

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Rodrigo Martins de Siqueira Barbosa

Modelos de contrarreação cosmológica

Vitória
2016

RODRIGO MARTINS DE SIQUEIRA BARBOSA

Modelos de contrarreação cosmológica

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Winfried Zimdahl

Co-orientador: -

Vitória

2016

“MODELOS DE CONTRARREAÇÃO COSMOLÓGICA”

RODRIGO MARTINS DE SIQUEIRA BARBOSA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Física.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Winfried Zimdahl
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. —
Universidade Federal do Espírito Santo

Dr. —
—

À minha mãe, meu pai e minha irmã... simplesmente insubstituíveis!

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a minha família, por todos estes anos em que me apoiaram para que eu pudesse concluir este trabalho.

Um agradecimento muito especial ao meu orientador Winfried, que com uma paciência infinita suportou meus atrasos e, de certa forma, até mesmo algumas de minhas irresponsabilidades. Sem ele, tenho sérias dúvidas se este trabalho teria sido concluído! Deixo aqui um agradecimento também ao meu amigo Eddy Chrininos, que me ajudou enormemente na parte numérica deste trabalho, e me ensinou a mexer com algumas das partes mais complexas do Mathematica. Um agradecimento ao Professor Oliver Piatella, que ajudou nos estudos de fundamentação do trabalho, e também aprendi vários truques no Mathematica com ele. Obrigado! Quero agradecer também aos vários amigos que ajudaram no caminho, direta ou indiretamente, como o Rodrigo Lugon, o Edison de Oliveira Santos, Arthur Scadua, dentre outros. Se você não viu seu nome aqui e me ajudou, sintá-se citado!

Este trabalho foi realizado com o financiamento da CAPES.

“The most incomprehensible thing about the world is that it is comprehensible.” (Albert Einstein)

Resumo

A cosmologia padrão requer, para explicar de forma satisfatória os dados observados, componentes de energia que são muito diferentes daquelas que conhecemos no modelo padrão de partículas; estes, são conhecidos como "Energia Escura" e "Matéria Escura". Apesar de bem aceitos, a origem destes ainda é controversa. Uma proposta para tentar explicar tais conceitos é a contrarreação causada pela distribuição não-homogênea de matéria no universo. Neste trabalho apresentamos o formalismo de contrarreação de Buchert, e o utilizamos para demonstrar que uma pressão viscosa pode ser entendida como consequência de uma contrarreação. Depois estabelecemos um modelo de média baseado numa solução de LTB, linearizado com respeito ao parâmetro da curvatura. Fazemos comparação com dados de supernova utilizando uma métrica "modelo" ("template metric") que permite relacionar o desvio para o vermelho neste modelo com uma versão semelhante ao formalismo usual.

Abstract

The standard cosmological picture requires, to explain properly the observable data, energy components that are very unusual compared to the ones we are familiar within the standard model of particles; these are known as "Dark Energy" and "Dark Matter". Even though they are well accepted, their origins are still controversial. One proposal to explain such concepts is the backreaction caused by the inhomogeneity in the matter distribution of the universe. In this work we present the Buchert's backreaction formalism, and we use it to show that a viscous pressure can be understood as a consequence of backreaction. Later, we establish an average model based on an LTB solution, linearized with respect to the curvature parameter. We then compare against the data using a "template" metric that allows us to relate the redshift in this model to a close realization to the usual formalism.

Sumário

1	Introdução	1
2	Cosmologia Padrão	4
2.1	Universo dominado pela matéria	7
2.2	Universo dominado por radiação	7
2.3	Universo dominado por uma constante cosmológica	8
2.4	Dinâmica de Friedmann	9
3	Motivação: O Problema do “Ajuste”	12
4	Formalismo de Buchert	17
4.1	Foliação e equações básicas	18
4.2	Tomando médias das equações de Einstein	20
4.3	Fluido de contrarreação	23
4.4	Exemplo: Constante cosmológica	24
5	Fluido Viscoso como resultado de contrarreação	25
5.1	Fluido viscoso dependente do domínio	25
5.2	Fluido viscoso como contrarreação	27
5.3	Métrica efetiva e distância de luminosidade	32
5.4	Sumário	36
6	A métrica de Lemaître-Tolman-Bondi	39
6.1	Modelos inomogêneos exatos	39
6.2	A solução de Lemaître-Tolman-Bondi (LTB)	40
6.2.1	Comportamento na origem	43
6.2.2	Shell Crossing	44
6.3	Inomogeneidade e distância de luminosidade no modelo LTB	46
7	Análise de contrarreação numa métrica de Lemaître-Tolman-Bondi	48
7.1	Dinâmica de Lemaître-Tolman-Bondi (LTB)	48

7.2	Tomando médias dos escalares de LTB	49
7.3	Soluções para a dinâmica de LTB	51
7.3.1	Soluções gerais	51
7.3.2	Solução de curvatura pequena para $E > 0$	52
7.3.3	Dinâmica das equações médias	53
7.3.4	Contrarreação em segunda ordem	62
7.3.5	Modelos Simples	63
8	Considerações Finais	65
9	Apêndice	68

Lista de Figuras

- 5.1 Dependência do parâmetro de desaceleração em função do parâmetro de desvio para o vermelho (Redshift) $z_D = a_D^{-1} - 1$. Para tempos atuais, $z = 0$ nos fornece um parâmetro de desaceleração negativo, o que nos diz que o universo se expande de forma acelerada. Para redshifts maiores que 1 (no passado), notamos que o parâmetro de desaceleração era positivo, indicando que neste modelo em tempos passados o universo expandia-se de forma desacelerada - até a época $z \approx 1$. Esperamos que no futuro ($z < 0$) o parâmetro de desaceleração se torne cada vez mais negativo, fazendo que a expansão se torne cada vez mais acelerada neste modelo. 30
- 5.2 Dependência das abundâncias fracionárias em função do desvio para o vermelho $z_D = a_D^{-1} - 1$. Nota-se que a medida que o tempo passa, a contribuição da matéria para a expansão torna-se cada vez menor, enquanto a contribuição de curvatura e contrarreação aumentam. A contribuição de curvatura começa a crescer bastante a partir de $z \approx 1$, enquanto que o termo de contrarreação fica cada vez mais negativo. Note que na definição de Ω_Q^D o termo Q_D aparece com um sinal negativo, indicando que um Ω_Q^D negativo implica em Q_D positivo e, portanto, maior contribuição de contrarreação. 31
- 5.3 Dependência do módulo de distância em função do desvio para o vermelho $z_D = a_D^{-1} - 1$. Os três gráficos tem uma boa superposição para os valores de melhor ajuste com os dados do Union 2.1. Nota-se que, para redshifts grandes ($z \approx 1.4$), começam a surgir diferenças entre os modelos. 34

5.4	Ampliação da Fig.5.3. Aqui podemos ver as diferenças entre os modelos, para redshifts altos, comparados com as barras de erros das medidas de distância de luminosidade. Esperamos que, com melhores observações futuras, as barras de erros diminuam e, portanto, poderemos determinar qual modelo de fato melhor descreve a realidade.	35
5.5	Dependência do módulo de distância em função do desvio para o vermelho para o modelo Λ CDM e seu modelo correspondente de contrarreação.	37
7.1	Módulo de distância binada μ_D com dependência do parâmetro de redshift z_D . Verificamos que o modelo reproduz de forma satisfatória os dados de supernovas do JLA.	60
7.2	O plano $\Omega_{R0}^D - h_D$ com curvas de contorno ($1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$) para os testes de SNIa e $\mathcal{H}_D(z_D)$. Verificamos uma tensão entre os valores possíveis para h_D e Ω_{R0}^D praticamente irreconciliável, o que nos sugere que o modelo que estamos trabalhando não fornece uma descrição fiel do universo observável.	61

Lista de tabelas

5.1	Dados de Supernova Ia. Observamos que os modelos que analisamos se adaptam bem aos dados do Union 2.1, pois os valores de χ^2_ν são bastante próximos de 1, e os modelos produzem um valor de melhor ajuste para h que fica próximo de 0.7. O modelo de Fluido de contrarreação acaba se saindo melhor pois ajustamos valores para um número maior de parâmetros do que o modelo Λ CDM. Obtemos também os valores de melhor ajuste para o parâmetro de desaceleração hoje.	38
-----	---	----

Capítulo 1

Introdução

Em cosmologia, buscamos encontrar modelos que descrevem de forma simultânea o maior número possível de dados observacionais que dispomos. Dentre os vários modelos concebidos, um deles se destaca pela simplicidade e, ao mesmo tempo, por descrever de forma adequada quase todos os dados observacionais, que é chamado de “Modelo Padrão da Cosmologia” [7]. Também é conhecido como Λ CDM, onde o Λ indica a presença de uma constante cosmológica, que impulsiona a expansão acelerada do Universo, sugerida por Hubble [8], e “CDM” é uma abreviação para “Matéria Escura Fria” (do inglês “Cold Dark Matter”) , que especula-se ser uma forma de matéria que interage apenas através de interações gravitacionais; foi proposta por Jacobus Kapteyn em 1922[1] como tentativa de explicar a falta de massa das curvas de rotação de galáxias.

Este modelo se baseia em torno de uma métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) que descreve um Universo homogêneo e isotrópico em todas as escalas. Este modelo consegue reproduzir as curvas de luminosidade das Supernovas tipo IA[2][67], e através de perturbações nesta métrica, ou seja, desvios da homogeneidade, conseguem explicar satisfatoriamente as medidas feitas em Radiação Cósmica de Fundo (“CMB”, do inglês “Cosmic Microwave Background”), as abundâncias de Hélio, Hidrogênio e Lítio observadas e a formação de estrutura em largas escalas. Pode-se estender o modelo padrão com modelos de Inflação cósmica e quintessência[6][5], que permitem explicar outros aspectos, como o problema da planaridade e o problema do horizonte.

Ao fazer o confronto do modelo com os dados, obtemos que, hoje, a constante cosmológica (também chamada de “Energia Escura”) é a principal componente que rege a evolução do Universo, com cerca de 69% da composição total de energia, enquanto os outros 30% são compostos de 4% de matéria bariônica e 26% de matéria escura. Isto levanta a questão que, em-

bora tenhamos uma teoria que descreve de forma bastante satisfatória os dados observacionais, ela precisa de conceitos que não são bem fundamentados com o nosso conhecimento atual; Não conhecemos a origem da constante cosmológica, e não temos evidências experimentais da existência de matéria escura (apenas observacionais!). Não só isto, mas estas duas componentes correspondem a 96% do balanço de energia do Universo atual.

Se analisamos a evolução das componentes de energia desde um passado muito distante até o presente, notamos que a era de dominação pela constante cosmológica é um evento muito recente. É notório que formação de estruturas em larga escala no universo também é um evento recente, e não é surpreendente a proposição que pudesse haver uma correlação entre os dois eventos.

É previsto pelo modelo padrão a formação de estruturas em larga escala através da teoria de perturbações lineares. Porém, sabe-se que a Relatividade Geral é uma teoria altamente não-linear e, portanto, haveria uma escala para a qual as perturbações lineares se tornariam cada vez menos eficientes em descrever a realidade. Esta escala corresponde precisamente à formação de estruturas bastante complexas, como a rede cósmica.

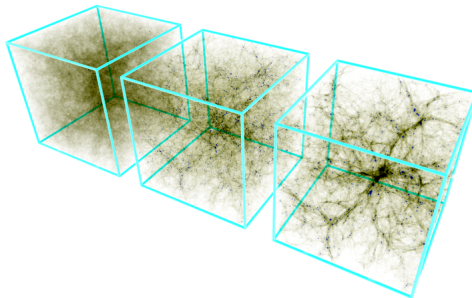


FIG.1: Simulação de N-corpos do “The Millennium Simulation Project”.

É posta então a seguinte questão: Temos ao nosso redor um Universo que é altamente inhomogêneo e anisotrópico, e que sabemos que perto de nós a teoria da Relatividade Geral é válida (pelo menos em escalas próximas do sistema solar), e também sabemos que em grandes escalas o Universo é muito bem modelado pelo modelo padrão Λ CDM. Existem várias propostas que tentam conciliar estes fatos, incluindo modelos que modificam a Relatividade Geral em largas escalas [5]. Uma outra proposta, que é a aplicada neste trabalho, consiste em considerar que tomando um número grande de regiões inhomogêneas, é possível construir observáveis que se relacionam àqueles obtidos em observações de larga escala. Ou seja, considerando os efeitos médios de um número de regiões inhomogêneas, podemos obter uma descrição que é “estatisticamente homogênea”, e com isto relacionar observações em pequenas escalas àquelas em grandes escalas.

Para implementar esta proposta, devemos considerar a idéia de tomar médias das quantidades relevantes em Relatividade Geral. E desde já, notamos um empecilho: não existe uma forma unívoca de calcular a média de quantidades vetoriais e tensoriais e, mesmo que escolhamos uma forma, não há garantias de que estas quantidades possuem conexão com as observações. Existem propostas para lidar com esta idéia de médias de quantidades tensoriais [4], mas vamos nos concentrar em outra idéia neste trabalho.

Buchert propôs uma forma de evitar estes problemas, considerando apenas médias de quantidades escalares[24]. Propõe-se então um procedimento de média, e avalia-se a média das equações de Einstein, descritas de forma a evidenciar estas quantidades escalares (As equações de Einstein são reescritas como equações diferenciais de primeira ordem vinculadas). Estas equações médias evidenciam a existência de componentes extras - relacionadas com a contrarreação - que está diretamente relacionada ao quanto a distribuição de matéria se distancia da homogeneidade e isotropia; Salientamos que esta componente de contrarreação evolui durante a história do Universo da mesma forma que uma energia escura - O que nos leva naturalmente a perguntar se a constante cosmológica é na verdade uma medida do tanto que a formação de estruturas se desviou da homogeneidade.

Faremos uma breve descrição de como este trabalho se organiza:

No Capítulo 2 fazemos uma breve revisão da cosmologia padrão Λ CDM, com o intuito de lembrar os conceitos básicos e fixar a notação que utilizaremos no restante do trabalho. No Capítulo 3 introduzimos o formalismo de Buchert, indicando como obter as equações de Einstein no formalismo 3+1 covariante e, através da definição de uma média, obtemos as equações de Friedmann médias, em conjunto com as equações de consistência da teoria, e deduzimos o termo de contrarreação. No Capítulo 4 fazemos uma descrição da energia escura como um fluido viscoso, e comparamos esta descrição com dados de supernova. Aplicamos, em seguida, o formalismo de Buchert para este fluido viscoso, e utilizando o método de métrica efetiva, comparamos com os dados de supernovas. No Capítulo 5 introduzimos a métrica LTB e deduzimos as quantidades relacionadas a este modelo, como o tempo de Big Bang, o parâmetro de Hubble, dentre outros. Em seguida, aplicamos o procedimento de média de Buchert para obter a expressão do fator de escala médio e da contrarreação para este modelo. Finalmente utilizamos o método de métrica efetiva para calcular as distâncias de luminosidade e comparar com os dados de supernova. No Capítulo 6 fazemos as conclusões do trabalho, avaliando como os modelos se comportaram, quais foram as dificuldades enfrentadas, e quais são as projeções para a continuação deste trabalho.

Capítulo 2

Cosmologia Padrão

O modelo FLRW é conhecido também como o modelo padrão da cosmologia. É baseado na métrica de Robertson-Walker, que em coordenadas esféricas pode ser escrito como [41]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sinh^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (2.1)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala e não possui dimensão, e $\kappa \in \{-1, 0, 1\}$ corresponde à curvatura espacial e possui dimensão $[\kappa] = [\text{Comprimento}]^{-2}$. O fator de escala controla a expansão ou contração do espaço-tempo. A métrica também pode ser escrita como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2.2)$$

onde $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\phi^2$ corresponde ao ângulo sólido diferencial. O parâmetro de Hubble é definido em termos do fator de escala como:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (2.3)$$

Assumimos que o espaço é preenchido com um fluido perfeito caracterizado por uma densidade $\rho(t)$, e uma pressão $p(t)$. O tensor de energia-momento pode ser expresso como

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

onde u^μ corresponde às componentes da quadri-velocidade do fluido. No referencial de repouso do fluido, onde $u = (1, 0, 0, 0)$, o tensor de energia-momento pode ser escrito como

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}[-\rho, p, p, p] \quad (2.5)$$

A pressão é relacionada à densidade de energia através de uma equação de estado, que é considerada na forma

$$p = \omega\rho. \quad (2.6)$$

O valor de ω depende do tipo de matéria que está sendo considerado. Para matéria não-relativística, $\omega = 0$. Isto implica que matéria que se move lentamente (comparada à velocidade da luz), forma um fluido sem pressão. Para o caso de radiação, $\omega = 1/3$. Para a constante cosmológica, $\omega = -1$. Aplicando as equações de Einstein para a métrica de Robertson-Walker, junto com as hipóteses acima, obtemos as duas equações conhecidas como a Equação de Friedmann e a Equação de Raychaudhuri, respectivamente:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2}, \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \end{aligned} \quad (2.7)$$

As equações de Friedmann relacionam as quatro quantidades $p(t)$, $\rho(t)$, $a(t)$ e κ . A pressão $p(t)$ pode ser eliminada das equações de Friedmann utilizando a equação de estado. As duas equações de Friedmann podem ser utilizadas para resolver para $\rho(t)$ e $a(t)$ em termos de κ . A densidade pode ser resolvida explicitamente, para um valor constante de ω :

$$\rho(t) = \rho_0 \left[\frac{a(t)}{a_0} \right]^{-3(1+\omega)}, \quad (2.8)$$

onde $\rho_0 \equiv \rho(t_0)$ e $a_0 \equiv a(t_0)$ para um tempo inicial t_0 . O tempo inicial pode ser colocado como zero, $t_0 = 0$. Para obter uma expressão explícita para o fator de escala precisamos fazer escolhas para os valores de ω e κ ; iremos analisar estas opções em breve.

Podemos explicitar um pouco mais o significado exato da constante κ . O escalar de Ricci para o espaço-tempo de Robertson-Walker, calculado de (2.1), é dado por:

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (2.9)$$

As equações de Friedmann (2.7) podem ser utilizadas para escrever o escalar de Ricci (2.9) como:

$$R = 8\pi G(1 - 3\omega)\rho_0 \left[\frac{a(t)}{a_0} \right]^{-3(1+\omega)}. \quad (2.10)$$

Analisando (2.10) podemos ver que existem dois casos para o qual o escalar de Ricci se anula: um é para o caso em que o universo é vazio, $\rho = 0$, e o outro é para o caso de um universo dominado por radiação, $\omega = 1/3$. Consideremos agora uma foliação espacial com tempo constante t_0 . A métrica induzida na parte espacial é dada por

$$d\bar{s}^2 = a^2(t_0) \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (2.11)$$

O escalar de Ricci da foliação espacial, calculada através de (2.11) é dada por

$$\bar{R} = \frac{6\kappa}{a^2(t_0)}. \quad (2.12)$$

Portanto κ é proporcional ao escalar de Ricci da foliação espacial a tempo constante. O caso $\kappa = 0$, por exemplo, indica que cada foliação a tempo constante é plana, mas isso não implica necessariamente que o espaço-tempo seja plano.

A métrica de Robertson-Walker pode ser expressa em outras coordenadas diferentes. Primeiro note que a distância própria σ através de um caminho radial (ou seja, um caminho em que $dt = d\theta = d\phi = 0$) é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \sqrt{d\bar{s}^2} = \int_0^r \sqrt{\frac{a^2}{1 - \kappa r^2}} dr^2 \\ &= a \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} dr = \begin{cases} a(t)r & , \text{para } \kappa = 0, \\ a(t)\text{sen}^{-1}r & , \text{para } \kappa = 1, \\ a(t)\text{senh}^{-1}r & , \text{para } \kappa = -1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Portanto a coordenada r nem sempre é uma boa medida de distância, e algumas vezes é preferível utilizar uma coordenada diferente:

$$\chi \equiv \begin{cases} r & , \text{para } \kappa = 0, \\ \text{sen}^{-1}r & , \text{para } \kappa = 1, \\ \text{senh}^{-1}r & , \text{para } \kappa = -1. \end{cases} \quad (2.14)$$

A métrica de Robertson-Walker, nas coordenadas (t, χ, θ, ϕ) então pode ser escrita como

$$ds^2 = \begin{cases} -dt^2 + a^2(t) (d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2) & , \text{para } \kappa = 0, \\ -dt^2 + a^2(t) (d\chi^2 + \text{sen}^2 \chi d\Omega^2) & , \text{para } \kappa = 1, \\ -dt^2 + a^2(t) (d\chi^2 + \text{senh}^2 \chi d\Omega^2) & , \text{para } \kappa = -1. \end{cases} \quad (2.15)$$

Vamos agora detalhar os casos especiais para um universo FLRW.

2.1 Universo dominado pela matéria

O universo dominado por matéria é um caso especial do universo FLRW onde $\kappa = 0$ e $\omega = 0$. A densidade de matéria pode ser expressa em termos do fator de escala como

$$\rho(t) = \rho_0 a_0^3 a^{-3}(t) \quad (2.16)$$

As equações de Friedmann (2.7) se reduzem a:

$$\dot{a}(t) = \sqrt{2A_M a^{-1}(t)}, \quad (2.17)$$

onde $A_M \equiv \frac{4\pi G}{3} \rho_0 a_0^3$. Resolvendo a equação (2.17), temos

$$a(t) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{A_M} t + a_0^{3/2} \right)^{2/3}.$$

Utilizando (2.10) encontramos que o escalar de Ricci neste espaço-tempo se torna:

$$R = 6A_M \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{A_M} t + a_0^{3/2} \right)^{-2}.$$

2.2 Universo dominado por radiação

O universo dominado por radiação é um caso especial do universo FLRW onde $\kappa = 0$ e $\omega = 1/3$. A densidade de radiação pode ser escrita em termos do fator de escala como:

$$\rho(t) = \rho_0 a_0^4 a^{-4}(t). \quad (2.18)$$

As equações de Friedmann se reduzem a:

$$\dot{a}(t) = \sqrt{2A_R a^{-2}(t)}, \quad (2.19)$$

onde $A_R \equiv \frac{4\pi G}{3} \rho_0 a_0^4$. Resolvendo (2.19) temos

$$a(t) = \left(2^{\frac{3}{2}} \sqrt{A_R} t + a_0^2 \right)^{1/2}. \quad (2.20)$$

Utilizando (2.10) pode-se mostrar que o escalar de Ricci para este espaço-tempo é $R = 0$.

2.3 Universo dominado por uma constante cosmológica

Outro caso especial do universo FLRW é um na qual tanto matéria quanto radiação estão ausentes, mas a constante cosmológica tem um valor diferente de zero. Neste caso, $\kappa = 0$ e $\omega = -1$. A densidade pode ser expressa como

$$\rho(t) = \rho_0. \quad (2.21)$$

As equações de Friedmann (2.7) se reduzem a

$$\dot{a}(t) = \sqrt{2A_\Lambda} a(t), \quad (2.22)$$

onde $A_\Lambda \equiv \frac{4\pi G}{3} \rho_0$. Resolvendo a equação diferencial (2.22), obtemos

$$a(t) = a_0 e^{\sqrt{2A_\Lambda} t}. \quad (2.23)$$

Utilizando (2.19) pode-se ver que o parâmetro de Hubble é constante, $H(t) = \sqrt{2A_\Lambda}$. Portanto, a equação (2.23) pode ser escrita como

$$a(t) = a_0 e^{H_0 t}.$$

Desenvolvendo (2.10) descobrimos que o escalar de Ricci neste espaço-tempo é dado por

$$R = 32\pi G \rho_0 = 24A_\Lambda = 12H_0^2.$$

Esta constante de curvatura positiva assemelha-se a um espaço-tempo de de-Sitter. De fato, este espaço-tempo é realmente apenas um pedaço de um espaço-tempo de de Sitter escrito em coordenadas diferentes; é normalmente conhecido na literatura como universo de Sitter[9].

A constante cosmológica pode ser analisada como uma forma de matéria, ou de forma mais precisa, como uma energia de vácuo de algum campo de matéria. A motivação para esta interpretação está nas equações de Einstein com constante cosmológica, que podem ser escritas de forma que o termo de constante cosmológica aparece como uma contribuição ao tensor de energia-momento:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \right).$$

Em teoria quântica dos campos, o estado fundamental pode ser escrito num tensor momento-energia que se assemelha a um fluido perfeito em repouso (num referencial comóvel ao fluido). Ou seja, a quadri-velocidade deste fluido em coordenadas comóveis (t, r, θ, ϕ) é $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Portanto

$$(\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}.$$

Escrevendo esta equação como $(\rho + p) u_\mu u_\nu = \left(-\frac{\Lambda}{8\pi G} - p\right) g_{\mu\nu}$, é fácil de ver que

$$\rho = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (2.24)$$

$$p = -\frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (2.25)$$

O termo de constante cosmológica pode ser escrito em termos de outras constantes como

$$\Lambda = 8\pi G \rho_0 = 6A_\Lambda = 3H_0^2.$$

2.4 Dinâmica de Friedmann

Para descrever a dinâmica de um universo homogêneo e isotrópico em expansão deve ser retomada a equação de Einstein com a constante cosmológica (2.3), na qual o tensor de energia-momento é dado por (2.5) e o tensor métrico é dado pela métrica de FLRW.

O tensor de energia-momento do universo como um todo é dado pela soma dos tensores de energia-momento de cada componente descrita na seção anterior

$$T^{\mu\nu} = T_m^{\mu\nu} + T_r^{\mu\nu} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \rho_m + \rho_r \\ p = p_r \end{cases}.$$

Uma vez que a homogeneidade e isotropia do universo garantem que as quadravelocidades para cada componente sejam as mesmas, de fato a soma dos tensores de energia-momento mantém a forma de um fluido perfeito.

A componente temporal das equações de Einstein resulta na relação que é conhecida como equação de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3}.$$

Já espacialmente as equações de Einstein resultam na equação para a aceleração do universo

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}.$$

A partir deste resultado fica claro que para a descrição de uma fase de expansão acelerada para o universo é necessário um fluido com pressão negativa, ou então uma constante cosmológica diferente de zero.

