ROBSON LUIZ DA SILVA

OFICINA SOBRE O INFINITO: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA OS ALUNOS DAS SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL II E ENSINO MÉDIO

Vitória - Espírito Santo, Brasil
2016

ROBSON LUIZ DA SILVA

OFICINA SOBRE O INFINITO: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA OS ALUNOS DAS SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL II E ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação da Universidade Federal do Espírito Santo – Mestrado Profissional em Matemática, requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Orientador: Fábio Júlio da Silva Valentim

Vitória - Espírito Santo, Brasil
2016

Agradecimentos

Aos meus pais que estão sempre me apoiando nos momentos pelos quais mais preciso, pelo amor e exemplo de vida que eles representam. A Deus que guia meus passos. A minha esposa que proporciona momentos maravilhosos. A todos os familiares. Aos professores pela dedicação e preocupação em ajudar a realizar este trabalho da melhor maneira possível. Ao Departamento de Ciências Exatas, pelo apoio a minha participação no Mestrado. A todos, que de alguma forma, contribuíram para o crescimento acadêmico.

"A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens". (Descartes)

Resumo

Este trabalho tem o intuito de servir como material complementar para professores de ensino básico (fundamental e médio) e para alunos que tenham interesse em ter argumentos (dentro deste nível de ensino) para trabalhar com o infinito e com procedimentos infinitos. Para tanto foram feitas algumas demonstrações e exemplos que fundamentam o tema. Os conceitos utilizados foram levantados a partir de bibliografias que são usadas por professores e alunos do ensino fundamental e médio. Foram apresentados argumentos algébricos e aritméticos que envolvem o infinito, como dízimas periódicas e números reais. Foram também expostas aplicações que utilizam procedimentos infinitos, como obtenção de π e a aproximação de algumas funções por somas infinitas. Este é um material que pode ser usado como fonte de pesquisa por docentes e discentes que necessitem de material complementar para o estudo do tema.

Palavras-chaves: infinito, números Reais.

Abstract

The purpose of this project is to offer complementary material for both basic education teachers (primary and secondary education) and students who are interested in having arguments (in this level of study) to work with the infinity and infinite series. Therefore, some demonstrations and examples which ground the topic were made. The concepts used were raised from references which are used by teachers and students from primary and secondary education. Algebraic and arithmetic arguments related to the infinity, such as recurring decimals and real numbers, were presented. Applications involving infinite series, like the generation of π and the approximation of some functions using infinite sums, were also shown. This material can be used as reference by techers and students who need additional material to learn about the topic.

Key-words: infinity, real numbers.

Sumário

INTRODUÇÃO

Este trabalho foi desenvolvido com o intuito de produzir um material complementar que trate alguns conteúdos que envolvam o conceito de infinito de forma a esclarecer algumas dúvidas dos educandos das últimas séries do ensino fundamental e do primeiro ano do ensino médio, a fim de responder possíveis questionamentos sobre o tema "infinito", assim como suas implicações, explicando matematicamente e mostrando que existem várias situações dentro da Matemática que envolve o infinito, porém possuem uma solução relativamente simples.

No intuito de se fazer entender melhor o tema, no capítulo 1 desenvolvemos a parte teórica e conceitos necessários. Vamos tratar ainda neste capítulo de um resgate a partir de algumas evoluções do contexto histórico, o surgimento do conceito de infinito, e os primeiros registros de fatos históricos a envolver o infinito. No capítulo 2 foi realizada uma breve abordagem dos conceitos básicos de conjuntos e funções.

Os capítulos 3 e 4 trataram de definir um método de contagem de elementos de um conjunto, bem como o conceito de conjuntos enumeráveis e não enumeráveis. Além disso, são apresentadas algumas propriedades aritméticas dos conjuntos numéricos.

No capítulo 5, encontramos uma das principais contribuições deste trabalho. Foram expostos exemplos de aplicações de procedimentos infinitos com alguns resultados interessantes como: soma de P.G. infinita, funções que podem ser representadas por somas infinitas e o processo de obtenção do número π a partir do método clássico utilizado por Arquimedes.

Após vasta análise de livros didáticos do ensino básico, percebemos apresentações peculiares e uma ausência de variedade de bibliografia relativa ao tema, por este motivo nos propusemos a elaborar esta proposta didática, utilizando exemplos simples e aplicações acessíveis, expondo uma forma de trabalhar o infinito e desmistificando o que para o aluno, por certas vezes causa dúvidas, devido ao seu teor abstrato e poderia ser um empecilho no entendimento de outros conteúdos.

O tema proposto se deu com o objetivo de apresentar diferentes maneiras de como o infinito pode ser discutido em sala de aula, partindo da idéia que muitas vezes o aluno não tem noção do que é a matéria, e tendo em vista que é importante que o professor esteja preparado, trazendo atividades construtivas para uma simples compreensão do assunto.

1 ORIGENS HISTÓRICAS

1.1 INFINITO: UMA ABORDAGEM HISTÓRICA

A História da Matemática é interessante e importante como conhecimento, com ela pode-se compreender a origem que deu forma, o motivo e circunstâncias em que ela se desenvolveu. Compreender também que a Matemática sempre existiu e que era algo natural para seu momento, mesmo de uma forma simples e utilizando a intuição caçando e pescando já era possível utilizar a Matemática. Partindo de teorias de estudiosos em educação, é possível analisar a importância do ensino de Matemática nos dias atuais, e o grau de relevância que a escola tem na formação do indivíduo que interpreta símbolos e códigos matemáticos, e sabe manejar objetos que possibilite a melhor compreensão do processo ensino aprendizagem e os fatores envolvidos neste processo.

De acordo com Boyer (2003, p.01), durante muito tempo considerava-se que a Matemática poderia se ocupar do mundo que os sentidos pudessem perceber. Porém após o século dezenove saiu da limitação sugerida por observações da natureza, o que era possível observar semelhanças apesar de diferenças entre uma árvore e uma floresta ou relacionar as mãos com os pés, percepções abstratas que certos elementos têm em comum e que pode ser chamado de números.

Desde o surgimento do homem, constata-se a utilização da Matemática, e especificamente no século V A.C., é possível observar que alguns matemáticos relevantes já procuravam compreender o infinito. Toma se como exemplo o matemático grego Zenão, assim como alguns matemáticos indianos. Zenão discípulo do filósofo Parmênides usou a elaboração de uma série paradoxos para comprovar suas teorias de infinito.

Porém, as constatações a respeito do infinito mais relevantes datam de um período mais moderno que vai de 1867 até 1871, quando o matemático George Cantor e Richard Dedeking, em 1870, conseguem uma explicação mais detalhada sobre os conceitos sobre infinito, operações, e os entre elementos e conjuntos, e algumas outras as que revolucionaram o saber matemático nessa área de pesquisa. De acordo com a História Cantor mostrou que o infinito pode ser compreendido e que na verdade não existe somente um infinito e sim uma infinidade de infinitos, sendo assim tentou pegar algarismos $1, 2, 3 \cdots$ e comparou a um conjunto menor $10, 20, 30 \cdots$ mostrando que os dois conjuntos de números infinitos tem o mesmo tamanho, podendo emparelhar 1 com 10 , 2 com 20 , etc., e que a infinidade de frações é maior que a de números inteiros, encontrou-se uma forma de emparelhar todos os números inteiros com todas as frações, montando uma tabela infinita, chegando a conclusão que as frações são do mesmo tipo de infinitos que os números inteiros, supondo que talvez todos os infinitos tenham o mesmo tamanho. Cantor considerou que todos os conjuntos de todos os decimais levam a um infinito maior, pois não importa como se deve listar todos os números decimais e que sempre haveria um número decimal faltando, tendo uma nova visão do infinito, um maior que o outro, podendo contar o infinito.

Cantor ainda lançou um artigo que de início na época dividiu a sociedade Matemática, o mesmo abrangia todas as discussões relacionadas idéias sobre conjuntos. O trabalho fora intitulado "A respeito de uma propriedade característica de todos os números reais", artigo publicado em 1874, e que recebeu apoio de matemáticos da época como Karl Weierstrass e Dedekind e no lado oposto estava Leopold Kronecker, em dias atuais, conhecido como o criador do construtivismo matemático.

