**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**

**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT**

**EUZEBIO GLAUDER ZANDONADI**

# UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O USO DE INVARIANTES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

**VITÓRIA**

**2016**

**EUZEBIO GLAUDER ZANDONADI**

# UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O USO DE INVARIANTES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho

**VITÓRIA**

**2016**

## AGRADECIMENTOS


*Agradeço a Deus por ter me dado saúde e discernimento para fazer as escolhas corretas durante essa caminhada.*

*À minha família, especialmente meu pai, Euzebio Zandonadi, minha mãe, Ana Luci Bellon Zandonadi, e meu irmão, Kleuber Estêvão Zandonadi, por me incentivar e apoiar em todos momentos.*

*À minha namorada, Kainá Kiffer Paiva, pela paciência e compreensão demonstrada.*

*Aos meus amigos, que sempre me incentivaram mesmo diante das dificuldades. Em especial, a Ygor Franzotti de Barros Gomes, que me auxiliou na escolha do tema deste trabalho, e a Adenilson Mendes dos Santos pelo auxílio na revisão ortográfica deste trabalho.*

*Aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, em especial ao corpo docente do PROFMAT, que se empenharam e deram o máximo de si para que eu pudesse chegar aqui.*

*Ao meu orientador, Prof. Dr. Moacir Rosado Filho, que com sua serenidade e inteligência me proporcionou grande aprendizado.*

*Aos colegas do mestrado pelos dois anos de convivência e enriquecimento intelectual.*

**RESUMO**

Este trabalho trata-se de uma sequência didática para o estudo de invariantes na resolução de problemas a ser utilizada com alunos de Ensino Médio. Os temas abordados são paridade, divisibilidade, restos, coloração e expressões algébricas. Cada capítulo possui um desenvolvimento teórico contextualizado, seguido de problemas resolvidos e problemas propostos, além de suas respostas e dicas para a solução.

**Palavras-chave:** Invariantes, Problemas, Paridade, Divisibilidade, Restos, Coloração, Expressões.

## ABSTRACT

This work is a didactic sequence for solving problems in the study of invariant, to be used with high school students. The themes are parity, divisibility, remainders, coloring and algebraic expressions. Each chapter has a contextualized theoretical development, followed by solved problems and proposed problems, as well as their answers and tips for the solution.



**Keywords:** Invariants, Problems, Parity, Divisibility, Remains, Coloring, Expressions.

# SUMÁRIO

# 1. INTRODUÇÃO

As deficiências no ensino da Matemática estão explicitamente inseridas nas dificuldades com as quais os alunos chegam ao Ensino Médio e elas se expressam principalmente na parte de conceitos mais básicos, necessários para o entendimento de conteúdos mais complexos. A maioria dos alunos se preocupa apenas em usar fórmulas pré-definidas para a resolução dos problemas matemáticos, sem mesmo entender o sentido de tais fórmulas. O aluno não é estimulado a pensar, e sim a reproduzir, muitas vezes, de forma mecânica, o que lhe é ensinado.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, (PCN, 2000), duas das finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a:

> - [...] Desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo; (p.42)
> - Utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos; [...] (p.42)

Desta forma, muito além de ser uma disciplina na qual o aluno aprende cálculos e fórmulas, a Matemática torna-se uma ferramenta capaz de promovê-lo enquanto ser humano, na medida em que o prepara para os enfrentamentos da vida. Ao desenvolver o raciocínio lógico, automaticamente o aluno adquire capacidade para entender melhor e de forma crítica a sociedade em que vive. A atividade matemática, neste caso, não é apenas uma simples reprodução de métodos e procedimentos direcionada ao acúmulo de resultados e informações, mas também, como afirmam os Parâmetros Curriculares Nacionais, (PCN, 2000, p.40).

> [...] Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.

Neste caso, o aluno com maior capacidade de raciocínio se sente mais confiante e enfrenta a vida com mais facilidade e adota formas mais amplas de resolver problemas. Segundo Dante (1991, p.11)

> [...] um dos objetivos do ensino de Matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso, nada melhor que lhe apresentar situações problemas que o envolva, desafie e o motive a querer resolvê-las.

Com esse intuito, serão apresentados neste trabalho problemas cujo enunciado descreve uma sequência de passos (movimentos, transformações, etc.) e questiona se uma determinada situação pode ocorrer após a sequência ser executada. Neste tipo de problema, costuma-se usar como estratégia de resolução a procura por invariantes. Em linhas gerais, um invariante é uma quantidade ou característica que permanece sempre a mesma durante todos os passos da sequência. Tal estratégia de resolução é melhor assimilada experimentalmente, por meio da resolução de problemas.

Segundo Engel, A. (1998), no livro “Problem-Solving Strategies”, na busca por um invariante, deve-se estar atento às seguintes perguntas:

1 - O que permanece invariável?
2 - Pode um determinado estado final ser alcançado?
3 - Quais são todos os estados finais alcançáveis?
4 - Existe a convergência para um estado final?

Dentro do tema invariantes, serão abordados neste trabalho, temas como paridade, coloração, divisibilidade e expressões algébricas e numéricas.

## 1.1 JUSTIFICATIVA

Sabe-se, de modo geral, que os alunos do Ensino Médio não demostram grande interesse em estudar alguns conceitos matemáticos, principalmente aqueles com maior grau de complexidade. A partir desta realidade, propõe-se uma sequência didática que possibilite ao professor, estimulá-los a pensar de forma lógica e crítica.

Propõe-se então, utilizar problemas, cujas estratégias de resolução estejam pautadas na procura por invariantes, visto que, tais problemas são diferentes dos habitualmente estudados na escola, pois, estimulam a criatividade dos alunos quando necessitam procurar a quantidade invariante do problema.

## 1.2 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta de sequência didática que estimule a produção de conhecimento no aluno, através de novas metodologias, baseadas na resolução de problemas por meio de invariantes. Então, busca-se:

- Desenvolver o raciocínio lógico e intuitivo;
- Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas;
- Fazer o aluno pensar produtivamente;
- Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações matemáticas;
- Estimular o trabalho coletivo, interagindo de forma cooperativa na busca por estratégias e soluções dos problemas.
- Proporcionar ao aluno maior confiança em relação à própria capacidade de construir ideias matemáticas, desenvolvendo a autoestima na busca de soluções.

## 1.3 METODOLOGIA

A sequência proposta e apresentada neste trabalho está dividida em cinco etapas. Cada etapa corresponderá a um capítulo do trabalho.

**1ª Etapa:** Correspondente ao capítulo 2, consiste em discutir cinco problemas por meio de aula expositiva, contemplando diversos temas, como paridade, coloração, divisibilidade, expressões algébricas e numéricas, em que a resolução se dá por meio de uma quantidade invariante.

O objetivo é mostrar ao aluno que a busca por invariantes pode solucionar problemas em diversas áreas da Matemática, sem a necessidade da utilização de uma fórmula pré-definida. O tempo estimado é de duas aulas, com duração de cinquenta minutos cada, para a realização desta etapa.

**2ª Etapa:** Correspondente ao capítulo 3, destaca-se como foco para esta etapa, a resolução de problemas cujo tema paridade age como um invariante.

Os alunos terão aula expositiva sobre os conceitos básicos de paridade. Alguns problemas serão resolvidos como exemplos e, posteriormente, os alunos serão estimulados a resolver os problemas propostos deste capítulo.

Para finalizar a atividade, teremos um momento de discussão e análise dos resultados obtidos pelos alunos. São necessárias duas aulas, com duração de cinquenta minutos cada, para a realização desta etapa.

**3ª Etapa:** Correspondente ao capítulo 4, destaca-se como foco para esta etapa, a resolução de problemas cujo tema coloração age como um invariante.

Através de aulas expositivas, alguns problemas serão resolvidos como exemplos. Como o tema desperta maior curiosidade por parte dos alunos, estes serão orientados, em grupos de quatro pessoas, a resolverem os problemas propostos, estimulando assim, o trabalho coletivo na busca por estratégias de resolução. Para finalizar a atividade, teremos um momento de discussão e análise dos resultados obtidos pelos alunos. São necessárias duas aulas, com duração de cinquenta minutos cada, para a realização desta etapa.

**4ª Etapa:** Correspondente ao capítulo 5, serão trabalhados problemas que utilizam restos como invariantes.

Assim como nas etapas anteriores, serão ministradas aulas expositivas sobre os conceitos básicos de divisibilidade. Alguns problemas serão resolvidos como exemplos e, posteriormente, os alunos serão estimulados a resolver os problemas propostos deste capítulo. Para finalizar a atividade, teremos um momento de discussão e análise dos resultados obtidos pelos alunos. São necessárias duas aulas, com duração de cinquenta minutos cada, para a realização desta etapa.

**5ª Etapa:** Correspondente ao capítulo 6, teremos expressões numéricas e algébricas agindo como invariantes.

Estima-se que este seja o caso mais difícil para compreensão dos alunos, pois há a necessidade de certa abstração matemática para a visualização do invariante. Neste caso, os alunos serão novamente organizados em grupos com quatro pessoas e, após a apresentação de alguns exemplos por parte do professor, estes serão direcionados a resolver os problemas propostos. Fecharemos a atividade com a análise e discussão dos resultados obtidos pelos alunos. São necessárias duas aulas, com duração de cinquenta minutos cada, para a realização desta etapa.

É importante salientar que o tempo de duração das atividades é apenas uma sugestão, cabendo ao professor adequá-lo à realidade de seus alunos.

Após a realização das cinco etapas, o professor poderá direcionar os alunos à resolução dos problemas adicionais do capítulo 7, momento onde o aluno irá pôr em prática as metodologias apresentadas nas etapas anteriores, visto que, no capítulo 7 os problemas estão propostos de forma aleatória com base nos conteúdos anteriormente apresentados. Isso fará com que os alunos utilizem sua criatividade para estabelecer a melhor estratégia para a resolução dos problemas.

