

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**ALLAN DAMM PIASSI**

**PROPOSIÇÃO DE FORMULAÇÃO DA RIGIDEZ ROTACIONAL DE  
VIGAS MISTAS COM PERFIL CELULAR PARA DETERMINAÇÃO DO  
MOMENTO CRÍTICO ELÁSTICO À FLAMBAGEM LATERAL COM  
DISTORÇÃO**

VITÓRIA  
2016

ALLAN DAMM PIASSI

**PROPOSIÇÃO DE FORMULAÇÃO DA RIGIDEZ ROTACIONAL DE  
VIGAS MISTAS COM PERFIL CELULAR PARA DETERMINAÇÃO DO  
MOMENTO CRÍTICO ELÁSTICO À FLAMBAGEM LATERAL COM  
DISTORÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração Estruturas.

Orientador: Adenílcia Fernanda Grobério Calenzani.

VITÓRIA  
2016

ALLAN DAMM PIASSI

**PROPOSIÇÃO DE FORMULAÇÃO DA RIGIDEZ ROTACIONAL DE  
VIGAS MISTAS COM PERFIL CELULAR PARA DETERMINAÇÃO DO  
MOMENTO CRÍTICO ELÁSTICO À FLAMBAGEM LATERAL COM  
DISTORÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de Estruturas.

Aprovada em 05 de agosto de 2016.

**COMISSÃO EXAMINADORA**

---

---

Prof<sup>a</sup>.Dr<sup>a</sup>. Adenilcia Fernanda Grobério Calenzani  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Orientadora

---

Prof. Dr. Fernando Cesar Meira Menandro  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Co-Orientador

---

Prof. Dr. Ricardo Hallal Fakury  
Universidade Federal de Minas Gerais  
Examinador externo

---

Prof. Dr. Walnório Graça Ferreira  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Examinador interno

# DEDICATÓRIA

Em memória de meu padrinho, Ademilson Francisco Piassi.

Pacum, para você todo o meu amor.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus pais pelo apoio e pela oportunidade de me fornecer todos esses anos de estudos. Aos meus irmãos, pela paciência, carinho e companheirismo.

Ao meu amigo/irmão Vinicius de Melo Passos por encarar essa batalha e sonho ao meu lado.

Aos meus orientadores, Adenilcia Fernanda Grobério Calenzani e Fernando César Meira Menandro, pelo apoio incondicional, pela sempre disposição em atender e apoiar o trabalho que se tornou um sonho à ser realizado. Obrigado também por, acima de tudo, se tornarem além de orientadores, amigos e exemplos para minha vida.

À minha namorada, Laíza Bruschi Marchesi, pois sem ela nada disso seria possível. Obrigado por me fazer acreditar quando nem eu acreditava mais. Sem você, nada seria possível.

## RESUMO

As vigas mistas de aço e concreto contínuas e semicontínuas têm se mostrado uma opção interessante de racionalização e otimização de sistemas estruturais, uma vez que possuem uma melhor distribuição de momentos fletores. Adicionalmente, quando se utilizam perfis celulares de aço em vigas mistas os resultados em relação à economia podem ser ainda mais promissores. Entretanto, em vigas mistas contínuas ou semicontínuas, na região de momentos negativos próximos aos apoios internos, uma parte do perfil de aço está sujeita à compressão, o que pode ocasionar um estado limite de instabilidade global denominado flambagem lateral com distorção (FLD). A ABNT NBR 8800:2008 fornece um procedimento aproximado para verificação desse estado limite pelo qual se obtém o momento crítico elástico a partir da rigidez rotacional das vigas mistas, porém esse procedimento se restringe às vigas mistas com perfis de aço de alma cheia. Neste trabalho, uma equação para o cálculo da rigidez rotacional da alma de perfis celulares foi deduzida analiticamente e verificada por análises numéricas desenvolvidas no ANSYS, sendo possível comprovar a sua eficiência. Uma análise paramétrica foi implementada para avaliação da influência dos parâmetros geométricos do perfil celular no valor da rigidez rotacional de sua alma. A formulação proposta para rigidez rotacional de vigas mistas com perfil celular utiliza a equação deduzida neste trabalho para o cálculo da rigidez da alma e a equação da ABNT NBR 8800:2008 para o cálculo da rigidez rotacional da laje. O valor da rigidez rotacional fica determinado com base na expressão da rigidez de molas ligadas em série. Dessa forma, o cálculo do momento crítico à FLD, prescrito na ABNT NBR 8800:2008, é estendido a vigas mistas com perfil de aço celular em exemplos numéricos com as devidas modificações nas propriedades geométricas e na rigidez rotacional.

**Palavras chave:** Flambagem Lateral com Distorção, Vigas Mistas Contínuas e Semicontínuas, Perfil de Aço Celular, Rigidez Rotacional da Viga Mista.

## ABSTRACT

Continuous and semi-continuous steel and concrete composite beams have been presented as an interesting option for rationalization and optimization of structural systems, since they have better moment distribution. Additionally, when cellular steel profiles are used in composite beams the results with regard to economy can be more promising. At the hogging moment region, close to the supports, though, for continuous and semi-continuous composite beams, a portion of the steel profile is subject to compressive forces, what may cause a global instability limit state called lateral-torsional buckling (LTB). The Brazilian Standard ABNT NBR 8800:2008 provides an approximate procedure for the verification of this limit state with which the critical elastic moment can be obtained from the rotational stiffness of the composite beams, but this procedure is restricted to composite beams with full web profiles. In this work, an equation was analytically deduced for the computation of the rotational stiffness of the cellular profile web and subsequently verified through numerical simulations carried out using ANSYS. This showed the efficiency of the developed equation. A parametric analysis was implemented for the evaluation of the influence of the cellular profile geometric parameters at the computed value of the rotational stiffness of its web. The proposed formulation for rotational stiffness of cellular profile composite beams utilizes the equation deduced for this research in the computation of the web stiffness and the equation from ABNT NBR 8800:2008 in the computation of the rotational stiffness of the slab. From this, the value of the rotational stiffness is determined based on the expression of the stiffness of springs serially connected. Finally, the critical moment for LTB computation, prescribed by ABNT NBR 8800:2008, is extended to cellular steel profile composite beams in numerical examples with the necessary modifications in the geometric properties and in the rotational stiffness.

**Keywords:** Distortional Lateral Buckling, Continuous Composite Beams, Rotational Stiffness, Elastic Critical Moment

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Momento positivo .....	16
Figura 1.2 – Momento negativo .....	16
Figura 1.3 - Flambagem lateral com distorção .....	17
Figura 1.4 - Mecanismo “U” invertido .....	17
Figura 1.5 - Rigidez rotacional de uma viga mista para o mecanismo “U” invertido..	18
Figura 1.6 – Rigidez à flexão da laje fissurada.....	20
Figura 1.7 – Rigidez à distorção da alma do perfil .....	21
Figura 1.8 – Rigidez da conexão de cisalhamento.....	22
Figura 1.9 – Fabricação e montagem de vigas celulares .....	23
Figura 1.10 – Geometria para fabricação de vigas celulares .....	23
Figura 1.11 – Vigas celulares de aço e Vigas celulares mistas de aço e concreto ...	25
Figura 1.12 – Vigas Mistas Celulares.....	26
Figura 2.1 - Mecanismo “U” contínuo e discreto.....	30
Figura 2.2 – Viga mista com mecanismo “U” contínuo.....	31
Figura 2.3 – Sistema equivalente para representar o comportamento do mecanismo .....	32
Figura 2.4 – Esquema para cálculo de $M_{Rd}$ .....	38
Figura 2.5 – Valor de $\chi_{dist}$ em função do índice de esbeltez $\lambda_{dist}$ .....	38
Figura 2.6 - Pórtico em “U” invertido .....	39
Figura 2.7 – Modelo U1 de Fan.....	42
Figura 2.8 - Modelo restringido.....	46
Figura 3.1 – Modelo para formulação analítica .....	50
Figura 3.2 – Regiões para integração .....	50
Figura 3.3 – Modelo para viga celular com $n$ aberturas .....	53
Figura 3.4 – Rigidez à distorção da alma do perfil .....	54
Figura 3.5 – Modelo Placa Celular - Frontal.....	56
Figura 3.6 – Modelo Placa Celular - Isométrica.....	56
Figura 3.7 – Elemento de casca Shell 181 .....	57
Figura 3.8 – Deslocamento Máximo x Quantidade de Elementos.....	60
Figura 3.9 – Desvio relativo x Tamanho do Elemento.....	60
Figura 3.10 – Condições de Contorno da placa celular.....	61
Figura 3.11 – Aplicação da força na placa celular .....	62
Figura 3.12 – Gráfico da linha de ajuste perfeito.....	64
Figura 3.13 – Força x Comprimento – 1 furo.....	67
Figura 3.14 – Nós do modelo numérico C200x26,6_1,6_0,65_1,3_0,5_1 .....	67
Figura 4.1 – Variação da rigidez rotacional da alma celular com a altura do perfil....	74
Figura 4.2 – Variação da rigidez rotacional da alma com o diâmetro da abertura....	76
Figura 4.3 – Variação da rigidez rotacional da alma celular com a distância da extremidade ao início do diâmetro da abertura .....	79
Figura 4.4 – Alma celular com duas aberturas obtida do perfil W200x26.6 .....	80
Figura 4.5 — Alma celular com duas aberturas e condições de contorno .....	81



Figura 4.6 – Variação da rigidez rotacional da alma celular para diferentes espaçamentos entre aberturas .....	83
Figura 4.7 Comparação da alma modelada no Ansys com a da equação- 2 aberturas .....	84
Figura 4.8 – Variação da rigidez rotacional da alma celular do perfil W200x26.6 para $n$ aberturas .....	87
Figura 4.9 – Variação da rigidez rotacional da alma celular do perfil W410x60 para $n$ aberturas .....	88
Figura 4.10 – Variação da rigidez rotacional da alma celular do perfil W610x125 para $n$ aberturas .....	89
Figura 4.11 – Linha de ajuste perfeito – Perfil W200x26.6 .....	91
Figura 4.12 – Linha de ajuste perfeito – Perfil W410x60 .....	91
Figura 4.13 – Linha de ajuste perfeito – Perfil W610x125 .....	92
Figura 5.1 – Vigas mistas com perfil de alma celular - Mecanismo U contínuo .....	94
Figura 5.2 – Modelo Padrão – Vista Lateral .....	94
Figura 5.3 – Modelo Padrão – Distância entre vigas .....	94
Figura 5.4 – Faixa Transversal da Laje .....	95
Figura 5.6 – Seção transversal perfil celular – T superior .....	98
Figura 5.7 – Seção transversal Viga Mista .....	100

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Valores de $C_{dist}$ para vãos com cargas transversais.....	35
Tabela 2.2 – Valores de $C_{dist}$ para vãos sem cargas transversais.....	36
Tabela 2.3 – Coeficientes de $C_{dist}$ para vigas semicontínuas submetidas a carregamento uniformemente distribuído .....	36
Tabela 2.4 – Valores de $C_{dist}$ para vãos com cargas transversais.....	40
Tabela 3.1 – Análise da Malha .....	59
Tabela 3.2 – Perfis para validação analítica.....	62
Tabela 3.3 – Tabela de modelo padrão.....	63
Tabela 3.4 – Tabela de perfis padrão para aferição .....	63
Tabela 3.5 – Comparação dos resultados.....	65
Tabela 3.6 – Reação da Força nos nós do modelo.....	66
Tabela 4.1 – Tabela paramétrica de variação das propriedades geométricas .....	69
Tabela 4.2 – Tabela paramétrica de variação do número de aberturas .....	70
Tabela 4.3 – Tabela dos modelos de alma celular gerados do perfil W200x26,6 .....	71
Tabela 4.4 – Tabela dos modelos de alma celular gerados do perfil W410x60 .....	71
Tabela 4.5 – Tabela dos modelos de alma celular gerados do perfil W610x125 .....	72
Tabela 4.6 – Rigidezes analítica e numérica para diferentes perfis e alturas de alma .....	73
Tabela 4.7 – Rigidezes analítica e numérica para diferentes diâmetros da abertura	76
Tabela 4.8 – Rigidezes analítica e numérica para diferentes espaçamentos entre a distância da extremidade ao início do diâmetro da abertura .....	78
Tabela 4.9 – Rigidezes analítica e numérica para diferentes espaçamentos entre aberturas .....	82
Tabela 4.10 – Rigidez numérica e analítica para diferentes espaçamentos entre aberturas – 10, 20 e 30 aberturas. ....	85
Tabela 4.11 – Rigidezes analítica e numérica do perfil W200x26,6 para $n$ aberturas .....	87
Tabela 4.12 – Rigidezes analítica e numérica do perfil W410x60 para $n$ aberturas..	88
Tabela 4.13 – Rigidezes analítica e numérica do perfil W610x125 para $n$ aberturas	89
Tabela 5.1 – Rigidez Rotacional dos Modelos Estudados .....	96
Tabela 5.2 – Coeficiente $C_{dist}$ para vigas contínuas e semicontínuas sem carregamento no comprimento $L$ .....	101
Tabela 5.3 – Momento Crítico dos Modelos Estudados .....	102

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$  - área

$b_f$  – largura da mesa

$b_w$  – altura total da onda senoidal

$C_{dist}$  – fator de modificação do diagrama de momento fletor não uniforme

$C_w$  – constante de empenamento

$d, e$  – distância

$E, E_a$  – módulo de elasticidade do aço

$F$  - força

$f_y$  – resistência ao escoamento do aço

$f_s$  – resistência ao escoamento da armadura

$G$  – módulo de elasticidade transversal do aço

$h$  - altura

$I$  – momento de inércia

$J$  – constante de torção

$k$  – rigidez rotacional

$L$  – vão

$M_{cr}$  – momento crítico elástico

$M_R$  – momento fletor resistente

$M_{Sd}$  – momento fletor solicitante de cálculo

$q$  – carga uniformemente distribuída

$t_f$  – espessura da mesa

$t_w$  – espessura da alma

$r$  – raio de giração

$y$  - distância

$w$  – comprimento da onda senoidal

$\alpha$  – coeficiente

$\delta, \Delta$  - deslocamento

$\lambda$  – índice de esbeltez

$\nu$  – coeficiente de Poisson

$\chi$  – fator de redução associado à resistência à compressão

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>15</b>
<b>1.1</b>	<b>Vigas mistas de aço e concreto</b> .....	<b>15</b>
<b>1.2</b>	<b>Flambagem lateral com distorção</b> .....	<b>16</b>
1.2.1	Definição do Fenômeno .....	16
1.2.2	Mecanismo “U” invertido .....	17
1.2.3	Rigidez Rotacional .....	18
<b>1.3</b>	<b>Vigas com perfil celular</b> .....	<b>22</b>
1.3.1	Fabricação das vigas celulares .....	22
1.3.2	Configurações de aberturas .....	23
1.3.3	Vantagens e desvantagens das vigas celulares .....	24
<b>1.4</b>	<b>Vigas mistas de aço e concreto com perfis de aço celulares</b> .....	<b>24</b>
<b>1.5</b>	<b>Objetivo Geral</b> .....	<b>26</b>
<b>1.6</b>	<b>Justificativa</b> .....	<b>26</b>
<b>1.7</b>	<b>Estrutura da dissertação</b> .....	<b>27</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>29</b>
<b>2.1</b>	<b>Introdução</b> .....	<b>29</b>
<b>2.2</b>	<b>Mecanismo “U” invertido contínuo e discreto</b> .....	<b>29</b>
<b>2.3</b>	<b>Métodos para determinação do momento crítico elástico na região de momento negativo</b> .....	<b>31</b>
2.3.1	Método de cálculo por aproximação de energia - Roik, Hanswille e Kina ....	31
<b>2.4</b>	<b>Determinação do momento fletor resistente à flambagem lateral com distorção (FLD)</b> .....	<b>37</b>
<b>2.5</b>	<b>Estado da arte</b> .....	<b>42</b>
<b>3</b>	<b>ESTUDO DA RIGIDEZ ROTACIONAL DA ALMA DE PERFIS CELULARES</b> <b>49</b>	
<b>3.1</b>	<b>Introdução</b> .....	<b>49</b>
<b>3.2</b>	<b>Equação do deslocamento transversal de uma placa com abertura circular</b> <b>49</b>	
3.2.1	Aplicação da equação do deslocamento transversal para o caso de $n$ aberturas .....	52
<b>3.3</b>	<b>Determinação da rigidez rotacional da alma celular</b> .....	<b>53</b>
<b>3.4</b>	<b>Avaliação numérica da equação da rigidez da alma celular</b> .....	<b>55</b>
3.4.1	Programa utilizado .....	56

3.4.2	Elementos utilizados .....	57
3.4.3	Propriedades do Material .....	58
3.4.4	Malha de Elementos Finitos .....	58
3.4.5	Condições de contorno e carregamento aplicado .....	61
3.4.6	Modelos de avaliação.....	62
3.4.7	Comparação dos resultados numéricos e analíticos .....	64
<b>4</b>	<b>PROPOSIÇÃO DE FORMULAÇÃO PARA A RIGIDEZ ROTACIONAL DE VIGAS MISTAS COM PERFIS DE AÇO CELULAR .....</b>	<b>68</b>
<b>4.1</b>	<b>Introdução.....</b>	<b>68</b>
<b>4.2</b>	<b>Modelos de parametrização .....</b>	<b>68</b>
<b>4.3</b>	<b>Influência dos parâmetros no valor da rigidez rotacional da alma.....</b>	<b>72</b>
4.3.1	Altura final do perfil celular (d).....	72
4.3.2	Diâmetro da abertura do perfil celular ( $d_0$ ) .....	75
4.3.3	Espaçamento entre a extremidade do perfil e a abertura ( $s_e$ ) .....	77
4.3.4	Espaçamento entre aberturas (s).....	80
4.3.5	Número de aberturas (n).....	86
<b>4.4</b>	<b>Ajuste da equação da rigidez rotacional da alma.....</b>	<b>90</b>
<b>4.5</b>	<b>Formulação proposta para rigidez rotacional de vigas mistas com perfis celulares .....</b>	<b>92</b>
<b>5</b>	<b>MOMENTO CRÍTICO ELÁSTICO DE VIGAS MISTAS COM PERFIL CELULAR .....</b>	<b>93</b>
<b>5.1</b>	<b>Introdução.....</b>	<b>93</b>
<b>5.2</b>	<b>Exemplo de cálculo do momento crítico elástico .....</b>	<b>93</b>
5.2.1	Rigidez rotacional da laje de concreto maciça .....	95
5.2.2	Rigidez rotacional da viga mista.....	96
5.2.3	Momento crítico elástico.....	97
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>103</b>
<b>6.1</b>	<b>Sobre o trabalho realizado .....</b>	<b>103</b>
<b>6.2</b>	<b>Avaliação global e sugestões para trabalhos futuros .....</b>	<b>105</b>
<b>7</b>	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>106</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Vigas mistas de aço e concreto

Vigas mistas de aço e concreto, de acordo com a ABNT NBR 8800:2008, é a junção de um perfil de aço simétrico e não simétrico em relação ao plano de flexão com uma laje de concreto acima de sua face superior. Para esse conjunto de elementos trabalharem juntos, a fim de resistir à flexão, se faz necessária uma ligação mecânica por meio de conectores de cisalhamento.

As vigas mistas podem ser biapoiadas, semicontínuas ou contínuas. As vigas biapoiadas são aquelas em que as ligações são consideradas como rótulas, as vigas semicontínuas possuem ligação de resistência parcial nos apoios internos, isto é, a resistência da ligação é inferior à resistência da viga mista. As vigas contínuas são aquelas em que o perfil de aço e a armadura da laje têm continuidade total nos apoios internos, isto é, a resistência das ligações é igual ou superior a da viga mista. (Queiroz, 2001). As vigas contínuas e semicontínuas permitem a utilização de perfis de menores dimensões devido a melhor distribuição de momentos ao longo de seu comprimento. Porém, nas regiões próximas aos apoios internos aparecerão momentos negativos.

Nas regiões de momentos positivos das vigas mistas contínuas e semicontínuas, a laje estará pelo menos em parte comprimida e a mesa superior e parte da alma do perfil podem sofrer compressão também (Figura 1.1). Isso dependerá da posição do eixo de deformação nula, que pode estar na laje de concreto, na mesa superior ou na alma do perfil de aço. Nesse caso a flambagem lateral com torção (FLT) será impedida, pois a laje de concreto irá restringir completamente o deslocamento lateral da mesa superior do perfil de aço. A flambagem local da mesa comprimida (FLM) não representa um estado-limite último.

Nas regiões de momentos negativos (Figura 1.2), a viga estará sujeita a flambagem lateral com distorção (FLD). Existe também a possibilidade de ocorrência da flambagem local da mesa inferior (FLM) e da flambagem local da alma (FLA).

Figura 1.1 – Momento positivo

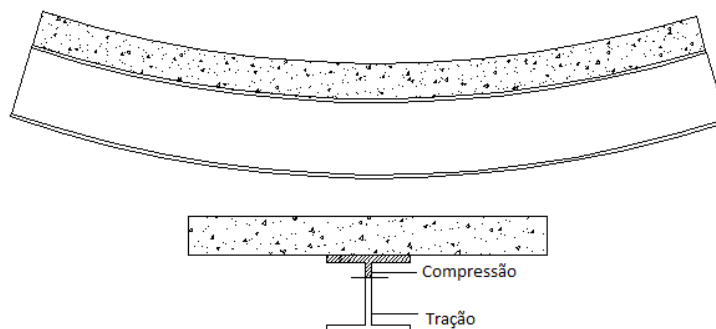
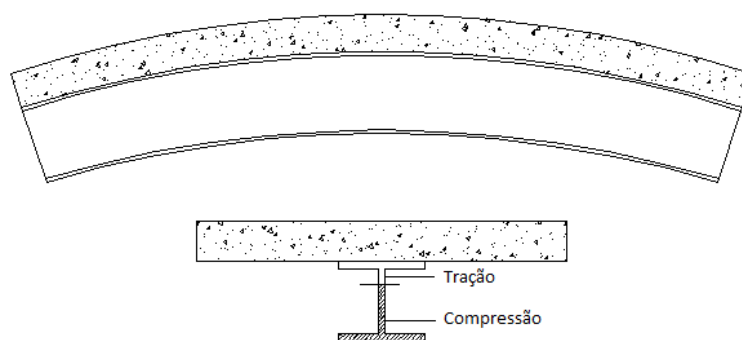


Figura 1.2 – Momento negativo

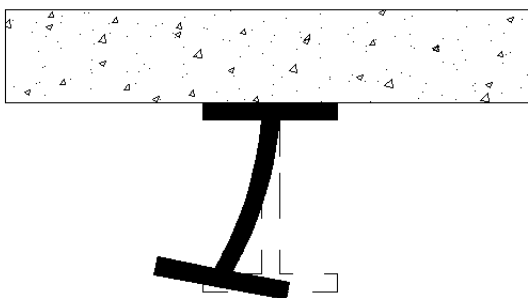


## 1.2 Flambagem lateral com distorção

### 1.2.1 Definição do Fenômeno

Nas vigas contínuas e semicontínuas, haverá regiões de momentos positivos e negativos. Nas regiões de momentos negativos, a mesa inferior e parte da alma do perfil de aço são comprimidas. A flambagem lateral com distorção acontecerá devido à compressão da mesa inferior e a tendência desta de flambar em relação ao seu eixo de maior inércia, já que em relação ao eixo de menor inércia é impossível devido à restrição da alma do perfil. Caso a alma não tenha rigidez suficiente à flexão lateral, ela distorce e a mesa comprimida desloca lateralmente acompanhada de uma torção.

Figura 1.3 - Flambagem lateral com distorção



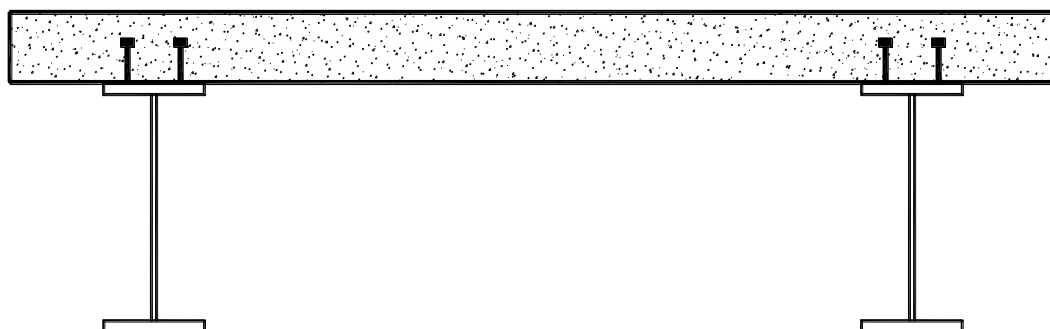
A FLD ocasiona deslocamento lateral e giro da mesa inferior (comprimida), apresentando um formato de semi onda ao longo de parte da região de momento negativo, com deslocamento e giro nulo nos apoios. O deslocamento máximo encontra-se afastado do apoio de duas a três vezes a altura da seção transversal do perfil de aço (Johnson, 2004).

A ABNT NBR 8800:2008 prescreve um procedimento para verificação da FLD, similar ao da norma europeia EN 1994-1-1:2004, que consiste na determinação do momento crítico elástico ( $M_{cr}$ ) como passo inicial para obtenção do momento fletor resistente.

### 1.2.2 Mecanismo “U” invertido

O cálculo de  $M_{cr}$  à flambagem lateral com distorção é feito tendo como base o comportamento do mecanismo “U” invertido, formado por duas ou mais vigas adjacentes e pela laje na qual essas vigas estão fixadas (Figura 1.4).

Figura 1.4 - Mecanismo “U” invertido



Fonte: ABNT NBR 8800:2008  
Nota: Figura adaptada por Calenzani (2008)



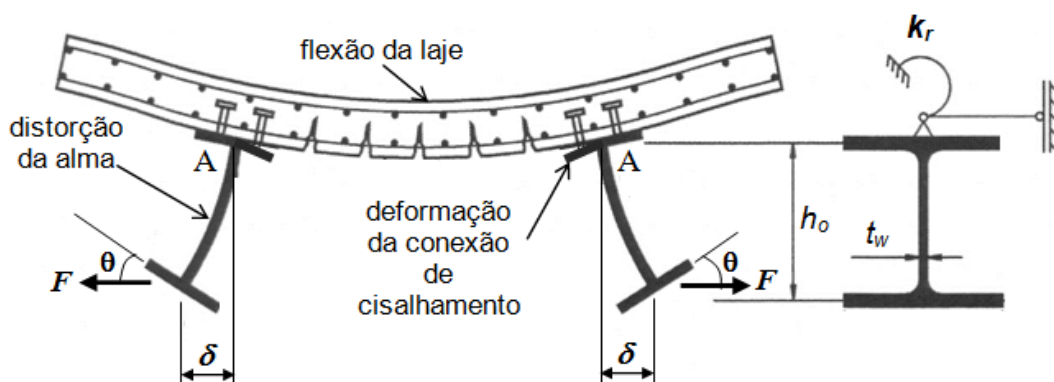
O mecanismo “U” invertido é considerado mais adequado para representar o comportamento de uma viga mista à FLD do que o modelo de viga em “T”. As restrições ao deslocamento lateral e à torção impostas à mesa inferior do perfil de aço por sua alma, pela laje de concreto e pela conexão de cisalhamento são representadas de forma bastante realista no mecanismo “U” invertido. Esse mecanismo tem boa relação com a prática, uma vez que grande parte das construções usam sistemas de pisos compostos por vigas de aço paralelas sob uma laje de concreto.

### 1.2.3 Rigidez Rotacional

Rigidez Rotacional da viga mista, também tratada como rigidez do mecanismo “U” invertido,  $k_r$ , conforme Johnson (2004) é uma grandeza fundamental para o valor do momento crítico elástico,  $M_{cr}$ . Essa rigidez, aplicada a uma mola de rotação situada na mesa superior de uma viga de aço, permite reproduzir a influência do mecanismo “U” na resistência à FLD e é obtida por unidade de comprimento da viga, relacionando o momento no ponto A, situado no centro geométrico da mesa superior com a rotação  $\theta$ .

O valor da rigidez rotacional é obtido por meio da aplicação de forças de perturbação  $F$  nas mesas inferiores das vigas que ocasionam a rotação  $\theta$  e um deslocamento lateral  $\delta$  nessas mesas conforme Figura 1.5.

Figura 1.5 - Rigidez rotacional de uma viga mista para o mecanismo “U” invertido



Fonte: EN 1994-1-1:2004

Nota: Figurada adaptada por Calenzani (2008)

A rotação  $\theta$  no ponto A da figura é dada por  $\delta/h_o$  e o momento em A é  $F h_o$ . Assim, a rigidez  $k_r$  é dada pela razão entre o momento e a rotação, conforme equação (1.1).

$$k_r = \frac{F h_0}{\delta / h_0} \quad (1.1)$$

Manipulando a equação (1.1) obtém-se:

$$\delta = \frac{F h_0^2}{k_r} \quad (1.2)$$

A determinação da rigidez rotacional  $k_r$  diretamente pela equação (1.1) depende de análises experimentais ou numéricas de alto grau de complexidade. A ABNT NBR 8800:2008 fornece uma maneira prática, confiável e simplificada de resolver o problema. O método consiste em obter as rotações isoladas devido à flexão transversal da laje de concreto, a distorção da alma e a deformação da conexão de cisalhamento. Assim, pode-se obter o valor da rigidez rotacional do sistema em função da rigidez à flexão da laje ( $k_1$ ), da rigidez à flexão da alma do perfil ( $k_2$ ) e da rigidez à flexão da conexão de cisalhamento ( $k_3$ ), fazendo a analogia conforme a expressão da resultante de molas ligadas em série, dessa forma têm-se:

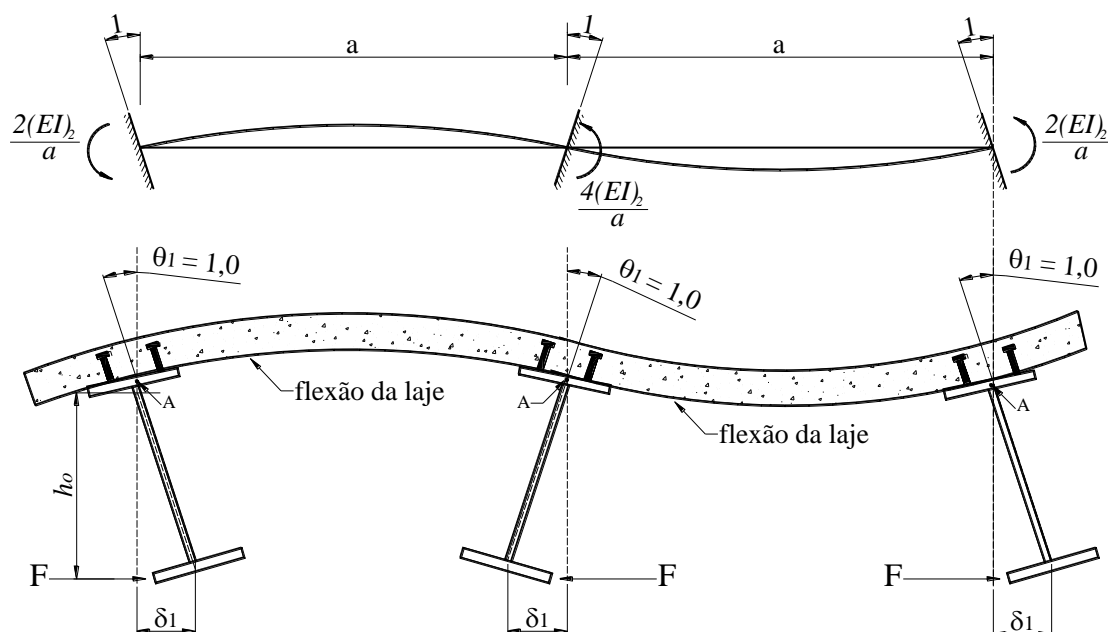
$$\frac{1}{k_r} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \quad (1.3)$$

De acordo com a ABNT NBR 8800:2008, para a rigidez à flexão da laje fissurada na direção longitudinal dos perfis de aço, pode-se considerar a laje como uma viga engastada nos perfis. Aplicando rotações unitárias nos engastes, os momentos que surgem são as rigidezes procuradas em cada apoio conforme a Figura 1.6. Generalizando, tem-se a rigidez à flexão da laje por unidade de comprimento:

$$k_1 = \frac{\alpha(EI)_2}{a} \quad (1.4)$$

onde  $\alpha$  é o coeficiente que depende da posição da viga analisada, ou seja, se a viga situa-se na extremidade da laje,  $\alpha$  é igual a 2, se a viga for interna,  $\alpha$  é igual a 3 (para vigas internas com quatro ou mais vigas similares, pode-se adotar  $\alpha$  igual a 4). O termo  $(EI)_2$  é a rigidez à flexão da seção mista homogeneizada da laje, desconsiderando o concreto tracionado, por unidade de comprimento, tomada como o menor valor entre as rigidezes no meio do vão e no apoio interno. O valor de  $a$  é a distância entre as vigas paralelas.

Figura 1.6 – Rigidez à flexão da laje fissurada



Fonte: Calenzani (2008)

Outro parâmetro importante para a obtenção da rigidez rotacional  $k_r$  do mecanismo “U” invertido é a rigidez à flexão da alma do perfil de aço que pode ser determinada considerando a alma como uma placa engastada no centro geométrico da mesa superior e livre no centro geométrico da mesa inferior, como observado na Figura 1.7. A força horizontal  $F$  que atua na mesa inferior está relacionada com o deslocamento  $\delta_2$ , de acordo com a equação (1.5):

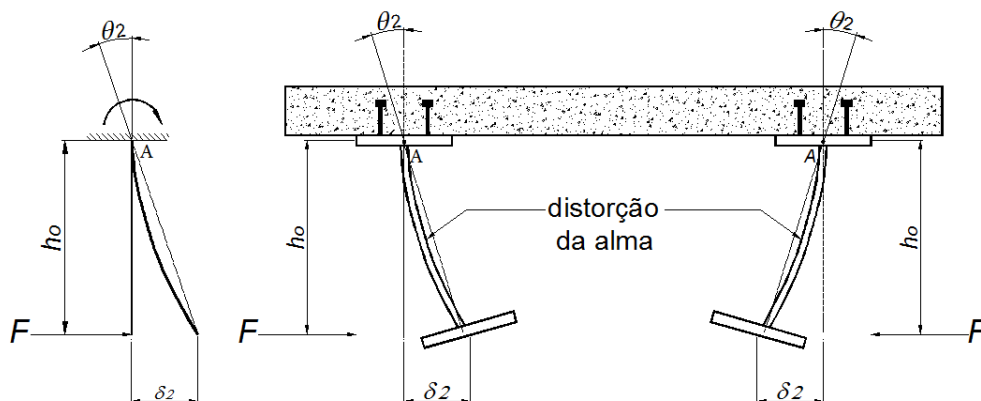
$$\frac{F}{\delta_2} = \frac{3D}{h_0^3} \quad (1.5)$$

onde  $D$  é a rigidez à flexão da placa por unidade de comprimento.

Utilizando a equação (1.1) na equação (1.5) obtém-se:

$$k_2 = \frac{3D}{h_0} \quad (1.6)$$

Figura 1.7 – Rigidez à distorção da alma do perfil



Fonte: Calenzani (2008)

Timoshenko e Krieger (1959) definiram o valor da rigidez à flexão da placa por unidade de comprimento como:

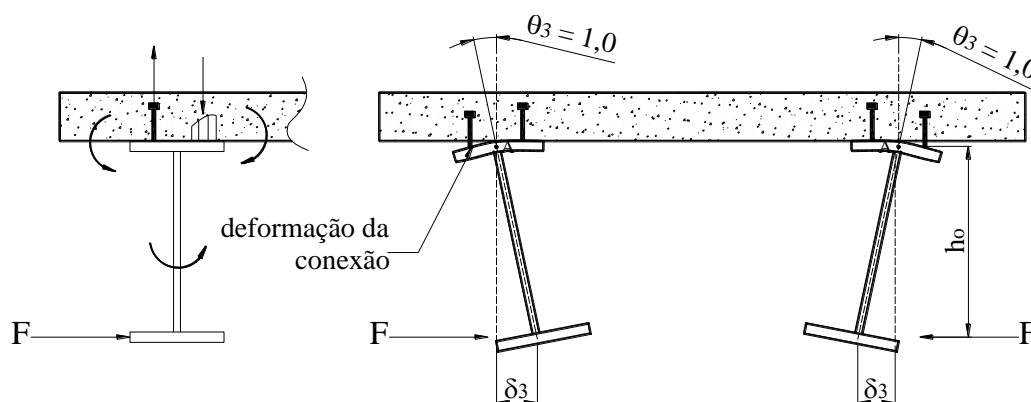
$$D = \frac{E_a t_w^3}{12(1 - \nu_a^2)} \quad (1.7)$$

onde  $t_w$  é a espessura da alma,  $E_a$  o módulo de elasticidade e  $\nu_a$  o coeficiente de Poisson do aço. Manipulando as equações (1.7) e (1.6) tem-se finalmente:

$$k_2 = \frac{E_a t_w^3}{4h_0(1 - \nu_a^2)} \quad (1.8)$$

A rigidez da conexão de cisalhamento,  $k_3$ , depende de um grande número de fatores, o que torna extremamente difícil obtê-la analiticamente. Essa rigidez costuma ser muito elevada, então é desprezada por diversas análises de cálculo, inclusive pela ABNT NBR 8800:2008. Ensaios mostraram que para uma viga mista típica de pisos de pontes, ou seja, uma viga com grande altura, o valor da rigidez rotacional do mecanismo sofre influência de menos de 1% da rigidez da conexão ( $k_3$ ), enquanto a rigidez da alma ( $k_2$ ) influencia 90% da rigidez total.

