UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO DO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

CARLOS ALBERTO AFONSO DE ALMEIDA JUNIOR

ATIVIDADES MATEMÁTICAS INVESTIGATIVAS E OS DESDOBRAMENTOS DE ALGUMAS ETAPAS: UM ESTUDO DE CASO EXPLORATÓRIO-DESCRITIVO REALIZADO COM UMA PROFESSORA ATUANTE NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

SÃO MATEUS
2016

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Divisão de Biblioteca Setorial do CEUNES - BC, ES, Brasil)

A447a

Almeida Junior, Carlos Alberto Afonso de, 1988-
Atividades matemáticas investigativas e os desdobramentos de algumas etapas : um estudo de caso exploratório-descritivo realizado com uma professora atuante nos anos finais do ensino fundamental / Carlos Alberto Afonso de Almeida Junior. – 2016.
104 f. : il.

Orientador: Moysés Gonçalves Siqueira Filho.
Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Universitário Norte do Espírito Santo.

1. Educação. 2. Prática pedagógica. 3. Matemática - Estudo e ensino. I. Siqueira Filho, Moysés Gonçalves. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Universitário Norte do Espírito Santo. III. Título.

CDU: 37

CARLOS ALBERTO AFONSO DE ALMEIDA JUNIOR

ATIVIDADES MATEMÁTICAS INVESTIGATIVAS E OS DESDOBRAMENTOS DE ALGUMAS ETAPAS: UM ESTUDO DE CASO EXPLORATÓRIO-DESCRITIVO REALIZADO COM UMA PROFESSORA ATUANTE NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino na Educação Básica, na Linha de Pesquisa Ensino de Ciências Naturais e Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Moysés Gonçalves Siqueira Filho

SÃO MATEUS
2016

CARLOS ALBERTO AFONSO DE ALMEIDA JUNIOR

ATIVIDADES MATEMÁTICAS INVESTIGATIVAS E OS DESDOBRAMENTOS DE ALGUMAS ETAPAS: UM ESTUDO DE CASO EXPLORATÓRIO-DESCRITIVO REALIZADO COM UMA PROFESSORA ATUANTE NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino na Educação Básica.

Aprovada em 23 de dezembro de 2016.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Moysés Gonçalves Siqueira Filho
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Lúcio Souza Fassarella

Prof. Dr. Lúcio Souza Fassarella
Universidade Federal do Espírito Santo

Flávio Gimenes Alvarenga

Prof. Dr. Flávio Gimenes Alvarenga
Universidade Federal do Espírito Santo

Andressa Cesana

Prof.ª Dr.ª Andressa Cesana
Universidade Federal do Espírito Santo

Luciane de F. Bertini

Prof.ª Dr.ª Luciane de Fátima Bertini
Universidade Federal de São Paulo

AGRADECIMENTOS

A primeira pessoa a quem devo agradecer e acima de tudo, é a minha esposa, Fabiane. Não poderia colocar todos os motivos aqui, pois, certamente, resultaria em uma nova dissertação. Talvez eu faça isso para minha tese...

Ao meu orientador, Prof. Dr. Moysés, que creio ter tanto apreço por mim, quanto tenho por ele. Agradeço-o, principalmente pela sua imensa sabedoria e paciência maior ainda.

Ao Prof. Dr. Lúcio Souza Fassarella por aceitar compor a banca e pelas interessantes discussões sobre análise combinatória e probabilidade que levarei como uma boa memória do curso.

À Profª. Drª. Andressa Cesana, por aceitar compor a banca e contribuir para minha formação desde a graduação. Esse trabalho não seria o mesmo sem suas considerações.

Ao Prof. Dr. Flávio Gimenes Alvarenga, por aceitar compor a banca e pelas excelentes contribuições dadas ao trabalho em seus momentos finais.

À Profª. Drª. Luciane de Fátima Bertini, por aceitar compor a banca e pelo seu impressionante olhar analítico, indicando várias sugestões que me surpreendem até hoje, quando penso.

Ao meu amigo Fraklin Noel Santos, que foi muito mais do que um professor e sempre se mostrou disponível para me ajudar, independentemente do motivo.

Aos meus amigos Ana Cláudia, André, Clarisse, Miriam, César, Rosângela, Géssica, Roseane, Aminadabe, Hairley, Renata, Roger, Gilcélia e Andréia, que dividiram bons e maus momentos comigo. Não poderia agradecê-los sem nomeá-los. Vocês são muito importantes pra mim. Sério.

Ao Centro Universitário do Norte do Espírito Santo, instituição que pertenço desde a minha formação acadêmica.

A todos os meus familiares que me viram sorrir, chorar, cair, levantar, enraivecer, acalmar e, também, engordar. Viram, pois estavam ao meu lado. Sempre.

O que eu e você fazemos importa.

Gregory House

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

DT – Designação Temporária

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

IFES – Instituto Federal do Espírito Santo

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PE – Programa de Ensino

TIC – Tecnologias de Comunicação e Informação

UFES – Universidade Federal do Espírito Santo

RESUMO

Apresenta um estudo de caso exploratório-descritivo. Descreve as atitudes e posturas de uma professora de Matemática, diante da aplicação de quatro atividades matemáticas investigativas em duas de suas turmas e uma escola pública municipal, localizada em São Mateus-ES. Identifica as potencialidades, positivas e negativas, da comunicação matemática e/ou trabalho coletivo, inerentes às tarefas aplicadas, a partir de quatro etapas: planejamento, exploração, socialização e avaliação. Objetiva responder ao problema de pesquisa: **Que práticas didático-pedagógicas são utilizadas por uma professora de Matemática ao trabalhar com atividades investigativas na sala de aula?**. Adota por referencial teórico os trabalhos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013); Ponte et al (1998a); Sacristán (2000). Evidencia dificuldades na administração do tempo, em decorrência de fatores externos aos da sala de aula. Conclui que, apesar de considerar a investigação matemática importante para o tratamento de novos conteúdos, a professora sinalizou não ser possível realizá-las sempre, por requerer muito tempo para a seleção e preparação das atividades, como também, precisar, por ora, do auxílio de outros profissionais, pois não se sentia apta para elaborá-las e/ou planejá-las.

Palavras-chave: Investigação Matemática. Atividades investigativas. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

It presents a study of a exploratory-descriptive case. It describes the attitudes and postures of a mathematics teacher while applying four mathematical investigative activities in two of her classes, in a municipal school located in São Mateus-ES. It identifies the potentialities, both positives and negatives, of mathematical communication and/or group work promoted from the given tasks, divided into four steps: planning, exploring, socialization and evaluation. It aims to answer the research problem: **Which didactic-pedagogical practices can be identified in a mathematics teacher when working with investigative activities in the classroom?.** It adopts as theoretical references the works of Ponte, Brocardo and Oliveira (2013); Ponte et al (1998a); Sancristán (2000). It emphasizes the problem of time administration, as consequence of external factors from the classroom. It concludes that, in spite of considering the mathematical investigation important to new content's treatment, the teacher indicated that it is not possible to always implement it, because it requires too many time to select and prepare the activities, and also it needs the help of others professionals for now, since she does not feel prepared to elaborate and/or plan the tasks.

Keywords: mathematical investigation, investigative activities, mathematics teaching.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

> **[...] A investigação matemática é uma das mais antigas atividades humanas, tão ancestral quanto a carpintaria, a culinária e a metalurgia. Mas, na verdade, mais descobertas em matemática foram feitas a partir de 1900 do que em toda história humana anterior (O'SHEA, 2009, p. 19).**

O ato de investigar faz parte das nossas vidas desde a mais tênue idade. Quando tentamos ir além do que fomos pelos braços dos nossos pais, aprendemos a engatinhar. Quando isso não basta mais, nos colocamos em pé e aprendemos a andar. Um pouco por curiosidade, um pouco por necessidade. Aprendemos a falar pela necessidade de se comunicar com o mundo e aí se inicia a fase dos "por quês", pois somos seres curiosos, que buscamos e precisamos de respostas para tudo.

A investigação tomou diferentes formas em diferentes momentos, ao longo da minha vida. Desde criança me interessava por temas relacionados às ciências. Ora por dinossauros, ora pelo universo. Minha imaginação me levava a fazer perguntas que meus professores, muitas vezes, não conseguiram responder. Nessa época, ainda, não me imaginava como professor, mas como um cientista a procurar teorias sobre o universo e sua origem.

Entretanto, foi no Ensino Médio que decidi cursar a faculdade de Física e, quando contei ao meu professor dessa disciplina, que tinha formação em Matemática, ele me deu total apoio, mas como na época não havia esse curso em minha cidade, São Mateus-ES, ele sugeriu que primeiro fizesse Matemática para, depois, com um emprego fixo, cursar Física, eliminando, inclusive, algumas matérias. Esse foi um dos principais motivos pelo qual optei por concorrer a uma vaga na Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, *campus* São Mateus, onde ingressei em 2006. Mas, paradoxalmente, na expectativa de me tornar físico algum dia.

Nos primeiros semestres a questão educacional não era nada presente, mas isso não me preocupava; afinal, não desejava ser professor. Depois de três semestres no curso, tive um contato maior com a profissão por meio de substituições esporádicas em escolas do município, que começaram a modificar certas concepções sobre a licenciatura em Matemática. Além disso, o trabalho de alguns professores da Universidade foi bastante determinante no meu modo de ver a educação como campo profissional e área de pesquisa. Em 2009, comecei a trabalhar como professor de Física no Ensino Médio, mesmo ainda não tendo me formado, já que a Secretaria de Educação do Espírito Santo permite que alunos, a partir do quinto período de Licenciatura Plena em Matemática, ministrem aulas de área afim da que se está cursando, e no ano seguinte, graduei-me.

Durante o primeiro contato com o ensino de Matemática, ocorrido em 2010, no Ensino Fundamental, desenvolvi diversas concepções acerca do que seria um “bom professor”. Acreditava que esse profissional deveria ser carismático; se importar com os alunos e desenvolver práticas que estimulassem o aprendizado da Matemática. Minha principal proposta de trabalho era o uso da Matemática recreativa e dos jogos e, a partir dela, pude oportunizar aos alunos explorar diversos temas e realizar tarefas matemáticas, um tanto mais complexas, a partir de seus próprios jogos.

Em 2014, realizei alguns estudos sobre Educação Matemática, intencionando ingressar no Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica, o que ocorreu no ano seguinte. A partir da leitura do livro *Investigações matemáticas na sala de aula*, de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), constatei haver muitas aproximações entre o que praticava em sala e as propostas desses autores.

Nesse sentido, optei por aplicar algumas atividades investigativas, por eles sugeridas, nas aulas que ministrava no Ensino Fundamental, naquele ano, embora desejasse compreender melhor as diversas situações que poderiam emergir desse tipo de tarefa, razão pela qual elaborei meu anteprojeto de pesquisa

Considerando que, no período em que estive no programa de mestrado, percorri caminhos junto à diversas pessoas, tais como meus colegas, meu orientador, os teóricos nos quais me baseei, entre outras, abandono, agora, a primeira pessoa do singular e passo a utilizar a do plural, em consideração a todas elas. Faz sentido, agora, ampliar um pouco mais a discussão sobre investigações matemáticas, recorrendo à história.

Apesar das grandes descobertas realizadas no século XX, boa parte do que se estuda nas escolas da educação básica remonta séculos e, até mesmo, milênios. Pitágoras, por exemplo, demonstrou o teorema que leva seu nome por volta do século V a.C.; e Euclides, no século III a.C., produziu a coletânea chamada

Elementos, um tratado sobre a geometria, que foi adotada como manual de ensino até meados do século XVIII. Até hoje a geometria euclidiana é a única vista no ensino básico (FLOOD e WILSON, 2013, MIORIM, 1998).

Esses resultados são apresentados nas escolas como se já estivessem prontos desde sempre. Os contextos em que esses matemáticos realizaram suas descobertas não podem ser passados aos alunos, bem como as relações com a Matemática da época – a linguagem e os conhecimentos matemáticos dos gregos antigos eram diferentes dos que temos hoje (FLOOD e WILSON, 2013). Contudo, é possível salientar que, para além de uma Matemática pronta e acabada, houve algum momento em que esses matemáticos se puseram a investigar.

O ato de investigar em Matemática, geralmente, é atribuído aos pesquisadores. Contudo, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 13) indicam que para haver investigação é necessário "[...] descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades [...]".

Para Flood e Wilson (2013, p. 8, grifos dos autores), "é comum descrever os matemáticos como 'buscadores de padrões', quer estudem padrões abstratos em números, quer simetria no mundo natural à nossa volta [...]". Pesquisas realizadas no passado servem de base para as pesquisas do presente que, consequentemente, terão o mesmo destino no futuro. A exemplo disso está o famoso *Teorema de Fermat*[1]. Em um exemplar do livro *Aritmética,* de Diofanto, Fermat, por volta de 1640, afirmou ter encontrado uma prova para esse teorema. Porém, essa demonstração não veio a ser apresentada em nenhum momento de sua vida. Séculos depois, muitas tentativas de solucioná-lo foram feitas, mas todas sem sucesso, até a demonstração de Andrew Wiles em 1994 (SINGH, 2010).

Muitas pesquisas foram realizadas no mundo até que o matemático inglês pudesse, finalmente, encontrar uma demonstração validada pela comunidade acadêmica, por

[1]Para qualquer $n > 2$ inteiro, não é possível existirem inteiros positivos x, y e z para que seja válida a expressão $x^n + y^n = z^n$ (SINGH, 2010).

exemplo, Euler[2] tentou uma solução direta do problema; o japonês Yutaka Taniyama, em 1955, apresentou uma conjectura que, mais tarde, levaria o nome de *Teorema de Taniyama-Shimura*[3]; o matemático alemão Gerhard Frey[4] fez relações entre o problema e áreas distintas e, em 1984, ligou o campo das equações elípticas ao referido Teorema; outros, ainda, desenvolveram investigações que, aparentemente, não possuíam qualquer relevância, porém, noutro momento, revelaram-se imprescindíveis para a sua solução (SINGH, 2010).

Baseado nesses resultados, Andrew Wiles, em 1993, fez sua apresentação durante uma conferência na Universidade de Cambridge. Porém, havia uma grande lacuna, que precisou de mais um ano para corrigir. Esse processo não foi simples e ele, apenas, percebeu o que faltava em sua demonstração, subitamente (SINGH, 2010).

O *Teorema de Fermat*, como pudemos observar, teve toda uma trajetória que se iniciou muito antes do nascimento de Wiles. As investigações de outros matemáticos, apesar de não terem conduzido, diretamente, à sua solução, resultaram em importantes descobertas. Dessa forma, entendemos, como afirmam Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 17), que

> quando trabalhamos em um problema, o nosso objetivo é, naturalmente, resolvê-lo. No entanto, para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original. Outras vezes, não se conseguindo resolver o problema, o trabalho não deixa de valer a pena pelas descobertas imprevistas que proporciona [...].

Esse é o caso de Henry Poincaré, matemático francês que, dentre outras descobertas, demonstrou a existência das “funções fuchsianas”. Segundo seu relato, apresentado em Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 14) ele explica como lhe ocorreu a descoberta. Vejamos:

> Havia já quinze dias que me esforçava por demonstrar que não podia existir nenhuma função análoga às que depois vim a chamar funções fuchsianas. Estava, então, na mais completa ignorância; sentava-me todos os dias à

---

[2] Euler, auxiliado pelos manuscritos de Fermat, descobriu que a equação $x^3 + y^3 = z^3$ não possui soluções inteiras para x, y e z, enquanto seu antecessor demonstrou que $x^4 + y^4 = z^4$ não possui solução sobre as mesmas condições (FLOOD e WILSON, 2013).

[3] Esse teorema afirma que as séries das funções modulares correspondem às séries de equações elípticas (SINGH, 2010).

[4] Foi o responsável por mostrar a relação entre o Teorema de Taniyama-Shimura e o Último Teorema de Fermat (SINGH, 2010)

> minha mesa de trabalho e ali permanecia uma ou duas horas ensaiando um grande número de combinações e não chegava a nenhum resultado. Uma tarde, contra meu costume, tomei um café preto e não consegui adormecer; as idéias surgiram em tropel, senti que me escapavam, até que duas delas, por assim dizer, se encaixaram, formando uma combinação estável. De madrugada tinha estabelecido a existência de uma classe de funções fuchsianas, as que derivam da série hipergeométrica. Não tive mais que redigir os resultados, o que apenas me levou algumas horas.
>
> Quis, em continuação, representar essas funções pelo quociente de duas séries: esta idéia foi completamente consciente e deliberada, era guiado pela analogia com as funções elípticas. Perguntava a mim mesmo quais seriam as propriedades destas séries, se é que existiam, e logrei sem dificuldade formar as séries que chamei tetafuchsianas.

Enquanto Poincaré se concentrava em provar a impossibilidade de um tipo de função, ele acabou por perceber que ela era possível e, por consequência, acabou descobrindo as funções que ele chamou de fuchsianas. Essa descoberta ocorreu subitamente, mas todo o processo posterior se desenvolveu por analogia ao primeiro resultado, investigando o que aconteceria se ele utilizasse novos procedimentos. A experimentação foi fundamental para essas novas descobertas.

Outro exemplo de investigação matemática pode ser extraído da literatura. Doxiadis (2010), em seu livro *Tio Petros e a Conjectura de Goldbach,* apresenta a história de Petros Papachristos e sua obsessão em demonstrar a famosa *Conjectura de Goldbach*[5]*,*partindo de um motivo não matemático, mas que foi esquecido com o tempo, dando lugar à uma busca compulsória. Durante décadas de investigação, Petros realizou algumas descobertas que poderiam ser importantes para o mundo acadêmico, mas optou em não apresentá-las ao mundo. Em seu fim, é possível perceber que muito conhecimento matemático emergiu de sua investigação, independentemente do resultado de sua busca.

Podemos observar que em todos os exemplos dados compartilham algo: a busca por solucionar um problema. Quanto a isso, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 16) afirmam que

> uma investigação desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo dizer-se que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver. Por isso, não é de admirar que, em Matemática, exista uma relação estreita entre problemas e investigações.

[5]Todo número inteiro maior do que 2 pode ser representado pela soma de dois números primos (DOXIADIS, 2010).

A busca por soluções de problemas matemáticos pode produzir resultados valorosos para o capital científico daqueles que se dispõem a investigar. Seguindo essa perspectiva, os autores portugueses refletem sobre a possibilidade de levar as investigações para a sala de aula. Para eles, seu uso pode levar os alunos a terem novas experiências com a Matemática, buscando relações a partir de situações postas por meio de problemas, mas que não requerem, necessariamente, um resultado específico.

Nas atividades que seguem essa forma de abordar a Matemática, é comum propor situações abertas em que os alunos possam se decidir por onde desejam seguir (LAMONATO e PASSOS, 2011). Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), é possível saber como uma atividade investigativa vai se iniciar, mas, não é possível prever todos os destinos que, eventualmente, surgirão. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) indicam que

> [...] é necessário desenvolver [no aluno] habilidades que permitam provar os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos para obter a solução. Nessa forma de trabalho, a importância da resposta correta cede lugar a importância do processo de resolução" (BRASIL, 1998, p. 41).

A investigação na sala de aula é um tema abordado nos PCN. Termos como "espírito investigativo", "argumentar", "investigar" e "justificar", característicos dessas tarefas, se encontram presentes no seu texto.

O professor, quando se dispõe a usar atividades investigativas na sala de aula, desenvolve diversos papéis, mediando as discussões emergentes das investigações pelos alunos, refletindo, matematicamente, sobre as situações apresentadas, incentivando o espírito investigativo e a reflexão, recordando conteúdos já estudados que se fazem necessários para o desenvolvimento da atividade, dentre outros.

Ao admitirmos as atividades investigativas como possíveis de serem realizadas nas salas de aula, algumas dúvidas surgem para o professor que opta por usá-las. Existe uma postura adequada do professor para trabalhar com essas tarefas? O que emerge de uma sala de aula quando se utiliza as atividades investigativas? Quais são as impressões do professor que tem o seu primeiro contato com a investigação matemática? É possível, para ele, desenvolver essas atividades por conta própria sem o auxilio de uma formação continuada específica?

Direcionados por essas inquietações, sem a intenção de respondê-las todas, e por outras, decidimos realizar, com uma professora de Matemática, atuante nos anos finais do Ensino Fundamental, algumas tarefas que envolvessem atividades investigativas e, consequentemente, analisar suas atitudes e perspectivas diante delas. Nesse sentido, a pesquisa aconteceu em uma escola municipal de São Mateus/ES, junto a duas turmas – uma do sétimo ano e outra do oitavo –, nas quais a professora convidada era regente.

Para tanto, organizamos a dissertação em cinco capítulos: No primeiro, revisitamos alguns trabalhos que versassem sobre investigação matemática, destacando o objeto de estudo, a opção teórico-metodológica e suas possíveis conclusões. Buscamos, com isso, o movimento dado por essas pesquisas, em tempos outros, e com ele, planejar a contribuição que poderíamos oferecer com a nossa; no Capítulo 2, delimitamos o problema de pesquisa; descrevemos a natureza de nosso estudo, bem como os elementos necessários para seu desenvolvimento; o referencial teórico, tratado no Capítulo 3, nos deu suporte para constarmos e compreendermos atitudes, conjecturas, ambientes de aprendizagem, teorias curriculares emergentes a partir da aplicação de atividades matemáticas investigativas, o que nos permitiu trazer as ideias de alguns autores, dentre outros, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013); Skovsmose (2000); Sacristán (2000).

Exibimos, no Capítulo 4, as quatro atividades investigativas planejadas com a professora e a descrição e análise das etapas de cada uma delas, quais sejam, planejamento; introdução/exploração; socialização; avaliação; no último Capítulo, 5, retomamos a trajetória de nossa pesquisa, em busca de algumas outras compreensões.

CAPÍTULO 1

REPENSANDO A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA A PARTIR DE ALGUMAS OUTRAS PRODUÇÕES EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Nesse capítulo apresentaremos algumas pesquisas desenvolvidas sobre investigação matemática. Para isso, utilizamos a plataforma da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações. A partir de uma busca pelo termo *investigação matemática,* encontramos 1.582 trabalhos contendo as duas palavras, mas, não necessariamente, juntas. Posteriormente, inserimos o termo entre aspas, diminuindo para 26 resultados, cujos resumos foram todos lidos, com o objetivo de identificar trabalhos que tivessem como foco o professor e sua prática ou as práticas desenvolvidas no interior da sala de aula e que envolvessem tanto o professor quanto os alunos. Selecionamos três trabalhos que atendiam a um ou ambos os critérios.

Ampliamos nossa busca com os termos *"investigação matemática"* (entre aspas)*; investigação matemática scielo; investigação matemática na sala de aula; investigação matemática Ponte*. A partir disso, selecionamos mais dois trabalhos. Outros dois, aqui apresentados, foram indicados pelo orientador e por uma das integrantes da Banca Examinadora, à época da qualificação.

Em consonância com Marconi e Lakatos (2003, p. 225) quando dizem que "[...] a citação das principais conclusões a que outros autores chegaram permite salientar a contribuição da pesquisa realizada, demonstrar contradições ou reafirmar comportamentos e atitudes", assim faremos.