Algum tempo depois foram encontradas por parte de estudiosos em Matemática algumas contradições, o principal paradoxo foi observado em 1900, chamado de paradoxo de Russel, chamado assim como forma de homenagear seu descobridor Bertrand Russel, dando lhe seu nome. Juntamente com Ernst Zemelo quem apontou um dos paradoxos mais famosos da história da humanidade: "O conjunto de todos os conjuntos que não são membros entre si mesmos".

2 DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Para dar início ao estudo é preciso deixar claro alguns conceitos e notações de conjuntos e funções, a partir de uma breve revisão, introduzindo a noção de conjuntos e suas operações, utilizando como teoria de suma importância para nos amparar na compreensão de alguns processos que envolvem o infinito. Usaremos neste trabalho as noções de domínio, contradomínio de funções como pré-requisitos no estudo do "infinito".

2.1 CONJUNTOS

Um conjunto é um agrupamento de elementos, podemos dizer que um conjunto é uma coleção, ou um grupo, ou uma lista de elementos que pode ter uma ou mais propriedades em comum, contudo existe um conjunto especial que não possui elemento, o qual pode ser chamado de conjunto vazio. Quando um objeto x é um elemento do conjunto A, dizemos que x pertence a A e escrevemos $x \in A$. Quando o objeto x não é elemento do conjunto A, dizemos que x não pertence a A e escrevemos $x \notin A$.

A representação de conjuntos pode se dar de três maneiras:

1 - Descrição dos elementos (forma tabular): Consiste em representar os elementos do Conjunto entre chaves "$\{\cdots\}''$, separando-os por vírgula ou ponto e vírgula.

EXEMPLOS:

A - Conjunto de preços do pão francês em seu bairro (por Kg).

$$B = \{\text{R\$}9,98;\ \text{R\$}12,49;\ \text{R\$}22,99;\ \text{R\$}25,19\}.$$

B - Conjunto dos números naturais pares.

$$C = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \cdots\}.$$

2 - – Descrição da(s) propriedade(s) do(s) seu(s) elemento(s): Consiste em explicitar alguma propriedade dos elementos do conjunto. Para tanto, devemos usar alguns símbolos específicos:

$$\forall : \text{ para todo}$$

$$\text{"/"} \ : \text{ tal que}$$

$$\Rightarrow : \text{ então}$$

$$\Leftrightarrow : \text{ se e somente se}$$

A – Conjunto de materiais escolares básicos do João.

$$A = \{x \ / \ x \text{ é material escolar básico}\}.$$

B – Conjunto de preços do pão francês em seu bairro (por Kg).

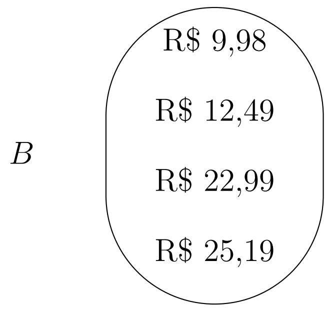
$$B = \{x \ / \ x \text{ é preço do Kg do pão francês em seu Bairro}\}.$$

C – Conjunto dos números naturais pares.

$$C = \{x \ / \ x \text{ é número natural par}\}.$$

3 - Diagrama de Venn: Consiste em descrever os elementos do conjunto dentro de uma figura plana fechada qualquer.

B – Conjunto de preços do pão francês em seu bairro (por Kg).



O conjunto vazio é um conjunto que não possui elementos. A sua representação é feita pelos seguintes símbolos: "$\emptyset$" ou "$\{\}$".

Exemplo: T = conjunto dos números naturais menores do que zero
$T = \emptyset$

Relação de Pertinência e Relação de Inclusão

Como já vimos anteriormente, as relações de pertinência relacionam elemento e conjunto, nesta ordem. Existem duas relações de pertinência:
$\in$ - pertence;
$\notin$ - não pertence.

Assim, usando os conjuntos citados acima, temos que:

$R\$22,99 \in B$
$455 \notin C$

As relações de Inclusão relacionam conjuntos. As relações de Inclusão são as seguintes:
$\subset$ - está contido

$\not\subset$ - não esta contido
$\supset$ - contém
$\not\supset$ - não contém

Dizemos que o conjunto A está contido no conjunto B quando todos os elementos de A também são elementos de B. Em símbolos:
$A \subset B \ : \ x \in A \to x \in B$

Dizemos que o conjunto A contém o conjunto B quando todos os elementos de B também são elementos de A. Em símbolos:
$A \supset B \ : \ x \in B \to x \in A$.
$A \subset B$: leia-se: "A está contido em B" ou"A é Subconjunto de B"
$A \supset B$: leia-se: "A contém B" ou "A é Conjunto Universo de B"

As seguintes propriedades das Relações de Inclusão são facilmente verificadas:

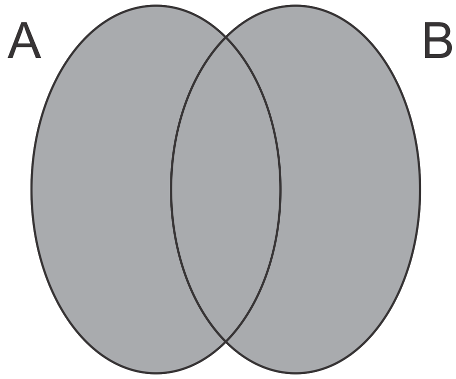
- $A \subset A$
- $A \supset A$
- $\emptyset \subset A$
- $A \supset \emptyset$
- Se $A \subset B$ e $B \subset A$ então $A = B$.

2.2 OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

A seguir definiremos as operações que podem ser realizadas entre conjuntos, que são elas: a União, Interseção e a Diferença. Sejam A e B dois conjuntos quaisquer.

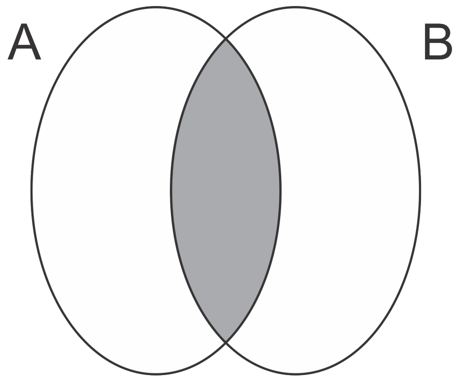
(I) (I) A união de A com B é o conjunto formado pelos elementos que estão em A ou em B e, denotamos por $A \cup B$.
$A \cup B = \{x; \ x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Dizer "$x \in A$ ou $x \in B$" significa que pelo menos uma dessas duas alternativas é verdadeira, mas não está excluída a possibilidade de que $x \in A$ e $x \in B$.
EXEMPLO: Dados os conjuntos:
$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ e
$B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$



Temos
$A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18\}$.

(II) A interseção entre os conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que estão em A e estão em B e, denotamos por $A \cap B$.
$A \cap B = \{x;\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$



EXEMPLO: Dados os conjuntos:
$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ e
$B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

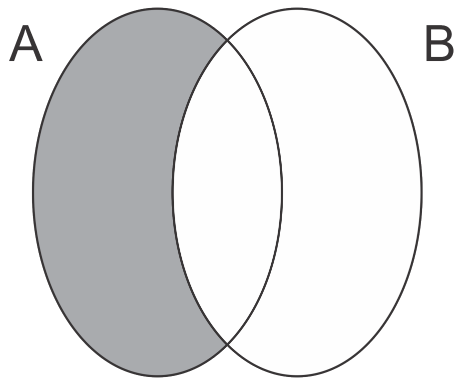
Temos
$A \cap B = \{0, 6, 12\}$.

(III) A diferença entre os conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que estão em A e não estão em B e, denotamos $A \setminus B$.
$A \setminus B = \{x;\ x \in A \text{ e } x \notin B\}$

EXEMPLO: Dados os conjuntos:

$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ e
$B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$.

Temos $A \setminus B = \{2, 4, 8, 10\}$.