Combinando a derivada temporal da equação de Friedmann com a equação (2.4) obtém-se o seguinte resultado para a derivada temporal do parâmetro de Hubble

$$\dot{H} = -\frac{4\pi G}{3H}\dot{\rho} + \frac{K}{a^2}.$$

Para cada componente do universo é conveniente definir a quantidade Ω_A , denominado parâmetro de densidade, que é definido como a razão da densidade de energia de uma determinada componente com uma densidade crítica $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$

$$\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho_m, \quad \Omega_r = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho_r, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad \Omega_K = -\frac{K}{H^2}.$$

Com essas definições a equação de Friedmann se escreve

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1.$$

Fica claro que o significado físico do parâmetro de densidade de uma determinada componente representa a sua fração na composição do universo. A partir da equação (2.4) pode-se ilustrar como a geometria do espaço-tempo está relacionada com a distribuição de matéria no universo. Reunindo todo o conteúdo material em um único parâmetro de densidade $\Omega_t = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda$, é possível relacionar a distribuição da matéria com a curvatura do espaço-tempo

$$\Omega_t - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}.$$

Dessa forma a geometria do espaço-tempo pode assumir três características distintas:

$$\begin{cases} \Omega_t > 1 \Rightarrow & \text{Espaço-tempo fechado (esférico)} \\ \Omega_t < 1 \Rightarrow & \text{Espaço-tempo aberto (hiperbólico)} \\ \Omega_t = 1 \Rightarrow & \text{Espaço-tempo plano} \end{cases}.$$

Recentemente, estudos realizados pela Agência Espacial Européia, feitos com o telescópio Planck, divulgaram valores para os parâmetros de densidade atual de cada componente [7]. Segundo esse estudo, a componente de matéria Ω_{m_0} corresponde a aproximadamente 31,35% do universo, onde 4,9% corresponde ao percentual de matéria bariônica Ω_{b_0} e o resto corresponde à porção de matéria escura. Já a energia escura é responsável por 68,25% da energia cósmica.

Uma vez que o modelo Λ CDM não prevê interação entre suas componentes, a evolução de cada uma deles deve se dar de forma independente, satisfazendo as equações (2.17),(2.19) e (2.23). Combinando esse resultado

com a equação de Friedmann (2.4) é possível obter uma dependência temporal em termos do fator de escala, para o parâmetro de Hubble

$$H^2 = H_0^2 (\Omega_{r0}a^{-4} + \Omega_{m0}a^{-3} + \Omega_{K0}a^{-2} + \Omega_{\Lambda0}),$$

onde H_0 é o valor atual do parâmetro de Hubble e é estimado em $H_0 = 69 \text{ Km/s} \times \text{Mpc}$.

Capítulo 3

Motivação: O Problema do “Ajuste”

Ao estudarmos a cosmologia utilizando o modelo padrão Λ CDM, por muitas vezes nos acostumamos com a simplicidade e elegância dele, e passa despercebido uma grande quantidade de hipóteses sobre como fazemos cosmologia e a relação entre nossos modelos e as observações. O “Problema do Ajuste” nos faz questionar até que ponto o modelo padrão tem sua validade garantida. Seguimos aqui a linha argumentativa proposta por Ellis[17].

Em cosmologia, nós tentamos encontrar a distribuição de matéria em larga escala e a estrutura do espaço-tempo através de observações astronômicas. Nós podemos encarar este problema de duas formas diferentes: Uma, que é a caminho que normalmente se toma, consiste em fazer considerações *a priori* sobre a geometria do espaço-tempo, baseada em argumentos filosóficos ou pragmáticos; normalmente concluímos que devemos partir de um universo homogêneo e isotrópico em grandes escalas (que corresponde ao princípio cosmológico[10][11]). Disto, podemos concluir que o universo é, de forma bastante precisa, descrito através de modelo de FLRW, e o objetivo principal da cosmologia observacional é relacionar os dois ou três parâmetros livres da teoria com os dados observacionais.

A segunda forma, consiste em fazer o caminho oposto: A partir dos dados observacionais, determinar a geometria do espaço-tempo sem ter de fazer qualquer consideração *a priori*. Este caminho, todavia, nos apresenta um grande número de dificuldades para descrever a geometria do espaço-tempo de forma realista.

Ambos caminhos, de certa forma, não conseguem resolver de forma simultânea todos os problemas relacionados às observações: o primeiro, porque o universo que observamos ao nosso redor não é FLRW em algumas escalas, e

esta solução não nos aponta um caminho para descobrir quais são as escalas na qual este modelo é aplicável, e também não considera os problemas de ter de descrever várias dinâmicas relacionadas a diferentes escalas de inhomogeneidades. Já o segundo caminho tem dificuldades de natureza prática em se relacionar as quantidades observadas com as quantidades previstas teoricamente.

O “problema do ajuste”

Um outro caminho possível, que é de certa forma uma mistura das duas descrições, é baseada no que se chama de “Problema do Ajuste” (do inglês “Fitting Problem”) [19]. A ideia básica aqui é a que não assumimos *a priori* que o universo é modelado por uma métrica FLRW em todos os tempos, mas ainda assim queremos utilizar tal modelo por motivos práticos e históricos. Enfrentamos então a seguinte situação: Temos de um lado um modelo cosmológico “granular” $U = \{M, g_{\mu\nu}, u^\mu, \rho, n\}$ que consiste em uma variedade M , um tensor métrico $g_{\mu\nu}(x^\mu)$, uma 4-velocidade normalizada $u^\mu(x^\mu) : u^\mu g_{\mu\nu} u^\nu = -1$, variáveis dinâmicas da matéria, aqui simbolizadas pela densidade de energia ρ (que em geral pode incluir outras quantidades como a pressão p), e outras variáveis da matéria, simbolizadas pelo número de densidade de galáxias n (mas em geral incluindo especificações mais detalhadas da distribuição de matéria luminosa no universo), que juntos fornecem uma representação realística do universo, incluindo todas as inhomogeneidades até uma certa escala específica L ; e do outro lado um modelo FLRW completamente idealizado $U' = \{M', g'_{\mu\nu}, u'^\mu, \rho', n'\}$. Nosso problema consiste em como determinar um ‘melhor ajuste’ entre estes dois modelos cosmológicos. Isto então irá determinar a forma correta na qual devemos utilizar a cosmologia idealizada de FLRW U' para modelar a natureza irregular do universo real (representado aqui pelo modelo granular U). Encaramos o problema de forma parecida como resolvemos o problema da geodésica, onde utilizamos uma esfera perfeita para modelar a Terra, que na verdade tem um formato aproximadamente oval; Os desvios do modelo perfeito podem então ser medidos e caracterizados.

Esta forma de se encarar o problema das observações em cosmologia tem o potencial de esclarecer as interpretações físicas e geométricas do modelo FLRW que utilizamos, precisamente porque ele se concentra na relação entre o modelo suave idealizado e uma outra descrição mais realística da realidade. Em particular, esta forma de encarar o problema deve ser capaz não só de determinar um modelo FLRW de melhor ajuste para o universo, mas também especificar detalhes de como este ajuste é feito (dando a diferença entre os dois modelos em cada ponto do espaço-tempo), e portanto nos per-

mitir investigar o quão bom o ajuste é (caracterizando o quão adequado à realidade o modelo suavizado se aproxima do real). Parte do pragmatismo deste caminho consiste em que, uma vez que o procedimento adequado é implementado, deve ser possível utilizá-lo de forma repetida; ou seja, ao considerar o melhor ajuste entre qualquer modelo de universo granular U' e um modelo U'' que descreve de forma ainda melhor o universo real do que U' , U'' fornecerá ainda mais detalhes sobre a maneira de como as inomogeneidades estão distribuídas. Este processo, em princípio, permitiria escrever a melhor descrição possível em qualquer nível de detalhe desejado.

Um dos modelos que possivelmente podem resolver este problema consiste em considerar um universo granular U' , e tentar relacioná-lo a um universo FLRW U através de um procedimento de média adequado. Vamos nos concentrar neste modelo.

Procedimentos de média

Uma forma importante de se pensar no uso de um modelo suavizado é que este representa as propriedades médias de um modelo granular. Considere que a descrição suavizada U^* seja obtida a partir de uma descrição granular U através de um determinado procedimento de média; Ele então representa a natureza de U quando descrito em uma determinada escala L , onde se toma a média. Se, de fato, faz sentido descrever a natureza de larga escala de U através de uma métrica FLRW, então o modelo FLRW de melhor ajuste U' deve ser o mesmo que o modelo médio U^* . Um procedimento de média apropriado deve ser capaz de fornecer uma maneira de estabelecer a relação entre U e U' . Em particular ele deve determinar a escala L apropriada para se efetuar a média para se obter um modelo suavizado; ou seja, deveria levar a uma afirmação de que o universo U pode ser considerado um universo FLRW, U' , se toma-se a média em uma determinada escala L .

Em [12], Carfora e Marzuoli sugeriram uma forma de realizar o ajuste de um modelo FLRW U' , a um modelo granular U , e se baseia no conceito de que o universo U' deve representar de forma precisa o comportamento médio de um modelo U , mais realista.

A forma mais fácil de analisar é quando o espaço-tempo é descrito como um produto direto de cortes espaciais Σ, Σ' e enumeradas por um parâmetro temporal t . Isto requer que o modelo FLRW suavizado tenha uma curvatura espacial positiva ($k = +1$), ou que seja um “universo pequeno” com uma topologia incomum. [Ellis e Schreiber, 1986]. Se exigimos que o modelo suavizado U' represente um comportamento médio de um modelo granular U , quais são os requerimentos em que isto implica? Para compará-los precisamos escolher um tempo próprio apropriado τ, τ' para as famílias de superfícies

Σ, Σ' nos dois universos. Podemos então especificar o modelo FLRW que desejamos, exigindo que

(i) O comportamento do volume nos dois universos seja o mesmo, ou seja, que o volume total V das seções espaciais Σ deve ser a mesma função de τ que o volume total Σ' é para τ' ;

(ii) A densidade de energia ρ' em Σ' (τ') tem que ser a média sobre $\Sigma(\tau)$ de ρ para o valor de τ correspondendo a τ' , e a pressão média p' em Σ' (τ') seja a média de p sobre $\Sigma(t)$. Neste caso o modelo U' iria reproduzir precisamente o comportamento do volume, da densidade e da pressão médios no modelo granular mais realista U .

O primeiro problema é que, enquanto existe uma escolha óbvia para a foliação espacial no caso FLRW (universo U'), em geral não haverá uma foliação preferida para U (a menos que existam superfícies homogêneas em U). Portanto o critério não é único: podemos obter respostas diferentes simplesmente por mudar a maneira como realizamos a foliação no mesmo universo U . Podemos, por exemplo, escolher superfícies de densidade constante ou superfícies ortogonais ao fluxo de matéria (no caso de vorticidade nula). Isto se torna ainda mais problemático ao notarmos que, ainda que escolhamos uma maneira de realizar a foliação, a maneira como determinamos τ e τ' não é única. As dificuldades aqui são essenciais, e surgirão em qualquer tentativa de se discutir a evolução temporal do universo através de um processo de média definido em superfícies de tipo tempo.

O segundo problema consiste que, ao se tomar médias das quantidades como volumes, energias e pressões, em geral levarão a modelos FLRW que não obedecem às equações de Einstein, porquê os processos de média espacial e de se avaliar as equações de Einstein não comutam [19]. De forma mais específica, se substituimos a função radial $R'(\tau')$ correspondendo ao comportamento médio do volume $V'(\tau')$ nas equações de Einstein para um universo FLRW U' , vamos obter delas quantidades $\rho^*(\tau)$ e $p^*(\tau)$ que não correspondem à $\rho(\tau)$ e $p(\tau)$. A forma de se lidar com isto consiste em considerar ρ^* e p^* (que são valores efetivos da energia e da pressão) como se elas levassem em conta contribuições da suavização da granularidade presente em escalas de descrição mais detalhadas [Carfora e Marzuilo, 1984]; Fisicamente estes representam as contribuições para a energia média total efetiva das ondas gravitacionais, energia de ligação de objetos compactos, etc (que não estão incluídos no procedimento de média que leva a ρ' e p'). Definimos o modelo médio de FLRW simplesmente tomando o seu comportamento volumétrico; a diferença entre a densidade média ρ' e a pressão p' e os valores obtidos de FLRW ρ^* e p^* é então definida como sendo a contribuição destas quantidades devido às inhomogeneidades em pequena escala.

Entendendo isto, o procedimento de média pode então fornecer um proce-

dimento de ajuste que, dada a escolha de foliação espacial, um único modelo FLRW U' será associado a U . Ainda assim, persistem os problemas da arbitrariedade da escolha do tempo próprio τ ; por exemplo, esta relação entre as observações astronômicas nos dois modelos é obscura.

Uma possível realização do modelo de Carfora e Marzuoli foi feita por Buchert [24], e este será o objeto de estudo do próximo capítulo.

Capítulo 4

Formalismo de Buchert

As equações de Einstein, na forma que conhecemos atualmente, são muito bem testadas em distâncias curtas, com um bom nível de precisão entre dados e teoria, e fornecem uma base para a descrição da física em escalas cosmológicas através de um fluido, que pode incluir matéria bariônica, matéria escura, um termo de constante cosmológica (quintessência). Enquanto estes pontos já foram discutidos no capítulo anterior, um ponto importante resta a ser discutido: o domínio de validade das hipóteses que impomos para construir a cosmologia padrão.

Supomos, a priori, que a matéria se move no espaço como um fluido, e está distribuído de maneira homogênea e uniforme. Esta descrição produz resultados realmente impressionantes para dados observacionais de desvio para o vermelho de supernovas, oscilações acústicas dos bárions, e até mesmo para nucleossíntese. Porém ao observarmos nas nossas redondezas, não é o que observamos: vemos algo completamente inhomogêneo e anisotrópico. Isto sugere que existe uma certa escala na qual uma descrição homogênea e isotrópica deixa de funcionar, e uma descrição completamente local se torna impraticável.

Porém, escolher um procedimento de média não é algo trivial; as equações de Einstein se tratam de um conjunto altamente não-linear de equações diferenciais que tem como objetos principais tensores. Um procedimento que tomaria o valor médio dessas equações deveria produzir valores médios para esses tais tensores, e ainda teria de produzir uma teoria covariante. Existem tentativas de produzir tal teoria [4], mas tomamos uma forma diferente de analisar o problema. Visto que grande parte dos observáveis que estamos interessados em cosmologia se tratam de escalares (estes explicitamente covariantes), podemos analisar as equações de Einstein que evidenciam estes observáveis. Para isso, escolhemos trabalhar com o formalismo ADM[13].

4.1 Foliação e equações básicas

Vamos considerar aqui o caso em que temos, como componentes de matéria, apenas poeira (sem pressão). Para o caso em que o referencial se move com o fluido, podemos construir hipersuperfícies ortogonais à velocidade, e representar eventos numa foliação 3+1 do espaço-tempo.

Temos as equações de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi\rho u_\mu u_\nu + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

com o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, seu traço R , a quadrivelocidade do fluido u^μ ($u^\mu u_\mu = -1$), a constante cosmológica Λ , e a densidade massa ρ , que obedece a lei de conservação

$$(\rho u^\mu u^\nu)_{;\mu} = 0. \quad (4.2)$$

Escolhemos um sistema de coordenadas ortogonal ao fluxo $x^\mu = (t, X^k)$ (também chamado de coordenadas comóveis). Escrevendo $x^\mu = f^\mu(X^k, t)$ temos imediatamente $u^\mu = \dot{f}^\mu = (1, 0, 0, 0)$ e $u_\mu = \dot{f}_\mu = (-1, 0, 0, 0)$, onde o ponto significa derivada temporal com relação ao tempo próprio t .

Consideremos que as coordenadas (X^μ, t) sejam as variáveis independentes. Podemos então, prosseguir em escrever a métrica como uma decomposição entre uma parte temporal e uma 3-métrica independente, na forma

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}dX^i dX^j,$$

As equações de Einstein (4.1), em conjunto com as equações de continuidade (4.2) (contraídas com u_ν) são equivalentes ao seguinte sistema de equações [13][14], que são equações de vínculos:

$$\frac{1}{2}(\mathcal{R} + K^2 - K_j^i K_i^j) = 8\pi G\rho + \Lambda, \quad (4.3)$$

$$K_{j||i}^i - K_{|j} = 0,$$

onde $K_{ij} := -h_i^\alpha h_j^\beta u_{\alpha;\beta}$ é o tensor de curvatura extrínscica e $h_{\alpha\beta} := g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta$ o tensor de projeção ortogonal na 3-superfície. As equações que dão a dinâmica de evolução da densidade e das outras formas fundamentais (g_{ij} e K_{ij}) são

$$\dot{\rho} = K\rho, \quad (4.4)$$

$$(g_{ij})^\cdot = -2g_{ik}K_j^k, \quad (4.5)$$

$$(K_j^i)^\cdot = KK_j^i + \mathcal{R}_j^i - (4\pi G\rho + \Lambda)\delta_j^i. \quad (4.6)$$

As quantidades $\mathcal{R} = \mathcal{R}_i^i$ e $K = K_i^i$ correspondem aos traços do tensor de Ricci espacial \mathcal{R}_{ij} e o tensor de curvatura extrínica K_{ij} , respectivamente. Expressando este último em termos de quantidades cinemáticas

$$-K_{ij} = \Theta_{ij} = \sigma_{ij} + \frac{1}{3}\theta g_{ij}, \quad (4.7)$$

$$-K = \theta, \quad (4.8)$$

sendo Θ_{ij} o tensor de expansão, σ_{ij} o tensor de cisalhamento (com traço nulo), e o fator de expansão θ , podemos escrever as equações (4.3) e (4.5) como

$$\frac{1}{2}\mathcal{R} + \frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^2 = 8\pi G\rho + \Lambda, \quad (4.9)$$

$$\sigma_{j||i}^i = \frac{2}{3}\theta_{|j}, \quad (4.10)$$

$$\dot{\rho} = -\theta\rho, \quad (4.11)$$

$$(g_{ij})' = 2g_{ik}\sigma_j^k + \frac{2}{3}\theta g_{ik}\delta_j^k, \quad (4.12)$$

$$(\sigma_j^i)' = -\theta\sigma_j^i - \mathcal{R}_j^i + \frac{2}{3}\delta_j^i \left[\sigma^2 - \frac{1}{3}\theta^2 + 8\pi G\rho + \Lambda \right], \quad (4.13)$$

onde introduzimos o cisalhamento $\sigma^2 := \frac{1}{2}\sigma_j^i\sigma_i^j$. Para derivar esta última, utilizamos a equação de Raychaudhuri

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 + 2\sigma^2 + 4\pi G\rho - \Lambda = 0, \quad (4.14)$$

que segue do traço da equação (4.9) combinada com o vínculo (4.13). Utilizando o vínculo (4.9) novamente, podemos escrever a equação (4.13) como

$$(\sigma_j^i)' + \theta\sigma_j^i = - \left(\mathcal{R}_j^i - \frac{1}{3}\delta_j^i \mathcal{R} \right). \quad (4.15)$$

Tomando o traço de (4.5), escrita na forma

$$K_j^i = -\frac{1}{2}g^{ik}(g_{kj})',$$

e definindo

$$J(t, X^i) := \sqrt{\det(g_{ij})},$$

nós obtemos com $\frac{1}{2}g^{ik}(g_{kj})' = (\ln J)'$ a identidade

$$\dot{J} = -KJ = \theta J.$$

Utilizando-a nós podemos integrar a equação de continuidade para a densidade de massa (4.4) comóvel às linhas de fluxo:

$$\rho(t, X^i) = (\rho(t_0, X^i) J(t_0, X^i)) J^{-1}. \quad (4.16)$$

Tanto as equações de Raychaudhuri (4.14) quanto a equação de continuidade integrada (4.16) são idênticas às suas versões Newtonianas [15]. No que segue, vamos fazer uso do vínculo (4.9). Esta equação proverá um elemento chave para a compreensão do problema de contrareação.

É oportuno neste momento, definir duas quantidades escalares invariantes que iremos utilizar logo adiante, que denotamos através dos símbolos \mathbf{I} e \mathbf{II} como:

$$\mathbf{I} := \Theta^l_l = \theta, \quad (4.17)$$

e a dispersão dos seus elementos diagonais,

$$\mathbf{II} := \frac{1}{2} (\theta^2 - \Theta^l_k \Theta^k_l) = \frac{1}{3} \theta^2 - \sigma^2. \quad (4.18)$$

4.2 Tomando médias das equações de Einstein

Tomar médias espaciais de campos escalares é uma operação covariante dada uma foliação do espaço-tempo. Portanto, podemos tomar médias, por exemplo, da equação de Raychaudhuri sem grandes problemas.

Vamos definir um procedimento de média. A média espacial de um campo escalar Ψ como função das coordenadas Lagrangeanas e do tempo em uma porção compacta arbitrária do fluido \mathcal{D} é bem direta e é definida através da integral

$$\langle \Psi(t, X^i) \rangle_{\mathcal{D}} := \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} J(t, X^i) \Psi(t, X^i) d^3 X,$$

com o elemento de volume $dV := J d^3 X$ em superfícies espaciais a tempo constante. O volume é dado por

$$V_{\mathcal{D}} := \int_{\mathcal{D}} J(t, X^i) d^3 X.$$

Vamos também definir um fator de escala “efetivo” (normalizado pelo volume do domínio inicial $V_{\mathcal{D}_0}$), sem dimensão, através do volume, dado na forma

$$a_{\mathcal{D}}(t) := \left(\frac{V_{\mathcal{D}}(t)}{V_{\mathcal{D}_0}} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Assim, a expansão média pode ser escrita em termos deste fator de escala:

$$\langle \theta \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{\dot{V}_{\mathcal{D}}}{V_{\mathcal{D}}} = 3 \frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}}.$$

A integral (4.16) nos diz que a conservação da massa total $M_{\mathcal{D}}$ dentro de uma porção do fluido \mathcal{D} é transportada junto das linhas de fluxo,

$$M_{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}} J \rho d^3 X = \text{const} \Leftrightarrow \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{M_{\mathcal{D}}}{V_{\mathcal{D}_0} a_{\mathcal{D}}^3}.$$

Com estes resultados, podemos deduzir facilmente uma “relação de comutação”, aqui escrita para um escalar Ψ qualquer:

$$\langle \Psi \rangle_{\mathcal{D}} \dot{} - \dot{\langle \Psi \rangle}_{\mathcal{D}} = \langle \Psi \theta \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \Psi \rangle_{\mathcal{D}} \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}. \quad (4.19)$$

Tomando a média nas equações do vínculo Hamiltoniano (4.9) e nas equações de Raychaudhuri (4.14), com a ajuda desta relação de comutação, podemos escrever as seguintes equações:

Equação média de Raychaudhuri:

$$3 \frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} + 4\pi G \frac{M_{\mathcal{D}}}{V_{\mathcal{D}_0} a_{\mathcal{D}}^3} - \Lambda = \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}; \quad (4.20)$$

Equação média do vínculo Hamiltoniano:

$$3 \left(\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} \right)^2 - 8\pi G \frac{M_{\mathcal{D}}}{V_{\mathcal{D}_0} a_{\mathcal{D}}^3} + \frac{1}{2} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} - \Lambda = -\frac{\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}}{2}, \quad (4.21)$$

onde a massa $M_{\mathcal{D}}$, o escalar de Ricci espacial médio $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$ e a “contrarreação” $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ dependem do domínio de integração e, com exceção da massa, dependem do tempo. Em particular, o termo de fonte da contrarreação é dado por

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} := 2 \langle \mathbf{II} \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{2}{3} \langle \mathbf{I} \rangle_{\mathcal{D}}^2 = \frac{2}{3} \langle (\theta - \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}})^2 \rangle_{\mathcal{D}} - 2 \langle \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}}.$$

Notamos também a seguinte propriedade surpreendente das equações médias comparadas com sua versão local: apesar da não-comutatividade do procedimento de média e da dinâmica da evolução, que é descrita através da relação de comutação (4.19), descobrimos que as equações são as mesmas tanto para a versão local quanto para a versão na média, contanto que nós as escrevamos em termos dos invariantes (4.17) e (4.18). Com isto, podemos escrever as equações médias como:

$$\frac{1}{2} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = 8\pi G \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} + \Lambda - \langle \mathbf{II} \rangle_{\mathcal{D}}, \quad (4.22)$$

$$\langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} \dot{} = -\langle \theta \rangle_{\mathcal{D}} \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}}, \quad (4.23)$$

$$\langle \theta \rangle_{\mathcal{D}} \dot{} = -\langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}^2 + \Lambda - 4\pi G \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} + 2 \langle \mathbf{II} \rangle_{\mathcal{D}}, \quad (4.24)$$

ou seja, as médias $\langle \rho \rangle_{\mathcal{D}}$, $\langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}$, $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$ e $\langle \mathbf{II} \rangle_{\mathcal{D}}$ obedecem as mesmas equações que os campos locais ρ , θ , \mathcal{R} e \mathbf{II} . O motivo desta propriedade advém do tipo especial de não-linearidade do sistema gravitacional, ou seja, a não-linearidade em θ contida nas equações de Raychaudhuri.

Da mesma forma como é feito em universos homogêneos e isotrópicos, podemos aqui introduzir uma função de Hubble dependente do domínio $H_{\mathcal{D}} := \frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}}$ e características médias adimensionais, como segue:

$$\Omega_m := \frac{8\pi G M_{\mathcal{D}}}{3V_{\mathcal{D}_0} a_{\mathcal{D}}^3 H_{\mathcal{D}}^2}, \quad (4.25)$$

$$\Omega_{\Lambda} := \frac{\Lambda}{3H_{\mathcal{D}}^2} \quad (4.26)$$

$$\Omega_k := -\frac{\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}}{6H_{\mathcal{D}}^2} \quad (4.27)$$

$$\Omega_{\mathcal{Q}} := -\frac{\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}}{6H_{\mathcal{D}}^2} \quad (4.28)$$

e substituindo (4.25),(4.26),(4.27),(4.28) em (4.21), temos que

$$\Omega_m + \Omega_{\Lambda} + \Omega_k + \Omega_{\mathcal{Q}} = 1.$$

Todos estes parâmetros cosmológicos adimensionais dependem da escala espacial em que se toma a média, incluindo a constante cosmológica adimensional Ω_{Λ} , que depende da escala através de $H_{\mathcal{D}}$.