Camargo (2006), em sua dissertação, realizou um estudo de caso com três alunas de 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental de uma escola do interior de Curitiba, no contra turno a que estudavam. O objetivo geral da pesquisa pautou em descrever e analisar como elas manifestavam seu raciocínio e seu conhecimento matemático nas atividades investigativas propostas, para responder à questão: **Como três alunas de 8ª série do Ensino Fundamental envolvem-se em atividades**

investigativas de Matemática, mesmo não estando habituadas a trabalhar nesse tipo de tarefa? Para isso, realizou uma pesquisa qualitativa a partir de um estudo de caso.

A autora constatou que as interações aconteciam em menor grau entre as alunas, porém, com a professora, as discussões se intensificavam, o que a levou inferir que o desenvolvimento das atividades era dependente da participação da professora, apesar de não ter sido possível à docente dar suporte em tempo integral.

Lamonato (2007), em sua dissertação, investigou quatro professoras da Educação Infantil. Seus objetivos foram investigar o conhecimento revelado por elas quando se envolviam em atividades exploratório-investigativas; discutiam sobre o ensino da geometria; elaboravam tarefas e realizavam a ação pedagógica e sua reflexão. Analisou, também, a possibilidade de uma ação formativa dessas atividades para essas professoras. A questão norteadora de seu trabalho fora: **Quais conhecimentos são revelados por professores da Educação Infantil quando discutem sobre geometria e seu ensino em um contexto exploratório-investigativo?**

As observações da pesquisadora se concentraram no ambiente de formação continuada, por durante quatro meses, sendo poucos os momentos em que atuou com as professoras durante o desenrolar de suas práticas na sala de aula. Entretanto, constatou que existe pouco espaço para a geometria na prática pedagógica da Educação Infantil e que isso incomoda as professoras que participaram da pesquisa. Além disso, essas professoras admitem que tiveram pouco ou nenhum ensino de geometria na sua formação inicial. Em contrapartida, segundo a pesquisadora (p. 228), "[...] as atividades exploratório-investigativas mobilizaram conhecimentos que as professoras traziam em relação aos conteúdos geométricos e em relação à metodologia adotada, possibilitando ressignificações, conflitos e novas buscas".

Acabou por concluir que as atividades exploratório-investigativas são ações "[...] que permitam que a formação de professores ocorra como condição de trabalho e seja, de fato, contínua [...]" (p. 230), em função de seu potencial formador. Optou por uma pesquisa qualitativa realizada a partir da observação participante.

Bertini (2009), em seu trabalho de mestrado, analisou uma professora da terceira série (4º ano) do Ensino Fundamental de uma escola do interior de São Paulo, durante sua prática de sala de aula envolvendo atividades investigativas e a própria turma. Desenvolveu uma pesquisa-ação, dando início em março de 2008 e se estendeu até o início de julho do mesmo ano. Buscou responder ao problema "**Quais as potencialidades e as limitações do uso de tarefas investigativas no ensino de matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental a partir das ações e das reflexões de uma professora?".**

Identificar as potencialidades e dificuldades percebidas pela professora no uso de tarefas investigativas; analisar as suas contribuições para ampliar essas potencialidades e diminuir essas dificuldades; identificar as mudanças que ocorrem na prática pedagógica e na dinâmica de sala de aula perante esse tipo de tarefa, delinearam seus objetivos, para os quais serem alcançados foram realizados alguns encontros de estudo para que a professora pudesse ter um contato prévio com as tarefas investigativas, já que ela desconhecia o assunto. Apenas depois de três reuniões para discutir textos sobre investigação matemática, elas começaram a discutir sobre qual seria a primeira atividade a ser aplicada.

A pesquisadora constatou algumas potencialidades e dificuldades após a pesquisa de campo e sinalizou que o trabalho em conjunto contribuiu para o melhor entendimento da professora sobre a investigação matemática e da forma de conduzir tarefas nesse ambiente. Além disso, também, possibilitou o seu desenvolvimento profissional, principalmente, em momentos que assistia a vídeos de suas aulas ou registrava suas reflexões.

A autora destaca o valor do uso de tarefas investigativas para a formação continuada, apoiada no depoimento de uma professora que admitiu ter mudado sua forma de lecionar depois do contato com essas tarefas, assumindo, inclusive, uma postura mais questionadora perante os estudantes, sem induzi-los às respostas.

A dissertação desenvolvida por Rocha (2009), acerca das crenças e concepções de Matemática de um grupo de alunos do primeiro ano do Ensino Médio, procurou esclarecer: "**Em que aspectos o trabalho com atividades de natureza investigativa pode contribuir para a aprendizagem de Matemática no 1º ano de Ensino Médio?".**

O trabalho constitui-se de uma pesquisa-ação em que o pesquisador participou das aulas junto ao professor regente durante nove meses do ano letivo, usando atividades investigativas e resolução de problemas. Durante esse tempo, investigou e relatou todo o processo, concluindo que práticas diferenciadas, como as citadas, podem influenciar nas concepções dos estudantes. Antes do período da pesquisa, os alunos desse primeiro ano viam a Matemática como algo acabado, cujo aprendizado ocorria por meio da repetição. Depois do período em que realizou atividades diferenciadas na sala de aula, ele percebeu alguma mudança nas concepções dos alunos sobre a Matemática. Porém, elas poderiam ser maiores se não fosse o tempo demasiado curto, concluindo, assim, que as concepções dos alunos sobre a matemática podem surgir da prática habitual de sala de aula.

Em sua dissertação, Reginaldo (2012) observou três turmas de 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal de Belo Horizonte. Seu objetivo principal foi compreender como a argumentação matemática acontecia entre os estudantes durante uma atividade. Para isso, durante cerca de dois meses, a pesquisadora elaborou e realizou quatro atividades investigativas a serem aplicadas em sequência, agregando à questão: **“Como se desencadeia e se desenvolve a argumentação matemática dos alunos em uma investigação matemática?”**. A fim de respondê-la adotou a pesquisa qualitativa de caráter descritivo.

Reginaldo observou que muitos fatores prejudicam o desencadeamento da argumentação entre os alunos, dentre eles estão a “[...] falta do domínio da linguagem algébrica, falta de tempo, conflitos no grupo e outras prioridades” (p. 162). Contudo, ela comprovou que os alunos são, de fato, capazes de manter argumentação em aulas de Matemática, independentemente, dos fatores complicadores já citados. Além disso, constatou que as intervenções realizadas pela professora puderam auxiliar tanto na escrita, quanto na oralidade, contribuindo, assim, para a exploração da atividade pelos alunos.

Em seu artigo, Guerra e Medeiros (2013) realizaram uma pesquisa-ação e propuseram o uso das investigações matemáticas em algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras. Para contribuir com o processo de ensino-aprendizagem e estimular o raciocínio lógico-dedutivo do aluno sobre suas aplicações, as atividades teriam o auxílio de material concreto. Foram realizados sete encontros com uma turma do 1º ano do Ensino Médio na Paraíba, sendo que, dois deles se destinaram à aplicação de dois testes, e cinco,para atividades investigativas, ocorridas uma por encontro. As autoras não escreveram o problema,mas a todo o momento, intuímos ser algo em torno de: **De que forma o uso de materiais concretos em atividades investigativas que envolvam demonstrar o Teorema de Pitágoras podem contribuir para a aprendizagem de alunos do 1° ano do Ensino Médio?**

Para elas,

> [...] a típica aula expositiva não tem conseguido alcançar os objetivos de uma boa aprendizagem por parte dos alunos. Apenas o uso dessa prática tem levado a uma visão errada da matemática, acreditando que a aprendizagem se dá através do acúmulo de fórmulas. As Investigações Matemáticas podem ser uma importante atividade educativa, levando em conta que é um ótimo aliado no desenvolvimento de ideias matemáticas (GUERRA e MEDEIROS, 2013, p. 70).

Por conceberem os alunos como o centro do processo de ensino e aprendizagem, as autoras criaram um ambiente para que eles propusessem, explorassem e investigassem as possíveis demonstrações do Teorema. Com isso, constataram que os alunos e a professora tiveram uma boa aceitação das atividades realizadas e que a manipulação do material concreto ajudou aos alunos na demonstração do Teorema de Pitágoras.

Wichnoski e Klüber (2015) apresentaram o estado da arte, no cenário nacional, de pesquisas em Educação Matemática que envolvem investigação matemática. Em seu artigo, realizaram um levantamento de trabalhos *Stricto Sensu* disponíveis em uma plataforma virtual que tinham esse tema como eixo central, consubstanciado à questão: **"O que se revela a partir dos focos de pesquisa em dissertações e teses brasileiras de Investigação Matemática?"**. Para isso, criaram cinco categorias:

> 1) Investigação Matemática e o professor de Matemática, 2) Aprendizagem no contexto da Investigação Matemática, 3) Investigação Matemática e conteúdos matemáticos, 4) Investigação Matemática e as teorias da aprendizagem, 5) Relação da Investigação Matemática com outras possibilidades para o ensino de Matemática (p. 338 – 339).

A primeira categoria abrange os trabalhos sobre a formação docente do professor a partir da investigação matemática, analisando suas percepções e práticas na sala de aula. A segunda destina-se ao estudo dos processos de aprendizagem por meio das atividades investigativas, tentando compreender quais são suas potencialidades e limitações. A terceira trata das estratégias de ensino de determinados conteúdos matemáticos utilizando-se de investigações. A quarta envolve pesquisas que objetivam estabelecer relações entre essa “tendência” e diferentes teorias de aprendizagem, de forma que estas últimas deem sentido ao trabalho com a investigação matemática. Por fim, a quinta possibilita relacioná-la com diferentes tendências da Educação Matemática, como a Resolução de Problemas, a Modelagem, a História da Matemática e as tecnologias da informação e comunicação (TIC), observando seus pontos de convergência e que contribuições elas proporcionam integradas.

As autoras observaram que há uma recente emergência da investigação matemática no cenário de pesquisas acadêmicas brasileiras.

Todas essas pesquisas procuraram, de alguma maneira, tratar a investigação matemática sob seus aspectos didático-pedagógicos, ora com foco na prática docente, ora na dinâmica da aprendizagem discente em diferentes níveis de escolarização: Camargo (2006) na descrição interativa/dialógica entre professor/aluno e a emersão do raciocínio e do conhecimento matemático no Ensino Fundamental; Lamonato (2007) e o desempenho de professoras da Educação Infantil acerca de conteúdos de geometria; Bertini (2009) e a prática de uma professora do primeiro ciclo do Ensino Fundamental a partir de um trabalho conjunto entre pesquisadora e professora, o que muito nos aproxima de sua proposta, já que desenvolvemos nossa pesquisa auxiliando, parcialmente, sua prática com atividades investigativas; Rocha (2009) e a modificação de crenças e concepções de alunos do Ensino Médio na aprendizagem matemática; Reginaldo (2012) e a argumentação matemática de alunos do Ensino Fundamental; Guerra e Medeiros (2013) e as demonstrações, auxiliadas por material concreto, em uma turma de Ensino Médio; Wichnoski e Klüber (2015) e o estado da arte das pesquisas sobre investigação matemática no cenário nacional.

Reconhecemos que não realizamos uma revisão exaustiva, porém, procuramos cobrir os últimos cinco anos e fomos um pouco além, haja vista, inquirirmos trabalhos de 2006, 2007 e 2009.

CAPÍTULO 2

OS (DES)CAMINHOS TRILHADOS EM BUSCA DE POSSÍVEIS CONTRIBUIÇÕES AO ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

> **A pesquisa [...] é um procedimento formal com método de pensamento reflexivo, que requer um tratamento científico e se constitui um caminho para conhecer a realidade ou para descobrir verdades parciais (MARCONI e LAKATOS, 2003, p. 155).**

Nesse sentido, nosso intuito será, a partir da definição dada pelas autoras, delinear, nesse capítulo, um panorama das etapas que constituíram esse estudo, a começar pela delimitação da questão norteadora; dos objetivos elencados; dos procedimentos para coleta de dados, seguidos da descrição do campo e do sujeito da pesquisa, no caso, a Professora Maria, bem como o processo de análise e discussão dos resultados, obtidos na aplicação de quatro atividades investigativas.

2.1 O PROBLEMA DE PESQUISA E SEUS OBJETIVOS

Já possuíamos algum conhecimento, digamos superficial, sobre investigação matemática, antes de iniciarmos a pesquisa. Como tínhamos a expectativa de compreendê-la melhor e verificar quais contribuições poderia trazer para a sala de aula, alguns reajustes, em relação à delimitação do problema e dos objetivos, se fizeram necessários no decorrer do estudo.

"Quais contribuições podem ser identificadas e/ou inseridas na prática didático-pedagógica de dois professores de Matemática atuantes no ensino fundamental em uma escola pública municipal de São Mateus-ES, a partir da investigação matemática?" foi a primeira redação dada à nossa questão norteadora. Porém, após muitas reflexões, compreendemos não haver, necessariamente, contribuições prévias da investigação matemática para o trabalho do professor. Não fora suficiente termos constatado-as, tão somente, em nossa prática profissional, pois, muito provavelmente, ela varie de professor para professor, beneficiando a um e não a outro. Além disso, julgamos que o tempo para a conclusão do mestrado – dois anos – seria demasiado curto para analisarmos a prática de dois professores.

Reelaboramos o problema para **“Que outras práticas didático-pedagógicas se destacam numa professora de Matemática ao trabalhar com atividades investigativas na sala de aula?”**. Tratamos de “outras práticas” por acreditarmos que a própria atividade investigativa já se constituía como uma prática. Mas não tínhamos parâmetros para destacarmos “outras práticas”. Finalmente, chegamos a um problema, que consideramos ser possível responder com esse trabalho: **“Que práticas didático-pedagógicas são utilizadas por uma professora de Matemática ao trabalhar com atividades investigativas na sala de aula?”.** Apesar de ser muito próximo ao que buscávamos anteriormente, acreditávamos, agora, com essa perspectiva, sermos menos contundentes acerca das possíveis ações efetivadas pela professora, uma vez que não mais as queríamos destacar e, sim,identificá-las.

Para tanto, tivemos por objetivo geral:

- ✓ Descrever e analisar as práticas didático-pedagógicas de uma professora atuante nas séries finais do Ensino Fundamental diante da aplicação de atividades matemáticas investigativas;

E, consequentemente, por objetivos específicos:

- ✓ Constatar a condução dada pela professora às atividades investigativas, considerando suas atitudes e posturas;
- ✓ Identificar as potencialidades, positivas ou negativas, inerentes às atividades investigativas aplicadas.

2.2 NATUREZA DO ESTUDO

Para Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 60),

> [...] a pesquisa é um processo de estudo que consiste na busca disciplinada/metódica de saberes ou compreensões acerca de um fenômeno, problema ou questão da realidade ou presente na literatura, o qual inquieta/instiga o pesquisador perante o que se sabe ou diz a respeito.

A partir dessa definição, trilhamos os procedimentos de um estudo de caso, o qual, para Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 110),

> [...] busca retratar a realidade de forma profunda e mais completa possível, enfatizando a interpretação ou a análise do objeto, no contexto em que ele se encontra, mas não permite a manipulação das variáveis e não favorece a generalização.

Nesse sentido, entendemos que o estudo de caso configura-se como uma ferramenta confiável para observar os fenômenos surgidos no espaço escolhido, permitindo-nos melhor analisar e descrever os resultados nele obtidos.

Outrossim, optamos pela abordagem qualitativa por nos oportunizar, conforme Borba e Araújo (2013, p. 25), “[...] informações mais descritivas, que primam pelo significado dado às ações”.

Assim posto e por tratarmos da descrição e análise da prática de uma professora, compreendemos estar diante de um estudo exploratório-descritivo, cuja finalidade apoia-se, segundo Marconi e Lakatos (2003, p. 188), em “[...] descrever completamente determinado fenômeno, como, por exemplo, o estudo de um caso para o qual são realizadas análises empíricas e teóricas”.

Portanto, julgamos nossa investigação, admitindo a pesquisa qualitativa, caracterizada por Borba e Araújo (2013); o estudo de caso, a partir da visão de Fiorentini e Lorenzato (2012); o estudo exploratório-descritivo, demarcado por Marconi e Lakatos (2003); uma pesquisa qualitativa desenvolvida a partir de um estudo de caso exploratório-descritivo.

2.3 AS ATIVIDADES INVESTIGATIVAS

Elaboramos quatro atividades investigativas, com a intenção de a professora determinar a ordem em que seriam aplicadas. Porém, uma delas, que propunha a utilização da calculadora, fora rejeitada e, portanto, tivemos que substituí-la. Assim, apresentaremos a disposição executada, de forma bastante sintética, pois, descreveremos, mais detalhadamente, sobre o desenrolar das atividades no próximo capítulo.

A primeira atividade, adaptada da dissertação de Camargo (2006), sugere buscar regularidades no Triângulo de Pascal. A segunda, adaptada do artigo de Maccali (2015), propõe encontrar possíveis relações a partir de uma sequência construída por palitos de fósforo. Os quadrados mágicos, substitutos da calculadora, constituem a terceira atividade, e com eles os alunos deveriam encontrar diferentes soluções, de acordo com as sucessões numéricas propostas. Por fim, a quarta atividade, adaptada da obra *O Homem que Calculava*, de Malba Tahan (2013), trata da composição de expressões para números de zero a cem, nas quais devem configurar, apenas, quatro quatros.

2.4 PROCEDIMENTOS PARA A COLETA DE DADOS

Nossas primeiras ações giraram em torno de encontrarmos uma escola e um professor, cuja seleção ancorar-se-ia em alguns critérios definidos *apriori.* Assim, o professor deveria ter Licenciatura Plena em Matemática; alguma experiência com a prática profissional; não estar próximo da aposentadoria; a escola deveria ser pública; de Ensino Fundamental regular; localizada em São Mateus; possuir pelo menos uma turma de sétimo ano[6].

A restrição em ser licenciado pleno em Matemática, se justifica, pois, queríamos observar a prática de alguém que tivesse recebido orientações específicas para lecionar. Não descartamos haver muitos bons professores não licenciados, mas restringimos nossa escolha para não recairmos em práticas, tão somente, empíricas ou autodidatas. Ter alguma experiência profissional nos garantiria, por exemplo, não trabalhar com recém-formados, por estarem em uma fase inicial de se constituir professor e a condução de atividades que, possivelmente, não pertencessem à sua cotidianidade, poderiam promover certa insegurança, dificultando, assim, a identificação e análise de suas práticas. Em contrapartida, trabalhar com um professor muito experiente, talvez, enrijecido pelos anos de prática, poderia fazê-lo não se abrir para novas teorias sobre o ensino de Matemática, razão pela qual, afinamos por alguém distante da aposentadoria.

[6]Inicialmente, queríamos um professor que trabalhasse com turmas do sétimo ano, em função da nossa experiência em realizar atividades investigativas nessa etapa de escolarização. Porém, alguns ajustes no cronograma da professora, que colaborou em nosso trabalho, os quais serão explicados mais à frente, fizeram-se necessários e não pudemos trabalhar, apenas, com alunos do sétimo ano, o que não inviabilizou a pesquisa, haja vista, as atividades, que elaboramos, serem flexíveis aos outros anos.

Listadas algumas escolas, buscamos saber quais eram os professores que ali lecionavam e quais satisfaziam os critérios estabelecidos. Dentre todos os “bem qualificados para a pesquisa”, ficamos em dúvida entre duas professoras: Maria e Joana[7]. Apesar de nos conhecermos - já havíamos trabalhados juntos -, preferimos Maria, pois fomos colegas de turma na graduação e isso poderia auxiliar nossa comunicação e/ou diminuir as primeiras dificuldades, tanto a nossa quanto a dela, sobretudo, em relação à observação de sua sala de aula.

Fizemos contato por telefone, para convidá-la, quando, então, lhe dissemos do que se tratava. Agendamos nos encontrarmos em uma das escolas que lecionava, no horário de seu planejamento. Nesse encontro, registrado no diário de bordo, demos todos os detalhes do que pretendíamos; desde informações gerais acerca do Programa de Mestrado à nossa proposta de pesquisa. Maria refletiu por alguns instantes antes de concordar e mostrou-se receptiva com relação ao que lhe dissemos. Em seguida, fomos até sua diretora solicitar-lhe autorização para realizarmos o trabalho de campo. Após relatarmos como iríamos proceder, ela não se opôs, aquiescendo nossa participação nas dependências da escola.

Essa etapa da pesquisa constituiu-se, basicamente, por meio dos instrumentos: diário de bordo; gravação em áudio, acoplados às técnicas: observação participante; aplicação das atividades investigativas e entrevista semi-estuturada(APÊNDICES A, B, C e D). Por ora, não nos alongaremos, pois voltaremos a comentar a esse respeito no capítulo 3 e 4.

Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 118 – 119), consideram o diário de bordo

> um dos instrumentos mais ricos de coleta de informações durante o trabalho de campo [...]. É nele que o pesquisador registra observações de fenômenos, faz descrições de pessoas e cenários, descreve episódios ou retrata diálogos.

Tal instrumento foi utilizado, basicamente, em quatro momentos – eles foram subdivididos - ao longo do trabalho de campo, quais sejam: [1] Planejamento com a professora; [2] Aplicação das atividades; [3] Reflexão acerca das descobertas dos alunos; [4] Avaliação do processo pela professora. Nos planejamentos, acordávamos a forma de organização da sala e das atividades; as sugestões dadas,

---

[7] Nomes fictícios

bem como as possíveis alterações dos objetivos elencados e do cronograma elaborado. Durante a aplicação das atividades, observávamos a introdução dada à tarefa; as explorações dos alunos; o gerenciamento do tempo; as atitudes da professora. Na terceira etapa, constatávamos a condução das discussões e suas justificativas matemáticas; a socialização dos resultados encontrados pelos alunos. Por fim, na avaliação do processo, identificávamos suas percepções em relação aos acontecimentos emergidos; à abordagem da investigação matemática; aos currículos prescrito e praticado.

Sobre as entrevistas semi-estruturadas, Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 120) enfatizam que "[...] além de permitir a obtenção mais direta e imediata dos dados, serve para aprofundar o estudo, complementando outras técnicas de coleta de dados [...]". Assim, para maior segurança, gravamos as entrevistas em áudio e as acionamos sempre que sentíamos a necessidade de relembrar algum acontecimento ou reviver o momento em que elas ocorreram. Elas foram realizadas antes do primeiro planejamento, para ampliar nosso conhecimento sobre a professora e, também, após as duas primeiras atividades, na etapa da avaliação. Todavia, devido à sugestão da banca, à época do exame de qualificação de nosso trabalho, gravamos as demais etapas das duas últimas atividades.

2.5 O CAMPO DA PESQUISA

A escola, onde realizamos a pesquisa, pertence a um bairro residencial de São Mateus/ES. Funciona em três turnos: matutino, vespertino e noturno. No primeiro, conta com uma equipe de 27 professores que lecionam para 431 alunos. Além das 15 salas de aula, que estão divididas em dois pavilhões, possui uma biblioteca e um laboratório de informática que, segundo a secretária, se encontra em desuso, devido às más condições das máquinas. Há um pátio central coberto e uma área ao redor da escola onde os alunos ficam durante o recreio. Nessa grande área, existe um jardim feito com sucata e uma quadra na parte de trás da escola. A quadra não pode ser utilizada, pois, apesar de pronta e sem uso, ela apresenta uma série de problemas estruturais e deve passar por uma reforma, antes mesmo da inauguração.

