

para (vide [57])

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + p \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}) = 0 \quad , \quad (4.7)$$

$$\dot{\vec{v}} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho + p} - \vec{\nabla} \Psi \quad , \quad (4.8)$$

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi G(\rho + 3p) \quad . \quad (4.9)$$

Combinando essas equações em conjunto com a lei de Hubble tem-se que

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad . \quad (4.10)$$

Note que esta é a mesma expressão obtida pela TRG, contudo, aqui ela está apresentada em termos do parâmetro de Hubble, onde $H = \frac{\dot{a}}{a}$.

Assim, a TnN torna-se uma ferramenta interessante para descrever a dinâmica do Universo, uma vez que simplifica o tratamento matemático e fornece as interpretações física de forma correta, ao menos no que tange as soluções de base para a cosmologia. Vale ressaltar que esse modelo apresenta desvios consideráveis da TRG no regime perturbativo, para maiores detalhes veja [58]. Sendo assim, uma discussão relevante pode ser trazida a tona: como deve ser o comportamento de uma estrutura estática nessa teoria? Ou seja, quais as condições que estabelecem o equilíbrio estelar? Essas questões foram respondidas no trabalho [38] e uma abordagem semelhante, para um modelo alternativo, pode ser encontrada em [59].

4.2 O Equilíbrio Hidrostático

Na condição de equilíbrio, dentro de um formalismo Newtoniano, a força resultante sobre um elemento do fluido é nula. Assim, da equação de Euler (4.8) e impondo as condições de simetria e isotropia angular, o gradiente de pressão é dado por

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p)\frac{d\Psi}{dr} \quad , \quad (4.11)$$

onde o gradiente do potencial ($\nabla\Psi$), proveniente da equação de Poisson (4.9), é

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = G \frac{d\mathcal{M}}{dr} \quad , \quad (4.12)$$

com

$$\frac{d\mathcal{M}}{dr} = 4\pi r^2 \rho \left(1 + \frac{3p}{\rho} \right) \quad (4.13)$$

sendo uma diferencial de uma função que depende somente de r e exerce o papel de “*massa efetiva*”. Desse modo, a equação de equilíbrio hidrostático é

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{GM(r)\rho}{r^2} \left(1 + \frac{p}{\rho} \right) \quad . \quad (4.14)$$

Os termos entre parênteses nas equações (4.13) e (4.14) são as correções inerentes a escolha do modelo neo-Newtoniano. Note que, a correção no termo de massa faz surgir uma diferença na forma funcional da massa inercial, cujo termo relacionado é $\rho + p$; e da massa gravitacional ativa (aquela que está relacionada com a massa que gera o campo gravitacional) que passa a depender de $\rho + 3p$. Essa conclusão pode ser tirada por uma comparação direta entre as equações do fluido hidrodinâmico Newtoniano e neo-Newtoniano. Sendo assim, o princípio da equivalência deixa de ser válido, uma discussão introdutória pode ser encontrada em [16]. Com isso, tem-se agora diferentes expressões para a “massa”. Mais adiante será feita uma comparação entre as diferentes definições de “massa” aplicadas a estrelas de nêutrons.

4.3 Lane-Emden Modificada

No contexto de objetos compactos, a equação análoga a Lane-Emden pode ser obtida a partir do modelo Newtoniano modificado. Isso permitirá fazer um paralelo da estrutura das anãs brancas entre os dois modelos, Newtoniano e o neo-Newtoniano. Certamente, o valor obtido por Chandrasekhar, utilizando um gás eletrônico degenerado, será alterado. A seguir será mostrado o fator que modifica a massa máxima obtida por Chandrasekhar.

Utilizando a equação de equilíbrio hidrostático mostrada na seção anterior, equação (4.14), em conjunto com a equação (4.13) e adotando as seguintes transformações

$$\rho = \rho_0 \theta^n \quad , \quad \gamma = \frac{1+n}{n} \quad ,$$

$$\alpha = \left(\frac{k(n+1)\rho_0^{(1-n)/n}}{4\pi G} \right)^{1/2} \quad , \quad r = \alpha \xi \quad , \quad \beta = k\rho_0^{1/n}. \quad (4.15)$$

tem-se que:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi^2}{1+\beta\theta} \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n (1+3\beta\theta) \quad . \quad (4.16)$$

Para que a forma convencional da equação de L-E (3.46) seja retomada o termo β deve ser nulo. Contudo, isso não pode acontecer uma vez que nem k e nem ρ_0 podem ser iguais a zero, veja equação (4.15). Impondo, desse modo, que este modelo não poderá ser reduzido ao modelo Newtoniano, a menos que $p \ll \epsilon$. Uma ilustração dos resultados numéricos obtidos para a equação de L-E modificada, está apresentada na figura (4.1), onde fixou-se $\beta = 1$ para a obtenção das curvas.

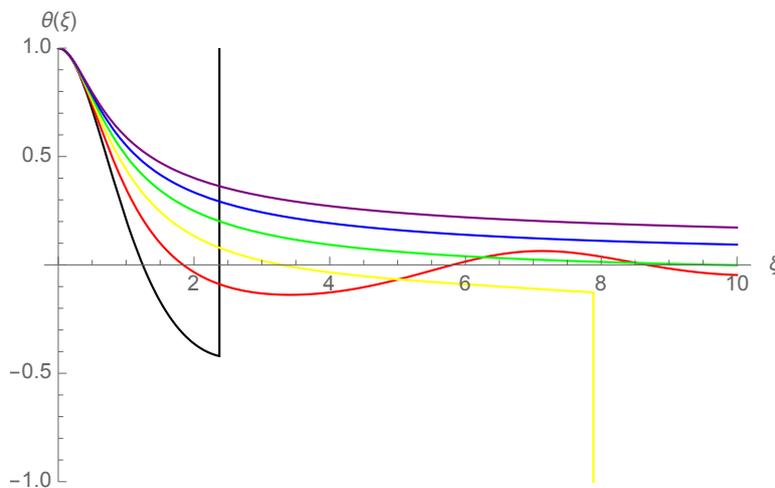


Figura 4.1: Utilizando o programa obtido *LaneEmdenNeo.nb* pode-se mostrar as curvas para diferentes valores de n . A linha em preto é o resultado para $n=0$, a vermelha para $n=1$, a amarela para $n=2$, etc.

Com as redefinições acima em conjunto com a equação (4.13), tem-se que

$$\mathcal{M} = 4\pi \left(\frac{k(1+n)}{4\pi G} \right)^{3/2} \frac{\rho_c^{(3-n)/2n}}{1+k\rho_c^{1/n}\theta} \xi_R^2 \left[-\frac{d\theta}{d\xi_R} \right] \quad . \quad (4.17)$$

Colocando-a em termos dos parâmetros usuais, a expressão para a massa fica

$$\mathcal{M} = 4\pi\rho_c^{\frac{3}{2}(\gamma-4/3)} \left[\frac{k\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right]^{3/2} \frac{\xi_R^2}{1 + \rho_c^{(\gamma-1)}\theta(\xi_R)} \left[-\frac{d\theta(\xi_R)}{d\xi_R} \right] . \quad (4.18)$$

Agora, é possível fazer uma comparação com o resultado obtido da teoria de Newton, apresentado na equação (3.47). Desse modo, verifica-se que o fator de correção da massa é

$$\frac{M}{\mathcal{M}} = 1 + \beta\theta \quad , \quad (4.19)$$

com M sendo a massa convencional (Newtoniana) e \mathcal{M} a massa efetiva do modelo neo-Newtoniano, com as duas funções dependentes exclusivamente de r .

Por outro lado, o raio da estrela não depende explicitamente do modelo gravitacional escolhido, uma vez que

$$R = \left[\frac{k\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right]^{1/2} \rho_c^{\frac{1}{2}(\gamma-2)} \xi_R . \quad (4.20)$$

Contudo, o raio da estrela é uma função de ξ , que por sua vez dependerá do modelo. A influência do modelo no cálculo do ξ está apresentado na tabela (4.1), onde os índices 1 (ξ_1) e R (ξ_R) serão usados para determinar o ponto onde a função θ toca pela primeira vez o eixo ξ , para um modelo Newtoniano e neo-Newtoniano, respectivamente. Um comparativo, que mostra a diferença entre os dois modelos, com foco na região até o ponto onde ocorre a mudança de sinal da função θ , está ilustrado na figura (4.2). Nessa figura, tem-se uma comparação de θ em função de ξ . Para os valores de $n = 1, 2, 3$ o valor de ξ_1 é maior que o de ξ_R . Já para $n = (4 \text{ e } 5)$ não há raiz para as equações diferenciais, no modelo neo-Newtoniano, ou seja, o valor de ξ_1 torna-se menor que o de ξ_R . Sendo assim, as EoS onde $\gamma = 5/4$ ou $\gamma = 6/5$, não apresentam um valor de massa máxima. Contudo, um estudo mais detalhado sobre a influência de β nesse resultado precisa ser feito (será deixado como trabalho futuro).

n	ξ_1	ξ_R
0	2.45	1.24
1	3.14	1.84
2	4.35	3.29
3	6.90	9.74
4	14.97	—
5	27.89	—

Tabela 4.1: Valores de ξ_1 e ξ_R , raízes da equação de LE para os modelos Newtoniano e Neo-Newtoniano (com $\beta = 1$).

4.4 Diagrama $M - R$

Para obter o diagrama $M - R$, para a gravidade neo-Newtoniana, integra-se as equações (4.13) e (4.14) em conjunto com uma EoS a ser escolhida. Impondo as condições de contorno, a saber: $m(0) = 0$, $p(0)$ sendo a pressão central, que está relacionada com a densidade central $\epsilon(0)$, e $p(\mathcal{R}) = \epsilon(\mathcal{R}) = 0$, sendo \mathcal{R} o raio da estrela. Tem-se que, para cada valor de pressão central (ou densidade central) escolhido encontra-se um valor de massa e de raio para a estrela. Que, por sua vez, corresponderá a um ponto dentro do diagrama $M - R$.

Utilizando um fluido de puro nêutron, modelado como um gás ideal de Fermi, de forma análoga ao trabalho de Oppenheimer-Volkoff [27]. Assim, o fluido pode ser modelado via EoS politrópica com $\gamma = 5/3$, ou seja

$$\frac{\bar{\rho}(\bar{p})}{c^2} = \bar{K}^{-1} \bar{p}^{3/5}, \quad (4.21)$$

onde os coeficientes da equação (4.21) foram ajustados no trabalho [46] com $\bar{K} = 1.914$. Os termos $\bar{\rho}$ e \bar{p} representam as grandezas na forma adimensional, deixando a dimensão a cargo de ϵ_0 . Nesse caso, utilizou-se a seguinte conversão: $p = \epsilon_0 \bar{p}$ e $\rho = \epsilon_0 \bar{\rho}$, com $\epsilon_0 = 1.603 \times 10^{38}$ ergs/cm³.

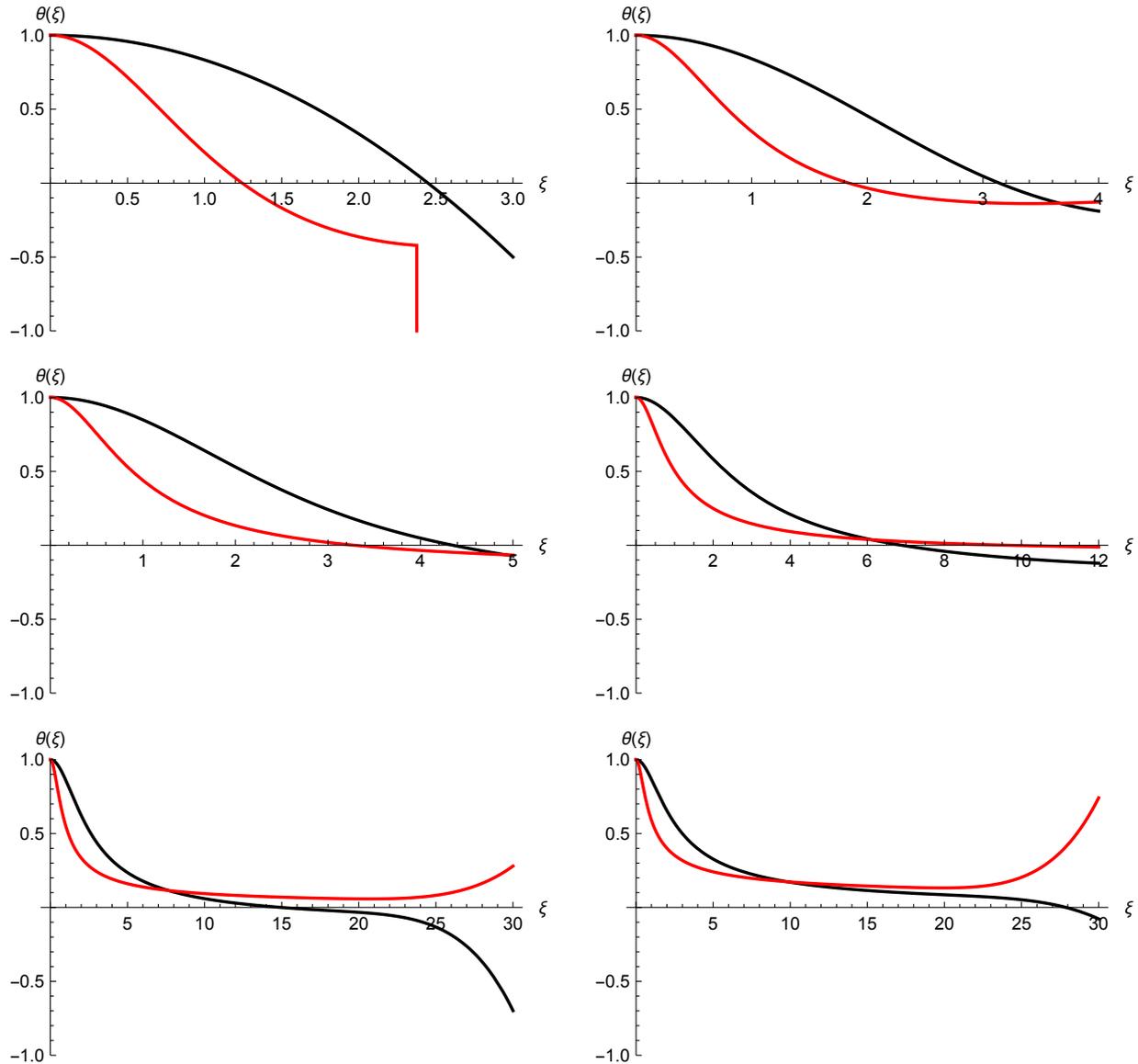


Figura 4.2: Utilizando o programa obtido *LaneEmdenNeo.nb* pode-se mostrar as curvas para diferentes valores de n . A linha em preto expressa os resultados para LE-Newton e as linhas em vermelho LE-NeoNew, onde utilizou-se um valor de $\beta = 1$.