As equações (4.21) e (4.20) formam um sistema de duas equações com três incógnitas $a_{\mathcal{D}}$, $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$ e $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$. Portanto não podemos resolver problema da contrarreação para escalares baseados neste sistema. Nós podemos eliminar o termo de contrarreação de (4.21) substituindo em (4.20). Isto resulta numa equação para o fator de escala médio $a_{\mathcal{D}}$ em termos do escalar de Ricci médio no domínio. De forma alternativa, podemos calcular a derivada temporal em (4.20) e inserir o resultado de volta em (4.21) e (4.20). Isto produz uma relação universal entre o escalar de Ricci médio e o termo de contrarreação:

$$\dot{\mathcal{Q}}_{\mathcal{D}} + 6\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}}\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \langle \dot{\mathcal{R}} \rangle_{\mathcal{D}} + 2\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}}\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = 0,$$

que é uma condição necessária para integrabilidade da equação (4.20) para produzir (4.21). De forma equivalente, temos

$$(a_{\mathcal{D}}^6 \mathcal{Q}_{\mathcal{D}})' + a_{\mathcal{D}}^4 (a_{\mathcal{D}}^2 \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}})' = 0.$$

No caso mais simples essa relação é satisfeita com

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} \propto a_{\mathcal{D}}^{-6}, \quad \mathcal{R}_{\mathcal{D}} \propto a_{\mathcal{D}}^{-2}. \quad (4.29)$$

4.3 Fluido de contrarreação

Podemos definir um fluido de contrarreação efetivo[40] através de

$$\rho_{bD} = -\frac{1}{16\pi G} (\mathcal{Q}_D + \mathcal{R}_D), \quad (4.30)$$

$$p_{bD} = -\frac{1}{16\pi G} \left(\mathcal{Q}_D - \frac{\mathcal{R}_D}{3} \right), \quad (4.31)$$

onde ρ_{bD} é uma densidade de energia efetiva e p_{bD} é uma pressão efetiva. Isto leva a um conjunto de equações tipo Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}_D}{a_D} \right)^2 - \frac{8\pi G}{3} (\langle \rho_m \rangle_D + \rho_{bD}) = 0, \quad (4.32)$$

e

$$\frac{\ddot{a}_D}{a_D} + \frac{4\pi G}{3} (\langle \rho_m \rangle_D + \rho_{bD} + 3p_{bD}) = 0, \quad (4.33)$$

que implica

$$\dot{\rho}_{bD} + 3 \frac{\dot{a}_D}{a_D} (\rho_{bD} + p_{bD}) = 0 \quad (4.34)$$

para o fluido de contrarreação. Podemos então introduzir uma densidade de energia total ρ_D como

$$\rho_D = \langle \rho_m \rangle_D + \rho_{bD} \quad (4.35)$$

e também uma pressão total $p_D \equiv p_{bD}$ tal que a lei de conservação

$$\dot{\rho}_D + 3 \frac{\dot{a}_D}{a_D} (\rho_D + p_D) = 0 \quad (4.36)$$

é preservada. O parâmetro da equação de estado efetiva para o fluido de contrarreação é

$$\frac{p_{bD}}{\rho_{bD}} = \frac{\mathcal{Q}_D - \frac{1}{3}\mathcal{R}_D}{\mathcal{Q}_D + \mathcal{R}_D}. \quad (4.37)$$

Um parâmetro de desaceleração dependente do domínio é definido por

$$q_D \equiv -\frac{\ddot{a}_D a_D}{\dot{a}_D^2}, \quad (4.38)$$

que em termos de Ω_Q^D e Ω_R^D pode ser escrito como

$$q_D = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \Omega_Q^D \left[1 - \frac{1}{3} \frac{\Omega_R^D}{\Omega_Q^D} \right]. \quad (4.39)$$

O conceito de fluido efetivo foi utilizada para modelar a dinâmica de campo escalar e a descrição unificada do setor escuro com a ajuda de um gás de Chaplygin em termos da contrarreação e variáveis de curvatura média.

4.4 Exemplo: Constante cosmológica

O exemplo mais simples de se construir é o de uma constante cosmológica descrita através das quantidades de fluido efetivo. Uma dinâmica que imita uma constante cosmológica pode ser obtida tomando $\rho_{bD} = -p_{bD}$. Combinando esta condição com as relações (4.30) e (4.31) encontramos

$$p_{bD} = -\rho_{bD} \rightarrow \mathcal{R}_D = -3\mathcal{Q}_D.$$

As expressões resultantes para p_{bD} e ρ_{bD} então são dadas por

$$p_{bD} = -\frac{1}{8\pi G}\mathcal{Q}_D \quad \text{e} \quad \rho_{bD} = \frac{1}{8\pi G}\mathcal{Q}_D. \quad (4.40)$$

Uma contrarreação cinemática constante \mathcal{Q}_D (dependente do domínio D) junto com uma curvatura média negativa (constante) $\mathcal{R}_D = -3\mathcal{Q}_D$ produz a mesma dinâmica que uma constante cosmológica Ω_Λ^D , também dependente do domínio D ,

$$\Omega_\Lambda^D = \frac{1}{3} \frac{\mathcal{Q}_D}{\mathcal{H}_{D0}^2} = -\frac{1}{9} \frac{\mathcal{R}_D}{\mathcal{H}_{D0}^2}. \quad (4.41)$$

Note que um valor positivo de \mathcal{Q}_D corresponde a um valor negativo para Ω_Λ^D e uma curvatura média efetiva negativa \mathcal{R}_D corresponde a um valor positivo para Ω_Λ^D e um raio de curvatura

$$\mathcal{R}_{cD}^\Lambda = \frac{c}{a_D} \sqrt{-\frac{6}{\mathcal{R}_D}} = \frac{c}{a_D} \sqrt{\frac{2}{\mathcal{Q}_D}}. \quad (4.42)$$

Seu valor atual

$$\mathcal{R}_{cD0}^\Lambda = \frac{c}{\mathcal{H}_{D0}} \sqrt{\frac{2}{3\Omega_\Lambda^D}}$$

é da ordem do comprimento de Hubble no domínio considerado. Se consideramos esse domínio como sendo do tamanho do universo observável, este raio de curvatura é da escala de Gigaparsecs. Pode-se discriminar entre uma constante cosmológica efetiva como resultado de uma contrarreação e uma constante cosmológica autêntica? Retornaremos a este ponto posteriormente.

Capítulo 5

Fluido Viscoso como resultado de contrarreação

5.1 Fluido viscoso dependente do domínio

Um fluido viscoso num domínio D se caracteriza por uma Equação de Estado (EdS) na forma

$$p_{vD} = p_D = -\zeta_D \langle \Theta \rangle = -3\zeta_D \frac{\dot{a}_D}{a_D} \quad (5.1)$$

Substituímos aqui o índice anterior de contrarreação b por um subíndice v que significa “viscoso”, para indicar que estamos lidando com o caso especial de um fluido viscoso. Por simplicidade, vamos assumir que ζ_D se mantém constante em todo o domínio D .

Com $\rho'_D \equiv d\rho_D/da_D$, podemos escrever (4.36) e (5.1) como

$$\rho'_D = -\frac{3}{a_D} \left(\rho_D - 3\zeta_D \frac{\dot{a}_D}{a_D} \right) = -\frac{3}{a_D} \left(\rho_D - 3\zeta_D \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \sqrt{\rho_D} \right),$$

onde utilizamos a equação (4.32). Integrando, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_D &= \left[A_D + (\sqrt{\rho_{D0}} - A_D) a_D^{-3/2} \right]^2 \\ \Rightarrow \mathcal{H}_D &= \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \left[A_D + (\sqrt{\rho_{D0}} - A_D) a_D^{-3/2} \right], \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde o valor ρ_{D0} é o valor de ρ_D medido hoje, e

$$A_D \equiv 3\zeta_D \sqrt{\frac{8\pi G}{3}}. \quad (5.3)$$

O valor atual para a_D foi tomado como 1. De acordo com (5.2) a densidade de energia se comporta como $\rho_D \propto a_D^{-3}$ quando $a_D \ll 1$ e se comporta aproximadamente como uma constante quando $a_D \gg 1$. No passado distante, ela se comporta como matéria e, no futuro distante, se comporta como uma constante cosmológica. É justamente esta característica que faz com que a descrição de fluido viscoso seja um candidato para uma descrição unificada da energia e matéria escura.

O parâmetro de desaceleração é dado por

$$q_D = -1 - \frac{a_D \mathcal{H}'_D}{\mathcal{H}_D} = \frac{-1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\rho_{D0}}}{A_D} - 1 \right) a_D^{-3/2}}{1 + \left(\frac{\sqrt{\rho_{D0}}}{A_D} - 1 \right) a_D^{-3/2}}. \quad (5.4)$$

É conveniente relacionar a constante A_D ao valor atual q_{D0} de q_D :

$$A_D = \frac{1}{3} \sqrt{\rho_{D0}} (1 - 2q_{D0}). \quad (5.5)$$

Para $\zeta_D = 0$ temos que $A_D = 0$ e, conseqüentemente, $q_{D0} = \frac{1}{2}$ que é o limite correto para um universo Einstein-deSitter.

Introduzindo como abreviação da notação

$$Q_1 = 1 + q_{D0} \quad e \quad Q_2 = 1 - 2q_{D0} \quad (5.6)$$

o parâmetro de Hubble em termos do valor atual do parâmetro de desaceleração então fica escrito como

$$\mathcal{H}_D = \frac{1}{3} \mathcal{H}_{D0} \left[Q_2 + 2Q_1 a_D^{-3/2} \right]. \quad (5.7)$$

Como $\langle \rho_m \rangle_D = \langle \rho_m \rangle_{D0} a_D^{-3}$, a densidade de energia que corresponde ao fluido viscoso é a diferença entre a densidade total de energia e a densidade de energia da matéria,

$$\rho_{vD} = \rho_D - \langle \rho_m \rangle_{D0} a_D^{-3} = \frac{1}{9} \rho_{D0} \left[Q_2 + 2Q_1 a_D^{-3/2} \right]^2 - \langle \rho_m \rangle_{D0} a_D^{-3} \quad (5.8)$$

e para a pressão temos

$$p_{vD} = -\frac{1}{9} \rho_{D0} Q_2 \left[Q_2 + 2Q_1 a_D^{-3/2} \right]. \quad (5.9)$$

Olhando para (5.7)-(5.9) fica óbvio que a dinâmica é completamente determinada pelos parâmetros \mathcal{H}_{D0}, q_{D0} e $\langle \rho_m \rangle_{D0}$.

5.2 Fluido viscoso como contrarreação

Vamos agora investigar, se a contrarreação e o escalar de curvatura média no domínio D podem ser modelados em termos de um fluido viscoso efetivo. Identificamos a densidade de energia em (4.30) com (5.8) e a pressão (4.31) com (5.9), ou seja,

$$\rho_{vD} = -\frac{1}{16\pi G} (\mathcal{Q}_D + \mathcal{R}_D) = \frac{1}{9}\rho_{D0} \left[Q_2 + 2Q_1 a_D^{-3/2} \right]^2 - \langle \rho_m \rangle_{D0} a_D^{-3} \quad (5.10)$$

e

$$p_{vD} = -\frac{1}{16\pi G} \left(\mathcal{Q}_D - \frac{\mathcal{R}_D}{3} \right) = -\frac{1}{9}\rho_{D0} Q_2 \left[Q_2 + 2Q_1 a_D^{-3/2} \right]. \quad (5.11)$$

Isolando as quantidades da contrarreação \mathcal{Q}_D e \mathcal{R}_D resulta em

$$\mathcal{Q}_D = -4\pi G (\rho_{vD} + 3p_{vD}) \quad e \quad \mathcal{R}_D = -12\pi G (\rho_{vD} - p_{vD}), \quad (5.12)$$

respectivamente. A combinação

$$\mathcal{R}_D - 3\mathcal{Q}_D = 48\pi G p_{vD}$$

determina a pressão efetiva. Ainda, temos que

$$\rho_D + 3p_D = \langle \rho_m \rangle_D - \frac{1}{4\pi G} \mathcal{Q}_D. \quad (5.13)$$

Da relação (5.13) determinamos que uma expansão acelerada exige $\mathcal{Q}_D > 4\pi G \langle \rho_m \rangle_D$. Podemos relacionar o valor atual do parâmetro de desaceleração aos valores atuais \mathcal{Q}_{D0} e \mathcal{R}_{D0} :

$$q_{D0} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{\mathcal{Q}_{D0}}{4\pi G \langle \rho_m \rangle_{D0}}}{1 - \frac{\mathcal{R}_{D0} + \mathcal{Q}_{D0}}{16\pi G \langle \rho_m \rangle_{D0}}}.$$

Obviamente, se zeramos os valores de \mathcal{Q}_{D0} e \mathcal{R}_{D0} recuperamos $q_{D0} = \frac{1}{2}$. Uma vez que ρ_{vD} sendo positivo implica que $\mathcal{R}_{D0} + \mathcal{Q}_{D0} < 0$, devemos ter que $\mathcal{Q}_{D0} > 4\pi G \langle \rho_m \rangle_{D0}$ para que $q_{D0} < 0$, ou seja, expansão acelerada hoje. A contrarreação precisa ser maior que um certo valor limite.

Combinando (5.3) e (5.5), encontramos um valor explícito para o coeficiente de viscosidade do fluido em termos dos valores atuais da contrarreação e da curvatura média:

$$\zeta_D = \frac{1}{9} \frac{\langle \rho_m \rangle_{D0}}{\mathcal{H}_{D0}} \frac{\mathcal{R}_{D0} - 3\mathcal{Q}_{D0}}{\mathcal{R}_{D0} + \mathcal{Q}_{D0} - 16\pi G \langle \rho_m \rangle_{D0}} = \frac{1}{9} \frac{\langle \rho_m \rangle_{D0}}{\mathcal{H}_{D0}} (1 - 2q_{D0}). \quad (5.14)$$

Para $\mathcal{R}_{D0} + \mathcal{Q}_{D0} < 0$, como se exige para termos uma energia positiva, o denominador fica sempre negativo. Para qualquer valor positivo de \mathcal{Q}_{D0} o numerador também é negativo. Relembremos a relação $\mathcal{R}_{D0} - 3\mathcal{Q}_{D0} = 48\pi G p_{v0}^D$. Nestas circunstâncias, o coeficiente de contrarreação do fluido é sempre positivo. Perceba, porém, que a energia efetiva do fluido viscoso é algo artificial, e não existe nenhuma exigência com relação a sua positividade. A segunda equação (5.14) relaciona ζ_D diretamente ao valor atual do parâmetro de desaceleração q_{D0} . Nota-se, por consistência, que $q_{D0} = \frac{1}{2}$ quando $\zeta_D = 0$.

Para o caso em que $a_D \ll 1$ os termos a_D^{-3} em (5.10) e (5.11) dominam sobre o a densidade de energia da contrarreação,

$$\begin{aligned} \rho_{vD}(a_D \ll 1) = & \left[\frac{4}{9} \left(q_{D0} - \frac{1}{2} \right) \left(q_{D0} + \frac{5}{2} \right) \langle \rho \rangle_{D0} \right. \\ & \left. + \left(1 + \frac{4}{9} \left(q_{D0} - \frac{1}{2} \right) \left(q_{D0} + \frac{5}{2} \right) \langle \rho_m \rangle_{D0} \right) a_D^{-3} \right] \quad (5.15) \end{aligned}$$

Nota-se que o fluido se comporta, neste caso, como matéria não-relativística. De forma correspondente, o parâmetro efetivo da EdS (4.37) tende a zero para $a_D \ll 1$. No limite oposto, $a_D \gg 1$,

$$p_{vD} = -\rho_{vD} = -\frac{1}{9}\rho_{D0}(1 - 2q_{D0})^2 \quad (a_D \gg 1),$$

ele age como uma constante cosmológica. A dependência do fator de escala volumétrico do parâmetro efetivo da EdS do fluido de contrarreação, p_{vD}/ρ_{vD} , é mostrado na Fig.1 para os valores de melhor ajuste dados na Tabela I.

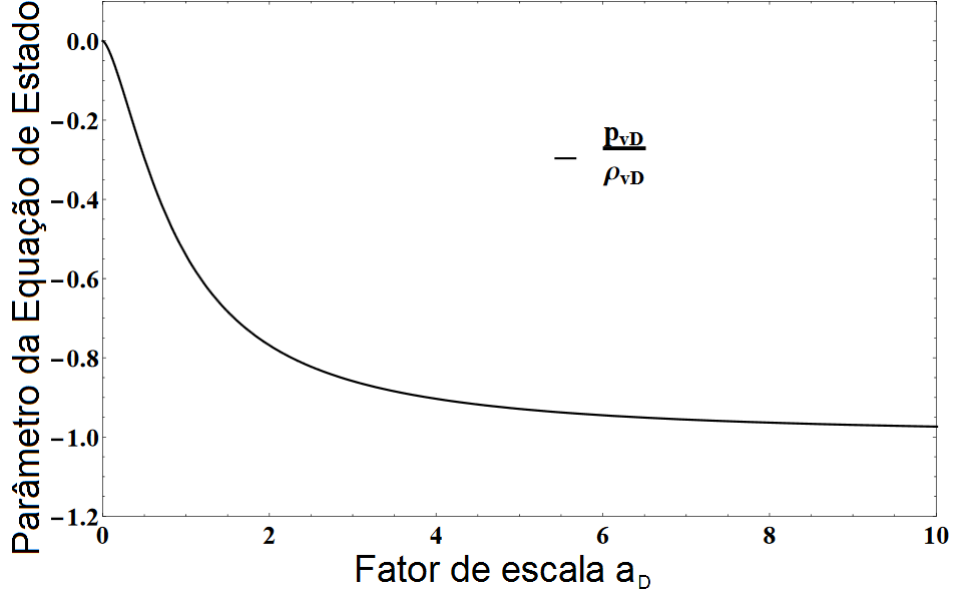


Fig.1 Parâmetro da EdS do fluido de contrarreação em termos do fator de escala volumétrico. Note que no presente, onde $a_D = 1$, o valor do parâmetro da EdS é negativo, e para valores maiores do fator de escala (no futuro), esperamos que estes valores se tornem cada vez mais negativos, indicando uma pressão cada vez mais negativa e, portanto, um universo cada vez mais acelerado.

Explicitamente, \mathcal{Q}_D e \mathcal{R}_D são escritos como

$$\mathcal{Q}_D = \frac{1}{3} \mathcal{H}_{D0}^2 \left[\left(Q_2 - Q_1 a_D^{-3/2} \right) \left(Q_2 + 2Q_1 a_D^{-3/2} \right) \right] + \frac{3}{2} \mathcal{H}_{D0}^2 \Omega_{m0}^D a_D^{-3}, \quad (5.16)$$

e

$$\mathcal{R}_D = -\mathcal{H}_{D0}^2 \left[\left(Q_2 + Q_1 a_D^{-3/2} \right) \left(Q_2 + 2Q_1 a_D^{-3/2} \right) \right] + \frac{9}{2} \mathcal{H}_{D0}^2 \Omega_{m0}^D a_D^{-3}, \quad (5.17)$$

respectivamente, onde $\Omega_{m0}^D = \langle \rho_m \rangle_{D0} / \rho_{D0}$. As quantidades fracionárias correspondentes são

$$\Omega_m^D = \frac{9\Omega_{m0}^D a_D^{-3}}{\left[Q_2 + 2Q_1 a_D^{-3/2} \right]^2}, \quad \Omega_Q^D = -\frac{1}{2} \frac{Q_2 - Q_1 a_D^{-3/2}}{Q_2 + 2Q_1 a_D^{-3/2}} - \frac{1}{4} \Omega_m^D,$$

e

$$\Omega_R^D = \frac{3}{2} \frac{Q_2 + Q_1 a_D^{-3/2}}{Q_2 + 2Q_1 a_D^{-3/2}} - \frac{3}{4} \Omega_m^D. \quad (5.18)$$

O parâmetro de desaceleração resultante (4.39) é mostrado na Fig. 2. Para os valores atuais de Ω_Q^D e Ω_R^D temos

$$\Omega_{Q0}^D = -\frac{1}{4} (1 - 2q_{D0}) + \frac{1}{4} (1 - \Omega_{m0}^D),$$

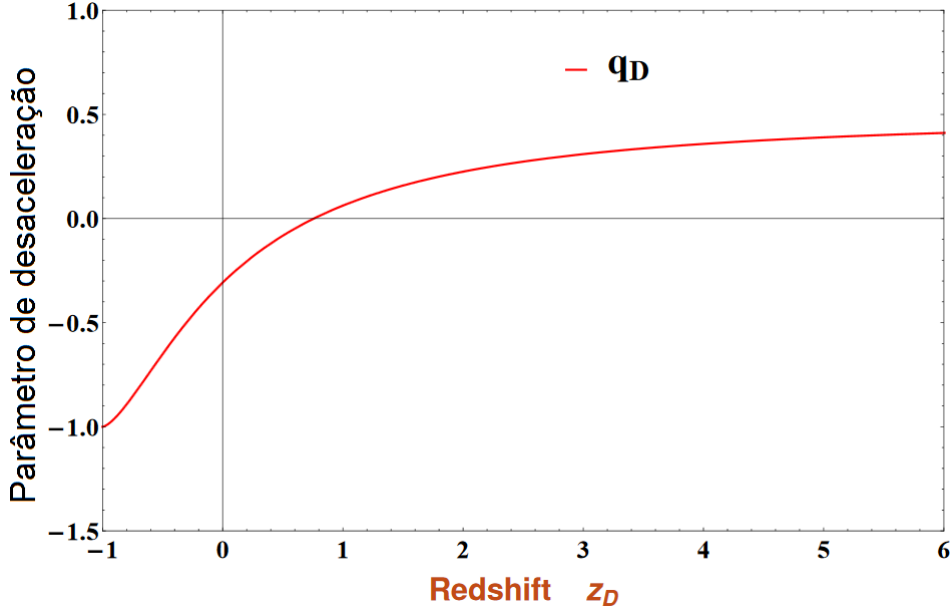


Figura 5.1: Dependência do parâmetro de desaceleração em função do parâmetro de desvio para o vermelho (Redshift) $z_D = a_D^{-1} - 1$. Para tempos atuais, $z = 0$ nos fornece um parâmetro de desaceleração negativo, o que nos diz que o universo se expande de forma acelerada. Para redshifts maiores que 1 (no passado), notamos que o parâmetro de desaceleração era positivo, indicando que neste modelo em tempos passados o universo expandia-se de forma desacelerada - até a época $z \approx 1$. Esperamos que no futuro ($z < 0$) o parâmetro de desaceleração se torne cada vez mais negativo, fazendo que a expansão se torne cada vez mais acelerada neste modelo.

e

$$\Omega_{R0}^D = \frac{1}{4}(1 - 2q_{D0}) + \frac{3}{4}(1 - \Omega_{m0}^D),$$

respectivamente.

Recuperamos o universo Einstein-de Sitter com $q_D = \frac{1}{2}$ e $\Omega_{m0}^D = 1$, correspondendo a $\Omega_{Q0}^D = \Omega_{R0}^D = 0$. Note que, já que $\Omega_{m0}^D \leq 1$, a fração de contrarreação cinemática Ω_{Q0}^D fica negativa para $q_{D0} < 0$. Isto significa que Q_D se torna positivo, que é uma condição necessária para termos expansão acelerada, de acordo com (5.13). A contribuição combinada de $\Omega_{Q0}^D + \Omega_{R0}^D$, porém, continua positiva. No limite de alto redshift $a_D \ll 1$ a abundância fracionária tem os valores

$$\Omega_m^D = \frac{9}{4} \frac{\Omega_{m0}^D}{(1 + q_{D0})^2}, \quad \Omega_Q^D = \frac{1}{4}(1 - \Omega_m^D), \quad \Omega_R^D = \frac{3}{4}(1 - \Omega_m^D) \quad (a_D \ll 1).$$

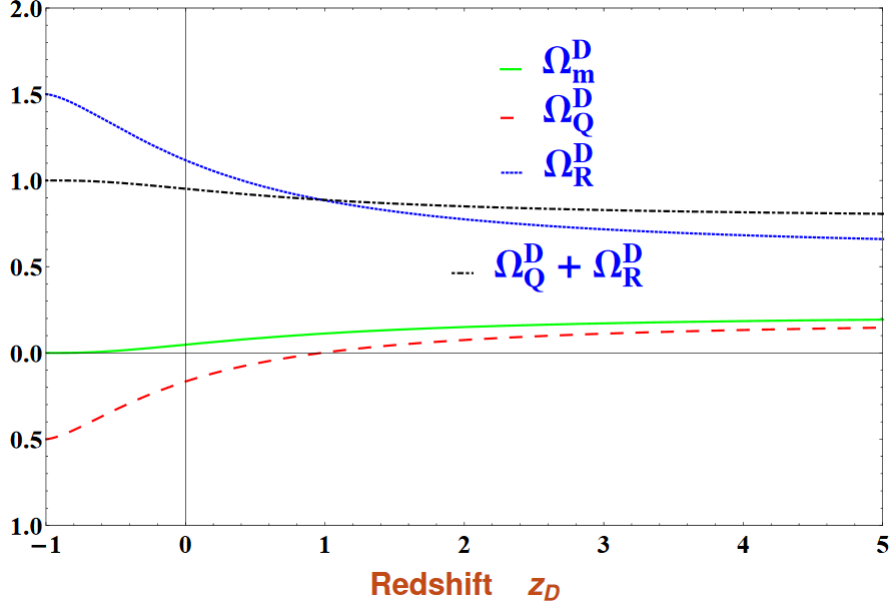


Figura 5.2: Dependência das abundâncias fracionárias em função do desvio para o vermelho $z_D = a_D^{-1} - 1$. Nota-se que a medida que o tempo passa, a contribuição da matéria para a expansão torna-se cada vez menor, enquanto a contribuição de curvatura e contrarreação aumentam. A contribuição de curvatura começa a crescer bastante a partir de $z \approx 1$, enquanto que o termo de contrarreação fica cada vez mais negativo. Note que na definição de Ω_Q^D o termo Q_D aparece com um sinal negativo, indicando que um Ω_Q^D negativo implica em Q_D positivo e, portanto, maior contribuição de contrarreação.

Para $\Omega_{m0}^D < \frac{4}{9}(1 + q_{D0})^2$ tem-se que $\Omega_m^D < 1$ e ambos Ω_Q^D e Ω_R^D são positivos. Para um valor atual do parâmetro de desaceleração da ordem de $q_{D0} \approx -\frac{1}{2}$, o valor de Ω_m^D para $a_D \ll 1$ é aproximadamente uma ordem de magnitude maior que Ω_{m0}^D . Deve-se manter em mente, porém, que neste limite o fluido de contrarreação se comporta como matéria. Esta restrição em Ω_{m0}^D é compatível com caso em que descreve exclusivamente matéria bariônica. De imediato, não há uma componente separada de matéria escura aqui, visto que esperamos que o fluido viscoso já leve em conta todo o setor escuro. Mas na verdade a condição $\Omega_{m0}^D < \frac{4}{9}(1 + q_{D0})^2$ deixa espaço para uma abundância, de certa forma, maior que a atribuída aos bárions com uma fração da ordem de 0.048. Na Fig. 3 o comportamento das abundâncias fracionárias é representada para os valores de melhor ajuste da Tabela 1, assumindo que Ω_{m0}^D descreve a fração de matéria bariônica com $\Omega_{m0}^D = 0.048$.