O Projeto de maior destaque da escola intitula-se “Aulão para o IFES”, cujo objetivo é trabalhar os conteúdos exigidos para ingresso no Ensino Médio Integrado do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES). Para que isso aconteça, professores são convidados a preparar uma aula para os alunos do nono ano, interessados em estudar naquela Instituição. Além da revisão de variados tópicos, são explorados diversos exemplos e aplicadas algumas atividades, em uma sala exclusiva, durante a manhã. Segundo a diretora, o projeto contribuiu para que doze estudantes, do ano anterior, conseguissem aprovação no processo seletivo.

2.6 O PERFIL DA PROFESSORA MARIA

Assinalamos em linhas atrás, tê-la conhecido durante a graduação. Apesar de cursarmos a licenciatura juntos, na Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), *campus* São Mateus, não nos tornamos próximos nesse período. Maria iniciou seu Curso em 2006 e se formou em 2011 e sua atuação profissional, como professora do Ensino Fundamental, em escola pública, aconteceu a partir de 2012. Desde então, ela vem ministrando aulas na rede municipal e sempre com turmas dos 6º ao 9º anos. Mesmo não tendo lecionado como titular no Ensino Médio, mas pela experiência que teve com aulas de substituição, ela prefere o trabalho com alunos menores.

Em 2013, ela fez uma especialização em Educação Matemática em uma instituição de ensino particular, concluindo-a no mesmo ano. Trabalhamos, coincidentemente, nas mesmas escolas de 2012 a 2014, com contrato de Designação Temporária (DT), haja vista, a cada ano, um novo processo seletivo ser feito para a contratação de professores “DT”.

Em junho de 2016, quando iniciamos a pesquisa de campo, Maria lecionava em duas escolas, pela manhã. Sua designação, ainda temporária, ocorreu, aproximadamente, um mês após o período letivo já ter começado, por conta de haver professores, de ambas as escolas, desistentes ou remanejados. Segundo ela, isso prejudicou sua atuação, pois, os professores, cientes de que não iriam continuar com as turmas, decidiram não adiantar os conteúdos, os quais estavam todos atrasados.

Relatou-nos que, no Curso de Licenciatura Plena em Matemática, teve pouco contato com as disciplinas voltadas à didática do ensino. Ela demonstrou ter algum conhecimento sobre Resolução de Problemas, Modelagem Matemática e Jogos Matemáticos, mas não se recordou que tenha estudado acerca da investigação matemática, durante os cinco anos de seu Curso, embora tal deficiência tenha sido, parcialmente, sanada por meio da realização de cursos de formação continuada, promovidos pela Secretaria Municipal de Educação. Para ela, a abordagem didático-pedagógica da investigação matemática trata de atividades que oportunizam ao aluno descobertas por si só, como também, objetivam fixar conteúdos, cuja aplicação denota a prática de algoritmos.

Maria considerou sua atuação, em sala, inserida nos moldes da escola tradicional, pois, cerca-se de aulas expositivas, provas escritas e listas de exercícios. O planejamento conta com o auxílio do livro didático, internet e ocorre na escola, semanalmente, em três momentos, durante cinquenta minutos cada, tendo um deles a presença da pedagoga.

Com relação à utilização de tecnologias, limita-se à calculadora, entretanto, afirmou que seus alunos não têm maturidade suficiente para usá-la, pois "dá muito trabalho para convencê-los de que a calculadora não é sempre o melhor meio de realizar contas", uma vez que, tornam-se muito dependentes dela até para o cálculo de contas simples.

2.7 ANÁLISE DOS DADOS E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

> [...] De posse do material coletado, o pesquisador deve submetê-lo a uma verificação crítica, a fim de detectar falhas ou erros, evitando informações confusas, distorcidas, incompletas, que podem prejudicar o resultado da pesquisa (MARCONI & LAKATOS, 2003, p. 166).

Revisitar os dados obtidos e registrados no diário de bordo configurou a largada inicial. Apropriamo-nos das etapas da pesquisa de campo, apresentadas no item 2.4, como categorias de análise. Posteriormente, agrupamos, em cada uma delas, os dados a partir das relações existentes entre eles de modo a permitir uma melhor análise e interpretação dos resultados.

Para tanto, recorremos à técnica de triangulação, a qual, para Marcondes e Brisola (2014, p. 203), “[...] permite que o pesquisador possa lançar mão de três técnicas ou mais com vistas a ampliar o universo informacional em torno de seu objeto de pesquisa [...]”. Nesse sentido, agregamos as informações obtidas nas observações em sala de aula; na entrevista com a professora e nas atividades aplicadas, à luz dos pressupostos teórico-metodológicos da pesquisa, a fim de responder a nossa questão de estudo, bem como verificar os objetivos traçados. O capítulo 4 apresenta a descrição das atividades seguida de suas análises.

Em busca de melhor compreendermos o que venha a ser investigação matemática, nos deparamos com diferentes autores, cujas ideias, contribuíram para o avanço do nosso processo de constituição e aprendizagem a respeito da temática em questão e auxiliaram durante a elaboração das atividades que propusemos à professora escolhida, assim como nas etapas da pesquisa de campo. À medida que avançávamos em nosso propósito, tínhamos a necessidade de, diante dos acontecimentos emergidos em sala de aula e dos planejamentos efetivados com Maria, ampliar o campo teórico para uma análise mais fecunda e fidedigna. Assim posto, fizemos algumas incursões, no próximo capítulo, das ideias dos teóricos que nos serviram de sustentação para o desenvolvimento das atividades matemáticas investigativas.

CAPÍTULO 3

A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: ENTRE ESPAÇOS E SUJEITOS

> [...] **não estamos a falar de descobertas verdadeiramente novas para o capital científico de Matemática, mas sim de descobertas verdadeiramente novas para o capital científico do estudante (BRAUMANN, 2002, p. 21).**

Ante a um vasto campo teórico, constatamos haver a possibilidade de estabelecer relações entre a investigação matemática e alguns elementos peculiares no ambiente em que a pesquisa foi realizada. Preferimos, então, subdividi-lo em quatro setores, com os quais passamos a dialogar.

3.1 PESQUISA E A MATEMÁTICA DA SALA DE AULA

Para Skovsmose (2000) é comum uma aula tradicional se dividir em duas partes: [1] o professor apresenta algumas técnicas e algoritmos de resolução para o conteúdo proposto; [2] os alunos se debruçam sobre uma lista extensa de atividades mecânicas que visam a memorização e fixação do algoritmo posto em destaque. Para ele, esse tipo de aula se enquadra no chamado paradigma do exercício, que, em sua concepção, é um exemplo de abordagem tradicional das aulas de Matemática. Observa, ainda, que a Matemática desenvolvida por um aluno inserido em contextos que privilegiam o paradigma do exercício – memorização e reprodução –, seja diferente da desenvolvida no cenário de pesquisas - experimentação e relação com situações reais.

Para D'Ambrósio (1993, p. 36),

> [...] o processo de transmissão de conhecimento utilizado na experiência matemática da maioria dos nossos alunos [...] não deixa que o aluno analise a Matemática como uma área de pesquisa e investigação. Assim como no processo de construção da Matemática como disciplina, a essência do processo é a pesquisa, na construção do conhecimento para cada aluno, a essência do processo tem que ser a pesquisa. Dificilmente o aluno de Matemática testemunha a ação do verdadeiro matemático no processo de identificação e solução de problemas. O professor faz questão de preparar todos os problemas a serem apresentados com antecedência; consequentemente, o legítimo ato de pensar matematicamente é escondido do aluno, e o único a conhecer a dinâmica desse processo continua sendo o professor. O professor, com isso, guarda para si a emoção da descoberta de uma solução fascinante, da descoberta de um caminho produtivo, das frustrações inerentes ao problema considerado e de como um matemático

> toma decisões que facilitam a solução do problema proposto. O que o aluno testemunha é uma solução bonita, eficiente, sem obstáculos e sem dúvidas, dando-lhe a impressão de que ele também conseguirá resolver problemas matemáticos com tal elegância.

Braumann (2002, p. 5, grifo do autor) acrescenta que

> aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão ‘detectivesca’ indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles.

Ponte (2003b, p. 1) acredita que a dicotomia “[...] entre investigar e ensinar tem vindo a ser questionada, do mesmo modo que se tem vindo a pôr em causa a existência de uma separação incontornável entre investigar e aprender”. O ato de investigar, apesar de estar associado ao trabalho acadêmico, não precisa, necessariamente, ser próprio dele. Investigações em menor grau podem existir em um ambiente escolar. Prossegue, dizendo que “[…] ’investigar’ não é mais do que procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com [os quais] nos deparamos” (PONTE, 2003b, p. 2). Não se trata da mesma investigação feita pelos matemáticos profissionais, para os quais, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 13) “[...] investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades”.

Parece-nos que, para esses autores, o aprendizado da Matemática teria mais significado se envolvesse, já nos seus primórdios, a pesquisa e, consequentemente, a investigação. O aluno não deveria se posicionar como um ser passivo, cuja demanda recai, apenas, em decorar algoritmos para aplicação em exercícios. Ao contrário, a ele deveria ser oportunizada uma interação constante com essa Ciência, tornando-o, também, responsável por sua construção.

Possivelmente, o professor intencione realizar investigações, enquanto elabora seu planejamento, mas, muito provavelmente, por diferentes razões, as conduza de forma pronta e acabada, restando ao estudante, apenas, escrever uma solução preestabelecida, ocultando-lhe alguns caminhos que poderiam promover, por exemplo, a busca por relações e padrões, algo comum, ou que deveria ser, nas atividades propostas no processo ensino e aprendizagem da Matemática.

3.2 A AS ETAPAS DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

“O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa [...]”, conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p.23).

Nessa perspectiva, a condução da atividade segue algumas etapas, distintas para professor e aluno, sem se sobreporem umas às outras. Os atributos designados ao professor são, assim, dispostos por Ponte et al (1998a): Planejamento; Aplicação e Avaliação. Os do aluno, apresentados por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), se configuram em: Apresentação da tarefa pelo professor; Realização da exploração; Socialização dos resultados obtidos durante a investigação.

As etapas não são excludentes; tanto o professor quanto o aluno assumem posicionamentos que se complementam. Já havíamos mencionado, brevemente, a respeito delas no capítulo anterior. Compreendemos, agora, ser possível mesclá-las e reestruturá-las em: [1] Planejamento da atividade; [2] Introdução da tarefa para os alunos; [3] Exploração da atividade pelos alunos; [4] Socialização dos resultados obtidos pelos alunos; [5] Avaliação da atividade após a sua conclusão. Essas nos auxiliaram nas descrições e análises das atividades investigativas sugeridas à professora Maria e aplicadas em suas turmas; o que nos faz melhor discuti-las.

Certamente, o planejamento configura-se como o momento em que o professor escolhe a atividade a ser aplicada; define os objetivos pretendidos; intui o tempo de execução e/ou outros fatores que julgar importantes.

Ponte et al. (1998a, p. 5) se referem ao planejamento como uma “agenda”, suscetível a constantes mudanças, cuja “[...] combinação das diversas acções programadas constitui a estratégia do professor para aquela aula” e, ainda, indagam:

> […] Que factores se evidenciam como mais importantes para facilitar a sua actuação? Como é que ele pode gerir a situação didáctica, estabelecendo as normas de funcionamento da aula, determinando expectativas, indicando o que é ou não desejável, o que é ou não permitido aos alunos e a si próprio?

Posteriormente, dá-se início à aplicação, propriamente dita, da atividade investigativa com os alunos, a partir da introdução da tarefa, fase em que o professor descreve a atividade; a maneira como ela será realizada; seus objetivos; o tempo destinado para sua execução; os critérios avaliativos, caso existam; e/ou outras informações necessárias. Esse é um momento importante, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), para aqueles que não estão habituados a esse tipo de trabalho, pois carecem de mais informações para desenvolverem suas investigações.

Consequentemente, ocorre a exploração da atividade, cabendo ao professor permitir o protagonismo do aluno; auxiliar na manutenção de seu espírito investigativo; provocar reflexões e debates entre os pares e ele; elaboração de questões e conjecturas, em busca de padrões e regularidades.

Produzir conjecturas talvez não seja uma tarefa trivial para o aluno da educação básica, muito provavelmente, por não estar acostumado a fazer perguntas a si próprio; subdividi-las em subquestões ou, por vezes, realizar ações matemáticas de forma inconsciente, contudo, o papel do professor se torna imprescindível, pois, como nos sinaliza Lamonato (2007, p. 80-81),

> […] mesmo os alunos não tendo condições de elaborarem processos complexos de raciocínio ou de utilizar demonstrações ou fazer justificações matemáticas, podem posicionar-se com atitude investigativa perante situações matemáticas ou não, tomando decisões e não apenas dando respostas esperadas.

O processo de investigação pode proporcionar uma grande diversidade de caminhos, inclusive, emergindo questões que não foram pensadas pelo professor. Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) acreditam que essa seja a oportunidade dele mostrar seu raciocínio matemático aos alunos, afinal, seu modo de pensar pode influenciar o modo de pensar do aluno, permitindo-lhe acesso a outra forma de organizar o pensamento matemático.

A socialização dos resultados obtidos durante a exploração contribui para que toda a turma compreenda melhor aquilo que eles mesmos desenvolveram e o significado de investigar. A comunicação matemática, também, é aqui trabalhada, já que se torna necessário relatar, para o professor e demais colegas, as descobertas e de como chegaram até elas (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2013).

Para esses autores, o significado dado ao trabalho investigativo acaba se evidenciando, uma vez que a função do professor, nessa fase, é de moderar as discussões e garantir a abordagem dos principais pontos, bem como reforçar a importância de se elaborar argumentos para validar ou não as conjecturas produzidas. A conclusão dessa etapa significa o término da atividade para os alunos, porém, resta ainda uma última etapa para o professor.

Assim, como em toda atividade matemática, a investigação requer uma avaliação. A partir dela o professor pode observar melhor como está o desempenho dos alunos, se há progresso satisfatório, se é necessário repensar sua prática, entre outras possibilidades (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2013).

Ponte et al. (1998a, p. 6) indicam que a avaliação envolve dois aspectos: "[…] as reações dos alunos em face das expectativas e os resultados dos objetivos e acções do professor". Ela pode acontecer de forma explícita, quando se realiza uma reflexão mais apurada sobre os acontecimentos na sala durante a atividade, ou de forma implícita, quando tudo acontece dentro do planejado e não existe muito para refletir. A avaliação explícita acontece, geralmente, em dois momentos: quando se deseja entender determinadas ações ocorridas durante a atividade, ou quando se deseja analisar o desenvolvimento dos alunos. Nesse último caso, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), é comum que a avaliação seja feita por meio de relatórios escritos; das observações feitas durante a exploração da atividade; da socialização dos resultados obtidos.

3.3 OS "CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO"

Para contrapor à visão tradicionalista, admitindo o paradigma do exercício como um de seus representantes, Skovsmose (2000, p. 21) sugere o uso de uma abordagem investigativa, cuja inserção deve ocorrer no interior do que designou de *cenário para* *investigação,* isto é, um ambiente específico no qual o aluno é convidado a fazer perguntas a si próprio.

> […] O convite é simbolizado pelo 'o que acontece se...?' do professor. O aceite dos alunos ao convite é simbolizado por seus 'Sim, o que acontece se...?'. Dessa forma os alunos se envolvem no processo de exploração. O 'Por que isto...?' do professor representa um desafio e os 'Sim, por que isto...?' dos alunos indicam que eles estão encarando o desafio e que estão procurando por explicações.

Apesar de Alrø e Skovsmose (2010) reconhecerem a necessidade do convite para que o *cenário para investigação* seja estabelecido; admitem não haver garantias de que ele seja aceito. Porém, estratégias podem ser adotadas para favorecer um bom resultado, em contrapartida, o professor deverá se preocupar com a permanência do aluno no *cenário*, com o intuito de não torná-lo efêmero, insuficiente para execução da atividade.

Tanto os *cenários para investigação*, quanto o *paradigma do exercício* desenvolvem ambientes de aprendizagem que irão se diferenciar em relação aos objetivos da tarefa matemática pretendida. Skovsmose (2000, p. 8) propõe seis ambientes de aprendizagem, dispostos em três categorias, conforme QUADRO 1:

QUADRO 1: Atividades matemáticas desenvolvidas a partir do *paradigma do exercício* e dos *cenários para investigação*

Referência	Exercícios	Cenários para investigação
(A) à matemática pura	(1)	(2)
(B) à semi-realidade	(3)	(4)
(C) à realidade	(5)	(6)

Fonte: Adaptado de Skovsmose (2000)

Em (A,1) as tarefas desenvolvidas têm caráter, unicamente, matemático ou seja, há o predomínio de atividades mecânicas que preconizam a fixação em detrimento da interpretação; em (A,2) os alunos devem buscar relações e investigar possibilidades, partindo de atividades abstratas que envolvem números e/ou figuras.

Em (B,3) tem-se questões genéricas que fazem menção à realidade, entretanto, de forma ideal, harmônica, excluindo-se quaisquer variações ou imprevistos; geralmente, apresenta modelos apenas para a solução de um problema, didaticamente, criado, de forma tal que nenhuma informação presente ali signifique algo, de fato real. Segundo Skovsmose (2000), é o tipo de atividade mais presente nos livros didáticos; em (B,4) um tanto semelhante a (B,3) no que tange a situações ideais, entretanto, as atividades têm por objetivo recriá-las por meio de jogos e desafios.

Em (C,5) as situações da vida real são tratadas, levando-se em consideração todos os possíveis imprevistos que podem ocorrer. Tais situações são comuns de serem encontradas em provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), nas quais se apresentam gráficos e tabelas, com dados reais, que podem ser conferidas e analisadas pelos alunos; por fim, em (C,6), o desenvolvimento das atividades, geralmente, ocorre por meio de pesquisas ou trabalhos de campo, provocando a aproximação entre Matemática e realidades. Skovsmose (2000) o considera o ambiente com maior potencial para a construção de um *cenário para investigação*.

Como vemos, tarefas matemáticas podem ser desenvolvidas a partir de qualquer uma das referências, as quais, responsáveis pela criação dos ambientes de aprendizagem, promovem situações distintas, podendo variar de exercícios a problemas; de atividades investigativas a projetos.

3.4 O CURRÍCULO E A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

> [...] a prática que se refere ao currículo […] é uma realidade prévia muito bem estabelecida através de comportamentos didáticos, políticos, administrativos, econômicos, etc., atrás dos quais se encobrem muitos pressupostos, teorias parciais, esquemas de racionalidade, crenças, valores, etc. […] (SACRISTÁN, 2000, p. 13).

A citação acima, nos permite inferir que as percepções de currículo se modificam de acordo com as instâncias que o definem. A visão de um diretor escolar se diferencia da de um professor que se diferencia da do aluno. Sacristán (2000, p. 102), ainda, afirma ser o currículo “[...] um objeto em construção cuja importância depende do próprio processo […]” e, por isso, o currículo se altera, dando forma a uma nova versão.

Nesse sentido, legitimam-se documentos que, amparados por diretrizes educacionais vigentes, acabam por determinar o andamento do que se pratica na sala de aula, ratificando os ideais prescritos por aquelas, seja em âmbito nacional ou regional. Assim sendo, faremos uma incursão, bastante breve, com o intuito de verificar a presença ou não da investigação matemática, nos Parâmetros Curriculares Nacionais; no Currículo Estadual Espírito-Santense e no Programa de Ensino de São Mateus.

Iniciemos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), publicados em fins da década de 1990, para "construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras" (BRASIL, 1998, p. 5), tendo, como um de seus objetivos na área da Matemática,

> Questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação (BRASIL, 1998, p. 8).

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) enfatizam que questionar e formular problemas são ações fundamentais em uma atividade investigativa. Os PCN, utilizando ao longo de seu texto expressões como "espírito de investigação" (p. 47), "desenvolvimento da capacidade de investigar, argumentar, comprovar, justificar [...]" (p. 34), "[...] capacidade de argumentar e de fazer conjecturas e generalizações" (p. 49), preconizam a importância de se investigar em matemática.

Seguindo, nessa mesma linha, o Currículo Básico da Escola Estadual do Espírito Santo concebe a Matemática como "[...] uma atividade humana que encerra nela mesma uma dialética de conjecturas, refutações e demonstrações até chegar às conclusões" (ESPÍRITO SANTO, 2009, p.81), elencando em seus objetivos "Estimular o espírito de investigação e desenvolver a capacidade de resolver problemas" (p. 84); "argumentar sobre suas conjecturas" (p. 85), e a eles acrescenta o contato com experiências matemáticas, tais como

> [...] resolver problemas, realizar atividades de investigação, desenvolver projetos e atividades que envolvam jogos e ainda resolver exercícios que proporcionem uma prática compreensiva de procedimentos [...] (ESPÍRITO SANTO, 2009, p.85).

Por outro lado, as escolas municipais de São Mateus seguem seu Programa de Ensino (PE), publicado em 2003, o qual contém algumas informações gerais sobre cada área, incluindo objetivos gerais, orientações metodológicas, sugestões para avaliação e destina-se, exclusivamente, ao Ensino Fundamental.

O PE concebe a Resolução de Problemas como metodologia de ensino e deixa a cargo do professor utilizar os recursos didático-pedagógicos que lhe aprouver, colocando em destaque os jogos matemáticos (SÃO MATEUS, 2003). Entretanto, as atividades investigativas não são tratadas, explicitamente, em seu texto, apesar de constatarmos o termo "investigação", em um de seus objetivos, como se pode ler:

> Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo a sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da matemática como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o **espírito de investigação** o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas (SÃO MATEUS, 2003, p. 162, grifos nossos).

Como não fora objetivo desse trabalho uma análise documental mais detalhada, interessou-nos, apenas, localizar nos três documentos o tratamento dado às investigações matemáticas, as quais, segundo Araújo et al. (2008, p. 30), "[...] não tem sido frequentes em salas de aula do nosso país". A esse respeito, Canavarro (2003, p.3) nos remete à reflexão: "[...] será que [os professores] não reconhecem valor ou viabilidade às novas propostas e preferem continuar a ensinar aos seus alunos aquilo que lhes foi ensinado a si?".

Admitindo as práticas pedagógicas como "[...] produtos de tradições, valores e crenças muito assentadas, que mostram sua presença e obstinação à mudança quando uma proposta metodológica alternativa pretende instalar-se em certas condições já dadas (SACRISTÁN, 2000, p. 28)", cabe-nos, para observamos a inserção das atividades investigativas em cada um deles, discutir sobre os diferentes tipos de currículo apontados por esse mesmo autor.

