

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

ABRAÃO LEMOS CALDAS FROSSARD

**AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DE TÉCNICAS PARA MELHORIA
DA FORMULAÇÃO MECID EM PROBLEMAS DE AUTOVALOR**

**VITÓRIA
2016**

ABRAÃO LEMOS CALDAS FROSSARD

**AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DE TÉCNICAS PARA MELHORIA
DA FORMULAÇÃO MECID EM PROBLEMAS DE AUTOVALOR**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como pré-requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof^o. Dr^o. Carlos Friedrich Loeffler Neto

VITÓRIA

2016

FICHA CATALOGRÁFICA

ABRAÃO LEMOS CALDAS FROSSARD

**AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DE TÉCNICAS PARA MELHORIA DA
FORMULAÇÃO MECID EM PROBLEMAS DE AUTOVALOR**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica na linha de Métodos Numéricos.

Aprovado em 20 de setembro de 2016.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto

DEM/PPGEM/UFES – Orientador

Prof. Dr. Luciano de Oliveira Castro Lara

DEM/UFES – Membro Interno

Prof. Dr. Guilherme Fabiano Mendonça dos Santos

DEM/UFES – Membro Interno

Prof. Dr. Julio Tomás Aguije Chacaltana

DEA/PPGEA/UFES – Membro Interno

A meus pais, Maristane e Sebastião, e aos meus irmãos, Leandro e Joice.

Ao Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto, meu orientador pela tranquilidade, paciência e toda a dedicação nesse tempo de orientação e nas aulas ministradas.

Aos meus amigos pelos momentos de descontração.

Ao PPGEM da UFES, pela oportunidade oferecida.

“Tudo o que temos de decidir é o que fazer com o tempo que nos é dado.”

John Ronald Reuel Tolkien

RESUMO

A técnica de Integração Direta (MECID) já se mostrou uma vertente adequada do Método dos Elementos de Contorno para resolver problemas expressos por equações diferenciais parciais, que apresentam termos que não são dados por operadores auto-adjuntos ou requeiram a utilização de uma solução fundamental que não é correlata ao problema proposto. Já foi utilizado anteriormente, de forma bem sucedida, em problemas governados pelas Equações de Poisson e de Helmholtz. Porém, todo método numérico passa por inúmeros processos de melhoria que visam aprimorar os resultados apresentados, adaptá-lo à solução de uma nova família de problemas, diminuir o seu custo computacional e até mesmo simplificá-lo matematicamente. Buscando melhorar a qualidade dos resultados apresentados pelo MECID, testam-se dois expedientes diferentes com essa finalidade: primeiramente, a utilização de diferentes famílias de Funções de Base Radial para analisar quais são as funções que permitem a obtenção de melhor precisão nos resultados; em segundo lugar, a utilização de um esquema de regularização do tipo proposto por Hadamard para remover a singularidade que ocorre no núcleo das integrais a serem interpoladas pela MECID, eliminando assim a necessidade de conjuntos distintos de pontos, um para interpolação e outro para geração de pontos fonte. A avaliação dos procedimentos é feita confrontando-se valores numéricos com os analíticos na solução de problemas bidimensionais de autovalor bem conhecidos.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno, Problema de Autovalor, Esquema de Regularização de Hadamard, Equação Helmholtz, Funções Radiais.

ABSTRACT

The Boundary Element Method with Direct Integration (DIBEM) has proved to be a suitable component of the boundary element method to solve problems expressed by partial differential equations, which have terms that are not given by self-adjoint operator or require the use of a fundamental solution which is not related to the proposed problem. It has been previously used, successfully, in issues governed by the Poisson and Helmholtz equations. However, every numerical method involves numerous improvement processes and these aim to enhance the results presented, adapt it to the solution of a new family problems, decrease its computational cost and even simplify it mathematically. Seeking to improve the quality of the results presented by DIBEM, two different expedients for this purpose are tested: first, the use of different radial basis functions families to analyze what are the functions that enable to obtain a better accuracy in results; Secondly, the use of an adjustment scheme of the type proposed by Hadamard to remove the singularity that occurs in the nucleus of the whole to be interpolated by DIBEM, thus eliminating the need for separate point sets, one for interpolation and the other for generation of source points. The evaluation of procedures is made confronting numerical values with the analytical solution in two-dimensional well-known eigenvalue problems.

Keywords: Boundary Element Method, Eigenvalue, Regularization Scheme Hadamard, Helmholtz Equation, Radial Functions

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Flambagem ocorrendo em uma barra de seção retangular. A flambagem ocorrerá em torno do eixo a-a devido ao menor momento de inércia. Fonte: Hibbeler, 2006.	23
Figura 2 – Paralelepípedo elementar de tensões. Fonte: (TIMOSHENKO e GERE, 1993)	24
Figura 3 – Sistema de coordenadas alinhado às direções preferenciais do material. Fonte: Autor.....	26
Figura 4 – Organização dos pontos fonte e pontos internos auxiliares no domínio. Fonte: (BARCELOS 2014)	43
Figura 5 – Membrana retangular totalmente fixada. Fonte: Autoria própria.	51
Figura 6 - Representação dos erros para os dez primeiros autovalores. Com as Funções Radiais Clássicas.	53
Figura 7 – Representação dos erros para a segunda dezena de autovalores. Com as Funções Radiais Clássicas.	54
Figura 8 – Representação dos erros para os vinte últimos autovalores. Com as Funções Radiais Clássicas.	55
Figura 9 – Representação dos erros para os primeiros 10 autovalores. Para as funções de Wendland com malha de 164 elementos.	56
Figura 10 – Representação dos erros para os primeiros 10 autovalores. Para as funções de Wendland com malha de 320 elementos.	56
Figura 11 – Representação dos erros para a segunda dezena de autovalores. Para as funções de Wendland com malha de 164 elementos.	57
Figura 12 – Representação dos erros para a segunda dezena de autovalores. Para as funções de Wendland com malha de 320 elementos.	58
Figura 13 – Representação dos erros para os últimos 20 autovalores. Para as funções de Wendland com malha de 164 elementos.	58
Figura 14 – Representação dos erros para os últimos 20 autovalores. Para as funções de Wendland com malha de 320 elementos.	59
Figura 15 – Representação dos erros para os 10 primeiros autovalores. Funções de Wu com suporte pleno.	60
Figura 16 – Representação dos erros para a segunda dezena de autovalores. Funções de Wu para suporte pleno.	60
Figura 17 – Representação dos erros para os últimos 20 autovalores. Funções de Wu para suporte pleno.	61
Figura 18 – Comparação entre os resultados das três melhores funções dentro do seu respectivo grupo.	62
Figura 19 – Barra engastada numa extremidade. Fonte: (BARCELOS 2014)	62
Figura 20 – Erro para os primeiros 10 autovalores.	64
Figura 21 – Erro para segunda dezena de autovalores.	65
Figura 22 – Erro para os ultimos 20 autovalores.	65
Figura 23 – Erro para os primeiros 10 autovalores, com a malha de 164 elementos.	66

Figura 24 – Erro para os primeiros 10 autovalores, com a malha de 320 elementos.	67
Figura 25 – Erro para segunda dezena de autovalores, com malha de 164 elementos.	67
Figura 26 – Erro para segunda dezena de autovalores, com malha de 320 elementos.	68
Figura 27 – Erro para os últimos 20 autovalores, com malha de 164 elementos.	68
Figura 28 – Erro para os últimos 20 autovalores, com malha de 320 elementos.	69
Figura 29 – Erro para os primeiros 10 autovalores.	70
Figura 30 – Erro para segunda dezena de autovalores.	70
Figura 31 – Erro para os últimos 20 autovalores.	71
Figura 32 – Membrana Circular totalmente fixada no contorno de raio a.	72
Figura 33 – Erro para os dez primeiros autovalores com a malha de 160 elementos.	74
Figura 34 – Erro para os dez primeiros autovalores com a malha de 320 elementos.	74
Figura 35 – Erro para a segunda dezena de autovalores com a malha de 160 elementos.	75
Figura 36 – Erro para a segunda dezena de autovalores com a malha de 320 elementos.	75
Figura 37 – Erro para os últimos vinte autovalores com a malha de 160 elementos.	76
Figura 38 – Erro para os últimos vinte autovalores com a malha de 320 elementos.	76
Figura 39 – Erro para os dez primeiros autovalores com a malha de 160 elementos.	77
Figura 40 – Erro para os dez primeiros autovalores com a malha de 320 elementos.	77
Figura 41 – Erro para a segunda dezena de autovalores com a malha de 160 elementos.	78
Figura 42 – Erro para a segunda dezena de autovalores com a malha de 320 elementos.	78
Figura 43 – Erro para os últimos vinte autovalores com a malha de 160 elementos.	79
Figura 44 – Erro para os últimos vinte autovalores com a malha de 320 elementos.	79
Figura 45 – Erro para os dez primeiros autovalores com a malha de 160 elementos.	80
Figura 46 – Erro para os dez primeiros autovalores com a malha de 320 elementos.	80
Figura 47 – Erro para a segunda dezena de autovalores com a malha de 160 elementos.	81
Figura 48 – Erro para a segunda dezena de autovalores com a malha de 320 elementos.	81
Figura 49 – Erro para os últimos vinte autovalores com a malha de 160 elementos.	82
Figura 50 – Erro para os últimos vinte autovalores com a malha de 320 elementos.	82

Figura 51 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r e 160 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.....	88
Figura 52 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r e 160 elementos. Para os últimos vinte autovalores.....	89
Figura 53 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r e 320 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.....	89
Figura 54 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r e 320 elementos. Para os últimos vinte autovalores.....	90
Figura 55 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função $r^2 \ln r$ e 160 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.....	90
Figura 56 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função $r^2 \ln r$ e 160 elementos. Para os últimos vinte autovalores.....	91
Figura 57 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função $r^2 \ln r$ e 320 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.....	91
Figura 58 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função $r^2 \ln r$ e 320 elementos. Para os últimos vinte autovalores.....	92
Figura 59 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r^3 e 160 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.....	92
Figura 60 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r^3 e 160 elementos. Para os últimos vinte autovalores.....	93
Figura 61 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r^3 e 320 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.....	93
Figura 62 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r^3 e 160 elementos. Para os últimos vinte autovalores.....	94
Figura 63 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r e 160 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.....	95
Figura 64 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r e 160 elementos. Para os últimos vinte autovalores.....	95

Figura 65 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r e 320 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.....	96
Figura 66 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r e 320 elementos. Para os últimos vinte autovalores.....	96
Figura 67 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função $r^2 \ln r$ e 160 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.....	97
Figura 68 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função $r^2 \ln r$ e 160 elementos. Para os últimos vinte autovalores.....	97
Figura 69 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função $r^2 \ln r$ e 320 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.....	98
Figura 70 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função $r^2 \ln r$ e 320 elementos. Para os últimos vinte autovalores.....	98
Figura 71 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r^3 e 160 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.....	99
Figura 72 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r^3 e 160 elementos. Para os últimos vinte autovalores.....	99
Figura 73 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r^3 e 320 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.....	100
Figura 74 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r^3 e 320 elementos. Para os últimos vinte autovalores.....	100
Figura 75 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação MECID normal e a regularizada. Com a função r e malhas com 160 EC.	101
Figura 76 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação MECID normal e a regularizada. Com a função r e malhas com 320 EC.	102
Figura 77 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação MECID normal e a regularizada. Com a função $r^2 \ln[r]$ e malha com 160 elementos de contorno.	102
Figura 78 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação MECID normal e a regularizada. Com a função $r^2 \ln[r]$ e malha com 320 elementos de contorno.	103
Figura 79 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação MECID normal e a regularizada. Com a função r^3 e malha com 160 elementos de contorno.	103

Figura 80 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação MECID normal e a regularizada. Com a função r^3 e malha com 320 elementos de contorno.

..... 104

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Funções de Base Radial.	47
Tabela 2 – Funções de Wendland de Suporte Compacto	49
Tabela 3 – Funções de Wu de Suporte Compacto.....	50
Tabela 4 – Autovalores do problema calculados analiticamente.....	52
Tabela 5 – Valores analíticos para o problema da barra engastada.	63
Tabela 6 – Autovalores Calculados Analiticamente.	72

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EC	Elemento de Contorno
EDP	Equação Diferencial Parcial
FBR	Função de Base Radial
FBRSC	Função de Base Radial com Suporte Compacto
FPT	Função de Potência Truncada
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MECDR	Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade
MECID	Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta
MEF	Método dos Elementos Finitos
MN	Métodos Numéricos

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	17
1.1	COMENTÁRIOS PRELIMINARES	17
1.2	OBJETIVO	18
1.3	RESENHA BIBLIOGRAFICA.....	19
2	O PROBLEMA DE AUTOVALOR	21
2.1	COMENTÁRIOS PRELIMINARES	21
2.2	FLAMBAGEM.....	22
2.3	ANÁLISE DE TENSÕES	24
2.4	MATERIAIS NÃO ISOTROPICOS.....	25
2.5	DINÂMICA DAS ESTRUTURAS.....	26
2.6	MÉTODOS DE SOLUÇÃO	27
2.6.1	MÉTODO DE JACOBI	28
2.6.2	MÉTODO DE FRANCIS (QR)	30
3	APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO AOS PROBLEMAS DE HELMHOLTZ	33
3.1	COMENTÁRIOS PRELIMINARES	33
3.2	DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ A PARTIR DA EQUAÇÃO DA ONDA	33
3.4	TRATAMENTO DO TERMO RELACIONADO AO LAPLACIANO	36
3.5	EMPREGO DE FUNÇÕES RADIAIS COM O MEC.....	38
3.6	A FORMULAÇÃO MECID.....	40
3.7	O PROBLEMA DE AUTOVALOR COM A MECID.....	43
4	SIMULAÇÕES TESTE COM FUNÇÕES DE BASE RADIAL.....	45
4.1	COMENTÁRIOS PRELIMINARES	45
4.2	FUNÇÕES DE BASE RADIAL.....	46
4.3	FUNÇÕES DE BASE RADIAL COM SUPORTE COMPACTO.....	47
4.3.1	FUNÇÕES DE WENDLAND DE SUPORTE COMPACTO	48
4.3.2	FUNÇÕES DE WU DE SUPORTE COMPACTO.....	49
4.4	VIBRAÇÃO EM MEMBRANA RETANGULAR TOTALMENTE FIXADA	51
4.4.1	RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÕES	53
4.4.2	CONCLUSÕES PARCIAIS.....	61
4.5	BARRA ENGASTADA	62
4.5.1	RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÕES	64
4.5.2	CONCLUSÕES PARCIAIS.....	71
4.6	VIBRAÇÃO EM MEMBRANA CIRCULAR TOTALMENTE FIXADA.....	71
4.6.1	RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÕES	73
4.6.2	CONCLUSÕES PARCIAIS.....	83
5	PROCEDIMENTO DE REGULARIZAÇÃO	84
5.1	INTRODUÇÃO.....	84
5.2	FORMULAÇÃO.....	84
5.3	COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS	87
5.3.1	MEMBRANA RETANGULAR TOTALMENTE FIXADA.....	88
5.3.2	MEMBRANA CIRCULAR TOTALMENTE FIXADA.....	94
5.3.3	BARRA ENGASTADA	100

5.4	CONCLUSÕES.....	104
6	CONCLUSÕES.....	105
	BIBLIOGRAFIA	108
	ANEXO I – ENCONTRANDO AS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO PRIMITIVAS .	113

1 INTRODUÇÃO

1.1 COMENTÁRIOS PRELIMINARES

Um critério para avaliação do patamar alcançado pela evolução humana pode ser proposto considerando-se a complexidade dos problemas matemáticos que já foram resolvidos. Muitos outros ainda estão por serem solucionados e os métodos numéricos aparecem como uma útil ferramenta para auxiliar na solução desses problemas, agilizando e muitas vezes possibilitando a obtenção de resultados inacessíveis a outros procedimentos. O aumento da variedade e complexidade dos problemas na engenharia faz com que haja uma busca incessante por melhoria da qualidade e potencialidade dos métodos numéricos, sempre buscando resultados mais precisos e diminuição do custo computacional, entre outros fatores, como a busca por processadores mais poderosos.

Problemas que parecem corriqueiros, como a prospecção sísmica e o movimento das ondas, entre outros, podem apresentar uma modelagem matemática extremamente complicada, que os torna praticamente impossíveis de resolver analiticamente. Porém é necessário que esses problemas e muitos outros sejam resolvidos para atender as demandas da sociedade moderna.

Assim, a utilização de métodos numéricos está cada dia mais comum na prática da engenharia, auxiliando na resolução de problemas, na criação de novos produtos, na modificação de projetos, na substituição de materiais, etc. Essa difusão no meio industrial ocorre, sobretudo, porque diferentemente das técnicas analíticas, as técnicas numéricas se adaptam facilmente à modelagem de configurações físicas e geométricas das mais diversas, proporcionando uma gama de diferentes resultados de forma rápida e relativamente barata, bastando introduzir os diferentes parâmetros de projeto.

Os métodos numéricos mais usuais atualmente possuem como ideia principal a discretização, que é a substituição do meio contínuo por um número finito de pontos, que possuem representatividade matemática para tal. Essa discretização pode ser feita em todo domínio, como feito no Método das Diferenças Finitas (GRIFFITHS e MITCHELL, 1980), no Método dos Volumes Finitos (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007) e no Método dos Elementos Finitos (HUGHES, 2012), ou

ainda pode ser feita apenas no contorno, como ocorre no Método dos Elementos de Contorno (MEC) (BREBBIA, 1982). Este último é uma técnica já conhecida desde os anos 1970, que utiliza os recursos da Teoria das Equações Integrais (BANERJEE e BUTTERFIELD, 1981) e do Cálculo Vetorial (CHEN e HONG, 1999) para gerar expressões matemáticas que envolvem apenas integrais no contorno e funções de ponto. Por não realizarem integrações de domínio, as matrizes finais originadas da discretização ficam reduzidas em uma dimensão, comparativamente às técnicas de domínio, e dessa forma diminui-se o número de operações necessárias para obtenção dos resultados (SOUZA, 2013).

Como as demais técnicas previamente mencionadas, o MEC tem passado sistematicamente por grande desenvolvimento desde sua elaboração, aprimorando-se e servindo cada vez mais a numerosas aplicações, buscando também mais precisão e redução em seu dispêndio computacional.

Neste contexto, aborda-se uma técnica - a MECID - que pode ser entendida como uma contribuição em meio às diversas formulações originadas da proposta básica do MEC. No caso, realizam-se aproximações diretas no núcleo de integrais que não possuem operadores auto-adjuntos através de funções de base radial (RBFs) (LOEFFLER, PEREIRA e BARCELOS, 2014) atualmente muito em voga com o método dos elementos finitos e outras técnicas ditas *meshless* (LOEFFLER, MANSUR e BARCELOS, 2015).

1.2 OBJETIVO

Os objetivos deste trabalho são testar dois diferentes procedimentos no contexto da MECID visando melhorar seu desempenho em termos de precisão computacional. Escolheu-se o problema de autovalor, originado da abordagem da Equação de Helmholtz nas condições de movimento livre para realização dos seguintes procedimentos:

- Testar o MECID com diferentes funções de base radial, incluindo funções mais simples, como as clássicas Funções de Base Radial, até as mais modernas e teoricamente mais robustas, como as Funções de Base Radial com Suporte Compacto, embora por razões expostas doravante, sejam testadas com o suporte pleno.

- Comparar os resultados da formulação MECID original com a nova técnica que utiliza o esquema de regularização de Hadamard.

1.3 RESENHA BIBLIOGRAFICA

O MEC foi formalmente apresentado em 1978, com a publicação do livro “The Boundary Element Method for Engineers” (BREBBIA, 1978), anteriormente o esforço para desenvolver o método já aparecia em alguns artigos e sua utilização era feita quase exclusivamente por matemáticos e físicos. O método foi adotado, na maioria dos casos, para aplicações em engenharia nas áreas da mecânica e da civil.

Desde 1978 diversos pesquisadores utilizaram o MEC para resolver problemas importantes da engenharia como: Kagami e Fukai em 1984 aplicaram o MEC com a equação de Helmholtz; Chang e Tan em 1990 verificaram a influência da espessura de metalização em linhas de microfita blindadas (Equação de Schrödinger-Poisson); Collin em 1991 usou o MEC na solução de problemas de autovalores; Kagawa et al. Estudaram a equação escalar de Helmholtz pelo MEC a partir da formulação variacional em 1996; em 1998, Shen e Sterz propuseram uma melhoria nos problemas numéricos devidos aos cantos geométricos; entre outros. (POUZADA, 1999)

Para classes de problemas em que o MEC não consegue transformar todas as integrais inicialmente de domínio em integrais envolvendo somente variáveis de contorno, como acontece em alguns casos na Teoria de Campo Escalar e também na Elasticidade para resolver esse problema surgiram diferentes proposta, onde a mais utilizada é a técnica de dupla reciprocidade (MECDR). Tal técnica foi desenvolvida em 1982 e consiste na substituição da ação de domínio por uma combinação linear de um produto de novas funções, que são operacionalizadas e tem suas integrais transformadas em integrais de contorno, como feito no MEC tradicional (BULCÃO, 1999).

De 2012 até os presentes dias, uma frente de estudos orientada pelo Professor Doutor Carlos Friedrich Loeffler foi desenvolvida para apresentar, avaliar desempenho e melhorias da técnica MECID, uma potente ferramenta com tratamento matemático mais simplificado que é uma opção para os problemas resolvidos anteriormente pela técnica da dupla reciprocidade. Inicialmente a técnica

foi apresentada formalmente utilizando funções de base radial por Cruz, em 2012. Seguido pela aplicação com funções mais robustas por Souza, em 2013. Em 2014, Barcelos utilizou o MEF para comparar a qualidade dos resultados apresentado pelo método. O presente trabalho busca agregar ainda mais aos bons resultados já apresentados.

2 O PROBLEMA DE AUTOVALOR

2.1 COMENTÁRIOS PRELIMINARES

A formulação do problema de autovalor é aparentemente simples e é conhecida há muitos anos, porém a determinação exata da solução pode mostrar-se demasiadamente difícil.

A proposição fundamental do problema de autovalor é a determinação de n valores λ para um conjunto de n equações lineares homogêneas com n incógnitas. Considere, então, que a matriz quadrada A contenha os coeficientes das equações e as incógnitas sejam organizadas no vetor x , como mostrado matricialmente em (2.1).

$$Ax = \lambda x \quad (2.1)$$

Admita haja uma solução não trivial. Reescrevendo-se a Eq. (2.1) na seguinte forma:

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (2.2)$$

A solução trivial só será obtida se, e somente se, a matriz $(A - \lambda I)$ é singular. Sendo assim, seu determinante deve ser nulo (WILKINSON, 1965):

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (2.3)$$

O determinante do lado esquerdo da equação pode ser expandido como uma equação polinomial:

$$\alpha_0 + \alpha_1 \lambda' + \dots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + (-1)^n \lambda^n = 0 \quad (2.4)$$

Na equação (2.4) os coeficientes α são funções dos componentes da matriz A e são encontrados conforme o determinante imposto.

A equação (2.4) é chamada de equação característica da matriz A e o polinômio do lado esquerdo é conhecido como polinômio característico. Desde que λ^i não seja nulo e excluindo os números complexos na composição da matriz A , a equação característica sempre terá n raízes. Em geral, as raízes podem ser complexas, mesmo se A for real. As raízes da equação característica são chamadas de

autovalores, raízes latentes, valores característicos ou valores adequados da matriz A .

Resolver a equação (2.4) analiticamente, na prática, torna-se um exercício matemático árduo, considerando que as matrizes provenientes de discretização de domínio podem ser de alta ordem. Muitos sistemas possuem milhões de graus de liberdade, o que seria impossível de se resolver sem o recurso dos computadores. Logo é usual a resolução dos problemas de autovalores utilizando métodos numéricos adequados.

Como mostrado na equação (2.2) para cada valor de λ haverá pelo menos uma solução não trivial x , conhecido como autovetor correspondente ao autovalor.

É interessante comentar que o problema de autovalor apresenta várias propriedades interessantes, tal como: a equação característica pode ser fatorada; o traço da matriz é igual à soma dos autovalores; o produto dos autovalores é igual ao determinante da matriz; a matriz e sua transposta possuem os mesmos autovalores; se a matriz é triangular seus autovalores são os elementos da diagonal; permuta de linhas e colunas não alteram os autovalores; entre outras. (WILKINSON, 1965)

Normalmente, quando se resolve uma equação diferencial parcial (EDP) utilizando um método numérico é gerado um sistema discreto, em muitos desses casos – particularmente os problemas estruturais - haverá o termo referente à inércia, o que possibilita escrevê-la na forma de um problema de autovalor.

Para melhor estimar a importância do problema de valor característico a seguir são mostrados alguns exercícios de engenharia que decaem na necessidade da resolução de um problema dessa natureza.

2.2 FLAMBAGEM

A flambagem é a deflexão lateral que pode ocorrer em colunas e também em demais elementos estruturais compridos e esbeltos, como chapas, placas e cascas sujeitas à carga de compressão, quando essa ultrapassa um limite crítico. Em colunas o problema é relativamente simples de formular e compreender, além de ser bastante importante na engenharia estrutural. Surge porque na prática, sempre há desalinhamentos e excentricidades materiais e geométricas que induzem a

produção de momentos fletores (HIBBELER, 2006). A figura 1 ilustra o caso simples de uma coluna sofrendo flambagem.



Figura 1 – Flambagem ocorrendo em uma barra de seção retangular. A flambagem ocorrerá em torno do eixo a-a devido ao menor momento de inércia. Fonte: Hibbeler, 2006.

Considerando os conteúdos da Mecânica das Estruturas (PIMENTA, 2002), um problema estrutural já discretizado é resolvido pela solução do sistema:

$$f = Ku \quad (2.5)$$

Onde f é o vetor de forças nodais, u é o vetor de deslocamentos nodais e K é a matriz de rigidez global da estrutura, obtida através de procedimentos típicos de discretização, como os empregados na Análise Matricial das Estruturas ou pelos modernos métodos de discretização já mencionados, como o Método dos Elementos Finitos.

A equação (2.5) é válida para deformações pequenas. Caso maiores deformações não possam ser negligenciadas, deve-se analisar as estruturas utilizando a configuração diferente da original, ou seja, na posição de equilíbrio após a deformação. Esse modelo trabalha com um segundo tipo de rigidez, nomeado como

rigidez geométrica. Tal problema pode ser resolvido pelo problema de autovalores e autovetores, dado por (GAVIN 2012):

$$(K - \lambda G)w = 0 \quad (2.6)$$

Onde K é a matriz de rigidez, G é a matriz de rigidez geométrica da estrutura, λ é a carga crítica de flambagem (autovalor) e w é o modo de flambagem (autovetor). O modo de flambagem representa o número de ondas na forma defletida da coluna.

2.3 ANÁLISE DE TENSÕES

Tensão é a grandeza que define a intensidade e a direção das forças internas num ponto particular, agindo num determinado plano (POPOV, 1990). Essas forças internas surgem das deformações causadas por forças externas aplicadas no corpo tentando neutralizá-las para garantir a integridade do contínuo.

Assim, em um dado ponto existe um estado de tensões, que em cada plano que passa por esse ponto define um vetor tensão. Cada componente do vetor tensão em um dado plano define uma componente de tensão particular. É interessante que o vetor tensão seja conhecido em três planos ortogonais, conforme define o conhecido paralelepípedo elementar das tensões, mostrado na figura 2 a seguir:

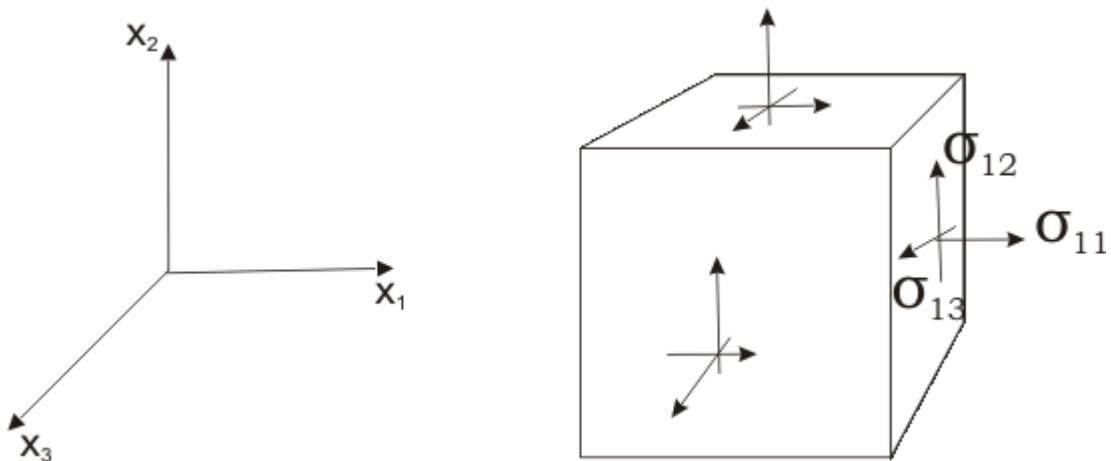


Figura 2 – Paralelepípedo elementar de tensões. Fonte: (TIMOSHENKO e GERE, 1993)

Considerando que não há momento distribuído:

$$\begin{cases} \sigma_{12} = \sigma_{21} \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} \end{cases} \quad (2.7)$$

Matricialmente a representação dos estados de tensão no ponto, segundo os planos e direções mostrados é:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

É possível afirmar que conhecendo o vetor tensão em três planos linearmente independentes, é possível defini-lo em qualquer plano. Sendo assim é fácil mostrar que uma tensão, t^m , em um plano m é dada matricialmente por (HIBBELER, 2006):

$$t^m = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} \quad (2.9)$$

Onde \mathbf{n} é o vetor normal ao plano ortogonal. Os planos ortogonais nos quais o vetor tensão tem direção coincidente com a normal, que não possuem tensão de cisalhamento, estes planos definem as direções principais. Nessas condições a matriz do estado de tensão é diagonal. Logo, matematicamente pode ser escrita como:

$$t^m = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n} \quad (2.10)$$

O que é semelhante a equação (2.1) e permite que esse problema seja solucionado através do problema de autovalor.

2.4 MATERIAIS NÃO ISOTROPICOS

Em meios rochosos e porosos é comum que os grãos constitutivos do material se apresentem sem direções preferenciais. Nessa situação, a velocidade u de passagem de um fluxo de calor ou escoamento de um fluido qualquer obedece à seguinte relação:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

O escalar Φ significa um potencial qualquer. É de interesse verificar se é possível encontrar uma nova organização matricial, de modo que não apenas o modelo matemático se simplifique, mas que fisicamente possam se encontrar direções nas quais o fluxo se processe preferencialmente. A figura 3 ilustra fisicamente o significado de encontrar um sistema de novas coordenadas que e ajuste as possíveis direções preferenciais no material:

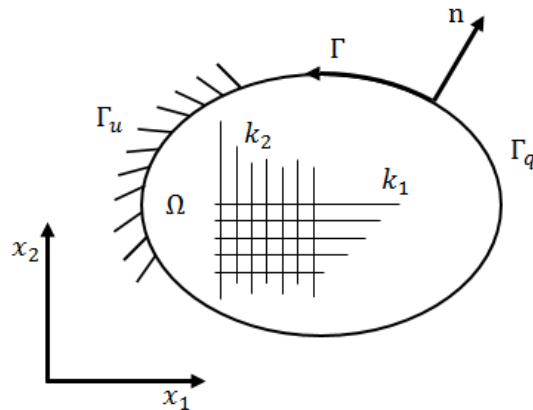


Figura 3 – Sistema de coordenadas alinhado às direções preferenciais do material. Fonte: Autor.

A identificação destas direções com relação ao sistema de coordenadas original se faz também na forma de um problema de valor característico (KYTHE, 1995):

$$Ku = -\lambda^2 u \quad (2.12)$$

Identificadas tais direções, a Eq. (2.11) pode ser escrita de modo mais simples:

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda_I & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{III} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z'} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} K_I & 0 & 0 \\ 0 & K_{II} & 0 \\ 0 & 0 & K_{III} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

2.5 DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

Considerando a dinâmica de sistemas estruturais discretos com vários graus de liberdade, pode ser escrita uma equação matricial de movimento na seguinte forma, caso não seja computado o amortecimento estrutural:

$$MU + KU = F \quad (2.14)$$

Na equação (2.14), K é a matriz de rigidez (análoga a matriz dada na Eq. 2.5), M é a matriz de massa e F é um vetor nodal das forças aplicadas. No caso da vibração livre, em que se procuram configurações autoequilibradas, o vetor das forças F é nulo admite-se o movimento harmônico em que:

$$U(X, t) = u(X)e^{-i\omega t} \rightarrow \ddot{U}(X, t) = -\omega u(X)e^{-i\omega t} \quad (2.15)$$

A consideração das equações anteriores torna possível a resolução do problema de autovalor, dado por:

$$-\omega^2 Mu + Ku = 0 \quad (2.16)$$

Ou melhor:

$$(k - \omega^2 M)u = 0 \quad (2.17)$$

Para evitar a solução trivial, toma-se o determinante nulo, conforme ocorreu nos casos anteriores. Nesse caso, as raízes ou autovalores correspondem ao quadrado das freqüências naturais de um sistema estrutural. A cada uma dessas raízes corresponde um vetor característico que é chamado modo natural de vibração.

É exatamente a partir dessa concepção que se forma o problema abordado nesta dissertação. Visando um maior detalhamento, esse mesmo problema será apresentado com maior rigor em capítulo próximo, considerando-o como um caso particular da conhecida Equação da Onda (GAUL, KÖGL e WAGNER, 2013).

2.6 MÉTODOS DE SOLUÇÃO

O problema de autovalor pode parecer, inicialmente, de simples solução, mas como mostrado no primeiro subtópico desse capítulo a solução passa pela resolução de um determinante que, dependendo do tamanho da matriz torna-se impraticável de implementar analiticamente. Logo, é interessante apresentar algoritmos numéricos construídos para se calcular os autovalores. São apresentados dois métodos clássicos para se encontrar os autovalores: o bem conhecido Método de Jacobi, que

trabalha com matrizes simétricas e é amplamente usado com o Método dos Elementos Finitos (BATHE, 2006); e o Método de Francis, concebido para lidar com matrizes assimétricas. Adianta-se que pelo fato do MEC gerar matrizes não simétricas, esta última técnica é implementada no código computacional empregado nas simulações desta dissertação.

2.6.1 Método de Jacobi

As matrizes simétricas de ordem n possuem seguramente n autovalores reais e n autovetores linearmente independentes (BOLDRINI, et al. 1980). O Método de Jacobi consiste em aplicar uma série de transformações similares (U) (FRANCO, 2006):

$$A_{k+1} = U_k^{-1} A_k U_k \quad (2.18)$$

Onde $k = 1, 2, \dots, m$ e $A_1 = A$. Com a aplicação das transformações a Matriz A converge para uma matriz A_{m+1} (equação (2.19)) quase diagonal com os autovalores aproximados aos de A . Lembrando que os autovalores de uma matriz diagonal são os elementos de sua diagonal, utiliza-se essa aproximação para o caso da matriz quase diagonal, sendo que os elementos fora da diagonal em uma matriz quase diagonal deve ser próximos suficientes de zero (quanto mais próximos de zero, mais próximos serão os autovalores encontrados).

$$A_{m+1} = U_m^{-1} \dots U_2^{-1} U_1^{-1} A U_1 U_2 \dots U_m \quad (2.19)$$

É interessante ressaltar que os autovetores podem ser encontrados aproximadamente fazendo o produto das matrizes U 's, formando uma matriz V . As colunas de V serão as aproximações dos autovetores de A .

Para criar as matrizes U precisa-se utilizar o conceito da Rotação de Jacobi. Ou seja, a matriz U de ordem n , tem elementos definidos por:

$$\begin{cases} u_{pp} = u_{qq} = \cos(\phi), \\ u_{pq} = -u_{qp} = \text{sen}(\phi), \\ u_{ii} = 1, \quad i \neq p, \quad i \neq q, \\ u_{ij} = 0, \quad ij \neq pq, ij \neq qp. \end{cases} \quad (2.20)$$

Uma rotação (p, q) de Jacobi é a operação da equação (2.18) que é uma transformação de semelhança na matriz A . Essa transformação alterará os elementos das linhas e colunas p e q ($a_{pp}, a_{pq}, a_{qp}, a_{qq}$), portanto A_{k+1} continua simétrica. Os elementos que foram modificados têm a seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{pp}^{k+1} = a_{pp}^k \cos^2 \phi - 2a_{pq}^k \sin \phi \cos \phi + a_{qq}^k \sin^2 \phi, \\ a_{qq}^{k+1} = a_{pp}^k \sin^2 \phi + 2a_{pq}^k \sin \phi \cos \phi + a_{qq}^k \cos^2 \phi, \\ a_{pq}^{k+1} = a_{qp}^{k+1} = (a_{pp}^k - a_{qq}^k) \sin \phi \cos \phi + a_{pq}^k (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi). \end{cases} \quad (2.21)$$

Tomando o primeiro passo para obter a matriz A_2 , consiste em escolher o maior elemento em módulo fora da diagonal de A_1 , isto é:

$$a_{pq}^2 = \max_{i \neq j} (a_{ij}^1) \quad (2.22)$$

A rotação deve ser feita objetivando zerar o elemento a_{pq} . E o processo deve ser feito até que a matriz A seja reduzida a uma matriz quase diagonal. Para se zerar o elemento a_{pq}^{k+1} utiliza-se (2.21), fazendo:

$$a_{pq}^{k+1} = (a_{pp}^k - a_{qq}^k) \sin \phi \cos \phi + a_{pq}^k (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) = 0 \quad (2.23)$$

Portanto:

$$a_{pp} - a_{qq} = -\frac{a_{pq} \cos 2\phi}{\frac{1}{2} \sin 2\phi} = -2a_{pq} \cotg 2\phi \quad (2.24)$$

$$\cotg 2\phi = \frac{a_{pp} - a_{qq}}{2 a_{pq}} = \theta \quad (2.25)$$

Reorganizando:

$$\theta = \frac{1 - tg^2 \phi}{2tg \phi} \quad (2.26)$$

Chamando $tg \phi = t$ obtêm-se a partir de (2.26) uma equação de segundo grau que possui solução:

$$t = \frac{1}{\theta \pm \sqrt{\theta^2 + 1}} \quad (2.27)$$

Computacionalmente, adota-se:

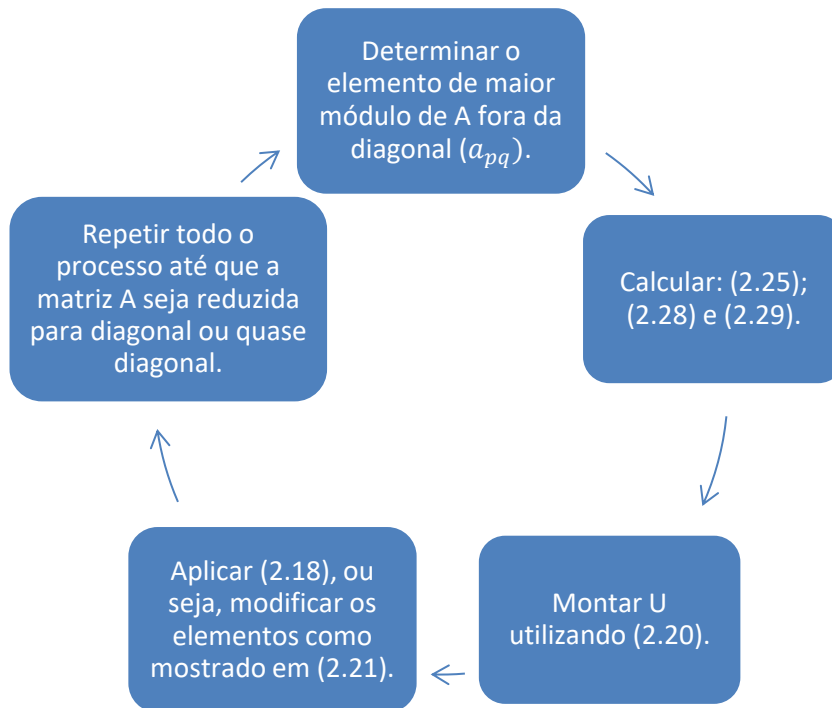
$$t = \begin{cases} \frac{1}{\theta \pm \text{Sinal}(\theta)\sqrt{\theta^2 + 1}}, & \theta \neq 0; \\ 1, & \theta = 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

O sinal deve ser adotado de modo a obter o denominador de maior módulo. Logo utilizando a propriedades trigonométricas, escreve-se:

$$c = \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \quad (2.29)$$

$$s = \text{sen } \phi = \cos \phi \cdot t = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$$

Resumidamente o algoritmo do Método de Jacobi, pode ser esquematizado pelo seguinte fluxograma:



É importante comentar que existem outros métodos menos custosos que também podem ser aplicados para encontrar autovalores de matrizes simétricas.