Figura 1.8 – Rigidez da conexão de cisalhamento



Fonte: Calenzani (2008)

### 1.3 Vigas com perfil celular

As vigas celulares foram criadas como forma de atender as necessidades estruturais que exigiam redução de peso e atendimento aos critérios de resistência aos esforços solicitantes. Fabricadas normalmente a partir de perfis laminados, as vigas celulares tem aberturas padronizadas na alma em forma de círculos. Geralmente são utilizadas para vencer grandes vãos com sobrecargas pequenas, como cobertura e passarelas.

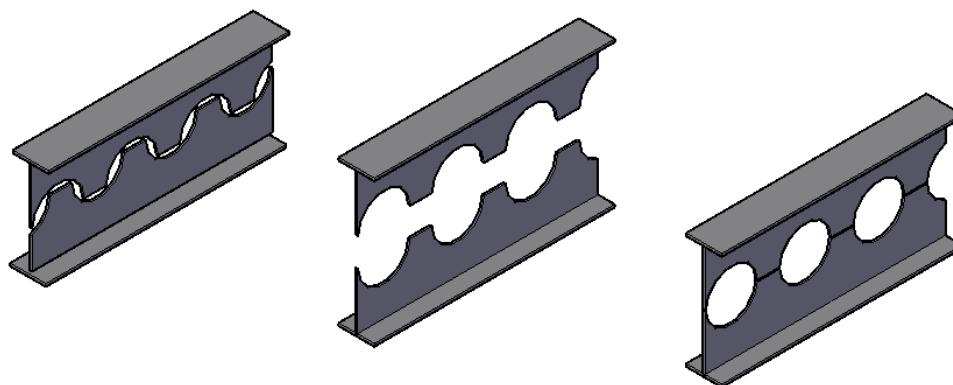
As aberturas na alma alteram em diversos aspectos o comportamento estrutural se comparado ao perfil original de alma cheia. A presença das aberturas na alma não apenas altera a importância relativa dos diferentes modos de colapso possíveis, como também, introduz a possibilidade de novos modos. Porém, o processo de expansão da alma concede maior inércia à viga celular, resultando em uma maior resistência à flexão e maior rigidez aos deslocamentos na direção do plano médio da alma.

#### 1.3.1 Fabricação das vigas celulares

As vigas celulares são feitas a partir de perfis de seção I ou H, cuja alma é bi cortada longitudinalmente no formato semicircular seguido de um segmento reto. Em seguida, as duas metades são deslocadas e soldadas pelo eixo, de forma a gerar aberturas em sequência ao longo da alma e acréscimo na altura da seção transversal. Na

Figura 1.9 é possível entender como funciona o processo de fabricação e montagem das vigas celulares.

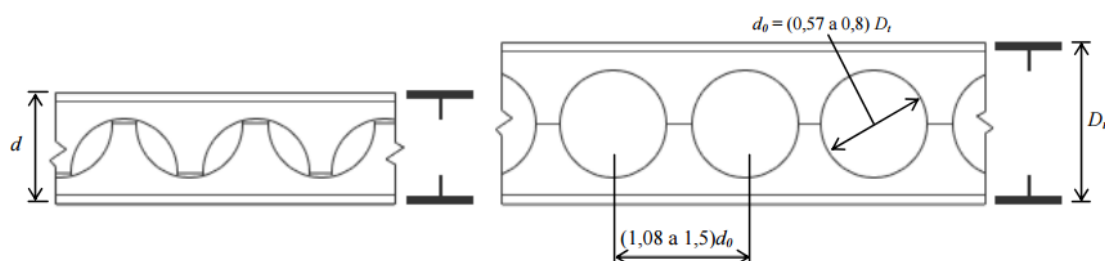
Figura 1.9 – Fabricação e montagem de vigas celulares



### 1.3.2 Configurações de aberturas

As vigas celulares possuem flexibilidade para variar o espaçamento entre as aberturas, pois o traçado do corte para a produção não implica em uma simetria estrita entre a largura do montante da alma e o comprimento horizontal da abertura. Uma relação que é utilizada tradicionalmente e que traz resultados compensadores (Figura 1.10) de acordo com Harper (1994) apud Abreu (2010).

Figura 1.10 – Geometria para fabricação de vigas celulares



Fonte: Abreu *et al.* (2010)

Na literatura, é usual encontrar razões de expansão de 30% a 70% (Toprac e Cooke, 1959). As razões dependem do atendimento de condições de resistência e rigidez da viga.

É possível apontar vantagens significativas com a possibilidade de se variar o espaçamento e o tamanho das aberturas em vigas celulares:

- maior flexibilidade para sua aplicação, permitindo configurar vigas mais apropriadas para coberturas ou para sistemas de piso;
- maior liberdade de projeto possibilitando definir a posição dos alvéolos de modo a reduzir os detalhes associados às ligações com outras vigas.

### **1.3.3 Vantagens e desvantagens das vigas celulares**

As principais vantagens das vigas celulares são:

- Podem ter altura total até 70% maior que a do perfil original de alma cheia, resultando em maior resistência à flexão e maior rigidez aos deslocamentos na direção do plano médio da alma;
- São mais leves que um perfil de alma cheia de mesma altura, reduzindo dessa forma o peso médio das estruturas;
- Possibilitam vãos livres maiores, reduzindo o número de pilares e fundações, levando a uma montagem mais rápida e mais econômica;
- Permitem redução do espaço estrutural pela passagem de dutos nas aberturas, evitando-se cortes na alma ou o aumento da altura da construção, visto que, no caso de usarem-se as vigas padrões, sem furos, os dutos devem passar sob as mesmas, havendo necessidade de aumentar o pé-direito dos pavimentos.

As desvantagens das vigas celulares são:

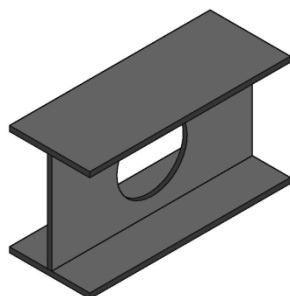
- Menor capacidade resistente ao esforço cortante;
- Alguns casos exigem a inserção de reforço na alma;
- Pouco eficientes na resistência a cargas localizadas.

## **1.4 Vigas mistas de aço e concreto com perfis de aço celulares**

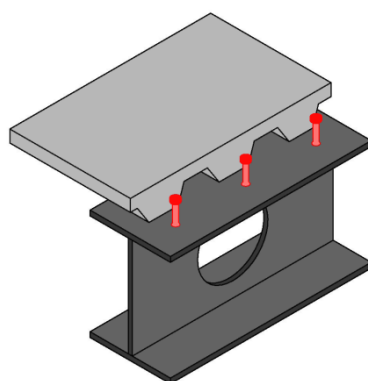
Vigas com perfil celular são dimensionadas da mesma forma que vigas de alma cheia, isto é, considerando apenas a resistência do perfil de aço, se não houver ligação mecânica entre a laje de concreto e o perfil de aço, figura 1.11(a). Quando se associa o perfil à laje de concreto por meio de conectores de cisalhamento, a viga de

perfil celular pode ser dimensionada como uma viga mista, considerando a participação do concreto na resistência à flexão, figura 1.11(b).

Figura 1.11 – Vigas celulares de aço e Vigas celulares mistas de aço e concreto



(a) Vigas celulares de aço



(b) Vigas celulares mistas de aço e concreto

Fonte: Oliveira, T (2012)

Nota: Figurada adaptada pelo autor

Como as vigas mistas de aço e concreto formam o sistema de piso mais eficiente da atualidade, então é possível assumir que com a inclusão das vigas celulares à construção mista, o efeito na economia do material é promissor não afetando as exigências de projeto.

Na Figura 1.12 é feita uma comparação entre a viga mista com perfil de alma cheia e a viga mista com perfil celular no que se refere a intervalo de vão e altura da estrutura (altura da mesa inferior da viga até a face superior da laje). Utilizando-se vigas mistas com perfil celular, consegue-se vencer vãos ainda maiores que os da viga mista convencional.



Figura 1.12 – Vigas Mistas Celulares



Viga mista – perfil de alma cheia e laje mista



Viga mista – perfil celular e laje mista

Fonte: Muller e Oppe (2014)

Nota: Figurada adaptada pelo autor

## 1.5 Objetivo Geral

O objetivo geral é propor uma formulação compatível com o procedimento da ABNT NBR 8800:2008 para a determinação da rigidez rotacional de vigas mistas de aço e concreto com perfil celular com vistas ao cálculo do momento crítico elástico à flambagem lateral com distorção.

## 1.6 Justificativa

A busca por racionalização e otimização no projeto de estruturas de aço e mistas de aço e concreto tem levado à utilização de soluções estruturais que proporcionem

continuidade entre os elementos. Em particular, vigas mistas contínuas e semicontínuas conduzem a uma melhor distribuição de momento fletor, permitindo a utilização de peças com menores dimensões, todavia o estado limite último de flambagem lateral com distorção deve ser verificado.

Sabe-se que a ABNT NBR 8800:2008 fornece um método de cálculo aproximado para a determinação do momento fletor resistente na região de momentos negativos, que inclui a verificação à flambagem lateral com distorção para viga mista com perfil de aço de alma plana. Como tem sido feito poucos estudos sobre o tema no Brasil e no exterior, vigas mistas semicontínuas possuem uso aquém de sua real potencialidade. Associado a isso, a viga de aço com perfil celular também tem seu uso limitado no Brasil devido, principalmente, ao pouco material de pesquisa sobre o tema, além da ABNT NBR 8800:2008 não abordar o seu dimensionamento.

A investigação da flambagem lateral com distorção de vigas mistas com perfil celular é algo ainda inédito. Não foram encontradas publicações ou prescrições normativas sobre esse assunto na literatura científica nacional e internacional.

Com base nas justificativas aqui apresentadas, conclui-se que este trabalho pode contribuir de forma relevante para consolidar o uso de vigas mistas de aço e concreto mais leves, e por sua vez mais econômicas.

## **1.7 Estrutura da dissertação**

O capítulo 1 apresenta uma introdução sobre vigas mistas contínuas de aço e concreto e os conceitos necessários à apresentação do fenômeno de flambagem lateral com distorção (FLD). Itens relacionados às vigas com perfil de aço celular são abordados tais como o seu processo de fabricação, configuração das aberturas e suas vantagens e desvantagens. Também são apresentados os objetivos e a justificativa e motivação para a realização do trabalho no tema proposto.

O capítulo 2 é feita uma ampla revisão bibliográfica, com base em artigos científicos, dissertações de mestrado e teses de doutorado, para a assimilação de conceitos fundamentais ao entendimento do comportamento de vigas mistas na região de momento negativo. É apresentado um estado de arte das pesquisas relacionadas a

esse assunto, principalmente as que se refere ao fenômeno da FLD. Também é discutido o método para dimensionamento de vigas mistas na região de momento negativo segundo a norma ABNT NBR 8800:2008.

O capítulo 3 apresenta uma metodologia desenvolvida para determinação analítica da rigidez rotacional da alma de perfis celulares. Para isso, inicialmente, uma equação é deduzida para o cálculo do deslocamento transversal de uma placa com aberturas circulares. São definidos modelos numéricos de almas de perfis celulares, definindo as condições de contorno, os tipos de elementos, as características geométricas, as propriedades dos materiais e outras informações pertinentes, para a aferição da equação proposta.

No capítulo 4, um estudo paramétrico é implementado com o objetivo de mostrar resultados que ilustrem a influência dos parâmetros geométricos do perfil celular no valor da rigidez rotacional da alma. No final, a formulação para a rigidez rotacional de vigas mistas com perfil celular é proposta.

O capítulo 5, o momento crítico elástico à FLD de três exemplos de vigas mistas com perfil celular é determinado. Também é estudada a influência das aberturas da alma nos valores da rigidez rotacional e do momento crítico, ao compará-los com os calculados para vigas mistas com perfis de alma cheia de altura equivalente.

O capítulo 6 apresenta as conclusões do trabalho e sugestões para estudos futuros.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Introdução

Flambagem lateral com distorção em vigas mistas é um assunto pouco abordado na literatura e em pesquisas. Acredita-se que os motivos de tal escassez seja a complexidade dos modelos mistos, o elevado custo para modelos reais, e a difícil execução dos mesmos devido à necessidade de se ter modelos em escalas reais para a obtenção de resultados consistentes. Destacam-se os trabalhos de Fan (1990) e de Chen (1992), tendo em vista que ambos realizaram o experimento em tamanho real abordando aspectos de resistência e comportamento das vigas mistas em regiões de momentos negativos.

Neste capítulo são abordadas as pesquisas sobre o tema. O Item 2.2 define os mecanismos “U” invertido contínuo e discreto. O Item 2.3 apresenta os métodos para a obtenção do momento crítico elástico na região de momento negativo. No Item 2.4 o estado-limite de flambagem lateral com distorção é discutido em detalhes, sendo descritos os procedimentos de determinação do momento fletor resistente à FLD. O Item 2.5 aborda o estado da arte do tema proposto, discutindo trabalhos executados por diversos autores.

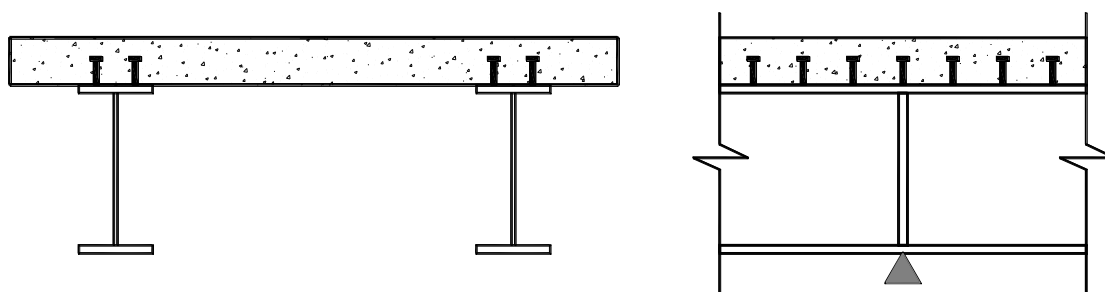
### 2.2 Mecanismo “U” invertido contínuo e discreto

As vigas mistas contínuas apresentam regiões de momentos negativos em seus apoios internos. Nessas regiões a parte superior ao eixo de deformação nula do conjunto perfil e laje, considerando interação total, está tracionada e por sua vez a parte inferior ao mesmo estará comprimida. O concreto, que está sofrendo tração, pode fissurar reduzindo a rigidez à rotação da laje. Por sua vez, a parte do perfil que está comprimida não está restringida e pode sofrer flambagem local da alma e da mesa. Ainda pode ocorrer flambagem lateral com distorção no perfil de aço.

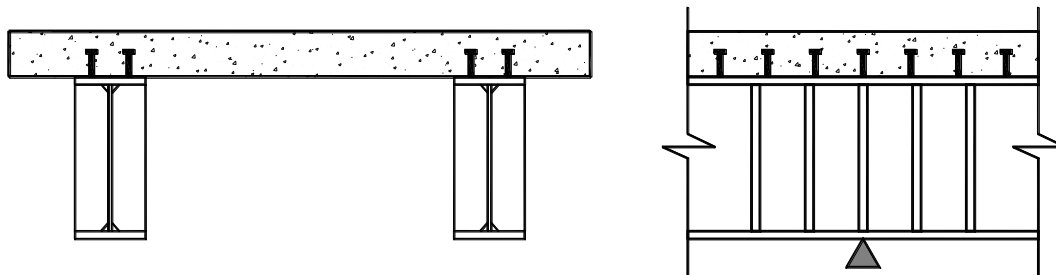
O mecanismo “U” invertido, como citado no Subitem 1.2.2, é considerado o ideal para representar o comportamento de uma viga mista à FLD. A verificação do estado-

limite FLD consiste na determinação do momento crítico ( $M_{cr}$ ) baseado no comportamento do mecanismo “U” invertido. Na literatura científica existem dois tipos de mecanismos “U” invertido, o mecanismo “U” invertido contínuo e o mecanismo “U” invertido discreto (Figura 2.1). O mecanismo “U” contínuo é caracterizado por vigas mistas com enrijecedores verticais e contraventamentos laterais nos apoios internos. A restrição à FLD é contínua e fornecida pela laje de concreto e pela alma do perfil de aço não enrijecido. Já no mecanismo “U” discreto são colocados vários enrijecedores transversais soldados na alma do perfil na região de momento negativo aumentando assim sua capacidade de resistir à FLD.

Figura 2.1 - Mecanismo “U” contínuo e discreto



a) Mecanismo “U” contínuo com duas vigas



b) Mecanismo “U” discreto com duas vigas

Fonte: Calenzani (2008)

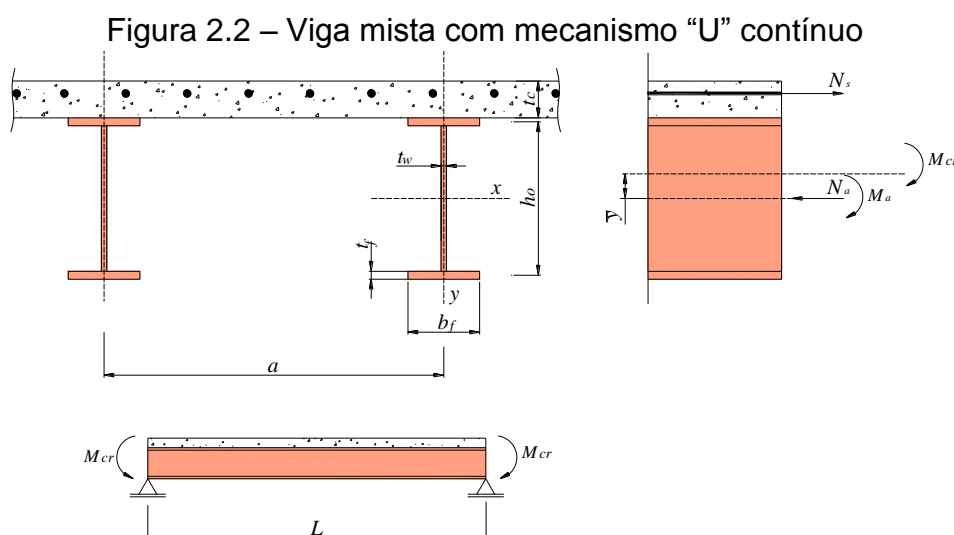
Para o presente trabalho o mecanismo de interesse será o “U” contínuo, tendo em vista que a ABNT NBR 8800:2008 e o EN 1994-1-1:2004 consideram esse mecanismo para a verificação de vigas mistas.

## 2.3 Métodos para determinação do momento crítico elástico na região de momento negativo

Os projetos de vigas mistas semicontínuas e contínuas requerem o conhecimento do momento crítico elástico ( $M_{cr}$ ) na região de momento negativo para determinação do momento fletor resistente dessas vigas. Para a obtenção do momento crítico elástico nos estudos de FLD, são conhecidos métodos teóricos simplificados, como o método da coluna com apoio elástico e o método da energia. Neste item só será abordado o método de cálculo por aproximação de energia por ser o utilizado pela ABNT NBR 8800:2008.

### 2.3.1 Método de cálculo por aproximação de energia - Roik, Hanswille e Kina

O cálculo do momento crítico elástico por aproximação de energia, dado a seguir, baseia-se em Roik, Hanswille e Kina (1990). A Figura 2.2 mostra uma viga mista de vão L sujeita a momentos de extremidade de sentidos opostos, ocasionando, portanto, um diagrama de momento fletor constante ao longo do vão. O cálculo do momento crítico elástico,  $M_{cr}$ , ou seja, o momento de bifurcação da posição de equilíbrio é feito considerando a resposta de um mecanismo “U” contínuo à FLD.



Fonte: Calenzani (2008)

Os esforços internos no perfil de aço, momento fletor ( $M_a$ ) e força axial ( $N_a$ ) se relacionam com o momento crítico elástico conforme as equações:

$$M_a = M_{cr} \frac{I_{ax}}{I_x} \quad (2.1)$$

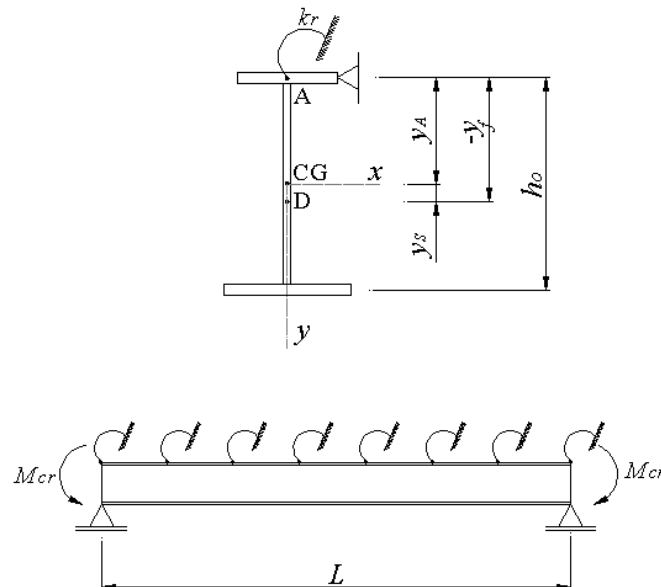
$$N_a = -M_{cr} \frac{\bar{y}A_a}{I_x} \quad (2.2)$$

onde  $I_{ax}$  e  $I_x$  são os momentos de inércia em relação ao eixo  $x$  da seção do perfil de aço e da seção mista, tomada como a seção do perfil de aço mais a seção da armadura negativa, respectivamente e  $\bar{y}$  é a distância do centro de gravidade da seção mista ao centro de gravidade da seção do perfil de aço. A excentricidade da força axial no perfil de aço,  $e$ , pode ser definida como:

$$e = \frac{M_a}{N_a} = \frac{I_{ax}}{\bar{y}A_a} \quad (2.3)$$

Um sistema equivalente ao da Figura 2.2 mostrado na Figura 2.3 é utilizado para representar o comportamento do mecanismo “U” na flambagem lateral com distorção. Nesse sistema, a laje de concreto é substituída por um apoio rígido, que impede o deslocamento lateral da mesa superior ao longo do vão. Além disso, é aplicado um apoio elástico que impede parcialmente o giro da seção do perfil de aço no ponto A da mesa superior. Esse apoio é contínuo ao longo do vão e sua rigidez é tomada como a rigidez rotacional do mecanismo “U”.

Figura 2.3 – Sistema equivalente para representar o comportamento do mecanismo



Fonte: Calenzani (2008)

O método de energia aplicado às condições de contorno da viga mostrada na Figura 2.3 fornece a seguinte expressão para a variação potencial:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ (E_a I_{ay} y_f^2 + E_a C_w) \phi''^2 + G_a J \phi'^2 + k_r \phi^2 + M_a r_{my} \phi'^2 \right. \\ \left. - 2M_a y_f \phi \phi'' + N_a (y_f^2 + r_D^2) \phi'^2 + 2N_a y_s y_f \phi \phi'' \right] dz \quad (2.4)$$

onde:

$E_a$  e  $G_a$  são os módulos de elasticidade longitudinal e transversal do aço, respectivamente;

$I_{ay}$ ,  $J$  e  $C_w$  são o momento de inércia em relação ao eixo  $y$ , a constante de torção e a constante de empenamento, relativos à seção do perfil de aço;

$y_f$  é a distância entre o centro de rotação (ponto A) e o centro de cisalhamento (ponto D) da seção do perfil de aço;

$L$  é o comprimento da viga entre apoios verticais (exige-se que ambas as mesas do perfil de aço possuam contenção lateral nesses apoios);

$r_D$  é o raio de giração polar da seção do perfil de aço em relação ao centro de cisalhamento,  $r_D^2 = y_D^2 + r_p^2$ ;

$r_p$  é o raio de giração polar da seção do perfil de aço,  $r_p^2 = (I_{ax} + I_{ay})/A_a$ ;

$A_a$  é a área da seção do perfil de aço;

$k_r$  é a rigidez rotacional da viga mista;

$y_s$  é a distância do centro geométrico ao centro de cisalhamento do perfil de aço, positiva quando o centro de cisalhamento e a mesa comprimida pelo momento negativo estão do mesmo lado do centro geométrico;

e  $r_{my}$  é igual a  $-2y_j$ , sendo  $y_j = y_s - \int \frac{y(x^2 + y^2)}{2I_{ax}} dA$ .

Com a solução  $\phi = \phi_0 \text{sen} \left( \frac{\pi z}{L} \right)$  e os esforços internos  $N_a$  e  $M_a$  dados pelas equações (2.1) e (2.2), tem-se:

$$M_{cr} = \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{\alpha_g}{h_0} \left\{ E_a I_{ay} y_f^2 + E_a C_w + \left( \frac{L}{\pi} \right)^2 \left[ G_a J + k_r \left( \frac{L}{\pi} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.5)$$

onde  $\alpha_g$  é um fator relacionado à geometria da seção transversal da viga mista, dado por:



$$\alpha_g = \frac{\left(\frac{h_0 I_x}{I_{ax}}\right)}{\frac{(y_f - y_s)^2 + r_p^2}{e} + 2(y_f - y_j)} \quad (2.6)$$

A expressão  $(E_a I_{ay} y_f^2 + E_a C_w)$  é a rigidez ao empenamento do perfil de aço em relação ao centro de rotação. Pode-se denominar  $C_{w,A}$  de constante de empenamento do perfil de aço em relação ao centro de rotação, sendo seu valor dado por:

$$C_{w,A} = C_w y_f^2 I_{ay} = I_{af,y} h_0^2 \quad (2.7)$$

onde  $I_{af,y}$  é o momento de inércia da mesa inferior em relação ao eixo  $y$ . Operando as equações matematicamente obtém-se:

$$M_{cr} = \frac{C_{dist} \alpha_g}{L} \sqrt{\left(G_a J + \frac{k_r L^2}{\pi^2}\right) E_a I_{afy}} \quad (2.8)$$

O coeficiente  $C_{dist}$  considera a influência da forma do diagrama de momento fletor em função do parâmetro  $\gamma$ , que depende das propriedades geométricas e mecânicas do perfil de aço:

$$\gamma = \frac{E_a I_{afy} h_0^2}{\left(G_a J + \frac{k_r L^2}{\pi^2}\right) L^2} \quad (2.9)$$

Para o diagrama de momento fletor constante:

$$C_{dist} = \pi^2 \sqrt{\gamma} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \quad (2.10)$$

Na equação (2.8) o termo  $G_a J$  fornece a rigidez à torção uniforme do perfil de aço. Quando comparada com a expressão  $k_r L^2 / \pi^2$  é notório sua menor influência, ou seja, a rigidez à torção é pequena. Portanto, segundo Johnson (2004), é desprezada em cálculo do momento crítico elástico sem perda de precisão favorável.

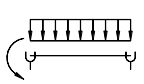
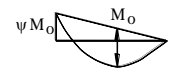
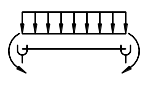
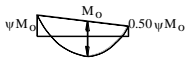
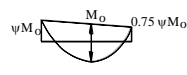
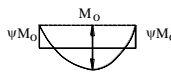
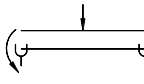
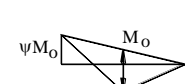
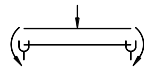
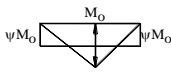
$$M_{cr} = \frac{C_{dist} \alpha_g}{\pi} \sqrt{k_r E_a I_{afy}} \quad (2.11)$$

A solução da equação (2.8) pode ser utilizada também para outras formas de diagrama de momento fletor. Casos práticos de vigas mistas solicitadas a momento fletor que varia ao longo do vão foram resolvidos através do Método dos Elementos

Finitos e pelo processo de Ritz. O cálculo do momento crítico elástico foi efetuado com auxílio do método da bisseção e seguido da iteração da secante.

Foi demonstrado que existe pouca dependência dos valores de  $C_{dist}$  com o perfil de aço escolhido. Então, a favor da segurança, pode-se adotar o valor de  $C_{dist}$  dado nas tabelas 2.1, 2.2 e 2.3.

Tabela 2.1 – Valores de  $C_{dist}$  para vãos com cargas transversais

Condições de carregamento e apoio	Diagrama de momento fletor <sup>1)</sup>	$C_{dist}$								
		$\psi=0,50$	$\psi=0,75$	$\psi=1,00$	$\psi=1,25$	$\psi=1,50$	$\psi=1,75$	$\psi=2,00$	$\psi=2,25$	$\psi=2,50$
		41,5	30,2	24,5	21,1	19,0	17,5	16,5	15,7	15,2
		33,9	22,7	17,3	14,1	13,0	12,0	11,4	10,9	10,6
		28,2	18,0	13,7	11,7	10,6	10,0	9,5	9,1	8,9
		21,9	13,9	11,0	9,6	8,8	8,3	8,0	7,8	7,6
		28,4	21,8	18,6	16,7	15,6	14,8	14,2	13,8	13,5
		12,7	9,89	8,6	8,0	7,7	7,4	7,2	7,1	7,0
NOTA:										
<sup>1)</sup> $M_0$ é o momento máximo solicitante de cálculo, considerando o trecho analisado como biapoiado.										

Fonte: Roik, Hanswille e Kina (1990)

Nota: Tabela adaptada por Calenzani (2008)

Tabela 2.2 – Valores de  $C_{dist}$  para vãos sem cargas transversais

Condições de carregamento e apoio	Diagrama de momento fletor 1)	$C_{dist}$				
		$\psi=0,00$	$\psi=0,25$	$\psi=0,50$	$\psi=0,75$	$\psi=1,00$
		11,1	9,5	8,2	7,1	6,2
		11,1	12,8	14,6	16,3	18,1

NOTA:  
1) M é o maior momento negativo solicitante de cálculo, em módulo, no trecho analisado, sendo que valores de  $\psi$  maiores que 1,00 devem ser tomados iguais a 1,00.

Fonte: Roik, Hanswille e Kina (1990)

Nota: Tabela adaptada por Calenzani (2008)

Tabela 2.3 – Coeficientes de  $C_{dist}$  para vigas semicontínuas submetidas a carregamento uniformemente distribuído

$\psi_1 = \frac{M_{pd,b}}{M_{ppd}}$ 1)	1,0	0,8	0,6	0,4	0,2	0,1	
$\psi_2 = \frac{M_{pd,a}}{M_{pd,b}}$ 1)	1,00	21,9	24,0	26,7	29,5	32,7	34,2
0,75	26,5	29,0	32,0	35,0	38,0	39,8	
0,50	30,5	33,9	37,0	40,4	44,3	45,7	
0	32,4	36,5	42,6	47,6	51,8	53,5	

$M_{pd,a} = M_{pd,b}$

$M_{pd,a} < M_{pd,b}$

NOTA:  
1)  $M_{ppd}$  é o momento plástico positivo resistente;  $M_{pd,a}$  é o menor momento plástico resistente de cálculo, em módulo, nas extremidades do trecho considerado;  $M_{pd,b}$  é o maior momento plástico resistente de cálculo, em módulo, nas extremidades do tramo considerado.

Fonte: Roik, Hanswille e Kina (1990)

Nota: Tabela adaptada por Calenzani (2008)

## 2.4 Determinação do momento fletor resistente à flambagem lateral com distorção (FLD)

A ABNT NBR 8800:2008 apresenta um procedimento para o dimensionamento de vigas mistas contínuas e semicontínuas. Esse procedimento é limitado a perfis de aço de alma cheia não sujeita a flambagem local. O momento fletor resistente de cálculo a FLD prescrito pela ABNT NBR 8800:2008 é dado por:

$$M_{Rd,dist}^- = \chi_{dist} M_{Rd}^- \quad (2.12)$$

onde  $\chi_{dist}$  o fator de redução para flambagem lateral com distorção da seção transversal. Esse momento considera a plastificação do perfil de aço e da armadura longitudinal dentro da largura efetiva da laje e é dado por:

$$M_{Rd}^- = \frac{M_R^-}{\gamma_r} = A_s \frac{f_{ys}}{\gamma_s} d_3 + A_{at} \frac{f_y}{\gamma_a} d_4 + A_{ac} \frac{f_y}{\gamma_a} d_5 \quad (2.13)$$

onde:

$A_s, f_{ys}$  e  $\gamma_s$  são, respectivamente, a área, a resistência ao escoamento e o coeficiente de ponderação da resistência da armadura longitudinal dentro da largura efetiva da laje;

$A_{at}$  é a área tracionada da seção do perfil de aço;

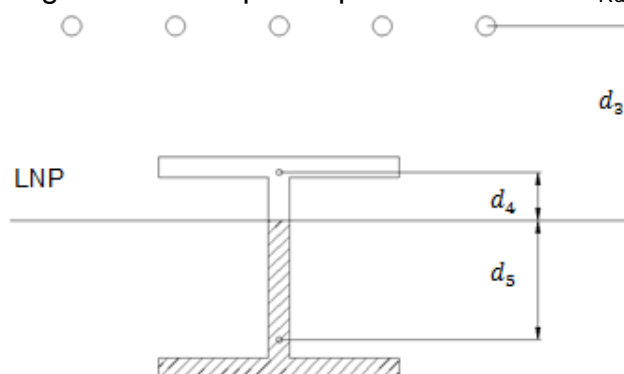
$A_{ac}$  é a área comprimida da seção do perfil de aço;

$d_3$  é a distância do centro geométrico da armadura à linha neutra plástica (LNP);

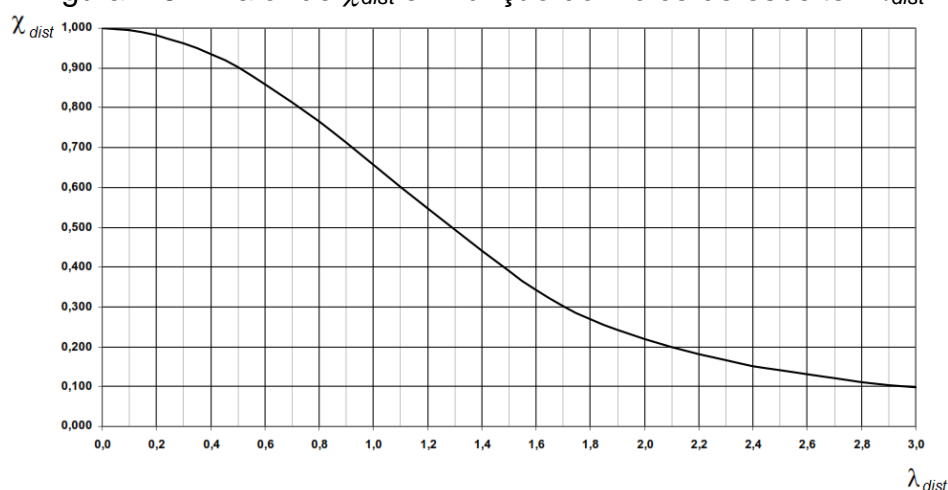
$d_4$  é a distância da força de tração, situada no centro geométrico da área tracionada da seção do perfil de aço, à LNP;

$d_5$  é a distância da força de compressão, situado no centro geométrico da área comprimida da seção do perfil de aço, à LNP.

O momento fletor resistente à FLD descrito na ABNT NBR 8800:2008 não prevê caso de vigas não compactas. Portanto, para vigas compactas, o momento resistente da região negativa é obtido pelo momento de plastificação da seção (Figura 2.4).

Figura 2.4 – Esquema para cálculo de  $M_{Rd}^-$ 

A curva de resistência de barras comprimidas (Figura 2.5) é utilizada para se obter o fator de redução,  $\chi_{dist}$ , em função do índice de esbeltez da viga,  $\lambda_{dist}$ .

