UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

VINICIUS BASSI COSWOSCK

MOVIMENTOS RECORRENTES E QUASE PERIÓDICOS EM SISTEMAS SEMIDINÂMICOS IMPULSIVOS

VITÓRIA
2017

VINICIUS BASSI COSWOSCK

MOVIMENTOS RECORRENTES E QUASE PERIÓDICOS EM SISTEMAS SEMIDINÂMICOS IMPULSIVOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo - PPGMAT/UFES, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof$\underset{.}{^a}$ Dr$\underset{.}{^a}$ Daniela Paula Demuner.

VITÓRIA

2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

C842m

Coswosck, Vinicius Bassi, 1990-
Movimentos recorrentes e quase periódicos em sistemas semidinâmicos impulsivos / Vinicius Bassi Coswosck. – 2017.
95 f. : il.

Orientador: Daniela Paula Demuner.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Estabilidade. 3. Sistemas dinâmicos. I. Demuner, Daniela Paula. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

“ Movimentos recorrentes e quase periódicos em sistemas semidinâmicos impulsivos”

Vinicius Bassi Coswosck

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 29/05/2017 por:

Profª Dra. Daniela Paula Demuner - UFES

Profº. Dr.Fábio Júlio da Silva Valentim - UFES

Profº. Dr. Everaldo de Mello Bonotto (USP/São Carlos)

Agradecimentos

Agradeço a Deus por tudo que tem me proporcionado.

Agradeço a minha família, principal inspiração, minha incentivadora emocional, pela incansável determinação em me educar, pelo amor incondicional, pelos anos de apoio.

Agradeço a minha noiva Alcinéia pelo amor, amizade e por sempre estar comigo nos momentos difíceis.

Agradeço aos amigos de jornada, pela companhia, troca de ideias, listas de exercícios, risadas, por me permitirem fazer um pouco da parte da vida de vocês, obrigado.

Agradeço a professora Daniela por acreditar que eu era capaz e pela orientação. Só tenho a agradecer aos seus ensinamentos, orientações, palavras de incentivo, puxões de orelha, paciência e dedicação.

Agradeço a todos os professores que tive a honra de conhecer, todos foram importante para eu ter chegado até aqui.

À CAPES pelo incentivo, suporte financeiro e por acreditar no potencial desse estudo.

Nossa maior fraqueza é a desistência. O caminho mais certeiro para o sucesso é sempre tentar apenas uma vez mais.

Thomas A. Edison

Resumo

Neste trabalho, estudamos a teoria de sistemas semidinâmicos impulsivos. Tais sistemas descrevem processos de evolução que sofrem variações de estado de curta duração de tempo e que podem ser considerados instantâneos. Introduzimos na primeira parte deste trabalho a teoria de sistemas semidinâmicos, processos de evolução que não sofrem variações de estado, pois são sistemas contínuos. Na segunda parte, apresentamos os sistemas semidinâmicos impulsivos que são uma generalização da teoria apresentada na primeira parte. Interessados em estudar os movimentos recorrentes e quase periódicos em sistemas semidinâmicos impulsivos, na terceira e quarta parte deste trabalho, estudamos conceitos como conjuntos minimais, pontos assintóticos e estabilidade de Zhukoviskij.

Palavras-chave: Sistemas semidinâmicos impulsivos, Pontos assintóticos, Pontos recorrentes e Pontos quase periódicos.

Abstract

In this work, we study the theory of impulsive semidynamic systems theory. These systems describe the evolution processes subject to quickly variations of state, and can be considered instantaneous. In the first part of this work is introduced the theory of semidiamic systems, these are not subject to variations of state because they are continuous. In the second part are presented the impulsive semi-dynamic systems, a generalization of the theory of semi-dynamic systems. To study the almost periodic recurrent movements of the impulsive semi-dynamic systems, in the third and fourth part, concepts of minimal sets, asymptotic points and Zhukoviskij stability are studied.

Key words: Impulsive semi-dynamic systems; Asymptotic points; Recurrent points; Almost periodic points.

Sumário

Introdução

A teoria de sistemas dinâmicos impulsivos é um capítulo importante e moderno da teoria de sistemas dinâmicos topológicos. Esta teoria vem sendo desenvolvida continuamente. Tais sistemas admitem vários fenômenos interessantes às vezes, por causa de sua "irregularidade", e às vezes, por causa de sua "regularidade". Tais sistemas representam uma generalização para a teoria clássica dos sistemas dinâmicos contínuos, uma das dificuldades de estudar esta teoria é que perdemos a continuidade que tínhamos no caso clássico. Seus conceitos são aplicados em áreas como biologia, medicina, economia, engenharia, física e entre muitas outras, exemplos de aplicações desta teoria podem ser vistas nos artigos:

- Mingzhan Huang; Xinyu Song, **Modeling and qualitative analysis of diabetes therapies with state feedback control**, International Journal of Biomathematics Vol. 7, No. 4 (2014);
- Lichun Zhao; Lansun Chen; Qingling Zhang, **The geometrical analysis of a predator-prey model with two state impuses**, 2012 Elsevier Inc.

Esses dois artigos são aplicações sobre nível de glicose no sangue e sobre predador presa, ambos usam sistemas semidinâmicos com impulsos.

Algumas das figuras desse texto podem ser encontradas em [3], [13], [21] e [25].

O presente texto está organizado em quatro capítulos, que compõe os resultados preliminares e os resultados principais. No que segue, descrevemos um resumo de cada capítulo.

No Capítulo 1, desenvolvemos a teoria elementar de sistemas semidinâmicos. Apresentamos os conceitos básicos de sistemas dinâmicos contínuos e exibimos alguns exemplos desta teoria. Definimos, também, conceitos de órbita, trajetória, conjunto positivamente invariante, conjunto limite e, além disso, provamos resultados envolvendo tais conceitos. As principais referências para este capítulo são [2], [3] e [24].

No Capítulo 2, introduzimos o conceito de sistemas semidinâmicos impulsivos e exibimos alguns exemplos. Definimos a função ϕ, que representa o menor tempo que a trajetória intercepta o conjunto impulsivo. Na Seção 2.2, introduzimos o conceito de seção para um tubo, esse conceito permite descrever uma vizinhança de um ponto não estacionário de X de forma "paralela", ou seja, como uma "caixa"em que os semifluxos vão de um lado ao outro da caixa com um mesmo intervalo de tempo. Definimos órbita positiva impulsiva, conjunto positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante, conjunto I-invariante e conjunto limite impulsivo. Entre os resultados deste capítulo podemos destacar os Lemas de convergência da Seção 2.4. As referências para este capítulo são [3], [16], [17] e [21].

No Capítulo 3, desenvolvemos uma introdução a teoria de conjuntos minimais para sistemas semidinâmicos com impulsos. Essa teoria nos permite apresentar alguns resultados no Capítulo 4. Usamos [13] como a principal referência deste capítulo.

No Capítulo 4, desenvolvemos a teoria sobre movimentos recorrentes e quase periódicos, que é nosso objetivo principal, veremos que mesmo com definições diferentes esses movimentos estão ligados estabelecendo certas condições. O conceito de pontos assintóticos para os pontos $\widetilde{\pi}$-periódico, quase $\widetilde{\pi}$-periódico e a estabilidade de Zhukovskij foram introduzidos neste capítulo. Na Seção 4.2, definimos o conceito de estabilidade de Zhukovskij e, na última seção, finalizamos nosso trabalho apresentando condições para que a partir da estabilidade de Lyapunov seja obtida a quase estabilidade de Zhukovskij. As principais referências para este capítulo são [13], [14], [22] e [23].

Notações

Vamos apresentar as notações que serão usadas neste texto.

Nosso ambiente de trabalho será o par (X, d), onde X é um conjunto e d é uma métrica em X.

- $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais (sem o zero);
- $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros;
- $\mathbb{Z}_+$ é o conjunto dos números inteiros não negativos;
- $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais;
- $\mathbb{R}_+$ é o conjunto dos números reais não negativos;
- $\mathbb{R}^n$ é o espaço euclidiano n-dimensional;
- $\varphi(t; t_0, x_0)$ representa uma solução no tempo t que no tempo t_0 vale x_0;
- $C(X, Y)$ é o conjunto das funções contínuas definidas em X e tomando valores em Y;
- $\overline{A}$ representa o fecho do conjunto A;
- ∂A representa a fronteira do conjunto A;
- $A \setminus B = \{x \in X : x \in A, x \notin B\}$;
- $A^c = X \setminus A$;
- $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$, com $A \subset X$ não vazio e $d(\cdot, \cdot)$ é a distância em X;

- $d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$, com $A, B \subset X$ não vazios;
- $B(x;\epsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \epsilon\}$, com $\epsilon > 0$;
- $\overline{B(x;\epsilon)} = \{y \in X : d(x,y) \leq \epsilon\}$, com $\epsilon > 0$;
- $B(A;\epsilon) = \{y \in X : d(y,A) < \epsilon\}$, com $\epsilon > 0$;
- $\overline{B(A;\epsilon)} = \{y \in X : d(y,A) \leq \epsilon\}$, com $\epsilon > 0$.

Escrevemos $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ para indicar que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência em X indexada no conjunto $\mathbb{N}$. Vamos escrever $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, para representar o limite $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Sistemas semidinâmicos

Neste capítulo definimos o que é um sistema semidinâmico e exibimos alguns exemplos sobre esta teoria, destacamos apenas algumas definições e resultados que serão importantes no estudo da teoria de sistemas semidinâmicos com impulsos, definições como a de invariância, conjunto limite positivo de um ponto x, prolongamento do conjunto limite positivo e o conjunto prolongado, foram introduzidos. Daremos, também, definições de estabilidades para esse tipo de sistema. As referências utilizadas e para mais informações sobre sistemas semidinâmicos podem ser consultadas em [1], [2], [3] e [24].

Definição 1.1. *Seja (X, d) um espaço métrico. Um sistema semidinâmico em X é uma tripla ordenada $(X, \pi, \mathbb{R}_+)$ onde a aplicação*

$$\begin{aligned} \pi \;:\; & X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow X \\ & (x, t) \longmapsto \pi(x, t) \end{aligned}$$

satisfaz as seguintes propriedades:

i) *π é contínua em $X \times \mathbb{R}_+$;*

ii) *$\pi(x, 0) = x$, para todo $x \in X$;*

iii) *$\pi(x, t + s) = \pi(\pi(x, t), s)$ para todos $t, s \in \mathbb{R}_+$ e todo $x \in X$.*

Se substituirmos $\mathbb{R}_+$ por $\mathbb{R}$ na Definição 1.1, dizemos que a tripla $(X, \pi, \mathbb{R})$ é um *sistema dinâmico* em X. Ao considerarmos no lugar de $\mathbb{R}_+$ na Definição 1.1, $\mathbb{Z}_+$ (ou $\mathbb{Z}$), obtemos um *sistema semidinâmico discreto* (ou um *sistema dinâmico discreto*) em X.

Se $(X, \pi, \mathbb{R}_+)$ é um sistema semidinâmico, então dizemos que o conjunto X é o *espaço de fase* e que a aplicação π é a *aplicação de fase*.

Para cada $x \in X$, a aplicação π induz uma aplicação contínua $\pi_x : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ definida por $\pi_x(t) = \pi(x, t)$. E, para cada $t \in \mathbb{R}_+$, a aplicação π induz uma aplicação contínua $\pi_t : X \longrightarrow X$ definida por $\pi_t(x) = \pi(x, t)$.

O exemplo a seguir é um exemplo clássico de sistema semidinâmico.

Exemplo 1.1. Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Considere a equação diferencial autônoma

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{1.1}$$

Vamos assumir que para cada $x \in \mathbb{R}^n$, exista uma única solução $\varphi(t, x)$ de (1.1) definida em $\mathbb{R}_+$ e satisfazendo a condição $\varphi(0, x) = x$. Pela unicidade de soluções, obtemos

$$\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x)$$

para todo $t, s \in \mathbb{R}_+$. Então a aplicação $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\pi(x, t) = \varphi(t, x)$, define um sistema semidinâmico em $\mathbb{R}^n$.

Em particular, considere a função contínua $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ com $f(x) = x$. A única solução da equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x, \tag{1.2}$$

definida em $\mathbb{R}_+$ e satisfazendo a condição $\varphi(0, x) = x$ é $\varphi(t, x) = xe^t$. Para $t, s \in \mathbb{R}_+$, temos

$$\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(s, x)e^t = xe^s e^t = xe^{s+t} = \varphi(t + s, x).$$

Portanto, $\pi(x, t) = \varphi(t, x)$ define um sistema semidinâmico $(\mathbb{R}^n, \pi, \mathbb{R}_+)$.

Exemplo 1.2. Seja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua. Considere a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t). \tag{1.3}$$

Assuma que para cada $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ a equação (1.3) possua uma única solução $\varphi(t; t_0, x_0)$, $\varphi(t_0; t_0, x_0) = x_0$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$. A aplicação $\pi : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$

dada por

$$\pi((x,t),s) = (\varphi(s+t;t,x), s+t),$$

onde $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, define um sistema dinâmico em X.

Em todos os capítulos, a menos de menção ao contrário, vamos denotar a tripla ordenada $(X, \pi, \mathbb{R}_+)$ somente pelo par ordenado (X, π) para simplificar a notação e porque no presente trabalho estamos interessados em estudar somente os sistemas semidinâmicos.

Definição 1.2. *Seja (X, π) um sistema semidinâmico. Para cada $x \in X$, a aplicação contínua*

$$\begin{aligned} \pi_x \ : \ & \mathbb{R}_+ \longrightarrow X \\ & t \longmapsto \pi(x,t) \end{aligned}$$

é chamada de trajetória positiva de x.

Definição 1.3. *Seja (X, π) um sistema semidinâmico em X. Dado $x \in X$, a órbita positiva de x é o conjunto*

$$\pi^+(x) = \{\pi_x(t) : t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Para quaisquer conjuntos $A \subset X$ e $B \subset \mathbb{R}_+$ definimos

$$\pi^+(A) = \bigcup_{x \in A} \pi^+(x) \quad e \quad \pi^+(A, B) = \bigcup_{x \in A} \{\pi_x(t) : t \in B\}.$$

Definição 1.4. *Um conjunto $A \subset X$ é dito positivamente π-invariante, se $\pi^+(A) \subset A$.*

Observação 1.1. Vale sempre a inclusão $A \subset \pi^+(A)$. Então, se A é um conjunto positivamente π-invariante temos a igualdade $A = \pi^+(A)$.

Definição 1.5. *Um ponto $x \in X$ é dito ponto crítico (estacionário ou equilíbrio), se $\pi(x,t) = x$, para $t \in \mathbb{R}_+$.*

Definição 1.6. *Um ponto $x \in X$ é dito ponto periódico, se existe $T > 0$ tal que $\pi(x,T) = x$.*

Apresentamos agora alguns resultados sobre invariância.

Proposição 1.1. *Sejam (X, π) um sistema semidinâmico e $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família de subconjuntos positivamente π-invariantes em X. Então,*

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \quad e \quad \tilde{A} = \bigcap_{i \in I} A_i,$$

são conjuntos positivamente π-invariantes em X.

Prova: Seja $x \in \pi^+(A)$. Então $x = \pi(x_0, t_0)$ para algum $x_0 \in A$ e algum $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Deste modo, $x_0 \in A_j$ para algum $j \in I$. Como A_j é positivamente π-invariante, temos que $x = \pi(x_0, t_0) \in A_j$ e, portanto,

$$x = \pi(x_0, t_0) \in A = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Logo, A é positivamente π-invariante em X.

Agora, se $x \in \pi^+(\tilde{A})$, então $x = \pi(x_0, t_0)$ para algum $x_0 \in \tilde{A}$ e algum $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Daí, $x_0 \in A_j$ para todo $j \in I$. Como A_j é positivamente π-invariante para todo $j \in I$, temos que $x = \pi(x_0, t_0) \in A_j$ para todo $j \in I$ e, portanto,

$$x = \pi(x_0, t_0) \in \tilde{A} = \bigcap_{i \in I} A_i,$$

o que demonstra que $\tilde{A}$ é positivamente π-invariante em X. ■

Proposição 1.2. *Seja (X, π) um sistema semidinâmico. Se $A \subset X$ é um subconjunto positivamente π-invariante, então o fecho de A também é positivamente π-invariante.*

Prova: Dado $y \in \pi^+(\overline{A})$. Então existem $y_0 \in \overline{A}$ e $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tais que $y = \pi(y_0, t_0)$. Como $y_0 \in \overline{A}$, existe $\{y_n\}_{n \geq 1} \subset A$ tal que $y_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y_0$. Usando o fato de que A é positivamente π-invariante e que $y_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\pi(y_n, t_0) \in A, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Pela continuidade de π,

$$\lim_{n \to \infty} \pi(y_n, t_0) = \pi(y_0, t_0) = y \in \overline{A}.$$

Logo $\pi^+(\overline{A}) \subset \overline{A}$, finalizando a demonstração. ■

Proposição 1.3. *Seja (X, π) um sistema semidinâmico. Para todo $x \in X$, $\pi^+(x)$ é positivamente π-invariante.*

Prova: Dado $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} \pi^+(\pi^+(x)) &= \bigcup_{y \in \pi^+(x)} \{\pi(y, t) : t \in \mathbb{R}_+\} = \bigcup_{s \in \mathbb{R}_+} \{\pi(\pi(x, s), t) : t \in \mathbb{R}_+\} \\ &= \bigcup_{s \in \mathbb{R}_+} \{\pi(x, s + t) : t \in \mathbb{R}_+\} \subset \pi^+(x), \end{aligned}$$

provando a proposição. ■

O conceito de conjunto limite é introduzido a seguir. Tal conceito é de grande relevância, pois através dele podemos extrair propriedades para o sistema. Conjuntos limites também estão ligados ao desdobramento da teoria de atratores globais, para mais informações pode ser consultado [1] e [2].

Definição 1.7. *Sejam (X, π) um sistema semidinâmico e $x \in X$. O conjunto*

$$L^+(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\pi(x, [t, +\infty))}$$

é chamado de conjunto limite positivo de $x \in X$.

A definição de conjunto limite para $x \in X$ pode ser estendida para um conjunto $A \subset X$. Se (X, π) é um sistema semidinâmico e $A \subset X$, definimos o *conjunto limite positivo de A* por

$$L^+(A) = \bigcap_{t \geq 0} \left(\overline{\bigcup_{s \geq t} \pi(A, s)} \right).$$

Note que, se $A = \{x\}$, $x \in X$, temos $L^+(A) = L^+(x)$.

O lema abaixo mostra uma caracterização através de sequências para o conjunto limite positivo.

Lema 1.1. *Sejam (X, π) um sistema semidinâmico e A um subconjunto de X. Então*

$$\begin{aligned} L^+(A) &= \{y \in X : \text{ existem sequências } \{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+ \text{ e } \{x_n\}_{n \geq 1} \subset A \\ &\quad \text{tais que } \; t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{e} \quad \pi(x_n, t_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y\}. \end{aligned}$$

Prova: Para facilitar a notação seja $W = \{y \in X\colon$ existem sequências $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ e $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset A$ tais que $t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\pi(x_n, t_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y\}$. Vamos provar inicialmente que $W \subset L^+(A)$. Dado $y \in W$, então existem sequências $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ e $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset A$ tais que

$$t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{e} \quad \pi(x_n, t_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y.$$

Vamos supor sem perda de generalidade que $\{t_n\}_{n \geq 1}$ é uma sequência estritamente crescente. Dado $t \geq 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\pi(x_n, t_n) \in \bigcup_{s \geq t} \pi(A, s)$ para todo $n > n_0$. Logo, $y \in \overline{\bigcup_{s \geq t} \pi(A, s)}$ para todo $t \geq 0$. Portanto

$$y \in \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} \pi(A)} = L^+(A).$$

Como y é qualquer, $W \subset L^+(A)$.
Por outro lado, seja $z \in L^+(A)$. Então, $z \in \overline{\bigcup_{s \geq t} \pi(A,s)}$ para todo $t \geq 0$. Em particular, $z \in \overline{\bigcup_{s \geq t_n} \pi(A,s)}$ para uma sequência $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \stackrel{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $x_n \in A$ e $\lambda_n \in [t_n, +\infty)$ tais que

$$d(\pi(x_n, \lambda_n), z) < \frac{1}{n}.$$

Por construção, $\lambda_n \stackrel{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Além disso,

$$\pi(x_n, \lambda_n) \stackrel{n \to +\infty}{\longrightarrow} z.$$

Assim $z \in W$ e, portanto, $L^+(A) \subset W$. O lema está provado. ∎

Corolário 1.1. *Sejam (X, π) um sistema semidinâmico e $x \in X$. Então,*

$$\begin{aligned} L^+(x) \;\; = \;\; & \{y \in X : \text{ existe uma sequência } \{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+ \\ & \text{tal que } \; t_n \stackrel{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{e} \quad \pi(x, t_n) \stackrel{n \to +\infty}{\longrightarrow} y\}. \end{aligned}$$

Sejam (X, π) um sistema semidinâmico e $x \in X$. Um ponto $y \in X$ é chamado *ponto limite positivo de* x se existe uma sequência $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}+$ tal que:

i) $t_n \stackrel{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$;

ii) $\pi(x, t_n) \stackrel{n \to +\infty}{\longrightarrow} y$.

Podemos dizer que, $L^+(x)$ é conjunto de todos os pontos limites positivos do ponto $x \in X$.

Exemplo 1.3. Considere o sistema em coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} r' = r(1-r), \\ \theta' = 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

O retrato de fase do sistema (1.4) consiste da trajetória fechada γ que coincide com o círculo unitário $r = 1$, do ponto $r = 0$ e de trajetórias espirais que se aproximam da curva γ, quando $t \to +\infty$. Veja Figura 1.

Note que a menos do ponto $r = 0$, o conjunto limite positivo de todas as trajetórias para o sistema (1.4) é a curva fechada γ. Para $r = 0$, o conjunto limite positivo é o ponto $r = 0$.

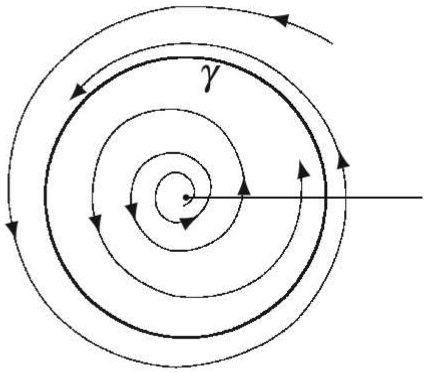

Figura 1: Trajetórias do sistema (1.4).

O próximo teorema estabelece alguns resultados sobre a órbita positiva e o conjunto limite positivo de um ponto $x \in X$.

Teorema 1.1. *Sejam* (X, π) *um sistema semidinâmico e* $x \in X$*. Então,*

a) $\overline{\pi^+(x)} = \pi^+(x) \cup L^+(x)$*;*

b) $L^+(x)$ *é fechado e positivamente* π*-invariante;*

c) se X *é localmente compacto,* $L^+(x)$ *é compacto e não vazio, então* $L^+(x)$ *é conexo.*

Prova: *a)* Provamos inicialmente que $\pi^+(x) \cup L^+(x) \subset \overline{\pi^+(x)}$. De fato, dado $y \in \pi^+(x) \cup L^+(x)$, temos que $y \in \pi^+(x)$ ou $y \in L^+(x)$. Se $y \in \pi^+(x)$ então $y \in \overline{\pi^+(x)}$. Agora, se $y \in L^+(x)$, então

$$\pi(x, t_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y,$$

para alguma sequência $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Como $\pi(x, t_n) \in \pi^+(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $y \in \overline{\pi^+(x)}$.
Por outro lado, seja $y \in \overline{\pi^+(x)}$. Então existe uma sequência $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(x, t_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y$. Se $t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \infty$, então $y \in L^+(x)$. Suponha agora que $\{t_n\}_{n \geq 1}$ é uma sequência limitada. Então $\{t_n\}_{n \geq 1}$ admite uma subsequência $\{t_{n_k}\}_{k \geq 1}$ convergente, ou seja, $t_{n_k} \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} a$ para algum $a \in \mathbb{R}_+$. Como π é contínua,

$$\pi(x, t_{n_k}) \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \pi(x, a).$$

Assim, pela unicidade do limite, $y = \pi(x, a)$ e, portanto, $y \in \pi^+(x)$. Logo, o resultado está provado.

b) Pela definição de $L^+(x)$, ele é um conjunto fechado. Vamos provar que $L^+(x)$ é positivamente π-invariante. Seja $z \in \pi(L^+(x))$, então $z = \pi^+(y, t_0)$ para algum $y \in L^+(x)$ e algum $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Como $y \in L^+(x)$, existe uma sequência $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tal que $\pi(x, t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Pela continuidade de π, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} \pi(x, t_n + t_0) = \lim_{n\to+\infty} \pi(\pi(x, t_n), t_0) = \pi(y, t_0) = z.$$

Como $t_n + t_0 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, temos que $z \in L^+(x)$. Portanto, $L^+(x)$ é fechado e positivamente π-invariante.

c) Suponha por absurdo que $L^+(x)$ não seja conexo. Então $L^+(x) = A \cup B$, onde $A, B \subset L^+(x)$ são não vazios, fechados e disjuntos. Como $L^+(x)$ é compacto segue que A e B são compactos. Usando o fato de X ser localmente compacto, existe um $\epsilon > 0$ tal que $\overline{B(A, \epsilon)}$ e $\overline{B(B, \epsilon)}$ são compactos e disjuntos em X. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. Assim existem sequências $\{t_n\}_{n\geq 1}$ e $\{s_n\}_{n\geq 1}$ em $\mathbb{R}_+$ com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $s_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tais que

$$\pi(x, t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \quad \text{e} \quad \pi(x, s_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\pi(x, t_n) \subset B(A, \epsilon)$, $\pi(x, s_n) \subset B(B, \epsilon)$ e $s_n - t_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o segmento de trajetória $\{\pi(x, t) : t_n \leq t \leq s_n\}$ é um conjunto conexo, compacto e ele claramente intercepta $\partial B(A, \epsilon)$ e $\partial B(B, \epsilon)$. Em particular, existe uma sequência $\{\gamma_n\}_{n\geq 1}$ com $t_n < \gamma_n < s_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $\pi(x, \gamma_n) \in \partial B(A, \epsilon)$. Como $\partial B(A, \epsilon)$ é compacto, então a sequência $\{\pi(x, \gamma_n)\}_{n\geq 1}$ possui uma subsequência convergente. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que

$$\pi(x, \gamma_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z,$$

assim, $z \in \partial B(A, \epsilon)$. Por outro lado, $t_n, s_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ implicam $\gamma_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e, deste modo, $z \in L^+(x)$, contradizendo o fato de $L^+(x) = A \cup B$. Portanto, $L^+(x)$ é conexo, finalizando a demonstração. ■

No que segue, os conceitos de prolongamento do conjunto limite positivo e conjunto prolongado são apresentados. Exibimos alguns resultados que envolvem estes conjuntos com o conjunto $\pi^+(x)$.

Definição 1.8. *Sejam (X, π) um sistema semidinâmico e $x \in X$. O prolongamento do conjunto limite positivo de x é*

$$J^+(x) = \bigcap_{\epsilon>0} \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{\tau\geq t} \pi(B(x;\epsilon), \tau)}.$$

O conjunto prolongado de x é

$$D^+(x) = \bigcap_{\epsilon>0} \overline{\bigcup_{t\geq 0} \pi(B(x;\epsilon), t)}.$$

No próximo lema segue uma caracterização através de sequências para o prolongamento do conjunto limite positivo e o conjunto prolongado.

Lema 1.2. *Seja $x \in X$. Então,*

a) $J^+(x) = \{y \in X$: existem sequências $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x,\ t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\pi(x_n, t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y\}$;

b) $D^+(x) = \{y \in X$: existem sequências $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ e $\pi(x_n, t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y\}$.