## CAPÍTULO 2: O USO DE INVARIANTES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dentro desses tipos de problemas, a principal dificuldade é encontrar a quantidade invariante. Essa destreza não vem da noite para o dia e, para tal, necessita-se resolver muitos problemas com características semelhantes, para que, com o acúmulo de experiência, a visualização e a resolução do problema se tornem mais simples.

Analisaremos a seguir, exemplos da aplicação de um invariante como estratégia de resolução de alguns problemas.

***Exemplo 2.1:*** Escrevemos os números de $1$ até $10$ em um quadro. A cada passo, escolhemos dois números quaisquer do quadro e trocamos esses pela soma deles. Ao final, vai sobrar somente um número. Quem é esse número?

***Solução:*** Perceba que a operação muda os números, mas não muda a soma de todos eles. Então, a soma dos números é a nossa invariante. Como no fim só resta um número, ele só pode ser igual à soma dos $10$ iniciais. Logo, o número é $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$.

Podemos perceber que este é um exercício fácil, porém ele ilustra como a identificação de um padrão (um invariante), pode resolver rapidamente um problema.

***Exemplo 2.2:*** Um círculo está dividido em seis setores (veja a Figura 1) e cada um deles tem um peão. É permitido mover dois peões quaisquer para setores vizinhos aos ocupados pelos peões naquele momento. É possível juntar todos os peões em um setor usando tais operações?

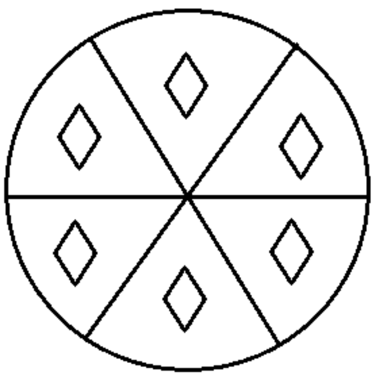


FIGURA 1

***Solução:*** Numeramos os setores no sentido horário de $1$ a $6$ (veja a Figura 2) e, para qualquer distribuição dos peões dentro do círculo, consideramos a soma $S$ dos números dos setores ocupados por peões (contando multiplicidades).

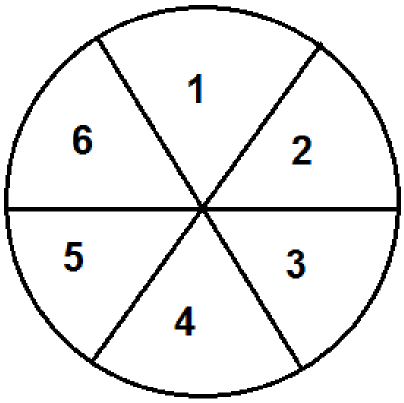



FIGURA 2

Considere a seguinte configuração apresentada na Figura 3.

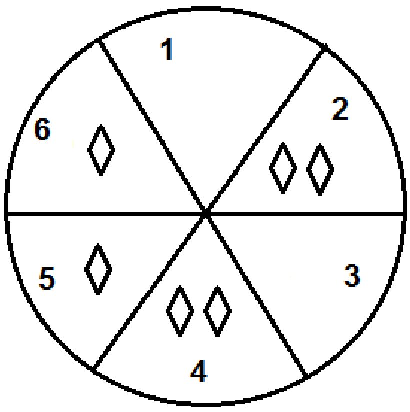



FIGURA 3

Para a distribuição na Figura 2, temos $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.

Pela distribuição na Figura 3, temos $S = 2 + 2 + 4 + 4 + 5 + 6 = 23$.

Assim, podemos verificar que quando você move um peão para um setor vizinho, a parcela correspondente na soma $S$ muda de paridade (de ímpar para par ou de par para ímpar). Portanto, se movermos dois peões simultaneamente, a paridade de $S$ não vai mudar – ela é invariante. Se todos os peões estiverem em um setor de número $X$, então $S = 6X$. Este é um número par e $21$ é ímpar. Logo, não é possível transformar a distribuição inicial em uma distribuição com todos os peões no mesmo setor.

***Exemplo 2.3:*** Uma peça especial de xadrez, chamado de camelo, move-se ao longo de um tabuleiro $10 \times 10$ de maneira semelhante à de um cavalo, só que com movimentos mais longos, que denotaremos por $(1,3)$. Ele pode mover-se para qualquer quadrado adjacente e depois mover-se mais três quadrados em uma direção perpendicular (o movimento usual de um cavalo pode ser denotado por $(1,2)$). É possível para um camelo ir de alguma posição para o quadrado adjacente?

***Solução:*** A resposta é não. Considere a coloração padrão de um tabuleiro de xadrez em preto e branco, representada na Figura 4.

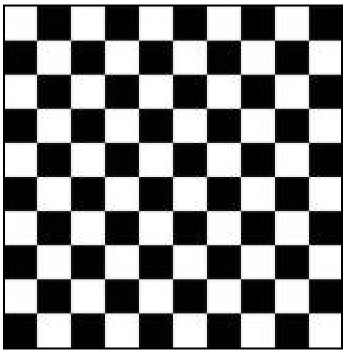


FIGURA 4

Seguindo a notação dada no enunciado do problema, podemos verificar que a movimentação $(1,3)$ faz com que um camelo sempre se mova de um quadrado de uma cor para outro da mesma cor, ou seja, a cor de um quadrado onde o camelo está não muda - ela é invariante.

Portanto, a resposta é negativa, já que dois quadrados adjacentes sempre têm cores diferentes.

***Exemplo 2.4:*** A Ilha de Cromática tem $13$ camaleões cinzas, $15$ marrons e $17$ vermelhos. Quando dois camaleões de cores diferentes se encontram, ambos mudam para a cor do terceiro (por exemplo, se um camaleão cinza encontra um marrom, ambos tornam-se vermelhos). É possível que, depois de algum tempo, todos os camaleões da ilha estejam da mesma cor?

***Solução:*** Sejam $a$, $b$ e $c$ os números de camaleões cinzas, marrons e vermelhos respectivamente. A operação descrita no enunciado significa que a tripla $(a, b, c)$ se transforma em uma das triplas: $(a-1, b-1, c+2)$ ou $(a-1, b+2, c-1)$ ou $(a+2, b-1, c-1)$, dependendo da cor inicial dos dois camaleões que se encontraram.

A diferença entre quaisquer duas coordenadas da tripla ou não muda ou muda de $-3$ ou muda de $3$, como pode-se observar na situação abaixo.

Suponha que a tripla $(a, b, c)$ se transformou na tripla $(a-1, b-1, c+2)$. Assim, a diferença entre quaisquer duas coordenadas resultará nas seguintes quantidades:

- $a_{12} = (a-1) - (b-1) = a - b$
- $a_{13} = (a-1) - (c+2) = (a-c) - 3$
- $a_{21} = (b-1) - (a-1) = b - a$
- $a_{23} = (b-1) - (c+2) = (b-c) - 3$
- $a_{31} = (c+2) - (a-1) = (c-a) + 3$
- $a_{32} = (c+2) - (b-1) = (c-b) + 3$

Logo, o resto da divisão por $3$ dessa diferença também não muda, ou seja, esse resto é invariante. Originalmente, $a - b = 13 - 15 = -2$. Se ocorresse de todos os camaleões ficarem vermelhos, teríamos $a - b = 0 - 0 = 0$. Mas, os números $0$ e $-2$ têm restos diferentes quando divididos por 3 e, portanto, não pode ocorrer de todos os camaleões ficarem vermelhos. Os casos em que todos os camaleões ficam cinzas ou marrons são tratados da mesma forma.

***Exemplo 2.5:*** Os números $1, 2, 3, 4, \ldots, 19, 20$ estão escritos em um quadro. Deve-se apagar dois números quaisquer $a$ e $b$ e escrever o novo número $a + b - 1$. Qual número estará no quadro depois dessas $19$ operações?

***Solução:*** Para qualquer conjunto de $n$ números no quadro, consideremos a seguinte quantidade $x$ igual à soma de todos os números menos $n$. Suponha que transformamos o conjunto como descrito no enunciado. A pergunta é: como varia a quantidade $x$? Se a soma de todos os números, exceto $a$ e $b$ for igual a $S$, então antes da transformação, $x = S + a + b - n$ e, depois da transformação, $x = S + (a + b - 1) - (n - 1) = S + a + b - n$. Logo, o valor de $x$ é o mesmo – é invariante. Para o conjunto de números do enunciado, temos $x = (1 + 2 + 3 + \cdots + 19 + 20) - 20 = 190$.

Portanto, depois de $19$ operações, quando só tiver um número escrito no quadro, $x$ será igual a $190$. Isso significa que o último número, que é $x + 1$, é $191$.

***Solução alternativa:*** (solução provável que um aluno do Ensino Médio daria)

Em cada passo, a soma de todos os números diminui de $1$. São $19$ passos e, originalmente, a soma era $210$. Portanto, no final, a soma vai ser igual a $210 - 19 = 191$.

A solução está correta e vale salientar que este é um problema invariante, mas que, neste caso, o invariante é tão simples que pode ser interpretado trivialmente. Porém, nem sempre será tão fácil encontrar a quantidade invariante.

É perceptível que cada um desses cinco exemplos possui uma particularidade:

- O primeiro é um caso simples de identificação de um padrão;
- O segundo envolve o conceito de paridade;
- O terceiro desperta curiosidade ao falar de um problema de coloração;
- O quarto, um pouco mais complexo, relaciona conceitos de divisibilidade;
- O quinto faz referência a problemas que necessitam, para sua resolução, de uma representação algébrica para a quantidade invariante.

Com esse intuito, propõem-se, nos capítulos seguintes, situações onde a quantidade invariante estará diretamente ligada aos temas: paridade, coloração, divisibilidade, restos, e expressões algébricas e numéricas.

## CAPÍTULO 3: PARIDADE COMO INVARIANTES

Para discutir o tema paridade, pode-se considerar a simples afirmação usada por Wagner, E. (Revista Eureka,2007): "todo número natural é par ou ímpar. Assim, dizemos que um número natural par tem paridade par e um número natural ímpar tem paridade ímpar". (p.12)

Mesmo o conceito de paridade sendo elementar, ele possui grande utilidade na resolução de problemas, inclusive, em alguns casos, em problemas com grau maior de dificuldade.

