UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
PROFMAT

CASSIANO ARMINIO

UMA PROPOSTA DE CONSTRUÇÃO DE CURVAS PLANAS NO GEOGEBRA

VITÓRIA
2017

CASSIANO ARMINIO

UMA PROPOSTA DE CONSTRUÇÃO DE CURVAS PLANAS NO GEOGEBRA

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho

VITÓRIA

2017

RESUMO

Este trabalho é uma proposta de construção de curvas planas utilizando o *software* de matemática dinâmica GeoGebra, que contém ferramentas de álgebra e geometria. As curvas planas escolhidas são algumas das estudadas no Ensino Médio, e outras com um nível próximo do desenvolvido no Ensino Médio, no entanto, pouco estudadas. As curvas planas estudadas, serão analisadas a partir de suas equações paramétricas, cartesianas e pela definição. No GeoGebra, as construções poderão ser animadas e modificadas sempre que necessário, a fim de que possamos entender com detalhes as variações sofridas nos gráficos à medida que os parâmetros forem modificados.

Palavras-chave: GeoGebra; Curvas planas; Matemática dinâmica.

ABSTRACT

This work is a proposal to construct plane curves using GeoGebra, a *software* of dynamic Mathematics, which has several algebraic and geometric tools. Some of the chosen plane curves are studied in high school, and others are of a level close to that developed in high school. The plane curves are analyzed from their parametric or cartesian definition equations. Using GeoGebra, constructions can be animated and modified, so that we can understand in detail the effects on graphs variations as parameters are modified.

Key words: GeoGebra; Flat curves; Dynamic mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Tela inicial do GeoGebra 16
Figura 1.2: Ícone do GeoGebra 16
Figura 1.3: Janela de Álgebra 17
Figura 1.4: Campo Entrada 17
Figura 1.5: Janela de Visualização 18
Figura 1.6: Barra de Menus 18
Figura 1.7: Menu Arquivo 18
Figura 1.8: Menu Editar 19
Figura 1.9: Menu Exibir 19
Figura 1.10: Menu Opções 19
Figura 1.11: Menu Ferramentas 20
Figura 1.12: Menu Janela 20
Figura 1.13: Menu Ajuda 20
Figura 1.14: Barra de Ferramentas 20
Figura 1.15: Ícone Mover 21
Figura 1.16: Ícone Ponto 22
Figura 1.17: Ícone Reta 22
Figura 1.18: Ícone Retas Especiais 23
Figura 1.19: Ícone Polígonos 23
Figura 1.20: Ícone de Círculos 24
Figura 1.21: Ícone Cônicas 24
Figura 1.22: Ícone Ângulo 25
Figura 1.23: Ícone Transformação 25
Figura 1.24: Ícone Objetos Especiais 25
Figura 1.25: Ícone Objetos Dinâmicos 26
Figura 1.26: Ícone Ferramentas Gerais 26
Figura 1.27: Barra Lateral 27
Figura 2.1: Quadrantes do plano 30
Figura 2.2: Distância horizontal e vertical 31
Figura 2.3: Triângulo retângulo PQS 31
Figura 2.4: Escolhendo o sistema de coordenadas 32
Figura 3.1: Três pontos em linha Reta 34

Figura 3.2: Curva Poligonal 35
Figura 3.3: Curva Polinomial modular..36
Figura 3.4: Curva Exponencial com crescente 36
Figura 3.5: Curva Exponencial com decrescente 37
Figura 3.6: Curvas Logarítmicas crescente e decrescente 37
Figura 3.7: Área sob a hipérbole..38
Figura 3.8: Definição do número e...39
Figura 3.9: Limite da sequência..39
Figura 3.10: Círculo unitário..40
Figura 3.11: Parábola com foco e diretriz 42
Figura 3.12: Elementos da parábola...42
Figura 3.13: Variação do coeficiente ‘a’..44
Figura 3.14: Variação do coeficiente ‘a’..45
Figura 3.15: Variação do coeficiente ‘a’..45
Figura 3.16: Variação do coeficiente ‘a’..46
Figura 3.17: Variação do coeficiente ‘b’..47
Figura 3.18: Variação do coeficiente ‘c’..48
Figura 3.19: Curvas Polinomiais..49
Figura 3.20: Curva polinomial de grau 1..50
Figura 3.21: Curva polinomial de grau 2..51
Figura 3.22: Curva polinomial de grau 3..51
Figura 3.23: Curva polinomial de grau 4..52
Figura 3.24: Círculo com centro (a,b) e raio r 52
Figura 3.25: Elipse com centro (m,n)..53
Figura 3.26: Elipse eixo maior horizontal...54
Figura 3.27: Elipse eixo maior vertical 54
Figura 3.28: Elementos da Hipérbole 55
Figura 3.29: Hipérbole eixo real horizontal 56
Figura 3.30: Hipérbole eixo real vertical..56
Figura 3.31: Definição da curva de Agnesi 57
Figura 3.32: Bruxa de Agnesi 58
Figura 3.33: Círculo rolando 59
Figura 3.34: Cicloide para t = π/2 60
Figura 3.35: Cicloide para t = π 60

Figura 3.36: Cicloide para $t = 3\pi/2$ ... 60
Figura 3.37: Cicloide para $t = 2\pi$ ... 60
Figura 3.38: Cicloide ... 60
Figura 3.39: Cardioide ... 61
Figura 3.40: Epicicloide $R=2r$ ... 62
Figura 3.41: Epicicloide $R=3r$ ... 62
Figura 3.42: Hipocicloide degenerada ... 63
Figura 3.43: Hipocicloide $R=3r$ ... 63
Figura 3.44: Astroide ... 64
Figura 3.45: Lemniscata de Bernoulli ... 65
Figura 3.46: Folium de Descartes ... 66
Figura 3.47: Seno Hiperbólico ... 67
Figura 3.48: Cosseno Hiperbólico ... 67
Figura 3.49: Espiral de Arquimedes ... 68
Figura 3.50: Arco da curva f ... 69
Figura 3.51: Parábola $y=x^2$ ... 70
Figura 3.52: Elementos na parábola ... 71
Figura 3.53: Parábola rolando sobre o eixo ... 71
Figura 3.54: Catenária a partir da parábola ... 73
Figura 3.55: Triângulo de Reuleaux ... 74
Figura 4.1: Reta dado sua função ... 76
Figura 4.2: Reta dado dois pontos ... 77
Figura 4.3: Controle Deslizante ... 78
Figura 4.4: Reta com Controle Deslizante ‘a’ e ‘b’ ... 78
Figura 4.5: Reta com ‘a’ variando ... 79
Figura 4.6: Reta com ‘b’ variando ... 79
Figura 4.7: Raiz da função ... 80
Figura 4.8: Caminho Poligonal ... 81
Figura 4.9: Opção Malha ... 81
Figura 4.10: Função Poligonal ... 82
Figura 4.11: Função Exponencial ... 82
Figura 4.12: Exponencial, $0<a<1$ ... 83
Figura 4.13: Exponencial, $a>1$ ... 84
Figura 4.14: Função Logaritmo no campo Entrada ... 84

Figura 4.15: Funções Logarítmicas, b>1 85
Figura 4.16: Funções Logarítmicas, 0<b<1 85
Figura 4.17: Integral no campo Entrada 86
Figura 4.18: Área sob a hipérbole 86
Figura 4.19: Função Seno 87
Figura 4.20: Função Cosseno 87
Figura 4.21: Função Tangente 88
Figura 4.22: Círculo unitário 88
Figura 4.23: Medida do arco BC 89
Figura 4.24: Unidade em radianos 90
Figura 4.25: Função Seno 90
Figura 4.26: Função Cosseno 91
Figura 4.27: Função Tangente 91
Figura 4.28: Funções Trigonométricas 92
Figura 4.29: Parábola 92
Figura 4.30: Parábola com Controle Deslizante 93
Figura 4.31: Variação de ‘a’ na Parábola 94
Figura 4.32: Parábola com ‘a’ variando 94
Figura 4.33: Variação de b, a<0 95
Figura 4.34: Variação de b, a>0 95
Figura 4.35: Variação de c, a<0 96
Figura 4.36: Variação de c, a>0 96
Figura 4.37: Polinomial de grau 3 97
Figura 4.38: Polinomial de grau 4 97
Figura 4.39: Polinomial de grau 5 98
Figura 4.40: Polinômio campo Entrada 98
Figura 4.41: Polinômio grau 1 99
Figura 4.42: Polinômio grau 2 99
Figura 4.43: Polinômio grau 3 100
Figura 4.44: Polinômio grau 4 100
Figura 4.45: Polinômio com Controle Deslizante 101
Figura 4.46: Círculo centro na origem e raio 1 102
Figura 4.47: Elipse centro em (5,1) 103
Figura 4.48: Hipérbole centro em (3,1) 104

Figura 4.49: Bruxa de Agnesi eq. Paramétrica 105
Figura 4.50: Bruxa de Agnesi eq. Cartesiana 105
Figura 4.51: Construção da Bruxa de Agnesi 106
Figura 4.52: Cicloide eq. Paramétrica...107
Figura 4.53: Construção da Cicloide...108
Figura 4.54: Epicicloide com R=2r 109
Figura 4.55: Epicicloide com R=3r 109
Figura 4.56: Epicicloide com R=4r 110
Figura 4.57: Epicicloide com r=3 e R=2 110
Figura 4.58: Cardioide 111
Figura 4.59: Epicicloide com R=2r 112
Figura 4.60: Epicicloide com R=5r 112
Figura 4.61: Hipoclicoide Degenerada...113
Figura 4.62: Hipocicloide com R=3r...113
Figura 4.63: Hipocicloide com R=7 e r=4...114
Figura 4.64: Hipocicloide com R=2r...115
Figura 4.65: Hipocicloide com R=3r...115
Figura 4.66: Hipocicloide com R=5 e r=2...116
Figura 4.67: Lemniscata de Bernoulli 116
Figura 4.68: Folium de Descartes...117
Figura 4.69: Seno Hiperbólico 118
Figura 4.70: Cosseno Hiperbólico...118
Figura 4.71: Espiral de Arquimedes equação 119
Figura 4.72: Espiral de Arquimedes construção 120
Figura 4.73: Catenária a partir da Parábola...121
Figura 4.74: Triângulo de Realeaux rolando...123

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **13**
1 O GEOGEBRA **15**
1.1 Instalação do software GeoGebra 15
1.2 Conhecendo o GeoGebra 16
1.2.1 Janela de Álgebra 17
1.2.2 Campo de Entrada 17
1.2.3 Janela de Visualização 17
1.2.4 Barra de Menus 18
1.2.5 Barra de Ferramentas 20
1.2.6 Barra Lateral 26
2 CONCEITOS PRELIMINARES **29**
2.1 Coordenadas na reta 29
2.2 Coordenadas no Plano 29
2.3 Distância entre dois pontos 30
2.4 Escolhendo o sistema de coordenadas 32
3 CURVAS PLANAS **33**
3.1 Reta 33
3.2 Poligonal 35
3.3 Exponencial 36
3.4 Logarítmica 37
3.5 Seno, Cosseno e Tangente 40
3.6 Parábola 41
3.7 Polinomial 48
3.8 Circunferência 52
3.9 Elipse 53

3.10 Hipérbole 54
3.11 Bruxa de Agnesi 56
3.12 Cicloide 58
3.13 Epicicloide 61
3.14 Hipocicloide 62
3.15 Lemniscata de Bernoulli 64
3.16 O Folium de Descartes 65
3.17 Hiperbólicas 66
3.18 Espiral de Arquimedes 68
3.19 Catenária a partir da Parábola 69
3.20 Curva de largura constante 73
4 CONSTRUÇÃO DAS CURVAS PLANAS NO GEOGEBRA 76
4.1 Reta 76
4.2 Poligonal 80
4.3 Exponencial 82
4.4 Logarítmica 84
4.5 Seno, Cosseno e Tangente 86
4.6 Parábola 92
4.7 Polinomial 96
4.8 Cicunferência 101
4.9 Elipse 102
4.10 Hipérbole 103
4.11 Bruxa de Agnesi 104
4.12 Cicloide 106
4.13 Epicicloide 108
4.14 Hipocicloide 112
4.15 Lemniscata de Bernoulli 116

4.16 O Folium de Descartes 116

4.17 Hiperbólicas 117

4.18 Espiral de Arquimedes 118

4.19 Catenária a partir da parábola...120

4.20 Curva de largura constante 122

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS..124

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 125

INTRODUÇÃO

As novas tecnologias, quando inseridas no ambiente de ensino-aprendizagem, ajudam significativamente no desenvolvimento e entendimento dos conteúdos trabalhados, bem como mostram outras formas de se analisar e perceber características de tais conteúdos. Nesse sentido, os *softwares*, aplicativos e ferramentas áudio visuais se destacam. Neste trabalho, utilizaremos o *software* de matemática dinâmica GeoGebra, para realizarmos construções com elementos de geometria e álgebra interagindo no mesmo ambiente.

O *software* GeoGebra é uma ótima ferramenta de matemática dinâmica e atualmente utilizado em diversos países. Com ele podemos fazer construções de pontos, retas, vetores, polígonos, etc., em sua Janela de Visualização e em sua Janela de Álgebra, além da possibilidade de modificações das construções, tanto pela álgebra quanto pela geometria. O *software* permite ainda fazer animações e cálculos mais complexos, inclusive cálculos de derivadas e integrais. Ele traz ainda funções internas previamente estabelecidas, a fim de facilitar seu uso. Os gráficos de funções ou curvas em geral podem ser feitos em poucos segundos no GeoGebra, bastando para isso digitar suas equações no campo Entrada.

A utilização do GeoGebra em sala de aula é uma grande vantagem no que se refere às construções de gráficos das funções, polígonos, círculos, elipse, etc., além de permitir a ampliação e redução da imagem, sempre que necessário, a fim de se analisar mais de perto certa características estudadas. O professor, quando faz uso do *software* em suas aulas, consegue apresentar melhor as figuras e interpretações dos problemas propostos, bem como suas soluções. Além disso, os alunos ficam mais atraídos ao que está acontecendo, devido, principalmente, à dinâmica que o *software* permite dar às construções.

As construções mostradas nos capítulos seguintes foram todas produzidas no GeoGebra e um dos critérios usados para a escolha das construções foi a proximidade e aplicação das mesmas com a matemática do Ensino Médio. Diante disso, as curvas planas têm papel importante, pois representam parte significativa do conteúdo abordado em matemática nos livros de Ensino Médio.

As curvas planas escolhidas foram: Retas, Poligonais, Exponenciais, Logarítmicas, Trigonométricas, Parábolas, Polinomiais, Cônicas, Bruxa de Agnesi, Ciclóides, Epiciclóides, Hipociclóides, Lemniscata de Bernoulli, Folium de Descartes, Hiperbólicas, Espiral de Arquimedes, Curva de largura constante. Todas essas curvas são possíveis de serem tratadas no Ensino Médio, e essa é a razão principal de sua escolha. As construções aqui presentes representam, antes de tudo, uma proposta de trabalho para o professor que pretende usar o *software* em sala de aula.

O trabalho foi dividido em capítulos, onde encontramos no capítulo 1 a apresentação do *software* GeoGebra, e são mostradas suas ferramentas principais. Além disso, é mostrado ainda como baixar e instalar o software. No capítulo 2, são trabalhados alguns conceitos preliminares de geometria analítica, com a finalidade de que sua utilização, nos capítulos seguintes, se dê de forma mais eficiente. No capítulo 3, são apresentadas as curvas que serão construídas, a partir de suas definições, equações paramétricas e cartesianas. Para compreensão adequada do tema abordado na seção 3.19, é necessário que o leitor tenha conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral. No capítulo 4, são realizadas as construções, no GeoGebra, das curvas apresentadas no capítulo 3, bem como suas variações. O trabalho se encerra com as considerações finais e as referências bibliográficas.

1 O GEOGEBRA

O *software* GeoGebra é um programa de matemática dinâmica de distribuição livre, que combina Álgebra e Geometria em um único ambiente. Criado por uma equipe liderada por Markus Hohenwarter[1], o programa permite realizar construções dinâmicas de pontos, retas, segmentos, vetores, polígonos, sequências, translações, rotações, inserir funções, etc., além de possibilitar a modificação desses elementos durante as construções, sendo que tais modificações aparecem, simultaneamente, na Janela de Álgebra e na Janela de Geometria.

O programa traz ferramentas tradicionais da Geometria e outras mais adequadas à Álgebra e ao Cálculo. A partir da versão 5.0, é possível se trabalhar com Geometria em três dimensões.

O programa tem notória vantagem didática, uma vez que faz a apresentação algébrica e geométrica ao mesmo tempo, além de sua capacidade de movimentos e animações. Diante disso, a utilização do programa em sala de aula é de grande relevância no que se refere ao ensino de matemática e suas tecnologias.

1.1 INSTALAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA

O *software* GeoGebra pode ser baixado, instalado e usado gratuitamente. Para isso, deve-se proceder de acordo com o roteiro a seguir:

- Entre no site www.geogebra.org;
- Clique no botão *Downloads*;
- Selecione a opção de *download* de acordo com o sistema operacional do computador (Windows, Mac Os X, Linux);
- Concluído o *download*, abra o instalador com dois cliques, selecione o idioma e clique na opção PRÓXIMO;
- Leia os termos de licença de instalação e clique em EU CONCORDO;
- Selecione STANDARD e clique em INSTALAR;
- Clique em TERMINAR e o GeoGebra abrirá automaticamente.

[1] Markus Hohenwarter, criador do GeoGebra em 2001.

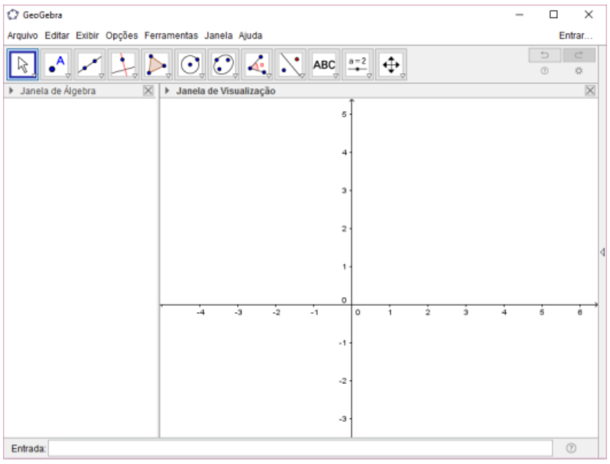
Figura 1.1: Tela inicial do GeoGebra

Observação: Caso o GeoGebra não abra automaticamente, vá à área de trabalho do computador, localize o ícone do programa e dê dois cliques sobre ele.

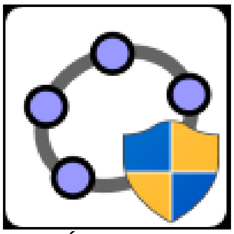
Figura 1.2: Ícone do GeoGebra

Para o uso do GeoGebra é necessário que o computador tenha o JAVA instalado, que pode ser adquirido gratuitamente em: “www.java.com/pt_BR/download”.

1.2 CONHECENDO O GEOGEBRA

Vejamos uma apresentação inicial das principais ferramentas e elementos que compõem o GeoGebra, e que serão usados posteriormente para as construções propostas neste trabalho. Mais informações podem ser obtidas no manual do GeoGebra[2].

[2] MANUAL GEOGEBRA. **Site GeoGebra**. Disponível em: <https://wiki.geogebra.org/pt/Manual>. Acesso em 12/07/2017.

1.2.1 Janela de Álgebra

Localizada na parte central esquerda, a Janela de Álgebra apresenta todos os comandos inseridos no Campo de Entrada ou na Janela de Visualização, como: funções, pontos, números, vetores, sequências, etc. Esses comandos podem ser modificados a partir da Janela de Álgebra como se queira.

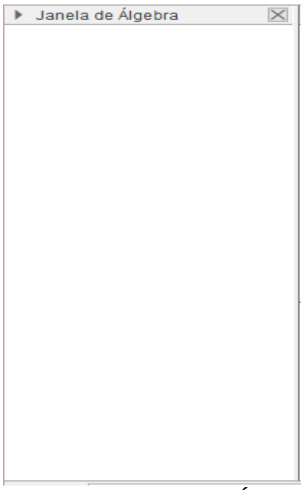

Figura 1.3: Janela de Álgebra

1.2.2 Campo de Entrada

No Campo Entrada podem ser inseridos vários tipos de comandos como, funções, sequências, pontos, retas, vetores, etc. Estes objetos aparecerão na Janela de Visualização e na Janela de Álgebra. Este campo é muito importante, pois grande parte dos comandos serão inseridos por ele.

Figura 1.4: Campo Entrada

1.2.3 Janela de Visualização

Localizada na parte central, a Janela de Visualização é o espaço onde os objetos são apresentados de forma geométrica; Tais objetos podem ser inseridos diretamente a partir desta janela, além de poderem ser modificados.

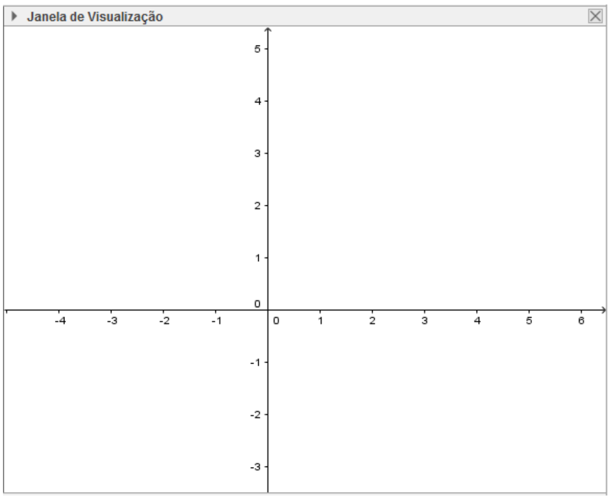

Figura 1.5: Janela de Visualização

1.2.4 Barra de Menus

Localizada na parte superior, a Barra de Menus é formada pelos botões: Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela, Ajuda. Cada um destes botões apresenta várias funcionalidades, que serão melhor explicadas nas construções futuras. Abaixo seguem imagens de cada um dos botões da Barra de Menus.

Figura 1.6: Barra de Menus

1.2.4.1 Arquivo

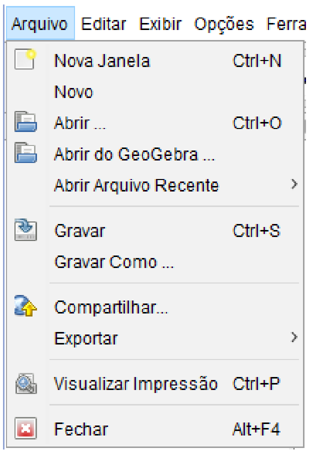

Figura 1.7: Menu Arquivo

1.2.4.2 Editar

Figura 1.8: Menu Editar

1.2.4.3 Exibir

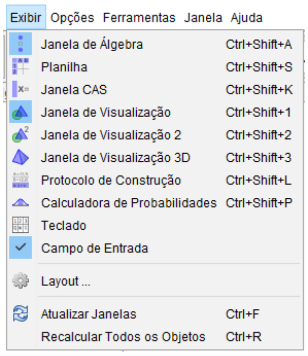

Figura 1.9: Menu Exibir

1.2.4.4 Opções

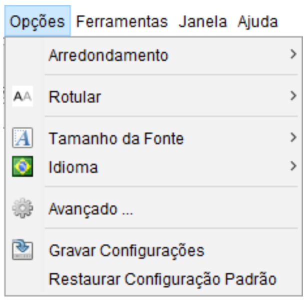

Figura 1.10: Menu Opções

1.2.4.5 Ferramentas

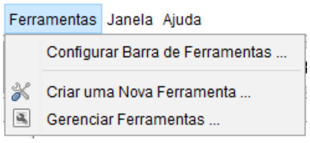

Figura 1.11: Menu Ferramentas

1.2.4.6 Janela

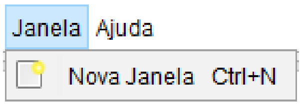

Figura 1.12: Menu Janela

1.2.4.7 Ajuda

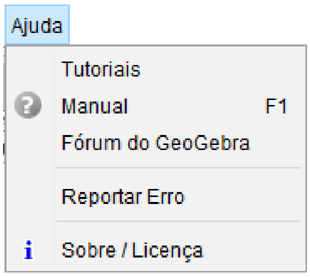

Figura 1.13: Menu Ajuda

1.2.5 Barra de Ferramentas

Localizada na parte superior e abaixo da Barra de Menus, a Barra de Ferramentas apresenta doze ícones, cada um composto por várias ferramentas, que são acessadas com facilidade a partir de um clique com o mouse sobre o ícone. Tais ferramentas podem ser usadas na Janela de Visualização.

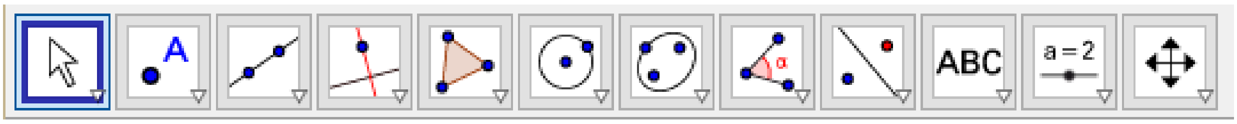

Figura 1.14: Barra de Ferramentas

Vamos, a seguir, explorar as principais ferramentas que cada ícone traz. Uso mais específico será dado nas construções futuras dos capítulos que se seguem.

Informações mais aprofundadas podem ser obtidas a partir do ícone Ajuda na parte inferior direita ou no manual do GeoGebra.

1.2.5.1 Ferramentas de Mover

O primeiro ícone da Barra de Ferramentas apresenta a ferramenta Mover. Com ela, pode-se movimentar os objetos da Janela de Visualização, bem como modifica-los; é possível, também, clicar e segurar com o botão esquerdo do mouse a fim de deslocar o sistema de eixos OXY. Existe, ainda, a possibilidade de se fazer rotações em torno de um ponto com a ferramenta Rotação em Torno de um Ponto.

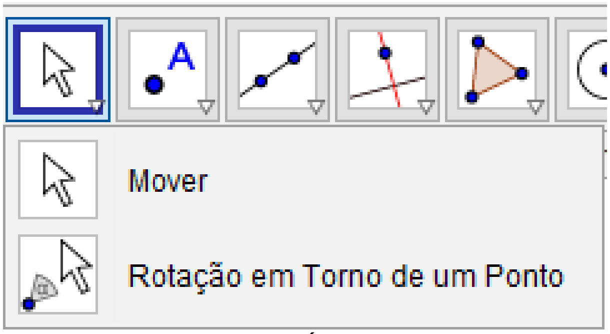

Figura 1.15: Ícone Mover

1.2.5.2 Ferramentas de Pontos

O ícone Ponto apresenta a ferramenta Ponto, que permite criar pontos na Janela de Visualização.

Com a ferramenta Interseção de Dois Objetos é possível gerar o ponto de interseção de objetos.

A ferramenta Ponto Médio ou Centro, determina o ponto médio entre dois pontos dados.

A ferramenta Otimização encontra pontos de máximos e mínimos locais de uma função, bastando para isso clicar sobre o gráfico da função.

A ferramenta Raízes encontra as raízes de uma função ao clicar sobre seu gráfico.

Figura 1.16: Ícone Ponto

1.2.5.3 Ferramentas de Retas

O Ícone Reta, apresenta a possibilidade de criação de retas (ferramenta Reta), seguimentos (ferramenta Seguimento), semirretas (ferramenta Semirreta), caminho poligonal (ferramenta Caminho Poligonal) e vetores (ferramenta Vetor) na Janela de Visualização.

Figura 1.17: Ícone Reta

1.2.5.4 Ferramentas de Retas Especiais

Este ícone traz a possibilidade de criação de retas perpendiculares (ferramenta Reta Perpendicular), retas paralelas (ferramenta Reta Paralela), mediatrizes (ferramenta Mediatriz), bissetrizes (ferramenta Bissetriz), retas tangentes (ferramenta Reta Tangente) e lugar geométrico (ferramenta Lugar Geométrico) na Janela de Visualização.

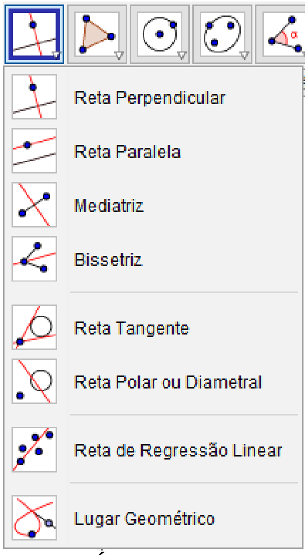

Figura 1.18: Ícone Retas Especiais

1.2.5.5 Ferramentas de Polígonos

Este ícone permite a criação de polígonos (ferramenta Polígono) e polígonos regulares (ferramenta Polígono Regular).

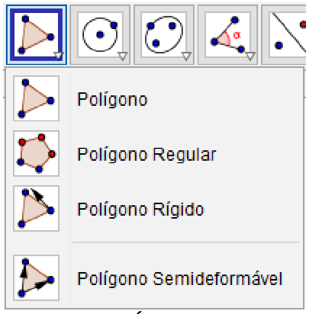

Figura 1.19: Ícone Polígonos

1.2.5.6 Ferramentas de Círculos e Arcos Circulares

Este ícone apresenta ferramentas de criação de círculos, semicírculos, arcos circulares e setores de círculos.

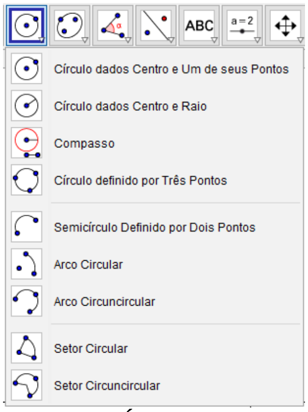

Figura 1.20: Ícone de Círculos

1.2.5.7 Ferramentas de Cônicas

Com as ferramentas deste ícone, o usuário pode criar elipses (ferramenta Elipse), hipérboles (ferramenta Hipérbole), parábolas (ferramenta Parábola) e encontrar a equação de uma cônica dados cinco pontos, com a ferramenta Cônica por Cinco Pontos.

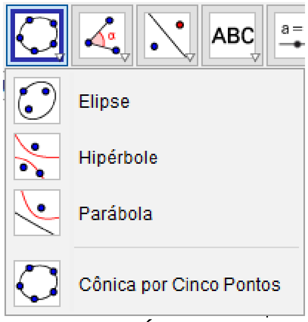

Figura 1.21: Ícone Cônicas

1.2.5.8 Ferramentas de Medida/Métrica

Com as ferramentas deste ícone o usuário poderá criar ângulos, medir distâncias, comprimentos, perímetros e áreas.

Figura 1.22: Ícone Ângulo

1.2.5.9 Ferramentas de Transformação

Essas ferramentas permitem a realização de reflexão, rotação e translação.

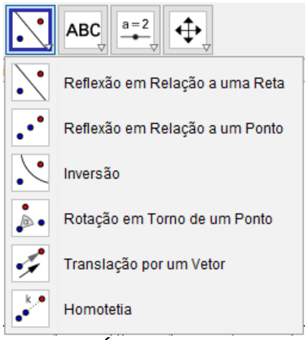

Figura 1.23: Ícone Transformação

1.2.5.10 Ferramentas de Objetos Especiais

Com essas ferramentas é possível inserir textos, imagens e desenhar na Janela de Visualização.

Figura 1.24: Ícone Objetos Especiais

1.2.5.11 Ferramentas de Objetos Dinâmicos

Com essas ferramentas é possível criar parâmetros, controlar a apresentação dos objetos, exibir ou ocultar objetos, criar botões com funções específicas e criar movimentos.

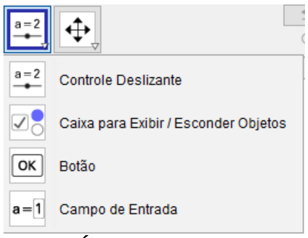

Figura 1.25: Ícone Objetos Dinâmicos

1.2.5.12 Ferramentas Gerais

Essas ferramentas permitem mover a janela, ampliar ou reduzir a visualização, exibir ou esconder objetos, copiar estilos e apagar.

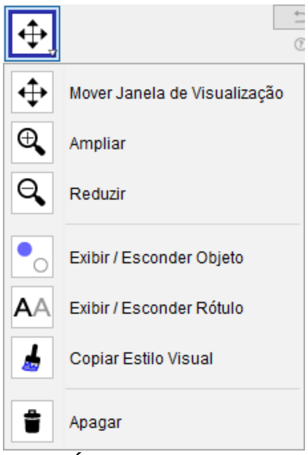

Figura 1.26: Ícone Ferramentas Gerais

1.2.6 Barra Lateral

Na Barra Lateral direita central da janela principal do GeoGebra é possível mostrar ou esconder uma pequena Janela de Opções, que permite realizar alterações na janela principal do GeoGebra de forma rápida e prática. Essa barra conta com seis opções, como se seguem.

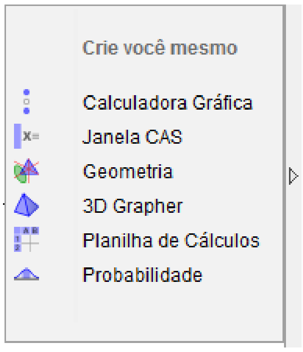

Figura 1.27: Barra Lateral

1.2.6.1 Calculadora Gráfica

Exibe a Janela de Álgebra e a Janela de Visualização com os eixos ordenados.

1.2.6.2 Janela CAS

Exibe a Janela CAS e a Janela de Visualização.

1.2.6.3 Geometria

Exibe a Janela de Geometria sem os eixos ordenados.

1.2.6.4 3D Grapher

Exibe a Janela de Álgebra e a Janela de Visualização 3D.

1.2.6.5 Planilha de Cálculos

Exibe a Planilha e a Janela de Visualização.

1.2.6.6 Probabilidade

Exibe a Janela de Probabilidade e Estatística.

2 CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo faremos uma introdução à Geometria Analítica Plana, dando ênfase aos conceitos mais relevantes à elaboração deste trabalho, bem como ao uso que serão dados no capítulo 4, onde serão feitas construções com o *software* de matemática dinâmica GeoGebra.

2.1 COORDENADAS NA RETA

Dados os pontos A e B quaisquer, o segmento de reta $\overline{AB}$ chama-se distância entre os pontos A e B. Escrevemos $d(A,B)$ para indicar essa distância, que é um número real maior que zero, se $A \neq B$. Além disso, vale que $d(A,C) + d(C,B) = d(A,B)$ se, e somente se, o ponto C pertence ao seguimento de reta AB.

Um eixo é uma reta orientada, dotada de um sentido positivo e um sentido aposto negativo, na qual se fixou um ponto O, chamado origem. Todo eixo é uma correspondência biunívoca com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais; com a origem correspondendo ao número zero, cada ponto X situado a direita de O correspondendo ao número real $x = d(O,X)$ e os pontos situados a esquerda de O correspondendo aos números reais negativos $x = -d(O,X)$; o número real x que corresponde ao ponto X chama-se coordenada desse ponto.

Dados pontos X e Y sobre um eixo, tais que $x = d(O,X)$ e $y = d(O,Y)$, então $x < y$ se, e somente se, X está à esquerda de Y. Além disso, tem-se que $d(X,Y) = |x - y|$. Disso, decorre que se A, B e C pertencem a mesma reta então $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$, com C localizando entre A e B (LIMA at al., 2006c, pag. 1-5).

2.2 COORDENADAS NO PLANO

Um sistema de coordenadas no plano $\prod$ consiste num par de eixos perpendiculares OX e OY contidos nesse plano, com origem comum. O eixo OX chama-se eixo das abcissas e o eixo OY eixo das ordenadas. O sistema é indicado por OXY. A cada ponto P do plano $\prod$ corresponde, de forma biunívoca, um par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Os números x e y são as coordenadas do ponto P no sistema OXY, onde x é a abcissa e y é a ordenada de P.

O ponto O do sistema possui abcissa e ordenada iguais a zero, $(0,0)$. Um ponto sobre o eixo OX possui ordenada zero, $(x, 0)$. Um ponto sobre o eixo OY possui abcissa zero, $(0, y)$.

Dado um ponto P de abcissa x e ordenada y, chama-se projeção de P sobre o eixo OX o ponto P' de coordenadas $(x, 0)$, e de projeção sobre o eixo OY o ponto P'' de coordenadas $(0, y)$.

Os eixos ortogonais dividem o plano $\prod$ em quatro regiões chamadas quadrantes. O primeiro quadrante é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. O segundo quadrante é formado por ponto $P = (x, y)$ tais que $x \leq 0$ e $y \geq 0$. O terceiro quadrante pelos pontos $P = (x, y)$ tais que $x \leq 0$ e $y \leq 0$. O quarto quadrante por pontos $P = (x, y)$ com $x \geq 0$ e $y \leq 0$ (LIMA at al., 2006c, pag. 5-12).

