UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – PPGE

GERALDO CLAUDIO BROETTO

O ensino de números irracionais para alunos ingressantes na licenciatura em matemática

Vitória

2016

GERALDO CLAUDIO BROETTO

O ensino de números irracionais para alunos ingressantes na licenciatura em matemática

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação/CE/UFES, como requisito para obtenção do título de Doutor em Educação na área de Educação e Linguagens: Matemática.

Orientadora: Professora Dra. Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner.

Vitória

2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)

(Biblioteca Setorial de Educação,

Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Broetto, Geraldo Claudio, 1975-

B865e O ensino de números irracionais para alunos ingressantes na licenciatura em matemática / Geraldo Claudio Broetto. – 2016.

422 f. : il.

Orientador: Vânia Maria Pereira Dos Santos-Wagner.

Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Educação.

1. Aprendizagem – Matemática. 2. Ensino superior – Matemática. 3. Matemática – Educação. 4. Matemática – Estudo e ensino. 5. Números irracionais. 6. Professores – Formação. I. Santos-Wagner, Vânia Maria Pereira dos, 1955-. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Educação. III. Título.

CDU: 37

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

GERALDO CLAUDIO BROETTO

O ENSINO DE NÚMEROS IRRACIONAIS PARA ALUNOS INGRESSANTES NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Educação.

Aprovada em 26 de fevereiro de 2016.

COMISSÃO EXAMINADORA

Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner

Professora Doutora Vania Maria Pereira dos Santos-Wagner
Universidade Federal do Espírito Santo

Lígia Sad

Professora Doutora Lígia Arantes Sad
Universidade Federal do Espírito Santo

Professor Doutor Edmar Reis Thiengo
Instituto Federal do Espírito Santo

Professor Doutor Rodolfo Chaves
Instituto Federal do Espírito Santo

Wanderley M Rezende

Professor Doutor Wanderley Moura Rezende
Universidade Federal Fluminense

Agradecimentos

Um trabalho do porte de uma tese de doutorado é fruto de alguns anos de intensiva dedicação ao estudo de um tema, um esforço intelectual e, porque também não dizer físico, para elaboração de um trabalho que preencha os requisitos estabelecidos pela academia. Contudo, uma tese de doutorado também é fruto da convivência familiar, das conversas com amigos, colegas de trabalho e professores. É uma jornada frenética sem escalas nem pontos de parada, de tardes ensolaradas de luta contra o sono, de noites mal dormidas, de isolamento e de um enorme sentimento de solidão. Ao chegar à última estação é hora de pensar naqueles que estiveram presentes, inclusive em pensamento, e que contribuíram de alguma forma para que esta viagem deixasse de ser um sonho.

Ao longo de toda essa jornada estiveram comigo os companheiros Leandra Santos e Messenas Rocha, com os quais dividi minhas angústias, minhas alegrias, meus desabafos e claro, minhas piadas sem graça. Outros colegas também viajaram por algum tempo comigo, ouviram minhas ideias e contribuíram com pequenas, porém valiosas, sugestões. São eles, Alexsandra Senna, Daniel dos Santos e Renato Fundão. Na penúltima estação, também chegaram os novos companheiros Thiarla Zanon, Simone Zogaib e José Carlos Thompson. A todos vocês meu abraço e meu muito obrigado!

Aos licenciandos do Instituto Federal do Espirito Santo – Ifes, Campus Vitória, das turmas ingressantes de 2013 e 2014, que tão gentilmente aceitaram participar desta pesquisa, meus sinceros agradecimentos. Esta viagem não seria possível sem a participação de vocês e, o seu resultado, agora também pertence a vocês. Façam o melhor uso que puderem dessas páginas nas suas carreiras docentes. Tomara que vocês se inspirem e também sintam vontade de estudar mais e de fazer pesquisa. Podem contar comigo no que precisarem.

Ademais, uma tese de doutorado também é o resultado de toda formação acadêmica e escolar pregressa. Todas as escolas nas quais estudei eram públicas, desde as primeiras letras, aprendidas com a Tia Alice na Escola Municipal de Ensino Fundamental Coronel Joaquim de Freitas, até as aulas do professor Florêncio Guimarães na graduação em matemática na Universidade Federal do Espírito Santo. Nesse meio tempo, também estudei na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Luiz Manoel Vellozo e na Escola Técnica Federal do Espírito Santo. No mestrado, ao tomar um novo rumo e seguir o caminho da educação matemática, tive o privilégio de conhecer e de me encantar com o conhecimento e com as pessoas das professoras Circe Dynnikov e Lígia Sad. A todos os mestres, citados ou não, meu carinho e minha admiração. Eu não poderia imaginar que seguiria essa tão nobre profissão docente, mas eis me aqui tentando fazer o meu melhor.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE, os mais recentes nessa sequência de mestres que resultou no que sou hoje, meu muito obrigado pelos momentos especiais que compartilhamos. As aulas de Janete Carvalho, Regina Simões, Robson Loureiro e Hiran Pinel já deixaram saudades, pelo motivo óbvio que foi aprender com eles as teorias, as filosofias, as histórias e as ciências, mas também pelo afeto e consideração com os estudantes por eles demonstrados. A leveza e o bom humor de suas aulas, sem abrir mão do necessário aprofundamento teórico, fazem parte agora das minhas melhores lembranças daquele tempo e espaço que dividimos.

A convivência com os companheiros de lutas do Ifes também tem sua contribuição neste trabalho. Os minutos de sabedoria que compartilho com os colegas mais experientes Oscar Rezende, Hélio Rosetti, Tércio Cossetti e Antônio Henrique Pinto são sempre muito inspiradores e estão presentes aqui, ainda que nas entrelinhas. Um agradecimento especial aos colegas Rony Freitas, Alex Jordane e Márcia Cade, pela generosidade de cederem algumas de suas aulas para realização deste trabalho, e aos companheiros Rodolfo Chaves e Edmar Thiengo, pela leitura cuidadosa e pelas sugestões nas versões preliminares deste trabalho. A todos os outros colegas da matemática, sem exceção, meu agradecimento pelo companheirismo e pelos belos exemplos de dedicação e profissionalismo. Aos professores Ricardo Paiva e Hudson Côgo, que também foram meus professores e que hoje ocupam cargos de direção no Ifes, meu muito obrigado pelo apoio. Muito me orgulha fazer parte desse time.

Outro círculo sem o qual esse trabalho não seria possível é o familiar. Considero este o único parágrafo óbvio desta tese, mas, talvez seja o mais fundamental. O título de doutor é um sonho sonhado junto, e que se torna realidade agora pela dedicação e pelo esforço de um carpinteiro e de uma dona de casa, meu pai e minha mãe, que mesmo nunca tendo sentado nos bancos de uma universidade, sempre souberam muito bem o valor desta conquista e desse espaço. Esta pode ser a diferença que tanto debatemos entre conhecimento e sabedoria. À Andressa, Luísa e Giovane agradeço por terem suportado um sujeito tão enjoado quanto eu por tanto tempo.

À minha orientadora Vânia Maria Santos-Wagner, agradeço pela dedicação e pelo compromisso de sempre tentar fazer o melhor. Se alguma vez você falhou professora, pode ter certeza que foi por excesso, por excesso de zelo, não só pelo trabalho, mas também por se preocupar com a minha saúde e a saúde dos colegas, com nossas famílias e com tudo à nossa volta. Agradeço ainda aos professores Wanderley Rezende, Robson Loureiro e Lígia Sad, pelas valiosas contribuições e comentários inspirados e inspiradores.

Para terminar, quero contar uma breve história. Em 1999, então recém-formado e com pouco mais de um ano de experiência em sala de aula, tive uma grande decepção na minha vida profissional. Naquela ocasião, lecionava em uma escola da rede particular de ensino e, com apenas 4 meses de trabalho, fui chamado até a sala da diretora, que se chamava Minerva, e fui demitido. Eu lembro que chorei muito, que fiquei muito chateado, e por algum tempo achei que a sala de aula não era o meu lugar. No ano de 2000 fiz um curso de verão no Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, eu queria fazer mestrado em matemática pura, o que de alguma forma, eu imaginava que me manteria longe da sala de aula. Ao final do curso, atingi o conceito B+, mas, naquela ocasião, o IMPA só aceitava para o mestrado aqueles que atingissem o conceito A. Outra grande decepção.

Após alguns anos, uma das últimas frases da dona Minerva ainda ecoavam na minha mente. Ela disse “você tem que fazer algo maior”. Eu não sei se ela considerava lecionar em uma 8ª série do ensino fundamental como ‘algo menor’, mas, de qualquer forma, a sua frase acabou me incentivando de alguma forma a ir buscar esse ‘algo maior’, mesmo sem saber direito o que era isso. Recebi outros ‘nãos’ da vida depois desse episódio, mas nunca mais os enxerguei da mesma forma. Um ‘não’ que se recebe pode ser o fim da linha, uma porta que se fecha, ou pode ser o início de uma jornada, uma porta que se abre. Para se alcançar algum objetivo na vida, pode não ser suficiente querer ver o lado bom das coisas, mas, com certeza, é necessário.

Todos os coros do céu e bens da terra – em uma palavra, todos aqueles corpos que compõem a estrutura do mundo – não têm qualquer subsistência sem uma mente.

George Berkeley

Resumo

A literatura referente ao ensino e à aprendizagem de números irracionais aponta para deficiências e inadequações relacionadas a esse tema, tanto nos livros didáticos quanto na formação do professor de matemática, com vistas à sua atuação na educação básica. A partir desse cenário, realizamos uma pesquisa em educação matemática, de natureza qualitativa e com intervenção em sala de aula. O objetivo deste trabalho de doutorado foi diagnosticar as imagens conceituais de números racionais e irracionais trazidas por licenciandos ingressantes na matemática, bem como analisar as movimentações dessas imagens ao longo da pesquisa. Os dados foram coletados em uma turma de ingressantes na licenciatura em matemática do Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes – Campus Vitória, durante o ano de 2014. O quadro teórico utilizado foi a imagem do conceito (TALL; VINNER, 1981), compreensão instrumental e relacional (SKEMP, 1976), exemplos protótipos e associações com atributos relevantes e irrelevantes (HERSHKOWITZ, 1994). A análise dos dados apontou à precariedade dos conhecimentos relacionados a números irracionais dos alunos ingressantes, com predominância de exemplos protótipos e de uma compreensão – quando muito – instrumental do assunto. A intervenção pedagógica mostrou-se capaz de desequilibrar cognitivamente os licenciandos, além de contribuir para a conscientização acerca de seus próprios conhecimentos e limitações. As movimentações das imagens conceituais alcançadas pelos participantes da pesquisa também trouxeram ganhos significativos aos sujeitos, além de apontar para novas possibilidades e futuras investigações.

Palavras-chave:

Números irracionais. Aprendizagem em matemática. Formação de professores. Matemática no ensino superior.

Abstract

The literature concerning the teaching and learning of irrational numbers points to shortcomings and inadequacies related to this issue, both in textbooks and in the training of mathematics teachers, with a view to their work in basic education. From this scenario, we conducted a qualitative research in mathematics education, qualitative, with intervention in the classroom. The objective of this doctoral work was to diagnose conceptual images of rational and irrational numbers brought by undergraduate students in mathematics, as well as analyze the movements of these images during the research. Data were collected in a group of undergraduate students initiating a course in mathematics teacher education at the Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes – Campus Vitoria, during the year 2014. The theoretical framework used was the concept image (TALL; VINNER, 1981), instrumental understanding and relational understanding (SKEMP, 1976), prototypes examples and associations with relevant and irrelevant attributes (HERSHKOWITZ, 1994). Data analysis pointed to the precariousness of student's knowledge of irrational numbers, especially in relation of prototypes and examples of an understanding - if at all - instrumental of the subject. The educational intervention was found to be cognitively able to unbalance the licensees, as well as contribute to the awareness of their own skills and limitations. The movement of conceptual images achieved by the participants also brought significant gains for the subjects, as well as pointed to new possibilities and future investigations.

Keywords:

Irrational numbers. Mathematics learning. Teacher training. Mathematics at university level.

Lista de figuras

Lista de quadros

Lista de tabelas

Lista de siglas e abreviações

ANPED	Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação
APM	Associação de Professores de Matemática (Portugal)
BBC	British Broadcasting Corporation
Bolema	Boletim de Educação Matemática (Unesp/Rio Claro)
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
ENADE	Exame Nacional de Desempenho de Estudantes
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
ENIAC	Electronic Numerical Integrator and Computer
FEUSP	Faculdade de Educação da USP
GEPEM	Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática (UFRRJ)
ICMI	International Commission on Mathematical Instruction
Ifes	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Inep	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
MEC	Ministério da Educação
MMM	Movimento Matemática Moderna
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
PBO	Princípio da Boa Ordenação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PME	Psychology of Mathematics Education

PNLD	Plano Nacional do Livro Didático
PNLDEM	Plano Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio
PPGE/UFES	Programa de Pós-Graduação em Educação da UFES
PUC	Pontifícia Universidade Católica
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SBHMAT	Sociedade Brasileira de História da Matemática
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SEB/MEC	Secretaria de Educação Básica do MEC
SEF/MEC	Secretaria de Educação Fundamental do MEC
SEMT/MEC	Secretaria de Educação Média e Tecnológica do MEC
SISU	Sistema de Seleção Unificada
TLCE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
UFES	Universidade Federal do Espírito Santo
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UFRPE	Universidade Federal Rural de Pernambuco
UFRRJ	Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Unesp	Universidade Estadual Paulista
Unicap	Universidade Católica de Pernambuco
UPE	Universidade de Pernambuco
USP	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

A ideia de realizar uma pesquisa a respeito de números irracionais em nível de doutorado desenvolveu-se a partir de uma proposta inicial que focalizava um número irracional bem específico, o número de Eüler (e). No decurso de doze anos lecionando disciplinas de pré-cálculo e cálculo diferencial e integral, deparei-me diversas vezes com alunos que apresentavam algum tipo de dificuldade em relação às funções exponenciais e logarítmicas. Percebi ainda que, paralelamente às dificuldades operatórias e conceituais referentes a essas funções, existia uma grande curiosidade dos alunos a respeito do número e, como "por que $2{,}71828182846$ ...?", "por que não outro número qualquer"? "O que garante que esse número é irracional"? Dentre outras.

Nesse longo processo, as dúvidas e curiosidades dos alunos a respeito do número e levou-me a questionar meus próprios conhecimentos a respeito desse número. Comecei a pensar em como essas questões foram-me ensinadas enquanto aluno, e algumas indagações ganharam corpo. Como a maior parte da minha experiência docente até aquele momento estava no ensino superior, fiquei curioso em entender como o número de Eüler era ensinado na educação básica. A busca por respostas em livros didáticos do ensino médio, a leitura de artigos científicos e da legislação referente a esse nível de ensino, bem como algumas conversas com colegas professores culminou na elaboração do meu anteprojeto de doutorado, apresentado no ano de 2011 ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo (PPGE/UFES).

A principal hipótese desse anteprojeto era a seguinte: uma abordagem consistente do número e, que explora, interliga e resgata vários conceitos e práticas de matemática, constitui excelente oportunidade de aprendizagem dessa disciplina para estudantes do ensino médio. Implicitamente, acreditava também que a antecipação do assunto à educação básica, comumente tratado com mais detalhes apenas no ensino superior, também poderia trazer benefícios futuros, contribuindo para melhor compreensão dos alunos no que se refere às funções exponenciais e logarítmicas.

Ao longo dos dois primeiros anos do doutorado, pude refletir a respeito do que pretendia pesquisar, agora auxiliado por novas leituras propostas pelos professores do PPGE/UFES e pela minha orientadora, além das discussões com colegas de linha de pesquisa nos encontros presenciais e à distância[1]. Nesse novo contexto, passei a suspeitar que as questões que me incomodavam referentes ao ensino do número *e* eram decorrentes de dificuldades de cunho mais geral. Por conta disso, decidi ampliar o foco da pesquisa para o ensino de números irracionais, trabalhando com uma hipótese inicial de que as dificuldades constatadas no ensino superior citadas anteriormente têm relação com o tratamento breve e superficial conferido ao assunto desde suas primeiras apresentações na escola básica. Assim, abria-se uma nova porta para um novo mundo, repleto de nuances e dimensões inexploradas e não imaginadas por nós[2] anteriormente.

Esse alargamento do horizonte de pesquisa nos levou a procurar novas fontes e ver que os problemas na aprendizagem do número *e* percebidos na minha prática docente também se mostravam presentes em relação aos números irracionais como um todo, principalmente na educação básica. Na educação superior, mais especificamente quando se trata da formação de professores de matemática, entendemos que a esse problema junta-se outro. A abordagem formal conferida aos números reais nesse nível de ensino – e consequentemente aos irracionais – não capacita o professor para atuar na educação básica (FISCHBEIN; JEHIAN; COHEN, 1995; IGLIORI; SILVA, 1998; DIAS, 2002; REZENDE, 2003; PENTEADO, 2004; LIMA, 2001; SOUTO, 2010; POMMER, 2012; SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1999; ZAZKIS; SIROTIC, 2004; SIROTIC; ZAZKIS, 2007b; BERGÉ, 2008; MOREIRA; FERREIRA, 2012).

Além de estar presente em todos os níveis de ensino, do fundamental ao superior, números irracionais também é um assunto frequente nos livros didáticos, em documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, 2000), nas matrizes de referência para o Sistema de Avaliação da Educação Básica - SAEB (BRASIL, 2008b), Prova Brasil (BRASIL, 2011b) e Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM (BRASIL, 2009). A preocupação com questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem desses números também se faz presente no meio acadêmico, tendo sido objeto de trabalhos apresentados em congressos e artigos publicados em revistas científicas, bem como de

[1] Os dois primeiros anos do doutorado foram os anos de 2012 e 2013. Nesse período, além das aulas presenciais com minha orientadora e com outros professores do PPGE, participei juntamente com meus colegas de linha de pesquisa de encontros à distância semanais coordenados pela minha orientadora. As aulas e, especialmente esses encontros, foram fundamentais para uma série de ideias que tive para aplicar nos dois estudos piloto que realizei em 2013 e para o Estudo Principal realizado em 2014.

[2] Ao longo de todo o trabalho, foi utilizada a primeira pessoa do plural em relação a situações vividas, reflexões ou decisões tomadas em conjunto pelo autor e sua orientadora. Experiências pessoais que se referem exclusivamente ao autor foram tratadas na primeira pessoa do singular.

pesquisas nacionais e estrangeiras. No Brasil, surgem trabalhos em nível de mestrado/doutorado relacionados aos números irracionais a partir da segunda metade da década de 1990[3].

Os resultados dessas pesquisas apontam para dificuldades e/ou insuficiências relacionadas principalmente à três aspectos: conhecimentos de professores e alunos (DIAS, 2002; FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995; IGLIORI; SILVA, 1998; REZENDE, 2003; SILVA; PENTEADO, 2009), tratamento dado ao tema pelos livros didáticos (LIMA, 2001; POMMER, 2012; SOUTO, 2010) e formação de professores de matemática (BERGÉ, 2008; MOREIRA; FERREIRA, 2012; SIROTIC; ZAZKIS, 2007b; SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1999; ZAZKIS; SIROTIC, 2004). As dificuldades e/ou insuficiências relacionadas ao ensino e à aprendizagem de números irracionais relatadas por essas pesquisas nos motivam a pensar que o assunto é atual e relevante, justificando a realização desta pesquisa.

Dentre as várias possbilidades de contribuição em relação ao ensino de números irracionais, nossa proposta de trabalho situou-se na formação de professores de matemática. Entendemos a formação de professores como um processo apropriado para começar a romper um ciclo vicioso que, a nosso ver, encontra-se estabelecido: o egresso da educação básica ingressa na licenciatura sem uma conceituação adequada de números irracionais → o recém-formado professor sai da licenciatura em matemática sem uma formação que lhe forneça subsídios para ensinar números irracionais de forma adequada[4] na educação básica → o egresso da educação básica ingressa na licenciatura sem uma conceituação adequada de números irracionais... e assim fecha-se o ciclo. Retornamos à questão do ciclo vicioso mais adiante.

Ao todo, três turmas participaram de três momentos distintos desta pesquisa. O primeiro momento, que chamamos de Pequeno Estudo Diagnóstico (Apêndice G), foi realizado em 2012 com uma turma de quarto período de licenciatura em matemática do Ifes – Campus Vitória[5]. O segundo momento, que chamamos de Estudo Exploratório (Apêndice H), foi

[3] Soares, Ferreira e Moreira (1999) afirmam que, após a realização de um extenso levantamento bibliográfico sobre o assunto, foram encontrados apenas trabalhos produzidos no exterior. Também não temos conhecimento de trabalhos de mestrado ou doutorado produzidos no Brasil antes da década de 1990 que sejam especificamente voltados às questões relativas ao ensino dos números irracionais.

[4] Explicamos o que entendemos por forma adequada de ensino dos irracionais no capítulo 1.

[5] O Instituto Federal do Espírito Santo conta hoje com dezessete campi em funcionamento e outros três em fase de implantação. Nossa pesquisa foi realizada no Campus Vitória, e, por uma questão de simplificação da escrita, sempre que escrevemos Ifes, leia-se Ifes – Campus Vitória.

realizado com a turma de ingressantes de licenciatura em matemática do Ifes no ano de 2013. O terceiro momento, chamado de Estudo Principal, foi realizado com a turma de ingressantes da licenciatura em matemática do Ifes de 2014. Mais detalhes a respeito dos sujeitos, dos instrumentos e procedimentos de cada um desses momento são fornecidos nos capítulos 6 e 7.

Por ora, esse breve panorama já é suficiente para apresentar os objetivos de nossa pesquisa, que foram:

- ✓ Diagnosticar conhecimentos prévios a respeito de números irracionais trazidos pelos alunos ingressantes;
- ✓ Realizar uma intervenção pedagógica compromissada com o enriquecimento das imagens conceituais e com a preparação do licenciando para discutir o assunto de uma forma adequada na educação básica;
- ✓ Analisar as movimentações das imagens conceituais dos participantes ao longo da pesquisa.

Para alcançar esses objetivos, buscamos responder às seguintes perguntas:

- ✓ O que sabem os alunos ingressantes de uma turma de licenciatura em matemática do Ifes a respeito de número irracional?
- ✓ Que associações ou imagens foram construídas por esses alunos a respeito desses números?
- ✓ Quais dessas imagens não contribuem para a aprendizagem de números irracionais?
- ✓ Quais as contribuições de uma intervenção pedagógica planejada para o enriquecimento das imagens conceituais de números irracionais dos licenciandos?
- ✓ Como as imagens conceituais se movimentaram ao longo da pesquisa?

O trabalho foi dividido em sete capítulos. No capítulo 1, pontuamos algumas questões relacionadas ao ensino de números irracionais e estabelecemos o que consideramos uma abordagem adequada do assunto para a educação básica. No capítulo 2, tratamos de alguns aspectos teóricos como definição, representação e algumas propriedades dos números irracionais. No capítulo 3, fazemos uma breve incursão pela história e filosofia no que diz respeito ao desenvolvimento do conceito de número irracional. No capítulo 4, fazemos uma revisão da literatura. No capítulo 5, apresentamos os referenciais teóricos que darão suporte à análise dos dados. No capítulo 6, apresentamos o percurso metodológico da nossa pesquisa e descrevemos a metodologia utilizada na elaboração e aplicação dos instrumentos de pesquisa. No capítulo 7, apresentamos e analisamos os dados produzidos. Por fim, encerramos o trabalho com as considerações finais, apontamentos e reflexões.

No primeiro capítulo, discutimos algumas questões que deixamos em aberto nos parágrafos anteriores, e que são centrais em nossa proposta de trabalho. O que entendemos como uma forma adequada de ensinar números irracionais na educação básica? Pensando no licenciando em matemática, como capacitá-lo para ensinar números irracionais de forma adequada na educação básica? Para tanto, conduzimos a discussão a partir de trabalhos acadêmicos, documentos oficiais, livros didáticos, matrizes e provas de avaliação da educação nacional em relação ao ensino, a aprendizagem e a avaliação de números irracionais, tanto na educação básica quanto na licenciatura em matemática.

Contudo, antes de terminar esta apresentação, uma palavra ao leitor. Procuramos organizar os capítulos de maneira a tornar a leitura acessível para uma pessoa com conhecimentos básicos de matemática, equivalentes ao que se aprende nessa disciplina até o ensino médio. De maneira geral, recomendamos que os capítulos sejam lidos na ordem em que se apresentam. Porém, para os leitores menos familiarizados com as definições e os conceitos matemáticos que aqui trazemos, ou para aqueles que desejam rever seus conhecimentos, recomendamos seguir um itinerário de leitura alternativo. Nesses casos, o capítulo 2 pode ser lido antes do capítulo 1. O capítulo 3, que trata de aspectos históricos e filosóficos dos números irracionais, pode ter sua leitura postergada sem maiores prejuízos por aqueles que desejarem seguir direto para os capítulos que tratam mais especificamente da pesquisa que realizamos. Contudo, sua leitura é indispensável para ampliar a visão do leitor em relação ao número irracional, além de formar uma base de conhecimentos que podem contribuir para reflexões a respeito de dificuldades inerentes ao assunto, cuja origem tem relação com a história do surgimento e desenvolvimento do conceito de número irracional.

Capítulo 1 – O ensino de números irracionais

A Ciência só conhece a relação entre as coisas; não as próprias coisas.

Henri Poincaré

No percurso deste trabalho, ao preocuparmo-nos com o ensino de números irracionais na licenciatura, surgiu a necessidade de estabelecer, de forma clara e direta, o que consideramos um ensino ‘adequado’ dos números irracionais na educação básica. Em diversos momentos, houve a necessidade de criar uma espécie de referencial, algo em que pudéssemos nos apoiar para fazer certas colocações. Longe de estabelecer fórmulas e engessar procedimentos e propostas de ensino, nossa intenção foi discutir algumas sugestões dos documentos oficiais e mostrar que algumas práticas, abordagens e atividades relacionadas aos números irracionais podem não contribuir para a aprendizagem desse assunto na educação básica.

Para tanto, procuramos responder às seguintes perguntas com este capítulo:

- O que dizem os documentos oficiais que regulam a educação básica a respeito dos números irracionais? Existe alguma recomendação de como abordar esse assunto?
- Como os livros didáticos tratam os números irracionais na educação básica? Eles estão de acordo com as recomendações dos documentos oficiais?
- Como os números irracionais poderiam ser tratados em um curso de licenciatura em matemática visando o futuro trabalho do professor na educação básica?

1.1 – Na educação básica

Segundo orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental (BRASIL, 1998), o assunto números irracionais deve ser abordado no 4º ciclo do ensino fundamental, isto é, 7ª e 8ª séries, o que hoje seria equivalente ao 8º e 9º anos desse nível de ensino[6]. A importância dos irracionais aparece mais claramente em dois momentos nesse documento, na ampliação da noção de número e no despertar da curiosidade dos alunos sobre questões relacionadas ao infinito, como a infinidade de números irracionais ou a representação de π com mais de um bilhão de casas decimais

[6] Publicada em 6 de fevereiro de 2006, a Lei 11.274 ampliou a duração do ensino fundamental para 9 anos e tornou obrigatória a matrícula aos 6 anos de idade. Os sistemas educacionais tiveram um prazo até 2010 para se adequarem à Lei.

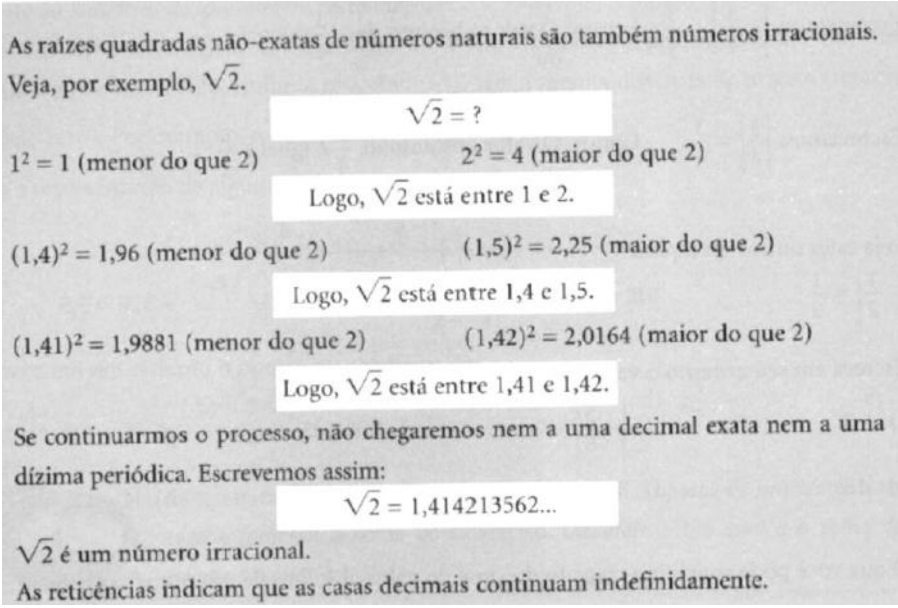
sem que apareça um período. Em relação à abordagem do assunto, o documento recomenda: i) não seguir por um caminho formal; ii) evitar a associação de número irracional com radicais; iii) discutir sobre a notação decimal infinita e não-periódica dos irracionais e a aproximação de um irracional por racionais; iv) discutir a necessidade e as consequências do arredondamento de um número com infinitas casas decimais.

Por 'evitar a associação de número irracional com radicais', entendemos que se trata de não limitar a visão de número irracional do aluno, de não restringir seu conhecimento a respeito de números irracionais a um conhecimento a respeito de radicais. Pensamos que isso pode começar a ser feito ao introduzir o tema, especialmente no cuidado com a seleção dos exemplos e contraexemplos que serão apresentados e dos exercícios que serão propostos. Deve-se optar por exemplos, contraexemplos e exercícios variados incluindo não apenas radicais, mas também representações decimais e casos especiais como e, π e φ. No parágrafo seguinte, exemplificamos uma situação que, a nosso ver, enfatiza os radicais, e que pode fazer com que o aluno associe número irracional com raízes, especificamente com raízes quadradas.

Dante (2005) inicia a seção dedicada aos números irracionais com uma pequena historinha, que apresentamos resumidamente. Por meio de uma pesquisa na Internet, uma aluna fica sabendo que os matemáticos gregos sabiam que alguns problemas não podiam ser resolvidos com números racionais e, com o tempo, surgiu a necessidade de outro tipo de número. A aluna então resolve perguntar para sua professora se existe número que não é racional e obtém a resposta *sim, alguns são chamados números irracionais* (p. 85). Em seguida, são apresentados dois exemplos: π e $\sqrt{2}$, sendo que para o $\sqrt{2}$ é realizada uma sequência de aproximações sucessivas com o objetivo de mostrar que se trata de um número irracional (ver Figura 1). Finalizando a seção, são propostos dois exercícios (ver Figura 2).

Tanto nos exemplos quanto nos exercícios propostos, existe uma predominância quase absoluta de raízes quadradas, já que o único item diferente é o item 'a' do exercício proposto, que contém π (Figura 2). Além disso, o uso da calculadora, da forma como foi proposto no exercício, também não contribui para discutir a representação decimal do número irracional, por vários motivos (Figura 2).

Figura 1 - A suposta irracionalidade de raiz quadrada de dois


As raízes quadradas não-exatas de números naturais são também números irracionais.
Veja, por exemplo, $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2} = ?$

$1^2 = 1$ (menor do que 2) $2^2 = 4$ (maior do que 2)

Logo, $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2.

$(1,4)^2 = 1,96$ (menor do que 2) $(1,5)^2 = 2,25$ (maior do que 2)

Logo, $\sqrt{2}$ está entre 1,4 e 1,5.

$(1,41)^2 = 1,9881$ (menor do que 2) $(1,42)^2 = 2,0164$ (maior do que 2)

Logo, $\sqrt{2}$ está entre 1,41 e 1,42.

Se continuarmos o processo, não chegaremos nem a uma decimal exata nem a uma dízima periódica. Escrevemos assim:

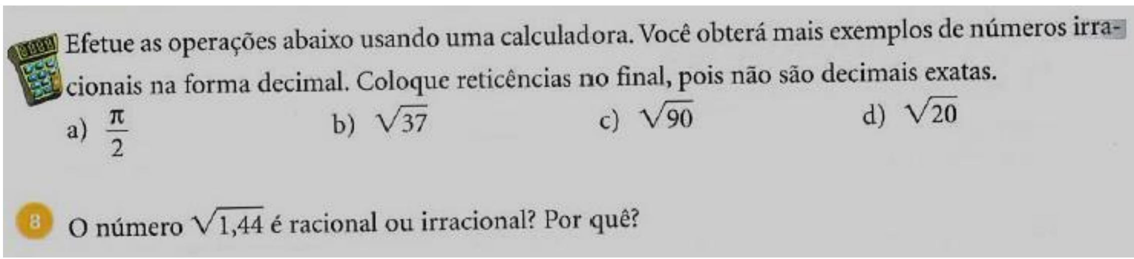
$\sqrt{2} = 1,414213562...$

$\sqrt{2}$ é um número irracional.
As reticências indicam que as casas decimais continuam indefinidamente.

Fonte: DANTE (2005, p. 86)

No item ‘a’, por exemplo (Figura **2**), caso a calculadora utilizada não disponha de uma tecla ‘π’, qual valor se espera que o aluno digitará? 3,14? 3,1416? Qualquer valor que seja digitado pelo aluno será um valor racional e, portanto, não será o valor de π. Como se espera que o aluno obtenha um número irracional a partir da divisão de dois números racionais? Caso a calculadora disponha de uma tecla específica para π – como é bastante comum nas calculadoras científicas – isto é, uma tecla especial que traz o valor desse número em sua memória, ainda assim, pela limitação do visor do aparelho, o que se poderá enxergar ao final da operação será um número racional. A situação parece ser resolvida pela frase *coloque reticências ao final, pois não são decimais exatas* (DANTE, 2005, p. 86), mas, é justamente aí que o autor do livro ou o professor deveriam problematizar a situação (ver Figura **2**).

Figura 2 - Exemplos de exercícios com irracionais


Efetue as operações abaixo usando uma calculadora. Você obterá mais exemplos de números irracionais na forma decimal. Coloque reticências no final, pois não são decimais exatas.

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\sqrt{37}$ c) $\sqrt{90}$ d) $\sqrt{20}$

8 O número $\sqrt{1,44}$ é racional ou irracional? Por quê?

Fonte: DANTE (2005, p. 86)

Na nossa avaliação, conduzir uma introdução aos números irracionais conforme a situação discutida anteriormente favorece uma associação desses com os radicais, especificamente com a raiz quadrada. Em um exercício como o que apresentamos na **Figura 2**, a representação decimal, que deveria ser um importante contraponto para evitar a associação exclusiva com radicais, fica em segundo plano, não é explorada, aparece sem maiores explicações e de modo aligeirado, o que vai de encontro à outra recomendação dos PCN, que é justamente 'discutir sobre a notação decimal infinita e não-periódica dos irracionais'.

De acordo com nossa experiência docente, o argumento utilizado em Dante (2005) é muito comum e muito frequente nos livros didáticos da educação básica. Por meio da calculadora ou de procedimento semelhante ao da Figura 1, apresenta-se $\sqrt{2}$ como um número cuja representação decimal é infinita e não-periódica, e, como consequência, afirma-se tratar de um número irracional. Esse tipo de procedimento não contribui para a construção do conceito de número irracional, por pelo menos três motivos. Primeiro, ele se apóia exclusivamente na representação decimal após um número finito de operações, e não é algo trivial convencer os alunos que essa representação não será periódica. Segundo, a representação infinita e não-periódica é algo muito diferente do que os alunos consideram como número. Terceiro, o procedimento deveria usar o argumento contrário: mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional (ver diversas possibilidades no Apêndice B - Demonstrações da irracionalidade de $\sqrt{2}$), e, a partir daí, concluir que a representação decimal deve ser infinita e não-periódica, pois caso contrário, isto é, se fosse finita ou periódica, tratar-se-ia de um número racional. O trecho a seguir reforça nosso pensamento.

> Examinando o desenvolvimento decimal de um número, nunca podemos garantir que ele seja irracional. Mesmo o número π, que o livro diz ter sido calculado com 1 bilhão de casas decimais (na verdade já são 5 bilhões), poderia ser racional, com um período muito grande. Aqui poderia ser feito um breve comentário sobre o método matemático. Um raciocínio simples mostra que não existem $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $p^2 = 2q^2$, logo $\sqrt{2}$ não é racional. Daí decorre que a expressão 1,414213 ... não é periódica. Este é o verdadeiro argumento. O argumento contrário não é válido (LIMA, 2001, p. 269).

Após apresentar a representação decimal infinita e não-periódica como uma consequência lógica ao fato de que existem números irracionais, pode-se discutir a necessidade e as consequências do arredondamento de um número com infinitas casas decimais e a aproximação de um irracional por racionais. São temas próximos que podem ser abordados em atividades como, por exemplo, as operações com números irracionais quando representados em notação decimal. Como seria realizar operações com expressões decimais infinitas, usando-as integralmente, se as representações decimais organizam-se da esquerda para a direita enquanto as operações em geral são desenvolvidas da direita para a esquerda? (LIMA; CARVALHO; WAGNER; MORGADO, 1996, p. 66). Por exemplo, como seria realizar a soma

$$\begin{array}{r} 1{,}41421356\ldots \\ +\ 1{,}73205080\ldots \\ \hline ? \end{array}$$

A solução é fixar um número n de casas decimais em cada um dos números anteriores, o que o PCN chama de arredondamento, e realizar a soma. Quanto maior n, melhor a aproximação para a soma. O mesmo vale para as operações de subtração, multiplicação e divisão. Uma das consequências desse arredondamento é que um erro sempre será cometido, e, portanto, também será preciso discutir que erro é esse, se é grande ou pequeno, se é admitido ou não, de acordo com a aplicação.

Das quatro recomendações dos PCN referentes à abordagem dos números irracionais, 'não seguir por um caminho formal' é a menos específica de todas e, por isso mesmo, a mais delicada, pois pode ser interpretada de divsersas formas. Estamos nos referindo especificamente à expressão 'caminho formal'. O que é um 'caminho formal'? Se for entendido como um caminho que valida suas afirmações apenas por meio de demonstrações, como é comum na matemática praticada no ensino superior, pode-se entender a recomendação como 'não utilizar demonstrações', e o resultado pode ser desastroso. Como exemplo temos o procedimento adotado na Figura 1, onde $\sqrt{2}$ é considerado irracional como consequência do suposto aparecimento de uma representação infinita e não-periódica, resultado da tentativa de encontrar um número cujo quadrado é 2. O mais apropriado seria fazer a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e, como consequência, convencer-se de que a representação desse número é infinita e não-periódica. Em alguns casos, uma pequena demonstração, desde que sua compreensão esteja ao alcance da turma, é um procedimento mais apropriado do que a opção por não fazê-la.

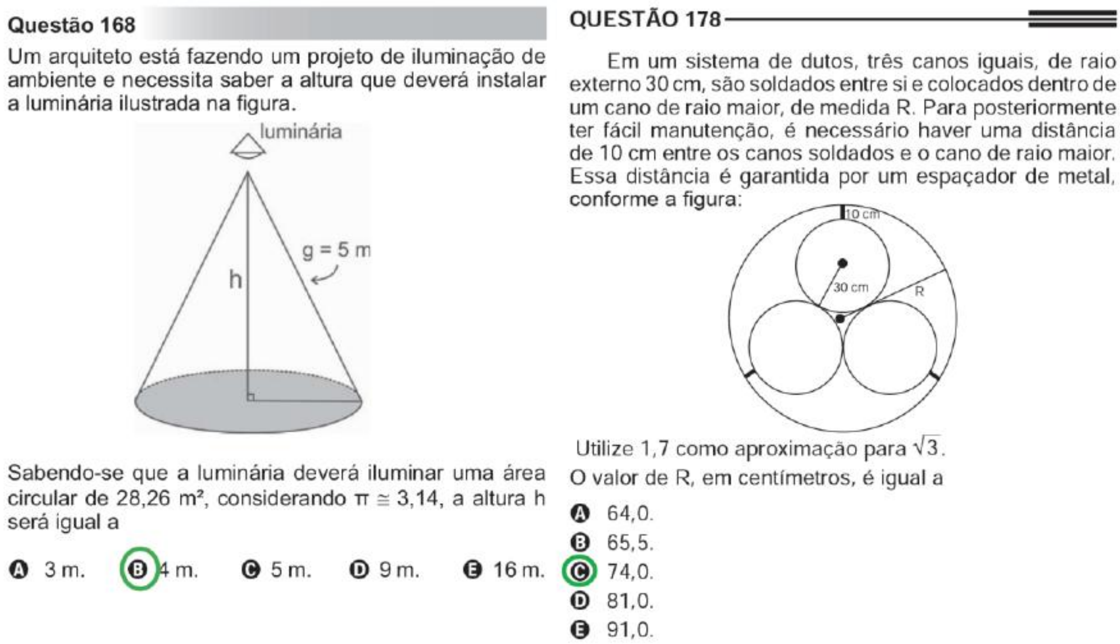
Entendemos a recomendação de 'não seguir por um caminho formal' como uma sugestão de cunho geral, que inclui todo o tratamento que será dispensado ao assunto. Em termos práticos, pensamos que ela sugere, por exemplo, que o professor utilize demonstrações de teoremas e proposições em suas aulas apenas quando forem indispensáveis e, mesmo quando o fizer, que o nível de abstração e rigor seja compatível com a educação básica. Pensamos também que se deve fazer a opção por exemplos, contraexemplos, aplicações e reflexões que valorizem mais a intuição do que o rigor, sem abandonar, contudo, pequenas demonstrações e o cuidado com a precisão da linguagem que é própria do conhecimento matemático.

Além dos PCN, também analisamos documentos como a matriz da Prova Brasil para a 8ª série (atual 9º ano) do ensino fundamental (BRASIL, 2011b), os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2000), as matrizes para as provas do SAEB (BRASIL, 2008b) e do ENEM (BRASIL, 2009). Não encontramos referência direta aos números irracionais em nenhum desses documentos, sendo possível inferir sua presença apenas nas diretrizes relacionadas aos números reais. No que diz respeito à prova do ENEM, entendemos que o conteúdo de suas questões também exerce certa influência balizadora no ensino médio, devido à grande importância que o exame adquiriu nos últimos anos em virtude do número crescente de universidades que vem utilizando seu resultado como critério (único, ou parcial) de admissão.

Sendo assim, fizemos um levantamento das questões do ENEM que abordaram números irracionais no período 2009 – 2013 e, em seguida, resolvemos as mesmas. Ao final, produzimos uma tabela com as habilidades que utilizamos para resolver as questões referentes a esses números (ver Apêndice A). Constatamos que não houve uma única questão envolvendo números irracionais que abordasse qualquer aspecto conceitual desse assunto. Ao invés disso, todas as questões que envolviam números irracionais propostas no período analisado o faziam de forma bastante superficial, exigindo apenas um conhecimento procedimental, como aplicação direta de fórmulas, utilização de aproximações racionais para números irracionais sem qualquer discussão, utilização de propriedades de radiciação, entre outras. Veja dois exemplos na Figura 3.

As questões do ENEM como exemplificado na Figura 3, não avaliam, por exemplo, conhecimentos relativos à representação decimal dos irracionais, como a dízima infinita e não-periódica, a aproximação dos irracionais pelos racionais e as consequências dessas aproximações, como sugerem os PCN. Na verdade, estão bem longe disso, pois para resolvê-las não é preciso saber nem mesmo que π ou $\sqrt{3}$ são números irracionais. Basta aplicar os valores aproximados sugeridos pelas próprias questões às fórmulas apropriadas. Pela importância do ENEM e pelo fato de que os tipos de questões desse exame podem servir de referência para práticas escolares de ensino, consideramos que a forma como os números irracionais foram abordados nas questões das provas que analisamos apontam para um caminho diametralmente oposto ao que é sugerido pelos PCN.

Figura 3 – Exemplos de questões do ENEM que abordam números irracionais


Questão 168

Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura.

Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de 28,26 m², considerando $\pi \cong 3,14$, a altura h será igual a

A 3 m. B 4 m. C 5 m. D 9 m. E 16 m.

QUESTÃO 178

Em um sistema de dutos, três canos iguais, de raio externo 30 cm, são soldados entre si e colocados dentro de um cano de raio maior, de medida R. Para posteriormente ter fácil manutenção, é necessário haver uma distância de 10 cm entre os canos soldados e o cano de raio maior. Essa distância é garantida por um espaçador de metal, conforme a figura:

Utilize 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O valor de R, em centímetros, é igual a

A 64,0.
B 65,5.
C 74,0.
D 81,0.
E 91,0.

(a) **(b)**

Fonte: (a) BRASIL (2010a) (b) BRASIL (2011a)

Além das raízes, outro exemplo muito comum de número irracional na educação básica é o número π, que, em geral, aparece pela primeira vez nas últimas séries do ensino fundamental. Esse número também é fonte de muitos equívocos e abordagens que consideramos inadequadas, conforme mostramos a seguir. Começamos mais uma vez com o que dizem os PCN a respeito desse número.

> Outro irracional que pode ser explorado no quarto ciclo é o número π. De longa história e de ocorrência muito frequente na Matemática, o número π nessa fase do aprendizado aparece como a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro. Essa razão, sabe-se, não depende do tamanho da circunferência em virtude do fato de que duas circunferências quaisquer são figuras semelhantes (BRASIL, 1998, p. 106).

Buscando compreender como essas orientações poderiam ser postas em prática no ensino, consultamos alguns livros didáticos de matemática direcionados para os 8º/9º anos do ensino fundamental, escritos por autores brasileiros renomados. Observamos três pontos: a presença de exemplos utilizando π, a presença de outros exemplos de números irracionais que não sejam relacionados a π e a forma como esse número é apresentado.

Primeiro, constatamos que, de fato, é muito frequente a utilização de π como um exemplo de número irracional (DANTE, 2002; IMENES; LELLIS, 2012; GIOVANNI JR.; CASTRUCCI, 2009; LEONARDO, 2010). Segundo, também verificamos que pode ocorrer que π seja o **único** exemplo apresentado de número irracional que não é uma raiz quadrada (DANTE, 2002). Terceiro, a forma como π é trabalhado pode trazer alguns problemas.

Evidentemente, apresentar π como exemplo de número irracional é algo indispensável. Além de ser uma constante importante da matemática, que aparece em diversas situações e contextos diferentes, trata-se de um exemplo de número irracional transcendente (ver Capítulo 2 – Números irracionais: aspectos teóricos). Porém, se esse for o único exemplo de número irracional diferente de raiz quadrada a ser oferecido aos alunos, provavelmente não será suficiente para evitar uma possível associação dos números irracionais com os radicais, de acordo com o que discutimos anteriormente. De acordo com nossa experiência docente, é isso que acontece, ou, até algo mais prejudicial para o aluno. A maioria dos livros e professores apresenta um número muito pequeno de exemplos de números irracionais e, em geral, nenhum contraexemplo. Insistimos na importância do contraexemplo na construção do conceito de número irracional. É por meio do par exemplo – contraexemplo que o aluno relaciona diversas propriedades do conceito, apropriando-se do mesmo.

A questão da abordagem de π é mais delicada e, para tanto, trazemos um exemplo onde esse número é apresentado como a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência (como sugerido pelos PCN) a partir de medidas realizadas em objetos circulares. É preciso que se discuta que, tanto com uma moeda quanto com uma lata de refrigerante (ver Figura 4), o resultado obtido será um número racional, não apenas nesse caso, mas para quaisquer experiências dessa natureza que realizemos.

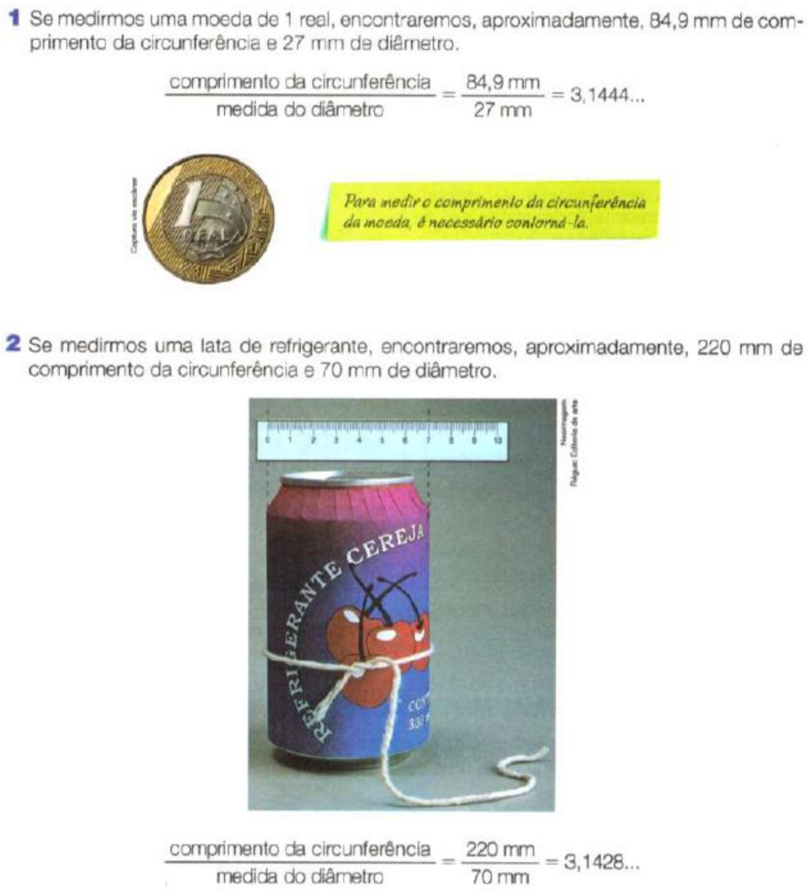
O que se pretende mostrar com a realização desse tipo de experiência – que a razão entre o comprimento e o diâmetro de objetos circulares é uma constante irracional – traz consigo duas dificuldades intrínsecas. A primeira é mostrar que se trata de uma constante, pois, para cada objeto utilizado, a medida obtida é ligeiramente diferente. A segunda dificuldade é mostrar que é irracional, já que qualquer instrumento de medida sempre fornecerá um número racional para o comprimento e para o diâmetro dos objetos, obtendo-se assim um quociente de números racionais, que é um número racional. Os PCN alertam para essa dificuldade, de acordo com o trecho transcrito a seguir:

> Deve-se estar atento para o fato de que o trabalho com as medições pode se tornar um obstáculo para o aluno aceitar a irracionalidade do quociente entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, uma vez que ele já sabe que as medições envolvem apenas números racionais (BRASIL, 1998, p. 107).

Porém, a solução encontrada para essa situação pode camuflar todas essas dificuldades. Em referência ao experimento proposto na **Figura 4**, os autores seguem escrevendo:

> Nos dois exemplos, ao dividir o comprimento da circunferência pela medida do diâmetro (na mesma unidade), encontramos sempre um número maior do que 3 (aproximadamente 3,14). Pode-se verificar que esse fato acontece para qualquer circunferência, ou seja, dividindo-se a medida do comprimento de uma circunferência pela medida do seu diâmetro, obtém-se sempre o mesmo valor. Esse valor constante representa um número muito importante em Matemática, o número pi, representado pela letra grega π. Então, $\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \pi$ e $\pi = 3{,}14159265\ldots$ Por ser um número irracional, nas aplicações utilizamos uma aproximação do valor de π, em geral 3,14 (GIOVANNI JR.; CASTRUCCI, 2009, p. 26–27).

Figura 4 - Exemplo de abordagem de π em livros didáticos



Fonte: GIOVANNI JR.; CASTRUCCI (2009, p. 26)

Outro problema que pode decorrer desse tipo de abordagem empírica do número π, e que se estende aos irracionais de forma geral, é a questão da coerência com a definição proposta. As definições mais frequentes para os números irracionais na educação básica são: 1) números que não podem ser escritos/representados como razão de dois números inteiros e 2) números cuja representação decimal é infinita e não-periódica. Se a definição 1 é utilizada, como se espera obter π por meio da razão de duas medidas racionais, como na experiência com a moeda ou com a lata de refrigerante? (**Figura 4**). Por outro lado, se a definição 2 é empregada, como se espera obter π a partir da razão de duas decimais periódicas? Essas questões precisam ser discutidas quando se realizam experiências como a que ilustramos na Figura 4, além de outras questões que também poderiam ser trabalhadas logo na introdução de π, como razão, proporção, proporcionalidade de figuras, o comprimento da circunferência, a representação decimal infinita, além, é claro, do próprio conceito de número irracional.

Em síntese, a abordagem dos números irracionais sugerida pelo PCN, acrescidas de nossas considerações, inclusive no que se refere ao que não se deve fazer – como discutido nos casos de $\sqrt{2}$ e π – é o que chamaremos de forma adequada para desenvolver o assunto na educação básica. Todavia, não empregamos a palavra 'adequada' com a intenção de estabelecer um padrão a ser seguido. Há diversas formas de proceder e muito o que avançar a partir de trabalhos acadêmicos, leituras diversas e compartilhamento de experiências de sala de aula (ver Capítulo 4 – Números irracionais: o que dizem as pesquisas?). O nosso intuito foi estabelecer uma abordagem minimamente satisfatória no que diz respeito à coerência entre definição e conceito, bem como no equilíbrio entre intuição e rigor matemático compatíveis com a educação básica. Além disso, também empregamos a palavra 'adequada' no sentido de que a abordagem evite contradições e contribua para posteriores avanços, por exemplo, no ensino superior.

Por fim, entendemos ainda que, o que foi discutido nessa seção também vale para o ensino médio, quando os alunos têm o segundo contato com o assunto. Logo nos primeiros capítulos dos livros didáticos destinados a 1ª série do ensino médio, é frequente a presença de uma revisão dos conjuntos numéricos, um momento que julgamos oportuno para avançar um pouco mais em relação ao que foi discutido nos últimos anos do ensino fundamental. Porém, a leitura de Lima (2001) e Souto (2010) nos permite dizer que essa revisão no ensino médio não representa avanços significativos em relação ao que foi visto no ensino fundamental, porque muitas vezes repete os mesmos equívocos e formas inadequadas de abordagem dos números irracionais discutidos anteriormente.

1.2 – Na licenciatura em matemática

Nas disciplinas iniciais da licenciatura em matemática, como fundamentos de matemática e cálculo diferencial e integral, os estudantes provavelmente têm novo contato com os números irracionais. As disciplinas de fundamentos podem ser encaradas como revisão, reforço ou aprofundamento de conceitos da matemática elementar como números e funções, além de, em alguns casos, também cumprir o papel de preparação para o cálculo diferencial e integral[7]. Em qualquer desses casos, pensamos que dificilmente os números irracionais estarão completamente ausentes, ainda que seja muito difícil precisar o nível de profundidade com que serão tratados. Isso evidentemente dependerá do programa da disciplina, do projeto do curso e, em última instância, do professor. No cálculo diferencial e integral, porém, esse contato com os números irracionais é secundário e quase sempre indireto, porque o objetivo dessa disciplina é estudar conceitos novos como limites, derivadas e integrais. Concordamos com Souto (2010) que, nas disciplinas de cálculo diferencial e integral presume-se que os estudantes já dominam questões como a estrutura algébrica dos números reais[8], a ideia intuitiva de limite de funções e propriedades da estrutura topológica dos reais como a completude da reta[9].

É claro que os números irracionais podem e devem ser tratados em outras disciplinas ao longo de um curso de licenciatura em matemática, mas, além das disciplinas básicas de fundamentos de matemática e cálculo diferencial e integral, é comum haver pelo menos mais uma oportunidade de contato com o assunto, ainda que de forma indireta, em

---

[7] Devido aos altos índices de retenção registrados nas disciplinas de cálculo diferencial e integral, muitos cursos de licenciatura e engenharia introduzem disciplinas em suas grades curriculares cujo objetivo é revisar conteúdos considerados importantes, servindo assim como uma espécie de pré-cálculo, ou seja, como uma preparação para o cálculo diferencial e integral. Nessas disciplinas, os números reais, e possivelmente os irracionais, também podem ser tratados.

[8] Em alguns casos, é possível que na própria disciplina de cálculo diferencial e integral, antes de iniciar algum assunto propriamente novo, seja feita uma pequena revisão de números e funções, prática adotada por alguns livros populares como Swokowski (1983) e também por clássicos como Maurer (1964), Apostol (1967), Kaplan e Lewis (1972), Lang (1976), entre outros. Porém, alguns títulos mais recentes de grande circulação nas universidades como Anton, Bivens e Davis (2014), Stewart (2013) e Weir e Hass (2012) optaram por retirar a parte relativa aos números e iniciar suas revisões a partir da noção de função.

[9] O conjunto dos números reais é frequentemente associado à imagem de uma reta contínua e sem ‘furos’, ou seja, completa. É essa propriedade que diferencia os números reais dos números racionais, que são um corpo ordenado, mas não são um corpo ordenado completo. Mais detalhes ainda nessa seção.

disciplinas avançadas de análise real ou fundamentos de análise. Nessas disciplinas, quase sempre situadas nos últimos períodos do curso, os irracionais podem aparecer como parte de um contexto maior, a formalização dos números reais. Porém, mesmo os números reais não são o foco principal de uma disciplina de análise real, cujo objetivo maior é *apresentar os tópicos do Cálculo Diferencial e Integral de uma forma logicamente bem organizada* (ÁVILA, 2006, p. 1). Dito de uma forma mais técnica, algumas propriedades ou teoremas que não foram demonstrados rigorosamente no cálculo diferencial e integral assim o serão na análise real.

Os números reais costumam ser apresentados logo no início de um curso de análise – em livros clássicos de análise real como Spivak (1967), Figueiredo (1973), Lima (1995) e Ávila (2006) eles aparecem logo nos primeiros capítulos – pois fornecem a base para os assuntos seguintes, como sequências e séries de números reais, limites, funções contínuas, derivadas e integrais. Como já dissemos, a análise real é vista como uma espécie de cálculo diferencial e integral, porém, mais rigoroso. Sendo assim, existe uma tendência de abordagem estruturalista de todos os tópicos, e os números reais frequentemente são apresentados como um corpo ordenado completo (MOREIRA; DAVID, 2010; MOREIRA, 2004; PASQUINI, 2007; SILVA, 2011). Trata-se de uma estrutura formal munida de duas operações, adição e multiplicação, e que satisfaz a uma lista de propriedades. Nesse tipo de abordagem, que chamamos de formalista, a questão ontológica fica em segundo plano, já que a questão central não é *o que são os números reais*, mas como os objetos do corpo ordenado completo se relacionam.

Para a abordagem formalista, não importa a natureza dos números reais, sendo suficiente conhecer seu papel nessa estrutura e concebê-los como elementos do corpo ordenado completo (mais detalhes no capítulo 2). Porém, o licenciando em matemática também precisa conhecer os números reais de outra forma, já que, na escola básica, *número real é número, extensão dos números naturais. Não é corte de Dedekind, classe de equivalência, ou sequência de intervalos*[10] (MOREIRA; FERREIRA, 2012, p. 53). Nas palavras de Moreira e David (2010),

> É fundamental conceber o número real como número, o que faz uma grande diferença, porque, na escola, a ideia de número já possui uma história de elaboração e reelaboração. No processo de ensino-aprendizagem escolar essa história vem se desenvolvendo a partir do trabalho com os naturais e passa pelos inteiros, pelos racionais até chegar aos reais. Ao longo dela, o aluno se

[10] Moreira e Ferreira (2012) referem-se a elementos da matemática superior criados para definir ou construir os números reais. Mais detalhes no capítulo 2.

> vê na condição de reelaborar esquemas cognitivos para, a cada etapa, acomodar a nova noção de número (p. 80).

Ou seja, na escola básica, cada nova reelaboração da noção de número tem o sentido de superar as limitações da noção anterior de número. Em particular, *o conjunto dos números reais é constituído para dar solução aos problemas vistos como insuperáveis no âmbito dos números racionais. A estrutura de corpo ordenado completo é estabelecida a* ***posteriori*** (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 81, grifo dos autores). Abordagens formalistas como ilustradas anteriormente seguem por um caminho completamente diferente, já que postulam a existência de uma estrutura chamada corpo ordenado completo a priori, e identificam o conjunto dos números reais com essa estrutura. Trata-se de uma *inversão de rota que entra em conflito com o processo que se desenvolve na escola* (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 81).

De fato, os números irracionais desempenham um papel central na constituição dos números reais, afinal,

> Como seria possível passar dos racionais aos reais sem descrever o conjunto dos números irracionais? Os irracionais são parte do sistema numérico e sem eles o conceito de número real é incompleto. Basta descuidar-se dos irracionais e todo o sistema desmorona (FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995, p. 30).

A despeito da importância dos irracionais como elo de ligação com os números reais ou como sustentação de todo o sistema numérico, isso vai depender do terreno que estamos pisando. Para a matemática acadêmica, por exemplo, os irracionais podem até mesmo serem dispensados no processo de construção dos números reais, e a metáfora de uma ponte ligando os racionais aos reais é mais adequada à matemática escolar do que para a matemática acadêmica. De fato, para a matemática escolar, podemos pensar que os irracionais são a ponte que liga os racionais aos reais, mas, na matemática acadêmica, o elo de ligação entre racionais e reais são os cortes de Dedekind ou as sequências de Cauchy. Os números reais são construídos a partir dos números racionais sem que seja preciso mencionar os números irracionais (para mais detalhes, ver capítulo 2).

A lógica da matemática escolar é diferente. Uma vez estabelecido o conjunto dos racionais, é preciso ter um motivo para ampliar mais uma vez o conceito de número, e um dos principais motivos é a insuficiência dos racionais para realizar a medida de um segmento qualquer a partir de uma unidade de medida preestabelecida. Em termos técnicos, essa ideia recebe o nome de incomensurabilidade e o exemplo mais comumente utilizado é o da incomensurabilidade da diagonal de um quadrado em relação ao lado. Para o enfoque formalista da análise, no entanto, essa discussão não faz sentido, já que *os* *irracionais não são os (novos) entes que serão acrescentados aos (conhecidos) racionais para a obtenção dos reais. Eles são simplesmente os reais que não são racionais* (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 90). Talvez por conta disso, a incomensurabilidade seja um assunto ausente em muitos livros de análise real[11].

Além da pouca importância dada pela abordagem formalista ao significado dos números reais – e consequentemente dos números irracionais – uma prática comum em cursos com uma abordagem formal, que pode ser um curso de análise real mas também pode ser qualquer outro, é igualmente não recomendada por não contribuir para a aprendizagem dos estudantes. Trata-se de apresentar os conceitos exclusivametne por meio de suas definições e pensar que, por se tratar de uma definição 'correta' e precisa, esse é o melhor, senão o único caminho para se apreender o conceito. Para Soares, Ferreira e Moreira (1999),

> É ingenuidade acreditar que os alunos vão abandonar suas imagens construídas ao longo da vida escolar, para substituí-las de imediato por uma definição formalmente correta apresentada pelo professor de um curso de Análise na Universidade. De um modo geral, ao serem expostos a uma abordagem formal dos números reais, sem conexão com suas imagens intuitivas, os estudantes acrescentarão novas imagem dos irracionais/reais ao seu mosaico de imagens, muitas delas conflitantes, lançando mão de uma ou de outra conforme as situações se apresentam (p. 97).

A formalização e utilização dos conceitos matemáticos por meio de suas definições é uma característica importante da matemática do ensino superior. Porém, conforme destacado na passagem anterior, apenas a definição não é suficiente. Nesse ponto, reforçamos novamente a importância dos exemplos e contraexemplos para o enriquecimento das imagens conceituais de número irracional. É por meio deles que o estudante estabelece relações com o que já conhece do assunto, podendo construir, formular ou reformular seu conhecimento. Maiores detalhes no Capítulo 5 – Quadro teórico.

Na sequência, de maneira semelhante ao que fizemos com as questões do ENEM, procuramos questões referentes aos números irracionais nas provas do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes – ENADE, que avalia estudantes ingressantes e concluintes do ensino superior. Analisamos as provas de 2005, 2008, 2011 e 2014, quando os cursos de matemática (bacharelado e licenciatura) foram avaliados. Encontramos uma questão em 2005 na prova da licenciatura e uma questão em 2008 nas provas de

[11] Os livros *Análise I* de Djairo Figueiredo e *Análise Real* de Elon Lages Lima não tratam desse assunto, sendo que no segundo não existe uma menção sequer à incomensurabilidade (MOREIRA; DAVID, 2010).

licenciatura e bacharelado envolvendo o conceito de número irracional, situação sensivelmente diferente do que apresentamos em relação ao ENEM, onde todas as questões analisadas foram consideradas questões procedimentais. Na prova de 2014 (licenciatura) encontramos também algo que não esteve presente em nenhuma outra prova que analisamos, uma questão envolvendo história dos números. Como um contraponto às questões puramente procedimentais do ENEM que trouxemos na **Figura 3**, trazemos uma das questões que encontramos nas provas do ENADE que consideramos que avaliam o conceito (ver Figura 5).

Figura 5 – Exemplo de uma questão conceitual envolvendo irracionais

QUESTÃO 20

Para cada número real x, considere o conjunto C_x formado por todos os números obtidos somando-se a x um número racional, isto é,

$$C_x = \{x + r : r \in \mathbb{Q}\}.$$

Sob essas condições, conclui-se que

(A) o número π pertence ao conjunto C_1.

(B) o conjunto $C_4 \cap C_5$ possui um único elemento.

(C) o número $\sqrt{2}$ pertence ao conjunto $C_{\sqrt{3}}$.

(D) os conjuntos C_3 e $C_{1/3}$ são iguais.

(E) o número zero pertence ao conjunto $C_\pi \cup C_{-\pi}$.

Fonte: BRASIL (2008a, p. 9)

O objetivo até aqui foi mostrar onde e como o assunto número irracional costuma ser tratado em um curso de licenciatura. Chamamos atenção para a possibilidade do licenciando sair do curso sem ter condições de ensinar números irracionais/reais no ensino básico, já que uma abordagem formal dos números irracionais/reais, prática comum da matemática acadêmica, não capacita o futuro professor para abordar esses conceitos no nível da matemática escolar. A nosso ver, é preciso incorporar as peculiaridades da matemática escolar referentes a esse tema na formação dos professores, onde *a organização dos saberes precisa se dar a partir de uma perspectiva pedagógica e não apenas lógica* (MOREIRA; FERREIRA, 2012, p. 56).

Há quase trinta anos, Lee Shulman já alertava para a insuficiência do conhecimento dos conteúdos para a formação docente. Shulman (1986) afirma que também é preciso um conhecimento pedagógico do conteúdo que se pretende ensinar, além de um conhecimento curricular. Para os tópicos mais frequentemente ensinados em uma determinada área, Shulman (1986) inclui como parte do conhecimento pedagógico do conteúdo: as formas mais úteis de representação daquelas ideias, as mais poderosas analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações. E como não existe uma forma infalível de ensinar, Shulman (1986) recomenda que o professor deve possuir um *verdadeiro arsenal* (p. 9) de formas de representar e formular um assunto, derivados de pesquisas ou da prática e que o tornem compreensível para outras pessoas (Mais detalhes a respeito das ideias de Shulman, ver seção 4.7 – A matemática escolar e os conhecimentos necessários para exercer a atividade docente: impactos na formação de professores de matemática).

Pelo que vimos anteriormente, uma abordagem formalista dos números irracionais/reais não é capaz de fornecer ao futuro professor esse arsenal mencionado em Shulman (1986). Se em nenhum momento ou disciplina da licenciatura houve espaço para discussão das peculiaridades de se ensinar conjuntos numéricos na educação básica, o recém-formado professor poderá se ver em apuros quando efetivamente tiver que fazê-lo. Ele rapidamente perceberá, se já não percebeu durante sua formação, que uma abordagem formalista/axiomática não dá o suporte necessário para enfrentar os desafios da prática em sala de aula. Materiais de apoio poderiam contornar o problema, mas,

> É na situação em que mais necessita que o professor do Ensino Básico menos encontra pesquisas, estudos e propostas de que possa lançar mão para experimentar, criticar, refletir, reformular, adaptar e eventualmente criar formas de abordagem que se ajustem às necessidades e às condições de sua prática docente (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 98).

Nesse caso, o professor pode buscar ajuda em suas memórias de quando estudara o assunto na educação básica, ou, o que achamos mais provável, buscará refúgio no livro didático, como apontado em Silva (2011):

> Geralmente, o professor recém-formado chega à escola com uma bagagem de conteúdo muito formal, que é indispensável, mas não é suficiente, visto que não possui uma prática de ensino que tenha abordagens adequadas e necessárias para o dia a dia da sala de aula. Em consequência, muitos professores seguem as orientações dos livros didáticos, sem aprofundamentos e complementações (p. 72).

A suposta 'facilidade' oferecida pelo livro didático, associada a ausências na formação acadêmica do professor como o conhecimento pedagógico do conteúdo, podem trazer consequências indesejáveis se o professor *engolir a ideia de que sem a adoção do livro didático não há como orientar a aprendizagem* (SILVA, 1996, p. 11). O problema se agrava quando analisamos o tratamento que é dado aos números irracionais nos livros didáticos. De acordo com os trabalhos de Pommer (2012), Souto (2010) e Lima (2001), que juntos analisaram mais de duas dezenas de títulos dos ensinos fundamental e médio de importantes autores brasileiros das décadas de 1990 e 2000, diversas questões merecem atenção. Essas obras apontam que os livros privilegiam definições baseadas na representação decimal, tarefas limitadas à classificação como racional ou irracional, determinação de frações geratrizes, notas históricas enfocando nomes e datas, entre outras. Em geral, os três trabalhos concordam que nos livros didáticos analisados existe pouco aprofundamento conceitual dos números irracionais. (Mais detalhes a respeito do tratamento dos números irracionais nos livros didáticos são abordados na seção 4.6 – Abordagem dos livros didáticos).

Talvez como resultado dessas ausências ou equívocos no tratamento dos números irracionais na licenciatura em matemática e/ou nos livros didáticos, tanto professores quanto futuros professores de matemática têm várias dificuldades relativas aos números irracionais e reais. Entre os problemas relatados por diversas pesquisas, destacamos a ideia de número irracional como aquele que possui representação ilimitada (mesmo sendo periódica), que duas grandezas são sempre comensuráveis, que números irracionais são apenas aqueles representados com raízes (por exemplo, $\sqrt{2}, \sqrt{3},$ etc.), que números reais têm sucessores, que irracionais não são números exatos, entre outras dificuldades (ARCAVI; BRUCKHEIMER; BEN-ZVI, 1987; DIAS, 2002; IGLIORI; SILVA, 1998; PENTEADO, 2004). Também foram constatados problemas relativos a estratégias equivocadas utilizadas por professores para ensinar números irracionais (PIETROPAOLO; CORBO; CAMPOS, 2013) e inconsistências entre a intuição e o conhecimento formal e algorítmico dos professores (SIROTIC; ZAZKIS, 2007b).

Ilustramos a seguir nossa tentativa de articular os argumentos que apresentamos até aqui. O ciclo vicioso do não-ensino e da não-aprendizagem dos números irracionais (Figura 6), que elaboramos a partir de uma proposta que encontramos em Souto (2010), sugere que a abordagem dos números irracionais na licenciatura, seja com a informalidade de uma disciplina básica, seja com o excesso de formalismo de uma disciplina avançada, não prepara o professor de matemática para tratar desse assunto de uma forma apropriada na educação básica[12]. Uma vez no seu ambiente de trabalho, o professor novato perceberá

---

[12] Essa é a ideia de Souto (2010). Porém, não descartamos a possibilidade de uma disciplina básica ser tratada com formalismo e uma disciplina avançada ser tratada de maneira informal. Em qualquer caso, tendo em mente as atividades que exercerá na escola, principalmente o ensino de números irracionais, pensamos que nenhum dos dois extremos contribui para uma boa formação do professor de matemática. Mais detalhes na seção 1.2 – Na licenciatura em matemática.

isso, e possivelmente recorrerá ao livro didático, o que, por sua vez, poderá ocasionar ainda mais dificuldades para os alunos, devido aos problemas que apontamos nesse recurso didático. Os alunos que saem do ensino médio com dificuldades em relação ao conceito de número irracional serão os futuros licenciandos, fechando assim o ciclo vicioso de não-ensino e não-aprendizagem.

Figura 6 - Ciclo vicioso do não-ensino e da não-aprendizagem dos números irracionais

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma vez descrito o terreno em que estamos pisando, uma grande inquietação se estabelece: como podemos contribuir para mudar essa situação? A tarefa aparentemente hercúlea de agir em várias frentes, seja na educação básica, na licenciatura em matemática ou na produção de materiais didáticos, precisava ser dividida em tarefas menores ou em uma tarefa que, de certa forma, pelo menos tangenciasse essas várias frentes. Uma leitura que nos inspirou nesse sentido foi a de Soares, Ferreira e Moreira (1999), sintetizada no seguinte trecho:

> Uma nova abordagem dos sistemas numéricos deve ser construída especificamente voltada para a formação de professores. Tal abordagem teria que partir fundamentalmente da problematização das representações conceituais já existentes entre os licenciandos e chegar a uma visão global do conjunto $\mathbb{R}$ que efetivamente instrumentalize para o ensino (p. 95).

Foi assim que delineamos um dos objetivos do nosso trabalho, que foi diagnosticar conhecimentos prévios a respeito de números irracionais trazidos pelos alunos ingressantes. A partir desse diagnóstico inicial, realizamos na sequência uma intervenção pedagógica compromissada com o enriquecimento das imagens conceituais e com a preparação do licenciando para discutir o assunto de uma forma adequada na educação básica; e, por fim, analisamos as movimentações das imagens conceituais dos participantes ao longo da pesquisa.

Capítulo 2 – Números irracionais: aspectos teóricos

Depois que decidimos o que significam, não temos como controlar seu comportamento. Os números obedecem a certas leis e têm certas propriedades, personalidades e modos de se combinarem uns com os outros, e não há nada que possamos fazer a respeito disso, exceto observar e tentar compreender.

Steven Strogatz

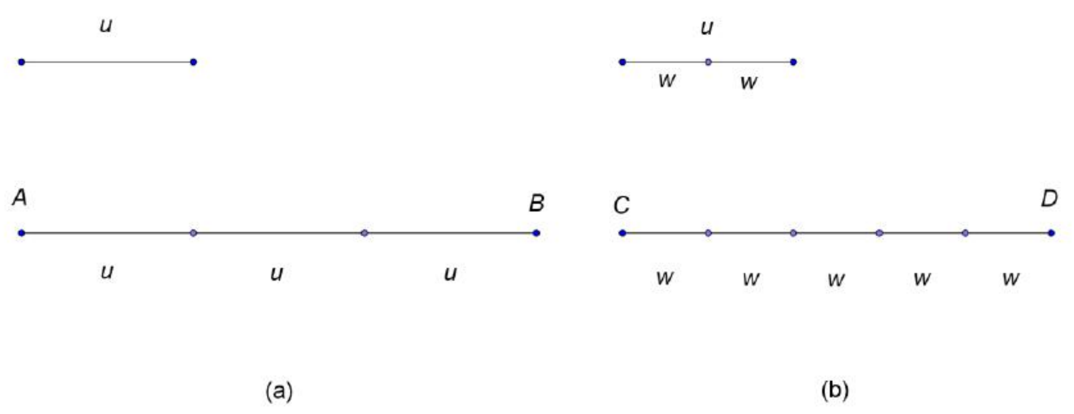
Ao longo deste trabalho, utilizamos termos e expressões que têm um significado particular na matemática, como dízima periódica, comensurabilidade, densidade, enumerabilidade, entre outros. Este capítulo destina-se a definir o significado dessas expressões, assim como do próprio conceito de número irracional e da medida de segmentos.

2.1 – Medida de um segmento

A medida de um segmento AB, denotada por $\overline{AB}$, é um número que indica quantas vezes o segmento AB contém uma unidade de medida representada por um segmento u, previamente fixado. Três situações podem ocorrer. Na primeira situação, o segmento u cabe um número inteiro de vezes em AB. Ilustramos na Figura 7a o caso em que u cabe 3 vezes em AB. Podemos escrever que $\overline{AB} = 3u$ e, em geral, essa situação é representada por $\overline{AB} = mu$, onde m é um número inteiro. Na segunda situação, o segmento u não cabe um número inteiro de vezes em CD, mas um submúltiplo de u, isto é, algum segmento obtido da divisão de u em um número inteiro de partes iguais, cabe. Ilustramos na Figura 7b o caso em que dividimos o segmento u em 2 partes iguais, e essas partes, chamadas de w, cabem 5 vezes em CD. Nesse caso, como $\overline{CD} = 5w$ e $w = \frac{u}{2}$, podemos escrever que $\overline{CD} = \frac{5}{2}u$. Em geral, essa situação é representada por $\overline{CD} = \frac{m}{n}u$, onde m e n são números inteiros.

Via de regra, o segmento u tem comprimento igual a 1, e os dois casos ilustrados pela **Figura 7** poderiam ser escritos de forma ainda mais simples como $\overline{AB} = 3$ e $\overline{CD} = \frac{5}{2}$. A terceira situação ocorre quando nenhum submúltiplo de u, por menor que seja, cabe um número inteiro de vezes em EF. Nos dois primeiros casos, isto é, $\overline{AB} = mu$ e $\overline{CD} = \frac{m}{n}u$, dizemos que os segmentos AB e CD são **comensuráveis** com u. No terceiro caso, dizemos que EF é **incomensurável** com u. Em uma linguagem menos formal, pode-se dizer que dois segmentos quaisquer são comensuráveis quando ambos podem ser medidos por uma mesma unidade de medida. De maneira análoga, dois segmentos quaisquer são ditos incomensuráveis quando **não** existe uma unidade de medida, por menor que seja, capaz de medir os dois segmentos. Porém, é preciso tomar cuidado com o uso da linguagem informal. Lima *et al.* (1996) alertam para o uso inadequado do termo incomensurável em frases como "havia um número incomensurável de formigas em nosso piquenique". Incomensurabilidade é uma relação entre duas grandezas e não dá a ideia de algo muito numeroso. Nas palavras de Lima *et al.* (1996), *nada é incomensurável, a não ser quando comparado com outro objeto (grandeza) da mesma espécie* (p. 55).

Figura 7- Segmentos comensuráveis com a unidade

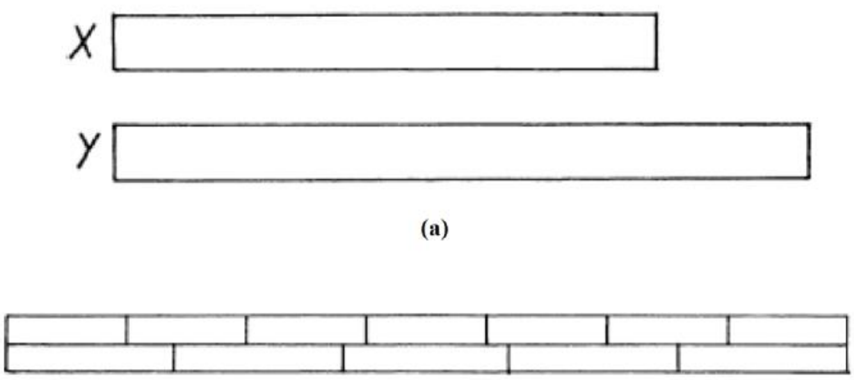


Fonte: Elaborada pelo autor.

Existe outra forma de caracterização da comensurabilidade que não coloca tanta ênfase na existência de uma unidade comum de medida dos segmentos. Ela está presente, mas em princípio, o foco da comensurabilidade recai sobre a própria natureza dos segmentos, no caso, sobre os comprimentos desses segmentos. Trata-se do seguinte: dois segmentos AB e CD são comensuráveis se, e somente se, podemos escrever $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros, e $n \neq 0$. De fato, se AB e CD são comensuráveis, existem u, m e n tal que $\overline{AB} = mu$ e $\overline{CD} = nu$, logo, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m}{n}$. Reciprocamente, se $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m}{n}$, temos $\overline{AB} = \frac{m}{n}\overline{CD} = m \cdot \frac{1}{n}\overline{CD}$. Chamando $u = \frac{1}{n}\overline{CD}$, temos $\overline{AB} = mu$ e $\overline{CD} = nu$.

A respeito dessa caracterização, encontramos em Dewdney (2000) uma forma de apresentá-la por meio de um jogo chamado de *jogo das réguas* (p. 29). Funciona da seguinte forma. Colocamos sobre uma mesa duas réguas, uma de comprimento X e outra de comprimento Y, de tal forma que as extremidades anteriores das duas réguas estejam alinhadas (Figura 8a). O jogo começa com a movimentação da régua menor, e a única regra a ser seguida é pegar a régua cuja extremidade anterior encontra-se mais à esquerda e deslizar para direita exatamente pela distância de seu próprio comprimento. Se em algum momento as extremidades posteriores das duas réguas coincidirem, os segmentos serão comensuráveis e você ganha o jogo. Se nunca coincidirem, os segmentos serão incomensuráveis e você perde o jogo. A Figura 8b ilustra o caso em que 7 vezes o comprimento da régua X é igual a 5 vezes o comprimento da régua Y, isto é, $7X = 5Y$, ou ainda, $\frac{X}{Y} = \frac{5}{7}$. Quanto à unidade de medida comum aos dois segmentos, basta notar que $\frac{X}{5} = \frac{Y}{7}$, ou seja, ao dividir a barra X por 5 e a barra Y por 7, obtemos partes do mesmo comprimento, que vale $1/35$.

Figura 8 - Jogo das réguas



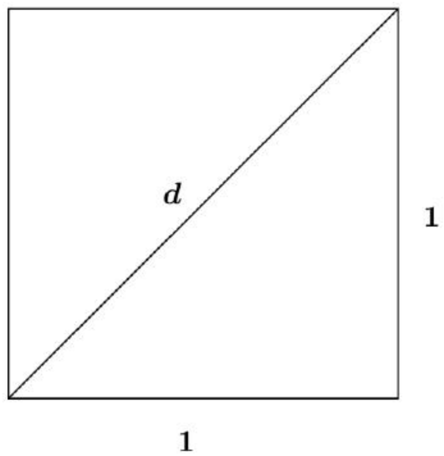
Fonte: DEWDNEY (2000, p. 29 e 33)

Segundo Dewdney (2000), os pitagóricos acreditavam que o jogo das réguas sempre acabava, mesmo que demorasse muito, isto é, pensavam que dois segmentos seriam sempre comensuráveis. Vamos mostrar que o referido jogo pode, de fato, não acabar. Como exemplo da existência de segmentos incomensuráveis, apresentamos o caso do lado (que consideraremos igual a 1) e da diagonal de um quadrado (ver **Figura 9**). Como vimos no parágrafo anterior, se a diagonal do quadrado, que chamaremos de d, é comensurável com o lado, podemos escrever $d = \frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros e a fração $\frac{m}{n}$ é uma fração irredutível[13]. Pelo Teorema de Pitágoras, $d^2 = 1^2 + 1^2$, e, substituindo $d = \frac{m}{n}$ teremos $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, ou seja, $m^2 = 2n^2$. Daí, seguem as seguintes implicações:

$$m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \text{ é par} \Rightarrow m \text{ é par} \Rightarrow m = 2k \Rightarrow (2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow$$

$$2k^2 = n^2 \Rightarrow n^2 \text{ é par} \Rightarrow n \text{ é par, onde } k \text{ é um número inteiro.}$$

Figura 9 - Diagonal de um quadrado de lado igual a 1



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ora, chegamos a uma contradição, pois se m e n são números inteiros e $\frac{m}{n}$ é uma fração irredutível, m e n não podem ser ambos números pares, pois teriam ao menos um fator 2 em comum[14]. Portanto, a diagonal d é incomensurável com o lado 1, ou seja, não podemos escrever $d = \frac{m}{n}$ com m e n números inteiros. A existência de segmentos incomensuráveis aponta para a insuficiência dos números naturais e das frações para medir qualquer segmento de reta. Como definir então o comprimento da diagonal do

[13] Fração em que não é possível simplificar, isto é, não existem fatores comuns a m e a n que possam ser cancelados.

[14] Essa demonstração pode ser feita de diversas outras formas, como aquela que usa diretamente o Teorema Fundamental da Aritmética, que estabelece que todo número inteiro maior do que 1 pode ser fatorado de forma única utilizando apenas números primos. Assim, a partir da expressão $m^2 = 2n^2$, já é possível concluir que se trata de um absurdo, pois o fator 2 aparece um número par de vezes do lado esquerdo e um número ímpar de vezes do lado direito. Optamos pela demonstração apresentada por entendermos que ela se utiliza de proposições mais elementares, como o quadrado de um número par é par e o quadrado de um número ímpar é ímpar.

quadrado de lado 1? A solução encontrada pelos matemáticos foi ampliar o conceito de número e introduzir os chamados números irracionais[15].

A intenção com essa ampliação é que qualquer segmento de reta pudesse ser representado por um número. Assim, *quando o segmento considerado é comensurável com a unidade escolhida, sua medida é um número racional (inteiro ou fracionário). Os números irracionais representam medidas de segmentos que são incomensuráveis com a unidade* (LIMA *et al.*, 1996, p. 54). No nosso exemplo, a medida da diagonal do quadrado de lado 1 vale $\sqrt{2}$ pois, pelo Teorema de Pitágoras, $d^2 = 2$ (**Figura 9**). Assim, a demonstração que realizamos também é muito conhecida como a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$[16].

A medida de segmentos também pode ser utilizada desde muito cedo na educação das crianças. Uma ação nesse sentido foi proposta por Davydov[17] e colegas, que desenvolveram um currículo baseado na medição de segmentos nas décadas de 1960 e 1970 na Univão Soviética. Segundo Bass (2015), o currículo de Davydov postergou a introdução do número na instrução escolar, pois para ele, *o problema fundamental resolvido pela invenção dos números é a tarefa de pegar uma dada quantidade (comprimento, volume, massa, área, uma quantidade discreta de objetos) e reproduzi-la em um tempo e espaço diferentes* (p. 14 -15, tradução nossa), sem a utilização de números para enumerar. Ou seja, essa tarefa pode ser considerada uma tarefa de medição de grandezas. Para exemplificar concretamente uma atividade construída segundo o pensamento de Davydov, trazemos Moxhay (2008):

> Em uma mesa, está uma tira de papel. A tarefa é ir para outra mesa (em uma sala diferente) e cortar, a partir de um rolo de papel, um pedaço que tem exatamente o mesmo comprimento da tira original. Mas não é permitido levar a tira de papel para a outra mesa. Nos experimentos de Davydov, as crianças as vezes apenas caminhavam para a segunda mesa e cortavam um pedaço de papel de comprimento aleatório, na esperança que pudesse ter o mesmo comprimento da tira original. Nesses casos, as condições da tarefa faziam parecer para as crianças que uma solução correta é impossível (exceto pela sorte) (p. 7, tradução nossa).

A ideia, segundo Moxhay (2008), é que as crianças discutam em grupo como resolver a tarefa, e percebam que precisarão de um objeto intermediário, um terceiro objeto, como

---

[15] Essa ampliação não foi um processo tão natural como porventura possa parecer. Ela se deu após um longo processo que durou vários séculos. Mais detalhes no Capítulo 3 - Números irracionais: aspectos históricos e filosóficos.

[16] Para ver outras provas da irracionalidade de $\sqrt{2}$, ver Apêndice B.

[17] Vasily Vasilovich Davydov (1930 - 1998) foi um psicólogo russo. Foi diretor do Instituto de Psicologia da Academia Russa de Educação.

uma corda ou um pedaço de madeira para que possam transportar o comprimento da tira de papel de uma sala à outra. As crianças podem então ter acesso a objetos, ora maiores, ora menores do que a tira a ser medida. Quando os objetos intermediários são menores do que a tira original, as crianças terão a chance de construir a noção de unidade de medida. Com uma atividade dessa natureza, também é possível dizer que as crianças terão a possibilidade de reconstruir a invenção do número como uma ferramenta humana que possibilita a reprodução de uma quantidade em um lugar e tempo diferentes.

No Brasil também temos propostas de ensino de números racionais via medição de segmentos para o ensino fundamental. Um exemplo de como colocar em prática uma proposta desta natureza pode ser encontrado em Rezende, Mendonça e Pereira (2013). A partir de uma material desenvolvido pelo professor Roberto Ribeiro Baldino conhecido como Frac-235, os autores apresentam uma sequência de atividades que proporcionam ao aluno construir a noção de medida. Além disso, Rezende, Mendonça e Pereira (2013) mostram como utilizar o Frac-235 para trabalhar com a equivalência de frações, além das operações de soma, subtração, multiplicação e divisão de frações.

2.2 – Representação

A representação está diretamente relacionada ao reconhecimento, na medida em que os conceitos matemáticos só são acessíveis por meio de suas representações (DUVAL, 2003). No caso específico dos números racionais/irracionais, procuramos trabalhar com as representações em forma de fração, decimal e representação na reta real. Porém, antes de discutir a representação decimal dos números irracionais, consideramos pertinente realizar primeiro uma breve discussão a respeito da representação decimal dos números racionais. Número racional é todo número que pode ser representado por uma fração $\frac{a}{b}$, sendo a e b números inteiros e $b \neq 0$. A representação decimal é uma forma compacta de escrever um número como uma soma de frações cujos denominadores são $10, 100, 1000, \ldots$, que são chamadas de frações decimais. Por exemplo:

$$\frac{5}{4} = \frac{125}{100} = \frac{100}{100} + \frac{20}{100} + \frac{5}{100} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = 1{,}25$$

$$\frac{7}{8} = \frac{875}{1000} = \frac{800}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = 0{,}875$$

Porém, um número racional na forma irredutível a/b terá uma representação decimal finita (como os exemplos acima) se, e somente se, b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5[18]. Vejamos o caso de $\frac{1}{3}$, vamos tentar escrever essa fração como uma soma de frações decimais. Começamos nos perguntando quantos décimos cabem em $\frac{1}{3}$? Isto é equivalente a fazer

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10}$$

$$3a = 10$$

$$a = \frac{10}{3} = \frac{9}{3} + \frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{3}$$

Ou seja, retornando à primeira igualdade teremos

$$\frac{1}{3} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{10} = \frac{3}{10} + \frac{\frac{1}{3}}{10}$$

O que nos leva a descobrir que cabem 3 décimos em $\frac{1}{3}$, e sobra $\frac{\frac{1}{3}}{10}$, que é menor do que um décimo. A pergunta seguinte seria: quantos centésimos cabem em $\frac{\frac{1}{3}}{10}$? Isto é equivalente a escrever

$$\frac{\frac{1}{3}}{10} = \frac{b}{100}$$

$$10b = \frac{100}{3}$$

$$b = \frac{10}{3} = \frac{9}{3} + \frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{3}$$

Ou seja,

$$\frac{\frac{1}{3}}{10} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{100} = \frac{3}{100} + \frac{\frac{1}{3}}{100}$$

---

[18] Para uma demonstração dessa proposição, sugerimos a leitura de Niven (1990) nas páginas 29, 30 e 31.

Isso nos mostra que cabem 3 centésimos em $\frac{\frac{1}{3}}{10}$, e sobra $\frac{\frac{1}{3}}{100}$, que é menor do que um milésimo. A pergunta seguinte seria: quantos milésimos cabem em $\frac{\frac{1}{3}}{100}$? O processo, como pode-se notar, não termina, e a solução encontrada é escrever que

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots = 0{,}333\ldots$$

A representação obtida é uma decimal periódica infinita, também chamada de dízima periódica. A parte dessa representação que se repete indefinidamente é chamada de período, e pode ser formada por mais de um algarismo, como por exemplo:

$$\frac{5}{11} = 0{,}454545\ldots \ \text{(o período é 45)}$$

$$\frac{1000}{999} = 1{,}001001001\ldots \ \text{(o período é 001)}$$

Existem casos de as representações infinitas possuírem também uma parte não-periódica, como exemplo:

$$\frac{37}{30} = 1{,}2333\ldots \ \text{(o período é 3)}$$

Isso nos leva a fazer uma classificação das dízimas: simples – toda a parte decimal do número é periódica; composta – existe uma parte não-periódica que antecede o período. Exemplos:

$$\frac{875}{999} = 0{,}875875875\ldots \ \text{(dízima periódica simples)}$$

$$\frac{139}{33} = 4{,}2134343\ldots \ \text{(dízima periódica composta)}$$

Uma forma mais simples de argumentar que uma fração como $\frac{1}{3}$ não pode ser escrita como uma soma finita de frações decimais é por meio da fatoração em números primos. A questão central é que não existe uma fração equivalente a $\frac{1}{3}$ cujo denominador seja uma potência de 10. De fato, isso não é possível pois nenhum múltiplo de 3 pode ser igual a uma potência de 10. Caso ocorresse, teríamos $3x = 10^n$, ou seja, $3x = 2^n 5^n$, onde x e n são números inteiros. Pela fatoração única em primos, a equação anterior não tem uma solução inteira para x, pois um fator 3 sempre sobrará do lado esquerdo da igualdade. A solução encontrada foi escrever frações como $\frac{1}{3}$ como uma soma infinita de frações decimais, conforme mostramos anteriormente.

A indefinição causada pela notação com os três pontos ao final do número é algo que precisa ser mencionado. Ao encontrar o número $0{,}23123\ldots$, pode-se afirmar que se trata de uma dízima periódica? Em caso afirmativo, qual seria o período? Em caso negativo, o que é preciso para ser considerada uma dízima periódica? Para remediar essa situação, alguns autores de livros didáticos estabelecem um acordo que, para uma representação ser considerada dízima periódica, deve-se repetir o período 3 vezes, como por exemplo, $0{,}333\ldots$; $0{,}454545\ldots$ e $1{,}001001001\ldots$ Em muitos casos, essa questão não é explicitamente acordada, mas, costuma ser posta em prática por meio de exemplos e exercícios, e os estudantes acabam assimilando esse acordo. É o que chamamos de acordo tácito. Para dar uma solução mais consistente à questão da representação, algumas fontes como Niven (1990) preferem usar uma barra para indicar que se trata de uma parte periódica ao invés dos três pontos. Nesse caso, escreve-se $0,\overline{3}$; $0\overline{45}$ e $1{,}\overline{001}$.

Mas qual é o verdadeiro significado de uma igualdade como $\frac{3}{11} = 0{,}272727\ldots$? A soma de infinitas frações decimais é apenas uma aproximação de $\frac{3}{11}$? A resposta é não, a soma é de fato igual a $\frac{3}{11}$. Mas, como se trata de uma soma infinita, é preciso tecer alguns comentários a respeito dessa igualdade, que geralmente causa estranheza aos estudantes. O significado é esclarecido em Lima (1991):

> As frações decimais $0{,}27$; $0{,}2727$; $0{,}272727$ etc, constituem valores aproximados da fração ordinária $3/11$. Quanto maior for o número de algarismos decimais tomados, menor será o erro cometido (isto é, melhor será a aproximação). Por isso, quando escrevemos $\frac{3}{11} = 0{,}272727\ldots$, não estamos afirmando que $\frac{3}{11} = 0{,}2727$. As reticências no fim do símbolo $0{,}272727\ldots$ significam que ele não representa uma única fração decimal mas a sequência infinita de frações decimais acima, as quais são valores aproximados de $3/11$ (p. 160).

Pode-se então afirmar o seguinte: um número é racional se, e somente se, sua representação decimal é finita ou infinita periódica. Ou, equivalentemente, todo número racional possui uma representação decimal finita ou infinita periódica, e, reciprocamente, toda decimal finita ou infinita periódica pode ser convertida em um número racional.

Apesar de ser uma questão importante para a pesquisa que desenvolvemos, optamos por deslocar a demonstração das afirmações acima para o Apêndice E para não comprometer a fluidez do texto e para não nos afastar do objetivo nesse momento, que é definir a representação decimal dos números irracionais. Pois bem, convencidos de que as afirmações antecedentes são verdadeiras, podemos dizer que a representação decimal dos números irracionais não pode ser finita nem infinita e periódica, pois se trata de uma exclusividade dos números racionais. Ela deve ser uma decimal infinita e não-periódica. Mas isso existe de fato? Ou não passa de uma aberração teórica? Alguns livros, como demonstra a **Figura 1**, não discutem esse ponto; apenas afirmam que as dízimas não-periódicas existem. Nós, professores, precisamos colocar essas dúvidas para os alunos.

Podemos explorar como seria a representação decimal de $\sqrt{2}$ a exemplo do que foi feito na Figura 1. Como se trata de um número cujo quadrado é igual a 2, começamos assim:

É 1? Não, o quadrado de 1 é 1. É 2? Não, o quadrado de 2 é 4. Então está entre 1 e 2. É 1,5? Não, o quadrado de 1,5 é 2,25. Então é menor do que 1,5. É 1,4? Não, o quadrado de 1,4 é 1,96. Então é maior do que 1,4. É 1,41? Não, o quadrado de 1,41 é 1,9881. Então é maior do que 1,41. É 1,412? Não, o quadrado de 1,412 é 1,993744. Então é maior do que do que 1,412. E assim por diante.

O que se pode afirmar a respeito do processo acima? Ele acaba? Encontraremos uma dízima periódica? Nem uma coisa nem outra. Como provamos anteriormente que $\sqrt{2}$ é um número irracional e que a representação finita ou infinita periódica é uma exclusividade dos números racionais, podemos afirmar que o processo acima não acaba e nem se tornará periódico. Este é o significado da igualdade

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356237309504880168872420 97\ldots$$

O equívoco que apontamos na Figura 1 deve-se a uma inversão na argumentação que consideramos prejudicial para o ensino: a partir da representação decimal de $\sqrt{2}$, que a princípio apenas parece infinita e não-periódica (mas só uma demonstração poderia garantir isso), afirmou-se que se tratava de um número irracional. Esta prática inclusive pode estar na raiz de algumas dificuldades que detectamos nos estudantes que participaram da nossa pesquisa. Ao serem apresentados a frações de inteiros cuja representação decimal tinha um período grande, e por isso muitas vezes difícil de ser detectado, muitos deles classificaram essas frações como números irracionais.

Além da representação decimal, existem algumas representações alternativas que podem ser exploradas como um recurso extra em sala de aula. Uma delas é a representação por meio de frações contínuas, para a qual sugerimos a leitura de Pommer (2009). Outras questões interessantes a respeito da representação podem ser encontradas na literatura, como o paralelo estabelecido em Britt (1998) entre a representação decimal de um número irracional e um gráfico com uma assíntota. Nesse caso, os estudantes precisam ter noções de limites de funções.

2.3 – Definição

No dia a dia, quando dizemos que algo é irracional, em geral queremos dizer que se trata de algo desprovido de bom senso, contrário à razão. Isso está de acordo com o significado da palavra irracional no dicionário: ***1.*** *Que não é racional, oposto à razão.* ***2.*** *Que não raciocina.* ***3.*** *Que não tem a faculdade do raciocínio.* ***4.*** *Em oposição ao homem, diz-se dos outros animais cujo comportamento é determinado pelo instinto*[19]. Na matemática, porém, o significado dessa palavra é bem diferente. O significado matemático para número irracional refere-se a ausência de uma razão do tipo a/b onde a e b são números inteiros e $b \neq 0$ (NIVEN, 1990). No que se refere especificamente a uma definição de número irracional, ela vai depender do nível de ensino, conforme apresentamos a seguir.

2.3.1 – Na matemática básica

As definições para números irracionais mais frequentemente encontradas em livros didáticos de matemática da educação básica são as seguintes: i) números que não podem ser representados como frações de inteiros; ii) números cuja representação decimal é infinita e não-periódica; iii) números reais que não são racionais (POMMER, 2012; SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1999; SOUTO, 2010).

Como vimos na seção anterior, existem segmentos – como a diagonal de um quadrado de lado 1 – que não podem ser medidos/escritos/representados por uma fração de inteiros, o que justifica a definição ‘i’ apresentada acima. A definição ‘ii’ seria uma consequência da definição ‘i’, como também mostramos na seção anterior. A definição ‘iii’ baseia-se em uma prática comum de definir os números reais como união dos racionais com os

---

[19] Fonte: http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra=irracional. Consulta em 06/01/2016.

irracionais, como discutido por Cezar (2014, 2011), enquanto concepção majoritária apresentada por professores da educação básica, atores de suas pesquisas. Contudo, apesar de serem as definições mais usadas, há uma série de apontamentos que precisam ser feitos. Não temos a intenção de condenar essas definições, mas chamar atenção para alguns detalhes que muitas vezes passam desapercebidamente.

Primeiro, destacamos um aspecto comum das três definições, que é a caracterização do número irracional em termos do que ele NÃO é. Não é uma fração de inteiros, não é uma decimal finita, não é uma decimal infinita periódica e não é um número racional. Definir o número irracional pelo que ele NÃO é o torna um objeto ainda mais misterioso, um não-ser, a antimatéria do número racional[20], podendo provocar sérios danos na estruturação dos conceitos matemáticos e na possível compreensão desses números pelos estudantes. É possível, por exemplo, de acordo com as definições 'i' e 'ii', considerar números complexos da forma $a + bi,\ b \neq 0$ como números irracionais, já que não podem ser escritos como uma fração de inteiros.

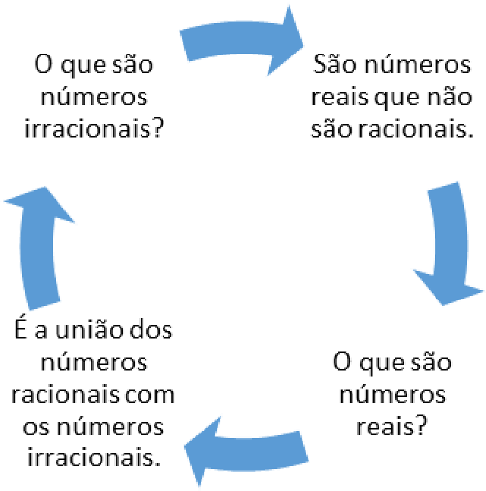
Segundo, uma não-fração ou uma dízima não-periódica são elementos estranhos para os alunos cujo universo numérico ainda é composto apenas pelos números racionais, e não faz qualquer sentido para eles definir um número dessa forma (MOREIRA; DAVID, 2010). De acordo com Moreira e David (2010), *trata-se de uma situação análoga àquela de procurar no dicionário o sinônimo para uma palavra cujo significado não conhecemos e encontrar apenas duas palavras, as quais, também, não sabemos o que significam* (p. 82).

Terceiro, embora essas definições sejam *familiares, convenientes e inofensivas* (HAVIL, 2012), a sua utilização na prática fica bastante restrita. Como usá-las, por exemplo, para definir a igualdade ou realizar operações aritméticas entre dois irracionais, se o que sabemos a respeito desses números é só o que eles não são? Além disso, por meio dessas definições, *os irracionais são definidos em termos de uma de suas qualidades características, não como entidades no seu direito próprio. Quem pode dizer que eles existem de fato?* (HAVIL, 2012).

[20] Talvez seja sintomático o fato de não existir um símbolo consolidado para representar os irracionais, como no caso dos naturais, inteiros, racionais e reais, representados por $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, respectivamente. Alguns autores usam a letra I, outros usam Ir, enquanto outros ainda representam os irracionais como $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, reforçando ainda mais o irracional como um não-ser racional.

Especificamente em relação à definição 'iii', não são utilizados conceitos ou ideias estranhas para os alunos como dízima não-periódica ou a existência de números além das frações. Mas, em contrapartida, o conjunto dos números reais é mencionado, o que nos leva a presumir que a definição 'iii' seja apresentada após algum trabalho realizado com os números reais. E como são definidos os números reais? Em geral, como a união dos racionais com os irracionais. Daí, forma-se uma circularidade e, no final das contas, não se sabe direito nem o que é número real nem o que é número irracional (MOREIRA, 2004; PASQUINI, 2007; POMMER, 2012; REZENDE, 2003; SILVA, 2011), conforme ilustramos na Figura 10.

Figura 10 - Circularidade na definição de números reais e irracionais



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma possibilidade de estabelecimento de um estatuto próprio do número irracional, e, consequentemente, da superação da sua visão apenas como um não-ser-racional, passa pela noção de incomensurabilidade e pela medição de segmentos. Manuais escolares da segunda metade do século XIX até as primeiras décadas do século XX procediam dessa forma (GOMES, 2005; LIMA, 2001). Além de evitar os problemas que apontamos, como a circularidade e a nebulosidade das definições, essa prática permite realizar uma discussão única em que aparecerão naturais, racionais e irracionais, o que em geral não acontece. Na educação básica, a abordagem mais frequente para os conjuntos numéricos inicia-se tomando os números naturais como resposta à necessidade humana de contar objetos. Mas, como a subtração de dois números naturais nem sempre é um número natural, amplia-se o conceito de número, dando origem aos inteiros. Em seguida, como a divisão de inteiros nem sempre é um número inteiro, resolve-se esse problema novamente com uma ampliação, dando origem aos racionais[21]. Porém, as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão com números racionais resultam em números racionais, e o mesmo argumento não pode ser usado novamente para estender o conceito de número. A extensão seguinte para os irracionais, e posteriormente para os reais, passará muito provavelmente pelo argumento da medição de segmentos.

De maneira intencional, começamos esse capítulo sob a perspectiva da medição de segmentos, e, em seguida, falamos da representação, para só depois tratarmos da definição. Fizemos isso porque entendemos que uma discussão inicial a respeito da medida de segmentos é capaz de criar um *ambiente problemático* (ROQUE; GIRALDO, 2014, p. 15) que dá suporte e oferece sentido à criação dos números irracionais, como vimos na seção 2.1 – Medida de um segmento, antes mesmo de sua definição. Portanto, a principal questão que se coloca, a nosso ver, não se refere ao uso das definições apresentadas no início desta seção. As definições para os números irracionais mais comumente oferecidas pelos livros didáticos talvez sejam as melhores definições possíveis para a educação básica. Preocupamo-nos mais com o que vem antes e depois dessas definições, com o que será feito com elas.

Se uma definição de números irracionais for a primeira coisa a ser apresentada aos alunos, não achamos adequado. Entendemos que é preciso um trabalho prévio capaz de criar uma problematização em torno do assunto, por exemplo, a partir da medição de segmentos. Após sua apresentação, também é preciso realizar algum trabalho, principalmente no que diz respeito a equivalência dessas definições. Isto é, o professor deve proporcionar situações em sala de aula para que os alunos compreedam que um número que não pode ser escrito como razão de inteiros tem, necessariamente, uma notação decimal infinita e não-periódica. Os estudantes também devem entender que a recíproca é verdadeira. Na verdade, antes disso, os alunos precisam compreender porque um número racional é representado por uma decimal exata ou infinita periódica[22]. Segundo Lima (2001),

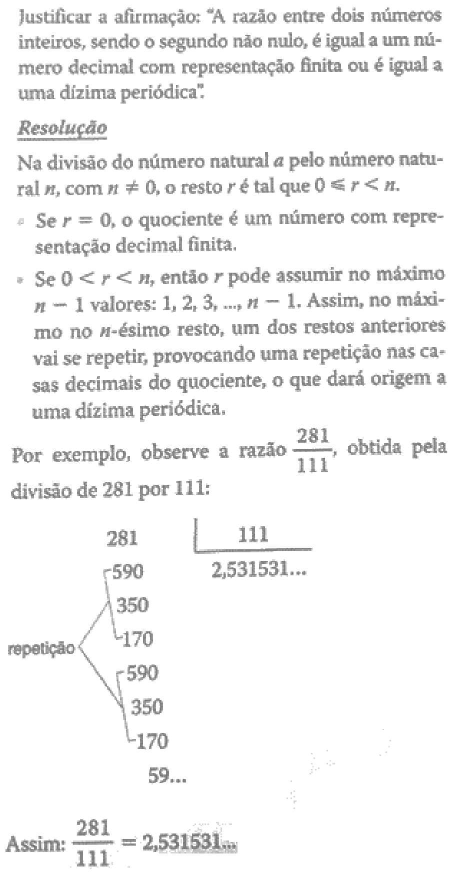
> É dito que um número racional pode ser representado por uma expressão decimal finita ou periódica, mas nenhum esforço é feito para justificar tal afirmação. Seria tão simples dar um exemplo (como 1/7) de divisão continuada do numerador *m* pelo denominador *n* e lembrar que só podem ocorrer *n* restos diferentes; daí a periodicidade (p. 8).

[21] A ampliação dos conjuntos para que as operações resultem em elementos do próprio conjunto visa alcançar uma propriedade dos conjuntos conhecida em matemática pelo termo ‘fechamento algébrico’.

[22] A recíproca, isto é, que toda decimal exata ou infinita periódica representa uma fração, é muito mais frequente nos livros didáticos.

Frequentemente, a dízima periódica é alcançada em cada caso após a realização da divisão do numerador pelo denominador. Isso não prova que todo número racional será representado por uma dízima periódica. Para mostrar isso, é preciso usar um argumento capaz de generalizar a situação, como proposto por Lima (2001) no trecho destacado anteriormente. Até hoje, após várias buscas, encontramos apenas um livro didático editado no Brasil que traz um exercício ou atividade nessa linha de raciocínio. Trata-se de Paiva (2013), e o exercício em questão está na Figura 11.

Figura 11 - Equivalência de definições de números racionais



R.11 Justificar a afirmação: "A razão entre dois números inteiros, sendo o segundo não nulo, é igual a um número decimal com representação finita ou é igual a uma dízima periódica".

Resolução

Na divisão do número natural a pelo número natural n, com $n \neq 0$, o resto r é tal que $0 \leq r < n$.

- Se $r = 0$, o quociente é um número com representação decimal finita.
- Se $0 < r < n$, então r pode assumir no máximo $n - 1$ valores: 1, 2, 3, ..., $n - 1$. Assim, no máximo no n-ésimo resto, um dos restos anteriores vai se repetir, provocando uma repetição nas casas decimais do quociente, o que dará origem a uma dízima periódica.

Por exemplo, observe a razão $\frac{281}{111}$, obtida pela divisão de 281 por 111:

Assim: $\frac{281}{111} = 2{,}531531...$

Fonte: PAIVA (2013, p. 29).

2.3.2 – Na matemática avançada

Na matemática avançada, o número irracional é costumeiramente tratado como o número real que não é racional. Porém, para conferir um tratamento mais rigoroso e também para evitar a circularidade que já discutimos anteriormente, são utilizados alguns procedimentos para definir os números reais sem mencionar os números irracionais. Como exemplo concreto, citamos Lima (1995), um livro bastante respeitado e bastante utilizado nos cursos de matemática brasileiros (licenciatura e bacharelado), nas disciplinas de análise real. Ele procede assim: define o que é um *corpo* – conjunto K munido de duas operações que satisfazem os *axiomas do corpo*; define *corpo ordenado* – um corpo cujos elementos positivos obedecem a certas condições; define *supremo* – a menor das cotas superiores de um conjunto; define *corpo ordenado completo* – corpo ordenado em que todo subconjunto não-vazio $X \subset K$, limitado superiormente, possui supremo em K; por fim, estabelece o axioma: existe um corpo ordenado completo, $\mathbb{R}$, chamado *corpo dos números reais* (p. 49-64). Procedendo assim, os irracionais aparecem como os elementos desse corpo que não são racionais.

Em um livro mais antigo, mas igualmente influente, encontramos um processo muito semelhante. Em Figueiredo (1973) é definido corpo, corpo ordenado, ínfimo – a maior das cotas inferiores de um conjunto – e, por último, define os números reais como um corpo ordenado onde se verifica o postulado de Dedekind: *todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ constituído de elementos positivos tem um ínfimo* (p. 17). Apesar de não usar o termo corpo ordenado completo, a estrutura criada em Figueiredo (1973) é exatamente a mesma criada em Lima (1995). Outro traço comum é a definição dos números reais por meio de um axioma, que é uma afirmação em matemática considerada auto-evidente e que dispensa demonstrações.

A respeito do significado dos números reais, existe uma postura comum entre os matemáticos de considerar que é suficiente dizer que se trata de um corpo ordenado completo. O primeiro exemplo vem de Michael Spivak, ao final do capítulo dedicado à construção dos números reais:

> É inteiramente irrelevante que um número real seja, por acaso, uma coleção de números racionais, e um fato como esse nunca deveria fazer parte da demonstração de nenhum teorema sobre números reais. Demonstrações aceitáveis devem usar apenas o fato que os números reais são um corpo ordenado completo (SPIVAK, 1967, p. 511–512).

O segundo exemplo vem de Elon Lages Lima, na introdução do capítulo que trata dos números reais:

> Faremos uma lista contendo vários fatos elementares a respeito dos números reais. Estes fatos serão admitidos como axiomas, isto é, não serão demonstrados. Deles deduziremos certas consequências, que demonstraremos como teoremas. Esses axiomas representam o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais como um corpo ordenado completo. Frisamos que nosso ponto de vista coincide com o exposto na página 511 de Spivak [refere-se ao trecho de Spivak (1967) citado anteriormente]. Assim, um processo qualquer de construção dos números reais é importante apenas porque prova que corpos ordenados completos existem. A partir daí, tudo o que interessa é que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo (LIMA, 1995, p. 47–48).

O significado dos números reais, e consequentemente dos números irracionais, pode surgir, por exemplo, no contexto de uma demonstração da existência dessa estrutura, como é sugerido por Lima (1995). A respeito dessas construções, as principais são as Sequências de Cauchy e os Cortes de Dedekind[23], que passamos a tratar a seguir. Para falar da primeira, apoiamo-nos em Aragona (2010).

Um número real é dado por uma expressão do tipo

$$d = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots \quad 0 \leq a_{i+1} \leq 9 \ \text{ e } \ a_0 \in \mathbb{N}$$

Por exemplo, $\sqrt{2} = 1{,}4142135 \ldots$ ou $\frac{1}{3} = 0{,}333 \ldots$

As igualdades anteriores são um tanto ambíguas em virtude das reticências. O significado dessas expressões são

$$d = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots$$

Pensando no caso em que d não é um número racional, qualquer que seja o número m de algarismos $a_1, \ldots a_m$ após a vírgula, sempre teremos

$$d \neq a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_m}{10^m}$$

Mas cada expressão finita $x_m = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_m}{10^m}$ será uma aproximação de d e esta aproximação será melhor quanto maior for o número m. Esse é precisamente o significado das igualdades nas expressões com reticências acima. Dá ideia de como achar uma boa definição para números reais, uma sequência de racionais que aproximam um dado número real. Por exemplo, embora ainda não saibamos o que seja $\sqrt{2}$, sabemos que deverá ser um objeto matemático tal que a sequência de números racionais

$$\begin{cases} x_1 = 1{,}4 = 1 + \dfrac{4}{10} \\ x_2 = 1{,}41 = 1 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{1}{10^2} \\ x_3 = 1{,}414 = 1 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{4}{10^3} \\ \vdots \end{cases}$$

---

[23] Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) e Richard Dedekind (1831-1916), o primeiro francês e o segundo alemão, figuram entre os principais responsáveis pelo reestabelecimento da análise matemática em bases rigorosamente formais, a exemplo do que os gregos faziam com a geometria. Os cortes de Dedekind e as sequências de Cauchy permitem construir os reais a partir dos racionais. Para mais detalhes do desenvolvimento histórico da análise, ver capítulo 3. Para ver todo o processo de construção dos números reais a partir dos Cortes de Dedekind, sugerimos a leitura de Caraça (1951) e/ou Ferreira (2011), e, a partir das sequências de Cauchy, sugerimos Aragona (2010).

aproxima-se de $\sqrt{2}$. Estas sequências são sequências de Cauchy, $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{Q}$ tais que a distância de x_m a x_n pode ser tornada arbitrariamente pequena desde que m e n sejam suficientemente grandes. Por exemplo, a sequência que aproxima $\sqrt{2}$, se $m > n$ temos:

$$x_m = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots + \frac{a_m}{10^m}$$

$$x_n = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

$$dist\ (x_m, x_n) = x_m - x_n = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots \frac{a_m}{10^m}$$

$$= \frac{1}{10^{n+1}}\left(a_{n+1} + \frac{a_{n+2}}{10} + \cdots + \frac{a_m}{10^{m-n-1}}\right) < \frac{1}{10^n}$$

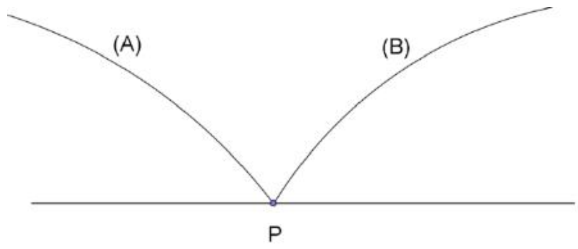
O que mostra que $dist\ (x_m, x_n)$ é tão pequena quanto se queira desde que m e n sejam suficientemente grandes. Uma sequência de Cauchy de números racionais arbitrária pode aproximar um número irracional (como (x_m) aproxima $\sqrt{2}$) ou um número racional como $1/3$ que é aproximado pela sequência de Cauchy $0{,}3; 0{,}33; 0{,}333; \ldots$ ou 1 que é aproximado pela sequência de Cauchy $2 = 1 + 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, \ldots, 1 + \frac{1}{m}, \ldots$

O verdadeiro problema é definir os irracionais, sendo supérfluo usar essa ferramenta sofisticada para definir os números racionais, porque sabemos o que é um número racional e porque a sequência seria óbvia: $x_0 = r;\ x_1 = r;\ x_2 = r;\ \ldots;\ x_m = r, \ldots$ Sendo assim, a definição de números reais em termos das sequências de Cauchy é a seguinte:

Número real é o conjunto de todas as sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$ *que o aproximam* (ARAGONA, 2010, p. 6).

Quanto aos Cortes de Dedekind, recorremos a Caraça (1951) para nos auxiliar. Deve-se a essa fonte o encadeamento das ideias que apresentaremos agora, com algumas modificações na notação e na linguagem utilizada. Seja P um ponto sobre uma reta. Em relação a esse ponto, todos os pontos da reta pertencem a apenas duas classes: classe (A) dos pontos que estão à esquerda de P; classe (B) dos pontos que estão à direita de P. O próprio ponto P pode ser colocado na classe (A) ou na classe (B), isso é indiferente. Definimos como **corte** qualquer partição da reta em duas classes (A) e (B) tal que: i) nenhum ponto da reta escapa à partição; ii) todo ponto da classe (A) está a esquerda de todo ponto da classe (B). A notação utilizada será (A, B).

Figura 12 - Ilustração para um corte de Dedekind



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pode-se dizer pelo que foi visto acima, que todo ponto P da reta produz nela um corte. E quanto à recíproca? Será que todo corte (A, B) é provocado por um ponto da reta? Isto é, existirá um ponto da reta que separa as classes (A) e (B)? Segundo Caraça (1951), Cantor descobriu nessa pergunta a essência da continuidade da reta, ou como ele diz, o *bom reagente da continuidade* (p. 60), e definiu o seguinte axioma, conhecido como axioma da continuidade de Dedekind-Cantor[24]: *todo corte da reta é produzido por um ponto dela, isto é, qualquer que seja o corte* (A, B), *existe sempre um ponto da reta que separa as duas classes* (A) *e* (B) (p. 60).

Passando da reta para o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, é possível definir o conceito de corte fazendo corresponder 'estar à esquerda' por 'ser menor que'. Assim, temos um corte no conjunto $\mathbb{Q}$ quando existirem duas classes (A) e (B) de números racionais tais que: i) todo número racional pertence a (A) ou a (B); ii) todo número que está em (A) é menor do que todo número que está em (B). Como exemplo, temos um corte em $\mathbb{Q}$ colocando (A) como a classe dos números racionais menores ou iguais a $3/5$ e (B) como a classe de todos os números racionais maiores do que $3/5$. Nesse caso, $3/5$ é o ponto que separa as duas classes.

O conjunto $\mathbb{Q}$ tem algumas propriedades semelhantes às propriedades de uma reta, como a infinidade de pontos, a densidade – entre dois pontos quaisquer da reta existem infinitos pontos da reta – e a ordenação. Daí, a pergunta crucial é a seguinte: do ponto de vista da continuidade, o conjunto de pontos da reta e $\mathbb{Q}$ têm a mesma estrutura? Para responder, verificaremos se $\mathbb{Q}$ satisfaz ao axioma da continuidade de Dedekind-Cantor, isto é, se todo corte no conjunto $\mathbb{Q}$ é provocado por um número racional.

[24] Praticamente ao mesmo tempo que Richard Dedekind, o matemático George Cantor formulou a continuidade em termos bastante semelhantes (CARAÇA, 1951).

Para investigar se isso acontece, basta efetuar um corte nos racionais com as seguintes classes: (A) são os números racionais cujo quadrado é menor do que 2; (B) são os números racionais cujo quadrado é maior do que 2. É preciso verificar que, de fato, trata-se de um corte nos racionais, de acordo com a definição acima. O critério usado no corte é um critério bem definido, isto é, dado um número racional qualquer, ou seu quadrado é menor do que 2 ou seu quadrado é maior do que 2. O único número que escapa desse critério é o número cujo quadrado é igual a 2, mas, como vimos na seção 2.1 – Medida de um segmento, trata-se de um número que não é racional. Portanto, todo número racional pertence a (A) ou a (B). Quanto à segunda condição, ela também é satisfeita pois $s^2 < 2 < r^2$ implica que $s < r$. Temos assim um corte efetivamente definido nos números racionais. Qual é o número racional que separa as duas classes? Não existe!

Dedekind então encerra a questão fazendo a seguinte definição:

> Chamo número real ao elemento de separação das duas classes dum corte qualquer no conjunto dos números racionais; se existe um número racional a separar as duas classes, o número real coincidirá com esse número racional; se não existe tal número, o número real dir-se-á irracional (CARAÇA, 1951, p. 62).

Para os leitores que se interessarem por uma construção passo-a-passo dos números reais, recomendamos a leitura de Ferreira (2011).

2.4 - Densidade

Um conjunto X é chamado denso em $\mathbb{R}$ quando todo intervalo aberto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ possui algum ponto de X. O conjunto dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$, pois em qualquer intervalo de números reais existe um número racional. O mesmo acontece com os números irracionais, isto é, em qualquer intervalo de números reais existe um número irracional. As demonstrações dessas propriedades dos racionais e irracionais podem ser encontradas em qualquer livro de análise real e, em geral, são apresentadas em disciplinas avançadas dos cursos de licenciatura em matemática, como fundamentos de análise.

Quando se trata da densidade dos números irracionais e, consequentemente dos números reais, uma das grandes dificuldades que precisam ser superadas no ensino diz respeito a uma falsa impressão e/ou uma falsa conclusão a que podem chegar alguns estudantes. Isso se deve porque muitos estudantes já sabem que entre dois racionais existe outro racional e, assim, intuitivamente, parece claro que um conjunto denso como os racionais preenche toda a reta numérica. Como dito por Courant e Robbins (2000):

> O sistema de pontos racionais, embora seja denso sobre a reta, não cobre toda a reta numérica. Para uma pessoa ingênua, deve certamente parecer muito estranho e paradoxal que um conjunto denso de pontos racionais não cubra toda a reta. Nada em nossa "intuição" pode nos ajudar a "enxergar" os pontos irracionais como distintos dos racionais (p. 69).

Sendo assim, faz-se necessário 'ajudar' nossa intuição e mostrar, por exemplo, que entre dois números racionais existe um número irracional. Porém, antes de mostrar isso, é preciso discutir um pouco de operações básicas com números irracionais. Aliás, trata-se de uma boa oportunidade para fazer isso, ou, se já houver sido trabalhado, para rever a soma, subtração, produto e divisão de números racionais e irracionais.

Os números racionais são fechados em relação à soma, subtração, multiplicação e divisão (exceto por zero). Isso significa que quando realizamos essas operações com dois números racionais, o resultado é um número racional. Os irracionais, por sua vez, não possuem nenhuma dessas propriedades. As operações com números irracionais podem resultar em um número irracional, mas também podem resultar em um número racional. Porém, para ver isso, é preciso antes tratar das operações envolvendo um racional e um irracional. Quando operamos com um racional e um irracional, o resultado é sempre um número irracional. Para ver isso, seja α um número irracional e r um número racional diferente de zero. Considere os seguintes números:

$$r_1 = \alpha + r, r_2 = \alpha - r, r_3 = r - \alpha, r_4 = r\alpha, r_5 = \alpha/r \text{ e } r_6 = r/\alpha.$$

Se todos esses números são racionais, então também são racionais

$$r_1 - r = \alpha, r_2 + r = \alpha, r - r_3 = \alpha, r_4/r = \alpha, r_5 \cdot r = \alpha \text{ e } r/r_6 = \alpha.$$

Isso é uma contradição, já que, por hipótese, α é um número irracional. Portanto, somar, subtrair, multiplicar ou dividir um racional com/por um irracional sempre resultará em um número irracional (NIVEN, 1990). Feito isso, podemos agora mostrar o que pode acontecer quando operamos com dois irracionais. Faremos isso por meio de exemplos.

A soma de dois números irracionais pode ser um número irracional ou um número racional.

$$\underbrace{(2+\sqrt{2})}_{\text{irracional}} + \sqrt{2} \text{ é um número irracional;}$$

$$\underbrace{(2-\sqrt{2})}_{\text{irracional}} + \sqrt{2} \text{ é um número racional.}$$

A multiplicação de dois números irracionais pode ser um número irracional ou um número racional.

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6} \text{ é um número irracional;}$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4 \text{ é um número racional.}$$

A divisão de dois números irracionais pode ser um número irracional ou um número racional.

$$\sqrt{3}/\sqrt{2} \text{ é um número irracional;}$$

$$\sqrt{8}/\sqrt{2}=2 \text{ é um número racional.}$$

Agora, estamos prontos para trabalhar um pouco mais com a densidade, inspirados pelo sítio *Khanacademy*[25]. Começamos observando que o número $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ é um número irracional, pois é a divisão de um racional por um inteiro, e está entre 0 e 1. Dados dois números racionais r_1 e r_2, com $r_2>r_1$, procedemos assim:

$$0<\frac{1}{\sqrt{2}}<1$$

$$0<\frac{r_2-r_1}{\sqrt{2}}<r_2-r_1$$

$$r_1<r_1+\frac{r_2-r_1}{\sqrt{2}}<r_2$$

Como vimos anteriormente, $\frac{r_2-r_1}{\sqrt{2}}$ será um número irracional, pois é o quociente de um racional por um irracional. Por sua vez, $r_1+\frac{r_2-r_1}{\sqrt{2}}$ é a soma de um racional com um irracional, e, portanto, também será um número irracional. Isso mostra que $r_1+\frac{r_2-r_1}{\sqrt{2}}$ é um número irracional localizado entre dois números racionais. Para mostrar agora que

[25] A Khanacademy é uma organização não governamental criada e sustentada por Salman Khan, um educador norte americano de origem bengali, cujo objetivo é promover educação gratuita por meio da produção e veiculação de vídeos de matemática, história, medicina e saúde, finanças, física, química, biologia, astronomia, economia, ciência da computação, entre outras matérias. O vídeo da Khanacademy que nos serviu de inspiração está disponível em https://pt.khanacademy.org/math/algebra/rational-and-irrational-numbers/proofs-concerning-irrational-numbers/v/proof-that-there-is-an-irrational-number-between-any-two-rational-numbers .

entre dois números irracionais quaisquer existe um número irracional, basta multiplicar a desigualdade anterior por $\sqrt{2}$, assim:

$$r_1\sqrt{2} < r_1\sqrt{2} + r_2 - r_1 < r_2\sqrt{2}$$

Como r_1 e r_2 são números racionais, $r_1\sqrt{2}$ e $r_2\sqrt{2}$ são números irracionais, pois o produto de um número racional por um número irracional é um número irracional. O número $r_1\sqrt{2} + r_2 - r_1$ é irracional, pois se trata da soma do irracional $r_1\sqrt{2}$ com o racional $r_2 - r_1$.

2.5 – Enumerabilidade e não-enumerabilidade

Dada a densidade em $\mathbb{R}$ dos números racionais e dos números irracionais, uma questão surge naturalmente: qual dos dois conjuntos tem mais elementos, os racionais ou os irracionais? Para responder a essa pergunta, precisamos fazer uma definição. Dizemos que um conjunto X é enumerável quando pode ser colocado em relação biunívoca com o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. A relação biunívoca também é conhecida como relação um-a-um, isto é, para cada elemento em X existe um único elemento em $\mathbb{N}$. Exemplo de conjunto enumerável: os números pares.

$$1 \to 2$$

$$2 \to 4$$

$$3 \to 6$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$n \to 2n$$

$$\vdots \quad \vdots$$

Da mesma forma, o conjunto dos números ímpares também é enumerável. Quando se trata de conjuntos infinitos, alguns fatos podem causar surpresa, como por exemplo, que o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ também é enumerável. A surpresa vem do fato de $\mathbb{N}$ estar contido em $\mathbb{Z}$, ou seja, de parecer, pelo menos a princípio, que $\mathbb{Z}$ é ‘maior’ do que $\mathbb{N}$. Mas não é. Vejamos como fica a relação biunívoca de $\mathbb{Z}$ com $\mathbb{N}$:

$$0 \to 0$$

$$1 \to -1$$

$$2 \to 1$$

$$3 \to -2$$

$$4 \to 2$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\text{naturais pares} \;\to\; \text{inteiros positivos}$$

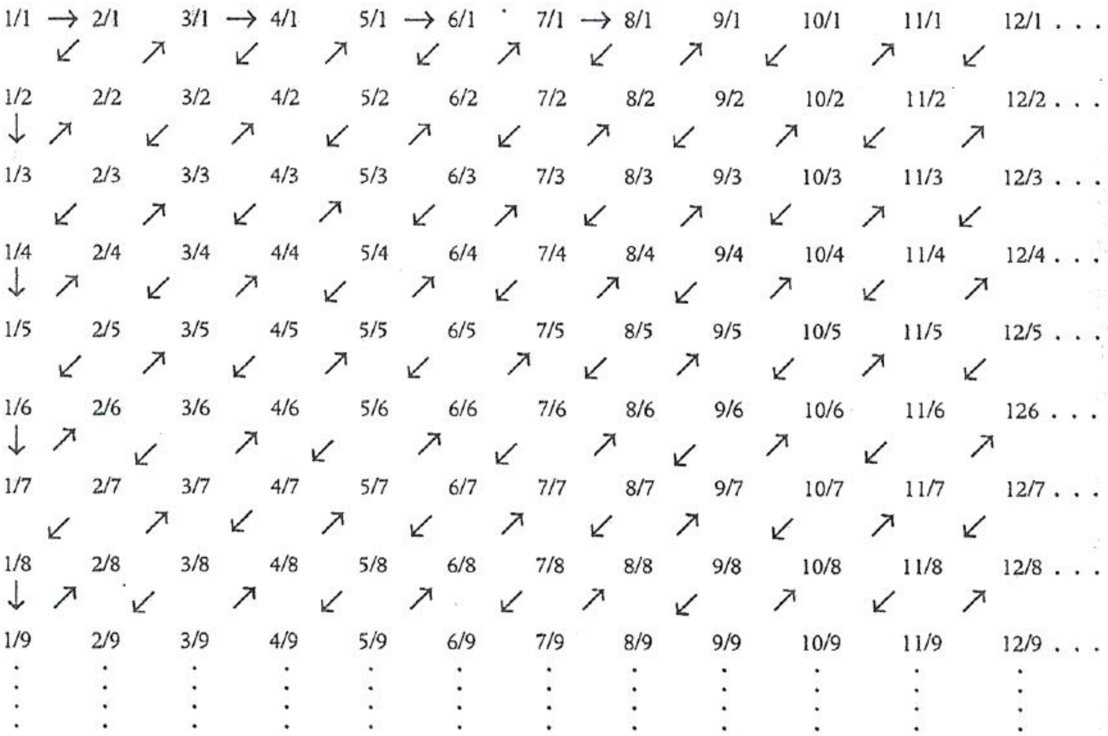
$$\text{naturais ímpares} \to\; \text{inteiros negativos}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

Talvez mais espantoso ainda possa ser o fato dos racionais serem enumeráveis, pois, além de conter os inteiros, também são densos. A demonstração desse fato, conhecida como prova da diagonalização de Cantor, deve-se ao matemático russo Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 – 1918). A demonstração se inicia com a organização de todos os números racionais em uma matriz bidimensional como mostrada na Figura 13.

É importante observar que, embora não se possa escrever todos os números racionais, a organização proposta por Cantor permite chegar até o número racional que se queira. Por exemplo, o número $23/15$ estará localizado no cruzamento da 23ª coluna com a 15ª linha. Pois bem, a dificuldade da prova reside em como estabelecer uma relação biunívoca entre os números naturais e as frações dispostas nessa matriz. Cantor conseguiu resolver esse problema ao propor que a mesma fosse percorrida pelas diagonais, conforme ilustram as setas na Figura 13. A correspondência é a seguinte: 1/1 é associado a 1; 2/1 é associado a 2; ½ é associado a 3; 1/3 é associado a 4; 2/2 é associado a 5, e assim por diante. Portanto, como esse caminho pelas diagonais passará em cada número racional uma única vez, fica estabelecida uma relação biunívoca com os naturais, o que mostra que o conjunto dos números racionais é enumerável.

Figura 13 - Prova de Cantor para enumerabilidade dos racionais

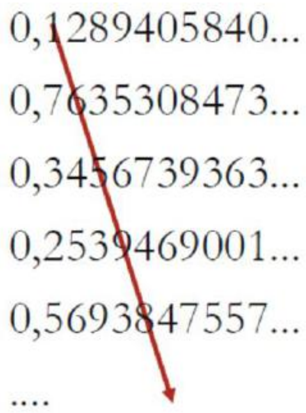


Fonte: ACZEL (2003, p. 104).

E quanto aos números irracionais? Será que também podemos contá-los de forma semelhante? Cantor também trabalhou para resolver esse problema, e apresentou uma brilhante solução, que explicaremos agora. Cantor restringiu sua análise aos números irracionais do intervalo $(0,1)$, e assumiu que existia um modo de listar todos esses números, sem se preocupar com alguma ordem especial, apenas com o fato de que todos os números irracionais desse intervalo estão lá. Dessa forma, sua hipótese é equivalente a assumir que os irracionais são enumeráveis.

A partir da hipótese de que todos as decimais infinitas e não-periódicas do intervalo $(0,1)$ podiam ser listadas (Figura 14), Cantor construiu um número completamente diferente de todos os números listados. Ele procedeu assim: pegou o número formado a partir da diagonal – $0{,}16598\ldots$ – (ver figura 14) e criou um novo número mediante a adição de 1 a cada dígito (se o número for 9, o dígito será mudado para 0). O novo número criado, $0{,}27609\ldots$ não está na lista acima, pois é diferente de cada número listado em pelo menos um dígito. Cantor provava assim, por contradição à sua hipótese, que o conjunto dos números irracionais não pode ser enumerado. A intenção de Cantor, na verdade, era mostrar que existem diferentes ordens de infinito. Com a demonstração acima ele conseguiu provar isso[26]. A ordem do infinito dos números irracionais é maior do que a ordem do infinito dos naturais, que é a mesma dos inteiros e dos racionais, conforme mostramos anteriormente. Dizemos que os números irracionais são **não enumeráveis**.