Figura 2.5 – Valor de  $\chi_{dist}$  em função do índice de esbeltez  $\lambda_{dist}$ 

Fonte: ABNT NBR 8800:2008

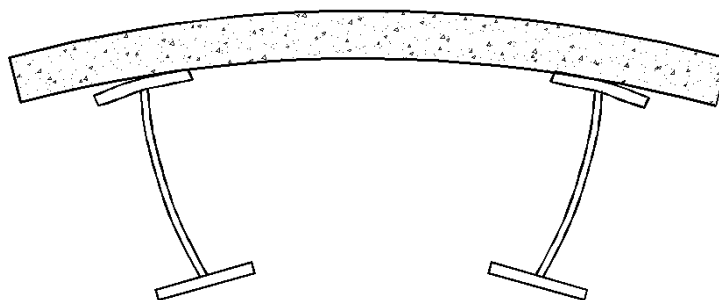
O índice esbeltez  $\lambda_{dist}$  é expresso pela equação:

$$\lambda_{dist} = \sqrt{\frac{M_{Rk}^-}{M_{cr}}} \quad (2.14)$$

onde  $M_{cr}$  é o momento crítico elástico, estimado através da aproximação de energia, e  $M_{Rk}^-$  é o momento resistente, ambos da região de momento negativo.

A deformação ocorrida no mecanismo “U” invertido devido à FLD pode ser observada na Figura 2.6. A mesa inferior do perfil se desloca lateralmente quando há flexão na alma e um giro ocorre na mesa superior do perfil de aço, este restringido pela laje. O momento crítico elástico ( $M_{cr}$ ) à FLD é calculado considerando a resposta de um mecanismo “U” invertido, formado por duas ou mais vigas paralelas ligadas à mesma laje de concreto.

Figura 2.6 - Pórtico em “U” invertido



Fonte: Johnson (2004)

Nota: Figurada adaptada por Oliveira (2014)

Os cálculos propostos pela ABNT NBR 8800:2008 são baseados nos estudos de Roik, Hanswille e Kina (1990) (subitem 2.3.1). A equação é obtida por aproximação de energia e é feita considerando a resposta de um mecanismo “U” contínuo à FLD, sendo expressa por:

$$M_{cr} = \alpha_g \frac{C_{dist}}{L} \sqrt{\left(GJ + \frac{k_r L^2}{\pi^2}\right) EI_{af,y}} \quad (2.15)$$

onde:

$G$  é o módulo de elasticidade transversal do aço;

$L$  é o comprimento da viga entre apoios verticais (exige-se que ambas as mesas do perfil de aço possuam contenção lateral nesses apoios);

$J$  é a constante de torção do perfil de aço;

$I_{af,y}$  é o momento de inércia da mesa inferior do perfil de aço em relação ao eixo  $y$ ;

$C_{dist}$  é um coeficiente que depende da distribuição de momentos fletores no comprimento  $L$ ;

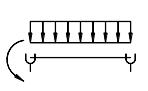
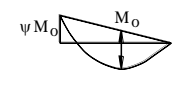
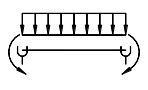
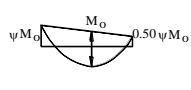
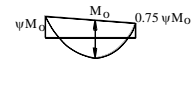
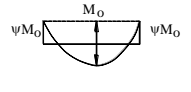
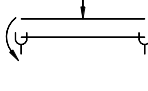
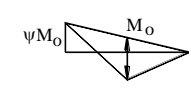
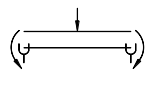
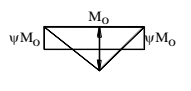
$\alpha_g$  é um fator relacionado à geometria da seção transversal da viga mista;

$k_r$  é a rigidez rotacional da viga mista.

A forma da distribuição do momento fletor no vão influencia o momento crítico. O coeficiente  $C_{dist}$  leva isso em consideração, sendo determinado por meio de análises numéricas pelo método dos elementos finitos. Os valores do coeficiente  $C_{dist}$  para vigas mistas contínuas em diversas condições de carregamentos são apresentados

na que por sua vez é idêntica à Tabela 2.1 (no caso, esta tabela é retirada da ABNT 8800:2008).

Tabela 2.4 – Valores de  $C_{dist}$  para vãos com cargas transversais

Condições de carregamento e apoio	Diagrama de momento fletor <sup>1)</sup>	$C_{dist}$								
		$\psi=0,50$	$\psi=0,75$	$\psi=1,00$	$\psi=1,25$	$\psi=1,50$	$\psi=1,75$	$\psi=2,00$	$\psi=2,25$	$\psi=2,50$
		41,5	30,2	24,5	21,1	19,0	17,5	16,5	15,7	15,2
		33,9	22,7	17,3	14,1	13,0	12,0	11,4	10,9	10,6
		28,2	18,0	13,7	11,7	10,6	10,0	9,5	9,1	8,9
		21,9	13,9	11,0	9,6	8,8	8,3	8,0	7,8	7,6
		28,4	21,8	18,6	16,7	15,6	14,8	14,2	13,8	13,5
		12,7	9,89	8,6	8,0	7,7	7,4	7,2	7,1	7,0
NOTA:										
<sup>1)</sup> $M_o$ é o momento máximo solicitante de cálculo, considerando o trecho analisado como biapoiado.										

Fonte: ABNT NBR 8800:2008

O fator  $\alpha_g$  da equação (2.15) está relacionado com propriedades geométricas da seção, conforme descrito abaixo:

Para perfis duplamente simétricos

$$\alpha_g = \frac{\left(\frac{h_0 I_x}{I_{ax}}\right)}{\left(\frac{h_0^2}{4} + \frac{(I_{ax} + I_{ay})}{A_a}\right)} + h_0 \quad (2.16)$$

Para perfis monossimétricos:

$$\alpha_g = \frac{\left(\frac{h_0 I_x}{I_{ax}}\right)}{\frac{(y_f - y_s)^2 + \frac{(I_{ax} + I_{ay})}{A_a}}{e} + 2(y_f - y_j)} \quad (2.17)$$

onde:

$y_c$  é a distância do centro geométrico do perfil de aço à metade da altura da laje de concreto;

$I_x$  é o momento de inércia da seção mista na região de momento negativo (perfil de aço mais a armadura da laje) com relação ao eixo  $x$ ;

$I_{ax}$  e  $I_{ay}$  são os momentos de inércia da seção de aço com relação a seus eixos baricêntricos;

$A_a$  é a área do perfil de aço;

$A$  é a área da seção mista na região de momento negativo (perfil de aço mais armadura da laje);

$y_s$  é a distância do centro geométrico de cisalhamento do perfil de aço, positiva quando o centro de cisalhamento e a mesa comprimida pelo momento negativo estão no mesmo lado do centro geométrico;

sendo:

$$e = \frac{A I_{ax}}{A_a y_c (A - A_a)} \quad (2.18)$$

$$y_f = \frac{h_0 I_{afy}}{I_{ay}} \quad (2.19)$$

$$y_j = y_s - \int \frac{y(x^2 + y^2) dA}{2I_{ax}} \quad (2.20)$$

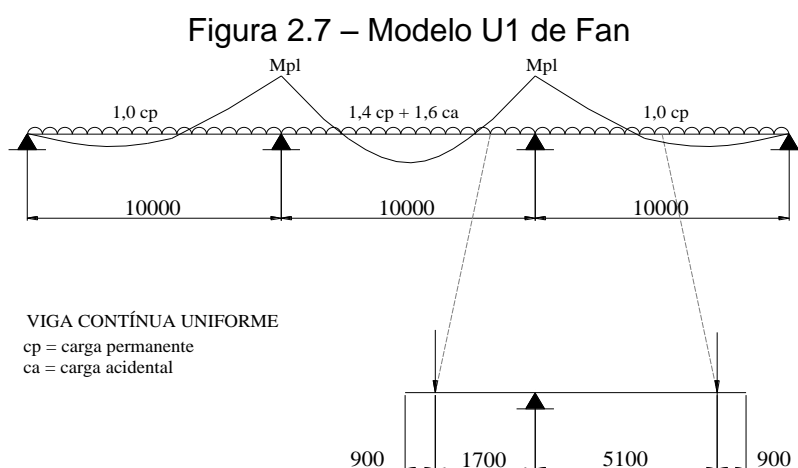
Quando  $I_{af,y} > 0,5I_{ay}$  pode-se tomar:

$$y_j = 0,40h_0 \left( 2 \frac{I_{af,y}}{I_{ay}} - 1 \right) \quad (2.21)$$



## 2.5 Estado da arte

Fan (1990) em sua tese de doutorado realizou quatro ensaios com modelos em escala real: dois deles em vigas mistas de seção transversal “T” e outros dois em vigas mistas com mecanismo “U” contínuo. Em cada ensaio as vigas foram construídas com dois vãos e um apoio central. O comprimento dos vãos representou o comprimento de uma viga mista contínua entre um apoio intermediário e um ponto de inflexão, sujeito a momento negativo. Fan (1990) nominou os modelos com seção transversal em “T” de S2 e U1 e os com mecanismo “U” contínuo de U2 e U3.



Fonte: Calenzani (2008)

Os resultados dos modelos ensaiados mostraram que a resistência à flexão, depois de alcançado os momentos máximos, declinou quando houve uma combinação de flambagem local e flambagem lateral com distorção da mesa inferior. Os ensaios feitos por Fan (1990) evidenciam que a flambagem local pode iniciar a flambagem lateral com distorção. Outro fator importante observado pelo autor foi que os deslocamentos laterais das mesas inferiores dos modelos foram mesmo sendo submetidos a cargas de níveis mais baixos. Os momentos resistentes últimos dos modelos foram ligeiramente superiores aos seus momentos plásticos. A incapacidade das vigas de alcançarem maiores resistências (efeito de endurecimento) parece ser devido às proporções de suas seções transversais, e não devido ao comprimento destravado sujeito a momento negativo.

Chen (1992) realizou ensaios com modelos em escala real de vigas mistas com mecanismos “U” contínuo e discreto para sua tese de doutorado. Os modelos contínuos

e discretos foram chamados de U4 e U5, respectivamente, e os modelos de estruturas isoladas discretas foram chamados de I-US e I-UD. A flambagem lateral com distorção foi avaliada primeiramente no mecanismo “U” contínuo, modelo U4, e depois no mecanismo “U” discreto, modelo U5. Posteriormente, a resistência e a rigidez dos mecanismos discretos foram avaliadas com base em uma série de ensaios em estruturas “U” isoladas com comprimento longitudinal de 0,4m a 1m.

Os resultados obtidos por Chen (1992) mostraram a ocorrência de flambagem local da alma próximo da região dos apoios após o início da FLD. O autor também observou que houve redução da distorção da alma dos modelos enrijecidos, quando comparados com os modelos sem enrijecedores, em especial na região afastadas da seção central, levando a concluir que os enrijecedores aumentaram a resistência à FLD. Nos modelos “U” em estruturas isoladas, constatou-se que não é possível desprezar a contribuição da conexão de cisalhamento, outrora desprezado, no cálculo da rigidez rotacional de vigas mistas com mecanismos “U” discreto.

Dekker *et al.* (1995) analisaram os fatores que influenciam no comportamento de vigas mistas na região de momento fletor negativo, propondo modelos teóricos com base no método dos elementos finitos. Foram feitas comparações entre a resistência à flambagem das vigas mistas contínuas nos regimes inelástico e plástico. No regime inelástico, a FLD governou o dimensionamento à flexão, enquanto no regime plástico, houve uma interação da flambagem local da mesa e da alma com a flambagem lateral com distorção.

Ng e Ronagh (2004) propuseram um programa computacional para a determinação da flambagem lateral com distorção de vigas mistas com seção I usando séries de Fourier para funções dos deslocamentos. Com esse programa foi possível determinar a carga de flambagem e as formas modais de vigas mistas com seção I sujeitas a qualquer tipo de carregamento e diversas condições de apoio.

Chen (2005) analisou experimentalmente quatro grupos de vigas mistas contínuas protendidas por cabos externos na região de momento negativo. Constatou-se que a protensão na viga mista aumenta a resistência à fissuração do concreto, entretanto, também aumenta a força axial de compressão na viga, aumentando a compressão na alma do perfil, tornando a viga mais suscetível à flambagem e reduzindo a resistência da viga a região de momento fletor negativo.

Chen e Jia (2008) estudaram a redistribuição do momento negativo nas vigas mistas contínuas com apoios internos. Foi possível fazer uma aproximação para avaliar a resistência de vigas mistas que depende da capacidade de rotação ou da razão entre as forças aplicadas nos vãos.

Calenzani (2008) com o intuito de propor uma metodologia de cálculo para determinar a rigidez rotacional de vigas mistas com perfis de alma senoidal realizou ensaios experimentais e análises numéricas. Para os ensaios foram utilizados quatro protótipos representativos do mecanismo “U” invertido. Dois protótipos utilizados no ensaio têm lajes de concreto armado e outros dois lajes mistas com fôrma de aço incorporada. As análises numéricas via método de elementos finitos foram aferidas com os resultados das análises experimentais e realizado um estudo paramétrico em sessenta e oito modelos numéricos diferentes.

Calenzani (2008) propôs formulações para a rigidez rotacional da laje e do perfil de alma senoidal. A autora também propôs que a rigidez rotacional da viga mista fosse constituída da associação em série de três rigidezes, as duas já citadas e a rigidez à conexão de cisalhamento. Foi elaborada uma tabela que determina a rigidez rotacional da conexão.

Pimenta (2008) tomando como base os dados de pesquisa de Calenzani (2008), propôs outra formulação para a obtenção da rigidez rotacional do mecanismo “U” invertido das vigas mistas com perfil de alma senoidal. O autor determinou uma equação para cálculo da rigidez rotacional da conexão eliminando o uso das tabelas estabelecidas por Calenzani (2008). Para verificar a flambagem lateral com distorção nas vigas mistas com perfis de alma senoidal, Pimenta (2008) recomenda adotar o mesmo procedimento da ABNT NBR 8800:2008, desprezando-se a alma do perfil de aço no cálculo das propriedades geométricas.

Nguyen *et al.* (2009) deram ênfase ao estudo da fissuração da laje de concreto na região de momento negativo. Devido a essa fissuração há uma redução da rigidez global da estrutura e uma redução do efeito de continuidade. Através da formulação de método dos elementos finitos, foi realizado um estudo paramétrico para analisar a influência do comprimento do vão e do grau de interação da conexão de cisalhamento na rigidez e na ductilidade de vigas mistas contínuas.

Chen *et al.* (2009) compararam, experimentalmente, o comportamento de vigas mistas contínuas de aço e concreto protendidas e não-protendidas. Foram testadas quatro vigas mistas contínuas com seções transversais idênticas, sendo duas com dois vãos e duas com três vãos. Foram analisadas uma viga não protendida e uma viga protendida por cabos externos para os modelos de dois vãos. Para as vigas com três vãos, um modelo não era protendido e outro era protendido por cabos externos somente na região de momento negativo.

Observando o gráfico da carga *versus* deformação obtido dos resultados de Chen *et al.* (2009), percebeu-se que a viga mista protendida deforma menos que a não protendida, ou comporta-se de maneira mais rígida. Isso ocorre, porque existe uma curvatura inicial negativa (para cima) nas vigas protendidas devido à aplicação da protensão dos cabos. Entretanto após o escoamento da mesa inferior do perfil de aço próxima ao apoio interno, ambas as vigas comportam-se de maneira semelhante. Isso aconteceu devido ao incremento da força de protensão que é pequena e aumenta linearmente com a força exercida antes do escoamento do perfil de aço, mas cresce rapidamente após escoar. As tensões residuais, imperfeições geométricas e a esbeltez da alma e da mesa influenciam no momento resistente à flambagem lateral com distorção das vigas mistas protendidas por cabos externos.

Chen *et al.* (2010) fez uma análise não linear por meio de modelagem numérica em elementos finitos desse tipo de viga. Com base nos resultados experimentais de Chen (2005), o modelo numérico desenvolvido no software ABAQUS v.6.5 foi aferido. Com o modelo aferido, Chen (2005) estudou 200 modelos numéricos, contemplando os fatores que influenciam a resistência desse tipo de viga, foram processados.

Gizejowski e Khalil (2010) compararam os estudos experimentais e numéricos que constam na literatura sobre a flambagem lateral com distorção de vigas mistas para perfis de alma plana e de alma castelada. Os autores compararam os resultados do momento crítico elástico aos resultados da flambagem lateral com distorção obtidos pela EN 1994-1-1:2004 usando as expressões para  $M_{cr}$  de Johnson (2004) e de Hanswille (2002), além da formulação proposta por Dekker, Kemp e Trincherro (1995) e dos resultados das vigas modeladas por elementos finitos no ABAQUS. Todas as soluções estudadas conduziram a resultados conservadores, uma vez que os resul-

tados numéricos foram superiores aos obtidos pelas previsões do momento crítico elástico.

Chen e Xindi (2012) analisaram numericamente o comportamento estrutural de vigas mistas contínuas com enrijecedores transversais soldados à alma do perfil de aço. Utilizando o auxílio do software Ansys 10.0, os modelos foram inseridos com o objetivo de estudar o comportamento da região de momento negativo. Os parâmetros analisados foram os que podem afetar a capacidade resistente, como a rigidez à flexão da laje de concreto, a rigidez da alma enrijecida, a esbeltez da alma do perfil de aço e a razão entre a distância dos enrijecedores e o vão da viga. Esses autores realizaram análises não lineares e análises de flambagem. Para a análise de flambagem foi adotado um modelo constituído por uma viga de aço soldada simplesmente apoiada, submetido a um momento negativo e tendo restrição rotacional e lateral aplicada a mesa superior. A restrição rotacional no modelo foi feita através de molas, conforme representado na Figura 2.8.

Figura 2.8 - Modelo restringido



Fonte: Chen e Xindi (2012)

Nota: Figura adaptada por Oliveira (2014)

Para as molas, utilizaram o elemento Spring combine 14 distribuídos uniformemente na mesa superior ao longo do vão da viga. O perfil e os enrijecedores transversais foram modelados pelo elemento Shell 163. O valor da rigidez rotacional ( $k_r$ ) das molas foi obtido através da formulação proposta pela EN 1994-1-1:2004. Nos estudos paramétricos, os autores compararam vigas de mesma seção transversal com e sem enrijecedor. Eles constataram que os enrijecedores na alma do perfil de aço aumentam o momento crítico elástico das vigas mistas e reduzem o deslocamento lateral da mesa comprimida.

Vasdravellis *et al.* (2012) estudaram o comportamento de vigas mistas sujeitas aos efeitos combinados de momento fletor negativo e compressão. Para esse estudo foram montadas seis vigas mistas em escala real sujeitas ao esforço de compressão e ao momento fletor negativo simultâneos. Contraventamentos foram colocados a fim de impedir a FLD. Para um estudo mais aprofundado foram desenvolvidos modelos numéricos não lineares, por sua vez calibrados com os resultados experimentais. Verificou-se que quando uma força de compressão age na viga mista há uma redução significativa da resistência a momento fletor negativo e a flambagem local no perfil de aço é mais pronunciada, comprometendo a ductilidade da seção. Foi sugerida a colocação de enrijecedores longitudinais na alma do perfil de aço na região de momento negativo para eliminar a flambagem local da alma.

Oliveira (2014) apresentou um procedimento para determinação do momento crítico elástico de vigas mistas contínuas com perfis de alma senoidal, com vistas à verificação do estado limite último de flambagem lateral com distorção (FLD). Inicialmente Oliveira (2014) desenvolveu uma modelagem numérica utilizando o programa Ansys 11.0 (2007), a qual foi aferida tomando como referência os resultados do exemplo numérico de Hanswille (2002). Em seguida, foram processados oitenta e cinco modelos numéricos diferentes variando os parâmetros que influem no cálculo do momento crítico elástico (condição de carregamento, rigidez da laje, rigidez do perfil de aço, rigidez da conexão de cisalhamento, comprimento da viga e esbeltez da mesa do perfil). Finalmente, os resultados obtidos com os modelos numéricos foram analisados, e proposto um procedimento para a determinação do momento crítico elástico de vigas mistas contínuas com perfis de alma senoidal.

Para o cálculo do momento crítico elástico das vigas mistas contínuas com perfis de alma senoidal foi utilizado o método proposto pela ABNT NBR 8800:2008 para vigas mistas com perfis de alma plana. Para adequar a expressão proposta pela norma a perfis de alma senoidal, foi necessário utilizar novos valores para o parâmetro  $C_{dist}$ . Recomendou-se adotar a prescrição de Calenzani (2008) para cálculo da rigidez rotacional das vigas mistas com perfis de alma senoidal. A adequação do procedimento para o cálculo do momento crítico elástico de vigas mistas com perfis de alma senoidal foi confirmada pela boa concordância observada entre os valores propostos e os numéricos, tanto para vigas mistas biapoiadas submetidas a momento fletor ne-

gativo linear quanto para vigas mistas submetidas a momento fletor não uniforme. O máximo desvio obtido para menos foi de 11% e para mais de 23%.

### **3 ESTUDO DA RIGIDEZ ROTACIONAL DA ALMA DE PERFIS CELULARES**

#### **3.1 Introdução**

A formulação para rigidez rotacional abordada na ABNT NBR 8800:2008 abrange apenas vigas mistas compostas por perfis de aço de alma cheia. Neste capítulo, uma metodologia foi desenvolvida para determinação analítica da rigidez rotacional da alma de perfis celulares. Para isso, inicialmente, no Item 3.2, uma equação é deduzida para o cálculo do deslocamento transversal de uma placa com aberturas circulares. A rigidez rotacional da alma celular é obtida analiticamente como uma função desse deslocamento, Item 3.3.

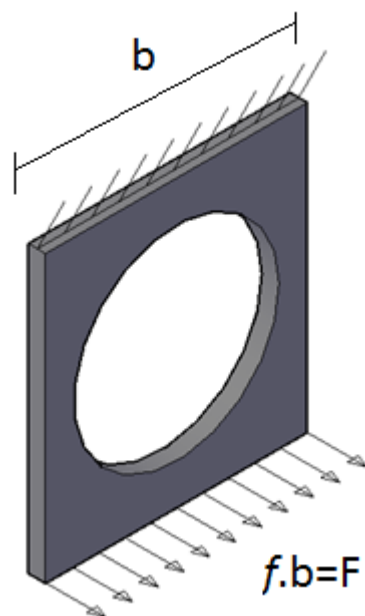
No Item 3.4 definiram-se modelos numéricos, utilizando o programa ANSYS 15.0, visando avaliar a equação de rigidez determinada no item 3.2. Os subitens 3.4.1 a 3.4.6 discutem as premissas utilizadas na escolha dos modelos numéricos e o subitem 3.4.7 apresenta a comparação dos resultados analíticos com os numéricos.

#### **3.2 Equação do deslocamento transversal de uma placa com abertura circular**

Para a obtenção de uma fórmula analítica para rigidez da alma celular, foi utilizado nesse trabalho o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), método que permite determinar os deslocamentos de quaisquer pontos de um corpo sólido. Foi desenvolvido um modelo simplificado para encontrar a solução analítica utilizando a teoria de elementos lineares. Esse modelo, Figura 3.1, representa uma barra de comprimento igual à distância entre os centros de mesas superior e inferior do perfil de aço e de seção transversal variável devido à abertura. A força é aplicada na extremidade inferior da placa. Foi considerada apenas uma abertura centralizada na placa.

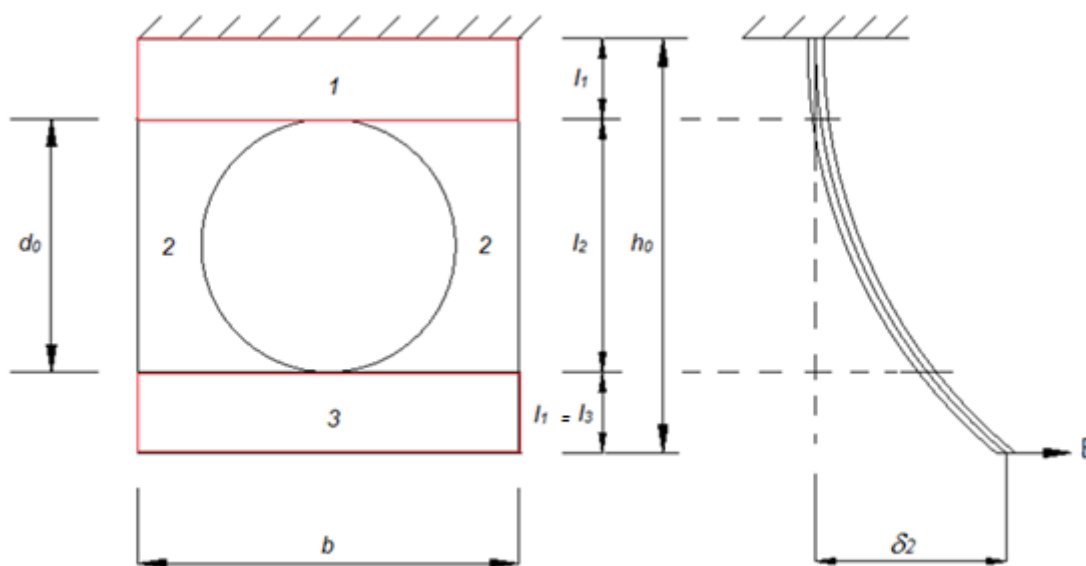


Figura 3.1 – Modelo para formulação analítica



O modelo simplificado foi dividido em três regiões para a integração, regiões 1, 2 e 3, Figura 3.2. A primeira região estende-se do engaste até o início da abertura circular, a segunda abrange a área da abertura da placa, e a terceira, estende-se do fim da abertura até a extremidade inferior da placa. A necessidade da divisão do modelo deve-se à variação do momento de inércia da placa.

Figura 3.2 – Regiões para integração



O deslocamento total do modelo simplificado,  $\delta_2$ , é igual à soma dos deslocamentos da placa,  $\delta_{2,1}$ ,  $\delta_{2,2}$  e  $\delta_{2,3}$  correspondentes respectivamente aos comprimentos  $l_1$ ,  $l_2$  e  $l_3$ , portanto:

$$\delta_2 = \delta_{2,1} + \delta_{2,2} + \delta_{2,3} \quad (3.1)$$

Para obter o deslocamento do primeiro trecho, da parte engastada até o início da abertura, foi utilizada a equação (3.2).

$$\delta_{2,1} = \int_0^{\frac{h_0-d_0}{2}} \frac{Fx^2}{EI} dx \quad (3.2)$$

Solucionando a integral da equação (3.2), obtém-se o deslocamento do primeiro trecho, dado por:

$$\delta_{2,1} = \frac{F}{24EI} (h_0 - d_0)^3 \quad (3.3)$$

Para a terceira parte, do fim da abertura até a extremidade da alma, o procedimento se assemelha ao da primeira parte, uma vez que o momento de inércia é constante, mudando apenas os limites de integração, conforme:

$$\delta_{2,3} = \int_{\frac{h_0+d_0}{2}}^{h_0} \frac{Fx^2}{EI} dx \quad (3.4)$$

Resolvendo a equação (3.4) obtém-se o deslocamento do terceiro trecho, dado por:

$$\delta_{2,3} = \frac{F}{3EI} \left( h_0^3 - \frac{(h_0 + d_0)^3}{8} \right) \quad (3.5)$$

Para o segundo trecho, os limites de integração correspondem ao diâmetro da abertura e a equação do deslocamento fica:

$$\delta_{2,2} = \int_{\frac{h_0-d_0}{2}}^{\frac{h_0+d_0}{2}} \frac{12Fx^2}{Et_w^3 \left( b - 2 \sqrt{\frac{d_0^2}{4} - \left( \frac{h_0}{2} - x \right)^2} \right)} dx \quad (3.6)$$

Para solucionar a equação (3.6) foi necessária à utilização do software MATHEMATICA 10.3. O software apresentou uma solução com números reais e complexos. O

procedimento da manipulação do resultado da integral solucionada pelo software é apresentado no Apêndice I. O deslocamento no segundo trecho é dado por:

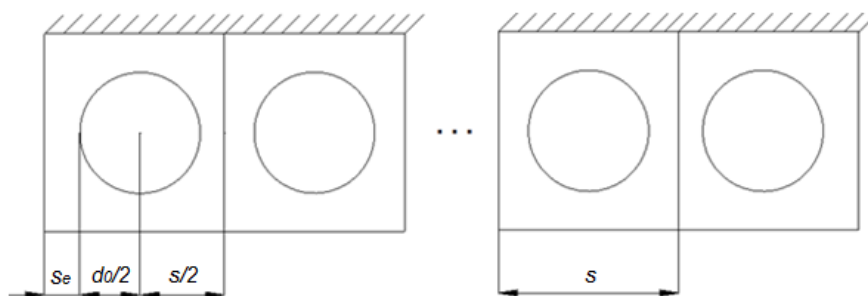
$$\delta_{2,2} = \frac{3F}{4Et_w^3} \left\{ [4bd_0 + \pi(2b^2 - d_0^2 - 2h_0^2)] - \frac{(b^3 - bd_0^2 - bh_0^2)}{\sqrt{b^2 - d_0^2}} \left[ 4\text{arctg} \left( \frac{d_0}{\sqrt{b^2 - d_0^2}} \right) + 2\pi \right] \right\} \quad (3.7)$$

Obtidos os deslocamentos individuais, como apresentado na equação (3.1), obtém-se a equação para o deslocamento de uma placa com furo centralizado e uma força aplicada em sua extremidade inferior:

$$\delta_2 = \frac{F}{Ebt_w^3} \left\{ (4h_0^3 - 3d_0h_0^2 - d_0^3) + \frac{3b}{4} \left\{ [4bd_0 + \pi(2b^2 - d_0^2 - 2h_0^2)] - \frac{(b^3 - bd_0^2 - bh_0^2)}{\sqrt{b^2 - d_0^2}} \left[ 4\text{arctg} \left( \frac{d_0}{\sqrt{b^2 - d_0^2}} \right) + 2\pi \right] \right\} \right\} \quad (3.8)$$

### 3.2.1 Aplicação da equação do deslocamento transversal para o caso de $n$ aberturas

Um modelo genérico com base no modelo já estudado de placa com uma abertura centralizada é proposto para determinação do deslocamento transversal de uma placa com  $n$  aberturas. Sabendo-se que a alma celular possui diversas aberturas igualmente espaçadas da distância  $s$ , e que a primeira e a última abertura ficam distantes de  $s_e$  das extremidades, Figura 3.3, o modelo genérico foi gerado agrupando-se  $n$  placas centrais de largura  $s$  a duas placas de extremidade de largura igual à soma de  $s_e$  com  $0,5d_0$  e  $0,5s$ .

Figura 3.3 – Modelo para viga celular com  $n$  aberturas

A alma do perfil submetida à força  $F$  na sua extremidade inferior apresenta um deslocamento lateral igualitário ao longo do comprimento da viga, uma vez que está conectada a mesa inferior que é rígida. Por isso, este trabalho propõe obter o deslocamento lateral da alma celular com  $n$  furos,  $\delta_{2,c}$ , equação (3.9), por meio da média ponderada dos deslocamentos das placas isoladas (centrais e de extremidades) em relação ao comprimento de cada placa:

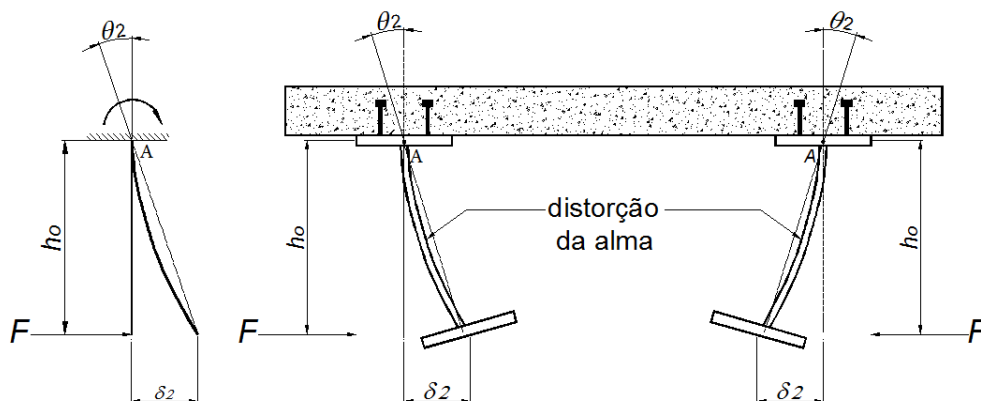
$$\delta_{2,c} = \frac{2(s_e + 0,5d_0 + 0,5s)\delta_{2,ext} + (n - 2)s\delta_{2,cent}}{L} \quad (3.9)$$

Os deslocamentos  $\delta_{2,cent}$  e  $\delta_{2,ext}$  são calculados por meio da equação (3.8), onde a largura  $b$  é tomada igual a  $s$  para as placas centrais e igual a  $s_e + 0,5d_0 + 0,5s$  para as placas de extremidades. A força  $F$  aplicada nas placas deve ser distribuída de forma proporcional ao comprimento de cada placa isolada.

### 3.3 Determinação da rigidez rotacional da alma celular

Como foi visto no capítulo 1, a rigidez rotacional de uma viga mista,  $k_r$ , depende substancialmente da rigidez à flexão da alma do perfil de aço ( $k_2$ ). Esta por sua vez pode ser determinada considerando a alma como uma placa engastada no centro geométrico da mesa superior e livre no centro geométrico da mesa inferior, Figura 1.7, aqui repetida na Figura 3.4. Conforme descrito no Subitem 1.2.3, aplicando-se uma força horizontal  $F$  no centro geométrico da mesa inferior, o deslocamento lateral da alma  $\delta_2$  é determinado e por aproximação obtém-se também os valores de rotação e rigidez da alma,  $\theta_2$  e  $k_2$ , respectivamente.

Figura 3.4 – Rigidez à distorção da alma do perfil



Fonte: Calenzani (2008)

Sabe-se que a chapa da alma do perfil celular tem momento de inércia variável em relação aos seus eixos principais devido à presença das aberturas, impossibilitando a utilização da fórmula de cálculo da rigidez da alma proposta por Timoshenko e Krieger (1959), adotada na ABNT NBR 8800:2008.

É possível determinar a rigidez rotacional da alma considerando uma parte ou até mesmo o comprimento total do perfil celular que compõe a viga mista. Para achar a rigidez rotacional da alma por metro linear, deve-se utilizar uma regra de proporcionalidade.

De acordo com a equação (1.1), é possível relacionar a rigidez rotacional ao momento gerado pela força aplicada na barra e a rotação ocorrida na mesma. O momento foi tomado igual ao produto da força aplicada nas mesas inferiores dos perfis de aço do mecanismo “U” pela distância entre os centros geométricos das mesas inferior e superior.

$$k_2 = \frac{M}{\theta} = \frac{F h_0}{\frac{\delta}{h_0}} \quad (3.10)$$

Substituindo a equação do deslocamento total (3.8) na equação da rigidez rotacional (3.10), é possível encontrar a rigidez rotacional de uma barra com uma abertura circular:

$$k_{2,c} = \frac{Ebt_w^3 h_0^2}{\left\{ (4h_0^3 - 3d_0 h_0^2 - d_0^3) + \frac{3b}{4} \right.}$$

$$\left. \left\{ 4bd_0 + \pi(2b^2 - d_0^2 - 2h_0^2) - \frac{(b^3 - bd_0^2 - bh_0^2)}{\sqrt{b^2 - d_0^2}} \left[ 4\arctg\left(\frac{d_0}{\sqrt{b^2 - d_0^2}}\right) + 2\pi \right] \right\} \right\}} \quad (3.11)$$

Da mesma forma, é possível encontrar a rigidez rotacional de uma placa com uma abertura circular por unidade de comprimento, utilizando a proporcionalidade:

$$k_{2,c} = \frac{Et_w^3 h_0^2}{\left\{ (4h_0^3 - 3d_0 h_0^2 - d_0^3) + \frac{3b}{4} \right.}$$

$$\left. \left\{ 4bd_0 + \pi(2b^2 - d_0^2 - 2h_0^2) - \frac{(b^3 - bd_0^2 - bh_0^2)}{\sqrt{b^2 - d_0^2}} \left[ 4\arctg\left(\frac{d_0}{\sqrt{b^2 - d_0^2}}\right) + 2\pi \right] \right\} \right\}} \quad (3.12)$$

Também é possível relacionar a rigidez rotacional para  $n$  aberturas substituindo a equação (3.9) na equação da rigidez rotacional (3.10). A equação da rigidez rotacional da alma celular por unidade de comprimento fica expressa por:

$$k_{2,c} = \frac{Fh_0^2}{2(s_e + 0,5d_0 + 0,5s)\delta_{2,ext} + (n - 2)s\delta_{2,cent}} \quad (3.13)$$

### 3.4 Avaliação numérica da equação da rigidez da alma celular

Modelos numéricos foram definidos para simular o comportamento da alma do perfil celular em regime elástico por meio do método dos elementos finitos. Os resultados numéricos de deslocamento lateral da placa da alma e conseqüentemente da sua rigidez foram obtidos e comparados com os resultados analíticos da equação (3.13). O objetivo era avaliar a equação analítica para sua posterior utilização no estudo paramétrico de determinação da rigidez rotacional de vigas mistas com perfil celular.

