

Dualidade do Fator de Escala e Cosmologias Pré-Big-Bang

Andre Luiz Alves Lima

Orientador: Prof. Dr. Galen Mihaylov Sotkov

Departamento de Física
Universidade Federal do Espírito Santo

Tese apresentada para obtenção do título de

Doutor em Física

Vitória – 2017

*

Para as jovens alunas e alunos da Escola Fátima Soares e de todas as escolas rebeldes que de outubro a novembro de 2016 lutaram pelo pensamento livre e pelo direito ao conhecimento.

Que o futuro traga uma universidade pública de excelência, diversa, plural e democrática, digna de sua coragem; e que nós fabriquemos esse futuro.

Agradecimentos

Uma rede de amizades me sustenta.

Naiara desde já nem me lembro quando está em minha vida ajudando a fazer quem eu sou. As meninas Lovelace, Domitilla, Alexia, Chava, Anna e Ana, desde ainda antes, se é possível.

Igor é uma amizade constante e intercontinental desde que muito tempo atrás começamos a estudar a curvatura do universo. Ulysses vem sendo amigo, professor e um coorientador também há muito, e é um enorme privilégio ter sido seu colaborador nesta pesquisa.

Laura, bichinho, me reencontrou com as coisas fantásticas. Um bando de bichinhos me acolheu, Pólinha eu não sei o que que eu faço, Acácio me lembrou que pensar é um ato de coragem, Vic me lembra sempre que a física é extraordinária, Ana tramou planos junto a padres, Davis e Bel me lembraram de agir, Nildete teve coragem a vida toda, Toninho plantou um jardim no caos, Lori pensou comigo em cafeterias, Harolda é uma gota de mercúrio, Rovená um coração numa trincheira.

Luana me abraçou com amor enquanto eu fazia a janta.

Minha família é um raio da sorte que tive, por serem gente tão boa, Carolinha que não sabe o que eu faço, Lucas que no fundo não liga, Marianne que acha interessante, Fefe que viu não viu em sonho, Tathi que sonhou e viu, André que concorda com Lívia, que acha que estudo Mecânica, Lorena e Thiago que acham Graça, Nilvan e Márcia estão procurando, todos esses, e eu, amamos Armezinda que acha que eu deveria ter feito gastronomia.

Em meus pais desde sempre encontrei todo o suporte necessário para que, dentre muitas coisas, eu pudesse perseguir uma carreira em Ciências, além de um lar repleto de amor e exemplo de coragem e bondade. É impossível descrever o quanto sou grato.

Em Galen Sotkov, meu professor e orientador desde muito antes do começo desses últimos quatro anos, tenho a alegria de ter encontrado um grande amigo com um coração enorme. Esta tese é fruto direto de seu apoio, colaboração e de seu trabalho, em inúmeros sentidos, e tudo isso continua. Wish me luck, e

Avanti.

*

Este trabalho foi realizado com o apoio financeiro da CAPES.

Resumo

Esta tese é uma investigação de modelos cosmológicos duais sob uma inversão do fator de escala no tempo conforme, na gravitação de Einstein. A transformação de Dualidade do Fator de Escala no tempo conforme (DFE) atua como um mapa entre altas e baixas energias, e entre evoluções aceleradas e desaceleradas do universo. Utilizada enquanto um princípio de simetria, a DFE seleciona modelos com duas fases de aceleração, simétricos por reflexão ao redor do ponto em que aceleração é nula. Encontramos uma classe desses modelos, correspondente a um gás de Chaplygin modificado, que pode ser usada como ferramenta de discussão em diversos regimes fenomenológicos, e.g. uma fase inflacionária do tipo hilltop, ou um universo de quintessência.

A DFE, na gravitação de Einstein, é análoga a uma dualidade bem conhecida da gravitação dilatônica, em que a inversão do fator de escala (no quadro de cordas) junto com uma transformação apropriada do dilaton fornecem uma simetria das equações gravidilatônicas para uma classe muito restrita de potenciais. Apesar de ser uma simetria das equações de Friedmann no quadro de Einstein, as soluções duais da DFE, para qualquer potencial, podem ser interpretadas no quadro de cordas, onde fornecem transformações relacionando grandes e pequenos valores do fator de escala.