2.3 PRODUTO CARTESIANO

O produto cartesiano de dois conjuntos A e B é o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y), onde "x" é um elemento de A e "y" é um elemento de B. Em símbolos:

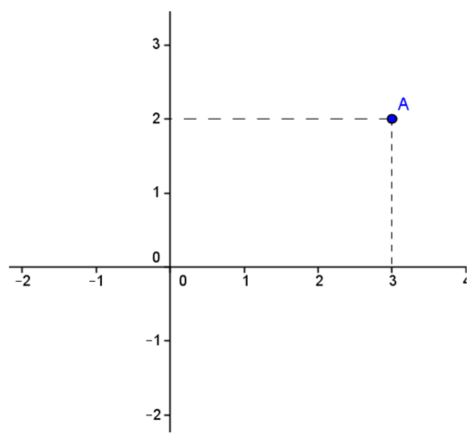
$A \times B = \{(x, y)\ /\ x \in A \text{ e } y \in B\}$

EXEMPLO: Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, então:

$A \times B = \{(a, 1); (a, 2); (a, 3); (b, 1); (b, 2); (b, 3); (c, 1); (c, 2); (c, 3)\}$

$B \times A = \{(1, a); (1, b); (1, c); (2, a); (2, b); (2, c); (3, a); (3, b); (3, c)\}$

Um exemplo importante de produto cartesiano é o $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjuno dos números reais, que será definido na seção 4.1. A sua representação geométrica mais usual é feita por dois eixos ortogonais (horizontal e vertical) e é chamado de plano cartesiano. No par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a primeira coordenada x é denotada por abscissa e a segunda coordenada é denotada por ordenada. No exemplo a seguir temos a representação do ponto $A = (3, 2)$.



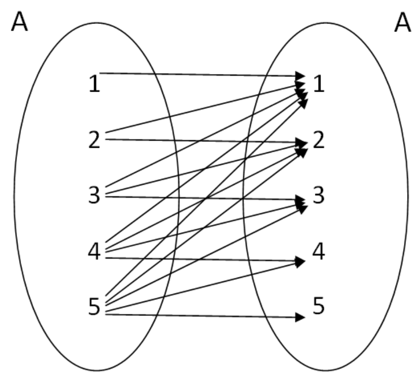
O plano cartesiano é uma ferramenta indispensável no estudo de gráficos de funções reais.

2.4 RELAÇÕES

Uma relação é um subconjunto do produto cartesiano. Em uma relação $A_R B \subset A \times B$, temos que:
A – domínio da relação
B – contra domínio da relação

Exemplo: Seja A $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$, e R uma relação definida da seguinte forma:

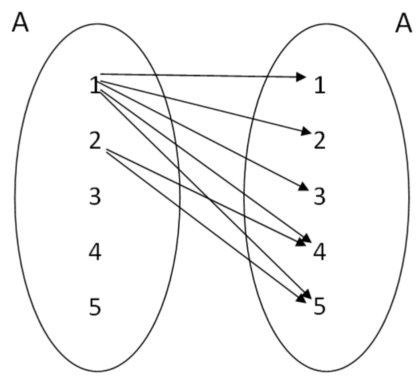
$$A_R A = \{(x, y) \in A \times A;\ y < x + 1\}$$



Usando o mesmo conjunto A acima, vamos definir uma relação S da seguinte forma:

$$A_S A = \{(x, y) \in A \times A;\ y \geq x^2\}$$

Vamos representar esta relação usando o diagrama de flechas:



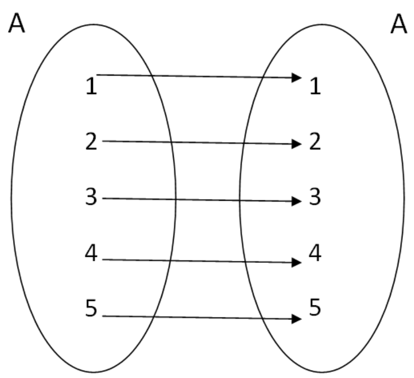
2.5 FUNÇÃO

Vamos apresentar a definição de função, que podemos dizer que é um dos conceitos mais importantes da Matemática. Uma função é uma relação f entre dois conjuntos X e Y, tal que a cada valor $x \in X$ está associado um, e somente um, valor $y \in Y$.

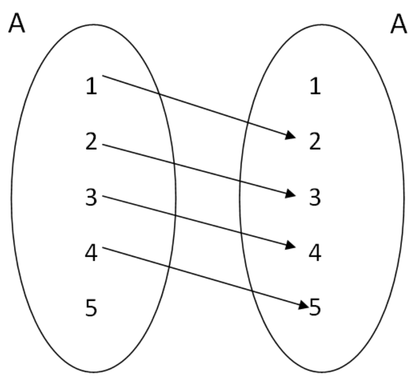
- A relação é expressa por $y = f(x)$.
- O conjunto de valores de x é dito domínio da função.
- As variáveis x e y são ditas, respectivamente, independente e dependente.

De outro modo, dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x\ E\ A$ existe um só $y\ E\ B$ tal que $(x, y) \in f$.

Exemplo: Seja A $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$, uma relação $f : A \to A$, definida por $f(x) = x$, é uma função:



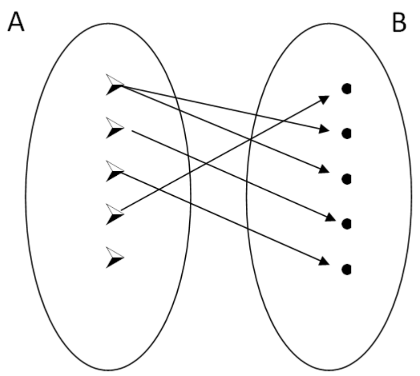
Já uma relação $g : A \to A$, definida por $g(x) = x + 1$ não é uma função, pois existe um elemento do domínio $(x = 5)$ que não faz parte da relação



A relação acima não representa uma função

2.6 FUNÇÃO INJETORA, SOBREJETORA E BIJETORA

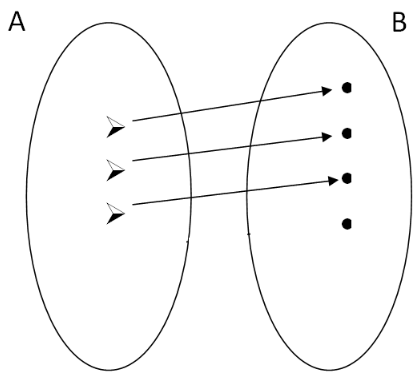
A seguir apresentaremos a classificação de uma função como injetora, sobrejetora ou bijetora.



2.6.1 Função Injetora

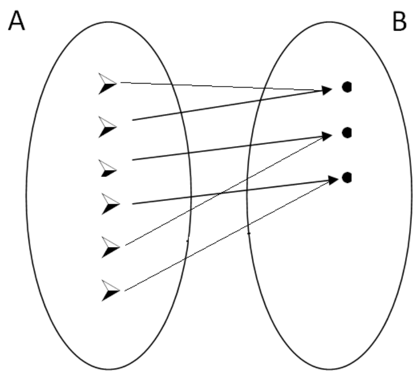
Uma função f de A em B é injetora quando para quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in A$,com $x_1 \neq x_2$, temos que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

De modo equivalente, f é injetora se $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$



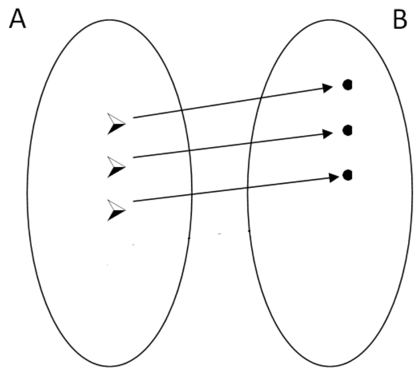
2.6.2 Função Sobrejetora

Uma função f de A em B é sobrejetora se, e somente se, para todo y pertencente a B existe um elemento x pertencente a A tal que $f(x) = y$.



2.6.3 Função Bijetora

Uma função f de A em B é bijetora se, e somente se, para qualquer elemento y pertencente a B existe um único elemento x pertencente a A tal que $f(x) = y$.



3 CONJUNTOS ENUMERÁVEIS

Neste capítulo iremos definir conjuntos enumeráveis. Um conjunto é enumerável quando possui uma bijeção com um subconjunto de $\mathbb{N}$. Veremos o caso finito e o caso infinito.

Um conjunto infinito é enumerável quando é possível indexar os seus elementos com os números naturais. Um conjunto X diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to X$. Nesse último caso, X é também chamado de um conjunto infinito enumerável. Veremos na sequênia detalhes destes conceitos.

