

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO TECNOLÓGICO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**ANDRÉ GUILHERME ALVES AMORIM**

**REDUÇÃO DE ORDEM DE UM MODELO DE UM VEÍCULO  
DE CARGA FERROVIÁRIO**

VITÓRIA  
2018

ANDRÉ GUILHERME ALVES AMORIM

**REDUÇÃO DE ORDEM DE UM MODELO DE UM VEÍCULO DE  
CARGA FERROVIÁRIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientadora:  
Prof. Dra. Jussara Farias Fardin

VITÓRIA  
2018

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de  
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

A524r Amorim, André Guilherme Alves, 1994-  
Redução de ordem de um modelo de um veículo de carga  
ferroviário / André Guilherme Alves Amorim. - 2018.  
109 f. : il.

Orientadora: Jussara Farias Fardin.  
Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) -  
Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Vagões. 2. Ferrovia. 3. Simulação veicular. 4. Redução de  
Ordem. 5. Modelagem. 6. Algoritmo Genético. I. Fardin,  
Jussara Farias. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro  
Tecnológico. III. Título.

CDU: 621.3

---

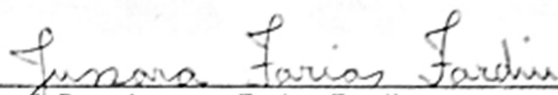
ANDRÉ GUILHERME ALVES AMORIM

REDUÇÃO DE ORDEM DE UM MODELO DE UM VEÍCULO DE  
CARGA FERROVIÁRIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 21 de Dezembro de 2018.

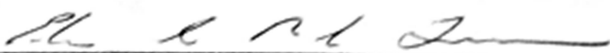
COMISSÃO EXAMINADORA:



Prof. Dra. Jussara Farias Fardin  
Departamento de Engenharia Elétrica  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Orientadora



Prof. Dr. Guilherme Fabiano Mendonça dos Santos  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Examinador



Prof. Dr. Ing. Edson de Paula Ferreira  
Departamento de Engenharia Elétrica  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Examinador



*“Quem pensa conhecer alguma coisa, ainda não conhece como deveria”*

*Bíblia Sagrada - I Coríntios 8:2*

*Dedico esse trabalho à quem dediquei minha vida, Jesus Cristo.*

## **AGRADECIMENTOS**

Sou grato a Deus, pois Ele me tem dado inspiração e perseverança.

Agradeço aos meus pais, Marcelo e Elvira, que são responsáveis por me tornarem o que sou hoje.

Ao meu irmão Arthur, pela amizade, companheirismo e orientação.

Às minhas avós, Eliza e Eni, pelo amparo fundamental em fases cruciais da vida.

Aos meus familiares, tios, tias e primos de perto e de longe.

À minha namorada, Júlia Helena, pelas orações e encorajamento nos momentos de angústia.

Aos meus amigos, que fizeram essa caminhada se tornar mais leve.

Aos colegas de mestrado que navegaram comigo nessa jornada rumo ao conhecimento.

Ao professor Flávio Gomes pelas ideias compartilhadas e auxílio na realização do artigo científico.

Ao professor Guilherme Santos pela grande ajuda com as simulações e todo conhecimento transmitido com generosidade e disponibilidade.

Ao professor José Leandro pelo conhecimento que me agregou, pela disponibilidade durante esse período e pela oportunidade.

À minha orientadora, professora Jussara, por toda compreensão e apoio nos momentos de necessidade.

À CAPES e ao PPGE pela bolsa de estudos e pelo suporte concedido.

## RESUMO

Na indústria ferroviária encontram-se diversas aplicações para modelagem de sistemas e simulação dinâmica de modelos. Em particular, no setor de transporte ferroviário é fundamental simular computacionalmente modelos dinâmicos verticais e laterais de veículos de carga para fins de projeto e de operação. Modelos que representam esse sistema envolvem uma grande quantidade de graus de liberdade, portanto, mais complexos computacionalmente e difíceis para implantação de sistemas de controle de suspensão ativos. Nesse contexto, o presente trabalho desenvolve um modelo linear da interação vagão via de 30 a fim de avaliar os efeitos da dinâmica veicular vertical e lateral. Propõe-se a simplificação desse modelo inicialmente por meio de técnicas de redução de ordem analíticas presentes na literatura. Essas técnicas usam transformações de similaridade para obtenção de realizações do sistema na forma balanceada e na forma modal com o intuito de priorizar os estados que mais contribuem para a resposta do modelo, eliminando os estados que menos contribuem para a resposta final por truncamento direto ou eliminando via perturbação singular (EPS). Posteriormente, aplica-se um algoritmo genético ao resultado das técnicas de redução de ordem analíticas, buscando otimizar os modelos reduzidos obtidos matematicamente. A comparação entre os modelos, completo e reduzidos, é baseada no Manual de padrões e práticas recomendadas da AAR (*American Association of Railroads*) seção C – parte II: *Design, Fabrication, and Construction of Freight Cars* que prevê a realização de testes de segurança e os respectivos requisitos de aprovação para operação de novos modelos de veículos de carga. Os resultados obtidos via simulação indicam que é possível obter boas aproximações do modelo completo por meio dos modelos reduzidos, especialmente com as técnicas de redução de ordem baseadas em perturbação singular. Demonstra-se também o potencial de aplicação de algoritmos genéticos para otimização dos modelos reduzidos. Portanto, os resultados obtidos por esse trabalho, poderão facilitar a implementação de sistemas de controle de suspensão do veículo e simplificar análises de segurança operacional de novos projetos de suspensão.

**Palavras-chave:** Vagões, Ferrovia, Simulação Veicular, Redução de Ordem, Algoritmos Genéticos.

## ABSTRACT

In railway industries there are many applications for systems modelling and dynamic simulations of models. Especially, in railway transportation department it is important to simulate computationally the dynamics of freight trains models in order to ensure design quality and safe operation conditions for wagons. The models that reproduce the behavior of the real system involve a great number of degrees of freedom, thus, more computationally complex and more difficult to implement active control suspension systems. In this context, the present work develops a 30 state linear model of the rail-vehicle interaction to evaluate the vertical and lateral dynamic response of the vehicle. It is proposed, initially, the simplification of this full model by analytical model order reduction techniques present in the literature. These techniques use similarity transformations to obtain realizations of the system in the balanced form and modal form in order to prioritize the most influent states in the final response of the model, eliminating the least contributory states through truncation or singular perturbation elimination (SPE). Then, it is applied a genetic algorithm to the result of the model order techniques, aiming the optimization of the mathematically reduced models. The comparison between both models, full and reduced, is based on the AAR (*American Association of Railroads*) manual of standards and recommended practices section C – part II: *Design, Fabrication, and Construction of Freight Cars*, where are indicated tests to evaluate security and the respective requirements for the approval of new models of freight cars. The results obtained by simulation shows that it is possible to acquire reduced models that are good approximations of the full model, specially using the singular perturbation based techniques. It is also proven the potential of application of genetic algorithms to optimize reduced models. Therefore, the results obtained in this work, can make easier the implementation of active control suspension systems and simplify the security operational analysis of new suspension projects.

**Keywords:** Freight cars, Railroad, Vehicle Simulation, Model Order Reduction, Genetic Algorithms.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Descarrilamento ocorrido na estrada de ferro Carajás em 08/01/2016....	21
Figura 2 - Tipos de modelos matemáticos da dinâmica Pista-Trem.....	22
Figura 3 - Ilustração gráfica da redução de ordem de modelos .....	25
Figura 4 - Sistema massa, mola e amortecedor de um grau de liberdade .....	28
Figura 5 - Sistema massa, mola e amortecedor de um grau de liberdade com excitação pela base .....	29
Figura 6 - Vagão Gondola do tipo GDU .....	31
Figura 7 - Componentes do sistema vagão - via .....	32
Figura 8 - Representação esquemática de um truque usual.....	33
Figura 9 - Vista lateral do esquema do vagão.....	34
Figura 10 - Vista superior do esquema do vagão.....	34
Figura 11 - Vista frontal do esquema do vagão.....	35
Figura 12 - Representação de raízes no plano complexo .....	52
Figura 13 – Procedimento de redução de ordem implementado.....	55
Figura 14 - Metodologia de funcionamento de um Algoritmo Genético para redução de ordem de modelos .....	59
Figura 15 – Distribuição do primeiro gene dos indivíduos em torno da média.....	60
Figura 16 - Processo de criação da população inicial do AG para redução de ordem de um sistema reduzido de 15 estados.....	61
Figura 17 – Forma da roleta para o método seleção por roleta .....	62
Figura 18 – Exemplo de cruzamento genético .....	62
Figura 19 - Modos de Vibração do Vagão - <i>Pitch e Bounce</i> .....	64
Figura 20 - Pista para o teste de <i>Pitch e Bounce</i> .....	64
Figura 21 - Valores singulares Hankel do modelo do vagão .....	66
Figura 22 - Respostas do Sistema completo para o Teste de <i>Pitch e Bounce</i> .....	67
Figura 23 - Respostas do modelo reduzido pela técnica I para o Teste de <i>Pitch e Bounce</i> .....	68
Figura 24 - Respostas do modelo reduzido pela técnica II para o Teste de <i>Pitch e Bounce</i> .....	68
Figura 25 - Respostas do modelo reduzido pela técnica III para o Teste de <i>Pitch e Bounce</i> .....	69

Figura 26 - Respostas do modelo reduzido pela técnica IV para o Teste de <i>Pitch</i> e <i>Bounce</i> .....	69
Figura 27 - Medida quantitativa do erro dos modelos reduzidos em relação ao modelo completo.....	71
Figura 28 - Percentuais de carga vertical de cada roda para o modelo completo....	72
Figura 29 - Percentuais de carga vertical de cada roda para a Técnica I .....	72
Figura 30 - Percentuais de carga vertical de cada roda para a Técnica II .....	73
Figura 31 - Percentuais de carga vertical de cada roda para a Técnica III .....	73
Figura 32 - Percentuais de carga vertical de cada roda para a Técnica IV .....	74
Figura 33 - Capacidade Dinâmica da suspensão principal para o modelo completo	75
Figura 34 - Capacidade Dinâmica da suspensão principal para a técnica I .....	75
Figura 35 - Capacidade Dinâmica da suspensão principal para a técnica II .....	76
Figura 36 - Capacidade Dinâmica da suspensão principal para a técnica III .....	76
Figura 37 - Capacidade Dinâmica da suspensão principal para a técnica IV.....	77
Figura 38 - Mínimo percentual de carga vertical em função da velocidade tangencial do veículo.....	78
Figura 39 - Máxima capacidade dinâmica em função da velocidade tangencial do veículo.....	79
Figura 40 – Tempo de simulação do modelo completo e reduzido .....	80
Figura 41 - Tempo de simulação e redução das diferentes técnicas de redução ....	81
Figura 42 – Evolução do AG ao longo das gerações para o resultado número 6 ....	84
Figura 43 – Evolução do AG ao longo das gerações para o resultado 7 .....	85
Figura 44 - Evolução do AG ao longo das gerações para o resultado 8 .....	85
Figura 45 - Evolução do AG ao longo das gerações para o resultado 11 .....	87
Figura 46 - Evolução do AG ao longo das gerações para o resultado 19 .....	88
Figura 47 - Modos de vibração avaliados no teste .....	99

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Variáveis utilizadas na modelagem (Continua) .....	36
Tabela 2 – Técnicas de Redução de Ordem Aplicadas .....	47
Tabela 3 - Terminologia adotada para Algoritmos Genéticos .....	57
Tabela 4 - Medida numérica do erro dos modelos reduzidos em relação ao modelo completo .....	71
Tabela 5 - Resultado da otimização promovida pelo AG para a Técnica I.....	82
Tabela 6 - Resultado da otimização promovida pelo AG para a Técnica II.....	84
Tabela 7 - Resultado da otimização promovida pelo AG para a Técnica III.....	86
Tabela 8 - Resultado da otimização promovida pelo AG para a Técnica IV .....	87
Tabela 9 - Resumo dos resultados comparativos em relação ao modelo original ...	89



## LISTA DE ABREVIATURAS

AAR	<i>Association of American Railroads;</i>
AG	Algoritmo Genético;
CDSP	Capacidade Dinâmica da Suspensão Principal;
EFC	Estrada de Ferro Carajás;
EPS	Eliminação por Perturbação Singular;
GDU	Vagão Gôndola com Descarga em <i>Car Dumper</i> ;
PRIMA	<i>Passive Reduced-order Interconnect Macromodeling Algorithm;</i>
PVL	Padé Via Lanczos;
TTCI	<i>Transportation Technology Institute, Inc;</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$F(t)$	Força de excitação externa exercida no bloco em função do tempo (N)
$F_s(t)$	Força exercida no bloco pela mola em função do tempo (N)
$F_d(t)$	Força exercida no bloco pelo amortecedor em função do tempo (N)
$m$	Massa do bloco (kg)
$\ddot{x}(t)$	Aceleração resultante do bloco no eixo x em função do tempo ( $m/s^2$ )
$c$	Constante de amortecimento do amortecedor do bloco (kg/s)
$k$	Constante de rigidez da mola do bloco ( $kg/s^2$ )
$u(t)$	Trajatória descrita pela base ao longo do tempo (m)
$\dot{u}(t)$	Derivada da trajetória descrita pela base ao longo do tempo (m/s)
$x_1$	Variável de estado 1
$x_2$	Variável de estado 2
$x(t)$	Posição do bloco no eixo x em função do tempo (m)
$\dot{x}(t)$	Velocidade do bloco no eixo x em função do tempo (m/s)
$y$	Saídas do modelo no espaço de estados
$x$	Vetor de estados
$\dot{x}$	Derivada do vetor de estados
$A$	Matriz A do espaço de estados
$B$	Matriz B do espaço de estados
$C$	Matriz C do espaço de estados
$D$	Matriz D do espaço de estados
$u$	Entradas do modelo no espaço de estados
$m_s$	Massa da caixa do vagão (kg)
$m_{t1}$	Massa do truque 1 (kg)
$m_{t2}$	Massa do truque 2 (kg)
$I_{xs}$	Momento de inércia da caixa no eixo x ( $kg\ m^2$ )
$I_{ys}$	Momento de inércia da caixa no eixo y ( $kg\ m^2$ )
$I_{zs}$	Momento de inércia da caixa no eixo z ( $kg\ m^2$ )
$I_{xt1}$	Momento de inércia do truque 1 no eixo x ( $kg\ m^2$ )
$I_{yt1}$	Momento de inércia do truque 1 no eixo y ( $kg\ m^2$ )
$I_{zt1}$	Momento de inércia do truque 1 no eixo z ( $kg\ m^2$ )
$I_{xt2}$	Momento de inércia do truque 2 no eixo x ( $kg\ m^2$ )

$I_{yt2}$	Momento de inércia do truque 2 no eixo y ( $\text{kg m}^2$ )
$I_{zt2}$	Momento de inércia do truque 2 no eixo z ( $\text{kg m}^2$ )
$ktv$	Constante de rigidez vertical da suspensão primária ( $\text{kg/s}^2$ )
$kth$	Constante de rigidez horizontal da suspensão primária ( $\text{kg/s}^2$ )
$ksv$	Constante de rigidez vertical da suspensão secundária ( $\text{kg/s}^2$ )
$ksh$	Constante de rigidez horizontal da suspensão secundária ( $\text{kg/s}^2$ )
$ctv$	Constante de amortecimento vertical da suspensão primária ( $\text{kg/s}^2$ )
$cth$	Constante de amortecimento horizontal da suspensão primária ( $\text{kg/s}^2$ )
$csv$	Constante de amortecimento vertical da suspensão secundária ( $\text{kg/s}^2$ )
$cs$	Constante de amortecimento horizontal da suspensão secundária ( $\text{kg/s}^2$ )
$az$	Distância no eixo z entre o centro de massa do truque e o ponto de aplicação da suspensão horizontal (m)
$bz$	Distância no eixo z entre o centro de massa do truque e o centro do eixo do rodeiro (m)
$cz$	Distância no eixo z entre o centro de massa do truque e o centro de massa da caixa (m)
$dz$	Distância no eixo z entre o centro de massa da caixa e o centro do eixo do rodeiro (m)
$lz$	Distância no eixo z entre o centro de massa da caixa e o ponto de aplicação da suspensão secundária (m)
$dy$	Distância no eixo y entre o ponto de aplicação da suspensão primária e o centro de massa da caixa (m)
$dx$	Distância no eixo x entre o centro de massa do truque e o ponto de aplicação da suspensão primária (m)
$Lx$	Distância no eixo x entre o centro de massa da caixa e o ponto de aplicação da suspensão secundária (m)
$w_s$	Grau de liberdade referente ao deslocamento vertical da caixa (m)
$v_s$	Grau de liberdade referente ao deslocamento lateral da caixa (m)
$\theta_s$	Grau de liberdade referente ao ângulo de pitch da caixa (rad)
$\beta_s$	Grau de liberdade referente ao ângulo de roll da caixa (rad)
$\alpha_s$	Grau de liberdade referente ao ângulo de yaw da caixa (rad)
$w_{t1}$	Grau de liberdade referente ao deslocamento vertical do truque

	traseiro (m)
$v_{t1}$	Grau de liberdade referente ao deslocamento lateral do truque traseiro (m)
$\theta_{t1}$	Grau de liberdade referente ao ângulo de pitch do truque traseiro (rad)
$\beta_{t1}$	Grau de liberdade referente ao ângulo de roll do truque traseiro (rad)
$\alpha_{t1}$	Grau de liberdade referente ao ângulo de yaw do truque traseiro (rad)
$w_{t2}$	Grau de liberdade referente ao deslocamento vertical do truque dianteiro (m)
$v_{t2}$	Grau de liberdade referente ao deslocamento lateral do truque dianteiro (m)
$\theta_{t2}$	Grau de liberdade referente ao ângulo de pitch do truque dianteiro (rad)
$\beta_{t2}$	Grau de liberdade referente ao ângulo de roll do truque dianteiro (rad)
$\alpha_{t2}$	Grau de liberdade referente ao ângulo de yaw do truque dianteiro (rad)
$F_{w_s}$	Força aplicada no grau de liberdade referente ao deslocamento vertical da caixa (N)
$F_{v_s}$	Força aplicada no grau de liberdade referente ao deslocamento lateral da caixa (N)
$F_{\theta_s}$	Torque aplicado no grau de liberdade referente ao ângulo de pitch da caixa (Nm)
$F_{\beta_s}$	Torque aplicado no grau de liberdade referente ao ângulo de roll da caixa (Nm)
$F_{\alpha_s}$	Torque aplicado no grau de liberdade referente ao ângulo de yaw da caixa (Nm)
$F_{w_{t1}}$	Força aplicada no grau de liberdade referente ao deslocamento vertical do truque traseiro (N)
$F_{v_{t1}}$	Força aplicada no grau de liberdade referente ao deslocamento lateral do truque traseiro (N)
$F_{\theta_{t1}}$	Torque aplicado no grau de liberdade referente ao ângulo de pitch do truque traseiro (Nm)
$F_{\beta_{t1}}$	Torque aplicado no grau de liberdade referente ao ângulo de roll do truque traseiro (Nm)
$F_{\alpha_{t1}}$	Torque aplicado no grau de liberdade referente ao ângulo de yaw do

	truque traseiro (Nm)
$F_{w_{t2}}$	Força aplicada no grau de liberdade referente ao deslocamento vertical do truque dianteiro (N)
$F_{v_{t2}}$	Força aplicada no grau de liberdade referente ao deslocamento lateral do truque dianteiro (N)
$F_{\theta_{t2}}$	Torque aplicado no grau de liberdade referente ao ângulo de pitch do truque dianteiro (Nm)
$F_{\beta_{t2}}$	Torque aplicado no grau de liberdade referente ao ângulo de roll do truque dianteiro (Nm)
$F_{\alpha_{t2}}$	Torque aplicado no grau de liberdade referente ao ângulo de yaw do truque dianteiro (Nm)
$w_{tr}(i)$	Irregularidade no trilho no plano vertical na i-ésima roda (m)
$\dot{w}_{tr}(i)$	Derivada da irregularidade no trilho no plano vertical na i-ésima roda (m/s)
$v_{tr}(i)$	Irregularidade no trilho no plano horizontal na i-ésima roda (m)
$\dot{v}_{tr}(i)$	Derivada da irregularidade no trilho no plano horizontal na i-ésima roda (m/s)
$M$	Matriz de massas do modelo na forma matricial
$C$	Matriz de amortecimentos do modelo na forma matricial
$K$	Matriz de rigidezes do modelo na forma matricial
$W_C$	Gramiano de controlabilidade
$W_O$	Gramiano de observabilidade
$\Sigma$	Matriz de valores singulares Hankel
$e$	Somatório do erro quadrático das saídas
$y_i$	Saídas do modelo completo
$y_{red_i}$	Saídas do modelo reduzido

# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>20</b>
1.3. Objetivos do Trabalho.....	25
1.4. Organização da Dissertação.....	26
<b>2. MODELAGEM DE UM VEÍCULO FERROVIÁRIO .....</b>	<b>28</b>
2.1. Introdução à Modelagem de Sistemas Mecânicos .....	28
2.2. Modelagem do Veículo Completo .....	30
<b>3. REDUÇÃO DE ORDEM DE MODELOS .....</b>	<b>45</b>
3.1. Breve histórico da redução de ordem de modelos.....	45
3.2. Técnicas de redução de ordem no espaço de estados .....	46
3.2.1. Base de projeção .....	47
3.2.2. Seleção dos Estados a Serem Eliminados.....	52
3.2.3. Eliminação de Estados.....	54
3.3. Implementação das Técnicas de Redução de Ordem .....	55
3.4. Algoritmos Genéticos Aplicados a Redução de Ordem de Modelos..	57
<b>4. ANÁLISE POR SIMULAÇÃO, RESULTADOS E DISCUSSÃO.....</b>	<b>63</b>
4.1. Considerações.....	63
4.1.1. Teste de <i>Pitch e Bounce</i> .....	63
4.1.2. Aspectos Comparativos.....	65
4.2. Resultados.....	66
4.2.1. Teste de <i>Pitch e Bounce</i> .....	66
4.3. Comparação entre os tempos de simulação.....	79
4.4. Otimização das Técnicas Analíticas por Meio de Algoritmo Genético	81
4.4.1. Algoritmo Genético Aplicado à Técnica I.....	82
4.4.2. Algoritmo Genético Aplicado à Técnica II.....	84
4.4.3. Algoritmo Genético Aplicado à Técnica III.....	86
4.4.4. Algoritmo Genético Aplicado à Técnica IV .....	87
4.5. Análise Geral da Otimização das Técnicas Analíticas .....	89
<b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>90</b>
5.1. Contribuições.....	90
5.2. Conclusões .....	90
5.3. Propostas de Trabalhos Futuros.....	92
5.3.1. Análise de segurança operacional em outros testes da norma AAR92	

5.3.2. Aplicação de outras técnicas de redução de ordem de modelos ....	92
5.3.3. Desenvolvimento de uma Modelagem Mais Complexa do Veículo Ferroviário .....	93
5.3.4. Utilização de Modelos Reduzidos para Implementação Sistemas de Controle de Suspensão do Veículo .....	93
<b>APÊNDICE A – PRINCÍPIO DE D’ALEMBERT E EQUAÇÕES DE LAGRANGE..</b>	<b>94</b>
1. Princípio dos Trabalhos Virtuais .....	94
2. Equações de Lagrange .....	96
<b>APÊNDICE B – PROCEDIMENTO DE VALIDAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO DINÂMICO DO VAGÃO GDU.....</b>	<b>99</b>
<b>APÊNDICE C – FUNÇÕES DO CÓDIGO DO ALGORÍTMO GENÉTICO .....</b>	<b>102</b>
<b>6. BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>104</b>

## 1. INTRODUÇÃO

Na engenharia moderna é fundamental a utilização de modelos. Etimologicamente, a palavra modelo descreve aquilo que serve de referência ou é dado para ser reproduzido. De acordo com Ferreira (2012), a modelagem consiste na representação dos fenômenos físicos observados no processo para uma linguagem que permita melhor interpretação ou entendimento. Dessa forma, a modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda maneiras de construir ou implementar modelos matemáticos de sistemas reais (Aguirre, 2000). Portanto, modelos matemáticos são formas de representação que utilizam a linguagem matemática para extrair ou estimar as características mais relevantes de um processo desejado (Chen C.-T. , 1999).

A formulação matemática dos fenômenos físicos é objeto de estudo da engenharia há séculos. Cientistas e engenheiros são frequentemente confrontados com a análise, construção e síntese de problemas dos sistemas físicos reais (Janardhanan, 2004). Modelos matemáticos são essenciais para o entendimento e controle de sistemas complexos (Dorf & Bishop, 2013). De fato, é praticamente impossível a reprodução exata dos sistemas reais. Apesar dos grandes avanços tecnológicos das últimas décadas, é inerente aos modelos de engenharia um percentual de erro associado em virtude das diversas simplificações e hipóteses consideradas para que seja viável a realização de um equacionamento dos sistemas. Em aplicações práticas, é fundamental que os modelos empregados sejam confiáveis o suficiente para a aplicação de interesse, isto é, que os erros inerentes estejam dentro de limites aceitáveis para tal processo, e ao mesmo tempo busca-se também que essa representação seja simplificada (Maciel, 2015).

As equações que descrevem os sistemas podem assumir diversas formas: sejam elas equações lineares, não-lineares, equações integrais, diferenciais e equações a diferenças, entre outras. Em função do problema que está sendo estudado, uma forma de equação pode ser preferível em relação a outra para descrever o mesmo sistema (Chen C.-T. , 1999). Em geral, sistemas mecânicos podem ser representados adequadamente por sistemas de equações lineares (Ogata, 2003) (Dorf & Bishop, 2013).



Na indústria encontram-se diversas aplicações para modelagem de sistemas mecânicos em sistemas lineares. Em particular, no setor de transporte ferroviário é importante mensurar as interações dinâmicas que ocorrem entre o veículo ferroviário e a via permanente devido à magnitude das cargas envolvidas e em razão das desastrosas consequências em caso de descarrilamento, conforme evidenciado pela Figura 1.

Na estrada de ferro Carajás (EFC) da Vale, os descarrilamentos ocorridos durante o período de agosto de 2007 a agosto de 2011 com causas atribuídas à imperfeição da geometria da via oneraram a empresa em aproximadamente R\$ 12,7 milhões, custos oriundos da perda de material rodante e reparação da estrutura de via permanente (Santos, 2015).

Figura 1 - Descarrilamento ocorrido na estrada de ferro Carajás em 08/01/2016



Fonte: (G1, 2016)

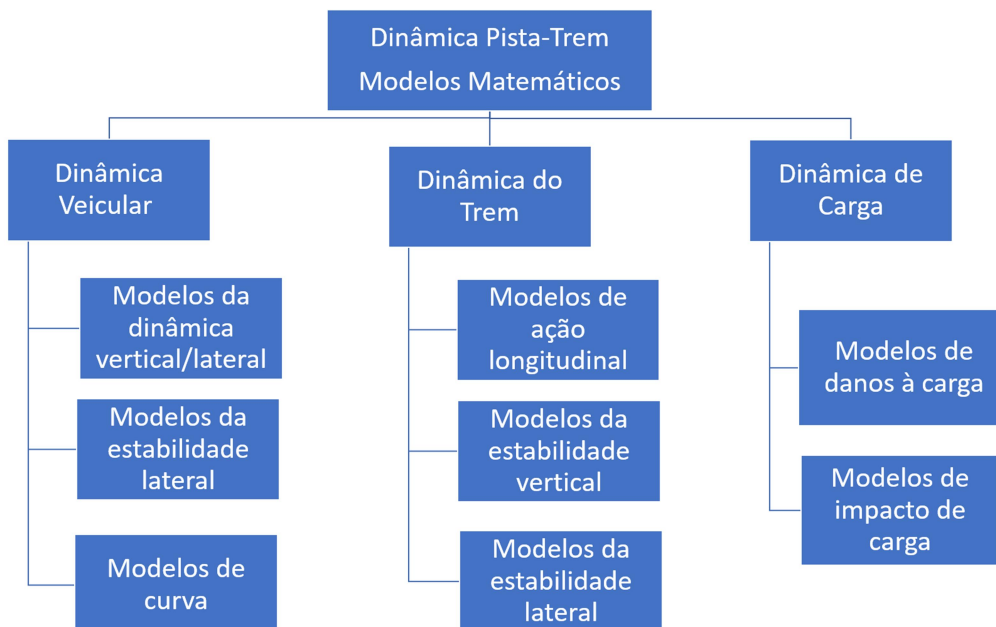
Portanto, para que a operação de uma ferrovia seja feita de uma forma segura e eficiente, é fundamental que sejam desenvolvidos modelos e simulações capazes de avaliar a possibilidade de um descarrilamento, prevenindo grandes perdas de ativos e até mesmo evitando acidentes fatais. Diante disso, o manual de padrões e práticas recomendadas da AAR seção C (Association of American Railroads, 2007) propõe a realização de testes que avaliam situações críticas na dinâmica de vagões

e estabelece limites de segurança para determinados parâmetros, tornando-se uma ferramenta útil para projeto e fabricação de veículos de carga.

### 1.1. Estado da Arte da Modelagem Dinâmica de Veículos Ferroviários

Segundo Garg & Dukkipati (1984), modelos de veículos ferroviários que tratam da dinâmica Pista-Trem podem ser classificados em três grupos distintos, a saber: dinâmica veicular, dinâmica do trem e dinâmica de carga. Cada um desses grupos também pode ser subdividido em diferentes frentes de pesquisa no ramo da dinâmica ferroviária. A organização dos tipos de modelos dinâmicos no setor ferroviário pode ser observada na Figura 2.

Figura 2 - Tipos de modelos matemáticos da dinâmica Pista-Trem



Fonte: Adaptado de (Garg & Dukkipati, 1984)

Na dinâmica veicular, os modelos da dinâmica vertical/lateral avaliam a resposta dinâmica de um veículo submetido a irregularidades de via. Modelos de estabilidade lateral são utilizados para previsão de velocidades críticas, forças na interação roda-trilho e deslocamentos e forças da suspensão e do veículo. Já os modelos de curva são úteis para calcular as forças dinâmicas ou quasi-estáticas de um veículo que é introduzido durante uma negociação em curva.

A dinâmica do trem também é dividida em três subgrupos: modelos de ação longitudinal e modelos da estabilidade vertical e lateral. Modelos de ação

longitudinal são usados primariamente em estudos das forças entre veículos adjacentes, considerando as características do veículo e as práticas de direção de trem. Enquanto modelos da estabilidade vertical estudam a possibilidade de separação dos acoplamentos por impactos, modelos da estabilidade lateral avaliam os efeitos do acoplamento para controle de alinhamento e estabilidade do trem no plano lateral.

Por fim, na dinâmica de carga, modelos de danos à carga estudam a possibilidade de danos à carga resultantes de ações dinâmicas que ocorrem durante as operações. Modelos de impacto de carga são responsáveis por investigar os efeitos do impacto causado pela mudança de via.

No presente trabalho, avaliam-se os efeitos da dinâmica veicular, especialmente a dinâmica vertical/lateral do veículo ferroviário.