2.6.2 Método de Francis (QR)

Quando se tem uma matriz assimétrica, os algoritmos numéricos voltados para encontrar autovalores têm como objetivo transformar a matriz da qual se quer

calcular os autovalores associados em uma matriz quase triangular superior ou inferior, ou seja, matrizes que possuam os elementos da diagonal abaixo ou acima da diagonal principal tão próximos de zero quanto se deseja. Essa matriz é chamada de matriz de Hessenberg superior ou inferior. Pela álgebra matricial sabe-se que os elementos da diagonal são os autovalores (ACTON, 1970).

No Método de Francis tendo uma matriz A de ordem n decompõe-se essa matriz como o produto de duas outras matrizes:

$$A_1 = Q_1 R_1 \quad (2.30)$$

Onde Q é uma matriz ortogonal (ou seja, $Q Q^T = Q^T Q = I$), R é uma matriz triangular superior e $A_1 = A$. Para obter a próxima matriz da sequência (objetivando obter uma matriz A_k quase triangular) inverte-se a ordem do produto:

$$A_2 = R_1 Q_1 \quad (2.31)$$

Novamente aplica-se (2.30):

$$A_2 = Q_2 R_2 \quad (2.32)$$

Aplica-se (2.31) e (2.32) sucessivamente até obter-se uma matriz quase triangular (A_k), cujos elementos da diagonal são os autovalores. É importante ressaltar que o processo deve ser repetido até os elementos abaixo da diagonal principal sejam menores que a precisão estabelecida.

A cada passo (2.32) devem-se determinar as matrizes Q e R . Para isso, considerando uma matriz de ordem 4, deve-se fazer:

- Achar uma matriz U_1 , ortogonal, tal que a multiplicação por A zera o elemento a_{31} .
- Achar uma matriz U_2 , ortogonal, tal que a multiplicação por $U_1 A$ zera o elemento a_{41} .
- Achar uma matriz U_3 , ortogonal, tal que a multiplicação por $U_1 A$ zera o elemento a_{42} .

- Para definir R faz-se:

$$R = U_s \cdots U_2 U_1 A \quad (2.33)$$

- Como as matrizes U são ortogonais, $U^{-1} = U^T$:

$$A = \underbrace{U_1^T U_2^T \cdots U_s^T}_Q R \quad (2.34)$$

O valor de s dependerá do número de elementos que devem ser aproximados suficientemente de zero para que A seja transformada em uma matriz de Hessenberg superior.

3 APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO AOS PROBLEMAS DE HELMHOLTZ

3.1 COMENTÁRIOS PRELIMINARES

A prática da engenharia apresenta diversos problemas regidos por equações diferenciais parciais (EDPs). A solução dessas EDPs não são simples e usualmente são impossíveis de se resolver analiticamente, especialmente se representam contornos irregulares e possuem condições de carregamento ou excitação simples, levando a necessidade da utilização de métodos numéricos (MN) para obtenção de resultados. Tais métodos geralmente utilizam o conceito já mencionado de discretização do domínio, como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método das Diferenças Finitas (MDF). Porém, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) se diferencia desses por trabalhar com discretização apenas no contorno do domínio.

Ao reduzir a dimensão do problema, no MEC, possibilita que os sistemas lineares sejam menores. Numerosas experiências computacionais demonstram que o MEC permite uma modelagem precisa no caso de ações concentradas, problemas de contato entre superfícies, fratura, fronteiras móveis, meios semi-infinitos e infinitos e permite o cálculo simultâneo de variável básica e sua derivada normal com elevada exatidão. (SOUZA, 2013)

A eficiência do MEC já foi amplamente comprovada em problemas de campo escalar como a difusão térmica, escoamentos potenciais e acústica, diversos problemas de campo vetorial, como os casos de elasticidade bi e tridimensional e teoria de placas já foram abordados com ótimo desempenho.

3.2 DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ A PARTIR DA EQUAÇÃO DA ONDA

As Equações de Helmholtz estão dentro do grupo das equações de campo escalar e representam problemas nas mais diversas áreas, como a Física Quântica, a Química e o Eletromagnetismo. Na representação de problemas acústicos, representam as vibrações livres de um meio no qual há propagação de energia mecânica (BARCELOS, 2014).

É interessante deduzi-la como um caso particular de uma equação mais geral. Assim, antecedendo o desenvolvimento matemático do MEC junto à equação de Helmholtz, primeiramente é demonstrada a dedução desta a partir da equação diferencial da onda acústica (GAUL, KÖGL e WAGNER, 2013):

$$U_{,ii}(X, t) = \frac{1}{c^2} \ddot{U}(X, t) \quad (3.1)$$

Onde na equação (3.1) $U(X, t)$ é a resposta espacial do sistema para quaisquer excitações com o tempo, pode significar a pressão ou o tensor dilatação num meio acústico (BUTKOV 1988), c é a velocidade de propagação da onda acústica, dada por:

$$c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (3.2)$$

Assim, no caso particular em que se procura a resposta produzida no sistema através de uma excitação de frequência variável cuja ω é conhecida, o potencial $U(X, t)$ é composto por uma resposta vibracional conteúdo específico, da forma a seguir. Na análise vibracional as configurações de equilíbrio associado às frequências naturais são buscadas. Pode-se admitir que o movimento, como a soma de harmônicos:

$$U(X, t) = u(X)e^{i\omega t} \quad (3.3)$$

Derivando 3.3, duas vezes, em relação ao tempo:

$$\ddot{U}(X, t) = -\omega^2 u(X)e^{i\omega t} \quad (3.4)$$

Fazendo o mesmo, em relação a X :

$$U_{,ii}(X, t) = u_{,ii}e^{i\omega t} \quad (3.5)$$

Aplicando 3.4 e 3.5 em 3.1:

$$u_{,ii}(X)e^{i\omega t} = -\frac{1}{c^2} \omega^2 u(X)e^{i\omega t} \quad (3.6)$$

Então, finalmente, tem-se a Equação de Helmholtz que é uma EDP que não apresenta dependência com relação à variável tempo:

$$u_{,ii}(X) = -\frac{1}{c^2}\omega^2 u(X) \quad (3.7)$$

3.3 FORMULAÇÃO INTEGRAL ASSOCIADA À EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

Principiando as etapas de dedução do MEC está sua formulação em termos de equações integrais, obtidas a partir da multiplicação de ambos os lados da equação 3.7 por uma função auxiliar $u^*(\xi; X)$ e sua integração em todo o domínio físico $\Omega(X)$ do problema:

$$\int_{\Omega} u_{,ii}(X)u^*(\xi; X) d\Omega = -\frac{1}{c^2}\omega^2 \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X) d\Omega \quad (3.8)$$

A forma integral anterior é conhecida como forma integral forte (BREBBIA, 1978). A função $u^*(\xi; X)$ é tomada como sendo a solução de um problema correlato, visando à construção de um espaço funcional eficiente para minimização dos resíduos, quando se interpreta a equação integral (3.8) à luz dos princípios do Método dos Resíduos Ponderados (EIGER, 1989). Nessa condição de função correlata é chamada de Solução Fundamental. O uso da função correlata resulta numa elevada precisão numérica dos resultados do MEC. No caso da equação de Helmholtz, a solução fundamental possui argumentos complexos e impede a obtenção das frequências naturais pela solução direta dos problemas de autovalor ou valor característico (BREBBIA e DOMINGUEZ, 1994). Assim, formulações alternativas que empregam soluções fundamentais diferente das do problema, tem sido objeto de estudos há cerca de duas décadas, ressaltando-se a formulação com Dupla Reciprocidade (PARTRIDGE, BREBBIA e WROBEL, 1992).

Assim, neste trabalho ao empregar-se a MECID, uma estratégia semelhante à técnica da Dupla Reciprocidade é utilizada: emprega-se a solução fundamental do problema de Laplace, que se refere à integral contida no lado esquerdo da equação 3.8 e aproxima-se o termo inercial usando-se uma primitiva das funções de base radial para criar um operador auto-adjunto e então transformar todo o equacionamento em equações integrais de contorno e funções de ponto.

Sabe-se que a precisão da formulação matemática ao usar uma função auxiliar que tem um parentesco mais distante com o problema a ser resolvido decresce, mas as experiências numéricas têm mostrado que essa redução no desempenho ainda assim produz resultados satisfatórios para as aplicações em engenharia, garantindo, por outro lado, uma flexibilidade maior ao MEC. É exatamente o tratamento desse termo associado ao Laplaciano, usando uma solução fundamental mais simples que é mostrado neste item que se segue e nos demais.

3.4 TRATAMENTO DO TERMO RELACIONADO AO LAPLACIANO

Para os problemas governados pela Equação de Laplace sabe-se que a solução fundamental $u^*(\xi; X)$ é dada por (BREBBIA, 1978):

$$u^*(\xi; X) = -\frac{\ln r(\xi; X)}{2\pi} \quad (3.9)$$

Sendo $r(\xi; X)$ a distância euclidiana entre o ponto fonte ou de aplicação de carga ξ e um ponto X genérico do domínio chamado ponto de campo. A forma forte da equação de Laplace é:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = 0 \quad (3.10)$$

Integrando a equação (3.10) por partes duas vezes obtêm-se a forma fraca, utilizada no desenvolvimento matemático de outros métodos numéricos:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Omega} (u_{,i} u^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} u_{,i} u^*_{,i} d\Omega \quad (3.11)$$

Integrando por partes novamente, obtêm-se a forma integral inversa:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Omega} (u_{,i} u^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} (u u^*_{,i})_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} u u^*_{,ii} d\Omega \quad (3.12)$$

Juntando (3.10) e (3.12):

$$\int_{\Omega} (u_{,i} u^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} (u u^*_{,i})_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} u u^*_{,ii} d\Omega = 0 \quad (3.13)$$

Utilizando o Teorema da Divergência (STEWART, 2001) no primeiro e no segundo termo de (3.13):

$$\int_{\Gamma} u_{,i} n_i u^* d\Omega - \int_{\Gamma} u u_{,i}^* n_i d\Omega + \int_{\Omega} u u_{,ii}^* d\Omega = 0 \quad (3.14)$$

Sabendo que n_i é o vetor normal à superfície no ponto campo fica mais simples escrever:

$$u_i n_i = q \quad (3.15)$$

$$u_{,i}^* n_i = q^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi r(\xi; X)} \frac{\partial r(\xi; X)}{\partial n} \quad (3.16)$$

Onde q^* é chamado de fluxo fundamental (BREBBIA, 1978). Reescrevendo-se, então, a Eq. 3.11:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} q u^* d\Omega - \int_{\Gamma} u q^* d\Omega + \int_{\Omega} u u_{,ii}^* d\Omega \quad (3.17)$$

Para tratar o termo que permanece no domínio é necessário relacionar a solução fundamental com a função Delta de Dirac (3.18) e utilizar as propriedades dessa função como apresentado em 3.19. (COURANT e JOHN, 1974)

$$u_{,ii}^* = -\Delta(\xi; X) \quad (3.18)$$

$$\int_{\Omega} u u_{,ii}^* d\Omega = - \int_{\Omega} u \Delta(\xi; X) d\Omega = -c(\xi)u(\xi) \quad (3.19)$$

Como $c(\xi)$ é função do termo fonte e esse pode ser localizado em qualquer lugar dentro e fora do domínio, esse valor respeita condições especiais (BREBBIA, 1978). Uma analogia interessante para obter o valor de $c(\xi)$ é imaginar o ponto fonte como sendo um círculo que estará totalmente pintado se estiver localizado dentro do domínio ($c(\xi) = 1$) e totalmente sem cor se estiver fora do domínio ($c(\xi) = 0$), caso o ponto se encontre no contorno o valor de $c(\xi)$ variará entre esses dois extremos, sendo ($c(\xi) = 0,5$) para um ponto fonte em contorno reto (que não esteja nas extremidades). Sendo assim pode-se escrever $c(\xi)$ em função de um ângulo α , em radianos, que representa o espaço do círculo que está dentro do domínio.

$$c(\xi) = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (3.20)$$

Sendo assim, a equação (3.17) torna-se:

$$-\int_{\Omega} uu_{,ii}^* d\Omega = c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} uq^* d\Omega - \int_{\Gamma} qu^* d\Omega \quad (3.21)$$

3.5 EMPREGO DE FUNÇÕES RADIAIS COM O MEC

A busca de melhores e mais flexíveis soluções para problemas matematicamente heterogêneos, como os problemas de Poisson e os casos dependentes do tempo, em especial os problemas dinâmicos, tem despendido certo esforço dos pesquisadores. Um dos recursos mais eficazes tem sido a associação de formulações do MEC com funções de base radial, visando simplificações operacionais.

Trabalhos anteriores já mostraram que o MEC apresenta bom desempenho em aplicações nas quais os operadores que caracterizam matematicamente a equação de governo são autoadjuntos (BREBBIA, TELLES e WROBEL, 1984). Porém, nem todos os problemas podem ser representados por operadores diferenciais ou apresentam forma integral inversa associada complicada.

As funções radiais, que são funções baseadas na formação de um espaço funcional discreto a partir da identificação da distância euclidiana entre pontos de discretização, tem se mostrado um dos recursos mais eficazes, não apenas com o MEC, mas com outros métodos numéricos, especialmente o MEF, nas suas formulações *meshless* (BELYTSCHKO, et al. 1996).

Não se pode identificar precisamente quando as funções radiais passaram a ser usadas ostensivamente na engenharia. Por isso, é oportuno destacar que Nardini e Brebbia (1982) aplicaram-nas na abordagem de certos problemas modelados com o Método dos Elementos de Contorno (MEC), visando à eliminação de integrais de domínio. Aplicações dessa formulação, denominada formulação com Dupla Reciprocidade (MECDR) foram bem-sucedidas em vários problemas, ressaltando-se os problemas que apresentam um operador linear com um termo não-homogêneo na equação de governo (BREBBIA, 1982). A integral de domínio resultante da operacionalização matemática desses termos não-homogêneos é transformada em integrais de contorno equivalentes pelo uso de funções auxiliares especiais que são devidamente aproximadas pelo uso de funções de base radial de suporte global.

A MECDR vem sendo empregado para problemas que apresentam operadores que não são auto-adjuntos, como casos transientes, respostas dinâmicas, problemas de valor característico e problemas caracterizados por fontes ou ações de domínio. Anteriormente, tais casos eram resolvidos de maneira mais custosa, menos flexível e complexa, usando soluções fundamentais correlatas (BREBBIA e WALKER, 1980); contudo com a utilização do MECDR puderam ser solucionados de maneira mais simples, usando as funções de base radial (LOEFFLER, 1988). Entretanto, o MECDR não é uma técnica simples de interpolação; ele apresenta algumas estratégias interessantes, entre as quais está a introdução de uma sequência de funções de base radial expressa em termos de uma função primitiva, que permite a aplicação dos recursos da integração por partes e Teorema da Divergência (LOEFFLER, PEREIRA e BARCELOS, 2014)

O MECDR apresenta problemas, como imprecisões numéricas nos casos em que muitos polos internos são necessários para representar propriedades de domínio, por exemplo, a inércia, o que resulta em mau condicionamento matricial e imprecisões numéricas no processamento dos esquemas incrementais de avanço no tempo.

A técnica denominada MECID (Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta) foi desenvolvida para resolver o termo integral de domínio, que normalmente representa fonte, inércia, sorvedouro, entre outras ações de campo. Utilizando um procedimento de aproximação com funções de base radiais, relativamente parecido com o MECDR, porém mais simples, robusto e geral. O MECID já foi utilizado com sucesso em problemas de Poisson (LOEFFLER e CRUZ, 2013).

O MECDR exige a construção de duas matrizes auxiliares de interpolação que multiplicam as matrizes clássicas H e G do MEC (BREBBIA, 1978). Atuando diferentemente, o MECID aproxima diretamente o núcleo da integral fazendo o uso de uma função primitiva, como feito num processo de simples interpolação. O que diferencia essa técnica de uma interpolação é a transformação da integral de domínio em uma de contorno. Diversos tipos de funções radiais podem ser utilizadas sem problemas de instabilidade, como ocorre constantemente com a MECDR.

Já foi mostrado (LOEFFLER e CRUZ, 2013) para problemas governados pela Equação de Poisson que, considerando pontos internos em quantidades suficientes, o desempenho da MECID mostra-se superior ao MECDR.

3.6 A FORMULAÇÃO MECID

Para apresentar sua aplicação ao problema de Helmholtz, apresenta-se a equação integral de governo (3.8), já reescrita com o lado esquerdo expresso exclusivamente em termos de integrais de contorno e uma função de ponto:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} uq^* d\Omega - \int_{\Gamma} qu^* d\Omega = \frac{1}{c^2} \omega^2 \int_{\Omega} uu^* d\Omega \quad (3.22)$$

A aplicação do MECID se faz exatamente na integral de domínio que persiste no lado direito da eq. 3.8.

Primeiramente, substitui-se o núcleo da integral por uma função e uma constante:

$$\int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X) d\Omega = \int_{\Omega} \xi \alpha^j F^j(X; X^j) d\Omega \quad (3.23)$$

Onde $\xi \alpha^j$ é uma constante que depende do ponto fonte (ξ) e dos pontos interpolantes (X^i) e $F^j(X; X^i)$ é uma função de interpolação. Neste trabalho serão utilizadas funções de base radial de várias categorias, que são apresentadas detalhadamente mais à frente. Como a ideia central do MEC é realizar integrações exclusivamente no contorno, é interessante utilizar artifícios matemáticos para levar (3.23) para o contorno. Inicialmente será utilizado uma função auxiliar ψ_{ii}^j que é a primitiva de $F^j(X; X^i)$.

$$\int_{\Omega} \xi \alpha^j F^j(X; X^j) d\Omega = \int_{\Omega} \xi \alpha^j \psi_{ii}^j d\Omega \quad (3.24)$$

Utilizando o teorema da divergência em (3.24):

$$\int_{\Omega} \xi \alpha^j \psi_{ii}^j d\Omega = \int_{\Gamma} \xi \alpha^j \psi_{ii}^j n_i d\Gamma = \int_{\Gamma} \xi \alpha^j \eta^j d\Gamma \quad (3.25)$$

Onde n_i é o vetor normal unitário ao contorno. Reescrevendo (3.8) utilizando (3.22) e (3.25):

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} uq^* d\Omega - \int_{\Gamma} qu^* d\Omega = \frac{1}{c^2} \omega^2 \left[\xi \alpha^j \int_{\Gamma} \eta^j d\Gamma \right] \quad (3.26)$$

O cálculo das funções primitivas e do seu produto pela normal, utilizados nesse trabalho será mostrado no Anexo I.

Matricialmente, a equação 3.26 pode ser escrita como:

$$\frac{c^2}{\omega^2} \left\{ \begin{bmatrix} H_{cc} & 0_{ci} \\ H_{ic} & I_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ u_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{cc} & 0_{ci} \\ G_{ic} & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_c \\ q_i \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} {}^1\alpha^1 & \dots & {}^1\alpha^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^n\alpha^1 & \dots & {}^n\alpha^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Cada termo do vetor $[A_{\xi}]$ corresponde a um dos pontos fonte. É importante ressaltar que para este método os pontos fonte devem ter localizações diferentes dos pontos campo X , feitos coincidentes com os pontos interpolantes, para evitar o problema da singularidade.

Os coeficientes $\xi \alpha^j$ podem ser encontrados da seguinte forma:

$$u(X)u^*(\xi; X) = \xi \alpha^j F^j(X^i; X) \quad (3.28)$$

Matricialmente:

$$[\xi \alpha] = [F]^{-1} [\xi \Lambda] [u] \quad (3.29)$$

A matriz $[\xi \Lambda]$ é a matriz diagonal, na qual os termos da diagonal são a solução fundamental. Logo cada termo A_{ξ} será:

$$[A_{\xi}] = (N_1 \quad \dots \quad N_n) \begin{pmatrix} {}^1F^1 & \dots & {}^1F^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^nF^1 & \dots & {}^nF^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi \Lambda^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \xi \Lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Nesse caso, é importante a utilização de uma matriz de interpolação dos valores nodais Φ , que visa evitar a singularidade, os pontos X são escolhidos em posição diferentes dos pontos fontes e dos pontos nodais. Reescrevendo (3.30) colocando em valores nodais de contorno:

$$[A_\xi] = \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} {}^1F^1 & \dots & {}^1F^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^nF^1 & \dots & {}^nF^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi\Lambda^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \xi\Lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{cc} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Phi_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Estas matrizes têm composição simples para os m pontos auxiliares de contorno. Os valores centralizados são a média dos valores nodais nos extremos:

$$\begin{pmatrix} u_1^c \\ \vdots \\ u_m^c \end{pmatrix} = (\Phi_{cc}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi u_1 \\ \xi u_2 \\ \vdots \\ \xi u_m \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Para os pontos internos, usa-se uma interpolação com funções de base radial, para relacionar os pontos fontes com os pontos internos interpolantes:

$$\begin{pmatrix} u_1^\xi \\ \vdots \\ u_p^\xi \end{pmatrix}^i = (F^j(X^j; X)^i) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}^i \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}^i = (F^j(X^j; X)^i)^{-1} \begin{pmatrix} u_1^\xi \\ \vdots \\ u_p^\xi \end{pmatrix}^i \quad (3.33)$$

Posteriormente, se relacionam os pontos internos interpoladores ou auxiliares com os pontos fontes, na forma:

$$\begin{pmatrix} u_1^a \\ \vdots \\ u_m^a \end{pmatrix} = (F) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}^i = (F) (F^j(X_j; X_a)^i)^{-1} \begin{pmatrix} u_1^\xi \\ \vdots \\ u_m^\xi \end{pmatrix}^i \quad (3.34)$$

Na matriz F cada linha é referente a um ponto interpolante e cada coluna se refere a um termo fonte. A quantidade de pontos auxiliares interpoladores pode ser maior, igual ou menor do que a quantidade de pontos fontes internos. Em princípio, um número similar produz resultados melhores. A organização dos pontos é mostrada na figura 4.

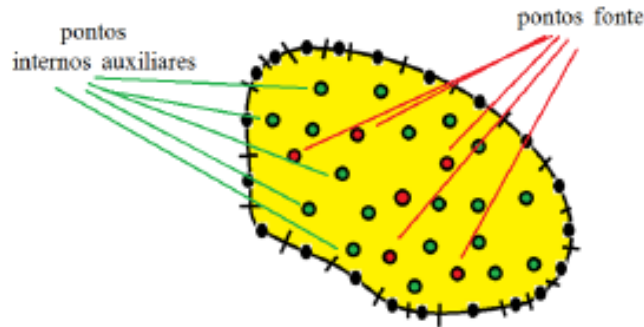


Figura 4 – Organização dos pontos fonte e pontos internos auxiliares no domínio. Fonte: (BARCELOS 2014)

É interessante pensar na construção de uma matriz de Massa M que pode ser montada da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} M_{cc} & \cdots & M_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{ic} & \cdots & M_{ii} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} {}^1F^1 & \cdots & {}^1F^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^nF^1 & \cdots & {}^nF^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi\Lambda^1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \xi\Lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{cc} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Phi_{ii} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Assim, a equação 3.27 pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} H_{cc} & 0_{ci} \\ H_{ic} & I_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ u_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{cc} & 0_{ci} \\ G_{ic} & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_c \\ q_i \end{bmatrix} = \frac{\omega^2}{c^2} \begin{bmatrix} M_{cc} & M_{ci} \\ M_{ic} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ u_i \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

3.7 O PROBLEMA DE AUTOVALOR COM A MECID

Neste trabalho, utiliza-se do cálculo das frequências naturais para avaliar o desempenho de aspectos numéricos relacionados à MECID, ou seja, são resolvidos problemas de Helmholtz postos na forma de um problema de autovalor.

É preciso, entretanto, adaptar as matrizes finais ao mencionado problema de valor característico, ou seja, é necessário reescrever a equação matricial final de acordo com a exigida situação de vibração livre, sem a presença de condições de Neuman, que representam as excitações externas.

As matrizes do problema de autovalor com o MEC envolvem simultaneamente os valores potenciais e suas respectivas derivadas normais (fluxo) (LOEFFLER e MANSUR, 1986). Assim, submatrizes devem ser utilizadas e definidas com índices subscritos, para caracterizar sua relação com os pontos nodais onde a prescrição é feita em termos da condição de Dirichlet (potencial) ou Neuman (Fluxo). Então:

$$\begin{bmatrix} H_{u\bar{u}} & H_{u\bar{q}} \\ H_{q\bar{u}} & H_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{u\bar{u}} & G_{u\bar{q}} \\ G_{q\bar{u}} & G_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \bar{q} \end{bmatrix} = \frac{\omega^2}{c^2} \begin{bmatrix} M_{u\bar{u}} & M_{u\bar{q}} \\ M_{q\bar{u}} & M_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ u \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

O problema de autovalor solicita condições de contorno essenciais e naturais nulos, portanto os valores prescritos para u e q são zero. Logo:

$$H_{u\bar{q}} u - G_{u\bar{u}} q = \frac{\omega^2}{c^2} M_{u\bar{q}} u \quad (3.38)$$

$$H_{q\bar{q}} u - G_{q\bar{u}} q = \frac{\omega^2}{c^2} M_{q\bar{q}} u \quad (3.39)$$

Das equações (3.38) e (3.39), eliminando a derivada do potencial q , obtêm-se:

$$[\bar{H}][u] = \frac{\omega^2}{c^2} [\bar{M}][u] \quad (3.40)$$

Onde $[u]$ é um vetor coluna e:

$$\begin{aligned} [\bar{H}] &= [H_{qq}] - [G_{qu}][G_{uu}]^{-1}[H_{uq}] \\ [\bar{M}] &= [M_{qq}] - [G_{qu}][G_{uu}]^{-1}[M_{uq}] \end{aligned} \quad (3.41)$$

4 SIMULAÇÕES TESTE COM FUNÇÕES DE BASE RADIAL

4.1 Comentários Preliminares

Todo o desenvolvimento da técnica do MECID foi pautado na utilização de funções simples, buscando contrapor as formulações existentes, que possuem uma matemática complexa, e ao mesmo tempo oferecer uma ferramenta robusta e fácil entendimento. Diversos pesquisadores, como: Bertolani (2010), Cruz (2012), Souza (2013), Barcelos (2014), entre outros; se dedicaram a testar diferentes tipos de funções com essa técnica em diferentes casos de aplicações.

Dentre as funções que foram trabalhadas, as Funções de Base Radial de Suporte Compacto (FBRSC) apresentaram resultados excelentes nos problemas governados pela equação de Poisson. (SOUZA, 2013; BERTOLANI, 2010) Outro grupo que já se mostrou bem sucedido foi a das Funções de Base Radial (FBR) clássicas, testada tanto para a equação de Poisson, quanto para de Helmholtz. (BARCELOS, 2014)

O que justifica o interesse particular nessas duas famílias de funções (FBRSC e FBR) para serem testadas como funções de interpolação no MECID, para a equação de Helmholtz.

Neste capítulo são feitas simulações com problemas que possuem solução analítica em que as frequências naturais de sistemas fechados são calculadas numericamente usando o MECID e a qualidade dos resultados é tomada como um parâmetro para avaliar a capacidade de cada função radial. Três exemplos clássicos, cuja solução analítica é conhecida, foram escolhidos para a avaliação dos resultados.

O erro relativo é tomado como uma medida do desempenho. É igual à diferença entre o módulo de valores numéricos e analíticos dividido pelo valor analítico disponível ($Erro = \frac{|R_{anal} - R_{num}|}{|R_{anal}|}$).

Para o cálculo dos autovalores, uma vez que as matrizes não são simétricas, foi utilizado o método de Francis.

Cabe ressaltar que os algoritmos de solução de problemas de autovalor com matrizes não simétricas enfrentam uma complexidade bem maior do que as técnicas

desenvolvidas para a abordagem de matrizes simétricas. No caso aqui examinado, as imprecisões numéricas se revelam primeiramente pelo surgimento de autovalores negativos. Posteriormente, pela presença de valores complexos. Em certos casos em que a matrizes não estão bem constituídas representando as propriedades físicas e geométricas, o algoritmo de Hessenberg sequer retorna resultados.

4.2 Funções de Base Radial

O emprego das funções de base radial tem se mostrado uma das formas mais eficientes para gerar pontos de discretização e correlacionar os domínios de influência.

Uma função $\Phi: \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ é dita radial desde que exista uma função, de único argumento, $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que: (FASSHAUER, 2007)

$$\Phi(x) = \varphi(r) \quad (4.1)$$

Onde $r = \|x\|$, e $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana em \mathbb{R}^S . Compreende-se desta definição que:

$$\|x_1\| = \|x_2\| \rightarrow \Phi(x_1) = \Phi(x_2) \quad (4.2)$$

Sabendo que, x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}^S$. Ou seja, para qualquer ponto que possua a mesma distancia da origem o valor de Φ será constante. Logo Φ será radialmente simétrico a esse centro (origem).

Um exemplo bem conhecido de função radial é a função radial simples (4.3):

$$\varphi(r) = r \quad (4.3)$$

Onde $r \in \mathbb{R}$. Utilizando a distância Euclidiana ($\|\cdot\|_2$) é possível escrever a função Gaussiana de múltiplos argumentos para qualquer $x_k \in \mathbb{R}^S$:

$$\Phi_k(x) = \|x - x_k\|_2 \quad (4.4)$$

Em que, $x \in \mathbb{R}^S$. Reescrevendo (4.4) de forma mais convencional, utilizando a base ortogonal no espaço (x e y) \mathbb{R}^2 :

$$\Phi_k(x) = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} \quad (4.5)$$

A conexão de (4.3) e (4.4) pode ser escrita formalmente como:

$$\Phi_k(x) = \varphi(\|x - x_k\|_2) \quad (4.6)$$

Logo será possível formar uma base de funções radiais linearmente independentes para diferentes valores de x_k .

Para os testes realizados neste capítulo serão utilizadas as FBR e suas respectivas primitivas (Anexo I) são mostradas na tabela 1, a seguir. As funções selecionadas, na ordem da tabela 1, foram: Função Radial Simples; Função Radial Lâmina Spline Fine; e Função Radial Cúbica. Essas três funções foram selecionadas por já terem apresentado bons resultados em trabalhos de outros pesquisadores, já citados anteriormente (BARCELOS, 2014).

Tabela 1 – Funções de Base Radial.

Funções de Base Radial	Primitivas
$F^i(r) = r$	$\psi_{ri} = \frac{r}{3} r_i$
$F^i(r) = r^2 \ln(r)$	$\psi_{ri} = \left[-\frac{r^2}{16} + \frac{r^2 \ln r}{4} \right] r_i$
$F^i(r) = r^3$	$\psi_{ri} = \frac{r^3}{5} r_i$

4.3 Funções de Base Radial com Suporte Compacto

As FBRSC são utilizadas para atenuar o problema de custo computacional, nos casos onde uma enorme proporção de dados é requerida. Elas aumentam a eficiência computacional, torna possível o trabalho com matrizes que possuem vários elementos nulos, reduz o risco de mau condicionamento do problema. O que facilita a solução do sistema linear. (BERTOLANI, 2010)

Elas inicialmente foram introduzidas por Wu, e em 98, trabalhadas por Wendland. Sua forma pode ser expressa como: (WONG, HON e GOLBERG, 2002)

$$\phi_{s,k}\left(\frac{r}{\delta}\right) = \left(1 - \frac{r}{\delta}\right)_+^s p\left(\frac{r}{\delta}\right), \quad \text{para } k \geq 1 \quad (4.7)$$

Com condições:

$$\left(1 - \frac{r}{\delta}\right)_+^s = \begin{cases} \left(1 - \frac{r}{\delta}\right)^s & \rightarrow \text{ se } 0 \leq r \leq \delta \\ 0 & \rightarrow \text{ se } r > \delta \end{cases} \quad (4.8)$$

Onde $p\left(\frac{r}{\delta}\right)$ é um polinômio prescrito, r é a distância euclidiana no \mathbb{R}^s , os índices “ s ” e “ k ” indicam, respectivamente, a dimensão espacial e a suavidade (smoothness) da função. Percebe-se claramente que, (4.7) tem valor “zero” para r 's maiores que o suporte compacto (δ), devido às propriedades, (4.8), chamada função de potência truncada (FPT).

O suporte compacto tem influência direta no preenchimento da matriz de interpolação, quanto menor o suporte compacto, maior o percentual de elementos nulos da matriz, o que reduz o custo computacional, mas também implica numa razoável queda na precisão dos resultados. Tendo em vista, que a redução do valor do suporte compacto torna a função radial mais restrita e menos pontos são acessíveis ao centro da função radial (WONG, HON e GOLBERG, 2002).

O suporte global ou suporte pleno é definido como a maior distância entre dois pontos quaisquer pertencentes ao domínio (LEBLANC, MALESYS e LAVIE, 2011).

Nesse trabalho será utilizado apenas o suporte pleno, pois nos testes foi o que mostrou melhores resultados.

4.3.1 Funções de Wendland de Suporte Compacto

A partir da aplicação repetida de um operador de integração τ nas FPT's, Wendland construiu uma família de FBRSC's. Esse operador de integração é definido como:

$$\tau\left[\Phi\left(\frac{r}{\delta}\right)\right] = \frac{1}{\delta} \int_r^\infty \frac{w}{\delta} \phi\left(\frac{w}{\delta}\right) dw \quad (4.9)$$

Com $\phi_l\left(\frac{r}{\delta}\right) = \left(1 - \frac{r}{\delta}\right)_+^l$, define-se as Funções de Wendland de Suporte Compacto como:

$$\phi_{l,k}\left(\frac{r}{\delta}\right) \doteq \tau^k \left[\phi_l\left(\frac{r}{\delta}\right)\right] \quad (4.10)$$

Onde $l = \lfloor d/2 \rfloor + 3k + 1$, (4.10) representa a aplicação do operador, (4.9) “k” vezes na função ϕ_l (WONG, HON e GOLBERG 2002). O termo $\lfloor y \rfloor$ significa o primeiro termo inteiro acima de y . E \doteq significa que para valores negativos a função assume valor igual a “zero”, ou seja, condição semelhante a (4.8).

Teorema: Para qualquer dimensão espacial d e qualquer $k \in \mathbb{N}$, existe uma função positiva definida $\phi_{l,k}\left(\frac{r}{\delta}\right)$ estabelecida em \mathbb{R}^d na forma de (4.7), de modo que o grau do polinômio univariável é igual a $\lfloor d/2 \rfloor + 3k + 1$ (WONG, HON e GOLBERG, 2002).

As funções de Wendland de Suporte Compacto utilizadas nesse capítulo e suas primitivas são mostradas na tabela 2.

Tabela 2 – Funções de Wendland de Suporte Compacto

Função	Nomen.	Primitivas
$\Phi_{1,0}(r) \doteq \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^1$	wl 1	$\psi_{ri} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{r}{\delta}\right)\right] r_i$
$\Phi_{3,0}(r) \doteq \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^2$	wl 2	$\psi_{ri} = \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{r}{\delta}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{\delta}\right)^2\right] r_i$
$\Phi_{5,0}(r) \doteq \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^3$	wl 3	$\psi_{ri} = \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{r}{\delta}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right] r_i$
$\Phi_{3,1}(r) \doteq \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[1 + 4\frac{r}{\delta}\right]$	wl 4	$\psi_{ri} = \left[\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + 4\left(\frac{r}{\delta}\right)^3 - \frac{5}{2}\left(\frac{r}{\delta}\right)^4 + \frac{4}{7}\left(\frac{r}{\delta}\right)^5\right] r_i$

4.3.2 Funções de Wu de Suporte Compacto

As funções de Wu de Suporte Compacto são positivas definidas, assim como as de Funções de Wendland de Suporte Compacto. Porém Wu utilizou a função (4.11), que não é positivamente definida, para formular esse grupo de função.

$$\phi\left(\frac{r}{\delta}\right) = \left[1 - \left(\frac{r}{\delta}\right)^2\right]_+^l \quad (4.11)$$

Onde $l \in \mathbb{N}$. Para transformar (4.11) em positivamente definido, é necessário aplicar uma convolução, ou seja:

$$\phi_l = (\phi * \phi)\left(2\frac{r}{\delta}\right) \quad (4.12)$$

$$\phi_l = \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{w}{\delta}\right)^2\right]_+^l \left[1 - \left(\frac{2r-w}{\delta}\right)^2\right]_+^l dw \quad (4.13)$$

Utilizando o operador derivativo, as Funções de Wu de suporte compacto foram definidas como:

$$\phi_{u,l} = \mathcal{D}^u[\phi_l] \quad (4.14)$$

Onde (4.14) é definida positiva (sua transformada de Fourier é maior que zero) e radial em \mathbb{R}^d , para $d \leq 2u + 1$. A equação é um polinômio de grau $\partial\phi = 4l - 2u + 1$ (BERTOLANI, 2010).

As funções de Wu de Suporte Compacto utilizadas nesse capítulo e suas primitivas são mostradas na tabela 3.