Ao resolver um problema que envolva paridade, deve-se estar atento às seguintes propriedades:

i) a soma de dois números pares é par.
ii) a soma de dois números ímpares é par.
iii) a soma de um número par com um número ímpar é ímpar.

Assim, temos que a soma de dois números será par se, e somente se, estes números possuírem a mesma paridade.

Dentro do vasto campo de aplicações para o conceito de paridade, serão discutidos, neste capítulo, problemas que utilizam a paridade como um invariante. Para tal, considere os exemplos a seguir:

***Exemplo 3.1:*** Escrevemos abaixo os números naturais de $1$ a $10$.

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

Antes de cada um deles, coloque sinais " $+$ " ou "$-$". É possível que a soma de todos esses números seja zero?

***Solução:*** Se fosse possível, deveríamos separar os números dados em dois grupos com a mesma soma. Assim, colocaríamos sinais negativos nos números de um dos grupos e sinais positivos nos números do outro. Teríamos então uma soma igual a zero. Acontece que a soma dos números naturais de $1$ a $10$ é invariante, igual a $55$. Como este número é ímpar, não podemos separar os números dados em dois grupos que tenham a mesma soma, pois a soma de dois números iguais é sempre par. Portanto, não é possível tal situação.

***Exemplo 3.2:*** Um jogo consiste de $9$ botões luminosos (de cor verde ou vermelha) dispostos da seguinte forma:

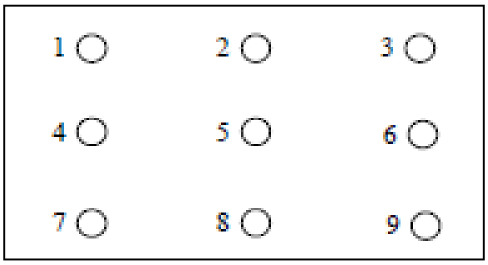


FIGURA 5

Apertando um botão da borda do retângulo, trocam de cor ele e seus vizinhos (do lado ou em diagonal). Apertando o botão do centro, trocam de cor todos os seus $8$ vizinhos, porém ele não. Desta forma:

- Apertando 1, trocam de cor 1, 2, 4 e 5.
- Apertando 2, trocam de cor 1, 2, 3, 4, 5 e 6.
- Apertando 5, trocam de cor 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 e 9.

Se, inicialmente, todos os botões estão verdes, é possível, apertando sucessivamente alguns botões, torná-los todos vermelhos?

***Solução:*** Observe que apertando um botão do vértice do retângulo, trocam de cor $4$ botões. Apertando um botão do meio de um lado, trocam de cor $6$ botões e apertando um botão do centro trocam de cor $8$ botões. Assim, cada vez que apertamos um botão trocam de cor um número *par* de botões, ou seja, a paridade do número de botões que trocam de cor é invariante. Como existem $9$ botões, não é possível que todos troquem de cor.

***Exemplo 3.3:*** Um tabuleiro $4 \times 4$ possui, inicialmente, todas as casas pintadas de branco. Uma operação permitida é escolher um retângulo consistindo de $3$ casas e pintar cada uma das casas da seguinte forma:

– se a casa é branca, então pinta-se de preto;

– se a casa é preta, então pinta-se de branco.

Prove que, aplicando várias vezes a operação permitida, é impossível conseguirmos que todo o tabuleiro fique pintado de preto.

***Solução:*** Distribuímos as letras $a$, $b$ e $c$ no tabuleiro da seguinte forma:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $a$ |
| $c$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $c$ | $a$ | $b$ |
| $a$ | $b$ | $c$ | $a$ |

FIGURA 6

Note que as letras estão alternadas tanto nas linhas quanto nas colunas. Esta alternância faz com que toda vez que um retângulo com $3$ casas seja selecionado, então exatamente uma letra $a$, uma letra $b$ e uma letra $c$ são selecionadas.

Sejam $A$ a quantidade de casas brancas com a letra $a$, $B$ a quantidade de casas brancas com a letra $b$ e $C$ a quantidade de casas brancas com a letra $c$. No início temos $A = 6$, $B = 5$ e $C = 5$. Toda vez que selecionamos um retângulo formado de três casas, estamos somando a cada valor de $A$, $B$ e $C$ os valores $+1$ ou $-1$. Perceba que se todas as casas ficarem pretas, então teremos $A = 0$, $B = 0$ e $C = 0$. Entretanto, note que iniciando de $A = 6$, $B = 5$ e $C = 5$, e alterando simultaneamente por $+1$ ou $-1$ esses valores, sempre teremos entre os valores de $A$, $B$ e $C$ dois números ímpares e um par ou dois pares e um ímpar (invariante), fazendo com que a situação $A = 0$, $B = 0$ e $C = 0$ seja impossível de ocorrer.

## 3.1 PROBLEMAS PROPOSTOS

Nesta seção propõe-se quatro problemas que podem ser resolvidos usando o conceito de paridade como invariante.

***Problema 3.1***

Cem pessoas são postas em uma fila e cada uma delas recebe um chapéu preto ou branco. Cada pessoa só consegue ver os chapéus das pessoas que estão à sua frente. É pedido que cada uma delas tente adivinhar a cor do seu chapéu. Qual o máximo número de acertos que se pode garantir, dado que as pessoas podem combinar uma estratégia antes de recebê-los.

***Problema 3.2***

(Leningrado-85) Três cangurus estão alinhados em uma estrada. A cada segundo um dos cangurus salta. É permitido que um canguru salte por cima de um outro canguru, mas não de dois cangurus de uma só vez. Prove que depois de $1985$ segundos, os cangurus não podem voltar a ocupar a posição relativa inicial.

FIGURA 7

***Problema 3.3***

Um tubo de ensaio contém amebas de três tipos: A, B e C. Duas amebas de dois tipos diferentes quaisquer podem se fundir em uma ameba do terceiro tipo. Depois de vários desses processos de fusão, só restou uma ameba no tubo de ensaio. Qual é o tipo dessa última ameba, se inicialmente existiam $20$ amebas do tipo A, $21$ do tipo B e $22$ do tipo C?

***Problema 3.4***

Sete copos estão em uma mesa, todos com o fundo para cima. É permitido virar quaisquer quatro deles em um movimento. É possível chegar a uma situação em que todos os copos estejam com o fundo para baixo?

## CAPÍTULO 4: INVARIANTES EM PROBLEMAS DE COLORAÇÃO

A utilização da coloração na resolução de problemas matemáticos objetiva torná-los mais compreensíveis e mais fáceis para serem resolvidos. Uma estratégia eficiente é tirar proveito das diferenças existentes entre as variáveis envolvidas nos problemas. Nos exemplos a seguir, os problemas serão resolvidos usando a coloração como invariante.

***Exemplo 4.1:*** Temos um tabuleiro $8 \times 8$ e $31$ fichas de dominó com a particularidade de que cada ficha pode ocupar a região de duas casas adjacentes do tabuleiro (como mostrado na Figura 8). Você deseja colocar as $31$ fichas do dominó de modo que o tabuleiro fique coberto, exceto as duas extremidades da diagonal principal. É possível fazer tal distribuição com as $31$ fichas do dominó?

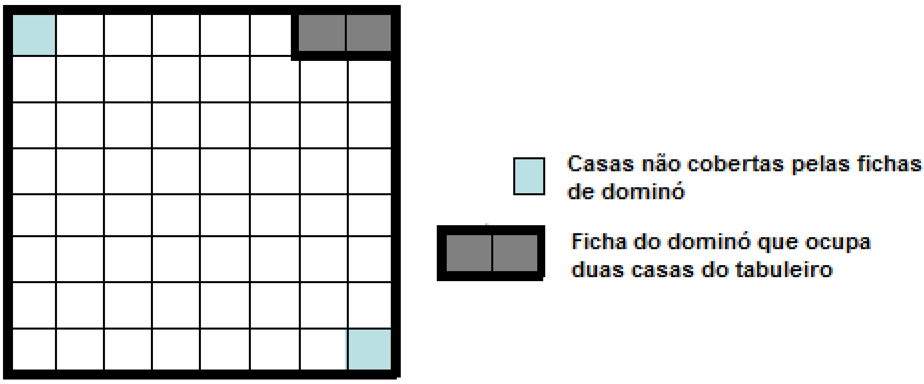



FIGURA 8

***Solução:*** Inicialmente, colorimos os quadrados do tabuleiro com duas cores (cinza e branco) formando um tabuleiro de damas, como mostra a Figura 9.

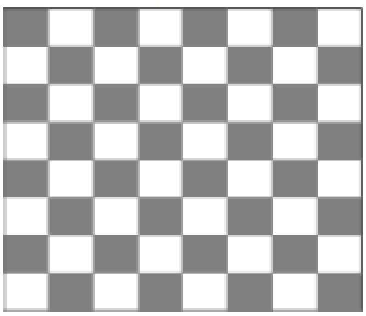


FIGURA 9

Cada ficha de dominó será colocada no tabuleiro de modo a ocupar duas casas adjacentes (vertical ou horizontal), ocupando necessariamente uma casa branca e uma casa cinza. Daí, colocando as $31$ fichas de dominó como desejado, iremos ocupar $31$ casas brancas e $31$ casas cinzas. E, portanto, será impossível colocar as $31$ fichas do dominó de modo que o tabuleiro fique coberto, exceto as duas extremidades da diagonal principal, pois, neste caso, essas extremidades da diagonal principal terão a mesma cor, restando apenas $30$ casas cinzas para serem cobertas. Neste caso, o invariante usado foi que a coloração de dois quadrados com um lado comum a placa tem uma coloração diferente. A coloração usada foi a mais comum, duas cores.

***Exemplo 4.2:*** Uma criança tentando completar um quebra-cabeça, colocou três de suas peças (todas da mesma forma) ocupando as posições mostradas na Figura 10. É possível completar o quebra–cabeça com estas três peças fixadas?