3.1 MÉTODO DE CONTAGEM (CASO FINITO)

Para lidarmos com a contagem de conjuntos finitos, vamos introduzir uma notação para o subconjunto formado pelos "n" menores números naturais positivos.
$I_n = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, n\}$

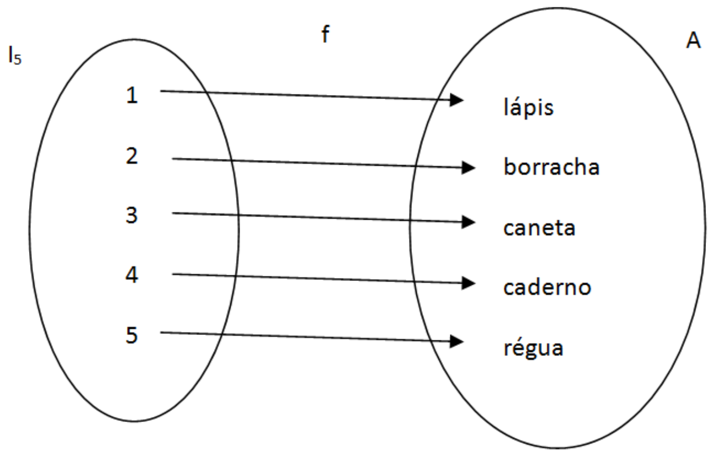
Dizemos que um conjunto K tem n elementos se existe uma bijeção de K com algum I_n.

Exemplo:

Conjunto A: Lista de Materiais escolares básicos do João

$A = \{$lápis, borracha, caneta, caderno, régua$\}$

Existe uma bijeção entre A e I_5, como podemos ilustrar abaixo:



Dizemos que f é uma contagem de A, e o conjunto A possui 5 elementos. Nesta contagem específica, o elemento "caneta" foi o terceiro elemento de A a ser contado.

Algumas propriedades podem ser facilmente verificadas:

(i) Se A é finito e $B \subset A$, $B \neq \emptyset$, então B é finito e $n(B) \leq n(A)$, onde $n(A)$ é o número de elementos do conjunto A.

(ii) Seja $A = B \cup C$ com $B \cap C = \emptyset$, $B, C \neq \emptyset$. Vale: A é finito se, e somente se, B e C são finitos. Neste caso: $n(A) = n(B) + n(C)$.

O leitor é convidado a enunciar e justificar outras propriedades para a contagem de conjuntos finitos.

3.2 CASO INFINITO

Os conjuntos infinitos têm muitas propriedades que são surpreendentes. Podemos mostrar que seus elementos podem ser colocados em relação biunívoca com os elementos de um de seus subconjuntos próprios. Cantor contribuiu muito para o estudo do infinito, esse foi conhecido como o pai da teoria dos conjuntos.

Um conjunto X é infinito quando não é finito, ou seja, quando não é vazio e quando não existe uma bijeção entre seus elementos e I_n para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Mesmo sendo infinitos, alguns destes conjuntos ainda são enumeráveis.

Seja X um conjunto enumerável e infinito, $\varphi : \mathbb{N} \to X$ uma bijeção
Colocando $\varphi(1) = x_1$; $\varphi(2) = x_2$; $\varphi(3) = x_3; \cdots$; $\varphi(n) = x_n$; $\cdots$ obtemos que $X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ Dizemos que φ é uma contagem dos elementos de X.

EXEMPLOS:

a) $X = \mathbb{N}$ é infinito e enumerável. Basta considerarmos $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, com $\varphi(n) = n$;

b) $X = 2\mathbb{N} + 1 = \{1, 3, 5, 7, \cdots\}$, o conjuntos dos números naturais ímpares.
Podemos tomar $\varphi : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N} + 1$, com $\varphi(n) = 2n + 1$;

$\varphi(0) = 1,\ \varphi(1) = 3,\ \varphi(2) = 5,\ \varphi(3) = 7,\ \varphi(4) = 9,\ \cdots$

c) $X = 2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \cdots\}$ Os números naturais pares são enumeráveis Podemos tomar $\varphi : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, com $\varphi(n) = 2n$;
$\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 2,\ \varphi(2) = 4,\ \varphi(3) = 6,\ \varphi(4) = 8, \cdots$

Mais geralmente, se X é infinito e enumerável e $Y \subset X$ também é infinito, então Y é enumerável. De fato, se existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \to X$, bijeção, basta definir $\varphi : \mathbb{N} \to Y$ da seguinte forma:
$\varphi(1) = x_{p_1}$, onde $p_1 := \min\{k \in \mathbb{N};\ x_k \in Y\}$, em que *min* é o menor dos elementos do conjunto.

Uma vez definidas $\varphi(1),\ \varphi(2),\ \varphi(3),\ \cdots,\ \varphi(n)$, façamos $\varphi(n+1) = x_{p_{n+1}}$, onde $p_{n+1} := \min\{k \in \mathbb{N};\ x_k \in Y \setminus \{x_{p_1},\ x_{p_2},\ x_{p_3}, \cdots,\ x_{p_n}\}\}$

Se X e Y são enumeráveis, então $X \cup Y$ é enumerável. De fato, tratemos o caso em que X e Y são infinitos e enumeráveis e denote:

$X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3, \cdots\}$,

Vamos definir $\varphi : \mathbb{N} \to X \cup Y$ com $\varphi(2n) = x_n$ e $\varphi(2n+1) = y_n$

Com este argumento, estabelemos bijeção entre $\mathbb{N}$ e $X \cup Y$.

Exemplos:

a) $\mathbb{Z}$ é enumerável

Usando o fato de que união de enumeráveis é enumerável, vamos definir a seguinte bijeção:

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \varphi(2n) = n \\ \varphi(2n+1) = -n-1 \end{cases}$$

$\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = -1,\ \varphi(2) = 1,\ \varphi(3) = -2,\ \varphi(4) = 2,\ \varphi(5) = -3,\ \varphi(6) = 3,\ \varphi(7) = -4,\ \varphi(8) = 4, \cdots$

b) $\mathbb{Q}$ é enumerável:

O conjunto dos números racionais pode ser definido da seguinte forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$$

Ou seja, as frações formadas por números inteiros, com o denominador não nulo.

Neste exemplo, iremos estabelecer uma bijeção (desconsiderando - se as frações equivalentes) entre o conjunto dos números naturais não nulos e o conjunto dos números racionais positivos. Esta bijeção pode ser feita a partir da seguinte construção apresentada abaixo:

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	...
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{9}$	...
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{9}$	...
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{9}$	...
(...)	(...)	(...)	(...)	(...)	(...)	(...)	(...)	(...)	(...)

$\varphi(1) = \frac{1}{1}$, $\varphi(2) = \frac{1}{2}$, $\varphi(3) = \frac{2}{1}$, $\varphi(4) = \frac{1}{3}$, $\varphi(5) = \frac{2}{2}$, $\varphi(6) = \frac{3}{1}$, $\varphi(7) = \frac{1}{4}$, $\varphi(8) = \frac{2}{3}, \cdots$

Utilizando a mesma construção com $\mathbb{Q}_-$, temos que: $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$ é um conjunto enumerável (pois é uma união de conjuntos enumeráveis)

Outra justificativa de que $\mathbb{Q}$ é enumerável:

Podemos observar que o conjunto dos números racionais é enumerável a partir do seguinte argumento:

Sabemos que o conjunto dos números primos $P = \{p \in \mathbb{N};\ p \text{ é primo}\}$ é enumerável, pois é um subconjunto de $\mathbb{N}$. Vamos provar que o conjunto dos números primos é infinito.

Suponha que o conjunto dos números primos $P = \{p \in \mathbb{N};\ p\, \text{é primo}\}$ é finito e denotemos $P = \{p_1,\ p_2,\ p_3, \cdots,\ p_n\}$ uma enumeração de P . Observe agora que $p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ não é divisível por nenhum dos números $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$, (pois $p : p_k$ tem resto 1). Logo p também é primo e $p \notin P$, pois $p > p_k$ para todo $k = 1, 2, 3, \cdots, n$, isto é uma contradição.

Como $P \subset \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$ são enumeráveis, temos que P é um conjunto infinito e enumerável. Denotemos $P = \{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n, \cdots\}$ com esta enumeração. A partir daí, podemos demonstrar que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Basta considerar $\mathbb{Q}_+ = \left\{\frac{m}{n};\ (m,n) = 1,\ m, n \in \mathbb{N}\right\}$, onde (m, n) significa mdc (máximo divisor comum entre) m e n e $(m, n) = 1$ quer dizer que m e n são primos entre si.