A dualidade gravidilatônica dá origem ao chamado Cenário Pré-Big-Bang na cosmologia de cordas. De maneira similar, um universo dual pela DFE pode ser interpretado como estando antes da singularidade, na gravitação de Einstein. Concentramo-nos em analisar as cosmologias duais em que a fase pré-big-bang é um universo em expansão eterna (ao contrário dos modelos usuais de ricochete), e sua fase final, acelerada, faz o papel da inflação antes do big-bang do universo seguinte. Essa idéia é remanescente da idéia de uma ‘Cosmologia Conforme Cíclica’. A transição através da singularidade requer uma identificação conforme; abordamos esse problema utilizando a correspondência dS/CFT e o grupo de renormalização holográfico.

Abstract

This thesis is an investigation of cosmological models dual under an inversion of the scale factor in conformal time, in Einstein gravity. The Scale Factor Duality in conformal time (SFD) acts as a map between high and small energy, and between accelerated and decelerated evolutions of the universe. Used as a symmetry principle, the SFD selects models with two phases of acceleration of the scale factor, symmetric by reflection over the point when acceleration vanishes. We derive a class of such models, corresponding to a modified Chaplygin gas, which might be used as a toy model in more than one phenomenological regime, e.g. a hilltop inflationary phase or a quintessence model.

In Einstein gravity, SFD is analogous to a well known duality in dilatonic gravity, in which the inversion of the scale factor in the string frame, along with an appropriate transformation of the dilaton, is a symmetry of the gravidilatonic equations for a restricted class of potentials. Although it is a symmetry of the Friedmann equations in the Einstein frame, dual solutions obtained with the SFD, for any potential, may be mapped to the string frame, providing transformations which relate small and large values of the (string-frame) scale factor.

Gravidilatonic duality gives rise to the so-called Pre-Big-Bang Scenario of string cosmology. Analogously, a universe obtained by the SFD may be interpreted as being “before” the big-bang of its dual, in Einstein gravity. We concentrate in the analysis of such pre-big-bang universes which are eternally expanding (in contrast with bouncing models), and their final, accelerated phase plays the rôle of an inflationary phase previous to the big-bang of the ensuing decelerated universe. This idea is reminiscent of a ‘Conformal Cyclic Cosmology’. The transition across the singularity requires a conformal identification; we address this issue by making use of the dS/CFT correspondence and the holographic renormalization group.

Conteúdo

Conteúdo	vi
1 Introdução	1
1.1 O começo do tempo	1
1.2 Antes do Big-Bang	2
1.3 A simetria conforme perdida	4
1.4 A dualidade do fator de escala no tempo conforme	7
1.5 Organização desta tese	8
I O Universo Após o Big-Bang	10
2 O Universo, homogêneo e isotrópico	11
2.1 A métrica de Robertson-Walker	11
2.2 O tensor de energia-momento	16
2.3 As equações de Friedmann	18
2.4 Modelos cosmológicos	21
2.5 Geometria causal de universos FLRW	23
2.5.1 Horizontes de partícula e de eventos	23
2.5.2 A esfera de Hubble e o horizonte aparente	25
2.5.3 Diagramas de Penrose	27
2.6 O Modelo Cosmológico Padrão	28
2.6.1 A Radiação Cósmica de Fundo (CMB)	30
2.6.2 O Modelo Λ CDM	31
3 Cosmologia inflacionária	34
3.1 Paradoxos do modelo cosmológico padrão	34
3.2 A evolução do raio de Hubble	36
3.3 Inflação	38
3.3.1 Aspectos gerais de um universo inflacionário	38
3.3.2 Slow-roll	40