Por outro lado, as observações indicam que a estrela de nêutrons contém uma pequena fração de prótons e elétrons que evitam o decaimento beta via interação fraca, além disso, as interações entre os nucleons não podem ser desprezadas para o cálculo da densidade de energia total do fluido. Assim, este modelo torna-se apenas uma abordagem teórica, ou seja, não descreve uma estrela real. Contudo, devido a importância histórica e, principalmente, às facilidades matemáticas que favorecem os ajustes de unidades, este modelo foi

a primeira escolha. Uma representação do diagrama $M - R$, para três diferentes modelos gravitacionais distintos, pode ser vista na figura (4.3), retirada do trabalho [38]. Nele é

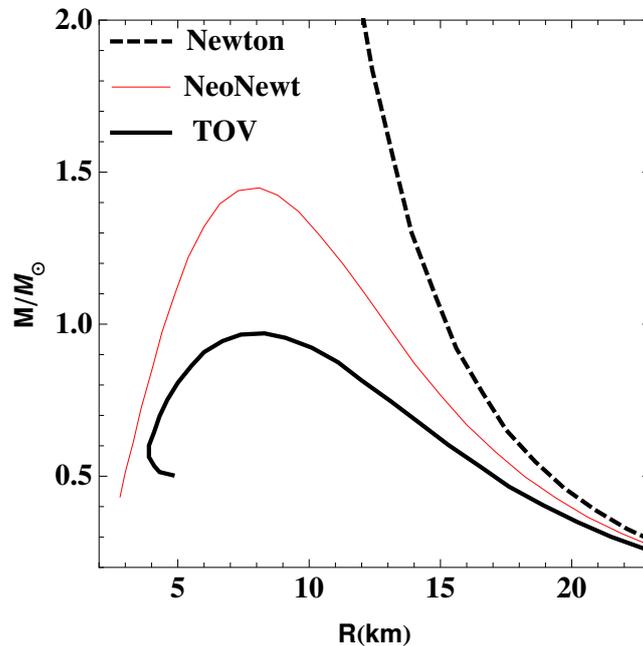


Figura 4.3: Aqui é apresentado o diagrama $M - R$ para uma estrela de puro nêutron sem interação modelada via gás de Fermi.

possível observar as possíveis configurações da estrela, onde cada ponto dentro deste diagrama foi obtido para um valor bem determinado de pressão central $p(r = 0) = p_0$. Note que, a pressão central cresce para a esquerda do gráfico, ou seja, pequenas massas e grandes raios correspondem a pequenos valores de p_0 . Nessa figura, a linha sólida é a solução para TOV, com a referida EoS. As soluções para o modelo neo-Newtoniano e Newtoniano estão representadas nas linhas vermelho sólida e na linha pontilhada, respectivamente. Os três modelos gravitacionais prevêm que quanto maior a massa da estrela menor será o seu raio. Como esperado, obtém-se uma massa máxima ($M_{max} \sim 0.95M_{\odot}$ quando $R \sim 8km$) para TOV, o mesmo não ocorre para o modelo Newtoniano. Por outro lado, apesar de não haver equivalência numérica entre os modelos TOV e neo-Newtoniano, é possível obter um valor de massa máximo a partir de uma abordagem newtoniana corrigida, que é uma característica típica de modelos relativistas. Desse modo, este modelo pode ser usado como uma primeira aproximação para a estrela de nêutrons. Uma comparação quantitativa entre os modelos Newtoniano e neo-Newtoniano, além da existência de uma massa máxima,

há indicações de que a pressão atua como um agente de compactação da estrela, o que corrobora a interpretação relativista de que a pressão “amplifica” os efeitos gravitacionais. Esse fato, pode ser comprovado quando muda-se a forma funcional da massa. Vale ressaltar que na figura (4.3) o cálculo da massa foi feito utilizando a forma convencional, ou seja, de acordo com a equação (2.55). Contudo, a formulação neo-Newtoniana permite alternativas para essa definição, como pode ser visto na equação (4.13), que é uma consequência da diferença entre as definições de massa inercial e massa gravitacional ativa. A figura (4.4) apresenta um diagrama de massa com a comparação entre as diferentes possibilidades para a interpretação da massa no formalismo neo-Newtoniano. A ligação entre as figuras (4.3) e (4.4) é estabelecido por m_0 que representa a massa em sua forma convencional ($m_0 \sim \rho$). Outras duas forma de calcular são apresentadas, $m_1 \sim \rho + p$ (forma com a qual a massa gravitacional passiva e a massa inercial se transformam) e $m_3 \sim \rho + 3p$ (forma com a qual a massa gravitacional ativa se transforma).

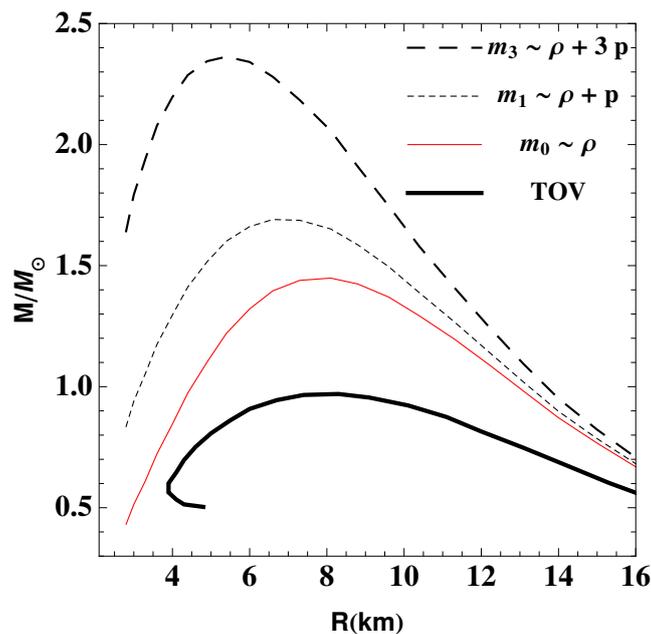


Figura 4.4: Comparativo entre as diferentes definições de massa, para uma estrela de nêutrons de puro nêutron, sem interação, modelada via gás de Fermi ideal. Note como que o incremento no termo da pressão permite a existência de estrela mais massivas.

Para o caso de uma estrela de puro nêutrons com interação nucleon-nucleon, utilizou-se

o método Prakash para modelar a EoS de um gás de Fermi. Assim, a equação do fluido politrópico é

$$\frac{\rho(\bar{p})}{c^2} = (\kappa_0 \epsilon_0)^{-1/2} \bar{p}^{-1/2}, \quad (4.22)$$

sendo que agora $\epsilon_0 = m_n^4 c^5 / 3\pi^3 \hbar^3$ e a compressibilidade é $\kappa_0 = 363$ MeV.

Aplicando essa EoS na equação de equilíbrio hidrostático, pode-se construir o diagrama $M - R$, apresentado na figura (4.5). Nela a linha sólida preta corresponde a solução

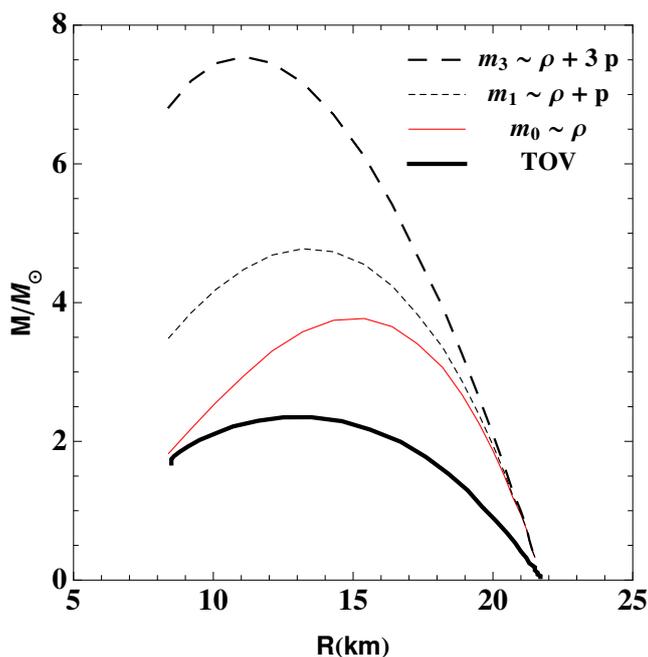


Figura 4.5: Comparativo entre as diferentes definições de massa, para uma estrela de nêutrons de puro nêutron, com interação nucleon-nucleon, modelada via gás de Fermi. Note como que o incremento no termo da pressão permite a existência de estrela mais massivas.

de TOV, a linha vermelha mostra o resultado para a forma convencional do cálculo de massa para um modelo neo-Newtoniano, as linhas pontilhadas são as diferentes definições de massa para $\gamma = 2$. A interação entre nucleons, cujos resultados estão apresentados na figura (4.5), torna os valores de massa máxima muito maiores do que aqueles obtido para o caso sem interação, ilustrado na figura (4.4). O valor de massa máxima para a equação TOV agora é $M \sim 2.3 M_\odot$ (com $R = 13.5$ km). Esse resultado está diretamente relacionado com o valor da compressibilidade κ_0 , quanto maior esse valor mais dura é a EoS e, conseqüentemente, mais massa ela suporta (mantendo o raio fixo).

Ressalta-se que essa seção apresenta os resultados publicados no trabalho [38].

Capítulo 5

A Gravidade Rastall

P. Rastall em 1972 no trabalho “Generalização da Teoria de Einstein” [4], propôs uma quebra na forma convencional da lei de conservação do tensor energia-momento, dada por $T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0$, uma vez que esta pode não ser válida para espaços curvos. Desse modo, sua proposta de generalização foi escrever a derivada covariante do tensor energia-momento proporcional ao gradiente do escalar de curvatura, ou seja, $T_{\nu;\mu}^{\mu} \propto R_{,\nu}$. Tal hipótese parece razoável, já que a curvatura espacial, onde os testes ao qual a Teoria da Relatividade Geral é submetida, é essencialmente nula. Contudo, sabe-se que a conservação do tensor energia-momento é uma consequência do acoplamento mínimo da matéria com a gravidade e da invariância por difeomorfismo. Assim, para que a gravidade Rastall possa ser escrita a partir do formalismo de Lagrange, uma dessas condições deve ser suprimida. Porém, não se tem uma estrutura consistente no formalismo de Lagrange para esse modelo de gravidade, tornando essa teoria uma modificação fenomenológica da TRG. Assim, a obtenção das equações de campo a partir de um princípio variacional ainda é um problema em aberto. E, por outro lado, encontrar uma interpretação física para a quebra da conservação da derivada covariante do tensor energia-momento, torna-se um problema. Uma sugestão de solução deste problema pode ser encontrada em [60], trabalho em que os autores usaram a teoria Rastall para reproduzir alguns dos resultados obtidos na teoria

quântica de laços, nesse trabalho os autores sugerem que o surgimento do termo de não conservação deve-se a um aparente efeito quântico no contexto clássico. Outros estudos sobre a relação entre os efeitos quânticos e a modificação na expressão clássica para o tensor energia-momento podem ser encontrados em [61, 62].