Figura 14 – Prova da não enumerabilidade dos irracionais pela diagonalização de Cantor



Fonte: Elaborada pelo autor.

[26] Aczel (2003) conta essa e outras histórias referentes a busca de Cantor pelo infinito, e a ligação dessa busca com questões pessoais – espirituais e religiosas – do matemático .

Capítulo 3 - Números irracionais: aspectos históricos e filosóficos

Cada estágio da história é um momento necessário da ideia do espírito do mundo. Toda realidade é um processo histórico.

Georg Hegel

Neste capítulo, ampliamos a discussão em relação aos números irracionais, especificamente no que se refere à origem e ao desenvolvimento dos mesmos. Nesse sentido, a escolha da história e da filosofia pareceu-nos um caminho natural. Além de complementar os aspectos teóricos mais voltados à matemática em si (que apresentamos no Capítulo 2 – Números irracionais: aspectos teóricos), entendemos que a história e a filosofia podem oferecer contribuições valiosas à compreensão de alguns pontos fundamentais do nosso trabalho, como as dificuldades atuais no ensino e na aprendizagem dos números irracionais.

Este capítulo, juntamente com os dois capítulos anteriores, completa o que pode ser entendido como o resultado da nossa preparação para entrar em uma sala de aula e falar a respeito dos números irracionais. Foi consequência da necessidade de aprofundar os conhecimentos, de entender o desenvolvimento histórico, de buscar respostas que a própria matemática não parecia ser capaz de fornecer. Muito mais do que um recurso didático para tornar as aulas mais 'interessantes' ou 'atraentes', entendemos que a história da matemática é capaz de dar sentido aos números irracionais, ao revelar as situações e as intenções envolvidas no desenvolvimento desse conceito. Além disso, pensamos que, ao mostrar a matemática como fruto de uma construção social, a história da matemática também pode contribuir para diminuir a atitude negativa que muitos estudantes têm em relação a essa disciplina. Uma passagem que nos inspirou, sobremaneira, em vários momentos da pesquisa, principalmente quando pensávamos em incluir ou não alguns aspectos de história da matemática, foi a seguinte:

> Como uma pessoa que aprendeu matemática em todos os níveis universitários, estou ciente da atitude negativa de muitos estudantes em relação a esta disciplina. Existem vários motivos para isso, sendo um deles o modo esotérico e seco com que o tema é ensinado. Temos a propensão a sobrecarregar nossos estudantes com fórmulas, definições, teoremas e demonstrações, mas raramente mencionamos a evolução histórica desses fatos, deixando a impressão de que eles foram entregues à humanidade como os Dez Mandamentos, por alguma autoridade divina. A história da matemática é uma boa maneira de corrigir essa impressão (MAOR, 2008, p. 14)

Quanto à presença da filosofia da matemática neste capítulo, entendemos que ela se torna inevitável para tratar de questões colocadas pela própria matemática, mas que transbordam seus limites. Essas questões, em geral, não são questões de matemática, mas sim reflexões sobre a matemática, como por exemplo, qual a natureza do número? São meras invenções humanas ou sua existência é independente de nós? (SILVA, 2007). Além disso, as questões históricas que abordamos aqui também tornaram algumas reflexões filosóficas inevitáveis, como por exemplo, a evolução da ideia de rigor. Por que os matemáticos do século XIX consideraram que a matemática não se encontrava estabelecida em bases rigorosas?

A principal pergunta que norteou nosso trabalho nesse capítulo foi 'como o conceito de número irracional se desenvolveu? '. Para tentar respondê-la, estudamos dois momentos cruciais para o desenvolvimento desse conceito. Um desses momentos ocorreu na Grécia antiga, a partir da ideia do incomensurável; o outro ocorreu no século XIX a partir de um movimento que pode ser chamado de aritmetização da análise.

3.1 – Aritmetização da análise no século XIX

Os números irracionais tais como os conhecemos hoje são resultado de uma construção recente da matemática, ocorrida na transição do século XIX para o século XX. Porém, isso não quer dizer que os números irracionais surgiram recentemente; as ideias precursoras desse conceito, como a incomensurabilidade de dois segmentos, remontam ao século VI a.C. O que ocorreu no século XIX foi a mais recente atualização do conceito de número irracional, resultado de um movimento de discussão dos fundamentos dos sistemas numéricos. Para entender como se deu esse processo, é preciso conhecer os antecedentes desse movimento, que, mesmo sem uma definição considerada segura para os irracionais (pelos padrões atuais de rigor), promoveu uma série de avanços relativos aos números irracionais. Começamos na Idade Média, deixando as origens do número irracional para a seção seguinte.

A manipulação algébrica de números irracionais se tornou intensa na Idade Média, pelas mãos dos matemáticos árabes. Além disso, eles também foram grandes divulgadores do zero e dos números negativos[27], assim como foram *os primeiros a manipular as raízes*

---

[27] Existem diversos documentos que mostram que o desenvolvimento do conceito do zero ocorreu muito antes da Idade Média, e que babilônios, maias, indianos e chineses já manipulavam de alguma forma esse

quadradas com algum grau de convicção (HAVIL, 2012). O matemático árabe al-Kwarizmi (c. 825) se referia aos números racionais e irracionais como 'audíveis' e 'inaudíveis', respectivamente. Mais tarde, isso levou ao uso da palavra árabe *asamm*, que significa surdo ou estúpido, e que em latim foi traduzido pela palavra *surdus*. Diversos matemáticos, como Gerardo de Cremona (século XII), Leonardo Fibonacci (século XIII) e Robert Recorde (século XVI) usaram o termo *surdus* para se referir a raízes irracionais não resolvidas, o que chamaríamos hoje de raízes não exatas (SMITH, 1925).

A partir do século XVI, ocorreram diversos avanços, desde a introdução de tipos ainda desconhecidos de irracionais até questões de ordem prática, como o desenvolvimento de técnicas para efetuar a racionalização de denominadores, métodos para a extração de raiz quadrada e de aproximação por números racionais, entre outros. Alguns exemplos desses avanços são o trabalho de Michael Stifel (1487 – 1567) com irracionais do tipo $\sqrt[m]{a + \sqrt[n]{b}}$, de Girolamo Cardano (1501 – 1576) com a racionalização de frações com raízes cúbicas, de François Viète (1540 – 1603) com uma expansão para π, entre outros (KLEIN, 1968). Também há que se destacar o trabalho realizado por Rafael Bombelli (1526 – 1572) em sua obra *L'Algebra Opera* de 1579. Ele estabeleceu métodos para aproximação de raízes quadradas por números racionais que utilizam o que hoje conhecemos como frações contínuas (ARCAVI, 1985).

O século XVI ainda presenciou um avanço que devemos destacar aqui. Apesar dos matemáticos árabes e hindus já terem conhecimento de raízes não reais alguns séculos antes, eles hesitaram em representar essas raízes. Coube a matemáticos italianos como Cardano e Bombelli a glória pelo desenvolvimento do 'imaginário' e, mais especificamente, foi Cardano o primeiro que ousou denotar o imaginário por um símbolo[28] (DANTZIG, 1970). Deste modo, os matemáticos italianos do século XVI foram os principais responsáveis por iniciar uma revolução que, alguns séculos mais tarde, concretizar-se-ia na expansão do próprio conceito de número. Assim,

> Estava estabelecida uma nova trilha para que a matemática pudesse enveredar na ampliação do campo numérico. Bastava, para isso, penetrar nesse portal

número, inclusive com um símbolo para ele (IFRAH, 2005). Quanto aos números negativos, apesar de não trabalhar com o objeto em si, Diofanto (século III) já utilizava a regra 'menos vezes menos dá mais'. Também para chineses e indianos, os números negativos estiveram presentes de alguma forma (KATZ, 2009).

[28] O problema resolvido por Cardano em que aparecia pela primeira vez um número imaginário foi o seguinte: dividir 10 em duas partes cujo produto seja 40. A solução apresentada por Cardano foi $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ (DANTZIG, 1970).

> imaginário e dar-lhe o significado necessário para o estabelecimento de um novo olhar sobre o mundo. Um olhar no qual estavam agora juntos, real e imaginário, sempre apoiados no real (MENDES, 2006, p. 77).

Todavia, o caminho aberto por Cardano no século XVI ainda esperaria alguns séculos para ser percorrido. A expansão do conceito de número foi um longo processo, e a aceitação do irracional como um número ainda era um problema; isto é, o irracional ainda não havia alcançado um *status* de número. Como exemplo, citamos dois trechos de trabalhos dos séculos XVI, contemporâneos a Cardano. O primeiro deles é de 1544, foi retirado de *Arithmetica Integra*, escrita pelo matemático alemão Michael Stifel:

> Na demonstração de figuras geométricas, quando os números racionais falham, os números irracionais tomam o seu lugar e provam exatamente aquelas coisas que os números racionais não puderam provar... nós somos compelidos a afirmar que eles são números verdadeiros, compelidos pelos resultados que seguem do seu uso – resultados os quais percebemos que são reais, certos e constantes. Por outro lado, outras considerações nos compelem a negar que os números irracionais sejam mesmo números. A saber, quando os submetemos à numeração (representação decimal), descobrimos que eles fogem eternamente, de tal forma que nenhum deles podem ser apreendidos precisamente neles mesmos. Assim como um número infinito não é um número, um número irracional não é um número de verdade, pois permanece escondido em uma nuvem de infinito (KLINE, 1972a, p. 251, tradução nossa).

Ao mencionar o surgimento dos irracionais na geometria, Stifel provavelmente se refere a situações como o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1 (ARCAVI, 1985). O tom da citação anterior é o de um conflito entre algo que aparece em determinadas situações, que resolve determinados problemas, mas que não se encaixava no conceito de número da época. Algo semelhante também pode ser notado na obra *De Oculta Parte Numerorum* do poeta e matemático francês Jacques Pelletier (1517 – 1582), publicada em 1560:

> Eles são, em qualquer caso, 'alguma coisa', e é certo que o seu uso é necessário, especialmente no tratamento de magnitudes contínuas. Eles são como números 'absolutos' genuínos, sujeitos a 'regras'. Sua relação com os números absolutos pode ser comparada com aquela dos animais com os homens: números irracionais têm uma comunicação muda e obscura com os números absolutos, que não difere daquelas feras, que além de ter impressões sensoriais, têm, à sua própria maneira, uma espécie de raciocínio assim como os homens. Apesar de tudo, eles são inexplicáveis e possuem apenas um tipo de existência sombria. Eles não devem ser contados entre os números, mas sua existência deve ser entendida como totalmente contida em sua "designação" (KLEIN, 1968, p. 290, tradução nossa).

A semelhança dos argumentos de Pelletier e de Stifel reside no fato de que os irracionais são percebidos como necessários, mas, ao mesmo tempo, existe uma resistência em aceitá-los como números, sendo resignados a uma 'existência sombria'. Mesmo assim, isso não impediu que os estudos referentes a esses números continuassem avançando. No século XVIII, as questões de ordem prática relacionadas aos números irracionais continuavam em alta. Como exemplo, temos um método para aproximação de raízes quadradas desenvolvido por Nicholas Saunderson (1682 – 1739). O método em questão se tornou muito popular e foi ensinado nas escolas por um longo período, até o advento das calculadoras eletrônicas[29].

Apesar da intensa manipulação de números irracionais na Idade Média pelos árabes, na Europa durante o Renascimento e até o século XVIII, isso não significou que houve algum progresso filosófico a respeito do assunto. Os números irracionais não eram vistos como números, apenas aceitava-se que podiam ser manipulados da mesma maneira que os números racionais (HAVIL, 2012). Para os padrões da matemática atuais, esse conhecimento essencialmente manipulativo não é suficiente, mas, para aqueles tempos, a validação dos métodos se dava em outro nível de referência, e um exemplo disso é o que aconteceu com o cálculo diferencial e integral. Até o início do século XIX, ideias fundamentais como limite, derivada e integral, não haviam recebido a fundamentação lógica que tem hoje. Desde a constituição do cálculo no século XVII, a fundamentação estava em baixa, por diversos motivos. Uma das possíveis causas aponta que os matemáticos estavam muito ocupados e maravilhados com as aplicações do cálculo na mecânica, hidrodinâmica, elasticidade, acústica, balística, ótica, transmissão de calor e mecânica celeste. Não havia separação entre o cálculo e suas aplicações, entre análise matemática e física matemática, e os resultados empíricos validavam os métodos do cálculo diferencial e integral em outras bases (geométricas, físicas, entre outras) (ÁVILA, 2006).

> Um problema físico que se traduzia numa equação diferencial, como o movimento de um pêndulo ou as vibrações de uma corda esticada, já tinha garantida, por razões físicas, a existência e a unicidade da solução. Isso está exemplificado na produção dos mais importantes matemáticos do século [XVIII], dentre os quais destacam-se Leonhard Eüler e Joseph-Louis Lagrange (ÁVILA, 2006, p. 168)

Ou seja, podemos supor que no século XVII não havia necessidade de fundamentação matemática nos moldes que aconteceria no século XIX, quando essa situação começou a mudar. A preocupação com o rigor e com os fundamentos da matemática idealizado pelos

[29] Segundo Arcavi (1985), esse método já era conhecido e utilizado por Téon de Alexandria no século IV d.C., assim como por árabes, hindus e outros matemáticos na Idade Média. O mérito de Saunderson foi justificar o método, isto é, explicar como ele funciona. Para mais detalhes a respeito desse e de outros métodos de extração de raízes quadradas, recomendamos a leitura de Sousa (2013).

gregos voltaria a ocupar as mentes dos matemáticos, por dois motivos principais. O primeiro deles foi o entendimento de que faltava clareza em relação aos fundamentos do sistema numérico, provocado pelo grande desenvolvimento da álgebra e da análise. Os trabalhos de Bernard Bolzano (1781 – 1848) e de Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830) com as funções contínuas e de Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) com os limites de sequências foram os grandes responsáveis por expor, ainda que inadvertidamente, o quão intuitivo eram as bases de sustentação dos sistemas numéricos. O matemático alemão Karl Weierstrass (1815 – 1897) foi o primeiro a apontar que para estabelecer cuidadosamente as propriedades das funções contínuas, era preciso constituir a aritmética do *continuum*, isto é, dos números reais (KLINE, 1972b).

O segundo motivo foi o surgimento de outros tipos de geometria, conhecidas como geometrias não-euclidianas. Para entender a dimensão do abalo que esta construção causou, temos que apresentar, ao menos em linhas gerais, os Elementos, o principal trabalho de Euclides, escrito por volta do século III a.C. Essa obra foi a primeira a abordar, de maneira sistemática, a matemática como uma ciência dedutiva, isto é, uma ciência em que todas as afirmações são deduzidas a partir de afirmações mais simples. Porém, Euclides sabia que era preciso começar de algum lugar, isto é, era preciso escolher um pequeno conjunto de afirmações que fossem consideradas verdades por qualquer pessoa. Tais afirmações não precisariam ser demonstradas porque são evidentes por si mesmas (CARMO, 1987).

Euclides elegeu cinco afirmações para iniciar sua geometria, as quais chamou de postulados (aquilo que se pode), que são os seguintes:

> 1 – Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto;
>
> 2 – Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
>
> 3 – E, com todo centro e distância, descrever um círculo;
>
> 4 – E serem iguais entre si todos os ângulos retos;
>
> 5 – E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado, menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (EUCLIDES, 2009)[30].

Os quatro primeiros postulados preenchem as características pretendidas por Euclides, de afirmações verdadeiras que são auto evidentes, mas o mesmo não se pode dizer do quinto

---

[30] Os Elementos é um tratado matemático escrito por Euclides de Alexandria por volta do ano 300 a.C. A obra que estamos utilizando é uma tradução do grego para o português realizada pelo professor Irineu Bicudo.

postulado. De fato, durante alguns séculos, suspeitava-se que o quinto postulado[31] poderia ser demonstrado a partir dos anteriores, o que o tornaria supérfluo. Contudo, apesar dos esforços de grandes matemáticos, nunca se conseguiu tal feito, até que no século XIX descobriu-se algo ainda mais surpreendente: a retirada desse postulado da lista de Euclides dava origem a geometrias inteiramente diferentes, como a geometria elíptica e hiperbólica, genericamente denominadas como geometrias não-euclidianas. A geometria, considerada há milênios como a *apoteose da verdade e da certeza* (LIVIO, 2010, p. 177), passava agora a ser vista apenas como um jogo lógico que depende das regras escolhidas. Ou seja, ao alterar uma única regra, o resultado é um jogo igualmente coeso e sem contradições, mas completamente diferente do jogo original. Criava-se assim uma espécie de mal-estar em relação aos fundamentos da matemática.

Para remediar a situação, era preciso escolher uma base forte para reerguer o edifício da matemática de forma segura, e o alicerce escolhido foi a aritmética. Por duas razões, os matemáticos se convenceram de que todas as teorias deveriam se fundamentar em última instância, nos números naturais. A primeira é que todos os números poderiam ser construídos a partir dos números naturais de forma lógica e consistente. A segunda é que a própria geometria, outrora modelo de rigor e verdade, e que se encontrava abalada pelo surgimento de outras geometrias, poderia ser reconstruída de forma segura a partir da correspondência entre elementos geométricos e equações, ou seja, pela geometria analítica (ÁVILA, 2006).

Além dessas razões de ordem prática, a escolha dos números naturais como base de sustentação para todos os outros números estava permeada de questões de fundo filosófico. Uma dessas questões dizia respeito a dois componentes essenciais da matemática, a lógica e a intuição. Poincaré reconhece que existem dois tipos de espíritos diferentes na matemática, os que caminham passo a passo seguindo estritamente a lógica, e os que se deixam guiar pela intuição e conseguem importantes conquistas de forma rápida, como se fossem *ousados cavaleiros na linha de frente* (POINCARÉ, 1995[32],

[31] O quinto postulado, ou quinto axioma, também ficou muito conhecido como ‘axioma das paralelas’, ou ‘axioma de Playfair’, devido ao enunciado equivalente proposto pelo matemático e geólogo escocês John Playfair (1748 – 1819): *por um ponto P fora de uma reta dada r, não passa mais que uma paralela a r* (CARMO, 1987).

[32] A edição que tivemos acesso é de 1995, porém, a primeira edição do livro é de 1905.

p.13). Contudo, Poincaré (1995) também assinala que essas conquistas rápidas muitas vezes são precárias, pois a intuição não pode nos dar o rigor, nem mesmo a certeza.

Poincaré escreve em 1905, claramente se referindo à crise de fundamentos ocorrida no século XIX, que a evolução se deu quando se percebeu que o rigor não poderia ser introduzido nos raciocínios se antes não estivesse nas definições.

> Por muito tempo os objetos de que se ocupam os matemáticos eram em sua maioria mal definidos; julgavam conhecê-los, porque os representavam com os sentidos ou com a imaginação; mas deles só tinham uma imagem grosseira, não uma ideia precisa sobre a qual o raciocínio pudesse atuar (POINCARÉ, 1995, p. 17).

Assim, a evolução a que Poincaré (1995) se refere várias vezes em seu texto aconteceu quando as definições passaram a não mais recorrerem à intuição, mas somente à lógica. Porém, ele aceita a crítica dos filósofos que uma lógica inteiramente pura só levaria a tautologias[33] e, para fazer aritmética, geometria ou qualquer ciência, é preciso algo mais do que lógica pura. Esse algo mais pode ser chamado de intuição. Ele então recua ligeiramente em sua afirmação e reconhece que a matemática não se tornou totalmente livre da intuição, mas que essa intuição é do tipo 'aceitável', indubitável, a intuição dos números puros. Nesse ponto, é preciso explicar o que seria uma intuição 'aceitável', e Poincaré (1995) o faz, por meio da classificação de três tipos de intuição, que são o apelo aos sentidos e à imaginação, a generalização por indução e a intuição do número puro. Como exemplos, ele cita:

> Se, numa reta, o ponto C está entre A e B, e o ponto D entre A e C, o ponto D estará entre A e B.
>
> O que é verdadeiro para uma quantidade real – dizia Poncelet – deve sê-lo para uma quantidade imaginária; o que é verdadeiro para a hipérbole, cujas assíntotas são reais, é, portanto, verdadeiro para a elipse, cujas assíntotas são imaginárias (p. 18).

Para Poincaré (1995), o primeiro exemplo é do primeiro tipo, isto é, um apelo aos sentidos e à imaginação. O segundo trata-se de um princípio de generalização, e que, embora não faça apelo ao testemunho dos sentidos, assim como o primeiro tipo de intuição, não pode

---

[33] A tautologia é, na retórica, um termo ou texto que expressa a mesma ideia de formas diferentes. Como um vício de linguagem pode ser considerada um sinônimo de pleonasmo ou redundância. Exemplos comuns na linguagem popular: 'sair para fora', 'subir para cima', 'tudo que é demais, sobra', entre outros. A origem do termo vem do grego *tautó*, que significa "o mesmo", mais *logos*, que significa "assunto". Portanto, tautologia é dizer sempre a mesma coisa em termos diferentes. Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Tautologia. Na lógica matemática, trata-se de uma proposição que é sempre verdadeira, ou, em termos mais técnicos, uma *proposição composta cuja última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra V (verdade)* (ALENCAR FILHO, 2002, p.43).

nos dar certeza. Contudo, *quem duvidará seriamente da terceira, quem duvidará da aritmética?* (POINCARÉ, 1995, p. 19). Ou seja, ele defende a aritmética e a intuição do número puro como as únicas bases seguras para edificar a matemática e acredita que, por meio do que chamou de *aritmetização*, a análise evoluiu e se concretizou, atingindo um rigor absoluto.

> Hoje em dia, na análise, não restam mais que números inteiros, ou sistemas finitos ou infinitos de números inteiros, ligados entre si por uma rede de relações de igualdade ou desigualdade. A matemática como se diz, aritmetizou-se (POINCARÉ, 1995, p. 17).
>
> Ora, na análise hoje, quando queremos nos dar ao trabalho de ser rigorosos, não há mais que silogismos ou apelos a essa intuição do número puro, a única que não pode nos enganar. Pode-se dizer hoje que o rigor absoluto foi atingido (idem, p. 19).

A confiança de Poincaré ao falar da análise real no início do século XX deve-se principalmente, mas não apenas, aos bem-sucedidos (ou bem aceitos) trabalhos de George Cantor e Richard Dedekind na formalização do sistema numérico. A segurança em afirmar que o *rigor absoluto foi atingido* também refletia uma certa satisfação pela superação de dificuldades de tentativas anteriores, como aquela proposta por Cauchy, que definia um número irracional como o limite de uma sequência infinita de racionais. O grande problema dessa ideia é que o limite só existe se o número irracional existe, ou, em outras palavras, o limite converge para algo que ele quer definir. Tecnicamente, pode-se dizer que se trata de uma circularidade lógica[34], ou, no popular, *cachorro correndo atrás do próprio rabo*.

O esforço para colocar o sistema numérico e a análise real em bases sólidas rendeu, em 1872, a publicação de três construções dos números reais de forma independente, por três métodos diferentes. Richard Dedekind por meio de cortes de racionais (ou cortes de Dedekind, ver Capítulo 2 – Números irracionais: aspectos teóricos), Charles Méray (1835 – 1911) e George Cantor por meio de sequências fundamentais, e Karl Weierstrass e Eduard Haine (1821 – 1881) por meio de frações decimais. Esses trabalhos não se tratavam apenas de grandes contribuições à matemática ou de preenchimento de lacunas fundamentais do sistema numérico, como o que apresentamos até aqui pode sugerir. Eles mudavam também a forma de fazer matemática.

Na concepção vigente à época de Bolzano e Cauchy, número era uma entidade cuja existência era assumida a *priori*, e que o papel de uma definição seria alcançar e descrever

[34] Para mais detalhes a respeito dessa circularidade, indicamos a leitura de Baldino (1994).

essa entidade. Nesses moldes, considerando a definição de números irracionais como limite de sequências de racionais, podemos pensar que *o número estava presente no lugar para onde a sequência convergia como que à espera de que a convergência se consumasse* (BALDINO, 1994, p. 6). Como vimos, essa definição foi considerada insatisfatória, e a solução encontrada para esse problema mudava não só o conceito de número, mas também o papel de uma definição. Segundo Baldino (1994), é importante reforçar que houve 'construção' dos números reais, e que, além disso, o papel da definição mudava de descritivo para constitutivo.

> Em vez de uma presença metafísica a priori que pedia uma determinação de seu lugar por um processo de aproximações sucessivas, foi o próprio processo de aproximação que se impôs como presença no lugar que ele mesmo indicava. Dissolveu-se a consistência ontológica do número como entidade metafísica (BALDINO, 1994, p. 7).

Uma outra questão envolvida na construção dos números reais, e que não passou despercebida, foi a utilização de processos infinitos. Leopold Kroenecker (1823 – 1891), que foi professor de George Cantor na Universidade de Berlim,

> Rejeitava categoricamente a construção dos números reais de seu tempo pelo fato de não poder ser efetuada só com processos finitos, e pedia uma revolução aritmética que banisse como inexistentes os números irracionais. [...] Diz-se que ele perguntou a Lindemann[35] para que servia sua prova de que π não é algébrico já que números irracionais não existem (BOYER, 1996, p. 416)

Mas, talvez Kroenecker seja mais conhecido pela frase *Deus criou os números naturais. Todo o resto é invenção do homem*, o que nos leva a repensar a formalização do sistema numérico também como o resultado de um desejo de que cada ponto em uma reta (e consequentemente cada segmento de reta) corresponda a um número (COURANT; ROBBINS, 2000). Isso porque, para finalidades práticas de medida e diversas outras aplicações, os racionais são mais do que suficientes. Na verdade, apenas as decimais exatas, aquelas obtidas de subdivisões da unidade em 10, 100, 1000 etc. já cobrem a reta densamente; isto é, dado um ponto qualquer da reta, é possível obter uma fração decimal tão próxima desse ponto quanto se queira.

Em síntese, a matemática do século XIX experimentou, movida por um sentimento de fragilidade dos fundamentos, uma espécie de retorno ao ideal grego de rigor e precisão inaugurado por Euclides no século III a.C. Nesse cenário a aritmética foi escolhida como

[35] Carl-Louis Ferdinand von Lindemann (1852 – 1939) foi um matemático alemão que se notabilizou como o primeiro a mostrar que π é transcendente. Mais detalhes na seção 3.3.1 – π.

uma base segura para a construção do edifício matemático e, após algumas tentativas de definição do número real, a solução encontrada e aceita pela comunidade científica foi a construção do número real. A revisão das bases da matemática também ajudou a criar um sentimento de que a matemática atingira o rigor absoluto, o ponto final do seu curso histórico, resultado de uma jornada que começou na Grécia Antiga. Essa teleologia[36], isto é, o sentimento que a matemática 'cumpriu sua missão' e 'foi o que tinha que ser', pode levar a uma leitura anacrônica da história, isto é, o passado é analisado com o olhar do presente, com o benefício de todo o conhecimento que não era disponível no passado. Segundo Roque (2012), os livros de história da matemática estão repletos de anacronismos. E além disso, costumam ser anacronismos recorrentes, como aquele em que se sustenta que os gregos experimentaram uma crise em sua filosofia ao descobrirem os números irracionais. Esse é um dos assuntos da próxima seção.

3.2 – O desenvolvimento da incomensurabilidade na Grécia Antiga e o olhar anacrônico sobre a história dos números irracionais

Pitágoras de Samos foi o fundador de uma confraria com um rígido código de conduta em que se estudavam propriedades acerca dos números, da música e da astronomia. A historiografia credita a Pitágoras e seus seguidores, conhecidos como pitagóricos, uma série de realizações no âmbito da matemática e áreas afins, como o desenvolvimento do teorema que levou seu nome, o desenvolvimento dos rudimentos de uma teoria dos números, a criação de uma escala musical, a construção de grandezas incomensuráveis, entre outras. Também se credita a Pitágoras e seus seguidores a introdução das palavras "filosofia" e "matemática".

O período em que Pitágoras viveu não é conhecido com exatidão, mas conjectura-se que tenha sido de 586 a 500 a.C. Na verdade, tudo que se refere ao nome de Pitágoras reveste-se de incertezas, especulações e relatos que chegam à beira do anedotismo. Isso se deve principalmente ao fato de nenhum documento dos tempos de Pitágoras ter chegado aos dias de hoje. Na verdade, nem mesmo se sabe se Pitágoras deixou algo escrito, e grande

[36] Segundo Abbagnano (2007), teleologia é a parte da filosofia natural que explica os fins das coisas, é o mesmo que finalismo, ou, em suas palavras, *doutrina que admite a causalidade do fim, no sentido de que o fim é a causa total da organização do mundo e a causa dos acontecimentos isolados. Essa doutrina implica duas teses: 1ª o mundo está organizado com vistas a um fim; 2ª a explicação de qualquer evento do mundo consiste em aduzir o fim para o qual esse evento se dirige* (p.457).

parte do que sabemos a seu respeito vem de fontes muito posteriores ao tempo em que ele viveu. Os escritos mais antigos referentes a Pitágoras se devem a filósofos neopitagóricos do século I d.C., porém, um dos principais relatos das realizações da escola pitagórica está ainda mais distante do tempo em que ela existiu, foi escrito por Proclo no século V d.C., portanto, cerca de mil anos após a morte de Pitágoras. Proclo afirma ter lido uma obra de um discípulo de Aristóteles chamado Eudemo[37], que se tratava de uma espécie de compêndio de toda geometria grega produzida desde o período de Tales e de Pitágoras (BOYER, 1996; CAJORI, 2007; EVES, 2004; GARBI, 2007).

A confraria criada por Pitágoras, também conhecida como escola pitagórica, acreditava que "tudo é número", no sentido de que tudo o que existe poderia ser traduzido em números, como a harmonia na música, as formas da geometria e até as gotas do mar, pois

> [...] ainda que seja muito difícil contá-las, as gotas de água do mar são passíveis de serem contadas. Para os pitagóricos, todas as coisas que compõem o cosmo gozam dessa propriedade, o que os levou a considerar que as coisas consistem de números (ROQUE, 2012, p. 104).

Pensar que tudo o que existe pode ser entendido por intermédio dos números é uma visão presente até nos dias de hoje, inclusive o argumento utilizado pelos pitagóricos, que pode ser colocado da seguinte forma: *se todas as coisas possuem forma, e formas podem ser descritas por números, então os números se tornam a essência do conhecimento, a porta para um nível superior de sabedoria* (GLEISER, 1997).

Os pitagóricos lidavam com o conhecimento matemático de uma forma bastante peculiar. Hoje, estabelecemos fronteiras bem nítidas que separaram a ciência do misticismo, mas os pitagóricos não faziam tal distinção. Ciência e misticismo eram como faces de uma mesma moeda, uma servindo de inspiração à outra[38]. Para exemplificar o complexo amálgama de matemática, misticismo e cosmologia que se constituía a escola pitagórica,

---

[37] Eudemo de Rodes (370 a 300 a.C.) é considerado o primeiro historiador da ciência e da matemática. A obra a qual Proclo se refere, e que supostamente esteve em suas mãos, encontra-se perdida e é conhecida como 'Sumário Eudemiano'. Porém, o fato de Proclo ter vivido cerca de 800 anos após Eudemo coloca essa tese sob suspeição. Além disso, estudos recentes apontam que Proclo fez uma interpolação de Eudemo com uma obra muito mais próxima do seu tempo chamada 'De vita pytaghorica', escrita por um filósofo neoplatônico assírio chamado Jâmblico (245 – 325 d.C.) (GONÇALVES; POSSANI, 2009).

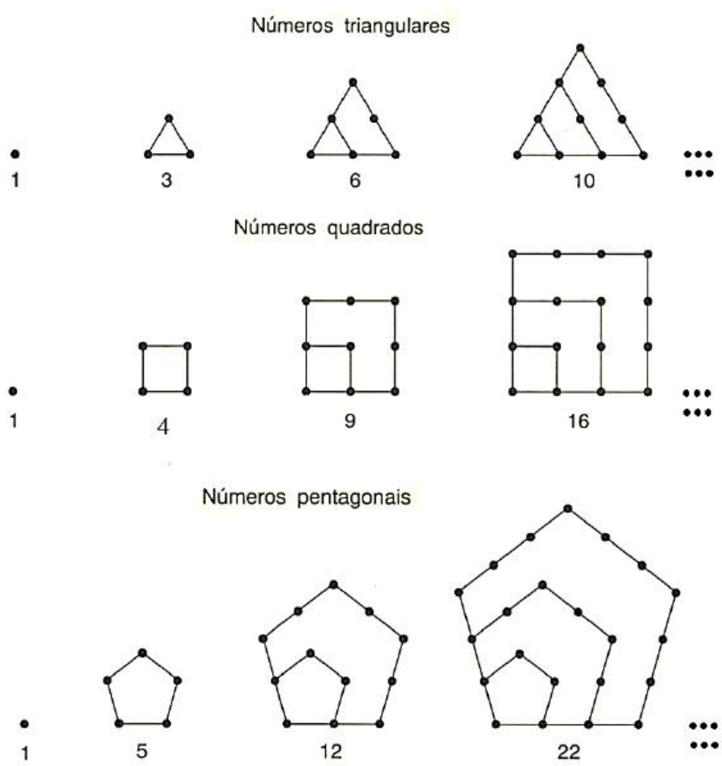
[38] Na verdade, misticismo e religião sempre estiveram relacionados ao avanço científico. Mesmo após o século XVII, quando as Academias decretaram que os dogmas da religião deveriam ficar de fora das comunicações científicas, alguns cientistas continuavam a pautar suas pesquisas em algo que, de certa forma, assemelhava-se a um tipo de crença transcendental. Um dos casos mais emblemáticos é o caso de Einstein, cujo trabalho científico fora impulsionado em grande parte pela crença em "uma grande ordem do universo", imortalizada por uma de suas mais célebres frases, "Deus não joga dados".

vamos usar a música. Diversos relatos afirmam que a partir de uma série de experiências com os sons emitidos por cordas tensionadas, os pitagóricos teriam descoberto relações entre os comprimentos dessas cordas e as notas musicais emitidas por elas. Essas experiências permitiram que se criasse uma escala musical, além de instrumentos como a harpa. Essa seria a parte científica. A parte mística transcendia essas experiências e afirmava que cada planeta emitia um som ao realizar sua órbita, de acordo com a sua distância até o Sol. Dessa forma, a movimentação dos planetas produzia uma sinfonia celestial que só poderia ser ouvida por pessoas de espírito elevado. Possivelmente, acreditava-se que Pitágoras era uma dessas pessoas.

Entre as grandes realizações atribuídas aos pitagóricos, destaca-se a construção de segmentos incomensuráveis. Segundo Boyer (1996), as circunstâncias em que ocorreu a primeira percepção da incomensurabilidade são tão incertas quanto a época do seu desenvolvimento. Contudo, há vários relatos que sugerem que Pitágoras e seus seguidores teriam realizado uma demonstração a partir do lado e da diagonal de um quadrado, como a que mostramos na seção 2.1 – Medida de um segmento. Porém, algumas fontes como Roque (2012) consideram que essa demonstração está além dos conhecimentos dos matemáticos do século VI a.C., e teria sido realizada muito tempo depois e creditada aos pitagóricos pela tradição. Para entender essas colocações, precisamos falar da ‘aritmética dos pontinhos’ praticada por Pitágoras e seus discípulos.

O lema da escola pitagórica, ‘tudo é número’, referia-se na verdade a números inteiros e suas frações. Porém, segundo Roque (2012), os pitagóricos não possuíam uma noção de número puro, ou seja, *os números pitagóricos não eram o objeto matemático que conhecemos hoje, isto é, entes abstratos* (p. 104). Em seus estudos e experiências matemáticas, Pitágoras e seus seguidores trabalhavam com seixos, pequenas pedras arredondadas, por isso a referência aos ‘pontinhos’. Os chamados ‘números figurados’ da matemática pitagórica eram figuras formadas por pontos (**Figura 15**).

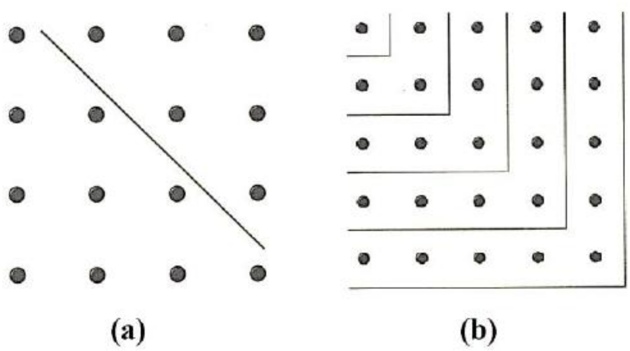
Figura 15 - Números figurados



Fonte: EVES (2004, p. 100)

Diversas construções provavelmente decorreram do arranjo ou da disposição visual dos números figurados, como ‘todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos’ (Figura 16a) ou que ‘as somas parciais da sequência de números ímpares 1+3+5+7+... é sempre um número quadrado’ (Figura 16b). Algumas obras como Boyer (1996) e Eves (204) consideram essas observações como as primeiras manifestações de uma teoria dos números.

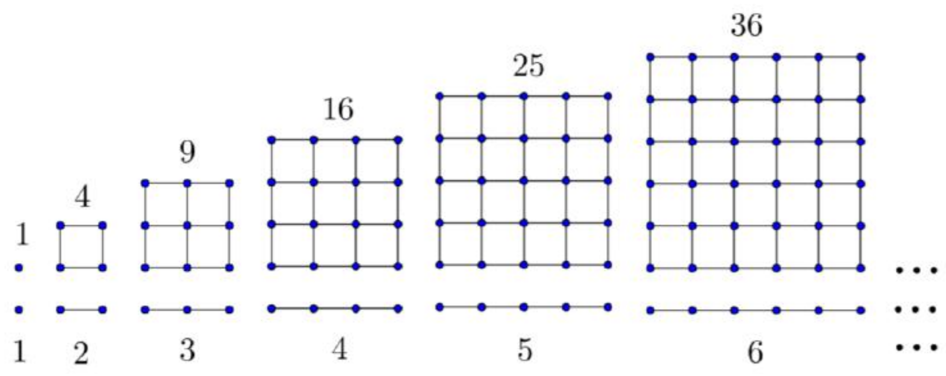
Figura 16 - Aritmética dos pontinhos



Fonte: ROQUE (2012, p. 107)

Outro desenvolvimento possível em um contexto da aritmética com pedrinhas, e que nos interessa em particular, tem relação específica com os números quadrados. É preciso lembrar que para os pitagóricos, elevar um número ao quadrado significava construir um quadrado a partir de um segmento (formado por pontinhos). Por exemplo, elevar 3 ao quadrado implicava em construir um quadrado a partir de um segmento formado por 3 pontinhos, assim como elevar 4 ao quadrado significava construir um quadrado a partir de um segmento formado por 4 pontinhos. Assim, pode-se alcançar a compreensão de que 'o quadrado de um número par é sempre par, e o quadrado de um número ímpar é sempre ímpar' (ver **Figura 17**).

Figura 17 - Significado de elevar ao quadrado para os pitagóricos

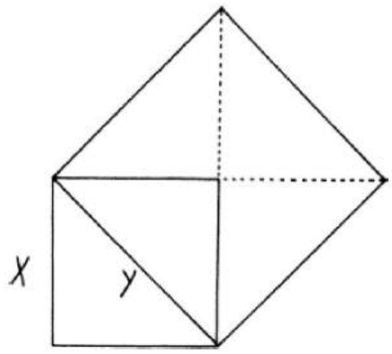


Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir dessas observações, podemos formular uma hipótese de como teria sido a construção da incomensurabilidade de uma maneira que seja próxima dos conhecimentos dos pitagóricos. Apesar de se tratar de um livro de ficção, Dewdney (2000) apresenta um enredo interessante – e que deixaremos aqui como uma possibilidade – de como Pitágoras e seus discípulos poderiam ter atacado a questão da incomensurabilidade. Segundo essa obra, Tales conhecia um teorema (aprendido com os egípcios) que afirma que, dado um quadrado de lado x e diagonal y, se construímos um segundo quadrado sobre a diagonal do primeiro, ele terá o dobro da área do primeiro, isto é, $y^2 = 2x^2$ (ver **Figura 18**). Se Tales conhecia esse teorema, é razoável aceitar que Pitágoras também conhecia[39] uma possibilidade para a construção da incomensurabilidade, conforme descrita a seguir.

[39] Especula-se que o jovem Pitágoras possa ter convivido com o então experiente Tales, e aprendido matemática com ele, visto que a diferença de idade entre os dois seja algo em torno de meio século. Mesmo que esse encontro não tenha ocorrido, os conhecimentos de Tales devem ter chegado até Pitágoras de outras formas.

Figura 18 - Teorema egípcio



Fonte: DEWDNEY (2000, p. 42)

Os Pitagóricos consideravam que tudo poderia ser representado por números (inteiros), portanto, não deveriam aceitar que fosse possível a existência de segmentos incomensuráveis. Por isso, partimos da hipótese de que os segmentos x e y são comensuráveis. Isso significa que eles têm uma unidade em comum, e que quando escritos nessa unidade, ambos são representados por números inteiros, que podemos considerar primos entre si (qualquer dúvida o leitor deve retornar à seção 2.1 – Medida de um segmento). Daí, pode-se imaginar os segmentos x e y marcados com pontinhos representando seus respectivos comprimentos na unidade comum encontrada. Pelo teorema egípcio (**Figura 18**), o quadrado maior tem o dobro de pontinhos do quadrado menor, logo, é formado por um número par de pontinhos, o que implica que y é par pelas observações que fizemos na **Figura 17**. Daí, temos que o número de pontinhos do quadrado com lado y é na verdade um múltiplo de 4, e como esse quadrado tem o dobro de pontinhos daquele de lado x, concluímos que x também é par. Isso contradiz a hipótese de que x e y são primos entre si (não têm múltiplos em comum), e essa contradição foi criada a partir da hipótese de que o lado e a diagonal do quadrado eram comensuráveis. Portanto, era preciso aceitar a existência de segmentos incomensuráveis (DEWDNEY, 2000).

Diversos relatos apresentam essa construção como uma experiência chocante, humilhante, devastadora, herética, assombrosa e perturbadora para os pitagóricos, porque comprometia a base do pensamento da escola pitagórica (AABOE, 1984; BELL, 1986; BENTLEY, 2009; BOYER, 1996; IFRAH, 2005; MUIR, 1996; SMITH, 1996; STRUIK, 1987). A construção de segmentos que não podem ser representados pela razão de números inteiros, os chamados segmentos incomensuráveis, teria causado consternação entre os pitagóricos, estremecendo as bases de suas crenças místico-religiosas nos números inteiros. Nas palavras de Carl Boyer,

> [...] a comunidade matemática grega fora assombrada por uma descoberta[40] que praticamente demolia a base da fé pitagórica nos inteiros. Tratava-se da descoberta que na própria geometria os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever mesmo simples propriedades básicas (BOYER, 1996, p. 50).

Toda a filosofia criada por Pitágoras estaria arruinada com essa construção, pois derrubava a crença fundamental de que 'tudo é número', de que todas as formas do universo poderiam ser descritas por meio de números (inteiros). Um simples quadrado já mostrava a insuficiência dos números para cumprir tal tarefa e uma crise se estabeleceu, a chamada 'crise dos incomensuráveis' ou 'escândalo lógico' (ÁVILA, 1984; EVES, 2004; ROSSMEISSL; WEBBER, 1992). A crise teria sido tão séria que os pitagóricos decidiram *guardar segredo desta inexplicável falha na obra do arquiteto supremo, para não despertar sua cólera* (IFRAH, 2005, p. 329). Mas, apesar dos esforços para manter o assunto em sigilo, conta uma lenda que um membro da congregação chamado Hipaso de Metaponto teria revelado o segredo para não membros da confraria, e, por conta disso, foi lançado ao mar (BENTLEY, 2009; BOYER, 1996; EVES, 2004; MUIR, 1996; ROSSMEISSL; WEBBER, 1992; SMITH, 1996).

Além das questões místico-filosóficas envolvidas, algumas obras acrescentam mais dois fatores que justificariam ter havido uma crise. A construção de grandezas incomensuráveis desafia o senso comum e a intuição geométrica.

> A descoberta dos incomensuráveis parecia desferir um golpe mortal na filosofia pitagórica segundo a qual tudo dependia dos números inteiros. Além disso, parecia contrária ao senso comum, pois intuitivamente havia o sentimento de que toda grandeza poderia ser expressa por algum número racional (EVES, 2004, p. 106).

> [...] não é verdade que dois segmentos quaisquer sejam sempre comensuráveis.[...] esse é um fato que contraria nossa intuição geométrica, e por isso mesmo a descoberta de grandezas incomensuráveis na Antiguidade representou um momento de crise no desenvolvimento da matemática (ÁVILA, 1984, p. 1).

Esses três argumentos a favor da crise podem ser agrupados em um só, presumidamente mais forte do que cada um isoladamente: a construção de segmentos incomensuráveis

---

[40] De acordo com nossa concepção de matemática como um conhecimento histórico-social, preferimos usar os termos 'desenvolvimento' ou 'construção' ao invés de 'descoberta', pois entendemos que esse termo sugere que algo que estava escondido e foi encontrado pronto ou por acaso. Porém, nas citações diretas, o uso do termo obviamente será mantido.

teria abalado o pensamento pitagórico por que contrariava a base da fé nos números inteiros, o senso comum ou a intuição geométrica, ou os três ao mesmo tempo. Para o olhar de um matemático do século XX, parece um raciocínio consistente com a descrição dos pitagóricos e suas realizações matemáticas consagradas pela historiografia. Todavia, alguns historiadores têm colocado essas teses sob suspeição, e versões contestadoras da 'crise dos incomensuráveis' começam a criar consistência, fruto de pesquisas recentes em história da matemática.

A mesma documentação que sustentou a construção de uma visão favorável à uma crise de fundamentos da matemática ocorrida no século VI a.C. começou a ser revista a partir da década de 1960. A partir dessas releituras, começaram a surgir versões alternativas para os relatos tradicionais de uma 'crise dos incomensuráveis'. Uma das frentes de pesquisa contesta não só a crise, mas diversos outros dados referentes aos pitagóricos bastante consolidados pela historiografia, como a demonstração do teorema que levou o nome de Pitágoras e até mesmo da sua própria imagem como um matemático. O motivo desse descrédito reside principalmente na fragilidade da documentação tradicionalmente referida, por se tratarem de relatos tardios e interpolações de diversos textos, como discutimos no início desta seção (GONÇALVES; POSSANI, 2009; ROQUE, 2012)..

Duas outras frentes de pesquisa descartam um colapso de ordem filosófica no seio da escola pitagórica, mas por motivos diferentes. Uma delas sustenta que os pitagóricos provavelmente não descobriram os incomensuráveis porque sua matemática era muito rudimentar, o que impossibilitava lidar com questões avançadas como a incomensurabilidade. Para Roque (2012), a matemática pitagórica era muito concreta, não possuía uma noção de número puro, e por isso, estava muito distante do pensamento abstrato que comumente é associado à matemática grega, de forma que *a descoberta das grandezas incomensuráveis, frequentemente atribuída a um pitagórico, deve ter tido outras origens* (p. 100). As provas que apresentamos (Figura 9 e Figura 18) para a incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado seriam, nessa perspectiva, construções posteriores que foram atribuídas aos pitagóricos.

Uma terceira vertente, bastante sutil em relação às anteriores, defende que, mesmo aceitando que Pitágoras e seus discípulos tenham de alguma forma apreendido a incomensurabilidade, essa construção não teve a relevância que tradicionalmente lhe é atribuída, portanto, não houve crise (ARAÚJO, 2011; GONÇALVES; POSSANI, 2009;

ROQUE, 2012). Para os pitagóricos, números e grandezas eram coisas distintas, e a necessidade de comparar grandezas por meio de números não fazia parte do seu pensamento. A ideia de que *'tudo é número' não significava 'todas as grandezas são comensuráveis'* (ROQUE, 2012, p. 124), ou seja, a existência de segmentos incomensuráveis era uma situação particular da geometria, sem relação com os números, tratados pela aritmética.

O desenvolvimento dos incomensuráveis também teve consequências importantes para a matemática, como o desenvolvimento da teoria das proporções de Eudoxo (que posteriormente inspirou o trabalho de Dedekind no século XIX, ver seção 3.1 – Aritmetização da análise no século XIX), como o caráter formal e abstrato de geometria de Euclides. A partir da construção de segmentos incomensuráveis, que desafiavam o testemunho dos sentidos, uma nova forma de fazer geometria se tornava necessária, onde todas as afirmações tinham que ser comprovadas a partir da lógica e de um conjunto de axiomas e premissas (ROQUE, 2012). Nessa 'nova realidade' as figuras poderiam ser retiradas sem que isso afetasse as demonstrações, já que todas as conclusões deveriam decorrer exclusivamente da argumentação lógica, dos axiomas e dos teoremas ou postulados. A geometria começou a se tornar, a partir dos Elementos de Euclides, o que o professor Florêncio Ferreira Guimarães Filho[41] ensinava em suas aulas: *a geometria é uma conversa ao telefone*. Há que se dizer que o telefone ao qual ele se referia não possibilitava ver as pessoas do outro lado da linha, como hoje é possível com os *smartphones*. Ou seja, o que o professor Florêncio queria dizer é que a geometria deve se sustentar apenas com base em argumentações, como uma 'conversa ao telefone', não sendo permitido o uso de figuras para a demonstração de algum teorema.

Os comentários de Pappus a respeito do livro X dos Elementos de Euclides, aquele que trata de grandezas comensuráveis e incomensuráveis, refletem a separação entre geometria e aritmética de forma bastante clara: *incomensurabilidade e irracionalidade pertencem essencialmente à esfera da geometria* (THOMSON; JUNGE, 1930, p. 52, tradução nossa). Além disso, a concepção de número e de quantidades contínuas de Pappus, segundo Thomson e Junge (1930), era coincidente com a concepção aristotélica: *números são limitados pelo um como seu mínimo, mas não têm um limite máximo;*

[41] Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo. Foi professor do autor deste trabalho durante a graduação e a pós-graduação.

quantidades contínuas têm um máximo, mas não têm um limite mínimo (Idem, p. 52). Em outras palavras, os números são racionais e comensuráveis, pois avançam a partir de uma unidade que pode ser adicionada até o infinito; números possuem uma unidade comum por natureza. Já as quantidades contínuas, partem de um todo e não possuem uma unidade comum por natureza, mas apenas por convenção; podem ser divididas infinitamente (THOMSON; JUNGE, 1930).

Mesmo sem poder afirmar que foram os pitagóricos os primeiros a desenvolver os incomensuráveis, ainda assim resta uma questão intrigante: como os gregos lidaram com a incomensurabilidade? Como eles conviveram com essa nova realidade? Para um matemático do século XIX, envolvido com o estabelecimento de bases rigorosas de fundamentação para a matemática, e mesmo para os matemáticos do século XX ou XXI, parece impossível aceitar que os gregos possam ter convivido com um sistema numérico cheio de lacunas provocadas pela construção de números irracionais. Porém, essas lacunas só existem a partir de uma série de pressupostos, como a relação biunívoca de números com os pontos de uma reta – que implica que todo segmento deve ter sua medida representada por um número – e que todo número (ou grandeza) deve ser racional ou irracional. Tratam-se de pressupostos fortemente arraigados em nós, pois são introduzidos desde muito cedo no currículo escolar, e utilizados com tanta frequência que acabam sendo naturalizados, isto é, torna-se difícil raciocinar 'fora da caixa'. Uma demonstração da força dessa naturalização é que o leitor provavelmente não deve ter percebido que utilizamos esses dois pressupostos nas demonstrações aritmética (**Figura 9**) e geométrica (**Figura 18**) do desenvolvimento da incomensurabilidade.

Na perspectiva de separação entre geometria e aritmética já discutida, descarta-se o pressuposto da associação biunívoca número-grandeza (ou número-segmento ou número-pontos de uma reta). As definições encontradas no início do Livro X dos Elementos de Euclides parecem reforçar essa ideia, pois tratam da incomensurabilidade de um ponto de vista geométrico:

> Definições:
>
> 1. Magnitudes são ditas comensuráveis as que são medidas pela mesma medida, e incomensuráveis, aquelas das quais nenhuma medida comum é possível produzir-se.
>
> 2. Retas são comensuráveis em potência, quando os quadrados sobre elas sejam medidos pela mesma área, e incomensuráveis, quando para os quadrados sobre elas nenhuma área comum seja possível produzir-se.

> 3. Sendo supostas essas coisas, é provado que existem realmente retas, ilimitadas em quantidade, tanto comensuráveis quanto também incomensuráveis com a reta proposta, umas somente em comprimento, outras também em potência. Seja chamada, de fato, por um lado, a reta proposta racional, e as comensuráveis com essa, quer em comprimento e em potência quer em potência somente, racionais, e, por outro lado, as incomensuráveis com essa sejam chamadas irracionais (EUCLIDES, 2009).

Porém, segundo Fowler (1999), as palavras em grego utilizadas por Euclides foram *rhetos* e *alogoi*. Apesar de não formarem um par dicotômico, foram traduzidas como 'racional' e 'irracional', o que pode causar confusões e mal-entendidos.

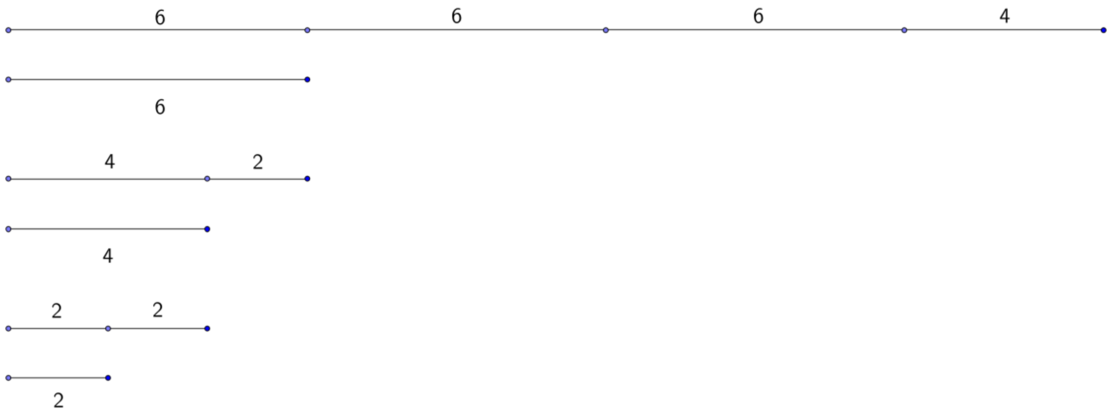
> O uso das palavras 'racional' e 'irracional' dá a impressão que as definições se referem a uma dicotomia em que cada linha é ou racional ou irracional; mas este não é o caso no que se refere ao original em grego. De fato, Euclides não fez esforço algum nas classificações do Livro X para considerar cada possibilidade de linha. Ele primeiro descreveu as linhas exprimíveis na Definição 3, e então ele passou a descrever treze tipos diferentes de linhas *alogoi* que surgem de construções muito especiais (FOWLER, 1999, p. 162, tradução nossa).

Para evitar problemas, Fowler (1999) opta por traduzir *rhetos* por 'exprimível' e deixa *alogoi* sem tradução, mas, escreve em outro momento que *alogos* forma um par dicotômico com *logos*, e que pode significar 'sem palavras' ou 'sem razão'. Outras obras apresentam os termos 'indizível', 'privado de razão' (MENDES, 2012, p. 46), 'inexprimível' (DANTZIG, 1970, p. 97), 'não-racionais' e até mesmo 'não deve ser falado' (MLODINOW, 2010, p. 37). Contudo, alguns desses significados utilizam a palavra 'razão', e também é necessário entender o que os gregos entendiam por 'razão' (*logos*).

Os gregos poderiam trabalhar com dois segmentos (ou retas como escrevia Euclides) e determinar se são comensuráveis ou incomensuráveis por meio de um processo conhecido como antifairese, sem a necessidade de associar números aos segmentos. Esse processo também era utilizado quando se tratava apenas de números, o que conhecemos hoje por algoritmo de Euclides. Assim, a razão 22:6 era assim enxergada pelos gregos como a sequência '3 – 1 – 2', pelo seguinte: 6 pode ser subtraído **3 vezes** de 22, e sobra 4; 4 pode ser subtraído **uma vez** de 6, e sobra 2; 2 pode ser subtraído **2 vezes** de 4 e não sobra nada (FOWLER, 1979; ROQUE, 2012).

Em se tratando de segmentos, procede-se da mesma forma. Por exemplo, dados os segmentos de comprimento 22 e 6 (associamos números para facilitar a visualização, mas, originalmente não se procedia dessa forma), marcamos o segmento menor 3 vezes sobre o segmento maior, observando um resto (de comprimento 4). Marcamos esse resto uma vez sobre o segmento menor, observando um resto (de comprimento 2). Marcamos o segundo resto sobre o primeiro resto duas vezes, não observando sobra alguma (**Figura 19**).

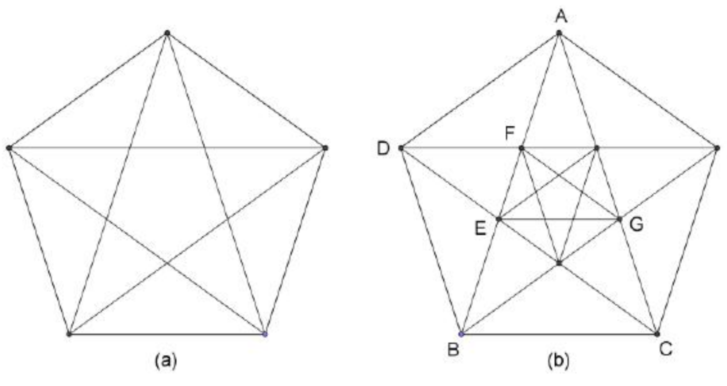
Figura 19 - Processo de antifairese



Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir do entendimento de razão segundo os gregos, e do seu tratamento via processo de antifairese, são feitas novas sugestões de como a incomensurabilidade teria surgido. Algumas obras mostram como esse processo pode levar à conclusão de que diagonal e lado de um quadrado são segmentos incomensuráveis (FOWLER, 1979; MIGUEL, 2009; ROQUE, 2012). Utilizamos esse procedimento na atividade de Medição de Segmentos (ver Apêndice Z - Medida de segmentos). Mostramos aqui uma outra possibilidade, apresentada por Fowler (1979), que envolve o lado e a diagonal de um pentágono regular, figura de onde nasce o pentagrama, comumente atribuído como o símbolo da escola pitagórica (Figura 20a).

Figura 20 - Construção da incomensurabilidade a partir da antifairese no pentágono



Fonte: Elaborada pelo autor.

O procedimento é o seguinte (várias afirmações não serão justificadas formalmente, pois tornaria o processo muito penoso, mas, podem ser facilmente aceitas utilizando-se um compasso para comparar os segmentos):

i) Subtrair AD de AB (lado e diagonal do pentágono maior)

$AB = AE + EB = AD + EB \Rightarrow AB - AD = EB.$

Note-se que $EB = AF$ que é menor do que AD. Daí, AD cabe **1 vez** em AB e sobra EB.

ii) Subtrair EB de AD

$AD = AE = AF + FE = EB + FE \Rightarrow AD - EB = FE.$

Note-se que FE é menor do que EB. Daí, EB cabe **1 vez** em AD e sobra FE.

iii) Subtrair FE de EB

Observe que $EB = AF = FG$ que é uma diagonal do pentágono menor. Como FE é um lado do pentágono menor, retornamos à mesma situação do item 'i' e o processo continua indefinidamente com pentágonos cada vez menores (a sequência gerada é '1 – 1 – 1 – 1 ...'). Ao mesmo tempo em que se descobriam os incomensuráveis, criava-se um critério para detectar a incomensurabilidade de dois segmentos. Os incomensuráveis seriam aqueles em que o processo de antifairese envolvido não termina. Talvez seja possível reinterpretar o significado dos *alogoi* a partir daí. Indizível e inexprimível podem ter alguma relação com um processo infinito de comparação.

Segundo Fowler (1979), utilizando como critério de incomensurabilidade o fato de que o processo de antifairese não termina, podemos dizer que o lado e a diagonal do pentágono regular são segmentos incomensuráveis. De fato, se o lado e a diagonal de um pentágono são comensuráveis, a sua razão pode ser expressa por uma razão de inteiros. Mas, como esse processo não termina, isso implica que podemos obter inteiros cada vez menores. Por redução ao absurdo, concluímos que o lado e diagonal de um pentágono são segmentos incomensuráveis.

Ao proceder a comparação de segmentos por antifairese, dispensava-se a necessidade da ideia de que cada segmento deve corresponder a um número. Como vimos, geometria e aritmética eram tratadas de formas diferentes, e, ao que tudo indica, nenhum tipo de problema era causado por essa separação. No século XIX, porém, isso passou a ser considerado insatisfatório, e mais, também foi encarado como uma falha nos pilares da matemática. Decidiu-se então que, entre outras coisas, todo segmento de reta deveria corresponder a um número, ou seja, decidiu-se que a geometria deveria ser traduzida em termos aritméticos. O preço que foi pago para incluir os segmentos incomensuráveis com a unidade entre os segmentos que podem ser traduzidos por um número, foi a ampliação do próprio conceito de número. Os irracionais alcançavam assim, após alguns séculos de obscurantismo, o seu *status* de número.

Por fim, pode-se dizer que há diversos indícios de que a crise dos incomensuráveis é resultado de uma visão anacrônica da história, e foi atribuída aos pitagóricos muito tempo depois, como resultado de um forte movimento de retorno aos fundamentos da matemática ocorrido no século XIX. Na visão de um matemático pós-Cantor/Dedekind do final do século XIX e início do século XX, quando os primeiros livros de história da matemática foram escritos (embebidos em positivismo), se hoje achamos que a existência de incomensuráveis ainda contraria o senso comum das pessoas, com maior razão isso deve ter acontecido no passado. Esse fato associado à crença de que 'tudo é número' deve ter causado um grande terremoto na escola pitagórica, abalando severamente os pilares de sua filosofia.

Porém, esse pensamento está eivado de anacronismos, além de teleologias. Ao considerar que algo que contraria a nossa intuição também contrariou a intuição dos pitagóricos, estamos considerando que existe uma 'intuição humana', uma linha de pensamento única, que evoluiu e que se tornou o nosso pensamento atual. Porém, conforme argumentamos, a partir da separação entre aritmética e geometria e do processo de antifairese, os gregos antigos do tempo de Pitágoras podem ter convivido sem problema algum com os incomensuráveis. A visão da crise tem implícito algo que sugere uma escalada do desenvolvimento matemático contaminado por uma visão do século XX, depois que se integralizou aritmética e geometria.

3.3 – Números irracionais notáveis: π, e

Consideramos esses números notáveis por três motivos principais: aparecem com frequência em livros didáticos e paradidáticos, documentários e até em obras de ficção; são exemplos de números irracionais transcendentes em um universo de exemplos que parece privilegiar os números irracionais algébricos; possuem uma longa e rica história que atravessa diversos períodos da história da matemática. Além disso, eles têm fundamental importância no meio científico, aparecendo em diversos contextos e fórmulas matemáticas, como na função de densidade de probabilidade

$f(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, utilizada na estatística; na Transformada de Fourier

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{2\pi ikx} dk$, $F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ikx} dx$, utilizada na física, sismologia, criptografia, no processamento digital de sinais e imagens, entre outras; na Fórmula Integral de Cauchy $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$, utilizada em análise complexa; nas raízes enésimas da unidade $z^n = 1 \rightarrow z = e^{2\pi i/n}$, utilizadas na engenharia elétrica; entre outras fórmulas e outras áreas.

Nesta seção, vamos investir esforços na abordagem de aspectos históricos a respeito dos problemas que deram origem a esses números, dos avanços, dos entraves e das mudanças de paradigma na constituição dos mesmos, pois entendemos que eles podem contribuir para ampliação da visão, não apenas a respeito dos números e, π e ϕ, mas dos números irracionais como um todo. Na formação do professor de matemática, pensamos que a história é essencial para promover o rompimento do ciclo vicioso descrito na seção 1.2 – Na licenciatura em matemática e ilustrado pela Figura 6. Com uma visão ampliada a respeito dos números irracionais, o professor adquire maior segurança para levar o tema à sala de aula de forma independente ou complementar ao livro didático, e proporcionar uma aprendizagem relacional do assunto para os alunos, assim como para si próprio.

3.3.1 – π

O uso da letra grega π para representar a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo se tornou comum apenas no século XVIII, a partir de publicações do matemático suíço Leonhard Eüler (1707 – 1783). Porém, situações e problemas que remetem direta ou indiretamente ao conceito carregado por essa letra são muito mais remotos.

Os registros mais antigos que tratam do número π, tal qual o conhecemos hoje, devem-se a Arquimedes de Siracusa (287 a 212 a.C.). Em uma pequena obra intitulada *A Medida de um Círculo*, o matemático grego demonstra que a área de um círculo de raio r e comprimento C é igual a área de um triângulo retângulo de base C e altura r. Chamando a área do círculo de A, isso é equivalente a dizer que $A = \frac{1}{2} rC$. Como já se sabia que o comprimento de uma circunferência é proporcional ao seu diâmetro, isto é, $C = kD$, onde k é uma constante de proporcionalidade e $D = 2r$ é o diâmetro, pode-se dizer, em notação moderna, que Arquimedes chegou até a fórmula $A = kr^2$. Na sequência, nessa mesma obra, Arquimedes apresenta um método para aproximação da constante k, que é equivalente ao que conhecemos hoje como π. É o que mostraremos a seguir.

Com o cálculo do perímetro do hexágono inscrito e uma simples observação, que o comprimento da circunferência é maior do que o perímetro do hexágono inscrito (ver Figura 21), Arquimedes mostra que k deve ser maior do que 3.

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro da circunferência}} > \frac{\text{perímetro do hexágono inscrito}}{\text{diâmetro da circunferência}} = \frac{6r}{2r} = 3\ .$$

O passo seguinte consiste em dobrar sucessivamente os lados dos polígonos inscritos, sempre calculando os perímetros, até chegar a um polígono de 96 lados. A ideia central subjacente ao procedimento realizado por Arquimedes é que, ao aumentar o número de lados do polígono inscrito, tornando-o 'mais próximo' do círculo, é possível diminuir a diferença entre as áreas do círculo e do polígono o tanto quanto se queira, conforme ilustra a Figura 21.

Figura 21 - Polígonos inscritos de Arquimedes

Fonte: Elaborada pelo autor.

Mais uma consideração é importante para o procedimento realizado, a área de um círculo sempre será maior do que a área de qualquer polígono inscrito nesse círculo. A desigualdade obtida por Arquimedes ao final desse processo foi

$$k = \frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro da circunferência}} > \frac{\text{perímetro do 96-ágono inscrito}}{\text{diâmetro da circunferência}} = \frac{223}{71}.$$

Em seguida, Arquimedes fez o mesmo procedimento para polígonos circunscritos, utilizando ideia análoga, isto é, de que a área de um círculo sempre será menor do que a área de qualquer polígono circunscrito a esse círculo, mas, é possível diminuir a diferença entre essas áreas tanto quanto se queira, aumentando-se o número de lados dos polígonos circunscritos, conforme ilustra a **Figura 22**.

Figura 22 - Polígonos circunscritos de Arquimedes

Fonte: Elaborada pelo autor.

A desigualdade obtida por Arquimedes ao final desse processo foi

$$k = \frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro da circunferência}} < \frac{\text{perímetro do 96-ágono circunscrito}}{\text{diâmetro da circunferência}} = \frac{22}{7}.$$

Combinando as duas desigualdades, concluiu que

$$\frac{223}{71} < k < \frac{22}{7}.$$

Em representação decimal, o resultado obtido por Arquimedes seria equivalente a aproximadamente $3{,}1408 < k < 3{,}1429$, que é um resultado correto até a segunda casa decimal. Para maiores detalhes de como Arquimedes fez seus cálculos, principalmente no que diz respeito aos cálculos dos perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos, veja Garbi (2007). Também recomendamos um vídeo "Finding pi by Archimedes method" (FINDING..., 2012) que mostra como é possível transformar as ideias de Arquimedes apresentadas acima em uma atividade para a sala de aula, com o apoio do *software Geogebra* para a visualização geométrica e de uma planilha eletrônica para a aplicação de fórmulas iterativas e a realização dos cálculos.

Civilizações mais antigas como a egípcia, chinesa e mesopotâmia, também resolveram, cada qual à sua maneira, problemas relacionados com π, como o cálculo da área de um círculo. Porém, diferentemente da obra de Arquimedes, nesses registros não há menção a uma constante proveniente da razão entre o comprimento e o diâmetro (ou raio) da circunferência. Apenas calcula-se a área de um círculo específico por meio de um determinado procedimento que deve ser seguido. Registros dessa natureza aparecem em papiros egípcios, em tabletes de argila babilônicos e até em textos sagrados, conforme mostraremos a seguir.

O papiro Rhind é um documento egípcio que data aproximadamente do século 18 a.C. Ele é composto por 85 problemas de aritmética e geometria com suas respectivas soluções. Não se sabe ao certo qual é a natureza do papiro Rhind, isto é, para que ele foi escrito. As duas principais hipóteses levantadas são um manual para o professor ensinar ao aluno ou um caderno de estudante, devido a repetição de exercícios e os pequenos erros contidos em alguns problemas (MARTINS, 2015). Em diversos problemas, a seguinte regra era utilizada para calcular a área de um círculo: o diâmetro é multiplicado por $1/9$, depois o resultado é subtraído do próprio diâmetro que, por fim, é elevado ao quadrado (ROQUE, 2012). Por exemplo, no problema 50, a área de um círculo de 9 unidades de diâmetro é calculada assim:

$$\frac{1}{9} \cdot 9 = 1$$

$$9 - 1 = 8$$

$$8^2 = 64$$

Em linguagem moderna, podemos dizer que a área de um círculo era dada no papiro Rhind por $\left(\frac{8}{9}D\right)^2$. Como indicativo do nível de acuidade desse cálculo, podemos descobrir qual valor de π está implícito nessa relação comparando com a fórmula atual $\frac{\pi D^2}{4}$. Igualando as fórmulas, teremos $\frac{\pi \cdot}{4} = \frac{8^2}{9^2}$, o que acarreta $\pi = \frac{256}{81} = 3{,}16049$. Trata-se de uma boa aproximação, mas, não há indícios que comprovem que os egípcios tinham consciência de que havia uma constante matemática envolvida no cálculo da área de círculos. Tão interessante quanto saber a forma utilizada para o cálculo da área do círculo é pensar como os sábios egípcios chegaram até ela, e, para tal, indicamos a leitura de Beckmann (1974).

Sobre a Mesopotâmia, centenas de tabletes de argila de conteúdo matemático chegaram até nós, e encontram-se espalhados em museus e coleções particulares ao redor do mundo. Selecionamos um tablete que é representativo da matemática babilônica, principalmente no que diz respeito às medidas. Trata-se do tablete Haddad 104, datado do século 18 a.C., encontrado na região do rio Dyiala, na cidade de Tell Haddad, na Síria. O tablete é composto por dez problemas relativos a construção de silos para estocar grãos, medidas de embarcações, carga de trabalho e produção de tijolos (GONÇALVES, 2013). Em um desses problemas, a área do círculo aparece no contexto do cálculo da capacidade para estocar grãos de um silo em formato de tronco de cone. Segundo Roque (2012), o procedimento ensinado, no que diz respeito ao cálculo da área da base do silo, que é um círculo, ocorre da seguinte forma: triplicar o diâmetro, elevar o resultado ao quadrado e depois dividir por 12. Em linguagem moderna, isso equivale a fazer $\frac{(3D)^2}{12}$, ou, $\frac{3D^2}{4}$, que se comparado com a fórmula atual, $\frac{\pi D^2}{4}$, implicaria em $\pi = 3$.

A partir de interpretações de dados contidos em outros tabletes, como os tabletes de Susa, fontes como Eves (2004) e Boyer (1996) afirmam que os povos da mesopotâmia utilizavam a aproximação $\pi \sim 3\frac{1}{8}$, um valor próximo ao que era usado pelos egípcios. Essas comparações não fazem sentido porque, como vimos, a matemática de egípcios e babilônicos não era baseada em fórmulas, mas em sequências de comandos. Outra evidência de que π não era conhecido da mesma forma como conhecemos hoje são os diversos valores que podem ser inferidos para π dos cálculos contidos em diferentes tabletes. Nas palavras de Tatiana Roque,

> Seria um tremendo anacronismo dizer que os povos mesopotâmicos e egípcios já possuíam uma estimativa para π, pois esses valores estavam implícitos em operações que funcionavam, ao invés de serem expressos por números considerados constantes universais, como em nossa concepção atual sobre π. O valor de $1/9$ dos egípcios era uma constante multiplicativa que devia ser operada com o diâmetro, e não um número. O caso babilônico é ainda mais flagrante, pois o verbo “triplique” indica uma operação (ROQUE, 2012, p. 85).

Em textos sagrados como a Bíblia e o Talmude[42], existem cálculos diretamente relacionados a π. Na Bíblia, está escrito que *ele também fez o tanque de metal redondo*

[42] O Talmude é um livro sagrado dos judeus, um registro de conhecimentos e discussões rabínicas acumulados ao longo de milhares de anos que versam a respeito da lei, ética, costumes e história do judaísmo. É formado por duas partes, Mishna e Gemara. Os conhecimentos do Mishna foram transmitidos de forma oral de geração em geração, até serem compilados no século II d.C. O Gemara consiste de discussões e argumentações a respeito dos conhecimentos contidos no Mishna, realizadas por duas escolas, a babilônica e a palestina, cada qual tendo compilado seu próprio Talmude (TSABAN, 1998).

de dez côvados de diâmetro, cinco côvados de altura e trinta de circunferência (Reis 7:23), enquanto no Talmude, está escrito que *cada círculo cuja circunferência é três palmos, tem um palmo de largura* (TSABAN, 1998, p. 76). Em ambos os trechos, é evidente que o comprimento da circunferência está sendo considerado como o triplo do diâmetro, mas será que isso significa que os sábios judeus conheciam π e consideravam seu valor igual a 3?

Estamos novamente diante da mesma questão colocada em relação aos egípcios e babilônios, porém, nesse caso, as condições são diferentes, pois existem mais fontes que permitem formar uma resposta mais consistente. Segundo Tsaban (1998), ao ser questionado a respeito da imprecisão do cálculo estabelecido no Talmude, o rabino Yohanan (180 – 279 d.C.) disse que isso veio da Bíblia, e que deveria ser usado apenas para propósitos religiosos. Para Tsaban (1998), o fato do rabino **não** ter respondido *este é um fato matemático* nem *você pode checar fazendo a medição* (p. 77), indica que era sabido que não se tratava de um valor matematicamente correto, e, conforme o próprio rabino dissera, deveria ser utilizado apenas para fins religiosos. Um comentário do rabino Maimonides (1135 – 1204 d.C.) mostra, de forma ainda mais clara, que os sábios judeus sabiam muito mais a respeito de π. Eles estavam conscientes de que existia uma razão entre a circunferência e seu diâmetro, conheciam inclusive uma melhor aproximação, o valor $3\frac{1}{7}$, além de questões relacionadas à irracionalidade desse número, mas, contentaram-se com o valor 3 para suas obrigações religiosas. Maimonides escreveu assim:

> Você precisa saber que a razão do diâmetro para sua circunferência não é conhecida e nunca será possível expressá-la precisamente. Isto não é devido à uma falha no nosso conhecimento, como a facção chamada Gahaliya [os ignorantes] pensa; é na sua natureza que isso é desconhecido e não há forma de sabê-lo, mas apenas aproximadamente. Os geômetras já escreveram ensaios a respeito disso, isto é, saber a razão do diâmetro para a circunferência aproximadamente, e a demonstração para isso. Essa aproximação que é aceita pelas pessoas cultas é a razão de um para três e um sétimo. Todo círculo cujo diâmetro é um palmo, tem uma circunferência de três palmos e um sétimo aproximadamente. Como nunca será percebido, mas apenas aproximadamente, eles [os sábios hebreus] pegaram o inteiro mais próximo e disseram que todo círculo cuja circunferência é três punhos tem um punho de largura, e eles se contentaram com isso para suas necessidades religiosas (TSABAN, 1998, p. 78, tradução nossa).

Deixando o Egito e a Mesopotâmia para trás, partimos agora em direção aos primeiros séculos da era cristã. Lá encontraremos grandes sábios como Claudio Ptolomeu (90 – 168 d. C.) que obteve um valor ainda melhor para π do que fora obtido por Arquimedes. Em sua obra mais difundida, o Almagesto, Ptolomeu calculou o comprimento de uma corda de $0{,}5^o$, equivalente ao lado de um polígono de 720 lados inscritos na circunferência (Arquimedes chegou até um polígono de 96 lados), que lhe permitiu obter uma aproximação para π de $\frac{377}{120}$, ou, $3{,}14161616$ ... (EVES, 2004).

Daí em diante, durante muitos séculos, o que se viu foi um desfile de aproximações cada vez mais precisas para π, todas valendo-se do método utilizado por Arquimedes, também chamado de método dos perímetros, ou método clássico. Foi assim que, em 480 d.C., o mecânico chinês Tsu Ch'ung-chih obteve a aproximação $\frac{355}{113}$, correta até a 6ª casa decimal. Também foi assim, usando o método clássico, que o matemático árabe Al-Kashi obteve em 1429 uma aproximação correta até a 16ª casa decimal. Em 1610, o holandês Ludolph van Ceulen calculou π corretamente até a 35ª casa decimal pelo método clássico, utilizando para isso um polígono de 2^{62} lados[43]. Em 1621, o físico holandês Willebrord Snell descobriu um método para aperfeiçoar o método clássico, e conseguiu atingir as mesmas 35 casas decimais de van Ceulen utilizando um polígono de "apenas" 2^{30} lados. Em 1630, com o método de Snell, o astrônomo austríaco Christoph Grienberger foi capaz de calcular π até a 39ª casa decimal, e foi a *última tentativa importante de calcular π pelo método dos perímetros* (EVES, 2004, p. 143).

A partir do século XVII, com o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, surgem métodos mais eficientes e menos dispendiosos para obter aproximações para π. Em 1671, o matemático escocês James Gregory obteve a série infinita

$$arc\ tgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots - 1 \leq x \leq 1.$$

Contudo, de acordo com Eves (2004), passou despercebido para ele que, para $x = 1$, a série forneceria uma potente forma de cálculo para π,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

O matemático inglês Abraham Sharp percebeu o que Gregory não havia alcançado e, em 1699, escreveu π corretamente até a 71ª casa decimal, a partir da série desenvolvida pelo

[43] Ceulen gastou grande parte de sua vida nessa tarefa e seu feito foi considerado tão extraordinário que sua viúva fez gravar o número em seu túmulo (hoje perdido) no adro da igreja de São Pedro em Leyden. Até hoje o número π é chamado "número ludolphiano" (EVES, 2004, p.143).

matemático escocês, fazendo $x = \sqrt{1/3}$. Com esse mesmo valor de x, o matemático francês De Lagny obteve em 1719 as 112 primeiras casas decimais de π (EVES, 2004).

Após Arquimedes ter aproximado π com precisão de duas casas decimais, tudo o que os matemáticos haviam conseguido, apesar de usarem métodos mais poderosos que os do célebre matemático grego, resumia-se a obter maior precisão. Tratava-se de um aumento vigoroso, mais de cem casas decimais, porém, que não eram capazes de desnudar a natureza desse número. Mesmo as 112 casas obtidas por De Lagny não eram capazes de garantir, por exemplo, que π era um número irracional. A demonstração da irracionalidade de π só veio em 1767 com o matemático suíço Johann Heinrich Lambert[44]. Antes dessa data, uma das razões para se obter π com um grande número de casas decimais era, além do desafio, *verificar se os dígitos começariam a se repetir, e, se fosse o caso, obtê-lo como um número racional exato, talvez com um denominador grande* (EVES, 2004, p. 148). Mas, mesmo após Lambert ter resolvido o problema que desafiou inúmeros matemáticos por quase dois mil anos, continuaram a aparecer aproximações mais precisas para π. Utilizando a série de Gregory, Zacharias Dase encontrou 200 casas decimais em 1844, Rutheford obteve 400 em 1853, e William Shanks obteve espantosas 707 casas em 1873 (EVES, 2004).

O interesse naquele momento havia se tornado outro, o deslumbre das possibilidades de significados para π fora do âmbito da geometria, até então seu *habitat* natural. Os estudos de séries infinitas, como a de James Gregory, revelavam outros aspectos de π, fazendo surgir diversas relações aritméticas com aparentemente pouca ou nenhuma relação com a geometria. Ou seja, os matemáticos estavam descobrindo que π era muito mais do que a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência. Segundo Kasner e Newman (1968), *é por mera coincidência, por mero acidente que π é definido como a relação entre um círculo e seu diâmetro* (p. 84).

Com o advento dos computadores, o desafio ou a compulsão pela obtenção das casas decimais de π alcançaria novos patamares, ultrapassando a barreira dos milhares. Em 1949, o ENIAC, primeiro computador digital totalmente eletrônico, obteve 2037 casas decimais. Utilizando um computador Cray-2, o matemático da NASA, D. H. Bailey,

---

[44] No Apêndice C, apresentamos uma prova da irracionalidade de π. Não é a prova originalmente apresentada por Lambert, e, embora seja necessário um conhecimento básico de cálculo diferencial e integral, consideramos essa prova mais acessível que a do matemático francês. Para os argumentos de Lambert, ver Laczkovich (1997).

calculou 29.360.000 casas em 1986. Pouco depois disso, o matemático japonês Yasumasa Kanada, da universidade de Tóquio, utilizando um supercomputador NEC SX-2, calculou π com 137.217.700 dígitos (EVES, 2004). Na era digital, a obtenção das casas decimais de π se tornou uma espécie de teste de capacidade de processamento para novos computadores.

Apesar de todo conhecimento acumulado a respeito de π, ainda existem questões em aberto relativas a esse número. Em Teoria dos Números, diz-se que um número é *normal* se todos os seus dígitos aparecem de forma completamente aleatória, isto é, a probabilidade de aparecerem é a mesma. Não se sabe ainda se π é um número normal.

3.3.2 – e

O número $2{,}7182818284590\ldots$ ficou conhecido como número de Eüler devido ao pioneirismo do trabalho do matemático suíço Leonhard Eüler (1707 – 1783). Ele foi o primeiro a usar, em 1727, a letra *e* para representar esse número, o primeiro a escrevê-lo como soma de uma série infinita, além de também ter sido o primeiro a demonstrar que se tratava de um número irracional. Apesar do trabalho de Eüler ser reconhecidamente um marco na história do número *e*, ele não foi o primeiro a notar que havia algo de extraordinário relacionado a esse número.

No início do século XVII, o matemático, físico e astrônomo escocês John Napier (1550 – 1617) chegou muito próximo de descobrir *e*. Ele publicou, em 1614, um tratado chamado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição do maravilhoso cânone dos logaritmos), obra pioneira que apresentou os logaritmos ao mundo. A invenção de Napier foi muito bem recebida no meio científico, pois facilitava os cálculos com números muito grandes, e rapidamente difundiu-se por toda a Europa, chegando inclusive na China. Um dos primeiros a utilizar a invenção de Napier foi o astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571 – 1630), em seus elaborados cálculos das órbitas planetárias (MAOR, 2008).

Para elucidar a ideia por trás do trabalho de Napier, isto é, para dar um exemplo do que se tratam os logaritmos, suponha que precisamos multiplicar 32 por 128. Para isso, criamos uma tabela com as potências de 2.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Localizamos nessa tabela as potências referentes a 32 e 128, que são 5 e 7, respectivamente. Somamos $5 + 7 = 12$ e procuramos na tabela o número referente a 12 que é 4096. Ou seja, $32 \times 128 = 4096$. Para números muito grandes ou muito "quebrados", trabalhar com a soma dos expoentes ao invés do produto dos números representou um grande avanço para uma época em que os maiores recursos disponíveis para realização de cálculos eram pena, tinta e papel. Essa é a essência da ideia dos logaritmos. Na linguagem matemática atual, os expoentes 5 e 7 seriam denotados por $\log_2 32$ e $\log_2 128$, e 12 seria o resultado da operação $\log_2(32 \times 128) = \log_2 32 + \log_2 128$. Em geral, vale a propriedade $\log_b(A \times B) = \log_b A + \log_b B$. De forma análoga, também é possível fazer divisões pela propriedade $\log_b(A/B) = \log_b A - \log_b B$. Ou seja, por meio dos logaritmos, qualquer problema de multiplicação ou divisão reduz-se a um problema de soma ou subtração.

Porém, há um grande problema com a tabela acima. O seu uso é muito restrito, pois muitos cálculos não podem ser realizados com ela. Por exemplo, se quisermos multiplicar 28×112, não encontraremos esses números na tabela, pelo simples fato de que não são potências de 2. Como preencher os enormes vazios existentes na tabela acima? Napier entendeu que a solução seria adotar uma base próxima de 1. Vamos analisar o que aconteceria se adotássemos, por exemplo, uma base $1{,}01$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$1{,}01^n$	1,01	1,0201	1,0303	1,0406	1,0510	1,0615	1,0721	1,0829

O crescimento agora é muito mais lento e os vazios entre as potências são muito menores. E seriam menores ainda se a base fosse ainda mais próxima de 1. Na verdade, Napier também estava ciente disso, pois não adotou $1{,}01$, este foi apenas o nosso exemplo. Ele adotou como base $1 - 10^{-7}$, ou, $0{,}9999999$. A escolha de um número menor do que 1 deveu-se ao desejo de Napier de começar com um número muito grande, 10^7, e, por meio de multiplicações por potências da base escolhida, obter uma série decrescente de resultados. No entanto, a essência da ideia que apresentamos não muda. Napier dedicou 20 anos de sua vida à realização dos cálculos que deram origem a várias tabelas que constavam de sua obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio.*

Uma das formas de se entender porque pode-se dizer que Napier chegou muito perto de descobrir e, é por meio do problema do juro composto contínuo. Antes disso, porém, é necessário abordar brevemente um problema mais simples, mais próximo do que ocorre em situações reais. Problemas de matemática financeira são bastante antigos, com registros em tabletes de argila mesopotâmicos datados de aproximadamente 1700 a.C. Em um desses tabletes está escrito: *quanto tempo levará para uma soma em dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de juros de 20% compostos anualmente?* (MAOR, 2008, p. 41).

De forma geral, problemas como esse podem ser resolvidos pela conhecida fórmula $M = P(1+i)^t$, onde M é o montante, P é o principal, i é a taxa de juros compostos (em decimal) e t é o tempo total de aplicação. O problema mesopotâmico traduzir-se-ia então por $P(1+0{,}2)^t = 2P$, ou seja, $1{,}2^t = 2$. Aprendemos no ensino médio que esse tipo de equação, chamada de equação exponencial, resolve-se por meio da aplicação do logaritmo para "retirar" a incógnita do expoente, usando uma extensão da propriedade que já discutimos acima para os números reais, $\log_b A^n = n \log_b A$. A solução para o problema babilônico ficaria assim em linguagem matemática moderna:

$$\log_2 1{,}2^t = \log_2 2$$

$$\mathrm{t} \cdot \log_2 1{,}2 = 1$$

$$t = \frac{1}{\log_2 1{,}2} \sim 3{,}8018$$

Os mesopotâmicos, segundo Maor (2008), mesmo sem conhecer os logaritmos, obtiveram uma boa aproximação para a resposta, que é um número irracional, alcançando o valor 3,7870.

Tendo visto esse problema, podemos falar agora do problema do juro contínuo. Suponha que você coloque R$1,00 em um banco que paga juros simples de 4% ao ano. Ao final de 25 anos terá R$2,00. Se os juros forem compostos, o dinheiro crescerá mais rápido e ao final do mesmo período, teria $(1 + 0{,}04)^{25} = 2{,}66$ reais. Se agora, ao invés de capitalizado anualmente, o dinheiro fosse capitalizado semestralmente, teríamos $(1 + 0{,}04/2)^{50} = 2{,}69$. Isso pode levar a concluir que quanto mais frequente o período de capitalização, mesmo sem alterar a taxa de juros, maior será o montante ao final de 25 anos. Observe que, procedendo assim, a taxa i de juros não fica expressa no mesmo período que o tempo t de aplicação, e precisamos adaptar a fórmula vista anteriormente para $M = P(1 + i/n)^{nt}$. Assim sendo, em 25 anos, um real crescerá $(1 + 4/100n)^{25n} = (1 + 1/25n)^{25n}$, onde n é o número de vezes que os juros são pagos (GARDNER, 1991). Observe que a última expressão é equivalente a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Na tabela a seguir, mostramos o que acontece à medida que n cresce. O valor do montante parece estabilizar-se em $2{,}7183$, menos de três centavos a mais do que se tivesse sido composto semestralmente.

Tabela 1 - O problema do juro composto contínuo

Taxa (%)	**Capitalização**	***n***	**Montante (R$)**
4	Anual	25	2,6658
2	Semestral	50	2,6916
1/3	Mensal	300	2,7138
1/90	Diária	9.000	2,7181
1/2160	Horária	216.000	2,7183
1/129600	Por minuto	12.960.000	2,7183
1/7776000	Por segundo	777.600.000	2,7183

Fonte: Elaborada pelo autor.

Segundo Maor (2008), no final do século XVII, o matemático suíço Jakob Bernoulli (1655 – 1705) trabalhava com a questão do juro composto contínuo, e foi o primeiro a mostrar uma conexão entre a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, que aparece nesse problema, e o número e. Bernoulli mostrou que o limite dessa expressão deve se encontrar entre 2 e 3. Hoje, sabemos que $e = 2{,}7182818284590\ldots$ e que $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$(Para ver uma demonstração, ver Apêndice F). Voltando ao trabalho de Napier, ao recuperamos a essência de sua ideia, tomar um número muito próximo de 1 para que as potências crescessem lentamente e não deixassem grandes vazios umas entre as outras, temos algo bastante semelhante na expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, já que $1 + \frac{1}{n}$ é cada vez mais próximo de 1 à medida que n vai para o infinito. De fato, ao elevar a base escolhida por Napier, $1 - 10^{-7}$, a um número muito grande como 10^7, obtemos $0{,}3678$, que é aproximadamente $1/e$. Napier havia esbarrado em e, mas, ao que tudo indica, não se deu conta disso.

No ensino médio, o número *e* costuma ser apresentado simplesmente como a base de um logaritmo especial, chamado logaritmo natural, ou, logaritmo neperiano (em homenagem a Napier ou Neper, que também é uma grafia para o seu nome encontrada na literatura). No cálculo diferencial e integral, o tratamento dado a esse número como valor de *a* para o qual a derivada da função $f(x) = a^x$ é igual à própria função, pode esconder a sua verdadeira natureza e fazer crer que se trata apenas de uma conveniência matemática para simplificação dos cálculos[45]. Essa impressão mostra-se completamente equivocada já que o número *e* aparece em diversos fenômenos naturais em que a taxa de variação das grandezas envolvidas é proporcional às próprias grandezas. Exemplos: a taxa de decaimento de uma substância radioativa é proporcional à quantidade de radiação; a taxa de resfriamento de um objeto quente é proporcional à temperatura do objeto; a taxa de diminuição da intensidade do som no ar é proporcional à intensidade do som; a taxa de crescimento populacional é proporcional à população, entre outros. *Todos esses fenômenos que são, ou parecem ser, processos orgânicos, podem ser precisamente descritos por uma forma de função exponencial das quais a mais simples é* $y = e^x$ (KASNER; NEWMAN, 1968, p. 93).

Além das aplicações à física e à própria matemática, existem algumas aparições curiosas do número *e*. Uma dessas situações acontece no *problema do moleiro* (POMMER, 2010), que diz assim:

> Um moleiro armazenou 100 sacas de trigo, de 100 kg cada. O moleiro pretende transportar tal carga do armazém de sua casa até o moinho, que fica a 100 km de distância. Para tal, faz uso de um burro, teimoso por natureza, que não suporta mais de 100 kg. Porém, o burro, quando carregado, exige consumir 1 kg de trigo para cada quilômetro que percorre. Caso exista solução, proponha um modo de maximizar a quantidade de trigo que o moleiro pode fazer chegar até o moinho (VIEIRA, 2008 apud POMMER, 2010, p. 12)[46].

A princípio, parece um problema sem solução, já que para transportar cada saca de $100kg$ por um trajeto de $100km$, o burro consumiria toda a carga. É possível, porém, fazer algum trigo chegar ao seu destino, introduzindo postos de parada durante o caminho.

[45] Também é possível encontrar *e* como a abcissa do ponto do gráfico $y = a^x$ no qual a reta tangente tem inclinação igual a 1. Também nesse caso, a essência do número de Eüler, um ingrediente fundamental em diversos problemas que envolvem o crescimento de diversas grandezas, parece se esconder na sofisticada construção geométrica apresentada.

[46] VIEIRA, A. **À procura do número e**. Portugal, Instituto Tecnológico e Nuclear, 2008.

Introduzindo apenas um posto no meio do caminho, o burro deixará todas as sacas pela metade ao final do primeiro trecho, que o moleiro pode juntar e formar 50 sacas de $100kg$. Ao final da segunda parte, essas 50 sacas também estarão pela metade. Ou seja, chegam ao seu destino 25 sacas de $100kg$, que corresponde a $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1/4$ da quantidade inicial. Introduzindo três paradas, o burro terá quatro trechos para percorrer. No final do primeiro trecho, consumirá $1/4$ de cada saca, ou seja, de cada 4 sacas o moleiro poderá fazer 3, ficando com $\frac{3}{4} \cdot 100 = 75$ sacas. Ao final do segundo trecho, o burro terá consumido $1/4$ do que havia antes, ou seja, restará $\frac{3}{4} \cdot 75 = \frac{225}{4}$ sacas. Ao final do terceiro trecho, com o consumo de mais $1/4$, restarão $\frac{3}{4} \cdot \frac{225}{4} = \frac{375}{8}$ sacas. E, finalmente, ao final do último trecho, o moleiro terá $\frac{3}{4} \cdot \frac{375}{8} = \frac{1125}{32}$ sacas. Observe que $\frac{1125}{32} = 100\left(\frac{3}{4}\right)^4$.

A questão que se coloca nesse ponto é: quantos postos deverão ser colocados para maximizar a quantidade de trigo que chega até o moinho? Alguns valores podem ser experimentados, formando uma tabela (Tabela 2). Uma análise superficial desses dados pode sugerir que quanto maior o número de postos de paradas, maior quantidade de trigo chega ao moinho. Na verdade, a quantidade máxima entregue vai se estabilizar em torno de 3678 kg, pois $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$converge para $1/e$, o mesmo número que apareceu inadvertidamente no trabalho de Napier.

Tabela 2 - Problema do moleiro

Trechos	**Paradas**	$[\mathbf{1 - 1/n}]^{\mathbf{n}}$	**% entregue**
2	1	$(1/2)^2$	25
4	3	$(3/4)^4$	31,64
8	7	$(7/8)^8$	34,36
16	15	$(15/16)^{16}$	35,61
32	31	$(31/32)^{32}$	36,21
64	63	$(63/64)^{64}$	36,50
128	127	$(127/128)^{128}$	36,64
256	255	$(255/256)^{256}$	36,72
512	511	$(511/512)^{512}$	36,75

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma situação semelhante ao problema do moleiro ocorre em um jogo conhecido como *cut and multiply* (corte e multiplique). Consiste em tomar um número, digamos 100, dividi-lo em partes iguais, e em seguida multiplicá-las. Ganha o jogo quem conseguir o maior resultado para a multiplicação. A solução parece se encontrar entre 30 e 40 e, de fato, se for estabelecida como regra que o número de partes deve ser inteiro, ganhará o jogo quem obtiver um valor de parcela mais próximo do número e, que equivale a dividir 100 em 37 parcelas de 2,702702... Uma curiosidade acerca do número e, relacionada com a brincadeira *cut and multiply* é que o maior valor de $\sqrt[n]{\boldsymbol{n}}$ ocorre quando $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}$.

Outra seara em que o número de Eüler também costuma fazer suas inesperadas aparições é na probabilidade. Vejamos, por exemplo, o problema do amigo oculto. Qual é a probabilidade que em um grupo de n pessoas que vão participar de um amigo oculto (ou amigo X), ninguém sorteie a si próprio? Apesar da simplicidade do problema, é possível chegar a uma conclusão espantosa: a probabilidade é de exatamente $1/e = 0{,}367879441\ ...$, ou, aproximadamente 37% para $n \geq 5$. Isto é, não importa se o grupo é formado por 5 ou por 5.000 pessoas, a probabilidade de que alguém sorteie a si próprio é praticamente a mesma (CARNEIRO, 1995).

Para terminar, temos de novo Eüler, que em 1748 mostrou o que muitos consideram a fórmula mais bela da matemática[47], pois relaciona cinco números importantes da matemática, $0, 1, e, \pi$ e i, dentre eles os dois números transcendentes mais famosos, e e π:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Para entender o significado dessa fórmula, é preciso ter uma preparação equivalente aos dois primeiros anos de um curso de matemática. Remetemos o leitor interessado em uma explicação dessa fórmula para Stewart (2009).

3.3.3 – π e e

Segundo Kasner e Newman (1968),

> Um universo em que faltassem e e π não seria inconcebível, como disse alguma alma antropomórfica. Dificilmente se pode imaginar que o sol deixasse de nascer ou as marés de fluir, se faltassem e e π. Mas sem estes dois artefatos matemáticos, o que sabemos do sol e das marés, na verdade toda nossa capacidade de descrever todos os fenômenos naturais, físicos, biológicos, químicos ou estatísticos, seria reduzido a dimensões primitivas (p. 93).

Esse pensamento nos remete a uma questão intrigante que talvez possa ter passado despercebida nas seções anteriores, e que será tratada nesta seção. O aparecimento de π e e em diversas fórmulas que descrevem fenômenos naturais e na fórmula de Eüler –

[47] Segundo Stewart (2009), de vez em quando surgem pesquisas para eleger a mais bela fórmula da matemática de todos os tempos, e a vencedora é quase sempre a fórmula de Eüler $e^{i\pi} + 1 = 0$.

que vimos na seção anterior e que relaciona os dois números – leva-nos a pensar na possibilidade de existir mais alguma relação entre esses dois números irracionais. No que diz respeito à origem, π e e têm histórias bem diferentes. O primeiro surgiu desde épocas muito remotas em problemas relacionados ao cálculo da área de um círculo, enquanto o segundo surgiu no século XVII, praticamente junto com o cálculo diferencial e integral, no contexto de diversos problemas relacionados a logaritmos e taxas de crescimento. Entretanto, apesar desse descompasso inicial, a partir de um certo ponto as histórias desses números começaram a se entrelaçar.

Durante muitos séculos, um dos maiores desafios relacionados aos números π e e era decidir a respeito de sua racionalidade ou irracionalidade. Conforme mostramos nas seções anteriores, esses desafios foram superados no século XVIII, e, segundo já se suspeitava, ambos os números foram confirmados como irracionais. Porém, no século seguinte, mais precisamente em 1884, a construção de um novo tipo de número lançaria novos desafios em relação a π e e. Para entender que desafios foram esses, precisamos primeiro entender a natureza desses novos números.

A maioria dos números que conhecemos na álgebra elementar são soluções para equações polinomiais com coeficientes inteiros. Por exemplo, os números $-1, \frac{2}{3}$ e $\sqrt{2}$ são soluções para as equações $x + 1 = 0$, $3x - 2 = 0$ e $x^2 - 2 = 0$, respectivamente. Porém, números que não são estudados na álgebra elementar, como os números complexos, também podem ter essa propriedade, como é o caso de $i = \sqrt{-1}$ que é uma solução para $x^2 + 1 = 0$. Até números de aparência complicada podem ter essa propriedade. Por exemplo, $\sqrt[3]{1 - \sqrt{2}}$ é solução da equação $x^6 - 2x^3 - 1 = 0$. Os números que são soluções de equações polinomiais com coeficientes inteiros são chamados de algébricos (MAOR, 2008).

Uma consequência imediata dessa definição é que todo número racional é algébrico. De fato, qualquer número que possa ser escrito da forma a/b com a e b inteiros será solução da equação com coeficientes inteiros $bx - a = 0$. A grande questão que se coloca agora é: será que existem números que não são algébricos? Por volta do início do século XIX, os matemáticos suspeitavam que sim, mas nenhum número ainda tinha sido encontrado. Pelo que vimos, se existir algum número não algébrico, ele não poderá ser racional. Logo, a procura por números não algébricos pode se restringir aos números irracionais (MAOR, 2008).

Foi o matemático francês Joseph Liouville (1809 – 1882) que acabou com o mistério. Em 1844 ele mostrou que o número $\frac{1}{10^{1!}}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+\frac{1}{10^{4!}}+\cdots$ não é algébrico. Outro exemplo é $0{,}12345678910111213\ldots$, onde os dígitos são os números naturais em ordem (MAOR, 2008). Os números que não são algébricos, isto é, que não são solução de nenhuma equação com coeficientes inteiros, são chamados de transcendentes. Apesar de ter resolvido a questão, de certo modo, o número de Liouville não deixou os matemáticos completamente satisfeitos, afinal, ele foi construído com o propósito de se mostrar que existe um número que não é algébrico. Havia algo de artificial nesse número, e as atenções se voltaram novamente para π e e. Seriam esses números transcendentes?

Heinrich Lambert, que provou em 1768 que π é irracional, suspeitava que π e e eram transcendentes, mas não pode provar isso. A questão da transcendência de e ainda desafiaria os matemáticos por mais de um século, e só foi resolvida em 1873 pelo matemático francês Charles Hermite (1822 – 1901). Era de se esperar que, após resolver a questão para e, o matemático francês se dedicasse a decidir a situação de π, mas, segundo Maor (2008), Hermite escreveu: *Eu não me arriscarei a provar a transcendência de π. Se outros tentarem, ninguém ficará mais feliz do que eu com o seu sucesso. Mas, acredite-me, vai custar a eles algum esforço* (p. 248). Tudo leva a crer que Hermite imaginou que a demonstração da transcendência de π demandaria um grande esforço. Contudo, apesar da genialidade de Hermite, um curto espaço de tempo foi necessário para mostrar que ele estava enganado.

Apenas nove anos após o trabalho de Hermite, o matemático alemão Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852 – 1939) provou que π é um número transcendente. Na verdade, Hermite havia chegado muito perto de resolver a questão, pois Lindemann modelou sua prova de acordo com a demonstração de Hermite. O matemático alemão mostrou que uma expressão da forma

$$A_1e^{a_1}+A_2e^{a_2}+\cdots+A_ne^{a_n}$$

onde $a_i, 1\leq i\leq n$, representam números algébricos distintos (reais ou complexos) e $A_i, 1\leq i\leq n$, são números algébricos, nunca pode ser igual a zero. Como a expressão $e^{i\pi}+1=0$ já era conhecida, colocando-a na forma da expressão acima como $e^{i\pi}+$

$e^0 = 0$, decorre que πi é algébrico. A conclusão final necessitava de mais duas informações que também já eram conhecidas, i é algébrico e o produto de números algébricos é algébrico. Portanto, π é transcendente.

Com isso, resolvia-se também um dos problemas mais famosos já formulados até então, o problema da quadratura do círculo, proposto por geômetras gregos e que resistia às tentativas de resolução desde o século V a.C. Trata-se, em breves palavras, de se construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado. Ao medir a área do quadrado, temos a área do círculo, por isso a expressão "quadrar". A demonstração de Lindemann pusera fim em toda e qualquer esperança de se resolver esse problema, pois uma das consequências da transcendência de π é a impossibilidade de se resolver a quadratura do círculo[48].

Em linguagem matemática, o problema da quadratura do círculo pode ser assim colocado, $\ell^2 = \pi r^2$, onde r é o raio do círculo conhecido e ℓ é o lado do quadrado procurado. Isolando a incógnita ℓ, teremos $\ell = r\sqrt{\pi}$. Ora, se r é um dado do problema e o valor de π já era conhecido com mais de 700 casas de precisão, como se pode afirmar que se trata de um problema impossível? Qual a importância da demonstração de Lindemann nessa afirmação? Para responder a essas perguntas, precisamos aprofundar um pouco mais a discussão a respeito da quadratura do círculo, mas antes, trazemos Kasner e Newman (1968) para dizer que *"impossível" em Matemática, significa teoricamente impossível, e não tem nada a ver com o estado atual do conhecimento humano* (p. 74, aspas no original). Ou seja, é claro que se pode construir um quadrado com uma área tão próxima à área do círculo quanto a aproximação conhecida de π permitir. Mas, a partir da demonstração de Lindemann, o problema tornou-se teoricamente impossível de resolver.

[48] Apesar disso, são frequentes os relatos de pessoas que teriam conseguido resolver o problema da quadratura do círculo. Trata-se dos *quadradores de círculos* (BECKMANN, 1974, p.174), figuras presentes em praticamente todos os países. Quase sempre, a suposta resolução da quadratura do círculo vem acompanhada de um "novo" valor para π. Um dos episódios mais famosos a esse respeito ocorreu no estado americano de Indiana em 1897. O médico Edwin Goodman enviou à legislatura estadual uma proposta de alteração do valor de π para $16/\sqrt{3}$. A proposta chegou até o Senado, que decidiu que não se tratava de uma questão sobre a qual se pudesse legislar (BECKMANN, 1974; STEWART, 2009). Outros casos bem semelhantes podem ser facilmente encontrados. Em uma busca na Internet, chegamos até Dutch (2010), que narra um caso ocorrido no estado americano de Iowa, também no século XIX, onde também foi levada às autoridades legislativas uma proposta de imposição legal para o valor de π. Nesse caso, o autor da proposta sugeria que fosse legalmente declarado que $\pi = 3$ devido à passagem bíblica de Reis 7:23. Segundo Stewart (2009), existem narrativas semelhantes a essa que supostamente ocorreram nos estados de Indiana, Iowa ou Idaho. Porém, essas narrativas não passam de *mitos persistentes* (STEWART, 2009, p.32). O caso de Goodman, no entanto, é confirmado como real por Beckmann (1974) e por Stewart (2009).

Com régua e compasso, só podemos construir figuras a partir de pontos obtidos da interseção de duas retas, dois círculos ou de um círculo e uma reta. Traduzindo algebricamente, as retas serão equações lineares e os círculos serão equações do segundo grau, e a construção como um todo será uma combinação de equações algébricas, portanto, também será algébrica. Como π foi declarado transcendente, isso implica que esse número não é raiz de nenhuma equação algébrica com coeficientes inteiros, isto é, não pode ser obtido utilizando-se apenas régua e compasso.

No ano de 1900, David Hilbert (1862 – 1943), um dos maiores matemáticos daquele tempo, propôs no Segundo Congresso Internacional de Matemática, realizado em Paris, uma lista com vinte e três problemas ainda não resolvidos que ele considerava importantes para o desenvolvimento da matemática. O sétimo problema dessa lista consistia em estabelecer a transcendência (ou não) de certos números como, por exemplo, $2^{\sqrt{2}}$. Especificamente em relação a esse número, que foi citado pelo próprio Hilbert, o problema foi resolvido em 1929 pelo matemático russo Alexandr Gelfond (1906 – 1968). Ele mostrou que $2^{\sqrt{2}}$ é um número transcendente. Em 1934, o próprio Gelfond e, de forma independente, Theodor Shcneider (1911 – 1988), resolveram um problema mais geral referente ao desafio proposto por Hilbert, conhecido como teorema de Gelfond-Schneider:

Sejam α e β números algébricos (reais ou complexos). Se $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ e β não for um número racional (real), então α^{β} é transcendente (FIGUEIREDO, 2011, p. 55).

O teorema de Gelfond-Schneider permitiu acrescentar muitos números à lista de números transcendentes, inclusive e^{π}. Para entender como esse número pode ser considerado transcendente a partir desse teorema, encaminhamos o leitor para o Apêndice D - Prova de que $i^{-2i} = e^{\pi}$. Embora o teorema de Gelfond-Schneider tenha proporcionado um significativo avanço, diversos números ainda permanecem desafiando os matemáticos, assim como Hilbert anunciou há mais de cem anos. Por exemplo, ainda não foi decidida a transcendência dos números π^{e}, π^{π} e e^{e} (MAOR, 2008).

Por fim, é possível enumerar algumas coincidências relativas a π e e, como por exemplo, o fatos dos dois números terem valores bem próximos, $3{,}1416$ ... e $2{,}7183$ ..., assim como e^{π} e π^{e}, que valem $23{,}1407$ ... e $22{,}4591$ ... , respectivamente. Além disso, a própria fórmula de Eüler $e^{i\pi} + 1 = 0$ pode inspirar os matemáticos a pensar que não se tratam apenas de coincidências, e a buscar outras relações entre esses números. Alguns autores como Maor (2008) sugerem que esses fatos podem não ser mero fruto do acaso.

> Entre a infinidade de números reais, aqueles que são mais importantes para a matemática – $0, 1, \sqrt{2}, e$ e π – estão localizados dentro de menos de quatro unidades na linha numérica. Uma coincidência extraordinária? Um mero detalhe do grande projeto do Criador? (MAOR, 2008, p. 251).

Concordamos que o assunto é vibrante e tem um grande potencial para encantar quem quer que se interesse por entendê-lo mais profundamente. Todavia, a ideia exposta em Maor (2008) vai de encontro à visão que defendemos, da matemática como uma construção social, histórica, datada, atravessada e conduzida por disputas políticas, e pelos interesses mais diversos, e que carrega em si uma marca indelével do ser humano. Apesar disso, esse pensamento não diminui o seu encanto, muito ao contrário, torna-o ainda mais fascinante. Como explicar que uma construção social tenha a capacidade de descrever tão precisamente os fenômenos naturais? Ou, segundo Einstein citado por Livio (2010), *como é possível que a matemática, um produto do pensamento humano que é independente da experiência, se encaixe tão excepcionalmente aos objetos da realidade física?* (p. 14).

Capítulo 4 – Números irracionais: o que dizem as pesquisas?

Toda a nossa ciência, comparada com a realidade, é primitiva e infantil. No entanto, é a coisa mais preciosa que temos.

Albert Einstein

Neste capítulo, trazemos as pesquisas mais relevantes que tivemos acesso a respeito de questões relacionadas ao ensino, à aprendizagem ou à avaliação dos números irracionais. Contudo, pela proximidade dos assuntos, tanto no encadeamento lógico do ponto de vista da matemática, quanto das dificuldades relacionadas ao ensino, entendemos que é inevitável considerar também alguns trabalhos referentes aos números racionais e reais. Organizamos as subseções de acordo com sete categorias, que são: reconhecimento, conceito e definição, propriedades, importância, propostas de ensino, conhecimentos do professor e abordagem dos livros didáticos. Essa escolha fez com que alguns trabalhos aparecessem em mais de uma dessas categorias, mas optamos por fazer assim, pois as quatro primeiras categorias correspondem aos quatro aspectos do conhecimento acerca de números irracionais que decidimos investigar (ver **Quadro 1**).

As buscas pelos trabalhos que são apresentados nesta seção foram realizadas no período de 2012 a 2015, em fontes diversas ligadas à matemática ou à educação matemática. Buscamos por dissertações e teses no Banco de Teses da Capes, nas bibliotecas digitais das principais universidades brasileiras e em sites de busca da Internet. As revistas e os periódicos brasileiros foram acessadas por meio físico e pelos sítios eletrônicos das mesmas, quando disponíveis. Quanto aos artigos de periódicos estrangeiros, foram acessados principalmente a partir do Portal de Periódicos da Capes. Os livros utilizados pertencem a acervo próprio e às Bibliotecas da UFES e do Ifes, além de alguns que estão disponíveis gratuitamente para baixar ou apenas para ler na Internet. Artigos publicados em congressos foram acessados a partir dos anais disponibilizados em meio físico ou em sítios eletrônicos desses eventos. Também estivemos atentos a fontes diversas como *sites*, *blogs*, documentários, vídeo-aulas, palestras, seminários e vídeos em geral disponibilizados na Internet a partir das palavras ‘irracional’ e ‘irracionais’ digitadas nos sites de busca.

Quadro 1 - Categorias e fontes utilizadas

Categorias	Fontes	
Reconhecimento	Arcavi, Bruckheimer e Ben-Zvi (1987) Boff (2006) Fischbein, Jehiam e Cohen (1995)	Igliori e Silva (1998) Melo (1999) Penteado (2004)
Conceito e definição	Arcavi, Bruckheimer e Ben-Zvi (1987) Cezar (2014)	Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) Soares, Ferreira e Moreira (1998)
Incomensurabilidade	Arcavi, Bruckheimer e Ben-Zvi (1987) Boff (2006) Corbo (2005) Fischbein, Jehiam e Cohen (1995)	Gomes (2005) Pietropaolo, Corbo e Campos (2013) Pommer (2012) Soares, Ferreira e Moreira (1998)
Densidade	Boff (2006) Dias (2002) Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) Melo (1999)	Penteado (2004) Sirotic e Zazkis (2007b) Voskoglou e Kosyvas (2011)
Não-enumerabilidade	Fischbein, Jehiam e Cohen (1995)	Sirotic e Zazkis (2007b)
Importância e utilidade	Boff (2006) Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) Garcia, Soares e Fronza (2005) Klein (1932) Miguel (2009)	Moreira (2004) Reis e Reis (1892) Sirotic e Zazkis (2007b) Soares, Ferreira e Moreira (1998) Vinner (2011)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 2 - Categorias e fontes utilizadas (continuação)

Categorias	Fontes	
Propostas de ensino	Andersen (1968) Arcavi (1985) Baroni e Nascimento (2005) Bass (2015) Damazio, Rosa e Euzébio (2012) Dias e Cobianchi (2004) Garcia, Soares e Fronza (2005)	Klein (1932) Melo (1999) Mendes (2012) Mosca (2013) Pasquini (2007) Rosa, Damazio e Silveira (2014) Silva (2006)
Abordagem dos livros didáticos	Dante (2002) Giovanni Jr. e Castrucci (2009) Gomes (2012; 2005) Imenes e Lellis (2012) Leonardo (2010) Machado (1996)	Lima (2001) Nakamura (2008) Pommer (2012) Reis e Reis (1892) Silva (1996) Souto (2010)
Conhecimentos do professor	Ball e Bass (2003) Ball, Thames e Phelps (2008) Brasil (2001; 2002; 2010b) Chervel (1990) Chevallard (1991) Fiorentini (2005) Fischbein, Jehiam e Cohen (1995)	Moreira e David (2010) Moreira e Ferreira (2012) Scheibe (1983) Shulman (1986; 1987) Soares, Ferreira e Moreira (1998; 1999) Tall e Vinner (1981) Tardif (2002)

Fonte: Elaborado pelo autor

4.1 – Reconhecimento

Entendemos o reconhecimento como o estágio mais superficial, porém essencial, de qualquer conhecimento. É uma etapa necessária à construção do conhecimento, mas não é suficiente. Para exemplificar a ausência do reconhecimento de um objeto matemático, imaginemos uma criança que já conhece os números naturais, mas nunca viu algo parecido com $\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$. Ao se deparar com uma matriz como essa, a criança poderá achar engraçado o fato de se arrumarem números em filas (linhas e colunas), ou até mesmo que se trata de algum tipo de jogo. Ou seja, ela não reconhecerá esse objeto como o que os matemáticos chamam de matriz[49].

Para exemplificar a presença do reconhecimento de um objeto matemático, continuamos com o exemplo antecedente, imaginando agora que a criança aprendeu que esse objeto se chama matriz, que é composto por linhas e colunas, e que existem matrizes com as mais diversas combinações linha-coluna, como $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$ etc. Dessa forma, a criança já compreendeu as propriedades básicas de uma matriz necessárias para realizar o seu reconhecimento, isto é, para identificar e diferenciar matrizes do que antes parecia apenas um amontoado de números sem sentido. Obviamente, a habilidade para reconhecer matrizes é o primeiro passo, mas não é suficiente para afirmar que a criança compreendeu o que é uma matriz. Essa compreensão pode se dar em vários níveis. No ensino médio, por exemplo, pode-se dizer que o estudante avançou em relação ao reconhecimento se, além de saber identificar uma matriz, ele é capaz de realizar operações com elas (soma, subtração, multiplicação, encontrar o determinante, entre outras) de resolver alguns sistemas de equações utilizando matrizes, de entender em que situações uma matriz pode ser utilizada para modelar um problema, entre outras características que compõe o conceito de matriz.

No que se refere aos números irracionais, buscamos pesquisas que investigaram o reconhecimento dos mesmos, seja por alunos, seja por professores. Em geral, a questão do reconhecimento também aparece sob a forma de classificação de números, isto é, deseja-se saber se os sujeitos são capazes de, a partir de uma lista de números, identificar quais são os irracionais.

Arcavi, Bruckheimer e Ben-Zvi (1987) relatam um curso de história da matemática, voltada para os números irracionais, oferecido para professores de matemática do ensino médio de Israel. Antes de iniciar o referido curso, foi aplicado um questionário com o

---

[49] Um exemplo dessa situação é narrado por Romulo Campos Lins. Seu filho de 9 anos, ao se deparar com uma equação envolvendo uma integral escrita em uma lousa, ele disse: *Papai, parece linguagem alienígena* (LINS, 2012, p.27).

intuito de fazer um diagnóstico a respeito dos irracionais. Uma das questões dizia respeito ao reconhecimento, e foi a seguinte:

Indique os irracionais entre os números seguintes:

$$a)\ \sqrt{26} \qquad b)\ \frac{-7}{3} \qquad c)\ 1{,}010010001\ldots \qquad d)\ \frac{22}{7}$$

$$e)\ \pi \qquad f)\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} \qquad g)\ \frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)}$$

(ARCAVI; BRUCKHEIMER; BEN-ZVI, 1987, p. 19).

Sessenta professores responderam a essa questão e 60% das respostas continham dois erros ou mais. O erro mais comum foi classificar $\frac{22}{7}$ como irracional, o que sugere, de acordo com Arcavi, Bruckheimer e Ben-Zvi (1987), que uma das fontes de confusão entre números racionais e irracionais para essa população é o uso comum da aproximação racional de um irracional como se fosse o próprio irracional ($\frac{22}{7}$ é uma conhecida aproximação racional para π). *Embora muitos problemas práticos sejam resolvidos assim (por exemplo, quando uma medição está envolvida), a distinção deve ser clara, principalmente para o professor* (ARCAVI; BRUCKHEIMER; BEN-ZVI, 1987, p. 19, tradução nossa).

Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) conduziram um estudo com o objetivo de investigar a situação relativa ao conhecimento de números irracionais de alunos e futuros professores de matemática. Participaram da pesquisa: 30 alunos do 9º ano, 32 alunos do 10º ano (equivalente ao primeiro ano do ensino médio no Brasil) e 29 licenciandos, todos da cidade de TelAviv, Israel. As perguntas abordavam questões como o reconhecimento e definição de números inteiros, racionais, irracionais e reais, assim como questões relacionadas a infinidade e densidade de racionais e irracionais, associação desses números com pontos da reta, comparação da cardinalidade de racionais e irracionais e incomensurabilidade de dois segmentos. No que se refere especificamente ao reconhecimento, pediu-se para que os participantes classificassem uma lista com 15 números de vários tipos. Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) apresentaram apenas os resultados mais surpreendentes (para eles), como o caso de π, em que mais de 80% dos estudantes do 9º e 10º não o reconheceram como um número irracional. Muitos desses alunos nem ao menos reconheceram π como um número (ver Tabela 3).

Tabela 3 – Resultados referentes a questões de reconhecimento em Fischbein, Jehiam e Cohen (1995)

		É um número	**Racional**	**Irracional**	**Real**
π	*9º Ano*	43	13	17	3
	10º Ano	59	13	19	28
	Licenciandos	90	7	79	76
$\mathbf{0,121221}\ldots$	*9º Ano*	27	13	57	17
	10º Ano	81	9	66	44
	Licenciandos	97	17	69	79
$\mathbf{0,0555}\ldots$	*9º Ano*	83	50	23	13
	10º Ano	97	53	25	41
	Licenciandos	100	97	-	83
$\mathbf{34,2727}\ldots$	*9º Ano*	83	83	70	13
	10º Ano	84	13	56	44
	Licenciandos	97	59	28	83
$\mathbf{\frac{-22}{7}}$	*9º Ano*	70	13	20	7
	10º Ano	91	31	31	28
	Licenciandos	100	90	10	76

Fonte: FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN (1995, p. 32)

Em relação às decimais infinitas (ver Tabela 3), foi observado em Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) que muitos estudantes de todos os níveis não identificaram $0,121221\ldots$ como um número irracional e, a exemplo do que aconteceu com π, muitos também não o reconheceram nem ao menos como um número. Até mesmo entre os licenciandos, mais de 30% não identificaram esse número como irracional. Com respeito a $0,0555\ldots$, aproximadamente metade dos estudantes do 9º e 10º ano considerou como um número racional, e cerca de 25% nesse mesmo nível considerou como irracional. Em relação a $34,2727\ldots$, muitos estudantes do 9º e 10º ano consideraram como irracional, e mais de um quarto dos licenciandos fizeram o mesmo. Também é possível notar que, para alguns alunos do 9º ano, esse número é racional e irracional ao mesmo tempo.

No questionário proposto em Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) havia uma única fração, $\frac{-22}{7}$ e, de forma bastante semelhante ao que ocorreu em Arcavi, Bruckheimer e Ben-Zvi (1987), houve muitos erros relacionados a essa fração. Por exemplo, a maioria dos alunos do 9º e 10º não considerou $\frac{-22}{7}$ como um número racional (ver Tabela 3).

No que tange às raízes quadradas (ver Tabela 4), poucos estudantes do 9º e 10º identificaram $3\sqrt{8}$ como um número irracional. Quanto a $\sqrt{16}$, menos da metade dos alunos do 9º e 10º anos considerou esse número como racional, e a maioria, com exceção de um aluno em cada turma, também não o considerou como irracional. Segundo Fischbein, Jehiam e Cohen (1995), isso mostra que, para muitos desses estudantes, os termos 'número racional' e 'número irracional' são *totalmente obscuros* (p. 34). A seguir, passamos a um breve relato de pesquisas semelhantes à Fischbein, Jehiam e Cohen (1995), que foram desenvolvidas no Brasil no final da década de 1990 e que também abordaram questões relacionadas ao reconhecimento.

Tabela 4 - Resultados referentes a questões de reconhecimento em Fischbein, Jehiam e Cohen (1995)

		É um número	**É um número inteiro**	**Racional**	**Irracional**	**Real**
$\mathbf{3\sqrt{8}}$	*9º Ano*	32	10	7	17	10
	10º Ano	78	-	13	38	38
	Licenciandos	97	-	10	86	76
$\mathbf{\sqrt{16}}$	*9º Ano*	60	57	30	-	32
	10º Ano	84	56	44	3	59
	Licenciandos	97	76	69	3	90

Fonte: FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN (1995, p. 32)

O estudo conduzido por Igliori e Silva (1998) tinha dois objetivos. O primeiro foi investigar que concepções errôneas apontadas em estudos diagnósticos de pesquisas realizadas em outros países, inclusive aquela relatada em Fischbein, Jehiam e Cohen (1995), eram também concepções dos alunos pesquisados. O segundo objetivo foi avaliar quais dessas concepções persistiam, após um estudo sistemático do número real. Participaram da pesquisa 36 alunos iniciantes do curso de ciência da computação e uma turma (14 alunos) de finalistas do curso de matemática, que já havia cursado a disciplina análise real. Isso possibilitou uma comparação coerente com o proposto como segundo objetivo da pesquisa, já que nessa disciplina, em geral, é feito um estudo sistemático do número real. Igliori e Silva (1998) acrescentam ainda que, na instituição onde a pesquisa foi realizada, os números reais são apresentados na disciplina de Análise Real pelo *método axiomático* (ver seção 2.3.2 – Na matemática avançada).

O principal instrumento de pesquisa utilizado em Igliori e Silva (1998) foi um questionário contendo 9 questões, das quais duas estão diretamente relacionadas ao reconhecimento de números. Os dados referentes à primeira questão estão na **Tabela 5**.

Tabela 5 – Resultados referentes a questões de reconhecimento em Igliori e Silva (1998)

	Alunos iniciantes			Alunos finalistas		
	$\in \mathbb{Q}$	$\notin \mathbb{Q}$	Sem resposta	$\in \mathbb{Q}$	$\notin \mathbb{Q}$	Sem resposta
$\mathbf{0}$	34	2	0	13	0	1
$\sqrt{\mathbf{3}}$	8	28	0	0	14	0
$\mathbf{1/2}$	33	3	0	14	0	0
$\mathbf{1/3}$	25	10	1	14	0	0
$\mathbf{0,333}\ldots(\mathbf{30}\ \boldsymbol{d})$	25	10	1	12	1	1
$\mathbf{4,21222324}\ldots$	9	27	0	2	12	0
$\mathbf{4,212121}\ldots$	14	22	0	10	4	0
$\boldsymbol{\pi}$	15	20	1	0	14	0
$\mathbf{3,1416}$	28	8	0	6	7	1
$\mathbf{-3/7}$	18	18	0	10	4	0
$\boldsymbol{\pi}/\mathbf{10}$	13	23	0	0	14	0
$\boldsymbol{e}$	8	25	3	0	14	0
$\mathbf{2,7182}$	24	7	5	7	6	1
$\mathbf{1,999}\ldots$	12	23	1	10	3	1
$\mathbf{2}$	32	2	2	14	0	0

Fonte: IGLIORI; SILVA (1998, p. 4).

Igliori e Silva (1998) chamam a atenção para alguns números dessa tabela, como por exemplo, o índice significativamente maior de estudantes iniciantes que considerou $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Q}$ em comparação com os que consideraram $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Q}$. Segundo essa obra, isso se deve possivelmente à representação decimal infinita de $\frac{1}{3}$. Entre as dízimas periódicas, essa obra também destaca o alto índice de alunos iniciantes que consideraram $4{,}212121\ldots \notin \mathbb{Q}$ e $1{,}999\ldots \notin \mathbb{Q}$, e apontaram para a relação de decimais ilimitadas com irracionalidade. Entre os finalistas esse índice também foi significativo.

Outro dado surpreendente apontado em Igliori e Silva (1998) foi a identificação entre 3,1416 e π, e entre 2,7182 e *e* aparecer com maior consistência entre os finalistas, com uma *nítida desestabilização destes alunos na classificação de 3,1416 e de 2,7182* (p. 5). Entre os iniciantes, a associação de fração com número racional se fez presente pelo resultado expressivo de 13 estudantes que consideraram $\frac{\pi}{10} \in \mathbb{Q}$, mas, paradoxalmente, $\frac{-3}{7}$ não foi considerado racional por metade dos alunos iniciantes. Segundo essa obra, *possivelmente porque esse número é, ao mesmo tempo, negativo e com uma* *representação decimal infinita. Neste caso, parece ter ocorrido a associação número-representação*[50] (p. 5).

Na segunda pergunta do questionário de Igliori e Silva (1998) relacionada ao reconhecimento dos números, perguntou-se aos estudantes qual o critério utilizado para a classificação realizada na primeira questão. O argumento *número irracional como sendo um "número infinito"* ou *número com infinitos dígitos após a vírgula* (p. 7) foi utilizado por 9 alunos iniciantes e 5 alunos finalistas; 5 alunos iniciantes e 7 finalistas usaram como argumento que o número *racional pode ser posto na forma a/b* (em geral, sem especificação sobre a e b) enquanto que os irracionais são *os outros números* (p. 8)*;* 7 alunos iniciantes adotaram o critério de *número racional como sendo um número "exato" e consequentemente um irracional como um número "não exato"* (p. 7). Outros critérios/associações com menor incidência também foram detectados, como racional com número inteiro e irracional com número negativo.

Em sua conclusão, Igliori e Silva (1998) elencam as principais associações detectadas nas respostas dos participantes da pesquisa foram: associação número – representação, associação irracionalidade – representação decimal ilimitada, associação irracionalidade – "não exatidão" (número não inteiro, número negativo, número cuja representação decimal possuía pontos de reticências, em número infinito ou não) e associação *número –aproximação*. Na análise comparativa das respostas dos alunos iniciantes e finalistas, Igliori e Silva (1998) avaliaram que, apesar dos alunos finalistas terem apresentado evolução em relação aos iniciantes, concepções "errôneas" persistiram após um curso introdutório de análise real, tratado de forma tradicional. Como reflexão final, esse trabalho aponta para a importância de se conhecer as concepções prévias dos estudantes.

> Pensamos que se pode obter melhorias no processo de ensino quando o professor conhece as ideias conceituais dos estudantes bem como aquelas que são persistentes após um estudo mais sistematizado. As concepções prévias dos estudantes sobre um conceito é um dos pontos a serem investigados, dada a complexidade envolvida no processo de ensino/aprendizagem, entendendo que a mudança conceitual não ocorre pela simples substituição das ideias alternativas do estudante por ideias científicas (IGLIORI e SILVA, 1998, p. 19).

[50] Em Igliori e Silva (1998), não fica explícito no que consiste exatamente essa associação. Em nosso entendimento, número é um ente abstrato que pode ser representado de várias formas. Por exemplo, o número 'dois' pode ser representado como $2, \sqrt{4}, \frac{8}{4}, 1{,}999\ldots$, entre outros. Portanto, número e representação são coisas diferentes. A presença da associação número-representação consiste no oposto disso; isto é, consiste em encarar a representação de um número como se fosse o próprio número.

Na dissertação de mestrado de Severino Barros de Melo (1999) o foco principal foi encontrar na história da matemática uma opção para auxiliar na compreensão do conceito de número irracional desde o ensino médio até o primeiro ciclo do ensino superior. Como parte das atividades propostas nesse estudo, foi realizada uma avaliação diagnóstica para detectar as dificuldades conceituais relacionadas aos números irracionais. Os sujeitos da pesquisa foram 178 estudantes universitários do 1º ao 3º período de cursos da área de ciências exatas das universidades de Pernambuco[51], sendo 135 dos cursos de engenharia e ciência da computação e 43 do curso de licenciatura em matemática. Em um questionário com 9 perguntas respondido pelos sujeitos da pesquisa, duas abordam a questão do reconhecimento.

Tabela 6 - Resultados referentes a questões de reconhecimento em Melo (1999)

	Racional (%)		**Irracional (%)**		**Em branco (%)**	
	Lic.	*Total*	*Lic.*	*Total*	*Lic.*	*Total*
$\boldsymbol{-\sqrt{2}}$	14,0	19,6	81,3	72,2	4,7	8,2
$\boldsymbol{0,777}$ ...	58,1	54,3	37,2	55,6	4,7	6,5
$\boldsymbol{-1/2}$	88,1	91,8	4,6	2,2	7,3	6,0
$\boldsymbol{-3}$	90,4	93,0	4,6	2,8	5,0	4,2
$\boldsymbol{e/2}$	16,2	17,4	71,9	71,1	11,9	11,5
$\boldsymbol{\sqrt{3}}$	11,6	20,7	81,2	71,7	7,2	7,6
$\boldsymbol{0,171771777}$ ...	23,2	20,7	69,6	72,3	7,2	7,0
$\boldsymbol{2\pi}$	18,5	17,9	76,5	75,6	5,0	6,5
$\boldsymbol{18/3}$	92,8	93,5	2,3	1,7	4,9	4,8

Fonte: MELO (1999, p. 74)

Uma das perguntas era *que diferença você faz entre um número racional e um irracional?* Em torno de 25% dos estudantes respondeu que os racionais podem ser representados por fração, resposta considerada parcialmente correta por Melo (1999). Apenas um estudante respondeu *número racional é aquele que pode ser colocado na forma a/d, onde a e d são inteiros e d não é zero,* considerada certa em tal obra. Um dos erros mais frequentes foi classificar como irracional um número que possui infinitas casas decimais, e praticamente metade dos estudantes deixou a questão em branco. A outra pergunta relacionada ao reconhecimento dos números racionais e irracionais era *classifique os*

[51] São elas: Universidade de Pernambuco (UPE), Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Universidade Católica de Pernambuco (Unicap) e Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE).

números abaixo em racional ou irracional, cujas respostas resumimos na Tabela 6 (fazendo o destaque para a turma de licenciatura em matemática denotada por ‘Lic.’).

Em relação ao desempenho dos licenciandos, Melo (1999) chama a atenção para os 30% que não reconheceram $0{,}171771777\ldots$ como número irracional, para os 18,7% que consideraram $-\sqrt{2}$ racional ou deixaram em branco e para os 11,9% que não demonstraram clareza a respeito da racionalidade de $-1/2$. Nós acrescentamos à análise da referida obra um destaque para os 16,2% que consideraram $e/2$ como um número racional e os 11,9% que deixaram esse item em branco. Avaliamos também que, nesse caso, dois fatores podem ter influenciado nesse resultado, o desconhecimento da irracionalidade do número e e a associação de uma razão qualquer (mesmo que não seja fração) com número racional.

A dissertação de mestrado de Penteado (2004) investigou a concepção e a reação de 11 professores do ensino médio da rede pública do estado de São Paulo no que diz respeito à densidade dos números reais. Foram realizadas 10 atividades e uma delas, consistia de um pequeno questionário com quatro perguntas, sendo duas de reconhecimento e duas de densidade. Os professores trabalharam em duplas, e a maioria delas classificou corretamente os dezessete números apresentados (ver **Tabela 7**).

Tabela 7 - Questão de reconhecimento de Penteado (2004)

Número	**Racional**	**Irracional**	**Racional e irracional**	**Em branco**
$\mathbf{0}$	4	0	1	0
$\sqrt{\mathbf{5}}$	0	5	0	0
$\mathbf{1/2}$	5	0	0	0
$\mathbf{1/3}$	5	0	0	0
$\mathbf{0,333}\ldots$	5	0	0	0
$\mathbf{4,21222324}\ldots$	1	3	0	1
$\mathbf{4,212121}\ldots$	4	0	0	1
$\boldsymbol{\pi}$	0	5	0	0
$\mathbf{3,1416}$	3	2	0	0
$\mathbf{-3/7}$	2	3	0	0
$\boldsymbol{\pi}\mathbf{/10}$	0	5	0	0
$\boldsymbol{e}$	0	5	0	0
$\mathbf{2,7182}$	4	1	0	0
$\mathbf{1,999}\ldots$	5	0	0	0
$\mathbf{2}$	5	0	0	0
$\sqrt{\mathbf{9}}$	5	0	0	0
$\sqrt{\mathbf{3}}\mathbf{/4}$	0	5	0	0

Fonte: PENTEADO (2004, p. 79)

Os dois itens com maiores índices de erros foram 3,1416 e $\frac{-3}{7}$, considerados irracionais por 2 (40%) e 3 (60%) duplas, respectivamente. Na plenária, percebeu-se que as duplas consideraram $\frac{-3}{7}$ um número irracional após realizar a divisão e não terem identificado uma periodicidade na representação decimal.