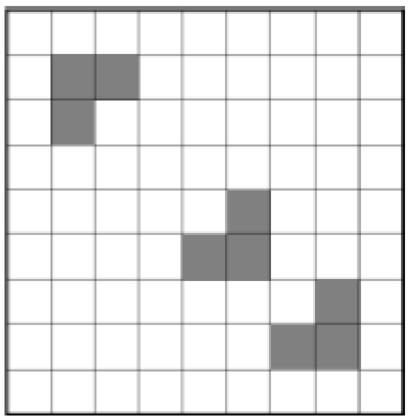


FIGURA 10

***Solução:*** Nota-se que esta placa é $9 \times 9$, de modo que seriam necessárias $27$ peças, cada uma ocupando $3$ casas do tabuleiro, para cobrir todo o tabuleiro. Se usarmos uma coloração de duas cores (branco e vermelho), como mostrado na Figura 11, onde também estão presentes as três peças colocadas pela criança, notaremos que nenhuma das três peças colocadas ocupa uma casa vermelha. E ainda, cada casa vermelha será coberta por uma peça distinta, devido ao formato das fichas.

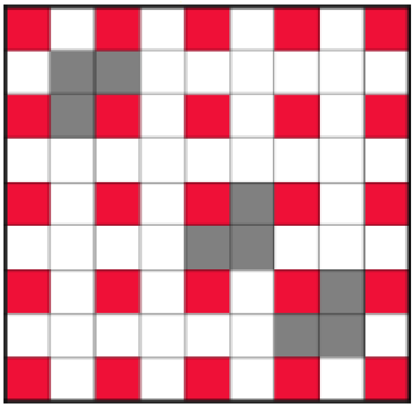


FIGURA 11

Sob estas condições, o número de peças utilizado nunca será menor do que a quantidade de quadrados vermelhos $(25)$, mais as três peças fixadas inicialmente, totalizando assim $28$ peças, o que contradiz a hipótese de serem necessárias $27$ peças para cobrir as $81$ casas do tabuleiro. Portanto, é impossível completar o quebra–cabeça com estas três peças fixadas pela criança. Novamente, usamos a coloração mais comum, duas cores, e a quantidade invariante usada foi o número de fichas usadas para cobrir cada casa vermelha.

***Exemplo 4.3:*** É possível para um cavalo de xadrez (lembrando que o cavalo tem um movimento especial que parece a letra L. O cavalo se movimenta $2$ casas para frente ou para trás e, em seguida, $1$ casa para a direita ou para a esquerda, ou $2$ casas para a direita ou para esquerda e, em seguida, $1$ casa para frente ou para trás) passar por todos os quadrados de um tabuleiro $4 \times N$ tendo visitado cada quadrado exatamente uma vez e retornar ao quadrado inicial?

***Solução:*** Colorimos os quadrados do tabuleiro $4 \times N$ usando as quatro cores mostradas na Figura 12 a seguir.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | |
| | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | |
| | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | |
| | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | |

FIGURA 12

Suponha que exista tal movimentação para o cavalo. A coloração ilustrada satisfaz a condição de que se um cavalo está em um quadrado de cor 1, então, depois do próximo movimento, ele estará em um quadrado de cor 3. Analogamente, se um cavalo está em um quadrado de cor 2, então, depois do próximo movimento, ele estará em um quadrado de cor 4.

Como o número de quadrados de cores 1 e 2 é igual ao número de quadrados de cores 3 e 4, esses pares de cores se alternam durante o percurso. Cada vez que um quadrado está em um quadrado de cor 3, ele vai para um quadrado de cor 1 na próxima jogada. Assim, as cores 1 e 3 ficam alternando-se, o que torna a situação proposta pelo problema impossível, pois, neste caso, o cavalo nunca visitaria os quadrados de cores 2 ou 4.

Portanto, com esta contradição, provamos que não é possível um cavalo de xadrez passar por todos os quadrados de um tabuleiro $4 \times N$ tendo visitado cada quadrado uma única vez e ter retornado ao quadrado inicial.

## 4.1 PROBLEMAS PROPOSTOS

Nesta seção, propõem-se quatro problemas que podem ser resolvidos usando a coloração como invariante.

***Problema 4.1***

Prove que um tabuleiro de xadrez $8 \times 8$ não pode ser coberto, sem sobreposições, por quinze poliminós $1 \times 4$ e um único poliminó ilustrado na Figura 13.

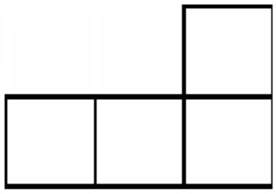


FIGURA 13

***Problema 4.2***

A sede de uma instituição burocrática tem exatamente uma entrada e uma saída, e uma porta no meio de cada parede interna de cada sala (veja a planta baixa na Figura 14). A fim de receber um certificado, deve-se entrar na sede, visitar cada sala uma única vez, e sair da sede. É possível receber um certificado?

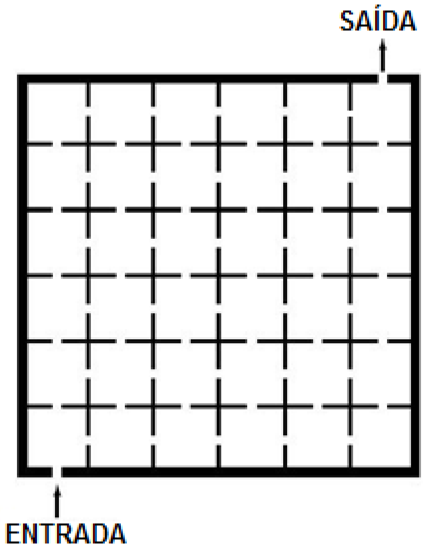



FIGURA 14

***Problema 4.3***

Prove que um tabuleiro $102 \times 102$ não pode ser coberto, sem sobreposições, por poliminós $1 \times 4$.

***Problema 4.4***

Um tabuleiro retangular foi coberto por poliminós $1 \times 4$ e $2 \times 2$, sem sobreposições. Depois, os poliminós foram removidos do tabuleiro, mas um poliminó $2 \times 2$ se perdeu. Foi providenciado outro poliminó, só que um $1 \times 4$. Prove que, agora, o tabuleiro não pode mais ser coberto pelos poliminós sem sobreposições.

# CAPÍTULO 5: RESTOS COMO INVARIANTES

A utilização como invariante do resto da divisão euclidiana de dois números naturais é uma excelente alternativa para a resolução de determinados problemas.

Inicialmente, considere uma demonstração do Algoritmo da Divisão Euclidiana, por Hefez, A. (Iniciação à Aritmética, 2015, página 53), possibilitando assim uma melhor compreensão dos elementos a serem utilizados nos problemas a seguir.

## 5.1 ALGORITMO DA DIVISÃO

Uma das propriedades mais importantes dos números naturais é a possibilidade de dividir um número por outro com resto pequeno. Essa é a chamada Divisão Euclidiana.

Sejam dados dois números naturais $a$ e $b$, com $a > 0$ e $b$ qualquer. Queremos comparar o número natural $b$ com os múltiplos do número $a$. Para isto, considere todos os intervalos da forma $[na, (n+1)a)$, sendo $n$ um número natural qualquer. Isto nos dá uma partição de $\mathbb{N}$, ou seja, $\mathbb{N} = [0, a) \cup [a, 2a) \cup [2a, 3a) \cup \ldots \cup [na, (n+1)a) \cup \ldots$ , sendo esses intervalos dois a dois sem elementos em comum.

Portanto, o número $b$ estará em um e apenas um dos intervalos acima. Digamos que $b$ pertença ao intervalo $[qa, (q+1)a)$.

Logo, existem dois números naturais $q$ e $r$, unicamente determinados, tais que $b = aq + r$, com $0 \leq r < a$.

O número $b$ é chamado *dividendo*, o número $a$ *divisor*, os números $q$ e $r$ são chamados, respectivamente, de *quociente* e *resto* da divisão de $b$ por $a$.

Dados dois números naturais $a$ e $b$, $b$ é múltiplo de $a$ se, e somente se, $r = 0$.

Se $b < a$, como $b = 0 \cdot a + b$, temos $q = 0$ e $r = b$.

Se $b = a$, neste caso, tomamos $q = 1$ e $r = 0$.

Se $b > a$, podemos considerar a sequência $b - a, b - 2a, \dots, b - na, \dots$ até encontrar um número natural $q$ tal que $b - (q + 1)a < 0$, com $b - qa \geq 0$. Assim, obtemos $b = qa + r$, sendo $r = b - qa$ e, portanto, $0 \leq r < a$.

Por exemplo, para dividir o número $54$ por $13$, determinamos os resultados da subtração de $54$ pelos múltiplos de $13$:

$$54 - 13 = 41$$

$$54 - 2 \cdot 13 = 28$$

$$54 - 3 \cdot 13 = 15$$

$$54 - 4 \cdot 13 = 2$$

$$54 - 5 \cdot 13 = -11 < 0$$

Assim, a divisão euclidiana de $54$ por $13$ é expressa por $54 = 4 \cdot 13 + 2$.

Considerando o processo de divisão descrito anteriormente, serão apresentados neste capítulo, problemas que usam o resto da divisão por algum número natural como a quantidade invariante em sua resolução.

***Exemplo 5.1:*** Dr. Pardal inventou uma máquina de trocar moedas que pode ser usada em qualquer país do mundo. Não importa o sistema de cunhagem, a máquina recebe qualquer moeda e, se possível, devolve exatamente cinco outras com o mesmo valor total. Prove que, não importa como o sistema de cunhagem funciona em um país, você nunca pode começar com uma única moeda e terminar com $26$ moedas.

***Solução:*** Como, depois de cada operação da máquina do Dr. Pardal, o número de moedas aumenta de $4$, temos que o resto da divisão do número de moedas por $4$ é invariante. Mas, $26$ e $1$ têm restos diferentes quando divididos por $4$ e, portanto, não será possível terminar com $26$ moedas.