Contudo, esses problemas não impedem a investigação de possíveis soluções para gravidade Rastall, que em seu trabalho ainda mostrou que tal hipótese pode ser interpretada, matematicamente, como uma redefinição do tensor de Ricci e do tensor energia-momento, de tal modo que, a forma convencional da equação de Einstein fica mantida, o que lhe permite concluir que as duas formas de representar a lei de conservação são igualmente boas. Outras aplicações da não conservação na forma usual, podem ser encontradas em modelos de difusão como mostram os trabalhos [63, 64, 65] ou ainda podem estar conectados a teorias de gravidade modificada, como pode ser visto em [66, 67].

Aqui será mantido o foco na condição de equilíbrio hidrostático, visto que o desejo é encontrar a solução interna e externa (solução de Schwarzschild) para uma estrutura esférica, isotrópica e estática; utilizando a Gravidade Rastall. Tal abordagem resultará na solução de TOV modificada, que aqui será chamada de TOVR. Além disso, será retomada a discussão acerca da massa inercial e gravitacional, no contexto de Princípio da Equivalência. Por fim, uma comparação entre a Gravidade Rastall e a TRG será feita, o que permitirá limitar o parâmetro livre de Rastall.

5.1 As Novas Equações de Campo

Com base no que foi discutido na seção anterior, as equações de campo para essa teoria são dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad , \quad (5.1)$$

$$T_{\nu;\mu}^{\mu} = \frac{1-\lambda}{16\pi G}R_{,\nu} \quad , \quad (5.2)$$

em unidades de c^2 . Agora, nesse contexto, as equações de campo incorporam as possíveis modificações inerentes à curvatura do espaço-tempo. O parâmetro livre, λ , “a priori” pode assumir qualquer valor e permite que as equações retornem a forma convencional quando $\lambda = 1$.

Assim, utilizando as novas equações, o traço da equação de Einstein modificada será dado por

$$R = \frac{8\pi G}{1 - 2\lambda} T \quad , \quad (5.3)$$

que descreve a relação entre o escalar de curvatura e o constituinte material local. Desse modo, quando $\lambda = 1/2$ o traço do tensor energia-momento é nulo ($T = 0$), sem a necessidade de que a curvatura o seja. Esse é o caso de um fluido de radiação que é invariante por transformação conforme. Contudo, o lado esquerdo da equação de Einstein modificada não é invariante conforme, o que conduz à necessidade de generalizar o acoplamento com a matéria. Nesse contexto, uma discussão acerca da solução de vácuo para a gravidade Rastall torna-se relevante. Esse é o tema central do trabalho [68] e será abordado na próxima seção.

5.2 Modificações na Solução de Schwarzschild

A solução de vácuo, neste contexto, torna-se importante pois ela deve ser válida para a região externa da estrela, ou seja, para todo $r > \mathcal{R}$, onde \mathcal{R} representa o raio da estrela. \mathcal{R} , por sua vez, é determinado pela ausência de matéria ($\epsilon(r = \mathcal{R}) = 0$), que é caracterizado por uma pressão nula, $p(r = \mathcal{R}) = 0$, para matéria hadrônica. Note que, $\epsilon(\mathcal{R})$ pode ser diferente de zero quando o fluido em questão é, por exemplo, composto por quark estranho (SQM) [40]. Desse modo, para um fluido hadrônico, o tensor energia-momento, tanto na superfície da estrela quanto no meio externo a ela (vácuo), deve ser nulo ($T_{\mu\nu} = 0$), do mesmo modo que na configuração de um buraco negro. Nesse caso, as equações de campo para a gravidade Rastall satisfazem a condição convencional

de vácuo, ou seja, para a TRG $R = 0$ e $R_{\mu\nu} = 0$. Isso gera, aparentemente, uma possível contradição com o que se espera, uma vez que alguns os modelos alternativos para a gravidade têm uma solução para a configuração Schwarzschild - de Sitter (SdS) [69]. Tal configuração é obtida quando a constante cosmológica (Λ) é introduzida nas equações de campo de Einstein, obtida via TRG. Por outro lado, nas teorias alternativas, o efeito da constante cosmológica é incorporado aos parâmetros do modelo de gravidade modificado. Desse modo, a gravidade Rastall parece comportar-se de forma diferente dos outros modelos alternativos. Uma vez que, em escalas cosmológicas, a gravidade Rastall pode ser interpretada como o modelo Λ CDM [70]. Nessa seção será mostrado que, para o caso onde $\lambda = 1/2$, existe outra possível solução de vácuo esfericamente estática que se assemelha à solução Schwarzschild-de Sitter, sem a necessidade de introduzir o termo de constante cosmológica.

Impondo a condição de vácuo na equação (5.1), tem-se que

$$R_{\mu\nu} = \frac{\lambda}{2} g_{\mu\nu} R \quad . \quad (5.4)$$

O traço dessa equação leva a

$$R(1 - 2\lambda) = 0 \quad . \quad (5.5)$$

Há duas formas de satisfazer a igualdade acima: (i) se $R = 0$, usando a equação (5.4), tem-se que $R_{\mu\nu} = 0$, ou seja, as soluções convencionais de Schwarzschild são recuperadas; ou (ii) se $\lambda = 1/2$.

Para a condição de vácuo, quando $\lambda = 1/2$, a equação (5.4) pode ser reescrita como

$$R_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{4} R \quad . \quad (5.6)$$

Utilizando $\lambda = 1/2$ e manipulando as componentes R_{tt} e R_{rr} , utilizando a métrica dada em (2.24) e as equações (2.27) e (2.36), tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{R_{tt}}{B} &= \frac{R}{4} \\ \frac{R_{rr}}{A} &= -\frac{R}{4} \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A}\right) = 0 \quad , \quad (5.7)$$

que é a mesma relação obtida quando $R_{\mu\nu} = 0$.

Desse modo, conclui-se que as duas possibilidades, $R = 0$ ou $\lambda = 1/2$, levam a um sistema métrico tipo Schwarzschild, onde

$$B = A^{-1} \quad . \quad (5.8)$$

Utilizando a componente $R_{\theta\theta} = 0$, condição em que R e $R_{\mu\nu}$ são nulos, obtém-se que

$$B = 1 + \frac{C_1}{r} \quad , \quad (5.9)$$

sendo $C_1 = -2GM$ a constante de integração em unidades de c^2 , \mathcal{M} uma função do tipo massa e G a constante gravitacional de Newton. Contudo, para o caso onde $\lambda = 1/2$ tem-se que a componente $R_{\theta\theta} = \frac{g_{\theta\theta}}{4}R$, desse modo,

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{r}{2A} \left\{ \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right\} - \frac{1}{A} = \\ & = -\frac{r^2}{4} \left[\frac{B''}{AB} - \frac{B'}{2AB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{2}{rA} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A} \right) \right] \quad , \end{aligned}$$

utilizando a relação obtida em (5.7), a igualdade acima pode ser simplificada para

$$1 - \frac{r}{A} \frac{B'}{B} - \frac{1}{A} = -\frac{r^2}{4} \left[\frac{B''}{AB} + \frac{4}{rA} \frac{B'}{B} - \frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A} \right) \right] \quad ,$$

agora usando (5.8), pode-se eliminar a dependência em A ,

$$1 - rB' - B = -\frac{r^2}{4} \left[B'' + \frac{4}{r}B' - \frac{2}{r^2}(1 - B) \right] \quad ,$$

simplificando,

$$\frac{r^2 B''}{2} - B + 1 = 0 \quad ,$$

e integrando a equação, tem-se que

$$B(r) = 1 + \frac{C_1}{r} + C_2 r^2 \quad , \quad (5.10)$$

sendo C_2 uma constante de integração a ser determinada. Assim, a métrica esfericamente simétrica e estática, no contexto da gravidade Rastall, para $\lambda = 1/2$, é

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} + C_2 r^2\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r} + C_2 r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad . \quad (5.11)$$

Desse modo, dependendo do valor de C_2 , é possível que ocorra uma inversão de sinal das componentes temporal e radial, o que pode ser interpretado como uma mudança da componente temporal. Além disso, para o problema do horizonte, não prevê uma singularidade da métrica em $r = r_S = 2GM$.

No trabalho [71], os autores mostram uma solução semelhante a esta, no contexto da transformação conforme, baseada no tensor de Weyl. Apesar das diferenças entre a proposta desta referência — note que, as equações de campo no referido trabalho são uma combinação do tensor de Ricci, do escalar de Ricci e de suas derivadas — e a apresentada aqui, a solução obtida difere apenas pela ausência do termo proporcional a r na gravidade Rastall, o que reflete a diferença entre as duas teorias. Desse modo, a solução para o vácuo obtida utilizando a gravidade Rastall, aparentemente, pode ser tratada como um caso especial da transformação conforme gravitacional, com a constante que acompanha o termo linear nulo. Outra semelhança é encontrada quando comparamos a gravidade Rastall, com $\lambda = 1/2$, com a teoria $f(R) \propto R^2$. Para esse caso particular a equação obtida para $f(R)$ será igual a (5.6).

Observe ainda que a estrutura da métrica dada por (5.11) coincide com a solução de Schwarzschild - de Sitter, ou Schwarzschild - Anti de Sitter, obtida via TRG com constante cosmológica. Desse modo, fazendo um paralelo entre os resultados desses dois modelos, identifica-se que $C_2 = -\Lambda/3$ e a métrica é dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad , \quad (5.12)$$

onde $\Lambda > 0$ é a métrica de Schwarzschild - de Sitter [72] e $\Lambda < 0$ é a métrica de Schwarzschild - Anti de Sitter [73]. Desse modo, aparentemente, pode-se interpretar a constante

cosmológica como um efeito da curvatura do espaço e deve dominar quando r é suficientemente grande.

Para o caso de $\lambda = 1/2$ a configuração de vácuo implica em um escalar de curvatura constante, resultado direto da equação (5.1). De modo que, ele será nulo para a solução de Schwarzschild e não nulo para Schwarzschild - de Sitter ou Schwarzschild - Anti de Sitter. Por outro lado, assumindo a presença de matéria e a condição $\lambda = 1/2$, tem-se que o traço do tensor energia-momento será nulo. Assim, o acoplamento com a matéria só é possível para $T = 0$, nesse caso o fluido em questão é a radiação e ele é invariante conforme. Pode-se verificar, que para essa condição ($\lambda = 1/2$), o lado esquerdo da equação não é um invariante conforme. Assim, para que se possa generalizar o acoplamento com a matéria, a equação de campo deve ser modificada para algo do tipo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R = 8\pi G\tau_{\mu\nu} \quad , \quad (5.13)$$

sendo $\tau = 0$. Uma forma simples para o novo tensor energia-momento é, por exemplo, $\tau_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^c + T_{\mu\nu}^m + g_{\mu\nu}T^m/4$, onde os índices c e m estão relacionados com a componente conforme e material, respectivamente. O acoplamento com a matéria, nessa hipótese simples, mostra algumas propriedades cosmológicas razoáveis. Por exemplo, ao utilizar a métrica de FLRW na equação (5.13) sem o termo $T_{\mu\nu}^c$, haverá uma única equação independente para duas variáveis, o fator de escala a e a densidade do fluido ρ ,

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho + p) \quad (5.14)$$

em unidades de c^2 . Nessa equação $H = \dot{a}/a$ e p é a pressão do fluido. Desse modo, escolhendo uma relação entre p e ρ do tipo $p = \omega\rho$, com ω sendo uma constante, e impondo que $\rho \propto a^{-n}$, para $\omega \neq -1$, tem-se que:

$$a(t) = \begin{cases} a_0 \sin^{2/n}(n\sqrt{k}t/2), & \text{se } k > 0 \\ a_0 \sinh^{2/n}(n\sqrt{|k|}t/2), & \text{se } k < 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

sendo $a(t=0) = a_0$ o valor inicial para o fator de escala e k é uma constante de integração. Nesse caso, a solução para $k > 0$ corresponde a uma fase inicial de expansão,

cujo comportamento depende de n , seguida de um big crunch. Por outro lado, a segunda solução, para $k < 0$, tem-se um universo tipo de Sitter. Para o caso onde $p = -\rho$ leva a um universo de de Sitter. Esse resultado pode estar relacionado com a presença da constante cosmológica no caso de simetria esférica estática, estudado anteriormente. Contudo, estudos mais aprofundados, para verificar a viabilidade de um acoplamento deste tipo, se faz necessário.

Ressalta-se que os resultados apresentados nessa seção foram publicados no trabalho [68].

5.3 O Equilíbrio Hidrostático

Na seção anterior encontrou-se a solução exterior a uma esfera isotrópica e estática, para o caso onde $\lambda = 1/2$. Agora as atenções estarão voltadas para a parte interna de tal estrutura. Nessa situação o efeito gerado pelo termo r^2 , ligado à constante cosmológica na métrica da seção anterior, pode ser desprezado. Isso torna-se possível pois a contribuição do termo $1/r$ será muito maior que a contribuição do termo adicional, ou seja, r é suficientemente pequeno.