Um trem rodando sobre uma via é um sistema dinâmico que já existe desde o século XVI (Kouroussisa, Connolly, & Verlinden, 2014). No entanto, apenas na década de 60 a dinâmica de veículos ferroviários começa a tomar forma de ciência com a criação do departamento britânico de pesquisa ferroviária (Sharma, Kumar, & Sharma, 2014). Inicialmente, a simulação dinâmica de veículos ferroviários foi desenvolvida como uma ferramenta de sondagem. Sua finalidade, a princípio, tinha um caráter de compreensão dos principais fenômenos da dinâmica veicular, tais como a estabilidade, comportamento em curvas e qualidade de direção (Sharma, Kumar, & Sharma, 2014). Wickens (1965) contribuiu significativamente para o entendimento da dinâmica do conjunto de eixos e rodas ferroviários e, portanto, para as equações de movimento de veículos ferroviários. Frýba (1972) desenvolveu estudos a respeito de uma carga vertical se movimentando ao longo do trilho ferroviário. Garg & Dukkipati (1984) produziu um trabalho extenso de revisão abordando todos os aspectos da dinâmica veicular ferroviária, desde vibrações mecânicas até contato roda-trilho. Hunt (1986) aborda os aspectos gerais da interação do veículo com a via, avaliando inclusive a deflexão dos trilhos durante a passagem do vagão pelo método dos elementos finitos. Knothe e Grassie (1993) e Popp et al. (1999) apresentam um estado da arte na área da interação do trem com a via.

O desenvolvimento de análises computacionais permitiu grandes avanços em favor da solução das equações de movimento dos veículos ferroviários (Sharma, Kumar,

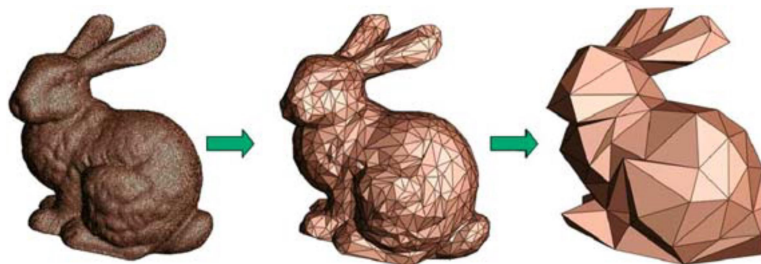
& Sharma, 2014). Pacotes de softwares foram desenvolvidos e são amplamente utilizados na indústria. Nucars®, Vampire®, Simpack® e Universal Mechanisms® são exemplos de pacotes comerciais destinados a simulação da dinâmica vertical e lateral de vagões. Iwnick (1998) estuda os principais pacotes de softwares de simulação dinâmica de vagões, realizando testes de referência para investigação do comportamento da dinâmica e da estabilidade veicular. No entanto, a construção de novos modelos computacionais ainda é fundamental tanto para a melhor compreensão dos projetistas de vagões a respeito da dinâmica do veículo de carga quanto para abranger determinados aspectos deficientes nos pacotes de software (Iwnick, 1998). Diversos autores se dedicam à essa linha de pesquisa, criando modelos que atendam especificamente suas necessidades (Correia, 2013) (Cunha, 2011) (Santos, 2015) (Shabana, Zaazaa, & Sugiyama, 2008) (Spiryagin, Cole, & Sun, 2014). Santos (2015), desenvolve um modelo de 15 graus de liberdade a partir do Princípio de D’Alembert e das Equações de Lagrange. No Apêndice A, são apresentados o princípio de D’Alembert e as equações de Lagrange (Oliveira & Ladeira, 2016).

## **1.2. Modelagem Dinâmica de Veículos Ferroviários e Redução de Ordem de Modelos**

Devido à demanda por melhor precisão na modelagem moderna de sistemas mecânicos, algoritmos computacionais de sistemas multicorpos vêm sendo cada vez mais utilizados como parte integrante do projeto e análise de diversas aplicações tecnológicas e industriais (Shabana & Sany, 2001). Um veículo ferroviário se movendo ao longo de uma via é um dos sistemas dinâmicos mais complexos na engenharia (Wickens, 2005). Portanto, é preciso considerar que em alguns casos a apresentação matemática de modelos de veículos ferroviários pode resultar em um modelo de grande complexidade, visto que envolvem uma grande quantidade de graus de liberdade e uma vasta gama de fatores que influenciam no movimento do veículo (Correia, 2013). Cinematicamente, entende-se grau de liberdade como o número de parâmetros independentes que são necessários para se definir a posição de um corpo no espaço em qualquer instante (Becker, 2010). Tendo isso em vista, a aproximação de um sistema de alta ordem por um sistema de ordem inferior é um dos grandes problemas na teoria de sistemas e permeia a literatura de matemática aplicada (Antoulas & Sorensen, 2001). Modelos de ordem

reduzida buscam capturar características essenciais de uma estrutura, isto é, as propriedades mais básicas do modelo original devem estar presentes na aproximação simplificada (Schilders, 2008), conforme a Figura 3

Figura 3 - Ilustração gráfica da redução de ordem de modelos



Fonte: (Schilders, 2008)

O objetivo dessa imagem é demonstrar graficamente de uma forma de simples entendimento que, em determinados casos, pouca informação é requerida para descrever um modelo (Schilders, 2008). O uso de modelos de ordem reduzida torna-se mais fácil de analisar, simular e controlar os sistemas implementados (Maciel, 2015).

A partir um modelo mais simples, torna-se mais fácil a implantação de sistemas de controle ativos para a suspensão do veículo. Shin, You, Hur, & Park (2014) propõem um sistema de controle de suspensão no espaço de estados, utilizando um modelo de um vagão de 18 estados.

### 1.3. Objetivos do Trabalho

O vagão mais utilizado no transporte de minério de ferro é do tipo gôndola, com descarga em virador de vagões (Greenbier Maxion, 2018). Atualmente, existem vagões do tipo gôndola projetados para até 150 toneladas brutas de carga, isto é 37,5 toneladas por eixo, denominados GDU (Santos, 2015). Assim sendo, o objetivo geral desse trabalho é reduzir a ordem de um modelo de um vagão GDU utilizando diferentes técnicas existentes na literatura e, a partir disso, fazer um comparativo entre os mecanismos de simplificação. Além disso, também é parte desse trabalho a implementação de um algoritmo genético para redução de ordem de modelos.

Este estudo parte da premissa de que modelos da dinâmica de veículos ferroviários podem se tornar bastante complexos e envolver muitos graus de liberdade a serem avaliados, consumindo muito tempo e esforço computacional para suas simulações.

Portanto, tendo isso em vista, os objetivos específicos dessa pesquisa são:

- Construir um modelo computacional da dinâmica de um veículo ferroviário, através das Equações de Lagrange e sua representação no espaço de estados;
- Selecionar o número máximo de graus de liberdade que podem ser eliminados do sistema para que a resposta não seja significativamente afetada;
- Implementação das diferentes técnicas de redução de ordem no modelo dinâmico de um vagão;
- Utilizar um algoritmo genético para otimização da redução de ordem do sistema;
- Determinação de uma metodologia para contrapor os resultados dos modelos reduzidos;
- Avaliação comparativa entre as técnicas de redução de ordem de sistemas lineares aplicadas ao modelo dinâmico de um vagão diante de testes propostos pela norma AAR.

#### **1.4. Organização da Dissertação**

O texto está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, será feita uma breve contextualização a respeito da modelagem de sistemas mecânicos lineares. Neste capítulo, também serão apresentados os graus de liberdade considerados para o modelo, as equações que regem a dinâmica do sistema e, também será denotado como é feita a conversão do modelo para o espaço de estados.

No Capítulo 3, serão apresentadas as técnicas de redução de ordem e a sua forma de implementação em sistemas representados no espaço de estados. Ademais, será descrito o modo de execução do algoritmo genético ao problema de redução de ordem de modelos.

No Capítulo 4, serão demonstradas as condições em que são feitas as simulações e seus resultados. Desse modo, baseando-se na norma AAR, serão detalhados os testes propostos pela norma a serem aplicados e seus parâmetros de interesse. E, finalmente, serão apresentados os resultados obtidos nas simulações realizadas tanto para o modelo completo quanto para os modelos reduzidos pelas diferentes técnicas, produzindo resultados comparativos entre eles.

No Capítulo 5 serão dadas as conclusões deste estudo e também algumas sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros. Por fim, no Apêndice B será demonstrado sucintamente o procedimento de validação do modelo completo do vagão GDU, relacionando os modos de vibração encontrados em testes reais com os parâmetros apontados pelo modelo matemático.

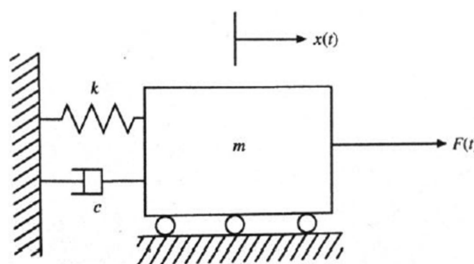
## 2. MODELAGEM DE UM VEÍCULO FERROVIÁRIO

Para um melhor entendimento da dinâmica de um vagão é conveniente realizar uma breve introdução sobre a modelagem matemática de sistemas mecânicos partindo de sistemas mais simples, isto é, sistemas massa, mola e amortecedor com apenas um grau de liberdade, para que seja atingido posteriormente o entendimento de sistemas mais complexos com mais graus de liberdade.

### 2.1. Introdução à Modelagem de Sistemas Mecânicos

Considera-se, portanto, preliminarmente um sistema massa, mola e amortecedor com apenas um grau de liberdade linear, conforme a Figura 4

Figura 4 - Sistema massa, mola e amortecedor de um grau de liberdade



Fonte: (Santos, 2015)

Fazendo o somatório de forças nesse sistema, pela segunda Lei de Newton nota-se que:

$$F(t) - F_s(t) - F_d(t) = m \cdot \ddot{x}(t) \quad (2.1)$$

onde  $F(t)$  é a força de excitação externa,  $F_s(t)$  e  $F_d(t)$  são as forças exercidas no bloco pela mola e pelo amortecedor respectivamente,  $m$  é a massa do bloco e  $\ddot{x}(t)$  é a aceleração resultante do corpo.

A dinâmica desse tipo de sistema pode ser bem representada por uma equação diferencial linear de segunda ordem em que as forças produzidas pela mola e pelo amortecedor são assumidas lineares e em função de constantes, conforme equação adiante (Beer, Johnston, & Cornwell, 2012).

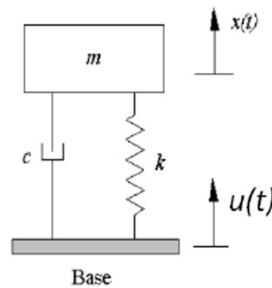
$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = F(t) \quad (2.2)$$



onde  $c$  é a constante de amortecimento e  $k$  representa a rigidez da mola.

No entanto, a interação entre o vagão e a via permanente pode ser modelada como um problema de excitação pela base, ou seja, a força de excitação é dada a partir movimento da base em relação ao sistema, conforme a Figura 5 (Garg & Dukkipati, 1984).

Figura 5 - Sistema massa, mola e amortecedor de um grau de liberdade com excitação pela base



Fonte: (Santos, 2015)

Assim, temos a equação:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = F(t) = c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) \quad (2.3)$$

onde  $u(t)$  é a trajetória descrita pela base e  $\dot{u}(t)$  sua derivada.

Esse sistema é de segunda ordem. Em vista disso, definem-se as variáveis de estado  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  como apresentado a seguir (Ogata, 2003).

$$x_1(t) = x(t) \quad (2.4)$$

$$x_2(t) = \dot{x}(t) \quad (2.5)$$

Então, tem-se que:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.6)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{k}{m} x_1 - \frac{c}{m} x_2 + \frac{1}{m} F \quad (2.7)$$

A equação de saída é:

$$y = x_1 \quad (2.8)$$

Na forma vetorial-matricial, as Equações (2.6) e (2.7) podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} F \quad (2.9)$$

A equação de saída, Equação (2.8) é denotada da seguinte maneira.

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

A Equação (2.9) é uma equação de estado e a Equação (2.10) é uma equação de saída para o sistema. Portanto, já está formado o sistema na forma padrão de um sistema no espaço de estados.

$$\dot{x} = A x + B u \quad (2.11)$$

$$y = C x + D u \quad (2.12)$$

## 2.2. Modelagem do Veículo Completo

### 2.2.1. Componentes Principais de um Veículo Ferroviário

Para fundamentar a modelagem matemática do veículo ferroviário, é imprescindível compreender o significado físico de cada componente do vagão e de cada variável do processo. Portanto, a Figura 6 apresenta um vagão gôndola do tipo GDU que será o objeto de modelagem desse trabalho.

Figura 6 - Vagão Gondola do tipo GDU

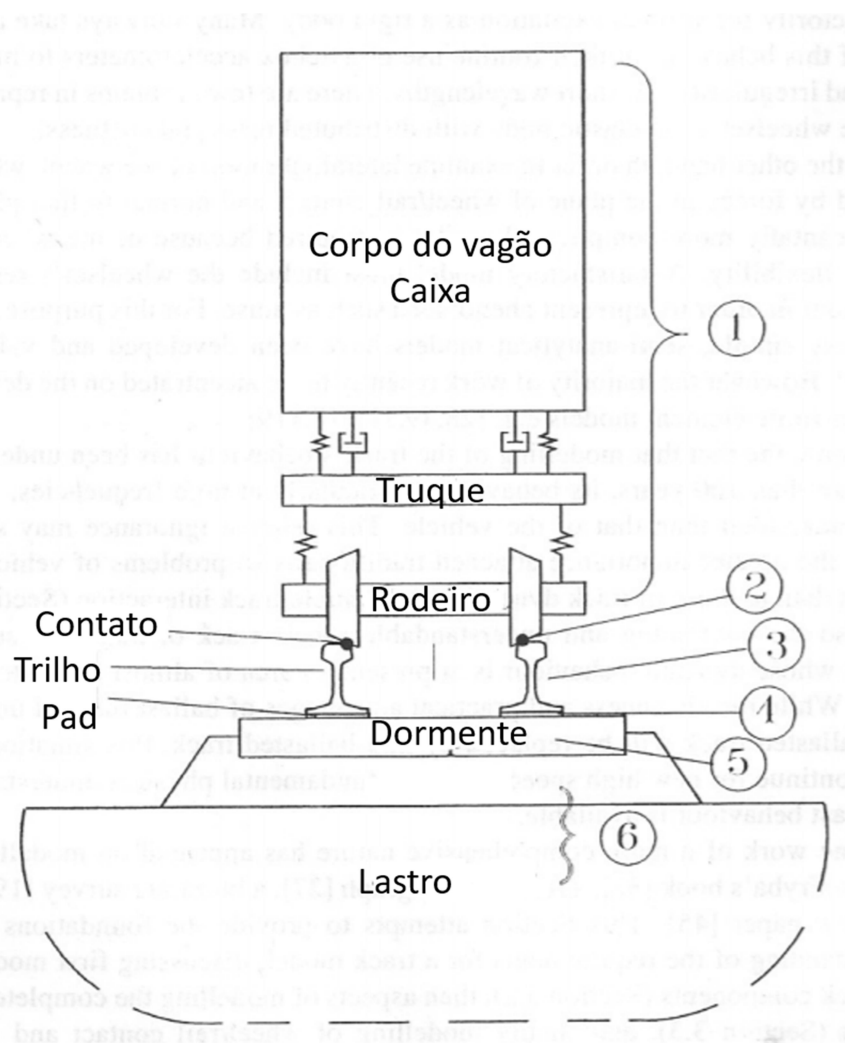


Fonte: (Greenbier Maxison, 2018)

Segundo Knothe & Grassie (1993), para uma análise global do comportamento dinâmico de interação com os trilhos é possível considerar os seguintes subsistemas, conforme a Figura 7:

1. O veículo, incluindo o corpo do veículo, truque e rodeiros;
2. O contato roda/trilho e representação da excitação;
3. O Trilho;
4. O sistema de juntas;
5. Os dormentes;
6. O Lastro.

Figura 7 - Componentes do sistema vagão - via



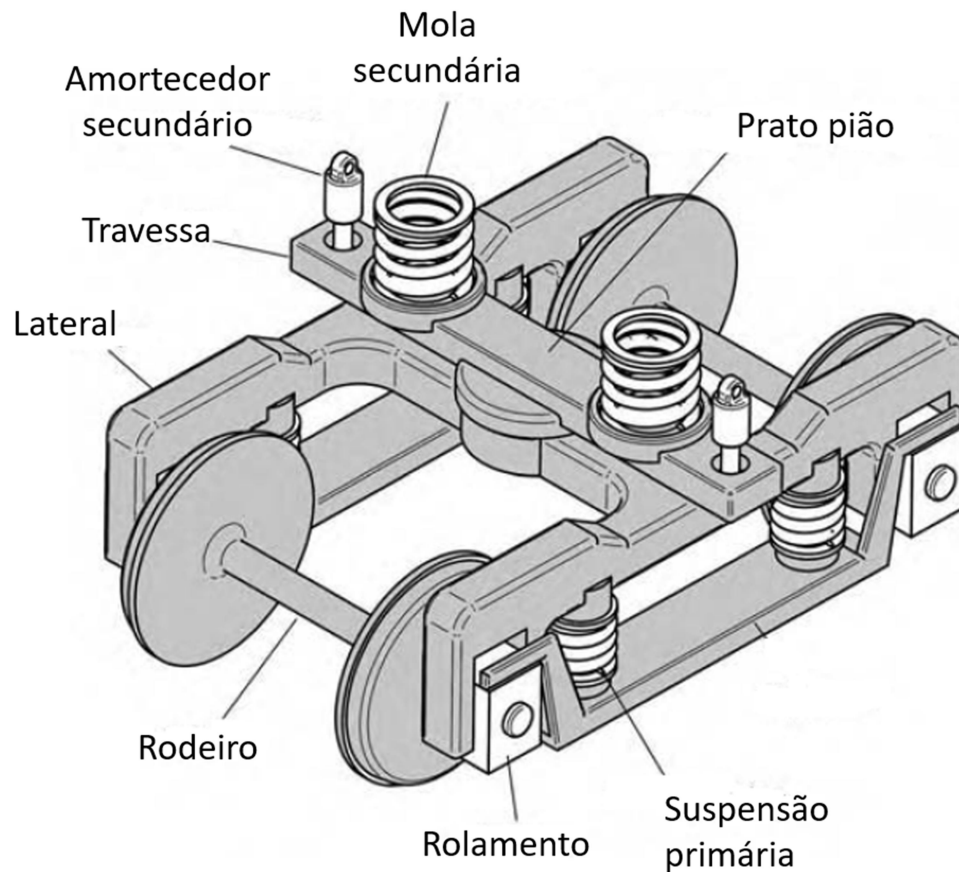
Fonte: Adaptado de (Knothe & Grassie, 1993)

No entanto, existem modelos para aplicações específicas que levam em conta apenas o veículo e a excitação da via (Cunha, 2011). Sendo assim, analisam-se especificamente a dinâmica vertical e lateral do veículo em função da irregularidade da via, isto é, desconsiderando a elasticidade do trilho.

Os veículos ferroviários convencionais são compostos de uma caixa apoiada normalmente por dois truques. A grande maioria dos truques convencionais de vagões de carga no Brasil segue o padrão da AAR (Association of American Railroads, 2007), conforme a Figura 8.

São compostos de dois rodeiros (rodas + eixo), quatro rolamentos e caixa de rolamentos, duas laterais, uma travessa e grupo de suspensão que pode ser projetada para diferentes cargas do vagão (Santos, 2015).

Figura 8 - Representação esquemática de um truque usual



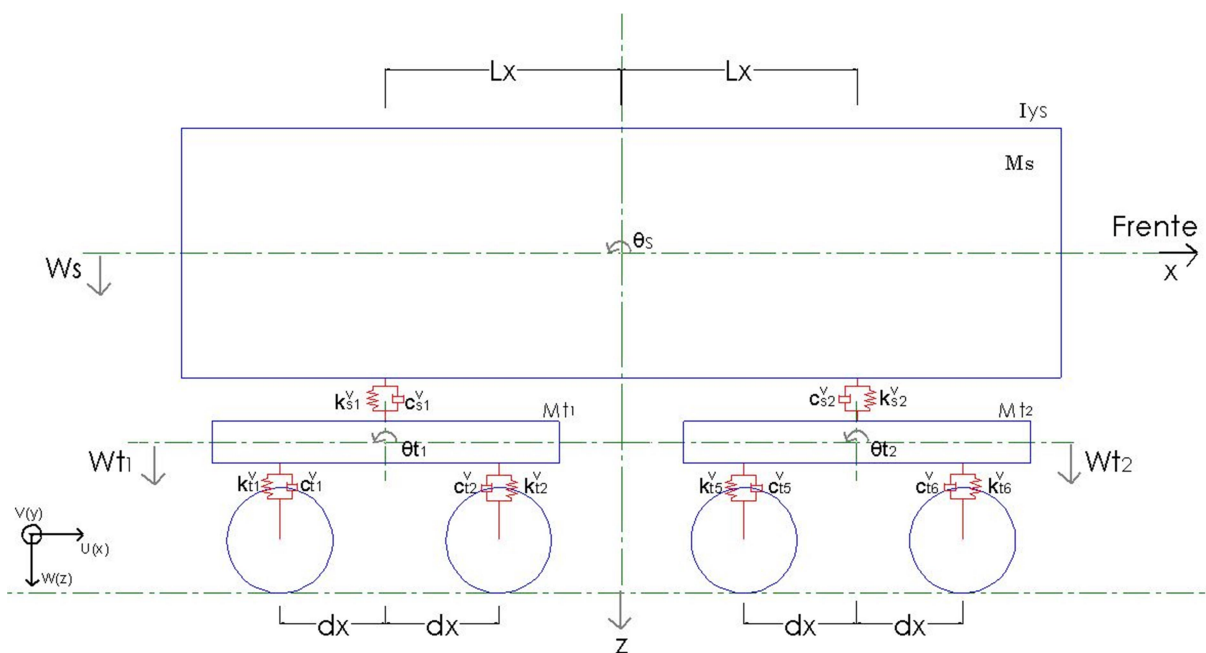
Fonte: Adaptado de (Shabana, Zaazaa, & Sugiyama, 2008)

As suspensões primárias e secundárias são projetadas para fornecer bom direcionamento do veículo, desempenho seguro durante negociação em curva e bom comportamento dinâmico em pista tangente. Os rodeiros são conectados ao truque por elementos suspensivos elásticos e dissipativos, assim a suspensão primária permite o rodeiro se movimentar em relação ao truque e contribuir para a redução de transmissão de vibrações para o corpo do veículo (Sharma R. C., 2012).

### 2.2.2. Modelagem Matemática do Veículo Completo

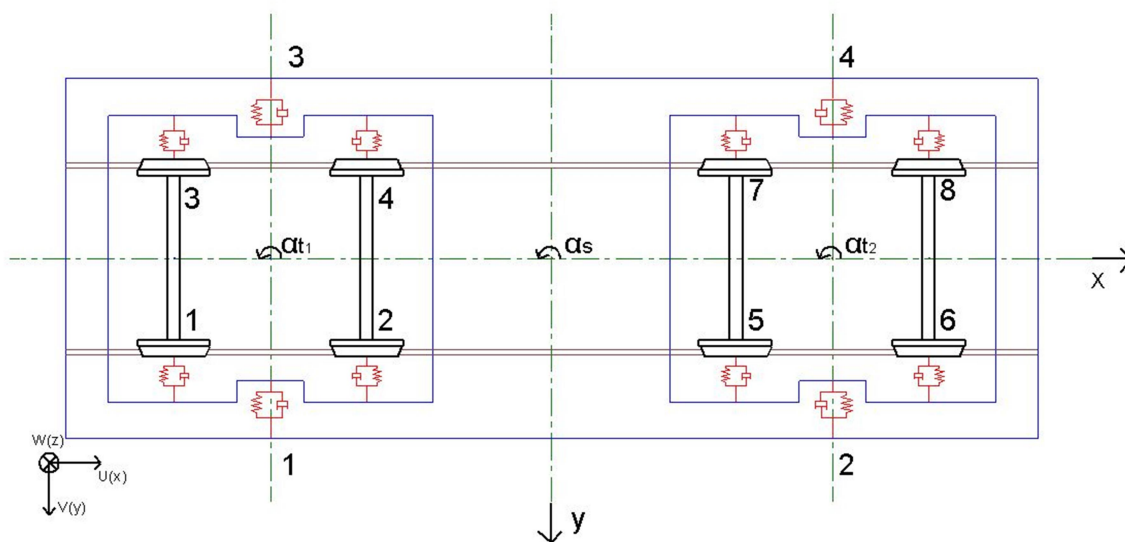
Desse modo, para descrever o modelo completo do vagão GDU e as equações que regem a dinâmica do veículo são utilizados os esquemas das Figuras 9, 10 e 11.

Figura 9 - Vista lateral do esquema do vagão



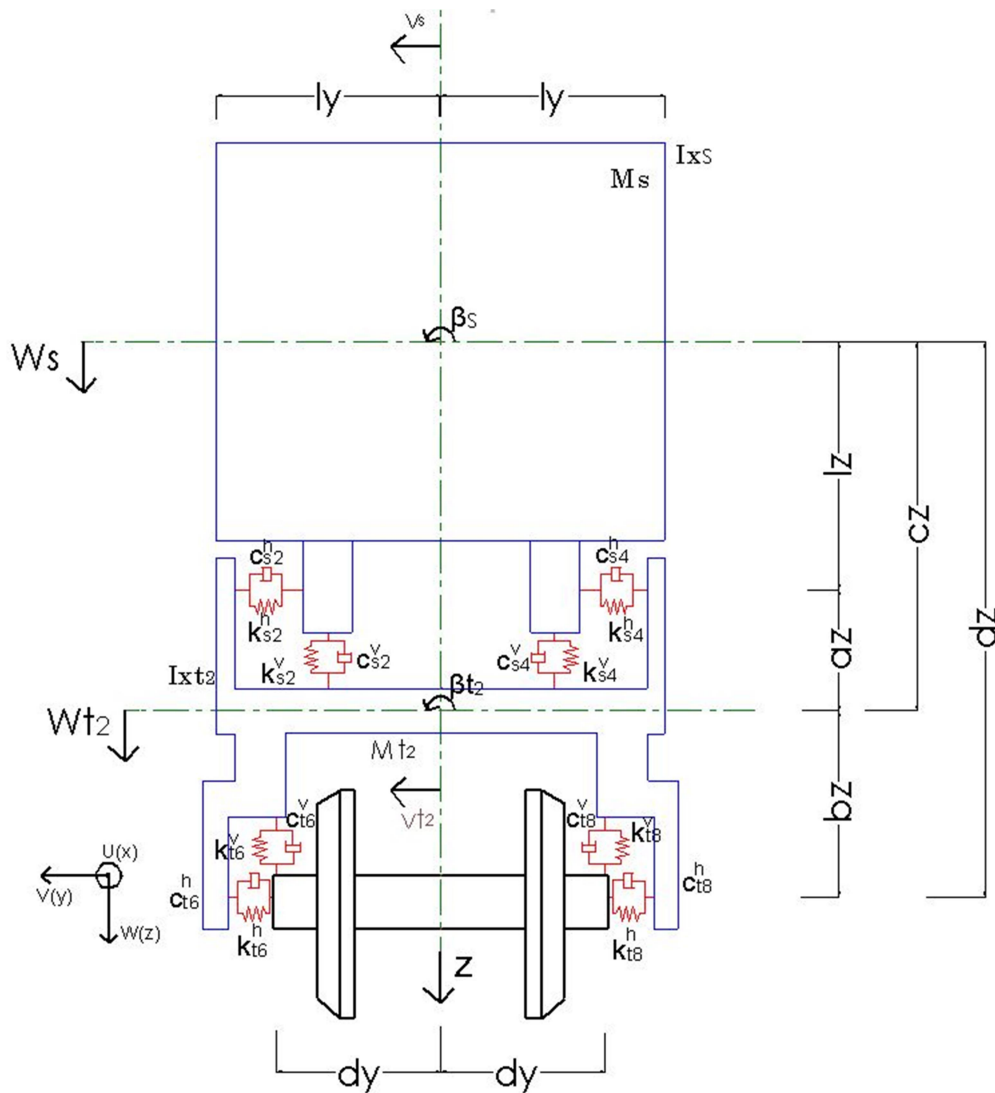
Fonte: O próprio autor

Figura 10 - Vista superior do esquema do vagão



Fonte: O próprio autor

Figura 11 - Vista frontal do esquema do vagão



Fonte: O próprio autor

Nesse caso o modelo do vagão é composto por 3 corpos rígidos principais: caixa, truque dianteiro e truque traseiro. Cada um desses corpos conta com 5 graus de liberdade, ou seja, o movimento geral de cada corpo rígido é composto pela superposição dessas 5 variáveis. Na Tabela 1 encontram-se as constantes utilizadas pelo modelo utilizadas nos croquis e nas equações adiante.

Tabela 1 - Variáveis utilizadas na modelagem (Continua)

<b>Variável</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidade</b>
$m_s$	$1,4 \cdot 10^5$	kg
$m_{t1}$	$4,93 \cdot 10^3$	kg
$m_{t2}$	$4,93 \cdot 10^3$	kg
$lxs$	$1,3 \cdot 10^5$	kg . m <sup>2</sup>
$lys$	$6,64 \cdot 10^5$	kg . m <sup>2</sup>
$lzs$	$6,64 \cdot 10^5$	kg . m <sup>2</sup>
$lxt(1 e 2)$	$1,47 \cdot 10^3$	kg . m <sup>2</sup>
$lyt(1 e 2)$	$3,43 \cdot 10^3$	kg . m <sup>2</sup>
$lzt(1 e 2)$	$5,07 \cdot 10^3$	kg . m <sup>2</sup>
$ktv$	$1,75 \cdot 10^8$	N/m
$kth$	$8,76 \cdot 10^9$	N/m
$ksv$	$4,74 \cdot 10^6$	N/m
$ksh$	$1,85 \cdot 10^6$	N/m
$ctv$	$3,5 \cdot 10^3$	Ns/m
$cth$	$1,54 \cdot 10^6$	Ns/m
$csv$	$1,05 \cdot 10^5$	Ns/m
$csht$	$1,05 \cdot 10^5$	Ns/m
$az$	0,10995	m
$bz$	0,0254	m
$cz$	1,655	m



Tabela 1 - Variáveis utilizadas na modelagem (Conclusão)

Variável	Valor	Unidade
$dz$	1,68	m
$lz$	1,545	m
$dy$	1,098	m
$ly$	1,098	m
$dx$	0,914	m
$Lx$	2,705	m

Fonte: (Urban & Joy, 2011)

Para a formulação das equações dinâmicas do movimento de sistemas mecânicos é habitual utilizar a abordagem Lagrangeana. Baseada no princípio de d'Alembert, essa abordagem utiliza quantidades escalares como o trabalho virtual e energias cinética e potencial para o desenvolvimento das equações de movimento (Shabana, Zaazaa, & Sugiyama, 2008). Encontra-se no Apêndice A em mais detalhes o princípio de d'Alembert e as Equações de Lagrange.