3.4	Inflação e o começo do tempo	42
4	Flutuações no Universo de FLRW	46
4.1	Flutuações em primeira ordem	46
4.2	Flutuações tensoriais; ondas gravitacionais	48
4.3	Flutuações escalares e calibre de Newton	51
4.4	O céu iluminado pela Radiação Cósmica de Fundo	55
4.5	Espectros de potência	59
4.6	Flutuações no universo inflacionário	60
5	Tópicos sobre a termodinâmica do Universo	65
5.1	Termodinâmica de universos de FLRW	65
5.2	Entropias de horizontes	72
5.2.1	A entropia de Bekenstein-Hawking	72
5.2.2	Horizontes aparentes	73
5.2.3	A entropia na gravitação de Gauss-Bonnet	74
5.3	A Segunda Lei da Termodinâmica, Generalizada	75
5.3.1	Limites de entropia	76
5.3.2	A Segunda Lei Generalizada e a cosmologia	76
5.4	A entropia no Universo e a peculiaridade do big-bang	78
5.4.1	Inventário de entropia	79
5.4.2	A entropia do campo gravitacional e a Hipótese da Curvatura de Weyl	83
5.4.3	Singularidades isotrópicas	85
II	O Universo Antes do Big-Bang	87
6	Cosmologia de cordas antes do Big-Bang	88
6.1	Ação efetiva e gravitação dilatônica	89
6.2	Dualidade do Fator de Escala	94
6.2.1	A inversão do fator de escala	95
6.2.2	Simetria $O(d, d)$ da ação efetiva	96
6.2.3	Dualidade do fator de escala na presença de matéria	98
6.3	O Cenário Pré-Big-Bang	98
6.3.1	Soluções duais	99
6.3.2	A evolução pré-big-bang	101
6.3.3	Ricochetes e epirose	102

7	Cosmologia Conforme Cíclica	106
7.1	Princípios	106
7.1.1	Os aeons	106
7.1.2	A superfície de transição	107
7.2	Equações	108
7.3	Fenomenologia e problemas	113
 III Dualidade do Fator de Escala no Tempo Conforme		 116
8	A Dualidade do Fator de Escala	117
8.1	A dualidade do fator de escala na gravitação de Einstein	117
8.2	A Dualidade do Fator de Escala no tempo conforme (DFE)	121
8.2.1	Universos acelerados & desacelerados	121
8.2.2	Geometria conforme de universos duais	123
8.3	A dualidade e o campo escalar	127
8.3.1	Modelos fantasmas	130
8.4	A DFE como uma (nova) transformação na gravitação dilatônica .	132
8.5	Discussão	134
9	Fluidos Autoduais	136
9.1	Composições de fluidos duais com w constante	138
9.2	Generalizações e o gás de Chaplygin	139
9.2.1	Uma família de fluidos autoduais	140
9.2.2	O gás de Chaplygin modificado	142
9.3	Campo escalar e o potencial autodual	143
9.4	Aspectos do gás de Chaplygin modificado	145
9.4.1	Solução analítica para as Equações de Friedmann	145
9.4.2	Cosmologia autodual pós-inflacionária	148
9.4.3	Modelos inflacionários autoduais	150
9.5	Potencial dilatônico autodual e dualidade no quadro de cordas . .	153
9.6	Simetrias no espaço dos parâmetros dos fluidos autoduais	156
9.6.1	A DFE como uma simetria discreta Z_2	156
9.6.2	Autodualidade parcial e simetria $SO(1,1)$ no espaço das densidades relativas	157
10	Termodinâmica e a dualidade do fator de escala	160
10.1	Dualidade das grandezas termodinâmicas	160
10.2	Termodinâmica do gás de Chaplygin modificado	161
10.2.1	Temperaturas duais	163

10.2.2	Instabilidades termodinâmicas	168
10.3	Termodinâmica dual de horizontes aparentes	170
10.3.1	Transformações gerais	170
10.3.2	O caso do fluido autodual	172
10.3.3	A Segunda Lei Generalizada e o gás de Chaplygin modificado	173
11	Cosmologias duais do tipo conforme cíclicas	177
11.1	Universo dual antes do big-bang	177
11.2	Dualidade do fator de escala enquanto uma transformação de Weyl	179
11.3	A dualidade do fator de escala como uma cosmologia conforme cíclica de FLRW	183
11.4	Extensões cíclicas de cosmologias duais	186
11.5	Entropia de Gauss-Bonnet na superfície de travessia	189
11.6	DFE vs. CCC	191
12	Flutuações em universos duais e inflação antes do big-bang	194
12.1	Continuidade dos modos das flutuações entre aeons	194
12.2	Um universo pré-big-bang dual ao modelo de concordância	200
	Inflação com um gás de branas	201
	Domínio de radiação antes da inflação	204
12.3	Exemplo: universo autodual com $\delta = 1/2$	207
12.4	Dualidade de flutuações adiabáticas	209
12.5	Discussão	212
13	A DFE em um universo holográfico	214
13.1	Simetria conforme na borda de dS_4	215
13.2	dS/CFT	221
13.3	$(a)dS/pCFT$	226
	Funções de 2-pontos e a equação de Callan-Symanzik	227
	Índices espectrais a partir da holografia	228
13.4	A DFE e a inflação holográfica	229
13.5	Fluxo do GR em universos duais	230
	O universo autodual	231
	O modelo de concordância, assintoticamente	234
	Mapas entre pCFTs	235
13.6	Discussão	236
14	Conclusão	238