5.3 Métrica efetiva e distância de luminosidade

Como já mencionado, para fazer o contato da teoria com as observações temos de confiar num componente adicional que não faz parte da teoria até o momento. Apesar de termos enfatizado que o fator de escala volumétrico a_D não está relacionado a uma métrica do espaço-tempo em particular, vamos seguir aqui um procedimento que é padrão na literatura [38][39] e supõe a existência de uma métrica efetiva na qual a_D imita um fator de escala de uma métrica do tipo Robertson-Walker que, neste caso, não precisa necessariamente satisfazer as equações de campo. Esta métrica efetiva também precisa levar em conta a curvatura efetiva média \mathcal{R}_D cuja expressão foi encontrada em (5.17) e sua abundância fracionária correspondente (5.18). Estas quantidades definem um raio de curvatura

$$\mathcal{R}_{cD} = \frac{c}{a_D} \sqrt{\frac{-6}{\mathcal{R}_D}} = \frac{c}{a_D \mathcal{H}_D} \frac{1}{\sqrt{\Omega_R^D}},$$

cujo valor atual é da ordem do raio de Hubble (dependente do domínio) atual. Isto sugere uma métrica efetiva com o fator de escala efetivo a_D (cf. Roukema et al. [34])

$$ds_{eff}^2 = -c^2 dt^2 + a_D^2 \left[dr^2 + \mathcal{R}_{cD}^2 \sinh^2 \frac{r}{\mathcal{R}_{cD}} (d\vartheta + \sinh^2 \vartheta d\vartheta^2) \right],$$

generalizando a métrica de Robertson-Walker que pode ser recuperada se fazemos $\mathcal{R}_{cD}^{-1} = \sqrt{|k|} = \text{const.}$ Aqui, \mathcal{R}_{cD} é uma quantidade dependente do tempo tal que cada fatia $t = \text{constante}$ é caracterizada por uma curvatura diferente. Comparando a dinâmica de contrarreação com a dinâmica baseada numa métrica padrão de Robertson-Walker assumimos um volume para as médias do tamanho do universo observável. Sob estas proposições, a propagação radial da luz é descrita por

$$ds_{eff}^2 = 0 \Rightarrow dr = \frac{c}{a_D^2 \mathcal{H}_D} da_D.$$

Com (5.7) encontramos para $r(a_D)$,

$$\begin{aligned}
r(a_D) = & -\frac{6c}{\mathcal{H}_{D0}} \frac{1}{6\sqrt[3]{Q_2} (2Q_1)^{2/3}} \cdot \\
& \left\{ \ln \left[\frac{Q_2^{2/3} a_D - \sqrt[3]{Q_2} \sqrt[3]{2Q_1} a_D^{1/2} + (2Q_1)^{2/3}}{Q_2^{2/3} - \sqrt[3]{Q_2} \sqrt[3]{2Q_1} + (2Q_1)^{2/3}} \right] \right. \\
& - 2 \ln \left[\frac{\sqrt[3]{Q_2} a_D^{1/2} + \sqrt[3]{2Q_1}}{\sqrt[3]{Q_2} + \sqrt[3]{2Q_1}} \right] \\
& \left. + 2\sqrt{3} \left[\arctan \frac{1 - 2\frac{\sqrt[3]{Q_2}}{\sqrt[3]{2Q_1}} a_D^{1/2}}{\sqrt{3}} - \arctan \frac{1 - 2\frac{\sqrt[3]{Q_2}}{\sqrt[3]{2Q_1}}}{\sqrt{3}} \right] \right\} \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Introduzindo um parâmetro de redshift efetivo z_D como $1 + z_D = a_D^{-1}$, podemos calcular a distância de luminosidade $d_L^{eff}(z_D)$ na forma

$$d_L^{eff}(z_D) = (1 + z_D) \mathcal{R}_{cD}(z_D) \sinh \frac{r(z_D)}{\mathcal{R}_{cD}(z_D)} \quad (5.20)$$

e determinamos o módulo de distância como

$$\mu_D = 5 \log d_L^{eff}(z_D) + \mu_{D0}$$

com $\mu_{D0} = 42.384 - 5 \log h_D$, onde h_D é definido por $\mathcal{H}_{D0} = 100 h_D \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$.

Adotando os valores da análise padrão, nós deduzimos que a escala de média é do tamanho do universo observável. Podemos, então, contrastar estas relações com aquelas de um universo espacialmente plano composto de um fluido viscoso, onde este fluido viscoso é uma parte do setor de matéria. O cálculo formal então segue passos similares ao que foi feito na seção 3. Em particular, o parâmetro de Hubble também possui a mesma estrutura que (5.13). A diferença consiste em que o fator de escala volumétrico a_D em (5.13) é substituído por um fator de escala a de uma métrica de Robertson-Walker, e os sub-índices D não são mais necessários. Então $H(z) = \frac{1}{3} H_0 \left[1 - 2q_0 + 2(1 + q_0)(1 + z)^{3/2} \right]$. Para tal modelo, a distância de luminosidade é obtida da maneira padrão

$$d_L = (1 + z) c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (5.21)$$

onde utilizamos o módulo de distância

$$\mu = 5 \log d_L(z) + \mu_0$$

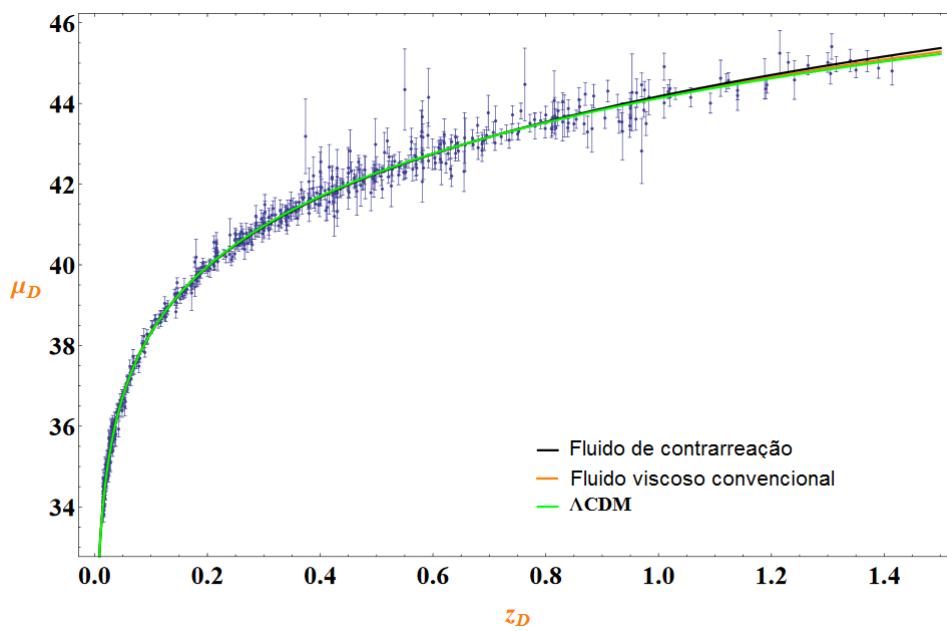


Figura 5.3: Dependência do módulo de distância em função do desvio para o vermelho $z_D = a_D^{-1} - 1$. Os três gráficos tem uma boa superposição para os valores de melhor ajuste com os dados do Union 2.1. Nota-se que, para redshifts grandes ($z \approx 1.4$), começam a surgir diferenças entre os modelos.

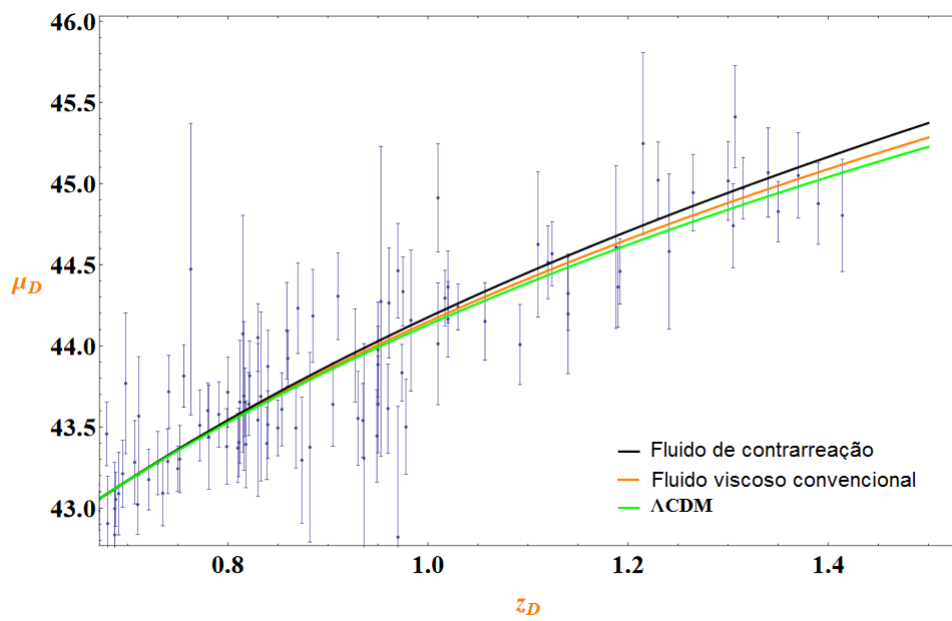


Figura 5.4: Ampliação da Fig.5.3. Aqui podemos ver as diferenças entre os modelos, para redshifts altos, comparados com as barras de erros das medidas de distância de luminosidade. Esperamos que, com melhores observações futuras, as barras de erros diminuam e, portanto, poderemos determinar qual modelo de fato melhor descreve a realidade.

com $\mu_0 = 42.384 - 5 \log h$. Nas Figuras 4 e 5, utilizando os dados amostrais do projeto Union 2.1, comparamos os resultados para o modelo de um fluido de contrarreação baseado em (5.20) contra aquele de um fluido viscoso “convencional” numa métrica espacialmente plana baseado em (5.21). Embora existam diferenças, estas aparentemente não são grandes o suficiente para podermos discernir completamente um do outro. Para efeito de comparação, nós também incluímos o resultado do modelo Λ CDM. No que se refere à análise de supernovas, nossa conclusão é que o modelo de contrarreação com uma contribuição grande da curvatura produz resultados similares aos do modelo plano correspondente. Isto nos remete de volta a dinâmica do modelo Λ CDM com uma constante cosmológica efetiva induzida. Ou a distância de luminosidade pode ser calculada via formulação padrão (5.21) com o parâmetro de Hubble do universo Λ CDM, $H^{\Lambda CDM}(z) = H_0^{\Lambda CDM} \sqrt{\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}$, ou no contexto de contrarreação através de (5.20) e a função de Hubble dependente do domínio $\mathcal{H}_D^{\Lambda CDM}(z) = \mathcal{H}_{D0}^{\Lambda CDM} \sqrt{\Omega_{m0}^D(1+z)^3 + \Omega_\Lambda^D}$ com a constante cosmológica de contrarreação (4.41) e o raio de curvatura (4.42). Utilizando a amostra de Supernovas 1A novamente, procuramos pelo valor de melhor ajuste para cada um destes casos, que são mostrados nas últimas linhas da Tabela 1. Os resultados são apresentados na Fig. 6. O modelo Λ CDM padrão parece se adequar marginalmente melhor aos dados, mas sem ser claramente superior à dinâmica de contrarreação.

o

5.4 Sumário

Investigamos a possibilidade de que a dinâmica de um fluido cosmológico viscoso seja o resultado de uma contrarreação devida a média de inhomogeneidades em um universo de poeira pura. Quantificamos a contrarreação dinâmica e a curvatura média através do período de dominação da matéria da evolução cosmológica. Com a ajuda de uma métrica efetiva com curvatura espacial dependente do tempo testamos este modelo contra observações de supernovas tipo Ia da amostra Union 2.1. Não encontramos diferenças grandes comparadas aos resultados de uma análise padrão para uma cosmologia viscosa espacialmente plana. Ao nosso conhecimento, este tipo de interpretação dos dados comparando um mesmo modelo descrito de forma padrão e sob o ponto de vista da contrarreação não foi feito até o momento. Um argumento parecido também é válido para um modelo de constante cosmológica efetiva na qual a dinâmica de uma constante cosmológica é imitada por uma combinação de contrarreação cinemática e curvatura média. Nesta

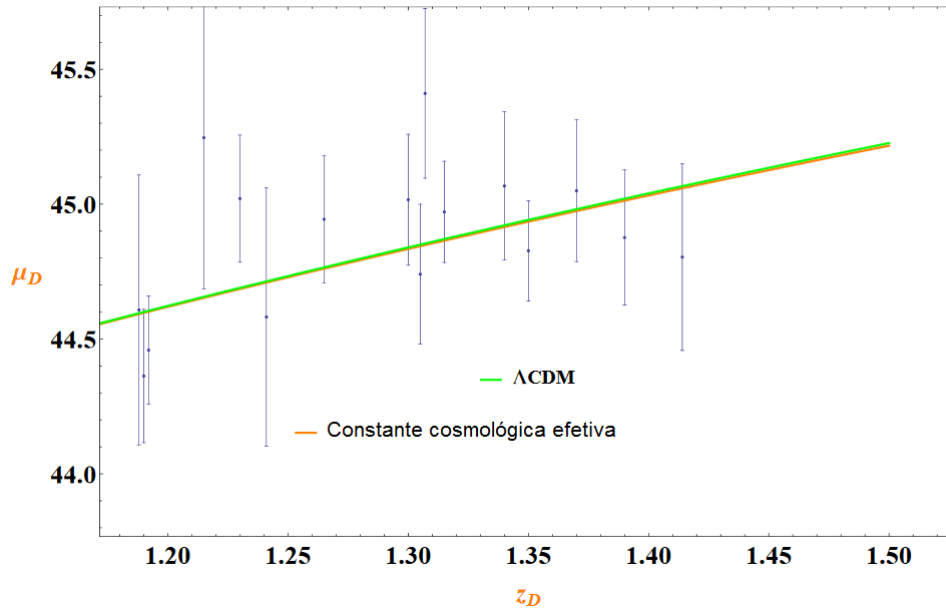


Figura 5.5: Dependência do módulo de distância em função do desvio para o vermelho para o modelo Λ CDM e seu modelo correspondente de contrarreação.

perspectiva, a análise de contrarreação aparentemente é compatível com respeito a interpretação dos dados de supernovas Ia. Se poderá passar também por outros testes fica para uma pesquisa futura.

A diferença crucial entre os modelos de contrarreação e o modelo padrão FLRW é a existência da evolução temporal de uma curvatura, em contraste com o modelo FLRW na qual a curvatura é constante (na maioria dos casos, nula). Em [63] uma quantidade útil foi introduzida na qual é essencialmente nula para uma configuração FLRW mas não é para modelos mais gerais. Para uma classe de modelos cuja curvatura evolui no tempo esta quantidade foi discutida em [27]. Desta forma, de acordo com os autores em [27], resultados futuros do projeto Euclid [64] deverão ser capazes de distinguir entre modelos de curvatura com evolução e modelos de curvatura constante.

Dados Supernova Ia UNION 2.1			
Fluido de contrarreação para $\Omega_{m0} = 0.048$	χ_ν^2	q_0 (95% CL)	h
	0.985	$-0.307^{+0.070}_{-0.073}$	0.693
Fluido viscoso convencional	χ_ν^2	q_0 (95% CL)	h
	0.974	$-0.480^{+0.066}_{-0.059}$	0.697
Constante cosmológica efetiva	χ_ν^2	Ω_{m0} (95% CL)	h
	0.971	$0.318^{+0.051}_{-0.041}$	0.699
Λ CDM	χ_ν^2	Ω_{m0} (95% CL)	h
	0.971	$0.279^{+0.038}_{-0.039}$	0.701

Tabela 5.1: Dados de Supernova Ia. Observamos que os modelos que analisamos se adaptam bem aos dados do Union 2.1, pois os valores de χ_ν^2 são bastante próximos de 1, e os modelos produzem um valor de melhor ajuste para h que fica próximo de 0.7. O modelo de Fluido de contrarreação acaba se saindo melhor pois ajustamos valores para um número maior de parâmetros do que o modelo Λ CDM. Obtemos também os valores de melhor ajuste para o parâmetro de desaceleração hoje.

Capítulo 6

A métrica de Lemaître-Tolman-Bondi

A existência de estruturas cósmicas mostra que o nosso universo não é homogêneo. Nós vemos vazios, grupos de galáxias, aglomerados, superaglomerados, paredes, filamentos, etc. No entanto, geralmente é argumentado que o universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas, o que permite o uso dos modelos de Friedmann. Mas quão grande essas escalas são e o que implica quase nunca é precisamente declarado.

No entanto, durante os últimos anos, o efeito das inhomogeneidades tem que ser considerado quando se deseja construir um modelo cosmológico preciso até as regiões onde as estruturas começam a se formar e sua evolução torna-se não-linear.

O uso de soluções exatas mostra que a física bem estabelecida pode explicar alguns dos fenômenos observados na astrofísica e cosmologia, sem introduzir elementos altamente especulativos, como a matéria escura, energia escura, expansão exponencial em densidade nunca alcançados em qualquer experiência (inflação), e similares.

6.1 Modelos inhomogêneos exatos

Muito poucas soluções inhomogêneas exatas das equações de campo de Einstein tem sido utilizadas para descrever os fenômenos observados na cosmologia. Descreveremos algumas delas.

- O modelo baseado na solução de Lemaître-Tolman-Bondi, que é simetricamente esférico e é uma solução de poeira ($p = 0$) das equações de campo de Einstein. A densidade de massa e a velocidade das partículas são funções

só da coordenada radial e da coordenada temporal. O movimento de cada partícula é radial e se move devido a influência da gravidade, além disso não se considera interação eletromagnética. A densidade de massa é finita em todo ponto. Este modelo é determinado por uma escolha de coordenada e duas funções livres a coordenada radial.

A energia por unidade de massa, $E(r)$, das partículas contidas na casca esférica comóvel em um dado r , a massa gravitacional, $M(r)$, contida nessa casca e a função de tempo de bang $t_B(r)$, o que significa que o Big Bang ocorreu em termos diferentes em diferentes valores de r . O modelo de FLRW é um caso particular deste.

- O modelo de Lemaître (comumente conhecido como Misner-Sharp) não é uma solução explícita, mas é uma métrica determinada por um conjunto de duas equações diferenciais. Ele representa um fluido perfeito esfericamente simétrico com gradiente de pressão. Sua solução é obtida por integração numérica.

- Os modelos basados na solução Quasi-Spherical de Szekeres (QSS), são soluções de poeira (fluido perfeito com $p = 0$) das equações de Einstein sem simetria alguma. Eles são definidos por uma escolha de coordenadas e cinco funções livres da coordenada radial. Os modelos de LTB e FLRW são casos particulares deste modelo.

- O modelo de Stephani esfericamente simétrico, também tem, sido utilizado para fins cosmológicos. É uma solução exata com densidade de energia homogênea e pressão não-homogênea.

O modelo LTB tem sido o mais amplamente utilizado na cosmologia, já que é um dos mais tratáveis entre os poucos mencionados. No entanto, o modelo Quasi-Spherical Szekeres (QSS), atualmente está sendo considerado também para abarcar alguns problemas na cosmologia.

6.2 A solução de Lemaître-Tolman-Bondi (LTB)

O nível de isotropia da CMB sugere que há uma pequena dependência na direção de observação em grandes escalas. Justifica-se então a considerar métricas esfericamente simétricas porém com inomogeneidades.

Vamos considerar um universo de poeira ($p = 0$) esfericamente simétrico com inomogeneidades radiais, visto da nossa localização, no centro. Escolhendo coordenadas espaciais comóveis $\left(\frac{dx^i}{dt} = 0\right)$ com a teoria, a origem espacial ($x^i = 0$) como o centro de simetria, e a coordenada temporal ($x^0 \equiv t$) para medir o tempo próprio do fluido comóvel.

O modelo LTB é uma solução não-estática com simetria esférica das equações de campo de Einstein com uma fonte de poeira. A métrica de

Lemaître-Tolman-Bondi[42][43][10], em coordenadas comóveis de tempo síncrono, com $c = 1$, é dada por

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R'^2}{1 + 2E(r)} dr^2 - R^2(t, r) (d\theta^2 + \sinh^2\theta d\phi^2), \quad (6.1)$$

onde aqui $R(t, r)$ é a função de raio areal, a linha denota a derivada parcial com respeito à coordenada radial r e $E(r)$ é uma função arbitrária que determina a curvatura do espaço para cada valor de r .

Notamos que E deve obedecer

$$2E + 1 \geq 0, \quad (6.2)$$

já que a assinatura de (6.1) é $(+, -, -, -)$. A igualdade $E = -\frac{1}{2}$ só pode acontecer em lugares especiais (em valores isolados de r) chamados de necks[41]. Podemos observar também que recuperamos a métrica de FLRW no caso que temos

$$R(t, r) = ra(t) \quad \text{e} \quad E(r) = -\frac{kr^2}{2}.$$

Assim, como consideramos o gauge em FLRW: $a(t_0) = a_0 = 1$, no LTB podemos fazer o seguinte gauge: $R(t_0, r) = R_0(r) = r$.

A evolução temporal da função do raio areal $R(r, t)$ é determinado pela integral das equações de Einstein:

$$\dot{R}^2 = 2E(r) + \frac{2M(r)}{R} - \frac{1}{3}\Lambda R^2. \quad (6.3)$$

Aqui, o ponto em \dot{R}^2 denota a derivada parcial em respeito à coordenada temporal, $M(r)$ é outra função arbitrária e Λ é a constante cosmológica. A solução de (6.3) conterà uma função arbitrária extra, $t_B(r)$. Ela é chamada de função de tempo de bang, no caso de $\Lambda = 0$ veremos mais adiante de fato que defina a coordenada temporal da singularidade do Big Bang, a qual é em geral dependente da posição. Com um valor arbitrário de Λ , o Big Bang não ocorrerá sempre, assim como nos modelos de Friedmann.

As equações de Einstein (sua componente t-t) também proporcionam a definição da densidade de massa, assim:

$$\frac{8\pi G}{c^4}\epsilon = \frac{8\pi G}{c^2}\rho = \frac{2M'}{R^2 R'} \Rightarrow 8\pi G\rho = \frac{2M'}{R^2 R'}. \quad (6.4)$$

A densidade de massa $\rho = \frac{\epsilon}{c}$ torna-se infinito quando $R = 0$ e $M' \neq 0$ ou quando $R' = 0$ e $M' \neq 0$.

- O primeiro deles é o Big Bang a qual ocorre necessariamente quando $\Lambda = 0$.

- O segundo é a singularidade de Shell Crossing (cruzamento de cascas), onde a densidade de massa ρ vai a infinito e muda de sinal tornando-se negativo. Nesses pontos, a distância geodésica radial entre o ponto $(t_0, r_0, \theta_0, \phi_0)$ e o ponto $(t_0, r_0 + dr, \theta_0, \phi_0)$, é igual a $\sqrt{g_{rr}}dr$, torna-se zero, a qual significa que as cascas coincidem para diferentes valores da coordenada r . Esta singularidade pode ser evitada com uma relação apropriada das funções $M(r)$, $E(r)$ e $t_B(r)$.

Estas singularidades, o shell crossing, e o Big Bang coincidem no limite de Friedmann.

A equação (6.3) tem a mesma forma que uma das equações de Friedmann, exceto que ela contém funções arbitrárias de r em lugar de constantes arbitrárias. A solução de 6.3 pode ser escrita como

$$t - t_B(r) = \pm \int \frac{dR}{\sqrt{2E(r) + \frac{2M(r)}{R} - \frac{1}{3}\Lambda R^2}}, \quad (6.5)$$

onde aqui $t_B(r)$ é uma função arbitrária extra, chamada de tempo de bang. O sinal “+” se aplica para regiões em expansão e “-” para regiões em colapso.

Com $\Lambda \neq 0$, as soluções explícitas de (6.3) envolvem funções elípticas.

Com $\Lambda = 0$, as soluções de (6.3) podem ser escritas na forma paramétrica, assim:

- Com $E(r) < 0$, temos uma evolução elíptica:

$$\begin{aligned} R(t, r) &= -\frac{M}{2E} (1 - \cos \eta), \\ \eta - \sinh \eta &= \frac{(-2E)^{3/2}}{M} (t - t_B(r)). \end{aligned}$$

- Com $E(r) = 0$, temos uma evolução parabólica:

$$R(t, r) = \left[\frac{9}{2} M(r) \right]^{1/3} (t - t_B(r))^{2/3}. \quad (6.6)$$

- Com $E(r) > 0$, temos uma evolução hiperbólica:

$$\begin{aligned} R(t, r) &= \frac{M}{2E} (\cosh \eta - 1), \\ \sinh \eta - \eta &= \frac{(2E)^{3/2}}{M} (t - t_B(r)). \end{aligned}$$

onde η é um parâmetro. Note também que todas as fórmulas apresentadas nesse capítulo até agora são covariantes sob transformações de coordenadas da forma $\tilde{r} = g(r)$, de tal forma que r pode ser escolhido à vontade. Isto significa que uma das funções $E(r)$, $M(r)$ ou $t_B(r)$ pode ser fixada seguindo a nossa conveniência por uma escolha adequada de g .

6.2.1 Comportamento na origem

As condições para um centro regular foram obtidos por Mustapha e Hellaby[45]. Estes pesquisadores utilizam a métrica (6.1) e a expressão (6.3) com $\Lambda = 0$.

Eles definem um raio de escala, $P(r)$, e um tempo de escala, $q(r)$, para modelos não-parabólicos do seguinte modo:

$$P(r) = \frac{M(r)}{\pm E(r)} \quad \text{e} \quad q(r) = \frac{M(r)}{\sqrt{\pm [2E(r)]^3}}.$$

Nos casos acima, escolhemos o sinal positivo quando estamos tratando de modelos hiperbólicos, e o sinal negativo quando estamos lidando com modelos elípticos.

Num modelo de “recollapsing”, o raio areal em máxima expansão é dado por $P(r)$ e o tempo desde a criação até a destruição é $\pi q(r)$. Das soluções de (6.3) com $\Lambda = 0$, para um universo não-vazio $M(r) \neq 0$, na nomenclatura destes pesquisadores temos:

$$R(t, r) = \frac{P}{2} \phi_0(\eta) \quad \text{e} \quad \xi(\eta) = \frac{2[t - t_B(r)]}{q},$$

onde

$$\phi_0(\eta) = \begin{cases} \cosh \eta - 1, & \text{para } E > 0, \\ \frac{1}{2}\eta^2, & \text{para } E = 0, \\ 1 - \cos \eta, & \text{para } E < 0, \end{cases} \quad (6.7)$$

e

$$\xi(\eta) = \begin{cases} \sinh \eta - \eta, & \text{para } E > 0, \\ \frac{1}{6}\eta^3, & \text{para } E = 0, \\ \eta - \sin \eta, & \text{para } E < 0. \end{cases} \quad (6.8)$$

Na origem, temos $R(t, r = 0) = 0$ para todo t . Em qualquer superfície com t constante que esteja longe do bang ou do crunch, então é necessário que:

- A densidade ρ seja finita positiva e diferente de zero.

$$\frac{2M'}{R^2 R'} \Rightarrow \frac{8\pi G}{c^2} \rho_0(t) = \text{const}, \quad \text{com } \epsilon \in [0, +\infty). \quad (6.9)$$

O escalar de Kretschmann seja finito.

$$K(t, r) = \frac{48M^2}{R^6} + \frac{32MM'}{R^5 R'} + \frac{12M'^2}{R^4 R'^2} \Rightarrow K_0(t) = \text{const}, \quad \text{com } \epsilon \in (-\infty, +\infty).$$

- A evolução em $r = 0$ não é diferente da sua vizinhança, de modo que $(t - t_B)$, $\phi_0(\eta)$ e $\xi(\eta)$ vão mais suavemente para um limite finito em $[0, +\infty)$ como em $r \rightarrow \infty$. A equação (6.7) então nos dá o seguinte comportamento das funções arbitrárias perto da origem:

$$\begin{aligned} \frac{R(t, r)}{P(r)} &= \frac{R(\pm E)}{M} \Rightarrow S_0(t) = \text{const}, \quad \epsilon \in [0, \infty), \\ q(r) &= \frac{M}{(\pm E)^{3/2}} \Rightarrow q_0 = \text{const}, \quad \epsilon \in [0, \infty). \end{aligned}$$

Se assumimos que $E(r)$ e $M(r)$ são analíticas em $r = 0$, de modo que eles podem ser aproximados por polinômios em r , então podemos deduzir ainda que, como $R \rightarrow 0$:

$$E \propto R^2 \rightarrow 0 \quad , \quad M \propto R^3 \rightarrow 0.$$

De modo semelhante:

$$\dot{R} \propto R \rightarrow 0. \quad (6.10)$$

Embora $\frac{M'}{M}$ e $\frac{E'}{E}$ se comportam como $\frac{1}{R}$, o anterior resulta em

$$\frac{q'}{q} = \left(\frac{M'}{M} - \frac{3E'}{2E} \right) \rightarrow \text{const}. \quad (6.11)$$

Assim temos uma origem do tipo FLRW.