Escrevendo a equação (5.1) na forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{\lambda + 1}{2}g_{\mu\nu}R + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad ,$$

e organizando os termos, de modo que do lado esquerdo apareça a forma convencional do tensor geométrico de Einstein, tem-se que

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G \left\{ T_{\mu\nu} - \left(\frac{1 - \lambda}{2(1 - 2\lambda)} \right) g_{\mu\nu}T \right\} \quad , \quad (5.16)$$

para deixar dessa forma foi utilizado a relação entre o escalar de curvatura e o traço do tensor energia-momento, equação (5.3).

Assim, as componentes do tensor de Einstein modificado são

$$\begin{aligned}
 G_{tt} &= \frac{A'B}{rA^2} + \frac{B}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A}\right) = 8\pi GB\tilde{\rho} \quad , \\
 G_{rr} &= \frac{B'}{rB} - \frac{A}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A}\right) = 8\pi GA\tilde{p} \quad , \\
 G_{\theta\theta} &= \frac{r^2 B''}{2AB} - \frac{r^2 B'}{4AB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) = 8\pi Gr^2 \tilde{p} \quad , \\
 G_{\phi\phi} &= G_{\theta\theta} \sin^2 \theta = 8\pi Gr^2 \sin^2 \theta \tilde{p} \quad ,
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

sendo \tilde{p} e $\tilde{\rho}$ a pressão e a densidade efetivas. Tais grandezas são definidas em termos da pressão e densidade reais do fluido e podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho} &= \alpha_1 \rho + 3\alpha_2 p, \\
 \tilde{p} &= \alpha_2 \rho + \alpha_3 p,
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

onde, redefiniu-se $\lambda \rightarrow 1 + \eta$,

$$\alpha_1 = \frac{2 + 3\eta}{2 + 4\eta} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{\eta}{2 + 4\eta} \quad \text{e} \quad \alpha_3 = \frac{2 + \eta}{2 + 4\eta}, \tag{5.19}$$

com η sendo a medida do quanto a gravidade Rastall desvia da relatividade geral. Um resultado direto da relação de \tilde{p} e $\tilde{\rho}$ com p e ρ é $p + \rho = \tilde{p} + \tilde{\rho}$, o que mantém válida a condição de energia fraca.

Manipulando a componente temporal, G_{tt} , tem-se

$$A(r) = \left[1 - \frac{2G\tilde{\mathcal{M}}(r)}{r} \right]^{-1} \quad , \tag{5.20}$$

sendo

$$\tilde{\mathcal{M}}(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \tilde{\rho}(r') dr' \quad , \tag{5.21}$$

a massa efetiva interna ao raio r . Note que, $\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{R})$ só será igual a massa M quando $\eta = 0$, ou seja, quando o desvio da RG é nulo. De fato quando isso ocorre espera-se que as equações da TRG sejam recuperadas.

Por outro lado, a manipulação da componente radial G_{rr} resultará em

$$\frac{B'}{2B} = \frac{G\tilde{\mathcal{M}}}{r^2} \left[1 + \frac{4\pi r^3 \tilde{p}}{\tilde{\mathcal{M}}} \right] \left[1 - \frac{2G\tilde{\mathcal{M}}}{r} \right]^{-1}. \quad (5.22)$$

Onde, de forma análoga ao que foi feito na TRG, pode-se interpretar o termo $\frac{B'}{2B}$ como o gradiente de um potencial $\Psi(r)$, ou seja, $\Psi'(r) = \frac{B'}{2B}$, mas agora surgem as correções do modelo adotado.

Utilizando a “quebra” na lei de conservação do tensor energia-momento proposta por Rastall, aqui utilizada como apresentada na equação (5.2), e escrevendo-a como uma função do traço do tensor energia-momento ($T = T^\mu_\mu$), tem-se

$$\begin{aligned} T^\mu{}_{;\mu} &= \frac{1-\lambda}{16\pi G} R^\nu{}_{;\nu} = \frac{\eta}{16\pi G} R^\nu{}_{;\nu} \\ &= \left(\frac{\eta}{4\eta-2} \right) T^\nu{}_{;\nu}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Fazendo $\nu = r$, obtém-se que

$$\frac{B'}{2B} = -\frac{\tilde{p}'}{\tilde{\rho} + \tilde{p}}, \quad (5.24)$$

note que esta é, além da situação de interesse (estático), a única componente não nula.

Substituindo a equação (5.22) na equação (5.24),

$$\tilde{p}' = -\frac{G\tilde{\mathcal{M}}\tilde{\rho}}{r^2} \left[1 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 \tilde{p}}{\tilde{\mathcal{M}}} \right] \left[1 - \frac{2G\tilde{\mathcal{M}}}{r} \right]^{-1}, \quad (5.25)$$

esta é a equação de equilíbrio hidrostático para o modelo Rastall, cujas soluções são conhecidas como TOV (para $\eta = 0$) e para o caso mais geral, onde η pode assumir qualquer valor, as soluções são a TOVR.

As equações (5.21) e (5.25) representam a forma reduzida da equação de Einstein, generalizada por Rastall, para o interior de uma estrutura esférica e isotrópica, como uma estrela, por exemplo. Para resolver o par de equações é necessário escolher uma EoS $p(\rho)$, que descreve o fluido interestelar, além da imposição das condições de contorno: $\tilde{\mathcal{M}}(0) = 0$, $p(r = \mathcal{R}) = 0$, $M(0) = 0$ e $\rho(0) = \rho_c$, sendo ρ_c a densidade central e \mathcal{R} o raio

da estrela. Visto que a relação entre M e ρ_c é única, para cada EoS existe uma única família de estrelas parametrizadas pela densidade central.

Pode-se aplicar a regra da cadeia na equação (5.25) e, o par de equações será escrito como

$$4\pi r^2 d\tilde{p} = -\frac{G\tilde{\mathcal{M}}d\tilde{\mathcal{M}}}{r^2} \left[1 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}\right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 \tilde{p}}{\tilde{\mathcal{M}}}\right] \left[1 - \frac{2G\tilde{\mathcal{M}}}{r}\right]^{-1}, \quad (5.26)$$

$$d\tilde{\mathcal{M}} = 4\pi r^2 \tilde{\rho} dr. \quad (5.27)$$

A primeira equação apresentada acima representa o balanço para cada valor de r entre a pressão de matéria interna, que empurra a casca referida casca esférica para fora, e o peso da matéria externa que pesa sobre ela. O termo do lado esquerdo, nessa equação, representa a ação da força para fora. O primeiro termo do lado direito é a atração gravitacional de Newton e os outros três termos são as correções relativísticas. O segundo termo pode ser obtido quando as correções neo-Newtonianas são consideradas [38]. Pode-se ainda, observando a referida equação, concluir que a pressão decresce de forma monótona na estrela, visto que a derivada da pressão é negativa. Vale ressaltar que uma propriedade da matéria, para fluidos normais¹, é que a pressão nunca decresce com o incremento da densidade. No máximo ela pode ser mantida constante, mas nunca decrescer. Desse modo, como p é uma função de ρ conclui-se que a densidade também deve decrescer de forma monótona na estrela.

O gradiente de pressão na estrela faz com que a matéria seja comprimida. Desse modo, raio da estrela é reduzido quando há um incremento da densidade central. Em geral, quando o raio é reduzido a valores abaixo do limite de Schwarzschild, de outro modo, caso a massa exceda a massa limite; a pressão não poderá suportar o colapso.

¹Aqui está excluída as possibilidades de fluidos exóticos como aqueles utilizados para descrever a energia escura.

5.4 Mudanças na Termodinâmica

Uma questão relevante, no contexto de estruturas compactas, é a termodinâmica dessas estruturas. Assim, utilizando a gravidade Rastall, pode-se observar mudanças relevantes, como por exemplo a conservação do potencial químico dessas estruturas. Nessa seção mostraremos essa modificação.

Da primeira lei da termodinâmica,

$$\partial E = \delta Q - p\partial V, \quad (5.28)$$

onde ∂E é a energia interna ao volume ∂V . Tem-se que, para uma entropia constante,

$$p = -\frac{\partial E}{\partial V} \quad . \quad (5.29)$$

A densidade de energia (ϵ) e de bárions (ρ), são dadas por

$$\epsilon = \frac{E}{V} \quad , \quad \rho = \frac{A}{V} \quad , \quad (5.30)$$

sendo A a quantidade numérica de bárions, tida constante, no interior do volume V . Em alguns casos a equação de estado pode ser escrita de forma que $p = p(\rho)$ e $\epsilon = \epsilon(\rho)$. Nesses casos a dependência em ρ poderá ser eliminada de modo que $p = p(\epsilon)$, exatamente como foi feito com o fluido politrópico. Para os casos mais gerais, tem-se que

$$E = \epsilon V \quad \text{e} \quad V = \frac{A}{\rho}. \quad (5.31)$$

Substituindo em (5.29),

$$p = \rho\mu - \epsilon \quad , \quad (5.32)$$

sendo $\mu \equiv \frac{d\epsilon}{d\rho}$ o potencial químico, o que leva a

$$\frac{dp}{d\rho} = \rho \frac{d\mu}{d\rho} \quad . \quad (5.33)$$

A partir da equação (5.24), pode-se escrever que

$$\begin{aligned}
 d\Psi &= -\frac{d\tilde{p}}{\tilde{p} + \tilde{\epsilon}} = -\frac{\alpha_2 d\epsilon - \alpha_3 dp}{p + \epsilon} , \\
 d\Psi &= -\alpha_2 \frac{d\epsilon}{p + \epsilon} + \alpha_3 \frac{dp}{p + \epsilon} , \\
 d\Psi &= -\alpha_2 \frac{d\epsilon}{\rho\mu} + \alpha_3 \frac{dp}{\rho\mu} , \\
 d\Psi &= -\alpha_2 \frac{\mu d\rho}{\rho\mu} + \alpha_3 \frac{\rho d\mu}{\rho\mu} , \\
 d\Psi &= -\alpha_2 \frac{d\rho}{\rho} + \alpha_3 \frac{d\mu}{\mu} .
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

uma vez que $\Psi' = \frac{B'}{2B}$ e ainda,

$$e^{2\Psi} = B = \left(1 - \frac{2GM(r)}{r}\right) . \tag{5.35}$$

Quando $\eta = 0$ recupera-se o caso convencional, tratado pela TRG. Assim, para $\eta = 0$, tem-se que

$$d\Psi = -\frac{d\mu}{\mu} , \tag{5.36}$$

e integrando, tem-se

$$-\int_r^{r'} d\Psi = \int_r^{r'} \frac{d\mu}{\mu} ,$$

onde $r < r' < \mathcal{R}$, sendo \mathcal{R} o raio da estrela; r e r' são arbitrários. Então,

$$\begin{aligned}
 \Psi(r') - \Psi(r) &= \ln(\mu(r)) - \ln(\mu(r')) , \\
 e^{\Psi(r') - \Psi(r)} &= \frac{\mu(r)}{\mu(r')} , \\
 \frac{e^{\Psi(r')}}{e^{\Psi(r)}} &= \frac{\mu(r)}{\mu(r')} , \\
 e^{\Psi(r')} \mu(r') &= e^{\Psi(r)} \mu(r) ,
 \end{aligned}$$

ou seja, o potencial químico corrigido por um fator e^Ψ , em qualquer ponto no interior estelar, é constante (quando $\eta = 0$). Assim, pode-se dizer que uma partícula levada do infinito a qualquer ponto da estrela tem sempre o mesmo ganho de energia gravitacional, numa situação de equilíbrio.

Uma vez que, o estado de equilíbrio de mais baixa energia para uma matéria hadrônica é o Fe^{56} , então a formação deste elemento corresponda ao ponto final do processo de fusão nuclear em uma estrela pré-Super Nova. Sendo assim, esse constituinte é ideal para formar uma superfície de uma estrela de nêutron fria. Note que o ferro sólido em seu estado de equilíbrio tem $p = 0$. Utilizando as equações (5.31) e (5.33) para o ferro, encontra-se que

$$\frac{E}{A} = \left(\frac{\epsilon}{\rho} \right)_0 = \mu_{Fe} \approx \frac{m_{Fe^{56}}}{56} = 930.54 \text{MeV} \quad , \quad (5.37)$$

sendo $m_{Fe^{56}}$ a massa atômica do Fe^{56} .

Sendo assim, da equação (5.35), tem-se que

$$e^{\Psi(R)} = \left(1 - \frac{2GM}{R} \right)^{1/2} \quad , \quad (5.38)$$

e, por sua vez,

$$\mu(r)e^{\Psi(r)} = \mu_{Fe} \left(1 - \frac{2GM}{R} \right)^{1/2} \quad . \quad (5.39)$$

Por outro lado, quando $\eta \neq 0$ a equação (5.37) assume a seguinte forma,

$$\rho(r)^{\alpha_2} \mu(r)^{-\alpha_3} e^{\Psi(r)} = \text{cte} \quad , \quad (5.40)$$

resultando em uma relação entre os potenciais químicos dados por

$$\rho(r)^{\alpha_2} \mu(r)^{-\alpha_3} e^{\Psi(r)} = \rho_{Fe}^{\alpha_2} \mu_{Fe}^{-\alpha_3} \left(1 - \frac{2G\tilde{M}}{R} \right)^{1/2} \quad . \quad (5.41)$$

Essa modificação e a influência desta nas estruturas compactas, causada pelo uso da gravidade Rastall, precisa ser melhor estudada e foi aqui apresentada com a finalidade de mostrar que se tem modificações na forma com que o potencial químico se conserva, como pode ser visto através de uma comparação direta entre as equações (5.39) e (5.41). Porém, essa modificação não deverá ser relevante pois as correções relativísticas já são muito pequenas.