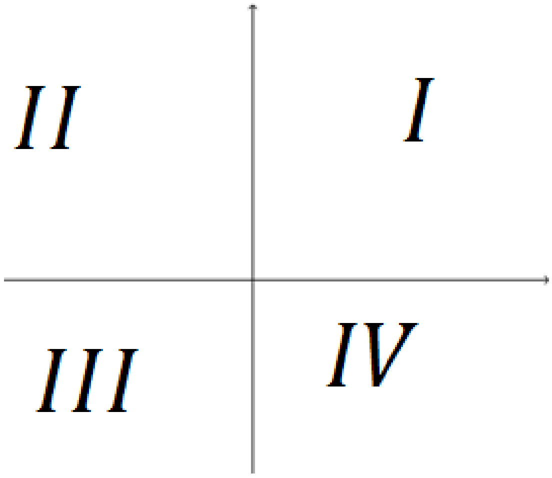

Figura 2.1: Quadrantes do plano

2.3 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Como visto em (LIMA at al., 2006c, pag. 13-19) se os pontos $P = (a, b)$ e $Q = (c, b)$ têm a mesma ordenada, então eles estão na mesma reta horizontal paralela ao eixo OX, e a distância entre eles é $d(P, Q) = |a - c|$. Analogamente, se os pontos $P = (a, b)$ e $Q' = (a, d)$ possuem a mesma abcissa, então eles estão na mesma reta vertical paralela ao eixo OY, e a distância entre eles é $d(P, Q') = |b - d|$.

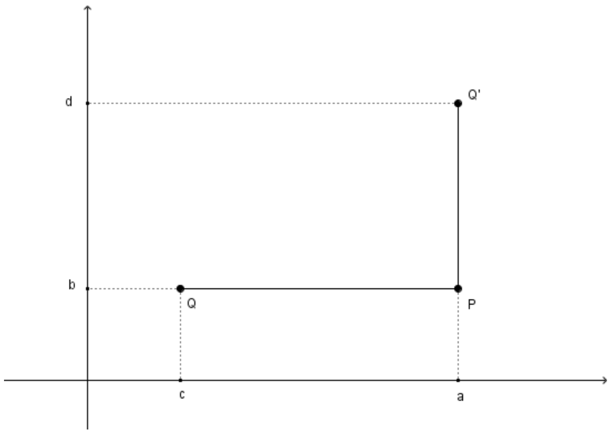

Figura 2.2: Distância horizontal e vertical

Entretanto, se os pontos $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ tem coordenadas distintas, consideremos o ponto $S = (c, b)$. Então, o triângulo PQS é retângulo, com hipotenusa PQ.

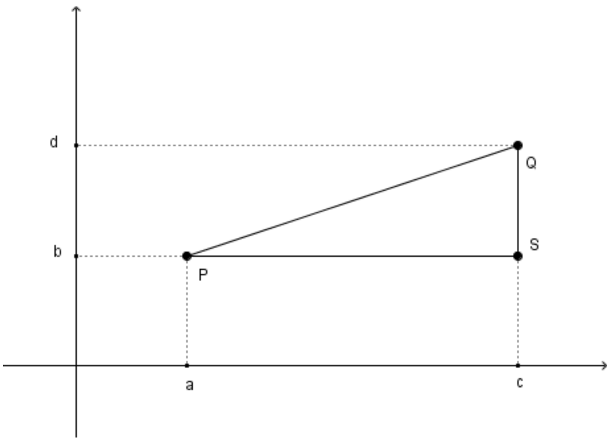

Figura 2.3: Triângulo retângulo PQS

Então, $d(P, S) = |c - a|$ e $d(Q, S) = |d - b|$. E, pelo teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$d(P, Q)^2 = d(P, S)^2 + d(Q, S)^2$$

Daí

$$d(P, Q) = \sqrt{d(P, S)^2 + d(Q, S)^2}$$

Que é a distância entre dois pontos no plano.

Em particular, a distância do ponto $P = (x, y)$ à origem $O = (0,0)$ é:

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2.4 ESCOLHENDO O SISTEMA DE COORDENADAS

Diante de um problema geométrico, que não menciona coordenadas, podemos resolvê-lo usando Geometria Analítica e introduzindo um sistema de eixos da forma mais conveniente ao problema; vejamos um problema extraído de.

Seja, por exemplo, ABC um triângulo retângulo cuja hipotenusa é BC. Seja M o ponto médio de BC. Queremos mostrar que o comprimento da mediana $\overline{AM}$ é igual à metade do comprimento da hipotenusa (LIMA at al., 2006c, pag. 19-23).

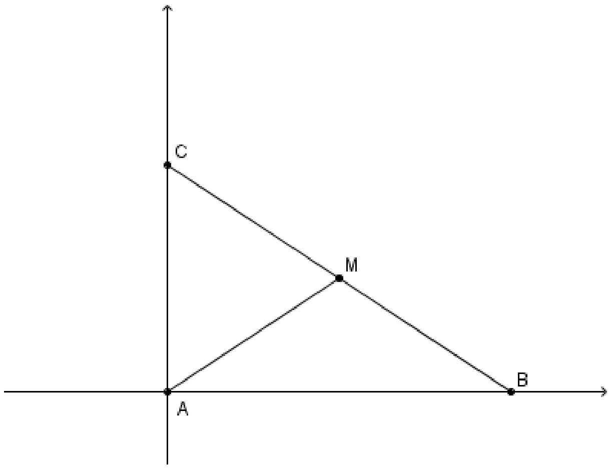

Figura 2.4: Escolhendo o sistema de coordenadas

Neste caso, um sistema de coordenadas conveniente para a resolução do problema seria aquele em que os seguimentos AB e AC estão sobre os eixos. Ou seja, $A = (0,0)$, $B = (b, 0)$ e $C = (0, c)$ são as coordenadas dos vértices do triângulo dado, e $M = \left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

Daí, o comprimento da mediana é

$$\overline{AM} = d(A, M) = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}$$

E, o comprimento da hipotenusa é

$$\overline{BC} = d(B, C) = \sqrt{b^2 + c^2}$$

o que comprova que a afirmação inicial é verdadeira.

Assim, observamos que a escolha adequada do sistema de coordenadas pode facilitar consideravelmente um problema de geometria. É possível que tal escolha possa ser feita de outra forma, e ainda assim se possa facilitar o problema.

3 CURVAS PLANAS

Neste capítulo faremos o estudo de algumas Curvas Planas, que serão construídas, posteriormente, com o auxílio do *software* de matemática dinâmica, GEOGEBRA.

Uma vez escolhido um sistema de coordenadas no plano, as curvas nesse plano passam a ser representadas por equações envolvendo as variáveis x, y na qual o ponto $P = (x, y)$ pertence à curva.

3.1 RETA

Como nos fala (LIMA at al., 2006a, pag. 78-98).uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes a, $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

O número $b = f(0)$ é chamado valor inicial da função f. O número a pode ser determinado a partir do conhecimento dos valores de $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função f assume em dois pontos distintos x_1 e x_2. Temos que, $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$, então fazendo a diferença obtemos: $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$,

Dai, $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Dados $x, x + h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$, o número $a = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ chama-se a *taxa de variação* de função f no intervalo de extremos $x, x + h$. A função chama-se:

Crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

Decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

Ou seja, a função f será crescente quando a é positivo, decrescente quando a é negativo e constante quando a é zero.

O gráfico G de uma função afim $f: x \to ax + b$ é uma *linha reta*. Para vermos isso basta mostrarmos que três pontos quaisquer $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ do gráfico são colineares. Para isso, é necessário e suficiente que o maior dos três números $d(P1, P2)$, $d(P2, P3)$ e $d(P1, P3)$ seja igual à soma dos outros dois. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_1 < x_2 < x_3$. Daí,

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)}$$

$$d(P_2, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + a^2(x_3 - x_2)^2} = (x_3 - x_2)\sqrt{(1 + a^2)}$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)}$$

Segue que $d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$.

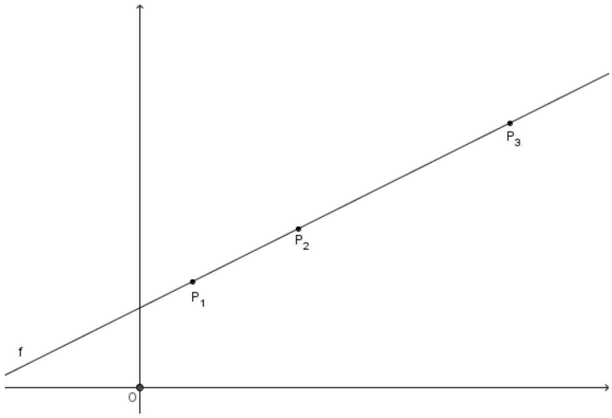

Figura 3.1: Três pontos em linha Reta

Do ponto de vista geométrico, b é a ordenada do ponto onde a reta, que é gráfico da função $f: x \to ax + b$, intersecta o eixo OY. O número a chama-se a inclinação, ou coeficiente angular, dessa reta em relação ao eixo horizontal OX. Quanto maior o valor de a mais a reta se afasta da posição horizontal. Quando $a > 0$, o gráfico de f é uma reta ascendente e quando $a < 0$, a reta é descendente.

Como o gráfico da função afim é uma reta, e uma reta fica inteiramente determinada quando se conhecem dois de seus pontos, resulta que basta conhecer os valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$, com $x_1 \neq x_2$, que a função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fica inteiramente determinada.

Dados arbitrariamente $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma, função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.

Se $f(x) = ax + b$, diz-se que $y = ax + b$ é a equação da reta r. Se a reta r é o gráfico da função afim f, dada por $f(x) = ax + b$, o coeficiente $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são dois pontos distintos quaisquer de r, dizemos que a é a inclinação ou coeficiente angular da reta r, pois ele é a tangente do ângulo formado pela reta r e pelo eixo OX.

A equação da reta que passa pelo ponto $P = (x_1, y_1)$ e tem inclinação $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ é $y = y_1 + \frac{y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$, e é chamada Equação Reduzida da reta.

O conjunto dos pontos $P = (x, y)$ cujas coordenadas satisfazem a equação $ax + by = c$ é uma reta, e tal equação é conhecida como Equação Cartesiana da Reta.

Dados os pontos distintos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, as equações $\begin{Bmatrix} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{Bmatrix}$, onde t assume todos os valores reais, chamam-se Equações Paramétricas da Reta P_1P_2.

3.2 POLIGONAL

As Curvas Poligonais aparecem em muitas situações cotidianas, como no gráfico de imposto de renda, da temperatura de mudança de fase de um elemento, na bolsa de valores, nos resultados de exames médicos, etc. (LIMA at al., 2006a, pag. 102).

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita Poligonal quando existem $t_0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n$ tais que, para $x \leq t_0$, para $x \geq tn$ e em cada intervalo $[ti - 1, ti]$, f coincide com uma função afim f_i. Equivalentemente, podemos dizer que uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é poligonal quando seu gráfico é uma linha poligonal .

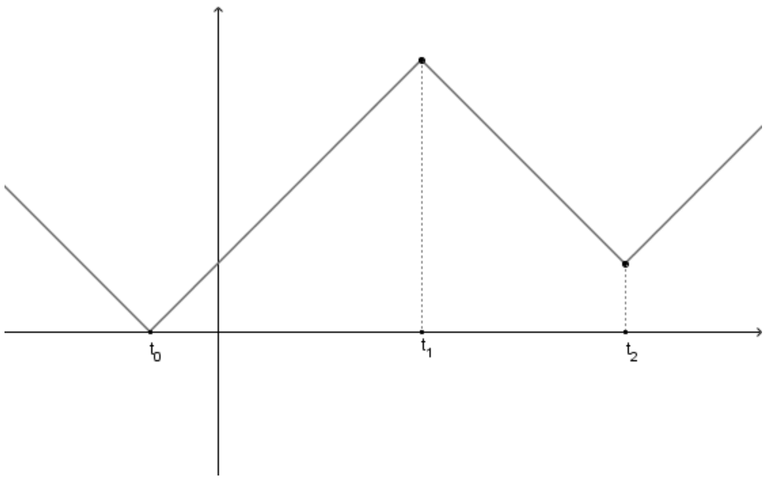

Figura 3.2: Curva Poligonal

Um exemplo bem óbvio de uma função poligonal é a função $f(x) = |x|$, ou seja: $f(x) = x, se\ x \geq 0\ e\ f(x) = -x, se < 0$.

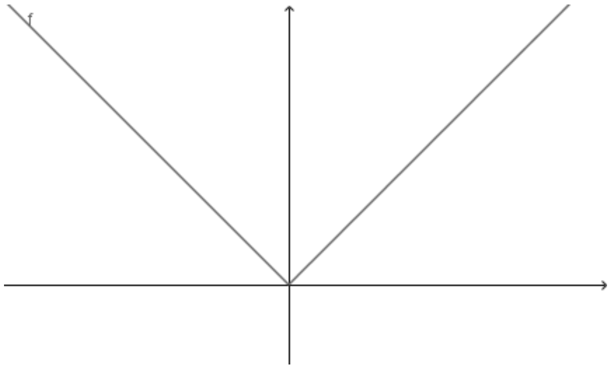

Figura 3.3: Curva Polinomial modular

3.3 EXPONENCIAL

Como visto em (LIMA at al., 2006a, pag. 178-182) chama-se de função Exponencial a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$, tal que $f(x) = a^{x}$, com $a \in \mathbb{R}^{+}$, $a \neq 1$. O número real a chama-se base da função exponencial. A função é crescente se $a > 1$, e decrescente se $0 < a < 1$. A função assim definida satisfaz às seguintes propriedades:

1- $f(1) = a$

2- $f(x + y) = f(x).f(y)$

3- $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, quando $0 < a < 1$.

4- A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$, definida por $f(x) = a^{x}$, é ilimitada superiormente.

5- A função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$, $f(x) = a^{x}$, com $a \neq 1$ é sobrejetiva.

As figuras abaixo exibem os gráficos de $f(x) = a^{x}$, nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$.

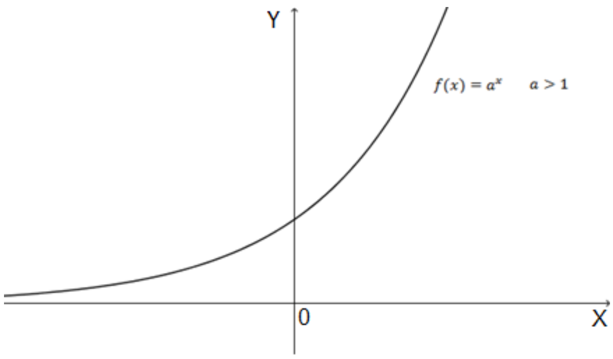

Figura 3.4: Curva Exponencial com crescente

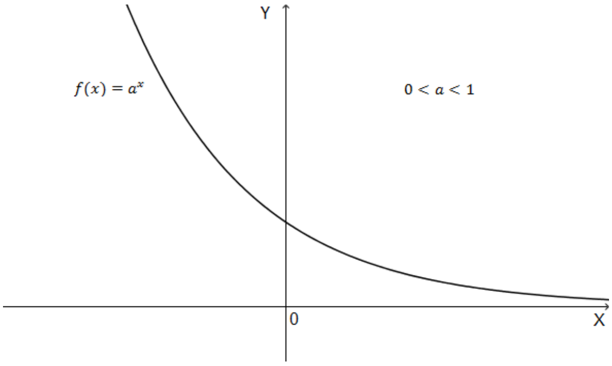

Figura 3.5: Curva Exponencial com decrescente

3.4 LOGARÍTMICA

Dada a função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = a^x$, para todo número real positivo $a \neq 1$, chama-se de função Logarítmica a inversa da função exponencial, $log_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número real positivo x o número real $log_a x$, chamado o logaritmo de x na base a (LIMA at al., 2006a, pag. 186-195). Por definição de função inversa, tem-se $a^{log_a x} = x$ e $log_a a^x = x$.

Assim, $log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevara base a para obter o número x. Ou seja, $y = log_a x \Leftrightarrow a^y = x$. Segue que $log_a xy = log_a x + log_a y$, para x e y positivos quaisquer.

A função $log_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é crescente quando a >1 e decrescente quando $0 < a < 1$. Como $a^0 = 1$, tem-se que $log_a 1 = 0$.

A figura abaixo mostra os gráficos das funções logarítmicas para os casos em que $a > 1$ e $0 < a < 1$.

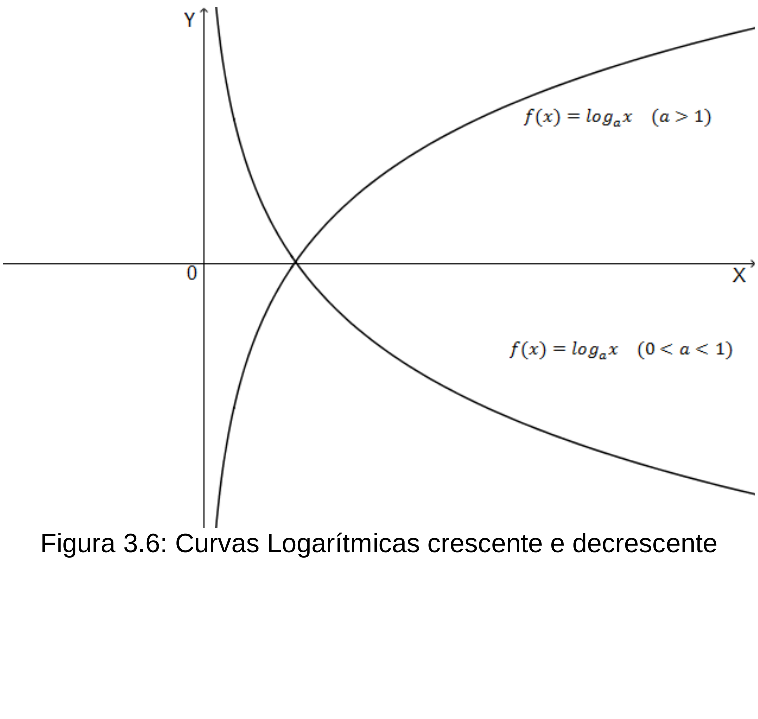

Figura 3.6: Curvas Logarítmicas crescente e decrescente

Os logaritmos naturais, aqueles em que a base $a = e$, podem ser definidos, de forma geométrica, como sendo a área delimitada pela hipérbole $f(x) = \frac{1}{x}$, pelas retas verticais $x = 1$ e $x = k$ e pelo eixo das abcissas, como se segue:

Seja H_a^b a região do plano delimitada pelas retas verticais $x = a$, $x = b$, pelo eixo das abcissas e pela hipérbole $y = \frac{1}{x}$. Então,

$ÁREA\ H_1^x > 0$ se $x > 1$

$ÁREA\ H_1^x = -ÁREA\ H_1^x$ se $x < 1$

$ÁREA\ H_1^x = 0$ se $x = 1$

Definamos uma função $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ pondo cada número real $x > 0$ como se segue:

$$f(x) = ÁREA\ H_1^x$$

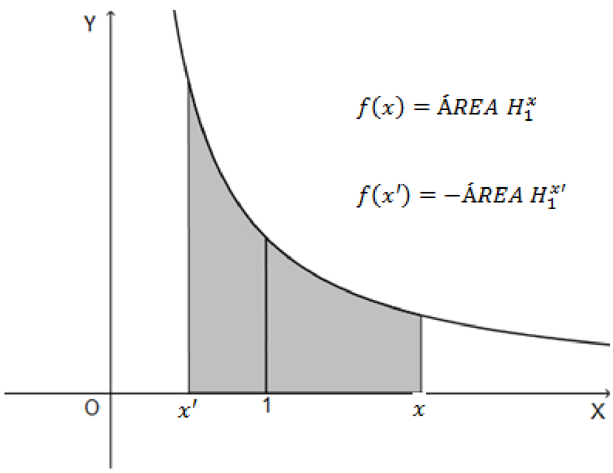

Figura 3.7: Área sob a hipérbole

Resultam imediatamente da definição, as seguintes propriedades:

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$;
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$;
- $f(1) = 0$;
- $f(x)$ é crescente.

Além disso, observamos que, para $x,y \in \mathbb{R}^+$ quaisquer:

- $f(xy) = ÁREA\ H_1^{xy} = ÁREA\ H_1^x + ÁREA\ H_x^{xy}$. No entanto, $ÁREA\ H_x^{xy} = ÁREA\ H_1^y$, então, $f(xy) = ÁREA\ H_1^x + ÁREA\ H_1^y$, ou seja:
- $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Existe um número real positivo, que chamaremos de e, tal que $f(x) = log_e\, x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Usaremos a notação $ln\, x$ em vez de $log_e\, x$ é chamaremos o número $ln\, x$ de logaritmo natural de x.

O número e, base dos logaritmos naturais, é caracterizado pelo fato de que seu logaritmo natural é igual a 1, ou seja $ÁREA\ H_1^e = 1$. O número e é irracional e tem valor aproximado $e = 2{,}71$ (LIMA at al., 2006a, pag. 200).

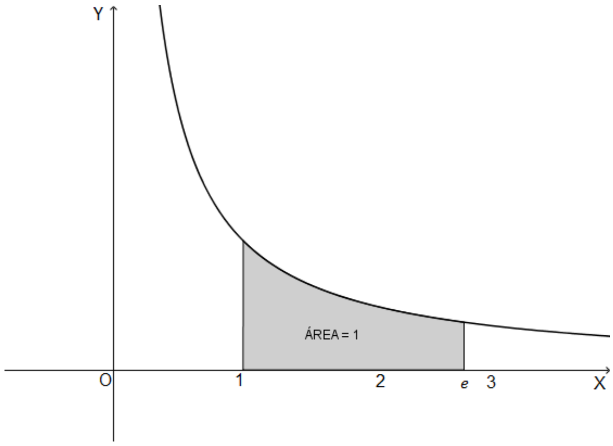

Figura 3.8: Definição do número e

Geralmente, o número e é apresentado como o limite da expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando n tende ao infinito. Ou seja, o número e é introduzido como uma aproximação de números racionais da forma $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. A figura abaixo mostra como esse limite tende a e quando n tende ao infinito.

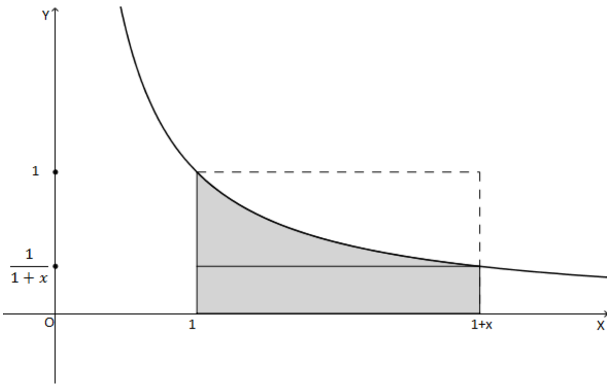

Figura 3.9: Limite da sequência

Observamos o retângulo menor cuja base mede x e a altura mede $\frac{1}{1+x}$, contido na região H_1^{1+x} e essa região, por sua vez, contida no retângulo maior de base x e altura 1. Donde podemos escrever:

$$x\frac{1}{1+x} < ln(1+x) < x$$

Dai, como $x > 0$, podemos dividir por x

$$\frac{1}{1+x} < \frac{ln(1+x)}{x} < 1$$

tomando $x = \frac{1}{n}$

$$\frac{n}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad < 1$$

$$e^{\frac{n}{n+1}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ (LIMA at al., 2006a, pag. 201-202).

Quando n cresce indefinidamente, $\frac{n}{n+1}$ se aproxima de 1, logo $e^{\frac{n}{n+1}}$ tende a e. Segue então da última desigualdade que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

3.5 SENO, COSSENO E TANGENTE

Consideremos o círculo unitário centrado na origem do sistema de eixos ortogonais OXY. Um ângulo t é a medida, em radianos, do arco desde o ponto $(1,0)$ até o ponto $P(x, y)$. O ângulo t será positivo se a rotação for no sentido anti-horário e negativo se for no sentido horário.

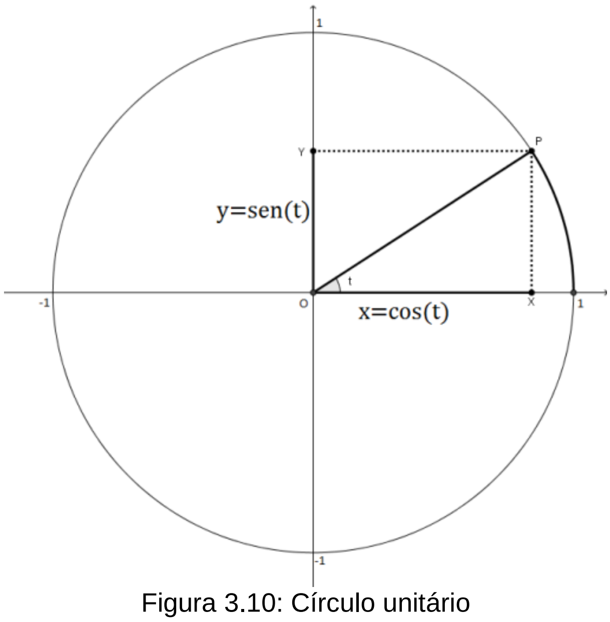

Figura 3.10: Círculo unitário

O cosseno é definido como sendo o valor da coordenada x do ponto P. Ou seja, $x = cos(t)$.

O seno é definido como sendo o valor da coordenada y do ponto P. Ou seja, $y = sen(t)$.

Uma consequência imediata da definição é a identidade fundamental $(sen(t))^2 + (cos(t))^2 = 1$. Já que o ponto $P = (x, y) = (cos(t), sen(t))$, pertence ao círculo unitário com centro na origem.

Chama-se função Cosseno a função $f: \mathbb{R} \to [-1,1]$, tal que $f(x) = cos(x)$, que associa a cada ângulo x, em radianos, o valor $cos(x)$.

Chama-se função Seno a função $f: \mathbb{R} \to [-1,1]$, tal que $f(x) = sen(x)$, que associa a cada ângulo x, em radianos, o valor $sen(x)$.

À medida que o ângulo x varia os valores de $sen(x)$ e $cos(x)$ variam no intervalo $[-1,1]$.

Chama-se função Tangente à função $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{(2k+1).\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$, que associa a cada ângulo x, em radianos, o valor $tg(x)$.

3.6 PARÁBOLA

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se Quadrática quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (LIMA at al., 2006a, pag. 114).

O gráfico de uma função quadrática é uma curva conhecida como Parábola. Dados um ponto F e uma reta d que não contém F, a parábola de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos que estão à mesma distância de F e de d.

A reta que passa por F e é perpendicular a reta d é chamada de *eixo* da parábola. O ponto da parábola mais próximo da reta diretriz chama-se *vértice* da parábola, e é o ponto médio entre o segmento que liga o foco ao ponto de interseção do eixo com a diretriz.

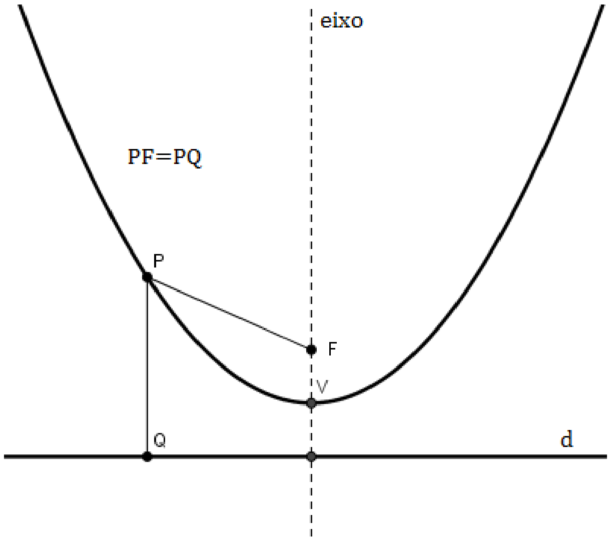

Figura 3.11: Parábola com foco e diretriz

Dados $a, m, k \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é a parábola com o seguintes elementos:

- Eixo: reta vertical de equação $x = m$
- Vértice: ponto $V = (m, k)$
- Foco: ponto $F = (m, k + \frac{1}{4a})$
- Diretriz: reta d horizontal de equação $y = k - \frac{1}{4a}$.

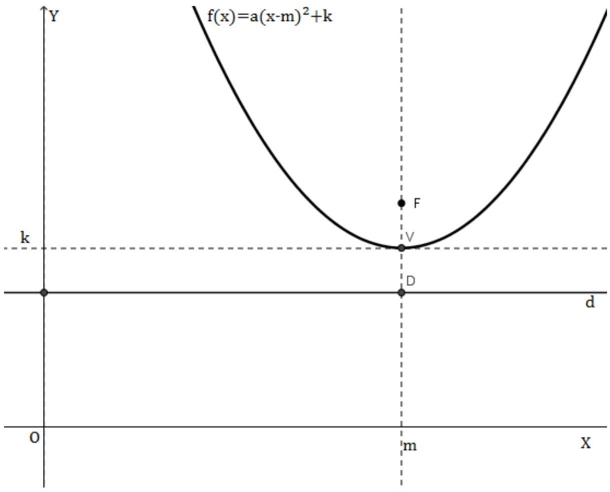

Figura 3.12: Elementos da parábola

Segue-se daí que o gráfico de qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola com os seguintes elementos:

Fazendo $ax^2 + bx + c = a(x-m)^2 + k$ e completando o quadrado do lado esquerdo da igualdade, temos:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = a(x-m)^2 + k$$

- Eixo: reta vertical $x = \frac{-b}{2a}$
- Vértice: ponto $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a}\right)$
- Foco: ponto $F = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a} + \frac{1}{4a}\right)$
- Diretriz: reta d horizontal de equação $y = \frac{-(b^2-4ac)}{4a} - \frac{1}{4a}$
- Esta parábola tem sua concavidade voltada para cima se $a > 0$ ou para baixo se $a < 0$.

O ponto do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ mais próximo da diretriz é aquele de abcissa $x = \frac{-b}{2a}$. Neste ponto, $f(x)$ atinge seu valor mínimo quando $a > 0$ e seu valor máximo quando $a < 0$.

Variação dos coeficientes a, b e c.

Vamos agora fazer um estudo do efeito provocado no gráfico da função quadrática a partir da variação dos coeficientes a, b e c, de sua função polinomial do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Variação do coeficiente a.

$Caso\ I$: $b \neq 0$

Sejam a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $k \in \mathbb{R} - \{-a\}$. Então, ao variar o coeficiente a em k unidades tem-se $g(x) = \alpha x^2 + bx + c$, com $\alpha = a + k$.

As duas funções, $f(x)$ e $g(x)$, intersectam o eixo das ordenadas no mesmo ponto, ou seja, no ponto $(0, c)$.

A função $f(x)$ tem vértice no ponto $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, e a função $g(x)$ possui vértice no ponto $V\alpha = \left(\frac{-b}{2\alpha}, \frac{4\alpha c-b^2}{4\alpha}\right) = \left(\frac{-b}{2a+2k}, \frac{4kc+4ac-b^2}{4a+4k}\right) = (x_{v\alpha}, y_{v\alpha})$

$$\begin{cases} x_{v\alpha} = \dfrac{-b}{2a+2k} \\ y_{v\alpha} = \dfrac{4kc+4ac-b^2}{4a+4k} \end{cases}$$

Observamos que as coordenadas do vértice da função $g(x)$ aparecem em função de k. Isolando o parâmetro k, temos:

$$\begin{cases} k = \dfrac{-b-2ax_{v\alpha}}{2x_{v\alpha}} \end{cases}$$

Substituindo o valor de k na equação $y_{v\alpha} = \frac{4kc+4ac-b^2}{4a+4k}$ vem

$$\begin{cases} y_{v\alpha} = \dfrac{-2b^2 x_{v\alpha}}{-4b} + \dfrac{-4bc}{-4b} = \dfrac{b x_{v\alpha}}{2} + c \end{cases}$$

Observamos que $y_{v\alpha}$ é dado por uma função do 1º grau cujo gráfico é uma reta que intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0, c)$. Ou seja, mesmo ponto onde a função $f(x)$ intersecta o eixo das ordenadas. Então, ao variar o coeficiente a de $f(x)$ em k unidades, o vértice de $f(x)$ desloca-se sobre uma reta, como na figura a seguir.

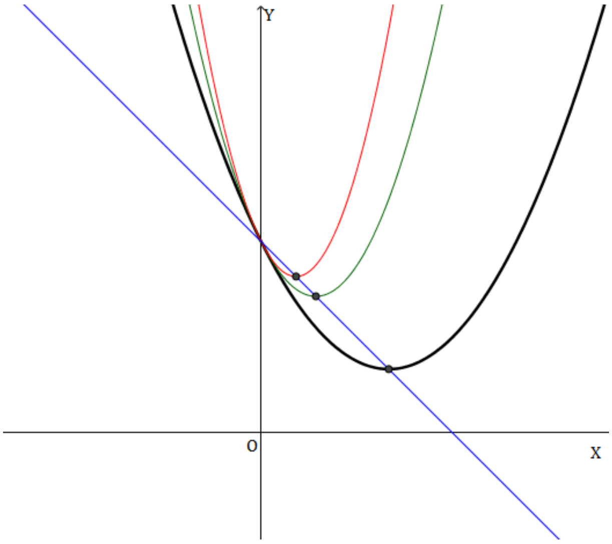

Figura 3.13: Variação do coeficiente ‘a’

Observamos que ao deslocar o vértice de $f(x)$ sobre a reta $y_{v\alpha} = \frac{b x_{v\alpha}}{2} + c$, para que o gráfico continue intersectando o eixo das ordenadas no ponto $(0, c)$, a parábola sofre alterações em sua abertura.

Vimos que $x_{v\alpha} = \frac{-b}{2a+2k}$ ou seja, o valor de $x_{v\alpha}$ é inversamente proporcional ao valor de $|a - k|$. Quanto mais próximo de 0 for o valor de $|a + k|$ maior será o valor de $x_{v\alpha}$, e mais fechada será a parábola de $f(x)$.

Observamos também que $\begin{cases} k < -a \Rightarrow k + a = \alpha < 0 \\ k > -a \Rightarrow k + a = \alpha > 0 \end{cases}$ ou seja, a variação do coeficiente α vai mudar a concavidade da parábola. Logo, para

$$b < 0 \ \Rightarrow \begin{cases} \alpha < 0 \Rightarrow x_{v\alpha} = \dfrac{-b}{2\alpha} < 0 \\ \alpha > 0 \Rightarrow x_{v\alpha} = \dfrac{-b}{2\alpha} > 0 \end{cases}$$

Visto que o gráfico de $f(x)$ intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0, c)$ e que $b < 0, \alpha < 0$ e $x_{v\alpha} < 0$, as parábolas com vértice a esquerda do eixo OY terão concavidade para baixo. De forma análoga, as parábolas a direita do eixo OY terão concavidade para cima.

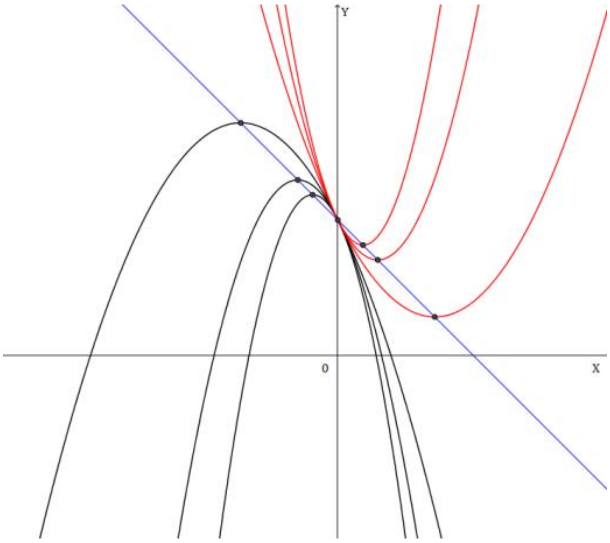

Figura 3.14: Variação do coeficiente 'a'

Para

$$b > 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha < 0 \Rightarrow xv\alpha = \dfrac{-b}{2\alpha} > 0 \\ \alpha > 0 \Rightarrow xv\alpha = \dfrac{-b}{2\alpha} < 0 \end{cases}$$

Visto que o gráfico de $f(x)$ intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0, c)$ e que $b > 0, \alpha < 0$ e $x_{v\alpha} > 0$, as parábolas com vértice a direita do eixo OY terão concavidade para baixo. De forma análoga, as parábolas a esquerda do eixo OY terão concavidade para cima.

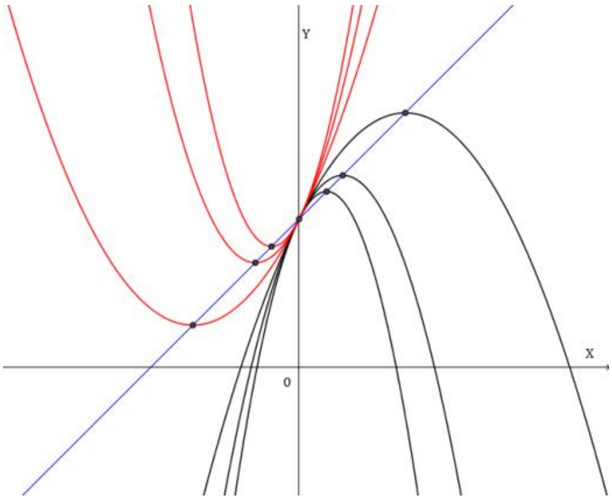

Figura 3.15: Variação do coeficiente 'a'

Logo, ao se atribuir valores para k, tem-se várias parábolas $g(x) = (a + k)x^2 + bx + c$ que intersectam o eixo das ordenadas em $(0, c)$, com vértices sobre a reta $y_{v\alpha} = \frac{bx_{v\alpha}}{2} + c$ com concavidades que mudam de sentido.