Na dissertação de mestrado de Daiane Scopel Boff (2006) o objetivo foi construir uma proposta pedagógica para o ensino de números reais via medição de segmentos para o ensino fundamental. Antes, porém, foram aplicados questionários-sondagem para 254 alunos das cidades de Porto Alegre e Caxias do Sul, dos quais 142 cursavam a 7ª série do ensino fundamental, 73 cursavam o 3º ano do ensino médio e 39 eram calouros da licenciatura em matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. A terceira questão de todos os questionários aplicados dizia respeito ao reconhecimento de números racionais e irracionais. Para as turmas da educação básica, a questão foi elaborada assim:

3) Quais dos seguintes números podemos garantir que são racionais?

a) 2/3	*f) 0,010101001000100001…*
b) 0,12345678910111213141516171812 0…	*g) 0,01001*
c) 0,32	*h) √6*
d) π	*i) 1+√6*
e) 0,010101010101…	*j) √6/2*

(BOFF, 2006, p. 23)

A pergunta “quais dos seguintes números podemos garantir que são racionais? ” é completamente diferente de enunciados como “assinale os números racionais” ou “quais dos seguintes números são racionais”. A presença da expressão “podemos garantir que” tem potencial para suscitar a questão do acordo tácito da dízima periódica, e ficaria ainda melhor se incluísse também um pedido de justificativa, exatamente para avaliar se o aluno considera ou não o referido acordo. Pensamos ainda que a questão, do jeito que foi formulada, seria melhor aproveitada após discussões e debates com os alunos a respeito das limitações das representações utilizando reticências e do próprio acordo tácito. Na turma de licenciandos ingressantes em 2013, onde realizamos o Estudo Exploratório (Apêndice H), surgiu muita discussão a respeito do significado das reticências, e a formulação de uma pergunta nesses moldes poderia ter sido muito proveitosa. Porém, sem um trabalho prévio, ela pode ser inócua.

Tabela 8 - Resultados de uma questão do questionário aplicado por Boff (2006) para alunos da educação básica e calouros da licenciatura em matemática

Quais dos seguintes números podemos garantir que são racionais?	**Número absoluto de acertos (percentual de acertos)**				
	7ª série pública	*7ª série privada*	*3º ano público*	*3º ano privado*	*Lic. Mat.*
$\mathbf{2/3}$	47 (55%)	43 (77%)	29 (73%)	28 (85%)	29 (74%)
$\mathbf{0,123456789101112131415}\ldots$	45 (52%)	50 (89%)	23 (58%)	27 (82%)	22 (56%)
$\mathbf{0,32}$	36 (42%)	50 (89%)	25 (63%)	31 (94%)	30 (77%)
$\boldsymbol{\pi}$	53 (62%)	47 (84%)	22 (55%)	16 (48%)	27 (69%)
$\mathbf{0,010101010101}\ldots$	31 (36%)	46 (82%)	12 (30%)	11 (33%)	23 (59%)
$\mathbf{0,010101001000100001}\ldots$	38 (44%)	41 (73%)	13 (33%)	28 (85%)	23 (59%)
$\mathbf{0,01001}\ldots$	41 (48%)	49 (88%)	23 (58%)	27 (82%)	17 (44%)
$\boldsymbol{\sqrt{6}}$	53 (62%)	46 (82%)	22 (55%)	27 (82%)	21 (54%)
$\mathbf{1+\sqrt{6}}$	53 (62%)	48 (86%)	17 (43%)	30 (91%)	23 (59%)
$\boldsymbol{\sqrt{6}/2}$	52 (60%)	46 (82%)	20 (50%)	28 (85%)	20 (51%)

Fonte: BOFF (2006, p. 25)

Na **Tabela 8** agrupamos os resultados referentes à terceira questão dos questionários aplicados em Boff (2006) nas turmas da educação básica e na turma de calouros da licenciatura em matemática. Chamamos atenção para a contabilização por parte dessa obra do "número de acertos" de cada item que, em conjunto com a pergunta, inspira cuidados na leitura dessa tabela. O "acerto" para alguns itens significa que o mesmo **não** foi marcado, como, por exemplo, no caso de π, $\sqrt{6}$, $0{,}010101001000100001$ ..., entre outros. A rigor, pela pergunta que foi feita e pela forma escolhida para apresentar os dados, ainda existe outro problema, especificamente em relação ao item $0{,}010101010101$ ..., pois não se pode afastar a possibilidade da sequência de "zeros" e "uns" se desfazer após a 12ª casa decimal desse número. Porém, considerando-se o acordo tácito, parece-nos razoável pensar que a intenção de Boff (2006) foi inserir duas dízimas não-periódicas, *0,1234567891011121314151617181920…* e *0,010101001000100001…*, e uma dízima periódica, *0,010101010101…* Esse entendimento foi reforçado pela reformulação da questão quando da sua aplicação aos calouros da licenciatura em matemática. Todos os itens foram mantidos, na mesma ordem, mas ganharam alternativas e aqueles contendo dízimas ainda foram acrescidos de explicações, conforme mostramos a seguir.

3) Quais dos seguintes números podemos garantir que são racionais?

b) 0,1234567891011121314151617181 20… (listagem encadeada de todos os números naturais)

( )é racional ( )não é racional ( )nada podemos garantir

e) 0,010101010101… (continua a lei de formação de ir-se intercalando 0's e 1's)

( )é racional ( )não é racional ( )nada podemos garantir

f) 0,010101001000100001… (continua a lei de formação de ir-se aumentando em uma unidade a quantidade de zeros entre duas unidades consecutivas)

( )é racional ( )não é racional ( )nada podemos garantir

(BOFF, 2006, p. 37)

Voltando à **Tabela 8**, chamou-nos atenção o baixo desempenho dos calouros da licenciatura em matemática. Em nenhum dos itens, os licenciandos obtiveram melhor resultado do que os alunos da educação básica. Em particular, os alunos da 7ª série das escolas privadas foram melhores do que os calouros da licenciatura em todos os itens avaliados. Segundo Boff (2006), apenas 12,82% dos calouros acertou toda a questão. Para nós, uma possível explicação para esse baixo desempenho dos licenciandos comparando-se com os alunos da educação básica, em particular com a 7ª série, é o distanciamento do assunto. O assunto número racional é bastante explorado no ensino fundamental e pouco explorado no ensino médio, de forma que, ao chegar à licenciatura, é provável que os calouros estejam a no mínimo três anos sem estudar esse assunto. O problema se agrava ainda mais para aqueles calouros que interromperam os estudos após concluir o ensino médio.

4.2 – Conceito e definição

No questionário aplicado por Arcavi, Bruckheimer e Ben-Zvi (1987), além das questões de reconhecimento já citadas anteriormente, também foi perguntado para professores de matemática do ensino médio de Israel se conheciam alguma definição matemática para números irracionais. Dos 56 professores que responderam a essa questão, mais de 2/3 citou as definições dos livros texto que utilizavam, que são *um número que não pode ser expresso como quociente de inteiros* ou *um número cuja parte decimal é não-periódica e tem um número infinito de dígitos* (p. 18). Apenas dois professores usaram os cortes de Dedekind. Arcavi, Bruckheimer e Ben-Zvi (1987) consideraram que, embora não tenha sido pedida uma definição formal, os professores deveriam estar cientes de que a definição dos livros não é a definição formal e que essa definição existe. Acrescentam ainda que nas universidades os estudantes aprendem a definição formal, mas, de uma forma divorciada do contexto em que surgiu; contexto este que pode contribuir para um sentimento de necessidade lógica para essas definições.

Entendemos essa última afirmação de Arcavi, Bruckheimer e Ben-Zvi (1987) como referente às universidades de Israel. Nas universidades brasileiras, não temos conhecimento de pesquisas que nos permitam afirmar que os estudantes aprendem a definição formal de número irracional, seja dentro ou seja fora do contexto em que essas definições foram criadas. O nosso entendimento, calcado na nossa experiência do passado enquanto estudantes, do presente enquanto docentes, além de algumas leituras, é que, em geral, não é apresentada ao licenciando uma definição formal de número irracional. Muitas vezes isso é consequência do próprio currículo das licenciaturas, onde não há espaço nem tempo disponível para esse tipo de discussão.

Na pesquisa relatada em Fischbein, Jehiam e Cohen (1995), também se perguntou aos sujeitos (30 alunos do 9º ano, 32 alunos do 10º ano e 29 licenciandos) suas definições de números racionais e irracionais. No caso dos racionais, *um número que pode ser escrito como quociente de inteiros* ou *um decimal periódico com infinitos dígitos* (p. 35) foram as respostas mais frequentes em todos os grupos (alunos do 9º ano, 10º ano e licenciandos), atingindo o índice de 97% no caso das respostas dos licenciandos. O erro mais comum em todos os grupos foi definir os racionais como 'um decimal com um número finito de dígitos'. No 9º ano, esse erro foi cometido por 40% dos estudantes. Quanto aos irracionais, 'um número que **não** pode ser escrito como quociente de inteiros' ou um 'decimal **não** periódico com infinitos dígitos' foram as respostas mais frequentes em todos os grupos (alunos do 9º ano, 10º ano e licenciandos), atingindo o índice de 94% entre os licenciandos. O erro mais comum em todos os grupos, cometido por 38% dos estudantes do 9º ano, foi definir número irracional como aquele que possui infinitos dígitos.

Dada a semelhança dos erros mais cometidos nos dois casos, tanto no que se refere a números racionais quanto números irracionais, Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) fazem a seguinte reflexão:

> Um número infinito de casas decimais significa alguma coisa que nunca alcança uma realização total e isso sempre é facilmente associado com irracionalidade. Esses estudantes certamente não possuem o verdadeiro

> significado do termo “número irracional”, o algoritmo pelo qual um decimal infinito e periódico pode se transformar em um quociente de inteiros e, ainda mais importante, eles não têm um entendimento claro do porquê, em várias circunstâncias, alguns recebem um símbolo, um número que contradiz a ideia intuitiva básica de coleções comparáveis e aquela da medida (que implica naquela da unidade comum) a partir da qual o conceito de número inicialmente nasceu (p. 35, tradução nossa).

A respeito dessas palavras, acrescentamos que apenas conhecer todas essas coisas não é suficiente para que o aluno construa o “verdadeiro significado” do termo número irracional, isto é, o significado formal, aquele conferido pela comunidade matemática. Para tanto, o aluno precisa entender os porquês e as relações entre esses conhecimentos. Por exemplo, conhecer o algoritmo pelo qual um decimal infinito e periódico pode se transformar em um quociente de inteiros pode não ser suficiente para o aluno deixar de associar o infinito com o irracional. Também é necessário que o aluno entenda porque uma fração de inteiros será, necessariamente, representada por uma decimal finita ou por uma dízima periódica. A partir daí, pode-se mostrar como realizar o caminho de volta, isto é, dada uma dízima periódica, descobrir a fração que a gerou. Finalmente, mostra-se que existe um número que não é racional, como por exemplo $\sqrt{2}$, e conclui-se que o mesmo não poderá ser uma dízima periódica, pois, caso contrário, seria uma fração de inteiros, logo, seria um número racional.

Quanto às dificuldades relacionadas à questão da ideia intuitiva básica do conceito de número, também levantada no trecho de Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) destacado anteriormente, pensamos que elas se devem a discretização da abordagem do conceito de número, que acompanha o desenvolvimento histórico desse conceito. De fato, diversas fontes históricas afirmam que a ideia de número nasceu a partir de problemas de comparação e contagem de objetos discretos como dias do mês, animais de um rebanho, pessoas de um grupo, etc. Só depois de muito tempo, o conceito de número foi expandido para medir grandezas contínuas. É muito comum encontrar livros de matemática que reproduzem essa ordem, começando no discreto e passando para o contínuo apenas quando é preciso tratar os números reais. A ideia de medida, por exemplo, permite tratar naturais, racionais e irracionais em um único contexto, que privilegia o contínuo e coloca o discreto como uma exceção, um caso particular (ver seção 2.1 – Medida de um segmento).

O relatório de pesquisa presente em Soares, Ferreira e Moreira (1998) apresenta os resultados da aplicação de um questionário cujo objetivo era conhecer as imagens conceituais de estudantes universitários a respeito de números reais. Nesse contexto, a irracionalidade foi um conceito considerado importante para a aprendizagem dos números reais. Quarenta e sete estudantes do curso de matemática da Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG responderam ao questionário. Destacamos aqui as respostas obtidas para a questão referente a definição ou conceito de número irracional, que foi: *Para você o que é um número irracional?* Ver **Tabela 9**.

Tabela 9 – Principais respostas referentes ao conceito de números irracionais em Soares, Ferreira e Moreira (1998)

Para você o que é um número irracional?	**Alunos**	**%**
Números que não podem ser escritos na forma de fração	13	27,6
Números cuja representação decimal é infinita e não-periódica	6	12,7
Número que possui infinitas casas decimais	5	10,6
Números que não podem ser escritos na forma de fração e cuja representação decimal é infinita e não-periódica	3	6,4

Fonte: SOARES; FERREIRA; MOREIRA (1998, p. 77)

Soares, Ferreira e Moreira (1998) destacaram ainda que 40% das definições (as duas primeiras na **Tabela 9**) coincidem com as duas definições mais comuns nos livros didáticos, e que 60% associaram irracionais a tudo que não é familiar ou bem compreendido. Outras respostas, cada uma respondida por um único estudante, foram: *aquele que não tem divisão exata*; *é um número que não pertence aos racionais mas está contido no conjunto dos reais*; *é um número negativo que extrai-se sua raiz quadrada*; *números do tipo* $\frac{1}{3} = 0{,}333$ ...; *número extremamente único em sua maneira de escrever*; *número que não possui uma dízima periódica exata*; *números que são difíceis de imaginar, que fogem do comportamento dos racionais*; *número que ao ser dividido por outro apresenta infinitas casas decimais*; *número cuja raiz quadrada não é inteira*, entre outras (SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1998, p. 78).

Na dissertação de mestrado de Cezar (2014), pesquisa realizada com 27 licenciandos ingressantes[52] e 5 licenciandos finalistas do curso de matemática do Ifes, a resposta majoritária foi 'número que não pode ser escrito na forma de fração'. Segundo Cezar (2014), o conhecimento de licenciandos ingressantes e finalistas não divergiu muito. Ambos os grupos apresentaram definições aprendidas na educação básica e não souberam explicar como essas definições foram construídas.

[52] A turma de ingressantes foi a mesma que participou do nosso Estudo Exploratório.

No ensino fundamental, em geral apresenta-se a sequência naturais, inteiros, racionais e reais tendo como fio condutor a progressiva ampliação dos conjuntos para permitir todas as operações. Como não é possível efetuar a subtração de dois números naturais quaisquer, criam-se os inteiros; como não é possível efetuar a divisão de dois números inteiros quaisquer, criam-se os racionais. Concordamos com Ferreira (2011) que esse modo de definir é ingênuo e não rigoroso, mas é *isso mesmo o que está acessível ao estudante do Ensino Fundamental* (p. 43). No ensino médio, entretanto, pensamos que é possível avançar um pouco mais.

4.3 – Propriedades

Apresentamos dados de pesquisa que tratam de três propriedades dos números irracionais: incomensurabilidade, densidade e não-enumerabilidade. Para definição matemática desses termos, ver seção 2.3 – Definição.

4.3.1 – Incomensurabilidade

Diversos relatos históricos apontam para o surgimento do conceito de irracionalidade a partir do descobrimento de segmentos incomensuráveis por volta do século VI a.C. (BOYER, 1996; EVES, 2004; ROQUE, 2012; STRUIK, 1987). Porém, a pesquisa de Arcavi, Bruckheimer e Ben-Zvi (1987) mostra que muitos professores não têm esse conhecimento. São apresentados e discutidos nessa obra alguns resultados de um curso de história da matemática voltada para os números irracionais oferecido para professores de matemática do ensino médio de Israel. Foi detectado por meio de um questionário diagnóstico, aplicado antes da realização do curso, que os participantes tinham pouco conhecimento a respeito da história dos números irracionais. Eles tinham noção de **quando** surgiu o conceito de irracionalidade – 70% acertou que surgiu com os gregos antes da era comum, mas, poucos sabiam **como** surgiu. Ao serem solicitados a ordenar números negativos, frações decimais e números irracionais por ordem cronológica de surgimento, 55% achou que as frações decimais precederam os números irracionais, e 10% não responderam nada[53].

[53] Por uma questão curricular, atualmente as frações decimais são ensinadas antes dos números irracionais. Porém, historicamente, a construção da incomensurabilidade de dois segmentos, o que abriu as portas para o que hoje conhecemos como números irracionais, aconteceu cerca de dois mil anos antes da introdução das frações decimais.

Segundo Arcavi, Bruckheimer e Ben-Zvi (1987), isso não é apenas uma indicação de falta de conhecimento histórico dos professores participantes da pesquisa a respeito de quão recente são as frações decimais. Eles afirmam que também é um indício que eles concebem os irracionais a partir das frações decimais e não fazem a conexão com geometria, como os relatos históricos indicam que ocorreu, a partir da questão da incomensurabilidade de segmentos. Sob esse aspecto, tal obra também afirma que *a origem histórica do irracionais em geral, e as conexões à geometria em particular, podem proporcionar um entendimento perspicaz do conceito assim como ensinar ideias para a introdução do tema em sala de aula* (ARCAVI; BRUCKHEIMER; BEN-ZVI, 1987, p. 18, tradução nossa).

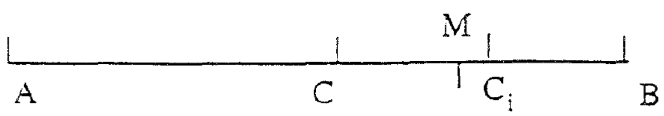
Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) apresentam duas perguntas relacionadas à incomensurabilidade de dois segmentos. A primeira foi *é sempre possível encontrar para dois segmentos AB e CD, de diferentes comprimentos, uma unidade comum?* (p. 39). Dos 29 licenciandos, 31% respondeu 'Sim' e 38% respondeu o que tal obra considerou correto, 'nem sempre' ou 'às vezes'. A segunda pergunta foi *é possível encontrar uma unidade comum para o lado de um quadrado e sua diagonal?* (p. 39), e 49% dos licenciandos respondeu 'nunca', o que Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) consideraram como sendo a resposta correta. Para essa obra, esses dados significam que a ideia da incomensurabilidade, mesmo quando se refere a uma situação específica (o quadrado e sua diagonal), permanece não esclarecida para metade dos licenciandos. Mas, apesar disso, poucos estudantes mencionaram explicitamente que uma unidade comum sempre pode ser encontrada, o que contrariou uma das hipóteses iniciais do trabalho. Segundo essa hipótese, a aceitação de que duas magnitudes podem ser incomensuráveis, isto é, que pode não existir unidade comum entre elas, constitui um obstáculo intuitivo, psicologicamente e historicamente assumidos em relação ao conceito de número irracional.

Para fazer uma espécie de contraprova, uma pergunta semelhante foi feita em Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) para 60 participantes de um curso de psicologia a respeito da possibilidade de encontrar uma unidade comum para dois segmentos. Trinta e um estudantes não responderam nada, e, entre os que responderam alguma coisa, 7 responderam corretamente 'depende' e apenas 6 mencionaram que uma unidade comum sempre pode ser encontrada, contrariando novamente as expectativas desses pesquisadores. Todos os estudantes que responderam corretamente possuíam bacharelado em matemática ou física. Ou seja, segundo nosso entendimento, Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) esperavam comprovar que a incomensurabilidade é contra intuitiva porque a maioria das pessoas acha que sempre se pode encontrar uma unidade comum para os segmentos, e isso não aconteceu. Quando foi aplicada a mesma pergunta a uma espécie de grupo de controle, resultado semelhante aconteceu, isto é, poucas pessoas afirmaram explicitamente que sempre existe uma unidade de medida comum. Mais ainda, o fato das respostas corretas terem sido dadas apenas por bacharéis de matemática ou física também sugere que é preciso preparo para enxergar e vivenciar a dificuldade do problema, o que exclui a hipótese de se tratar de algo intuitivo.

Para verificar ainda mais a questão do fundo intuitivo dos números irracionais, Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) ainda formularam mais uma questão.

> Dado um segmento AB, considere um ponto M ao acaso neste segmento. Vamos dividir o segmento AB ao meio, e seja C o ponto de divisão. Vamos dividir novamente CB em duas partes iguais (com C_i como o ponto de divisão). Contiuamos a dividir, sempre do mesmo modo, os segmentos em que o ponto M está.
>
> - Esse processo de divisão é finito ou infinito?
>
> - Se continuamos a dividir, um dos pontos pode coincidir com M?
>
> (p. 41, tradução nossa)

Figura 23 - Questão de Fischbein, Jehiam e Cohen (1995)



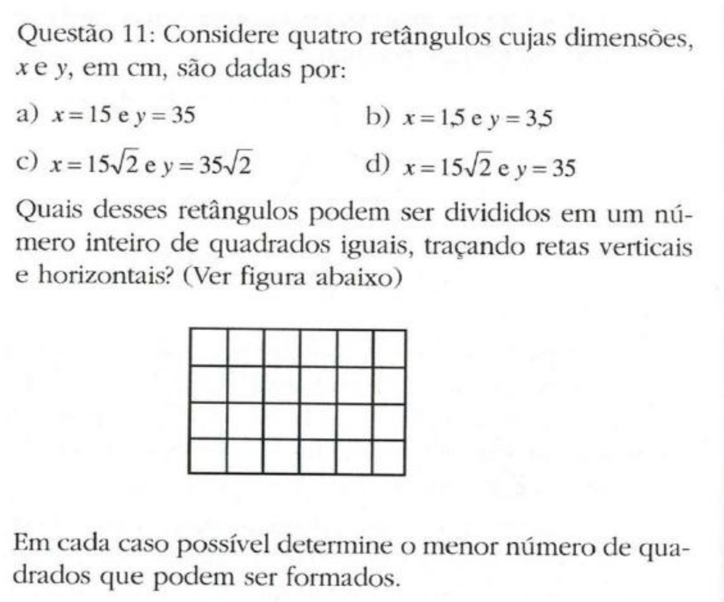
Fonte: FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN (1995, p. 41)

Os resultados foram: 90% dos licenciandos reconheceram que o processo é infinito, 38% disseram que o processo sempre acertará o ponto M e 45% responderam ‘algumas vezes’ acertará exatamente o ponto M. Porém, entre os que responderam ‘algumas vezes’, apenas 6 foram capazes de justificar que isso depende de M representar um número racional ou irracional. A conclusão de Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) é que os números irracionais não encontram uma dificuldade intuitiva na mente dos estudantes, e que, na verdade, essas dificuldades expressam um alto nível de instrução matemática.

Com a intenção de aprofundar o conceito de irracionalidade, foi proposto em Soares, Ferreira e Moreira (1998) a seguinte questão para verificar com que frequência a possibilidade da incomensurabilidade estaria presente nas considerações dos alunos: *você* *quebra uma barra de chocolate em dois pedaços ao acaso. É* ***sempre*** *possível exprimir a razão entre os "tamanhos" desses dois pedaços (as áreas deles por exemplo) por um número racional?* (p. 64, grifo no original). Um resumo das principais respostas foi o seguinte: 30% dos alunos responderam 'sim', sem nenhuma explicação ou com uma explicação do tipo *toda medida é expressa por um número racional* (p. 66); 63% dos sujeitos responderam 'não', mas nenhum deles foi capaz de oferecer uma explicação satisfatória, segundo a referida obra. Algumas dessas explicações insatisfatórias concluíam que a razão entre dois números reais é irracional se um deles (ou ambos) for irracional, o que obviamente é um equívoco, pois, por exemplo, $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$ é uma razão inteira de dois irracionais. Esse raciocínio só é válido se o comprimento (ou área) da barra for considerado racional. Nesse caso, chamando a área ou comprimento da barra de B (racional), se os pedaços x e y são irracionais, teremos $\frac{x}{y} = \frac{B-y}{y} = \frac{B}{y} - 1$ um número irracional.

Outra questão referente à incomensurabilidade proposta em Soares, Ferreira e Moreira (1998) está na **Figura 24**.

Figura 24 - Questão de incomensurabilidade de Soares, Ferreira e Moreira (1998)



Questão 11: Considere quatro retângulos cujas dimensões, x e y, em cm, são dadas por:

a) $x = 15$ e $y = 35$ b) $x = 1{,}5$ e $y = 3{,}5$

c) $x = 15\sqrt{2}$ e $y = 35\sqrt{2}$ d) $x = 15\sqrt{2}$ e $y = 35$

Quais desses retângulos podem ser divididos em um número inteiro de quadrados iguais, traçando retas verticais e horizontais? (Ver figura abaixo)

Em cada caso possível determine o menor número de quadrados que podem ser formados.

Fonte: SOARES; FERREIRA; MOREIRA (1998, p. 72)

Apenas 4 responderam corretamente os itens 'a', 'b' e 'c' e encontraram também o número mínimo de quadrados a serem formados. Nenhum dos 4 explicou porque no caso 'd' o problema não tem solução. A estratégia para o item 'a' foi encontrar o máximo divisor comum (m.d.c.) de 15 e 35. Dividindo o valor do m.d.c. por 10 resolveram o item 'b' e multiplicando por $\sqrt{2}$ resolveram o item 'c'. Segundo Soares, Ferreira e Moreira (1998), *como isso não funciona em d) eles podem ter concluído que nesse caso a subdivisão é impossível, sem considerar a incomensurabilidade entre a base e a altura do retângulo dado* (p. 72).

Em uma pesquisa realizada com 23 professores da rede pública da cidade de São Paulo, Pietropaolo, Corbo e Campos (2013) mostraram que professores fazem referências à incomensurabilidade de grandezas de maneira bastante vaga, levando a uma conjectura sobre a ausência de uma definição (ou de uma compreensão) para esse conceito. A respeito do ensino dos números irracionais, todos os participantes consideraram importante a introdução e o estudo dos irracionais no ensino fundamental, mas, desde que esse estudo tenha restrições. Um dos professores disse que *introduzir sim, mas não se aprofundar, pois nesta fase ainda é muito complicado para o aluno esses conceitos, no entanto, é importante que ele tenha um primeiro contato e algumas noções para que consiga diferenciá-los dos outros* (p. 7). Mas, qual será o significado atribuído a aprofundar atribuído pelos professores? Falar em incomensurabilidade é aprofundar?

Pietropaolo, Corbo e Campos (2013) também apresentaram aos professores um trecho do Caderno do Professor destinado à 8ª série/9º ano do ensino fundamental, que faz parte da proposta curricular do estado de São Paulo: *É sempre possível representar a razão de dois segmentos quaisquer com um número racional? Como isso pode ser feito? (Para quaisquer segmentos AB e CD é sempre possível $\frac{AB}{CD} = \frac{p}{q}$, ou seja, $AB = \frac{p}{q} \cdot CD$, com p e $q \in \mathbb{Z}$)* (p. 7). Alguns comentários dos professores foram: *muito complexa, poderia abordar com valores na prática* (p. 8); *é razoável, mas nem sempre os alunos chegarão a uma razão que represente um número irracional, mesmo usando os submúltiplos cada vez menores* (p. 8). Interpretamos duas coisas a partir deles: alguns dos professores não abordam a questão da incomensurabilidade por considerarem esse tópico um aprofundamento inadequado para o nível dos alunos (ensino fundamental) e/ou nem mesmo eles, os professores, entenderam do que se trata a incomensurabilidade, como fica claro no segundo comentário, quando o professor diz que 'nem sempre chegarão a uma razão que represente um número irracional'. Ora, em se tratando de um número irracional, nunca se chegará a uma razão (de inteiros).

O estudo realizado em Corbo (2005) teve como objetivo contribuir para a formação inicial de professores de matemática, propondo a utilização da seção áurea como contexto para explorar a noção de incomensurabilidade de segmentos de reta. Para tanto, aplica um pré-teste para avaliar o conhecimento dos professores, e, em seguida, aplica uma sequência de ensino sobre seção áurea para dez alunos do 3º e 4º período de licenciatura em matemática de uma instituição particular de ensino da cidade de São Paulo. Os resultados do diagnóstico mostraram que apenas dois alunos tinham algum conhecimento sobre seção áurea e nenhum aluno sabia a relação entre seção áurea e incomensurabilidade de segmentos. Especificamente sobre a incomensurabilidade de segmentos, quatro participantes definiram segmentos comensuráveis como segmentos que podem ser medidos, e segmentos incomensuráveis, com a negação dessa afirmação. Dois participantes se referiram a uma relação entre as medidas dos segmentos comensuráveis, porém não especificaram qual é essa relação, e dois participantes apresentaram respostas indicando que deve ter havido anteriormente algum trabalho sobre incomensurabilidade de segmentos de reta.

As atividades da sequência de ensino começaram abordando as subtrações sucessivas, ou algoritmo de Euclides, para a determinação do máximo divisor comum de dois números para, em seguida, estender esse processo para a situação em que se deseja achar a maior medida comum entre dois segmentos. A última atividade teve por objetivo que os alunos mostrassem que os lados de um retângulo áureo são segmentos incomensuráveis. Os resultados obtidos com a aplicação da sequência didática indicaram que houve um avanço em relação às respostas apresentadas no pré-teste, permitindo concluir que a seção áurea pode ser um contexto favorável à compreensão e/ou desenvolvimento da noção de segmentos incomensuráveis. O exame do desempenho dos estudantes revelou também que a sequência desenvolvida pode favorecer para que seja estabelecido um elo de ligação entre determinadas construções geométricas e números irracionais (CORBO, 2005).

Boff (2006) propõe a seguinte questão para 39 licenciandos de matemática: *uma barra de giz de comprimento c é quebrada em dois pedaços. Podemos garantir que os comprimentos de ambas as partes são números racionais?* (p. 39). Segundo essa obra, os objetivos da questão são *detectar se o aluno tem ideia de que os irracionais também servem para medir, ou, de outro modo, que os racionais não medem qualquer coisa; ou ainda, que "existem irracionais cuja soma pode até ser um inteiro, por exemplo* (p. 39). Os resultados apresentados para essa questão apontaram que 22 licenciandos forneceram uma resposta correta com uma justificativa correta, mas Boff (2006) não explicitou o que foi considerada uma resposta correta, nem transcreveu uma resposta sequer.

Apesar de Boff (2006) não ter explorado mais essa questão, consideramos que ela tem potencial para discutir pontos importantes referentes aos números irracionais, como a possibilidade de uma soma de irracionais ser inteira, como é mencionado nos objetivos dessa mesma obra. Porém, nesse caso, faltou dizer no enunciado que o comprimento do giz é um número inteiro. Quanto aos irracionais servirem para medir, é preciso tomar cuidado. Se a experiência de quebrar o giz for feita na prática, como se pretende mostrar que um dos pedaços pode ser irracional? Medindo os pedaços? Nesse caso, ambos terão que ser considerados racionais, pois toda medida na prática o é. Por outro lado, se a experiência for mental, existe espaço para o aparecimento de números irracionais. Essas observações também são pertinentes para o problema da barra de chocolate proposto em Soares, Ferreira e Moreira (1998).

Em relação a livros didáticos, nas cinco coleções analisadas em Pommer (2012), nenhuma trata da incomensurabilidade. Duas delas citam ‘a crise dos incomensuráveis’, mas não desenvolvem as consequências desse processo. Pensamos que a utilização desse suposto acontecimento histórico (ver 3.2 – O desenvolvimento da incomensurabilidade na Grécia Antiga e o olhar anacrônico sobre a história dos números irracionais) apenas como uma curiosidade, sem aprofundamentos ou discussões a respeito da incomensurabilidade ou algum outro aspecto dos números irracionais, não trará mais benefícios aos alunos do que uma simples consulta ao Google ou a Wikipédia traria.

Segundo Gomes (2005), os livros da segunda metade do século XIX e início do século XX apresentavam os irracionais como incomensuráveis, resultados de tentativas de medidas, além de salientar que eles podem ser aproximados por frações o quanto se desejar. Esses livros também já exploravam ideias do cálculo como aproximações por sequências infinitas na educação básica, proposta que se coaduna com a de Rezende (2003). Das primeiras décadas do século XX para cá, os incomensuráveis foram deixando de aparecer nos livros didáticos.

4.3.2 – Densidade

Em Fischbein, Jehiam e Cohen (1995), perguntou-se aos sujeitos: *dados dois pontos A e B em uma linha reta, quantos pontos correspondem a números racionais nesse intervalo?*

(p. 37, tradução nossa). A mesma pergunta foi feita em relação a números irracionais. O índice de acerto da questão entre os licenciandos, ou seja, de respostas ‘infinitos’, foi bastante alto: 90% no caso dos racionais e 97% no caso dos irracionais. Foi perguntado ainda nessa pesquisa, *a cada ponto na reta numérica corresponde um número racional?* (p. 37, tradução nossa). A resposta correta, ‘não’, foi dada por 66% dos licenciandos, o que Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) consideraram um resultado muito ruim.

A dissertação de mestrado Dias (2002) analisou as imagens conceituais de densidade relacionadas aos números reais de 45 professores do ensino fundamental e médio do estado de São Paulo. Teve como hipótese que as concepções dos professores são bem próximas das concepções de alunos detectadas em outras pesquisas semelhantes, como por exemplo, a concepção de “reta racional”[54] com a existência de antecessor/sucessor de um número no sentido de um *limite que nunca é realmente alcançado* (TALL; SCHWARZENBERGER, 1978, p. 5, tradução nossa).

Entre as questões propostos por Dias (2002), destacamos as seguintes:

Questão 4 – Para cada um dos itens, responda: Existe algum número racional entre os números representados abaixo? Se existir, escreva qual (quais ou alguns)? Se não, escreva o porquê.

a) 3,14 e π?

b) 3 e 4?

c) 0,333 e 0,333...?

d) 2/3 e 0,666...?

e) 1/7 e 2/7?

f) 2 e 1,300301302303...? (Os algarismos seguem essa lei de formação)

Em cada item, há ainda as questões: Quantos existem? Qual (quais ou alguns)? Ou não existe, por que... (p. 13)

Questão 5 – idem questão 4, porém, trocando a palavra ‘racional’ por ‘irracional’.

Dos 45 professores, um grupo de 14 respondeu às questões 4 e 5, cujos resultados foram agrupados por Dias (2002) em um quadro (**Quadro 3**).

[54] Uma vez que os racionais cobrem a reta densamente, pode parecer que todos os pontos sobre a reta são racionais.

Quadro 3 - Resultados de duas questões referentes a densidade em Dias (2002)

Total: 14	**Tipo de resposta**
4	Citaram pelo menos uma vez: alguns; vários; muitos
7	Escreveram números fora do intervalo
5	Classificaram os números, sendo alguns incorretamente: $3{,}14$ e $\sqrt{4}$ como irracionais; π; $1{,}300301302303$ ... como racionais; $1/7$ e $2/7$ como irracionais
6	Consideraram $0{,}333 = 0{,}333$ ... $3{,}14 = \pi$ $\sqrt{2} = 1{,}300301302303$ ... Não existe número entre $1/7$ e $2/7$
7	Consideraram racionais como irracionais ou irracionais como racionais

Fonte: DIAS (2002, p. 31)

A preposição "entre" tem diversos significados na língua portuguesa. Isso provavelmente levou alguns sujeitos a interpretar a questão de formas variadas. Vê-se no **Quadro 3** que um grupo entendeu que era para realizar uma classificação dos números. Isso condiz com o significado da palavra "entre" como "em meio a". Outros grupos entenderam que, em cada item, era para dizer se existia um número racional no intervalo compreendido pelos dois números dados. Esse entendimento condiz com o significado da palavra "entre" como "a meio de" (HOUAISS, 2009).

Segundo Dias (2002), a ausência da definição do conceito de densidade não impediu a revelação das imagens conceituais. A imagem conceitual detectada para os números reais foi de um conjunto discreto, a partir das considerações de inexistência ou finitude de números entre dois reais distintos, assim como pela existência de um número máximo como atributo dos reais e de uma "sucessão de decimais", e até de irracionais. Para Dias (2002), isso se deve a uma generalização abusiva da discretização do conjunto dos inteiros. Dessa forma, confirma sua hipótese inicial de que as imagens do conceito de densidade dos professores pesquisados são semelhantes às imagens do conceito de alunos relatadas em diversas pesquisas que foram utilizadas como referências, inclusive com a utilização de forma idêntica de alguns termos.

Em Sirotic e Zazkis (2007b), perguntou-se para 46 formandos em um curso de certificação para docência de matemática, sendo 15 bacharéis em matemática e os outros bacharéis em ciências:

2. (a) É sempre possível encontrar um número racional entre dois números irracionais . Determinar Verdadeiro ou Falso e explicar o seu pensamento.

(b) É sempre possível encontrar um número irracional entre quaisquer dois números irracionais . Determinar Verdadeiro ou Falso e explicar o seu pensamento.

(c) É sempre possível encontrar um número irracional entre dois números racionais. Determinar Verdadeiro ou Falso e explicar o seu pensamento.

(d) É sempre possível encontrar um número racional entre dois números racionais. Determinar Verdadeiro ou Falso e explicar o seu pensamento.

(p. 53, tradução nossa).

Os resultados foram os seguintes:

Tabela 10 - Resultados para uma questão de densidade em Sirotic e Zazkis (2007b)

Item	**Falso**	**[%]**	**Verdadeiro**	**[%]**	**Sem resposta**	**[%]**
(a)	12	26.1	24	52.2	10	21.7
(b)	5	10.9	32	69.5	9	19.6
(c)	3	6.5	33	71.6	11	23.9
(d)	10	21.7	24	52.2	12	26.1

Fonte: SIROTIC; ZAZKIS (2007b, p. 63, tradução nossa)

Embora a maioria dos participantes tenha marcado a resposta correta em todos os itens, ‘Verdadeiro’, Sirotic e Zazkis (2007b) chamam a atenção que essa maioria nos itens (a) e (d) foi apertada. Acrescentamos um destaque para, nesses mesmos itens (a) e (d), o expressivo percentual de respostas ‘Falso’, indicando que a questão da densidade dos racionais e dos irracionais merece uma atenção maior.

Em busca de uma análise mais qualitativa, Sirotic e Zazkis (2007b) realizaram entrevistas com os sujeitos e apontaram que ¼ dos participantes acredita que existem irracionais tão próximos que não ‘cabe’ um racional entre eles, e 50% dos participantes acha que existem racionais tão próximos que não se possa colocar um racional entre eles. Um sujeito mencionou a existência de ‘irracionais consecutivos’. Em relação ao item (d), apenas 4 sujeitos utilizaram em seus argumentos a média aritmética de dois racionais como uma forma de se obter um racional entre dois racionais. A maioria das explicações dos participantes se baseava exclusivamente nas representações decimais, e isso aconteceu em todos os itens, não apenas em (d).

Melo (1999) fez a seguinte pergunta a 43 licenciandos de matemática que cursavam entre o 1º e o 3º períodos do curso:

Classifique em V ou F:
a) Entre dois racionais há um racional.
b) Entre dois irracionais há um irracional.
c) Entre dois racionais há um irracional.
d) Entre dois irracionais há um racional.
e) Entre dois reais há um real.
(p. 80)

E obteve as seguintes respostas (em percentuais):

Tabela 11 - Desempenho de licenciandos em matemática em uma questão de densidade proposta em Melo (1999)

	a	**b**	**c**	**d**	**e**
V	58,0	44,0	55,6	39,4	60,3
F	20,8	34,8	23,2	37,1	16,2
Em branco	20,8	20,8	20,8	23,2	23,2

Fonte: MELO (1999, p. 81).

Das 10 atividades propostas em Penteado (2004) para 11 professores do ensino médio da rede pública do estado de São Paulo, 9 diziam respeito à densidade dos números reais, mas também foi possível averiguar outras questões. Para exemplificar um número racional, a maioria utilizou o registro fracionário, enquanto para o irracional foi utilizado exclusivamente o registro simbólico – raízes quadradas e π. Em muitas situações, constatou-se que os sujeitos associavam irracionalidade com infinitude da representação decimal, e um sujeito deixou isso bem claro ao escrever que *o racional é finito e o irracional é infinito* (PENTEADO, 2004, p. 171). Em uma das atividades que priorizavam o uso da língua natural, alguns sujeitos demonstraram insegurança com expressões como ‘um único número’, ‘não existe’, ‘exatamente um’ e ‘um único’. O significado das reticências (acordo tácito) também foi contestado por alguns alunos com frases do tipo: *0,222... não poderia ter outro número depois do 2? O que garante?* (Idem, p. 171). Especificamente em relação à densidade, Penteado (2004) conclui que os sujeitos parecem ter se apropriado dessa propriedade, pois expressaram em seus comentários frases como ‘entre dois racionais existem infinitos racionais’ e ‘entre dois irracionais existem infinitos irracionais’.

Boff (2006) fez as seguintes perguntas a respeito de densidade para os 39 alunos da licenciatura: *1) Existe algum número racional entre* $2/3$ *e* $3/4$ *?Quem? Quantos, ao todo?; 2) Existe algum número irracional entre* $2/3$ *e* $3/4$ *? Quem? Quantos, ao todo?* (p. 39). Aproximadamente 31% dos licenciandos responderam que são infinitos, mas não conseguiram dar um exemplo sequer. Entendemos tratar-se de um indício de que a densidade dos racionais e dos irracionais foi provavelmente aceito e memorizado pelos estudantes, mas não completamente entendido.

Na pesquisa de Voskoglou e Kosyvas (2011), o objetivo foi avaliar a influência das representações semióticas na compreensão dos números irracionais. Para tanto, foi aplicado um questionário para 78 alunos que cursavam o ginásio[55] em Atenas e 106 estudantes de engenharia do Instituto de Educação Tecnológica de Patras, ambas cidades situadas na Grécia. Das quinze questões do questionário, quatro foram devotadas para a densidade. Em uma delas perguntou-se: *encontre dois números racionais e dois irracionais entre* $\sqrt{10}$ *e* $\sqrt{20}$*. Quantos números irracionais existem entre essas duas raízes quadradas?* (p. 134, tradução nossa). Entre os futuros engenheiros, 41% conseguiram fornecer apenas dois números.

Em outra questão de Voskoglou e Kosyvas (2011) que avaliava a densidade dos racionais, perguntou-se o seguinte: *existe algum número racional entre* $\frac{1}{11}$ e $\frac{1}{10}$*? Em caso afirmativo, escreva um deles. Quantos números racionais existem entre essas duas frações?* (p. 134, tradução nossa). Nessa questão, muitos estudantes, especialmente do ginásio, responderam que não existe número racional entre $\frac{1}{11}$ e $\frac{1}{10}$, porque são duas frações sucessivas. Para Voskoglou e Kosyvas (2011), isso se trata de uma transferência inadequada de uma propriedade correspondente dos números naturais para as frações. Em relação à densidade dos números racionais e irracionais, tal obra conclui que *um número considerável de estudantes parece não ter incorporado essa propriedade apropriadamente, especialmente do ginásio* (p. 138, tradução nossa).

---

[55] O ginásio é uma etapa do sistema escolar grego com duração de 3 anos no qual as crianças são matriculadas aos 11 anos de idade. É equivalente, portanto, aos três últimos anos do ensino fundamental no Brasil.

4.3.3 – Não enumerabilidade

Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) pediram para que os estudantes escolhessem a opção correta de comparação entre os números racionais (Q) e irracionais (J):

(a) Existem mais elementos em Q;

(b) Existem mais elementos em J;

(c) Existe a mesma quantidade de elementos em ambos (p. 38, tradução nossa).

O resultado foi que 41% dos licenciandos escolheram a opção (c), ou seja, eles não têm noção da não enumerabilidade dos números irracionais.

Sirotic e Zazkis (2007b), além da questão relativa à densidade apresentada anteriormente, também perguntaram a respeito da quantidade de números racionais e irracionais para 46 formandos em um curso de certificação para docência de matemática:

> (1a) Qual conjunto você acha que é mais "abundante", racionais ou irracionais (i.e. qual desses nós temos mais)?
>
> (1b) Suponha que você escolha um número aleatoriamente no intervalo [0,1] (na reta numérica real). Qual a probabilidade de escolher um número racional? (p. 53, tradução nossa).

Em relação ao item (a) o resultado foi

Tabela 12 – Resultado da questão (1a) referente a enumerabilidade em Sirotic e Zazkis (2007b)

Categoria da resposta	Número de participantes	%
Irracionais	*22*	*47.8*
Nenhum	*11*	*23.9*
Racionais	*10*	*21.8*
Outros	*3*	*6.5*

Fonte: SIROTIC; ZAZKIS (2007b, p. 56, tradução nossa)

Em termos quantitativos, aproximadamente metade dos sujeitos considera que existam mais irracionais do que racionais (Tabela 12). Ao perguntar a mesma coisa, porém, de outro modo e envolvendo probabilidade, a questão (1b) pôde avaliar a percepção dos sujeitos em relação a comparação entre as quantidades de irracionais e de racionais no intervalo [0,1] (Tabela 13).

Tabela 13 – Resultado da questão (1b) referente a enumerabilidade em Sirotic e Zazkis

Categoria da resposta	*Número de participantes*	*%*
"Igual a 0"	*2*	*4.3*
"Perto de 0"	*9*	*19.6*
"Perto ou igual a 50%"	*10*	*21.7*
"Perto ou igual a 100%"	*8*	*17.4*
"Indefinido"	*1*	*2.2*
Sem resposta	*16*	*43.8*

Fonte: SIROTIC; ZAZKIS (2007b, p. 56, tradução nossa)

Apenas 4,3% optou pela alternativa 'igual a 0', que é equivalente a dizer que o número de irracionais é infinitamente maior do que o número de racionais. Uma parcela expressiva dos sujeitos optou pelas alternativas 'Perto ou igual a 50%', que significa que existe a mesma quantidade de racionais e irracionais, ou 'Perto ou igual a 100%', que significa que quase todos os números no intervalo [0,1] são racionais. Um número também expressivo de sujeitos não respondeu à questão (1b). A discrepância no desempenho dos formandos nas questões (1a) e (1b) tem, possivelmente, várias causas. A questão (1a) é mais comum e direta, e alguns formandos possivelmente já tinham a informação de que existem mais irracionais do que racionais. Já a questão (1b), por se tratar de uma experiência de pensamento[56], não é tão comum e pode ter causado alguma dificuldade. Além disso, a situação (1b) recorre à probabilidade, que, pelo menos no Brasil, é um assunto frequentemente não ensinado e (talvez por isso mesmo) comumente não compreendido, em todos os níveis de ensino. Por fim, a questão (1b) ainda trabalha a probabilidade em um domínio contínuo, o que é ainda mais incomum.

Em termos qualitativos, apesar de quase metade dos sujeitos indicar que existem mais irracionais do que racionais, apenas 3 deles forneceram justificativas que se referem à cardinalidade dos conjuntos, de acordo com Sirotic e Zazkis (2007b). Porém, um dos participantes, de nome Ted, foi capaz de argumentar de maneira bastante peculiar e sem fazer referência à cardinalidade dos conjuntos. Eis sua justificativa:

> Então, se nós estávamos apenas fazendo números, colocando dígitos, como dígitos decimais, de forma aleatória, quais são as chances da mesma seqüência aleatória reaparecer interminavelmente? Muito improvável. Eu diria ainda

[56] Com um enredo diferente, mas com mesmo conteúdo matemático, Machado (2012) apresenta a situação (1b) proposta por Sirotic e Zazkis (2007b) como a alegoria da cabra-cega e os irracionais: *imaginemos a reta real estendendo-se como um varal esticado horizontalmente, à altura dos nossos olhos. Munidos de uma agulha de ponta fina e com os olhos vendados, "espetemos" um número ao acaso; terá sido ele racional ou irracional? Qual a probabilidade de ser racional? Qual a probabilidade de ser irracional?* (p. 34-35)

> mais improvável do que ganhar 6-49[57]. Mas, você sabe, algumas pessoas ganham, acredite ou não. Assim, os números que você vai fazer são irracionais, certo? É por isso que eu acho que há mais desses irracionais (p. 57, tradução nossa).

Segundo Sirotic e Zazkis (2007b), podemos aprender com Ted, que nunca foi exposto à ideia dos diferentes infinitos, que é possível construir um conhecimento intuitivo de que há muito mais irracionais do que racionais sem nunca ter visto a prova da diagonalização de Cantor (**Figura 14**) ou saber que existem infinitos de diferentes ordens.

4.4 – Importância e utilidade

Esta seção está dividida em duas partes. Na primeira, apresentamos dados de algumas pesquisas referentes ao conhecimento de licenciandos de matemática a respeito da importância e da utilidade dos números irracionais. Na segunda, buscamos, nós mesmos, responder à pergunta que está no cerne da discussão que nos propomos a fazer nesta seção: para **que** servem os números irracionais? E mais uma, que surgiu de reflexões ao longo de leituras de trabalhos que tratam do assunto: para **quem** servem os números irracionais?

Começamos então com os dados de algumas pesquisas. Em Soares, Ferreira e Moreira (1998), perguntou-se: *o que leva você a acreditar na existência de números irracionais?* (p. 64). Das 47 respostas apresentadas a essa questão, 9 (20%) foram consideradas satisfatórias, isto é, que apresentaram, mesmo que de forma imprecisa, algum elemento relevante associado à necessidade de criação dos números irracionais, como a incomensurabilidade lado-diagonal do quadrado. Doze alunos (25%), responderam 'não sei', 'nunca parei para pensar' ou deixaram em branco. Entre as respostas que apareceram uma única vez, destacamos:

Para resolvermos certos exercícios e fazermos certos cálculos são necessários outros números além dos racionais (p. 79).

Algumas divisões não têm uma medida certa. Como os números representam a realidade, logo podem existir irracionais (p. 79).

Quando estava na escola, conheci os irracionais e aceitei sua existência (p. 79).

Talvez eu não acredite, apenas aceite (p. 80).

---

[57] 6-49 é um tipo de loteria muito conhecida no Canadá. O apostador deve escolher 6 números entre os números de 1 a 49. Fonte: http://www.olg.ca/lotteries/games/howtoplay.do?game=lotto649. Acesso em 06/10/2015.

A demonstração de que $\sqrt{2}$ *é um número irracional* (p. 80).

Nada me leva a ver os números irracionais (p. 80).

Moreira (2004) perguntou para 66 licenciandos de matemática da UFMG (24 cursando o último período e 42 cursando o primeiro período de licenciatura em matemática na UFMG):

Os números naturais se prestam muito bem, entre outras coisas, para contar coleções de objetos. Os números racionais se prestam, entre outras coisas, para expressar uma medida fracionária. Para você, o que são números irracionais e para que servem eles? (p. 141).

A expectativa de Moreira (2004) era que os iniciantes apresentassem noções confusas a respeito dos irracionais, e isso se confirmou. Nenhum dos alunos iniciantes mencionou elementos relevantes como a incomensurabilidade em suas respostas de 'para que servem os irracionais'. Em relação aos formandos, a intenção foi *observar em que medida a experiência da formação na licenciatura contribuiu para uma reelaboração das imagens que trouxeram da escola* (p. 163). Entre as respostas dos formandos para a questão da utilidade dos irracionais, Moreira (2004) destaca:

i) Sete ocorrências para a representação decimal

Exemplo: *não há muita serventia para tais números uma vez que para qualquer cálculo é usada sempre uma forma truncada ou aproximada por números, mas apenas para preencher lacunas na formalização matemática* (p. 166).

ii) Seis referências à incomensurabilidade.

Exemplo: *Irracionais, para mim, são os incomensuráveis* (p. 165).

iii) Duas ocorrências para a questão da medida.

Exemplo: *servem para representar medidas, distância [...] que não podem ser representadas por números racionais* (p. 165).

iv) Quatro referências à função de tornar contínua ou completar a reta.

Exemplo: *os números irracionais servem para cobrir as lacunas na reta real, espaços que não podem ser representados nem por frações nem por inteiros, mas que existem* (p. 165).

Moreira (2004) conclui que, apesar de não apresentarem uma visão consistente dos irracionais, notou-se um certo amadurecimento dos formandos em relação às imagens apresentadas pelos iniciantes. De maneira semelhante, a pesquisa realizada em Rezende (2013), que trabalhou com 30 alunos brasileiros dos níveis fundamental, médio e superior, e 21 alunos franceses de níveis equivalentes, concluiu que o *desenvolvimento do conceito de números irracionais necessita de um longo período de escolarização para ser compreendido pelos alunos, sendo este conceito aprimorado progressivamente, conforme avança os níveis escolares* (REZENDE, 2013, p. 159).

Boff (2006) pediu aos 39 licenciandos que participaram de sua pesquisa, *cite uma razão que ilustre a importância e/ou necessidade dos números reais* (p. 40). Segundo essa obra, *apesar de várias questões terem tratado de medidas irracionais, apenas 3 alunos apresentaram respostas relevantes, mencionando medida* (p. 47). Não ficamos surpresos com esse resultado, visto que a abordagem de números, desde a educação básica, privilegia questões relacionadas ao discreto. A ideia de medir algo (contínuo) é comumente associada a uma ação física, a um instrumento de medida e, os problemas de medida, quando trabalhados, ficam relegados à geometria, onde dificilmente se discute a incomensurabilidade, o surgimento e a necessidade dos irracionais.

De maneira geral, os resultados das pesquisas que apresentamos apontam para uma concepção precária da importância e/ou utilidade dos números irracionais por parte dos licenciandos. Os dados também indicam que essas visões ou concepções melhoram com o tempo, mas ainda assim ficam aquém do que se espera de um professor de matemática, um entendimento dos pontos fundamentais do assunto que se propõe a ensinar. No caso dos irracionais, esses pontos são a incomensurabilidade, a medida de segmentos, entre outros, que pouco foram citados pelos licenciandos nas pesquisas que apresentamos.

Encerramos a apresentação de dados de pesquisas e passamos agora à segunda parte da seção, com o propósito de responder às questões colocadas anteriormente: para **que** servem os números irracionais? Para **quem** servem os números irracionais? Construímos uma resposta a partir de algumas fontes e de nossas reflexões como professores, pesquisadores e estudiosos do tema. Temos consciência que nossas respostas para essas questões apenas tocam a superfície de um problema amplo e complexo, que pode ser tratado no âmbito do currículo, da história, da epistemologia, da psicologia, entre outras áreas. No entanto, sentimo-nos provocados a responder a essas perguntas, mesmo correndo o risco de fazer uma análise superficial, porque esperamos assim estimular professores e estudantes a refletirem junto conosco.

Começamos com os questionamentos de Garcia, Soares e Fronza (2005): *é realmente importante levar, para a escola básica, conceitos com tal nível de abstração? Por quê ensinar números irracionais na escola?* (p. 3). Não são exatamente nossas perguntas, mas elas nos ajudam a pensar. Segundo esse trabalho, o ensino dos números irracionais no ensino fundamental é essencial para o prosseguimento dos estudos de matemática, como a construção dos números reais. Encontramos sintonia das ideias de Garcia, Soares e Fronza (2005) com outras pesquisas. Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) entendem os irracionais não apenas como elo de ligação para os números reais, mas também como um suporte a todo sistema numérico. Para Sirotic e Zazkis (2007b), *os números irracionais são essenciais para a extensão e reconstrução do conceito de número a partir de um sistema de números racionais para um sistema de números reais* (p. 75, tradução nossa).

Porém, também encontramos algumas posturas críticas em relação à presença dos irracionais na escola básica. Vinner (2011) entende que, em nome de manter uma integridade matemática, o currículo inclui alguns assuntos que requerem maturidade e uma sólida base matemática que os alunos não têm. Vinner (2011) cita especificamente o caso dos números irracionais. Segundo tal obra, para entender a definição usualmente colocada – número que não pode ser expresso como uma razão de números inteiros – são necessárias muitas ideias matemáticas que o currículo não tem tempo de elaborar. A prática comum no ensino fundamental é apresentar a definição e em seguida alguns exemplos de números irracionais, como π. Com o tempo, a definição é esquecida ou ignorada por ser considerada muito complicada, e quando perguntados a respeito de números irracionais, alguns estudantes e até professores recorrem apenas aos exemplos.

Retornando às perguntas iniciais trazemos para discussão a questão da utilidade dos irracionais sob o ponto de vista de Klein (1932). Para esse pensador, a matemática pode ser dividida em duas, matemática de aproximação e matemática de precisão. Essa divisão é decorrente de duas fontes distintas de conhecimento: uma fonte é intuitiva e empírica, controlada pela medida, enquanto a outra fonte é resultado de uma intuição subjetiva idealizada, que vai além da imprecisão do nosso senso de observação. O olho humano, mesmo com o auxílio de instrumentos sofisticados, está sujeito a limitações impostas por propriedades físicas como o comprimento de onda da luz que é da ordem de 1 mícron (1/1000 mm). Objetos menores do que 1 mícron não podem ser vistos nem com os melhores microscópios e isso significa que, quando medimos em milímetros, apenas as três primeiras casas decimais têm um significado conhecido. Esse seria o limiar da percepção, o limite da matemática de aproximação. A matemática de precisão não possui essas limitações, ao contrário, exige uma percepção ilimitada, o que segundo o axioma de Cantor-Dedekind[58], corresponde exatamente à definição aritmética do conceito de número.

Klein (1932) nos dá um exemplo prático para diferenciar as duas matemáticas:

> Se desejamos explicar essa diferença pela interpretação da equação $f(x) = 0$, devemos notar que, na matemática de aproximação, como em nossa percepção espacial empírica, não se está preocupado se $f(x)$ pode ser exatamente igual a zero, mas meramente se seu valor absoluto $|f(x)|$ deve ficar dentro do limiar de exatidão ε. O símbolo $f(x) = 0$ é meramente a abreviação da inequação $|f(x)| < \varepsilon$, com a qual realmente se está preocupado. É apenas na matemática da precisão que se insiste que a equação $f(x) = 0$ deve ser exatamente satisfeita (p. 36, tradução nossa).

Como nas aplicações práticas utilizamos necessariamente a matemática de aproximação, Klein (1932) sustenta que é possível argumentar que esse é o único ramo da matemática que precisamos. A matemática de precisão serviria apenas como satisfação intelectual daqueles que se ocupam com ela, além de dar suporte ao desenvolvimento da matemática de aproximação. Fechando seu raciocínio, Klein (1932) afirma que o conceito de número irracional certamente pertence apenas à matemática de precisão, já que nas aplicações práticas, usando o metro como unidade, todos os decimais além da sexta casa (equivalente ao milésimo de milímetro) são vazios de significado. Ou seja, conclui o que muitos alunos talvez já descobriram, que em aplicações práticas, os números irracionais podem ser substituídos pelos números racionais sem causar maiores problemas.

Apesar de não ter chamado atenção para esse ponto, ressaltamos ainda que a postura de Klein (1932) também implica que, não apenas os números irracionais, mas qualquer número cuja representação decimal vai além da sexta casa decimal pertence à matemática de precisão, e isso inclui os racionais representados por dízimas periódicas. Um número

[58] O axioma de Cantor-Dedekind estabelece que existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de uma linha.

como $0,333\ldots$ pertence à matemática de precisão, podendo ser aproximado por $0,3$; $0,33$; $0,333$; $0,3333$; $0,33333$; ou no máximo $0,333333$.

Sob outra perspectiva, ainda que se possa encontrar semelhanças com o pensamento de Klein (1932), Reis e Reis (1892) afirmam que o objetivo maior da matemática é resolver um problema de medida direta de forma indireta. Isso significa resolver um problema em que seria necessário utilizar algum instrumento para realizar uma medida, porém sem realizar de fato a medida. E, sendo assim, os números irracionais podem aparecer, inevitavelmente.

> A medida direta das grandezas nunca conduz a números incomensuráveis; mas como o objeto da matemática é, exatamente, a medida indireta das grandezas, determinando-as, umas pelas outras, por meio de relações precisas que entre elas existam – não há meio de evitar que, na avaliação de certas funções, apareçam os números incomensuráveis (REIS; REIS, 1892, p. 459).

Como exemplo, vamos pensar em uma situação simples, calcular o comprimento de uma tampa de panela circular cujo raio r é conhecido. O problema, se resolvido de forma direta com o auxílio de uma fita métrica, nunca revelará um número irracional. Porém, sua resolução indireta aponta a presença de π, que é um número irracional. Pelo pensamento de Klein (1932), $2\pi r$ é uma solução que pertence à matemática de precisão, e para a maioria das aplicações práticas, seria suficiente medir o comprimento da tampa com uma ou duas casas decimais de precisão. Para qualquer aplicação prática, Klein (1932) defende, como discutido anteriormente, que é suficiente medir até o milionésimo de milímetro.

Miguel (2009) traz uma posição diferente para o debate em torno da utilidade dos irracionais. Antes, contudo, fala da utilidade de um conhecimento em termos mais amplos. Segundo ele, nenhuma ciência é inútil e não ter aplicação pode ser apenas uma questão de momento. Um caso emblemático foi a possibilidade teórica prevista no início do século XX pela teoria da relatividade de Einstein para extrair energia do núcleo do átomo. No próprio meio acadêmico havia pessoas que não acreditavam nisso, como o físico Ernest Rutherford (1871 – 1937), que ironizava as pessoas que sonhavam com essa possibilidade. Hoje, tanto para o bem quanto para o mal, a energia nuclear é uma realidade. No âmbito da matemática, Miguel (2009) cita o exemplo do matemático inglês

Godfrey Hardy (1877 – 1947), que afirmou certa vez que a teoria dos números em que trabalhava não servia para nada. Hoje, essa teoria é a base da criptografia[59].

E quanto aos números irracionais? Começam a surgir aplicações nos testes de computadores. Segundo Miguel (2009),

> É justamente essa "propriedade desagradável" dos números irracionais, de não poderem ser detectados, que começa a ter uma aplicação atualmente. Eles começam a ser utilizados para se detectar falhas no funcionamento de computadores (p. 187).

Essas experiências configuram-se como contrapontos ao pensamento contido em Klein (1932) e Reis e Reis (1892), pois, de uma certa forma, inserem os números irracionais nas aplicações práticas e nos problemas de medida direta, e nos forçam inclusive a ter que repensar o significado de 'aplicação prática' e de 'medida direta'.

Colocados os pontos de vista que julgamos relevantes para a discussão, temos agora que enfrentar a árdua tarefa de responder às perguntas que nos propusemos no início desta seção. A questão da utilidade dos números irracionais, diretamente relacionada com a primeira pergunta – para que serve os irracionais? – foi respondida pelo que mostramos. Seja como satisfação intelectual dos matemáticos e cientistas, seja para dar suporte à matemática de aproximação (KLEIN, 1932), seja para resolver indiretamente problemas de medida direta (REIS; REIS, 1892), seja para realizar testes em computadores (MIGUEL, 2009), os números irracionais têm sua utilidade.

De uma certa forma, a resposta à questão da utilidade já traz também a questão do 'útil para quem', que é o cerne da nossa segunda pergunta, ainda que isso não fique bem claro, de acordo com a linha de pensamento que adotemos. De acordo com o pensamento em Klein (1932), a matemática de precisão, aquela que lida com os irracionais, é mais achegada aos matemáticos e cientistas em geral[60]. Já a leitura de Reis e Reis (1892) aponta para outra situação. Como o objetivo da matemática é resolver de forma indireta os problemas de medida direta, e nesses casos, o aparecimento dos irracionais é inevitável, o assunto deveria ser ensinado a todos. Entendemos que, qualquer que seja o pensamento

---

[59] Criptografia é o estudo dos princípios e técnicas pelas quais a informação pode ser transformada da sua forma original para outra ilegível, de forma que possa ser conhecida apenas por seu destinatário, o detentor da "chave secreta". Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Criptografia. Acesso em 12/1/2016.

[60] Mas, isso não significa que Klein (1932) defende o banimento dos irracionais da educação básica. Como veremos na seção seguinte, ele defende, assim como Vinner (2011), que os estudantes (em geral) não têm maturidade para aprofundar-se nesse assunto, e, portanto, a apresentação dos números irracionais na educação básica deve ser conduzida em linhas gerais, por meio de exemplos.

adotado, a escola não sabe quais alunos serão cientistas, quais serão bancários, nem quais serão advogados, de forma que não é possível privar totalmente os alunos da matemática de precisão, nem da habilidade de resolver problemas de medida direta de forma indireta. Por isso, o mais honesto com todos os alunos é ensinar os números irracionais, evidentemente, com um nível de aprofundamento adequado à condição dos alunos. A própria discussão que realizamos aqui também é algo que julgamos necessário ser feito, principalmente em um curso de formação de professores.

4.5 – Propostas de ensino

Se concordamos que os números irracionais são importantes e devem ser ensinados na escola básica, outras questões surgirão imediatamente: como ensinar? Quais pontos aprofundar? Já discutimos o assunto a partir das orientações dos PCN na seção 1.1 – Na educação básica, e acrescentaremos agora algumas sugestões de alternativas para lidar com o tema que nos deparamos ao longo de nossas buscas por fontes e referências. Advertimos ao leitor que esta seção tem caráter informativo, e que devido à natureza variada das propostas apresentadas, com níveis de aprofundamento variados (algumas talvez pudessem ser chamadas de princípios ou diretrizes), seria impossível apresentar muitos detalhes em um curto espaço.

Começamos com Klein (1932) e sua proposta de tratar os numeros irracionais a partir apenas de exemplos.

> Deixe-me dizer, em poucas palavras, como eu lido com essa matéria nas escolas. Uma teoria exata dos números irracionais é dificilmente adaptável para o interesse e o poder de compreensão da maioria dos pupilos. O pupilo usualmente ficará contente com resultados de exatidão limitada. Ele ficará admirado com uma aproximação de 1/1000 mm e não exigirá uma exatidão ilimitada. Para a maioria dos pupilos será suficiente se o número irracional for entendido em termos gerais por meio de exemplos, e isso é o que usualmente é feito. Com certeza, estudantes especialmente dotados exigirão uma explanação mais completa do que essa, e será um exercício louvável de habilidades pedagógicas por parte do professor dar a esses estudantes a explanação suplementar desejada sem sacrificar os interesses da maioria (p. 37).

Para Klein (1932), a opção pelos exemplos não é exatamente uma escolha. Ela talvez seria a única opção já que uma teoria rigorosa dos irracionais é inadequada na escola básica, porque está além do interesse e das possibilidades de compreensão dos alunos. Assim como Klein (1932), também observamos que a opção quase que exclusiva pelos exemplos é o que de fato ocorre na escola, mais precisamente no ensino fundamental.

Talvez seja apresentada uma definição, muito brevemente e sem maiores discussões e tempo para os alunos assimilarem todas as suas nuances, mas rapidamente os exemplos entram em cena e isso é tudo de números irracionais que os alunos verão. Essa é uma abordagem comum de ser encontrada nos livros didáticos do 8º ou 9º anos do ensino fundamental.

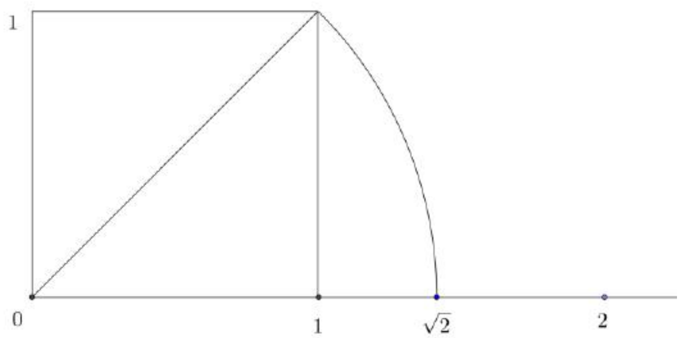
Além de apresentar poucos exemplos de números irracionais, esse tipo de abordagem comum em aulas e livros didáticos de matemática também costuma negligenciar a importância dos contraexemplos. Pensamos que devem ser apresentados diversos exemplos e suas propriedades, para que os alunos assimilem o porquê daqueles casos serem considerados números irracionais. Da mesma forma, diversos contraexemplos devem ser apresentados e discutidos para que os alunos entendam porque aquele número não satisfaz certas condições e propriedades necessárias para ser considerado um número irracional.

As propostas de ensino dos números irracionais que apresentaremos a seguir são um contraponto às ideias de Klein (1932), na medida em que vão além dos exemplos. A nosso ver, essas propostas encontram-se em um ponto de equilíbrio entre dois extremos apontados por Klein (1932): uma teoria rigorosa de números irracionais e a apresentação exclusiva de exemplos. Entendemos que não é salutar à aprendizagem da matemática abrir mão da abordagem de algum conceito quando não é possível tratá-lo com o máximo rigor, inclusive porque o rigor matemático não á algo absoluto, ele carrega a marca de seu tempo. A própria história nos dá vários exemplos disso. Um deles é o cálculo diferencial e integral, que se desenvolveu no século XVII, mostrou toda sua força e eficácia na resolução de diversos problemas de mecânica, ótica, termodinâmica, entre outros, mas suas bases matemáticas foram consideradas não rigorosas no século XIX. Veremos a seguir que, mesmo em um nível elementar, é possível abordar algumas questões relacionadas aos números irracionais em profundidade, sem que para isso seja necessário construir uma teoria matemática rigorosa.

No trabalho de Mosca (2013), são propostas três maneiras para definir os números irracionais no ensino médio. A primeira maneira é dizer que um número é irracional quando representa a medida de um segmento incomensurável com a unidade. Antes, o número racional deve ser definido como aquele que representa a medida de um segmento comensurável com a unidade. Essa definição mostra que a irracionalidade é algo relativo, que reside na relação entre os elementos, e não nos elementos em si. Se, por exemplo, definíssemos $\sqrt{2}$ como unidade, 1 seria um número irracional. Na verdade, todos os naturais e racionais se tornariam números irracionais. Essa proposta precisa de um trabalho prévio com a medida de segmentos para os estudantes se familiarizarem com os procedimentos de medida.

A segunda maneira é definir os números racionais como aqueles que podem ser escritos em forma de fração a/b com $b \neq 0$. O objetivo é definir os irracionais ao final do processo como números reais que **não** podem ser escritos em forma de fração a/b com $b \neq 0$. Antes, porém, é preciso definir os números reais. A proposta de Mosca (2013) é pegar uma reta, marcar um ponto, chamá-lo de origem, definir um segmento como unidade e marcar, a partir dessa unidade, os números racionais. Em seguida, mostra que existe um ponto que representa um número irracional (Figura 25). Os números reais são definidos assim: *o conjunto ℝ, denominado conjunto dos números reais é o conjunto que contém o conjunto dos números racionais, e dado um número irracional* ***a****, contém todos os números gerados por este a partir das quatro operações aritméticas* (p. 32). Segundo tal obra, a intenção dessa definição é criar um conjunto fechado para as quatro operações e que possa ser utilizado na definição de número irracional, evitando-se ou minimizando-se uma circularidade lógica.

Figura 25 - Construção de um ponto que representa um número irracional



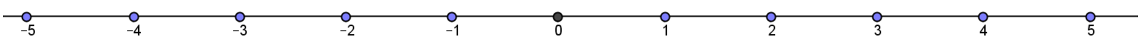
Fonte: Elaborada pelo autor.

Na terceira maneira proposta por Mosca (2013), define-se primeiramente uma expansão decimal: um símbolo da forma $n = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ ...., onde $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ ... são números positivos chamados dígitos, tal que cada a_i pertence ao conjunto $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. A partir daí, define-se número real como aquele que pode ser expresso por meio de uma expansão decimal. Mostra em seguida que toda fração ordinária é equivalente a uma expressão decimal finita ou a uma dízima periódica. Define a partir daí que um número real é um número racional se sua representação for finita ou infinita periódica. Por fim, o número irracional é definido como o número real cuja representação decimal é infinita e não-periódica.

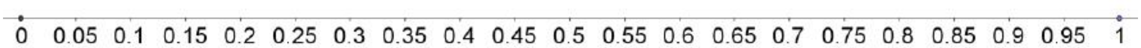
Mendes (2012) apresenta uma pesquisa de natureza qualitativa, desenvolvida em uma escola de formação de professores para a educação básica, da rede pública estadual do Rio de Janeiro. Constitui-se em uma investigação de práticas pedagógicas para o ensino dos números irracionais, com o objetivo de fornecer material para auxiliar professores das séries iniciais em suas práticas e estimular a reflexão sobre a importância de uma boa formação desse conceito. Mendes (2012) propõe refletir acerca de diferentes práticas pedagógicas passíveis de serem aplicadas em sala de aula via sequências de atividades didáticas com ou sem auxílio do *software* GeoGebra, como a percepção do infinito, o número de ouro, percepção de segmentos comensuráveis e incomensuráveis, localização de irracionais na reta, entre outras.

Garcia, Soares e Fronza (2005) propõem uma série de atividades para o 9º ano do ensino fundamental que giram em torno da reta real. De forma resumida, apresentamos a atividade proposta para a construção da reta real (as ilustrações são nossas):

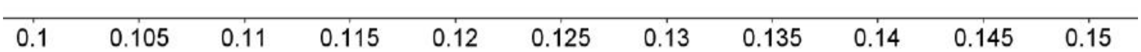
1 – Traçar uma linha horizontal e marcar o 0 (zero) e o 1 (um). Usando a mesma distância entre 0 e 1, marcar o 2, 3, 4, 5, ... Fazer uma reflexão e marcar -1, -2, -3, ...



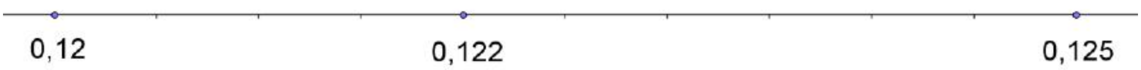
2 – Ampliar o intervalo entre 0 e 1, tomando toda a folha, dividir em dez partes iguais e marcar os pontos 0,1; 0,2; ...; 0,9. Em seguida marcar os pontos médios 0,05; 0,15; 0,25; ...; 0,95.



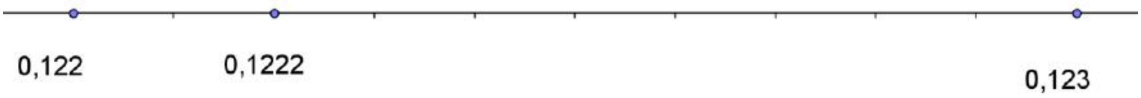
3 – Ampliar o intervalo entre 0,1 e 0,15, tomando toda a folha, dividir em dez partes iguais e marcar os pontos 0,105; 0,110; 0,115; ...; 0,145.



4 – Ampliar o intervalo entre 0,12 e 0,125, tomando toda a folha, dividir em dez partes iguais e marcar 0,122.



5 – Ampliar o intervalo entre 0,122 e 0,123, tomando toda a folha, dividir em dez partes iguais e marcar 0,1222.



Os pontos que aparecem correspondem a números decimais exatos, aqueles que têm um número finito de casas decimais. Se pudéssemos continuar essas divisões, poderíamos marcar na reta o número infinito e periódico 0,1222..., da mesma forma que poderíamos marcar um número infinito e não periódico como 0,121121112...A conclusão da atividade é que:

> A cada nova divisão da reta os números ganham mais um dígito. Pode-se ampliar e dividir os intervalos infinitas vezes. Assim podemos marcar pontos da reta que correspondem a números decimais com número infinito de casas após a vírgula. Para cada ponto da reta vai existir um número decimal finito ou infinito, correspondente. A estes números chamamos de números reais. O conjunto dos números reais é o conjunto dos números que têm correspondência nos pontos da reta. Estes números têm representação decimal, finita ou infinita (GARCIA; SOARES; FRONZA, 2005, p. 32).

Andersen (1968) apresenta uma proposta *não tradicional* para introduzir os números irracionais no ensino médio, em contraposição a uma abordagem muito comum de iniciar o assunto escrevendo na lousa $x^2 = 2$ e desafiar os alunos a encontrar a solução. Segundo Andersen (1968), muitos professores que começam dessa forma acabam eles mesmos tendo que dar a solução para os alunos e depois convencê-los que a solução é um número que não pertence ao conjunto dos racionais. A razão disso deve-se ao fato de que *o referido método não é natural, na medida em que depende muito pouco da experiência dos alunos e depende pesadamente de uma definição não construtível, assim como de uma prova indireta* (ANDERSEN, 1968, p. 272).

Antes de prosseguir com a ideia de Andersen (1968) para a introdução do assunto números irracionais, cabe aqui apontar o nosso entendimento a respeito dessas colocações da obra. Primeiro, a frase ‘depende pesadamente de uma definição não construtível e de uma prova indireta' provavelmente se refere a definição de $\sqrt{2}$ como a solução de $x^2 = 2$ e da prova mais comum da irracionalidade de $\sqrt{2}$, que é na verdade uma prova de que esse número não é racional, portanto uma prova indireta por *redução ao absurdo*[61]. Segundo, 'depende muito pouco da experiência dos alunos', provavelmente se refere a encontrar um número racional que ao quadrado é igual a 2.

Prosseguindo, a ideia central de Andersen (1968) é mostrar que existem outros números no intervalo [0,1] além dos números racionais. Para levar a efeito tal proposta, sugere discutir alguns processos que levam a somas infinitas como

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

para em seguida obter $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots < \frac{1}{2}$. O passo seguinte é construir uma relação biunívoca entre o conjunto $A = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2}^{(k+1)}, \dots\right\}, k \in \mathbb{N}$, e o conjunto de todos os números racionais (inclusive algumas repetições) no intervalo $[0,1]$, chamado de $B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots\right\}$. Assim, pensando os elementos do conjunto A como comprimentos de segmentos, mostra que o intervalo $[0,1]$ fica *descoberto* quando relacionamos biunivocamente cada um desses segmentos com um número racional de B. Logo, é natural que exista algo além dos racionais, que serão chamados de irracionais[62].

Uma vez firmemente estabelecido que existem números que não são racionais, Andersen (1968) afirma que o estudante está pronto para a tarefa de encontrar um exemplo particular, e isso poderá ser feito pela discussão já citada em relação à solução da equação $x^2 = 2$ ou pela localização de $\sqrt{2}$ na reta numérica por meio de uma construção

---

[61] O nome provém do latim *reductio ad absurdum* e está baseado na lei do terceiro excluído, segundo a qual uma afirmação que não pode ser falsa deverá ser verdadeira (OLIVEIRA; FERNÁNDEZ, 2010).

[62] Analisando historicamente como se deu a formalização dos números reais, não achamos que seja natural. Na verdade, se alimentarmos o desejo de que todos os pontos do intervalo [0,1] correspondam a um número, deve existir algum outro tipo de número para preencher as lacunas que criamos com esse desejo. Esse desejo foi naturalizado.

geométrica. A etapa seguinte será a propagação dos números irracionais, isto é, a construção de outros números irracionais além de $\sqrt{2}$, como $\frac{a}{b}\sqrt{2}$, onde a e b são números inteiros. Andersen (1968) também aponta que naturalmente os alunos suspeitarão da irracionalidade de $\sqrt{3}$, e que isso poderá ser uma interessante e desafiadora lição de casa.

Por fim, Andersen (1968) aponta para outras discussões frutíferas que poderão surgir, como: os racionais e os irracionais têm a mesma quantidade de elementos? Os irracionais preenchem todas as lacunas deixadas na reta numérica pelos racionais? A solução para $x^2 = -1$ pertence aos irracionais? Qual o lugar de π no nosso sistema numérico?

Apesar da proposta de Andersen (1968) ser direcionada ao ensino médio, consideramos que também seria muito interessante utilizá-la em um curso de licenciatura em matemática, em uma disciplina de introdução à análise real, quando os alunos já tiveram a oportunidade de estudar séries infinitas e correspondência biunívoca em outras disciplinas, como cálculo diferencial e integral, álgebra ou teoria dos números. Entendemos ainda que para aplicar a proposta de Andersen (1968) em uma turma de ensino médio brasileira seria preciso trabalhar antes com processos infinitos por algumas semanas, talvez meses. De acordo com essa obra, discussões de fatos matemáticos como uma soma infinita que resulta em um valor finito podem proporcionar acaloradas discussões, mas, não costumam estar presentes na sala de aula nesse nível de ensino.

Silva (2006) propõe uma abordagem metodológica sobre números irracionais para o ensino médio. A proposta foi construída e aplicada em duas turmas de 1ª série do ensino médio de escolas públicas da cidade de Natal após uma fase inicial de diagnóstico. As atividades foram desenvolvidas em pequenos grupos, seguindo os procedimentos: i) leitura individual e silenciosa; ii) discussão sobre como resolver a atividade proposta; iii) resolução da atividade (uso de materiais, procedimentos de cálculos, anotações e outros); iv) comunicação das ideias e dos procedimentos adotados na resolução; v) quando necessário, havia intervenção do professor-pesquisador para esclarecimentos.

A seguir, listamos a sequência de atividades, bem como os tópicos principais de cada atividade proposta para uma das turmas participantes da pesquisa de Silva (2006).

1 - Identificação de um número primo. Decomposição de um número em fatores primos.

2 – Equação do 1º grau.

3 – Razão, proporção e proporcionalidade.

4 – Representação dos números irracionais utilizando régua e compasso.

5 – Radicais e operações com radicais.

6 – Semelhança de figuras.

7 – Procedimentos para calcular a raiz quadrada por aproximação.

8 – Demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$.

9 – Equações irracionais.

10 – Breve revisão de trigonometria. Polígonos regulares inscritos e circunscritos. Método de Arquimedes para aproximação do valor de π.

Silva (2006) concluiu, diante dos resultados positivos alcançados, que a intervenção tem condições de ser aplicada de forma mais frequente no ensino médio.

Arcavi (1985) apresenta diversas propostas de atividades para o ensino de números irracionais utilizando história da matemática. As atividades são direcionadas a professores em formação e professores que já atuam na educação básica. Os principais objetivos dessa proposta, materializada em uma sequência de fichas de trabalho, são: i) aumentar o conhecimento matemático do professor sobre tópicos do currículo, de uma forma que motive o professor a reconsiderar tópicos previamente estudados, mas possivelmente entendidos imperfeitamente; ii) propiciar discussões de práticas relevantes; iii) criar uma imagem razoável da atividade matemática como esforço humano. Outro ponto que merece destaque é a utilização, sempre que disponível, de fontes primárias.

Todas as folhas de trabalho têm a seguinte estrutura: uma breve introdução biográfica-cronológica para situar a cena histórica; uma fonte histórica (tanto quanto possível uma fonte primária); por fim, questões principais da fonte matemática e das consequências matemáticas e didáticas. A dinâmica do processo é a seguinte: após receberem a folha de trabalho com um tema em destaque, os participantes trabalham em grupos ou individualmente, com a intervenção de um tutor se necessário. Uma discussão coletiva e guiada é iniciada e, por fim, distribuem-se as folhas de respostas da atividade. Os 6 temas propostos vão desde os primeiros registros dos números irracionais até sua formalização no século XIX: 1 – os pitagóricos; 2 – Euclides e os Elementos; 3 – Irracionais nos séculos XVI e XVII; 4 – Rafael Bombelli; 5 – Nicholas Saunderson; 6 – Dedekind e a definição dos irracionais.

Melo (1999) também propôs atividades para abordar o número irracional envolvendo a história da matemática. São 7 conjuntos de atividades, fruto de pesquisas bibliográficas, cuja contribuição à educação matemática reside no fato de estarem agrupadas por temas, que são os seguintes: existência dos irracionais, diversas formas de representação, representação na reta, a questão da densidade, irracionalidades trigonométricas, irracionalidades logarítmicas, irracionais algébricos e transcendentes.

Em mais uma proposta de ensino utilizando elementos da história da matemática, Dias e Cobianchi (2004) propõem uma abordagem dos números reais que guardam uma relação direta com a questão dos irracionais. Essa abordagem está apoiada em uma perspectiva lógico-histórica, e, em linhas gerais, parte do pressuposto que a reconstrução histórica do movimento de ideias relacionadas a um determinado conceito favorecem a apreensão lógica do objeto. Nesse contexto, os pesquisadores sugerem que sejam abordados os seguintes conceitos: infinidade, ordenação, densidade, enumerabilidade, continuidade e incomensurabilidade.

Baroni e Nascimento (2005) sugerem a ideia de se introduzir os números reais em cursos de formação de professores a partir da medição de segmentos. A proposta apresentada nasceu de discussões entre os autores dessa obra e alunos do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Unesp – Rio Claro, e foi posta em prática em uma disciplina de análise real ministrada para alunos de mestrado e doutorado em educação matemática no ano de 2004. Segundo Baroni e Nascimento (2005), a intenção não foi esgotar o assunto nem apresentar algo novo, já que a proposta se baseia em uma sugestão do matemático francês Henri Lebesgue (1875 – 1941).

A proposta se inicia com o tratamento de segmentos proporcionais, que inclui uma abordagem dos segmentos comensuráveis. Em seguida, mostra-se que existem segmentos incomensuráveis a partir de uma construção geométrica. O passo seguinte cuida do processo de medição de segmentos a partir de uma unidade de medida. A intenção é mostrar que *o processo de medição permite introduzir tanto os números que serão ditos racionais, quanto aqueles que serão ditos irracionais* (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 2). Apesar do nível de rigor matemático do material causar algumas dificuldades no início, como relatado por alguns participantes, a proposta tem o mérito de tratar os números reais de uma forma diferente do que é usualmente feito em uma disciplina de análise real, quando o assunto é tratado de maneira puramente formal, sem fazer relações com a medição de segmentos.

Em Pasquini (2007) foi feito um estudo referente à proposta de ensino dos números reais via medição de segmentos que acabamos de apresentar. Esse estudo foi composto de análise do material proposto por Baroni e Nascimento (2005), da observação das aulas de análise real da professora Rosa Lúcia Sverzut Baroni para alunos da pós-graduação em educação matemática da Unesp/Rio Claro no ano de 2005, além da entrevista de alguns estudantes. Em suas considerações finais, Pasquini (2007) deliberadamente não apresenta os resultados de seu trabalho. Contudo, a fala de um professor que participou da pesquisa mostra que o material utilizado no curso tem potencial, inclusive para o tratamento dos números irracionais.

> Com certeza, com certeza, e houve discussão de conceitos . . . bem elaborados na minha opinião, e eu achei coisas que eu não tinha pensado antes. Eu acho que a gente tem algumas pendências, pra mim, quando eu começo a falar do número irracional do jeito que ele aparece por aí, é um nó, eu acho que pensando nesse processo de medição, pode ser uma saída pra um material muito diferenciado, ... (PASQUINI, 2007, p. 160).

Ainda no que se refere ao ensino de números utilizando a medição de segmentos, a proposta do psicólogo russo Vasily Davydov (já mencionada de forma breve na seção 2.1 – Medida de um segmento) vai ainda mais longe: ensinar números via medição e segmentos desde o primeiro ano do ensino fundamental. Trata-se de uma proposta desenvolvida na sala de aula ao longo de 25 anos, a partir dos pressupostos da teoria sócio-histórica de Vygotsky. Essas propostas foram publicadas em livros didáticos e de orientações para professores na União Soviética, inclusive com propostas de atividades (ROSA; DAMAZIO; SILVEIRA, 2014). A proposta de Davydov e seus colaboradores aponta para o tratamento dos números como um todo contínuo, desde sua introdução, o que é incompatível com o ensino tradicional, que o concebe como partes discretas (DAMAZIO; ROSA; EUZÉBIO, 2012). Mas, a principal diferença entre a abordagem davydoviana e a tradicional, aquela que encontramos na maioria dos livros didáticos, é que na primeira,

> É necessário que se tenha como princípio que, mesmo no primeiro ano, o aluno adquira a concepção de número real. Para tanto, o sistema de tarefas foge dos padrões daquelas apresentadas aos alunos que estabelecem como conteúdo primeiro o número natural. A preocupação inicial não é a sequência numérica e a escrita dos signos, mas a ideia de valor e suas relações de igualdade e desigualdades. Para tanto, as tarefas envolvem a comparação (comprimento, área, massa, volume), que são identificadas e representadas, pelo estudante, inicialmente, por tiras, depois por segmentos, posteriormente, por letras e

> signos. Momento em que o estudante faz anotações do tipo $a = b, a > b$ e $a < b$. O conceito de número é introduzido como relação multiplicativa, traduzida por $a/c = n$, onde n é qualquer número, c é uma medida e a uma medida múltipla de c (DAMAZIO; ROSA; EUZÉBIO, 2012, p. 228).

Pela ótica da concepção davydoviana, o ensino tradicional de números procede muito rapidamente para a escrita dos números, sem um trabalho prévio consistente em relação ao significado dessa escrita. A proposta de usar a medição de segmentos é vista como vantajosa, pois ela consegue dar um significado único para todos os números e operações com números, além de dispensar as tradicionais justificativas de fechamento algébrico (ver seção 2.3.1 – Na matemática básica) para a ampliação dos conjuntos numéricos. Não são apenas os educadores matemáticos que dizem isso, mas também os matemáticos. Para Elon Lages Lima, *o processo de medição das grandezas contínuas conduz à noção de número real* (LIMA *et al.*, 1996, p. 52). Para Hyman Bass,

> Desenvolver os números no contexto da medida oferece um contexto produtivo para desenvolver a reta real através das séries escolares. Depender exclusivamente do modelo discreto de contagem leva ao que chamarei de "narrativa da construção" da reta numérica, na qual os novos tipos de números, suas notações e suas operações, são adicionadas incrementalmente sem uma interconexão suficiente (BASS, 2015, p. 12, tradução nossa).

4.6 – Abordagem dos livros didáticos

O livro didático desempenha importante papel na sala de aula, sendo talvez o recurso didático mais utilizado pelos professores de todas as disciplinas da educação básica brasileira. As razões para isso são inúmeras, mas elencamos apenas duas que consideramos fundamentais. Primeiro, temos a ampla disponibilidade desse material, que é fornecido gratuitamente pelo Governo Federal aos alunos e pode ser escolhido pelos professores por meio dos guias do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) e Plano Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM). Segundo, temos a organização, o sequenciamento e o fracionamento do conteúdo promovido pelo livro didático, que 'facilita' a tarefa do professor, que frequentemente possui pouco tempo para planejar suas aulas devido a uma elevada carga horária semanal de trabalho e deslocamentos entre duas ou três escolas. No caso da matemática não é diferente, e *o livro didático é, na maioria dos casos, a única fonte de referência com que conta o professor para organizar suas aulas* (LIMA, 2001, p. 1).

Nesse contexto de dificuldade, a suposta 'facilidade' oferecida pelo livro didático, associada a ausências na formação acadêmica do professor como o *conhecimento* *pedagógico do conteúdo* (SHULMAN, 1986), pode trazer consequências indesejáveis se o professor *engolir a ideia de que sem a adoção do livro didático não há como orientar a aprendizagem* (SILVA, 1996, p. 11). Uma utilização exclusiva desse material no direcionamento das ações pedagógicas, sem complementações ou até mesmo possíveis correções, pode ser muito danosa se o professor, por exemplo,

> Abdica do privilégio de projetar os caminhos a serem trilhados, em consonância com as circunstâncias – experiências, interesses, perspectivas – de seus alunos, passando a conformar-se, mais ou menos acriticamente, com o encadeamento de temas propostos pelo autor [do livro didático] (MACHADO, 1996, p. 31).

A possibilidade do livro didático desempenhar um papel central no direcionamento das questões pedagógicas na escola básica, como a seleção e a ordem dos conteúdos, além dos exemplos e das atividades propostas para os alunos, provoca-nos uma inquietação: como os números irracionais são tratados nos livros didáticos da educação básica? Esse tratamento pode suprir possíveis ausências que apontamos na formação acadêmica? (ver seção 1.2 – Na licenciatura em matemática). Porém, antes de iniciar qualquer discussão que tenha como foco principal os livros ou manuais didáticos, é preciso deixar claro algumas limitações intrínsecas a essa atividade. Falando especificamente dos livros didáticos de matemática, não é possível fazer afirmações ou generalizações a respeito do ensino dessa disciplina a partir da análise exclusiva desses materiais. Os livros refletem o que foi proposto para o ensino de matemática em uma determinada época, mas não são capazes de revelar o modo como foram usados por professores e estudantes (GOMES, 2012). Tendo em vista essa colocação, comentamos algumas pesquisas realizadas a respeito da abordagem conferida aos números irracionais pelos livros didáticos. Eventualmente, também abordamos os números racionais e os reais, conforme já alertamos, pela proximidade e relevância desses assuntos na constituição dos números irracionais.

Encontramos quatro trabalhos que nos ajudaram a responder nossas perguntas. Tratam-se de duas dissertações de mestrado (NAKAMURA, 2008; SOUTO, 2010), uma tese de doutorado (POMMER, 2012) e um livro escrito por renomados matemáticos brasileiros (LIMA, 2001). Nesses trabalhos, ao todo, foram analisadas mais de duas dezenas de títulos, em um total de 70 volumes, dos ensinos fundamental e médio de importantes autores brasileiros das décadas de 1970, 1990 e 2000 (ver **Quadro 4**). Os critérios utilizados em Souto (2010) e Pommer (2012) para a seleção dos livros que seriam analisados foram a aprovação dos livros nos PNLD e PNLEM, além da disponibilidade dos títulos e da importância dos autores no mercado editorial. Já nos trabalhos de Lima

(2001) e Nakamura (2008), não são mencionados os critérios utilizados na seleção dos livros, sendo que nesse último justifica-se apenas o ano de publicação dos títulos escolhidos (ver adiante).

Quadro 4 - Quantitativo de livros didáticos de matemática analisados em Lima (2001), Nakamura (2008), Souto (2010) e Pommer (2012)

Trabalho	**Ensino fundamental**		**Ensino médio**	
	Quantidade	*Período*	*Quantidade*	*Período*
Lima (2001)	-	-	12 coleções (36 volumes)	Não informado[63]
Nakamura (2008)	6 coleções (12 volumes)	1973 - 1977 1995 2000 - 2005	-	-
Souto (2010)	9 volumes	2002-2006	5 volumes	2003-2005
Pommer (2012)	2 coleções (8 volumes)	2008-2010	2 coleções (6 volumes)	2006-2009

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em Lima (2001), são analisados os três volumes para o ensino médio de cada uma das 12 coleções selecionadas (ver **Quadro 5**), observando três componentes básicas: conceituação, manipulação e aplicação. A partir dessas observações, cria-se o *livro genérico brasileiro de matemática para o ensino médio* (LIMA, 2001, p. 462), que não é nenhum dos livros avaliados, mas cujas características estão presentes em pelo menos 80% dos textos analisados. As principais qualidades e defeitos desse livro genérico são:

> - Ele é muito bem impresso e diagramado, em várias cores, com belas ilustrações, embora as figuras matemáticas contenham muitas imprecisões e erros;
> - Seu texto não induz o leitor (aluno) a pensar. Quando propõe problemas que exigem raciocínio, são quebra-cabeças que não se relacionam com a matéria ensinada;
> - Transmite sistematicamente a impressão de que as conclusões gerais da matemática resultam do exame superficial de dois ou três casos particulares;
> - Não estabelece conexões entre os assuntos estudados em diferentes capítulos ou volumes. Exemplo: progressão geométrica e função exponencial;
> - Das três componentes básicas do ensino de matemática (conceituação, manipulação e aplicações) privilegia a manipulação. A parte conceitual é extremamente deficiente e as aplicações reais, contextualizando temas estudados, praticamente inexistem.
>
> (LIMA, 2001, p. 462)

[63] As datas de publicação dos livros analisados não foram informadas. Apesar disso, pela data de publicação do trabalho Lima (2001), e por já termos trabalhado com alguns dos livros citados nessa obra, acreditamos que se tratam de livros da década de 1990.

No que se refere especificamente ao ensino de números reais, e, consequentemente de números irracionais, Lima (2001) afirma que a apresentação desse assunto no livro genérico é obscura e não há menção a medidas, o que *deseduca e mistifica* (p. 463), como por exemplo: $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ *é irracional porque não é uma decimal periódica. Quem garante isso? Ou então:* $a < b$ *quando* b *está a direita de* a *na reta. Como saber então se* $\sqrt{10} < \pi$ *ou não?* (p. 463).

Quadro 5 - Coleções analisadas em Lima (2001)

Autor(es)	**Título**	**Editora**
Antônio dos Santos Machado	Matemática na Escola do Segundo Grau	Saraiva
Benigno Barreto Filho e Claudio Xavier da Silva	Matemática, aula por aula	FTD
Edwaldo Bianchini e Herval Paccola	Matemática	Moderna
Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, José Carlos Teixeira, Nilson José Machado, Márcio Cintra Goulart, Luiz Roberto Castro e Antônio dos Santos Machado	Matemática	Saraiva
Nelson Gentil, Carlos Alberto dos Santos, Antônio Carlos Grecco, Antônio Bellotto Filho e Sérgio Emílio Greco	Coleção maetmática para o segundo grau	Ática
José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno	Coleção matemática	FTD
Katia Cristina Stocco Smole e Rokusaburo Kiyukawa	Matemática	Saraiva
Luiz Roberto Dante	Matemática – contexto e aplicações	Ática
Manoel Rodrigues Paiva	Coleção matemática	Moderna
Marcio Cintra Goulart	A matemática no ensino médio	Scipione
Maria Helena Soares de Souza e Walter Spinelli	Matemática	Scipione
Paulo Bucchi	Curso prático de matemática	Moderna

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na dissertação de mestrado de Nakamura (2008), são analisadas seis coleções de livros, sendo duas dos anos 1970, duas dos anos 1990 e duas dos anos 2000 (ver **Quadro 6**). Os períodos escolhidos para a análise acompanham períodos de mudanças, tanto nos documentos oficiais quanto nas tendências da educação matemática. Nos anos 1970, havia a influência do Movimento de Matemática Moderna, e o documento oficial (para o estado de São Paulo) era o *Guia Curricular de Matemática* (NAKAMURA, 2008, p. 75). Nos anos 1990, sob a influência do construtivismo, foi elaborada no estado de São Paulo a *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática* (idem, p. 81). Nos anos 2000, sob a influência de órgãos de financiamento internacionais e, seguindo as novas tendências de desenvolvimento de capacidades e habilidades, foram elaborados a partir do final da década de 1990 os *Parâmetros Curriculares Nacionais* (ibidem, 2008, p. 83).

Quadro 6 - Coleções analisadas por Nakamura (2008)

Década	**Coleções**	
1970	LAMPARELLI, Lydia; CANTON, Adolfo; MORETTIN, Pedro; INDIANI, Dalva. **Matemática para o 1º grau** – 7ª e 8ª série. São Paulo: EDART, 1973.	AVERBUCH, Anna; GOTTLIEB, Franca; SANCHEZ, Lucília; LIBERMAN, Manhúcia. **Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau** – 7ª e 8ª série. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1977.
1990	NETTO, Scipione. **Matemática: Conceitos e História** – 1ºgrau – 7ª e 8ª séries. São Paulo: Scipione, 1997.	BONGIOVANNI, Vincenzo; LEITE, Olímpio; LAUREANO, José Luiz. **Matemática e Vida,** 1ºgrau – 7ª e 8ª série. São Paulo: Ática, 1997.
2000	BIGODE, Antônio José. **Matemática hoje é feito assim** – Ensino fundamental – 7ª e 8ª séries. São Paulo: FTD, 2000.	DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática** – Ensino Fundamental – 8ª série. São Paulo: Ática, 2005

Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com Nakamura (2008), as coleções da década de 1970 priorizavam, em geral, o desenvolvimento de habilidades estritamente técnicas. *Os conteúdos, sob esse enfoque, aparecem dispostos em passos sequenciais em forma de instrução programada, onde o aluno deve realizar uma série de exercícios do tipo siga o modelo* (idem, p. 90). No que se refere aos números irracionais, os volumes dedicados às 7ª séries expõem um conhecimento pronto sobre esses números – aqueles que não possuem uma representação decimal infinita e periódica – e, em seguida, apresentam exercícios de fixação. Os volumes dedicados às 8ª séries tratam da questão dos segmentos comensuráveis e incomensuráveis, porém, o livro de Averbuch, Gottlieb, Sanchez e Liberman, não relaciona os segmentos incomensuráveis com os números irracionais.

Nas coleções da década de 1990, Nakamura (2008) identifica uma tendência de aproximar o conhecimento matemático do cotidiano dos alunos, com o uso de uma linguagem mais coloquial na apresentação dos conteúdos e a preocupação em construir conexões entre os temas, evitando em muitos pontos a sensação de um conhecimento pronto e isolado. Além disso, diferente dos livros da década de 1970, onde prevalecia uma apresentação linear e sequencial dos temas, nas coleções analisadas da década de 1990, o estudo de um tema não se limita a um só capítulo, sendo retomado várias vezes ao longo das séries, com apresentações diferentes, de acordo com a maturidade e a experiência matemática dos alunos. Em relação aos números irracionais, um diferencial dos livros analisados da década de 1990 foi a presença da história da matemática como fio condutor para tornar o estudo dos números irracionais mais interessante e significativo. Pelo menos essa era a intenção manifestada explicitamente na obra de Bongiovanni, Leite e Laureano (NAKAMURA, 2008).

Quanto às coleções dos anos 2000, elas seguiram basicamente na mesma linha das coleções da década anterior. Em resumo, pode-se dizer que cada uma das coleções analisadas em Nakamura (2008) acompanhou as tendências educacionais de sua década. Quanto à abordagem dos números irracionais, um traço comum a todas elas apontado por Nakamura (2008) foi a superficialidade, em contraste com um trabalho mais consistente referente aos números naturais, inteiros e racionais. As principais ausências alusivas aos números irracionais referem-se à parte conceitual do assunto, ao trabalho com os segmentos incomensuráveis e à questão da representação decimal.

Na dissertação de mestrado de Souto (2010) foram analisados 14 volumes, sendo 9 do ensino fundamental e 5 do ensino médio (ver **Quadro 7**). Os procedimentos metodológicos centraram-se em quatro temas de análise: definições, representações, tarefas e abordagem histórica, e o quadro teórico adotado engloba duas teorias, a teoria de registros de representação semiótica de Duval e a teoria antropológica do didático de Chevallard. Quanto à questão da forma como os números irracionais são tratados nos livros didáticos, Souto (2010) concluiu que eles privilegiam definições baseadas na representação decimal, tarefas envolvendo classificação como racional e irracional, determinação de frações geratrizes, registros de representação simbólico-algébrico e notas históricas enfocando nomes e datas. Concluiu também que as atividades propostas são de natureza mecânica e com pouco ou nenhum aprodunfamento conceitual.

Quadro 7 - Livros analisados em Souto (2010)

	Autor	Título	Editora	Ano
Ensino fundamental	Luiz Roberto Dante	Tudo é Matemática. 7ª série.	Ática	2005
	Maria Helena Souza e Walter Spinelli	Matemática. 7ª série.	Ática	2002
	Álvaro Andrini e Maria José Zampirolo	Novo Praticando Matemática. 7ª série.	Editora do Basil	2002
	Antônio José Lopes Bigode	Matemática Hoje é Feita Assim. 7ª série.	FTD	2006
	Editora Moderna	Projeto Araribá – Matemática. 7ª série.	Moderna	2006
	Claudia Tosatto, Edilaine Peracchi e Violeta Estephan	Ideias & Relações	Positivo	2005
	Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis	Matemática para todos	Scipione	2002
	Antônio Machado, Gelson Iezzi e Osvaldo Dolce	Matemática e Realidade	Saraiva	2005
Ensino médio	Iracema Mori e Dulce Onaga	Matemática – Ideias e Desafios	Saraiva.	2006
	Kátia Smole e Maria Ignez Diniz.	Matemática ensino médio. 1ª série.	Saraiva	2005
	Benigno Barreto Filho e Claudio Xavier da Silva	Matemática aula por aula. 1ª série.	FTD	2003
	José Roberto Bonjorno e José Ruy Giovanni	Matemática completa. 1ª série.	FTD	2005
	Luiz Roberto Dante	Matemática: contexto e aplicações. 1ª série.	Ática	2005

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na tese de doutorado de Pommer (2012), a hipótese é que os pares discreto/contínuo, exato/aproximado, finito/infinito constituem pilares conceituais essenciais para proporcionar um panorama favorável a uma abordagem significativa dos números irracionais. A partir daí, tal obra buscou responder ‘como são abordados os números irracionais no ensino básico, considerando-se como fonte o livro didático de matemática?’. Foram selecionadas quatro coleções de livros, sendo duas do ensino fundamental e duas do ensino médio (ver **Quadro 8**), e uma coleção extra, Fundamentos da Matemática Elementar, composta por 10 volumes, escrita por Gelson Iezzi e colegas e publicada pela editora Atual. Os fundamentos metodológicos para a análise dos dados foram os núcleos de significação descritos por Aguiar e Ozella, que buscou apreender os sentidos que constituem o conteúdo do discurso expresso nos textos dos livros didáticos.

Quadro 8 - Coleções analisadas por Pommer (2012)

	Autores	Título	Editora	PNLD/PNLEM
Ensino fundamental	Luis Marcio Imenes e Marcelo Lellis.	Matemática para todos. 3. ed.	Scipione	2008-2010
	José Roberto Bonjorno, Regina Azenha Bonjorno e Ayrton Olivares.	Matemática. Fazendo a diferença.	FTD	2008
Ensino médio	Katia Smole e Maria Inês Diniz	Matemática - Ensino Médio. 3. ed.	Saraiva	2006-2008
	José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno.	Matemática completa. 2. ed.	FTD	2009

Fonte: Elaborado pelo autor.

Constata-se em Pommer (2012) que a exposição didática dos livros é polarizada entre os pólos empírico ou teórico. No pólo empírico são realizadas exposições de situações e exemplos particulares, seguidas de um salto didático para a generalização e um novo salto para os exercícios de aplicação. Nenhum retorno é feito para aprofundar ou mesmo consolidar questões conceituais. Já nas coleções que se situam no pólo teórico, a exposição se inicia por definições e conceitos, e ao longo do texto são propostos *exercícios de aplicação imediata, embasados nos números como ferramenta operatória para cálculos de natureza aritmética e manipulações algébricas, privilegiando assim aspectos sintáticos, em detrimento dos aspectos semânticos* (POMMER, 2012, p. 205).

Para complementar o que nos mostraram os trabalhos supracitados, nós também analisamos alguns livros didáticos. Grande parte desta análise se encontra na seção 1.1 – Na educação básica, e complementamos aqui com a questão do tratamento conferido ao número π, principalmente no que se refere à sua primeira apresentação para os alunos. Consultamos alguns livros didáticos de matemática escritos por autores brasileiros renomados, e direcionados para os 8º/9º anos, e constatamos que é muito frequente a utilização de π como um exemplo de número irracional (DANTE, 2002; IMENES; LELLIS, 2012; GIOVANNI JR.; CASTRUCCI, 2009; LEONARDO, 2010). Além disso, também verificamos que pode ocorrer que π seja o único exemplo apresentado de número irracional que não é uma raiz quadrada (DANTE, 2002). A forma mais comum de exposição de π adotada pelos livros que consultamos (DANTE, 2002; GIOVANNI JR.; CASTRUCCI, 2009; LEONARDO, 2010) é apresentá-lo como um número irracional obtido pela razão entre o comprimento de uma circunferência qualquer e seu diâmetro. Dois deles vão além. Giovanni Jr. e Castrucci (2009), assim como Leonardo (2010), apresentam exemplos de moedas e latinhas de refrigerante e estimulam que se façam as medidas. Como já comentamos na seção 1.1 – Na educação básica, esse é o tipo de abordagem que não consideramos adequada para os números irracionais.

Essas análises dos livros didáticos, tanto a que fizemos quanto a que nos proporcionaram os trabalhos de Lima (2001), Nakamura (2008), Souto (2010) e Pommer (2012), levaram-nos a pensar em uma outra questão: o tratamento conferido pelos livros didáticos aos números irracionais foi sempre o mesmo? O trabalho realizado em Nakamura (2008) toca, ainda que superficialmente, essa questão, mas queríamos saber mais. Chegamos assim até Gomes (2012), e descobrimos que os livros didáticos do final do século XIX e início do século XX enfatizavam a ligação entre números e medição de grandezas. Isso difere totalmente do enfoque dos livros do final do século XX, que associam os números aos conjuntos e à operação de contagem, e se referem ao número irracional como aquele que não pode ser escrito como quociente de inteiros ou aquele que não é racional. Em termos de rigor parece ter havido um ganho, uma evolução do livro didático, mas, no que se refere ao ensino, essa mudança também pode ser vista como um retrocesso. Segundo Gomes (2005),

> Embora sob os padrões atuais de rigor da matemática como disciplina científica seja pertinente uma crítica à conceituação de número dos textos antigos, pelo uso de expressões tais como “grandeza”, “grandeza contínua”, “grandeza discreta” e “comparação”, cuja definição nesses textos não se conforma aos mesmos padrões, consideramos que esse enfoque favorece a atribuição de um significado aos números irracionais e contribui para que se lhes confira um sentido e se lhes entenda a necessidade (p. 195).

Os livros e manuais escolares analisados em Gomes (2012) pertencem ao período que vai das últimas décadas do século XIX até a década de 1970. Ao todo foram analisados 17 títulos de três períodos históricos distintos: o primeiro período – final do século XIX até início do século XX; o segundo período – de 1931 a 1959, entre a Reforma Francisco Campos[64] e o início do Movimento da Matemática Moderna (MMM)[65]; e o terceiro período – de 1961 a 1971, durante o MMM. Com essa amostra, Gomes (2012) pretende

---

[64] Francisco Campos foi ministro da Educação e Saúde de 1930 a 1932. A reforma que leva seu nome foi realizada em 1931, e é considerada a primeira reforma educacional de caráter nacional. Ela deu uma estrutura orgânica ao ensino secundário, dividindo-o em dois ciclos: um fundamental, com duração de cinco anos, e outro complementar, com duração de dois anos. Além da seriação do ensino secundário, a frequência obrigatória dos alunos, a imposição de um detalhado e regular sistema de avaliação discente e a reestruturação do sistema de inspeção federal foram outras novidades trazidas pela reforma (DALLABRIDA, 2009).

[65] Movimento desencadeado em âmbito internacional entre as décadas de 1960 e 1970. Os conteúdos e as finalidades do ensino foram atingidos com as mudanças propostas por esse movimento, que atribuiu importância primordial à axiomatização, às estruturas algébricas, à lógica e aos conjuntos (PINTO, 2005).

mostrar que houve mudanças significativas no conteúdo matemático dos livros didáticos ao longo do período analisado, apontando especificamente para o que mudou em relação à abordagem conferida a números racionais e irracionais.

No primeiro período estudado em Gomes (2012), foram analisados os livros de J. A. Coqueiro, Aarão e Luciano Reis, Adelino Serrasqueiro e J. J. L. Vianna, publicados entre o final do século XIX e as primeiras décadas do século XX. Segundo essa obra, um traço comum desses trabalhos é que todos iniciavam o texto pela definição de grandeza como *tudo que é capaz de aumento ou diminuição*. As grandezas são classificadas em contínuas – podem ser aumentadas ou diminuídas por graus tão pequenos quanto se queira; e discretas ou descontínuas – só podem aumentar ou diminuir por unidades ou graus determinados. Em seguida, todos os livros apresentavam a noção de medição de uma grandeza como a comparação dessa grandeza com outra de mesma espécie, já conhecida, que recebia o nome de unidade. Depois, apresentavam o conceito de número como o resultado da medição de uma grandeza. Segundo Gomes (2012), as quatro obras mencionadas classificavam as grandezas e os números que expressam suas medidas como *comensuráveis ou racionais* e *incomensuráveis ou irracionais*, de acordo com a existência (ou não existência) de uma medida comum entre a grandeza a ser medida e a unidade[66].

Vejamos como Reis e Reis (1892) desenvolveram essa parte. Segundo essa obra, a comparação de uma grandeza com sua respectiva unidade pode dar em resultado: um número inteiro – se a grandeza contiver a unidade exatamente uma ou mais vezes; um número quebrado, ou fração – se a grandeza é menor do que a unidade; um número fracionário, ou misto – se a grandeza, além de conter a unidade uma ou mais vezes exatamente, contiver ainda partes da unidade. Em seguida, definem grandezas e números comensuráveis e incomensuráveis.

> Quando uma grandeza contém a unidade respectiva, ou uma certa parte desta, um número exato de vezes, – a grandeza e a unidade são comensuráveis; o que quer dizer que têm uma medida comum. O número que resulta, nesse caso, da comparação da grandeza com a unidade, – quer seja inteiro, quer seja fraccionário, quer quebrado – é denominado NUMERO COMMENSURAVEL, OU RACIONAL. Quando, porém, por mais longe que se levem as divisões sucessivas da unidade, nunca se chega a uma parte desta

[66] Ao ler Gomes (2012) refletimos que o uso das expressões ‘número comensurável’ e ‘número incomensurável’ torna totalmente explícito a ligação dos números com a medição de grandezas. As expressões número racional e número irracional não ressaltam isso.

> que se contenha na grandeza dada um certo número exato de vezes, – então, a grandeza e a unidade são incomensuráveis; o que quer dizer que não têm medida comum. O número que resulta, neste segundo caso, da comparação da grandeza com a unidade, não pode ser inteiro, quebrado, nem fraccionário, e é denominado NUMERO INCOMMENSURAVEL OU IRRACIONAL (REIS; REIS, 1892, p. 6–7).

No segundo período estudado em Gomes (2012), foram analisados 8 livros publicados entre 1934 a 1959, escritos por Arthur Thiré e Melo e Souza; Euclides Roxo, Arthur Thiré e Melo e Souza; Algacyr Maeder; Jacomo Stávale; Osvaldo Sangiorgi; e Francisco Lacaz Netto. De acordo com Gomes (2012), nenhum desses livros empregava mais as expressões números comensuráveis e números incomensuráveis. Apesar disso, em cinco das oito obras consultadas ainda constava a definição de grandeza, e em seis delas o número era conceituado como o resultado da medição de grandezas. Quanto à fração, somente três livros a vincularam à medição de comprimentos, prevalecendo na maioria deles a ideia de fração como uma ou mais partes iguais de uma unidade. A respeito desses dados, Gomes (2012) pondera que o abandono da expressão “números comensuráveis” *parece refletir, na matemática escolar brasileira, o desligamento operado ao longo do tempo entre a noção de fração e a medição de comprimentos. De forma mais geral, podemos assinalar que ocorreu uma progressiva desvinculação entre grandeza e número* (p. 41).

No terceiro período estudado por Gomes (2012), foram analisados 5 livros publicados entre 1966 e 1971, por Benedito Castrucci e Alcides Bóscolo; Henrique Morandi; Scipione di Pierro Neto; Ary Quintella; e Osvaldo Sangiorgi. Os temas abordados por essas obras são praticamente os mesmos das obras analisadas no período anterior, números naturais e operações, divisibilidade, números fracionários e operações, grandezas e medidas. Porém, como é salientado em Gomes (2012), nota-se em todos os livros do terceiro período uma das marcas mais fortes do MMM, a presença das noções sobre conjuntos na abertura dos livros. Esse, segundo Gomes (2012), é o preâmbulo para a definição dos números de uma forma bem diferente daquela adotada pelos autores dos períodos anteriores. Algumas das definições de números desses autores são citadas em Gomes (2012):

Osvaldo Sangiorgi escreve que número “é uma ideia que associamos a certos conjuntos que têm em comum, uma mesma propriedade. Que é o número três? É a propriedade comum a todos os conjuntos de três objetos” (p. 44).

Scipione di Pierro Neto prefere dizer que "aos conjuntos que podem ser colocados em correspondência biunívoca ou correspondência um a um, atribui-se o mesmo número" (p. 44).

Para Ary Quintella, a característica comum a dois conjuntos, de estarem em correspondência biunívoca "independentemente da forma, da natureza e da disposição de seus elementos, é que nos dá a ideia de número natural" (p. 44).

Castrucci e Bóscolo apresentam do seguinte modo o conceito de número: "Número, que é uma ideia associada a um conjunto através da operação de contar, constitui também um atributo comum a conjuntos que podem ser colocados em correspondência biunívoca" (p. 44)

A noção de fração, que no período anterior aparecia como uma ou mais partes iguais em que se divide uma unidade, agora, ainda que seja apresentada, é considerada uma noção intuitiva ou vulgar. No terceiro período, em sintonia com o que era proposto pelo MMM, o número fracionário é definido como um par ordenado de inteiros em que o segundo número não é zero, afastando ainda mais a fração como um possível resultado da medida de segmentos. Segundo Gomes (2012),

> Parece completar-se o processo, iniciado no momento anterior, de desvinculação entre a noção de fração e a medição de comprimentos, pois, entre os cinco livros analisados, somente o de Ary Quintella faz referência à associação entre fração e medida de comprimentos (p. 46).

Em síntese, como produtos de suas épocas, os livros didáticos acompanharam as tendências educacionais vigentes, sofrendo diversas mudanças em relação à apresentação (inclusive visual), à abordagem dos números em geral e dos números irracionais em particular. Os livros do final do século XIX e início do século XX analisados em Gomes (2012) apresentavam o conceito de número como resultado da medição de uma grandeza, e os números irracionais eram diretamente associados às grandezas incomensuráveis. Nos livros das décadas de 1930 a 1950 analisados nessa mesma obra, as expressões números comensuráveis e incomensuráveis desapareceram, mas os números ainda eram conceituados como resultado da medida de grandezas. Já nos livros da década de 1960 analisados em Gomes (2012), percebe-se a influência do MMM e os números passaram a ser associados aos conjuntos e à operação de contagem.

Na década de 1970, Nakamura (2008) aponta para a linearidade dos conteúdos e para a ênfase no desenvolvimento de habilidades técnicas. Os números irracionais eram apresentados como aqueles que possuem representação infinita e não periódica. Nas décadas de 1990 e 2000, Lima (2001), Nakamura (2008) e Souto (2010) assinalam que os livros desse período apresentam os números irracionais de maneira superficial, com pouca ou nenhuma ênfase na parte conceitual, privilegiam as definições baseadas na representação decimal e propõe tarefas predominantemente mecânicas. Além disso, em Pommer (2012) também foi observada uma tendência à polarização nos livros da década de 2000. Alguns enfatizam a questão empírica, partem de situações e exemplos particulares para uma generalização; outros enfatizam a questão teórica, com definições e conceitos, e depois propõem exercícios.

Sendo assim, concluímos essa seção com o pensamento de que o livro didático de matemática que temos hoje avançou em diversos pontos em relação aos livros do passado. É nítido o esforço de autores e editoras de torná-lo um produto melhor, mais atrativo e estimulante tanto para alunos quanto para professores. Além da questão visual, também houve avanços em tentar evitar a associação do conhecimento matemático com algo pronto e acabado. Porém, praticamente todos os livros e/ou coleções analisadas pelos trabalhos que consultamos apontam deficiências na parte conceitual no que se refere aos números irracionais. Por isso, entendemos que o livro didático de matemática atual, levando em conta o tratamento que dá aos números irracionais, não é capaz de suprir possíveis deficiências na formação do professor de matemática nesse assunto. A apresentação dos números como resultado de medidas de grandezas, prática comum de alguns livros do passado, deveria ser reconsiderada pelos autores e editoras de livros didáticos, pois, a nosso ver, ela traz muitos ganhos para o ensino da matemática, além de ser uma alternativa em relação à abordagem que associa os números exclusivamente à ideia de conjuntos e de contagem de grandezas discretas.

4.7 – A matemática escolar e os conhecimentos necessários para exercer a atividade docente: impactos na formação de professores de matemática

Entre as diversas linhas de pesquisa da educação matemática, entendemos que nosso trabalho está mais próximo daquela que trata de questões específicas relacionadas ao ensino superior[67]. Pensamos dessa forma devido às questões que abordamos relacionadas

[67] A Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM reúne 13 linhas de pesquisa, cada qual referente a um grupo de trabalho. O grupo de trabalho denominado "Educação matemática no ensino superior" é o GT-4. Fonte: http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/grupo-de-trabalho.

à construção e utilização de um conceito avançado (número irracional) no ensino superior, bem como pelo próprio referencial teórico que adotamos. Contudo, como realizamos nossa pesquisa com estudantes ingressantes na licenciatura em matemática e preocupamo-nos com a adequação do ensino de números irracionais na educação básica, entendemos que as questões levantadas pelo nosso trabalho também passeiam por uma região de interseção com outra linha de pesquisa da educação matemática, a formação de professores. Por isso, além do que já foi discutido no Capítulo 1, avaliamos que seria importante incluir na nossa revisão de literatura algumas leituras que nos influenciaram e inspiraram na condução de todo o processo de pesquisa, sobretudo durante o planejamento e a execução da etapa de intervenção pedagógica.

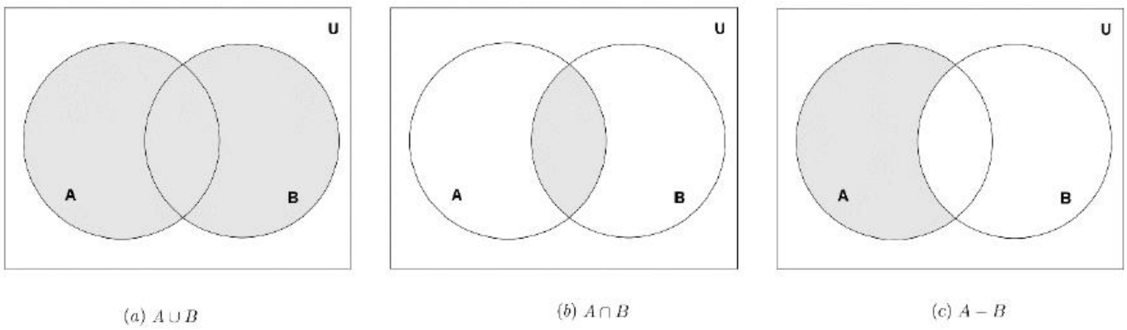
A primeira dessas questões diz respeito à natureza do conhecimento matemático que é trabalhado na escola. Pensamos que diversas reflexões importantes estão relacionadas a esse ponto, pois refletem diretamente no trabalho que o professor realiza em sala de aula. As especificidades de uma matemática escolar, cuja origem se deve não só à matemática acadêmica, mas também à própria escola enquanto instituição sócio histórica, demanda uma atenção especial do próprio professor e de todos que estão envolvidos e/ou preocupados com o processo de formação de professores. Iniciamos essa discussão com a ideia de transposição didática como difundida por Yves Chevallard.

Segundo Chevallard (1991), um objeto de saber preexiste ao movimento que o designa como um saber a ensinar. A partir daí esse objeto sofre uma série de transformações adaptativas que o torna um objeto de ensino. O trabalho realizado para transformar um saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado transposição didática. Como exemplo desse processo, Chevallard (1991) cita a noção de distância:

> – A noção de distância (entre dois pontos) é utilizada espontaneamente “desde sempre”;
>
> – O conceito matemático de distância é introduzido em 1906 por Maurice Fréchet (objeto de saber matemático);
>
> – No primeiro ciclo da educação secundária francesa, a noção matemática de distância, surgida da noção de Fréchet aparece em 1971 (objeto a ensinar);
>
> – Seu tratamento didático varia com os anos a partir de sua designação como objeto a ensinar: continua o ‘trabalho’ de transposição (CHEVALLARD, 1991, p. 46, tradução nossa).

Chevallard (1991) também afirma que, em alguns casos, os objetos de ensino podem ser verdadeiras criações didáticas, que surgem como um recurso para outras aprendizagens. Por exemplo, na transposição didática da teoria dos conjuntos dos matemáticos para a teoria dos conjuntos da escola básica, surgiram os diagramas de Venn, cuja proposta é representar graficamente situações como a união de conjuntos ($A \cup B$), a interseção de conjuntos ($A \cap B$), a diferença de conjuntos ($A - B$), entre outros (ver **Figura 26**). Outro exemplo de criação didática da escola citado por Chevallard (1991) é o 'grande seno' e o 'grande cosseno'[68]. Segundo Pais (2012), o problema surge quando esses objetos de ensino tornam-se um fim em si mesmos, de forma *puramente automatizada e desvinculada de aplicação* (p. 17), como é o caso dos produtos notáveis[69].

Figura 26 - Diagramas de Venn



Fonte: Elaborada pelo autor.

Diversos autores reconhecem a transposição didática como um processo inevitável, ou, como uma ferramenta importante para demarcar e entender a diferença entre o saber acadêmico[70] e o saber escolar. Também concordamos com Chevallard (1991) que, todo saber, ao ser designado como saber a ser ensinado, passará por alguma transformação ou adaptação. Chevallard (1991) cita que, quando do seu surgimento, é comum os saberes se confundirem com os seus criadores, e que um processo de depuração e despersonalização daquele saber quase sempre é necessário. Como exemplo, cita o trabalho de Isaac Newton, que em sua origem, muito se confundia com os interesses em

---

[68] Segundo Chevallard (1991) são criações exclusivas de escolas francesas. Grosso modo, trata-se de diferenciar o seno e o cosseno de um número real da função seno e da função cosseno, chamadas de 'gran seno' e 'gran cosseno'. Para maiores detalhes, indicamos a leitura de Leivas e Cury (2009).

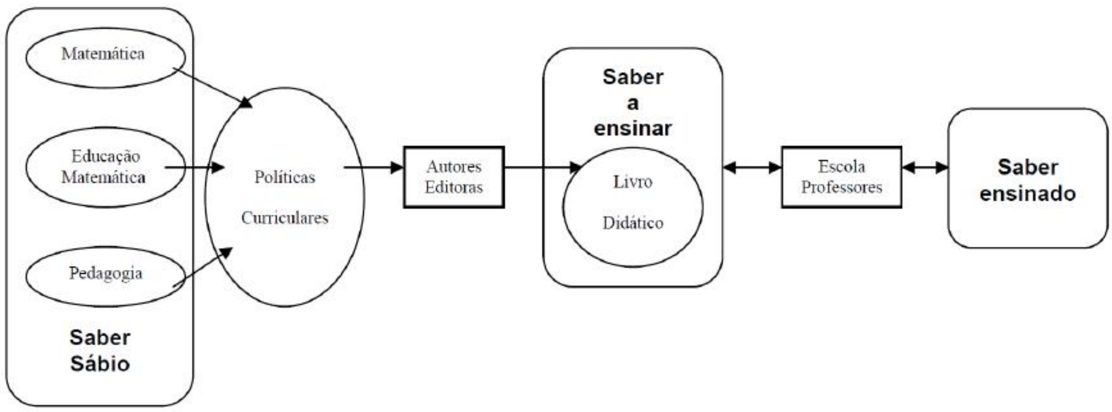
[69] Os produtos notáveis mais conhecidos são o *quadrado da soma* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, o *quadrado da diferença* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, e a *diferença de quadrados* $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, entre outros.

[70] O termo em francês utilizado em Chevallard (1991) é *savoir savant*, que literalmente significa 'saber sábio'. A tradução em espanhol que utilizamos optou pela tradução 'saber acadêmico'.

questões místicas de seu criador, como a alquimia. Porém, as ideias contidas em Chevallard (1991) também apresentam alguns pontos polêmicos, principalmente no que se refere ao saber acadêmico como única fonte geradora e balizadora do saber a ensinar.

No caso da matemática, pode-se dizer que o saber acadêmico (saber sábio) é formado principalmente pelas contribuições da matemática, da educação matemática e da pedagogia. Essas ideias passam em seguida pelo filtro das políticas públicas, pela elaboração dos currículos, e, em seguida, pelos autores e editoras de livros didáticos, materializando o saber sábio em um saber a ensinar, por exemplo, por meio do livro didático. Esse saber a ensinar ainda passará pelo crivo das escolas e, em última instância, pelo professor, antes de se tornar um saber ensinado (**Figura 27**).

Figura 27 - Ilustração da transposição didática



Fonte: SANT'ANNA; BITTENCOURT; OLSSON (2008, p. 6)

Ainda segundo Chevallard (1991), *com o tempo, o saber tratado pelo sistema de ensino envelhece; um belo dia se percebe que se tornou velho em relação à sociedade (em relação ao saber sábio e em relação ao saber banalizado)* (p. 30, tradução nossa). O envelhecimento citado em Chevallard (1991) se refere a dois tipos de desgaste: um desgaste biológico, que se refere ao afastamento em relação ao saber acadêmico, e um desgaste moral, que se refere a uma *perigosa aproximação* (p. 30) em relação ao saber banalizado, isto é, o saber de domínio público. A solução para o saber escolar, segundo Chevallard (1991), é estabelecer uma nova corrente de saber proveniente do saber acadêmico. Ou seja, além de *fonte privilegiada do saber escolar* (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 18), o saber acadêmico também seria responsável pela validação ou acreditação do saber escolar, e é exatamente nesse ponto que muitos autores discordam.

> A matemática escolar se constituiria essencialmente de uma adaptação à escola de conceitos, métodos e técnicas da Matemática Científica (...) As análises de Chevallard, embora penetrem de forma rica e profunda em certos aspectos do processo de ensino de Matemática na escola, sugerem uma concepção de Matemática Escolar excessivamente dominada pela Matemática Científica (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 18).

Um texto que frequentemente é utilizado como contraponto a Chevallard (1991) é Chervel (1990). Ele contesta a ideia de que as disciplinas escolares são uma vulgarização das respectivas ciências de referência, e que, consequentemente, a pedagogia serviria apenas como um lubrificante facilitador do ensino.

> Se se ligam diretamente as disciplinas escolares às ciências, aos saberes, aos *savoir-faire* correntes na sociedade global, todos os desvios entre umas e outros são atribuídos à necessidade de simplificar, na verdade vulgarizar, para um público jovem, os conhecimentos que não se lhe podem apresentar na sua pureza e integridade. A tarefa dos pedagogos, supõe-se, consiste em arranjar os métodos de modo que eles permitam que os alunos assimilem o mais rápido e o melhor possível a maior porção da ciência de referência. As disciplinas reduzem-se, nessa hipótese, às "metodologias". Ao lado da disciplina-vulgarização é imposta a imagem da pedagogia-lubrificante, encarregada de lubrificar os mecanismos e fazer girar a máquina (CHERVEL, 1990, p. 180).

Para Chervel (1990), as disciplinas escolares são entidades *sui generis*, criadas pela *própria escola, na escola e para a escola* (p. 181), ou seja, seriam independentes, de certa forma, da realidade cultural exterior à escola. Quanto à pedagogia, Chervel (1990) aponta que ela faz parte das disciplinas, e que *longe de ser um lubrificante espalhado sobre o mecanismo, não é senão um elemento desse mecanismo, aquele que transforma os ensinos em aprendizagens* (p. 182). Ou seja, a escola não deve ser vista como uma simples reprodutora (e vulgarizadora) da ciência, nem as disciplinas escolares devem ser vistas como matérias a serem ensinadas, uma *lista de "conteúdos" constituída anteriormente ao processo de ensino escolar. Ao contrário, se constitui historicamente em conjunção com a prática e a cultura escolar* (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 20). Chervel (1990) baseia suas conclusões em um estudo histórico a respeito da gramática francesa ensinada nas escolas, que não permitiria paralelo com alguma vulgarização científica.

Moreira e David (2010) também reconhecem a existência de uma matemática acadêmica e de uma matemática escolar com objetivos e métodos próprios, porém, oferecem uma visão que ultrapassa as posições assumidas em Chevallard (1991) e Chervel (1990), e levam a discussão para outro patamar. Ainda que em Chevallard (1991) seja reconhecido o poder criativo da escola em relação a alguns objetos de ensino, Moreira e David (2010) consideram que Chevallard (1991) comete um *hiperdimensionamento do saber científico*, reduzindo a matemática escolar a uma espécie de *didatização da matemática científica*

(p. 20). Quanto a Chervel (1990), Moreira e David (2010) avaliam que considerar as disciplinas escolares como uma construção original da escola *parece fechar as portas a múltiplos mecanismos e processos que condicionam essa construção a partir do exterior do espaço escolar* (p. 20). Além de destacar que matemática acadêmica e matemática escolar são formas distintas do conhecimento matemático, em Moreira e David (2010) a matemática escolar é estabelecida não como uma *disciplina "ensinada" na escola*, mas como um *conjunto de saberes associados ao exercício da profissão docente* (p. 21). Isso nos remete à segunda questão que iremos tratar. Quais são os saberes necessários para o exercício da profissão docente?

Trata-se de ponto pacífico que, para lecionar sua disciplina, seja matemática, física, biologia ou língua portuguesa, o professor deve 'dominar a matéria', isto é, ter um bom nível de conhecimento do conteúdo da disciplina que vai ensinar. Além disso, também se considera importante deter alguns conhecimentos de pedagogia, como a didática. Durante muito tempo, os cursos de formação de professores refletiram esse pensamento por meio do modelo que ficou conhecido como '3+1', isto é, 3 anos de bacharelado mais 1 ano de disciplinas pedagógicas que conferiam o grau de licenciado. Ainda que esse modelo seja considerado um modelo ultrapassado, e hoje as disciplinas pedagógicas estejam diluídas ao longo de todos os anos dos cursos de licenciatura em matemática, a essência da dualidade conteúdo-método ainda se mostra presente (SCHEIBE, 1983).

O artigo de Lee Shulman (1986) foi pioneiro na superação da dualidade conteúdo-método ao lançar um olhar completamente diferente para a questão, oferecendo novas possibilidades de descrição tanto do conhecimento do conteúdo quanto do conhecimento pedagógico. Para Shulman (1986), existem três categorias referentes ao conhecimento do conteúdo: *conhecimento do conteúdo da matéria a ser ensinada*; *conhecimento pedagógico do conteúdo*[71] e o *conhecimento curricular* (p. 9). É importante ressaltar que, ao incluir um tipo de conhecimento pedagógico como parte do conhecimento de conteúdo, Shulman (1986) não diminui a importância do saber pedagógico do ensino, que se refere ao conhecimento dos princípios genéricos da organização e regência de uma sala

[71] As ideias de Shulman (1986) foram citadas em mais de 1200 artigos de periódicos ao longo de duas décadas após sua publicação. A difusão das ideias de Shulman (1986) alcançou áreas como matemática, ciência, estudos sociais, educação física, direito, enfermagem, comunicação, religião, engenharia, química, música, educação especial, entre outras. Dentre as ideias de Shulman (1986), a que mais se destacou foi o conhecimento pedagógico do conteúdo, citado e/ou utilizado por milhares de artigos, capítulos de livros e relatórios de pesquisa (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

de aula. Ambos são importantes, mas são completamente diferentes. A seguir oferecemos uma breve descrição dos principais pontos relacionados às ideias propostas em Shulman (1986).

Em relação ao conhecimento do conteúdo da matéria a ser ensinada, Shulman (1986) aponta que os professores devem ser capazes de definir para os estudantes as verdades aceitas em um determinado domínio, além de explicar porque uma dada proposição é considerada válida, porque se deve saber aquela proposição, e como ela se relaciona com outras proposições, tanto no âmbito interno da disciplina quanto no âmbito externo, tanto na teoria quanto na prática. De acordo com tal obra, *o professor precisa não apenas entender 'que' alguma coisa é assim, o professor precisa entender, além disso, 'porque' é assim, que fundamentos garantem suas afirmativas, e sob que circunstâncias nossas crenças nesta justificativa podem ser enfraquecidas ou até mesmo abandonadas* (SHULMAN, 1986, p. 9, tradução nossa, grifos no original).

No que se refere ao conhecimento pedagógico do conteúdo, Shulman (1986) faz questão de destacar que esse ponto ainda trata fundamentalmente do conhecimento do conteúdo, mas de um aspecto particular desse conhecimento, que está relacionado com a sua ensinabilidade (*teachability*). Além dos tópicos regulares comumente ensinados em uma determinada área, Shulman (1986) inclui no conhecimento pedagógico do conteúdo, as formas mais comuns de representação desses tópicos, as analogias mais poderosas, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações. *Em uma palavra, as formas de representar e formular o assunto que o torna compreensível para outrem* (SHULMAN, 1986, p. 9, tradução nossa). Shulman (1986) ainda ressalta que não existe uma forma mais poderosa de representação, o que leva o professor a ter que conhecer vários recursos alternativos para ensinar, que podem se originar de pesquisas ou de saberes construídos na própria prática docente. Além disso, a referida obra também chama a atenção para a importância do professor conhecer os pontos mais difíceis da matéria que ensina e as concepções que os alunos trazem consigo.