5.5 Diagrama $M - R$

A partir de uma comparação entre as equações de equilíbrio hidrostático provenientes da TRG, equação (2.44), e da gravidade Rastall, equação (5.25), verifica-se que a forma funcional da equação não é modificada pelo uso da gravidade Rastall, ou seja, a equação TOVR pode ser obtida através de uma parametrização da pressão e da densidade de energia, de modo que $p \rightarrow \tilde{p}$ e $\epsilon \rightarrow \tilde{\epsilon}$. Assim, pode-se interpretar o modelo de gravidade Rastall como uma mudança na EoS, onde a densidade de energia efetiva $\tilde{\epsilon}$ é influenciada tanto pela densidade de energia total do fluido ϵ como pela pressão p , o mesmo ocorre com a pressão efetiva. Desse modo, o sinal de α_1 , α_2 e α_3 estão diretamente relacionados com a condição de equilíbrio da estrela, representada pela equação (5.25). O equilíbrio dessa equação pode ser quebrado para três situações. A primeira situação é trivial, $\tilde{p} < 0$. Já as outras duas estão relacionadas com a situação onde $\alpha_2 < 0$. Se o termo $3p$ domina sobre ϵ , com $\alpha_2 < 0$, a densidade efetiva será negativa ($\tilde{\epsilon} < 0$) e, conseqüentemente da equação (5.21), $\tilde{\mathcal{M}} < 0$. Já a terceira situação ocorre quando a densidade ϵ domina sobre p , com $\alpha_2 < 0$, então $\tilde{p} < 0$, novamente. Além disso, como a relação $\tilde{\epsilon} + \tilde{p} = \epsilon + p$ indica que as condições (fraca e forte) de energia são preservadas, se α_2 for negativo, para condições extremas, é possível que $\tilde{\epsilon}$ também seja, o que quebra a condição de energia e gera instabilidades na estrutura da estrela. Portanto, um estudo de sinais para os α 's torna-se necessário. Assim, a partir da equação (5.19), pode-se concluir que: $\alpha_1 < 0$ quando $\eta = (-2/3, -1/2)$, $\alpha_2 < 0$ para $\eta = (-1/2, 0)$ e $\alpha_3 < 0$ se $\eta = (-2, -1/2)$. Desse modo, valores de η negativo podem ser problemáticos, uma vez que, α_2 torna-se negativo nessa condição.

Para resolver a equação (5.25) é necessário: escolher uma EoS e determinar os valores dos parâmetros livres, a densidade central ($\rho(r = 0) = \rho_0$) e o parâmetro de Rastall. Utilizando o método adaptável de Runge-Kutta de tamanho do passo, como descrito em [74], para resolver a equação integro-diferencial não trivial (TOVR), para cada valor de densidade central e de η , encontrou-se um valor correspondente de massa e raio, ou seja, um ponto dentro do diagrama $M - R$. Esse diagrama para uma estrela cujo fluido é

composto apenas por nêutrons que interagem, modelada via fluido politrópico utilizando o método Prakash com $\gamma = 2$ e $\kappa \sim 10^5 \frac{cm^5 s^2}{g}$, está representado na figura (5.1). Nessa

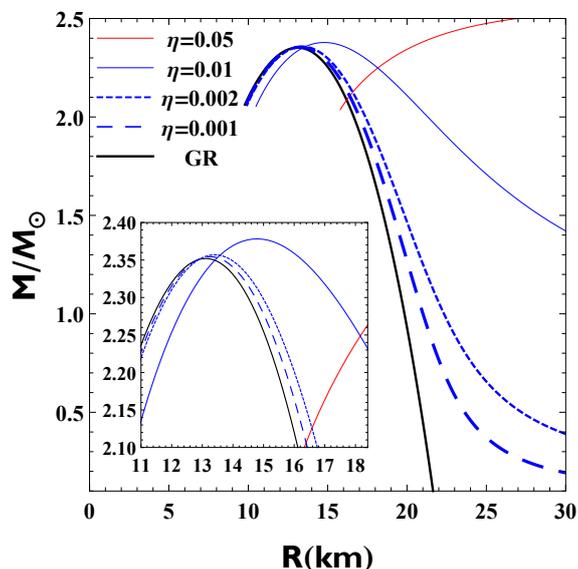


Figura 5.1: Diagrama $M - R$ para uma estrela de nêutron com interação usando o método Prakash.

figura, a massa foi calculada a partir de sua forma convencional como apresentada na equação (2.45) e a linha preta representa a Relatividade Geral ($\eta = 0$). Observe que, para $\eta \sim 10^{-3}$ os valores da massa máxima e do raio correspondente, estão próximos daqueles previstos pela TRG. Ainda, nessa faixa de η verifica-se que para um determinado valor de raio, superior ao raio correspondente a massa máxima, as configurações de equilíbrio prevêem estrelas mais massivas em Rastall do que na TRG. Por outro lado, quando η se aproxima de 0.05 o modelo de Rastall não prevê a existência da estrela de nêutrons típica, com massas $2M_{\odot}$ e raio entre $10 - 15 \text{ km}$, isso faz com que esses valores de η sejam proibidos.

Com a finalidade de verificar se o diagrama $M - R$ está consistente, deve-se utilizar uma EoS mais realista. Sendo assim, a família BSk torna-se um modelo de EoS interessante, uma vez que ela descreve as regiões mais internas da estrutura estelar com uma EoS única. Assim, resolvendo a equação diferencial (5.25) com auxílio da EoS descrita pela equação (3.51) e utilizando a definição usual de massa (2.45), pode-se traçar o diagrama $M - R$,

que estão apresentados nas figuras (5.2), (5.3) e (5.4); para três classes desta família: BSk19, BSk20 e BSk21, respectivamente. O valor da massa máxima depende do modelo

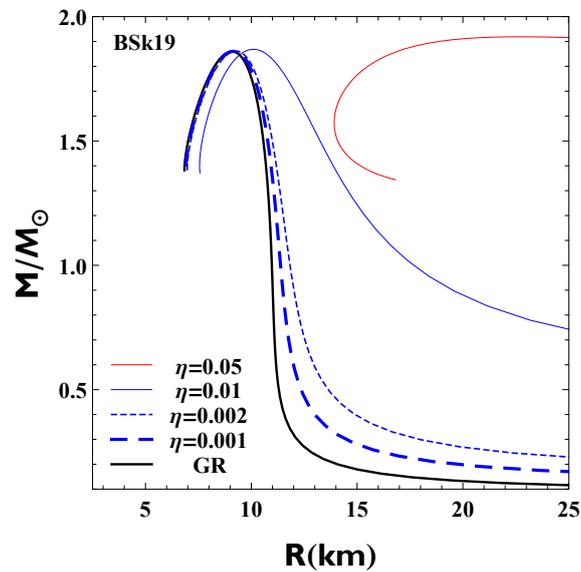


Figura 5.2: Diagrama $M - R$ para diferentes valores de η no modelo BSk19.

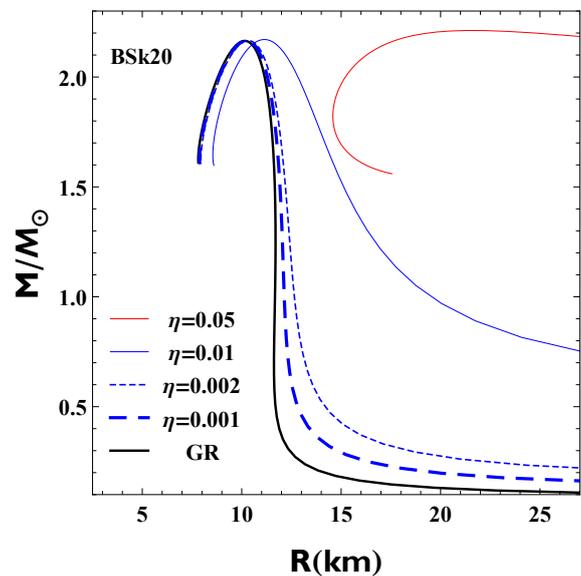


Figura 5.3: Diagrama $M - R$ para diferentes valores de η no modelo BSk20.

BSk escolhido. A EoS BSk19 não prevê a existência de estrelas com massas maiores que $2M_{\odot}$. Desse modo, os ajustes das EoSs BSk20 e BSk21 são favorecidos, pois os dados

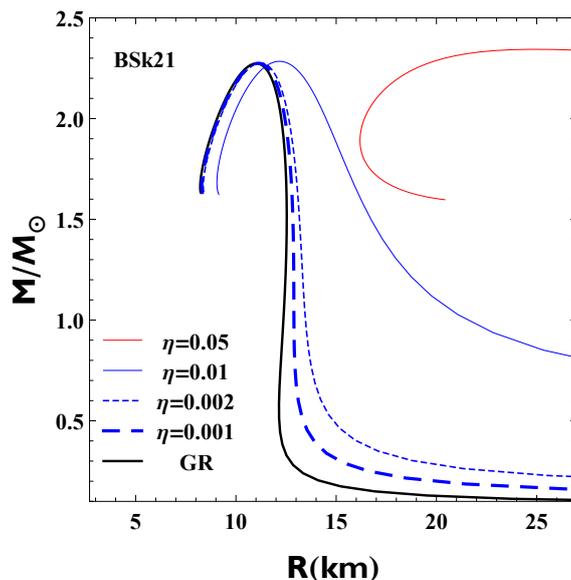


Figura 5.4: Diagrama $M - R$ para diferentes valores de η no modelo BSk21.

indicam que estrelas de nêutrons muito massivas devem ter raios de $\sim 13 \text{ km}$, como pode ser visto na figura (3.3). Do mesmo modo que a modelagem anterior, onde o constituinte matéria estelar era composto apenas por nêutrons com interação (discutido acima, cujo resultado foi apresentado na figura (5.1)), a família BSk prevê que a gravidade Rastall não permite configurações estáveis quando o desvio da TRG é $\sim 5\%$. Além disso, observa-se um incremento no raio da estrela (fixada uma massa) quando o desvio da TRG aumenta. Por exemplo, para objetos com massas de $1.5M_{\odot}$ os raios típicos estão entre $10 - 12 \text{ km}$ para RG ($\eta = 0$). Contudo, quando $\eta = 0.01$ os raios são aumentados para valores entre $14 - 17 \text{ km}$.

Apesar das incertezas na determinação do raio inviabilizarem a distinção nesse grau de precisão, alguns resultados recentes permitem fixar o desvio da TRG na ordem de 1% . Por exemplo, no trabalho [75] os autores utilizaram a estatística bayesiana para mostrar que $R_{1.5} = 10.8_{-0.4}^{+0.5} \text{ km}$, para objetos com massas de $1.5 M_{\odot}$ e que, em geral, o pico de probabilidade tem favorecido raios entre $9 - 12 \text{ km}$, tornando assim desfavoráveis a existência de estrela de nêutrons com raios entre $14 - 17 \text{ km}$, para essa massa. Por outro lado, algumas estimativas menos restritivas admitem a possibilidade de existir estrela de

nêutrons com $R_{1.5} \sim 15$ km [76, 77]. Ressalta-se que estrelas de nêutrons com $R_{1.5} > 15$ km são desfavoráveis. As diferentes previsões para o raio da estrela de nêutrons está diretamente relacionada com o erro sistemático inerente a forma com que a atmosfera é modelada, além das suposições acerca da composição química dessa região, para uma revisão sobre o assunto veja [78]. Assim, conclui-se que a determinação da massa e raio (da estrela de nêutrons), permitem desvios da TRG na ordem de $\eta \lesssim 0.01$. Assim, nessa faixa as configurações estelares parecem ser consistentes. Ou seja, se for necessário algum ajuste para a TRG, este deve ser da ordem de $\sim 1\%$.

Ressalta-se que os resultados apresentados nessa seção foram publicados no trabalho [37].

Capítulo 6

Parametrização de TOV

Como foi discutido no capítulo anterior, a estrutura da equação de equilíbrio obtida via gravidade Rastall permite interpretar este modelo como uma parametrização da pressão e da densidade de energia. Sendo assim, a discussão acerca da parametrização da equação TOV torna-se relevante. Alguns modelos alternativos mantêm a forma funcional da equação de equilíbrio hidrostático. Nesse capítulo será feita uma “generalização” da equação TOV, que permitirá discutir a relevância de cada termo desta equação. Para isso, serão utilizados cinco parâmetros livres, α , β , γ , χ e σ , onde cada um dos parâmetros está relacionado com um dos termos que contribuem para a equação TOV. A construção dessa parametrização de TOV foi feita “ad-hoc” a partir da equação de equilíbrio hidrostático. Isso permite concentrar todos os modelos de gravidade modificada que resultam numa equação com a forma funcional próxima a TOV, como é o caso das teorias Newtoniana, neo-Newtoniana e $f(R)$.