Com base em modelos da literatura, desenvolve-se para cada grau de liberdade uma equação que rege sua dinâmica, fundamentada nas Equações de Lagrange (Santos, 2015) (Cunha, 2011). Portanto, para cada um dos três corpos rígidos considerados serão descritas 5 equações.

## 1. Para a Caixa:

### 1.1. Para o grau de liberdade de deslocamento vertical (*bounce*):

$$\begin{aligned}
& m_s \ddot{w}_s + c_{s1}^v (\dot{w}_s + l_x \dot{\theta}_s + l_y \dot{\beta}_s - \dot{w}_{t1} - l_y \dot{\beta}_{t1}) + c_{s1}^v (\dot{w}_s + l_x \dot{\theta}_s + l_y \dot{\beta}_s - \dot{w}_{t2} - l_y \dot{\beta}_{t2}) + \\
& c_{s3}^v (\dot{w}_s + l_x \dot{\theta}_s + l_y \dot{\beta}_s - \dot{w}_{t1} - l_y \dot{\beta}_{t1}) + c_{s4}^v (\dot{w}_s + l_x \dot{\theta}_s + l_y \dot{\beta}_s - \dot{w}_{t2} - l_y \dot{\beta}_{t2}) + \\
& k_{s1}^v (w_s + l_x \theta_s - l_y \beta_s - w_{t1} - l_y \beta_{t1}) + k_{s2}^v (w_s - l_x \theta_s + l_y \beta_s - w_{t2} - l_y \beta_{t2}) + \\
& k_{s3}^v (w_s + l_x \theta_s - l_y \beta_s - w_{t1} + l_y \beta_{t1}) + k_{s4}^v (w_s - l_x \theta_s - l_y \beta_s - w_{t2} + l_y \beta_{t2}) = F_{w_s}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

1.2. Para o grau de liberdade de deslocamento transversal (*sway*):

$$\begin{aligned}
& m_s \ddot{v}_s + c_{s1}^h (\dot{v}_s - l_z \dot{\beta}_s - l_x \dot{\alpha}_s - \dot{v}_{t1} - a_z \dot{\beta}_{t1}) + c_{s2}^h (\dot{v}_s - l_z \dot{\beta}_s + l_x \dot{\alpha}_s - \dot{v}_{t2} - a_z \dot{\beta}_{t2}) + \\
& c_{s3}^h (\dot{v}_s - l_z \dot{\beta}_s - l_x \dot{\alpha}_s - \dot{v}_{t1} - a_z \dot{\beta}_{t1}) + c_{s4}^h (\dot{v}_s - l_z \dot{\beta}_s + l_x \dot{\alpha}_s - \dot{v}_{t2} - a_z \dot{\beta}_{t2}) + \\
& k_{s1}^h (v_s - l_z \beta_s - l_x \alpha_s - v_{t1} - a_z \beta_{t1}) + k_{s2}^h (v_s - l_z \beta_s + l_x \alpha_s - v_{t2} - a_z \beta_{t2}) + \\
& k_{s3}^h (v_s - l_z \beta_s - l_x \alpha_s - v_{t1} - a_z \beta_{t1}) + k_{s4}^h (v_s - l_z \beta_s + l_x \alpha_s - v_{t2} - a_z \beta_{t2}) = F_{v_s}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

1.3. Para o grau de liberdade de rotação em torno do eixo transversal (*pitch*):

$$\begin{aligned}
& I_{y_s} \ddot{\theta}_s + c_{s1}^v (\dot{w}_s + l_x \dot{\theta}_s + l_y \dot{\beta}_s - \dot{w}_{t1} - l_y \dot{\beta}_{t1}) l_x - c_{s2}^v (\dot{w}_s - l_x \dot{\theta}_s + l_y \dot{\beta}_s - \dot{w}_{t2} - l_y \dot{\beta}_{t2}) l_x + \\
& c_{s3}^v (\dot{w}_s + l_x \dot{\theta}_s - l_y \dot{\beta}_s - \dot{w}_{t1} + l_y \dot{\beta}_{t1}) l_x - c_{s4}^v (\dot{w}_s - l_x \dot{\theta}_s - l_y \dot{\beta}_s - \dot{w}_{t2} + l_y \dot{\beta}_{t2}) l_x + \\
& k_{s1}^v (w_s + l_x \theta_s + l_y \beta_s - w_{t1} - l_y \beta_{t1}) l_x - k_{s2}^v (w_s - l_x \theta_s + l_y \beta_s - w_{t2} - l_y \beta_{t2}) l_x + \\
& k_{s3}^v (w_s + l_x \theta_s - l_y \beta_s - w_{t1} + l_y \beta_{t1}) l_x - k_{s4}^v (w_s - l_x \theta_s - l_y \beta_s - w_{t2} + l_y \beta_{t2}) l_x = F_{\theta_s}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

1.4. Para o grau de liberdade de rotação em torno do eixo longitudinal (*roll*):

$$\begin{aligned}
& I_{x_s} \ddot{\beta}_s + c_{s1}^v (\dot{w}_s + l_x \dot{\theta}_s + l_y \dot{\beta}_s - \dot{w}_{t1} - l_y \dot{\beta}_{t1}) l_y + c_{s2}^v (\dot{w}_s - l_x \dot{\theta}_s + l_y \dot{\beta}_s - \dot{w}_{t2} - l_y \dot{\beta}_{t2}) l_y - \\
& c_{s3}^v (\dot{w}_s + l_x \dot{\theta}_s - l_y \dot{\beta}_s - \dot{w}_{t1} + l_y \dot{\beta}_{t1}) l_y - c_{s4}^v (\dot{w}_s - l_x \dot{\theta}_s - l_y \dot{\beta}_s - \dot{w}_{t2} + l_y \dot{\beta}_{t2}) l_y + \\
& k_{s1}^v (w_s + l_x \theta_s + l_y \beta_s - w_{t1} - l_y \beta_{t1}) l_y + k_{s2}^v (w_s - l_x \theta_s + l_y \beta_s - w_{t2} - l_y \beta_{t2}) l_y - \\
& k_{s3}^v (w_s + l_x \theta_s - l_y \beta_s - w_{t1} + l_y \beta_{t1}) l_y - k_{s4}^v (w_s - l_x \theta_s - l_y \beta_s - w_{t2} + l_y \beta_{t2}) l_y - \\
& c_{s1}^h [(\dot{v}_s - l_z \dot{\beta}_s - l_x \dot{\alpha}_s) l_z + (-\dot{v}_{t1} - a_z \dot{\beta}_{t1}) l_z] - c_{s2}^h [(\dot{v}_s - l_z \dot{\beta}_s + l_x \dot{\alpha}_s) l_z + (-\dot{v}_{t2} - a_z \dot{\beta}_{t2}) l_z] - \\
& c_{s3}^h [(\dot{v}_s - l_z \dot{\beta}_s - l_x \dot{\alpha}_s) l_z + (-\dot{v}_{t1} - a_z \dot{\beta}_{t1}) l_z] - c_{s4}^h [(\dot{v}_s - l_z \dot{\beta}_s + l_x \dot{\alpha}_s) l_z + (-\dot{v}_{t2} - a_z \dot{\beta}_{t2}) l_z] - \\
& k_{s1}^h [(v_s - l_z \beta_s - l_x \alpha_s) l_z + (-v_{t1} - a_z \beta_{t1}) l_z] - k_{s2}^h [(v_s - l_z \beta_s + l_x \alpha_s) l_z + (-v_{t2} - a_z \beta_{t2}) l_z] - \\
& k_{s3}^h [(v_s - l_z \beta_s - l_x \alpha_s) l_z + (-v_{t1} - a_z \beta_{t1}) l_z] - k_{s4}^h [(v_s - l_z \beta_s + l_x \alpha_s) l_z + (-v_{t2} - a_z \beta_{t2}) l_z] = F_{\beta_s}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

1.5. Para o grau de liberdade de rotação em torno do eixo vertical (*yaw*):

$$\begin{aligned}
& I_{z_s} \ddot{\alpha}_s + c_{s1}^h (-\dot{v}_s + l_z \dot{\beta}_s + l_x \dot{\alpha}_s + \dot{v}_{t1} + a_z \dot{\beta}_{t1}) l_x - c_{s2}^h (-\dot{v}_s + l_z \dot{\beta}_s - l_x \dot{\alpha}_s + \dot{v}_{t2} + a_z \dot{\beta}_{t2}) l_x + \\
& c_{s3}^h (-\dot{v}_s + l_z \dot{\beta}_s + l_x \dot{\alpha}_s + \dot{v}_{t1} + a_z \dot{\beta}_{t1}) l_x - c_{s4}^h (-\dot{v}_s + l_z \dot{\beta}_s - l_x \dot{\alpha}_s + \dot{v}_{t2} + a_z \dot{\beta}_{t2}) l_x + \\
& k_{s1}^h (-v_s + l_z \beta_s + l_x \alpha_s + v_{t1} + a_z \beta_{t1}) l_x - k_{s2}^h (-v_s + l_z \beta_s - l_x \alpha_s + v_{t2} + a_z \beta_{t2}) l_x + \\
& k_{s3}^h (-v_s + l_z \beta_s + l_x \alpha_s + v_{t1} + a_z \beta_{t1}) l_x - k_{s4}^h (-v_s + l_z \beta_s - l_x \alpha_s + v_{t2} + a_z \beta_{t2}) l_x = F_{\alpha_s}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

## 2. Para o Truque Traseiro

### 2.1. Para o grau de liberdade de deslocamento vertical (*bounce*):

$$\begin{aligned}
& m_{t1} \ddot{w}_{t1} - c_{s1}^v (\dot{w}_s + l_x \dot{\theta}_s + l_y \dot{\beta}_s - \dot{w}_{t1} - l_y \dot{\beta}_{t1}) - c_{s3}^v (\dot{w}_s + l_x \dot{\theta}_s - l_y \dot{\beta}_s - \dot{w}_{t1} - l_y \dot{\beta}_{t1}) - \\
& k_{s1}^v (w_s + l_x \theta_s + l_y \beta_s - w_{t1} - l_y \beta_{t1}) - k_{s3}^v (w_s + l_x \theta_s - l_y \beta_s - w_{t1} + l_y \beta_{t1}) + \\
& c_{t1}^v (\dot{w}_{t1} + d_x \dot{\theta}_{t1} + d_y \dot{\beta}_{t1}) + c_{t2}^v (\dot{w}_{t1} - d_x \dot{\theta}_{t1} + d_y \dot{\beta}_{t1}) + c_{t3}^v (\dot{w}_{t1} + d_x \dot{\theta}_{t1} - d_y \dot{\beta}_{t1}) + \\
& c_{t4}^v (\dot{w}_{t1} - d_x \dot{\theta}_{t1} - d_y \dot{\beta}_{t1}) + k_{t1}^v (w_{t1} + d_x \theta_{t1} + d_y \beta_{t1}) + k_{t2}^v (w_{t1} - d_x \theta_{t1} + d_y \beta_{t1}) + \\
& k_{t3}^v (w_{t1} + d_x \theta_{t1} - d_y \beta_{t1}) + k_{t4}^v (w_{t1} - d_x \theta_{t1} - d_y \beta_{t1}) = F_{w_{t1}}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

### 2.2. Para o grau de liberdade de deslocamento transversal (*sway*):

$$\begin{aligned}
& m_{t1} \ddot{v}_{t1} - c_{s1}^h (\dot{v}_s + l_z \dot{\beta}_s - l_x \dot{\alpha}_s - \dot{v}_{t1} - a_z \dot{\beta}_{t1}) - c_{s3}^h (\dot{v}_s + l_z \dot{\beta}_s - l_x \dot{\alpha}_s - \dot{v}_{t1} - a_z \dot{\beta}_{t1}) - \\
& k_{s1}^h (v_s + l_z \beta_s - l_x \alpha_s - v_{t1} - a_z \beta_{t1}) - k_{s3}^h (v_s + l_z \beta_s - l_x \alpha_s - v_{t1} - a_z \beta_{t1}) + c_{t1}^h (\dot{v}_{t1} - b_z \dot{\beta}_{t1} + d_x \dot{\alpha}_{t1}) + \\
& c_{t2}^h (\dot{v}_{t1} - b_z \dot{\beta}_{t1} + d_x \dot{\alpha}_{t1}) + c_{t3}^h (\dot{v}_{t1} - b_z \dot{\beta}_{t1} - d_x \dot{\alpha}_{t1}) + c_{t4}^h (\dot{v}_{t1} - b_z \dot{\beta}_{t1} + d_x \dot{\alpha}_{t1}) + k_{t1}^h (v_{t1} - b_z \beta_{t1} - d_x \alpha_{t1}) + \\
& k_{t2}^h (v_{t1} - b_z \beta_{t1} + d_x \alpha_{t1}) + k_{t3}^h (v_{t1} - b_z \beta_{t1} - d_x \alpha_{t1}) + k_{t4}^h (v_{t1} - b_z \beta_{t1} + d_x \alpha_{t1}) = F_{v_{t1}}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

### 2.3. Para o grau de liberdade de rotação em torno do eixo transversal (*pitch*):

$$\begin{aligned}
& I_{y_{t1}} \ddot{\theta}_{t1} + c_{t1}^v (\dot{w}_{t1} + d_x \dot{\theta}_{t1} + d_y \dot{\beta}_{t1}) d_x - c_{t2}^v (\dot{w}_{t1} - d_x \dot{\theta}_{t1} + d_y \dot{\beta}_{t1}) d_x + c_{t3}^v (\dot{w}_{t1} + d_x \dot{\theta}_{t1} - d_y \dot{\beta}_{t1}) d_x - \\
& c_{t4}^v (\dot{w}_{t1} - d_x \dot{\theta}_{t1} - d_y \dot{\beta}_{t1}) d_x + k_{t1}^v (w_{t1} + d_x \theta_{t1} + d_y \beta_{t1}) d_x - k_{t2}^v (w_{t1} - d_x \theta_{t1} + d_y \beta_{t1}) d_x + \\
& k_{t3}^v (w_{t1} + d_x \theta_{t1} - d_y \beta_{t1}) d_x - k_{t4}^v (w_{t1} - d_x \theta_{t1} - d_y \beta_{t1}) d_x = F_{\theta_{t1}}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

#### 2.4. Para o grau de rotação em torno do eixo longitudinal (*roll*):

$$\begin{aligned}
& I_{x1} \ddot{\beta}_{t1} - c_{s1}^v (\dot{w}_s + l_x \dot{\theta}_s + l_y \dot{\beta}_s - \dot{w}_{t1} - l_y \dot{\beta}_{t1}) l_y + c_{s3}^v (\dot{w}_s + l_x \dot{\theta}_s - l_y \dot{\beta}_s - \dot{w}_{t1} + l_y \dot{\beta}_{t1}) l_y - \\
& k_{s1}^v (w_s + l_x \theta_s + l_y \beta_s - w_{t1} - l_y \beta_{t1}) l_y + k_{s3}^v (w_s + l_x \theta_s - l_y \beta_s - w_{t1} + l_y \beta_{t1}) l_y + \\
& c_{s1}^h [(-\dot{v}_s + l_z \dot{\beta}_s + l_x \dot{\alpha}_s) a_z + (\dot{v}_{t1} + a_z \dot{\beta}_{t1}) a_z] + c_{s3}^h [(-\dot{v}_s + l_z \dot{\beta}_s + l_x \dot{\alpha}_s) a_z + (\dot{v}_{t1} + a_z \dot{\beta}_{t1}) a_z] + \\
& k_{s1}^h [(-v_s + l_z \beta_s + l_x \alpha_s) a_z + (v_{t1} + a_z \beta_{t1}) a_z] + k_{s3}^h [(-v_s + l_z \beta_s + l_x \alpha_s) a_z + (v_{t1} + a_z \beta_{t1}) a_z] + \\
& c_{t1}^v (\dot{w}_{t1} + d_x \dot{\theta}_{t1} + d_y \dot{\beta}_{t1}) d_y + c_{t2}^v (\dot{w}_{t1} - d_x \dot{\theta}_{t1} + d_y \dot{\beta}_{t1}) d_y - c_{t3}^v (\dot{w}_{t1} + d_x \dot{\theta}_{t1} - d_y \dot{\beta}_{t1}) d_y - \\
& c_{t4}^v (\dot{w}_{t1} - d_x \dot{\theta}_{t1} - d_y \dot{\beta}_{t1}) d_y + k_{t1}^v (w_{t1} + d_x \theta_{t1} + d_y \beta_{t1}) d_y + k_{t2}^v (w_{t1} - d_x \theta_{t1} + d_y \beta_{t1}) d_y - \\
& k_{t3}^v (w_{t1} + d_x \theta_{t1} - d_y \beta_{t1}) d_y - k_{t4}^v (w_{t1} - d_x \theta_{t1} - d_y \beta_{t1}) d_y - c_{t1}^h (\dot{v}_{t1} - b_z \dot{\beta}_{t1} - d_x \dot{\alpha}_{t1}) b_z - \\
& c_{t2}^h (\dot{v}_{t1} - b_z \dot{\beta}_{t1} - d_x \dot{\alpha}_{t1}) b_z - c_{t3}^h (\dot{v}_{t1} - b_z \dot{\beta}_{t1} - d_x \dot{\alpha}_{t1}) b_z - c_{t4}^h (\dot{v}_{t1} - b_z \dot{\beta}_{t1} + d_x \dot{\alpha}_{t1}) b_z - \\
& k_{t1}^h (v_{t1} - b_z \beta_{t1} - d_x \alpha_{t1}) b_z - k_{t2}^h (v_{t1} - b_z \beta_{t1} + d_x \alpha_{t1}) b_z - k_{t3}^h (v_{t1} - b_z \beta_{t1} - d_x \alpha_{t1}) b_z - \\
& k_{t4}^h (v_{t1} - b_z \beta_{t1} + d_x \alpha_{t1}) b_z = F_{\beta_{t1}}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

#### 2.5. Para o grau de liberdade de rotação em torno do eixo vertical (*yaw*):

$$\begin{aligned}
& I_{z1} \ddot{\alpha}_{t1} + c_{t1}^h (-\dot{v}_{t1} + b_z \dot{\beta}_{t1} + d_x \dot{\alpha}_{t1}) d_x - c_{t2}^h (-\dot{v}_{t1} + b_z \dot{\beta}_{t1} - d_x \dot{\alpha}_{t1}) d_x + c_{t3}^h (-\dot{v}_{t1} + b_z \dot{\beta}_{t1} + d_x \dot{\alpha}_{t1}) d_x - \\
& c_{t4}^h (-\dot{v}_{t1} + b_z \dot{\beta}_{t1} - d_x \dot{\alpha}_{t1}) d_x + k_{t1}^h (-v_{t1} + b_z \beta_{t1} + d_x \alpha_{t1}) d_x - k_{t2}^h (-v_{t1} + b_z \beta_{t1} - d_x \alpha_{t1}) d_x + \\
& k_{t3}^h (-v_{t1} + b_z \beta_{t1} + d_x \alpha_{t1}) d_x - k_{t4}^h (-v_{t1} + b_z \beta_{t1} - d_x \alpha_{t1}) d_x = F_{\alpha_{t1}}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

### 3. Para o Truque Dianteiro

#### 3.1. Para o grau de liberdade de deslocamento vertical (*bounce*):

$$\begin{aligned}
& m_{t2} \ddot{w}_{t2} - c_{s2}^v (\dot{w}_s - l_x \dot{\theta}_s + l_y \dot{\beta}_s - \dot{w}_{t2} - l_y \dot{\beta}_{t2}) - c_{s4}^v (\dot{w}_s - l_x \dot{\theta}_s - l_y \dot{\beta}_s - \dot{w}_{t2} + l_y \dot{\beta}_{t2}) - \\
& k_{s2}^v (w_s - l_x \theta_s + l_y \beta_s - w_{t2} - l_y \beta_{t2}) - k_{s4}^v (w_s - l_x \theta_s - l_y \beta_s - w_{t2} + l_y \beta_{t2}) + \\
& c_{t5}^v (\dot{w}_{t2} + d_x \dot{\theta}_{t2} + d_y \dot{\beta}_{t2}) + c_{t6}^v (\dot{w}_{t2} - d_x \dot{\theta}_{t2} + d_y \dot{\beta}_{t2}) + c_{t7}^v (\dot{w}_{t2} + d_x \dot{\theta}_{t2} - d_y \dot{\beta}_{t2}) + \\
& c_{t8}^v (\dot{w}_{t2} - d_x \dot{\theta}_{t2} - d_y \dot{\beta}_{t2}) + k_{t5}^v (w_{t2} + d_x \theta_{t2} + d_y \beta_{t2}) + k_{t6}^v (w_{t2} - d_x \theta_{t2} + d_y \beta_{t2}) + \\
& k_{t7}^v (w_{t2} + d_x \theta_{t2} - d_y \beta_{t2}) + k_{t8}^v (w_{t2} - d_x \theta_{t2} - d_y \beta_{t2}) = F_{w_{t2}}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

### 3.2. Para o grau de liberdade de deslocamento transversal (sway):

$$\begin{aligned}
& m_{t2} \ddot{v}_{t2} - c_{s2}^h (\dot{v}_s - l_z \dot{\beta}_s + l_x \dot{\alpha}_s - \dot{v}_{t2} - a_z \dot{\beta}_{t2}) - c_{s4}^h (\dot{v}_s - l_z \dot{\beta}_s + l_x \dot{\alpha}_s - \dot{v}_{t2} - a_z \dot{\beta}_{t2}) - \\
& k_{s2}^h (v_s - l_z \beta_s + l_x \alpha_s - v_{t2} - a_z \beta_{t2}) - k_{s4}^h (v_s - l_z \beta_s + l_x \alpha_s - v_{t2} - a_z \beta_{t2}) + c_{t5}^h (\dot{v}_{t2} - b_z \dot{\beta}_{t2} - d_x \dot{\alpha}_{t2}) + \\
& c_{t6}^h (\dot{v}_{t2} - b_z \dot{\beta}_{t2} + d_x \dot{\alpha}_{t2}) + c_{t7}^h (\dot{v}_{t2} - b_z \dot{\beta}_{t2} - d_x \dot{\alpha}_{t2}) + c_{t8}^h (\dot{v}_{t2} - b_z \dot{\beta}_{t2} + d_x \dot{\alpha}_{t2}) + k_{t5}^h (v_{t2} - b_z \beta_{t2} - d_x \alpha_{t2}) + \\
& k_{t6}^h (v_{t2} - b_z \beta_{t2} + d_x \alpha_{t2}) + k_{t7}^h (v_{t2} - b_z \beta_{t2} - d_x \alpha_{t2}) + k_{t8}^h (v_{t2} - b_z \beta_{t2} + d_x \alpha_{t2}) = F_{v_{t2}}
\end{aligned} \quad (2.24)$$

### 3.3. Para o grau de liberdade de rotação em torno do eixo transversal (pitch):

$$\begin{aligned}
& I_{yt2} \ddot{\theta}_{t2} + c_{t5}^v (\dot{w}_{t2} + d_x \dot{\theta}_{t2} + d_y \dot{\beta}_{t2}) d_x - c_{t6}^v (\dot{w}_{t2} - d_x \dot{\theta}_{t2} + d_y \dot{\beta}_{t2}) d_x + c_{t7}^v (\dot{w}_{t2} + d_x \dot{\theta}_{t2} - d_y \dot{\beta}_{t2}) \\
& c_{t8}^v (\dot{w}_{t2} - d_x \dot{\theta}_{t2} - d_y \dot{\beta}_{t2}) d_x + k_{t5}^v (w_{t2} + d_x \theta_{t2} + d_y \beta_{t2}) d_x - k_{t6}^v (w_{t2} - d_x \theta_{t2} + d_y \beta_{t2}) d_x + \\
& k_{t7}^v (w_{t2} + d_x \theta_{t2} - d_y \beta_{t2}) d_x - k_{t8}^v (w_{t2} - d_x \theta_{t2} - d_y \beta_{t2}) d_x = F_{\theta_{t2}}
\end{aligned} \quad (2.25)$$

### 3.4. Para o grau de rotação em torno do eixo longitudinal (roll):

$$\begin{aligned}
& I_{xt2} \ddot{\beta}_{t2} - c_{s2}^v (\dot{w}_s - l_x \dot{\theta}_s + l_y \dot{\beta}_s - \dot{w}_{t2} - l_y \dot{\beta}_{t2}) l_y + c_{s4}^v (\dot{w}_s - l_x \dot{\theta}_s - l_y \dot{\beta}_s - \dot{w}_{t2} + l_y \dot{\beta}_{t2}) l_y - \\
& k_{s2}^v (w_s - l_x \theta_s + l_y \beta_s - w_{t2} - l_y \beta_{t2}) l_y + k_{s4}^v (w_s - l_x \theta_s - l_y \beta_s - w_{t2} + l_y \beta_{t2}) l_y + \\
& c_{s2}^h [(-\dot{v}_s + l_z \dot{\beta}_s - l_x \dot{\alpha}_s) a_z + (\dot{v}_{t2} + a_z \dot{\beta}_{t2}) a_z] + c_{s4}^h [(-\dot{v}_s + l_z \dot{\beta}_s - l_x \dot{\alpha}_s) a_z + (\dot{v}_{t2} + a_z \dot{\beta}_{t2}) a_z] + \\
& k_{s2}^h [(-v_s + l_z \beta_s - l_x \alpha_s) a_z + (v_{t2} + a_z \beta_{t2}) a_z] + k_{s4}^h [(-v_s + l_z \beta_s - l_x \alpha_s) a_z + (v_{t2} + a_z \beta_{t2}) a_z] + \\
& c_{t5}^v (\dot{w}_{t2} + d_x \dot{\theta}_{t2} + d_y \dot{\beta}_{t2}) d_y + c_{t6}^v (\dot{w}_{t2} - d_x \dot{\theta}_{t2} + d_y \dot{\beta}_{t2}) d_y - c_{t7}^v (\dot{w}_{t2} + d_x \dot{\theta}_{t2} - d_y \dot{\beta}_{t2}) d_y - \\
& c_{t8}^v (\dot{w}_{t2} - d_x \dot{\theta}_{t2} - d_y \dot{\beta}_{t2}) d_y + k_{t5}^v (w_{t2} + d_x \theta_{t2} + d_y \beta_{t2}) d_y + k_{t6}^v (w_{t2} - d_x \theta_{t2} + d_y \beta_{t2}) d_y - \\
& k_{t7}^v (w_{t2} + d_x \theta_{t2} - d_y \beta_{t2}) d_y - k_{t8}^v (w_{t2} - d_x \theta_{t2} - d_y \beta_{t2}) d_y - c_{t5}^h (\dot{v}_{t2} - b_z \dot{\beta}_{t2} - d_x \dot{\alpha}_{t2}) b_z - \\
& c_{t6}^h (\dot{v}_{t2} - b_z \dot{\beta}_{t2} - d_x \dot{\alpha}_{t2}) b_z - c_{t7}^h (\dot{v}_{t2} - b_z \dot{\beta}_{t2} - d_x \dot{\alpha}_{t2}) b_z - c_{t8}^h (\dot{v}_{t2} - b_z \dot{\beta}_{t2} + d_x \dot{\alpha}_{t2}) b_z - \\
& k_{t5}^h (v_{t2} - b_z \beta_{t2} - d_x \alpha_{t2}) b_z - k_{t6}^h (v_{t2} - b_z \beta_{t2} + d_x \alpha_{t2}) b_z - k_{t7}^h (v_{t2} - b_z \beta_{t2} - d_x \alpha_{t2}) b_z - \\
& k_{t8}^h (v_{t2} - b_z \beta_{t2} + d_x \alpha_{t2}) b_z = F_{\beta_{t2}}
\end{aligned} \quad (2.26)$$

3.5. Para o grau de liberdade de rotação em torno do eixo vertical (yaw):

$$\begin{aligned}
& I_{z12} \ddot{\alpha}_{t2} + c_{t5}^h (-\dot{v}_{t2} + b_z \dot{\beta}_{t2} + d_x \dot{\alpha}_{t2}) d_x - c_{t6}^h (-\dot{v}_{t2} + b_z \dot{\beta}_{t2} - d_x \dot{\alpha}_{t2}) d_x + c_{t7}^h (-\dot{v}_{t2} + b_z \dot{\beta}_{t2} + d_x \dot{\alpha}_{t2}) d_x - \\
& c_{t8}^h (-\dot{v}_{t2} + b_z \dot{\beta}_{t2} - d_x \dot{\alpha}_{t2}) d_x + k_{t5}^h (-v_{t2} + b_z \beta_{t2} + d_x \alpha_{t2}) d_x - k_{t6}^h (-v_{t2} + b_z \beta_{t2} - d_x \alpha_{t2}) d_x + \\
& k_{t7}^h (-v_{t2} + b_z \beta_{t2} + d_x \alpha_{t2}) d_x - k_{t8}^h (-v_{t2} + b_z \beta_{t2} - d_x \alpha_{t2}) d_x = F_{\alpha_2}
\end{aligned} \quad (2.27)$$

Assim, é possível representar o sistema na forma matricial.

$$\begin{aligned}
[M]_{n \times n} \cdot \{\ddot{X}(t)\}_{n \times 1} + [C]_{n \times n} \cdot \{\dot{X}(t)\}_{n \times 1} + [K]_{n \times n} \cdot \{X(t)\}_{n \times 1} \\
= \{F(t)\}_{n \times 1}
\end{aligned} \quad (2.28)$$

Nesse caso:

$$\{X(t)\}^T = \{w_s \ v_s \ \theta_s \ \beta_s \ \alpha_s \ w_{t1} \ v_{t1} \ \theta_{t1} \ \beta_{t1} \ \alpha_{t1} \ w_{t2} \ v_{t2} \ \theta_{t2} \ \beta_{t2} \ \alpha_{t2}\} \quad (2.29)$$

$$\{\dot{X}(t)\}^T = \{\dot{w}_s \ \dot{v}_s \ \dot{\theta}_s \ \dot{\beta}_s \ \dot{\alpha}_s \ \dot{w}_{t1} \ \dot{v}_{t1} \ \dot{\theta}_{t1} \ \dot{\beta}_{t1} \ \dot{\alpha}_{t1} \ \dot{w}_{t2} \ \dot{v}_{t2} \ \dot{\theta}_{t2} \ \dot{\beta}_{t2} \ \dot{\alpha}_{t2}\} \quad (2.30)$$

$$\{\ddot{X}(t)\}^T = \{\ddot{w}_s \ \ddot{v}_s \ \ddot{\theta}_s \ \ddot{\beta}_s \ \ddot{\alpha}_s \ \ddot{w}_{t1} \ \ddot{v}_{t1} \ \ddot{\theta}_{t1} \ \ddot{\beta}_{t1} \ \ddot{\alpha}_{t1} \ \ddot{w}_{t2} \ \ddot{v}_{t2} \ \ddot{\theta}_{t2} \ \ddot{\beta}_{t2} \ \ddot{\alpha}_{t2}\} \quad (2.31)$$

A principal fonte de entrada de forças em relação ao veículo é a via. Idealmente, a pista teria uma superfície plenamente plana e os trilhos seriam absolutamente retos e paralelos, mas obviamente isso é inatingível na prática (Hunt, 1986). Desse modo, é importante salientar que a força de excitação sobre o sistema é oriunda das irregularidades presentes na via permanente na qual o veículo trafega. Portanto, a força  $F$  pode ser arranjada vetorialmente da seguinte maneira:

$$\{F(t)\}^T = \{F_{w_s} \ F_{v_s} \ F_{\theta_s} \ F_{\beta_s} \ F_{\alpha_s} \ F_{w_{t1}} \ F_{v_{t1}} \ F_{\theta_{t1}} \ F_{\beta_{t1}} \ F_{\alpha_{t1}} \ F_{w_{t2}} \ F_{v_{t2}} \ F_{\theta_{t2}} \ F_{\beta_{t2}} \ F_{\alpha_{t2}}\} \quad (2.32)$$

Nos graus de liberdade da caixa não há excitação direta por parte dos trilhos, logo seu valor é zero.

$$F_{w_s} = F_{v_s} = F_{\theta_s} = F_{\beta_s} = F_{\alpha_s} = 0 \quad (2.33)$$

Contudo, nos demais graus de liberdade, o movimento das rodas causado pelo trilho interfere de modo direto nas forças e momentos aplicados aos truques, sendo

essas formadas a partir de combinações lineares dependentes das molas, amortecedores, dimensões do veículo e propriamente a irregularidade apresentada pelo trilho, conforme equações apresentadas a seguir:

$$F_{w_{t1}} = \sum_1^4 c_{t1}^v \dot{w}_{tr(i)} + \sum_1^4 k_{t1}^v w_{tr(i)} \quad (2.34)$$

$$F_{v_{t1}} = \sum_1^4 c_{t1}^h \dot{v}_{tr(i)} + \sum_1^4 k_{t1}^h v_{tr(i)} \quad (2.35)$$

$$F_{\theta_{t1}} = \sum_1^4 (-1)^{i+1} c_{t1}^v dx \dot{w}_{tr(i)} + \sum_1^4 (-1)^{i+1} k_{t1}^v dx w_{tr(i)} \quad (2.36)$$

$$F_{\beta_{t1}} = \sum_1^4 c_{t1}^v dy \dot{w}_{tr(i)} + \sum_1^4 k_{t1}^v dy w_{tr(i)} + \sum_1^4 c_{t1}^h bz \dot{v}_{tr(i)} + \sum_1^4 k_{t1}^h bz v_{tr(i)} \quad (2.37)$$

$$F_{\alpha_{t1}} = \sum_1^4 (-1)^i c_{t1}^h bz \dot{v}_{tr(i)} + \sum_1^4 (-1)^i k_{t1}^h bz v_{tr(i)} \quad (2.38)$$

$$F_{w_{t2}} = \sum_5^8 c_{t1}^v \dot{w}_{tr(i)} + \sum_5^8 k_{t1}^v w_{tr(i)} \quad (2.39)$$

$$F_{v_{t2}} = \sum_5^8 c_{t1}^h \dot{v}_{tr(i)} + \sum_5^8 k_{t1}^h v_{tr(i)} \quad (2.40)$$

$$F_{\theta_{t2}} = \sum_5^8 (-1)^{i+1} c_{t1}^v dx \dot{w}_{tr(i)} + \sum_5^8 (-1)^{i+1} k_{t1}^v dx w_{tr(i)} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned}
F_{\beta_{t2}} = & \sum_5^8 c_{t1}^v dy \dot{w}_{tr(i)} + \sum_5^8 k_{t1}^v dy w_{tr(i)} + \sum_5^8 c_{t1}^h bz \dot{v}_{tr(i)} \\
& + \sum_5^8 k_{t1}^h bz v_{tr(i)}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$F_{\alpha_{t2}} = \sum_5^8 (-1)^i c_{t1}^h bz \dot{v}_{tr(i)} + \sum_5^8 (-1)^i k_{t1}^h bz v_{tr(i)} \tag{2.43}$$

onde  $w_{tr(i)}$  é a irregularidade no trilho no plano vertical na  $i$ -ésima roda e  $\dot{w}_{tr(i)}$  sua derivada. Já  $v_{tr(i)}$  traduz a irregularidade no trilho no plano horizontal transversal da  $i$ -ésima roda e  $\dot{v}_{tr(i)}$  é sua derivada.