Prova: *a)* Para Facilitar a notação seja $W = \{y \in X$: existem sequências $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x,\ t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\pi(x_n, t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y\}$. Vamos provar primeiro que $W \subset J^+(x)$. Dado $y \in W$, existem sequências $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que

$$x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x, t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty \text{ e } \pi(x_n, t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y.$$

Vamos supor sem perda de generalidade que $\{t_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência estritamente crescente. Dados $\epsilon > 0$ e $t \geq 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\pi(x_n, t_n) \in \bigcup_{\tau\geq t} \pi(B(x;\epsilon), \tau)$, para todo $n > n_0$. Logo, $y \in \overline{\bigcup_{\tau\geq t} \pi(B(x;\epsilon), \tau)}$ para todo $\epsilon > 0$ e todo $t \geq 0$. Portanto

$$y \in \bigcap_{\epsilon>0} \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{\tau\geq t} \pi(B(x;\epsilon), \tau)} = J^+(x).$$

Pela arbitrariedade de y, $W \subset J^+(x)$.
Por outro lado, seja $y \in J^+(x)$. Então, $y \in \overline{\bigcup_{\tau\geq t} \pi(B(x;\epsilon), \tau)}$ para todo $\epsilon > 0$ e todo $t \geq 0$. Em particular, $y \in \overline{\bigcup_{\tau\geq n} \pi(B(x;\frac{1}{n}), \tau)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $\{\pi(x_m^n, t_m^n)\}_{m\geq 1}$ tal que $x_m^n \in B(x, \frac{1}{n})$, $m \in \mathbb{N}$, $t_m^n \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\pi(x_m^n, t_m^n) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Podemos escolher para $n \in \mathbb{N}$, $x_{m_n}^n = y_n$ e $t_{m_n}^n = h_n$ tais que $y_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, $h_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e

$$d(\pi(y_n, h_n), y) < \frac{1}{n}.$$

Isso implica que $\pi(y_n, h_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Portanto, $J^+(x) \subset W$.

b) Os argumentos desta demonstração são os mesmos do item *a)*. ■

Se utilizarmos os Lemas 1.1 e 1.2, podemos concluir que $L^+(x) \subset J^+(x)$ e que $J^+(x) \subset D^+(x)$, para todo $x \in X$. O próximo resultado estabelece propriedades dos conjuntos $J^+(x)$ e $D^+(x)$.

Teorema 1.2. *Sejam (X, π) um sistema semidinâmico e $x \in X$. Então,*

a) os conjuntos $J^+(x)$ e $D^+(x)$ são fechados e positivamente π-invariantes;

b) $\overline{\pi^+(x)} \subset D^+(x)$;

c) $D^+(x) = \pi^+(x) \cup J^+(x)$.

Prova: *a*) Segue da definição dos conjuntos $J^+(x)$ e $D^+(x)$ que ambos são fechados. Vamos provar que $J^+(x)$ é positivamente π-invariante. Seja $z \in \pi^+(J^+(x))$, então $z = \pi(y, t_0)$ para algum $y \in J^+(x)$ e algum $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Como $y \in J^+(x)$, existem sequências $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ e $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ tais que $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ e $\pi(x_n, t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Pela continuidade de π, temos

$$\lim_{n\to+\infty} \pi(x_n, t_n + t_0) = \lim_{n\to+\infty} \pi(\pi(x_n, t_n), t_0) = \pi(y, t_0) = z.$$

Como $t_n + t_0 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, concluímos que $z \in J^+(x)$. Portanto $J^+(x)$ é positivamente π-invariante. Com os mesmos argumentos provamos que $D^+(x)$ é positivamente π-invariante.

b) Observe que $x \in D^+(x)$ (basta escolher $x_n = x$ e $t_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Portanto, pelo item *a*), temos

$$\pi^+(x) \subset \pi^+(D^+(x)) \subset D^+(x) \quad \Rightarrow \quad \overline{\pi^+(x)} \subset D^+(x).$$

c) Como $J^+(x) \subset D^+(x)$ e pelo item *b*), obtemos $\pi^+(x) \cup J^+(x) \subset D^+(x)$.
Por outro lado, seja $y \in D^+(x)$. Então existem sequências $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ e $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ tais que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ e $\pi(x_n, t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Se $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$, então $y \in J^+(x)$. Caso contrário, se $\{t_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência limitada, então $\{t_n\}_{n\geq 1}$ admite uma subsequência $\{t_{n_k}\}_{k\geq 1}$ convergente, ou seja, $t_{n_k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} a$ para algum $a \in \mathbb{R}_+$. Pela continuidade de π,

$$\pi(x_{n_k}, t_{n_k}) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(x, a).$$

Assim, usando a unicidade do limite, $y = \pi(x, a)$ e, portanto, $y \in \pi^+(x)$. Deste modo, $D^+(x) \subset \pi^+(x) \cup J^+(x)$, o que queríamos demonstrar. ■

O exemplo a seguir mostra uma aplicação do Teorema 1.2.

Exemplo 1.4. Considere o sistema em $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x_1' = -x_1, \\ x_2' = x_2. \end{cases} \tag{1.5}$$

Utilizando o Teorema 1.2, podemos escrever $D^+(p) = \pi^+(p) \cup J^+(p)$, $p \in \mathbb{R}^2$. Assim, para determinarmos $D^+(p)$ basta conhecermos o conjunto $J^+(p)$. Se p for um ponto qualquer do eixo x_1, então $J^+(p) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$. Caso p não esteja sobre o eixo x_1, então $J^+(p) = \emptyset$, Assim, se p for um ponto qualquer do eixo x_1 temos $D^+(p) = \pi^+(p) \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$ e se p não esteja sobre o eixo x_1, temos $D^+(p) = \pi^+(p)$.

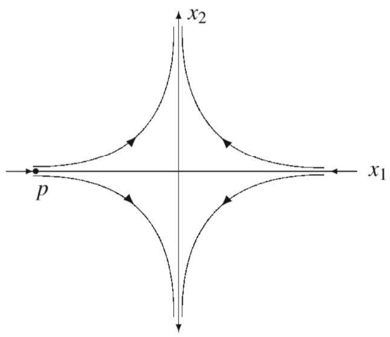

Figura 2: Retrato de fase do sistema (1.5).

Capítulo

2

Sistemas semidinâmicos impulsivos

Neste capítulo, apresentamos a teoria elementar de sistemas semidinâmicos com impulsos. Estamos interessados em uma estrutura semelhante aos sistemas semidinâmicos contínuos que contemplem e generalizam alguns resultados da teoria clássica. Nas seções deste capítulo definimos sistema semidinâmico com impulso (sistema semidinâmico impulsivo), a função ϕ, a $\widetilde{\pi}$-invariância, assim como os conjuntos limites impulsivos. As principais referências para este capítulo são [3], [17] e [24].

2.1 Definição de sistema semidinâmico impulsivo

Nesta seção vamos definir o que é um sistema semidinâmico impulsivo.

Apresentamos a seguir alguns conceitos que nos possibilitam definir um sistema semidinâmico impulsivo.

Definição 2.1. *Sejam (X, π) um sistema semidinâmico, $x \in X$ e $t \geq 0$. Definimos o "passado" de x pelo seguinte conjunto*

$$F(x,t) = \{y \in X : \pi(y,t) = x\}$$

e para $D \subset X$ e $\triangle \subset \mathbb{R}_+$ definimos

$$F(D,\triangle) = \bigcup_{x \in D} \left(\bigcup_{t \in \triangle} F(x,t) \right).$$

O próximo exemplo ilustra a definição acima.

Exemplo 2.1. Seja $(\mathbb{R}^2, \pi)$ um sistema semidinâmico em $\mathbb{R}^2$, onde $\pi((x,y),t) = (x+t, y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $t \in \mathbb{R}$. Considere $(x,y) = (1,1)$ e $t = 1$, então $F((x,y),t) = F((1,1),1) = (0,1)$, pois $(0,1)$ é o único ponto tal que aplicando π com o tempo $t = 1$ é igual a $(1,1)$. Se tomarmos $\triangle = [0,1]$ e $(x,y) = (1,1)$ teremos $F((x,y),\triangle) = F((1,1),[0,1]) = [0,1] \times \{1\}$. Agora, se considerarmos $D = \{1\} \times [0,1]$, obteremos $F(D,\triangle) = [0,1] \times [0,1]$.

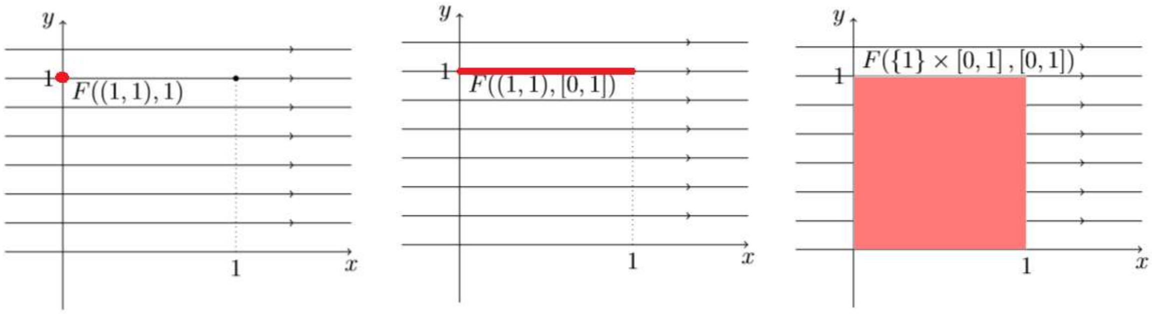

Figura 3: Conjuntos $F((1,1),1)$, $F((1,1),[0,1])$ e $F(D,\triangle)$.

Definição 2.2. *Um sistema semidinâmico impulsivo, $(X, \pi; M, I)$, consiste de um sistema semidinâmico (X,π), um conjunto não vazio, fechado e de interior vazio $M \subset X$ e uma aplicação $I : M \longrightarrow X$ contínua que cumprem as seguintes propriedades: para cada $x \in M$, existe $\epsilon_x > 0$ tal que*

$$F(x,(0,\epsilon_x)) \cap M = \emptyset \quad e \quad \pi(x,(0,\epsilon_x)) \cap M = \emptyset.$$

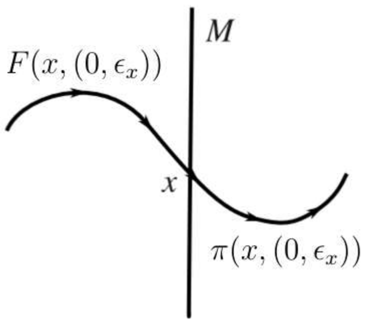

Figura 4: Trajetória através de x.

Informalmente significa que se $x \in M$ existe um um intervalo de tempo $(0,\epsilon_x)$ que podemos evoluir ou retroceder o sistema que não encontraremos o conjunto M.

Dizemos que M é o *conjunto impulsivo* e que I é a *aplicação de impulso.*

Definição 2.3. *Dizemos que $x \in X$ é um ponto inicial, se $F(x,t) = \emptyset$ para todo $t > 0$.*

Lema 2.1. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Se $x \in X \setminus M$ satisfaz $\pi(x,(0,+\infty)) \cap M \neq \emptyset$, então existe $s_x > 0$ tal que $\pi(x,t) \notin M$, para $0 < t < s_x$, e $\pi(x, s_x) \in M$.*

Prova: Seja $x \in X$ satisfazendo $\pi(x,(0,+\infty)) \cap M \neq \emptyset$. Como $\pi(x,(0,+\infty)) \cap M \neq \emptyset$, existe $t_1 > 0$ tal que $\pi(x,t_1) \in M$. Sendo M fechado e $\pi_x : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ contínua, segue que o conjunto $[0,t_1] \cap \pi_x^{-1}(M)$ é compacto. Então, $[0,t_1] \cap \pi_x^{-1}(M)$ possui um menor elemento, digamos $s_x > 0$. Portanto, $s_x > 0$ satisfaz a propriedade desejada. ■

Em vista do lema acima somos motivados a fazer as duas próximas definições.

Definição 2.4. *Seja $\phi : X \longrightarrow (0,+\infty]$ uma função definida da seguinte maneira:*

$$\phi(x) = \begin{cases} +\infty, & se \quad M^+(x) = \emptyset, \\ s_x, & se \quad M^+(x) \neq \emptyset, \end{cases}$$

onde $M^+(x) = \pi(x,(0,+\infty)) \cap M$ e s_x é o número real positivo determinado pelo Lema 2.1.

Note que caso $M^+(x) \neq \emptyset$, o número positivo $\phi(x)$ representa o menor tempo no qual a trajetória de x encontra o conjunto impulsivo M.

Definição 2.5. *Dado $x \in X$ com $\phi(x) < +\infty$, dizemos que $\pi(x,\phi(x))$ é o ponto impulsivo de x.*

A ***Trajetória impulsiva*** de $x \in X$ em $(X,\pi;M,I)$ é uma aplicação $\widetilde{\pi}_x$ definida em um intervalo contido em $\mathbb{R}_+$ que contém o zero com valores em X, dada indutivamente da seguinte forma: Se $M^+(x) = \emptyset$, então $\widetilde{\pi}_x(t) = \pi(x,t)$ para todo $t \geq 0$ e $\phi(x) = +\infty$. Caso $M^+(x) \neq \emptyset$, então

$$\widetilde{\pi}_x(t) = \begin{cases} \pi(x,t), & \text{se} \quad 0 \leq t < \phi(x), \\ x_1^+, & \text{se} \quad t = \phi(x), \end{cases}$$

onde $x_1^+ = I(x_1)$, com $x_1 = \pi(x,\phi(x)) \in M$. Vamos denotar x por x_0^+.

Note que neste caso o sistema tem um salto. Como $\phi(x) < +\infty$, o processo continua mas, agora, iniciando em x_1^+. Deste modo, caso $M^+(x_1^+) = \emptyset$, então $\widetilde{\pi}_x(t) = \pi(x_1^+, t - \phi(x_0^+))$ para $\phi(x_0^+) \leq t < +\infty$ e $\phi(x_1^+) = +\infty$. Agora, se $M^+(x_1^+) \neq \emptyset$, então

$$\widetilde{\pi}_x(t) = \begin{cases} \pi(x_1^+, t - \phi(x_0^+)), & \text{se} \quad \phi(x_0^+) \leq t < \phi(x_0^+) + \phi(x_1^+), \\ x_2^+, & \text{se} \quad t = \phi(x_0^+) + \phi(x_1^+), \end{cases}$$

onde $x_2^+ = I(x_2)$, com $x_2 = \pi(x_1^+, \phi(x_1^+)) \in M$.

Suponha que $\widetilde{\pi}_x$ esteja definida no intervalo $[t_{n-1}(x), t_n(x)]$ e que $\widetilde{\pi}_x(t_n(x)) = x_n^+$, onde $t_0(x) = 0$ e $t_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \phi(x_i^+)$ para $n \in \mathbb{N}$. Se $M^+(x_n^+) = \emptyset$, então $\widetilde{\pi}_x(t) = \pi(x_n^+, t - t_n(x))$ para $t_n(x) \leq t < +\infty$ e $\phi(x_n^+) = +\infty$. Agora, se $M^+(x_n^+) \neq \emptyset$, então

$$\widetilde{\pi}_x(t) = \begin{cases} \pi(x_n^+, t - t_n(x)), & \text{se} \quad t_n(x) \leq t < t_{n+1}(x), \\ x_{n+1}^+, & \text{se} \quad t = t_{n+1}(x), \end{cases}$$

onde $x_{n+1}^+ = I(x_{n+1})$ com $x_{n+1} = \pi(x_n^+, \phi(x_n^+)) \in M$. Assim, $\widetilde{\pi}_x$ está definida no intervalo $[t_n(x), t_{n+1}(x)]$ e, com isso, no intervalo $[0, t_{n+1}(x)]$.

A Figura 5 representa a trajetória de um ponto $x \in X$ em um sistema impulsivo.

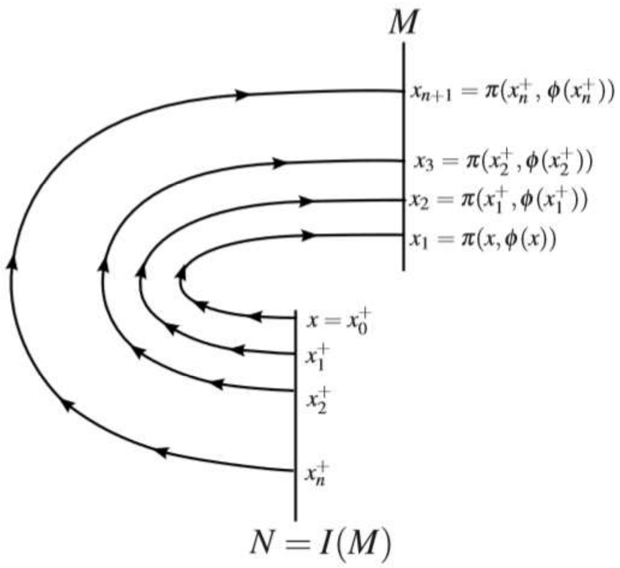

Figura 5: Trajetória impulsiva através de x.

O processo acima é finito se $M^+(x_n^+) = \emptyset$ para algum $n \in \mathbb{Z}_+$. Caso contrário, $M^+(x_n^+) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, então $\widetilde{\pi}_x$ está definida no intervalo $[0, T(x))$, onde $T(x) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \phi(x_i^+)$.

Para $x \in X$ definimos

$$\widetilde{\pi}(x, t) = \widetilde{\pi}_x(t), \quad t \in [0, T(x)).$$

Definição 2.6. *A órbita positiva impulsiva de $x \in X$ é o conjunto:*

$$\widetilde{\pi}^{+}(x) = \{\widetilde{\pi}(x,t) : t \in [0, T(x))\}.$$

Dado $x \in X$ uma das três condições é satisfeita:

i) $M^{+}(x) = \emptyset$;

ii) para algum $n \in \mathbb{N}$, x_k^{+} está definido para $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, ..., n\}$ e $M^{+}(x_n^{+}) = \emptyset$;

iii) $M^{+}(x_n^{+}) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{Z}_{+}$.

Na primeira condição acima, $\widetilde{\pi}_x$ é contínua, na segunda, $\widetilde{\pi}_x$ possui um número finito de descontinuidades, já na terceira, $\widetilde{\pi}_x$ possui infinitas descontinuidades. Além disso, se valem a primeira ou a segunda condição acima, temos $T(x) = +\infty$. Caso seja válida a terceira condição então ou $T(x) = +\infty$ ou $T(x) < +\infty$.

Hipótese (H1): *Ao longo deste trabalho, vamos supor que para todo $x \in X$, $T(x) = +\infty$.*

Definição 2.7. *Dados $A \subset X$ e $B \subset \mathbb{R}_{+}$. Definimos*

$$\widetilde{\pi}^{+}(A) = \bigcup_{x \in A} \widetilde{\pi}^{+}(x) \quad e \quad \widetilde{\pi}^{+}(A, B) = \bigcup_{x \in A} \{\widetilde{\pi}(x,t) : t \in B\}.$$

Exemplo 2.2. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : X \times \mathbb{R}_{+} &\longrightarrow X \\ ((z,t), s) &\longmapsto \pi((z,t), s) = (z, t+s), \end{aligned}$$

onde $X = E \times \mathbb{R}_{+}$ com $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Seja $M = E \times \{2; 3\}$ e para $z = re^{i\theta}$, seja $\lambda(z) = re^{i(\theta+\alpha)}$, onde α é um número irracional. Definindo a aplicação impulsiva $I : M \longrightarrow X$ por $I(z,j) = (\lambda(z), j-2)$, temos que $(X, \pi; M, I)$ é um sistema semidinâmico com impulso.

Em particular, se considerarmos $\alpha = \pi$ no caso acima, temos algumas variações na trajetória de x, que dependem de onde o ponto inicial x se encontra. Vamos ilustrar algumas dessas trajetórias para o sistema semidinâmico impulsivo. Note que se $x = (z,t)$ para algum $z = re^{i\theta}$ e com $t \geq 3$ então não teremos impulso. A Figura 6 mostra a trajetória para $x = (z,t)$, $x = (z,0)$ e $x = (z, \frac{5}{2})$ com $z = re^{i\theta}$ e $t \geq 3$.

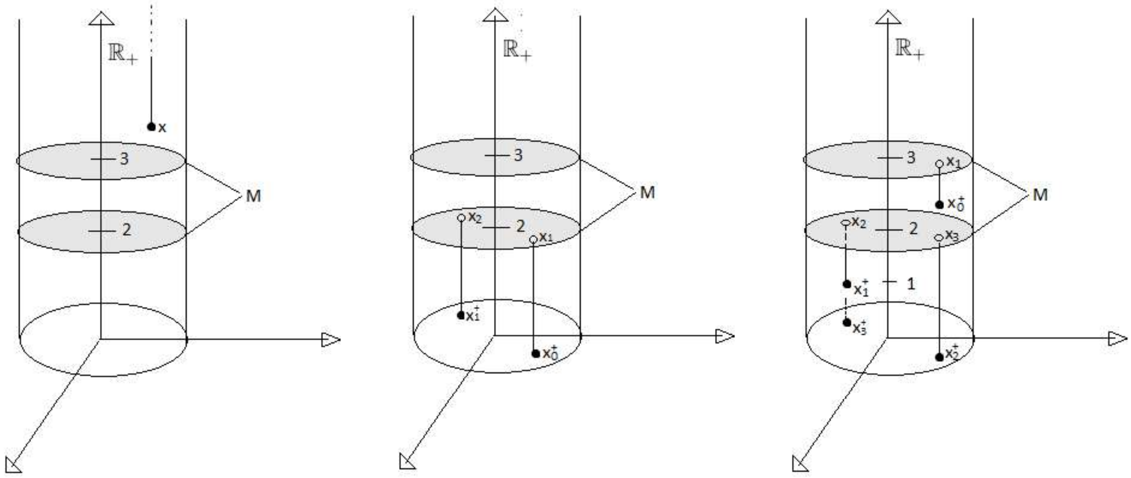

Figura 6: Trajetórias impulsivas através de x.

Observação 2.1. Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo.

i) Note que, se $x \in M$ então $\widetilde{\pi}(x,t) = \pi(x,t)$ para todo $0 \leq t < \phi(x)$, ou seja, não há impulso no instante $t = 0$. Para que a trajetória de um ponto $x \in X$ sofra impulso, devemos encontrar o menor tempo estritamente positivo para o qual esta trajetória encontra M;

ii) Sejam $x \in X$ e $t \geq 0$. Note que, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $t = t_k(x) + t'$ com $t_0(x) = 0$, $t_k(x) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \phi(x_i^+)$ e $0 \leq t' < \phi(x_k^+)$. Assim podemos escrever $\widetilde{\pi}(x,t) = \pi(x_k^+, t')$.

A proposição seguinte nos diz que $\widetilde{\pi}$ satisfaz o princípio da identidade e a condição de semigrupo.

Proposição 2.1. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Se $x \in X$, então:*

a) $\widetilde{\pi}(x, 0) = x$;

b) para $t, s \in [0, +\infty)$ tem-se $\widetilde{\pi}(x, t+s) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x,t), s)$.

Prova: Se $\widetilde{\pi}$ é contínua nada temos para provar, já que não existe ação impulsiva. Caso $\widetilde{\pi}$ não seja contínua, temos:

a) Segue do fato de $\widetilde{\pi}(x,t) = \pi(x,t)$, para $0 \leq t \leq \phi(x)$, e $\pi(x, 0) = x$.

b) Sejam $t, s \in [0, +\infty)$ e consideremos $y = \widetilde{\pi}(x, t)$. Pela Observação 2.1, podemos escrever $\widetilde{\pi}(x, t) = \pi(x_k^+, t')$ para algum $k \in \mathbb{Z}_+$, com $0 \leq t' < \phi(x_k^+)$ e $t = t_k(x) + t'$. Da mesma forma, podemos escrever $\widetilde{\pi}(y, s) = \pi(y_l^+, s')$ para algum $l \in \mathbb{Z}_+$, com $0 \leq s' < \phi(y_l^+)$ e $s = t_l(y) + s'$. Como $y = \widetilde{\pi}(x, t) = \pi(x_k^+, t')$, então

$$\phi(y) = \phi(x_k^+) - t' \text{ e } y_j^+ = x_{k+j}^+$$

para $j \in \mathbb{Z}_+$. Assim,

$$\begin{aligned} s &= t_l(y) + s' \\ &= \phi(y_0^+) + \phi(y_1^+) + \ldots + \phi(y_{l-1}^+) + s' \\ &= \phi(x_k^+) - t' + \phi(x_{k+1}^+) + \ldots + \phi(x_{k+l-1}^+) + s', \end{aligned}$$

onde $y_0^+ = y$. Somando t e s temos,

$$\begin{aligned} t + s &= t_k(x) + t' + \phi(x_k^+) - t' + \phi(x_{k+1}^+) + \ldots + \phi(x_{k+l-1}^+) + s' \\ &= \left(\sum_{i=0}^{k-1} \phi(x_i^+) + t' \right) + \left(\sum_{i=k}^{k+l-1} \phi(x_i^+) + s' - t' \right) \\ &= \sum_{i=0}^{k+l-1} \phi(x_i^+) + s', \\ &= t_{k+l}(x) + s', \end{aligned}$$

com $0 \leq s' < \phi(x_{k+l}^+)$. Desde modo,

$$\widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x, t), s) = \widetilde{\pi}(y, s) = \pi(y_l^+, s') = \pi(x_{k+l}^+, s') = \widetilde{\pi}(x, t_{k+l}(x) + s') = \widetilde{\pi}(x, t + s),$$

para $0 \leq s' < \phi(x_{k+l}^+)$. A proposição está demonstrada. ■

2.2 Continuidade da função ϕ

Vamos estudar condições para que a função ϕ definida na seção anterior, que determina o menor tempo estritamente positivo para o qual a órbita positiva de $x \in X$ sofre impulso seja contínua. Introduzimos o conceito de seção que permite descrever uma vizinhança de um ponto não estacionário de X de forma "paralela", ou seja, como uma "caixa"em que os semifluxos vão de um lado ao outro da caixa com um mesmo intervalo de tempo.

Definição 2.8. *Sejam (X, π) um sistema semidinâmico e $x \in X$. Um conjunto fechado S contendo x é dito seção (λ-seção), se existem $\lambda > 0$ e um conjunto fechado L tais que:*

i) $F(L, \lambda) = S$;

ii) $F(L, [0, 2\lambda])$ *é uma vizinhança de* $x \in X$;

iii) $F(L, \vartheta) \cap F(L, \mu) = \emptyset$ *para* $0 \leq \vartheta < \mu \leq 2\lambda$.

Denominamos o conjunto $F(L, [0, 2\lambda])$ de *tubo* (ou λ-tubo) e o conjunto L de *barra* (ou λ-barra).

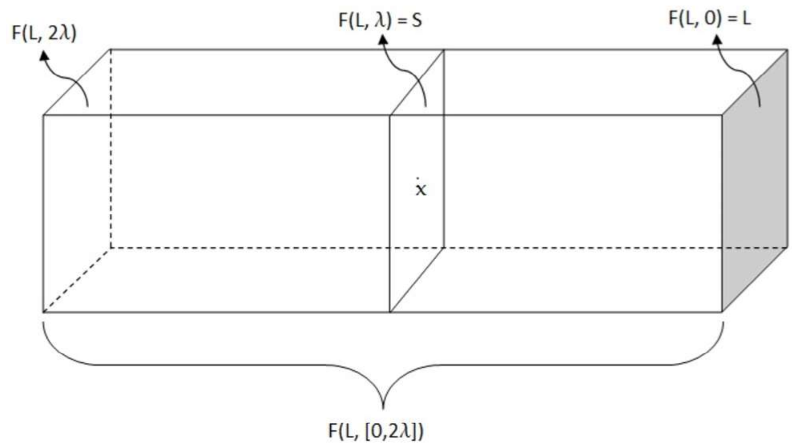

Figura 7: λ-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$.

Vamos denotar por L_λ o conjunto fechado L de um λ-tudo $F(L, [0, 2\lambda])$, chamado de barra na Definição 2.8.

No que segue vamos apresentar dois lemas essenciais para discutirmos sobre a continuidade da aplicação ϕ.

Lema 2.2. *Sejam* (X, π) *um sistema semidinâmico e* $x \in X$. *Se* S *é uma* λ*-seção através de* $x \in X$, $\lambda > 0$, *e* $0 < \mu \leq \lambda$, *então* S *também é uma* μ*-seção através de* x.

Prova: Se $\mu = \lambda$ nada temos para provar. Agora, sejam μ com $0 < \mu < \lambda$ e $L_\mu = F(L_\lambda, \lambda - \mu)$. Como π é contínua, então L_μ é fechado. Vamos provar que S é uma μ-seção através de x, ou seja, que são válidas as condições $i)$, $ii)$ e $iii)$ da Definição 2.8. De fato, a condição $i)$ segue de

$$y \in F(L_\mu, \mu) \Leftrightarrow \pi(y, \mu) \in L_\mu \Leftrightarrow \pi(\pi(y, \mu), \lambda - \mu) \in L_\lambda \Leftrightarrow \pi(y, \lambda) \in L_\lambda \Leftrightarrow y \in S.$$

Vamos mostrar que a condição $ii)$ é satisfeita. Como S é uma λ-seção através de x, existe um aberto U_1 contendo x tal que $U_1 \subset F(L_\lambda, [0, 2\lambda])$. Seja $T = F(L_\lambda, [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda])$.

Mostremos que T é fechado. Se $\{z_n\}_{n\geq 1} \subset T$ com $z_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z$, então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]$ tal que

$$\pi(z_n, t_n) \in L_\lambda.$$

Sendo $[0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]$ compacto, podemos supor sem perda de generalidade que $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{t} \in [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]$. Pela continuidade da aplicação π, obtemos que

$$\pi(z_n, t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(z, \bar{t}) \in L_\lambda.$$

Logo T é fechado.