A partir dessa parametrização pode-se construir o diagrama M-R e verificar se eles prevêem a existência de estruturas estelares estáveis com massa $\sim 2M_{\odot}$. Para isso, fez-se com que cada parâmetro assumisse valores distintos, previamente escolhidos. Essa abordagem pode ser encontrada no trabalho [79] e um enfoque na análise da contribuição do termo de pressão na massa gravitacional ativa no estudo de estrela de nêutrons pode

ser encontrado em [80].

6.1 A Equação de Equilíbrio

O termo de compactação $C = 2GM/R$, em unidades de c^2 , de uma estrela está diretamente relacionado com a relevância da contribuição dos termos da TRG. Para baixas compactação, por exemplo, $C \ll 1$ o formalismo newtoniano pode ser utilizado de forma satisfatória. A título de curiosidade, as anãs brancas têm $C_{AB} \sim 10^{-6}$, por outro lado, as estrelas da sequência principal têm $C_{SP} \sim 10^{-4}$. Já as estrelas de nêutrons têm valores de compactação entre $0.2 \lesssim C_{EN} \lesssim 0.4$. Sendo assim, os efeitos relativísticos, desse último, não podem ser desprezados. Os termos de pressão e de curvatura podem absorver tais efeitos, além do mais, para que se possa testar e descrever as modificações oriundas de modelos de gravidade modificada, pode-se parametrizar a equação TOV, que sobre essa perspectiva será dada por

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G(1+\alpha)\mathcal{M}(r)\rho}{r^2} \frac{\left(1 + \frac{\beta p}{\rho}\right) \left(1 + \frac{\chi 4\pi r^3 p}{\mathcal{M}(r)}\right)}{1 - \frac{\gamma 2G\mathcal{M}(r)}{r}} . \quad (6.1)$$

Pode-se também generalizar a função massa $\mathcal{M}(r)$ em (6.1) escrevendo-a como

$$\frac{d\mathcal{M}(r)}{dr} = 4\pi r^2(\rho + \sigma p) . \quad (6.2)$$

Onde cada um dos parâmetros está relacionados com uma das contribuições relativísticas de uma gravidade modificada. O termo α está relacionado com os efeitos do acoplamento gravitacional — $G_{eff} = G(1 + \alpha)$. Para a teoria $f(R)$, por exemplo, tem-se que $\alpha = 1/3$ [81]. Enquanto que para a TRG $\alpha = 0$. O termo β mede a contribuição da pressão para a inércia. Note que, o termo $(\rho + p)$ vem de $T^{\mu\nu}_{;\nu=r} = 0$, sendo r a coordenada radial. Na TRG $\beta = 1$. Por sua vez, γ é uma contribuição da curvatura intrínseca que não surge na física Newtoniana, onde $\gamma = 0$. Enquanto que na TRG $\gamma = 1$. Já o χ mede o efeito da pressão na gravidade ativa, que é uma contribuição característica da TRG. Esse efeito foi avaliado em [80], para a TRG $\chi = 1$. Por fim, σ modifica a função massa devido a contribuição da pressão para a massa gravitacional, na TRG $\sigma = 0$.

Com essa parametrização é possível obter algumas situações particulares, tais como: (i) $\alpha = \beta = \gamma = \chi = \sigma = 0$: que corresponde a equação de equilíbrio hidrostática em uma abordagem newtoniana, que foi brevemente discutida anteriormente; (ii) $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = \chi = 0, \sigma = 3$: essa parametrização leva a equação de equilíbrio hidrostático obtido a partir das modificações neo-Newtonianas; (iii) $\alpha = \beta = \gamma = 0, \chi \neq 0, \sigma = 0$: foi a parametrização utilizada no trabalho [80]. (iv) $\alpha \neq 0, \beta = \gamma = \chi = \sigma = 0$: essa configuração descreve uma estrela no contexto de uma teoria Newtoniana modificada. (v) $\alpha = 1/3, \beta = \gamma = \chi = 0, \sigma \neq 0$: descreve modelos estelares para uma teoria $f(R)$, ao menos alguns casos desta.

Sendo assim, algumas teorias modificadas podem descrever as estruturas estelares como uma equação do tipo TOV, o que pode incluí-la como um caso particular da parametrização proposta aqui. Contudo, a forma com que a massa foi calculada (para efeito de comparação) é sempre a forma convencional, dada pela equação

$$M = \int_0^{\mathcal{R}} 4\pi r^2 \rho dr \quad ,$$

independente da forma da função da massa efetiva \mathcal{M} . Note que, quando $\sigma = 0$, há uma equivalência na forma das funções massa, ou seja,

$$M = \mathcal{M} \quad , \quad \text{para} \quad \sigma = 0 \quad .$$

Apesar da necessidade de uma discussão mais aprofundada acerca da estabilidade do sistema aqui considerado, veja o teorema 2 da pg. 306 na referência [19], aqui adotou-se a condição $dM/d\rho_c > 0$ para determinar o limite estável da massa estelar máxima. Contudo, o problema da estabilidade estelar em teorias modificadas ainda é um problema em aberto e deverá ser tratado em trabalhos futuros.

6.2 Diagrama Massa-Raio

Do mesmo modo que foi feito para os modelos anteriores, escolheu-se uma EoS (para esse caso foi utilizada o BSk20) e aplicou-se as condições de contorno $M(0) = 0, \rho(0) = \rho_0$

(densidade central) relacionada com a pressão central ($p(0) = p_0$) e $p(\mathcal{R}) = 0$ a pressão na borda, quando $r = \mathcal{R}$ (raio da estrela), é nula. Os resultados para as configurações e diferentes parametrizações está ilustrado na figura (6.1). Nessa figura, a linha preta representa os resultados obtidos via equação TOV e apresenta algumas famílias de configurações estelares para diferentes valores dos parâmetros livres. Para referenciar os gráficos obtidos utiliza-se letras (A, B, C e D) para identificar as linhas e as colunas são identificadas pelos algarismos romanos (I, II, III e IV). Desse modo, a primeira figura (no canto superior esquerdo) é a célula $A-I$, por exemplo. Nesse caso, para a célula $A-I$, é apresentada as configurações estelares com uma varredura nos parâmetros α e β , enquanto que os outros parâmetros foram fixados na configuração da TRG, ou seja, $\gamma = 1$, $\chi = 1$ e $\sigma = 0$. Em todas as células optou-se por ilustrar a configuração padrão da RG, que aparece como a linha sólida preta, além disso, o eixo y de cada célula, foi calculada utilizando $M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr$, situação em que $\sigma = 0$ (ou seja, $M = \mathcal{M}$). Os efeitos $\sigma \neq 0$ estão apresentados $A-IV$, $B-III$, $C-II$ e $D-I$.

O efeito de α no diagrama $M-R$ está ilustrado na linha A . Esse termo é uma simples modificação na teoria gravitacional, onde a constante de acoplamento gravitacional é modificada $G_{\text{efet}} \rightarrow G(1 + \alpha)$. O incremento de α reduz a massa máxima e o raio da estrela. Quando o efeito inercial da pressão, medida pelo parâmetro β , é considerado (ou seja, igual a 1) a massa da estrela torna-se menor, comparando com $\beta = 0$. O termo χ contribui para a redução do raio da estrela. Já o termo γ quando nulo, permite estruturas com massa máxima superior a $2M_{\odot}$, em todos os casos analisados.

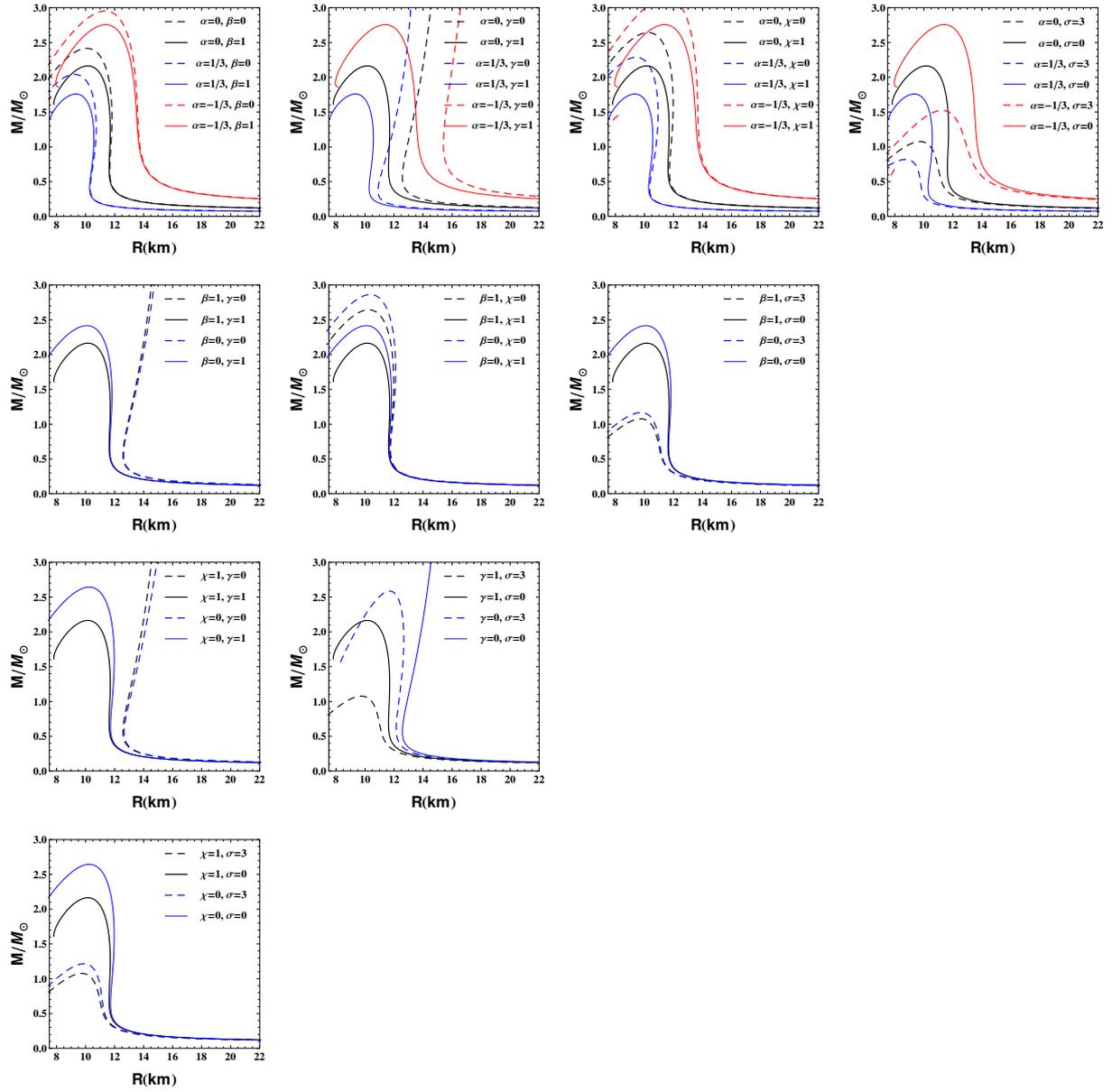


Figura 6.1: O diagrama Massa-raio é apresentado para os parâmetros α ; β ; γ ; χ ; σ .

Capítulo 7

Conclusão

Nesta tese utilizou-se teorias alternativas (TAs) à teoria Newtoniana (TN) e à teoria da relatividade geral (TRG), para estabelecer as situações de equilíbrio das estruturas astrofísicas compactas. As teorias alternativas são comumente utilizadas na cosmologia com a finalidade de reduzir a quantidade de matéria e energia escuras, que são postuladas para que a TRG possa se ajustar aos dados observacionais. No contexto astrofísico, há dois indícios de que as TAs podem ser utilizadas para descrever as estruturas compactas, são elas: (1) A figura (3.3) evidencia que pode existir estruturas compactas com massa de $\lesssim 3M_{\odot}$. Contudo a TRG, mesmo utilizando as equações de estado mais realistas conhecidas, não prediz a existência de estruturas estáveis com essa massa. É fato que não existe nenhum experimento em laboratório que permite estabelecer com precisão a relação $p(\rho)$, em situações onde a densidade é da ordem da densidade de saturação nuclear que é $\sim 10^{-14} \text{ g cm}^{-3}$. É nisso que algumas linhas de pesquisa se sustentam. Tentam determinar equações de estado mais realistas, baseada em experimentos, a fim de que a massa observada possa ser prevista pela TRG. (2) O fato de não existe informações sobre o comportamento da gravidade em situações onde as grandezas físicas são tão extremas. É verdade que os testes gravitacionais indicam que TRG é a teoria que melhor descreve os fenômenos gravitacionais. Contudo, ressalta-se que esses testes são, em sua maioria,

realizados a nível de Sistema Solar, ou seja, em regiões onde a curvatura é $\sim 10^{-30}$ vezes a curvatura no interior de uma estrela de nêutrons. Portanto, no interior das estruturas compactas relativísticas a gravidade pode fazer surgir alguns efeitos não convencionais, que por sua vez, podem estar relacionados a efeitos de campos ou curvaturas, de modo que no limite de espaço plano recupere-se os resultados previstos pela TRG. Sendo assim, o estudo das estruturas compactas pôde trazer informações relevantes para a gravitação, como por exemplo, permitiu determinar os vínculos da Gravidade Rastall.