***Exemplo 5.2:*** O Príncipe Ivan tem duas espadas mágicas.

i) Uma delas pode cortar, em cada golpe, $21$ cabeças de um dragão perverso.

ii) A outra espada pode cortar, em cada golpe, $4$ cabeças, mas depois disso crescem mais $1985$ cabeças no mesmo dragão.

O Príncipe Ivan pode cortar todas as cabeças, se originalmente o dragão tinha $100$ cabeças? (Observação. se, por exemplo, o dragão tivesse $3$ cabeças seria impossível cortá-las todas com uma das espadas.)

FIGURA 15

***Solução:*** De forma geral, considere que o dragão tenha $x$ cabeças. Se o Príncipe usar a primeira espada, cortando $21$ cabeças, temos que o número de cabeças do dragão passará a ser $x - 21 = x - 3 \cdot 7$. Se, por outro lado, o Príncipe usar a segunda espada, ele irá cortar $4$ cabeças mas irão surgir outras $1985$ novas cabeças e, assim, temos que o número de cabeças do dragão passará a ser $x - 4 + 1985 = x + 1981 = x + 283 \cdot 7$. Assim, após o uso de qualquer uma das espadas, o número de cabeças do dragão ou vai aumentar de $1981$ cabeças ou diminuir de $21$ cabeças. Como os dois número são múltiplos de $7$, podemos tomar como invariante o resto do número de cabeças do dragão quando dividido por $7$. Logo, o uso de qualquer uma das espadas não muda este resto e, como $100$ e $0$ possuem restos diferentes na divisão por $7$, temos que a resposta é negativa.

***Exemplo 5.3:*** Um monte de $1001$ pedras está em cima de uma mesa. Você pode fazer a seguinte operação: escolhe um dos montes que contém mais de uma pedra, joga fora uma pedra e divide o monte em dois montes menores (não necessariamente iguais). É possível chegar a uma situação em que todos os montes na mesa tenham exatamente $3$ pedras?

***Solução:*** A resposta é não. De fato:

Seja $S$ a quantidade equivalente à soma do número de pedras com o número de montes.

Inicialmente, retiramos uma pedra do monte que contém $1001$ pedras e formamos dois novos montes, digamos um com $999$ pedras e outro com $1$ pedra. Assim, a soma $S$ é igual a

$$\underbrace{999+1}_{NÚMERO\ DE\ PEDRAS} + \underbrace{2}_{NÚMERO\ DE\ MONTES} = 1002.$$

Seguindo essa ideia, retiramos uma pedra do monte que contém $999$ pedras e formamos assim dois novos montes, digamos um com $996$ pedras e outro com $2$ pedras, além do monte que possui uma única pedra. Assim, a soma $S$ é igual a

$$\underbrace{996+2+1}_{NÚMERO\ DE\ PEDRAS} + \underbrace{3}_{NÚMERO\ DE\ MONTES} = 1002.$$

Seguindo esse processo, observamos que a quantidade $S$ é invariante, pois sempre retiramos uma pedra e aumentamos em $1$ unidade o número de montes, e seu valor inicial é $1002$.

Assim, se tivéssemos $k$ montes com exatamente $3$ pedras em cada um deles, então a quantidade $S$ seria igual a $k + 3k = 4k$, que não pode ser igual a $1002$, já que $1002$ não é divisível por $4$. Portanto, é impossível chegar a uma situação em que todos os montes na mesa contêm exatamente $3$ pedras.

## 5.2 PROBLEMAS PROPOSTOS

Nesta seção propõem-se quatro problemas que podem ser resolvidos usando conceitos de divisibilidade e restos como invariantes.

### *Problema 5.1*

Uma calculadora tem duas teclas e o número $1$ na tela. A primeira tecla adiciona $3$ ao número mostrado na tela, e a segunda permite que você troque de lugar quaisquer dois dígitos do número da tela. É possível obtermos o número $\underbrace{123456789123456789 \ldots 123456789}_{2012\ BLOCOS\ 123456789}$ na tela da calculadora?

***Problema 5.2***

Um peão se move em um tabuleiro de xadrez $n \times n$. Em cada jogada, ele pode se mover um quadrado para cima, um quadrado para a direita ou um quadrado ao longo da diagonal que vai para a esquerda e para baixo (veja a Figura 16). Ele pode percorrer todos os quadrados do tabuleiro, visitando cada um exatamente uma vez e terminar seu passeio no quadrado à direita do quadrado inicial?

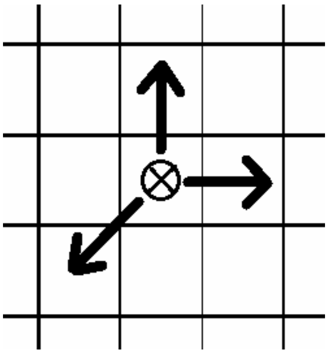


FIGURA 16

***Problema 5.3***

(Hong Kong - 97) Cinco números $1, 2, 3, 4, 5$ estão escritos em um quadro negro. Um estudante pode apagar dois dos números $a$ e $b$ no quadro e escrever os números $a + b$ e $ab$ nos seus lugares. Se esta operação é repetida indefinidamente, podem os números $21, 27, 64, 180$ e $540$ aparecerem no quadro negro ao mesmo tempo?

***Problema 5.4***

Nos países Dília e Dália, as moedas são o díler e o dáler, respectivamente. Em Dília, a taxa de câmbio é de $10$ dáleres por um díler e em Dália, a taxa é de $10$ díleres por um dáler. Prove que, a menos que ele gaste algum dinheiro, nunca terá quantidades iguais de díleres e dáleres.

## CAPÍTULO 6: EXPRESSÕES E VALORES NUMÉRICOS COMO INVARIANTES

Além do que já foi trabalhado nos capítulos anteriores, muitos problemas podem ser resolvidos de forma rápida caso seja usado como invariante uma expressão numérica ou algébrica, ou até mesmo um número como fator invariante. Neste capítulo, serão apresentados problemas que nos levam a essa discussão.
Considere os problemas a seguir.

***Exemplo 6.1:*** Seis pardais estão em seis árvores, um pardal em cada árvore. As árvores estão enfileiradas, com $10$ metros entre duas árvores vizinhas. Se um pardal voar de uma árvore para outra, na mesma hora, algum outro pardal voa de alguma árvore para outra que esteja à mesma distância, mas na direção oposta. É possível todos os pardais se juntarem em uma mesma árvore? E se forem sete árvores e sete pardais?

***Solução:*** Podemos usar a seguinte quantidade como invariante: cada pardal tem um índice especial igual ao número da árvore onde ele está atualmente (contando da esquerda para a direita). Então, a soma $S$ desses índices é a quantidade invariante. De fato, depois do voo de dois pássaros quaisquer, só seus índices variam – um é aumentado de algum número $x$ e o outro diminui do mesmo número. Logo, a soma $S$ é invariante. Inicialmente, o valor de $S$ é $1+2+3+4+5+6 = 21$ e, se todos os pardais estiverem na mesma árvore com número $k$, então o valor de $S$ é $6k$. Como $21$ não é divisível por $6$, concluímos que os pardais não podem se juntar em uma mesma árvore.

Por outro lado, se forem sete árvores e sete pardais, então inicialmente a soma $S = 28$, que é divisível por $7$, e não podemos excluir a possibilidade de todos os pardais se juntarem em uma mesma árvore. De fato, o leitor pode, facilmente, construir uma sequência de voos que resultam na situação desejada: todos os pardais ficam juntos na árvore do meio.

***Exemplo 6.2:*** Escrevemos os números de $1$ a $10$ numa lousa. A cada passo, trocamos dois números da lousa $a$ e $b$ pelo número $\sqrt{a^2+b^2}$. Qual é o número que vai ficar no final, independentemente das operações?

***Solução:*** Aqui a quantidade invariante não é tão trivial como no exemplo anterior. Então qual é o invariante? Neste caso, o invariante é a soma dos quadrados dos números da lousa, pois, ao fazermos uma transformação, se $S$ é a soma dos quadrados dos números não escolhidos, então podemos dizer que:

- A soma dos quadrados antes era igual a $S + a^2 + b^2$;
- A soma dos quadrados depois é igual a $S + (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = S + a^2 + b^2$.

Então, a soma dos quadrados realmente se conserva. Com isso, se $x$ é o número que vai restar no final, temos que, comparando as situações inicial e final,

$$x^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = 385 \Longrightarrow x = \sqrt{385}.$$

***Exemplo 6.3:*** As seguintes operações são permitidas com a equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

i) permutar $a$ e $c$;

ii) trocar $x$ por $x + t$, onde $t$ é um número real.

Repetindo estas transformações, é possível transformar $x^2 - x - 2 = 0$ em $x^2 - x - 1 = 0$?

***Solução:*** Mostraremos que é invariante o valor do discriminante de todas as equações obtidas pela aplicação das operações permitidas.

Inicialmente, temos $\varDelta_0 = b^2 - 4ac$.

Aplicando a primeira operação: $ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow cx^2 + bx + a = 0$ (1)

Para esta equação, temos $\varDelta_1 = b^2 - 4ac = \varDelta_0$.

Aplicando a segunda operação:

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow a(x + t)^2 + b(x + t) + c = 0$$

$$\rightarrow ax^2 + (b + 2at)x + at^2 + bt + c = 0 \qquad (2)$$

Para esta equação, temos $\varDelta_2 = (b + 2at)^2 - 4a(at^2 + bt + c) = b^2 + 4abt + 4a^2t^2 - 4a^2t^2 - 4abt - 4ac = b^2 - 4ac = \varDelta_0 = \varDelta_1$.

Como o discriminante de $x^2 - x - 2 = 0$ é igual a $9$, e o discriminante de $x^2 - x - 1 = 0$ é igual a $5$, temos que a transformação é impossível.

### 6.1 SEMI-INVARIANTES

Vale ressaltar também a ideia de semi-invariante, uma pequena generalização do conceito de invariante. Dizemos que uma quantidade é semi-invariante quando ela nunca diminui ou nunca aumenta, durante algum processo de transformação. Um semi-invariante típico é a idade de uma pessoa que só pode crescer com o passar do tempo.