Agora, note que $S \subset T^c = X \setminus T$ e T^c é aberto. Então existe um aberto $U_2 \subset T^c$ contendo x. Assim, $x \in U_1 \cap U_2$ com $U_1 \cap U_2$ aberto. Provemos que $U_1 \cap U_2 \subset F(L_\mu, [0, 2\mu])$. Dado $w \in U_1 \cap U_2$, temos que $w \in F(L_\lambda, [0, 2\lambda])$ e $w \in T^c$. Isso implica que $\pi(w, t) \in L_\lambda$ para algum $\lambda - \mu < t < \lambda + \mu$. Considere o número $s = t + \mu - \lambda$. Segue de $\lambda - \mu < t < \lambda + \mu$ que $s = t + \mu - \lambda > 0$ e $0 < t + \mu - \lambda < 2\mu$. Usando que

$$\pi(\pi(w, t + \mu - \lambda), \lambda - \mu) = \pi(w, t) \in L_\lambda,$$

temos

$$\pi(w, t + \mu - \lambda) \in L_\mu.$$

Portanto, $w \in F(L_\mu, [0, 2\mu])$. Vamos mostrar que a condição *iii*) também é válida. Suponha por absurdo que existam $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\mu$ tais que $F(L_\mu, \alpha) \cap F(L_\mu, \beta) \neq \emptyset$. Seja $\gamma \in F(L_\mu, \alpha) \cap F(L_\mu, \beta)$. Assim, $\pi(\gamma, \alpha) \in L_\mu$ e $\pi(\gamma, \beta) \in L_\mu$. Daí,

$$\pi(\gamma, \alpha + \lambda - \mu) = \pi(\pi(\gamma, \alpha), \lambda - \mu) \in L_\lambda \text{ e } \pi(\gamma, \beta + \lambda - \mu) = \pi(\pi(\gamma, \beta), \lambda - \mu) \in L_\lambda.$$

Então,

$$\gamma \in F(L_\lambda, \alpha + \lambda - \mu) \cap F(L_\lambda, \beta + \lambda - \mu),$$

com $0 \leq \alpha + \lambda - \mu < \beta + \lambda - \mu \leq 2\lambda$, o que é um absurdo. Portanto, vale o item *iii*), completando a demonstração do lema. ∎

A seguir são apresentados os conceitos de TC-tubo e STC-tubo.

Definição 2.9. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico com impulso.*

i) Um λ-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ dado por uma seção S através de x tal que $S \subset M \cap F(L, [0, 2\lambda])$ é chamado de TC-tubo através de x. Dizemos que um ponto $x \in M$ satisfaz a Condição de Tubo e escrevemos abreviadamente (TC), se existir um TC-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ através de x;

ii) *Um λ-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ dado por uma seção S através de x tal que $S = M \cap F(L, [0, 2\lambda])$ é chamado de STC-tubo através de x. Dizemos que um ponto $x \in M$ satisfaz a Condição Forte de Tubo e escrevemos abreviadamente (STC), se existir um STC-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ através de x.*

O exemplo a seguir ilustra a diferença entre as condições (TC) e (STC), vamos ver que um ponto $x \in X$ pode satisfazer a condição (TC) e não satisfazer a condição (STC).

Exemplo 2.3. Considere o sistema semidinâmico em $\mathbb{R}^2$ dado por

$$\pi((x, y), t) = (x + t, y) \tag{2.1}$$

e $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y, x \geq 0\}$. Note que o ponto $(0, 0)$ satisfaz a condição (TC) mas não satisfaz a condição (STC). Veja Figura 8.

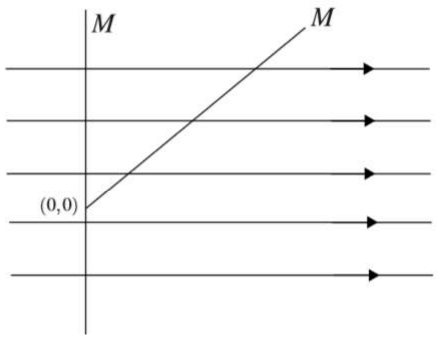

Figura 8: Esboço das trajetórias do sistema (2.1).

O próximo lema mostra que dado um TC-tubo (STC-tubo) através de x, $F(L, [0, 2\lambda])$, com λ-seção S, podemos "diminuir" $F(L, [0, 2\lambda])$ preservando a seção S.

Lema 2.3. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Suponha que exista um ponto $x \in X$ que satisfaça a condição (TC) $((STC))$ com uma λ-seção S através de x. Para qualquer $0 < \eta < \lambda$ o conjunto S também é uma η-seção com um TC-tubo $(STC$-tubo$)$.*

Prova: Dado $0 < \eta < \lambda$. Pelo Lema 2.2, S é uma η-seção através de x com o tubo $F(L_\eta, [0, 2\eta])$, assim, pela definição de seção, $F(L_\eta, \eta) = S$. Sendo $S \subset M \cap F(L_\lambda, [0, 2\lambda])$, em particular $S \subset M$. Portanto, $S \subset M \cap F(L_\eta, [0, 2\eta])$, e o lema está provado. ■

Na próxima definição vamos apresentar um tipo mais fraco de continuidade de uma função.

Definição 2.10. *Dizemos que uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é semicontínua superiormente em um ponto $a \in X$ quando, para cada $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $d(x,a) < \delta$ então $f(x) < f(a) + \epsilon$. Dizemos que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é semicontínua superiormente quando ela o for em cada ponto de X. Analogamente, dizemos que f é semicontínua inferiormente em um ponto $a \in X$ quando, para cada $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $d(x,a) < \delta$ então $f(x) > f(a) - \epsilon$.*

Em termos de sequências, f é uma função semicontínua superiormente em $a \in X$ se, para toda sequência $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ com $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, tivermos $\limsup\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \leq f(a)$. De forma análoga, f é uma função semicontínua inferiormente em $a \in X$ se, para toda sequência $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ com $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, tivermos $\liminf\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \geq f(a)$. Dizemos, então, que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $a \in X$ se, e somente se, ela for semicontínua superiormente e inferiormente no ponto a.

O exemplo abaixo mostra que a função ϕ nem sempre é contínua.

Exemplo 2.4. Considere o sistema semidinâmico e o conjunto impulsivo dados no Exemplo 2.3. Note que cada $(x,y) \in M$ satisfaz a condição (TC). Agora, note que $\phi(0,y) = y$ para $y > 0$ e que $\phi(0,0) = +\infty$. Portanto, ϕ não é semicontínua inferiormente no ponto $(0,0)$.

A seguir apresentamos alguns resultados que dizem quando a função ϕ é semicontínua e quando é contínua.

Teorema 2.1. *Seja $(X,\pi;M,I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Então, a função ϕ é semicontínua inferiormente em qualquer $x \in X \setminus M$.*

Prova: Sejam $x \in X \setminus M$ e $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ uma sequência qualquer tal que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Inicialmente, vamos supor que $\phi(x) = +\infty$. Caso exista uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ tal que $\{\phi(x_{n_k})\}_{k\geq 1}$ convirja para algum número real $\lambda \geq 0$, então

$$\pi(x_{n_k}, \phi(x_{n_k})) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(x,\lambda).$$

Como $\pi(x_{n_k}, \phi(x_{n_k})) \in M$ para todo $k \geq 1$ e M é fechado, segue que $\pi(x,\lambda) \in M$ e, portanto, $\phi(x) \leq \lambda$ o que é uma contradição. Logo $\liminf\limits_{n\to+\infty} \phi(x_n) = +\infty = \phi(x)$.
Agora, vamos supor que $\phi(x) = c$ com $c \in (0,+\infty)$. Seja $l = \liminf\limits_{n\to+\infty} \phi(x_n)$. Se $l < +\infty$ então existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ tal que $\{\phi(x_{n_k})\}_{k\geq 1}$ convirja para l. Assim,

$$\pi(x_{n_k}, \phi(x_{n_k})) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(x,l).$$

Como $\pi(x_{n_k}, \phi(x_{n_k})) \in M$ para todo $k \geq 1$ e M é fechado, segue que $\pi(x, l) \in M$ e, portanto, $\phi(x) \leq l$, ou seja, $\phi(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \phi(x_n)$, finalizando a demonstração. ∎

Teorema 2.2. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e suponha que $x \in M$ não seja um ponto inicial. Então a função ϕ não é semicontínua inferiormente em x.*

Prova: Dado $x \in M$ um ponto não inicial. Existem $\epsilon > 0$ e $y \in X$ tais que $\pi(y, \epsilon) = x$. Podemos escolher $y \notin M$. Sem perda de generalidade podemos supor $\pi(y, [0, \epsilon)) \cap M = \emptyset$. Seja $\{\epsilon_n\}_{n\geq1}$ uma sequência crescente de números reais tal que $\epsilon_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \epsilon$. Afirmamos que $\phi(\pi(y, \epsilon_n)) = \epsilon - \epsilon_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De fato, primeiro observe que $\pi(\pi(y, \epsilon_n), \epsilon - \epsilon_n) = \pi(y, \epsilon) \in M$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Agora, vamos supor por absurdo que exista um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(\pi(y, \epsilon_{n_0})) = t_{n_0} < \epsilon - \epsilon_{n_0}$. Assim,

$$\pi(y, \epsilon_{n_0} + t_{n_0}) = \pi(\pi(y, \epsilon_{n_0}), t_{n_0}) \in M,$$

com $0 < \epsilon_{n_0} < \epsilon_{n_0} + t_{n_0} < \epsilon$, contradizendo o fato de $\pi(y, [0, \epsilon)) \cap M = \emptyset$. Deste modo, definindo $y_n = \pi(y, \epsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, temos que $y_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ e

$$\phi(y_n) = \phi(\pi(y, \epsilon_n)) = \epsilon - \epsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < \phi(x).$$

Portanto, ϕ não é semicontínua inferiormente em x. ∎

O teorema seguinte apresenta condições suficientes para a semicontinuidade superior da função ϕ em X.

Teorema 2.3. *Se $(X, \pi; M, I)$ é um sistema semidinâmico impulsivo tal que todo $x \in M$ satisfaz a condição (TC), então ϕ é semicontínua superiormente em X.*

Prova: Seja $x \in X$. Mostremos que ϕ é semicontínua superiormente em x. Se $\phi(x) = +\infty$, então para toda sequência $\{x_n\}_{n\geq1} \subset X$ com $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$,

$$\limsup_{n\to+\infty} \phi(x_n) \leq +\infty = \phi(x).$$

Isto mostra que ϕ é semicontínua superiormente em x. Agora, suponha que $\phi(x) = u \in (0, +\infty)$. Neste caso, $\pi(x, u) = y \in M$ e $\pi(x, (0, u)) \cap M = \emptyset$. Usando o Lema 2.3 junto com a hipótese que todo ponto em M satisfaz a condição (TC), existem $0 < \epsilon < u$ e um conjunto fechado L tais que $F(L, [0, 2\epsilon])$ seja um TC-tubo através de $y \in M$ com uma ϵ-seção $S = F(L, \epsilon)$. Como $F(L, [0, 2\epsilon])$ é uma vizinhança de y e π_u é contínua, existe uma vizinhança V de x tal que

$$\pi(V, u) = \pi_u(V) \subset F(L, [0, 2\epsilon]).$$

Assim, $\pi(z, u) \in F(L, [0, 2\epsilon])$, para qualquer $z \in V$. Além disso, para qualquer $z \in V$, existe um $t_z \in [0, 2\epsilon]$ tal que

$$\pi(z, u + t_z) = \pi(\pi(z, u), t_z) \in L. \tag{2.2}$$

Como $u + t_z - \epsilon > 0$, segue de (2.2) que

$$\pi(z, u + t_z - \epsilon) \in F(L, \epsilon) = S \subset M.$$

Daí,

$$\phi(z) \leq u + t_z - \epsilon < u + \epsilon = \phi(x) + \epsilon.$$

Portanto, ϕ é semicontínua superiormente em x. ■

O próximo teorema nos diz quando a função ϕ é contínua em $x \in X$. Esse teorema é uma junção dos três últimos teoremas.

Teorema 2.4. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Se todo ponto que pertença a M não é ponto inicial e satisfaz a condição (TC), então ϕ é contínua em $x \in X$ se, e somente se, $x \in X \setminus M$.*

Prova: Suponha que ϕ seja contínua em $x \in X$. Se $x \in M$ então, pelo Teorema 2.2, ϕ não é semicontínua inferiormente em x, o que é uma contradição, pois estamos supondo que ϕ é contínua em x. Logo $x \in X \setminus M$.
Por outro lado, seja $x \in X \setminus M$. Pelo Teorema 2.1, segue que ϕ é semicontínua inferiormente em $x \in X$. Usando a hipótese de que x não é ponto inicial junto com o Teorema 2.3, concluimos que ϕ é semicontínua superiormente em x. Portanto a função ϕ é contínua em x. ■

Hipótese (H2): *Ao longo desse trabalho, vamos admitir que M satisfaça a condição (STC) e que não existam pontos iniciais em M.*

2.3 Invariância em sistemas com impulsos

Nesta seção, apresentamos a definição de conjunto positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e de conjunto I-invariante.

Os conceitos e alguns resultados de invariância para sistemas semidinâmicos com impulsos são definidos e demonstrados de forma semelhante ao caso contínuo.

Definição 2.11. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e A um subconjunto de X. Dizemos que A é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante se $\widetilde{\pi}^+(A) \subset A$. Se $I(A \cap M) \subset A$, dizemos que A é I-invariante.*

O próximo exemplo mostra que em geral não existe relação entre π-invariância, $\widetilde{\pi}$-invariância e I-invariância.

Exemplo 2.5. Considere o sistema semidinâmico impulsivo em $\mathbb{R}$ dado por $\pi(x, t) = t+x$, $M = 1$ e $I(1) = -1$. Então o conjunto $A = [0, +\infty)$ é positivamente π-invariante mas não é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e nem I-invariante. Agora, o conjunto $B = [-1, 1)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante mas não é positivamente π-invariante, o conjunto $C = [-2, 2]$ é I-invariante mas não é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante, já o conjunto $D = [1, +\infty)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante mas não é I-invariante.

A próxima proposição é um resultado análogo a Proposição 1.3 para o caso com ação impulsiva.

Proposição 2.2. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Para todo $x \in X$, a órbita positiva impulsiva $\widetilde{\pi}^+(x)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.*

Prova: Seja $y \in \widetilde{\pi}^+(x)$. Então existe um $s \geq 0$ tal que $y = \widetilde{\pi}(x, s)$. Para todo $t \geq 0$ temos,

$$\widetilde{\pi}(y, t) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x, s), t) = \widetilde{\pi}(x, s + t) \in \widetilde{\pi}^+(x).$$

Daí, $\widetilde{\pi}^+(y) \subset \widetilde{\pi}^+(x)$. Como y é arbitrário,

$$\widetilde{\pi}^+(\widetilde{\pi}^+(x)) \subset \widetilde{\pi}^+(x).$$

A proposição está demonstrada. ■

Em vista do Exemplo 2.5, as duas próximas proposições mostram uma forma de relacionar $\widetilde{\pi}$-invariância, I-invariância e π-invariância.

Proposição 2.3. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e A um subconjunto de X positivamente π-invariante e I-invariante. Então A é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.*

Prova: Dado $x \in A$. Se x não sofre ação impulsiva, então nada temos de mostrar, pois por hipótese A é positivamente π-invariante. Agora, suponha que x sofra ação impulsiva, então $\widetilde{\pi}(x, [0, \phi(x))) = \pi(x, [0, \phi(x))) \subset A$ e

$$x_1 = \pi(x, \phi(x)) \in A \cap M.$$

Por hipótese A é I-invariante, daí, $x_1^+ = I(x_1) \in A$. Deste modo, $\widetilde{\pi}(x, [0, \phi(x)]) \subset A$. De forma análoga, $\widetilde{\pi}(x_1^+, [0, \phi(x_1^+))) = \pi(x_1^+, [0, \phi(x_1^+))) \subset A$ e

$$x_2 = \pi(x_1^+, \phi(x_1^+)) \in A \cap M.$$

Novamente, como A é I-invariante, $x_2^+ = I(x_2) \in A$. Portanto, $\widetilde{\pi}(x, [0, \phi(x)+\phi(x_1^+)]) \subset A$. De modo indutivo segue que $\widetilde{\pi}^+(x) \subset A$, o que queríamos demonstrar. ■

Proposição 2.4. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e A um subconjunto de X fechado e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Então A é positivamente π-invariante.*

Prova: Suponha por absurdo que A não seja positivamente π-invariante. Então, existem $x \in A$ e $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tais que $\pi(x, t_0) \notin A$. Seja $X_A = \{t \in \mathbb{R}_+ : \pi(x, t) \notin A\}$. Temos que X_A é limitado inferiormente, pois $X_A \subset \mathbb{R}_+$, e $X_A \neq \emptyset$ já que $t_0 \in X_A$. Seja $w = \inf X_A$. Sendo

$$\pi(x, [0, \phi(x))) = \widetilde{\pi}(x, [0, \phi(x))) \subset A,$$

então $w > 0$. Pela definição de w, temos $\pi(x, [0, w)) \subset A$. Utilizando a continuidade de π e o fato de A ser fechado obtemos $\pi(x, w) \in \overline{A} = A$. Daí

$$\pi(\pi(x, w), [0, \phi(\pi(x, w)))) = \widetilde{\pi}(\pi(x, w), [0, \phi(\pi(x, w)))) \subset A.$$

Logo, $\pi(x, [w, w + \phi(\pi(x, w)))) \subset A$. Isto significa que $\pi(x, s) \in A$, para $s \in [w, w + \phi(\pi(x, w)))$, o que contradiz o fato de w ser o ínfimo de X_A. Portanto, A é positivamente π-invariante, demonstrando a proposição. ■

A seguir, vamos mostrar que sobre certas hipóteses uma componente conexa de um conjunto positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.

Proposição 2.5. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e A um subconjunto de X compacto e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Se E é uma componente conexa I-invariante de A, então E é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.*

Prova: Dado $x \in E$. Por hipótese temos $\pi(x, [0, \phi(x))) = \widetilde{\pi}(x, [0, \phi(x))) \subset A$. Sendo $[0, \phi(x))$ conexo e π contínua, então $\pi(x, [0, \phi(x))) \subset E$. Se $\phi(x) = +\infty$ concluímos a prova. Do contrário, se $\phi(x) < +\infty$, então $x_1 = \pi(x, \phi(x)) \in \overline{E} = E$ pela continuidade de π. Usando a hipótese que E é I-invariante, temos $x_1^+ = I(x_1) \in E$. Logo,

$$\widetilde{\pi}(x, [\phi(x), \phi(x) + \phi(x_1^+))) = \pi(x_1^+, [0, \phi(x_1^+))) \subset E.$$

Se $\phi(x_1^+) = +\infty$ concluímos a prova. Caso contrário, se $\phi(x_1^+) < +\infty$, então $x_2 = \pi(x_1^+, \phi(x_1^+)) \in \overline{E} = E$ pela continuidade de π. Novamente, pela hipótese que E é I-invariante, temos $x_2^+ = I(x_2) \in E$. Continuando com este processo concluímos que $\widetilde{\pi}^+(x) \subset E$. Portanto, E é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante, o queríamos provar. ∎

2.4 Conjuntos limites

A seguir, apresentamos os conjuntos limites impulsivos. Provamos, por exemplo, que estes conjuntos são positivamente $\widetilde{\pi}$-invariantes quando não interceptam o conjunto impulsivo. Além disso, exibimos alguns lemas de convergência, lemas que são muito importante no desenvolvimento desse trabalho.

Definição 2.12. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Para cada $x \in X$, definimos o conjunto limite positivo impulsivo de x por*

$$\widetilde{L}^+(x) = \bigcap_{t>0} \overline{\widetilde{\pi}(x, [t, +\infty))}.$$

O prolongamento do conjunto positivo impulsivo de x é dado por

$$\widetilde{J}^+(x) = \bigcap_{\epsilon>0} \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{\tau\geq t} \widetilde{\pi}(B(x;\epsilon), \tau)}.$$

O conjunto prolongado impulsivo de x é

$$\widetilde{D}^+(x) = \bigcap_{\epsilon>0} \overline{\bigcup_{t\geq 0} \widetilde{\pi}(B(x;\epsilon), t)}.$$

Assim, como no caso contínuo (sem ação impulsiva) podemos dar uma caracterização através de sequências para os conjuntos limites $\widetilde{L}^+(x)$, $\widetilde{J}^+(x)$ e $\widetilde{D}^+(x)$.

Lema 2.4. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$. Então,*

a) $\widetilde{L}^+(x) = \{y \in X$*: existe uma sequência* $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ *tal que* $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$ *e* $\widetilde{\pi}(x, t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y\}$;

b) $\widetilde{J}^+(x) = \{y \in X$*: existem sequências* $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ *e* $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ *tais que* $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$ *e* $\widetilde{\pi}(x_n, t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y\}$;

c) $\widetilde{D}^+(x) = \{y \in X$ *: existem sequências* $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ *e* $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ *tais que* $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ *e* $\widetilde{\pi}(x_n, t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y\}$.

Prova: A demonstração deste lema segue as mesmas ideias da prova dos Lemas 1.1 e 1.2. ■

Proposição 2.6. *Seja $x \in X$. Os conjuntos $\widetilde{L}^+(x)$, $\widetilde{J}^+(x)$ e $\widetilde{D}^+(x)$ são fechados em X.*

Prova: O resultado segue da própria definição destes conjuntos. ■

Tendo em vista até aqui a semelhança com o caso sem ação impulsiva, somos levados a acreditar erradamente que dado $x \in X$, $\widetilde{L}^+(x)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. O exemplo abaixo mostra que tal afirmação não é verdadeira.

Exemplo 2.6. Considere o sistema impulsivo em $\mathbb{R}^2$ dado por:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 0, \\ I : M \longrightarrow N, \end{cases}$$

onde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$, $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ e a função I é definida da seguinte forma: para $z \in M$, considere o segmento de reta cujos extremos são a origem de $\mathbb{R}^2$ e o ponto z. Então definimos $I(z) \in N$ como o ponto de interseção do segmento de reta com o conjunto N.

Seja $p = (1, 2)$. Então $\widetilde{L}^+(p) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, 3], y = 0\}$. Por outro lado, $q = (3, 0) \in \widetilde{L}^+(p)$ mas $\widetilde{\pi}^+(q) = \pi^+(q)$ não está contido em $\widetilde{L}^+(p)$. Portanto, $\widetilde{L}^+(p)$ não é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. A Figura 9 abaixo ilustra a trajetória do ponto p.

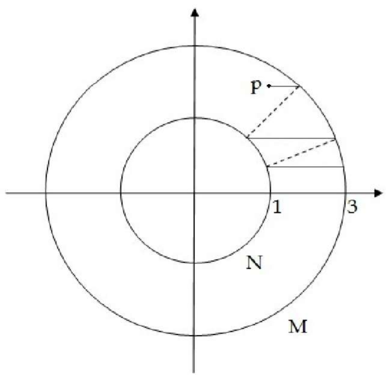

Figura 9: Trajetória impulsiva do ponto p.

Hipótese (H3): *Ao longo deste trabalho também vamos supor que $M \cap I(M) = \emptyset$.*

Como a aplicação $\widetilde{\pi}$ não é necessariamente contínua, então os lemas de convergência a seguir, são de grande importância para o desenvolvimento deste trabalho.

Lema 2.5. *Sejam* $(X, \pi; M, I)$ *um sistema semidinâmico impulsivo e* $x \in X \setminus M$*. Seja* $\{z_n\}_{n\geq 1} \subset X$ *uma sequência tal que* $z_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$*. Dado* $t \geq 0$*, existe uma sequência* $\{\epsilon_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$*, com* $\epsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*, tal que* $\widetilde{\pi}(z_n, t + \epsilon_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(x, t)$*.*

Prova: Seja $t \geq 0$. Para provar esse lema vamos separar em quatro casos distintos.

Caso 1: Suponha que $\phi(x) = +\infty$. Como $x \in X \setminus M$, então ϕ é contínua em x. Isto implica que $\phi(z_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(z_n) > t$, para $n > n_0$. Então no intervalo $[0, t]$ não ocorre impulso para $n \geq n_0$, ou seja, $\widetilde{\pi}(z_n, t) = \pi(z_n, t)$, para $n \geq n_0$. Escolhendo a sequência $\epsilon_n = 0$ para todo $n \geq 1$, temos

$$\widetilde{\pi}(z_n, t + \epsilon_n) = \widetilde{\pi}(z_n, t) = \pi(z_n, t) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(x, t) = \widetilde{\pi}(x, t).$$

Caso 2: Suponha que $0 \leq t < \phi(x) < +\infty$. Seja $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \phi(x) - t$, isto é, $t < \phi(x) - \epsilon$. Como $\phi(z_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$, existe $n_1 > 0$ tal que $\phi(z_n) > \phi(x) - \epsilon > t$, para $n > n_1$. Então, $\widetilde{\pi}(z_n, t) = \pi(z_n, t)$ para $n > n_1$. Assim, sendo $t < \phi(x)$ e escolhendo a sequência $\epsilon_n = 0$ para todo $n \geq 1$, temos

$$\widetilde{\pi}(z_n, t + \epsilon_n) = \widetilde{\pi}(z_n, t) = \pi(z_n, t) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(x, t) = \widetilde{\pi}(x, t).$$

Caso 3: Suponha que $t = \phi(x) < +\infty$. Sejam $x_1 = \pi(x, t)$ e $x_1^+ = \widetilde{\pi}(x, t) = I(x_1)$. Como $\phi(z_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$, então podemos supor que $\phi(z_n) < +\infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que $(z_n)_1 = \pi(z_n, \phi(z_n)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (x, \phi(x)) = x_1$. Usando a continuidade de I temos

$$(z_n)_1^+ = I((z_n)_1) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(x_1) = x_1^+.$$

Como $|\phi(z_n) - \phi(x)| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, escolhendo $\epsilon_n = \phi(z_n) - t$ temos $\epsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $(t = \phi(x))$. Logo

$$\widetilde{\pi}(z_n, t + \epsilon_n) = \widetilde{\pi}(z_n, \phi(z_n)) = I((z_n)_1) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_1^+ = \widetilde{\pi}(x, t).$$

Caso 4: Suponha que $0 < \phi(x) < t$. Neste caso, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $t = t_m(x) + t'$, com $0 \leq t' < \phi(x_m^+)$ e $t_m(x) = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \phi(x_i^+)$. Definamos $\{(z_n)_i\}_{i\geq 1}$ indutivamente por

$$(z_n)_1 = \pi(z_n, \phi(z_n)) \text{ e } (z_n)_{i+1} = \pi((z_n)_i^+, \phi((z_n)_i^+)),$$

para $i \in \mathbb{N}$. Como $\phi(z_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$, temos

$$(z_n)_1 = \pi(z_n, \phi(z_n)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(x, \phi(x)) = x_1.$$

Usando a continuidade de I,

$$(z_n)_1^+ = I((z_n)_1) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(x_1) = x_1^+.$$

Como $\phi((z_n)_1^+) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x_1^+)$, pois $x_1^+ \notin M$, temos

$$(z_n)_2 = \pi((z_n)_1^+, \phi((z_n)_1^+)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(x_1^+, \phi(x_1^+)) = x_2.$$

Prosseguindo com este raciocínio, obtemos $(z_n)_i \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Pela continuidade de I, segue que

$$(z_n)_i^+ \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_i^+,$$

para $i \in \mathbb{N}$. Assim,

$$t_m(z_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t_m(x) = t - t'.$$

Defina a sequência $\{\epsilon_n\}_{n\geq 1}$ por $\epsilon_n = t_m(z_n) + t' - t$, $n \in \mathbb{N}$. Note que $\epsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Como ϕ é contínua em x_m^+ e $(z_n)_m^+ \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_m^+$, $m \in \mathbb{N}$, para n suficientemente grande vale $0 \leq t' < \phi((z_n)_m^+)$. Então

$$\widetilde{\pi}(z_n, t+\epsilon_n) = \widetilde{\pi}(z_n, t_m(z_n) + t') = \widetilde{\pi}((z_n)_m^+, t') = \pi((z_n)_m^+, t') \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(x_m^+, t') = \widetilde{\pi}(x, t),$$

finalizando a demonstração do lema. ■

Lema 2.6. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo, $x \notin M$ e $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X \setminus M$ com $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Se $\alpha_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\alpha_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\widetilde{\pi}(x_n, \alpha_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.*

Prova: Como $x \notin M$, pela continuidade de ϕ em $X \setminus M$, $\phi(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$. Daí como $\alpha_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, podemos assumir que

$$\frac{\phi(x)}{2} < \phi(x_n) < \frac{3\phi(x)}{2} \qquad \text{e} \qquad 0 \leq \alpha_n < \phi(x_n),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\widetilde{\pi}(x_n, \alpha_n) = \pi(x_n, \alpha_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(x, 0) = x,$$

o que demonstra o lema. ■

Lema 2.7. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X \setminus M$. Suponha que $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ com $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Então, dado $t \geq 0$, existe uma sequência $\{\epsilon_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\epsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\widetilde{\pi}(x_n, t+\epsilon_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(x, t)$.*

Prova: De acordo com o Lema 2.5, existe uma sequência $\{\gamma_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ tal que $\gamma_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\widetilde{\pi}(x_n, t+\gamma_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(x, t). \tag{2.3}$$

Escolhendo $\epsilon_n = \gamma_n + |\gamma_n|$, $n \in \mathbb{N}$, temos $\epsilon_n \geq 0$ com $\epsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, pois $\gamma_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Usando

(2.3) e o Lema 2.6, para n suficientemente grande,

$$\widetilde{\pi}(x_n, t + \epsilon_n) = \widetilde{\pi}(x_n, t + \gamma_n + |\gamma_n|) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x_n, t + \gamma_n), |\gamma_n|) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(x, t).$$

Portanto, o lema está provado. ■

Lema 2.8. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X \backslash M$. Suponha que $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ com $x_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Dado $t \geq 0$ com $t \neq t_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, e $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência satisfazendo $\lambda_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} t$, então $\widetilde{\pi}(x_n, \lambda_n) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(x, t)$.*

Prova: Note que, se $t = 0$ o resultado segue diretamente do Lema 2.6. Agora, seja $t_k(x) < t < t_{k+1}(x)$ para algum $k \in \mathbb{Z}_+$. Como $\phi(x_n) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$, obtemos,

$$(x_n)_1 = \pi(x_n, \phi(x_n)) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(x, \phi(x)) = x_1.$$

Pela continuidade da função I, segue que

$$(x_n)_1^+ \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_1^+.$$

Com o mesmo raciocínio, $\phi((x_n)_1^+) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x_1^+)$. Assim,

$$(x_n)_2 = \pi((x_n)_1^+, \phi((x_n)_1^+)) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(x_1^+, \phi(x_1^+)) = x_2.$$

Novamente, pela continuidade de I,

$$(x_n)_2^+ \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_2^+.$$

De forma geral, seguindo o raciocínio, temos

$$(x_n)_k^+ \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_k^+ \quad \text{e} \quad \phi((x_n)_k^+) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x_k^+),$$

para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, onde $(x_n)_0^+ = x_n$ e $x_0^+ = x$. Como $\lambda_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} t$ e $t_k(x) < t < t_{k+1}(x)$, podemos supor que

$$t_k(x_n) < \lambda_n < t_{k+1}(x_n). \tag{2.4}$$

Por (2.4) e pela continuidade de π, temos

$$\widetilde{\pi}(x_n, \lambda_n) = \pi((x_n)_k^+, \lambda_n - t_k(x_n)) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(x_k^+, t - t_k(x)) = \widetilde{\pi}(x, t),$$

finalizando assim a demonstração do lema. ■

Lema 2.9. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo, $x \in X \setminus M$ e $t \geq 0$. Suponha que $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ é tal que $\lambda_n \geq t$, para cada $n \in \mathbb{N}$, e $\lambda_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} t$. Se*

$\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ é uma sequência convergente com $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, então existe uma sequência $\{\beta_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\beta_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\widetilde{\pi}(x_n, \lambda_n + \beta_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(x,t)$.