$Caso\ II: b = 0$

Para o caso em que $b = 0$, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem seu gráfico intersectando o eixo das ordenadas, OY, no ponto $(0, c)$ que coincide com o vértice $V = (0, c)$. E a função $g(x) = \alpha x^2 + c = (a + k)x^2 + c$ também possui vértice em $(0, c)$, assim as parábolas terão vértices no mesmo ponto e se diferenciarão apenas pela abertura.

Considerando a reta $y_{v\alpha} = \frac{bx_{v\alpha}}{2} + c$ com $b = 0$, tem-se $y_{v\alpha} = c$. Ou seja, todas as parábolas terão vértices no mesmo ponto, pois $x_{v\alpha} = \frac{-b}{2\alpha} = 0$.

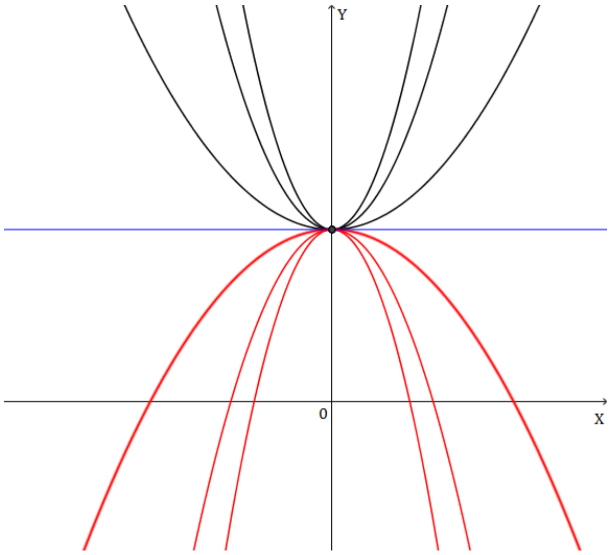

Figura 3.16: Variação do coeficiente ‘a’

Portanto, ao se variar os valores de $\alpha = a + k$ se obtém parábolas com vértice no ponto $(0, c)$, com concavidades para cima e para baixo, dependendo do valor de α, e com aberturas inversamente proporcionais a $|a + k|$.

b) Variação do coeficiente b

Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $k \in \mathbb{R}$. Ao variar o valor de k tem-se a função $h(x) = ax^2 + \beta x + c = ax^2 + (b + k)x + c$, com $\beta = (b + k)$. Ambas as funções, $f(x)$ e $h(x)$, intersectam o eixo das ordenadas, OY, no mesmo ponto $(0, c)$. A função $f(x)$ tem vértice no ponto $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, e a função $h(x)$ possui vértice no ponto $V_\beta = \left(\frac{-\beta}{2a}, \frac{4ac-\beta^2}{4a}\right) = \left(\frac{-b}{2a} - \frac{k}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a} - \frac{k^2+2bk}{4a}\right) = (x_{v\beta}, y_{v\beta})$.

$$\begin{cases} x_{v\beta} = \dfrac{-b}{2a} - \dfrac{k}{2a} \\ y_{v\beta} = \dfrac{4ac - b^2}{4a} - \dfrac{k^2 + 2bk}{4a} \end{cases}$$

Novamente as coordenadas dos vértices de $h(x)$ aparecem em função de k. Isolando k na primeira equação:

$$\{k = -b - 2ax_{v\beta}$$

Daí, substituindo o valor de k na equação $y_{v\beta} = \frac{4ac-b^2}{4a} - \frac{k^2+2bk}{4a}$ vem

$$\{y_{v\beta} = -a(x_{v\beta})^2 + c$$

Logo, $y_{v\beta}$ é uma função quadrática com parábola congruente a de $f(x)$, no entanto com concavidade no sentido oposto. E o vértice de $y_{v\beta}$ é o ponto $(0, c)$ e é o ponto de intersecção com o eixo OY.

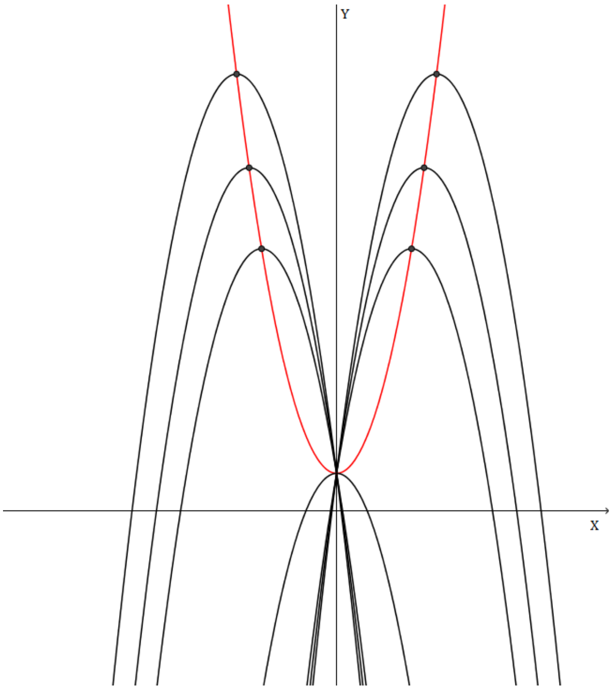

Figura 3.17: Variação do coeficiente ‘b’

Assim, ao se variar o coeficiente b de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ as parábolas geradas se movem segundo uma parábola congruente, porém, de sentido oposto. E o lugar geométrico dos vértices das parábolas é a função $y_{v\beta} = -a(x_{v\beta})^2 + c$.

c) Variando o coeficiente c

Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $k \in \mathbb{R}$. Ao variar o valor de k tem-se a função $p(x) = ax^2 + bx + \gamma = ax^2 + bx + c + k$, com $\gamma = (c + k)$. A função

$f(x)$ intersecta o eixo das ordenadas, OY, no ponto $(0, c)$ e a função $p(x)$ intersecta o eixo em $(0, c + k)$. A função $f(x)$ tem vértice no ponto $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, e a função $p(x)$ possui vértice no ponto $V_Y = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a} + k\right)$. Desse modo, o gráfico de $p(x)$ é obtido a partir do gráfico de $f(x)$ por um deslocamento vertical de $|k|$ unidades.

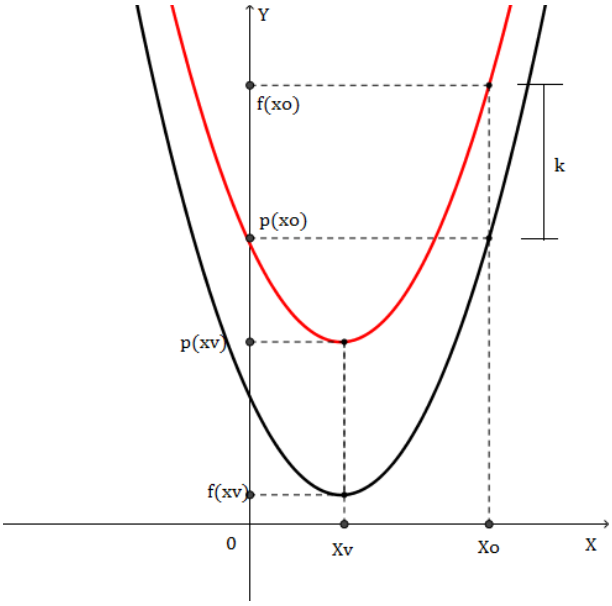

Figura 3.18: Variação do coeficiente ‘c’

O gráfico de $f(x)$ sofre um deslocamento vertical de k unidades para cima se $k > 0$, e um deslocamento vertical de k unidades para baixo se $k < 0$.

3.7 POLINOMIAL

Chamamos $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de função polinomial quando existem números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$p(x) = a_n x^n + n_{a-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (*)$$

Quando $a_n \neq 0$, dizemos que p tem grau n. O grau de uma função polinomial será o valor do maior expoente de x.

Dizemos que α é uma raiz de p se $p(\alpha) = 0$.

Uma função polinomial chama-se identicamente nula quando $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Polinômio a partir de seus valores

Dados $n + 1$ números reais distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e fixados os valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$, existe um, e somente um, polinômio p, de grau $\leq n$, tal que

$$p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1, \ldots, p(x_n) = y_n$$

Portanto, é possível determinar a função polinomial a partir dos valores assumidos por ele nos $n + 1$ números reais dados. Isso vai ser de grande importância para o desenvolvimento da expressão do polinômio e do gráfico da função polinomial.

As funções polinomiais tem seus gráficos associados ao grau do polinômio. Se n é par então, para $|x|$ suficientemente grande, $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n. Se, entretanto, n for ímpar, $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n se x for positivo e grande e sinal oposto ao de a_n para valores negativos grandes de x (LIMA at al., 2006a, pag. 165).

Exemplos de funções polinomiais de grau 1 e 2 aparecem em 3.1 e 3.6, respectivamente. Vejamos alguns esboços de gráficos na figura abaixo.

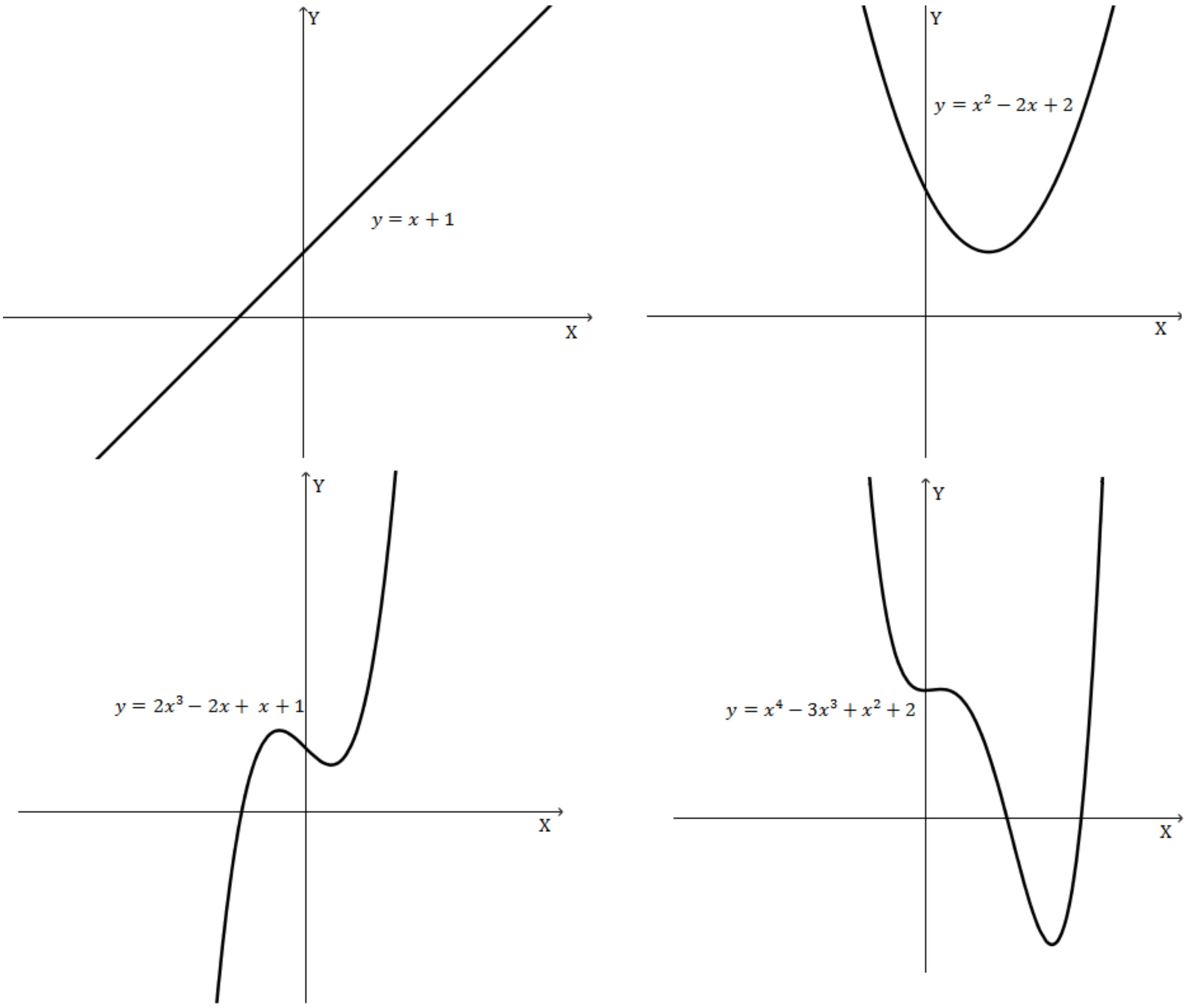

Figura 3.19: Curvas Polinomiais

É possível encontrar a expressão do polinômio, ou sua função, conhecidos os valores na qual o polinômio assume. Em outras palavras, dados $n+1$ pontos no plano é sempre possível determinar um polinômio de grau n que passa por estes pontos, a partir da fórmula de interpolação de Lagrange[3]. Como exemplo, sejam dados os pontos $A(1,-2)$, $B(-3,6)$, $C(2,1)$, $D(4,2)$ e $E(-1,-1)$. Podemos obter as seguintes funções polinomiais:

Função polinomial $y=-2x$, de grau 1, passando por A e B.

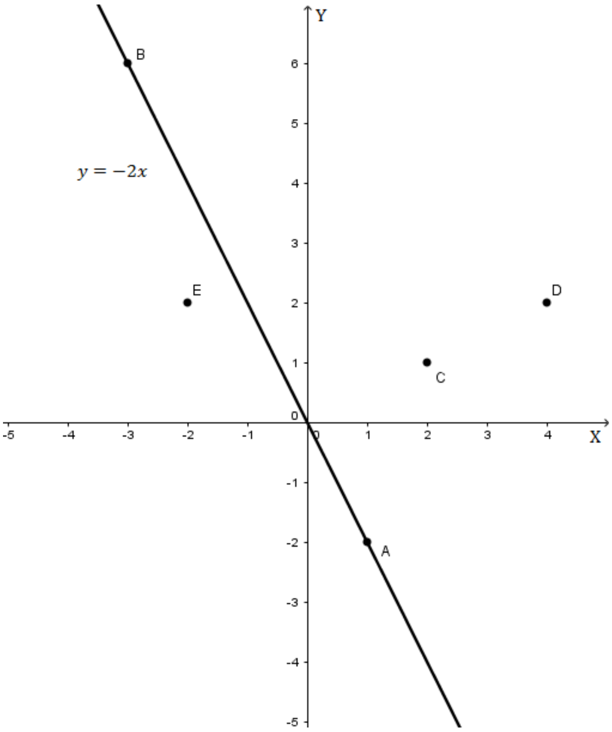

Figura 3.20: Curva polinomial de grau 1

Função polinomial $y=x^2-3$, de grau 2, passando por A,B e C.

---

[3] Joseph Louis Lagrange (Turim, 25 de janeiro de 1736 – Paris, 10 de abril de 1813) foi um matemático italiano.

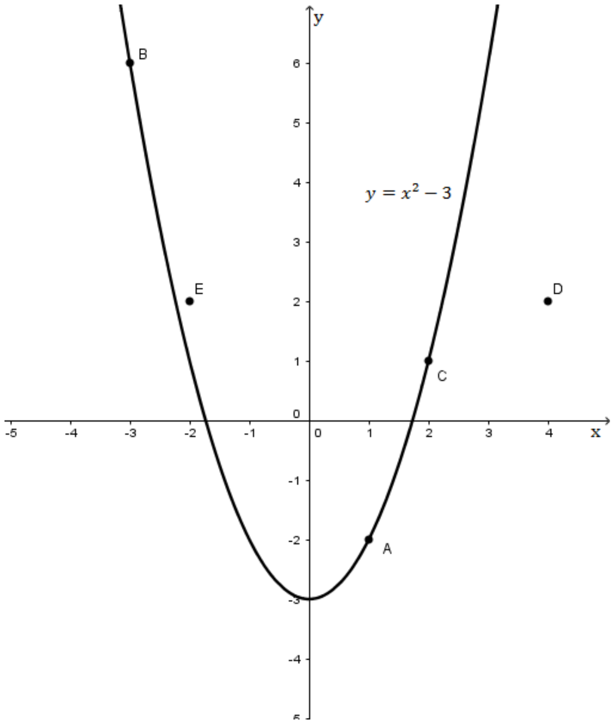

Figura 3.21: Curva polinomial de grau 2

Função polinomial $y = -0{,}26x^3 + x^2 + 1{,}83x - 4{,}57$, de grau 3, passando por A,B,C e D.

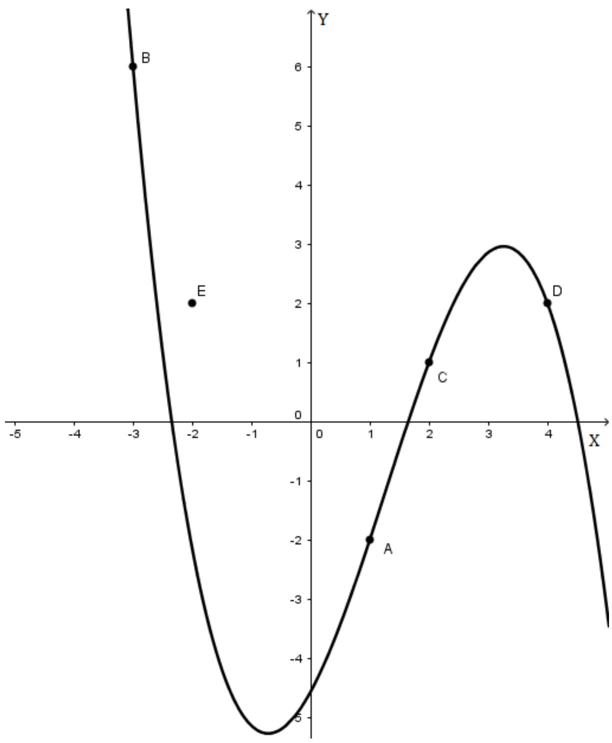

Figura 3.22: Curva polinomial de grau 3

Função polinomial $y = -0{,}1x^4 + 0{,}15x^3 + 1{,}72x^2 - 1{,}65x - 2{,}11$, de grau 4, passando por A, B, C, D e E.

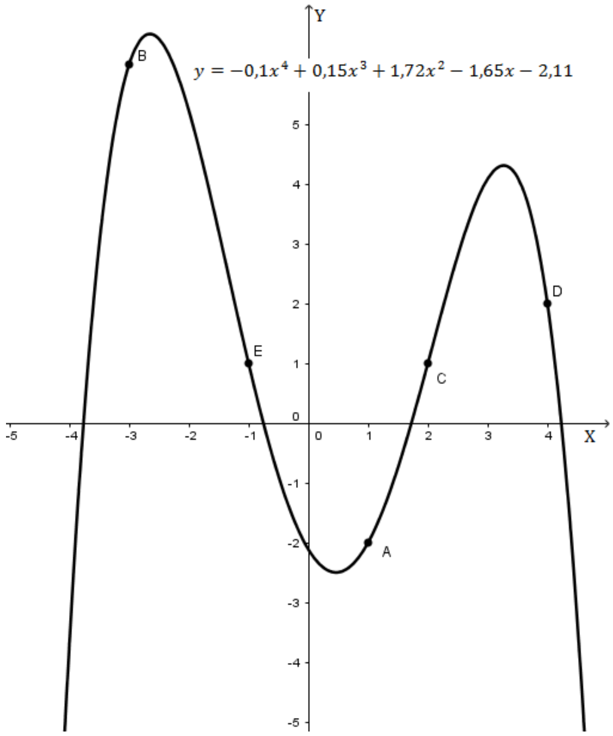

Figura 3.23: Curva polinomial de grau 4

3.8 CIRCUNFERÊNCIA

Uma circunferência é um conjunto formado por pontos que distam de um mesmo ponto dado, chamado centro da circunferência. No sistema de eixos ortogonais, seja $A = (a, b)$ o centro da circunferência de raio $r > 0$. A circunferência de centro A e raio r é o conjunto de pontos $P = (x, y)$ tais que $d(A, P) = r$ (distância de A a P é igual a r). Assim, P pertencerá à circunferência se, e somente se,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

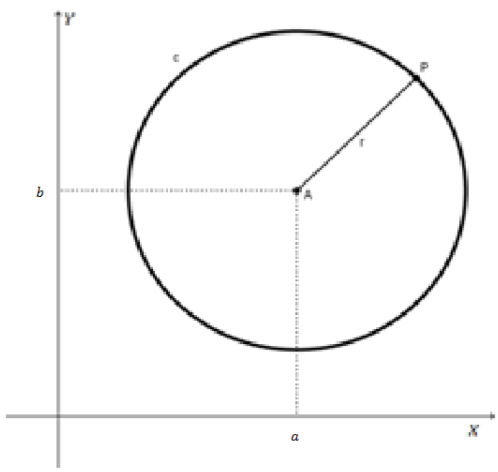

Figura 3.24: Círculo com centro (a,b) e raio r

3.9 ELIPSE

Dados dois pontos fixos do plano, F_1 e F_2, com $|F_1F_2| = 2c$, chamamos de Elipse[4] o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ cuja soma das distâncias aos pontos F_1 e F_2 é uma constante $2a > 2c$. Analisaremos os casos em que F_1 e F_2 tem a mesma ordenada ou mesma abscissa.

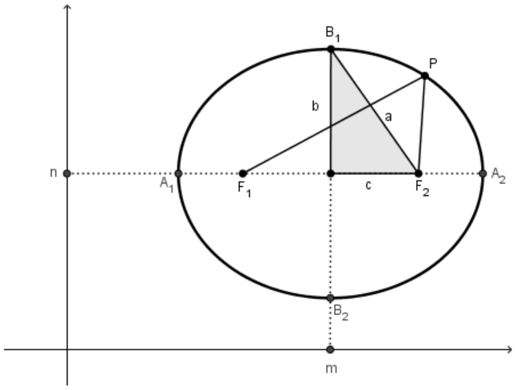

Figura 3.25: Elipse com centro (m,n)

Elementos da Elipse

- F_1 e F_2 são os focos
- A_1, A_2, B_1 e B_2 são os vértices
- $|A_1A_2| = 2a$ é o eixo maior
- $|B_1B_2| = 2b$ é o eixo menor
- $|F_1F_2| = 2c$ é a distância focal
- $C = (m, n)$ é o centro da Elipse
- $a^2 = b^2 + c^2$

Excentricidade $e = \frac{c}{a}$. A excentricidade mede o "achatamento" da elipse, quanto mais próximo de 1 estiver a excentricidade mais achatada é a elipse e, quanto mais próximo de zero estiver mais "arredondado" será.

Pela definição de Elipse temos: $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, e o desenvolvimento da equação resulta na equação reduzida da elipse, que é dada por

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

---

[4] LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e cálculo vetorial**. 2ª ed. Coleção Matemática Universitária. IMPA, 2008.

(eixo maior horizontal)

$$\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1$$

(eixo maior vertical)

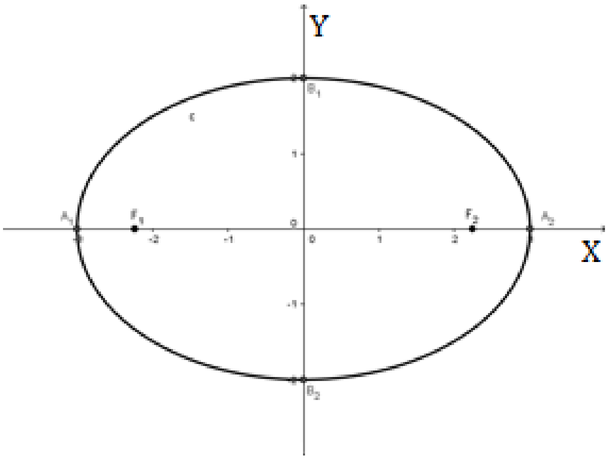

Figura 3.26: Elipse eixo maior horizontal

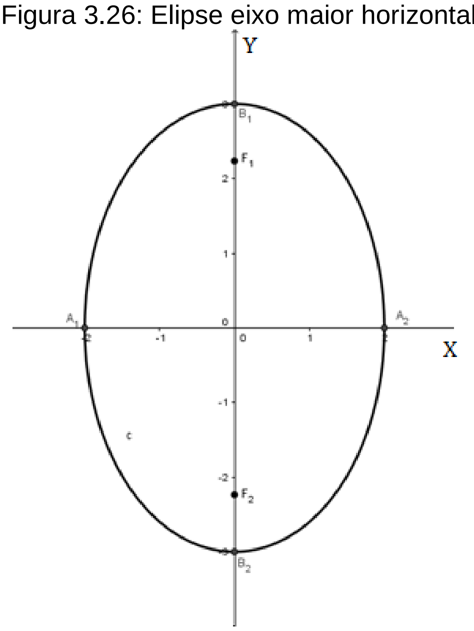

Figura 3.27: Elipse eixo maior vertical

3.10 HIPÉRBOLE

Como explica (LIMA, 2008), dados dois pontos fixos F_1 e F_2 do plano tais que $|F_1F_2|=2c$, chama-se Hipérbole o lugar geométrico dos pontos $P=(x,y)$ do plano, cuja diferença, em módulo, das distâncias a F_1 e F_2 é uma constante $2a<2c$. Analisaremos os casos em que F_1 e F_2 tem a mesma ordenada ou mesma abscissa.

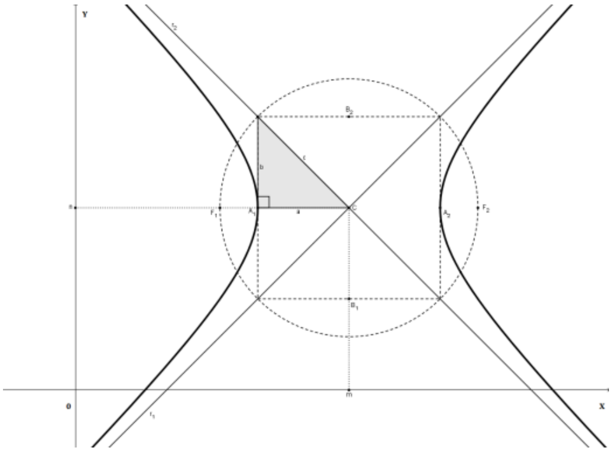

Figura 3.28: Elementos da Hipérbole

Elementos da hipérbole

- F_1 e F_2 são os focos
- $|F_1F_2| = 2c$ é a distância focal
- A_1 e A_2 são os vértices
- $|A_1A_2| = 2a$ é o eixo real ou eixo transverso
- $|B_1B_2|$ é o eixo imaginário ou eixo conjugado
- $C = (m, n)$ é o centro
- r_1 e r_2 são as retas assíntotas e suas equações são $y - n = \pm\frac{b}{a}(x - m)$
- Temos a seguinte relação: $c^2 = a^2 + b^2$

Excentricidade $e = \frac{c}{a}$. Como $2c < 2a$ então $c < a$ e a excentricidade $e > 1$. Quanto mais próximo de 1 estiver a excentricidade mais fechados são os ramos da hipérbole e quanto mais se afasta de 1 a excentricidade mais abertos são os ramos.

Seja $P = (x, y)$ um ponto da hipérbole. Pela definição de hipérbole dada, temos: $|PF_1| - |PF_2| = 2a$, e o desenvolvimento da equação resulta na equação reduzida da hipérbole, que é dada por

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{-b^2} = 1$$

(eixo real horizontal)

$$\frac{(x-m)^2}{-b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$$

(eixo real vertical)

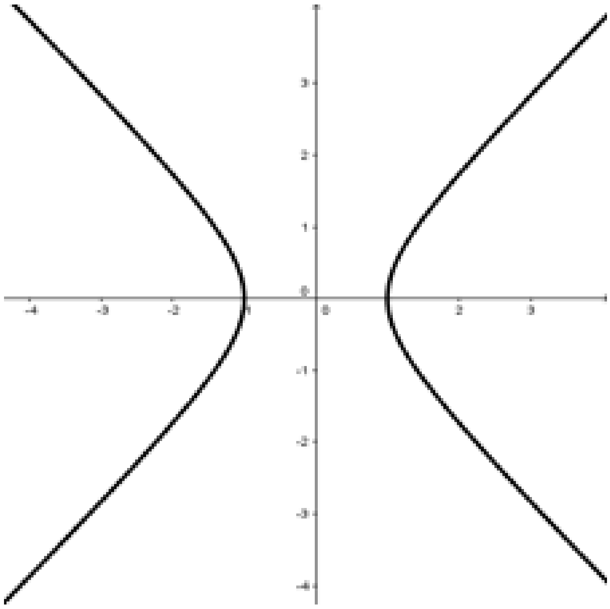

Figura 3.29: Hipérbole eixo real horizontal

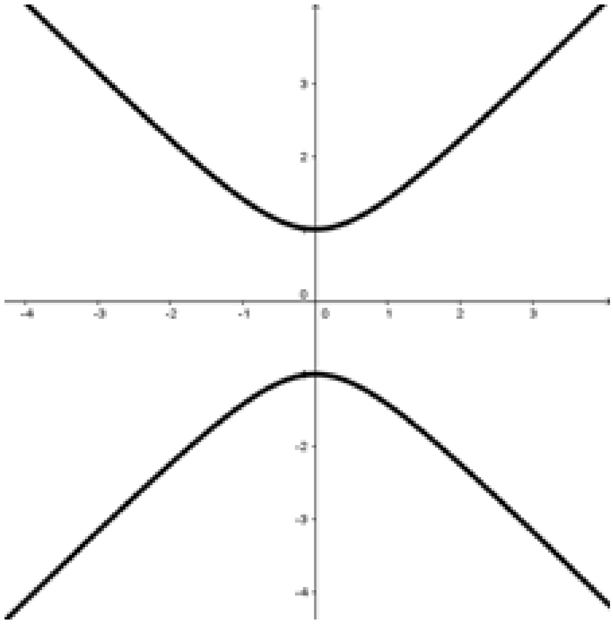

Figura 3.30: Hipérbole eixo real vertical

3.11 BRUXA DE AGNESI

A curva de Agnesi, também conhecida como Bruxa de Agnesi, é uma curva plana que foi estudada por Maria Gaetana Agnesi[5] em seu livro Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana. A definição da curva, bem como suas equações

[5] Maria Gaetana Agnesi foi uma linguista, filósofa e matemática italiana.

paramétricas e cartesiana, são apresentadas por FRENSEL, K; DELGADO, J. [6] (acesso em 12/07/2017), e reproduzidas aqui.

Seja C um círculo de raio r com centro em $(0, r)$ e tangente as retas $r_1: y = 0$ e $r_2: y = 2r$. Sejam $O = (0{,}0)$ e $A = (0{,}2r)$ os pontos de tangência de C com as retas r_1 e r_2, respectivamente. Do ponto O seja traçada uma semirreta em direção a reta r_2, e sejam B e D os pontos de interseção da semi-reta com o círculo C e a reta r_2, respectivamente. Seja traçado o seguimento DE perpendicular a r_1. Seja r a reta paralela a r_1 que passa por B, figura 3.31.

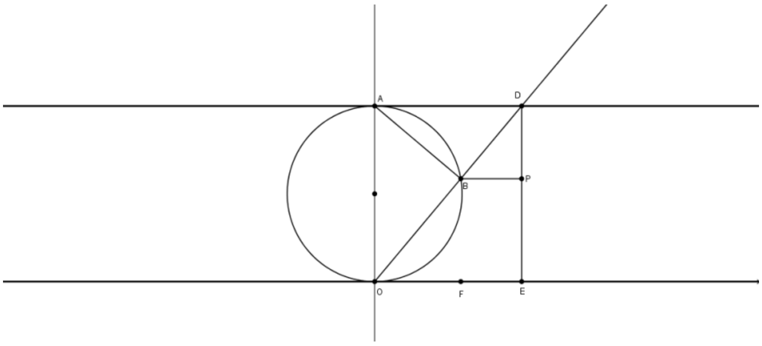

Figura 3.31: Definição da curva de Agnesi

Seja P o ponto de interseção de r com o segmento DE. O lugar geométrico obtido pelo ponto P quando são traçadas todas as retas que partem de O e intersectam o círculo C, é a curva conhecida por Bruxa de Agnesi.

a) Equação Paramétrica: A fim de encontrarmos a equação paramétrica da bruxa de Agnesi, basta encontrarmos as coordenadas do ponto $P = (x, y)$. Para isso, seja t a medida do ângulo $\widehat{EOD}$, então: $x = |OE| = |OD| cos\, t$ e $y = |BF| = |OB| sen\, t$, onde F é a projeção de B sobre o eixo OX. Observamos que os triângulos OAB (inscrito no semi-círculo) e ODE são retângulos. No triângulo OAB o ângulo $\widehat{OBA}$ é reto e $\widehat{OAB}$ mede t, então, $|OB| = |OA| sen\, t$. No triângulo ODE, vemos que $|DE| = 2r$. Logo, $|OD| sen\, t = |DE| = 2r$. Ou seja, $|OD| = \frac{2r}{sen\, t}$. E daí, teremos:

$$x = |OE| = |OD| cos\, t = \frac{2r}{sen\, t} cos\, t = 2r cotg\, t$$

$$y = |BF| = |OB| sen\, t = |OA| sen^2 t = 2r sen^2 t$$

Ou seja, as equações paramétricas da bruxa de Agnesi são:

$$\begin{cases} x = 2r cotg\, t \\ y = 2r sen^2 t \end{cases} \quad t \in (0, \pi)$$

[6] FRENSEL, K; DELGADO, J. **Parametrização de algumas curvas planas**. Acesso em: 12/07/2017.

b) Equação cartesiana: Para encontrarmos a equação cartesiana da bruxa de Agnesi, devemos relacionar x e y. Para isso, usaremos as equações paramétricas, donde:

$$x = 2rcotg\ t = 2r\frac{cos\ t}{sen\ t}$$

então $x^2 = 4r^2\frac{cos^2 t}{sen^2 t}$ e somando-se $4r^2$ teremos

$$x^2 + 4r^2 = 4r^2\frac{cos^2 t}{sen^2 t} + 4r^2 = 4r^2\left(\frac{cos^2 t}{sen^2 t} + 1\right) = \frac{4r^2}{sen^2 t}$$

Mas sabemos que $y = 2rsen^2 t$, portanto $sen^2 t = \frac{y}{2.r}$, desta forma

$x^2 + 4r^2 = \frac{4.r^2}{\frac{y}{2.r}}$ ou seja, $y = \frac{8.r^3}{x^2+4.r^2}$ é a equação cartesiana da bruxa de Agnesi.

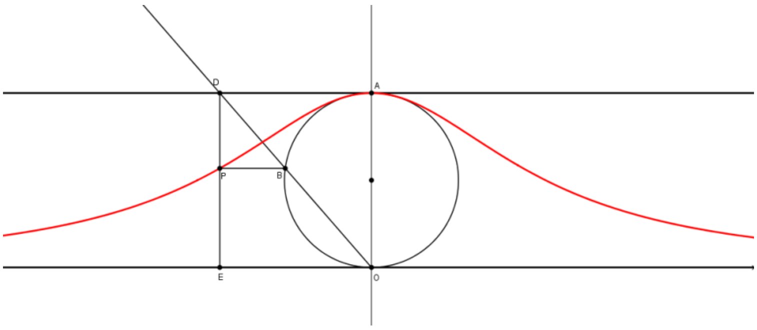

Figura 3.32: Bruxa de Agnesi

3.12 CICLOIDE

Seja C um círculo de raio r tangente ao eixo OX e P um ponto de C. Denomina-se Cicloide a curva descrita pelo ponto P quando C rola sobre o eixo OX, sem deslizar. A fim de encontrarmos a equação paramétrica da Cicloide, vamos supor o círculo C com centro em $(0, r)$ e P, inicialmente, na origem do sistema de coordenadas. Vamos supor, ainda, o círculo C em dois momentos, o inicial com centro na origem e, num segundo momento, após ter rolado sobre o eixo OX por algum instante, figura 3.33.