6.2.2 Shell Crossing

A densidade de massa $\rho = \frac{\epsilon}{c^2}$ no modelo LTB torna-se infinita quando $R' = 0^-$ e $M' \neq 0$. Esta singularidade é chamada de shell crossing, porque nessas localizações a distância radial entre duas cascas adjacentes que tem diferentes valores de r tornam-se zero. Se R' muda de sinal ali, então a densidade de massa na outra parte do shell crossing torna-se negativa.

Se olharmos para a componentes da tetrade do tensor de Riemann:

$$e^0 = dt, e^1 = \left(\frac{R'}{\sqrt{1 + 2E(r)}} \right) dr, e^2 = R d\theta, e^3 = R \sinh\theta d\phi, \quad (6.12)$$

os quais são

$$\begin{aligned} R_{0101} &= \frac{2M}{R^3} - \frac{M'}{R^2 R'} \\ R_{0202} &= R_{0303} = -\frac{M}{R^3} = \frac{1}{2} R_{2323} \\ R_{1212} &= R_{1313} = \frac{M}{R^3} - \frac{M'}{R^2 R'}. \end{aligned}$$

Assim, o shell crossing é uma singularidade de curvatura (as quantidades indicadas acima são escalares e alguns se tornam infinitos quando $R' = 0$ e $M' \neq 0$). Ele é considerado menos “perigoso” que o Big Bang por duas razões:

- Em objetos astrofísicos reais de alta densidade, gradientes de pressão estão presentes, e estes devem ser capazes de prevenir a ocorrência de shell crossings. A solução LTB simplesmente não é suficientemente geral para descrever tal situação, e acredita-se que o shell crossing é um limite a pressão zero, de uma onda acústica - de elevado, mas finita - densidade.

- Um feixe de geodésicas enviados em uma singularidade de shell crossing não fica focado em uma superfície ou uma linha, ao contrário do Big Bang. Isto significa que os objetos materiais que batem no shell crossing não seriam esmagados[28]. Por esta razão, o shell crossing é chamado de singularidade fraca.

Estas singularidades podem ser evitadas se as formas das funções arbitrárias são adequadamente escolhidas. Há duas maneiras de evitá-las:

- Definindo as funções de modo que $R' \neq 0$ em todo o intervalo de aplicabilidade do modelo, e

- Definindo as funções de modo que $R' = 0$ apenas nos lugares $r = r_\omega$ onde $M' = 0$ e $\lim_{r \rightarrow r_\omega} \left| \frac{M'}{R'} \right| < \infty$.

Nós assumimos que $t \geq t_B$, ou seja, consideramos modelos em expansão, Para o colapso em direção do Big Crunch $t \leq t_c$, onde t_c é o tempo de recolapso, basta substituir $(t - t_B)$ por $(t_c - t)$ e t'_B por $(-t'_c)$.

Para mais detalhes sobre as condições nas quais o shell crossing possa acontecer, referenciamos ao trabalho de Hellaby e Lake[29], onde eles mostram as condições para não ter shell crossing em regiões elípticas, regiões hiperbólicas e regiões parabólicas.

6.3 Inomogeneidade e distância de luminosidade no modelo LTB

Para comparar um modelo inhomogêneo LTB com as observações de supernovas, precisamos de uma equação que relacione o redshift e o fluxo de energia da luz com a natureza exata das inomogeneidades. Para isso, deve-se estudar a propagação da luz no universo LTB.

Vamos derivar as equações para um observador localizado no centro de simetria [30]; uma dedução mais geral destas equações para um observador fora do centro pode ser encontrada no artigo de Alnes e Amarzguioui [31].

Estudamos a propagação da luz na direção radial, isto é, existem geodésicas com $d\theta = d\phi = 0$. Além disso, já que a luz viaja sempre ao longo de geodésicas nulas, temos $ds^2 = 0$. Inserindo estas condições em (6.1), obtemos a equação para os raios de luz:

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{R'(t, r)}{\sqrt{1 + 2E(r)}} \quad \text{ou} \quad \frac{dt}{d\mu} = -\frac{dr}{d\mu} \frac{R'(t, r)}{\sqrt{1 + 2E(r)}},$$

onde μ é um parâmetro da curva, e o sinal negativo indica que estamos estudando os raios de luz que nos atingem radialmente.

Consideramos dois raios de luz que são soluções da equação (6.13), os quais são $t_1 = t(\mu)$ e $t_2 = t(\mu) + \lambda(\mu)$. Substituindo estas soluções em (6.13), temos:

$$\frac{dt_1}{d\mu} = \frac{dt(\mu)}{d\mu} = -\frac{dr}{d\mu} \frac{R'(t(\mu), r)}{\sqrt{1 + 2E(r)}}, \quad (6.13)$$

$$\frac{dt_2}{d\mu} = \frac{dt(\mu)}{d\mu} + \frac{d\lambda(\mu)}{\mu} = -\frac{dr}{d\mu} \frac{R'(t(\mu), r)}{\sqrt{1 + 2E(r)}} + \frac{d\lambda(\mu)}{d\mu}. \quad (6.14)$$

Também da equação (6.13), temos:

$$\frac{dt_2}{d\mu} = -\frac{dr}{d\mu} \frac{R'(t_2, r)}{\sqrt{1 + 2E(r)}} = -\frac{dr}{d\mu} \frac{R'(t(\mu) + \lambda(\mu), r)}{\sqrt{1 + 2E(r)}}. \quad (6.15)$$

Fazemos uma expansão de Taylor ao redor de $\lambda(\mu)$ mantendo apenas os termos lineares, assim

$$\frac{dt_2}{d\mu} = -\frac{dr}{d\mu} \frac{R'(t(\mu), r)}{\sqrt{1 + 2E(r)}} - \frac{dr}{d\mu} \frac{R'(t(\mu), r) \lambda(\mu)}{\sqrt{1 + 2E(r)}}. \quad (6.16)$$

Das equações (6.14) e (6.16), obtemos

$$\frac{d\lambda(\mu)}{d\mu} = -\frac{dr}{d\mu} \frac{R'(t, r) \lambda(\mu)}{\sqrt{1 + 2E(r)}}. \quad (6.17)$$

Derivando a definição do redshift $z \equiv \frac{\lambda(0)}{\lambda(\mu)} - 1$, temos: $\frac{dz}{d\mu} = -\frac{\lambda(0)}{\lambda^2(\mu)} \frac{d\lambda(\mu)}{d\mu}$. Logo substituímos esta relação e a definição do redshift na equação anterior para obter

$$\frac{dz}{d\mu} = \frac{dr}{d\mu} \frac{(1+z) \dot{R}'(t, r)}{\sqrt{1 + 2E(r)}}. \quad (6.18)$$

Finalmente de (6.13) e (6.18) obtemos o par de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem que determinam as relações entre as coordenadas e o redshift observável, ou seja $t(z)$ e $r(z)$. Assim,

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{R'(t, r)}{(1+z) \dot{R}'(t, r)}, \quad (6.19)$$

e

$$\frac{dr}{dz} = \frac{c\sqrt{1 + 2E(r)}}{(1+z) \dot{R}'(t, r)}. \quad (6.20)$$

Aqui reintroduzimos a velocidade da luz $c \approx 0.3$ em unidades de $\frac{\text{Gpc}}{\text{Gyr}}$ [32] utilizado para a consistência de obter a distância de luminosidade em Gpc. Estas equações (6.19) e (6.20) com as condições iniciais $t(z=0) = t_0$ e $r(z=0) = 0$ determinam $t(z)$ e $r(z)$.

A distância de luminosidade $d_L(z)$ de uma fonte de luz até o observador central é [33]:

$$d_L(z) = (1+z)^2 R(t, r) = (1+z)^2 R(t(z), r(z)). \quad (6.21)$$

Aqui identificamos que $d_A(z) = R(t(z), r(z))$ é a distância de diâmetro angular. O correspondente módulo de distância, considerando $10\text{pc} = 10^{-8}\text{Gpc}$ é dado por

$$\mu = m - M = 5 \log \left(\frac{d_L}{\text{Gpc}} \right) + 40. \quad (6.22)$$

Capítulo 7

Análise de contrarreação numa métrica de Lemaître-Tolman-Bondi

7.1 Dinâmica de Lemaître-Tolman-Bondi (LTB)

Consideramos a solução dinâmica não-homogênea mais simples para uma poeira irrotacional [41]

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2}{1 + 2E(r)} dr^2 - R^2(t, r) [d\vartheta^2 + \sinh\vartheta d\varphi]$$

onde a função $R = R(t, r)$ obedece

$$\dot{R}^2 = 2E(r) + \frac{2M(r)}{R}, \quad \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{M}{R^3}. \quad (7.1)$$

Para a densidade de matéria ρ_m temos

$$8\pi G\rho_m = \frac{2M'}{R^2 R'}, \quad (7.2)$$

onde a linha denota uma derivada com respeito a r . A relação, que é válida no caso geral,

$$\frac{1}{3}\Theta^2 - \sigma^2 = 8\pi G\rho_m - \frac{1}{2}{}^3R$$

é satisfeita em nosso caso com o escalar de expansão Θ ,

$$\Theta = 2\frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{R}'}{R'}, \quad (7.3)$$

o quadrado do cisalhamento σ^2 , definido por

$$\sigma^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{R}}{R} - \frac{\dot{R}'}{R'} \right)^2,$$

e o escalar 3-curvatura da métrica LTB

$${}^3R = -4 \frac{(ER)'}{R^2 R'}. \quad (7.4)$$

A densidade de matéria obedece a lei de conservação

$$\dot{\rho}_m + \Theta \rho_m = 0.$$

7.2 Tomando médias dos escalares de LTB

Para combinar a dinâmica LTB com as equações de Buchert precisamos considerar os escalares de expansão (7.3) e cisalhamento (7.4) nas expressões gerais (4.2) e (4.22). O elemento de volume LTB é dado por

$$dr^3 = \frac{R' R^2 \sinh\vartheta}{\sqrt{1+2E}} dr d\vartheta d\varphi.$$

Assumindo que o volume que desejamos fazer a média seja uma esfera de raio r_D , o volume da média se torna

$$V_D = 4\pi \int_0^{r_D} \frac{R' R^2}{\sqrt{1+2E}} dr = \frac{4\pi}{3} \int_0^{r_D} \frac{\partial}{\partial r} (R^3) \frac{1}{\sqrt{1+2E}}. \quad (7.5)$$

Os valores médios de quaisquer escalares S são calculados então de acordo com

$$\langle S \rangle(t) = \frac{4\pi}{V_D} \int_0^{r_D} S(t, r) \frac{R'(t, r) R^2(t, r)}{\sqrt{1+2E(r)}} dr.$$

A combinação $\frac{2}{3}\Theta^2 - \sigma^2$ que aparece na expressão (4.2) é convenientemente escrita como

$$\frac{2}{3}\Theta^2 - 2\sigma^2 = 4 \frac{\dot{R} \dot{R}'}{R R'} + 2 \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{2}{R^2 R'} \frac{\partial}{\partial r} (R^2 \dot{R}).$$

O escalar de expansão pode também ser escrito em termos de uma derivada

$$\Theta = \frac{2\dot{R}}{R} + \frac{\dot{R}'}{R'} = \frac{1}{R^2 R'} \frac{\partial}{\partial r} (R^2 \dot{R}).$$

Podemos então escrever

$$\langle \frac{2}{3}\Theta^2 - 2\sigma^2 \rangle = \frac{8\pi}{V_D} \int_0^{r_D} \frac{\partial}{\partial r} \left(\dot{R}^2 R \right) \frac{1}{\sqrt{1+2E}} dr \quad (7.6)$$

e

$$\langle \Theta \rangle = \frac{4\pi}{V_D} \int_0^{r_D} \frac{\partial}{\partial r} \left(\dot{R} R^2 \right) \frac{1}{\sqrt{1+2E}} dr \quad (7.7)$$

para obter a combinação

$$\mathcal{Q}_D = \langle \frac{2}{3}\Theta^2 - 2\sigma^2 \rangle - \frac{2}{3}\langle \Theta^2 \rangle. \quad (7.8)$$

Para o escalar de curvatura média temos

$$\langle {}^3R \rangle = -\frac{16\pi}{V_D} \int_0^{r_D} \frac{\partial}{\partial r} (ER) \frac{1}{\sqrt{1+2E}} dr. \quad (7.9)$$

As expressões (7.5), (7.6), (7.7), (7.8), (7.9) são bons pontos de partida para efetuar os cálculos diretos das quantidades relevantes. Após integração parcial, o volume (7.5) se torna

$$V_D = \frac{4\pi}{3} \frac{R^3(t, r_D)}{\sqrt{1+2E(r_D)}} \left[1 + \frac{\sqrt{1+2E(r_D)}}{R^3(t, r_D)} \int_0^{r_D} R^3(t, r) \frac{E'(r)}{(1+2E(r))^{3/2}} dr \right]. \quad (7.10)$$

As funções R e E fora da integral tem de ser tomadas em $r = r_D$. O fator de escala volumétrico então se torna

$$a_D(t) = \frac{R(r_D, t)}{R_0(r_D)} \left[\frac{1 + \frac{\sqrt{1+2E}}{R^3} \int_0^{r_D} R^3 \frac{E'}{(1+2E)^{3/2}} dr}{1 + \frac{\sqrt{1+2E}}{R_0^3} \int_0^{r_D} R_0^3 \frac{E'}{(1+2E)^{3/2}} dr} \right]^{1/3}$$

No limite $E = 0$ o fator de escala volumétrico é dada pela função de LTB R , tomada em $r = r_D$. Encontramos a expansão volumétrica como

$$\frac{\dot{a}_D}{a_D} = \frac{\dot{R}(r_D)}{R(r_D)} \frac{1 + \frac{\sqrt{1+2E}}{\dot{R}R^2} \int_0^{r_D} \dot{R}R^2 \frac{E'}{(1+2E)^{3/2}} dr}{1 + \frac{\sqrt{1+2E}}{R^3} \int_0^{r_D} R^3 \frac{E'}{(1+2E)^{3/2}} dr}.$$

Para $E = 0$ o limite de FLRW pode ser recuperado tomando $R = ar$, resultando em $a_D = a$ e a expansão do volume coincide com o parâmetro de Hubble de FLRW, $\frac{\dot{a}_D}{a_D} = \frac{\dot{a}}{a}$. de forma similar, encontramos através de (7.9)

$$\mathcal{R}_D = -\frac{8\pi}{V_D} \frac{2ER}{\sqrt{1+2E}} \left[1 + \frac{\sqrt{1+2E}}{2ER} \int_0^{r_D} 2ER \frac{E'}{(1+2E)^{3/2}} dr \right] \quad (7.11)$$

e, a partir de (7.8), (7.7) e (7.7),

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_D = & 6 \frac{\dot{R}^2(r_D)}{R^2(r_D)} \frac{1}{\left[1 + \frac{\sqrt{1+2E}}{R^3} \int_0^{r_D} \frac{E'}{(1+2E)^{3/2}} dr\right]^2} \left\{ \frac{\sqrt{1+2E}}{\dot{R}^2 R} \int_0^{r_D} \dot{R}^2 R \frac{E'}{(1+2E)^{3/2}} dr \right. \\
& + \frac{\sqrt{1+2E}}{R^3} \int_0^{r_D} R^3 \frac{E'}{(1+2E)^{3/2}} dr - 2 \frac{\sqrt{1+2E}}{\dot{R} R^2} \int_0^{r_D} \dot{R} R^2 \frac{E'}{(1+2E)^{3/2}} dr \\
& + \frac{1+2E}{\dot{R}^2 R^4} \left[\int_0^{r_D} \dot{R}^2 R \frac{E'}{(1+2E)^{3/2}} dr \right] \left[\int_0^{r_D} R^3 \frac{E'}{(1+2E)^{3/2}} dr \right] \\
& \left. - \frac{1+2E}{\dot{R}^2 R^4} \left[\int_0^{r_D} \dot{R} R^2 \frac{E'}{(1+2E)^{3/2}} dr \right]^2 \right. \quad (7.12)
\end{aligned}$$

As fórmulas (7.11) e (7.12) são as expressões mais gerais para a contrarreacção no contexto de LTB. Note que as funções R e E fora das integrais devem ser tomadas no ponto $r = r_D$. Pode-se mostrar explicitamente que utilizando as equações (7.1), o conjunto das equações de Buchert é identicamente satisfeito. Com uma solução explícita para $R(r, t)$ e um modelo para $E(r)$ todas as médias podem, em princípio, serem calculadas. Obviamente, ambos \mathcal{R}_D e \mathcal{Q}_D são determinados pelos parâmetros da solução de LT no contorno do volume médio considerado.

7.3 Soluções para a dinâmica de LTB

7.3.1 Soluções gerais

Aqui vamos relembrar as soluções gerais da dinâmica de LTB. Estas dependem do sinal da função E . Para $E < 0$ a equação (7.1) tem como solução

$$R(r, t) = -\frac{M(r)}{2E(r)} (1 - \cos \eta), \quad \eta - \sinh \eta = \frac{(-2E(r))^{3/2}}{M(r)} (t - t_B(r)). \quad (7.13)$$

$$(7.14)$$

Aqui surge outra função de r , o tempo de Big Bang $t_B(r)$. A solução para $E > 0$ é

$$R(r, t) = \frac{M(r)}{2E(r)} (\cosh \eta - 1), \quad \sinh \eta - \eta = \frac{(2E(r))^{3/2}}{M(r)} (t - t_B(r)) \quad (7.15)$$

Para $E = 0$ a equação (7.1) se resolve na forma

$$R(r, t) = \left[\frac{9}{2} M(r) \right]^{1/3} (t - t_B(r))^{2/3}. \quad (7.16)$$

Em geral, as soluções são caracterizadas pelas funções livres $M(r)$, $E(r)$ e $t_B(r)$.

7.3.2 Solução de curvatura pequena para $E > 0$

Vamos nos concentrar momentaneamente na solução (7.15). Para valores pequenos de η , mantendo contribuições de até segunda ordem em η^2 ,

$$\cosh \eta - 1 \approx \frac{1}{2} \eta^2 \left(1 + \frac{1}{12} \eta^2 \right), \quad \sinh \eta - \eta \approx \frac{1}{6} \eta^3 \left(1 + \frac{1}{20} \eta^2 \right). \quad (7.17)$$

Temos então que

$$R(r, t) = \frac{M}{2E} \frac{1}{2} \eta^2 \left(1 + \frac{1}{12} \eta^2 \right)$$

e, mantendo até a segunda ordem em η^2 ,

$$R(r, t) = \left(\frac{9M(r)}{2} \right)^{1/3} (t - t_B(r))^{2/3} \left[1 + \frac{9}{20} (2E(r)) \left(\frac{2}{9M(r)} \right)^{2/3} (t - t_B(r))^{2/3} \right]. \quad (7.18)$$

Esta é a solução para a função $R(r, t)$ para $E > 0$, linearizada em torno da solução para $E = 0$. Ela depende das funções espaciais $M(r)$, $E(r)$ e do tempo de Big Bang não-homogêneo $t_B(r)$. Uma solução similar foi encontrada em [51][52]. No limite $E = 0$ a solução (7.16) é recuperada. Uma das três funções $M(r)$, $E(r)$ e $t_B(r)$ pode ser fixada. Aqui fazemos a escolha

$$M = \frac{2}{9} \frac{r^3}{(t_0 - t_B(r))^2}. \quad (7.19)$$

Isto garante que $R_0 \equiv R(r, t_0) = r$ para $E = 0$. Com (7.19) a solução (7.18) se escreve como

$$R(r, t) = r \frac{(t - t_B(r))^{2/3}}{(t_0 - t_B(r))^{2/3}} \left[1 + \kappa(r) \frac{(t - t_B(r))^{2/3}}{(t_0 - t_B(r))^{2/3}} \right], \quad (7.20)$$

com a quantidade de curvatura dada por

$$\kappa(r) \equiv \frac{9}{20} (2E(r)) \frac{(t_0 - t_B(r))^2}{r^2}.$$

Linearizando em κ nas derivadas e potências de $R(r, t)$ como, por exemplo,

$$R^2(r, t) = r^2 \frac{(t - t_B(r))^{4/3}}{(t_0 - t_B(r))^{4/3}} \left[1 + 2\kappa(r) \frac{(t - t_B(r))^{2/3}}{(t_0 - t_B(r))^{2/3}} \right],$$

pode-se verificar explicitamente que as equações (7.1) são satisfeitas para a solução (7.20). Para o parâmetro local de Hubble encontramos

$$H(r, t) \equiv \frac{\dot{R}(r, t)}{R(r, t)} = \frac{2}{3} \frac{1}{t - t_B(r)} \left[1 + \kappa(r) \frac{(t - t_B(r))^{2/3}}{(t_0 - t_B(r))^{2/3}} \right]. \quad (7.21)$$

A derivada espacial de R se escreve como

$$\begin{aligned} R'(r, t) = & \frac{(t - t_B(r))^{2/3}}{(t_0 - t_B(r))^{2/3}} \left[1 - \kappa(r) \frac{(t - t_B(r))^{2/3}}{(t_0 - t_B(r))^{2/3}} \left(1 - \frac{rE'}{E} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{3} r t'_B \left(\frac{2}{t - t_B} + \frac{1}{t_0 - t_B} \right) \right) \right. \\ & \left. - \frac{2}{3} r t'_B \left(\frac{1}{t - t_B} - \frac{1}{t_0 - t_B} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Note que $t'_B > 0$ reduz o valor de $R'(r, t)$. Dependendo do modelo isto pode fazer com que tenhamos $R' = 0$ para o qual a densidade de energia (7.2) diverge.

7.3.3 Dinâmica das equações médias

Tomar médias baseado numa dinâmica de LTB tem atraído bastante interesse na literatura [48][38][49][50][53][54]. Uma análise detalhada foi efetuada em [55]. Começamos a nossa análise com o caso mais simples, o de uma curvatura nula.

Limite de curvatura nula $E = 0$

O volume de média V_D em (7.10) é simplificado para

$$V_D = \frac{4\pi}{3} R^3(r_D) \quad (E = 0).$$

Ainda,

$$\left\langle \frac{2}{3}\Theta^2 - 2\sigma^2 \right\rangle = 6 \frac{\dot{R}^2(r_D)}{R^2(r_D)}, \quad (E = 0)$$

e

$$\langle \Theta \rangle = 3 \frac{\dot{R}(r_D)}{R(r_D)} \Rightarrow \langle \Theta \rangle^2 = 9 \frac{\dot{R}^2(r_D)}{R^2(r_D)} \quad (E = 0).$$

Segue, então, que

$$\mathcal{Q}_D = \frac{2}{3} (\langle \Theta^2 \rangle - \langle \Theta \rangle^2) - 2\langle \sigma^2 \rangle = 0 \quad (E = 0).$$

Não há qualquer contrarreação resultante para o caso $E = 0$ [38][50], e a curvatura média (7.11) é identicamente nula.

Dinâmica média na primeira ordem da curvatura E

Agora consideramos as equações (7.5), (7.6),(7.7),(7.8) e (7.9) até a ordem linear da função de curvatura E . Isto requer o conhecimento da solução de (7.20) para $R(r, t)$, que já é descrito de forma linear na curvatura. Desta forma vamos buscar soluções explícitas para o fator de escala volumétrico, o parâmetro de Hubble efetivo, a contrarreação cinemática e a curvatura média.

• Fator de escala

Linearizando em E , a expressão para o volume (7.10) se torna

$$V_D = \frac{4\pi}{3} R^3(r_D) \left[1 - E(r_D) + \frac{1}{R^3(r_D)} \int_0^{r_D} R^3 E' dr \right] + \mathcal{O}(E^2).$$

Com a solução (7.20) em $r = r_D$ o fator de escala volumétrico se torna

$$\begin{aligned} a_D = & \frac{(t - t_B(r_D))^{2/3}}{(t_0 - t_B(r_D))^{2/3}} \left[1 + \kappa(r_D) \left(\frac{(t - t_B(r_D))^{2/3}}{(t_0 - t_B(r_D))^{2/3}} - 1 \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{3R^3(r_D)} \int_0^{r_D} R^3 E' dr - \frac{1}{3R_0^3(r_D)} \int_0^{r_D} R_0^3 E' dr \right]. \quad (7.23) \end{aligned}$$

A curvatura de LTB modifica a dependência do tempo cósmico no fator de escala comparado com o caso de pura poeira, no qual é recuperado para $E = \kappa = 0$. A influência da modificação depende do valor da curvatura κ na borda do domínio. O segundo termo nos colchete no lado direito da equação (7.23) induz um crescimento mais rápido do fator de escala comparado ao universo de poeira sem contrarreação. A dependência adicional $t^{2/3}$ coincide exatamente com a dependência correspondente encontrada em [56], com base em um tratamento perturbativo.