Tabela 3 – Funções de Wu de Suporte Compacto

Função	Nomen.	Primitivas
$\Phi_{3,3}(r) \doteq \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16 + 29\left(\frac{r}{\delta}\right) + 20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + 5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$	wu	$\psi_{r_i} = \left[\frac{5}{9}\left(\frac{r}{\delta}\right)^7 - 3\left(\frac{r}{\delta}\right)^5 + 7\left(\frac{r}{\delta}\right)^3 - \frac{35}{3}\left(\frac{r}{\delta}\right) + 8\right]r_i$
$\Phi_{2,3}(r) \doteq \left[1 - \left(\frac{r}{\delta}\right)\right]_+^5 \left[8 + 40\left(\frac{r}{\delta}\right) + 48\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + 25\left(\frac{r}{\delta}\right)^3 + 5\left(\frac{r}{\delta}\right)^4\right]$	wuc	$\psi_{r_i} = \left[-\frac{5}{11}\left(\frac{r}{\delta}\right)^9 + 3\left(\frac{r}{\delta}\right)^7 - 9\left(\frac{r}{\delta}\right)^5 + 21\left(\frac{r}{\delta}\right)^3 - 18\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + 4\right]r_i$

4.4 Vibração em Membrana Retangular Totalmente Fixada

Para testar o método anteriormente apresentado será introduzido o problema de vibração em membrana quadrada, que possui solução analítica (tabela 4).

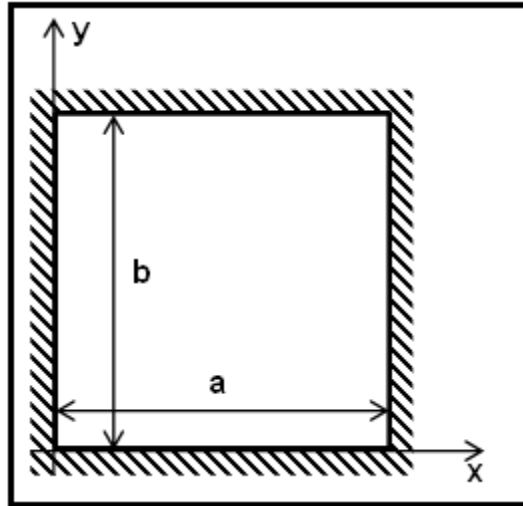


Figura 5 – Membrana retangular totalmente fixada. Fonte: Autoria própria.

Neste caso, considera-se uma membrana bidimensional quadrada se estendendo por um domínio D definido por $0 < x < a$ e $0 < y < b$, figura 5, que possui equação de governo (Meirovitch, 1967):

$$\nabla^2 W(x, y) + \beta^2 W(x, y) = 0 \quad (4.15)$$

Onde, $\beta^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$, c é a velocidade de propagação da onda, ω é a frequência natural, $W(x, y)$ é função que mostra o deslocamento normal da membrana em cada ponto.

É importante perceber a semelhança entre (4.15) e (3.7).

A solução analítica do problema é:

$$\beta_{mn} = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (4.16)$$

Onde $m, n = 1, 2, 3, \dots$ e β_{mn} são os autovalores do problema (Meirovitch, 1967).

Neste trabalho determinou-se que o objetivo era encontrar os primeiros 40 autovalores reais da equação. Porém também é possível encontrar os valores de $W(x, y)$ com esses resultados.

Foi adotado para os testes: $a = 1$; $b = 1$. E os autovalores, encontrados analiticamente, colocados em ordem crescente de valor são representados na tabela 4, abaixo:

Tabela 4 – Autovalores do problema calculados analiticamente.

	m	n	β_{mn}		m	n	β_{mn}
1	1	1	4,442883	21	5	3	18,31848
2	1	2	7,024815	22	3	5	18,31848
3	2	1	7,024815	23	6	1	19,10956
4	2	2	8,885766	24	1	6	19,10956
5	1	3	9,934588	25	6	2	19,86918
6	3	1	9,934588	26	2	6	19,86918
7	3	2	11,32717	27	5	4	20,11601
8	2	3	11,32717	28	4	5	20,11601
9	1	4	12,95312	29	6	3	21,07444
10	4	1	12,95312	30	3	6	21,07444
11	3	3	13,32865	31	5	5	22,21441
12	4	2	14,04963	32	7	1	22,21441
13	2	4	14,04963	33	1	7	22,21441
14	4	3	15,70796	34	6	4	22,65435
15	3	4	15,70796	35	4	6	22,65435
16	1	5	16,01904	36	7	2	22,87114
17	5	1	16,01904	37	2	7	22,87114
18	5	2	16,91799	38	7	3	23,92566
19	2	5	16,91799	39	3	7	23,92566
20	4	4	17,77153	40	6	5	24,53662

Os valores encontrados na tabela 4 serão utilizados como referência para calcular os erros nos resultados numéricos obtidos pela MECID, usando as diversas funções radiais mostradas nas tabelas 1, 2 e 3.

Para os casos de funções que possuem suporte compacto o valor será variado para encontrar qual seria a melhor escolha para essa aplicação.

Serão testadas duas malhas: uma com 160 elementos de contorno, 164 nós funcionais, 144 pontos fonte e 484 pontos internos, aqui será chamada de 160 elementos; a outra com 320 elementos de contorno, 324 nós funcionais, 324 pontos fonte e 576 pontos internos, aqui será chamada de 320 elementos.

Para as funções radiais de suporte compacto, todas são utilizadas aqui com o valor pleno do suporte. Testes feitos em outros problemas, como os governados pela

Equação de Poisson (SOUZA, 2013) retornaram valores discutíveis, em razão de existir um valor ótimo de suporte que não pode ser definido claramente, variando de problema para problema, e gerando resultados que pioram muito em precisão em determinadas faixas.

O propósito dos testes realizados é averiguar se as propriedades matemáticas que garantem um bom comportamento numérico das funções utilizadas ainda permanecem após a transformação imposta pela MECID que conduz as integrações exclusivamente ao longo do contorno.

4.4.1 Resultados Numéricos e Discussões

Funções Radiais Clássicas.

Para as três funções clássicas as duas malhas serão representadas nos mesmos gráficos. O primeiro gráfico, na figura 6 apresenta o grupo das dez primeiras frequências:

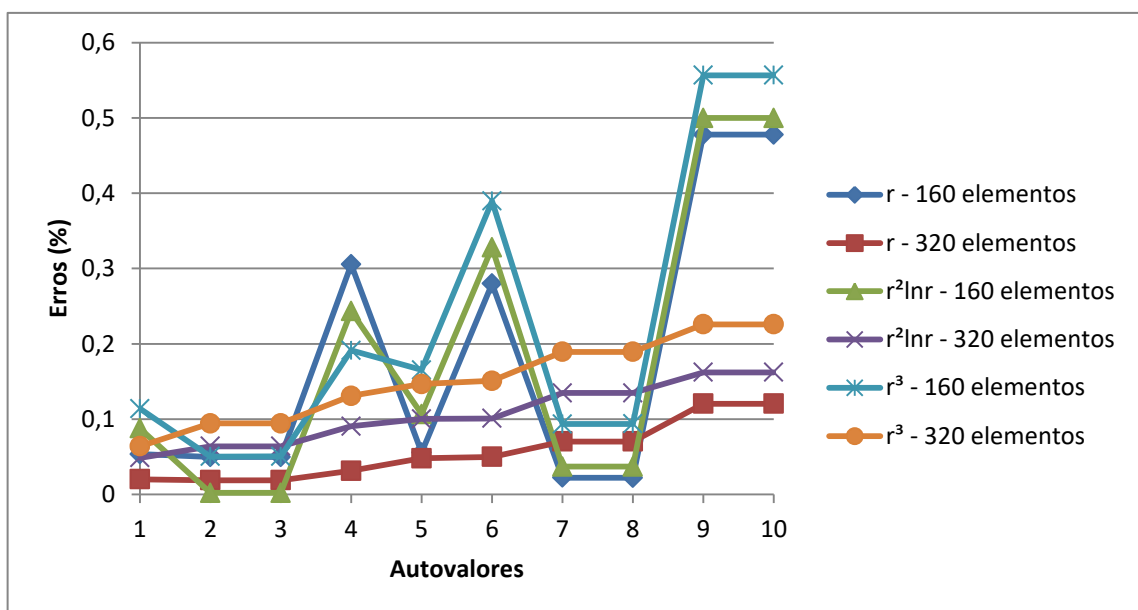


Figura 6 - Representação dos erros para os dez primeiros autovalores. Com as Funções Radiais Clássicas.

Como esperado os erros para a malha de 320 elementos se mostraram inferiores aos encontrados com a malha de 160 elementos. A função r foi a que mostrou melhores resultados.

Para a malha grosseira o erro percentual não cresce monotonamente com o aumento da frequência, devido à dificuldade do MECID para calcular certas frequências que estão associadas a modos de vibração mais elaborados, pois a distribuição espacial e a quantidade de pontos internos interpolantes não são suficientes para bem representá-los. Mesmo assim, o resultado se mostrou globalmente satisfatório para essas malhas.

Para o grupo das dez próximas frequências (figura 7), os erros aumentaram. Como esperado, o cálculo de maiores frequências resultam em maiores erros para qualquer método numérico. A malha mais refinada manteve-se com bons resultados, mesmo com o aumento dos erros e a perda da monotonicidade, devido a incapacidade na representação de certos modos. A função r continuou mostrando menores erros.

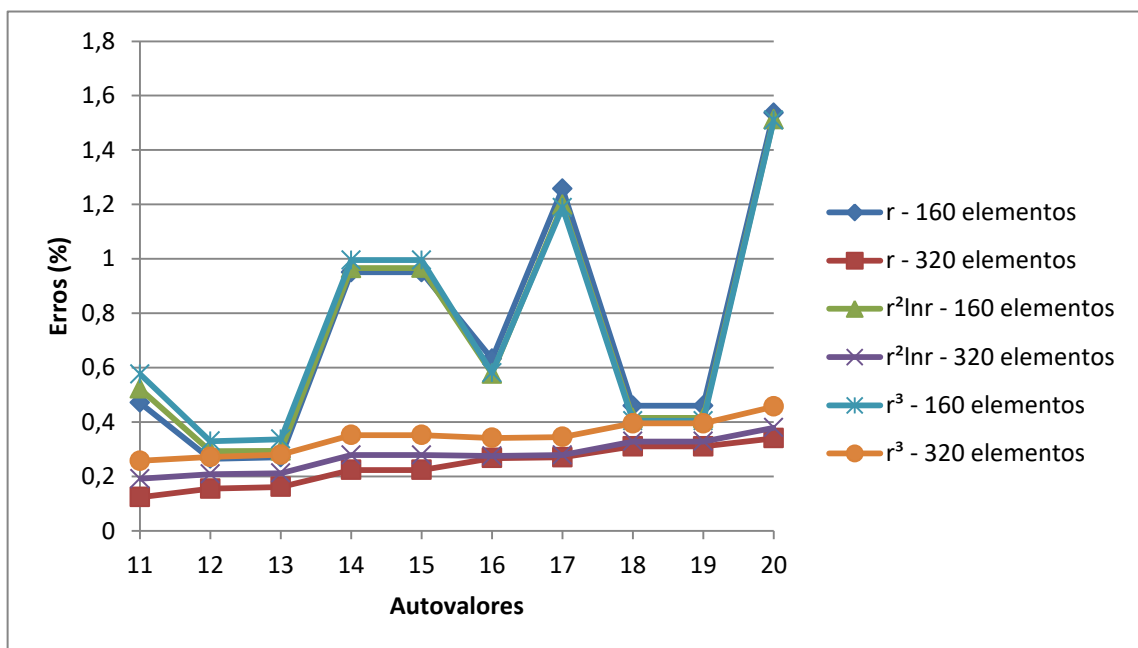


Figura 7 – Representação dos erros para a segunda dezena de autovalores. Com as Funções Radiais Clássicas.

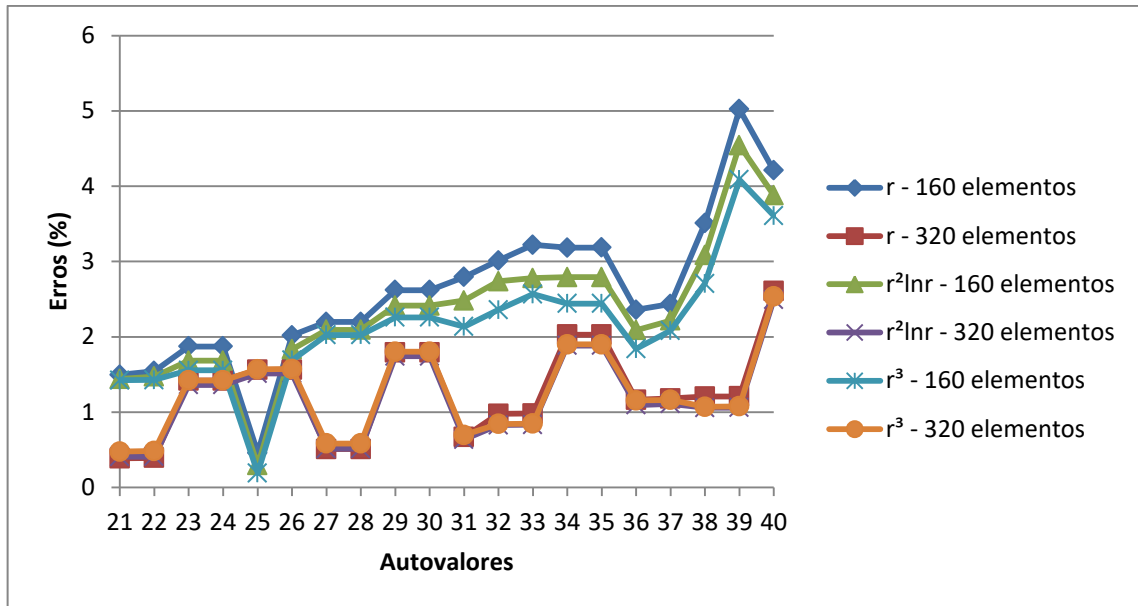


Figura 8 – Representação dos erros para os vinte últimos autovalores. Com as Funções Radiais Clássicas.

Para os vinte últimos autovalores (figura 8), ambas as malhas apresentaram uma redução na precisão. A ausência de monotonicidade também afetou a malha mais rica, pois os modos vibracionais tornaram-se mais intrincados e a população de pontos internos interpolantes começou a dar sinais de incapacidade de representação de muitos deles. Globalmente, os erros encontrados para a malha de 320 elementos de contorno foram sempre menores. A exceção encontrada na vigésima quinta frequência se deve ao fato do método calcular uma frequência errada, posicionada equivocadamente em sua ordem hierárquica no conjunto, mas que coincide com um valor esperado. Embora todas as funções apresentem erros próximos, a função que apresentou menores erros foi a r^3 com a malha de 320 elementos.

Funções de Wendland de Suporte Compacto

Para as funções de Wendland foram gerados gráficos utilizando suporte pleno ($\delta = \sqrt{2}$) para as quatro funções mostradas na tabela 2. Devido ao número de funções são apresentados um gráfico para cada malha. Os erros encontrados são apresentados nas figuras de 9 a 14:

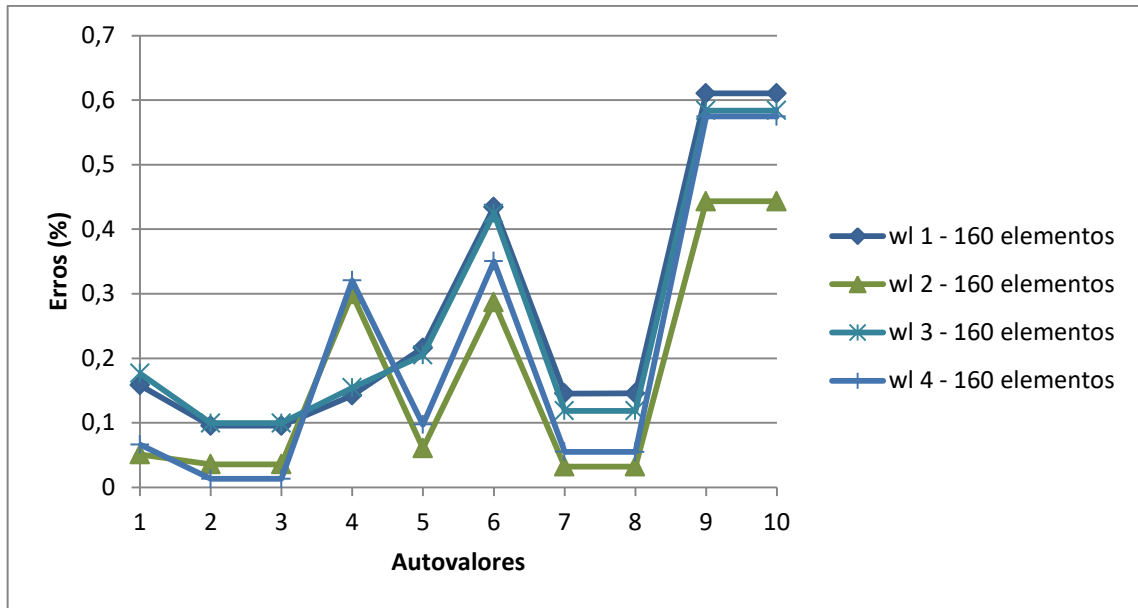


Figura 9 – Representação dos erros para os primeiros 10 autovalores. Para as funções de Wendland com malha de 164 elementos.

Para os dez primeiros autovalores, figuras 9 e 10, as respostas apresentadas pelos testes com malhas mais ricas (figura 10) apresentaram um erro inferior aos obtidos com a malha de menor refinamento (vide figura 9). A função wl2 teve o melhor desempenho dentre as funções para ambas as malhas. Observando as curvas referentes à malha mais refinada, nota-se que a função wl4 começou com erros pequenos, mas apresentou um crescimento acelerado na perda de sua precisão com o aumento da ordem das frequências naturais calculadas.

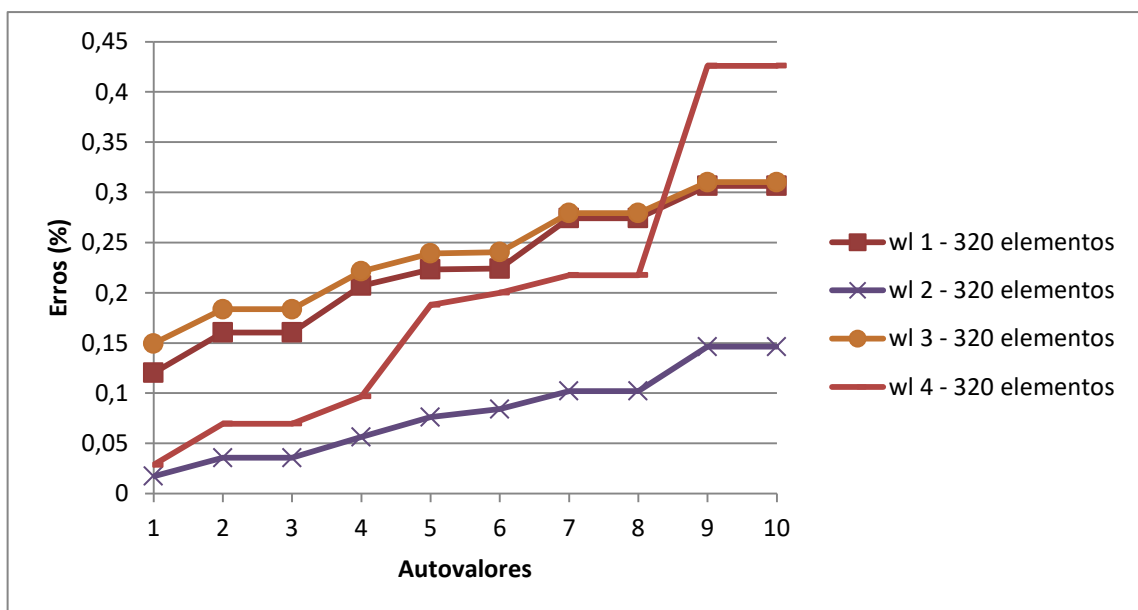


Figura 10 – Representação dos erros para os primeiros 10 autovalores. Para as funções de Wendland com malha de 320 elementos.

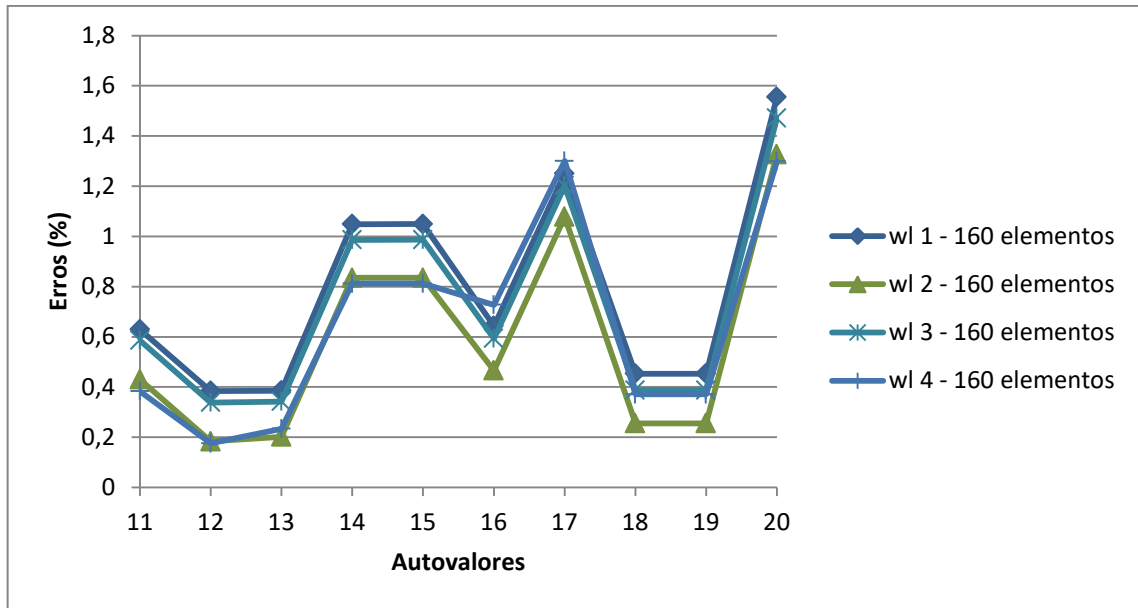


Figura 11 – Representação dos erros para a segunda dezena de autovalores. Para as funções de Wendland com malha de 164 elementos.

Esse comportamento se manteve para o segundo grupo de frequências, conforme mostra a figura 12. Funções de ordem mais elevada são muito afetadas pela transformação de contorno típica da MECID, entre outros possíveis fatores, e comumente apresentam desempenho pior do que as funções mais simples.

Para a segunda dezena de autovalores (figuras 11 e 12) percebe-se mais claramente que os valores obtidos com a malha de 320 elementos são superiores aos com a malha de 160. Contudo, o nível dos erros ainda é reduzido, mesmo para o conjunto de resultados obtidos para a malha menos refinada, figura 11.

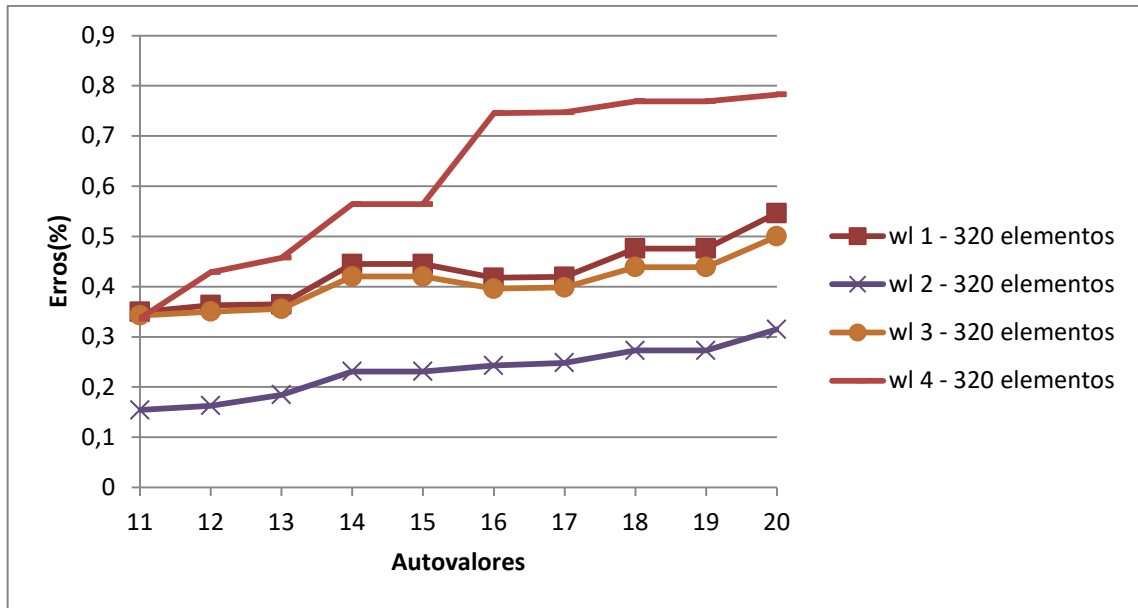


Figura 12 – Representação dos erros para a segunda dezena de autovalores. Para as funções de Wendland com malha de 320 elementos.

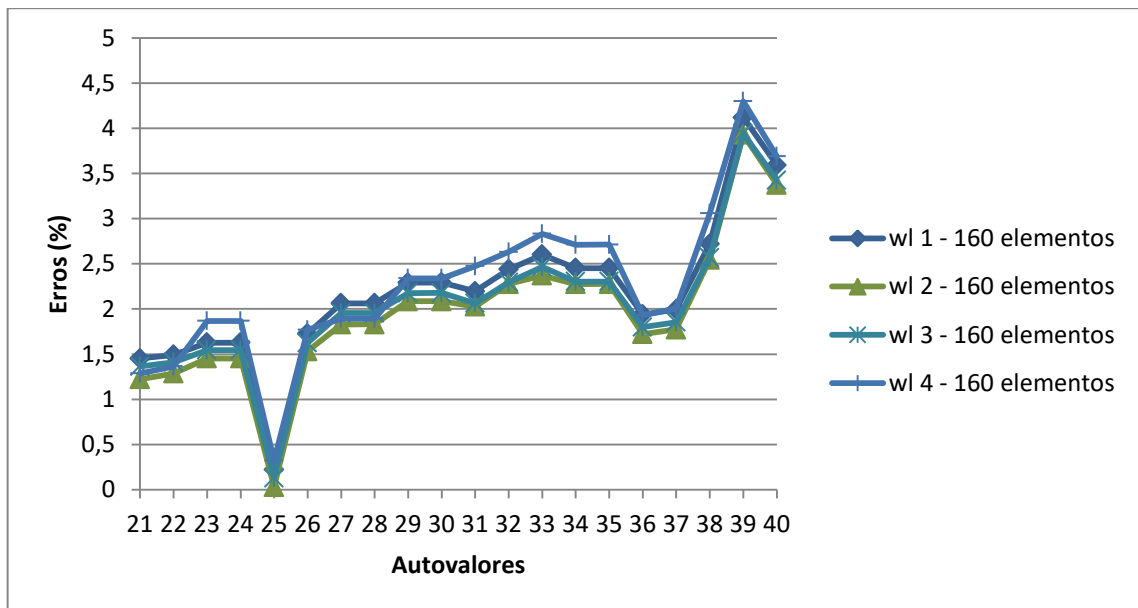


Figura 13 – Representação dos erros para os últimos 20 autovalores. Para as funções de Wendland com malha de 164 elementos.

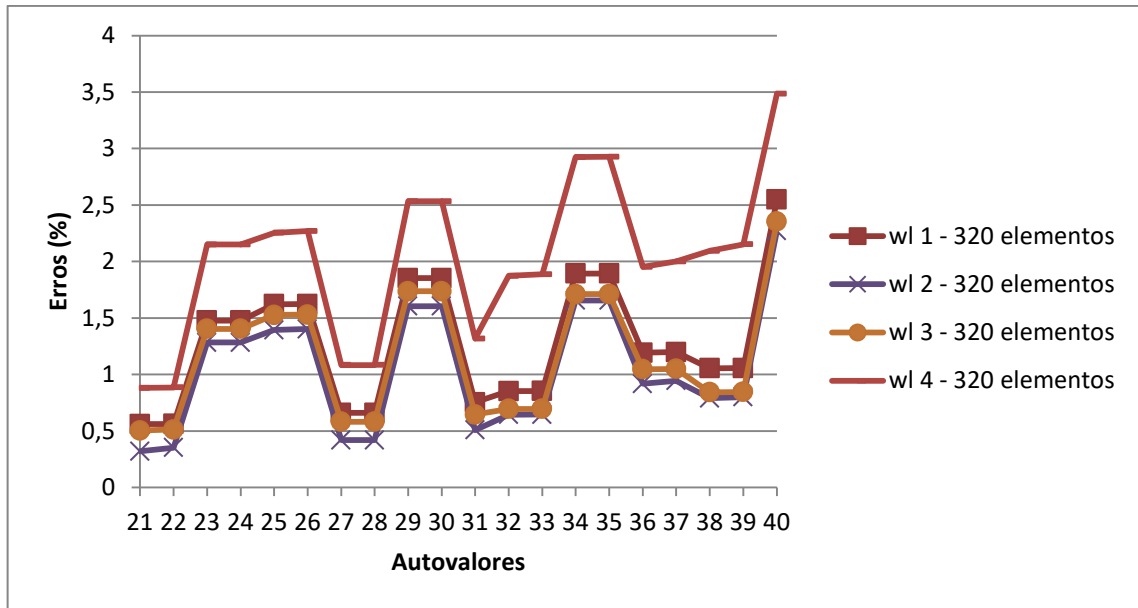


Figura 14 – Representação dos erros para os últimos 20 autovalores. Para as funções de Wendland com malha de 320 elementos.

Para esse último grupo de autovalores (figuras 13 e 14) a função wl2 continua mostrando resultados melhores que as demais funções do grupo.

Funções de Wu de Suporte Compacto

Para as funções de Wu de Suporte Compacto serão realizados os mesmos testes feito para as Funções de Wendland de Suporte Compacto, com as mesmas malhas e suporte pleno ($\delta = \sqrt{2}$). Como o número de funções é reduzido, o mesmo gráfico será utilizado para as duas malhas. Os erros serão apresentados nos gráficos das figuras de 15 a 17.

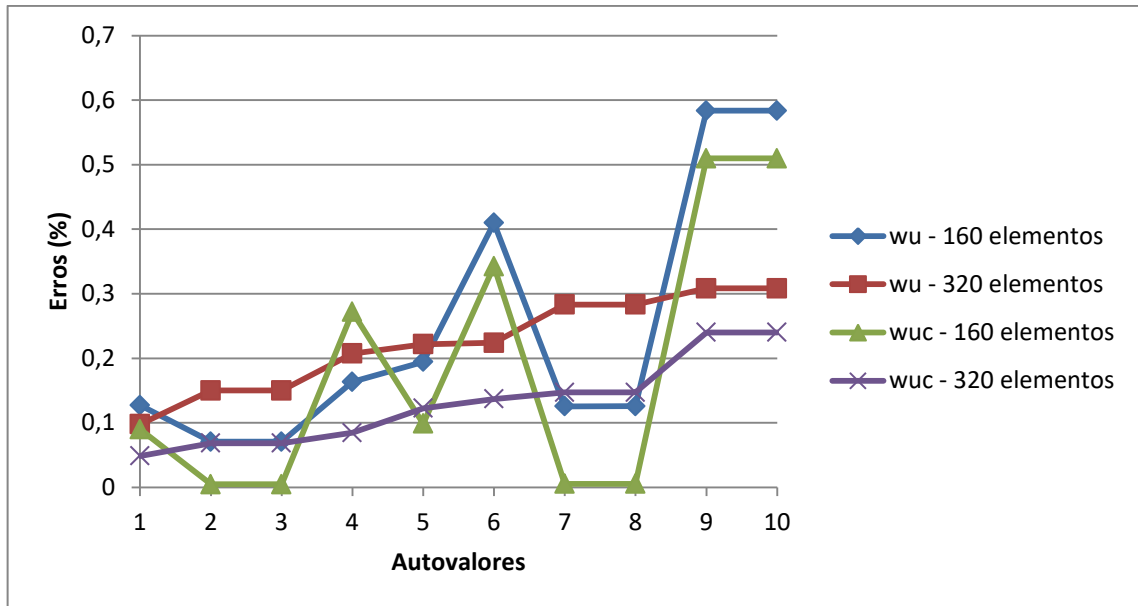


Figura 15 – Representação dos erros para os 10 primeiros autovalores. Funções de Wu com suporte pleno.

Na figura 15 é possível observar que a função wuc apresenta melhores resultados, tanto na malha mais pobre quanto na malha mais rica. Entretanto, para a malha mais pobre os valores encontrados para algumas frequências foram iguais aos valores analíticos. Neste caso, envolvendo frequências mais baixas, não se trata de uma comutação ou troca entre posição de frequências, como suposto previamente, e sim um fenômeno numérico característico destas funções (BERTOLANI 2010). No geral, entretanto, a malha mais refinada apresentou melhores resultados.

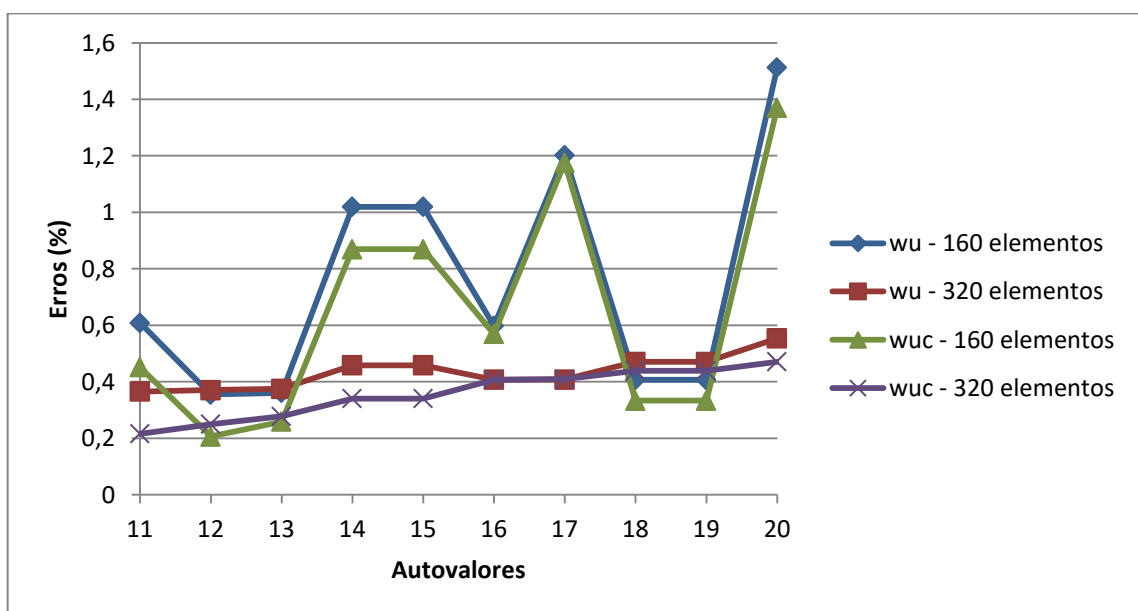


Figura 16 – Representação dos erros para a segunda dezena de autovalores. Funções de Wu para suporte pleno.

Nesse segundo grupo de frequências, apresentado na figura 16, pode ser feito o mesmo comentário realizado anteriormente. A função wuc teve melhor desempenho. O mesmo pode ser dito para as vinte últimas frequências, para as quais os erros numéricos cresceram acentuadamente.

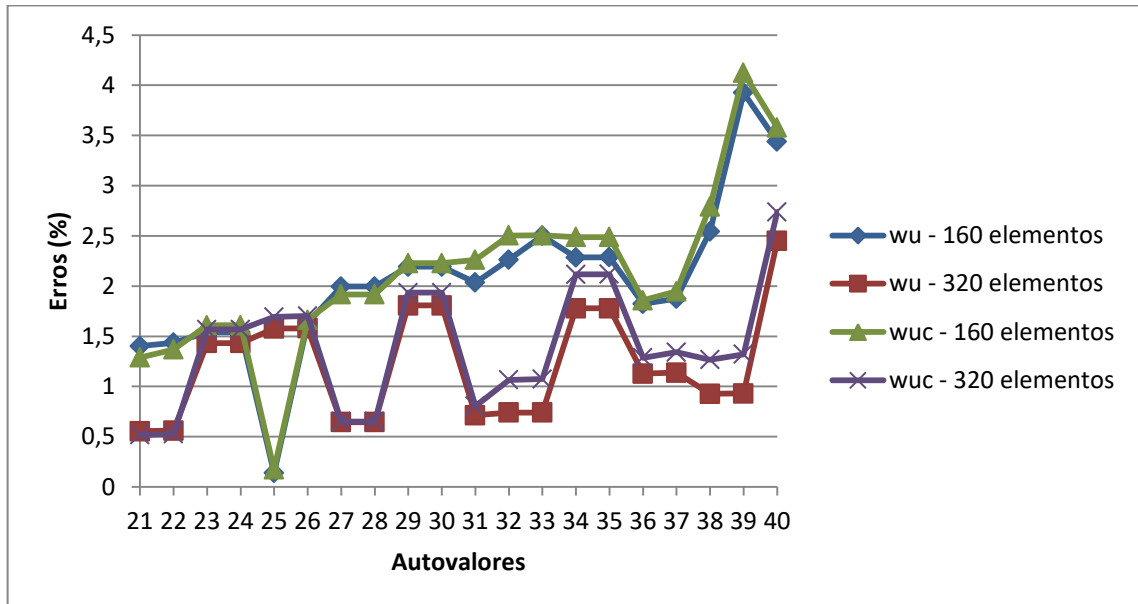


Figura 17 – Representação dos erros para os últimos 20 autovalores. Funções de Wu para suporte pleno.

4.4.2 Conclusões parciais

Observando os resultados obtidos é possível constatar a eficiência do método para essa aplicação, tanto utilizando funções simples como as radiais clássicas até com funções mais complexas como as FBRSC's.

Todas as classes de funções tiveram um desempenho razoável. Para melhor identificação da equivalência de desempenho destas funções, no gráfico a seguir são mostradas a melhor função radial clássica, a melhor função de Wendland e a melhor função de Wu para os dez primeiros autovalores.