Prova: Note que, se $t \neq t_k(x)$ para $k \in \mathbb{N}$ então, pelo Lema 2.8, segue o resultado. Agora, se $t = t_k(x)$ para algum $k \in \mathbb{N}$, como $\lambda_n \geq t$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever $\lambda_n = t + s_n$ com $s_n \geq 0$ e $s_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Como $\phi((x_n)_j^+) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x_j^+)$ para cada $j \in \mathbb{Z}_+$, então

$$t_k(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t_k(x).$$

Defina $T_n = t_k(x_n) - t_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Daí

$$T_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

e $\lambda_n = t_k(x_n) - T_n + s_n$, $n \in \mathbb{N}$. Considerando $\beta_n = |T_n|$, $n \in \mathbb{N}$, e usando o Lema 2.6, temos
$\widetilde{\pi}(x_n, \lambda_n + \beta_n) = \widetilde{\pi}(x_n, t_k(x_n) - T_n + s_n + |T_n|) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x_n, t_k(x_n)), |T_n| - T_n + s_n) = \widetilde{\pi}((x_n)_k^+, |T_n| - T_n + s_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_k^+ = \widetilde{\pi}(x,t)$, o que queríamos provar. ■

Lema 2.10. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo, $x \in X \setminus M$ e $t = t_k(x)$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Sejam $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ com $\lambda_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t$ e $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ tal que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.*

a) se $\lambda_n < t$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\widetilde{\pi}(x_n, \lambda_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_k$;

b) se $\lambda_n \geq t$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\{\widetilde{\pi}(x_n, \lambda_n)\}_{n\geq 1}$ possui uma subsequência convergente em $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$.

Prova: *a)* Como $\lambda_n < t$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então é possível encontrar uma sequência $\{s_n\}_{n\geq 1} \subset [0, \phi((x_n)_{k-1}^+))$ com $s_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x_{k-1}^+)$ e um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n = t_{k-1}(x_n) + s_n$ para todo $n \geq n_0$. Daí,

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi}(x_n, \lambda_n) &= \widetilde{\pi}(x_n, t_{k-1}(x_n) + s_n) = \widetilde{\pi}((x_n)_{k-1}^+, s_n) \\ &= \pi((x_n)_{k-1}^+, s_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi((x)_{k-1}^+, \phi(x_{k-1}^+)) = x_k. \end{aligned}$$

b) Usando a prova do Lema 2.9 para $t = t_k(x)$, temos $\lambda_n = t_k(x_n) - T_n + s_n$ com $s_n \geq 0$, $T_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $s_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Se $\{s_n - T_n\}_{n\geq 1}$ admite uma subsequência $\{s_{n_l} - T_{n_l}\}_{l\geq 1}$ tal que $s_{n_l} - T_{n_l} \geq 0$ pata todo $l \in \mathbb{N}$ então, pelo Lema 2.6, temos

$$\widetilde{\pi}(x_{n_l}, \lambda_{n_l}) = \widetilde{\pi}(x_{n_l}, t_k(x_{n_l}) - T_{n_l} + s_{n_l}) = \widetilde{\pi}((x_{n_l})_k^+, -T_{n_l} + s_{n_l}) \overset{l\to+\infty}{\longrightarrow} x_k^+ \in \overline{\widetilde{\pi}^+(x)}.$$

Agora, suponha que $\{s_n - T_n\}_{n\geq 1}$ admita uma subsequência $\{s_{n_l} - T_{n_l}\}_{l\geq 1}$ tal que $s_{n_l} - T_{n_l} < 0$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Podemos escrever

$$\lambda_{n_l} = t_{k-1}(x_{n_l}) + \phi((x_{n_l})^+_{k-1}) - T_{n_l} + s_{n_l},$$

$l \in \mathbb{N}$. Note que $\phi((x_{n_l})^+_{k-1}) - T_{n_l} + s_{n_l} > 0$ para l suficientemente grande. Então,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\pi}(x_{n_l}, \lambda_{n_l}) &= \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x_{n_l}, t_{k-1}(x_{n_l})), \phi((x_{n_l})^+_{k-1}) - T_{n_l} + s_{n_l}) \\
&= \widetilde{\pi}((x_{n_l})^+_{k-1}, \phi((x_{n_l})^+_{k-1}) - T_{n_l} + s_{n_l}) \\
&= \pi((x_{n_l})^+_{k-1}, \phi((x_{n_l})^+_{k-1}) - T_{n_l} + s_{n_l}) \stackrel{l\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(x^+_{k-1}, \phi(x^+_{k-1})) = x_k \in \overline{\widetilde{\pi}^+(x)},
\end{aligned}$$

finalizando a demonstração do lema. ■

No que segue, mostramos que se retirados os pontos em comum com o conjunto M, os conjuntos $\widetilde{L}^+(x)$, $\widetilde{J}^+(x)$ e $\widetilde{D}^+(x)$ se tornam positivamente $\widetilde{\pi}$-invariantes.

Teorema 2.5. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$, então $\widetilde{L}^+(x) \setminus M$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.*

Prova: Sejam $y \in L^+(x) \setminus M$ e $t \geq 0$. Existe uma sequência $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $t_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$ e

$$\widetilde{\pi}(x, t_n) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} y. \tag{2.5}$$

Usando (2.5), e o Lema 2.7, obtemos uma sequência $\{\epsilon_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ com $\epsilon_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(x, t_n + t + \epsilon_n) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x, t_n), t + \epsilon_n) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(y, t).$$

Como $t_n + t + \epsilon_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$, concluímos que $\widetilde{\pi}(y, t) \in L^+(x) \setminus M$, o que queríamos demonstrar. ■

Teorema 2.6. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistemas semidinâmico impulsivo e $x \in X$, então $\widetilde{J}^+(x) \setminus M$ e $\widetilde{D}^+(x) \setminus M$ são positivamente $\widetilde{\pi}$-invariantes.*

Prova: A prova deste teorema segue os mesmos argumentos da prova do Teorema 2.5. ■

Lema 2.11. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo, $l \in \mathbb{R}_+$ e $A \subset X$ não vazio e relativamente compacto. Então o conjunto $\widetilde{\pi}(A, [0, l]) \subset X$ é relativamente compacto.*

Prova: Note que se $l = 0$ nada temos para provar. Suponha que $l > 0$. Seja $\{y_n\}_{n\geq 1} \subset \widetilde{\pi}(A, [0, l])$. Então existem sequências $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset A$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset [0, l]$ tais que

$y_n = \widetilde{\pi}(a_n, t_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Como A é relativamente compacto e $[0, l]$ é compacto, podemos supor que

$$a_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \in \overline{A} \qquad \text{e} \qquad t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{t} \in [0, l].$$

Vamos considerar dois casos: quando $a \notin M$ e quando $a \in M$.

Caso 1: Suponha que $a \notin M$. Se $\overline{t} \neq t_k(a)$ para $k \in \mathbb{N}$ então, pelo Lema 2.8,

$$\widetilde{\pi}(a_n, t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(a, \overline{t}).$$

Agora, se $\overline{t} = t_k(a)$ para algum $k \in \mathbb{N}$ então, pelo Lema 2.10, $\widetilde{\pi}(a_n, t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_k$ ou $\{\widetilde{\pi}(a_n, t_n)\}_{n\geq 1}$ possui uma subsequência convergente, o que demonstra o lema nesse caso.

Caso 2: Suponha que $a \in M$. Como M satisfaz a condição (STC) existem um conjunto fechado L e um STC-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ através de a com λ-seção S. Por hipótese o tubo é uma vizinhança de a, logo existe $\eta > 0$ tal que

$$B(a, \eta) \subset F(L, [0, 2\lambda]).$$

Denotemos H_1 e H_2 os conjuntos

$$H_1 = F(L, [\lambda, 2\lambda]) \cap B(a, \eta) \qquad \text{e} \qquad H_2 = F(L, [0, \lambda]) \cap B(a, \eta).$$

Temos dois casos a serem estudados: quando $a_n \in H_1$ para uma quantidade infinita de índices e quando $a_n \in H_2$ para uma quantidade infinita de índices. Sem perda de generalidade podemos supor que $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset H_1$ e que $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset H_2$ como mostra a Figura 10.

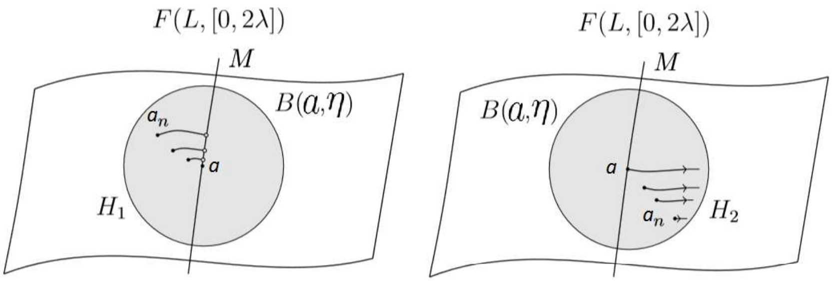

Figura 10: H_1 e H_2.

Suponha inicialmente que $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset H_1$. Note que $\phi(a_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $I(a) \notin M$. Se $\overline{t} \neq t_k(I(a))$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \overline{t} < \phi(I(a))$ então, pela continuidade de π e de I,

$$\widetilde{\pi}(a_n, t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(I(a), \overline{t}).$$

Porém, se $\bar{t} > \phi(I(a))$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bar{t} = t_k(I(a)) + s,$$

onde $0 < s < \phi(I(a)_k^+)$. Assim, podemos obter uma sequência $\{s_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $t_n = t_{k+1}(a_n) + s_n$ com $n \in \mathbb{N}$ e $s_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} s$. Pela continuidade de I temos

$$(a_n)_{k+1}^+ \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(a)_k^+,$$

para $k \in \mathbb{N}$, e

$$\widetilde{\pi}(a_n, t_n) = \widetilde{\pi}(a_n, t_{k+1}(a_n) + s_n) = \pi((a_n)_{k+1}^+, s_n) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi((I(a))_k^+, s).$$

Se $\bar{t} = t_k(I(a))$ para algum $k \in \mathbb{N}$, também temos dois casos a considerar: quando $t_n \leq \bar{t}$ para uma quantidade infinita de índices e quando $t_n > \bar{t}$ para uma quantidade infinita de índices. Suponha que $t_n \leq \bar{t}$ para $n \in \mathbb{N}$. Existe uma sequência $\{s_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $t_n = t_k(a_n) + s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $s_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(I(a)_{k-1}^+)$. Então,

$$\widetilde{\pi}(a_n, t_n) = \widetilde{\pi}(a_n, t_k(a_n) + s_n) = \pi((a_n)_k^+, s_n) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(I(a)_{k-1}^+, \phi(I(a)_{k-1}^+)) = I(a)_k.$$

Analogamente, podemos assumir que $t_n > \bar{t}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Deste modo,

$$\widetilde{\pi}(a_n, t_n) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(a)_k^+.$$

Agora, suponha que $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset H_2$. Se $\bar{t} \neq t_k(a)$ para $k \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \bar{t} < \phi(a)$, então

$$\widetilde{\pi}(a_n, t_n) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(a, \bar{t}).$$

Se $\bar{t} > \phi(a)$ então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{t} = t_k(a) + s$, onde $0 < s < \phi(a_k^+)$. Assim,

$$\widetilde{\pi}(a_n, t_n) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(a_k^+, s).$$

Caso $\bar{t} = t_k(a)$ para algum $k \in \mathbb{N}$, também temos dois casos a considerar. Suponha inicialmente que $t_n \leq \bar{t}$, para $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\widetilde{\pi}(a_n, t_n) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(a_{k-1}^+, \phi(a_{k-1}^+)) = a_k.$$

Se $t_n > t$, para $n \in \mathbb{N}$, então

$$\widetilde{\pi}(a_n, t_n) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} a_k^+,$$

completando a demonstração do lema. ■

Lema 2.12. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$. Suponha* *que* $\phi(x_j^+) < +\infty$ *para todo* $j \in \mathbb{Z}_+$ *então*

$$\overline{\widetilde{\pi}^+(x)} = \widetilde{\pi}^+(x) \cup \widetilde{L}^+(x) \cup \{x_j : j \in \mathbb{N}\},$$

onde $x_j = \pi(x_{j-1}^+, \phi(x_{j-1}^+))$, $j \in \mathbb{N}$. *Note que se* $\phi(x_j^+) < +\infty$ *para cada* $j = 0, 1, ..., k$ *e* $\phi(x_{k+1}^+) = +\infty$, *então*

$$\overline{\widetilde{\pi}^+(x)} = \widetilde{\pi}^+(x) \cup \widetilde{L}^+(x) \cup \{x_j : j = 1, 2, ..., k+1\}.$$

Prova: É suficiente mostrar que $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \subset \Big(\widetilde{\pi}^+(x) \cup \widetilde{L}^+(x) \cup \{x_j : j \in \mathbb{N}\}\Big)$. Seja $y \in \overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$. Então existe uma sequência $\{y_n\}_{n\geq 1} \subset \widetilde{\pi}^+(x)$ tal que

$$y_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y.$$

Como $\{y_n\}_{n\geq 1} \subset \widetilde{\pi}^+(x)$, temos $y_n = \widetilde{\pi}(x, t_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, onde $\{t_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência em $\mathbb{R}_+$. Podemos assumir que,

$$\lim_{n \to +\infty} t_n = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n \to +\infty} t_n = a < +\infty.$$

Se $t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, então $y \in \widetilde{L}^+(x)$. Agora, suponha que $t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$. Vamos dividir em duas situações: quando $a \neq t_k(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e quando $a = t_k(x)$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Inicialmente suponha que $a = t_k(x)$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Se existir uma subsequência $\{t_{n_k}\}_{k\geq 1}$ de $\{t_n\}_{n\geq 1}$ tal que $t_{n_k} < a$, $k \in \mathbb{N}$, então existe um inteiro $N_1 > 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(x, t_{n_k}) = \pi(x_{k-1}^+, t'),$$

para $n_k > N_1$, onde $t_{n_k} = t_{k-1}(x) + t'$, $0 \leq t' < \phi(x_{k-1}^+)$ e $t' \overset{n_k \to +\infty}{\longrightarrow} \phi(x_{k-1}^+)$. Assim,

$$\widetilde{\pi}(x, t_{n_k}) = \pi(x_{k-1}^+, t') \overset{n_k \to +\infty}{\longrightarrow} \pi(x_{k-1}^+, \phi(x_{k-1}^+)) = x_k.$$

Assim, $y = x_k \in \{x_j : j \in \mathbb{N}\}$. Se $t_{n_k} = a$, para uma infinidade de k, o resultado segue direto. Agora, se não existe t_{n_k} que $t_{n_k} \leq a$ para cada $k \in \mathbb{N}$, então existe um inteiro $N_2 > 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(x, t_{n_k}) = \pi(x_k^+, s'),$$

para $n_k > N_2$, onde $t_{n_k} = t_k(x) + s'$, $0 \leq s' < \phi(x_k^+)$ e $s' \overset{n_k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Daí,

$$\widetilde{\pi}(x, t_{n_k}) = \pi(x_k^+, s') \overset{n_k \to +\infty}{\longrightarrow} x_k^+.$$

Portanto, $y = x_k^+ \in \widetilde{\pi}^+(x)$.

Por outro lado, se $a \neq t_k(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então podemos obter um $l \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$t_l(x) < a < t_{l+1}(x)$. Logo existe um $N_3 > 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(x, t_n) = \pi(x_l^+, t_n')$$

para $n > N_3$, onde $0 \leq t_n' < \phi(x_l^+)$ e $t_n' \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a - t_l(x) < \phi(x_l^+)$. Então

$$\widetilde{\pi}(x, t_n) = \pi(x_l^+, t_n') \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \pi(x_l^+, a - t_l(x)).$$

Portanto, $y = \pi(x_l^+, a - t_l(x)) \in \widetilde{\pi}^+(x)$, finalizando a demonstração. ■

Capítulo

3

Conjuntos minimais

Neste capítulo, apresentamos a teoria de conjuntos minimais para sistemas semidinâmicos impulsivos. Estudamos apenas o necessário para avançar e obtermos resultados desejados no próximo capítulo. Para referência e mais informações pode ser consultado [13].

3.1 Conjuntos minimais

No que segue, definimos o conceito de minimalidade para sistemas semidinâmicos impulsivos.

Definição 3.1. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é minimal se as seguintes condições forem satisfeitas:*

i) $A \setminus M \neq \emptyset$;

ii) *A é fechado;*

iii) *$A \setminus M$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante;*

iv) *A não admite subconjunto próprio satisfazendo as propriedades $i), ii)$ e $iii)$.*

Exemplo 3.1. Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Suponhamos que exista um ponto $x \in X \setminus M$ tal que $I(\pi(x, \phi(x))) = x$. Então $A = \pi(x, [0, \phi(x)])$ é um conjunto minimal.

Teorema 3.1. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. O conjunto $A \subset X$ é minimal se, e somente se, $A = \overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ para todo $x \in A \setminus M$.*

Prova: Inicialmente, suponha que A seja minimal. Dado $x \in A \setminus M$. Como $A \setminus M$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e A é fechado, segue que

$$\overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \subset \overline{A} = A.$$

Note que $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \setminus M \neq \emptyset$, $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ é fechado, usando o Lema 2.12, a Proposição 2.2 e o Teorema 2.5, temos que $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \setminus M$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Como A é minimal devemos ter $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)} = A$.
Agora, vamos mostrar a condição suficiente. Seja $B \subset A$ tal que $B \setminus M \neq \emptyset$, B é fechado e $B \setminus M$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Dado $b \in B \setminus M$, segue que $b \in A \setminus M$. Por hipótese temos que $\overline{\widetilde{\pi}^+(b)} = A$. Como $B \setminus M$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante, temos

$$B \subset A = \overline{\widetilde{\pi}^+(b)} \subset B.$$

Então $A = B$ e, portanto, A não admite subconjunto próprio o que implica em A ser um conjunto minimal. Isto demonstra o teorema. ■

O teorema a seguir mostra uma outra forma de caracterizar um conjunto minimal considerando uma hipótese adicional.

Teorema 3.2. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Dado $A \subset X$ e suponha que $\widetilde{L}^+(x) \setminus M \neq \emptyset$ para todo $x \in A$. Então A é minimal se, e somente se, $A = \widetilde{L}^+(x)$ para todo $x \in A \setminus M$.*

Prova: Vamos mostrar primeiro a condição necessária. Seja $x \in A \setminus M$. Pelo Teorema 3.1 podemos escrever $A = \overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$. Daí

$$\widetilde{L}^+(x) \subset A.$$

Por outro lado, $\widetilde{L}^+(x) \setminus M \neq \emptyset$, $\widetilde{L}^+(x)$ é fechado e, pelo Teorema 2.5, o conjunto $\widetilde{L}^+(x) \setminus M$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Pela minimalidade do conjunto A obtemos

$$A = \widetilde{L}^+(x).$$

Vamos mostrar agora a condição suficiente. Suponha por absurdo que A não seja minimal, ou seja, existe um subconjunto próprio de A, $B \subsetneq A$, tal que $B \setminus M \neq \emptyset$, B é fechado e $B \setminus M$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Dado $b \in B \setminus M$, segue que $b \in A \setminus M$. Daí, por hipótese temos $A = \widetilde{L}^+(b)$. Como $B \setminus M$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e B é fechado, obtemos

$$A = \widetilde{L}^+(b) \subset B.$$

Logo, $A = B$ e isto é uma contradição. Assim A não admite subconjunto próprio e, portanto, A é minimal. O teorema está provado. ■

A demonstração do Teorema 3.2 nos motiva ao seguinte resultado.

Teorema 3.3. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Dado $A \subset X$ um conjunto minimal e $x \in A \setminus M$ um ponto tal que $\widetilde{L}^+(x) \setminus M \neq \emptyset$. Então $A = \widetilde{L}^+(x)$.*

Prova: A demonstração deste teorema se encontra na prova do Teorema 3.2 na condição necessária. ■

A seguir, o lema mostra que sob certa condição a órbita positiva de um ponto $x \in X$ é contínua.

Lema 3.1. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Se $\widetilde{\pi}^+(x)$ é um conjunto minimal então, $\widetilde{\pi}^+(x) = \pi^+(x)$.*

Prova: Para provar que $\widetilde{\pi}^+(x) = \pi^+(x)$ é suficiente mostrarmos que $\phi(x) = +\infty$. Suponhamos por absurdo que $\phi(x) < +\infty$. Então

$$x_1 = \pi(x, \phi(x)) \in M \text{ e } x_1 \in \overline{\widetilde{\pi}^+(x)}.$$

Como $\widetilde{\pi}^+(x)$ é fechado, pois $\widetilde{\pi}^+(x)$ é minimal, segue que

$$x_1 \in \widetilde{\pi}^+(x),$$

o que é uma contradição, pois pela definição da trajetória impulsiva, pontos de impulsos não podem estar na trajetória de x. Portanto $\phi(x) = +\infty$. ■

Na próxima definição apresentamos um tipo especial de minimalidade, esse tipo de minimalidade nos permite obter mais resultados para sistemas semidinâmicos impulsivos.

Definição 3.2. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é I-minimal se as seguintes condições forem satisfeitas:*

i) $A \setminus M \neq \emptyset$;

ii) A *é fechado;*

iii) $A \setminus M$ *é positivamente* $\widetilde{\pi}$*-invariante;*

iv) $I(A \cap M) \subset A$*;*

v) A *não admite subconjunto próprio satisfazendo as propriedades* $i), ii), iii)$ *e* $iv)$*.*

O lema a seguir apresenta um resultado sobre a I- invariância do conjunto $\widetilde{L}^+(x)$. Ele nos permite dar uma caracterização para os conjuntos I-minimais.

Lema 3.2. *Seja* $(X, \pi; M, I)$ *um sistema semidinâmico impulsivo. Suponha que exista* $\epsilon > 0$ *tal que* $\pi(M, [0, \epsilon]) \cap I(M) = \emptyset$*. Então* $I(\widetilde{L}^+(x) \cap M) \subset \widetilde{L}^+(x)$*, com* $x \in X$*.*

Prova: Suponha que $\widetilde{L}^+(x) \cap M \neq \emptyset$ para algum $x \in X$. Seja $a \in \widetilde{L}^+(x) \cap M$. Então existe uma sequência $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\widetilde{\pi}(x, t_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$. Como M satisfaz a condição (STC), existe um STC-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ através de a dado por uma seção $S \subset M$ tal que $S = M \cap F(L, [0, 2\lambda])$. Podemos assumir $\lambda < \epsilon$. Além disso, como o tubo é uma vizinhança de a, existe um $\eta > 0$ tal que

$$B(a, \eta) \subset F(L, [0, 2\lambda]).$$

Considere os conjuntos H_1 e H_2 da mesma forma que na demonstração do Lema 2.11,

$$H_1 = F(L, [\lambda, 2\lambda]) \cap B(a, \eta) \quad \text{ e } \quad H_2 = F(L, [0, \lambda]) \cap B(a, \eta),$$

veja Figura 10. Seja $\{\widetilde{\pi}(x, t_{n_k})\}_{k \geq 1}$ uma subsequência de $\{\widetilde{\pi}(x, t_n)\}_{n \geq 1}$. Afirmamos que existe um número natural $l > 0$ tal que $\{\widetilde{\pi}(x, t_{n_k})\}_{n_k \geq l} \subset H_1$. De fato, suponhamos por contradição e, por comodidade, que $\{\widetilde{\pi}(x, t_{n_k})\}_{k \geq 1} \subset H_2$. Seja $y_k = \widetilde{\pi}(x, t_{n_k}), k \in \mathbb{N}$. Pela propriedade de tubo, existe $s_k \in [0, \lambda]$ tal que $F(y_k, s_k) \subset S$ para cada $k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$\pi(F(y_k, s_k), s_k) = y_k,$$

$k \in \mathbb{N}$. Seja $k_0 > 0$ tal que $t_{n_k} - s_k > 0$ para todo $k \geq k_0$. Como

$$\widetilde{\pi}(x, t) \notin \bigcup_{k=1}^{+\infty} F(y_k, s_k),$$

para todo $t > 0$, pois $I(M) \cap M = \emptyset$, existem $t'_k \in (t_{n_k} - s_k, t_{n_k}]$ e $w_k \in M$ tais que

$$I(w_k) = \widetilde{\pi}(x, t'_k) \quad \text{ para todo } k \geq k_0.$$

Também, temos que

$$I(w_k) = \widetilde{\pi}(x, t'_k) \in F(L, [0, \lambda]) \quad \text{ para todo } k \geq k_0.$$

Como $F(L,[0,\lambda]) \subset \pi(M,[0,\epsilon])$, temos

$$I(w_k) \in \pi(M,[0,\epsilon]) \cap I(M),$$

para todo $k \geq k_0$, o que contradiz a hipótese. Deste modo, existe um número natural $l > 0$ tal que $\{\widetilde{\pi}(x,t_{n_k})\}_{n_k \geq l} \subset H_1$. Logo $\phi(\widetilde{\pi}(x,t_{n_k})) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $I(\pi(\widetilde{\pi}(x,t_{n_k}),\phi(\widetilde{\pi}(x,t_{n_k})))) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} I(a)$, ou seja,

$$\widetilde{\pi}(x,t_{n_k}+\phi(\widetilde{\pi}(x,t_{n_k}))) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} I(a).$$

Portanto, $I(a) \in \widetilde{L}^+(x)$, finalizando a demonstração. ■

Teorema 3.4. *Seja $(X,\pi;M,I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Suponha que exista $\epsilon > 0$ tal que $\pi(M,[0,\epsilon]) \cap I(M) = \emptyset$. Então o conjunto $A \subset X$ é I-minimal se, e somente se, $A = \overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ para todo $x \in A \setminus M$.*

Prova: A demonstração segue do Lema 3.2 e da prova do Teorema 3.1. ■

Corolário 3.1. *Seja $(X,\pi;M,I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Suponha que exista $\epsilon > 0$ tal que $\pi(M,[0,\epsilon]) \cap I(M) = \emptyset$. Então o conjunto $A \subset X$ é I-minimal se, e somente se, A é minimal.*

Prova: A demonstração segue do Teorema 3.1 e Teorema 3.4. ■

Capítulo

4

Movimentos recorrentes e quase periódicos

Neste capítulo, apresentamos e exploramos conceitos sobre movimentos recorrentes e quase periódicos. O conceito de pontos assintóticos para os pontos $\widetilde{\pi}$-periódico, quase $\widetilde{\pi}$-periódico e a estabilidade de Zhukovskij foram apresentados. No sistema dinâmico discreto, apresentado na última seção, vamos ter condições suficientes para obter a quase estabilidade de Zhukovskij via estabilidade de Lyapunov. Usaremos com frequência os lemas de convergências do Capítulo 2. Para referências e mais informações podem ser consultados [13], [14], [22] e [23].