- **Expansão volumétrica**

O parâmetro de Hubble efetivo $\mathcal{H}_D = \frac{1}{3} \frac{\dot{V}_D}{V_D}$ é determinado por

$$\frac{\dot{V}_D}{V_D} = 3 \frac{\dot{R}(r_D)}{R(r_D)} \left[1 + \frac{1}{\dot{R}R^2} \int_0^{r_D} \dot{R}R^2 E' dr - \frac{1}{R^3(r_D)} \int_0^{r_D} R^3 E' dr \right] + \mathcal{O}(E^2). \quad (7.24)$$

Da solução linear, encontramos o fator em frente aos colchetes no lado direito da equação (7.24) (de acordo com (7.21))

$$\frac{\dot{R}(r_D)}{R(r_D)} = \frac{2}{3} \frac{1}{t - t_B(r_D)} \left[1 + \kappa(r_D) \frac{(t - t_B(r_D))^{2/3}}{(t_0 - t_B(r_D))^{2/3}} \right].$$

Visto que, de acordo com (7.23), temos

$$\frac{(t - t_B(r_D))^{2/3}}{(t_0 - t_B(r_D))^{2/3}} = a_D [1 + \mathcal{O}(E)],$$

obtemos, até a ordem linear na curvatura,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}_D^2}{\mathcal{H}_{D0}^2} &= a_D^{-3} \left[1 + 5\kappa(r_D)(a_D - 1) + \frac{2}{\dot{R}(r_D)R^2(r_D)} \int_0^{r_D} \dot{R}R^2 E' dr \right. \\ &\quad - \frac{1}{R^3(r_D)} \int_0^{r_D} R^3 E' dr - \frac{2}{\dot{R}_0(r_D)R_0^2(r_D)} \int_0^{r_D} \dot{R}_0 R_0^2 E' dr \\ &\quad \left. + \frac{1}{R_0^3(r_D)} \int_0^{r_D} R_0^3 E' dr \right], \end{aligned} \quad (7.25)$$

onde $\mathcal{H}_{D0} = \mathcal{H}_D(t_0)$. O comportamento a_D^{-3} do caso de pura poeira é modificado, como deveria. O termo de curvatura é dado em função do fator de escala efetivo.

- **Contrarreação cinemática**

Em ordem linear em E , com

$$\frac{\dot{R}^2(r_D)}{R^2(r_D)} = \mathcal{H}^2 [1 + \mathcal{O}(E)],$$

a contrarreação cinemática (7.12) se reduz para

$$\mathcal{Q}_D = 6\mathcal{H}_D^2 \left[\frac{1}{R^3} \int_0^{r_D} R^3 E' dr + \frac{1}{M} \int_0^{r_D} M E' dr - \frac{2}{\dot{R}R^2} \int_0^{r_D} \dot{R}R^2 E' dr \right].$$

O parâmetro de contrarreação cinemática fica

$$\Omega_Q^D = -\frac{\mathcal{Q}_D}{6\mathcal{H}_D^2} = \frac{2}{\dot{R}R^2} \int_0^{r_D} \dot{R}R^2 E' dr - \frac{1}{M} \int_0^{r_D} ME' dr - \frac{1}{R^3} \int_0^{r_D} R^3 E' dr. \quad (7.26)$$

Explicitamente,

$$\begin{aligned} \Omega_Q^D = & \frac{(t_0 - t_B(r_D))^2}{r_D^3} \left[\frac{2}{t - t_B(r_D)} \int_0^{r_D} r^3 \frac{t - t_B(r)}{(t_0 - t_B(r))^2} E' dr \right. \\ & - \frac{1}{(t - t_B(r_D))^2} \int_0^{r_D} r^3 \frac{(t - t_B(r))^2}{(t_0 - t_B(r))^2} E' dr \\ & \left. - \int_0^{r_D} \frac{r^3}{(t_0 - t_B(r))^2} E' dr \right]. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Da equação (7.27) é fácil ver que não há contrarreação cinemática resultante para um tempo de big bang homogêneo $t_B(r) = \text{constante}$. Para um $t_B(r)$ constante as integrais em (7.27) simplesmente se cancelam.

• Curvatura média

A curvatura média, em ordem linear, é dada por

$$\mathcal{R}_D = -6 \frac{2E(r_D)}{R^2(r_D)} = -6 \frac{2E(r_D)}{r_D^2 a_D^2}.$$

Isto corresponde a uma constante de curvatura efetiva \mathcal{K}_D ,

$$|\mathcal{K}_D| = \frac{2E(r_D)}{r_D^2} = \mathcal{R}_{cD}^{-2} \Rightarrow \mathcal{R}_{cD} = \frac{r_D}{\sqrt{2E}}, \quad (7.28)$$

onde \mathcal{R}_{cD} é o raio de curvatura efetivo. Isto tem uma estrutura de uma curvatura comum nas equações de Friedmann. Em particular, \mathcal{K}_D é constante. Mas o termo de curvatura é o resultado de um procedimento de média e é aqui determinado pelos parâmetros de uma solução de LTB subjacente na borda do volume em que se faz a média. O parâmetro de curvatura correspondente se reduz a

$$\Omega_R^D = \frac{9}{4} (2E(r_D)) \frac{(t_0 - t_B(r_D))^2}{r_D^2} a_D = 5\kappa(r_D) a_D. \quad (7.29)$$

Isto implica $\Omega_{R0}^D = 5\kappa(r_D)$ para $\Omega_{R0}^D = \Omega_R^D(t_0)$, seu valor em t_0 . Para o raio de curvatura temos

$$\mathcal{R}_{cD} = \frac{c}{\mathcal{H}_{D0} \sqrt{\Omega_{R0}^D}}, \quad (7.30)$$

isto é, é da ordem do raio de Hubble do domínio.

• **Fração de matéria**

O comportamento $\langle \rho_m \rangle_D \propto a_D^{-3}$ que é uma consequência da equação de conservação da densidade média de energia, é consistente com a média de (7.2). Escrevemos

$$8\pi G \langle \rho_m \rangle_D = \frac{6M(r_D)}{R^3(r_D)} \left[1 + \frac{1}{M(r_D)} \int_0^{r_D} dr M(r) E' - \frac{1}{R^3(r_D)} \int_0^{r_D} dr R^3 E' \right].$$

A razão da densidade $\langle \rho_m \rangle_D / \langle \rho_m \rangle_{D0}$ então corresponde corretamente à

$$\frac{\langle \rho_m \rangle_D}{\langle \rho_m \rangle_{D0}} = \frac{R_0^3}{R^3} \left[1 - \frac{1}{R^3(r_D)} \int_0^{r_D} dr R^3 E' + \frac{1}{R_0^3(r_D)} \int_0^{r_D} dr R_0^3 E' \right] = a_D^{-3}.$$

A expressão para o parâmetro de densidade de matéria é

$$\begin{aligned} \Omega_m = & \frac{2M}{R^3} \frac{R^2}{\dot{R}^2} \left[1 + \frac{1}{M} \int_0^{r_D} M E' dr \right. \\ & \left. - \frac{2}{\dot{R} R^2} \int_0^{r_D} \dot{R} R^2 E' dr + \frac{1}{R^3(r_D)} \int_0^{r_D} dr R^3 E' \right]. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Até a ordem linear, temos que

$$R^3 \frac{\dot{R}^2}{R^2} = 2M [1 + 5\kappa(r_D) a_D] + \mathcal{O}(E^2)$$

é válido e com (7.26) e (7.29) pode-se verificar que (4.2) se recupera de forma consistente nesta ordem.

• **Consistência**

Obviamente, $(\mathcal{R}_D a_D^2)' = 0$. Isto implica, pela relação de consistência, ou que $\mathcal{Q}_D = 0$ ou $\mathcal{Q}_D \propto a_D^{-6}$. Calculando diretamente, pode-se encontrar que

$$\mathcal{Q}_D = \mathcal{Q}_{D0} a_D^{-6}, \quad \Omega_{Q0}^D = \Omega_{Q0}^D a_D^{-3} \quad (7.32)$$

com

$$\begin{aligned} \Omega_{Q0}^D = & \frac{1}{r_D^3} \left[2(t_0 - t_B(r_D)) \int_0^{r_D} \frac{r^3}{t_0 - t_B(r)} E' dr \right. \\ & \left. - \int_0^{r_D} r^3 E' dr - (t_0 - t_B(r_D))^2 \int_0^{r_D} \frac{r^3}{(t_0 - t_B(r))^2} E' dr \right]. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Esta combinação desaparece para o caso em que há uma constante de big bang homogênea. Para haver uma contrarreação cinemática em ordem linear, é necessário haver um tempo de big bang não-homogêneo. Para um tempo de big bang homogêneo o parâmetro de EdS (4.37) é sempre $p_{bD}/\rho_{bD} = -1/3$.

• **Parâmetro de Hubble e parâmetro de desaceleração**

Com os parâmetros (7.29) e (7.32) o parâmetro de Hubble (7.25) se escreve como

$$\frac{\mathcal{H}_D^2}{\mathcal{H}_{D0}^2} = a_D^{-3} [\Omega_{M0}^D + \Omega_{R0}^D a_D + \Omega_{Q0}^D a_D^{-3}], \quad (7.34)$$

enquanto o parâmetro de desaceleração (4.39) se torna

$$q_D = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left[\Omega_{Q0}^D a_D^{-3} - \frac{1}{3} \Omega_{R0}^D a_D \right].$$

O resultado (7.34) para o parâmetro de Hubble em termos do fator de escala volumétrico com coeficientes conhecidos explicitamente é o nossa principal conquista até o momento. A combinação $\Omega_{R0}^D a_D + \Omega_{Q0}^D a_D^{-3}$ representa a influência do fluido de contrarreação na dinâmica. Do ponto de vista da cosmologia com contrarreação esta deveria fornecer o equivalente as componentes do setor escuro no modelo cosmológico padrão. Dada que a dependência desta contribuição de a_D não é obvio, porém, que esta expectativa possa ser contemplada no nosso modelo de LTB simples. Enquanto a estrutura de (7.34) corresponde à solução fenomenológica mais simples possível (4.29) para o qual os termos de contrarreação cinemática e a curvatura média na relação de consistência (4.2) desaparecem separadamente, nós derivamos esta estrutura aqui através de uma dinâmica exata não-homogênea subjacente que nos proveu com expressões explícitas para Ω_{R0}^D e Ω_{Q0}^D . Mesmo que este não nos leve a uma descrição realista do universo, acreditamos que seja útil como um “modelo de teste” (do inglês “Toy Model”) com solução exata e um primeiro passo para configurações mais realistas.

Para um tempo de big bang homogêneo o último termo da equação (7.34) desaparece, visto que $\Omega_{Q0} = 0$ e o único termo adicional vindo do procedimento de média é devido a uma curvatura constante na qual esta curvatura constante é determinada pela solução de LTB na borda da região de integração. O fluido de contrarreação se torna uma componente de pura curvatura neste caso. Para um tempo de big bang não-homogêneo, a contrarreação é de forma geral diferente de zero. Mas visto que esta contribuição relativa à parte de matéria decai com a_D^{-3} em (7.34), haverá um impacto cada vez menor enquanto aumentamos o valor de a_D . Ainda, já que se espera que a parte de matéria Ω_M^D domine a evolução para $a_D \ll 1$, temos um vínculo forte sobre o valor atual do parâmetro de contrarreação Ω_{Q0}^D . Apesar destes problemas óbvios, vamos prosseguir e tentar nosso modelo com observações de Supernovas tipo Ia do catálogo Union 2.1. Esperamos com isto dar uma idéia aproximada da ordem de magnitude dos parâmetros da teoria, em es-

pecial os parâmetros ainda não fixados, como o raio r_D e o volume de média V_D .

• Métrica efetiva e distância de luminosidade

Para fazer contato com as observações, é útil considerar uma métrica efetiva com o fator de escala volumétrico a_D com uma quantidade de curvatura generalizada[34][37]

$$ds_{eff}^2 = c^2 dt^2 - a_D^2 \left[dr^2 + \mathcal{R}_{cD}^2 \sinh \frac{r}{\mathcal{R}_{cD}} (d\vartheta + \sin^2 \vartheta d\varphi) \right].$$

A propagação de luz radial é então descrita por

$$ds^2 = 0 \Rightarrow dr \pm \frac{c}{a_D^2 \mathcal{H}_D} da_D = \mp \frac{c}{\mathcal{H}_D} dz_D.$$

Então

$$r(z_D) = \frac{c}{\mathcal{H}_{D0}} \int_0^{z_D} \frac{dz_D}{[\Omega_{M0}^D (1+z_D)^3 + \Omega_{R0}^D (1+z_D)^2 + \Omega_{Q0}^D (1+z_D)^6]^{1/2}}.$$

A distância de luminosidade pode ser calculada via

$$d_L^{eff}(z_D) = (1+z_D) \mathcal{R}_{cD}(z_D) \sinh \frac{r(z_D)}{\mathcal{R}_{cD}(z_D)},$$

com \mathcal{R}_{cD} de (7.28).

Como já foi mencionado, não é de se esperar que a expressão (7.3.3) com (7.3.3) e a taxa de Hubble (7.34) resultem em um modelo competitivo do nosso Universo real. Mas mesmo se visto objetivamente como um “toy model”, pode ser interessante clarificar seu status em relação aos dados observacionais. Começamos com uma análise simplificada que ignora a estrutura detalhada para expressões para Ω_{R0}^D e Ω_{Q0}^D mas que permite um atalho para os dados observacionais. Para estar aproximadamente de acordo com o modelo padrão, fixamos a fração de matéria em $\Omega_{m0}^D = 0.3$. Então consideramos Ω_{R0}^D e \mathcal{H}_{D0} como parâmetros livres nas expressões (7.34) e (7.3.3) para \mathcal{H}_D e $d_L^{eff}(z_D)$, respectivamente, e confrontamos os resultados com dados de supernovas do tipo Ia, e também com dados de idade diferenciais para galáxias antigas para $\mathcal{H}_D(z_D)$. Apenas para fazer a comparação com os dados, adotamos os valores da análise padrão para o módulo de distância [37]

$$\mu_D = 5 \log d_L^{eff}(z_D) + \mu_{D0} \quad (7.35)$$

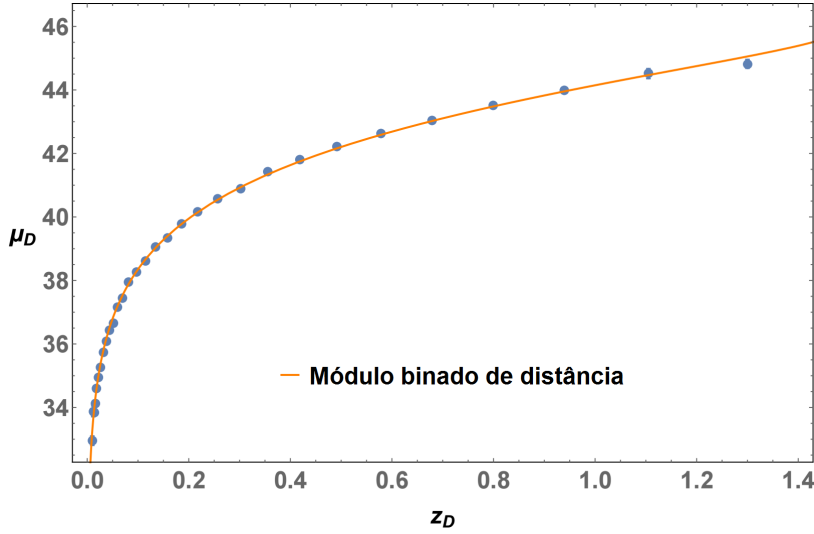


Figura 7.1: Módulo de distância binada μ_D com dependência do parâmetro de redshift z_D . Verificamos que o modelo reproduz de forma satisfatória os dados de supernovas do JLA.

com $\mu_{D0} = 42.384 - 5 \log h_D$, onde h_D é definido por $\mathcal{H}_{D0} = 100h_D \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$. Esta escolha implica em uma escala de médias da ordem do tamanho do Universo observável. Isto nos permite fazer uma análise estatística utilizando os dados da compilação JLA das supernovas do tipo Ia[67]. O módulo de distância binada μ_D com dependência do parâmetro de redshift z_D é mostrado na figura abaixo.

Como valores de melhor ajuste, obtemos $\Omega_{R0}^D = 0.74$ e $h_D = 0.67$. Usando estes valores em (7.30) encontramos $R_{cD} = 5.21 \text{Gpc}$ para o raio de curvatura do universo. O valor correspondente para a contrarreação cinemática é $\Omega_{Q0}^D = -0.04$. Enquanto isto parece nos dar algum suporte observacional para o nosso modelo, a situação muda quando aplicamos um teste diferente que confronta a taxa de Hubble(7.34) com a idade diferencial de galáxias antigas que evoluíram passivamente[58][59][60]. Aqui utilizamos os 28 dados listados em [61]. Esta análise de $\mathcal{H}_D(z_D)$ nos fornece valores bastante diferentes $\Omega_{R0}^D = 0.702$, $h = 0.57$ e $\Omega_{Q0}^D = -0.002$. Ainda mais importante: ainda que os valores atuais da fração de contrarreação cinemática sejam bem pequenos em ambos os casos, elas ainda são grandes demais para permitir uma época de dominação de matéria em um redshift da ordem do redshift da época de recombinação. Além do mais, uma contrarreação que cresce mais rápido que a dominação de matéria quando olhamos cada vez mais para o passado é fisicamente duvidoso de qualquer forma. Os resultados da análise estatística são vistos na figura 7.2.

Os contornos de confiança de ambos os testes são dramaticamente diferentes, o que demonstra explicitamente a falha observacional da nossa configuração de fluido de curvatura.

Note que para obter estes resultados não nos utilizamos das expressões para o parâmetro de curvatura $E(r)$ e o tempo de big bang inhomogêneo $t_B(r)$. Na próxima seção vamos discutir brevemente alguns modelos simples para estas quantidades.

7.3.4 Contrarreação em segunda ordem

Para as expressões gerais (7.11) e (7.12) para a curvatura média e a contrarreação cinemática, respectivamente, é óbvio que a contribuição de menor ordem é no máximo linear em E e, com $E = 0$ ambos \mathcal{R}_D e \mathcal{Q}_D desaparecem. Uma vez que conhecemos a solução para R até a ordem linear também, é possível calcular \mathcal{R}_D e \mathcal{Q}_D até a segunda ordem. O resultado para a curvatura média é

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D = & -\frac{6}{r_D^2 a_D^2} \left[2E \left(1 - \frac{2}{5} \Omega_{R0}^D - \frac{2}{3R_0^2(r_D)} \int_0^{r_D} R_0^3 E' dr \right) \right. \\ & + \frac{1}{R(r_D, t)} \int_0^{r_D} 2E(r) R(r, t) E' dr \\ & \left. - \frac{2E}{3R^3(r_D, t)} \int_0^{r_D} R^3(r, t) E' dr \right] \end{aligned} \quad (7.36)$$

Somente os últimos dois termos nos colchetes dependem do tempo. Para verificar a dependência de \mathcal{R}_D em a_D é útil calcular o termo $(a_D^2 \mathcal{R})'$. Obtemos

$$\begin{aligned} (a_D^2 \mathcal{R})' = & -\frac{12\mathcal{H}_D(r_D, t)}{r_D^2} \left[E(r_D) \left(\frac{1}{R^3(r_D, t)} \int_0^{r_D} R^3(r, t) E' dr \right) \right. \\ & - \frac{1}{\dot{R}(r_D, t) R^2(r_D, t)} \int_0^{r_D} \dot{R}(r, t) R^2(r, t) E' dr \\ & - \frac{1}{R(r_D, t)} \int_0^{r_D} R(r, t) E E' dr \\ & \left. + \frac{1}{\dot{R}(r_D, t)} \int_0^{r_D} \dot{R}(r, t) E E' dr \right] \end{aligned} \quad (7.37)$$

Esta é uma quantidade puramente de segunda ordem. Podemos utilizar aqui a expressão em ordem zero para $R(r, t)$,

$$R(r, t) = r \frac{(t - t_B(r))^{2/3}}{(t_0 - t_B(r))^{2/3}} + \mathcal{O}(E)$$

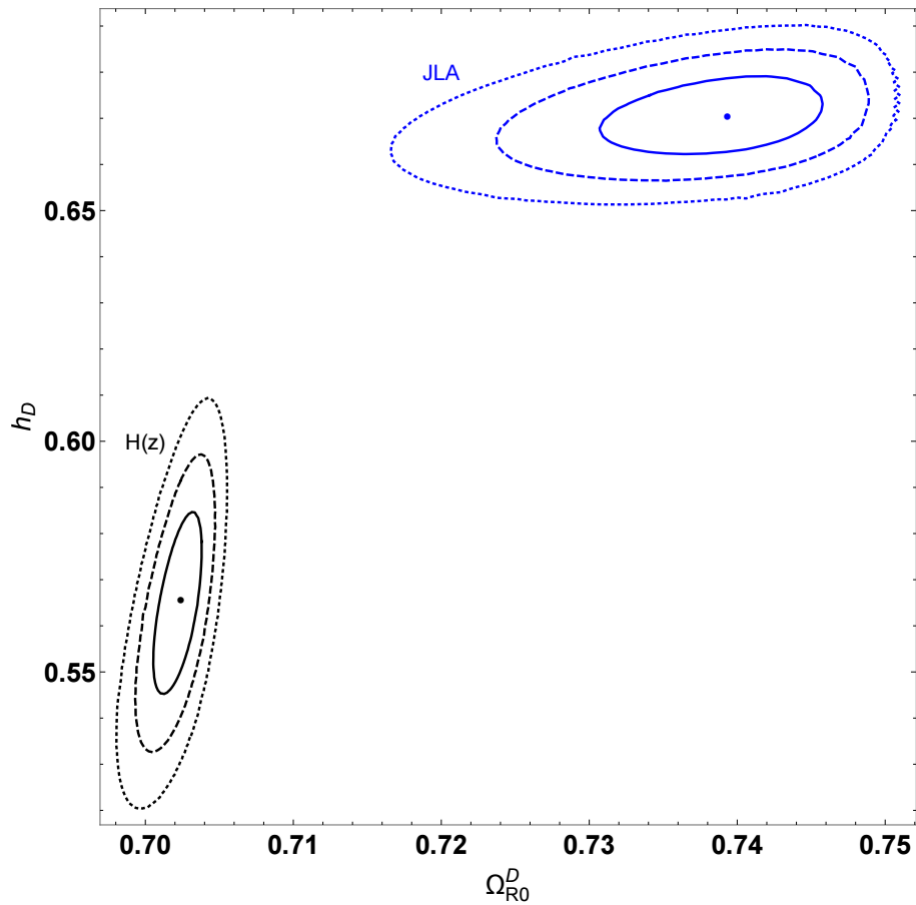


Figura 7.2: O plano $\Omega_{R0}^D - h_D$ com curvas de contorno ($1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$) para os testes de SNIa e $\mathcal{H}_D(z_D)$. Verificamos uma tensão entre os valores possíveis para h_D e Ω_{R0}^D praticamente irreconciliável, o que nos sugere que o modelo que estamos trabalhando não fornece uma descrição fiel do universo observável.

dentro das integrais e a mesma solução $r = r_D$ para os fatores que multiplicam as integrais. Isto revela que, para $t_B = \text{constante}$, os dois primeiros termos se cancelam mutuamente e os terceiro e quarto termos também. Para um tempo de big bang homogêneo a curvatura média se comporta como a_D^{-2} mesmo em segunda ordem em E . Desvios de uma curvatura constante requerem um tempo de big bang não-homogêneo. Através de um cálculo bastante direto pode-se concluir através de (7.12) que \mathcal{Q}_D realmente desaparece também para segunda ordem em E para um t_B constante, que é consistente com $\mathcal{R}_D \propto a_D^{-2}$ para este caso.

Para nossa configuração neste modelo simples e idealizado de LTB uma contrarreação cinemática diferente de zero só pode ser alcançada através de um tempo de big bang não-homogêneo. Uma solução que satisfaz a relação (4.2) além do caso mais simples (4.2) deve ser, no mínimo, de ordem quadrática em no parâmetro de curvatura de LTB E com um tempo de big bang não-homogêneo.

7.3.5 Modelos Simples

Para um estudo quantitativo, as funções de LTB $E(r)$ e $t_B(r)$ devem ser fornecidas. Vamos começar esta análise com uma sugestão (“ansatz”) simples para $E(r)$, e por conseguinte, considerar os casos $t_B = 0$, $t'_B < 0$ e $t'_B > 0$.

• Função de curvatura LTB

A função $2E$ tem de ter a forma geral [41]

$$2E = -r^2(k + F(r)), \quad F(0) = 0. \quad (7.38)$$

Fazendo a escolha

$$2E = -r^2(-|k| + F(r)), \quad F = |k| \left(1 - e^{-(r/r_E)^n}\right), \quad (7.39)$$

que satisfaz $F(0) = 0$ tem-se que

$$2E = r^2 |k| e^{-(r/r_E)^n}, \quad E' = \left[1 - \frac{n}{2} \left(\frac{r}{r_E}\right)^n\right] r |k| e^{-(r/r_E)^n}. \quad (7.40)$$

A função de curvatura tende a zero no limite $r \gg r_E$.

• Raio de curvatura média

Através de (7.29) temos que

$$\Omega_{R0}^D = \frac{9}{4} (2E(r_D)) \frac{(t_0 - t_B(r_D))^2}{r_D^2}.$$

Junto com

$$\mathcal{H}_{D0}^2 = \frac{4}{9(t_0 - t_B(r_D))^2} + \mathcal{O}(E)$$

e também com (7.28) e (7.30) temos a correspondência

$$2E(r_D) = \frac{r_D^2}{\mathcal{R}_{cD}^2}, \quad \frac{1}{\mathcal{R}_{cD}} = |k| e^{-(r_D/r_E)^n}, \quad \Omega_{R0}^D = \frac{c^2}{\mathcal{H}_{D0}^2 \mathcal{R}_{cD}^2}. \quad (7.41)$$

A combinação $|k| e^{-(r_D/r_E)^n}$ no ansatz para $2E(r_D)$ representa o quadrado do inverso do raio de curvatura da dinâmica média. O raio r_E caracteriza o alcance da curvatura da solução de LTB e o raio r_D determina a extensão do volume da qual tomamos a média. Se o volume de média é tomado de forma que $r_D \gg r_E$, o raio de curvatura da dinâmica média tende ao infinito, ou seja, a curvatura média é desprezível. Para ter um raio médio de curvatura \mathcal{R}_{cD} finito a extensão de r_D para o volume de média tem que ser tomado de forma que $r_D \lesssim r_E$.

Se o volume em que tomamos a média é tal que $r_D \gg r_E$ (e assumindo um valor de referência de $k = 1\text{Gpc}^{-2}$), o raio de curvatura da dinâmica média tende ao infinito, ou seja, a curvatura média é desprezível. Para ter um raio de curvatura R_{cD} finito, equivalente a uma influência perceptível da curvatura na dinâmica média, a extensão r_D do volume de média tem que ser de ordem r_E . O valor $\mathcal{R}_{cD} = 5.21\text{Gpc}$ do teste JLA é obtido para $r_D = 1.79r_E$.

Para um cálculo detalhado das quantidades Ω_{R0}^D e Ω_{Q0}^D em (7.29) e (7.33), respectivamente, precisamos ainda de um modelo explícito para o tempo de bang inhomogêneo $t_B(r)$. Em [62], foi demonstrado que o ansatz

$$t_B(r) = t_{B0} e^{-(r/r_c)^m}. \quad (7.42)$$

onde r_c denota outra escala de inhomogeneidade, produz um modelo simples de vazio. O tempo de bang (7.42) cresce com o raio r até se aproximar de um valor constante, ou seja, aqui,

$$t_B(0) = 0, \quad t_B(r \gg r_c) = t_{B0}.$$

Com essas hipóteses as integrais na expressão (7.33) para o parâmetro de contrarreação cinemática hoje Ω_{Q0}^D pode ser calculado explicitamente. Várias combinações dos parâmetros t_{B0} , r_c e r_E foram verificadas, mas mesmo que uma delas reproduza razoavelmente bem o mesmo valor que a análise de $\mathcal{H}_D(z_D)$, o significado físico deste termo ainda é duvidoso.