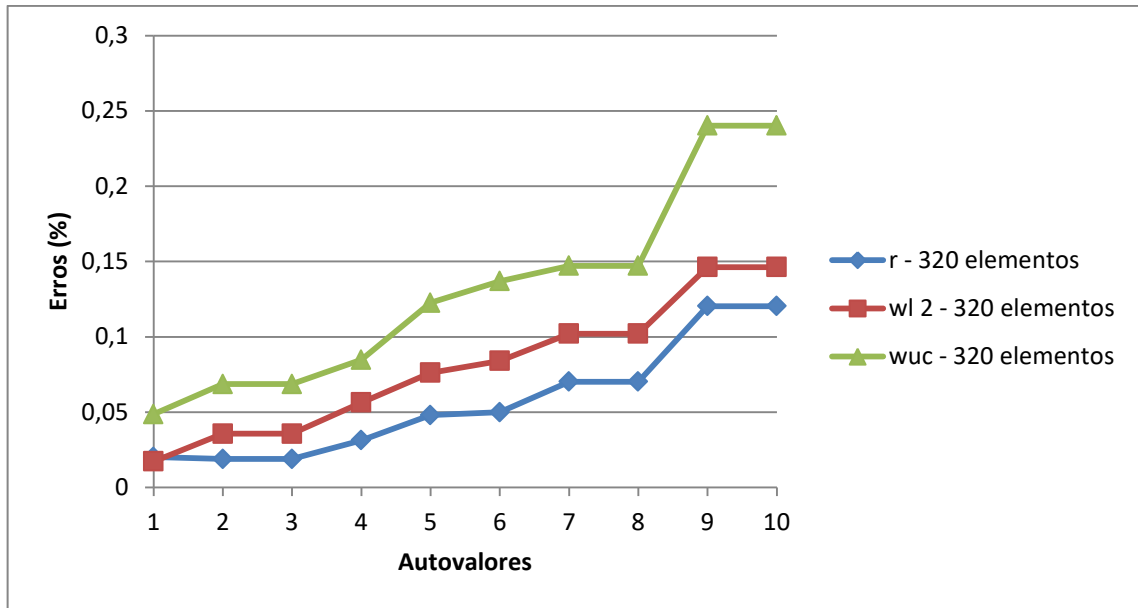


Figura 18 – Comparação entre os resultados das três melhores funções dentro do seu respectivo grupo.

Na figura 18 a função r foi a que apresentou melhor resultado dentre as funções radiais escolhidas.

4.5 Barra Engastada

Este exemplo consiste de uma chapa de dimensão unitária, engastada apenas numa extremidade (BARCELOS 2014), como mostrado na figura 19:

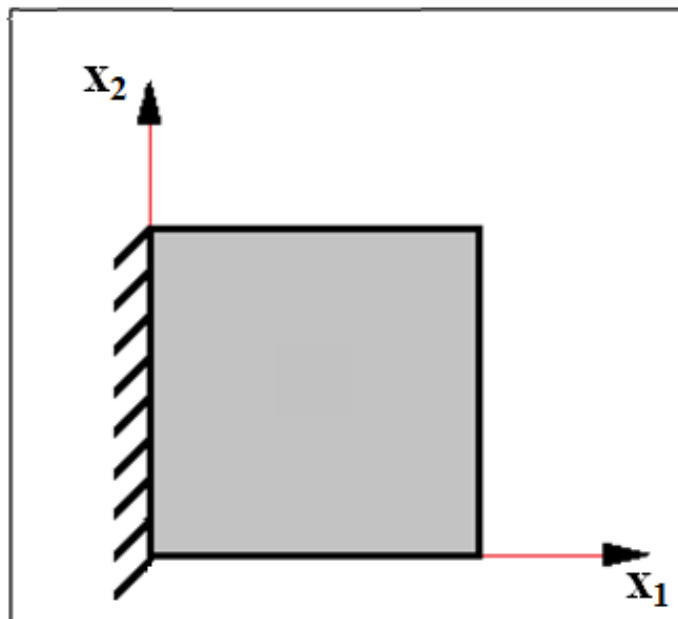


Figura 19 – Barra engastada numa extremidade. Fonte: (BARCELOS 2014)

Como feito anteriormente, os autovalores são calculados e representam as frequências naturais na barra. O problema também será regido pela mesma equação 3.7 e igualmente as propriedades físicas e os lados da chapa foram considerados unitários. Este problema também possui solução analítica e suas frequências, incluindo os valores relacionados à vibração transversal, são dados encontrados através do método da separação das variáveis:

$$\omega_{mn} = \frac{\pi}{2} \sqrt{4m^2 + 4n^2 - 4n + 1} \quad (4.17)$$

Novamente, são calculados os 40 primeiros autovalores naturais na ordem crescente, apresentados na tabela 5:

Tabela 5 – Valores analíticos para o problema da barra engastada.

ω_{mn}	Analítico	ω_{mn}	Analítico
1	1,570796	21	14,81886
2	3,512407	22	15,47055
3	4,712389	23	15,78631
4	5,663587	24	16,3996
5	6,476559	25	16,69779
6	7,853982	26	16,99076
7	7,853982	27	17,27876
8	8,458997	28	17,56204
9	9,554781	29	17,56204
10	10,05804	30	18,3857
11	10,65366	31	18,91489
12	10,99557	32	18,91489
13	11,43577	33	19,17401
14	12,36846	34	19,42968
15	12,66417	35	19,68202
16	12,66417	36	20,42035
17	13,42089	37	20,42035
18	14,13717	38	20,6606
19	14,48203	39	21,1329
20	14,48203	40	21,36514

Para fazer os testes foram utilizadas duas malhas: uma com 160 elementos de contorno (EC) e 164 nós funcionais, com 144 pontos fonte e 484 nós internos interpolantes; a outra com 320 elementos de contorno, 324 nós funcionais, 324

pontos fonte e 576 pontos internos interpolantes. As mesmas funções radiais das tabelas 1, 2 e 3 também serão utilizadas para este problema.

4.5.1 Resultados Numéricos e Discussões

Como feito anteriormente, os gráficos erros versus autovalores serão divididos em 3 grupos de autovalores para facilitar a visualização. Os resultados para cada família de função é mostrado a seguir:

Funções Radiais Clássicas

Nos gráficos a seguir serão representados os resultados para as duas malhas. Na figura 20 percebe-se que a função r^3 apresenta melhores resultados para ambas as malhas.

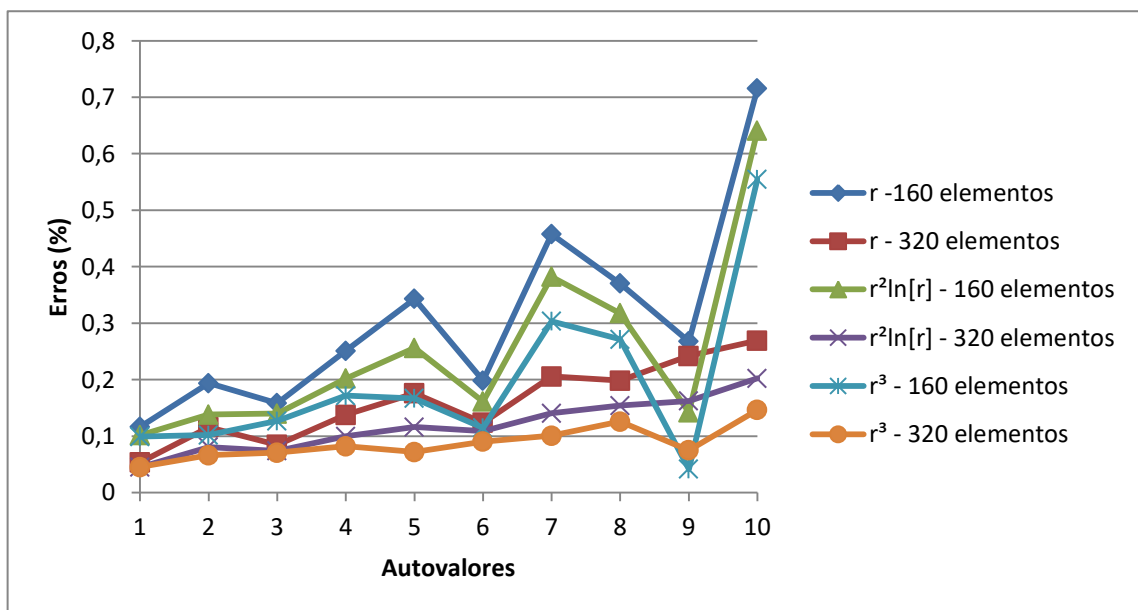


Figura 20 – Erro para os primeiros 10 autovalores.

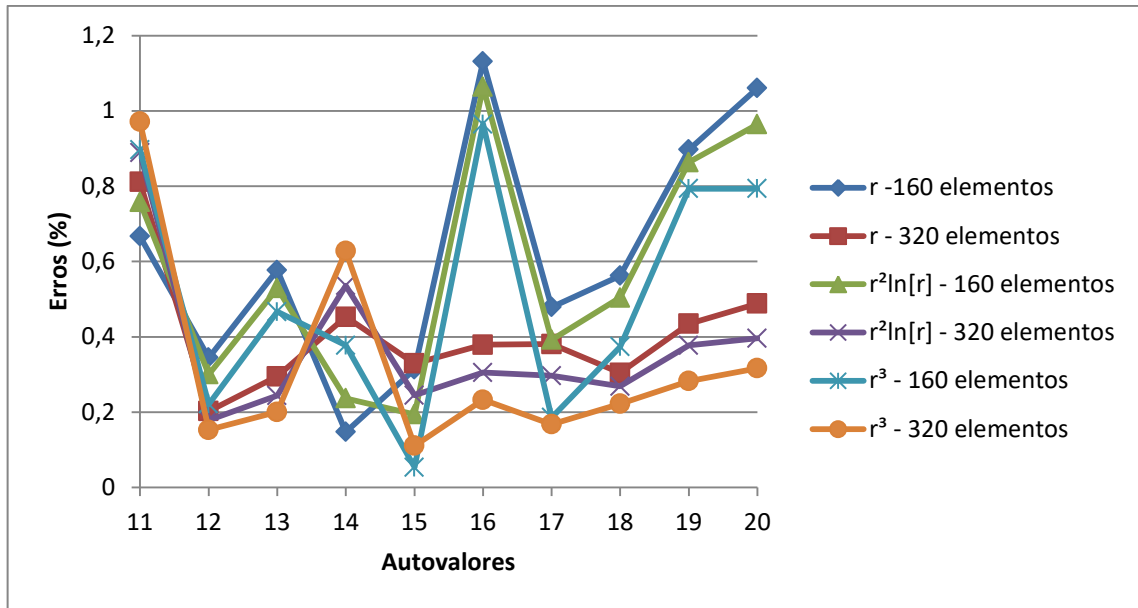


Figura 21 – Erro para segunda dezena de autovalores.

A superioridade nos resultados da função r^3 continuou sendo notado nos gráficos das figuras 21 e 22. O que demonstra que para o problema da barra engastada entre as funções clássicas a que mostrou mais afinidade foi a r^3 , porém todas as demais funções também mostraram bons resultados.

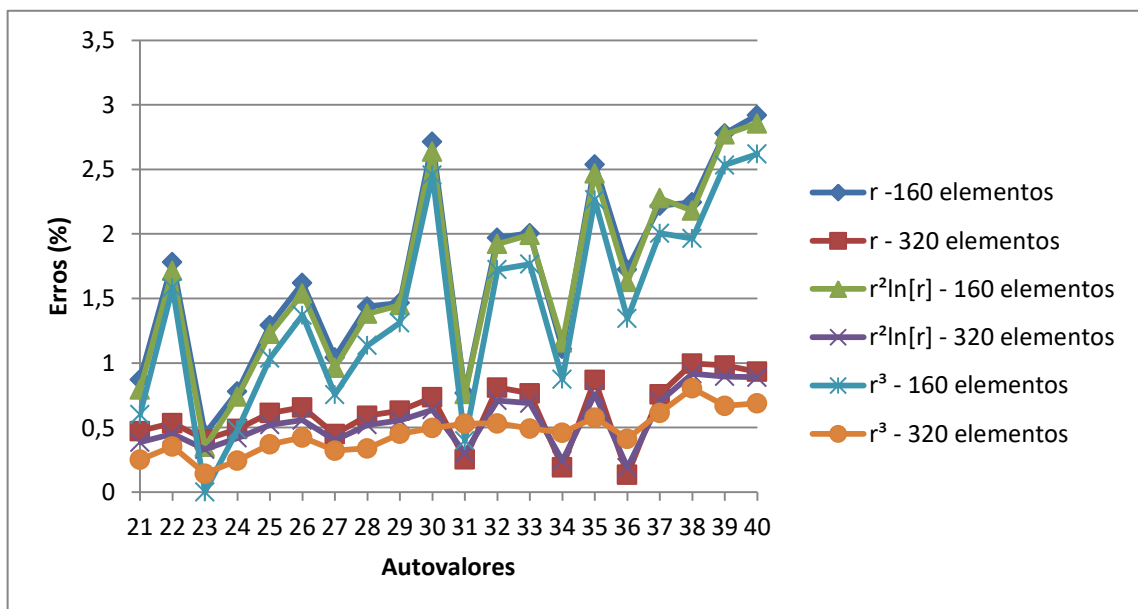


Figura 22 – Erro para os últimos 20 autovalores.

Uma comparação entre o nível de erro entre este exemplo e o anterior revela que a precisão alcançada na simulação deste exemplo é um pouco superior. A razão disso se deve ao fato de haver um maior número de graus de liberdade no sistema.

Embora a caracterização de certos modos transversais seja numericamente difícil, pois não há simetria com relação à direção vertical neste caso (a membrana possui simetria nos dois eixos), a maior quantidade de graus de liberdade prepondera sobre esse fator, fazendo com que os resultados sejam melhores.

Funções Radiais de Wendland com Suporte Compacto

Como feito anteriormente para as funções de Wendland foi utilizado o suporte pleno ($\delta = 2$). Os resultados para cada malha serão mostrados em gráficos separados.

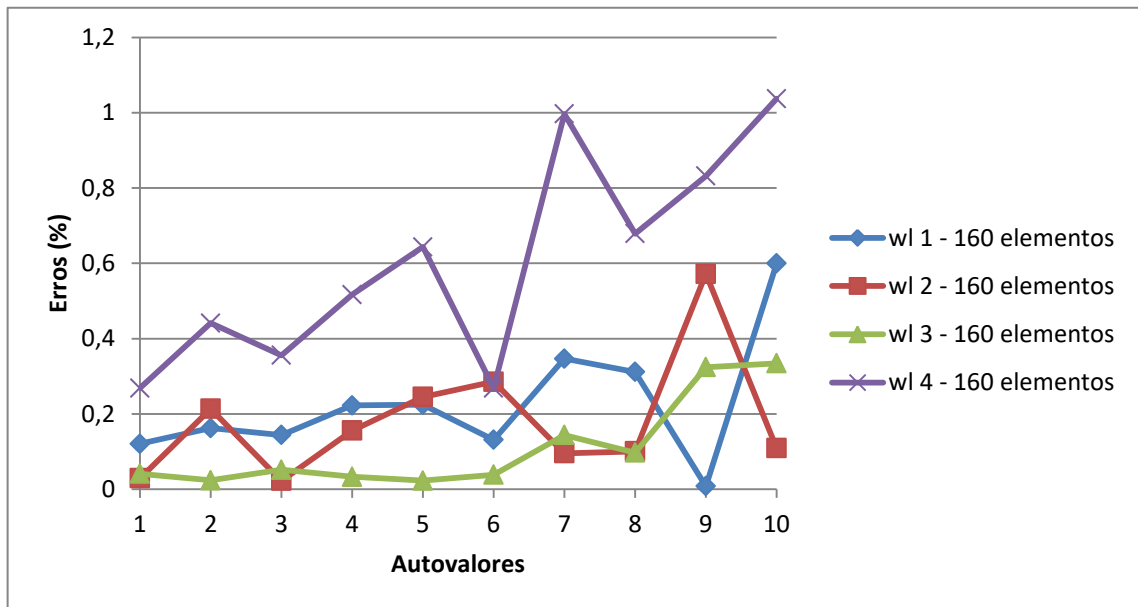


Figura 23 – Erro para os primeiros 10 autovalores, com a malha de 164 elementos.

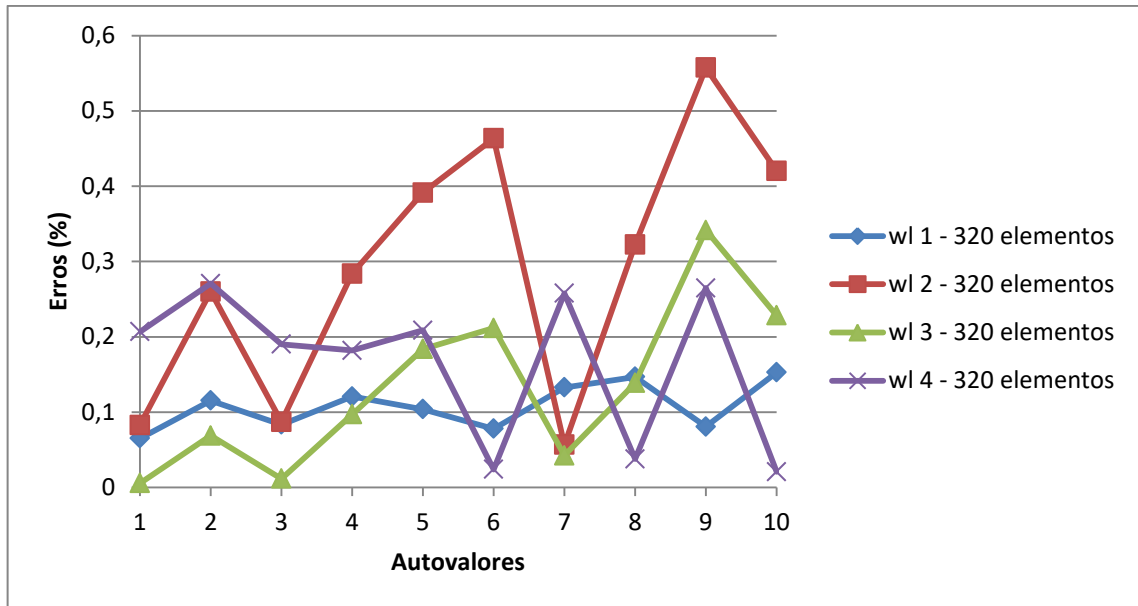


Figura 24 – Erro para os primeiros 10 autovalores, com a malha de 320 elementos.

Nas figuras 23 e 24 a função wl 3 apresentou melhores resultados. Para a malha de 160 elementos a função wl 4 teve resultados muito piores aos demais, o que ocorre também com a função wl2 para a malha mais rica, o que pode indicar que funções com maior expoente par não apresenta afinidade pelo problema.

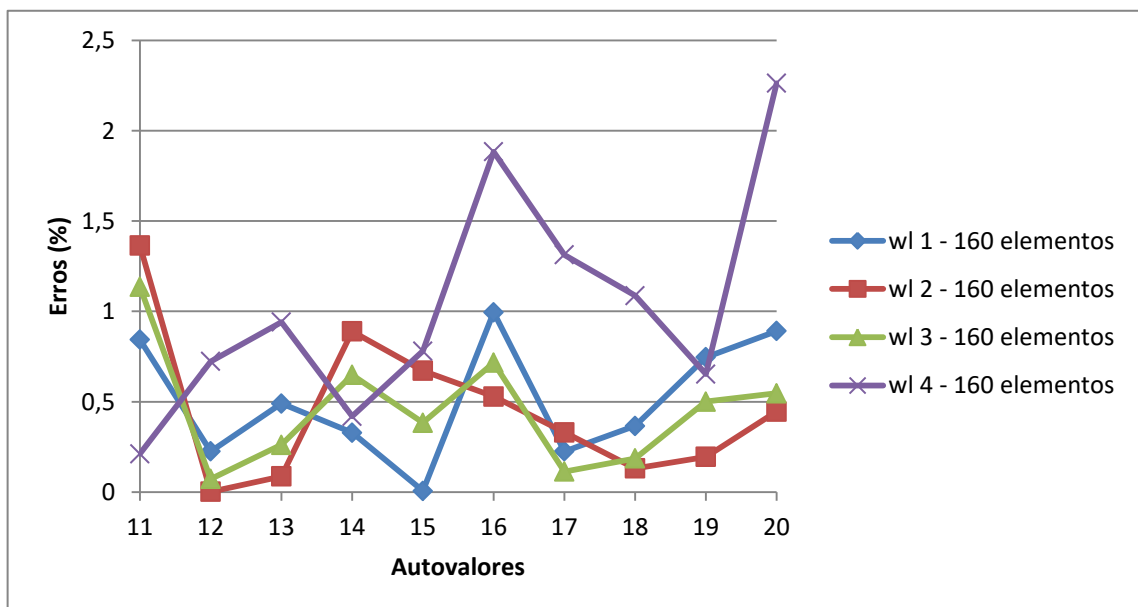


Figura 25 – Erro para segunda dezena de autovalores, com malha de 164 elementos.

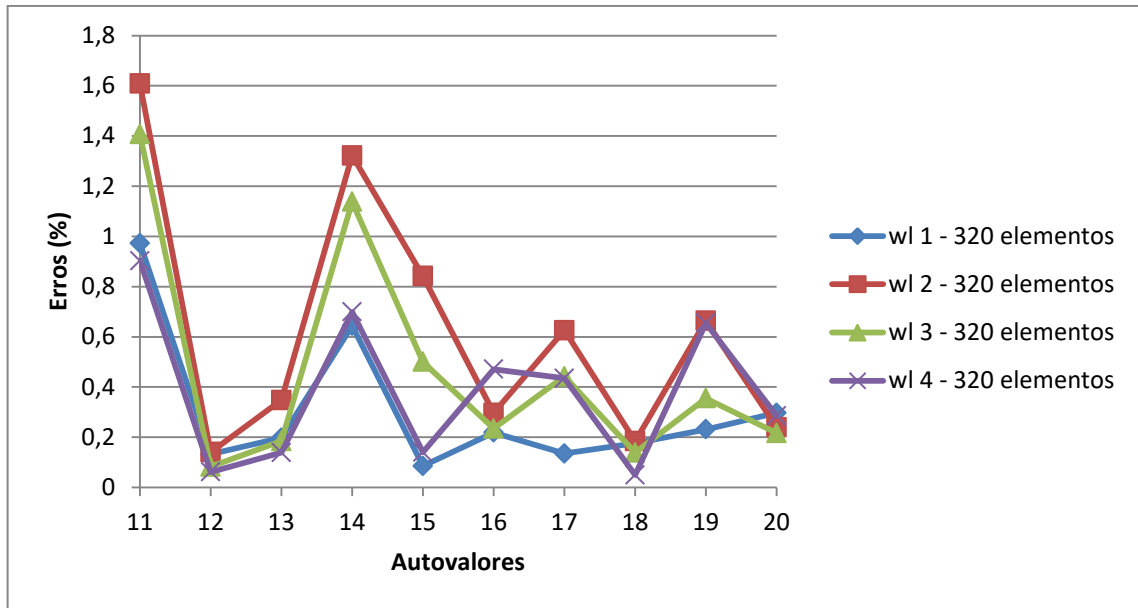


Figura 26 – Erro para segunda dezena de autovalores, com malha de 320 elementos.

No gráfico da figura 25 a função wl2 apresentou o melhor resultado e a função wl4 continuou apresentando resultados inferiores. Para a malha de 320 elementos na figura 26 a função wl1 apresentou melhores resultados.

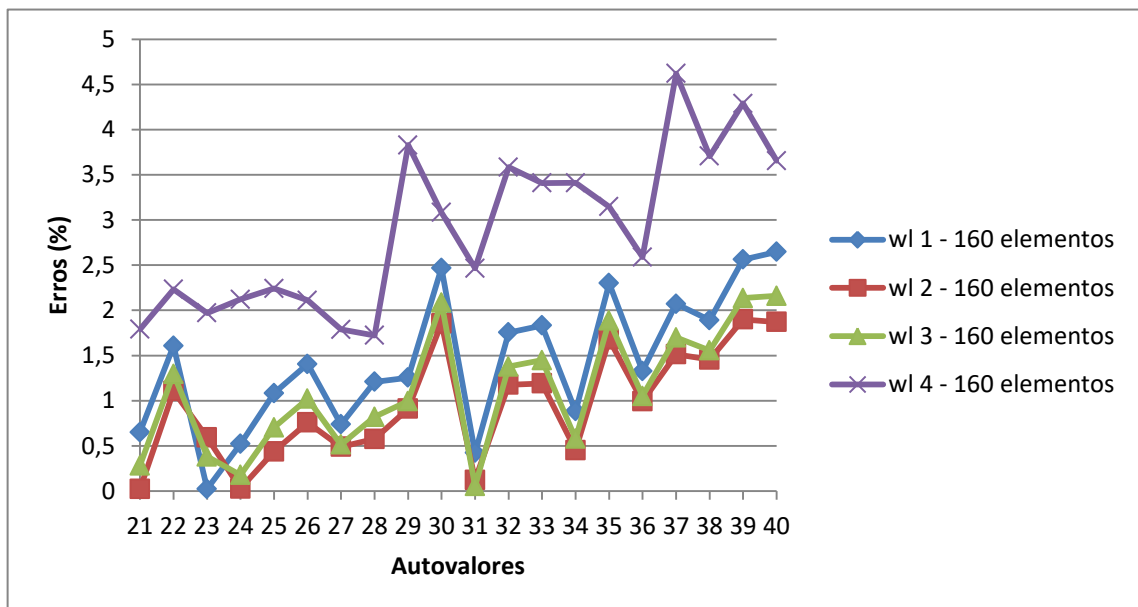


Figura 27 – Erro para os últimos 20 autovalores, com malha de 164 elementos.

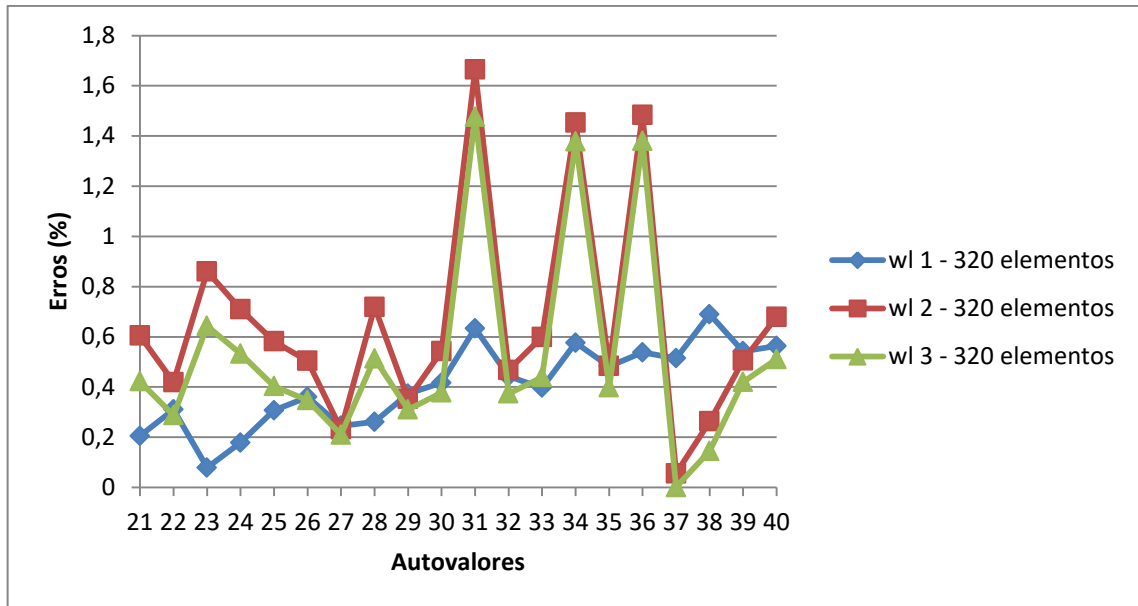


Figura 28 – Erro para os últimos 20 autovalores, com malha de 320 elementos.

Na figura 27 a função wl2 apresenta melhores resultados e a função wl4 apresentou qualidade bem inferior. No gráfico da figura 28, para a malha mais rica, a função wl1 apresentou melhores resultados e a função wl4 não apresentou sequer resultado, ou seja, não foi processado resultados para essa gama de funções. Logo a função wl4 não apresentou boa afinidade com a solução do problema de barra engastada. A transformação de contorno da MECID, aliada à alta ordem de wl4 e a falta de simetria dos modos transversais, são aspectos que devem ter se combinado para limitar numericamente o alcance dessa função na solução deste problema, pois a mesma função resolveu o problema anterior, em que havia um número menor de graus de liberdade.

Funções Radiais de Wu com Suporte Compacto

Considerando a pequena quantidade de função selecionada os resultados para as duas malhas serão representados no mesmo gráfico.

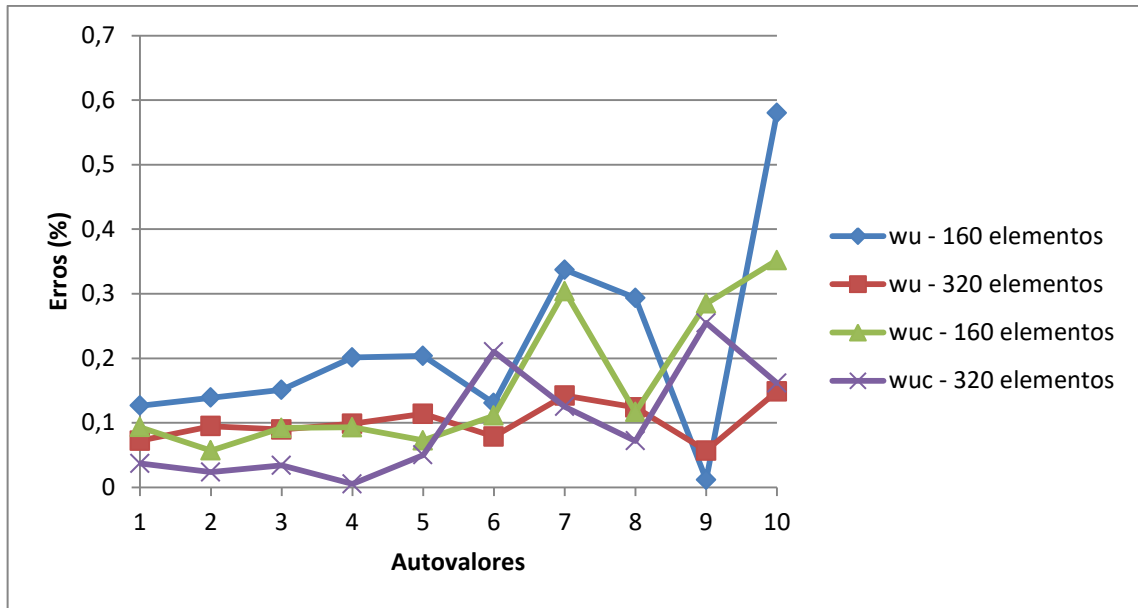


Figura 29 – Erro para os primeiros 10 autovalores.

Na figura 29 a função wuc apresenta melhores resultados para as duas malhas. Já na figura 30 os resultados da função wu com 320 elementos apresenta melhores resultados.

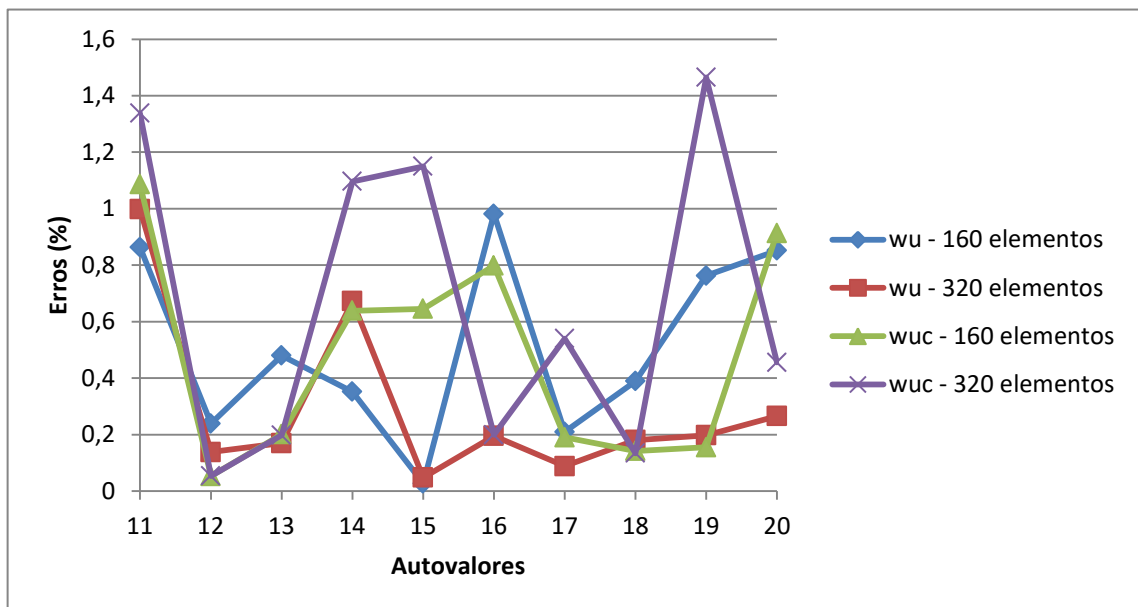


Figura 30 – Erro para segunda dezena de autovalores.

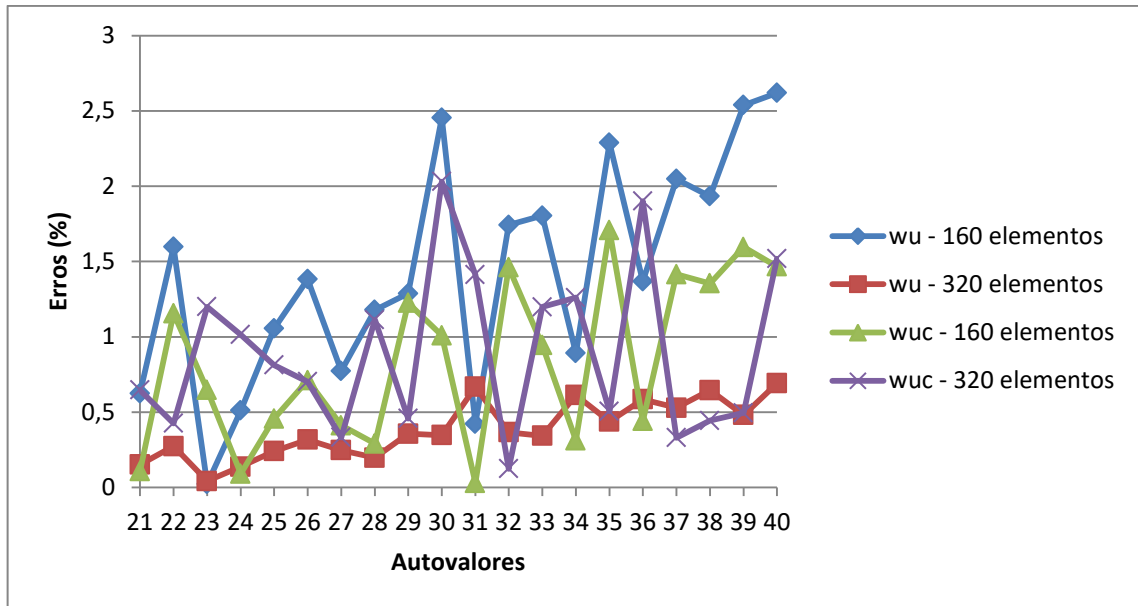


Figura 31 – Erro para os últimos 20 autovalores.

Para os últimos autovalores a função wu com 320 elementos continuou apresentando melhores resultados. Contudo, os valores obtidos com a função de Wu, particularmente observando o comportamento no cálculo dos últimos 20 autovalores, indica um pior desempenho dentre todas as classes testadas nesse caso.

4.5.2 Conclusões parciais

De forma geral, com exceção da função wl4, todas as funções apresentaram resultados para o problema escolhido. Sendo assim, viáveis para ser utilizadas. Entretanto é importante ressaltar que as funções clássicas apresentam mais facilidades ao ser tratadas matematicamente, o que poderia indica-las como escolha óbvia quando necessário.

4.6 Vibração em Membrana Circular Totalmente Fixada

Considera-se agora uma membrana circular com raio a , completamente fixado no contorno, como mostra a figura 32.

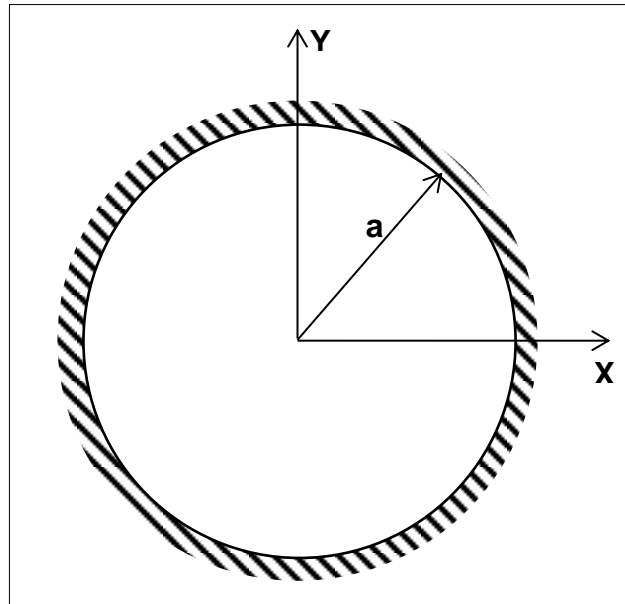


Figura 32 – Membrana Circular totalmente fixada no contorno de raio a .

A vibração livre da membrana possui solução analítica descrita por funções de Bessel. Considerando as imposições das condições de contorno, as frequências naturais são dadas pela solução da equação de governo, que consiste em um número infinito de soluções discretas para cada valor da função de Bessel de ordem m , que é:

$$J_m(\beta a) = 0 \quad (4.18)$$

Onde β são os autovalores do problema. Os resultados analíticos, da tabela 6, foram obtidos para os m 's e n 's e colocado na ordem crescente. Novamente aqui serão tomados apenas os 40 primeiros autovalores reais.

Tabela 6 – Autovalores Calculados Analiticamente.

	m	n	β_{mn}
1	0	1	2,404826
2	1	1	3,831706
3	1	1	3,831706
4	2	1	5,135622
5	2	1	5,135622
6	0	2	5,520078
7	3	1	6,380162
8	3	1	6,380162

	m	n	β_{mn}
21	6	1	9,93611
22	1	3	10,17347
23	1	3	10,17347
24	4	2	11,06471
25	4	2	11,06471
26	7	1	11,08637
27	7	1	11,08637
28	2	3	11,61984

9	1	2	7,01558
10	1	2	7,01558
11	4	1	7,588342
12	4	1	7,588342
13	2	2	8,417253
14	2	2	8,417253
15	0	3	8,653728
16	5	1	8,771478
17	5	1	8,771478
18	3	2	9,761023
19	3	2	9,761023
20	6	1	9,93611
29	2	3	11,61984
30	0	4	11,79153
31	8	1	12,22509
32	8	1	12,22509
33	5	2	12,3386
34	5	2	12,3386
35	3	3	13,0152
36	3	3	13,0152
37	1	4	13,32369
38	1	4	13,32369
39	9	1	13,3543
40	9	1	13,3543

Novamente os testes serão realizados utilizando MECID com as funções radiais das tabelas 1, 2 e 3. Agora as malhas são diferentes, devido à geometria do domínio. A primeira possui 160 elementos de contorno, 181 pontos internos e 464 pontos fonte. Esta será chamada de 160 elementos. A malha mais rica possui 320 elementos de contorno, 325 pontos internos e 624 pontos fonte e será referenciada como 320 elementos.

4.6.1 Resultados Numéricos e Discussões

Funções Radiais Clássicas

Nesse caso optou-se por representar os gráficos dos erros separados por malha, para facilitar a visualização. Novamente representam-se os 40 autovalores divididos em três grupos.