4.1 Movimentos quase periódicos

No que segue, definimos um ponto quase $\widetilde{\pi}$-periódico. Nessa definição, podemos observar que um ponto $\widetilde{\pi}$-periódico é um ponto quase $\widetilde{\pi}$-periódico mas não vale a recíproca.

Definição 4.1. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Dizemos que um ponto $x \in X$ é quase $\widetilde{\pi}$-periódico se para todo $\epsilon > 0$, existir um $T = T(\epsilon) > 0$ tal que para cada $\alpha \geq 0$, o intervalo $[\alpha, \alpha + T]$ contenha um número $\tau_\alpha > 0$ tal que*

$$d(\widetilde{\pi}(x, t + \tau_\alpha), \widetilde{\pi}(x, t)) < \epsilon, \quad \textit{para todo } t \geq 0.$$

No próximo resultado tratamos de pontos pertencentes ao fecho da órbita positiva impulsiva de um ponto quase $\widetilde{\pi}$-periódico.

Teorema 4.1. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$ quase $\widetilde{\pi}$-periódico, então cada ponto $y \in \overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \backslash M$ é quase $\widetilde{\pi}$-periódico. Além disso, se $\{\tau_\alpha : \alpha \geq 0\}$ é uma família de quase período de x então $\{\tau_\alpha : \alpha \geq 0\}$ é uma família de quase período para cada $y \in \overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \setminus M$.*

Prova: Seja $\epsilon > 0$. Como $x \in X$ é quase $\widetilde{\pi}$-periódico então existe um $T = T(\epsilon) > 0$ tal que para cada $\alpha \geq 0$, o intervalo $[\alpha, \alpha + T]$ contém um número $\tau_\alpha > 0$ tal que

$$d(\widetilde{\pi}(x, t + \tau_\alpha), \widetilde{\pi}(x, t)) < \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{4.1}$$

Seja $y \in \overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \setminus M$. Então existe uma sequência $\{\lambda_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que

$$y_n = \widetilde{\pi}(x, \lambda_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y.$$

Para cada $\alpha \geq 0$, considere $\tau_\alpha \in [\alpha, \alpha + T]$ satisfazendo (4.1). Fixe $t \geq 0$. Pelo Lema 2.7, existe uma sequência $\{\epsilon_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\epsilon_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\widetilde{\pi}(y_n, t + \epsilon_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(y, t).$$

Note que, $t + \tau_\alpha + \epsilon_n \geq t + \tau_\alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t + \tau_\alpha + \epsilon_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} t + \tau_\alpha$. Logo, pelo Lema 2.9, existe uma sequência $\{\beta_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\beta_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\widetilde{\pi}(y_n, t + \tau_\alpha + \epsilon_n + \beta_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(y, t + \tau_\alpha). \tag{4.2}$$

Além disso, como $\widetilde{\pi}(y, t) \notin M$, pelo Lema 2.6, temos

$$\widetilde{\pi}(y_n, t + \epsilon_n + \beta_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(y, t). \tag{4.3}$$

Portanto de (4.2) e (4.3), existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$d(\widetilde{\pi}(y_n, t + \epsilon_n + \beta_n), \widetilde{\pi}(y, t)) < \frac{\epsilon}{3} \text{ e } d(\widetilde{\pi}(y_n, t + \tau_\alpha + \epsilon_n + \beta_n), \widetilde{\pi}(y, t + \tau_\alpha)) < \frac{\epsilon}{3}. \tag{4.4}$$

Defina $\gamma_n = \epsilon_n + \beta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Note que,

$$d(\widetilde{\pi}(y_{n_0}, t + \gamma_{n_0}), \widetilde{\pi}(y_{n_0}, t + \tau_\alpha + \gamma_{n_0})) = d(\widetilde{\pi}(x, \lambda_{n_0} + t + \gamma_{n_0}), \widetilde{\pi}(x, \lambda_{n_0} + t + \tau_\alpha + \gamma_{n_0})).$$

Daí, por (4.1), temos

$$d(\widetilde{\pi}(y_{n_0}, t + \gamma_{n_0}), \widetilde{\pi}(y_{n_0}, t + \tau_\alpha + \gamma_{n_0})) < \frac{\epsilon}{3}. \tag{4.5}$$

Então, usando as equações (4.4) e (4.5), obtemos

$$\begin{aligned} d(\widetilde{\pi}(y,t),\widetilde{\pi}(y,t+\tau_\alpha)) &\leq d(\widetilde{\pi}(y,t),\widetilde{\pi}(y_{n_0},t+\gamma_{n_0})) + d(\widetilde{\pi}(y_{n_0},t+\gamma_{n_0}),\widetilde{\pi}(y_{n_0},t+\tau_\alpha+\gamma_{n_0})) \\ &+ d(\widetilde{\pi}(y_{n_0},t+\tau_\alpha+\gamma_{n_0}),\widetilde{\pi}(y,t+\tau_\alpha)) < \epsilon, \end{aligned}$$

Isso mostra que y é quase $\widetilde{\pi}$-periódico.

Note que os mesmos τ_α da definição de x ser quase $\widetilde{\pi}$-periódico foram usados para demonstrar que $y \in \overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \setminus M$ é quase $\widetilde{\pi}$-periódico. ■

O teorema que acabamos de ver nos diz que $y \in \overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \setminus M$ é quase $\widetilde{\pi}$-periódico sempre que x for quase $\widetilde{\pi}$-periódico, mas não nos diz nada quando $y \in M$. O próximo teorema vai tratar deste caso.

Teorema 4.2. *Sejam $(X,\pi;M,I)$ um sistema semidinâmico impulsivo, $x \in X$ quase $\widetilde{\pi}$-periódico, $y \in \overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \cap M$ e $\{y_n\}_{n\geq 1} \subset \widetilde{\pi}^+(x)$ uma sequência tal que $y_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Assumindo a notação da prova do Lema 2.11, temos:*

a) se $\{y_n\}_{n\geq 1}$ admite uma subsequência $\{y_{n_k}\}_{k\geq 1} \subset H_2$, então y é quase $\widetilde{\pi}$-periódico. Além disso, y admite a mesma família de quase período de x;

b) se $\{y_n\}_{n\geq 1}$ admite uma subsequência $\{y_{n_k}\}_{k\geq 1} \subset H_1$, então $I(y)$ é quase $\widetilde{\pi}$-periódico. Além disso, $I(y)$ admite a mesma família de quase período de x.

Prova: a) A prova deste item segue os mesmos argumentos da prova do Teorema 4.1.

b) Seja $y \in \overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \cap M$, sem perda de generalidade vamos supor que $\{y_n\}_{n\geq 1} \subset H_1$. Então $\phi(y_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e, pela continuidade de π e I, temos

$$z_n = \widetilde{\pi}(y_n, \phi(y_n)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(y).$$

Como $\{z_n\}_{n\geq 1} \subset \widetilde{\pi}^+(x) \setminus M$ (Hipótese H3), segue do Teorema 4.1 que z_n é quase periódico, para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe um $T = T(\frac{\epsilon}{3}) > 0$ tal que para cada $\alpha \geq 0$, o intervalo $[\alpha, \alpha+T]$ contém um número $\tau_\alpha > 0$ tal que

$$d(\widetilde{\pi}(z_n,t),\widetilde{\pi}(z_n,t+\tau_\alpha)) < \frac{\epsilon}{3}, \tag{4.6}$$

para todo $t \geq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Fixe $\alpha \geq 0$, $\tau_\alpha \in [\alpha,\alpha+T]$ e seja $t \geq 0$. Como $I(y) \notin M$ (Hipótese H3) e pelo Lema 2.7, existe $\{\epsilon_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\epsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\widetilde{\pi}(z_n, t+\epsilon_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(I(y),t). \tag{4.7}$$

Note que $t + \tau_\alpha + \epsilon_n \geq t + \tau_\alpha$, $n \in \mathbb{N}$ e

$$t + \tau_\alpha + \epsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t + \tau_\alpha,$$

Assim, pelo Lema 2.9, existe uma sequência $\{\beta_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\beta_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\widetilde{\pi}(z_n, t + \tau_\alpha + \epsilon_n + \beta_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(I(y), t + \tau_\alpha). \tag{4.8}$$

Como $\widetilde{\pi}(I(y), t) \notin M$ então, por (4.7) e pelo Lema 2.6, temos

$$\widetilde{\pi}(z_n, t + \epsilon_n + \beta_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(I(y), t). \tag{4.9}$$

Defina $\gamma_n = \epsilon_n + \beta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Portanto de (4.8) e (4.9), existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$d(\widetilde{\pi}(z_n, t + \gamma_n), \widetilde{\pi}(I(y), t)) < \frac{\epsilon}{3} \text{ e } d(\widetilde{\pi}(z_n, t + \tau_\alpha + \gamma_n), \widetilde{\pi}(I(y), t + \tau_\alpha)) < \frac{\epsilon}{3}. \tag{4.10}$$

Assim, usando (4.6) e (4.10), temos

$$\begin{aligned} d(\widetilde{\pi}(I(y), t), \widetilde{\pi}(I(y), t + \tau_\alpha)) \quad &\leq \quad d(\widetilde{\pi}(I(y), t), \widetilde{\pi}(z_{n_0}, t + \gamma_{n_0})) \\ &+ \quad d(\widetilde{\pi}(z_{n_0}, t + \gamma_{n_0}), \widetilde{\pi}(z_{n_0}, t + \tau_\alpha + \gamma_{n_0})) \\ &+ \quad d(\widetilde{\pi}(z_{n_0}, t + \tau_\alpha + \gamma_{n_0}), \widetilde{\pi}(I(y), t + \tau_\alpha)) < \epsilon. \end{aligned}$$

E, assim, finalizamos a demonstração do teorema. ■

A definição, a seguir, diz respeito ao conceito de conjuntos relativamente densos.

Definição 4.2. *Dizemos que um conjunto $D \subset \mathbb{R}_+$ é relativamente denso em $\mathbb{R}_+$ se existir um número $L > 0$ tal que $D \cap [t, t + L] \neq \emptyset$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$.*

Apresentamos, agora, um resultado que relaciona o conceito de ponto quase $\widetilde{\pi}$-periódico e conjunto relativamente denso.

Lema 4.1. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Um ponto $x \in X$ é quase $\widetilde{\pi}$-periódico se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ o conjunto $D(\epsilon) = \{\tau \in \mathbb{R}_+ : \sup_{t\in\mathbb{R}_+} d(\widetilde{\pi}(x, t + \tau), \widetilde{\pi}(x, t)) < \epsilon\}$ é relativamente denso em $\mathbb{R}_+$.*

Prova: Seja $x \in X$ quase $\widetilde{\pi}$-periódico, então dado $\epsilon > 0$ existe um $T = T(\frac{\epsilon}{2}) > 0$ tal que para cada $\alpha \geq 0$, o intervalo $[\alpha, \alpha + T]$ contenha um número $\tau_\alpha > 0$ com

$$d(\widetilde{\pi}(x, t), \widetilde{\pi}(x, t + \tau_\alpha)) < \frac{\epsilon}{2},$$

para todo $t \geq 0$. Daí, $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} d(\widetilde{\pi}(x,t),\widetilde{\pi}(x,t+\tau_\alpha)) < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Logo

$$D(\epsilon) \cap [\alpha, \alpha + T] \neq \emptyset,$$

para todo $\alpha \geq 0$, demonstrando que o conjunto $D(\epsilon)$ é relativamente denso em $\mathbb{R}_+$.
Por outro lado, seja $\epsilon > 0$ e suponha $D(\epsilon)$ relativamente denso em $\mathbb{R}_+$. Então existe um $T > 0$ tal que $D(\epsilon) \cap [\alpha, \alpha + T] \neq \emptyset$ para todo $\alpha \geq 0$. Daí, para cada $\alpha \geq 0$, existe um $\tau_\alpha \in D(\epsilon) \cap [\alpha, \alpha + T]$ tal que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} d(\widetilde{\pi}(x,t),\widetilde{\pi}(x,t+\tau_\alpha)) < \epsilon.$$

Deste modo

$$d(\widetilde{\pi}(x,t),\widetilde{\pi}(x,t+\tau_\alpha)) < \epsilon.$$

Portanto $x \in X$ é quase $\widetilde{\pi}$-periódico, finalizando a demonstração do lema. ■

Já definimos quando um ponto $x \in X$ é quase $\widetilde{\pi}$-periódico. Agora, vamos definir quando um ponto $x \in X$ é $\widetilde{\pi}$-recorrente. Esses dois conceitos são os principais tipos de movimentos a serem estudados nesta seção.

Definição 4.3. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Dizemos que um ponto $x \in X$ é $\widetilde{\pi}$-recorrente se para todo $\epsilon > 0$, existir um $T = T(\epsilon) > 0$ tal que para cada $t, s \geq 0$, o intervalo $[0, T]$ contenha um número $\tau > 0$ tal que*

$$d(\widetilde{\pi}(x,t),\widetilde{\pi}(x,s+\tau)) < \epsilon.$$

Uma órbita positiva $\widetilde{\pi}^+(x)$ é chamada de $\widetilde{\pi}$-recorrente, se $x \in X$ é $\widetilde{\pi}$-recorrente.

Observação 4.1. Se $x \in X$ é $\widetilde{\pi}$-recorrente, então dado $\epsilon > 0$ existe $T = T(\epsilon) > 0$ tal que $\widetilde{\pi}^+(x) \subset B(\widetilde{\pi}(x,[t,t+T]),\epsilon)$, para todo $t \geq 0$.

O resultado seguinte apresenta condições suficientes para um ponto ser $\widetilde{\pi}$-recorrente.

Teorema 4.3. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $A \subset X$ um subconjunto compacto e minimal. Se $x \in A \setminus M$, então x é $\widetilde{\pi}$-recorrente.*

Prova: Suponha por absurdo que x não seja $\widetilde{\pi}$-recorrente, isto é, existem $\epsilon > 0$ e sequências $\{T_n\}_{n\geq 1}$, $\{s_n\}_{n\geq 1}$, $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $T_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e

$$d(\widetilde{\pi}(x,t_n),\widetilde{\pi}(x,s_n+\tau)) \geq \epsilon, \tag{4.11}$$

para todo $\tau \in [0, T_n], n \in \mathbb{N}$. Como $x \in A \setminus M$ e $A \setminus M$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante, temos

$$\{\widetilde{\pi}(x, t_n)\}_{n \geq 1} \subset A \setminus M \subset A$$

e

$$\{\widetilde{\pi}(x, s_n + \frac{T_n}{2})\}_{n \geq 1} \subset A \setminus M \subset A.$$

Sendo A compacto, podemos supor, passando para uma subsequência se necessário, que

$$\widetilde{\pi}(x, t_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a \in A$$

e

$$\widetilde{\pi}(x, s_n + \frac{T_n}{2}) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} b \in A.$$

Agora, vamos dividir essa demonstração em dois casos: quando $b \notin M$ e quando $b \in M$.

Caso 1: Suponha que $b \notin M$. Fixe $t \geq 0$. Inicialmente, suponha que $t \neq t_k(b)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Neste caso, pela continuidade de π e I, existe um $\delta > 0$ tal que $d(y, b) < \delta$ então

$$d(\widetilde{\pi}(y, t), \widetilde{\pi}(b, t)) < \frac{\epsilon}{3}. \tag{4.12}$$

Por outro lado, podemos obter um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{T_{n_0}}{2} &> t, \\ d(\widetilde{\pi}(x, t_{n_0}), a) &< \frac{\epsilon}{3}, \\ d(\widetilde{\pi}(x, s_{n_0} + \frac{T_{n_0}}{2}), b) &< \delta. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Usando (4.11), (4.12) e (4.13), obtemos

$$\begin{aligned} d(\widetilde{\pi}(b, t), a) &\geq d(\widetilde{\pi}(x, s_{n_0} + \frac{T_{n_0}}{2} + t), a) - d(\widetilde{\pi}(x, s_{n_0} + \frac{T_{n_0}}{2} + t), \widetilde{\pi}(b, t)) \\ &\geq d(\widetilde{\pi}(x, s_{n_0} + \frac{T_{n_0}}{2} + t), \widetilde{\pi}(x, t_{n_0})) - d(\widetilde{\pi}(x, t_{n_0}), a) \\ &\quad - d(\widetilde{\pi}(x, s_{n_0} + \frac{T_{n_0}}{2} + t), \widetilde{\pi}(b, t)) \\ &\geq \epsilon - \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{3} = \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Logo, para todo $t \geq 0$ com $t \neq t_k(b)$, $k \in \mathbb{N}$, temos

$$d(\widetilde{\pi}(b, t), a) \geq \frac{\epsilon}{3}. \tag{4.14}$$

Agora, suponha que $t = t_k(b)$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Assim, podemos tomar uma sequência

$\{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\lambda_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t_k(b)$ com

$$t_k(b) < \lambda_n < t_{k+1}(b),$$

$k \in \mathbb{N}$. Usando (4.14), podemos escrever

$$d(\widetilde{\pi}(b, \lambda_n), a) \geq \frac{\epsilon}{3},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Deste modo, pela continuidade a direita de $\widetilde{\pi}$, obtemos

$$d(\widetilde{\pi}(b, t_k(b)), a) \geq \frac{\epsilon}{3}.$$

Portanto podemos concluir que

$$d(\widetilde{\pi}(b, t), a) \geq \frac{\epsilon}{3},$$

para todo $t \geq 0$. Daí,

$$a \notin \overline{\widetilde{\pi}^+(b)},$$

o que é um absurdo, pois pelo Teorema 3.1, deveríamos ter $\overline{\widetilde{\pi}^+(b)} = A$ já que A é minimal e $b \in A \setminus M$, o que demonstra o teorema neste caso.

Caso 2: Suponha que $b \in M$. Como M satisfaz a condição (STC), existe um STC-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ através de b dado por uma seção $S \subset M$ tal que $S = M \cap F(L, [0, 2\lambda])$. Além disso, como o tubo é uma vizinhança de b, existe um $\eta > 0$ tal que

$$B(b, \eta) \subset F(L, [0, 2\lambda]).$$

Considere os conjuntos H_1 e H_2 da mesma forma que na demonstração do Lema 2.11,

$$H_1 = F(L, [\lambda, 2\lambda]) \cap B(b, \eta) \quad \text{e} \quad H_2 = F(L, [0, \lambda]) \cap B(b, \eta),$$

veja a Figura 10. Seja $w_n = \widetilde{\pi}(x, s_n + \frac{T_n}{2})$, $n \in \mathbb{N}$, note que $w_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$. Aqui, vamos analisar dois casos: quando $\{w_n\}_{n\geq 1}$ admite subsequência em H_1 e quando $\{w_n\}_{n\geq 1}$ admite subsequência em H_2.

Suponha, primeiramente, que a sequência $\{w_n\}_{n\geq 1}$ possua uma subsequência $\{w_{n_r}\}_{r\geq 1}$ em H_1. Neste caso, temos $\phi(w_{n_r}) \overset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Logo

$$\widetilde{\pi}(w_{n_r}, \phi(w_{n_r})) \overset{r\to+\infty}{\longrightarrow} I(b),$$

ou seja,

$$\widetilde{\pi}(x, s_{n_r} + \frac{T_{n_r}}{2} + \phi(w_{n_r})) \overset{r\to+\infty}{\longrightarrow} I(b).$$

Como $A\setminus M$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e $x \in A\setminus M$, segue que $I(b) \in \overline{A} = A$. Considere

$\widetilde{\pi}(I(b),t)$, $t \geq 0$. Se $t \neq t_k(I(b))$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue da continuidade de π e I que existe um $\delta > 0$ tal que se $d(y, I(b)) < \delta$, então

$$d(\widetilde{\pi}(y,t), \widetilde{\pi}(I(b),t)) < \frac{\epsilon}{3}. \tag{4.15}$$

Podemos obter um $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{T_{n_{r_0}}}{2} &> t + \phi(w_{n_{r_0}}), \\ d(\widetilde{\pi}(x, t_{n_{r_0}}), a) &< \frac{\epsilon}{3}, \\ d(\widetilde{\pi}(x, s_{n_{r_0}} + \frac{T_{n_{r_0}}}{2} + \phi(w_{n_{r_0}}), I(b)) &< \delta. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Usando (4.11), (4.15) e (4.16), obtemos

$$\frac{T_{n_{r_0}}}{2} + \phi(w_{n_{r_0}}) + t < \frac{T_{n_{r_0}}}{2} + \frac{T_{n_{r_0}}}{2} = T_{n_{r_0}}$$

e

$$\begin{aligned} d(\widetilde{\pi}(I(b),t), a) &\geq d(\widetilde{\pi}(x, s_{n_{r_0}} + \frac{T_{n_{r_0}}}{2} + \phi(w_{n_{r_0}}) + t), a) \\ &\quad - d(\widetilde{\pi}(x, s_{n_{r_0}} + \frac{T_{n_{r_0}}}{2} + \phi(w_{n_{r_0}}) + t), \widetilde{\pi}(I(b),t)) \\ &\geq d(\widetilde{\pi}(x, s_{n_{r_0}} + \frac{T_{n_{r_0}}}{2} + \phi(w_{n_{r_0}}) + t), \widetilde{\pi}(x, t_{n_{r_0}})) - d(\widetilde{\pi}(x, t_{n_{r_0}}), a) \\ &\quad - d(\widetilde{\pi}(x, s_{n_{r_0}} + \frac{T_{n_{r_0}}}{2} + \phi(w_{n_{r_0}}) + t), \widetilde{\pi}(I(b),t)) \\ &\geq \epsilon - \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{3} = \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Então, para todo $t \geq 0$ com $t \neq t_k(I(b))$, $k \in \mathbb{N}$, temos

$$d(\widetilde{\pi}(I(b),t), a) \geq \frac{\epsilon}{3}. \tag{4.17}$$

Agora, suponha que $t = t_k(I(b))$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Assim, podemos tomar uma sequência $\{\lambda_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\lambda_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} t_k(I(b))$ com

$$t_k(I(b)) < \lambda_n < t_{k+1}(I(b)),$$

$k \in \mathbb{N}$. Usando (4.17), podemos escrever

$$d(\widetilde{\pi}(I(b), \lambda_n), a) \geq \frac{\epsilon}{3},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Deste modo, pela continuidade a direita de $\widetilde{\pi}$, obtemos

$$d(\widetilde{\pi}(I(b), t_k(b)), a) \geq \frac{\epsilon}{3}.$$

Portanto podemos concluir que

$$d(\widetilde{\pi}(I(b), t), a) \geq \frac{\epsilon}{3},$$

para todo $t \geq 0$. Daí,

$$a \notin \overline{\widetilde{\pi}^{+}(I(b))},$$

o que é um absurdo, pois pelo Teorema 3.1 deveríamos ter $\overline{\widetilde{\pi}^{+}(I(b))} = A$ já que A é minimal e $I(b) \in A \setminus M$.

Suponha, agora, que a sequência $\{w_n\}_{n\geq 1}$ possua uma subsequência $\{w_{n_s}\}_{s\geq 1}$ em H_2. Considere $0 < \lambda < \phi(b)$. Como $w_{n_s} \overset{s\to+\infty}{\longrightarrow} b$, temos

$$\widetilde{\pi}(w_{n_s}, \lambda) \overset{s\to+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(b, \lambda),$$

ou seja,

$$\widetilde{\pi}(x, s_{n_s} + \frac{T_{n_s}}{2} + \lambda) \overset{s\to+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(b, \lambda).$$

Como $A \setminus M$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e $x \in A \setminus M$, segue que

$$\widetilde{\pi}(x, s_{n_s} + \frac{T_{n_s}}{2} + \lambda) \in A \setminus M \subset A,$$

para todo $s \in \mathbb{N}$. Isto implica que

$$b_\lambda = \widetilde{\pi}(b, \lambda) \in \overline{A} = A$$

e, além disso, $b_\lambda \notin M$, (Hipótese $H3$). Considerando $\widetilde{\pi}(b_\lambda, t)$ e, usando a prova do Caso 1, temos

$$d(\widetilde{\pi}(b_\lambda, t), a) \geq \frac{\epsilon}{3},$$

para todo $t \geq 0$. Daí,

$$a \notin \overline{\widetilde{\pi}^{+}(b_\lambda)},$$

o que é um absurdo, pois pelo Teorema 3.1 deveríamos ter $\overline{\widetilde{\pi}^{+}(b_\lambda)} = A$ já que A é minimal e $b_\lambda \in A \setminus M$.

Portanto x é $\widetilde{\pi}$-recorrente e o teorema está demonstrado. ∎

O próximo lema é um resultado que relaciona o conceito de ponto $\widetilde{\pi}$-recorrente e conjunto relativamente denso.

Lema 4.2. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo tal que $\overline{\widetilde{\pi}^{+}(x)}$ é compacto para algum $x \in X \setminus M$. A órbita positiva $\widetilde{\pi}^{+}(x)$ é $\widetilde{\pi}$-recorrente se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$ o conjunto $K_\epsilon = \{t \in \mathbb{R}_+ : d(x, \widetilde{\pi}(x, t)) < \epsilon\}$ é relativamente denso.*

Prova: Suponhamos inicialmente que $\widetilde{\pi}^+(x)$ seja $\widetilde{\pi}$-recorrente. Pela Observação 4.1, dado $\epsilon > 0$ existe $T = T(\epsilon) > 0$ tal que $d(\widetilde{\pi}(x,t), \widetilde{\pi}(x, [\alpha, \alpha + T])) < \epsilon$ para todo $t \geq 0$ e para todo $\alpha \geq 0$. Em particular, $d(x, \widetilde{\pi}(x, [\alpha, \alpha + T])) < \epsilon$, para todo $\alpha \geq 0$. Deste modo

$$K_\epsilon \cap [\alpha, \alpha + T] \neq \emptyset.$$

Portanto, K_ϵ é relativamente denso.

Por outro lado, suponha que K_ϵ seja relativamente denso para todo $\epsilon > 0$. Vamos provar que $\widetilde{\pi}^+(x)$ é $\widetilde{\pi}$-recorrente. Como $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ é compacto, pelo Teorema 4.3 é suficiente mostrar que $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ é minimal. Suponha por absurdo que $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ não seja minimal, então existe um subconjunto próprio $A \subset \overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ tal que $A \setminus M \neq \emptyset$, A é fechado e $A \setminus M$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Note que $x \notin A$, pois $A \setminus M$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e A é fechado. Assim $d(x, A) = d > 0$. Escolha $0 < \epsilon < \frac{d}{2}$. Segue da hipótese que existe $T = T(\epsilon) > 0$ tal que

$$K_\epsilon \cap [\alpha, \alpha + T] \neq \emptyset, \quad \text{para todo } \alpha \geq 0. \tag{4.18}$$

Seja $q \in A \setminus M$. Como $A \setminus M$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante, temos que $\widetilde{\pi}^+(q) \subset A$. Então

$$d(x, \widetilde{\pi}(q, t) \geq d(x, A) = d > 2\epsilon, \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{4.19}$$

Por outro lado, como $q \in \overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ e $q \notin M$ então, pelo Lema 2.12, $q \in \widetilde{\pi}^+(x)$ ou $q \in \widetilde{L}^+(x)$. Primeiro suponha que $q \in \widetilde{\pi}^+(x)$. Então $q = \widetilde{\pi}(x, s)$ para algum $s > 0$. Usando (4.19) obtemos $d(x, \widetilde{\pi}(x, s + t)) > 2\epsilon$ para todo $t \geq 0$. Assim

$$K_\epsilon \cap [s, s + T] = \emptyset,$$

o que contradiz (4.18). Agora, Suponha que $q \in \widetilde{L}^+(x)$. Então existe uma sequência $\{\lambda_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\lambda_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\widetilde{\pi}(x, \lambda_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} q$. Por hipótese, para cada λ_n existe $\eta_n \in [0, T]$ tal que

$$d(x, \widetilde{\pi}(x, \lambda_n + \eta_n)) < \epsilon, \tag{4.20}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\eta_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \eta \in [0, T]$. Como $\eta_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \eta$, $\widetilde{\pi}(x, \lambda_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} q$ e $q \notin M$, segue do Lema 2.8 que

$$\widetilde{\pi}(x, \lambda_n + \eta_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(q, \eta),$$

se $\eta \neq t_k(q)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. E, se $\eta = t_k(q)$ para algum $k \in \mathbb{N}$ então, pelo Lema 2.10

$$\widetilde{\pi}(x, \lambda_n + \eta_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} q_k^+ = \widetilde{\pi}(q, \eta) \quad \text{ou} \quad \widetilde{\pi}(x, \lambda_n + \eta_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} q_k.$$

Fazendo $n \longrightarrow +\infty$ em (4.20), temos

$$d(x, \widetilde{\pi}(q, \eta)) \leq \epsilon \tag{4.21}$$

ou

$$d(x, q_k) \leq \epsilon. \tag{4.22}$$

Se (4.21) ocorrer, segue de (4.19) a seguinte desigualdade

$$2\epsilon < d(x, \widetilde{\pi}(q, \eta)) \leq \epsilon,$$

o que é uma contradição.
Agora, se (4.22) ocorrer, tomamos uma sequência $\{s_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $0 < s_n < \phi(q_{k-1}^+)$ e $s_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(q_{k-1}^+)$. Então, por (4.19), obtemos

$$d(x, \widetilde{\pi}(q, t_{k-1}(q) + s_n)) = d(x, \pi(q_{k-1}^+, s_n)) > 2\epsilon,$$

onde $\phi(q_{-1}^+) = 0$. Isto implica que $d(x, q_k) = \lim_{n\to+\infty} d(x, \pi(q_{k-1}^+, s_n)) \geq 2\epsilon$, o que contradiz (4.22). Portanto $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ é minimal. O que queríamos demonstrar. ■

O seguinte resultado apresenta uma relação entre ponto quase $\widetilde{\pi}$-periódico e $\widetilde{\pi}$-recorrente.