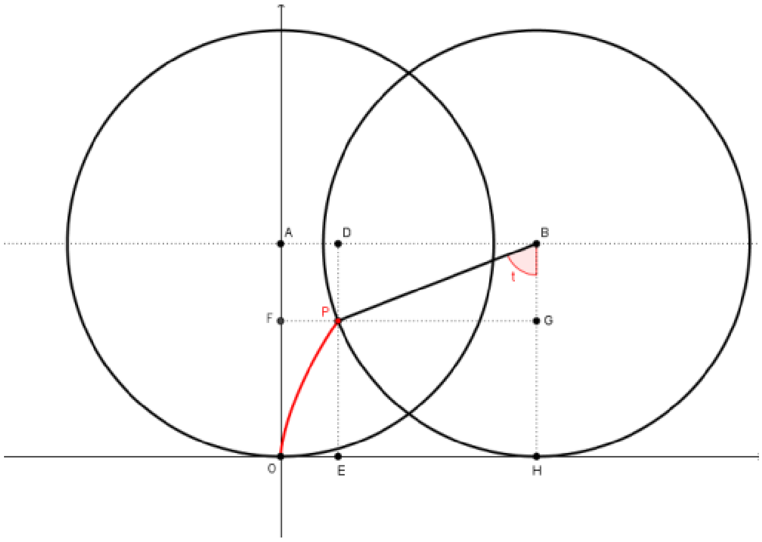

Figura 3.33: Círculo rolando

Da figura temos os seguintes elementos:

- $P = (x, y)$ ponto da Cicloide;
- A e B os centros do círculo C nos dois momentos considerados;
- H o ponto onde o círculo C, no segundo momento, toca o eixo OX;
- $E = (x, 0)$ e $F = (0, y)$ são as projeções ortogonais de P sobre os eixos OX e OY, respectivamente;
- D e G são as projeções ortogonais de P sobre AB e BH, respectivamente.

Observamos que o segmento OH tem a mesma medida do arco HP. Como t é a medida do ângulo $\widehat{HBP}$ então o arco $HP = r.t$. Logo, $OH = r.t$.

Daí, temos:

$$x = OE = OH - EH = r.t - r.sen\, t$$

$$y = OF = OA - FA = r - r.cos\, t$$

Ou seja, as equações paramétricas da Cicloide são:

$$\begin{cases} x = r.t - r.sen\, t \\ y = r - r.cos\, t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Na figura abaixo podemos observar o desenvolvimento da curva Cicloide. Para $t = 0$ o ponto P encontra-se na posição inicial. Para $t = \pi$ o ponto P alcança a altura máxima de $2r$. Para $t = 2\pi$ o ponto P volta a tocar o eixo OX.

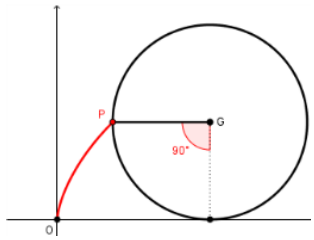

Figura 3.34: Cicloide para t = π/2

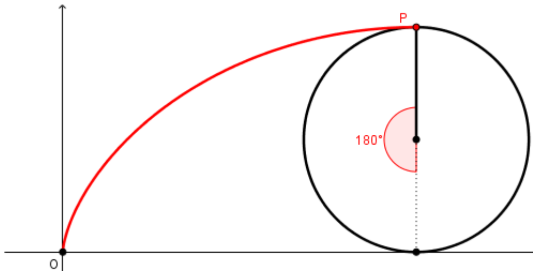

Figura 3.35: Cicloide para t = π

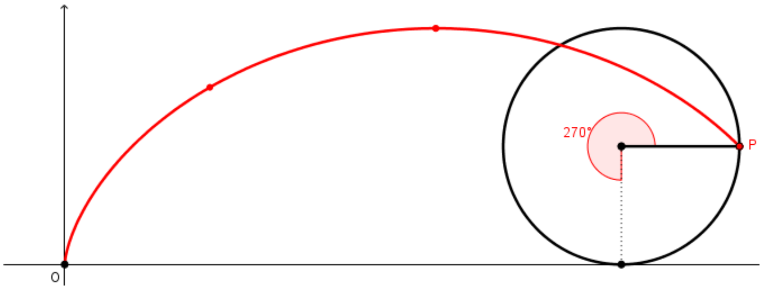

Figura 3.36: Cicloide para t = 3π/2

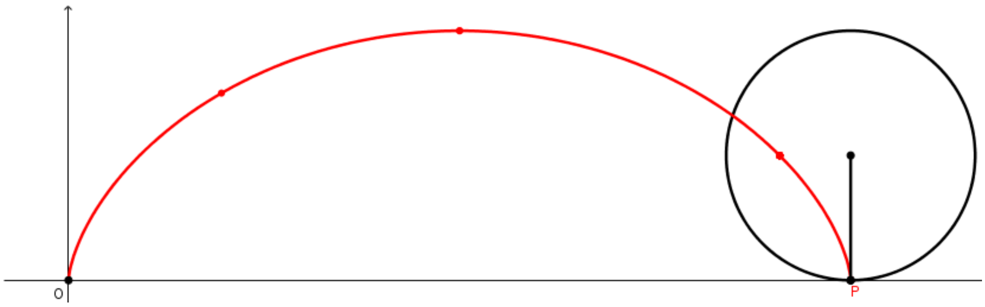

Figura 3.37: Cicloide para t = 2π

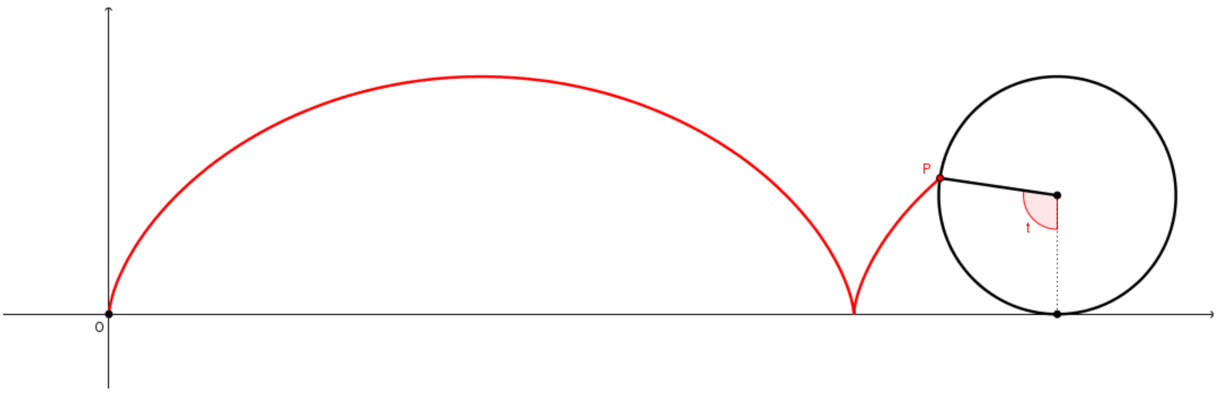

Figura 3.38: Cicloide

3.13 EPICICLOIDE

Segundo FRENSEL, K; DELGADO, J. (acesso 12/07/2017), consideremos dois círculos C_1 e C_2 com raios R e r, respectivamente, tais que:

- C_1 e C_2 se tocam em apenas um ponto P
- Os pontos de C_2, diferentes de P, estão no exterior de C_1

Denominamos Epicicloide o lugar geométrico descrito pelo ponto P quando C_2 rola sobre C_1, sem deslizar.

A fim de determinarmos as equações paramétricas da Epicicloide, vamos supor que o círculo C_1 tem centro O_1 na origem do sistema de coordenadas, C_2 tem centro O_2 em $(R+r, 0)$ e que a posição inicial de P seja $(R, 0)$.

Sendo α o ângulo formado entre o eixo OX e a reta O_1O_2, é possível mostrar que as equações paramétricas da Epicicloides são dadas por:

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos\alpha - r.\cos\left(\dfrac{R+r}{r}\alpha\right) \\ y = (R+r)\operatorname{sen}\alpha - r.\operatorname{sen}\left(\dfrac{R+r}{r}\alpha\right) \end{cases}$$

Quando $R = r$ a Epiciclóide recebe o nome de Cardióide. Vejamos nas figuras abaixo alguns exemplos de Epiciclóides.

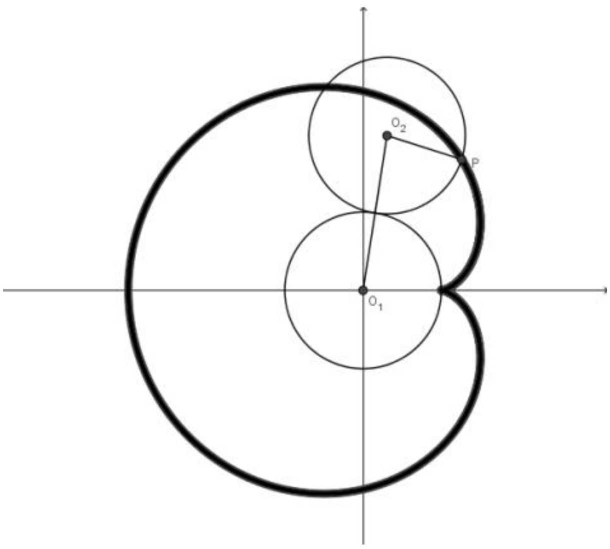

Figura 3.39: Cardioide

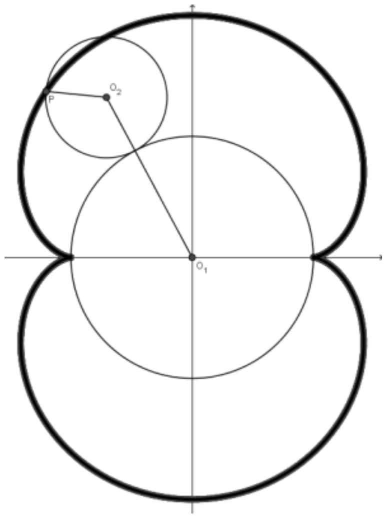

Figura 3.40: Epicicloide R=2r

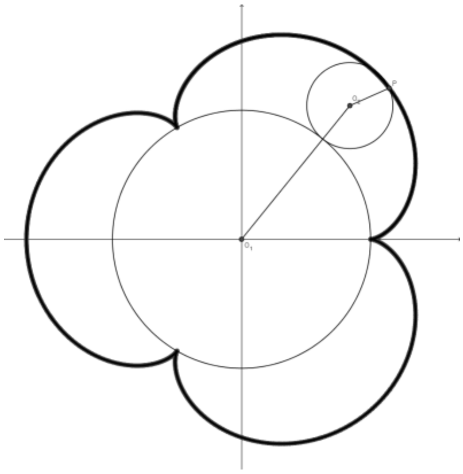

Figura 3.41: Epicicloide R=3r

3.14 HIPOCICLOIDE

Como nos falam FRENSEL, K; DELGADO, J. (acesso em 12/07/2017), dados dois círculos C_1 e C_2 de raios R e r, respectivamente, tais que:

- $R > r$
- C_1 e C_2 se tocam apenas no ponto P
- Os pontos de C_2 diferentes de P estão no interior de C_1

Chama-se Hipocicloide o lugar geométrico descrito pelo ponto P quando C_2 rola sobre C_1, sem deslizar.

A fim de determinarmos as equações paramétricas da Hipocicloide, vamos supor que o centro O_1 de C_1 seja a origem do sistema de coordenadas, o centro O_2 de C_2 seja $(R-r, 0)$ e P com posição inicial em $(R, 0)$.

Sendo α o ângulo formado entre o eixo OX e a reta O_1O_2, é possível mostrar que as equações paramétricas da Hipociclóides são dadas por:

$$\begin{cases} \mathrm{x} = (\mathrm{R}-\mathrm{r})\cos\alpha + \mathrm{r}.\cos\left(\dfrac{R-r}{r}\alpha\right) \\ \mathrm{y} = (\mathrm{R}-\mathrm{r})\mathrm{sen}\,\alpha - \mathrm{r}.\mathrm{sen}\left(\dfrac{R-r}{r}\alpha\right) \end{cases}$$

Hipocicloide degenerada é o segmento que liga os pontos $(R;\ 0)$ e $(-R;\ 0)$ e é obtida quando $R = 2r$.

Astroide é a Hipocicloide obtida quando $R = 4r$.

Vejamos nas figuras abaixo alguns exemplos de Hipocicloides.

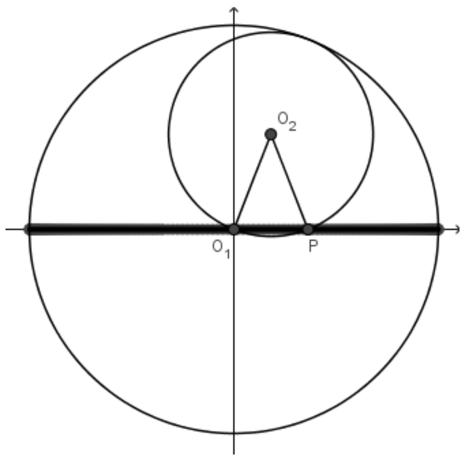

Figura 3.42: Hipocicloide degenerada

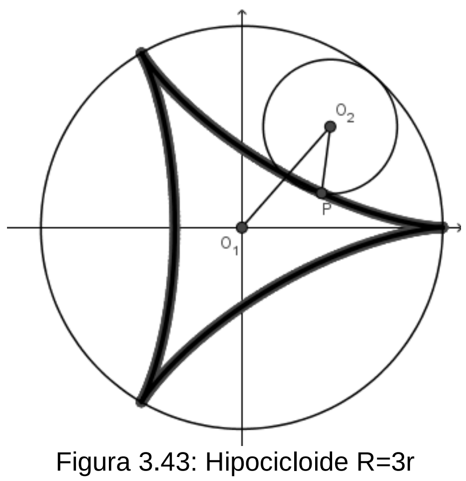

Figura 3.43: Hipocicloide R=3r

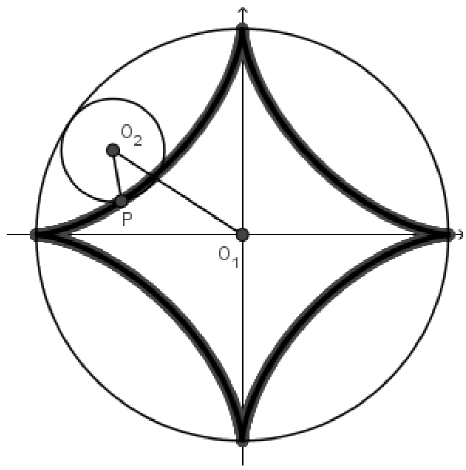

Figura 3.44: Astroide

3.15 LEMNISCATA DE BERNOULLI

Como mostra ALENCAR, H; SANTOS, W. (acesso em 12/07/2017)[7], a Lemniscata de Bernoulli é uma curva plana do quarto grau, descrita por Jakob Bernoulli[8] em 1694 como uma modificação da elipse.

A Lemniscata de Bernoulli é a curva dada pela equação paramétrica

$$L: \begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^4} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4} \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

ou pela equação cartesiana

$$(x^2+y^2)^2 = xy$$

A fim de se construir e analisar a curva, vamos, inicialmente, encontrar onde a curva toca a reta $r: y = x$. Para isso devemos ter:

$x(t) = y(t) \Leftrightarrow \frac{1}{1+t^4} = \frac{t^3}{1+t^4} \Leftrightarrow t^3 - t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = 1$ ou $t = -1$.

Logo, $L \cap r = \{(0,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\}$

Além disso

a) Para $t \in (-\infty, -1) \cup (0,1), x(t) > y(t), pois\ t > t^3$ e $\lim_{n\to-\infty}\big(x(t), y(t)\big) = \lim_{n\to-\infty}\left(\frac{1}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4}\right) = (0,0)$

[7] ALENCAR, H; SANTOS, W. **Geometria diferencial das curvas planas**, 2002. Acesso em: 12/07/2017.

[8] Jakob Bernoulli matemático suíço.

b) para $t \in (-1,0) \cup (1,\infty), x(t) < y(t), pois\ t < t^3$ e $\lim_{n\to\infty}\big(x(t), y(t)\big) = \lim_{n\to-\infty}\left(\frac{1}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4}\right) = (0,0)$

Com as informações acima podemos fazer um esboço da curva:

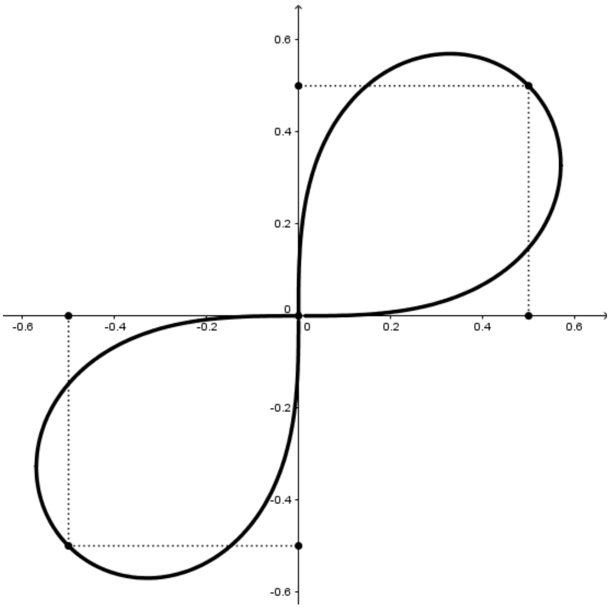

Figura 3.45: Lemniscata de Bernoulli

Como $y = \frac{t^3}{1+t^4} = t^2\frac{t}{1+t^4} = t^2x$, então, $t^2 = \frac{y}{x}$, isso mostra que y tem o mesmo sinal que x ao longo da curva.

3.16 O FOLIUM DE DESCARTES

O Folium de Descartes[9], como mostra FRENSEL, K; DELGADO, J. (acesso em 12/07/2017), é uma curva de equação cartesiana $C: x^3 + y^3 = 3axy$, onde $a > 0$. A fim de encontrarmos a equação paramétrica da curva, seja $t = \frac{y}{x}$, uma parametrização. Daí,

- se $(x, y) \in C$, então $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$
- se $t = -1$, ou seja, $y = -x$ e $(x, y) \in C$, então $x^3 + (-x)^3 = 3ax(-x) \Rightarrow 0 = -3ax^2 \Rightarrow x = 0\ e\ y = 0$.

Substituindo $y = tx$ na equação $x^3 + y^3 = 3axy$ e supondo $(x, y) \neq (0,0)$, obtemos $(1 + t^3)x^3 = 3atx^2$. Portanto, para $t \neq -1$, temos

[9] René Descartes foi filósofo, físico e matemático francês.

$$C: \begin{cases} x(t) = \frac{3at}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

é uma parametrização do Folium de Descartes.

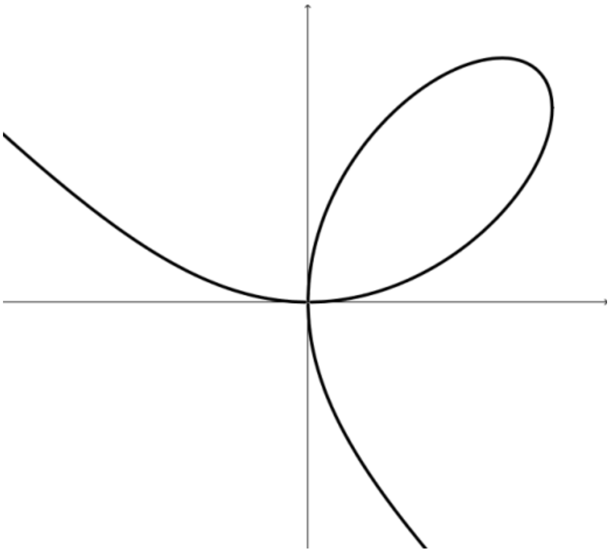

Figura 3.46: Folium de Descartes

3.17 HIPERBÓLICAS

Como nos fala James Stewart:

> Certas combinações das funções exponenciais e^x e e^{-x} surgem frequentemente em matemática e suas aplicações, por isso merecem nomes especiais. Elas são análogas de muitas formas às funções trigonométricas, e têm a mesma relação com a hipérbole que as funções trigonométricas têm com o círculo. Por essa razão, são chamadas de funções hiperbólicas, particularmente seno hiperbólico, cosseno hiperbólico e assim por diante. (JAMES STEWART, 2006, pag246)

Neste capítulo trataremos das funções seno e cosseno hiperbólico.

Definição:

$$senh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$cosh\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Uma forma de se esboçar o gráfico das funções hiperbólicas é usar os gráficos das funções $f(x) = \frac{e^x}{2}$ e $g(x) = \frac{e^{-x}}{2}$.

Daí,

$$senh\, x = f(x) - g(x)$$

$$cosh\, x = f(x) + g(x).$$

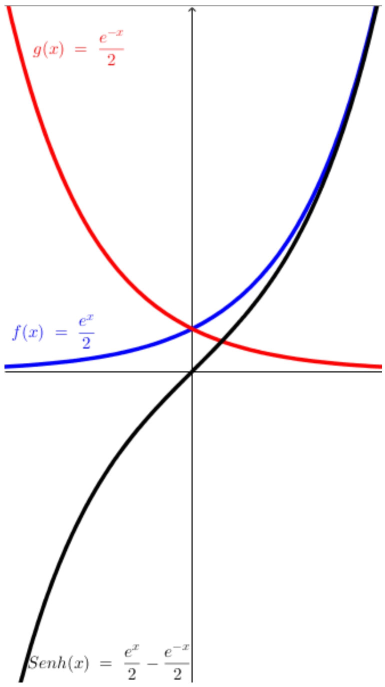

Figura 3.47: Seno Hiperbólico

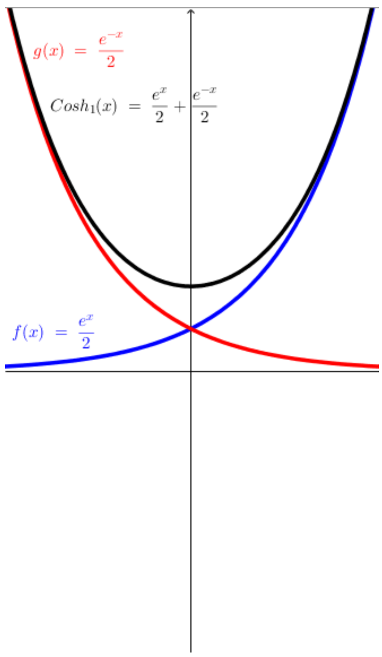

Figura 3.48: Cosseno Hiperbólico

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a\,\frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2} + c = acosh(x/a) + c$ é conhecida como Catenária[10]. Essa é a forma assumida por uma corrente de peso

[10] Curva plana que representa a forma de equilíbrio de um fio homogêneo, flexível, suspenso por suas extremidades a partir de dois pontos fixos, e submetido exclusivamente à força da gravidade.

uniforme é pendurada por dois pontos de mesma altura deixada sob a ação da força gravitacional, como fala:

> Galileu (1564-1642) achava que era uma parábola. Jungius, em 1669, argumenta que Galileu estava errado. Mas só em 1691 é que Leibniz, Huyghens e Johann Bernoulli dão sua equação, respondendo a um desafio colocado por Jacob Bernoulli. Leibniz a chama de catenária (do latim *catena* que significa corrente), (Sônia Pinto de Carvalho, acesso em 12/07/2017)[11].

3.18 ESPIRAL DE ARQUIMEDES

A Espiral de Arquimedes é uma curva plana que tem esse nome devido ao matemático grego Arquimedes de Siracusa, que viveu no século III antes de Cristo. A curva é definida como sendo o lugar geométrico de um ponto se movendo com velocidade constante sobre uma reta que gira sobre um ponto fixo com velocidade angular constante.

A espiral de Arquimedes tem equação cartesiana dada por

$$xtg\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)=y$$

com $a>0$, (ALENCAR, H; SANTOS, W., acesso em 12/07/2017).

Pela definição da curva é fácil perceber que sua equação paramétrica é dada por

$$x(t)=t.cos\,t \qquad\qquad y(t)=t.sen\,t$$

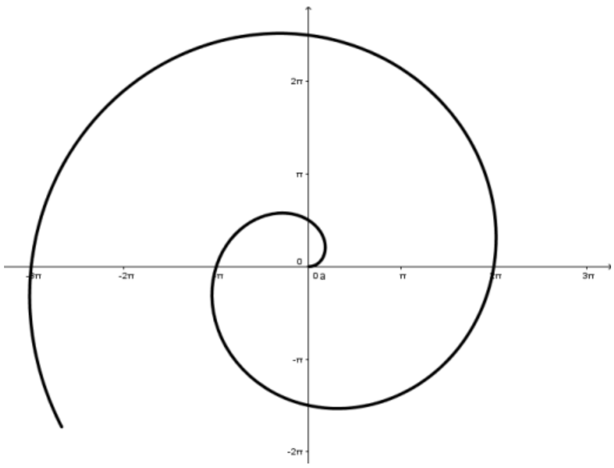

Figura 3.49: Espiral de Arquimedes

---

[11] CARVALHO, S.P. **As Funções Hiperbólicas**, 2005.

3.19 CATENÁRIA A PARTIR DA PARÁBOLA

A fim de estudarmos o lugar geométrico do foco da parábola quando a mesma rola, sem deslizar, sobre o eixo OX, faço aqui uma leitura e tradução do artigo The Locus of the Focus of a Rolling Parabola[12] de AGARWAL, A; MARENGO, J., 2009, (acesso em 12/07/2017, tradução nossa). Para o bom desenvolvimento do que será exposto aqui, o leitor deve estar familiarizado com alguns conceitos do Cálculo, como derivada e integral. Vamos fazer, inicialmente, uma breve revisão acerca do comprimento de arcos de curvas planas. Para isso, utilizaremos, como referência o livro de Cálculo de James Stewart [13] (2006, pag 542), que nos explica que dada uma curva C de equação $y = f(x)$ com derivada $f'(x)$ em $[a, b]$, então o comprimento da curva C no intervalo $[a, b]$ é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \qquad (1)$$

Ou pela notação de Leibniz[14]

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Como exemplo, vamos calcular o comprimento do arco da curva, $f(x) = x^2$, do seu vértice $(0,0)$ até o ponto $(2,4)$.

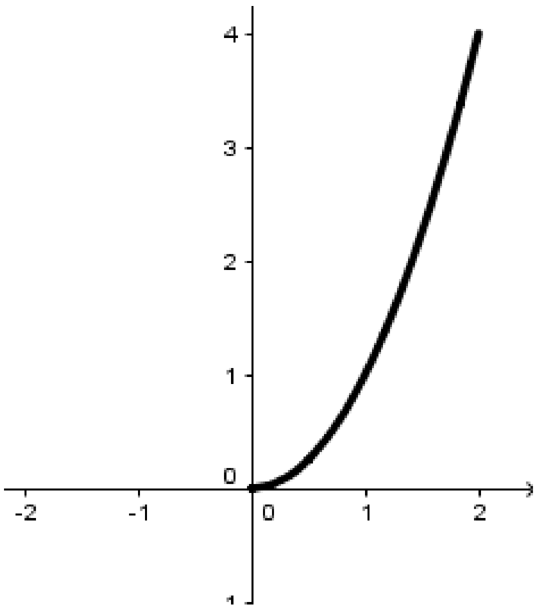

Figura 3.50: Arco da curva f

---

[12] O artigo descreve o lugar geométrico do foco da parábola quando a mesma rola, sem deslizar, sobre o eixo OX. O artigo encontra.

[13] James Drewry Stewart, doutor pela universidade de Toronto.

[14] Gottfried Wilhelm Leibniz foi um filósofo, cientista, matemático, diplomata e bibliotecário alemão

A curva é contínua em $\mathbb{R}$ e sua derivada, $f'(x) = 2x$, também é contínua em $\mathbb{R}$. Daí, o comprimento do arco será dado por

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = 4{,}65$$

Saber calcular o comprimento de arco de uma dada curva vai ser de grande importância para o entendimento das construções que serão realizadas nos capítulos seguintes, em particular a construção da Catenária a partir da parábola que rola, sem deslizar, sobre o eixo, além de podermos usar o comprimento de arco como uma função, como nos fala James Stewart:

> É útil termos uma função que mede o comprimento de arco de uma curva a partir de um ponto inicial particular até um outro ponto qualquer na curva. Então, se a curva suave C tem equação $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, seja $s(x)$ a distância ao longo de C do ponto inicial $P0(a, f(a))$ ao ponto $Q(x, f(x))$. Então s é uma função, chamada função comprimento de arco, e, pela fórmula 1, $s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dx$ (Stewart, 2006, pag 545)

Esse resultado será de grande importância quando fizermos a parábola rolar, sem deslizar, sobre o eixo OX, a fim de encontrarmos o lugar geométrico do foco, quando a curva rola.

Suponha que a parábola de equação $y = x^2$, e foco $F = (0, \frac{1}{4})$ role, sem deslizar, sobre o eixo OX, como na figura 3.51. Desejamos encontrar o lugar geométrico do foco à medida que a parábola rola sobre o eixo.

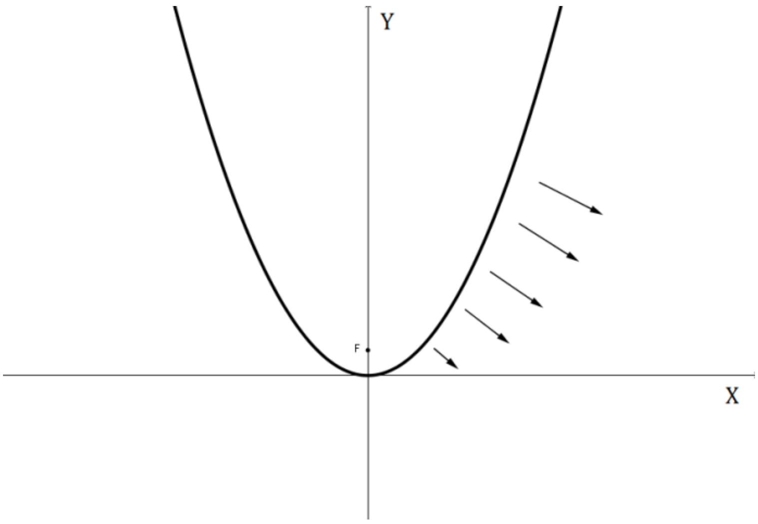

Figura 3.51: Parábola y=x²

Para a resolução desse problema vamos introduzir variáveis como mostra a figura 3.52. Onde, $\theta_1 = \theta(t)$ é o ângulo entre a reta tangente a parábola no ponto

$P = (t, t^2)$ e o eixo OX; $\theta_2 = \theta(t)$ é o ângulo entre a reta FP e o eixo OX; $\alpha(t) = \theta_1 - \theta_2$ é o ângulo entre a reta tangente e a reta FP. Além disso, $d = d(t)$ é o comprimento do segmento FP e $s = s(t)$ é o comprimento do arco de parábola do vértice $V = (0,0)$ até o ponto P.

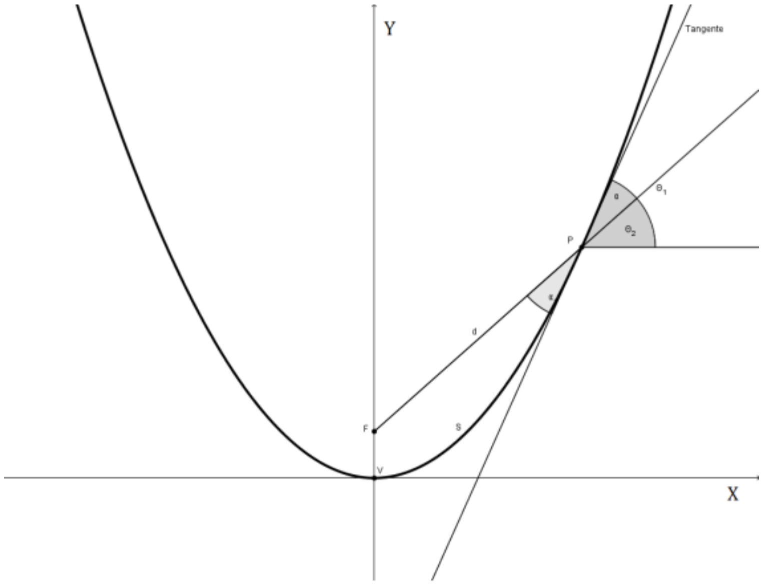

Figura 3.52: Elementos na parábola

Quando a parábola rolar o ponto P vai se mover para o ponto P' sobre o eixo OX, como na figura 3.53.

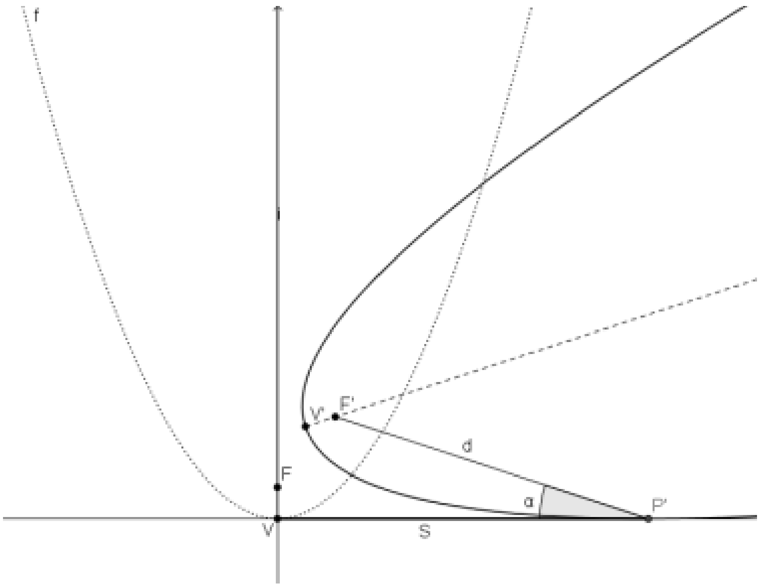

Figura 3.53: Parábola rolando sobre o eixo

Nesse instante F vai está na posição $F' = (x, y)$. Vamos encontrar fórmulas que explicitam F' em função de t. Como a parábola rola sem deslizar o comprimento do segmento VP' é $s(t)$. As coordenadas de $x(t)$ e $y(t)$ de F' são dadas por:

$$x(t) = s - d.cos\,\alpha \qquad \text{e} \qquad y(t) = d.sen\,\alpha \qquad (1)$$

Calculando a derivada da função $y = x^2$, encontramos a inclinação da reta tangente à parábola em P que é

$$tg\,\theta_1 = 2t$$

E a inclinação da reta FP é

$$tg\,\theta_2 = \frac{t^2 - \frac{1}{4}}{t}$$

Usando identidades trigonométricas e depois simplificando encontramos

$$tg\,\alpha = \frac{1}{2t}$$

A partir do qual se segue

$$cos\,\alpha = \frac{t}{\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}} \text{ e } sen\,\alpha = \frac{1}{2.\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}}$$

Da figura 3.52 temos que

$$d = |FP| = t^2 + \frac{1}{4}$$

Podemos calcular o valor de $s(t)$ usando a fórmula de comprimento de arco, e então,

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^t \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx$$

Logo,

$$s(t) = t\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\ln\left(2t + 2\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}\right)$$

Como os valores de α, d e s foram explicitados em função de t, podemos achar as coordenadas (x, y) de F' substituindo esses valores na expressão (1):

$$x(t) = \frac{1}{4}ln\left(2t + 2\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}\right) \qquad (2)$$

$$y(t) = \frac{1}{4}\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}} \qquad (3)$$

Agora que expressamos x e y em termos do parâmetro t, vamos tentar eliminar t. Isolando t em (2) temos

$$t = \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{4}$$

Substituindo essa expressão em (3), obtemos:

$$y = \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

Simplificando fica

$$y = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2}\right) = \frac{1}{4} cosh\, 4x$$

E essa curva, uma Catenária, é o lugar geométrico do foco da parábola quando ela rola, sem deslizar, sobre o eixo OX, como mostra a figura 3.54.

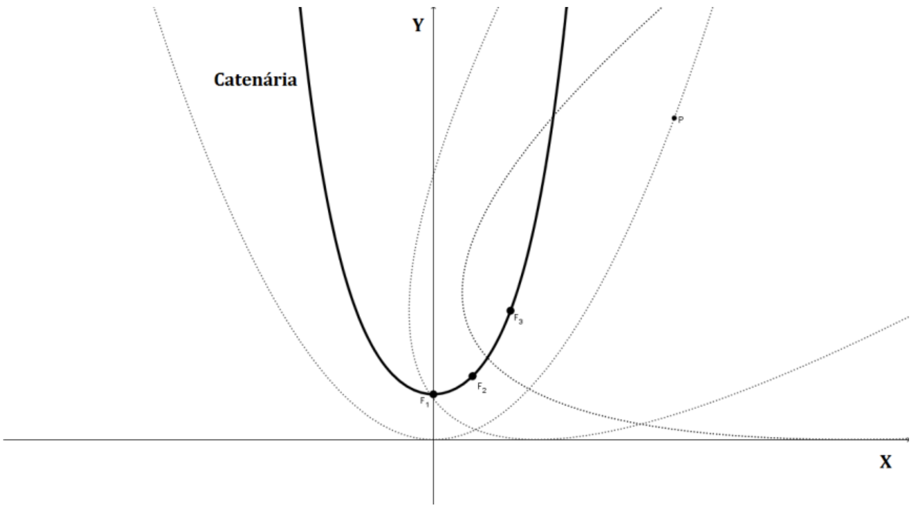

Figura 3.54: Catenária a partir da parábola

3.20 CURVA DE LARGURA CONSTANTE

Na edição 81 da Revista do Professor de Matemática (RPM)[15] foi apresentado o artigo "Polígonos de Reuleaux a Generalização de Pi" de José Pastore Mello, na qual falava sobre polígonos de largura ou diâmetro constante. Iremos aqui fazer uma breve introdução ao assunto, a fim de instigar o leitor a conhecer mais sobre o tema e em 4.20 será mostrado à construção do triângulo de Reuleaux no GeoGebra.