Foram implementados modelos tridimensionais em elementos finitos de placa, Figura 3.5 e Figura 3.6, desenvolvidos para retratar de forma mais realística possível o comportamento estrutural das placas com aberturas circulares. A escolha do ele-

mento, das condições de contorno, entre outros, foi feita visando à fidelidade ao modelo analítico para obter resultados confiáveis.

Figura 3.5 – Modelo Placa Celular - Frontal

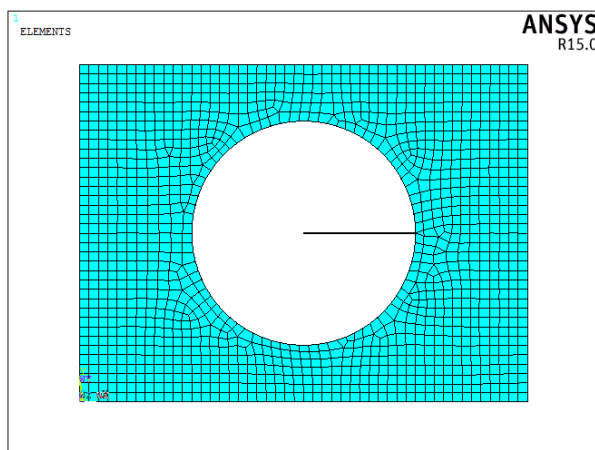
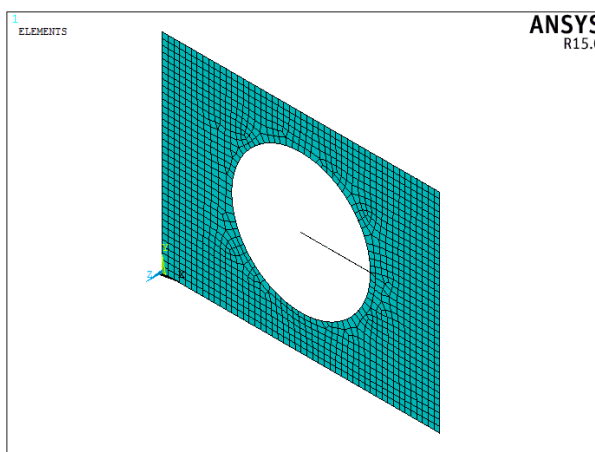


Figura 3.6 – Modelo Placa Celular - Isométrica



### 3.4.1 Programa utilizado

A modelagem numérica foi realizada utilizando-se o software de análise de elementos finitos ANSYS (versão 15). Esse programa é utilizado para todos os tipos de modelagem em elementos finitos e tem a credibilidade da comunidade científica para análises estruturais.

O software disponibiliza uma alta variedade de tipos de elementos, que são identificados por um número único para cada elemento e um prefixo. Esses elementos podem ser utilizados para a representação de diversos tipos de formas e materiais. O

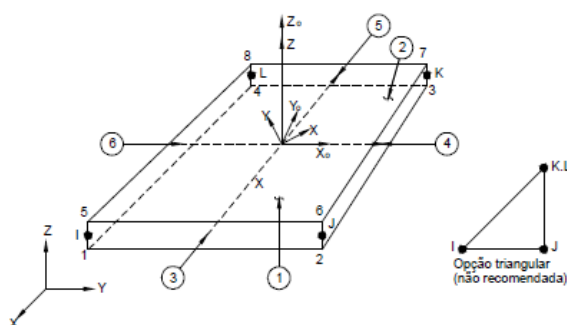
programa também apresenta uma vasta biblioteca de modelos de materiais, permitindo a definição de diversas propriedades (entre elas, propriedades térmicas, estruturais, elétricas, entre outros). Adicionalmente, o pacote do software apresenta pré e pós-processadores com capacidades gráficas, que facilitam a análise dos resultados.

Os modelos foram confeccionados em linguagem de programação parametrizada interpretada pelo ANSYS, denominada APDL (ANSYS Parametric Design Language). Esses arquivos são escritos de forma a parametrizar o modelo, isto é, as propriedades geométricas e de materiais do modelo podem ser alteradas a partir da simples troca de uma variável no código.

### 3.4.2 Elementos utilizados

O elemento de casca SHELL181 foi utilizado para representar o perfil de aço celular. Esse elemento é recomendado para modelar estruturas de espessura fina a moderadamente grossa, e também para análises lineares e não-lineares, de grandes rotações e/ou grandes deslocamentos. A mudança de espessura também pode ser considerada em análises não lineares (ANSYS 15). Esse elemento é definido por quatro nós e seis graus de liberdade por nó, translações nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  e rotações em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , conforme a Figura 3.7.

Figura 3.7 – Elemento de casca Shell 181





### **3.4.3 Propriedades do Material**

O coeficiente de Poisson e o módulo de elasticidade foram tomados iguais a 0,3 e 200000 MPa, respectivamente. Foi feita análise linear do material.

### **3.4.4 Malha de Elementos Finitos**

O ANSYS 15 possui duas alternativas para a geração da malha de elementos finitos, livre ou mapeada. A malha de elementos finitos foi definida como uma malha livre, em vez de mapeada devido à simplicidade do tipo de análise. Para determinação do tamanho ideal de malha foi utilizado um modelo específico de um perfil laminado W200x26.6 adaptado para um perfil celular com uma abertura. Esse modelo por sua vez tem 0,3228 m de altura, 0,4306 m de comprimento e com diâmetro de 0,2153 m. As malhas foram geradas com elementos de 0,01 a 0,1 m de lado (variando-se o tamanho dos elementos em 0,005 m) e os resultados de deslocamento na direção normal à placa foram anotados, bem como o número de elementos em cada modelo. A partir desses dados, calculou-se o valor do desvio relativo entre duas medições consecutivas. Os valores obtidos são apresentados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Análise da Malha

Tamanho do Elemento (m)	$\delta_{m\acute{a}x}$ (m)	Qty Elementos	Desvio $(\delta_i - \delta_{i+1})/\delta_i$
0,010	0,1189	1096	0,0017
0,015	0,1187	498	0,0025
0,020	0,1184	291	0,0017
0,025	0,1182	195	0,0034
0,030	0,1178	128	0,0025
0,035	0,1175	114	0,0043
0,040	0,1170	81	0,0051
0,045	0,1164	71	0,0069
0,050	0,1156	58	-0,0043
0,055	0,1161	37	0,0000
0,060	0,1161	37	0,0121
0,065	0,1147	30	0,0044
0,070	0,1142	28	0,0149
0,075	0,1125	30	-0,0027
0,080	0,1128	26	0,0168
0,085	0,1109	23	0,0469
0,090	0,1057	23	0,0000
0,095	0,1057	23	-0,0095
0,100	0,1067	21	

A Figura 3.8 apresenta o gráfico que relaciona o deslocamento máximo de cada modelo com sua quantidade de elementos nos modelos analisados. É possível analisar a convergência dos resultados a partir de um deslocamento de 0,118 m. A Figura 3.9 relaciona o desvio relativo dos resultados do deslocamento com o tamanho do elemento analisado de cada modelo analisado. Constatou-se que o desvio relativo dos resultados pouco varia para elementos com menos de 0,030 m de lado.

Figura 3.8 – Deslocamento Máximo x Quantidade de Elementos

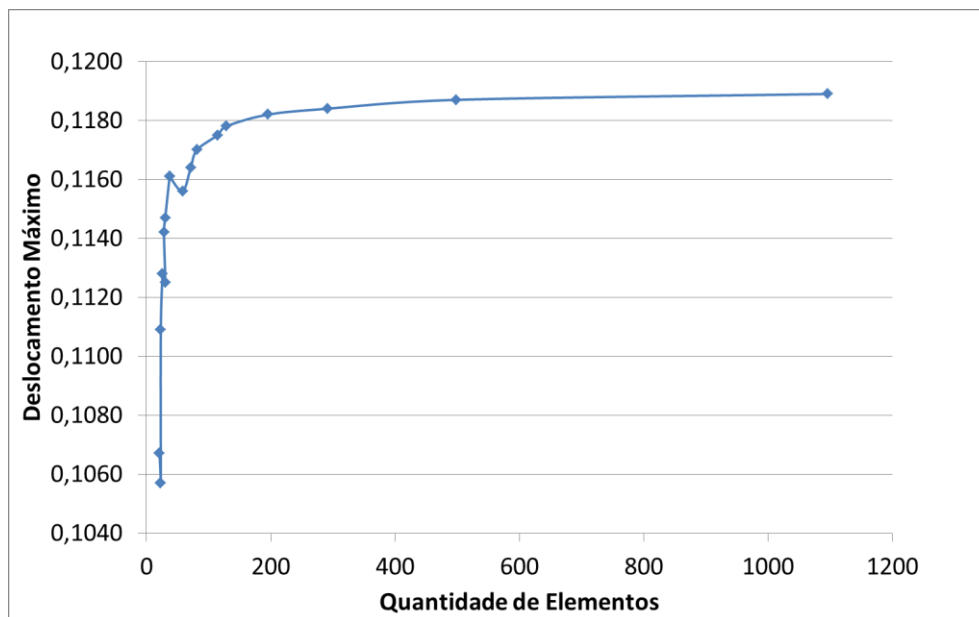
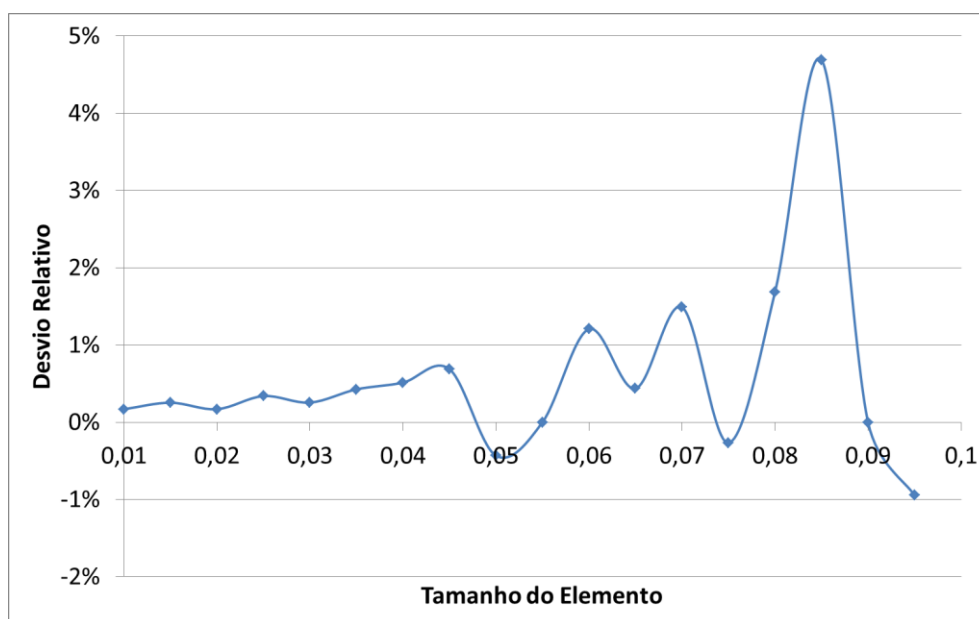


Figura 3.9 – Desvio relativo x Tamanho do Elemento



Tomando como base os resultados analisados, para todos os modelos estudados nos capítulos 3, 4 e 5, a malha utilizada é de 0,01 m. Tal malha apresentou resultados com precisão adequada e, apesar de mais discretizada que aquela que apresenta resultados com boa convergência de solução, não apresentou tempo de processamento computacional muito maior.

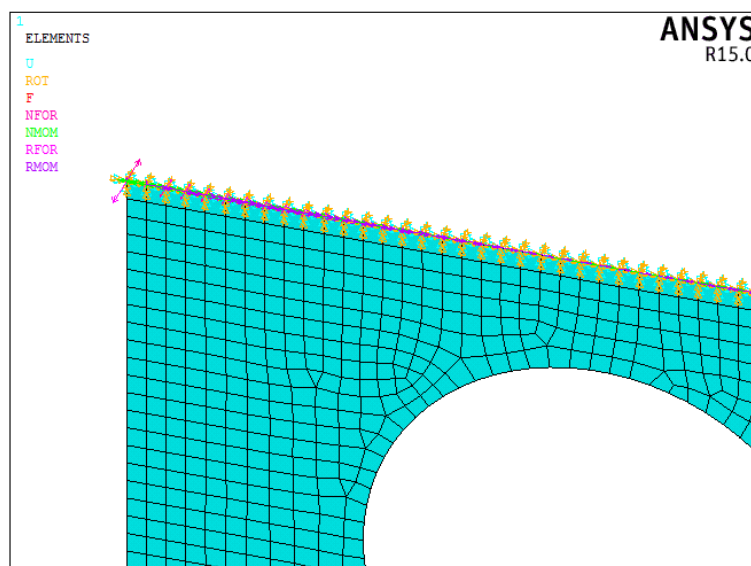
No processo de desenvolvimento algébrico da equação para determinação da rigidez rotacional da alma celular, considerou-se apenas análise elástica linear. Desta

forma, para que as análises pudessem ser comparadas, a análise pelo método dos elementos finitos também foi feita elástica linear.

### 3.4.5 Condições de contorno e carregamento aplicado

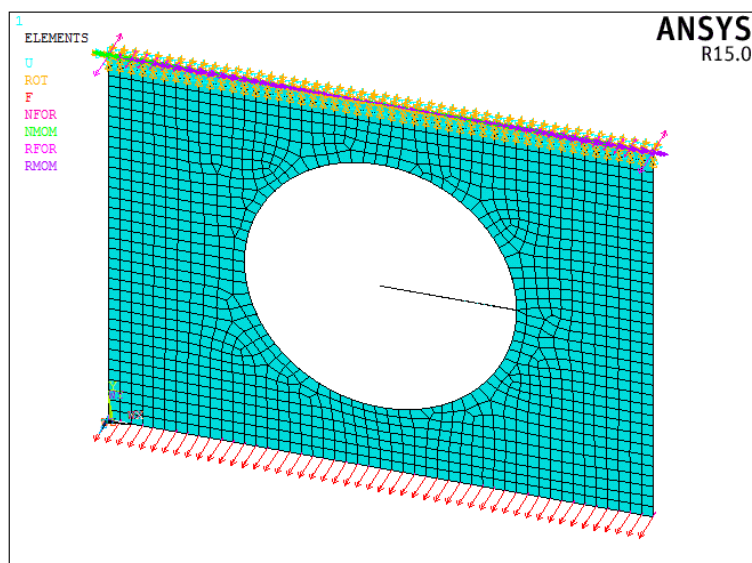
Para simular as condições de contorno, na extremidade superior da alma celular, os deslocamentos e rotações nas direções globais x, y e z foram impedidos, como apresentado na Figura 3.10. Na extremidade inferior, o deslocamento dos nós foi acoplado, fazendo com que houvesse um deslocamento igualitário ao longo do comprimento do modelo, simulando a mesa inferior. Essa restrição foi dada para considerar o efeito diafragma proporcionado pela mesa inferior, que não foi modelada.

Figura 3.10 – Condições de Contorno da placa celular



O carregamento foi distribuído nos nós que compõem a linha da extremidade inferior da placa para uma melhor convergência do modelo, como apresentado na Figura 3.11. A intensidade da força total aplicada ao modelo foi de 10 kN.

Figura 3.11 – Aplicação da força na placa celular



### 3.4.6 Modelos de avaliação

Para a validação da equação analítica mediante os resultados numéricos, foram selecionados 7 perfis laminados, escolhidos de forma que abranjam toda a tabela de fabricação dos perfis laminados. A Tabela 3.2 apresenta os perfis escolhidos:

Tabela 3.2 – Perfis para validação analítica

	$d_g$ (m)	$t_f$ (m)	$t_w$ (m)
<b>W200x26.6</b>	0,2070	0,0084	0,0058
<b>W310x44.5</b>	0,3130	0,0112	0,0066
<b>W360x51.0</b>	0,3550	0,0116	0,0072
<b>W410x60.0</b>	0,4070	0,0128	0,0077
<b>W460x74.0</b>	0,4570	0,0145	0,0090
<b>W530x82.0</b>	0,5280	0,0133	0,0095
<b>W610x125.0</b>	0,6120	0,0196	0,0119

Posteriormente à escolha dos perfis, procedeu-se a adaptação desses em perfis celulares, utilizando as informações dadas no Subitem 1.3.2. Inicialmente, um modelo padrão para aferição foi proposto (Tabela 3.3). Foi necessário arbitrar os parâmetros construtivos do perfil celular como: a altura expandida do perfil ( $d$ ), o diâmetro da abertura circular na alma do perfil ( $d_0$ ), o espaçamento entre aberturas ( $s$ ), a distân-

cia entre a extremidade do perfil e o início da abertura circular ( $s_e$ ) e o número de aberturas no perfil ( $n$ ).

Tabela 3.3 – Tabela de modelo padrão

	$d$	$d_o$	$s$	$s_e$	nº de aberturas
<b>MODELO PADRÃO</b>	1,6*dg	0,65*d	1,3*d0	0,5*d0	1 ou 2

Definido o modelo padrão criou-se uma tabela (Tabela 3.4) com os 7 perfis escolhidos para avaliar a equação proposta. Adicionou-se o parâmetro  $h_o$ , correspondente ao comprimento da placa da alma (altura de centro da mesa superior ao centro da mesa inferior do perfil) e o parâmetro  $L$  igual a largura do modelo, calculada de acordo com o número de aberturas.

Tabela 3.4 – Tabela de perfis padrão para aferição

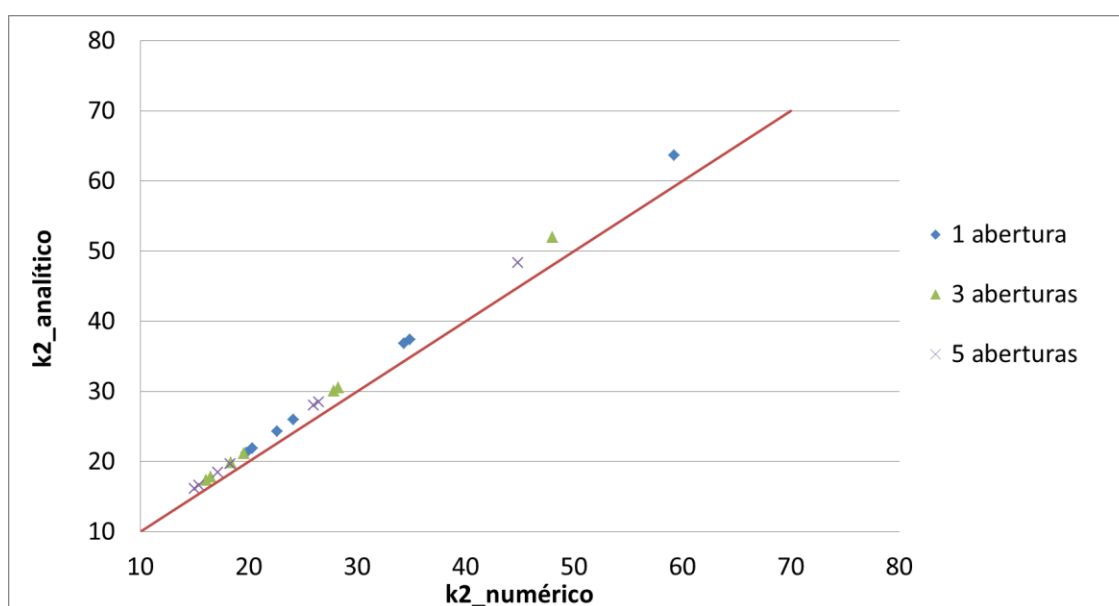
	$d$ (m)	$h_o$ (m)	$d_o$ (m)	$s$ (m)	$s_e$ (m)	nº de aberturas	$L$ (m)
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_1	0,331	0,323	0,215	0,280	0,108	1	0,431
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_3						3	0,990
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_5						5	1,550
C310x44.5_1.60_0.65_1.3_0.5_1	0,501	0,490	0,326	0,423	0,163	1	0,651
C310x44.5_1.60_0.65_1.3_0.5_3						3	1,497
C310x44.5_1.60_0.65_1.3_0.5_5						5	2,344
C360x51.0_1.60_0.65_1.3_0.5_1	0,568	0,556	0,369	0,480	0,185	1	0,738
C360x51.0_1.60_0.65_1.3_0.5_3						3	1,698
C360x51.0_1.60_0.65_1.3_0.5_5						5	2,658
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_1	0,651	0,638	0,423	0,550	0,212	1	0,847
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_3						3	1,947
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_5						5	3,048
C460x74.0_1.60_0.65_1.3_0.5_1	0,731	0,717	0,475	0,618	0,238	1	0,951
C460x74.0_1.60_0.65_1.3_0.5_3						3	2,186
C460x74.0_1.60_0.65_1.3_0.5_5						5	3,422
C530x82.0_1.60_0.65_1.3_0.5_1	0,845	0,832	0,549	0,714	0,275	1	1,098
C530x82.0_1.60_0.65_1.3_0.5_3						3	2,526
C530x82.0_1.60_0.65_1.3_0.5_5						5	3,954
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_1	0,979	0,960	0,636	0,827	0,318	1	1,273
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_3						3	2,928
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_5						5	4,583

### 3.4.7 Comparação dos resultados numéricos e analíticos

Para avaliar a equação analítica, os resultados dos modelos numéricos foram comparados com os da equação da rigidez rotacional da alma celular (3.13). Essa comparação foi feita por meio do gráfico da linha do ajuste perfeito (Figura 3.12), que leva em conta as rigidezes numérica e analítica.

No gráfico da Figura 3.12, pode-se notar que os valores calculados pela equação analítica têm uma boa concordância com os resultados numéricos, não apresentando grande dispersão em relação à linha de ajuste. São apresentadas as curvas dos perfis com 1, 3 e 5 aberturas.

Figura 3.12 – Gráfico da linha de ajuste perfeito



O desvio relativo entre as rigidezes rotacionais obtidas pela equação analítica em comparação aos da análise numérica foram dispostos na Tabela 3.5.

Tabela 3.5 – Comparação dos resultados

	$n$	$L$ (m)	$\delta_{2,c_A}$ (m)	$\delta_{2,c_{ext}}$ (m)	$\delta_{2,c_{cen}}$ (m)	$\delta_{2,c_N}$ (m)	$K_{2c_A}$ (kN/rad)	$K_{2c_N}$ (kN/rad)	<b>Desvio</b> ( $K_{2c_A}/K_{2c_N}$ )
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_1	1	0,431	0,111			0,119	21,879	20,354	1,075
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_3	3	0,990	0,059	0,054	0,071	0,064	17,833	16,518	1,080
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_5	5	1,550	0,041	0,035	0,046	0,044	16,585	15,419	1,076
C310x44.5_1.60_0.65_1.3_0.5_1	1	0,651	0,173			0,186	21,273	19,806	1,074
C310x44.5_1.60_0.65_1.3_0.5_3	3	1,497	0,092	0,085	0,111	0,100	17,350	16,056	1,081
C310x44.5_1.60_0.65_1.3_0.5_5	5	2,344	0,063	0,054	0,071	0,068	16,138	14,997	1,076
C360x51.0_1.60_0.65_1.3_0.5_1	1	0,738	0,172			0,185	24,319	22,638	1,074
C360x51.0_1.60_0.65_1.3_0.5_3	3	1,698	0,092	0,084	0,111	0,099	19,839	18,357	1,081
C360x51.0_1.60_0.65_1.3_0.5_5	5	2,658	0,063	0,054	0,071	0,068	18,455	17,152	1,076
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_1	1	0,847	0,186			0,199	25,931	24,144	1,074
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_3	3	1,947	0,099	0,091	0,119	0,107	21,157	19,580	1,081
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_5	5	3,048	0,068	0,058	0,076	0,073	19,682	18,294	1,076
C460x74.0_1.60_0.65_1.3_0.5_1	1	0,951	0,147			0,157	36,881	34,331	1,074
C460x74.0_1.60_0.65_1.3_0.5_3	3	2,186	0,078	0,072	0,094	0,084	30,091	27,837	1,081
C460x74.0_1.60_0.65_1.3_0.5_5	5	3,422	0,054	0,046	0,060	0,058	27,992	26,015	1,076
C530x82.0_1.60_0.65_1.3_0.5_1	1	1,098	0,168			0,181	37,437	34,859	1,074
C530x82.0_1.60_0.65_1.3_0.5_3	3	2,526	0,090	0,082	0,108	0,097	30,563	28,276	1,081
C530x82.0_1.60_0.65_1.3_0.5_5	5	3,954	0,061	0,053	0,069	0,066	28,438	26,456	1,075
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_1	1	1,273	0,114			0,122	63,673	59,245	1,075
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_3	3	2,928	0,061	0,056	0,073	0,066	51,946	48,017	1,082
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_5	5	4,583	0,042	0,036	0,047	0,045	48,323	44,852	1,077

O desvio de aproximadamente 8% da equação analítica em relação aos resultados numéricos pode ser atribuído às simplificações adotadas no cálculo analítico do deslocamento da alma, onde a teoria de elementos lineares foi utilizada em conjunto com o PTV, e a deformação por esforço cortante foi ignorada. A análise numérica considerou a teoria de placas e cascas e os deslocamentos são calculados incluindo todas as solicitações impostas. Além disso, o programa tende a concentrar a força aplicada no modelo nos locais com maior rigidez (locais com alma cheia) enquanto a equação distribui a força aplicada na placa celular de forma proporcional ao comprimento da placa analisada. Para comprovar essa afirmação, estudou-se o primeiro modelo da Tabela 3.5 (C200x26,6\_1,6\_0,65\_1,3\_0,5\_1). A Tabela 3.6 apresenta os nós, as forças (10 kN dividido pela quantidade de nós) e as reações dos respectivos nós.



Tabela 3.6 – Reação da Força nos nós do modelo

Nó	Força Aplicada (N)	Força Reação (N)	Nó	Força Aplicada (N)	Força Reação (N)
1	222,22	757,6	25	222,22	58,617
3	222,22	324,31	26	222,22	67,338
4	222,22	229,15	27	222,22	81,891
5	222,22	240,39	28	222,22	100,91
6	222,22	249,48	29	222,22	123,66
7	222,22	253,27	30	222,22	146,77
8	222,22	258,24	31	222,22	171,82
9	222,22	260,34	32	222,22	192,45
10	222,22	260,67	33	222,22	212,22
11	222,22	258,19	34	222,22	228,87
12	222,22	252,56	35	222,22	242,8
13	222,22	243,26	36	222,22	252,97
14	222,22	229,58	37	222,22	258,91
15	222,22	212,27	38	222,22	261,59
16	222,22	192,25	39	222,22	260,01
17	222,22	169,79	40	222,22	258,83
18	222,22	146,94	41	222,22	252,82
19	222,22	123,48	42	222,22	250,57
20	222,22	101,69	43	222,22	238,28
21	222,22	82,119	44	222,22	230,66
22	222,22	67,628	45	222,22	322,86
23	222,22	58,715	2	222,22	757,96
24	222,22	55,267	SOMA	9999,90	10000,00

É possível observar a variação da força nos nós onde os elementos são mais rígidos. À medida que a rigidez vai diminuindo pela presença das aberturas, a força vai regredindo. Na Figura 3.13 está o gráfico do comportamento da força ao longo do comprimento da alma do perfil celular. A Figura 3.14 apresenta o número dos nós do modelo analisado.

Figura 3.13 – Força x Comprimento – 1 furo

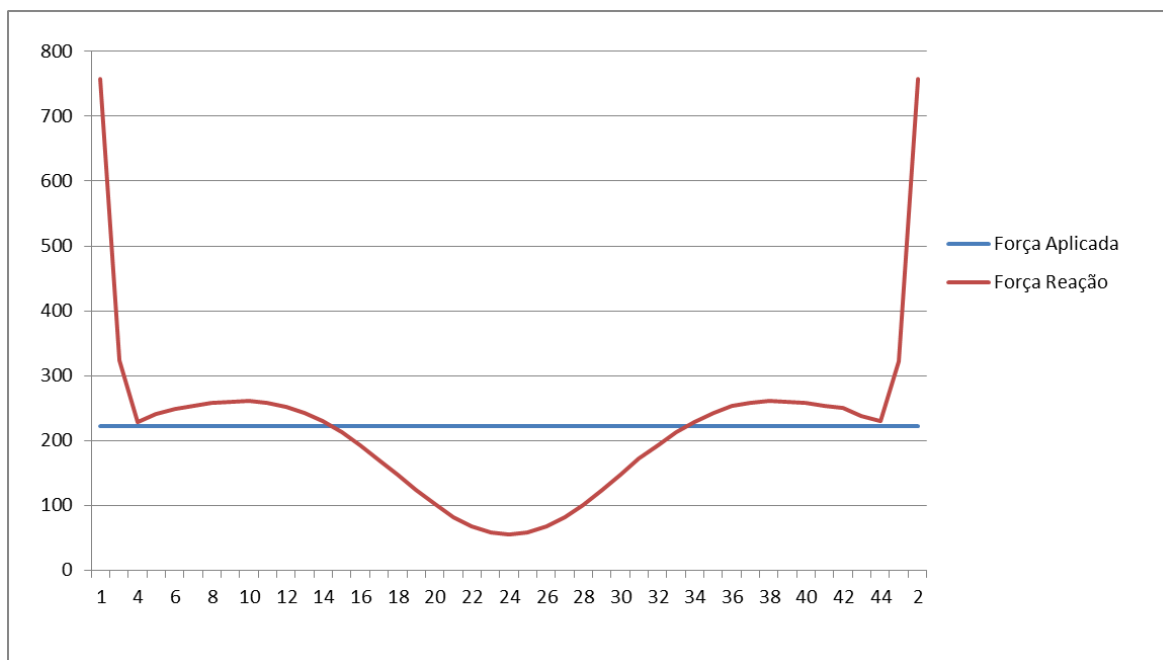
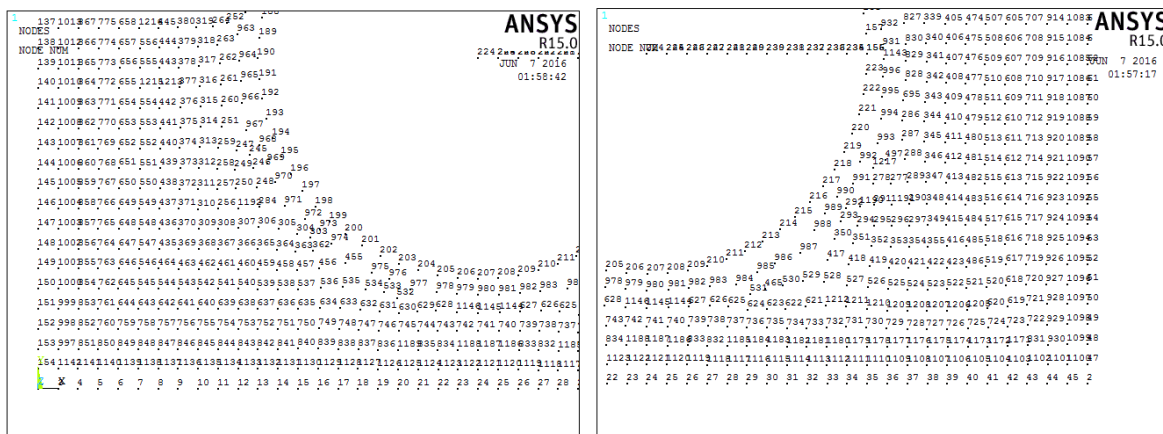


Figura 3.14 – Nós do modelo numérico C200x26,6\_1,6\_0,65\_1,3\_0,5\_1



## 4 PROPOSIÇÃO DE FORMULAÇÃO PARA A RIGIDEZ ROTACIONAL DE VIGAS MISTAS COM PERFIS DE AÇO CELULAR

### 4.1 Introdução

Neste capítulo, uma análise paramétrica é apresentada com o objetivo de mostrar resultados que ilustrem a influência dos parâmetros geométricos do perfil celular no valor da rigidez rotacional da alma. Para isso, foram processados cento e noventa e oito modelos numéricos, utilizando o programa ANSYS 15.0, com a modelagem apresentada no capítulo 3. Por meio da comparação dos resultados numéricos com os resultados analíticos, propôs-se um ajuste na equação da rigidez rotacional da alma do perfil celular. Para a rigidez rotacional da laje, é utilizada a equação da ABNT NBR 8800:2008. Por fim, o valor da rigidez rotacional,  $k_r$ , fica determinado com base na expressão da rigidez de molas ligadas em série, descrita no capítulo 1.

No Item 4.2 discutem-se os parâmetros que podem influenciar nos resultados da rigidez rotacional da alma do perfil celular, gerando uma série de modelos paramétricos. A geometria e as características dos modelos estão dispostas na forma de tabela. No Item 4.3 são apresentados os resultados numéricos e comparados aos resultados analíticos de rigidez rotacional da alma celular. O Item 4.4 apresenta a formulação proposta para a rigidez rotacional de vigas mistas com perfil celular.

### 4.2 Modelos de parametrização

Para determinação da rigidez rotacional de vigas mistas com perfis de alma celular, a análise numérica parametrizada foi realizada em modelos de geometria e características definidas com base nos parâmetros de construção dessas vigas, como citado no Subitem 1.3.2. Os parâmetros considerados na avaliação do perfil celular foram os limites construtivos do mesmo: a altura expandida do perfil ( $d$ ), o diâmetro da abertura circular na alma do perfil ( $d_0$ ), o espaçamento entre aberturas ( $s$ ), a distância entre a extremidade do perfil e o início da abertura circular ( $s_e$ ) e o número de aberturas no perfil ( $n$ ). Todos esses parâmetros influenciam o valor da rigidez da alma celular de acordo com a expressão deduzida no capítulo 3.

Foram escolhidos para a análise paramétrica, três perfis laminados de abas paralelas com diferentes alturas, W200x26,6, W410x60 e W610x125, visando estudar a influência da alteração de cada parâmetro na rigidez rotacional da alma celular. Nas tabelas 4.1 e 4.2 são apresentadas, respectivamente, as propriedades geométricas e a variação do número de aberturas, adotadas na geração dos modelos de alma celular. A altura inicial do perfil laminado é representada por  $d_g$ . São apresentadas as características de 57 tipos de perfis celulares incluindo o modelo padrão. Essas características foram utilizadas nos três perfis laminados supracitados para gerar os modelos, portanto, no total, 171 modelos de alma celular foram analisados.

Tabela 4.1 – Tabela paramétrica de variação das propriedades geométricas

	$d$	$d_o$	$s$	$s_e$	nº de aberturas
<b>MODELO PADRÃO</b>	1,6*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,3*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	1 ou 2
CPERFIL_1	1,25*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,3*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	1
CPERFIL_2	1,3*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,3*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	1
CPERFIL_3	1,35*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,3*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	1
CPERFIL_4	1,4*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,3*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	1
CPERFIL_5	1,45*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,3*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	1
CPERFIL_6	1,5*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,3*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	1
CPERFIL_7	1,55*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,3*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	1
CPERFIL_8	1,65*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,3*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	1
CPERFIL_9	1,7*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,3*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	1
CPERFIL_10	1,75*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,3*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	1
CPERFIL_11	1,6*d <sub>g</sub>	0,57*d	1,3*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	1
CPERFIL_12	1,6*d <sub>g</sub>	0,7*d	1,3*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	1
CPERFIL_13	1,6*d <sub>g</sub>	0,75*d	1,3*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	1
CPERFIL_14	1,6*d <sub>g</sub>	0,8*d	1,3*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	1
CPERFIL_15	1,6*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,08*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	2
CPERFIL_16	1,6*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,15*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	2
CPERFIL_17	1,6*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,2*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	2
CPERFIL_18	1,6*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,25*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	2
CPERFIL_19	1,6*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,35*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	2
CPERFIL_20	1,6*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,4*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	2
CPERFIL_21	1,6*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,45*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	2
CPERFIL_22	1,6*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,5*d <sub>0</sub>	0,5*d <sub>0</sub>	2
CPERFIL_23	1,6*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,3*d <sub>0</sub>	0,6*d <sub>0</sub>	1
CPERFIL_24	1,6*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,3*d <sub>0</sub>	0,7*d <sub>0</sub>	1
CPERFIL_25	1,6*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,3*d <sub>0</sub>	0,8*d <sub>0</sub>	1
CPERFIL_26	1,6*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,3*d <sub>0</sub>	0,9*d <sub>0</sub>	1
CPERFIL_27	1,6*d <sub>g</sub>	0,65*d	1,3*d <sub>0</sub>	d <sub>0</sub>	1

Tabela 4.2 – Tabela paramétrica de variação do número de aberturas

	$d$	$d_o$	$s$	$s_e$	nº de aberturas
<b>MODELO PADRÃO</b>	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	1
CPERFIL_28	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	2
CPERFIL_29	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	3
CPERFIL_30	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	4
CPERFIL_31	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	5
CPERFIL_32	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	6
CPERFIL_33	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	7
CPERFIL_34	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	8
CPERFIL_35	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	9
CPERFIL_36	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	10
CPERFIL_37	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	11
CPERFIL_38	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	12
CPERFIL_39	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	13
CPERFIL_40	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	14
CPERFIL_41	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	15
CPERFIL_42	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	16
CPERFIL_43	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	17
CPERFIL_44	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	18
CPERFIL_45	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	19
CPERFIL_46	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	20
CPERFIL_47	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	21
CPERFIL_48	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	22
CPERFIL_49	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	23
CPERFIL_50	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	24
CPERFIL_51	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	25
CPERFIL_52	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	26
CPERFIL_53	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	27
CPERFIL_54	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	28
CPERFIL_55	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	29
CPERFIL_56	1.6*dg	0.65*d	1.3*d0	0.5*d0	30

De posse dos parâmetros a serem analisados, criou-se uma simbologia para identificação dos modelos de alma celular, a saber:  $C_{perfil\_d/d_g-d_o/d\_s/d_{o-s_e}/d_{o-n}}$ , onde  $C_{perfil}$  indica viga celular com a designação do perfil original e as variáveis  $d$ ,  $d_g$ ,  $d_o$ ,  $s$ ,  $s_e$  e  $n$  são as propriedades geométricas. C200x26,6\_1,6\_0,65\_1,3\_0,5\_1, por exemplo, significa uma viga celular com perfil original W200x26,6, razão entre a altura final e a altura do perfil original,  $d/d_g$ , igual a 1,6, razão entre o diâmetro da abertura e a altura final,  $d_o/d$ , igual a 0,65, razão entre a distância entre aberturas e o diâmetro da abertura,  $s/d_o$ , igual a 1,3, razão entre a distância da extremidade ao início da abertura e o diâmetro da abertura,  $s_e/d_o$ , igual a 0,5 e por último o número de aberturas. Nas tabelas 4.3, 4.4 e 4.5 são apresentados os modelos originados dos perfis W200x26,6, W410x60 e W610x125, respectivamente.