Tendo em vista toda essa formulação matemática, a fim de simplificar a simulação do modelo do veículo ferroviário, o sistema é convertido da forma matricial, conforme a Equação (2.29), para o espaço de estados. Isso é bastante vantajoso nesse caso, uma vez que na forma matricial são apresentadas equações diferenciais de segunda ordem, enquanto que o espaço de estados apresenta apenas equações de primeira ordem. A conversão ocorre de maneira análoga ao processo apresentado nas Equações (2.4) a (2.8). Logo:

$$\begin{bmatrix} \{\dot{x}(t)\} \\ \{\ddot{x}(t)\} \end{bmatrix}_{2n \times 1} = [A]_{2n \times 2n} \begin{bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{bmatrix}_{2n \times 1} + [B]_{2n \times n} \{F(t)\}_{n \times 1} \tag{2.44}$$

Na qual:

$$[A]_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} [0]_{n \times n} & [I]_{n \times n} \\ [M^{-1} K]_{n \times n} & [M^{-1} C]_{n \times n} \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

$$[B]_{2n \times n} = \begin{bmatrix} [0]_{n \times n} \\ [M^{-1}]_{n \times n} \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

Onde  $[I]_{n \times n}$  é a matriz identidade de tamanho  $n$ .

Considerando-se que o modelo do vagão GDU conta com 15 graus de liberdade, a sua realização no espaço de estados contará com 30 estados.



### 3. REDUÇÃO DE ORDEM DE MODELOS

#### 3.1. Breve histórico da redução de ordem de modelos

Originalmente, a redução de ordem de modelos foi desenvolvida na área de teoria de sistemas e controle, a qual estuda propriedades de sistemas dinâmicos (Schilders, 2008). Diversas técnicas de redução de ordem de sistemas lineares no domínio do tempo contínuo e no domínio da frequência podem ser encontradas na literatura (Davidson, 1966) (Moore, 1981) (Villemagne & Skelton, 1987) (Bai, 2002) (Parmar, 2007) (Schilders, 2008).

Dependendo do sistema original a ser reduzido, diferentes metodologias para redução de ordem podem ser aplicadas. Segundo Yu Ni et al. (2016), geralmente, as técnicas de redução de ordem se baseiam em:

- Identificação e preservação de certos modos de interesse diretamente, como ocorrem no truncamento modal e na análise modal seletiva (Varga, 1993) (Rao, 2008).
- Decomposição em valores singulares (SVD), os quais preservam a observabilidade e controlabilidade do sistema, como, por exemplo, no truncamento balanceado e nas aproximações da norma Hankel (Antoulas & Sorensen, 2001) (Moore, 1981).
- Casamento de momentos, o qual aproxima os momentos das funções de transferência do sistema original, presente no método de Krylov (Jaimoukha, 1997) (Bai, 2002).
- Análise de perturbação singular, na qual se presume que o sistema original pode ser dividido em dinâmica rápida e lenta (Maciel, 2015) (Obinata & Anderson, 2001).

Os métodos fundamentais na área de redução de ordem de modelos foram publicados nos anos 80 e 90 do século passado (Schilders, 2008). Moore (1981) foi o pioneiro na publicação do método de realização balanceada truncada. Glover

(1984), desenvolveu técnicas apoiadas nas aproximações da norma Hankel. Em (1987), foi proposto por Sirovich o método da Decomposição da Ortogonalização própria. Já nos anos 90, os primeiros trabalhos relacionados aos subespaços de Krylov foram divulgados (Pillage & Rohrer, 1990). Além disso, Freund e Feldmann (1995) demonstraram a relação entre a aproximação de Padé (casamento de momentos) e espaços de Krylov, propondo o método de Padé via Lanczos (PVL). Posteriormente, Odabasioglu e Celik (1998) utilizou-se das ideias de Arnoldi (1951) ao invés de Lanczos (1951), criando o método denominado Prima (*Passive Reduced-order Interconnect Macromodeling Algorithm*).

O resultado esperado a partir da aplicação das técnicas é a redução de complexidade dos modelos aliada à preservação da relação entre entradas e saídas tanto quanto possível (Gawronski, 2004).

### **3.2. Técnicas de redução de ordem no espaço de estados**

Em geral essas técnicas são desenvolvidas de maneira semelhante no tratamento de sistemas no espaço de estados (Maciel, 2015). Num estágio inicial é feita uma transformação linear no sistema para uma determinada base de projeção que evidencie algum parâmetro desejado (Villemagne & Skelton, 1987), tais como autovalores e fatores de controlabilidade e observabilidade, por exemplo. Em seguida é preciso empregar algum critério de seleção dos graus de liberdade a serem eliminados. E finalmente, adota-se algum método de eliminação de graus de liberdade.

O presente trabalho se utiliza dos princípios de identificação e preservação dos modos de interesse, decomposição em valores singulares e análise de perturbação singular. Combinando-se essas propriedades, formam-se quatro técnicas distintas para serem aplicadas ao modelo do vagão, conforme a Tabela 2, se valendo da simplicidade de implementação e ampla difusão desses métodos em análises de redução de ordem de modelos.

Tabela 2 – Técnicas de Redução de Ordem Aplicadas

Referência	Base de Projeção	Critério de seleção	Método de Eliminação
Técnica I	Realização balanceada	Normas Hankel	Truncamento
Técnica II	Realização balanceada	Normas Hankel	Perturbação Singular
Técnica III	Forma Modal	Controlabilidade e Observabilidade	Truncamento
Técnica IV	Forma Modal	Controlabilidade e Observabilidade	Perturbação Singular

Fonte: O próprio autor

### 3.2.1. Base de projeção

Na teoria de sistemas lineares existe a possibilidade de realização de um mesmo sistema no espaço de estados em diferentes bases de projeção a partir de transformações de similaridade (Chen C.-T. , 1999). Portanto dado um sistema no espaço de estados conforme equações abaixo:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \quad (3.1)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \quad (3.2)$$

É possível realizar esse mesmo sistema em uma nova base algebricamente equivalente utilizando a Equação (3.3). Tal equação é denominada transformação de equivalência (Chen C.-T. , 1999).

$$\bar{x} = P x \quad (3.3)$$

onde  $P$  é a nova base do sistema. A partir dessa transformação, obtém-se uma nova realização no espaço de estados conforme equações abaixo:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A} \cdot \bar{x}(t) + \bar{B} \cdot u(t) \quad (3.4)$$

$$y(t) = \bar{C} \cdot \bar{x}(t) + \bar{D} \cdot u(t) \quad (3.5)$$

onde:

$$\bar{A} = P \cdot A \cdot P^{-1} \quad (3.6)$$

$$\bar{B} = P \cdot B \quad (3.7)$$

$$\bar{C} = C \cdot P^{-1} \quad (3.8)$$

$$\bar{D} = D \quad (3.9)$$

Projeções em determinadas bases evidenciam características particulares que podem auxiliar o processo de redução de ordem (Villemagne & Skelton, 1987).

### 3.2.1.1. Forma Balanceada

Dado um sistema no espaço de estados, conforme as Equações (2.11) e (2.12), assumindo que  $A$  é estável, como é habitual em sistemas mecânicos, todos seus autovalores possuem parte real negativa. Portanto, segundo o Teorema 7.5 de Chen (1999), o Gramiano de controlabilidade  $W_c$  e o Gramiano de observabilidade  $W_o$  são as respectivas soluções únicas da Equação de Lyapunov (3.10) e (3.11) em um sistema controlável e observável.

$$A W_c + W_c A' = -B B' \quad (3.10)$$

$$A' W_o + W_o A = -C' C \quad (3.11)$$

Por definição, os Gramianos de controlabilidade e observabilidade podem ser representados por uma integral temporal (Schilders, 2008).

$$W_c = \int_0^{\infty} e^{At} B B' e^{A't} dt \quad (3.12)$$

$$W_o = \int_0^{\infty} e^{At} C' C e^{A't} dt \quad (3.13)$$

O Gramiano de controlabilidade indica a mínima quantidade de energia necessária para transportar o sistema de seu estado inicial para um novo estado arbitrário e o Gramiano de Observabilidade está relacionado com o quão bem pode-se estimar os vetores de estado inicial a partir da saída na ausência de qualquer entrada (Yu Ni, 2016). Nessa conjuntura, a realização de sistemas na forma balanceada iguala os gramianos na intenção de considerar uniformemente a importância de entradas e saídas.

$$W_c = W_o = \Sigma \quad (3.14)$$

A realização de sistemas na forma balanceada é provavelmente o método mais popular de decomposição em valores singulares (Yu Ni, 2016). Toda matriz pertencente ao domínio  $\mathbb{R}^{n \times m}$  pode ser decomposta em um produto de três matrizes (Antoulas & Sorensen, 2001). Tendo em vista que  $W_c$  e  $W_o$  são simétricos e positivos definidos, é possível aplicar a decomposição ao gramiano de controlabilidade da seguinte forma, conforme o Teorema 7.6 de Chen (1999):

$$W_c = Q' D_w Q \quad (3.15)$$

onde  $Q$  é uma matriz ortogonal, isto é, sua transposta é igual à sua matriz inversa, e  $D_w$  é uma matriz diagonal que contém os autovalores de  $W_c$  em sua diagonal. Visto que  $W_c$  possui todos os seus autovalores reais e positivos e é simétrica, é possível expressar a matriz  $D_w$  decomposta, conforme a Equação (3.16).

$$D_w = D_w^{1/2} D_w^{1/2} \quad (3.16)$$

onde  $D_w^{1/2}$  é diagonal com raízes quadradas positivas das entradas diagonais de  $D_w$  como suas entradas diagonais.

Adotando-se a fatoração de Cholesky (1875 – 1918) de  $W_c$  é possível calcular  $W_c = R'R$  e, aplicando a mesma decomposição das Equações (3.15) e (3.16) a  $RW_oR'$ , temos que:

$$RW_oR' = U \Sigma^2 U' \quad (3.17)$$

onde  $U$  é uma matriz ortogonal. Assim, é possível expressar uma matriz de transformação linear  $P$  tal que garante que o Gramiano de controlabilidade se iguale ao Gramiano de observabilidade.

$$P = \Sigma^{1/2} U' (R)^{-1} \quad (3.18)$$

Logo,  $W_c = W_o = \Sigma$  caso seja aplicada a transformação linear  $P$  a qualquer realização de um sistema.

### 3.2.1.2. Forma Modal

Não há como abordar sistemas em sua forma modal sem a devida compreensão a respeito de autovalores e autovetores. Por definição, um número real ou complexo  $\lambda$  é denominado um autovalor de uma matriz real  $A$  se houver um vetor não-nulo  $x$  tal que:

$$Ax = \lambda x \quad (3.19)$$

Também, qualquer vetor não nulo  $x$  que satisfaça a equação acima é chamado autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda$  (Chen C.-T. , 1999).

Admitindo que todos os autovalores de  $A$  de tamanho  $n \times n$  sejam distintos  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , é possível montar uma base de projeção com o conjunto de autovetores associados aos  $n$  autovalores distintos, formando uma base de vetores linearmente independentes  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ . Assim, a matriz  $Q$  de transformação linear é dada por:

$$Q = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n] \quad (3.20)$$

Portanto, aplicando essa transformação à matriz  $A$ , temos uma matriz  $\bar{A}$  que é diagonal formada pelos autovalores do sistema.

$$\bar{A} = Q^{-1} A Q \quad (3.21)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

A ideia básica da análise modal para redução de ordem nada mais é do que projetar a dinâmica do sistema linear em um subespaço correspondente aos modos dominantes do sistema (Yu Ni, 2016). Isso pode ser bem observado avaliando o sistema no domínio da frequência, ou seja, por meio de uma função de transferência com  $n$  polos e  $m$  zeros, visto que os autovalores de um sistema são os polos desse mesmo sistema.

$$F(s) = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\dots(s+\lambda_n)} \quad (3.23)$$

onde  $k$  é o ganho dessa função de transferência. Expandindo a função de transferência em frações parciais, tem-se:

$$F(s) = \frac{a_1}{s+\lambda_1} + \frac{a_2}{s+\lambda_2} + \dots + \frac{a_n}{s+\lambda_n} \quad (3.24)$$

na qual  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) são constantes denominadas de resíduos. Sabendo que é crucial para a estabilidade do sistema que os polos devem ter sua parte real negativa, por meio dessa equação fica evidente que quanto mais próximo o polo se aproximar da origem, tende a ser maior sua relevância na resposta do sistema ou, no caso de sistemas pouco amortecidos, quanto mais próximo o polo se localizar no plano complexo ao eixo real (Ogata, 2003).

Vale a pena salientar que a importância da abordagem modal como uma útil ferramenta na redução de ordem de modelos reside em sua aplicabilidade em reduzir sistemas de alta ordem como os sistemas provenientes da modelagem de grandes estruturas mecânicas ou grandes sistemas de potência (Varga, 1993).

Tratando-se de sistemas mecânicos, para o caso de vibração livre para um grau de liberdade, a força de excitação  $F(t) = 0$  e a equação de movimento é descrita da seguinte maneira:

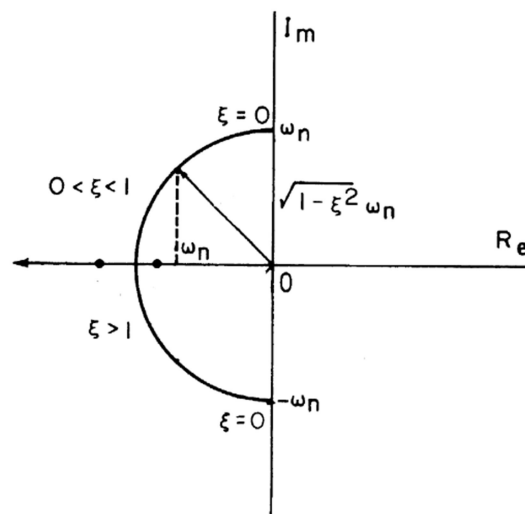
$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0 \quad (3.25)$$

Caso seja definido  $w_n^2 = k/m$  e  $\zeta = c/2mw_n$ , onde  $w_n$  representa a frequência natural e  $\zeta$  o fator de amortecimento do sistema, a Equação (3.25) pode ser reescrita como:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0 \quad (3.26)$$

Desenvolvendo a resposta dessa equação, é possível representar o lugar de suas raízes no plano complexo, conforme Figura 12.

Figura 12 - Representação de raízes no plano complexo



Fonte: Adaptado de (Garg & Dukkipati, 1984)

É válido ressaltar que nos sistemas mecânicos os autovalores representam as frequências naturais do sistema e os autovetores denotam os modos de vibração do sistema (Rao, 2008). Portanto, nota-se que os menores autovalores, isto é, as menores frequências naturais, são responsáveis pela parcela mais relevante da resposta do sistema, especialmente em sistemas com pouco amortecimento. Para fins de redução de ordem, entende-se que os autovalores mais dominantes do sistema devem ser preservados, tornando assim essa base de projeção adequada para aplicação de técnicas de redução de ordem.

### 3.2.2. Seleção dos Estados a Serem Eliminados

A seleção das variáveis a serem eliminadas é um fator diretamente relacionado com a capacidade do sistema reduzido em reproduzir características do sistema completo (Maciel, 2015). Os critérios de seleção são responsáveis por indicar



quantos e quais estados podem ser eliminados sem que a resposta final seja significativamente alterada.

Os valores singulares Hankel são definidos na realização balanceada, pois o gramiano de controlabilidade e o gramiano de observabilidade se igualam ambos em forma diagonal, sendo essa diagonal os valores singulares Hankel (Chen C.-T. , 1999). Portanto, por definição, na forma balanceada  $\Sigma$  é matriz que contém os valores singulares Hankel em sua diagonal.

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad (3.27)$$

na qual,  $\sigma_i$  são raízes quadradas positivas dos autovalores de  $W_c \cdot W_o$  e são ordenados de forma decrescente de magnitude para facilitar a redução do modelo. Portanto,

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \quad (3.28)$$

Assim, tendo em vista que cada  $\sigma_i$  está associado a um estado  $x_i$ , nota-se que, nessa ordem,  $x_i$  influencia a relação entrada/saída mais do que  $x_{i+1}$ .

Na teoria de controle, os valores singulares Hankel definem a “energia” de cada estado no sistema. Mantendo estados de maior energia, preserva-se a maior parte das características em termos de estabilidade, frequência e resposta temporal (Boyd, 1994).

Para a forma modal, sabe-se que os autovalores definem a estabilidade e, no caso de sistemas mecânicos, os modos de vibração de um sistema. No entanto, não se pode utilizar propriamente os valores singulares Hankel como critério de seleção, visto que este é inerente à forma balanceada. No entanto, como os valores singulares Hankel de um sistema dinâmico indicam o quanto este sistema é controlável e observável, pode-se estabelecer um critério baseado nos valores singulares Hankel que selecione os modos de vibrar menos controláveis e observáveis para serem eliminados, o qual denominado critério de controlabilidade e observabilidade. (Maciel, 2015).

### 3.2.3. Eliminação de Estados

Tendo em vista o critério de seleção utilizado, por fim, para efetivamente concretizar o processo de redução de ordem, é preciso eliminar os estados que foram considerados menos relevantes para a resposta do sistema. Para isso, o presente trabalho se valeu de duas técnicas bastante utilizadas em redução de ordem de modelos para eliminação de graus de liberdade, a saber: Truncamento direto e Eliminação por perturbação singular (EPS) (Obinata & Anderson, 2001).

Dado o sistema no espaço de estados, é possível separá-lo em duas partes, sendo que a primeira contém os estados mais relevantes e a segunda parte os estados considerados menos importantes, conforme o sistema de equações a seguir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad (3.29)$$

$$y = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D u \quad (3.30)$$

No truncamento direto os estados considerados menos relevantes são simplesmente eliminados do modelo (Schilders, 2008). Logo o sistema reduzido por truncamento direto assume a seguinte forma:

$$\dot{x}_r = A_{11} x_r + B_1 u \quad (3.31)$$

$$y_r = C_1 x_r + D u \quad (3.32)$$

Já o método de eliminação por perturbação singular se dá de uma forma um pouco mais complexa. As derivadas dos estados menos relevantes são consideradas nulas, tornando-se um sistema linearmente dependente que pode ser reduzido a um sistema linearmente independente combinando-se os estados.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad (3.33)$$

Consequentemente,

$$\dot{x}_1 = A_{11} \cdot x_1 + A_{12} \cdot x_2 + B_1 \cdot u \quad (3.34)$$

$$0 = A_{21} \cdot x_1 + A_{22} \cdot x_2 + B_2 \cdot u \quad (3.35)$$

Isolando a segunda parcela de estados  $x_2$ , temos que:

$$x_2 = (A_{22})^{-1} \cdot (-A_{21} \cdot x_1 - B_2 \cdot u) \quad (3.36)$$

Sendo assim, substituindo  $x_2$  na Equação (3.33), o modelo de ordem reduzido é descrito pelo sistema de equações adiante (Obinata & Anderson, 2001).

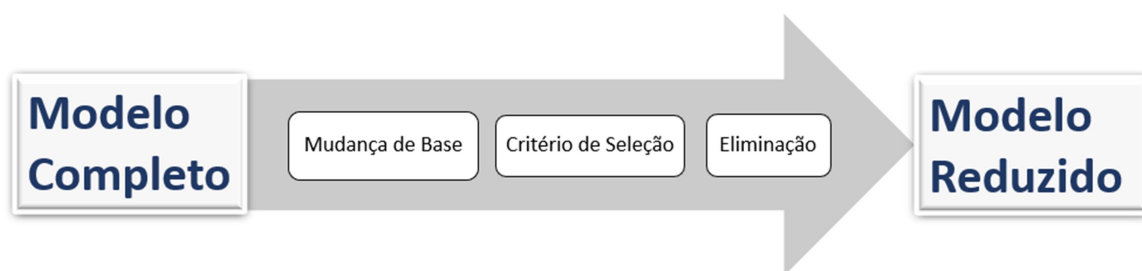
$$[\dot{x}_r] = [A_{11} - A_{12}(A_{22})^{-1}A_{21}] \cdot [x_r] + [B_1 - A_{12}(A_{22})^{-1}B_2] u \quad (3.37)$$

$$y_r = [C_1 - C_2(A_{22})^{-1}A_{21}] x_r + [D - C_2(A_{22})^{-1}B_2] u \quad (3.38)$$

### 3.3. Implementação das Técnicas de Redução de Ordem

Para implementação das técnicas de redução de ordem propostas, são desenvolvidos algoritmos em Matlab®, seguindo o procedimento indicado pela Figura 13.

Figura 13 – Procedimento de redução de ordem implementado



Fonte: O próprio autor

Portanto, inicialmente obtém-se as matrizes A, B, C e D do modelo completo no espaço de estados conforme já descrito no Capítulo 2. Tal modelo é convertido em um objeto de espaço de estados no Matlab® por meio do comando ss, demonstrado na Equação (3.39) adiante.

$$sys = ss(A, B, C, D) \quad (3.39)$$

Conforme apresentado na Tabela 2, as técnicas I e II se utilizam da mudança de base para a forma balanceada, enquanto que as técnicas III e IV levam o sistema para a forma modal. Para implementar essas transformações lineares aplica-se o comando *balreal* do Matlab® ao sistema completo para obter a forma balanceada e o comando *modreal* para obtenção da forma modal.

$$[sysb] = balreal(sys) \quad (3.40)$$

$$[sysfm] = modreal(sys) \quad (3.41)$$

A quantidade de estados do modelo completo a serem eliminados é determinada por meio da avaliação da controlabilidade e observabilidade, medidos pelos valores singulares Hankel. Isto se dá por meio do comando *balreal* também que pode retornar além do modelo na forma balanceada os valores singulares Hankel como saída.

$$[sysb, VSH] = balreal(sys) \quad (3.41)$$

Por fim, para concretizar efetivamente a redução de ordem, faz-se necessário truncar ou eliminar por meio de perturbação singular os estados menos significativos para a resposta do modelo. A redução é implementada utilizando-se o comando *modred* cuja sintaxe é apresentada a seguir.

$$[sys_{red}] = modred(\overline{sys}, elim, 'method') \quad (3.42)$$

onde  $\overline{sys}$  é o sistema na base desejada, *elim* são os estados que devem ser eliminados do modelo, no presente trabalho *elim* = 16:30 e '*method*' é um vetor de caracteres que pode assumir '*Truncate*' para o truncamento direto ou '*MatchDC*' para a eliminação por perturbação singular.

### 3.4. Algoritmos Genéticos Aplicados a Redução de Ordem de Modelos

Introduzido inicialmente em 1975 por John Holland (1975), o algoritmo genético se utiliza dos conceitos de seleção natural apresentados pelo naturalista Charles Darwin de reprodução e sobrevivência dos mais aptos. Além disso, também beneficia-se dos fundamentos da genética desenvolvidos pelo botânico Gregor Mendel da recombinação genética (Pacheco, 1999). O algoritmo genético é uma das mais utilizadas técnicas evolutivas, especialmente em problemas de otimização, onde diferentes soluções são combinadas por meio de regras probabilísticas para gerar outras soluções que se aproximam do ótimo (Almeida & Salles, 2016).

#### 3.4.1. Elementos de Algoritmos Genéticos

Naturalmente, pela origem do desenvolvimento da computação evolutiva ser construída inspirada em princípios biológicos, diversas técnicas de aprendizado de máquinas herdaram toda a nomenclatura e mecanismos presentes na natureza (Almeida & Salles, 2016) (Melanie, 1998). Em algoritmos genéticos, adota-se a seguinte terminologia apresentada na Tabela 3.

Tabela 3 - Terminologia adotada para Algoritmos Genéticos (Continua)

<b>Nomenclatura</b>	<b>Atributo</b>
<i>Cromossomo</i>	Tipicamente refere-se a um candidato à solução do problema, geralmente apresentado como um vetor de bits
<i>Genes</i>	São igualmente bits simples ou pequenos blocos de bits adjacentes que representam um elemento particular do candidato à solução
<i>População</i>	É definida como o conjunto de indivíduos, inserido no espaço de busca
<i>Geração</i>	É o número da iteração que o algoritmo genético executa.
<i>Operadores Genéticos</i>	Operações realizadas pelo AG sobre os indivíduos para garantir a evolução da espécie e a variabilidade genética necessária.

Tabela 3 - Terminologia adotada para Algoritmos Genéticos (Conclusão)

<b>Nomenclatura</b>	<b>Atributo</b>
<i>Função de Aptidão</i>	É a função objetivo do problema de otimização. Mede o quanto o indivíduo é apto a ser solução do problema.
<i>Seleção</i>	Essa operação seleciona cromossomos na população para reprodução. Quanto mais apto o cromossomo, mais provável sua seleção para reprodução.
<i>Recombinação</i>	Operação que consiste na troca aleatória de informações entre dois indivíduos
<i>Mutação</i>	Operador responsável por trocar aleatoriamente a característica de um gene em determinado indivíduo

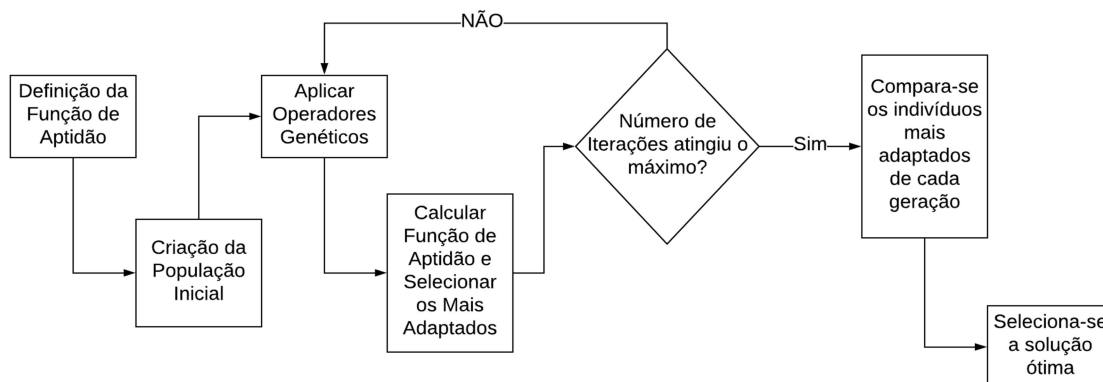
Fonte: O próprio autor

### 3.4.2. Algoritmo Genético na Redução de Ordem do Modelo do Vagão

Para fins de redução de ordem de modelos, os algoritmos genéticos são usualmente utilizados como ferramenta de otimização, isto é, busca-se simplificar ao máximo os modelos mantendo a sua precisão. Nesse contexto, é pré-determinado o tamanho da simplificação do modelo, ou melhor, define-se previamente qual será a ordem do modelo reduzido e o algoritmo se encarrega de encontrar os parâmetros ótimos que levem ao menor erro. Diversos autores desenvolvem esse tipo de técnica evolutiva para sistemas (Parmar, 2007) (S. Panda, 2009) (Ferreira A. d., 2012) (Adel & Salah, 2016).

Desse modo, segue-se a metodologia do diagrama apresentado na Figura 14 para a implementação de algoritmos genéticos na redução de ordem de modelos lineares.