IV Apêndices	246
A Notações e definições	247
B Diagramas de Penrose para universos de FLRW	250
B.1 Minkowski	250
B.2 Universos de FLRW	252
C Calibres nas flutuações cósmicas	257
D O espaço-tempo de de Sitter	261
D.1 Geometria	261
D.2 Geodésicas	265
E Teorias Conformes	268
E.1 Transformações conformes de R^n e $M^{(n-1),1}$	268
E.2 Álgebra de Lie	271
E.3 Campos conformes	273
E.4 Funções de correlação	277
E.5 Teorias conformes perturbadas	281
F Equação de estado para um gás de p-branas	285
G Teorema de área e a entropia generalizada na cosmologia	288
G.1 Definições — telas holográficas	288
G.2 Teorema para o crescimento da área	289
G.3 SLG na cosmologia	292
H (Fórmulas para) Transformações de Weyl	294
H.1 Transformações de Weyl	296
H.2 O Tensor de Weyl	299
I Fórmulas especiais	302
I.1 Manipulação de Jacobianos	302
I.2 Condição para uma forma quadrática positiva	303
I.3 Função Hipergeométrica de Gauss	304
Referências	306

Capítulo 1

Introdução

— NONADA.

J.G. Rosa, no Grande Sertão: Veredas

1.1 O começo do tempo

13.8 bilhões de anos atrás começam as linhas-de-mundo que virão a descrever o Universo atual. Esta é a fantástica consequência da Teoria da Relatividade Geral aplicada ao espaço-tempo em larga escala, descoberta a partir dos teoremas de [Penrose \(1965\)](#) e [Hawking \(1965\)](#). A predição do fim (ou do início) do espaço-tempo mostra muito literalmente os limites da Relatividade Geral, e a necessidade de uma teoria mais fundamental da gravitação. A esperança é que essa teoria advenha de uma formulação quântica da gravidade, e a termodinâmica de buracos negros revela importantes aspectos da relação entre geometria e fenômenos semiclássicos. Em um buraco negro a singularidade, envolta por uma região contendo superfícies capturadas, é escondida de um observador externo pelo horizonte de eventos, cuja área codifica toda a entropia perdida (ou não) em seu interior.

No big-bang acontece o oposto. A presença da Radiação Cósmica de Fundo indica a existência de superfícies anti-capturadas, que por sua vez implicam na ocorrência de uma singularidade tipo-espaço no passado do Universo que *não* está oculta por um horizonte de eventos. Uma singularidade no passado levanta mais perguntas que uma singularidade no futuro, porque a observação da causalidade como princípio fundamental da física nos leva sempre a especificar as condições *iniciais* de um sistema, em oposição às suas condições finais. Assim, o começo do Universo há um tempo finito enfaticamente sugere a pergunta: se há um Início,

nele devem estar especificadas as condições iniciais que nos trouxeram até aqui: Quais são elas?

Hoje, o Universo se encontra em uma configuração surpreendentemente peculiar cujas origens eram um enigma até a explicação brilhante apresentada por [Starobinsky \(1980\)](#), [Guth \(1981\)](#), [Linde \(1982\)](#) e vários outros através a formulação do paradigma inflacionário. Com o simples mecanismo dinâmico de uma expansão exponencial no início da evolução cósmica, a inflação dissolve inhomogeneidades e anisotropias, aplaina a curvatura das seções espaciais, e resolve de uma só vez uma lista de problemas do modelo Λ CDM. Além disso, flutuações quânticas do campo escalar responsável por guiar a expansão exponencial, o inflaton, se tornam estocásticas pela expansão acelerada do espaço-tempo (clássico), e explicam as pequenas anisotropias da Radiação Cósmica de Fundo e a formação de estruturas na fase dominada por matéria escura.