Uma definição sem o rigor matemático das curvas de largura constante é encontrado nesse artigo da revista, onde se lê:

> Sejam r e s retas paralelas girando em torno de uma curva fechada convexa λ de forma que λ sempre fique "perfeitamente espremida" entre r e

[15] MELLO, J.L.P. Revista de professor de matemática ed. 81. Disponível em:< http://ogeogebra.com.br/arquivos/reuleaux_rpm81.pdf> Acesso em: 12 de julho 2017.

> s, sendo P e Q os pontos de intersecção de r e s com λ (assuma que esses pontos sejam únicos). Nesse caso, chamaremos a distância entre P e Q de um diâmetro de λ. Ao girarmos r e s na condição estabelecida, podemos verificar "intuitivamente" que o diâmetro de λ poderá ser constante, como no caso do círculo e do triângulo de Reuleaux, ou não. (MELLO, J.L.P, 2013)

Além do círculo existem infinitas curvas de diâmetro constante, formadas a partir de polígonos regulares com um número ímpar de lados, uma dessas curvas é o triângulo de Reuleaux.

O triângulo de Reuleaux, tem esse nome em homenagem ao engenheiro alemão Franz Reuleaux, que, no século 19, projetou mecanismos envolvendo essa forma geométrica. A curva pode ser facilmente obtida da seguinte maneira: dado um triângulo equilátero de lado L, fazemos três arcos de circunferência de raio L, centrados em A, B e C, como mostra a figura seguinte; a curva obtida é chamada triângulo de Reuleaux.

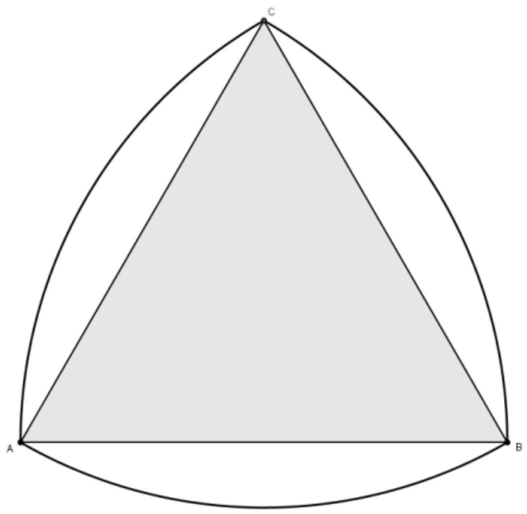

Figura 3.55: Triângulo de Reuleaux

Ao compararmos as áreas de um triângulo de Reuleaux (A_T) de diâmetro 1 e a área de um círculo (A_C) de diâmetro 1, encontramos:

$$A_T = \frac{\sqrt{3}.L^2}{4} + \frac{3\pi}{6} - 3\frac{\sqrt{3}.L^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\pi}{6} - 3\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2} < A_C = \pi$$

É possível de se mostrar que dentre todas as curvas de mesma largura constante o triângulo de Reuleaux é a que tem menor área e o círculo a maior área.

Ao compararmos o perímetro de um triângulo de Reuleaux (P_T) formado a partir de um triângulo equilátero de lado 1, com o perímetro de um círculo (P_C) de diâmetro 1, encontramos:

$$P_T = \frac{2\pi 1}{2} = \pi = P_C$$

As curvas de mesmo diâmetro, como nesse caso o triângulo de Reuleaux e o círculo, tem o mesmo perímetro. Esse resultado é conhecido como teorema de Barbier[16].

Diante das propriedades apresentadas acima, as curvas de largura constante, bem como os polígonos de Reuleaux, tem importante aplicação em situações práticas que envolvem engenharia.

[16] Saiba mais em: VOLOCH, J. F. Curvas de largura constante. Matemática Universitária, nº 5, junho de 1987, IMPA, RJ.

4 CONSTRUÇÃO DAS CURVAS PLANAS NO GEOGEBRA

No capítulo 1 foi apresentado o *software* GeoGebra e algumas de suas funções, no capítulo 3 foram estudadas algumas curvas planas e seus elementos mais importantes. Neste capítulo, serão apresentadas as construções das curvas planas do capítulo 3, bem como seus elementos principais, com a utilização do *software* de matemática dinâmica GeoGebra. As apresentações deste capítulo seguem a mesma ordem vista no capítulo 3.

4.1 RETA

Existem várias formas de se construir uma reta no GeoGebra, iremos a seguir explorar essas formas.

a) Reta dado sua função: a fim de se construir uma reta, por exemplo, $y = 2x - 1$, basta digitar no campo de Entrada do GeoGebra sua equação (pode ser digitado “y=2x-1” ou “y=2*x-1” ou ainda “y=2.x-1”. Pode-se ainda usar f(x) no lugar de y), e em seguida apertar ENTER. O gráfico da curva aparecerá na Janela de Visualização e a equação será exibida na Janela de Álgebra.

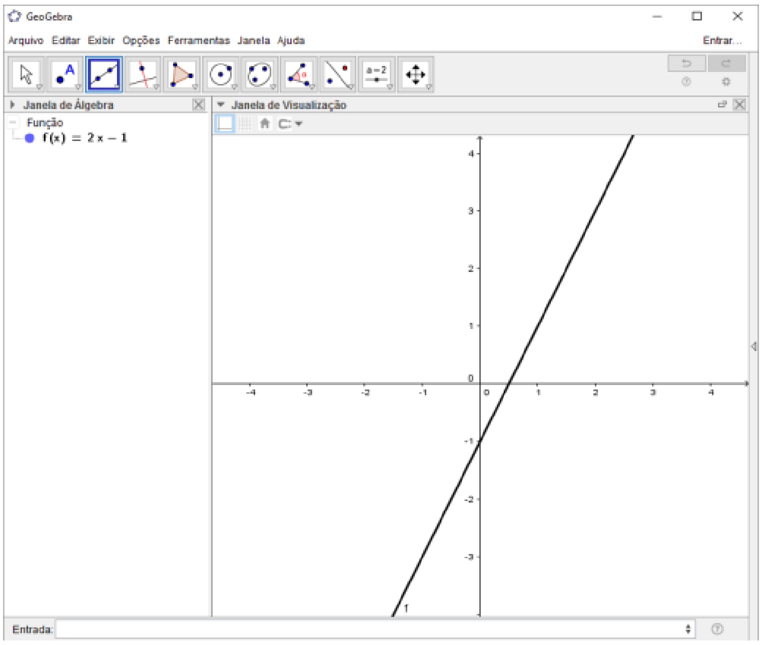

Figura 4.1: Reta dado sua função

b) Reta dados dois pontos: a fim de se construir a reta que passa por dois pontos dados, suponha $A(1,1)$ e $B(2,3)$, basta ir ao ícone de Pontos localizado na Barra de Ferramentas, clicar na ferramenta “Ponto”, e em seguida inserir os pontos na Janela de Visualização. Uma vez que os pontos foram inseridos, basta ir ao ícone de Retas e selecionar a ferramenta Reta e clicar sobre os dois pontos na Janela de Visualização que a reta aparecerá. Na Janela de Visualização estarão os dois pontos e a reta que passar por eles, e na Janela de Álgebra será exibido os mesmos elementos, mas com suas expressões algébricas bem como seus nomes.

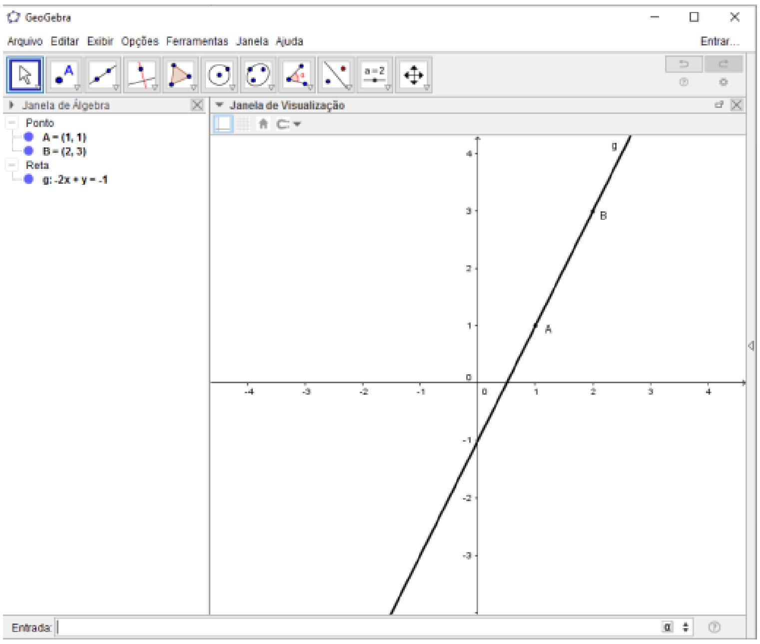

Figura 4.2: Reta dado dois pontos

c) Reta com coeficientes variando: a fim de se fazer o estudo da variação causada no gráfico de a função $f(x) = ax + b$ quando os coeficientes a e b sofrem variações, pode-se proceder da seguinte forma: na Barra de Ferramentas clique no ícone Controle Deslizante, e nele selecione a ferramenta Controle Deslizante. Em seguida clique sobre a Janela de Visualização e a seguinte janela será exibida.

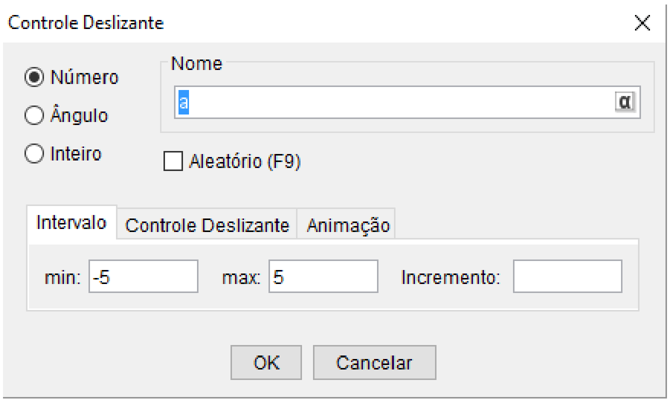

Figura 4.3: Controle Deslizante

Esta janela deve ser configurada da forma desejada, e após dado OK o parâmetro a será criado. Analogamente deve ser feito para a criação do parâmetro b. Com os coeficiente a e b criados basta ir ao campo Entrada e digitar a expressão genérica da função, “f(x)=ax+b”, e a reta será criada.

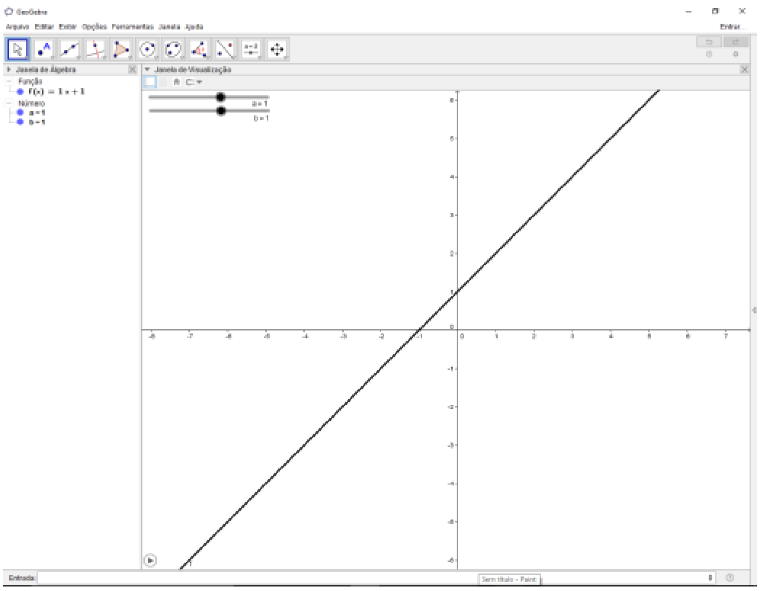

Figura 4.4: Reta com Controle Deslizante ‘a’ e ‘b’

d) Variação dos coeficientes: Clicando no botão ESC do teclado ou no ícone Mover da barra de ferramentas, pode-se fazer variar os valores de a e b da função, e assim analisar os efeitos causados no gráfico de $f(x)$.

Ao variar os valores do coeficiente a da função $f(x) = ax + b$, o gráfico sofre variações em sua inclinação, ficando com maior inclinação em relação ao eixo OX se o valor de a aumentar e menor inclinação se a diminuir, chegando a se tornar uma reta paralela ao eixo das abscissas se o valor de a for zero, tal reta será chamada constante. Para valores de a negativos o gráfico terá inclinação negativa em relação ao eixo OX, como mostra a figura a seguir.

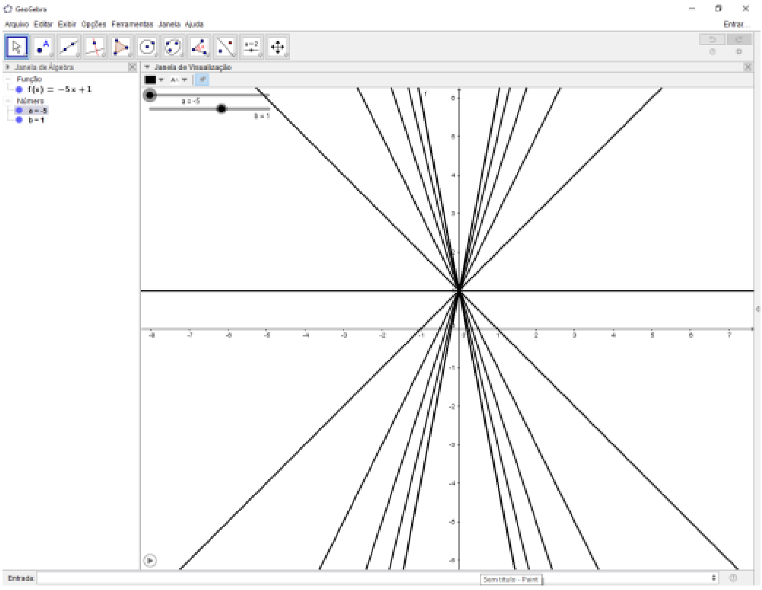

Figura 4.5: Reta com ‘a’ variando

Ao se variar os valores do coeficiente b da função $f(x) = ax + b$, o gráfico sofre variações verticais se deslocando na direção do eixo OY. Os deslocamentos serão para cima se os valores de b aumentarem e para baixo se diminuirem, e as retas produzidas são paralelas entre si, como mostra a figura a seguir.

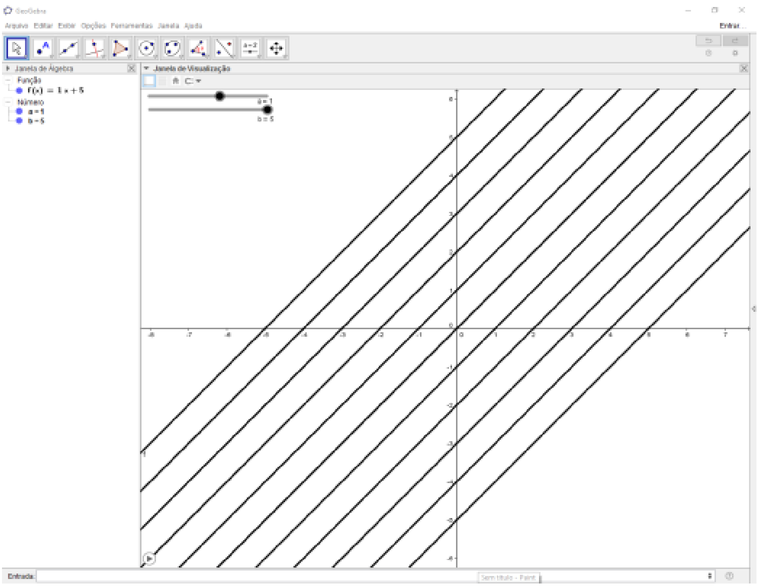

Figura 4.6: Reta com ‘b’ variando

e) Raiz da função: a raiz da função $f(x) = ax + b$ (ou onde o gráfico toca o eixo das abscissas) pode ser encontrada de forma fácil no GeoGebra a partir do campo Entrada. Ao digitar no campo Entrada “raiz[f(x)]” e clicar no botão ENTER do teclado a raiz será exibida como um ponto na Janela de Visualização e na Janela de Álgebra.

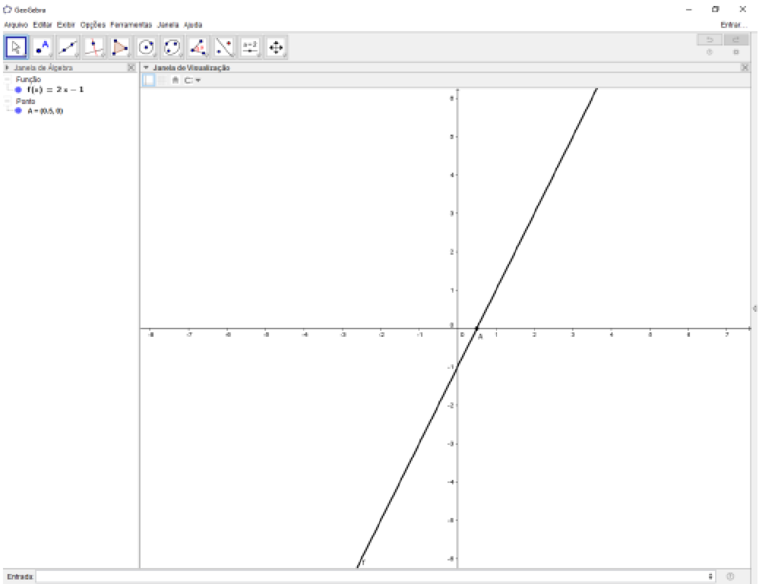

Figura 4.7: Raiz da função

4.2 POLIGONAL

Com várias aplicações no cotidiano as funções poligonais, assim como seus gráficos, tem relevância indiscutível. Vejamos, a seguir, exemplos de como tais funções podem ser criadas e exploradas no GeoGebra.

a) Caminho Poligonal: Sejam dados uma quantidade finita de pontos no plano, por exemplo, $A(-3,-5)$, $B(0,2)$, $C(3,-1)$, $D(4,4)$ e $E(5,-2)$. Vamos ligar esses pontos por um Caminho Poligonal de modo que o caminho comece em um dos pontos e termine em outro dos pontos dados. Para isso, basta clicar no ícone de Reta na Barra de Ferramentas e lá selecionar a ferramenta Caminho Poligonal, e em seguida clicar na Janela de Visualização sobre as coordenadas dos pontos desejados e no final clicar sobre o primeiro ponto novamente. Dessa forma o Caminho Poligonal e os pontos utilizados serão criados na Janela de Visualização, enquanto na Janela de Álgebra, aparecerá o nome do Caminho Poligonal com seu comprimento e as coordenadas algébricas dos pontos.

A fim de tornar a criação da curva poligonal mais fácil, pode-se fazer uso da malha quadriculada da Janela de Visualização, para isso basta clicar com o botão direito do mouse sobre a Janela de Visualização e, em seguida, escolher a opção Malha.

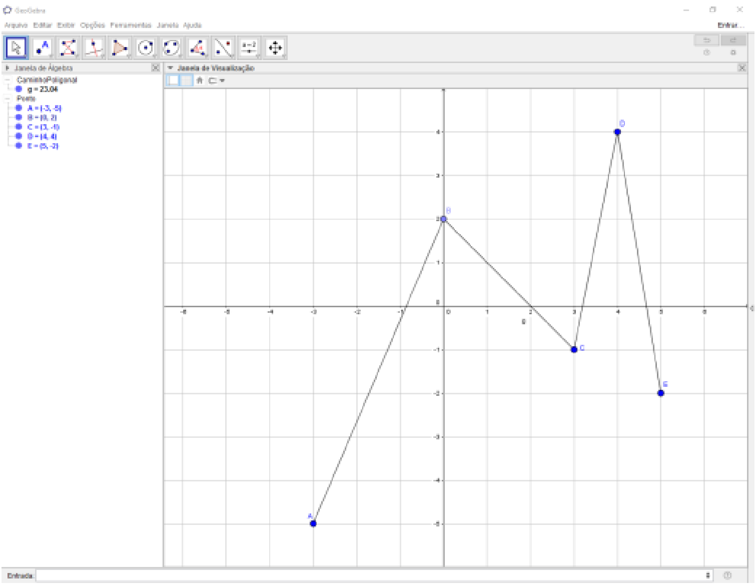

Figura 4.8: Caminho Poligonal

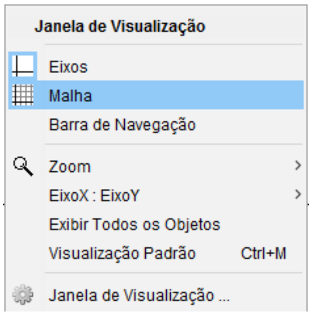

Figura 4.9: Opção Malha

b) Função poligonal: sejam dados $t_0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n$ tais que, para $x \leq t_0$, para $x \geq t_n$ e em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, f coincide com uma função afim f_i. Como exemplo seja

$$f(x) = -x - 2, se\ x \leq -3;\ f(x) = \frac{x+5}{2}, se\ -3 < x \leq 1;\ f(x) = 3, se\ 1 < x \leq 3;\ f(x) = \frac{-x+9}{2}, se\ 3 < x \leq 5, f(x) = x - 3, se\ x > 5$$

Para construir o gráfico de tal curva poligonal no GeoGebra, as informações podem ser digitadas direto no campo Entrada, utilizando-se o comando de função acompanhado do comando $se[\,]$, da seguinte forma:

“f(x)=Se[x<-3,-x-2,-3<x≤1,(x+5)/2,1<x≤3,3,3<x≤ 5,(-x+9)/2,x>5,x-3]”

Após apertar o botão ENTER do teclado, o gráfico da função poligonal será gerado na Janela de Visualização e sua expressão algébrica aparecerá na Janela de Álgebra, como mostra a figura a seguir.

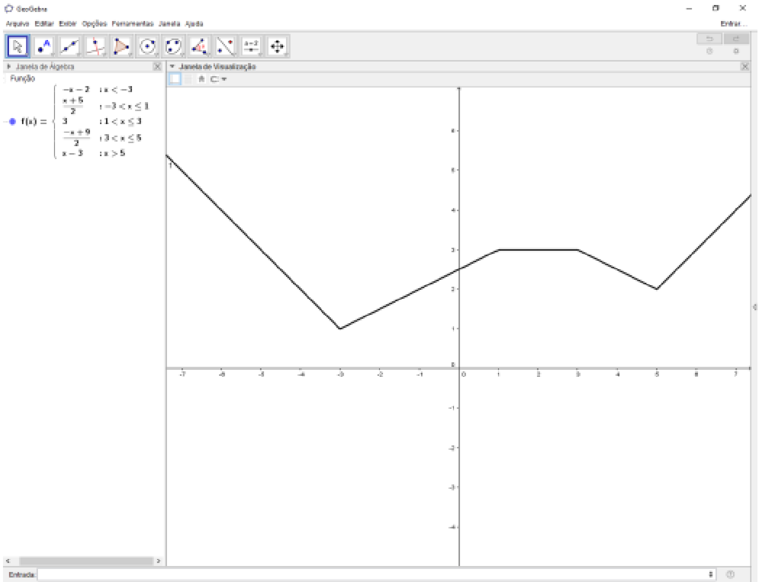

Figura 4.10: Função Poligonal

4.3 EXPONENCIAL

Para se construir uma curva exponencial no GeoGebra, basta digitar no campo Entrada a função desejada. Por exemplo, para se construir o gráfico da função $f(x) = 2^x$, digita-se a expressão “f(x)=2^x” no campo Entrada e o gráfico será gerado, como na figura a seguir.

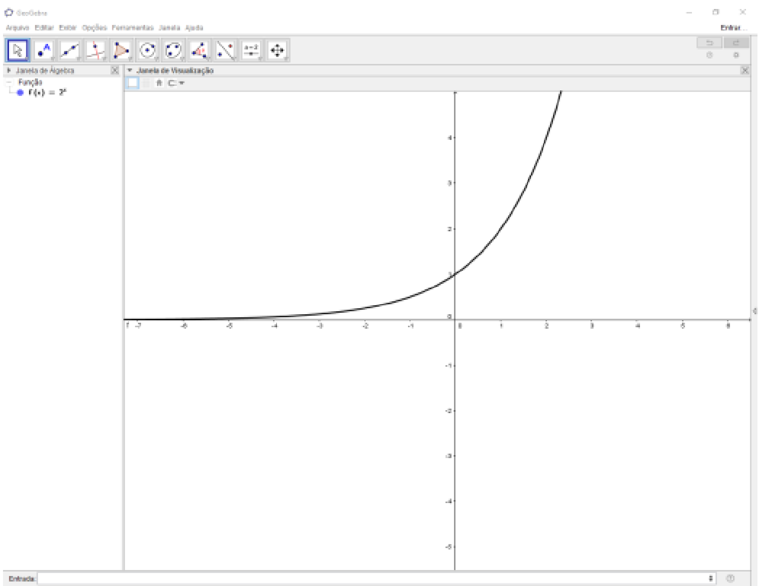

Figura 4.11: Função Exponencial

Na Janela de Visualização é exibido o gráfico da função dada, e na Janela de Álgebra é exibida a expressão da função.

Pode-se também usar como base um controle deslizante, a fim de se analisar as variações sofridas no gráfico da função. Para isto, basta clicar no ícone Controle Deslizante e selecionar a ferramenta Controle Deslizante, e em seguida clicar sobre a Janela de Visualização. Com o parâmetro a definido deve-se digitar no campo Entrada a expressão “f(x)=a^x”. Assim o gráfico da função será criado e poderá ser modificado, de acordo com a conveniência, bastando para isso mexer no controle deslizante criando. O próprio controle deslizante deve ser configurado a fim de atender melhor as necessidades do usuário, como, por exemplo, ao visualizar o gráfico para valores de a entre 0 e 1 e para valores de $a > 1$, como mostram as figuras a seguir.

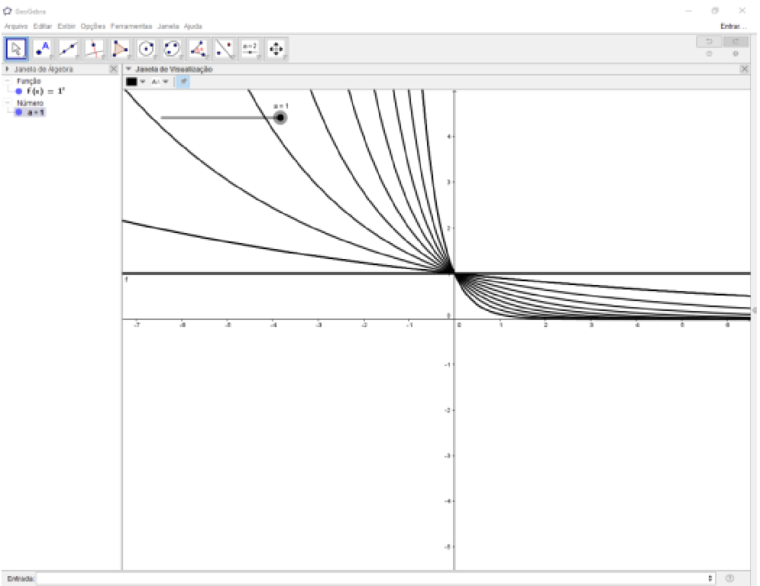

Figura 4.12: Exponencial, 0<a<1

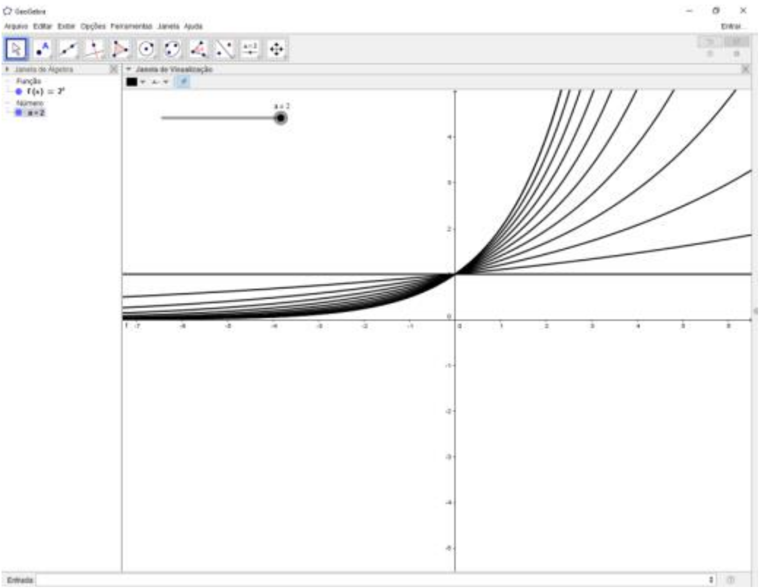

Figura 4.13: Exponencial, a>1

4.4 LOGARÍTMICA

A construção das funções logarítmicas no GeoGebra, são facilitadas pelo fato do *software* exibir opções de funções desse tipo. Ao se digitar, no campo Entrada, a palavra “log”, o software faz o reconhecimento e exibe opções, como mostra a figura a seguir.

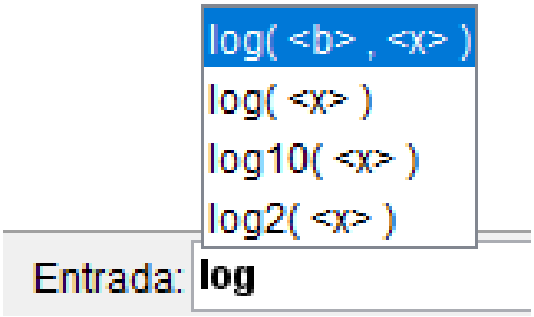

Figura 4.14: Função Logaritmo no campo Entrada

De baixo para cima as opções são: $\log_2 x$, $\log_{10} x$, $\log_e x$ e $\log_b x$. No último caso o usuário pode escolher a base que desejar. Exemplos de cada uma das funções geradas a partir das opções acima aparecem na figura a seguir, onde no lugar de b foi usado o valor 5.

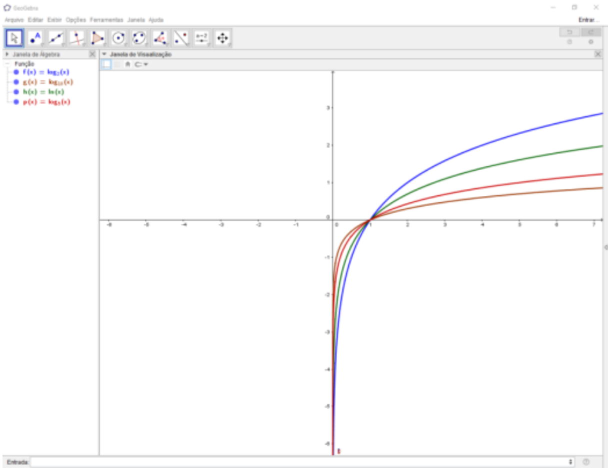

Figura 4.15: Funções Logarítmicas, b>1

Caso o usuário queira fazer uma função com uma base específica, diferente das que aparecem nas opções, ele poderá escolher a opção $\log_b x$ e usar a base de seu interesse, bastando para isso substituir o valor de b na expressão.

Como exemplo, podemos usar um valor para b no intervalo $(0,1)$.Usemos, então, os valores $0{,}2;\ 0{,}5;\ 0{,}7$ e vejamos como ficam os gráficos.

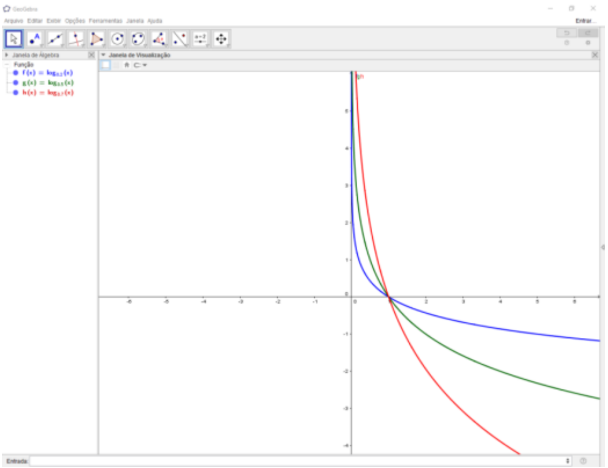

Figura 4.16: Funções Logarítmicas, 0<b<1

Observamos que na Janela de Álgebra são exibidos os nomes das funções e suas leis de formação, enquanto na Janela de Visualização são exibidos seus gráficos.

É possível obter os valores do *logaritmo natural*[17] pela definição geométrica, usando-se a função $\frac{1}{x}$ e integral. Com a ferramenta Controle Deslizante cria-se um parâmetro k. Em seguida, no campo Entrada, cria-se a função $f(x) = \frac{1}{x}$. Uma vez

[17] O logaritmo natural é o de base e, onde e é um número irracional aproximado por 2,71.

que a hipérbole $\frac{1}{x}$ foi criada, usaremos a ferramenta Integral. Digitando no campo Entrada “Integral”. Aparecerão as seguintes opções.

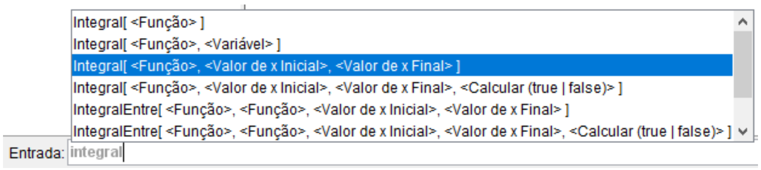

Figura 4.17: Integral no campo Entrada

A escolha da terceira opção de cima para baixo possibilitará ao usuário associar a função na qual ele deseja calcular a integral, no caso a hipérbole $\frac{1}{x}$, bem como o valor de início e valor final na qual se pretende obter a área.

Para o caso do logaritmo natural teríamos: “Integral[f(x),1,k]”. Com isso, aparecerá na Janela de Visualização a área sob a hipérbole de 1 até k, e na Janela de Álgebra será exibido o valor da área, nesse caso chamado de número a, que pela definição será o valor de $\log_e k$, como mostra a figura.

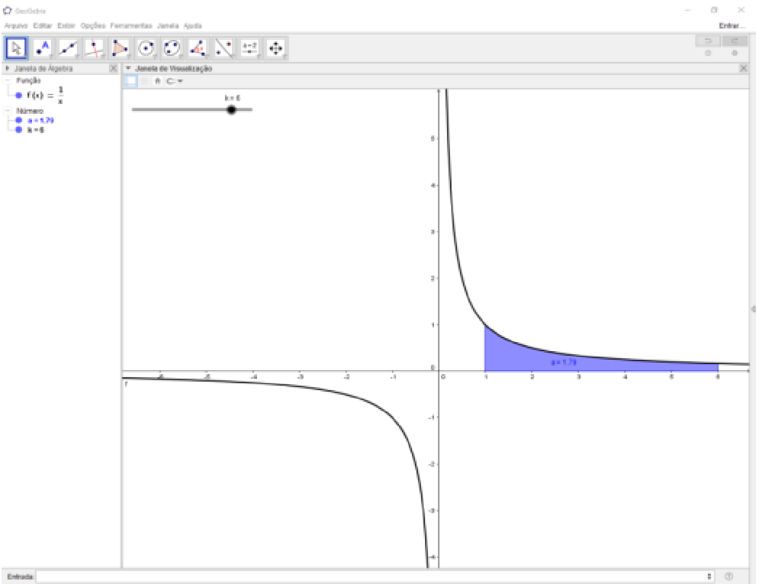

Figura 4.18: Área sob a hipérbole

4.5 SENO, COSSENO E TANGENTE

As funções trigonométricas, assim como várias outras, podem ser construídas diretamente do campo Entrada digitando-se suas expressões.

Ao se digitar “f(x)=sen(x)”, no campo Entrada o gráfico da função seno será criado e exibido na Janela de Visualização, enquanto sua expressão algébrica será mostrada na Janela de Álgebra.