O *currículo prescrito* se apresenta em qualquer sistema educacional e é desenvolvido com objetivo de prescrição ou orientação. Normalmente, é produzido por instituições maiores do que a escola, como órgãos do governo e da administração escolar. Nele, constam objetivos e conteúdos necessários para servir de referência ao trabalho do professor. Sob essa ótica, a investigação matemática receberia um formato teórico, sem, necessariamente, explicitar o seu uso na prática profissional do professor; o que vemos, por exemplo, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

O *currículo apresentado*, geralmente, desenvolvido por grupos fora da escola e entregue em forma de apostilas, livros didáticos e mídias, tem o papel fundamental de transcrever o *currículo prescrito* para o professor. A investigação matemática pode-se manifestar por meio de atividades ou propostas de projetos.

O currículo moldado coloca o professor como peça chave no processo educacional, pois, a partir da sua prática profissional e cultural, traduz os significados das propostas curriculares em seus momentos de planejamento. Mesmo que o currículo tenha sido produzido por um órgão político, nessa perspectiva, o professor irá decidir a maneira de executá-lo; definindo, nesse processo, as estratégias didático-pedagógicas a ser empregadas em sua aula, o que torna possível a inserção da investigação matemática.

Consequentemente, abre-se espaço para o *currículo em ação*, ou seja,aquele praticado pelo professor a partir do que fora delineado no *currículo moldado*, durante o planejamento, de outro modo, o professor produz um novo currículo ao pô-lo em prática, conforme suas convicções políticas, educacionais, sociais, etc. A efetivação das atividades investigativas na sala de aula pode ocorrer, nesse momento, caso o professor as tenha elegido na etapa anterior.

O currículo realizado se configura pelas produções do que fora praticado, traduzidas pelos efeitos cognitivos, afetivos, sociais, morais, entre outros, os quais implicam o aluno; o professor e sua forma de socialização profissional, permitindo, por exemplo, verificar, em curto prazo, o alcance dos objetivos traçados em uma atividade investigativa e, em longo prazo, promover a fruição matemática e o espírito investigador.

O *currículo avaliado* permite (re)significar a prática do professor e o desempenho dos alunos. Momento em que se buscam outras formas para revisar tópicos, ainda incompreendidos. A Investigação matemática apresenta-se como uma alternativa plausível, uma vez que, as suas etapas de desenvolvimento podem auxiliar na obtenção de modos diferentes de fazer.

Baseando-nos no questionamento feito por Canavarro (2003) e considerando o trabalho realizado com a Professora Maria, procuramos identificar sua concepção de investigação matemática; os movimentos efetuados nas etapas desenvolvidas; as transições entre esses diferentes tipos de currículos.

CAPÍTULO 4

AS ATIVIDADES INVESTIGATIVAS E OS DESDOBRAMENTOS DE SUAS ETAPAS

Nesse capítulo descrevemos o desenvolvimento das quatro atividades que propusemos considerando a reelaboração, feita por nós, das etapas sugeridas por Ponte et al (1998a) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), quais sejam, planejamento; introdução; exploração; socialização dos resultados; avaliação. Optamos, nessa descrição, não nos preocuparmos com um rigor cronológico e sim destacar momentos que acreditamos se mostraram significativos. O cronograma das atividades pode ser conferido no APÊNDICE E.

4.1 PLANEJAMENTO

Realizamos quatro planejamentos, todos eles registrados em nosso diário de bordo e, apenas nos dois últimos, utilizamos o recurso de áudio. Foram realizados às segundas-feiras que antecediam as atividades e, essas, elaboradas, geralmente, na semana anterior àqueles. Eles ocorreram, entre 7h50min às 9h30min, na sala dos professores.

Dividimos o primeiro planejamento em dois momentos: [1] leitura do Capítulo 2 do livro "Investigações matemáticas na sala de aula"[8]; [2] discussão acerca de eventuais questões, ainda obscuras. Pensamos ser esse um caminho adequado para apresentarmos à professora nossa referência sobre atividades investigativas. De acordo com Ponte et al (1998a) o conhecimento profissional baseia-se na experiência pessoal, mas também, na de outros professores e pesquisadores.

Prosseguindo na proposta que, conjuntamente, firmamos, a professora Maria nos relatou que enquanto lia o capítulo, se questionava sobre a validade de se investigar em matemática na sala de aula, pois, a impressão que teve fora a de que não saberia conduzir seus alunos em meio a esse tipo de atividade, tão pouco fazê-los elaborar conjecturas, em função da complexidade inerente ao desenvolvimento do trabalho com alunos naquela etapa de escolarização. Ela se baseara em uma

[8] PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA (2013)

“exploração com números” sugerida pelos autores, a qual depende, quase que exclusivamente, de observação, vejamos[9]:

Procure descobrir relações entre os números:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
...	...	...	...

Como sempre, registre as conclusões que for obtendo.

Note-se que a atividade possui um enunciado pouco estruturado, não existem questões direcionadoras, nem indicações de onde a investigação pode se iniciar, o que, muito provavelmente, induza a certa incompreensão.

Entretanto, sua preocupação diminuiu a partir do momento em que ela teve contato com a primeira atividade, retirada da dissertação de Camargo (2006), exibida a seguir.

4.1.1 Primeira Atividade: O Triângulo de Pascal

Esse triângulo numérico é chamado Triângulo de Pascal:

Figura 1	Figura 2
1	1
1 1	1 1
1 2 1	1 2 1
1 3 3 1	1 3 3 1
1 4 6 4 1	1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1	1 5 10 10 5 1

Fonte: Acervo pessoal

[9] PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA (2013, p. 27).

1) O que você pode observar sobre esse triângulo?
2) Descubra como se obtêm os números de cada linha deste triângulo, a partir dos números da linha anterior.
3) Escreva mais quatro linhas deste mesmo triângulo.
4) Explique como alguém deve fazer para obter novas linhas deste triângulo, a partir dos números da linha anterior.
5) É possível prever a soma dos números da 20ª linha se você souber a soma dos números da linha 19? Como?
6) Descubra agora um modo de saber a soma de qualquer linha que se queira, sem depender da soma da linha anterior.
7) Tente escrever uma fórmula para calcular a soma dos valores de qualquer linha que quiser.

Maria leu a atividade e depois de uma análise detalhada, sugeriu a inserção da figura 2. A última questão da atividade incomodou a professora por considerá-la muito difícil, em função de seus alunos não terem, satisfatoriamente, noções de álgebra. Mesmo assim decidiu deixá-la para ver como se sairiam e se caso não conseguissem pensar em alguma resolução para a questão, ela iria desconsiderá-la. Ponderou, ainda, que a atividade não contemplava o conteúdo trabalhado naquele momento – operações com números decimais – mas diante do objetivo com que a selecionamos, isto é, introduzir a investigação matemática nas aulas, aceitou aplicá-la.

Acertamos realizar as etapas, introdução e exploração, em duas aulas geminadas e, a de socialização, na aula seguinte. A organização do tempo foi um desafio para a professora, já que não conhecia como essas atividades se desenvolviam na prática. Por isso, aceitou nossa sugestão. A forma como a atividade seria entregue aos alunos foi outra pauta de discussão. Enquanto propusemos que ela fosse apresentada por meio de um dispositivo multimídia, de forma que as questões iriam se revelando com o desenvolvimento da atividade, Maria sugeriu entregá-la impressa, pois, os alunos poderiam manipular melhor as figuras, e assim, também, procedemos com todas as demais atividades.

4.1.2Segunda Atividade: Uma Sucessão com Palitos

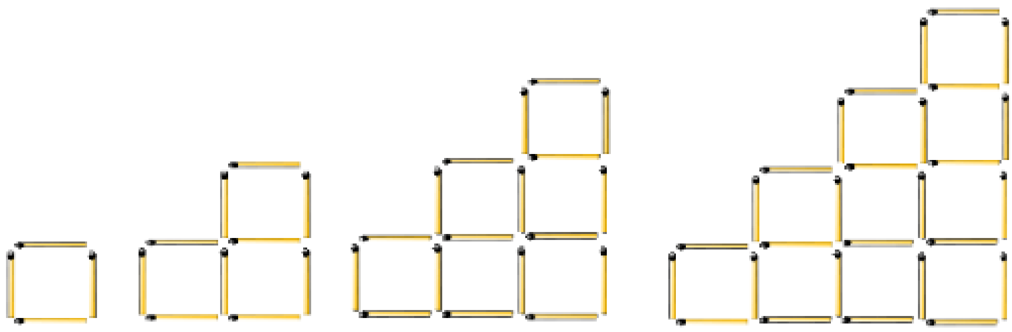
A primeira atividade se encerrou na semana em que os alunos iriam entrar em férias, e por isso, a segunda demorou quase um mês para ser iniciada. Combinamos com a professora de irmos encontrá-la, para planejarmos, na segunda semana após as férias. Assim fizemos; fomos até a escola para tratar da atividade e da data em que seria aplicada. Maria, porém, advertiu-nos que, ao conversar com a pedagoga e com a outra professora de Matemática, dos demais sétimos anos, percebeu o seu atraso em relação aos conteúdos de sua turma e perguntou-nos se poderíamos adiar a pesquisa para o terceiro trimestre. Tal fato nos remeteu a Ponte (2003a, p. 55) ao enfatizar que "[...] a visão do currículo como uma listagem de temas a tratar continua a ser dominante [...] entre professores [...]".

Como Maria é regente em três turmas: dois oitavos anos, e um sétimo ano – onde aplicamos a primeira atividade –, propusemos, então, trabalharmos com uma de suas turmas do oitavo ano, ao invés do adiamento. Ela aceitou a proposta e iniciamos o nosso planejamento para a próxima atividade. Vale lembrar que a mudança de turma não comprometeu o andamento da pesquisa, haja vista, o alvo do estudo ter sido a prática docente.

Um das primeiras decisões a serem tomadas, seria decidir a atividade para os alunos do oitavo ano. Maria iniciava o produto de polinômios e sugeriu que fizéssemos algo nesse sentido, já que as atividades elaboradas e apresentadas, previamente, não estavam ligadas a esse conteúdo. Informamos a ela que, provavelmente, seria muito difícil encontrar uma que tratasse diretamente disso e propusemos encontrar algo que, pelo menos, fosse próximo. Entretanto, naquele momento, não tínhamos nenhuma outra ideia, além da que intencionávamos propor, e preferimos adiar, momentaneamente, nosso planejamento até selecionarmos uma atividade que contemplasse seu pedido.

Assim sendo, a atividade escolhida propunha: **Observe a sequência abaixo:**

Figura 3: Figuras geométricas formadas por palitos de fósforo utilizadas como referência para a exploração da atividade



Fonte: Maccali (2015)

a) Existem relações com o número de palitos utilizados ao longo da sequência? Quais?
b) Sem construir a próxima figura, o grupo conseguiria dizer quantos palitos serão utilizados? Por quê?
c) Existe alguma relação com o número de quadrados formados ao longo da sequência? Justifique.
d) Quantos quadrados serão formados na próxima figura? Explique porque.
e) Quais relações vocês conseguem identificar entre o número de palitos e o número de quadrados?

Ficou a critério da professora escolher quantas aulas seriam destinadas a cada momento da atividade; se os alunos se dividiriam em grupos ou outras questões organizacionais que lhe interessassem. Maria decidiu que faria o momento de exploração em duas aulas consecutivas e, no outro dia, iria desenvolver a socialização. Também, estipulou que a atividade fosse realizada em grupos com quatro componentes, uma vez que o total de alunos era 28, o que implicava não haver nenhum aluno excedente, caso todos fossem à aula.

A discussão sobre a atividade foi bastante rápida e a professora a aprovou sem indicar alterações, apenas sugerindo que fossem distribuídos aos alunos alguns palitos para que a tratassem de forma lúdica. Guerra e Medeiros (2013, p. 79) atentam-nos para a importância do uso de materiais concretos nas tarefas matemáticas. Segundo elas,

> [...] o uso dos materiais concretos estimulam os alunos a aprender. Não um ‘aprender’ mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e nem porque faz, mas um aprender do qual o discente participe compreendendo, raciocinando e reelaborando o saber historicamente produzido, superando as dificuldades do ensino-aprendizagem da Matemática.

Vale ressaltar que o objetivo principal, nessa atividade, fora de trazer algo que se aproximasse do conteúdo no momento explorado, assim sendo, caberia verificar as potencialidades da investigação nas situações em que, minimamente, pudessem surgir algumas expressões algébricas.

4.1.3 Terceira Atividade: Quadrados Mágicos

O planejamento para a terceira atividade ocorreu um mês depois do encerramento da segunda. Porém, antes disso, conversamos com a professora, por telefone, e enviamos por e-mail duas sugestões de atividades investigativas; uma envolvendo quadrados mágicos e a outra o uso de calculadoras. Optou por ficar com a primeira.

Na escola, durante o planejamento, ela afirmou ter preferência em aplicar a atividade sobre os Quadrados Mágicos de ordem 3x3. Justificou a exclusão da outra opção, que utilizava a calculadora, por considerar difícil conseguir máquinas suficientes para todos os alunos.

Propusemos que a atividade da calculadora fosse a próxima, após a dos Quadrados Mágicos. Dispusemo-nos conseguir uma parte das máquinas a serem usadas. Porém, Maria estava relutante em usar as calculadoras temendo que os alunos desejassem utilizá-las em situações que já não eram mais apropriadas. Combinamos, então, que encontraríamos uma atividade mais adequada para ser a próxima.

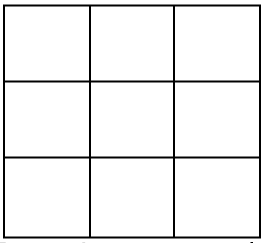
Era necessário discutir sobre a organização do tempo e da turma. O conteúdo ainda estava atrasado devido ao cancelamento de aulas, e a previsão era de mais atraso. Concordamos que seria melhor realizarmos a atividade em apenas um dia, durante duas aulas consecutivas de 50 minutos. Maria sugeriu que fosse excluída a última questão para adequar a atividade ao tempo. Como esse corte não implicava perda dos objetivos da atividade, acatamos sua sugestão. Segue abaixo a atividade e, sublinhada, a questão excluída.

Você já tentou resolver um quadrado mágico? Trata-se de uma pequena grade quadrada que pode assumir dimensões 3 x 3, 4 x 4, etc. Nesses quadradinhos da grade temos que colocar determinados números dispostos de forma que,

seja qual for a posição (horizontal, vertical e diagonal), sua soma sempre será a mesma. Por exemplo, numa malha 3 x 3, dispor números de formas que a soma seja sempre 15. Para isso, usaremos os números de 1 a 9. Vamos tentar?

Observe esse quadro:

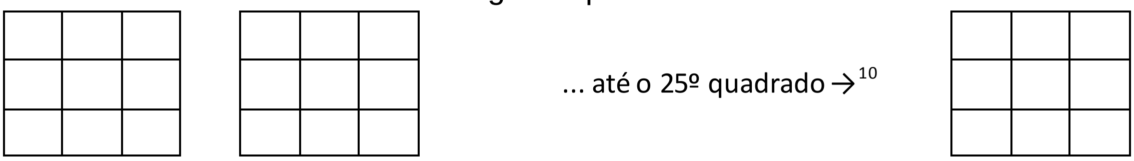
Figura 4: Modelo de Quadrado Mágico



Fonte: Acervo pessoal

1. De quantas formas possíveis podemos construir o quadrado mágico do exemplo acima? Você consegue perceber algumas relações? Quais?
2. O que aconteceria se, ao invés de usarmos números de 1 a 9, usássemos números de 2 a 10? E de 3 a 11, e de 20 a 28? Você percebe alguma regularidade?
3. E se incluíssemos os números negativos inteiros, seria possível construir um quadrado mágico 3 x 3 dispondo os números de -3 a 5? Existem regularidades a serem destacadas?
4. <u>Sempre usamos uma sequência específica de números até agora, como do 1 ao 9, do -3 ao 5. Mas será que existem outras formas de completar o quadrado mágico sem o uso de uma sequência como as citadas aqui? Se sim, há algum padrão? Se não, por quê?</u>

Figura 5: Modelos de Quadrados Mágicos para exploração da atividade investigativa pelos alunos



Fonte: Acervo pessoal

[10] Na folha entregue aos alunos constavam os 25 modelos do Quadrado Mágico dispostos em cinco linhas e cinco colunas.

Já havíamos desenvolvido essa atividade outras duas vezes; ocasiões em que os alunos ao invés de trabalharem sobre a figura exposta, optaram por desenhar cerquilhas grandes improvisadas. Diante desse nosso depoimento, Maria sugeriu que desenhássemos mais quadrados, com o intuito de evitar, que seus alunos se perdessem na organização da tarefa, assim inserimos outros 25 modelos.

As divisões da atividade foram realizadas em apenas um dia. Para a introdução e a organização dos grupos, a professora destinou os 20 primeiros minutos da aula; para a exploração 60, pois, nela o aluno precisa realizar diversas ações; para o momento de socialização de ideias, 28 minutos.

O número de alunos por grupo não foi estipulado. A professora preferiu verificar no início da aula quantos alunos estariam presentes.

4.1.4 Quarta Atividade: Os Quatro Quatros

A quarta e última atividade da pesquisa aconteceu em outubro/2016. Como já mencionamos, Maria optou por não utilizar a atividade investigativa baseada no uso de calculadoras. Então, escolhemos uma que havíamos apresentado em um evento de Educação Matemática, adaptada do livro *O Homem que Calculava,* de Malba Tahan (2013), cujo enunciado diz:

Muitas pessoas afirmam que é possível encontrar quaisquer números de 0 a 100 utilizando apenas quatro quatros e operações matemáticas que não possuem em seus símbolos outros números.

No livro, o autor traz alguns exemplos para os números de zero à dez:

$$44-44=0 \qquad \frac{44}{44}=1 \qquad \frac{4}{4}+\frac{4}{4}=2 \qquad \frac{4+4+4}{4}=3 \qquad 4+\frac{4-4}{4}=4 \qquad \frac{4\times 4+4}{4}=5$$

$$\frac{4+4}{4}+4=6 \qquad \frac{44}{4}-4=7 \qquad 4+4+4-4=8 \qquad 4+4+\frac{4}{4}=9 \qquad \frac{44-4}{4}=10$$

Você conseguiria encontrar quantas outras expressões para os números de 0 a 10? E de 11 a 100? Como sempre, registre o que for descoberto.

Maria optou destinar um tempo maior à introdução e manter a atividade em duas aulas geminadas, ou seja, em um período de cem minutos, a introdução aconteceria em 30 minutos, a exploração em 60 e a socialização em 10.

Antes de concluirmos o planejamento, combinamos entregar, como já dito, a atividade impressa aos alunos, porém, dessa vez, a professora preferiu que fossem feitas duas cópias por grupo, já que a maioria dos alunos acaba fazendo a atividade, individualmente, no caderno. Acordamos, também, uma média de cinco componentes por grupo.

4.2 INTRODUÇÃO E EXPLORAÇÃO

Entendemos que, por serem etapas, necessariamente, sequenciadas, a apresentação conjunta contribuirá para um melhor entendimento.

Todos os dias, antes de entrarem para a sala de aula, o que deveria ocorrer às 7 horas da manhã, os alunos precisavam formar filas no pátio e ouvirem os avisos dados pelo corpo administrativo/pedagógico, o que, segundo a professora, atrasava, frequentemente, em até 20 minutos, o início da primeira aula. Isso nos causou algumas dificuldades, pois, a atividades investigativas, que sempre aconteciam nas duas primeiras aulas, sofreram reduções significativas de tempo. Apenas as turmas que tivessem alguma atividade avaliativa agendada para aquele horário, seriam liberadas dos avisos.

4.2.1 Primeira Atividade: O Triângulo de Pascal

A atividade foi desenvolvida em 08 de julho/2016, sexta-feira. Contudo, como assinalado, perdemos 20 minutos. Situação que nos fez diminuir o tempo da etapa de exploração. Os alunos chegaram à sala bastante agitados e a professora teve dificuldades em organizá-los. Quando todos estavam sentados e em silêncio, fomos apresentados como “um professor de Matemática que estava fazendo uma pesquisa para seu projeto de mestrado”. Maria informou que aplicaria uma atividade investigativa e pediu para que os alunos se sentassem em grupos com quatro ou cinco componentes, modificando nosso planejamento, pois constatou a falta de dez alunos. Para Ponte et al (1998a), o planejamento só acaba com o fim da atividade, pois, a todo o momento é necessário avaliar seu andamento e modificá-lo para se adequar a novas situações. Enquanto isso, entregamos-lhes uma cópia da atividade.

Depois da organização dos grupos, demos início à introdução. A professora, ainda, desconhecia o funcionamento de uma atividade investigativa, por isso, introduziu-a de forma genérica, lendo-a rapidamente para que, a seguir, fosse executada. Percebendo que os alunos não haviam compreendido bem o que acabara de falar, pediu-nos para explicarmos nossos objetivos e o que era uma atividade investigativa. Momento em que aproveitamos para falar-lhes sobre a pesquisa e as etapas de uma investigação e, logo após, retomamos a atividade. Alguns alunos, ainda, permaneciam sem entendê-la, entretanto, intuíram, mais tarde, como proceder.

Concluída a introdução da tarefa, Maria se sentou para fazer a chamada do dia e registrar o conteúdo no diário. Esse foi um tempo importante dado aos alunos para que começassem a fazer questões e criar conjecturas. Segundo Ponte et al (1998b), esperar pelo desenvolvimento inicial da exploração é fundamental para que os alunos desenvolvam investigações baseadas em suas próprias indagações.

Antes do término da chamada, uma aluna se dirigiu à professora para apresentar seu feito. Muito provavelmente, estava convicta da sua descoberta sobre a construção das linhas do triângulo a partir da soma dos números da linha anterior, e mesmo assim, buscou pelo seu aval. Ponte (2003a, p. 9, grifos do autor) afirma que

> quando os alunos trabalham em grupo e encontram uma conjectura que parece ser verdadeira, a atitude mais comum não é procurar demonstrá-la, mas sim comunicá-la o mais rapidamente possível à professora. Fazem isto por duas razões: (a) para 'mostrar trabalho', obtendo crédito pela descoberta; (b) para obterem validação, ou seja, uma confirmação de que a conjectura 'está certa'.

A professora confirmou seu resultado e pediu para que ela o redigisse em seu caderno.

Mesmo depois de concluir os registros no diário de classe, a professora permaneceu sentada, observando o desempenho dos estudantes e não passou pelos grupos em nenhum momento, até que fosse requisitada. Para Balacheff, citado por Ponte et al. (1998a), medidas de intervenção durante a exploração modificam o comportamento do aluno que acabam por desenvolverem apenas os aspectos superficiais da investigação.

Esporadicamente, a professora era requisitada para sanar dúvidas ou validar/refutar o trabalho do grupo. Diante disso, solicitamos a ela lembrar-se do texto de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), no qual aconselham não validar conjecturas, mas promover a reflexão sobre elas para que o aluno, por si só, o fizesse. A partir desse momento, ela procurou desenvolver uma postura mais interrogativa, na medida em que se habituava a fazer perguntas e à nossa presença.

Mais tarde, uma aluna a requisitou para mostrar uma relação que percebeu no triângulo e que se tratava de uma abordagem, ainda, não apresentada pelos demais grupos. Consistia em formar outros triângulos a partir dos números do Triângulo de Pascal. A professora a interrogou sobre o que poderia dali surgir, porém, a aluna não soube responder. Maria, então, estimulou-a a realizar mais testes para descobrir algo interessante e, também, recordou a necessidade de escrever seus resultados.