A inflação não é uma teoria fundamental: é um paradigma. Há uma coleção de modelos e potenciais com forma e origem muito diferentes que realizam o mecanismo inflacionário, e a questão a respeito das condições iniciais do Universo se transfere em quão naturais são as condições para esses modelos. Há muita discussão sobre o assunto,¹ inclusive sobre como medir a “naturalidade”; das duas grandes classes de modelos separadas por “inflação a campo pequeno” ou a “campo grande”, a primeira parece requerer uma boa quantidade de ajuste fino nos valores do inflaton e de sua velocidade para que se inicie uma fase inflacionária. A inflação a campo grande, entretanto, pode ser iniciada em condições consideravelmente genéricas, o regime de slow-roll sendo um atrator no espaço de fase. Seja qual for o modelo, há um problema que a inflação não resolve, enquanto paradigma: a singularidade inicial continua presente, as geodésicas num espaço-tempo inflacionário são incompletas no passado.

1.2 Antes do Big-Bang

As propostas de resolução da singularidade inicial são praticamente unânimes em recorrer a um ricochete. Há um excelente motivo: a única maneira de se estender a dinâmica do espaço-tempo de forma contínua para além do big-bang, evitando que os volumes se contraíam até o zero, é havendo uma passagem de expansão para contração em algum valor mínimo do fator de escala.

A idéia de que o mundo é destruído por uma conflagração (em grego, *ekpírōsis*) e renasce das cinzas para depois ser ciclicamente destruído outra vez é muito antiga, e tem certamente o seu apelo estético. Como modelo cosmológico relativístico esse tipo de dinâmica aparece no trabalho pioneiro de [Tolman \(1931\)](#), que conseguiu descrever um universo termodinamicamente estável e (quase) cíclico,

¹Para uma revisão recente, ver [Brandenberger \(2017\)](#).

cuja curvatura positiva é responsável por reverter a expansão. Hoje sabemos que a curvatura espacial do Universo é quase nula, as equações de Friedmann levam a $\dot{H} = -4\pi G(P + \rho)$, sendo portanto impossível ocorrer um ricochete sem que haja ou uma violação da Condição Nula de Energia (que é uma das condições dos teoremas de singularidade), ou uma modificação da Relatividade Geral, ou ambas as coisas. E, de fato, ricochetes tendem a aparecer em diversas abordagens da gravitação quântica, tanto em nível perturbativo (com a adição de novos termos de curvatura à ação de Einstein-Hilbert, formando Lagrangeanas do tipo $f(R)$), quanto em formulações fundamentais como a Gravitação Quântica de Laços e a Teoria de Cordas.¹

Universos de ricochete apresentam dificuldades com as condições iniciais diferentes das enfrentadas pelos modelos inflacionários. Por exemplo, como o universo tem uma vida indefinidamente longa antes do big-bang, não há, por construção, problemas de causalidade com a homogeneização da Radiação Cósmica de Fundo. Em compensação, outras questões surgem; um ponto delicado é o fato de que, em um colapso gravitacional, anisotropias iniciais tendem a se desenvolver e ser amplificadas e, em geral, desenvolvem singularidades caóticas do tipo descrito por Belinskii *et al.* (1970, 1982). A isotropia observada hoje então requer ou que anisotropias (clássicas) simplesmente não existam no estado inicial do universo, ou que durante o ricochete exista algum tipo de matéria exótica com parâmetro da equação de estado $w \gg 1$, que dominaria sobre os termos anisotrópicos. Essa última possibilidade é de fato prevista por modelos de colisão de branas vindos da Teoria-M.