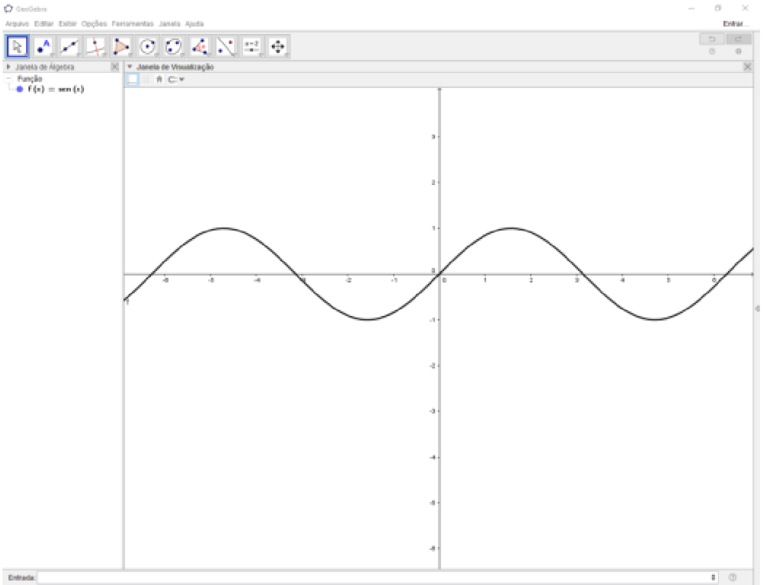

Figura 4.19: Função Seno

Ao se digitar "f(x)=cos(x)", no campo Entrada o gráfico da função cosseno será criado e exibido na Janela de Visualização, enquanto sua expressão algébrica será mostrada na Janela de Álgebra.

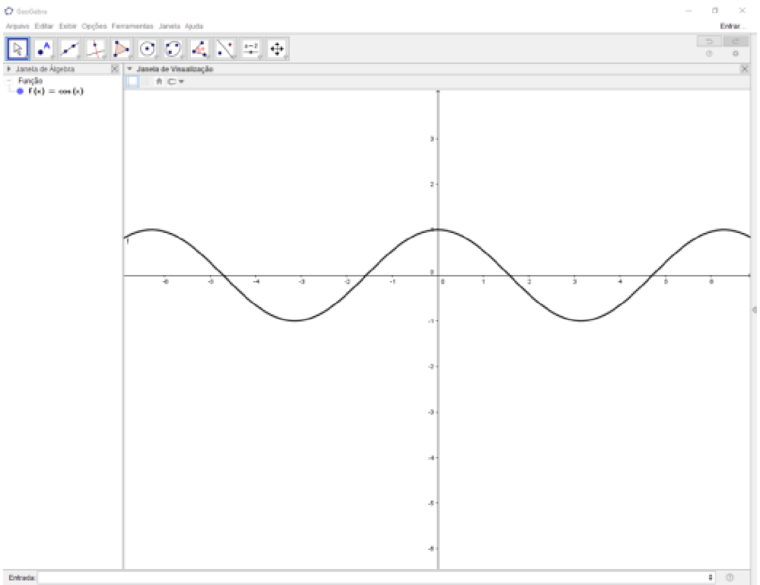

Figura 4.20: Função Cosseno

Ao se digitar “f(x)=tan(x)”, no campo Entrada o gráfico da função tangente será criado e exibido na Janela de Visualização, enquanto sua expressão algébrica será mostrada na Janela de Álgebra.

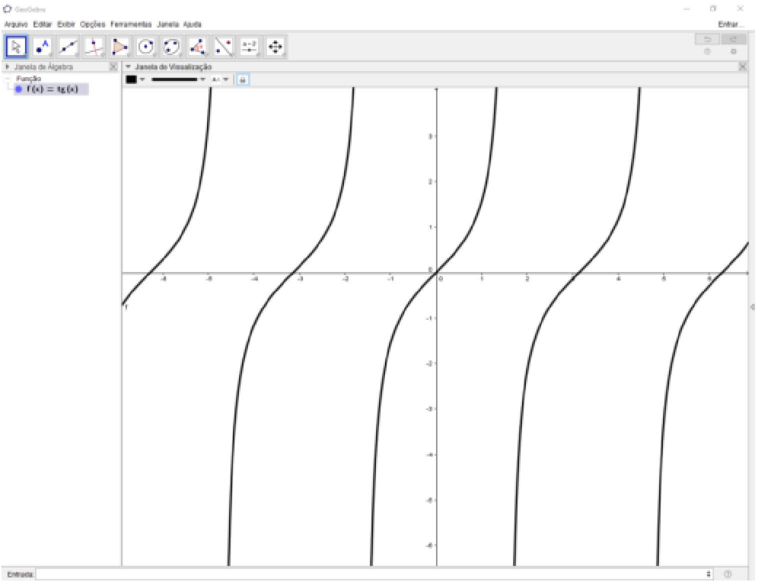

Figura 4.21: Função Tangente

As funções trigonométricas, seno, cosseno e tangente podem ser exibidas a partir da construção do círculo trigonométrico, como sendo as coordenadas do ponto P que se desloca sobre o círculo no sentido anti-horário. Para isso, deve-se construir um círculo de centro na origem e raio unitário, clicando no ícone de Círculos e Arcos, e escolhendo-se a ferramenta Círculo dados Centro e Raio. Em seguida basta clicar na origem do sistema de eixos e escolher 1 como medida do raio. Será criado um ponto $A(0,0)$ e o círculo unitário.

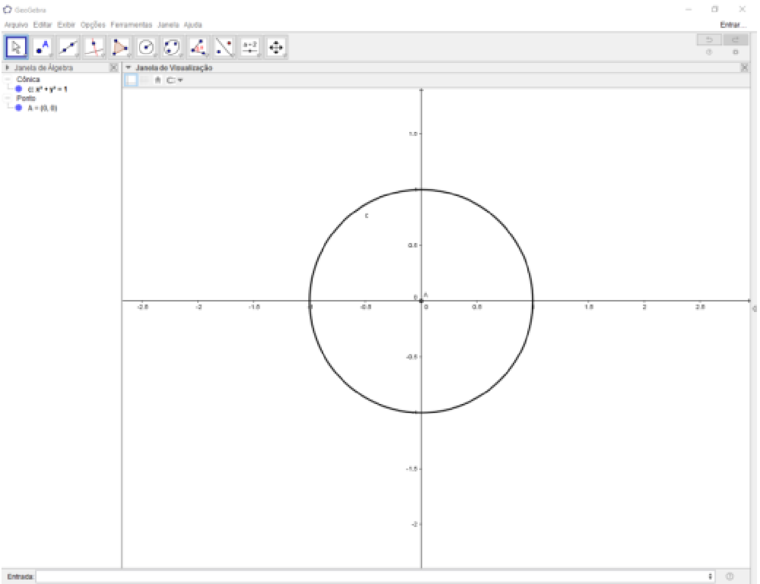

Figura 4.22: Círculo unitário

Em seguida, com a ferramenta Ponto, devem ser criados os pontos $B(1,0)$ e C sobre o círculo. O ponto C será móvel.

A fim de medir o arco BC, utilizaremos a ferramenta Ângulos, clicando no ícone de Ângulos da Barra de Ferramentas. Em seguida, deve-se clicar nos pontos B e C, e o ângulo α será gerado.

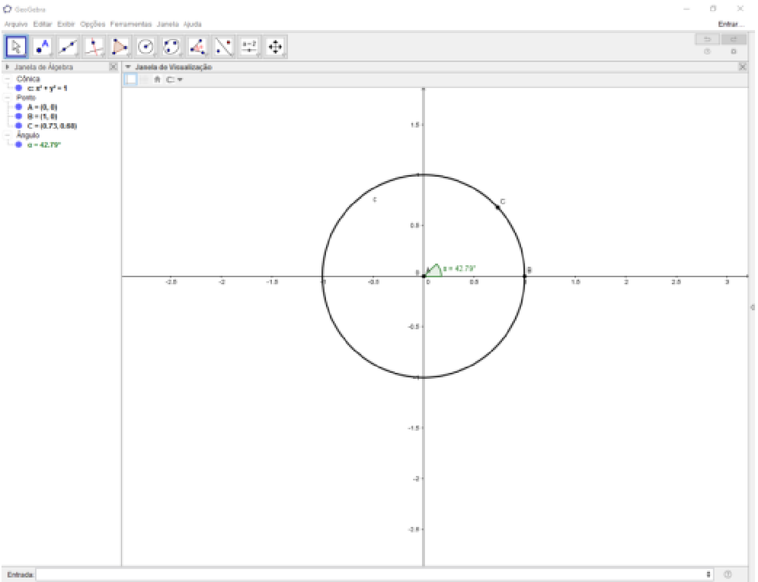

Figura 4.23: Medida do arco BC

As coordenadas do ponto C são, respectivamente, o cosseno e o seno do arco BC. A fim de melhor visualizar os valores do seno e cosseno à medida que o arco BC varia, podem ser criados os pontos D e E que serão, respectivamente, as projeções sobre os eixos X e Y, do ponto C. A construção desses pontos é feita digitando-se no campo Entrada "D=(x(C),0)" e "E=(0,y(C))". E, para melhor visualização, podem ser criados os segmentos AD e AE, que representam as medidas do cosseno e seno. Se o usuário quiser ele pode modificar a unidade de medida, e coloca-la em radianos, clicando com o botão direito do mouse sobre a Janela de Visualização e escolhendo propriedades.

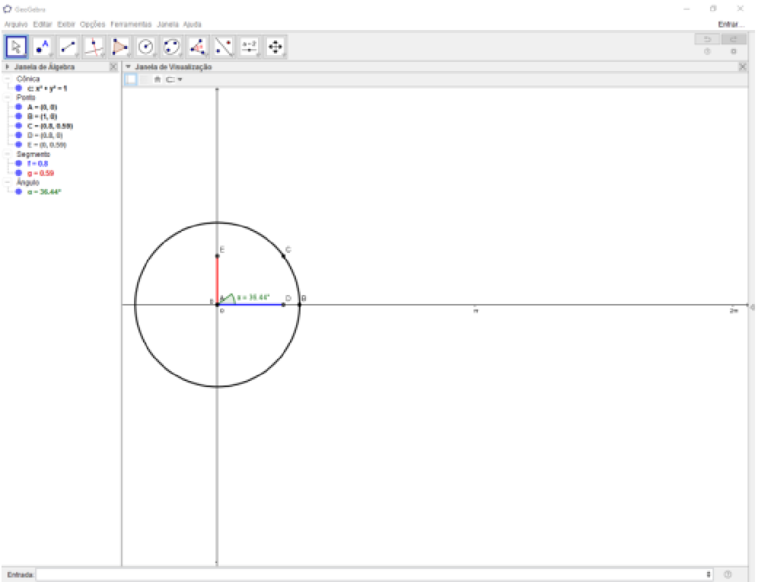

Figura 4.24: Unidade em radianos

A fim de se obter o gráfico das funções seno, cosseno e tangente no intervalo $[0,2\pi]$, o usuário poderá criar pontos $S = (\alpha, sen(\alpha))$, $C = (\alpha, cos(\alpha))$ e $T = (\alpha, tg(\alpha))$, respectivamente, e ,em seguida, clicando sobre esses pontos com o botão direito, selecionar a opção Habilitar Rastro. Quando o ponto C for movido com o mouse, o gráfico de cada função será esboçado como mostram as figuras abaixo.

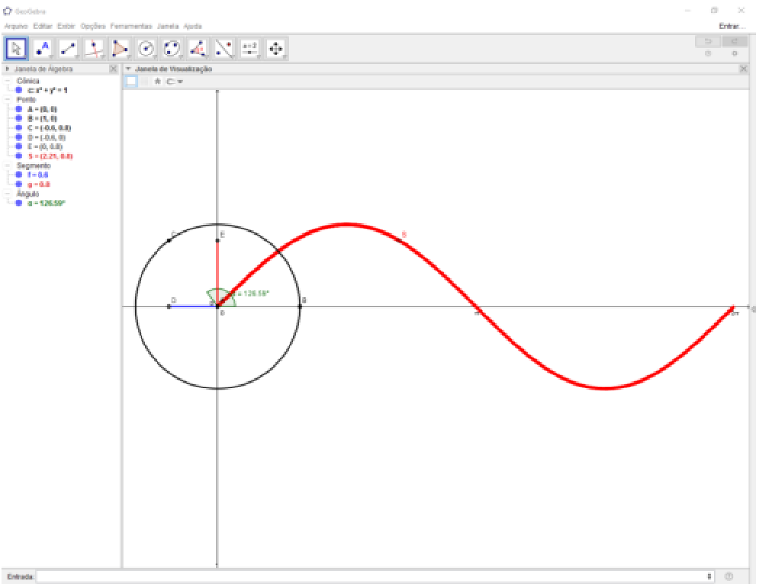

Figura 4.25: Função Seno

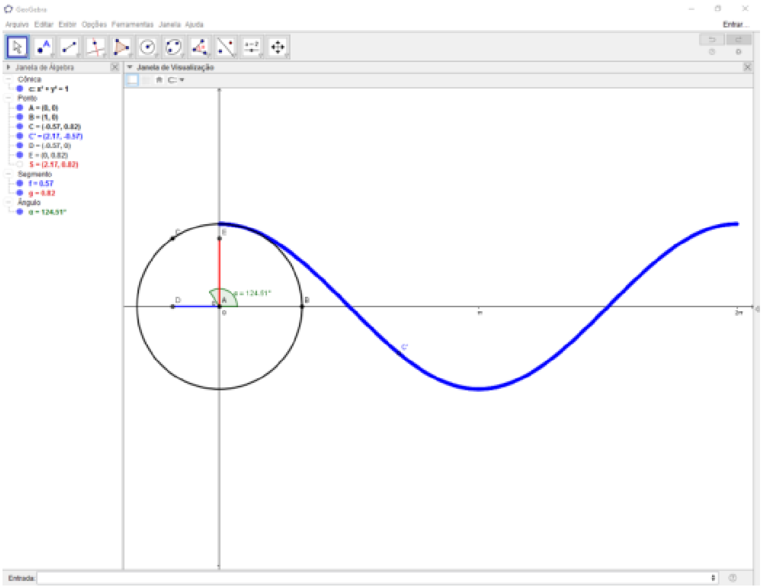

Figura 4.26: Função Cosseno

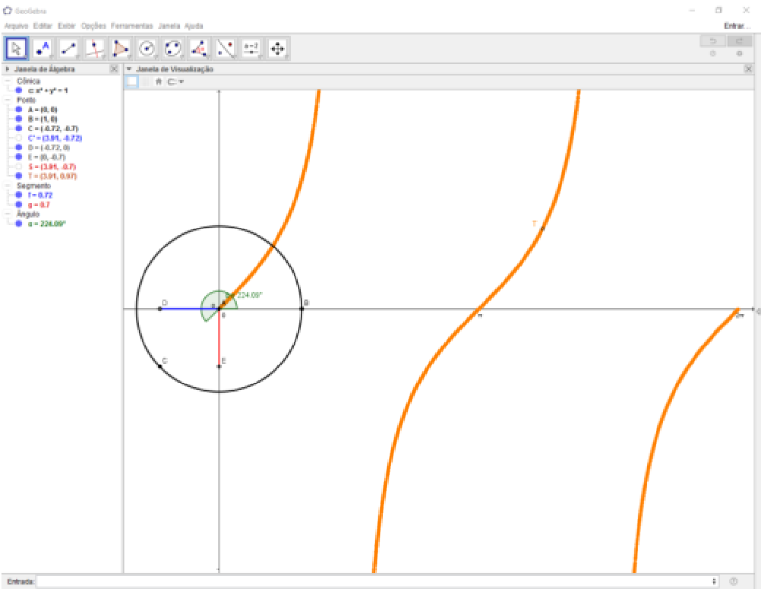

Figura 4.27: Função Tangente

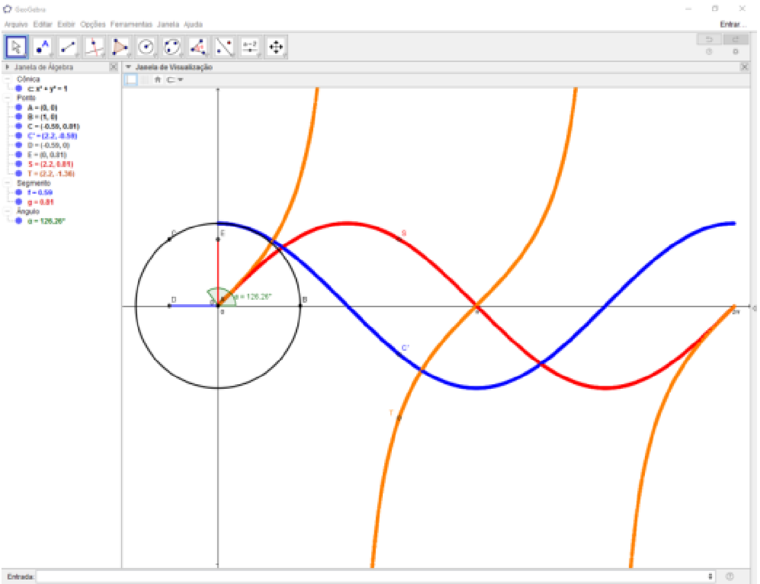

Figura 4.28: Funções Trigonométricas

4.6 PARÁBOLA

Para a construção da função quadrática, basta digitar no campo Entrada sua expressão, por exemplo, “f(x)=x^2” e a função será criada na Janela de Visualização.

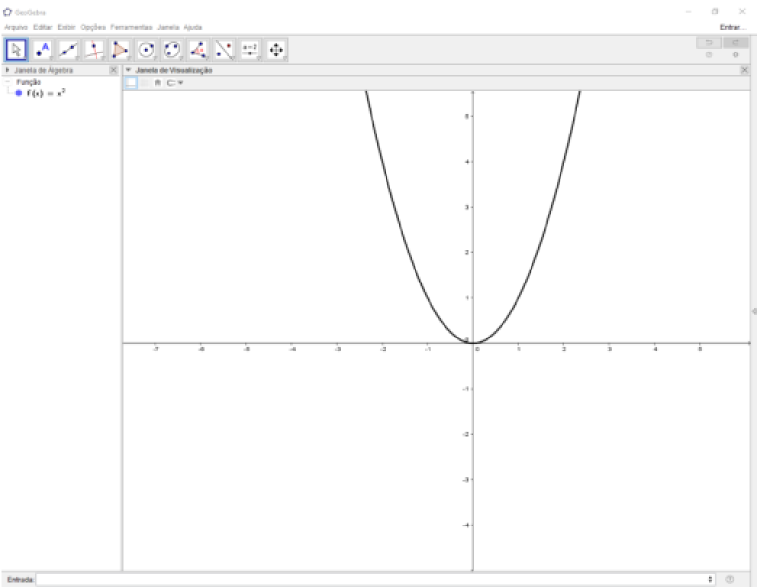

Figura 4.29: Parábola

Como a função quadrática tem a forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, podem ser criados parâmetros a, b e c, a fim de se verificar as alterações produzidas no gráfico à medida que se variam seus valores. Para isso, basta usar a ferramenta Controle Deslizante e, clicando-se sobre a Janela de Visualização, criar os parâmetros. Após a criação dos parâmetros a, b e c a função genérica pode ser criada no campo Entrada digitando-se ”f(x)=ax^2+bx+c”.

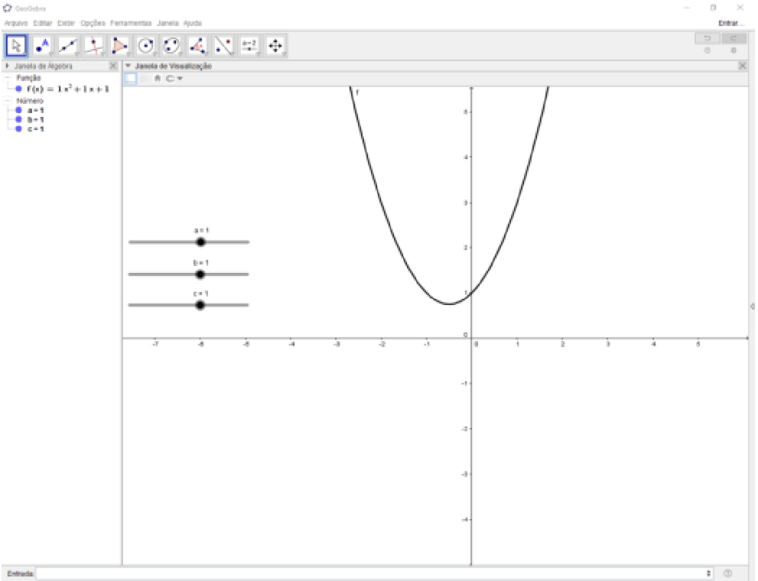

Figura 4.30: Parábola com Controle Deslizante

A fim de melhor visualizar os efeitos causados no gráfico da função quando se variam os valores de seus coeficientes, podemos construir o vértice da parábola. Para isso, no campo Entrada, digitamos “V=(-b/(2a),(4ac-b^2)/(4a))”, e em seguida clicando com o botão direito sobre o ponto V criado e abrindo a Janela Propriedades, pode ser exibido o rasto do vértice V.

a) Variação do parâmetro a: A variação do coeficiente a faz com que o vértice da parábola se desloque sobre a reta $y = \frac{bx}{2} + c$. Tanto a reta quanto a parábola tocam o eixo Y no ponto $(0, c)$, e para que isso ocorra a abertura da parábola deve mudar.

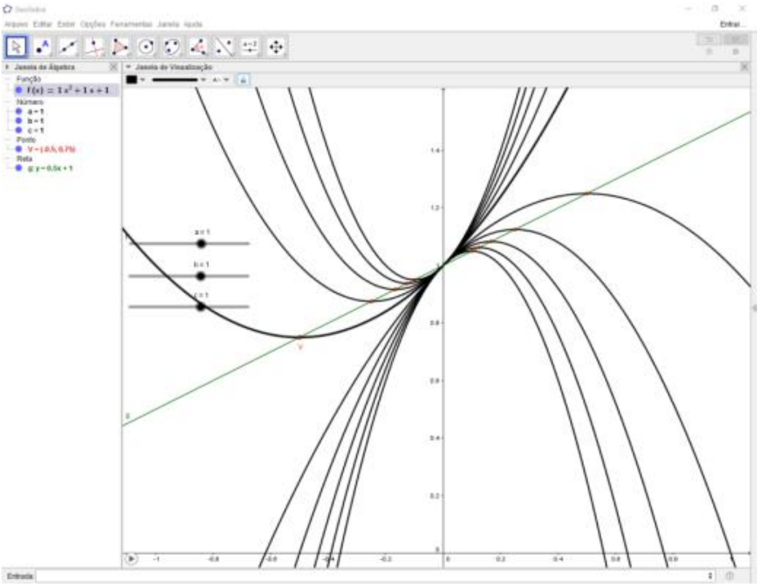

Figura 4.31: Variação de ‘a’ na Parábola

No caso em que $b = 0$, o vértice da parábola será o ponto $(0, c)$, e ao se variar os valores de a, o gráfico da função sofrerá alterações em sua abertura e sentido da concavidade, sendo para cima quando $a > 0$ e para baixo quando $a < 0$.

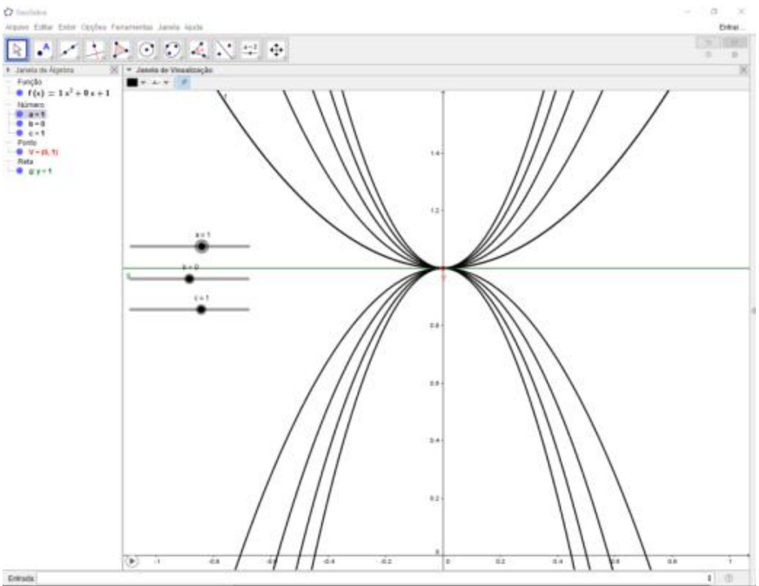

Figura 4.32: Parábola com ‘a’ variando

b) Variação do parâmetro b: Ao se variar o coeficiente b de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ as parábolas geradas se movem segundo uma parábola de sentido oposto à parábola dada. O lugar geométrico dos vértices das parábolas é a função $y = -ax^2 + c$, essa função tem vértice no ponto $(0, c)$ onde toca o eixo Y.

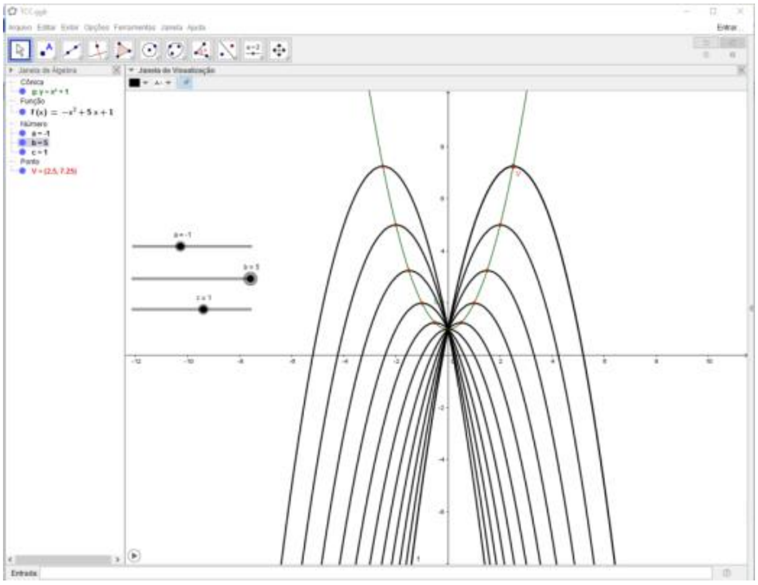

Figura 4.33: Variação de b, a<0

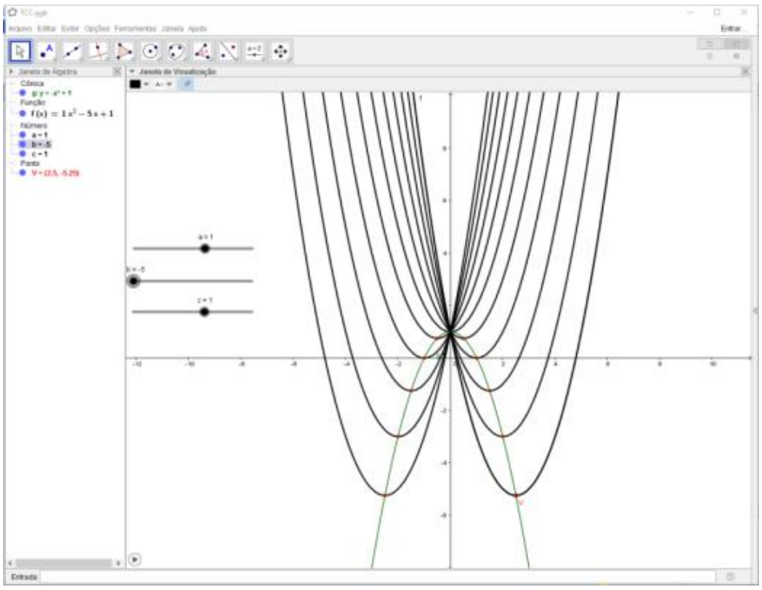

Figura 4.34: Variação de b, a>0

c) Variação do parâmetro c: A variação do coeficiente c provoca no gráfico um deslocamento vertical, de modo que o vértice da parábola se desloca sobre a reta $x = \frac{-b}{2a}$, que é o eixo de simetria da curva.

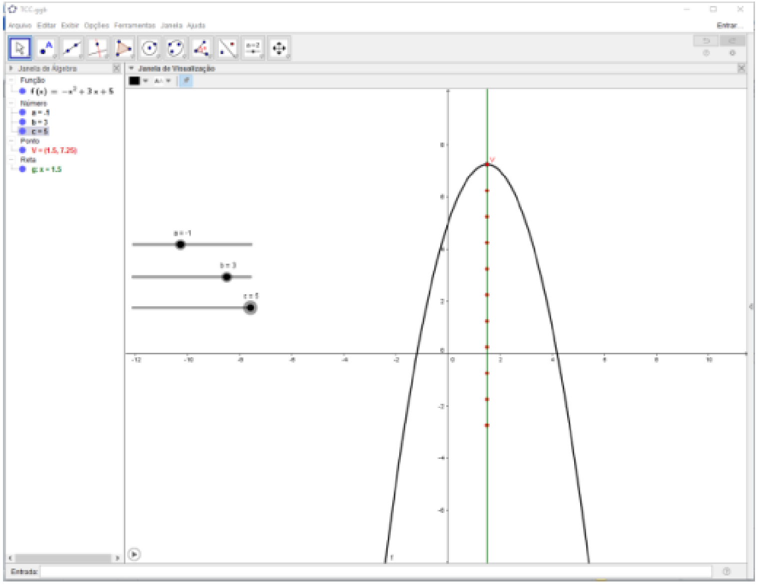

Figura 4.35: Variação de c, a<0

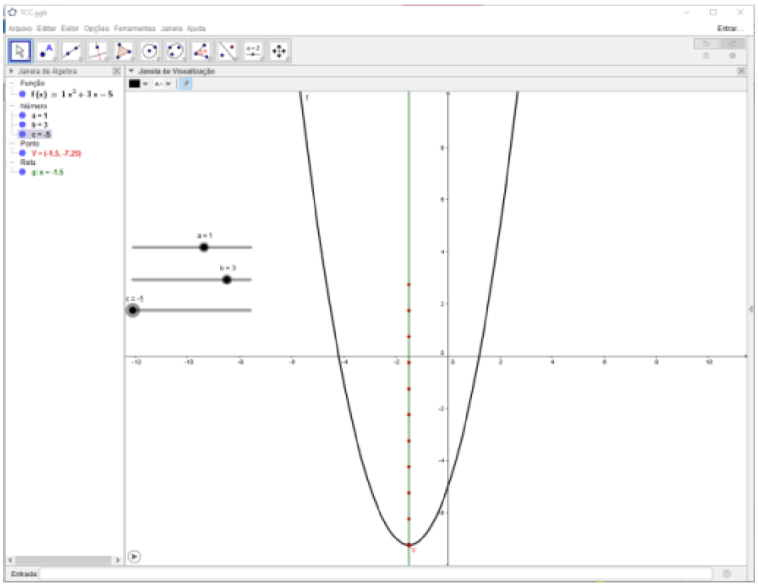

Figura 4.36: Variação de c, a>0

4.7 POLINOMIAL

Existem duas formas básicas de se construir curvas polinomiais no GeoGebra: A primeira é digitar a expressão polinomial direto no campo Entrada; a segunda é criar a curva a partir de pontos no plano, usando uma função pré-definida do GeoGebra, encontrada, também, no campo Entrada.

Dada uma expressão polinomial, o seu gráfico pode ser gerado a partir do campo Entrada, como foi feito em 4.1, para a função afim, e em 4.6, para a parábola.

Vejamos, agora, a construção de curvas polinomiais de grau maior que 2. Como exemplo, tomemos as funções $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 1$, $g(x) = 2x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ e $h(x) = -4x^5 - 4x^2 + x + 1$. Para se construir a curva basta digitar no campo Entrada suas expressões, como mostram as figuras a seguir.

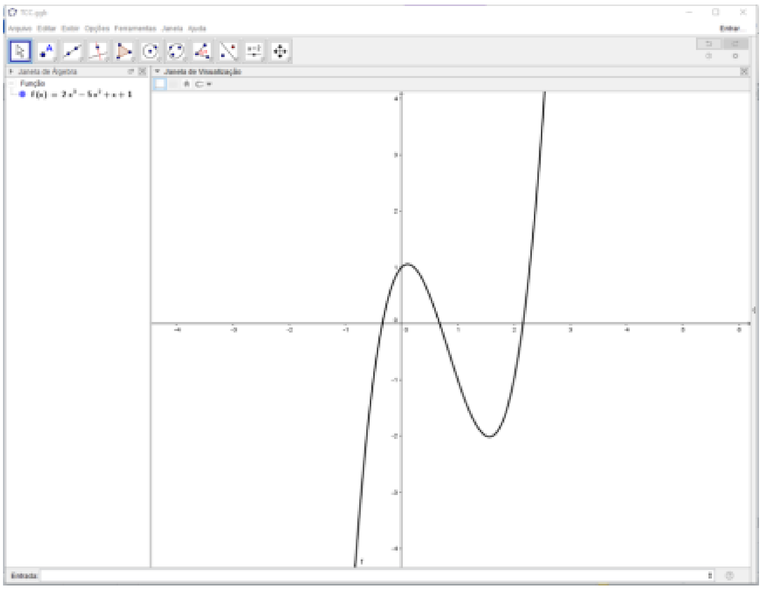

Figura 4.37: Polinomial de grau 3

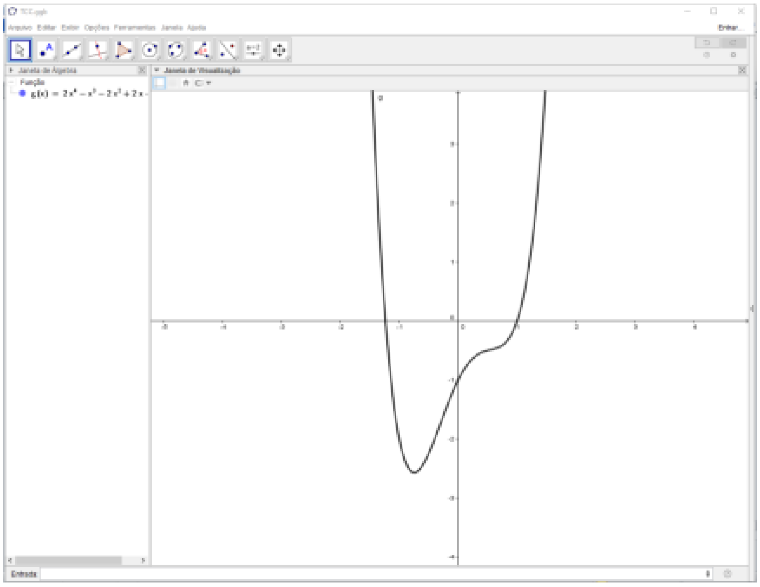

Figura 4.38: Polinomial de grau 4

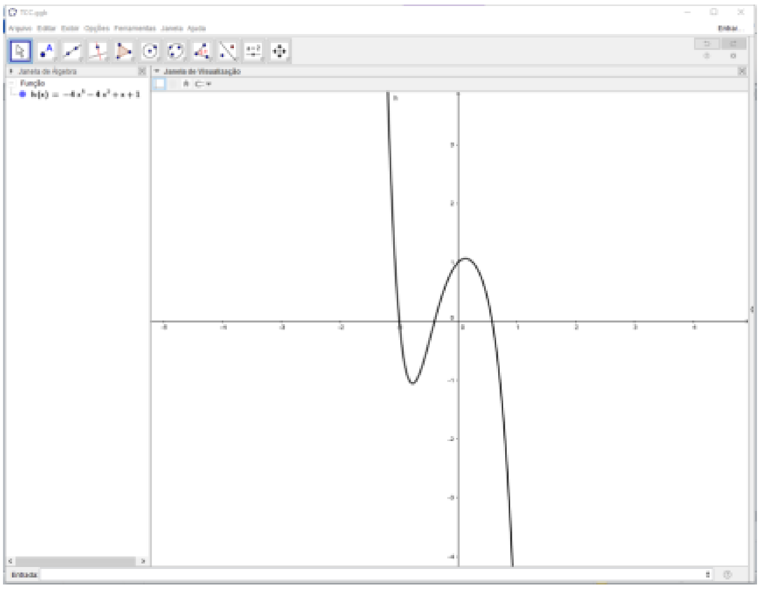

Figura 4.39: Polinomial de grau 5

Consideremos agora, a construção das curvas polinomiais que passam por pontos dados. Sejam $A(-2,1)$, $B(-1,-1)$, $C(1,3)$, $D(2,2)$ e $E(3,-1)$. Para se construir um polinômio uma vez conhecido seus pontos, basta, no campo Entrada, digitar "polinômio" e aparecerão opções ao usuário. Em seguida, o usuário deve escolher a segunda opção, "Polinômio[<Lista de Pontos>]", e no lugar da lista de pontos devem ser digitados os pontos as quais pertencem ao gráfico.

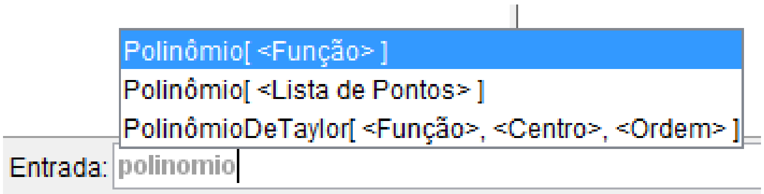

Figura 4.40: Polinômio campo Entrada

Como exemplo, sejam construídas as curvas polinomiais de grau 1 que passam por A e B; de grau 2 que passam por A, B e C; de grau 3 que passam por A, B, C e D; de grau 4 que passam por A, B, C, D e E, como mostram as figuras seguintes.