Considere o exemplo a seguir.

***Exemplo 6.4:*** Um total de $2000$ pessoas está dividido entre os $115$ quartos de uma mansão. A cada minuto, até que todas não estejam em um mesmo quarto, uma pessoa anda para um quarto com um número igual ou maior de pessoas do que o quarto que ocupava. Prove que eventualmente todas as pessoas vão estar em um mesmo quarto.

*Solução:* Seja $a_i$ a quantidade de pessoas no quarto $i$, $1 \leq i \leq 115$.

Considere a expressão $I = {a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_{115}}^2$.

Digamos que uma pessoa sai de um quarto que possui $n$ pessoas e vai para um quarto que possui $m$ pessoas $(m \geq n)$. A variação de $I$ é:

$$\Delta I = (m+1)^2 + (n-1)^2 - (m^2 + n^2) = 2(m - n + 1) > 0.$$

Assim, toda vez que uma pessoa troca de quarto, o valor de $I$ cresce (tendência de crescimento invariante). Entretanto, note que o valor de $I$ não pode crescer indefinidamente, uma vez que o número total de pessoas é finito, implicando que uma hora todas as pessoas estarão em um mesmo quarto.

## 6.2 PROBLEMAS PROPOSTOS

Nesta seção, iremos propor alguns problemas que podem ser resolvidos usando expressões algébricas ou numéricas como invariantes.

***Problema 6.1***

Em cada um dos $10$ degraus de uma escada existe uma rã. Cada rã pode, de um pulo, colocar-se em outro degrau, mas quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã pulará a mesma quantidade de degraus em sentido contrário: uma sobe e outra desce. Conseguirão as rãs colocarem-se todas juntas num mesmo degrau?

***Problema 6.2***

Começando com o conjunto $\{3, 4, 12\}$, é permitido apagar dois números $a$ e $b$ e escrever em seus lugares $0{,}6 \cdot a - 0{,}8 \cdot b$ e $0{,}8 \cdot a + 0{,}6 \cdot b$. É possível chegar ao conjunto $\{4, 6, 12\}$?

***Problema 6.3***

Um círculo está dividido em seis setores e os seis números $1, 0, 1, 0, 0, 0$ estão escritos no sentido horário, um em cada setor, como mostra a Figura 17. É permitido somar $1$ aos números em dois setores adjacentes. É possível tornar todos os números iguais?

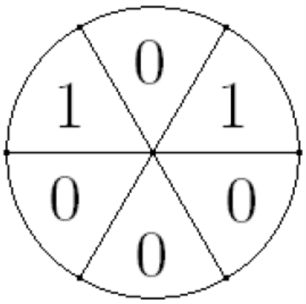



FIGURA 17

***Problema 6.4***

Temos numa lousa os inteiros positivos de $1$ a $4n - 1$, sendo $n$ um natural. Em cada etapa devemos substituir quaisquer dois inteiros por sua diferença. Prove que, após $4n - 2$ passos, restará um inteiro par.

# CAPÍTULO 7: PROBLEMAS ADICIONAIS

Neste capítulo, é apresentada uma série de problemas que utilizam todas as estratégias adotadas nos capítulos anteriores. É um excelente momento para os alunos colocarem em prática o que lhes foi apresentado até agora. Para tal, considere os problemas a seguir.

***Problema 7.1***

Em uma tabela $3 \times 3$, apenas uma das células do canto está colorida de preto e todas as outras são brancas (veja a Figura 18). Prove que não é possível tornar todas as células brancas recolorindo linhas e colunas, sendo que recolorir é a operação de mudar a cor de todas as células em uma linha ou coluna.

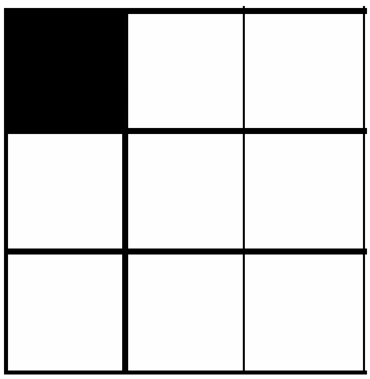


FIGURA 18

***Problema 7.2***

Os números $1, 2, 3, \dots, 1989$ estão escritos em um quadro negro. Pode-se apagar dois números quaisquer e substituí-los pela sua diferença. Esta operação pode ser usada para se obter uma situação onde todos os números no quadro são zeros?

***Problema 7.3***

Um dragão tem $100$ cabeças. Um cavaleiro pode cortar $15, 17, 20$, ou $5$ cabeças, respectivamente, com um golpe de sua espada. Em cada um destes casos, $24, 2, 14$, ou $17$ novas cabeças crescem sobre seus ombros. Se todas as cabeças são cortadas, o dragão morre. É possível que o dragão morra?

***Problema 7.4***

Uma linha poligonal fechada é composta por $11$ segmentos de reta. Pode uma reta (não contendo um vértice da linha poligonal) intersectar cada um desses segmentos?

***Problema 7.5***

Prove que um tabuleiro $10 \times 10$ não pode ser coberto, sem sobreposições, por poliminós como o da Figura 19.

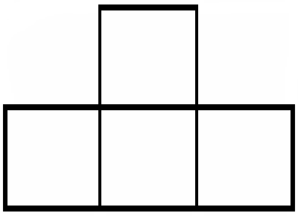


FIGURA 19

***Problema 7.6***

Os números de $1$ até $10$ são escritos em uma linha. Podemos colocar os sinais $+$ e $-$ entre eles de modo que o resultado da expressão resultante seja zero?

***Problema 7.7***

Pode um tabuleiro $8 \times 8$ (Figura 20) ser coberto por com poliminós $1 \times 2$ de modo que somente os quadrados a1 e h8 não sejam cobertos?

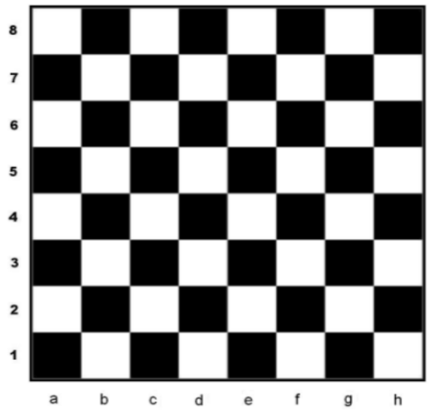


FIGURA 20

***Problema 7.8***

Nove casas $1 \times 1$ de um tabuleiro $10 \times 10$ estão infectadas. A cada segundo, uma casa que possui duas casas vizinhas (com um lado em comum) infectadas também se torna infectada. É possível todas as casas se tornarem infectadas?

***Problema 7.9***

Os números $1, 2, \ldots 20$ são escritos em uma lousa e a seguinte operação é permitida: excluir dois números $a$ e $b$ e escrever o número $ab + a + b$ em seus lugares. Qual número será obtido após realizadas $19$ operações?

***Problema 7.10***

Existem inicialmente $n$ números $1$ em um quadro negro. Em cada passo é permitido apagar quaisquer dois números $a$ e $b$ e escrever o número $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. Esta operação é feita $n - 1$ vezes. Prove que o último número não é menor que $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

# CAPÍTULO 8: SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS

## 8.1 SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS DO CAPÍTULO 3

### *Problema 3.1*

Esse número pode chegar a $99$ acertos, utilizando um poderoso argumento, que é a paridade. Notemos que ninguém sabe a cor do chapéu do último da fila. Então, não importando a estratégia de ordem das pessoas, nenhuma informação pode ser obtida para esse chapéu, o que não ocorre com os $99$ chapéus restantes. Note ainda que a diferença de conhecimentos entre uma pessoa e a pessoa que se encontra atrás dela é apenas o seu chapéu. Então, basta adotar a seguinte estratégia. As cores serão faladas das pessoas de trás para as da frente. A última pessoa vai falar BRANCO, caso a quantidade de chapéus brancos à sua frente seja par e PRETO, caso contrário. Como a $99$ª pessoa sabe a paridade da quantidade de chapéus brancos à sua frente, ela acertará o seu chapéu. A $98$ª pessoa, computando ambas as informações, pode acertar o dela, e assim sucessivamente.

### *Problema 3.2*

Existem seis posições para os cangurus: $\mathbf{123}$ $\underline{132}$ $\mathbf{312}$ $\underline{321}$ $\mathbf{231}$ $\underline{213}$. Note que as posições sublinhadas somente podem ser alcançadas através de uma posição anterior em negrito e vice-versa (invariante). Assim, depois de um número ímpar de pulos somente as posições sublinhadas ($\underline{132}$, $\underline{321}$ e $\underline{213}$) podem ser alcançadas, fazendo com que depois de $1985$ pulos não seja possível que os cangurus voltem a ocupar a posição inicial ($123$).

### *Problema 3.3*

Considere as paridades das diferenças $N(A) - N(B)$, $N(B) - N(C)$ e $N(C) - N(A)$, sendo $N(X)$ o número de amebas do tipo $X$. Essas paridades não mudam durante o processo de fusão. Inicialmente, $N(C) - N(A) = 22 - 20 = 2$, que é par. Ao final, quando restar apenas uma ameba no tubo, $N(C) - N(A)$ deve continuar sendo par, o que só é possível se $N(C) = N(A) = 0$, ou seja, ao final a única ameba restante é do tipo $B$.

***Problema 3.4***

Considere a situação inicial com $7$ copos com o fundo virado para cima. No primeiro movimento, viramos $4$ destes copos, passando a ter $3$ copos com o fundo virado para cima e $4$ com o fundo virado para baixo. Para qualquer movimento seguinte, ao virar $4$ copos quaisquer, podemos perceber que o número de copos com o fundo virado para cima sempre será um número ímpar. De fato, suponhamos que, em certo instante, haja um total de $x$ copos com fundo virado para cima, com $x$ ímpar. Ao virar $4$ copos, sendo $r$ deles dentre os $x$ copos com fundo virado para cima, e sendo $s$ deles dentre os $7 - x$ copos com fundo virado para baixo, obtém-se $x - r + s$ copos com fundo virado para cima. Mas, como $r + s = 4$, então $x - r + s = x - r + 4 - r = x + 2(2 - r)$,que é um número ímpar, pois soma de ímpar com par é ímpar ($x$ é ímpar e $2(2 - r)$ é par). Assim, tomamos como invariante a paridade do número de copos com o fundo virado para cima e, portanto, não será possível tornar todos os copos com o fundo virado para baixo.