Vamos definir $\begin{cases} \varphi : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N} \\ \dfrac{m}{n} \to (p_n)^m, \quad \text{onde } p_n \text{ é um primo na enumeração de } P \end{cases}$

Por exemplo $\varphi\left(\dfrac{7}{2}\right) = 2^7$

φ é injetora, logo existe bijeção entre $\mathbb{Q}_+$ e um subconjunto de $\mathbb{N}$. Em particular, $\mathbb{Q}_+$ é enumerável. Como $\mathbb{Q}_+$ possui bijeção com $\mathbb{Q}_-$, temos que $\mathbb{Q}_-$ também é enumerável. Então $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup Q_- \cup \{0\}$ é enumerável (pois é uma união de conjuntos enumeráveis).

Ainda que enumerável, não existe uma enumeração ordenada:

$$\mathbb{Q} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\},\ \text{onde } x_i < x_{i+1}, \text{para } i = 1, 2, 3, \ldots$$

Isso ocorre, pois não existem dois números racionais consecutivos. Sempre é possível encontrar um número racional entre dois números racionais dados.

Sejam $\dfrac{m}{n}, \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, tais que $\dfrac{m}{n} < \dfrac{p}{q}$

Temos que $\dfrac{m}{n} < \dfrac{\dfrac{m}{n} + \dfrac{p}{q}}{2} < \dfrac{p}{q}$ e $\dfrac{\dfrac{m}{n} + \dfrac{p}{q}}{2} = \dfrac{qm + pn}{2qn} \in \mathbb{Q}$

A melhor maneira de ordenar os números racionais é observar a sua representação decimal. Para tanto, devemos considerar cada representação fracionária dos racionais como uma divisão de números inteiros. Vamos recordar que um número decimal é um número da forma $a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots$, onde $a \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Note que $a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots = a + \dfrac{\alpha_1}{10} + \dfrac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \dfrac{\alpha_n}{10^n} + \ldots$.

EXEMPLOS:

$$\frac{1}{1} = 1; \quad \frac{2}{3} = 0,6666\ldots; \quad \frac{5}{4} = 1,25; \quad -\frac{3}{2} = -1,5; \quad -\frac{8}{9} = -0,8888\ldots$$

Realizando divisão entre números inteiros, obtemos três tipos de resultados:

(i) Número Inteiro;

(ii) Número com finitas casas decimais;

(iii) Número com dízima periódica (infinitas casas decimais, com repetição).

Podemos também converter um decimal (i, ii ou iii) para a forma fracionária:

Número inteiro: basta representar o número em forma de fração com denominador 1.

EXEMPLOS:

$$1 = \frac{1}{1}; \quad 7 = \frac{7}{1}; \quad 19 = \frac{19}{1}$$

Em geral $\dfrac{m}{n}$, onde m é múltiplo de n, ou seja: $m = kn$.

Para representar um número racional, não inteiro com finitas casas decimais, devemos seguir o seguinte procedimento:

Exemplo: Vamos denotar o número $25,28$ na forma fracionária:

$$25,28 = 25 + \frac{2}{10} + \frac{8}{100} = \frac{25.100 + 2.10 + 8}{100} = \frac{2500 + 20 + 8}{100} = \frac{2528}{10^2}.$$

De um modo geral, temos que:

$q = a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n$ $a \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$

Podemos reescrever

$q = a + \dfrac{\alpha_1}{10} + \dfrac{\alpha_2}{100} + \dfrac{\alpha_3}{1000} + \ldots + \dfrac{\alpha_n}{10^n}$. Assim,

$q = \dfrac{10^n.a + 10^{n-1}.\alpha_1 + 10^{n-2}.\alpha_2 + 10^{n-3}.\alpha_3 + \ldots + 10^p.\alpha_{n-p} \ldots + 10^1.\alpha_{n-1} + \alpha_n}{10^n}$, ou ainda,

$$q = \frac{a\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n}{10^n}$$

Em resumo: representamos uma fração com o número decimal escrito no numerador (sem vírgula),e o denominador como uma potência de dez com expoente igual ao número de casas decimais (à direita da vírgula)

EXEMPLOS

a) $1,25 = \dfrac{125}{10^2} = \dfrac{125}{100} = \dfrac{5}{4}$

b) $-3,275 = -\dfrac{3275}{10^3} = -\dfrac{3275}{1000} = -\dfrac{131}{40}$

c) $-14,6 = -\dfrac{146}{10^1} = -\dfrac{146}{10} = -\dfrac{73}{5}$

d) $0,0059 = \dfrac{59}{10^4} = \dfrac{59}{10000}$

Número com dízima periódica: primeiramente, devemos equacionar a parte decimal infinita, transformando–a em uma fração. Vamos ilustrar com exemplos numéricos. Vamos considerar inicialmente o caso da dízima periódica e posteriormente consideraremos o caso geral:

Considere $x = 0,111\ldots = 0,\overline{1}$. Logo temos:
$10x = 1,111\ldots$. Segue daí que
$10x = 1 + 0,111\ldots$ e portanto,
$10x = 1 + x$. Ou seja,
$9x = 1$. Obtendo a representação fracionária:
$x = \dfrac{1}{9}$.

Logo, $0,111\ldots = 0,\overline{1} = \frac{1}{9}$

Analogamente, conseguimos verificar que:

$0,222\ldots = 0,\overline{2} = \frac{2}{9}$;

$0,333\ldots = 0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$;

$0,121212\ldots = 0,\overline{12} = \frac{12}{99}$;

$0,234234234\ldots = 0,\overline{234} = \frac{234}{999}$;

$0,123412341234\ldots = 0,\overline{1234} = \frac{1234}{9999}$;

Considerando que toda dízima periódica possui representação similar a indicada acima, qualquer número que possui dizima periódica pode ser expresso como a soma da parte finita com a parte periódica.

Exemplo: Vamos expressar o número $x = 5,777\ldots = 5,\overline{7}$ na forma fracionária:
$x = 5 + 0,777\ldots$ pelo já considerado,
$x = 5 + \frac{7}{9}$ ou equivalentemente,
$x = \frac{52}{9}$.
Logo, $5,777\ldots = 5,\overline{7} = \frac{52}{9}$

Exemplo: Vamos expressar o número $x = 3,21\overline{453}$ na forma fracionária:
$x = 3 + 0,21\overline{453}$
$x = 3 + 0,21 + 0,00\overline{453}$
$x = 3 + \frac{21}{100} + \frac{453}{99900}$, ou equivalentemente
$x = \frac{321132}{99900}$.

Na subseção 5.1.1, veremos outra forma de obter uma fração geratriz, a partir de uma soma de P.G. infinita.

De um modo geral, se $x = a,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\overline{\beta_1\beta_2\ldots\beta_j}$ é um número com dízima periódica, temos que:

$10^k x = a.10^k + b + 0,\overline{\beta_1\beta_2\ldots\beta_j}$ onde $b = \alpha_1.10^{k-1} + \alpha_2.10^{k-2} + \ldots + \alpha_k$

Sabemos que: $0,\overline{\beta_1\beta_2\ldots\beta_j} = \dfrac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_j}{10^{j-1}} = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

Assim $x = a + \frac{b}{10^k} + \frac{m}{10^k.n}$ é uma soma de frações e x pode ser expresso como uma fração e fica provado que:

Teorema 3.2.1. *Um número é racional, se e somente se, sua representação decimal é finita ou periódica.*

4 CONJUNTOS NÃO ENUMERÁVEIS

Um conjunto infinito em que não é possível estabelecer uma bijeção com o conjunto dos números naturais é um conjunto não enumerável, ou seja, um conjunto infinito é não enumerável quando não é possível indexar os seus elementos com os números naturais. Em geral conseguimos estabelecer uma função injetora não sobrejetora, se considerarmos o conjunto dos números naturais como domínio. Veremos exemplos conhecidos de conjuntos não enumeráveis é o conjunto dos números irracionais e o conjunto dos números reais.

4.1 O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Existem várias maneiras alternativas para apresentar o conjunto dos números reais. Uma delas é a seguinte: O conjunto dos números reais é o conjunto formado por todas as representações decimais possíveis.