Tabela 4.3 – Tabela dos modelos de alma celular gerados do perfil W200x26,6

		$d$ (cm)	$h_0$ (cm)	$d_0$ (cm)	$s$ (cm)	$s_e$ (cm)	nº de aberturas
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_1	PADRÃO	33,120	32,280	21,528	27,986	10,764	1 ou 2
C200x26.6_1.25_0.65_1.3_0.5_1	1	25,875	25,035	16,819	21,864	8,409	1
C200x26.6_1.30_0.65_1.3_0.5_1	2	26,910	26,070	17,492	22,739	8,746	1
C200x26.6_1.35_0.65_1.3_0.5_1	3	27,945	27,105	18,164	23,614	9,082	1
C200x26.6_1.40_0.65_1.3_0.5_1	4	28,980	28,140	18,837	24,488	9,419	1
C200x26.6_1.45_0.65_1.3_0.5_1	5	30,015	29,175	19,510	25,363	9,755	1
C200x26.6_1.50_0.65_1.3_0.5_1	6	31,050	30,210	20,183	26,237	10,091	1
C200x26.6_1.55_0.65_1.3_0.5_1	7	32,085	31,245	20,855	27,112	10,428	1
C200x26.6_1.65_0.65_1.3_0.5_1	8	34,155	33,315	22,201	28,861	11,100	1
C200x26.6_1.70_0.65_1.3_0.5_1	9	35,190	34,350	22,874	29,736	11,437	1
C200x26.6_1.75_0.65_1.3_0.5_1	10	36,225	35,385	23,546	30,610	11,773	1
C200x26.6_1.60_0.57_1.3_0.5_1	11	33,120	32,280	18,878	24,542	9,439	1
C200x26.6_1.60_0.70_1.3_0.5_1	12	33,120	32,280	23,184	30,139	11,592	1
C200x26.6_1.60_0.75_1.3_0.5_1	13	33,120	32,280	24,840	32,292	12,420	1
C200x26.6_1.60_0.80_1.3_0.5_1	14	33,120	32,280	26,496	34,445	13,248	1
C200x26.6_1.60_0.65_1.08_0.5_2	15	33,120	32,280	21,528	23,250	10,764	2
C200x26.6_1.60_0.65_1.15_0.5_2	16	33,120	32,280	21,528	24,757	10,764	2
C200x26.6_1.60_0.65_1.20_0.5_2	17	33,120	32,280	21,528	25,834	10,764	2
C200x26.6_1.60_0.65_1.25_0.5_2	18	33,120	32,280	21,528	26,910	10,764	2
C200x26.6_1.60_0.65_1.35_0.5_2	19	33,120	32,280	21,528	29,063	10,764	2
C200x26.6_1.60_0.65_1.40_0.5_2	20	33,120	32,280	21,528	30,139	10,764	2
C200x26.6_1.60_0.65_1.45_0.5_2	21	33,120	32,280	21,528	31,216	10,764	2
C200x26.6_1.60_0.65_1.50_0.5_2	22	33,120	32,280	21,528	32,292	10,764	2
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.6_1	23	33,120	32,280	21,528	27,986	12,917	1
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.7_1	24	33,120	32,280	21,528	27,986	15,070	1
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.8_1	25	33,120	32,280	21,528	27,986	17,222	1
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.9_1	26	33,120	32,280	21,528	27,986	19,375	1
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_1_1	27	33,120	32,280	21,528	27,986	21,528	1
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_n	28	33,120	32,280	21,528	27,986	10,764	2 a 30

Tabela 4.4 – Tabela dos modelos de alma celular gerados do perfil W410x60

		$d$ (cm)	$h_0$ (cm)	$d_0$ (cm)	$s$ (cm)	$s_e$ (cm)	nº de aberturas
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_1	PADRÃO	65,120	63,840	42,328	55,026	21,164	1 ou 2
C410x60.0_1.25_0.65_1.3_0.5_1	1	50,875	49,595	33,069	42,989	16,534	1
C410x60.0_1.30_0.65_1.3_0.5_1	2	52,910	51,630	34,392	44,709	17,196	1
C410x60.0_1.35_0.65_1.3_0.5_1	3	54,945	53,665	35,714	46,429	17,857	1
C410x60.0_1.40_0.65_1.3_0.5_1	4	56,980	55,700	37,037	48,148	18,519	1
C410x60.0_1.45_0.65_1.3_0.5_1	5	59,015	57,735	38,360	49,868	19,180	1
C410x60.0_1.50_0.65_1.3_0.5_1	6	61,050	59,770	39,683	51,587	19,841	1
C410x60.0_1.55_0.65_1.3_0.5_1	7	63,085	61,805	41,005	53,307	20,503	1
C410x60.0_1.65_0.65_1.3_0.5_1	8	67,155	65,875	43,651	56,746	21,825	1
C410x60.0_1.70_0.65_1.3_0.5_1	9	69,190	67,910	44,974	58,466	22,487	1
C410x60.0_1.75_0.65_1.3_0.5_1	10	71,225	69,945	46,296	60,185	23,148	1
C410x60.0_1.60_0.57_1.3_0.5_1	11	65,120	63,840	37,118	48,254	18,559	1
C410x60.0_1.60_0.70_1.3_0.5_1	12	65,120	63,840	45,584	59,259	22,792	1
C410x60.0_1.60_0.75_1.3_0.5_1	13	65,120	63,840	48,840	63,492	24,420	1
C410x60.0_1.60_0.80_1.3_0.5_1	14	65,120	63,840	52,096	67,725	26,048	1
C410x60.0_1.60_0.65_1.08_0.5_2	15	65,120	63,840	42,328	45,714	21,164	2
C410x60.0_1.60_0.65_1.15_0.5_2	16	65,120	63,840	42,328	48,677	21,164	2
C410x60.0_1.60_0.65_1.20_0.5_2	17	65,120	63,840	42,328	50,794	21,164	2
C410x60.0_1.60_0.65_1.25_0.5_2	18	65,120	63,840	42,328	52,910	21,164	2
C410x60.0_1.60_0.65_1.35_0.5_2	19	65,120	63,840	42,328	57,143	21,164	2
C410x60.0_1.60_0.65_1.40_0.5_2	20	65,120	63,840	42,328	59,259	21,164	2
C410x60.0_1.60_0.65_1.45_0.5_2	21	65,120	63,840	42,328	61,376	21,164	2
C410x60.0_1.60_0.65_1.50_0.5_2	22	65,120	63,840	42,328	63,492	21,164	2
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.6_1	23	65,120	63,840	42,328	55,026	25,397	1
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.7_1	24	65,120	63,840	42,328	55,026	29,630	1
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.8_1	25	65,120	63,840	42,328	55,026	33,862	1
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.9_1	26	65,120	63,840	42,328	55,026	38,095	1
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_1_1	27	65,120	63,840	42,328	55,026	42,328	1
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_n	28	65,120	63,840	42,328	55,026	21,164	2 a 30

Tabela 4.5 – Tabela dos modelos de alma celular gerados do perfil W610x125

		$d$ (cm)	$h_o$ (cm)	$d_o$ (cm)	$s$ (cm)	$s_e$ (cm)	nº de aberturas
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_1	PADRÃO	97,920	95,960	63,648	82,742	31,824	1 ou 2
C610x125.0_1.25_0.65_1.3_0.5_1	1	76,500	74,540	49,725	64,643	24,863	1
C610x125.0_1.30_0.65_1.3_0.5_1	2	79,560	77,600	51,714	67,228	25,857	1
C610x125.0_1.35_0.65_1.3_0.5_1	3	82,620	80,660	53,703	69,814	26,852	1
C610x125.0_1.40_0.65_1.3_0.5_1	4	85,680	83,720	55,692	72,400	27,846	1
C610x125.0_1.45_0.65_1.3_0.5_1	5	88,740	86,780	57,681	74,985	28,841	1
C610x125.0_1.50_0.65_1.3_0.5_1	6	91,800	89,840	59,670	77,571	29,835	1
C610x125.0_1.55_0.65_1.3_0.5_1	7	94,860	92,900	61,659	80,157	30,830	1
C610x125.0_1.65_0.65_1.3_0.5_1	8	100,980	99,020	65,637	85,328	32,819	1
C610x125.0_1.70_0.65_1.3_0.5_1	9	104,040	102,080	67,626	87,914	33,813	1
C610x125.0_1.75_0.65_1.3_0.5_1	10	107,100	105,140	69,615	90,500	34,808	1
C610x125.0_1.60_0.57_1.3_0.5_1	11	97,920	95,960	55,814	72,559	27,907	1
C610x125.0_1.60_0.70_1.3_0.5_1	12	97,920	95,960	68,544	89,107	34,272	1
C610x125.0_1.60_0.75_1.3_0.5_1	13	97,920	95,960	73,440	95,472	36,720	1
C610x125.0_1.60_0.80_1.3_0.5_1	14	97,920	95,960	78,336	101,837	39,168	1
C610x125.0_1.60_0.65_1.08_0.5_2	15	97,920	95,960	63,648	68,740	31,824	2
C610x125.0_1.60_0.65_1.15_0.5_2	16	97,920	95,960	63,648	73,195	31,824	2
C610x125.0_1.60_0.65_1.20_0.5_2	17	97,920	95,960	63,648	76,378	31,824	2
C610x125.0_1.60_0.65_1.25_0.5_2	18	97,920	95,960	63,648	79,560	31,824	2
C610x125.0_1.60_0.65_1.35_0.5_2	19	97,920	95,960	63,648	85,925	31,824	2
C610x125.0_1.60_0.65_1.40_0.5_2	20	97,920	95,960	63,648	89,107	31,824	2
C610x125.0_1.60_0.65_1.45_0.5_2	21	97,920	95,960	63,648	92,290	31,824	2
C610x125.0_1.60_0.65_1.50_0.5_2	22	97,920	95,960	63,648	95,472	31,824	2
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.6_1	23	97,920	95,960	63,648	82,742	38,189	1
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.7_1	24	97,920	95,960	63,648	82,742	44,554	1
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.8_1	25	97,920	95,960	63,648	82,742	50,918	1
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.9_1	26	97,920	95,960	63,648	82,742	57,283	1
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_1_1	27	97,920	95,960	63,648	82,742	63,648	1
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_n	28	97,920	95,960	63,648	82,742	31,824	2 a 30

### 4.3 Influência dos parâmetros no valor da rigidez rotacional da alma

Nesse item, a equação analítica deduzida no capítulo 3 foi utilizada para calcular o valor da rigidez rotacional da alma dos modelos da parametrização e, assim, proceder-se a comparação com os resultados obtidos pelo procedimento numérico.

#### 4.3.1 Altura final do perfil celular ( $d$ )

Os modelos para análise da influência da altura da alma na rigidez rotacional são os primeiros onze modelos das tabelas 4.3 a 4.5, que possuem todos os parâmetros invariáveis exceto a altura  $d$ , cujo intervalo de variação foi de  $1,25d_g$  a  $1,75d_g$ , onde  $d_g$  é a altura do perfil laminado original. A tabela 4.6 apresenta o valor da altura da alma de cada modelo, o comprimento dos modelos ( $L$ ), os deslocamentos da alma analítico e numérico,  $\delta_{2,c,A}$  e  $\delta_{2,c,N}$ , as rigidezes rotacionais analítica e numérica,

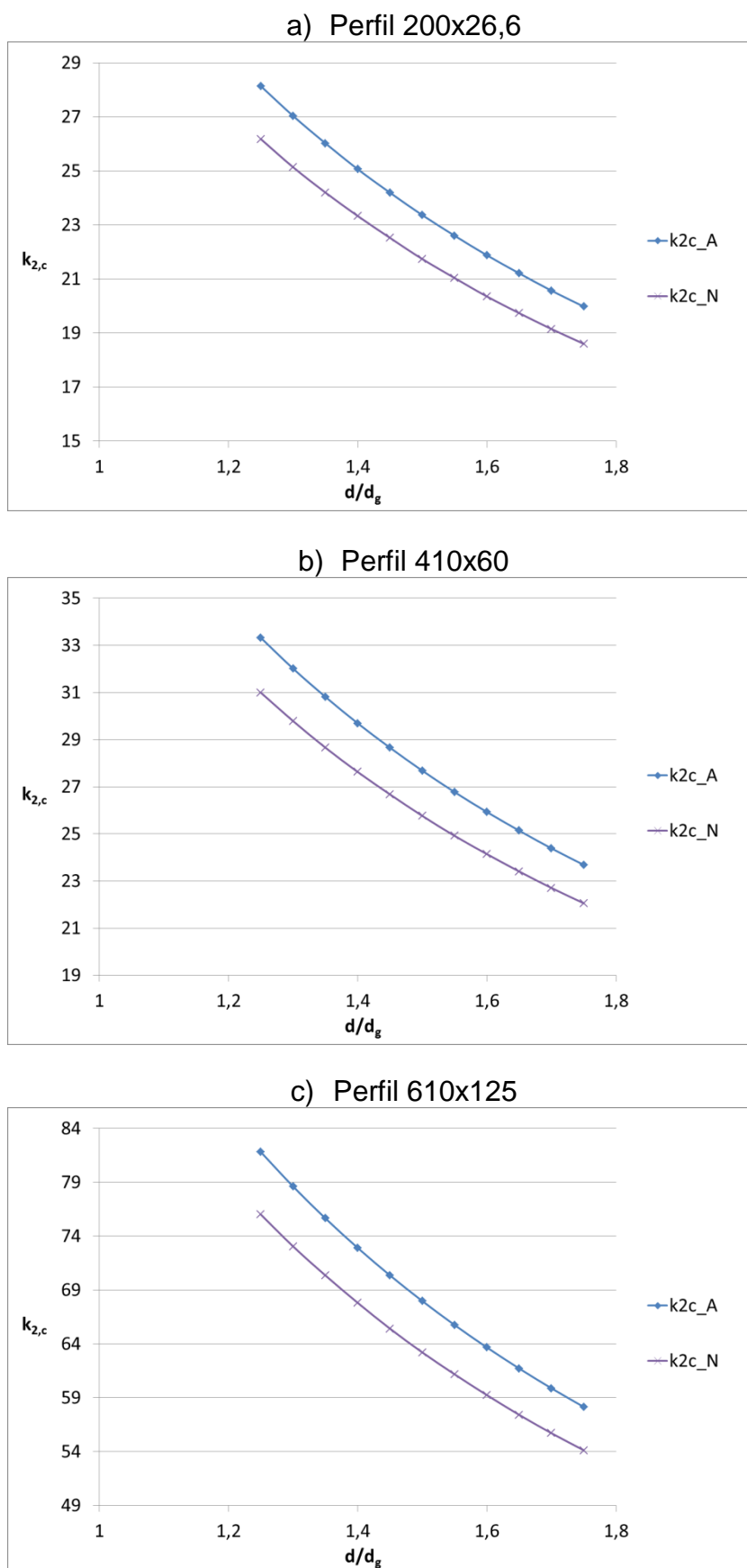
$k_{2c\_A}$  e  $k_{2c\_N}$ , e o desvio relativo entre elas,  $k_{2c\_A}/k_{2c\_N}$ . A figura 4.1 mostra em forma de gráficos o comportamento da rigidez rotacional da alma celular numérica e analítica em relação à variação do parâmetro altura do perfil.

Tabela 4.6 – Rigidezes analítica e numérica para diferentes perfis e alturas de alma

Simbologia	$d$ (m)	$L$ (m)	$\delta_{2c\_A}$ (m)	$\delta_{2c\_N}$ (m)	$k_{2c\_A}$ (kN/rad)	$k_{2c\_N}$ (kN/rad)	Desvio ( $K_{2c\_A}/K_{2c\_N}$ )
C200x26.6_1.25_0.65_1.3_0.5_1	0,259	0,336	0,066	0,071	28,137	26,178	1,075
C200x26.6_1.30_0.65_1.3_0.5_1	0,269	0,350	0,072	0,077	27,033	25,135	1,075
C200x26.6_1.35_0.65_1.3_0.5_1	0,279	0,363	0,078	0,084	26,022	24,198	1,075
C200x26.6_1.40_0.65_1.3_0.5_1	0,290	0,377	0,084	0,090	25,063	23,331	1,074
C200x26.6_1.45_0.65_1.3_0.5_1	0,300	0,390	0,090	0,097	24,191	22,520	1,074
C200x26.6_1.50_0.65_1.3_0.5_1	0,311	0,404	0,097	0,104	23,363	21,737	1,075
C200x26.6_1.55_0.65_1.3_0.5_1	0,321	0,417	0,104	0,111	22,601	21,036	1,074
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_1	0,331	0,431	0,111	0,119	21,877	20,352	1,075
C200x26.6_1.65_0.65_1.3_0.5_1	0,342	0,444	0,118	0,127	21,209	19,736	1,075
C200x26.6_1.70_0.65_1.3_0.5_1	0,352	0,458	0,125	0,135	20,566	19,147	1,074
C200x26.6_1.75_0.65_1.3_0.5_1	0,362	0,471	0,133	0,143	19,977	18,599	1,074
C410x60.0_1.25_0.65_1.3_0.5_1	0,509	0,661	0,112	0,120	33,323	30,997	1,075
C410x60.0_1.30_0.65_1.3_0.5_1	0,529	0,688	0,121	0,130	32,016	29,790	1,075
C410x60.0_1.35_0.65_1.3_0.5_1	0,549	0,714	0,131	0,141	30,815	28,661	1,075
C410x60.0_1.40_0.65_1.3_0.5_1	0,570	0,741	0,141	0,152	29,694	27,629	1,075
C410x60.0_1.45_0.65_1.3_0.5_1	0,590	0,767	0,152	0,163	28,658	26,676	1,074
C410x60.0_1.50_0.65_1.3_0.5_1	0,611	0,794	0,163	0,175	27,683	25,764	1,074
C410x60.0_1.55_0.65_1.3_0.5_1	0,631	0,820	0,174	0,187	26,775	24,917	1,075
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_1	0,651	0,847	0,186	0,199	25,930	24,143	1,074
C410x60.0_1.65_0.65_1.3_0.5_1	0,672	0,873	0,198	0,212	25,139	23,407	1,074
C410x60.0_1.70_0.65_1.3_0.5_1	0,692	0,900	0,210	0,226	24,385	22,706	1,074
C410x60.0_1.75_0.65_1.3_0.5_1	0,712	0,926	0,223	0,240	23,685	22,056	1,074
C610x125.0_1.25_0.65_1.3_0.5_1	0,765	0,995	0,068	0,074	81,814	76,013	1,076
C610x125.0_1.30_0.65_1.3_0.5_1	0,796	1,034	0,074	0,080	78,612	73,050	1,076
C610x125.0_1.35_0.65_1.3_0.5_1	0,826	1,074	0,080	0,086	75,652	70,351	1,075
C610x125.0_1.40_0.65_1.3_0.5_1	0,857	1,114	0,086	0,093	72,912	67,811	1,075
C610x125.0_1.45_0.65_1.3_0.5_1	0,887	1,154	0,093	0,100	70,358	65,411	1,076
C610x125.0_1.50_0.65_1.3_0.5_1	0,918	1,193	0,099	0,107	67,977	63,208	1,075
C610x125.0_1.55_0.65_1.3_0.5_1	0,949	1,233	0,106	0,114	65,752	61,175	1,075
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_1	0,979	1,273	0,114	0,122	63,668	59,243	1,075
C610x125.0_1.65_0.65_1.3_0.5_1	1,010	1,313	0,121	0,130	61,717	57,412	1,075
C610x125.0_1.70_0.65_1.3_0.5_1	1,040	1,353	0,129	0,138	59,877	55,709	1,075
C610x125.0_1.75_0.65_1.3_0.5_1	1,071	1,392	0,137	0,147	58,144	54,122	1,074



Figura 4.1 – Variação da rigidez rotacional da alma celular com a altura do perfil



Pode-se notar pela Tabela 4.6, que um aumento de 40% na altura do perfil celular ( $1,25 d_g$  a  $1,75 d_g$ ) resultou na mesma redução, de aproximadamente 29%, nas rigidezes da alma, tanto numérica quanto analítica e essa redução se manteve constante, em todos os modelos analisados, originados dos perfis W200x26,6, W410x60 e W610x125.

Foi observada uma concordância no comportamento da curva da equação analítica ao compara-la com a da análise numérica. Não houve desvio relativo superior a 7,6% e, além disso, o desvio relativo se manteve praticamente constante em todos os modelos analisados. A rigidez rotacional obtida pela equação analítica (3.12) foi sempre maior que a rigidez numérica obtida pelo ANSYS 15.0, isso mostra um caráter não conservador da equação analítica, assumindo a análise numérica como referência devido ao seu caráter mais realístico, que trata do comportamento real de placa da alma.

#### **4.3.2 Diâmetro da abertura do perfil celular ( $d_0$ )**

O parâmetro analisado neste item foi o diâmetro da abertura circular na alma do perfil ( $d_0$ ). Os limites de variação foram de  $0,57d$  a  $0,8d$ , onde  $d$  é a altura final do perfil celular. A tabela 4.7 apresenta o valor do diâmetro da abertura de cada modelo, o comprimento dos modelos ( $L$ ), os deslocamentos da alma analítico e numérico,  $\delta_{2,c_A}$  e  $\delta_{2,c_N}$ , as rigidezes rotacionais analítica e numérica,  $k_{2c_A}$  e  $k_{2c_N}$ , e o desvio relativo entre elas,  $k_{2c_A}/k_{2c_N}$ . A figura 4.2 mostra em forma de gráficos o comportamento da rigidez rotacional da alma celular numérica e analítica em relação à variação do parâmetro diâmetro da abertura.

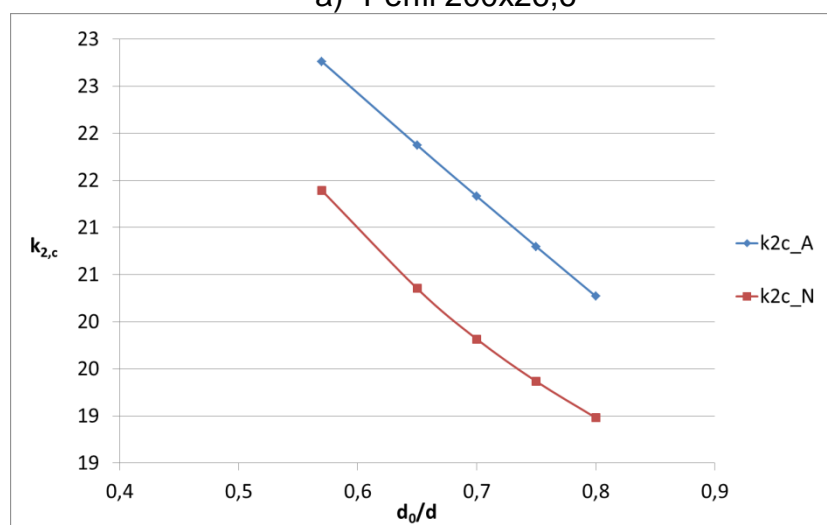
Tabela 4.7 – Rigidezes analítica e numérica para diferentes diâmetros da abertura

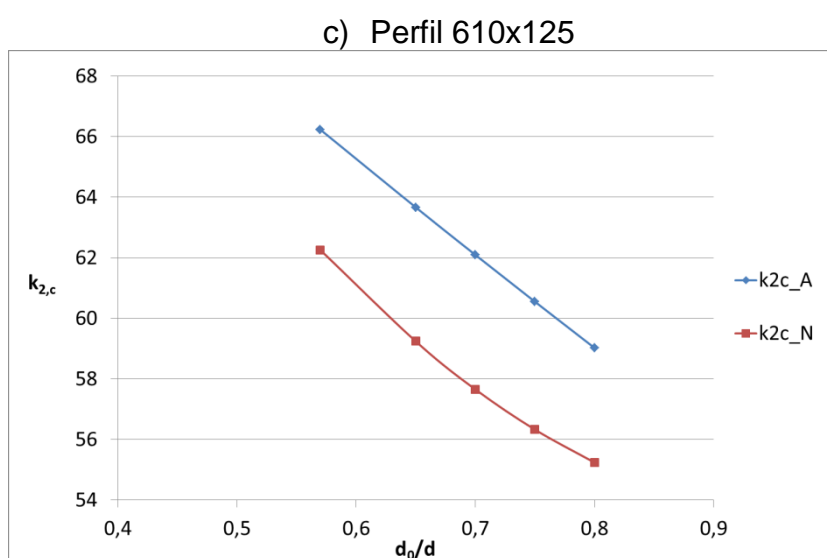
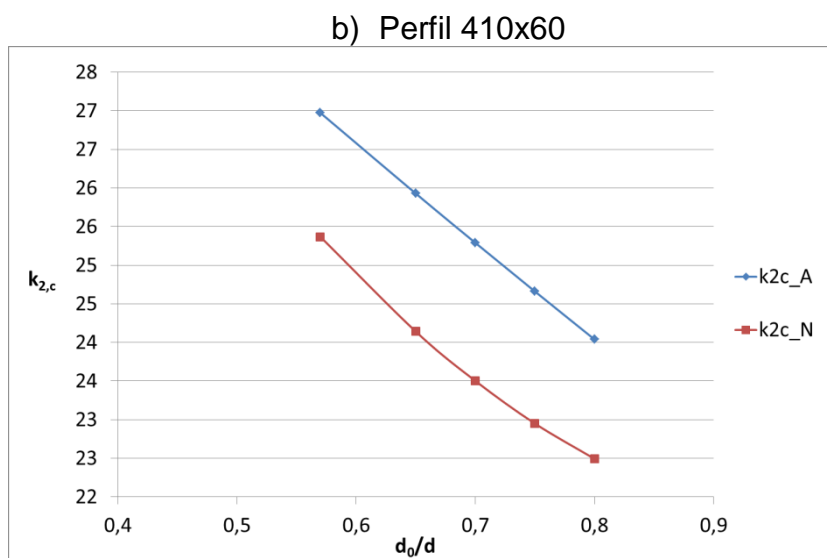
Simbologia	$d_0$ (m)	$L$ (m)	$\delta_{2,c_A}$ (m)	$\delta_{2,c_N}$ (m)	$k_{2c_A}$ (kN/rad)	$k_{2c_N}$ (kN/rad)	Desvio ( $K_{2c_A}/K_{2c_N}$ )
C200x26.6_1.60_0.57_1.3_0.5_1	0,189	0,378	0,121	0,129	22,760	21,392	1,064
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_1	0,215	0,431	0,111	0,119	21,874	20,352	1,075
C200x26.6_1.60_0.70_1.3_0.5_1	0,232	0,464	0,105	0,113	21,332	19,816	1,077
C200x26.6_1.60_0.75_1.3_0.5_1	0,248	0,497	0,101	0,108	20,798	19,367	1,074
C200x26.6_1.60_0.80_1.3_0.5_1	0,265	0,530	0,097	0,104	20,271	18,981	1,068
C410x60.0_1.60_0.57_1.3_0.5_1	0,371	0,742	0,204	0,216	26,973	25,368	1,063
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_1	0,423	0,847	0,186	0,199	25,930	24,143	1,074
C410x60.0_1.60_0.70_1.3_0.5_1	0,456	0,912	0,177	0,190	25,291	23,503	1,076
C410x60.0_1.60_0.75_1.3_0.5_1	0,488	0,977	0,169	0,182	24,661	22,950	1,075
C410x60.0_1.60_0.80_1.3_0.5_1	0,521	1,042	0,163	0,174	24,040	22,494	1,069
C610x125.0_1.60_0.57_1.3_0.5_1	0,558	1,116	0,125	0,133	66,233	62,256	1,064
C610x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_1	0,636	1,273	0,114	0,122	63,668	59,243	1,075
C610x125.0_1.60_0.70_1.3_0.5_1	0,685	1,371	0,108	0,117	62,099	57,657	1,077
C610x125.0_1.60_0.75_1.3_0.5_1	0,734	1,469	0,104	0,111	60,552	56,328	1,075
C610x125.0_1.60_0.80_1.3_0.5_1	0,783	1,567	0,100	0,106	59,026	55,240	1,069

Pode-se notar pela Tabela 4.7, que um aumento de aproximadamente 40% no diâmetro da abertura do perfil celular (0,57  $d$  a 0,80  $d$ ) resultou na mesma redução, de aproximadamente 11%, nas rigidezes da alma, tanto numérica quanto analítica e essa redução se manteve constante, em todos os modelos analisados, originados dos perfis W200x26,6, W410x60 e W610x125.

Figura 4.2 – Variação da rigidez rotacional da alma com o diâmetro da abertura

## a) Perfil 200x26,6





O erro relativo máximo foi de 7,7%. A rigidez rotacional obtida pela equação analítica (3.12) é maior novamente do que a rigidez numérica obtida pelo ANSYS 15.0, evidenciando o caráter ligeiramente não conservador da equação.

#### 4.3.3 Espaçamento entre a extremidade do perfil e a abertura ( $s_e$ )

Neste item, o parâmetro analisado foi a distância entre a extremidade do perfil e o início da abertura circular ( $s_e$ ). Os limites de variação foram de  $0,5d_0$  a  $d_0$ , onde  $d_0$  é o diâmetro da abertura circular na alma do perfil. A tabela 4.8 apresenta o valor da distância  $s_e$ , o comprimento dos modelos ( $L$ ), os deslocamentos da alma analítico e numérico,  $\delta_{2,c\_A}$  e  $\delta_{2,c\_N}$ , as rigidezes rotacionais analítica e numérica,  $k_{2c\_A}$  e  $k_{2c\_N}$ , e

o desvio relativo entre elas,  $k_{2c\_A}/k_{2c\_N}$ . A figura 4.3 mostra em forma de gráficos o comportamento da rigidez rotacional da alma celular numérica e analítica em relação à variação da distância  $s_e$ .

A figura 4.3 mostra na forma de gráficos, o comportamento da rigidez rotacional da alma celular numérica e analítica em relação à variação do parâmetro  $s_e$ .

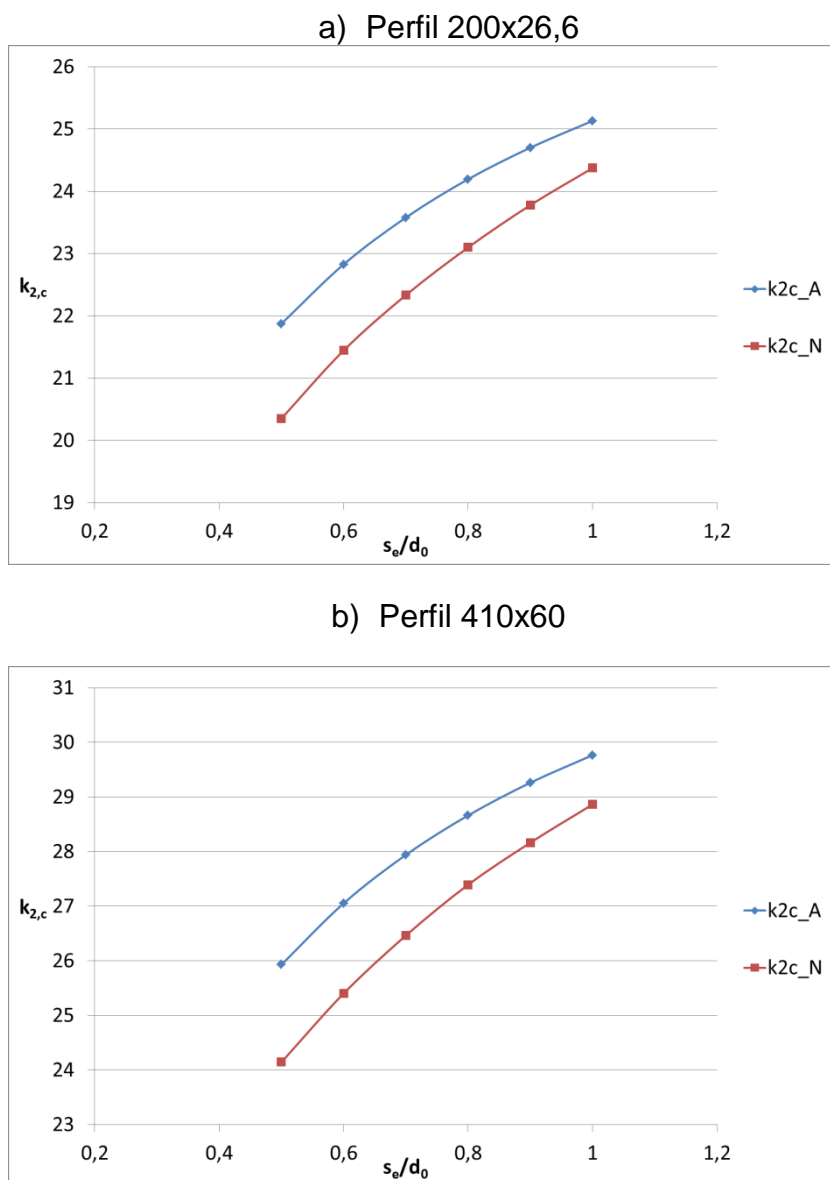
Tabela 4.8 – Rigidezes analítica e numérica para diferentes espaçamentos entre a distância da extremidade ao início do diâmetro da abertura

Simbologia	$s_e$ (m)	$L$ (m)	$\delta_{2c\_A}$ (m)	$\delta_{2c\_N}$ (m)	$k_{2c\_A}$ (kN/rad)	$k_{2c\_N}$ (kN/rad)	Desvio ( $K_{2c\_A}/K_{2c\_N}$ )
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_1	0,108	0,431	0,111	0,119	21,874	20,352	1,075
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.6_1	0,129	0,474	0,096	0,103	22,827	21,444	1,064
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.7_1	0,151	0,517	0,086	0,090	23,578	22,333	1,056
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.8_1	0,172	0,560	0,077	0,081	24,194	23,098	1,047
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.9_1	0,194	0,603	0,070	0,073	24,700	23,777	1,039
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_1_1	0,215	0,646	0,064	0,066	25,131	24,373	1,031
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_1	0,212	0,847	0,186	0,199	25,930	24,143	1,074
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.6_1	0,254	0,931	0,162	0,172	27,052	25,401	1,065
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.7_1	0,296	1,016	0,144	0,152	27,940	26,463	1,056
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.8_1	0,339	1,101	0,129	0,135	28,662	27,392	1,046
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.9_1	0,381	1,185	0,118	0,122	29,261	28,163	1,039
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_1_1	0,423	1,270	0,108	0,111	29,766	28,863	1,031
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_1	0,318	1,273	0,114	0,122	63,668	59,243	1,075
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.6_1	0,382	1,400	0,099	0,106	66,423	62,331	1,066
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.7_1	0,445	1,528	0,088	0,093	68,605	64,957	1,056
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.8_1	0,509	1,655	0,079	0,083	70,378	67,205	1,047
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.9_1	0,573	1,782	0,072	0,075	71,850	69,172	1,039
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_1_1	0,636	1,909	0,066	0,068	73,091	70,817	1,032

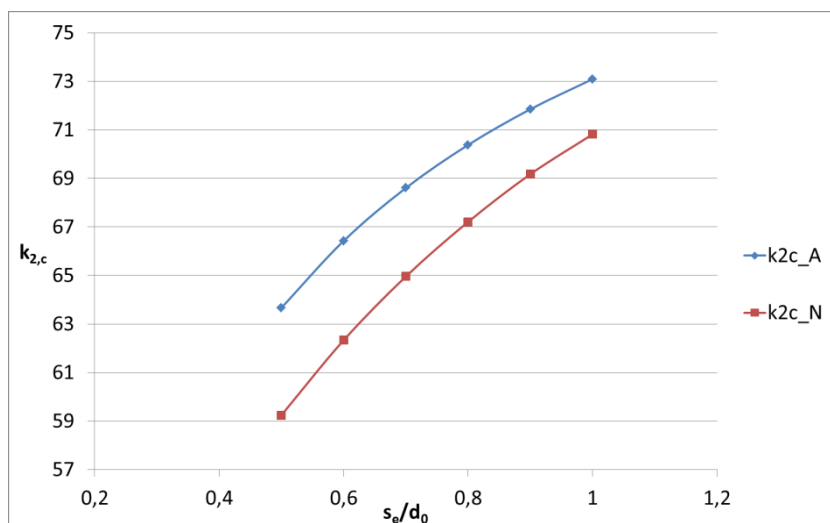
Pode-se notar pela Tabela 4.8, que um aumento de 50% na distância  $s_e$  ( $0,5 d_0$  a  $d_0$ ) resultou em um aumento, de aproximadamente 15%, na rigidez da alma analítica e de aproximadamente 20% na rigidez da alma numérica. Os percentuais diferentes se justificam uma vez que há melhor distribuição de força no modelo numérico a medida que aumenta-se a área rígida. Já para o modelo analítico, a distribuição de força é a mesma e só é relacionada ao comprimento da placa. O erro relativo máximo foi de 7,5%, mostrando a adequação da equação com a variação desse parâmetro, entretanto, diferentes dos parâmetros já estudados, a faixa de variação do erro foi maior, de 3,1 % a 7,5 % e, quando a distância  $s_e$  aumenta, o erro diminui, ou seja,

quando existe uma maior razão entre área cheia e área da abertura na seção transversal.