## 8.2 SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS DO CAPÍTULO 4

***Problema 4.1***

Use a seguinte coloração para o tabuleiro: as linhas com números ímpares são coloridas de preto e as linhas com números pares são coloridas de branco. Então, os poliminós $1 \times 4$ sempre cobrem um número par de quadrados brancos independente da sua posição no tabuleiro. Além disso, o poliminó especial sempre cobre um número ímpar de quadrados brancos. Esses dois fatos juntos implicam que o número total de quadrados brancos cobertos é ímpar (invariante). Mas, esse número tem que ser $32$. Portanto, conclui-se que um tabuleiro de xadrez $8 \times 8$ não pode ser coberto, sem sobreposições, por quinze poliminós $1 \times 4$ e um único poliminó ilustrado na Figura 13.

***Problema 4.2***

Vamos pintar a planta baixa da sede como em um tabuleiro de xadrez (veja a Figura 21). De acordo com essa coloração, de uma sala preta, pode-se apenas ir para uma sala branca, e de uma sala branca, só se pode entrar em uma sala preta. Assim, enquanto se anda pela sede, vai se alternando as cores das salas. Suponha que exista um caminho para receber o certificado, começando na entrada e terminando na saída. Como esse caminho começa numa sala preta e vai se alternando as cores das salas, ele deve terminar um uma sala branca, pois o número de salas pretas é igual ao de salas brancas. Mas, a sala de saída é preta, o que é uma contradição.

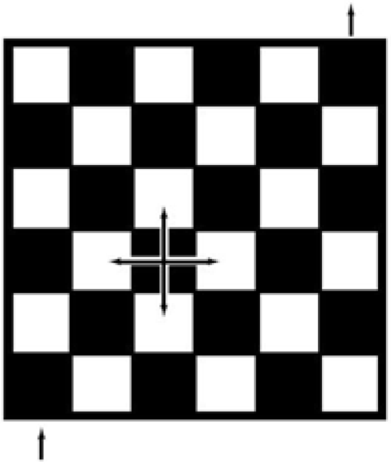


FIGURA 21

***Problema 4.3***

Aplique a coloração análoga ao do Problema 4.1 usando agora $4$ cores. Como cada poliminó cobre quatro quadrados de mesma cor ou 4 quadrados de cores diferentes, podemos concluir que a diferença entre o número de quadrados de cor A e o número de quadrados de cor B é divisível por $4$ (independentemente de que cores escolhemos como A ou B). Um cálculo fácil mostra que existem $2652$ quadrados da primeira cor, $2652$ quadrados da segunda cor, $2550$ quadrados da terceira cor e $2550$ quadrados da quarta cor. A diferença entre o número de quadrados da primeira e da terceira cor é $102$, que não é divisível por $4$. Portanto, um tabuleiro $102 \times 102$ não pode ser coberto, sem sobreposições, por poliminós $1 \times 4$.

***Problema 4.4***

Vamos considerar a coloração com $4$ cores ilustrada na Figura 22.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 2 | 3 |
| 1 | 4 | 1 | 4 |
| 2 | 3 | 2 | 3 |
| 1 | 4 | 1 | 4 |

FIGURA 22

Então, cada poliminó $2 \times 2$ contém exatamente um quadrado de cor 1 e cada poliminó $1 \times 4$ contém dois ou nenhum quadrado de cor 1. Portanto, a paridade do número de poliminós $2 \times 2$ coincide com a paridade do número de quadrados de cor 1. Assim, depois de mudar a paridade do número de poliminós $2 \times 2$ (quando um se perdeu), não podemos cobrir o mesmo tabuleiro sem sobreposição.

## 8.3 SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS DO CAPÍTULO 5

### *Problema 5.1*

Perceba que cada operação preserva o resto do número na divisão por $3$, uma vez que a primeira só adiciona $3$, aumentando o quociente de uma unidade e conservando o resto da divisão, e a segunda operação preserva o resto também, pois o resto da divisão de um número por $3$ é o mesmo resto da soma dos seus algarismos, e a soma dos algarismos não é alterada ao trocarmos dois dígitos de lugar. Como o número $123456789123456789 \ldots 123456789$ tem soma dos algarismos igual a $2012 \cdot (1+2+3+\cdots+9) = 2012 \cdot 45$, que é múltiplo de $3$, então o número acima é múltiplo de $3$. Como $1$ não é múltiplo de $3$, então é impossível obter esse número a partir do $1$.

### *Problema 5.2*

Depois de cada jogada, a soma dos números da linha e da coluna do quadrado onde está o peão diminuiu de $2$ ou aumentou de $1$. Logo, o resto da divisão dessa soma por $3$ aumenta de $1$ depois de cada jogada. Como serão feitas $(n^2 - 1)$ jogadas ao todo e a soma final tem que ser uma a mais que a original, temos que $(n^2 - 2)$ tem que ser divisível por $3$. Isso é impossível (um quadrado perfeito não pode ter resto $2$ quando dividido por $3$) e, portanto, tal percurso para o peão é impossível. Podemos explicar por que um quadrado perfeito não pode ter resto $2$ na divisão por $3$ da seguinte forma. Seja $x^2$ um quadrado perfeito. Pela Divisão Euclidiana, $x$ ou é da forma $3q$ ou é da forma $3q + 1$ ou é da forma $3q + 2$, sendo $q$ um inteiro. Se $x$ é da forma $3q$, então $x^2 = (3q)^2 = 3 \cdot (3q^2)$ deixa resto zero na divisão por $3$. Se $x$ é da forma $3q + 1$, então $x^2 = (3q + 1)^2 = 3 \cdot (3q^2 + 2q) + 1$ deixa resto $1$ na divisão por $3$. Se $x$ é da forma $3q + 2$, então $x^2 = (3q + 2)^2 = 3 \cdot (3q^2 + 4q + 1) + 1$ deixa resto $1$ na divisão por $3$. Em todo caso, o resto da divisão de $x^2$ por $3$ não é igual a $2$.

***Problema 5.3***

Não é possível. Note que, no início, existe somente um número divisível por $3$ e no final existem quatro números divisíveis por $3$. Observemos o que acontece com os restos da divisão por $3$ dos números no quadro quando fazemos uma operação:

$i)$ $a = 3x \text{ e } b = 3y \Rightarrow a + b = 3z \text{ e } ab = 3w.$

$ii)$ $a = 3x + 1 \text{ e } b = 3y \Rightarrow a + b = 3z + 1 \text{ e } ab = 3w.$

$iii)$ $a = 3x + 2 \text{ e } b = 3y \Rightarrow a + b = 3z + 2 \text{ e } ab = 3w.$

$iv)$ $a = 3x + 1 \text{ e } b = 3y + 1 \Rightarrow a + b = 3z + 2 \text{ e } ab = 3w + 1.$

$v)$ $a = 3x + 1 \text{ e } b = 3y + 2 \Rightarrow a + b = 3z \text{ e } ab = 3w + 2.$

$vi)$ $a = 3x + 2 \text{ e } b = 3y + 2 \Rightarrow a + b = 3z + 1 \text{ e } ab = 3w + 1.$

Portanto, a única forma de aumentar os divisíveis por $3$ é escolher $a = 3x + 1$ e $b = 3y + 2$. Consequentemente, também acrescentamos um número da forma $3k + 2$.

Por outro lado, na situação final o único número que não é divisível por $3$ é $64$, que é da forma $3k + 1$, o que é uma contradição, pois este número deveria ser da forma $3k + 2$ (o caso $iii$ mostra que sempre haverá um número da forma $3k + 2$ após termos $4$ deles da forma $3k$).

***Problema 5.4***

O resto da divisão por $11$ da diferença entre o número de dáleres e o número de dílares pertencentes ao comerciante pode ser usado como invariante. Como, inicialmente essa diferença é $1$, o comerciante nunca pode fazer com que essa diferença seja igual a $0$ e, portanto, ele nunca terá quantidades iguais para díleres e dáleres.

## 8.4 SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS DO CAPÍTULO 6

***Problema 6.1***

Numere os degraus de $1$ a $10$ e associe a cada rã o número do degrau que ela ocupa. A soma inicial destes valores é $S = 1 + 2 + \cdots + 10 = 55$.

Perceba, agora, que essa soma é invariante, pois quando uma rã sobe uma certa quantidade $x$ de degraus, temos outra rã que desce $x$, fazendo com que a soma das numerações destas duas rãs não se altere. Caso todas as rãs ocupem um mesmo degrau (digamos $y$), então todas as suas numerações são iguais a deste degrau, ou seja, teremos $10y = 55$, que não possui solução inteira. Deste modo, é impossível que todas as rãs ocupem um mesmo degrau.

***Problema 6.2***

Repare que $(0{,}6 \cdot a - 0{,}8 \cdot b\,)^2 + (0{,}8 \cdot a + 0{,}6 \cdot b.)^2 = a^2 + b^2$, implicando que a soma dos quadrados dos números dos conjuntos obtidos é invariante. Como $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$ e $4^2 + 6^2 + 12^2 = 14^2$, então não é possível chegar ao conjunto $\{4, 6, 12\}$.

***Problema 6.3***

Vamos numerar os setores de 1 a 6 no sentido horário, começando em algum setor. Depois, vamos considerar a diferença entre a soma dos números nos setores 1, 3 e 5 e a soma dos números nos setores 2, 4 e 6. Essa quantidade é invariante e seu valor inicial é $\pm 2$. Logo, não pode ser igual a zero, e a resposta é não.