Nesse sentido, iniciou-se a tese fazendo uma breve revisão acerca do ferramental matemático necessário para o uso da TRG, no contexto de objetos compactos. Utilizando essa teoria para uma métrica esférica, isotrópica e estática, pôde-se apresentar a equação relativística para o equilíbrio hidrostático (2.44), conhecida como equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV), que serviu como base para estudar as estrelas de nêutrons. Para saber se as correções relativísticas são relevantes, é necessário calcular o fator de compactação (C), em unidades de c^2 . Quando $C \sim 10^{-1}$ as correções relativísticas devem ser consideradas. Este é o caso de estruturas como as estrelas de nêutrons, onde $0.2 \lesssim C_{EN} \lesssim 0.4$. Por outro lado, se $C \ll 1$ a gravitação Newtoniana pode ser utilizada para descrever o fenômeno físico sem a perda de qualquer informação relevante. Este é o caso das estrelas na sequência principal e de estruturas como as anãs brancas cujos fatores de compactação são, $C_{SP} \approx 10^{-4}$ e $C_{AB} \approx 10^{-6}$, respectivamente. Em seguida, foi feita uma aproximação para campos fracos e baixas velocidades o que permitiu obter a equação de equilíbrio hidrostático Newtoniano (2.55), cuja validade é para $C \ll 1$. Por fim, verificou-se que para resolver a equação de equilíbrio é necessário estabelecer uma relação entre a pressão e a densidade do fluido $p(\rho)$, ou seja, há a necessidade de escolher uma equação de estado.

No capítulo seguinte, após uma breve revisão sobre a vida estelar na sequência principal e de sua morte, concluímos que a massa da estrela é um parâmetro essencial para determinar a vida e a morte da estrela. Note que, todas as informações físicas como: luminosidade, temperatura, tempo de vida em cada situação de equilíbrio, raio (durante sua vida na

sequência principal), se morrerá como uma anã branca, estrela de nêutrons ou buraco negro; dependem da massa da estrela. Em seguida, apresentou-se a divisão interna de uma estrela de nêutrons, estrutura cujo colapso gravitacional é sustentado pela degenerescência do nêutron, que tem as seguintes camadas: atmosfera, envelope, crosta (interna e externa) e caroço (interno e externo). A importância de cada nível da estrela também foi destacada. Ainda neste capítulo foi apresentado alguns candidatos para a equação de estado da região interna da estrela de nêutrons que foram utilizadas nesta tese. Foram elas: a densidade constante, gás de Fermi, fluido politrópico e equações de estado unificadas. Este último, descreve toda a região interna da estrela com uma única equação de estado. Na parte de fluido politrópico aproveitou-se para discutir a equação de Lane-Emden (L-E), a estabilidade estelar e a relação massa - raio. Com isso finalizou-se a revisão da tese e iniciou-se a abordagem no contexto de teorias alternativas.

Em um primeiro momento utilizou-se a teoria neo-Newtoniana (TnN). Esse modelo é uma alternativa a teoria Newtoniana. Inicialmente a TnN foi proposta a fim de corrigir os resultados para a dinâmica do universo obtidos via TN. A TN descreve somente a dinâmica para um universo dominado por matéria, onde $p = 0$, como pode ser visto na equação (4.6). A grosso modo, a TnN propõe uma mudança quebra no princípio da equivalência, fazendo as densidades de massa ativa e passiva se transformarem de formas distintas, são elas: $\rho_a \rightarrow \rho + 3p$ e $\rho_p \rightarrow \rho + p$, respectivamente. Essa mudança faz com que a TnN, ao menos a nível de base, descreva o universo da mesma forma que a TRG o faz, sem a perda de informações, como foi mostrado nas equações (4.5) e (4.10). Aqui, utilizou-se a TnN em um contexto estático para estudar as estruturas compactas previstas por essa teoria. Utilizando a equação de equilíbrio hidrostático para esse modelo (4.14), foi possível obter a equação (4.16) que é a equação de L-E modificada. Com isso, foi possível fazer uma comparação entre os resultados desta teoria com a TN para a equação de L-E, que estão apresentados nas figuras (4.1) e (4.2). Como resultado desta comparação vê-se que, para um dado valor de n , há diferenças entre os pontos onde a curva toca o eixo horizontal, correspondente a ζ (termo ligado ao raio da estrela). A tabela (4.1) ajuda nessa análise. Em seguida, utilizou-se a equação (4.14) em conjunto com uma equação

de estado para obter o diagrama massa-raio, para as estrelas de nêutrons. Desse modo, escolheu-se como fluido material o gás ideal de Fermi de puro nêutron sem interação (em um primeiro momento) e, no momento seguinte, estudou-se uma configuração estelar contendo um fluido com interação nucleon-nucleon. Para efeito de comparação, construiu-se um diagrama M-R dos seguintes modelos: Newtoniano, TRG e Neo-Newtoniano. Nesse caso, verificou-se que a TnN prevê a existência de uma massa máxima. Um avanço com relação a TN, uma vez que a massa máxima é uma característica de modelos relativísticos. Pôde-se comprovar que ocorre um incremento da massa estelar na TnN, com relação a massa correspondente prevista pela equação TOV. Para a equação de estado de puro nêutron encontrou-se uma família de estrelas, como apresentado na figura (4.3), para cada um dos modelos de gravidade escolhido. A quebra do princípio da equivalência permitiu escrever a função “massa” de três formas distintas. Aqui a função massa é apenas a função que deve ser introduzida para resolver a equação de equilíbrio, enquanto que para calcular a massa “real” da estrela, que aparece no eixo vertical do diagrama M-R, utilizou-se a forma convencional da definição de massa, onde $M' = 4\pi\rho r^2$. Assim, pôde-se fazer uma discussão acerca da contribuição do termo de pressão para a estrutura da estrela, ilustrado nas figuras (4.4) e (4.5). Concluiu-se que, quanto maior a influência deste termo mais massa a estrela comporta e mais longe da TRG o modelo estelar estará. Esse resultado é intrigante, uma vez que a inclusão dos termos de correção na TRG deve-se ao fato de que a pressão também contribui para a gravidade. Assim, esperava-se que a inclusão do termo de pressão, na abordagem neo-Newtoniana, agiria aproximando os resultados da TnN à TRG. Contudo, ocorre exatamente o contrário.

Em seguida, fez-se uma abordagem alternativa para a TRG. O modelo escolhido para esse estudo foi a gravidade Rastall, que apesar de ter sido amplamente utilizada no contexto cosmológico, é a primeira vez que essa teoria foi aplicada para descrever estruturas compactas. Originalmente este modelo foi uma proposta de generalização para a TRG, onde a curvatura modifica a lei de conservação, proveniente da derivada covariante do tensor energia-momento, dada pela equação (5.2). Aqui, abordou-se a solução de vácuo utilizando a gravidade Rastall. Como resultado inédito mostrou-se que a contribuição da

constante cosmológica surge de forma natural, aparentemente como um efeito geométrico neste contexto. Ressalta-se que, nesse caso, a configuração de vácuo não implica necessariamente que $R = 0$ e conseqüentemente que $R_{\mu\nu} = 0$. Outra possibilidade para tal configuração é obtida quando $\lambda = 1/2$, na equação (5.5). Nesse caso particular, a métrica obtida é do tipo Schwarzschild-de Sitter ou Schwarzschild-anti de Sitter, equação (5.12), dependendo do sinal de Λ . Se $\Lambda > 0$ tem-se SdS, caso contrário, se $\Lambda < 0$ tem-se SadS. Em seguida, utilizou-se duas equações de estado para modelar a estrutura interna da estrela (o gás de Fermi com interação nucleon-nucleon e a família BSk) em conjunto com a gravidade Rastall. Isso permitiu limitar o parâmetro livre da teoria $\lambda = 1 + \eta$, sendo que $\eta = 0$ corresponde a TRG. Assim, foi possível estabelecer um valor máximo para o parâmetro $\eta_{\text{máx}} \approx 0.05$, baseando-se na existência de estruturas estáveis. Os resultados indicam que não pode existir estrela de nêutrons estável quando $\eta > \eta_{\text{máx}}$. Por outro lado, os vínculos desta teoria podem ser estabelecidos, o que aparentemente não é feito de forma consistente através da Cosmologia Rastall, que permite qualquer valor para η . Note que, apenas desvios de $\sim 1\%$ da TRG (ou seja, $\eta = 0.01$) são consistentes com as observações. E valores negativos de η são proibidos, por gerar instabilidades nas equações de equilíbrio, como discutido na equação (5.19). Desse modo, com dados futuros, espera-se que seja possível reduzir ainda mais o desvio de η para $\sim 0.1\%$. Nesse caso, o resultado aqui apresentado indica que a teoria Rastall é compatível com as observações, no contexto de estrela de nêutrons, para pequenos desvios da TRG, ou seja, $\lambda \gtrsim 1$. Sendo assim, reforça que a alta densidade envolvida na estrutura estelar pode conter também violações das leis de conservação convencionais.

Por último foi proposto uma generalização para estudar a relevância da contribuição de cada termo da equação TOV, para isso introduziu-se uma parametrização livre “ad-hoc” nas diferentes contribuições desta equação. Desse modo a equação TOV parametrizada assumiu a forma da equação (6.1), onde os termos α , β , γ , χ e σ ; são as parametrizações, ou seja, que fazem o papel de medir a relevância de cada termo. Para obter as configurações estáveis da estrela de nêutrons, utilizou-se para descrever o interior estelar a equação de estado BSk 20, uma vez que, ela está em acordo com os dados observacio-

nais utilizando a TRG. Um comparativo, para os diferentes valores dos parâmetros livres, estão apresentados na figura (6.1). Na linha A, por exemplo, é ilustrado modificações do parâmetro α . Este parâmetro está relacionado com o acoplamento da matéria. O incremento deste torna o raio da estrela menor, o mesmo ocorre com a massa máxima. O parâmetro β , medida da colaboração da pressão para efeitos de inércia, também reduz a massa máxima. Já a análise acerca do parâmetro χ , vai de encontro aos resultados apresentados no trabalho [80]. Já a contribuição do termo de Schwarzschild, cujo parâmetro associado é γ , é indispensável para que a massa da estrela esteja dentro dos limites esperados. Em todos os casos em que $\gamma = 0$, as massas máximas tornam-se muito superior ao valor esperado, sendo a única excessão quando $\sigma = 3$. Ainda assim, nessa condição a massa máxima fica próximo deste valor, como pode ser visto na figura (6.1) painel C-II. Isso também ocorreu quando utilizou-se o modelo neo-Newtoniano. Uma possível causa é a ausência desse termo.

Uma vez que a relação entre a pressão e a densidade de matéria no interior de estruturas compactas, como estrela de nêutrons, são tão desconhecidas quanto o comportamento da gravidade nessa mesma região, parece razoável sugerir outros modelos, alternativos à TRG, para descrever a estrutura interna desses corpos. Nesse sentido, há alguns estudos que abordam TAs no contexto de objetos compactos, alguns abordados nessa tese, como por exemplo: TnN e Gravidade Rastall. Porem outros modelos alternativos trouxeram resultados relevantes nesse contexto, por exemplo: usando $f(R)$ e Brans-Dicke. Contudo há modelos que ainda não foram abordados nesse contexto de estrela de nêutrons, como é o caso de campos escalares-tensoriais. Por outro lado, a gravidade Rastall ainda não está completa. Existem alguns pontos em aberto que merecem atenção, como é o caso do colapso gravitacional e da obtenção das equações de campo a partir de um formalismo Lagrangeano. Esperamos contribuir ainda mais nesses pontos em aberto e nas situações ainda não estudadas.

Referências Bibliográficas

- [1] K. Y. Ekşi, C. Güngör, and M. M. Türkoğlu, “What does a measurement of mass and/or radius of a neutron star constrain: Equation of state or gravity?,” *Physical Review D*, vol. 89, no. 6, p. 063003, 2014.
- [2] E. Harrison, “Cosmology without general relativity,” *Annals of Physics*, vol. 35, no. 3, pp. 437–446, 1965.
- [3] W. H. McCrea, “Relativity theory and the creation of matter,” in *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 206, pp. 562–575, The Royal Society, 1951.
- [4] P. Rastall, “Generalization of the Einstein theory,” *Physical Review D*, vol. 6, no. 12, p. 3357, 1972.
- [5] C. M. Will, “The confrontation between general relativity and experiment,” *Living Rev. Rel.*, vol. 17, no. arXiv: 1403.7377, p. 4, 2014.
- [6] C. M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge University Press, 1993.
- [7] G. Steigman, B. Dasgupta, and J. F. Beacom, “Precise relic WIMP abundance and its impact on searches for dark matter annihilation,” *Physical Review D*, vol. 86, no. 2, p. 023506, 2012.