Figura 4.3 – Variação da rigidez rotacional da alma celular com a distância da extremidade ao início do diâmetro da abertura



c) Perfil 610x125



#### 4.3.4 Espaçamento entre aberturas (s)

Neste item, o parâmetro analisado foi o espaçamento entre aberturas,  $s$ . Diferentemente dos casos anteriormente estudados, esses modelos apresentaram 2 (duas) aberturas, para tornar possível tal análise (Figuras 4.4 e 4.5).

Figura 4.4 – Alma celular com duas aberturas obtida do perfil W200x26.6

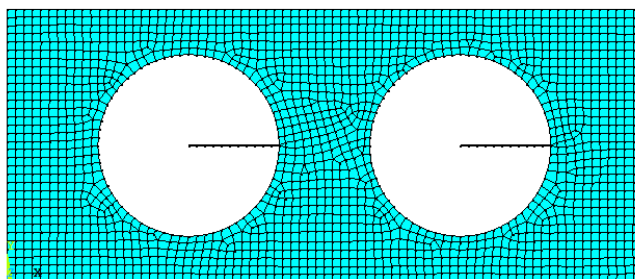
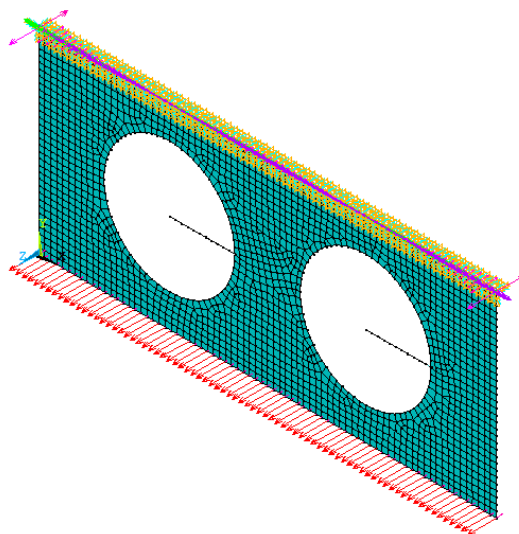


Figura 4.5 — Alma celular com duas aberturas e condições de contorno



Os limites de variação foram de  $1,08d_0$  a  $1,5d_0$ , onde  $d_0$  é o diâmetro da abertura circular na alma do perfil. A Tabela 4.9 apresenta o valor do espaçamento entre aberturas  $s$ , o comprimento dos modelos ( $L$ ), os deslocamentos da alma analítico e numérico,  $\delta_{2,c\_A}$  e  $\delta_{2,c\_N}$ , as rigidezes rotacionais analítica e numérica,  $k_{2c\_A}$  e  $k_{2c\_N}$ , e o desvio relativo entre elas,  $k_{2c\_A}/k_{2c\_N}$ . A figura 4.6 mostra em forma de gráficos o comportamento da rigidez rotacional da alma celular numérica e analítica em relação à variação do espaçamento entre aberturas.

Pode-se notar pela Tabela 4.9 que um aumento de aproximadamente 39% no espaçamento entre aberturas ( $1,08 d_0$  a  $1,5 d_0$ ) resultou em um aumento, de aproximadamente 11%, na rigidez da alma analítica e de aproximadamente 17% na rigidez da alma numérica.

Observou-se que o máximo erro relativo foi de aproximadamente 14,8% (rigidez analítica maior que a numérica). Isso se deve ao fato da equação trabalhar com aberturas circulares centralizadas na placa, enquanto a modelagem do Ansys respeita as distâncias das extremidades às aberturas estipuladas para o modelo padrão. Para exemplificar, na Figura 4.7, têm-se desenhos da alma utilizada no cálculo analítico de rigidez rotacional e desenhos da alma modelada no Ansys para o cálculo da rigidez numérica. A Figura 4.7 (a) corresponde ao modelo C200x26,6\_1,6\_0,65\_1,08\_0,5\_2 de menor espaçamento entre aberturas da série originada do perfil W200x26,6 e a Figura 4.7 (b) corresponde ao modelo C200x26,6\_1,6\_0,65\_1,5\_0,5\_2 de maior espaçamento entre aberturas desta mes-



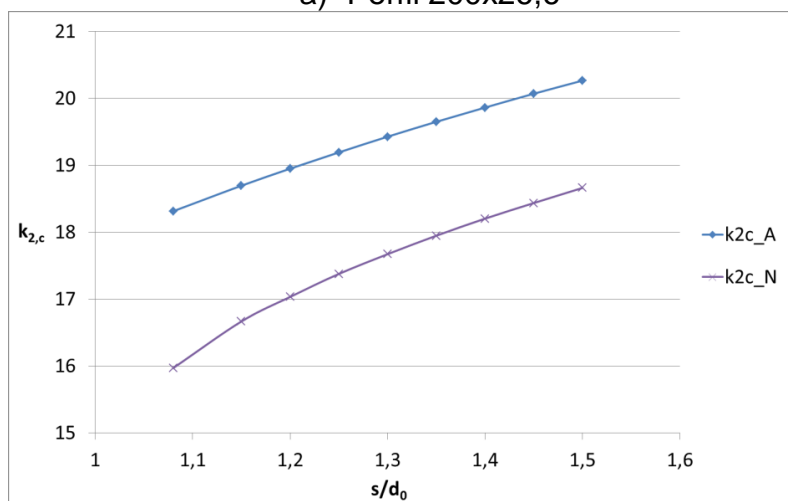
ma série. Percebe-se claramente que o modelo da Figura 4.7 (a) conduz a um maior erro devido à consideração de abertura centralizada.

Tabela 4.9 – Rigidezes analítica e numérica para diferentes espaçamentos entre aberturas

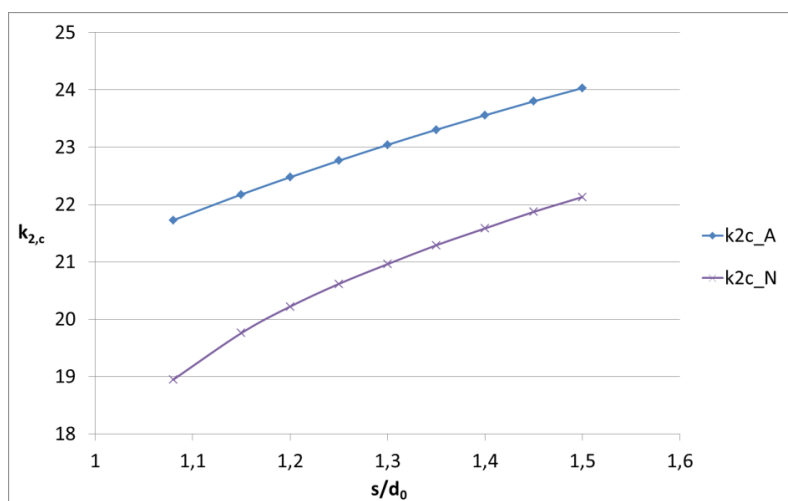
Simbologia	$s$ (m)	$L$ (m)	$\delta_{2,c_A}$ (m)	$\delta_{2,c_N}$ (m)	$k_{2c_A}$ (kN/rad)	$k_{2c_N}$ (kN/rad)	Desvio ( $K_{2c_A}/K_{2c_N}$ )
C200x26.6_1.60_0.65_1.08_0.5_2	0,233	0,663	0,086	0,098	18,314	15,970	1,147
C200x26.6_1.60_0.65_1.15_0.5_2	0,248	0,678	0,082	0,092	18,695	16,666	1,122
C200x26.6_1.60_0.65_1.20_0.5_2	0,258	0,689	0,080	0,089	18,950	17,033	1,113
C200x26.6_1.60_0.65_1.25_0.5_2	0,269	0,700	0,078	0,086	19,193	17,377	1,105
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_2	0,280	0,710	0,075	0,083	19,428	17,672	1,099
C200x26.6_1.60_0.65_1.35_0.5_2	0,291	0,721	0,074	0,081	19,651	17,948	1,095
C200x26.6_1.60_0.65_1.40_0.5_2	0,301	0,732	0,072	0,078	19,863	18,203	1,091
C200x26.6_1.60_0.65_1.45_0.5_2	0,312	0,743	0,070	0,076	20,070	18,436	1,089
C200x26.6_1.60_0.65_1.50_0.5_2	0,323	0,754	0,068	0,074	20,266	18,662	1,086
C410x60.0_1.60_0.65_1.08_0.5_2	0,457	1,304	0,144	0,165	21,727	18,946	1,147
C410x60.0_1.60_0.65_1.15_0.5_2	0,487	1,333	0,138	0,155	22,176	19,759	1,122
C410x60.0_1.60_0.65_1.20_0.5_2	0,508	1,355	0,134	0,149	22,477	20,221	1,112
C410x60.0_1.60_0.65_1.25_0.5_2	0,529	1,376	0,130	0,144	22,765	20,616	1,104
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_2	0,550	1,397	0,127	0,139	23,041	20,961	1,099
C410x60.0_1.60_0.65_1.35_0.5_2	0,571	1,418	0,123	0,135	23,305	21,290	1,095
C410x60.0_1.60_0.65_1.40_0.5_2	0,593	1,439	0,120	0,131	23,557	21,584	1,091
C410x60.0_1.60_0.65_1.45_0.5_2	0,614	1,460	0,117	0,128	23,800	21,872	1,088
C410x60.0_1.60_0.65_1.50_0.5_2	0,635	1,482	0,114	0,124	24,032	22,132	1,086
C610x125.0_1.60_0.65_1.08_0.5_2	0,687	1,960	0,088	0,101	53,345	46,461	1,148
C610x125.0_1.60_0.65_1.15_0.5_2	0,732	2,005	0,084	0,095	54,447	48,500	1,123
C610x125.0_1.60_0.65_1.20_0.5_2	0,764	2,037	0,082	0,091	55,189	49,629	1,112
C610x125.0_1.60_0.65_1.25_0.5_2	0,796	2,069	0,080	0,088	55,895	50,585	1,105
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_2	0,827	2,100	0,077	0,085	56,572	51,456	1,099
C610x125.0_1.60_0.65_1.35_0.5_2	0,859	2,132	0,075	0,083	57,221	52,221	1,096
C610x125.0_1.60_0.65_1.40_0.5_2	0,891	2,164	0,074	0,080	57,842	52,926	1,093
C610x125.0_1.60_0.65_1.45_0.5_2	0,923	2,196	0,072	0,078	58,434	53,624	1,090
C610x125.0_1.60_0.65_1.50_0.5_2	0,955	2,228	0,070	0,076	59,006	54,317	1,086

Figura 4.6 – Variação da rigidez rotacional da alma celular para diferentes espaçamentos entre aberturas

a) Perfil 200x26,6



b) Perfil 410x60



c) Perfil 610x125

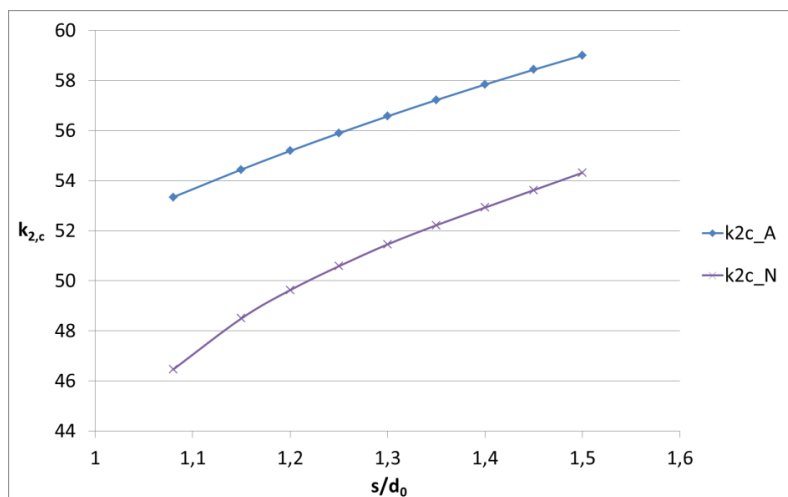
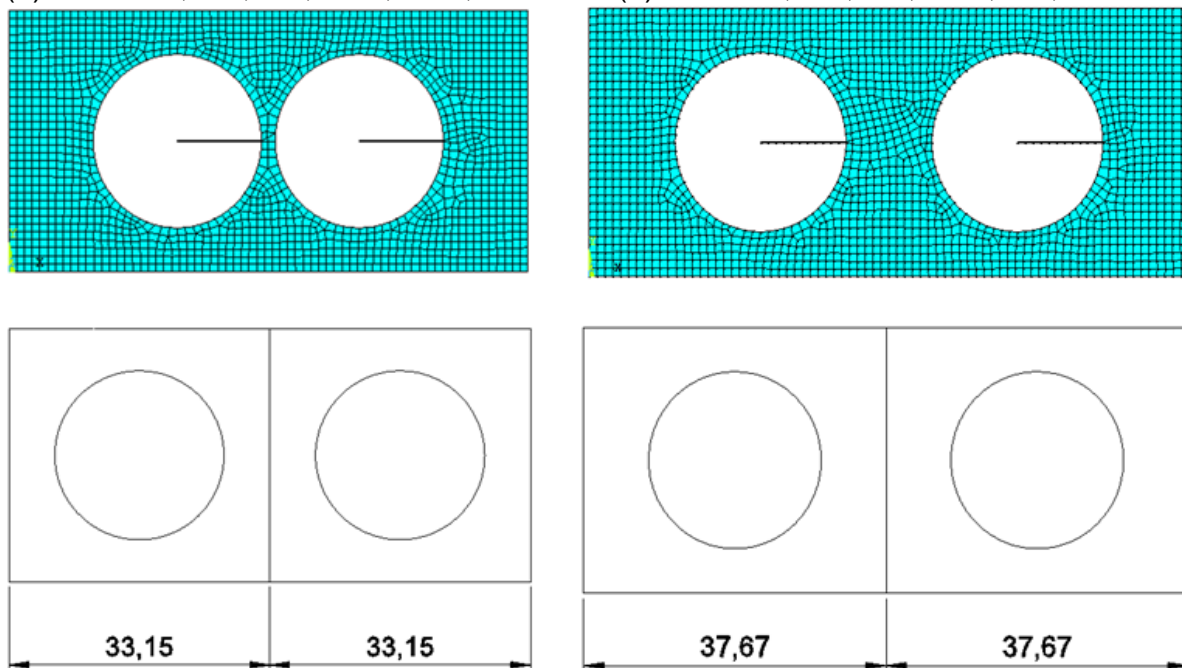


Figura 4.7 Comparação da alma modelada no Ansys com a da equação- 2 aberturas

(a) C200x26,6\_1,6\_0,65\_1,08\_0,5\_2

(b) C200x26,6\_1,6\_0,65\_1,5\_0,5\_2



Como na prática o número de aberturas em vigas celulares é maior que dois, o estudo da influência do espaçamento entre aberturas foi estendido para considerar almas com dez, vinte e trinta aberturas. Apenas a viga celular originada do perfil W200x26,6 é apresentada neste estudo, uma vez que o comportamento dos outros perfis foi semelhante. Foi utilizada a extensão da equação analítica proposta para os cálculos (3.13), pois os casos apresentaram mais que uma abertura. A tabela 4.10 apresenta o valor do espaçamento entre aberturas  $s$ , o comprimento dos modelos ( $L$ ), os deslocamentos da alma analítico e numérico,  $\delta_{2,c,A}$  e  $\delta_{2,c,N}$ , as rigidezes rotacionais analítica e numérica,  $k_{2c,A}$  e  $k_{2c,N}$ , e o desvio relativo entre elas,  $k_{2c,A}/k_{2c,N}$ .

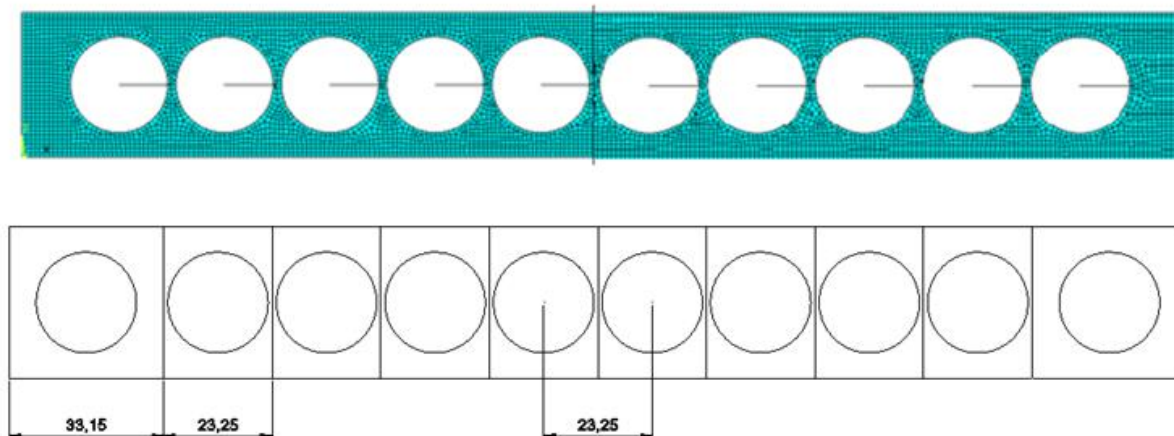
Tabela 4.10 – Rigidez numérica e analítica para diferentes espaçamentos entre aberturas – 10, 20 e 30 aberturas.

Simbologia	s (m)	L (m)	$\delta_{2,c,A}$ (m)	$\delta_{2,c,N}$ (m)	$k_{2c,A}$ (kN/rad)	$k_{2c,N}$ (kN/rad)	Desvio ( $K_{2c,A}/K_{2c,N}$ )
C200x26.6_1.60_0.65_1.08_0.5_10	0,233	2,523	0,044	0,042	9,481	9,810	0,966
C200x26.6_1.60_0.65_1.15_0.5_10	0,248	2,659	0,032	0,033	12,221	11,769	1,038
C200x26.6_1.60_0.65_1.20_0.5_10	0,258	2,756	0,028	0,029	13,608	12,862	1,058
C200x26.6_1.60_0.65_1.25_0.5_10	0,269	2,853	0,025	0,027	14,728	13,733	1,072
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_10	0,280	2,949	0,023	0,024	15,665	14,539	1,077
C200x26.6_1.60_0.65_1.35_0.5_10	0,291	3,046	0,021	0,023	16,468	15,203	1,083
C200x26.6_1.60_0.65_1.40_0.5_10	0,301	3,143	0,019	0,021	17,169	15,787	1,088
C200x26.6_1.60_0.65_1.45_0.5_10	0,312	3,240	0,018	0,020	17,789	16,408	1,084
C200x26.6_1.60_0.65_1.50_0.5_10	0,323	3,337	0,017	0,019	18,343	16,880	1,087
C200x26.6_1.60_0.65_1.08_0.5_20	0,233	4,848	0,025	0,025	8,759	8,737	1,002
C200x26.6_1.60_0.65_1.15_0.5_20	0,248	5,134	0,018	0,019	11,560	10,970	1,054
C200x26.6_1.60_0.65_1.20_0.5_20	0,258	5,339	0,015	0,016	13,016	12,198	1,067
C200x26.6_1.60_0.65_1.25_0.5_20	0,269	5,544	0,013	0,014	14,207	13,145	1,081
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_20	0,280	5,748	0,012	0,013	15,210	14,053	1,082
C200x26.6_1.60_0.65_1.35_0.5_20	0,291	5,953	0,011	0,012	16,074	14,835	1,084
C200x26.6_1.60_0.65_1.40_0.5_20	0,301	6,157	0,010	0,011	16,829	15,526	1,084
C200x26.6_1.60_0.65_1.45_0.5_20	0,312	6,362	0,009	0,010	17,498	16,059	1,090
C200x26.6_1.60_0.65_1.50_0.5_20	0,323	6,566	0,009	0,010	18,096	16,705	1,083
C200x26.6_1.60_0.65_1.08_0.5_30	0,233	7,173	0,017	0,017	8,530	8,349	1,022
C200x26.6_1.60_0.65_1.15_0.5_30	0,248	7,610	0,012	0,013	11,346	10,697	1,061
C200x26.6_1.60_0.65_1.20_0.5_30	0,258	7,922	0,010	0,011	12,822	11,957	1,072
C200x26.6_1.60_0.65_1.25_0.5_30	0,269	8,235	0,009	0,010	14,034	12,912	1,087
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_30	0,280	8,547	0,008	0,009	15,059	13,855	1,087
C200x26.6_1.60_0.65_1.35_0.5_30	0,291	8,859	0,007	0,008	15,943	14,703	1,084
C200x26.6_1.60_0.65_1.40_0.5_30	0,301	9,171	0,007	0,007	16,716	15,354	1,089
C200x26.6_1.60_0.65_1.45_0.5_30	0,312	9,483	0,006	0,007	17,401	15,925	1,093
C200x26.6_1.60_0.65_1.50_0.5_30	0,323	9,795	0,006	0,006	18,014	16,622	1,084

Constata-se que para um maior número de aberturas, não houve desvio relativo superior a 9,3%. Para os casos com s igual a  $1.08d_0$  observou-se um valor relativamente baixo do desvio, inclusive na viga com 10 furos, a equação analítica forneceu resultado a favor da segurança. Isso se deve ao fato do software Ansys distribuir os esforços nos elementos que mais rígidos, no caso dos modelos estudados, os locais onde a viga apresentava alma cheia. À medida que se aumenta o espaçamento entre aberturas, há uma melhor distribuição dos esforços no modelo numérico, ficando mais aproximada da consideração da distribuição da força no modelo analítico. A formulação analítica proposta não faz essa distinção. A aplicação de força na equa-

ção analítica é proporcional ao comprimento estudado. A Figura 4.8 representa os modelos numérico e analítico C200x26.6\_1,6\_0,65\_1,08\_0,5\_10.

Figura 4.8 – Comparação da alma modelada no Ansys com a da equação - C200x26.6\_1,6\_0,65\_1,08\_0,5\_10



#### 4.3.5 Número de aberturas (n)

No item 3.2.1, foi apresentada uma expansão da equação da rigidez rotacional de perfis celulares para casos com mais de uma abertura na alma. Neste item, os três perfis laminados estudados (W200x26,6, W410x60 e W610x125) foram analisados com a variação de uma à trinta aberturas na composição da alma celular. Tomou-se como base o modelo padrão para os parâmetros de construção do perfil ( $d, d_o, s, s_e$ ). As tabelas 4.11 a 4.13 apresentam, para cada série de perfis W200x26,6, W410x60 e W610x125, o valor do comprimento dos modelos ( $L$ ), os deslocamentos da alma analítico e numérico,  $\delta_{2,c_A}$  e  $\delta_{2,c_N}$ , as rigidezes rotacionais analítica e numérica,  $k_{2c_A}$  e  $k_{2c_N}$ , e o desvio relativo entre elas,  $k_{2c_A}/k_{2c_N}$ . As figuras 4.8 a 4.10 mostram o comportamento da rigidez rotacional da alma celular numérica e analítica em relação à variação do número de aberturas.

Tabela 4.11 – Rigidezes analítica e numérica do perfil W200x26,6 para  $n$  aberturas

Simbologia	$L$ (m)	$\delta_{2,c_A}$ (m)	$\delta_{2,c_N}$ (m)	$k_{2c_A}$ (kN/rad)	$k_{2c_N}$ (kN/rad)	Desvio ( $K_{2c_A}/K_{2c_N}$ )
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_1	0,431	0,111	0,119	21,869	20,352	1,075
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_2	0,710	0,075	0,083	19,428	17,672	1,099
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_3	0,990	0,059	0,064	17,833	16,518	1,080
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_4	1,270	0,048	0,052	17,050	15,837	1,077
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_5	1,550	0,041	0,044	16,585	15,419	1,076
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_6	1,830	0,035	0,038	16,277	15,144	1,075
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_7	2,110	0,031	0,033	16,058	14,922	1,076
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_8	2,390	0,027	0,030	15,894	14,782	1,075
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_9	2,670	0,025	0,027	15,767	14,619	1,078
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_10	2,949	0,023	0,024	15,665	14,539	1,077
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_11	3,229	0,021	0,022	15,582	14,405	1,082
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_12	3,509	0,019	0,021	15,513	14,345	1,081
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_13	3,789	0,018	0,019	15,455	14,324	1,079
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_14	4,069	0,017	0,018	15,405	14,227	1,083
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_15	4,349	0,016	0,017	15,361	14,178	1,083
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_16	4,629	0,015	0,016	15,324	14,159	1,082
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_17	4,908	0,014	0,015	15,290	14,153	1,080
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_18	5,188	0,013	0,014	15,260	14,045	1,087
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_19	5,468	0,013	0,014	15,234	14,012	1,087
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_20	5,748	0,012	0,013	15,210	14,053	1,082
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_21	6,028	0,011	0,012	15,188	14,054	1,081
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_22	6,308	0,011	0,012	15,169	14,000	1,084
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_23	6,588	0,010	0,011	15,151	13,998	1,082
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_24	6,867	0,010	0,011	15,135	13,920	1,087
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_25	7,147	0,010	0,011	15,119	13,885	1,089
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_26	7,427	0,009	0,010	15,105	13,891	1,087
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_27	7,707	0,009	0,010	15,093	13,938	1,083
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_28	7,987	0,009	0,009	15,081	13,879	1,087
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_29	8,267	0,008	0,009	15,069	13,851	1,088
C200x26.6_1.60_0.65_1.3_0.5_30	8,547	0,008	0,009	15,059	13,855	1,087

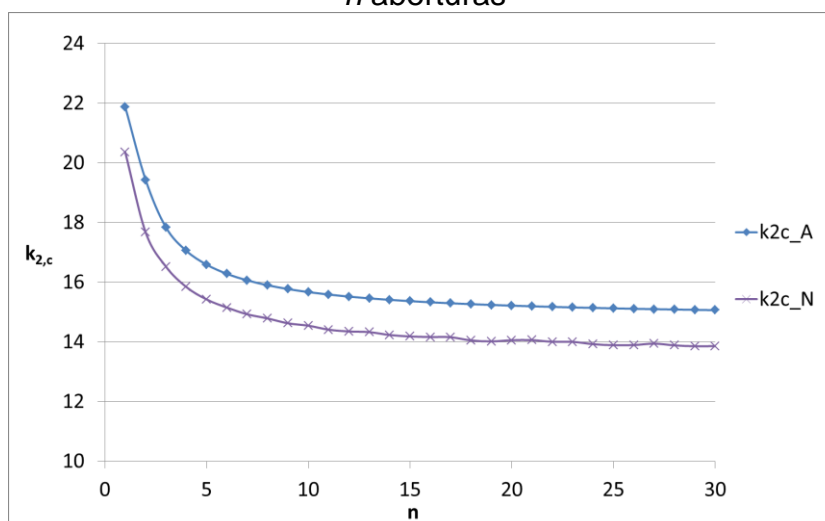
Figura 4.8 – Variação da rigidez rotacional da alma celular do perfil W200x26.6 para  $n$  aberturas

Tabela 4.12 – Rigidezes analítica e numérica do perfil W410x60 para  $n$  aberturas

Simbologia	$L$ (m)	$\delta_{2,c_A}$ (m)	$\delta_{2,c_N}$ (m)	$k_{2c_A}$ (kN/rad)	$k_{2c_N}$ (kN/rad)	Desvio ( $K_{2c_A}/K_{2c_N}$ )
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_1	0,847	0,186	0,199	25,930	24,143	1,074
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_2	1,397	0,127	0,139	23,041	20,961	1,099
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_3	1,947	0,099	0,107	21,157	19,580	1,081
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_4	2,497	0,081	0,087	20,232	18,801	1,076
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_5	3,048	0,068	0,073	19,682	18,294	1,076
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_6	3,598	0,059	0,063	19,317	17,952	1,076
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_7	4,148	0,052	0,056	19,058	17,703	1,077
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_8	4,698	0,046	0,050	18,864	17,524	1,076
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_9	5,249	0,041	0,045	18,714	17,371	1,077
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_10	5,799	0,038	0,041	18,594	17,226	1,079
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_11	6,349	0,035	0,038	18,495	17,117	1,081
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_12	6,900	0,032	0,035	18,414	17,023	1,082
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_13	7,450	0,030	0,032	18,345	16,990	1,080
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_14	8,000	0,028	0,030	18,286	16,925	1,080
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_15	8,550	0,026	0,028	18,234	16,843	1,083
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_16	9,101	0,025	0,027	18,190	16,773	1,084
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_17	9,651	0,023	0,025	18,150	16,758	1,083
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_18	10,201	0,022	0,024	18,115	16,716	1,084
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_19	10,751	0,021	0,023	18,083	16,699	1,083
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_20	11,302	0,020	0,022	18,055	16,618	1,086
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_21	11,852	0,019	0,021	18,030	16,612	1,085
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_22	12,402	0,018	0,020	18,006	16,597	1,085
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_23	12,952	0,017	0,019	17,985	16,561	1,086
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_24	13,503	0,017	0,018	17,966	16,584	1,083
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_25	14,053	0,016	0,018	17,948	16,572	1,083
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_26	14,603	0,016	0,017	17,932	16,514	1,086
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_27	15,153	0,015	0,016	17,916	16,500	1,086
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_28	15,704	0,014	0,016	17,902	16,530	1,083
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_29	16,254	0,014	0,015	17,889	16,496	1,084
C410x60.0_1.60_0.65_1.3_0.5_30	16,804	0,014	0,015	17,877	16,499	1,084

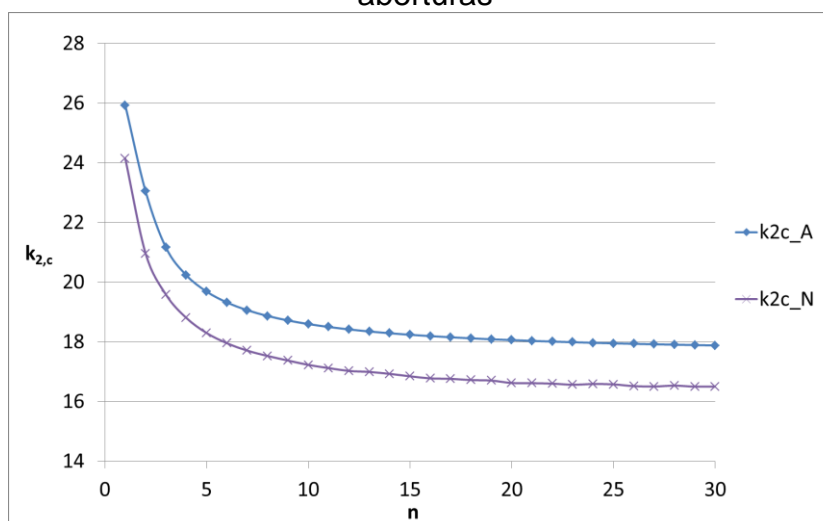
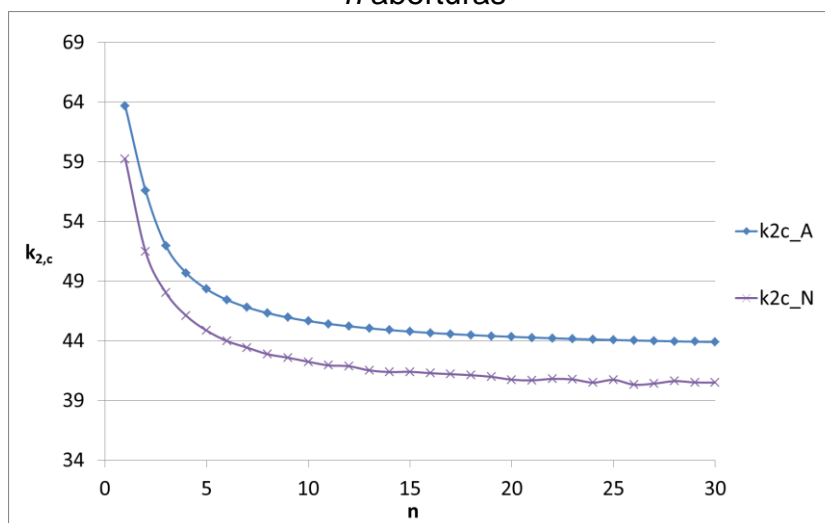
Figura 4.9 – Variação da rigidez rotacional da alma celular do perfil W410x60 para  $n$  aberturas



Tabela 4.13 – Rigidezes analítica e numérica do perfil W610x125 para  $n$  aberturas

Simbologia	$L$ (m)	$\delta_{2,c_A}$ (m)	$\delta_{2,c_N}$ (m)	$k_{2c_A}$ (kN/rad)	$k_{2c_N}$ (kN/rad)	Desvio ( $K_{2c_A}/K_{2c_N}$ )
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_1	1,273	0,114	0,122	63,668	59,243	1,075
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_2	2,100	0,077	0,085	56,573	51,456	1,099
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_3	2,928	0,061	0,066	51,946	48,017	1,082
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_4	3,755	0,049	0,053	49,674	46,093	1,078
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_5	4,583	0,042	0,045	48,323	44,852	1,077
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_6	5,410	0,036	0,039	47,428	43,981	1,078
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_7	6,238	0,032	0,034	46,792	43,420	1,078
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_8	7,065	0,028	0,030	46,315	42,875	1,080
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_9	7,892	0,025	0,027	45,946	42,581	1,079
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_10	8,720	0,023	0,025	45,651	42,241	1,081
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_11	9,547	0,021	0,023	45,410	41,935	1,083
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_12	10,375	0,020	0,021	45,209	41,867	1,080
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_13	11,202	0,018	0,020	45,039	41,516	1,085
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_14	12,030	0,017	0,019	44,894	41,377	1,085
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_15	12,857	0,016	0,017	44,768	41,400	1,081
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_16	13,684	0,015	0,016	44,658	41,283	1,082
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_17	14,512	0,014	0,015	44,561	41,204	1,081
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_18	15,339	0,013	0,015	44,475	41,117	1,082
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_19	16,167	0,013	0,014	44,398	40,978	1,083
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_20	16,994	0,012	0,013	44,329	40,741	1,088
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_21	17,821	0,012	0,013	44,266	40,685	1,088
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_22	18,649	0,011	0,012	44,209	40,808	1,083
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_23	19,476	0,011	0,012	44,157	40,758	1,083
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_24	20,304	0,010	0,011	44,109	40,494	1,089
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_25	21,131	0,010	0,011	44,065	40,726	1,082
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_26	21,959	0,010	0,010	44,025	40,322	1,092
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_27	22,786	0,009	0,010	43,987	40,412	1,088
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_28	23,613	0,009	0,010	43,953	40,621	1,082
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_29	24,441	0,009	0,009	43,920	40,512	1,084
C610x125.0_1.60_0.65_1.3_0.5_30	25,268	0,008	0,009	43,890	40,491	1,084

Figura 4.10 – Variação da rigidez rotacional da alma celular do perfil W610x125 para  $n$  aberturas



Quando comparados as rigidezes analíticas com as numéricas, os desvios variam de 7,40% a aproximadamente 9,94%. Este último desvio relativo, ocorrido no perfil com duas aberturas deve-se ao fato das aberturas não estarem centralizadas como justificado no subitem 4.3.4.