Figura 14 - Metodologia de funcionamento de um Algoritmo Genético para redução de ordem de modelos



Fonte: O próprio autor

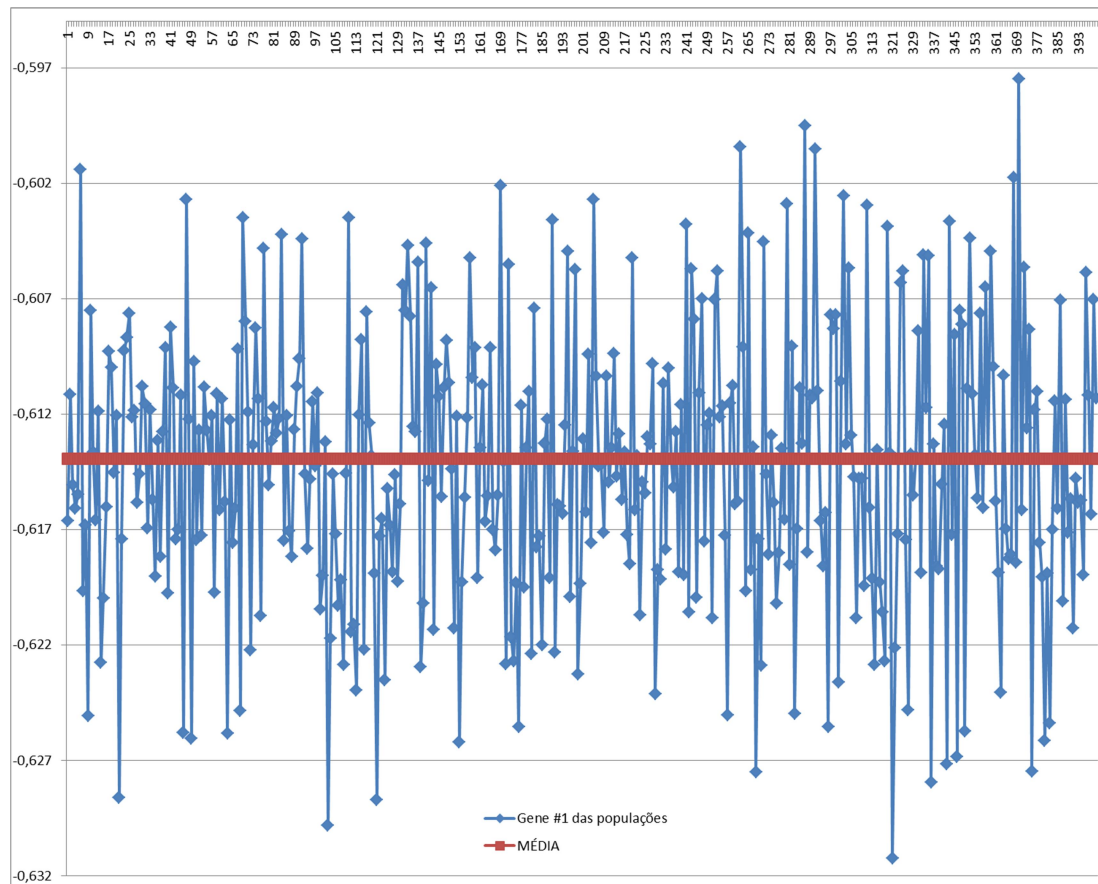
O presente trabalho trata o somatório do erro quadrático entre as saídas do modelo completo e as saídas do modelo reduzido pelo AG como função de aptidão (*Fitness*), conforme apresentado na Equação (3.43).

$$e = \sum_{i=1}^{15} \sqrt{(y_i - y_{red_i})^2} \quad (3.43)$$

Como população inicial, adotam-se pequenas variações aleatórias em torno dos parâmetros dos modelos obtidos através das técnicas de redução de ordem algébricas já apresentadas (Técnica I, Técnica II, Técnica III e Técnica IV), ou seja, o AG proposto é construído no espaço de estados com o mesmo tamanho de redução das demais técnicas e a população inicial tem como média os valores dos parâmetros dos modelos apresentados pelas técnicas I, II, III e IV e arbitra-se um pequeno valor de desvio para gerar variabilidade genética da população inicial.

Para exemplificar a geração da população inicial, mostra-se a seguir na Figura 15 a distribuição dos valores do primeiro gene dos indivíduos de uma população de tamanho de 400 indivíduos e o valor do primeiro termo da técnica IV como média, considerando um desvio padrão de 1% em torno da média.

Figura 15 – Distribuição do primeiro gene dos indivíduos em torno da média

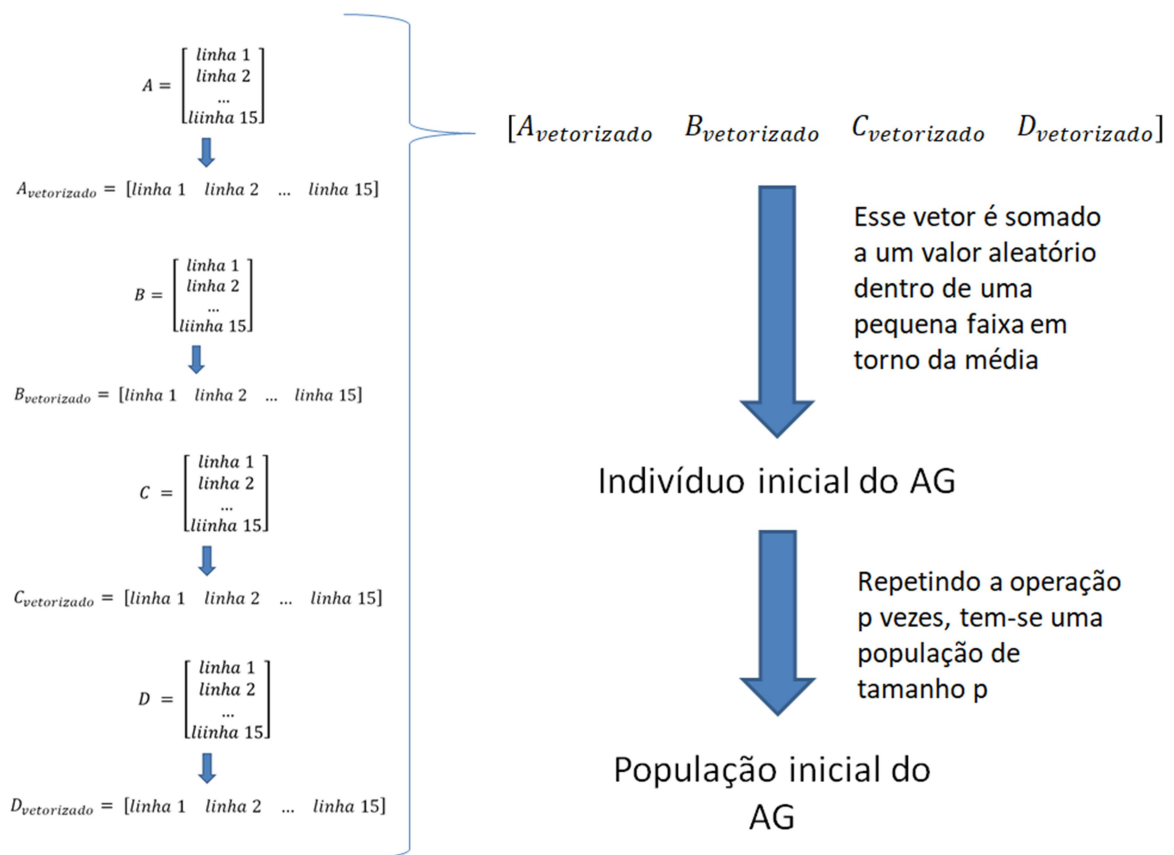


Fonte: O próprio autor

Para montar a população inicial completa, realiza-se um processo de vetorização das matrizes, concatenando-as em um único vetor, a fim de facilitar a inserção da variabilidade inicial e em seguida sejam feitas as operações genéticas.



Figura 16 - Processo de criação da população inicial do AG para redução de ordem de um sistema reduzido de 15 estados

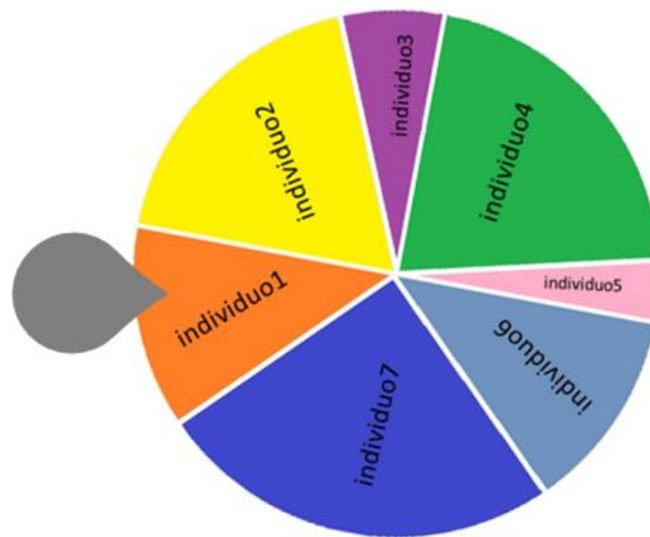


Fonte: O próprio autor

Após a criação da população inicial, calcula-se o *Fitness* dos indivíduos da população inicial, ordenando-os em ordem decrescente. Assim, utiliza-se o método da roleta para a seleção dos indivíduos que farão parte dos cruzamentos para criação de novos indivíduos das gerações posteriores.

O método de roleta consiste em girar virtualmente uma roleta e selecionar indivíduos pelo sorteio, onde cada indivíduo tem seu valor aptidão representado proporcionalmente em relação ao valor total de aptidões na população (Holland, 1975). Aqueles que ocupam maior área na roleta terão maiores chances de serem selecionados, conforme a Figura 17.

Figura 17 – Forma da roleta para o método seleção por roleta

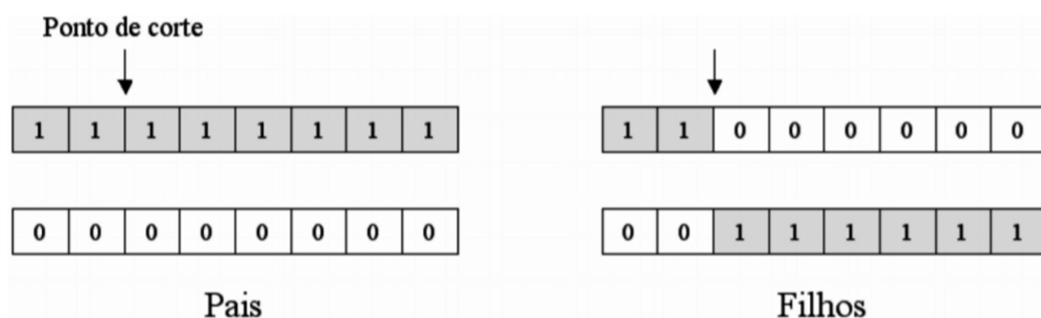


Fonte: (Filho, 2018)

Em seguida recombina-se os indivíduos selecionados por meio de cruzamentos, analogamente ao apresentado como exemplo na

Figura 18, onde o ponto de corte é selecionado aleatoriamente.

Figura 18 – Exemplo de cruzamento genético



Fonte: (Lopes, Rodrigues, & Steiner, 2013)

O AG, portanto, se propõe a otimizar o resultado obtido pelas técnicas analíticas implementadas nesse trabalho.

## 4. ANÁLISE POR SIMULAÇÃO, RESULTADOS E DISCUSSÃO

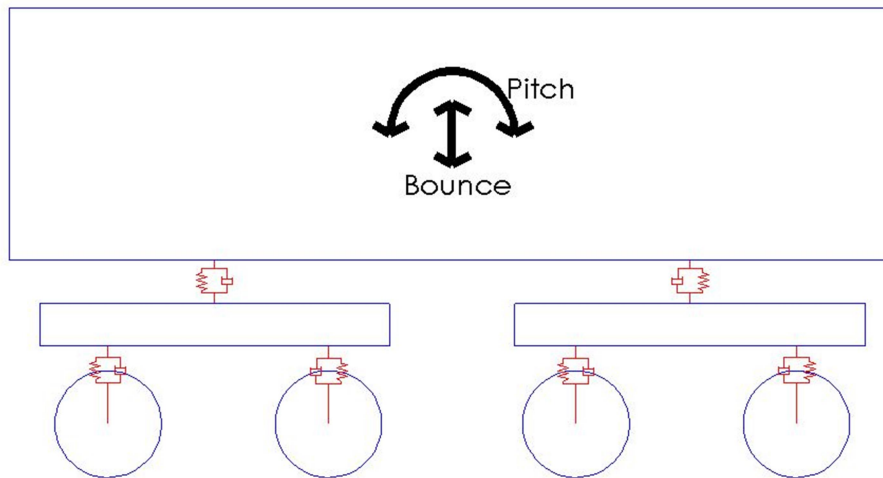
As simulações realizadas foram implementadas no software Matlab® cujas constantes e dados mecânicos do vagão GDU adotados para as simulações como massas, inércias, rigidezes, amortecimentos e distâncias foram retirados de uma caracterização modal real de um vagão GDU (Urban & Joy, 2011). Nesse capítulo são apresentados e discutidos os resultados gerados a partir dessas simulações.

### 4.1. Considerações

A fim de garantir a segurança operacional de veículos de carga, o manual de padrões e práticas recomendadas da AAR seção C (Association of American Railroads , 2007) propõe a realização de simulações que avaliam situações críticas na dinâmica de vagões e estabelece limites para determinados parâmetros. Tais limites de segurança são fundamentais para projetos de novos veículos de carga nas ferrovias a fim de evitar ocorrências ferroviárias ou até mesmo descarrilamentos. A norma define diferentes padrões de irregularidades nos trilhos para que os vagões sejam testados. Cada perfil configura um teste diferente e avalia o desempenho específico dos principais modos de vibração do sistema. O presente trabalho avalia os modelos completo e reduzidos do vagão para o teste de *Pitch e Bounce*.

#### 4.1.1. Teste de *Pitch e Bounce*

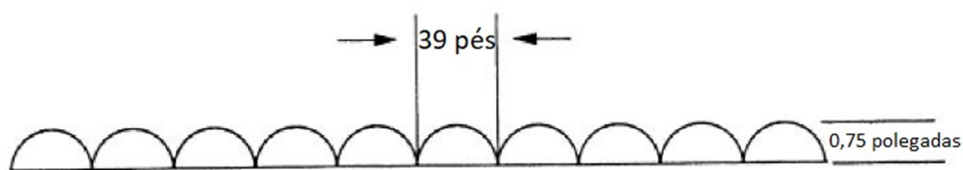
Por definição, *Pitch* de um corpo é a rotação em torno do seu eixo transversal através do centro de massa e *Bounce* é a simples oscilação vertical de um corpo sobre suas suspensões na qual o corpo do carro permanece na horizontal (Association of American Railroads , 2007), conforme a Figura 19.

Figura 19 - Modos de Vibração do Vagão - *Pitch* e *Bounce*

Fonte: O próprio autor

Esse teste é projetado para assegurar uma resposta satisfatória do veículo sobre a pista que promove uma excitação oscilatória nos modos de Pitch e Bounce. Portanto, em conformidade com o intuito desse teste, a norma AAR propõe a passagem do vagão a diferentes velocidades por um perfil de irregularidades com dez perturbações paralelas de 39 pés de comprimento de onda e máximo de 0,75 polegadas, conforme a

Figura 20.

Figura 20 - Pista para o teste de *Pitch* e *Bounce*

Fonte: Adaptado de (Association of American Railroads , 2007)

Os indicadores avaliados nesse tipo de teste são o mínimo percentual de carga vertical e a máxima capacidade dinâmica da suspensão principal.

O percentual de carga vertical é dado pela razão da força exercida no trilho por uma roda sobre a força estática em cada roda, que é o peso total do vagão dividido pelas oito rodas.

$$P_{cv} [\%] = \frac{\text{Força na roda } i}{\text{Peso do Vagão}/8} \quad (4.1)$$

O valor mínimo definido como limite pela norma é de 10% da carga estática não seja excedido durante um período maior que 50 milissegundos e por uma distância maior que 1 metro por circunstância, visando restringir a possibilidade de que um alívio na roda seja responsável por causar um descarrilamento.

A capacidade dinâmica da suspensão principal é definida pela razão da medida do deslocamento de uma mola que liga a caixa ao truque em relação ao comprimento nominal da mola.

$$CDSP [\%] = \frac{\text{deslocamento da mola da suspensão principal}}{\text{comprimento nominal da mola da suspensão principal}} \quad (4.2)$$

Seu limite é de 95% da capacidade total da mola.

#### 4.1.2. Aspectos Comparativos

Para avaliação do desempenho das técnicas de redução de ordem propostas e para fins de comparação são equiparados os gráficos que denotam as principais saídas dos modelos para cada tipo de teste, isto é, as variáveis mais significativamente afetadas pela determinada perturbação de via permanente estabelecida. São também comparados os gráficos resultantes da avaliação dos indicadores de segurança definidos por norma tanto para modelo completo quanto para modelos reduzidos. Além disso, define-se o somatório do erro quadrático, um número escalar responsável por demonstrar quantitativamente a diferença entre o modelo completo e os modelos reduzidos, conforme a equação a seguir.

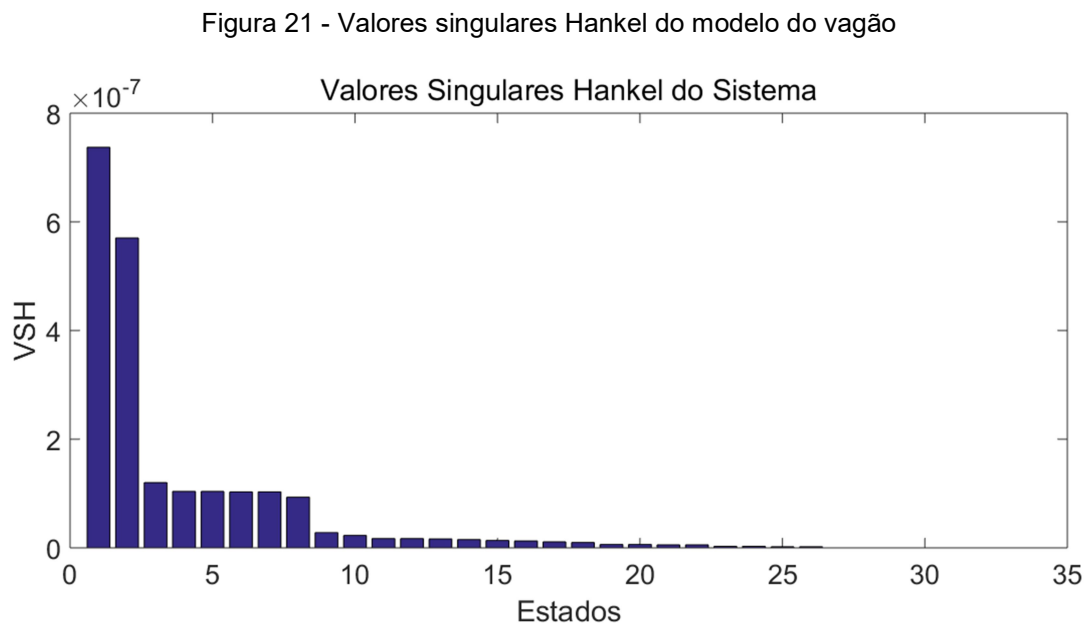
$$e = \sum_{i=1}^{15} \sqrt{(y_i - y_{red_i})^2} \quad (4.3)$$

onde,  $e$  é o erro,  $y_i$  são as saídas dos  $i$ -ésimos graus de liberdade do modelo completo e  $y_{red_i}$  são as saídas dos  $i$ -ésimos graus de liberdade dos modelos de ordem reduzida.

## 4.2. Resultados

Para efeito de redução de ordem de modelos, é preciso avaliar a quantidade de estados que poderão ser eliminados sem grandes prejuízos na resposta final do modelo. Portanto, avalia-se para o modelo do vagão em questão os valores singulares Hankel, conforme descrito na seção 3.2.2 do presente trabalho, conforme a

Figura 21.



Fonte: O próprio autor

Nota-se que os estados mais relevantes se encontram na primeira metade dos estados. Dessa forma, adota-se a eliminação a partir do 16° estado para efeitos de simplificação de modelos. Dessa forma, isto é, eliminando metade dos estados do modelo, qualitativamente reduzem-se os modelos à metade de sua complexidade original.

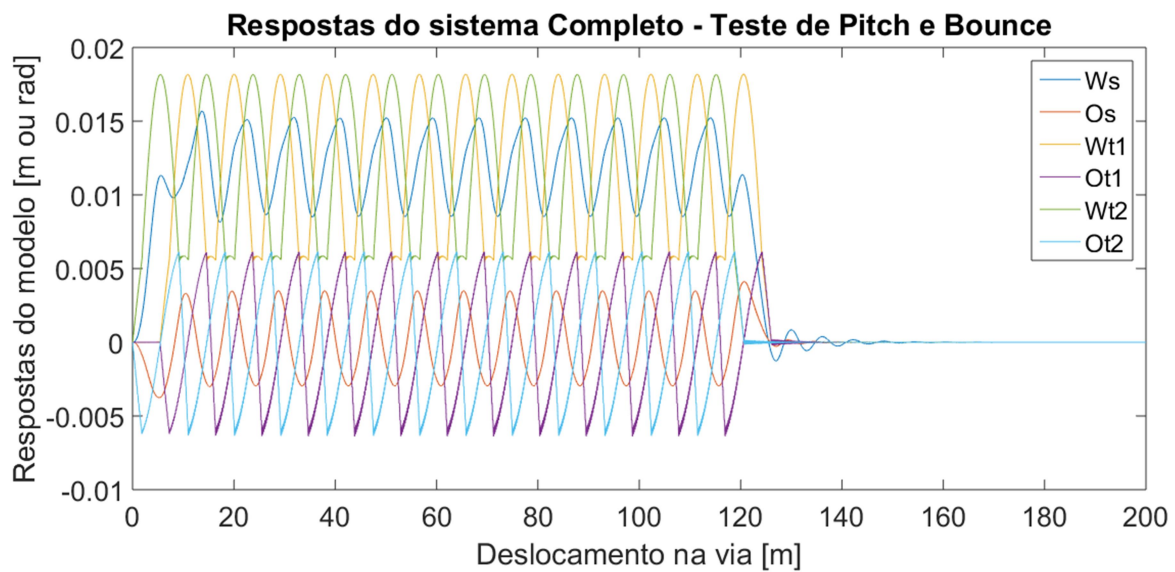
### 4.2.1. Teste de *Pitch* e *Bounce*

A seguir são apresentados os resultados obtidos pela simulação do teste de *Pitch* e *Bounce* a uma velocidade constante de 40 km/h.

A Figura 22 mostra o comportamento das respostas obtidas pelo modelo completo e as Figura 23, 24, 25 e 26 mostram o comportamento das respostas obtidas pelos

modelos reduzidos. Para representação gráfica mais clara, escolheu-se apresentar apenas os graus de liberdade que são realmente importantes para esse tipo de teste, a saber: o movimento vertical da caixa ( $W_s$ ), o ângulo de *pitch* da caixa ( $\theta_s$ ), os ângulos de *pitch* de ambos os truques ( $\theta_{t1}$  e  $\theta_{t2}$ ) e os movimentos verticais dos dois truques ( $W_{t1}$  e  $W_{t2}$ ). As unidades são dadas em metros, para as variáveis de movimento linear, e em radianos, para as variáveis angulares.

Figura 22 - Respostas do Sistema completo para o Teste de *Pitch e Bounce*



Fonte: O próprio autor

Figura 23 - Respostas do modelo reduzido pela técnica I para o Teste de *Pitch e Bounce*

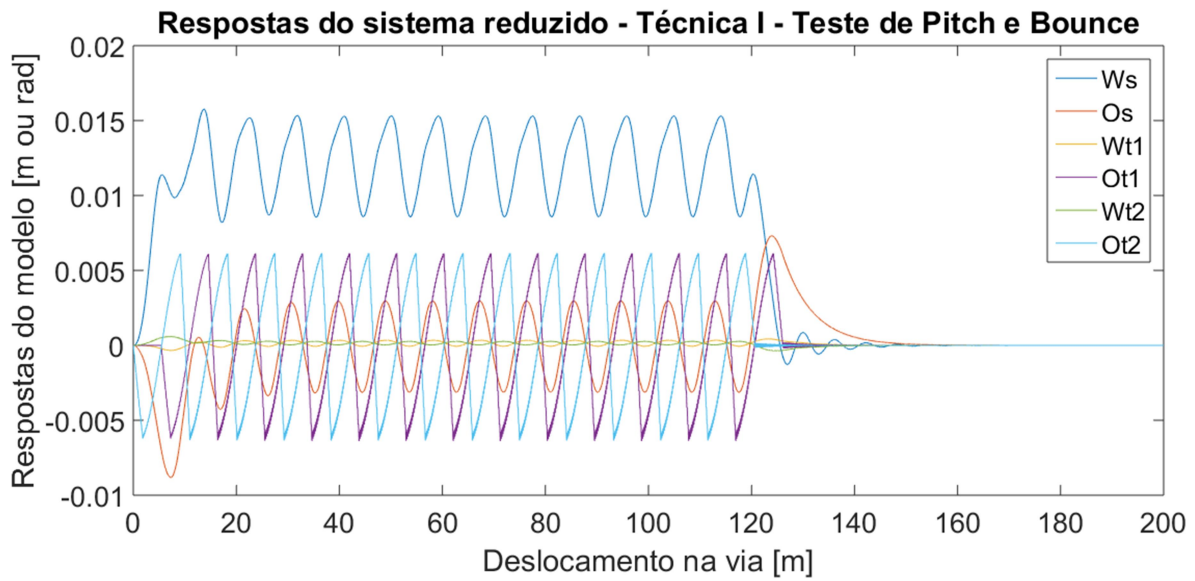


Figura 24 - Respostas do modelo reduzido pela técnica II para o Teste de *Pitch e Bounce*

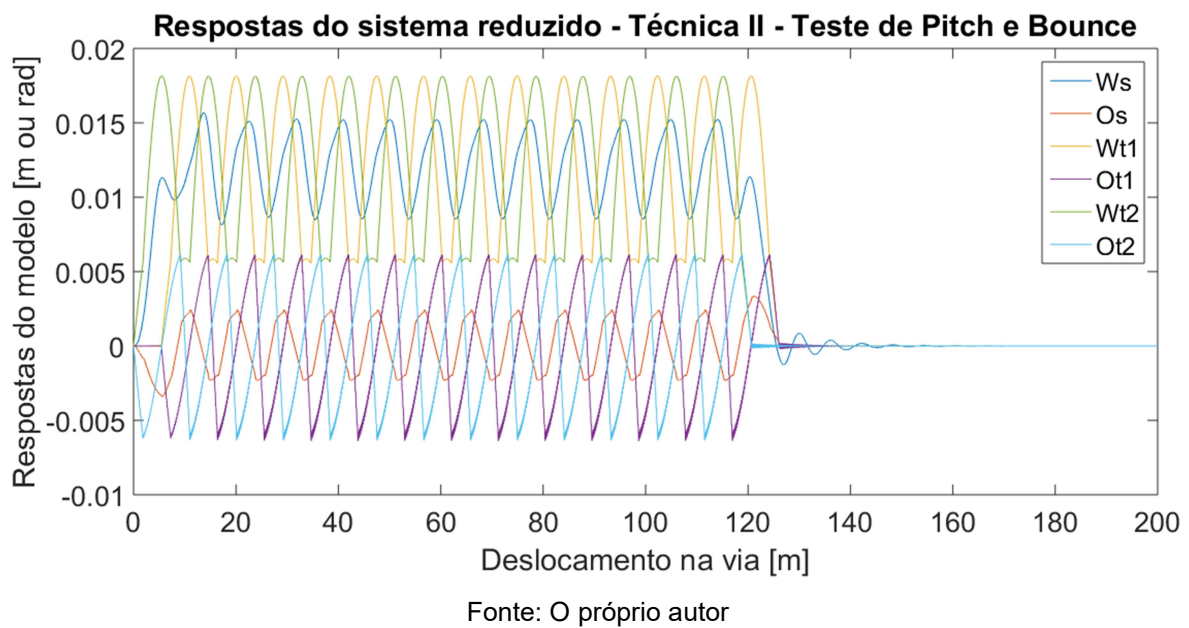
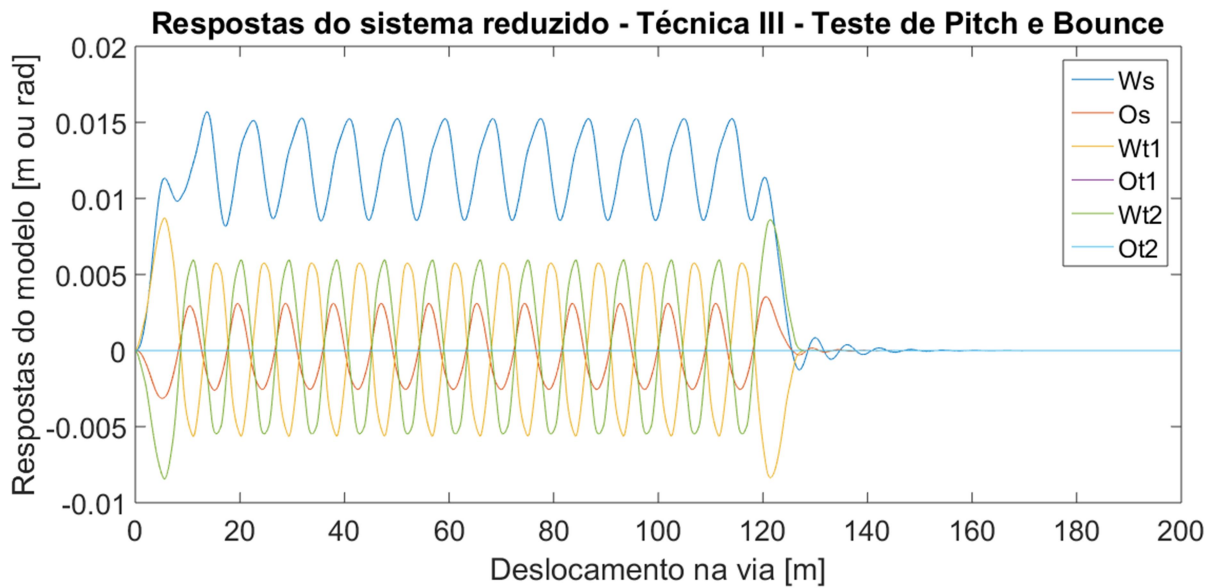
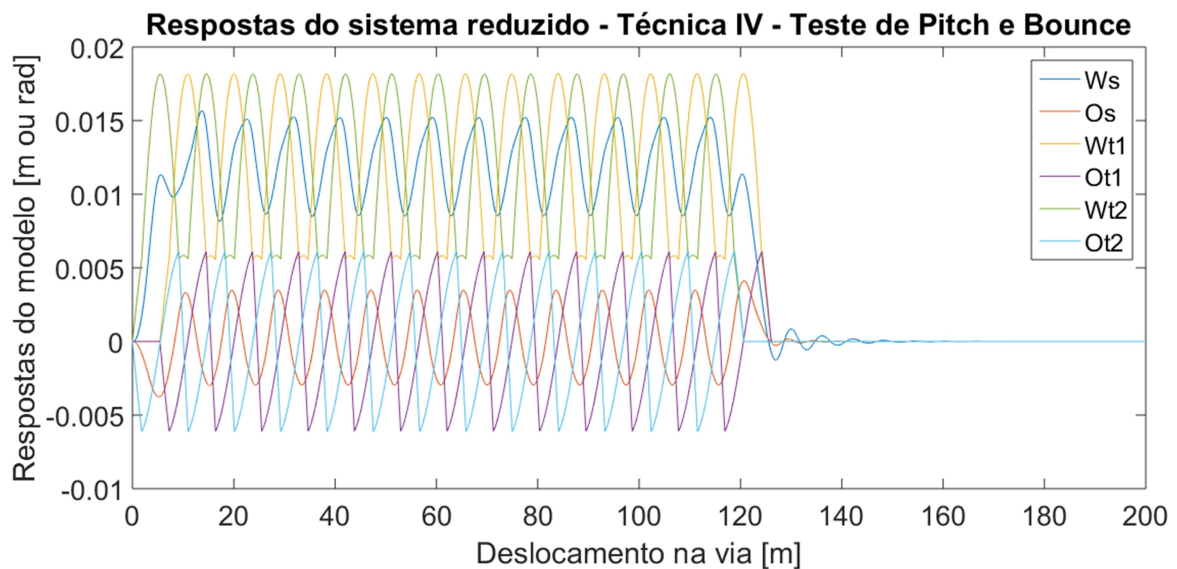




Figura 25 - Respostas do modelo reduzido pela técnica III para o Teste de *Pitch e Bounce*Figura 26 - Respostas do modelo reduzido pela técnica IV para o Teste de *Pitch e Bounce*

Observa-se que a Técnica I consegue reproduzir satisfatoriamente o comportamento de algumas variáveis, como, por exemplo, o movimento vertical da caixa ( $W_s$ ), o ângulo de *pitch* da caixa ( $\theta_s$ ) e os ângulos de *pitch* de ambos os truques ( $\theta_{t1}$  e  $\theta_{t2}$ ). No entanto é facilmente observável que o comportamento das demais variáveis foi significativamente afetado no processo de redução de ordem ( $W_{t1}$  e  $W_{t2}$ ).