> Já que não existem formas singulares mais poderosas de representação, o professor deve ter em mãos um verdadeiro arsenal de formas alternativas de representação, algumas das quais derivam-se de pesquisas enquanto outras são originadas da sabedoria da prática. O conhecimento pedagógico do conteúdo também deve incluir o que torna um tópico específico fácil ou difícil, as concepções e preconcepções que os estudantes de diferentes idades e bagagens (*backgrounds*) trazem com eles para a aprendizagem dos tópicos e lições mais frequentemente ensinados. Se essas preconcepções são concepções equivocadas (*misconceptions*), que elas frequentemente são, os professores

> precisam de conhecimentos de estratégias com maiores chances de serem frutíferas em reorganizar o entendimento dos aprendizes, porque é improvável que aqueles aprendizes apareçam na frente deles como lousas em branco (SHULMAN, 1986, p. 9, tradução nossa).

Quanto ao conhecimento curricular, Shulman (1986) aponta que o currículo é composto dos programas designados para ensinar um determinado assunto ou tópico em um dado nível e de uma variedade de materiais instrucionais disponíveis relacionados a esses tópicos. Para esse autor,

> O currículo e seus materiais associados são a *materia medica*[72] da pedagogia, a farmacopeia[73] a partir da qual os professores selecionam aquelas ferramentas de ensino que apresentam ou exemplificam um conteúdo particular e remedeiam ou avaliam a adequação das realizações dos estudantes (SHULMAN, 1986, p. 10).

Além disso, Shulman (1986) chama atenção para dois aspectos do conhecimento curricular: o *conhecimento curricular lateral* e o *conhecimento curricular vertical* (p. 10). O primeiro aspecto se refere à habilidade do professor em relacionar o conteúdo que ensina com outros conteúdos que seus alunos estejam aprendendo em outras disciplinas. O segundo aspecto se refere ao conhecimento do que foi ensinado na mesma disciplina durante os anos anteriores e do que será ensinado em anos posteriores, bem como os materiais envolvidos. Em nossa experiência docente como professores de matemática, percebemos o potencial para gerar estímulo do conhecimento curricular lateral. Muitos alunos ficam empolgados quando relacionamos algum tópico da matemática com algum assunto que está sendo tratado nas aulas de física, química, de biologia, entre outras. Quanto ao conhecimento curricular vertical, o que vemos é que uma visão holística de todo o currículo de matemática, desde a educação infantil até a educação superior, é muito rara de se encontrar. Porém, defendemos que esse conhecimento poderia auxiliar os professores a realizar suas tarefas de ensino de uma forma mais eficiente.

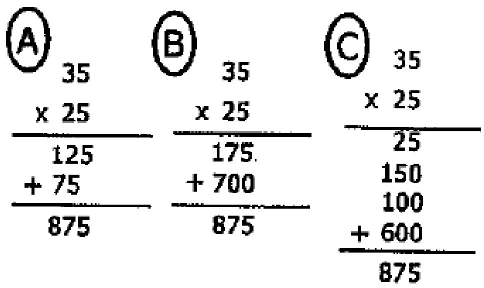
---

[72] *Materia medica* é um termo em latim usado na medicina que representa o corpo de conhecimentos acumulados a respeito das propriedades terapêuticas das substâncias para o tratamento de doenças. O termo foi usado desde o período do Império Romano até o século XX, e deriva do título de um trabalho de um fisiólogo grego antigo chamado Pedanius Dioscorides, do século I d.C. Hoje esse termo foi substituído no ensino de medicina pelo termo farmacologia. Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Materia_medica. Acesso em 4/12/2015.

[73] Uma farmacopeia é um conjunto de informações técnicas que retratam a nomenclatura das substâncias e dos medicamentos básicos, bem como seus princípios ativos. Em sua forma técnica moderna, o termo se refere a um livro contendo referências de medicamentos publicado por autoridades governamentais ou por sociedades médicas ou farmacêuticas. Fontes: https://pt.wikipedia.org/wiki/Farmacopeia e https://en.wikipedia.org/wiki/Pharmacopoeia. Acesso em 4/12/2015.

A seguir, apresentamos duas situações apontadas em Ball e Bass (2003) para ilustrar, na linha de pensamento de Shulman (1986), que o professor precisa de um conhecimento que vai além do conhecimento matemático. O primeiro exemplo diz respeito a uma situação que ocorre com frequência: alunos utilizam métodos que os professores nunca viram para resolver alguma tarefa. Segundo Ball e Bass (2003), os professores devem ser capazes de perguntar e responder a si mesmos uma questão fundamental: que método é esse? Ele funciona para qualquer caso? Qualquer decisão pedagógica posterior depende das respostas a essas perguntas. Por exemplo, vejamos três métodos alternativos para multiplicar 35×25 (**Figura 28**).

Figura 28 - Métodos alternativos de multiplicação



Fonte: BALL; BASS (2003, p. 7)

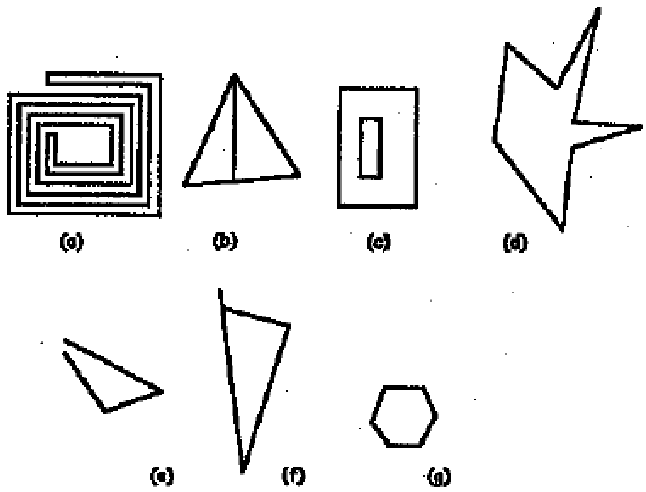
O professor deve ser capaz de entender o que está acontecendo em cada uma das abordagens, para poder decidir quais métodos são sempre válidos e quais são apenas possíveis coincidências. Isso é primordial para, em seguida, tomar decisões e poder auxiliar os alunos. *Isso são questões matemáticas por excelência, não pedagógicas* (BALL; BASS, 2003, p. 7, tradução nossa). Porém, esse conhecimento vai muito além de saber fazer multiplicações, pois requer do professor muito mais do que saber fazer as multiplicações. Esse exemplo mostra que possuir o conhecimento matemático não é suficiente para ensinar. O professor saber multiplicar não é um conhecimento suficiente para ensinar multiplicação. Ele vai se deparar com situações como as apresentadas no exemplo citado. Nas palavras de Ball e Bass (2003),

> A habilidade do próprio professor para resolver problemas matemáticos não é suficiente para resolver o problema matemático do ensinar – inspecionar métodos alternativos, examinar suas estruturas e princípios, e julgar quando eles podem ou não ser generalizados (p. 7, tradução nossa).

Com um segundo exemplo, Ball e Bass (2003) mostram as demandas matemáticas (ou, de como saber matemática) que podem surgir no dia a dia de uma sala de aula. Lembram que essas demandas podem inclusive não ser diretamente relacionadas aos pontos previstos no currículo, como a multiplicação do exemplo anterior. Suponha que, estudando polígonos, os estudantes produzam ou encontrem figuras não usuais como as apresentadas a seguir (**Figura 29**) e perguntem quais delas são polígonos. Nesse momento, torna-se essencial levar os alunos a pensar na diferença entre uma figura qualquer e um polígono. É tudo a mesma coisa? Ou existem diferenças? Algumas definições podem surgir nesse momento, e é importante considerar algumas possibilidades, como as seguintes:

> 1) Polígono é uma forma plana fechada bidimensional cujos lados são formados por segmentos de reta.
> 2) Polígono é uma curva fechada simples formada por segmentos de reta.
> 3) Polígono é uma sequência de três ou mais segmentos de reta em um plano, cada um terminando onde o próximo começa, e o último terminando aonde o primeiro começa. Exceto por esses pontos finais, compartilhando apenas pelos pares de segmentos vizinhos, os segmentos de reta não têm outros pontos em comum (BALL; BASS, 2003, p. 8, tradução nossa).

Figura 29 – Figuras não usuais



1.

2. Fonte: BALL; BASS (2003, p. 7)

O professor poderá recorrer a livros texto e encontrar definições como ‘1’ ou ‘2’. Ele precisará perceber que a definição ‘1’ não exclui os casos (b), (c) e (f); isto é, de acordo com essa definição, as figuras representadas em (b), (c) e (f) são polígonos. Quanto à definição ‘2’, ela parece mais apropriada, porém, o professor precisará estar atento ao fato de que os alunos podem não ter conhecimento do significado de termos como curva fechada simples’ utilizados no enunciado. Ensinar envolve selecionar definições que são matematicamente apropriadas ao mesmo tempo em que possam ser utilizáveis pelos estudantes de um determinado nível. O professor precisaria, portanto, ser capaz de desenvolver uma definição adequada para os seus alunos, e poderia chegar até a definição '3'. Essa definição, ao contrário de '1', além de matematicamente aceitável, exclui as figuras (b), (c), (e) e (f) da categoria de polígonos. Ao contrário de '2', utiliza termos de mais fácil compreensão para os alunos (mas ainda assim o professor deve estar atento a termos utilizados como 'segmentos vizinhos').

Saber definições para ensinar, portanto, requer capacidade de lidar com as definições que vai além de simplesmente entendê-las ou utilizá-las. É preciso saber como as definições funcionam, qual o seu papel, e também saber adaptar ou criar definições que ao mesmo tempo tenham integridade matemática e sejam compreendidas pelos estudantes.

> Tomados conjuntamente, esses dois exemplos (da multiplicação e dos polígonos) mostram que saber matemática no e para o ensino inclui ambos os elementos da matemática como encontrados no currículo dos estudantes – algoritmos computacionais padrão, multiplicação e polígonos – assim como os aspectos de saber e fazer matemática que são menos visíveis nos sumários dos livros texto – sensibilidade para definições ou inspeções da generalidade de um método, por exemplo (BALL; BASS, 2003, p. 8, tradução nossa).

Com uma visão estabelecida de que saber um conteúdo para o ensino é algo diferente de apenas saber um conteúdo, Shulman (1987) conduziu uma pesquisa e observou professores veteranos e professores que estavam iniciando na carreira docente durante três anos, com o objetivo de comparar suas ações e descobrir quais são os principais conhecimentos necessários para lecionar. Shulman (1987) observou professores veteranos ensinando os mesmos tópicos nos quais os professores novatos apresentaram alguma dificuldade, como equações quadráticas, o subcontinente indiano, fotossíntese, entre outros. A intenção do pesquisador foi aprender como os conteúdos e as estratégias pedagógicas interagiam na mente desses professores e definir um quadro de conhecimentos-base (*knowledge base*) para ensinar. Além do conhecimento do conteúdo (e suas três subcategorias), já discutido anteriormente, Shulman (1987) acrescenta mais três categorias: conhecimento dos estudantes e suas características; conhecimento dos contextos educacionais; e conhecimento dos fundamentos filosóficos, propósitos, valores e finalidades da educação.

Com objetivos bastante próximos de Shulman (1987), Deborah Ball e Hyman Bass observaram o ensino de matemática em uma sala de aula do terceiro ano de uma escola pública durante um ano (BALL; BASS, 2003). Observaram coisas que os professores de matemática fizeram que todo professor faz, manter a classe organizada, acompanhar o progresso dos estudantes, comunicar com os pais, construir relações com os estudantes.

Outras atividades que todo professor faz, como selecionar e modificar tarefas, criar questionários, mediar discussões, interpretar e utilizar materiais do currículo, propor questões, avaliar os estudantes e decidir o que aprofundar e o que deixar de lado. Parecem atividades pedagógicas genéricas, mas, olhando de perto, essas tarefas exigem um substancial conhecimento matemático e raciocínio.

O trabalho de Ball e Bass (2003) foi uma espécie de complemento às ideias apresentadas em Shulman (1986; 1987). Esses pesquisadores deram exemplos mais concretos do que seriam os conhecimentos necessários ao professor de matemática para ensinar. A primeira constatação é óbvia: os professores precisam saber matemática para ensinar matemática. Outra questão, porém, não é óbvia: Como esses professores precisam saber essa matemática? O que mais professores precisam saber da matemática e sobre a matemática? Eles chegaram até a propor uma lista desses conhecimentos:

> ✓ Projetar explicações matematicamente acuradas que são compreensíveis e utilizáveis pelos estudantes;
> ✓ Usar definições matematicamente apropriadas e compreensíveis;
> ✓ Representar ideias cuidadosamente, mapeando entre um modelo físico ou gráfico, a notação simbólica e a operação ou processo;
> ✓ Interpretar e fazer julgamentos matemáticos e pedagógicos sobre as perguntas dos estudantes, soluções, problemas e *insights* (previsíveis e não usuais);
> ✓ Ser capaz de responder produtivamente às questões matemáticas e curiosidades dos estudantes;
> ✓ Fazer julgamentos sobre a qualidade matemática dos materiais de instrução e modifica-los se necessário;
> ✓ Ser capaz de propor boas questões matemáticas e problemas que são produtivos para a aprendizagem dos estudantes;
> ✓ Avaliar a aprendizagem dos estudantes e tomar os próximos passos (BALL; BASS, 2003, p. 11, tradução nossa).

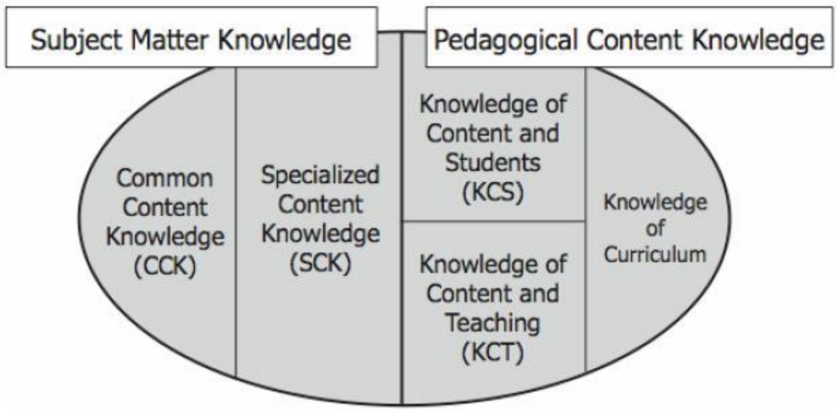
Em Ball e Bass (2003) ainda é feita uma observação que evidencia um aspecto importante do trabalho do professor de matemática. Uma característica importante da matemática é sua capacidade de comprimir informações em formas abstratas e usáveis. Uma das habilidades fundamentais de se saber matemática para o ensino, observadas pelos pesquisadores é exatamente o contrário; isto é, o conhecimento matemático precisa ser desempacotado. Um exemplo é a aprendizagem de frações. As crianças não começam a aprender frações com a noção de número real, nem mesmo de número racional. Elas começam vendo as frações como partes de um todo. *Em diferentes contextos matemáticos, as crianças começam a trabalhar com elementos que se reúnem para compor as quantidades convenientemente representadas com a notação de fração* (BALL; BASS, 2003, p. 11, tradução nossa). Nesse meio tempo, suas experiências com a expansão da notação de valor posicional dos decimais desenvolvem outro território que depois se juntam com as frações para formar o conceito de número racional.

No que se refere aos números reais, existe muito conhecimento, resultado de décadas ou até séculos de compactação, que são trabalhados na formação do professor de matemática. Esse conhecimento, como Ball e Bass (2003) destacaram, não é suficiente para capacitar o professor para lidar com o desenvolvimento das crianças. Embora definições formais, teoremas e demonstrações referentes a números reais tenham grande utilidade para o trabalho dos matemáticos, eles não são adequados ao trabalho de ensinar matemática (BALL; BASS, 2003).

> O que sabemos a respeito do conhecimento matemático dos professores, aprender matemática para o ensino, e as demandas para se ensinar matemática sugerem que precisamos proceder um reenquadramento do problema da preparação de professores para aprender matemática para o ensino. O que muitos professores não têm é um conhecimento matemático que seja útil para o ensino e utilizável no ensino (BALL; BASS, 2003, p. 13, tradução nossa).

O trabalho conduzido por Ball, Thames e Phelps (2008) também avançou em relação aos trabalhos de Shulman (1986; 1987), e propõe um refinamento das categorias propostas nessas obras.

Figura 30 - Refinamento de Ball, Thames e Phelps (2008) para as categorias de Shulman (1986)



Fonte: BALL; THAMES; PHELPS (2008, p. 5)

O conhecimento do conteúdo específico ou conhecimentos do conteúdo da disciplina, orginalmente proposto por Shulman (1986), foi dividido em dois em Ball, Thames e Phelps (2008). O conhecimento comum do conteúdo (CCK) é o conhecimento matemático que os professores precisam ter para serem capazes de realizar o trabalho que eles mesmos estão capacitando os estudantes para fazer. Esse tipo de conhecimento também é esperado de um adulto bem-educado. Por exemplo, realizar uma subtração como 367 – 168. Já o conhecimento de conteúdo especializado (SCK) é o tipo de conhecimento que está além do que se espera de um cidadão bem-educado. É o tipo de conhecimento que o professor precisa ter e saber, mas que não necessariamente será o conhecimento que o aluno construirá. Esse conhecimento engloba tarefas como apresentar ideias matemáticas, responder às perguntas dos estudantes do tipo 'porque', encontrar um exemplo para fazer um apontamento matemático específico, reconhecer o que está envolvido quando se usa uma determinada representação, fazer a ligação entre diferentes tipos de representações, apreciar e adaptar o conteúdo matemático dos livros texto, modificar tarefas para se tornarem mais difíceis ou mais fáceis, fornecer e avaliar explicações matemáticas, escolher e desenvolver definições usáveis, usar e ser capaz de criticar a linguagem e a notação matemática, entre outros. Em outras palavras, para um professor de matemática desenvolver esse tipo de conhecimento, ele precisa entender e compreender a matemática tanto de forma instrumental quanto de forma relacional, como já destacava Skemp (1976).

O conhecimento pedagógico do conteúdo proposto em Shulman (1986) também foi refinado em Ball, Thames e Phelps (2008), e passou a incluir três subtipos. O conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS) é um tipo de conhecimento que combina conhecimentos a respeito dos estudantes e conhecimentos matemáticos. Ele deriva da experiência e do conhecimento que o professor vai adquirindo ao longo do tempo como, por exemplo, o conhecimento dos erros mais comuns que os alunos cometem. O conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT) é um tipo de conhecimento que combina saber ensinar com saber matemática. Está incluído nesse tipo de conhecimento saberes como sequenciar o conteúdo para a instrução, decidir quais exemplos utilizar para iniciar um determinado assunto e quais exemplos utilizar para aprofundar o assunto, avaliar as vantagens e desvantagens de determinadas representações utilizadas para ensinar alguma ideia, decidir quando pedir aos alunos maior clareza nas suas colocações, quando colocar uma nova questão ou sugerir uma nova tarefa, entre outros.

A terceira e última questão que tratamos nesta seção refere-se ao nosso posicionamento em relação à formação do professor de matemática. Por tudo que mostramos até aqui, não parece razoável aceitar que um professor de matemática não saiba matemática. Porém, isso tampouco significa que um curso de formação de professores, seja inicial ou continuada, deva se constituir apenas em um espaço-tempo em que o professor (ou o licenciando) precisa aprender mais matemática. A pesquisa relatada em Begle's (1979) apud Ball e Bass (2003) [74] mostrou que quando professores fazem cursos avançados, isso tem efeitos positivos em 10% dos alunos e negativos em 8% dos alunos. Já na pesquisa realizada por Eisenhart, Borko, Underhill, Brown, Jones e Agard (1993), uma licencianda de matemática que já havia cursado dois anos de cálculo diferencial e integral, um curso de demonstrações, um curso de álgebra moderna e quatro cursos de ciência da computação, não foi capaz de explicar para uma criança por que a regra da divisão de frações funciona. Ademais, as leituras de Shulman (1986,1987), Ball e Bass (2003) e Ball, Thames e Phelps (2008) apontam para a importância do desenvolvimento de um conhecimento para ensinar matemática, que vai além do conhecimento de matemática e do conhecimento pedagógico, pois *ensinar requer um entendimento único que interliga aspectos do ensino e da aprendizagem com o conteúdo* (BALL; BASS, 2003, p. 4, tradução nossa).

A grande ruptura ocasionada pela introdução do conceito de conhecimento pedagógico do conteúdo em Shulman (1986; 1987) foi a distinção entre o conteúdo como é estudado e aprendido em configurações disciplinares e o *amálgama especial de conteúdo e pedagogia* (BALL; BASS, 2003, p. 8, tradução nossa) necessário para ensinar uma matéria. Ou seja, o que deve estar em jogo durante a formação de professores é muito mais do que saber matemática, é saber ensinar matemática, que são coisas bem diferentes. Segundo Ball e Bass (2003), a introdução de ideias como o conhecimento pedagógico do conteúdo trouxe à tona questões sobre o conteúdo e sobre o entendimento desse conteúdo pelos professores que não haviam sido levantadas previamente pela formação de professores. Para Fiorentini (2005), o conhecimento do conteúdo, da forma como elaborado em Shulman (1986), é o principal saber docente, *pois interliga de forma intencional o saber matemático e os saberes didático-pedagógicos* (p. 109).

Outro ponto que discutimos e que tem relação direta com a formação de professores é a questão da matemática escolar como um saber que é próprio da atividade docente. Avançando um pouco mais nessa discussão, trazemos Tardif (2002), que nos chama atenção para os saberes construídos na prática docente. Para ele, o saber não é uma coisa

---

[74] BEGLE, E. G. **Critical variables in mathematics education: findings from a survey of the empirical literature**. Washington: Mathematics Association of America and National Council of Teachers of Mathematics, 1979.

independente que *flutua no espaço* (p. 10), ele está relacionado com a pessoa e a identidade do professor, com suas experiências de vida, com sua trajetória profissional e com seu relacionamento com os alunos e com outros atores escolares. A proposta de Tardif (2002) situa o saber do professor entre o individual e o social, sem tender aos extremos que ele chama de *mentalismo* e *sociologismo* (p. 11). O mentalismo consiste em uma redução do saber a processos mentais tais como representações, esquemas, imagens e processamento de informações, cujo suporte é a atividade cognitiva individual. Já o sociologismo vai na direção oposta ao eliminar ou minimizar a contribuição dos indivíduos na construção do saber, tratando-o como uma produção social que, levada ao extremo, *transforma os atores sociais em bonecos de ventríloquo* (TARDIF, 2002, p. 15). Em suas palavras,

> Os saberes de um professor são uma realidade social materializada através de uma formação, de programas, de práticas coletivas, de disciplinas escolares, de uma pedagogia institucionalizada, etc., e são também, ao mesmo tempo, os saberes dele (p. 16).

Parece natural que o saber construído na/pela prática docente faça parte da formação dos professores. Porém, de acordo com Tardif (2002), os saberes difundidos pelas universidades ainda não estão em sintonia com os saberes construídos na prática docente.

> Até agora, a formação para o magistério esteve dominada sobretudo pelos conhecimentos disciplinares, conhecimentos esses produzidos geralmente numa redoma de vidro, sem nenhuma conexão com a prática profissional, devendo, em seguida, serem aplicados na prática por meio de estágios ou de outras atividades do gênero (p. 23).

Concordamos com Tardif (2002), embora as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica (BRASIL, 2002) já signifiquem um avanço na relação da formação do professor com sua futura prática na escola. Essas diretrizes defendem que o preparo para o ensino deve visar à aprendizagem do aluno e que a seleção e o ordenamento dos conteúdos da matriz curricular para a formação de professores é o *primeiro passo para a transposição didática, que visa a transformar os conteúdos selecionados em objeto de ensino dos futuros professores* (BRASIL, 2002, p. 5). Apontam também que haja *coerência entre a formação oferecida e a prática esperada do futuro professor* (idem, p.2) e que *os conteúdos a serem ensinados na escolaridade básica devem ser tratados de modo articulado com suas didáticas específicas* (ibidem, p.2). Para as Diretrizes Curriculares para Cursos de Matemática (BRASIL, 2001), *o licenciado em Matemática deverá ter as capacidades de elaborar propostas de ensino-aprendizagem* *de Matemática para a educação básica* (p. 4). Já segundo os Referenciais Curriculares Nacionais dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura (BRASIL, 2010b),

> O Licenciado em Matemática é o professor que planeja, organiza e desenvolve atividades e materiais relativos à Educação Matemática. Sua atribuição central é a docência na Educação Básica, que requer sólidos conhecimentos sobre os fundamentos da Matemática, sobre seu desenvolvimento histórico e suas relações com diversas áreas; assim como sobre estratégias para transposição do conhecimento matemático em saber escolar (p. 79).

Segundo Moreira e David (2010), o conjunto de saberes associados ao exercício da profissão docente inclui tanto os saberes produzidos pelos professores em sua ação pedagógica na sala de aula quanto resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar. Complementando essa ideia, Fiorentini (2005) acrescenta que a formação do professor deve contemplar, além do conhecimento acadêmico, conhecimentos próprios da escola e também de práticas não-formais.

> O conhecimento matemático pode ser focalizado a partir de três diferentes perspectivas: da prática científica ou acadêmica; da prática escolar; e das práticas cotidianas não-formais. Todas essas perspectivas interessam à formação do professor, pois a matemática escolar se constitui com feição própria mediante um processo de interlocução com a matemática científica e com a matemática produzida/mobilizada nas diferentes práticas cotidianas. Interessa ao professor, principalmente, porque a matemática escolar – que é objeto-foco da atividade do professor no Ensino Básico – é um conhecimento que é, ao mesmo tempo, mobilizado e transcriado ou produzido nas relações que se estabelecem no seio escolar (FIORENTINI, 2005, p. 108).

A respeito da relação entre disciplinas do chamado núcleo duro e as disciplinas pedagógicas, Fiorentini (2005) desenvolve argumentos que consideramos pertinentes. Segundo essa obra, professores de cálculo diferencial e integral, álgebra, análise etc., ensinam muito mais do que conceitos ou procedimentos matemáticos, apesar de muitas vezes não terem consciência disso. Os professores dessas disciplinas também ensinam o que Fiorentini (2005) chama de um *currículo oculto subjacente à ação pedagógica* (p. 111); isto é, um jeito de ser pessoa, um jeito de ser professor, um modo de conceber o mundo e um modo de conceber e tratar a matemática, além do próprio ensino e da avaliação da aprendizagem.

Algumas pesquisas apontam ainda que o comportamento dos professores das disciplinas específicas influencia mais a prática do futuro professor do que as prescrições das disciplinas didático-pedagógicas. As razões para isso, segundo Fiorentini (2005), é que o comportamento dos professores das disciplinas específicas reforça procedimentos internalizados durante o processo anterior de escolarização. Nesse ponto, convém lembrar que a atividade docente é talvez a única em que, antes mesmo de se profissionalizar, o candidato passa vários anos em seu futuro local de trabalho.

> Antes mesmo de começarem a ensinar oficialmente, os professores já sabem, de muitas maneiras, o que é o ensino por causa de toda a sua história escolar anterior. Além disso, muitas pesquisas mostram que esse saber herdado da experiência escolar anterior é muito forte, que ele persiste através do tempo e que a formação universitária não consegue transformá-lo nem muito menos abalá-lo (TARDIF, 2002, p. 20).

Cientes da formação pedagógica implícita em todos os seus movimentos, os professores das disciplinas específicas da licenciatura, deveriam implementar outros modelos didáticos de ensino. Fiorentini (2005) sugere que esses professores utilizem atividades exploratórias e problematizadoras das dimensões conceituais, procedimentais, epistemológicas e históricas dos saberes matemáticos por meio de investigações em sala de aula e modelagem matemática baseados na metodologia de projetos, além de seminários temáticos. De forma análoga, em Fiorentini (2005) também é defendida uma formação matemática nas disciplinas pedagógicas. Isso pode ocorrer de várias formas, como a contribuição para uma visão da matemática como um *saber sociocultural produzido nas relações e práticas sociais* (p. 112), que pode se expressar de muitas maneiras, sendo uma delas a forma acadêmica. Outra forma é a ressignificação de conceitos e procedimentos matemáticos adquiridos durante o processo de escolarização. Por exemplo, pode-se discutir *como cada licenciando pensa introduzir, na prática escolar, o conceito de equação ou promover a iniciação ao desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos* (p. 112). Ainda uma outra forma sugerida em Fiorentini (2005) seria a discussão de episódios reais ocorridos em sala de aula, por meio de vídeos ou narrativas, que podem ser extraídos de relatos de pesquisa ou do diário de campo do próprio licenciando após observação nas escolas.

Trazendo a questão dos conhecimentos acumulados pelo licenciando em sua trajetória escolar pregressa para o nosso foco de interesse específico, o ensino de números irracionais, consideramos de suma importância para os formadores de formadores conhecerem o que os licenciandos sabem sobre o assunto. Em relação a esse tema, fizemos uma opção de tratá-lo a partir das imagens conceituais (ou imagem do conceito), um constructo teórico capaz de lidar com a formação, transformação e manipulação de conceitos e definições matemáticas. Tall e Vinner (1981) definem a imagem do conceito como toda a estrutura cognitiva de um indivíduo – figuras mentais, processos e propriedades – relacionada a um determinado conceito. Segundo Soares, Ferreira e

Moreira (1998), as representações conceituais já existentes entre os licenciandos deveriam ser o ponto de partida para a construção de uma nova abordagem dos sistemas numéricos, especificamente voltada para a formação de professores. O ponto de chegada seria a formação de uma *visão global do conjunto $\mathbb{R}$ que efetivamente instrumentalize para o ensino na educação básica* (SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1998, p. 95). A importância de se considerar esses conhecimentos prévios se deve ao fato de que

> Ao chegar à Universidade, o aluno já passou por um longo processo de aprendizagem escolar e construiu para si uma imagem dos conceitos matemáticos a que foi exposto, durante o ensino básico. Assim, a formação do matemático demanda o aprofundamento da compreensão dos significados dos conceitos matemáticos, a fim de que ele possa contextualizá-los adequadamente. O mesmo pode-se dizer em relação aos processos escolares em geral: o aluno chega ao ensino superior com uma vivência e um conjunto de representações construídas. É preciso que estes conhecimentos também sejam considerados ao longo de sua formação como professor (BRASIL, 2001, p. 4).

Do ponto de vista da ação didático-pedagógica, detectar a imagem dos conceitos matemáticos construídas pelos estudantes é extremamente importante, pois quando são ignoradas no processo de ensino, podem se transformar em obstáculos para a aprendizagem (SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1998, 1999). Shulman (1986) também aponta para a necessidade do conhecimento das concepções e preconcepções trazidas pelos alunos, que podem facilitar ou dificultar a aprendizagem, e vai além:

> Se essas preconcepções são concepções equivocadas, e frequentemente o são, os professores precisam conhecer estratégias frutíferas em reorganizar o entendimento dos aprendizes, pois é improvável que eles apareçam na sua frente como uma lousa em branco (p. 9-10).

Porém, trabalhar com as imagens construídas pelos estudantes não é algo simples, visto que elas são "psicologicamente resistentes" (FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995); isto é, não são facilmente substituíveis por outras imagens. Soares, Ferreira e Moreira (1998) explicam a dinâmica do funcionamento da imagem do conceito quando os alunos são expostos a uma definição formal apresentada pelo professor.

> É ingenuidade acreditar que os alunos vão abandonar suas imagens, construídas ao longo da vida escolar, para substituí-las de imediato por uma definição formalmente correta apresentada pelo professor de um curso de Análise na Universidade. De um modo geral, o aluno tende a manter as suas imagens conceituais e acrescentar a elas uma versão (possivelmente distorcida) da definião formal apresentada. Dessa forma ele constrói uma espécie de mosaico com várias representações de um determinado conceito, recorrendo a uma ou outra dessas reprsentações, dependendo das circunstâncias (p. 97).

O trabalho de Moreira e Ferreira (2012) defende a necessidade de uma abordagem dos números reais na licenciatura em matemática voltada à formação do professor, visando sua futura prática docente na educação básica. Segundo essa obra, a matemática acadêmica atual tem uma tendência de valorizar as estruturas ao invés da natureza dos objetos. Dessa forma, postular a existência de um corpo ordenado completo e identificar esse conjunto com $\mathbb{R}$ não atende às necessidades da formação do professor para o (futuro) trabalho na escola. Além disso, quando a matemática acadêmica postula a existência dos números reais a partir do nada configura uma inversão de rota que entra em conflito com o processo que se desenvolve na escola, em que os números reais vêm estender a noção de número que começa com os naturais. Nas palavras de Soares, Ferreira e Moreira (1999),

> Deve ser construída uma nova abordagem dos sistemas numéricos, especificamente voltada para a formação de professores. Tal abordagem deveria partir da problematização das representações conceituais já existentes entre os licenciandos e chegar a uma visão global do conjunto $\mathbb{R}$ que efetivamente instrumentalize para o ensino na educação básica (p. 95).

Em síntese, pensamos que a licenciatura em matemática deveria estreitar seus laços com a educação básica. Para atingir o conhecimento de conteúdo da forma como proposto por Shulman (1986), entendemos que seria preciso colocar em prática as orientações das diretrizes para a formação de professores que já existem, e inserir os problemas e as especificidades dos saberes da escola na formação acadêmica do professor de matemática. Seria preciso discutir na licenciatura, com base nos resultados de pesquisas acadêmicas e nos saberes docentes de quem ensina matemática na educação básica, questões relacionadas com o ambiente escolar, com as dificuldades dos alunos em determinados tópicos e as estratégias adotadas pelos professores para contornar diversas situações, entre outras questões. Assim, poder-se-ia criar condições para que os licenciandos desenvolvam, começando desde sua formação inicial, o verdadeiro arsenal de representações citado em Shulman (1986).

Capítulo 5 – Quadro teórico

> *O pescador faz suas redes com fios.*
>
> *O cientista faz suas redes com palavras.*
>
> *Estas redes construídas com palavras têm o nome de teorias.*
>
> Rubem Alves

Cotidianamente, não necessitamos de definições para adquirir um conceito. Em geral, aprendemos a guiar nossas ações e a tomar decisões por meio de exemplos. Desde a infância, aprendemos a lidar com os conceitos e a reconhecê-los pela experiência e pela aplicação em contextos apropriados. Por exemplo, para ensinar o conceito de cadeira a uma criança,

> [...] a prática comum é apontar para vários tipos de cadeiras em vários contextos e dizer “cadeira”. Após algumas repetições, a criança entende que a palavra cadeira é supostamente relacionada a cadeiras e que quando perguntada “o que é isso? ”, espera-se que diga cadeira. Mais tarde, as crianças imitarão todo o ritual por sua própria iniciativa, elas apontarão para cadeiras e dirão “cadeira” (VINNER, 2011, p. 248, tradução nossa).

Em seu desenvolvimento, após o conceito ser reconhecido e manipulado por meio de um símbolo ou nome em determinadas situações, ocorrerá um refinamento do conceito ao surgirem novas circunstâncias, como o aparecimento de novos representantes desse conceito. Um exemplo comum é que crianças pequenas costumam chamar bois ou outros animais de quatro patas de cachorro. Corriqueiramente, o primeiro animal que uma criança tem contato, principalmente nas grandes cidades, é um cachorro. Por isso, ao observar um animal que anda sobre quatro patas e com rabo, é comum que possa chamá-lo de cachorro. O conceito precisará passar por um processo de refinamento após a observação, por exemplo, que bois são bem maiores ou que cachorros não têm chifre. A partir daí a criança não confundirá mais cachorros com bois (WADSWORTH, 1997). Nas palavras de Tall e Vinner (1981),

> Muitos conceitos que usamos alegremente não são definidos de forma alguma. Nós aprendemos a reconhecê-los pela experiência e pela utilização em contextos apropriados. Mais tarde, esses conceitos podem ser refinados nos seus significados e interpretados com cada vez mais sutilezas, com ou sem o luxo de uma definição precisa (p. 151, tradução nossa).

Desta maneira, em grande parte das situações cotidianas lidamos de forma satisfatória com os conceitos a partir de exemplos e outras figuras mentais (explicamos adiante) e uma definição do conceito é quase sempre dispensável. Em contextos científicos, ao contrário, as definições exercem um papel importante, impondo diferentes hábitos de raciocínio. Para entender a frase “meu bonito carro verde está estacionado em frente à minha casa” você não consulta definições. Contudo, para entender a frase “dentre todos os retângulos com o mesmo perímetro, o quadrado é o que tem área máxima” você precisa consultar as definições dos termos matemáticos da sentença (VINNER, 2011). Daí que, frequentemente, surgem dificuldades na transição do pensamento matemático elementar da escola básica, onde os conceitos têm suas bases fundadas na experiência, nos exemplos, no descrever e no convencer, para o pensamento matemático avançado, onde os conceitos são definidos formalmente e todas as proposições precisam ser demonstradas (TALL, 1991; 1992; VINNER, 2011).

Partindo do pressuposto de que existe diferença entre os conceitos matemáticos formalmente definidos e os processos cognitivos pelos quais eles são concebidos, tratamos de dois conceitos específicos, *concept image* e *concept definition*, que traduzimos por imagem do conceito e definição do conceito[75]. Esses termos surgiram pela primeira vez em um artigo de Shlomo Vinner e Rina Hershkowitz publicado nos Anais da IV Conferência Internacional para a Psicologia da Educação Matemática (PME), realizada em 1980. No ano seguinte, esses termos reapareceram em Tall e Vinner (1981), que se tornou o trabalho mais referenciado quando se trata de imagem do conceito e definição do conceito (BINGOLBALI; MONAGHAN, 2008).

Conforme Bingolbali e Monaghan (2008), esses termos têm resistido bem ao tempo, apesar de já poderem ser considerados antigos. São termos que, em sua concepção original, remetem apenas ao plano individual, reflexo de uma época, a década de 1980, em que muitos estudos a respeito de processos de aprendizagem estavam focados em processos cognitivos individuais. Apesar disso, de acordo com Bingolbali e Monaghan (2008), é possível adaptá-los às tendências que surgiram na década de 1990, e considerar também os processos de aprendizagem decorrentes da interação social. O trabalho de Dias (2007) é um exemplo disso, utilizando a teoria de imagem do conceito conjuntamente com pressupostos teóricos fundamentados na perspectiva lógico-histórica e na interação indivíduo-coletividade na formação de conceitos. Não negligenciamos o efeito das interações sociais nos processos de aprendizagem de um indivíduo, mas, em nossa

---

[75] Essa tradução foi utilizada em Giraldo (2004), mas não é a única. É possível encontrar outras traduções em português para os termos *concept image* e *concept definition*, como ‘conceito imagem’ e ‘conceito definição’. Além de imagem do conceito, também utilizamos neste trabalho uma variação que consideramos apropriada: ‘imagem conceitual’.

pesquisa, os termos imagem do conceito e definição do conceito serão utilizados em sua concepção original (TALL; VINNER, 1981).

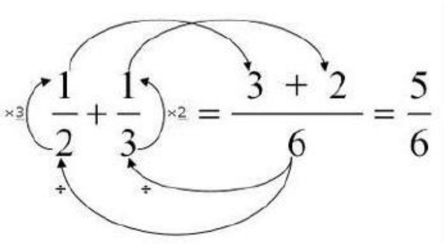
Também fazem parte do quadro teórico principal, os exemplos protótipos, atributos relevantes e atributos irrelevantes, apresentados em Hershkowitz (1994), que se articulam harmonicamente com as noções de imagem do conceito e definição do conceito. De forma coadjuvante, mas não menos importante, também incluímos as ideias de compreensão instrumental e compreensão relacional (SKEMP, 1976) para caracterizar em que nível se deram as reformulações, reconstruções ou inclusões nas imagens do conceito dos sujeitos participantes desta pesquisa.

5.1 – Imagem do conceito

Denominamos por ‘figuras mentais’ ao conjunto de todas as figuras relacionadas a um determinado conceito presentes na mente de um indivíduo. Nesse caso, a palavra ‘figura’ deve ser entendida no seu sentido mais amplo, incluindo qualquer representação visual como símbolos, gráficos, expressões e procedimentos (VINNER, 1983). Assim, ao ouvir a palavra função, um indivíduo pode recordar a expressão $y = f(x)$ ou visualizar o gráfico de uma função, ou ainda pensar em casos específicos como $y = x^2$, $y = \cos(x)$, dentre outras (DOMINGOS, 2003). Além das imagens mentais, pode existir um conjunto de propriedades associadas ao conceito na mente do indivíduo. Por exemplo, um sujeito pode achar que a altura de um triângulo deve sempre ser interior ao triângulo ou que uma função deve sempre ser definida por meio de uma expressão algébrica (VINNER, 1983).

Resolvemos incluir procedimentos como um tipo de figura mental – o que não aparece em Vinner (1983) – pois consideramos que alguns procedimentos possuem forte conotação visual. Citamos como exemplo a regra de soma de frações. Esse procedimento, quando ensinado de uma forma apenas instrumental, possui um forte apelo visual, com todas suas setinhas e um ritual próprio: tira o mínimo múltiplo comum e depois ‘divide pelo denominador e multiplica pelo numerador’. Tudo precisa estar no seu lugar e precisa ser feito naquela ordem. O aluno memoriza cada passo e, ao final, tudo parece fazer parte de uma grande figura (**Figura 31**).

Figura 31 - Regra visual para soma de frações



Fonte: http://somaisegue.blogspot.com.br/2013/02/soma-e-subtracao-de-fracoes.html

De acordo com Vinner (1983), a reunião das propriedades associadas ao conceito com as figuras mentais é chamado de imagem do conceito. Outros trabalhos definem a imagem do conceito de outras formas, que, apesar de equivalentes, ajudam a explicitar melhor o que está sendo tratado aqui. É o caso de Domingos (2003), que estabelece a imagem do conceito como *qualquer coisa não verbal associada na nossa mente ao nome do conceito* (p. 27). Ainda segundo essa obra, além de uma possível representação visual, a imagem do conceito pode ainda conter uma coleção de impressões e experiências associadas a um determinado conceito.

A imagem do conceito é a estrutura cognitiva responsável pela aquisição e pela manipulação dos conceitos, e construída ao longo do tempo por meio de experiências variadas, podendo mudar à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurecimento (TALL; VINNER, 1981). Na perspectiva de Vinner (1991), a imagem do conceito pode ser considerada inexistente quando nenhum significado é associado ao nome do conceito. Por exemplo, a palavra laplaciano[76] provavelmente não tem nenhum significado para um estudante do ensino médio, ou seja, esta palavra não acionaria nenhuma figura mental ou propriedade na mente do indivíduo, o que poderíamos chamar de uma imagem do conceito vazia para o conceito de laplaciano. Porém, na perspectiva de Dias (2002), a imagem do conceito pode não estar vazia mesmo que o nome do conceito seja desconhecido do aluno e não ative a estrutura cognitiva relacionada a ele. Ou seja, apesar do nome do conceito não ativar um dado conhecimento, ainda assim o indivíduo pode ter aquele conhecimento. Um exemplo citado nessa obra considera a questão da densidade.

[76] Laplaciano é um operador diferencial de segunda ordem muito utilizado em matemática e que também aparece em diversas equações de derivadas parciais que modelam problemas físicos. O nome é uma homenagem ao matemático francês Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827). Fonte: pt.wikipedia.org/wiki/Laplaciano. Acesso em 23/9/2015.

> Um indivíduo pode não formar qualquer conceito imagem[77] relacionado ao nome densidade, mas sim, se questionado diretamente sobre o conhecimento próprio relativo a esse conceito matemático. Conforme a questão, esse indivíduo pode afirmar que entre dois números reais quaisquer e distintos, sempre existe um outro número real diferente deles (DIAS, 2002, p. 3).

Apesar de considerarmos que esteja implícito na ideia original contida em Tall e Vinner (1981), é preciso destacar outra situação relacionada ao ativamento da imagem do conceito pelo nome do conceito. Pode ocorrer que uma palavra conhecida do aluno revele significados completamente diferentes do que um professor de matemática imaginaria. Tomemos como exemplo um aluno do ensino fundamental, que ao ouvir a expressão 'número complexo' faz associação com um número muito difícil, muito grande ou muito complicado. O mesmo poderíamos pensar em relação ao número irracional, que pode ser associado com irracionalidade, ou até como já ouvimos dos alunos, ainda que em tom de brincadeira, como um 'número que não pensa'. Em ambos os casos, apesar de não conter o significado matemático desejado, a imagem do conceito não está vazia, pois os alunos criam e/ou associam outras ideias e imagens para os termos matemáticos escutados.

Um outro aspecto importante da imagem do conceito é que ela não precisa ser (em geral não é) um todo coerente. À medida que essa estrutura se desenvolve, novas figuras, processos ou propriedades são incluídas, reconstruídas ou reformuladas, podendo ser incoerentes ou até contradizer figuras, processos ou propriedades preexistentes (TALL; VINNER, 1981). Mesmo havendo incoerência entre algumas figuras, processos ou propriedades, é provável que elas convivam na imagem do conceito de um indivíduo. Isso é possível porque, por se tratar de uma estrutura ampla e complexa, apenas pequenas partes da imagem do conceito são ativadas durante a resolução de alguma tarefa. Essas pequenas porções da imagem do conceito, ativadas de acordo com o momento do indivíduo e com a situação, são chamadas de *imagem do conceito evocada* (TALL; VINNER, 1981).

5.2 – Definição do conceito e imagem da definição do conceito

Uma definição do conceito é uma descrição de um conceito usando palavras. Mais precisamente, é uma *expressão verbal que explica acuradamente o conceito de uma forma não circular* (VINNER, 1983, p. 293, tradução nossa). Em geral, essas definições são criadas por especialistas e, no caso da matemática, também são resultado de um longo

[77] Dias (2002) faz opção de traduzir *concept image* por conceito imagem.

processo histórico de negociação, depuração, aceitação e revisão do conceito. Contudo, o indivíduo também pode construir para si uma definição pessoal para um determinado conceito, que pode ser uma variante equivalente à uma definição do conceito aceita pela comunidade científica, ou, pode ser totalmente incoerente com ela. Segundo Tall e Vinner (1981), *para cada indivíduo a definição do conceito gera sua própria imagem do conceito, que pode, em um voo de fantasia ser chamada de imagem da definição do conceito* (p. 153, tradução nossa). Nas palavras de Victor Giraldo, *a imagem do conceito pode ou não incluir uma definição do conceito pessoal, que, por sua vez, pode (ou não) ser consistente com a definição formal* (GIRALDO, 2004, p. 9).

A descrição ‘quadrilátero equiângulo’ é um exemplo de uma definição para o conceito de retângulo e uma das possíveis variantes equivalentes seria ‘paralelogramo com ângulos congruentes’. Uma definição pessoal para retângulo incoerente com essas definições, e que é comum de ser encontrada entre alunos que começam a estudar geometria, seria ‘quadrilátero com quatro ângulos retos, lados opostos iguais e lados consecutivos diferentes’. Essa descrição é incoerente com a definição anterior pois, entre outras coisas, não considera um quadrado como um retângulo (GIRALDO, 2004).

Conforme exposto em Tall (2003), após a publicação do trabalho que lançou as bases da imagem do conceito e da definição do conceito (TALL; VINNER, 1981), cada um dos pesquisadores seguiu um caminho diferente. Em seus trabalhos posteriores, Shlomo Vinner sempre considerou a definição do conceito e a imagem do conceito como células independentes na estrutura cognitiva do indivíduo. Para David Tall, a definição do conceito deve ser considerada como uma instância da imagem do conceito (TALL, 2003). São visões incompatíveis e que podem trazer problemas, inclusive com a própria noção de imagem do conceito. Considerar a definição do conceito separada da imagem do conceito é coerente com o entendimento da imagem do conceito como tudo que é não verbal relacionado ao conceito (DOMINGOS, 2003). Porém, entendemos que, nesse caso, não se enfatiza o caráter pessoal que a definição do conceito pode ter; isto é, o fato dela poder ser o resultado de uma construção pessoal do indivíduo. Além do mais, é necessário reportar-se a expressões como ‘definição formal do conceito’ quando se deseja mostrar que a definição do conceito do indivíduo não está de acordo com uma definição aceita pela comunidade acadêmica. Sendo assim, a despeito de ter que incluir algo que é verbal à imagem do conceito, optamos pelo caminho apontado por David Tall por concordarmos com ele e por entendermos que se trata do caminho mais adequado para nossa análise de dados.

Isso posto, acordamos que uma definição do conceito formal, ou seja, aquela que é criada e aceita pela comunidade científica, será chamada simplesmente de definição do conceito. A definição do conceito pessoal, isto é, aquela definição criada pelo próprio indivíduo, que pode ou não coincidir com a definição do conceito, será chamada de imagem da definição do conceito. Ao contrário de Tall e Vinner (1981), achamos que se trata de um voo bastante real e apropriado para o contexto de nossa pesquisa.

A partir dessas considerações, uma imagem do conceito vazia implicará necessariamente que a imagem da definição do conceito também é vazia. Porém, a recíproca nem sempre é verdadeira, ou seja, a imagem da definição do conceito pode ser vazia – o indivíduo nunca teve contato ou nunca pensou em uma definição para um determinado conceito – sem que isso signifique que figuras mentais e/ou propriedades também sejam vazias. Isso é muito comum para conceitos presentes na vida de qualquer pessoa. Praticamente qualquer ser humano que já teve contato com uma laranja sabe o que é uma laranja, sabe para que serve uma laranja, reconhece a forma e até o gosto de uma laranja e formou, a partir dessas experiências, figuras mentais relacionadas ao conceito de laranja. Contudo, provavelmente a pessoa nunca tenha pensado – talvez porque não foi necessário – em uma definição para laranja.

A partir de nossas leituras das fontes citadas anteriormente, entendemos que não é possível que a imagem do conceito contenha apenas uma imagem da definição do conceito e mais nada. Ao aprender uma definição de algum conceito, é inevitável que o cérebro crie também alguma figura mental, alguma relação ou algum exemplo para associar a esta definição. Contudo, ainda que não seja possível que figuras mentais, propriedades e exemplos estejam ausentes da imagem do conceito, eles podem estar empobrecidos, pouco desenvolvidos, mesmo com a presença da imagem da definição do conceito. Isso pode ocorrer quando um conceito é introduzido exclusivamente por meio de uma definição em um contexto no qual a construção de figuras mentais, exemplos e contraexemplos não seja valorizada e/ou estimulada. Um exemplo desta situação foi citado na seção 2.3.2 – Na matemática avançada, quando, por exemplo, Elon Lages Lima defende que *tudo o que interessa é que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo* (LIMA, 1995, p. 48).

Especificamente nessa situação, quando um conceito é introduzido por meio de uma definição somente, Vinner (1991) aponta que esta definição poderá permanecer desativada e pode até mesmo ser esquecida. É difícil treinar um sistema cognitivo para agir contra sua natureza e forçá-lo a consultar definições, seja em um processo de formação de uma imagem do conceito ou de efetivação de uma tarefa cognitiva. Diante de tarefas escolares como um problema matemático, em geral os alunos consultam suas imagens do conceito, podendo contrariar o professor que espera uma resposta baseada na definição formal. A teoria de imagens do conceito sugere que

> O desenvolvimento cognitivo de um conceito matemático se dá através do enriquecimento de uma diversidade de ideias associadas ao conceito, e que a compreensão da própria definição do conceito só é possível quando a gama de ideias associadas é rica o suficiente (GIRALDO, 2004, p. 3).

Imagem do conceito e definição do conceito podem ser formados independentemente, além disso, eles podem ou não interagir. Já argumentamos que a imagem do conceito pode conter elementos incoerentes dividindo o mesmo espaço e isso inclui a imagem da definição do conceito, que pode ser incoerente com alguma figura mental ou propriedade associada ao conceito. *Uma definição do conceito consistente com a definição formal, uma imagem do conceito rica e uma imagem do conceito consistente são fenômenos mutuamente independentes* (GIRALDO, 2004, p. 10). A existência de incoerência entre algumas das partes da imagem do conceito foi chamada de *fator de conflito potencial* e, se esses fatores são evocados simultaneamente, eles se tornam conflitantes, e serão chamados de *fatores de conflito cognitivo* (TALL; VINNER, 1981, p. 153-154). Como exemplo desse conflito potencial, um dos sujeitos de nossa pesquisa apresentou o seguinte como definição para os irracionais: "É o número que não é obtido pela divisão de números inteiros". Em seguida, classificou a fração 13/23 como um número irracional. Para maiores detalhes, ver seção 7.2.3 – Agatha.

Uma das formas de resolver um conflito potencial como esses é torná-lo um conflito cognitivo, para que o próprio indivíduo tenha consciência do problema e, a partir daí, possa reformular e/ou reconstruir alguma figura mental, propriedade ou até a imagem da definição do conceito que esteja provocando o conflito. Porém, um caso mais sério de fator de conflito potencial ocorre quando o indivíduo produz figuras, propriedades ou sua própria imagem da definição do conceito em desacordo com a definição formal do conceito. Nesses casos, quando os estudantes parecem seguros de suas próprias interpretações das noções envolvidas e/ou consideram a teoria formal inútil ou supérflua, os fatores de conflito potencial podem não se tornar fatores de conflito cognitivo. Nesses casos, a aprendizagem de qualquer teoria formal pode ficar seriamente comprometida (TALL; VINNER, 1981).

A geometria nos fornece diversos exemplos de conflitos potenciais. As crianças pequenas aprendem a identificar retângulos, quadrados e paralelogramos a partir de representações gráficas como da **Figura 32**. Essas representações podem contribuir para a formação de imagens mentais como "retângulo tem lados desiguais", "quadrado tem todos os lados iguais" e "paralelogramo não tem os ângulos retos". O conflito pode surgir quando o professor diz que todo quadrado é retângulo e que todo retângulo é um paralelogramo.

Figura 32 - Representações gráficas mais comuns para retângulo, quadrado e paralelogramo

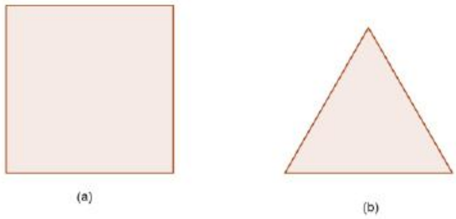
Fonte: Elaborada pelo autor.

Outro exemplo de conflito na matemática elementar é o caso da subtração. Ao aprender subtração com números positivos, crianças pequenas podem formar uma imagem mental que subtração sempre implica em diminuição, isto é, que ao subtrair dois números o resultado da subtração é sempre menor do que o minuendo. Isso pode se tornar uma semente de conflito para a criança quando aprender os números negativos. Por isso todas as imagens mentais devem ser consideradas (TALL; VINNER, 1981).

5.3 – Exemplos protótipos, atributos relevantes e atributos irrelevantes

Quando se pede a alguém para desenhar um quadrilátero ou um triângulo, frequentemente o resultado apresentado é um quadrado ou um triângulo equilátero (Figura 33). Nesse caso, o quadrado e o triângulo equilátero são exemplos do que é chamado de exemplos protótipos (ou prototípicos) em Hershkowitz (1994). Eles são considerados os melhores exemplares das categorias 'quadrilátero' e 'triângulo' porque apresentam um maior número de características que os fazem pertencer a essas categorias, além de terem um forte apelo visual e de terem sido, provavelmente, os exemplos por mais vezes vistos pelo sujeito no que se refere a essas categorias.

Figura 33 - Exemplos prototípicos de quadrilátero e triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Essas características que definem as categorias podem ser classificadas, de acordo com a concepção original em Hershkowitz (1994), como atributos relevantes (ou críticos) e atributos irrelevantes (ou não críticos). De acordo com Hershkowitz (1994), atributos relevantes são aqueles que devem ser satisfeitos para termos um exemplo positivo[78] do conceito, e atributos irrelevantes são aqueles que apenas alguns dos exemplos positivos possuem. No caso do quadrilátero, possuir quatro lados é um atributo relevante, pois todo quadrilátero possui quatro lados, mas os quatro lados serem iguais é um atributo irrelevante, pois é uma característica que apenas alguns quadriláteros possuem. Outros atributos irrelevantes seriam ter todos os ângulos retos, ter dois pares de lados paralelos, entre outros. No caso do triângulo, possuir três lados é uma característica relevante, mas possuir três lados iguais ou três ângulos iguais são atributos irrelevantes. Segundo Hershkowitz (1994), os exemplos protótipos são aqueles que reúnem a maior listagem de atributos relevantes e irrelevantes, o que explica um quadrado (**Figura 33**a) e um triângulo isósceles ou equilátero (**Figura 33**b) como exemplos protótipos de quadriláteros e triângulos, respectivamente.

Enxergamos nas ideias contidas em Hershkowitz (1994), originalmente elaboradas para um contexto de geometria, uma ferramenta capaz de auxiliar-nos na análise dos nossos dados. Porém, alguns ajustes precisaram ser realizados para contemplar algumas situações. Por exemplo, quando um aluno considera que um determinado número é irracional porque é um número inexato, de acordo com o trabalho citado, não poderíamos dizer que se trata de um atributo relevante nem irrelevante, já que a inexatidão não é característica de nenhum exemplo positivo da categoria dos números irracionais[79]. Para

[78] Hershkowitz (1994) usa o termo exemplo positivo como antônimo de contraexemplo, que seria o exemplo negativo.

[79] Na verdade, nenhum número possui esse atributo. Todo número pode ser representado por um ponto na reta, portanto, é exato.

abarcar esses atributos, nossa ideia foi reservar o termo atributos irrelevantes para os atributos que não têm nenhuma relação com o conceito, isto é, que não são características de nenhum exemplo positivo do conceito. Os atributos relevantes ficariam divididos em dois subgrupos: os atributos críticos, aqueles que todos os exemplos positivos de uma categoria devem ter, e os atributos não críticos, aqueles que apenas alguns dos exemplos positivos possuem. Feita essa adequação, podemos citar como exemplo, alguns dos principais atributos relevantes e irrelevantes dos números racionais que foram detectados nas falas e nas respostas dos sujeitos desta pesquisa (Ver **Quadro 9**. Mais detalhes no Capítulo 7 – Apresentação e análise dos dados):

Quadro 9 - Atributos relevantes e irrelevantes de números racionais

<table>
<tr><th colspan="3">NÚMEROS RACIONAIS</th></tr>
<tr><td colspan="3">Exemplo protótipo: FRAÇÃO</td></tr>
<tr><td colspan="2">Atributos relevantes</td><td rowspan="2">Atributos irrelevantes</td></tr>
<tr><td>Críticos</td><td>Não críticos</td></tr>
<tr><td>• Divisão/quociente/razão de números inteiros
• Razão
• Padrão/Regularidade/Previsibilidade</td><td>• Decimal finito
• Dízima periódica[80]</td><td>• Mensurabilidade
• Exatidão</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com Hershkowitz (1994), o exemplo protótipo serve como modelo para julgamentos prototípicos, que foram classificados em duas categorias: puramente visuais e analíticos. Nos julgamentos puramente visuais, duas situações podem ocorrer. Na primeira, o exemplo protótipo serve como referência para um julgamento visual aplicado para outras situações, como quando um aluno afirma que $\pi/6$ é um número racional pois o visualiza como uma fração, exemplo protótipo de número racional. Na segunda situação, o exemplo protótipo também é usado como referência, mas atributos próprios do protótipo são levados em conta, não apenas a questão visual. Como exemplo, um aluno afirma que o número $0{,}121221222$ ... é um número racional porque apresenta um padrão, um atributo comumente associado aos números racionais devido às dízimas periódicas. Em ambos os exemplos, o aspecto visual é que fundamenta a escolha (SILVA, 2011). O

[80] Se considerarmos que todas as decimais são infinitas, o atributo 'dízima periódica' passa a ser crítico, pois todo número racional será representado por uma dízima periódica. Isso é possível de duas formas. Dado um decimal finito como 1,25, podemos pensar em 1,25000... ou 1,24999...

julgamento analítico, ao contrário, utiliza-se de resultados matemáticos, atributos relevantes ou da própria definição do conceito para julgar os exemplares e categorizá-los. Para Hershkowitz (1994), existe alguma evidência de que a construção da imagem do conceito seja uma mistura de processos visuais e analíticos, porém, é desejável que os alunos superem as tendências visuais, que são responsáveis por muitos equívocos, e baseiem seus julgamentos nos atributos relevantes do conceito.

Os atributos relevantes e irrelevantes, além de constituírem a base para a formação de exemplos e julgamentos protótipos, também podem se cristalizar em associações favoráveis ou desfavoráveis à aprendizagem do conceito. As associações favoráveis são aquelas que podem ser trabalhadas para que o aluno amplie sua imagem do conceito para atingir algo equivalente ao conceito formal, isto é, de acordo com o entendimento atual da comunidade matemática. Por exemplo, se um aluno associa números racionais a decimal finito, pode-se trabalhar para que ele também inclua nessa associação as dízimas periódicas, e entenda a relação desses atributos com a representação em forma de fração. Quanto às associações desfavoráveis, citamos o exemplo detectado em alunos na pesquisa Silva (2011): *números decimais que apresentam na parte decimal um número que se repete três vezes são dízimas periódicas* (p. 164). Essa associação não pode ser ampliada ou completada, pois está em desacordo com o conceito formal de dízima periódica.

Em geral, a utilização de atributos irrelevantes produzirá associações desfavoráveis, pela própria natureza equivocada e não relacionada com o conceito desses atributos. Porém, no que se refere aos atributos relevantes, nem sempre sua utilização garantirá a produção de associações favoráveis. Atributos relevantes podem produzir tanto associações favoráveis quanto associações desfavoráveis, dependendo de como será elaborada essa associação. Por exemplo, a ideia de 'padrão' pode ser um atributo relevante, tanto para números racionais quanto para números irracionais, e pode levar a associações tanto favoráveis quanto desfavoráveis à aprendizagem. Em nossos dados, descobrimos que alguns licenciandos associavam os números racionais com a existência de padrão, o que os levava a considerar números como $1{,}121121112\ldots$ como números racionais (Maiores detalhes no Capítulo 7 – Apresentação e análise dos dados).

No que tange à definição do conceito as ideias defendidas em Hershkowitz (1994) também se articulam de forma harmônica com as ideias já citadas de Tall, Vinner e Giraldo apresentadas nas seções anteriores. Segundo o trabalho de Hershkowitz (1994), uma definição pode ser considerada como um conjunto mínimo de atributos relevantes suficientes para definir o conceito. Porém, a definição quase sempre fica em segundo plano devido a uma tendência de se confiar mais na imagem do conceito do que na definição do conceito (VINNER, 2011). No caso dos números irracionais, em que a definição envolve diversas ideias matemáticas complexas, como a representação decimal infinita, é comum os estudantes esquecerem ou ignorarem a definição e usarem apenas as imagens do conceito. Quando essas ideias não são discutidas e trabalhadas nas aulas, a definição pode até ser memorizada, mas, com o tempo, poderá ser considerada inútil e abandonada. É nesse contexto que observamos que os exemplos protótipos surgem, muito frequentemente, como as primeiras opções na mente do indivíduo ao resolver alguma tarefa relacionada a um determinado conceito matemático.

O conceito de exemplo protótipo também precisa ser reconfigurado e adaptado à nossa pesquisa. Números como $\sqrt{2}$ ou π podem ser protótipos de irracionais por reunirem um grande número de atributos relevantes e irrelevantes como descrito em Hershkowitz (1994), mas, também vamos considerar uma outra possibilidade. Em alguns casos, os exemplos protótipos podem ser fruto de algo muito menos elaborado, algo muito mais simples, como a autoridade do professor; isto é, o aluno aceita e internaliza que $\sqrt{2}$ e π são números irracionais porque o professor assim o disse. Além disso, pesquisas apontam (seção 4.6 – Abordagem dos livros didáticos) que esses são os exemplos mais utilizados pelos livros didáticos, e pelo que argumentamos no Capítulo 1, o professor muitas vezes apenas reproduz o livro, fazendo com que esses números sejam os primeiros a serem lembrados como números irracionais, senão os únicos.

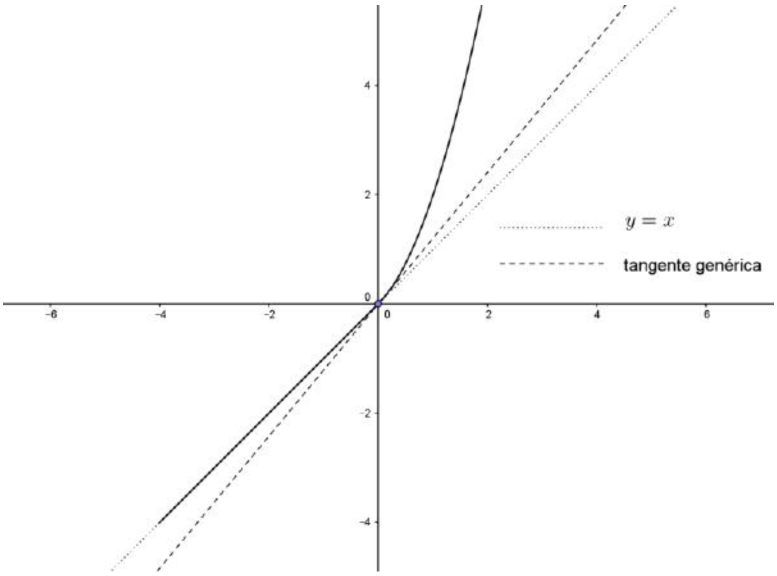
Os exemplos protótipos, figuras mentais e atributos são elementos que se influenciam uns aos outros. Para exemplificar o poder dos exemplos na formação de imagens mentais, e ao mesmo tempo as consequências de se basear um conceito apenas em exemplos, citamos um caso descrito em Tall (1988). Esse pesquisador pediu a jovens de 16 anos que traçassem uma reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ na origem, sendo

$$f(x) = \begin{cases} x, \ x \leq 0 \\ x + x^2, x > 0 \end{cases}.$$

Ele obteve o seguinte: 36% traçou a tangente correta, $y = x$, mas 46% traçou uma tangente um pouco “rotacionada” em relação a $y = x$, de forma que parecesse que tocava a curva em apenas um ponto. Tall (1988) chama essa tangente de “tangente genérica” (ver

Figura 34), pois engloba a propriedade genérica de “tocar em um único ponto”, compartilhada por muitos exemplos anteriores. Dito de outra forma, pensamos que o aluno cria essas imagens ou propriedades genéricas a partir dos inúmeros exemplos apresentados para ele em que realmente a tangente só tocava em um único ponto. De forma semelhante, entendemos que muitos alunos também criam imagens semelhantes, muitas delas equivocadas, a respeito dos números irracionais a partir dos exemplos que lhes são apresentados em aulas de matemática e nos livros didáticos.

Figura 34 - Tangente genérica



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.4 – Compreensão instrumental e compreensão relacional

Em um trabalho como o que fizemos, de sair a campo para diagnosticar o que sabiam os sujeitos a respeito de números racionais e irracionais e, ao mesmo tempo, de contribuir para a aprendizagem desses assuntos, é inevitável pensar em algumas questões relacionadas à compreensão da matemática. Questões como ‘o que é compreender matemática?’, ‘quando podemos afirmar que alguém compreendeu algum tópico de matemática?’ e ‘existe uma única forma de compreender matemática?’ estiveram presentes durante quase todo o tempo em que a pesquisa foi planejada e realizada.

Além das ideias de David Tall, Shlomo Vinner, Rina Hershkowitz e Victor Giraldo discutidas anteriormente, Richard Skemp também nos ajudou a lançar alguma luz nessas questões relacionadas à compreensão da matemática. Particularmente o trabalho Skemp

(1976), em que é feita uma distinção entre dois tipos de compreensão da matemática. A **compreensão relacional** é aquela em que se sabe o que fazer e o porquê, enquanto a **compreensão instrumental** é aquela em que se conhece uma regra e se tem habilidade para usá-la, o que também é chamado de *regras sem razões*. Exemplos comuns de compreensão instrumental: pegar emprestado na subtração, multiplicar a primeira pelo inverso da segunda (divisão de frações), passar para o outro lado trocando o sinal (equações), entre outras.

Skemp (1976) aponta três principais vantagens de se ensinar matemática visando uma compreensão instrumental. A primeira vantagem é que memorizar regras como 'menos vezes menos dá mais' e 'multiplica a primeira pelo inverso da segunda' é mais fácil do que entender as razões por trás dessas regras. Daí segue diretamente a segunda vantagem: as recompensas de um ensino que procede dessa forma são mais imediatas e mais aparentes. Segundo Skemp (1976), não se pode subestimar a importância do sentimento de sucesso e de autoconfiança dos estudantes, e, nesse ponto, isso pode ser alcançado mais facilmente com a matemática instrumental do que com a matemática relacional. A terceira vantagem é que as respostas certas podem ser obtidas de forma mais rápida e confiável. *Se o que é desejado é uma página de respostas corretas, a matemática instrumental pode oferecer isso mais rapidamente e mais facilmente* (SKEMP, 1976, p. 8).

Em relação ao ensino relacional da matemática, Skemp (1976) aponta quatro principais vantagens. A primeira é a maior adaptação para novas tarefas matemáticas, pois entender as relações e os porquês da aplicação de certos métodos a determinados problemas faz com que se tenha maiores chances de conseguir adaptá-los a novas situações – no ensino instrumental, em geral deve-se memorizar qual método funciona para cada situação. A segunda vantagem seria maior facilidade para se lembrar, pois, apesar da aparente contradição (já que há mais para se aprender quando o ensino é relacional), uma vez aprendido, o resultado é mais duradouro. Um exemplo diz respeito às áreas do retângulo, paralelogramo e triângulo. Ao invés de apenas memorizar a fórmula para o cálculo da área de cada uma dessas figuras, fazer conexões entre elas e entender como as duas últimas áreas estão relacionadas com a primeira auxilia a lembrar dessas fórmulas como parte de um todo (SKEMP, 1976).

A terceira vantagem de um ensino relacional é que ele pode ser tratado como um fim em si mesmo. De acordo com Skemp (1976), nesse caso, há menos necessidade de punições e recompensas externas, tornando mais fácil o trabalho motivacional do professor. A quarta vantagem é que os esquemas relacionais são mais orgânicos em qualidade, e se uma pessoa obtém satisfação com a compreensão relacional, ela não apenas tentará entender relacionalmente novos assuntos que forem apresentados para ela, mas também procurará novos materiais e vai explorar novas áreas, *como uma árvore estendendo suas raízes ou um animal explorando novo território à procura de nutrição* (SKEMP, 1976, p. 10).

Em síntese, Skemp (1976) defende que ambas as formas de se abordar a matemática, seja relacional ou seja instrumental, têm suas vantagens e podem ser úteis dependendo do que se pretende. Entendemos a partir da leitura de Skemp (1976) que o conhecimento construído a partir da compreensão instrumental é mais volátil, isto é, desaparece ou fica esquecido mais facilmente, já que não se conecta com outros conhecimentos. Já o conhecimento construído a partir da compreensão relacional pode durar muito mais tempo, pois está posto no centro de uma rede de conhecimentos, sustentado por fios que o conectam com uma série de outros conhecimentos.

Uma leitura superficial de Skemp (1976) pode levar a entender que a compreensão instrumental é um primeiro estágio enquanto a compreensão relacional é uma espécie de estágio superior, o objetivo final a ser alcançado. Não entendemos dessa forma. Ao contrário, pensamos que são formas diferentes, ambas com suas vantagens, como já discorremos anteriormente, mas que podem trazer problemas em determinadas situações. Por exemplo, se um professor direciona suas aulas para uma compreensão instrumental, isto é, ensina regras e procedimentos específicos para resolver determinados tipos de problemas, e nas avaliações prioriza questões que exigem entendimento dos porquês, ou seja, que valorizam uma compreensão relacional, isso poderá causar vários transtornos.

O contrário também pode ser problemático, isto é, aulas que priorizam uma compreensão relacional e avaliações em que prevalece o instrumental. Ou seja, o problema a que estamos nos referindo é o problema da incoerência de posturas em aulas e avaliações. O ideal seria ter um ensino em que tanto o entendimento relacional quanto o instrumental fossem explorados e valorizados e em que os exercícios de aula, testes e provas envolvessem tarefas matemáticas que focalizassem nos dois tipos de entendimento matemático.

Contudo, em geral, o ensino que é praticado por professores e livros da educação básica prioriza uma compreensão instrumental, assim como questões de provas – como exemplo as questões do ENEM que analisamos (ver Apêndice A - Habilidades necessárias para resolver questões do ENEM (2009 a 2014) referentes a números irracionais). Daí, é natural que os alunos achem estranho quando surge um professor que decide trabalhar de forma relacional. Em minha experiência docente no primeiro semestre de 2016, atuando em várias turmas de ensino médio para jovens e adultos, pude constatar isso na prática. Experimentei muitas dificuldades ao tentar dar aulas que tragam algo de compreensão relacional, isto é, que mostrem o porquê de determinadas regras.

Como exemplo, trabalhava com divisão de frações em uma dessas turmas citadas anteriormente e decidi reservar duas aulas para mostrar o verdadeiro significado dessa operação. Iniciei com o significado da divisão de uma fração por um número inteiro. Em seguida, com a noção de 'quantos cabe', trabalhei a questão da divisão de uma fração qualquer por uma fração do tipo $\frac{1}{b}$ e, finalmente, abordei a divisão de uma fração qualquer $\frac{a}{b}$ por uma fração qualquer $\frac{c}{d}$. A intenção era dar todos os passos na direção da construção da conhecida regra de divisão de frações: "repete a primeira e multiplica pelo inverso da segunda". Após vários quadros e etapas de demonstração, apresentei a referida regra e, logo em seguida, um aluno perguntou: "professor, mas não é mais fácil fazer dessa forma?"

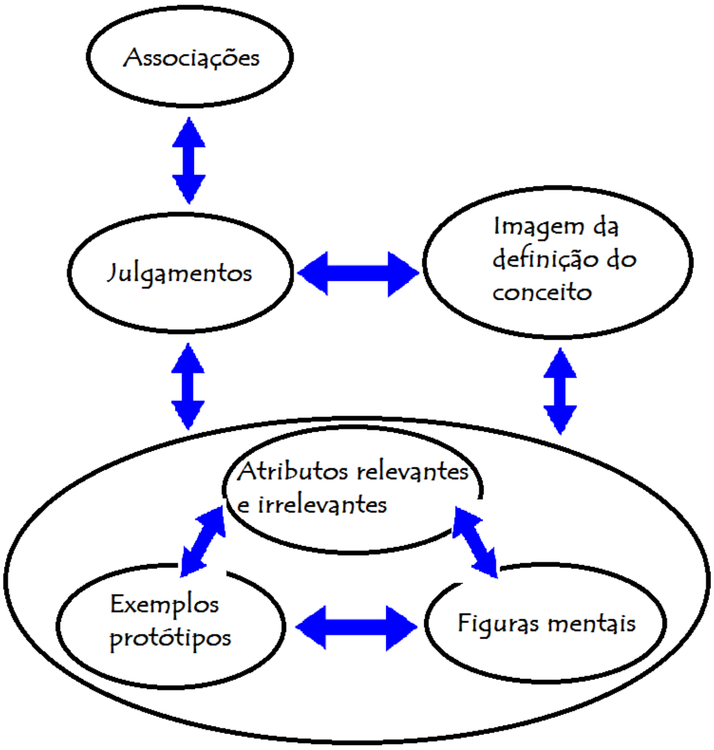
Pensamos que todo o trabalho realizado para chegar até a fórmula não fez sentido para o aluno por se tratar de uma abordagem que valoriza a compreensão relacional. Em nosso modo de pensar, isso se deve às suas experiências anteriores em que a matemática sempre foi abordada de forma instrumental. Na concepção desse aluno, talvez nem reconheça o que foi feito como matemática, visto que em suas experiências anteriores, essa disciplina sempre foi abordada por meio de comandos e instruções do tipo 'essa regra serve para isso', 'esse cálculo serve para aquilo'. Uma abordagem que visa à compreensão relacional é tão diferente de uma que visa a compreensão instrumental que é preciso ter cuidado ao transitar de uma para a outra. O professor deve ter consciência dessas sutilezas em seu trabalho diário, seja nas atividades de sala de aula, seja nas avaliações.

5.5 – Modelo de análise de dados

Tendo em vista as considerações anteriores acerca das ideias de Tall, Vinner, Hershkowitz e Skemp, criamos nosso próprio modelo de imagem do conceito (**Figura 35**), o qual foi utilizado na etapa de análise de dados (Ver Capítulo 7 – Apresentação e análise dos dados). Na base do modelo temos os exemplos protótipos, os atributos relevantes, atributos irrelevantes e as figuras mentais (**Figura 35**). Em síntese, classificamos todas as propriedades relacionadas a um conceito como atributos relevantes ou irrelevantes, e, a partir da sugestão de Hershkowitz (1994), estabelecemos esses atributos como elementos fundantes dos exemplos protótipos, dos julgamentos e da imagem da definição do conceito.

Os três balões da base do modelo (**Figura 35**) influenciam-se mutuamente e formam uma espécie de mecanismo que dará suporte aos julgamentos, associações e à imagem da definição do conceito. Na verdade, toda a estrutura é sensível e está constantemente em transformação, e modificações em qualquer balão da estrutura provocadas por novos estímulos podem desencadear mudanças em praticamente todos os outros balões. Todavia, a base é especialmente sensível, pois seus elementos são os primeiros que são formados toda vez que algum indivíduo é exposto a um novo conceito. Vamos apresentar um exemplo de aplicação desse modelo em uma situação vivenciada em sala de aula.

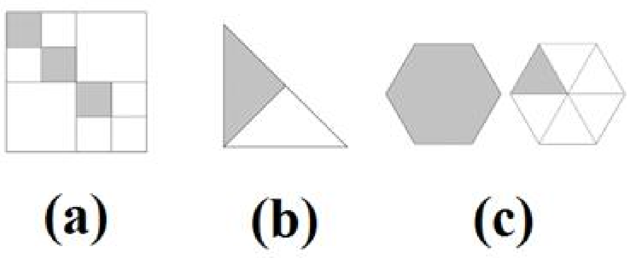
Figura 35 - Modelo que será utilizado de imagem do conceito



Fonte: Elaborada pelo autor.

No primeiro semestre de 2016, lecionando em uma turma de Proeja do Ifes, fazia uma revisão do conteúdo ‘frações’, e trabalhava com a ideia de fração como parte-todo. Vários exemplos com representações gráficas, como os itens ‘a’ e ‘b’ da **Figura 36**, todos representando frações próprias, foram apresentados durante aproximadamente duas semanas. Em certa aula, pedi para que representassem a fração 4/3, quando um dos alunos disse que não seria possível, pois não é possível tomar 4 partes de 3 partes.

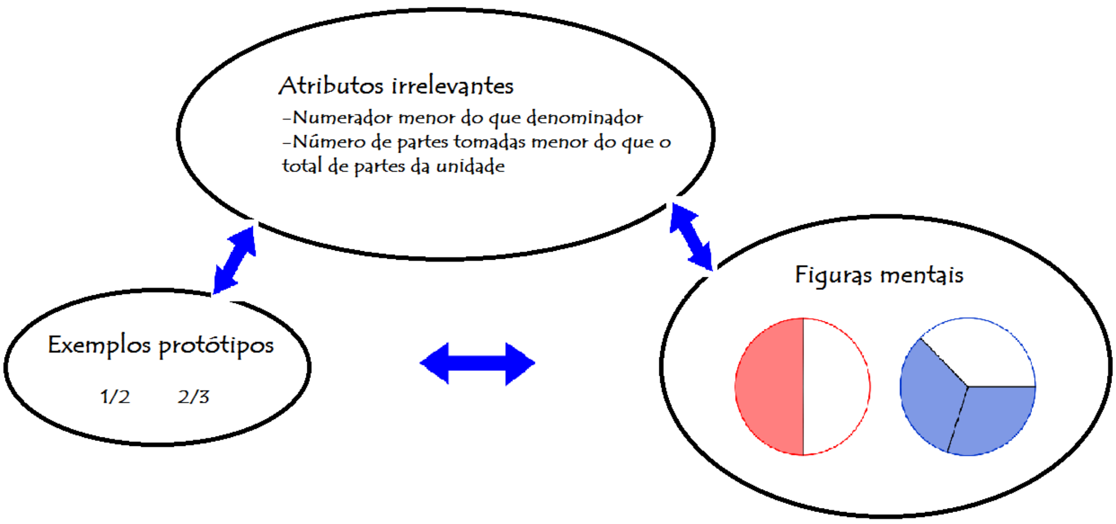
Figura 36 - Frações como parte-todo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Um possível esquema (simplificado) da utilização do nosso modelo na análise desse caso está ilustrado na **Figura 37**. Não é possível listar tudo que acontece em uma estrutura complexa como a imagem do conceito, e é bastante provável que outras figuras mentais, exemplos protótipos e atributos estejam presentes. Todavia, optamos por trazer um exemplo simplificado que evidenciasse a inter-relação de partes de elementos da imagem do conceito, e como o conteúdo de cada um dos balões da **Figura 37** reforçam-se mutuamente.

Figura 37 - Exemplo de utilização do modelo criado de imagem do conceito



Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando o aluno foi confrontado com um caso que não se enquadrou nos seus exemplos protótipos de fração, sua primeira reação foi dizer que aquilo não se tratava de uma fração. Na verdade, esse aluno provavelmente havia construído para si um modelo para frações que chamamos de próprias, isto é, aquelas em que o numerador é menor do que o denominador. Pensamos que esse comportamento é comum e devido aos livros didáticos e aos exemplos apresentados pelos professores, que, em geral, são de frações próprias. Nesses casos, o papel do professor é contribuir para o enriquecimento da imagem do conceito do aluno apresentando figuras como o item 'c' da **Figura 36** e discutindo a necessidade de atributos como 'numerador menor do que denominador'. Feito isso, o aluno tem maiores chances de criar novas ligações em sua imagem do conceito que contribuam para um entendimento mais amplo do conceito de fração e assim provavelmente poderá elaborar imagem do conceito de fração imprópria.

Voltando ao modelo que vamos usar para imagem do conceito como um todo (**Figura 35**), os exemplos protótipos, figuras mentais e atributos relevantes e irrelevantes formam a base para os julgamentos, à medida que se repetem, podem se cristalizar e, nesse caso, formarão o que chamamos de associações. Ao lado dos exemplos protótipos, das associações e da imagem da definição do conceito, colocamos as figuras mentais, de acordo com a proposta original de Vinner (1983).

Visualizamos outras ligações e interconexões entre os elementos que compõem a imagem do conceito ilustrada pela Figura 35, bem como a influência da autoridade do professor em todos esses elementos. Contudo, optamos por um esquema simplificado e mais próximo do que utilizamos de fato na análise dos dados no Capítulo 7.

Capítulo 6 – Metodologia

A arte e a ciência têm o seu ponto de encontro no método.

Edward Bulwer-Lytton

Nossa pesquisa, de natureza qualitativa e com intervenção em sala de aula, inicialmente pretendeu realizar um diagnóstico das imagens conceituais trazidas pelos licenciandos. Em seguida, procedemos a uma intervenção pedagógica com o objetivo de contribuir para o enriquecimento das imagens conceituais de números irracionais trazidas pelos estudantes. A intervenção também foi pautada pelo compromisso com a preparação do licenciando para discutir o assunto de forma adequada na educação básica, conforme discutimos nas seções 1.1 – Na educação básica e 1.2 – Na licenciatura em matemática. Por fim, analisamos as movimentações nas imagens conceituais dos participantes ao longo da pesquisa.

Em nossa entrada no campo de pesquisa procuramos não nos armar previamente de teorias para testar; isto é, estivemos atentos a qualquer detalhe, a qualquer fala, a qualquer dado relacionado aos números irracionais sem a preocupação de fazer uma leitura prévia desses dados a partir de alguma teoria. As teorias que nos auxiliaram a analisar os dados foram escolhidas a *posteriori*, e receberam algumas adaptações e fusões a partir dos dados coletados. A Figura 35 ilustra a fusão de duas teorias (de Tall e Vinner (1981) com Hershkowitz (1994)) e de um esquema que criamos a partir dos dados que tínhamos em mãos. Essa característica da nossa coleta e análise de dados é um dos pontos centrais em um tipo de pesquisa conhecida na literatura como teoria fundamentada (*grounded theory*). Esse tipo de pesquisa dá *prioridade aos dados e ao campo em estudo sobre as suposições teóricas. As teorias não devem ser aplicadas ao sujeito que está sendo estudado, mas sim "descobertas" e formuladas no trabalho com o campo e com os dados empíricos ali encontrados* (FLICK, 2009, p. 96).

Porém, se por um lado não nos preocupamos previamente com teorias para analisar os dados que seriam coletados, o mesmo não podemos dizer em relação a conhecimentos importantes diretamente relacionados com os números irracionais e com o seu ensino. Como um professor que vai dar uma aula de um assunto que não se sente suficientemente seguro e preparado, começamos a nos organizar nesse sentido antes mesmo de iniciar a pesquisa de campo e a coleta de dados. Essa preparação deu origem aos capítulos 1, 2 e

3, que tratam do ensino dos números irracionais na educação básica e na licenciatura, de alguns aspectos teóricos dos números irracionais e de um panorama histórico e filosófico dos mesmos, respectivamente.

Esses capítulos, que antecedem a revisão de literatura, abordam temas que julgamos pertinentes para nós, enquanto pesquisadores, e também para o leitor, no sentido de proporcionar um entendimento mais amplo das questões relacionadas aos números irracionais. Assim, por exemplo, entendemos que um panorama histórico do assunto pode lançar alguma luz sobre as dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem dos números irracionais. Apesar de não terem a profundidade de uma pesquisa documental ou histórica, as discussões propostas nos capítulos 1, 2 e 3 também não permaneceram apenas na superfície do problema. Cada um desses capítulos teve um objetivo e, apesar de não serem os pontos fundamentais do nosso trabalho, cada um deles foi desenvolvido como uma pequena investigação com o intuito de formar lastro de sustentação para a pesquisa principal.

As perguntas que nos guiaram ao longo da pesquisa foram: P1 – O que sabem os alunos ingressantes de uma turma de licenciatura em matemática do Ifes a respeito de número irracional? P2 – Que associações ou imagens foram construídas por esses alunos a respeito desses números? P3 – Quais dessas imagens não contribuem para a aprendizagem de números irracionais? P4 – Quais as contribuições de uma intervenção pedagógica planejada para o enriquecimento das imagens conceituais de números irracionais dos licenciandos? P5 – Como as imagens conceituais se movimentaram ao longo da pesquisa?

As nossas hipóteses de trabalho estão no Quadro 10, que também resume as informações antecedentes e relaciona os objetivos, perguntas e hipóteses. Os instrumentos utilizados para responder às perguntas de pesquisa foram questionários, atividades individuais e em grupos, além de entrevistas. Para maiores detalhes a respeito da elaboração, desenvolvimento e aplicação dos instrumentos utilizados nesta pesquisa ver capítulo 6, mais especificamente na seção 6.2.2 – Etapas, procedimentos e instrumentos.

Quadro 10 - Perguntas, objetivos e hipóteses do Estudo Principal

Objetivos	Perguntas	Hipóteses de trabalho
Diagnosticar conhecimentos prévios dos alunos em relação a números irracionais, identificando associações ou imagens que não contribuem para a aprendizagem desses números.	**P1 -** *O que sabem os alunos ingressantes, de uma turma de licenciatura em matemática do Ifes, a respeito de número irracional?* **P2 –** *Que associações ou imagens foram construídas por esses alunos a respeito desses números?* **P3 –** *Quais dessas imagens não contribuem para a aprendizagem de números irracionais?*	**H1 -** *O conhecimento prévio a respeito de números irracionais dos alunos ingressantes não é um todo coerente, apresenta algumas associações ou imagens truncadas ou fragmentadas em relação ao conceito formal.*
Realizar uma intervenção pedagógica compromissada com o enriquecimento das imagens conceituais e com a preparação do licenciando para discutir o assunto de uma forma adequada na educação básica.	**P4** – *Quais as contribuições de uma intervenção pedagógica planejada para o enriquecimento das imagens conceituais de números irracionais dos licenciandos?*	**H2** – *É possível enriquecer as imagens conceituais dos licenciandos a respeito de número irracional e, consequentemente, capacitá-los para ensinar números irracionais de forma adequada na educação básica.*
Analisar as movimentações das imagens conceituais dos participantes ao longo da pesquisa.	**P5** – *Como as imagens conceituais se movimentaram ao longo da pesquisa?*	

Fonte: Elaborado pelo autor.

6.1 – Itinerário de pesquisa

Ao decidir trabalhar com os números irracionais, faltava decidir para qual nível de ensino direcionar o olhar. Consideramos inicialmente duas opções: educação básica e ensino superior. Escolhemos a segunda opção pelo fato do autor ter maior experiência no ensino superior e por atuar na licenciatura em matemática do Ifes desde o ano de 2008, o que facilitaria o nosso acesso às turmas, mas também porque pensamos que o problema na educação básica é um reflexo do problema que detectamos na formação do professor de matemática.

A partir desse direcionamento chegamos até a leitura de trabalhos referentes ao tema números irracionais e/ou reais, principalmente Dias (2002), Penteado (2004), Soares, Ferreira e Moreira (1999) e Igliori e Silva (1998). Nesses trabalhos, foram realizados estudos diagnósticos que mostraram algumas deficiências de alunos e professores relativas aos conceitos e algumas propriedades dos números reais e/ou irracionais. Começamos assim a formular algumas hipóteses de trabalho e, em um processo natural para nós, surgiu a ideia de aplicar um questionário para testá-las. Isso foi feito em março de 2013, ocasião em que realizamos o primeiro estudo piloto com os próprios alunos do autor desta pesquisa, que cursavam a disciplina Geometria III da licenciatura em matemática do Ifes. A intenção foi verificar como se encontrava o conhecimento dos alunos a respeito dos números irracionais e, consequentemente, avaliar a razoabilidade de se construir um projeto de pesquisa em torno desse tema.

Os resultados desse primeiro estudo, que chamamos de Pequeno Estudo Diagnóstico, mostraram-nos que havia ali um problema com potencial para pesquisa. Assim como relatado nas leituras que citamos anteriormente, esse pequeno estudo apontou para possíveis deficiências relativas ao conceito de números irracionais dos alunos pesquisados. Não foi dado retorno aos alunos após esse estudo. Corrigimos essa falha metodológica e, ao final dos estudos posteriores, foi dado um retorno em relação ao desempenho geral da turma nas atividades propostas, com a preocupação de esclarecer dúvidas que não puderam ser tiradas quando da aplicação das atividades porque comprometeriam o planejamento do mesmo. Para mais detalhes, veja o Apêndice G.

Após decidir o nível de ensino em que atuaríamos, o passo seguinte foi estabelecer o tipo de pesquisa que seria realizada. Estabelecemos duas propostas diferentes de pesquisa que gostaríamos de realizar. Julgávamos as duas como propostas igualmente importantes e interessantes, mas mutuamente excludentes pela questão do tempo e recursos disponíveis, principalmente recursos humanos. Uma trabalharia com uma ou duas atividades que seriam aplicadas em turmas e períodos diferentes ao longo do curso de licenciatura em matemática do Ifes; a outra trabalharia diversas atividades em uma única turma de um período específico.

O primeiro desenho de pesquisa nos proporcionaria traçar um panorama de todo o curso de licenciatura em matemática do Ifes no que tange ao ensino dos números irracionais e poderia responder às perguntas do tipo *como se encontra o ensino de números irracionais na licenciatura em matemática do Ifes? Em que momentos e/ou disciplinas desse curso são abordados os números irracionais? Existe integração entre essas disciplinas?* Seria uma pesquisa que necessariamente teria uma grande extensão e, por conta do tempo disponível, provavelmente teria pouca profundidade.

A segunda proposta a ser realizada em um único momento do curso, por exemplo o primeiro período, poderia responder a outros tipos de perguntas, do tipo *como se encontra o conhecimento de números irracionais dos alunos quando ingressam no curso? Quais atividades podem ser desenvolvidas no primeiro período do curso, visando a construção ou reconstrução por parte do aluno do conceito de número irracional?* Seria uma pesquisa menor em extensão e maior em profundidade.

Nesse interim o professor da disciplina Fundamentos de Matemática para a turma de ingressantes 2013, concedeu-nos a oportunidade de realizar o que seria nosso segundo estudo piloto (que chamamos de Estudo Exploratório, relatado no Apêndice H), desta feita com uma turma de ingressantes em licenciatura em matemática do Ifes. Observamos algumas aulas, aplicamos em seguida um questionário diagnóstico e, após a análise das respostas, ficou claro que existia um problema: muitos alunos demonstraram imagens conceituais conflitantes, por vezes equivocadas, a respeito dos números irracionais.

Isso nos impulsionou a propor e a realizar, com o consentimento do professor da disciplina de Fundamentos de Matemática, uma intervenção pedagógica. Tratamos três questões principais durante a intervenção, inspirados por leituras, troca de ideias com colegas e com a orientadora, além da análise das respostas encontradas no primeiro estudo piloto: i) representação dos irracionais (uso das reticências), ii) visão dos irracionais (reconhecimento e questões conceituais) e iii) equivalência das definições mais comuns de irracionais.

Seis atividades foram propostas e a boa receptividade das mesmas por parte dos alunos, e também dos professores[81] da disciplina de Fundamentos de Matemática, deixou-nos

[81] Houve uma mudança de professor na disciplina de Fundamentos de Matemática um mês após o início do período.

confiantes que um passo importante havia sido dado. O professor da disciplina de Fundamentos inclusive sugeriu que o estudo fosse repetido e aprimorado com a turma de 1º período que ingressaria no ano seguinte. Hoje, pensamos que foi sensata nossa decisão em aceitar a sugestão do professor da disciplina de Fundamentos, mas naquele momento ainda havia outra ideia em relação ao passo seguinte da pesquisa.

Existia interesse em trabalhar com uma turma de concluintes para, juntamente com o estudo realizado na turma de ingressantes, avaliar e comparar como entravam e como saíam os alunos no curso de licenciatura em matemática. A disciplina ideal seria a disciplina introdução à análise, oferecida no 7º período, quando é feita uma discussão mais elaborada, muitas vezes apenas formal, dos números reais e dos números irracionais. Essa ideia ainda tinha um complemento ambicioso, quase um sonho, que era acompanhar o início da carreira docente desses alunos para avaliar como desenvolveriam o conteúdo de números irracionais na escola básica.

Os alunos que estavam cursando o 7º período no primeiro semestre de 2013 preenchiam todos os requisitos para os nossos intuitos, pois concluiriam o curso no segundo semestre daquele ano e provavelmente começariam a trabalhar no início de 2014, se é que já não haviam começado durante o curso. Fizemos então contato com o professor de análise, explicamos do que se tratava a pesquisa, do nosso interesse de, pelo menos em princípio, observar aulas daquela disciplina, mas, infelizmente, o professor não aceitou. A opção em aprender com erros, aprimorar as atividades e reaplicar novamente no ano seguinte no 1º período, conforme sugerido pelo professor da disciplina de Fundamentos, tornava-se assim a opção principal.

Pensamos que, ao trabalhar pela segunda vez com o primeiro período, teríamos a possibilidade de aprimorar as atividades propostas na primeira vez e realizar um estudo de natureza qualitativa com maior profundidade. Além disso, uma segunda oportunidade de aplicação dessas atividades também poderia proporcionar outros avanços, como conhecer melhor o público que procura a licenciatura em matemática do Ifes, seus conhecimentos ao ingressar no curso, suas expectativas e bagagens pessoais, propiciando ainda elementos para a realização de pesquisas posteriores com os outros direcionamentos que citamos acima. Chamamos esse segundo estudo piloto de Estudo Exploratório, e para mais detalhes relativos a ele, ver Apêndice H.

Após a definição do assunto, do nível de ensino em que iríamos atuar, do perfil dos sujeitos e do tipo de pesquisa de campo, restava estabelecer os objetivos da mesma. Estabelecemos dois objetivos principais: diagnosticar o conhecimento relativo a números irracionais trazidos pelos alunos ingressantes na licenciatura em matemática do Ifes e, a partir desse diagnóstico, criar e testar formas de abordagem que pudessem contribuir para a formação do conceito de número irracional dos futuros professores, principalmente no que diz respeito à sua capacitação para tratar desse assunto de forma adequada à sala de aula da educação básica.

Ao planejarmos a etapa seguinte, que pretendíamos fosse a coleta de dados decisiva, percebemos que alguns ajustes finos ainda precisavam ser realizados. Que aspectos do conhecimento relativo a números irracionais seriam diagnosticados? A palavra conhecimento tem um sentido muito amplo e por isso precisávamos delimitar esse conhecimento, escolher aspectos ou tópicos relativos ao conteúdo de números irracionais. Decidimos direcionar nosso olhar para seis aspectos do conhecimento relativo aos números racionais e irracionais dos alunos ingressantes: reconhecimento, representação, definição, propriedades, existência e aplicação. Justificamos nossa escolha por esses aspectos por dois motivos. Primeiro por julgarmos que eles compõem um núcleo básico do conceito de números irracionais e, segundo, por considerarmos que é possível trabalhar esses aspectos em um curso de licenciatura em matemática de uma forma profunda, mas sem formalismos em excesso, capaz de fornecer suporte para o trabalho que os futuros docentes desempenharão na educação básica.

O Estudo Principal aconteceu no ano de 2014, com a turma que ingressou nesse ano. As aulas utilizadas também foram as da disciplina de Fundamentos em Matemática, cedidas mais uma vez por gentileza da professora regente. Em relação ao Estudo Exploratório (Apêndice H), avançamos em termos quantitativos, no que diz respeito ao tempo de convivência com a turma – praticamente todo o semestre letivo de 2014/1 – e ao número de atividades de intervenção propostas. Também avançamos em termos qualitativos, conseguidos por meio da diversificação e do aperfeiçoamento das atividades anteriormente propostas e de um contato mais próximo com a turma e com alguns sujeitos selecionados para uma entrevista ao final da coleta de dados.

Entre o final do Estudo Exploratório (Apêndice H) e o início do Estudo Principal decorreu quase um ano e, nesse período, formulamos três perguntas de pesquisa: P1 – *Como se encontra o conceito de número irracional de alunos que ingressam na licenciatura em* *matemática do Ifes?* P2 – *Como se encontra o ensino de números irracionais nas turmas de licenciatura em matemática do Ifes? Em quais disciplinas ele é abordado? Como é abordado?* P3 – *Até que ponto intervenções planejadas podem contribuir para a aprendizagem de números irracionais dos licenciandos e para a formação de futuros professores de matemática da educação básica?*

O Estudo Exploratório (Apêndice H) mostrou potencial para responder às perguntas P1 e P3, relacionadas aos objetivos de diagnosticar a conceituação de números irracionais de alunos ingressantes, além de criar e testar instrumentos para abordagem dos números irracionais de uma forma significativa para o futuro professor. Ao mesmo tempo, o Estudo Exploratório também se mostrou promissor na possibilidade de auxiliar o futuro professor na tarefa de ensinar números racionais ou irracionais na educação básica. Quando fizemos esse estudo já tínhamos formulado uma hipótese de trabalho, baseada no resultado do Pequeno Estudo Diagnóstico (Apêndice G), de que os alunos ingressam no ensino superior já tendo formadas imagens do conceito e às vezes até definições do conceito de número irracional. Isso também foi confirmado com a turma que participou do Estudo Exploratório (Apêndice H). Porém, essas imagens do conceito são frequentemente conflitantes umas com as outras ou com a própria definição de número irracional formulada pelo aluno, gerando dificuldades para uma melhor compreensão desse assunto.

6.2 – Estudo Principal

O Pequeno Estudo Diagnóstico (Apêndice G) e o Estudo Exploratório (Apêndice H) foram importantes para a formação de um lastro de pesquisa e para que pudéssemos avançar com mais segurança e com o foco melhor ajustado. Também pudemos fazer um balanço entre as coisas que gostaríamos de fazer, as que planejamos fazer e aquelas que realmente fizemos, e duas demandas surgiram. Verificamos em primeiro lugar que seria necessário aumentar a duração da intervenção pedagógica, não apenas para realizar mais atividades e triangular as mesmas, mas também para chegar mais perto dos alunos para tentar descobrir e entender melhor suas dificuldades, como deve acontecer em estudos de natureza qualitativa. Além disso, queríamos ficar próximos dos alunos para dar-lhe retorno das atividades realizadas, como previsto em pesquisas dessa natureza e, portanto, mostrando respeito aos participantes. Assim, estaríamos auxiliando seus processos de entendimento acerca de números irracionais e proporcionando-lhes um melhor aproveitamento. E, em segundo lugar, verificamos que devido à complexidade do assunto, precisávamos definir quais os aspectos do conhecimento relativo a números irracionais seriam focalizados.

Tendo isso em mente, aumentamos o tempo de intervenção pedagógica no Estudo Principal e elegemos seis aspectos do conhecimento relativo a números irracionais: reconhecimento, representação, definição, propriedades, utilidade e existência. O motivo da escolha desses aspectos tem dupla justificativa. Primeiro, nossa revisão de literatura continha diversos dados referentes a esses aspectos, e enxergá-los nos trabalhos que tivemos acesso aconteceu de uma forma natural. Segundo, entendemos que esses aspectos fazem parte de uma espécie da base mínima de qualquer conhecimento. Para conhecer algo, é preciso, antes de tudo, reconhecer o objeto do conhecimento, e isso está diretamente relacionado com a representação do objeto, isto é, reconhecer as diversas formas em que esse objeto se apresenta. Depois, rumo a uma consolidação desse conhecimento, é preciso conhecer uma definição para ele, suas propriedades principais (aquelas que o diferenciam de outros objetos de conhecimento). Por fim, também é desejável que se esteja convencido da existência desse objeto, além de conhecer sua utilidade (aplicações).

O amadurecimento decorrente dos estudos anteriores e de novas leituras também nos fez ver que não poderíamos ignorar a questão dos racionais. Para entender o que se passa com as imagens dos conceitos relativas aos irracionais precisávamos incluir também as imagens do conceito concernentes aos racionais, já que grande parte do ensino dos irracionais se dá por contraste com os racionais (ver Capítulo 1). Isso nos fez retornar mais uma vez ao ponto inicial de qualquer estudo, a seleção de artigos, livros, dissertações e teses sobre o assunto. Uma das principais mudanças nesse sentido foi a ampliação do diagnóstico inicial para o Estudo Principal, com a aplicação de dois questionários, sendo um para os números racionais e um para os números irracionais. Também não pudemos ignorar as fontes relativas a números reais, pela grande similaridade das questões conceituais envolvidas (como o infinito, dízimas, incomensurabilidade, densidade, entre outras), e pelo fato dos irracionais serem muitas vezes tratados no contexto dos números reais como ‘os reais que não são racionais’.

Os estudos anteriores também nos proporcionaram conhecer melhor o terreno em que estávamos pisando. Especificamente falando, pudemos constatar a existência de algumas imagens do conceito de número irracional relatadas em algumas pesquisas já realizadas.

Também pudemos constatar algumas dificuldades provocadas por associações indevidas, por exemplo, do número irracional com algo que não é exato. Isso permitiu que fossem planejadas atividades e aulas expositivas para o Estudo Principal, no sentido de procurar superar essas dificuldades. As principais associações e/ou imagens do conceito detectadas nos estudos anteriores que realizamos serão resumidas brevemente a seguir, no que tange ao reconhecimento, representação e definição dos números irracionais.

Em relação ao reconhecimento, detectamos algumas imagens do conceito recorrentes dos números irracionais como decimal infinita, divisão que sempre dá resto, número que não é exato, número que é imprevisível (não podemos saber sua 'última casa') e número que não tem padrão. Muitas das justificativas dadas pelos alunos ao classificarem os números como racionais ou irracionais refletiam essas imagens. As definições foram poucas vezes usadas como justificativa.

Em relação à representação dos números irracionais, quando pedimos "escreva um número irracional na notação decimal", muitos alunos não responderam, alguns colocaram o símbolo π e outros algo que remetia ao que gravaram ou registraram em suas mentes acerca de π, como 3,1415 ou 3,141617 ou 3,14159... ou até mesmo 3,14. Apenas dois alunos escreveram dízimas aparentemente não periódicas e sem ligação com um exemplo prototípico de número irracional como π ou $\sqrt{2}$. Quando restringimos a pergunta para um intervalo específico, o resultado foi ainda pior, com maior frequência de respostas incorretas, em branco ou 'não sei'.

Ainda sobre a representação dos irracionais, houve muita discussão por parte dos alunos em relação à interpretação das reticências. O número 0,121221222... foi interpretado por alguns como irracional e por outros como racional: uns consideraram o padrão "cada vez que aparece 1 (um) aparece mais um 2 (dois) " enquanto outros consideraram que o 2 antes das reticências se repetiria indefinidamente. Houve ainda quem dividisse em duas possibilidades, escrevendo "se o próximo algarismo for 1, é irracional, se for 2 é racional" e quem afirmasse que nada poderia ser afirmado.

Em relação às definições de irracionais, detectamos, como era esperado, que os alunos trouxeram aquelas definições e explicações que são mais frequentes nos livros didáticos: i) número que não pode ser escrito na forma *a/b* com *a* e *b* números inteiros, b diferente de zero, e ii) número que possui uma dízima não-periódica. Também foi muito frequente a apresentação de uma dessas definições concomitantes com erros de classificação.

O Estudo Principal foi realizado com a turma de ingressantes na licenciatura em matemática do Ifes de 2014, entre os meses de maio e setembro. Foram promovidos um total de vinte e um encontros, onde foram realizadas sete atividades em grupos, seis aulas expositivas com apresentação de material que desenvolvemos, dois questionários, um vídeo, quatro entrevistas e quatro auto avaliações dos encontros, perfazendo um total de cinquenta e duas horas de contato com a turma (mais detalhes no **Quadro 11**). Nem todas as atividades realizadas estavam diretamente relacionadas com o assunto principal de nossa pesquisa, como em duas aulas que substituí o professor da disciplina. Contudo, consideramos que todos os encontros foram válidos no sentido de manter uma relação mais próxima com a turma e com isso conseguir alguma informação que pudesse auxiliar a compreender e interpretar as informações, e assim acrescentar algo na análise dos dados.

Nesse estudo, ao contrário do Estudo Exploratório (Apêndice H), não realizamos a intervenção pedagógica de uma forma isolada, isto é, em descompasso com a programação do professor. Desta vez, a intervenção pedagógica ocorreu no momento em que o professor responsável pela disciplina Fundamentos de Matemática havia planejado tratar dos números. Além disso, as atividades foram pensadas para responder às nossas questões de pesquisa ao mesmo tempo que deveriam ser integradas ao contexto da disciplina. Para isso, submetemos o planejamento das atividades ao professor da disciplina antes de entrar em campo. Trocamos algumas ideias e ajustamos alguns pontos a partir de conversas que tivemos em alguns momentos.

Ainda falando a respeito de nossa tentativa de integrar a intervenção pedagógica no contexto da disciplina de Fundamentos de Matemática, uma de nossas preocupações desde o início foi que os alunos vissem a pesquisa de caráter qualitativo que realizamos como algo que contribuísse para sua formação acadêmica. Queríamos evitar a associação do pesquisador como uma figura que apenas tira o que lhe interessa e não dá nada em troca. Para tanto, nossa aproximação com a turma foi planejada com o objetivo de ganhar a confiança dos alunos, e as ações nesse sentido seriam a apresentação da pesquisa e da nossa trajetória acadêmica, conversas sobre coisas que os alunos têm curiosidade, como por exemplo como funciona o mestrado e o doutorado, além da disponibilização de ajuda em outras disciplinas antes ou depois dos encontros ou em horários alternativos.

Em relação à multiplicidade de instrumentos utilizada, entendemos que a qualidade dos dados coletados é muito maior e mais significativa quando acontece em situações variadas, com a exploração de diversos aspectos de um determinado tema e, principalmente, quando essas situações são proporcionadas por instrumentos variados. Com isto atendemos a ideia de triangular os dados que é central em pesquisas de natureza qualitativa em que queremos compreender e ter evidências do que estamos investigando a partir de pelo menos três fontes distintas. Além disso, incluímos discussões a respeito de concepções, de história e de filosofia da matemática, além da própria matemática relacionada aos números racionais e irracionais. Agimos assim porque também tínhamos e temos a preocupação de inserir o ensino de números irracionais no contexto de um curso de licenciatura, visando o trabalho do futuro professor na sala de aula.

A seguir, cada etapa será detalhada, bem como os instrumentos utilizados, mas antes tecemos alguns comentários a respeito do que antecedeu esse estudo.

6.2.1 – Sujeitos

Em princípio, todos os alunos da turma de ingressantes em 2014 foram convidados a participar da pesquisa. Vinte e cinco alunos aceitaram participar e assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido (Apêndice BB- Termo de Consentimento Livre e Esclarecido), mas apenas 19 realizaram mais da metade das atividades. Dessa forma, esses 19 alunos constituíram-se como sujeitos de nossa pesquisa. Alguns desses alunos não desistiram apenas de participar da pesquisa, eles desistiram do curso também. É uma situação complexa, que não é nosso objetivo analisar, mas pelo pouco que observamos desses alunos e pela nossa experiência docente, muitos deles tinham expectativas em relação ao curso de matemática que não foram correspondidas. Em nossa experiência docente, percebemos que muitos alunos esperam que um curso de licenciatura seja uma espécie de ‘curso prático para dar aulas’, quando na verdade, encontram um curso que é predominantemente teórico, com diversas disciplinas usualmente consideradas difíceis pelos alunos como cálculo diferencial e integral e análise real, dentre outras, normalmente qualificadas como da “linha dura”.

Como acontece frequentemente, o perfil do público que procura o turno noturno é o de alunos trabalhadores e, com a turma de ingressantes em 2014, não foi diferente. Havia na turma uma heterogeneidade de ocupações bastante interessante, como professor da educação infantil, cobrador de ônibus, bancário, servidor público, microempresário, vendedor, policial militar, programador e técnico em radiologia. A heterogeneidade de intenções e expectativas em relação ao curso também era grande. Alguns alunos já manifestavam o desejo de se tornar professor enquanto outros gostariam de fazer engenharia mecânica, física, bacharelado em matemática, engenharia elétrica, atuar na área da saúde, matemática computacional e engenharia civil. Dois alunos não manifestaram suas intenções de forma clara, um aluno disse que estava ali para 'ver no que vai dar' (sic) e outro disse ainda que estava ali graças à pontuação conseguida no ENEM[82].

A faixa etária da turma também era bastante elástica. O aluno mais novo tinha 19 anos e o mais velho 53 anos, mas, apesar dessa grande diferença, os alunos construíram laços de afinidade bem rápido. As relações de uns para com os outros se davam quase sempre com bom humor e, nas aulas da disciplina de fundamentos de matemática que observamos, os alunos também demonstravam interesse em aprender matemática. Além disso, muitos já se mostravam preocupados em 'aprender para poder passar para os alunos', isto é, preocupados com suas futuras atividades docentes.

Como havia trabalhado com a turma de ingressantes em 2013, foi inevitável comparar o comportamento em sala de aula relativo ao acompanhamento dos conteúdos ministrados. A turma de ingressantes em 2014 apresentava nitidamente mais dificuldades para acompanhar as aulas do que a turma de ingressantes do ano anterior. Apuramos mais tarde diversos casos na turma de ingressantes de 2014 de alunos que haviam concluído o ensino médio há mais de cinco anos, alguns até há mais de dez anos. Isso talvez explique a diferença citada acima entre as duas turmas, já que a maioria da turma de ingressantes de 2013 não ficou longos períodos sem estudar entre o ensino médio e o ingresso no ensino superior.

6.2.2 – Etapas, procedimentos e instrumentos

A pesquisa de campo foi planejada para ser realizada em cinco etapas: Aproximação Com a Turma, Observação, Diagnóstico, Intervenção Pedagógica e Avaliação. Cada uma dessas etapas contém diversos procedimentos, que por sua vez, podem pertencer a mais de uma etapa, como é o caso das entrevistas e das conversas informais, dentre outros.

[82] A partir de 2010, a seleção para os cursos superiores do Ifes passou a ser realizada exclusivamente via Sistema de Seleção Unificado – SISU, que funciona da seguinte forma: o aluno se inscreve, escolhe a instituição e os cursos que deseja fazer (é possível escolher duas opções) e o sistema faz a seleção de acordo com a nota do aluno obtida no ENEM. Entendemos a declaração do aluno como "estou aqui porque a minha nota do ENEM não foi suficiente para entrar no curso que era minha 1ª opção".

Alguns procedimentos têm instrumentos específicos desenvolvidos para sua realização, conforme mostra o **Quadro 11**.

Quadro 11 - Etapas, procedimentos e instrumentos

Etapa	*Procedimento*		*Instrumento*
Aproximação Com a Turma	Discussão a respeito de concepções de matemática		"O que é matemática? " (*slides*)
	Apresentações		"Apresentação da trajetória acadêmica do pesquisador" (*slides*)
	Aulas expositivas		Função exponencial
			Inequações exponenciais
	Atividades em grupo		Números figurados
	Conversas informais		-
Observação	Observação de aulas		-
	Observação de apresentações de trabalhos		-
Diagnóstico	Aplicação de questionários		Questionário Q1
			Questionário Q2
	Apresentações		-
	Entrevista Inicial		-
	Entrevista Final		-
	Conversas informais		-
Intervenção Pedagógica	Atividades em grupos	Números figurados	Ficha própria
		Correção de questões	Ficha própria
		Análise de livros didáticos	Ficha própria
		Formulação de problemas	Ficha própria
		Incomensurabilidade	Ficha própria
		Medida de segmentos	Ficha própria
		Equivalência de definições	Ficha própria
	Comentários após a realização das atividades		Quadro e pincel.
	Aulas expositivas (diretamente relacionadas ao tema da pesquisa)		"Pitágoras de Samos" (*slides*)
			"Medir, o que é? " (*slides*)
			"Dízimas periódicas" (*slides*)
	Exibição e discussão de filmes		"The Story of Maths" (vídeo)
	Entrevista Final		-
Avaliação	Avaliação dos encontros		Fichas próprias
	Auto avaliação dos alunos		Fichas próprias
	Entrevistas Inicial e Final		-
	Conversas informais		-
Questões de Ética	Esclarecimentos		TCLE
	Retornos (*feedbacks*)		-

Fonte: Elaborado pelo autor.

A seguir, apresentamos mais detalhes do planejamento de cada etapa, seus objetivos, quais procedimentos e instrumentos foram utilizados e o que esperávamos obter deles.

6.2.2.1 – Etapas

A etapa de Aproximação Com a Turma foi composta de uma série de procedimentos planejados, como aulas expositivas, atividades em grupo, apresentação do pesquisador e dos alunos e conversas informais, dentre outros. Contudo, alguns procedimentos aconteceram por circunstância de algumas situações, como aulas expositivas que não estavam previstas, mas foram assimilados por nós como oportunidades para fortalecer a aproximação do pesquisador com a turma, como explicaremos adiante.

Com relação à Aproximação Com a Turma, apesar desta etapa ter se concentrado no início do trabalho, entendemos que não se trata de uma etapa que se esgota nos primeiros encontros, ela foi quase constante e permeou todas as outras etapas da pesquisa, tendo como objetivo principal construir uma relação de confiança mútua entre o pesquisador e a turma. Na medida em que foi construída essa relação, esperava-se que o aluno se sentisse mais estimulado e mais à vontade para participar das atividades, sem medo de errar, sem medo de expor suas fraquezas e suas carências (de conhecimentos), favorecendo assim uma produção de dados com mais confiabilidade e fidedignidade, ou seja, mais relevantes para a pesquisa.

No que se refere à etapa de Observação, o objetivo foi captar o máximo de dados possível do que ocorre dentro e fora da sala de aula, bem como tornar a figura do pesquisador familiar ao ambiente e de fato inserida no campo de estudo. Entendemos que essa etapa também contribuiu para outras etapas, como a Aproximação Com a Turma, Diagnóstico e Avaliação. Não fez parte dos planos para esta etapa que o pesquisador fizesse qualquer tipo de interferência além do fato de estar presente na sala de aula (que já se constitui em uma grande interferência). Especificamente, registramos toda e qualquer fala (ou outro tipo de dado) dos alunos ou da professora a respeito de números e de concepções de matemática, ou assuntos correlatos.

Em relação ao Diagnóstico, pensamos que não deve ser algo definitivo, feito em um único momento da pesquisa, geralmente no começo, e ao qual nunca ou raramente se retorna. Entendemos que em uma pesquisa qualitativa da forma como a concebemos, ele deve ser dinâmico, estar em constante revisão e ser feito durante toda a pesquisa, desde o primeiro contato com a turma. Isso implica, além de aplicar os instrumentos planejados para esse fim, ficar atento a tudo que acontece na sala de aula e fora dela, como perguntas dos alunos, suas conversas com os colegas, entre outros e assim estar disposto a mudar o diagnóstico se for preciso.

Um dado importante referente à fase de Diagnóstico é que, a partir do que aprendemos no Estudo Exploratório (Apêndice H), achamos que seria conveniente ampliar a sua duração no Estudo Principal. As imagens dos conceitos assumem diversas roupagens e necessitam de situações igualmente diversas para se manifestarem e para podermos triangular os dados. Assim poderemos confiar que temos evidências em nossas interpretações e garantirmos confiabilidade dos resultados como previsto em pesquisas qualitativas. Sendo assim, uma série de instrumentos e atividades foram acrescentadas e/ou modificadas em relação à fase de diagnóstico do Estudo Exploratório (Apêndice H), com a intenção de obter um panorama mais fidedigno das imagens dos conceitos trazidos pelos alunos ingressantes da licenciatura em matemática do Ifes. Dessa forma, todos os procedimentos tiveram um pouco de diagnóstico em sua concepção, mas elegemos aqui os principais, aqueles que planejamos para serem as principais fontes de dados dessa etapa, que são as Apresentações, Aplicação de Questionários, Conversas Informais e Entrevistas Inicial e Final, que figuram no **Quadro 11** como procedimentos da etapa de Diagnóstico.

A respeito da etapa de Intervenção Pedagógica, o Estudo Exploratório (Apêndice H) nos possibilitou ver, entre outras coisas, que a mesma deveria ser mais longa e mais variada. Oito encontros não foram suficientes para desenvolver como esperávamos as seis atividades que propusemos naquele estudo, pois uma parcela muito grande do tempo foi destinada para discussões relacionadas apenas ao reconhecimento e à representação decimal dos números irracionais. Resolvemos então fazer algumas alterações importantes para a intervenção pedagógica do Estudo Principal.

Uma dessas alterações diz respeito à aplicação de novas e variadas atividades. Após a realização do Estudo Exploratório, avaliamos que o mesmo ficou restrito quase que totalmente à questão da representação decimal dos números racionais e irracionais. Decidimos então que no estudo seguinte também deveríamos elaborar atividades referentes à definição e algumas propriedades dos números irracionais. Incluímos assim atividades como as de Formulação e Correção de questões e Análise de Livro Didático, para as quais daremos mais detalhes a seguir.

Também incluímos no Estudo Principal procedimentos que não fizeram parte da intervenção pedagógica do Estudo Exploratório (Apêndice H), como Exibição e Discussão de Filmes, Aulas Expositivas e Comentários Após a Realização das Atividades. Percebemos que, para avançar além do diagnóstico, seria preciso discutir dúvidas geradas pelos questionários e apresentar aos alunos, o que seria novidade para muitos deles, uma definição de números racionais e irracionais, além de propriedades como densidade e incomensurabilidade, entre outros tópicos relacionados. Também consideramos a Entrevista Final como um momento de intervenção, como explicaremos adiante.

Com respeito à etapa de Avaliação, o objetivo principal foi analisar o impacto da pesquisa para o aluno, isto é, avaliar se ela contribuiu para resolver possíveis conflitos conceituais a respeito de números racionais e irracionais. Essa etapa também levou em conta a Avaliação dos Encontros e a Autoavaliação dos Alunos, realizadas ao final de algumas atividades, mas principalmente na Entrevista Final. Conversas informais também foram consideradas potenciais contribuidoras para a etapa de Avaliação.

Em relação a etapa Questões de Ética, procuramos seguir todas as recomendações no sentido de resguardar a identidade dos alunos, de estar acessível e disposto a esclarecer quaisquer dúvidas referentes ao processo de coleta e análise de dados e de dar retorno desses dados. Todos os alunos que participaram o fizeram de livre e espontânea vontade, preencheram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE, cujo modelo está no Apêndice BB. Além disso, os licenciandos que foram selecionados para a Entrevista Final receberam um primeiro retorno de dados pré-analisados durante a própria entrevista. Dos 7 estudantes que foram entrevistados, selecionamos 3 para uma análise mais minuciosa, e esses receberam ainda um retorno final, quando os dados já se encontravam em sua versão final de análise. Esses 3 alunos preencheram um termo de autorização complementar ao TCLE (Apêndice CC).

A seguir, detalhamos a construção e o planejamento relativos aos procedimentos e instrumentos.

6.2.2.2 – Procedimentos e instrumentos

6.2.2.2.1 - Discussão a respeito de concepções de matemática

Em nossa experiência docente, discussões acerca de concepções de matemática sempre se mostraram propícias para um primeiro contato, no sentido de aproximação aos alunos, e de não proceder, logo no primeiro encontro, ao início da matéria propriamente dita. Apesar de ser um assunto denso, crivado de reflexões filosóficas e aspectos históricos, a forma leve e bem-humorada que temos conduzido essas discussões mostrou-se sempre bem aceita pelos alunos, de tal modo que pensamos em aproveitar essa experiência e fazer o mesmo na pesquisa de campo, antes da aplicação de questionários ou outros instrumentos de pesquisa. Entendemos que essas discussões, apesar de não serem uma finalidade específica da pesquisa, também são importantes para a formação de ideias básicas da matemática como o conceito de número.

Além disso, entendemos que discussões dessa natureza são importantes para a formação do futuro professor de matemática. Crenças relativas à matemática influenciam na prática docente, assim como crenças relativas ao ensino e ao processo de aprendizagem dessa disciplina. Especificamente sobre as crenças e concepções relativas à matemática, aquelas que dizem respeito à natureza do conhecimento matemático desempenham papel central no desempenho da atividade docente. Um professor que tenha uma visão instrumentalista da matemática, isto é, que considera essa disciplina como um acúmulo de fatos, regras e habilidades sem relação umas com as outras, provavelmente conduzirá suas aulas apenas apresentando aos alunos fatos e regras matemáticas. Já um professor que tem uma visão da matemática como ferramenta humana desenvolvida para resolver problemas, possivelmente orientará suas aulas para que o aluno construa a matemática (ERNEST, 1991; GODINO, 2004).

Como o pretensioso título “O que é matemática? ” (Ver Apêndice K - O que é matemática?), os *slides* que utilizamos nessa discussão foram produzidos pelo autor e utilizados em duas oportunidades como introdução da disciplina história da matemática, sendo de tempos em tempos atualizados, conforme encontramos novas leituras e novos olhares. O objetivo desse material, tanto nas aulas de história da matemática quanto nesta pesquisa, não é responder à pergunta que dá título ao material, e sim, levantar discussões que consideramos importantes na formação de professores de matemática, conforme discutimos anteriormente. Estimulamos os alunos a refletirem a respeito de questões como: o que é matemática? Descobrimos ou criamos a matemática? Se criamos a matemática, ela depende de nossa relação com o mundo? Alienígenas criariam a mesma matemática que criamos?

6.2.2.2.2 – Apresentações

Constituiu-se basicamente da apresentação dos alunos e do pesquisador. Consideramos esses procedimentos de vital importância na construção dos laços de confiança que nos referimos acima. A intenção era mostrar aos alunos a pessoa que estava ali atrás do rótulo de ‘pesquisador’, sua história, sua trajetória acadêmica e, principalmente, que essa pessoa não estava interessada apenas em conseguir os dados para sua pesquisa, mas também ajudá-los a crescer durante o curso. Esse deve ser sempre o cuidado e o papel de um pesquisador desenvolvendo uma investigação de caráter qualitativo, pois o pesquisador quer compreender o ambiente da pesquisa de campo e responder seus questionamentos, mas também precisa respeitar e auxiliar os participantes no que eles necessitarem. Os slides intitulados “Apresentação da trajetória do pesquisador” (Ver Apêndice L) foram construídos com esse objetivo.

Também consideramos importante que os alunos estabelecessem laços afetivos não apenas com o pesquisador, mas também uns com os outros, já que teriam que trabalhar em grupos, apresentar e debater ideias e, possivelmente, mostrar suas fraquezas no que concerne aos números racionais e irracionais, bem como à matemática como um todo. Nessa apresentação inicial, pedimos para os licenciandos que se apresentassem e falassem um pouco a respeito de suas intenções e expectativas em relação ao curso de licenciatura em matemática. O objetivo desse procedimento foi começar a conhecer a turma e promover a integração entre os alunos. Também pensamos que foi uma oportunidade ímpar para captar as expectativas iniciais dos alunos em relação à disciplina de Fundamentos, em relação à pesquisa e ao curso de licenciatura em matemática como um tudo. Posteriormente, foi possível comparar esses dados com o sentimento dos alunos no transcorrer e ao final do trabalho.

6.2.2.2.3 – Aulas expositivas

Foram planejadas três aulas expositivas. Na primeira, o tema foi “Pitágoras de Samos” (Apêndice P) e o objetivo era discutir como os pitagóricos lidavam com os números, principalmente a questão da ‘aritmética das pedrinhas’, ou seja, a representação dos números por seixos, pequenas pedras com cantos arredondados. Com esses seixos, os pitagóricos também faziam arranjos sofisticados (números figurados) com elas, o que permitia descobrir propriedades dos números (ver seção 3.2 – O desenvolvimento da incomensurabilidade na Grécia Antiga e o olhar anacrônico sobre a história dos números irracionais). Além de discutir um conteúdo importante para a formação específica do professor de matemática, essa aula, conduzida de forma lúdica, também cumpriu o papel de aproximar o pesquisador da turma. Os números figurados também são essenciais para que se entenda uma das possíveis demonstrações realizadas pelos pitagóricos para a irracionalidade de $\sqrt{2}$ (ver seção 3.2 – O desenvolvimento da incomensurabilidade na Grécia Antiga e o olhar anacrônico sobre a história dos números irracionais).

Na segunda aula, o tema foi "Medir, o que é? " (Apêndice Q). A intenção foi fazer uma apresentação dos números pelo viés da medida, isto é, mostrar os números como uma necessidade do problema da medição, algo semelhante ao que mostramos na seção 2.1 – Medida de um segmento. Pensamos que essa abordagem é uma alternativa para o enfoque tradicionalmente aplicado de números como conjuntos e para resolver o problema da contagem. Na terceira aula expositiva, abordamos o tema "Dízimas periódicas" (Apêndice N). Essa aula surgiu como uma necessidade de estabelecer um acordo em relação à notação e à nomenclatura como dízima simples, composta, parte periódica, parte não-periódica, entre outras.

Outras duas aulas expositivas também foram ministradas ao longo do tempo em que estivemos com a turma – "Função exponencial" e "Inequações exponenciais" – a pedido da professora de Fundamento de Matemática, que precisou se ausentar. Apesar de não planejadas, entendemos que foram oportunidades interessantes para aumentar a confiança da turma no nosso trabalho, e é por isso que apresentamos essas aulas no **Quadro 11** como parte da etapa de Aproximação Com a Turma.

6.2.2.2.4 – Atividades em Grupo

A maioria das atividades em grupo foi aplicada durante a etapa de Intervenção pedagógica. Optamos por esse formato nessa etapa por uma questão de familiaridade (sempre trabalhamos em grupo durante o doutorado) e também porque entendemos que o trabalho em grupo propicia trocas de experiências entre os alunos e favorece a construção do conhecimento. Pesquisas como a de Santos (1993), que estudou vários pesquisadores que focalizaram na aprendizagem que acontece quando alunos estudam e exploram temas matemáticos ao trabalhar em pequenos grupos (2 a 4 alunos), mostram que os alunos aprendem uns com os outros. Na etapa de Aproximação com a Turma, foi planejada apenas uma atividade em grupo, chamada “Números figurados” que se tratava, na verdade, de um complemento da aula expositiva sobre os “Pitagóricos”. Nessa etapa, tanto as aulas quanto essa atividade tinham o objetivo de contribuir com a formação do licenciando, além de promover aproximação do pesquisador com a turma. Mais detalhes adiante.

6.2.2.2.5 – Conversas informais

Entendemos que conversas informais não são procedimentos que podem ser planejados, são situações que acontecem naturalmente ao final de uma aula, no corredor ou no pátio da escola. Esse procedimento fez parte das etapas de Aproximação com a Turma – entendemos que foram e são importantes para criação e manutenção de laços afetivos com a turma, de Diagnóstico – consideramos que as conversas informais também podem produzir dados de pesquisa ao proporcionar aos alunos oportunidades de exporem suas noções e concepções de matemática e de Avaliação – pelos mesmos motivos anteriores.

6.2.2.2.6 – Observação de Aulas

O procedimento Observação de Aulas foi o único da etapa de Observação. Ver seção 6.2.2.1 – Etapas.

6.2.2.2.7 – Aplicação de Questionários

Embora o objetivo principal da nossa pesquisa fosse a questão do número irracional, suspeitávamos a partir do Estudo Exploratório (Apêndice H) que algumas dificuldades com os irracionais poderiam estar relacionadas com alguma ideia ou conceito truncado relativo aos números racionais. Em decorrência dessa constatação, decidimos aplicar dois questionários, sendo um para os números racionais, que será chamado de Q1, e um para os números irracionais, que será chamado de Q2. Nossa intenção com os questionários foi iniciar um diagnóstico dos conhecimentos prévios dos alunos a respeito de números racionais e irracionais e, juntamente com outros instrumentos como observação e entrevistas, triangular as informações e formar uma espécie de portfólio da imagem do conceito de números racionais e irracionais desses alunos.

Usamos uma variedade de apresentações dos números racionais e irracionais nos dois questionários. As principais foram frações de inteiros, frações com raízes quadradas ou π no numerador, dízimas periódicas, dízimas não-periódicas, dentre outras. A ideia de colocar frações de inteiros surgiu a partir da Atividade 6 do Estudo Exploratório (Apêndice H), quando constatamos algo que sequer havia sido considerado. Naquela atividade, tínhamos a intenção que os alunos compreendessem o porquê de toda fração de inteiros ser representada necessariamente por uma dízima periódica e vice-versa. Consideramos que não fomos bem-sucedidos com essa questão, talvez por que a atividade não estivesse bem construída. Mas, essa atividade foi importante nos rumos da nossa pesquisa, pois pudemos aprimorá-la e a partir dela despertamos para uma questão que ainda não havíamos sequer considerado: os alunos reconhecem frações de inteiros como números racionais?

Incluímos frações de inteiros nos dois questionários a partir de uma suspeita que surgiu durante o Estudo Exploratório (Apêndice H), de que alunos converteram as frações para representação decimal, algumas vezes na calculadora[83], para encontrar o período e a partir daí, decidir se é racional ou irracional. As frações $\frac{-3}{14}$, $\frac{13}{23}$ e $\frac{22}{7}$ foram escolhidas para os questionários Q1 e Q2, por apresentarem dízimas periódicas grandes: $-0{,}21\overline{428571}$, $0,\overline{5652173913043478260869}$ e $3,\overline{142857}$, respectivamente, mas também por aparecerem em pesquisas que aplicaram questionários semelhantes como Arcavi, Bruckheimer e Ben-Zvi (1987) e Fischbein, Jehiam e Cohen (1995). Além disso, $\frac{22}{7}$ é uma conhecida aproximação decimal de π. Segundo Vinner (2011), em muitos países até professores reconhecem esse número como irracional. A nossa intenção foi verificar se os alunos classificariam esses números como irracionais ao não visualizar os períodos dessas frações, que são grandes.

6.2.2.2.8 – Entrevistas Iniciais e Finais

Realizamos duas entrevistas semiestruturadas, sendo uma pequena com todos os participantes da pesquisa no início e uma grande com alguns participantes selecionados ao final do trabalho. Nas entrevistas iniciais, obtivemos dados relativos à trajetória escolar pregressa dos alunos, principalmente no que se refere aos primeiros contatos com os números irracionais. Também conhecemos o sentimento que os sujeitos tinham em

[83] Os modelos mais populares de calculadoras possuem 10 dígitos, podendo chegar a 12 dígitos. Algumas calculadoras científicas, computadores ou *smartphones* possuem *softwares* ou aplicativos que realizam operações com mais do que 12 dígitos.

relação a esse tema ou qualquer outra coisa que quiseram falar. A primeira entrevista continha essas três perguntas:

- Há quanto tempo terminou o ensino médio?
- Estudou números irracionais? Como foi? Que livro a professora/escola usava?
- O assunto número irracional é confortável para você? Te traz algum sentimento? Qual?

Entendemos que os dados obtidos com as Entrevistas Iniciais foram importantes para constatar se havia relação entre essa trajetória pregressa e possíveis dúvidas e dificuldades que apresentariam ao longo da pesquisa. Também consideramos essas informações importantes para uma análise dos sujeitos como um todo, como pessoas que tiveram uma história e uma trajetória escolar próprias. Assim, entendemos que esses dados, juntamente com o desempenho do aluno nas atividades propostas na pesquisa, foram importantes para compreendermos como os estudantes pensavam e respondiam a estes questionamentos, conhecê-los um pouco mais e também compreender possíveis erros cometidos pelos licenciandos.

Nas Entrevistas Finais, os alunos foram entrevistados em duplas, com exceção de Agatha, que foi entrevistada sozinha, e para cada dupla foi criado um roteiro específico, baseado em alguns dados pré-analisados de atividades anteriores em que os sujeitos participaram, principalmente nas dificuldades relacionadas aos números racionais/irracionais detectadas. As entrevistas finais foram planejadas para que pudéssemos testar e triangular nossas interpretações dos dados obtidos com as atividades anteriores, já previamente analisadas, além de esclarecer pontos que considerávamos obscuros nessa pré-análise. Além disso, com um contato mais próximo com os alunos, entendemos que foi possível realizar uma avaliação razoável do crescimento e/ou caminhar dos mesmos ao longo do período de realização da pesquisa de campo e do trabalho realizado como um todo.

Fieis ao princípio que a pesquisa qualitativa em si, inclusive cada uma das atividades propostas, deve também contribuir para o crescimento do aluno, procuramos identificar as principais dúvidas refletidas nas atividades realizadas para que as entrevistas também pudessem se tornar mais uma oportunidade de aprendizagem. Também havia abertura para o esclarecimento de qualquer tipo de dúvida do aluno, não apenas em relação aos números, mas em relação à nossa pesquisa ou a qualquer outro assunto direta ou indiretamente relacionado a ela.