Observa-se nos gráficos das figuras 4.8 a 4.10 que as curvas numérica e analítica tendem a uma assíntota para o valor da rigidez rotacional. Assim, nos modelos de alma originados do perfil W200x26,6, a partir de 10 aberturas a diferença entre os valores de rigidez numérica não ultrapassam 1% conforme pode ser identificado na tabela 4.11. Nos modelos de alma originados dos perfis W410x60 e W610x125, o valor da rigidez rotacional da alma estabiliza a partir de nove aberturas.

#### 4.4 Ajuste da equação da rigidez rotacional da alma

A equação da rigidez rotacional apresentada no subitem 3.3, quando comparada aos resultados obtidos através de modelos criados no software Ansys 15.0 apresentou-se contra a segurança. Nenhum caso analisado obteve erro maior que 10% (os casos com espaçamento entre aberturas mínimo são desconsiderados). Tendo em vista os exemplos e análises até aqui apresentados, propõe-se uma formulação para a rigidez rotacional da alma do perfil celular ( $k_2$ ) no qual é adicionado um coeficiente redutor igual a 0,90 para que a equação seja o mais realística possível:

$$k_{2,c} = \frac{0,9Fh_0^2}{2(s_e + 0,5d_0 + 0,5s)\delta_{2,ext} + (n - 2)s\delta_{2,cent}} \quad (4.1)$$

À fim validar a formulação proposta neste capítulo, para os três perfis analisados e consequentemente todos os 198 (cento e noventa e oito) modelos, foram feitas linhas de ajuste perfeito (Figuras 4.11, 4.12 e 4.13). Os pontos abaixo da linha de ajuste perfeito estão a favor da segurança e quanto maior a proximidade entre o ponto e a linha, maior a precisão dos resultados.

Figura 4.11 – Linha de ajuste perfeito – Perfil W200x26.6

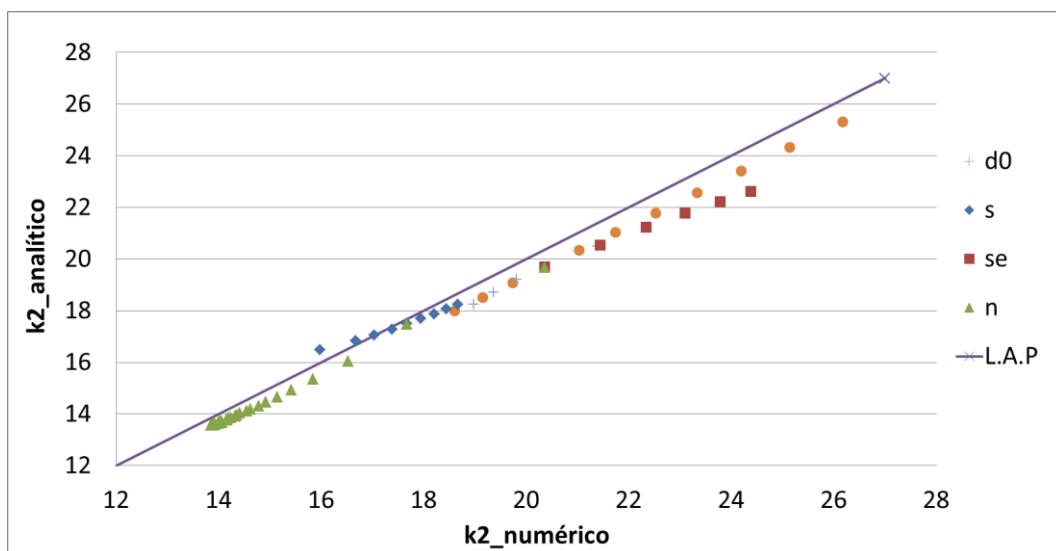


Figura 4.12 – Linha de ajuste perfeito – Perfil W410x60

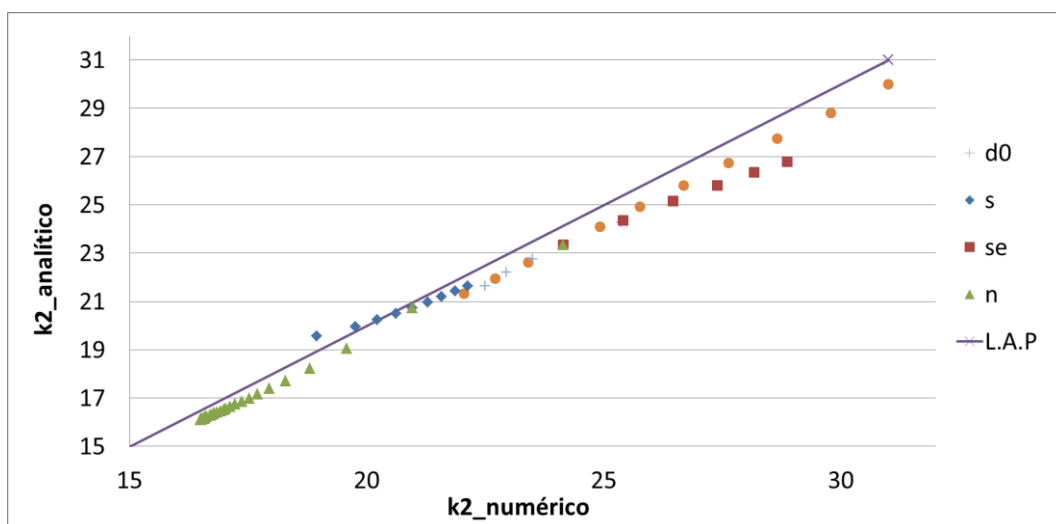
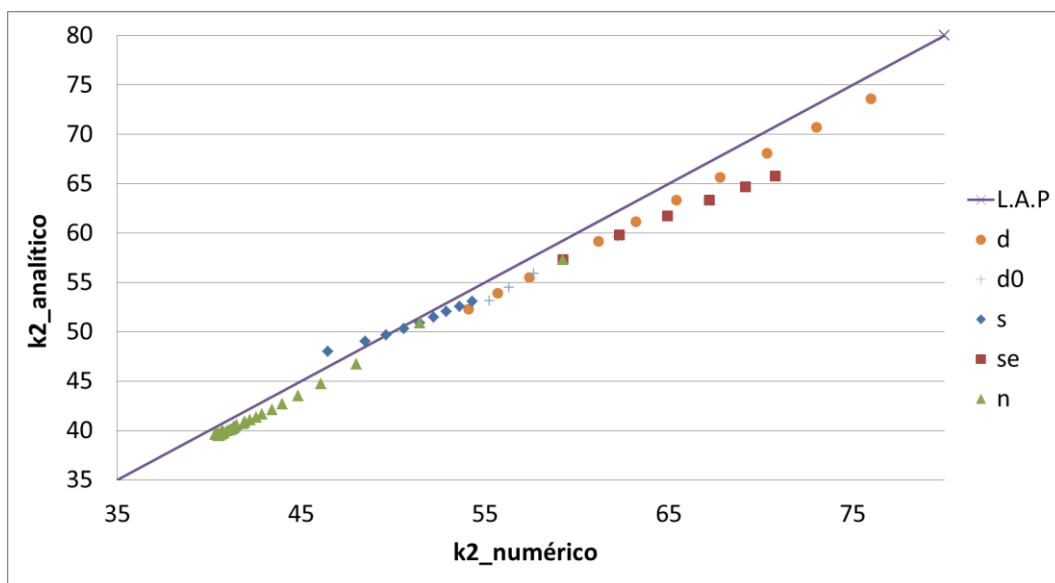


Figura 4.13 – Linha de ajuste perfeito – Perfil W610x125



#### 4.5 Formulação proposta para rigidez rotacional de vigas mistas com perfis celulares

Para o cálculo da rigidez rotacional de vigas mistas com perfis celulares propõe-se utilizar a equação da ABNT NBR 8800, para o cálculo da rigidez rotacional da laje, equação (1.4), e para a rigidez rotacional da alma do perfil celular, a equação proposta (4.1). Notar que vigas celulares significam múltiplas aberturas, portanto, deve ser avaliada a possibilidade de, no final, sempre se trabalhar com vigas com mais de uma abertura. A princípio, desconsidera-se a rigidez rotacional da conexão de cisalhamento ( $k_3$ ). Com os resultados das rigidezes rotacionais dos elementos em separados, utilizar a associação de molas em série determinada pela ABNT NBR 8800 (equação (1.3)) para se obter a rigidez rotacional de vigas mistas com perfil celular.

## 5 MOMENTO CRÍTICO ELÁSTICO DE VIGAS MISTAS COM PERFIL CELULAR

### 5.1 Introdução

Neste capítulo, determina-se o momento crítico elástico à FLD de três exemplos de vigas mistas com perfil celular. Estas vigas foram construídas com os três perfis laminados, previamente estudados, W200x26,6, W410x60 e W610x125 e, laje maciça de concreto armado. O momento crítico elástico foi calculado utilizando a expressão da rigidez rotacional de vigas mistas de perfil celular proposta no Item 4.5.

Para cada uma das vigas mistas analisadas, a influência das aberturas da alma nos valores do momento crítico elástico foi avaliada, tendo como parâmetro, o momento crítico elástico de vigas mistas de alma cheia de altura equivalente às de alma celular, calculado pela formulação da ABNT NBR 8800:2008.

### 5.2 Exemplo de cálculo do momento crítico elástico

A Figura 5.1 apresenta uma vista isométrica de vigas mistas compondo o mecanismo “U” contínuo. Nesse exemplo de cálculo, a distância transversal entre vigas mistas é de 2,5 m e escolheu-se determinar o momento crítico elástico da viga interna.

Três vigas mistas foram analisadas variando-se apenas o perfil celular, gerado a partir dos perfis laminados W200x26,6, W410x60 e W610x125, utilizando as características do modelo padrão citado no capítulo 4, conforme figura 5.2. Adotou-se a quantidade de 30 (trinta) aberturas na alma, o que fez com que o vão da viga mista ficasse levemente superior a  $25d$ , onde  $d$  é a altura do perfil celular. Assim, para a viga celular VC, de altura 331,2 mm, originada do perfil W 200x26,6, o vão foi de 8,55 m. A viga celular VC, de altura 661,2 mm, originada do perfil W410x60 teve seu vão igual a 16,80 m e, por último a viga celular VC, de altura 979,2 mm, originada do perfil W610x125 teve seu vão igual a 25,27 m.

A laje das três vigas mistas estudadas foi a mesma, de concreto armado com altura de 100 mm. A armadura longitudinal negativa foi considerada de diâmetro 12,5 mm a cada 150 mm e as armaduras transversais positivas e negativas foram de diâmetro

6,3 mm a cada 200 mm. Os cobrimentos são: 30 mm para armadura longitudinal negativa e transversal positiva e 42 mm para armadura transversal negativa. O módulo de elasticidade do aço e do concreto são, respectivamente, 200000 MPa e 23800 MPa. Para os exemplos de cálculo, foram utilizadas unidades dimensionais usuais da engenharia civil (centímetros), que por sua vez não afetam a unidade da rigidez rotacional da viga mista, pois a equação desenvolvida independe das unidades.

Figura 5.1 – Vigas mistas com perfil de alma celular - Mecanismo U contínuo

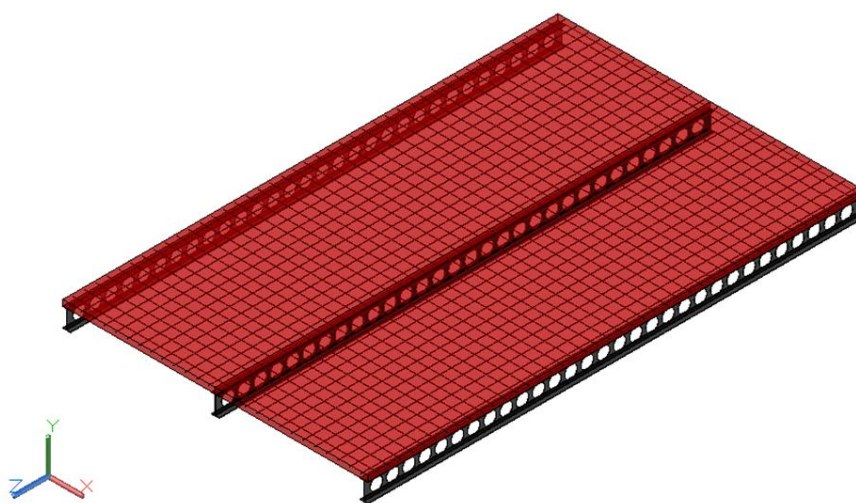


Figura 5.2 – Modelo Padrão – Vista Lateral

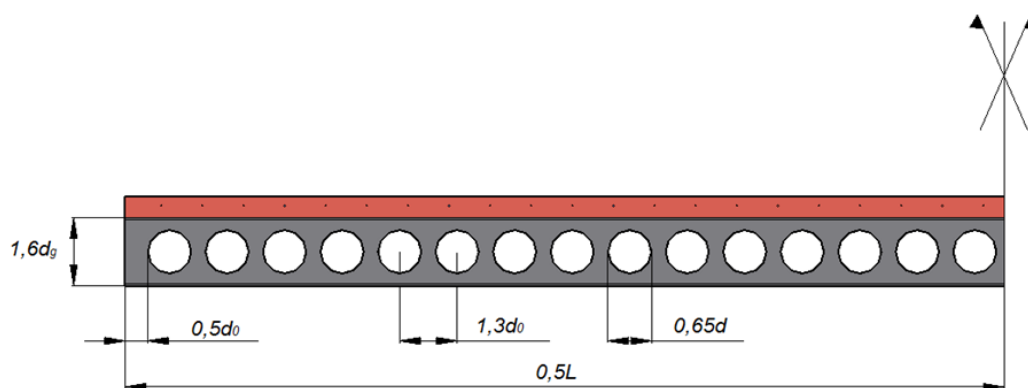
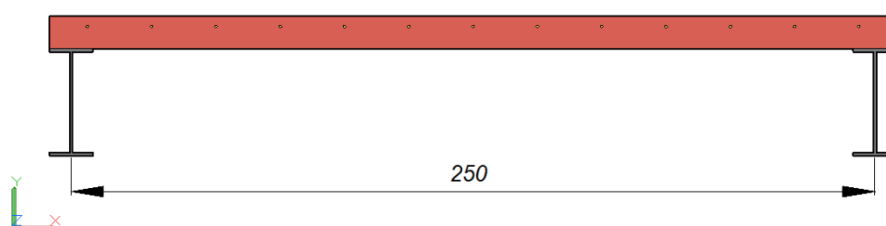


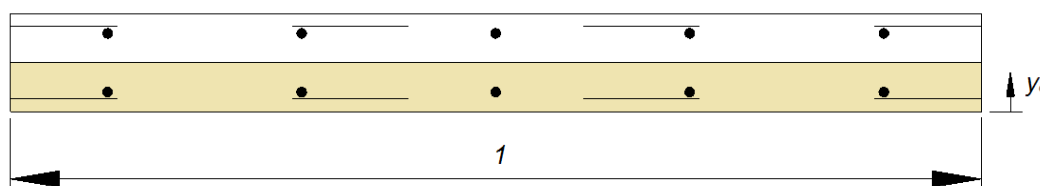
Figura 5.3 – Modelo Padrão – Distância entre vigas



### 5.2.1 Rigidez rotacional da laje de concreto maciça

Considera-se a faixa de um metro na direção transversal ao eixo da viga, de forma a obter-se a rigidez rotacional por metro (Figura 5.4). Assim, cinco barras para a armadura transversal, positiva e negativa, cabem dentro dessa faixa. As áreas de aço da armadura transversal, em 1 m de laje, ficam:

Figura 5.4 – Faixa Transversal da Laje



$$A_{st} = 5 * \frac{\pi d^2}{4} = 1,55 \text{ cm}^2 \quad (5.1)$$

Para o cálculo da rigidez da laje é necessário transformar a seção do concreto em aço. A largura transformada da laje, e a inércia transformada, desconsiderando o concreto tracionado, conforme figura, são dadas pelas equações (5.2) a (5.4).

$$b_{tr} = \frac{100}{n_E} = \frac{100}{\frac{20000}{2380}} = \frac{100}{8,403} = 11,9 \text{ cm} \quad (5.2)$$

$$\frac{11,9 y_c^2}{2} = 1,55(10 - 4,2 - y_c) \rightarrow y_c = 1,11 \text{ cm} \quad (5.3)$$

$$I_{2neg} = \frac{A_{stneg}(t_c - c_{tneg} - y_c)^2 + b_{ef} \frac{(y_c)^3}{3}}{100} \rightarrow I_{2neg} = 0,395 \text{ cm}^2 / \text{cm} \quad (5.4)$$

A rigidez à flexão da seção mista homogeneizada por unidade de comprimento da viga é calculada tomada como o menor valor, considerando o meio do vão da laje, para momento positivo, e um apoio interno da laje, para momento negativo. Neste caso, os dois momentos de inércia são iguais e, uma vez que as armaduras, positiva e negativa, apresentam a mesma área. Assim:

$$EI_2 = 20000 \times 0,395 = 7900 \text{ kN/cm} \quad (5.5)$$

Pela equação (1.4), fornecida pela ABNT NBR 8800:2008, tem-se a rigidez à flexão da seção mista homogeneizada, adotando-se  $\alpha$  igual a 3 por representar vigas internas.

$$k_1 = 3x \frac{7900}{250} = 94,8 \text{ kN/rad} \quad (5.6)$$

### 5.2.2 Rigidez rotacional da viga mista

Após a obtenção da rigidez rotacional da laje, calculou-se a rigidez rotacional da alma para as vigas mistas com perfis celulares e para as vigas mistas com perfis de altura de alma correspondente a dos perfis celulares, porém sem aberturas. Para a alma plana foi utilizada a equação (1.8) fornecida pela ABNT NBR 8800:2008, aqui repetida:

$$k_{2,p} = \frac{E_a t_w^3}{4h_0(1 - \nu_a^2)} \quad (5.7)$$

Para o perfil celular, a formulação proposta foi utilizada (4.1). A Tabela 5.1 apresenta os resultados da rigidez rotacional da laje, da rigidez rotacional da alma celular e da alma cheia, rigidez rotacional da viga mista celular e da viga mista com alma cheia e a diferença desses resultados. Pode-se notar que a presença das aberturas no perfil celular faz com que o valor da rigidez da viga mista reduza em 51,8%, 50,5% e 41,7% respectivamente para os perfis gerados a partir do W200x26,6, W410x60 e W610x125.

Tabela 5.1 – Rigidez Rotacional dos Modelos Estudados

Perfil	$n$	$h_0$ (cm)	$L$ (cm)	$k_1$ (kN/rad)	$k_{2,c}$ (kN/rad)	$k_{2,p}$ (kN/rad)	$k_{r,c}$ (kN/rad)	$k_{r,p}$ (kN/rad)	Desvio ( $k_{r,c}/k_{r,p}$ )
200x26.6	30	32,28	854,662	94,800	13,553	33,211	11,858	24,595	0,482
410x60.0	30	63,84	1680,420	94,800	16,089	39,292	13,755	27,779	0,495
610x125.0	30	95,96	2526,830	94,800	39,501	96,489	27,883	47,819	0,583

### 5.2.3 Momento crítico elástico

Para calcular o momento crítico elástico, seguiu-se a metodologia adotada pela ABNT NBR 8800:2008 (subitem 2.3). A equação do momento crítico elástico é apresentada na equação (2.15) e aqui repetida na equação (5.8).

$$M_{cr} = \alpha_g \frac{C_{dist}}{L} \sqrt{\left(GJ + \frac{k_r L^2}{\pi^2}\right) EI_{af,y}} \quad (5.8)$$

onde:

$G$  é o módulo de elasticidade transversal do aço;

$L$  é o comprimento da viga entre apoios verticais (exige-se que ambas as mesas do perfil de aço possuam contenção lateral nesses apoios);

$J$  é a constante de torção do perfil de aço;

$I_{af,y}$  é o momento de inércia da mesa inferior do perfil de aço em relação ao eixo  $y$ ;

$C_{dist}$  é um coeficiente que depende da distribuição de momentos fletores no comprimento  $L$ ;

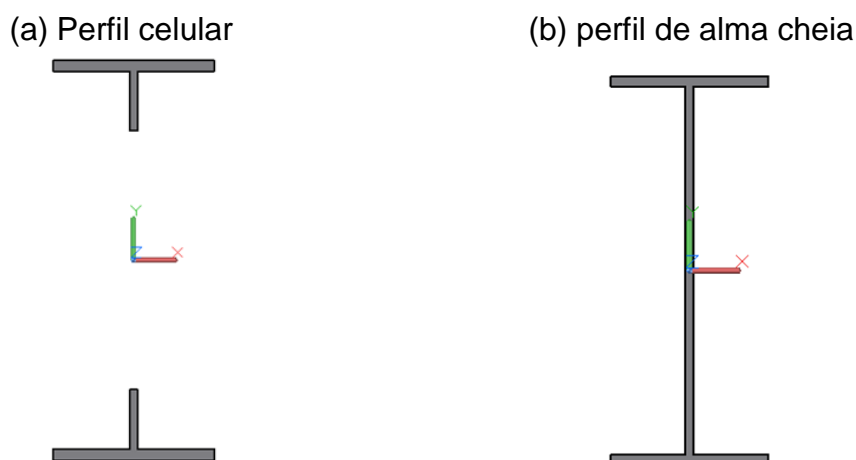
$\alpha_g$  é um fator relacionado à geometria da seção transversal da viga mista;

$k_r$  é a rigidez rotacional da viga mista.

Conforme mostrado na equação acima, para o cálculo das propriedades geométricas das vigas mistas com perfil celular, foi utilizada a seção transversal do perfil celular no centro da abertura, o que consiste em dois “T”s (um chamado de “T” superior e outro chamado de “T” inferior). Já para o perfil de alma cheia, de seção transversal constante ao longo do vão, utilizou-se a seção transversal bruta de alma com altura correspondente a dos perfis celulares.



Figura 5.5 – Seção transversal considerada no cálculo das propriedades geométricas



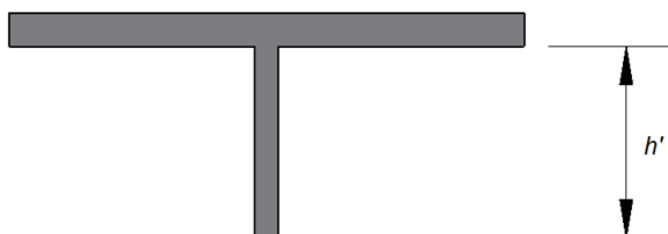
A título de demonstração do cálculo do momento crítico elástico, serão apresentados os resultados obtidos para a viga mista com perfil celular obtido do W200x26,6. A equação do momento crítico elástico depende de diversos fatores. Dois deles são: o módulo de elasticidade transversal do aço ( $G$ ) e a constante de torção do perfil de aço ( $J$ ).

$$G = \frac{E_a}{2(1 + \nu_a)} = 7692,308 \text{ kN/cm}^2 \quad (5.9)$$

$$J = 2 \left( \frac{b_f t_f^3}{3} + \frac{h' t_w^3}{3} \right) = 5,900 \text{ cm}^4 \quad (5.10)$$

A altura da alma dos T's (superior e inferior) é representada por  $h'$ , como mostrado na Figura 5.6.

Figura 5.6 – Seção transversal perfil celular – T superior



Para encontrar  $h'$  é necessário relacioná-lo à altura total do perfil celular:

$$d = 2t_f + 2h' + d_0 \quad (5.11)$$

$$h' = 4,956 \text{ cm} \quad (5.12)$$

O momento de inércia da mesa inferior do perfil de aço em relação ao eixo  $y$  ( $I_{af,y}$ ) :

$$I_{af,y} = \frac{t_f b_f^3}{3} = 164,685 \text{ cm}^4 \quad (5.13)$$

O fator relacionado à geometria da seção transversal da viga mista ( $\alpha_g$ ) é calculado para perfil duplamente simétrico de acordo com a equação (5.14):

$$\alpha_g = \frac{\left(\frac{h_0 I_x}{I_{ax}}\right)}{\left(\frac{h_0^2}{4} + \frac{(I_{ax} + I_{ay})}{A_a}\right) \frac{1}{e} + h_0} = 1,164 \quad (5.14)$$

Os momentos de inércia da seção de aço em relação aos seus eixos centroidais,  $I_{ax}$  e  $I_{ay}$ , foram calculados conforme equações (5.15) a (5.17).

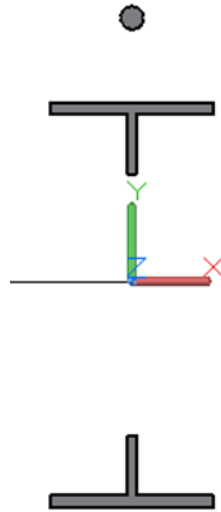
$$I_{ax} = \Sigma(I_x + Ad^2) \quad (5.15)$$

$$I_{ax} = 2 \left( \frac{b_f t_f^3}{12} + b_f t_f \left( \frac{d}{2} - \frac{t_f}{2} \right)^2 \right) + 2 \left( \frac{t_w h'^3}{12} + t_w h' \left( \frac{d_0}{2} + \frac{h'}{2} \right)^2 \right) = 6841,7 \text{ cm}^4 \quad (5.16)$$

$$I_{ay} = 2 \frac{t_f b_f^3}{12} + 2 \frac{h' t_w^3}{12} = 329,53 \text{ cm}^4 \quad (5.17)$$

Para encontrar o momento de inércia da seção mista,  $I_x$ , foi utilizada a seção transversal do perfil de aço e a armadura longitudinal negativa, considerando apenas a área da armadura contida na largura efetiva da viga mista, como apresentado na Figura 5.7.

Figura 5.7 – Seção transversal Viga Mista



A largura efetiva foi calculada pelas equações (5.18) e (5.19):

$$v\tilde{a}o = \frac{1}{4}(854 + 854) = 427 \text{ cm} \quad (5.18)$$

$$b_{eff} = 2 \text{ menor} \left\{ \begin{array}{l} \frac{v\tilde{a}o}{8} = \frac{427}{8} = 53,38 \text{ cm} \\ \frac{a}{2} = \frac{250}{2} = 125 \text{ cm} \end{array} \right. \quad (5.19)$$

$$b_{eff} = 106,75 \text{ cm}$$

Sabendo que o espaçamento entre armaduras é de 150 mm, então haverá 8 barras na largura efetiva, portanto:

$$A_{St} = 8 * \frac{\pi d^2}{4} = 9,81 \text{ cm}^2 \quad (5.20)$$

A distância da face inferior da mesa inferior ao centroide da seção mista foi calculada por:

$$y_0 = \frac{A_s(d + t_c + c) + b_f t_f \left(d - \frac{t_f}{2}\right) + \frac{b_f t_f^2}{2} + h' t_w \left(d - t_f - \frac{h'}{2}\right) + h' t_w \left(t_f + \frac{h'}{2}\right)}{A_s + A_a} \quad (5.21)$$

$$y_0 = 22,661 \text{ cm} \quad (5.22)$$

Para o cálculo de  $I_x$ , o momento de inércia da armadura longitudinal em relação ao seu eixo centroidal x foi desconsiderado. Portanto:

$$I_x = A_s(d + t_c - c + y_0)^2 + 2 \frac{b_f t_f^3}{12} + b_f t_f \left(d - y_0 - \frac{t_f}{2}\right)^2 + b_f t_f \left(y_0 - \frac{t_f}{2}\right)^2 + \frac{2t_w h'^3}{12} + h' t_w \left(d - y_0 - t_f - \frac{h'}{2}\right)^2 + h' t_w \left(y_0 - t_f - \frac{h'}{2}\right)^2 \quad (5.23)$$

$$I_x = 10879,980 \text{ cm}^4 \quad (5.24)$$

Para o valor de  $e$ :

$$e = \frac{A I_{ax}}{A_a y_c (A - A_a)} = 43,620 \text{ cm} \quad (5.25)$$

Onde  $y_c$  é a distância do centro geométrico do perfil de aço à metade da altura da laje de concreto,  $A$  é a área da seção mista na região de momento negativo (perfil de aço mais armadura da laje e  $A_a$  é a área do perfil de aço).

Para obter  $C_{dist}$  foi utilizada a Tabela O.2 da ABNT NBR 8800:2008, aqui representada pela Tabela 5.2. Para exemplificar o pior caso de uma viga sujeita a momento negativo, arbitrou-se  $\psi$  como 1, sendo assim  $C_{dist}$  igual a 6,2.

Tabela 5.2 – Coeficiente  $C_{dist}$  para vigas contínuas e semicontínuas sem carregamento no comprimento L

Condições de carregamento e apoio	Diagrama de momento fletor <sup>a</sup>	$\psi$				
		0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
		11,1	9,5	8,2	7,1	6,2
		11,1	12,8	14,6	16,3	18,1

<sup>a</sup>  $M$  é o maior momento negativo solicitante de cálculo, em módulo, no trecho analisado, sendo que valores de  $\psi$  maiores que 1,00 devem ser tomados iguais a 1,00.

Com todos os parâmetros calculados, foi possível encontrar o momento crítico elástico das vigas mistas com perfil celular e de alma cheia. Os resultados são apresentados na Tabela 5.3. Pode-se perceber que a presença das aberturas no perfil celular faz com que o valor do momento crítico elástico se reduza em 32,4%, 31,2% e 24,7% respectivamente para os perfis gerados a partir do W200x26,6, W410x60 e W610x125.

Tabela 5.3 – Momento Crítico dos Modelos Estudados

Perfil	$n$	$h_o$ (cm)	$L$ (cm)	$k_{r,c}$ (kN/rad)	$k_{r,p}$ (kN/rad)	$M_{cr,c}$ (kNcm)	$M_{cr,p}$ (kNcm)	Razão ( $M_{cr,c}/M_{cr,p}$ )
200x26.6	30	32,28	854,662	11,858	24,595	14721,933	21785,558	0,676
410x60.0	30	63,84	1680,420	13,755	27,779	28088,019	40810,862	0,688
610x125.0	30	95,96	2526,830	27,883	47,819	69586,671	92354,509	0,753

## 6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

### 6.1 Sobre o trabalho realizado

Nesse trabalho, foi desenvolvida e apresentada uma formulação para a determinação da rigidez rotacional de vigas mistas contínuas e semicontínuas com perfil celular, tendo como base o comportamento do mecanismo “U” invertido, com vistas à verificação do estado limite último de flambagem lateral com distorção (FLD). Para se chegar a essa formulação, inicialmente, o valor da rigidez rotacional da alma do perfil celular a partir do deslocamento lateral de uma placa com abertura circular centrada de altura igual a distância entre os centros das mesas superior e inferior do perfil foi deduzido com base no PTV. Para fins de validação da equação, foi desenvolvida uma modelagem numérica, via Método dos Elementos Finitos com uso do Ansys 15.0, para obtenção do deslocamento lateral da alma do perfil celular por meio de análise linear elástica.

Os modelos numéricos de validação foram gerados a partir de um modelo padrão com os parâmetros geométricos de perfis celulares ( $d$ ,  $d_o$ ,  $s$ ,  $s_e$  e  $n$ ) selecionados conforme as exigências de fabricação. Vinte e um modelos de dimensões distintas foram definidos a partir de sete perfis laminados escolhidos de forma a abranger todas as classes de altura de perfil da tabela do fabricante de perfis laminados de abas paralelas. Os resultados numéricos de deslocamento lateral da placa da alma e conseqüentemente de sua rigidez foram comparados com os resultados da equação analítica. A adequação da equação analítica para rigidez rotacional da alma do perfil celular foi confirmada pela boa concordância observada entre os valores analíticos e os numéricos, com desvio relativo de aproximadamente 8%. Essa diferença pode ser atribuída às simplificações adotadas no cálculo analítico do deslocamento da alma, onde a teoria de elementos lineares foi utilizada em conjunto com o PTV, e a deformação por força cortante foi ignorada.

Uma análise paramétrica foi implementada visando estudar a influência dos parâmetros construtivos no valor da rigidez da alma do perfil celular. Para esse estudo, escolheram-se três dos sete perfis analisados na validação (W200x26.6, W410x60 e

W610x125). Foram analisados os parâmetros da altura final do perfil celular ( $d$ ), do diâmetro da abertura ( $d_0$ ), e do espaçamento entre o início do perfil à extremidade da abertura ( $s_e$ ) para modelos com uma abertura circular somente. Pôde-se notar que um aumento de 40% na altura do perfil celular ( $1,25 d_g$  a  $1,75 d_g$ ) resultou na redução de aproximadamente 29% na rigidez da alma. Um aumento de aproximadamente 40% no diâmetro da abertura do perfil celular ( $0,57 d$  a  $0,80 d$ ) resultou na redução de aproximadamente 11% na rigidez da alma e, um aumento de 50% na distância  $s_e$  ( $0,5 d_0$  a  $d_0$ ) resultou em um aumento de aproximadamente 15% na rigidez da alma. Estudou-se também a influência do espaçamento entre aberturas ( $s$ ) em modelos de vigas celulares com dez, vinte e trinta aberturas e a influência do número de alvéolos na alma do perfil celular ( $n$ ). Notou-se que um aumento de 28% no espaçamento entre as aberturas ( $s$ ) ( $1,08d_0$  a  $1,5d_0$ ), resultou em um acréscimo máximo na rigidez da alma em 51,2%. Com o aumento do número de aberturas de um para trinta, a rigidez rotacional da alma diminuiu 31,1%.

Tendo em vista que na análise paramétrica, os resultados da equação analítica sempre foram superiores aos numéricos, porém, o desvio relativo foi menor que 10%, propôs-se um coeficiente de redução para a equação da rigidez da alma do perfil celular de 0,9. Ao final, este trabalho recomenda para obtenção da rigidez rotacional das vigas mistas de alma celular: utilização da expressão da rigidez de molas ligadas em série, considerando as rigidezes isoladas da laje e do perfil de aço. Para a rigidez da laje, recomenda usar a expressão prescrita pela ABNT NBR 8800:2008 e para a rigidez da alma recomenda-se a equação deduzida neste trabalho.

A título de exemplificação, utilizou-se o procedimento supracitado para determinar a rigidez rotacional e o momento crítico elástico à FLD de três vigas mistas com perfis celulares, construídas a partir dos perfis W200x26,6, W410x60 e W610x125. Comparou-se os valores da rigidez rotacional e do momento crítico elástico dessas vigas com o de vigas mistas de alma cheia de altura equivalente. Pôde-se notar que a rigidez rotacional da viga mista celular é 48,2%, 49,5% e 58,3% da rigidez da viga mista de alma cheia, respectivamente, para as vigas formadas pelos perfis W200x26,6, W410x60 e W610x125. As vigas mistas com perfil celular tiveram um momento crítico elástico 32,4%, 31,2% e 24,7% menor do que os das vigas com alma cheia, respectivamente.

## 6.2 Avaliação global e sugestões para trabalhos futuros

Do que foi observado dos estudos e pesquisas realizados até o presente, das análises realizadas neste trabalho, considera-se que o mesmo represente uma contribuição adicional para compreensão e caracterização do fenômeno da flambagem lateral com distorção (FLD) de vigas mistas de aço e concreto. A principal realização deste trabalho encontra-se no seu lado inédito, que vem da formulação desenvolvida para a determinação da rigidez rotacional de vigas mistas com perfis celulares. Não se pode perder de vista que os resultados aqui apresentados foram comparados com modelos numéricos, e que se faz necessária uma análise maior por ensaios experimentais para uma possível adequação da formulação proposta, se necessário.

Procurou-se, nas etapas desta pesquisa, considerar da forma mais precisa possível todos os fatores envolvidos na questão da FLD de vigas de mistas com perfis celulares, visando à confiabilidade da formulação desenvolvida e garantir a futuros interessados o seu uso com segurança. A metodologia de cálculo utilizada e sua implementação se mostraram adequadas, o que possibilitou o entendimento e a validação dos resultados. Portanto, para trabalhos futuros, sugere-se:

- realizar ensaios em vigas mistas com perfis celulares, representativas do mecanismo "U" invertido, para comparar a rigidez rotacional experimental com a formulação analítica proposta neste trabalho;
- realizar ensaios em vigas mistas com perfis celulares, representativas do mecanismo "U" invertido, para determinar a resistência à flambagem lateral com distorção.



## 7 REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT. ABNT NBR 8800:2008 Projeto de estrutura de aço e de estrutura mista de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008.

ABREU, L. M. P.; FAKURY, R. H.; CASTRO e SILVA, A. L. R. Determinação do momento fletor resistente à flambagem lateral com torção de vigas de aço celulares, *Mecânica Computacional*, v. XXIX, p. 7255-7271, 2010

ANSYS, INC. Release 15.0 Documentation for ANSYS. Canonsburg: [s.n.], 2013.