Das várias maneiras mais ou menos fenomenológicas de se construir um universo antes do big-bang, é particularmente interessante o chamado ‘Cenário Pré-Big-Bang’, de Gasperini & Veneziano (1993). Nesse caso, a gravitação é descrita pela ação efetiva dilatônica da cosmologia de cordas, e o ponto de partida é a ‘T-dualidade’ do espectro das cordas bosônicas, que num espaço-tempo cosmológico corresponde à simetria da ação gravidilatônica sob a inversão do fator de escala

$$a(t) \mapsto 1/a(t),$$

em conjunto com uma transformação apropriada do dilaton ϕ , ficando invariante o “campo deslocado” $\bar{\phi} = \phi - 6 \log a$. Partindo da função $a(t)$ que descreve, com o tempo cósmico t , a expansão do Universo após o big-bang que observamos, em que o dilaton está congelado, e aplicando essa transformação, chega-se a uma solução dual *antes do big-bang*, na qual o dilaton é dinâmico e o Universo é conduzido até a singularidade depois de começar sua vida em $t = -\infty$ em um vácuo perturbativo. O que causa o crescimento da curvatura e o ricochete é divergência

¹Para uma revisão recente do estado da arte de modelos de ricochete, ver Brandenberger & Peter (2017).

de ϕ à medida que $t \rightarrow 0^-$; mas junto com ele, o acoplamento de cordas diverge exponencialmente e, portanto, em algum momento $t < 0$ se inaugura uma fase não perturbativa em que efeitos da teoria de cordas (supostamente) dominam a dinâmica e eliminam (de alguma maneira ainda desconhecida) a singularidade. Nesse Cenário Pré-Big-bang, o colapso gravitacional que leva ao ricochete é um fenômeno percebido no ‘quadro de Einstein’, obtido da ação dilatônica a partir de uma transformação de Weyl tal que o dilaton assuma a forma de um campo escalar canônico. Desse ponto de vista, o big-crunch é análogo à formação de um buraco negro do qual “emerge”, com o ricochete, o Universo que observamos. No ‘quadro de cordas’, que é onde acontece a física “natural” da gravitação dilatônica, o fator de escala sempre *cresce* antes do ricochete, cuja singularidade se deve à divergência de ϕ , e assim se realiza o paradigma inflacionário antes do big-bang.

O que dá origem à pesquisa relatada nesta tese é a observação da existência de uma certa simetria das equações de Friedmann, na gravitação de Einstein, sob a inversão do fator de escala no tempo conforme,

$$a(\eta) \mapsto c^2/a(\pm\eta). \quad (1.1a)$$

A inversão é acompanhada por uma transformação da matéria que mapeia equações de estado com parâmetros

$$w \mapsto -w - \frac{2}{3}, \quad (1.1b)$$

logo universos desacelerados em acelerados. Qualitativamente, essa dualidade corresponde, na Relatividade Geral, à transformação que acabamos de descrever na gravitação dilatônica. Se escolhermos o sinal positivo em (1.1a), o dual de um universo em expansão é outro em contração, mas com o sinal negativo temos um par dual de universos em expansão, um deles acontecendo em $\eta < 0$, e o outro em $\eta > 0$; portanto um universo acontece “antes” do big-bang do seu dual, e ambos são ligados em $\eta = 0$ pela transformação $\{a(0^+) = 0\} \mapsto \{a(0^-) = \infty\}$. Apesar de isso ser basicamente o oposto do que acontece em um ricochete, inspirados no Cenário Pré-Big-Bang, é tentador arriscar a seguinte pergunta: seria possível descrever de forma operacional o conceito de uma inflação antes do big-bang na gravitação de Einstein?

1.3 A simetria conforme perdida

Na presença de simetria conforme, todas as escalas são equivalentes já que, por definição, é impossível distinguir entre duas métricas $g_{\mu\nu}(x)$ e $\tilde{g}_{\mu\nu}(x)$, tais que