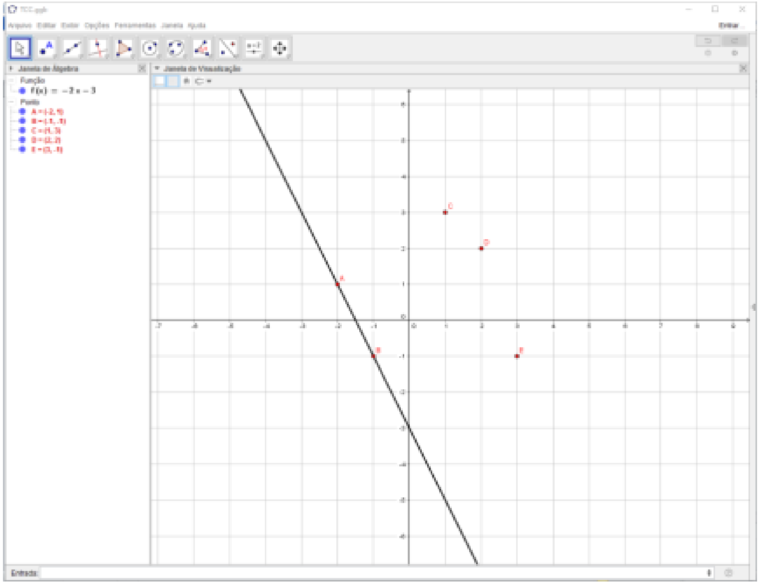

Figura 4.41: Polinômio grau 1

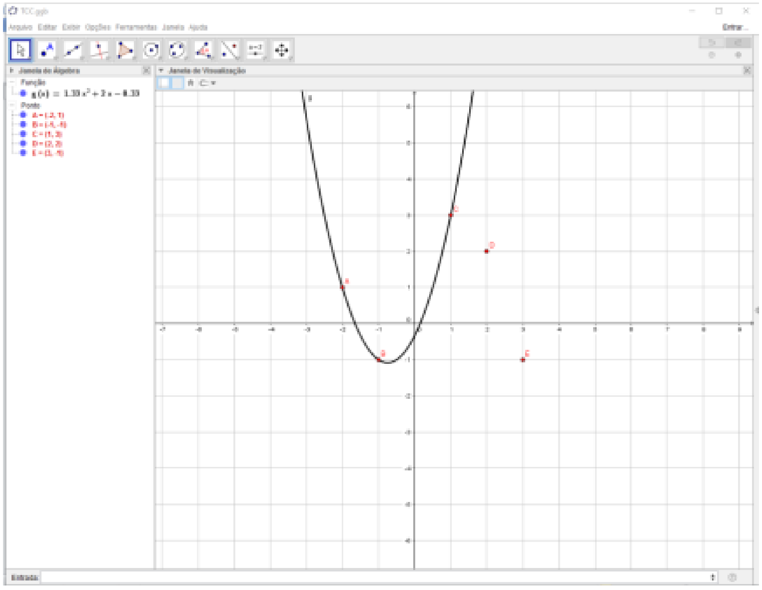

Figura 4.42: Polinômio grau 2

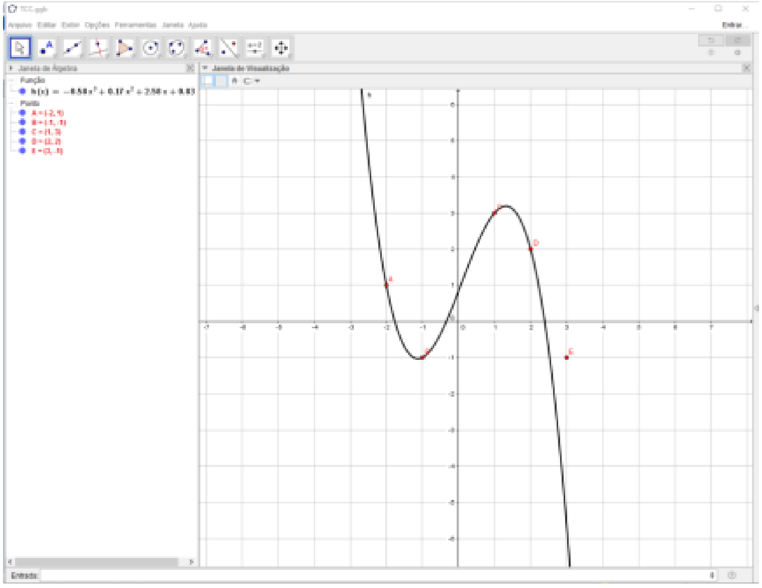

Figura 4.43: Polinômio grau 3

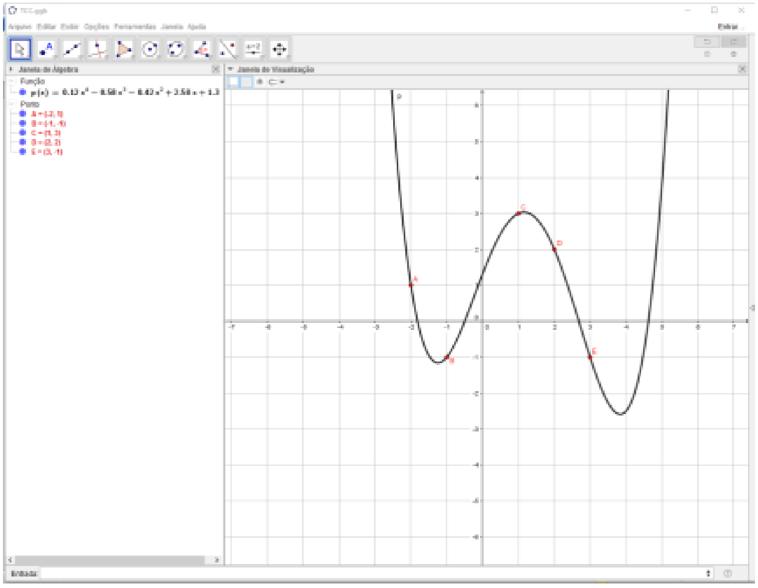

Figura 4.44: Polinômio grau 4

É possível, também, criar uma curva polinomial com coeficientes que podem ser variados convenientemente. Para isso, devemos criar parâmetros à partir da ferramenta Controle Deslizante. Como exemplo, vamos construir uma curva polinomial de grau 3, “f(x)=ax³+bx²+cx+d”, com parâmetros a, b, c e d. Primeiramente, com a ferramenta Controle Deslizante, criam-se coeficientes a, b, c e d; em seguida, no campo Entrada, digita-se “f(x)=ax^3+bx^2+cx+d”, e a curva será criada e exibida na Janela de Visualização e seu expressão na Janela de Álgebra.

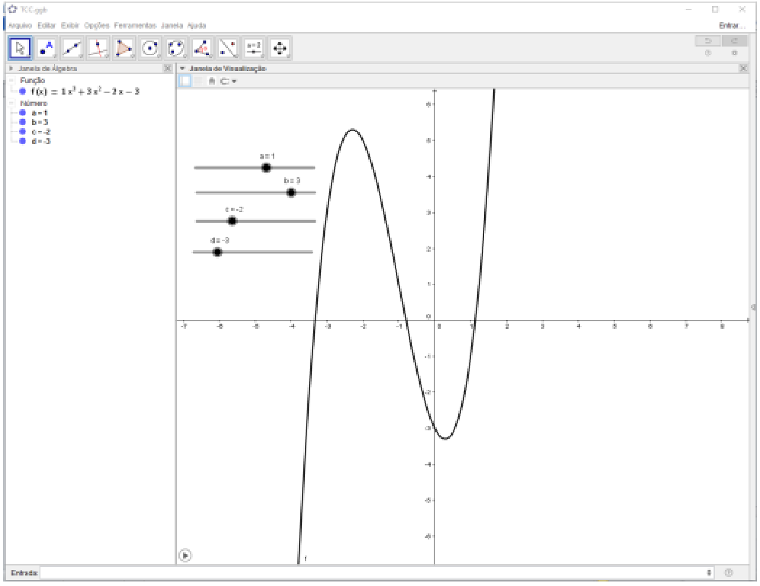

Figura 4.45: Polinômio com Controle Deslizante

4.8 CICUNFERÊNCIA

A construção de uma circunferência se dá de forma bem simples a partir da ferramenta de Círculos, na Barra de Ferramentas, ou digitando-se sua equação no campo Entrada.

a) Ferramenta Círculo dado centro e um de seus pontos: Com essa ferramenta o usuário deverá clicar no centro da circunferência e em um de seus pontos, assim a circunferência será criada na Janela de Visualização e sua equação cartesiana aparecerá na Janela de Álgebra.

b) Ferramenta Círculo dado Centro e Raio: Nesta ferramenta o usuário deverá clicar no centro da circunferência e informar o valor do raio. Feito isso, a circunferência será criada e sua equação será exibida.

c) Ferramenta Círculo definido por três pontos: Com esta ferramenta é possível criar a circunferência a partir de três pontos não colineares do plano. Clicando-se sobre os pontos a circunferência será exibida, assim como sua equação.

d) Equação da Circunferência: No campo Entrada é possível digitar a equação da circunferência, e a partir daí gerar seu gráfico. Como exemplo, vamos gerar a circunferência que tem equação $x^2 + y^2 = 1$. Para isso, digitamos no campo Entrada “x^2+y^2=1”.

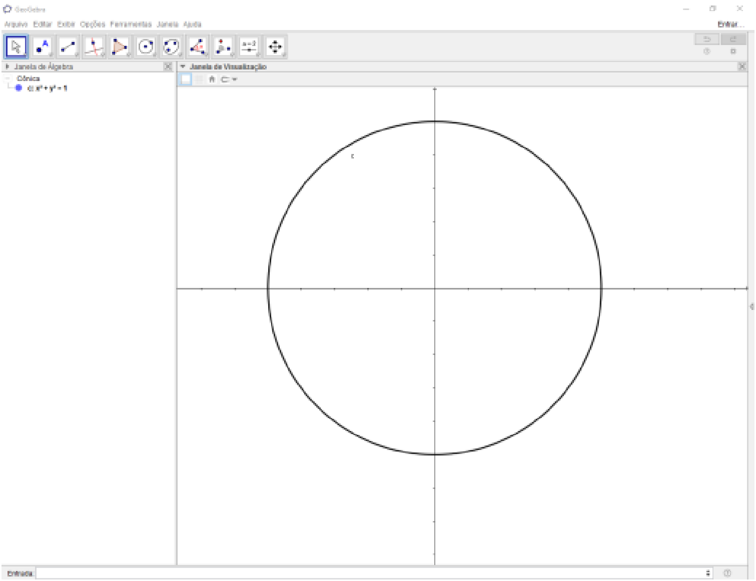

Figura 4.46: Círculo centro na origem e raio 1

4.9 ELIPSE

A Elipse pode ser construída a partir do campo Entrada, digitando-se sua equação, ou usando-se a ferramenta Elipse, no ícone de Cônicas, na Barra de Ferramentas.

a) Ferramenta Elipse: Basta selecionar a ferramenta Elipse no ícone de Cônicas da Barra de Ferramentas, e em seguida escolher dois pontos que serão os focos, e um ponto da elipse, assim a elipse será criada e sua equação será exibida.

b) Equação da Elipse: No campo Entrada basta digitar a equação da elipse desejada e apertar Enter, assim a curva será criada e sua equação exibida. Como exemplo, seja construída a curva de equação $\frac{(x-5)^2}{6}+\frac{(y-1)^2}{3}=1$. Para isso, deve ser digitado no campo Entrada "(x-5)^2/6+(y-1)^2/3=1", e a elipse será criada, como mostra a figura a seguir.

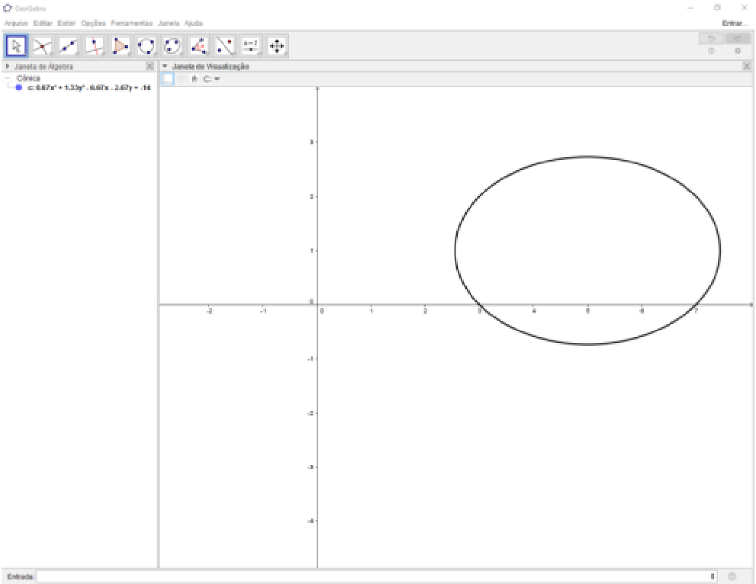
Figura 4.47: Elipse centro em (5,1)

4.10 HIPÉRBOLE

A Hipérbole pode ser construída a partir do campo Entrada, digitando-se sua equação, ou usando-se a ferramenta Hipérbole, no ícone de Cônicas, na Barra de Ferramentas.

a) Ferramenta Hipérbole: Basta selecionar a ferramenta Hipérbole, no ícone de Cônicas da Barra de Ferramentas, e em seguida escolher dois pontos que serão os focos, e um ponto da hipérbole, assim a hipérbole será criada e sua equação será exibida.

b) Equação da Hipérbole: No campo Entrada basta digitar a equação da hipérbole desejada e apertar Enter, assim a curva será criada e sua equação exibida. Como exemplo, seja construída a curva de equação $\frac{(x-3)^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$. Para isso, deve ser digitado no campo Entrada “(x-3)^2/2-(y-1)^2/2=1”, e a hipérbole será criada, como mostra a figura a seguir.

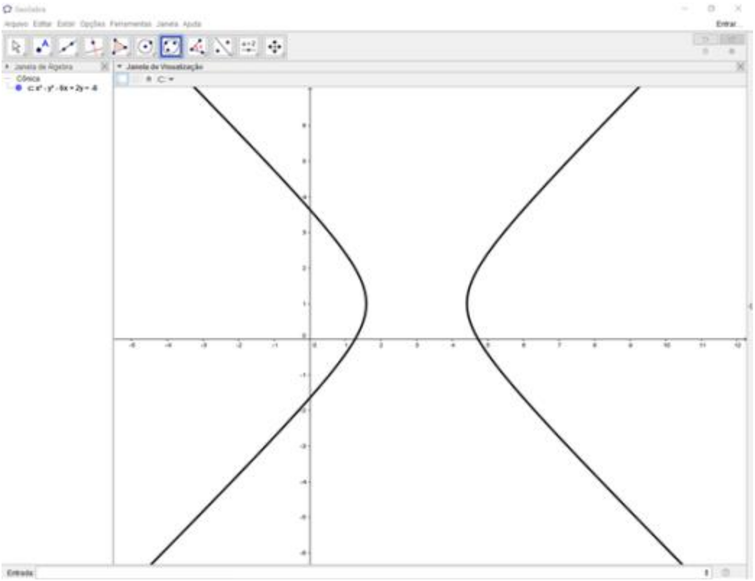

Figura 4.48: Hipérbole centro em (3,1)

4.11 BRUXA DE AGNESI

A fim de se construir a curva de Agnesi, mais conhecida como Bruxa de Agnesi, podemos usar sua equação cartesiana, equação paramétrica ou fazer a construção do lugar geométrico, como foi mostrado em 3.11.

a) Equação Paramétrica: Para a construção da curva por meio da equação paramétrica, iremos inicialmente criar o parâmetro r na ferramenta de Controle Deslizante, no ícone de Controle Deslizante. Com o parâmetro r criado basta digitar no campo Entrada "curva" e em seguida selecionar a opção "Curva[<Expressão>,<Expressão>,<Variável>,<Valor Inicial>,<Valor Final>]", e fazer o seguinte preenchimento: "Curva[2*r*cotg(t),2*r*(sen(t))^2,t,0,2*π]", e a bruxa de Agnesi será criada, como mostra a figura a seguir.

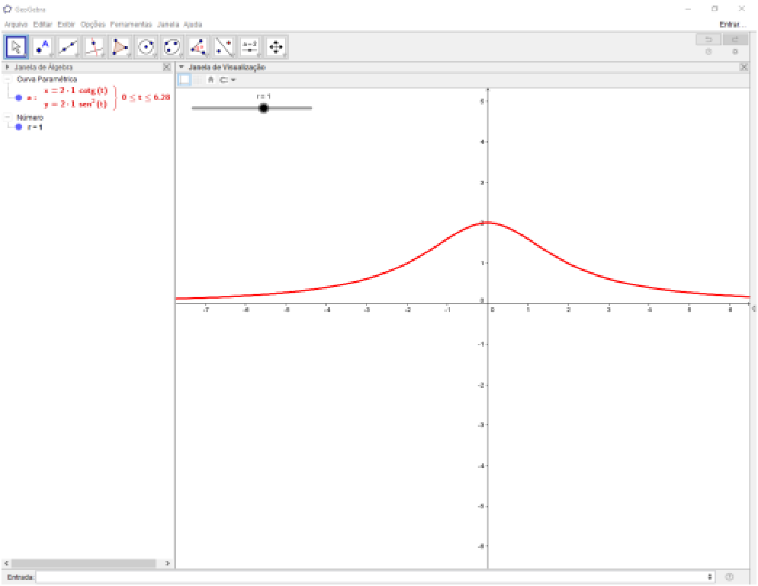

Figura 4.49: Bruxa de Agnesi eq. Paramétrica

b) Equação Cartesiana: A fim de se construir à curva de Agnesi por meio da equação cartesiana, criaremos, da mesma forma, o parâmetro r na ferramenta de Controle Deslizante. Em seguida, no campo Entrada deve ser digitado “y=(8*r^3)/(x^2+4*r^2)”. Assim, a curva será criada, como mostra a figura a seguir.

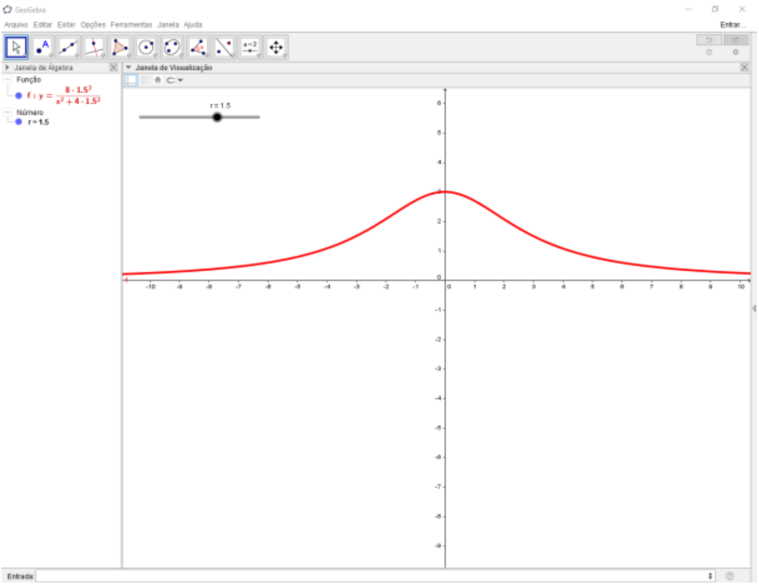

Figura 4.50: Bruxa de Agnesi eq. Cartesiana

c) Construção do Lugar Geométrico: Para a construção do lugar geométrico definido como bruxa de Agnesi, seguiremos os seguintes passos:

- Construir o parâmetro r com a ferramenta de Controle Deslizante.
- Criar o ponto $A = (0, r)$.
- Criar o círculo C_1 de centro A e raio r, com a ferramenta de círculo.

- Criar as retas $r_1: y = 0$ e $r_2: y = 2r$.
- Criar a semirreta s com origem A e ponto B sobre o círculo C_1, no sentido de r_2.
- Com a ferramenta de Interseção entre dois Objetos no ícone de pontos, criar o ponto C que é a interseção entre s e r_2.
- Com a ferramenta de Reta Perpendicular, criar as retas r_3 perpendicular ao eixo OX passando por C e r_4 perpendicular ao eixo OY passando por B.
- Com a ferramenta de Interseção entre dois Objetos, criar o ponto D de interseção entre as retas r_3 e r_4.
- Clicar com o botão direito sobre o ponto D e escolher a opção Habilitar Rastro e Renomear chamando-o por P.
- Mover o ponto B e o lugar geométrico da Bruxa de Agnesi será criado, como mostra a figura a seguir.

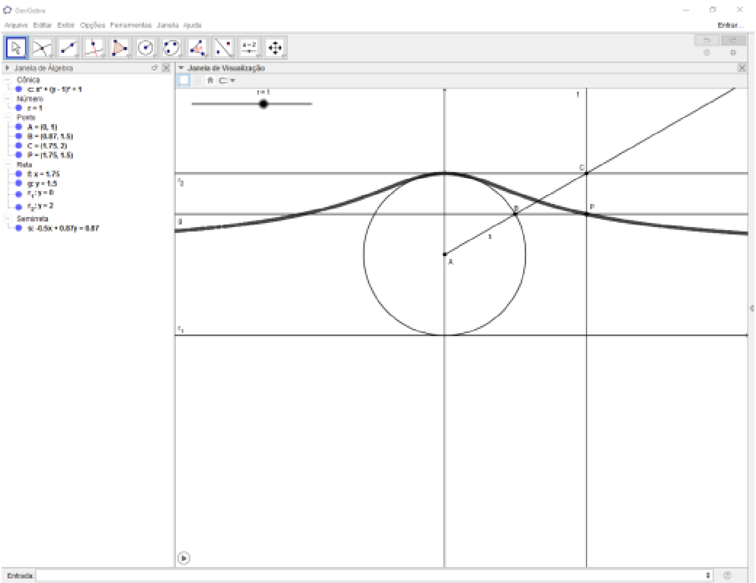
Figura 4.51: Construção da Bruxa de Agnesi

4.12 CICLOIDE

Para a construção da cicloide usaremos sua equação paramétrica e depois faremos a construção do lugar geométrico que define a curva.

a) Equação paramétrica: Inicialmente deve ser criado o parâmetro r com a ferramenta de Controle Deslizante. Em seguida, no campo Entrada digita-se “Curva” e seleciona-se a opção

“Curva[<Expressão>,<Expressão>,<Variável>,<ValorInicial>,<ValorFinal>]” e se preenche da seguinte forma: “Curva[r*t-r*sen(t),r-r*cos(t),t,0,20]”, os valores 0 e 20 podem ser mudados. Assim, a curva cicloide será criada, como mostra a figura seguinte.

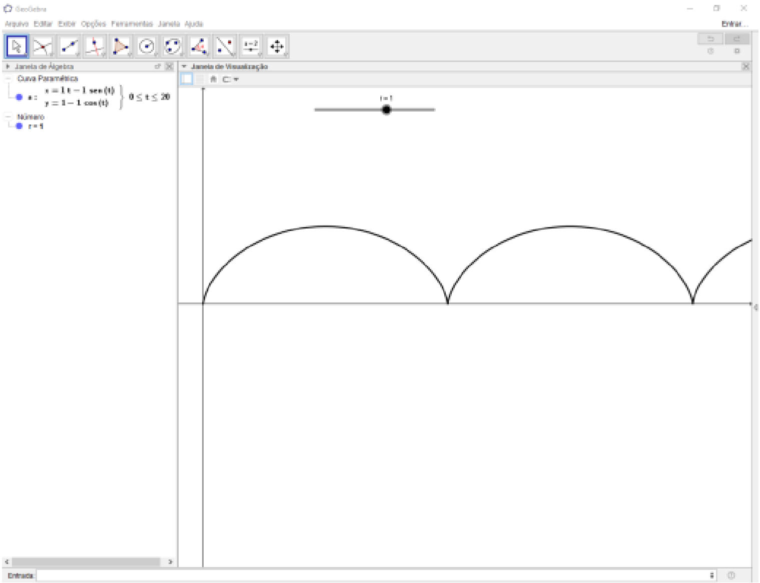

Figura 4.52: Cicloide eq. Paramétrica

b) Construção do lugar geométrico: Para a construção do lugar geométrico definido como Cicloide, devemos seguir os seguintes passos:

- Criar os parâmetros r e t com a ferramenta de Controle Deslizante.
- Criar os pontos de $A = (t, r)$.
- Com a ferramenta Círculo dado Centro e Raio clicar sobre o ponto A e definir r como sendo o raio do círculo.
- Criar um ponto B sobre o círculo e arrastá-lo para a origem do sistema de eixos quando o parâmetro $t = 0$.
- Usar a ferramenta Rotação em torno de um Ponto no ícone de Ferramentas de Transformação na Barra de Ferramentas, e clicar sobre B e depois sobre A e selecionar o ângulo $-t$. Assim, será criado um ponto B'.
- Criar o segmento AB'
- Clicar com o botão direito sobre B' e selecionar a opção Habilitar Rastro, e mover o valor de t, assim a curva será criada, como mostra a figura a seguir.

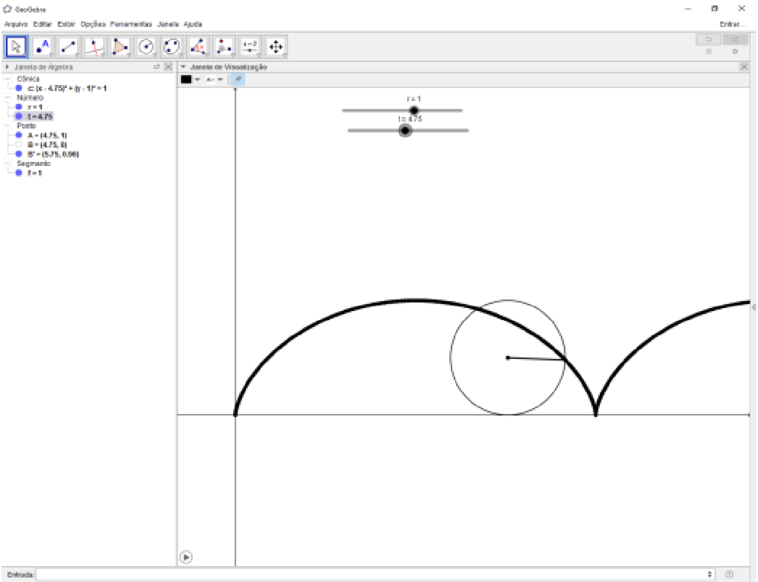
Figura 4.53: Construção da Cicloide

4.13 EPICICLOIDE

A Epicicloide pode ser construída na GeoGebra, a partir da equação paramétrica da curva ou pela definição, dadas em 3.17.

a) Equação Paramétrica: Utilizando a ferramenta Controle Deslizante, na Barra de Ferramentas, devemos criar os parâmetros R e r. Em seguida, no campo Entrada, utilizando a estrutura “Curva[<Expressão>,<Expressão>,<Variável>,<Valor Inicial>,<Valor Final>]” devemos digitar as equações da curva, mostradas em 3.17, e fazer o seguinte preenchimento “Curva[(R+r)*cos(t)-r*cos(((R+r)/r)*t),(R+r)*sen(t)-r*sen(((R+r)/r)*t),t,0,100]”. Desta forma, a curva será gerada na Janela de Visualização e sua equação paramétrica será exibida na Janela de Álgebra, e variando os valores de R e r é possível ver as variações produzidas na curva, como mostram as figuras a seguir.

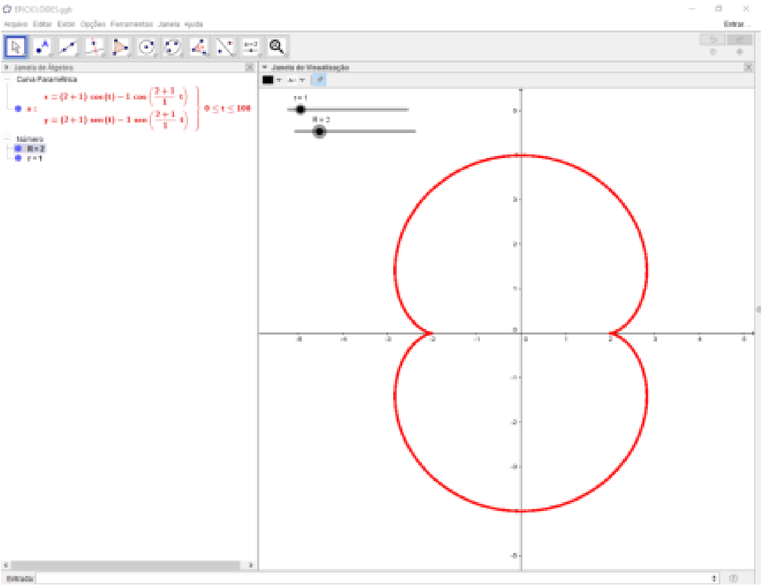

Figura 4.54: Epicicloide com R=2r

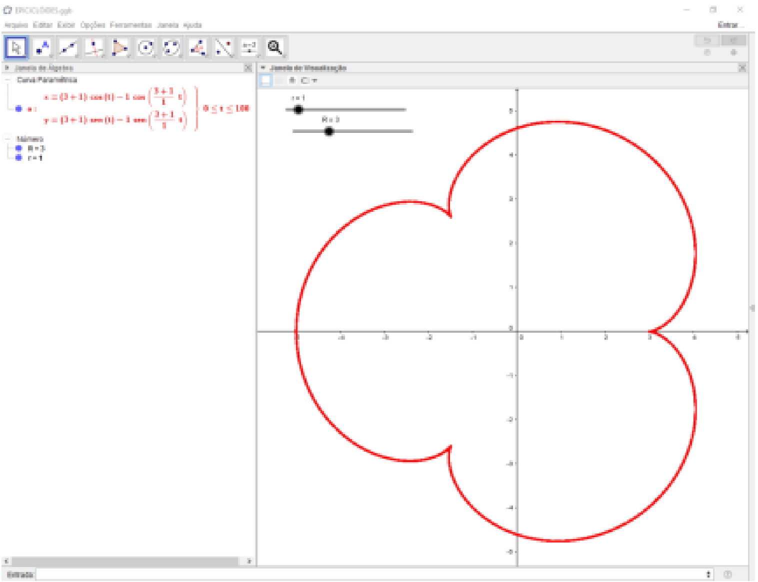

Figura 4.55: Epicicloide com R=3r

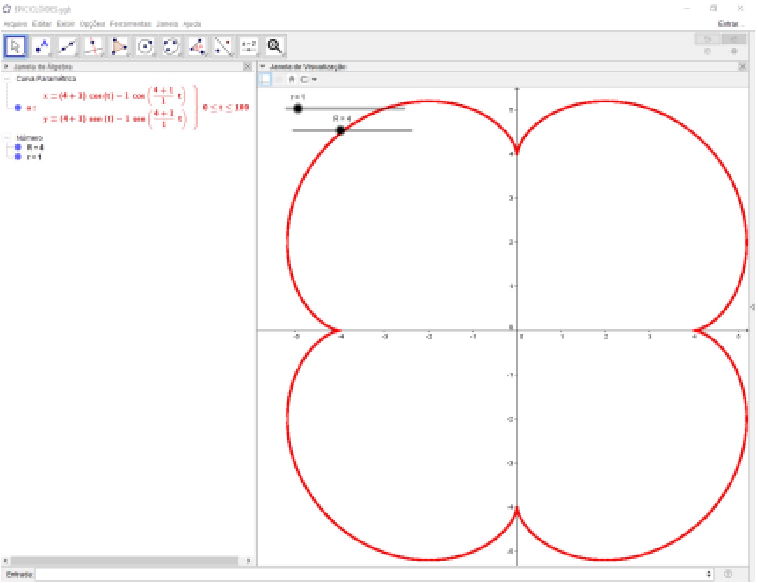

Figura 4.56: Epicicloide com R=4r

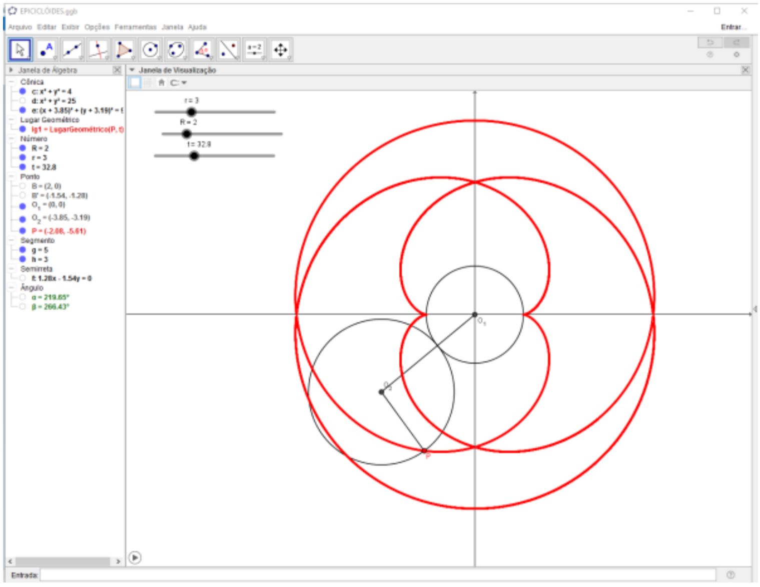

Figura 4.57: Epicicloide com r=3 e R=2

b) Por construção: Para se construir a curva, a partir de sua definição, devemos seguir os seguintes passos:

- Construa os parâmetros R e r, utilizando a ferramenta Controle Deslizante na Barra de Ferramentas;
- Crie o ponto $O_1 = (0,0)$;
- Construa o círculo C_1 de centro em O_1 e raio R, com a ferramenta Círculo dados Centro e Raio;
- Construa o círculo C de centro na origem e raio $R + r$;
- Construa o parâmetro t com valor mínimo 0 e valor máximo $2\pi(r + R)$;

- Construa o ponto $A = (R, 0)$;
- Com a ferramenta Ângulo com amplitude fixa, construa o ângulo $\widehat{AO_1B}$ com amplitude t/R;
- Construa a semirreta $s = O_1B$, com a ferramenta Semirreta, na Barra de Ferramentas;
- Faça o ponto $O_2 = C \cap s$, utilizando a ferramenta Interseção de dois Objetos;
- Construa o círculo C_2 de centro em O_2 e raio r;
- Com a ferramenta Ângulo com amplitude fixa, construa o ângulo $\widehat{BO_2P}$ com amplitude t/r;
- Construa os segmentos O_1O_2 e $O2P$;
- Habilite o rastro do ponto P, clicando sobre o mesmo com o botão direito do mouse e escolhendo a opção Habilitar Rastro;
- Dessa forma a curva será criada ao se "animar" o parâmetro t. E modificando-se os valores de R e r, obtém-se variações nas Epiciclóides. Pode-se, ainda, esconder a exibição de elementos irrelevantes a visualização da curva, como mostram as figuras a seguir.