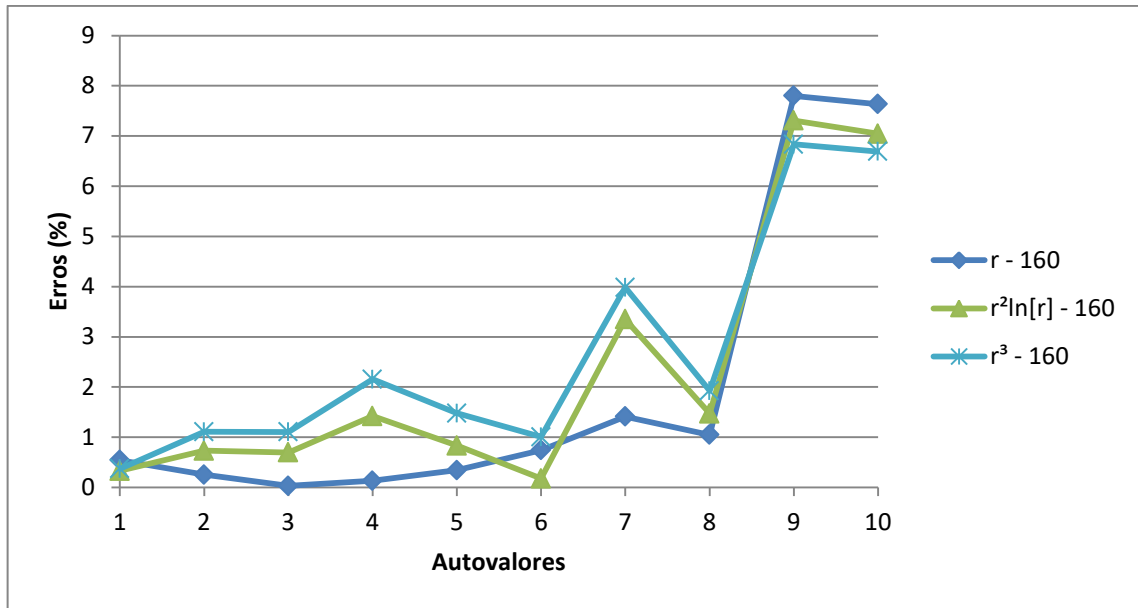


Figura 33 – Erro para os dez primeiros autovalores com a malha de 160 elementos.

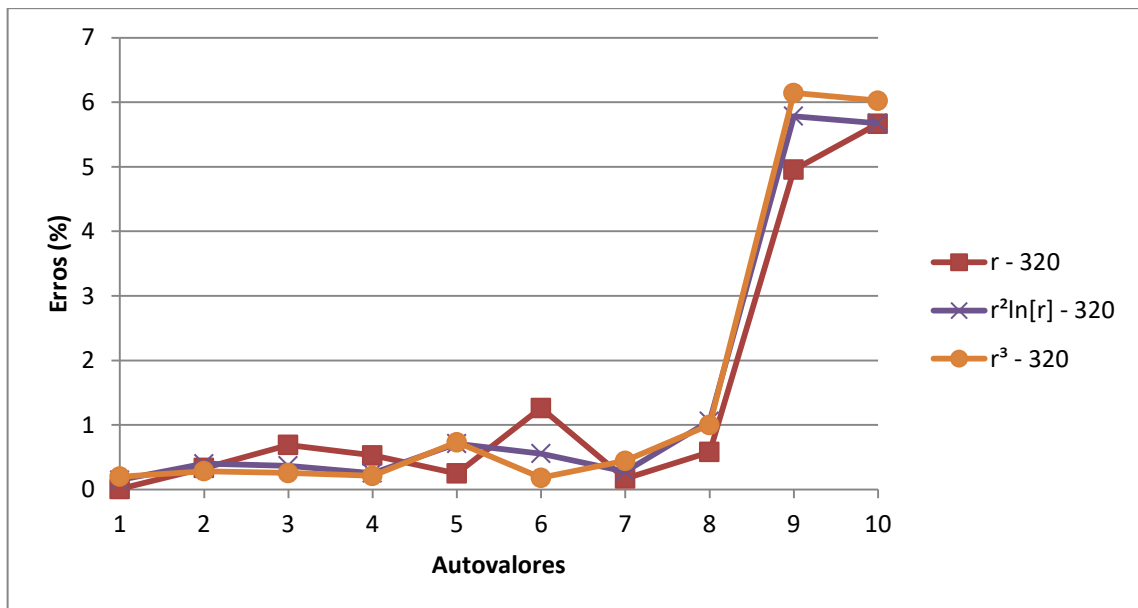


Figura 34 – Erro para os dez primeiros autovalores com a malha de 320 elementos.

Nesse primeiro grupo de resultados (Figura 33 e 34) é possível perceber que o efeito do refinamento da malha é efetivo e a função r apresentou melhores resultados.

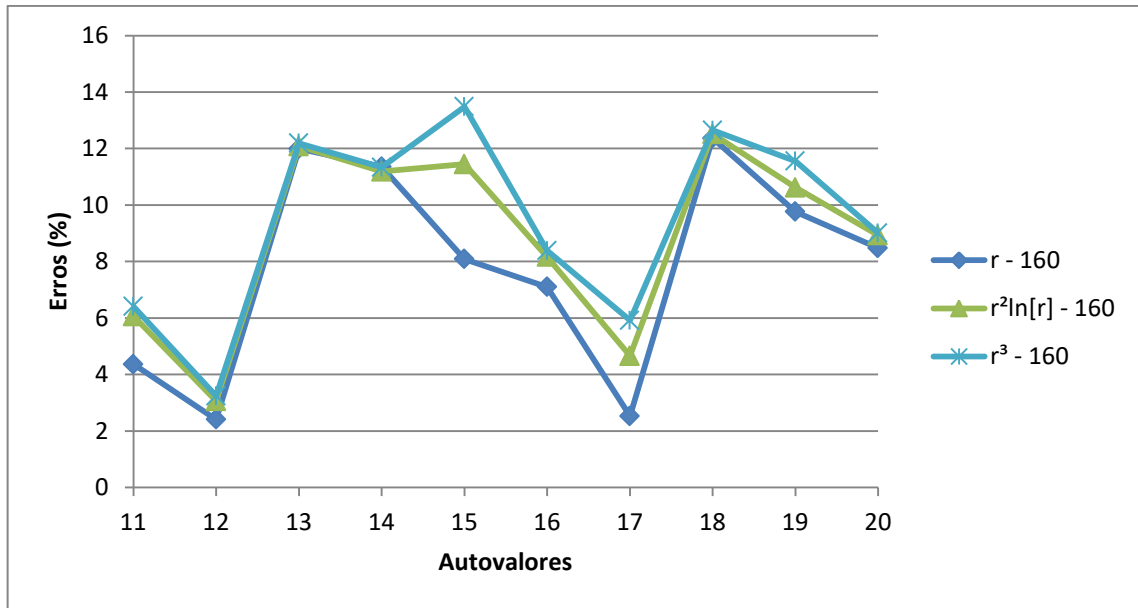


Figura 35 – Erro para a segunda dezena de autovalores com a malha de 160 elementos.

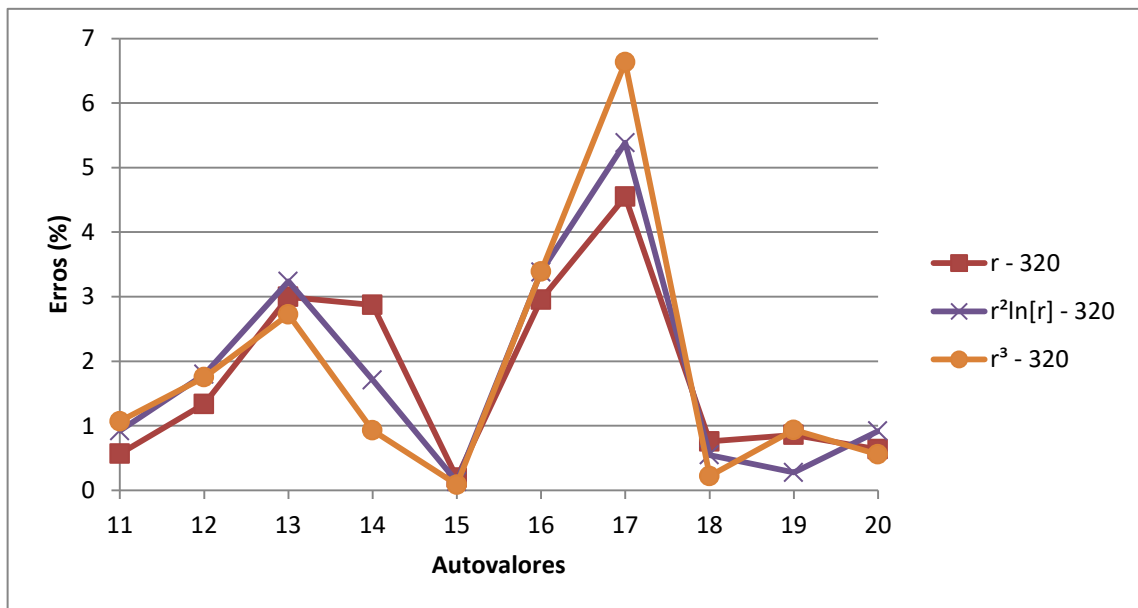


Figura 36 – Erro para a segunda dezena de autovalores com a malha de 320 elementos.

Comparando as figuras 35 e 36 novamente a malha de 320 elementos mostra resultado superior, a função r^3 apresenta piores resultados do que as outras duas. É interessante notar que algumas frequências, certamente associadas a modos não adequadamente representados pela distribuição interna de pontos base, têm erros discrepantes, tais frequências são destacadas claramente nas curvas de erros. Salvo por pequenas diferenças todas as funções apresentaram resultados semelhantes.

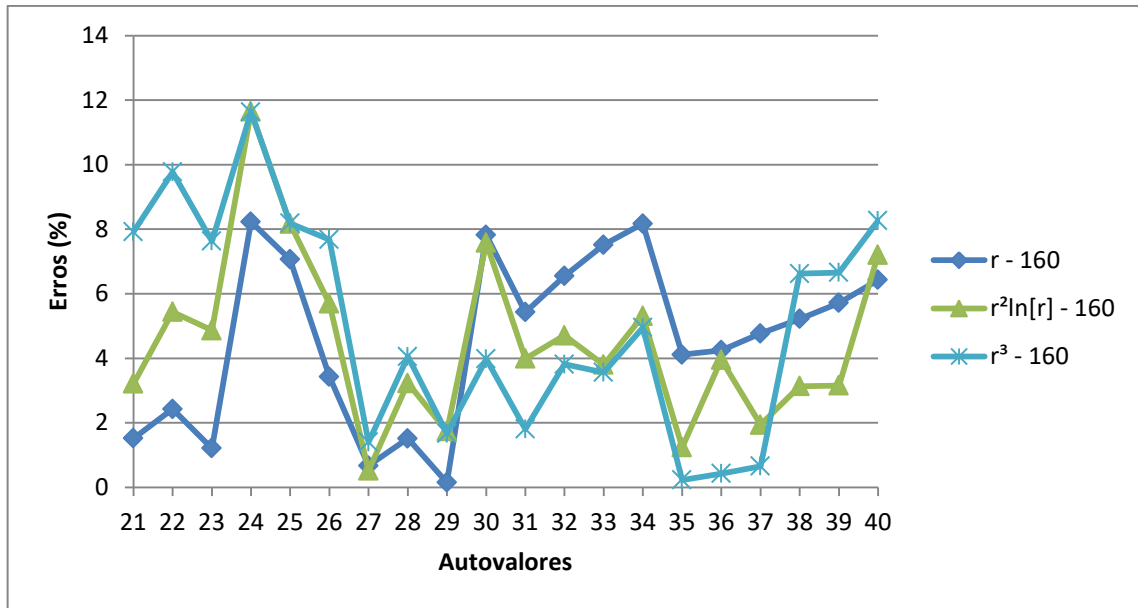


Figura 37 – Erro para os últimos vinte autovalores com a malha de 160 elementos.

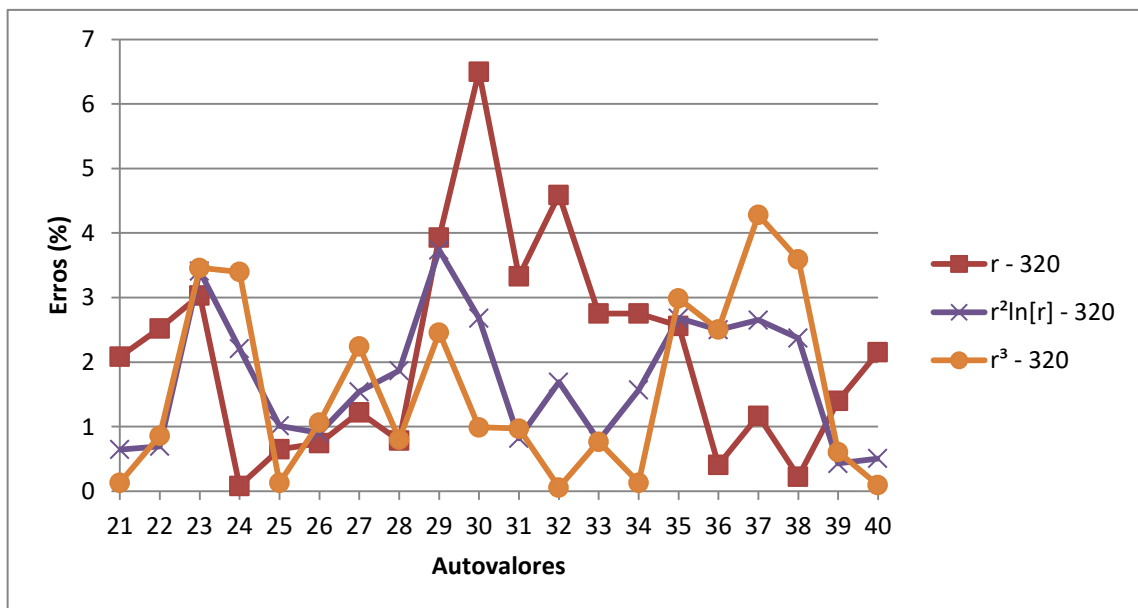


Figura 38 – Erro para os últimos vinte autovalores com a malha de 320 elementos.

Para as últimas duas figuras (37 e 38), como esperado, a malha mais rica apresentou menores erros, para esse último grupo a função $r^2\ln[r]$ apresentou melhores resultados e a função r^3 apresentou significativa melhora em alguns pontos. No geral as funções r e $r^2\ln[r]$ mostraram maior afinidade com o problema.

Funções Radiais de Wendland com Suporte Compacto

Para esse problema será utilizado apenas o suporte pleno ($\delta = 2$), pois foi o que se mostrou mais efetivo para a obtenção de resultados. Os resultados serão divididos por malha. A função wl 4 não mostrou resultados para nenhum teste.

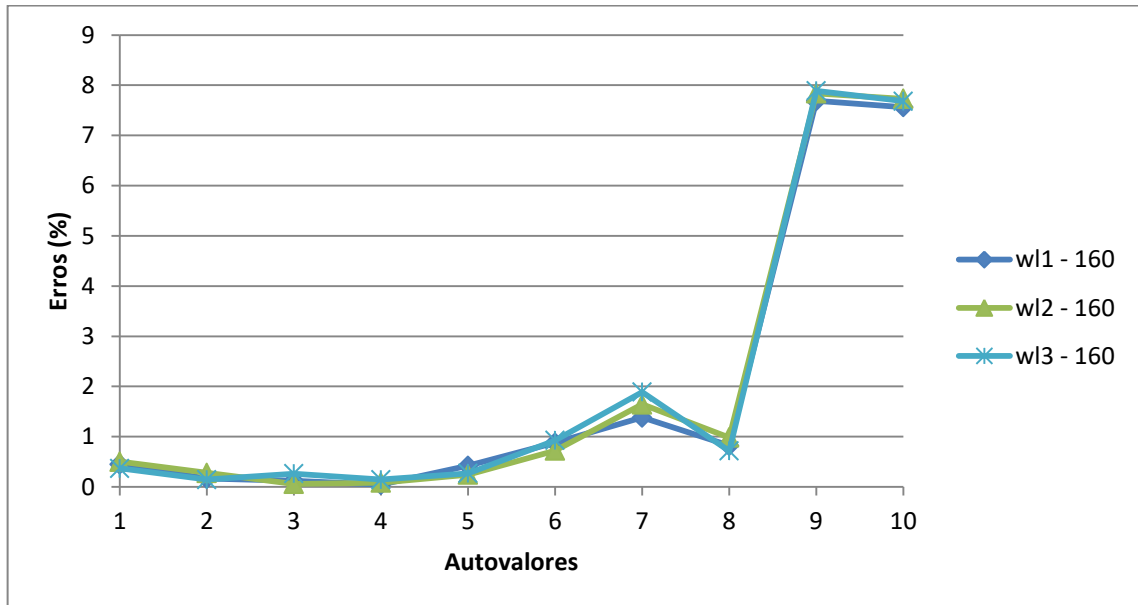


Figura 39 – Erro para os dez primeiros autovalores com a malha de 160 elementos.

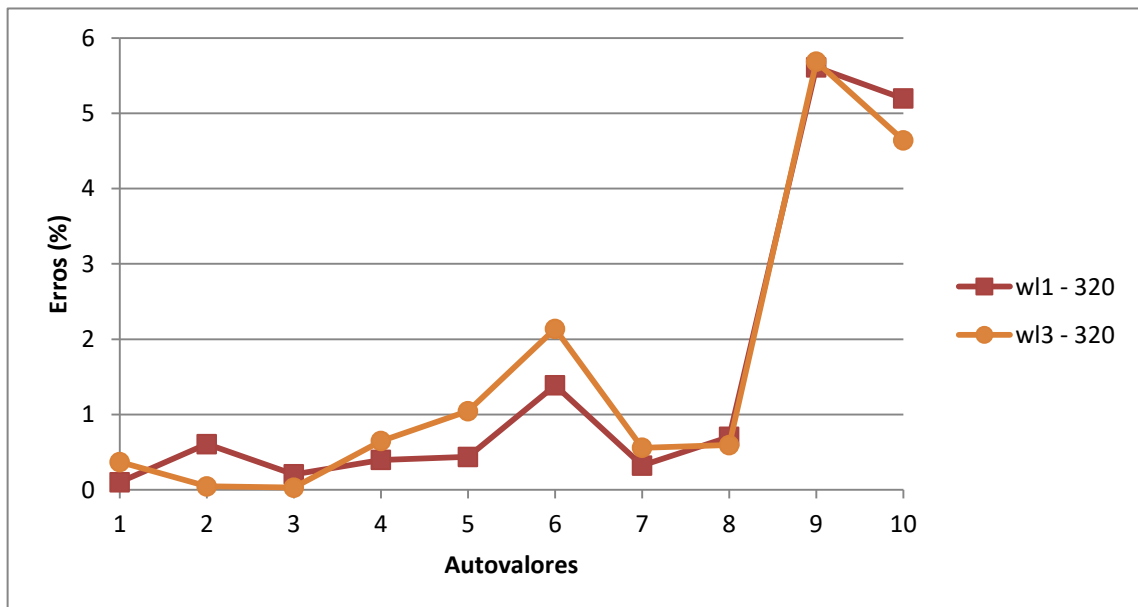


Figura 40 – Erro para os dez primeiros autovalores com a malha de 320 elementos.

Nas figuras 39 e 40, a função wl1 com 320 elementos foi a que apresentou melhor resultado, a função wl2 só apresentou respostas com 160 elementos.

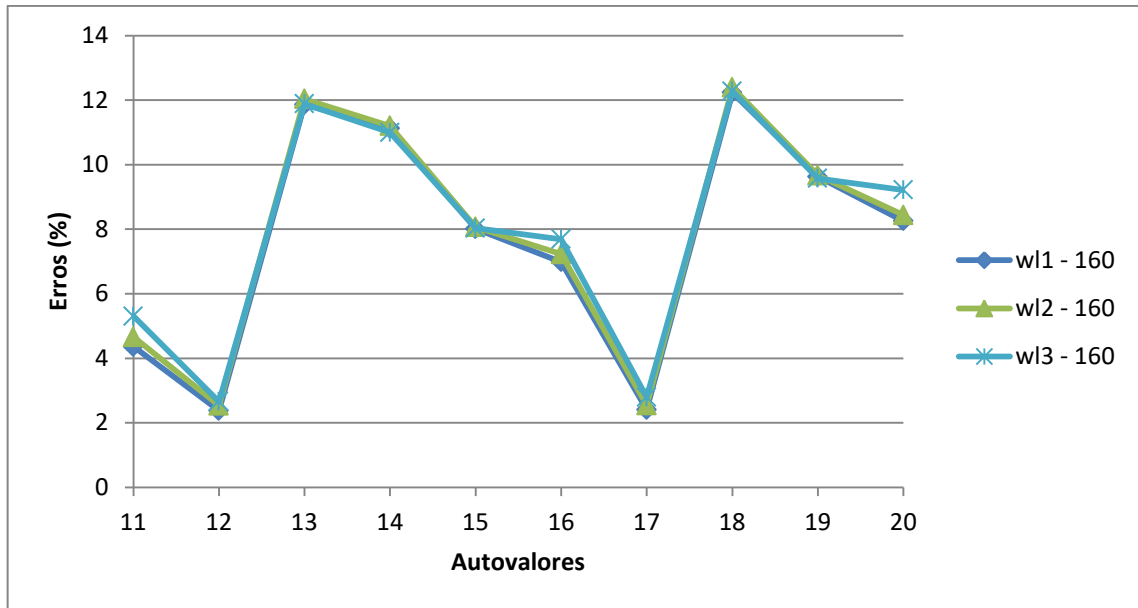


Figura 41 – Erro para a segunda dezena de autovalores com a malha de 160 elementos.

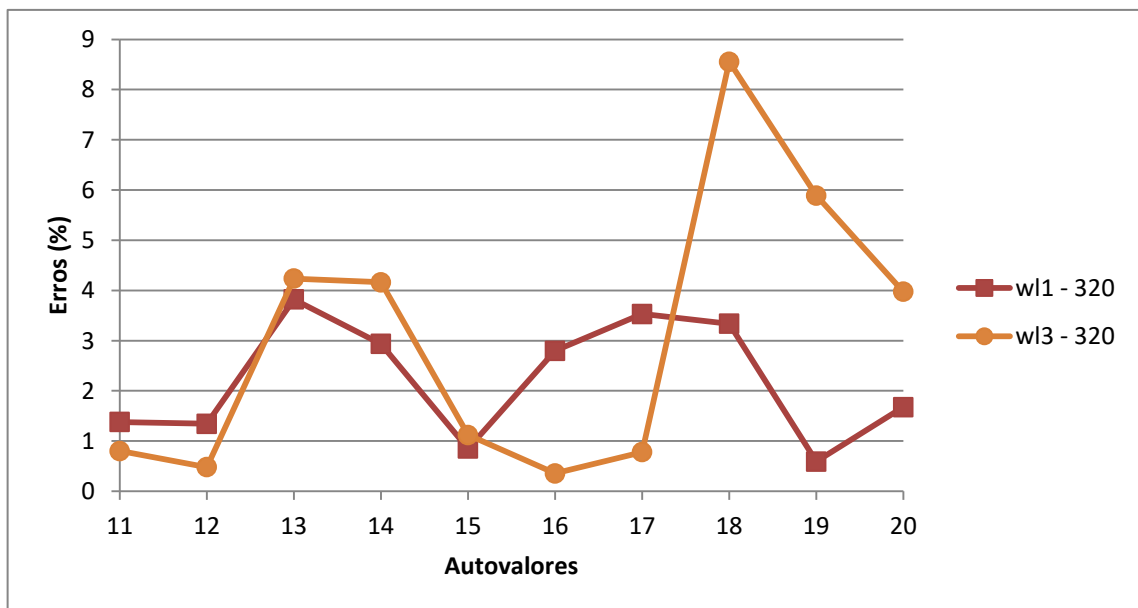


Figura 42 – Erro para a segunda dezena de autovalores com a malha de 320 elementos.

A função w1 novamente se mostrou superior para esse grupo de gráficos (figura 41 e 42), curiosamente para esses primeiros 20 autovalores os erros para as três funções se mantiveram similares com os testes com 160 elementos.

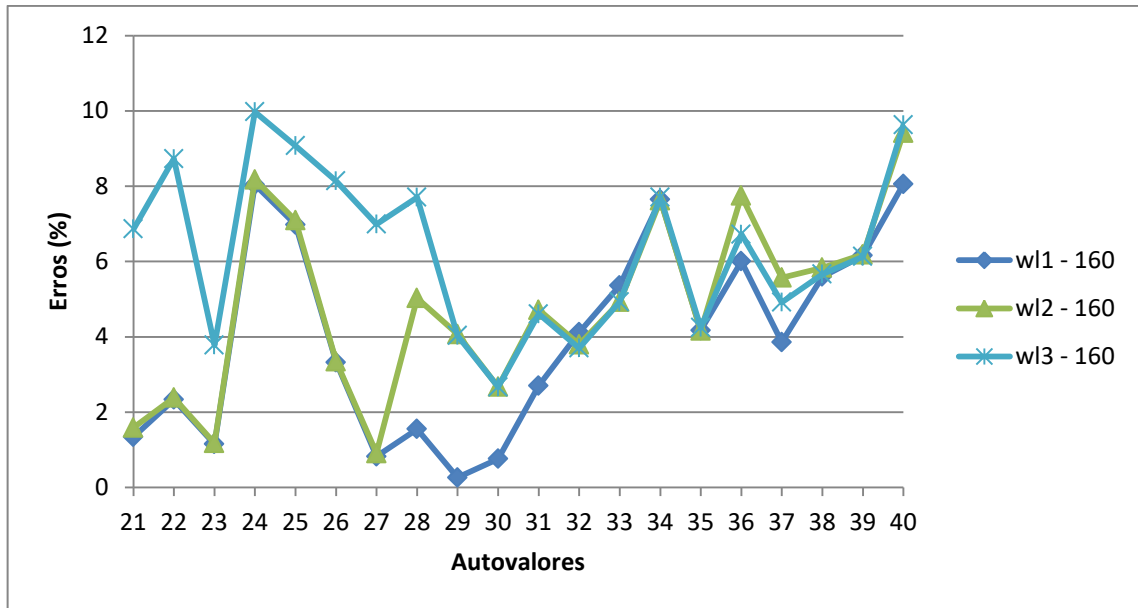


Figura 43 – Erro para os últimos vinte autovalores com a malha de 160 elementos.

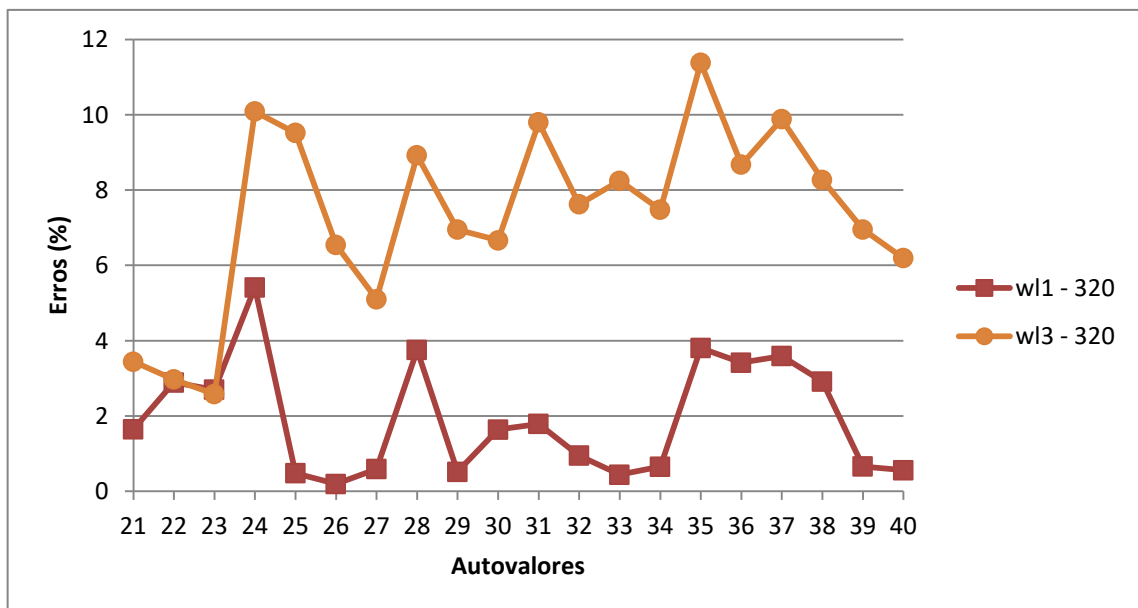


Figura 44 – Erro para os últimos vinte autovalores com a malha de 320 elementos.

A função w1 foi a que mostrou mais afinidade pelo problema nessa família de funções, as funções que apresentam expoente maior par não se mostraram bem sucedidas. Embora tenha mostrado resultado satisfatório para duas funções com a malha de 320 elementos, o desempenho se mostrou inferior ao apresentado elas funções de base radiais clássicas.

Funções Radiais de Wu com Suporte Compacto

Para esse grupo, também, será utilizado apenas o suporte pleno ($\delta = 2$). Os resultados são divididos por malha.

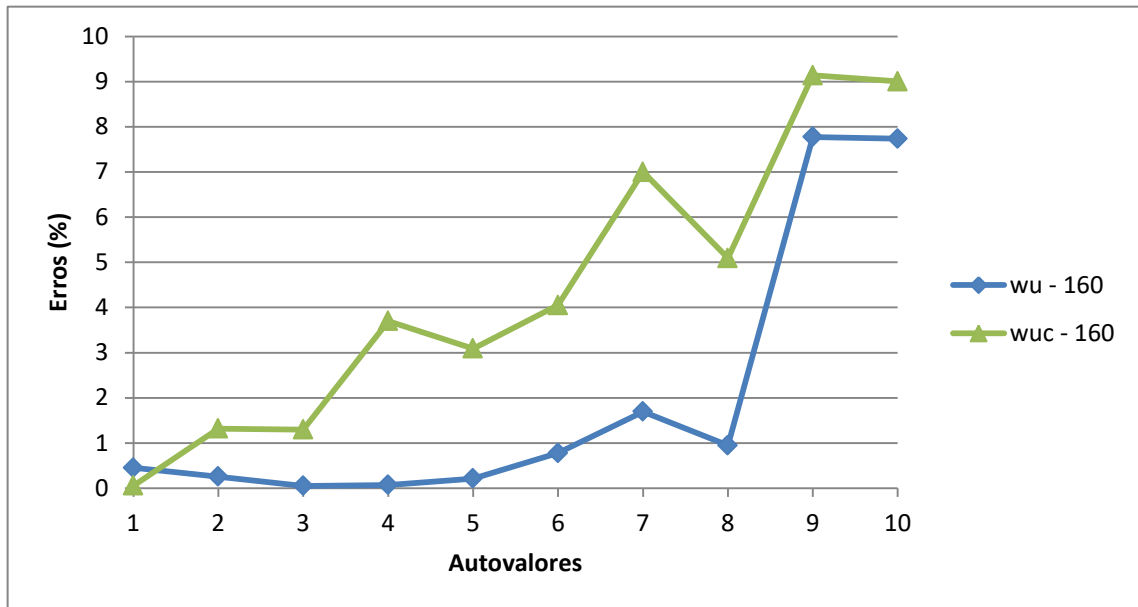


Figura 45 – Erro para os dez primeiros autovalores com a malha de 160 elementos.

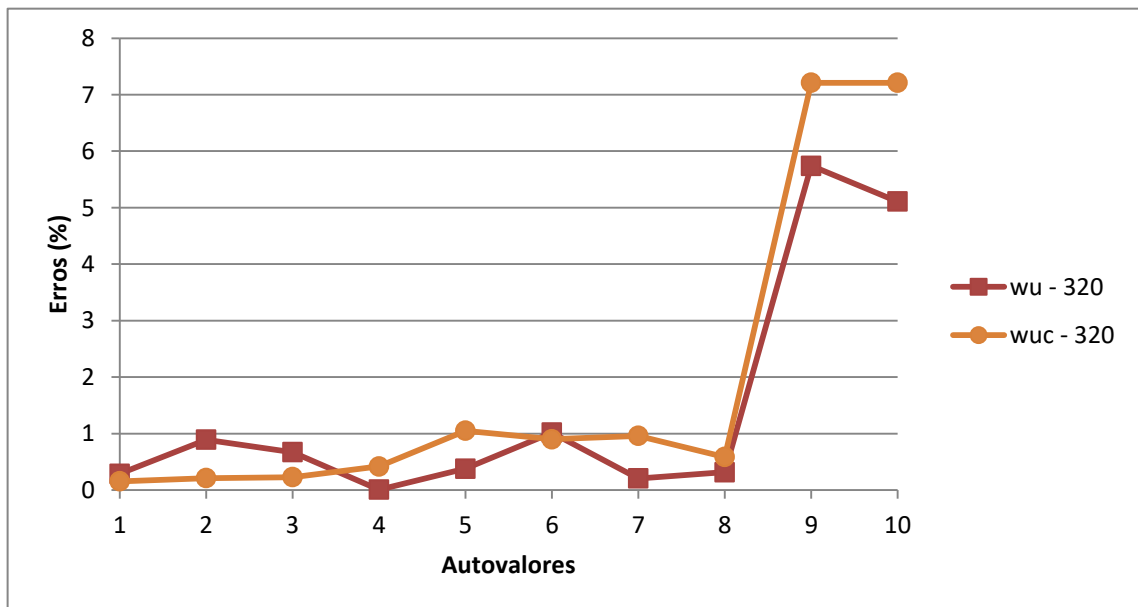


Figura 46 – Erro para os dez primeiros autovalores com a malha de 320 elementos.

A função *wu* se mostrou melhor nesses primeiros resultados (Figuras 45 e 46). A função *wuc* mostrou os piores resultados entre as três famílias aqui apresentadas para esses primeiros autovalores.

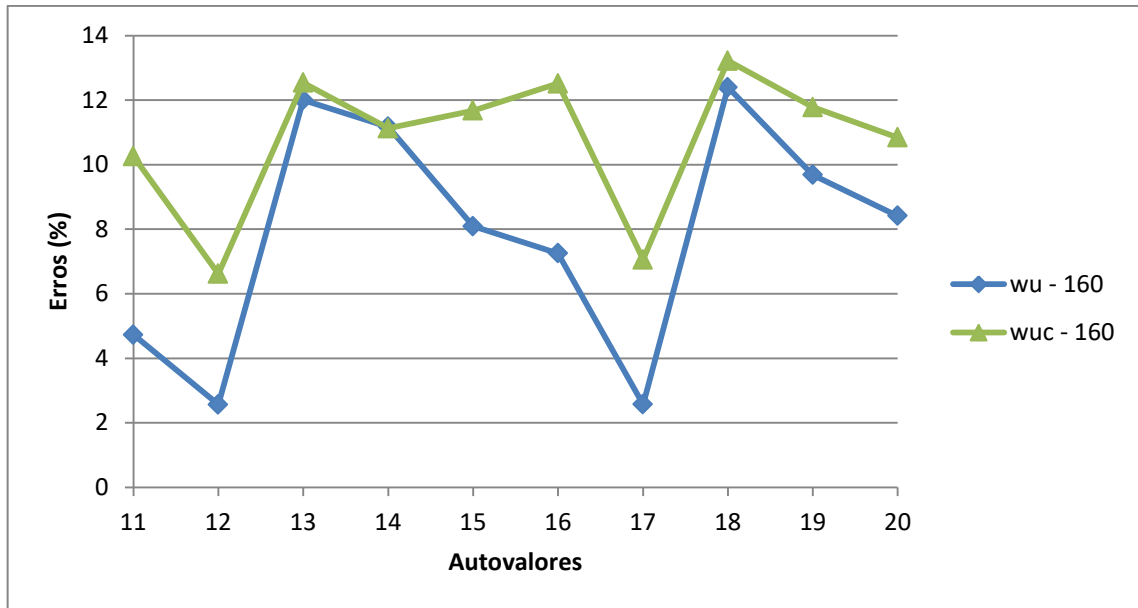


Figura 47 – Erro para a segunda dezena de autovalores com a malha de 160 elementos.

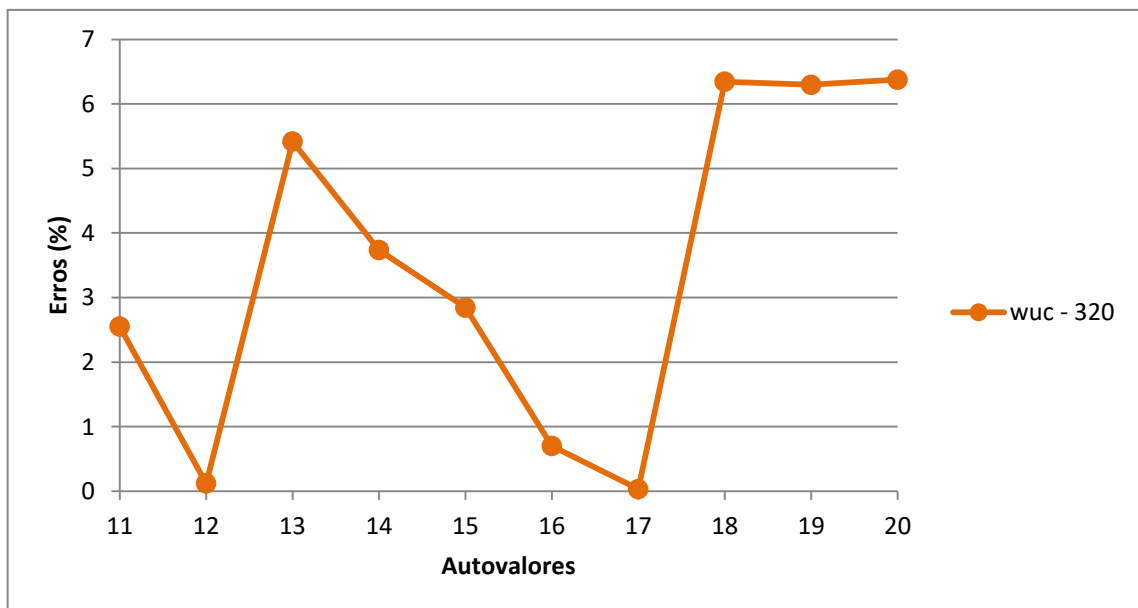


Figura 48 – Erro para a segunda dezena de autovalores com a malha de 320 elementos.

Com as figuras 47 e 48 observou-se que a função wu não apresentou resultados para essa segunda dezena de autovalores com 320 elementos. Os resultados para wuc com 320 elementos se mostraram melhores do que os resultados com 160 das duas funções.