As entrevistas foram planejadas previamente e individualmente para cada entrevistado, porém, havia um roteiro comum. A sequência de tópicos abordados foi reconhecimento, representação, definição, densidade, utilidade do racional, existência dos irracionais e a questão emocional, isto é, o sentimento do licenciando em relação aos irracionais, ao seu desempenho na pesquisa e à pesquisa como um todo. Em cada um desses tópicos, o procedimento adotado foi fazer, além das perguntas específicas para cada entrevistado, algumas perguntas que já haviam sido feitas em atividades anteriores, como por exemplo, o que é um número irracional? Quantos irracionais existem entre dois números racionais? Depois, apresentamos para o entrevistado as suas respostas para essas perguntas dadas no início da pesquisa, cerca de quatro meses antes das entrevistas finais.

Entendemos que, ao proceder dessa forma, tornamos cada entrevista como o momento principal de avaliação do trabalho realizado na pesquisa e do desempenho entrevistado, que ao ser confrontado com seus acertos e erros, teve uma nova oportunidade de aprendizagem além de um momento para sua autoavaliação.

Os objetivos das entrevistas finais foram:

a) esclarecer respostas de alguma atividade realizada pelo entrevistado que não entendemos, fechando a fase de diagnóstico;

b) dar um retorno sobre o que escreveram ou falaram ao longo da pesquisa;

c) oportunizar mais um momento de aprendizagem ao estimular que eles autoanalisassem suas respostas e as possíveis incoerências apresentadas;

d) estimular que percebessem o crescimento conquistado, principalmente para aqueles que pareciam estar mais confusos ao final da pesquisa do que no início dela;

e) esclarecer algum ponto importante da teoria que o aluno deu sinais de não ter entendido apropriadamente;

f) fazer uma avaliação conjunta do trabalho realizado.

Em relação à escolha dos alunos para a Entrevista Final, consideramos três parâmetros – frequência nas atividades, a quantidade de erros cometidos nos questionários Q1 e Q2 (entrada) e a quantidade de erros na atividade Equivalência de Definições (saída) – para criar quatro perfis:

Perfil 1: Errou muito na entrada – 10 a 15 erros nos Questionários Q1 e Q2 *e pouco na saída* – 0 a 1 erros na atividade Equivalência de Definições.

Perfil 2: Errou muito na entrada – 10 a 15 erros nos Questionários Q1 e Q2 *e muito na saída* – 2 a 4 erros na atividade Equivalência de Definições.

Perfil 3: Errou pouco na entrada – menos de 10 erros nos Questionários Q1 e Q2 e *muito na saída* – 2 a 4 erros na atividade Equivalência de Definições.

Perfil 4: Errou pouco na entrada – menos de 10 erros nos Questionários Q1 e Q2 e *pouco na saída* – 0 a 1 erros na atividade Equivalência de Definições.

A intenção era selecionar dois alunos em cada um dos perfis. No caso de empate, isto é, mais de dois alunos com o mesmo perfil, utilizamos a frequência nas atividades como critério de desempate. Esses perfis foram criados para não privilegiar apenas um grupo de alunos, os que cometeram menos erros por exemplo. Tampouco para concentrar no grupo daqueles que cometeram mais erros. Criamos os perfis com a intenção de capturar três situações que consideramos possíveis em qualquer pesquisa: houve ganhos significativos – o aluno entrou errando muito e saiu errando pouco (Perfil 1); houve perdas significativas – o aluno entrou errando pouco e saiu errando muito (Perfil 3) e não houve perdas nem ganhos significativos – o aluno entrou errando muito e saiu errando muito (Perfil 2) ou entrou errando pouco e saiu errando pouco (Perfil 4).

Em um sentido amplo, consideramos que todos tiveram algum ganho em participar da pesquisa. Com esse pensamento em mente, poderíamos ter escolhido qualquer aluno para entrevistar. Contudo, notamos nas atividades que foram propostas, nas observações do comportamento da turma durante as aulas da professora de Fundamentos de Matemática, das perguntas durante a aula, nas conversas de corredor e nas gravações realizadas que alguns alunos tornaram sua escrita ou sua fala (ou os dois) mais claras (Perfil 1), mais confusas (Perfil 3) ou indiferentes de como começaram o curso (Perfis 2 e 4). Por isso, tivemos a ideia de criar esses perfis considerando 'ganhos' e 'perdas' em um sentido mais restrito, focalizando exclusivamente a questão de 'arrumação' das ideias relativas à conceituação de números racionais e irracionais, refletidos pelos erros cometidos nos instrumentos que abordavam mais fortemente os conceitos, no caso, os questionários Q1 e Q2 e a Equivalência de Definições.

6.2.2.2.9 – Comentários Após a Realização dos Questionários

A ideia foi dar um retorno imediatamente após a realização dos questionários, comentar algumas respostas, alguns erros cometidos e apresentar uma definição de números racionais e irracionais. Não fizemos comentários após a realização de atividades no Estudo Exploratório (Apêndice H), pois estávamos preocupados em diagnosticar uma imagem do conceito não 'contaminada'. Mudamos essa postura no Estudo Principal por dois motivos. Percebemos que os alunos queriam respostas rápidas para suas dúvidas (alguns chegaram a manifestar sua insatisfação com a ausência de respostas do pesquisador), e também porque entendemos que ao fazer os comentários, contribuímos para o enriquecimento das imagens do conceito dos licenciandos. Ver mais detalhes em 6.2.3 – Dinâmica dos encontros.

6.2.2.2.10 – Correção de Questões e Formulação de Problemas

A ideia principal da atividade Correção de Questões (Apêndice U - Atividade Correção de Questões) foi expor os alunos aos principais erros cometidos por eles nos questionários Q1 e Q2. Foram criadas questões com respostas de alunos fictícios relacionadas aos números racionais e irracionais para os alunos corrigirem como se fossem professores (Apêndice U). Além de cometer os mesmos erros que detectamos nos questionários, esses alunos fictícios também acertaram algumas questões, mas não justificaram adequadamente. Os participantes dessa atividade também deveriam justificar porque atribuíram certo ou errado em cada questão.

O objetivo da atividade Correção de Questões foi verificar se os licenciandos repetiam ou não os mesmos erros cometidos nos questionários Q1 e Q2, assim como estimular a assumirem o papel de professor, a refletir sobre seus erros e até aprender com eles, além de avaliar o comportamento dos alunos ao serem expostos a outros tipos de erros, diferentes daqueles que cometeu. Avaliamos que a metacognição[84] é uma das questões

[84] A ideia de trabalhar com atividades que abordassem questões relacionadas à metacognição foi uma decisão natural, considerando-se o histórico do autor e de sua orientadora. O autor utilizou metacognição em sua dissertação de mestrado (BROETTO, 2004). Sua orientadora também trabalhou com o tema em sua tese de doutorado (SANTOS, 1993). Além disso, nas atividades realizadas durante o doutorado, sempre

centrais trabalhadas por essa atividade, por isso discorreremos brevemente a esse respeito a seguir.

Em nossa concepção, a metacognição envolve o pensar sobre o pensamento, o refletir acerca do que se sabe e do que não se sabe, seja a respeito de um assunto, seja quando uma tarefa está sendo resolvida. A metacognição envolve também o pensar sobre a seleção e o controle de estratégias adotadas na realização de alguma tarefa. Para Rocha, Santos-Wagner e Broetto (2013),

> A metacognição também auxilia a compreensão de conceitos matemáticos e a aquisição de processos mais complexos de raciocínio, pois oferece ao indivíduo possibilidades de ser desafiado a construir (e/ou reconstruir) seu próprio conhecimento e analisar e gerenciar os mesmos (p. 4).

Então, quando buscamos conscientemente analisar e avaliar um plano que utilizamos na resolução de um determinado problema, ou mesmo as estratégias usadas na resolução, nós estamos envolvidos em atividades e ações metacognitivas. São processos complexos que precisam ser ensinados, pois nem todas as pessoas os desenvolvem de forma natural (GAROFALO; LESTER, 1985; SANTOS, 1994, 1995; SCHOENFELD, 1992).

Para realização da tarefa, dividimos a turma em grupos pequenos, agrupados de acordo com as semelhanças das dificuldades detectadas e dos erros cometidos nos questionários. As dificuldades apresentadas nos questionários relativas ao reconhecimento e/ou conceituação dos racionais e/ou irracionais que foram usadas para a criação dos grupos foram:

- Representação decimal dos racionais/irracionais (Grupo 1)
    - Alguns alunos associaram racional com padrão, regularidade, mas não diferenciam bem padrão de dízima periódica.
- Relação entre a divisão ser/não ser exata e a classificação em racional/irracional (Grupo 2);
    - Alguns alunos fizeram as divisões na calculadora e, mesmo se tratando de uma divisão de inteiros, como não viram o período na calculadora, eles classificaram o número como irracional.

---

fomos estimulados a pensar sobre o pensar, isto é, a nos tornarmos metacognitivamente mais aptos a lidar com diversas situações envolvendo o ensino e a aprendizagem de matemática.

- Relação entre ser/não ser racional/irracional e a possibilidade de escrita em forma de razão de inteiros (Grupo 3)
    - Alguns alunos associaram racional com fração, sem se atentar para o detalhe dos números serem inteiros.

Em relação à formulação de problemas, porque se trata de uma tendência da educação matemática apontada, desde a década de 1940, por nomes como Polya e Freudenthal como parte da experiência matemática do estudante (SILVER; MAMONA-DOWNS; LEUNG; KENNEY, 1996). Esses pesquisadores e outros defendem que devemos explorar tarefas de resolver e formular problemas em sala de aula. Nas décadas de 1980 e 1990, o *National Council of Teachers of Mathematics* recomendou que fosse dada ênfase na formulação de problemas em sala de aula. Recomendava-se que os estudantes deveriam *ter alguma experiência reconhecendo e formulando seus próprios problemas, uma atividade que está no coração do fazer matemático* (NCTM, 1989, p. 138, tradução nossa). Também apontava que *aos estudantes também deve ser dada a oportunidade de formular problemas a partir de situações dadas e criar novos problemas por meio da modificação das condições do problema dado* (NCTM, 1991, p. 95, tradução nossa).
Mais recentemente, a formulação de problemas já aparece nas recomendações do NCTM como uma atividade que auxilia na aprendizagem de matemática. Planilhas eletrônicas, softwares de geometria dinâmica e micromundos gerados por computador são ferramentas úteis para formulação de problemas que valem a pena (NCTM, 2000). Diversos autores também apontam nesse sentido, de que a formulação de problemas tem relação com o estímulo da criatividade e com a própria aprendizagem de matemática (SILVER et al. 1996; BROWN; WALTER, 2005; PINHEIRO; VALE, 2013).

Em nossa pesquisa, o objetivo da atividade de Formulação de Problemas foi obter uma nova ‘fotografia’ do que o licenciando trazia de suas experiências anteriores a respeito do número irracional. As outras fotografias que tiramos foram os questionários Q1 e Q2 e a Entrevista Inicial, sendo que essas tinham sugestões, números para classificar, enfim, apresentavam algo para o sujeito. A atividade de formulação foi uma oportunidade para avaliar o que eles apresentavam e evidenciavam sobre o tema quando tinham liberdade total para decidir e pensar em como formular problemas relativos a números irracionais. É claro que as questões que já tinham sido apresentadas influenciaram, e era esperado que surgissem muitas questões de classificação em racional ou irracional, por isso, tivemos a ideia de entregar uma segunda folha em separado da primeira, e pedir que elaborassem uma questão que não fosse de classificação em racional ou irracional (Apêndice X).

6.2.2.2.11 – Análise de Livros Didáticos

O objetivo desta atividade foi proporcionar aos alunos mais uma oportunidade de contato com definições de racionais e irracionais, no contexto de outra atividade própria do trabalho docente, a análise de livros didáticos. Temos ciência que uma análise profunda de um material didático é tarefa para especialistas no assunto. Mas, entendemos também que o futuro professor de matemática precisa começar a aprender a direcionar o seu olhar para pontos importantes quando pegar um livro de matemática para folhear. Dessa forma, pretendíamos que essa atividade de análise de livros fosse apenas o primeiro passo nesse sentido.

Dividimos a análise em três tópicos: primeiras impressões, dízima periódica e números irracionais. Nas primeiras impressões, foram analisados título, capa e contracapa do livro escolhido, e estimulamos os alunos a pensarem a respeito de questões como 'que imagem de matemática é transmitida por esse título? E por essa capa? ' Em relação às dízimas, pedimos que procurassem se esse ponto estava bem esclarecido, se havia algum tipo de acordo explícito ou se o acordo era tácito, ou seja, era implícito. Em relação aos números irracionais, pedimos que encontrassem a definição, os primeiros exemplos e os tipos de exercícios propostos, principalmente que verificassem se os exercícios iam além da questão do reconhecimento.

Elaboramos um roteiro para essa atividade (Ver Apêndice V - Análise de Livros Didáticos) em que os estudantes manusearam livros didáticos procurando:

- Tratamento do assunto dízima periódica;
- Existência de um acordo (explícito ou tácito) ou cuidados com o uso das reticências (os três pontinhos);
- O traço como um recurso adicional de representação;
- Definição de número irracional.
- Utilização de diagramas para representar $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Como identificar um irracional representado por radicais.

Sabemos que o livro didático de matemática desempenha um papel importante nas aulas de matemática. Ele auxilia o professor no planejamento e na execução das aulas, pois, em geral, o livro didático traz o conteúdo organizado de uma forma testada e validada por pesquisas ou pela própria sucessão de modificações realizadas pelos autores ao longo do tempo. O livro também auxilia os alunos, pois apresenta exemplos, exercícios e atividades relacionadas aos conteúdos por ele abordados. Como quase sempre é o próprio professor (ou grupos de professores) que escolhe o livro que será adotado, entendemos que o licenciando precisa ter contato o quanto antes com a tarefa de realizar uma análise de livros didáticos. Sabemos que se trata de uma tarefa complexa, estudada por especialistas, mas nossa intenção, ao desenvolver esse material, foi apenas exemplificar concretamente como esse procedimento pode ser feito.

6.2.2.2.12- Incomensurabilidade

O instrumento utilizado nessa atividade surgiu a partir de uma questão retirada de Soares, Ferreira e Moreira (1998). Na verdade, essa questão tornou-se a segunda questão do nosso instrumento e inspirou-nos também a criar a primeira questão (ver Apêndice Y - Incomensurabilidade). Trata-se praticamente da mesma coisa, dividir um retângulo em um número inteiro de quadrados iguais. Porém, na questão que retiramos de Soares, Ferreira e Moreira (1998, p. 88), são fornecidos valores numéricos para as dimensões do retângulo, enquanto na questão que elaboramos, criamos uma situação em que as medidas do retângulo são fixas, pois se trata de uma parede, enquanto os quadrados podem variar, pois são azulejos que podem ser encomendados, inclusive com as dimensões que se queira. Achamos que seria mais interessante trazer primeiro uma questão mais genérica de incomensurabilidade, para avaliar se esse conceito estava presente de uma forma mais pura; isto é, sem fazer as sugestões que eram feitas na questão de Soares, Ferreira e Moreira (1998) ao colocar valores numéricos.

A situação em que o azulejo pode ser encomendado da fábrica com dimensões tão pequenas quanto se queira foi criada para averiguar se os licenciandos tinham um *background* desfavorável à ideia de que, em alguns casos, é impossível cobrir a parede sem cortar algum azulejo (FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995). Isso é equivalente à ideia de que existem segmentos incomensuráveis, ou seja, que não podem ser medidos por uma unidade comum aos dois segmentos. Segundo Fischbein, Jehiam e Cohen (1995), esse *background* é algo que os alunos trazem de experiências anteriores ao longo de sua trajetória escolar, e que formam crenças como a de que quaisquer segmentos são comensuráveis.

6.2.2.2.13 – Medida de Segmentos

Essa atividade, cujos itens foram todos inspirados, retirados e adaptados de Miguel (2009), forma um par com a aula expositiva “Medir, o que é?”. Após uma aula em que explicamos no que consiste efetuar uma medida, e como os números naturais, racionais e irracionais aparecem naturalmente nesse processo, aplicamos uma atividade em que os licenciandos puderam realizar medidas na prática. Para isso, levamos, juntamente com as fichas da atividade (Apêndice Z - Medida de segmentos), compassos para todos os estudantes.

A intenção dessa atividade foi levar o licenciando a compreender, a partir da técnica de antifairese (subtrações sucessivas), a incomensurabilidade da diagonal com o lado de um quadrado a partir de um argumento geométrico. Essa prova, quando é feita, em geral utiliza argumentos algébricos e, por isso, entendemos que uma prova geométrica poderia contribuir para o esclarecimento de alguns pontos. Além disso, essa atividade também possibilitaria uma outra visão da incomensurabilidade, como resultado de um processo de comparação que não tem fim.

6.2.2.2.14 – Equivalência de definições

Uma vez que as principais definições de número racional são i) número que pode ser escrito como fração de inteiros e ii) número que pode ser escrito como uma dízima periódica, o objetivo da atividade foi fazer com que o aluno percebesse que essas colocações são equivalentes, isto é, se um número pode ser escrito em forma de fração de inteiros então sua dízima será periódica e vice-versa. Uma vez esclarecido isso, a etapa seguinte foi trabalhar a equivalência das negações, isto é, se um número NÃO pode ser escrito em forma de fração de inteiros então sua dízima NÃO será periódica, e vice-versa.

A intenção dessa atividade foi aprimorar a Atividade 6 do Estudo Exploratório (Apêndice J – Atividades aplicadas no Estudo Exploratório), que, na nossa avaliação, não foi bem-sucedida. Naquela ocasião, a sequência de atividades ia muito direto ao ponto, isto é, não dava tempo de o aluno perceber a relação entre o número limitado de restos possíveis em uma divisão de inteiros e a formação da parte periódica no quociente dessa divisão. Para a atividade reformulada, cada grupo ficou com diversas frações, todas com um mesmo denominador. A intenção foi que percebessem que a sequência de restos se mantém a mesma quando efetuamos as divisões, e que essa sequência dá origem à parte periódica da representação decimal da fração. A ideia dessa atividade partiu da leitura de Lima (1996).

6.2.3 – Dinâmica dos encontros

Nessa seção descrevemos como e quando se deu a aplicação das atividades e as circunstâncias em que foram realizadas. Iniciamos com um quadro que apresenta uma visão geral de tudo que foi feito em cada encontro, com a data, procedimentos realizados e material utilizado, além da duração de cada atividade (Quadro 12).

Quadro 12- Atividades e materiais utilizados no Estudo Principal

Data	***Procedimento***	***Instrumentos***	***Duração (h)***
5/5/14	✓ Apresentações (licenciandos). ✓ Discussão a respeito de concepções de matemática.	✓ "O que é matemática? " (*slides*)	2
7/5/14	✓ Observação de aulas.	-	2
8/5/14	✓ Idem	-	2
12/5/14	✓ Apresentações (pesquisador). ✓ Aplicação de questionários. ✓ Avaliação do encontro.	✓ Apresentação da trajetória acadêmica do pesquisador (*slides*). ✓ Questionário Q1. ✓ Ficha própria.	2
14/5/14	✓ Aplicação de questionários. ✓ Comentários após a realização de atividades (resultados do Q1). ✓ Avaliação do encontro.	✓ Questionário Q2. ✓ Quadro e pincel. ✓ Ficha própria.	2
15/5/14	✓ Comentários após a realização de atividades (resultados do Q2). ✓ Exibição e discussão de filmes. ✓ Avaliação do encontro.	✓ Quadro e pincel. ✓ "The Story of Maths" (1º episódio). ✓ Debate. ✓ Ficha própria.	2
19/5/14	✓ Aula expositiva.	✓ "Contagem" (*slides*)	2
21/5/14	✓ Entrevista Inicial. ✓ Correção de Questões.	✓ Apresentação oral ✓ Ficha própria.	3
22/5/14	✓ Aula expositiva. ✓ Análise de Livros Didáticos. ✓ Avaliação do encontro.	✓ "Dízimas periódicas" (*slides*). ✓ Ficha própria. ✓ Ficha própria.	2
26/5/14	✓ Análise de Livros Didáticos (feita pelo pesquisador).	✓ "Análise de Livros Didáticos" (*slides*).	2
28/5/14	✓ Aula expositiva. ✓ Atividade em grupo.	✓ "Pitágoras de Samos" (*slides*). ✓ "Números figurados" (ficha própria)	2
29/5/14	✓ Correção de Questões (para alunos que faltaram).	✓ Ficha própria.	-
2/6/14	✓ Comentários após realização de atividades (números figurados). ✓ Formulação de problemas.	✓ Quadro e pincel. ✓ Ficha própria.	2

16/6/14	✓ Observação de apresentações de trabalhos (apresentados pelos licenciandos).	-	2
18/6/14	✓ Idem.	-	2
25/6/14	✓ Idem.	-	2
26/6/14	✓ Idem.	-	2
14/7/14	✓ Incomensurabilidade	✓ Ficha própria	2
16/7/14	✓ Aula expositiva.	✓ "Medir, o que é? " (*slides*).	2
17/7/14	✓ Medida de Segmentos.	✓ Ficha própria.	2
25/8/14	✓ Equivalência de Definições	✓ Ficha própria.	2
27/8/14	✓ Função exponencial (aula expositiva).	✓ Notas de aula.	2
28/8/14	✓ Inequações exponenciais (aula expositiva)	✓ Idem	2
		SUBTOTAL:	**45**
4/9/14	✓ Entrevista Ulysses e Titus	-	2
11/9/14	✓ Entrevista Calvin e Cyrus	-	3
12/9/14	✓ Entrevista Calvin e Cyrus (continuação).	-	
15/9/14	✓ Entrevista Osana e Felix.	-	1,33
16/9/14	✓ Entrevista Agatha.	-	1,37
		TOTAL:	**52,7**

Fonte: Elaborado pelo autor.

No primeiro encontro com a turma, em 5/5/14, a intenção foi conhecer as pessoas que estavam ali e que gentilmente concordaram em participar da nossa pesquisa, além de abordar questões relativas às concepções de matemática. Na primeira parte do encontro, apresentamo-nos brevemente e pedimos que fizessem o mesmo, dizendo o nome, porque escolheram licenciatura em matemática e o que esperavam do curso. Na segunda parte do encontro, discutimos o que é matemática a partir de uma apresentação de slides intitulada "O que é matemática" (Apêndice K).

Nos dois encontros seguintes, em 7/5/14 e 8/5/14, assumimos a postura de observador das aulas do professor da disciplina de Fundamentos de Matemática. Foram observadas doze aulas com duração de uma hora cada uma, totalizando doze horas de observações. Dessas doze aulas, oito foram apresentações de trabalhos elaborados pelos alunos a respeito de números. Não fizemos intervenções de qualquer natureza durante esses encontros. Durante os dez encontros seguintes, em um total de vinte horas no período de quatro semanas, assumimos a turma integralmente, podendo aplicar os instrumentos do diagnóstico inicial (questionários Q1 e Q2) e as quatro primeiras atividades em grupo, além de ministrar quatro aulas expositivas com duplo papel, coletar dados para a nossa pesquisa e contribuir com o andamento da disciplina, conforme acordado com a professora (Ver **Quadro 12**).

No primeiro desses dez encontros, em 12/5/14, fizemos uma apresentação mais detalhada sobre minha trajetória acadêmica, culminando com o projeto de pesquisa do doutorado. Também falamos a respeito da pesquisa em linhas gerais e da ética da pesquisa, apresentando o TCLE (Apêndice BB), além de esclarecer algumas dúvidas dos alunos sobre a diferença entre mestrado e doutorado e as diferenças de uma pesquisa em matemática e em educação matemática. Em seguida, dando sequência à fase de diagnóstico, aplicamos o Questionário Q1 (Apêndice R) que trata de números racionais. Ao final, pedimos que avaliassem o encontro, o questionário e também que se auto avaliassem (Apêndice T).

O encontro seguinte, em 14/5/14, também foi divido em dois momentos. No primeiro, aplicamos o Questionário Q2 (Apêndice S) a respeito dos números irracionais e, no segundo momento, apresentamos para os alunos alguns resultados já tabulados sobre o questionário Q1. Surgiram diversas dúvidas em relação à representação e à definição nesse momento, relativas não apenas aos racionais, mas também aos irracionais. Respondemos às dúvidas de representação e apresentei a seguinte definição de números racionais, números que podem ser representados da forma a/b com a e b inteiros e $b \neq 0$, que, por sua vez, provocou outras dúvidas. Apresentaremos detalhes da discussão e das dúvidas dos alunos mais adiante (Ver Capítulo 7 – Apresentação e análise dos dados). A exemplo do encontro anterior, ao final do encontro, pedimos aos alunos que avaliassem o encontro, o questionário e também que se auto avaliassem (Ver Apêndice T – Formulários de avalição de encontros do Estudo Principal).

Aqui existiu uma diferença importante em termos metodológicos em comparação com o que fizemos antes. No Estudo Exploratório (Apêndice H), o questionário foi aplicado depois dos alunos terem apresentado trabalhos referentes a conjuntos numéricos, inclusive números irracionais, e do professor haver explicado e discutido o assunto com a turma. No Estudo Principal, aplicamos os questionários na segunda semana de aula do semestre, e antes do professor de Fundamentos realizar qualquer intervenção ou comentário em relação a números racionais e irracionais, o que nos proporcionou uma leitura mais fidedigna de como os alunos chegam até a licenciatura em matemática do Ifes no que se refere a números racionais e irracionais.

No encontro seguinte, em 15/5/14, levamos até os alunos alguns resultados do Questionário Q2. À medida que apresentávamos os resultados da primeira questão do Q2, exibimos a relação de equivalência entre a representação com dízima periódica e a representação como fração de inteiros, e a consequente relação dos irracionais com a dízima não-periódica, da seguinte forma:

$$\text{racional}\begin{cases}\text{pode ser escrito em forma de fração de inteiros}\\ \Updownarrow\\ \text{possui dízima periódica ou decimal exata}\end{cases}$$

$$\text{irracional}\begin{cases}\text{NÃO pode ser escrito em forma de fração de inteiros}\\ \Updownarrow\\ \text{possui dízima NÃO-periódica}\end{cases}$$

Fomos bastante sucintos, não entramos em detalhes de como se dá essa relação porque isso seria tratado nas atividades seguintes. E, novamente, surgiram algumas dúvidas durante a apresentação desses dados (Ver Capítulo 7 – Apresentação e análise dos dados). Em seguida, apresentamos para eles um trecho do primeiro episódio do documentário *The Story of Maths* (2008), que trata sobre o surgimento dos primeiros sistemas numéricos, dos egípcios, babilônios, chineses, gregos, árabes e indianos. Ao final da aula, os alunos avaliaram todo o encontro (Ver Apêndice T – Formulários de avalição de encontros do Estudo Principal).

No encontro seguinte, em 19/5/14, abordamos o tema contagem (Apêndice M). Falamos do processo de se contar, que passa pela bijeção com os naturais, falamos na enumerabilidade dos inteiros e dos racionais, inclusive apresentando o processo de diagonalização de Cantor (**Figura 13**). Comentamos sobre a não enumerabilidade dos irracionais, mas não aprofundamos na discussão, nem foi apresentado o argumento de Cantor, conforme **Figura 14**.

A atividade Correção de Questões foi realizada nos dias 21 e 29 de maio de 2014, nos horários das aulas de Fundamentos e também nos horários de outras disciplinas. Os estudantes eram retirados da sala de aula com a permissão do professor, em pequenos grupos, sendo um grupo de cada vez, e levados para uma outra sala para a realização da atividade. Dezoito sujeitos participaram desta atividade, sendo três agrupamentos de quatro alunos (Grupos 1, 2 e 4), realizados no dia 21, com duração aproximada de uma hora para cada e um agrupamento de seis alunos (Grupo 3) realizado no dia 29, durante aproximadamente cinquenta minutos. Uma vez acomodados em uma sala reservada, os integrantes de cada grupo responderam a uma pequena entrevista previamente estruturada, que chamamos de Entrevista Inicial. Perguntamos a cada um: 'há quanto tempo terminou o ensino médio? Estudou números irracionais? Como foi? Que livro a professora/escola usava? O assunto número irracional é confortável para você? Te traz algum sentimento? Qual? '

Em seguida, entregamos uma ficha contendo alguns números e pedimos que classificassem como racionais ou irracionais. Essa ficha continha quatro representações decimais infinitas (grupo 1), quatro frações de inteiros (grupo 2), quatro frações variadas (grupo 3) e uma mistura de todas essas coisas (grupo 4). A ficha seguinte trazia as respostas de um aluno fictício para as mesmas questões da ficha anterior, com justificativas em cada resposta. Pedimos que os licenciandos assumissem o papel de professor e dessem certo ou errado nessas questões. A terceira ficha (apenas para os grupos 1, 2 e 3) continha as respostas de um outro aluno fictício para as mesmas questões da primeira ficha entregue. A quarta ficha, apenas para o grupo 2, continha as respostas de um terceiro aluno fictício para as mesmas questões da primeira ficha entregue. Todas as fichas utilizadas nessa atividade estão no Apêndice U. Na sequência, promovemos um debate com todos os alunos de cada grupo. Pedimos a eles que justificassem, ficha por ficha, item por item, as classificações em racional ou irracional que fizeram, bem como os certos ou errados que deram. Todos os encontros, incluindo entrevistas e os debates, foram gravados em áudio com a anuência dos alunos.

O encontro do dia 22 de maio de 2014 teve três momentos distintos. No primeiro momento, fomos ao quadro explicar três coisas (os *slides* produzidos para essa parte da aula estão no Apêndice N):

- Definição e classificação das dízimas
    - Percebemos que deveríamos explicar esses pontos relacionados à dízima periódica, pois havíamos falado por várias vezes em "dízima infinita periódica" em aulas anteriores, e um aluno disse nunca ter ouvido falar nisso. De fato, o termo dízima já traz em si a questão do infinito, isto é, toda dízima é infinita. A homogeneização da linguagem fez-se necessária,

pois é algo essencial para evitar problemas de comunicação e de aprendizagem na matemática.

- Como reconhecer se uma raiz quadrada é um número irracional
    - Essa foi uma dúvida levantada por uma aluna em uma das primeiras aulas. Achei que o momento também era oportuno para explicar brevemente essa questão.
- A questão das reticências
    - Visando evitar uma possível polarização da discussão do número irracional apenas em torno desse tema, como ocorreu no Estudo Exploratório (Apêndice H), também achamos por bem destinar alguns minutos para a discussão desse assunto.

No segundo momento, aplicamos a atividade Análise de Livros Didáticos (Apêndice V - Análise de Livros Didáticos). Os alunos foram divididos em duplas para analisar livros de 8º ou 9º ano do ensino fundamental ou 1º ano do ensino médio que eles trouxeram (na aula anterior havíamos pedido que trouxessem seus livros). Entregamos a eles o roteiro para análise (ver 6.2.2.2.11 – Análise de Livros Didáticos) e passei a circular entre os grupos para auxiliar no que fosse preciso. Ao manipularem os livros, os alunos tiveram várias dúvidas pontuais e também de cunho geral, relacionadas à definição e à representação dos irracionais, que não foram esclarecidas no momento, pois tratavam-se de questões que seriam abordadas nas atividades posteriores.

No terceiro e último momento, os alunos avaliaram o encontro por meio de uma ficha (Ver Apêndice W). Também realizamos a mesma atividade que foi proposta aos alunos. Escolhemos um livro para analisar e seguimos o mesmo roteiro que propusemos a eles. Colocamos tudo em slides que foram apresentados no encontro seguinte (ver Apêndice O). O livro escolhido foi Giovanni Jr. e Castrucci (2009), mas também mostramos diversas capas e títulos que encontramos na Internet.

No encontro seguinte, em 28/5/14, o assunto foi números figurados. Falamos dos pitagóricos (Ver Apêndice P) e em seguida aplicamos uma atividade referente a números figurados. No encontro de 29/5/14, aplicamos a atividade Correção de Questões para os alunos que haviam faltado na primeira aplicação. A mesma dinâmica foi adotada, porém, participaram dessa vez seis alunos. No último desses dez encontros tecemos alguns comentários a respeito da atividade de números figurados, principalmente no que se refere às demonstrações, pois percebemos que os alunos não sabiam o que era e nem como fazer uma demonstração.

Ainda nesse encontro, os licenciandos realizaram a atividade Formulação de Problemas. Foram divididos em duplas, e cada uma recebeu uma ficha com o roteiro da atividade (ver Apêndice X). Observamos que nessa atividade os licenciandos formularam algumas questões que, na verdade, refletiam curiosidades que eles tinham em relação a algum aspecto dos números irracionais que gostariam de saber, como, por exemplo, de que forma se pode provar que π é um número irracional? Nos quatro encontros seguintes, 16, 18, 25 e 26 de maio de 2014 observamos a apresentação de trabalhos em grupos a respeito de números. No encontro do dia 14/7/14 realizamos a Incomensurabilidade (ver Apêndice Y). Em seguida os alunos avaliaram o encontro (ver Apêndice T – Formulários de avalição de encontros do Estudo Principal).

A aula de 16/7/14 foi expositiva, com o tema "Medir, o que é? " (Ver Apêndice Q), e a aula seguinte, em 17/7/14, contou com a atividade Medida de Segmentos (ver Apêndice Z) e com uma avaliação da atividade. Infelizmente apenas 6 licenciandos estiveram presentes na atividade Medida de Segmentos, o que nos levou a querer aplicá-la novamente em outra oportunidade. Essa oportunidade surgiu na IV Semana de Matemática do Ifes, evento organizado pela Coordenadoria de Matemática do Ifes Vitória e pela SBEM – ES. Novamente a frequência de público foi muito baixa, mas, apesar disso, pudemos refletir a respeito de algumas dificuldades surgidas durante a execução das medidas por parte dos alunos. O compasso gera muitas imprecisões e alguns sujeitos não conseguiam obter o que esperávamos que obtivessem. Pensamos que, em uma nova oportunidade, seria interessante tentar adaptar a atividade para algum ambiente virtual como o GeoGebra.

O encontro seguinte, em 25/8/14, tratou da atividade Equivalência de definições (ver Apêndice AA). Essa atividade teve sua parte inicial realizada em duplas e uma parte final que foi individual. Observamos muitas dificuldades e até algumas reclamações por parte das duplas que ficaram com as frações com denominadores maiores, como 13 e 17. Por serem muito grandes, as contas faziam com que alguns grupos parassem de fazer as divisões antes de encontrar os períodos das representações decimais dessas frações. No geral, avaliamos como positiva a aplicação dessa atividade em relação à primeira experiência no Estudo Exploratório (Apêndice J – Atividades aplicadas no Estudo Exploratório), porém, concluímos que seria melhor ainda se houvesse mais tempo para a realização da mesma. Talvez dois ou três encontros seria o tempo ideal para efetuar as contas, discutir e amadurecer a ideia de que a sequência periódica de restos gera a sequência periódica no quociente.

As Entrevistas Finais foram conduzidas por nós e realizadas no próprio Ifes, em horários previamente agendados com os alunos, sendo todas gravadas em áudio com o consentimento dos participantes e posteriormente transcritas na íntegra (apenas duas por enquanto, restando duas ainda por transcrever). Planejamos entrevistar nove alunos, mas apenas sete compareceram, de forma que três entrevistas foram realizadas com duplas de alunos e uma entrevista com uma única aluna. Ao selecionar os alunos de acordo com os perfis traçados (seção 6.2.2.2.8 – Entrevistas Iniciais e Finais), percebi que, dos oito alunos selecionados, havia três duplas que trabalharam juntas em quase todas as atividades. Resolvemos que esses agrupamentos seriam mais naturais para realizar a entrevista, pois muitas das perguntas poderiam ser direcionadas aos dois entrevistados. Ou seja, duplas que trabalharam juntas em algumas atividades foram entrevistadas juntas, mesmo que os perfis por nós criados fossem diferentes.

Foram entrevistas longas, com duração variando entre uma hora e meia a três horas, porém muito proveitosas e com ganhos para ambas as partes. Para nós, foi possível esclarecer dúvidas, entender as respostas dos alunos para algumas questões propostas, avaliar o desempenho dos alunos ao longo do trabalho, além de perceber algumas falhas na elaboração e aplicação dos instrumentos. Para os entrevistados, além de esclarecerem nossas dúvidas, puderam rever seus erros, tirar dúvidas que permaneciam em relação aos números racionais e irracionais, entender melhor a proposta da nossa pesquisa, aprender um pouco mais a respeito desses números, além de avaliar suas próprias participações na pesquisa. Especificamente no que se refere ao diagnóstico, cruzamos e triangulamos os dados obtidos nos questionários e atividades com o que foi falado pelos alunos na Entrevista Final. Dessa forma, testamos possíveis hipóteses elaboradas com os dados colhidos nas atividades anteriores à entrevista.

Capítulo 7 – Apresentação e análise dos dados

Exceto na matemática pura (e, na verdade, nem mesmo nesse caso), não há certezas no conhecimento.

Carl Sagan

A apresentação e análise dos dados referentes ao Estudo Principal foram realizadas em duas etapas. Na primeira etapa, apresentamos os dados referentes aos licenciandos ingressantes de 2014, de acordo com quatro dos seis aspectos do conhecimento relativo aos números racionais e irracionais que abordamos ao longo de nossa pesquisa, que foram: reconhecimento, definição, propriedades (apenas a densidade) e existência dos irracionais (Maiores detalhes na seção 6.1 – Itinerário de pesquisa). Para cada um desses aspectos, analisamos os dados da turma como um todo, em paralelo com as respostas de alguns participantes para realizar uma análise qualitativa e também para ilustrar a variedade de respostas obtidas em cada item. Também comparamos, quando possível, os dados que obtivemos no Estudo Principal com os dados obtidos no Pequeno Estudo Diagnóstico (Apêndice G) e no Estudo Exploratório (Apêndice H), além de comparar com os dados obtidos por outras pesquisas.

Na segunda etapa, à luz do referencial teórico adotado, recuperamos, sistematizamos e analisamos os dados referentes a 3 licenciandos selecionados. A princípio, a intenção era analisar e apresentar os dados dos 7 alunos entrevistados, mas, devido à grande quantidade de material, optamos por apresentar os 3 que nos deram maior riqueza de detalhes na Entrevista Final acerca de como pensaram para resolver as questões propostas pela nossa pesquisa.

7.1 – Análise geral da turma

7.1.1 – Reconhecimento

Os dados referentes ao reconhecimento de números racionais e irracionais foram coletados durante três etapas. Na etapa de Diagnóstico pela primeira questão dos Questionários Q1 e Q2, na etapa de Intervenção Pedagógica, principalmente na atividade de Correção de Questões e, na etapa de Avaliação, durante as Entrevistas Finais. Avaliamos o reconhecimento de frações, representações fracionárias com raiz quadrada ou π no numerador, dízimas periódicas, dízimas não-periódicas e outras, que serão apresentadas a seguir, conjuntamente com sua análise.

7.1.1.1 – Frações

Em relação às frações presentes nos Questionários Q1 e Q2 (Ver **Quadro 13**), os resultados majoritários foram: 15 sujeitos (62,5%) não consideraram $\frac{-3}{14}$ como um número racional, 18 sujeitos (75%) consideraram $\frac{22}{7}$ um número racional e 10 sujeitos (43%) consideraram $\frac{13}{23}$ um número irracional (empatado com o número de sujeitos que consideraram essa fração um número racional). Frente a esses dados, entendemos que pelo menos duas perguntas precisam ser respondidas: o que levou a maioria dos sujeitos a não considerar as frações apresentadas como números racionais, ou, a considerá-las como números irracionais? Por que $\frac{22}{7}$ obteve um índice de acertos maior do que $\frac{-3}{14}$ e $\frac{13}{23}$?

Quadro 13 - Desempenho da turma e dos alunos selecionados em relação ao reconhecimento de frações de inteiros nos Questionários Q1 e Q2

Frações de inteiros	**Turma**		**Ernest**	**Ulysses**	**Cyrus**	**Inst.**	**Data**
$\frac{-3}{14}$ é racional?	Sim	8	Não.	Não.	Não.	Q1	12/5/14
	Não	15	O resultado é uma dízima não periódica.	Não apresenta regularidade.	Divisão inexata.		
	E/B	1					
$\frac{22}{7}$ é racional?	Sim	18	Não.	Não.	Não.		
	Não	6	Pois o resultado da divisão não será uma dízima periódica 3,14285...	Não apresenta regularidade.	Divisão inexata.		
	E/B	0					
$\frac{13}{23}$ é irracional?	Sim	10	Sim.	Sim.	Sim.	Q2	14/5/14
	Não	10	Pois o resultado é uma dízima não-periódica.	Não apresenta regularidade em sua forma escrita.	Divisão inexata.		
	E/B	3					

Legenda: E/B – Em branco.

Fonte: Elaborado pelo autor.

As justificativas de Ernest, Ulysses e Cyrus, destacadas no Quadro 13, levaram-nos a pensar na hipótese que levantamos durante o Estudo Exploratório (Apêndice H) que alguns sujeitos decidem se frações são racionais ou não após tentar convertê-las para representação decimal. Como as três frações em questão possuem uma longa parte periódica, esses licenciandos consideraram-nas irracionais por não terem visualizado a dízima periódica, a regularidade ou o 'fim' da divisão. Pudemos confirmar essa hipótese nas entrevistas finais realizadas com Ulysses, Cyrus, Titus e Agatha e, é provável que o mesmo tenha ocorrido com Ernest. Isso responde à primeira pergunta.

Encontramos em uma pesquisa um relato de um professor que ofereceu $9/14$ como exemplo de número irracional e ao ser indagado como havia chegado a essa conclusão, ele disse que *em forma de fração é racional, mas se dividirmos é irracional* (COSTA, 2008, p. 66 apud MOSCA, 2013, p. 21) [85]. Sua justificativa deixa claro o que ele fez, dividiu, e como a parte periódica de $9/14$ tem seis casas decimais, é provável que o mesmo tenha ocorrido com esse professor; isto é, ao não visualizar a parte periódica, considerou o número como irracional. Também não podemos deixar de destacar a dualidade do número segundo a concepção desse professor, que pode ser racional ou irracional, de acordo com a representação. Aqui pensamos novamente na associação número-representação conforme apontada em Igliori e Silva (1998).

Em relação à segunda pergunta, podemos pensar que $\frac{22}{7}$ obteve maior índice de acertos, pois sua representação decimal tem o menor número de casas na parte periódica em comparação com as outras frações, sendo, portanto, mais facilmente visualizada. Quanto aos 25% de erros referentes à essa fração, não encontramos nenhuma evidência que apontasse para o que foi assinalado em Arcavi, Bruckheimer e Ben-Zvi (1987) e em Vinner (2011), que muitos alunos e até professores consideram $\frac{22}{7}$ um número irracional por se tratar de uma conhecida aproximação racional para π. Contudo, é uma possibilidade que também não podemos descartar.

Analisando com mais cuidado as justificativas apresentadas pelos alunos que destacamos no Quadro 13, vemos que apenas Ernest baseou seu julgamento em um atributo relevante dos números irracionais (HERSHKOWITZ, 1994). De fato, toda dízima não-periódica é

[85] COSTA, C. **Considerações sobre números racionais na sala de aula de matemática**. Monografia. Unioeste, Foz do Iguaçu, 2008.

um número irracional. Quanto a Ulysses e Cyrus, eles fundamentaram suas justificativas em atributos não relevantes dos números irracionais como a falta de regularidade e a divisão inexata. De fato, a irregularidade (pensada como ausência de padrão) e a inexatidão não são características determinantes dos números irracionais. Como exemplos, podemos citar irracionais como $1{,}010010001 \ldots$ que possuem regularidade, e racionais como $1/3$ ou qualquer dízima periódica, cuja divisão é 'inexata'.

Alguns fatores pontuais também devem ser mencionados, como o caso do efeito perturbador que o sinal negativo provocou em relação ao reconhecimento de $\frac{-3}{14}$. Dentre os quinze alunos que não consideraram esse número como racional, cinco mencionaram explicitamente a presença desse sinal como justificativa. Um dos casos foi o do licenciando Silvester, que escreveu *o numerador não pode ser negativo*. Dado semelhante foi apurado em Igliori e Silva (1998), em que metade dos alunos iniciantes de um curso de Computação classificou o número $\frac{-3}{7}$ como irracional. Nessa obra, considerou-se que isso ocorreu possivelmente porque esse número é, ao mesmo tempo, negativo e com uma representação decimal infinita. Observou também que, nesse caso, parece ter ocorrido a associação número – representação.

Outro fator pontual, mas nem por isso menos preocupante, apresenta-se na resposta de Fidelia para o item $\frac{13}{23}$. A estudante não considerou essa fração como irracional, mas sua justificativa foi *não possui raiz e nem letras gregas como o π*. Isso demonstra claramente que ela considera números irracionais como aqueles que se apresentam em forma de raiz ou com letras gregas, como o π. Trata-se, evidentemente, de uma imagem empobrecida e distorcida para o conceito de número irracional.

7.1.1.2 – Representações fracionárias com raiz quadrada ou π no numerador

Em relação às quatro representações fracionárias com raiz quadrada ou π no numerador presentes nos Questionários Q1 e Q2 (ver **Quadro 14**), a maioria da turma classificou-as corretamente. Porém, uma quantidade expressiva de alunos cometeu erros que consideramos graves: 8 sujeitos (33%) consideraram $\frac{\sqrt{3}}{2}$ um número racional; 9 sujeitos (38%) consideraram $\frac{4\pi}{3}$ como um número racional; 8 sujeitos (33%) não consideraram $\frac{3\pi}{4}$ um número irracional ou deixaram em branco; 8 sujeitos (33%) não consideraram $\frac{\sqrt{5}}{2}$ um número irracional ou deixaram em branco.

Quadro 14 - Desempenho da turma e dos alunos selecionados em relação ao reconhecimento de frações com raízes quadradas ou π no numerador

Frações com raízes ou π no numerador	Turma		Zelma	Felix	Jasper	Inst.	Data
$\frac{\sqrt{3}}{2}$ é racional?	Sim	8	Sim	Não	Não	Q1	12/5/14
	Não	14	Porque está representado em forma de fração.	Porque não conseguimos relacioná-lo.	Porque raiz não é número e não indica com clareza um número.		
	E/B	2					
$\frac{4\pi}{3}$ é racional?	Sim	9	Não	Não	Não		
	Não	13	Porque não é dízima periódica e nem número decimal exato.	Porque não dá para mensurar.	Uma fração com números não compreendi-dos.		
	E/B	2					
$\frac{\sqrt{5}}{2}$ é irracional?	Sim	15	Não	Não	EB	Q2	14/5/14
	Não	3	Porque é fração.	Porque podemos fazer uma relação dele.	EB		
	E/B	5					
$\frac{3\pi}{4}$ é irracional?	Sim	15	Sim	Sim	EB		
	Não	4	Porque na resolução com variável não encontramos valor exato.	Porque não há um número que possa prever, seu resultado é incerto.	EB		
	E/B	4					

Legenda: E/B – respostas deixadas em branco.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como já mencionado anteriormente, a intenção com esses itens foi misturar exemplos prototípicos (HERSHKOWITZ, 1994) do número racional, como a fração e a representação fracionária, com exemplos prototípicos de números irracionais como π e raízes quadradas. Esse conflito parece ter sido o responsável por vários erros cometidos pela turma. Como, por exemplo, as respostas e justificativas de Zelma (ver **Quadro 14**) apontam para a força do exemplo protótipo de razão (ou fração) como determinante no reconhecimento de um número racional. Nos dois casos, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{\sqrt{5}}{2}$, a estudante utiliza a palavra 'fração' nas suas justificativas para considerar esses números como números racionais. De fato, estar escrito em forma de representação fracionária não é um atributo crítico; isto é, não é determinante para saber se o número é racional ou irracional, já que podemos escrever números racionais como $0{,}666 \ldots$ em forma de razão $2/3$, assim como podemos escrever um irracional como π em forma de razão C/D, onde C é o comprimento e D é o diâmetro de uma circunferência.

Em relação à π, a presença desse número (ou símbolo) parece suscitar associações com a inexatidão, exemplificadas nas expressões utilizadas pelos sujeitos destacados no Quadro 14, como *não dá para mensurar*, *não encontramos valor exato, seu resultado é incerto* e *números não compreendidos*. Como essas associações também são comuns quando se trata de número irracional (ver Apêndice H), isso parece explicar os índices nulos de erro de Zelma, Felix e Jasper quanto ao reconhecimento de números envolvendo π como números irracionais. Isto é, π é considerado inexato porque é irracional e vice-versa. Porém, como mencionamos, na turma como um todo houve um índice expressivo de erros, semelhante ao que foi relatado em Igliori e Silva (1998), quando perguntaram a 33 alunos iniciantes de um curso de ciência da computação a respeito de $\pi/10$ e 39% respondeu que se tratava de um número racional (ver **Tabela 5**). Segundo essa obra, *a classificação do número $\pi/10$ como racional, feita por 13 iniciantes parece indicar que houve uma identificação entre um número fracionário e sua representação fracionária*[86] (IGLIORI; SILVA, 1998, p. 5).

No que diz respeito às representações fracionárias contendo raízes quadradas, lembramos que no Estudo Exploratório (Apêndice H), apenas um pequeno número de licenciandos, 10,5%, considerou $\frac{\sqrt{2}}{2}$ como um número racional, mas a pesquisa de Boff (2006) mostrou um alto índice de erros em uma questão semelhante. Um percentual de 49% dos calouros de licenciatura considerou $\sqrt{6}/2$ como um número racional (ver **Tabela 8**). Além do caso já citado de Zelma, destacamos a justificativa de Jasper para não considerar $\frac{\sqrt{3}}{2}$ um número racional. Segundo o licenciando, *raiz não é número e não indica com clareza um*

---

[86] Nem todo número escrito na representação fracionária é um número fracionário. Por exemplo, $10/2$ e $\sqrt{2}/2$ estão escritos na representação fracionária, mas não são números fracionários. O primeiro é um número inteiro e o segundo é um número irracional.

número (ver **Quadro 14**). Percebemos nessas palavras o reflexo de duas visões já relatadas por outras pesquisas – o irracional como um não-número e o irracional como algo incerto. A primeira pode ser encontrada em Fischbein, Jehiam e Cohen (1995), onde muitos alunos do 9º ano não consideraram representações com raízes como números (ver **Tabela 4**), enquanto a segunda foi detectada em Igliori e Silva (1998) e também em nosso Estudo Exploratório (Apêndice H). Essa visão provavelmente é transferida para a raiz quadrada, ou vice-versa; isto é, como a raiz quadrada é um dos exemplos de número irracional mais frequentes nos livros didáticos e sua representação decimal precisa ser aproximada para ser utilizada na prática, possivelmente o estudante transfira seu entendimento da raiz quadrada como algo aproximado para os números irracionais.

7.1.1.3 – Dízimas periódicas e não-periódicas

Foi nossa intenção representar quatro dízimas periódicas, $0{,}0555\ldots$, $2{,}343434\ldots$, $0{,}666\ldots$ e $1{,}222\ldots$, e duas dízimas não-periódicas, $1{,}010010001\ldots$ e $1{,}1212212221\ldots$ Observando os resultados gerais da turma no Quadro 15, constatamos que a maioria dos alunos entendeu da mesma forma, o que indica a presença do acordo tácito que utiliza as reticências para indicar a continuidade de um padrão. Essas duas dízimas não-periódicas têm uma característica em comum, ambas possuem um padrão. A escolha de representações decimais com essas características foi proposital e se deve à suspeita de que alguns alunos associam padrão ou regularidade com número racional e, consequentemente, a falta de padrão ou regularidade com número irracional.

Vejamos o caso de $1{,}1212212221\ldots$ Nos dois estudos anteriores que realizamos, esse número foi considerado racional por 7 sujeitos (37%) no Estudo Exploratório e não foi considerado irracional por 3 sujeitos (27%) no Pequeno Estudo Diagnóstico (ver Tabela 23 no Apêndice G). No Estudo Principal, 10 sujeitos (43%) não o consideraram um número irracional. (Ver Quadro 15). Esse mesmo número, com uma pequena diferença na representação (ver Tabela 3), foi considerado racional por 17% dos licenciandos que participaram da pesquisa de Fischbein, Jehiam e Cohen (1995). A outra dízima com padrão, $1{,}010010001\ldots$, foi considerada um número racional por 9 sujeitos (38%) no Estudo Principal (ver Quadro 15). No estudo conduzido em Boff (2006), um número bastante semelhante, $0{,}010010001\ldots$ foi considerado racional por 59% dos licenciandos (ver Tabela 8). Em outras pesquisas, outros números irracionais cuja representação decimal possui um padrão, também foram considerados racionais por um número significativo de sujeitos. Na pesquisa de Melo (1999), 10 alunos (23,2%) do 1º ao 3º período de licenciatura em matemática classificaram o número 0,171771777... como racional (ver Tabela 6), enquanto no trabalho de Igliori e Silva (1998), 9 sujeitos (25%) consideraram 4,21222324... fizeram o mesmo (ver Tabela 5).

As justificativas de Titus e Ulysses (ver Quadro 15) deixaram evidente o motivo da classificação de $1{,}1212212221\ldots$ e $0{,}010010001\ldots$ como números racionais (ou não irracionais): a presença de um padrão ou regularidade em sua representação decimal, que conjuntamente com os dados de outras pesquisas apresentados, reforçam nossa hipótese da existência de uma associação do padrão com o número racional, ou, equivalentemente, da ausência de padrão com o número irracional.

Outra hipótese que surge com o Quadro 15 é a associação do infinito com o número irracional, refletida na justificativa de Percival. Cumpre destacar ainda a presença da associação do número irracional com a inexatidão nas questões contendo dízimas periódicas e não-periódicas, representada no **Quadro 15** pela justificativa de Calvin ao considerar $1{,}121221221\ldots$ um número irracional. Além dele, outros estudantes também fizeram tal associação. Osana considerou irracionais os números 3,1444... 1,121221222... 1,222...pois é o *resultado da divisão de números não exatos*. Fidelia não considerou irracional $\sqrt[3]{27}$ pois *dará um número exato então não é irracional*. Cyrus considerou irracionais os números 3,1444..., 1,121221222... e 1,222... pois a divisão é inexata. Ambas associações, infinito – irracional e inexatidão – irracional também foram detectadas na pesquisa de Igliori e Silva (1998).

Quadro 15 – Desempenho da turma e dos alunos selecionados no que se refere às dízimas periódicas e não-periódicas dos Questionários Q1 e Q2

Dízimas	**Turma**		**Titus**	**Ulysses**	**Percival**	**Inst.**	**Data**
0,0555... é racional?	Sim	16	Sim.	Sim.	Não.	Q1	12/5/14
	Não	6	É uma dízima periódica.	Apresenta regularidade.	Imagino que não seria pois é infinito.		
	E/B	2					
2,343434... é racional?	Sim	16	Sim	Sim	Não.		
	Não	7	É uma dízima periódica.	Apresenta regularidade.	A mesma razão acima.		
	E/B	1					
0,666... é racional?	Sim	17	Sim	Sim.	Não.		
	Não	7	É uma dízima periódica.	Apresenta regularidade.	O mesmo é infinito.		
	E/B	0					
1,010010001... é racional?	Sim	9	Sim.	Sim.	Não.		
	Não	14	Apresenta um padrão lógico de repetição.	Apresenta regularidade.	A mesma razão acima.		
	E/B	1					
			Titus	**Ulysses**	**Calvin**		
3,1444... é irracional?	Sim	8	Não.	Não.	Sim.	Q2	14/5/14
	Não	10	A repetição apresentada no número é lógica.	Apresenta regularidade.	Uma dízima periódica e que leva ao infinito.		
	E/B	5					
1,222... é irracional?	Sim	8	Não.	Não.	Sim.		
	Não	12	A repetição apresentada no número é lógica.	Apresenta regularidade.	Por ser uma dízima periódica.		
	E/B	3					
1,121221222... é irracional?	Sim	11	Não.	Não.	Sim.		
	Não	10	A repetição apresentada no número é lógica.	Apresenta regularidade.	Não é uma dízima, porém, o resultado não é exato, o que o torna irracional.		
	E/B	2					

Legenda: E/B – Em branco.

Fonte: Elaborado pelo autor.

7.1.2 – Definição

Perguntamos explicitamente a respeito da definição de números racionais e irracionais nos questionários Q1 e Q2, respectivamente, e na Entrevista Final. A pergunta foi feita de forma direta como recomendado em Vinner (1991). Em relação aos irracionais, estimulamos que os alunos pensassem em duas definições, uma aprendida na escola e uma de acordo com a opinião de cada um[87]. Pensamos que dessa forma poderíamos ter maiores chances de saber se existe alguma reconstrução pessoal da definição, cientes de que essa pergunta possa ter estimulado uma reconstrução pessoal do licenciando no momento em que foi requerida[88]. As definições mais frequentes que surgiram foram agrupadas de acordo com a ideia central contida nas mesmas, sendo que cada definição apresentada pode ter mais de uma ideia, por isso ela pode ter sido contabilizada em mais de uma categoria. Apresentamos também, para cada ideia central das definições, as principais expressões utilizadas pelos licenciandos.

No que diz respeito à definição de números racionais (Quadro 16), havia a possibilidade de que as expressões mais utilizadas pelos licenciandos apresentassem associações referentes às representações fracionárias ou às dízimas periódicas; isso porque são definições largamente utilizadas nos livros didáticos, além de terem sido detectadas em algumas pesquisas como em Fischbein, Jehiam e Cohen (1995), conforme discutimos na seção 4.2 – Conceito e definição. Observando o Quadro 16, vemos que as definições que utilizam representação fracionária e dízima periódica estão entre as três opções mais frequentes dos licenciandos, tendo surgido uma associação entre as duas que esperávamos. Seis estudantes mencionaram a divisão e utilizaram expressões como *números que podem ser escritos/representados/obtidos por uma divisão*. Rigorosamente falando, o uso do termo divisão para definir um racional consiste em um problema, já que é possível representar um irracional por meio de uma divisão, como $4\pi/2$. Não sabemos se esse termo foi utilizado como um equivalente à fração, mas, de qualquer forma, optamos por não agrupar as definições que utilizaram o termo divisão com aquelas que utilizaram o termo fração ou razão.

---

[87] A ideia de dividir a pergunta a respeito da definição de irracionais em duas partes surgiu da resposta de uma licencianda ao Pequeno Estudo Diagnóstico (Apêndice G).

[88] Estamos dizendo com isso que a ‘definição de acordo com sua opinião’ pode ter sido algo que foi dito mas não estava bem amadurecido. O sujeito poderia inclusive nunca ter pensado nisso antes.

Quadro 16 - Como você define números racionais? (Questionário Q1 em 12/5/2014)

CONTEÚDO DA DEFINIÇÃO – *expressões utilizadas*	**Sujeitos (%)**
FRAÇÃO/RAZÃO – *números que podem ser escritos/representados/obtidos por uma fração/razão de/entre dois números (inteiros)*	11 (46%)
DIVISÃO – *números que podem ser escritos/representados/obtidos por uma divisão*	6 (25%)
DÍZIMAS PERIÓDICAS – *números/divisão/fração que podem ser escritos/representados/resultar por/em uma dízima periódica*	4 (17%)
PADRÃO, REGULARIDADE OU PREVISIBILIDADE – *números que apresentam regularidade, padrão ou previsibilidade*	3 (13%)
OUTRAS	1 (4%)
EM BRANCO	4 (17%)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em termos da qualidade dos atributos utilizados, todas as categorias de conteúdos apresentadas no **Quadro 16** podem ser consideradas atributos críticos dos números racionais, com exceção da categoria 'dízimas periódicas', que é um atributo não crítico (um número racional pode ser representado por uma decimal exata). No entanto, apesar de serem críticos, alguns desses atributos não são suficientes para diferenciar um número racional de um irracional, como por exemplo, 'divisão' e 'padrão/regularidade'. De fato, como já argumentamos, um número irracional pode ser apresentado como divisão, e, um número irracional também pode ter um padrão/regularidade, como no caso de $1{,}010010001$ ...

Referente à definição para números irracionais, ao perguntar 'O que são números irracionais segundo você aprendeu nas aulas de matemática', pensamos constatar que as respostas mais frequentes fossem as negativas das definições para número racionais; isto é, 'não pode ser escrito em forma de fração' ou 'dízima não-periódica'. O motivo da nossa expectativa se deve ao fato dessas respostas estarem no topo das mais citadas em diversas pesquisas, como Cezar (2011; 2014), Arcavi, Bruckheimer e Ben-Zvi (1987), Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) e Soares, Ferreira e Moreira (1998). Além disso, essas definições também podem ser encontradas em livros didáticos da educação básica. No entanto, de acordo com o Quadro 17, elas foram a segunda e a terceira definições mais citadas. Em primeiro lugar surgiu a categoria inexato/incompreensível/não definido, que são atributos irrelevantes não apenas dos números irracionais, mas de qualquer número. É interessante pensar como é possível encontrar espaço para inexatidão na ciência da exatidão por excelência?

Quadro 17 - O que são números irracionais segundo você aprendeu nas aulas de matemática? (Questionário Q2 em 14/5/2014)

CONTEÚDO DA DEFINIÇÃO ***–*** *expressões utilizadas*	**Sujeitos (%)**
INEXATO/INCOMPREENSSÍVEL/NÃO DEFINIDO – *números que resultam/levam de/a divisões/situações inexata (s); números que fogem à compreensão concreta de seus valores; números representados por símbolos não definidos; números que não se tem exatidão que seguem para o infinito.*	5/23 (22%)
NÃO FRAÇÃO *– números que não podem ser descritos/representados por uma fração de inteiros/irredutível; representação não periódica em forma de não fração; números que não podem ser escritos na forma a/b.*	4/23 (17%)
INFINITO E NÃO PERIÓDICO – *números que são infinitos e não periódicos; números cuja representação é infinita e não-periódica.*	2/23 (9%)
NÃO DIVISÃO *- números que não podem ser obtidos pela divisão de dois/números inteiros.*	2/23 (9%)
IRREGULARIDADE *- números que não apresentam regularidade em sua forma escrita*	1/23 (4%)
OUTRAS – *números que possuem raiz em sua notação; números não reais; números não inteiros; números que podem ser convertidos à dízima*	4/23 (17%)
NÃO SABE/NÃO LEMBRA	3/23 (13%)
EM BRANCO	2/23 (9%)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pensando nessa questão, colocamos uma lente de aumento nas respostas dadas pelos alunos nessa categoria, que também surgiu no Estudo Exploratório (**Tabela 21** do Apêndice H) e no Pequeno Estudo Diagnóstico (Apêndice G). Observando o conteúdo dessa categoria no **Quadro 18**, nossa hipótese é que os alunos fazem associação do número com sua representação. A sensação de inexatidão conferida pela representação decimal de um número irracional, provavelmente devido às questões relacionadas ao infinito e a algo que não se repete nunca (dízima não-periódica), é transferida para o próprio número. Esse tipo de associação também foi detectado em Igliori e Silva (1998). Aprofundamos essa questão na seção 7.2.

Quadro 18 – Definições de números irracionais do grupo *inexato/incompreensível/não definido*

Licenciando	**Definição de irracional**
Calvin	*São números acompanhados por vírgula que não se tem exatidão do mesmo, ele segue para o infinito para aproximar ao máximo do valor.*
Osana	*São números que se resultam de divisões não exatas.*
Cyrus	*Números cuja divisão leva à dízima ou situação inexata.*
Jasper	*São números representados por símbolos e números não definidos.*
Titus	*Números que fogem da compreensão concreta de seus valores.*

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quando perguntamos aos alunos ‘o que são números irracionais segundo sua opinião’, objetivávamos verificar a diversidade – ou não – de respostas, ou seja, se surgiriam muitas coisas diferentes, fruto da reconstrução pessoal de cada aluno. Isso de fato aconteceu. Observando as categorias do Quadro 19, nota-se o surgimento de algumas novidades em relação ao Quadro 17, como ‘não inteiro’ (3 ocorrências), ‘complexo’ (duas ocorrências) e ‘não apresenta padrão’ (1 ocorrência). A impossibilidade de escrever em forma de fração e a questão da dízima não-periódica foram citadas por apenas dois estudantes, enquanto a inexatidão continuou no topo da lista.

Entre essas categorias, algumas nos parecem reveladoras das dificuldades dos alunos, como a associação do irracional a algo difícil, complexo e imprevisível, pois que consistem em atributos irrelevantes para o conceito de irracional. Quanto ao infinito, é verdade que todo número irracional tem uma representação decimal infinita, mas do jeito que um licenciando escreveu, *números que tendem ao infinito, mas que não podem ser previstos de maneira concreta*, não sabemos se ele se refere ao número em si ou aos dígitos da representação decimal. Se for o primeiro caso, o infinito será um atributo irrelevante, pois nenhum número é infinito. Se for o segundo caso, trata-se de um atributo crítico.

Como um todo, a análise das definições de racionais e irracionais apresentadas mostra um número relevante de definições baseadas em associações não favoráveis à aprendizagem; isto é, que fazem menção a atributos irrelevantes como a ‘não divisão’, a inexatidão, a indefinição ou a complexidade. As associações com a irregularidade, com a imprevisibilidade, com o ‘não inteiro’ ou com o ‘não padrão’, apesar de se valerem de atributos não críticos, podem ser revertidas, pois necessitam apenas de alguns ajustes, como a apresentação de exemplos e contraexemplos que possam enriquecer a imagem do conceito e reformular ou reconstruir as associações apresentadas.

Quadro 19 - O que são números irracionais segundo sua opinião? (Questionário Q2 em 14/5/2014)

CONTEÚDO DA DEFINIÇÃO – *expressões utilizadas*	**Sujeitos (%)**
INEXATO/INCOMPREENSSÍVEL/IMPREVISÍVEL/INEXPRESSÍVEL – *números que não podemos definir seu desenvolvimento; número de divisão inexata, senão por 1 ou eles mesmos; números que tendem ao infinito, mas que não podem ser previstos de maneira concreta; todos os números não exatos e que possuem tanto a raiz e a letra grega π; impossibilidade de se escrever um número.*	5/23 (22%)
INFINITO E/OU NÃO PERIÓDICO – *números decimais infinitos ou dízimas não-periódicas infinitas; resultado que proporciona números infinitos; números que tendem ao infinito, mas que não podem ser previstos de maneira concreta; número fracionário, infinito e não periódico.*	4/23 (13%)
NÃO INTEIRO – *números que não são inteiros; números que não dá para obter um inteiro a partir dele; número que não é real, sem valor inteiro.*	3/23 (13%)
COMPLEXO – *números muito grandes ou muito pequenos de difícil compreensão; números estudados à parte por sua complexidade.*	2/23 (9%)
NÃO APRESENTA PADRÃO – *números que não apresentam um padrão.*	1/23 (4%)
NÃO FRAÇÃO – *números decimais infinitos que não consigo colocá-lo em forma de fração.*	1/23 (4%)
OUTRAS – *números que não tem raiz; constantes matemáticas resultantes de uma razão qualquer; resultados de números irracionais.*	3/23 (22%)
NÃO SABE/NÃO LEMBRA	2/23 (9%)
EM BRANCO	3/23 (13%)

Fonte: Elaborado pelo autor.

7.1.3 – Propriedades (Densidade)

A noção de densidade foi objeto de quatro questões, sendo duas em cada um dos questionários Q1 e Q2. Na **Tabela 14** apresentamos os dados referentes à questão 5 do Questionário Q1.

Tabela 14 - Densidade dos racionais

Quantos números racionais existem entre 2/3 e ¾? (Questão 5 do questionário Q1)				
Um	*Muitos*	*Infinitos*	*Nenhum*	*EB*
2/24 (8%)	8/24 (33%)	11/24 (46%)	2/24 (8%)	1/24 (4%)

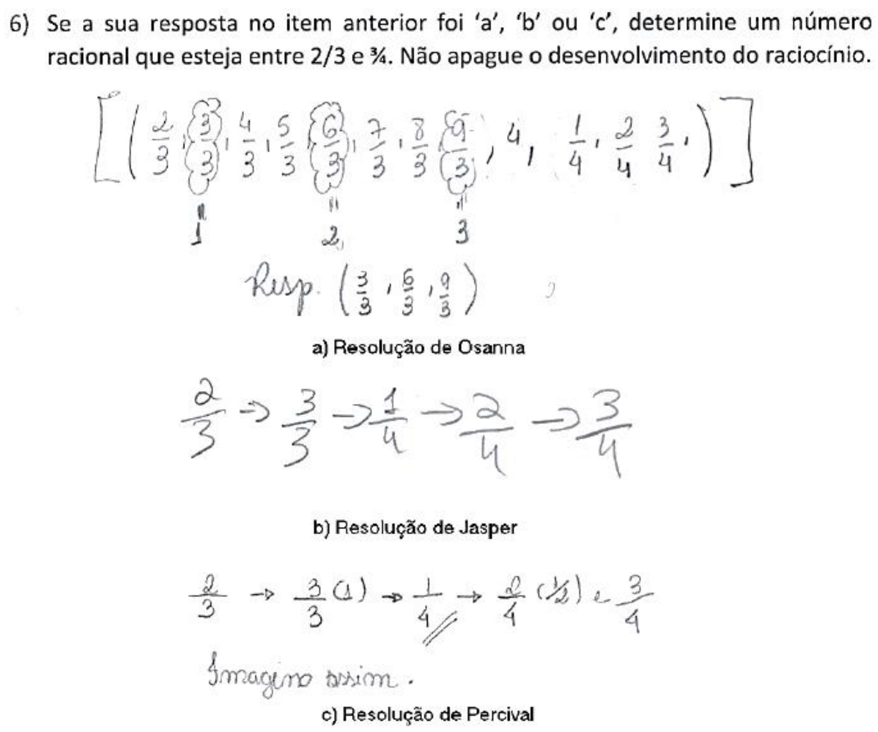
Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com a **Tabela 14**, a escolha majoritária da turma na questão 5 do questionário Q1, assinalada por 11 sujeitos, foi a alternativa 'infinitos números', e dentre esses, a estratégia majoritária para determinar um número racional entre 2/3 e ¾ (questão 6 do questionário Q1), adotada por 3 sujeitos, foi primeiro converter 2/3 e ¾ para forma decimal para em seguida apresentar o número pedido, também na forma decimal. Essa estratégia também foi a mais utilizada por toda a turma ao resolver a questão 6 do questionário Q1. Na pesquisa relatada em Boff (2006), da qual participaram 39 licenciandos, 31% respondeu 'infinitos' para a mesma pergunta que fizemos, mas nenhum deles conseguiu dar um exemplo sequer. Concordamos com Boff (2006) que se trata de um indício de que a densidade dos racionais é aceita e apenas memorizada pelos estudantes, mas não completamente entendida.

Ainda pela **Tabela 14**, a segunda resposta com maior frequência foi 'muitos', escolhida por 8 sujeitos (33%). Em Dias (2002), também foram relatadas respostas semelhantes ('alguns', 'vários' e 'muitos') para uma pergunta semelhante (ver **Quadro 3**), sendo que os participantes eram professores do ensino fundamental (ver seção 4.3.2 – Densidade). Titus e Agatha estiveram entre os licenciandos que marcaram a opção 'muitos' na questão da densidade dos racionais (questão 5 do questionário Q1). O que leva alguém a pensar assim? O que esses 8 sujeitos pensaram ao responder que existem muitos números entre 2/3 e ¾? As conversas que tivemos com eles na Entrevista Final ofereceram algumas pistas para responder a essas perguntas (ver seção 7.2 – Análise de sujeitos selecionados).

Osana, Jasper, Percival e Zelma também estão entre os que erraram a questão 5 do questionário Q1 – os três primeiros marcaram a alternativa 'muitos' e a última marcou a opção 'um' - porém, as respostas que esses alunos deram para a questão 6 do questionário Q1 mostrou indícios de que esses 'erros', apesar do desacordo com a matemática, podem estar fundamentados em construções ou ideias próprias dos alunos. Osana, Jasper e Percival descreveram uma sequência de racionais (**Figura 38**), como se para cada racional houvesse um sucessor, e a partir dessa sequência, concluíram que a melhor alternativa para a pergunta 'quantos racionais existem entre 2/3 e ¾' seria 'muitos'. Essa ideia equivocada de sucessor para os números racionais pode surgir da extensão de uma propriedade válida para os números naturais e inteiros, e já foi detectada em algumas pesquisas, como Dias (2002) e Santos (1995, apud Dias, 2002)[89], onde alunos responderam, por exemplo, que o sucessor de 2/3 é 3/3.

Figura 38 - Resolução de Osana, Jasper e Percival para a Questão 6 do Questionário Q1

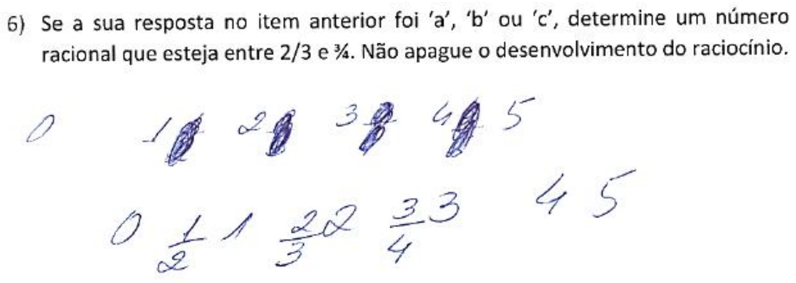


Fonte: Acervo do pesquisador.

No caso de Zelma, nossa hipótese é que (ver **Figura 39**): na 1ª linha escreveu os números inteiros 0, 1, 2, 3, 4 e 5; na 2ª linha formou frações nos intervalos (0,1), (1,2), (2,3) e (3,4), onde os numeradores são os extremos da esquerda e os denominadores são os extremos da direita de cada intervalo. Em seguida escreveu novamente os inteiros entre as frações, começando com o '1' após o '1/2' (o que está matematicamente certo e pode ter influenciado seguir a sequência), o '2' após o '2/3', e assim por diante e por isso concluiu que entre 2/3 e ¾ existe apenas um número, no caso, o número 2.

[89] SANTOS, V. de M. **Infinito: concepções e consequências pedagógicas**. 1995. São Paulo, 1995. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Figura 39 - Resolução de Zelma para a questão 6 do Questionário Q1



Fonte: Acervo do pesquisador.

Em relação à densidade dos irracionais (questão 6 do questionário Q2) obtivemos os seguintes dados (**Tabela 15**).

Tabela 15 - Densidade dos irracionais

Existe algum número irracional no intervalo (1/3, ½)? Em caso afirmativo, escreva esse número em notação decimal. Em caso negativo, justifique (Questão 6 do questionário Q2)		
Resposta	***Ação***	***Sujeitos***
Sim	Apresentou um número irracional na forma decimal	2/23 (9%)
	Apresentou um número irracional na forma decimal a partir de $\sqrt{}$ ou π.	4/23 (17%)
	Não apresentou um número irracional.	7/23 (30%)
Não	[Sem justificativas]	2/23 (9%)
Não soube responder ou deixou em branco	-	8/23 (35%)

Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com a **Tabela 15**, a maioria dos sujeitos marcou 'sim', mas apenas 6 justificaram apropriadamente; isto é, conseguiram escrever um número irracional no intervalo pedido. Destacamos a quantidade expressiva de licenciandos que não souberam responder ou deixou em branco (8 sujeitos). Em questões bastante semelhantes, Dias (2002) aponta que alguns participantes responderam com números fora do intervalo, enquanto Boff (2006) atesta que, entre os que responderam que existem infinitos irracionais entre dois números racionais, nenhum deles conseguiu apresentar um exemplo sequer (ver seção 4.3.2 – Densidade). Mais um indício de que a densidade, desta feita dos irracionais, é algo memorizado, mas não compreendido.

A questão mais genérica referente à densidade de racionais e irracionais era a questão 5 do questionário Q2. Na **Tabela 16**, apresentamos os dados dessa questão, que mostram que nos itens 'a', 'c' e 'd', a maioria da turma marcou a resposta correta, que era 'verdadeiro'.

O menor índice de acerto foi do item ‘b’, que fala da possível existência de um irracional entre dois irracionais. Resultados bastante semelhantes foram observados em Sirotic e Zazkis (2007b) e em Melo (1999), e os resultados obtidos por essas pesquisas estão na **Tabela 10** e na **Tabela 11**, respectivamente. Na nossa questão, apenas 7 sujeitos (30%) acertaram os quatro itens, e desses, apenas 6 foram capazes de apresentar um número irracional no intervalo (1/3,1/2), sendo que 4 deles utilizaram, como havíamos detectado no Estudo Exploratório (Apêndice H), números irracionais conhecidos como π ou $\sqrt{2}$ para obter um número no intervalo solicitado.

Tabela 16 - Densidade de racionais e irracionais (Questão 5 do questionário Q2)

Item	Verdadeiro (%)	Falso (%)	Em branco (%)
Entre dois racionais há pelo menos um racional	13/23 (56%)	5/23 (22%)	5/23 (22%)
Entre dois irracionais há pelo menos um irracional	9/23 (39%)	7/23 (30%)	7/23 (30%)
Entre dois racionais há pelo menos um irracional	14/23 (61%)	2/23 (9%)	7/23 (30%)
Entre dois irracionais há pelo menos um racional	12 (52%)	4/23 (17%)	7/23 (30%)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Entre os 7 sujeitos que consideraram verdadeiras as quatro afirmações da questão 5, destacamos no Quadro 20 as justificativas de quatro deles. Nas duas primeiras afirmações, Calvin interpretou a palavra ‘entre’ de duas formas diferentes: como ‘alternativa’ nas duas primeiras afirmações e como ‘lugar ou espaço intermediário’ nas duas últimas. Ambas são interpretações possíveis para essa palavra, mas a segunda contém o significado mais próximo do que pretendíamos. Especificamente em relação à sua justificativa para a quarta afirmação, constatamos que ela é coerente com suas definições de número irracional (ver Quadro **18**).

Outras justificativas presentes no Quadro 20 nos fazem pensar que, apesar dos alunos terem considerado todas as alternativas da questão 5 verdadeiras, ainda não entenderam completamente do que se trata a densidade. Vejamos por exemplo os casos de Hank, Osana e Ernest. Hank usa uma espécie de argumento probabilístico – já que há infinitos números entre eles, um deles deve ser irracional; Osana, ao citar que há um irracional entre 1 e 2, provavelmente se refere a $\sqrt{2}$; Ernest utiliza apenas irracionais bem conhecidos (prototípicos) em forma de raiz.

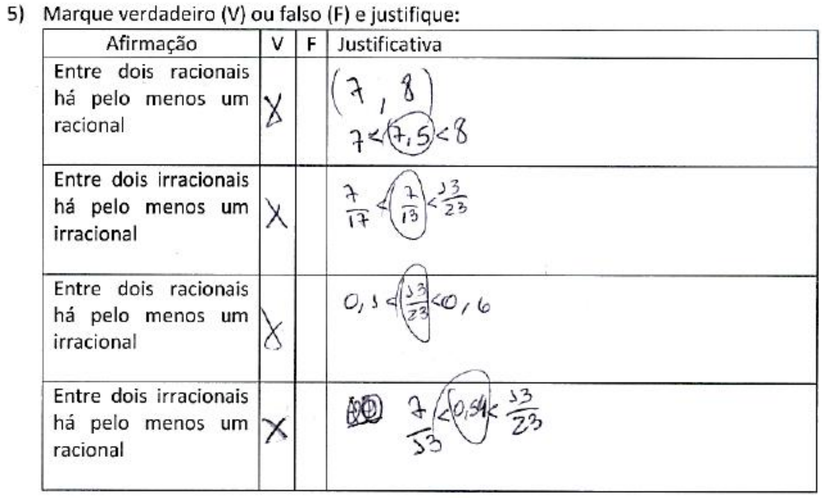
Quadro 20 - Justificativas de alguns alunos para a questão 5 do Questionário Q2

Afirmação	V	Justificativa
Entre dois racionais há pelo menos um racional	X	Calvin – *se os dois são racionais, logo pelo menos um é racional*. Hank – *pois entre dois números racionais há infinitos números.* Ernest – *entre 1 e 2, existe* $\frac{1}{2}$ *e* $\frac{1}{4}$ *que também são racionais.*
Entre dois irracionais há pelo menos um irracional	X	Calvin – *mesma situação da questão anterior*. Hank – *porque se há infinitos números entre estes, então tem que haver um irracional*. Ernest – *entre* $\sqrt{3}$ *e* $\sqrt{7}$ *existe* $\sqrt{5}$.
Entre dois racionais há pelo menos um irracional	X	Osana – *Sim. Exemplo 1 e 2, podem existir números irracionais.* Calvin – *existem infinitos números irracionais entre dois números racionais.* Ernest – *entre 1 e 2, existe* $\sqrt{2}$.
Entre dois irracionais há pelo menos um racional	X	Calvin – *1,333... e 1,444... aqui o 1,4 seria um racional.* Ernest – *entre* $\sqrt{3}$ *e* $\sqrt{7}$ *existe 2.*

Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma última resolução da questão 5 nos chamou atenção. O licenciando Titus considera frações com denominadores 13 e 23 como números irracionais, provavelmente porque a parte periódica das representações decimais dessas frações são grandes, e o período não foi observado, como já havíamos apontado ter ocorrido em outras situações (**Figura 40**).

Figura 40 - Resolução de Titus para a questão 5 do Questionário Q2



5) Marque verdadeiro (V) ou falso (F) e justifique:

Afirmação	V	F	Justificativa
Entre dois racionais há pelo menos um racional	X		(7, 8) $7 < 7,5 < 8$
Entre dois irracionais há pelo menos um irracional	X		$\frac{7}{17} < \frac{7}{13} < \frac{13}{23}$
Entre dois racionais há pelo menos um irracional	X		$0,5 < \frac{13}{23} < 0,6$
Entre dois irracionais há pelo menos um racional	X		$\frac{7}{53} < 0,54 < \frac{13}{23}$

Fonte: Acervo do pesquisador.

Em relação às propriedades de incomensurabilidade e não-enumerabilidade, avaliamos que não produzimos dados suficientes para proceder a uma análise capaz de proporcionar alguma conclusão e/ou contribuição para o ensino de números irracionais que estivesse à altura de um trabalho deste porte. A não-enumerabilidade foi objeto apenas de uma aula expositiva, e, quanto à incomensurabilidade, foi realizada uma atividade, mas, pelos motivos que explicamos na seção 6.2.3 – Dinâmica dos encontros, não demos prosseguimento a esse tema. Apesar disso, continuamos a entender que incomensurabilidade e não-enumerabilidade são componentes importantes para se compreender com mais profundidade os números irracionais, tanto para professores, futuros professores e também estudantes.

7.1.4 – Existência dos irracionais

A questão 3 do Questionário Q2 tratou da existência dos irracionais, e foi uma reprodução da pergunta feita em Soares, Ferreira e Moreira (1998), *o que leva você a acreditar na existência de números irracionais?* (p. 64). A intenção foi aprofundar nosso diagnóstico a respeito do conhecimento e das concepções dos licenciandos referentes a esses números, além de estabelecer e comparar nossas respostas com as respostas obtidas em pesquisas anteriores, como Moreira (2004). Apresentamos no **Quadro 21** as respostas que obtivemos, que dividimos em quatro categorias principais.

Quadro 21 – Existência dos números irracionais

O que te faz acreditar na existência de números irracionais? (Questionário Q2 – 14/4/14)	
IDEIA CENTRAL DA RESPOSTA	**N (%)**
Irracionais são descritos/aparecem pela/na matemática *Acredito pelo fato de ser descrito na matemática* (Casper). *Pelo fato de estudar na matemática, mas sinceramente, nunca me falaram sobre a importância, sei de sua existência, pois quando estudei só mostravam os conjuntos dos números, somente para que tomássemos conhecimento de sua existência* (Dixie). *O conhecimento matemático adquirido até o presente momento* (Rufus). *A presença de números irregulares em sua forma escrita* (Ulysses). *A percepção e obtenção dos mesmos nos resultados dos problemas e questões matemáticas* (Percival).	5/23 (22%)
Irracionais são a expressão da inexatidão *O que não é real, sem valor inteiro* (Zelma). *Por que entre um número exato e outro existem "n" números, ex. 1....2 pode existir 1,3; 1,4; ... Etc.* (Osana). *A percepção de que nem todos os números possuem divisão exata* (Cyrus).	3/23 (13%)
Justificativas lógico-matemáticas *Pelo teorema de Pitágoras usando um quadrado de lado 1, a diagonal não é comensurável aos demais lados* (Wendell). *Medir ou mensurar com o máximo de exatidão possível os valores ou tamanhos de um cálculo ou objeto respectivamente falando* (Ernest). *A fórmula comprimento/diâmetro = π, esse fato me faz acreditar* (Hank).	3/23 (13%)
Preenchimento de lacunas *Para mim não existe uma explicação, penso que existem para explicar alguma lacuna na matemática* (Octavio). *Os números irracionais existem para preencher lacunas, partem da necessidade de preencher espaços deixados por outras classes de número* (Felix). *A necessidade de preencher lacunas onde os números racionais não aparecem (usando como base os números reais*) (Sheldon).	3/23 (13%)
Outras *Que os números podem ser infinitos, como as dízimas por exemplo* (Lilith). *De não conseguir escrever uma dízima periódica* (Jasper).	2/23 (9%)
Não sabe/não lembra/em branco	8/23 (33%)

Fonte: Elaborado pelo autor.

A categoria ‘Irracionais são descritos/aparecem pela/na matemática’ compreende respostas que são de certa forma redundantes, algo do tipo ‘acredito que existem porque existem’, ou seja, que já partem do princípio de que os números irracionais existem. No

Estudo Exploratório (Apêndice H), as respostas redundantes também foram as mais citadas pelos sujeitos quando perguntamos por que se ensina números irracionais. Citamos o exemplo de um licenciando que escreveu *porque eles existem e interferem nos cálculos e aplicações do dia-a-dia*. Algumas respostas do **Quadro 21**, porém, apresentam algo que vai além da redundância. A resposta de Dixie, por exemplo (2ª resposta do **Quadro 21**), desvela uma possível relação com a autoridade da matemática e do professor de matemática. Soares, Ferreira e Moreira (1998) também encontraram respostas que confirmam nossa suspeita, como *Quando estava na escola, conheci os irracionais e aceitei sua existência* (p. 79) e *Talvez eu não acredite, apenas aceite* (p. 80).

Em nosso Estudo Exploratório (Apêndice H), também surgiram referências à uma suposta inexatidão dos números irracionais. Naquela ocasião, perguntamos aos alunos ingressantes de 2013 por que se ensina números irracionais? Obtivemos duas seguintes respostas nesse sentido, que foram *existem cálculos matemáticos não exatos* e *não é toda divisão que resulta em número inteiro, então temos que estudar também os quebrados, números irracionais*. A inexatidão também aparece em outras pesquisas, em respostas de estudantes veteranos de licenciatura em matemática (SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1998, p. 79) bem como em imagens detectadas de estudantes ingressantes em um curso de licenciatura em matemática (MOREIRA, 2004, p. 164).

As respostas da categoria "justificativas lógico-matemáticas" são aquelas que fazem menção aos elementos ou propriedades que têm relação estreita com o surgimento ou com a aceitação dos números irracionais, como a incomensurabilidade, os problemas de medida, o número π, entre outras. São respostas que um professor de matemática provavelmente consideraria 'corretas'. Porém, entendemos que elas também poderiam estar na categoria 'Irracionais são descritos/aparecem pela/na matemática', pois não podemos descartar sua relação com a autoridade matemática, isto é, aceitação e repetição de algo que ouviram ou leram sem que isso reflita um conhecimento adquirido pelo sujeito. Todavia, para fazer isso, precisaríamos investigar o que pensam e sabem os licenciandos Wendell, Ernest e Hank com maior profundidade, o que não fizemos.

O 'preenchimento de lacunas' também apareceu no Estudo Exploratório (Apêndice H), mas quando perguntamos a definição de números irracionais. A função de completar a reta foi citada por quatro licenciandos pesquisados em Moreira (2004). Um deles disse o seguinte:

os números irracionais servem para cobrir as lacunas na reta real, espaços que não podem ser representados nem por frações nem por inteiros, mas que existem (p. 165).

7.2 – Análise de sujeitos selecionados

O que apresentamos a seguir é uma análise do desenvolvimento da imagem do conceito de números racionais e irracionais de três sujeitos ao longo das atividades propostas. A forma utilizada para a apresentação de dados na seção anterior adequou-se bem para uma análise da turma como um todo, inclusive no agrupamento e na condensação dos dados a serem apresentados. Contudo, nesta seção, seguimos por outro caminho. Ao invés de apresentar os dados a partir dos aspectos dos números irracionais como reconhecimento, definição e propriedades, decidimos apresentar e analisar os dados a partir de associações detectadas na imagem do conceito dos sujeitos, de acordo com o modelo apresentado na **Figura 35**. Optamos por esse caminho, pois entendemos que ele é mais adequado quando se trata de analisar individualmente os participantes da pesquisa, já que diz respeito a um dos elementos da imagem do conceito – as associações – que são atravessadas por todos os aspectos dos números irracionais.

Identificamos as associações existentes, partindo da hipótese de que quando existe mais de um julgamento semelhante; isto é, que utiliza justificativas equivalentes, isso é um sinal de que aquela associação foi estabelecida. A associação seria a cristalização de julgamentos que são feitos com frequência, segundo nossa leitura de Hershkowitz (1994). A partir da sua formação, essas associações muitas vezes são a primeira resposta da imagem do conceito. Diante de uma situação familiar, a mente entende que não precisa fazer uma longa cadeia de raciocínios para chegar a uma conclusão que já chegou algumas vezes antes e usa a associação, uma espécie de atalho capaz de economizar energia. É nesse sentido que entendemos Vinner (1991), em relação ao que é natural para o cérebro, segundo a forma de pensar que fomos acostumados, que é tirar conclusões por meio de comparação com situações semelhantes que já vivemos. Esse caminho seguido pelo nosso pensamento em geral não passa pelo uso de definições[90].

[90] Para identificar um gato, não procuramos a definição de 'gato' em nossa mente. Na verdade, dificilmente alguma pessoa terá uma definição para esse animal, salvo especialistas como os biólogos. Uma criança aprende a identificar um gato por semelhança com todos os outros exemplares de animais que os adultos chamam de gatos. Para aprofundar como a criança cria e manipula esquemas mentais, recomendamos a leitura de Wadsworth (1997).

Para apresentar os dados relativos às movimentações das associações presentes na imagem do conceito desses sujeitos, seguimos uma direção semelhante ao que foi feito em Giraldo (2004). Nesse trabalho, foram realizadas diversas entrevistas com os sujeitos e analisada a evolução do discurso dos mesmos em relação ao conceito de derivada por meio de 4 categorias:

> **Reformulação**: um aspecto da imagem de conceito é reelaborado, de forma que algumas de suas características são preservadas e outras mudam.
>
> **Reconstrução**: um aspecto da imagem de conceito é substituído por um novo, que é incompatível com o primeiro.
>
> **Inclusão**: passa a fazer parte do discurso um aspecto até então ausente e sem relação direta aparente com aspectos presentes antes. É claro que o fato de um aspecto estar ausente do discurso não significa que este não faça parte da imagem de conceito. Assim, quando um participante passa a mencionar uma ideia até então ausente, podemos apenas supor, mas não garantir, que esta haja sido incluída em sua imagem de conceito a partir daquele momento. Tal suposição pode ser fortalecida pela frequência com que a ideia é citada.
>
> **Exclusão**: deixa de fazer parte do discurso um aspecto até então presente, sem que se identifique relação direta (por exemplo, por meio reformulação ou reconstrução) com novos aspectos. Da mesma forma que no caso do efeito de inclusão, a exclusão de um aspecto do discurso do indivíduo não é garantia da exclusão da imagem de conceito, o que requer estudos mais cuidadosos (GIRALDO, 2004, p. 121).

O que fizemos foi adaptar o que foi feito para o 'discurso' ao que chamamos de associação. Os licenciandos escolhidos para essa análise mais minuciosa foram Cyrus, Titus e Agatha e, além das associações, também analisamos a imagem da definição do conceito e o sentimento desses estudantes ao longo da etapa de Avaliação. Os critérios para a seleção desses estudantes foram apresentados na seção 6.2.2.2.8 – Entrevistas Iniciais e Finais.

7.2.1 – Cyrus

Cyrus é um jovem de 19 anos com múltiplos talentos. Ensina música na sua igreja, participa de um grupo de teatro criado por alunos do Ifes, além de manter um *blog* com curiosidades matemáticas na Internet. Disse durante a apresentação da turma em 5/5/2014 que queria fazer Engenharia Elétrica, mas escolheu a licenciatura em matemática por ser aplicada, para ter base de cálculo e porque o turno noturno no qual o curso é oferecido foi atraente, já que trabalha durante todo o dia. A visão do estudante a respeito da licenciatura como uma área aplicada da matemática e que capacita o professor para fazer cálculos chamou nossa atenção. Em geral, não é essa a visão mais comum que se tem de um curso cujo objetivo principal é o de formar professores.

Cyrus também demonstrou interesse em aprender durante todas as atividades que participou. Além do interesse, o estudante também apresentou uma postura questionadora frente ao conhecimento matemático que julgamos importante na formação do professor de matemática.

> *Eu pelo menos não gosto, de aceitar, só simplesmente aceitar as informações. Quando você está no ensino médio, beleza, você não tem argumentos para discutir com o professor. O professor fala para você que "a é igual a pedra, a é igual a pedra". Agora, quando você chega no ensino superior quando você tem um pouco mais de base você quer saber o porquê* (Fala do aluno registrada durante a etapa de Observação da apresentação de um trabalho sobre números em 16/7/2014).

Cyrus ingressou na licenciatura em matemática do Ifes dois anos após ter terminado o ensino médio e seu contato anterior com os números irracionais foi, nas palavras do próprio licenciando, resumido assim:

> *Ela [a professora] não deu muita atenção, ela fez meio que um apanhado geral, uma coisa prática, talvez até para a prova dela, por questão de grade curricular mesmo, não sei. Na época até me se sentia bem, acreditava que estava entendendo a matéria. Hoje no ensino de verdade eu me sinto meio desconfortável, um pouco inseguro com a matéria, mas a intenção é que eu consiga ter essas questões, esses termos, todos bem definidos até o final do estudo (Durante a atividade de Correção de Questões em 21/5/2014).*

Nessa fala, que foi feita após a aplicação dos questionários Q1 e Q2, destacamos o incômodo causado pelos mesmos. Os questionários, que foram aplicados nos dias 12 e 14/5/2014, provocaram o licenciando a fazer uma pequena análise da situação em que se encontrava antes e comparar com a situação atual. Também há que se destacar nessa fala as boas expectativas do estudante em relação à pesquisa que estava começando. Chamou-nos atenção também o uso da expressão "ensino de verdade", como se, o que ele vivenciara até então, não tivesse sido um ensino 'à vera'.

7.2.1.1 – Associações detectadas

As afirmações de Cyrus ao longo das atividades e dos instrumentos aplicados foram agrupadas de acordo com o que consideramos ser resultado de associações com atributos, figuras mentais e exemplos protótipos presentes na sua imagem do conceito de número racional e irracional (temos em mente aqui o modelo que criamos – ver **Figura 35**). Identificamos essas associações com a letra C, de Cyrus, seguida de um número. Utilizamos o símbolo $\asymp$ para representar a ligação entre o conceito e o atributo, figura mental ou exemplo protótipo.

C1: Número racional ≍ divisão/resultado exato (a)

A associação do número racional com a exatidão ficou marcada nos dados apurados nos questionários Q1 e Q2, que apresentamos no **Quadro 22**. Além desses dados, ainda no questionário Q1, quando perguntamos 'Quantos números racionais existem entre 2/3 e ¾', Cyrus marcou a opção "Muitos números" e forneceu como exemplo *Quaisquer números que possuam divisão precisa.* Quando perguntamos a respeito da utilidade dos números racionais, ele respondeu *para atender a situações que exigem extrema precisão, não cabendo, então, arredondamentos.*

Quadro 22 - Número racional ≍ divisão/resultado exato (a)

Julgamento	***Justificativa***	***Instrumento***	***Data***
$\frac{4\pi}{3}$ é racional	A divisão é exata	Q1	12/5/14
$1{,}725$ é racional	Divisão exata		
$\sqrt[3]{27}$ não é irracional	Resultado exato	Q2	14/5/14
$\frac{3\pi}{4}$ não é irracional	Resultado exato		

Fonte: Elaborado pelo autor.

Um dado intrigante relativo ao **Quadro 22** foi a classificação de $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{3\pi}{4}$ como racionais. Como o licenciando entendeu que essas divisões seriam exatas? Na Entrevista Final, pudemos revelar esse 'mistério'.

> Pesquisador*: Como que $\frac{4\pi}{3}$ é uma divisão exata?*
>
> Cyrus*: É, eu errei professor...*
>
> Pesquisador*: Eu não falei que você errou, eu só queria entender...*
>
> Cyrus*: Hoje eu entendo que seria um número irracional, porque π é um número irracional. É porque eu associei π ao valor de graus, não o valor... a história de círculo...*
>
> Pesquisador*: Entendi.*
>
> Cyrus*: Então eu associei como um círculo...4π, quatro vezes cento e oitenta...*
>
> Pesquisador*: Você pensou no 180º?*
>
> Cyrus*: Isso, isso. Eu associei com aquela ideia.*

O trecho acima, além de elucidar a questão da classificação de $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{3\pi}{4}$ como números racionais (na verdade, $4 \cdot \frac{180}{3}$ e $3 \cdot \frac{180}{4}$ são números inteiros) também mostrou que π não era um exemplo protótipo de número irracional na imagem do conceito de Cyrus. Na verdade, o trecho *hoje eu entendo que seria um número irracional, porque π é um número irracional* sugere que esse número nem mesmo era reconhecido como irracional antes do estudante participar da pesquisa. Ou seja, inferimos que ele elaborou durante a pesquisa que π é irracional, mas, perguntamo-nos em que nível se deu essa elaboração? Provavelmente em nível instrumental, até porque não desenvolvemos a questão da irracionalidade desse número durante a pesquisa.

A questão da irracionalidade de π foi um assunto recorrente, e diversos alunos manifestaram interesse de entender porque esse número é irracional, além de outras dúvidas. Titus foi um deles, e ao final de uma atividade, perguntou-me como π pode ser escrito como uma fração C/D se π é um número irracional? Essa dúvida não é exclusividade dos discentes, também foi dúvida de um grupo de professores, conforme mostrado em Cezar (2011) e, como mostramos na seção 1.1 – Na educação básica, essa questão muitas vezes não está bem resolvida em alguns livros didáticos (ver **Figura 4**). Tudo isso fez-nos refletir: que número é esse que é ensinado como irracional, mas que também é 180º, e que também pode ser escrito da forma fracionária? Será que nós, os professores, estamos ensinando o assunto da forma adequada para os alunos? Discutimos o que entendemos como uma forma adequada de ensinar os números irracionais na seção 1.1, e acrescentamos aqui que vemos nessas dúvidas relacionadas a π um reflexo do tratamento que é dispensado aos números irracionais como um todo: rápido, superficial e cheio de contradições.

C2: Número irracional ≍ divisão inexata

Apesar do licenciando ter classificado alguns números corretamente, essa associação também fez com que ele considerasse frações como números irracionais (ver **Quadro 23**). Na entrevista final pudemos esclarecer que Cyrus fez a divisão, e ao não identificar a parte periódica, considerou que o número era irracional, conforme trecho destacado a seguir.

> Pesquisador: *Cyrus por exemplo, eu destaquei aqui que ele considerou não racionais o -3/14 e o 22/7, pois a divisão é inexata, e aí eu queria saber, você fez essa divisão na mão, ou você usou a calculadora, como que foi o processo para chegar a essa conclusão?*
>
> Cyrus: *Fiz na mão.*
>
> Pesquisador: *E aí você achou que a divisão era inexata...*
>
> Cyrus: *É porque geralmente a gente associa algumas casas né? Eu fiz até a quinta, geralmente faço até a quinta casas no máximo para esse tipo de divisão, e aí como eu não achei nenhum período eu acabei não percebendo.*

Outro ponto que merece destaque na ação do estudante, é o fato de associar fração com algo a ser feito, com uma operação a ser realizada, no caso, a divisão. Várias questões estão envolvidas, mas principalmente a ênfase que é dada no ensino dos números à representação decimal (SIROTIC; ZAZKIS, 2007b) e, a partir daí, podemos entender que muitos estudantes só se sentem seguros ao trabalharem com números escritos na representação decimal. Um uso instrumental da definição de números racionais como quociente de inteiros já seria suficiente para evitar que Cyrus classificasse frações como números irracionais. Isso nos leva a pensar que, ou essa definição não fazia parte da sua imagem do conceito ou ela não foi usada (TALL; VINNER, 1981). Na seção seguinte, confirmamos a primeira hipótese.

Quadro 23 - Associação Número irracional $\asymp$ divisão inexata

Julgamento	*Justificativa*	*Instrumento*	*Data*
$\frac{-3}{14}$ não é racional	Divisão inexata	Q1	12/5/14
$\frac{22}{7}$ não é racional	Divisão inexata		
$\frac{13}{23}$ é irracional	Divisão inexata	Q2	14/5/14
$\frac{\sqrt{5}}{2}$ é irracional	Divisão inexata		
3,1444 ... é irracional	Divisão inexata		
1,1212212221 ... é irracional	Divisão inexata		
$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ é irracional	Divisão inexata		
1,222 ... é irracional	Divisão inexata		
3,1416 é irracional	Divisão inexata		

Fonte: Elaborado pelo autor.

A respeito da classificação de 3,1416 como irracional porque é uma divisão inexata, descobrimos o seguinte na Entrevista Final

> Pesquisador*: O 3,1416 você colocou que é uma divisão inexata, no primeiro ainda, no primeiro questionário. 3,1416 você falou que é irracional pois a divisão é inexata. Esse eu também não entendi.*
>
> Cyrus*: É porque está sem as reticências, mas eu devo ter pensado nele com as reticências. Provavelmente eu associei com as reticências.*

Como professores precisamos refletir: quantas vezes utilizamos algum exemplo de fração com mais de cinco casas na parte periódica? No máximo quando se introduz a questão da dízima, com um exemplo ou dois. Não é uma questão rotineira. Na nossa rotina de sala de aula, os números que usamos em nossos exemplos e questões de prova têm uma ou duas casas no máximo. Daí a possível associação de que se até a quinta casa não apareceu período, como dito por Cyrus, deve ser um número irracional.

Além das justificativas mostradas no **Quadro 23**, quando perguntamos no questionário Q2 ‘o que te faz acreditar na existência de números irracionais’, Cyrus respondeu *a percepção de que nem todos os números possuem divisão exata*, reforçando a associação dos irracionais com a inexatidão.

Com o intuito de analisar conjuntamente as associações C2 e C1, refletimos a respeito de alguns pontos que julgamos importantes. O termo ‘divisão exata’ é bastante difundido na matemática e significa que o resto obtido em uma divisão é igual a zero. O problema com esse termo é que ele sugere que existe um tipo de divisão inexata. O mesmo acontece com o termo ‘decimal exata’. Daí, é comum que se façam esses tipos de associação: divisão/resultado exato(a) com os racionais e divisão/resultado inexato(a) com os irracionais. De fato, foi exatamente isso o que Cyrus fez em C1 e C2. A notação finita, resultado de uma divisão exata, dá origem aos racionais; a notação infinita, resultado de uma divisão que não acaba, logo inexata, dá origem aos irracionais. É claro que essas associações levam a erros, como os que Cyrus cometeu ao classificar $1{,}222$ ... e $3{,}1444$ ... como números irracionais (**Quadro 23**). Pensamos que ‘divisão exata’ e ‘decimal exata’ são termos que deveriam ser evitados e, no seu lugar, seria mais apropriado utilizar ‘divisão finita’ e ‘decimal finita’

Destacamos ainda que, como as associações C1 e C2 relacionam os números racionais e irracionais com um procedimento – a divisão – ou com o resultado de um procedimento, elas desempenham um duplo papel, podendo ser pensadas como atributo ou como figura mental. De acordo com o que discutimos no capítulo 5, alguns procedimentos podem ser considerados figuras mentais devido a um forte apelo visual. Feitas essas reflexões, consideramos o atributo/figura mental da divisão/resultado exato(a) e divisão/resultado inexato como irrelevantes e, portanto, desfavoráveis à aprendizagem (HERSHKOWITZ, 1994).

C3: Número irracional $\asymp$ *dízima*

Observando o **Quadro 24**, é possível inferir que ‘dízima’ se refere tanto a dízima periódica quanto não-periódica. A dízima periódica é um atributo irrelevante para o número irracional, enquanto a dízima não-periódica é um atributo crítico. Apesar de equivocada, se considerarmos que, para o aluno, a dízima é a representação de uma divisão inexata, a associação C3 é coerente com as associações C1 e C2.

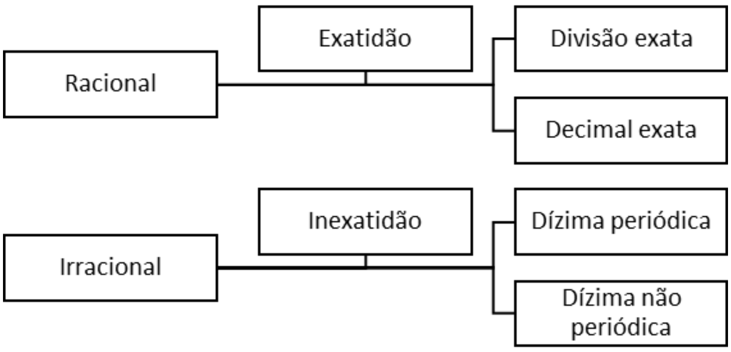
Quadro 24 - Número irracional ≍ dízima

Julgamento	*Justificativa*	*Instrumento*	*Data*
$\frac{\sqrt{3}}{2}$ não é racional	Raiz quadrada de 3 é dízima e a divisão por dois não altera isso	Q1	12/5/14
0,0555 ... não é racional	Dízima		
1,010010001 ... não é racional	Dízima		
0,666 ... não é racional	Dízima		

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na verdade, pensamos que as associações C1, C2 e C3 pertencem a um ciclo único de raciocínio: racional é associado ao que é exato e irracional ao que é inexato. Assim, as dízimas, sejam periódicas ou não-periódicas, são tratadas como números irracionais, e as decimais exatas como números racionais. As imagens dos conceitos de número racional e irracional se interpenetram e uma reforça a outra. Os atributos e/ou figuras mentais utilizados pelo estudante – divisão exata/inexata e dízima – pertencem a um grupo ainda maior de atributos ou figuras: a exatidão/inexatidão (ver **Figura 41**).

Figura 41 – Esquema de raciocínio de Cyrus



Fonte: Elaborada pelo autor.

Esse tipo de associação também foi detectado no Pequeno Estudo Diagnóstico (Apêndice G), no Estudo Exploratório (ver Tabela 21 e Tabela 22 do Apêndice H) e em pesquisas como a de Igliori e Silva (1998). Tal associação também se relaciona diretamente com a ideia de que irracional é tudo que é considerado estranho, nebuloso, como o infinito e a dízima não-periódica. Estranho até à própria ideia de número, quase sempre associada a números inteiros (FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995; MOREIRA, 2004; REZENDE, 2003).

7.2.1.2 – Movimentações das associações

Na Entrevista Final, Cyrus parecia ter reformulado a associação C3, pois diferencia situação inexata de dízima.

> Pesquisador*: Qual a diferença entre uma divisão que leva a uma dízima e uma divisão que leva a uma situação inexata?*
>
> Cyrus*: Divisão inexata é uma situação que ela reflete um número, sequência, um número extenso, mas que não necessariamente é uma dízima, um número que tem decimais, mas que não se organiza de forma periódica. É um número que tem decimais, mas não se agrupam de forma periódica. E a outra situação são os números que se agrupam de forma periódica, tem uma organização na casa dos decimais.*
>
> Pesquisador*: Entendi. Então a divisão que leva a uma situação inexata é quando não é dízima?*
>
> Cyrus*: Quando não é dízima.*

Entendemos que a situação inexata seria o que chamamos de dízima não-periódica, enquanto a dízima periódica não foi considerada mais como uma situação inexata. Em outro momento da entrevista final, observamos que C3 havia sido excluída da imagem do conceito de Cyrus.

> Pesquisador: *Você também marcou como não era racional o 0,555... o 2,343434... e o 0,666... porque são dízimas.*
>
> Cyrus: *Isso aí é conceito. Esse aí porque eu não sabia mesmo.*
>
> Pesquisador: *E você colocou o 1,010010001... como não racional pois é dízima*.
>
> Cyrus: *Misturei...*
>
> Pesquisador: *O que você diria desse hoje?*
>
> Cyrus: *Eu diria que ele não é racional porque ele não apresenta período, mas a justificativa da primeira resposta estava errada.*
>
> Pesquisador: *Você percebe, você colocou...*
>
> Cyrus: *Contradição...*
>
> Pesquisador: *...que não era racional mas colocou que era dízima*.
>
> Cyrus: *Coloquei uma resposta para sim...justifiquei como sim e respondi que não.*

Ao contrário de C3, C2 parece ter se mantido na imagem do conceito de Cyrus. Na Entrevista Final, mesmo com nossa última tentativa para que o licenciando derrubasse essa associação, ele traz um novo elemento, a organização, e 'salva' sua associação C2, conforme trazemos no trecho a seguir.

> Pesquisador: *Pelo que eu entendi, a divisão exata são os racionais e a inexata os irracionais. É isso?*
>
> Cyrus: *Isso.*
>
> Pesquisador: *Tá, então o que você me diria por exemplo do 0,333..., essa divisão é exata ou inexata?*

> Cyrus: *Para mim ela se encaixa na questão da exata porque, justamente pela questão da organização. Porque ela não aparenta, olhando para o número, você não vê uma desorganização. Você vê o zero, vê o 3 sequenciadamente (sic). Se cortar depois da primeira vez, se fizer uma aproximação, você vai ter quase que a mesma coisa do resto do número*.

Parece que a questão da divisão exata/inexata se desloca exclusivamente para a representação. Ele chega até a citar uma tal 'desorganização' gerada pela divisão inexata. Ou seja, transfere a questão da divisão para a representação. Seria interessante descontruir essa ideia de Cyrus e trabalhar um pouco com Geometria. Um segmento de comprimento 1 pode ser dividido em 3 partes iguais sem problemas. Um segmento de comprimento $\sqrt{2}$ pode ser dividido em 3,4 ou 5 partes iguais sem problemas. A questão da 'desorganização' está muito mais ligada à representação decimal dos números, mas, infelizmente, não percebemos isso a tempo e tal perspectiva não foi trabalhada com Cyrus nem com os outros participantes de nossa pesquisa.

Ainda a respeito desse trecho da entrevista final, Cyrus nos fez refletir e lembrar de Fischbein, Jehiam e Cohen (1995), especificamente do adjetivo *psicologicamente resistentes*, que foi utilizado para caracterizar as imagens conceituais; isto é, imagens conceituais não são facilmente substituíveis por uma definição 'correta' ou por alguma explicação ou aula que venha a confrontá-las. A tendência é que ocorra o que mostramos anteriormente com o exemplo de Cyrus, ou seja, com o surgimento de um novo atributo, figura mental ou exemplo protótipo, podem ocorrer pequenos ajustes para acomodar as novas informações ao mosaico atual de imagens, com a intenção de reforçar as associações existentes. Pois bem, como já tínhamos essa leitura quando realizamos a entrevista final, tentamos mais uma vez desconstruir suas associações e mostrar para o licenciando que C1 e C2 não se sustentavam. Mas, dessa vez, ele lançou mão da desconfiança na representação utilizando reticências e da imprevisibilidade, que ainda não havia aparecido em seu vocabulário, para salvar a associação C2 mais uma vez.

> Pesquisador: *O que você acharia por exemplo de 1,11121314...eu posso prever a casa, o número que eu quiser! Não posso?*
>
> Cyrus: *Você não pode afirmar como certeza.*
>
> Pesquisador: *Posso! 11, 12, 13, 14, 15, ... eu posso montar uma função, uma sequência, uma forma de descobrir a 50ª, a 80ª casa, não dá?*
>
> Cyrus: *Dá para você chu...*
>
> Pesquisador: *11, 12, 13, tem uma lógica...*
>
> Cyrus: *É, dá para você supor. É, tem uma lógica, mas o que que garante?*
>
> Pesquisador: *Da mesma forma que o 0,333... não garante que vai ter 3...*

Cyrus: *Por isso que eu até levantei aquela questão..., mas aí a gente volta para o conceito. Se tem um conceito, se tem uma ideia fixa do que é um número, aí a gente pode definir algumas coisas ou não. Por exemplo, esse número, eu sei que eu não posso prever porque ele foge do conceito de a sobre b, com b diferente de zero, a e b pertencentes aos naturais e tudo mais.*

Percebemos naquele instante que a questão ainda poderia alongar-se por muito tempo e decidimos fazer, como fizemos com Titus, o que gostaríamos de ter feito para toda a turma. Explicamos que não existe essa relação de previsibilidade com o racional e nem da imprevisibilidade com o irracional. No fim das contas, a sensação foi a de que ainda seria necessário trabalhar algumas horas, talvez vários encontros, para que o aluno se convencesse disso. Apesar disso, na entrevista final também pudemos detectar alguns avanços na questão do reconhecimento. Cyrus acertou todas as classificações dos seguintes números:

a) 1,11121314...

b) 0,101100110001...

c) 2/19

c) 2,45678678678...

d) 0,123456789...

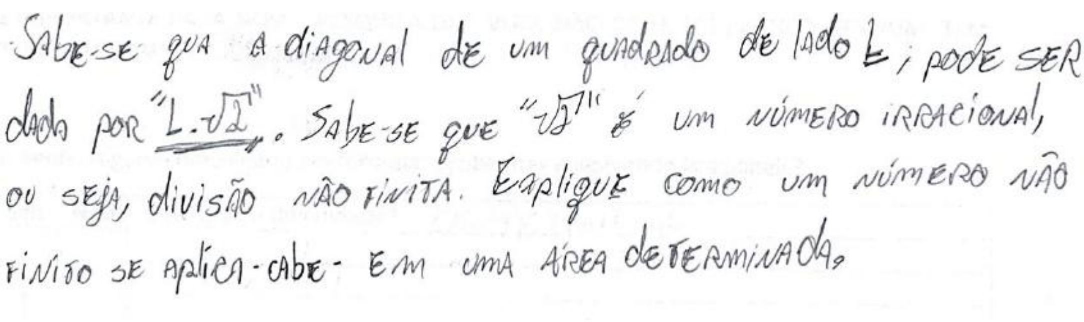
e) 2,334335336...

f) 1,357911... (só ímpares)

Na verdade, desde a atividade Correção de Questões, o licenciando já não cometeu os mesmos erros cometidos nos questionários Q1 e Q2. Entendemos assim que o nível instrumental foi alcançado rapidamente, talvez porque o estudante precisou apenas relembrar o que já havia aprendido antes, provavelmente na educação básica. Porém, como veremos, o nível relacional ainda estava bastante distante.

Uma associação que pareceu permear todas as outras é uma associação do número com a sua representação. O número irracional, nas associações de Cyrus, esteve sempre relacionado com a divisão inexata e com dízima, aspectos diretamente ligados à representação do número. Na atividade de Elaboração de Questões, realizada em 2/6/14, tivemos mais uma amostra dessa associação proveniente de uma das questões elaboradas pela dupla Calvin e Cyrus (ver **Figura 42**).

Figura 42 - Problema proposto por Cyrus e Calvin na atividade de Elaboração de Questões


Sabe-se qua a diagonal de um quadrado de lado L; pode ser dada por "L.√2". Sabe-se que "√2" é um número irracional, ou seja, divisão não finita. Explique como um número não finito se aplica-cabe- em uma área determinada.

Entendemos tratar-se de uma curiosidade que esses alunos têm de saber, como um número infinito, que não acaba, 'cabe' em uma diagonal finita, limitada. Perguntei a Cyrus e Calvin se o que eu tinha entendido com essa questão estava correto, e eles confirmaram.

> Pesquisador: *O que tem a ver a divisão não finita com caber?*
>
> Cyrus: *É porque quando a gente pensa em figura, a gente pensa no.... tipo dois. É um número, você sabe aonde vai dar, então o dois pára. Agora o* $\sqrt{2}$ *por exemplo. Quanto que é* $\sqrt{2}$ *? Você não vai parar de contar, só vai crescendo o quanto você for contando. Quando você vai parar de crescer? Entendeu?*
>
> Calvin: *É que não dá pra ter exatidão na métrica mesmo. Para medir, a gente colocou a questão de geometria. Não dá para você medir isso numa trena com essas réguas precisas. Porque a* $\sqrt{2}$ *é um número irracional, vai ter sempre um número depois e vai chegar uma hora que o equipamento não vai atender...*

Em seguida, tentamos explicar que se tratava apenas de uma questão de representação. Percebemos que isso poderia ter sido trabalhado em alguma atividade, com toda a turma, mas, não havia mais tempo. Como síntese das movimentações das associações de Cyrus, apresentamos o **Quadro 25**. As setas tracejadas indicam que as movimentações foram realizadas em nível instrumental.

Quadro 25 - Movimentações das associações de Cyrus

Q1 (12/5/2014)	Q2 (14/5/2014)	Diversas atividades (maio a agosto de 2014)	Entrevista Final (11/9/2014)

C1: Número racional $\asymp$ divisão exata	Reformulação →	C1’: Número racional $\asymp$ divisão com dígitos previsíveis, organizados
C2: Número irracional $\asymp$ divisão inexata	Reformulação →	C2’: Número irracional $\asymp$ divisão com dígitos imprevisíveis, desorganizados
C3: Número irracional $\asymp$ dízima	Exclusão →	

Fonte: Elaborado pelo autor.

7.2.1.3 - Imagem da definição do conceito

Começamos afirmando que a imagem da definição do conceito de número irracional de Cyrus não estava vazia quando ele ingressou na licenciatura em matemática. Segundo o próprio estudante,

> *Eu já tinha visto a definição, eu tenho certeza, eu já vi a definição no ensino médio, porque é a primeira coisa que o professor fala... pega um número racional e um irracional e joga aquilo lá. Mas, pronto, ele só fez aquilo lá e foi para o número. Ele não ficou em cima daquilo, não discutiu com você, não associou aquilo ali à matéria em si. Ele só te falou que é aquilo lá, entendeu? Agora, quando você vê aplicação, você vê aquilo ali se verificando na matéria, é diferente* (Entrevista Final, em 11/9/2014).

As definições de Cyrus para números racionais e irracionais apresentadas nos questionários Q1 e Q2 são coerentes com a maioria das justificativas utilizadas para o reconhecimento e, consequentemente, com as associações detectadas. Todas as definições de Cyrus giram em torno da questão da exatidão dos racionais (C1) e inexatidão dos irracionais (C2), conforme mostramos no **Quadro 26**.

Quadro 26 - Definições de Cyrus para número racional e irracional

<table>
<tr><th>Definição de número racional</th><th>Instrumento</th><th>Data</th></tr>
<tr><td>Números cuja divisão não tem término exato</td><td>Q1</td><td>12/5/2014</td></tr>
<tr><td>Definição de número irracional</td><td rowspan="4">Q2</td><td rowspan="4">14/5/2014</td></tr>
<tr><td>Números cuja a divisão leva à dízima ou situação inexata.
Números de divisão inexata, se não por 1 ou eles mesmos.</td></tr>
<tr><td>Diferença entre número racional e número irracional</td></tr>
<tr><td>Respectivamente, um possui divisão exata, outro não.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor.

Especificamente em relação à definição de Cyrus para número racional apresentada no questionário Q1, suspeitamos que o estudante confundiu racional com irracional. O que o estudante respondeu no questionário Q2 sobre a ‘diferença entre número racional e número irracional’ foi para nós o primeiro indício de que havia sido feita essa confusão. Na entrevista final, quando li para Cyrus suas definições no Q1 e Q2, confirmamos nossa suspeita.

Cyrus*: Eu inverti os conceitos.*

Pesquisador*: Inverteu? Como assim?*

Cyrus*: Porque no racional eu usei o conceito de irracional.*

Pesquisador*: No racional você falou, cuja divisão não tem término exato.*

Cyrus*: Então.*

Solucionada essa questão, pode-se dizer que também existe coerência entre as definições de racional e irracional do **Quadro 26**, seguindo a mesma linha de raciocínio que ilustramos na **Figura 41**. A respeito da caracterização dos números irracionais como *números de divisão inexata, se não por 1 ou eles mesmos*, Cyrus disse o seguinte na entrevista final: *por 1 ou por ele mesmo porque por 1 dá o próprio número e por eles mesmo dá 1. Então não é necessariamente divisão nesses casos. Entendeu?*

Na Entrevista Final, Cyrus definiu racional como *um número que pode ser escrito na forma de a/b com b diferente de zero e a e b pertencentes aos naturais.* O número irracional foi definido como *um número que não dá para ser escrito na forma a/b, com a e b pertencente aos naturais, por que um desses dois provavelmente vai falhar, provavelmente não, tem que falhar para ser irracional.* Ele explicou o que era falhar: *falhar é eles não pertencerem ao conjunto dos naturais.*

Na atividade de Correção de Questões (Apêndice U - Atividade Correção de Questões), Cyrus não mudou nenhuma classificação por causa dos argumentos dos alunos. Porém, quando argumentamos sobre a questão do 5/6 e da divisão que não acaba [$\frac{5}{6} = 0{,}8333 \ldots$] ele disse que existem outros fatores para dar a resposta, e disse, usando implicitamente sua mais recente definição, que como são dois inteiros, é um racional.

> *Cyrus: Sempre que for divisão de um inteiro por um inteiro, o número é racional.*
>
> *Pesquisador: Mas, e a questão da divisão que não acaba?*
>
> *Cyrus: Independente da divisão, você tem mais de um fator que pode te levar até a resposta. A divisão de inteiro por inteiro sempre vai dar um número racional (Em 21/5/2014).*

Ou seja, percebe-se que sua nova definição de número racional foi acomodada ao lado da imagem da divisão que não acaba. Elas estavam convivendo juntas. Essa suspeita foi reforçada na Entrevista Final, quando voltamos a tocar na resposta que o licenciando havia dado na atividade de Correção de Questões, pois achamos que ainda poderíamos extrair algo mais, principalmente no que se refere à expressão *você tem mais de um fator que pode te levar até a resposta*.

> Pesquisador: *Quando você disse, tem outros fatores para dar a resposta, você pode me corrigir se eu estiver errado, você estava usando a definição que você tinha acabado de aprender*[91]*, eu imagino, ou lembrado...*
>
> Cyrus: *Estava fresco.*
>
> Pesquisador: *Estava fresco na cabeça. Como são frações de inteiro é racional, mas como você fala em outros fatores para dar a resposta eu imagino que você não abandonou aquela coisa, a divisão inexata continua rondando a sua cabeça. Você não jogou ela fora. Estou errado nessa minha interpretação? De que você não jogou aquilo completamente fora, aquilo está aí na sua cabeça ainda...*
>
> Cyrus: *É, continua. É porque é muito tempo com a ideia do que você tem de conceito. Para mim era quase que um conceito, eu trabalhei tanto tempo com essa ideia que você acaba se firmando muito nisso, se apoiando nisso. Então por mais que eu queira, tipo assim, eu olho um número, ok, a primeira ideia que vem é sempre aquela mais antiga, aquela inicial, mas aí sempre que eu puder eu vou tentar puxar para a definição. Se bateu com a definição, se casou, ok. Agora, se divergiu, aí eu vou pela definição. Eu largo o que eu creio, o que eu quero, o que eu espero ver daquele número e volto para a definição. Entendeu?*

O que vemos no caso de Cyrus está de acordo com o pensamento de Giraldo (2004), que *uma definição de conceito consistente com a definição formal, uma imagem de conceito rica e uma imagem de conceito consistente são fenômenos mutuamente independentes* (p. 10). Ou seja, pode-se ter uma imagem da definição do conceito consistente com a definição formal convivendo com uma imagem do conceito em desacordo com a

[91] A atividade Correção de Questões foi realizada uma semana após ter comentado no quadro a definição de números racionais e irracionais. Ver seção 6.2.3 – Dinâmica dos encontros.

matemática. No caso de Cyrus, esse desacordo reside principalmente nas associações C1, C2 e C3 que detectamos. Outro aspecto importante a se destacar nessa fala de Cyrus é que imagens antigas não foram apagadas quando o estudante teve contato com novas informações, o que também é previsto em Tall e Vinner (1981), e comentado em Soares, Ferreira e Moreira (1999):

> De um modo geral, o aluno tende a manter as suas imagens conceituais e acrescentar a elas uma versão (possivelmente distorcida) da definição formal apresentada. Dessa forma ele constrói uma espécie de mosaico com várias representações de um determinado conceito, recorrendo a uma ou outra dessas representações, dependendo das circunstâncias (p. 97).

No caso de Cyrus, a sua última definição apresentada (na Entrevista Final) não é uma versão distorcida da definição formal, mas, no resto, pensamos que ocorre o que foi dito em Soares, Ferreira e Moreira (1999). De fato, parece que foi criada uma espécie de mosaico que o aluno recorre e escolhe aquela representação, propriedade, imagem ou associação que mais lhe pareça apropriada para a circunstância (TALL; VINNER, 1981). Cyrus ainda dá mais um detalhe que pode ser agregado a esse pensamento, que diz respeito à autoridade da matemática (ou do professor de matemática) representada por uma definição, quando diz que *se divergiu, aí eu vou pela definição. Eu largo o que eu creio, o que eu quero, o que eu espero ver daquele número e volto para a definição.* Pensando no nosso modelo (**Figura 35**), podemos dizer que a definição recém-chegada de Cyrus ainda não tem ligação com as associações, e nem com atributos, figuras mentais e exemplos protótipos, instalados há mais tempo.

Na atividade Equivalência de Definições, aplicada em 25/8/14, cujo objetivo principal era relacionar as duas principais definições de números racionais e, consequentemente, de números irracionais, Cyrus acertou praticamente tudo, mas, escreveu que "uma dízima sem período é fruto da divisão de números inteiros", o que nos deixou preocupados.

Na entrevista final, quando lemos para Cyrus essa frase, ele disse:

> Cyrus: *Nossa, é o inverso do que é o conceito. É porque eu queria chegar na divisão de números que desse uma dízima sem período, mas não seria um número inteiro, seriam números reais. Divisão inexata, era isso que eu queria falar, inexata no sentido de não ter período, talvez não consiga nem prever. É o inverso do conceito.*
>
> Pesquisador: *Como assim o inverso do conceito?*
>
> Cyrus: *Para você ter um período, tem que ter a/b com a e b pertencente a inteiro. Aí eu usei essa definição para o que não era, para uma dízima não-periódica, no caso essa definição se aplica para dízimas periódicas.*
>
> Pesquisador: *E se eu te fizer outra pergunta...a divisão de dois números inteiros pode gerar uma dízima periódica?*

Cyrus: *Pode.*

Pesquisador: *E não-periódica?*

Cyrus: *Não.*

Depois de fazer no quadro algumas divisões e discutir a questão da repetição dos restos gerando as dízimas, disse para eles que o fato de uma fração de inteiros gerar uma dízima periódica não constitui uma definição. Pedimos que justificassem porque uma fração de inteiros necessariamente será uma dízima periódica. Apesar de ter acabado de mostrar isso no quadro para Cyrus e Calvin, eles não souberam justificar. Cyrus disse que não estava conseguindo justificar. Depois de algum silêncio e olhando para o quadro, Calvin começa a elaborar uma resposta, e Cyrus faz o arremate.

Calvin: *O resto sempre vai dar todos os números antes do divisor.*

Pesquisador: *E?*

Calvin: *Esse número nunca vai chegar ao divisor senão vai dar zero e aí vai finalizar a divisão.*

Pesquisador: *Está quase lá, mas falta ainda porque vai dar a dízima periódica.*

[Silêncio. Voltei ao quadro explicando que em uma divisão por 17, temos restos de 1 a 16]

Pesquisador: *Mas o que isso tem a ver com gerar dízima periódica?*

Calvin: *Esse 16 é o período...*

Cyrus: *Como o intervalo é menor que o denominador, que o divisor, eu vou ter repetições, eu vou ter sempre os mesmos fatores para dividir.*

Quando perguntamos as outras três afirmações da atividade Equivalência de Definições, eles conseguiram alcançar, com alguma ajuda, os objetivos que pretendíamos com a atividade.

7.2.1.4 - Sentimento

Ao ser estimulado a refletir a respeito de seus conhecimentos de matemática, Cyrus escreve que pensou em/na:

Como fundamentar melhor meus conhecimentos e evitar confusões como a de hoje.

(Após responder ao questionário Q1 em 12/5/2014)

Imprecisão/dubiedade do que achava conhecer.

(Após responder ao questionário Q2 em 14/5/2014)

Em relação à sua expectativa em consideração à pesquisa e ao que poderia aprender, o licenciando escreveu:

Para ter mais confiança no que digo/escrevo e pretendo passar.

(Após responder o questionário Q2 em 14/5/2014)

Obter um campo mais largo de aplicações e explicações [em relação ao irracional]

(Após realizar a atividade Formulação de Problemas em 02/6/2014)

Como uma pequena atividade complementar à atividade de Análise de Livros Didáticos, propusemos que os estudantes elaborassem uma capa e um título para um livro de matemática. Cyrus criou o título “Não é tão difícil quanto parece” e, segundo suas próprias palavras, sua capa transmite a seguinte visão de matemática (que provavelmente reflete a visão do aluno):

> *Que a matemática pode ser, e de fato é, gostosa de se aprender, praticar e ensinar. Que há sim contas e raciocínios complexos mas há também uma infinidade de séries que podem ser facilmente aprendidas de maneira limpa.*

Cyrus acha que melhorou a parte conceitual, mas continua com algumas dúvidas que tinha no início da pesquisa. Também avaliamos da mesma forma, principalmente após a Entrevista Final, que ainda existem muitas questões que precisariam ser trabalhadas.

> *Bom, quanto à conceituação está invariavelmente mais fácil, mais tranquilo. Esses por exemplo [referindo-se ao exercício proposto ao início da entrevista] eu nem olhei direito o que era e já fui fazendo porque já está mais fácil, a gente já está mais acostumado (sic). Agora, algumas coisas que eu já tinha dúvida antes, talvez nem são dúvidas, são algumas indagações que eu tenho, por exemplo quanto às irregularidades que a gente acha nos irracionais, se tem um porquê disso, ou se para essas irregularidades a gente acha na fração, ou sei lá, ou em alguma outra coisa uma regularidade, uma possível explicação lógica para isso... essas coisas assim. Quanto à fração também, que eu sempre me embolo com fração, essa coisa de densidade, eu nunca me dei bem com ela, sempre fui meio fraco.*

Na parte que ele diz que gostaria de entender como são geradas as irregularidades dos irracionais, a atividade Equivalência de Definições tinha como objetivo ajudar nesse sentido. Mas parece que essa atividade não foi suficiente para Cyrus. Ele talvez se refere a uma construção direta dos irracionais, como surge essa ‘desorganização’. Na verdade, isso é feito formalmente (cortes de Dedekind, por exemplo) e não como ele talvez desejaria ver.

Cyrus também revela na entrevista final como a pesquisa o instigou a procurar, por si só, a conceituação de número irracional.

> *Foram as conversas que a gente ia tendo ao longo da sua pesquisa. Querendo ou não a gente saía de lá e a gente parava no corredor “Pô Broetto (sic), tal coisa assim, assim, assim e tal”, ou as vezes a gente chegava na aula, com a repercussão da pesquisa, então a gente ia comentando e tal e as vezes um ou outro que tem mais conhecimento, a gente acabava conceituando de uma forma ou de outra, então a gente ia progredindo. E depois, principalmente depois do segundo, no primeiro não que eu achei que ia ser só aquela folha então eu fiquei tranquilo. Mas depois do segundo que eu vi que a pesquisa ia continuar, que eu precisava, que até era bom eu melhorar meu conceito naquilo, eu procurei conversar mais, procurei tirar minhas dúvidas. Então assim, era o que eu queria mesmo, entendeu? Minha perspectiva era essa, de uma semana para outra talvez não, mas minha perspectiva era justamente conseguir conceituar melhor...*

Cyrus também fica empolgado com a possibilidade de justificar as afirmações matemáticas com argumentos simples e sem precisar de novos conhecimentos.

> *Eu achei legal isso. A matemática prova a matemática por ela mesma, é meio que uma metalinguagem. Você consegue provar aquilo que você está mostrando para o aluno usando o que a gente já sabe. Tem um denominador x, eu sei que realmente dividindo aquilo, eu vou te mostrar, você está vendo aqui que repete, não é uma coisa mirabolante, não é nada de ensino superior [ele se referia ao que acabei de mostrar da questão das possibilidades de resto], é o que você aprendeu no pré, só que você aprende e não observa lá.*

Na avaliação geral do trabalho, ao término da entrevista final, pedi que avaliassem o trabalho desenvolvido e mencionassem também algo que ficaria marcado. Cyrus disse o seguinte:

> *O que eu achei mais legal foi que, primeiro que, inicialmente eu achei meio estranha a pesquisa. Todo mundo ficou meio assustado com a ideia da pesquisa, mas o que eu achei mais legal foi que a gente foi, primeiro criando prática, porque de começo o curso estava meio perdidão (sic) assim no ar e tal, ninguém entendia direito o que ia ser do curso, até porque da situação da greve e tudo mais, a gente já ter uma iniciação, um contato, a gente pôs em cheque algumas coisas que a gente tinha como conceito, a gente verificou se eram ou não de fato conceitos, a gente viu aplicação de tudo isso, assim, achei legal foi a própria definição tão simples de como se escrever um número racional, de como se achar, de conceituar uma dízima, e agora a explicação de porquê que é dízima, porque que não é dízima, quando eu tenho uma fração de inteiros eu tenho uma dízima. Acho que isso aí vai ficar bem marcado para mim* [ele fala assim mesmo, sem pausa!].

Apesar de não termos escolhido Calvin para ser analisado, sua declaração ao final da entrevista também consideramos relevante como retorno e para a avaliação do trabalho que realizamos.

> Calvin: *Eu achei muito válido, eu aprendi bastante coisa. No início eu estranhei também, porque, poxa, uma pesquisa científica em cima de números irracionais, só números irracionais. Mas hoje, agora, estou vendo que não é só números irracionais, é um mundo de... arrisco dizer, infinito, e bonito, porque, com isso que eu acabei de ver, é fantástico cara. É muito bonito você compreender e saber responder que, realmente, você pode dizer se é ou não infinito, se tem período ou se não tem... essa parte também de provar matematicamente, de achar, vai ficar marcado*.

Nos Retornos (segundo retorno, realizado em 17/9/2015), aproximadamente um ano após a entrevista final, perguntamos novamente a Cyrus o que foi mais marcante na pesquisa para ele.

> *Para mim o que mais marcou, o que eu percebo ainda de diferença, é o fato de, apesar da gente ter estudado números irracionais em matéria, nós tivemos uma matéria específica para isso [disciplina de Fundamentos da Matemática I], eu percebo que eu, por ter participado da pesquisa, eu tenho um fundamento um pouco melhor disso, eu tenho isso mais claro na minha mente do que as pessoas que só passaram pela disciplina de fundamentos. Eu me considero mais bem estruturado no conceito de números racionais e irracionais, pelo fato de ter participado da pesquisa.*

O nosso pensamento inicial ao nos deparamos com o caso de Cyrus foi no sentido de que a questão da representação decimal precisaria ser trabalhada. Um dividido por três pode ser representado por 1/3, que é absolutamente exato. Quando usamos a representação decimal de 1/3, que nada mais é do que uma forma mais prática de escrever 1/3 como uma soma de frações decimais, parece que fica uma sensação de inexatidão. O licenciando precisaria compreender que não existe inexatidão, tanto para os racionais quanto para os irracionais.