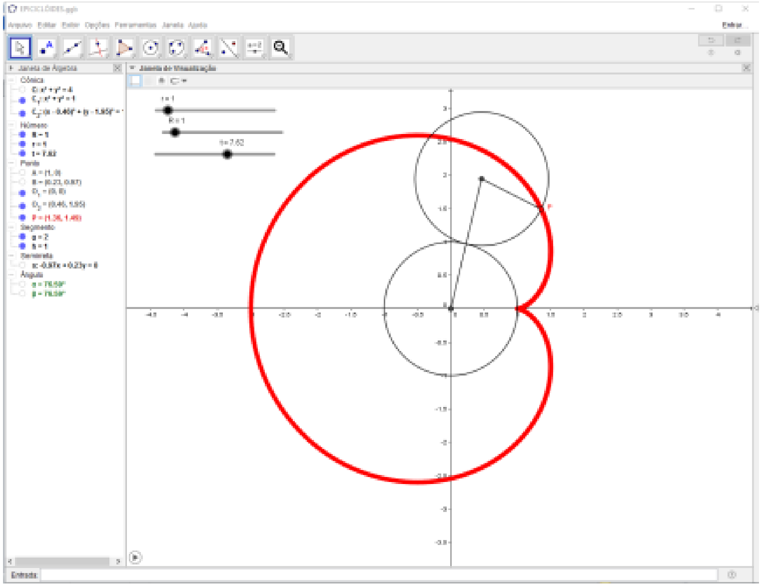

Figura 4.58: Cardioide

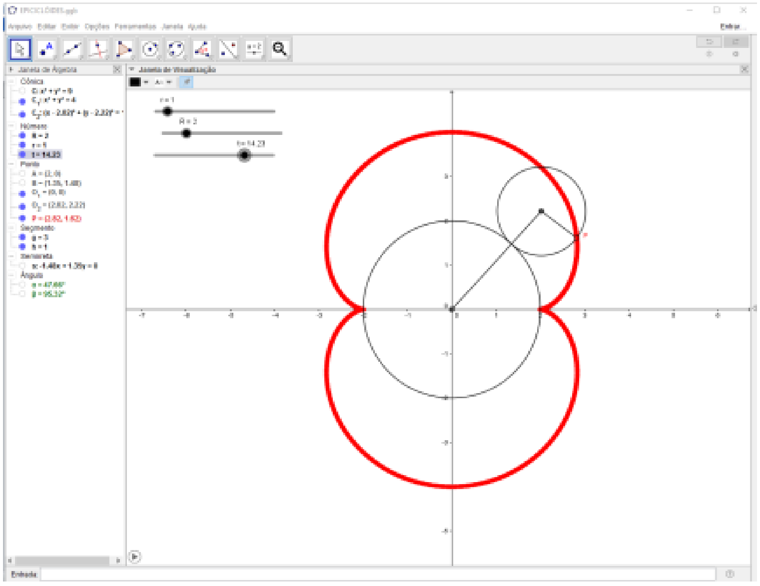

Figura 4.59: Epicicloide com R=2r

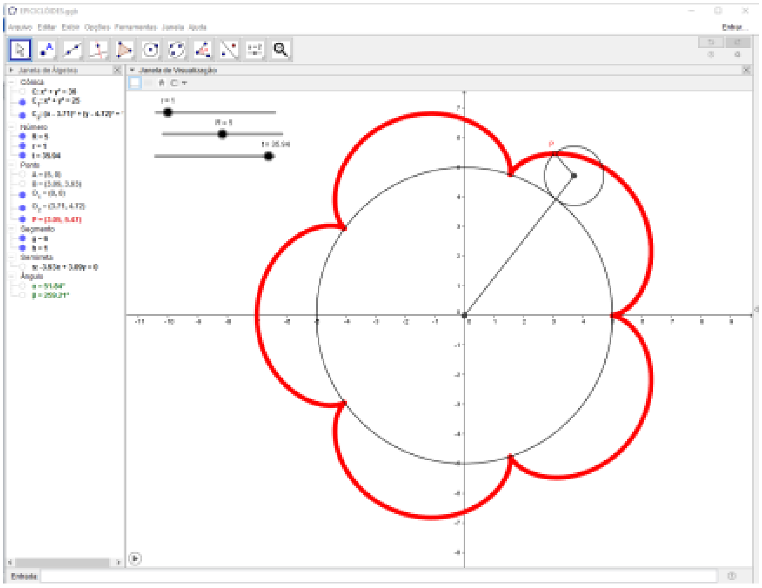

Figura 4.60: Epicicloide com R=5r

4.14 HIPOCICLOIDE

A Hipocicloide pode ser construída no GeoGebra, a partir de sua equação paramétrica ou pela definição, ambas apresentadas em 3.18.

a) Pela equação paramétrica: Utilizando a ferramenta de Controle Deslizante, na Barra de Ferramentas, devemos criar os parâmetros R e r. Em seguida, no campo Entrada, utilizando a estrutura "Curva[<Expressão>,<Expressão>,<Variável>,<ValorInicial>,<ValorFinal>]" devemos digitar as equações da curva, mostradas em 3.18, e fazer o seguinte preenchimento “Curva[(R-r)*cos(t)+r*cos(((R-r)/r)*t),(R-r)*sen(t)-r*sen(((R-r)/r)*t),t,0,100]”. Desta forma, a curva será gerada na Janela de Visualização e sua equação paramétrica será exibida na Janela de Álgebra, e variando os valores de R e r é possível ver as variações produzidas na curva, como mostram as figuras a seguir.

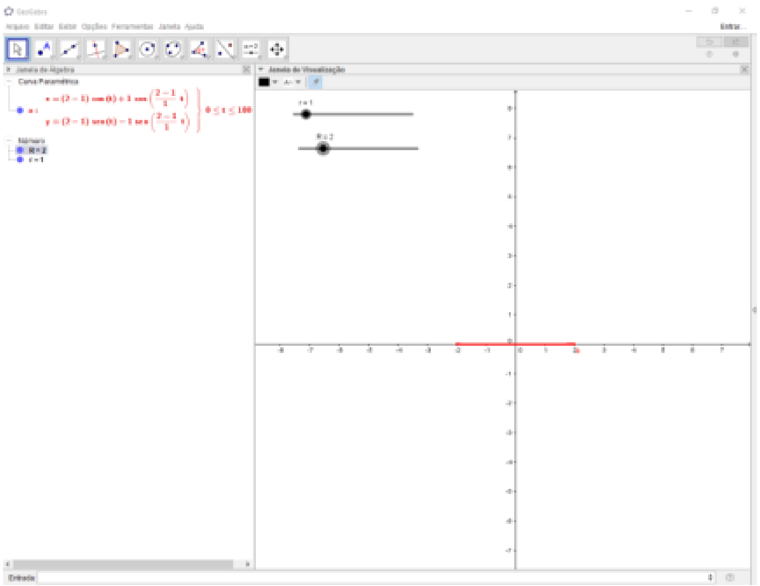

Figura 4.61: Hipoclicoide Degenerada

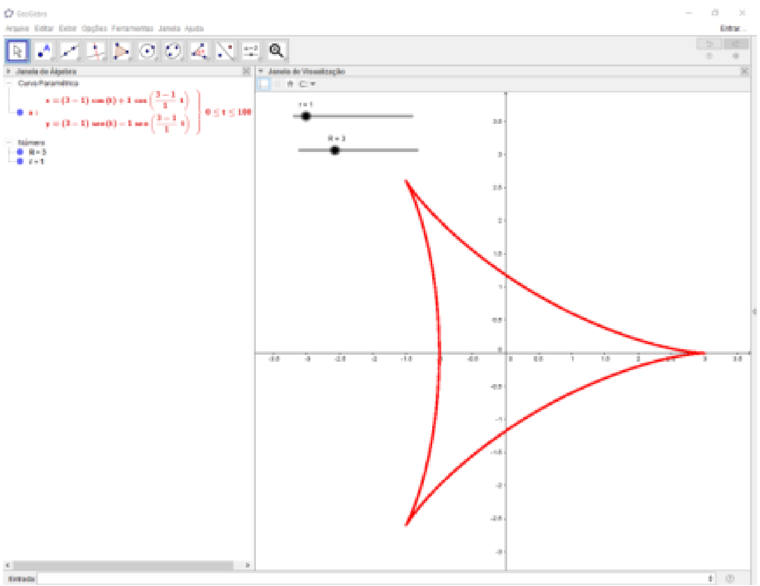

Figura 4.62: Hipocicloide com R=3r

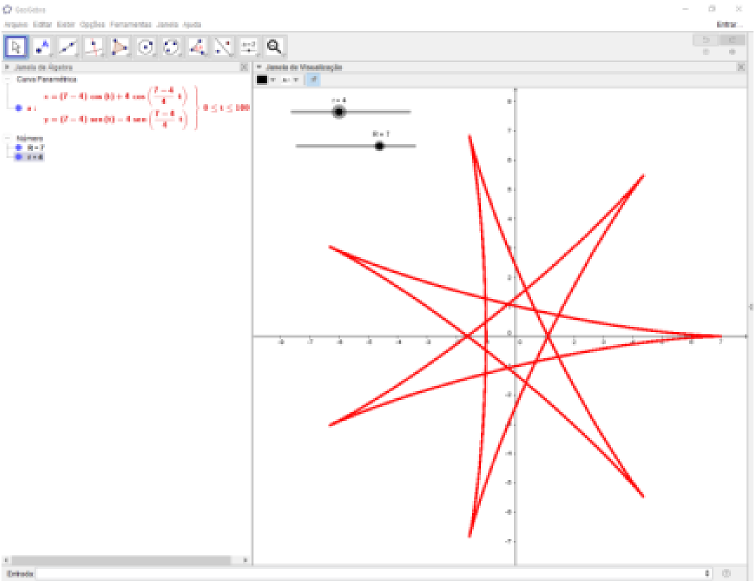

Figura 4.63: Hipocicloide com R=7 e r=4

b) Por construção: Para se construir a curva a partir de sua definição, devemos seguir os seguintes passos:

- Construa os parâmetros R e r com valor mínimo 1 e valor máximo 10, e t com valor mínimo 0 e máximo $2\pi R$, utilizando a ferramenta Controle Deslizante;
- Construa o ponto $O_1 = (0{,}0)$;
- Construa o círculo com centro em O_1 e raio R;
- Construa o círculo C com centro na origem e raio $R - r$;
- Construa o ponto $A = (R, 0)$;
- Construa o ângulo $\widehat{AO_1B}$ com amplitude fixa igual a t/R, utilizando a ferramenta Ângulo com amplitude fixa;
- Construa o segmento $m = O_1B$;
- Construa o ponto $O_2 = m \cap C$, utilizando a ferramenta Interseção entre dois objetos;
- Construa o círculo de centro em O_2 e raio r;
- Construa o ângulo $\widehat{BO_2P}$ com amplitude fixa igual a t/r;
- Construa o segmento $n = O_1O_2$ e o segmento $h = O_2P$;
- Habilite o rastro do ponto P com a ferramenta Habilitar rastro;
- Ao animar o parâmetro t a curva será criada na Janela de Visualização e sua equação será exibida na Janela de Álgebra. É possível, ainda,

verificar as variações sofridas na curva quando os valores de R e r mudam, como mostram as figuras a seguir.

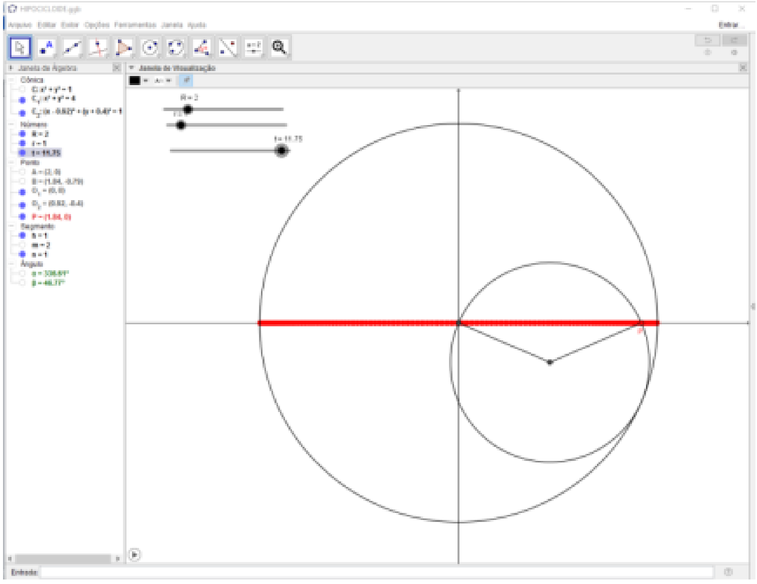

Figura 4.64: Hipocicloide com R=2r

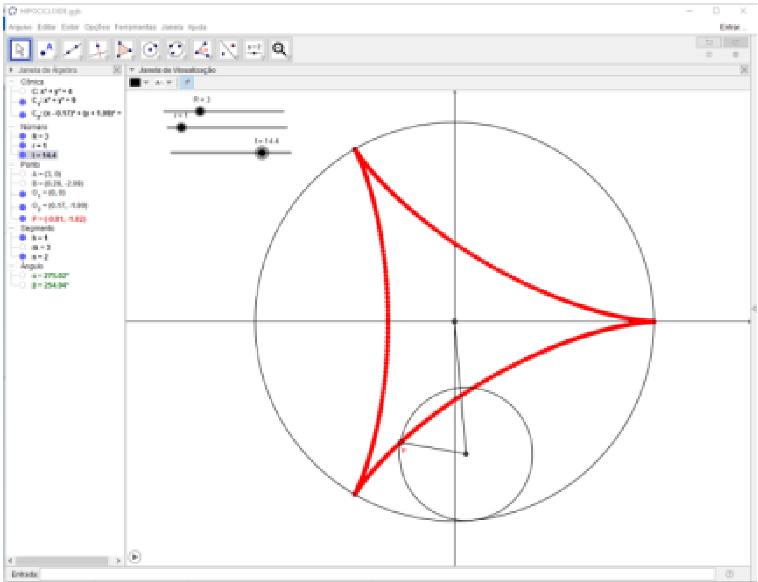

Figura 4.65: Hipocicloide com R=3r

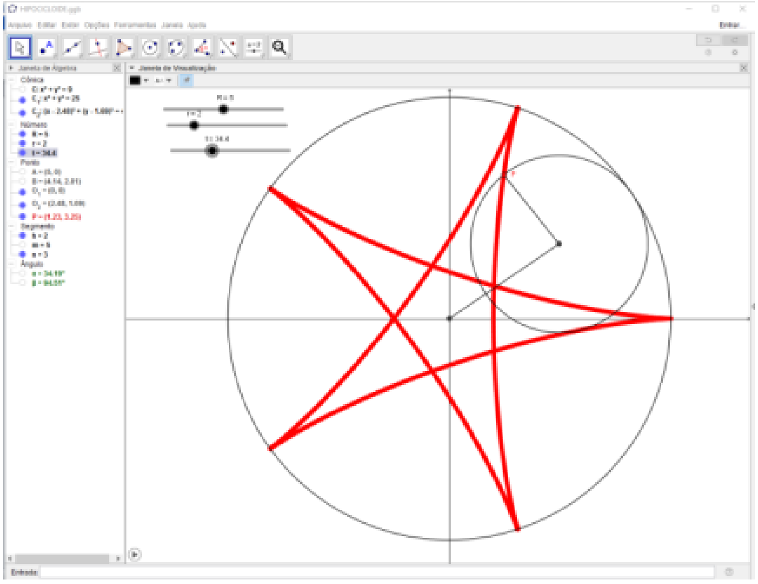

Figura 4.66: Hipocicloide com R=5 e r=2

4.15 LEMNISCATA DE BERNOULLI

A Lemniscata de Bernoulli pode ser construída a partir do campo Entrada, digitando-se sua equação cartesiana ou paramétrica. Como exemplo, seja digitado no campo Entrada a equação cartesiana “L:$(x^2+y^2)^2=xy$” da Lemniscata, sua equação será expressa na Janela de Álgebra e a curva será exibida na Janela de Visualização, como mostra a figura seguinte.

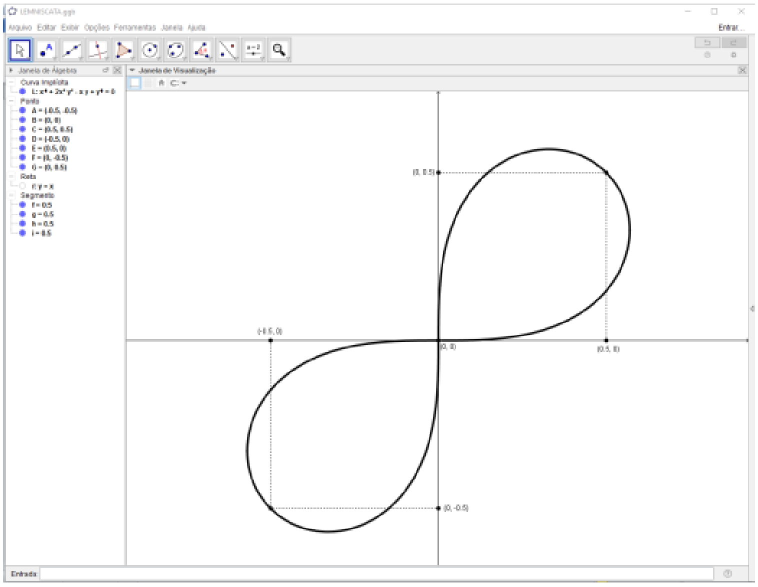

Figura 4.67: Lemniscata de Bernoulli

4.16 O FOLIUM DE DESCARTES

O Folium de Descartes pode ser criado a partir do campo Entrada, digitando-se sua equação cartesiana ou paramétrica. A fim de se estudar as variações causadas na curva a partir da mudança do valor a, pode-se criar o controle deslizante a com a ferramenta de Controle Deslizante, no ícone de Controle Deslizante, na Barra de Ferramentas. Após criado o Controle Deslizante, basta digitar no campo Entrada a equação “C:x³+y³=3axy”, e a curva será exibida na Janela de Visualização e sua equação aparecerá na Janela de Álgebra, como mostra a figura a seguir.

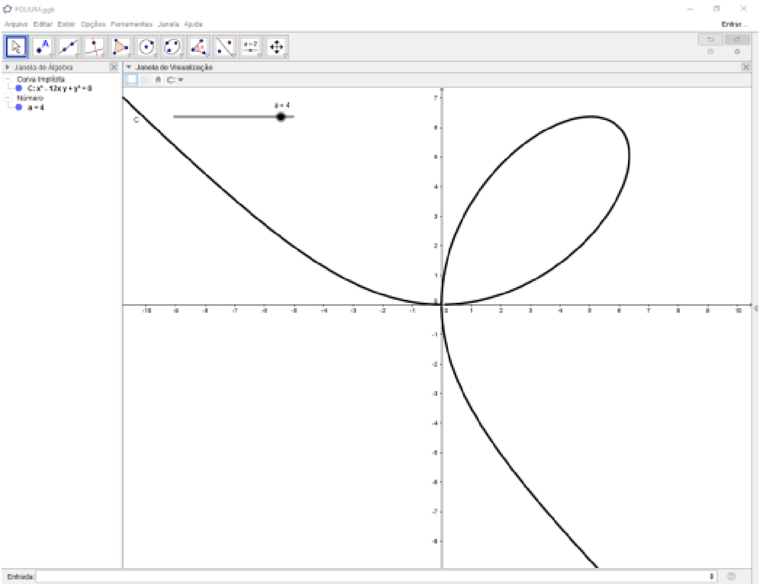

Figura 4.68: Folium de Descartes

4.17 HIPERBÓLICAS

Para a construção das curvas hiperbólicas no GeoGebra, basta utilizar as funções já definidas no *software*. Para isso, podemos digitar no campo Entrada “senh(x)” ou “cosh(x)” e as curvas serão criadas, como na figura seguinte.

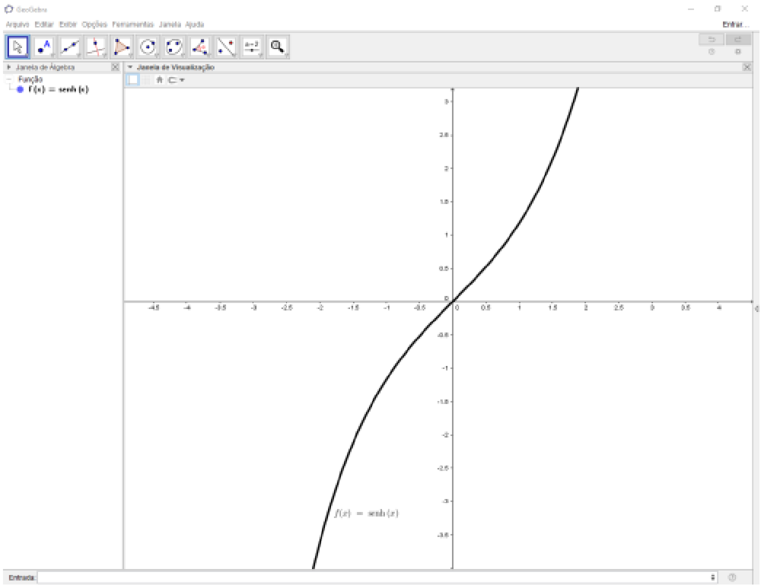

Figura 4.69: Seno Hiperbólico

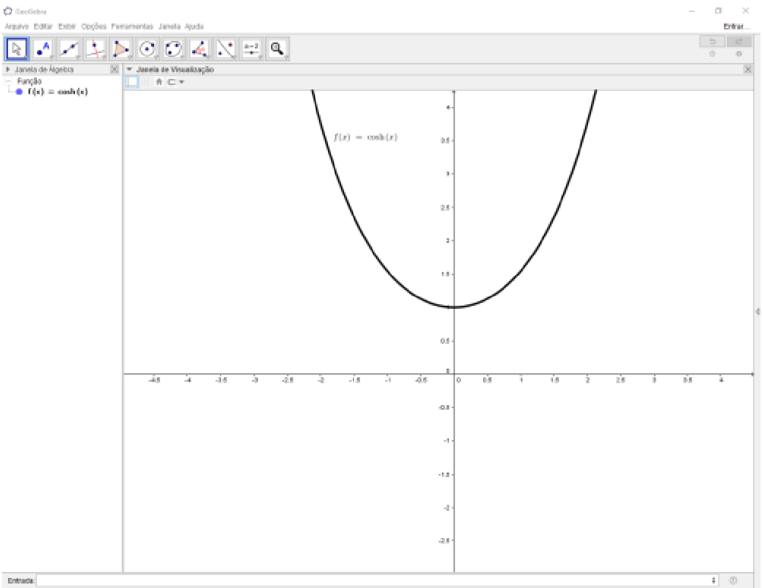

Figura 4.70: Cosseno Hiperbólico

4.18 ESPIRAL DE ARQUIMEDES

A Espiral de Arquimedes pode ser construída no GeoGebra a partir de sua equação cartesiana, paramétrica ou pela definição da curva. Vejamos algumas construções:

a) Equação paramétrica: No campo Entrada pode ser usado a opção "Curva[<Expressão>,<Expressão>,<Variável>,<Valor Inicial>,<Valor Final>]", com o seguinte preenchimento "Curva[t*cos(t), t*sen(t), t, 0, 15]". O valor 15 pode ser modificado caso o usuário julgue necessário. Dessa forma a curva será gerada e sua equação paramétrica exibida, como mostra a figura seguinte.

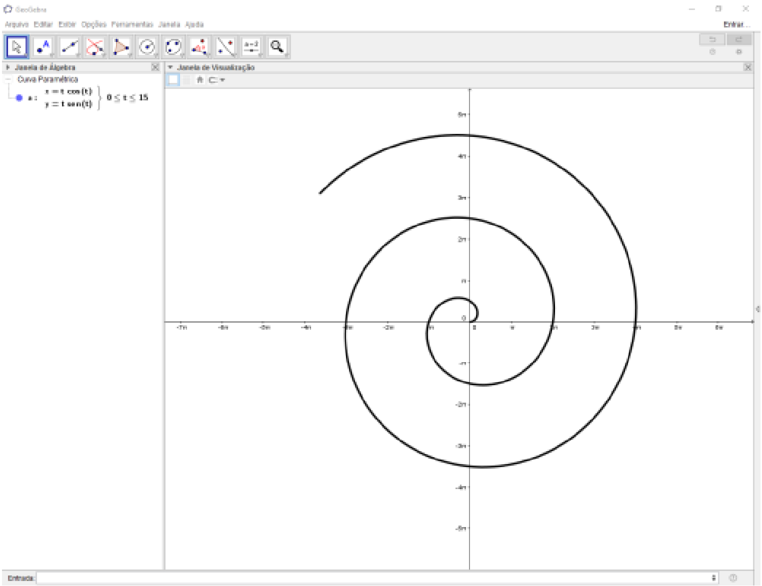

Figura 4.71: Espiral de Arquimedes equação

b) Pela definição: Vamos construir a curva a partir de sua definição dada em 3.16. Para isso o usuário deve:

- Com a ferramenta Círculo dados centro e Raio crie o círculo de centro na origem, ponto A, e raio 1;
- Construa o ponto $B = (0,0)$;
- Crie o controle deslizante t, com valor mínimo 0 e valor máximo 15;
- Com a ferramenta Ângulo com Amplitude Fixa, clique sobre o ponto B e em seguida sobre o ponto A e escolha t como amplitude do ângulo, criando assim o ponto B' sobre o círculo;
- Com a ferramenta de Semirreta, crie a semirreta AB';
- Crie o ponto "P=(t*cos(t),t*sen(t))";
- Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto P e habilite a exibição do rastro do ponto;
- Clique com o botão direito do mouse sobre o Controle Deslizante t e faça a animação;
- Assim a espiral de Arquimedes será criada, como mostra a figura a seguir.

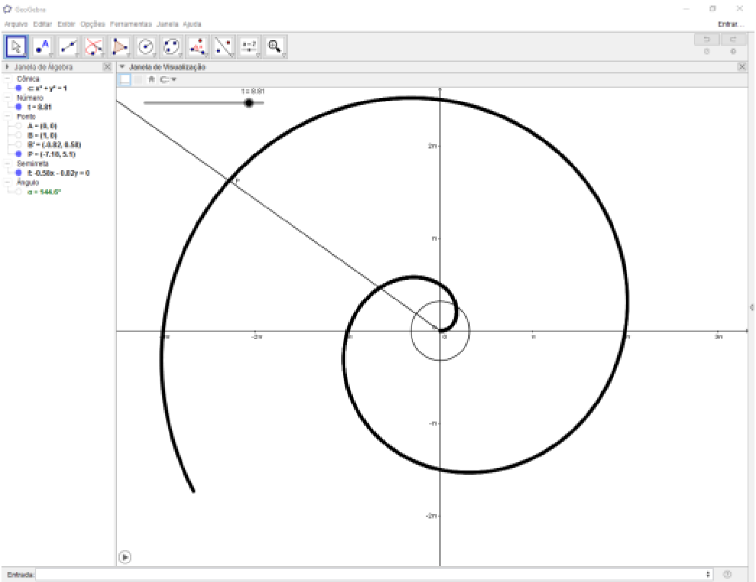

Figura 4.72: Espiral de Arquimedes construção

4.19 CATENÁRIA A PARTIR DA PARÁBOLA

Para a construção, no GeoGebra, da parábola que rola sobre o eixo OX e, consequentemente, a exibição do lugar geométrico do foco da parábola, quando a mesma rola, seguiremos os seguintes passos:

- No campo Entrada digite “f(x)=x^2”, para criar da parábola $f(x) = x^2$;
- Crie o ponto $F = (0,1/4)$ que é o foco da parábola;
- Crie um ponto P sobre a parábola f;
- Use a ferramenta Reta Tangente para criar a reta t, tangente à parábola f, no ponto P;
- Crie o ângulo α formado entre a reta t e o eixo OX, digitando no campo entrada “α=ÂNGULO[EixoX,t]”;
- Faça a rotação da parábola f (criando assim a parábola f_1) por um ângulo – α, digitando no campo Entrada “Girar[f, -α]”;
- Faça a rotação da reta t (criando assim a reta t’) por um ângulo – α, digitando no campo Entrada “Girar[t, -α]”;
- Faça a rotação do foco F (criando assim o ponto F’) por um ângulo – α, digitando no campo Entrada “Girar[F, -α]”;
- Faça a rotação do ponto P (criando assim o ponto P’) por um ângulo – α, digitando no campo Entrada “Girar[P, -α]”;

- Defina o número k como sendo o comprimento do arco da parábola f, do ponto $(0,0)$ ou ponto P, digitando no campo entrada “Integral[sqrt(1 + 4x²), 0, x(P)]”;
- Crie o ponto $K = (k, 0)$;
- Com a ferramenta de criação de vetor, crie o vetor $u = P'K$ digitando no campo Entrada “Vetor[P', K]”;
- Com a ferramenta Translação por um Vetor, na Barra de Ferramentas, translade a parábola f_1 pelo vetor u, criando assim a curva a;
- Com a ferramenta Translação por um Vetor, translade o ponto F' pelo vetor u, encontrando assim o ponto F'';
- Esconda todos os objetos, deixando apenas as curvas f e a e os pontos P, F e F'';
- Clicando com o botão direito do mouse sobre o ponto F'', habilite o rastro desse ponto;
- Mova o ponto P para rolar a parábola f e criar o lugar geométrico do ponto F''.
- Ao mover o ponto P o rastro do lugar geométrico do ponto F'', que é o foco da parábola que rola sobre o eixo OX, será criado. A fim de se obter a curva completa, pode-se usar a ferramenta Lugar Geométrico na Barra de Ferramentas. A figura a seguir mostra o resultado da construção.

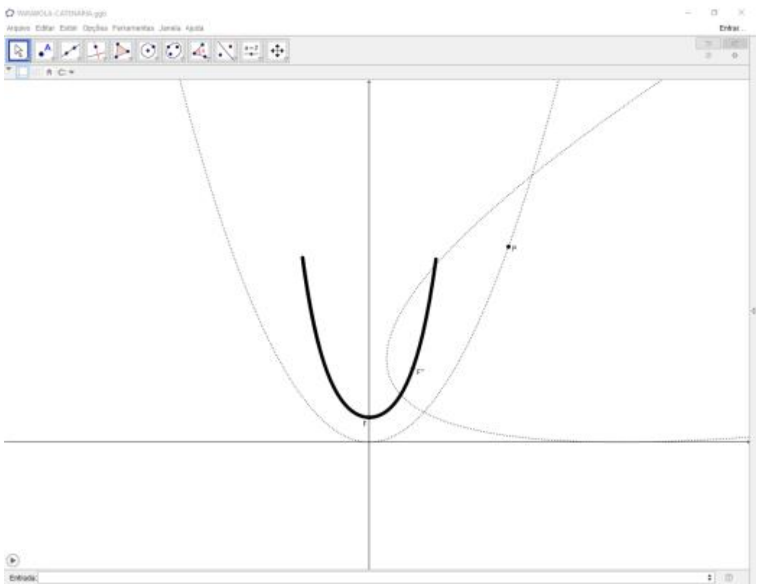

Figura 4.73: Catenária a partir da Parábola

4.20 CURVA DE LARGURA CONSTANTE

A fim de construirmos uma curva de largura constante, o triângulo de Realeaux, utilizo aqui a construção feita por Sérgio Dantas (acesso em 12/07/2017)[18]. Essa construção segue os seguintes passos:

- Crie o controle deslizante max com valor mínimo 0 e valor máximo 50;
- Crie o controle deslizante d com valor mínimo 0 e valor máximo max;
- Crie as funções $f1(x) = 0$ e $f2(x) = 1$, digitando no campo Entrada "f_1(x) = 0" e "f_2(x) = 1", respectivamente;
- Crie o número "α=Resto[180d / π, 60]", a partir do campo Entrada;
- Crie o número "e=Quociente[d, 1.0472] + 1", a partir do campo Entrada;
- Crie o ponto "O=Se[Resto[e, 2] == 0, (e / 2 π / 3, 0), (d - (e - 1) π / 6, 0)]", a partir do campo Entrada;
- Crie o número "a=Resto[e, 6]"; a partir do campo Entrada;
- Crie o ponto "P=(x(O), 1)"; a partir do campo Entrada;
- Crie o ponto "A=Se[a == 1, Girar[O, (-α)°, P], Se[a == 2, Girar[P, 60° - α°, O], Se[a == 3, P, Se[a == 4, Girar[P, (-α)°, O], Se[a == 5, Girar[O, 60° - α°, P], Se[a == 0, O]]]]]]", a partir do campo Entrada;
- Crie o ponto "B=Se[a == 1, Girar[A, 60°, P], Se[a == 2, O, Se[a == 3, Girar[O, (-α)°, P], Se[a == 4, Girar[P, 60° - α°, O], Se[a == 5, P, Se[a == 0, Girar[P, (-α)°, O]]]]]]]", a partir do campo Entrada;
- Crie o triângulo equilátero ABC, com a ferramenta Polígono Regular, clicando sobre A e depois B, assim o ponto C será automaticamente criado;
- Clique na ferramenta Arco Circular e construa três arcos: de centro em A e por B e C, de centro em B e por A e C e de centro em C e por A e B;
- Por último oculte os pontos A, B e C e anime o controle deslizante d.

[18] DANTAS, Sérgio. **Triângulo de Reuleaux**.

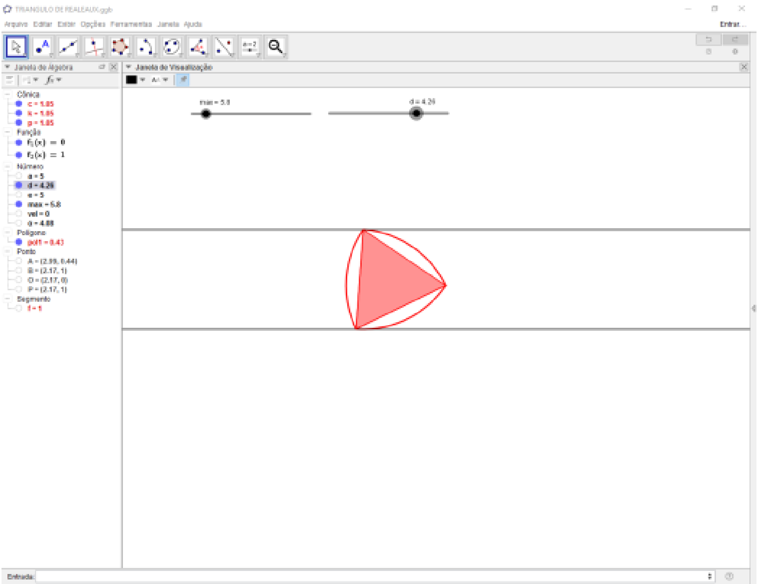

Figura 4.74: Triângulo de Realeaux rolando

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Todas as curvas propostas foram possíveis de serem realizadas com o *software* GeoGebra, mostrando assim a importante ferramenta que o *software* representa no que se refere ao ensino de matemática. Além das curvas mais básicas como, por exemplo, a Reta, foi possível a construção de curvas mais complexas, como no caso da Parábola que gira sobre o eixo OX e a construção do Triângulo de Realeaux, ambas as construções exigiram um nível maior de dificuldade ao utilizarmos ferramentas como Rotação e translação por um Vetor.

Foram construídas mais de vinte curvas planas, várias das quais aparecem nas aulas de matemática do ensino médio. De modo que, temos aqui um “manual” de curvas planas a ser utilizado em sala de aula pelos professores que se aventurarem pelos belos caminhos das construções dinâmicas.

Esse trabalho teve uma longa pesquisa das curvas planas e sucessivas tentativas e erros até chegarmos ao formato exposto aqui, como é o caso da Parábola que rola. As referências foram fundamentais para a elaboração do trabalho, tanto no caso da descrição das curvas como no caso de suas construções no GeoGebra, cito aqui a construção do Triângulo de Realeaux, que teve sua construção baseada na construção de Sérgio Dantas (Acesso em 12/07/2017).

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGARWAL, A; MARENGO, J. **The Locus of the Focus of a Rolling Parabola**, 2009. Disponível em:<https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/cmj_ftp/CMJ/March%202010/3%20Articles/5%20Agarwal/locus_of_focus-final_version.pdf> Acesso em: 12/07/2017.

ALENCAR, H; SANTOS, W. **Geometria diferencial das curvas planas**, 2002. Disponível em:<https://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjkvNLYhYTVAhWGkZAKHcS0B2cQFggmMAA&url=http%3A%2F%2Fwww.im.ufal.br%2Fposgraduacao%2Fposmat%2Findex.php%2Fdownloads%2Fcategory%2F6-livros%3Fdownload%3D61%3Alivro.geometria.diferencial.das.curvas.planas02.07.2003&usg=AFQjCNHxPJDdm4JFdu5_VQNL9515S4Iwmw>. Acesso em: 12/07/2017.

CARVALHO, S.P. **As Funções Hiperbólicas**, 2005. Disponível em:<http://www.mat.ufmg.br/comed/2005/b2005/funchiper.pdf>. Acesso em: 12/07/2017.

DANTAS, Sérgio. **Triângulo de Reuleaux**. . Disponível em:<http://ogeogebra.com.br/arquivos/reuleaux.pdf> Acesso em: 12 de julho 2017.

DANTAS, Sérgio. **Triângulo de Reuleaux**. . Disponível em:<https://www.geogebra.org/m/rdfubsfb> Acesso em: 12 de julho 2017.

FRENSEL, K; DELGADO, J. **Equações paramétricas das Cônicas**. Disponível em:<http://www.joinville.udesc.br/portal/professores/eliane/materiais/equa__es_param_tricas.pdf> Acesso em: 12/07/2017.

FRENSEL, K; DELGADO, J**. Parametrização de algumas curvas planas**. Disponível em:<https://www.yumpu.com/pt/document/view/15580929/aula-3-professores-da-uff>. Acesso em: 12/07/2017.

INSTITUTO GEOGEBRA. **Site Geogebra**. Disponível em:<http://www.geogebra.org>. Acesso em: 12 de julho 2017.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio - volume 1**, 9ª ed., SBM, Rio de Janeiro, 2006a.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio - volume 3**, 6ª ed., SBM, Rio de Janeiro, 2006b.

LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e cálculo vetorial**. 2ª ed. Coleção Matemática Universitária. IMPA, 2008.

MANUAL GEOGEBRA. **Site Geogebra**. Disponível em: <https://wiki.geogebra.org/pt/Manual>. Acesso em 12/07/2017.

MELLO, J.L.P. **Revista de professor de matemática** ed. 81. Disponível em:<http://ogeogebra.com.br/arquivos/reuleaux_rpm81.pdf> Acesso em: 12 de julho 2017.

STEWART, James. **Cálculo, volume I**, 4ª ed., São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

VOLOCH, J. F. **Curvas de largura constante**. Matemática Universitária, nº 5, junho de 1987, IMPA, RJ.