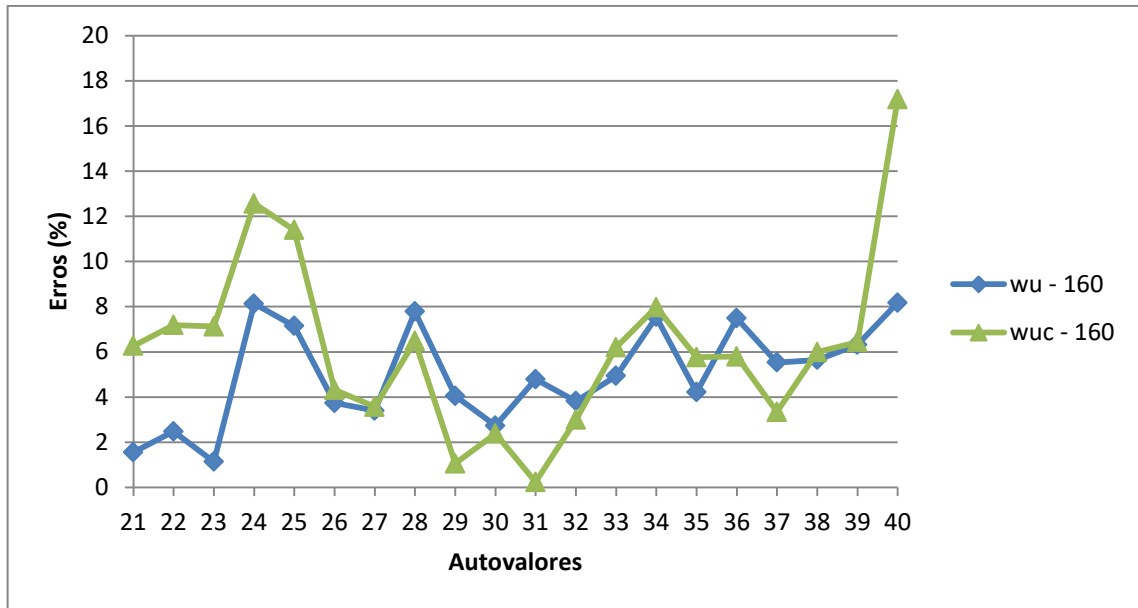


Figura 49 – Erro para os últimos vinte autovalores com a malha de 160 elementos.

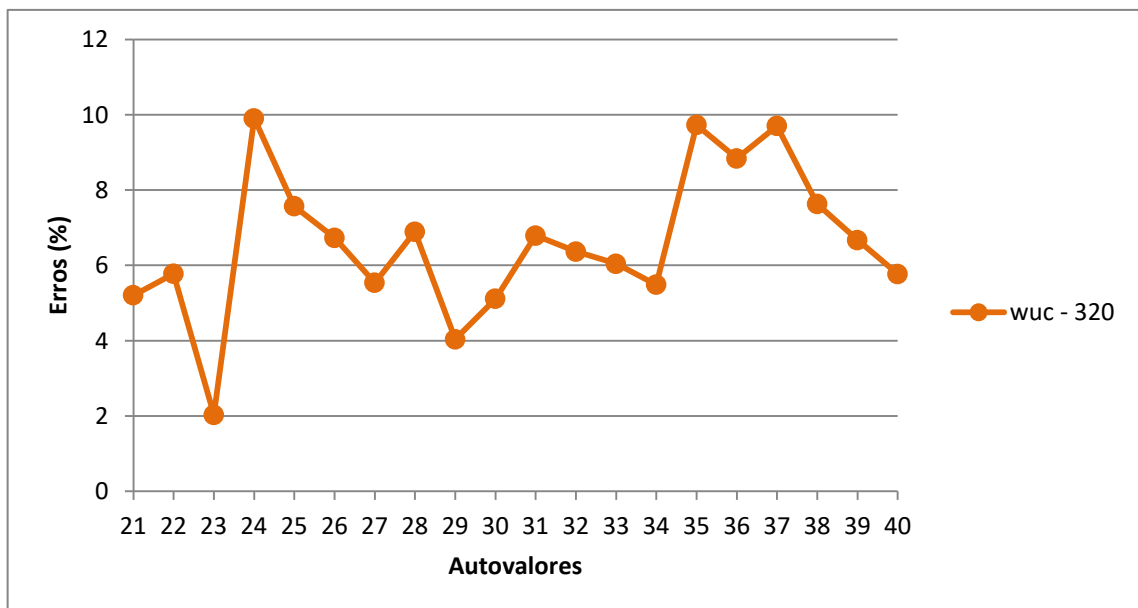


Figura 50 – Erro para os últimos vinte autovalores com a malha de 320 elementos.

Para esse último grupo (figura 49 e 50) a função wu apresentou melhor resultado com a malha de 160, embora não tenha apresentado resultado para 320. A wuc com 320 se mostrou superior a com 160 elementos.

De fato, as funções de Wu são mais complexas algebricamente. Portanto, o procedimento de resolução de problemas de autovalores usando matrizes não-simétricas e a aplicação do teorema de divergência para transformar toda a área em

uma integral de contorno certamente causa distúrbios numéricos adicionais com esse tipo de função de base radial.

4.6.2 Conclusões parciais

Nessa experiência numérica novamente foi mostrado que algumas funções apresentam maior afinidade com o tipo de problema. Aqui embora as FBR's tenham apresentado resultados ligeiramente inferiores aos mostrados pelas FBRSC's, elas se mostraram mais potentes, pois os resultados foram obtidos para todos os autovalores desejados. Essa constatação é importante, uma vez que se for necessário adotar uma função para trabalhar com um problema desconhecido as FBR's podem ser utilizadas e os melhores resultados podem ser obtidos refinando as malhas.

5 PROCEDIMENTO DE REGULARIZAÇÃO

5.1 Introdução

O MECID é uma nova formulação para a solução de equações diferenciais parciais (EDP) que apresentam operadores não auto-adjuntos. Ele surgiu como uma técnica alternativa ao Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade (MECDR) que apresenta um tratamento matemático muito complicado. O MECID já vem se mostrando mais simples, mais geral e mais robusta, do que as técnicas existentes para resolver essas EDP's.

Ao contrário do que ocorre no MECDR, na MECID todo o interior da integral de domínio é interpolado utilizando funções de base radial, incluindo a solução fundamental (Capítulo 3). Assim, caso aconteça coincidência entre os pontos fonte ξ e os pontos de campo X ocorrerá singularidade. Para evitar isso, a formulação preliminar do MECID estabelece que as coordenadas desses pontos precisam ser distintas, o que decorre na necessidade da entrada de dois conjuntos de dados.

A proposta deste capítulo é utilizar o conceito de Hadamard (BRAGA 2006) para eliminar as singularidades, fazendo com que o processo de aplicação e entrada de dados do MECID, seja feita de forma mais rápida e prática. Uma vez que os pontos de campo e os pontos fonte podem coincidir. Claramente, é necessário verificar a qualidade dos resultados, já que o procedimento original apresenta um bom desempenho.

5.2 Formulação

A concepção da regularização de Hadamard é normalmente aplicada em outro contexto (PESSOLANI 2002), porém aqui será utilizado objetivando a exclusão da singularidade na equação (3.23)¹ no caso dos pontos fonte e pontos de campo coincidirem. Partindo da equação (3.22)² e aplicando o conceito do lado direito:

¹ $\int_{\Omega} uu^* d\Omega = \int_{\Omega} \xi \alpha^j F^j(X; X^i) d\Omega$

² $c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} uq^* d\Omega - \int_{\Gamma} qu^* d\Omega = -\frac{1}{c^2} \omega^2 \int_{\Omega} uu^* d\Omega$

$$\begin{aligned}
c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma \\
= \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ \int_{\Omega} [u(X)u^*(\xi; X)]d\Omega - \int_{\Omega} [u(\xi)u^*(\xi; X)]d\Omega \right\} \\
+ \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega} [u(\xi)u^*(\xi; X)]d\Omega
\end{aligned} \quad (5.1)$$

Os primeiros termos do lado direito de (5.1) podem ser aproximados em conjunto como mostrado em (5.2):

$$\frac{\omega^2}{c^2} \left\{ \int_{\Omega} [u(X)u^*(\xi; X)]d\Omega - \int_{\Omega} [u(\xi)u^*(\xi; X)]d\Omega \right\} \approx \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ \int_{\Omega} \xi \alpha^i F^i(X^i; X)d\Omega \right\} \quad (5.2)$$

Usando a transformação do MECID, dado por (3.26)³, encontra-se:

$$\begin{aligned}
c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma \\
= \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ \xi \alpha^i \int_{\Gamma} \eta^i(X^i; X)d\Gamma \right\} + \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega} [u(\xi)u^*(\xi; X)]d\Omega
\end{aligned} \quad (5.3)$$

Convenientemente o segundo termo do lado direito da equação (5.3) será ignorado. Tratando os outros termos matricialmente:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & \cdots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & \cdots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \frac{\omega^2}{c^2} \begin{bmatrix} {}^1\alpha^1 & \cdots & {}^1\alpha^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^n\alpha^1 & \cdots & {}^n\alpha^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_m \end{bmatrix} \\
= \frac{\omega^2}{c^2} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (5.4)$$

Cada coeficiente A_{ξ} é dado explicitamente por:

$$A_{\xi} = [N_1 \quad \cdots \quad N_m] \begin{bmatrix} \xi \alpha^1 \\ \vdots \\ \xi \alpha^m \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Cada termo $\xi \alpha$ pode ser calculado usando a equação de interpolação básica, que é:

³ $c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} uq^* d\Omega - \int_{\Gamma} qu^* d\Omega = \frac{1}{c^2} \omega^2 \left[\xi \alpha^j \int_{\Gamma} \eta^j d\Gamma \right]$

$$[\xi \alpha] = [F]^{-1} [\xi \Lambda] [F] \alpha = [F]^{-1} [\xi \Lambda] [u] \quad (5.6)$$

Assim:

$$\begin{aligned} A_\xi &= [N_1 \quad \dots \quad N_n] \begin{bmatrix} F_{11} & \dots & F_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1} & \dots & F_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \xi \Lambda^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \xi \Lambda^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \begin{bmatrix} \xi \Lambda^1 \cdot u_\xi & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \xi \Lambda^n \cdot u_\xi \end{bmatrix} \right\} \\ &= [S_1 \quad \dots \quad S_n] \left\{ \begin{bmatrix} \xi \Lambda^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \xi \Lambda^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \begin{bmatrix} \xi \Lambda^1 \cdot u_\xi & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \xi \Lambda^n \cdot u_\xi \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Considerando que o índice n é o total de pontos fonte, incluindo os pontos internos e os nós de contorno. O vetor $[A_\xi]$ é dado por:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [-S_2 \quad {}^1\Lambda^2 - S_3 \quad {}^1\Lambda^3 \dots - S_n \quad {}^1\Lambda^n] & \dots & S_n \quad {}^1\Lambda^n \\ & \ddots & \vdots \\ S_1 \quad {}^n\Lambda^1 & \dots & [-S_1 \quad {}^n\Lambda^1 - S_2 \quad {}^n\Lambda^2 \dots - S_{n-1} \quad {}^n\Lambda^{n-1}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Percebe-se que agora o termo que causava a singularidade agora não apresentará mais em (5.8).

O último termo do lado direito de (5.1) ainda continua existindo, entretanto isso pode ser facilmente tratado matematicamente aplicando o conceito do tensor de Galerkin (KYTHE 1995) e ser transformado em uma integral de contorno seguindo os próximos passos:

$$\int_{\Omega} [u(\xi)u^*(\xi; X)]d\Omega = u(\xi) \int_{\Omega} [G_{ii}^*(\xi; X)]d\Omega = u(\xi) \int_{\Gamma} [G_{ii}^*(\xi; X)n_i(X)]d\Gamma \quad (5.9)$$

Em (5.9), $G_{ii}^*(\xi; X)$ é dado por:

$$G_{r_i}^*(\xi; X)n_i(X) = \xi P^X = \frac{1}{4\pi} \{0,5 - \ln[r(\xi; X)]\} r_i n_i \quad (5.10)$$

O procedimento de discretização aplicado em (5.9) leva ao seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_1^1 {}^1P^1 d\Gamma_1 + \dots + \int_n^1 {}^1P^n d\Gamma_n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \int_1^n {}^n P^1 d\Gamma_1 + \dots + \int_n^n {}^n P^n d\Gamma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

O sistema matricial final pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \frac{\omega^2}{k^2} \begin{bmatrix} (A_1 - Z_1) \\ \vdots \\ (A_n - Z_n) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$= \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

5.3 Comparação entre os Métodos

A qualidade do MECID com esquema de regularização será testada comparando os erros encontrados utilizando a nova formulação com os erros dos dois problemas teste do Capítulo 4 (que utilizaram a formulação MECID sem regularização).

O esquema de regularização afeta o comportamento das funções de base radial e, via de regra, as FRBCs não apresentaram resultados bons. Assim, apenas os resultados das FBRs (Tabela 1) são discutidos. Logo, somente os erros mostrados por elas serão utilizados para fazer os gráficos.

Para facilitar a visualização e a comparação serão mostrados gráficos individuais para cada função e malha, como a quantidade de autovalores é elevado serão divididos em dois gráficos com 20 autovalores cada.

5.3.1 Membrana Retangular Totalmente Fixada

Os testes para esse problema com a técnica regularizada serão feitos com duas malhas: uma com 160 elementos de contorno e 144 pontos internos; outra com 320 elementos de contorno e 324 pontos internos.

Nas figuras 51 e 52 nota-se que a função r com a malha de 160 elementos apresentou melhores resultados com a formulação normal.

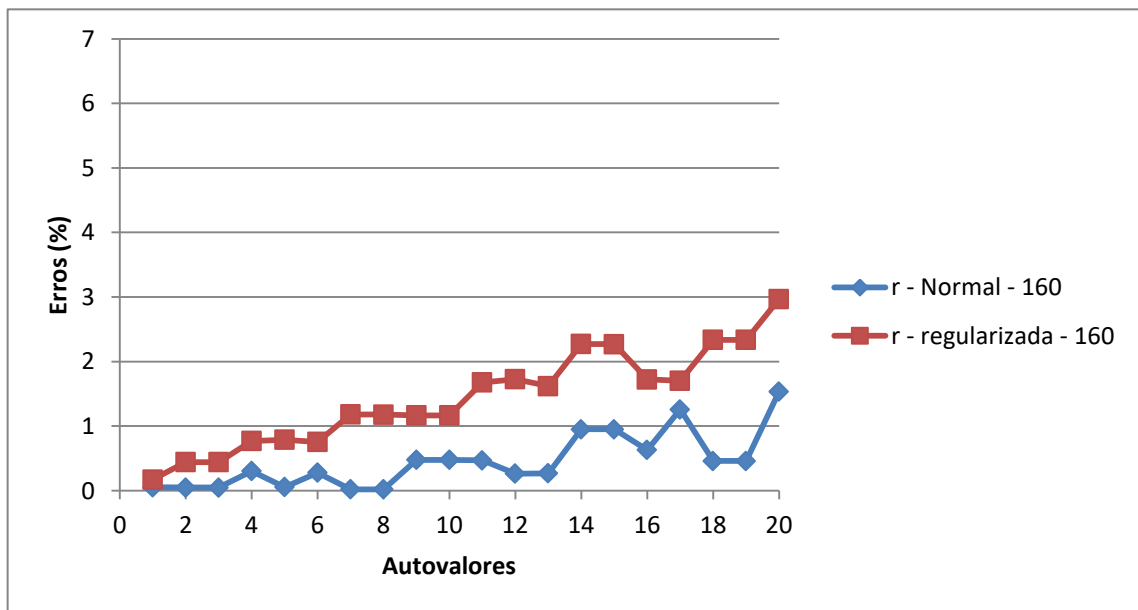


Figura 51 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r e 160 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.

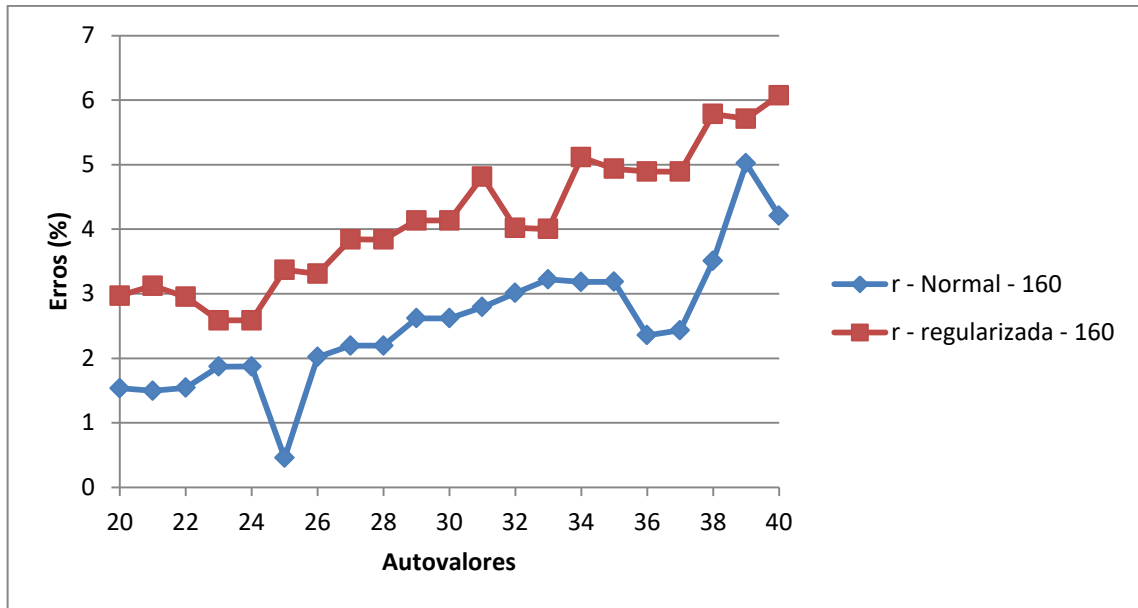


Figura 52 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r e 160 elementos. Para os últimos vinte autovalores.

Nos gráficos das figuras 53 e 54 que utilizam a função r com a malha 320 elementos, a formulação normal apresentou melhores resultados para quase todos os autovalores, porém para alguns autovalores a formulação regularizada já apresentou melhores resultados (figura 54).

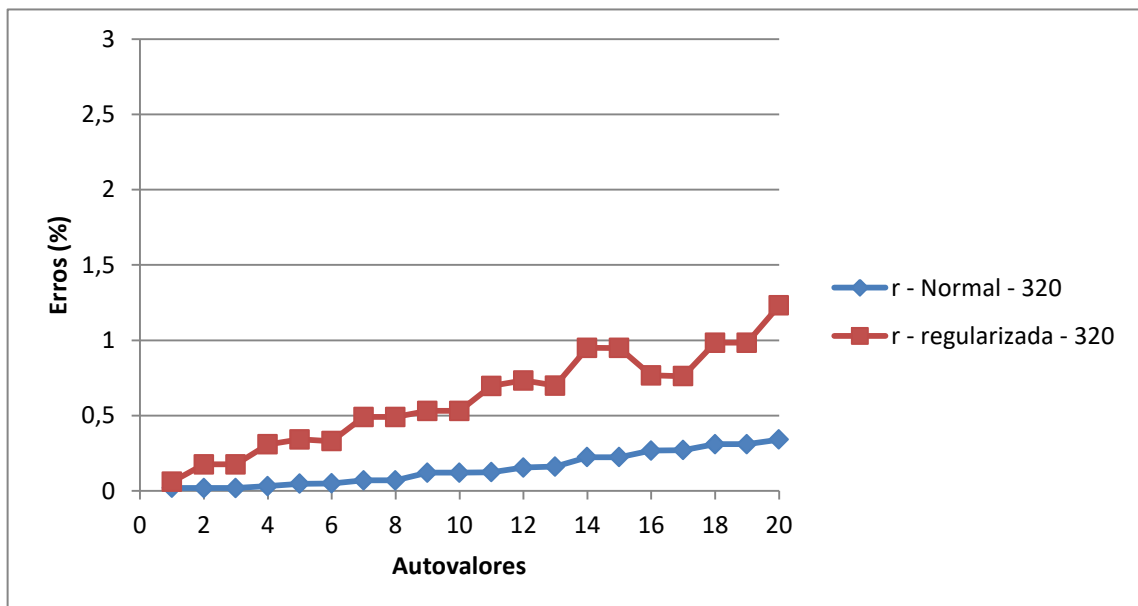


Figura 53 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r e 320 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.

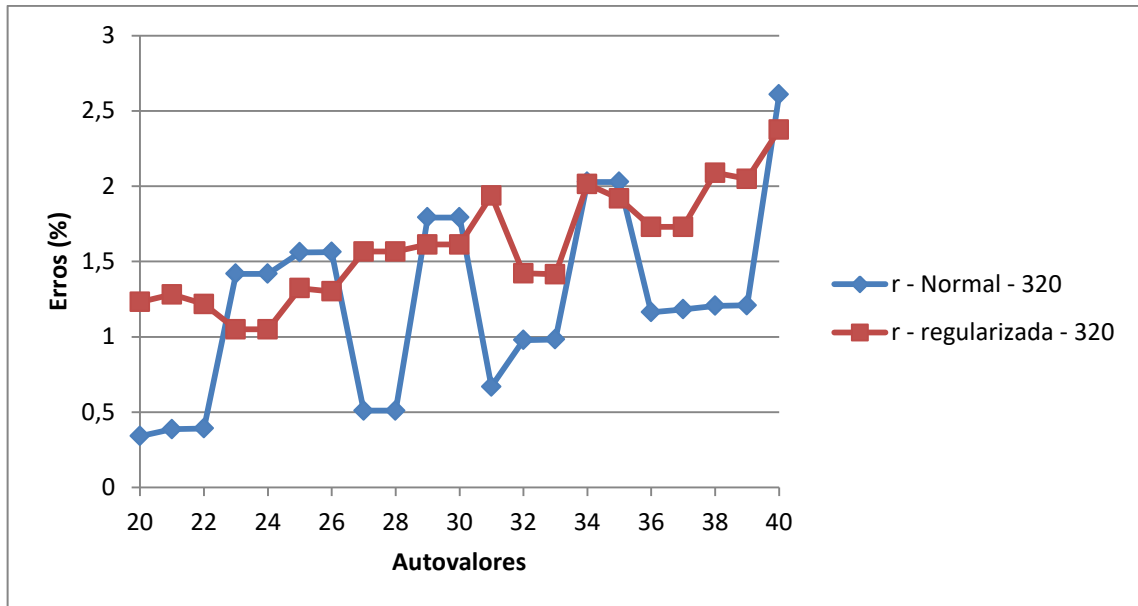


Figura 54 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r e 320 elementos. Para os últimos vinte autovalores.

Nas figuras 55 e 56 a formulação regularizada já apresenta superioridade na qualidade dos resultados, o que se repete nas figuras 57 e 58. Assim sendo, pode-se afirmar que a função r^2lnr apresenta mais afinidade com a formulação regularizada.

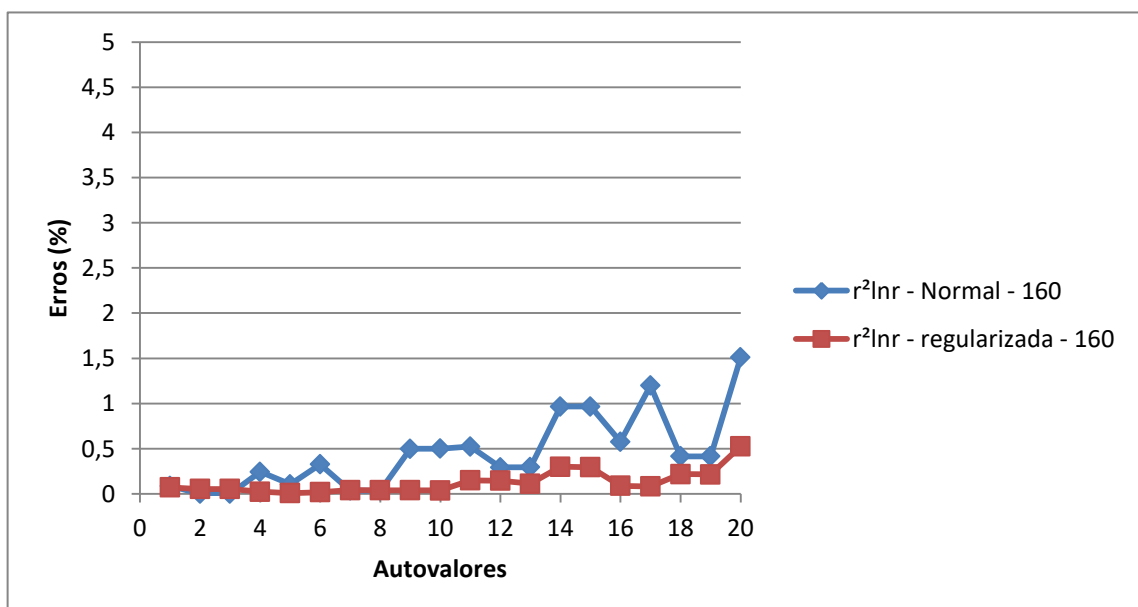


Figura 55 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r^2lnr e 160 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.

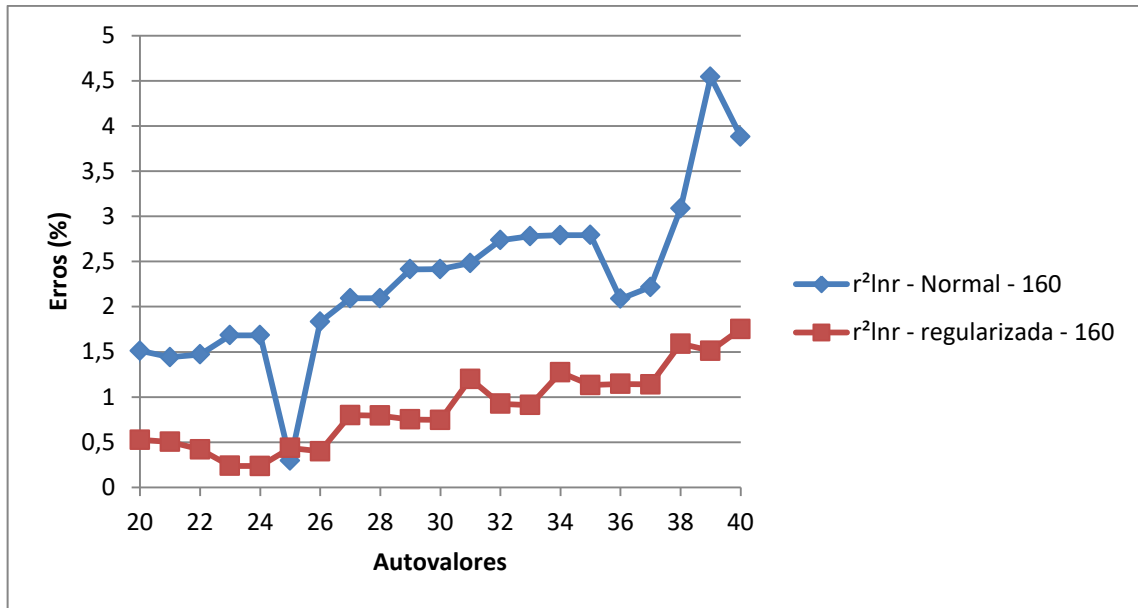


Figura 56 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r^2Inr e 160 elementos. Para os últimos vinte autovalores.

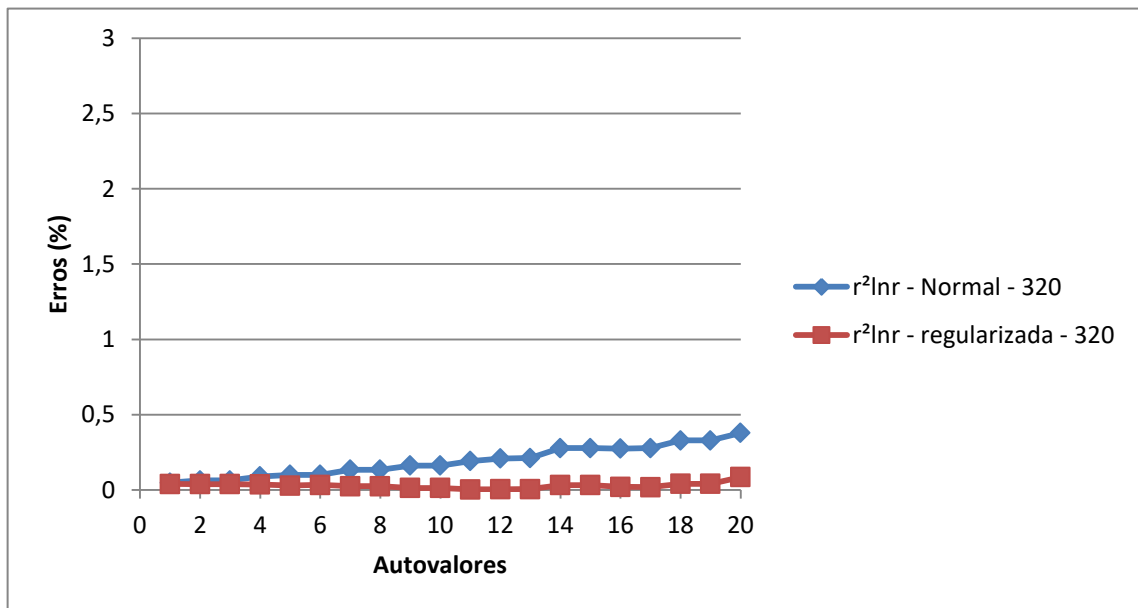


Figura 57 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r^2Inr e 320 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.

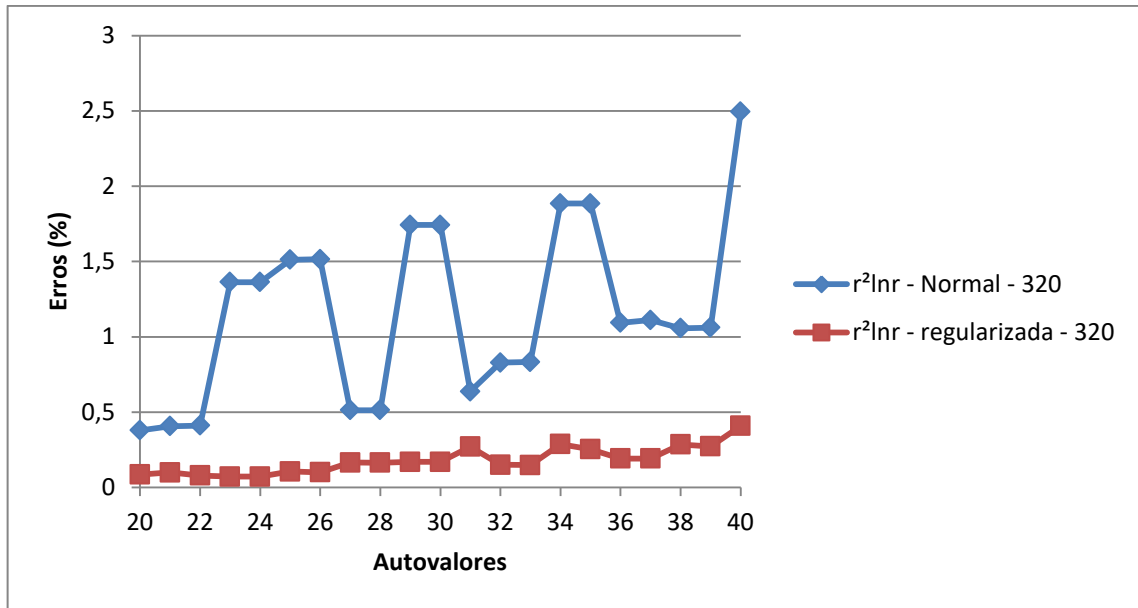


Figura 58 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função $r^2 \ln r$ e 320 elementos. Para os últimos vinte autovalores.

Com a função r^3 também a formulação regularizada se mostrou superior à formulação normal, como pode ser constatado nas figuras de 59 a 62.

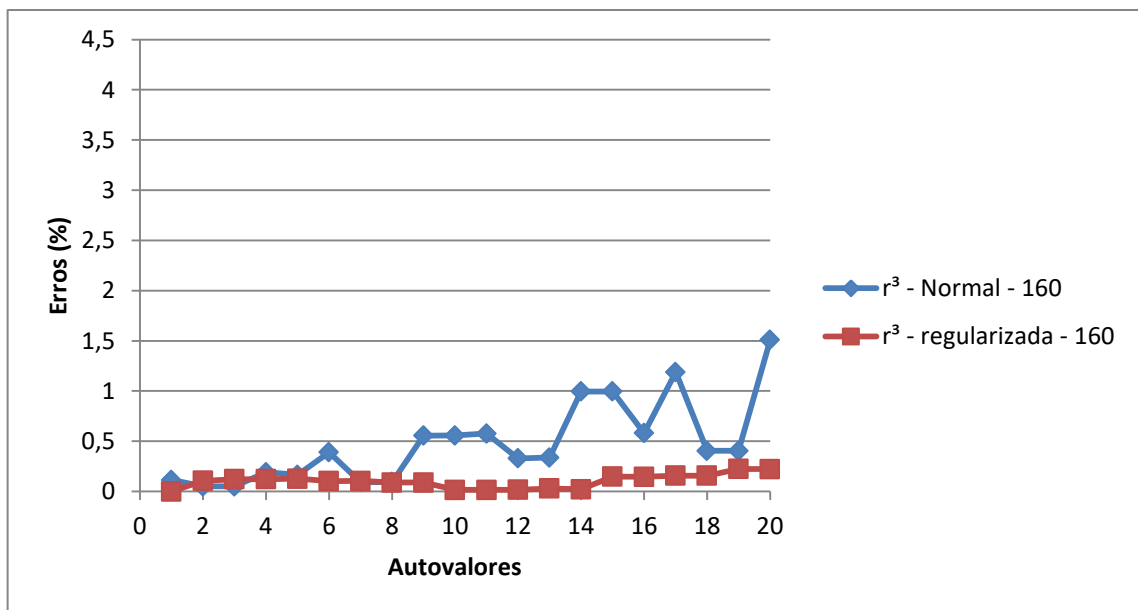


Figura 59 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r^3 e 160 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.

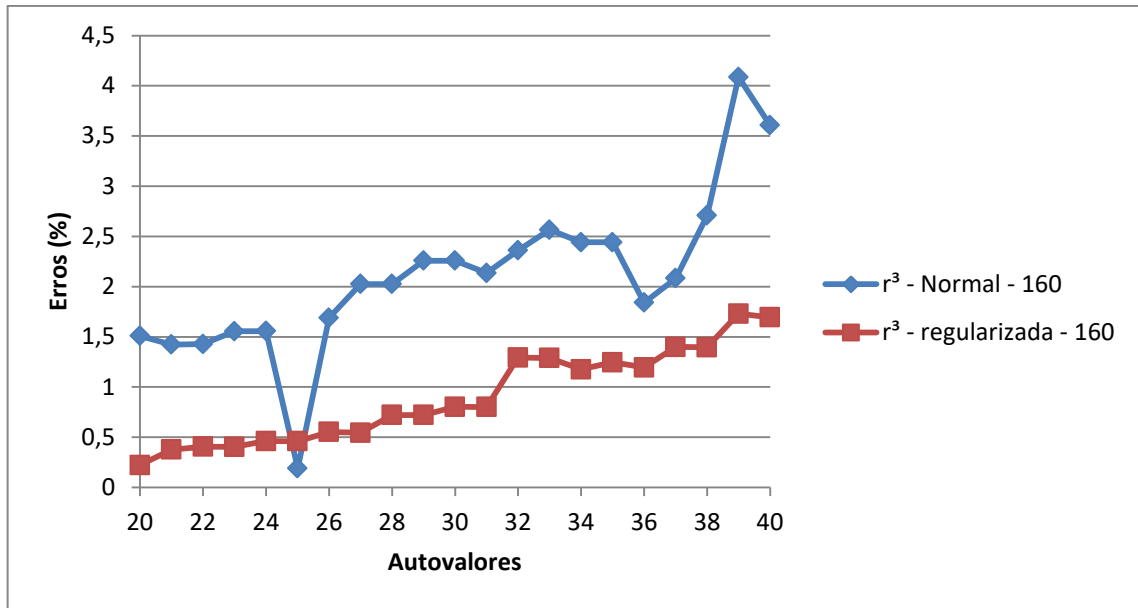


Figura 60 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r^3 e 160 elementos. Para os últimos vinte autovalores.

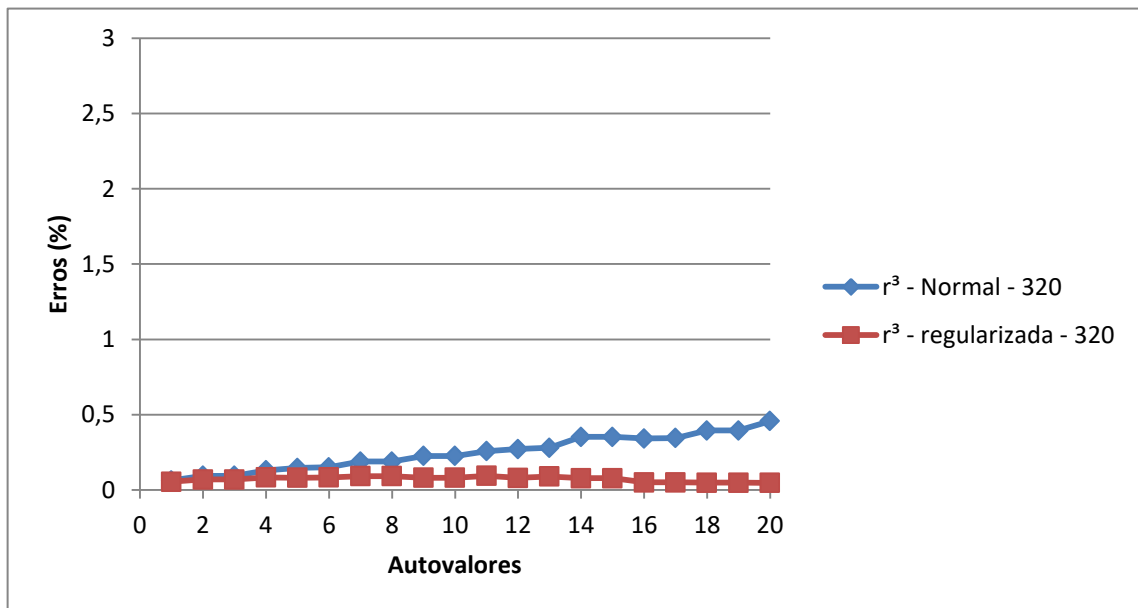


Figura 61 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r^3 e 320 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.