Também podemos dizer que o conjunto dos números reais pode designar a união do conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais. Recorde que o conjunto dos números racionais contém os seguintes subconjuntos:

Números Naturais $\mathbb{N}$: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, \ldots\}$
Números Inteiros $\mathbb{Z}$: $\{\ldots, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$
Números Racionais $\mathbb{Q}$: $\left\{\frac{m}{n};\ m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\}$
Números Irracionais:$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
São exemplos de irracionais: $\sqrt{2}, \pi, \sqrt{p}$, p primo

4.2 REPRESENTAÇÃO DECIMAL DOS NÚMEROS REAIS

Nesta seção, iremos formalizar a representação do conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), bem como algumas características do conjunto e seus elementos. Concluiremos que $\mathbb{R}$ é um conjunto não enumerável e, consequentemente que o conjunto dos números irracionais também é um conjunto não enumerável.

Vamos definir o conjunto dos números reais da seguinte maneira:

$$\mathbb{R} = \{a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots\ /\ a \in \mathbb{Z} \text{ e } \alpha_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}\}$$

ou seja, um número real é constituído por uma parte inteira e uma representação decimal infinita.

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = a + a_1.10^{-1} + a_2.10^{-2} + a_3.10^{-3} + \ldots \text{ onde } a_j \in \{0, 1, 2 \ldots, 9\}.$$

Caso $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = 0$, temos um número inteiro;

$$x = a, 0000\ldots, \text{ ou seja } x = a$$

Caso $\alpha_{j+1} = \alpha_{j+2} = \alpha_{j+3} = \ldots = 0$ e $\alpha_j \neq 0$, temos um número racional não inteiro (com finitas casas decimais)

$$x = a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_j 0000\ldots$$

Em particular, podemos escrever todos os números racionais na forma decimal com dízima periódica na sua representação:

O caso em que x é inteiro: $x = a$
$x = (a-1), 9999\ldots$ ou $x = a, 000\ldots$

O caso em que x é racional com representação decimal finita, vale: $x = a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_j 0000\ldots$, ou ainda,
$x = a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots(\alpha_j - 1)9999\ldots$

Agora iremos representar os números reais:

$x = a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_j\ldots$

Qualquer número real pode ser aproximado com a precisão desejada, por um número racional. Para justificar isto, consideremos $x = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots \in [0,1]$.

$x \in \mathbb{R}, \exists\ x_0, y_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x_0 < x < y_0$ e $y_0 - x_0 < 10^{-n}$

Como a é um número inteiro, vamos dar ênfase aos números reais compreendidos entre 0 e 1.

$[0,1]: \ \{0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_i \in \{0,1,2,3,\ldots,9\},\ i \in \mathbb{N}\}$

$= \left\{\frac{\alpha_1}{10^1} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \ldots \ / \ \alpha_i \in \{0,1,2,3,\ldots,9\},\ i \in \mathbb{N}\right\}$

Se $x \in [0,1] \Rightarrow x_0 = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n \leq x \leq y_0 = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n 999\ldots$

Com x_0 e y_0 obtidos desta forma temos que: $\max\{x - x_0, , y_0 - x\} \leq y_0 - x_0 = \dfrac{9}{10^{n+1}} + \dfrac{9}{10^{n+2}} + \dfrac{9}{10^{n+3}} + \ldots = \frac{1}{10^n}$
Ou seja, quanto maior o valor de n, a desigualdade $x_0 < x < y_0$ tende para uma igualdade.

Chamamos de irracional um número real que não é racional. Vamos denotar por $\mathbb{I}$ o conjunto dos números irracionais. Assim, $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou ainda $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ com $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$. Vamos apresentar o primeiro exemplo de conjunto não enumerável, o conjunto dos números reais.

Vamos supor que o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1\}$ seja enumerável. Assim, existe uma função bijetora $\varphi : \mathbb{N} \to X$.
Denotemos por:

$\varphi(1) = 0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15} \dots \alpha_{1n} \dots$

$\varphi(2) = 0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\alpha_{24}\alpha_{25} \dots \alpha_{2n} \dots$

$\varphi(3) = 0, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\alpha_{34}\alpha_{35} \dots \alpha_{3n} \dots$

$\varphi(4) = 0, \alpha_{41}\alpha_{42}\alpha_{43}\alpha_{44}\alpha_{45} \dots \alpha_{4n} \dots$

$\varphi(5) = 0, \alpha_{51}\alpha_{52}\alpha_{53}\alpha_{54}\alpha_{55} \dots \alpha_{5n} \dots$

$(\dots)$

Em que $a_{ij} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ e esta lista esgota a relação de todos os números reais no intervalo $[0, 1]$, por ser uma bijeção.

No entanto, vamos exibir um decimal $x \in [0, 1]$ que não está na listagem acima. Considere $x = 0, \beta_1\beta_2\beta_3 \dots \beta_n \dots$ onde os dígitos $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ e satisfazem $\beta_1 \neq \alpha_{11},\ \beta_2 \neq \alpha_{22},\ \beta_3 \neq \alpha_{33},\ \beta_4 \neq \alpha_{44}, \dots,\ \beta_n \neq \alpha_{nn}$. Temos que $x \in X$ e $x \notin Im(\varphi)$, isto é um absurdo. Assim não é possível estabelecer uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e X, então X é não enumerável.

Em particular, como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, a união de dois enumeráveis é um conjunto enumerável, e $\mathbb{Q}$ é enumerável, concluímos que $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não é enumerável, visto que acabamos de verificar que $\mathbb{R}$ é não enumerável.

5 APLICAÇÕES

Neste capítulo iremos expor algumas aplicações que podem ser utilizadas no ensino básico que envolvem o infinito. Trataremos aqui sobre a soma de P.G. infinita, expor algumas funções que podem ser representadas como somas infinitas e o número π.

5.1 P.G. infinita

Seja: $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ uma sequência de termos não nulos tal que: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$
Uma sequência com esta propriedade é chamada de Progressão Geométrica (P.G.) de razão q e primeiro termo a_1. Note que

$a_2 = a_1.q$
$a_3 = a_2.q \ \Rightarrow \ a_3 = a_1.q.q \ \Rightarrow \ a_3 = a_1.q^2$

e de modo mais geral

$a_n = a_1.q^{n-1}$ onde $n \in \mathbb{N}$, é o termo geral da P.G.

A soma dos termos de uma P.G. é dada da seguinte forma:
Denotando

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n \tag{5.1}$$

e multiplicando a equação (5.1) por q, temos:

$$q.S_n = q.(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n) = a_1.q + a_2.q + a_3.q + a_4.q + \ldots + a_n.q$$

portanto,

$$q.S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + q.a_n \tag{5.2}$$

Fazendo (5.2) - (5.1), temos:
$q.S_n - S_n = q.a_n - a_1$

$q.S_n - S_n = q.a_1.q^{n-1} - a_1$

$q.S_n - S_n = a_1.q^n - a_1$

Colocando S_n e a_1 em evidência,

$$S_n.(q-1) = a_1.(q^n - 1) \text{ e concluímos que } S_n = \frac{a_1.(q^n-1)}{(q-1)} \tag{5.3}$$

EXEMPLO: Vamos calcular a soma dos 10 primeiros termos da sequência: $(3, 6, 12, \ldots)$

Note que temos uma P.G. onde $a_1 = 3$ e a razão $q = 2$. Logo por (5.3):

$S_{10} = \dfrac{3.(2^{10}-1)}{(2-1)} = 3069.$

5.1.1 Soma dos infinitos termos de uma P.G.

Considere uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ e denotemos por $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ a soma de todos os termos da P.G..

Para que possa ser realizada a soma dos infinitos termos de uma P.G., é necessário que $|q| < 1$. De fato, se $|q| \geq 1$ é fácil ver que S_n aumenta indefinidamente com o valor de n e no caso $|q| < 1$ temos a seguinte desigualdade:

$|q| > |q|^2 > \ldots > |q|^n > \ldots$ onde o termo q^n se aproxima cada vez mais de zero a medida que aumentamos o valor de n.

Com esta observação, podemos calcular a soma dos infinitos termos de uma P.G. com $|q| < 1$. Temos que:

$S_n = \dfrac{a_1.(q^n-1)}{(q-1)} = \dfrac{a_1}{(1-q)} + \left[\dfrac{a_1}{(1-q)}.q^n\right]$

Pela observação acima, quando n tende ao infinito q^n tende a zero e, portanto a 2ª parcela na expressão anterior tende a zero, e podemos escrever:

$S = \dfrac{a_1}{(1-q)}$

Exemplos:

(a) A seguinte soma infinita: $S = 10 + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \ldots$, possui um resultado finito. Vemos que a sequência: $\left(10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \ldots\right)$ é uma P.G. com $a_1 = 10$ e $q = \frac{1}{2}$, então:

$S_n = \dfrac{10}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \dfrac{10}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 20$

Mesmo com infinitas parcelas, a soma proposta possui resultado igual a 20.