Capítulo 8

Considerações Finais

Este trabalho surgiu da tentativa de compreender como funciona o formalismo de Buchert e a sua possível relação com a componente de energia escura que aparece no modelo Λ CDM. O formalismo é, de fato, bastante interessante e fornece uma explicação alternativa para uma expansão acelerada do universo, relacionada principalmente à forma de como a distribuição de matéria no universo é dada. Outro ponto interessante é o fato de não precisarmos determinar uma métrica para concluirmos esses resultados. Porém logo nos deparamos com o problema que a teoria é tão geral que existe uma dificuldade intrínseca de relacioná-la com as observações: primeiro, que pode-se fazer uma relação direta entre a contrarreação e Λ CDM e, a primeira vista, parecia muito difícil encontrar diferenças em fenômenos físicos que pudessem justificar escolher uma teoria ou outra (caso a fenomenologia de ambos fosse idêntica, a teoria não passaria de uma descrição matemática diferente para o Λ CDM usual) e segundo, que sem uma métrica específica não haveria qualquer forma de relacioná-la com quaisquer observações. Então o trabalho seguiu por dois caminhos distintos, mas paralelos: Por um lado, estávamos interessados em encontrar a relação entre a contrarreação e a descrição da evolução do universo através de um fluido viscoso, enquanto por outro lado queríamos aplicar a teoria de Buchert diretamente a uma métrica que descrevesse um universo inomogêneo, e escolhemos nesse caso a métrica de Lemaître-Tolman-Bondi.

A descrição de fluido viscoso foi a primeira parte que desenvolvemos, e obtivemos uma relação direta entre o fluido e a contrarreação, porém para relacionar isso com observações, em particular com dados de luminosidade de Supernovas, precisávamos de uma forma de descrever a propagação de luz em um universo granulado (cujos valores médios são descritos pela teoria de Buchert), e isto não era uma tarefa trivial.

Partimos então para desenvolver a parte LTB, e grande parte deste trabalho foi justamente descrever as quantidades relacionadas - devido à grande quantidade de cálculos necessários. Ficou bastante claro aqui que, embora a teoria geral pareça bastante simples, aplicá-la num modelo específico pode ser bastante trabalhoso e complicado. Mas uma vez desenvolvido, tínhamos novamente o problema de relacionar os dados com as observações - e novamente somos forçados a lidar com a propagação de luz.

Inicialmente tentamos avançar pelo caminho que Alimi et al.[27] sugere, para obter a propagação de luz em função do redshift para uma métrica qualquer, coisa que é bastante trabalhosa de se obter, e finalmente se obtém um conjunto de três equações diferenciais não-lineares acopladas que descrevem a luminosidade em função do redshift, o que resolveria completamente nosso problema - se não fosse o fato que os programas numéricos que desenvolvemos não funcionavam de forma alguma. Para avançar com nossos problemas, tivemos então de buscar outra alternativa para a propagação de luz, e a solução encontrada foi utilizar uma métrica “template”, que imita propriedades de uma métrica de FLRW (como um fator de escala), mas que não precisa ser solução das equações de campo. Então foi possível encontrar uma relação entre a métrica template e a métrica LTB, e utilizá-la para descrever a propagação de luz dessa forma. Dessa forma, podemos discernir entre as teorias Λ CDM e uma teoria de métrica efetiva através da forma como a luz se propaga. Utilizamos esse formalismo para comparar a propagação da luz do modelo viscoso com contrarreação contra o modelo Λ CDM, e chegamos a um resultado agradável que a teoria de fluido viscoso com contrarreação fornece valores que concordam bastante com Λ CDM, mas ainda tem pequenas discrepâncias para redshifts acima de $z = 1.4$, o que indica que com melhores observações no futuro, poderemos discernir quais das teorias está correta.

Utilizamos também este formalismo (propagação de luz por métrica template) para o caso LTB, mas aqui é um pouco mais complicado pois o número de parâmetros livres do sistema para fazer o fitting com os dados de supernovas é maior, o que dificultou um pouco o processo numérico. Mas ainda assim foi possível realizá-lo, e obtivemos resultados não muito bons comparados a Λ CDM - porém não esperávamos uma descrição realista, visto que a métrica LTB serve melhor como um “toy model”, que pode nos ajudar a entender melhor como uma dinâmica homogênea e isotrópica pode surgir a partir de uma configuração inomogênea a priori.

Uma possível continuação para trabalhos futuros seria implementar outros testes, como Oscilações Acústicas de Bárions, ou até mesmo verificar a estabilidade de perturbações em torno da métrica LTB, e ver como as perturbações influenciam as quantidades de contrarreação (em princípio esperamos que essas variações não produzam efeitos observáveis, mas isso precisa

ser demonstrado). Existe uma discussão ainda em andamento se os efeitos de contrarreação são desprezíveis ou não em tempos recentes [65][66], e talvez os resultados do nosso trabalho podem ajudar a responder alguns dos argumentos contra a contrarreação. Outra possível linha de pesquisa seria avaliar o formalismo de Zalaletdinov[4], que considera médias sobre quantidades tensoriais e um formalismo mais geral (e mais complicado), e tentar relacionar com as quantidades de contrarreação do formalismo de Buchert para decidir qual das duas é correta.

Capítulo 9

Apêndice

O formalismo ADM

O formalismo ADM recebe este nome vindo de seus pesquisadores originais, Richard Arnowitt, Stanley Deser e Charles W. Misner[13], e se trata de uma formulação das equações da relatividade geral em um formalismo de primeira ordem. Vamos desenvolver este formalismo para obtermos as equações que são necessárias para a teoria de Buchert para a contrarreação. Mantemos aqui a convenção de índices gregos $\alpha, \beta, \dots = 0, 1, 2, 3$ e índices latinos $a, b, \dots = 1, 2, 3$. Tomamos como ponto de partida um campo escalar $t(x^\mu)$ definido no espaço-tempo tal que $t = \text{const}$ descreve uma família de hipersuperfícies ortogonais de tipo tempo com um vetor normal $n_\mu \propto \partial_\mu t$. Em cada hipersuperfície $\Sigma(t)$ parametrizada por um valor de t , introduzimos as coordenadas espaciais y^i . Para conectar as coordenadas espaciais nas duas hipersuperfícies diferentes, nós consideramos a congruência das curvas que atravessam essas superfícies, com t sendo o parâmetro afim da curva. (As curvas não são necessariamente geodésicas, e não precisam também ser ortogonais às hipersuperfícies.) Isto define um mapeamento de eventos de uma hipersuperfície para a outra, com o mesmo conjunto de valores y^i sendo dados aos eventos interceptados por esta curva. Este procedimento produz um sistema de coordenadas $x^\mu = (t, y^i)$ no espaço-tempo com o vetor tangente $t^i = (\partial x^i / \partial t)$ às curvas satisfazendo a condição $t^\mu \partial_\mu t = 1$. Além disso, $e_i^\mu = (\partial x^\mu / \partial y^i)$ atua como uma tetrade de projeção em $\Sigma(t)$. Em seguida, podemos escrever o vetor normal às hipersuperfícies como $n_\mu = -N \partial_\mu t$ (com $n_\mu e_i^\mu = 0$), onde inserimos a função escalar N (chamada de “lapso”) para garantir a normalização. Podemos decompor t^μ como $t^\mu = N n^\mu + N^i e_i^\mu$, onde as três funções N^i formam um vetor espacial (chamado de “deslocamento”,

do inglês “shift”). Através da transformação de coordenadas $x^\mu = x^\mu(t, y^i)$, temos que

$$dx^\mu = t^\mu dt + e_i^\mu dy^i = (Ndt) n^\mu + (dy^i + N^i dt) e_i^\mu. \quad (9.1)$$

Assim a métrica do espaço-tempo, dada por $ds^2 = dx^\mu dx_\mu$, se simplifica em

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + h_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt), \quad (9.2)$$

onde a 3-métrica induzida em Σ é dada por

$$h_{ij} = g_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu = g_{ij}. \quad (9.3)$$

Este resultado nas equações (9.2) e (9.3) descreve as componentes tempo-tempo, tempo-espaço e espaço-espaço da métrica em termos de N , N^i e h_{ij} como $g_{00} = N^i N_i - N^2$; $g_{0i} = N_i$; $g_{ij} = h_{ij}$. Uma vez que estes são fornecidos, pode-se calcular as componentes contravariantes da métrica de forma direta, e obtêm-se

$$g^{00} = -N^{-2}, \quad g^{0i} = N^{-2} N^i, \quad g^{ij} = h^{ij} - N^{-2} N^i N^j.$$

Também é fácil verificar que $\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$. Assim, portanto, a quebra do espaço-tempo em espaço e tempo é obtida matematicamente através de uma foliação do espaço-tempo em uma série de hipersuperfícies $\Sigma(t)$ do tipo tempo, enumeradas através de uma coordenada t através de uma função $t(x^\mu)$ no espaço-tempo. A métrica induzida na hipersuperfície $\Sigma(t)$ pode ser escrita também como

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu; \quad n_0 = -N; \quad n_i = 0, \quad (9.4)$$

onde n^μ é a normal a $\Sigma(t)$. Isto leva às componentes

$$h_{00} = N^i N_i, \quad h_{0i} = N_i,$$

e, é claro, as componentes espaciais que são simplesmente $h_{ij} = g_{ij}$. Enfatizamos que, mesmo que $h_{\mu\nu}$ seja uma métrica no 3-espaço, h_{00} e h_{0i} são diferentes de zero, porquê $g_{0i} \neq 0$. Note também que h_ν^μ atua como um tensor de projeção em $\Sigma(t)$.

Existem três propriedades relacionadas ao vetor normal n^μ que vamos usar frequentemente:

$$h_\nu^\mu n^\nu = 0; \quad n^\nu \nabla_\mu n_\nu = 0; \quad n_{[\mu} \nabla_\nu n_{\rho]} = 0. \quad (9.5)$$

A primeira propriedade segue da definição da métrica induzida; a segunda surge diferenciando a condição de normalização $n^\mu n_\mu = -1$. Finalmente,

uma vez que n^μ é a normal a um conjunto de hipersuperfícies que folheiam o espaço-tempo, o teorema de Frobenius deve valer, levando à terceira condição. No sistema de coordenadas que estamos usando, $n_\mu = -N\delta_\mu^0$ ou, na notação de formas diferenciais, $\mathbf{n} = -N\mathbf{d}t$. O sinal de menos na definição de $n_0 = -N$ (com $N > 0$) é escolhido de forma que $n^0 = +N^{-1}$ é um vetor apontando para fora da hipersuperfície na nossa escolha de assinatura. Claramente, não haverão sinais negativos correspondentes no caso das normais à superfícies de tipo tempo.

Nossa próxima tarefa consiste em definir uma derivada covariante natural D_μ que atua nos vetores tridimensionais que são tangentes à $\Sigma(t)$. A definição natural da derivada covariante espacial de qualquer vetor X_μ que satisfaz a condição $X_\mu n^\mu = 0$ (que garante que X_μ é um vetor tangencial a Σ) é dada por

$$D_\mu X_\nu = h_\mu^\rho h_\nu^\sigma \nabla_\rho X_\sigma.$$

O lado direito é uma projeção da derivada covariante quadridimensional $\nabla_\mu X_\nu$ em $\Sigma(t)$ usando o tensor de projeção natural $h_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu + n^\nu n_\mu$. De forma similar, vamos assumir que D atua em funções escalares na forma $D_\mu f = h_\mu^\nu \nabla_\nu f$. Dadas essas duas propriedades e a regra da cadeia usual, podemos facilmente determinar a ação de D em vetores contravariantes. Começamos com o resultado de que $D_\mu (X_\nu V^\nu) = V^\nu D_\mu X_\nu + X_\nu D_\mu V^\nu$. Utilizando nossa definição para a atuação de D em escalares e vetores covariantes, podemos obter o resultado

$$V^\nu h_\mu^\rho \nabla_\rho X_\nu + X_\nu h_\mu^\rho \nabla_\rho V^\nu = V^\nu h_\mu^\rho \nabla_\rho X_\nu + X_\nu D_\mu V^\nu,$$

onde utilizamos o fato de que $V^\nu h_\nu^\mu = V^\mu$ para vetores puramente espaciais. Esta relação é a mesma que $X_\nu h_\mu^\rho \nabla_\rho V^\nu = X_\nu D_\mu V^\nu$. Não podemos simplesmente remover X_ν de ambos os lados da equação porque esta relação não é verdadeira para todos vetores X_ν , mas apenas para aqueles que satisfazem o vínculo $X_\nu n^\nu = 0$. Mas qualquer vetor que satisfaz esta condição de tangenciabilidade pode ser expresso na forma $X_\nu = h_\nu^\rho Y_\rho$, onde Y_ρ é completamente arbitrário. Isto nos permite obter o resultado $h_\nu^\rho D_\mu V^\nu = h_\nu^\rho h_\mu^\sigma \nabla_\sigma V^\nu$. Mas, por construção, o operador D mapeia tensores espaciais em tensores espaciais e, portanto, o operador de projeção no lado direito é redundante. Isto nos permite obter a derivada covariante tridimensional de vetores espaciais contravariantes como

$$D_\mu V^\rho = h_\nu^\rho h_\mu^\sigma \nabla_\sigma V^\nu.$$

Dada a maneira que D atua nos vetores covariantes e contravariantes, como também nas funções escalares, podemos determinar a sua atuação em todos os tensores de maior ordem. Por exemplo, uma análise similar a que acabamos de fazer nos mostra que a atuação em tensores covariantes de rank dois

é dada por

$$D_\mu T_{\nu\rho} = h_\mu^\sigma h_\nu^\delta h_\rho^\lambda \nabla_\sigma T_{\delta\lambda}.$$

Deve ser óbvio agora que a regra para as derivadas covariantes espaciais é bem direta: consiste basicamente em tomar as derivadas covariantes usuais no espaço 4-dimensional e projetar todos os índices relevantes em $\Sigma(t)$, utilizando o tensor de projeção h_μ^ν .

Para que a atuação de D seja consistente, é necessário que $D_\mu h_{\nu\rho} = 0$. Este resultado pode ser verificado diretamente:

$$\begin{aligned} D_\mu h_{\nu\rho} &= h_\mu^\sigma h_\nu^\delta h_\rho^\lambda \nabla_\sigma h_{\delta\lambda} = h_\mu^\sigma h_\nu^\delta h_\rho^\lambda \nabla_\sigma (g_{\delta\lambda} + n_\delta n_\lambda) \\ &= h_\mu^\sigma h_\nu^\delta h_\rho^\lambda \nabla_\sigma (n_\delta n_\lambda) = h_\mu^\sigma h_\nu^\delta h_\rho^\lambda n_\lambda \nabla_\sigma n_\delta + h_\mu^\sigma h_\nu^\delta h_\rho^\lambda n_\delta \nabla_\sigma n_\lambda = 0. \end{aligned}$$

Temos agora uma métrica induzida e um operador intrínseco de derivada covariante na 3-variedade $\Sigma(t)$ que são capazes de descrever as propriedades locais intrínsecas das fatias espaciais. Para obter as informações completas sobre a estrutura do espaço-tempo, precisamos também saber como as hipersuperfícies do tipo espaço $\Sigma(t)$ estão inseridas na geometria 4-dimensional. Intuitivamente, esperaríamos que estas informações estivessem contidas de maneira que a normal à $\Sigma(t)$ variasse para cada evento. Para quantificar esta variação, definimos uma quantidade chamada de “Curvatura Extrínseca” de $\Sigma(t)$ como

$$K_{\mu\nu} = -h_\mu^\rho h_\nu^\sigma \nabla_\rho n_\sigma = -h_\mu^\rho \nabla_\rho n_\nu. \quad (9.6)$$

Esta segunda quantidade é obtida escrevendo $h_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu + n^\nu n_\mu$ e utilizando a segunda relação em (9.5). Fica claro da primeira igualdade de que $K_{\mu\nu}$ carrega a informação sobre $\nabla_\mu n_\nu$ projetada em $\Sigma(t)$. É óbvio olhando esta relação que $K_{\mu\nu} n^\mu = K_{\mu\nu} n^\nu = 0$. Uma vez que $n_i = 0$, temos que $K^{0\mu} = 0$, mostrando que as componentes contravariantes de $K^{\mu\nu}$ são puramente espaciais.

O que não é óbvio da definição em (9.6) é que $K_{\mu\nu}$ é simétrico nos seus índices. Para provar a simetria de $K_{\mu\nu}$, começamos com a relação

$$-K_{\mu\nu} = h_\mu^\rho \nabla_\rho n_\nu = \nabla_\mu n_\nu + n^\rho n_\mu \nabla_\rho n_\nu$$

e expandimos o último termo usando o teorema de Frobenius. Isto resulta em

$$-K_{\mu\nu} = \nabla_\mu n_\nu + n^\rho (-n_\rho \nabla_\nu n_\mu - n_\nu \nabla_\mu n_\rho + n_\mu \nabla_\nu n_\rho + n_\nu \nabla_\rho n_\mu + n_\rho \nabla_\mu n_\nu),$$

que pode ser simplificado para

$$-K_{\mu\nu} = \nabla_\nu n_\mu + n^\rho n_\nu \nabla_\rho n_\mu = h_\nu^\rho \nabla_\rho n_\mu = -K_{\nu\mu},$$

mostrando que a curvatura extrínseca é simétrica. Note também que temos a relação

$$-\nabla_\mu n_\nu = K_{\mu\nu} + n_\mu (n^\rho \nabla_\rho n_\nu) \equiv K_{\mu\nu} + n_\mu a_\nu. \quad (9.7)$$

Ao chegar nesta segunda relação, definimos a aceleração correspondente ao vetor normal (que, sendo do tipo tempo e normalizado em -1, pode ser pensado como uma 4-velocidade) como $a_\nu = n^\rho \nabla_\rho n_\nu$. A equação (9.7) mostra que a derivada covariante da normal pode ser decomposta em duas componentes, uma tangencial a $\Sigma(t)$ (e é dada por $K_{\mu\nu}$), e outra normal a $\Sigma(t)$ (e é dada por $n_\mu a_\nu$).

Da equação (9.7) e (9.4) podemos ver que as componentes espaciais covariantes são dadas por $K_{ij} = -\nabla_j n_i = -NT_{ij}^0$. Expandindo isto nos resulta

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (D_j N_i + D_i N_j - \partial_0 h_{ij}),$$

onde $N_i = h_{ij} N^j$. Em particular, se trabalhamos num sistema de coordenadas com $N^i = 0$, então a curvatura extrínseca tem como componentes

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N} \frac{\partial h_{ij}}{\partial t}; \quad K_{0\mu} = K^{0\mu} = 0.$$

Neste sistema de coordenadas, $K_{\mu\nu}$ é explicitamente espacial e as componentes não-nulas medem a derivada temporal de h_{ij} .

O significado geométrico da curvatura extrínseca é reforçado ainda mais pelo fato de que pode ser relacionado à derivada de Lie da métrica espacial com relação à normal, pela relação $K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{\mu\nu}$. Isto pode ser provado facilmente fazendo manipulação nos índices

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n h_{\mu\nu} &= n^\rho \nabla_\rho h_{\mu\nu} + h_{\rho\nu} \nabla_\mu n^\rho + h_{\mu\rho} \nabla_\nu n^\rho \\ &= n^\rho \nabla_\rho (n_\mu n_\nu) + g_{\rho\nu} \nabla_\mu n^\rho + g_{\mu\rho} \nabla_\nu n^\rho \\ &= n^\rho n_\mu \nabla_\rho n_\nu + n^\rho n_\nu \nabla_\rho n_\mu + \nabla_\mu n_\nu + \nabla_\nu n_\mu \\ &= h_\mu^\rho \nabla_\rho n_\nu + h_\nu^\rho \nabla_\rho n_\mu = -2K_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

A primeira linha é a definição de derivada de Lie; a segunda igualdade é obtida utilizando que $\nabla_\mu \mathbf{g} = 0$ e $n^\nu \nabla_\mu n_\nu = 0$. A quarta igualdade pode ser verificada diretamente e a última segue da definição de curvatura extrínseca. A quantidade $\mathcal{L}_n h_{\mu\nu}$ é uma generalização covariante (embora dependente da foliação escolhida) da derivada temporal da métrica.

As equações de Gauss-Codazzi

Dada uma foliação particular do espaço-tempo, $h_{\mu\nu}$ e $K_{\mu\nu}$ contém as informações necessárias sobre as propriedades intrínsecas e extrínsecas de $\Sigma(t)$.

Em particular, podemos expressar o tensor de curvatura de Riemann completo no espaço 4-dimensional em termos de $K_{\mu\nu}$ e do tensor de curvatura so subespaço 3-dimensional. Vamos agora obter estas relações.

Dado o operador de derivada covariante D em $\Sigma(t)$, podemos definir o tensor de curvatura 3-dimensional através da relação usual

$$D_\mu D_\nu X_\rho - D_\nu D_\mu X_\rho = -{}^{(3)}R_{\mu\nu\rho}^\sigma X_\sigma.$$

Vamos mostrar que os tensores 3-dimensionais e 4-dimensionais são relacionados pela expressão (chamada de Equação de Gauss-Codazzi):

$${}^{(3)}R_{\mu\nu\rho\sigma} = h_\mu^\delta h_\nu^\lambda h_\rho^\omega h_\sigma^\kappa R_{\delta\lambda\omega\kappa} + \epsilon (K_{\mu\rho} K_{\nu\sigma} - K_{\mu\sigma} K_{\nu\rho}), \quad (9.8)$$

onde $\epsilon = n_\mu n^\mu = -1$ para uma superfície do tipo espaço. Este resultado, novamente, tem uma interpretação geométrica simples. Esta curvatura das superfícies 3-dimensionais tem uma componente intrínseca que é obtida projetando o tensor de curvatura completo 4-dimensional na 3-superfície - dado o primeiro termo no lado direito - e dois termos extras que surgem devido às propriedades extrínsecas da imersão das 3-superfícies no espaço 4-dimensional. Obter este resultado é bastante direto. Diretamente da definição, temos

$$\begin{aligned} -{}^{(3)}R_{\rho\sigma[\mu\nu]} X^\rho &= h_{[\mu}^\tau h_{\nu]}^\lambda h_\sigma^\epsilon \nabla_\tau (h_\lambda^\rho h_\epsilon^\zeta \nabla_\rho X_\zeta) \\ &= h_{[\mu}^\tau h_{\nu]}^\lambda h_\sigma^\epsilon h_\lambda^\rho h_\epsilon^\zeta \nabla_\tau \nabla_\rho X_\zeta + h_{[\mu}^\tau h_{\nu]}^\lambda h_\sigma^\epsilon (\nabla_\tau h_\lambda^\rho h_\epsilon^\zeta) (\nabla_\rho X_\zeta) \\ &= h_{[\mu}^\tau h_{\nu]}^\rho h_\sigma^\zeta \nabla_\tau \nabla_\rho X_\zeta + h_{[\mu}^\tau h_{\nu]}^\lambda h_\sigma^\epsilon (h_\lambda^\rho \nabla_\tau h_\epsilon^\zeta + h_\epsilon^\zeta \nabla_\tau h_\lambda^\rho) (\nabla_\rho X_\zeta) \\ &= h_{[\mu}^\tau h_{\nu]}^\rho h_\sigma^\zeta \nabla_\tau \nabla_\rho X_\zeta + h_{[\mu}^\tau h_{\nu]}^\rho h_\sigma^\epsilon n^\zeta (\nabla_\tau n_\epsilon) (\nabla_\rho X_\zeta) \\ &\quad + h_{[\mu}^\tau h_{\nu]}^\lambda h_\sigma^\zeta n^\rho (\nabla_\tau n_\lambda) (\nabla_\rho X_\zeta) \\ &= h_{[\mu}^\tau h_{\nu]}^\rho h_\sigma^\zeta \nabla_\tau \nabla_\rho X_\zeta - h_{[\nu}^\rho n^\zeta K_{\mu]\sigma} (\nabla_\rho X_\zeta) - h_{[\mu}^\tau h_\sigma^\zeta n^\rho K_{\tau\nu]} (\nabla_\rho X_\zeta) \\ &= h_{[\mu}^\tau h_{\nu]}^\rho h_\sigma^\zeta \nabla_\tau \nabla_\rho X_\zeta - h_{[\nu}^\rho n^\zeta K_{\mu]\sigma} (\nabla_\rho X_\zeta). \end{aligned}$$

onde utilizamos a notação $A_{[\mu} B_{\nu]} = \frac{1}{2} (A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu)$.

Utilizamos agora o fato que, para qualquer tensor espacial que satisfaz a condição $n^\mu X_\mu = 0$ temos a relação $n^\mu \nabla_\rho X_\mu = -X^\mu \nabla_\rho n_\mu$. Com isto, obtemos

$$\begin{aligned} -{}^{(3)}R_{\rho\sigma[\mu\nu]} X^\rho &= h_{[\mu}^\tau h_{\nu]}^\rho h_\sigma^\zeta \nabla_\tau \nabla_\rho X_\zeta + h_{[\nu}^\rho X^\zeta K_{\mu]\sigma} (\nabla_\rho n_\zeta) \\ &= h_{[\mu}^\tau h_{\nu]}^\rho h_\sigma^\zeta \nabla_\tau \nabla_\rho X_\zeta - X^\zeta K_{[\mu\sigma} K_{\nu]\zeta} \\ &= -h_{[\mu}^\tau h_{\nu]}^\rho h_\sigma^\zeta R_{\omega\zeta\tau\rho} X^\omega - X^\omega K_{\mu\sigma} K_{\nu\omega} + X^\omega K_{\nu\sigma} K_{\mu\omega}. \end{aligned}$$

Notamos novamente que este resultado deve valer para todos os vetores na forma $X^\mu = h_\nu^\mu Y^\nu$ onde Y^ν é arbitrário. Usando isto e eliminando Y^ν ,

obtemos o resultado da equação (9.8) em termos de ${}^{(3)}R_{\nu\rho\sigma}^\mu$ e $K_{\mu\nu}$. Para obter o panorama completo, precisamos também encontrar resultados parecidos para o tensor de curvatura com: (i) uma componente normal e três índices projetados em Σ , e (ii) duas componentes normais e dois índices projetados em Σ . Vamos atacar estes problemas agora. Em particular, vamos mostrar que

$$h_{[\eta}^\mu h_{\delta]}^\nu h_\epsilon^\beta n^\alpha R_{\mu\nu\beta\alpha} = -D_\eta K_{\delta\epsilon} + D_\delta K_{\eta\epsilon}, \quad (9.9)$$

que exprime o tensor de curvatura com uma componente normal e três componentes tangenciais em termos das derivadas do tensor de curvatura extríntrica. (Esta expressão é válida tanto para hipersuperfícies do tipo espaço e do tipo tempo.) De forma análoga, nós podemos obter uma expressão para o tensor de curvatura com duas componentes normais e duas componentes espaciais como

$$R_{\alpha\beta\sigma\tau} h_\mu^\alpha n^\beta h_\nu^\sigma n^\tau = \mathcal{L}_n K_{\mu\nu} + K_{\beta\nu} K_\mu^\beta + D_\mu a_\nu + a_\mu a_\nu; \quad a^\mu = n^\nu \nabla_\nu n^\mu. \quad (9.10)$$

As equações (9.8), (9.9) e (9.10) juntas exprimem $R_{\beta\eta\delta}^\alpha$ em termos de ${}^{(3)}R_{\beta\eta\delta}^\alpha$ e $K_{\mu\nu}$. (Contração nos três índices do tensor de curvatura com n^i , é claro, resultarão em zero.)