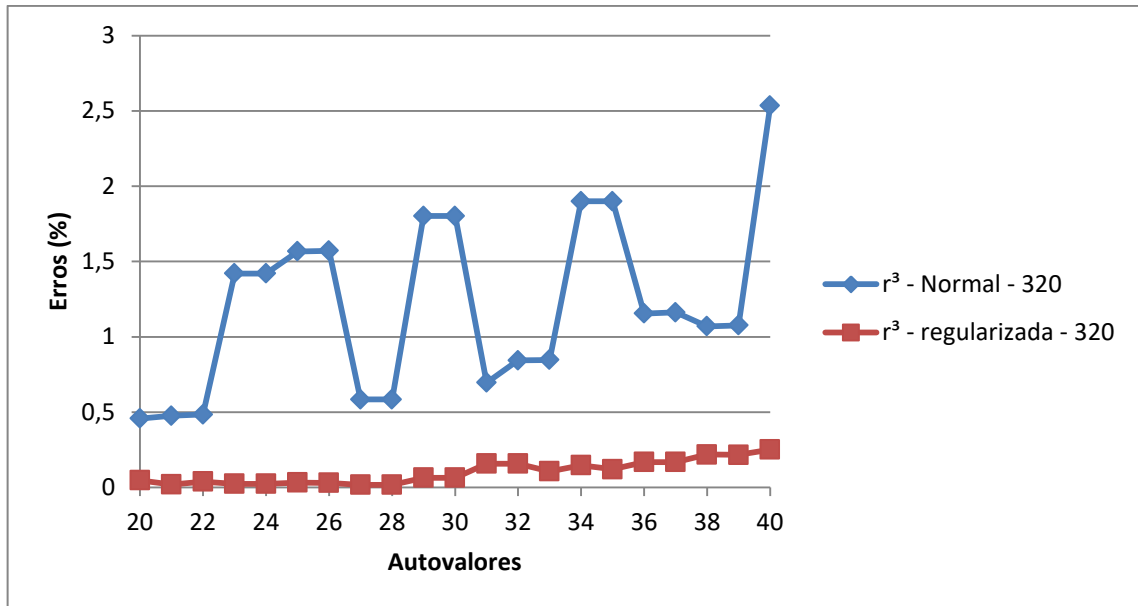


Figura 62 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r^3 e 160 elementos. Para os últimos vinte autovalores.

Para esse problema o MECID com formulação regularizada mostrou resultados superiores ao MECID com formulação normal. A melhor qualidade só não foi observada em totalidade para a função r , porém com o aumento da malha alguns pontos (da formulação regularizada) apresentaram melhores valores que a formulação normal.

5.3.2 Membrana Circular Totalmente Fixada

Aqui também serão utilizadas duas malhas: uma com 160 elementos de contorno e 181 pontos internos; e outra com 320 elementos de contorno e 325 pontos internos.

Utilizando a função r com a malha de 160 elementos a formulação regularizada se mostrou predominantemente melhor do que a formulação normal (figuras 63 e 64).

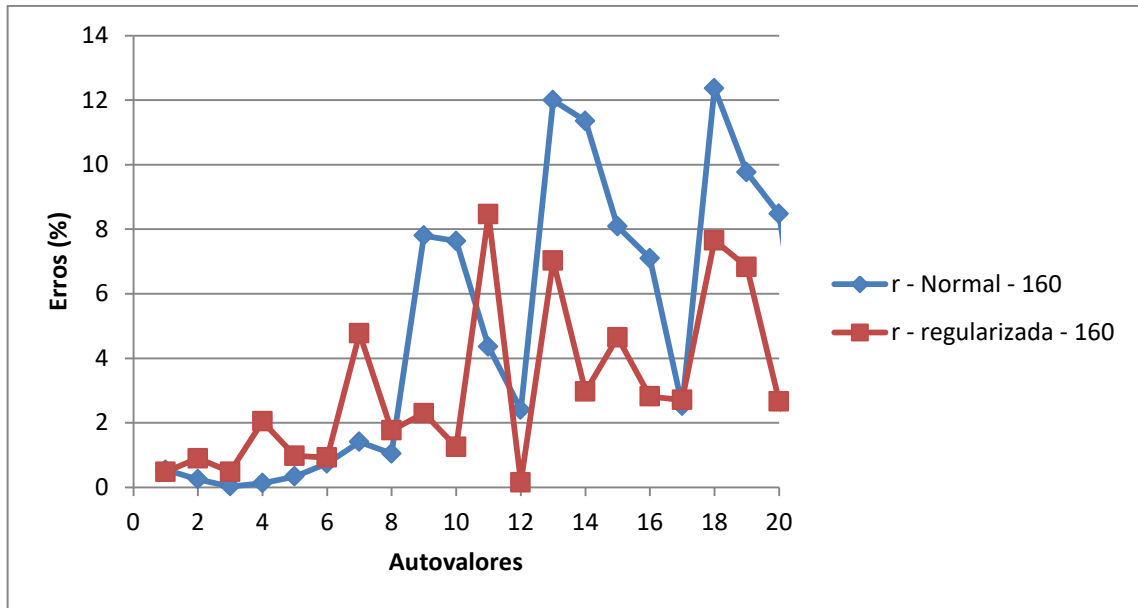


Figura 63 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r e 160 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.

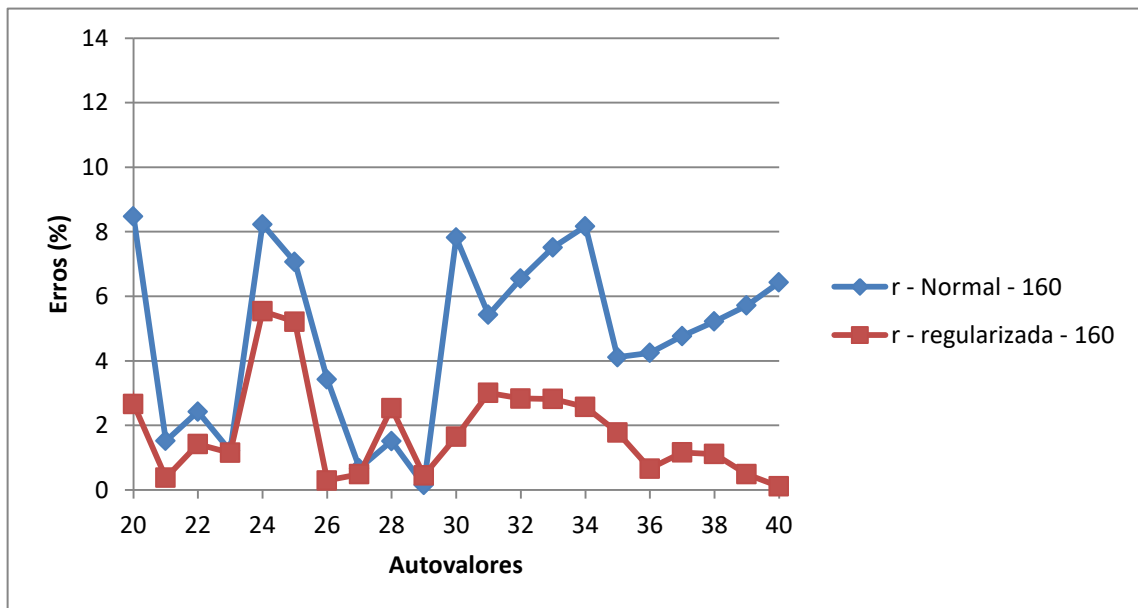


Figura 64 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r e 160 elementos. Para os últimos vinte autovalores.

Nos gráficos das figuras 65 e 66, a seguir, é possível notar que com 320 elementos a formulação normal apresentou melhores resultados para os primeiros autovalores e para os últimos os erros com a formulação regularizada foram menores.

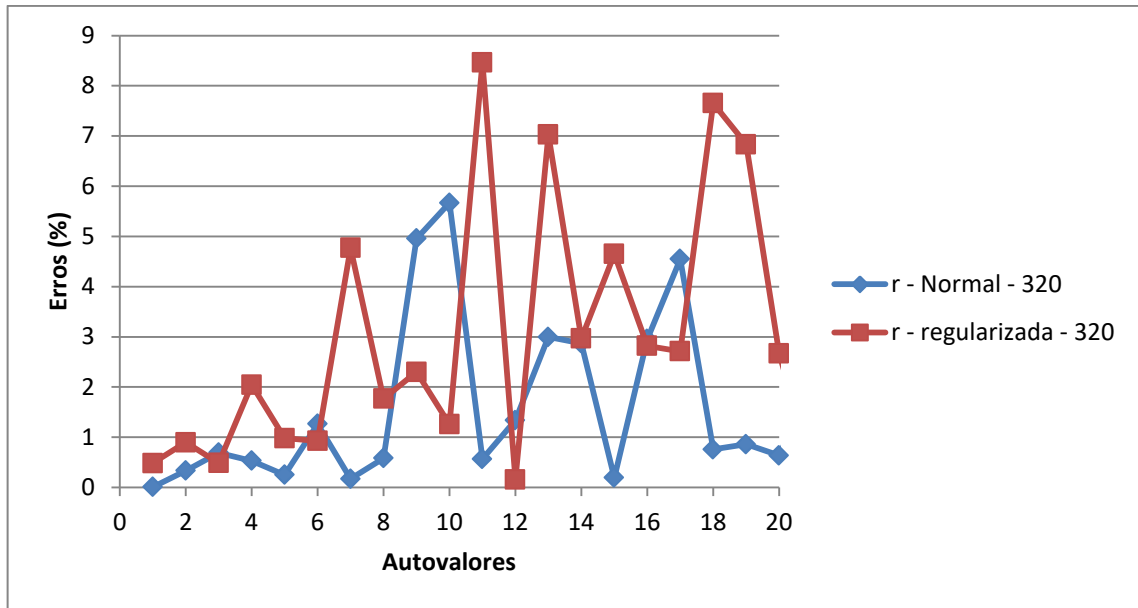


Figura 65 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r e 320 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.

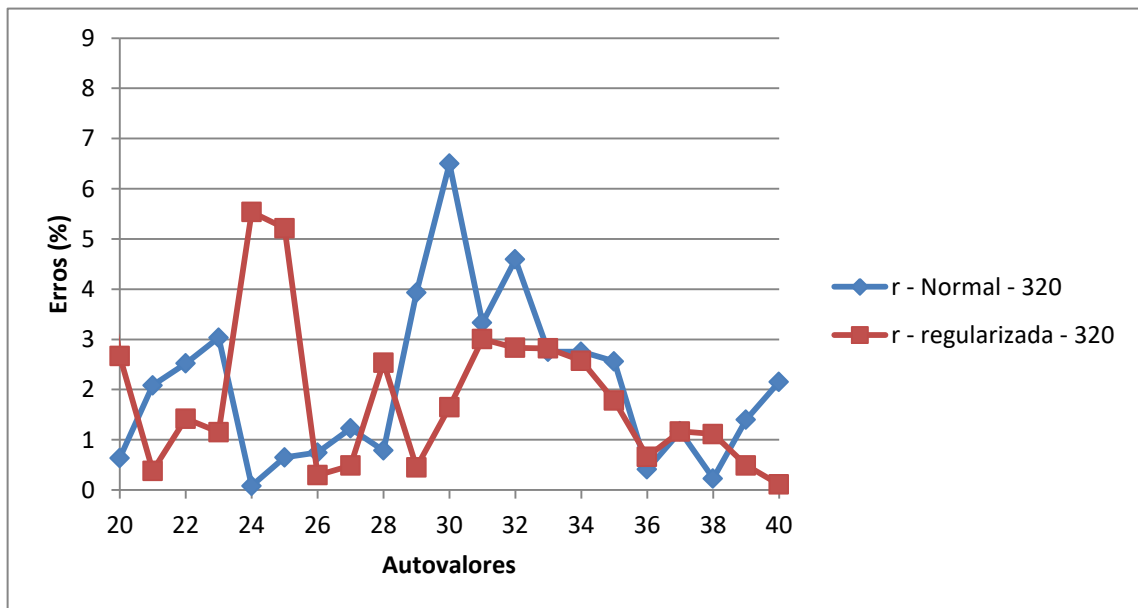


Figura 66 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r e 320 elementos. Para os últimos vinte autovalores.

Para 160 elementos de contorno com a função $r^2 \ln r$ o MECID regularizado mostrou menores erros aos apresentados pelo normal, porém não foram encontrados todos os autovalores.

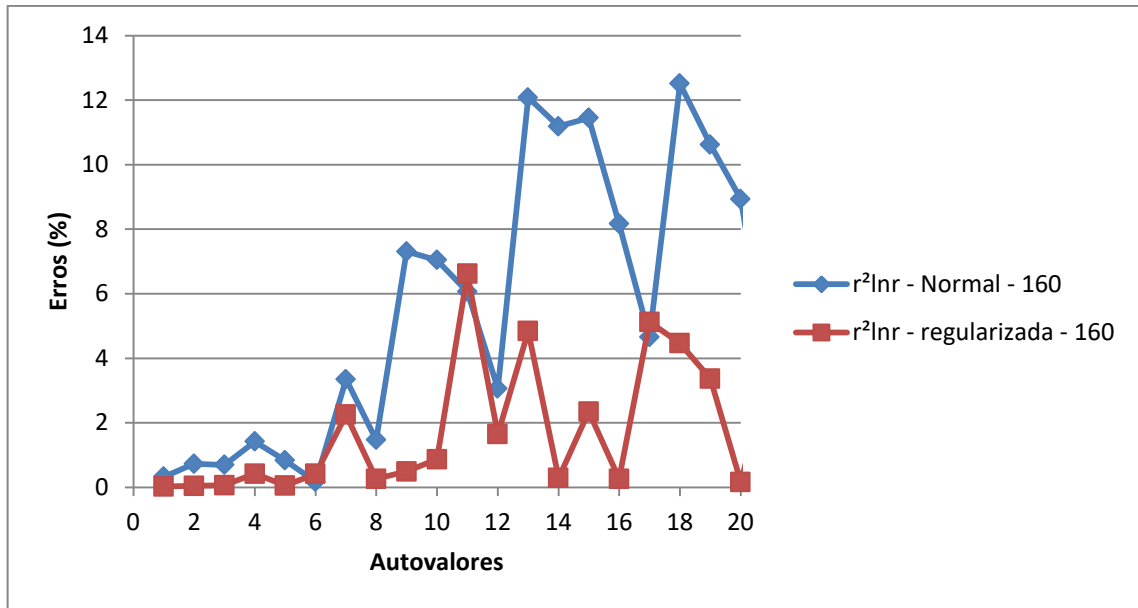


Figura 67 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r^2Inr e 160 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.

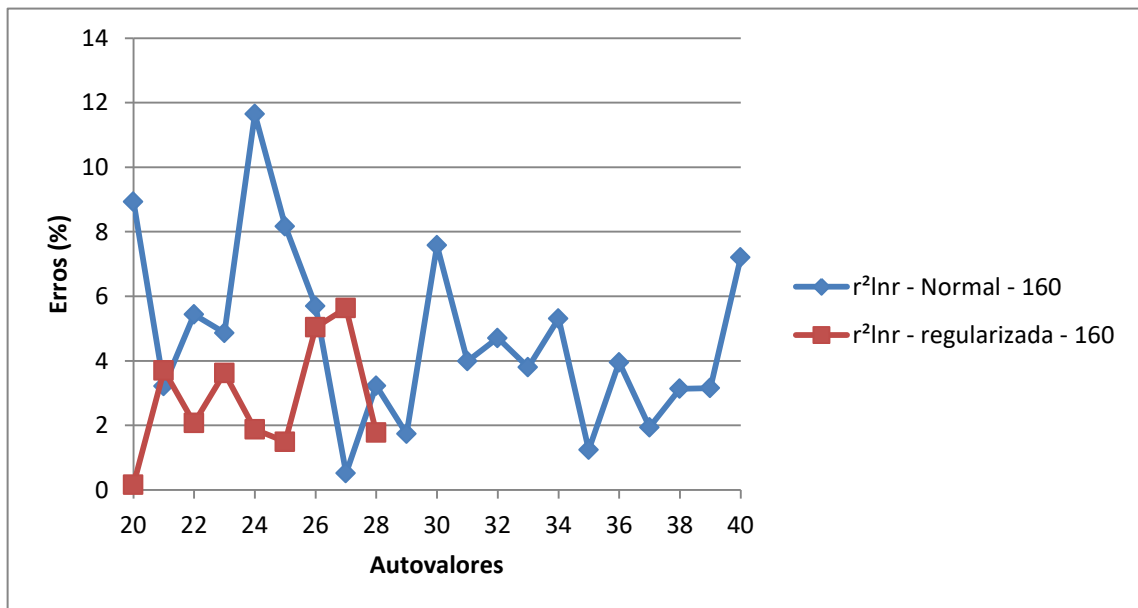


Figura 68 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r^2Inr e 160 elementos. Para os últimos vinte autovalores.

Nas figuras 69 e 70, a formulação regularizada apresentou resultado para todos os autovalores e também apresentou menores erros no primeiro grupo de 20 autovalores, para os últimos autovalores a formulação normal apresentou melhores resultados.

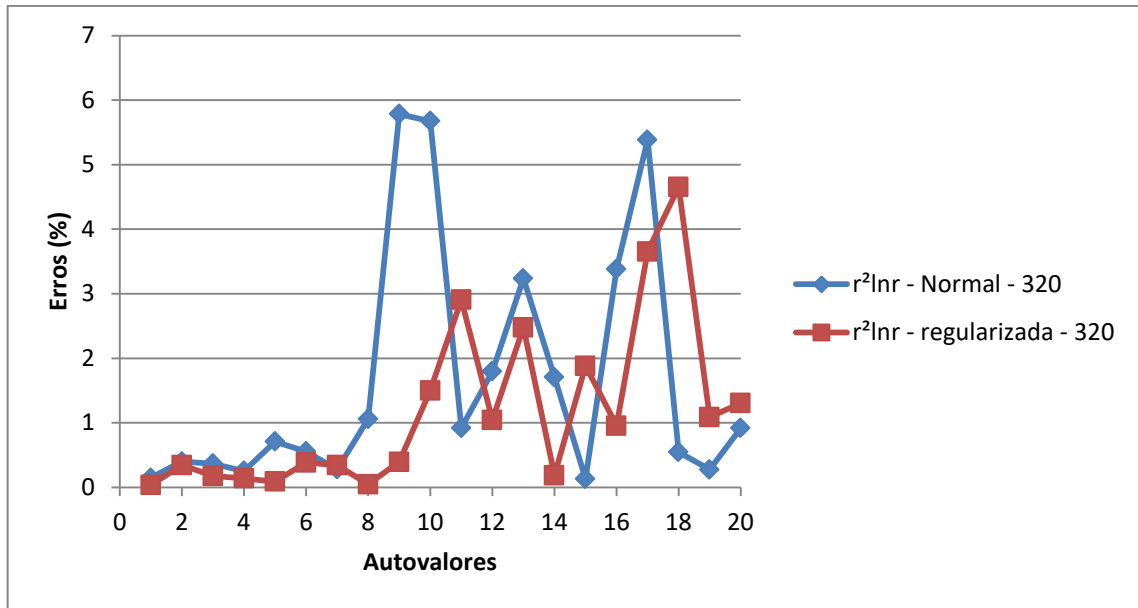


Figura 69 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função $r^2 \ln r$ e 320 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.

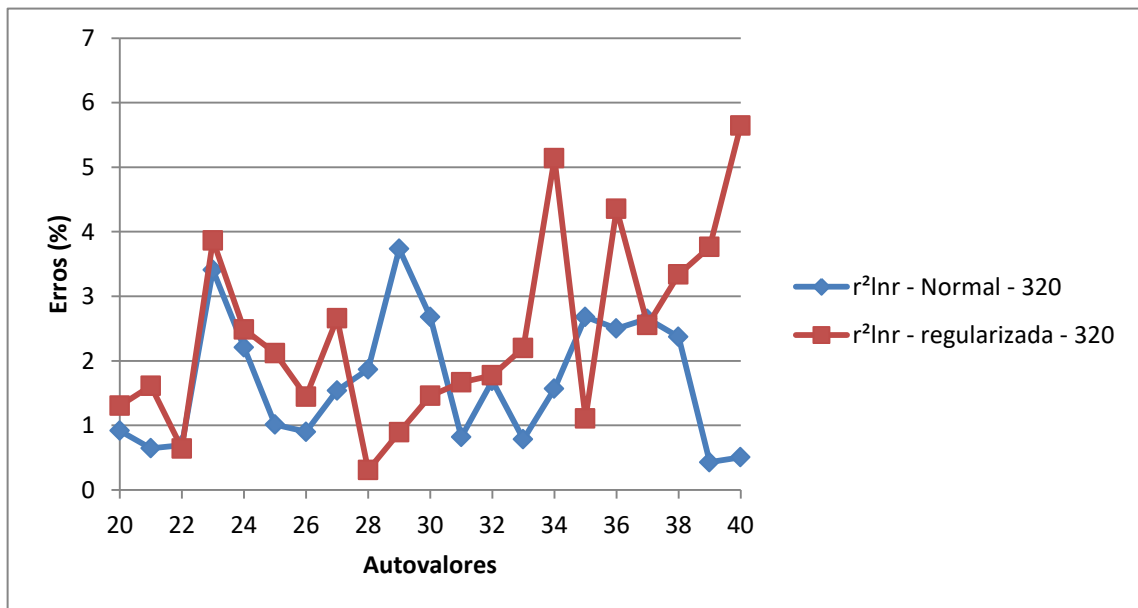


Figura 70 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função $r^2 \ln r$ e 320 elementos. Para os últimos vinte autovalores.

Nas figuras 71, 72, 73 e 74 com a função r^3 acontece um cenário semelhante ao apresentado pela função anterior. Com a malha de 160 elementos o MECID com esquema de regularização mostra bons resultados, porém não apresenta resposta para todos os autovalores. Já com 320 elementos ele apresenta resultado para todos os autovalores, contudo não pode-se afirmar que o seu desempenho é superior ao do MECID normal, mas a precisão dos dois para esse caso são parecidas.

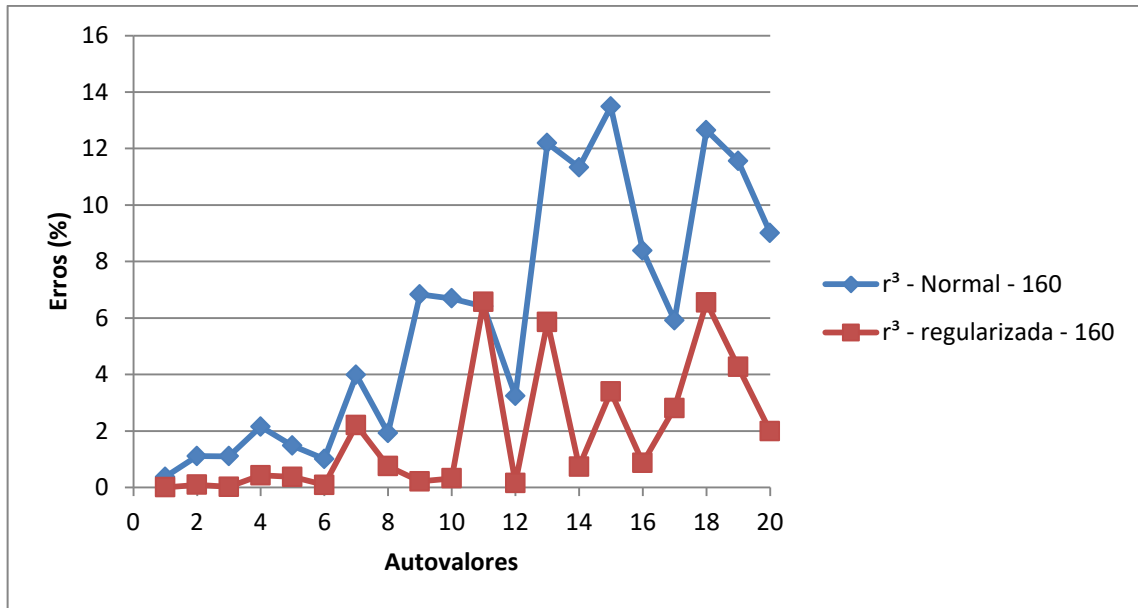


Figura 71 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r^3 e 160 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.

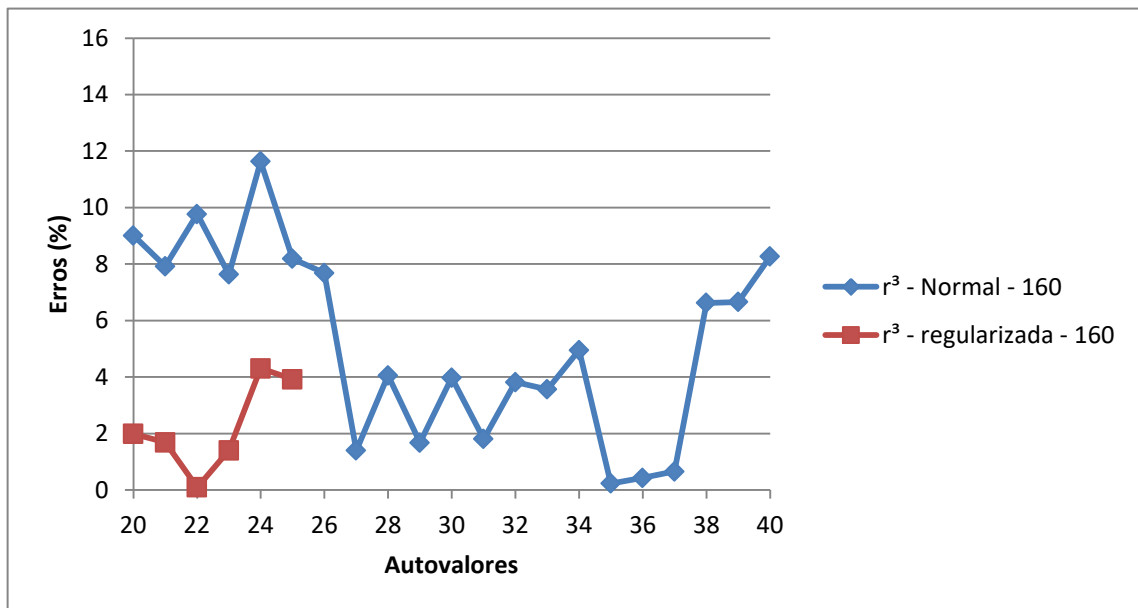


Figura 72 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r^3 e 160 elementos. Para os últimos vinte autovalores.

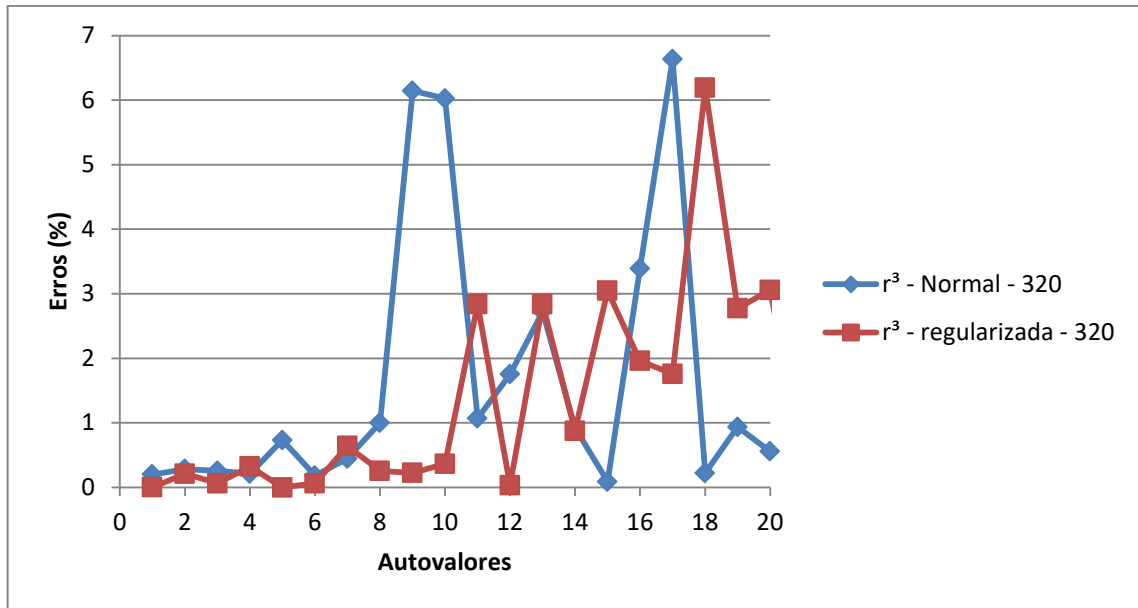


Figura 73 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r^3 e 320 elementos. Para os primeiros vinte autovalores.

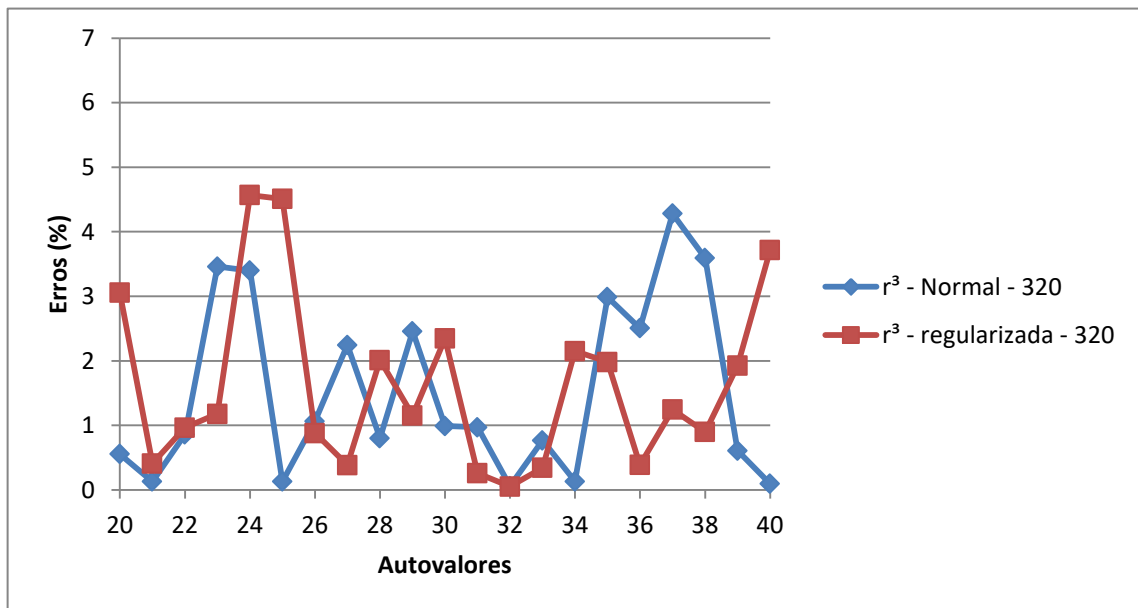


Figura 74 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação normal e a regularizada, utilizando a função r^3 e 320 elementos. Para os últimos vinte autovalores.

Para o problema da membrana circular totalmente fixada os dois métodos mostraram desempenho pareados, ao comparar os erros apresentados.

5.3.3 Barra Engastada

Para esse problema a comparação será feita entre os primeiros 20 autovalores. Os testes utilizando o MECID normal foram utilizadas duas malhas: uma com 160 elementos de contorno (EC), 164 nós funcionais, 144 pontos fonte e 484 nós

internos interpolantes; a outra com 320 elementos de contorno, 324 nós funcionais, 324 pontos fonte e 576 pontos internos interpolantes.

Nos testes com o MECID regularizado também se utilizou duas malhas: uma com 160 elementos de contorno, 164 nós funcionais, 144 nós internos; e outra com 320 elementos de contorno, 324 nós funcionais, 324 pontos internos.

Os gráficos foram separados pelas funções (Tabela 1) e pelas malhas utilizadas.

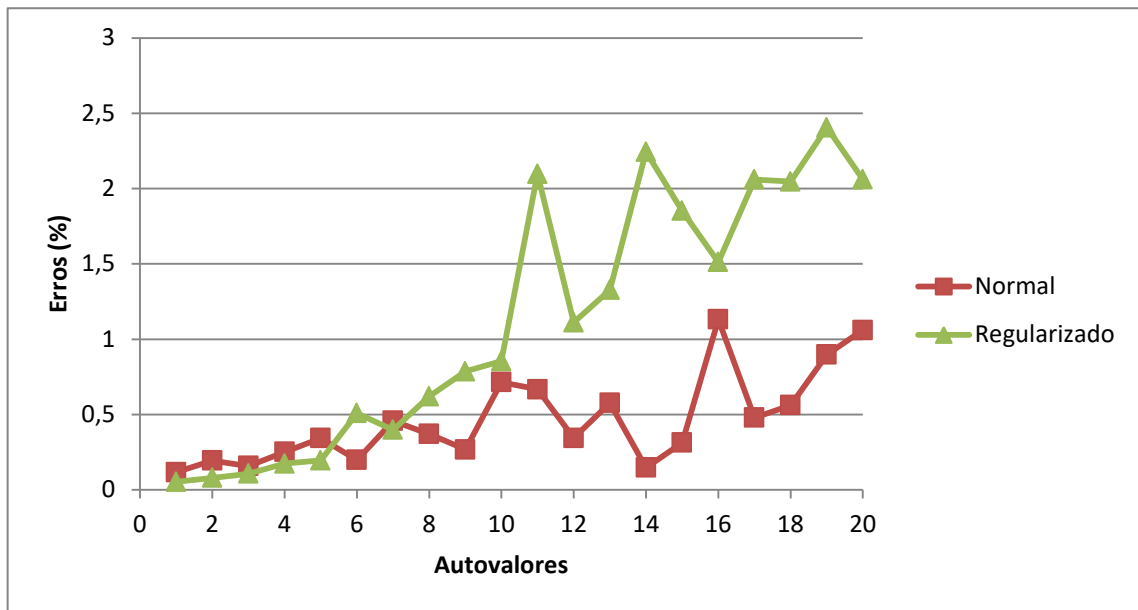


Figura 75 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação MECID normal e a regularizada. Com a função r e malhas com 160 EC.

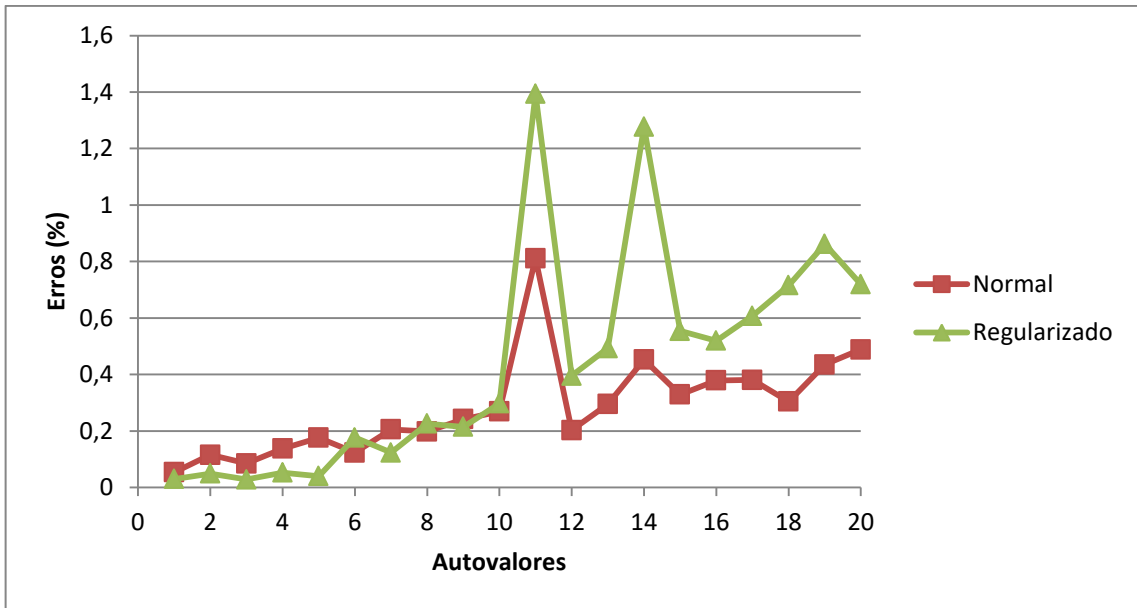


Figura 76 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação MECID normal e a regularizada. Com a função r e malhas com 320 EC.

Nas figuras 75 e 76 comparando entre a resposta do MECID (regularizado e normal) com a função r para a malha de 160 EC a formulação normal apresentou melhores resultados. No caso da malha com 320 EC o MECID normal apresentou melhores resultados para os últimos autovalores e o MECID regularizado apresentou melhores resultados pros primeiros.

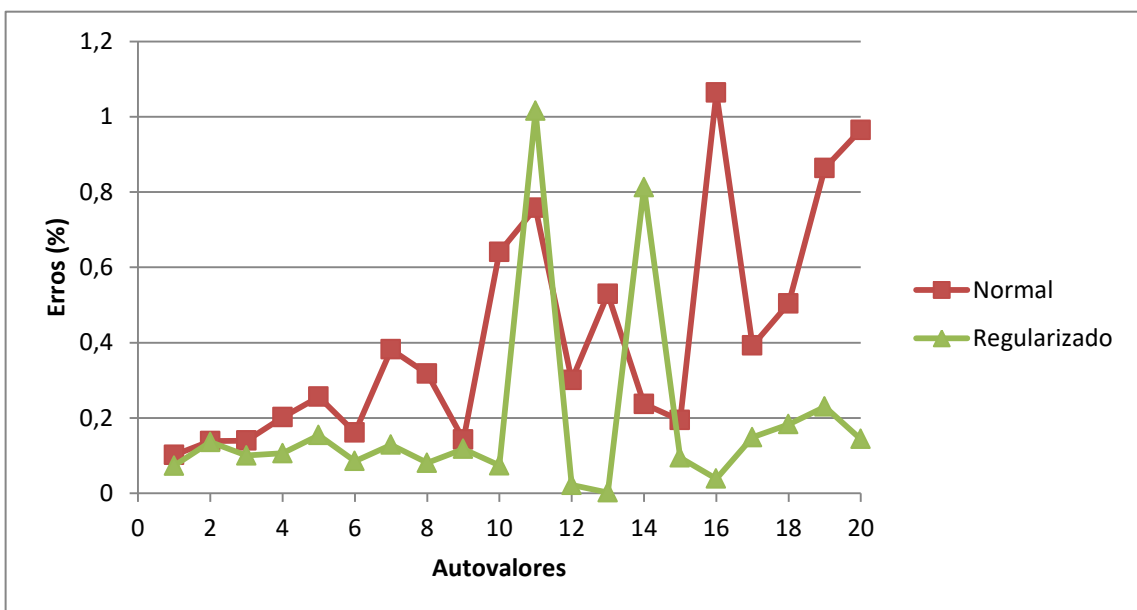


Figura 77 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação MECID normal e a regularizada. Com a função $r^2 \ln[r]$ e malha com 160 elementos de contorno.