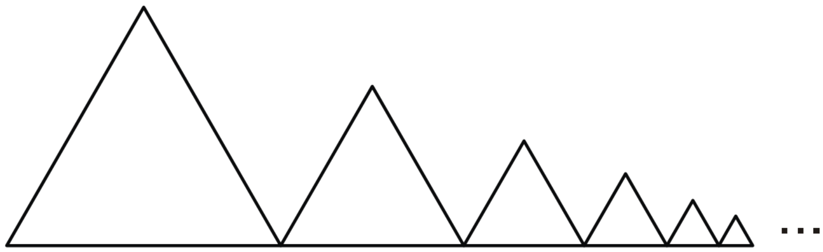
(b) Vamos obter a fração geratriz do seguinte número com dízima periódica: $2,535353\ldots = 2,\overline{53}$

$2,535353\ldots = 2 + 0,535353\ldots$

$$2,535353\ldots = 2 + \frac{53}{100} + \frac{53}{10000} + \frac{53}{10^6} + \frac{53}{10^8} + \ldots$$

Temos uma P.G. infinita com $a_1 = \frac{53}{100}$ e $q = \frac{1}{100}$.
Assim, $2,535353\ldots = 2 + \dfrac{\frac{53}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 2 + \dfrac{\frac{53}{100}}{\frac{99}{100}} = \dfrac{251}{99}$

(c) A sequência representada, na figura abaixo, é formada por infinitos triângulos equiláteros. O lado do primeiro triângulo mede 1 e a medida do lado de cada um dos outros triângulos é $\frac{2}{3}$ da medida do lado do triângulo imediatamente anterior.



A soma dos perímetros dos triângulos dessa sequência infinita é:
O perímetro do primeiro triângulo é igual a 3, o perímetro do segundo triângulo é igual a 2 , o perímetro do 3º é igual a $\frac{4}{3}$, e assim por diante. Podemos observar que a sequência formada por estes perímetros $\left(3, 2, \frac{4}{3}, \ldots\right)$ forma uma progressão geométrica em que $a_1 = 3$ e $q = \frac{2}{3}$.

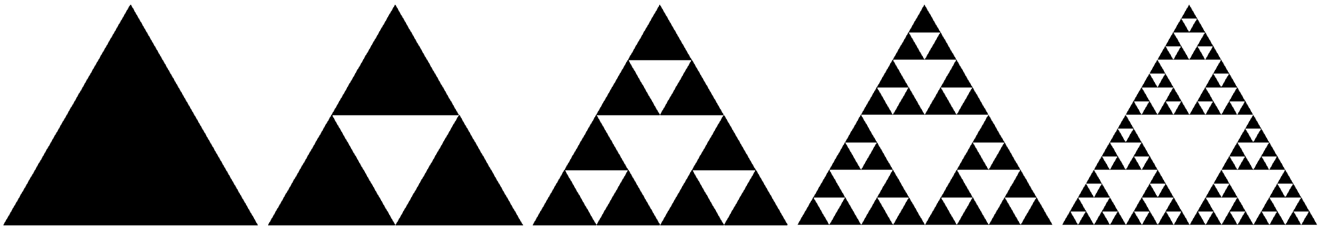
Realizando esta soma, temos:
$S = 3 + 2 + \dfrac{4}{3} + \ldots = \dfrac{3}{1 - \frac{2}{3}} = 9$
Assim, a soma dos perímetros dos infinitos triângulos propostos no problema é igual a 9.

Fica como exercício a cargo do leitor o cálculo da soma das áreas destes triângulos.

EXEMPLO: O Triângulo de Sierpinski

Calcule a soma das áreas de todas as figuras formadas abaixo, obedecendo a ordem da sequência , sabendo que primeira figura é um triângulo equilátero de área A:

Observamos que as áreas das figuras formam uma P.G. em que: $a_1 = A$ e $q = \frac{3}{4}$
Assim, temos:



$S = A + \frac{3}{4}.A + \frac{9}{16}.A + \dots$

$S = \frac{A}{1-\frac{3}{4}} = 4A$

EXEMPLO: Os termos da série harmônica, expressos por $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$ também tendem a zero quando aumentamos indefinidamente o valor de n, porém a sua soma infinita $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ tende ao infinito.

De fato,

$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

$S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} \dots + \frac{1}{2^k}\right) \dots$

$> 1 + \frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} + 4.\frac{1}{8} + \dots + 2^{k-1}\frac{1}{2^k} + \dots \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots \geq 1 + \frac{k}{2}$

Como $k \in \mathbb{N}$ é arbritário, temos o resultado tendendo para o infinito.

5.2 FUNÇÕES REPRESENTADAS POR SOMAS INFINITAS

Muitas funções usadas na Matemática, Física e Química são definidas como somas infinitas. Embora tais somas exijam um estudo mais aprofundado, pretendemos aqui apenas apresentar alguns destes resultados, para que os leitores possam despertar maior interesse sobre o assunto e entender a sua importância. Um leitor que estiver mais interessado e quiser se aprofundar sobre o tema, buscando as respectivas demonstrações dos resultados aqui apresentados, podem ler THOMAS, (p. 71).

Representação da função $f(x) = sen\ x, x \in \mathbb{R}$

A função seno tem a sua representação como uma soma infinita abaixo:

$$sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

Obs.: o valor de x na soma acima deve ser apresentado em radianos

Vamos comparar alguns valores obtidos usando a aproximação: $sen\ x \cong x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$,

x	$sen\ x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$	erro
0	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,1	0,0998334	0,0998334	0,0000000
0,2	0,1986693	0,1986693	0,0000000
0,3	0,2955202	0,2955203	0,0000000
0,4	0,3894183	0,3894187	0,0000003
0,5	0,4794255	0,4794271	0,0000015
0,6	0,5646425	0,5646480	0,0000055
0,7	0,6442177	0,6442339	0,0000162
0,8	0,7173561	0,7173973	0,0000412
0,9	0,7833269	0,7834208	0,0000938
1	0,8414710	0,8416667	0,0001957
1,1	0,8912074	0,8915876	0,0003802
1,2	0,9320391	0,9327360	0,0006969
1,3	0,9635582	0,9647744	0,0012162
1,4	0,9854497	0,9874853	0,0020356
1,5	0,9974950	1,0007813	0,0032863

A coluna de erro representa a diferença entre a aproximação e o valor da função até a sétima casa decimal.

Vemos que a diferença entre os valores reais da função e os valores obtidos a partir da aproximação aumenta à medida que o valor de x aumenta. Para reduzir esta diferença, devemos aumentar a quantidade de parcelas na aproximação, visto que o valor exato seria obtido com uma soma infinita.

Vamos analisar os mesmos valores utilizando uma aproximação com mais parcelas, com a seguinte aproximação: $sen\ x \cong x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$, lembrando que os valores serão exatamente os mesmos quando utilizarmos a soma infinita e, que quanto mais parcelas da expressão utilizarmos, maior a aproximação com a referida função.

x	$sen\ x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$	erro
0	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,1	0,0998334	0,0998334	0,0000000
0,2	0,1986693	0,1986693	0,0000000
0,3	0,2955202	0,2955202	0,0000000
0,4	0,3894183	0,3894183	0,0000000
0,5	0,4794255	0,4794255	0,0000000
0,6	0,5646425	0,5646425	0,0000000
0,7	0,6442177	0,6442177	0,0000000
0,8	0,7173561	0,7173561	0,0000000
0,9	0,7833269	0,7833269	0,0000000
1	0,8414710	0,8414710	0,0000000
1,1	0,8912074	0,8912074	0,0000001
1,2	0,9320391	0,9320393	0,0000002
1,3	0,9635582	0,9635586	0,0000004
1,4	0,9854497	0,9854507	0,0000010
1,5	0,9974950	0,9974971	0,0000021

Outros exemplos funções que podem ser representadas por somas infinitas: THOMAS, (p. 71).