7.2.2 – Titus

Titus é um rapaz bem-humorado e falante. Concentrou-se bastante nas aulas que observamos e nas atividades que participou, sempre com intervenções espontâneas e pertinentes. Na apresentação da turma em 5/5/2014 disse que gosta de matemática e que escolheu licenciatura pela possibilidade de dar aula. Quer fazer a diferença na sociedade, pois, segundo suas palavras, *está podre lá em cima, a solução é mexer na base*. Também disse naquela mesma ocasião que espera sair com *bagagem boa* para ensinar seus futuros alunos.

7.2.2.1 – Associações detectadas

T1: Número racional $\asymp$ *dízima periódica*

As afirmações de Titus ao longo das atividades e dos instrumentos aplicados foram agrupadas de acordo com o que consideramos ser resultado de associações com atributos, figuras mentais ou exemplos protótipos presentes na sua imagem do conceito de número racional e irracional. Identificamos essas associações com a letra T, de Titus, seguida de um número. Utilizamos o símbolo $\asymp$ para representar a ligação entre o conceito e o atributo/figura mental/exemplo protótipo.

Podemos dizer que a dízima periódica é atributo ou figura mental presente na imagem do conceito de Titus e inferimos que existe uma associação do número racional com a dízima periódica, observando os dados do Quadro 27. Chamou-nos atenção o fato da fração $\frac{22}{7}$ ser considerada racional com a justificativa ‘pois é uma dízima periódica’. No nosso entender, $\frac{22}{7}$ é racional por definição, mas, como pudemos comprovar na Entrevista Final (mais detalhes adiante), Titus converteu $\frac{22}{7}$ para sua representação decimal antes de fazer seu julgamento. Essa associação é favorável à aprendizagem, já que a dízima periódica é um atributo relevante dos números racionais. Porém, o seu uso não foi suficiente para evitar erros, como a classificação de $\frac{13}{23}$ como um número irracional, pois entraram em cena outras associações, como veremos a seguir.

Quadro 27 – Associação número racional $\asymp$ dízima periódica

Julgamento	*Justificativa*	*Instrumento*	*Data*
0,0555 ... é racional	Pois é uma dízima periódica	Q1	12/5/14
2,343434 ... é racional	Pois é uma dízima periódica		
$\frac{22}{7}$ é racional	Pois é uma dízima periódica		
0,666 ... é racional	Pois é uma dízima periódica		

Fonte: Elaborado pelo autor.

T2: Número racional $\asymp$ padrão lógico de repetição

Os julgamentos e as justificativas presentes no Quadro 28 apontam para a existência de uma associação do número racional com um padrão na representação decimal dos números. Além desses julgamentos, a definição elaborada por Titus para números racionais (Questionário Q1 em 12/5/14) também é coerente com T2: *São números mensuráveis, ou imensuráveis que acompanhem um padrão lógico repetitivo sendo assim previsível*. Os dados apresentados no **Quadro 28** mostram ainda que, independentemente de a dízima ser periódica ou não-periódica, o atributo que foi acionado na imagem do conceito de Titus foi a existência de um padrão. Pode-se considerar que a existência de um padrão seja um atributo crítico dos números racionais, já que todo número racional é representado por um decimal finito ou por uma dízima periódica, que tem um padrão. Apesar disso, a presença desse atributo pode levar a situações desfavoráveis à aprendizagem, como veremos a seguir.

Quadro 28 - Associação número racional - padrão lógico de repetição

Julgamento	*Justificativa*	*Instrumento*	*Data*
1,010010001 ... é racional	Pois possui um padrão lógico de repetição.	Q1	12/5/14
3,1444 ... não é irracional	Pois a repetição apresentada no número é lógica.	Q2	14/5/14
1,1212212221 ... não é irracional	Pois a repetição apresentada no número é lógica.		
1,222 ... não é irracional.	Pois a repetição apresentada no número é lógica.		

Fonte: Elaborado pelo autor.

T3: Número irracional ≍ ausência de padrão lógico de repetição

Os dados presentes no Quadro 29 apontam para a existência de uma associação entre números irracionais e a ausência de um padrão, que tem relação direta com T2. A associação T3 provavelmente é resultado da negação de T2, uma lógica que parece bem simples: 'se racional é aquele número que tem padrão, então irracional é o número que **não** tem padrão'. Resultados semelhantes foram encontrados por Rezende (1994). Segundo dados apresentados nesse estudo, alguns estudantes classificaram números como $0{,}1010010001\ldots$ e $0{,}12345678910111213\ldots$ como racionais pois possuem uma *sequência lógica definida* (p. 124) ou uma *estrutura lógica* (p. 126).

Ao contrário de T2, a associação T3 se baseia em um atributo não crítico dos números irracionais, já que alguns números irracionais têm um padrão lógico de repetição, como $1{,}010010001\ldots$, $1{,}1212212221\ldots$, entre outros. Portanto, é uma associação que não é favorável à aprendizagem dos números irracionais. Isso somado à conversão para decimal levou à consideração de frações como números irracionais (**Quadro 29**).

Quadro 29 - Associação do número irracional com ausência de padrão lógico de repetição

Julgamento	*Justificativa*	*Instrumento*	*Data*
$\frac{-3}{14}$ não é racional	Pois o resultado dessa operação não converge em um padrão lógico de repetição.	Q1	12/5/14
$\frac{4\pi}{3}$ não é racional	Pois o resultado dessa operação não converge em um padrão lógico de repetição.		
$\frac{13}{23}$ é irracional	Pois o resultado da operação é um número que tende ao infinito fora de uma repetição lógica.	Q2	14/5/14

Fonte: Elaborado pelo autor.

Outro detalhe que nos chamou a atenção foi o uso da palavra 'operação' nas justificativas para os julgamentos dos três números representados na forma fracionária (ver **Quadro 29**). Suspeitamos que Titus enxergava fração ou razão como uma operação a ser realizada, semelhante ao que já observamos no caso de Cyrus. A partir de nossa experiência docente, pensamos que essa visão de fração como operação também tem relação com uma certa dependência dos números decimais, como uma espécie de terreno em que os estudantes se sentem mais seguros para pisar. Algumas pesquisas sustentam nossa tese ao afirmar que existe prevalência da representação decimal em relação a outras representações no ensino de matemática, seja nos livros didáticos (SOUTO, 2010), seja na formação de professores de matemática (SIROTIC; ZAZKIS, 2007b; ZAZKIS; SIROTIC, 2004). Isso explicaria a necessidade que detectamos em alguns participantes de nossa pesquisa de passar tudo para representação decimal. Cyrus também se comportou assim, como comentamos na seção anterior. Evidentemente, gostaríamos que os estudantes classificassem uma fração como um número racional diretamente pela definição, sem precisar realizar qualquer operação.

Na Entrevista Final, pudemos confirmar que Titus de fato converteu as frações antes de fazer seus julgamentos.

> Pesquisador: *Tanto você, Ulysses, quanto o Titus, classificaram umas frações como irracionais porque não apresentavam regularidade e você porquê do padrão, não tinha um padrão, e aí eu fiquei pensando, como que isso aconteceu?*
>
> Titus: *No meu caso eu lembro. No meu caso foi o caso da preguiça mesmo ...*
>
> Ulysses: *É.*
>
> Titus: *Fui dividindo o número, aí chegou uma hora que aquele troço não parava de dividir, aí pronto, lasquei esse negócio aí, irracional*.

A grande questão para nós, desde que observamos os dados referentes a Titus pela primeira vez, era que o licenciando precisaria aprender a diferenciar padrão de dízima periódica. As associações T2 e T3, que relacionam números racionais e irracionais com a existência e com a ausência de um padrão, respectivamente, foram responsáveis por praticamente todos os erros que o estudante cometeu nos Questionários Q1 e Q2. A associação T2 está presente inclusive na sua definição de números racionais (ver **Quadro 35**). Portanto, dentre as associações que detectamos, consideramos que T2 e T3 eram as mais importantes da imagem do conceito de Titus, e um obstáculo que ele precisaria superar.

T4: Número racional $\asymp$ previsibilidade

Essa associação apareceu em três situações, conforme mostra o **Quadro 30**. A previsibilidade é um atributo crítico não só dos racionais, mas de qualquer número. Mais detalhes a seguir, quando analisamos a associação que o licenciando faz dos irracionais com números imprevisíveis.

Quadro 30 - Associação número racional - previsibilidade

Situação	***Instrumento***	***Data***
Como você define números racionais? São números mensuráveis, ou imensuráveis que acompanhem um padrão lógico repetitivo sendo assim previsível.	Q1	12/5/14
Na sua opinião, para que servem os números racionais? Servem para representar o que pode, em dimensão, tempo, distância, valor, e outros fatores, ser mensurado ou ao menos logicamente previsto.		
Qual a diferença entre número racional e número irracional? O número racional é dotado do princípio da mensuração ou ao menos da previsibilidade, enquanto que o número irracional é justamente o oposto.	Q2	14/5/14

Fonte: Elaborado pelo autor.

T5: Número irracional $\asymp$ *imprevisibilidade*

Assim como T2 e T3 estão relacionadas por uma negação uma da outra, o mesmo foi detectado com T4 e T5. Novamente, o raciocínio nos parece algo do tipo: 'se racional é previsível, então os irracionais são imprevisíveis', que consideramos razoável já que se aprende o irracional muitas vezes pela negação de tudo relacionado ao racional. Nas palavras de Titus, *o número racional é dotado do princípio da mensuração ou ao menos da previsibilidade, enquanto que o número irracional é justamente o oposto* (ver **Quadro 31**). A imprevisibilidade, encarada como a impossibilidade de se saber uma casa decimal qualquer da expansão decimal de um número irracional, é um atributo irrelevante (HERSHKOWITZ, 1994). Tomemos π como exemplo. Apesar de não representarmos todas suas casas, existem meios (algoritmos computacionais e séries de potências) capazes de fornecer qualquer casa decimal desse número. É claro que pode levar muitos anos para se calcular trilhões de casas, mas, o que importa é que é possível conhecer a casa que se quiser.

Quadro 31 - Associação número irracional - imprevisibilidade

Situação	***Instrumento***	***Data***
O que são números irracionais na sua opinião? Números que tendem ao infinito, mas que não podem ser previstos de maneira concreta.	Q2	14/5/14
Qual a diferença entre número racional e número irracional? O número racional é dotado do princípio da mensuração ou ao menos da previsibilidade, enquanto que o número irracional é justamente o oposto.		

Fonte: Elaborado pelo autor.

Outra forma de pensar a imprevisibilidade pode estar relacionada com a ausência de padrão. Ainda assim, pensamos que esse atributo/figura mental é irrelevante para os números irracionais. Se não se sabe o decimal que vem em seguida em uma sequência, não se pode afirmar nada a respeito do número, nem que é racional nem que é irracional. Conhecer as casas decimais é a condição mínima para que se possa conhecer um número. Quando vemos o número 0,123457..., o que isso quer dizer? Pode-se afirmar que é irracional, pois não vemos a dízima periódica? Pode-se afirmar que é racional? Seria interessante perguntar isso aos alunos. Nos itens ‘a’ e ‘b’ da Ficha 1 da atividade Correção de Questões, pedimos para os Grupos 1 e 4 classificarem em racional ou irracional os números 4,732651..., 1,123581321... e 2,1373737... Dos 9 alunos que responderam, absoluta maioria considerou os dois primeiros números irracionais e o último um número racional (ver **Tabela 17**). Um desses alunos foi Titus, cujas respostas acompanharam as respostas da maioria.

Tabela 17 - Respostas à Ficha 1 da atividade de Correção de Questões

	4,732651...	**1,123581321...**	**2,1373737...**
Racional	1	2	7
Irracional	8	7	2

Fonte: Elaborada pelo autor.

Olhando para a **Tabela 17**, interpretamos os dados como um indicativo da presença de um acordo tácito, cuja ideia central pode ser resumida como “se repete três vezes, repete sempre; se não aparece repetição nenhuma, não repete nunca”. Para avaliar melhor essa hipótese, entendemos que seria necessário repetir a pergunta e permitir uma terceira opção de resposta, com algo do tipo "nada se pode afirmar" para avaliar se haveria alguma alteração em relação aos dados da **Tabela 17**. Além disso, também seria interessante incluir um irracional com padrão, como 1,010010001 ... Não implementamos essa modificação, mas deixamos a Tabela 18 como uma sugestão para futuras pesquisas.

Tabela 18 - Reformulação da questão

	4,732651...	1,123581321...	2,1373737...	1,010010001...
Racional				
Irracional				
Nada se pode afirmar				

Fonte: Elaborada pelo autor.

Voltando a Titus, encontramos na tese de doutorado de Sirotic (2004) uma concepção de número irracional de um futuro professor de matemática chamado Ed que se assemelha ao que identificamos no caso de Titus.

> Ed pensa que números racionais são organizados, eles têm um sistema para eles, e é possível prever seus dígitos – eles são razoáveis. Por outro lado, os números irracionais são alguma coisa que não se pode explicar. Eles são desorganizados e imprevisíveis (SIROTIC, 2004, p. 98, tradução nossa).

Ao contrário das associações com o padrão ou sua ausência (T2 e T3), a questão da previsibilidade ainda parecia nebulosa na imagem do conceito de Titus durante a Entrevista Final. O licenciando alternou momentos em que parecia ter reformulado a associação com momentos em que continuava preso à ideia da imprevisibilidade. Por exemplo, no trecho a seguir, no início da Entrevista Final, ele ainda parecia confuso.

> Titus: *É, basicamente meu pensamento foi esse, só que naquela época eu não conseguia enxergar o que eu enxergo hoje. Por exemplo, para enésima sequência desse número [referindo-se a 1,1010010001...] eu não vou saber quantos zeros tem, então é irracional. Apesar de ser lógico, de seguir uma sequência lógica, ao meu ponto de vista, é uma sequência que eu não consigo acompanhar.*

A ideia de que alguns irracionais têm padrão já parecia assimilada, mas frases como *eu não vou saber quantos zeros tem* e *sequência que eu não consigo acompanhar* ainda pareciam indicar que a questão da imprevisibilidade não estava resolvida. Por outro lado, em outro momento da Entrevista Final, essa questão começava a ser reelaborada na imagem do conceito de Titus.

> [Pesquisador lê para Titus suas definições de números racionais e irracionais – ver **Quadro 35**]

Titus: *É, enquanto eu deixasse essa definição eu aceitaria a letra 'b' [1,1010010001...] como um número racional só que essa definição não cabe mais, só que ...*

Pesquisador: *Por que da questão da previsibilidade né?*

Titus*: Exatamente.*

Pesquisador: *É previsível aquilo ali né?*

Titus: *É previsível, só que daí a formular uma nova definição já é mais difícil. Por que uma coisa é saber que a definição estava certa e agora você sabe o que é o certo e o errado, vamos colocar mais ou menos assim. Outra coisa é você agora conseguir definir o certo e o errado com a nova definição.*

T6: Número racional ≍ mensurabilidade

A associação do número racional com o atributo/figura mental mensurabilidade ficou marcada nos questionários Q1 e Q2 (ver **Quadro 32**).

Quadro 32 - Associação número racional ≍ mensurabilidade

<table>
<tr><th>Situação</th><th>Instrumento</th><th>Data</th></tr>
<tr><td>Como você define números racionais?
São números mensuráveis, ou imensuráveis que acompanhem um padrão lógico repetitivo sendo assim previsível.</td><td rowspan="2">Q1</td><td rowspan="2">12/5/14</td></tr>
<tr><td>Na sua opinião, para que servem os números racionais?
Servem para representar o que pode, em dimensão, tempo, distância, valor, e outros fatores, ser mensurado ou ao menos logicamente previsto.</td></tr>
<tr><td>Qual a diferença entre número racional e número irracional?
O número racional é dotado do princípio da mensuração ou ao menos da previsibilidade, enquanto que o número irracional é justamente o oposto.</td><td>Q2</td><td>14/5/14</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor.

A associação com a mensurabilidade, detectada no início da pesquisa, manteve-se na Entrevista Final, conforme o trecho a seguir.

Pesquisador: *Você fala aqui que o racional pode ser medido e o irracional é o oposto, ou seja, não poderia ser medido. Isso aparece demais. E essa parte você acha que...?*

Titus: *Essa eu manteria.*

Pesquisador: *Manteria?*

> Titus: *Essa eu manteria justamente pelo que ele é, mesmo nas dízimas periódicas que tende ao infinito, ainda assim a mensurabilidade se mantém, de uma forma bem abstrata, mas se mantém.*
>
> Pesquisador: *E do irracional?*
>
> Titus: *Do irracional não, por que não tem como.*

Observamos que ao elaborar sua fala, Titus percebe que os racionais também podem ter representação decimal infinita, e ele diz que *ainda assim a enumerabilidade se mantém de uma forma bem abstrata*. Seria muito interessante saber o que seria isso exatamente, mas, infelizmente esse detalhe passou despercebido no momento da entrevista. Todavia, pensamos que a questão da imprevisibilidade esteja associada com a inexatidão, e, consequentemente, com a impossibilidade de mensuração, por isso Titus considera que apenas os irracionais não podem ser medidos. Essa característica de 'não mensurabilidade' dos irracionais é obviamente um atributo irrelevante, já que os números irracionais foram criados exatamente para estabelecer uma relação biunívoca do sistema numérico com o *continuum* da reta, o que garantiu que qualquer segmento possa ser medido com exatidão pelos números reais. Para a desconstrução dessa associação, o recurso didático à história da matemática se apresenta como um aliado importante.

Refletindo sobre as associações de Titus como um todo, reportamo-nos a uma observação feita por Igliori e Silva (1998), que alguns estudantes confundem número com a representação do número. Dízima, padrão de repetição, previsibilidade e mensurabilidade se referem, em última instância, à representação decimal dos números. Em casos como o de Titus – e também de Cyrus, conforme seção anterior – atividades do Estudo Exploratório como o 'Diálogo de Ralf e Beto' (ver Apêndice J – Atividades aplicadas no Estudo Exploratório) poderiam auxiliar o aluno a enxergar, por exemplo, a imprevisibilidade como um atributo irrelevante do número irracional. Porém, essa e outras atividades do Estudo Exploratório (Apêndice H), que foi muito focado na questão da representação, não auxiliariam na questão conceitual, e na diferenciação do número e de sua representação.

7.2.2.2 – Movimentações das associações

No que se refere à associação T1, a ideia de dízima ainda se misturava com a ideia de padrão. Considerando a dízima sob esse aspecto nebuloso para o aluno e, considerando também que o estudante reformulou seu conceito de dízima no desenrolar da pesquisa, pode-se dizer que a associação T1, detectada nos questionários Q1 e Q2, foi excluída da imagem do conceito de Titus.

Em relação à T2 e T3, destacamos a seguir, alguns dados que apontam que o licenciando foi capaz de reformular tais associações a partir do discernimento entre o que é uma dízima periódica e o que é um padrão. Na atividade Correção de Questões (Apêndice U - Atividade Correção de Questões), Titus já demonstrava ter aprendido a diferenciar uma dízima periódica de um padrão. Naquela atividade, apresentamos questões respondidas por alunos fictícios e pedimos que dessem 'certo' ou 'errado' e explicassem o porquê. Em uma das questões, o aluno fictício considerou $1{,}123581321\ldots$ um número racional pois cada número é a soma dos dois números anteriores, portanto, existe um padrão. Titus, incorporando o papel de professor, deu errado nessa questão e disse o seguinte:

> *Até tem um padrão, mas o padrão não se aplica a essa questão em si, porque eu perguntei para ele se é racional ou irracional e no caso é irracional. Está errado.*

Na atividade Análise de Livros Didáticos, Titus teve contato com uma definição de números irracionais que também pode ter auxiliado na reformulação de T2 e T3, pois mencionava a questão do padrão. Pedimos no roteiro entregue aos alunos (ver Apêndice V - Análise de Livros Didáticos) que fosse identificada uma definição para número irracional no livro analisado. O trecho transcrito por Titus foi:

> *Existem números cuja representação decimal é infinita e não-periódica. Por exemplo,* $1{,}1010010001\ldots$ e $2{,}71727374\ldots$ *são representações decimais infinitas não-periódicas. Não há um mesmo padrão que se repete após a vírgula.*

Lembramos que os livros analisados pelos alunos foram trazidos por eles mesmos, e não tivemos qualquer influência nessa escolha. No entanto, o livro escolhido por Titus trazia uma definição de números irracionais, conforme mostrada anteriormente, sob medida para ele, pois apontava exatamente para a ideia (equivocada) do estudante de associar ausência de padrão com irracionalidade.

Na atividade Elaboração de Questões, Titus e seus companheiros (foi realizada por um trio) elaboraram uma questão de reconhecimento de números racionais e irracionais, e um dos itens era $2{,}1010010001\ldots$ Na entrevista Final, que foi realizada em dupla com Ulysses pois os dois trabalharam boa parte das atividades juntos, pedimos que resolvessem as questões que elaboraram e classificassem esse número, e Titus não teve dúvida de que $2{,}1010010001\ldots$ se tratava de um número irracional. No início da Entrevista Final, também pedimos novamente que Titus classificasse alguns números, entre eles alguns irracionais com um padrão, e ele acertou todos. Em um trecho da entrevista, que destacamos a seguir, o licenciando parece ter entendido a diferença entre padrão e dízima e a relação com o número irracional, apesar de ainda cometer alguns deslizes, como quando disse que *o padrão lógico é uma coisa que eu sei que vai seguir esse padrão infinitamente*. Essa ideia é mais adequada para a dízima periódica, que é exatamente isso, um padrão que se repete infinitamente.

> Pesquisador: *Mudou o que você achava que era padrão de repetição?*
>
> Titus: *Não. O que eu acho que é padrão de repetição ele está aplicado ali, só que esse pensamento não se aplicava a ideia de número irracional, a constatação que eu cheguei foi essa. A minha ideia de padrão de repetição lógica não mudou, por que, até por que, aquele número como exemplo, 0,101100110001... ele vai seguir um padrão...*
>
> Ulysses: *Vai continuar tendo regularidade...*
>
> Titus: *Mas só que...*
>
> Ulysses: *... mas não entra na definição de racional ou irracional.*
>
> Titus: *Isso. Para essa definição dos números irracionais não tem como aplicar o padrão lógico para definir ele não ser irracional. Mais ou menos isso.*
>
> Pesquisador: *E a diferença entre dízima e padrão ou regularidade?*
>
> Ulysses: *Fica difícil né...*
>
> Pesquisador: *É, dízima periódica e, no seu caso, que você usou regularidade e no seu caso, padrão de repetição.*
>
> Ulysses: *Ali [referindo-se a 1,101100110001...] não teria uma dízima periódica, por que o período...*
>
> Titus: *Não vai se repetir.*
>
> Ulysses: *... não vai ser o 10 eternamente, vai voltando o zero.*
>
> Titus: *Na minha concepção seriam coisas distintas, mas que se enquadram, nessa época, que se enquadrariam num mesmo...*
>
> Ulysses: *Num mesmo patamar.*
>
> Titus: *... lugarzinho. Uma dízima periódica, uma coisa que eu sei como vai se repetir quando vai se repetir e o padrão lógico é uma coisa que eu sei que vai seguir esse padrão infinitamente, assim, eu pensava que elas chegariam num mesmo lugar iguaizinhos, mas...*

Em outro momento da Entrevista Final, mais perto do seu encerramento, Titus novamente cita a questão do padrão.

> Titus: *...essa incerteza, o padrão... Padrão? Que padrão? O padrão na verdade não representava realmente o que eu achava que ele representava, isso foi me provando isso* (Entrevista Final, em 4/9/2014).

Por todas essas manifestações, entendemos que Titus reuniu condições para reformular as associações T2 e T3. Essa reformulação, de acordo com o quadro teórico que adotamos, poderia se dar em dois níveis, o instrumental e o relacional (SKEMP, 1976). Devido ao desempenho do licenciando na atividade Equivalência de Definições, especialmente pelo que escreveu na segunda parte da atividade (ver **Quadro 33**), que consistia na parte individual da atividade, pensamos que ele conseguiu entender a relação entre o número racional e a dízima periódica. O objetivo dessa atividade era mostrar porque uma fração gera, necessariamente, uma dízima periódica, e, consequentemente, uma dízima não-periódica não pode ser convertida em fração. Titus demonstrou ter entendido isso ao escrever que a divisão de números inteiros é o fator gerador da dízima periódica. Portanto, Titus reuniu condições para reformular T2 e T3 de forma relacional.

Quadro 33 - Respostas de Titus na atividade Equivalência de Definições

Afirmação	**Resposta**
Toda dízima periódica pode ser convertida em fração de inteiros.	Verdadeiro. Pois o fator gerador de uma dízima periódica é a divisão de números inteiros.
A representação decimal de um número que NÃO pode ser escrito como fração de inteiros é necessariamente uma dízima Não-periódica.	Verdadeiro. Pois não é dotada do fator gerador de uma dízima periódica que basicamente é $\frac{a}{b}$, sendo a e b inteiros e b diferente de zero.
Toda dízima NÃO periódica NÃO pode ser convertida em fração de inteiros.	Verdadeiro. Pois a irregularidade da dízima impede que o valor inteiro seja definido.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Conforme já destacamos, as associações T4 e T5 estiveram presentes até a Entrevista Final, sem maiores alterações. Quanto à T6, não detectamos a sua presença após a aplicação dos questionários Q1 e Q2. Como síntese das movimentações das associações de Titus que pudemos detectar, apresentamos o **Quadro 34** a seguir. As setas (cheias) indicam movimentações realizadas em um estado relacional de compreensão.

Quadro 34 - Movimentações das associações de Titus

Q1 (12/5/2014)	Q2 (14/5/2014)	Diversas atividades (maio a agosto de 2014)	Entrevista Final (4/9/2014)

T1: Número racional $\asymp$ dízima periódica* $\xrightarrow{\text{Exclusão}}$

T2: Número racional $\asymp$ padrão lógico de repetição $\xrightarrow{\text{Reconstrução}}$ T2': Número racional $\asymp$ dízima periódica

T3: Número irracional $\asymp$ ausência de padrão $\xrightarrow{\text{Reconstrução}}$ T3': Número irracional $\asymp$ ausência de dízima periódica

T4: Número racional $\asymp$ previsibilidade

T5: Número irracional $\asymp$ imprevisibilidade

T6: Número racional $\asymp$ mensurabilidade

*no início da pesquisa, a ideia de dízima periódica ainda se confundia com a ideia de padrão

Fonte: Elaborado pelo autor

7.2.2.3 – Imagem da definição do conceito

A respeito da imagem da definição do conceito de número racional e irracional (**Quadro 35**), destacamos que as mesmas foram utilizadas, e utilizadas com coerência por Titus. Em muitos dos seus julgamentos, suas definições estavam presentes e desempenhavam um papel determinante. Mesmo cometendo alguns erros como considerar 1,010010001... e 1,1212212222... como números racionais por apresentarem padrão lógico de repetição, o motivo não foi o uso indevido da definição, mas a definição em si, que não reunia atributos críticos suficientes para formar uma definição consistente.

Quadro 35 - Imagem da definição do conceito de Titus

<table>
<tr><th>Definição de número racional</th><th>Instrumento</th><th>Data</th></tr>
<tr><td>São números mensuráveis, ou imensuráveis que acompanhem um padrão lógico repetitivo sendo assim previsível.</td><td>Q1</td><td>12/5/2014</td></tr>
<tr><td>Definição de número irracional</td><td rowspan="4">Q2</td><td rowspan="4">14/5/2014</td></tr>
<tr><td>Números que fogem a compreensão concreta de seus valores.
Números que tendem ao infinito, mas que não podem ser previstos de maneira concreta.</td></tr>
<tr><td>Diferença entre número racional e número irracional</td></tr>
<tr><td>O número racional é dotado do princípio da mensuração ou ao menos da previsibilidade, enquanto que o número irracional é justamente o oposto.</td></tr>
</table>

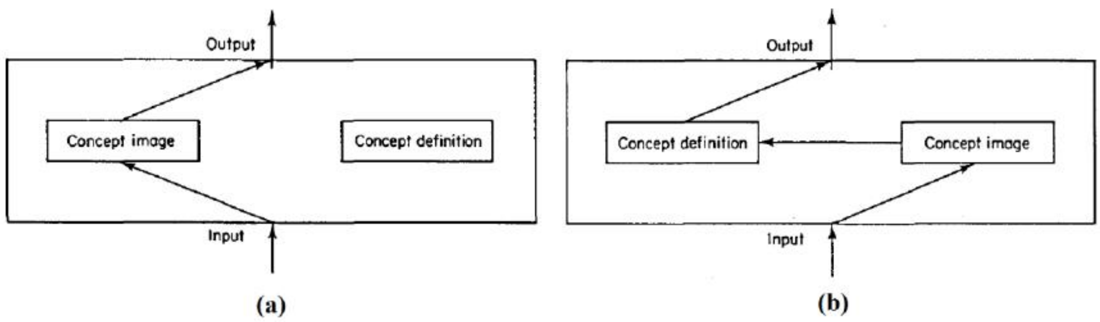
Fonte: Elaborado pelo autor.

Suspeitamos que as definições que ele apresentou são criações próprias do estudante, pois são diferentes daquelas encontradas nos livros didáticos e apresentam características bem peculiares, como o uso de atributos como o padrão, a previsibilidade e a mensurabilidade. Além disso, também é possível que Titus tenha formulado suas definições no momento em que respondia aos questionários, pois pelo trecho a seguir, ele nunca havia tido contato com uma definição dessa natureza antes.

> Ulysses: *Foi naquele momento que, eu acho que o Rodrigo também, conheceu a definição. A gente sabia, achava que sabia...*
>
> Titus: *Achava...*
>
> Ulysses: *... mas quando a gente viu a definição, não, não é isso.*
>
> Pesquisador: *Você nunca tinha visto aquela definição?*
>
> Ulysses: *Talvez nunca.*
>
> Titus: *Não que eu me lembrasse...*
>
> Pesquisador: *Ou, se viu não marcou nada né?*
>
> Titus: *Não marcou justamente por isso, por ser um assunto muito maltratado...* (Entrevista Final, *em* 4/9/2014).

Porém, ainda que tenha criado suas próprias definições no momento em que respondia aos questionários Q1 e Q2 no início da pesquisa, Titus foi fiel a elas no desenrolar das atividades que foram propostas. Entendemos assim que o perfil de Titus se assemelha àqueles que se adaptam facilmente ao *modus operandi* do pensamento matemático avançado; isto é, o fato de não usar apenas as figuras mentais, associações e exemplos protótipos, mas também a definição do conceito, favorece a sua compreensão das ideias e conceitos matemáticos. De acordo com Vinner (1983), Titus resolve tarefas de forma semelhante ao que está ilustrado na **Figura 43**b, isto é, além de consultar a sua imagem do conceito, também examina a sua definição do conceito antes de finalizar uma tarefa. É preciso lembrar que, para Vinner (1983), imagem do conceito e definição do conceito são células independentes.

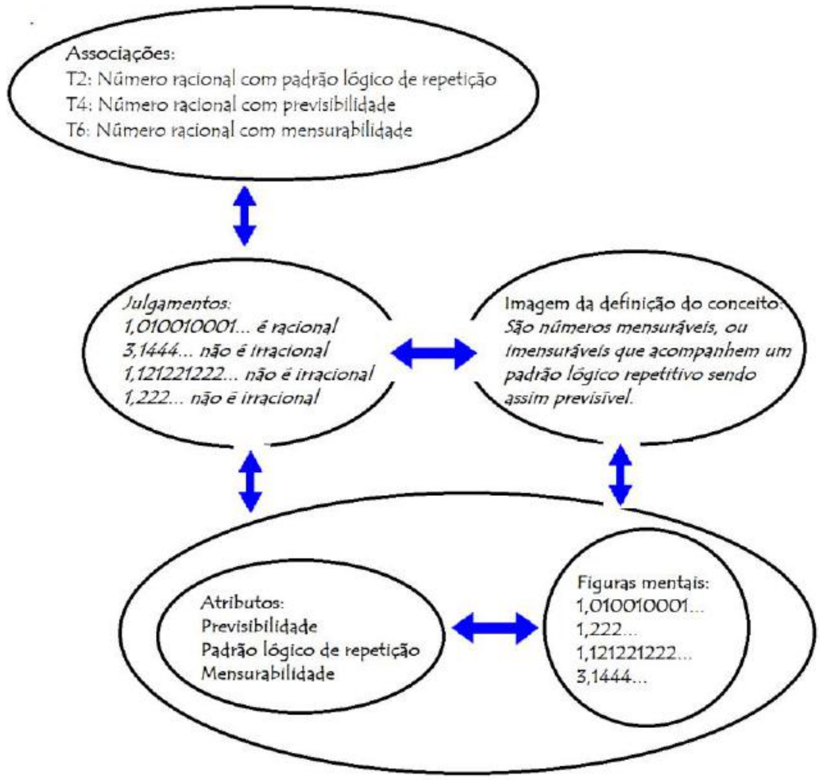
Figura 43 - Esquema de movimentação da imagem do conceito de acordo com Vinner (1983)



Fonte: VINNER (1983, p. 296)

No entanto, segundo Vinner (1983), o esquema ilustrado na **Figura 43**a é o mais comum, ou seja, uma consulta única e exclusiva à imagem do conceito, sem passar pela célula de definição do conceito. De acordo com o modelo de análise que criamos, a imagem da definição do conceito faz parte da imagem do conceito. Além disso, detalhamos os elementos da imagem do conceito e suas interconexões, conforme caso geral ilustrado na **Figura 35** e exemplificado na **Figura 44** no caso específico do conceito de número racional de Titus.

Figura 44 - Modelo para a imagem do conceito de Titus referente aos números racionais



Fonte: Elaborada pelo autor.

7.2.2.4 - Sentimento

De uma forma geral, ter participado da pesquisa parece ter deixado algumas marcas em Titus. Em relação ao conceito de número irracional, tivemos alguns indícios de enriquecimento da imagem do conceito do estudante, como no trecho a seguir da Entrevista Final, onde são citados termos que até então não haviam aparecido, como a questão da incomensurabilidade.

> Pesquisador: *Como você convenceria alguém de que os irracionais existem?*
>
> Titus: *Demonstrar numa circunferência fica difícil, π, mas é uma coisa mais simples de você demonstrar que realmente aquilo ali, num quadrado 1x1 vai dar uma zica braba [sic] ali. Aí a pessoa vai se perguntar, mas esse número essa raiz de dois é o que então? Aí você vai abrir uma abordagem para você explicar para ela. Um número irracional é assim, por que ele é definido tal, tal, tal jeito, incomensurável, não pode ser escrito em forma de fração de inteiros. Aí você vai demonstrando para ela e mostrando que aquilo realmente é válido e não pode ser escrito em forma de fração de inteiros, é incomensurável. Igual aquele exercício que você deu mostrando a própria raiz de dois dentro do quadrado, da diagonal do quadrado [referindo-se à demonstração da incomensurabilidade lado e diagonal de um quadrado da atividade Incomensurabilidade] (Entrevista Final, em* 4/9/2014).

Ao mesmo tempo, também coletamos dados que nos mostram que muita coisa ainda precisaria ser feita relativa à imagem do conceito de número irracional de Titus. No trecho destacado a seguir, o licenciando estabelece uma separação da prova matemática de uma prova com argumentação, como se uma demonstração matemática fosse algo diferente de um tipo de argumentação, ou talvez porque uma demonstração matemática não o satisfizesse completamente.

> Titus: *Eu hoje ainda não saberia responder o que me leva a crer que o irracional existe. Apesar de eu saber do uso dele, da aplicação, de muitos fatores, mas eu não saberia explicar por que que eu creio que ele existe. Talvez só demonstrando matematicamente, mas provar assim com argumentação, eu já não conseguiria não (Entrevista Final, em* 4/9/2014).

Outra marca importante que a pesquisa parece ter deixado em Titus foi ter propiciado ao estudante perceber suas próprias limitações e o estado real dos seus conhecimentos em relação aos números irracionais. Isso ficou bem nítido em diversas passagens, que citamos a seguir.

> Pesquisador: *Como você se sentiu respondendo a esse questionário? Por quê?*
>
> Titus: *Sentimento de ausência de algo. Pois faltou maior profundidade na aprendizagem de certos pontos* (Após responder ao Questionário Q1 em 12/5/14).
>
> Titus: *Confuso. Pela falta de domínio sobre o assunto* (Após responder ao questionário Q2 em 14/5/14).
>
> Pesquisador: *Algo do que você viu no encontro de hoje ajudou você a refletir sobre seus conhecimentos de matemática? No que você pensou exatamente?*
>
> Titus: *Sim. Na necessidade de voltar sempre em assuntos da matemática para recordar* (Ao final do encontro de 12/5/2014).
>
> Titus: *Sim. Na superficialidade do meu conhecimento matemático* (Ao final do encontro de 14/5/2014).
>
> Titus: *Sim. Preciso aprender e relembrar* (Ao final do encontro de 15/5/14).
>
> Pesquisador: *De forma geral, você acha que ter participado da pesquisa te ajudou de alguma forma no curso até agora? Como?*
>
> Titus: *Bom, de fato ajudou. Primeiro porque a minha visão de número irracional não era a verdadeira, digamos assim. Apesar de eu pensar que era, não era, eu cheguei à conclusão que não era* (Retorno em 17/9/2015).

Além disso, também conseguimos estimular Titus a buscar o conhecimento que ele mesmo achou que não tinha, como demonstram os trechos abaixo.

> Pesquisador: *Qual a palavra que melhor traduz o que você sentiu ao participar da atividade proposta hoje? Por que escolheu essa palavra?*
>
> Titus: *Dúvida. Curiosidade. Satisfação. Pois de fato tive dúvidas, minha curiosidade foi despertada, e no que pude pensar e assimilar com ordem fiquei satisfeito* (Ao final da atividade Incomensurabilidade em 14/7/14).

> Titus: *E isso, com certeza pelo menos no meu caso, despertou a vontade de aprender. Caramba, pô eu não sei, se eu não sei o que que eu estou fazendo aqui? Aí você pega e vai. Então, de um certo modo as listas, o trabalho realizado, despertou para tentar entender o porquê e pelo menos o rudimento... (Entrevista Final, em* 4/9/2014).
>
> Pesquisador: *Cite alguma coisa que foi marcante na pesquisa para você.*
>
> Titus: *O que mais marcou foi realmente o choque de saber que o que eu pensava que era número irracional, não era. Foi o primeiro choque que eu tive e foi o que mais me marcou, porque depois que eu cheguei a essa conclusão, isso ficou na minha cabeça. Eu fiquei pensando, nossa, caramba, eu pensava que eu sabia alguma coisa, mas eu não sabia, acabou que eu não sabia. Então isso me incomodou muito, até de pesquisar um pouco, para saber o quê que era aquilo. Então isso me incomodou e foi o choque mais relevante, foi o inicial, saber que eu não sabia* (Retorno em 17/9/2015).

7.2.3 – Agatha

Agatha é uma moça de 24 anos, extrovertida e bastante falante. Foi assídua às aulas de Fundamentos de Matemática que observamos e demonstrou interesse em participar das atividades propostas em nossa pesquisa. Porém, sua participação quase sempre se restringia a realizar muito rápido o que era proposto, sem muitos questionamentos nem discussões a respeito da tarefa com seus companheiros de dupla (as atividades eram realizadas em duplas). Faltou a duas atividades, Elaboração de Questões e Medida de Segmentos. Durante a apresentação da turma em 5/5/2014 a licencianda disse ter afinidade com matemática, que esperava se formar e ajudar os alunos e que teve ótimos professores. Ingressou na licenciatura em matemática do Ifes seis anos após ter terminado o ensino médio. Seu contato anterior com os números irracionais, nas palavras da própria aluna, foi resumido assim:

> *Ele [o professor] passou muito rápido, foi uma coisa assim, no susto. Ele falou irracionais, mostrou um exemplo ou outro e pronto, já foi para outra matéria (Em 29/5/2014).*

7.2.3.1 – Associações e exemplos protótipos detectados

As afirmações de Agatha ao longo dos instrumentos aplicados foram agrupadas de acordo com o que consideramos ser resultado de associações com atributos/figuras mentais/exemplos protótipos presentes na sua imagem do conceito de número racional e irracional. Identificamos essas associações com a letra A, de Agatha, seguida de um número. Utilizamos o símbolo $\asymp$ para representar a ligação entre o conceito e o atributo/figuras mentais/exemplos protótipos.

A1: Número racional $\asymp$ representação fracionária

No questionário Q1 (ver **Quadro 36**), a estudante classificou a fração $\frac{22}{7}$ e a representação fracionária $\frac{\sqrt{3}}{2}$ como números racionais. A justificativa apresentada em ambos os casos foi a mesma – “é uma fração” – o que sugere a existência de uma associação do número racional com um número escrito na representação fracionária. Essa associação também seria responsável por levar Agatha a não considerar $\frac{\sqrt{5}}{2}$ como um número irracional no questionário Q2, apesar disso não ficar claro em sua justificativa (**Quadro 36**). A representação fracionária é um atributo crítico dos números racionais, pois todos os números racionais podem ser escritos na forma fracionária. Porém, esse atributo não é suficiente para diferenciar racionais de irracionais, pois qualquer número pode ser escrito na forma fracionária, inclusive os números irracionais. O que ocorre na imagem do conceito de Agatha pode ser interpretado como resultado de um julgamento puramente visual, baseado na fração como exemplo protótipo (com forte apelo visual) de número racional (HERSHKOWITZ, 1994).

Quadro 36 - Associação número racional $\asymp$ representação fracionária

Julgamento	***Justificativa***	***Instrumento***	***Data***
$\frac{22}{7}$ é racional	É uma fração	Q1	12/5/14
$\frac{\sqrt{3}}{2}$ é racional	É uma fração		
$\frac{\sqrt{5}}{2}$ não é irracional	Não sei	Q2	14/5/14

Fonte: Elaborado pelo autor.

A2: Número racional $\asymp$ dízima periódica

Observando as classificações de Agatha no **Quadro 37**, não parece haver problema algum. De fato, os números foram interpretados como dízimas periódicas e corretamente classificados como racionais (ou não irracional). Além disso, o julgamento se baseia em um atributo relevante, apesar de não crítico, dos números racionais, já que alguns racionais são decimais exatas. O não reconhecimento de 1,725 como número racional (ver **Quadro 38**) reforçou a associação A2 como uma associação exclusiva do número racional com a dízima periódica, deixando de fora as decimais finitas.

Quadro 37 – Associação número racional ≍ dízima periódica

Julgamento	*Justificativa*	*Instrumento*	*Data*
2,343434... é racional	É uma dízima periódica	Q1	12/5/14
0,666... é racional	É uma dízima periódica		
1,222... não é irracional	É uma dízima periódica	Q2	14/5/14

Fonte: Elaborado pelo autor.

A3: Número irracional ≍ resultado não periódico

A associação A3 baseia-se em um atributo crítico dos números irracionais, a representação não-periódica, ou, como a aluna escreveu, 'resultado não periódico'. Ela é claramente uma negação da associação A2, o que também apareceu com frequência na turma como um todo, inclusive no Estudo Exploratório (Apêndice H). Como observamos no caso de Titus, uma associação dos racionais com algum atributo quase sempre vem acompanhada de uma outra associação dos irracionais com a negação desse atributo. Foram englobados por essa associação duas frações, uma decimal exata e duas dízimas não-periódicas (ver **Quadro 38**).

Quadro 38 – Associação número irracional ≍ resultado não periódico

Afirmação	*Justificativa*	*Instrumento*	*Data*
-3/14 não é racional	É um número irracional	Q1	12/5/14
1,010010001... não é racional	Não é uma dízima periódica		
1,725 não é racional	[Em branco]		
13/23 é irracional	Seu resultado não é periódico	Q2	14/5/14
1,1212212221... é irracional	Resultado não é periódico		

Fonte: Elaborado pelo autor.

A afirmação '$-3/14$ não é racional', reforçada por sua justificativa 'é um número irracional' nos deixou intrigados, afinal, qual é a relação dessa fração com um 'resultado não periódico'? Por que essa fração está ao lado de dízimas não-periódicas no **Quadro 38**? Analisando o que Agatha escreveu para $13/23$ e sua respectiva justificativa, formulamos uma hipótese: a exemplo do que fez Titus, a estudante converteu as frações para suas respectivas representações decimais e, ao não identificar uma dízima periódica (os períodos de ambas frações eram grandes e dificultavam a visualização), considerou-as como números irracionais (ou não racional). Durante a entrevista final, pudemos confirmar nossa suspeita, quando apresentamos para Agatha suas respostas dadas quatro meses antes, e pedimos que classificasse novamente as frações $-3/14$ e $13/23$.

Em relação a -3/14, o trecho específico da entrevista que fundamenta nossa análise está transcrito a seguir.

> Pesquisador: *Nesse -3/14 que era a primeira fração, eu pedia para dizer racional sim ou não, pra esse primeiro você marcou 'não' e escreveu que era um número irracional. Eu queria saber, como foi isso?*
>
> Agatha: *Acho que eu devo ter dividido isso por isso e ... não lembro.*
>
> Pesquisador: *Dividiu?*
>
> Agatha: *O menos três por quatorze..., mas o porque eu não lembro*.
>
> Pesquisador: *Você acha que fez a divisão?*
>
> Agatha: *Eu acho que fiz... só que aí...*
>
> Pesquisador: *Por que além de marcar 'não', a sua justificativa foi essa 'é um número irracional'*.
>
> Agatha: *É (risos). Ai meu Deus, não sei, eu não lembro porque, mas eu provavelmente devo ter dividido e como eu não tinha ideia eu coloquei isso.*
>
> Pesquisador: *Será que é porque você dividiu e não viu o ...*
>
> Agatha: *O período, deve ter sido.*

Com referência à 13/23, o trecho está transcrito a seguir.

> Pesquisador: *Nesse aqui, nessa 13/23, marcou irracional e a justificativa é que o resultado não é periódico. Você lembra o que você fez também? Se você fez a divisão?*
>
> Agatha: *Não me recordo...deixa eu ver quanto que dá, não lembro.*
>
> Pesquisador: *E se fosse hoje você marcaria o que? Diferente? O que você faria?*
>
> Agatha: *Eu marcaria... peraí, deixa eu ... (começou a fazer a conta na calculadora do celular).*
>
> Pesquisador: *De repente você fazendo você lembra. Você deve ter feito isso.*
>
> Agatha: *É. Deu um negócio não periódico, mas eu marcaria que era...são dois números inteiros, então eles podem ser racionais... (o tom de dúvida fica evidente na voz) ai eu não lembro o conceito disso Broetto...*
>
> Pesquisador: *Não tem problema, é falar o que você faria hoje. Marcaria o que?*
>
> Agatha: *Acho que eu marcaria racionais, que não são irracionais*.

Agatha estava insegura, alternando momentos de certeza ao afirmar que uma fração de inteiros seria um número racional com momentos de dúvida e insegurança, recorrendo à calculadora para converter a fração em notação decimal. Ela parecia estar em conflito cognitivo, e para nós isso é uma marca deixada pela Intervenção Pedagógica. A exposição que fizemos de conceitos, propriedades e definições dos números racionais e irracionais provavelmente entrou em choque com algumas noções, crenças ou concepções trazidas pela aluna. Na frase *deu um negócio não periódico, mas eu marcaria que era...são dois números inteiros, então eles podem ser racionais...* entendemos que esse choque está revelado, quando a aluna se vê na dúvida entre o que imagina ser *um negócio não periódico* e a definição que diz que uma fração de inteiros é um número racional.

Em relação a 1,725, levamos essa questão para a Entrevista Final, e foi esclarecido pela própria licencianda que ela estava presa à questão de ter dízima periódica ser um requisito necessário e suficiente para o número ser considerado racional, e sua negativa, não possuir dízima periódica ser um requisito necessário e suficiente para ser considerado irracional. Assim, ao se deparar com a decimal finita 1,725, não a considerou racional porque não é uma dízima periódica. Destacamos o trecho referente a esse número na Entrevista Final.

> Pesquisador: *E o 1,725 você colocou 'não' também. Não é racional.*
>
> Agatha: *Acho que é por causa da questão do período também.*
>
> Pesquisador: *É?*
>
> Agatha: *Deve ser.*
>
> Pesquisador: *Mas aí é uma decimal exata, não tem nem período. Aí eu fiquei tentando entender qual que era a ... a lógica.*
>
> Agatha: *Mas eu acho que eu estava voltada...é por que eu não sabia, eu estava com tudo voltado para a questão do período, aí eu imaginava que o que tinha período era racional e o que não tinha era irracional. E ainda não sei muito bem o que que é isso não. Eu aprendi algumas coisas.*

A4: Número irracional $\asymp$ *representação por meio de raiz*

A representação por meio de raiz (utilizando o sinal de raiz $\sqrt{\ }$) é um atributo relevante dos números irracionais, mas não é crítico, pois não é uma condição necessária para que um número seja classificado como irracional. Chegamos a considerar o atributo em questão como um exemplo protótipo, influenciados por nossa concepção de que as raízes, quase sempre as raízes quadradas, são frequentemente os exemplos mais encontrados em livros didáticos da educação básica, juntamente com π. Contudo, voltamos atrás, por dois motivos principais. Primeiro, entendemos que não se trata de um exemplo específico, como $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ e, segundo, diversos números contendo raízes quadradas foram classificados como racionais por Agatha. Ou seja, a presença das raízes quadradas não foi determinante no julgamento da estudante, o que para nós enfraquece a possibilidade de as raízes serem exemplos protótipos, já que, em geral, quando se trata efetivamente de um exemplo protótipo, sua presença é determinante nos julgamentos.

No início da pesquisa, especificamente nos questionários Q1 e Q2, Agatha classificou $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{\sqrt{5}}{2}$ como racionais, que, de acordo com nossa análise, foi resultado da utilização da associação A1. Isso significa que, ou a associação A4 ainda não estava presente ou a associação A1 'falou mais alto' do que A4 no momento do julgamento. Conforme Tall e Vinner (1981), a imagem do conceito não precisa ser um todo coerente, ela pode abrigar diversas associações ou propriedades dos conceitos que são totalmente incompatíveis. Porém, em cada tarefa só usamos pequenas partes da imagem do conceito, e o sujeito pode conviver com esses conflitos em potencial sem se dar conta deles.

Na atividade de Correção de Questões, notamos a primeira manifestação da associação A4, quando Agatha classifica $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ e $\frac{6}{\sqrt{3}}$ como irracionais. Na Entrevista Final, ela classifica $\frac{\sqrt{6}}{3}$ como irracional e cita, em dois momentos, de forma espontânea, a raiz. No primeiro momento, ao fazer uma autoavaliação da sua participação na pesquisa, não havia sinais de tal associação.

> Agatha*: (...) até que eu lembrei de algumas coisas, eu consegui lembrar, por que número que tem raiz se não for exata é irracional, não é? Eu lembrei de algumas coisas* (Em 16/9/2014).

No segundo momento, Agatha respondia como explicaria para alguém o que é um número irracional.

> *Números irracionais podem ser escritos através de raiz, né? Se não forem quadrados perfeitos. Não sei. π é um número irracional, mas eu não sei te explicar, definir* (Em 16/9/2014).

A palavra 'irracional' parece disparar uma série de ligações e associações na imagem do conceito de Agatha. Aparecem as dízimas não-periódicas, os resultados não exatos, π, além de, nas duas falas, aparecer a raiz. Em relação aos exemplos protótipos detectados, observando o Quadro **39**, vemos que nas frações contendo π, Agatha não cometeu erro algum. Mesmo no caso $\frac{C}{2r}$ em que não é explícita a presença de π, a estudante também acertou, embora não soubesse justificar.

Quadro 39 – Exemplos protótipos utilizados por Agatha

Afirmação	***Justificativa***	***Instrumento***	***Data***
$\frac{4\pi}{3}$ não é racional	-	Q1	12/5/14
3,1416 é irracional	Seu resultado não é periódico	Q2	
$\frac{4\pi}{2}$ é irracional	Usou π e π é um número irracional	Correção de Questões	21/5/14
$\frac{C}{2r}$ é irracional	[Não soube justificar]		

Fonte: Elaborado pelo autor.

Ainda no Quadro 39, a justificativa dada para $\frac{4\pi}{2}$ na atividade Correção de Questões nos faz pensar que a presença desse símbolo, ainda que implícita, seria determinante para a classificação de um número como irracional. Na Entrevista Final, a estudante mencionou o número π em dois momentos, quando pedi para definir números irracionais e quando pedi para justificar a existência dos mesmos. Veja os trechos abaixo.

> Pesquisador: *Alguém te pergunta aí no corredor o que é um número irracional. Você falaria o que para essa pessoa?*
>
> Agatha: *Se ele estiver em fração, se o resultado dele não der exato, exato assim, der uma dízima não-periódica, ele é irracional. Números irracionais podem ser escritos através de raiz, né? Se não forem quadrados perfeitos. Não sei. π é um número irracional, mas eu não sei te explicar, definir.*
>
> Pesquisador*: O que te faz acreditar na existência de números irracionais?*
>
> Agatha*: Olha, acho que a questão da circunferência, é por que usa π. Não, péra aí. O sr. deu um exemplo, acho que foi da mesa, que tinha que construir uma mesa, de 2 por ... agora não me recordo (sussurrando).*

Ou seja, o número π funciona para Agatha como um exemplo protótipo de número irracional. Em diversas situações, mesmo quando não apareceu explicitamente, a menção à palavra 'irracional' trouxe π para a fala da aluna, como quando perguntamos a respeito da definição e da existência dos irracionais. Os exemplos protótipos têm essa característica, por serem considerados os melhores representantes do conceito, os que reúnem a maior quantidade de atributos relevantes e irrelevantes, frequentemente são os primeiros a serem lembrados (HERSHKOWITZ, 1994).

Além disso, outro fator que reforça nosso pensamento de que π é um protótipo de número irracional na imagem do conceito de Agatha é que sua presença foi determinante para o julgamento, mesmo existindo uma associação que dizia o contrário. Segundo A1, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{2}$ e $\frac{C}{2r}$ deveriam ser classificadas como racionais, já que estão escritas por meio da representação fracionária. Porém, a força do exemplo protótipo de π possivelmente falou mais alto, e a estudante classificou-as como irracionais (ver Quadro 39).

A imagem de π como protótipo de número irracional é tão forte que até algo que não é π, mas que remete a esse número, isto é, cuja representação se parece com a representação decimal de π, foi considerada pela aluna como irracional, como mostra o trecho a seguir.

> Pesquisador: [...] *3,1416 você marcou como irracional pois não é periódica.*
>
> Agatha: *É π (pi) não é, isso aqui?*
>
> Pesquisador: *É? Não sei.*
>
> Agatha: *3,1416, acho que é!*
>
> Pesquisador: *Então deve ter sido por isso que você marcou irracional e não é periódico?*
>
> Agatha: *Acho que sim, eu devo ter lembrado do π.*
>
> (Entrevista Final, em 16/9/2014)

A classificação de 3,1416 como número irracional por parte de Agatha não parece ser um caso isolado. No Estudo Principal, 7 licenciandos (30%) fizeram essa classificação (incluindo Agatha), no Estudo Exploratório (Apêndice H) também foram 7 estudantes (37%) e inclusive outras pesquisas como as de Igliori e Silva (1998) e Penteado (2004) também detectaram a associação de 3,1416 com π. Mas como esse número veio a ser considerado por Agatha como se fosse π? Como em geral esse processo se dá? Interpretamos essa situação a partir da leitura de Vinner (2011), que argumenta ser prática comum após definir números irracionais como *aquele que não pode ser expresso como uma razão de dois inteiros,* mencionar alguns números irracionais, principalmente π. Por outro lado, em um estágio posterior, é muito comum a apresentação de $\pi = 3{,}1415$ ..., $\pi \sim 3{,}1416$ ou $\pi \sim 3{,}14$, o que acaba fixando e/ou reforçando as primeiras casas decimais do número, como em diversas questões de prova em que o enunciado sugere "use $\pi \sim 3{,}14$". Com o tempo, o significado das reticências se perde e π pode até se tornar igual a 3,14 ou 3,1416, como ficou sugerido na fala de Agatha destacada anteriormente.

7.2.3.2 – Movimentações das associações

Ao longo da pesquisa, entendemos que a associação A1 foi reformulada por Agatha. Em três momentos distintos a estudante apresentou sinais de aprendizagem a partir dos erros que cometera nos questionários Q1 e Q2. O primeiro momento foi na atividade Correção de Questões, quando ela reconheceu a razão algébrica $\frac{x}{x-y}$ $x, y \in \mathbb{Z}, x \neq 0, y \neq 0$ como um número racional justificando tratar-se de uma "fração de inteiros". O segundo e o terceiro momentos se deram durante a Entrevista Final, no início, quando ela classificou $\frac{\sqrt{6}}{3}$ como irracional, e, durante a entrevista, quando demonstrou mais uma vez que havia reformulado a associação A1, conforme trecho transcrito a seguir.

> Pesquisador*: No* $\sqrt{3}/2$*, que é o segundo, você marcou 'sim' [é um número racional] pois é uma fração.*
>
> Agatha*: (risos)*
>
> Pesquisador*: Você marcou que era racional e a justificativa por que é uma fração. Se fosse hoje, você marcaria a mesma coisa? Mudaria?*
>
> Agatha*: Acho que...eu mudaria ...* $\sqrt{3}/2$ *(falando baixinho). Acho que eu mudaria.*
>
> Pesquisador*: Mudaria? Por que?*
>
> Agatha*: Por que* $\sqrt{3}$ *não dá um número inteiro. Racionais têm que ser inteiro, não é? Pra dividir um pelo outro?*
>
> Pesquisador*: Sim.*
>
> Agatha*: Então, acho que eu marcaria que não [não é um número racional].*

Agatha passou a olhar não apenas para a forma fracionária, ela passou a considerar o conteúdo dessa fração; isto é, que tipo de número está no numerador e no denominador. Essa reformulação, apesar de parecer muito simples, ajudou a aluna a não cometer mais erros no reconhecimento de racionais e irracionais ao longo da pesquisa. Após os questionários Q1 e Q2 ela não cometeu mais nenhum erro de classificação semelhante aos que cometeu no início da pesquisa.

Em relação à A2, para se tornar uma associação favorável à aprendizagem, precisaria receber uma inclusão das decimais exatas. Temos um dado coletado na atividade Correção de Questões que sugere ter havido tal inclusão, quando a estudante considerou correta a argumentação:

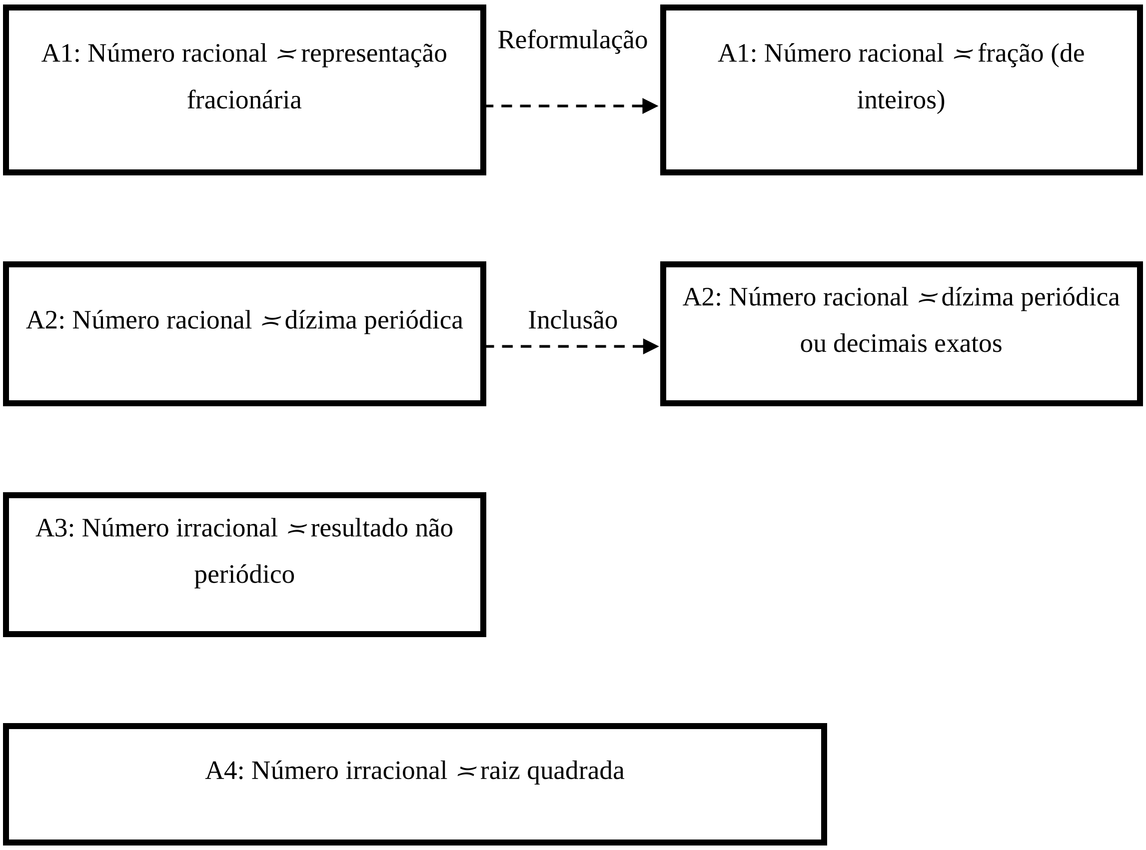
$$\frac{1,2}{3} \text{ é racional porque seu resultado é 0,4.}$$

Considerando a visão inicialmente restrita de Agatha no que se refere aos números que não apresentam dízimas periódicas, como 1,725, considerar 0,4 um número racional é sinal que algo novo foi incluído em seu repertório de associações. Porém, durante a Entrevista Final, pudemos avaliar que a estudante ainda se mostrava insegura em alguns momentos e não tinha entendido alguns pontos cruciais, principalmente aqueles propostos na atividade Equivalência de Definições, como a ligação direta entre a divisão de dois inteiros e o surgimento da dízima periódica. Por isso, consideramos que a reformulação e a inclusão foram conseguidas de maneira instrumental pela estudante, representadas pelas setas tracejadas no **Quadro 40**, que ilustra a movimentação de associações de Agatha ao longo da pesquisa.

Quanto à A3, não foi detectada após os questionários Q1 e Q2. No que se refere à A4, apareceu nos questionários Q1 e Q2 e na atividade de Correção de Questões. Não foi detectada na Entrevista Final.

Quadro 40 - Movimentação de associações de Agatha

Q1 (12/5/2014)	Q2 (14/5/2014)	Correção de Questões (21/5/2014)	Entrevista Final (16/9/2014)



Fonte: Elaborado pelo autor.

7.2.3.3 – Imagem da definição do conceito

Apesar de dizer em alguns momentos que não sabia muita coisa a respeito dos números irracionais, e que o professor (na escola básica) foi muito rápido quando apresentou essa matéria, Agatha forneceu definições no início da pesquisa, mais especificamente nos Questionários Q1 e Q2, bastante próximas daquelas que frequentemente encontramos nos livros didáticos de matemática (ver Quadro 41). Isso indica que alguma coisa foi assimilada por Agatha, isto é, sua imagem da definição do conceito de número racional e irracional não estava vazia no início da pesquisa. Como não fizemos qualquer tipo de intervenção anterior à aplicação dos questionários Q1 e Q2, a elaboração dessas definições pode ser resultado das aulas de matemática da escola, da leitura de algum livro, das primeiras semanas de aula na licenciatura em matemática ou de alguma outra fonte.

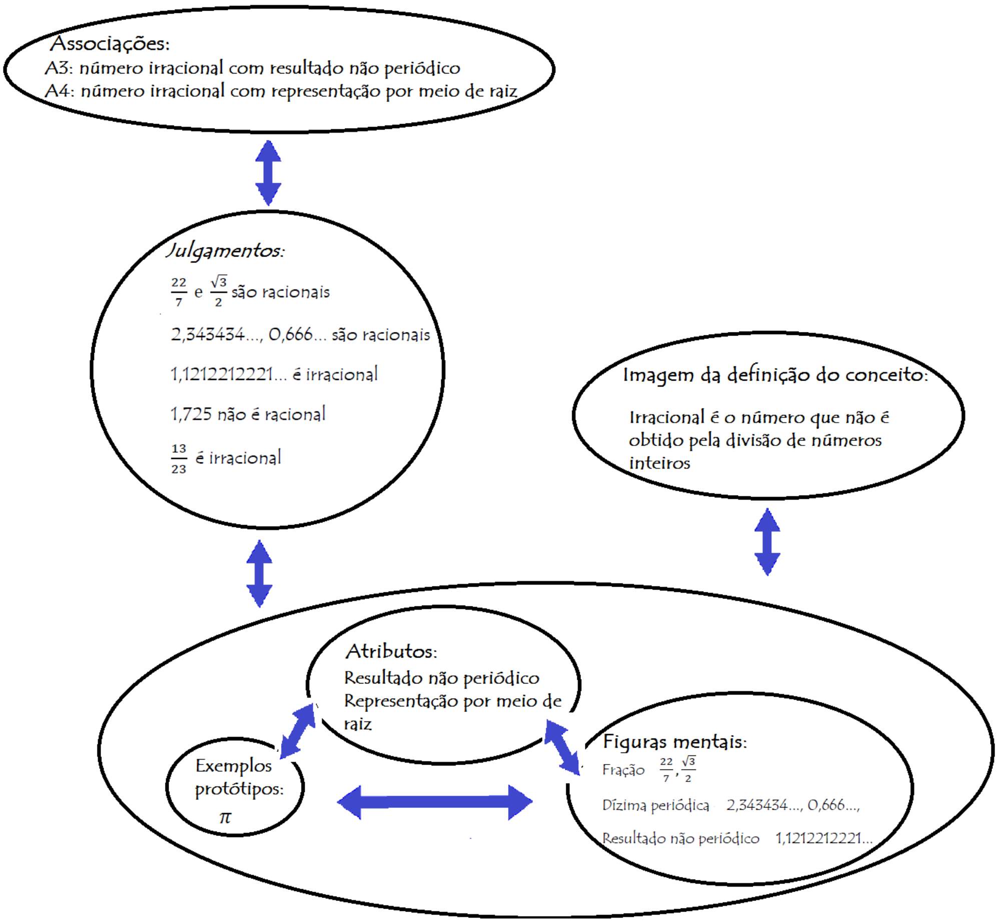
Quadro 41 - Definições de Agatha para números racionais e irracionais

Definição de número racional	**Instrumento**	**Data**
É o número que pode ser representado por uma razão entre dois números.	Q1	12/5/2014
Definição de número irracional	Q2	14/5/2014
É o número que não é obtido pela divisão de números inteiros.		
Diferença entre número racional e número irracional		
O racional é o resultado da divisão de dois números inteiros e o irracional não é.		

Fonte: Elaborado pelo autor.

Porém, apesar de apresentar definições bem próximas de definições que poderiam ter saído de algum livro didático, em nenhuma de suas justificativas a aluna usa essas definições, preferindo as associações A1, A2, A3 ou A4 que apresentamos anteriormente. As razões para não se usar definições podem ser diversas. Entre as principais suspeitas, entendemos que elas podem ter sido apenas memorizadas sem compreensão do seu significado ou podem ter sido deliberadamente consideradas inúteis. Além disso, também existe um fator descrito em nosso quadro teórico que, em geral, há uma predileção da mente pelas imagens ao invés das definições (VINNER, 1983). Esse comportamento está ilustrado na **Figura 43**a. De acordo com o nosso modelo, teríamos o que está ilustrado na **Figura 45**.

Figura 45 - Modelo da imagem do conceito de Agatha para número irracional



Fonte: Elaborada pelo autor.

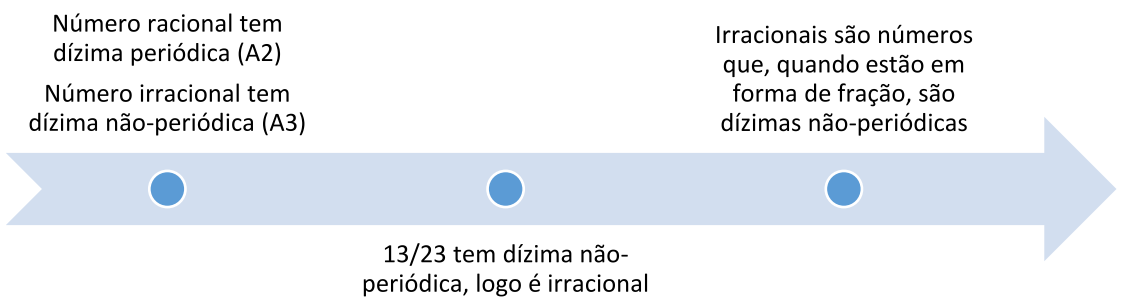
A definição de racional feita em Q1, por sua vez, é coerente com algumas classificações, embora erradas, como $\frac{\sqrt{3}}{2}$ é racional e $\frac{\sqrt{5}}{2}$ não é irracional. Levamos a aluna a perceber, durante a entrevista, que, em sua definição para os números racionais dada em Q1, faltava a palavra ‘inteiros’. Também chama atenção a incoerência entre as definições apresentadas (**Quadro 41**) e as classificações de -3/14 e 13/23 como números irracionais. Se as definições fossem utilizadas, esses números poderiam ser prontamente considerados como racionais, já que representam a divisão de dois números inteiros. Por isso, está configurado um fator de conflito potencial entre as definições iniciais e as classificações (e posteriormente entre a definição antiga e a apresentada durante a Entrevista Final).

Na Entrevista Final, perguntamos para Agatha como ela definiria números irracionais, e ela disse o seguinte:

Se ele estiver em fração, se o resultado dele não der exato, exato assim, der uma dízima não-periódica, ele é irracional (Entrevista Final, em 16/9/2014).

Observe que ela muda completamente sua definição em relação àquela dada no início da pesquisa. Sua fala é confusa e parece indicar que um número irracional pode ser escrito em forma de fração, ou, dito de outra forma, que uma dízima não-periódica pode ser resultado de uma fração. Do ponto de vista da teoria matemática, pode-se dizer que essa definição é 'pior' do que as definições anteriores, pois contém uma falha conceitual. Porém, essa nova definição é coerente com alguns julgamentos que Agatha fez nos questionários Q1 e Q2, como a classificação de 13/23 como irracional, com a justificativa de que 'o resultado não é periódico' (ver **Quadro 38**). Pensamos no seguinte processo de construção desta definição pela estudante (**Figura 46**):

Figura 46 - Processo de construção de uma definição por Agatha



Fonte: Elaborada pelo autor.

Segundo Tall e Schwarzenberger (1978), é fácil ver que toda fração m/n, com m e n inteiros, representa uma dízima periódica. Procedendo a divisão, as possibilidades para o resto são limitadas, $1, 2, \ldots, n-1$, e, em um dado momento, necessariamente os cálculos começarão a se repetir e aparecerá uma dízima periódica. Para essa obra, a recíproca é muito mais profunda, isto é, que toda dízima periódica representa uma fração de inteiros. Em nossa pesquisa, percebemos o contrário. A maioria dos participantes não tem dúvidas que uma dízima periódica representa uma fração de inteiros, mas muitos, inclusive Agatha, apresentaram dificuldades em entender que toda fração de inteiros representa uma dízima periódica. Entendemos que isso é provavelmente um reflexo da abordagem dos livros didáticos. É muito comum apresentar a fórmula ou procedimento para se obter fração geratriz e, quanto ao contrário, ou seja, da fração para a obtenção da dízima periódica, apresenta-se a divisão, porém quase sempre com denominadores pequenos e sem explicar a ligação dos restos com o aparecimento da dízima periódica. Isso explicaria o comportamento de Agatha, por exemplo, que não está segura de que uma fração de inteiros é sempre uma dízima periódica.

Ainda na Entrevista Final, percebi que um dos principais objetivos do processo de instrução não havia sido alcançado. A atividade Equivalência de Definições, não por coincidência a última atividade aplicada, tinha a intenção de fazer o fechamento das informações e conceitos trabalhados e fazer com que os participantes entendessem que, se um número racional está escrito como uma fração de inteiros, então necessariamente deverá ser representado por uma dízima periódica. Daí uma dízima não-periódica não pode ser transformada em uma fração, pois caso contrário, seria uma dízima periódica. A nova definição de Agatha demonstrava uma construção própria da estudante a partir do que ela vivenciou e pôde assimilar durante o processo de intervenção, mas que ainda estava muito aquém do que desejávamos. Além disso, ela marcou duas questões com FALSO na atividade Equivalência de Definições (todas eram verdadeiras, ver Apêndice AA - Equivalência de definições). Por isso, achei que deveria tentar pelo menos fazê-la perceber a incoerência entre as definições anteriores (do início da pesquisa) com a definição da Entrevista Final.

Para tentar fazer isso, comecei lendo para ela sua própria definição de irracional quando respondeu ao questionário Q2. Em seguida, ocorreu o seguinte diálogo.

> Pesquisador: *Você falou que irracional é um número que a fração não dá uma dízima periódica, mas aqui se você fala que o irracional não pode ser escrito como fração de inteiros, tem alguma coisa aí que não está...*
>
> Agatha: *É não bate...*
>
> Pesquisador: *Entendeu?*
>
> Agatha: *Ele pode ter a fração, ele pode ser representado por uma razão, só que o resultado dela vai dar um número ... é isso?*
>
> Pesquisador: *Mas essa razão é como?*
>
> Agatha: *De um número... aí eu já não sei.*
>
> Pesquisador: *Por que se o irracional não pode ser representado como uma fração de inteiros, como tem uma fração que dá um irracional?*
>
> Agatha: *Caraca...(sic)*
>
> Pesquisador: *Você falou essas duas coisas*.
>
> Agatha: *Entendi.*
>
> Pesquisador: *Você falou que irracional é aquele número que a fração não dá dízima periódica. E depois, aqui está dizendo na sua definição que o irracional não pode ser representado por uma fração, então...*

Agatha: *Não, ele pode*.

(Pesquisador) *Ele pode?*

Agatha: *Acho que pode. Pode, aí vai depender do resultado dela, se é racional ou não, irracional. Porque igual aqui, um exemplo, essa daqui, deixa eu ver (pausa). Esse* $\frac{13}{23}$*, isso é irracional?*

Pesquisador: *Quando você marcou lá você disse que sim, pois seu resultado não é periódico. Só que aí tem aquela questão da sua definição que quando você escreve como razão de inteiros é racional, não é? Então como que o* $\frac{13}{23}$ *pode ser irracional?*

Agatha: *Então no caso eu teria que mudar minha definição.*

Pesquisador: *Qual definição? A que você falou agora ou a que está escrito aqui? (referindo-se à definição de Q2). São diferentes. Agora para mim, você falou que é um número que a fração não dá dízima periódica e aqui você disse que irracional não é obtido pela divisão de inteiros, então uma das duas coisas tem que, não está batendo.*

Agatha: *Eu acho que a minha resposta de agora...*

Pesquisador: *É a que está melhor?*

Agatha: *Eu acho.*

Agatha estava bastante confusa. No início do diálogo parecia ter percebido a incoerência entre suas definições iniciais e a definição recém elaborada, mas, em seguida opta por sua definição recém elaborada e continua achando que uma fração pode resultar em uma dízima não-periódica, logo, em um número irracional. Ela ainda cita como exemplo o número 13/23, que ela havia classificado como irracional no início da pesquisa, reforçando nosso esquema na **Figura 46**. Para confirmar se realmente a aluna pensava ser possível uma fração de inteiros gerar um número irracional, resolvi perguntar de uma forma diferente.

Pesquisador: *Então, eu queria que você me desse um exemplo de uma fração com denominador treze cuja dízima não é periódica.*

Agatha: *(pausa) Pode usar de novo? (apontando para o celular).*

Pesquisador: *Pode.*

Agatha: *(fazendo contas no celular) Acho que não dá não.*

Pesquisador: *Não dá não? E se fosse uma fração com denominador qualquer agora?*

Agatha: *Qualquer?*

Pesquisador: *É, mas a dízima tem que ser não-periódica. Que a dízima seja não-periódica, pode ser qualquer denominador.*

Agatha: *Caramba, até assim está difícil.* $\sqrt{3}$ *sobre...*

Pesquisador: *Não, não quero raiz não. É fração de inteiros.*

Agatha: *De inteiros?*

Pesquisador: *É, desculpa que eu não falei, é fração de inteiros.*

Agatha: *(pausa). Caramba, difícil! Gente!*

Pesquisador: *Qualquer denominador, você tem infinitos para escolher.*

Agatha: *Ah tá, mas na hora que vai pegar aqui, tudo que eu faço dá ... (fazendo mais contas). Ah, acho que agora, peraí (mais contas). Ai Broetto, eu não estou conseguindo não.*

Pesquisador: *Você está tentando quais denominadores?*

Agatha: *Vários.*

Pesquisador: *Tenta uns grandes.*

Agatha: *Eu tentei com vinte e poucos, está dando tudo exato!*

Pesquisador: *Tenta, sei lá, denominador dezenove, você tentou?*

Agatha: *(pausa). Aí não dá, é, não dá não. 450 dividido por 19.*

Pesquisador: *Deu o que?*

Agatha: *23, ... eu não sei se depois disso aqui vai começar período... acho que não... 684210526, deu isso. Não sei se está certo.*

Pesquisador: *Olha bem. Vou voltar lá para o início, quer ver. Lá no início, você me falou que, na verdade lá no questionário, você disse que o irracional não é obtido pela divisão de inteiros.*

Agatha: *Isso aí eu já tinha mudado.*

Pesquisador: *Ah tá. Mas, ok. E outra, você falou também que o racional é o número que é representado por uma razão entre dois números, e essa conta que você fez são dois números inteiros, não é?*

Agatha: *É.*

Pesquisador: *E isso vai dar um racional, uma dízima periódica, uma não-periódica...*

Agatha: *Dá uma não-periódica.*

Pesquisador: *Dá uma não-periódica?*

Agatha: *Bom, pelo menos o que apareceu aqui não tinha período.*

De fato, Agatha considerava possível uma fração (de inteiros) gerar um número irracional, como visto anteriormente e, confirmado em seguida com a pergunta referente às dízimas não-periódicas. Apesar de ter demonstrado certa desconfiança com o resultado apresentado pela calculadora, consideramos um problema conceitual grave, já que o comportamento que esperávamos era que fosse prontamente respondido que uma fração sempre gera uma dízima periódica, portanto, um número racional. Esse inclusive era um dos objetivos da atividade Equivalência de Definições (Apêndice AA - Equivalência de definições). Possivelmente, Agatha nunca tinha pensado a respeito dos restos de uma divisão e de que existiria a possibilidade de resultados se repetirem. E talvez também nunca tenha sido discutido com ela anteriormente em aulas de matemática a respeito do que pode acontecer quando fazemos o cálculo para representar em forma decimal o número m/n, com n diferente de zero.

Ao perceber que os objetivos da atividade Equivalência de Definições não haviam sido atingidos, e conforme a Entrevista Final se encaminhava para o seu fim, decidi ir ao quadro para tentar explicar as ideias envolvidas nessa atividade. Fiz uma série de exemplos no quadro, fazendo a divisão longa com resto e mostrando a relação dos restos da divisão com o quociente, assim como das possibilidades para os restos e a dízima periódica. Também comentei a respeito das limitações da calculadora. Agatha participou ativamente de cada passo, completando minhas frases e seguindo a linha de raciocínio. Ao final da exposição, parecia satisfeita com o que viu, e ainda fez uma relação com o uso da calculadora.

> Pesquisador: *Deu para clarear?*
>
> Agatha: *(empolgada). Deu, nossa, com certeza! Agora eu tenho certeza que a divisão de inteiros dá uma dízima periódica. Era isso que eu ficava meio assim, porque eu sempre ficava na dúvida, exatamente pela questão da calculadora...* (Entrevista Final, em 16/9/2014).

7.2.3.4 - Sentimento

Nos primeiros contatos com as atividades propostas, Agatha fez questão de dizer que não havia aprendido números irracionais antes da nossa pesquisa. As três primeiras auto avaliações, realizadas ao final dos Questionários Q1 (12/5/14), Q2 (14/5/14) e do encontro de 21/5/2014 mencionavam insegurança e um certo desconforto por não ter *domínio do assunto*, para empregar uma expressão usada por ela.

> *Durante o desenvolvimento da pesquisa descobri que não tenho domínio do assunto* (Em 12/5/14).
>
> *Insegura dos meus conhecimentos matemáticos. Por que eu não sei quase nada sobre o assunto* (Em 14/5/14).
>
> *Vou me sentir melhor a partir do momento que eu realmente aprender o que são números irracionais. Por que a princípio eu estou um pouco insegura, por que eu não sei muita coisa. Tentando resolver os questionários eu descobri que é muito mais do que, muito mesmo mais além do que eu aprendi na escola. E é isso* (Em 21/5/14).
>
> *Tem sete anos que eu terminei meu ensino médio, e, assim tem muita coisa que eu também não lembro, mas números irracionais eu tenho certeza que ele [o professor] passou direito, entendeu? Eu sei pouca coisa. O que eu sei é o que eu aprendi depois fazendo seus questionários* (Em 16/9/14).

Também houve momentos em que Agatha sentiu a necessidade de fazer algo em relação a falta de conhecimento detectada por ela mesma, não apenas em relação aos números irracionais.

Descobri que preciso estudar mais sobre todos os assuntos (Em 14/5/14).

O estímulo para começar essa empreitada também ficou nítido em diversos momentos ao longo da pesquisa, impulsionada por uma preocupação com desempenho de sua futura profissão docente.

É importante conhecer para ensinar aos meus futuros alunos (Em 12/5/2014).

Gostaria de aprender melhor sobre números racionais, irracionais e conjuntos (Em 14/5/14).

Acho legal expor os meus conhecimentos e acabar aprendendo o que não sei (Em 14/7/14).

Agatha também demonstra satisfação por ter alcançado algum aprendizado. Ela se percebe aprendendo algo em diversos momentos da pesquisa, seja no início, meio ou até na Entrevista Final.

Voltei a descobrir um pouco mais sobre números irracionais (Em 22/5/14).

[Ao participar da atividade, sentiu...] Curiosidade, Satisfação e Aprendizado. Por que aprendi um pouco mais do conteúdo (Em 14/7/14).

Sintetizando, a participação na pesquisa configurou-se como uma tomada de consciência por parte de Agatha:

Eu acho que, segura totalmente não, por que ainda acho que isso aí eu tenho que ver um pouquinho mais, como você viu ainda tenho dúvidas, não sei me expressar muito bem, mas eu me sinto bem mais confiante do que eu estava quando eu fiz isso aqui. Consegui compreender um pouco mais (Em 16/9/14).

Para resumir a análise de Agatha, detectamos um conhecimento de números racionais e irracionais bastante precário e superficial, com algumas interpretações e associações equivocadas, que a levava a cometer erros, como considerar 1,725 como irracional por não ter uma dízima periódica e considerar 3,1416 como irracional por se tratar de π. Nas associações que detectamos, a dízima periódica mostrou ser algo bem forte na imagem do conceito de número racional da aluna, assim como a dízima não-periódica na imagem do conceito de número irracional. Porém, ao analisar suas definições, essas associações se mostraram frágeis, e consideramos que elas não se davam em um nível de compreensão relacional.

Em relação à definição do conceito, a aluna não tinha uma, mas algumas definições, e com um agravante, eram conflitantes. Nos questionários Q1 e Q2 apresentou definições bem próximas àquelas encontradas nos livros didáticos, mas na Entrevista Final apresentou uma outra, possivelmente fruto de uma construção própria, em conflito com a primeira, e que revelava que nosso propósito com a atividade Equivalência de Definições não havia sido atingido. Agatha considerava possível que uma fração de inteiros gerasse números racionais e irracionais. Também identificamos um conflito gerado quando estimulamos a aluna a fazer suas classificações a partir da definição.

Apesar da reformulação de A1, da inclusão em A2 e de outros avanços conquistados por Agatha, como o exercício da autocrítica a respeito de suas limitações e do seu conhecimento, ficou nitidamente marcado que esses avanços se deram em um nível de compreensão instrumental. As dúvidas e a insegurança demonstradas durante a Entrevista Final nos fazem concluir que as atividades que desenvolvemos e aplicamos não foram suficientes para proporcionar à estudante um entendimento mais profundo das relações envolvidas, como por exemplo, de por que o número racional implica uma dízima periódica e, portanto, numa fração de inteiros, e vice-versa.

Considerações, apontamentos e reflexões finais

> *Somente pensamos quando confrontados com um problema.*
>
> John Dewey

De volta ao Quadro 10, iniciamos as considerações finais respondendo às nossas perguntas de pesquisa. Em relação à pergunta P1 consideramos que o conhecimento prévio dos alunos que participaram de nossa pesquisa em relação aos números irracionais é bastante frágil, superficial, decorado e desconectado de outros conhecimentos. Identificamos várias situações que podem ser interpretadas à luz do referencial teórico adotado, como a coexistência de imagens conflitantes na imagem do conceito de número racional e irracional, a predileção pelo uso de imagens ao invés de definições e a proximidade desse conhecimento de uma compreensão instrumental.

Na turma, como um todo, observamos algumas situações que merecem atenção relacionadas ao reconhecimento, como a classificação de algumas frações e dízimas periódicas como números irracionais. Em relação à definição de número racional, a maioria da turma apresentou aquelas que são as definições mais frequentemente encontradas em livros didáticos de matemática, que caracterizam esses números como aqueles que podem ser escritos em forma de fração ou que são representados por dízimas periódicas. O mesmo não ocorreu em relação às definições apresentadas para os números irracionais. As definições mais frequentes caracterizaram os irracionais como números inexatos, incompreensíveis e imprevisíveis. Também foram registradas aquelas definições que poderiam ter sido retiradas de livros didáticos, que caracterizam os números irracionais como aqueles que não podem ser escritos em forma de fração ou aqueles que são representados por dízimas não-periódicas.

Em relação à propriedade de densidade, detectamos diversas dificuldades, tanto em relação aos racionais quanto em relação aos irracionais. A maioria da turma mostrou-se insegura com essa propriedade, fato demonstrado principalmente pelas dificuldades para justificar a existência de um racional/irracional entre dois racionais/irracionais. Dificuldades com relação ao reconhecimento e a representação de números irracionais também influenciaram no baixo desempenho da turma nas atividades relacionadas à propriedade de densidade. No que diz respeito a uma justificativa para a existência dos irracionais, a turma apresentou uma variedade de respostas que refletem ideias truncadas ou vazias que precisam ser revistas ou completamente abandonadas. Justificativas como ‘para expressar a inexatidão’ e ‘para preencher lacunas’ expõem a falta de aprofundamento conceitual, enquanto ‘existem porque a matemática me diz que existem’ reflete um total vazio conceitual e uma aceitação pela suposta autoridade da matemática ou do professor de matemática.

Referente à pergunta P2 foram detectadas diversas associações, tanto na turma como um todo quanto em relação aos alunos que selecionamos para uma análise mais detalhada. Com frequência, as associações referentes aos números racionais e irracionais configuraram-se em pares de afirmação/negação de um determinado atributo. Os principais pares detectados foram exatidão/inexatidão, padrão/ausência de padrão e previsibilidade/imprevisibilidade. Além dessas associações, também detectamos a presença das raízes quadradas e de π como exemplos protótipos de números irracionais, assim como da representação fracionária como exemplo protótipo de número racional.

Em resposta à P3 entendemos que há mais condições de responder em relação aos alunos que participaram da Entrevista Final. Destacamos as associações representação fracionária – racional e dízima/periódico – racional, que levaram Agatha a cometer erros no reconhecimento de números racionais e irracionais e as associações padrão/regularidade – racional e ausência de padrão/regularidade – irracional, que levaram Titus a cometer erros no reconhecimento de racionais e irracionais. Para esses estudantes, essas associações não contribuíram para a aprendizagem dos números racionais e irracionais. Em geral, trata-se de uma pergunta muito difícil de responder, pois cada indivíduo utiliza as associações de forma muito particular e mesmo uma associação com algum atributo relevante como no caso de Agatha, pode não contribuir para a aprendizagem. Nesses termos, podemos dizer que a hipótese H1 foi confirmada.

Em relação à pergunta P4, entendemos que a maior contribuição da intervenção pedagógica foi promover uma desequilibração cognitiva nos estudantes ingressantes, que serão futuros professores de matemática. Poderíamos citar diversas contribuições pontuais – como faremos ao responder P5 – mas, a mais pungente, aquela que diversos estudantes expuseram ao preencher as fichas de avaliação ao final dos encontros e das atividades realizadas, aquela que foi lembrada nas Entrevistas Finais e até nos momentos em que demos o segundo retorno após um ano de terminado o trabalho, foi a desequilibração cognitiva. Frases do tipo ‘eu achava que sabia o que era um número irracional’ foram as mais frequentes nessas fichas e nessas conversas. A desequilibração cognitiva, nesse caso, também pode ser pensada como uma espécie de choque, uma desestabilização das figuras e das associações mentais presentes na imagem do conceito dos participantes da pesquisa que os tirou de um local aonde se sentiam seguros e confortáveis. Além disso, umas das consequências positivas da desequilibração cognitiva foi o despertar da consciência dos licenciandos em relação aos seus próprios conhecimentos. Eles passaram a desenvolver suas capacidades metacognitivas, de pensar a respeito do que sabem e do que não sabem. Isso também ficou claro em diversos momentos ao longo da intervenção pedagógica.

Em respeito à pergunta P5, os quadros Quadro **25**, Quadro **34** e Quadro **40** mostram que as imagens conceituais de Cyrus, Titus e Agatha foram impactadas pelo nosso trabalho. As imagens conceituais dos três licenciandos sofreram reformulações, reconstruções, inclusões ou exclusões, sendo que apenas no caso de Titus observamos sinais de movimentações em um nível de compreensão relacional. Apesar disso, avaliamos que, ao final da pesquisa, os três licenciandos experimentaram ganhos, cada um ao seu modo, em relação a como estavam no início da mesma. Por esses motivos, consideramos que as imagens conceituais de Cyrus, Titus e Agatha foram enriquecidas, e a hipótese H2 foi parcialmente confirmada.

Referente à segunda parte da hipótese H2, aquela que se traz à baila uma capacitação dos licenciandos para ensinar números irracionais de forma adequada na educação básica, entendemos que não temos dados suficientes para confirmá-la. Hoje, prestes a escrever as últimas linhas do nosso trabalho, avaliamos que essa parte da hipótese H2 foi muito pretensiosa para o tempo de coleta de dados de uma pesquisa de doutorado – em geral um ano, no máximo dois. Apesar disso, pensamos que, ao perseguir essa hipótese, conseguimos trilhar um caminho interessante que pode gerar alguns frutos no futuro, como o aprimoramento e publicação das atividades como material de apoio didático. Foi trabalhando com essa hipótese – capacitar os licenciandos para ensinar números irracionais na educação básica – que adaptamos e desenvolvemos atividades que proporcionaram a eles uma experiência de ‘ser professor’. Além de tarefas inerentes à atividade docente, as atividades de correção de questões, formulação de questões e análise de livros didáticos também nos proporcionaram conhecer melhor diversos aspectos referentes à imagem do conceito de números irracionais dos licenciandos.

Respondidas as perguntas de pesquisa, após três anos de intenso trabalho, é inevitável fazer algumas reflexões a respeito do que fizemos e deixar alguns apontamentos e propostas para futuras investigações. Começando com a parte histórica, pudemos aprender como a noção de incomensurabilidade na Grécia Antiga deu origem a um processo de desenvolvimento de ideias que culminou, entre os séculos XVIII e XIX, com o que chamamos hoje de números irracionais. Entre esses quase vinte e cinco séculos de história, os números irracionais passaram por um longo processo de transformação e aceitação até adquirirem o *status* de número. Da história para o ensino, vemos que esse processo de aceitação, já resolvido pelos matemáticos, ainda ronda nossas salas de aula.

Concordamos com Rezende (2003) quando afirma que o cenário pedagógico referente aos números irracionais que se apresenta é semelhante ao que havia no Renascimento. Os matemáticos daquela época sabiam que os números irracionais eram identificáveis com as decimais infinitas e não-periódicas, porém, não conseguiam localizar esses números na reta numérica e por isso foram denominados "nebulosos" ou "surdos". Esse caráter de nebulosidade, segundo Rezende (2003), permanece presente na educação básica e os alunos ainda são privados de instrumentos que possibilitem uma superação dessa situação. Problemas motivadores e dificuldades inerentes à construção do significado dos números irracionais são escondidos dos alunos, como quando se ensina por uma regra prática que 0,333... é a representação decimal da fração 1/3. Assim, *cria-se um hiato entre a representação decimal do número irracional (discreto) e sua representação geométrica (contínuo)* (REZENDE, 2003, p. 330).

O conhecimento que os sujeitos apresentaram no início da nossa pesquisa parece ser um reflexo dessa negligência de processos pedagógicos relacionados aos números irracionais da educação básica, apontada por Rezende (2003). Naquela ocasião, verificamos que alguns sujeitos 'sabiam' alguma coisa a respeito de número irracional, como, por exemplo, que são representados por dízimas não-periódicas. Porém, em muitos casos, percebemos rapidamente que esse 'conhecimento' não ia além disso; isto é, o mesmo sujeito considerava possível que uma fração de inteiros pudesse gerar uma dízima não-periódica, portanto, um número irracional. Eis aí a nebulosidade mencionada por Rezende (2003). As redes de conexão e as relações entre os elementos da imagem do conceito de números irracionais desses sujeitos mostraram-se frágeis ou até mesmo inexistentes. Essa inclusive era uma das nossas hipóteses (H1), que como já comentamos, consideramos confirmada.

Para mudar essa situação na educação básica, apontada por Rezende (2003), e por nós com as turmas de licenciatura nos três estudos que realizamos – o que mais uma vez nos remete ao ciclo vicioso que apontamos (Figura 6) – entendemos que algumas ações podem ser adotadas. Como princípio norteador dessas ações, trazemos Soares, Ferreira e Moreira (1999) e a proposta da construção de uma nova abordagem dos sistemas numéricos especificamente voltada para a formação de professores. Essa nova abordagem, segundo tal obra, deve partir da problematização das representações conceituais já existentes entre os licenciandos para chegar a uma visão global do conjunto $\mathbb{R}$ que efetivamente instrumentalize para o ensino.

Essa nova abordagem pode se dar a partir de uma disciplina específica para tratar do ensino dos números na educação básica. Esta proposta existe e foi colocada em prática na licenciatura em matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) (ver programa dessa disciplina no Anexo 1). Além dessa possibilidade ou, de forma complementar a ela, entendemos que o problema do ensino de números na licenciatura também poderia ser atacado a partir da articulação entre diversas disciplinas, desde disciplinas básicas até disciplinas avançadas, ao longo de todo o curso. Porém, para alcançar um resultado que contribua para o incremento das relações na imagem do conceito de número irracional dos licenciandos, tal sugestão depende do envolvimento efetivo, além do planejamento em conjunto dos professores das disciplinas envolvidas, sem perder de vista que o licenciando deverá estar preparado para discutir o assunto na educação básica.

De forma mais pragmática, nossa sugestão para diluir o conteúdo de números irracionais ao longo da grade curricular de um curso de licenciatura em matemática é a seguinte:

- Fundamentos de matemática (e/ou uma disciplina específica para o ensino de números, como citamos anteriormente): primeiras noções, incluindo questões relacionadas aos números racionais como os restos parciais de uma divisão e sua relação com as dízimas, a representação por dízimas periódicas e a equivalência das principais definições de números racionais e irracionais presentes nos livros didáticos;
- Geometria: discussão da incomensurabilidade e provas geométricas da irracionalidade de números como $\sqrt{2}$ (por exemplo, como apresentadas no Apêndice B).

- Cálculo diferencial e integral: provas analíticas da irracionalidade, principalmente de π (por exemplo, como apresentadas no Apêndice C), mas também de e;
- História da matemática: como surgiu a questão da incomensurabilidade, o desenvolvimento e a formalização dos números irracionais. Entender o processo histórico de aceitação do número irracional como um número (algo semelhante ao que desenvolvemos nas seções 3.2 – O desenvolvimento da incomensurabilidade na Grécia Antiga e o olhar anacrônico sobre a história dos números irracionais e 3.3 – Números irracionais notáveis: π, e).
- Fundamentos de Análise: formalização do conceito. Definição por limites de sequências e cortes de Dedekind (fizemos uma pequena introdução a essa abordagem na seção 1.2 – Na licenciatura em matemática). Entender a questão filosófica por trás dos limites de sequências de Cauchy e suas inconsistências, e como Dedekind resolveu a questão ao construir (e não mais definir) os números reais e, consequentemente, os irracionais (conforme desenvolvemos na seção 3.1 – Aritmetização da análise no século XIX).

Além disso, quaisquer dessas disciplinas, ou até mesmo outras, também devem discutir a questão dos problemas de medida direta e da necessidade ou utilidade dos irracionais. Quem precisa deles? Em que situação precisamos deles? (Discussão semelhante ao que fizemos na seção 4.4 – Importância e utilidade). Apesar da questão quantitativa parecer preponderante em nossa sugestão, ou seja, é preciso falar muitas vezes do número irracional ao longo do curso, trata-se sobretudo de uma questão qualitativa. É preciso ensinar mais e melhor, usando várias representações e estimulando que o licenciando conheça os problemas relacionados aos números irracionais – e como eles surgiram – do ponto de vista histórico, algébrico e geométrico, fazendo ligações entre essas diferentes perspectivas.

Voltando a falar especificamente do trabalho que realizamos, foram essas diferentes perspectivas do número irracional, juntamente com as particularidades desse conhecimento quando desenvolvido na educação básica que nos inspiraram desde o início. Em tudo que fizemos, principalmente durante a etapa de Intervenção Pedagógica, tentamos colocar em prática a ideia defendia por Soares, Ferreira e Moreira (1999) a respeito de uma nova abordagem para os sistemas numéricos na educação básica. No Estudo Principal, foi nossa opção fazê-lo mais voltado à questão conceitual, pois avaliamos que o Estudo Exploratório (Apêndice H) se concentrou quase que exclusivamente na representação. Nossa reflexão hoje é que em um próximo estudo, deveríamos mesclar o que cada estudo apresentou de melhor. A parte da representação do Estudo Exploratório – como o diálogo entre Ralf e Beto, que poderia ter sido reaplicado – com a parte conceitual do Estudo Principal.

As conclusões deste trabalho estão relacionadas diretamente ao referencial teórico adotado, às turmas pesquisadas, ao momento da coleta dos dados e à nossa leitura dos mesmos. Pensamos que essas também são exatamente as maiores limitações deste estudo. Outros teóricos, outras turmas, outro momento ou outros autores provavelmente produziriam dados e conclusões diferentes. Ao mesmo tempo, assim como em qualquer pesquisa de natureza qualitativa, essas limitações também são sua principal força criadora, pois permitem que novas perspectivas surjam e sirvam de sustentação ou inspiração para novos estudos ou novas práticas.

A propósito, deixaremos alguns apontamentos referentes a investigações que não tivemos condições de realizar. Pela escassez de tempo optamos por focalizar o desenvolvimento dos alunos e analisar mais profundamente a movimentação das suas imagens conceituais, mas, a intenção inicial era também analisar o potencial das atividades que aplicamos. Uma análise mais detalhada dessas atividades, seus pontos fortes e fracos, e o consequente aprimoramento das mesmas, bem como a investigação de outras possibilidades, constitui um estudo que também gostaríamos de ter feito. Outra possibilidade de pesquisa surgiu no decorrer do processo, a partir das associações que detectamos, pois grande parte delas sugeriu um elemento de ligação, uma espécie de associação fluída que permeia todas as outras, a associação número-representação. Deixamos como sugestão um estudo que se proponha a estudar mais profundamente essa relação, não apenas em relação aos números racionais e irracionais, mas também em relação ao conceito de número em sua concepção mais ampla.

Como reflexão em relação ao triplo papel realizado na pesquisa, o de professor, o de pesquisador e o de professor pesquisador da própria prática, penso que todos os procedimentos, tanto de coleta quanto de organização e transcrição dos dados proporcionaram aprendizagens. Na verdade, todos os procedimentos realizados nesta pesquisa me fizeram repensar uma série de questões ao assumir esses papéis, e contribuíram, em maior ou menor escala, para uma profunda reflexão e autoanálise.

Como professor, pude pensar em minha postura em sala de aula, no trato com os alunos e na correção de avaliações. A partir da análise dos dados, aprendi que um erro cometido deve ser entendido no todo, inclusive na sua relação com outros erros, e não como um fato isolado. Essa simples observação tem grandes implicações na correção de avaliações e na postura do professor em sala de aula. Aprendi ainda, principalmente a partir da transcrição do áudio de aulas e entrevistas que realizei, a ter mais paciência para ouvir os alunos, entender suas questões, estabelecer acordos e só depois disso seguir com a aula, mas sempre retornando a esses pontos quando necessário.

Como pesquisador, percebi nas transcrições de aulas e entrevistas que falava demais e interrompia os alunos diversas vezes enquanto estavam falando. Essa postura prejudica a coleta de dados, pois não contribui para que os alunos se expressem de uma forma mais natural, além de interferir e poder sugerir as respostas. Como professor pesquisador da própria prática, pude refletir a respeito de minha postura na sala de aula, principalmente a partir das Entrevistas Finais. A interação mais próxima com o aluno me fez pensar em como teria sido proveitoso se tivesse adotado essa prática em minhas aulas a mais tempo, para entender melhor o aluno como pessoa, entender suas dúvidas e ensinar especificamente a partir delas, ou, simplesmente para 'dar um tempo' na sequência desgastante, tanto para professor quanto para os alunos, de explicar conteúdo e avaliar conteúdo, para tentar novas formas de comunicação.

Outra reflexão que foi muito potente para mim, e que só foi alcançada na reta final deste trabalho, diz respeito a duas perguntas, de cunho muito pessoal, que eu fazia para mim mesmo: aonde você quer chegar com isso? Quando você vai parar? O formato do trabalho mudou muito pouco desde as suas primeiras versões, pois eu sempre soube os capítulos que queria escrever. O conteúdo, por outro lado, não parava de crescer à medida que encontrava novos trabalhos a respeito do tema. Como saberia o momento de parar? Quando me daria por satisfeito?

Quando planejo uma aula de cálculo diferencial e integral, conheço grande parte das dificuldades que os alunos apresentam, tenho um repertório de exemplos e exercícios que me sinto seguro em aplicar, conheço os pontos fortes e fracos do livro adotado, etc. Isso se deve à experiência acumulada ao longo de dezoito anos de docência e repetidas oportunidades de testar e aprimorar planos de aula para essa disciplina. Números irracionais, ao contrário, é um assunto que sempre trabalhei *en passant* na sala de aula, que nunca dei a atenção que hoje acho que o assunto merece e, se voltasse ao passado, não saberia dizer quais as dificuldades dos alunos nesse tema, quais exercícios aplicar, entre outras dúvidas.

No planejamento dos encontros, apesar das leituras que já havia feito e dos resultados das pesquisas que já tinha conhecimento, não sabia o que poderia funcionar de fato, o que poderia atrair a atenção dos alunos, o que poderia dar certo e o que seria um completo desastre. Tive que experimentar, tive que errar, tive que mudar os planos e algumas atividades, algumas vezes até na véspera de entrar em sala de aula. Pode-se enxergar aqui o lado bom: foi uma experiência de ensino completa e real. Senti na pele as dificuldades que qualquer professor provavelmente sentiria ao encarar uma turma para dar suas primeiras aulas de números irracionais.

Uma das principais motivações para realizar esse trabalho foi a constatação que, em geral, os cursos de licenciatura não preparam os alunos de forma adequada para tratar do assunto números irracionais de forma adequada na educação básica. Eu, o professor Geraldo Broetto, sou fruto de um modelo de licenciatura que trata os números irracionais no início do curso de uma forma superficial, semelhante a como é feito no ensino médio e, ao final do curso, de uma maneira extremamente formal. Nenhuma dessas duas formas é adequada para o recém-formado professor atuar na educação básica e, talvez isso responda à minha pergunta; fui movido pela vontade e pela curiosidade de aprender a dar uma aula de números irracionais como eu não tive enquanto estudante da licenciatura em matemática, mas gostaria muito.

Pois bem, este seria o ponto de chegada: reunir os dados e o conhecimento, tanto da teoria quanto da prática, suficientes para dar uma excelente aula de números irracionais. No fundo, era isso o que eu queria fazer. Penso que alcançamos essa estação e nossa jornada chegou ao fim. Pensando bem, uma pesquisa como esta nunca acaba. Nós apenas paramos de fazê-la em algum momento, quando nos sentimos satisfeitos com o seu resultado. Depois, recuperamos o fôlego e seguimos em frente em busca de novas experiências, de novos encontros e de novas paragens.

Apêndice A - Habilidades necessárias para resolver questões do ENEM (2009 a 2014) referentes a números irracionais

	Quantidade de questões						
Habilidades envolvendo números irracionais suficientes para resolver as questões	2009 Prova Azul	2010 Prova Amarela	2010[92] Prova Azul	2011 Prova Azul	2012 Prova Cinza	2013 Prova Amarela	2014 Prova Amarela
Calcular volume ou área lateral de um cilindro circular reto, o volume de um cone ou de uma esfera usando fórmulas ou um valor aproximado de π fornecidos pela questão	1	3	2	1	-	1	1
Aplicar a relação entre lado e diagonal de um quadrado a uma situação prática	-	-	2	-	1	-	-
Resolver equação exponencial ou logarítmica usando valor aproximado de logaritmo ou exponencial fornecidos pela questão	1	-	-	-	-	1	-
Calcular o lado de um triângulo usando o valor de $tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ dado ou não pela questão	1	-	-	1	-	-	-
Aplicar a uma fórmula um valor aproximado de $\sqrt{3}$ fornecido pela questão, ou para calcular a altura de um triângulo equilátero	-	-	-	1	-	1	-
Calcular o raio de uma circunferência cuja área e valor de π aproximado são dados pela questão	-	-	1	-	-	-	-
Reconhecer o aparecimento da expressão $C = 2\pi r$ em uma situação prática	-	1	-	-	-	-	1

[92] A prova foi aplicada duas vezes no ano de 2010.

Antes de apresentarmos algumas demonstrações da irracionalidade de $\sqrt{2}$ convém tratar, ainda que brevemente, de duas questões: o que é uma demonstração matemática? Existe mais de um método para realizar uma demonstração matemática? Para responder à primeira pergunta, definimos primeiro o que é uma **proposição** ou **sentença**: *frase afirmativa em forma de oração, com sujeito, verbo e predicado, que ou é falsa ou é verdadeira, sem dar lugar a uma terceira alternativa* (OLIVEIRA; FERNÁNDEZ, 2010, p. 2). Considere as seguintes frases:

(a) Choveu em Vila Velha ontem.
(b) Buenos Aires é a capital do Brasil.
(c) Se correr, o bicho pega. Se ficar, o bicho come.
(d) Você está muito devagar!
(e) O quadrado de um número ímpar é sempre um número ímpar.

As frases (a), (b) e (e) são claramente sentenças, pois podemos decidir se são verdadeiras ou falsas, o que não ocorre em relação a (c) e (d).

Um tipo especial de sentença são as **proposições condicionais**, formadas a partir de duas proposições P e Q, e escritas da seguinte forma: "Se P, então Q" ou, simbolicamente por $P \Rightarrow Q$. P é chamada de hipótese e Q é chamada de tese. Como exemplo, vamos transformar uma proposição em uma proposição condicional. Por exemplo, na sentença (e), podemos escrever uma sentença equivalente (e'): Se n é ímpar (P) então n^2 é ímpar (Q). A partir de uma proposição condicional chamada de **positiva**, é possível criar novas proposições que desempenham um papel importante na matemática. Tratam-se da **recíproca** e da **contrapositiva**.

A recíproca é obtida pela troca da hipótese com a tese. Por exemplo, se temos a proposição positiva "sou vegetariano, logo não como carne", a recíproca seria "não como carne, logo sou vegetariano". A contrapositiva é obtida pela negação da recíproca. Utilizando o exemplo anterior, partindo da mesma proposição positiva "sou vegetariano, logo não como carne", a contrapositiva seria "como carne, logo não sou vegetariano". Um exemplo próprio da matemática seria:

Considere um triângulo ABC cujos lados medem a, b e c e o maior lado mede a.

Positiva: Se ABC é um triângulo retângulo então $a^2 = b^2 + c^2$.

Recíproca: Se $a^2 = b^2 + c^2$ então ABC é um triângulo retângulo.

Contrapositiva: Se $a^2 \neq b^2 + c^2$ então ABC não é um triângulo retângulo.

Estamos agora em condições de responder à nossa primeira pergunta. Segundo Oliveira e Fernández (2010), *uma demonstração matemática é o processo de raciocínio lógico e dedutivo para checar a veracidade de uma proposição condicional* (p. 9). Quanto à segunda pergunta, citamos três métodos de demonstração: a demonstração direta, a demonstração por contraposição e a demonstração por redução ao absurdo. A **demonstração direta** é aquela em que *assumimos a hipótese como verdadeira e através de uma série de argumentos verdadeiros e deduções lógicas concluímos a veracidade da tese* (OLIVEIRA; FERNÁNDEZ, 2010, p. 11). Por exemplo, uma demonstração direta para a proposição condicional (e') seria o seguinte:

Se n é ímpar, então podemos escrever $n = 2k + 1$, onde k é um inteiro positivo. Daí, temos $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Ou seja, n^2 é ímpar.

A **demonstração por contraposição** utiliza a forma contrapositiva da proposição. Esse método é baseado no fato de que a veracidade da forma contrapositiva implica na veracidade da forma positiva. Por conta disso, a demonstração por contraposição é sempre uma opção, principalmente quando a demonstração direta apresenta alguma dificuldade. Por exemplo, como demonstraríamos de forma direta que "se n^2 é par então n é par"? Podemos observar que $4 = 2^2, 16 = 4^2, 36 = 6^2$, e mesmo que verificássemos bilhões de números, ainda restariam números para serem verificados. A saída, nesse caso, é optar pela demonstração por contraposição (OLIVEIRA; FERNÁNDEZ, 2010). Pois bem, se chamamos a proposição "se n^2 é par então n é par" de forma positiva, a contrapositiva será "se n não é par então n^2 não par", que é equivalente a "se n é ímpar então n^2 é ímpar", que já demonstramos anteriormente.

O terceiro método de demonstração é a **redução ao absurdo**. Consiste em assumir a hipótese como verdadeira e a tese como falsa. A partir de argumentos verdadeiros, se se consegue chegar a falsidade de uma afirmação que é claramente verdadeira, conclui-se que a tese então deverá ser verdadeira. Temos vários exemplos a seguir de demonstrações da irracionalidade de $\sqrt{2}$ que utilizam o método da redução ao absurdo.

Demonstrações por redução ao absurdo

1 – Suponha que $\sqrt{2}$ é racional. Sendo assim, podemos escrever $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e primos entre si. Daí, isso implica que $a^2 = 2b^2$. Partindo do conhecimento de que o quadrado de um número par é sempre par e que o quadrado de um número ímpar é sempre ímpar, temos:

a^2 é par, logo a é par. Escrevemos $a = 2k$, k inteiro, e substituímos em $a^2 = 2b^2$. $(2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow 2k^2 = b^2$. Isso implica que b^2 é par, e que, portanto, b é par. Como onde a e b são inteiros e primos entre si, chegamos a uma contradição e concluímos que a nossa tese deve ser verdadeira, isto é, $\sqrt{2}$ é irracional.

Comentários:

Segundo Ávila (1984), essa é a prova que Aristóteles atribui aos pitagóricos quando da construção dos incomensuráveis. Mas, algumas obras colocam esse dado sob suspeita. Segundo Ávila (1984), o raciocínio empregado é muito sofisticado, e é mais provável que os pitagóricos tenham tido contato com a incomensurabilidade em um contexto geométrico.

2 – Suponha que $\sqrt{2}$ é racional. Sendo assim, podemos escrever $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e primos entre si. Daí, isso implica que $a^2 = 2b^2$. O expoente do número primo 2 aparece um número ímpar de vezes do lado direito e um número par de vezes do lado esquerdo da igualdade, o que contraria o Teorema Fundamental da Aritmética. Concluímos que nossa tese é verdadeira, isto é, $\sqrt{2}$ é irracional.

Comentários:

Trata-se de uma demonstração bastante simples, onde muito pouco precisa ser feito, pois faz uso de um resultado muito forte, que é o Teorema Fundamental da Aritmética, que diz o seguinte: todo número inteiro positivo maior do que 1 pode ser decomposto de maneira única como um produto de números primos. Como observa Rosa (2002), essa prova é mais adequada para o ensino médio, e, além disso, demanda um trabalho prévio com o Teorema Fundamental da Aritmética e com a decomposição em primos de números elevados ao quadrado. Rosa (2002) também aponta que essa demonstração pode facilmente ser utilizada para demonstrar a irracionalidade de $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$, entre outras, e chegar até a generalização: *se N é um número natural que não é um quadrado perfeito, então $\sqrt{N}$ é irracional* (p. 33). Também é possível demonstrar a irracionalidade de raízes como $\sqrt[3]{2}$.

3 – Suponha que $\sqrt{2}$ é racional. Sendo assim, podemos escrever $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e primos entre si. Daí, isso implica que $a^2 = 2b^2$. A partir dessa igualdade, podemos construir o número $\frac{2b-a}{a-b}$, cujo denominador é menor do que b e cujo quadrado é igual a 2. De fato, como $a = b\sqrt{2}$, temos:

i) $1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow b < b\sqrt{2} < 2b \Rightarrow b < a < 2b \Rightarrow 0 < a - b < b$.

ii) $\left(\frac{2b-a}{a-b}\right)^2 = \left(\frac{2b-b\sqrt{2}}{b\sqrt{2}-b}\right)^2 = \left(\frac{b(2-\sqrt{2})}{b(\sqrt{2}-1)}\right)^2 = \frac{4-4\sqrt{2}+2}{2-2\sqrt{2}+1} = 2$

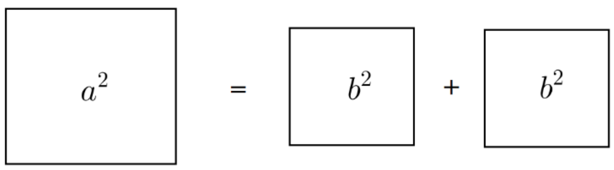
Podemos criar assim novos números com as mesmas propriedades, gerando uma sequência estritamente decrescente de números naturais (os denominadores), o que é um absurdo! Portanto, nossa tese deve ser verdadeira; isto é, $\sqrt{2}$ é irracional (ROSA, 2002).

Comentários:

Essa demonstração, também é recomendada para o ensino médio. Ela faz uso de uma ideia conhecida como Método da Descida Infinita de Fermat, que por sua vez, usa o Princípio da Boa Ordenação – PBO. Esse último diz que todo subconjunto não vazio dos naturais possui um menor elemento. Quanto à Descida Infinita de Fermat, ela pode ser utilizada sempre que pretendemos mostrar que uma propriedade ou relação não se verifica para nenhum número natural. Para isso, basta provar que, se ela se verificasse para um dado número, seria também válida para um número menor, obtendo-se assim uma sucessão estritamente decrescente de números naturais, o que contradiz o PBO (ROSA, 2002).

4 – Suponha que $\sqrt{2}$ é racional. Sendo assim, podemos escrever $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e primos entre si. Daí, isso implica que $a^2 = 2b^2$. Geometricamente, isso quer dizer que um quadrado de lado a pode ser decomposto em dois quadrados de lado b, sendo a e b números inteiros e primos entre si (ver **Figura 47**).

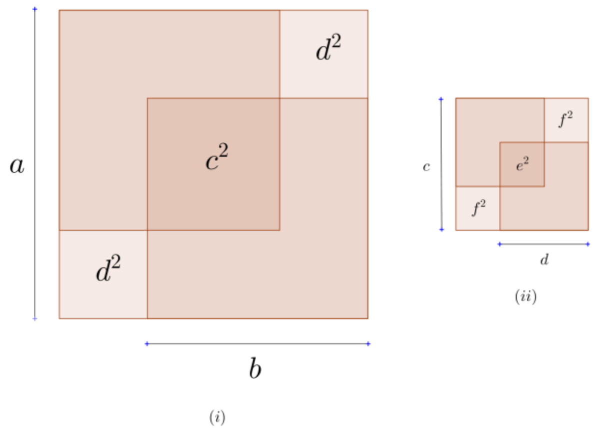
Figura 47 - Equivalência geométrica da equação $a^2 = 2b^2$



Fonte:

Observe que b deve ser maior do que a metade de a, pois caso contrário, $2b^2 \leq a^2/2$ e o problema não teria solução. Sendo assim, podemos afirmar que existem quadrados de lados c e d conforme a Figura 48 - (i).

Figura 48 – Decomposição em quadrados



Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir daí, verifica-se que $a^2 = 2b^2 = 2b^2 + 2d^2 - c^2$, ou seja, $c^2 = 2d^2$. Conseguimos assim um quadrado com lado menor do que b, que pode ser decomposto em dois quadrados, repetindo a situação anterior, conforme ilustrado na **Figura 48** – (ii).

Note que todos os lados dos quadrados envolvidos são números inteiros, pois foram obtidos a partir de operações elementares com números inteiros. Isso nos permite fazer todo o raciocínio novamente, obtendo uma sequência de lados inteiros de quadrados que seria infinita e estritamente decrescente, o que fere o PBO. Portanto, nossa tese deve ser verdadeira, isto é, $\sqrt{2}$ é irracional.

Comentários:

Essa prova que apresentamos foi uma adaptação de uma demonstração apresentada por Morais Filho (2015). Ela também se baseia no princípio da descida infinita de Fermat, como na demonstração anterior, diferenciando-se da mesma por enveredar por argumentos e visualizações geométricos.

Uma demonstração 'direta'

1 – Elevar um número racional ao quadrado produz um outro número racional com características particulares. Tomando um racional qualquer $\frac{m}{n}$, podemos escrever m e n como produto de números primos e cancelar os fatores comuns. Por isso, vamos supor logo de uma vez que m e n são primos entre si. Elevando $\frac{m}{n}$ ao quadrado, observa-se que m^2 tem os mesmos fatores primos que m, só que todos esses fatores estarão elevados ao quadrado. O mesmo ocorrerá em relação a n^2 e n. Por exemplo, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ e $60^2 = (2^2)^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Isso quer dizer que o quadrado de um número racional são frações cujo numerador e denominador apresentam ocorrências de números primos sempre aos pares. O número $2 = \frac{2}{1}$ não é um número desse tipo, já que os primos aparecem um número ímpar de vezes. Isso quer dizer que 2 não pode ser o quadrado de nenhum número racional. Como $\sqrt{2}$ é o número que ao quadrado é igual a 2, esse número não pode ser racional, portanto, $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Comentários:

Essa prova foi proposta em Tall e Schwarzenberger (1978). Segundo essa obra, existe uma certa suspeição em relação a demonstrações por redução, mesmo entre alunos que cursam o terceiro ano de matemática. O que acontece, com o passar do tempo, é que os alunos entendem que o mundo da matemática aceita as demonstrações por redução ao absurdo, e isso abranda as desconfianças. Quando se trata de estudantes mais jovens, com pouca experiência em demonstrações matemáticas, não é justo esperar que eles aceitem uma demonstração por redução ao absurdo. O tipo de raciocínio requerido para entender esse tipo de demonstração está além das capacidades de muitos formadores do 6º ou 7º ano, isto é, de muitos professores de matemática, e de alguns estudantes universitários.

A demonstração aqui apresentada não é exatamente uma prova direta (por isso escrevemos 'direta'). Porém, ela não apresenta a negação da tese logo no início, deixando-a para o final de forma disfarçada.

Apêndice C - Prova da irracionalidade de π

Suponha que π é racional. Logo, existem inteiros positivos a e b tal que $\pi = \frac{a}{b}$. Vamos definir uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{x^n \cdot (a - bx)^n}{n!}, n \text{ é um natural qualquer.}$$

Em seguida, estudaremos sete propriedades dessa função.

1.1) $f(0) = f(\pi) = 0$

De fato, basta fazer a substituição.

$$f(0) = \frac{0^n \cdot (a - b \cdot 0)^n}{n!} = 0$$

$$f(\pi) = \frac{\pi^n \cdot (a - b \cdot \pi)^n}{n!} = \frac{\pi^n \cdot (a - b \cdot \frac{a}{b})^n}{n!} = \frac{\pi^n \cdot (a - a)^n}{n!} = 0$$

1.2) $f(x) > 0$ quando $x \in (0, \pi)$

Como $x > 0$, então $x^n > 0$. Resta mostrar apenas que $(a - bx)^n > 0$.

De fato, $x \in (0, \pi)$ implica que $0 < x < \frac{a}{b}$, isto é, $0 < bx < a$. Daí, temos $a - bx > 0$, e, consequentemente, $(a - bx)^n > 0$.

1.3) $0 < f(x) \cdot sen(x) < \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!}$ quando $x \in (0, \pi)$

$x \in (0, \pi)$ implica:

i) $0 < x < \pi \Rightarrow 0 < x^n < \pi^n$
ii) $bx > 0 \Rightarrow a - bx < a \Rightarrow (a - bx)^n < a^n$
iii) $0 < sen(x) < 1$

Portanto, temos $f(x) \cdot sen(x) = \frac{x^n \cdot (a - bx)^n}{n!} < \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!} \cdot 1$. Pela propriedade 1.2, podemos concluir que $0 < f(x) \cdot sen(x) < \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!}$.

1.4) $f(\pi - x) = f(x)$ para todo x.

De fato,

$$f(\pi - x) = f\left(\frac{a}{b} - x\right) = \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n \cdot \left(a - b\left(\frac{a}{b} - x\right)\right)^n}{n!}$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n \cdot (a - a + bx)^n}{n!} = \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n \cdot b^n x^n}{n!}$$

$$\frac{\left[\left(\frac{a}{b} - x\right) \cdot b\right]^n x^n}{n!} = \frac{(a - bx)^n x^n}{n!} = f(x)$$

1.5) $f^{(i)}(0)$ é sempre um número inteiro ($f^{(i)}$ é derivada de f de ordem i)

Pelo desenvolvimento binomial,

$$f(x) = \frac{x^n}{n!}\left[\binom{n}{0} a^n \cdot (-bx)^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot (-bx) + \cdots + \binom{n}{n} a^0 \cdot (-bx)^n\right]$$

$$= \frac{x^n}{n!}[a^n - na^{n-1}bx + \cdots - (-b)^n x^n]$$

$$= \frac{a^n x^n}{n!} - \frac{na^{n-1}bx^{n+1}}{n!} + \cdots + \frac{(-b)^n x^{2n}}{n!}$$

Como cada termo tem grau máximo $2n$, quando $i > 2n$ teremos $f^{(i)}(x) = 0$ para todo x, em particular para $x = 0$. Como nenhum termo tem grau menor do que n, quando $i < n$ teremos pelo menos um fator x em cada termo de $f^{(i)}(x)$. Logo, $f^{(i)}(0) = 0$. Resta verificar o caso $n \leq i \leq 2n$.

Observe que cada monômio da expansão de $f(x)$ obtida acima é do tipo $\frac{kx^{n+j}}{n!}$, onde k é uma constante e $0 \leq j \leq n$. Tomando $n \leq i \leq 2n$, teremos alguns termos de $f(x)$ com grau menor do que i, alguns termos com grau maior do que i e um único termo com grau igual i. Como a derivada da soma é a soma das derivadas, $f^{(i)}(x)$ é obtida a partir da soma das derivadas de cada termo. Nos termos em que $n + j < i$ a derivada será nula para todo x, em particular para $x = 0$. Nos termos em que $n + j > i$, teremos ao menos um fator x, o que já garante derivada nula quando $x = 0$. No termo em que $n + j = i$, teremos

$$f^{n+j}(x) = \frac{k}{n!}(n + j)(n + j - 1)(n + j - 2) \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

$$= \frac{(n + j)!\, k}{n!} = \frac{n!\,(n + 1)(n + 2) \ldots (n + j)k}{n!} = (n + 1)(n + 2) \ldots (n + j)k$$

Trata-se de um número inteiro.

1.6) $f^{(i)}(x) = (-1)^i f^{(i)}(\pi - x)$

Pela propriedade 1.4, $f(\pi - x) = f(x)$. Derivando uma vez teremos

$$f'(\pi - x)\frac{d}{dx}(\pi - x) = f'(x)$$

$$-f'(\pi - x) = f'(x)$$

Derivando a segunda vez teremos

$$-f''(\pi - x)\frac{d}{dx}(\pi - x) = f''(x)$$

$$f''(\pi - x) = f''(x)$$

Uma demonstração rigorosa deveria usar o Princípio da Indução Infinita nesse ponto. Não o faremos por dois motivos: simplificaremos o tanto quanto possível a demonstração, e, entendemos que já está suficientemente claro que ao continuar o processo de derivação, teremos garantida a igualdade $f^{(i)}(x) = (-1)^i f^{(i)}(\pi - x)$.

1.7) $f^{(i)}(\pi)$ é sempre um número inteiro

Pela propriedade 1.6 temos $f^{(i)}(\pi) = (-1)^i f^{(i)}(0)$. Pela propriedade 1.5, $f^{(i)}(0)$ é sempre um número inteiro, portanto, $f^{(i)}(\pi)$ também o será.

Tendo estudado a função f, definiremos agora outra função. Seja $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

Passamos a seguir a estudar cinco propriedades dessa função.

2.1) $f(x) = F''(x) + F(x)$

De fato, basta desenvolver o lado direito da igualdade.

$$\begin{array}{rr} & F''(x) = f^{(2)}(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) - \cdots \\ + & F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) + \cdots \\ \hline & f(x) \end{array}$$

2.2) $F'(x)sen(x) - F(x)\cos(x)$ é uma primitiva de $f(x)sen(x)$.

De fato, basta derivar.

$$\frac{d}{dx}[F'(x)sen(x) - F(x)\cos(x)] =$$

$$= F''(x)sen(x) + F'(x)\cos(x) - F'(x)\cos(x) + F(x)sen(x)$$

$$= \big(F''(x) + F(x)\big)sen(x)$$

$$= f(x)sen(x)$$

2.3) $F(0) + F(\pi)$ é um número inteiro

$F(0) = f(0) - f^{(2)}(0) + f^{(4)}(0) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(0) = 0 - f^{(2)}(0) + f^{(4)}(0) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(0)$ é um número inteiro pela propriedade 1.5.

$F(\pi) = f(\pi) - f^{(2)}(\pi) + f^{(4)}(\pi) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(\pi) = 0 - f^{(2)}(\pi) + f^{(4)}(\pi) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(\pi)$ também é um número inteiro pela propriedade 1.5.

Logo, $F(0) + F(\pi)$ é um número inteiro.

2.4) $\int_0^\pi f(x)sen(x)dx$ é um número inteiro.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pela propriedade 2.2,

$$\int_0^\pi f(x)sen(x)dx = [F'(x)sen(x) - F(x)\cos(x)]\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix}$$

$$= F'(\pi)sen(\pi) - F(\pi)\cos(\pi) - F'(0)sen(0) + F(0)\cos(0)$$

$$= F(0) + F(\pi),$$

que é inteiro pela propriedade 2.3.

2.5) Se $x \in (0, \pi)$, então $0 < \int_0^\pi f(x)sen(x)dx < \frac{\pi^{n+1}a^n}{n!}$

Da propriedade 1.3 temos $0 < f(x) \cdot sen(x) < \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!}$. Pela continuidade das funções envolvidas, podemos afirmar que

$$0 < \int_0^\pi f(x) \cdot sen(x)\, dx < \int_0^\pi \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!} dx$$

Daí, calculando uma integral temos

$$0 < \int_0^\pi f(x) \cdot sen(x)\, dx < \left[\frac{\pi^n \cdot a^n}{n!} x\right]\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix}$$

$$0 < \int_0^\pi f(x) \cdot sen(x)\, dx < \frac{\pi^{n+1} a^n}{n!}$$

Para finalizar a demonstração, precisamos avaliar o comportamento de $\frac{\pi^{n+1}a^n}{n!}$.

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi^{n+1}a^n}{n!} = 0$, existe n_0 tal que $\frac{\pi^{n_0+1}a^{n_0}}{n_0!} < 1$. Sendo assim, tomando $n = n_0$ temos

$$0 < \int_0^\pi f(x)sen(x)dx < 1$$

Ou seja, temos um número inteiro no intervalo $(0,1)$. Como a única suposição foi que π era um número racional, somos forçados a considerá-la falsa. Portanto, π é irracional.

Notas finais:

i) A demonstração que apresentamos é baseada em uma demonstração apresentada pelo blog *Manthano* (MANTHANO, 2012) que por sua vez, trata-se do esmiuçamento de uma demonstração apresentada em apenas uma página por Niven (1947).

ii) Alguns detalhes ainda ficaram sem uma justificativa formal. Fizemos isso de forma deliberada com a intenção de tornar a demonstração o mais direta e o menos enfadonha possível.

iii) Em nenhum momento, usou-se o significado de π como razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro. O significado usado foi o de primeiro número real positivo que anula a função $sen(x)$.

Apêndice D - Prova de que e^{π} é transcendente.

Utilizaremos um resultado conhecido como teorema de Gelfond-Schneider, que diz o seguinte:

Sejam α e β números algébricos (reais ou complexos). Se $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ e β não for um número racional (real), então α^{β} é transcendente (FIGUEIREDO, 2011, p. 55).

Para mostrar que e^{π} é transcendente a partir do resultado de Gelfond-Schneider, precisamos mostrar que e^{π} satisfaz as condições desse teorema. Mostraremos que isso de fato ocorre, e que $e^{\pi} = i^{-2i}$. Porém, como isso envolve alguns conhecimentos acerca de números complexos, teremos que enveredar por alguns conceitos básicos dessa seara.

Um **número complexo** pode ser definido como um par ordenado (x, y) de números reais que satisfaz às seguintes propriedades:

i) $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$.
ii) $(a, b) + (c, d) \Leftrightarrow (a + c, b + d)$
iii) $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Todo número escrito da forma $(a, 0)$ é equivalente ao número real a. Para os números da forma $(0, b)$, no entanto, é diferente. O número complexo $(0,1)$ é chamado de **unidade imaginária**, e denotado por i. Dessa forma, temos

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1.$$

Observe também que

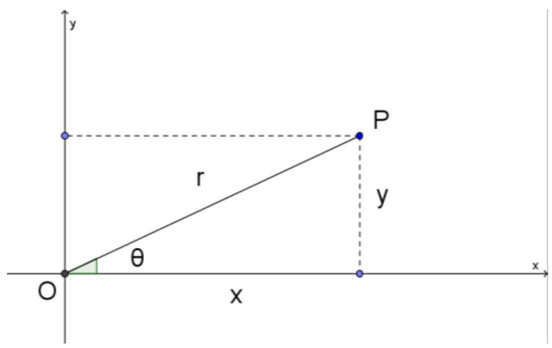
$$ib = (0,1) \cdot (b, 0) = (0 \cdot b - 1 \cdot 0,0 \cdot 0 + 1 \cdot b) = (0, b).$$

Isso quer dizer que podemos escrever qualquer número complexo da seguinte forma:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy.$$

Esta é chamada de **fórmula algébrica** do número complexo. Chamamos x de *parte real* e y de *parte imaginária*. Se representamos o número complexo $z = (x, y)$ no plano cartesiano, com a convenção de marcar sobre os eixos Ox e Oy as partes real e imaginária, respectivamente, cada número complexo $z = (x, y)$ corresponderá a um único ponto P do plano cartesiano.

Figura 49 - Representação de um número complexo no plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

Definindo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e θ como o ângulo formado entre o eixo Ox e o segmento OP (ver **Figura 49**), podemos escrever $z = x + iy$ como

$$z = r(cos\theta + isen\theta),$$

que é chamada de **forma trigonométrica** do número complexo. Essa fórmula é muito útil para trabalhar com potenciação e radiciação de números complexos. Tendo discutido o básico, vamos dar um salto para chegar logo ao ponto que nos interessa aqui. Para o leitor que quiser aprender ou relembrar todas as questões elementares relacionadas ao assunto, recomendamos a leitura de Iezzi (2005). Para noções avançadas, porém, indicamos Ávila (2000).

Pode-se demonstrar, em um curso avançado de Variáveis Complexas, que

$$e^{ix} = cosx + isenx \ ,$$

conhecida como **fórmula de Eüler**. A expressão $e^{i\pi} + 1 = 0$ se torna um caso particular dessa fórmula. Para mostrar que $i^{-2i} = e^{\pi}$, precisamos ainda definir as funções exponencial e logarítmica de um número complexo. Começamos pela função exponencial, que pela fórmula de Eüler, nos dá

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} \cdot e^{iy} = e^{x}(cosy + iseny).$$

Para definir o logaritmo, fazemos primeiro $w = lnz = u + iv$. Como a função exponencial deve ser o inverso do logaritmo, temos $z = e^{w}$. Fazendo $z = r(cos\theta + isen\theta)$, teremos a seguinte igualdade

$$r(cos\theta + isen\theta) = e^{u}(cosv + isenv).$$

Daí, tiramos que $r = e^{u}$ e $\theta = v + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Resolvendo as equações acima para u e v teremos $u = lnr$ e $v = \theta + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Logo, $lnz = lnr + i(\theta + 2k\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Daí, $lni = ln1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2}\right)$ para $k = 0$.

Em um primeiro curso de cálculo diferencial e integral, em geral define-se o significado de um número real a elevado a uma potência real x fazendo-se $a^{x} = e^{xlna}$. Essa ideia pode ser estendida para os números complexos de forma análoga. Sendo assim,

$$i^{-2i} = e^{-2i\, lni} = e^{-2i \cdot i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = e^{\pi}.$$

Uma expressão decimal é um símbolo da forma $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ onde a_0 é um número inteiro maior ou igual a zero e $a_1, a_2, \dots a_n$ são dígitos, isto é, números inteiros que podem assumir valores entre 0 e 9. A expressão decimal α representa o número real

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

Porém, é preciso explicar o significado da igualdade acima, principalmente no que se refere às reticências. Elas significam que o número real α tem valores aproximados pelos números racionais

$$\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots \frac{a_n}{10^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Quando se substitui α por α_n, comete-se um erro que não é superior a $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$. Assim, a_0 é o maior número natural contido em α, a_1 é o maior dígito tal que $a_0 + \frac{a_1}{10} \leq \alpha$, a_2 é o maior dígito tal que $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq \alpha$, e assim por diante. Tem-se assim uma sequência não decrescente de números racionais $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \alpha_n \leq \cdots$ que são valores cada vez mais próximos do número real α. Mais precisamente falando, $0 \leq \alpha - \alpha_n \leq 10^{-n}$, para cada $n = 0, 1, 2, 3, 4 \dots$ (LIMA *et al.*, 1996).