Teorema 4.4. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ compacto para todo $x \in X \setminus M$. Se $x \in X \setminus M$ quase $\widetilde{\pi}$-periódico, então x é $\widetilde{\pi}$-recorrente.*

Prova: Dado $\epsilon > 0$, existe $T = T(\epsilon) > 0$ tal que para cada $\alpha \geq 0$, o intervalo $[\alpha, \alpha + T]$ contém um número $\tau = \tau(\alpha) > 0$ tal que

$$d(\widetilde{\pi}(x, t), \widetilde{\pi}(x, t + \tau)) < \epsilon, \tag{4.23}$$

para todo $t \geq 0$. Seja $K_\epsilon = \{s \in \mathbb{R}_+ : d(x, \widetilde{\pi}(x, s)) < \epsilon\}$. Logo por (4.23) temos

$$K_\epsilon \cap [\alpha, \alpha + T] \neq \emptyset,$$

para todo $\alpha \geq 0$. Daí, segue do Lema 4.2 que x é $\widetilde{\pi}$-recorrente, o que demonstra o teorema. ■

Nosso próximo resultado mostra condições para obtermos que o fecho de uma órbita positiva impulsiva seja compacta.

Teorema 4.5. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e X um espaço métrico completo. Se $x \in X$ é quase $\widetilde{\pi}$-periódico então o conjunto $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ é compacto.*

Prova: Sejam $\epsilon > 0$ e $x \in X$ quase $\widetilde{\pi}$-periódico. Pelo Lema 4.1, o conjunto $D(\frac{\epsilon}{4})$ é relativamente denso em $\mathbb{R}_+$. Daí,

$$d(\widetilde{\pi}(x, t + \tau), \widetilde{\pi}(x, t)) < \frac{\epsilon}{4},$$

para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e para todo $\tau \in D(\frac{\epsilon}{4})$. Isso implica que

$$d(\widetilde{\pi}(x, t+\tau_1), \widetilde{\pi}(x, t+\tau_2)) \leq d(\widetilde{\pi}(x, t+\tau_1), \widetilde{\pi}(x, t)) + d(\widetilde{\pi}(x, t+\tau_2), \widetilde{\pi}(x, t)) < \frac{\epsilon}{2}, \tag{4.24}$$

para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e para todo τ_1,$\tau_2 \in D(\frac{\epsilon}{4})$.
Defina $\alpha = \inf\{\tau : \tau \in D(\frac{\epsilon}{4})\}$. Então existe uma sequência $\{\tau_n\}_{n\geq 1} \subset D(\frac{\epsilon}{4})$ tal que $\tau_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$ e $\tau_n \geq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\widetilde{\pi}(x, \cdot)$ é contínua à direita, temos

$$\widetilde{\pi}(x, t + \tau_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(x, t + \alpha).$$

Agora, usando (4.24), temos

$$\begin{aligned} d(\widetilde{\pi}(x, t + \alpha), \widetilde{\pi}(x, t + \tau)) &\leq d(\widetilde{\pi}(x, t + \alpha), \widetilde{\pi}(x, t + \tau_n)) + d(\widetilde{\pi}(x, t + \tau_n), \widetilde{\pi}(x, t + \tau)) \\ &\leq d(\widetilde{\pi}(x, t + \alpha), \widetilde{\pi}(x, t + \tau_n)) + \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e para todo $\tau \in D(\frac{\epsilon}{4})$. Daí fazendo $n \longrightarrow +\infty$, temos

$$d(\widetilde{\pi}(x, t + \alpha), \widetilde{\pi}(x, t + \tau)) \leq \frac{\epsilon}{2}, \tag{4.25}$$

para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e para todo $\tau \in D(\frac{\epsilon}{4})$.
Como $D(\frac{\epsilon}{4})$ é relativamente denso em $\mathbb{R}_+$, existe $L > 0$ tal que $D(\frac{\epsilon}{4}) \cap [t, t + L] \neq \emptyset$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Seja $S > L$, então podemos escolher $\tau_S \in D(\frac{\epsilon}{4}) \cap [S - L, S]$ (observe t = S - L). Logo, por (4.25),

$$d(\widetilde{\pi}(x, S), \widetilde{\pi}(x, S - \tau_S + \alpha)) = d(\widetilde{\pi}(x, (S - \tau_S) + \tau_S), \widetilde{\pi}(x, (S - \tau_S) + \alpha)) < \epsilon.$$

Isto implica que $\widetilde{\pi}(x, S) \in B(\widetilde{\pi}(x, [\alpha, L + \alpha]), \epsilon)$ para todo $S > L$. Assim,

$$\widetilde{\pi}(x, t) \in B(\widetilde{\pi}(x, [0, L + \alpha]), \epsilon) \subset B(Q_\alpha, \epsilon)$$

para todo $t \geq 0$, onde $Q_\alpha = \overline{\widetilde{\pi}(x, [0, L + \alpha])}$. Pelo Lema 2.11 segue que Q_α é compacto. Daí, $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ é totalmente limitado e, como X é completo, concluímos que $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ é compacto. O teorema está demonstrado. ■

Corolário 4.1. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo, $x \in X \backslash M$ quase $\widetilde{\pi}$-periódico e X completo, então x é $\widetilde{\pi}$-recorrente.*

Prova: A demonstração segue do Teorema 4.4 e do Teorema 4.5. ■

Agora, definimos a estabilidade de Poisson para um ponto $x \in X$.

Definição 4.4. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Dizemos que um ponto $x \in X$ é positivamente Poisson $\widetilde{\pi}$-estável se $x \in \widetilde{L}^+(x)$.*

O próximo teorema relaciona os conceitos de ponto $\widetilde{\pi}$-periódico com a estabilidade de Poisson.

Teorema 4.6. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Se $x \in X$ é quase $\widetilde{\pi}$-periódico, então $\widetilde{L}^+(x) = \overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$. Além disso, x é positivamente Poisson $\widetilde{\pi}$-estável.*

Prova: Notemos inicialmente que $\widetilde{L}^+(x) \subset \overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$. Por outro lado, sejam $\epsilon > 0$ e $y \in \overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$. Então existe uma sequência $\{\lambda_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\widetilde{\pi}(x, \lambda_n) \stackrel{n \to +\infty}{\longrightarrow} y$. Deste modo, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\widetilde{\pi}(x, \lambda_n), y) < \frac{\epsilon}{2}, \quad n \geq n_0.$$

Como x é quase $\widetilde{\pi}$-periódico, pelo Teorema 4.1, $\widetilde{\pi}(x, \lambda_n)$ é quase $\widetilde{\pi}$-periódico para todo $n \in \mathbb{N}$ com a mesma família de quase período de x. Então existe um $T > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o intervalo $[n, n + T]$ contém um número $\tau_n > 0$ tal que

$$d(\widetilde{\pi}(x, \lambda_n), \widetilde{\pi}(x, \lambda_n + \tau_n)) < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, para $n \geq n_0$, temos

$$d(\widetilde{\pi}(x, \lambda_n + \tau_n), y) \leq d(\widetilde{\pi}(x, \lambda_n + \tau_n), \widetilde{\pi}(x, \lambda_n)) + d(\widetilde{\pi}(x, \lambda_n), y) < \epsilon.$$

Como $\lambda_n + \tau_n \stackrel{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, então $y \in \widetilde{L}^+(x)$. Logo $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \subset \widetilde{L}^+(x)$. O teorema está demonstrado. ■

4.2 Movimentos assintoticamente quase periódicos

Nesta seção é apresentado o conceito assintótico para alguns tipos de pontos e a estabilidade de Zhukovskij. Aqui apresentamos, também, a definição de reparametrização do tempo, definição importante para o desenvolvimento da teoria.

No que segue, apresentamos a definição de uma reparametrização do tempo e de pontos assintóticos.

Definição 4.5. *Dizemos que uma função $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é uma reparametrização do tempo se h é um homeomorfismo e $h(0) = 0$.*

Definição 4.6. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Um ponto $x \in X$ é chamado assintoticamente $\widetilde{\pi}$-periódico (resp., assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estacionário, assintoticamente $\widetilde{\pi}$-recorrente, assintoticamente Poisson $\widetilde{\pi}$-estável) se existir um ponto $p \in X$ $\widetilde{\pi}$-periódico (resp., estacionário, $\widetilde{\pi}$-recorrente, positivamente Poisson $\widetilde{\pi}$-estável) e uma reparametrização do tempo h_p tais que*

$$\lim_{t \to +\infty} d(\widetilde{\pi}(x, t), \widetilde{\pi}(p, h_p(t))) = 0.$$

Observação 4.2. Se h é uma reparametrização do tempo, então sua inversa h^{-1} é uma reparametrização do tempo. Se tivermos $s = h(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, então

$$d(\widetilde{\pi}(x, t), \widetilde{\pi}(y, h(t))) = d(\widetilde{\pi}(x, h^{-1}(s)), \widetilde{\pi}(y, s)).$$

O próximo lema relaciona um ponto assintoticamente quase $\widetilde{\pi}$-periódico com sua órbita positiva impulsiva.

Lema 4.3. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Se $x \in X$ é assintoticamente quase $\widetilde{\pi}$-periódico (resp., assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estacionário, assintoticamente $\widetilde{\pi}$-periódico), então cada ponto $y \in \widetilde{\pi}^+(x)$ é assintoticamente quase $\widetilde{\pi}$-periódico (resp., assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estacionário, assintoticamente $\widetilde{\pi}$-periódico).*

Prova: Suponha que $x \in X$ seja assintoticamente quase $\widetilde{\pi}$-periódico. Então, existe um ponto $p \in X$ quase $\widetilde{\pi}$-periódico e uma reparametrização do tempo $h_p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tais que

$$\lim_{t \to +\infty} d(\widetilde{\pi}(x, t), \widetilde{\pi}(p, h_p(t))) = 0. \tag{4.26}$$

Seja $y \in \widetilde{\pi}^+(x)$, assim $y = \widetilde{\pi}(x, s)$ para algum $s \in \mathbb{R}_+$. Note que, pelo Teorema 4.1 $q = \widetilde{\pi}(p, h_p(s))$ é quase $\widetilde{\pi}$-periódico. Considere a função $g_y : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$g_y(t) = h_p(t + s) - h_p(s), \tag{4.27}$$

$t \in \mathbb{R}_+$. Observe que $g_y(0) = 0$ e g_y é uma função contínua com inversa $g_y^{-1}(t) = h_p^{-1}(t + h_p(s)) - s$ que também é contínua, então g_y é uma reparametrização. Deste modo, usando (4.26) e (4.27),

$$\begin{aligned} d(\widetilde{\pi}(y, t), \widetilde{\pi}(q, g_y(t))) &= d(\widetilde{\pi}(x, s + t), \widetilde{\pi}(p, h_p(s) + h_p(t + s) - h_p(s))) \\ &= d(\widetilde{\pi}(x, s + t), \widetilde{\pi}(p, h_p(t + s))) \overset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Portanto, $y \in \widetilde{\pi}^+(x)$ é assintoticamente quase $\widetilde{\pi}$-periódico.

Com o mesmo raciocínio desta demonstração provamos os outros casos. ■

Teorema 4.7. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e X um espaço métrico completo. Se $x \in X$ é assintoticamente quase $\widetilde{\pi}$-periódico, então:*

a) $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ é compacto;

b) $\widetilde{L}^+(x)$ coincide com o fecho da órbita de algum ponto quase $\widetilde{\pi}$-periódico.

Prova: *a)* Sejam x assintoticamente quase $\widetilde{\pi}$-periódico e $\epsilon > 0$. Então existem um ponto $p \in X$ quase $\widetilde{\pi}$-periódico, uma reparametrização do tempo $h_p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ e um $t_0 > 0$ tais que

$$d(\widetilde{\pi}(x,t), \widetilde{\pi}(p, h_p(t))) < \frac{\epsilon}{4}, \tag{4.28}$$

para todo $t \geq t_0$. Portanto,

$$\widetilde{\pi}(x, [t_0, +\infty)) \subset B(\overline{\widetilde{\pi}^+(p)}, \frac{\epsilon}{4}).$$

Usando o Teorema 4.5, temos que $\overline{\widetilde{\pi}^+(p)}$ é compacto. Assim, existem $p_1, ..., p_k \in \overline{\widetilde{\pi}^+(p)}$ tais que

$$\overline{\widetilde{\pi}^+(p)} \subset B\left(p_1, \frac{\epsilon}{4}\right) \cup ... \cup B\left(p_k, \frac{\epsilon}{4}\right). \tag{4.29}$$

Consequentemente,

$$B\left(\overline{\widetilde{\pi}^+(p)}, \frac{\epsilon}{4}\right) \subset B\left(p_1, \frac{\epsilon}{2}\right) \cup ... \cup B\left(p_k, \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Seja $h_p(t_0) = \eta$. Pelo Teorema 4.6, $\widetilde{L}^+(p) = \overline{\widetilde{\pi}^+(p)}$, logo, $p_1, ..., p_k \in \widetilde{L}^+(p)$. Daí, podemos obter $\lambda_j > \eta$ tal que

$$d(\widetilde{\pi}(p, \lambda_j), p_j) < \frac{\epsilon}{4}, \tag{4.30}$$

para cada $j \in \mathbb{N}$. Então, usando (4.29) e (4.30), temos

$$\overline{\widetilde{\pi}^+(p)} \subset B\left(\widetilde{\pi}(p, \lambda_1), \frac{\epsilon}{2}\right) \cup ... \cup B\left(\widetilde{\pi}(p, \lambda_k), \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, seja $s_j > t_0$ tal que $h_p(s_j) = \lambda_j$ (pois $\lambda_j > \eta = h_p(t_0)$). Deste modo, de (4.28),

$$d(\widetilde{\pi}(x, s_j), \widetilde{\pi}(p, \lambda_j)) = d(\widetilde{\pi}(x, s_j), \widetilde{\pi}(p, h_p(s_j))) < \frac{\epsilon}{4}.$$

Afirmamos que $\widetilde{\pi}(x, [t_0, +\infty)) \subset B(\widetilde{\pi}(x, s_1), \epsilon) \cup ... \cup B(\widetilde{\pi}(x, s_k), \epsilon)$. De fato, seja $a \in \widetilde{\pi}(x, [t_0, +\infty))$, então existe um $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(a, p_{j_0}) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{4.31}$$

Assim, de (4.28), (4.30) e (4.31), temos

$$d(a, \widetilde{\pi}(x, s_{j_0})) \leq d(a, p_{j_0}) + d(p_{j_0}, \widetilde{\pi}(p, \lambda_{j_0})) + d(\widetilde{\pi}(p, \lambda_{j_0}), \widetilde{\pi}(x, s_{j_0})) < \epsilon.$$

Portanto, $\overline{\widetilde{\pi}(x, [t_0, +\infty))}$ é totalmente limitado e fechado e, assim, é compacto já que X é completo. Usando o Lema 2.11, o conjunto $\overline{\widetilde{\pi}(x, [0, t_0])}$ é compacto. Provamos então que $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ é compacto.

b) Consideremos o ponto p quase $\widetilde{\pi}$-periódico encontrado na prova do item *a*) acima. Afirmamos que $\widetilde{L}^+(x) = \overline{\widetilde{\pi}^+(p)}$. De fato, seja $q \in \overline{\widetilde{\pi}^+(p)}$. Pelo Teorema 4.6, temos que $q \in \widetilde{L}^+(p)$. Então existe uma sequência $\{s_n\}_{n\geq} \subset \mathbb{R}_+$ com $s_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\widetilde{\pi}(p, s_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q$. Como

$$d(\widetilde{\pi}(x, h_p^{-1}(s_n)), q) \leq d(\widetilde{\pi}(x, h_p^{-1}(s_n)), \widetilde{\pi}(p, s_n)) + d(\widetilde{\pi}(p, s_n), q)$$

e x é assintoticamente quase $\widetilde{\pi}$-periódico, então

$$d(\widetilde{\pi}(x, h_p^{-1}(s_n)), q) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como $h_p^{-1}(s_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, temos que $q \in \widetilde{L}^+(x)$ e, portanto, $\overline{\widetilde{\pi}^+(p)} \subset \widetilde{L}^+(x)$.
Por outro lado, seja $q \in \widetilde{L}^+(x)$. Então existe uma sequência $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\lambda_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\widetilde{\pi}(x, \lambda_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q$. Pelo Teorema 4.5, $\overline{\widetilde{\pi}^+(p)}$ é compacto. Daí, a sequência $\{\widetilde{\pi}(p, h_p(\lambda_n))\}_{n\geq 1}$ admite uma subsequência convergente. Sem perda de generalidade vamos assumir que

$$\lim_{n\to+\infty} \widetilde{\pi}(p, h_p(\lambda_n)) = y \in \overline{\widetilde{\pi}^+(p)}.$$

Como

$$d(\widetilde{\pi}(x, \lambda_n), y) \leq d(\widetilde{\pi}(x, \lambda_n), \widetilde{\pi}(p, h_p(\lambda_n))) + d(\widetilde{\pi}(p, h_p(\lambda_n)), y)$$

e x é assintoticamente quase $\widetilde{\pi}$-periódico, então

$$d(\widetilde{\pi}(x, \lambda_n), y) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pela unicidade do limite $q = y \in \overline{\widetilde{\pi}^+(p)}$ o que implica $\widetilde{L}^+(x) \subset \overline{\widetilde{\pi}^+(p)}$, completando a prova do teorema. ■

Apresentamos agora o conceito de estabilidade de Zhukovskij.

Definição 4.7. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Dizemos que um ponto $x \in X \setminus M$ é Zhukovskij quase $\widetilde{\pi}$-estável com respeito ao conjunto $A \subset X$, se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(x, \epsilon) > 0$ tal que se $d(x, y) < \delta$ para $y \in A$, então podemos* *encontrar uma reparametrização do tempo h_y tal que*

$$d(\widetilde{\pi}(x,t),\widetilde{\pi}(y,h_y(t))) < \epsilon, \quad \textit{para todo } t \geq 0.$$

Um subconjunto $B \subset X$ é Zhukovskij quase $\widetilde{\pi}$-estável com respeito ao conjunto $A \subset X$, se cada ponto $z \in B$ é Zhukovskij quase $\widetilde{\pi}$-estável com respeito ao conjunto $A \subset X$.

Teorema 4.8. *Seja $x \in X \setminus M$ satisfazendo as seguintes condições:*

a) $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ é compacto;

b) $\widetilde{L}^+(x) \setminus M$ é Zhukovskij quase $\widetilde{\pi}$-estável com respeito ao conjunto $\widetilde{\pi}^+(x)$;

c) $\widetilde{L}^+(x) = \overline{\widetilde{\pi}^+(p)}$ para algum ponto p quase $\widetilde{\pi}$-periódico.

Então x é assintoticamente quase $\widetilde{\pi}$-periódico.

Prova: Seja $\epsilon > 0$. A condição $c)$ nos diz que $\widetilde{L}^+(x) = \overline{\widetilde{\pi}^+(p)}$ para algum ponto p quase $\widetilde{\pi}$-periódico. Assim, existe $T = T(\epsilon) > 0$ e $\tau_n \in [n, n+T]$ tais que

$$d(\widetilde{\pi}(p,t+\tau_n),\widetilde{\pi}(p,t)) < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para todo } t \geq 0 \text{ e todo } n \in \mathbb{N}.$$

De acordo com o item $a)$, podemos assumir que $\widetilde{\pi}(x,\tau_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q$. Como $\tau_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, temos que $q \in \widetilde{L}^+(x) = \overline{\widetilde{\pi}^+(p)}$. Vamos considerar dois casos a seguir: quando $q \notin M$ e quando $q \in M$.

Caso 1: $q \in \overline{\widetilde{\pi}^+(p)} \setminus M$.

Pelo Teorema 4.1, q é quase $\widetilde{\pi}$-periódico com a mesma família de quase período de p. Então

$$d(\widetilde{\pi}(q,t+\tau_n),\widetilde{\pi}(q,t)) < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para todo } t \geq 0 \text{ e todo } n \in \mathbb{N}. \tag{4.32}$$

Agora, como $q \in \widetilde{L}^+(x)$, pela condição $b)$, existe $\delta = \delta(q, \frac{\epsilon}{2}) > 0$ tal que se $y \in \widetilde{\pi}^+(x)$ e $d(q,y) < \delta$, então podemos encontrar uma reparametrização do tempo h_y tal que

$$d(\widetilde{\pi}(q,t),\widetilde{\pi}(y,h_y(t))) < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Pela convergência $\widetilde{\pi}(x,\tau_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(\widetilde{\pi}(x,\tau_{n_0}),q) < \delta$. Deste modo, existe uma reparametrização h_0 tal que

$$d(\widetilde{\pi}(q,t),\widetilde{\pi}(x,\tau_{n_0}+h_0(t))) < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{4.33}$$

Defina $h_q : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ por

$$h_q(t) = \begin{cases} t & , \quad \text{se} \quad t \in [0, \tau_{n_0}], \\ h_0(t - \tau_{n_0}) + \tau_{n_0}, & \quad \text{se} \quad t > \tau_{n_0}. \end{cases}$$

Note que h_q é uma reparametrização do tempo. Além disso, usando (4.32) e (4.33),

$$\begin{aligned} d(\widetilde{\pi}(x, h_q(t)), \widetilde{\pi}(q, t)) &= d(\widetilde{\pi}(x, h_0(t - \tau_{n_0}) + \tau_{n_0}), \widetilde{\pi}(q, t)) \\ &\leq d(\widetilde{\pi}(x, h_0(t - \tau_{n_0}) + \tau_{n_0}), \widetilde{\pi}(q, t - \tau_{n_0})) \\ &+ d(\widetilde{\pi}(q, t - \tau_{n_0}), \widetilde{\pi}(q, t)) < \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $t \geq \tau_{n_0}$. Portanto, x é assintoticamente quase $\widetilde{\pi}$-periódico.

Caso 2: $q \in \overline{\widetilde{\pi}^+(p)} \cap M$.

Temos que $q = \lim_{n \to +\infty} \widetilde{\pi}(p, \tau)$ para alguma sequência $\{\tau_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$. Como M satisfaz a condição (STC), existe um STC-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ através de q dado por uma seção $S \subset M$ tal que $S = M \cap F(L, [0, 2\lambda])$. Além disso, como o tubo é uma vizinhança de q, existe um $\eta > 0$ tal que

$$B(q, \eta) \subset F(L, [0, 2\lambda]).$$

Considere os conjuntos H_1 e H_2 da mesma forma que na demonstração do Lema 2.11,

$$H_1 = F(L, [\lambda, 2\lambda]) \cap B(q, \eta) \quad \text{e} \quad H_2 = F(L, [0, \lambda]) \cap B(q, \eta),$$

veja a Figura 10. Aqui também temos dois casos a considerar: quando a sequência $\{\widetilde{\pi}(p, \tau_n)\}_{n \geq 1}$ admite uma subsequência em H_1 e quando a sequência $\{\widetilde{\pi}(p, \tau_n)\}_{n \geq 1}$ admite uma subsequência em H_2. Vamos considerar os casos que $\{\widetilde{\pi}(p, \tau_n)\}_{n \geq 1} \subset H_1$ e $\{\widetilde{\pi}(p, \tau_n)\}_{n \geq 1} \subset H_2$.

Vamos supor inicialmente que $\{\widetilde{\pi}(p, \tau_n)\}_{n \geq 1} \subset H_2$. Pelo Teorema 4.2, o ponto q é quase $\widetilde{\pi}$-periódico com a mesma família de quase período de p. Então, para o $\epsilon > 0$ dado anteriormente, temos

$$d(\widetilde{\pi}(q, t + \tau_n), \widetilde{\pi}(q, t)) < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \text{para todo } t \geq 0 \text{ e todo } n \in \mathbb{N}. \tag{4.34}$$

Seja $\overline{q} = \widetilde{\pi}(q, s)$ para algum $s \in (0, \phi(q))$. Note que $\widetilde{\pi}(x, \tau_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} q$, pela condição de tubo $\widetilde{\pi}(p, \tau_n + s) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(q, s)$. Como $\tau_n + s \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, segue que $\overline{q} \in \widetilde{L}^+(x) \setminus M$. Defina $t_n = \tau_n + s$. Pela condição *b*), existem um $n_1 \in \mathbb{N}$ e uma reparametrização do tempo h_1 tais que

$$d(\widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x, t_{n_1}), h_1(t)), \widetilde{\pi}(\overline{q}, t)) = d(\widetilde{\pi}(x, t_{n_1} + h_1(t)), \widetilde{\pi}(\overline{q}, t)) < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \text{para todo } t \geq 0. \tag{4.35}$$

Suponha que $t \geq t_{n_1} = \tau_{n_1} + s$, como $\overline{q} = \widetilde{\pi}(q,s)$, de (4.34)

$$\begin{aligned} d(\widetilde{\pi}(\overline{q}, t - t_{n_1}), \widetilde{\pi}(q,t)) &= d(\widetilde{\pi}(q, s + t - t_{n_1}), \widetilde{\pi}(q,t)) \\ &= d(\widetilde{\pi}(q, t - \tau_{n_1}), \widetilde{\pi}(q,t)) < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Seja $h_q : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por

$$h_q(t) = \begin{cases} t & , \quad \text{se} \quad t \in [0, t_{n_1}], \\ h_1(t - t_{n_1}) + t_{n_1}, & \quad \text{se} \quad t > t_{n_1}. \end{cases}$$

Note que h_q é uma reparametrização do tempo. Então usando (4.35) e (4.36)

$$\begin{aligned} d(\widetilde{\pi}(x, h_q(t)), \widetilde{\pi}(q,t) &= d(\widetilde{\pi}(x, h_1(t - t_{n_1}) + t_{n_1}), \widetilde{\pi}(q,t)) \\ &\leq d(\widetilde{\pi}(x, h_1(t - t_{n_1}) + t_{n_1}), \widetilde{\pi}(\overline{q}, t - t_{n_1})) \\ &+ d(\widetilde{\pi}(\overline{q}, t - t_{n_1}), \widetilde{\pi}(q,t)) < \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $t \geq t_{n_1}$. Portanto, x é assintoticamente quase $\widetilde{\pi}$-periódico.