Durante suas abordagens, a professora percebeu a dificuldade da escrita por parte dos alunos. Em determinado momento, se aproximou de nós e admitiu: “a escrita é uma dificuldade, né?”.

Para finalizar essa etapa, já próximo do término da aula, a professora permitiu que os alunos ficassem com o material a eles entregue, para que, se tivessem interesse, continuassem as explorações em casa, reforçando a necessidade de organizar o raciocínio, por meio da escrita. Advertiu, também, que na próxima aula promoveria um momento de reflexão sobre as suas descobertas.

4.2.2 Segunda Atividade: Uma Sucessão com Palitos

A segunda atividade aconteceu terça-feira, 09 de agosto de 2016. Dessa vez, o tempo gasto na formação de fila não ultrapassou cinco minutos. Maria nos apresentou à turma como sendo aluno do mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica e que, juntamente com ela, estaria aplicando uma atividade diferenciada, chamada de atividade investigativa. A fala da professora apresentava um entusiasmo que não ocorreu na primeira introdução, buscando evidenciar que essa era uma atividade bastante diferente do que os alunos estavam habituados a realizar.

A professora realizou uma contagem rápida e constatou a ausência de quatro alunos e, por isso, repensou a divisão dos grupos, mudando para quatro ou cinco componentes. Logo após a organização da sala, que envolvia a entrega da atividade impressa e dos palitos, iniciou a explicação. Dessa vez, ela se concentrou nas dificuldades encontradas, por ela mesma, durante a atividade anterior, lendo, pausadamente, cada item a ser trabalhado e dando ênfase à escrita das descobertas. Os alunos pareceram compreendê-la e começaram a exploração.

Após realizar a chamada e registrar o conteúdo no diário de classe, aguardou ser solicitada. Algum tempo já havia se passado sem que lhe perguntassem nada, pois todos estavam preocupados em montar as figuras usando os palitos disponíveis. Sentindo-se incomodada com isso, Maria se aproximou de um grupo e reclamou do tratamento que estavam dando para a escrita da atividade. Os alunos pareceram não entender o motivo da crítica, pois montavam as figuras para constatar o que era pedido no item (a)[11]. Ela, então, questionou: “é preciso montar, para responder a letra a?”. Eles, então, olharam com estranheza para a atividade, como se não fosse possível realizá-la de outra maneira quando não da forma como estavam pensando. Notamos que houve êxito da professora em promover a reflexão e o espírito investigativo dos alunos, pois assim que ela se afastou, o grupo voltou a investigar, mas dessa vez, sem o uso dos palitos. Pareceu-nos se questionarem sobre a possibilidade de descobrir a relação entre o número de palitos e a próxima figura.

A agitação natural da turma exigia que a professora, com frequência, pedisse disciplina. Ela observava de sua mesa a exploração que estava sendo realizada pelos alunos e os advertiam, sempre que percebia alguém desatento. Um componente de um grupo, que havia sido abordado em momentos anteriores pela professora, ainda, demonstrava dificuldades no item (a). Maria sintetizou para ele: “Existe alguma relação entre o número de palitos?”. O aluno, em silêncio, tentou organizar seu raciocínio, mas como não lhe deu uma resposta, continuou: “você

[11]Existem relações com o número de palitos utilizados ao longo da sequência? Quais?

contou o número de palitos aqui?” e, no mesmo instante, ele se pôs a contar. Vejamos:

[Aluno]: Dá quatro, professora.
[Maria]: Sim, e aqui?
[Aluno]: Aqui tem (começa a contar) dez!
[Maria]: E nesse próximo?
[Aluno]: Deixa eu ver... (conta novamente) aqui tem dezoito!
[Maria]: E qual é a relação entre esses números? Tente achar! (e saiu de perto do grupo).

Notemos que ela desenvolve um diálogo a partir de perguntas direcionadoras, pois, percebendo haver dificuldades em descobrir relações sem o uso dos palitos, ela sugere que a abstração seja substituída pela contagem concreta para que o aluno, por si só, perceba as possíveis relações ali existentes.

Em outro caso, um grupo sinalizou, equivocadamente, uma regularidade. As alunas perceberam que cada número da sequência, formada pela quantidade de palitos em cada desenho, era obtido a partir do anterior multiplicado por um número não revelado por elas. A professora, percebendo o “erro”, questionou as alunas:

[Professora]: Está multiplicando? Quanto tem aqui?
[Aluna]: Quatro.
[Professora]: E aqui?
[Aluna]: Dez.
[Professora]: E aqui?
[Aluna]: Dezoito.
[Professora]: Tá multiplicando mesmo? Quatro pra dez multiplica?
[Aluna]: Não!

Apesar de ter mantido uma postura interrogativa, a professora acabou induzindo as alunas a perceberem seu “erro” sem muita reflexão, ao lhes perguntar: “Quatro pra dez multiplica?”, com o que apontou a falha da conjectura proposta.

Outro grupo, ao relatar a ela que a quantidade de palitos que aumentava da primeira figura para a segunda era seis; da segunda para a terceira era nove; e da terceira para a quarta era doze, concluiu que a quantidade de palitos de cada figura aumentava de três em três. Maria, então, perguntou o que isso significava e eles afirmaram que se tratavam de múltiplos de três. Ela pediu para que escrevessem o que haviam descoberto e voltou para sua mesa, sem ter observado um erro de contagem a partir da segunda figura, que os induziram a uma conjectura falsa.

Porém, passados alguns instantes, a professora pegou sua folha de atividades e começou a rabiscar. Rapidamente, olhou para nós e afirmou que o grupo havia cometido um erro, quando, então, se levantou e se dirigiu a eles, pedindo a recontagem dos palitos de cada figura. Após uma contagem mais apurada, os alunos constataram o erro e, sem esboçar nenhuma reação quanto ao ocorrido, passaram a desenvolver outras conjecturas.

Faltava cerca de meia hora para a finalização da aula e um grupo de alunas foi até a sua mesa afirmando ter "concluído" a atividade, o que nos causou certa estranheza ao passo que, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), as atividades investigativas podem ter um início, mas suas explorações podem surtir diversas situações que nos induzem concluir que as encerramos, mas não significa que elas abrangeram todas as suas possibilidades. Maria leu todas as respostas e recebeu o trabalho. Todavia, em uma segunda conferência, notou um erro no item (c)[12]. O grupo afirmara que, em todas as figuras, o número de quadrados era um múltiplo de três. Ela, então, se dirigiu às alunas: "Vocês disseram que o número de quadrados é múltiplo de três. Dez é múltiplo de três?". Elas, então, pegaram a folha de volta para repensarem a respeito.

Ao término da aula, o objetivo, a que nos referimos linhas atrás, não foi alcançado, haja vista, os alunos não associarem o conteúdo à atividade, e nem a professora evidenciar a possibilidade de se trabalhar com algumas expressões algébricas.

4.2.3 Terceira Atividade: Quadrados Mágicos

A terceira atividade aconteceu em 20 de setembro de 2016, terça-feira. A aula foi iniciada com nove minutos de atraso. Vinte e quatro alunos estavam presentes e a professora pediu para que fizessem grupos com quatro componentes, porém,

[12]Existe alguma relação com o número de quadrados formados ao longo da sequência? Justifique.

sempre que lhe pediam para que o grupo tivesse um integrante a mais, ela concordava, desde que não excedesse cinco. Consequentemente, obtivemos quatro grupos com cinco integrantes e um com quatro. Apesar de a organização ter sido um pouco tumultuada, não houve problemas com indisciplina.

Entregamos a atividade e Maria foi ao quadro explicá-la. Os alunos estavam um pouco desconcentrados e ela precisou frisar várias vezes os objetivos do quadrado mágico. Apenas quando todos os que a interrogavam tiraram suas dúvidas, ela continuou a leitura. Quando concluiu, sentou-se à sua mesa e os alunos se puseram a investigar.

Durante a exploração inicial, enquanto a professora fazia a chamada e registrava o conteúdo da aula no diário de classe, uma aluna foi até sua mesa para lhe perguntar se podia usar o caderno de Matemática. Estranhando a pergunta, já que os quadrados mágicos não possuem ligação direta com nenhum dos conteúdos abordados em sala, ela negou seu pedido e perguntou o motivo. A menina explicou que o professor anterior já havia lhes apresentado esse desafio, porém, de forma diferente. Ainda, assim, ela não permitiu que fosse consultado o caderno. Mais tarde, descobrimos que o desafio apresentado tratava dos quadrados mágicos de ordem 4x4 e foi utilizado apenas como um passatempo.

A todo o momento fora necessário chamar a atenção de um grupo que se mostrava desinteressado, a ponto de precisar fazer o registro de ocorrência de dois integrantes por perturbar os demais alunos; mesmo assim, o comportamento do grupo continuou aquém do requerido pela professora. Apesar disso, Thomas, integrante desse grupo, foi um dos que mais realizou conjecturas interessantes, admitiu a professora.

Maria não havia resolvido completamente a atividade antes da aula e, por isso, sentou-se à sua mesa e começou a estudá-la, também. Mesmo já tendo discutido as propriedades do quadrado mágico no planejamento, pediu-nos para relembrá-la.

Enquanto a professora produzia suas próprias descobertas, interrompidas sempre que era requisitada, os alunos faziam o mesmo: ora encontravam uma solução que apresentava a soma em todas as verticais e horizontais, porém, falhava nas diagonais; ora, driblando a regra, encontravam outra, repetindo alguns números. A esse respeito, a professora lhe advertiu que se isso fosse permitido, bastava colocar em todos os quadradinhos o número cinco. Também, foi comum descobrirem soluções em que, pelo menos uma soma das diagonais não resultava 15.

Como, depois de um tempo, relativamente, grande, nenhuma solução para o quadrado de soma 15 havia sido apresentada, a professora, preocupada, perguntou-nos se não seria melhor darmos uma dica para toda a turma. Após, discutirmos entre uma e outra, informamos a eles que o centro do quadrado mágico seria ocupado pelo “cinco”, mas sem justificar o porquê disso.

Notamos haver avanços, por exemplo, Thomas apresentou algumas de suas descobertas que impressionaram Maria:

- O centro do quadrado mágico é seis, porque ele é o valor do meio da sequência (se referia ao quadrado mágico feito com os números de 2 a 10);
- O 15 é a soma do quadrado mágico com números de 1 a 9, pois é múltiplo do valor que se encontra no centro deste quadrado, isto é, cinco;
- A posição dos números dentro do quadrado mágico pode ser alterada e, ainda assim, é possível manter a solução. (Porém, ele não sabia se existia alguma regularidade ou justificativa matemática para essa troca de posições)

Posteriormente, outras duas dicas foram acrescentadas: a professora observou que a soma seria sempre determinada pelo valor central multiplicado por três e que existia relação entre a posição dos números no quadrado mágico e a sequência numérica. Muito provavelmente, essa explicação contribuiu para o surgimento de outras conjecturas, tais como: o integrante de um grupo, chamaremos de Gean, informou que, para descobrir a soma do próximo quadrado, bastava adicionar 3 à soma do quadrado atual. Assim, a sequência de 2 a 10 teria 3 a mais em sua soma do que a sequência de 1 a 9, ou seja, 18. A sequência de 3 a 11, também, isto é, 18 + 3 = 21. Além disso, relatou que se o 1 era “oposto” ao 9, no quadrado de soma 15, no de soma 18, o 2 se “oporia ao 10” e, assim, sucessivamente.

O grupo de Thomas, a partir da disposição conseguida para a sequência de 1 a 9, fez uma generalização para os demais, considerando a diferença entre os respectivos elementos, ou seja, para encontrar a disposição da sequência de 5 a 13, cada um dos elementos se igualaria ao seu respectivo, na de 1 a 9, acrescentando-se 4: 1 + 4 = 5, 2 + 4 = 6, ..., 9 + 4 = 13, como nos mostra a Fig 6:

Figura 6: Exemplo de produção de um quadrado mágico a partir do de soma quinze proposto por Thomas

6	7	2
1	5	9
8	3	4

6+4	7+4	2+4
1+4	5+4	9+4
8+4	3+4	4+4

10	11	6
5	9	13
12	7	8

Fonte: Acervo pessoal

Na tentativa de esclarecer sua descoberta, Thomas apresentou à professora seu método para encontrar outras disposições, de maneira rápida, como por exemplo, a de 2 a 10, na qual acrescenta-se um a cada elemento da de 1 a 9. Vejamos sua argumentação:

[Thomas]: É só somar mais um.

[Maria]: Como assim?

[Thomas]: Se a sequência aumentou um, então soma mais um em cada. Assim, a gente tem os números da outra sequência.

Os dez minutos finais, atribuídos a essa fase, foram destinados apenas à escrita das descobertas, ninguém chamou a professora para esclarecer dúvidas, apesar de dois grupos ainda não terem iniciado a 3ª questão[13].

4.2.4Quarta Atividade: Os Quatro Quatros

Aplicamos a atividade no dia 04 de outubro de 2016, terça-feira. Seu início teve, aproximadamente, 25 minutos de atraso, devido aos avisos da diretora na formação das filas, no pátio. Assim que os alunos chegaram à sala e se sentaram, Maria informou-os que essa seria a última atividade que trabalharia junto conosco. Boa parte dos alunos demonstrou frustração, pois, sinalizou-nos desejar continuar nessa abordagem investigativa.

---

[13] E se incluíssemos os números negativos inteiros, seria possível construir um quadrado mágico 3 x 3 dispondo os números de - 3 a 5? Existem regularidades a serem destacadas?

A professora pediu para que formassem grupos, como de praxe. A maioria pareceu manter os mesmos integrantes. O grupo de Thomas, que, no passado, havia apresentado sinais de indisciplina, foi convidado a se sentar próximo da professora, estratégia, essa, discutida com antecedência, na avaliação da terceira atividade. Houve reivindicações por parte deles, mas sem sucesso. Contudo, tais questões tomaram mais alguns minutos da aula.

A introdução, como havíamos combinado, deveria ser mais detalhista dessa vez. A professora leu, pausadamente, a atividade, apresentando as soluções propostas como exemplos. Os alunos estavam interessados e atentos a cada exemplo. Maria aproveitou esse momento para relembrar algumas propriedades de fração, possivelmente, esquecidas por muitos. Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) reforçam que recordar conceitos, anteriormente estudados, pode ser necessário para garantir o fluxo da investigação. Além disso, também, falou sobre potências e raízes.

Porém, restavam, ainda, muitas dúvidas, apesar dos alunos não as terem admitido durante a introdução. Assim que a exploração se iniciou, muitas delas surgiram, antes mesmo da professora se sentar para fazer a sua habitual chamada e registro de conteúdos.

Dois grupos pediram melhores explicações sobre o que deveria ser feito. Rapidamente, Maria foi até eles, fornecendo ferramentas para que pudessem realizar testes independentes. Primeiro, pediu para que escrevessem o numeral 4, depois, um dos sinais operacionais; outro 4 e outro sinal, até completarem os “quatro quatros”. Isso feito, perguntou-lhes a possível resposta para a expressão encontrada e, caso não fosse a solicitada, construíssem outras variações para ela.

Logo após, tê-los auxiliado, a professora voltou à sua mesa para realizar a chamada e registrar o conteúdo do dia no diário de classe. Durante esse momento, percebemos, ainda, alunos com dificuldades de entendimento e outros dispersos e sem interesse. Maria chamou a atenção deles para a tarefa e pouco tempo depois, a maioria já havia iniciado a etapa.

Um aluno obteve a expressão $44 \div \sqrt{4} \times \sqrt{4}$, na intenção de escrever o numeral 11, porém, não conseguira realizar, sozinho, um pequeno reajuste para alcançar seu objetivo. Constatamos que, além de 44, outros resultados surgiram em seus testes, mas ele não buscou redigi-los. Percebendo a aflição do aluno e verificando que ele estava muito próximo do resultado, Maria se posicionou a seu lado, dando dicas até encontrar a expressão correta. As dicas foram tão direcionadas que, quando ele encontrou o resultado esperado, não se mostrou contente e autor da descoberta.

Chegara o momento, que Maria considerou adequado, para introduzir o sinal de fatorial. Ela o definiu como a multiplicação de um número por todos os seus antecessores naturais não nulos; e por meio de exemplos, calculou 3!; 5!, como também, diante do entendimento de muitos, 4!.

Os alunos receberam muito bem a informação. Alguns deles questionavam “por que vocês não mostraram isso para a gente antes?” e outros “será que dá para encontrar o número 7, agora? Será que dá para encontrar o número 15 agora?” e, assim, continuaram suas perguntas para outros números. Com a nova operação apresentada, a maioria pôs-se a explorar novas possibilidades.

Diferentemente das outras atividades, Maria foi requisitada o tempo todo, de forma que ela quase não teve tempo para se sentar. Muitas abordagens consistiam em, apenas, verificar operações. Quando havia uma situação diferente, ela olhava atentamente e buscava uma maneira de auxiliá-los sem responder diretamente a questão. A turma estava bastante agitada. A todo tempo, ouvia-se alunos afirmando: “aqui soma!”, “achei o 64 de novo!” ou “como faz pra dividir isso?”.

Em determinado momento, ela pediu licença e saiu de sala, mas muitos alunos continuaram a dar andamento à tarefa, enquanto outros conversavam sobre assuntos variados. Em seu retorno, foi bastante severa com um aluno que não fazia a atividade, até porque já havia chamado sua atenção em outro momento. Descontente, o aluno abriu seu caderno e passou a fazer a tarefa.

Observamos que o processo começara a se tornar mecânico, em função de se querer, apenas, escrever expressões para outros números. Faltando cerca de quinze minutos para o fim da aula, demos por encerrada a etapa.

4.3 SOCIALIZAÇÃO DOS RESULTADOS

Às quatro atividades foram reservados momentos, alguns muitos interessantes para a compreensão das atividades; outros nem tanto, e serviram para que os alunos refletissem sobre suas descobertas e as relatassem para seus pares. Nas duas primeiras atividades, essa etapa aconteceu em um dia diferente da exploração, enquanto nas outras duas, aconteceu no mesmo dia.

Ao final da descrição desses momentos, percebemos que muitas regularidades não haviam sido exploradas com certo grau de profundidade. Por isso, apresentamos, também, algumas situações que poderiam ter surgido durante as explorações pelos alunos, ou nas discussões dos resultados obtidos, mas que não ocorreram por motivos variados.

4.3.1 Primeira Atividade: O Triângulo de Pascal

A aula destinada à socialização aconteceu no dia 12 de julho de 2016, segunda-feira, cinco dias após a primeira etapa. Foi destinada uma aula que ocorreria após o intervalo, ou seja, às nove horas e cinquenta minutos.

Os alunos estavam agitados, mas não foi um desafio para a professora organizá-los. Assim que fizeram silêncio, ela pediu a eles para que formassem um semicírculo, para dar continuidade à atividade iniciada na aula anterior. Essa nova organização foi mais barulhenta e apresentou algumas dificuldades, pois muitos não sabiam onde sentar, já que lhes foi sugerido que ficassem próximos aos outros colegas de grupo. Outro desafio foi a presença da maioria dos alunos que faltou na aula de exploração. Maria deixou que se sentassem em qualquer lugar e deu uma cópia da atividade para cada um para que acompanhassem as discussões.

A estratégia da professora, explicou ela, durante o planejamento, era levar ao quadro os alunos por ordem de produção. Aqueles que menos produziram iriam primeiro e os que mais produziram, por último. Dessa forma, todos poderiam apresentar algo novo. Essa estratégia, provavelmente, se baseia no texto de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 42), no qual enfatizam que

> a professora, tendo noção do trabalho realizado por cada um dos grupos, [...] estabeleceu uma ordem de apresentação na qual os grupos que haviam identificado um menor número de regularidades, ou apenas aquelas que eram comuns a todos, seriam os primeiros a intervir[14].

O primeiro grupo foi convidado a ir ao quadro mostrar a(s) sua(s) descoberta(s). Porém, isso causou polêmica, pois os alunos que iniciariam a exposição entenderam como um ato punitivo. Depois de alguma argumentação, a professora decidiu que eles poderiam, apenas, falar sobre as suas descobertas, a partir de seus lugares, sem necessidade de explicar como chegaram até elas.

Em sua exposição, o grupo tentava mostrar que os lados do triângulo, exceto a base, eram compostos apenas pelo número 1, e que a soma do 1 e o número do lado seria, exatamente, o valor que estava abaixo e entre eles. Como não foi claro e não conseguia se desapegar da figura, esse representante do grupo acabou indo ao quadro. Os outros alunos da sala passaram a lhe dar dicas de como descrever a situação posta, apesar de não terem uma resposta melhor do que a dele. A professora observou as explicações dadas pelo aluno e as confirmava caso apresentasse alguma linguagem matemática.

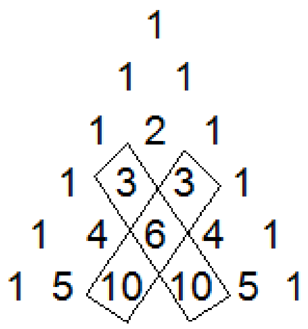
Terminado o relato, uma aluna, que havia faltado na etapa anterior, perguntou se podia fazer uma observação. A professora consentiu e ela foi ao quadro e mostrou que a soma de dois números, próximos da mesma linha, resultariam noutro na linha de baixo. A turma ficou indignada, pois, essa era a principal descoberta feita pela maioria dela. A professora não reagiu aos protestos e pediu para outro grupo ir ao quadro e um de seus integrantes apontou a igualdade entre as colunas opostas do triângulo.

Outra aluna insistia na existência de um “X” e que havia semelhanças entre as suas extremidades, vejamos:

---

[14] Devemos lembrar que, mesmo os autores portugueses tendo afirmado ser essa uma boa forma de iniciar a socialização, não significa que conseguiremos êxito em todos os casos. Além disso, osatores, por eles referidos, pertencem a uma cultura que, muito provavelmente, pouco se assemelha à dos alunos de Maria.

Figura 7: Registro da conjectura apresentada por uma aluna do sétimo ano sobre o cruzamento de diagonais no Triângulo de Pascal



Fonte: Acervo pessoal

Ela observou que todo “X”, feito a partir de pontos centrais, teria as extremidades iguais, independentemente do seu tamanho. Outra aluna afirmou haver vários triângulos na figura. Perguntamos quantos, por exemplo, até a quarta linha, quando, então, começou a contar, auxiliada pelos demais colegas. Sugerimos que, no lugar de números, colocasse pontos, para facilitar a visualização. Após toda agitação causada, identificaram treze triângulos. A professora intercedeu, perguntando-lhes a sua classificação e alguns alunos afirmaram se tratar de triângulos equiláteros. Ela os desafiou novamente, questionando sobre a quantidade de triângulos quaisquer existentes ali.