CALENZANI, A.F.G. Proposição de procedimento para a determinação da rigidez rotacional de vigas mistas contínuas e semicontínuas com perfis de alma senoidal. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

CEN, EN 1994-1-1:2004. EUROCODE 4: Design of composite steel and concrete structures - Part 1-1: general rules and rules for buildings. Bruxelas, Bélgica, 2004.

CHEN, S. Instability of composite beams in hogging bending. University of Warwick, U.K., 1992, PhD thesis.

CHEN, S. Experimental study of prestressed steel–concrete composite beams with external tendons for negative moments. *Journal of Constructional Steel Research*, v.61, p. 1613-1630, 2005.

CHEN, S.; JIA, Y. Required and available moment redistribution of continuous steel–concrete composite beams. *Journal of Constructional Steel Research*, v.65, p. 167-175, 2008.

CHEN, S.; XINDI, W.; JIA, Y. A comparative study of continuous steel–concrete composite beams prestressed with external tendons: Experimental investigation. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 65, p. 1480-1489, 2009.

CHEN, W.; YE, J. Elastic lateral and restrained distortional buckling of doubly symmetric I-beams. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. v.10, p.983-1016, 2010.

CHEN, S.; XINDI, W. Finite Element Analysis of Distortional Lateral Buckling of Continuous Composite Beams with Transverse Web Stiffeners. *Advances in Structural Engineering*, v.15, p.1607-1616, 2012

DEKKER, N.W.; KEMP, A.R.; TRINCHERO, P. Factors influencing the strength of continuous beams in negative bending. *Journal of Constructional Steel Research*, v.34, p.161-185, 1995.

FAN, C.K.R. Buckling in continuous composite beams. Thesis (Doctor of Philosophy) – Department of Engineering, University of Warwick, U.K., 1990.

GIZEJOWSKI, M.A.; KHALIL, W.A.S. Restrained distortional buckling strength of steel-concrete composite beams – a review of current practice and new developments. In: The 10<sup>o</sup> International Conference, 10, 2010, Lithuania. Modern Building Materials, Structures and Techniques, Vilnius Gediminas Technical University Publishing House "Technika", p. 604-612.

JOHNSON, R.P. Composite Structures of Steel and Concrete: beams, slabs, columns and frames for buildings. 3<sup>o</sup> ed. Warwick, U.K: Blackwell, 2004.

MÜLLER, C.; OPPE, M. Conceptual design and design examples for multi-storey buildings. Disponível em: [http://eurocodes.jrc.ec.europa.eu/doc/WS2008/EN1993\\_6\\_Mueller.pdf](http://eurocodes.jrc.ec.europa.eu/doc/WS2008/EN1993_6_Mueller.pdf). Acessado em 2015.

NG, M.L.H.; RONAGH, H.R. An analytical solution for the elastic lateral-distortional buckling of I-section beams. Advances in Structural Engineering. v.7, p. 189-200, 2004.

NGUYEN, Q.H. et al. Analysis of composite beams in the hogging moment regions using a mixed finite element formulation. Journal of Constructional Steel Research. v. 65, p. 737-748, 2009.

OLIVEIRA, J.P.S. Estudo da flambagem lateral com distorção em vigas mistas contínuas de aço e concreto com perfis de alma plana e senoidal. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas), Universidade Federal do Espírito Santo, 2014.

OLIVEIRA, T. C. P. Vigas alveoladas: metodologias de dimensionamento. Dissertação de Mestra, Universidade de Aveiro, 2012.

PIMENTA, R.J. Perfis de alma senoidal: proposição de métodos de cálculo e análise de confiabilidade estrutural. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Centro de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

QUEIROZ, G., PIMENTA, R.J., DA MATA, L.A.C. Elementos das Estruturas Mistas Aço – Concreto, Belo Horizonte, Brasil, 2001

ROIK, K.; HANSWILLE, G.; KINA, J. Solution for the lateral torsional buckling problem of composite beams. Stahlbau, 59, 327 – 332, 1990.

TIMOSHENKO, S. KRIEGER, S.W. Theory of plates and shells. 2 ed. McGraw-Hill Book Company, USA., 4-7, 1959.

TOPRAC, A. A., COOKE B.R. An experimental investigation of open-web beams, Welding Research Council Bulletin Series, No 47; New York, 1959.

VASDRAVELLIS, G. UY, B. TAN, E.L.. KIRKLAND, B. Behaviour and design of composite beams subjected to negative bending and compression. Journal of Constructional Steel Research, n.79, p.34-47, 2012

# APÊNDICE I

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{F x^2}{K(b-2\sqrt{d/2-(h/2-x)^2})^2} dx = \frac{1}{16\sqrt{b^2-d^2}K} F \\
& \left( 4bd\sqrt{b^2-d^2} + 2b^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - d^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - 2\sqrt{b^2-d^2}h^2\pi - 4b(b^2-d^2-h^2) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] + \right. \\
& \left. ib(b^2-d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h-h^2) \operatorname{Log} \left[ \frac{d(ib^2+d(-id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id+\sqrt{b^2-d^2})(b^2-d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h-h^2)} \right] - \right. \\
& \left. ib^3 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-ib^2+d(id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id+\sqrt{b^2-d^2})(b^2-d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h-h^2)} \right] + \right. \\
& \left. ibd^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-ib^2+d(id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id+\sqrt{b^2-d^2})(b^2-d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h-h^2)} \right] + \right. \\
& \left. 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-ib^2+d(id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id+\sqrt{b^2-d^2})(b^2-d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h-h^2)} \right] + \right. \\
& \left. ibh^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-ib^2+d(id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id+\sqrt{b^2-d^2})(b^2-d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h-h^2)} \right] + \right. \\
& \left. ib^3 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(ib^2+d(-id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id+\sqrt{b^2-d^2})(-b^2+d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h+h^2)} \right] - \right. \\
& \left. ibd^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(ib^2+d(-id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id+\sqrt{b^2-d^2})(-b^2+d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h+h^2)} \right] + \right. \\
& \left. 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(ib^2+d(-id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id+\sqrt{b^2-d^2})(-b^2+d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h+h^2)} \right] - \right. \\
& \left. ibh^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(ib^2+d(-id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id+\sqrt{b^2-d^2})(-b^2+d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h+h^2)} \right] - \right. \\
& \left. ib^3 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-ib^2+d(id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id+\sqrt{b^2-d^2})(-b^2+d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h+h^2)} \right] + \right. \\
& \left. ibd^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-ib^2+d(id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id+\sqrt{b^2-d^2})(-b^2+d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h+h^2)} \right] - \right. \\
& \left. 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-ib^2+d(id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id+\sqrt{b^2-d^2})(-b^2+d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h+h^2)} \right] + \right. \\
& \left. ibh^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-ib^2+d(id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id+\sqrt{b^2-d^2})(-b^2+d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h+h^2)} \right] \right)
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{Fx^2}{K(b-2\sqrt{(d/2)^2-(h/2-x)^2})} dx = \frac{1}{16\sqrt{b^2-d^2}K} F \\
& \left( 4bd\sqrt{b^2-d^2} + 2b^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - d^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - 2\sqrt{b^2-d^2}h^2\pi - 4b(b^2-d^2-h^2) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] \right) + \\
& ib^3 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(ib^2+d(-id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id+\sqrt{b^2-d^2})(b^2-d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h-h^2)} \right] - \\
& ibd^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(ib^2+d(-id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id+\sqrt{b^2-d^2})(b^2-d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h-h^2)} \right] - \\
& 2bh\sqrt{b^2-d^2} \operatorname{Log} \left[ \frac{d(ib^2+d(-id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id+\sqrt{b^2-d^2})(b^2-d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h-h^2)} \right] - \\
& ibh^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(ib^2+d(-id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id+\sqrt{b^2-d^2})(b^2-d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h-h^2)} \right] - \\
& ib^3 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-ib^2+d(id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id+\sqrt{b^2-d^2})(b^2-d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h-h^2)} \right] + \\
& ibd^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-ib^2+d(id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id+\sqrt{b^2-d^2})(b^2-d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h-h^2)} \right] + \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-ib^2+d(id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id+\sqrt{b^2-d^2})(b^2-d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h-h^2)} \right] + \\
& ibh^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-ib^2+d(id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id+\sqrt{b^2-d^2})(b^2-d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h-h^2)} \right] + \\
& ib^3 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(ib^2+d(-id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id+\sqrt{b^2-d^2})(-b^2+d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h+h^2)} \right] - \\
& ibd^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(ib^2+d(-id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id+\sqrt{b^2-d^2})(-b^2+d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h+h^2)} \right] + \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(ib^2+d(-id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id+\sqrt{b^2-d^2})(-b^2+d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h+h^2)} \right] - \\
& ibh^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(ib^2+d(-id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id+\sqrt{b^2-d^2})(-b^2+d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h+h^2)} \right] - \\
& ib^3 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-ib^2+d(id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id+\sqrt{b^2-d^2})(-b^2+d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h+h^2)} \right] + \\
& ibd^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-ib^2+d(id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id+\sqrt{b^2-d^2})(-b^2+d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h+h^2)} \right] - \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-ib^2+d(id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id+\sqrt{b^2-d^2})(-b^2+d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h+h^2)} \right] + \\
& ibh^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-ib^2+d(id+\sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id+\sqrt{b^2-d^2})(-b^2+d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h+h^2)} \right] \Big)
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{Fx^2}{K(b-2\sqrt{(d/2)^2-(h/2-x)^2})} dx = \frac{1}{16\sqrt{b^2-d^2}K} F \\
& \left( 4bd\sqrt{b^2-d^2} + 2b^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - d^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - 2\sqrt{b^2-d^2}h^2\pi - 4b(b^2-d^2-h^2) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] \right) + \\
& ib^3 \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ ib^2 + d(-id + \sqrt{b^2-d^2}) \right] \right) - \\
& \operatorname{Log}[b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] - \\
& ibd^2 \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ ib^2 + d(-id + \sqrt{b^2-d^2}) \right] \right) - \\
& \operatorname{Log}[b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] - \\
& 2bh\sqrt{b^2-d^2} \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ ib^2 + d(-id + \sqrt{b^2-d^2}) \right] \right) - \\
& \operatorname{Log}[b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] - \\
& ibh^2 \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ ib^2 + d(-id + \sqrt{b^2-d^2}) \right] \right) - \\
& \operatorname{Log}[b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] - \\
& ib^3 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-ib^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2)} \right] + \\
& ibd^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-ib^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2)} \right] + \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-ib^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2)} \right] + \\
& ibh^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-ib^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2)} \right] + \\
& ib^3 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(ib^2 + d(-id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] - \\
& ibd^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(ib^2 + d(-id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] + \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(ib^2 + d(-id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] - \\
& ibh^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(ib^2 + d(-id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] - \\
& ib^3 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-ib^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] + \\
& ibd^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-ib^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] - \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-ib^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] + \\
& ibh^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-ib^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] \Big)
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{Fx^2}{K(b-2\sqrt{(d/2)^2-(h/2-x)^2})^2} dx = \frac{1}{16\sqrt{b^2-d^2}K} F \\
& \left( 4bd\sqrt{b^2-d^2} + 2b^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - d^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - 2\sqrt{b^2-d^2}h^2\pi - 4b(b^2-d^2-h^2) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] \right) + \\
& \text{ib}^3 \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) - \\
& \text{ibd}^2 \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) - \\
& 2bh\sqrt{b^2-d^2} \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) - \\
& \text{ib}h^2 \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) - \\
& \text{ib}^3 \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ -\text{ib}^2 + d \left( id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) + \\
& \text{ibd}^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2)} \right] + \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2)} \right] + \\
& \text{ib}h^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2)} \right] + \\
& \text{ib}^3 \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ -b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2 \right] \right) - \\
& \text{ibd}^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(\text{ib}^2 + d(-id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] + \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(\text{ib}^2 + d(-id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] - \\
& \text{ib}h^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(\text{ib}^2 + d(-id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] - \\
& \text{ib}^3 \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ -\text{ib}^2 + d \left( id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ -b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2 \right] \right) + \\
& \text{ibd}^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] - \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] + \\
& \text{ib}h^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] \Big)
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{F x^2}{K(b - 2\sqrt{(d/2)^2 - (h/2 - x)^2})} dx = \frac{1}{16\sqrt{b^2 - d^2}K} F \\
& \left( 4bd\sqrt{b^2 - d^2} + 2b^2\sqrt{b^2 - d^2}\pi - d^2\sqrt{b^2 - d^2}\pi - 2\sqrt{b^2 - d^2}h^2\pi - 4b(b^2 - d^2 - h^2) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2 - d^2}} \right] \right) + \\
& \text{ib}^3 \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2 - d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2 - d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h - h^2 \right] \right) - \\
& \text{ibd}^2 \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2 - d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2 - d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h - h^2 \right] \right) - \\
& 2bh\sqrt{b^2 - d^2} \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2 - d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2 - d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h - h^2 \right] \right) - \\
& \text{ib}h^2 \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2 - d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2 - d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h - h^2 \right] \right) - \\
& \text{ib}^3 \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ -\text{ib}^2 + d \left( id + \sqrt{b^2 - d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2 - d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h - h^2 \right] \right) + \\
& \text{ibd}^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2 - d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2 - d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h - h^2)} \right] + \\
& 2b\sqrt{b^2 - d^2}h \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2 - d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2 - d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h - h^2)} \right] + \\
& \text{ib}h^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2 - d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2 - d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h - h^2)} \right] + \\
& \text{ib}^3 \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2 - d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2 - d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ -b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h + h^2 \right] \right) - \\
& \text{ibd}^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(\text{ib}^2 + d(-id + \sqrt{b^2 - d^2}))}{b^3(-id + \sqrt{b^2 - d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h + h^2)} \right] + \\
& 2b\sqrt{b^2 - d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(\text{ib}^2 + d(-id + \sqrt{b^2 - d^2}))}{b^3(-id + \sqrt{b^2 - d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h + h^2)} \right] - \\
& \text{ib}h^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(\text{ib}^2 + d(-id + \sqrt{b^2 - d^2}))}{b^3(-id + \sqrt{b^2 - d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h + h^2)} \right] - \\
& \text{ib}^3 \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ -\text{ib}^2 + d \left( id + \sqrt{b^2 - d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2 - d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ -b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h + h^2 \right] \right) + \\
& \text{ibd}^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2 - d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2 - d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h + h^2)} \right] - \\
& 2b\sqrt{b^2 - d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2 - d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2 - d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h + h^2)} \right] + \\
& \text{ib}h^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2 - d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2 - d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h + h^2)} \right] \Big)
\end{aligned} \tag{5}$$



$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{Fx^2}{K(b-2\sqrt{(d/2)^2-(h/2-x)^2})} dx = \frac{1}{16\sqrt{b^2-d^2}K} F \\
& \left( 4bd\sqrt{b^2-d^2} + 2b^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - d^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - 2\sqrt{b^2-d^2}h^2\pi - 4b(b^2-d^2-h^2) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] + \right. \\
& \text{ib}^3 \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log}[b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) - \\
& \text{ibd}^2 \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log}[b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) - \\
& 2bh\sqrt{b^2-d^2} \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log}[b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) - \\
& \text{ibh}^2 \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log}[b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) - \\
& \text{ib}^3 \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ -\text{ib}^2 + d \left( id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log}[b^3] - \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) + \\
& \text{ibd}^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2)} \right] + \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2)} \right] + \\
& \text{ibh}^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2)} \right] + \\
& \text{ib}^3 \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log}[b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ -b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2 \right] \right) - \\
& \text{ibd}^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(\text{ib}^2 + d(-id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] + \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(\text{ib}^2 + d(-id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] - \\
& \text{ibh}^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(\text{ib}^2 + d(-id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] - \\
& \text{ib}^3 \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ -\text{ib}^2 + d \left( id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log}[b^3] - \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ -b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2 \right] \right) + \\
& \text{ibd}^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] - \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] + \\
& \left. \text{ibh}^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] \right)
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{F x^2}{K(b - 2\sqrt{(d/2)^2 - (h/2 - x)^2})} dx = \frac{1}{16\sqrt{b^2 - d^2}K} F \\
& \left( 4bd\sqrt{b^2 - d^2} + 2b^2\sqrt{b^2 - d^2}\pi - d^2\sqrt{b^2 - d^2}\pi - 2\sqrt{b^2 - d^2}h^2\pi - 4b(b^2 - d^2 - h^2) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2 - d^2}} \right] + \right. \\
& \left. ib^3 \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ ib^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2 - d^2} \right) \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. \operatorname{Log}[b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2 - d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h - h^2 \right] \right) - \right. \\
& \left. ibd^2 \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ ib^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2 - d^2} \right) \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. \operatorname{Log}[b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2 - d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h - h^2 \right] \right) - \right. \\
& \left. 2bh\sqrt{b^2 - d^2} \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ ib^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2 - d^2} \right) \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. \operatorname{Log}[b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2 - d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h - h^2 \right] \right) - \right. \\
& \left. ibh^2 \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ ib^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2 - d^2} \right) \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. \operatorname{Log}[b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2 - d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h - h^2 \right] \right) - \right. \\
& \left. ib^3 \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ -ib^2 + d \left( id + \sqrt{b^2 - d^2} \right) \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. \operatorname{Log}[b^3] - \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2 - d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h - h^2 \right] \right) + \right. \\
& \left. ibd^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-ib^2 + d(id + \sqrt{b^2 - d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2 - d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h - h^2)} \right] + \right. \\
& \left. 2b\sqrt{b^2 - d^2}h \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-ib^2 + d(id + \sqrt{b^2 - d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2 - d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h - h^2)} \right] + \right. \\
& \left. ibh^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-ib^2 + d(id + \sqrt{b^2 - d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2 - d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h - h^2)} \right] + \right. \\
& \left. ib^3 \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ ib^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2 - d^2} \right) \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. \operatorname{Log}[b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2 - d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ -b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h + h^2 \right] \right) - \right. \\
& \left. ibd^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(ib^2 + d(-id + \sqrt{b^2 - d^2}))}{b^3(-id + \sqrt{b^2 - d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h + h^2)} \right] + \right. \\
& \left. 2b\sqrt{b^2 - d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(ib^2 + d(-id + \sqrt{b^2 - d^2}))}{b^3(-id + \sqrt{b^2 - d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h + h^2)} \right] - \right. \\
& \left. ibh^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(ib^2 + d(-id + \sqrt{b^2 - d^2}))}{b^3(-id + \sqrt{b^2 - d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h + h^2)} \right] - \right. \\
& \left. ib^3 \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ -ib^2 + d \left( id + \sqrt{b^2 - d^2} \right) \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. \operatorname{Log}[b^3] - \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2 - d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ -b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h + h^2 \right] \right) + \right. \\
& \left. ibd^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-ib^2 + d(id + \sqrt{b^2 - d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2 - d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h + h^2)} \right] - \right. \\
& \left. 2b\sqrt{b^2 - d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-ib^2 + d(id + \sqrt{b^2 - d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2 - d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h + h^2)} \right] + \right. \\
& \left. ibh^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-ib^2 + d(id + \sqrt{b^2 - d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2 - d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2 - d^2}h + h^2)} \right] \right)
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{Fx^2}{K(b-2\sqrt{(d/2)^2-(h/2-x)^2})} dx = \frac{1}{16\sqrt{b^2-d^2}K} F \\
& \left( 4bd\sqrt{b^2-d^2} + 2b^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - d^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - 2\sqrt{b^2-d^2}h^2\pi - 4b(b^2-d^2-h^2) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] + \right. \\
& \text{ib}^3 2 \left( \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \operatorname{Log} \left[ -\text{ib}^2 + d \left( id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] + \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2-d^2} \right] \right) - \\
& \text{ibd}^2 \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) - \\
& 2bh\sqrt{b^2-d^2} \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) - \\
& \text{ib}h^2 \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) + \\
& \text{ibd}^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2)} \right] + \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2)} \right] + \\
& \text{ib}h^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2)} \right] - \\
& \text{ibd}^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(\text{ib}^2 + d(-id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] + \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(\text{ib}^2 + d(-id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] - \\
& \text{ib}h^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(\text{ib}^2 + d(-id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] + \\
& \text{ibd}^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] - \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] + \\
& \left. \text{ib}h^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] \right)
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{Fx^2}{K(b-2\sqrt{(d/2)^2-(h/2-x)^2})} dx = \frac{1}{16\sqrt{b^2-d^2}K} F \\
& \left( 4bd\sqrt{b^2-d^2} + 2b^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - d^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - 2\sqrt{b^2-d^2}h^2\pi - 4b(b^2-d^2-h^2) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] + \right. \\
& \text{ib}^3 2 \left( \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \operatorname{Log} \left[ -\text{ib}^2 + d \left( id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] + \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2-d^2} \right] \right) - \\
& \text{ibd}^2 \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) - \\
& 2bh\sqrt{b^2-d^2} \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) - \\
& \text{ib}h^2 \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) + \\
& \text{ibd}^2 \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ -\text{ib}^2 + d \left( id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) + \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2)} \right] + \\
& \text{ib}h^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2)} \right] - \\
& \text{ibd}^2 \left( \operatorname{Log} [-d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ -b^2 + d^2 + 2i\sqrt{-b^2+d^2}h + h^2 \right] \right) + \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(\text{ib}^2 + d(-id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] - \\
& \text{ib}h^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(\text{ib}^2 + d(-id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] + \\
& \text{ibd}^2 \left( \operatorname{Log} [-d] + \operatorname{Log} \left[ -\text{ib}^2 + d \left( id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ -b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2 \right] \right) - \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] + \\
& \left. \text{ib}h^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] \right)
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{F x^2}{K(b-2\sqrt{(d/2)^2-(h/2-x)^2})} dx = \frac{1}{16\sqrt{b^2-d^2}K} F \\
& \left( 4bd\sqrt{b^2-d^2} + 2b^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - d^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - 2\sqrt{b^2-d^2}h^2\pi - 4b(b^2-d^2-h^2) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] + \right. \\
& \text{ib}^3 2 \left( \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \operatorname{Log} \left[ -\text{ib}^2 + d \left( id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] + \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2-d^2} \right] \right) - \\
& \text{ibd}^2 \left( \operatorname{Log} \left[ d \right] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} \left[ \text{b}^3 \right] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) - \\
& 2bh\sqrt{b^2-d^2} \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} \left[ \text{b}^3 \right] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) - \\
& \text{ib}h^2 \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} \left[ \text{b}^3 \right] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) + \\
& \text{ibd}^2 \left( \operatorname{Log} \left[ d \right] + \operatorname{Log} \left[ -\text{ib}^2 + d \left( id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} \left[ \text{b}^3 \right] - \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) + \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{\text{b}^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(b^2-d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h-h^2)} \right] + \\
& \text{ib}h^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{\text{b}^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(b^2-d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h-h^2)} \right] - \\
& \text{ibd}^2 \left( \operatorname{Log} \left[ d \right] + \operatorname{Log} \left[ \text{ib}^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} \left[ \text{b}^3 \right] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ -b^2 + d^2 + 2i\sqrt{-b^2+d^2}h + h^2 \right] \right) + \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(\text{ib}^2 + d(-id + \sqrt{b^2-d^2}))}{\text{b}^3(-id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] - \\
& \text{ib}h^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(\text{ib}^2 + d(-id + \sqrt{b^2-d^2}))}{\text{b}^3(-id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] + \\
& \text{ibd}^2 \left( \operatorname{Log} \left[ d \right] + \operatorname{Log} \left[ -\text{ib}^2 + d \left( id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} \left[ \text{b}^3 \right] - \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ -b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2 \right] \right) - \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{\text{b}^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] + \\
& \left. \text{ib}h^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-\text{ib}^2 + d(id + \sqrt{b^2-d^2}))}{\text{b}^3(id + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] \right)
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{Fx^2}{K(b-2\sqrt{(d/2)^2-(h/2-x)^2})} dx = \frac{1}{16\sqrt{b^2-d^2}K} F \\
& \left( 4bd\sqrt{b^2-d^2} + 2b^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - d^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - 2\sqrt{b^2-d^2}h^2\pi - 4b(b^2-d^2-h^2) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] + \right. \\
& \textit{ib}^3 2 \left( \operatorname{Log} \left[ \textit{ib}^2 + d \left( -\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \operatorname{Log} \left[ -\textit{ib}^2 + d \left( \text{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} \left[ -\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right] + \operatorname{Log} \left[ \text{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right] \right) - \\
& \textit{ibd}^2 2 \left( \operatorname{Log} \left[ \textit{ib}^2 + d \left( -\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \operatorname{Log} \left[ -\textit{ib}^2 + d \left( \text{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] + \right. \\
& \left. \operatorname{Log} \left[ \text{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ -\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right] \right) - \\
& 2bh\sqrt{b^2-d^2} \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ \textit{ib}^2 + d \left( -\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ -\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) - \\
& \textit{ibh}^2 \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ \textit{ib}^2 + d \left( -\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ -\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) + \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-\textit{ib}^2 + d(\text{id} + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(\text{id} + \sqrt{b^2-d^2})(b^2-d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h-h^2)} \right] + \\
& \textit{ibh}^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-\textit{ib}^2 + d(\text{id} + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(\text{id} + \sqrt{b^2-d^2})(b^2-d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h-h^2)} \right] + \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(\textit{ib}^2 + d(-\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2+d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h+h^2)} \right] - \\
& \textit{ibh}^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(\textit{ib}^2 + d(-\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2+d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h+h^2)} \right] - \\
& 2b\sqrt{b^2-d^2}h \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-\textit{ib}^2 + d(\text{id} + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(\text{id} + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2+d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h+h^2)} \right] + \\
& \left. \textit{ibh}^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-\textit{ib}^2 + d(\text{id} + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(\text{id} + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2+d^2+2i\sqrt{b^2-d^2}h+h^2)} \right] \right)
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{Fx^2}{K(b-2\sqrt{(d/2)^2-(h/2-x)^2})} dx = \frac{1}{16\sqrt{b^2-d^2}K} F \\
& \left( 4bd\sqrt{b^2-d^2} + 2b^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - d^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - 2\sqrt{b^2-d^2}h^2\pi - 4b(b^2-d^2-h^2) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] + \right. \\
& \textit{ib}^3 2 \left( \operatorname{Log} \left[ \textit{ib}^2 + d \left( -\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \operatorname{Log} \left[ -\textit{ib}^2 + d \left( \textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log} \left[ -\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right] + \operatorname{Log} \left[ \textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right] \right) - \\
& \textit{ib}d^2 2 \left( \operatorname{Log} \left[ \textit{ib}^2 + d \left( -\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \operatorname{Log} \left[ -\textit{ib}^2 + d \left( \textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] + \right. \\
& \left. \operatorname{Log} \left[ \textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ -\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right] \right) - \\
& 2bh\sqrt{b^2-d^2} \left( \operatorname{Log}[\cancel{d}] + \operatorname{Log} \left[ \textit{ib}^2 + d \left( -\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log}[\cancel{b^3}] - \operatorname{Log} \left[ -\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) - \\
& \textit{ib}h^2 \left( \operatorname{Log}[d] + \operatorname{Log} \left[ \textit{ib}^2 + d \left( -\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log}[\cancel{b^3}] - \operatorname{Log} \left[ -\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) + \\
& 2bh\sqrt{b^2-d^2} \left( \operatorname{Log}[\cancel{d}] + \operatorname{Log} \left[ -\textit{ib}^2 + d \left( \textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log}[\cancel{b^3}] - \operatorname{Log} \left[ \textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) + \\
& \textit{ib}h^2 \operatorname{Log} \left[ \frac{d(-\textit{ib}^2 + d(\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2})(b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2)} \right] + \\
& 2bh\sqrt{b^2-d^2} \left( \operatorname{Log}[\cancel{-d}] + \operatorname{Log} \left[ \textit{ib}^2 + d \left( -\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log}[\cancel{b^3}] - \operatorname{Log} \left[ -\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ -b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2 \right] \right) - \\
& \textit{ib}h^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(\textit{ib}^2 + d(-\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(-\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] - \\
& 2bh\sqrt{b^2-d^2} \left( \operatorname{Log}[\cancel{-d}] + \operatorname{Log} \left[ -\textit{ib}^2 + d \left( \textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \operatorname{Log}[\cancel{b^3}] - \operatorname{Log} \left[ \textit{id} + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ -b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2 \right] \right) + \\
& \left. \textit{ib}h^2 \operatorname{Log} \left[ -\frac{d(-\textit{ib}^2 + d(\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2}))}{b^3(\textit{id} + \sqrt{b^2-d^2})(-b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2)} \right] \right)
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{Fx^2}{K(b-2\sqrt{(d/2)^2-(h/2-x)^2})} dx = \frac{1}{16\sqrt{b^2-d^2}K} F \\
& \left( 4bd\sqrt{b^2-d^2} + 2b^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - d^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - 2\sqrt{b^2-d^2}h^2\pi - 4b(b^2-d^2-h^2) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] + \right. \\
& \quad \color{red} ib^3 2 \left( \operatorname{Log} \left[ ib^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \operatorname{Log} \left[ -ib^2 + d \left( id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \quad \left. \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] + \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2-d^2} \right] \right) - \\
& \quad \color{blue} ibd^2 2 \left( \operatorname{Log} \left[ ib^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \operatorname{Log} \left[ -ib^2 + d \left( id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] \right) - \\
& \quad \color{green} ibh^2 \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ ib^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \quad \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) + \\
& \quad \color{green} ibh^2 \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ -ib^2 + d \left( id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \quad \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ b^2 - d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h - h^2 \right] \right) - \\
& \quad \color{green} ibh^2 \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ ib^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \quad \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ -b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2 \right] \right) + \\
& \quad \color{green} ibh^2 \left( \operatorname{Log} [d] + \operatorname{Log} \left[ -ib^2 + d \left( id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \quad \left. \operatorname{Log} [b^3] - \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ -b^2 + d^2 + 2i\sqrt{b^2-d^2}h + h^2 \right] \right) \left. \right)
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{Fx^2}{K(b-2\sqrt{(d/2)^2-(h/2-x)^2})} dx = \frac{1}{16\sqrt{b^2-d^2}K} F \\
& \left( 4bd\sqrt{b^2-d^2} + 2b^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - d^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - 2\sqrt{b^2-d^2}h^2\pi - 4b(b^2-d^2-h^2) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] + \right. \\
& \quad \color{red} ib^3 2 \left( \operatorname{Log} \left[ ib^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \operatorname{Log} \left[ -ib^2 + d \left( id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \quad \left. \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] + \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2-d^2} \right] \right) - \\
& \quad \color{blue} ibd^2 2 \left( \operatorname{Log} \left[ ib^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \operatorname{Log} \left[ -ib^2 + d \left( id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] \right) - \\
& \quad \color{green} ibh^2 2 \left( \operatorname{Log} \left[ ib^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \operatorname{Log} \left[ -ib^2 + d \left( id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \quad \left. \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] + \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2-d^2} \right] \right) \left. \right)
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{Fx^2}{K(b-2\sqrt{(d/2)^2-(h/2-x)^2})} dx = \frac{1}{16\sqrt{b^2-d^2}K} F \\
& \left( 4bd\sqrt{b^2-d^2} + 2b^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - d^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - 2\sqrt{b^2-d^2}h^2\pi - 4b(b^2-d^2-h^2) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] + \right. \\
& \quad \color{red} i2b(b^2-d^2-h^2) \left( \operatorname{Log} \left[ ib^2 + d \left( -id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \operatorname{Log} \left[ -ib^2 + d \left( id + \sqrt{b^2-d^2} \right) \right] - \right. \\
& \quad \left. \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] + \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2-d^2} \right] \right) \left. \right)
\end{aligned} \tag{15}$$



$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{Fx^2}{K(b-2\sqrt{(d/2)^2-(h/2-x)^2})} dx = \frac{1}{16\sqrt{b^2-d^2}K} F \\
& \left( 4bd\sqrt{b^2-d^2} + 2b^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - d^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - 2\sqrt{b^2-d^2}h^2\pi - 4b(b^2-d^2-h^2) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] + \right. \\
& \left. i2b(b^2-d^2-h^2) \left( \operatorname{Log} \left[ i(b^2-d^2) + d\sqrt{b^2-d^2} \right] - \operatorname{Log} \left[ -i(b^2+d^2) + d\sqrt{b^2-d^2} \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. \operatorname{Log} \left[ -id + \sqrt{b^2-d^2} \right] + \operatorname{Log} \left[ id + \sqrt{b^2-d^2} \right] \right) \right) \quad (16)
\end{aligned}$$

Mas o logarítmo de um nmero complexo  $z = x + iy = re^{i\theta}$  é dado pela expressão  $\operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\operatorname{ArcTan}\frac{y}{x}$ .

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{Fx^2}{K(b-2\sqrt{(d/2)^2-(h/2-x)^2})} dx = \frac{1}{16\sqrt{b^2-d^2}K} F \\
& \left( 4bd\sqrt{b^2-d^2} + 2b^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - d^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - 2\sqrt{b^2-d^2}h^2\pi - 4b(b^2-d^2-h^2) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] + \right. \\
& \left. i2b(b^2-d^2-h^2) \left( \ln \left[ b\sqrt{b^2-d^2} \right] + i\operatorname{ArcTan} \left[ \frac{\sqrt{b^2-d^2}}{d} \right] - \ln \left[ b\sqrt{b^2-d^2} \right] - i\operatorname{ArcTan} \left[ -\frac{\sqrt{b^2-d^2}}{d} \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. \ln[b] - i\operatorname{ArcTan} \left[ -\frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] + \ln[b] + i\operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] \right) \right) \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{Fx^2}{K(b-2\sqrt{(d/2)^2-(h/2-x)^2})} dx = \frac{1}{16\sqrt{b^2-d^2}K} F \\
& \left( 4bd\sqrt{b^2-d^2} + 2b^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - d^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - 2\sqrt{b^2-d^2}h^2\pi - 4b(b^2-d^2-h^2) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] + \right. \\
& \left. i2b(b^2-d^2-h^2) \left( \ln \left[ b\sqrt{b^2-d^2} \right] + i\operatorname{ArcTan} \left[ \frac{\sqrt{b^2-d^2}}{d} \right] - \ln \left[ b\sqrt{b^2-d^2} \right] + i\operatorname{ArcTan} \left[ \frac{\sqrt{b^2-d^2}}{d} \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. \ln[b] + i\operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] + \ln[b] + i\operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] \right) \right) \quad (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{Fx^2}{K(b-2\sqrt{(d/2)^2-(h/2-x)^2})} dx = \frac{1}{16\sqrt{b^2-d^2}K} F \\
& \left( 4bd\sqrt{b^2-d^2} + 2b^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - d^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - 2\sqrt{b^2-d^2}h^2\pi - 4b(b^2-d^2-h^2) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] - \right. \\
& \left. 4b(b^2-d^2-h^2) \left( \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{\sqrt{b^2-d^2}}{d} \right] + \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] \right) \right) \quad (19)
\end{aligned}$$

Mas  $\operatorname{ArcTan} \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{ArcTan}(x)$ .

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{Fx^2}{K(b-2\sqrt{(d/2)^2-(h/2-x)^2})} dx = \frac{1}{16\sqrt{b^2-d^2}K} F \\
& \left( 4bd\sqrt{b^2-d^2} + 2b^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - d^2\sqrt{b^2-d^2}\pi - 2\sqrt{b^2-d^2}h^2\pi - 4b(b^2-d^2-h^2) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] - \right. \\
& \left. 4b(b^2-d^2-h^2) \left( \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{Fx^2}{K(b-2\sqrt{(d/2)^2-(h/2-x)^2})} dx = \frac{1}{16\sqrt{b^2-d^2}K} F \\
& \left( \sqrt{b^2-d^2} (4bd + \pi (2b^2 - d^2 - 2h^2)) - (b^3 - bd^2 - bh^2) \left( 4\operatorname{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2-d^2}} \right] + 2\pi \right) \right) \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{F x^2}{K(b - 2\sqrt{(d/2)^2 - (h/2 - x)^2})} dx = \frac{1}{16K} F \left( (4bd + \pi(2b^2 - d^2 - 2h^2)) - \left( \frac{b^3 - bd^2 - bh^2}{\sqrt{b^2 - d^2}} \right) \left( 4\text{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2 - d^2}} \right] + 2\pi \right) \right) \quad (22)$$

Considerando que  $K = \frac{Et_w^3}{12}$ :

$$\int_{\frac{h-d}{2}}^{\frac{h+d}{2}} \frac{F x^2}{K(b - 2\sqrt{(d/2)^2 - (h/2 - x)^2})} dx = \frac{3F}{4Et_w^3} \left( (4bd + \pi(2b^2 - d^2 - 2h^2)) - \left( \frac{b^3 - bd^2 - bh^2}{\sqrt{b^2 - d^2}} \right) \left( 4\text{ArcTan} \left[ \frac{d}{\sqrt{b^2 - d^2}} \right] + 2\pi \right) \right) \quad (23)$$