Agora, suponha que $\{\widetilde{\pi}(p, \tau_n)\}_{n \geq 1} \subset H_1$. Pelo Teorema 4.2, o ponto $I(q)$ é quase $\widetilde{\pi}$-periódico com a mesma família de quase período de p. Então para o $\epsilon > 0$ dado anteriormente, temos

$$d(\widetilde{\pi}(I(q), t + \tau_n), \widetilde{\pi}(I(q), t)) < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \text{para todo } t \geq 0 \text{ e todo } n \in \mathbb{N}. \tag{4.37}$$

Sejam $y_n = \widetilde{\pi}(x, \tau_n)$ e $z_n = \widetilde{\pi}(y_n, \phi(y_n))$, $n \in \mathbb{N}$. Note que $y_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} q$, $\phi(y_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$z_n = \widetilde{\pi}(y_n, \phi(y_n)) = I(\pi(y_n, \phi(y_n))) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} I(\pi(q,0)) = I(q).$$

Como $y_n = \widetilde{\pi}(x, \tau_n)$ e $\tau_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ temos que $I(q) \in \widetilde{L}^+(x) \setminus M$. Podemos encontrar um $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(y_n) < \tau_n$ para todo $n \geq n_2$. Pela condição b), existem um $n_3 \in \mathbb{N}$ com $n_3 > n_2$ e uma reparametrização do tempo h_3 tais que

$$d(\widetilde{\pi}(z_{n_3}, h_3(t)), \widetilde{\pi}(I(q), t)) < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \text{para todo } t \geq 0. \tag{4.38}$$

Defina $h_{I(q)} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ por

$$h_{I(q)}(t) = \begin{cases} 2t & , \quad \text{se } t \in [0, \phi(y_{n_3})], \\ t + \phi(y_{n_3}) & , \quad \text{se } t \in (\phi(y_{n_3}), \tau_{n_3}], \\ h_3(t - \tau_{n_3}) + \tau_{n_3} + \phi(y_{n_3}), & \quad \text{se } t > \tau_{n_3}. \end{cases}$$

Note que $h_{I(q)}$ é uma reparametrização do tempo. Então, usando (4.37) e (4.38),

$$\begin{aligned} d(\widetilde{\pi}(x, h_{I(q)}(t)), \widetilde{\pi}(I(q), t)) &= d(\widetilde{\pi}(x, h_3(t - \tau_{n_3}) + \tau_{n_3} + \phi(y_{n_3})), \widetilde{\pi}(I(q), t)) \\ &= d(\widetilde{\pi}(z_{n_3}, h_3(t - \tau_{n_3})), \widetilde{\pi}(I(q), t)) \\ &\leq d(\widetilde{\pi}(z_{n_3}, h_3(t - \tau_{n_3})), \widetilde{\pi}(I(q), t - \tau_{n_3})) \\ &+ d(\widetilde{\pi}(I(q), t - \tau_{n_3}), \widetilde{\pi}(I(q), t)) < \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $t \geq \tau_{n_3}$. Portanto, x é assintoticamente quase $\widetilde{\pi}$-periódico. ■

Corolário 4.2. *Seja $x \in X \setminus M$ satisfazendo as condições:*

a) $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ *é compacto;*

b) $\widetilde{L}^+(x) \setminus M$ *é Zhukovskij quase $\widetilde{\pi}$-estável com respeito ao conjunto $\widetilde{\pi}^+(x)$;*

c) $\widetilde{L}^+(x) = \overline{\widetilde{\pi}^+(p)}$ *para algum ponto p $\widetilde{\pi}$-periódico.*

Então x é assintoticamente $\widetilde{\pi}$-periódico.

Prova: A prova segue os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 4.8. ■

Na sequência, o teorema diz que sob certas condições um conjunto A é Zhukovskij quase $\widetilde{\pi}$-estável com respeito ao conjunto $\widetilde{\pi}^+(x)$.

Teorema 4.9. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$. Suponha que $T = \sup_{k \geq 1} \phi(x_k^+) < +\infty$ e que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

a) $d(I(p), I(q)) \leq \lambda_1 d(p, q)$ *para todo $p, q \in M$ e* $d(\pi(p, \phi(p)), \pi(q, \phi(q))) \leq \lambda_2 d(p, q)$ *para todo $p, q \in \overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \setminus M$, onde $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ e $\lambda_1 \lambda_2 \leq 1$;*

b) $|\phi(p_1^+) - \phi(q_1^+)| \leq |\phi(p) - \phi(q)|$ *para todo $p, q \in \overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \setminus M$;*

c) $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ *é compacto.*

Então todo conjunto $A \subset \overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \setminus M$ é Zhukovskij quase $\widetilde{\pi}$-estável com respeito ao conjunto $\widetilde{\pi}^+(x)$.

Prova: Considere um subconjunto A qualquer de $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \setminus M$. Sejam $\epsilon > 0$ e $z \in A$. Como π é contínua e $K = \overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \times [0, T]$ é compacto, segue que π é uniformemente contínua em K, assim existe $\delta_1 = \delta_1(K, \epsilon) > 0$, $\delta_1 < \epsilon$, tal que se $y \in \widetilde{\pi}^+(x)$, $t_1, t_2 \in [0, T]$ e $\max\{d(y, z), |t_1 - t_2|\} < \delta_1$ então

$$d(\pi(z, t_1), \pi(y, t_2)) < \epsilon. \tag{4.39}$$

Agora, como ϕ é contínua em $X \setminus M$, existe um $\delta = \delta(z, \delta_1) > 0$, $\delta < \delta_1$, tal que se $y \in X$ e $d(y, z) < \delta$ então

$$|\phi(y) - \phi(z)| < \delta_1. \tag{4.40}$$

Assim, se $d(y, z) < \delta$ pelas condições $a)$, $b)$ e por (4.40), temos

$$d(z_1^+, y_1^+) \leq \lambda_1 \lambda_2 d(z, y) < \delta \quad \text{ e } \quad |\phi(z_1^+) - \phi(y_1^+)| \leq |\phi(z) - \phi(y)| < \delta_1.$$

Note que

$$z_2^+ = I(z_2) = I((z_1^+)_1) = (z_1^+)_1^+ \quad \text{ e } \quad y_2^+ = I(y_2) = I((y_1^+)_1) = (y_1^+)_1^+,$$

então por $b)$ e pelo que acabamos de notar,

$$|\phi(z_2^+) - \phi(y_2^+)| = |\phi((z_1^+)_1^+) - \phi((y_1^+)_1^+)| \leq |\phi(z_1^+) - \phi(y_1^+)| < \delta_1.$$

De forma indutiva, se $d(y, z) < \delta$, então

$$d(z_n^+, y_n^+) < \delta \quad \text{ e } \quad |\phi(z_n^+) - \phi(y_n^+)| < \delta_1,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Defina a seguinte reparametrização do tempo $h_y = \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$h_y(t) = t_n(y) + \frac{\phi(y_n^+)}{\phi(z_n^+)}(t - t_n(z)), \quad \text{ se } \quad t \in [t_n(z), t_{n+1}(z)), n \in \mathbb{Z}_+.$$

Assim, se $t \in [t_n(z), t_{n+1}(z))$, $n \in \mathbb{Z}_+$, temos

$$\begin{aligned} d\left(\widetilde{\pi}(z, t), \widetilde{\pi}(y, h_y(t))\right) &= d\left(\pi(z_n^+, t - t_n(z)), \widetilde{\pi}(y, t_n(y) + \frac{\phi(y_n^+)}{\phi(z_n^+)}(t - t_n(z))\right) \\ &= d\left(\pi(z_n^+, t - t_n(z)), \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(y, t_n(y)), \frac{\phi(y_n^+)}{\phi(z_n^+)}(t - t_n(z))\right) \\ &= d\left(\pi(z_n^+, t - t_n(z)), \pi(y_n^+, \frac{\phi(y_n^+)}{\phi(z_n^+)}(t - t_n(z))\right). \end{aligned}$$

Se $d(z, y) < \delta$, então $d(z_n^+, y_n^+) < \delta < \delta_1$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ e

$$\left| t - t_n(z) - \frac{\phi(y_n^+)}{\phi(z_n^+)}(t - t_n(z)) \right| = \left| \frac{t - t_n(z)}{\phi(z_n^+)}(\phi(z_n^+) - \phi(y_n^+)) \right| < |\phi(z_n^+) - \phi(y_n^+)| < \delta_1,$$

pois $0 \leq \left|\frac{t-t_n(z)}{\phi(z_n^+)}\right| < 1$. Logo, por (4.39),

$$d(\widetilde{\pi}(z,t), \widetilde{\pi}(y, h_y(t)) < \epsilon.$$

Como $t \geq 0$ é arbitrário, concluímos que $z \in A$ é Zhukovskij quase $\widetilde{\pi}$-estável com respeito ao conjunto $\widetilde{\pi}^+(x)$. ∎

Corolário 4.3. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo que satisfaça as condições a) e b) do Teorema 4.9, X completo e $x \in X \setminus M$ assintoticamente quase $\widetilde{\pi}$-periódico. Se $\phi(x_k^+) < +\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $\widetilde{L}^+(x) \setminus M$ é Zhukovskij quase $\widetilde{\pi}$-estável com respeito ao conjunto $\widetilde{\pi}^+(x)$.*

Prova: Pelo Teorema 4.7, $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ é compacto, Como M é fechado e $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subset M$, temos que

$$\overline{\{x_k : k \in \mathbb{N}\}} \subset M.$$

Além disso, $\overline{\{x_k : k \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ é compacto. Note que

$$\{x_k^+ : k \in \mathbb{N}\} \subset I\left(\overline{\{x_k : k \in \mathbb{N}\}}\right).$$

Sendo $I\left(\overline{\{x_k : k \in \mathbb{N}\}}\right)$ compacto, pois I é contínua, temos

$$\overline{\{x_k^+ : k \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{I\left(\overline{\{x_k : k \in \mathbb{N}\}}\right)} = I\left(\overline{\{x_k : k \in \mathbb{N}\}}\right) \subset I(M).$$

Pela Hipótese H3, $\{x_k^+ : k \in \mathbb{N}\} \cap M = \emptyset$. Portanto, $\sup_{k \geq 1} \phi(x_k^+) < +\infty$ pois ϕ é uniformemente contínua em conjunto compacto contido em $X \setminus M$. Desde modo o resultado segue direto do Teorema 4.9. ∎

O exemplo a seguir é uma aplicação direta do Corolários 4.2 e Teorema 4.9.

Exemplo 4.1. Considere o sistema semidinâmico impulsivo $(\mathbb{R}^2, \pi; M, I)$ com

$$\pi((x,y),t) = (x+t, y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad t \geq 0,$$

onde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\}$ e $I : M \longrightarrow X$ dada por $I(x,y) = (1, \frac{y}{2})$.

Note que

$$d(I(p), I(q)) \leq \frac{1}{2} d(p,q) \quad \text{para todo } p, q \in M.$$

Se $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $x < 2$, então

$$\phi(x,y) = 2 - x \quad \text{e} \quad \pi((x,y), \phi(x,y)) = (2, y).$$

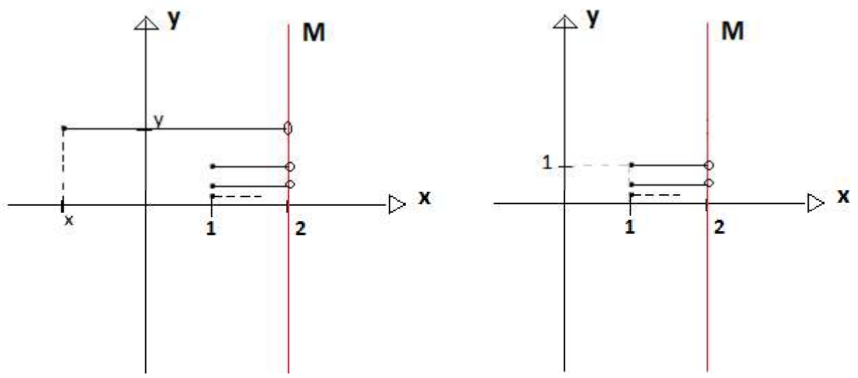

Figura 11: Trajetórias dos pontos (x, y) com $x < 2$ e do ponto $(1, 1)$.

Afirmamos que o ponto $(1, 1)$ veja Figura 11, é assimtoticamente $\widetilde{\pi}$-periódico. De fato, note que $\widetilde{L}^{+}(1,1) = [1,2] \times \{0\}$, $(1,0)$ é $\widetilde{\pi}$-periódico e $\overline{\widetilde{\pi}^{+}(1,0)} = [1,2] \times \{0\}$. Assim

$$\widetilde{L}^{+}(1,1) = \overline{\widetilde{\pi}^{+}(1,0)}.$$

Agora, se $p, q \in \overline{\widetilde{\pi}^{+}(1,1)} \setminus M$ temos

$$|\phi(p_1^+) - \phi(q_1^+)| = 0 \leq |\phi(p) - \phi(q)|,$$

$$d(\pi(p, \phi(p)), \pi(q, \phi(q))) \leq d(p, q) \quad \text{ e } \quad \phi((1,1)_k^+) = 1,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\overline{\widetilde{\pi}^{+}(1,1)}$ é compacto, segue do Teorema 4.9 que $\widetilde{L}^{+}(1,1) \setminus M$ é Zhukovskij quase $\widetilde{\pi}$-estável com respeito ao conjunto $\widetilde{\pi}^{+}(1,1)$. Com isso, usando o Corolário 4.2, o ponto $(1,1)$ é assintoticamente $\widetilde{\pi}$-periódico.

O próximo teorema associa pontos assintoticamente $\widetilde{\pi}$-periódicos com conjuntos relativamente compactos. Para provar este resultado usamos os lemas de convergência do Capítulo 2.

Teorema 4.10. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X \setminus M$ assintoticamente $\widetilde{\pi}$-periódico. Então existe $\tau > 0$ tal que $\{\widetilde{\pi}(x, n\tau) : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto em X.*

Prova: Seja $x \in X \setminus M$ assintoticamente $\widetilde{\pi}$-periódico, então existem $p \in X$ $\widetilde{\pi}$-periódico ($p \in X \setminus M$ (Hipótese H3)) com período $\tau > 0$ e uma reparametrização do tempo $h_p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que

$$\lim_{t \to +\infty} d\left(\widetilde{\pi}(x,t), \widetilde{\pi}(p, h_p(t))\right) = 0.$$

Em particular,

$$\lim_{n\to+\infty} d\left(\widetilde{\pi}(x,n\tau),\widetilde{\pi}(p,h_p(n\tau))\right)=0. \tag{4.41}$$

Para cada $n\in\mathbb{N}$, existem um $k_n\in\mathbb{N}$ e $\gamma_n\in[0,\tau)$ tais que $h_p(n\tau)=k_n\tau+\gamma_n$. Sem perda de generalidade vamos assumir que $\gamma_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma_0\in[0,\tau]$. Assim, como p é $\widetilde{\pi}$-periódico,

$$\widetilde{\pi}(p,h_p(n\tau))=\widetilde{\pi}(p,k_n\tau+\gamma_n)=\widetilde{\pi}(p,\gamma_n).$$

Então, pelos Lemas 2.8 e 2.10, concluímos que $\{\widetilde{\pi}(p,h_p(n\tau)) : n\in\mathbb{N}\}$ admite uma subsequência convergente em X. Usando (4.41) obtemos que $\{\widetilde{\pi}(x,n\tau) : n\in\mathbb{N}\}$ possui uma subsequência convergente em X, deste modo, $\{\widetilde{\pi}(x,n\tau) : n\in\mathbb{N}\}$ é relativamente compacto em X, o que queríamos demonstrar. ■

Teorema 4.11. *Sejam $(X,\pi;M,I)$ um sistema semidinâmico impulsivo que satisfaça as condições a) e b) do Teorema 4.9, $x\in X\setminus M$ e $\sup_{k\geq1}\phi(x_k^+)<+\infty$. Se a sequência $\{\widetilde{\pi}(x,n\tau)\}_{n\geq1}$ converge em $X\setminus M$, para algum $\tau>0$, então x é assintoticamente $\widetilde{\pi}$-periódico.*

Prova: Vamos mostrar que as condições do Corolário 4.2 são satisfeitas. Seja $p\in X\setminus M$ tal que $\widetilde{\pi}(x,n\tau) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p$. Vamos provar inicialmente que $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ é compacto. De fato, seja $\{y_n\}_{n\geq1}\subset\widetilde{\pi}^+(x)$ uma sequência arbitrária. Então existe uma sequência $\{t_n\}_{n\geq1}\subset\mathbb{R}_+$ tal que

$$y_n=\widetilde{\pi}(x,t_n),$$

$n\in\mathbb{N}$. Se $\{t_n\}_{n\geq1}$ admite uma subsequência convergente então a sequência $\{y_n\}_{n\geq1}$ também admite uma subsequência convergente. Agora, se $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ então, para cada $n\in\mathbb{N}$, existem $a_n\in\mathbb{N}$ e $b_n\in[0,\tau)$ tais que $t_n=a_n\tau+b_n$. Podemos assumir que $b_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b_0\in[0,\tau]$. Assim, $a_n\tau \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $b_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b_0$ e

$$\widetilde{\pi}(x,a_n\tau) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p.$$

Daí, como $y_n=\widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x,a_n\tau),b_n)$, $n\in\mathbb{N}$, pelos Lemas 2.8 e 2.10, a sequência $\{y_n\}_{n\geq1}$ admite uma subsequência convergente. Logo, $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ é compacto.

De acordo com o Teorema 4.9, $\widetilde{L}^+(x)\setminus M$ é Zhukovskij quase $\widetilde{\pi}$-estável com respeito ao conjunto $\widetilde{\pi}^+(x)$. Para que as condições do Corolário 4.2 sejam satisfeitas, falta mostrar que $\widetilde{L}^+(x)$ é o fecho da órbita positiva impulsiva de algum ponto $\widetilde{\pi}$-periódico. Como $p\in X\setminus M$ e $\widetilde{\pi}(x,n\tau) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p$, pelo Lema 2.7, existe uma sequência $\{\epsilon_n\}_{n\geq1}\subset\mathbb{R}_+$ com $\epsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x,n\tau),\tau+\epsilon_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(p,\tau).$$

Por outro lado, usando o Lema 2.6, temos

$$\widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x, n\tau), \tau + \epsilon_n) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x, (n+1)\tau), \epsilon_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} p.$$

Pela unicidade do limite $p = \widetilde{\pi}(p, \tau)$. Portanto p é $\widetilde{\pi}$-periódico.
Afirmamos que $\widetilde{L}^+(x) = \overline{\widetilde{\pi}^+(p)} = \overline{\widetilde{\pi}(p, [0, \tau])}$. De fato, se $q \in \widetilde{L}^+(x)$, então existe uma sequência $\{\tau_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\tau_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\widetilde{\pi}(x, \tau_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} q$. Também, existem $k_n \in \mathbb{N}$ e $r_n \in [0, \tau)$ tais que $\tau_n = k_n\tau + r_n$, $n \in \mathbb{N}$. Pelos Lemas 2.8 e 2.10, passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que

$$\widetilde{\pi}(x, \tau_n) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x, k_n\tau), r_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} q \in \overline{\widetilde{\pi}(p, [0, \tau])}.$$

Por outro lado, seja $q \in \overline{\widetilde{\pi}(p, [0, \tau])}$. Então existe uma sequência $\{s_n\}_{n \geq 1} \subset [0, \tau]$ tal que $q = \lim_{n \to +\infty} \widetilde{\pi}(p, s_n)$. Sem perda de generalidade podemos supor que $s_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} s_0 \in [0, \tau]$. Se $s_0 \neq t_k(p)$ para $k \in \mathbb{N}$, então pelo Lema 2.8, temos que $q = \lim_{n \to +\infty} \widetilde{\pi}(p, s_n) = \widetilde{\pi}(p, s_0)$. Seja $t_n = n\tau + s_0$, $n \in \mathbb{N}$. Então $t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e usando o Lema 2.8, temos

$$\widetilde{\pi}(x, t_n) = \widetilde{\pi}(x, n\tau + s_0) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x, n\tau), s_0) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(p, s_0) = q.$$

Deste modo, $q \in \widetilde{L}^+(x)$.
Agora, se $s_0 = t_k(p)$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então, pela prova do Lema 2.10 e por $\widetilde{\pi}(x, n\tau) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} p$, temos

$$\widetilde{\pi}(x, t_n) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x, n\tau), s_0) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(p, s_0) = p_k^+ = q,$$

ou

$$\widetilde{\pi}(x, t_n) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x, n\tau), s_0) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} p_k = q.$$

Em ambos os casos temos que $q \in \widetilde{L}^+(x)$. Assim, $\widetilde{L}^+(x) = \overline{\widetilde{\pi}^+(p)} = \overline{\widetilde{\pi}(p, [0, \tau])}$. Pelo Corolário 4.2, x é assintoticamente $\widetilde{\pi}$-periódico. ■

Corolário 4.4. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo que satisfaça as condições a) e b) do Teorema 4.9, $x \in X \setminus M$ e $\phi(x_k^+) < +\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se a sequência $\{\widetilde{\pi}(x, n\tau)\}_{n \geq 1}$ converge em $X \setminus M$, para algum $\tau > 0$, então x é assintoticamente $\widetilde{\pi}$-periódico.*

Prova: Utilizando a prova do Teorema 4.11 temos que $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ é compacto. Como M é fechado e $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subset M$, temos que

$$\overline{\{x_k : k \in \mathbb{N}\}} \subset M.$$

Além disso, $\overline{\{x_k : k \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ é compacto. Note que

$$\{x_k^+ : k \in \mathbb{N}\} \subset I\left(\overline{\{x_k : k \in \mathbb{N}\}}\right),$$

Sendo $I\left(\overline{\{x_k : k \in \mathbb{N}\}}\right)$ compacto, pois I é contínua, temos

$$\overline{\{x_k^+ : k \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{I\left(\overline{\{x_k : k \in \mathbb{N}\}}\right)} = I\left(\overline{\{x_k : k \in \mathbb{N}\}}\right) \subset I(M).$$

Pela Hipótese H3, $\{x_k^+ : k \in \mathbb{N}\} \cap M = \emptyset$. Portanto, $\sup\limits_{k\geq 1} \phi(x_k^+) < +\infty$ pois ϕ é uniformemente contínua em conjunto compacto contido em $X \setminus M$. Desde modo o resultado segue direto do Teorema 4.11. ■

Para finalizar esta seção, o próximo teorema nos dá condição necessária e suficiente para que um ponto x seja assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estacionário.

Teorema 4.12. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Então $x \in X$ é assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estacionário se, e somente se, a sequência $\{\widetilde{\pi}(x, t_n)\}_{n\geq 1}$ converge em X, onde $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ com $n \in \mathbb{N}$.*

Prova: Vamos supor inicialmente que $x \in X$ seja assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estacionário. Então existe um ponto $p \in X$ estacionário tal que

$$\lim_{t\to+\infty} d(\widetilde{\pi}(x, t), p) = 0. \tag{4.42}$$

Como $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, por (4.42), temos que $\{\widetilde{\pi}(x, t_n)\}_{n\geq 1}$ converge para $p \in X$.
Por outro lado, vamos supor que $\widetilde{\pi}(x, t_n) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} p \in X$, onde $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ com $n \in \mathbb{N}$.
Seja $\{s_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência arbitrária tal que $s_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Então existem um $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma sequência $\{m_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{N}$ tal que

$$t_{m_n} < s_n \leq t_{m_n+1},$$

para todo $n \geq n_0$. Note que $0 < s_n - t_{m_n} \leq t_{m_n+1} - t_{m_n} = \dfrac{1}{m_n + 1}$, $n \geq n_0$. Consideremos dois casos, quando $p \notin M$ e quando $p \in M$.
Caso 1: $p \notin M$.
Neste caso, como $\widetilde{\pi}(x, t_{m_n}) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} p$ e $(s_n - t_{m_n}) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, pelo Lema 2.6, temos

$$\widetilde{\pi}(x, s_n) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x, t_{m_n}), s_n - t_{m_n}) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} p.$$

Sendo $\{s_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência arbitrária, concluímos que

$$\lim_{t\to+\infty} d(\widetilde{\pi}(x,t),p) = 0.$$

Agora, se $0 \leq s < \phi(p)$ então, pelo Lema 2.8, temos

$$p = \lim_{t\to+\infty} \widetilde{\pi}(x,t+s) = \lim_{t\to+\infty} \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x,t),s) = \widetilde{\pi}(p,s) = \pi(p,s).$$

Portanto, p é estacionário e consequentemente x é assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estacionário.
Caso 2: $p \in M$.
A Hipótese H2 nos diz que o conjunto M satisfaz a condição (STC). Então existe um STC-tubo $F(L,[0,2\lambda]$ através de p com seção S. Por hipótese o tubo é uma vizinhança de p, logo existe $\eta > 0$ tal que $B(p,\eta) \subset F(L,[0,2\lambda])$. Usando a notação da prova do Lema 2.11, sejam $H_1 = F(L,[\lambda,2\lambda]) \cap B(p,\eta)$ e $H_2 = F(L,[0,\lambda]) \cap B(p,\eta)$.
Podemos assumir que $\{\widetilde{\pi}(x,t_{m_n})\}_{n\geq 1} \subset H_1$. De fato, suponha que exista uma subsequência $\{m_{n_k}\}_{k\geq 1}$ tal que $\widetilde{\pi}(x,t_{m_{n_k}}) \in H_2$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Seja $\{r_k\}_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência arbitrária tal que $r_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Como fizemos anteriormente, podemos assumir que

$$t_{m_{n_k}} < r_k \leq t_{m_{n_k}+1},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Então

$$\widetilde{\pi}(x,r_k) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x,t_{m_{n_k}}), r_k - t_{m_{n_k}}) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} p \in M.$$

Como $\{r_k\}_{k\geq 1}$ é uma sequência arbitrária, temos $\lim\limits_{t\to+\infty} d(\widetilde{\pi}(x,t),p) = 0$.
Se $0 \leq s < \phi(p)$, temos

$$p = \lim_{k\to+\infty} \widetilde{\pi}(x, s + t_{m_{n_k}}) = \lim_{k\to+\infty} \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x,t_{m_{n_k}}),s) = \pi(p,s).$$

Portanto $p \in M$ é estacionário, o que contradiz a definição de sistema semidinâmico impulsivo. Então, vamos assumir que $\{\widetilde{\pi}(x,t_{m_n})\}_{n\geq 1} \subset H_1$. Neste caso, podemos considerar que

$$t_{m_n} < s_n - \phi(\widetilde{\pi}(x,t_{m_n})) \leq t_{m_n+1},$$

para todo $n \geq n_0$, assim $\phi(\widetilde{\pi}(x,t_{m_n})) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Logo,

$$0 < s_n - t_{m_n} - \phi(\widetilde{\pi}(x,t_{m_n})) \leq t_{m_n+1} - t_{m_n} = \frac{1}{m_n+1}, \quad n \geq n_0.$$

Como $\widetilde{\pi}(x, t_{m_n} + \phi(\widetilde{\pi}(x,t_{m_n}))) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(p)$ e $(s_n - t_{m_n} - \phi(\widetilde{\pi}(x,t_{m_n}))) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, temos que

$$\widetilde{\pi}(x,s_n) = \widetilde{\pi}\left(\widetilde{\pi}(x, t_{m_n} + \phi(\widetilde{\pi}(x,t_{m_n}))), s_n - t_{m_n} - \phi(\widetilde{\pi}(x,t_{m_n}))\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(p).$$

Sendo $\{s_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência arbitrária, concluímos que $\lim_{t\to+\infty} d(\widetilde{\pi}(x,t), I(p)) = 0$. Daí, $I(p)$ é estacionário e x é assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estacionário, finalizando o teorema. ■

4.3 Sistemas dinâmicos discretos no sentido de Kaul.

Nesta seção definimos o sistema dinâmico discreto no sentido de Kaul associado a um sistema semidinâmico impulsivo e apresentamos propriedades recursivas para tal sistema. Para mais informações sobre esta teoria pode ser consultado em [14], [22] e [23].

Vamos começar definindo o sistema dinâmico discreto no sentido de Kaul associado ao sistema semidinâmico impulsivo $(X,\pi;M,I)$.

Seja $H = \{x \in I(M) : \phi(x_n^+) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}\}$. Definimos o *mapeamento* $g: H \longrightarrow H$ por

$$g(x) = \widetilde{\pi}(x,\phi(x)) = I(\pi(x,\phi(x))) = I(x_1) = x_1^+, \tag{4.43}$$

para todo $x \in H$. Note que g é contínua em H, com

$$g^0(x) = x \qquad \text{e} \qquad g^{k+1}(x) = g(g^k(x)) = x_{k+1}^+,$$

para $k \in \mathbb{Z}_+$ e $x \in H$. O par (H,g) é chamado de *sistema dinâmico discreto associado ao sistema $(X,\pi;M,I)$ no sentido de Kaul.*

Definimos o conjunto $g^+(x)$ por

$$g^+(x) = \{g^k(x) : k \in \mathbb{Z}_+\}.$$

No que segue apresentamos três definições que nos possibilitam desenvolver o trabalho nesta seção.

Definição 4.8. *Seja $(X,\pi;M,I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Dizemos que um ponto $x \in X$ é quase $\widetilde{\pi}$-periódico por uma reparametrização do tempo, se dado $\epsilon > 0$ existir um número $T = T(\epsilon) > 0$ tal que para todo $\alpha \geq 0$, o intervalo $[\alpha, \alpha+T]$ contém um número $\tau_\alpha > 0$ e podemos obter uma reparametrização do tempo h_α tal que*

$$d(\widetilde{\pi}(x,h_\alpha(t)+\tau_\alpha), \widetilde{\pi}(x,t)) < \epsilon, \qquad \textit{para todo } t \geq 0. \tag{4.44}$$

Definição 4.9. *Seja $\sigma > 0$. Uma σ-reparametrização do tempo é uma reparametrização do tempo $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $|h(t) - t| < \sigma$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Se $0 \leq h(t) - t < \sigma$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$, dizemos que h é uma σ-reparametrização positiva do tempo.*

Definição 4.10. *Dizemos que um ponto $x \in X$ é quase $\widetilde{\pi}$-periódico por uma σ-reparametrização do tempo, se a reparametrização h_α de (4.44) é uma σ-reparametrização do tempo. Dizemos que um ponto $x \in X$ é quase $\widetilde{\pi}$-periódico por uma σ-reparametrização positiva do tempo, se a reparametrização h_α de (4.44) é uma σ-reparametrização positiva do tempo.*

O próximo lema nos mostra que todo elemento da órbita positiva impulsiva de um ponto quase $\widetilde{\pi}$-periódico por uma σ-reparametrização positiva do tempo, também é quase $\widetilde{\pi}$-periódico pela σ-reparametrização do tempo.