Já a Técnica II apresenta um bom resultado para todas as variáveis analisadas nesse tipo de teste, reproduzindo com um bom grau de fidelidade o comportamento apresentado pelo modelo completo. No entanto, o ângulo de *pitch* da caixa no modelo reduzido apresenta o formato ligeiramente menos suave do que o modelo completo.

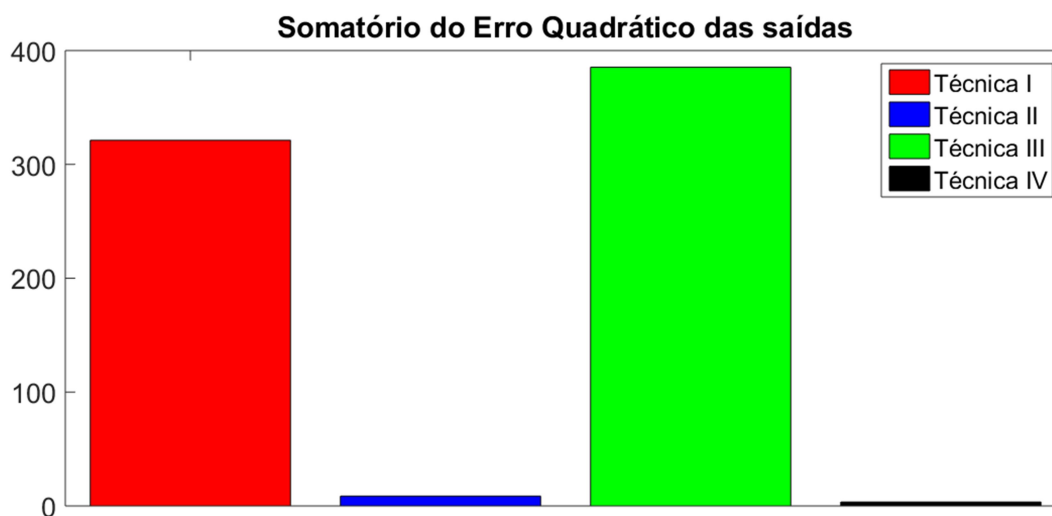
A Técnica III somente consegue atingir bons resultados para o movimento vertical da caixa e o ângulo de *pitch* da caixa ( $W_s$  e  $\theta_s$ ). Os demais graus de liberdade sofrem grande deformidade após o procedimento de redução de ordem.

A Técnica IV é a que apresenta os melhores resultados. Todas as variáveis do modelo reduzido se comportam de modo bastante semelhante às respostas obtidas pelo modelo completo. A eficiência dessa técnica nesse tipo de teste fica evidente quando comparados os gráficos do modelo completo e do modelo reduzido.

Nota-se que mesmo simplificando os modelos com metade da complexidade do modelo completo ainda obtém-se boas respostas em algumas técnicas de redução de ordem. Conforme esperado, as técnicas que eliminam por truncamento tem maiores dificuldades para representar o modelo completo enquanto as técnicas que eliminam por perturbação singular captam melhor o comportamento transiente do sistema, uma vez que a eliminação de estados por perturbação singular, por definição, leva em conta aspectos da parte rápida do sistema, enquanto o truncamento despreza completamente essa parcela. Ainda assim as Técnicas I e III conseguem reproduzir satisfatoriamente o comportamento de alguns graus de liberdade, especialmente aqueles cujas frequências naturais são mais baixas.

Para mensurar a assertividade das técnicas de redução de ordem aplicadas de maneira quantitativa exibe-se a seguir na Figura 27 o resultado do somatório do erro quadrático entre os graus de liberdade do modelo completo e os graus de liberdade de cada modelo reduzido, conforme a equação (4.5).

Figura 27 - Medida quantitativa do erro dos modelos reduzidos em relação ao modelo completo



Fonte: O próprio autor

A Tabela 4 expressa numericamente o que é exposto pela Figura 27.

Tabela 4 - Medida numérica do erro dos modelos reduzidos em relação ao modelo completo

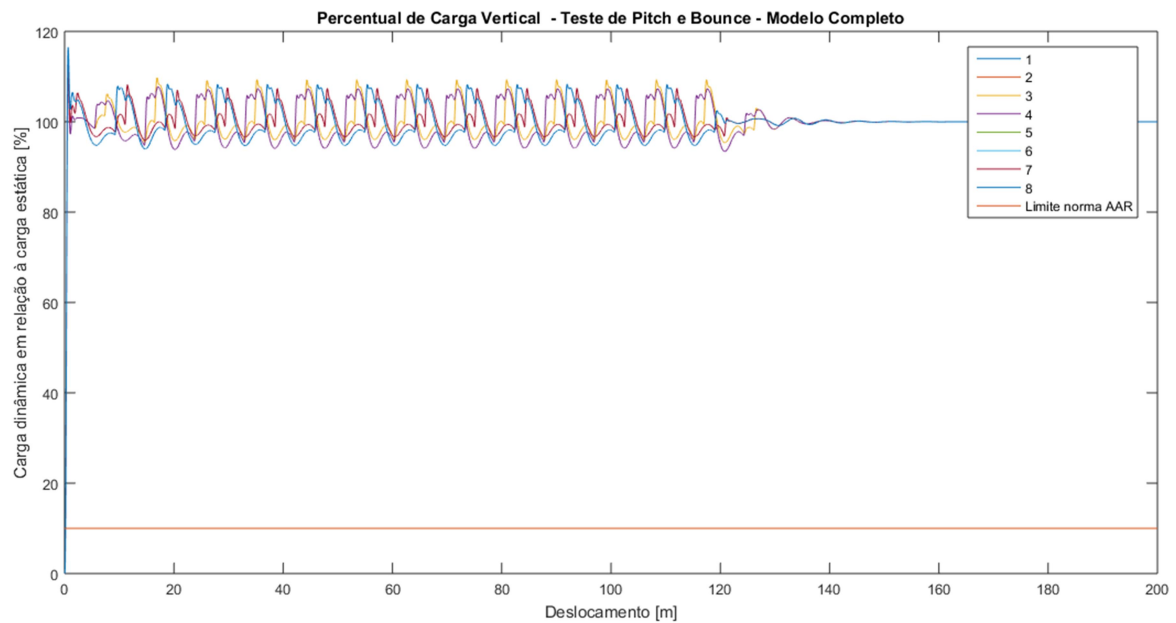
<b>Técnica</b>	<b>Erro</b>
<i>Técnica I</i>	321,228
<i>Técnica II</i>	8,663
<i>Técnica III</i>	385,402
<i>Técnica IV</i>	3,418

Fonte: O próprio autor

Além das respostas do sistema para o teste, são avaliados os indicadores propostos pela norma AAR, o percentual de carga vertical e a capacidade dinâmica da suspensão principal, tanto para o modelo completo quanto para os modelos reduzidos.

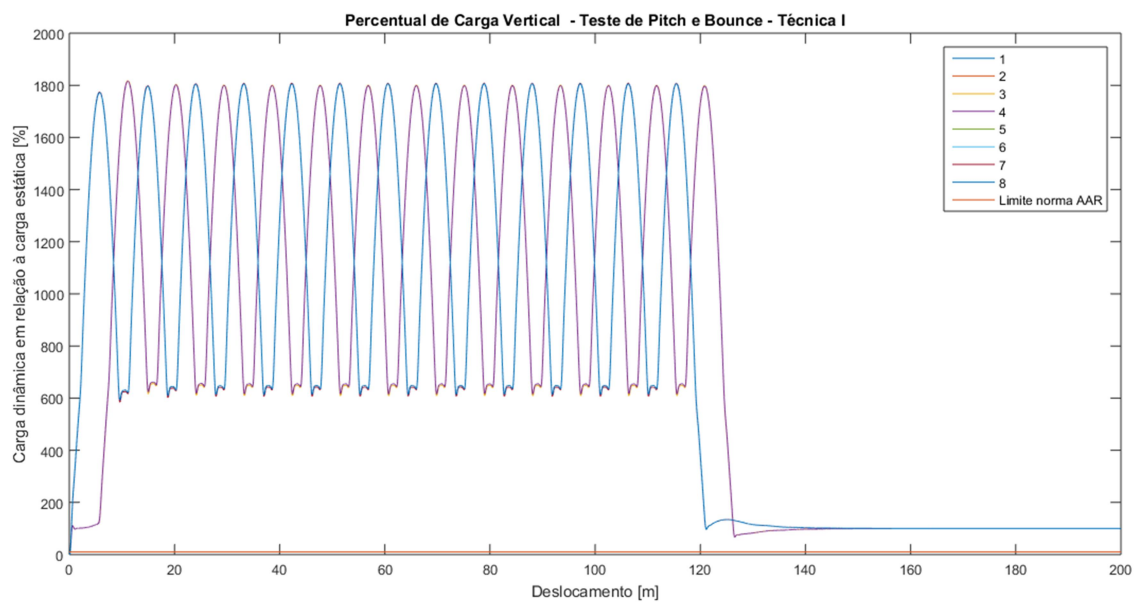
Apresentam-se adiante nas Figura 28, 29, 30, 31 e 32 os percentuais de carga vertical dos modelos para cada roda ao longo de todo o trajeto, delimitando também o seu valor mínimo estabelecido em norma. Cada roda é numerada conforme a Figura 10.

Figura 28 - Percentuais de carga vertical de cada roda para o modelo completo



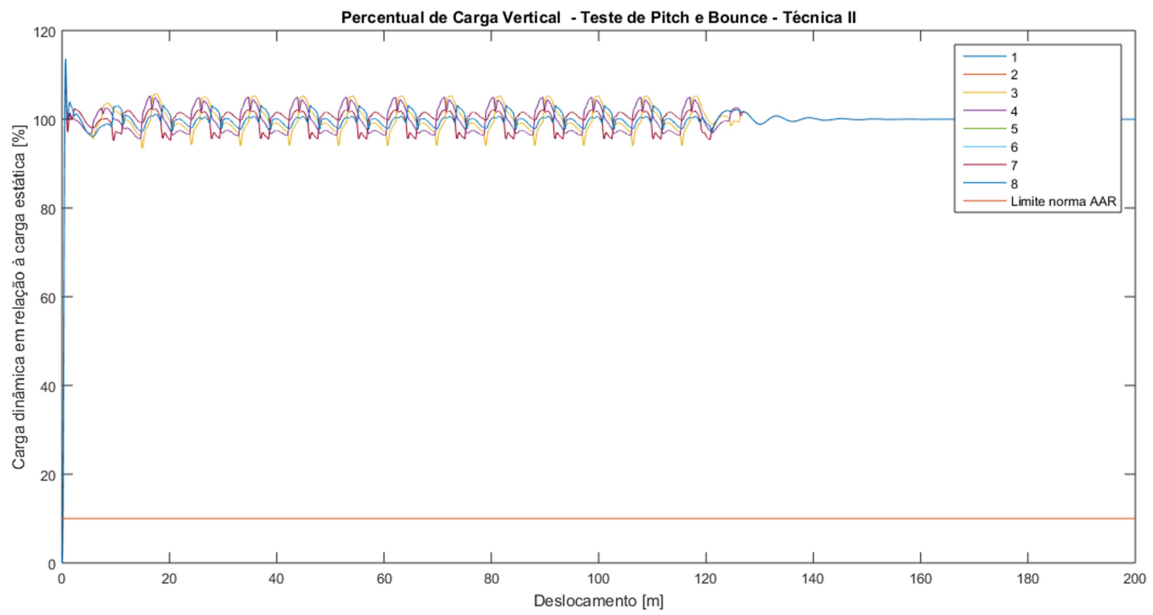
Fonte: O próprio autor

Figura 29 - Percentuais de carga vertical de cada roda para a Técnica I



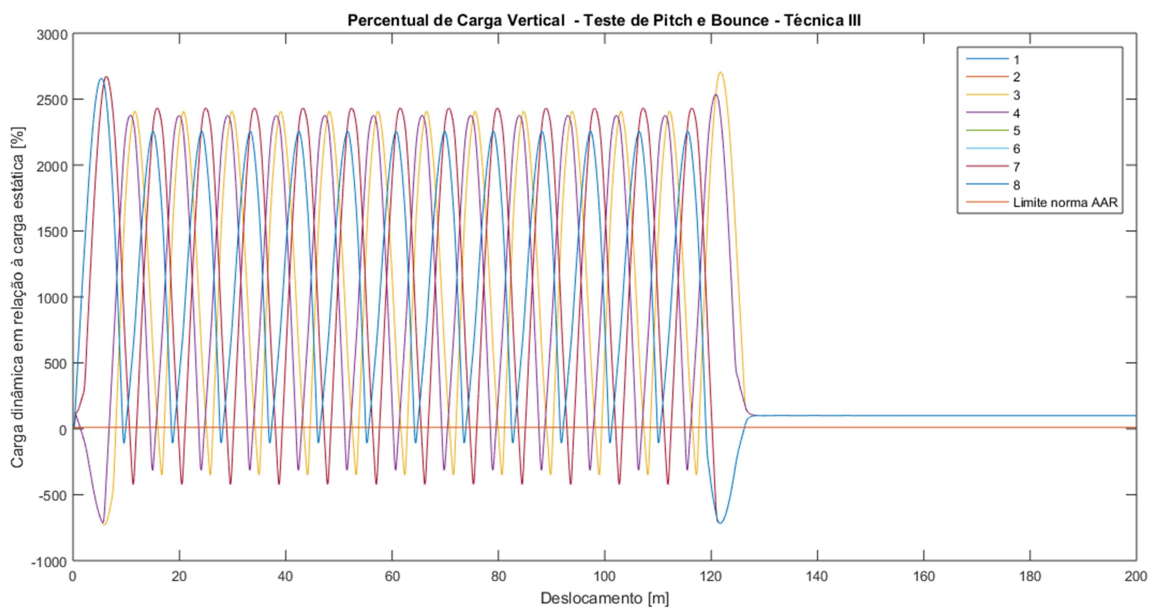
Fonte: O próprio autor

Figura 30 - Percentuais de carga vertical de cada roda para a Técnica II



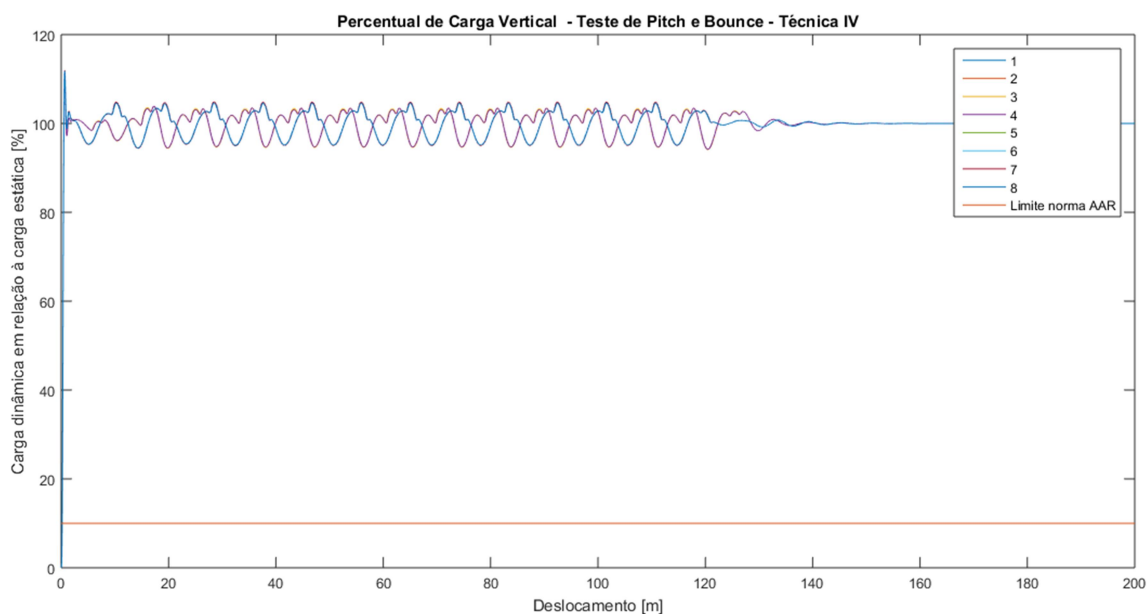
Fonte: O próprio autor

Figura 31 - Percentuais de carga vertical de cada roda para a Técnica III



Fonte: O próprio autor

Figura 32 - Percentuais de carga vertical de cada roda para a Técnica IV



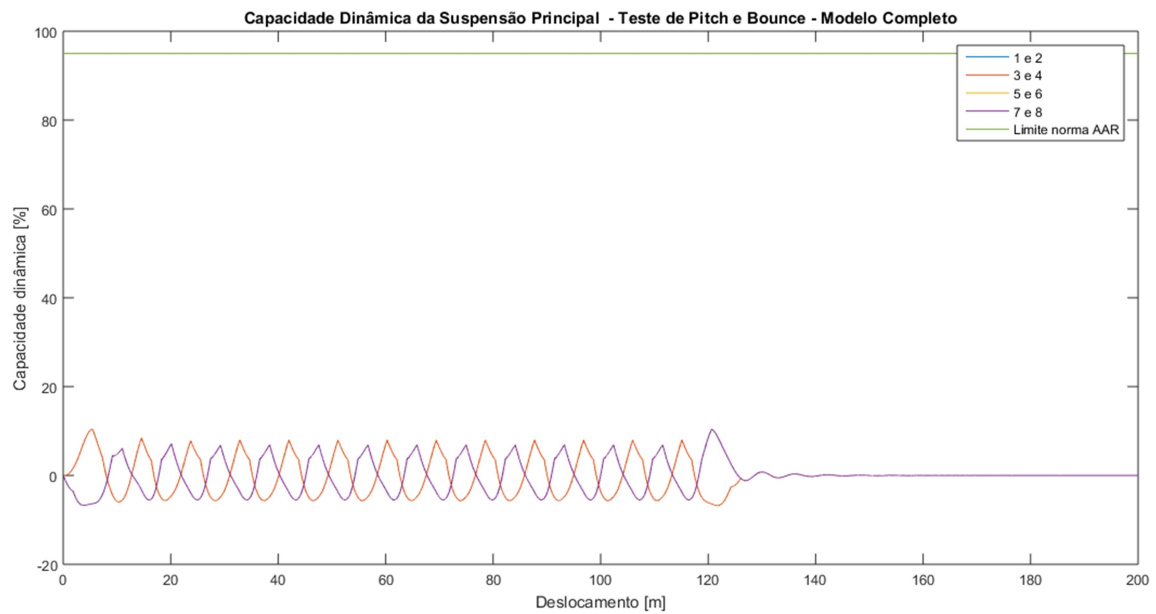
Fonte: O próprio autor

No que diz respeito ao comportamento dos percentuais de carga vertical, nota-se novamente que os melhores resultados são provenientes das técnicas II e IV. Fato previsível se for levado em conta que para o cálculo desse indicador os valores de deslocamento vertical dos truques ( $W_{t1}$  e  $W_{t2}$ ) e seus ângulos de *pitch* ( $\theta_{t1}$  e  $\theta_{t2}$ ) e *roll* ( $\beta_{t1}$  e  $\beta_{t2}$ ) são primordiais, uma vez que a carga dinâmica em cada roda é calculada nesse modelo a partir do deslocamento da suspensão de uma roda multiplicada pela rigidez da mola que a liga ao truque somado à derivada do deslocamento suspensão de uma roda multiplicado pelo fator de amortecimento associado ao seu respectivo amortecedor. Logo, as técnicas I e III, que não obtiveram bons resultados para esses graus de liberdade, tiveram o cálculo da carga dinâmica severamente prejudicado.

A seguir são apresentados nas

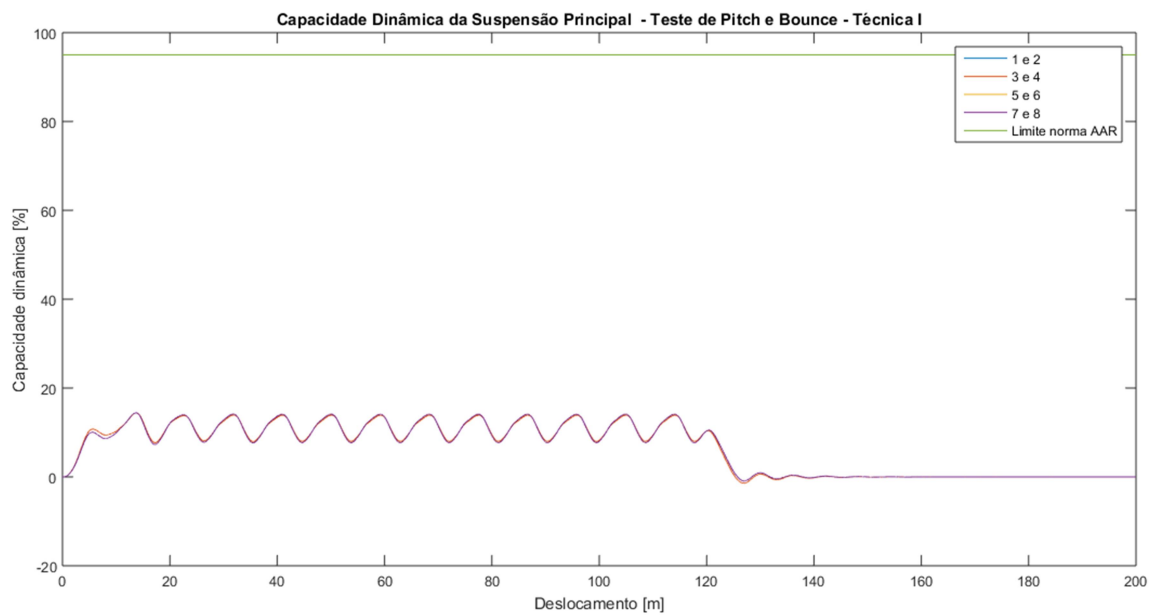
Figura 33, 34, 35, 36 e 37 a capacidade dinâmica da suspensão principal dos modelos para cada um dos quatro pacotes de suspensão principal longo de todo o trajeto, delimitando também o seu valor máximo estabelecido em norma. Cada pacote de suspensão principal pode ser associado a duas rodas, para simplificação da notação. A numeração adotada para as rodas se dá conforme a Figura 10.

Figura 33 - Capacidade Dinâmica da suspensão principal para o modelo completo



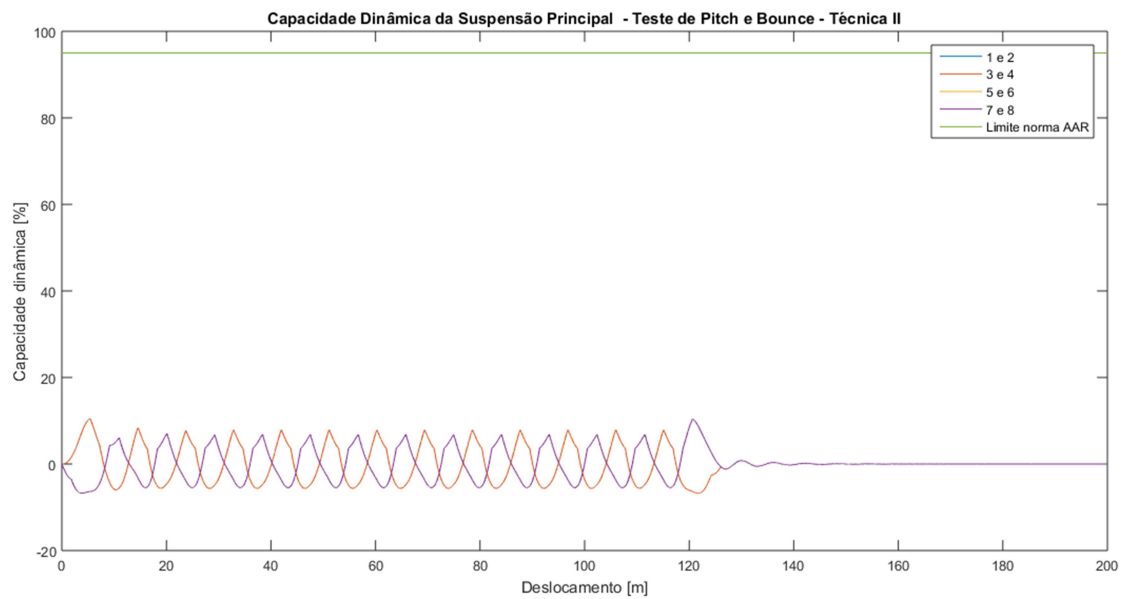
Fonte: O próprio autor

Figura 34 - Capacidade Dinâmica da suspensão principal para a técnica I



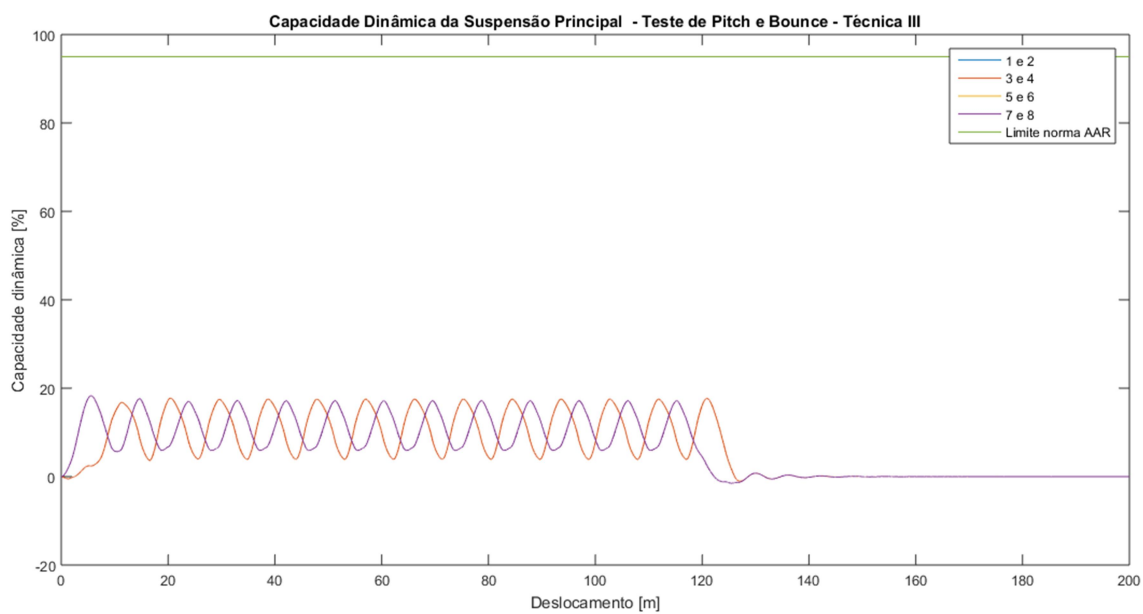
Fonte: O próprio autor

Figura 35 - Capacidade Dinâmica da suspensão principal para a técnica II



Fonte: O próprio autor

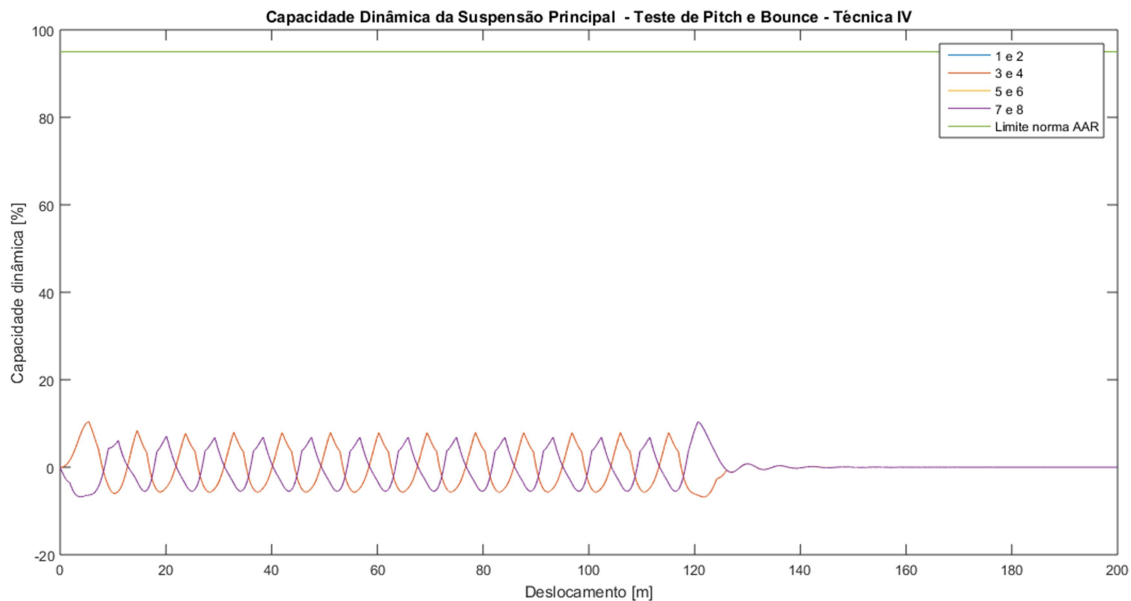
Figura 36 - Capacidade Dinâmica da suspensão principal para a técnica III



Fonte: O próprio autor



Figura 37 - Capacidade Dinâmica da suspensão principal para a técnica IV

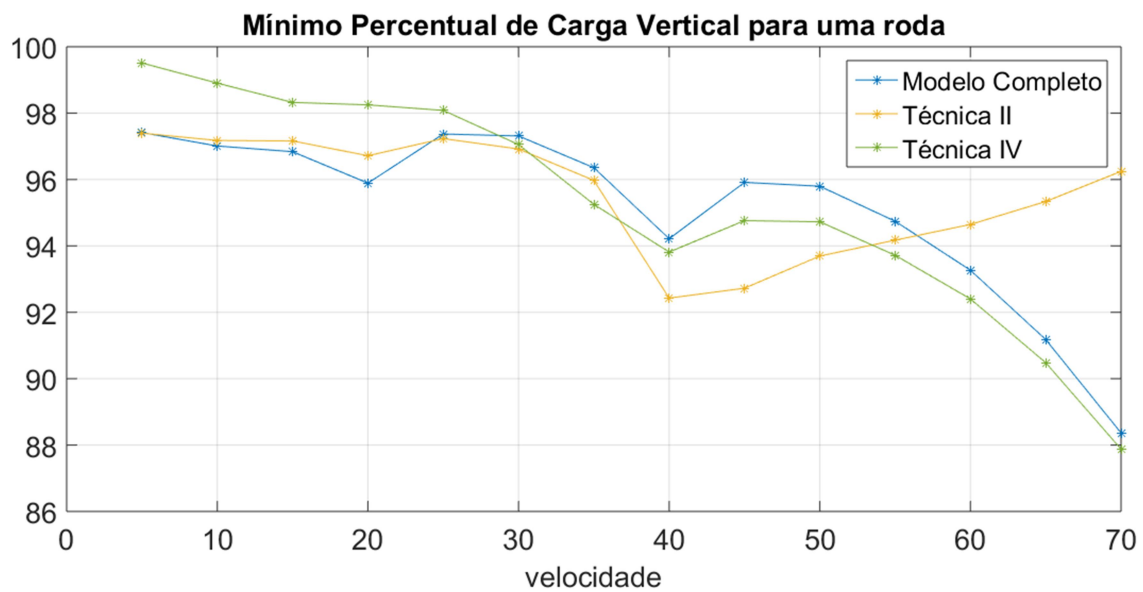


Fonte: O próprio autor

É possível notar mais uma vez que os melhores resultados são obtidos a partir da redução de ordem do modelo por meio das técnicas II e IV.