$f(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$ (se $|x| < 1$)

$f(x) = \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots + x^n + \ldots$ (se $|x| < 1$)

$f(x) = cos\ x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} + \ldots + (-1)^n . \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$

$f(x) = e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$

$f(x) = \ln(x) = (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3} - \dfrac{(x-1)^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{(x-1)^n}{n} + \ldots$
(se $0 < x \leq 2$)

Em particular, temos que:

$ln(2) = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \ldots$ (série harmônica alternada).

5.3 O NÚMERO π

Nesta seção iremos tratar de um dos números irracionais mais comuns no ensino básico (fundamental e médio), o número π.

5.3.1 O PROCESSO DE OBTENÇÃO DE π

Por definição π é a razão entre o comprimento de um círculo e seu diâmetro. Historicamente é usado desde a Antiguidade, com valor aproximado de 3 na Babilônia Antiga (2000 a.C. – 1600 a.C.) e também em versículos da Bíblia (Reis, I, 7: 23 e Crônicas, II, 4: 2).

Temos abaixo algumas estimativas históricas do valor de π.

No papiro de Rhind, um texto egípcio (1650 a. C.) que contém alguns problemas descritos, existe uma aproximação $\pi = (4/3)^4 = 3,1604\ldots$

Por volta de 240 a.C., Arquimedes concluiu que π está entre 223/71 e 22/7, utilizando o método clássico de cálculo de π, que verificaremos posteriormente.

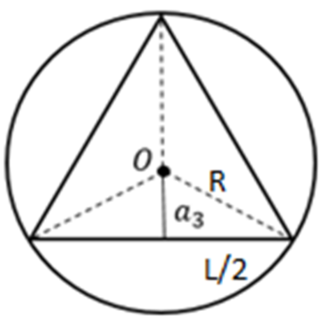
Ptolomeu encontrou um valor aproximado para π de 377/120 = 3,1416, em seu trabalho de astronomia, o Almagesto.

O matemático hindu Bháskara utilizou algumas aproximações para π. Chamou 3927/1250 de valor acurado, 22/7 de valor impreciso e $\sqrt{10}$ para trabalhos corriqueiros.

5.3.2 Método clássico para a obtenção π

O método clássico de obtenção de π consiste em aproximar o valor de uma circunferência (digamos de raio R) por polígonos regulares com uma quantidade cada vez maior de lados. Vamos observar alguns casos:

Aproximando a circunferência por um triângulo equilátero (de lado L), temos:
a_3 – apótema do triângulo equilátero.



O ângulo formado entre o lado que mede R e o lado que mede a_3 é igual a 60º e o ângulo formado entre os lados que medem a_3 e $(L/2)$ formam o ângulo reto. Assim:

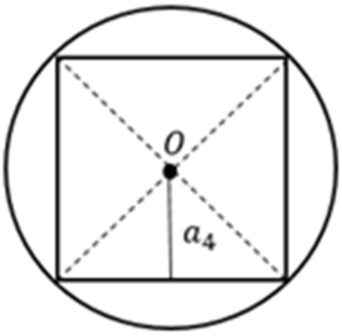
$\frac{\frac{L}{2}}{R} = sen\ 60^o$

$sen\ 60^o = \frac{L}{2R}$, o que resulta em

$L = R.\sqrt{3}$

Logo, o perímetro deste polígono é $P_3 = 3.R.\sqrt{3}$ (aproximadamente $5,19R$)

Analogamente conseguimos fazer um procedimento similar com o quadrado e o hexágono regular:

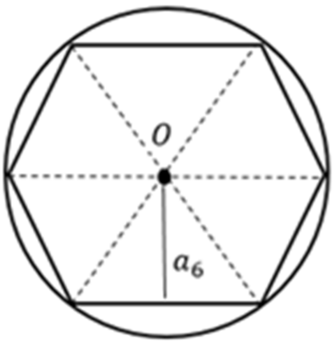


$\frac{\frac{L}{2}}{R} = sen\ 45^o$

$sen\ 45^o = \frac{L}{2R}$, o que resulta em

$L = R.\sqrt{2}$

Logo, o perímetro deste polígono é $P_4 = 4.R.\sqrt{2}$ (aproximadamente $5,65R$)



$\frac{\frac{L}{2}}{R} = sen\ 30^o$

$sen\ 30^o = \frac{L}{2R}$

$L = R$

Logo, o perímetro deste polígono é $P_6 = 6.R$
Generalizando (para o caso de um polígono de n lados), temos que o perímetro de um polígono regular é:

$$P_n = n.L = n.2.R.sen\ \left(\frac{180^o}{n}\right)^o$$

Com n sendo considerado cada vez maior, obtemos aproximações cada vez melhores para o comprimento da circunferência C.

$P_n \approx C$ e o valor de $\pi = \frac{C}{2R} \approx \frac{P_n}{2R} = n.sen\ \left(\frac{180}{n}\right)^o$. Assim:

Conforme aumentamos o valor de n , $n.sen\ (\frac{180}{n})^o$ tende a um valor constante de π.
Podemos ver abaixo algumas aproximações do valor de uma circunferência de raio 1:

lados	perímetro	Aproximação de π
3	5,19615242270663	2,59807621135332
4	5,65685424949238	2,82842712474619
5	5,87785252292473	2,93892626146237
6	6,00000000000000	3,00000000000000
7	6,07437234764581	3,03718617382291
8	6,12293491784144	3,06146745892072
9	6,15636257986204	3,07818128993102
10	6,18033988749895	3,09016994374947
100	6,28215181562566	3,14107590781283
1000	6,28317497175913	3,14158748587956
10000	6,28318520382533	3,14159260191267
100000	6,28318530614604	3,14159265307302
1000000	6,28318530716925	3,14159265358463
10000000	6,28318530717948	3,14159265358974
100000000	6,28318530717958	3,14159265358979
1000000000	6,28318530717959	3,14159265358979

Fazendo este procedimento infinitas vezes, encontramos o valor desta constante, que chamamos de π.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a pesquisa pode-se perceber a importância de fundamentar o infinito no ensino básico, levando em consideração que é possível se enganar a respeito do tema em várias situações.

É relevante pensar que muitas vezes não tem uma lógica ou não faz sentido, porém quando se compreende existem explicações concretas, este estudo fica mais descomplicado.

Diante disso, o professor deve atualizar–se e ter material para dar sustentação teórica à sua aula para que desta forma considere necessário passar a seus alunos o conceito correto do que é o infinito, entende-se que muitas vezes não existe um material bem preparado para que o professor possa transmitir ao aluno e fazer com que o mesmo tenha uma visão clara do tema, o que pode ser influenciado diariamente.

Este material tenta explorar a importância de trabalhar infinito no ensino básico (nas últimas séries do ensino fundamental II e no ensino médio) de uma forma sutil através de diversas situações onde o aluno se depara com o conceito abstrato de infinito, e não consegue formalizá–ló, até mesmo equivocando–se.

Não houve neste trabalho nenhuma pretensão de criar um novo conceito matemático, somente a intenção de relacionar o conceito de infinito com alguns conteúdos do currículo escolar que estão diretamente relacionados à seu surgimento, e deixar ao discente este material numa tentativa de melhor ampará–ló no momento de ensinar.

Portanto este material é apresentado como uma forma de respaldo ao professor, para que minimize a dificuldade de formalizar o conhecimento através do uso de questões que levem ao ensino da Matemática utilizando material acessível.

Quando tratamos o conhecimento sabemos que não existe saber pronto e acabado, no entanto houve aqui uma tentativa de relacionar alguns tópicos mais relevantes de conteúdos trabalhados rotineiramente em sala com o tema.

Os conceitos matemáticos aqui utilizados foram expostos de forma que um aluno com noções básicas de álgebra e aritmética consiga acompanhar o conteúdo proposto no texto sem muita dificuldade.

Referências

[1] ANDRADE, MARIA GORETE CARREIRA. **Um breve passeio ao infinito real de Cantor.** V Bienal da SBM. Paraíba, outubro de 2010.

[2] BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática.** São Paulo: Ed Edgard Blücher, 1974.

[3] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática/ Howard Eves**; Tradução: Hygino H. Domingues. – Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

[4] LIMA, Elon Lages. **Isometrias**. Publicação da SBM: 1996.

[5] LIMA, ELON LAGES. **A matemática do ensino médio – volume 1** - 9. ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2006. 237p.

[6] THOMAS, G. **Cálculo – Vol. 2**, 10ª edição. Editora Addison Wesley, 2005.