Lema 4.4. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo, $\sigma > 0$ e $x \in X$ um ponto quase $\widetilde{\pi}$-periódico por uma σ-reparametrização positiva do tempo. Então todo ponto $y \in \widetilde{\pi}^+(x)$ é quase $\widetilde{\pi}$-periódico por uma σ-reparametrização do tempo.*

Prova: Seja $\epsilon > 0$. Como $x \in X$ é um ponto quase $\widetilde{\pi}$-periódico por uma σ-reparametrização positiva do tempo, então existe um $T = T(\epsilon) > 0$ tal que para todo $\alpha \geq 0$, o intervalo $[\alpha, \alpha+T]$ contém um número $\tau_\alpha > 0$ e podemos obter uma reparametrização do tempo h_α tal que $0 \leq h_\alpha(t) - t < \sigma$ e

$$d(\widetilde{\pi}(x, h_\alpha(t) + \tau_\alpha), \widetilde{\pi}(x, t)) < \epsilon, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Dado $y \in \widetilde{\pi}^+(x)$, então $y = \widetilde{\pi}(x, s)$ para algum $s \in \mathbb{R}_+$. Seja $T_s = T + \sigma$. Para cada $\alpha \geq 0$ considere o número $\tau_\alpha > 0$ e a função h_α dada acima e defina

$$\tau_\alpha^s = \tau_\alpha + h_\alpha(s) - s$$

e

$$H_\alpha(t) = h_\alpha(t + s) - h_\alpha(s), \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Então $\tau_\alpha^s \in [\alpha, \alpha + T_s]$ e $H_\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é uma reparametrização do tempo com inversa dada por $H_\alpha^{-1}(t) = h_\alpha^{-1}(t + h_\alpha(s)) - s$. Para todo $t \geq 0$ temos

$$-\sigma < H(t) - t = h_\alpha(t + s) - h_\alpha(s) - t = (h\alpha(t + s) - (t + s)) - (h_\alpha(s) - s) < \sigma.$$

e

$$\begin{aligned} d(\widetilde{\pi}(y,t),\widetilde{\pi}(y,H_\alpha(t)+\tau_\alpha^s)) &= d(\widetilde{\pi}(x,s+t),\widetilde{\pi}(x,s+h_\alpha(t+s)-h_\alpha(s)+\tau_\alpha+h_\alpha(s)-s)) \\ &= d(\widetilde{\pi}(x,s+t),\widetilde{\pi}(x,h_\alpha(t+s)+\tau_\alpha)) < \epsilon, \end{aligned}$$

Logo, H_α é uma σ-reparametrização do tempo, o que demonstra o teorema. ■

O próximo resultado exibe a definição de ponto $x \in X$ quase g-periódico. Para isso consideremos a função $g : H \longrightarrow H$ definida em (4.43).

Definição 4.11. *Seja $(X,\pi;M,I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Dizemos que um ponto $x \in X$ é quase g-periódico se dado $\epsilon > 0$ existe um $N_1 > 0$ tal que para cada $n_1 \in \mathbb{Z}_+$, o intervalo $[n_1, n_1+N_1]$ contém um número $m_{n_1} \in \mathbb{Z}_+$ tal que*

$$d(g^n(x), g^{n+m_{n_1}}(x)) = d(x_n^+, x_{n+m_{n_1}}^+) < \epsilon, \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Teorema 4.13. *Sejam $(X,\pi;M,I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e (H,g) o sistema discreto associado no sentido de Kaul. Se $x \in H$ é um ponto quase g-periódico, $\overline{g^+(x)} \cap M = \emptyset$ e $\overline{g^+(x)}$ é compacto, então x é quase $\widetilde{\pi}$-periódico por uma reparametrização do tempo.*

Prova: Seja $\epsilon > 0$. Como $\overline{g^+(x)}$ é compacto e $\overline{g^+(x)} \cap M = \emptyset$ então $T = \sup_{k \geq 0} \phi(x_k^+) < \infty$, pois ϕ é uniformemente contínua no conjunto compacto $\overline{g^+(x)}$. A função π é uniformemente contínua em $\overline{g^+(x)} \times [0,T]$, então, existe $\delta \in (0,\epsilon)$ tal que se $y,z \in \overline{g^+(x)}$ e $t_1, t_2 \in [0,T]$ satisfaz $\max\{d(y,z), |t_1-t_2|\} < \delta$, então

$$d(\pi(y,t_1),\pi(z,t_2)) < \epsilon. \tag{4.45}$$

Pela continuidade uniforme de ϕ em $\overline{g^+(x)}$, podemos obter $\delta_1 \in (0,\delta)$ tal que se $y,z \in \overline{g^+(x)}$ com $d(y,z) < \delta_1$, então $|\phi(y)-\phi(z)| < \delta$.
Por hipótese $x \in H$ é um ponto quase g-periódico então para $\delta_1 > 0$ encontrado anteriormente, existe um $N_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que para cada $m \in \mathbb{Z}_+$, o intervalo $[m, m+N_0]$ contém um número $n_m \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$d(g^n(x), g^{n+n_m}(x)) = d(x_n^+, x_{n+n_m}^+) < \delta_1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.46}$$

Seja $T_1 = (N_0+1)T$. Afirmamos que T_1 satisfaz a Definição 4.8. De fato, dado $\alpha \geq 0$, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $t_k(x) \leq \alpha < t_{k+1}(x)$. Por (4.46), existe um $n_k \in [k+1, k+1+N_0] \cap \mathbb{Z}_+$ tal que

$$d(x_n^+, x_{n+n_k}^+) < \delta_1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.47}$$

Seja $\tau_\alpha = t_{n_k}(x)$. Como $T = \sup\limits_{k\geq 0} \phi(x_k^+) < \infty$, obtemos

$$\alpha < t_{k+1}(x) \leq t_{n_k}(x) = \tau_\alpha < t_{k+1+N_0}(x) = t_k(x) + \sum_{i=k}^{k+N_0} \phi(x_i^+) \leq \alpha + (N_0+1)T,$$

logo $\tau_\alpha \in [\alpha, \alpha + T_1]$.

Definimos a reparametrização do tempo $h_\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ por

$$h_\alpha(t) = t_n(x_{n_k}^+) + \frac{\phi(x_{n+n_k}^+)}{\phi(x_n^+)}(t - t_n(x)), \quad t \in [t_n(x), t_{n+1}(x)), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Se $t = t_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, de (4.47), temos

$$d(\widetilde{\pi}(x,t), \widetilde{\pi}(x, h_\alpha(t) + \tau_\alpha)) = d(x_n^+, \widetilde{\pi}(x, t_n(x_{n_k}^+) + t_{n_k}(x))) = d(x_n^+, x_{n+n_k}^+) < \delta_1 < \epsilon.$$

Agora, se $t \in (t_n(x), t_{n+1}(x)), n \in \mathbb{Z}_+$, temos

$$d(\widetilde{\pi}(x,t), \widetilde{\pi}(x, h_\alpha(t) + \tau_\alpha)) = d\left(\pi(x_n^+, t - t_n(x)), \pi\left(x_{n+n_k}^+, \frac{\phi(x_{n+n_k}^+)}{\phi(x_n^+)}(t - t_n(x))\right)\right).$$

Assim, $d(x_n^+, x_{n+n_k}^+) < \delta_1$ e

$$\left| t - t_n(x) - \frac{\phi(x_{n+n_k}^+)}{\phi(x_n^+)}(t - t_n(x)) \right| < |\phi(x_n^+) - \phi(x_{n+n_k}^+)| < \delta,$$

podemos concluir por (4.45) que

$$d(\widetilde{\pi}(x,t), \widetilde{\pi}(x, h_\alpha(t) + \tau_\alpha)) < \epsilon.$$

Portanto, $d(\widetilde{\pi}(x,t), \widetilde{\pi}(x, h_\alpha(t) + \tau_\alpha)) < \epsilon$, para todo $t \geq 0$. Isto mostra que x é quase $\widetilde{\pi}$-periódico por uma reparametrização do tempo, finalizando a demonstração do teorema. ■

Na Definição 4.12, a seguir, apresentamos condições para que um ponto $x \in H$ seja dito fortemente quase g-periódico.

Definição 4.12. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Dizemos que um ponto $x \in H$ é fortemente quase g-periódico se dado $\epsilon > 0$ existir um $N_1 > 0$ tal que para cada $n_1 \in \mathbb{Z}_+$, o intervalo $[n_1, n_1 + N_1]$ contém um número $m_{n_1} \in \mathbb{Z}_+$ tal que*

$$d(x_n^+, x_{n+m_{n_1}}^+) < \epsilon \quad \textit{e} \quad |t_k(x_n^+) - t_k(x_{n+m_{n_1}}^+)| < \epsilon, \quad \textit{para todo } n, k \in \mathbb{Z}_+.$$

O próximo resultado apresenta condições para um ponto ser quase $\widetilde{\pi}$-periódico por uma ϵ-reparametrização do tempo usando o conceito de ponto fortemente quase g-periódico.

Teorema 4.14. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e (H, g) o sistema discreto associado no sentido de Kaul. Se $x \in H$ é um ponto fortemente quase g-periódico, $\overline{g^+(x)} \cap M = \emptyset$ e $\overline{g^+(x)}$ é compacto, então para todo $\epsilon > 0$, o ponto x é quase $\widetilde{\pi}$-periódico por uma ϵ-reparametrização do tempo.*

Prova: Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Usando a prova do Teorema 4.13 junto com Definição 4.12, podemos notar que se $t \in [t_n(x), t_{n+1}(x)), n \in \mathbb{Z}_+$, então

$$\begin{aligned} |h_\alpha(t) - t| &= \left| t_n(x^+_{n_k}) + \frac{\phi(x^+_{n+n_k})}{\phi(x^+_n)}(t - t_n(x)) - t \right| \\ &\leq \max\{|t_n(x^+_{n_k}) - t_n(x)|, |t_{n+1}(x^+_{n_k}) - t_{n+1}(x)|\} < \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, x é quase $\widetilde{\pi}$-periódico por uma ϵ-reparametrização do tempo. ■

As próximas duas definições relacionam o conceito de pontos assintóticos com os conceitos de pontos quase g-periódico e pontos quase $\widetilde{\pi}$-periódico por uma reparametrização do tempo.

Definição 4.13. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Dizemos que um ponto $x \in H$ é assintoticamente quase g-periódico, se existe um ponto $p \in H$ quase g-periódico tal que*

$$\lim_{n \to +\infty} d(g^n(x), g^n(p)) = 0. \tag{4.48}$$

Definição 4.14. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Dizemos que um ponto $x \in X$ é assintoticamente quase $\widetilde{\pi}$-periódico por uma reparametrização do tempo, se existe um ponto p quase $\widetilde{\pi}$-periódico por uma reparametrização do tempo e uma reparametrização h_p tal que*

$$\lim_{t \to +\infty} d(\widetilde{\pi}(x, t), \widetilde{\pi}(p, h_p(t))) = 0.$$

Teorema 4.15. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e (H, g) o sistema discreto associado no sentido de Kaul. Suponha que X seja um espaço métrico completo. Se $x \in H$ é um ponto assintoticamente quase g-periódico e $\{x^+_n\}_{n \geq 1}$ é convergente em H, então x é assintoticamente quase $\widetilde{\pi}$-periódico por uma reparametrização do tempo.*

Prova: Seja $x \in H$ um ponto assintoticamente quase g-periódico. Então existe um ponto $p \in H$ quase g-periódico tal que

$$\lim_{n \to +\infty} d(g^n(x), g^n(p)) = 0. \tag{4.49}$$

Como $\{x_n^+\}_{n\geq 1}$ é convergente em H então $\overline{g^+(x)}$ é compacto e $\overline{g^+(x)} \cap M = \emptyset$, pelo fato de $\overline{g^+(x)} \subset H \subset I(M)$ junto com a Hipótese H3. Usando (4.49), obtemos que $\overline{g^+(p)}$ é compacto e $\overline{g^+(p)} \cap M = \emptyset$. Assim, pelo Teorema 4.13, o ponto p é quase $\widetilde{\pi}$-periódico por uma reparametrização do tempo.

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Pela continuidade uniforme de π em $(\overline{g^+(x)} \cup \overline{g^+(p)}) \times [0, T]$, onde $T = \sup_{k\geq 0} \phi(x_k^+) < \infty$, existe $\delta \in (0, \epsilon)$ tal que se $y, z \in \overline{g^+(x)} \cup \overline{g^+(p)}$ e $t_1, t_2 \in [0, T]$ satisfazendo $\max\{d(y, z), |t_1 - t_2|\} < \delta$, então

$$d(\pi(y, t_1), \pi(z, t_2)) < \epsilon. \tag{4.50}$$

Por (4.49), $\lim_{n\to+\infty} x_n^+ = \lim_{n\to+\infty} p_n^+ = z \in H$. Pela continuidade de ϕ em z, existe $\delta_1 \in (0, \delta)$ tal que se $d(y, z) < \delta_1$ então $|\phi(y) - \phi(z)| < \dfrac{\delta}{2}$. Seja $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n^+, z) < \delta_1$ e $d(p_n^+, z) < \delta_1$, para todo $n \geq n_1$.

Por (4.49), existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 \geq n_1$, tal que

$$d(x_n^+, p_n^+) = d(g^n(x), g^n(p)) < \delta_1, \quad \text{para todo } n \geq n_2. \tag{4.51}$$

Vamos definir a reparametrização do tempo $h_p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ por

$$h_p(t) = t_n(p) + \frac{\phi(p_n^+)}{\phi(x_n^+)}(t - t_n(x)), \quad t \in [t_n(x), t_{n+1}(x)), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Se $t = t_n(x)$ para $n \geq n_2$, usando (4.51), temos

$$d(\widetilde{\pi}(x, t), \widetilde{\pi}(p, h_p(t)) = d(x_n^+, p_n^+) < \delta_1 < \epsilon.$$

Agora, se $t \in (t_n(x), t_{n+1}(x))$, para $n \geq n_2$, temos

$$d(\widetilde{\pi}(x, t), \widetilde{\pi}(p, h_p(t)) = d\left(\pi(x_n^+, t - t_n(x)), \pi\left(p_n^+, \frac{\phi(p_n^+)}{\phi(x_n^+)}(t - t_n(x))\right)\right).$$

Assim, $d(x_n^+, p_n^+) < \delta_1$ e

$$\begin{aligned} \left| t - t_n(x) - \frac{\phi(p_n^+)}{\phi(x_n^+)}(t - t_n(x)) \right| &< |\phi(x_n^+) - \phi(p_n^+)| \\ &\leq |\phi(x_n^+) - \phi(z)| + |\phi(z) - \phi(p_n^+)| < \delta, \end{aligned}$$

para $n \geq n_2$, podemos concluir por (4.50) que

$$d(\widetilde{\pi}(x, t), \widetilde{\pi}(p, h_p(t))) < \epsilon, \quad \text{para todo } t \geq t_{n_2}(x).$$

Portanto, x é assintoticamente quase $\widetilde{\pi}$-periódico por uma reparametrização do tempo. O teorema está provado. ■

4.4 Estabilidade de Lyapunov e quase Zhukoviskij estável

Para finalizar nosso trabalho, esta seção apresenta condições para que a partir da estabilidade de Lyapunov seja obtida a quase estabilidade de Zhukovskij. Para mais informações e referências, podem ser consultados [22] e [23].

Vamos começar definindo quando que um ponto pertencente a H é chamado de Lyapunov g-estável com respeito a um conjunto P contido em H.

Definição 4.15. *Um ponto $x \in H$ é chamado Lyapunov g-estável com respeito a um conjunto $P \subset H$ se $x \in \overline{P}$ e se dado $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que se $d(x,p) < \delta$ com $p \in P$, então*

$$d(g^n(x), g^n(p)) = d(x_n^+, p_n^+) < \epsilon, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Um subconjunto $A \subset H$ é chamado Lyapunov g-estável com respeito ao conjunto $P \subset H$ se $A \subset \overline{P}$ e cada ponto $x \in A$ é Lyapunov g-estável com respeito ao conjunto $P \subset H$.

Se $A \subset X$ é um conjunto tal que $\phi(a) < +\infty$ para cada $a \in A$, então podemos definir

$$\widetilde{A} = \bigcup_{x \in A} \widetilde{\pi}(x, \phi(x)). \tag{4.52}$$

Note que $\widetilde{A} \subset I(M)$. Se $\phi(a_j^+) < +\infty$ para $j \in \mathbb{Z}_+$ e para todo $a \in A$, então $\widetilde{A} \subset H$.

Lema 4.5. *Se $B \subset X$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante então $\overline{B} \setminus M$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.*

Prova: Sejam $b \in \overline{B} \setminus M$ e $t \geq 0$. Então existe uma sequência $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset B$ tal que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$. Pelo Lema 2.7, existe uma sequência $\{\epsilon_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\epsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\widetilde{\pi}(x_n, t + \epsilon_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(b, t).$$

Como $\{\widetilde{\pi}(x_n, t+\epsilon_n)\}_{n\geq 1} \subset B$ e $I(M) \cap M = \emptyset$, temos,

$$\widetilde{\pi}(b, t) \in \overline{B} \setminus M,$$

o que demonstra o lema. ∎

Teorema 4.16. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo, (H, g) o sistema discreto associado no sentido de Kaul e suponha H um conjunto fechado. Sejam $A, B \subset X \setminus M$, $A \subset \overline{B}$ e B um conjunto relativamente compacto e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Suponha que $\phi(b) < +\infty$ para todo $b \in \overline{B} \setminus M$. Se $\overline{\widetilde{A}}$ é Lyapunov g-estável com respeito a $\overline{\widetilde{B}}$, então qualquer conjunto $O \subset \overline{A} \setminus M$ é Zhukovskij quase $\widetilde{\pi}$-estável com respeito a $\overline{B} \setminus M$.*

Prova: Sejam $O \subset \overline{A} \setminus M$ e $x \in O$. Por hipótese $\phi(x) < +\infty$. Como $\overline{B}$ é compacto e H é fechado, então $\overline{\widetilde{B}}$ compacto e $\overline{\widetilde{B}} \cap M = \emptyset$. Note que $\widetilde{B} \subset H$ pois B é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Como ϕ é contínua no conjunto compacto $\overline{\widetilde{B}} \cup \{x\}$, então

$$T = \sup_{a \in \overline{\widetilde{B}} \cup \{x\}} \phi(a) < +\infty.$$

Seja $\epsilon > 0$. Como π é uniformemente contínua em $\overline{B} \times [0, T]$, existe $\delta_1 \in (0, \epsilon)$ tal que para cada $y, z \in \overline{B}$ e $t_1, t_2 \in [0, T]$ satisfazendo $\max\{d(y, z), |t_1 - t_2|\} < \delta_1$, temos

$$d(\pi(y, t_1), \pi(z, t_2)) < \epsilon. \tag{4.53}$$

Sendo ϕ uniformemente contínua no conjunto compacto $\overline{\widetilde{B}}$, existe um $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ tal que se $z \in \overline{\widetilde{B}}$ e $d(y, z) < \delta_2$, então

$$|\phi(y) - \phi(z)| < \delta_1. \tag{4.54}$$

Usando o fato que $x_1^+ \in \overline{\widetilde{A}}$ é Lyapunov g-estável com respeito ao conjunto $\overline{\widetilde{B}}$, existe $\delta_3 \in (0, \delta_2)$ tal que se $p \in \overline{\widetilde{B}}$ com $d(x_1^+, p) < \delta_3$ então

$$d(g^n(x_1^+), g^n(p)) < \delta_2, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.55}$$

Como π é contínua em $X \times \mathbb{R}_+$, I é contínua em M e ϕ é contínua em $X \setminus M$, existe um $\delta_4 \in (0, \delta_3)$ tal que se $y \in \overline{B} \setminus M$ com $d(x, y) < \delta_4$ então

$$d(x_1^+, y_1^+) = d(I(\pi(x, \phi(x))), I(\pi(y, \phi(y)))) < \delta_3.$$

Por (4.55), temos

$$d(x_n^+, y_n^+) < \delta_2, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.56}$$

Como B é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante pelo Lema 4.5, $\overline{B} \setminus M$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Portanto, $x_n^+, y_n^+ \in \overline{\widetilde{B}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $y \in \overline{B} \setminus M$. Então $y \in \overline{B} \setminus M$ com $d(x, y) < \delta_4$, logo por (4.54) e (4.56), temos

$$|\phi(x_n^+) - \phi(y_n^+)| < \delta_1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.57}$$

Para $y \in \overline{B} \setminus M$ tal que $d(x,y) < \delta_4$ definimos a reparametrização do tempo $h_y : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ por

$$h_y(t) = t_n(y) + \frac{\phi(y_n^+)}{\phi(x_n^+)}(t - t_n(x)), \quad t \in [t_n(x), t_{n+1}(x)), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Se $t = t_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_+$, usando (4.56), temos

$$d(\widetilde{\pi}(x,t), \widetilde{\pi}(y, h_y(t))) = d(x_n^+, y_n^+) < \delta_2 < \epsilon.$$

Se $t \in (t_n(x), t_{n+1}(x)), n \in \mathbb{N}_+$, temos

$$d(\widetilde{\pi}(x,t), \widetilde{\pi}(y, h_y(t))) = d\left(\pi(x_n^+, t - t_n(x)), \pi\left(y_n^+, \frac{\phi(y_n^+)}{\phi(x_n^+)}(t - t_n(x))\right)\right).$$

Assim, por (4.56), $x_n^+, y_n^+ \in \overline{\overline{B}}$, $d(x_n^+, y_n^+) < \delta_2 < \delta_1$ e por (4.57)

$$\left| t - t_n(x) - \frac{\phi(y_n^+)}{\phi(x_n^+)}(t - t_n(x)) \right| < |\phi(x_n^+) - \phi(y_n^+)| < \delta_1,$$

então por (4.53), concluímos que

$$d(\widetilde{\pi}(x,t), \widetilde{\pi}(y, h_y(t))) < \epsilon.$$

Portanto, cada $x \in O \subset \overline{A} \setminus M$ é Zhukovskij quase $\widetilde{\pi}$-estável com respeito a $\overline{B} \setminus M$. ■

Corolário 4.5. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo, (H, g) o sistema discreto associado no sentido de Kaul e suponha H um conjunto fechado. Sejam $x \in X \setminus M$, $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$ compacto, $\phi(x_n^+) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ e $\{x_n^+\}_{n \geq 1}$ convergente em H. Se $\overline{g^+(x_1^+)}$ é Lyapunov g-estável com respeito a ele mesmo, então qualquer conjunto $O \subset \overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \setminus M$ é Zhukovskij quase $\widetilde{\pi}$-estável com respeito a $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \setminus M$.*

Prova: Vamos começar a prova mostrando que $\phi(y) < +\infty$ para todo $y \in \overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \setminus M$. De fato, pelo Lema 2.12, temos

$$\overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \setminus M = \widetilde{\pi}^+(x) \cup (\widetilde{L}^+(x) \setminus M)$$

e, por hipótese, $\phi(x_n^+) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, então $\phi(y) < +\infty$ para todo $y \in \widetilde{\pi}^+(x)$. Falta mostrar que $\phi(y) < +\infty$ para todo $y \in \widetilde{L}^+(x) \setminus M$. Seja $y \in \widetilde{L}^+(x) \setminus M$. Então existe uma sequência $\{s_n\}_{n \geq 1}$ em $\mathbb{R}_+$ tal que $s_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e

$$\widetilde{\pi}(x, s_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um $k_n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $t_{k_n}(x) \leq s_n \leq t_{k_n+1}(x)$. Então $\widetilde{\pi}(x, s_n) =$

$\pi(x^+_{k_n}, s_n - t_{k_n}(x))$ e $\phi(\widetilde{\pi}(x, s_n)) = \phi(x^+_{k_n}) - (s_n - t_{k_n}(x))$. Portanto

$$\phi(\widetilde{\pi}(x, s_n)) \leq \phi(x^+_{k_n}), \tag{4.58}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{x^+_n\}_{n\geq 1}$ é convergente em H com $\lim\limits_{n\to+\infty} x^+_n = z \in H$ para algum $z \in H$, então usando a continuidade de ϕ em $X \setminus M$ quando $n \to +\infty$ em (4.58), temos

$$\phi(y) \leq \phi(z).$$

Como $z \in H$ temos $\phi(z) < +\infty$. Portanto, $\phi(y) < +\infty$ para todo $y \in \widetilde{L}^+(x) \setminus M$. Logo o resultado segue direto do Teorema 4.16, basta considerar os conjuntos A e B iguais a $\widetilde{\pi}^+(x)$. ■

Referências

1 Bhatia N. P.; Hajek O., **Local semi-dynamical systems**, Lecture Notes in Mathematics 90, Springer-Verlag, 1970.

2 Bhatia N. P.; Szegö G. P., **Stability theory of dynamical systems**, Grundlehren Math. Wiss., Band 161, Springer-Verlag, New York, 1970; reprint of the 1970 original in: Classics Math., Springer-Verlag, Berlin, 2002.

3 Bonotto E. M., **Sistemas semidinâmicos impulsivos**, Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo, 2005.

4 Bonotto E. M., **Flows of characteristic 0^+ in impulsive semidynamical systems**, J. Math. Anal. Appl., 332 (1), (2007), 81-96.

5 Bonotto E. M., **LaSalle's Theorems in impulsive semidynamical systems**, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 71 (5-6), (2009), 2291-2297.

6 Bonotto E. M.; Demuner D. P., **Autonomous dissipative semidynamical systems with impulses**, Topological Methods in Nonlinear Analysis, v. 41, 1-38, 2013.

7 Bonotto E. M.; Demuner D. P., **Atractors of impulsive dissipative semidynamical systems**, Bulletin des Sciences Mathématiques (Paris. 1885), v. 137, 617-642, 2013.

8 Bonotto E. M.; Federson M., **Topological conjugation and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems**, J. Math. Anal. Appl. 326, (2007), 869-881.

9 Bonotto E. M.; Federson M., **Limit sets and the Poincaré-Bendixson Theorem in semidynamical impulsive systems**, J. Diff. Equations, 244 (2008),

2334-2349.

10 Bonotto E. M.; Federson M., **Poisson stability for impulsive semidynamical systems**, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 71 (12), (2009), 6148-6156.

11 Bonotto E. M.;Grulha Jr N. G., **Lyapunov stability of closed sets in impulsive semidynamical systems**, Electronic Journal of Differential Equations, 78, (2010), 1-18.

12 Bonotto E. M.; Jimenez M. Z., **Weak almost periodic motions, minimality and stability in impulsive semidynamical systems**, J. Diff. Equations, 256 (2014), 1683-1701.

13 Bonotto E. M.; Jimenez M. Z., **On impulsive semidynamical systems: minimal, recurrent and almost periodic motions**, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 44 (2014), 121-141.

14 Bonotto E. M.; Souto G. M., **Asymptotically almost periodic motions in impulsive semidynamical systems**, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 2016.

15 Bonotto E. M.; Afonso S. M.; Jimenez M. Z., **Negative trajectories in impulsive semidynamical systems**, J. Diff. Equations, 259 (2015), 964-988.

16 Ciesielski K., **On semicontinuity in impulsive dynamical systems**, Bull. Polish Acad. Sci. Math., 52, (2004), 71-80.

17 Ciesielski K., **On time reparametrizations and isomorphisms of impulsive dynamical systems**, Ann. Polon. Math., 84, (2004), 1-25.

18 Ciesielski K., **Sections in semidynamical systems**, Bull. Polish Acad. Sci. Math., 40, (1992), 297-307.

19 Ciesielski K., **On stability in impulsive dynamical systems**, Bull. Polish Acad. Sci. Math., 52, (2004), 81-91.

20 Costa E. R. A., **Sistemas gradientes, decomposição de Morse e funções de Lyapunov sob perturbação**, Tese de Doutorado - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (2012).

21 Ferreira, J. da Costa., **Sistemas semidinâmicos dissipativos com impulsos**, tese de doutorado, São Carlos, 2016.

22 Kaul S.K., **On impulsive semidynamical systems**, J. Math. Anal. Appl. 150 (1), (1990), 120-128.

23 Kaul S.K., **Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems**, J. Applied Math. and Stochastic Analysis, 7(4), (1994), 509-523.

24 Lakshmikanthan V.; Bainov D. D.; Simeonov P. S., **Theory of Impulsive Differential Equations**, Modern Applied Math., 6, World Scientific, 1989.

25 Nolasco, V. Hugo, **Sistemas semidinâmicos impulsivos**, dissertação de mestrado, UFES, 2013.