Para provar a equação (9.9), vamos começar com a identidade 4-dimensional para o tensor de curvatura expresso na forma

$$R_{\mu\nu\beta\alpha} n^\alpha = \nabla_\mu \nabla_\nu n_\beta - \nabla_\nu \nabla_\mu n_\beta = \nabla_{[\mu} (-K_{\nu]\beta} - n_{\nu]} n^\sigma \nabla_\sigma n_\beta).$$

Uma simplificação direta desta expressão resulta em

$$\begin{aligned} h_{[\eta}^\mu h_{\delta]}^\nu h_\epsilon^\beta n^\alpha R_{\mu\nu\beta\alpha} &= -h_{[\eta}^\mu h_{\delta]}^\nu h_\epsilon^\beta \nabla_\mu K_{\nu\beta} - h_{[\eta}^\mu h_{\delta]}^\nu h_\epsilon^\beta (\nabla_\sigma n_\beta) (\nabla_\mu n_\nu n^\sigma) \\ &\quad - h_{[\eta}^\mu h_{\delta]}^\nu h_\epsilon^\beta n_\nu n^\sigma \nabla_\mu (\nabla_\sigma n_\beta) \\ &= D_{[\eta} K_{\delta]\epsilon} - h_{[\eta}^\mu h_{\delta]}^\nu h_\epsilon^\beta n^\sigma (\nabla_\sigma n_\beta) (\nabla_\mu n_\nu) \\ &= D_\eta K_{\delta\epsilon} + h_\epsilon^\beta n^\sigma (\nabla_\sigma n_\beta) K_{\eta\delta} - (c \leftrightarrow d) \\ &= -D_\eta K_{\delta\epsilon} + D_\delta K_{\eta\epsilon}, \end{aligned}$$

que prova o resultado em (9.9).

Para provar (9.10), começamos novamente com a identidade 4-dimensional escrita na forma

$$R_{\alpha\beta\sigma\tau} n^\tau = \nabla_\alpha \nabla_\beta n_\sigma - \nabla_\beta \nabla_\alpha n_\sigma = \nabla_\alpha (-K_{\beta\sigma} - n_\beta a_\sigma) - \nabla_\beta (-K_{\alpha\sigma} - n_\alpha a_\sigma).$$

Contraindo novamente com mais um vetor normal e simplificando, temos

$$R_{\alpha\beta\sigma\tau} n^\beta n^\tau = -n^\beta \nabla_\alpha K_{\beta\sigma} + h_\alpha^\rho \nabla_\rho a_\sigma + n^\beta \nabla_\beta K_{\alpha\sigma} + a_\sigma a_\alpha.$$

Projetamos os índices livres em $\Sigma(t)$ e simplificamos como antes para obter

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\sigma\tau}h_\mu^\alpha n^\beta h_\nu^\sigma n^\tau &= -n^\beta h_\mu^\alpha h_\nu^\sigma \nabla_\alpha K_{\beta\sigma} = D_\mu a_\nu + n^\beta h_\mu^\alpha h_\nu^\sigma \nabla_\beta K_{\alpha\sigma} + a_\mu a_\nu \\
&= K_{\beta\nu} h_\mu^\alpha \nabla_\alpha n^\beta + D_\mu a_\nu + n^\beta h_\mu^\alpha h_\nu^\sigma \nabla_\beta K_{\alpha\sigma} + a_\mu a_\nu \\
&= -K_{\beta\nu} K_\mu^\beta + D_\mu a_\nu + n^\beta h_\mu^\alpha h_\nu^\sigma \nabla_\beta K_{\alpha\sigma} + a_\mu a_\nu \\
&= -K_{\beta\nu} K_\mu^\beta + D_\mu a_\nu \\
&\quad + h_\mu^\alpha h_\nu^\sigma (\mathcal{L}_n K_{\alpha\sigma} - K_{\alpha\lambda} \nabla_\sigma n^\lambda - K_{\lambda\sigma} \nabla_\alpha n^\lambda) + a_\mu a_\nu \\
&= -3K_{\beta\nu} K_\mu^\beta + D_\mu a_\nu + h_\mu^\alpha h_\nu^\sigma (\mathcal{L}_n K_{\alpha\sigma}) + a_\mu a_\nu. \quad (9.11)
\end{aligned}$$

Agora usamos o fato que $K_{\mu\nu}$ é puramente espacial de forma que podemos escrever para sua derivada de Lie

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n K_{\mu\nu} &= \mathcal{L}_n (h_\mu^\alpha h_\nu^\sigma K_{\alpha\sigma}) \\
&= h_\mu^\alpha h_\nu^\sigma (\mathcal{L}_n K_{\alpha\sigma}) + h_\mu^\alpha K_{\alpha\sigma} (\mathcal{L}_n h_\nu^\sigma) + h_\nu^\sigma K_{\alpha\sigma} (\mathcal{L}_n h_\mu^\alpha) \\
&= h_\mu^\alpha h_\nu^\sigma (\mathcal{L}_n K_{\alpha\sigma}) - 2K_{\mu\sigma} K_\nu^\sigma - 2K_{\alpha\nu} K_\mu^\alpha \\
&= h_\mu^\alpha h_\nu^\sigma (\mathcal{L}_n K_{\alpha\sigma}) - 4K_{\mu\sigma} K_\nu^\sigma,
\end{aligned}$$

ou,

$$h_\mu^\alpha h_\nu^\sigma (\mathcal{L}_n K_{\alpha\sigma}) = \mathcal{L}_n K_{\mu\nu} + 4K_{\mu\sigma} K_\nu^\sigma.$$

Substituindo isto na equação (9.11), obtemos como resultado a equação (9.10). Esta equação pode ser um pouco mais simplificada notando que

$$\begin{aligned}
D_\mu a_\nu &= D_\mu (N^{-1} D_\nu N) = -N^{-2} (D_\mu N) (D_\nu N) + N^{-1} D_\mu D_\nu N \\
&= N^{-1} D_\mu D_\nu N - a_\mu a_\nu.
\end{aligned}$$

Obtemos então,

$$R_{\alpha\beta\sigma\tau}h_\mu^\alpha n^\beta h_\nu^\sigma n^\tau = \mathcal{L}_n K_{\mu\nu} + K_{\beta\nu} K_\mu^\beta + N^{-1} D_\mu D_\nu N. \quad (9.12)$$

Notamos que, enquanto as componentes do tensor de curvatura sem índices ou com um índice contraído com a normal (correspondendo a R_{ijkl} e R_{0jkl} na notação não-covariante) podem ser escritos em termos de ${}^{(3)}R_{ijkl}$ e K_{ij} , as componentes com dois índices contraídos com a normal (correspondendo a R_{0j0l} na notação não-covariante) envolverão derivadas temporais da curvatura extrínica.

Os resultados que obtivemos também nos permitem escrever o tensor de Ricci e o escalar de curvatura de uma forma simplificada. Em particular, sabemos através definição do escalar de Ricci,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= h^{\alpha\eta} h^{\beta\delta} R_{\alpha\beta\eta\delta} = (g^{\alpha\eta} + u^\alpha u^\eta) (g^{\beta\delta} + u^\beta u^\delta) R_{\alpha\beta\eta\delta} \\
&= (g^{\alpha\eta} + u^\alpha u^\eta) (R_{\alpha\eta} + u^\beta u^\delta R_{\alpha\beta\eta\delta}) \\
&= R + 2u^\alpha u^\eta R_{\alpha\eta} = 2u^\alpha u^\eta G_{\alpha\eta}
\end{aligned}$$

que a contração completa da projeção espacial do tensor de curvatura nos dará as componentes normais do tensor de Einstein como

$$h^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} = 2n^\mu n^\nu G_{\mu\nu}.$$

Contraindo nosso resultado na equação (9.8) apropriadamente, obtemos

$$2n^\mu n^\nu G_{\mu\nu} = (-\epsilon)^{(3)} R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} \quad (9.13)$$

para as componentes normais do tensor de Einstein. (Nesta expressão introduzimos o termo ϵ tal que o resultado é válido tanto para $\epsilon = -1$ e para $\epsilon = +1$.)

De forma similar, para a componente do tensor de Einstein com um índice tangencial e um índice normal, temos o resultado

$$n^\mu h_\sigma^\nu G_{\nu\tau} = n^\mu h_\sigma^\nu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} n_\nu h_\sigma^\nu R = n^\mu h_\sigma^\nu R_{\mu\nu}.$$

Usando a equação (9.9) e contraindo alguns índices, pode-se obter que

$$h_\beta^\nu n^\tau G_{\nu\tau} = h_\beta^\nu n^\tau R_{\nu\tau} = D_\beta K - D_\alpha K_\beta^\alpha. \quad (9.14)$$

De forma similar, começando com a equação (9.8) e contraindo em β e δ , obtemos

$$h_\alpha^\mu h_\eta^\sigma h^{\tau\nu} R_{\mu\nu\sigma\tau} = {}^{(3)} R_{\alpha\eta} + K_{\alpha\eta} K - K_\alpha^\beta K_{\beta\eta},$$

que pode ser escrito como

$$h_\alpha^\mu h_\eta^\sigma R_{\mu\sigma} + h_\alpha^\mu n^\nu h_\eta^\sigma n^\tau R_{\mu\nu\sigma\tau} = {}^{(3)} R_{\alpha\eta} + K_{\alpha\eta} K - K_\alpha^\beta K_{\beta\eta}.$$

Agora usando a Eq. (9.12), conseguimos obter o resultado para as componentes do tensor de Ricci espaciais projetadas

$$h_\mu^\alpha h_\nu^\beta R_{\alpha\beta} = -\mathcal{L}_n K_{\mu\nu} + {}^{(3)} R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - 2K_\mu^\sigma K_{\sigma\nu} - N^{-1} D_\mu D_\nu N. \quad (9.15)$$

Com estes passos concluídos, temos em mãos as ferramentas para escrever as equações de Einstein na forma (1+3). As equações equivalentes às componentes tempo-tempo e espaço-tempo podem ser obtidas diretamente das equações (9.13) e (9.14). Temos

$${}^{(3)} R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} = 2\kappa T_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta \equiv 2\kappa\rho \quad (9.16)$$

e

$$D_\beta K - D_\alpha K_\beta^\alpha = \kappa h_\beta^\nu n^\tau T_{\nu\tau} \equiv \kappa j_\beta. \quad (9.17)$$

Estas são as equações de vínculo para os coeficientes da métrica. Isto é óbvio do fato que $K_{\mu\nu}$ contém apenas primeiras derivadas temporais de $h_{\mu\nu}$ (e não há derivadas temporais de N ou N^μ). Portanto estas equações contém apenas primeiras derivadas temporais, vinculando portanto os dados iniciais.

A dinâmica está contida na parte espaço-espaço das equações de Einstein, que requerem um pouco a mais de trabalho para serem expressas como uma equação de evolução. Vamos agora mostrar que a parte espaço-espaço pode ser reduzida às seguintes duas equações:

$$\partial_0 h_{ij} - \mathcal{L}_{\mathbf{N}} h_{ij} = -2N K_{ij}, \quad (9.18)$$

onde $\mathbf{N} = (0, N^\alpha)$, e

$$\begin{aligned} \partial_0 K_{ij} - \mathcal{L}_{\mathbf{N}} K_{ij} &= N^{(3)} R_{ij} + N (K K_{ij} - 2K_i^k K_{kj}) \\ &\quad - D_i D_j N - 2\kappa h_i^\alpha h_j^\beta \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T \right) N. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Destas, a equação (9.18) pode ser pensada como um análogo à definição ($\dot{q} = \partial H / \partial p$) de momento canônico em termos das variáveis dinâmicas em mecânica. A segunda equação, (9.19), é análoga à equação da aceleração ($\dot{p} = -\partial H / \partial q$).

Para obter a equação (9.18) e (9.19), vamos começar provando uma identidade que é válida para qualquer quantidade que é puramente espacial, e um tensor de rank 2, Q_{mn} :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{n}} Q_{\mu\nu} = N^{-1} (\partial_0 Q_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{\mathbf{N}} Q_{\mu\nu}),$$

onde $\mathbf{n} = N^{-1} (1, -N^i)$ e $\mathbf{N} = (0, N^i)$. (Este resultado é não-trivial porque a derivada de Lie - ao contrário da derivada covariante - não é um funcional linear no vetor subscrito). Para provar isto, vamos expandir a derivada de Lie $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ notando que, uma vez que este é independente da conexão afim, podemos trabalhar puramente com derivadas nas coordenadas. Temos

$$\mathcal{L}_{\mathbf{n}} Q_{\mu\nu} = n^\rho \partial_\rho Q_{\mu\nu} + Q_{\rho\nu} \partial_\mu n^\rho + Q_{\mu\rho} \partial_\nu n^\rho = n^\rho \partial_\rho Q_{\mu\nu} - n^\rho \partial_\mu Q_{\rho\nu} - n^\rho \partial_\nu Q_{\mu\rho},$$

onde utilizamos a condição $n^\rho Q_{\rho\mu} = 0$ para trocar as derivadas de n^ρ para $Q_{\rho\mu}$. Agora substituímos $n^\rho = N^{-1} (\delta_0^\rho - N^\rho)$ e usamos o fato que, para um vetor espacial, $Q_{0\nu} = N^\rho Q_{\rho\nu}$ para obter

$$\begin{aligned} N \mathcal{L}_{\mathbf{n}} Q_{\mu\nu} &= \partial_0 Q_{\mu\nu} - N^\rho \partial_\rho Q_{\mu\nu} - \partial_\mu (N^\rho Q_{\rho\nu}) \\ &\quad + N^\rho \partial_\mu Q_{\rho\nu} - \partial_\nu (N^\rho Q_{\mu\rho}) + N^\rho \partial_\nu Q_{\mu\rho} \\ &= \partial_0 Q_{\mu\nu} - N^\rho \partial_\rho Q_{\mu\nu} - Q_{\rho\nu} \partial_\mu N^\rho - Q_{\mu\rho} \partial_\nu N^\rho. \end{aligned}$$

Usando a definição de derivada de Lie novamente, obtemos

$$\mathcal{L}_{\mathbf{n}}Q_{\mu\nu} = N^{-1}(\partial_0 Q_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{\mathbf{N}}Q_{\mu\nu}). \quad (9.20)$$

Agora aplicamos a equação (9.20) em $K_{\alpha\beta} = -(1/2)\mathcal{L}_{\mathbf{n}}h_{\alpha\beta}$ para obter o resultado em (9.18). Para obter (9.19), notamos que podemos aplicar o nosso resultado em $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}K_{\alpha\beta}$ como também em (9.15). Isto leva a (9.19).

As quatro equações, (9.16), (9.17), (9.18) e (9.19), são equivalentes às equações de Einstein usuais $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ escritas na forma (1+3). Elas sugerem o seguinte procedimento formal para resolvê-las: Primeiro introduzimos uma foliação do espaço-tempo que é completamente arbitrária e contém as quatro funções $N(x)$ e $N^i(x)$. Os valores iniciais para h_{ij} (que são variáveis dinâmicas) e K_{ij} (que são análogos aos momentos canônicos) devem ser escolhidos satisfazendo as equações de vínculo (9.16) e (9.17). As equações dinâmicas (9.18) e (9.19) agora podem ser utilizadas para fazer a evolução temporal do sistema. As equações de vínculo junto com as equações dinâmicas determinam completamente todos os coeficientes da métrica.

Referências

- [1] van der Kruit, Pieter (2015). *Jacobus Cornelius Kapteyn, Born Investigator of the Heavens*. Springer Science+Business Media. ISBN 978-3-319-10876-6.
- [2] Suzuki et al., The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey: V. Improving the Dark Energy Constraints Above $z > 1$ and Building an Early-Type-Hosted Supernova Sample, *Ap.J.*, 2011.
- [3] M. Betoule et al. Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples, *A&A*, 568, A22 (2014); arXiv:1401.4064.
- [4] Zalaletdinov, R., The Averaging Problem in Cosmology and Macroscopic Gravity, *Int.J.Mod.Phys.A23:1173-1181,2008*
- [5] A.A. Starobinsky, A new type of isotropic cosmological models without singularity, *Physics Letters B*, Volume 91, Issue 1, 24 March 1980, Pages 99-102
- [6] Ratra, P.; Peebles, L. (1988). "Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field". *Physical Review D*. 37 (12): 3406. Bibcode:1988PhRvD..37.3406R
- [7] Planck Collaboration, Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters, *A&A* 594, A13 (2016)
- [8] Hubble, Edwin (1929). "A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae". *PNAS*. 15 (3)168 - 173.
- [9] Dodelson, Scott (2003). *Modern Cosmology* (4. [print.]. ed.). San Diego: Academic Press. ISBN 978-0-12-219141-1.
- [10] Bondi, Hermann (1947). "Spherically symmetrical models in general relativity". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 107: 410. Bibcode:1947MNRAS.107..410B. doi:10.1093/mnras/107.5-6.410.

- [11] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, pp. 688. ISBN 0-471-92567-5. Wiley-VCH , July 1972.
- [12] M. Carfora and A. Marzuoli, Smoothing Out Spatially Closed Cosmologies, *Phys. Rev. Lett.* 53, 2445 - Published 17 December 1984
- [13] Arnowitt R., Deser S., Misner C.W. (1962): *Gravitation: an Introduction to Current Research*, L. Witten(ed.), New York: Wiley
- [14] York J.W. Jr. (1979), *Sources of Gravitational Radiation*, L.Smarr(ed). Cambridge Univ. Press, p.83
- [15] Buchert T., Ehlers J. (1997), *Astron. Astrophys.* 320,1.
- [16] T. Buchert, Dark Energy from structure: a status report, *Gen.Rel.Grav.* 40, 467 (2008), arXiv:0707.2153.
- [17] G.F.R. Ellis and W. Stoeger, The'fitting problem'in cosmology, *Class. Quantum Grav.* 4, 1697 (1987).
- [18] G.F.R. Ellis, Inhomogeneity effects in cosmology, *Class. Quantum Grav.* 28, 164001 (2011).
- [19] G F R Ellis (1984), *Relativistic cosmology: its nature, aims and problems*, *General Relativity and Gravitation*, Ed B Bertotti et al (Reidel, 215-288).
- [20] D.L. Wiltshire, What is dust? Physical foundations of the averaging problem in cosmology, *Class. Quantum Grav.* 28, 164006 (2011).
- [21] T. Buchert, Toward physical cosmology: focus on inhomogeneous geometry and its nonperturbative effects, *Class. Quantum Grav.* 28, 164007 (2011).
- [22] S. Räsänen, Backreaction: directions of progress, *Class. Quantum Grav.* 28, 164008 (2011).
- [23] E.W. Kolb, Backreaction of inhomogeneities can mimic dark energy, *Class. Quantum Grav.* 28, 164009 (2011).
- [24] T. Buchert, On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity. 1. Dust cosmologies, *Gen. Rel. Grav.* 32 (2000) 105 [gr-qc/9906015].

- [25] J. Larena, J. M. Alimi, T. Buchert, M. Kunz and P. -S. Corasaniti, Testing backreaction effects with observations, *Phys. Rev. D* 79 (2009) 083011 [arXiv:0808.1161 [astro-ph]].
- [26] T. Buchert, J. Larena and J. -M. Alimi, Correspondence between kinematical backreaction and scalar field cosmologies: The ‘Morphon field’, *Class. Quant. Grav.* 23 (2006) 6379 [gr-qc/0606020].
- [27] J. Larena, J. M. Alimi, T. Buchert, M. Kunz and P. -S. Corasaniti, Testing backreaction effects with observations, *Phys. Rev. D* 79 (2009) 083011 [arXiv:0808.1161 [astro-ph]].
- [28] Joshi, P. S. Global aspects in gravitation and cosmology. *Int. Ser. Monogr. Phys.*, Vol. 87, 87 (1993).
- [29] Hellaby, C. & Lake, K. Shell crossings and the Tolman model. *The Astrophysical Journal* 290, 381-387 (1985).
- [30] Enqvist, K. & Mattsson, T. The effect of inhomogeneous expansion on the supernova observations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2007, 019 (2007).
- [31] Alnes, H. & Amarzguioui, M. CMB anisotropies seen by an off-center observer in a spherically symmetric inhomogeneous universe. *Physical Review D* 74, 103520 (2006).
- [32] Grande, J. & Perivolaropoulos, L. Generalized Lemaître-Tolman-Bondi model with inhomogeneous isotropic dark energy: Observational constraints. *Physical Review D* 84, 023514 (2011).
- [33] Bolejko, K. Structures in the Universe by exact methods: formation, evolution, interactions (Cambridge University Press, 2010).
- [34] B.F. Roukema, J.J. Ostrowski and T. Buchert, Virialisation-induced curvature as a physical explanation for dark energy, *JCAP* 1310 (2013) 043, arXiv:1303.4444.
- [35] X. Roy and T. Buchert: Chaplygin gas and effective description of inhomogeneous universe models in general relativity, *Class. Quant. Grav.* 27, 175013 (2010).
- [36] M. Chiesaa, D. Mainoa and E. Majerotto, Observational tests of backreaction with recent data, arXiv:1405.7911.

- [37] R.M. Barbosa, E.G. Chirinos Isidro, W. Zimdahl and O.F. Piattella, Cosmic bulk viscosity through backreaction, *Gen. Rel. Grav.* 48 (2016) 51.
- [38] A. Paranjape and T. P. Singh, The possibility of cosmic acceleration via spatial averaging in Lemaître-Tolman-Bondi models, *Class. Quantum Grav.* 23 (2006) 6955-6969; arXiv:astro-ph/0605195.
- [39] E.W. Kolb, Backreaction of inhomogeneities can mimic dark energy, *Class. Quantum Grav.* 28, 164009 (2011).
- [40] T. Buchert, Dark Energy from structure: a status report, *Gen.Rel.Grav.* 40, 467 (2008); arXiv:0707.2153.
- [41] J. Plebanski and A. Krasinski, *An Introduction to General Relativity and Cosmology* (Cambridge University Press 2006).
- [42] Lemaître, G. L'univers en expansion. *Annales de la Societe Scietifique de Bruxelles* 53, 51 (1933).
- [43] Tolman, R. C. Effect of inhomogeneity on cosmological models. *Proceedings of the national academy of sciences of the United States of America* 20, 169 (1934).
- [44] Enqvist, K. Lemaître-Tolman-Bondi model and accelerating expansion. *General Relativity and Gravitation* 40, 451-466 (2008).
- [45] Mustapha, N. & Hellaby, C. Clumps into voids. *General Relativity and Gravitation* 33, 455-477 (2001).
- [46] T. Biswas, R. Mansouri and A. Notari, Nonlinear Structure Formation and Apparent Acceleration: an Investigation *JCAP* 0712, 017 (2007); arXiv:astro-ph/0606703.
- [47] T. Biswas and A. Notari, 'Swiss-cheese' inhomogeneous cosmology and the dark energy problem, *JCAP* 0806, 021 (2008); arXiv:astro-ph/0702555.
- [48] S. Räsänen, Backreaction in the Lemaître-Tolman-Bondi model, *JCAP* 0411, 010 (2004).
- [49] R. Sussman, On spatial volume averaging in Lemaître-Tolman-Bondi dust models. Part I: back reaction, spacial curvature and binding energy, arXiv:0807.1145.

- [50] M. Mattsson and T. Mattsson, On the role of shear in cosmological averaging, JCAP 1010, 021 (2010).
- [51] T. Biswas, R. Mansouri and A. Notari, Nonlinear Structure Formation and "Apparent" Acceleration:an Investigation JCAP 0712, 017 (2007); arXiv:astro-ph/0606703.
- [52] T. Biswas and A. Notari, Swiss-cheese inhomogeneous cosmology and the dark energy problem, JCAP 0806, 021 (2008); arXiv:astro-ph/0702555.
- [53] R. Sussman, Weighed scalar averaging in LTB dust models, part I: statistical uctuations and gravitational entropy, arXiv:1209.1962.
- [54] R. Sussman, Weighed scalar averaging in LTB dust models, part II: a formalism of exact perturbations, arXiv:1209.1962.
- [55] R. Sussman, Backreaction and effective acceleration in generic LTB dust models, arXiv:1102.2663.
- [56] N. Li and D.J. Schwarz, On the onset of cosmological backreaction, Phys. Rev. D 76 (2007)083011; arXiv:gr-qc/0702043.
- [57] M. Betoule et al. Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples, AA, 568, A22 (2014); arXiv:1401.4064.
- [58] R. Jimenez and A. Loeb, Constraining Cosmological Pa- rameters Based on Relative Galaxy Ages, Astrophys.J. 573 (2002) 37.
- [59] R. Jimenez, L. Verde, T. Treu and D. Stern, Constraints on the equation of sate of Dark Energy and the Hubble Constant from Stellar Ages and the Cosmic Microwave Background, Astrophys. J. 593 (2003) 622.
- [60] D. Stern, R. Jimenez, L. Verde, M. Kamionkowski and S. Adam Stanford, Cosmic Chronometers: Constraining the Equation of State of Dark Energy. I: $H(z)$ Measurements, JCAP 1002 (2010) 008.
- [61] O. Farooq and B. Ratra, Hubble parameter measurement constraints on the cosmological deceleration-acceleration transition redshift, Astroph.J.Lett. 766 L7 (2013).
- [62] E.G. Chirinos Isidro, C. Zuniga Vargas and W. Zimdahl, Simple inhomogeneous cosmological (toy) models, JCAP 1605, 003 (2016), arXiv:1602.08583.

- [63] Ch. Clarkson, B. Bassett and T. Hui-Ching Lu, A general test of the Copernican Principle, *Phys.Rev.Lett.*101, 011301 (2008); arXiv:0712.3457.
- [64] <http://sci.esa.int/euclid/>
- [65] Buchert et al, Is there proof that backreaction of inhomogeneities is irrelevant in cosmology?, *Class. Quantum Grav.* 32 (2015) 215021
- [66] Stephen R. Green, Robert M. Wald, Comments on Backreaction, arXiv:1506.06452
- [67] M. Betoule et al. Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples, *A&A*, 568, A22 (2014); arXiv:1401.4064.