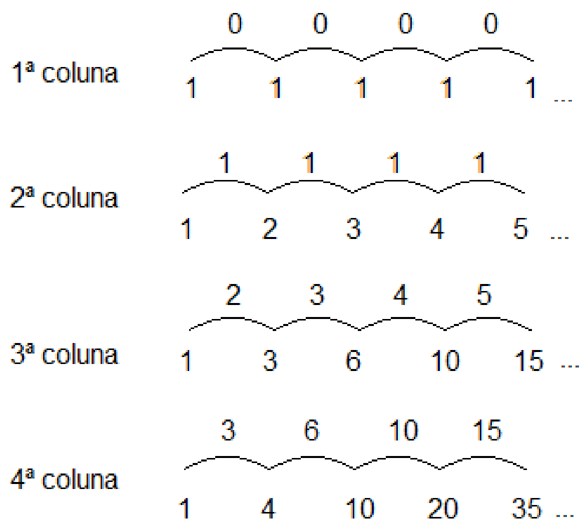
A partir daí, outra grande agitação e a participação dos alunos tomou novas proporções, dessa vez, incentivada pela professora. Muitos triângulos começaram a surgir e a contagem se tornava cada vez maior, fazendo-os crer não ser possível obter uma resposta exata. Mas Maria parecia não dar muita atenção a esse fato, muito provavelmente, por não ter pensado naquela situação anteriormente e, por isso, também, se interessava em solucionar o desafio colocado.

Vimos que a professora teve muitas dificuldades para manter certa organização na sala, de forma que a turma se sentisse estimulada a continuar o desenvolvimento da tarefa e entrasse em consenso com relação a quantidade de triângulos. Consequentemente, os alunos se desinteressaram, completamente, e o *cenário para investigação* se desfez junto ao término da aula.

O fim dessa atividade, para os alunos, deixou várias lacunas que poderiam ser preenchidas com um melhor direcionamento, seja ele feito pela professora, ou por nós mesmos. Consideramos como um dos achados mais importantes dessa atividade a constituição das linhas com base nas anteriores. Porém, apesar de os alunos perceberem claramente essa conjectura, houve dificuldades em validá-la sem recorrer a um processo intuitivo de indução. Descrevê-la, também, apresentou ser um desafio para muitos. A seguir vemos duas propostas para fundamentá-la melhor.

Observando as colunas do triângulo da Fig. 2, percebemos que os elementos de cada uma delas são desenvolvidos de forma específica. Por exemplo, a primeira coluna é constituída de uma sequência constante de números 1 e a segunda, varia de acordo com os naturais não nulos. Sabendo qualquer natural é obtido pela soma entre seu antecessor e 1, imaginamos haver alguma relação entre a primeira e a segunda colunas.Ao ampliar para as demais, obtivemos:

Figura 8: Variação dos elementos das colunas do Triângulo de Pascal



Fonte: Acervo Pessoal

Apesar de não haver variação nos elementos da primeira coluna, nas demais, isto ocorre conforme os elementos da coluna anterior. Ou seja:

Figura 9: Constituição das colunas do Triângulo de Pascal a partir dos elementos das colunas anteriores

1

1 + 1

↓

1 + 2 + 1

↓ ↓

1 + 3 + 3 + 1

↓ ↓ ↓

1 + 4 + 6 + 4 + 1

↓ ↓ ↓ ↓

1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1

Fonte: Acervo pessoal

Podemos, então, concluir que a soma de dois elementos de colunas consecutivas de uma mesma linha resulta no elemento da linha abaixo que está na segunda coluna em questão.

Adicionar todos os elementos de uma coluna configura-se como outra forma de produzir novas linhas do triângulo. Quando realizamos essa adição até uma linha n, o resultado que obtemos é igual ao valor do elemento da próxima coluna na linha abaixo – $n+1$. Pictoricamente:

Figura 10: Construção de novas linhas a partir da soma dos elementos das colunas

1

\+ ↘

1 1

\+ ↘ + ↘

1 2 1

\+ ↘ + ↘ + ↘

1 3 3 1

\+ ↘ + ↘ + ↘ + ↘

1 4 6 4 1

\+ ↘ + ↘ + ↘ + ↘ + ↘

1 5 10 10 5 1

Fonte: Acervo pessoal

Tomando como exemplo a segunda coluna da imagem acima, cujos elementos equivalem aos números naturais não nulos, podemos obtê-la a partir de uma série de somas envolvendo o número 1. Como cada elemento é obtido, como já sabemos, pela adição entre seu antecessor e 1, então podemos representá-los da seguinte forma:

$$0+1=1$$
$$1+1=2$$
$$1+2=1+(1+1)=3$$
$$1+3=1+(1+1+1)=4$$

O resultado dessas operações, para cada elemento, é equivalente à quantidade de elementos da primeira coluna até a linha anterior em questão. Para a terceira coluna, obtemos um resultado semelhante:

$$0+1=1$$
$$1+2=3$$
$$3+3=(1+2)+3=6$$
$$6+4=(1+2+3)+4=10$$

A soma dos elementos da segunda coluna determinou o elemento seguinte da terceira. Esse é um processo indutivo semelhante ao utilizado pelos alunos durante a atividade. As demais colunas podem ser obtidas de forma análoga.

A construção de novas linhas a partir de outras linhas foi uma descoberta realizada pela maioria dos alunos. Porém, algo não explorado na aula, apesar de ser um dos itens da atividade, foi a soma dessas linhas. Observemos:

$$1+0=1$$
$$1+1=2$$
$$1+2+1=4$$
$$1+3+3+1=8$$
$$1+4+6+4+1=16$$

Os resultados são os valores das potências de 2, isto é, $2^0=1$, $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, etc. Assim, podemos encontrar a soma de qualquer linha do triângulo elevando 2 à potência referente ao valor numérico da posição dessa linha, menos 1.Disso, concluímos que a expressão para encontrar a soma de qualquer linha é dada por $S(n)=2^{n-1}$.

Outras possibilidades podem emergir da exploração do Triângulo de Pascal por professores e alunos. Restringimo-nos, apenas, a essas três aqui apresentadas, porém, outras descobertas podem ocorrer durante uma atividade investigativa conforme a condução dada pelo professor. Além disso, trabalhamos, nessa pesquisa, com uma turma de sétimo ano, mas, essa atividade pode ser igualmente frutífera para outros anos do Ensino Fundamental ou Médio. Por exemplo, é possível relacionar os números das linhas às potências dos produtos notáveis.

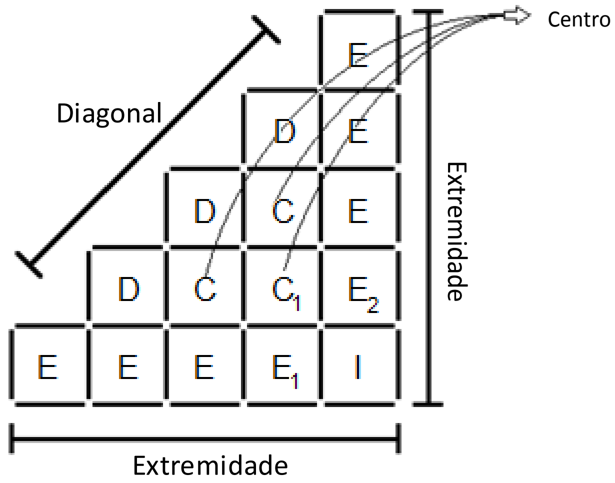
4.3.2Segunda Atividade: Uma Sucessão com Palitos

Essa etapa aconteceu no dia seguinte à exploração, isto é, quarta-feira, dia 10 de agosto de 2016. Dos quatro alunos que não estavam no primeiro momento, apenas um compareceu à escola. Essa atividade se caracterizou por ser a única em que a maioria dos alunos não se interessou pelas discussões. Um possível motivo pode ter sido o aviso dado pela pedagoga, logo no início da aula, de que haveria uma reunião com os pais no dia seguinte, o que acabou por agitá-los e preocupá-los.

A professora avaliou a situação e concluiu que seria melhor manter a formação padrão da sala para que não gastasse mais tempo. Ela explicou que se tratava do segundo momento da atividade iniciada na aula anterior e que eles deveriam apresentar suas descobertas.

Gean e um colega, que chamaremos de Roberto, foram ao quadro. O primeiro observou que cada figura era composta por uma quantidade par de palitos, e o segundo – sua voz era inaudível e a conversa aconteceu, praticamente, entre ele e a professora – afirmou que o número de palitos necessários para construir um novo quadrado na figura sempre seria três. Gean discordou e a professora, interessada, pediu sua justificativa. Ele fez o desenho no quadro e, a partir de (I), construiu (E_1) e (E_2), quando observou que todos os demais quadrados (E) seriam formados por três palitos. Posteriormente, mostrou (C_1), constituído por dois palitos, deduzindo, que os outros quadrados (C) e (D) eram compostos, também, por dois palitos.

Figura 11: Registro do desenho de Gean para demonstrar sua discordância à conjectura de Roberto



Fonte: Acervo pessoal

Ainda, com base no desenho, apontou que o único quadrado formado por quatro palitos (I), sem que nenhum já tivesse sido contado, era a intersecção das duas extremidades (E), que, por sua vez, são formadas por três palitos; os quadrados da diagonal (D) e do centro (C), para serem completados necessitariam de apenas outros dois.

Sua observação fora muito interessante e compreendemos que Maria, apesar de ter concordado e agradecido pela contribuição, poderia tê-la explorado até o ponto em que a turma concluísse, se, por exemplo, começassem da esquerda para a direita, "todos os outros quadrados da base a partir do segundo são construídos com três palitos, os da 2ª , 3ª, ..., nª linhas, a partir do segundo, são construídos com dois palitos"; dentre outras possibilidades.

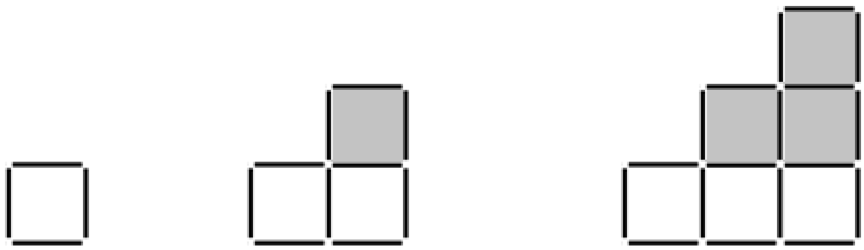
Durante a apresentação dos resultados do item (c)[15], Maria procurou ser mais atenta, acompanhando, passo a passo, o desenvolvimento das conjecturas; auxiliando os alunos sempre que possível e necessário, apesar de não detalhar o conteúdo matemático emergente. Notamos, ainda, que a participação dos alunos, quase sempre feita pelas mesmas pessoas, foi melhor conduzida.

[15]Existe alguma relação com o número de quadrados formados ao longo da sequência? Justifique.

Encerrada a etapa de socialização, pudemos perceber que algumas questões não foram levantadas no decorrer da atividade. Além disso, algumas justificativas para as conjecturas dos alunos podem ser melhor fundamentadas.

Uma regularidade que foi percebida apenas como uma regra no processo de construção das figuras seguintes pela maioria dos alunos foi a quantidade de quadrados em cada figura. Esse número aumenta a partir da base de cada figura conforme os números naturais – essa é a definição de números triangulares. Da primeira figura para a segunda aumentam 2, da segunda para a terceira aumentam 3, da terceira para a quarta aumentam 4 e assim sucessivamente.

Figura 12 – Construção das figuras apresentadas na segunda atividade aplicada a partir do acréscimo de quadrados na base das figuras anteriores



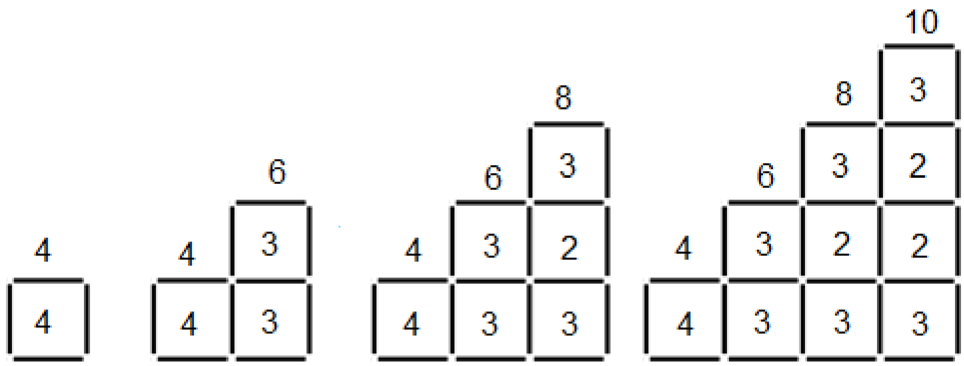
Fonte: Acervo pessoal

Podemos, então, afirmar que, se a quantidade de quadrados na primeira figura é 1, na segunda será $1+2=3$; na terceira $3+3=(1+2)+3=6$, na quarta, $6+4=(1+2+3)+4=10$ e, assim, sucessivamente. Esse é um processo indutivo que foi percebido por todos os alunos, porém, a sua formalização não foi apresentada por nenhum grupo.

Outra conjectura feita pelos alunos, e que buscamos melhores fundamentações, foi sobre a quantidade de palitos necessários para formar cada figura. As abordagens desenvolvidas durante a atividade buscavam por um padrão no crescimento do número de palitos, sendo validada por meio da indução intuitiva. Trouxemos duas abordagens, onde, em uma delas, exploramos a partir da quantidade de palitos necessários para construir cada quadrado.

Se considerarmos a construção dos quadrados da esquerda para a direita e de baixo para cima, a quantidade de palitos necessários para construir o primeiro quadrado é 4. Nas colunas seguintes serão necessários três palitos para o primeiro e o último quadrado – da base e do topo, respectivamente – de cada coluna e dois para os demais. Por exemplo, na segunda figura, a quantidade de palitos é dada por 4 + 3 + 3 = 10, sendo 4 da primeira coluna e 3 + 3 da segunda. Como não havia outros quadrados, se não o primeiro e o último, então, nenhum deles foi construído por apenas dois palitos.

Figura 13 – Quantidade de palitos necessários para a construção de cada quadrado das figuras apresentadas na segunda atividade



Fonte: Acervo pessoal

A partir da figura acima, podemos perceber que o número de palitos necessários para construir cada coluna é dado pela sequência dos números pares maiores ou iguais a quatro. Logo, para descobrir o total de palitos em cada figura, adicionamos esses valores.

A terceira conjectura que apresentamos fazia parte do objetivo da atividade, isto é, identificar expressões algébricas durante as explorações. Podemos determinar a quantidade de palitos necessários em cada figura a partir de $P = 2x + 3y + 4$, onde x e y são as quantidades de quadrados formados por dois e três palitos, respectivamente.

Considerando o modelo de construção das figuras, utilizado na conjectura anterior e,se distinguirmos os quadrados que requerem dois ou três palitos, conseguiremos descobrir a quantidade total em cada figura. Na Fig. 13 identificamos que:

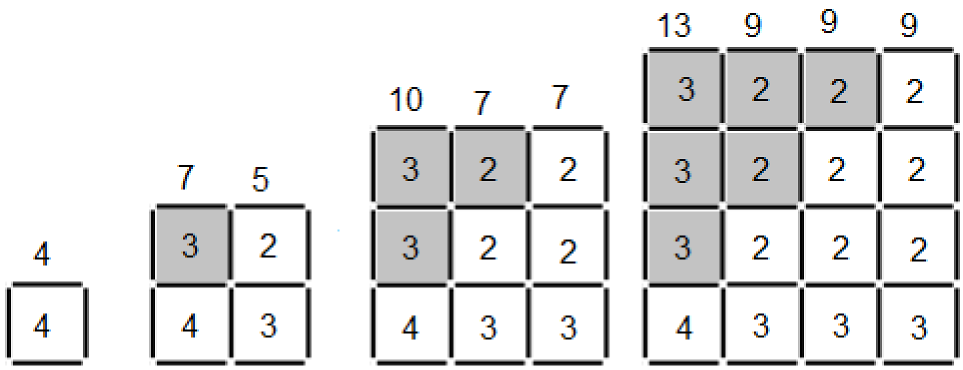
- O quadrado da primeira coluna é constituído por 4 palitos;
- As colunas seguintes serão formadas por quadrados com 2 e/ou 3 palitos;

- Da conjectura anterior, temos que o primeiro (base) e o último (topo) quadrados de uma coluna após a primeira são concebidos por 3 palitos e os demais, por 2.

Assim, podemos obter a quantidade de palitos de cada figura a partir da expressão dada pela conjectura inicial, pois, os produtos $2x$ e $3y$ determinam a quantidade de palitos de todos os quadrados feitos por 2 e 3 palitos, respectivamente, assim como 4 representa a quantidade de palitos necessários para formar o primeiro quadrado.

Existe outra expressão geral para o número de palitos de uma figura, mas que depende apenas do número de quadrados na sua base. Podemos obtê-la construindo quadrados fictícios, a partir das figuras, como os dos exemplos abaixo:

Figura 14 – Quantidade de palitos no quadrado formado a partir da figura apresentada na segunda atividade aplicada



Fonte: Acervo pessoal

A construção de cada figura partiu da esquerda para a direita e de baixo para cima, de forma que, na primeira coluna, o quadrado da base tenha 4 palitos e os demais 3; e nas colunas seguintes, a base tenha três palitos e os demais tenham 2. A partir disso, desenvolvemos uma expressão algébrica que represente a quantidade de palitos na primeira coluna e outra para as seguintes. Observemos:

Primeira coluna: $P = 4 + 3(x - 1)$, onde x é a altura medida em quadrados. Notemos que 4 representa o número de palitos do quadrado da base e $(x-1)$ representa a quantidade de quadrados que são constituídos por três palitos, que é, exatamente igual à quantidade total da coluna menos um.

Segunda coluna em diante: $P' = 3 + 2(x-1)$.O motivo é análogo ao caso acima, porém, como todas as colunas, exceto a primeira, possuem o mesmo número de palitos, multiplicamos por $(x-1)$ a expressão e obtemos:

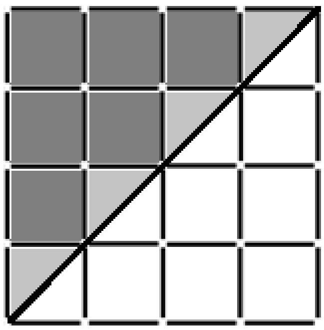
$P' = [3+2(x-1)](x-1) \Rightarrow P' = [3+2x-2](x-1) \Rightarrow P' = [2x+1](x-1) \Rightarrow P' = 2x^2 - 2x + x - 1$.

Logo, a quantidade de palitos em todas as colunas a partir da segunda é dada por $P' = 2x^2 + x - 1$. Adicionando P e P', obtemos uma expressão geral para o quadrado:

$Q = P + P' = 4 + 3(x-1) + 2x^2 - x - 1 \Rightarrow Q = 3x + 1 + 2x^2 - x - 1 \Rightarrow Q = 2x^2 + 2x = 2x(x+1)$.

Como a nossa intenção é descobrir, apenas, parte dos palitos usados no quadrado, dividimos o valor encontrado por dois e obtemos quase toda a quantidade que desejamos, exceto por dois palitos em cada coluna. Vejamos:

Figura 15 – Divisão dos palitos em um quadrado formado a partir de uma das figuras obtidas na segunda atividade aplicada



Fonte: Acervo pessoal

Solucionamos esse problema adicionando $2x$ à expressão obtendo uma para a figura original. Algebricamente, $\frac{Q}{2} = \left(\frac{2x^2 + 2x}{2}\right) = x^2 + x$, adicionando $2x$, obtemos a expressão geral: $T = x^2 + 3x$. Testamos para alguns casos para verificar a validade da expressão encontrada: Base 1: $1^2 + 3 \times 1 = 4$; Base 2: $2^2 + 3 \times 2 = 10$; Base 3: $3^2 + 3 \times 3 = 18$. Devemos lembrar que tais verificações não demonstram a veracidade da expressão, todo o processo desenvolvido é que afez.

Muito provavelmente, não encontraremos um aluno do oitavo ano, no Ensino Fundamental,que desenvolva essa investigação sem algum auxílio, porém, os caminhos matemáticos apresentados são possíveis de serem compreendidos.

Nessa perspectiva, o professor pode propor a investigação aos alunos ou apresentá-la durante o momento de socialização.

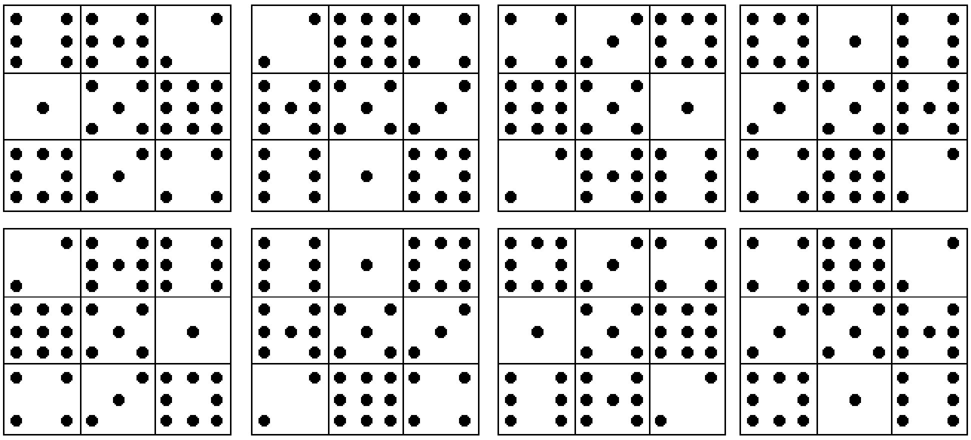
4.3.3 Terceira Atividade: Quadrados Mágicos

A terceira socialização, diferente das duas anteriores, ocorreu no mesmo dia que a da exploração. Avaliamos essa atitude como positiva, uma vez que manteve os alunos interessados, já que estavam engajados na atividade. Na intenção de não perder tempo com uma nova organização da sala, a professora propôs mantê-la como estava.

Mais um ponto a destacar: a professora optou por apresentar, ela mesma, as regularidades e mediar as discussões, iniciadas logo após ter dito acerca dos oito resultados possíveis. Para isso, ela pegou uma folha de papel em branco e na face 1 apresentou uma das soluções do quadrado mágico rebatida para a face 2. Construímos dessa forma para que os alunos visualizassem melhor as disposições dos números e percebessem todas as possibilidades.

Maria rotacionou o quadrado, da face 1, para a esquerda, obtendo outra disposição. A seu pedido, fomos para o quadro registrar as demais, articuladas pelos próprios alunos, cada vez que ela movimentava a folha. Esgotadas as rotações, a professora girou a folha 180° e reiniciou o processo, mantendo o mesmo sentido. Os resultados ficaram como na figura abaixo:

Figura 16 – Registro da imagem produzida pela professora para demonstrar a quantidade de possibilidades de solução para o quadrado mágico de soma quinze



Fonte: Acervo pessoal

Baseando-se em uma de suas dicas, Maria, a todo o momento, chamava a atenção para a posição do “cinco”, que se mantinha no centro, enquanto que a dos demais se alterava a cada giro. Com a resposta no quadro, foi possível ver que as rotações de uma face e da outra resultavam respostas distintas.