A norma AAR estabelece que a avaliação dos indicadores deve ser realizada para diferentes velocidades tangenciais do veículo (Association of American Railroads, 2007). Portanto, são feitas diversas simulações a velocidade constante para capturar os valores críticos em regime permanente para cada indicador. Nesse caso, tendo em vista que as únicas técnicas que tiveram êxito ao avaliar os parâmetros de percentual de carga vertical e a máxima capacidade dinâmica da suspensão principal foram as técnicas II e IV, somente essas foram avaliadas nas simulações seguintes. Assim, são obtidos gráficos de mínimo percentual de carga vertical e máxima capacidade dinâmica em função da velocidade tangencial do veículo, conforme a Figura 38 e a Figura 39.

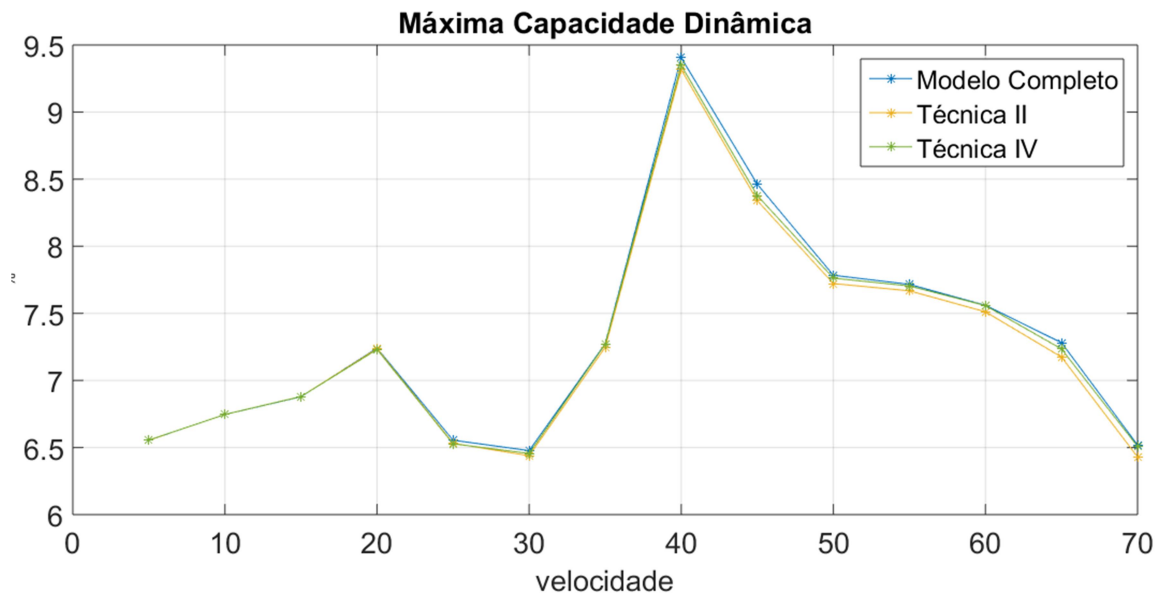
Figura 38 - Mínimo percentual de carga vertical em função da velocidade tangencial do veículo



Fonte: O próprio autor

De fato, é possível inferir que ambas as técnicas II e IV são capazes de captar boa parte do comportamento do modelo completo em relação ao percentual de carga vertical, especialmente a técnica IV que apresenta o melhor resultado, principalmente em maiores velocidades. No entanto, para menores velocidades a técnica II consegue reproduzir com boa precisão as características apresentadas pelo modelo completo.

Figura 39 - Máxima capacidade dinâmica em função da velocidade tangencial do veículo



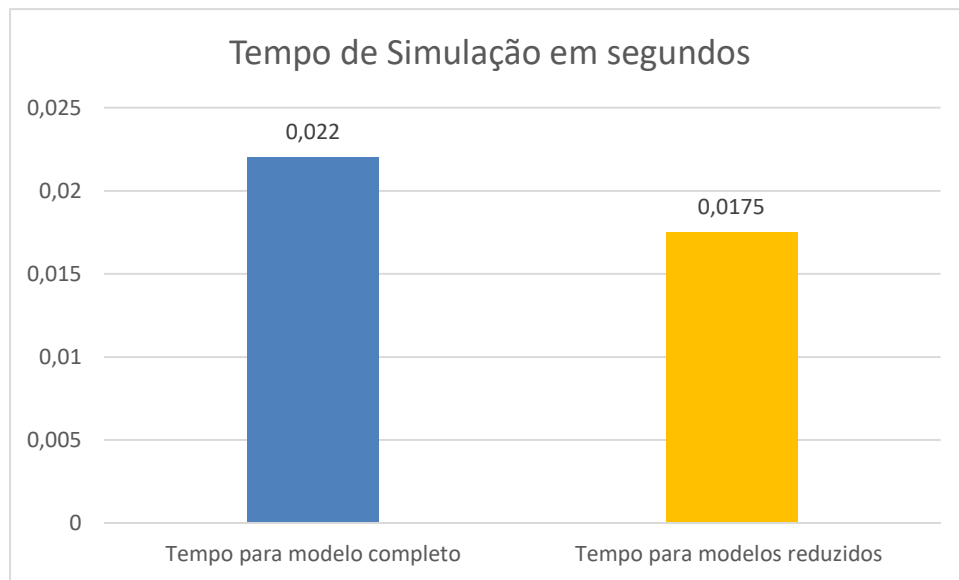
Fonte: O próprio autor

Já para a máxima capacidade dinâmica, fica bastante claro que as técnicas II e IV representam com excelente precisão o comportamento do modelo completo, especialmente em menores velocidades tangenciais do veículo.

### 4.3. Comparação entre os tempos de simulação

A fim de avaliar objetivamente o efeito da redução de ordem em relação a diminuição de esforço computacional e de tempo de simulação, é extraído o tempo de simulação do modelo completo e o tempo de simulação dos modelos reduzidos em segundos. Para evitar a interferência de variáveis externas ao processo e reduzir os efeitos da variabilidade, são feitas médias de 1000 amostras. O resultado é dado na Figura 40.

Figura 40 – Tempo de simulação em segundos do modelo completo e reduzido

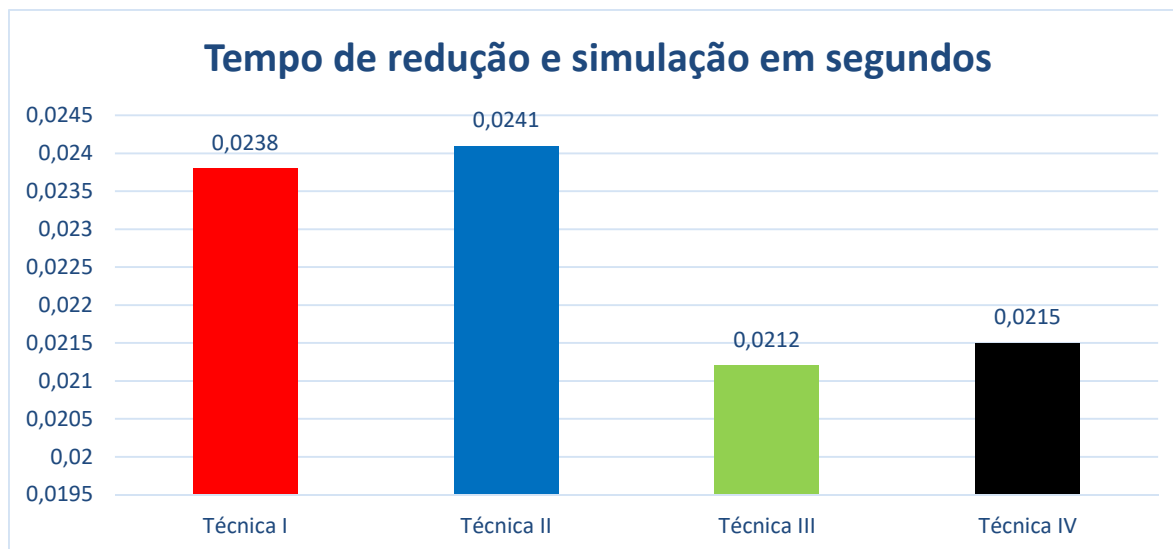


Fonte: O próprio autor

Nota-se que os modelos reduzidos provocam uma diminuição em torno de 20,45% no tempo de simulação em relação ao modelo completo. Todos os modelos reduzidos tem seu tempo de simulação similar, tendo em vista que possuem a mesma ordem e se utiliza o mesmo método para integrar a solução do modelo linear.

Para avaliar a eficiência computacional geral de cada técnica, são medidos os tempos de redução de ordem somados aos tempos de simulação para cada técnica. Logo, apresenta-se a Figura 41 a seguir.

Figura 41 - Tempo de simulação e redução das diferentes técnicas de redução



Fonte: O próprio autor

Também são feitas 1000 amostras e retiradas as médias para evitar interferências externas. É possível notar que as técnicas que realizam o modelo completo na forma modal (Técnicas III e IV) atingem mais rapidamente o resultado final do que as técnicas que fazem a realização do sistema na forma balanceada (Técnicas I e II). Além disso, como esperado, as técnicas que fazem a eliminação de estados por truncamento (Técnicas I e III) são mais rápidas do que as suas respectivas técnicas que operam por EPS (Técnicas II e IV), em virtude da maior quantidade de cálculos matriciais operados nas técnicas que eliminam por perturbação singular.

Portanto, a técnica de redução de ordem que apresenta o melhor tempo de redução e simulação com menores prejuízos às respostas do modelo é a técnica de número IV.

#### 4.4. Otimização das Técnicas Analíticas por Meio de Algoritmo Genético

Seguindo o procedimento descrito na seção 3.4, foram realizadas diversas simulações, variando o valor médio dos indivíduos iniciais do algoritmo genético, isto é, a técnica de redução de ordem a ser otimizada (I, II, III ou IV), o número de gerações (Ger.), o tamanho da população (Pop.) e o valor do desvio padrão adotado (Desvio).

Assim, o AG retorna um novo modelo com um somatório de erro quadrático associado (Fitness) calculado da mesma forma que o erro das técnicas analíticas apresentadas (Fit. Orig.), conforme a Equação (4.3). Os modelos calculados pelo algoritmo tendem a produzir resultados mais precisos do que as técnicas analíticas. Quantifica-se essa melhoria avaliando a redução percentual do fitness do modelo do AG em relação à técnica analítica analisada, em conformidade com a Equação (4.4) a seguir. Valores negativos indicam que de fato o AG produziu um resultado melhor que a técnica analítica abordada.

$$\text{Redução [\%]} = \frac{\text{Fitness} - \text{Fit. Orig.}}{\text{Fit. Orig.}} \quad (4.4)$$

Além disso, registra-se a geração na qual ocorreu o Fitness mínimo (Ger. Mín.), pois nem sempre o algoritmo tem seu resultado ótimo na última geração devido ao efeito das mutações e também da própria forma de cruzamento dos indivíduos ao longo do processo. Isso ocorre em virtude do AG utilizado criar sua população independente dos resultados de fitness, isto é, a população seguinte sempre é criada a partir da seleção dos melhores indivíduos da população atual desprezando a possibilidade do fitness da geração atual ser pior do que o fitness da geração anterior.

Serão também apresentados gráficos que registram o Fitness do modelo gerado pelo algoritmo genético em função das gerações, demonstrando o comportamento e a evolução do algoritmo ao longo das gerações.

#### 4.4.1. Algoritmo Genético Aplicado à Técnica I

Na Tabela 5, encontram-se os resultados da otimização da Técnica I.

Tabela 5 - Resultado da otimização promovida pelo AG para a Técnica I (Continua)

#	Ger.	Pop.	Desvio	Fitness	Fit. Orig.	Redução	Ger. Mín.
1	200	50	1	334,060	321,228	3,99	173
2	200	50	0,1	319,178	321,228	-0,64	194

Tabela 5 - Resultado da otimização promovida pelo AG para a Técnica I (Conclusão)

#	Ger.	Pop.	Desvio	Fitness	Fit. Orig.	Redução	Ger. Mín.
3	300	400	0,1	313,892	321,228	-2,28	211
4	800	600	0,2	313,165	321,228	-2,51	197
5	600	600	0,5	312,065	321,228	-2,85	598
6	800	800	0,5	292,527	321,228	-8,93	318

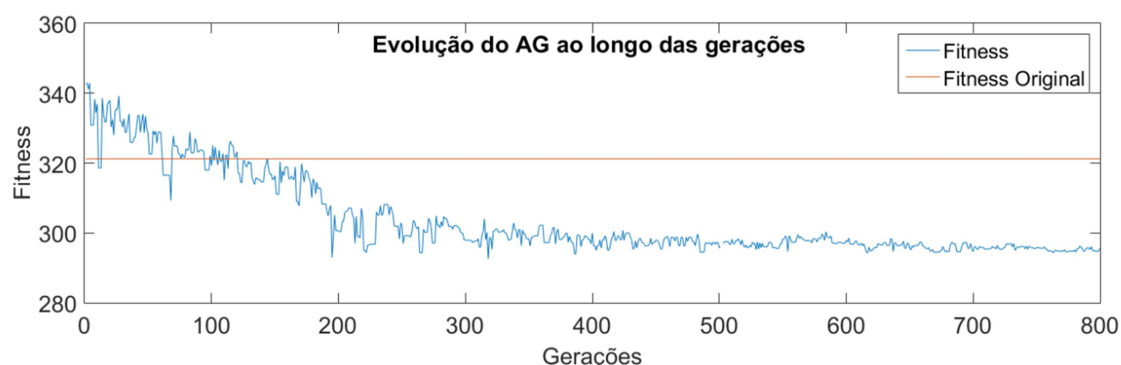
Fonte: O próprio autor

Percebe-se que, conforme esperado, os resultados tendem a ser melhores à medida que se aumentam o número de gerações e o tamanho da população. No entanto, é possível notar que nem sempre essa regra é válida em virtude das mutações ou da perseguição de algum mínimo local por parte do algoritmo, conforme observado entre os resultados de número (#) 4 e 5. Nesse caso a maior variabilidade do resultado 5 permitiu que o algoritmo expandisse seu horizonte de busca, alcançando um melhor resultado.

Com a expansão da busca e o aumento do número de gerações e tamanho de população, o resultado 6 produziu o melhor modelo dentre os analisados. O AG reduz o erro em 8,93% em relação à Técnica I. Encontra-se na

Figura 42 o gráfico da evolução do AG ao longo das gerações para o resultado 6, demonstrando a tendência de convergência do algoritmo com o passar das gerações.

Figura 42 – Evolução do AG ao longo das gerações para o resultado número 6



Fonte: O próprio autor

#### 4.4.2. Algoritmo Genético Aplicado à Técnica II

Na Tabela 6, encontram-se os resultados da otimização da Técnica II.

Tabela 6 - Resultado da otimização promovida pelo AG para a Técnica II

#	Ger.	Pop.	Desvio	Fitness	Fit. Orig.	Redução	Ger. Mín.
7	500	400	0,01	6,040	8,663	-30,28	465
8	800	800	0,01	6,508	8,663	-24,88	673

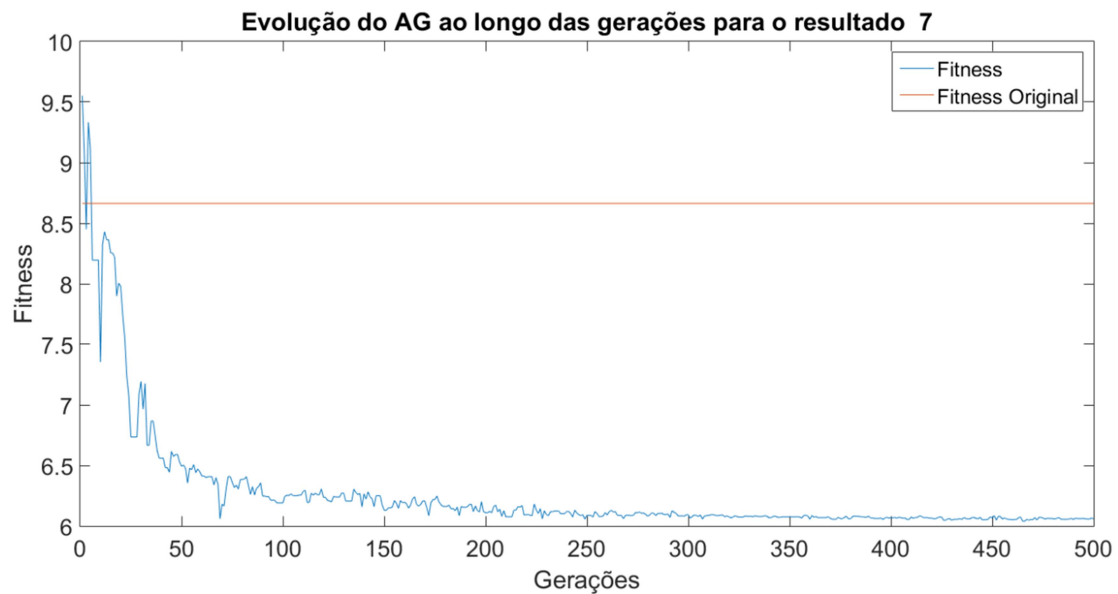
Fonte: O próprio autor

Os resultados 7 e 8 evidenciam que o processo ainda é afetado sensivelmente pelas aleatoriedades, tanto da geração da população inicial quanto, em menor escala, das mutações ao longo da evolução. Esse efeito da aleatoriedade pode ser justificado pela grande quantidade de genes que o algoritmo genético precisa processar. Ao todo, o AG trabalha com 900 genes, visto que o modelo reduzido é constituído de quatro matrizes de tamanho 15 x 15.

Para compreender melhor esse fenômeno, é preciso fazer a análise comparativa das evoluções do AG ao longo das gerações, contrastando a Figura 43 em relação à Figura 44.

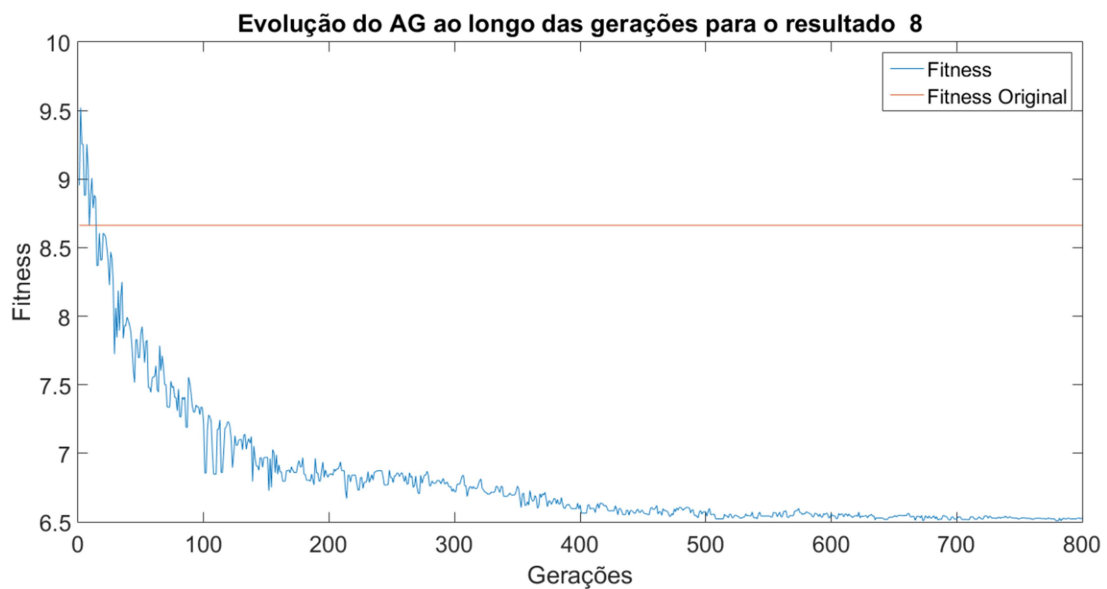


Figura 43 – Evolução do AG ao longo das gerações para o resultado 7



Fonte: O próprio autor

Figura 44 - Evolução do AG ao longo das gerações para o resultado 8



Fonte: O próprio autor

A partir dos gráficos de evolução do AG ao longo das gerações é possível depreender que o resultado 7 teve sua convergência altamente afetada em função de sua população inicial. Apesar de possuir um número menor de indivíduos, no resultado 7 a aleatoriedade dentro de um mesmo desvio padrão gerou uma

população mais eficiente do que o resultado 8, proporcionando uma convergência muito mais acelerada, especialmente no início das iterações. Construindo, conseqüentemente, um modelo 30,28% mais preciso do que a Técnica II.

#### 4.4.3. Algoritmo Genético Aplicado à Técnica III

Na Tabela 7, encontram-se os resultados da otimização da Técnica III.

Tabela 7 - Resultado da otimização promovida pelo AG para a Técnica III

#	Ger.	Pop.	Desvio	Fitness	Fit. Orig.	Redução	Ger. Mín.
9	500	400	0,01	382,887	385,402	-0,65	196
10	500	400	0,5	320,896	385,402	-16,74	426
11	800	600	0,5	248,194	385,402	-35,60	637

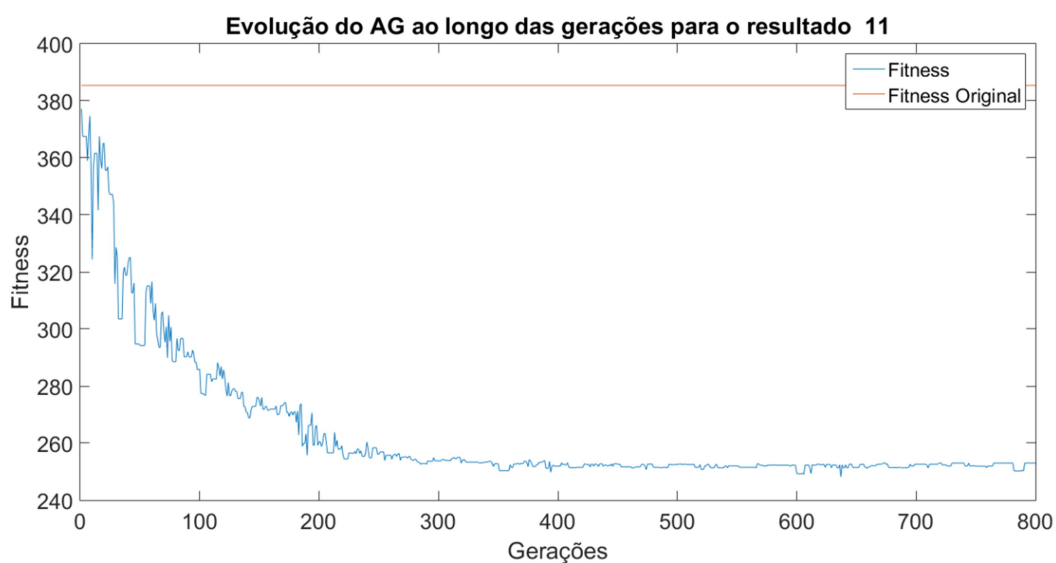
Fonte: O próprio autor

Para as técnicas analíticas com piores desempenhos (I e III), notadamente, o AG deve varrer um espectro maior de soluções a fim de propiciar melhores resultados. Isso pode ser observado comparando-se os resultados 9 e 10, visto que ambos possuem mesmo número de gerações e mesmo tamanho de população, divergindo-se apenas no desvio padrão.

Comparando os resultados 10 e 11, infere-se que o número de gerações e tamanho de população tem grande influência no desempenho do AG para essa técnica. Mantendo-se o mesmo horizonte de busca, o resultado 11 consegue promover uma redução de erro praticamente duas vezes maior do que o resultado 10. Com isso, tem-se que como melhor resultado a Técnica III o resultado 11, logrando uma melhoria de 35,60% em relação à técnica analítica.

Na Figura 45 encontra-se a evolução do fitness do AG em função das gerações para o resultado 11.

Figura 45 - Evolução do AG ao longo das gerações para o resultado 11



Fonte: O próprio autor

#### 4.4.4. Algoritmo Genético Aplicado à Técnica IV

Na Tabela 8, encontram-se os resultados da otimização da Técnica IV.

Tabela 8 - Resultado da otimização promovida pelo AG para a Técnica IV

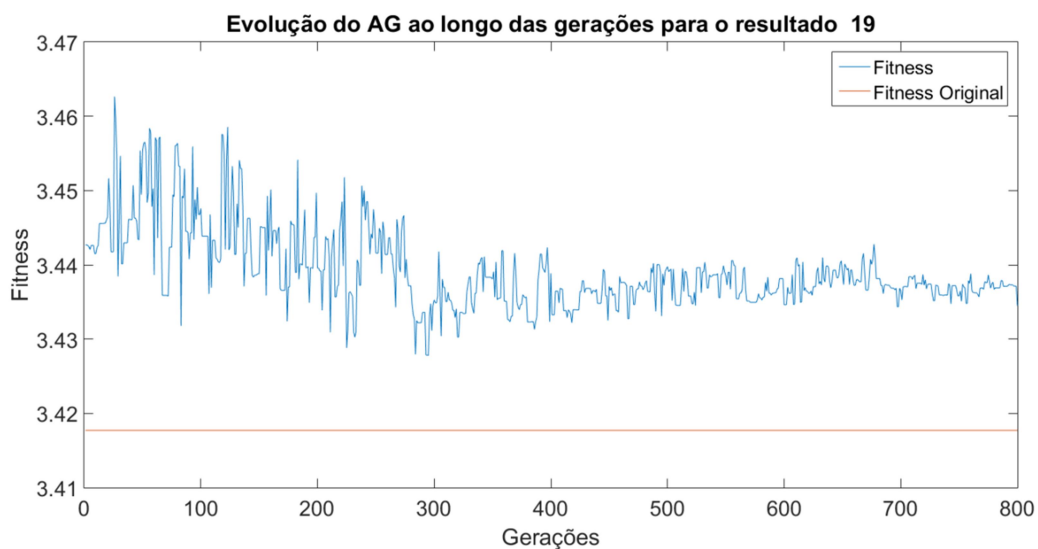
#	Ger.	Pop.	Desvio	Fitness	Fit. Orig.	Redução	Ger. Mín.
12	500	400	0,1	4,427	3,418	29,54	129
13	500	400	0,05	3,922	3,418	14,75	91
14	800	400	0,01	3,502	3,418	2,47	195
15	500	400	0,01	3,489	3,418	2,08	205
16	800	800	0,01	3,482	3,418	1,87	249
17	600	600	0,01	3,472	3,418	1,60	172
18	100	1000	0,001	3,434	3,418	0,48	99
19	800	800	0,001	3,428	3,418	0,30	295

Fonte: O próprio autor

Como pode ser observado, o AG foi incapaz de produzir resultados mais precisos do que o modelo reduzido pela Técnica IV. Tal realidade é decorrente de alguns fatores. Em primeiro lugar, é preciso considerar que a Técnica IV já havia produzido um modelo simplificado com boa assertividade, em vista disso, neste caso não há muita margem de melhoria do resultado. Além disso, vale ressaltar que o AG é responsável por processar uma grande quantidade de genes, o que torna imprescindível a criação de vastas populações e grande número de gerações para a convergência do algoritmo. Com isso para atingir bons resultados é inevitável o despendimento de um grande esforço computacional, ocasionando em muitas horas de processamento. Para gerar o melhor resultado dentre as simulações apresentadas, foram utilizadas 800 gerações com tamanho de população de 800 indivíduos. Nessa situação, o AG trabalhou por mais de 24 horas ininterruptas para finalizar seu procedimento. Mesmo reduzindo significativamente o desvio padrão da população inicial, o resultado 8 não foi capaz de ao menos convergir para o valor de erro da Técnica IV, tamanha a severidade computacional imposta ao AG.

A seguir, na Figura 46, é dada a apresentação da evolução do AG ao longo das gerações para a otimização da Técnica IV.

Figura 46 - Evolução do AG ao longo das gerações para o resultado 19



Fonte: O próprio autor

#### 4.5. Análise Geral da Otimização das Técnicas Analíticas

A seguir, na Tabela 9, são concentrados os melhores resultados de cada técnica com o intuito de avaliar técnicas de redução de ordem em relação ao modelo original com base na métrica proposta. Isto é, fundamentando-se no somatório do erro quadrático da técnica de redução de ordem em relação ao modelo original.