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2(x) \tilde{g}_{\mu\nu}.$$

Embora o ângulo entre duas direções permaneça bem definido, a medição de distâncias efetivamente perde o significado, já que $ds^2 = \Omega^2(x)d\tilde{s}^2$. Repare que, num espaço-tempo, “distância” inclui a direção temporal, e em suma, se não for possível medir o fator conforme $\Omega(x)$, é impossível construir régua e relógios. Tudo isso acontece na Teoria da Relatividade para partículas sem massa; em uma geodésica nula a distância $ds^2 = 0$ é invariante conforme. O fato de que o tempo não passa e a distância não existe para um fóton é só uma maneira de descrever a transformação de Lorentz para um referencial na velocidade da luz, com contração espacial e dilatação temporal infinitas. Assim, na ausência de massa, só existe, na Relatividade, a estrutura causal formada pelos cones de luz. Numa teoria gravitacional conforme é possível efetuar a identificação de escalas arbitrariamente grandes e arbitrariamente pequenas, $\{a = 0\} \sim \{a = \infty\}$, necessária para a transição entre o fim de um universo em expansão e o início de um universo singular que desejamos, mas, nas palavras de 't Hooft (2015), a simetria conforme local é a componente perdida das simetrias do espaço-tempo.

Existem, todavia, algumas pistas do seu paradeiro.

Há muito se considera a possibilidade de se construir uma gravitação em que a simetria conforme esteja no mesmo patamar que a covariância de Lorentz.¹ Uma possibilidade é utilizar apenas a parte invariante conforme do tensor de Riemann, o tensor de Weyl. Em 4 dimensões, a Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}W_{\alpha\beta\mu\nu}W^{\alpha\beta\mu\nu} = 2\sqrt{-g}(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^2) + \text{inv. topológico},$$

apesar de ter derivadas segundas da métrica, logo equações de campo de quarta ordem, é razoavelmente bem comportada e, (apenas) para fontes não-massivas, as equações de movimento coincidem com as equações de Einstein. Estamos nos preocupando aqui apenas com o setor gravitacional, e assumindo que a matéria também se acople à métrica de maneira invariante sob conformofismos locais. Seja como for, a Relatividade Geral tem que ser recuperada no limite apropriado, e é necessário descrever como a ação de Einstein-Hilbert pode ser obtida a partir da Lagrangeana conforme.

É possível generalizar a Lagrangeana de Einstein-Hilbert de maneira simples, e de forma que a quebra de simetria é evidente. Basta compensar a transformação do escalar de Ricci sob uma transformação conforme pela introdução de um par de campos escalares,

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{12}(\chi^2 - \phi^2)R - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\nu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\nu\chi - \frac{1}{36}\Lambda(\phi^2 - \chi^2)^2 \right].$$

Lagrangeanas com essa forma têm origem em teorias de supergravitação. A ação é invariante sob transformações conformes locais da forma

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^{-2}(x)g_{\mu\nu}, \quad \tilde{\chi} = \Omega(x)\chi, \quad \tilde{\phi} = \Omega(x)\phi,$$

¹Ver, e.g., Maldacena (2011); Mannheim (2012).

e, apesar da energia cinética negativa, o campo χ não é um fantasma porque não possui graus de liberdade; trata-se de um potencial de calibre. Quando $\chi^2 = \phi^2 + 6/\kappa^2$, temos a ação de Einstein-Hilbert com um campo escalar canônico sem massa e constante cosmológica Λ , e assim a simetria conforme está quebrada (se χ assume a forma adequada ao assumir seu valor clássico, por exemplo). Outras escolhas de χ levam, por exemplo, à ação gravidilatônica. Note que para $\varphi > \sqrt{6}$ o coeficiente do escalar de Ricci muda de sinal, resultando em uma teoria de “antigravitação”.¹ Uma generalização que preserva a simetria conforme é a substituição de Λ por uma função $f^2(\phi/\chi)$. No ‘calibre de Einstein’, isso substitui a constante cosmológica por um potencial $V(\varphi) = f^2(\tanh(\varphi/\sqrt{6}))$ para o campo escalar canônico φ . Introduzindo um parâmetro α tal que $V(\varphi) = f^2(\tanh(\varphi/\sqrt{6\alpha}))$, cria-se uma classe ainda mais geral de potenciais inflacionários chamada de ‘atratores- α ’, apresentados por [Kallosch et al. \(2014\)](#). A forma funcional acima abrange uma grande classe de potenciais inflacionários (a campo grande) cujas previsões para o espectro da CMB coincidem; e essas previsões são as mais compatíveis com os últimos resultados observacionais.