***Problema 6.4***

Em cada etapa, o número de inteiros sempre diminui de um. Após $(4n - 2)$ etapas, exatamente um inteiro restará. Inicialmente, há $2n$ inteiros ímpares, que é um número par. Se dois números ímpares são substituídos, o número de inteiros ímpares diminui de $2$. Se um dos números é ímpar ou ambos são pares, então o número de inteiros ímpares permanece o mesmo. Logo, o número de inteiros ímpares permanece par após cada etapa. Como esse número é inicialmente par, continuará sempre par, resultando em zero no final. Assim, um número par restará.

## 8.5 SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS DO CAPÍTULO 7

***Problema 7.1***

Inicialmente, há apenas uma célula preta entre as células de canto e, logo, é ímpar o número de células pretas entre as células de canto. Suponhamos que, em um certo instante, seja ímpar o número de células pretas entre as células de canto. Como na linha 2 e na coluna 2 não há células de canto, ao se recolorir a linha 2 ou a coluna 2, não se altera o número de células pretas entre as células de canto, que permanece ímpar. Ao se recolorir qualquer linha ou coluna diferentes da linha 2 e da coluna 2, nesta linha ou coluna podem ocorrer os seguintes casos:

a) As duas células de canto são brancas: neste caso, após a recoloração, as duas cédulas de canto ficam pretas e, portanto, aumenta de $2$ o número de células pretas entre as células de canto, mantendo-se ímpar esse número.
b) Há apenas uma célula preta nos cantos: neste caso, após a recoloração, uma célula de canto muda de branco para preto e a outra muda de preto para branco e, portanto, não se altera o número de células pretas entre as células de canto, mantendo-se ímpar esse número.
c) As duas células de canto são pretas: neste caso, após a recoloração, as duas cédulas de canto ficam brancas e, portanto, diminui de $2$ o número de células pretas entre as células de canto, mantendo-se ímpar esse número.

Em todos os casos, sempre fica ímpar o número de células pretas entre as células de canto. Assim, não é possível que todas as células fiquem brancas, pois, nesse caso, o número de células pretas entre as células de canto seria zero, que não é ímpar.

***Problema 7.2***

Inicialmente a soma dos números é $\frac{1+1989}{2} \cdot 1989 = 995 \cdot 1989$, que é ímpar. Suponhamos que, em certo instante, a soma dos números no quadro seja $s + x + y = I$, sendo $I$ um número ímpar e $x$ e $y$ sejam dois números no quadro, com $x < y$. Ao se substituir $x$ e $y$ pela sua diferença $y - x$, a nova soma obtida é $s + y - x = I - x - y + y - x = I - 2x$, que é ímpar. Assim, a soma dos números no quadro é sempre ímpar e, logo, não pode ocorrer de todos os números no quadro serem zero, pois, neste caso, a soma seria zero, que é par.

***Problema 7.3***

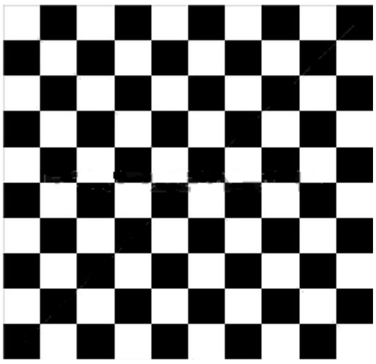
Após o uso de qualquer uma das espadas, o número de cabeças do dragão vai aumentar ou diminuir uma quantidade múltiplo de $3$. Logo, podemos tomar como invariante o resto do número de cabeças do dragão quando dividido por $3$. Portanto, o uso de qualquer uma das espadas não muda este resto e, como $100$ e $0$ possuem restos diferentes na divisão por $3$, temos que a resposta é negativa.

***Problema 7.4***

A resposta é não. Numeremos os vértices da linha poligonal com os números de $1$ até $11$. Se tal reta existisse, os vértices ímpares ficariam em um dos semiplanos determinados por ela e os vértices pares no outro. Entretanto, o segmento que une os vértices $1$ e $11$ em um destes semiplanos não poderia ser cortado pela reta. Este absurdo mostra que tal reta não existe.

***Problema 7.5***

Considere a coloração padrão de um tabuleiro de xadrez como mostra a Figura 23 abaixo.



FUGURA 23

Suponha que seja possível cobrir todo o tabuleiro com poliminós representados na Figura 19. Para cobrir os $100$ quadradinhos do tabuleiro serão necessários $25$ poliminós, de forma a cobrir $50$ casas brancas e $50$ casas pretas. Além disso, cada poliminó irá cobrir $3$ casas brancas e uma preta ou $3$ casas pretas e uma branca. Assim, podemos perceber facilmente que, ao utilizar os $25$ poliminós, o número de casas brancas e o número de casas pretas ocupadas pelos poliminós sempre será um número ímpar. Por exemplo, a melhor situação que teríamos seria $12$ poliminós que cobrem $3$ casas brancas e uma preta e $12$ poliminós que cobrem $3$ casas pretas e uma branca:

$12 \times 3 + 12 \times 1 = 48$ casas brancas cobertas e

$12 \times 1 + 12 \times 3 = 48$ casas pretas cobertas.

Necessariamente, o $25º$ poliminó tornará o número de casas brancas cobertas e o número de casas pretas cobertas um número ímpar. Logo, a paridade do número de casas bancas e pretas cobertas é invariante. E, portanto, será impossível cobrir o tabuleiro como desejado usando poliminós iguais ao da Figura 19.

***Problema 7.6***

Não é possível. Perceba que, quando escolhemos um número para trocarmos de sinal, por exemplo, de $+$ para $-$, a soma total varia o dobro do número escolhido, ou seja, a paridade da soma não muda. Basta ver agora que $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$ não tem a mesma paridade que $0$. Um invariante é a paridade da soma.

**_Problema 7.7_**

Não é possível. Considere a coloração da Figura 18. Cada dominó cobre exatamente um quadrado preto e outro branco (invariante). Portanto, a quantidade de quadrados pretos cobertos é igual à quantidade quadrados brancos cobertos. Como $a1$ e $h8$ têm a mesma cor, sobrariam $30$ quadrados de uma cor e $32$ de outra para serem cobertos. Absurdo!

**_Problema 7.8_**

Note que o perímetro da área infectada nunca aumenta. Inicialmente, temos um perímetro que é no máximo $4 \times 9 = 36$ e o perímetro do tabuleiro todo é $4 \times 10 = 40$. Logo, é impossível que o tabuleiro fique todo infectado.

**_Problema 7.9_**

Note que $ab + a + b = (a + 1)(b + 1) - 1$. Se, numa operação subsequente, este número é escolhido com algum outro número $c$, você deve digitar o número

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) - 1.$$

Isto sugere que o produto dos números que estão na lousa aumenta em $1$ unidade (invariante). Assim, inicialmente temos $(1 + 1)(2 + 1) \cdots (20 + 1) = 21!$. Após $19$ operações, será um número $x$ tal que $x + 1 = 21!$. Portanto, $x = 21! - 1$.

**_Problema 7.10_**

Suponha que, depois de $k$ operações, tenhamos os seguintes números escritos no quadro: $a_1, a_2, \ldots, a_{n-k}$. Considere a expressão

$$I_k = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-k}^2}$$

Depois de uma operação, a variação $\Delta I = I_{k+1} - I_k$ vale:

$$\Delta I = \left(\frac{a+b}{ab\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1}{ab} - \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2b^2},$$

sendo $a$ e $b$ dois dos inteiros $a_1, a_2, \ldots, a_{n-k}$.

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}} = \frac{1}{ab} \Longrightarrow \frac{1}{ab} - \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2b^2} \leq 0\,.$$

Desta forma $\Delta I \leq 0$, ou seja, $I_k$ nunca cresce.

Como $I_0 = n$ e $I_{n-1} = \frac{1}{a_1^2}$, então $I_{n-1} \leq I_0 \Longrightarrow \frac{1}{a_1^2} \leq n \Longrightarrow a_1 \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

## 9. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foi desenvolvida uma sequência didática que proporciona ao professor um nova forma de trabalhar com alguns conceitos matemáticos, pautada na resolução de problemas envolvendo invariantes, buscando o desenvolvimento do raciocínio lógico e intuitivo do aluno.

Temas como paridade, coloração, restos, divisibilidade, expressões algébricas e numéricas foram abordados de modo a desenvolver a criatividade, forçando o aluno a sair da sua “zona de conforto”, proporcionada pelos métodos tradicionais de ensino.

Isso condiz com os Parâmetros Curriculares Nacionais, (PCN, 2000),

> [...] Cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida; (p.41)
>
> [...] Para isso, habilidades como selecionar informações, analisar as informações obtidas e, a partir disso, tomar decisões exigirão linguagem, procedimentos e formas de pensar matemáticos que devem ser desenvolvidos ao longo do Ensino Médio; (p.41)

Acredita-se que a dinâmica apresentada no trabalho possibilite ao aluno pensar criticamente, ao desenvolver estratégias para a resolução dos problemas, pois, o objetivo é fazer com que ele entenda, de fato, os conteúdos apresentados e não apenas reproduza mecanicamente os mesmos.

## 10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BRASIL/MEC, **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**, Brasília, DF: MEC/SEMTEC, 2002.

[2] DANTE, Luiz Roberto; **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**, 2ª edição, São Paulo, SP: Ática, 1991.

[3] ENGEL, Arthur; **Problem Solving Strategies**. Springer-Verlag, 1998.

[4] FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia; **Círculos Matemáticos: A Experiência Russa**, Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2010.

[5] HEFEZ, Abramo; **Iniciação à Aritmética**, Rio de Janeiro, RJ: IMPA, p. 53-55, 2015.

[6] OBM: Olimpíada Brasileira de Matemática, **< www.obm.org.br**>

[7] OBMEP: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, **<www.obmep.org.br>**

[8] SOIFER, Alexander; **Mathematics as Problem Solving**, 2ª edição, Springer, 2009.

[9] WAGNER, Eduardo; **Paridade**, Rio de Janeiro, RJ: Revista Eureka, p. 15, 2007.