- [8] J. Szulágyi, G. Kovács, and D. Welch, “Application of the trend filtering algorithm to the MACHO database,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 500, no. 2, pp. 917–927, 2009.
- [9] D. Clowe, M. Bradač, A. H. Gonzalez, M. Markevitch, S. W. Randall, C. Jones, and D. Zaritsky, “A direct empirical proof of the existence of dark matter based on observations made with the nasa/esa hubble space telescope (hst), obtained at the space telescope science institute, which is operated by the association of universities for research in astronomy, inc., under nasa contract nas 5-26555, under program 10200, with the 6.5 m magellan telescopes located at las campanas observatory, chile, with the eso telescopes at the paranal observatory under program ids 72. a-0511, 60. a-9203, and 64. o-0332, and with the nasa chandra x-ray observatory, operated by the smithsonian astrophysics observatory under contract to nasa,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 648, no. 2, p. L109, 2006.
- [10] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, *et al.*, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *The Astronomical Journal*, vol. 116, no. 3, p. 1009, 1998.
- [11] C. H. Lineweaver, “Cosmological parameters,” *arXiv preprint astro-ph/0112381*, 2001.
- [12] C. Brans and R. H. Dicke, “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation,” *Physical Review*, vol. 124, no. 3, p. 925, 1961.
- [13] A. De Felice and S. Tsujikawa, “f (r) theories,” *Living Rev. Rel.*, vol. 13, no. 3, pp. 1002–4928, 2010.
- [14] J. C. Fabris, O. F. Piattella, D. C. Rodrigues, C. E. Batista, and M. H. Daouda, “Rastall cosmology,” in *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, vol. 18, pp. 67–76, World Scientific, 2012.

- [15] T. Caramês, M. Fabris, A. Oliveira, O. Piattella, and V. Strokov, “A Rastall Scalar-Tensor theory,” *arXiv preprint arXiv:1503.04882*, 2015.
- [16] J. C. Fabris and H. Velten, “Neo-Newtonian theories,” *arXiv preprint arXiv:1501.01614*, 2014.
- [17] W. H. McCrea and E. A. Milne, “Newtonian universes and the curvature of space,” *The quarterly journal of mathematics*, no. 1, pp. 73–80, 1934.
- [18] B. Chauvineau, D. C. Rodrigues, and J. C. Fabris, “Scalar-tensor theories with an external scalar,” *arXiv preprint arXiv:1503.07581*, 2015.
- [19] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, vol. 1. Wiley New York, 1972.
- [20] R. d’Inverno, “Introducing einstein’s relativity,” 1899.
- [21] S. M. Carroll, “Lecture notes on general relativity,” *arXiv preprint gr-qc/9712019*, 1997.
- [22] J. M. Lattimer, “Neutron stars,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 46, no. 5, pp. 1–26, 2014.
- [23] N. K. Glendenning, *Compact stars: Nuclear physics, particle physics and general relativity*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [24] P. Haensel, A. Y. Potekhin, and D. G. Yakovlev, *Neutron stars 1: Equation of State and Structure*, vol. 326. Springer Science & Business Media, 2007.
- [25] M. D. Kruskal, “Maximal extension of Schwarzschild metric,” *Physical review*, vol. 119, no. 5, p. 1743, 1960.
- [26] G. Szekeres, “On the singularities of a Riemannian manifold,” *Publicationes Mathematicae Debrecen 7, 285 (1960)*, vol. 7, p. 285, 1960.
- [27] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, “On massive neutron cores,” *Physical Review*, vol. 55, no. 4, p. 374, 1939.

- [28] R. C. Tolman, “Static solutions of Einstein’s field equations for spheres of fluid,” *Physical Review*, vol. 55, no. 4, p. 364, 1939.
- [29] A. C. S. Friaça, *Astronomia: “uma” visão geral do Universo*. Edusp, 2000.
- [30] G. Gamow and M. Schoenberg, “Neutrino theory of stellar collapse,” *Physical Review*, vol. 59, no. 7, p. 539, 1941.
- [31] H. Rodrigues, S. B. Duarte, and J. C. T. De Oliveira, “Massive compact stars as quark stars,” *The Astrophysical Journal*, vol. 730, no. 1, p. 31, 2011.
- [32] B. Franzon, D. A. Fogaça, F. S. Navarra, and J. E. Horvath, “Self-bound interacting QCD matter in compact stars,” *Physical Review D*, vol. 86, no. 6, p. 065031, 2012.
- [33] W. Hillebrandt and H. Heintzmann, “Neutron stars and incompressible fluid spheres in the Jordan-Brans-Dicke theory of gravitation,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 5, no. 6, pp. 663–672, 1974.
- [34] T. Harada, “Neutron stars in scalar-tensor theories of gravity and catastrophe theory,” *Physical Review D*, vol. 57, no. 8, p. 4802, 1998.
- [35] C. Palenzuela and S. Liebling, “Constraining scalar-tensor theories of gravity from the most massive neutron stars,” *arXiv preprint arXiv:1510.03471*, 2015.
- [36] P. D. Lasky, H. Sotani, and D. Giannios, “Structure of neutron stars in tensor-vector-scalar theory,” *Physical Review D*, vol. 78, no. 10, p. 104019, 2008.
- [37] A. Oliveira, H. Velten, J. Fabris, and L. Casarini, “Neutron stars in Rastall gravity,” *Physical Review D*, vol. 92, no. 4, p. 044020, 2015.
- [38] A. Oliveira, H. Velten, J. Fabris, and I. Salako, “Newtonian view of general relativistic stars,” *The European Physical Journal C*, vol. 74, no. 11, pp. 1–6, 2014.
- [39] S. Koranda, N. Stergioulas, and J. L. Friedman, “Upper limits set by causality on the rotation and mass of uniformly rotating relativistic stars,” *The Astrophysical Journal*, vol. 488, no. 2, p. 799, 1997.

- [40] J. M. Lattimer, “The nuclear equation of state and neutron star masses,” *arXiv preprint arXiv:1305.3510*, 2013.
- [41] R. M. Wald, *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [42] C. E. Rhoades Jr and R. Ruffini, “Maximum mass of a neutron star,” *Physical Review Letters*, vol. 32, no. 6, p. 324, 1974.
- [43] G. Baym, C. Pethick, and P. Sutherland, “The ground state of matter at high densities: equation of state and stellar models,” *The Astrophysical Journal*, vol. 170, p. 299, 1971.
- [44] H. B. Callen, *Thermodynamics & an Intro. to Thermostatistics*. John Wiley & Sons, 2006.
- [45] S. Chandrasekhar, *An introduction to the study of stellar structure*, vol. 2. Courier Corporation, 1958.
- [46] R. R. Silbar and S. Reddy, “Neutron stars for undergraduates,” *American journal of physics*, vol. 72, no. 7, pp. 892–905, 2004.
- [47] P. Haensel and A. Y. Potekhin, “Analytical representations of unified equations of state of neutron-star matter,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 428, no. 1, pp. 191–197, 2004.
- [48] F. Douchin and P. Haensel, “A unified equation of state of dense matter and neutron star structure,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 380, no. 1, pp. 151–167, 2001.
- [49] S. Capozziello, M. De Laurentis, R. Farinelli, and S. D. Odintsov, “Mass-Radius relation for neutron stars in $f(R)$ gravity,” *Physical Review D*, vol. 93, no. 2, p. 023501, 2016.
- [50] S. Goriely, N. Chamel, and J. Pearson, “Further explorations of Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov mass formulas. xii. stiffness and stability of neutron-star matter,” *Physical Review C*, vol. 82, no. 3, p. 035804, 2010.

- [51] A. Potekhin, A. Fantina, N. Chamel, J. Pearson, and S. Goriely, “Analytical representations of unified equations of state for neutron-star matter,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 560, p. A48, 2013.
- [52] B. Friedman and V. Pandharipande, “Hot and cold, nuclear and neutron matter,” *Nuclear Physics A*, vol. 361, no. 2, pp. 502–520, 1981.
- [53] C. Lorenz, D. Ravenhall, and C. Pethick, “Neutron star crusts,” *Physical Review Letters*, vol. 70, no. 4, p. 379, 1993.
- [54] A. Akmal, V. Pandharipande, and D. Ravenhall, “Equation of state of nucleon matter and neutron star structure,” *Physical Review C*, vol. 58, no. 3, p. 1804, 1998.
- [55] Z. Li, H.-J. Schulze, *et al.*, “Neutron star structure with modern nucleonic three-body forces,” *Physical Review C*, vol. 78, no. 2, p. 028801, 2008.
- [56] E. A. Milne, “A Newtonian expanding universe,” *The Quarterly Journal of Mathematics*, no. 1, pp. 64–72, 1934.
- [57] J. Fabris and H. Velten, “Neo-Newtonian cosmology: an intermediate step towards general relativity,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 34, no. 4, pp. 1–9, 2012.
- [58] J. Lima, V. Zanchin, and R. Brandenberger, “On the Newtonian cosmology equations with pressure,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 291, no. 1, pp. L1–L4, 1997.
- [59] P. Baqui, J. Fabris, and O. Piattella, “Cosmology and stellar equilibrium using Newtonian hydrodynamics with general relativistic pressure,” *arXiv preprint arXiv:1512.09056*, 2015.
- [60] J. C. Fabris, O. F. Piattella, D. C. Rodrigues, and M. H. Daouda, “Rastall’s cosmology and its observational constraints,” *arXiv preprint arXiv:1403.5669*, 2014.
- [61] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum fields in curved space*. No. 7, Cambridge university press, 1984.

- [62] A. Ashtekar and A. Magnon, “Quantum fields in curved space-times,” in *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 346, pp. 375–394, The Royal Society, 1975.
- [63] S. Calogero, “A kinetic theory of diffusion in general relativity with cosmological scalar field,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2011, no. 11, p. 016, 2011.
- [64] S. Calogero and H. Velten, “Cosmology with matter diffusion,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2013, no. 11, p. 025, 2013.
- [65] H. Velten and S. Calogero, “Exploring non-linear cosmological matter diffusion coefficients,” *arXiv preprint arXiv:1407.4306*, 2014.
- [66] T. Koivisto, “A note on covariant conservation of energy–momentum in modified gravities,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 23, no. 12, p. 4289, 2006.
- [67] O. Minazzoli, “Conservation laws in theories with universal gravity/matter coupling,” *Physical Review D*, vol. 88, no. 2, p. 027506, 2013.
- [68] A. Oliveira, H. Velten, and J. Fabris, “Non-trivial static, spherically symmetric vacuum solution in a non-conservative theory of gravity,” *arXiv preprint arXiv:1602.08513*, 2016.
- [69] L. Iorio, M. L. Ruggiero, N. Radicella, and E. N. Saridakis, “Constraining the Schwarzschild–de Sitter solution in models of modified gravity,” *Physics of the Dark Universe*, vol. 13, pp. 111–120, 2016.
- [70] C. E. Batista, M. H. Daouda, J. C. Fabris, O. F. Piattella, and D. C. Rodrigues, “Rastall cosmology and the Λ CDM model,” *Physical Review D*, vol. 85, no. 8, p. 084008, 2012.
- [71] P. D. Mannheim and D. Kazanas, “Exact vacuum solution to conformal Weyl gravity and galactic rotation curves,” *The Astrophysical Journal*, vol. 342, pp. 635–638, 1989.

- [72] E. Gasperin and J. A. V. Kroon, “Conformal properties of the extremal Schwarzschild de-Sitter spacetime,” *arXiv preprint arXiv:1506.00030*, 2015.
- [73] N. Cruz, M. Olivares, and J. R. Villanueva, “The geodesic structure of the Schwarzschild anti-de Sitter black hole,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 22, no. 6, p. 1167, 2005.
- [74] W. H. Press, *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*. Cambridge university press, 2007.
- [75] F. Ozel, D. Psaltis, T. Guver, G. Baym, C. Heinke, and S. Guillot, “The dense matter equation of state from neutron star radius and mass measurements,” *arXiv preprint arXiv:1505.05155*, 2015.
- [76] V. Suleimanov, J. Poutanen, M. Revnivtsev, and K. Werner, “A neutron star stiff equation of state derived from cooling phases of the x-ray burster 4u 1724? 307,” *The Astrophysical Journal*, vol. 742, no. 2, p. 122, 2011.
- [77] M. Zamfir, A. Cumming, and D. K. Galloway, “Constraints on neutron star mass and radius in GS 1826–24 from sub-eddington x-ray bursts,” *The Astrophysical Journal*, vol. 749, no. 1, p. 69, 2012.
- [78] A. Y. Potekhin, “Atmospheres and radiating surfaces of neutron stars,” *Physics-Uspekhi*, vol. 57, no. 8, p. 735, 2014.
- [79] H. Velten, A. M. Oliveira, and A. Wojnar, “A free parametrized TOV: Modified gravity from Newtonian to relativistic stars,” *arXiv preprint arXiv:1601.03000*, 2016.
- [80] J. Schwab, S. A. Hughes, and S. Rappaport, “The self-gravity of pressure in neutron stars,” *arXiv preprint arXiv:0806.0798*, 2008.
- [81] P. Brax, C. van de Bruck, A.-C. Davis, and D. J. Shaw, “f (R) gravity and chameleon theories,” *Physical Review D*, vol. 78, no. 10, p. 104021, 2008.