Há algumas situações particulares que devemos comentar. A primeira é quando, a partir de um certo dígito, todos se tornam iguais a zero. Nesse caso, $\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots \frac{a_n}{10^n}$ é um número racional. Mais geralmente, mesmo que não termine em zeros, uma expressão decimal pode representar um número racional, desde que seja uma dízima periódica. Uma expressão decimal $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ chama-se dízima periódica simples de período $a_1 a_2 \dots a_n$ quando os primeiros p dígitos após a vírgula se repetem indefinidamente na mesma ordem. Para mostrar que toda dízima periódica simples representa um número racional, começamos com uma afirmação particularmente intrigante para muitos alunos:

$$\alpha = 0{,}999 \dots = 1 \,.$$

De fato, os valores aproximados de α são $\alpha_1 = 0{,}9, \alpha_2 = 0{,}99,\ \alpha_3 = 0{,}999,$ etc. Daí, temos $1 - \alpha_1 = 0{,}1,\ 1 - \alpha_2 = 0{,}01,\ 1 - \alpha_3 = 0{,}001,$ e, mais geralmente, $1 - \alpha_n = 10^{-n}$. Sendo assim, tomando n suficientemente grande, a diferença $1 - \alpha_n$ pode se tornar tão pequena quanto se deseje, o que significa que os números racionais $\alpha_n = 0{,}999 \dots 9$ são valores cada vez mais próximos de 1.

Uma vez que

$$0{,}999 \dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots \frac{9_n}{10^n} + \cdots = 1,$$

resulta imediatamente que

$$0{,}111 \dots = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots \frac{1}{10^n} + \cdots = \frac{1}{9}.$$

A partir daí toda dízima com um dígito na parte periódica é um número racional.

$$0, aaa \dots = \frac{a}{10} + \frac{a}{10^2} + \cdots \frac{a}{10^n} + \cdots = \frac{a}{9}.$$

Para as dízimas com dois dígitos na parte periódica, é preciso antes observar que

$$1 = \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2}\right) + \left(\frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4}\right) + \cdots = \frac{99}{100} + \frac{99}{100^2} + \cdots = 99\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \cdots\right),$$

e, daí,

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \cdots = \frac{1}{99}.$$

Ou seja,

$$0,ababab\ldots = ab\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\frac{1}{100^3}+\cdots\right)=\frac{ab}{99}.$$

Prosseguindo com esse raciocínio para dízimas com três, quatro, ou mais dígitos na parte periódica, podemos dizer que toda dízima periódica simples representa um número racional, que também é chamada de fração geratriz da dízima periódica. Também podemos transformar esse raciocínio em uma conhecida regra: *a geratriz de uma dízima periódica simples é uma fração cujo numerador é o período e cujo denominador é o número formado por tantos noves quantos são os algarismos do período* (LIMA *et al.*, 1996, p. 63).

Existem ainda as dízimas periódicas compostas, aquelas em que existe uma parte após a vírgula que não se repete, como $1{,}4373737\ldots$ Nesses casos, basta fazer o seguinte:

$$\alpha = 1{,}4373737\ldots$$

$$10\alpha = 14{,}373737\ldots = 14 + 0{,}373737\ldots$$

Agora, basta usar a regra anterior para a dízima periódica simples.

$$10\alpha = 14+\frac{37}{99}=\frac{14\cdot 99+37}{99}=\frac{14(100-1)+37}{99}=\frac{1437-14}{99}$$

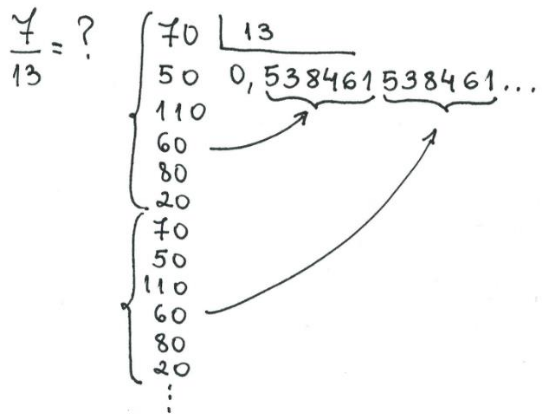
A fração geratriz de α será

$$\alpha=\frac{1437-14}{990}.$$

Esse procedimento nos remete a outra regra bastante conhecida: *a geratriz de uma dízima periódica composta é a fração cujo numerado é a parte inteira acrescida da parte não-periódica e de um período, menos a parte não-periódica, e cujo denominador é formado por tantos noves quantos são os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não-periódica* (LIMA *et al.*, 1996, p. 64).

Em suma, mostramos que uma dízima periódica, simples ou composta, representa um número racional. A recíproca, isto é, que todo número racional m/n representa uma dízima periódica, pode ser mostrada por meio da divisão continuada. Ao dividir m por n, só podem ocorrer os restos $0, 1, 2, \ldots n-1$. Isso significa que, após um máximo de n divisões, um dos restos vai se repetir, e, a partir daí os dígitos reaparecerão no quociente na mesma ordem. Logo, surgirá uma dízima periódica. Exemplo:

Figura 50 - Relação entre os restos e a dízima periódica



Fonte: Elaborada pelo autor.

Queremos mostrar que $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

De fato, chamando $u = 1/x$, teremos $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u\to 0^+}(1+u)^{1/u}$.

Chamando $y = (1+u)^{1/u}$ e aplicando o logaritmo teremos $\ln y = \ln(1+u)^{1/u} = \frac{1}{u}\cdot\ln(1+u)$.

Calculando o limite de $\ln y$, teremos

$$\lim_{u\to 0^+}\ln y = \lim_{u\to 0^+}\left(\frac{1}{u}\cdot\ln(1+u)\right) \underbrace{=}_{Regra\ de\ L'Hôpital} \lim_{u\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+u}}{1} = 1$$

A partir da igualdade $\lim_{u\to 0^+}\ln y = 1$, aplicamos a exponencial e obtemos $\lim_{u\to 0^+} e^{\ln y} = e^1$, ou seja, $\lim_{u\to 0^+} y = e$. Portanto,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Chamamos de *Pequeno Estudo Diagnóstico* ao primeiro estudo piloto que realizamos, que se constituiu da aplicação de um questionário seguido de algumas reflexões a partir dos resultados obtidos. Esse questionário foi aplicado em março de 2013 e respondido por onze alunos de uma turma de 4º período de licenciatura em matemática do Ifes, que naquela ocasião cursavam comigo a disciplina de Geometria III. No quarto período, os alunos já cursaram algumas disciplinas que podem tratar, de forma direta ou indireta, dos números irracionais, como Fundamentos de Matemática I (1º período), Fundamentos de Matemática II (2º período), Geometria I (2º período) e Cálculo I (3º período), ou ainda estavam cursando, como Cálculo II e Geometria III. O questionário era composto de duas perguntas, apresentadas a seguir.

O objetivo da primeira pergunta foi avaliar como se encontrava o conhecimento dos alunos no que se refere ao reconhecimento dos números racionais e irracionais, representados de três formas diferentes: representações decimais com dízimas, raízes e razões. As dízimas escolhidas foram três dízimas periódicas e uma não-periódica que apresentava um padrão (item ‘f’). As raízes escolhidas eram ambas representações de números inteiros para avaliar se a simples presença do sinal de raiz provoca associações com números irracionais. Quanto às razões, na primeira o número irracional $\sqrt{2}$ estava explícito no numerador, e na segunda, o irracional π, ficava implícito no comprimento da circunferência. A intenção foi misturar exemplos prototípicos de irracionais – $\sqrt{2}$ e π – com um exemplo prototípico de número racional, as frações.

O objetivo da segunda pergunta foi avaliar se o aluno possuía alguma ideia ou até uma definição do conceito de número irracional para comparar com as classificações feitas na primeira pergunta. Intentávamos com isso verificar a existência ou não de coerência entre as ideias apresentadas e o reconhecimento dos números irracionais.

As nossas expectativas, em relação às respostas que obteríamos, passam pelo entendimento de que existe um acordo tácito entre professores e alunos referente ao uso e ao significado das reticências. Existe acordo tácito onde há um relativo consenso das partes, todavia, não se troca mensagem escrita ou falada sobre o assunto. O entendimento que temos desse acordo, após esse estudo por parte dos alunos é que, quando se

Pergunta 1) Quais dos números a seguir são irracionais?

a) 1,222... b) $\sqrt{64}$ c) 3,1212... d) 1,1222... e) $\sqrt[3]{27}$

f) 0,121221222... g) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ h) $\frac{C}{2r}$ (C é o comprimento de uma circunferência de raio r)

Pergunta 2) Na sua opinião, o que são números irracionais?

repete uma sequência de números da parte decimal por duas ou três vezes, seguido de reticências, essa sequência é periódica, isto é, repete-se infinitamente. Pois bem, de acordo com esse entendimento os itens ‘a’, ‘c’ e ‘d’ da Pergunta 1 representam números racionais, mas o item ‘f’ deixa margem para uma dupla interpretação. Pode ser interpretado como o número racional $0{,}121221\overline{2}$ ou como o número irracional $0{,}1212212221$ ..., que tem um padrão (após cada algarismo ‘1’ aumenta o número de algarismos ‘2’), mas não é uma dízima periódica. Não foi nossa intenção criar uma ‘pegadinha’ e, na verdade, só percebemos essa dubiedade algum tempo depois de aplicar o instrumento. Nossa real intenção foi pela segunda possibilidade; isto é, a do número irracional. No final das contas, esse é o tipo de pesquisa em que a dupla possibilidade de interpretação também pode ser um ponto a ser investigado, ou seja, avaliar qual o significado atribuído pelos participantes para $0{,}121221222$ ...

Quanto à Pergunta 2, nossa expectativa era de que as respostas fossem iguais ou bem parecidas às definições mais comuns para números irracionais encontradas nos livros didáticos (ver seção 1.1 – Na educação básica).

Algumas reflexões a partir dos dados obtidos com a Pergunta 1:

- As raízes enésimas, exemplos prototípicos de números irracionais, parecem ter induzido três alunos a considerar $\sqrt{64}$ e $\sqrt[3]{27}$ como números irracionais. Sentimos que também seria interessante se tivéssemos incluído algum número envolvendo explicitamente π, outro exemplo prototípico de número irracional;

- As dízimas periódicas 1,222..., 3,1212... e 1,1222... foram consideradas irracionais por dois, três e quatro alunos, respectivamente. A associação da dízima com número irracional também foi detectada por Penteado (2004);

- Três alunos não reconheceram 0,121221222... como um número irracional, o que nos levou a pensar ser possível a associação de padrão com o número racional, ou, equivalentemente, da ausência de padrão com o número irracional;

- A fração como exemplo prototípico de número racional pode ter levado três alunos a não reconhecerem $\frac{\sqrt{2}}{2}$ como um número irracional e a seis alunos a não reconhecerem $\frac{C}{2r}$ como um número irracional.

Em relação à Pergunta 2, as respostas obtidas podem ser encontradas *ipsis litteris* em livros didáticos de matemática, o que nos leva a intuir que são provenientes de um processo de memorização por parte dos alunos ao longo de sua vida escolar pregressa. A definição apresentada mais recorrente foi *número que não pode ser escrito em forma de fração (de inteiros)*. Nossa surpresa ficou por conta de dois alunos que escreveram *números que não são 'exatos'*. Foi a primeira vez que tivemos contato com esse tipo de associação e o motivo da surpresa foi o conteúdo absurdo da definição, afinal, todo número é exato e tem sua localização exata na reta numerada. Depois, descobriríamos que essa associação já havia sido relatada em outras pesquisas, como Rezende (2013), Soares, Ferreira e Moreira (1998) e Igliori e Silva (1998).

Ao analisarmos conjuntamente as respostas dadas às duas perguntas, encontramos incoerências nas respostas de sete alunos, pois apresentaram definições matematicamente corretas na Pergunta 2 e cometeram alguma classificação equivocada na Pergunta 1. Isso reforçou e reforça a hipótese de que estudantes universitários apenas reproduzem definições que memorizaram, sem fazer uso delas no momento das classificações, e ainda sugere algumas reflexões. Os alunos não utilizam as definições porque não conseguem enxergar a relação dessas definições com as classificações? Será que essas definições são adequadas? Elas ajudam na classificação, isto é, saber essas definições ajuda a reconhecer corretamente os números irracionais?

Um dos exercícios mais comuns referente aos números irracionais, o que é mais frequentemente encontrado nos livros didáticos, é o exercício de classificação dos números em racionais ou irracionais. Isso somado ao fato de alguns alunos não conseguirem realizar essa classificação, apesar de apresentarem uma definição 'correta' de números irracionais, é preocupante e intrigante. A resposta de uma aluna para a Pergunta 2 nos instigou ainda mais, ela escreveu assim: "números que não conseguimos identificar sua última casa decimal (Regra aprendida: são números que não conseguimos representar por uma fração)". Ela separa, de forma espontânea, sua definição de números irracionais em duas partes. A primeira parte parece mostrar sua imagem mental pessoal dos irracionais enquanto a segunda parte representa algo que foi aprendido na escola, provavelmente por um processo de memorização, sugerindo a existência de um vazio entre o conceito e a definição de número irracional.

Pode-se pensar também na possibilidade que a segunda parte da resposta dessa aluna, o que ela chama de *regra aprendida*, foi dada para satisfazer o que é perguntado. O aluno sabe, pela sua experiência, pelo contrato didático estabelecido, os tipos de respostas que são esperadas e consideradas certas pelos professores. Assim, ao mesmo tempo em que a aluna deu a sua resposta, também deu aquela resposta que imaginava que teria maior chance de ser considerada correta pelo professor.

As dificuldades referentes ao reconhecimento de números irracionais apresentadas pelos alunos, bem como a resposta da aluna que destacamos, foram interpretados por nós como uma sinalização positiva para a viabilidade e necessidade de um estudo maior e mais completo, contemplando, além do diagnóstico inicial, uma fase de intervenção pedagógica. Além disso, precisávamos aprender mais sobre o tema, aprimorar o questionário e explorar novas atividades, buscando formas de interpretar as dificuldades encontradas pelos alunos bem como estabelecer diálogos a respeito de números irracionais. Esse trabalho foi realizado e o chamamos de Estudo Exploratório.

O Estudo Exploratório foi realizado com uma turma de 1º período de licenciatura em matemática do Ifes – Vitória, turno noturno, no segundo semestre de 2013 e foi composto de cinco etapas: observação, aplicação de um questionário, entrevistas, intervenção e avaliação. Porém, vamos apresentar dados e fazer análises preliminares apenas das etapas que foram mais decisivas na composição do Estudo Principal, que foram a aplicação do questionário, intervenção e avaliação. O espaço utilizado foi a própria sala de aula da turma, durante as aulas de Fundamentos da Matemática I e Português, gentilmente cedidas pelos respectivos professores. Os professores[93] da disciplina Fundamentos estavam presentes a todas as atividades desenvolvidas.

É importante frisar que quando observamos as apresentações dos trabalhos, na primeira quinzena de junho de 2013, o professor ainda não havia dado uma aula sequer sobre números ou conjuntos numéricos. Na segunda quinzena de julho do mesmo ano, quando aplicamos o questionário, os alunos já haviam estudado e debatido o assunto conjuntamente com o professor por cerca de um mês. De forma bem clara, pois esse ponto será importante depois, o Estudo Exploratório foi realizado após os alunos terem estudado o assunto números irracionais na disciplina de Fundamentos de Matemática.

Questionário

O questionário aplicado nesse estudo foi respondido por dezenove alunos e desenvolveu-se a partir do questionário aplicado no Pequeno Estudo Diagnóstico (Apêndice G). Na primeira questão, ao invés de perguntar ‘quais dos números a seguir são irracionais?’, preferimos perguntar ‘os números a seguir são racionais ou irracionais?’ e, além disso, também pedimos para que cada item marcado fosse justificado. A razão para isso foi que, no questionário anterior, notamos a coexistência de definições formais conforme encontradas nos livros didáticos com classificações equivocadas. Suspeitamos, assim, que as definições não foram utilizadas no momento em que o aluno era solicitado a reconhecer um número irracional, e o motivo de solicitar a justificativa foi o de tentar entender melhor a decisão de cada universitário para o reconhecimento do número. Esperávamos também que as justificativas deles nos ajudassem a identificar e a compor um cenário com algumas imagens do conceito de racionais e irracionais desses alunos ingressantes.

Na primeira questão, direcionada ao reconhecimento de números racionais e irracionais, acrescentamos também alguns itens que não estavam presentes no questionário anterior. A ideia principal era aumentar a variedade de situações para estimular o aparecimento de diferentes justificativas e, consequentemente, de diferentes imagens do conceito de número racional/irracional. Incluímos uma raiz quadrada irracional visto que, as duas raízes quadradas que apareceram no questionário anterior representavam números inteiros. A escolha natural talvez seria incluir o $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ – prototípicos exemplos de números irracionais apresentados pelos professores de matemática e presentes em muitos livros didáticos – mas optamos pelo $\sqrt{5}$ por se tratar de um número irracional diferente desses protótipos.

Também incluímos na primeira questão a decimal exata 3,1416 para avaliar se a prototípica imagem de irracional formada por π, conjuntamente com sua representação decimal, seria capaz de levar os alunos a classificar uma decimal exata como um número irracional. Na pesquisa de Igliori e Silva (1998) foi feita a mesma a pergunta, e o resultado foi o seguinte: 8 dos 36 alunos iniciantes de um curso de Computação e 7 dos 14 alunos finalistas do curso de Matemática assinalaram que 3,1416 não é um número racional.

Alguns dados obtidos com a primeira questão:

- Apenas um aluno considerou $\sqrt[3]{27}$ um número irracional, enquanto $\sqrt{5}$ foi considerada racional por dois alunos;
- As dízimas periódicas 1,222..., 3,1212... e 1,1222... foram consideradas irracionais por quatro, três e três alunos, respectivamente;
- Sete alunos consideraram 0,121221222... um número racional;

[93] Houve uma mudança de professor no decorrer do período.

- As frações $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{C}{2r}$ foram consideradas números racionais por dois e três alunos, respectivamente;
- Sete alunos consideraram 3,1416 um número irracional.

Os resultados da primeira questão reforçaram o que já havíamos detectado no primeiro questionário, que alguns alunos associam decimal infinita com número irracional. Expressões como 'dízima periódica', 'dízima sem fim', 'sequência sem fim', 'divisão sempre dá resto', 'não se vê o fim da sequência' e 'não é possível chegar ao fim' foram apresentadas por três alunos para justificar que 1,222..., 3,1212...,1,1222... ou 0,121221222... são números irracionais. Nesses casos, o infinito parece ser o elemento preponderante, pois está presente, ainda que sutilmente, nas justificativas apresentadas.

Também identificamos outros dois elementos na associação da dízima com o irracional, a inexatidão e a falta de padrão. Referente à inexatidão, dois alunos apresentaram as justificativas 'não é um número exato' e 'divisão sempre dá resto' ao classificarem 1,222... e 3,1212... como irracionais. Em relação à falta de padrão, dois alunos escreveram 'não tem padrão' e 'os números se repetem de forma diferente' quando faziam o reconhecimento do item 0,121221222.... como um número irracional.

Os resultados referentes ao número 3,1416 superaram todas as expectativas. Imaginávamos que uma parte da turma classificaria esse número como irracional, mas não esperávamos que quase 37% da turma o fizessem. Reforçamos assim a suspeita de que alguns alunos memorizam que π é irracional e que $\pi = 3{,}1416\ldots$, o que provavelmente os levou a considerar 3,1416 como um número irracional. Ou seja, uma total falta de compreensão do significado do conceito de número irracional.

Além do reconhecimento e das imagens do conceito de racional/irracional focalizados na primeira questão, também estávamos interessados na questão da representação (2ª e 3ª questões), definição (4ª questão), utilidade dos irracionais (5ª questão). Além disso, ao final do questionário apresentamos perguntas relativas ao sentimento dos alunos ao responderem o questionário.

Na segunda questão pedimos para o aluno escrever um número irracional representado em notação decimal. Conforme esperado, o número π foi citado algumas vezes, seja explicitamente por sua representação decimal, seja por algo que remete à sua representação decimal (como, por exemplo, 3,1416 ou 3,14, com ou sem reticências). Também esperávamos que aparecesse alguma raiz quadrada, principalmente $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$, que juntamente com π formam a dupla ou terno de exemplos mais comuns de números irracionais encontrados nos livros didáticos da educação básica.

Dos dezenove alunos, 48% apresentaram as representações decimais desses números, ou que remetem a esses números. Apenas dois alunos (11%) forneceram uma dízima periódica qualquer; isto é, diferente da representação de algum número irracional muito conhecido como π, $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$. Outro dado que também chama atenção é o expressivo índice de 'Não sei/Branco' (Ver **Tabela 19**).

Tabela 19 - Representação decimal de irracionais

Escreva um irracional representado em notação decimal	
Resposta	***Sujeitos (%)***
Representação decimal que remete a π	4/19 (21%)
$\boldsymbol{\pi}$	2/19 (11%)
$\boldsymbol{\sqrt{2}}$ ou $\boldsymbol{\sqrt{3}}$	2/19 (11%)
Representação decimal de um número racional	2/19 (11%)
Decimal que remete a uma dízima não-periódica qualquer	2/19 (11%)
Representação decimal que remete a $\boldsymbol{\sqrt{2}}$	1/19 (5%)
Não sei/Branco	6/19 (32%)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como a suspeita da memorização da irracionalidade de alguns números já havia surgido no questionário anterior, formulamos a terceira questão pedindo ao aluno que representasse um irracional na forma decimal no intervalo (1/3, ½). Escolhemos esse intervalo, pois ele não contém π, $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$. Antes perguntamos se havia algum número irracional nesse intervalo, o que também abordava, ainda que superficialmente, a propriedade de densidade dos irracionais em relação aos racionais.

Conforme mostrado na **Tabela 20**, a respeito da densidade, apenas dois alunos (11%) responderam que existem infinitos irracionais no intervalo solicitado, apenas quatro alunos (21%) foram capazes de representar um número irracional na forma decimal no intervalo solicitado e 8 alunos (42%) escreveram 'não sei' ou deixaram em branco. Isso posto, juntamente com os dados apresentados na **Tabela 19**, levou-nos a pensar em algumas hipóteses:

i) Os alunos não conhecem outros números irracionais além de π, $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$;
ii) Os alunos conhecem outros números irracionais além de π, $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$, mas não sabem como representá-los na forma decimal;
iii) Os alunos conhecem outros números irracionais, sabem como representá-los, mas π, $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ são os primeiros exemplos que vem à mente.

Tabela 20 – Densidade e representação decimal

Existe algum irracional no intervalo (1/3,1/2)?	
Respostas (Densidade)	***Sujeitos (%)***
'Sim'	5/19 (26%)
'Infinitos'	3/19 (16%)
'Muitos'	2/19 (11%)
Não respondeu diretamente	1/19 (5%)
Não sei/Branco	7/19 (37%)
Em caso afirmativo, escreva um em notação decimal. Em caso negativo, justifique.	
Respostas (Representação)	***Sujeitos (%)***
Apresentou um número racional no intervalo (1/3,1/2)	4/19 (21%)
Apresentou dízima periódica no intervalo (1/3,1/2)	1/19 (5%)
Apresentou dízima não-periódica no intervalo (1/3,1/2)	4/19 (21%)
Não sei/Branco	10/19 (53%)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Entendemos também que o conhecimento do aluno em relação à irracionalidade de π, $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ é resultado de um processo de aceitação e memorização que passa pela autoridade do professor, isto é, o aluno aceita que esses números – e suas respectivas representações decimais – são números irracionais e os memoriza sem maiores entendimentos, instrumentalizando-os de acordo com Skemp (1976) (ou talvez nem chegue a ser instrumental, porque está no nível do reconhecimento, não sei se pode-se aplicar esse conhecimento em alguma situação considerada instrumental). Explicamos o que é conhecimento instrumental e relacional na seção 5.4 – Compreensão instrumental e compreensão relacional.

Duas respostas a essa questão merecem destaque. Um aluno respondeu 'Existem infinitos números irracionais no intervalo (1/3,1/2)' e apresentou como representante dessa infinidade o número 0,4999... Do ponto de vista da matemática formal atualmente aceita, ele cometeu um erro, visto que $0{,}4999\ldots = 0{,}5$[94], portanto, racional. Porém, ponderamos que esse erro está eivado de sutilezas, como a memorização de que existem infinitos números irracionais em qualquer intervalo real e que uma decimal infinita representa um número irracional. Outro aluno elevou as duas extremidades do intervalo ao quadrado, tirou a média e em seguida tirou a raiz, obtendo o número irracional $\sqrt{13/72}$. Essa solução será comentada adiante.

A quarta questão tratava da definição dos números irracionais, e decidimos dividi-la em dois subitens inspirados pela aluna que, por iniciativa própria no questionário anterior, separou sua resposta em duas partes, uma supostamente sendo a sua opinião e outra sendo a 'regra aprendida', como ela mesma a chamou. Dessa forma, perguntamos o que são números irracionais 'segundo você aprendeu nas aulas de matemática' e 'na sua opinião'.

A resposta mais frequente à definição 'segundo você aprendeu nas aulas de matemática' foi, com pequenas variações, *números que não podem ser escritos na forma de fração*, apresentada por 8 alunos (42%). A segunda resposta mais frequente foi a resposta em branco, apresentada por 4 sujeitos (21%), seguida de

[94] Na perspectiva da *análise não-standard*, que trabalha com os infinitésimos originalmente propostos por Leibniz, e formalizada por Abraham Robinson no início da década de 1960, esta igualdade não é verdadeira. Existem diversos trabalhos nessa perspectiva no Brasil. O leitor que se interessar deve procurar pelos trabalhos de Roberto Ribeiro Baldino e Gilberto Francisco Loibel.

números que não são racionais, apresentada por 2 alunos (11%) e, de três respostas variadas, que apesar de serem minoria, chamaram nossa atenção.

Duas dentre as três respostas variadas que encontramos são possíveis reformulações da definição de número irracional feitas pelos alunos, e são preocupantes, pois apontam para interpretações, ressignificações ou associações que estão em desacordo com a matemática. Uma delas é *um número que não pode ser escrito na forma de fração, e consequentemente apresenta infinitas casas decimais*, que sugere que a relação entre poder ou não poder ser representado por fração (de inteiros) e a representação decimal em dízimas periódicas ou não-periódicas não está bem entendida. A outra definição que apresenta problemas é *números vindos de uma divisão que não tem fim*, pois seria possível, a partir dessa definição, considerar também números representados por dízimas periódicas como números irracionais.

Na segunda parte da quarta questão, quando deixamos os alunos livres para darem suas opiniões a respeito da definição de irracional, novamente a imagem de um *número que não pode ser escrito/representado em forma de fração* foi a mais frequente. Também surgiram respostas novas que não haviam surgido anteriormente (Ver **Tabela 21**), principalmente as ideias de que os irracionais são uma espécie de 'complemento dos números reais' (alguns alunos entenderam como complemento dos racionais) e que os irracionais são 'inexatos'.

Tabela 21 - Definição de irracional segundo a opinião dos alunos

CONTEÚDO DAS RESPOSTAS – expressões utilizadas	***Sujeitos (%)***
NÃO FRAÇÃO – números que não podem ser escritos/representados na forma de fração.	*4/19 (21%)*
COMPLEMENTO – *complemento dos racionais*; *preenchem lacunas/vazios dos racionais/reais.*	3/19 (16%)
INEXATIDÃO - *não podem ser medidos; não podem ser representados com exatidão; não têm divisão exata***.**	3/19 (16%)
OUTRAS	5/19 (26%)
Não sei/Branco	4/19 (21%)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em relação à imagem dos irracionais como um 'complemento', por se tratar de uma ideia que não é comumente explorada na educação básica, suspeitamos que esses alunos tiveram contato com ela depois de ingressarem no ensino superior. Averiguamos que dois dos três alunos que definiram os irracionais dessa forma fizeram parte do grupo que apresentou o trabalho a respeito de números racionais e irracionais. Entendemos que essa visão possa ter sido construída a partir das leituras indicadas pelo professor da disciplina de Fundamentos para a realização do trabalho. Uma dessas leituras que pode ter influenciado esses alunos foi a de Caraça (1951). Conforme dito anteriormente (ver seção 3.1 – Aritmetização da análise no século XIX), a construção dos números reais como um corpo ordenado completo surgiu tardiamente na matemática, quando do surgimento da análise no início do século XX.

A quinta e última questão indagava aos alunos 'por que se ensina números irracionais? ' Novamente, obtivemos respostas muito variadas e optamos por classificá-las de acordo com a ideia central, o que nos revela mais uma vez o aparecimento de algumas imagens e associações, principalmente aquelas que fazem alguma referência à inexatidão e à incomensurabilidade como *impossibilidade de medir*. Também foram frequentes respostas do tipo *porque existem deve-se ensinar* ou *deve-se ensinar porque existem*, o que nos remeteu diretamente à uma visão da matemática como algo que é descoberto (ver **Tabela 22**).

Tabela 22 - Por que se ensina números irracionais?

Ideia central da resposta	*Sujeitos (%)*
Os irracionais existem, estão 'lá' *Porque eles, embora não pareça, são importantes no ensino de matemática.* *Por aparecerem em algumas operações no ensino médio.* *Porque são números, fazem parte da matemática.* *Porque são reais.* *Fazem parte das várias questões matemáticas* *Porque eles existem e interferem nos cálculos e aplicações do dia-a-dia*	6/19 (32%)
Impossibilidade de medir *Para que saibamos que há um conjunto numérico particular que se tem dificuldade de medir* *Porque existem questionamentos nos estudos de matemática ou áreas afins que não é possível mensurar seu valor real*	2/19 (11%)
Inexatidão *Existem cálculos matemáticos não exatos.* *Não é toda divisão que resulta em número inteiro, então temos que estudar também os quebrados, números irracionais.*	2/19 (11%)
Em branco	4/19 (21%)
Outras	5/19 (26%)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na **Tabela 23**, fazemos uma comparação relativa ao reconhecimento dos números racionais e irracionais nos dois questionários aplicados.

Tabela 23 - Comparação entre o reconhecimento no Pequeno Estudo Diagnóstico e no Estudo Exploratório

Número	**Pequeno Estudo Diagnóstico (Turma 4º período - 2012)**		**Estudo Exploratório (Ingressantes em 2013)**	
	Não irracional	*Irracional*	*Racional (%)*	*Irracional (%)*
1,222...	9/11 (82%)	2/11 (18%)	15/19 (79%)	4/19 (21%)
3,1212...	8/11 (73%)	3/11 (27%)	16/19 (84%)	3/19 (16%)
1,1222...	7/11 (63%)	4/11 (37%)	16/19 (84%)	3/19 (16%)
0,121221222...	3/11 (27%)	8/11 (73%)	7/19 (37%)	12/19 (63%)
$\sqrt{5}$	-	-	2/19 (11%)	17/19 (89%)
$\sqrt{64}$	8/11 (73%)	3/11 (27%)	-	-
$\sqrt[3]{27}$	8/11 (73%)	3/11 (27%)	18/19 (95%)	1/19 (5%)
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	3/11 (27%)	8/11 (73%)	2/19 (11%)	17/19 (89%)
$\frac{C}{2r}$	6/11 (55%)	5/11 (45%)	3/19 (16%)	16/19 (84%)
3,1416	-	-	12/19 (63%)	7/19 (37%)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Destacamos que o reconhecimento do número 0,121221222... como irracional mostrou-se como o mais complicado para uma parcela significativa dos alunos (27% da turma de 4º período e 37% dos ingressantes em 2013). Isso ocorreu nos dois questionários e suspeitamos que seja decorrência da negação do que foi dito anteriormente, isto é, a associação do padrão com a racionalidade. Essa suspeita não foi confirmada com justificativas explícitas.

A respeito de $\sqrt{5}$ e $\sqrt[3]{27}$, o questionário mostrou que a maioria dos alunos da turma de ingressantes em 2013 consegue identificar corretamente quando se trata de um número irracional e quando se trata de um número inteiro. Mas, em relação às frações $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{C}{2r}$, a turma de ingressantes em 2013 obteve um rendimento bem diferente da turma de 4º período de 2012, demonstrando ter muito mais dificuldades no reconhecimento de irracionais quando apresentados dessa forma.

Também é possível olhar para os acertos apontados pela **Tabela 23**. A maioria dos alunos nas duas turmas classificou as dízimas periódicas como racionais (ou não-irracionais). Porém, no segundo questionário, as justificativas nos mostraram que, mesmo no caso dos acertos, pode haver um problema. As justificativas mais frequentes para a classificação das dízimas periódicas como racionais foram: 'dízima periódica', 'pode ser escrito em forma de fração' e 'existe uma fração geratriz'. Apesar de serem justificativas matematicamente corretas, suspeitamos que possam ser respostas decoradas.

Dos dezenove alunos que responderam ao segundo questionário, variou entre quatorze e quinze o número de acertos na classificação de 1,222..., 3,1212... e 1,1222... como racionais. Dentre esses acertos, variou entre dois e três o número de alunos que, além da justificativa verbal apresentou as frações geratrizes. Apesar de não termos solicitado explicitamente a apresentação dessas frações, ficamos com a sensação de que número racional, dízima periódica e a possibilidade de escrever em forma de fração são coisas desconectadas e que precisam ser trabalhadas. Isto é, os alunos sabem por que uma dízima periódica necessariamente pode ser escrita em forma de fração de inteiros? E a recíproca? Eles sabem por que a representação decimal de uma fração de inteiros necessariamente será uma decimal exata ou uma dízima periódica? Sabem as condições para que uma fração seja representada por uma decimal exata ou por uma dízima periódica?

Com exceção das frações $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{C}{2r}$, em todos os outros itens a turma de ingressantes em 2013 obteve um desempenho superior à turma de 4º período de 2012 e, isso talvez se explique pelo fato da turma ter acabado de estudar o assunto 'Números' e 'Conjuntos Numéricos' quando aplicamos o questionário. Apesar dessa pequena diferença de desempenho e de se tratarem de duas turmas em diferentes momentos do curso, entendemos que a **Tabela 23** mostra que os números selecionados têm potencial para fazer surgir imagens ou associações referentes ao reconhecimento dos números racionais/irracionais. Além disso, também vislumbramos potencial nessas questões para iniciar um trabalho de intervenção no sentido de construir/reconstruir imagens do conceito de número racional ou irracional que auxiliem o futuro professor na compreensão desses e de outros conceitos relacionados.

Intervenção Pedagógica

A intervenção pedagógica foi composta por cinco atividades distribuídas por quatro encontros no mês de setembro de 2013, com duração total de oito horas e com uma frequência média de dezenove alunos em cada encontro. Para interferir o mínimo possível na rotina de trabalho que os alunos estavam acostumados, optamos que trabalhassem em grupos formados por quatro alunos distribuídos no primeiro encontro e mantidos os mesmos durante todos os encontros. Todas as atividades (com exceção das avaliações dos encontros) foram realizadas em grupos e foi dado um tempo aproximado de 30 minutos em cada atividade para discussões internas dos grupos. Em seguida, eu coordenava uma plenária com todos os grupos, com o objetivo de promover o debate, ampliar as discussões e, quando possível, sanar algumas dúvidas.

A Atividade 1 tratava-se de uma reaplicação da primeira pergunta do questionário (*Os números a seguir são racionais ou irracionais? Justifique cada resposta*) porém agora realizada em grupos e com adição de uma pergunta a respeito do consenso do grupo (Ver Apêndice J). O objetivo dessa atividade foi oportunizar um novo momento (visto que já haviam respondido a essas mesmas questões de forma individual) para reflexão e aprendizagem, proveniente de possíveis debates em grupos. Esperávamos que a atividade proporcionasse debates em torno de dúvidas conceituais e contestação de um grupo em relação à resposta de outro grupo, mas, o que aconteceu de fato foi diferente. Cada grupo acatou a resposta de um dos integrantes que parecia mais seguro sem maiores debates e a plenária foi monopolizada por uma única questão, referente ao acordo tácito da representação das dízimas levantado por um grupo. Entendemos que dois fatores contribuíram para a tarefa não ter transcorrido do jeito que imaginamos.

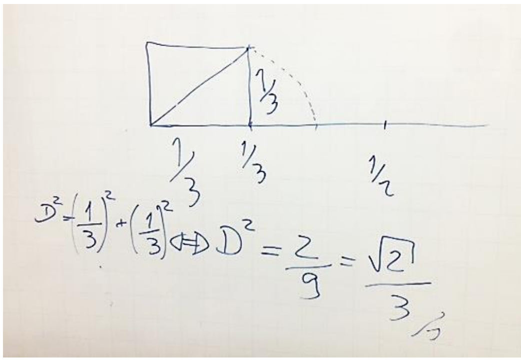
Primeiro, essa atividade foi realizada mais de um mês após a aplicação do questionário, e, segundo, os números utilizados na atividade e no questionário foram absolutamente os mesmos. Em mais de um mês após o questionário os alunos possivelmente sanaram suas dúvidas e isso eliminou praticamente todo o debate. Deveríamos ter usado números diferentes ou promovido esse debate no mesmo dia em que foi aplicado o questionário. Descobri mais tarde que a atitude do grupo de alunos que resolveu duvidar de todas as dízimas, refutando completamente o acordo tácito, e contaminando todos os outros grupos na plenária, explicava-se em parte por um comentário que foi feito pelo professor da disciplina Fundamentos. Em uma aula, ele teria dito *quem me garante que em 1,23456... não teremos uma repetição de todas as casas a partir da milionésima casa?* (sic)

A atividade 2 foi uma adaptação da terceira questão do questionário (*Existe algum número irracional no intervalo (1/3,1/2)? Em caso afirmativo, escreva esse número em notação decimal. Em caso negativo, justifique*) porém agora realizada em grupos, com adição de uma pergunta a respeito do consenso do grupo (ver Apêndice J – Atividades aplicadas no Estudo Exploratório). O objetivo foi o mesmo da atividade anterior: oportunizar mais uma rodada de discussões sobre uma questão já respondida individualmente, dessa vez em grupo, dessa vez referente ao conceito de densidade. As respostas de dois grupos merecem destaque.

Um grupo chegou até $0{,}44879895\ ... = \frac{\pi}{7}$ e explicaram assim: "Pegamos o número π e fomos dividindo, por 2, por 3, ..., até encontrar um número no intervalo da questão" (entre 1/3 e ½). Durante a plenária dessa atividade eu e o professor questionamos aos alunos: "segundo esse grupo (apontando para o grupo 1, que suspeitou de todas as dizimas e refutou o acordo tácito), como vocês poderiam garantir que lá pelas tantas não haverá repetição de casas decimais? " O representante do grupo disse que a garantia se dava porque o número decimal foi obtido através de π, que é irracional.

Outro grupo chegou à resposta $\frac{\sqrt{2}}{3}$ e explicaram como chegaram a esse número por meio construção geométrica (**Figura 51**) e disse que esse número estava no intervalo pedido. Eu e o professor observamos que a questão pedia um número em notação decimal, e o aluno respondeu que bastava 'jogar na calculadora'. Completamos a observação fazendo o mesmo comentário que fizemos ao grupo anterior: "como garantir que não haverá repetição de casas? " O aluno deu uma resposta semelhante ao grupo anterior, apoiando-se na irracionalidade conhecida do número $\sqrt{2}$.

Figura 51 - Solução de um grupo para a atividade 2



Fonte: Acervo do pesquisador.

Houve ainda um grupo que apresentou uma solução idêntica a uma solução apresentada quando da resolução do questionário. Na verdade, percebemos que a solução apresentada pelo grupo se deve ao aluno que a apresentou anteriormente. Esse mesmo aluno foi ao quadro na plenária e foi interessante vê-lo apresentá-la para toda a turma, para mim e para o professor. Ele mostrou o seguinte:

$$n = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}{2}} = \sqrt{\frac{13}{72}}$$

Nem a turma, nem eu, nem o professor da disciplina percebemos naquele momento o procedimento por trás dessa solução; isto é, elevar os extremos do intervalo ao quadrado, tirar a média e em seguida tirar a raiz quadrada, nem sempre gera um número irracional. Isso dependerá do intervalo, e um contraexemplo simples seria, tomando um intervalo $(\sqrt{8}, \sqrt{10})$, fazer o que o aluno fez,

$$n = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{8}\right)^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

e mostrar que o resultado obtido é um número inteiro. A discussão seguinte, naturalmente envolveria acrescentar a condição dos extremos do intervalo serem números inteiros. Ainda assim, o procedimento adotado pelo aluno pode não funcionar. Por exemplo, tomando o intervalo $[1,7]$, teríamos

$$n = \sqrt{\frac{(1)^2 + (7)^2}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

Interessante observar a semelhança dos argumentos das duas primeiras soluções apresentadas para encontrar um irracional entre 1/3 e ½, que não recorreram à alguma definição ou procedimento, mas aos números reconhecidamente irracionais como π ou alguma raiz quadrada não exata. A construção geométrica apresentada por um grupo provavelmente foi inspirada pela demonstração da incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado[95] e funcionou talvez como uma espécie de reforço ou justificativa para um fato que, na verdade foi apenas utilizado, de que $\frac{\sqrt{2}}{3}$ é irracional.

A atividade seguinte (ver Apêndice J – Atividades aplicadas no Estudo Exploratório) foi planejada para desenvolver a ideia de incomensurabilidade, porém, devido a uma série de dúvidas que restaram e do interesse demonstrado pelos alunos ao final do primeiro encontro, achamos que poderia ser mais proveitoso dar continuidade às discussões, principalmente aquelas relativas à representação decimal dos números irracionais e do uso das reticências, do que interrompê-las para iniciar uma nova discussão. Entendemos também que, se fosse o caso, poderíamos desenvolver essa atividade na disciplina de Geometria I, oferecida para o 2º período.

Como eles foram induzidos a duvidar das representações dos números, principalmente quando se usam as reticências, tanto pelo professor da disciplina quanto por mim, percebemos que seria interessante tentar resolver essa questão, ou seja, firmar ou jogar fora o acordo tácito, ou até firmar outro acordo. Como os grupos que propuseram as interessantes soluções da atividade 2 mostradas anteriormente utilizaram a calculadora, pensamos em formular uma atividade em que as nove casas da calculadora não fossem suficientes.

No lugar da atividade sobre incomensuráveis pensamos em algo que pudesse provocar discussões como: o que é um padrão? O que é uma dízima periódica? Todo padrão é uma dízima? Toda dízima é um padrão? 0,471405... é racional ou irracional? O que é preciso saber ao certo para decidir se esse número é racional ou irracional? É possível fazer um acordo? Como funcionará esse acordo? É preciso melhorar a notação? Escrever algo além do número? Pretendíamos que eles lançassem suas ideias e discutissem até chegar a um possível acordo. Pode ser que surja a barra sobre o número para indicar o período. Outra possibilidade seria escrever “1,145145... periódico com período 145”. Foi assim que decidimos criar um diálogo entre dois amigos, bem ao estilo de Lakatos (1978) para provocar essas discussões. Procuramos utilizar expressões coloquiais utilizadas pelos jovens, com o intuito de tornar a leitura mais atrativa. *O diálogo de Ralf e Beto* (personagens criados por mim), seguido de perguntas, foi dividido em duas partes e se constituiu como instrumento principal das Atividades 4 e 5 (ver Apêndice J – Atividades aplicadas no Estudo Exploratório).

A minha intenção, ao criar o diálogo entre Ralf e Beto, foi provocar questionamentos de ordem conceitual sobre os números irracionais. As explicações de Beto são explicações que já ouvimos de outros alunos em várias ocasiões, inclusive nos questionários que aplicamos. Porém, após lerem o diálogo representando os papéis de Ralf e Beto e se divertirem bastante com isso, perguntarmos o que eles não concordavam durante a plenária da atividade e a questão da representação utilizando as reticências emergiu novamente e polarizou as discussões. Um trecho bastante representativo da discussão foi o seguinte:

Aluno A: *A gente discordou por causa da representação das reticências... quando ele coloca reticências gerou aqui a dúvida...essa representação não dá ideia de que aquilo ali seja uma dízima periódica. A gente acha que essa que ficou a lacuna.*

Aluno B: *É, realmente, quando eles falam do número 0,12597483... e 1,333... significa que esse primeiro número*[96] *existe uma dízima? Com o último número ou com os dois últimos números? Com o número todo, com os três números? Ficou essa dúvida.*

---

[95] Essa demonstração foi feita pelo grupo de alunos que apresentou o trabalho sobre números racionais e irracionais na disciplina de Fundamentos de Matemática I.

[96] O aluno refere-se provavelmente ao algarismo 3. Ao criar a atividade, não reparamos que os dois números usados no diálogo terminavam com um 3: 0,12597483... e 1,333... e o aluno B foi buscar isso, provocando o questionamento transcrito.

Aluno A: *Porque só as reticências não dão ideia, pode estar se repetindo...*

Aluno B: *O número todo...*

Aluno A: *Ou só o 3 né?*

Aluno C: *Eu discordo, de vocês dois. Como é que vocês representam, por exemplo, o número pi? Não é 3,1416...? Não quer dizer que é uma dízima.*

Aluno A: *Eu não, eu boto assim aproximado 3,14.*

Aluno D: *...ela não está registrando a repetição do número, ela está registrando que existe uma continuidade nessa representação...*

Aluno B: *...isso tem que ser dito para a gente, se a reticências representa a dízima ou não...*

Aluno E: *Por exemplo, se tivesse um outro 3 aqui ou a repetição do 1 [referindo-se a 0,12597483...], daria para entender que está se repetindo.*

Pesquisador: *Deixem eu fazer um comentário. Vocês desviaram um pouco da pergunta, e novamente caíram naquela questão das reticências, perceberam? A pergunta foi, o que você achou da explicação do Beto, não é o que você achou das reticências, aquela discussão do final da aula passada, lembram?*

Aluno A*: Mas a explicação dele não está focada em cima das reticências?*

Esse trecho deixa claro, a nosso ver, que existem várias dúvidas geradas pelas reticências colocadas após um número. Os alunos C e E sustentam o que achamos ser a interpretação mais comum atribuído aos 'três pontinhos', enquanto os alunos A e B levantam a questão da interpretação dúbia gerada por esse símbolo. O aluno D assume uma posição intermediária. Em seguida, o aluno B deixa um pouco mais claro o seu pensamento, e o pesquisador pede para que ele repita para toda classe.

Aluno B: *Reticência é uma sequência do número, pois sem essa reticência, eu definiria que é um número racional, seria o número final dele, daria para colocar ele na forma de fração. Agora, a partir do momento que eu tenho um número decimal e que está com reticências, significa que existem números para a frente desse número que nós não conhecemos. A partir do momento que você coloca ali a reticências, mas coloca um traço no último, ou no penúltimo, dizendo que aquilo ali é periódico, a gente sabe que o número continua e que é uma dízima periódica*.

Na atividade 5, a segunda parte do Diálogo entre Ralf e Beto, foi nossa intenção explorar as diferenças entre padrão e dízima periódica, que muitos alunos erraram nos questionários. No diálogo, Beto enfatiza que nas dízimas tem sempre algo que se repete, enquanto Ralf prefere olhar para a questão da previsibilidade das casas decimais de um número como 0,33343536... Para Ralf, visto que a formação das casas decimais desse número tem uma 'lógica', ele seria um número racional.

Todos os grupos entenderam a 'lógica' a que Ralf se referia, isto é, como foram formadas as casas decimais de 0,33343536... e quais seriam as próximas, mas, quando perguntamos qual seria a 50ª casa decimal, um grupo questionou se após 0,33343536373839... viria 310 ou 340. Em seguida, perguntamos se 0,33343536... é racional ou irracional, e obtivemos respostas variadas, esclarecedoras e intrigantes.

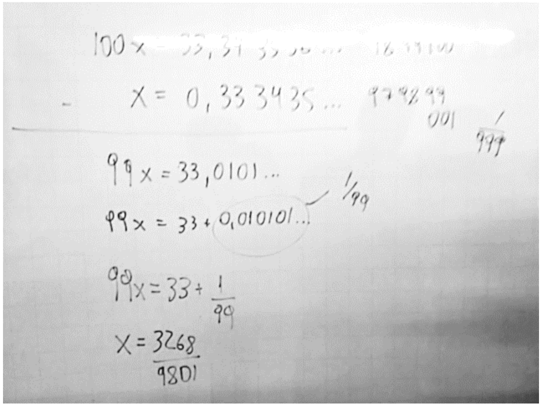
Quadro 42 - Respostas para a Pergunta 4 da Atividade 5 do Estudo Exploratório

O número 0,33343536... [com um padrão] é racional ou irracional? Justifique.	
Grupo	**Resposta**
1	*Irracional, pois não tenho uma repetição depois da vírgula.*
2	*Racional, pois eu posso encontrar qualquer casa.*
3	*Caso a lógica de Ralf esteja correta a 50ª casa será 57, contudo não podemos afirmar que a sequência apresentada é um número racional.*
4	*Considerando que a sequência de dezenas passe de 99 para 00, teremos a formação de dízima, tornando racional. Caso contrário, passando de 99 para 100, será irracional.*
5	*Racional. O número pode ser escrito na forma* $\frac{3268}{9801}$.
6	*Com o padrão o número seria racional, pois seria possível identificar os termos seguintes.*

Fonte: Elaborado pelo autor.

O grupo 2 concordou com Ralf e considerou que 0,33343536... é racional, pois é um número previsível, isto é, é possível 'encontrar qualquer casa'. O grupo 5 considerou o número 0,333435... racional por outro motivo, ele pode ser escrito em forma de fração, e ainda encontraram essa fração (ver **Figura 52**).

Figura 52 - Resolução do grupo 5 para a Atividade 5 do Estudo Exploratório



Fonte: Acervo do pesquisador.

Quando concluiu sua exposição, o representante do grupo 5 foi questionado pelos colegas de classe sobre "o que aconteceria após o 99" e ele próprio, percebeu que sua subtração não usual apresentava problemas exatamente após o 99. O grupo 4, por sua vez, levantou outra questão referente ao padrão do número 0,333435.... Interpretamos que eles olharam para a dízima do número em um determinado ponto e abriram em dois casos

$$333435\ldots 99\begin{cases}00\\100\end{cases}$$

Sendo que no primeiro caso, teremos uma dízima periódica $0{,}333435\ldots 99\underbrace{0001\ldots 9899}$ ... e no segundo caso uma dízima não-periódica $0{,}333435\ldots 99100101102\ldots$

Por fim, pedimos novamente aos alunos que escrevessem um número irracional no intervalo (1/3,1/2). A intenção era avaliar se captaram a mensagem da segunda parte do Diálogo entre Ralf e Beto, que um padrão sem dízima é um número irracional, e, consequentemente, para apontar um número irracional no intervalo em questão, ou qualquer intervalo, basta criar esse padrão. Dos seis grupos, três responderam com dízimas aparentemente não-periódicas, apesar das dúvidas levantadas anteriormente pela própria turma em relação à classificação desses números como irracionais. Apenas um grupo colocou um número como esperávamos – um padrão sem dízima – mas, não foram capazes de criar esse número, eles repetiram 0,33343536..., que aparece no diálogo entre Ralf e Beto. Pela resposta do grupo 5, percebemos que a nossa pergunta também poderia ser mais clara. Queríamos que fossem evitados os irracionais em forma de raiz quando nos referimos a irracionais conhecidos. Conhecidos para quem? Para os alunos do grupo 5 o número $\sqrt{\frac{13}{72}}$ pode muito bem ser um número desconhecido.

Para o último encontro, preparamos a Atividade 6 (ver Apêndice J – Atividades aplicadas no Estudo Exploratório) para mostrar a equivalência das duas definições de irracionais mais frequentes nos livros e que apareceram nos questionários aplicados (tanto do Pequeno Estudo Diagnóstico quanto do Estudo Exploratório). A ideia era mostrar, por meio do algoritmo da divisão, que todo número escrito na forma de fração tem necessariamente que ser representado por uma dízima periódica e vice-versa. Gostaríamos que eles enxergassem que o número limitado de possibilidades de restos em uma divisão é que gera os decimais finitos (resto dá zero) e as dízimas periódicas (resto nunca dá zero).

Para isso, pedimos que obtivessem a representação decimal de quatro frações: a) 0,625 – uma decimal exata, b) $\frac{2}{11}$ – cuja representação decimal é uma dízima com dois algarismos no período, c) $\frac{1}{7}$ – cuja representação decimal é uma dízima com seis algarismos no período e d) $\frac{13}{23}$ – cuja representação decimal é uma dízima com vinte e dois algarismos no período. Em um primeiro momento, deixamos que usassem a calculadora, mas depois pedimos que obtivessem a representação decimal das frações pelo algoritmo da divisão. Gostaríamos que observassem os restos parciais das divisões e sua relação com o tamanho das partes periódicas e os denominadores das frações.

As partes referentes a obter a representação decimal, tanto na calculadora quanto pelo algoritmo da divisão foram realizadas sem maiores problemas por todos os grupos. Quanto à relação dos restos, parte periódica e o denominador das frações, esperávamos que percebessem que o número de possibilidades de resto, e consequentemente o tamanho da parte periódica, é sempre menor que o denominador das frações. Fizemos a seguinte pergunta: *As representações obtidas são todas periódicas? Existe alguma relação entre o ‘tamanho’ da parte periódica e o denominador dos números? Qual?* Três respostas nos mostraram que precisaríamos aprimorar a atividade para poder atingir nosso objetivo, inclusive a formulação da pergunta (ver **Quadro 43**).

Nossa leitura frente às respostas dos grupos 1, 3 e 4 é que eles provavelmente entenderam ‘encontrar uma relação’ como ‘encontrar uma fórmula’, expressa em números, o que explicaria a relação encontrada do ‘um-menor’, ou ainda, *#parteperiódica = denominador – 1*. A reflexão que fazemos nos remeteu a alguns mitos criados (muitas vezes por nós mesmos) sobre a matemática, vários deles podendo estar relacionados com a situação descrita. São eles: todo problema tem resposta, essa resposta deve ser única, essa resposta não deve ser muito fácil, entre outros.

Entendemos que essa pergunta não ficou clara e não houve tempo nem condições suficientes para que percebessem o que gostaríamos que percebessem: que o número de possibilidades de resto é sempre menor que o denominador, podendo chegar ao *denominador -1* como alguns grupos afirmaram, e que o tamanho da parte periódica é determinado por esse número de restos. Essas conclusões também dependem de o aluno compreender que uma vez repetido um dos restos, toda a sequência de restos será repetida também, gerando a parte periódica da representação decimal das frações.

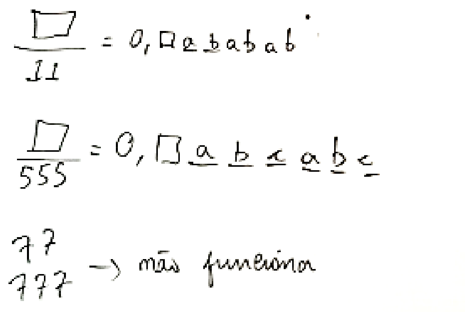
Quadro 43 - Respostas de três grupos para a Atividade 6 do Estudo Exploratório

As representações obtidas são todas periódicas? Existe alguma relação entre o ‘tamanho’ da parte periódica e o denominador dos números? Qual?	
Grupo	**Resposta**
1	*Não. O item ‘a’ não é periódico. Item c e d o tamanho do período é 1 menor que o denominador.*
3	*Não são todos periódicos. Nos exemplos apresentados, chegamos à seguinte conclusão: a letra ‘a’ não tem nenhuma relação. A letra ‘b’ aparentemente se os denominadores tiverem dígitos iguais o período terá a mesma quantidade de dígitos do denominador. As letras ‘c’ e ‘d’ aparentemente possuem períodos determinados pelo denominador menos um.*
4	*Não, somente b, c e d. Os itens c e d, o tamanho do período é o denominador -1. No c – nº período=6/denominador=7. No d – nº período=22/ denominador=23.*

Fonte: Elaborado pelo autor.

Apesar disso, entendemos que os grupos fizeram muita matemática ao tentarem responder a essa questão. Veja por exemplo o grupo 3, que descobriu uma interessante regra e seu representante disse na plenária que testou com todos os números de 0 a 10, e só não funcionou com o 7: qualquer fração que tenha denominador 11, 22, 33, etc., terá uma dízima com dois algarismos no período; qualquer fração com denominador 111, 222, 333, etc., terá uma dízima com três algarismos no período (ver **Figura 53**).

Figura 53 - Explicação do grupo 3 para sua resposta para a Atividade 6 do Estudo Exploratório

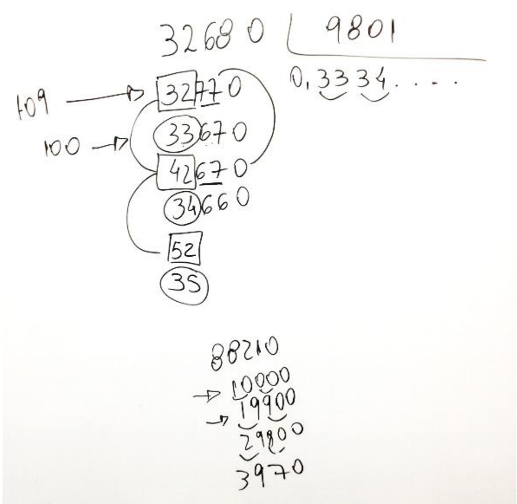


Fonte: Acervo do pesquisador.

Na última pergunta da Atividade 6, perguntamos *podemos afirmar algo em relação à representação decimal de 3268/9801? Ela será periódica?* Pedimos que respondessem de três formas diferentes: usando a calculadora, o algoritmo da divisão e usando o que foi discutido nos itens anteriores. Utilizamos a fração 3268/9801 intencionalmente. Ela surgiu como fração geratriz do número 0,333435... na resposta do grupo 5, na Atividade 5. Nossa expectativa com essa fração, cuja representação decimal possui um período com duzentas casas decimais, era que os alunos, ao não conseguirem encontrar o período com calculadora ou algoritmo da divisão, estivessem seguros para afirmar que se trata de uma dízima periódica, valendo-se apenas do conceito e/ou das discussões anteriores.

Apenas um grupo respondeu de acordo com o esperado; isto é, percebeu a limitação da calculadora, mas concluiu pela definição que se tratava de uma dízima periódica. Um grupo percebeu isso não pela definição, mas encontrando padrões de uma forma bem particular pelo algoritmo da divisão (ver **Figura 54**). Os outros grupos nada responderam.

Figura 54 - Forma que um grupo encontrou para concluir que uma fração será representada por uma dízima periódica



Fonte: Acervo do pesquisador.

Em síntese, o Estudo Exploratório foi importante como um laboratório, onde testamos hipóteses e instrumentos de pesquisa, como uma fonte de novas ideias, que surgiram a partir de novos olhares e novas perguntas e para tomarmos conhecimento de dúvidas e dificuldades dos alunos em relação aos irracionais que nem imaginávamos. As variadas – e muitas vezes inesperadas – soluções apresentadas pelos alunos paras as atividades propostas significaram aprendizagens para nós, e puderam, ainda nesse mesmo estudo, ser aproveitadas e discutidas com toda a turma. Muitos alunos nos surpreenderam com sua maturidade e com questionamentos pertinentes, que nos provocaram a pensar o que fazer para melhorar no Estudo Principal e em futuras intervenções e/ou instrumentos de pesquisa.

As atividades desenvolvidas também nos possibilitaram enxergar um pouco além das aparências. Citamos como exemplo o fato observado de que alguns alunos que apresentaram um bom seminário sobre conjuntos numéricos, aparentando dominar o assunto com relativa tranquilidade, mostraram-se, ao longo da intervenção, inseguros e repletos de dúvidas e falhas conceituais relativas aos números irracionais, e até mesmo racionais.

Muito do que fizemos foi propositadamente sem estar preso a embasamentos teóricos prévios. Tentamos mergulhar no ambiente de pesquisa sem deixar que influências externas e leituras limitassem ou direcionassem nossa visão dos alunos, do professor, da disciplina Fundamentos de Matemática e do assunto números irracionais. É claro que não é possível despir-se do inconsciente e de tudo que se lê, sente, ouve, e impedir que todo esse turbilhão de informações e desejos interfiram no trabalho. Porém, durante o planejamento do Estudo Exploratório, procuramos não delinear atividades intencionalmente fechadas ou baseadas em autor ‘A’ ou ‘B’, e na sala de aula, muitas vezes deixamos o instinto de professor falar mais alto do que o de pesquisador. Contudo, apesar de aparente *laissez faire*, havia intencionalidade nessa postura. Foi nosso desejo primeiro sentir o problema, abrir espaço para o novo e deixar que as questões de pesquisa emergissem a partir dos dados, sem perder de vista a intenção de contribuir para um melhor preparo dos futuros professores para ensinar números irracionais na educação básica.

1ª Questão – Os números a seguir são racionais ou irracionais? Justifique cada resposta.

Número	Racional	Irracional	Justificativa
1,222...			
$\sqrt{5}$			
3,1212...			
$\sqrt[3]{27}$			
1,1222...			
$\frac{\sqrt{2}}{2}$			
0,121221222...			
$\frac{C}{2r}$ (C é o comprimento de uma circunferência de raio r)			
3,1416			

2ª Questão - Escreva um irracional representado em notação decimal.

3ª Questão – Existe algum número irracional no intervalo (1/3,1/2)? Em caso afirmativo, escreva um em notação decimal. Em caso negativo, justifique.

4ª Questão – O que são números irracionais:

a) Segundo você aprendeu nas aulas de matemática;
b) Na sua opinião.

5ª Questão – Na sua opinião, por que se ensina números irracionais?

APÊNDICE J

Atividade 1

Os números a seguir são racionais ou irracionais? Justifique cada resposta.

Número	Racional	Irracional	Justificativa
1,222...			
$\sqrt{5}$			
3,1212...			
$\sqrt[3]{27}$			
1,1222...			
$\frac{\sqrt{2}}{2}$			
0,121221222...			
$\frac{C}{2r}$ (C é o comprimento de uma circunferência de raio r)			
3,1416			

Em todas as respostas acima houve consenso?

- ☐ Sim.
- ☐ Não. Em quais itens ocorreram divergências? Por quê?

Atividade 2: Existe algum número irracional no intervalo (1/3,1/2)? Em caso afirmativo, escreva esse número em notação decimal. Em caso negativo, justifique.

Houve consenso na resposta desta atividade?

- ☐ Sim.
- ☐ Não. Em quais itens ocorreram divergências? Por quê?

Atividade 4 - Diálogo de Ralf e Beto

1) Observe a conversa abaixo.

Ralf*: E aí camarada, foi à aula hoje? O que o professor passou?*

Beto*: Fui. Cara, passou um negócio muito doido...números irracionais!*

Ralf: *Que coisa é essa? Números que não pensam? Hehehehe.*

Beto*: Não, claro que não ô cabeção! São números que não sabemos a última casa decimal.*

Ralf*: Como assim não sabemos a última casa decimal?*

Beto*: Tipo assim, 0,12597483...*

Ralf*: Ah, mas em 1,333... eu também não sei a última casa decimal! Então ele é irracional?*

Beto*: Não, 1,333... é racional. A última casa é 3! Os pontinhos depois do 3 significam que o 3 sempre repete, logo, a última casa é 3! Tô sabendo rapá!*

Ralf*: Mas peraí. Quantas casas tem depois da vírgula em 1,333... ?*

Beto*: Infinitas, oras! Faltar aula dá nisso, tá vendo?*

Ralf: *Pera lá cara pálida! Se tem infinitas casas depois da vírgula como você pode falar que sabe a última casa? Na verdade, nem pode existir última casa! Não são infinitas? Então não existe última casa!*

Beto*: Ixi, é mesmo... [pensa por alguns instantes] Ah, mas eu posso saber qualquer casa que eu quiser. A bilionésima casa vai ser um 3, a trilionésima casa vai ser um 3! Por isso é racional.*

Ralf: *Ah, então irracional é o contrário né?*

Beto*: Isso! Irracional é quando não dá pra saber uma casa qualquer, tipo, em 0,4526793..., qual é a 100ª casa? Entendeu? Nossa, tem que ter muita paciência com esse povo que falta aula...*

2) O que você achou das explicações de número irracional dadas por Beto? 3) Concorda com tudo ou discorda de alguma coisa? Se discorda, por quê?

4) Se você fosse Beto, explicaria de forma diferente? Como?

5) Explique para todos os colegas da sala o que vocês discutiram no grupo.

Atividade 5 - Diálogo de Ralf e Beto (continuação)

1) Observe a conversa abaixo.

Ralf*:* Lembra do que você me falou ontem? Que em *0,4526793... não dá pra saber a 100ª casa?*

Beto*: Sim, claro!*

Ralf*: E se lá pelas tantas, alguma coisa começar a se repetir e não parar mais, tipo 0,4526793...1111...?*

Beto*: Aí vai ser racional, tipo 1,333... Mas o que eu queria dizer com 0,4526793... é que não tem essas repetições.*

Ralf*: Tipo, se nada se repetiu antes das reticências é porque não vai se repetir depois. Entendi.*

Beto*: Ufa!*

Ralf*: Mas peraí. Eu pensei em um número agora. 0,33343536...é racional ou irracional?*

Beto*: Irracional, não tá repetindo nada antes das reticências!*

Ralf: *Pera lá cara pálida! Mas eu consigo saber a 100ª casa, ou a casa que eu quiser, porque as casas depois da vírgula têm uma 'lógica'. Logo, pelo que você disse ontem, será um número racional!*

Beto*: [pensando, com cara de mal] Agora você conseguiu me confundir...por que você faltou à aula hein Ralf? Que saco! Agora fiquei com dúvida na parada!*

2) A que 'lógica' você acha que Ralf se refere em relação a 0,33343536...?

3) Considerando que existe um padrão em 0,33343536...é realmente possível encontrar uma casa qualquer? Caso afirmativo, encontre a 50ª casa. Caso negativo, explique.

4) 0,33343536... [com um padrão] é racional ou irracional? Justifique.

5) Escreva um número irracional no intervalo (1/3, ½) sem recorrer a irracionais conhecidos nem à calculadora.

Atividade 6

1) Obtenha a representação decimal dos números abaixo:

    a) 5/8
    b) 2/11
    c) 1/7
    d) 13/23

2) Quais números da lista acima são racionais? Quais são irracionais? Justifique.

3) Obtenha a representação decimal dos números do item “1” utilizando o algoritmo da divisão. Não apague nenhuma etapa do processo.

4) As representações obtidas no item “3” são todas periódicas? Existe alguma relação entre o ‘tamanho’ da parte periódica e o denominador dos números do item “1”? Qual?

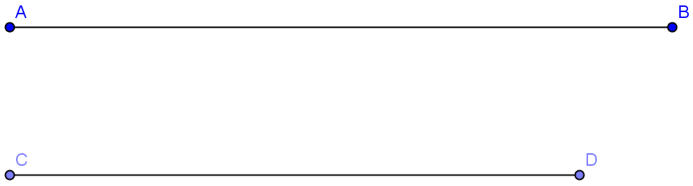
5) Podemos afirmar algo em relação à representação decimal de 3268/9801? Ela será periódica?
    a. Responda o que acha usando uma calculadora.
    b. Responda o que acha usando o algoritmo da divisão.
    c. Responda o que acha pelo que foi discutido nos itens acima.

Atividade 3

PROBLEMA:

Dois trechos de uma estrada, representados pelos segmentos AB e CD, devem receber placas de sinalização em toda sua extensão, de modo que:

i) As distâncias entre as placas, em ambos os trechos, sejam iguais;
ii) As placas sejam colocadas à maior distância possível uma da outra em ambos os trechos.



Utilizando apenas um compasso, determine os pontos em que as placas devem ser colocadas em ambos os trechos, satisfazendo as condições acima.

NÃO VÁ PARA A PÁGINA SEGUINTE SEM ANTES PENSAR UM POUCO. DISCUTA COM SEUS COLEGAS SOBRE POSSÍVEIS ESTRATÉGIAS PARA A SOLUÇÃO DESTE PROBLEMA.

Se você não teve nenhuma ideia, não tem problema. Vamos tentar ajudá-los.

Uma forma bastante usada para iniciar a resolução de um problema é pensar em uma versão mais simples do mesmo, alterando apenas um dos dados do problema e mantendo as demais condições iniciais. Nesse caso, poderíamos pensar em alterar o comprimento de um dos trechos da estrada. Resolva as três atividades abaixo, e, em seguida, retorne e tente resolver o problema proposto novamente.

Atividade A

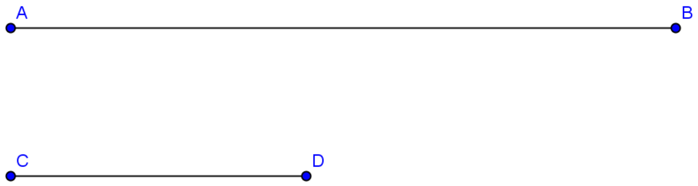
Considere os segmentos AB e CD abaixo.

Utilizando a ferramenta “compasso” para transportar os segmentos, execute os itens seguintes:

a) Extraia o segmento CD do segmento AB o maior número possível de vezes;
b) Após a subtração anterior, existiu alguma sobra no segmento AB?
c) O segmento CD é divisor do segmento AB? Por quê?
d) Existe um segmento maior do que CD que é divisor comum de AB e CD? Justifique.
e) Qual é o segmento que é o m.d.c. (maior divisor comum) de AB e CD?

Atividade B

Considere os segmentos AB e CD abaixo.



Utilizando a ferramenta “compasso” para transportar os segmentos, execute os itens seguintes:

a) Extraia o segmento CD do segmento AB o maior número possível de vezes;
b) Após a subtração anterior, existiu alguma sobra no segmento AB?
c) O segmento CD é divisor do segmento AB? Por quê?
d) Tome no compasso o segmento FB correspondente à sobra encontrada no item ‘b’.
e) Extraia o segmento FB do segmento CD o maior número possível de vezes;
f) Após a subtração anterior, existiu alguma sobra no segmento CD?
g) O segmento FB é divisor do segmento CD? Por quê?
h) O segmento FB é divisor comum de AB e CD? Por quê?
i) Existe um segmento maior do que FB que é divisor comum de AB e CD? Justifique
j) Qual é o segmento que é o m.d.c. (maior divisor comum) de AB e CD?

Atividade C

Considere os segmentos AB e CD abaixo.

Utilizando a ferramenta “compasso” para transportar os segmentos, execute os itens seguintes:

a) Extraia o segmento CD do segmento AB o maior número possível de vezes;
b) Após a subtração anterior, existiu alguma sobra no segmento AB?
c) O segmento CD é divisor do segmento AB? Por quê?
d) Tome no compasso o segmento FB correspondente à sobra encontrada no item ‘b’.
e) Extraia o segmento FB do segmento CD o maior número possível de vezes;
f) Após a subtração anterior, existiu alguma sobra no segmento CD?
g) O segmento FB é divisor do segmento CD? Por quê?
h) Tome no compasso o segmento GD correspondente à sobra encontrada no item ‘f’.
i) Extraia o segmento GD do segmento CG o maior número possível de vezes.
j) GD é divisor de CG?

j1) Suponha que sim, então GD também será divisor de AB? Por quê?

j2) Suponha que não, então podemos continuar o processo de subtrações sucessivas indefinidamente sem nunca encontrar um segmento que será divisor comum de AB e CD? Ou o processo vai terminar quando encontrarmos um segmento pequeno o suficiente para caber um número inteiro de vezes em AB e CD?

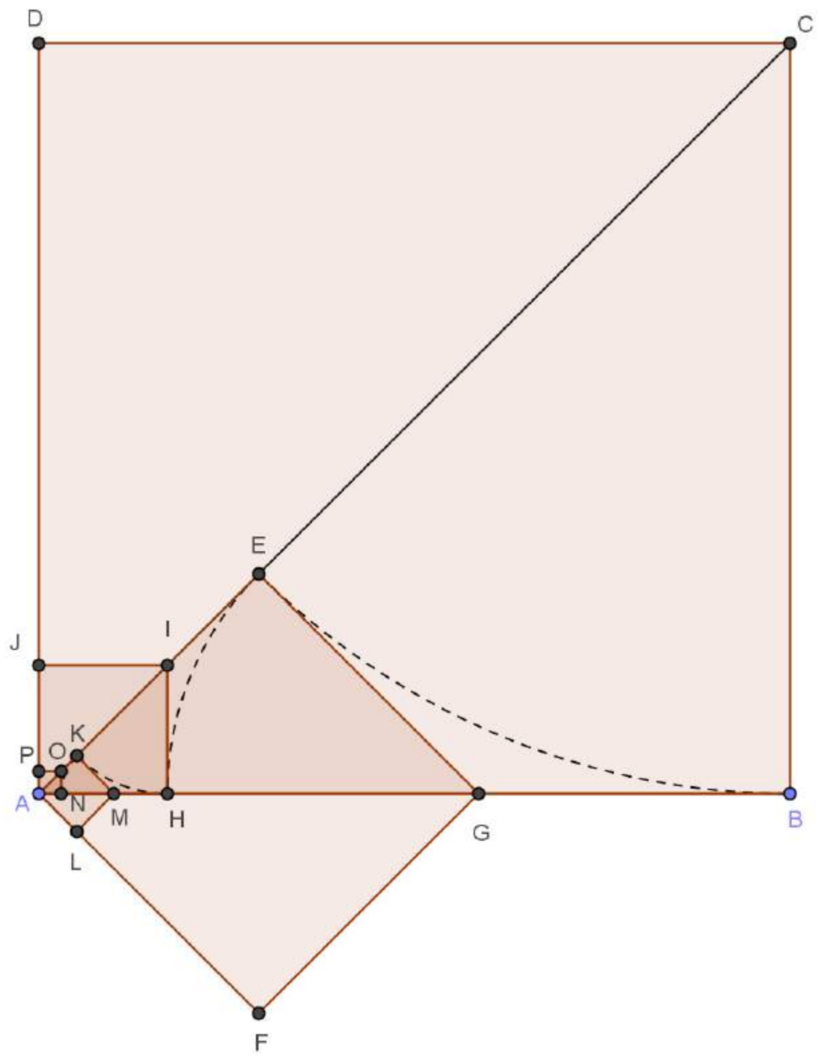
Com as três atividades anteriores, discutimos a questão do m.d.c. nos moldes de Euclides, ou seja, geometricamente. Voltamos ao problema inicial. Discuta com seus colegas as seguintes questões:

Q1) O problema dos dois trechos da estrada pode não ter solução?

Q2) Existem dois segmentos em que não é possível encontrar o m.d.c.? [Ou seja, medir simultaneamente com a maior unidade possível]

Q3) O que acontece se retirarmos a exigência de que as placas fiquem a maior distância possível umas das outras? O problema terá solução? Qual? [Ou seja, faz sentido pensar em medir os dois segmentos simultaneamente com a menor unidade possível?] Se existe alguma unidade comum, então existirá a maior, pois ela está limitada pelo maior dos segmentos.

Atividade D



Diga se cada uma das afirmações seguintes é ou não verdadeira, e justifique suas respostas.

Afirmação 1:

A diferença entre as medidas da diagonal AC e o lado BC do quadrado ABCD é igual à medida do lado AE do quadrado AEGF.

Afirmação 2:

A diferença entre as medidas dos lados BC do quadrado ABCD e do lado AE do quadrado AEGF é igual à medida da diagonal AG do quadrado AEGF.

Afirmação 3:

m(AG) – m(EG) = m(AH)

Afirmação 4

m(AE) – m(HI) = m(AK)

Afirmação 5

Se existir um segmento de medida *x* que caiba um número inteiro de vezes no lado e na diagonal do quadrado ABCD, então *x* deverá caber um número inteiro de vezes nos lados e nas diagonais de todos os quadrados da figura e de todos os quadrados cada vez menores que pudermos imaginar.

Afirmação 6

Mas esse segmento *x* não existe, isto é, sua medida é zero. Logo, o lado e a diagonal do quadrado ABCD são segmentos incomensuráveis.

APÊNDICE K

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO

Ministério
da Educação

O QUE É MATEMÁTICA?

Geraldo Broetto
IFES – Campus Vitória

O que é matemática?

Uma questão crucial

- "O que é matemática" é uma pergunta mais apropriada para a Filosofia da Matemática?
- Talvez sim, mas apenas por uma questão didática!
- Ela "cabe" em qualquer disciplina de um curso de Matemática, especialmente em disciplinas como Fundamentos de Matemática ou História da Matemática.
- Ao final do curso de Matemática, é importante que o aluno tenha refletido sobre essa e outras questões essenciais.

A MATEMÁTICA ESTÁ EM TODO O LUGAR

- Algumas modernidades como o avião, a televisão, o Mp3 são produto do desenvolvimento da Matemática.
- James Clark Maxwell usou apenas quatro equações matemáticas para unificar Eletricidade e Magnetismo, criando o Eletromagnetismo.
- Einstein usou a Geometria Riemenniana para apresentar sua Teoria da Relatividade Geral.
- A teoria de grupos de Galois tornou-se a linguagem empregada por físicos, engenheiros, linguistas e até antropólogos para descrever todas as simetrias do mundo.

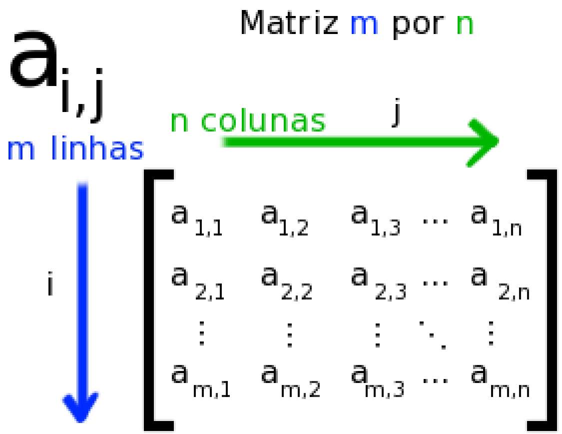
Algumas "respostas" para essa questão crucial

- Matemática é aquilo que os matemáticos fazem.
  - Crítica: é uma espécie de definição circular. Precisaríamos definir o que é um matemático, e, provavelmente, para fazer isso, precisaremos definir Matemática.
- Matemática é a ciência dos padrões.
  - Crítica: o que são padrões?
- "A Matemática é a ciência das quantidades e das formas."
  - Crítica: Esta definição cobre Aritmética e Geometria, mas deixa de fora a Análise Real, a Análise Complexa, a Álgebra Linear, Teoria dos Grupos, Teoria dos Conjuntos, etc.
- Eu não sei o que é Matemática, mas quando a vejo, reconheço-a imediatamente.
  - Crítica: não é exatamente uma definição, não explica nada.

Matemática é um produto da descoberta ou da criação do homem ?

ARGUMENTOS PARA A CRIAÇÃO

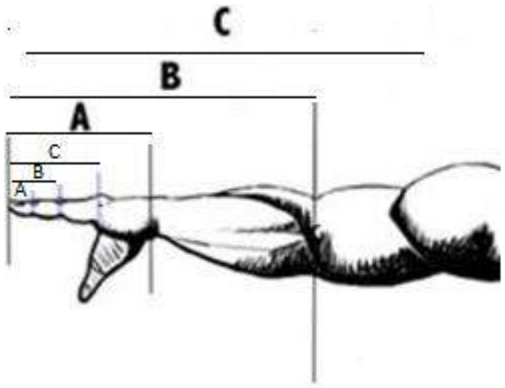
- Ninguém jamais viu na natureza números complexos, matrizes, vetores ou polinômios.
- "Matemática é uma parte natural do ser humano. Origina-se dos nossos corpos, nossos cérebros e nossas experiências cotidianas no mundo" (George Lakoff e Rafael Nuñez).

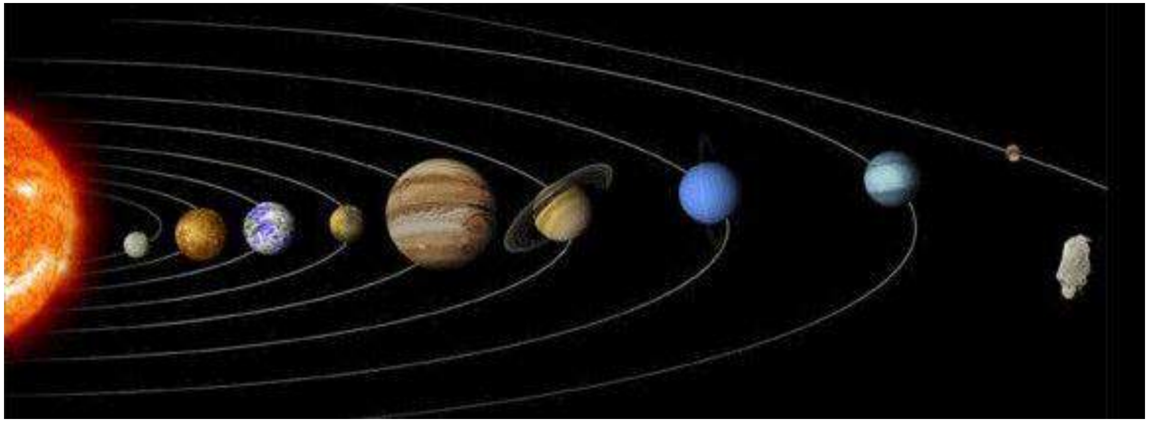


Se tivéssemos corpos diferentes, teríamos criado uma matemática diferente?

Argumentos para a descoberta

- Caracóis e galáxias em espiral logarítmica, órbitas elípticas, proporções do corpo humano em razão áurea são padrões matemáticos encontrados na natureza.





Matemática é descoberta - Frases famosas

- *"A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o livro do Universo". (Galileu Galilei)*
- "As leis da natureza não são nada mais que os pensamentos matemáticos de Deus". (Euclides)
- "*O principal objetivo de todas as investigações do mundo exterior deve ser descobrir a ordem racional e harmonia que tem sido imposta por Deus e que ele nos revelou na linguagem da matemática*". (Johannes Kepler)
- *"Se Deus fala ao homem, sem dúvida, ele usa a linguagem da matemática"*. (Poincaré)

ARGUMENTOS INTERMEDIÁRIOS

- "Deus criou os números naturais, tudo o resto é obra do homem"(Leopold Kronecker).
- "Se existe um Deus, ele é um grande matemático" (Paul Dirac).
- "É verdade que a matemática dispensa grandes quantidades de equipamento laboratorial e que experiências imaginadas são, em larga medida, o que é necessário. Não é, porém, justo afirmar que a matemática é feita completamente dentro da cabeça" (Davis e Hersh).
- "Sugiro que a matemática é parcialmente criada e parcialmente descoberta. Os seres humanos geralmente inventam conceitos matemáticos e descobrem as relações entre esses conceitos" (Mário Livio)

Variações sobre o mesmo tema

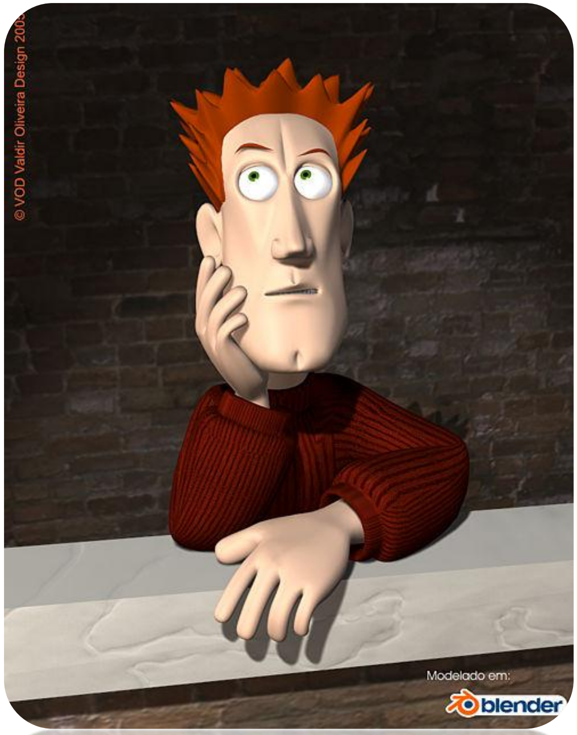
- A Matemática existe por si só?
- Em um planeta distante, alienígenas desenvolveriam a mesma Matemática que desenvolvemos?
- Stephen Wolfram argumentou que aquilo que chamamos “nossa matemática” pode representar apenas uma possibilidade dentre uma rica variedade de “sabores” da matemática.

A MATEMÁTICA DAS ALGAS

- O matemático britânico Sir Michael Atiyah (ganhador da medalha Fields em 1996 e o Prêmio Abel em 2004) certa vez declarou:
- *“...imaginemos que a inteligência tivesse residido não na espécie humana, mas em alguma enorme água-viva solitária e isolada, enterrada bem no fundo das profundezas do Oceano Pacífico. Ela não teria nenhuma experiência com objetos individuais, somente com água circundante. Movimento, temperatura e pressão proporcionariam os dados sensoriais básicos. Em um continuum tão puro, o discreto não teria se originado e nada existiria para contar”.*

Para pensar um pouco mais...

- Se existirem civilizações extraterrestres inteligentes, eles inventariam a mesma matemática?
- Se Atiyah estiver certo, se o nosso mundo fosse diferente, a matemática também seria diferente.
- Se Lakoff e Nuñez estiverem certo, se os nossos corpos e/ou cérebro fossem diferentes, a matemática também seria diferente.
- Isso explica ou complica ainda mais a questão da invenção ou descoberta da Matemática?



A MATEMÁTICA INDEPENDE DO HOMEM

- Para Martin Gardner, "se dois dinossauros se juntassem a outros dois dinossauros numa clareira, haveria quatro lá, mesmo que seres humanos não estivessem lá para observar e se as feras fossem estúpidas demais para saber"

Matemática é apenas linguagem?

- Biólogos e cientistas cognitivos contribuem com outra perspectiva, dizendo que matemática não é muito diferente de linguagem.
- No cenário cognitivo, depois de eternidades nas quais os seres humanos olharam fixamente para duas mãos, dois olhos, etc, emergiu uma noção do número 2, da mesma forma que a palavra "pássaro" representa qualquer animal capaz de voar.

Contra-argumento

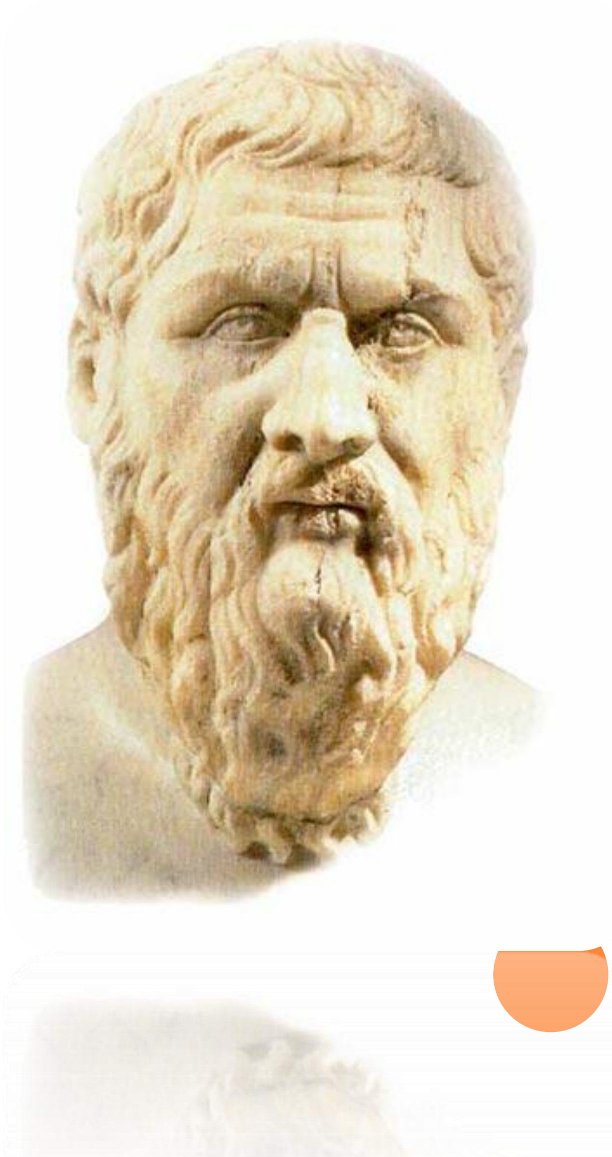
- Segundo LIVIO(2009), se matemática é só linguagem, como explicar o fato de que, crianças estudem idiomas com facilidade e muitas delas acham difícil estudar matemática?
- É preciso tomar cuidado com argumentos assim.
- É realmente um fato comprovado que crianças tem facilidade com idiomas? Será que os mesmos indivíduos com dificuldade em matemática também não teriam dificuldades com idiomas?

A MATEMÁTICA É UMA EXPRESSÃO ARTÍSTICA?

- Existe alguma diferença entre matemática e outras expressões da mente humana, como artes visuais ou música?
- A geometria de Euclides continua tão correta hoje (onde se aplica) quanto o era em 300 a.C.
- Em contraste, hoje não ouvimos a mesma música que os gregos antigos ouviam.

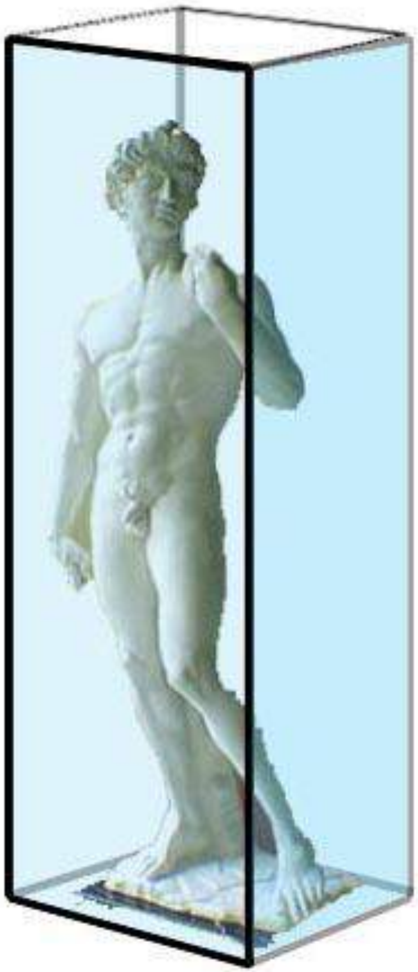
A VISÃO PLATÔNICA DA MATEMÁTICA

- Platão considerava que as verdades matemáticas pertenciam a um mundo ideal, independente do mundo físico, que deveriam ser descobertas pelo intelecto.
- Para ele, verdades matemáticas não dizem respeito a círculos ou quadrados que podem ser desenhados em uma folha de papel, mas a objetos abstratos que habitam um mundo ideal, lar das verdadeiras formas e perfeições.
- Essas ideias tiveram (e ainda tem!) profundas implicações na matemática, e exerceram (e ainda exercem) grande influência no modo de pensar do mundo ocidental.



Michelângelo também era platônico?

- O grande escultor e pintor italiano Michelangelo Buonarroti dizia que suas esculturas já se encontravam dentro dos blocos de mármore, e que a ele cabia apenas descobri-las.



O conhecimento matemático

O conhecimento matemático se desenvolve como uma árvore?

- Há um ditado popular que diz: “o saber só se ganha, nunca se perde”.
- Nessa mesma linha de raciocínio, a matemática é frequentemente descrita como uma árvore robusta, com um tronco, raízes e ramos etiquetados com certas subdisciplinas. É uma árvore que cresce com o tempo.
- Essa noção é algo ingênua!

Criação, esquecimento, desenvolvimento, destruição

- Segundo Whitehead, sabia-se menos matemática na Europa de 1500 do que na Grécia de Arquimedes.
- À medida que as estruturas matemáticas são construídas, outros processos estão simultaneamante ocupados com a sua destruição.
- Muitas obras tornam-se impopulares e são abandonadas. Outras entram na obscuridade.
- É um longo processo de negociação e de aceitação por uma certa comunidade de matemáticos, que só adquiriu homogeneidade entre os séculos XVIII e XIX.

O papel da História da matemática

- Um dos objetivos do presente curso de História da Matemática é provocar discussões filosóficas dessa natureza e propiciar ao aluno uma visão crítica sobre a essência da Matemática.
- Ao conhecer as produções matemáticas de diferentes povos e épocas, esperamos que o aluno adquira elementos para embasar suas próprias conclusões sobre essa relevante questão:
- “Matemática é criada ou descoberta pelo homem?”
- É hora de iniciarmos nossa viagem no tempo.

REFERÊNCIAS

- LIVIO, Mario. **Deus é matemático?** Rio de Janeiro: Record, 2010.
- DAVIS, Philip e HERSH, Reuben. **A experiência matemática**. 2 ed. Lisboa: Gradiva, 2013.

APÊNDICE L

Geraldo Claudio Broetto

Professor de Matemática

Instituto Federal do Espírito Santo – Campus Vitória

Trajetória escolar

- 1º Grau

  Pré a 4ª série (1981 – 1985)

  "Coronel Joaquim Freitas"

  Prefeitura municipal de Vila Velha

  5ª a 8ª série (1986 – 1989)

  "Luiz Manoel Velozzo"

  Governo do Estado do Espírito Santo

- 2º Grau (1990 – 1992)

  Escola Técnica Federal do Espírito Santo

  Governo Federal

Trajetória acadêmica

- Licenciatura em matemática (1994 – 1997)

  Universidade Federal do Espírito Santo

- Especialização em matemática (1998 – 2000)

  Universidade Federal do Espírito Santo

- Mestrado em Educação Matemática (2002 – 2004)

  Universidade Federal Espírito Santo

- Doutorado em Educação Matemática (2012 – 2015?)

  Universidade Federal do Espírito Santo

O projeto de pesquisa

Como funciona o mestrado? E o doutorado? Qual a diferença?

Do que trata a educação matemática?

Ética da pesquisa

APÊNDICE M

Fundamentos de Matemática

Geraldo Broetto

Instituto Federal do Espírito Santo

O problema da contagem

Contagem – uma necessidade

- Necessidades da vida corrente:
  - Pastor contando ovelhas para saber se perdeu alguma;
  - Operário contando dinheiro para saber se recebeu todo o salário;
  - Don@ de casa controlando o orçamento doméstico;
  - O cientista contando o número de segundos que deve durar uma experiência;
  - Entre outras.

Intensidade da vida social

- Durante uma boa parte da Idade Média, por exemplo, a atividade comercial era quase inexistente. Os algarismos romanos eram suficientes.
- À medida que as relações sociais foram aumentando sua intensidade e sua complexidade, a contagem também se tornou mais complexa.
- Imagine como seria realizar transações comerciais com algarismos romanos?

Números naturais

- Utilizamos os números naturais 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... para resolver os problemas de contagem.
- Quando esses números foram criados?
  - Longo processo a partir da prática diária de contagem;
  - Isto é, não foi uma criação independente da experiência (CARAÇA, 1951);
- Há tribos na África que não conhecem os números além de 5 ou 6;
- O maior ou menor conhecimento dos números está ligado com a intensidade das relações sociais, principalmente econômicas.

Importante até aqui:

A criação dos números naturais não precedeu os problemas de contagem. Os problemas de contagem é que deram origem, após um longo processo, à criação dos números naturais.

Uma história a parte

O símbolo para o zero

Os algarismos hindus e o sistema posicional

- Por volta de 250 a.C. os indianos utilizavam símbolos dos quais derivaram os algarismos modernos, porém, o sistema ainda não era posicional nem existia símbolo para o zero.
- Por volta do século VI da era cristã, o mundo inteiro aprendeu com os hindus o **sistema posicional de base dez empregando dez símbolos, um dos quais era o zero.**
- **Mas, ao contrário da China, o zero não servia apenas para marcar posição, era utilizado nos cálculos.**
- **1 x 0 = 0**
- **1 + 0 = 1**
- **1 – 0 = 1**

Templo de Chatur-bhuja (876 d.C.) em cujas paredes estão gravados os símbolos para o zero mais antigos da Índia

0 é um número natural?

- Para Caraça (1951), a sucessão 0, 1, 2, 3, 4, ... é a sucessão dos números inteiros. Ou seja, zero não seria natural.
- Para Lima (1991) a resposta é sim e não. Os algebristas preferem incluir o zero como natural enquanto os analistas optam por não incluí-lo. É uma questão de preferência pessoal.

Uma das maiores aventuras da razão

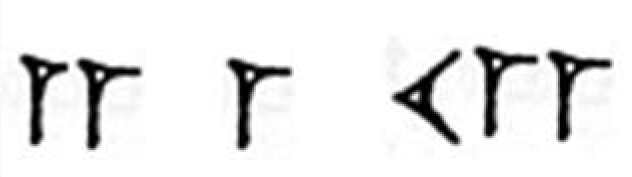
- Para Caraça (1951), *a criação de um símbolo para representar o nada constitui um dos atos mais audazes do pensamento, uma das maiores aventuras da razão* (p. 6).
- Criação relativamente recente (primeiros séculos da era cristã)
  - Posterior ao Império Romano;
  - Posterior à Grécia Antiga, aonde floresceram alguns dos espíritos matemáticos mais brilhantes de todos os tempos.

Facilidades permitidas pelo zero

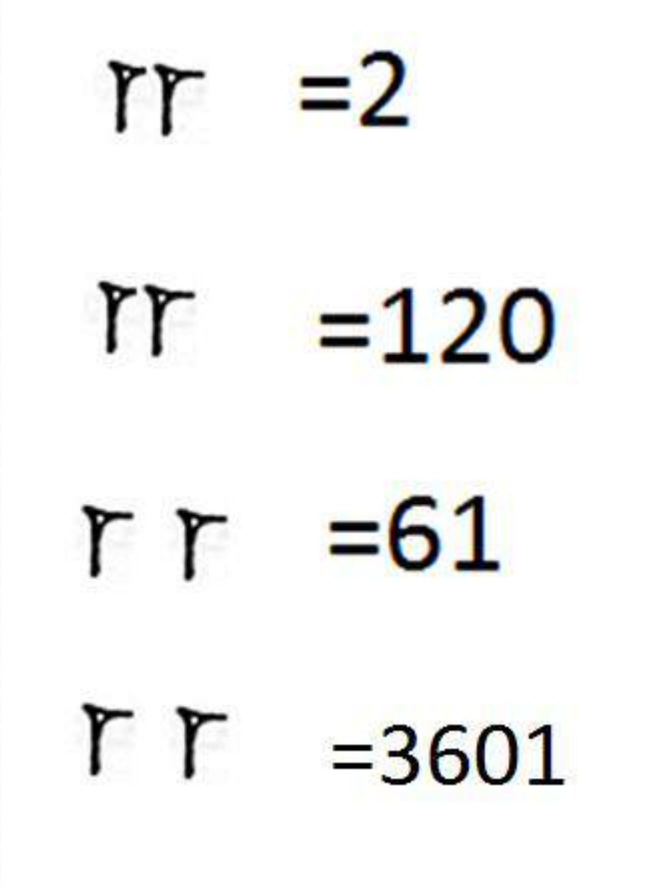
- O sistema babilônico de numeração era mais avançado do que o egípcio, pois já era posicional. A base utilizada era 60.
- Porém, a não utilização do zero deveria causar enorme confusão.

- Nesse sistema, um mesmo símbolo poderia representar certa quantidade de unidades ou tal quantidade multiplicada por uma potência inteira qualquer de 60.
- Assim, por exemplo, o número 132 (duas vezes 60 mais 12) poderia ser grafado como (2,12).

- Já o número 7.272 (2 vezes 60^2 mais 60 mais 12) seria grafado como (2, 1, 12).



- O escriba deveria deixar certo espaçamento entre os números para evitar ambiguidades. Quando alguma potência de 60 não era utilizada, também deixava um espaço em branco.
- Entretanto, os números 120 (duas vezes 60) e 2 (duas unidades) ou até mesmo 61 (60+1), por exemplo, eram grafados com inevitável ambiguidade.



Ideia de correspondência

- Como contar uma coleção de objetos usando os números naturais?
- Apontamos para um dos objetos e dizemos “um”, para outro objeto e dizemos “dois”, e vamos procedendo assim até o último objeto;
- Se o último número pronunciado for oito, dizemos que a coleção tem oito objetos.
- Fazemos corresponder a cada objeto um número da sucessão natural 1, 2, 3, 4, ..., n.
- Esta operação de fazer corresponder baseia-se na ideia de *correspondência*, uma das ideias basilares da matemática (CARAÇA, 1951).

Outro olhar

- Também podemos pensar que o processo de contar o número de elementos de um conjunto tem duas características fundamentais:
  - Todo objeto deve ser contado uma única vez;
  - Nenhum objeto pode escapar, isto é, ficar de fora da contagem.
- Parece simples contar, mas em muitos casos não é. Considere o seguinte problema:
- "Quantos dados diferentes podemos formar gravando números de 1 a 6 sobre as faces indistinguíveis de um cubo de madeira?"
- Para casos assim foi desenvolvida uma disciplina chamada *Análise Combinatória*, que é uma espécie de contar sem efetuar a contagem de fato.

Classificação das correspondências

- Numa sala encontram-se seis pessoas – três Antônios, dois Josés e um João.
- Para cada pessoa temos um único nome associado. Temos assim uma correspondência: pessoa → nome.
- Cada nome tem uma pessoa associada, mas não é única. Temos assim a correspondência: nome → pessoa.
- São chamadas de correspondências recíprocas. A primeira é chamada de *unívoca* ou *um-a-um*. A segunda é chamada de *um-a-vários*.

Correspondência biunívoca

- Se uma correspondência for unívoca e a sua recíproca também, dizemos que ela é ***biunívoca*** ou ***bijetora***.
- Por exemplo: em uma sala encontram-se seis homens com suas respectivas esposas. As correspondências marido → esposa e esposa → marido são ambas unívocas, logo, a correspondência é biunívoca.
- Sempre que duas entidades se podem por em correspondência biunívoca, elas dizem-se *equivalentes*.
- A equivalência de duas coleções de objetos significa igualdade de números de objetos. Dizemos também que eles tem a mesma **cardinalidade**.

Uma parada:

E quanto a conjuntos infinitos? É possível contar seus elementos?

Números pares

- Números pares são números da forma 2n, n=1, 2, 3, ...
- Existem mais números naturais ou números pares?
- A mesma quantidade!
- Para contar o número de pares, vamos estabelecer uma correspondência biunívoca com os números naturais.
- $$\begin{array}{cccccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & & 2n & \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & n & \end{array}$$
- Que pode ser representada assim: f(n)=2n, n=1, 2, 3, ...

Números inteiros

- Números inteiros são os números naturais mais os seus correspondentes negativos, isto é
- ...-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...
- Existem mais números naturais ou números inteiros?
- A mesma quantidade!
- Essa ficará como exercício. Resolveremos na próxima aula.

Mais uma parada:

Não aprendemos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$?

Números racionais

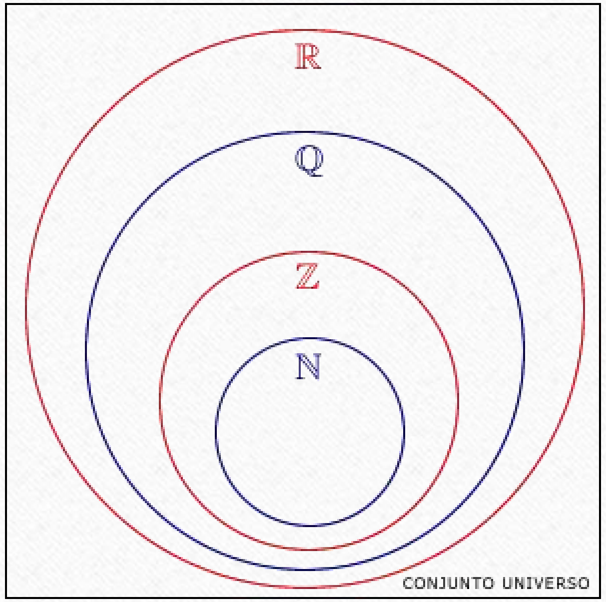
- Números racionais são números da forma a/b, com a e b inteiros e b diferente de zero.
- Existem mais números racionais ou números naturais?
- A mesma quantidade!!!

Diagonalização de Cantor

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
1	1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	7/1	8/1	9/1	...
2	½	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	7/2	8/2	9/2	...
3	1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	7/3	8/3	9/3	...
4	¼	2/4	¾	4/4	5/4	6/4	7/4	8/4	9/4	...
5	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5	7/5	8/5	9/5	
6	1/6	2/6	3/6	4/6	5/					
7	1/7	2/7	3/7	4/7	5/					
8	1/8	2/8	3/8	4/8	5/					
9	1/9	2/9	3/9	4/9	5/9	6/9	7/9	8/9	9/9	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Realizando esse processo, conseguimos contar cada elemento uma única vez e não deixamos nenhum de fora!!!

Como fica essa representação?



Procure em livros de matemática do ensino fundamental ou médio se você acha o diagrama ao lado. Reflita sobre a questão dos infinitos números racionais estarem em correspondência biunívoca com os naturais. Pode usar livros, internet ou qualquer outra fonte. Traga o que descobriu para compartilhar com os colegas na próxima aula.

E os números irracionais? Podemos contá-los?

- Vimos que os conjuntos dos números pares, dos números inteiros e dos números racionais são enumeráveis, isto é, podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números naturais.
- O conjunto dos números irracionais é um exemplo de um conjunto não enumerável!

Procedimento de Cantor

- Imagine que possamos fazer, como fizemos com os racionais, uma listagem de todos os números reais. Vamos supor que todos os infinitos números reais do intervalo [0, 1] estão na lista abaixo, sem uma ordem especial.
- 0,1289405840...
- 0,7635308473...
- 0,3456739363...
- 0,2539469001...
- 0,5693847557...
- ....
- Cantor tomou um número formado pela diagonal dessa lista, que seria 0,16598...
- Somou 1 a cada dígito obtendo o número *d=0,27609...*
- O número *d* não está na lista de números acima, pois difere de cada número em pelo menos um dígito.

Vídeo

Os infinitos de Cantor

Uma nova parada:

Os racionais são enumeráveis (bijeção com os naturais) mas os reais não são enumeráveis. Se os reais são a união dos racionais com os irracionais, o que se pode dizer dos irracionais?

A união de dois conjuntos enumeráveis ainda é um conjunto enumerável?

- Um conjunto enumerável é aquele que pode ser colocado em bijeção com os números naturais.
- Visto de outra forma, é aquele conjunto em que podemos apontar seus elementos em uma ordem qualquer e dizer 1, 2, 3, 4, ...
- Se cada elemento de um conjunto infinito está relacionado com um número natural, parece não “sobrar espaço” para mais nada, não é mesmo?
- Não no caso de conjuntos infinitos.

Hilbert Hotel

- O Hilbert Hotel tem infinitos quartos, mas está lotado. Um hóspede chamado Cantor chega ao hotel.
- - Um quarto por gentileza.
- - Lamento senhor, o hotel está lotado.
- - Mas vocês não tem infinitos quartos?
- - Sim, é verdade, porém todos os nossos infinitos quartos estão ocupados. Não há um que esteja vago.
- - Por que você não faz o seguinte: mude o hóspede 1 para o quarto 2. Depois, o hóspede do quarto 2 para o quarto 3, do 3 para o 4, do 4 para o 5, e assim por diante. Uma vez que o número de quartos é infinito, todos os hóspedes podem ser mudados e o quarto 1 ficará disponível para mim.
- O gerente do hotel não teve argumentos contrários e aceitou mais um hóspede.

Hilbert Hotel, pt. 2

- Um grupo de infinitos hóspedes chega de excursão e seguem direto para o Hotel Hilbert, afinal, ouviram dizer que lá existem infinitos quartos.
- O gerente, já com cara de bravo, diz:
- - Nem vem que não tem. Acabei de aceitar um hóspede e deu um trabalhão mudar infinitos hóspedes para acomodá-lo.

- Um garotinho chamado Galileu disse:
- - Nesse caso, o sr. vai ter que nos aceitar também.
- - Impossível, vocês são infinitos, ele era apenas um.
- - Faça o seguinte: o hóspede do quarto 2 o sr. desloca para o quarto 4, do 3 para o 9, do 4 para o 16, e assim por diante. Assim ficarão disponíveis infinitos quartos.
- - Claro que não! Isso é loucura!
- - Claro que sim! Ficarão disponíveis os quartos 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, ...

Referências

- CARAÇA, Bento de Jesus. **Fundamentos de matemática**. 1951.
- ACZEL, Amir. **O mistério do Alef**. São Paulo: Globo, 2003.
- LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.
- SIARETTA, Pedro. **Os infinitos de Cantor**. Matemática Multimídia. Casablanca, 2010. Disponível em http://www.youtube.com/watch?v=f1Ak-6vMVpg. Acesso em 13/5/2014.

APÊNDICE N

Dízima periódica

Definição e classificação

- **Definição**
- Entende-se por **dízima periódica** como uma representação numérica onde existe uma seqüência finita de algarismos que se repetem indefinidamente.
- Exemplos:
- 2/7 = 0,285714285...
  1/9 = 0,111111111...
  4/13 = 0,307692307...
- **Classificação**
- Dízimas periódicas simples: Quando o período aparece logo após à virgula.
- Exemplos:
- 2/3 = 0,6666666....... Período: 6
  4/13 = 0,307692307.... Período: 307692
  31/33 = 0,93939393.... Período: 93
- Dízimas periódicas compostas: Quando existe uma parte não repetitiva entre a vírgula e a parte periódica.
- Exemplos:
- 35/42 = 0,833333.... Período: 3 , Parte não periódica: 8
  44/45 = 0,977777.... Período: 7 , Parte não periódica: 9
  35/36 = 0,972222.... Período: 2 , Parte não periódica: 97

Reconhecimento de alguns irracionais

Como reconhecer se uma raiz quadrada é um número irracional?

- Pode-se usar duas regras:
  - Regra 1 – se p é primo, então $\sqrt{p}$ é irracional.
  - Regra 2 – se a não é um quadrado perfeito, então $\sqrt{a}$ é um número irracional.

As reticências

3,1444...

- O que me garante que não teremos 3,1444144441...?
- Nada garante! Mas existe um acordo (às vezes tácito) de que se coloca as reticências após a parte periódica ficar ‘clara’ para o leitor, em geral, após três repetições. Ao escrever 3,1444... eu quero dizer que 1 é a parte não periódica e 4 é a parte periódica.
- Se quisesse que 1444 fosse o período teria que escrever 3,144414441444...
- Porém, para representar partes não periódicas, é mais complicado. No caso de 1,121221222... pode ser interpretado que 121221 é uma parte não periódica e o último algarismo 2 é o período.
- Vamos ver como os livros didáticos tratam essa questão? Eles chamam atenção para o uso as vezes dúbio das reticências?

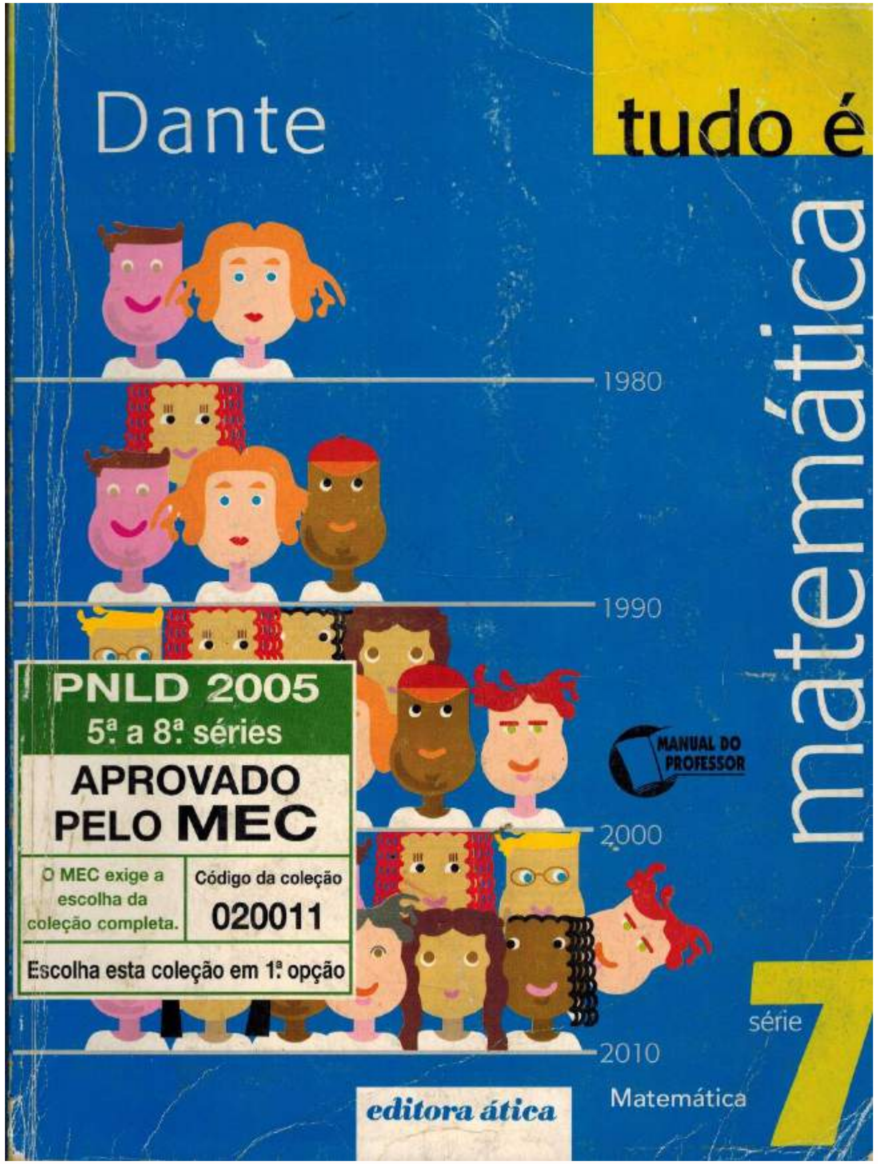
APÊNDICE O

Análise de livros didáticos

GERALDO BROETTO – IFES/CAMPUS VITÓRIA

Referência do livro:

- DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática**. São Paulo: Ática, 2002.



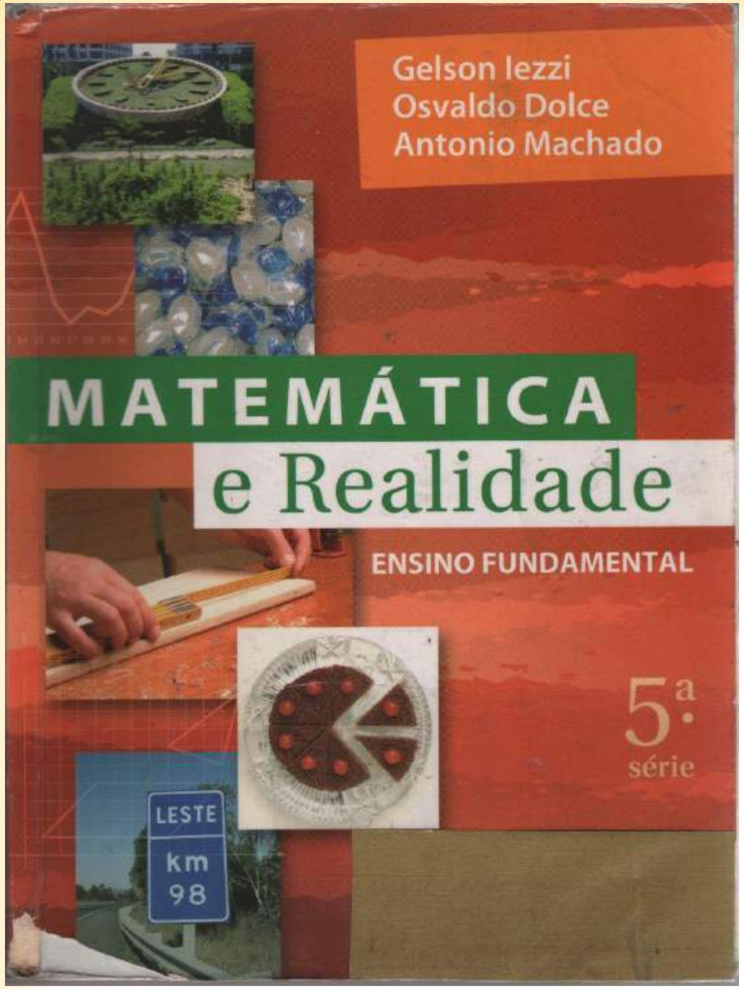
Primeiras impressões

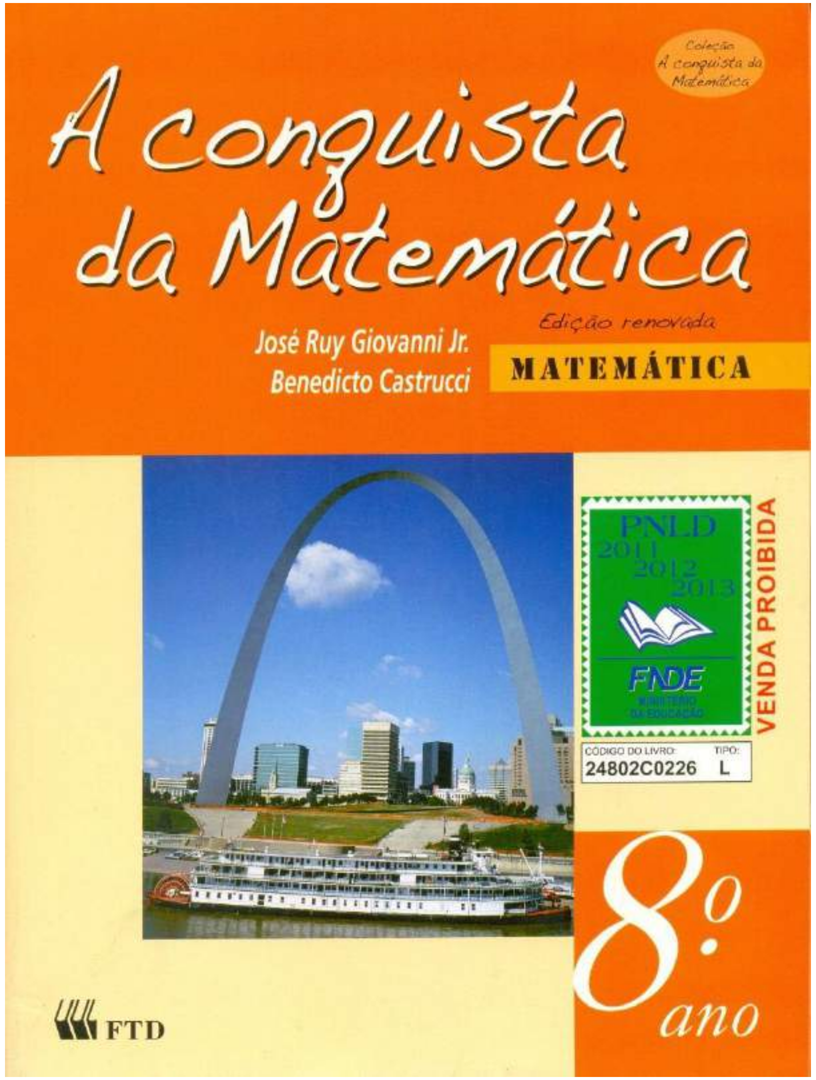
A capa possui alguma ilustração? Na sua opinião, essas ilustrações passam alguma imagem do que é a matemática?

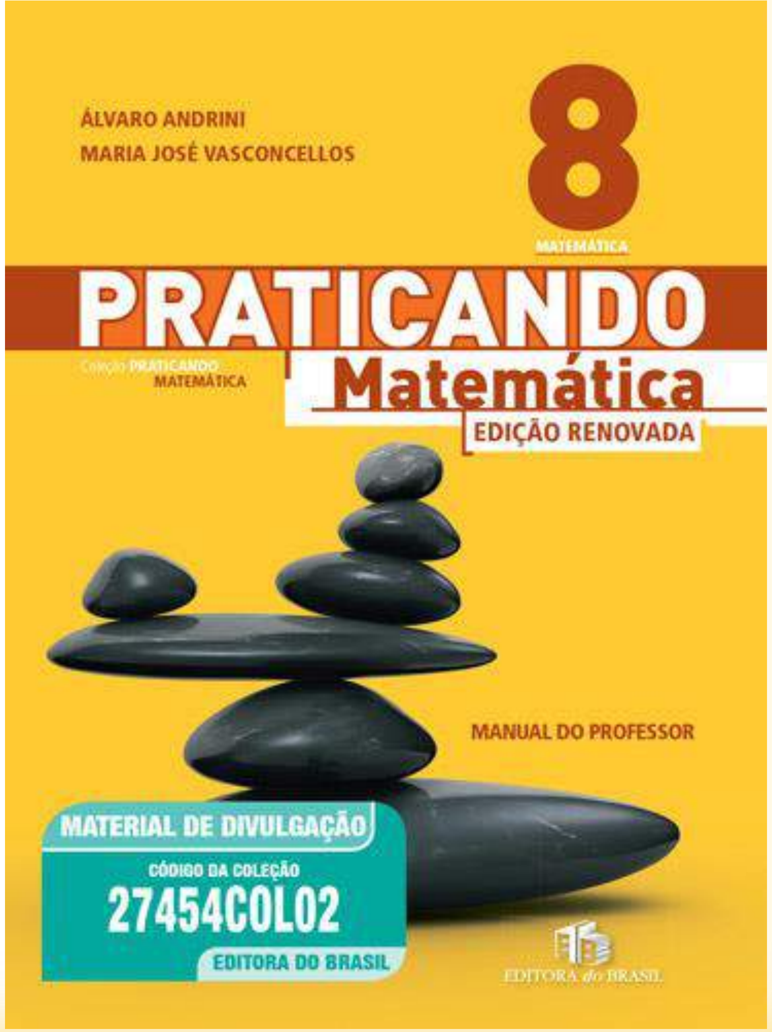
- A capa possui ilustração. São várias crianças, divididas em grupos por décadas, 1980, 1990, 2000 e 2010. A cada década aumenta o número de crianças.
- São crianças de várias cores e elas parecem felizes.
- Mas e a matemática? Qual a relação da ilustração com a matemática?

Vamos dar uma olhada em algumas capas?

O QUE ME DIZEM DELAS?


Gelson Iezzi
Osvaldo Dolce
Antonio Machado
MATEMÁTICA
e Realidade
ENSINO FUNDAMENTAL
5ª série
LESTE
km
98


Coleção A conquista da Matemática
A conquista da Matemática
José Ruy Giovanni Jr.
Benedicto Castrucci
Edição renovada
MATEMÁTICA
PNLD 2011 2012 2013
FNDE
VENDA PROIBIDA
CÓDIGO DO LIVRO: 24802C0226
TIPO: L
8º ano
FTD


ÁLVARO ANDRINI
MARIA JOSÉ VASCONCELLOS
8
MATEMÁTICA
PRATICANDO
Matemática
Coleção PRATICANDO MATEMÁTICA
EDIÇÃO RENOVADA
MANUAL DO PROFESSOR
MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
CÓDIGO DA COLEÇÃO
27454COL02
EDITORA DO BRASIL
EDITORA do BRASIL

E quanto ao título do livro? É encorajador para o estudante? Na sua opinião, o título passa alguma imagem do trabalho que será desenvolvido no livro em relação à matemática?

- “Tudo é matemática”.
- Tudo é matemática?
- Acho que a mensagem por trás do título é: estude, pois a matemática está em todo lugar e você precisará dela, já que tudo é matemática.

Vamos dar uma olhada em alguns títulos?

O QUE ME DIZEM?

Alguns títulos de livros de matemática à venda (consultados no Buscapé):

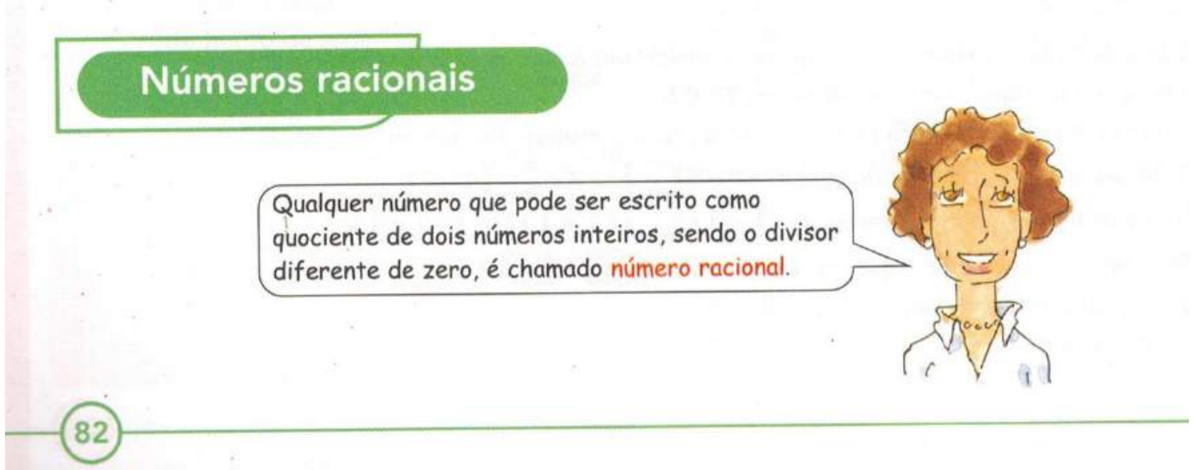
- Matemática na medida certa
- Matemática e vida: números, medidas, geometria.
- Matemática: jogos e conceitos
- Hoje é dia de matemática
- Matemática: construir e aprender.
- Matemática no plural
- Matemática: registrando descobertas
- Matemática: pensar & descobrir
- Vencendo com matemática
- Matemática em construção
- Pode contar comigo – Matemática
- Marcha criança - Matemática

- Pensar e viver – Matemática
- Lições de matemática
- Matemática – fazendo a diferença
- A conquista da matemática
- Matemática e realidade
- Praticando matemática
- A escola é nossa – Matemática
- Estação matemática
- Passaporte para a matemática
- Tempo de matemática
- Agora eu sei! Matemática

Dízima periódica

O autor define dízima periódica? Se sim, transcreva o trecho (sempre indicando a página).

- Primeiro ele define o que são números racionais.


Números racionais

Qualquer número que pode ser escrito como quociente de dois números inteiros, sendo o divisor diferente de zero, é chamado número racional.

82

- Em seguida, mostra alguns exemplos e define dízima periódica como decimal infinita que repete sempre o mesmo período (p. 83).
- O que é período? Observe que ele não trabalha essa noção, tampouco a define.
- Será que foi definido em páginas anteriores? Mesmo se foi, valeria a pena relembrar aqui.

Veja alguns exemplos:

a) 5 é racional, pois pode ser escrito como $\frac{5}{1}$ ou 5 : 1.

b) –3 é racional, pois (–6) : (+2) = –3, e podemos indicá-lo assim: $-3 = \frac{-6}{+2}$.

c) 0,6 é racional, pois $0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 3 : 5$.

d) $1\frac{3}{4}$ é racional, pois $1\frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ e $\frac{7}{4} = 7 : 4$.

e) Dividindo 2 por 3, obtemos um número racional que, na forma decimal, é conhecido por *dízima periódica* (decimal infinita que repete sempre o mesmo período).

Veja:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \hline 20 & 0{,}666\ldots \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$$

Então: $0{,}666\ldots = \frac{2}{3}$ é um número racional.

f) $\frac{41}{99} = 0{,}414141\ldots$ também é um número racional.

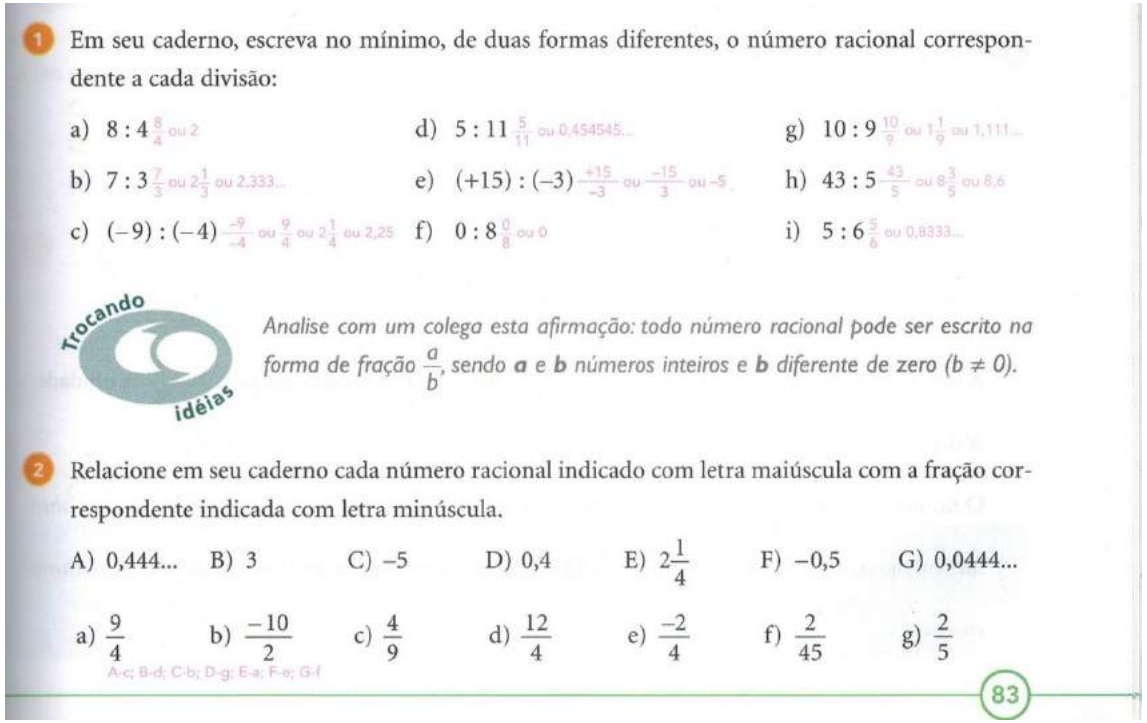
$$\begin{array}{r|l} 410 & 99 \\ \hline -396 & 0{,}4141\ldots \\ \hline 140 & \\ -99 & \\ \hline 410 & \\ -396 & \\ \hline 14 & \end{array}$$

O autor esclarece o significado das reticências? É feito algum tipo de acordo com o leitor? Sugere também o uso do traço acima da parte periódica?

- Não é esclarecido e nem é feito nenhum acordo. Também não sugere o uso do traço.

Uma observação

- É sempre interessante também analisar os exercícios.
- Podemos verificar se são de tipos variados ou se são sempre do mesmo tipo, podemos verificar se exigem entendimento do conceito ou se são apenas repetições mecânicas, entre outras características.
- Notamos entre os exercícios 1 e 2 um pequeno entre misso chamado “trocando ideias” em que os alunos deveriam discutir uma afirmação. Mas, notem que ela é a própria definição!



1 Em seu caderno, escreva no mínimo, de duas formas diferentes, o número racional correspondente a cada divisão:

a) $8 : 4$ $\frac{8}{4}$ ou 2
b) $7 : 3$ $\frac{7}{3}$ ou $2\frac{1}{3}$ ou 2,333...
c) $(-9) : (-4)$ $\frac{-9}{-4}$ ou $\frac{9}{4}$ ou $2\frac{1}{4}$ ou 2,25
d) $5 : 11$ $\frac{5}{11}$ ou 0,454545...
e) $(+15) : (-3)$ $\frac{+15}{-3}$ ou $\frac{-15}{3}$ ou -5
f) $0 : 8$ $\frac{0}{8}$ ou 0
g) $10 : 9$ $\frac{10}{9}$ ou $1\frac{1}{9}$ ou 1,111...
h) $43 : 5$ $\frac{43}{5}$ ou $8\frac{3}{5}$ ou 8,6
i) $5 : 6$ $\frac{5}{6}$ ou 0,8333...

Trocando idéias

*Analise com um colega esta afirmação: todo número racional pode ser escrito na forma de fração $\frac{a}{b}$, sendo **a** e **b** números inteiros e **b** diferente de zero ($b \neq 0$).*

2 Relacione em seu caderno cada número racional indicado com letra maiúscula com a fração correspondente indicada com letra minúscula.

A) 0,444... B) 3 C) -5 D) 0,4 E) $2\frac{1}{4}$ F) $-0,5$ G) 0,0444...

a) $\frac{9}{4}$ b) $\frac{-10}{2}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{12}{4}$ e) $\frac{-2}{4}$ f) $\frac{2}{45}$ g) $\frac{2}{5}$

A-c; B-d; C-b; D-g; E-a; F-e; G-f

O autor mostra que se um número é representado por uma dízima finita ou periódica então ele pode ser escrito como uma fração de inteiros? Mostra a recíproca?

- O autor faz duas contas em que as frações tem como resultado dízimas periódicas.
- Ele não mostra que TODA fração de inteiros deve ter como resultado uma dízima periódica.
- Também não mostra a recíproca, isto é, toda dízima periódica pode ser escrita em forma de fração.

Veja alguns exemplos:

a) 5 é racional, pois pode ser escrito como $\frac{5}{1}$ ou 5 : 1.

b) –3 é racional, pois (–6) : (+2) = –3, e podemos indicá-lo assim: $-3 = \frac{-6}{+2}$.

c) 0,6 é racional, pois $0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 3 : 5$.

d) $1\frac{3}{4}$ é racional, pois $1\frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ e $\frac{7}{4} = 7 : 4$.

e) Dividindo 2 por 3, obtemos um número racional que, na forma decimal, é conhecido por *dízima periódica* (decimal infinita que repete sempre o mesmo período).

Veja:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \hline 20 & 0{,}666... \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$$

Então: $0{,}666... = \frac{2}{3}$ é um número racional.

f) $\frac{41}{99} = 0{,}414141...$ também é um número racional.

$$\begin{array}{r|l} 410 & 99 \\ \hline -396 & 0{,}4141... \\ 140 & \\ -99 & \\ 410 & \\ -396 & \\ 14 & \end{array}$$

Número Irracional

Quantas páginas são dedicadas ao assunto?