Vários alunos afirmaram haver relações entre o valor do centro e a soma do quadrado mágico – de outra forma, ela já havia dito isso na etapa anterior -, pois segundo eles, cinco era um múltiplo de quinze. A professora, então, fez uma pequena correção, lembrando-os de que era o contrário, donde concluíram que o número do meio era um terço do valor da soma.

Também foi discutida a relação entre a posição dos números na sequência e no quadrado mágico. Para isso, Maria informou a eles que dois de seus colegas descobriram relações que permitiam encontrar, mais facilmente, a resposta de qualquer quadrado mágico de ordem 3x3 a partir do de soma 15. Ela preferiu apresentar as descobertas a pedir aos alunos para fazê-la, pois o fim da aula já estava se aproximando.

Apesar de durar vinte minutos, ela conseguiu abordar vários assuntos matemáticos; mediar as discussões; manter os alunos interessados; criar um ambiente propício à investigação e à participação da turma. Ao término da aula, os alunos pediram para que ela permanecesse na sala para dar continuidade à discussão, mas ela recusou por precisar ir para outra classe.

Durante a atividade, as investigações realizadas pelos grupos foram, quase exclusivamente, sobre as disposições dos números no triângulo. Contudo, muitas situações podem surgir do estudo das sequências ali dispostas. Por exemplo, quando buscamos perceber o que acontece na soma de todos os termos:

$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$;

$2+3+4+5+6+7+8+9+10=54$;

$3+4+5+6+7+8+9+10+11=63$.

Com o auxílio do professor, os alunos poderão encontrar, adicionando 1 a cada um dos termos da sequência de 1 a 9, cuja soma é 45, a de 2 a 10, ou seja, 1 + 1 = 2; 2 + 1 = 3; 3 + 1 = 4; 4 + 1 = 5; 5 + 1 = 6; 6 + 1 = 7; 7 + 1 = 8; 8 + 1 = 9; 9 + 1 = 10; a de a 11, adicionando 2 a cada um de seus termos, ou seja, 1 + 2 = 3; 2 + 2 = 4; 3 + 2 =

5; 4 + 2 = 6; 5 + 2 = 7; 6 + 2 = 8; 7 + 2 = 9; 8 + 2 = 10; 9 + 2 = 11.Com essas duas construções, o professor poderá conseguir que seus alunos verifiquem que a segunda sequência fora acrescida de 9 unidades, perfazendo o total de 54 = (45+[9.1]), a terceira de 18; 63 = (45+[9.2]), consequentemente, a quarta será de 27; 72 = (45 + [9.3]), a quinta de 36; 81 = (45 + [9.4]) e assim, sucessivamente.Portanto, quaisquer outras sequências, consecutivas, terão como resultado 45 + 9.(n - 1), onde *n* representa a posição por ela ocupada, identificada pelo seu primeiro termo ou, ainda, por 9.(n + 4), destacando que *n + 4* denota o termo central da sequência.

Outra regularidade que pode ser distinguida é a de quando dividimos a soma dos termos das sequências por três:

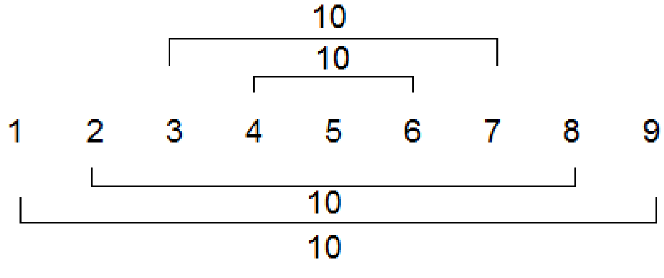
$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 \rightarrow 45 \div 3 = 15$;

$2+3+4+5+6+7+8+9+10=54 \rightarrow 54 \div 3 = 18$;

$3+4+5+6+7+8+9+10+11=63 \rightarrow 63 \div 3 = 21$.

Os valores obtidos indicam as somas das sequências dispostas nos quadrados mágicos sugeridos. Há uma demonstração para isso, mas que necessita de noções algébricas superiores aos de uma turma de 8° ano, por isso, optamos por apresentar um processo de indução intuitivo. A posição dos elementos das sequências, também, pode ser explorada. Vejamos:

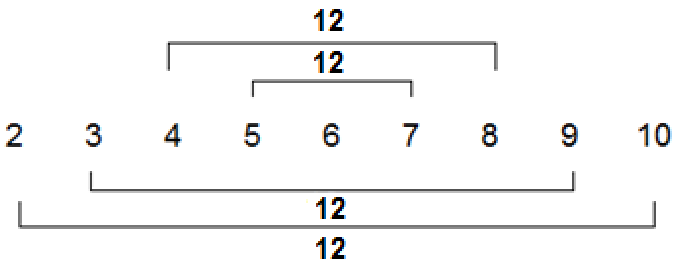
Figura 17 – Soma dos termos de posições opostas na sequência de 1 a 9 para a terceira atividade aplicada



Fonte: Acervo pessoal

Notemos que a soma dos elementos de posições opostas, em relação ao 5, para o exemplo acima, sempre resulta em 10. Observamos, também, que adicionado ao valor do centro, resulta na soma do quadrado mágico. O mesmo acontece para as demais sequências, como, por exemplo, a de 2 a 10.

Figura 18 – Soma dos termos de posições opostas na sequência de 1 a 9 para a terceira atividade aplicada



Fonte: Acervo pessoal

Para generalizar essa afirmação, usaremos uma sequência genérica, cujo elemento central é c. Assim, temos: $c-4$;$c-3$; $c-2$; $c-1$; c; $c+1$; $c+2$; $c+3$; $c+4$. Ao adicionarmos os elementos com posições opostas em relação a **c**, obtemos: $(c-4)+(c+4)=2c$; $(c-3)+(c+3)=2c$; $(c-2)+(c+2)=2c$; $(c-1)+(c+1)=2c$ .Observemos que a soma sempre resulta em $2c$ e, adicionada ao algarismo central, temos a soma do quadrado mágico de centro c, isto é, $3c$.

4.3.4 Quarta Atividade: Os Quatro Quatros

Essa etapa, também, aconteceu no mesmo dia que a anterior, ou seja, em 04 de outubro. Devido ao atraso, como já dissemos, no início da aula, de quase vinte e cinco minutos, ela foi bastante prejudicada. Havíamos estipulado dez minutos da aula para a apresentação dos resultados. Porém, a professora compensou o tempo perdido diminuindo a etapa de exploração. Consequentemente, os alunos, ainda, faziam a tarefa, e muitos continuaram a fazê-la, quando foram convidados a iniciar a socialização.

Ela optou por manter a disposição em que a sala se encontrava. Antes de iniciar essa etapa, ela escreveu os números de 0 a 100 no quadro em forma de tabela, deixando espaço na frente do número para que os alunos redigissem as expressões encontradas.

Quando, de fato, a socialização se iniciou, a professora pediu um voluntário para escrever a expressão equivalente ao zero. Depois, discutiu sobre outras expressões que, eventualmente, poderiam ter sido encontradas e, quando não houve mais discussão, passou para o um. Esse processo se estendeu até o número cinco. Porém, os alunos hesitavam em ir ao quadro e, por isso, a abordagem estava se tornando lenta demais para o tempo restante da aula. Assim, pediu para que alguns alunos fossem ao quadro e redigissem seus achados intencionando, posteriormente, discutir sobre as expressões apresentadas. Entretanto, a quantidade de expressões a serem registradas era grande e tomou todo o tempo restante.

No encerramento da aula, alguns alunos, ainda, estavam redigindo expressões no quadro. Perguntamos à professora se ela iria disponibilizar outro momento para a discussão, mas ela afirmou estar preocupada com o tempo gasto, já que deveria realizar, muito em breve, uma atividade avaliativa. Portanto, não houve uma etapa efetiva de socialização, apenas registros de resultado no quadro.

Durante a elaboração das atividades para a pesquisa de campo, percebemos que o número de questões direcionadoras em cada uma diminuía de acordo com a sequência em que foram aplicadas. Por esse motivo, optamos por uma exploração mais aberta para os quatro quatros, o que, talvez, não tenha sido uma boa escolha, já que algumas regularidades poderiam ter sido melhor exploradas se houvessem esses direcionamentos.Nessa perspectiva, trouxemos, ao invés de possibilidades de explorações, possibilidades de direcionamentos por meio de algumas questões.

Questão 1: Encontre expressões para o número 10 de forma que use:

a) Pelo menos uma raiz quadrada;
b) Pelo menos um sinal de fatorial.

Nessa tarefa, que pode ser desenvolvida com outros números, além do dez, colocamos o aluno em contato com outras possibilidades de encontrar um mesmo resultado. Algumas soluções para essa questão seriam:

a) $4+\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}$; $4\times\sqrt{4}+\dfrac{4}{\sqrt{4}}$.

b) $\dfrac{\sqrt{4}\times 4!}{4}-\sqrt{4}$; $\dfrac{4!-4}{\sqrt{4}\times\sqrt{4}}$.

Questão 2: Observe os exemplos de Malba Tahan e diga como ele fez para encontrar números ímpares. Existem outros ímpares que podem ser encontrados, sem o uso de todos os quatro quatros, a fim de que os restantes possam ser usados para encontrar outros números?

Nessa questão, o objetivo é fazer com que o aluno identifique operações matemáticas que, compostas apenas por números pares, produzam números ímpares. Ao identificar que $\frac{4}{4}=1$, é possível para ele encontrar outros resultados, além dos pares. Outro exemplo é $\frac{44}{4}=11$, a partir dele, pode-se encontrar o 7 – $\frac{44}{4}-4$ – e o onze – $\frac{44}{4}+4$ –, facilmente.

Questão 3: Quais os números que mais aparecem nas suas tentativas? Por que isso acontece?

Essa questão já fora observada, por eles mesmos, em suas tentativas, como vimos na etapa de exploração. Contudo, interessados em buscar outras expressões, acabam não se atendo à frequência dos resultados, por exemplo, 16 e 64. Certamente, o fato de serem múltiplos de 4,seja um indicativo da contínua aparição desses números.

4.4 AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE

Realizamos quatro entrevistas semi-estruturadas, todas gravadas em áudio, com a professora e, também, alguns registros no diário de bordo, sempre que esta etapa se encerrava. Elas aconteceram nas segundas feiras nos momentos de planejamento da professora que se iniciavam às 7h50min e iam até as 9h30min. Porém, não chegávamos a usar todo o planejamento, já que as entrevistas gastavam, no máximo, 50 minutos.

Vale afirmar que as entrevistas, sob nosso olhar, funcionaram como uma espécie de reflexão para a professora. Maria soube relatar o que lhe fora mais difícil, mas não soube, pelo menos nas primeiras, identificar seus pontos fortes; talvez, por não se sentir confortável com a nossa presença ou por não ter identificado, ainda, naquele momento, suas ações na condução daquele tipo de atividade.

4.4.1 Primeira Atividade: O Triângulo de Pascal

Para Maria, o desempenho dos alunos foi maior do que o esperado e se sentiu bastante satisfeita com o resultado. Ela se surpreendeu com a participação da grande maioria dos estudantes, algo que não acontece cotidianamente, muito em função de ter sido uma atividade diferente da daquelas que estão habituados. Entretanto, essa participação foi diretamente proporcional em relação às tarefas desenvolvidas ao longo dos trimestres, isto é, os que menos participavam nas aulas, menos participaram nas atividades investigativas.

A professora se mostrou surpresa em duas situações antagônicas. De um lado, Caio, por exemplo, em sua opinião, apresentava um rendimento regular nas aulas de Matemática, mas durante a atividade investigativa desenvolveu uma série de conjecturas que ela mesma não havia pensado ou esperava que nenhum deles fosse capaz de elaborar. Do outro, Erick que passou toda a atividade desenhando, o que causou a ela estranheza, não sabendo explicar, nem hipotetizar o motivo que levou esse aluno, normalmente, participativo, a não desenvolver a atividade. Maria percebeu suas dificuldades na introdução da aula e acredita que isso tenha acontecido por causa da falta de costume com esse tipo de tarefa[16].

Acerca do que desejava mudar em sua atuação, durante essa experiência, prontamente, nos relatou que seria sua postura diante das conjecturas, uma vez que validava muitas questões dos alunos sem permitir a reflexão do que acabaram de fazer. Por esse motivo, ela acredita ser importante aprender a manter uma conduta interrogativa que favoreça pensar, raciocinar, ponderar. Além disso, considerou complicado fazê-los entender que eles eram os protagonistas do processo, e, portanto, responsáveis pelas eventuais descobertas.

Quando lhe perguntamos se ela considerava O Triângulo de Pascal uma atividade investigativa, ela nos disse que sim, pois, promoveu aos alunos investigarem, por exemplo, propriedades da teoria dos números.

[16] São nomes fictícios.

4.4.2 Segunda Atividade: Uma Sucessão com Palitos

A professora apontou diferenças entre as duas atividades, os novos desafios, o que permaneceu e o que mudou. Como já apontamos, o objetivo principal não fora alcançado, uma vez que os alunos não conseguiram, no decorrer da atividade, associá-la às expressões algébricas.

Declarou se sentir feliz por estar melhor habituada àquele tipo de atividade e afirmou que interpretar as questões foi, em geral, a causa das dúvidas dos alunos. Novamente, destacou a participação, maior do que a prevista, da turma, justificando que, por vezes, muitos alunos, desinteressados em tarefas rotineiras, as realizam da forma mais rápida possível para se debruçarem em outras não ligadas à Matemática. Entretanto, em se tratando de algo diferente do usual, como era o caso, mesmo quando se distraíam com outros assuntos, eles retornavam a se concentrar naquilo que lhes fora proposto.

Maria admitiu não ter se preparado bem para a atividade. Depois de planejarmos juntos, não teve tempo de estudá-la e, por isso, muitas vezes, foi pega de surpresa com algumas conjecturas postas pelos alunos, sendo preciso pensar naquele momento.

A socialização da atividade foi a etapa que julgou como ponto negativo. Ela reconheceu não ter conseguido manter certa ordem para a explicação dos grupos, bem como, ter deixado obscuras aos alunos, algumas conjecturas. Assim posto, ela acredita que a formulação de conjecturas, por parte dela, e as demonstrações matemáticas devam ser atitudes incorporadas durante as próximas atividades que irá aplicar, com ou sem a nossa presença.

Considerando as descobertas de novas “coisas”, por meio das discussões dos grupos, ela acenou ser essa uma atividade investigativa.

4.4.3 Terceira Atividade: Os Quadrados Mágicos

A cada atividade investigativa aplicada, mais familiar isso se tornou, tanto para Maria quanto para seus alunos. Nesse sentido, a aplicação dessa atividade já não mais causou tantas dificuldades, a não ser as habituais como organizar a sala ou conter as conversas paralelas.

Maria relembrou alguns momentos que considerou importantes nas suas intervenções, sobretudo, um dos que promoveram o desenvolvimento do quadrado mágico de soma 15, cujas regularidades apresentadas pelos alunos só foram possíveis após ter revelado qual o número que ocuparia sua posição central.

Outro relato feito por ela diz respeito à qualidade das conjecturas apresentadas nessa atividade e admitiu não ter pensado em algumas delas, enquanto realizava breves explorações, ao mesmo tempo em que os alunos produziam as suas. Destacou as descobertas de Thomas, que sempre se apresentou como um aluno pouco dedicado, sendo, frequentemente, advertido por desordem, bem como as de Gean, um dos alunos com maior produtividade durante essa atividade, apesar de seu comportamento, ligeiramente, preguiçoso com relação às atividades rotineiras, ele sempre demonstrou ter um bom raciocínio matemático.

4.4.4 Quarta Atividade: Os Quatro Quatros

Maria relatou ter se preparado melhor para essa atividade. Além das discussões que fizemos no planejamento, ela realizou algumas explorações, em outros momentos. Isso, segundo ela, contribuiu para identificar quais seriam as principais dificuldades dos alunos dentre elas, quais operações e qual o melhor momento para usá-las[17].

Uma de suas principais dificuldades foi fazer com que os alunos compreendessem o funcionamento da atividade. Para solucionar esse problema, a professora sugeriu que os alunos experimentassem dispor algumas operações matemáticas entre os quatro quatros e realizassem o cálculo para conferir qual valor haviam encontrado. Segundo ela, essa estratégia foi efetiva, pois, na medida em que propôs essa experimentação, os alunos a requisitaram menos.

A introdução do fatorial para a investigação mostrou-se, segundo a professora, efetiva. E relatou que a operação não era complexa em demasia para que os alunos não a compreendessem, fazendo com que a admitissem em suas explorações.

[17] Maria sugeriu aos alunos que experimentassem as operações, aleatoriamente, ou em casos onde a dúvida era mais específica, trocar uma operação por outra.

A administração do tempo para a atividade foi o que a professora considerou ser sua maior dificuldade. Em sua opinião, poderia ter havido mais tempo para a exploração e socialização, porém, não poderia ceder mais aulas para não comprometer o cumprimento do currículo e o atraso gerado pela formação da fila prejudicou bastante a execução do planejamento[18]. Contudo, o tempo destinado à socialização não se alterou, mantendo-se o do combinado à época do planejamento.

Feita a descrição de cada uma das atividades aplicadas, cabe-nos uma análise mais abrangente das situações ocorridas, as quais apresentaram potencialidades, ora positivas, ora negativas. Assim o faremos no capítulo que se segue.

[18] Ela critica o sistema de formação de fila, pois se perde muito tempo da aula com ele. Em uma ocasião recente, relata que não pode aplicar o que planejou, por não haver sobrado mais do que vinte minutos da aula.

CAPÍTULO 5

OLHARES FINAIS OU RECOMEÇO DE OUTROS?

A decisão em tornar a Educação Matemática uma opção profissional, só nos ocorreu, em meados da graduação. Inicialmente intencionávamos cursar Física, entretanto, alguns motivos, relatados anteriormente, nos conduziram ao curso de Licenciatura Plena em Matemática. Gradualmente, o interesse por aquela ficara ofuscado por esta e a decisão em atuarmos como professor se fortificou e, para tanto, em busca de melhor conhecer as questões inerentes à profissão abraçada, optamos por realizar o Mestrado na Área de Ensino, tomando por objeto de estudo as atividades investigativas. O conhecimento que tínhamos, acerca da temática, limitava-se ao que praticávamos em algumas das salas em que ministramos a disciplina Matemática, e, portanto, para ampliá-lo, procuramos por trabalhos que versassem àquele respeito.

Como em todo projeto, e para que concretizássemos a pesquisa em dois anos, tempo recomendado pelo Programa, adequações se fizeram necessárias. Delimitações na questão-problema, reajustes nos objetivos, definição dos sujeitos colaboradores, seleção das atividades envolvidas, renegociação do cronograma de trabalho perpassaram a trajetória do estudo de caso exploratório-descritivo, que realizamos.

Os primeiros contatos que fizemos com o campo de pesquisa em que atuamos se mostraram bastante favoráveis, isto é, a colaboração da professora Maria, que pelo fato de já nos conhecermos, dispensou apresentações entre nós; a aquiescência da diretora, tão logo, lhe expusemos os objetivos do projeto; a boa recepção dos demais profissionais, são alguns exemplos. Evidentemente, eventuais imprevistos aconteceram, mas que diante desses registros, tornaram-se inócuos.

Na medida em que as quatro atividades investigativas, possuidoras de enunciados abertos, se desenvolviam, os *cenários para investigação* se constituíam e proporcionavam, sobretudo, por meio das etapas introdução, exploração e socialização, variadas situações entre professora-alunos e alunos-alunos, além de remeterem Maria a refletir acerca da preparação prévia de diferentes soluções ou até mesmo da condução de seus questionamentos e dos alunos.

Dispor sob quatro etapas, o trabalho com investigação matemática, permitiu-nos a discussão teórica, fundamental para que nós e Maria apontássemos concepções, preocupações, facilidades, dificuldades, complexidades; planejar estratégias; observar as ações e posturas da professora, diante de e para com seus alunos; identificar o envolvimento das turmas e de Maria, ambos desabituados com aquele tipo de tarefa; constatar descobertas, algumas interessantes e produtivas, realizadas pelos alunos, oralmente ou por registros escritos, sem, contudo, privilegiar, por parte da professora, uma discussão apropriada, para aquele nível de escolarização, das possibilidades matemáticas emergentes; captar a rigidez com que o currículo se lhe apresenta em prol de seu cumprimento; avaliar os desdobramentos do que se efetivara, em cada uma das atividades, propiciando à regente repensar, tanto suas atitudes, quanto as dos alunos e verificar o que funcionaria ou o que, ainda, careceria melhorar para as próximas atividades.

Nesse sentido, Maria sugeriu, nos planejamentos, a inserção de elementos nas atividades, que contribuíssem, de alguma forma, para que o aluno pudesse melhor compreender o que estava sendo solicitado. A opção em dispor o Triângulo de Pascal sob a forma de um triângulo retângulo; a distribuição de palitos para manipulação; o aumento de quadrados mágicos na folha impressa; a inclusão de expressões para os números de 0 a 10, na atividade dos quatro quatros; são exemplos do que acabamos de evocar.

Entendemos, com essa atitude, que Maria busca, com a inserção desses elementos, facilitar ou trazer uma linguagem mais acessível ao processo de aprendizagem dos seus alunos, com isso, aproximando, por meio de sua mediação, os *currículos prescrito* e *apresentado*, do que vai, efetivamente, por em *ação*. Nesse cenário, "é evidente que no professor recai [...] as obrigações em relação aos seus próprios alunos, ao meio social concreto no qual vivem, e isso o chama inevitavelmente a intervir, devido à responsabilidade para com eles" (SACRISTÁN, 2000, p. 165).

O tempo, conforme observamos e, algumas vezes relatado pela própria professora, se lhe apresentou como um desafio. Por assumir variadas tarefas, Maria acabou por não explorar, previamente, as atividades; outro aspecto relevante diz respeito ao tempo que destinamos às aplicações das atividades, nem sempre, satisfatórios, o que comprometeu a organização, concentração e finalização de algumas delas.

Ao longo do desenvolvimento das etapas condizentes à sala de aula, podemos destacar algumas situações interessantes. Maria, ao fazer a Introdução, se pautava na experiência vivenciada na atividade anterior para reforçar o que havia considerado como insuficiente no desempenho dos alunos. Consideramos esse posicionamento de Maria como algo produtivo, pois a maioria dos alunos acatava suas observações.

Os alunos se habituaram a procurar a professora apenas diante de eventuais dúvidas, quando, então, e apenas nesse momento, ela fazia as intervenções necessárias. Maria considerou importante os alunos buscarem tentativas de maneira independente. Balacheff, citado por Ponte et al (1998a) sinaliza que, caso exista interferência por parte do professor, a exploração pode ser alterada e, consequentemente, seguir caminhos diferentes. Parece-nos que Maria concorda com esse ponto de vista.

No que diz respeito à etapa de exploração, uma das preocupações da professora eram os registros escritos, os quais eram sempre recomendados, muito provavelmente, apoiada em Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 35) quando enfatizam que

> [...] a escrita dos resultados permite ao professor aceder posteriormente ao trabalho dos alunos de forma a analisar o seu desempenho e a planificar as aulas seguintes [...]. Por outro lado, a capacidade dos alunos de comunicar matematicamente, cuja importância é bem conhecida, pode ser trabalhada de forma espontânea e genuína para os alunos, uma vez que diz respeito aos seus próprios pensamentos.