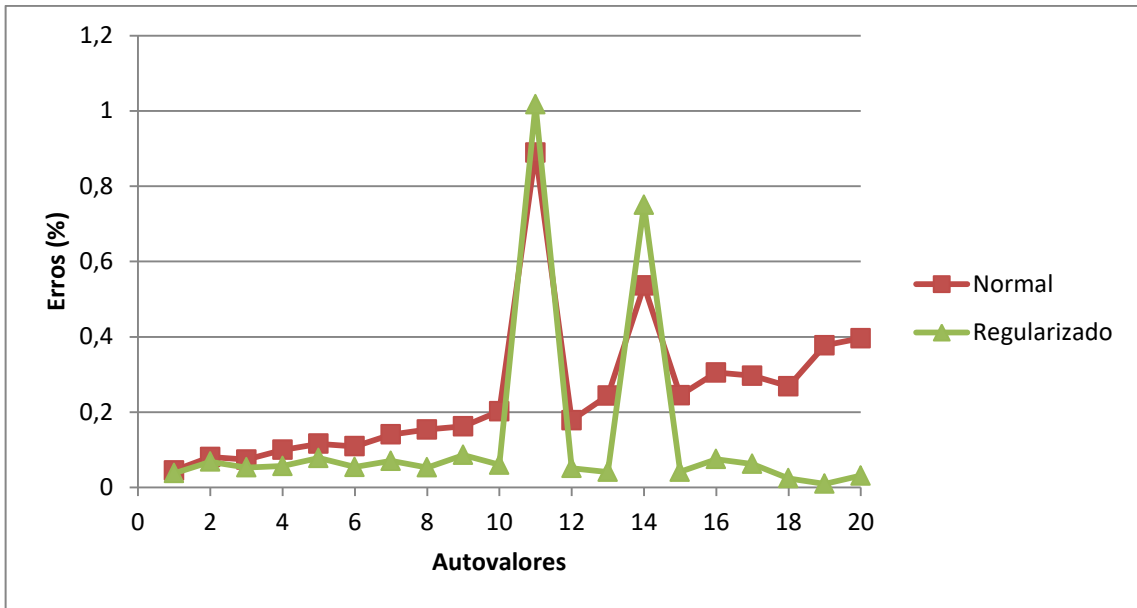


Figura 78 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação MECID normal e a regularizada. Com a função $r^2 \ln[r]$ e malha com 320 elementos de contorno.

O MECID regularizado se mostrou superior com a função $r^2 \ln[r]$ nos gráficos das figuras 77 e 78.

Tal resultado observado anteriormente se repetiu no caso da função r^3 nas figuras 79 e 80.

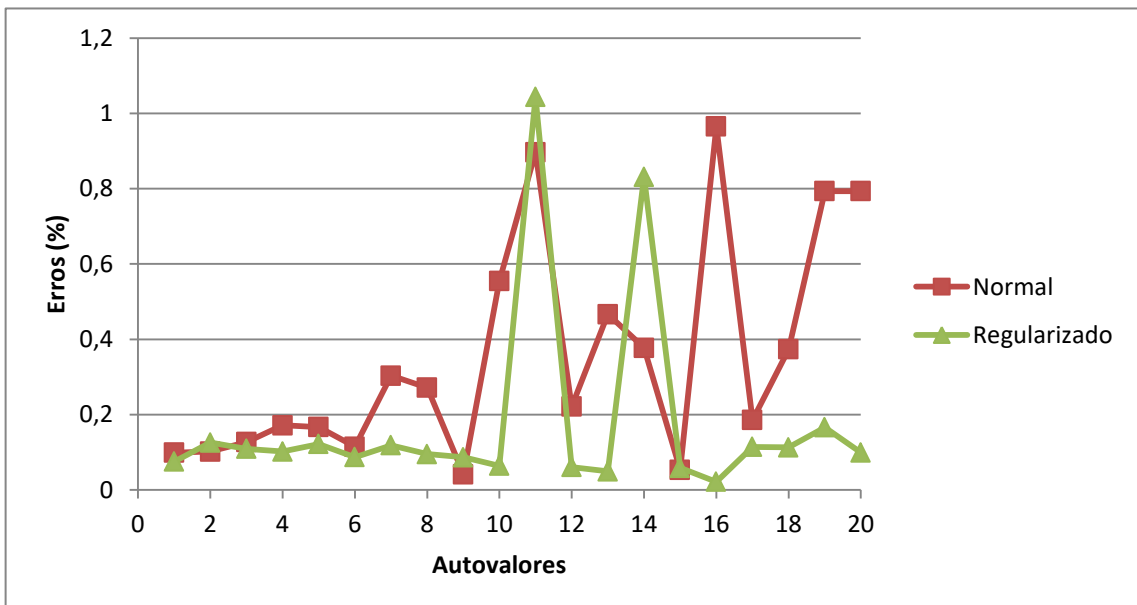


Figura 79 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação MECID normal e a regularizada. Com a função r^3 e malha com 160 elementos de contorno.

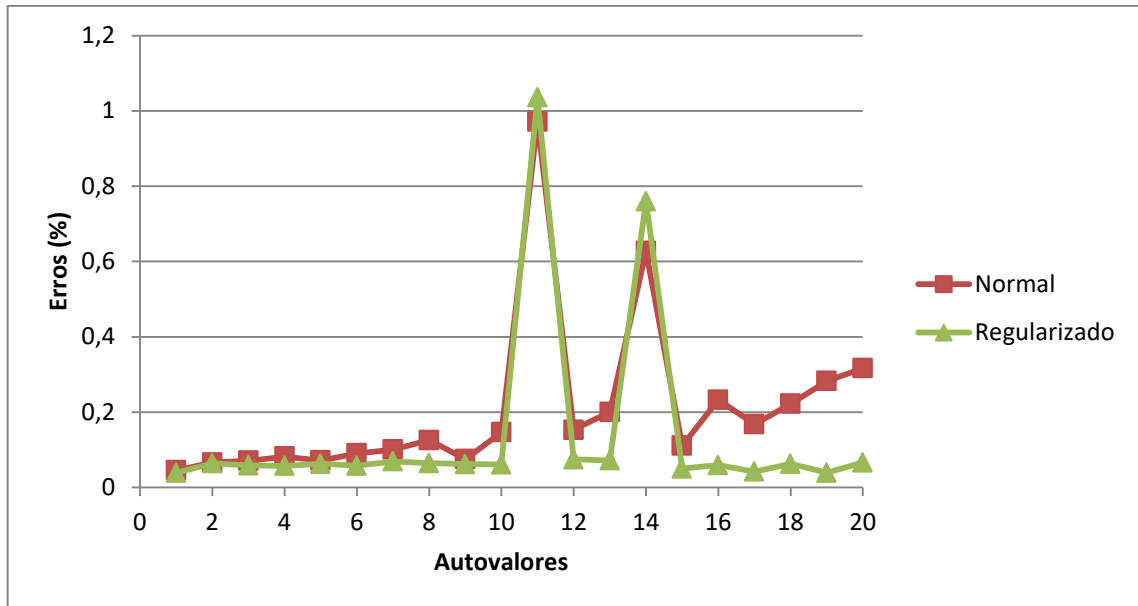


Figura 80 – Comparativo entre os erros encontrados utilizando a formulação MECID normal e a regularizada. Com a função r^3 e malha com 320 elementos de contorno.

No geral, o MECID regularizado mostrou um melhor desempenho para o problema da barra engastada nos testes feitos.

5.4 Conclusões

O MECID com regularização foi apresentado com a vantagem de eliminar as singularidades que ocorreriam no MECID normal caso os pontos fonte coincidisse com os pontos internos interpolantes. Tal vantagem reflete na menor entrada de dados, já que não é necessário entrar com duas nuvens distintas de pontos.

Nos testes realizados o MECID regularizado se mostrou predominantemente superior na qualidade dos resultados quando comparado com o já robusto MECID.

Partindo das vantagens apresentadas é possível propor que o MECID passe a ser sempre adotado utilizando o esquema de regularização de Hadamard.

6 CONCLUSÕES

O MECID havia se mostrado uma excelente ferramenta para resolver problemas que apresentam o termo não-adjunto, como integrais envolvendo inércia e ações de domínio em geral, e ser utilizado como opção a técnicas que não são gerais ou apresentam problemas numéricos como, por exemplo, o MECDR. Esse trabalho teve como foco testar algumas melhorias para agregar mais qualidade à formulação MECID.

Inicialmente, analisou-se a variação dos resultados utilizando diferentes famílias de funções de base radial. Sabe-se que o tipo de função radial impacta na qualidade dos resultados, e por isso foi feita uma avaliação de diversas funções. Como há enorme variedade delas, a escolha de funções variou entre funções mais básicas, como as FBRs, que é uma família de funções de suporte contínuo ou pleno, amplamente adotada por sua simplicidade matemática, e funções mais elaboradas, como as FBRSCs, que são geradas a partir de algebrismo mais sofisticados e utilizadas em métodos modernos, como os chamados sem malha, devido a sua robustez.

Em concomitância com a variação de funções, utilizou-se também duas malhas diferentes para cada função, objetivando observar os efeitos do refinamento da malha de contorno e também da quantidade de pontos interpolantes nos resultados. De forma geral, constatou-se que os erros diminuiriam significativamente com o refino da malha. Tal melhoria já era esperada, pois esse artifício já é utilizado em diversos métodos e considerado como senso comum quando se quer melhorar a qualidade dos resultados. O que normalmente ocorre em detrimento desse aumento na qualidade das respostas é o aumento do tempo de processamento, porém, nesse trabalho não teve essa abordagem devido o tempo de processamento ser irrelevante para os tamanhos de malha adotados.

Quanto a variação do tipo de função, observou-se pouca diferença nos resultados, aquém do que era esperado. Obviamente alguns problemas mostraram maior afinidade com certas funções, porém, globalmente pode-se afirmar que as FBRs foram as que mais apresentaram resultados positivos com todos os problemas, pois em alguns poucos casos certas FBRSCs não apresentaram resultados para todas

as frequências. Como mencionado, tal desempenho de algumas FBRSCs pode ser explicado devido os algoritmos de solução de problemas de autovalor com matrizes não simétricas enfrentam uma complexidade bem maior do que as técnicas desenvolvidas para a abordagem de matrizes simétricas. Isto resulta em algumas matrizes mal constituídas, o que faz com que o método não retorne resultados. Contudo é importante ressaltar que para algumas simulações as FBRSCs mostraram precisão melhor que as FBRs. Tais funções são as mais simples e um detalhe importante está relacionado com a estrutura das funções de potência truncada dessas FBRSCs, que estão correlacionadas à função de base radial simples, sendo a principal diferença dada pelo raio adimensional r , que é subtraído de uma constante unitária.

Esperava-se um melhor desempenho das FBRSCs porque essas funções são geradas de acordo com regras matemáticas rigorosas, buscando algumas qualidades, além de sua positividade, simetria radial e tendência a gerar matrizes esparsas nas quais a diagonal é dominante. No entanto, na MECID existe a solução da integral de domínio através de uma transformação que emprega uma função radial primitiva auxiliar. Certamente esta é a causa que faz com que o desempenho de FBRSCs com sucesso reconhecido em outras aplicações não tenha sido semelhante ao das funções clássicas com suporte pleno.

O MECID na forma em que foi concebido apresenta a necessidade da entrada pelo usuário de três nuvens de pontos interpolantes distintas, sendo uma com os pontos de contorno, e outras duas de pontos internos (uma com pontos fonte e outra com pontos interpolantes) o que faz com que a quantidade de dados seja elevada. Isso é necessário para evitar que ocorra singularidade. Além de trabalhoso, requer um pouco de atenção para que não ocorra de nenhum ponto se repita. Como opção de melhoria foi proposto à utilização do esquema de regularização de Hadamard para eliminar a possibilidade de ocorrer singularidade e sucessivamente reduzir a quantidade de pontos necessários na entrada de dados pelo usuário.

Utilizou-se os mesmos problemas adotados nos testes anteriores para analisar a efetividade do método com esquema de regularização. Para essa nova técnica as FBRSCs não apresentaram bons resultados, o que fez com que elas não fossem consideradas para essa avaliação, contudo as FBRs continuaram apresentando

excelente desempenho. Portanto foi utilizado esse grupo de função para obtenção dos resultados. Novamente foi utilizado o refinamento da malha, o que apresentou o mesmo resultado de melhoria esperado naturalmente.

Através dos testes realizados comprovou-se que o MECID regularizado apresentou melhores resultados ao ser confrontado com os valores obtidos anteriormente pelo MECID. É interessante destacar que o MECID normal utilizou maior número de pontos interpolantes para obtenção dos resultados, porém, ainda assim, o MECID com esquema de regularização se mostrou superior na maioria dos casos.

Como sugestão para trabalhos futuros, seria interessante estender a técnica a outros problemas de campo escalar, como os problemas de propagação da onda acústica e os de difusão-advecção.

Bibliografia

ACTON, F. S. *Numerical Methods that Work*. Washington D.C: The Mathematical Association of America, 1970.

BANERJEE, P. K., e R. BUTTERFIELD. *Boundary element methods in engineering science*. London: McGraw-Hill, 1981.

BARCELOS, Hércules de Melo. *Comparação de Desempenho entre a Formulação Direta do Método dos Elementos de Contorno com Funções Radiais e o Método dos Elementos Finitos em Problemas de Poisson e Helmholtz*. Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo, 2014.

BATHE, K. *Finite element procedures*. Klaus-Jurgen Bathe, 2006.

BELYTSCHKO, T., Y. KRONGAUZ, D. ORGAN, M FLEMING, e P. Krysl. "Meshless methods: an overview and recent developments." *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1996: 3-47.

BERTOLANI, Marcos Neves. *Funções de Base Radial de Suporte Global e Compacto na Aproximação de Superfícies*. Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo, 2010.

BOLDRINI, J. L., S. COSTA, V. FIGUEREDO, e H. WETZLER. *Álgebra Linear*. Harper & Row, 1980.

BRAGA, C. L. R. *Physical-Mathematics Notes (in portuguese)*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

BREBBIA, C. A. *The Boundary Element Method for Engineers*. London: Pentech Press, 1978.

BREBBIA, C., e J. DOMINGUEZ. *Boundary elements: an introductory course*. WIT press, 1994.

BREBBIA, C.A. *Boundary element methods in engineering*. New York: Springer, 1982.

BREBBIA, C.A., e S. WALKER. *Boundary Element Techniques in Engineering*. Boston, Massachusetts: Newnes-Butterworth, 1980.

BREBBIA, C.A., J.C. TELLES, e L.C. WROBEL. *Boundary element Techniques*. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

BULCÃO, André. “Formulação do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade Usando Elementos de Ordem Superior Aplicada a Problemas de Campo Escalar Generalizado.” Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo, PPGEM, 1999.

BUTKOV, Eugene. *Física matemática*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1988.

CHEN, J. T., e H. K. HONG. “Review of dual boundary element methods with emphasis on hypersingular integrals and divergent series.” *Applied Mechanics Reviews*, 1999: 17-33.

COLLIN, R. E. “Field theory of guided waves.” *IEEE Press*, 1991.

COURANT, R., e F. JOHN. *Introduction to Calculus & Analysis*. USA: John Wiley & Sons, 1974.

Cruz, A. L. *Modelagem Direta de Integrais de Domínio Usando Funções de Base Radial no Contexto do Método dos Elementos de Contorno*. Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo, 2012.

EIGER, Sérgio. “Modelos de escoamentos turbulentos.” *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos. Coleção da ABRH–Associação Brasileira de Recursos Hídricos*, 1989.

FASSHAUER, G. E. *Meshfree Approximation Methods with MATLAB*. Singapura: World Scientific Publishers, 2007.

FRANCO, N. *Cálculo Numérico*. São Paulo: Prentice Hall Brasil, 2006.

GAUL, L., M. KÖGL, e M. WAGNER. *Boundary element methods for engineers and scientists: an introductory course with advanced topics*. Springer Science & Business Media, 2013.

GAVIN, H. P. "Geometric Stiffness Effects in 2D and 3D Frames." Fall: CEE 421L. Matrix Structural Analysis, Duke University, 2012.

GRIFFITHS, David F., e Andrew R. MITCHELL. *The finite difference method in partial differential equations*. John Wiley, 1980.

HIBBELER, Russel C. *Resistência dos materiais*. Pearson Prentice Hall, 2006.

HUGHES, Thomas JR. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Courier Corporation, 2012.

KAGAMI, SHIN, e FUKAI. "Application of boundary-element method to electromagnetic field problems." *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, 1984: 455-461.

KAGAWA, Y., Y. SUN, e Z. MAHMOOD. "Regular Boundary Integral Formulation for the Analysis of Open Dielectric/Optical Waveguides." *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1996: 1441-1491.

KYTHER, O. J. *An Introduction to Boundary Element Methods*. Boca Raton: CRC Press, 1995.

LEBLANC, A., A. MALESYS, e A. LAVIE. "Compactly Supported Radial Basis Functions for the Acoustic 3D Eigenanalysis Using the Particular Integral Method." *Engineering Analysis with Boundary Elements, New York, USA*, 2011: 520-526.

LOEFFLER, C. F., M. P PEREIRA, e H. M. BARCELOS. "Determinação de auto valores usando a técnica de interpolação direta com funções de base radial do Método dos Elementos de Contorno." Fortaleza: In XXXV Iberian latin American congress On Computational Methods In Engineering, 2014.

LOEFFLER, C. F., W. J. MANSUR, e H. M BARCELOS. "Comparação de Desempenho entre o Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta e o

Método dos Elementos Finitos em Problemas de Helmholtz.” *Blucher Physics Proceedings*, 2015: 67-71.

LOEFFLER, C.F. “Uma Formulação Alternativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicada a Problemas de Campo Escalar.” Rio de Janeiro: Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio, 1988.

LOEFFLER, C.F., e A.L. CRUZ. “Avaliação da Precisão e Outras Propriedades Numéricas na Integração ao Longo de Superfícies Geradas por Funções de Base Radial.” *Anais do CNMAC*, 2013.

LOEFFLER, e MANSUR. “Vibrações Livres de Barras e Membranas Através do Método de Elementos de Contorno.” *Revista Brasileira de Engenharia, caderno de Engenharia Civil.*, 1986: 5-23.

NARDINI, D., e C. A. BREBBIA. *Boundary element methods in engineering.* . 1982.

PARTRIDGE, P. W., C. A. BREBBIA, e L. C. WROBEL. “The Dual Reciprocity, Boundary Element method: London.” Computational Mechanics Publications and Elsevier, 1992.

PESSOLANI, R. V. “An hp-adaptive hierarchical formulation for the boundary element method applied to elasticity in two dimensions.” *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, 2002: 23-45.

PIMENTA, P. M. *Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas.* São Paulo: Apostila de curso, 2002.

POPOV, E. P. *Engineering mechanics of solids.* Prentice Hall, 1990.

POUZADA, Eduardo Victor dos Santos. “Estudo da Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Análise de Propagação em Estruturas Guiantes.” São Paulo: Universidade de São Paulo, 1999.

SHEN, J., e O. STERZ. “A Mixed Galerkin and Collocation Approach for Treating Edge and Corner Problems in the BEM.” *IEEE Transactions on Magnetics*, 1998: 3296-3305.

SOUZA, L. Z. *Utilização de Funções de Base Radial de Suporte Compacto na Modelagem Direta de Integrais de Domínio Com o Método dos Elementos de Contorno*. Vitória: Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, 2013.

STEWART, JAMES. *Cálculo, Volume 2*. São Paulo: Pioneira, 2001.

TAN, I. H., G. L. SNIDER, L. D. CHANG, e E. L. HU. "A self-consistent solution of Schrödinger-Poisson equations using a nonuniform mesh." *Journal of applied physics*, 1990: 4071-4076.

TIMOSHENKO, S. P., e J. M. GERE. *Mecânica dos sólidos*. Livros Técnicos e Científicos, 1993.

VERSTEEG, Henk Kaarle, e Weeratunge MALALASEKERA. *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. Pearson Education, 2007.

WENDLAND, Holger. "Error Estimates for Interpolation by Compactly Supported Radial Basis Functions of Minimal Degree." *Journal Of Approximation Theory* 93, *Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Universität Göttingen, Germany*, 1998: 258-272.

WILKINSON, J. H. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. London: Oxford University Press, 1965.

WONG, S. M., Y. C. HON, e M. A. GOLBERG. "Compactly supported radial basis functions for shallow water equations." (*Applied Mathematics and Computation*) 127 (2002).

Anexo I – Encontrando as Funções de Interpolação Primitivas

Nesse trabalho foi utilizado de funções primitivas $\psi(X^i; X)$ obtidas a partir das funções radiais $F(X^i; X)$. Aqui será demonstrada a dedução de como essas funções primitivas foram encontradas. Sendo que $F(X^i; X)$ e $\psi(X^i; X)$ possuem a seguinte relação:

$$F(X^i; X) = \nabla^2 \psi(X^i; X) \quad (\text{A.1})$$

Como essas são funções radiais é necessário definir o laplaciano para coordenadas polares:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (\text{A.2})$$

Considerando que as funções trabalhadas aqui não possuem variação em θ :

$$\frac{\partial^2 \psi(X^i; X)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi(X^i; X)}{\partial r} = F(X^i; X) \quad (\text{A.3})$$

Para utilização no MECID é necessário utilizar $\eta(X^i; X)$, que pode ser como:

$$\eta(X^i; X) = \frac{\partial \psi(X^i; X)}{\partial x_i} n^i \quad (\text{A.4})$$

Onde $\eta(X^i; X)$ é o produto entre a normal ao elemento n^i e $\frac{d\psi(X^i; X)}{dx_i}$. Pode-se escrever $\frac{d\psi(X^i; X)}{dx_i}$ utilizando a regra da cadeia:

$$\frac{d\psi}{dx_i} = \frac{d\psi}{dr} \frac{dr}{dx_i} \quad (\text{A.5})$$

Sabendo que:

$$\frac{dr}{dx_i} = \frac{r_i}{r} \quad (\text{A.6})$$

Seguindo as etapas anteriores é possível encontrar $\eta(X^i; X)$ para as funções radiais, de Wendland e de Wu de suporte compacto.

Funções Radiais

$$F(X^i; X) = r$$

Utilizando (A.3):

$$\frac{d^2\psi(X^i; X)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi(X^i; X)}{dr} = r \quad (\text{A.7})$$

Reescrevendo:

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{d\psi(X^i; X)}{dr} \right] = r^2 \quad (\text{A.8})$$

Integrando dos dois lados da igualdade e passando o r para a direita:

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dr} = \frac{r^3}{3r} + \frac{A}{r} \quad (\text{A.9})$$

Considerando $A = 0$, pois ψ pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades, integrando novamente e desconsiderando futuras constantes.

$$\psi(X^i; X) = \frac{r^3}{9} \quad (\text{A.10})$$

Encontrando a derivada primeira de $\psi(X^i; X)$ como em (A.5):

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dx_i} = 3 \frac{r^2}{9} \frac{r_i}{r} \quad (\text{A.11})$$

Reordenando:

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dx_i} = \frac{r}{3} r_i \quad (\text{A.12})$$

Sendo assim:

$$\eta(X^i; X) = \frac{r}{3} r_i n^i \quad (\text{A.13})$$

$$F(X^i; X) = r^3$$

Analogamente ao que foi feito anteriormente:

$$\frac{d^2\psi(X^i; X)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi(X^i; X)}{dr} = r^3 \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{d\psi(X^i; X)}{dr} \right] = r^4 \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dr} = \frac{r^5}{5r} + \frac{A}{r} \quad (\text{A.16})$$

$$\psi(X^i; X) = \frac{r^5}{25} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dx_i} = \frac{5r^4}{25} \frac{r_i}{r} \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dx_i} = \frac{r^3}{5} r_i \quad (\text{A.19})$$

$$\eta(X^i; X) = \frac{r^3}{5} r_i n^i \quad (\text{A.20})$$

$$F(X^i; X) = r^2 \ln r$$

$$\frac{d^2\psi(X^i; X)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi(X^i; X)}{dr} = r^2 \ln r \quad (\text{A.21})$$

Reescrevendo:

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{d\psi(X^i; X)}{dr} \right] = r^3 \ln r \quad (\text{A.22})$$

Integrando dos dois lados da igualdade e reorganizando:

$$\left[\frac{d\psi(X^i; X)}{dr} \right] = \frac{r^4}{16r} (4 \ln r - 1) + \frac{A}{r} \quad (\text{A.23})$$

Considerando $A = 0$, pois ψ pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades e integrando novamente.

$$\psi(X^i; X) = -\frac{r^4}{32} + \frac{r^4 \ln r}{16} \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dx_i} = -\frac{4r^3}{32} \frac{r_i}{r} + \left[\frac{4r^3 \ln r}{16} + \frac{r^4}{16r} \right] \frac{r_i}{r} \quad (\text{A.25})$$

Reordenando:

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dx_i} = \frac{2r^2}{16} r_i + \left[\frac{r^2 \ln r}{4} + \frac{r^2}{16} \right] r_i \quad (\text{A.26})$$

Resolvendo a soma:

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dx_i} = \left[-\frac{r^2}{16} + \frac{r^2 \ln r}{4} \right] r_i \quad (\text{A.27})$$

$$\eta(X^i; X) = \left[-\frac{r^2}{16} + \frac{r^2 \ln r}{4} \right] r_i n^i \quad (\text{A.28})$$

Funções de Wendland com Suporte Compacto

$$\Phi_{1,0}(\mathbf{r}) \doteq \left(1 - \frac{r}{\delta}\right)_+$$

Como feito anteriormente:

$$\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi(r)}{dr} = 1 - \left(\frac{r}{\delta}\right) \quad (\text{A.29})$$

Reescrevendo:

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{d\psi(r)}{dr} \right] = r - \frac{r^2}{\delta} \quad (\text{A.30})$$

Integrando dos dois lados da igualdade e reorganizando:

$$\frac{d\psi(r)}{dr} = \frac{r^2}{2r} - \frac{r^3}{3r\delta} + \frac{A}{r} \quad (\text{A.31})$$

Considerando $A = 0$, pois ψ pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades e integrando novamente.

$$\psi(r) = \frac{r^2}{4} - \frac{r^3}{9\delta} \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{d\psi(r)}{dx_i} = \left[\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3\delta} \right] r_i \quad (\text{A.33})$$

Reordenando:

$$\frac{d\psi(r)}{dx_i} = \left[\frac{1}{2} - \frac{r}{3\delta} \right] r_i \quad (\text{A.34})$$

$$\eta(r) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{\delta}\right) \right] r_i n^i \quad (\text{A.35})$$

$$\Phi_{3,0}(X^i; X) \doteq \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+$$

Expandindo para facilitar a integração:

$$\Phi_{3,0}(X^i; X) \doteq 1 - 2\left(\frac{r}{\delta}\right) + \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 \quad (\text{A.36})$$

Como feito anteriormente:

$$\frac{d^2\psi(X^i; X)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi(X^i; X)}{dr} = 1 - 2\left(\frac{r}{\delta}\right) + \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 \quad (\text{A.37})$$

Reescrevendo:

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{d\psi(X^i; X)}{dr} \right] = r - \frac{2r^2}{\delta} + \frac{r^3}{\delta^2} \quad (\text{A.38})$$

Integrando dos dois lados da igualdade e reorganizando:

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dr} = \frac{r^2}{2r} - 2\frac{r^3}{3\delta r} + \frac{r^4}{4r\delta^2} + \frac{A}{r} \quad (\text{A.39})$$

Considerando $A = 0$, pois ψ pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades e integrando novamente.

$$\psi(X^i; X) = \frac{r^2}{4} - \frac{2r^3}{9\delta} + \frac{r^4}{16\delta^2} \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dx_i} = \left[\frac{r}{2} - \frac{2r^2}{3\delta} + \frac{r^3}{4\delta^2} \right] \frac{r_i}{r} \quad (\text{A.41})$$

Reordenando:

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dx_i} = \left[\frac{1}{2} - \frac{2r}{3\delta} + \frac{r^2}{4\delta^2} \right] r_i \quad (\text{A.42})$$

$$\eta(X^i; X) = \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \left(\frac{r}{\delta}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 \right] r_i n^i \quad (\text{A.43})$$

$$\Phi_{5,0}(X^i; X) \doteq \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^3$$

Expandindo para facilitar a integração:

$$\Phi_{5,0}(X^i; X) \doteq 1 - 3\left(\frac{r}{\delta}\right) + 3\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 - \left(\frac{r}{\delta}\right)^3 \quad (\text{A.44})$$

Como feito anteriormente:

$$\frac{d^2\psi(X^i; X)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi(X^i; X)}{dr} = 1 - 3\left(\frac{r}{\delta}\right) + 3\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 - \left(\frac{r}{\delta}\right)^3 \quad (\text{A.45})$$

Reescrevendo:

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{d\psi(X^i; X)}{dr} \right] = r - 3\frac{r^2}{\delta} + 3\frac{r^3}{\delta^2} - \frac{r^4}{\delta^3} \quad (\text{A.46})$$

Integrando dos dois lados da igualdade e reorganizando:

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dr} = \frac{r^2}{2r} - \frac{r^3}{\delta r} + 3\frac{r^4}{4r\delta^2} - \frac{r^5}{5r\delta^3} + \frac{A}{r} \quad (\text{A.47})$$

Considerando $A = 0$, pois ψ pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades e integrando novamente.

$$\psi(X^i; X) = \frac{r^2}{4} - \frac{r^3}{3\delta} + \frac{3r^4}{16\delta^2} - \frac{r^5}{25\delta^3} \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dx_i} = \left[\frac{r}{2} - \frac{r^2}{\delta} + \frac{3r^3}{4\delta^2} - \frac{r^4}{5\delta^3} \right] r_i \quad (\text{A.49})$$

Reordenando:

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dx_i} = \left[\frac{1}{2} - \frac{r}{\delta} + \frac{3r^2}{4\delta^2} - \frac{r^3}{5\delta^3} \right] r_i \quad (\text{A.50})$$

$$\eta(X^i; X) = \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{r}{\delta}\right) + \frac{3}{4} \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{5} \left(\frac{r}{\delta}\right)^3 \right] r_i n^i \quad (\text{A.51})$$

Redutível para a forma:

$$\eta(X^i; X) = \left\{ \left[1,60583 - \left(\frac{r}{\delta}\right) \right] \left[0,2 \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 - 0,42883 \left(\frac{r}{\delta}\right) + 0,31137 \right] \right\} r_i n^i \quad (\text{A.52})$$

$$\Phi_{3,1}(\mathbf{r}) \doteq \left[\mathbf{1} - \left(\frac{\mathbf{r}}{\delta}\right) \right]_+^4 \left[\mathbf{1} + 4 \left(\frac{\mathbf{r}}{\delta}\right) \right]$$

Expandindo para facilitar a integração:

$$\Phi_{3,1}(X^i; X) \doteq 1 - 10 \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + 20 \left(\frac{r}{\delta}\right)^3 - 15 \left(\frac{r}{\delta}\right)^4 + 4 \left(\frac{r}{\delta}\right)^5 \quad (\text{A.53})$$

Como feito anteriormente:

$$\frac{d^2\psi(X^i; X)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi(X^i; X)}{dr} = 1 - 10 \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + 20 \left(\frac{r}{\delta}\right)^3 - 15 \left(\frac{r}{\delta}\right)^4 + 4 \left(\frac{r}{\delta}\right)^5 \quad (\text{A.54})$$

Reescrevendo:

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{d\psi(X^i; X)}{dr} \right] = r - 10 \frac{r^3}{\delta^2} + 20 \frac{r^4}{\delta^3} - 15 \frac{r^5}{\delta^4} + \frac{4r^6}{\delta^5} \quad (\text{A.55})$$

Integrando dos dois lados da igualdade e reorganizando:

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dr} = \frac{r^2}{2r} - \frac{10}{4} \frac{r^4}{\delta^2 r} + \frac{20}{5} \frac{r^5}{\delta^3 r} - \frac{15}{6} \frac{r^6}{\delta^4 r} + \frac{4}{7} \frac{r^7}{\delta^5 r} + \frac{A}{r} \quad (\text{A.56})$$

Considerando $A = 0$, pois ψ pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades e integrando novamente.

$$\psi(X^i; X) = \frac{r^2}{4} - \frac{5}{8} \frac{r^4}{\delta^2} + \frac{4}{5} \frac{r^5}{\delta^3} - \frac{5}{12} \frac{r^6}{\delta^4} + \frac{4}{49} \frac{r^7}{\delta^5} \quad (\text{A.57})$$

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dx_i} = \left[\frac{r}{2} - \frac{5}{2} \frac{r^3}{\delta^2} + 4 \frac{r^4}{\delta^3} - \frac{5}{2} \frac{r^5}{\delta^4} + \frac{4}{7} \frac{r^6}{\delta^5} \right] r_i \quad (\text{A.58})$$

Reordenando:

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dx_i} = \left[\frac{1}{2} - \frac{5}{2} \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 + 4 \left(\frac{r}{\delta} \right)^3 - \frac{5}{2} \left(\frac{r}{\delta} \right)^4 + \frac{4}{7} \left(\frac{r}{\delta} \right)^5 \right] r_i \quad (\text{A.59})$$

$$\eta(X^i; X) = \left[\frac{1}{2} - \frac{5}{2} \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 + 4 \left(\frac{r}{\delta} \right)^3 - \frac{5}{2} \left(\frac{r}{\delta} \right)^4 + \frac{4}{7} \left(\frac{r}{\delta} \right)^5 \right] r_i n^i \quad (\text{A.60})$$

Funções de Wu com Suporte Compacto

$$\Phi_{3,3}(\xi; X) \doteq \left[1 - \frac{r}{\delta} \right]_+^4 \left[16 + 29 \left(\frac{r}{\delta} \right) + 20 \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 + 5 \left(\frac{r}{\delta} \right)^3 \right]$$

Expandindo para facilitar a integração:

$$\Phi_{3,3}(\xi; X) \doteq 5 \left(\frac{r}{\delta} \right)^7 - 21 \left(\frac{r}{\delta} \right)^5 + 35 \left(\frac{r}{\delta} \right)^3 - 35 \left(\frac{r}{\delta} \right) + 16 \quad (\text{A.61})$$

Como feito anteriormente:

$$\frac{d^2\psi(X^i; X)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi(X^i; X)}{dr} = 5 \left(\frac{r}{\delta} \right)^7 - 21 \left(\frac{r}{\delta} \right)^5 + 35 \left(\frac{r}{\delta} \right)^3 - 35 \left(\frac{r}{\delta} \right) + 16 \quad (\text{A.62})$$

Reescrevendo:

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{d\psi(X^i; X)}{dr} \right] = \frac{5r^8}{\delta^7} - \frac{21r^6}{\delta^5} + \frac{35r^4}{\delta^3} - \frac{35r^2}{\delta} + 16r \quad (\text{A.63})$$

Integrando dos dois lados da igualdade e reorganizando:

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dr} = \frac{5r^9}{9r\delta^7} - \frac{21r^7}{7r\delta^5} + \frac{35r^5}{5r\delta^3} - \frac{35r^3}{3r\delta} + \frac{16r^2}{2r} + \frac{A}{r} \quad (\text{A.64})$$

Considerando $A = 0$, pois ψ pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades e integrando novamente.

$$\psi(X^i; X) = \frac{5r^9}{81\delta^7} - \frac{3r^7}{7\delta^5} + \frac{7r^5}{5\delta^3} - \frac{35r^3}{9\delta} + 4r^2 \quad (\text{A.65})$$

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dx_i} = \left[\frac{5r^8}{9\delta^7} - \frac{3r^6}{\delta^5} + \frac{7r^4}{5\delta^3} - \frac{35r^2}{3\delta} + 8r \right] \frac{r_i}{r} \quad (\text{A.66})$$

Reordenando:

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dx_i} = \left[\frac{5}{9} \left(\frac{r}{\delta} \right)^7 - 3 \left(\frac{r}{\delta} \right)^5 + 7 \left(\frac{r}{\delta} \right)^3 - \frac{35}{3} \left(\frac{r}{\delta} \right) + 8 \right] r_i \quad (\text{A.67})$$

$$\eta(X^i; X) = \left[\frac{5}{9} \left(\frac{r}{\delta} \right)^7 - 3 \left(\frac{r}{\delta} \right)^5 + 7 \left(\frac{r}{\delta} \right)^3 - \frac{35}{3} \left(\frac{r}{\delta} \right) + 8 \right] r_i n^i \quad (\text{A.68})$$

$$\Phi_{2,3}(\mathbf{r}) \doteq \left[1 - \left(\frac{\mathbf{r}}{\delta} \right)_+ \right]^5 \left[8 + 40 \left(\frac{\mathbf{r}}{\delta} \right) + 48 \left(\frac{\mathbf{r}}{\delta} \right)^2 + 25 \left(\frac{\mathbf{r}}{\delta} \right)^3 + 5 \left(\frac{\mathbf{r}}{\delta} \right)^4 \right]$$

Expandindo para facilitar a integração:

$$\Phi_{2,3}(\xi; X) \doteq -5 \left(\frac{r}{\delta} \right)^9 + 27 \left(\frac{r}{\delta} \right)^7 - 63 \left(\frac{r}{\delta} \right)^5 + 105 \left(\frac{r}{\delta} \right)^3 - 72 \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 + 8 \quad (\text{A.69})$$

Como feito anteriormente:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi(X^i; X)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi(X^i; X)}{dr} \\ = -5 \left(\frac{r}{\delta} \right)^9 + 27 \left(\frac{r}{\delta} \right)^7 - 63 \left(\frac{r}{\delta} \right)^5 + 105 \left(\frac{r}{\delta} \right)^3 - 72 \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 + 8 \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

Reescrevendo:

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{d\psi(X^i; X)}{dr} \right] = -\frac{5r^{10}}{\delta^9} + \frac{27r^8}{\delta^7} - \frac{63r^6}{\delta^5} + \frac{105r^4}{\delta^3} - \frac{72r^3}{\delta^2} + 8r \quad (\text{A.71})$$

Integrando dos dois lados da igualdade e reorganizando:

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dr} = -\frac{5r^{11}}{11r\delta^9} + \frac{27r^9}{9r\delta^7} - \frac{63r^7}{7r\delta^5} + \frac{105r^5}{5r\delta^3} - \frac{72r^4}{4r\delta^2} + \frac{8r^2}{2r} + \frac{A}{r} \quad (\text{A.72})$$

Considerando $A = 0$, pois ψ pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades e integrando novamente.

$$\psi(X^i; X) = -\frac{5r^{11}}{121\delta^9} + \frac{1r^9}{3\delta^7} - \frac{9r^7}{7\delta^5} + \frac{21r^5}{5\delta^3} - \frac{9r^4}{2\delta^2} + 2r^2 \quad (\text{A.73})$$

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dx_i} = \left[-\frac{5r^{10}}{11\delta^9} + \frac{3r^8}{\delta^7} - \frac{9r^6}{\delta^5} + \frac{21r^4}{\delta^3} - \frac{18r^3}{\delta^2} + 4r \right] \frac{r_i}{r} \quad (\text{A.74})$$

Reordenando:

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dx_i} = \left[-\frac{5}{11} \left(\frac{r}{\delta}\right)^9 + 3 \left(\frac{r}{\delta}\right)^7 - 9 \left(\frac{r}{\delta}\right)^5 + 21 \left(\frac{r}{\delta}\right)^3 - 18 \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + 4 \right] r_i \quad (\text{A.75})$$

$$\eta(X^i; X) = \left[-\frac{5}{11} \left(\frac{r}{\delta}\right)^9 + 3 \left(\frac{r}{\delta}\right)^7 - 9 \left(\frac{r}{\delta}\right)^5 + 21 \left(\frac{r}{\delta}\right)^3 - 18 \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + 4 \right] r_i n^i \quad (\text{A.76})$$