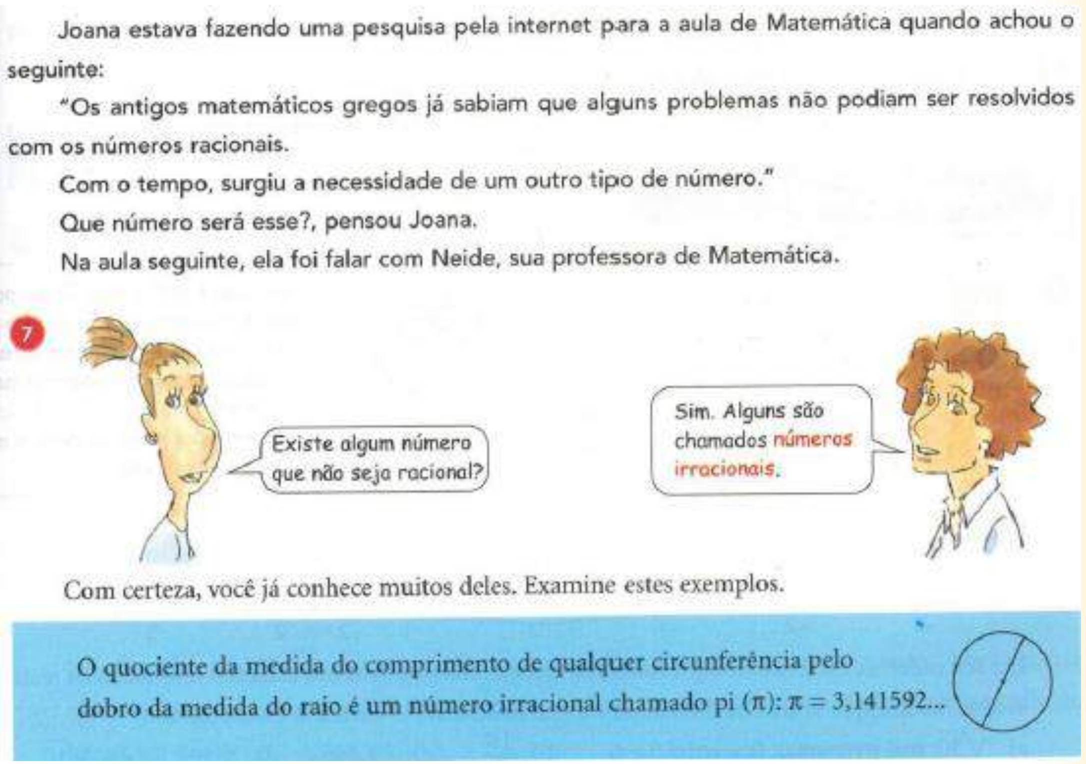
- Uma página.

Como o autor começa a falar do assunto? Começa com exemplos ou com uma definição?

- Começa com um diálogo professor-aluno.

Descreva sucintamente cada etapa do desenvolvimento do capítulo ou seção que trata dos números irracionais

- *O autor começa dizendo que uma aluna pesquisou na internet e descobriu que os gregos já sabiam que alguns problemas não poderiam ser resolvidos com números racionais. A aluna perguntou para a professora "existem números que não são racionais?" e a professora disse que sim, dando o exemplo de pi. Em seguida, o autor faz aproximações de raiz quadrada de dois e diz que a dízima não será finita nem periódica e que esse número é irracional. Em seguida propõe dois exercícios usando calculadora.*



Joana estava fazendo uma pesquisa pela internet para a aula de Matemática quando achou o seguinte:

"Os antigos matemáticos gregos já sabiam que alguns problemas não podiam ser resolvidos com os números racionais.

Com o tempo, surgiu a necessidade de um outro tipo de número."

Que número será esse?, pensou Joana.

Na aula seguinte, ela foi falar com Neide, sua professora de Matemática.

7

Existe algum número que não seja racional?

Sim. Alguns são chamados números irracionais.

Com certeza, você já conhece muitos deles. Examine estes exemplos.

O quociente da medida do comprimento de qualquer circunferência pelo dobro da medida do raio é um número irracional chamado pi (π): $\pi = 3{,}141592...$

O autor define número irracional? Se sim, transcreva o trecho

- Não define. Ele faz aproximações com raiz quadrada de dois e diz que o processo levará a uma dízima não periódica.
- Por que continua indefinidamente? Por que não chegará a uma dízima periódica?

As raízes quadradas não-exatas de números naturais são também números irracionais.

Veja, por exemplo, $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2} = ?$

$1^2 = 1$ (menor do que 2) $2^2 = 4$ (maior do que 2)

Logo, $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2.

$(1,4)^2 = 1,96$ (menor do que 2) $(1,5)^2 = 2,25$ (maior do que 2)

Logo, $\sqrt{2}$ está entre 1,4 e 1,5.

$(1,41)^2 = 1,9881$ (menor do que 2) $(1,42)^2 = 2,0164$ (maior do que 2)

Logo, $\sqrt{2}$ está entre 1,41 e 1,42.

Se continuarmos o processo, não chegaremos nem a uma decimal exata nem a uma dízima periódica. Escrevemos assim:

$\sqrt{2} = 1,414213562...$

$\sqrt{2}$ é um número irracional.

As reticências indicam que as casas decimais continuam indefinidamente.

No seu ponto de vista, existe algum problema ou incoerência com essa definição?

É mostrado por que ter dízima não periódica implica necessariamente em não poder ser escrito em forma de fração de inteiros? E a recíproca, é mostrada?

- Não.

Quais são os exemplos de números irracionais apresentados?

- $\sqrt{2}$ e π.

O autor mostra algum caminho para identificar quando os radicais são irracionais ou inteiros? Qual?

- Não.

Os números irracionais são marcados na reta numérica? Como?

É apresentada alguma ilustração da relação $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$? Desenhe aqui

- Não.

Quanto ao exercícios relativos à números irracionais, eles são repetitivos ou variados? Quais os tipos de exercícios propostos? Transcreva pelo menos três tipos de exercícios diferentes (se houver) que envolvam números irracionais

- Há apenas dois exercícios. O primeiro pede para usar calculadora para descobrir se os números (com pi e em forma de radicais) são irracionais. O segundo não pede para usar calculadora, mas, se no primeiro foi usada, provavelmente estará à mão e o aluno vai usar também.

Efetue as operações abaixo usando uma calculadora. Você obterá mais exemplos de números irracionais na forma decimal. Coloque reticências no final, pois não são decimais exatas.

a) $\frac{\pi}{2}$ 1,57079632... b) $\sqrt{37}$ 6,08276253... c) $\sqrt{90}$ 9,48683298... d) $\sqrt{20}$ 4,47213595...

8 O número $\sqrt{1,44}$ é racional ou irracional? Por quê?

Racional. Como $(1,2)^2 = 1,44$, então $\sqrt{1,44} = 1,2$. E 1,2 é racional, pois $1,2 = \frac{12}{10}$.

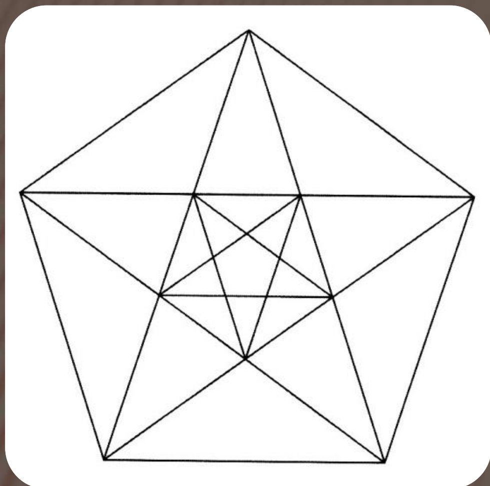
Qual sensação você tem olhando para a seção ou capítulo do livro que trata dos irracionais como um todo? Que a imagem de número irracional é passada para o aluno?

- Algo bastante esotérico, transcendental.

Como professor, você usaria esse livro com seus alunos?

- Não para esta parte de irracionais.

APÊNDICE P



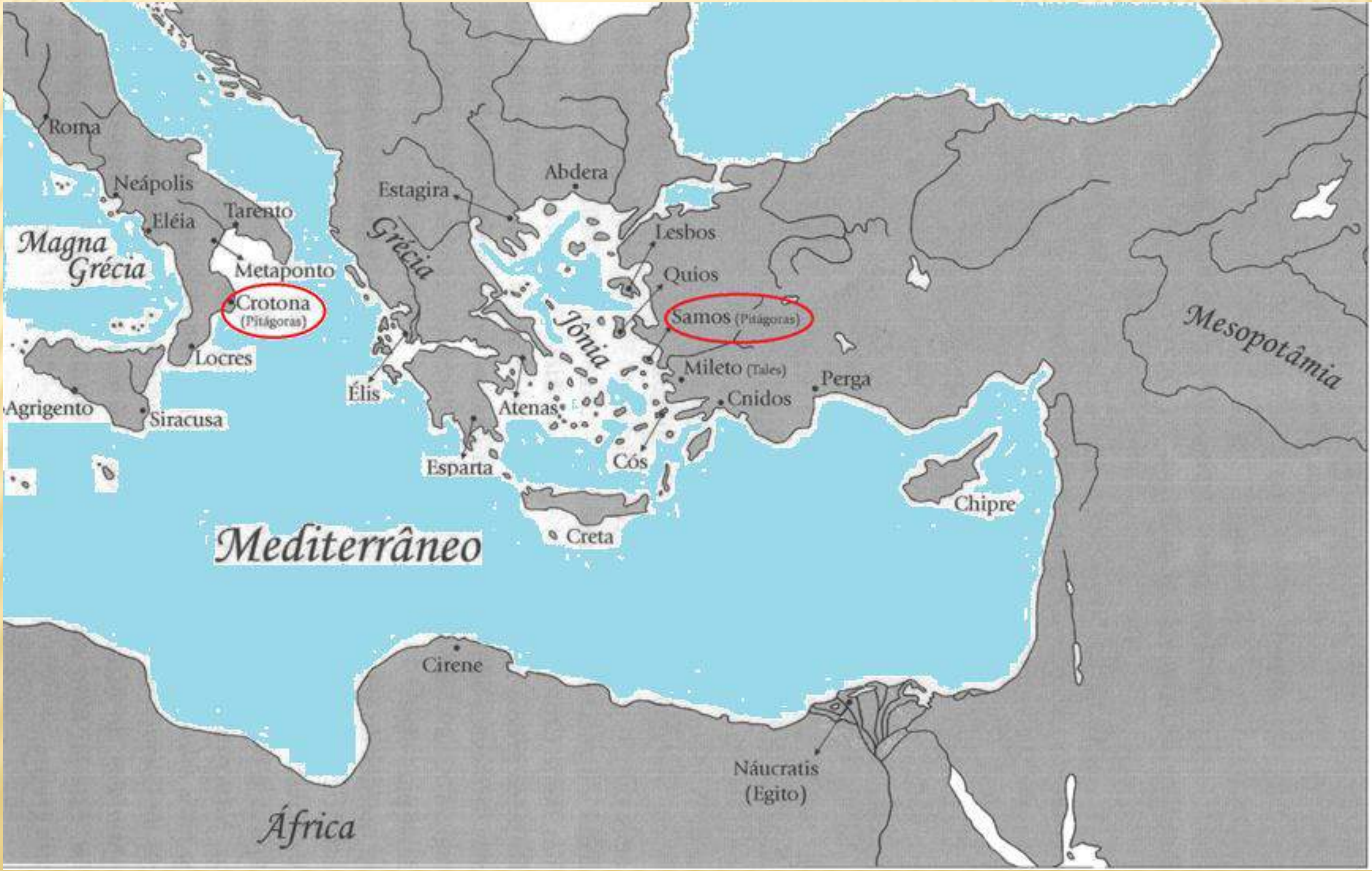
PITÁGORAS DE SAMOS

"...três quintos dele, gênio, e dois quintos, cristalino absurdo" (J.R. Lowell)

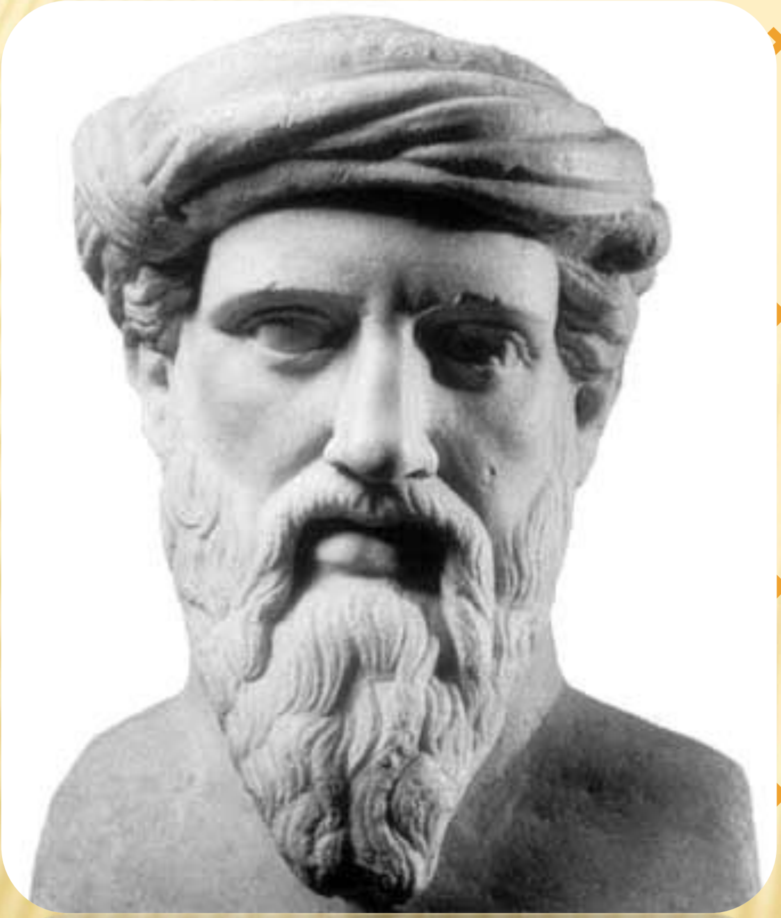
BREVE HISTÓRICO

- A Jônia (e não a península grega) foi o verdadeiro berço da Filosofia e da Matemática dedutiva.
- Em meados do século VII a.C., os egípcios permitiram que comerciantes jônios estabelecessem um entreposto comercial na cidade portuária de Náucratis, situada no estuário do Nilo.
- Este centro prosperou em razão do intenso comércio de papiros e outros produtos egípcios, em troca de azeite, cerâmica e vinho gregos.
- Os gregos provavelmente absorveram daí seus conhecimentos de Geometria, Aritmética e Astronomia.

PRINCIPAIS CENTROS DE ORIGEM GREGA EM MEADOS DO SÉCULO VII A.C. - SAMOS E CROTONA



PITÁGORAS DE SAMOS



- O período em que Pitágoras viveu não é conhecido com exatidão, mas conjectura-se que tenha sido de 586 a.C. a 500 a.C.
- Se isso for verdade, e se Tales viveu de 640 a.C a 564 a.C., Pitágoras tinha pouco mais de 20 anos quando Tales morreu.
- Não é impossível, portanto, que os dois tenham se encontrado alguma vez.
- Independentemente disso, o jovem de Samos foi influenciado pelas idéias de Tales.

FILOSOFIA E MATEMÁTICA

- É creditada a Pitágoras a introdução das palavras “filosofia” e “matemática”.
- “Filosofia” significa amor ao conhecimento, ou, amor à sabedoria.
- “Matemática” vem de “Máthema”, que em grego significa ciência.
- “Os pitagóricos literalmente encravaram o universo na matemática. De fato, para os pitagóricos, Deus não era um matemático, a matemática era Deus!” (LIVIO, 2010, p.45)

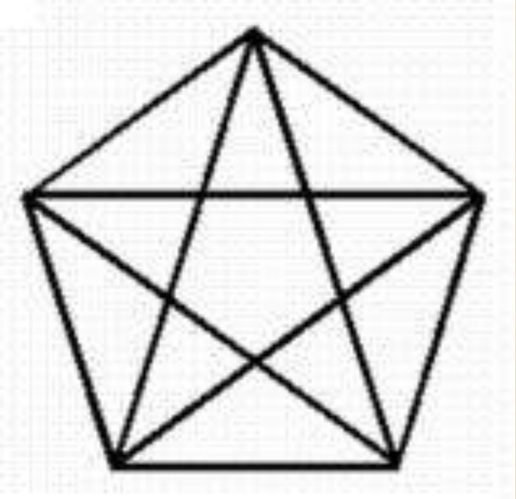
A ESCOLA PITAGÓRICA

A ESCOLA PITAGÓRICA

- Pitágoras deixou a ilha de Samos em 546 a.C., fugindo das tropas do rei persa Ciro.
- Passou algum tempo no Egito e talvez na Mesopotâmia, mas acabou estabelecendo moradia na cidade de Crotona, ao sul da península italiana.
- Lá ele fundou uma escola de cunho místico-religioso, voltada para o estudo de Matemática.
- Os frequentadores dessa seita-escola ficaram conhecidos como pitagóricos, geralmente pessoas ricas da sociedade.
- Envolviam-se em atividades políticas, religiosas, filosóficas e matemáticas.

MATEMÁTICA E MISTICISMO

- A escola pitagórica era politicamente conservadora e tinha um código de conduta rígido.
- O vegetarianismo era imposto a seus membros, aparentemente por que acreditavam na transmigração das almas (um animal poderia ser a moradia da alma de algum amigo falecido).
- Entre os tabus da escola estava o de não comer lentilhas, feijões ou qualquer alimento que causasse gases.
- Os números ímpares eram femininos, os pares masculinos.
- O número 1 era o gerador dos outros números, e também o número da razão.

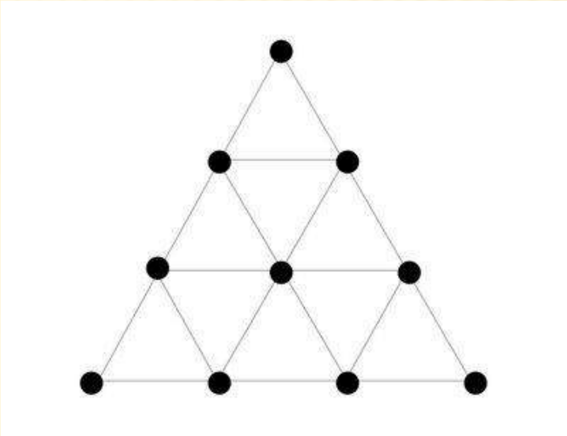


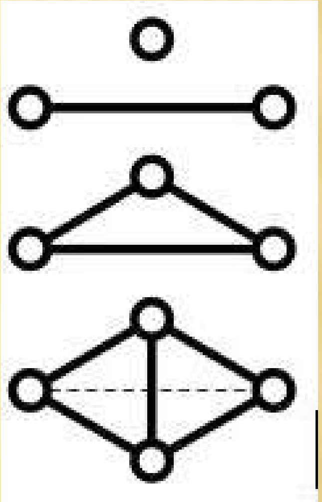
“TUDO É NÚMERO”

- Se todas as coisas possuem forma, e formas podem ser descritas por números, então os números se tornam a essência do conhecimento.
- “O objetivo dos pitagóricos era atingir a purificação da alma através da intoxicação do espírito pela beleza dos números”. (GLEISER, 1997)

A TETRAKTYS

- Os pitagóricos tinham uma maneira de representar números por meio de seixos ou pontos.
- A **tetraktys** era representada pelo triângulo construído com 1+2+3+4 seixos, e era considerada o símbolo da perfeição.
- Aos olhos dos pitagóricos, a **tetraktys** abarcava todas as dimensões percebidas do espaço: 1 (ponto), 2 (linha), 3 (superfície) e 4 (espaço).
- Possivelmente também havia relação com os 4 elementos da natureza: terra, fogo, ar e água.





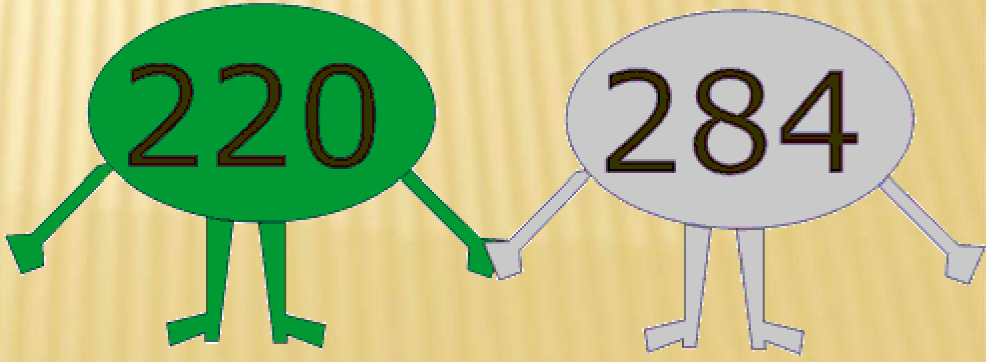
OS PITAGÓRICOS E A TEORIA DOS NÚMEROS

NÚMEROS PERFEITOS

- São aqueles que são iguais à soma de seus divisores, excetuados eles próprios.
- 6=1+2+3
- Os perfeitos seguintes são 28 e 496.
- Hoje, conhecemos mais de 30 números perfeitos.
- Veremos que por volta de 300 a.C., Euclides já tinha uma fórmula para gerar números perfeitos.
- Segundo o misticismo pitagórico: Deus criou o mundo em 6 dias, que é um número perfeito.

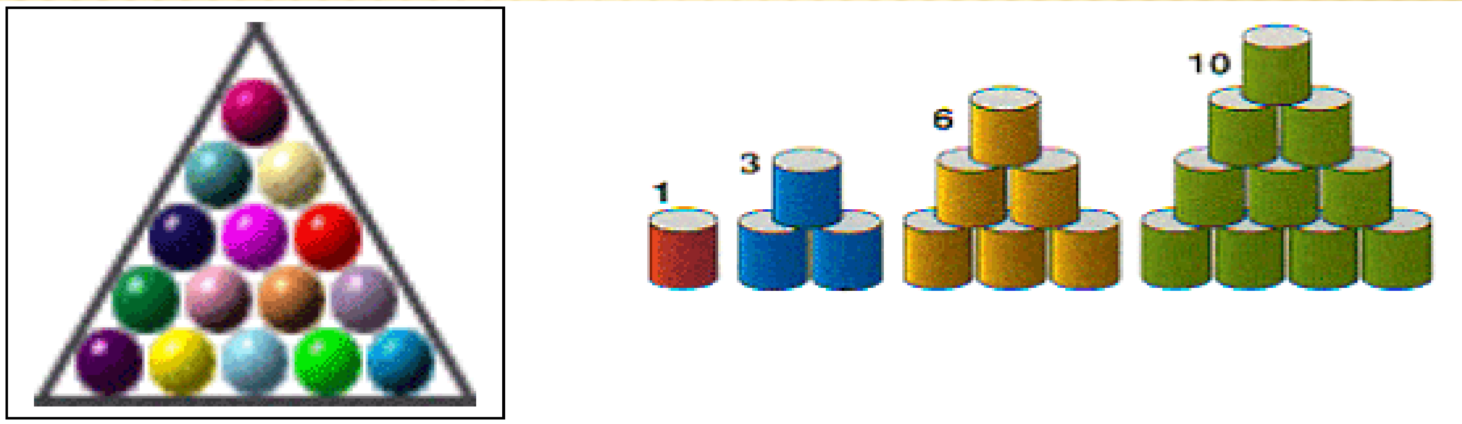
NÚMEROS AMIGOS

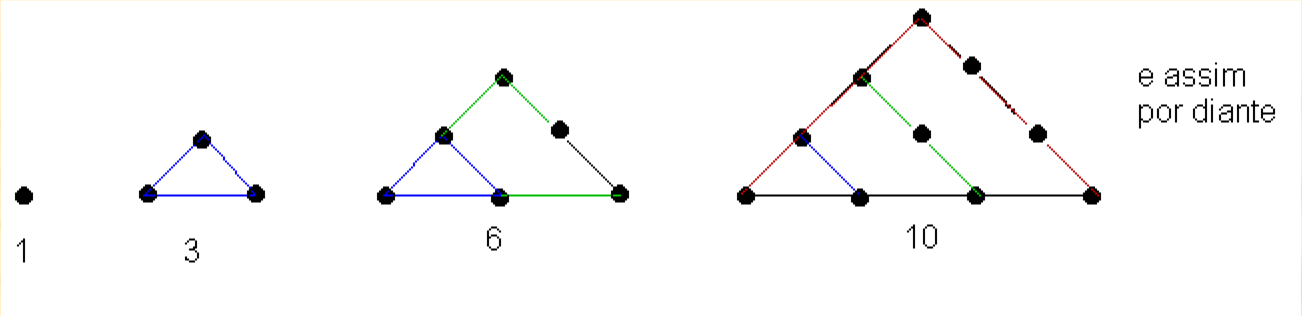
- Dois números formam um par de números amigos quando cada um é igual a soma dos divisores do outro.
- 220 e 284 são amigos.
- Somente com Fermat, em 1636, descobriu-se outro par de números amigos: 17296e 18416.
- Em seguida Descartes achou o par 9.363.584 e 9.437.056.
- Segundo o misticismo pitagórico, dois talismãs com esses números selariam uma amizade perfeita entre os que os usassem.



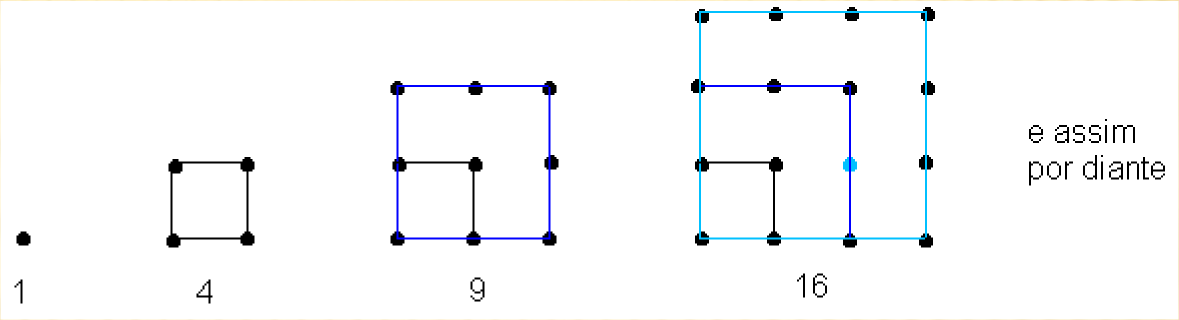
NÚMEROS FIGURADOS

- Embora nem todos historiadores da matemática entendam que os números perfeitos e amigáveis possam ser atribuídos aos pitagóricos, parece haver uma concordância universal quanto a que os números figurados se originaram da escola pitagórica.

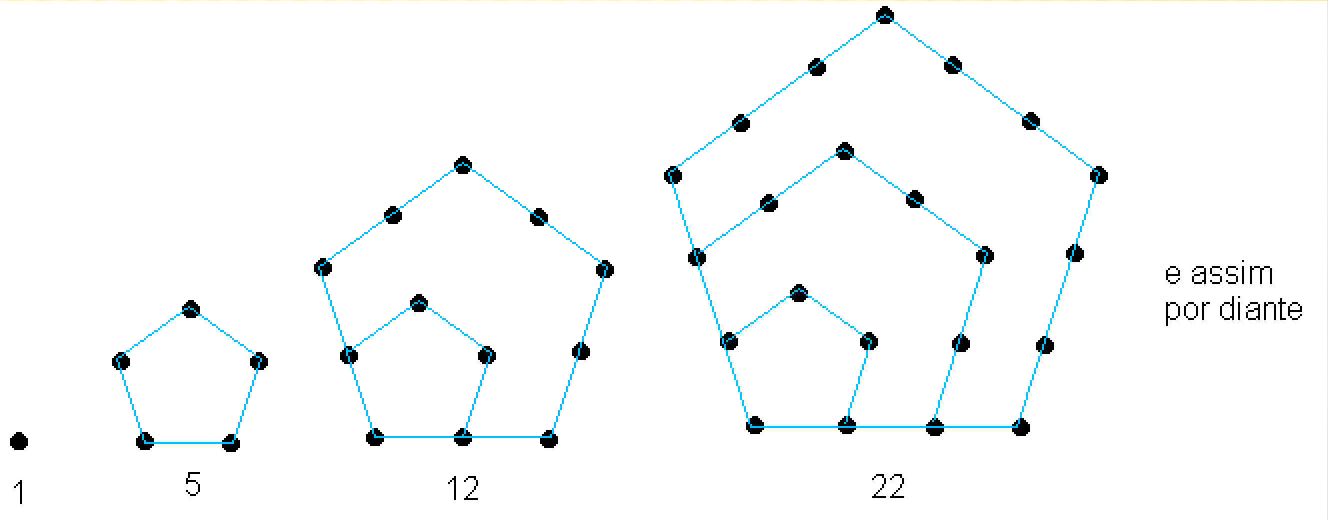




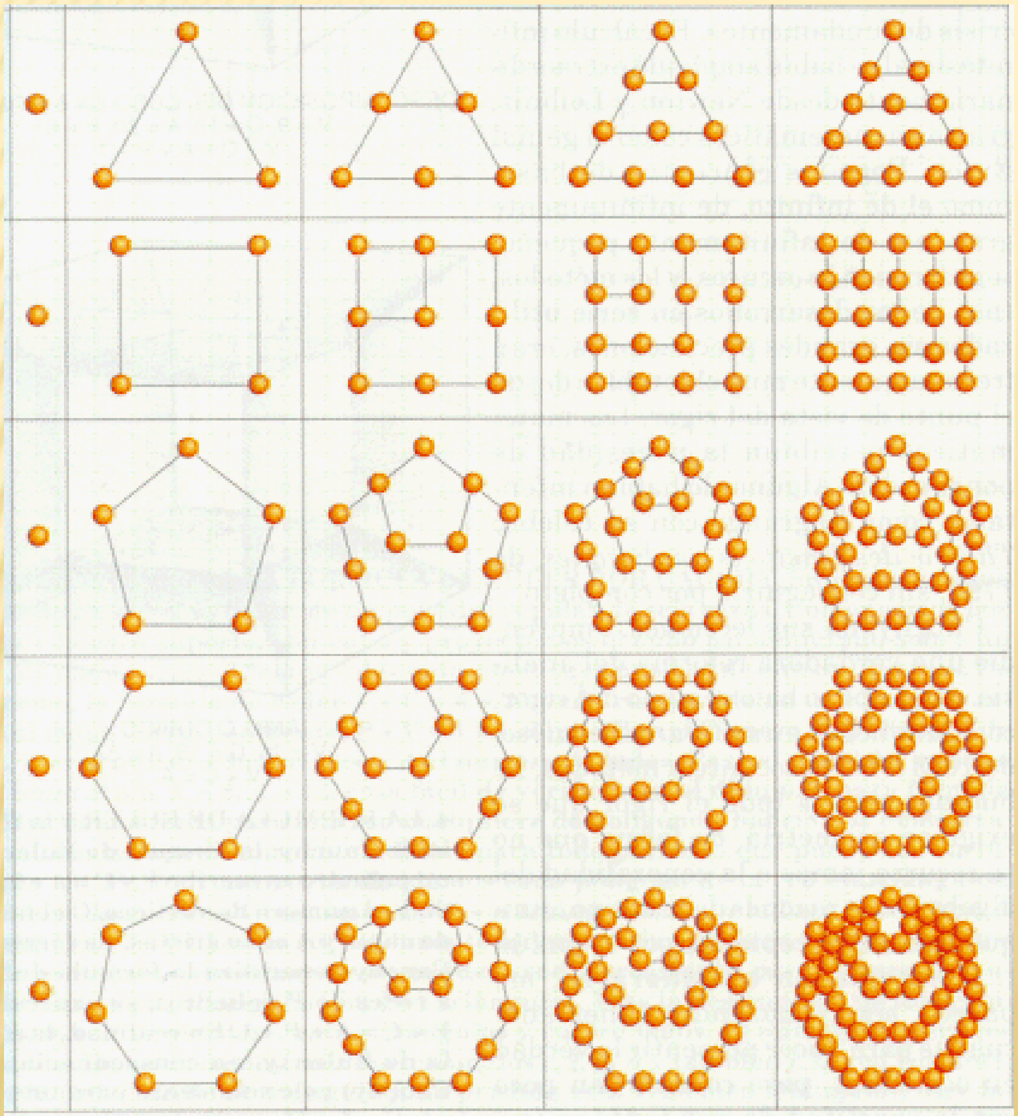
números triangulares



números quadrados



números pentagonais



1, 3, 6, 10, 15, ... (triangulares)

1, 4, 9, 16, 25, ... (quadrados)

1, 5, 12, 22, 35, ... (pentagonais)

1, 6, 15, 28, 45, ... (hexagonais)

1, 7, 18, 34, 55, ...(heptagonais)

O INÍCIO DA LENDA

MORTE DE PITÁGORAS

- Com o tempo, a influência e as tendências aristocráticas (não-democráticas) da irmandade tornaram-se tão grandes que forças democráticas do sul da Itália destruíram os prédios da escola fazendo com que a confraria se dispersasse.
- Pitágoras foi forçado a refugiar-se na cidade de Metaponto, também na Magna Grécia, onde diz-se que morreu assassinado durante uma rebelião popular.
- A irmandade, apesar de dispersa, continuou a existir por pelo menos mais duzentos anos.

UMA ADVERTÊNCIA

- A exemplo de Tales, o que sabemos sobre Pitágoras é um misto de fatos e lendas, sendo muito difícil distinguir uns dos outros.
- Segundo EVES(2004), a história dos 300 primeiros anos da matemática grega foi obscurecida pela grandeza dos *Elementos de Euclides*, escrito por volta de 300 a.C.
- Essa seminal obra teria eclipsado todos os trabalhos anteriores, que se tornaram supérfulos e consequentemente foram descartados.

REFERÊNCIAS

- AABOE, Asger. **Episódios da história antiga da matemática.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.
- BOYER, Carl. **História da Matemática.** 2 ed. São Paulo: Edgar Blucher, 1996.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Campinas, SP: Editora Unicamp, 2004.
- GARBI, Gilberto. **A Rainha das Ciências.** 2 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.
- GLEISER, Marcelo. **A dança do universo – dos mitos de criação ao big-bang.** 2 ed. São Paulo: Companhia das Letras, 1997.
- LIVIO, Mario. **Deus é matemático?** Rio de Janeiro: Record, 2010.

APÊNDICE Q

Medir, o que é?

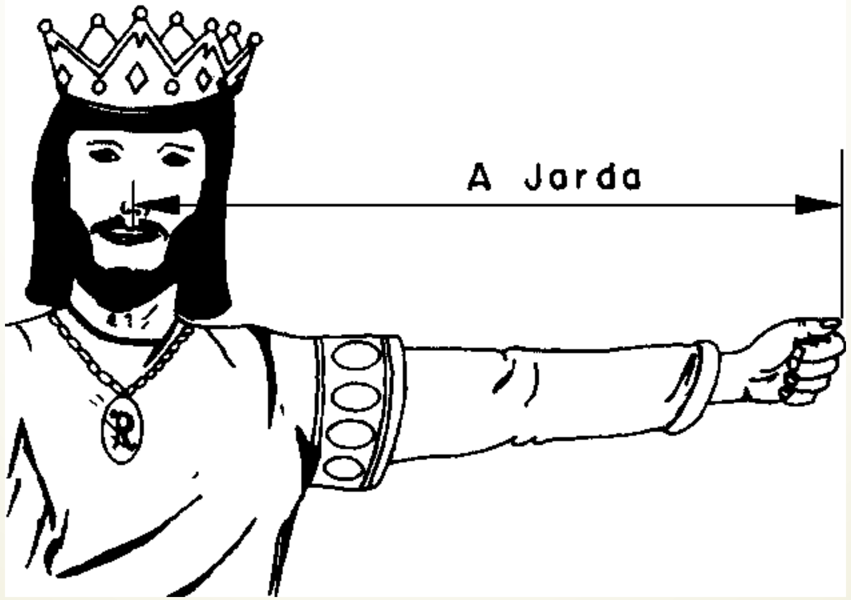
Geraldo Broetto – Instituto Federal do Espírito Santo, Campus Vitória

Medida de segmentos

- Medir é comparar.
- No caso de dois segmentos desiguais, é natural que queiramos saber quantas vezes o menor cabe no maior.
- Medir um segmento *AB* significa compará-lo com um segmento *u*.
- Em situações práticas, o segmento *u* representa uma unidade de medida qualquer, que tem a função de padronizar as medidas, permitindo a comparação entre quaisquer segmentos.
- Nos primórdios da civilização, utilizavam-se partes do corpo para realizar medidas, como pé, palmo, côvado, etc. Imagine a confusão!
- Hoje ainda existem medidas que recorrem (pelo menos nos seus nomes) a partes do corpo. Você saberia dizer alguma?

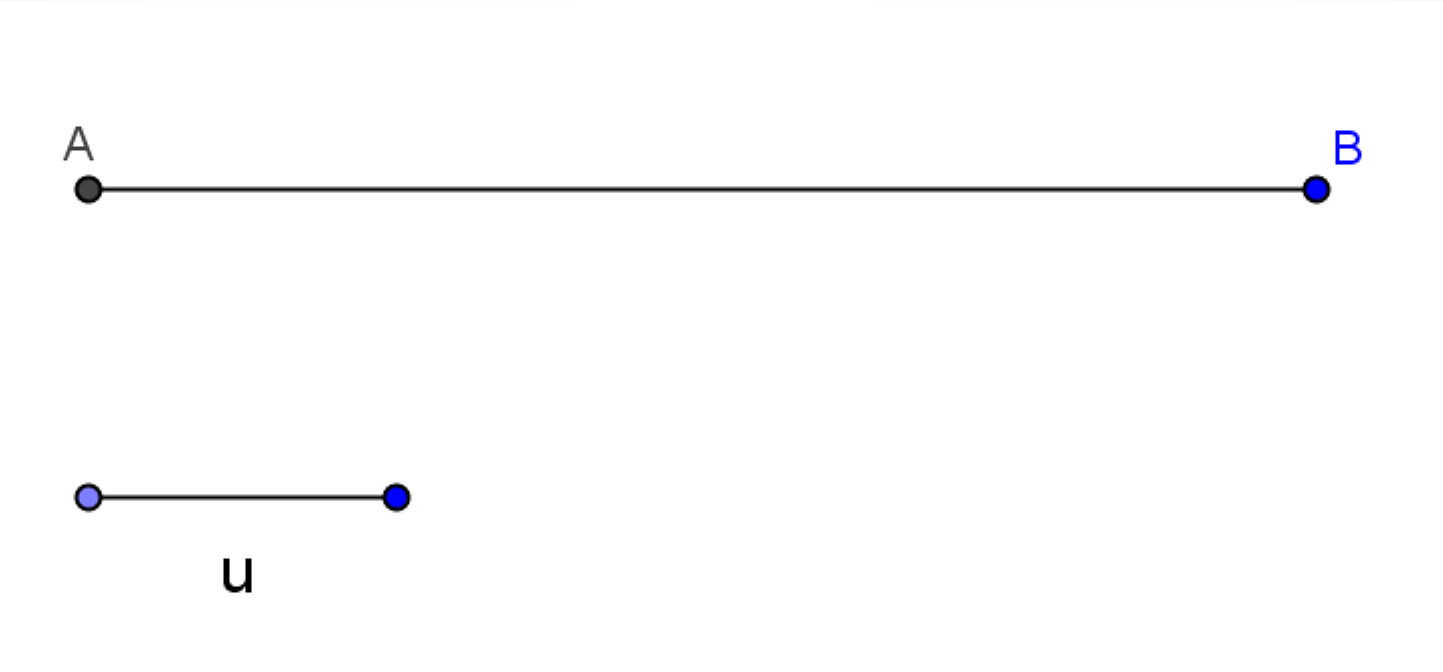
Uma curiosidade

- Nos EUA e na Inglaterra existe uma unidade de comprimento chamada "jarda".
- Jarda vem da palavra Yard, usada nas medições.
- No século XII, o rei Henrique I padronizou a jarda como senda medida da ponta do seu nariz até a ponta do dedão.

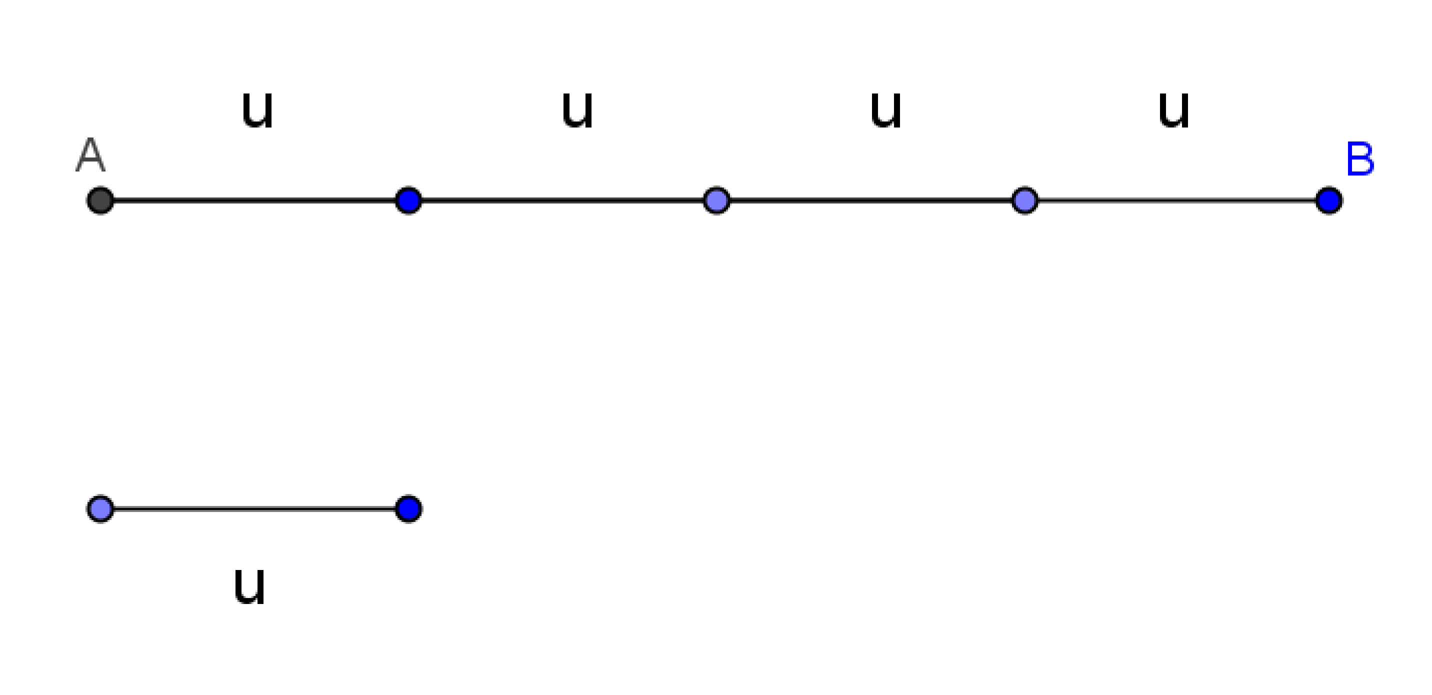


#partiumedir

Medir AB usando u



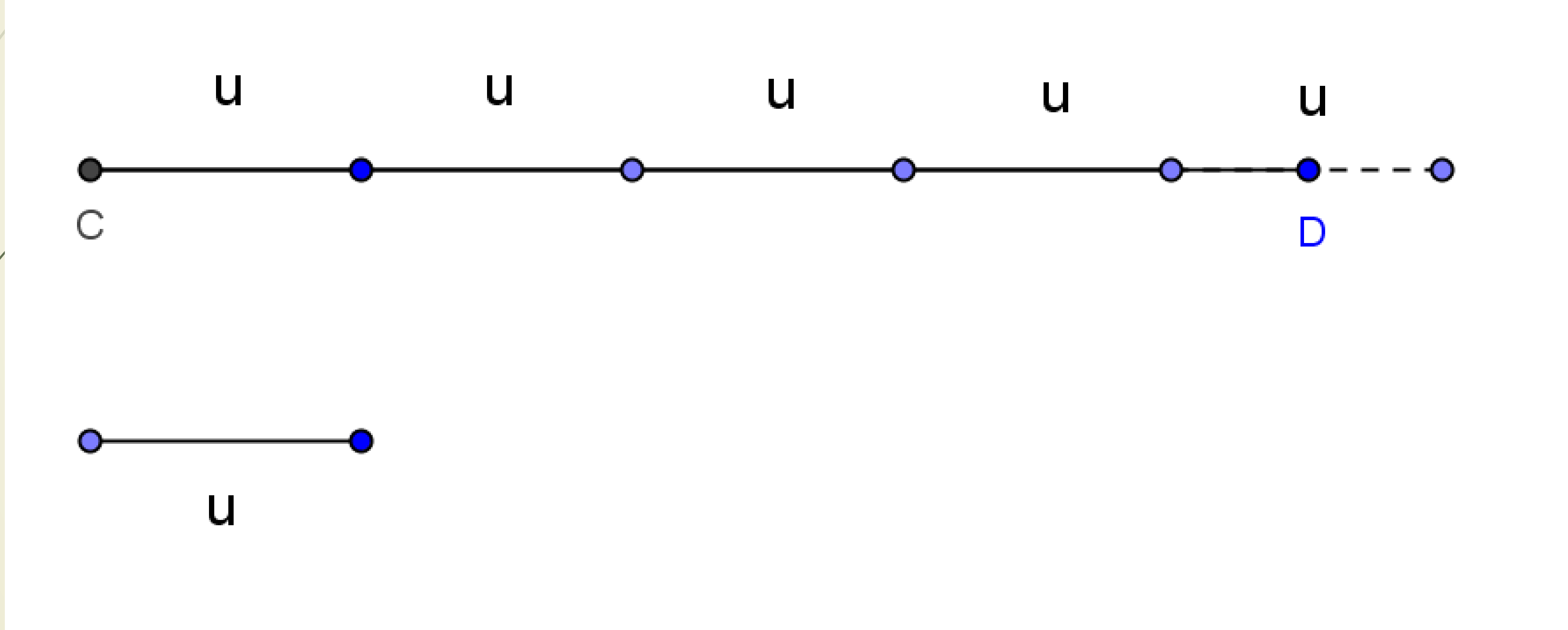
Medir AB usando u



AB=4u

Medir CD usando u

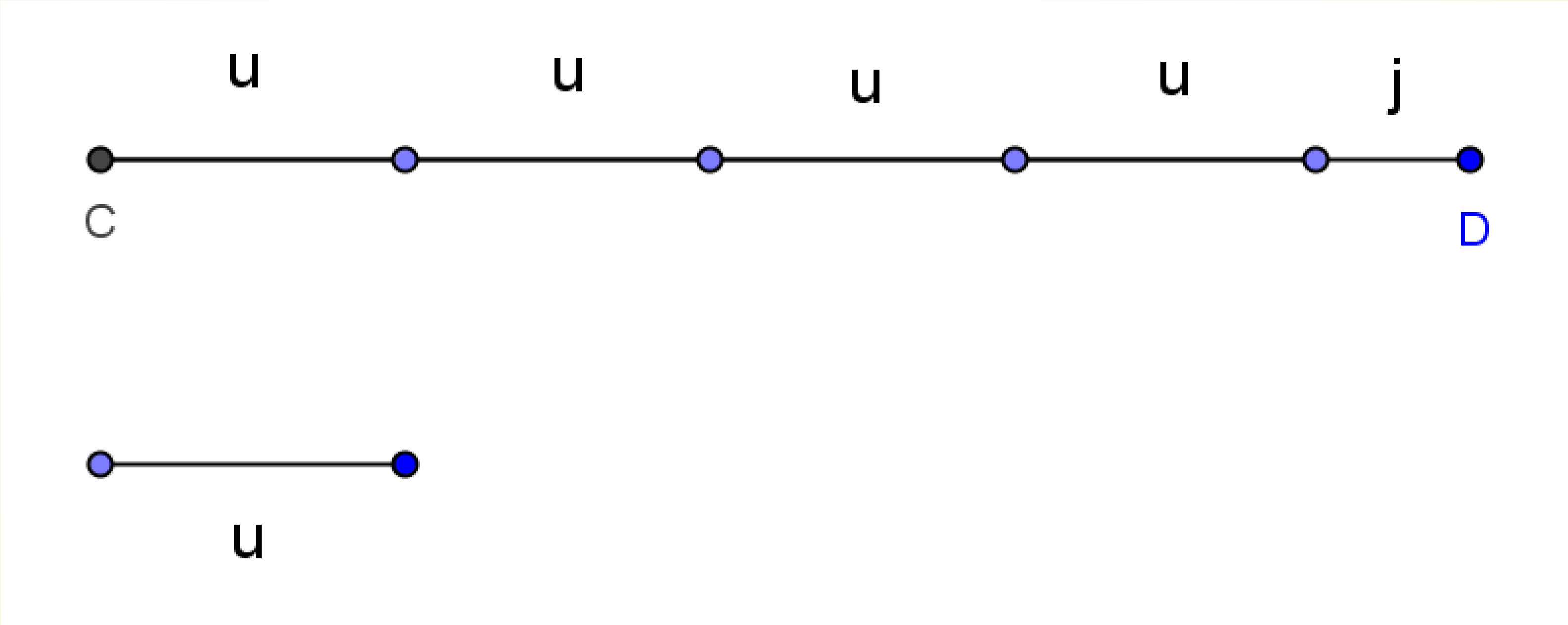
Medir CD usando u



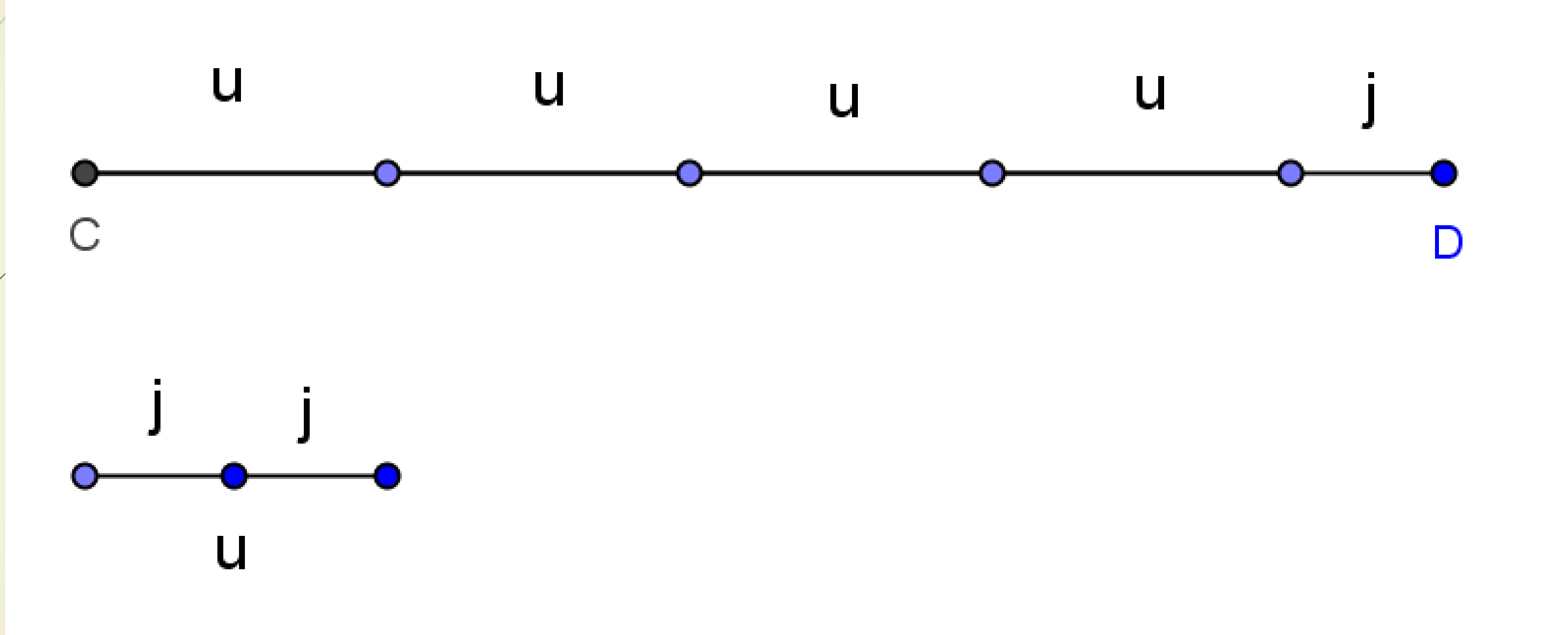
$4u<CD<5u$

Medir CD usando u

- Chamando a sobra de j, concorda que o problema estará resolvido se j for divisor de u, isto é, couber um número inteiro de vezes em u?



Medir CD usando u



$$CD = 9j$$

$$j = \frac{u}{2}$$

$$CD = \frac{9}{2}u$$

Pergunta:

- E se *j* não coubesse em *u* um número inteiro de vezes?
- Então haveria uma sobra *k*, e repetiríamos o processo descrito acima verificando se *k* cabe um número inteiro de vezes em *j*.
- O processo descrito acima é conhecido como *subtrações sucessivas* ou *antifairese*.
- Alguns historiadores defendem a ideia de que era dessa forma que os gregos antigos procediam para medir segmentos.
- Esse procedimento fornece também o m.d.c. de dois segmentos.

Como fazemos hoje?

- Hoje não fazemos como os gregos antigos.
- Se o segmento *u* não divide exatamente um segmento *AB*, dividimos o segmento *u* em tantas partes quanto for necessário.
- Digamos que *u* seja dividido em *p* partes que cabem um número inteiro *m* de vezes em *AB*. Dizemos que

$$AB = m \cdot \frac{u}{p} = \frac{m}{p} \cdot u$$

Se $u = 1$, então $AB = \frac{m}{p}$

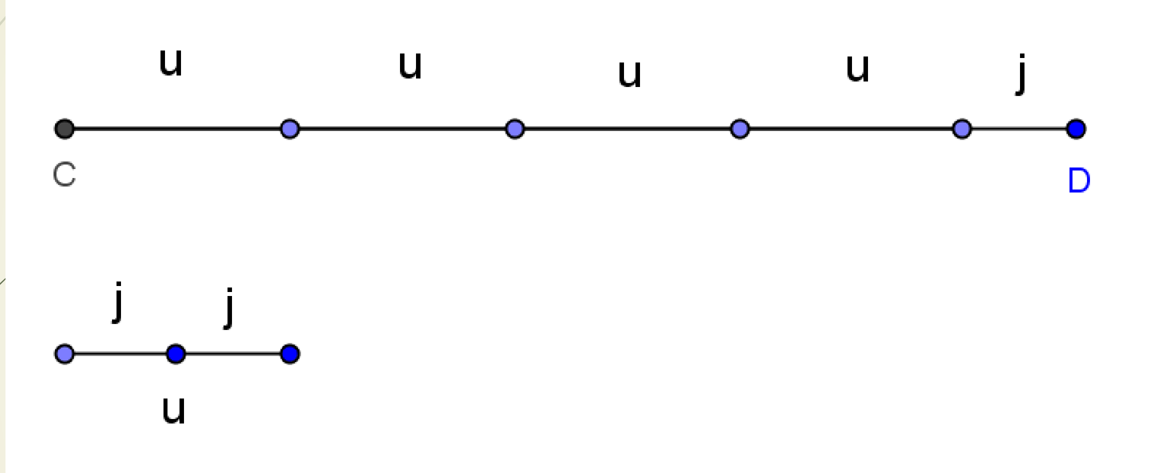
Tudo resolvido?

- Procedendo dessa forma, isto é, dividindo o segmento *u* em partes tão pequenas quanto se queira, pode-se medir todo e qualquer segmento *AB*. Certo?
- No problema proposto ontem, *cobrir uma parede com azulejos quadrados sem precisar cortar nenhum, encomendando à fábrica tamanhos menores se for necessário,* tivemos o seguinte resultado:
- 12 alunos disseram que é sempre possível;
- 3 alunos disseram que nem sempre é possível;
- Qual é a relação entre os dois problemas?

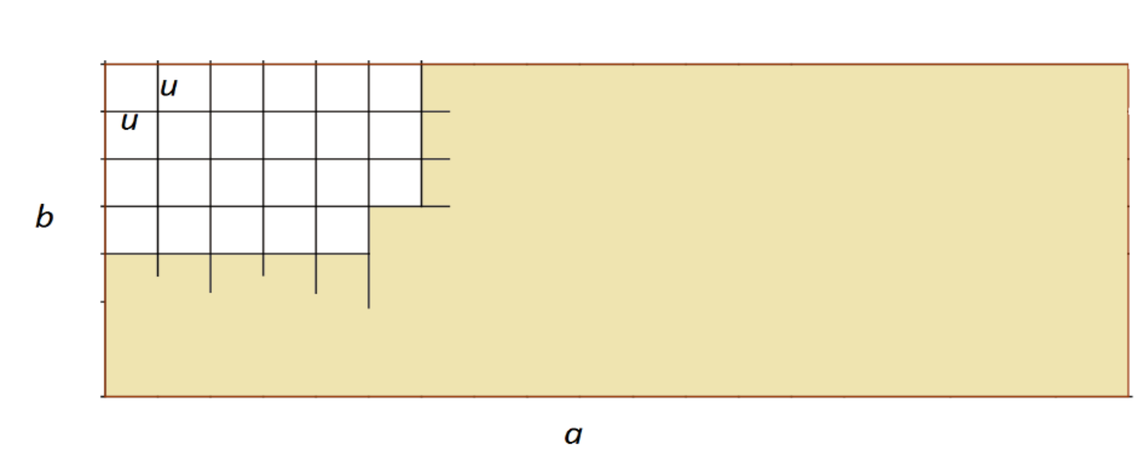
Comparação entre os problemas

- No problema de medir um segmento AB usando um segmento u, a questão é encontrar um submúltiplo de u que caiba um número inteiro de vezes em AB.
- No problema de cobrir a parede com azulejos quadrados, é preciso encontrar um valor para o lado do azulejo (u) que caiba um número inteiro de vezes no comprimento (a) e na altura (b) da parede.
- A solução do problema da parede passa necessariamente por encontrar um divisor comum do comprimento e da altura.
- O método de subtrações sucessivas também pode ser aplicado para resolver o problema da parede.

Comparação entre os problemas



Encontrar um segmento *j* que caiba um número inteiro de vezes nos segmentos *u* e *CD*, simultaneamente.



Encontrar um segmento *u* que caiba um número inteiro de vezes no comprimento (a) e na altura (b) da parede, simultaneamente.

Então é o ‘mesmo’ problema ?

Exatamente!

Uma ‘solução’ interessante para o problema da parede

- Imagine agora que seja possível pedir para a fábrica que faça os azulejos com o lado *u* tão pequeno quanto desejarmos. Com essa possibilidade em mente, responda: é sempre possível cobrir toda a parede sem precisar cortar nenhum azulejo? Justifique sua resposta.
  - “Sim, pois é só calcular a área a ser coberta e depois mandar fabricar azulejos com tamanhos proporcionais a área”

- Vamos supor que $a = 35$ e $b = 15\sqrt{2}$. A área será $525\sqrt{2}$. Azulejos proporcionais a área da parede teriam áreas iguais a $5\sqrt{2}$ ou $7\sqrt{2}$ ou $15\sqrt{2}$ ou $25\sqrt{2}$ ou $35\sqrt{2}$ ou $75\sqrt{2}$ ou $105\sqrt{2}$.
- Os lados seriam $\sqrt{5\sqrt{2}}$ ou $\sqrt{15\sqrt{2}}$ ou $\sqrt{25\sqrt{2}}$ ou $\sqrt{35\sqrt{2}}$ ou $\sqrt{105\sqrt{2}}$, etc.

Nenhum destes caberia um número inteiro de vezes no lado a !!!!!!!

Existe algum segmento que os racionais não conseguem medir?

Resposta esperada:

Os irracionais!

O que te leva a acreditar na existência dos irracionais?

- **Motivo de aceitação dos irracionais pela 'autoridade da Matemática'.**
- A presença de números irregulares em sua forma escrita.
- Acredito pelo fato de ser descrito na matemática.
- A percepção e obtenção dos mesmos nos resultados dos problemas e questões matemáticas.
- Os racionais, por que a partir que foi criado os irracionais.
- Pelo fato de estudar na matemática, mas sinceramente, nunca me falaram sobre a importância, sei de sua existência, pois quando estudei só mostravam os conjuntos dos números, somente para que tomássemos conhecimento de sua existência.
- O conhecimento matemático adquirido até o presente momento.

O que te leva a acreditar na existência dos irracionais?

- **Motivo da aceitação por um suposto 'preenchimento de lacunas'**
- Os números irracionais existem para preencher lacunas, partem da necessidade preencher espaços deixados por outras classes de número.
- A necessidade de preencher lacunas onde os números racionais não aparecem (usando como base os números reais).
- Para mim não existe uma explicação, penso que existem para explicar alguma lacuna na matemática.

O que te leva a acreditar na existência dos irracionais?

- **Motivo de aceitação por justificativas lógico-matemáticas**
- **Aceitáveis**
- A fórmula comprimento/diâmetro = π, esse fato me faz acreditar.
- Pelo teorema de Pitágoras usando um quadrado de lado 1, a diagonal não é comensurável aos demais lados.
- Medir ou mensurar com o máximo de exatidão possível os valores ou tamanhos de um cálculo ou objeto respectivamente falando.
- **Inaceitáveis**
- A percepção de que nem todos os números possuem divisão exata.
- Que os números podem ser infinitos, como as dízimas por exemplo.
- Por que entre um número exato e outro existem "n" números, ex 1....2 pode existir 1,3; 1,4; ... Etc.
- De não conseguir escrever uma dízima periódica.

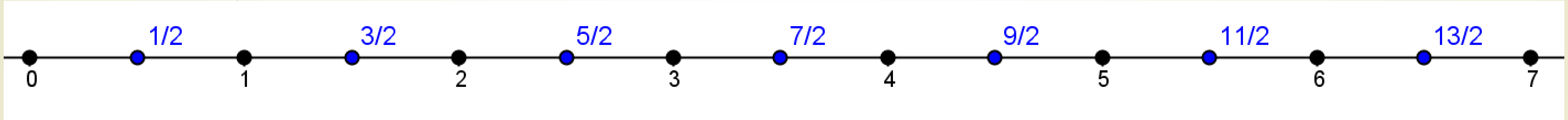
Marcando os racionais na reta

É possível marcar todos os racionais na reta?

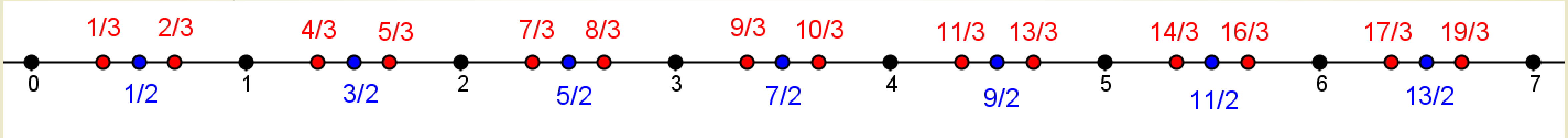
Os racionais na reta

- Pegue uma reta.
- Escolha um ponto para ser o zero.
- Escolha um ponto para ser o 1.
- Você acaba de definir um segmento unitário que vai de zero a 1.
- Marque agora ‘todos’ os inteiros positivos.

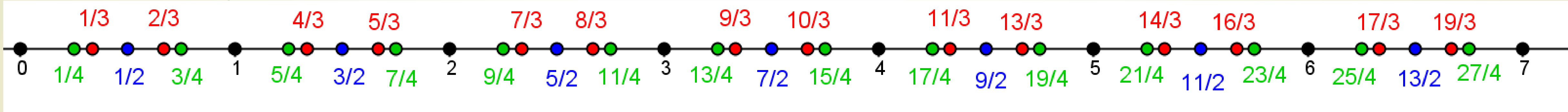
- Marque ‘todas’ as frações com denominador 2.



- Marque ‘todas’ as frações com denominador 3.



- Marque ‘todas’ as frações com denominador 4.



- Se tiver jogo do Flamengo, marque ‘todas’ as frações com denominador 5, 6, 7, etc, até acabar o jogo.

Perguntas:

- Entre dois racionais quaisquer sempre existe outro racional?
- Entre dois racionais quaisquer existem infinitos racionais?
- Existe espaçamento mínimo entre dois racionais?
- Os racionais cobrem toda a reta? Ou, em outras palavras, todo ponto da reta corresponde a um racional?

Vamos construir um ponto na reta que não corresponde a um número racional

Apêndice R- Questionário Q1 (números racionais)

1) Os números seguintes são racionais? Justifique suas respostas.

Número	Sim	Não	Justificativa
$\frac{-3}{14}$			
$\frac{\sqrt{3}}{2}$			
0,0555...			
1,010010001...			
2,343434...			
$\frac{4\pi}{3}$			
$\frac{22}{7}$			
1,725			
0,666...			

2) Como você define números racionais?
____
____
____
____

3) Na sua opinião, para que servem os números racionais?
____
____

4) Represente no intervalo abaixo os números $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{3}$ e $\frac{9}{4}$.

5) Quantos números racionais existem entre 2/3 e ¾?
   a. Um número
   b. Muitos números
   c. Infinitos números
   d. Nenhum número

6) Se a sua resposta no item anterior foi ‘a’, ‘b’ ou ‘c’, determine um número racional que esteja entre 2/3 e ¾. Não apague o desenvolvimento do raciocínio.

7) Como você se sentiu respondendo a esse questionário? Pode marcar mais de uma opção.

☐ Confiante

☐ Confuso

☐ Inseguro dos meus conhecimentos matemáticos

☐ Seguro dos meus conhecimentos matemáticos

☐ Outro sentimento. Qual?____

Por quê você acha que se sentiu assim?____
____

1) Os números seguintes são irracionais? Justifique suas respostas.

Número	Sim	Não	Justificativa
$\frac{13}{23}$			
$\frac{\sqrt{5}}{2}$			
3,1444...			
1,1212212221...			
$\sqrt[3]{27}$			
$\frac{3\pi}{4}$			
$\sqrt{3}+\sqrt{6}$			
1,222...			
3,1416			

2) O que são números irracionais:
a) segundo você aprendeu nas aulas de matemática?
____
____
b) na sua opinião.
____
____

3) O que te faz acreditar na existência de números irracionais?
____
____
____

4) Qual a diferença entre número racional e número irracional?
____
____
____

5) Marque verdadeiro (V) ou falso (F) e justifique:

Afirmação	V	F	Justificativa
Entre dois racionais há pelo menos um racional			
Entre dois irracionais há pelo menos um irracional			
Entre dois racionais há pelo menos um irracional			
Entre dois irracionais há pelo menos um racional			

6) Existe algum número irracional no intervalo (1/3,1/2)? Em caso afirmativo, escreva esse número irracional em notação decimal. Em caso negativo, justifique.

7) Como você se sentiu respondendo a esse questionário? Pode marcar mais de uma opção.

☐ Confiante

☐ Confuso

☐ Inseguro dos meus conhecimentos matemáticos

☐ Seguro dos meus conhecimentos matemáticos

☐ Outro sentimento. Qual?____

Por quê você acha que se sentiu assim?____
____

APÊNDICE T

12 de maio de 2014

É IMPORTANTE PARA NOSSA PESQUISA QUE VOCÊ NÃO DEIXE EM BRANCO NENHUM ITEM, PRINCIPALMENTE AS JUSTIFICATIVAS.

1) Algo do que você viu no encontro de hoje ajudou você a refletir sobre seus conhecimentos de matemática?

Sim	Não	No que você pensou exatamente?

2) Você ficou curioso em aprender mais sobre os números?

Sim	Não	Por quê?

3) Algo do que você viu no encontro de hoje fez você lembrar de alguma coisa que você já aprendeu sobre os números ou sobre outro assunto de matemática?

Sim	Não	O quê?

4) Algo do que você viu no encontro de hoje fez você lembrar de alguma coisa que você gostaria de aprender sobre os números ou sobre outro assunto de matemática?

Sim	Não	O quê?

5) Do que você mais gostou no encontro de hoje?

☐ Apresentação do pesquisador

☐ Responder o questionário sobre números racionais

☐ Assistir ao filme

☐ Gostei de outra coisa. Qual?____

☐ Não gostei de nada

Por quê?____

14 de maio de 2014

É IMPORTANTE PARA NOSSA PESQUISA QUE VOCÊ NÃO DEIXE EM BRANCO NENHUM ITEM, PRINCIPALMENTE AS JUSTIFICATIVAS.

1) Algo do que você viu no encontro de hoje ajudou você a refletir sobre seus conhecimentos de matemática?

Sim	Não	No que você pensou exatamente?

2) Você ficou curioso em aprender mais sobre os números?

Sim	Não	Por quê?

3) Algo do que você viu no encontro de hoje fez você lembrar de alguma coisa que você já aprendeu sobre os números ou sobre outro assunto de matemática?

Sim	Não	O quê?

4) Algo do que você viu no encontro de hoje fez você lembrar de alguma coisa que você gostaria de aprender sobre os números ou sobre outro assunto de matemática?

Sim	Não	O quê?

5) Do que você mais gostou no encontro de hoje?

☐ Responder o questionário sobre números irracionais

☐ Discussão dos resultados do questionário sobre números racionais

☐ Gostei de outra coisa. Qual?____

☐ Não gostei de nada

Por quê?____

15 de maio de 2014

É IMPORTANTE PARA NOSSA PESQUISA QUE VOCÊ NÃO DEIXE EM BRANCO NENHUM ITEM, PRINCIPALMENTE AS JUSTIFICATIVAS.

1) Algo do que você viu no encontro de hoje ajudou você a refletir sobre seus conhecimentos de matemática?

Sim	Não	No que você pensou exatamente?

2) Você ficou curioso em aprender mais sobre os números?

Sim	Não	Por quê?

3) Algo do que você viu no encontro de hoje fez você lembrar de alguma coisa que você já aprendeu sobre os NÚMEROS IRRACIONAIS ou sobre outro assunto de matemática?

Sim	Não	O quê?

4) Algo do que você viu no encontro de hoje fez você lembrar de alguma coisa que você gostaria de aprender sobre os NÚMEROS IRRACIONAIS ou sobre outro assunto de matemática?

Sim	Não	O quê?

5) Do que você mais gostou no encontro de hoje?

☐ Discussão dos resultados do questionário sobre números irracionais

☐ Assistir ao filme sobre a história dos números

☐ Gostei de outra coisa. Qual?____

☐ Não gostei de nada

Por quê?____

14 de julho de 2014

1) A atividade te surpreendeu?

Sim	Não	Qual o motivo?

2) Você acha que aprendeu algo que não sabia sobre os irracionais?

Sim	Não	Por quê?

3) Você acha que existe alguma coisa para aprender sobre os irracionais que você ainda não aprendeu?

Sim	Não	O quê?

4) Qual a palavra que melhor traduz o que você sentiu ao participar da atividade proposta hoje? Pode marcar mais de uma opção. POR FAVOR, SEJA HONESTO.

☐ Confusão

☐ Dúvida

☐ Insegurança

☐ Desconforto

☐ Alegria

☐ Curiosidade

☐ Espanto

☐ Satisfação

Outra palavra. Qual?____

Por que escolheu essa palavra?
____
____

FICHA 1 – GRUPO 1

Classifique os números abaixo em racionais (R) ou irracionais (I).

a) 4,732651 ... ( )
b) 0,24681012 ... ( )
c) 1,123581321 ... ( )
d) 2,1373737 ... ( )

FICHA 1 – GRUPO 2

Classifique os números abaixo em racionais (R) ou irracionais (I).

a) $\frac{4}{2}$ ( ) b) $\frac{2}{5}$ ( ) c) $\frac{5}{6}$ ( ) d) $\frac{3}{17}$ ( )

FICHA 1 – GRUPO 3

Classifique os números abaixo em racionais (R) ou irracionais (I).

a) $\frac{C}{2r}$ ( ) C é o comprimento de uma circunferência de raio r.

b) $\frac{1{,}2}{3}$ ( )

c) $\frac{x}{x-y}$ $x, y \in \mathbb{Z}, x \neq 0, y \neq 0$ ( )

d) $\frac{4\pi}{2}$ ( )

FICHA 1 – GRUPO 4

Classifique os números abaixo em racionais (Q) ou irracionais (I).

(a) 4,732651 ... ( )

(b) $\frac{3}{17}$ ( )

(c) 1,123581321 ... ( )

(d) 2,1373737 ... ( )

(e) $\frac{C}{2r}$ ( )

(f) $\frac{1{,}2}{3}$ ( )

(g) $\frac{4\pi}{2}$ ( )

(h) 1,252552555 ... ( )

FICHA 2 – GRUPO 1

O aluno Adriano respondeu a mesma questão que você acabou de responder da seguinte maneira:

a) 4,732651 ... (I) *Não tem regularidade*

b) 0,24681012 ... (R) *Tem uma regularidade, após a vírgula são todos números pares*

c) 1,123581321 ... (R) *Tem um padrão: cada número após o segundo número é a soma dos dois números anteriores*

d) 2,1373737 ... (R) *Tem uma regularidade, o 37 se repete sempre.*

Agora você é o professor. Atribua certo (C) ou errado (E) para as respostas de Adriano. Não precisa justificar.

FICHA 2 – GRUPO 2

O aluno Adriano respondeu à mesma questão que você acabou de responder, da seguinte maneira:

a) $\frac{4}{2}$ (R) Divisão exta, igual a 2.

b) $\frac{2}{5}$ (R) Divisão exta, igual a 0,4.

c) $\frac{5}{6}$ (I) Divisão não acaba.

d) $\frac{3}{17}$ (I) Divisão não acaba.

50 | 6
20 0,8333...
20
...

30 | 17
130 0,1764705882...
110
80
120
100
150
140
...

Agora você é o professor. Atribua certo (C) ou errado (E) para as respostas de Adriano. Não precisa justificar.

FICHA 2 – GRUPO 3

O aluno Adriano respondeu as mesmas questões que você acabou de responder, da seguinte maneira:

a) $\frac{C}{2r}$ (R) *escrito em forma de fração*

b) $\frac{1{,}2}{3}$ (I) *1,2 é um número racional e 3 é inteiro, logo não é uma fração de inteiros.*

c) $\frac{x}{x-y}$ $x, y \in \mathbb{Z}, x \neq 0, y \neq 0$ (R) *se x e y são inteiros, x-y é inteiro e isso é uma fração de inteiros.*

d) $\frac{4\pi}{2}$ (R) *escrito em forma de fração.*

C é o comprimento de uma circunferência de raio *r*.

Agora você é o professor. Atribua certo (C) ou errado (E) para as respostas de Adriano. Não precisa justificar.

FICHA 2 – GRUPO 4

O aluno Adriano respondeu a mesma questão que você acabou de responder, no entanto, foi exigido dele uma justificativa para cada item:

a) 4,732651 ... (I) *Não tem regularidade*

b) $\frac{3}{17}$ (I) A divisão nunca acaba, dízima imprevisível.

30 | 17
130 0,1764705882...
110
80
120
100
150
140
...

c) 1,123581321 ... (R) *Tem um padrão: cada número após o segundo número é a soma dos dois números anteriores.*

d) 2,1373737 ... (R) *Tem uma regularidade, o 37 se repete sempre.*

e) $\frac{C}{2r}$ (R) Escrito em forma de fração.

f) $\frac{1,2}{3}$ (I) *1,2 é um número racional e 3 é inteiro, logo não é uma fração de inteiros.*

g) $\frac{4\pi}{2}$ (R) O resultado é exato, 2π.

h) 1,252552555 ... *(R) Existe um padrão, a cada algarismo 2 aumenta o número de algarismos 5, assim 25-255-2555-etc.*

Agora você é o professor. Corrija essas questões. Fique à vontade para considerar ou não considerar o que quer que seja na correção. É preciso atribuir uma nota ao final, de 0 (zero) a 10.

FICHA 3 – GRUPO 2

O aluno Breno também respondeu a mesma questão da seguinte maneira:

a) $\frac{4}{2}$ (R) Não deixa resto.

b) $\frac{2}{5}$ (R) Não deixa resto.

c) $\frac{5}{6}$ (R) Deixa resto, mas é previsível.

50 | 6
20 0,8333...
20
20
20
...

d) $\frac{3}{17}$ (I) Deixa resto, mas é imprevisível.

30 | 17
130 0,1764705882...
110
80
120
100
150
140
...

Agora você é o professor. Atribua certo (C) ou errado (E) para as respostas de Breno. Não precisa justificar.

FICHA 3 – GRUPO 3

O aluno Breno também respondeu, da seguinte maneira:

a) $\frac{C}{2r}$ (R) *escrito em forma de fração*

b) $\frac{1,2}{3}$ (R) *o resultado é 0,4 logo é racional.*

c) $\frac{x}{x-y}$ $x, y \in \mathbb{Z}, x \neq 0, y \neq 0$ (I) x-*y pode ser negativo, então é irracional, por que não existe divisão por número negativo.*

d) $\frac{4\pi}{2}$ (R) *é uma divisão exata, dá* 2π.

C é o comprimento de uma circunferência de raio *r*.

Agora você é o professor. Atribua certo (C) ou errado (E) para as respostas de Breno. Não precisa justificar.

Apêndice V - Análise de Livros Didáticos

Caro aluno,

o livro didático está presente em praticamente todas as escolas do Brasil. O **Programa Nacional do Livro Didático** (PNLD) avalia e distribui coleções de livros didáticos para todas as escolas públicas brasileiras da educação básica. Sendo assim, o livro didático está presente no ambiente escolar e ao alcance dos alunos, constituindo-se assim em um valioso aliado para o desenvolvimento da atividade docente no que diz respeito às dimensões didáticas e pedagógicas.

Contudo, todo o esforço do PNLD em avaliar e distribuir as obras será em vão se o professor não desenvolver um olhar crítico do material que chega em suas mãos. Cabe ao professor em última instância, decidir a forma ou a maneira de ensinar determinado conteúdo para a sua turma. O professor pode discordar da forma como determinado conteúdo está sendo abordado no livro, seja porque considere a abordagem sucinta demais, profunda demais, superficial demais, técnica demais, etc.

Nas últimas décadas, observamos que os livros didáticos de matemática estão mudando, a maioria para melhor. Várias práticas e/ou ideias debatidas por matemáticos e educadores matemáticos vem sendo testadas nos livros, algumas são incorporadas, outras são descartadas, mas ainda é preciso cuidado, pois não existe livro perfeito, que aborde todos os assuntos de uma forma perfeita. Mesmo porque alguém pode perguntar "o que é uma forma perfeita? Ela existe? " E a resposta é NÃO, não existe forma perfeita de ensinar qualquer assunto que seja, por um motivo muito simples: nunca haverá consenso sobre o que seja essa tal *perfeição*.

O livro didático é também um produto comercial, e sendo assim, atende a interesses que transcendem o campo educacional. Isso significa que algumas melhorias solicitadas pela comunidade de professores e educadores podem sofrer um longo processo de resistência por parte das editoras até serem incorporadas total ou parcialmente. Mudanças radicais não são vistas com bons olhos, pois representam riscos em um mercado bastante competitivo.

Por tudo isso é que o professor precisa aprender a analisar os livros que usará na sala de aula. Em uma mesma obra podem haver conteúdos muito bem trabalhados e desenvolvidos e conteúdos tratados de forma superficial ou sem significado para o aluno. Existem critérios muito bem estabelecidos para analisar livros didáticos que não caberiam nesse primeiro contato, mas algumas ideias simples podem ser trabalhadas. Na verdade, uma análise mais profunda precisa considerar todos os volumes de uma dada coleção. Por hora, analisaremos apenas um assunto nos dois últimos volumes do ensino fundamental.

Ao trabalho?

ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS – 22/5/2014

Alunos:____

REFERÊNCIA DO LIVRO:____

1) PRIMEIRAS IMPRESSÕES

a) A capa possui alguma ilustração? Na sua opinião, essas ilustrações passam alguma imagem do que é a matemática?

b) E quanto ao título do livro? É encorajador para o estudante? Na sua opinião, o título passa alguma imagem do trabalho que será desenvolvido no livro em relação à matemática?

2) DÍZIMA PERIÓDICA

a) O autor define dízima periódica? Se sim, transcreva o trecho (sempre indicando a página).

b) O autor esclarece o significado das reticências? É feito algum tipo de acordo com o leitor? Sugere também o uso do traço acima da parte periódica?

c) O autor mostra que se um número é representado por uma dízima finita ou periódica então ele pode ser escrito como uma fração de inteiros? Mostra a recíproca?

3) NÚMERO IRRACIONAL

a) Quantas páginas são dedicadas ao assunto?

b) Como o autor começa a falar do assunto? Começa com exemplos ou com uma definição?

c) Descreva sucintamente cada etapa do desenvolvimento do capítulo ou seção que trata dos números irracionais. Por exemplo:

O autor começa dizendo que uma aluna pesquisou na internet e descobriu que os gregos já sabiam que alguns problemas não poderiam ser resolvidos com números racionais. A aluna perguntou para a professora "existem números que não são racionais" e a professora disse que sim, dando o exemplo de pi. Em seguida, o autor faz aproximações de raiz quadrada de dois e diz que a dízima não será finita nem periódica e que esse número é irracional. Em seguida propõe dois exercícios usando calculadora.

d) O autor define número irracional? Se sim, transcreva o trecho.

e) No seu ponto de vista, existe algum problema ou incoerência com essa definição?

f) É mostrado porque ter dízima não-periódica implica necessariamente em não poder ser escrito em forma de fração de inteiros? E a recíproca, é mostrada?

g) Quais são os exemplos de números irracionais apresentados?

h) O autor mostra algum caminho para identificar quando os radicais são irracionais ou inteiros? Qual?

i) Os números irracionais são marcados na reta numérica? Como?

j) É apresentada alguma ilustração da relação $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$? Desenhe aqui.

k) Quanto ao exercícios relativos à números irracionais, eles são repetitivos ou variados? Quais os tipos de exercícios propostos? Transcreva pelo menos três tipos de exercícios diferentes (se houver) que envolvam números irracionais.

l) Qual sensação você tem olhando para a seção ou capítulo do livro que trata dos irracionais como um todo? Que a imagem de número irracional é passada para o aluno?

m) Como professor, você usaria esse livro com seus alunos?

Avaliação INDIVIDUAL da atividade "Análise de livros didáticos", realizada em 22/5/2014

Nome:____

1) Algo do que você viu nessa atividade ajudou você a refletir sobre seus conhecimentos de matemática?

Sim	Não	No que você pensou exatamente?

2) Você ficou curioso em aprender mais sobre os números?

Sim	Não	Por quê?

3) Algo do que você viu na atividade de hoje fez você lembrar de alguma coisa que você já aprendeu (ou deixou de aprender) sobre os números irracionais?

Sim	Não	O quê?

4) Gostou de analisar livros didáticos? Gostaria de aprender mais nessa área?

Sim	Não	O quê?

Apêndice X - Formulação de Questões

Formule três questões envolvendo o conceito de número irracional. Pode ser de múltipla escolha, problemas com situações reais, de marcar V ou F, de completar, de ligar, etc. Seja criativo!

Questão 1

[O espaço originalmente era de uma folha]

Questão 2

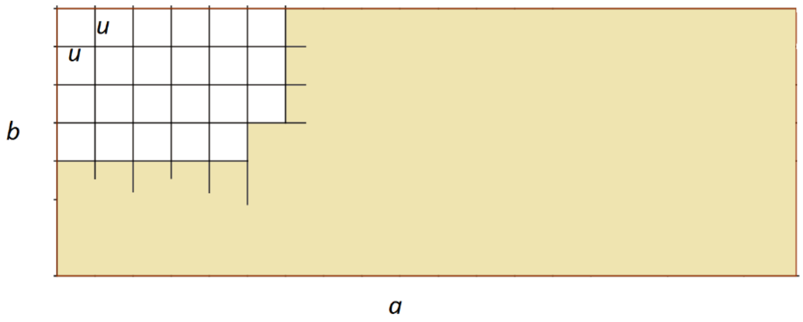
[O espaço originalmente era de uma folha]

Agora, formule uma questão que NÃO seja de classificação em racionais ou irracionais.

Questão 3

[o espaço originalmente era de uma folha]

1) Deseja-se cobrir com azulejos toda uma parede que tem *a* metros de comprimento por *b* metros de altura. O azulejo é quadrado e tem o lado medindo *u* centímetros (Veja Figura 1).

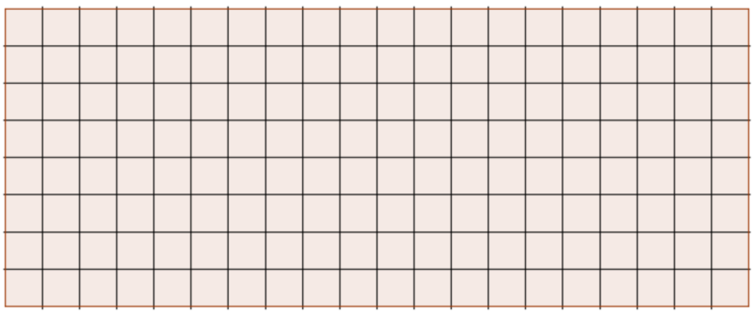


Perguntas:

a) É sempre possível cobrir toda a parede sem precisar cortar nenhum azulejo? Justifique sua resposta.

b) Imagine agora que seja possível pedir para a fábrica que faça os azulejos com o lado *u* tão pequeno quanto desejarmos. Com essa possibilidade em mente, responda: é sempre possível cobrir toda a parede sem precisar cortar nenhum azulejo? Justifique sua resposta.

2) Observe a Figura.



Considere um retângulo cujas dimensões, a e b, em cm, são dadas por:

R_1: $a = 35$ e $b = 15$

R_2: $a = 3{,}5$ e $b = 1{,}5$

R_3: $a = 35\sqrt{2}$ e $b = 15\sqrt{2}$

R_4: $a = 35$ e $b = 15\sqrt{2}$

<table>
<tr><td rowspan="2">R_1</td><td>Esse retângulo pode ser dividido em um número inteiro de quadrados iguais, traçando retas verticais e horizontais como na Figura 2?</td></tr>
<tr><td>Se for possível, qual é o número mínimo de quadrados necessários para cobrir o retângulo? Se for impossível, justifique.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">R_2</td><td>Esse retângulo pode ser dividido em um número inteiro de quadrados iguais, traçando retas verticais e horizontais como na Figura 2?</td></tr>
<tr><td>Se for possível, qual é o número mínimo de quadrados necessários para cobrir o retângulo? Se for impossível, justifique.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">R_3</td><td>Esse retângulo pode ser dividido em um número inteiro de quadrados iguais, traçando retas verticais e horizontais como na Figura 2?</td></tr>
<tr><td>Se for possível, qual é o número mínimo de quadrados necessários para cobrir o retângulo? Se for impossível, justifique.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">R_4</td><td>Esse retângulo pode ser dividido em um número inteiro de quadrados iguais, traçando retas verticais e horizontais como na Figura 2?</td></tr>
<tr><td>Se for possível, qual é o número mínimo de quadrados necessários para cobrir o retângulo? Se for impossível, justifique.</td></tr>
</table>

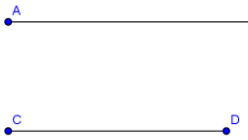
Apêndice Z - Medida de segmentos

O objetivo da atividade é encontrar um segmento que seja divisor comum de AB e CD. Utilize um compasso para transportar os segmentos.

1) Considere os segmentos AB e CD abaixo.

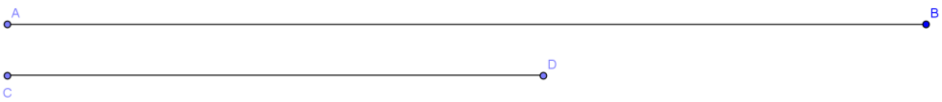
a) Extraia o segmento CD do segmento AB o maior número de vezes possível.
b) O segmento CD é divisor do segmento AB?
c) Escreva uma expressão do comprimento do segmento AB em função do comprimento do segmento CD.
d) O segmento CD é divisor comum de AB e CD?

2) Considere os segmentos AB e CD abaixo.



a) Extraia o segmento CD do segmento AB o maior número possível de vezes.
b) O segmento CD é divisor do segmento AB?
c) Existiu alguma sobra? Chame essa sobra de segmento EB.
d) Concorda que se o segmento EB for divisor do segmento CD o problema estará resolvido? Discuta com seu parceiro.
e) Extraia o segmento EB do segmento CD o maior número possível de vezes;
f) Após a subtração anterior, existiu alguma sobra no segmento CD?
g) Escreva uma expressão do comprimento do segmento CD em função do comprimento do segmento EB.
h) Escreva uma expressão do comprimento de AB em função do comprimento de EB.
i) O segmento EB é divisor comum de AB e CD?

3) Considere os segmentos AB e CD abaixo.

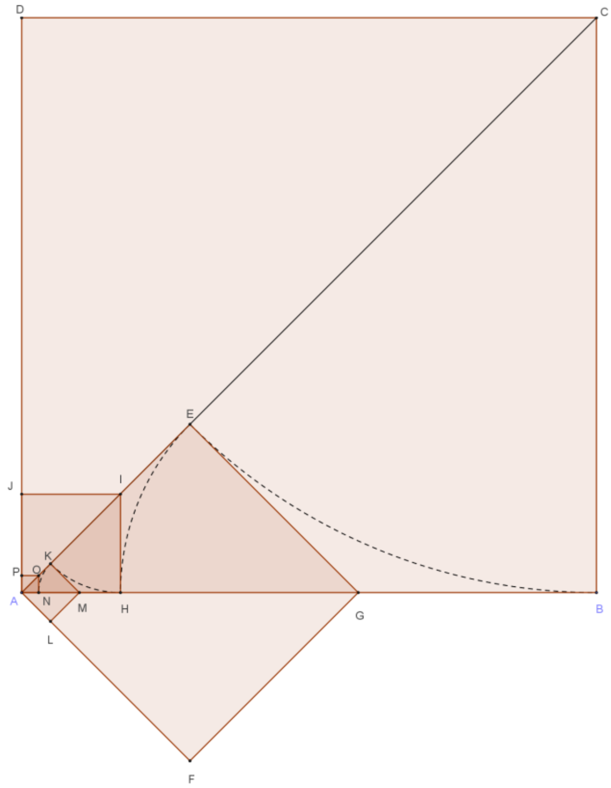


a) Utilize processo semelhante ao item anterior para encontrar um segmento que é divisor comum de AB e CD.

b) Escreva AB em função de CD.

PODE-SE DIZER QUE A MEDIDA COMUM, QUANDO EXISTE, É SEMPRE IGUAL OU MENOR DO QUE A MENOR DAS SOBRAS?

4) O objetivo agora é encontrar um segmento que seja medida comum do lado e da diagonal do quadrado ABCD. Diga se o raciocínio a seguir está perfeito ou tem algum problema. Se encontrar algum problema, explique.



Afirmação 1: BC cabe uma vez em AC e sobra AE.
Afirmação 2: Se existir uma unidade comum aos segmentos BC e AC, ela é menor ou igual à sobra AE.
Afirmação 3: AE = EG = GB
Afirmação 4: AE cabe duas vezes em BC e sobra AH.
Afirmação 5: Se existir uma unidade comum aos segmentos BC e AC, ela é menor ou igual à sobra AH.
Afirmação 6: AH = HI = IE
Afirmação 7: AH cabe duas vezes em AE e sobra AK.
Afirmação 8: Se existir uma unidade comum aos segmentos BC e AC, ela é menor ou igual à sobra AK.
Afirmação 9: O processo pode continuar indefinidamente: uma sobra cabe duas vezes na sobra anterior, e ainda sobra alguma coisa.
Afirmação 10: Se existisse uma unidade comum aos segmentos BC e AC, essa unidade seria menor ou igual à menor das sobras. Como vimos, o processo não acaba nunca e por isso não existe a menor das sobras. Os segmentos BC e AC são, portanto, incomensuráveis.

Avaliação da dupla em relação ao raciocínio acima:

____
____
____
____
____

GRUPO 1

1) Encontre as representações decimais das frações 1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7, 7/7, 8/7 e 9/7 utilizando o algoritmo da divisão. IMPORTANTE: NÃO APAGUE AS CONTAS!

Agora responda:

a) Os números encontrados acima são:

☐ Todos racionais

☐ Todos irracionais

☐ Alguns são racionais e alguns são irracionais. Especifique quais são racionais e quais são irracionais e justifique.

b) A parte periódica das dízimas encontradas acima é formada por quantos algarismos?

c) Toda fração com denominador 7 terá seis algarismos na parte periódica? Justifique.

d) Olhando para as divisões parciais, responda: qualquer número pode ser resto dessas divisões? Ou as possibilidades para os restos das divisões parciais são limitadas? Por quê?

e) Considere a seguinte afirmação: "toda fração com numerador inteiro *m* e denominador inteiro *n* vai produzir uma dízima periódica com *n-1* algarismos na parte periódica". Essa regra é válida? Justifique ou apresente um contraexemplo.

f) Observe a conta a seguir. Cada letra representa um número que foi acidentalmente apagado.

$$\begin{array}{l|l} 32 & 7 \\ \hline 40 & 4{,}5pqrst \\ \;a & \\ \;\;b & \\ \;\;\;c & \\ \;\;\;\;d & \\ \;\;\;\;\;e & \end{array}$$

É possível determinar, SEM FAZER NENHUMA CONTA, os valores de *a, b, c, d, e, p, q, r, s* e *t*? Em caso afirmativo, como é possível fazer isso?

GRUPO 2

1) Encontre as representações decimais das frações 2/17, 3/17, 4/17, 5/17, 6/17, 7/17, 8/17 e 9/17 utilizando o algoritmo da divisão. IMPORTANTE: NÃO APAGUE AS CONTAS!

Agora responda:

a) Os números encontrados acima são:

☐ Todos racionais

☐ Todos irracionais

☐ Alguns são racionais e alguns são irracionais. Especifique quais são racionais e quais são irracionais e justifique.

b) A parte periódica das dízimas encontradas acima é formada por quantos algarismos?

c) Toda fração com denominador 17 terá dezesseis algarismos na parte periódica? Justifique.

d) Olhando para as divisões parciais, responda: qualquer número pode ser resto dessas divisões? Ou as possibilidades para os restos das divisões parciais são limitadas? Por quê?

e) Considere a seguinte afirmação: "toda fração com numerador inteiro *m* e denominador inteiro *n* vai produzir uma dízima periódica com *n-1* algarismos na parte periódica". Essa regra é válida? Justifique ou apresente um contraexemplo.

f) Observe a conta a seguir. Cada letra representa um número que foi acidentalmente apagado.

$$
\begin{array}{l|l}
252 & 17 \\ \hline
82 & 14{,}82a_1b_1c_1 \ldots m_1n_1o_1 \\
\ \mathit{140} & \\
\ \ \mathit{40} & \\
\ \ \ a_2 & \\
\ \ \ \ b_2 & \\
\ \ \ \ \ c_2 & \\
\ \ \ \ \ \ \ldots & \\
\ \ \ \ \ \ \ m_2 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ n_2 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ o_2 &
\end{array}
$$

É possível determinar, SEM FAZER NENHUMA CONTA, os valores de $a_1b_1c_1 \ldots m_1n_1o_1$ e de $a_2b_2c_2 \ldots m_2n_2o_2$? Em caso afirmativo, como é possível fazer isso?

GRUPO 3

1) Encontre as representações decimais das frações 2/13, 3/13, 4/13, 5/13, 6/13, 7/13, 8/13 e 9/13 utilizando o algoritmo da divisão. IMPORTANTE: NÃO APAGUE AS CONTAS!

Agora responda:

a) Os números encontrados acima são:

☐ Todos racionais

☐ Todos irracionais

☐ Alguns são racionais e alguns são irracionais. Especifique quais são racionais e quais são irracionais e justifique.

b) A parte periódica das dízimas encontradas acima é formada por quantos algarismos?

c) Toda fração com denominador 13 terá seis algarismos na parte periódica? Justifique.

d) Olhando para as divisões parciais, responda: qualquer número pode ser resto dessas divisões? Ou as possibilidades para os restos das divisões parciais são limitadas? Por quê?

e) Observe a conta a seguir. Cada letra representa um número que foi acidentalmente apagado.

51	13
120	3,9*abcde*
30	
x	
y	
z	
w	
v	

É possível determinar, SEM FAZER NENHUMA CONTA, os valores de $a, b, c, d, e, x, y, z, w, v$? Em caso afirmativo, como é possível fazer isso?

Formulário individual (para todos os alunos)

2) Considerando as apresentações de todos os grupos, diga se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas e justifique:

a) A representação decimal de qualquer fração de inteiros é necessariamente uma dízima periódica.

☐ Verdadeiro

☐ Falso

Por quê?

b) Toda dízima periódica pode ser convertida em fração de inteiros.

☐ Verdadeiro

☐ Falso

Por quê?

c) A representação decimal de um número que NÃO pode ser escrito como fração de inteiros é necessariamente uma dízima Não-periódica.

☐ Verdadeiro

☐ Falso

Por quê?

d) Toda dízima Não-periódica NÃO pode ser convertida em fração de inteiros.

☐ Verdadeiro

☐ Falso

Por quê?

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu,____,RG nº______________, estou sendo convidado para participar do estudo “O ENSINO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA”.

Passo a saber que este estudo tem como objetivo investigar como é possível capacitar futuros professores de matemática para ensinarem números irracionais de uma forma efetiva na educação básica.

Sei também que esta pesquisa não apresenta nenhum risco à minha pessoa e entendo que traz, não somente para mim, mas para toda a comunidade escolar, como benefício, a possibilidade de melhoria do processo de ensino aprendizagem nos cursos de licenciatura em matemática.

Os dados serão coletados através de gravações, tanto de áudio quanto de vídeo, bem como por meio de anotações realizadas durantes as aulas.

Em qualquer etapa do estudo, terei acesso ao pesquisador responsável, Geraldo Broetto, que pode ser encontrado no endereço Rua XXXX, n. XX, Itapuã, Vila Velha, ES, celular (XX) XXXX-XXXX.

As informações que eu fornecer para o pesquisador serão guardadas em formatos de áudio e vídeo e, posteriormente, transcritas e não serão utilizadas em meu prejuízo ou de outras pessoas, inclusive na forma de danos à estima, prestígio e prejuízo econômico ou financeiro.

Como voluntário, durante ou depois da pesquisa é garantido o anonimato das informações que eu fornecer.

Posso entrar em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos do Instituto Federal do Espírito Santo, onde esta pesquisa foi aprovada, no endereço Av. Vitória, 1729 – Jucutuquara - CEP 29040-780 – Vitória – ES – Fone/Fax: + 55 27 3331-2119/2217/2203, pelo e-mail etica.pesquisa@Ifes.edu.br ou pelo site www.Ifes.edu.br.

Li ou foi lido para minha pessoa as informações sobre o estudo e estou claramente informado sobre minha participação neste estudo.

Fica claro para mim quais são as finalidades do estudo, os riscos e benefícios para minha pessoa, a forma como a pesquisa será aplicada para minha pessoa e a garantia de confidencialidade e privacidade de minhas informações.

Concordo em participar voluntariamente deste estudo e, se for de meu desejo, poderei deixar de participar deste estudo em qualquer momento, durante ou após minha participação, sem penalidades, perdas ou prejuízos para minha pessoa ou de qualquer equipamento ou benefício que possa ter adquirido.

Vitória, _________ de ____________________ de 2014.

________________________________ Assinatura do Pesquisador

__________________________________ Assinatura do Voluntário Participante

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA UTILIZAÇÃO DE DADOS DE PESQUISA

Eu, ____, aluno (a) do curso de licenciatura em matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, declaro que participei de livre e espontânea vontade da pesquisa “O ensino de números irracionais para alunos ingressantes na licenciatura em matemática”, cujos dados foram coletados no período de 5 de maio de 2014 a 16 de setembro de 2014, e, na presente data, tive acesso aos dados transcritos e analisados referentes a minha pessoa.

Estando ciente de ter minha identidade totalmente preservada, autorizo os pesquisadores a utilizarem os dados coletados e analisados referentes a minha pessoa na pesquisa supracitada.

Vitória, ___ de _____________ de 2015.

Participante: ____

Pesquisadores: ____

Geraldo Claudio Broetto

____

Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner

ANEXO 1

Nome da Disciplina: Números na Educação Básica – MAT 049

Professora: Maria Cristina Costa Ferreira - Departamento de Matemática – ICEx - UFMG

Objetivos:

1) Aprofundar o conhecimento que o futuro professor já tem de suas vivências anteriores sobre os números naturais, inteiros, racionais e reais, visando a preparação para a docência na escola básica.
2) Abordar os conceitos, métodos e técnicas matemáticos referentes aos números do ponto de vista das questões do ensino e aprendizagem escolares.
3) Analisar propostas curriculares e recursos didáticos para a escola básica no que se refere aos conteúdos sobre números.

Ementa

Números naturais, inteiros, racionais e reais do ponto de vista da matemática escolar trabalhada nos Ensinos Fundamental e Médio.

Programa:

Discussão de questões relativas ao ensino-aprendizagem de números:

1) A construção do conceito abstrato de número natural. Sistema de numeração decimal. Operações com os naturais: significados, propriedades e algoritmos.
2) O problema da medição: as necessidades de extensão dos naturais aos racionais positivos. O conjunto dos números racionais positivos: representação e significados de uma razão de inteiros. Operações: significados, modelos e propriedades. A representação decimal dos racionais.
3) Os números negativos, interpretações, representação na reta numérica, operações, propriedades.
4) As necessidades de extensão dos racionais: o conjunto dos números reais. Incomensurabilidade e irracionalidade. Representação decimal infinita (periódica e não periódica). Extensão das operações dos racionais para os reais. Propriedades das operações. Potências com expoentes inteiros, racionais e irracionais. O modelo geométrico da reta.
5) Propostas curriculares atuais e recursos didáticos para a abordagem dos números na escola básica.

Bibliografia

1) <u>Números naturais</u>

BROCARDO, Joana, SERRAZINA Lurdes e KRAEMER, Jean- Marie - Algoritmos e sentido do número.

CARAÇA, B.J. O problema da contagem. In: *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 1998.

CENTURIÓN, Marília. As operações aritméticas. In: *Números e operações. Conteúdo e metodologia da matemática.* São Paulo: Scipione, 1995.

CENTURIÓN, Marília. Os algoritmos das operações aritméticas. In: *Números e operações. Conteúdo e metodologia da matemática.* São Paulo: Scipione, 1995.

LOPES, Antônio José; RODRIGUEZ, Joaquin Gimenez. Metodologia para o ensino da Aritmética: competência numérica no cotidiano. São Paulo: FTD, 2012

MANDARINO, Mônica; BELFORT, Elizabeth. *Números naturais – Conteúdo e forma.* Rio de Janeiro: Ministério da Educação; Universidade Federal do Rio de Janeiro/Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências, 2005.

HART, Kathleen (ed.). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray, 1981.

2) Números Inteiros

IRIARTE, Maria Dolores; VARGAS-MACHUCA, Inmaculada. Los números negativos y su larga y azarosa historia. In: GONZALEZ, Jose Luis et al. *Números enteros.* Madrid: Editorial Síntesis, s.d.

HART, Kathleen (ed.). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray, 1981.

3) Números Racionais

CARAÇA, B.J. O problema da medida. In: *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 1998.

DAVID, Maria Manuela M. S.; FONSECA, Maria da Conceição F.R.. Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária. *Presença Pedagógica,* Belo Horizonte, v. 3, n. 14, p. 54-67, mar/abr 1997.

FERREIRA, M. C.C.; MOREIRA, P. C.; SOARES, E. F. *Números racionais e reais: as concepções dos alunos e a formação do professor.* . Belo Horizonte: UFMG/SPEC/CAPES, 1998.

FERREIRA, M. C.C.; MOREIRA, P. C.; SOARES, E. F. Frações: o que os erros dos alunos podem ensinar aos professores. *Presença Pedagógica,* Belo Horizonte, v. 5, n.29, set./out.1999.

LLINARES, Salvador.; SÁNCHEZ, Maria Victoria. *Fracciones.* Madrid: Síntesis, 1997.

HART, Kathleen (ed.). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray, 1981.

4) Números reais

CARAÇA, B.J. Crítica do problema da medida. In: *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 1998.

FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C.; SOARES, E. F - Números Reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura. *Zetetiké,* Campinas, SP, v. 7, n. 12 , pp. 95-117, Jul./Dez. 1999.

MOREIRA, P.C. O Conhecimento Matemático do Professor: Formação na Licenciatura e Prática Docente na Escola Básica. Tese (doutorado em educação). Faculdade de Educação, UFMG, Belo Horizonte, 2004.

MOREIRA, P.C.; FERREIRA, M. C. C.O que é número real? Os números reais na formação do professor de Matemática. In: CURY, H. N.; VIANNA, C. R.(org.) *Formação do Professor de Matemática: reflexões e propostas*. Santa Cruz do Sul: Editora IPR, 2012.

Avaliação

1) Análise da abordagem de números naturais e racionais em coleções de livros didáticos do ensino fundamental – Trabalho em grupo - apresentação oral e escrita – 20 pontos

2) Atividades diversas individuais e em grupo ao longo do semestre –30 pontos

3) Realização de pesquisa em sala de aula da escola básica e análise dos resultados – apresentação oral e escrita - 30 pontos

4) Seminários de apresentação de artigos – apresentação oral - 20 pontos

Bibliografia para os seminários

BERTONI, Nilza. Um novo paradigma no ensino e aprendizagem das frações. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., Recife. [*Anais eletrônicos...*] Recife, 2004. 1 CD-ROM.

CORREA, Jane; SPINILLO, Alina G. O desenvolvimento do raciocínio multiplicativo em crianças. In: PAVANELLO, Regina M. (Org.). *Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: a pesquisa e a sala de aula.* São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2004, p. 103-127.

GOMES, Maria Laura Magalhães. Sobre o campo numérico dos inteiros nos livros didáticos brasileiros: o caso da regra de sinais da multiplicação.

MARCHESI, Armando. Inversão de mão na rua dos racionais: dos números com vírgula para os fracionários. In: FIORENTINI, Dario.; MIORIM, Maria Ângela. (orgs.) *Por trás da porta, que matemática acontece?* Campinas: Editora Graf. FE/UNICAMP - CEMPEM, 2001, p. 83-120.

MEGID, Maria Auxiliadora. Construindo matemática na sala de aula: uma experiência com os números relativos. In: FIORENTINI, Dario.; MIORIM, Maria Ângela. (orgs.) *Por trás da porta, que matemática acontece?* Campinas: Editora Graf. FE/UNICAMP - CEMPEM, 2001, p. 143-184.

MORETTI, Méricles T. -1x-1=1? REPPEMAT, p.20-21. UFSC, 2006.

OLIVEIRA, Rodrigo L. E o amargo vira doce... Fazendo contas de cabeça. In: FIORENTINI, Dario; JIMÉNEZ, Alfonso (Org.). *Histórias de aulas de Matemática: compartilhando saberes profissionais.* Campinas: Graf. FE: CEMPEM, 2003, p. 13- 23.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa & ALLEVATO, Norma Suely Gomes. As diferentes “Personalidades” do Número Racional trabalhadas através da Resolução de Problemas. Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), Rio Claro (São Paulo), Ano 21, No 31, 2008, p.79 a 102.

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana & OLIVEIRA, Hélia. Capítulo III, Investigações Numéricas. In: *Investigações Matemáticas na sala de Aula.* Coleção Tendências em Educação Matemática . Belo Horizonte, Autêntica, 2003, p. 55 a 70.

AABOE, Asger. **Episódios da história antiga da matemática**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de filosofia**. 5. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ACZEL, Amir. **O mistério do alef**: a matemática, a cabala e a procura pelo infinito. São Paulo: Globo, 2003.

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Iniciação à lógica**. São Paulo: Nobel, 2002.

ANDERSEN, Harold. A nontraditional introduction to irrational numbers. **The Mathematics Teacher**, v. 61, n. 3, p. 272–275, 1968.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. Volume 1. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

APOSTOL, Tom. **Calculus**. vol. 1. 2. ed. Nova Iorque: Wiley & Sons, 1967.

ARAGONA, Jorge. **Números reais**. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

ARAÚJO, Marcos Paulo Ferreira de. **Introdução ao conceito de números reais:** uma proposta didática baseada na História da Matemática. 2011. 47 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2011.

ARCAVI, Abraham. **History of mathematics as a component of mathematics teacher's background.** 1985. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências). Weizmann Institute of Science, Rehovot. 1985.

ARCAVI, Abraham; BRUCKHEIMER, Maxim; BEN-ZVI, Ruth. History of mathematics for teachers: the case of irrational numbers. **For the Learning of Mathematics**, v. 2, n. 7, p. 18–23, 1987.

ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para licenciatura**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

______. **Variáveis complexas e aplicações**. 3. Ed. São Paulo: LTC, 2000.

______. Grandezas incomensuráveis e números irracionais. **Revista do Professor de Matemática**, n. 5, p. 6–11, 1984.

BALDINO, Roberto Ribeiro. A ética de uma definição circular de número real. **Bolema**, v. 9, n. 10, p. 31–52, 1994.

BALL, Deborah; BASS, Hyman. Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In: ANNUAL MEETING OF THE CANADIAN MATHEMATICS EDUCATION STUDY GROUP, 2003, Edmonton. **Anais**... Edmonton: CMESG/GCEDM, 2003, p. 3 – 14. Disponível em: http://eric.ed.gov/?id=ED529557.

BALL, Deborah; THAMES, Mark; PHELPS, Geoffrey. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389–407, 2008.

BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; NASCIMENTO, Vanderlei M. do. **Um tratamento via medição para os números reais.** Coleção História da Matemática para Professores. Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2005.

BASS, Hyman. Quantities, numbers, number names and the real number line. In: ICMI 23, 2015, Macau. **Anais**... Macau: ICMI, 2015, p. 10 - 20.

BECKMANN, Petr. **A history of pi**. 3. ed. Nova Iorque: St. Martin' Press, 1974.

BELL, Eric Temple. **Men of mathematics**: the lives and achievements of the great mathematicians from Zeno to Poincare. Nova Iorque: Simon & Schuster, 1986.

BENTLEY, Peter. **O livro dos números**: uma história ilustrada da matemática. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 2009.

BERGÉ, Analía. The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. **Educational Studies in Mathematics**, v. 67, n. 3, p. 217–235, 2008. Disponível em: http://link.springer.com/10.1007/s10649-007-9101-5.

BINGOLBALI, Erhan; MONAGHAN, John. Concept image revisited. **Educational Studies in Mathematics**, v. 68, n. 1, p. 19–35, 2008.

BLOG MANTHANO. Uma prova de que pi é irracional. 2012. Disponível em: http://manthanos.blogspot.com.br/2012/12/uma-prova-de-que-e-irracional_20.html. Acesso em: 27 ago. 2014.

BOFF, Daiane Scopel. **A construção dos números reais na escola básica**. 2006. 254 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2006.

BOYER, Carl. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. **Exame Nacional do Ensino Médio**. Brasília: MEC/Inep, 2011a. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2011/07_AZUL_GAB.pdf.

______. **Matriz de referência Prova Brasil** - matemática - 8a série do Ensino Fundamental. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2011b. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/web/prova-brasil-e-saeb/o-que-cai-nas-provas

______. **Exame Nacional do Ensino Médio**. Brasília: MEC/Inep, 2010a. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/AZUL_quinta-feira_GAB.pdf.

______. **Referenciais curriculares nacionais dos cursos de bacharelado e licenciatura**. Brasília: MEC, 2010b.

______. **Matriz de referência para o ENEM 2009**. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2009.

______. **Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes**. Brasília: MEC/Inep, 2008a.

______. **Plano de Desenvolvimento da Educação**. SAEB - ensino médio: matrizes de referência e tópicos descritores. Brasília: MEC/SEB, 2008b.

______. **Diretrizes curriculares nacionais para a formação de professores da educação básica**. Brasília: Conselho Nacional de Educação, 2002.

______. **Diretrizes curriculares para cursos de matemática**. Brasília: Conselho Nacional de Educação/Câmara de Educação Superior, 2001.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 2000.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática (3° e 4° ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRITT, Deborah. On irrational numbers. **The Mathematics Teacher**, v. 91, n. 5, p. 371 - 396, 1998.

BROETTO, Geraldo Claudio. **Resolução de problemas e desempenho escolar em matemática no ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória. 2004.

BROWN, Stephen; WALTER, Marion. **The art of problem posing**. 3. ed. Nova Jérsei: Lawrence Erlbaum Associates, 2005.

CAJORI, Florian. **Uma história da matemática**. Rio de Janeiro: Moderna, 2007.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais de matemática**. Lisboa: Fotogravura Nacional, 1951.

CARMO, Manfredo Perdigão do. Geometrias não-euclidianas. **Revista Matemática Universitária**, n. 6, p. 25–48, 1987.

CARNEIRO, José Paulo. O problema do amigo oculto. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 28, p. 21-26, 1995.

CEZAR, Mariana dos Santos. **Produções de significados matemáticos na construção dos números reais.** 2014. 167 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória. 2014.

______. **Concepções acerca do conceito de números reais:** uma breve reflexão sobre seu ensino na educação básica. 2011. 64 f. Monografia (Especialização em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Espírito Santo, São Mateus. 2011.

CHERVEL, André. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, n. 2, p. 177–229, 1990.

CHEVALLARD, Yves. **La transposición didáctica**: del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique, 1991.

CORBO, Olga. **Seção áurea:** um contexto para desenvolver a noção de incomensurabilidade de segmentos de reta. 2005. 243 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. 2005.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

DALLABRIDA, Norberto. A reforma Francisco Campos e a modernização nacionalizada do ensino secundário. **Educação**, v. 32, n. 2, p. 185–191, 2009. Disponível em: http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/faced/article/viewFile/5520/4015.

DAMAZIO, Ademir; ROSA, Josélia Euzébio da; EUZÉBIO, Juliana da Silva. O ensino do conceito de número em diferentes perspectivas. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 14, n. 1, p. 209–231, 2012.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática**. 7a série. São Paulo: Ática, 2002.

______. **Tudo é matemática**. 8a série. São Paulo: Ática, 2005.

DANTZIG, Tobias. **Number** - the language of science. 4. ed. Nova Iorque: Pi Press, 1970.

DEWDNEY, Alexander Keewatin. **20.000 léguas matemáticas** - um passeio pelo misterioso mundo dos números. São Paulo: Zahar, 2000.

DIAS, Marisa da Silva. **Formação da imagem conceitual da reta real**: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica. 2007. 253 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo. 2007.

______. **Reta real:** conceito imagem e conceito definição. 2002. 107 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. 2002.

DIAS, Marisa da Silva; COBIANCHI, Antônio Sérgio. Correlação do lógico e do histórico no ensino dos números reais. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2004, São Paulo. **Anais**... São Paulo: FEUSP, 2004. p. 1–11.

DOMINGOS, António. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados** – a matemática no início do superior. 2003. 407 f. Tese (Doutorado em Ciências e Educação). Universidade Nova de Lisboa, Lisboa. 2003.

DUTCH, Steven. **Pi in the Bible**. Disponível em: https://www.uwgb.edu/dutchs/pseudosc/pibible.htm . Acesso em: 19 mar. 2015.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de Representação Semiótica. 2. ed. Campinas: Papirus, 2003. p. 11–33.

EISENHART, Margaret; BORKO, Hilda; UNDERHILL, Robert; BROWN, Catherine; JONES, Doug; AGARD, Patricia. Conceptual knowledge falls through the cracks: complexities of learning to teach mathematics for understanding. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 24, n. 1, p. 8–40, 1993.

ERNEST, Paul. The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In: ERNEST, Paul. (Ed.) **Mathematics teaching**: the state of the art. Londres: The Falmer Press, p.249-254.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

FERREIRA, Jamil. **A construção dos números**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Números irracionais e transcendentes**. 3. Ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011.

______. **Análise na reta**. Rio de Janeiro: IMPA/Cnpq, 1973.

FILHO, Daniel Cordeiro de Morais. Malba Tahan e uma demonstração geométrica da irracionalidade. **Revista do Professor de Matemática**, n. 87, p. 12–14, 2015.

FINDING Pi by Archimedes' Method. Produção: Mathwithoutborders.com. 2012. 16 min. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=_rJdkhlWZVQ. Acesso em 14 jun. 2014.

FIORENTINI, Dario. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. **Revista de Educação PUC-Campinas**, n. 18, p. 107–115, 2005. Disponível em: http://200.18.252.94/seer/index.php/reveducacao/article/view/266.

FISCHBEIN, Efraim; JEHIAM, Ruth; COHEN, Dorit. The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. **Educational Studies in Mathematics**, n. 29, p. 29–44, 1995.

FLICK, Uwe. **Introdução à pesquisa qualitativa**. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

FOWLER, David. **The mathematics of Plato's academy**: a new reconstruction. 2. ed. Oxford: Clarendon Press, 1999.

______. Ratio in early greek mathematics. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 1, n. 6, p. 807–846, 1979.

GARBI, Gilberto. **A rainha das ciências**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

GARCIA, Vera Clotilde; SOARES, Débora da Silva; FRONZA, Juliana. **Ensino dos números irracionais no nível fundamental**. v. 1. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2005.

GARDNER, Martin. The transcendental number e. In: GARDNER, M. **The unexpected hanging and other mathematical diversions -** a classic collection of puzzles and games from Scientific American. Chicago: University of Chicago Press, 1991.

GAROFALO, Joe; LESTER, Frank. Metacognition, cognitive monitoring, and mathematics performance. **Journal for Research in Mathematics Education**, 16(3), p. 163-176, 1985.

GIOVANNI JR., José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática**. 8º ano. São Paulo: FTD, 2009.

GIRALDO, Victor Augusto. **Descrições e conflitos computacionais**: o caso da derivada. 2004. 230 f. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia de Sistemas). Universidade Federal do Rio de Janeiro. 2004.

GLEISER, Marcelo. **A dança do universo**: dos mitos de criação ao Big-Bang. São Paulo: Companhia das Letras, 1997.

GODINO, Juan D. **Didáctica de las matemáticas para maestros**. Proyeto Edumat-Maestros. Granada: Universidad de Granada, Facultad de Ciências de la Educación, 2004.

GOMES, Maria Laura Magalhães. Aspectos históricos da abordagem dos números irracionais na matemática escolar brasileira: no tempo da aritmética, álgebra, geometria e trigonometria. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 6., 2005, Brasília. **Anais**... Brasília: SBHMAT, 2005, p. 195–204.

______. **História do ensino da matemática**: uma introdução. Belo Horizonte: CEAD-UFMG, 2012.

GOMEZ-CHACÓN, Inés María. **Matemática emocional** – os afetos na aprendizagem matemática. Porto Alegre: Artmed, 2003.

GONÇALVES, Carlos. Abstract and measure numbers in the Diyala region: an example of fluctuating and overlapping roles. Disponível em: http://www.ichstm2013.com/programme/guide/p/1091.html .

GONÇALVES, Carlos; POSSANI, Claudio. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga. **Revista Matemática Universitária**, p. 16–24, dez. 2009.

HAVIL, Julian. **The irrationals -** a story of the numbers you can't count on. Nova Jérsei: Princeton University Press, 2012. Livro eletrônico.

HERSHKOWITZ, Rina. Aspectos psicológicos da aprendizagem da geometria. **Boletim GEPEM**, v. 32, p. 3–31, 1994.

HOUAISS, Antônio. **Dicionário eletrônico Houaiss da língua portuguesa**. São Paulo: Objetiva, 2009. CD-ROM.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**: complexos, polinômios, equações. 7. ed. São Paulo: Atual, 2005.

IFRAH, Georges. **Os números**: a história de uma grande invenção. 11. ed. São Paulo: Globo, 2005.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo; SILVA, Benedito Antônio da. Conhecimentos das concepções prévias de estudantes sobre números reais: um suporte para melhoria do ensino-aprendizagem. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 21., 1998, Caxambu. **Anais**... Caxambu: Anped, 1998.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática**. 9o ano. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2012.

KAPLAN, Wilfred; LEWIS, Alfred. **Cálculo e álgebra linear**. vol. 1. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1972.

KASNER, Edward; NEWMAN, James R. **Matemática e imaginação**. Rio de Janeiro: Zahar, 1968.

KATZ, Victor J. **A history of mathematics**: an introduction. 3. Ed. Boston: Pearson Education, 2009.

KLEIN, Felix. **Elementary mathematics from an advanced standpoint**. Londres: Mcmillian and Co., 1932.

KLEIN, Jacob. **Greek mathematical thought and the origin of algebra**. Nova Iorque: Dover Publications, 1968.

KLINE, Morris. **Mathematical thought from ancient to modern times**. vol. 1. Nova Iorque: Oxford University Press, 1972a.

______. **Mathematical thought from ancient to modern times**. vol. 3. [S.l.]: Oxford University Press, 1972b.

LACZKOVICH, Miklós. On Lambert's proof of the irrationality of π. **American Mathematical Monthly**, v. 104, n. 5, p. 439, 1997. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/2974737?origin=crossref.

LAKATOS, Imre. **A lógica do descobrimento matemático**: provas e refutações. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

LANG, Serge. **Cálculo**. vol. 1. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1976.

LEIVAS, José Carlos Pinto; CURY, Helena Noronha. Transposição didática: exemplos em educação matemática. **Educação Matemática Em Revista**, v. 1, n. 10, p. 65–74, 2009. Disponível em: http://www.gente.eti.br/nemat/public/upload/noticias/20131022161127borba_e_selva.pdf#page=65.

LEONARDO, Fábio Martins de (Org.). **Projeto Araribá Matemática**. 8o Ano. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio**. vol. 1. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

LIMA, Elon Lages (Ed.). **Exame de textos**: análise de livros de matemática para o ensino médio. Rio de Janeiro: VITAE/IMPA/SBM, 2001.

______. **Curso de Análise**. vol. 1. 8. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 1995.

______. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

LINS, Romulo Campos. O modelo dos campos semânticos: estabelecimento e notas de teorizações. In: ANGELO, Claudia Laus et al. (Org.). **Modelos dos campos semânticos e educação matemática**. São Paulo: Midiograf, 2012, p. 11–30.

LIVIO, Mario. **Deus é matemático?** Rio de Janeiro: Record, 2010.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e educação**: alegorias, tecnologias, jogo, poesia. 6. Ed. Coleção Questões da Nossa Época, v. 43. São Paulo: Cortez, 2012.

______. Sobre livros didáticos - quatro pontos. **Em Aberto**, p. 30–38, 1996.

MAOR, Eli. **e**: a história de um número. 4. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MARTINS, Juliana. **O livro que divulgou o papiro Rhind no Brasil**. 2015. 232 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Unesp, Rio Claro, 2015.

MAURER, Willie Alfredo. **Lições de cálculo infinitesimal**. 4. ed. São Paulo: Nobel, 1964.

MELO, Severino Barros de. **A compreensão do conceito de número irracional**: uma radiografia do problema e uso da história como uma alternativa de superação. 1999. 222 f. Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências). Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife. 1999.

MENDES, Iran Abreu. **Números** – o simbólico e o racional na história. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

MENDES, Sônia Cristina da Cruz. **Práticas pedagógicas para o ensino dos números irracionais**. 2012. 113 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Severino Sombra, Vassouras. 2012.

MIGUEL, Antônio. Números irracionais: a constituição de um estudo histórico-pedagógico. In: MIGUEL, Antônio *et al*. (Org.). **História da matemática em atividades didáticas**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. p. 179–319.

______. **Três estudos sobre história e educação matemática**. 1993. 361 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual Paulista, Campinas. 1993.

MLODINOW, Leonard. **A janela de Euclides**: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. São Paulo: Geração Editorial, 2010.

MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. Malba Tahan e uma demonstração geométrica de irracionalidade. **Revista do Professor de Matemática**, ano 33, n. 87, p. 12 – 14, 2015.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti. **O Conhecimento matemático do professor**: formação na licenciatura e prática docente na escola básica. 2004. 202 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. 2004.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela. **A formação matemática do professor**: licenciatura e prática docente escolar. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; FERREIRA, Maria Cristina Costa. O que é número real? Os números reais na formação do professor de matemática. In: CURY, Helena Noronha; VIANNA, Carlos Roberto (Org.). **Formação do professor de matemática**: reflexões e propostas. Santa Cruz do Sul: IPR, 2012. p. 49–94.

MOSCA, Marcos Antônio. **Números irracionais no ensino médio**: desdobrando o tema com equações polinomiais. 2013. 106 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2013.

MOXHAY, Peter. Assessing the scientific concept of number in primary school children. In: ISCAR, 2008, San Diego. **Anais**... San Diego: ISCAR, 2008. p. 1–24.

MUIR, Jane. **Of men and numbers** - the story of the great mathematicians. Nova Iorque: Dover, 1996.

NAKAMURA, Keiji. **Conjunto dos números irracionais**: a trajetória de um conteúdo não incorporado às práticas escolares. 2008. 128 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. 2008.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM, 2000.

______. **Professional standards for teaching mathematics**. Reston: NCTM, 1991.

______. **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. Reston: NCTM, 1989.

NIVEN, Ivan. **Números**: racionais e irracionais. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1990.

______. A simple proof that pi is irrational. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 53, n. 1, p. 509–510, 1947.

OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNÁNDEZ, Adán José Corcho. **Iniciação à matemática**: um curso com problemas e soluções. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

PAIS, Luiz Carlos. Transposição didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2012.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. vol. 1. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PASQUINI, Regina Célia Guapo. **Um tratamento para os números reais via medição de segmentos**: uma proposta, uma investigação. 2007. 209 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2007.

PENTEADO, Cristina Berndt. **Concepções de professores do ensino médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade**. 2004. 247 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. 2004.

PIETROPAOLO, Ruy César; CORBO, Olga; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. Os números irracionais e seu ensino delineando a imagem conceitual de um grupo de professores. In: CONGRESSO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA DE AMÉRICA CENTRAL Y EL CARIBE, 1., 2013, Santo Domingo. **Anais**... Santo Domingo: REDUMATE, 2013. Disponível em: http://i.cemacyc.org.

PINHEIRO, Sandra; VALE, Isabel. Formulação de problemas e criatividade na aula de matemática. In: SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 24., 2013, Minho. **Anais**... Minho: APM, 2013, p. 481–494.

PINTO, Neuza Bertoni. Marcas Históricas Da Matemática Moderna No Brasil. **Revista Diálogo Educacional**, v. 5, n. 16, p. 25–38, 2005.

POINCARÉ, Henri. **O valor da ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. (A primeira edição dessa obra, em língua inglesa, foi publicada em 1945).

POMMER, Wagner Marcelo. **A construção de significados dos números irracionais no ensino básico**: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais. 2012. 246 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo. 2012.

______. O número de Eüler: possíveis abordagens no ensino básico. In: SEMINÁRIOS DE ENSINO DE MATEMÁTICA/SEMA–FEUSP, São Paulo, 2010. Disponível em: http://www.nilsonjosemachado.net/sema20100831.pdf.

______. Frações Contínuas no ensino médio? In: SEMINÁRIOS DE ENSINO DE MATEMÁTICA/SEMA–FEUSP, São Paulo, 2009. Disponível em: http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3812/20211/CO+2009+2sem+SEMA+FEUSP+Fra%C3%A7%C3%B5es+Cont%C3%ADnuas.pdf.

REIS, Aarão; REIS, Luciano. **Curso elementar de mathematica**: Arithmetica. 2. ed. Rio de Janeiro: F. Alves & Cia, 1892.

REZENDE, Veridiana. **Conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos brasileiros e franceses**: um estudo com alunos concluintes de três níveis de ensino. 2013. 210 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Maringá, Maringá. 2013.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de Cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 468 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade de São Paulo, São Paulo. 2003.

______. **Uma análise histórica-epistêmica da operação de limite**. 1994. 166 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro. 1994.

REZENDE, Wanderley Moura; MENDONÇA, Ana Clara Pessanha Teixeira de; PEREIRA, Rodrigo Viana. (Re) Construindo o conceito de número racional. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais**... Curitiba: SBEM, 2013. Disponível em: http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/949_504_ID.pdf

ROCHA, Messenas Miranda; SANTOS-WAGNER, Vânia M. P. dos; BROETTO, Geraldo Claudio. Resolução de problemas na rotina escolar. In: ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15, 2013, Teixeira de Freitas. **Anais**... Teixeira de Freitas: SBEM, 2013. Disponível em: http://xvebem.galoa.com.br/node/3723.html.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 2012.

ROQUE, Tatiana; GIRALDO, Victor Augusto. **O saber do professor de matemática**: ultrapassando a dicotomia entre didática e conteúdo. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014.

ROSA, António Pereira. Números irracionais no ensino secundário. **Gazeta de Matemática**, v. 142, p. 32–36, 2002.

ROSA, Josélia Euzébio da; DAMAZIO, Ademir; SILVEIRA, Gisele Mezzari. O sistema de numeração nas tarefas propostas por Davýdov e seus colaboradores para o ensino de matemática. **Bolema**, v.28, n.50, p.1135–1154, 2014.

ROSSMEISSL, John; WEBBER, Frederick. Incomensuráveis e números irracionais. In: GUNDLACH, Bernard (Org.). **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula** - números e numerais. São Paulo: Atual, 1992, p. 54–56.

SANT'ANNA, Diogo; BITTENCOURT, Jane; OLSSON, Sandra. Transposição e mediação didática no ensino de frações. **Bolema**, v. 20, n. 27, p. 1–18, 2008.

SANTOS, Vânia Maria Pereira dos. Matemática – conhecimento, concepções e consciência metacognitiva de professores em formação e em exercício. In: NASSER, Lilian (Ed.). **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro: Instituto de matemática da UFRJ, p. 117 - 132, 1995.

______. Consciência metacognitiva de futuros professores primários numa disciplina de matemática e um exame de seu conhecimento, concepções e consciência metacognitiva sobre frações. **Série Documental**: Eventos, Brasília, INEP, n. 4, 2ª parte, p. 1-20, 1994.

______. **Metacognitive awareness of prospective elementary teachers in a mathematics content course and a look at their knowledge, beliefs and metacognitive awareness about fractions**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Indiana University, Bloomington, 1993.

SCHEIBE, Leda. A formação pedagógica do professor licenciado - contexto histórico. **Perspectiva**, v.1, n.1, p.31–45, 1983.

SCHOENFELD, A. Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research**

on mathematics teaching and learning. Nova Iorque: MacMillan Publishing Company, 1992, p. 334-370.

SHULMAN, Lee. Knowledge and teaching. **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1–22, 1987.

______. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n.2, p.4–14, 1986.

SILVA, Ana Lúcia Vaz. **Números reais no ensino médio** - identificando e possibilitando imagens conceituais. 2011. 340 f. Tese (Doutorado em Ciências Humanas – Educação). Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro. 2011.

SILVA, Benedito Antonio da; PENTEADO, Cristina Berndt. Fundamentos dos números reais: concepções de professores e viabilidade de início do estudo da densidade no ensino médio. **Educação Matemática em Pesquisa**, v.11, n. 2, p.351-371, 2009.

SILVA, Ezequiel Theodoro da. Livro didático: do ritual de passagem à ultrapassagem. **Em aberto**, n. 69, p. 11–15, 1996.

SILVA, Gratuliano Erigoi Alves da. **Um estudo sobre a aprendizagem de números irracionais no ensino médio**. 2006. 180 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal. 2006.

SILVA, Jairo José da. **Filosofias da matemática**. São Paulo: Editora Unesp, 2007.

SILVER, Edward; MAMONA-DOWNS, Joanna; LEUNG, Shukkwan; KENNEY, Patricia Ann. Posing mathematical problems: an exploratory study. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 27, n.3, p. 293–309, 1996.

SIROTIC, Natasa. **Prospective secondary mathematics teachers' understanding of irrationality**. 2004. 219 f. Dissertação (Mestrado em Ciências). Simon Fraser Universtiy, Burnaby. 2004.

SIROTIC, Natasa; ZAZKIS, Rina. Irrational numbers on the number line – where are they? **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 38, n. 4, p. 477–488, 2007a.

______. Irrational Numbers: the gap between formal and intuitive knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, v. 65, n. 1, p. 49–76, 2007b. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/s10649-006-9041-5>. Acesso em: 25 set. 2013.

SKEMP, Richard. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics Teaching**, n. 77, p. 20–26, 1976.

SMITH, David Eugene. **History of mathematics**. vol. 2. Boston: Ginn & Co., 1925.

SMITH, Sanderson. **Agnesi to Zeno**: over 100 vignettes from the history of math. Emeryville: Key Curriculum Press, 1996.

SOARES, Eliana Farias; FERREIRA, Maria Cristina Costa; MOREIRA, Plinio Cavalcanti. Números reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura. **Zetetiké**, v. 7, n. 12, p. 95–117, 1999.

______. **Números racionais e reais** - as concepções dos alunos e a formação do professor. 1998. UFMG/SPEC/CAPES, Belo Horizonte, 1998.

SOUSA, Rubens Oliveira de. **Alguns métodos interessantes de extração e aproximação da raiz quadrada**. 2013. 56 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Piauí, Teresina. 2013.

SOUTO, Alexandre Machado. **Análise dos conceitos de número irracional e número real em livros didáticos da educação básica**. 2010. 106 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2010.

SPIVAK, Michael. **Calculus**. Nova Iorque: W. A. Benjamin, 1967.

STEWART, Ian. **Almanaque das curiosidades matemáticas**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

STEWART, James. **Cálculo**. vol. 1. 7. ed. São Paulo: Cenage Learning, 2013.

STRUIK, Dirk. **A concise history of mathematics**. 4. ed. Nova Iorque: Dover, 1987.

SWOKOWSKI, Earl. **Cálculo**. vol. 1. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983.

TALL, David. Concept image and concept definition. 2003. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/concept-image.html. Acesso em: 17 set. 2015.

______. The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. In: GROUWS, David (Org.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. Nova Iorque: Macmillan, 1992, p. 495–511.

______. The psychology of the advanced mathematical thinking. In: TALL, David (Org.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 3–24.

______. Concept image and concept definition. **Senior Secondary Mathematics Education**, n. 1983, p. 37–41, 1988.

TALL, David; SCHWARZENBERGER, Rolph. Conflicts in the learning of real numbers and limits. **Mathematics Teaching**, n. 82, p. 44–49, 1978.

TALL, David; VINNER, Shlomo. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, p. 151–169, 1981.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 2002.

THE Story of Maths – the language of the universe. Direção: Karen McGann. Produção: BBC and Open University. Apresentado por Marcus du Satuoy, 2008. 60 min. Disponível em: http://www.bbc.co.uk/programmes/b00dwf4f.

THOMSON, William; JUNGE, Gustave. **The commentary of Pappus on book X of Euclid's Elements**. Cambridge: Harvard University Press, 1930.
TSABAN, Garber. On the rabinical aproximation of pi. **Historia Mathematica**, v. 25, n. 1, p. 75–84, 1998.

VINNER, Shlomo. The role of examples in the learning of mathematics and in everyday thought processes. **ZDM**, v. 43, n. 2, p. 247–256, 2011. Disponível em: http://link.springer.com/10.1007/s11858-010-0304-3.

______. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, David (Org.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 65–81.

______. Concept definition, concept image and the notion of function. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 14, n. 3, p. 293–305, 1983.

VOSKOGLOU, Michael; KOSYVAS, Georgios. A study on the comprehension of irrational numbers. **Quaderni di Ricerca in Didattica**, n. 21, p. 127–141, 2011.

WADSWORTH, Barry. **Inteligência e afetividade da criança na teoria de Piaget**. 5. Ed. São Paulo: Pioneira, 1997.

WEIR, Maurice; HASS, Joel. **Cálculo de George B. Thomas**. vol. 1. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

ZAZKIS, Rina; SIROTIC, Natasa. Making sense of irrational numbers: focusing on representation. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2004, **Anais**... Bergen: PME, 2004, p. 497–504.