Nessa direção, constatamos que em suas abordagens, Maria buscava questionar; compreender o raciocínio que lhe era apresentado; incentivar o aluno à reflexão; identificar o progresso da atividade pelo grupo e, diante disso, fornecia as informações que considerava pertinentes para auxiliá-los.

No transcorrer do processo, se algum membro de um grupo recorresse a ela sem consultar, antes, os demais integrantes, ela o aconselhava a sanar sua dúvida com o seu colega, privilegiando, dessa forma, o trabalho em grupo. Embora fosse bastante razoável essa sua postura, muitas vezes, se fez necessário recordar conteúdos já estudados, pois, de acordo com Ponte et al (1998a, p. 20), "[...] não faz sentido manter um diálogo do qual estão necessariamente afastados muitos alunos por não compreenderem os conceitos-chave que estão a ser utilizados".

Entretanto, o processo de validação de conjecturas, por vezes, pode exigir algum tipo de justificativa matemática, ainda, complexa para o nível de escolaridade em que se encontra o aluno, requerendo conceitos ou definições, ainda, não estudados.

Para corroborar com esse argumento, trazemos uma situação ocorrida na aplicação da atividade com o Triângulo de Pascal. Partindo do pressuposto de que, muitos alunos acreditam que não seja necessário justificar uma conjectura, eles acabam por induzi-la. Na sequência 1 3 6 10 1521 ..., uma aluna observou que cada um de seus elementos ocupava uma determinada posição (1ª, 2ª, 3ª,...) e que cada um deles, adicionado à sua posição + 1, geraria o próximo número (1 + 1 + 1 = 3; 3 + 2 + 1 = 6; 6 + 3 + 1 = 10; 10 + 4 + 1 = 15; 15 + 5 + 1 = 21, e assim sucessivamente). Tanto a aluna, quanto os demais grupos se limitaram a explicar como a sequência se comportava, o que, vemos como bastante razoável para uma turma de sétimo ano, uma vez que, as ferramentas da álgebra que conhecem não permitem fazer generalizações.

Contudo, caso o professor queira inserir uma série de conceitos que propiciem desenvolver conjecturas com níveis maiores de complexidade e a, ocasionalmente, validá-las, a etapa de exploração pode se tornar dependente de suas intervenções.

Por outro lado, vemos com certa importância o professor apresentar a seus alunos o modo como executa determinada situação-problema, com o intuito de colocá-los em contato com outra forma de produzir Matemática. Para Lampert, citado por Ponte et al (1998a, p. 8), o professor

> [...] tem de tornar explícito o conhecimento que está a usar para argumentar com eles sobre a legitimidade ou utilidade de uma estratégia de resolução. [...] precisa seguir os argumentos dos alunos enquanto eles vagueiam em vários terrenos e reunir evidência própria para suportar ou desafiar as suas conjecturas, e apoiar os alunos quando eles tentam fazer o mesmo uns com os outros.

Em contrapartida, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 47) apontam que o professor

> [...] deve procurar atingir um equilíbrio entre dois pólos. Por um lado, dar-lhes a autonomia que é necessária para não comprometer a autoria da investigação e, por outro lado, garantir que o trabalho dos alunos vá fluindo e seja significativo do ponto de vista da disciplina de Matemática

Pontuamos que um dos momentos propícios para que o professor coloque suas aspirações ou amplie a discussão, seja a etapa da socialização. Nela, é possível detalhar as relações matemáticas que surgem na etapa de exploração. Para isso, o uso de uma linguagem matemática adequada torna-se necessária.

Não obstante, detectamos que a socialização não foi, suficientemente, trabalhada em todas as atividades aplicadas. Julgamos que poderíamos ter discutido, mais amplamente, o desenrolar das tarefas, nos momentos em que nos reuníamos para as entrevistas; o que nos colocaria em conformidade com Ponte et al (1998a) quando enfatizam que o planejamento pode ser revisto a todo momento até que se dê por finalizada todas as etapas requeridas pela tarefa proposta. Não foi assim que agimos, principalmente, por objetivarmos que a professora desenvolvesse sua análise de forma mais independente possível, diminuindo, assim, nossa influência em suas práticas. Acabamos por fazer, no capítulo anterior, redigindo a versão final de nossa dissertação, algumas ponderações, após a descrição de cada uma das atividades, acerca de continuidades que podem ser dadas pelo professor.

Entretanto, podemos destacar que as argumentações postas pelos alunos e confrontadas pela professora, as quais, muitas vezes, se limitavam as respostas "sim" ou "não", gradativamente, melhoraram. Muito provavelmente, na medida em que, a cada atividade aplicada, tanto o aluno quanto a professora se afinavam àquilo que propusemos, seja elaborando melhor suas conjecturas, seja conduzindo o processo com mais propriedade.

Vale lembrar, também, que Maria, em uma de suas primeiras atitudes, seguiu a recomendação dada por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), qual seja, de chamar ao quadro os alunos com menos produção, cuja polêmica causada, fez com que ela desistisse da ideia.

Assim posto, a professora propiciou a construção de *cenários para investigação*, uma vez que ela procurou manter-se em uma postura questionadora, permitindo a seus alunos que, a partir da explicação do que fizeram, mostrassem e refletissem acerca das possibilidades da solução para a atividade que realizavam.

Chegamos, enfim, ao momento de avaliarmos o dito e o feito no desenrolar do trabalho. Nele, foi possível identificar algumas modificações acerca do que Maria concebia como uma atividade investigativa, a partir da sua atuação na aplicação das quatro tarefas, como também, no desenvolvimento de suas etapas. Inicialmente, ela cria que uma atividade investigativa deveria oportunizar ao aluno fazer descobertas por si só e, muito provavelmente, inspirada nas questões planejadas, fazê-lo, tão somente, buscar padrões e sequências; noutro momento, um pouco mais atenta, conseguiu perceber a importância do trabalho coletivo e da participação do professor.

Como não havia tido contato com atividades daquele tipo, antes de participar da pesquisa, Maria considerou as propostas por nós, muito complicadas, fato esse que se alterou, posteriormente. Mesmo assim, apesar de, vê-las como importantes para o tratamento de novos conteúdos, sinalizou-nos não ser possível realizá-las sempre, por requererem muito tempo para sua seleção e preparação, como também, precisaria, por ora, do auxílio de outros profissionais, pois não se sentia apta para elaborá-las e/ou planejá-las.

Embora o Programa de Ensino (PE), do município de São Mateus-ES, rede em que Maria atua, exerça o papel do *currículo prescrito*, ele flexibiliza ao professor utilizar-se de métodos e recursos que melhor lhe atendam, o que nos faz compreender seu posicionamento, haja vista, as atividades investigativas se inserirem em um contexto com o qual ela não estava habituada, muito provavelmente, por se prender às artimanhas do Currículo, definido por ela, em algum momento de nossas conversas, como uma "sequência de conteúdos estudados".

Note-se que tal definição pode nos remeter, parcialmente, às etapas pelas quais o currículo perpassa e se modifica, conforme nos expõe Sacristán (2000).Todavia, como já dissemos em linhas atrás, Maria, admitindo serem as atividades investigativas uma possibilidade para ensinar novos conteúdos, ratifica sua concepção de currículo.Em contrapartida, as entendemos como o *currículo apresentado*,que após as sugestões dadas,durante os planejamentos, a fim de ajustá-lo ao trabalho com seus alunos, imbricou, no que Sacristán (2000) denomina de *currículo moldado.*

Nesse sentido, podemos evidenciara constituição de um dos ambientes de aprendizagens, propostos por Skovsmose (2000), na transição entre o *currículo apresentado* e o *currículo moldado*, e sua consolidação nos *cenários para investigação,* constatados nas etapas de exploração e socialização, desenhando, dessa forma, o *currículo em ação*. Significa dizer que as atividades que propusemos fazem referência à Matemática pura, mas na contramão do paradigma do exercício, pois, propiciaram aos alunos buscar relações e investigar possibilidades, partindo de abstrações que envolviam números e/ou figuras.

Poderíamos, ainda, estender a discussão e falar acercado *currículo realizado,* o qual, em longo prazo, promove a fruição matemática e o espírito investigador e do *currículo avaliado*, que se configura em (re)significar a prática do professor e o desempenho dos alunos; entretanto, pelas características que apresentam,optamos por não fazê-la, uma vez que, não experienciamos tais momentos, sobretudo, se considerarmos que a visão discente dessas tarefas não foi o foco dessa pesquisa, porém, segundo a professora, o envolvimento dos alunos foi maior do que o habitual, ratificando nossa percepção quanto ao esforço coletivo em compreender o que lhes eram solicitados e dar a esses pedidos soluções matemáticas.

A forma como nos envolvemos durante todas as etapas das atividades investigativas, produtoras de um ambiente rico e complexo, e, cuja interação tornara-se parte do processo de ensino e aprendizagem, talvez, não tenha sido a mais apropriada. Mas, ao longo das reflexões e discussões que efetuamos em meio aos capítulos aqui apresentados, as quais, certamente, caminharão conosco, nos faz crer que para Maria, a sua participação na pesquisa lhe trouxe novos olhares para outros modos de trabalhar a Matemática em sala de aula, como também, diante de sua inexperiência, lhe evidenciou algumas dificuldades na aplicação das atividades investigativas e a conscientização de estar a par do que se produz na área da disciplina que se dispôs a lecionar.

Trabalhar com Maria, oportunizou-nos modificar o que, outrora, pautávamos como as únicas características possíveis de um "bom professor", quais sejam: ser carismático; se importar com os alunos e desenvolver práticas que estimulassem o aprendizado da Matemática. Passamos a entender que manter uma postura firme, diante da turma ou das colocações feitas, e agregá-la àquelas qualidades, não excluiria a possibilidade de se desenvolver atividades inseridas em um *cenário para investigação*.

Apesar das limitações, tanto dela, quanto nossas, não inviabilizaram inserir nesses espaços, sujeitos que conosco colaborariam para o alcance dos objetivos traçados na condução do estudo em voga. Reconhecemos, mais uma vez, que poderíamos tê-la auxiliado a promover outros diferentes tipos de questionamentos e/ou resoluções das situações advindas das atividades efetivadas ao invés de nos mantermos, por vezes, distantes.

Contudo, nosso foco de perspectivas e expectativas, relacionado ao tema, ampliou-se, sobretudo, quando repensamos, diante das situações conceituais, atitudinais e procedimentais surgidas, a nossa própria prática didático-pedagógica ao “finalizarmos” esse trabalho ou quando, posicionamo-nos como aprendizes daquilo que julgamos sabedores, inconclui-lo.

REFERÊNCIAS

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática.** 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010. 158p.

ARAÚJO, J. L.; PINTO, M. M. F.; LUZ, C. R.; RIBEIRO, A. N. Efemeridade dos cenários para investigação em um episódio de sala de aula de Matemática com tecnologias. **Cempem,** Campinas, FE/Unicamp, v. 16, n. 29, p. 7 – 40, jan.-jun. 2008.

BERTINI, L. de F. **Compartilhando conhecimento no ensino de Matemática nas séries iniciais:** uma professora no contexto de tarefas investigativas. 2009. 135p. Dissertação (Mestrado) Universidade Federal de São Carlos.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. Pesquisa qualitativa em educação matemática: notas introdutórias. In: ____________ (Org). **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** 5ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013. 144p.

BRASIL(PAÍS); Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In: PONTE, J. P.; COSTA, C.; ROSENDO, A. I.; MAIA, E.; FIEGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. F. **As atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores.**Lisboa: SEM-SPCE, 2002. p. 5 – 24.

CAMARGO, R. P. **Tarefas investigativas de Matemática:** uma análise de três alunas de 8ª série do Ensino Fundamental, 2006. 120p. Dissertação (Mestrado) Universidade Federal do Paraná.

CANAVARRO, Ana Paula; **Práticas de ensino de matemática:** duas professoras, dois currículos. 2003. 658p. Tese (Doutoramento em Educação). Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa.

D’AMBRÓSIO, B. S. Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. **Pro-posições.** V.4, n. 1, p. 35 – 41, março, 1993.

DOXIADIS, A. **Tio Petros e a Conjectura de Goldbach.** 2ª Ed. São Paulo, 2010, 168p.

ESPÍRITO SANTO (ESTADO). Secretaria da Educação**. Currículo básico escola estadual**. **Ensino Fundamental:** áreas de linguagens e códigos. Secretaria da Educação. Vitória: SEDU, 2009.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, D. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3ª ed. Campinas: Autores Associados, 2012. 228p.

FLOOD, R.; WILSON, R. **A história dos grandes matemáticos**: as descobertas e a propagação do conhecimento através das vidas dos grandes matemáticos. São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda., 2013.

GUERRA, E. D. M.; MEDEIROS, K. M. Investigações Matemáticas no Estudo do Teorema de Pitágoras: explorando o material concreto e a comunicação oral. **Revista Educação Matemática em Foco.** V. 2, n, 2, p. 68 – 99, ago. – dez., 2013.

LAMONATO, M. **Investigando Geometria:** aprendizagens de professoras da educação infantil. 2007. 244p. Dissertação (Mestrado) Universidade Federal de São Carlos.

LAMONATO, M.; PASSOS, C. L. B. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino da matemática. **Zetetiqué.** São Paulo: Unicamp. V. 19, n. 36, p. 51 – 74, jul/dez, 2011.

MACCALI, L. Investigação matemática: possibilidade para o ensino da álgebra no Ensino Fundamental. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 19. 2015, Juiz de Fora. **Anais.** Disponível em<http://www.ufjf.br/ebrapem2015/anais/sessao-d-0111-tarde/>, em 08 de agosto de 2016.

MARCONDES, N. A. V.; BRISOLA, E. M. A. Análise por triangulação de métodos: um referencial para pesquisas qualitativas. **Revista Univap.** V. 20, n. 35, p. 201 – 208, jul. 2014.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica.** 5ª Ed.São Paulo: Editora Atlas, 2003. 331p.

MIORIM, M. A. **Introdução à história da Educação Matemática.** São Paulo: Atual, 1998, 121p.

O'SHEA, D. **A solução de Poincaré:** em busca da forma do universo. Rio de Janeiro: Record, 2009. 348p.

PONTE, J. P. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. **Revista da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação**, v. 2, n.º 2, p. 93-169, junho 2003a.

__________ Investigar, ensinar e aprender. In: PROFMAT, 2003b, Lisboa. **Anais**. Disponível em<http://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/1149/4/%20Investigar%20para%20ensinar%20Matem%C3%A1tica.pdf> em 10 de março de 2016.

PONTE, J.P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H.**Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L.; VARANDAS, J. M.; FERREIRA, C. O trabalho do professor na aula de investigação matemática. **Quadrante.** Lisboa, v. 7, n. 2, p. 41-68, 1998a.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H. M.; CUNHA, M. H.; SEGURADO, M. I. **Histórias de investigações matemáticas.** Lisboa: Instituto de Inovação Educacional. 1998b.

REGINALDO, B. K. S. **Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de Matemática.** 2012. 168p. Dissertação (Mestrado em Educação) Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

ROCHA, M. M. **Um estudo do desenvolvimento de atividades investigativas na aprendizagem de Matemática no Ensino Médio.** 2009. 211p. Dissertação (Mestrado) Universidade Federal do Espírito Santo.

SACRISTÁN, José Gimeno; **O currículo:** uma reflexão sobre a prática. 3ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2000. 352p.

SÃO MATEUS (CIDADE). Programa de Ensino. São Mateus: Secretaria Municipal de Educação. 2003.

SINGH, S.**O Último Teorema de Fermat.**17ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2010. 324p.

SKOVSMOSE, Ole. ***Cenários para investigação.*** BOLEMA – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 14, p.66-91, 2000.

TAHAN, M. **O homem que calculava.** 84ª ed.Rio de Janeiro: Record. 2013. 300p.

WICHNOSKI, P.; KLÜBER, T. E. Uma hermenêutica da produção sobre Investigação Matemática. **Educação Matemática e Pesquisa,** v. 17, n. 2, p. 334 – 351, 2015.

APÊNDICES

APÊNDICE A –
ROTEIRO DE ENTREVISTA – O TRIÂNGULO DE PASCAL

1) Houve dificuldades na compreensão da atividade por parte dos alunos? Como foi essa situação?
2) Como foram as suas abordagens na segunda questão?
3) Houve alguma relação que você não esperava que seus alunos fizessem e que até mesmo você não havia pensado antes? Como você lidou com isso?
4) Como foi o seu tratamento com seus alunos na ultima questão? Algum aluno já havia encontrado uma fórmula geral antes mesmo de chegar a essa questão? Como foi a sua participação nos grupos que tiveram maior dificuldade?
5) Sobre a atividade:
   - Você considera essa uma atividade investigativa?
   - Quais foram as dificuldades dos alunos na busca de regularidades? Como foi a sua experiência de auxiliar os alunos nessa busca? O que foi, para você, mais fácil e o que foi mais difícil, durante a atividade?
   - Quando você percebia que era hora de interceder num grupo? Você conseguia manter a postura interrogativa o tempo todo?
   - Você mudaria algo na sua prática durante a atividade?

APÊNDICE B –

ROTEIRO DE ENTREVISTA – UMA SUCESSÃO COM PALITOS

1) O que você achou dessa atividade? Quais foram as principais diferenças entre a primeira atividade e esta?

2) Como você percebe a diferença entre a introdução desta atividade para a primeira?

3) Quais eram as dúvidas mais frequentes nessa atividade? Como você lidava com elas?

4) Os alunos se concentraram na atividade do início ao fim? O que você acha quer os motivou a isso?

5) Como você contribuiu para que os alunos conseguissem encontrar relações matemáticas?

6) Houve alguma observação ou propriedade desenvolvida por algum aluno ou grupo de alunos que você não havia pensado antes, ou que te surpreendeu por algum motivo? Relate como você lidou com isso.

7) Quais foram as suas impressões sobre o uso dos palitos na atividade?

8) Como os grupos de alunos relacionaram essa atividade com as expressões algébricas? O que você fez para auxiliá-los?

9) Sobre a atividade investigativa no geral:

- Você considera essa uma atividade investigativa? Por quê?
- Quais foram as dificuldades dos alunos na busca de regularidades? Como foi a sua experiência de auxiliar os alunos nessa busca? O que foi, para você, mais fácil e o que foi mais difícil, durante a atividade?
- Quando você percebia que era hora de interceder num grupo? Você conseguia manter a postura interrogativa o tempo todo?
- Você mudaria algo na sua prática durante a atividade?

APÊNDICE C –

ROTEIRO DE ENTREVISTA – QUADRADOS MÁGICOS

De que forma você introduziu essa atividade? Como você se preparou para ela?

Com relação ao primeiro quadrado da atividade, de dimensões 3 x 3 e soma quinze:

- Foi um desafio para os alunos construí-lo sem apresentá-los as regras básicas, de que os números pares devem se opor e os ímpares também, e que o cinco deve estar no centro?
- Como você intercedeu para que os alunos conseguissem chegar a uma resposta sem que lhe fossem tirada a autonomia?
- Quais perguntas você costumava fazer para auxiliar no trabalho do aluno e ainda manter a postura interrogativa?

Sobre a primeira questão:

- Foi possível para os alunos encontrarem novas respostas para o problema?
- Houve alunos que buscaram encontrar novas respostas com números diferentes da sequência de 1 a 9? O que você fez para auxiliá-los?

Sobre a segunda questão:

- Essa questão poderia ter um grau de dificuldade maior, pelo fato do aluno não conhecer a soma, ou menor, pelo fato dele já conhecer as propriedades básicas. O que aconteceu com os grupos de alunos? Como você lidou com isso?
- Até aqui, os alunos já conseguiram perceber a relação entre o valor mediano e o centro do quadrado mágico? Se sim, como ocorreu? Foi necessária a sua ajuda para isso? Se sim, de que forma os ajudou?
- Quais as formas de intervenção que você mais usou durante essa atividade? Por que foi feito dessa forma?
- Até aqui os alunos já conseguiram desenvolver algumas relações que você não esperava que eles percebessem, ou até mesmo que você desconhecia? Como foi e como você lidou com isso?

Sobre a terceira questão:

- O que aconteceu, na turma, com a inserção dos números negativos?
- Como você trabalhou esse novo desafio?
- Houve outras relações descobertas diferentes daquelas já observadas anteriormente?
- A abordagem que você usou durante essa parte da atividade foi diferente das outras partes? O que mudou? Por que mudou?

Sobre a quarta questão:

- Como os alunos tentaram desenvolver essa questão?
- Como você os ajudou a manter o espírito investigativo, mesmo sabendo que não era possível resolver os quadrados mágicos de outra forma?
- Os alunos conseguiram perceber que não era possível resolver o quadrado mágico usando números aleatórios?

Sobre a atividade:

- Você considera essa uma atividade investigativa?
- Quais foram as dificuldades dos alunos na busca de regularidades? Como foi a sua experiência de auxiliar os alunos nessa busca? O que foi, para você, mais fácil e o que foi mais difícil, durante a atividade?
- Quando você percebia que era hora de interceder num grupo? Você conseguia manter a postura interrogativa o tempo todo?
- Você mudaria algo na sua prática durante a atividade?

APÊNDICE D –
ROTEIRO DE ENTREVISTA – OS QUATRO QUATROS

1. De que forma você introduziu essa atividade? Como se preparou pra ela?
2. Foi um desafio para os alunos encontrarem valores diferentes utilizando operações básicas? Como você lidou com isso?
3. Que abordagens você utilizava para auxiliar os alunos? Por que foi feito dessa forma?
4. Quais perguntas você costumava fazer para auxiliar o trabalho dos alunos?
5. Houve alguma descoberta que você não esperava que eles percebessem, ou alguma que você desconhecia? Como lidou com isso?
6. Quando você percebeu que era hora de introduzir o fatorial para a turma? Como eles o receberam?
7. A partir dessa nova operação, houve novas descobertas além das percebidas anteriormente? A abordagem que você usou durante essa parte da atividade foi diferente das outras? Se sim, o que mudou e por que mudou?
8. Sobre a atividade:

   - Você considera essa uma atividade investigativa?
   - Quais foram as dificuldades dos alunos na busca de regularidades? Como foi a sua experiência de auxiliar os alunos nessa busca? O que foi, para você, mais fácil e o que foi mais difícil, durante a atividade?
   - Quando você percebia que era hora de interceder num grupo? Você conseguia manter a postura interrogativa o tempo todo?
   - Você mudaria algo na sua prática durante a atividade?

APÊNDICE E –

CRONOGRAMA DA REALIZAÇÃO DAS ETAPAS

Atividades	Planejamento	Introdução/exploração	Socialização	Avaliação
1ª	04.07.2016	08.07.2016	12.07.2016	18.07.2016
2ª	08.08.2016	09.08.2016	10.08.2016	15.08.2016
3ª	19.09.2016	20.09.2016	20.09.2016	26.09.2016
4ª	03.10.2016	04.10.2016	04.10.2016	10.10.2016