Tabela 9 - Resumo dos resultados comparativos em relação ao modelo original

<b>Técnica</b>	<b>Erro</b>
Técnica I	321,228
AG Técnica I	292,527
Técnica II	8,663
AG Técnica II	6,040
Técnica III	385,402
AG Técnica III	248,194
Técnica IV	3,418
AG Técnica IV	3,434

Fonte: O próprio autor

À vista disso, nota-se que há um potencial de utilização de algoritmos genéticos para redução de ordem de modelos. A aplicação das técnicas analíticas como parâmetro de definição de sua população inicial é extremamente eficiente por um lado, pois facilita consideravelmente a convergência do algoritmo. Entretanto, por outro lado, a metodologia utilizada para geração da população inicial favorece a convergência para mínimos locais, conforme pode ser observado nos gráficos de evolução do AG ao longo das gerações.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse capítulo apresenta-se uma análise geral do desempenho das técnicas de redução de ordem, tanto analíticas quanto a implementação do AG para sua otimização. Também são enunciados comentários finais sobre os resultados obtidos. Além disso, são feitas algumas sugestões de trabalhos futuros, para continuidade da pesquisa sobre o tema.

### 5.1. Contribuições

A principal contribuição desse trabalho é a simplificação de um modelo da dinâmica vertical e lateral de um veículo ferroviário e a utilização de técnicas de computação natural para a redução de ordem de modelos.

Contribui-se, do ponto de vista das pesquisas desenvolvidas a respeito de simulação da dinâmica ferroviária para análise de estabilidade de novos modelos de vagões ou até mesmo para definição de limites de segurança operacional de uma ferrovia.

Por outro lado, do ponto de vista das pesquisas relativas à redução de ordem de modelos, contribui-se apresentando mais um nicho de aplicação dessa tecnologia.

### 5.2. Conclusões

A avaliação da dinâmica vertical e lateral de vagões é fundamental tanto para projeto de novos veículos de carga quanto para avaliação de segurança operacional de trechos reais de ferrovias. Os estudos por meio de simulação computacional colaboram para o desenvolvimento de soluções e verificação de sua efetividade. Portanto, desenvolveu-se um modelo linear que representasse tal fenômeno físico, realizando-o no espaço de estados. Foi estudado o comportamento dinâmico de um vagão trafegando em velocidade constante em um perfil de irregularidade proposto por norma, avaliando também o atendimento aos critérios de segurança estabelecidos. Por meio do modelo completo e dos modelos analiticamente reduzidos, foram verificados os valores críticos dos parâmetros estabelecidos para o teste de *Pitch* e *Bounce* da norma AAR.

Nesse sentido, os resultados apresentados aqui e as propostas desenvolvidas demonstram que a simplificação de modelos nessa área de aplicação por meio de técnicas matemáticas analíticas é possível, sem grandes prejuízos à qualidade final na avaliação dos critérios propostos pela norma AAR. Mesmo reduzindo o modelo original de 30 estados para modelos simplificados de 15 estados, obtiveram-se respostas satisfatórias em relação ao movimento dos graus de liberdade do vagão.

Comprovou-se que o objetivo principal – redução de ordem de um modelo de um veículo ferroviário; foi alcançado com a implementação das técnicas analíticas, obtendo-se modelos menos complexos com pouca perda de acurácia.

Apesar do fato de que o tempo das simulações para ambos os casos ser relativamente pequeno, percebe-se que os modelos reduzidos provocam uma diminuição considerável no tempo de simulação em relação ao modelo completo.

No entanto, é possível considerar que a redução do tempo de simulação passaria a ser significativa quanto maiores forem os modelos completos. Algumas complexidades desprezadas na modelagem, caso fossem avaliadas, aumentariam significativamente o número de estados do modelo. Considerando os rodízios como corpos rígidos, por exemplo, o modelo seria acrescido de mais 16 graus de liberdade, isto é, um aumento de 32 estados no modelo no espaço de estados. Além disso, ainda seria também possível avaliar com mais detalhes o contato roda-trilho e a interação com a via permanente, o que resultaria em um modelo de grande complexidade, no qual o tempo de simulação seria mais significativo.

Demonstrou-se que esse pode ser mais um campo de aplicação para a tecnologia de computação evolutiva, especialmente nesse caso, algoritmos genéticos. Técnicas evolutivas para otimização de soluções são tendências tecnológicas atuais, porém, em alguns casos, apresentam custos computacionais elevados para sua implementação. Apesar do grande número de genes que o AG deveria processar, a utilização de um algoritmo genético para redução de ordem de modelos a partir das técnicas analíticas demonstra ser válida, em particular sobre as quais obtiveram piores resultados em relação ao modelo completo.

### **5.3. Propostas de Trabalhos Futuros**

Ao longo do desenvolvimento do trabalho, foram notados vários pontos que poderiam ser explorados para verificação de algumas considerações e para avanço na pesquisa do assunto. Demonstrando, portanto, a vastidão e abrangência do tema apresentado, resultando em pontos que extrapolam o escopo desse trabalho e por isso eles são sugeridos nas seções adiante.

#### **5.3.1. Análise de segurança operacional em outros testes**

Observa-se que na norma AAR (Association of American Railroads , 2007) são previstos diversos outros testes para análise de segurança operacional de novos veículos de carga além do teste executado no presente trabalho. Ademais, em alguns testes são avaliados modelos de vagões carregados e vazios, no entanto o presente trabalho avalia apenas o modelo de veículo carregado.

Os demais ensaios propostos em norma excitam outros modos de vibração do vagão. Avaliando outros modos de vibração varia-se o comportamento das técnicas de redução de ordem, especialmente aquelas projetadas na forma modal. Entretanto, nesse trabalho, avaliou-se apenas o teste de *Pitch e Bounce*.

Propõe-se verificar o comportamento das técnicas de redução de ordem nos demais testes da norma: *Hunting, Constant Curving, Spiral, Twist e Roll, Yaw e Sway e Dynamic Curving*.

Além disso, é possível avaliar os modelos em situações de irregularidade de via aleatória ou em irregularidades extraídas de trechos reais de ferrovia, que perturbem o vagão em um espectro maior de frequências.

#### **5.3.2. Aplicação de outras técnicas de redução de ordem de modelos**

Explorou-se, nesse trabalho, apenas quatro técnicas analíticas de redução de ordem de modelos, entre várias existentes na literatura. Portanto, há espaço para utilização de outros métodos, verificando-se também o desempenho de cada técnica utilizando outras estratégias de aferição de assertividade além do somatório de erro quadrático.



Além disso, foi explorado apenas o algoritmo genético em um único tipo de método de seleção, o método de seleção por roleta. Também não foram variadas as taxas de cruzamento e mutação. Acredita-se que a variação desses parâmetros podem eventualmente produzir resultados mais precisos. É possível realizar estudos aumentando o número de gerações, tamanho de população e desvio padrão, a fim de varrer um espectro maior de valores e aumentar a probabilidade de atingir mínimos globais em virtude do maior número de gerações. Ademais, também é possível utilizar outras técnicas de computação natural como redes neurais e inteligência coletiva, por exemplo, no processo de redução de ordem de modelos.

### **5.3.3. Desenvolvimento de uma Modelagem Mais Complexa do Veículo Ferroviário**

No presente trabalho, desenvolveu-se um modelo linear de 15 graus de liberdade para avaliar o comportamento da dinâmica vertical e lateral do veículo ferroviário. Diversas hipóteses simplificadoras foram assumidas para a modelagem completa, contudo, desconsiderando tais hipóteses, aumenta-se expressivamente a complexidade do modelo.

Portanto, sugere-se a construção de modelos que também levem em conta a dinâmica de partes do sistema que foram desprezados na modelagem, especificamente a dinâmica dos rodeiros e a interação com a via permanente.

### **5.3.4. Utilização de Modelos Reduzidos para Implementação Sistemas de Controle de Suspensão do Veículo**

A partir dos modelos lineares reduzidos no espaço de estados, torna-se mais fácil a implementação de sistemas de controle ativo de suspensão de vagões. Apesar dos altos custos envolvidos e complexidade de processos desse tipo, é possível pensar na viabilidade de sua aplicação em veículos ferroviários de alta velocidade, uma vez que a modelagem dinâmica de veículos é semelhante em relação a vagões de carga.

Com isso, busca-se garantir maior segurança de tráfego e possibilitar a operação em maiores velocidades por meio do controle ativo dos movimentos do veículo causados pelas irregularidades da via permanente.

## APÊNDICE A – PRINCÍPIO DE D’ALEMBERT E EQUAÇÕES DE LAGRANGE

Para compreensão do Princípio de D’Alembert e das Equações de Lagrange é fundamental a introdução de algumas definições como os deslocamentos virtuais, o princípio dos trabalhos virtuais e os demais conceitos que são aplicados para o seu desenvolvimento.

### 1. Princípio dos Trabalhos Virtuais

Antes mesmo de abordar diretamente deslocamentos e trabalhos virtuais, algumas definições precisam ser formalizadas.

- Vínculo: É uma restrição de natureza geométrica ou cinemática ao movimento das partículas de um sistema (Oliveira & Ladeira, 2016).
- Coordenadas generalizadas: É um conjunto mínimo de coordenadas necessárias para descrever a configuração de um sistema em relação a algum referencial. Devem, portanto, ser independentes entre si, caracterizar a configuração do sistema a cada instante univocamente e tornar os vínculos identicamente satisfeitos (Cindra, 2008).
- Deslocamento virtual: É usualmente denotado  $\delta_r$  e representa um deslocamento imaginário infinitesimal em um dado instante de tempo, isto é, um deslocamento virtual não tem duração ( $dt = 0$ ) (Cindra, 2008).

Partindo da formulação newtoniana, para um sistema de N partículas, é possível fazer a seguinte análise diferencial.

$$\vec{F}_i = m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{A.1})$$

onde  $\vec{F}_i$  é a força total, ou resultante, sobre a i-ésima partícula e  $\ddot{\vec{r}}_i$  é a aceleração da partícula.

Na análise de trabalhos virtuais é interessante segregar a força total em forças aplicadas  $\vec{F}_i^{(a)}$  e  $\vec{f}_i$  as forças de vínculo.

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i \quad (\text{A.2})$$

Em vínculos ideais, não há a realização de trabalho.

$$\sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (\text{A.3})$$

Em sistemas em equilíbrio,  $\vec{F}_i = \vec{0}$ . Logo,

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (\text{A.4})$$

Substituindo-se a Equação (A.2) em (A.4), tem-se que:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (\text{A.5})$$

Como o trabalho virtual das forças de vínculo é zero, tem-se o princípio dos trabalhos virtuais.

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (\text{A.6})$$

Pela segunda lei de Newton, com as forças já decompostas, obtém-se que:

$$\vec{\dot{p}}_i - \vec{F}_i^{(a)} = \vec{f}_i \quad (\text{A.7})$$

onde  $\vec{\dot{p}}_i$  é a derivada do momento linear da  $i$ -ésima partícula.

Multiplicando ambos os lados da equação pelo deslocamento virtual  $\delta \vec{r}_i$ , tem-se que:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{\dot{p}}_i - \vec{F}_i^{(a)}) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i \quad (\text{A.8})$$

Admitindo vínculos ideais, tem-se o princípio de d'Alembert, pois o lado direito da Equação (A.8) se anula.

$$\sum_{i=1}^N (\vec{p}_i - \vec{F}_i^{(a)}) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (\text{A.9})$$

## 2. Equações de Lagrange

Para chegar às Equações de Lagrange utiliza-se o desenvolvimento proposto por Oliveira & Ladeira (2016). É necessário, primeiramente, associar os deslocamentos virtuais das posições das partículas com os deslocamentos virtuais das coordenadas generalizadas.

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k \quad (\text{A.10})$$

Substituindo a Equação (A.10) em (A.9) e sabendo que  $\vec{p}_i = m_i \cdot \vec{v}_i$ , obtém-se que:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \cdot \vec{v}_i - \vec{F}_i^{(a)}) \left( \sum_{k=1}^N \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k \right) = 0 \quad (\text{A.11})$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \left( m_i \cdot \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k \quad (\text{A.12})$$

Definindo  $Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$  como a k-ésima componente da força generalizada, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \left( m_i \cdot \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k \right) = Q_k \quad (\text{A.13})$$

Nota-se que, pela regra da cadeia, tem-se que:

$$m_i \cdot \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left( m_i \cdot \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \cdot \vec{v}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \quad (\text{A.14})$$

Além disso,

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (\text{A.15})$$

onde  $\dot{q}_j = \frac{d q_j}{dt}$ . Portanto,

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (\text{A.16})$$

Derivando a Equação (A.15) separando em derivadas parciais, tem-se que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial q_l} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (\text{A.17})$$

Supondo que as coordenadas generalizadas podem ser diferenciadas tantas vezes quanto necessárias,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_l} \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial q_l} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (\text{A.18})$$

Substituindo (A.16) e (A.18) em (A.14),

$$m_i \cdot \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left( m_i \cdot \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i \cdot \vec{v}_i \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \quad (\text{A.19})$$

Percebe-se que,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \frac{m_i}{2} \cdot \vec{v}_i^2 \right) = m_i \cdot \vec{v}_i \left( \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) \quad (\text{A.20})$$

De modo semelhante, tem-se que:

$$m_i \cdot \vec{v}_i \left( \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{m_i}{2} \cdot \vec{v}_i^2 \right) \quad (\text{A.21})$$

Substituindo as duas últimas equações na Equação (A.19),

$$m_i \cdot \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \frac{m_i}{2} \cdot \vec{v}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{m_i}{2} \cdot \vec{v}_i^2 \right) \quad (\text{A.22})$$

Logo, substituindo em (A.13) e rearranjando a equação, tem-se que:

$$\sum_{k=1}^N \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \sum_{i=1}^N \left( \frac{m_i}{2} \cdot \vec{v}_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \cdot \vec{v}_i^2 \right) - Q_k = 0 \quad (\text{A.23})$$

Portanto, sendo  $T = \sum_{i=1}^N \left( \frac{m_i}{2} \cdot \vec{v}_i^2 \right)$  a energia cinética do sistema, logra-se, finalmente a Equação de Lagrange (A.24):

$$\sum_{k=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right] \cdot \delta q_k = 0 \quad (\text{A.24})$$

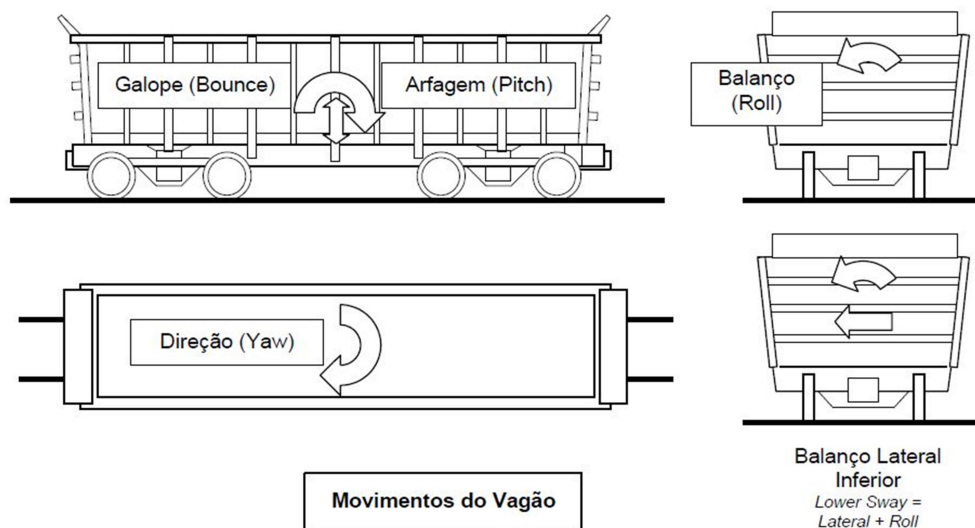
## APÊNDICE B – PROCEDIMENTO DE VALIDAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO DINÂMICO DO VAGÃO GDU

Para validar o modelo matemático dinâmico do veículo, comparam-se as frequências naturais do modelo matemático com o valor das frequências encontradas em ensaios modais.

O ensaio modal consiste em excitar os modos de corpo rígido do vagão e deixá-lo vibrar livremente a fim de obter a frequência natural por meio de sensores instalados no veículo. Em uma parceria entre Vale, Amsted Maxion e TTCI (*Transportation Technology Institute, Inc.*), foi desenvolvido um ensaio modal que obteve as frequências naturais dos principais modos de vibração de um veículo ferroviário, mais especificamente de vagão GDU (Urban & Joy, 2011).

Os modos de vibração avaliados nesse teste são: Vertical (*Bounce*), Arfagem (*Pitch*), Direção (*Yaw*), Balanço (*Roll*) e Balanço lateral inferior (*Lower center Roll*), conforme A Figura 47.

Figura 47 - Modos de vibração avaliados no teste



Fonte: Adaptado de (Barbosa, 2007)

Embora a capacidade do vagão seja de 150 toneladas (peso bruto máximo), devido a restrições operacionais, o veículo no ensaio modal foi carregado com apenas 116200 kg, com a tara estimada de 22 toneladas. O fato do vagão de teste

encontrar-se mais leve resulta em frequências medidas maiores do que as esperadas com um veículo em condições de carga de projeto. Portanto, é necessário corrigir esses valores para compararmos em relação ao modelo matemático desenvolvido. Essa correção parte do princípio de que as frequências naturais podem ser calculadas conforme a equação adiante (Rao, 2008).

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad (\text{B.1})$$

onde,  $\omega_n$  é a frequência natural do modo de vibração em questão,  $k$  é a rigidez equivalente do modo de tal modo de vibração e  $m$  é a massa. Para correção, considera-se que a rigidez se mantém inalterada e alterando-se apenas as massas.

Logo, apresentam-se na Tabela B.1 os valores das frequências naturais medidas e corrigidas obtidas pelo ensaio modal.

Tabela B.1 – Frequências naturais para o Vagão GDU

<b><i>Modos de Vibração</i></b>	<b><i>Valor medido [Hz]</i></b>	<b><i>Valor Corrigido[Hz]</i></b>
<i>Vertical (Bounce)</i>	2,08	1,85
<i>Arfagem (Pitch)</i>	2,35	2,3
<i>Direção (Yaw)</i>	1,8	1,55
<i>Balanço (Roll)</i>	3,32	3,09
<i>Balanço lateral inferior</i>	0,91	0,78

Fonte: Adaptado de (Santos, 2015)

Para obtenção das frequências naturais a partir do modelo matemático calculam-se os autovalores e os autovetores da matriz A no espaço de estados. Dessa forma, obtém-se por meio dos autovalores o módulo da frequência natural calculada e os autovetores indicam quais graus de liberdade compõem o modo de vibração, isto é, a partir dos autovetores é possível identificar cada modo clássico de vibração,



observando quais graus de liberdade tem influência sobre determinado modo de vibrar. Na Tabela B.2 encontram-se os autovalores da matriz A referentes aos estados que representam a posição dos graus de liberdade do modelo no espaço de estados.

Tabela B.2 – Frequências naturais para o Vagão GDU

<i>Grau de liberdade</i>	<i>Autovalor</i>
$w_s$	1.84 Hz
$v_s$	2.90 Hz
$\theta_s$	2.90 Hz
$\beta_s$	2.29 Hz
$\alpha_s$	2.29 Hz
$w_{t1}$	0.77 Hz
$v_{t1}$	0.77 Hz
$\theta_{t1}$	1.41 Hz
$\beta_{t1}$	1.41 Hz
$\alpha_{t1}$	0.94 Hz
$w_{t2}$	0.88 Hz
$v_{t2}$	160.83 Hz
$\theta_{t2}$	160.83 Hz
$\beta_{t2}$	0.91 Hz
$\alpha_{t2}$	0.909866 Hz

Fonte: O próprio autor

## APÊNDICE C – FUNÇÕES DO CÓDIGO DO ALGORÍTMO GENÉTICO

O código do AG utilizado neste trabalho foi desenvolvido por Gustavo Maia de Almeida e Ademir José Piontkovski Filho, sendo adaptado a este trabalho pelo autor. O AG é composto por treze rotinas, sendo estas apresentadas na Tabela C.1 adiante.

Tabela C.1 – Rotinas do AG e suas funções

<b>Rotina</b>	<b>Função</b>
<i>GA_geral</i>	Função que é responsável por fazer a chamada da função “run_genetic_algorithms.m” para cada uma das técnicas de redução de ordem calculadas analiticamente.
<i>run_genetic_algorithms.m</i>	Função principal deste código de AG. Nela entram o tamanho da população e o número de gerações, chamando as outras rotinas para retornar apenas o melhor indivíduo e o fitness a este associado após realizar cálculos de todas as populações de todas as gerações.
<i>create_individual.m</i>	Cria um indivíduo com os genes escolhidos. É nesta rotina que é descrito como os indivíduos da população inicial serão criados. Repetindo-se p vezes pela rotina "create_population.m" para se criar toda a população de tamanho p.
<i>create_population.m</i>	Repete a função “create_individual.m” para criar uma população de tamanho escolhido como entrada na rotina “run_genetic_algorithms.m”.
<i>standardized.m</i>	Calcula o fitness de apenas um indivíduo (a rotina “juntos.m” repete a “standardized.m” para cada indivíduo). É nesta rotina que deve-se escrever os cálculos para realização do cálculo do fitness de um indivíduo, além de também ser possível de se adicionar lógicas de manipulação do fitness
<i>juntos.m</i>	Calcula o fitness de cada indivíduo para uma geração ao repetir a função “standardized.m”, e organiza de forma decrescente os indivíduos da população em relação ao fitness.
<i>execute_generation.m</i>	Executa a funcao “juntos.m” para cada geração e usa a função “breed_new_population.m” para criar a população da próxima geração

<i>breed_new_population.m</i>	Cria uma nova população selecionando indivíduos pelo método Seleção por Roleta e então realizando as operações genéticas
<i>operator.m</i>	Aqui ocorrem as operações genéticas (a função “breed_new_population.m” que chama esta função)
<i>variable.m</i>	Cria variáveis globais que são usadas na execução do código
<i>random_integer.m</i>	Apenas uma lógica para um número aleatório inteiro
<i>random_floating_point_number.m</i>	Apenas uma lógica para um número aleatório real.
<i>park_miller_randomizer.m</i>	Apenas para auxiliar a aleatoriedade do código.

Fonte: Adaptado de (Filho, 2018)

## 6. BIBLIOGRAFIA

- Adel, A., & Salah, K. (2016). *Model Order Reduction Using Genetic Algorithm*. IEEE.
- Aguirre, L. A. (2000). *Introdução à Identificação de Sistemas*. Belo Horizonte: UFMG.
- Almeida, G. M., & Salles, J. L. (2016). *Controle Preditivo - Sintonia e aplicações na siderurgia*. Curitiba: Appris.
- Antoulas, A. C., & Sorensen, D. C. (2001). A survey of model reduction methods for large-scale systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, pp. 1103 - 1104.
- Arnoldi, W. E. (1951). The principle of minimized iteration in the solution of the matrix eigen-problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, pp. 17-29.
- Association of American Railroads. (2007). *Manual of Standards and Recommended Practices - Section C - Part II - Design, Fabrication, and Construction of Freight Cars*. Washington : The Association of American Railroads.
- Bai, Z. (2002). Krylov subspace techniques for reduced-order modeling of large-scale dynamical systems. *Applied Numerical Mathematics*, pp. 9-44.
- Barbosa, R. S. (2007). *Investigação experimental do comportamento dinâmico de um vagão de minério tipo GDE em tráfego na via com travessão*. São Paulo : FUSP.
- Becker, M. (2010). *Graus de Liberdade em Cadeias Cinemáticas*. São Paulo: USP.
- Beer, F., Johnston, R., & Cornwell, P. J. (2012). *Mecânica Vetorial para Engenheiros - Dinâmica*. Mcgraw Hill.
- Boyd, S. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Chen, C.-T. (1999). *Linear System Theory and Design* (3rd ed.). Oxford University Press.

- Cindra, J. L. (2008). Um esboço da história do conceito de trabalho virtual e suas aplicações. *Revista Brasileira de Ensino de Física*.
- Correia, N. F. (2013). *Vibrações Induzidas por Tráfego na Via e na Envolvente de Linhas Ferroviárias: Modelação Numérica 3D e Validação Experimental*. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Cunha, P. G. (2011). *Análise Dinâmica de Pontes Ferroviárias: Uma Metodologia Simplificada*. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo .
- Davidson, E. J. (1966). *A Method for Simplifying Linear Dynamic Systems*. IEEE.
- Dorf, R. C., & Bishop, R. H. (2013). *Modern Control Systems*. Prentice Hall.
- Feldmann, P., & Freund, R. W. (Maio de 1995). Efficient Linear Circuit Analysis by Padé Approximation via the Lanczos Process. *IEEE*.
- Ferreira, A. d. (2012). *Redução de Ordem de Modelos Matemáticos Lineares Usando Algoritmos Genéticos*. Belém: Universidade Federal do Pará.
- Filho, A. J. (2018). *PROPOSTA DE GPC AUTO-TUNING USANDO ALGORITMO*. Vitória.
- Frýba, L. (1972). *Vibration of solids and structures under moving loads*. Springer.
- G1. (08 de Janeiro de 2016). *g1.com*. Fonte: <http://g1.globo.com/ma/maranhao/noticia/2016/01/trem-de-passageiros-da-vale-descarrila-e-tomba-no-maranhao.html>
- Garg, V. K., & Dukkipati, R. V. (1984). *Dynamics of Railway Vehicle Systems*. Toronto: Academic Press.
- Gawronski, W. K. (2004). *Dynamics and control of structures: a modal approach*. Springer Science & Business Media.
- Glover, K. (03 de Janeiro de 1984). All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their  $L_1$ ,  $\infty$  -error bounds. *International Journal of Control*, pp. 1115-1193.

Greenbier Maxion. (04 de Setembro de 2018). Fonte: GBMX:  
<http://gbmx.com.br/negocios/vagao-gondola-gdu/>

Holland, J. (1975). *Adaptation in Nature and Artificial Systems*. MIT Press.

Hunt, G. A. (1986). *DYNAMIC ANALYSIS OF RAILWAY VEHICLE/TRACK INTERACTION FORCES*. Loughborough University.

Iwnick, S. (1998). Manchester Benchmarks for Rail Vehicle Simulation. *Vehicle System Dynamics*, 295-313.

Jaimoukha, I. M. (Outubro de 1997). A General Minimal Residual Krylov Subspace. *IEEE*.

Janardhanan, S. (2004). *Model Order Reduction and Controller Design Techniques*. Indian Institute of Technology Delhi.

Knothe, K. L., & Grassie, S. L. (1993). Modelling of railway track and vehicle-track interaction at high frequencies. *Vehicle System Dynamics*, 209-262.

Kouroussisa, G., Connolly, D., & Verlinden, O. (2014). Railway-induced ground vibrations – a review of vehicle effects. *International Journal of Rail Transportation*, 69-110.

Lanczos, C. (1951). An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *J. Res. Nat. Bur. Stand.*

Lopes, H. S., Rodrigues, L. C., & Steiner, M. T. (2013). *Meta-Heurística em Pesquisa Operacional*. Curitiba: Omnipax.

Maciel, G. P. (2015). *Métodos para Redução de Graus de Liberdade em Sistemas Dinâmicos Lineares*. São Paulo : Escola Politécnica da Universidade de São Paulo .

Mathworks. (2006). *Modal form realization and projection*. Mathworks.

Melanie, M. (1998). *An Introduction to Genetic Algorithms*. Cambridge, Massachusetts : The MIT Press.

- Moore, B. C. (February de 1981). Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, p. 26.
- Obinata, G., & Anderson, B. (2001). *Model Reduction for Control Design*. Springer.
- Odabasioglu, A., & Celik, M. (Agosto de 1998). PRIMA: passive reduced-order interconnect macromodeling algorithm. *IEEE Transactions. Computer Aided Design* , pp. 645-654.
- Ogata, K. (2003). *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice Hall.
- Oliveira, T. d., & Ladeira, D. G. (2016). *Princípio de d'Alembert e Equações de Lagrange*. São João Del-Rei: Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ.
- Pacheco, M. A. (1999). *ALGORITMOS GENÉTICOS: PRINCÍPIOS E APLICAÇÕES*. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica.
- Parmar, G. (2007). Order Reduction of Linear Dynamic Systems using Stability Equation Method and GA. *International Journal of Electrical, Computer, Energetic, Electronic and Communication Engineering*, pp. 1-7.
- Pillage, L. T., & Rohrer, R. A. (Abril de 1990). Asymptotic Waveform Evaluation for Timing Analysis. *IEEE*.
- Popp, K., Kruse, H., & Kaiser, I. (1999). Vehicle-track dynamics in the mid-frequency range. *Vehicle System Dynamics*, 423-464.
- Rao, S. (2008). *Vibrações Mecânicas* (4th ed.). Pearson Prentice Hall.
- S. Panda, J. S. (2009). *Evolutionary Techniques for Model Order Reduction of Large Scale Linear Systems*. International Journal of Applied Science, Engineering and Technology.
- Santos, G. F. (2015). *Análise de Segurança de um Veículo Ferroviário de Carga em Tangente Considerando a Excitação Periódica da Via Permanente*. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo .

- Schilders, W. (2008). *Model Order Reduction - Theory, Research and Applications*. Springer .
- Shabana, A. A., & Sany, J. R. (2001). *A Survey of Rail Vehicle Track Simulations and Flexible*. Kluwer Academic.
- Shabana, A. A., Zaazaa, K. E., & Sugiyama, H. (2008). *Railroad vehicle Dynamics - A Computational Approach*. CRC Press.
- Sharma, R. C. (2012). Recent Advances in Railway Vehicle Dynamics. *International Journal of Vehicle Structures & Systems*, 52-63.
- Sharma, S. K., Kumar, A., & Sharma, R. C. (2014). Challenges in railway vehicle modeling and simulations. *International Conference on Newest Drift in Mechanical Engineering*,.
- Sirovich, L. (Outubro de 1987). TURBULENCE AND THE DYNAMICS OF COHERENT STRUCTURES. *QUARTERLY OF APPLIED MATHEMATICS*, pp. 561-571.
- Spiryagin, M., Cole, C., & Sun, Y. Q. (2014). *Design and Simularion of Rail Vehicles*. New York: CRC PRes.
- Urban, C., & Joy, R. (2011). *GDU Wagon Characterization Test*. Transportation Technology Center Inc.
- Varga, A. (1993). *On Modal Techniques for Model Reduction*. Wessling, Germany: Institute of Robotics and System Dynamics, DLR Oberpfaffenhofen.
- Villemagne, C. d., & Skelton, R. E. (1987). Model Reductions Using a Projection Formulation . *IEEE*, pp. 1-6.
- Wickens, A. (1965). THE DYNAMIC STABILITY OF RAILWAY VEHICLE WHEELSETS AND BOGIES HAVING PROFILED WHEELS . *International Journal of Solid Structures*, 319 - 341.
- Wickens, A. (2005). *Fundamentals of Rail Vehicle Dynamics*. CRC Press.



Yu Ni, C. L. (2016). Model order reduction based dynamic equivalence of a wind farm. *Elsevier*, 96-103.