Há uma possibilidade radicalmente diferente das anteriores de se incorporar simetrias conformes à gravitação, e que parece ser particularmente adequada à construção que surge com a dualidade do fator de escala no tempo conforme: a holografia. Se o big-bang é dominado por radiação, a fase dual obtida por (1.1) termina em um universo de de Sitter que corresponde à ‘fase inflacionária’ antes do big-bang. Por definição, essa fase se estende até a borda \mathcal{I}^+ de dS_4 , onde ocorre a identificação conforme $\{a = \infty\} \sim \{a = 0\}$. Mas em \mathcal{I}^+ , que tem a topologia do espaço Euclidiano, o grupo de isometrias de dS_4 atua como o grupo conforme em R^3 , o que levou [Strominger \(2001a,b\)](#) a propor uma dualidade calibre/gravitacional dS_4/CFT_3 , análoga à bem estabelecida correspondência AdS/CFT da teoria de cordas. Assim, é natural tentar interpretar a transição conforme entre as fases pré- e pós-big-bang em termos de uma CFT_3 holográfica na superfície $\{\eta = 0\}$. Na verdade, como o universo anterior é apenas assintoticamente de Sitter, o que temos é uma teoria conforme perturbada que sai do ponto fixo seguindo um grupo de renormalização holográfico. Esse formalismo é usado para descrever o espectro da CMB, a partir da identificação apresentada por [Maldacena \(2003\)](#),

$$\Psi[\Phi] = Z[\Phi],$$

em que Ψ é a função de onda do Universo e Z a função de partição da teoria de campos holográfica. As flutuações do interior gravitacional, denotadas coletivamente por Φ , atuam como fontes na teoria de campos da borda. O desafio é descrever um fluxo do Grupo de Renormalização que seja compatível com a transformação (1.1), e com o fato de que a travessia liga a borda de dS_4 a uma

¹Utilizada por [Bars et al. \(2012\)](#) para construir rícochetes geodesicamente completos.

singularidade dominada por radiação.

1.4 A dualidade do fator de escala no tempo conforme

O objetivo desta tese é a investigação das consequências da transformação (1.1), que chamaremos de ‘dualidade do fator de escala’ (no tempo conforme, e na gravitação de Einstein).

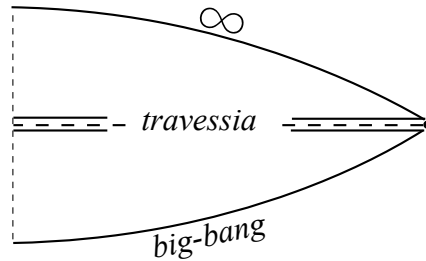
Enquanto simetria das equações de Friedmann, a dualidade do fator de escala (DFE) é de interesse por si só. No tempo conforme, a métrica de FLRW é uma transformação conforme de Weyl de um espaço-tempo estático; para $K = 0$, Minkowski. Como só há um grau de liberdade, expresso pelo fator de escala $a(\eta)$, o mapa $a \mapsto 1/a$ é a transformação de Weyl mais simples que inverte as escalas físicas preservando as simetrias de isotropia e homogeneidade.

A transformação da matéria que deve acompanhar a inversão de $a(\eta)$ para preservar a forma das equações de Friedmann relaciona univocamente universos acelerados e universos desacelerados. Em particular, o primeiro fluido perfeito a dominar a evolução do nosso Universo após a inflação é dual ao último, isto é: radiação ($w = 1/3$) é dual a uma constante cosmológica ($w = -1$), como se vê diretamente de (1.1b). Ou seja, a DFE é uma simetria assintótica do Universo observado. Inspirados nisso, podemos tentar usar a DFE como princípio de simetria para obter universos com duas fases de aceleração, cujo comportamento durante a fase acelerada seja completamente determinado pela fase desacelerada, e cujo comportamento em altas energias (próximo ao big-bang) seja completamente determinado pelo comportamento em baixas energias.

Num modelo cosmológico com apenas um campo escalar em um potencial qualquer, é sempre possível passar para o quadro de cordas e interpretá-lo como o dilaton; a DFE fornece então, de maneira indireta, uma transformação no quadro de cordas que relaciona pequenas e grandes escalas para potenciais não-triviais. Isso não acontece na dualidade original; inversão $a_C(t)$, onde a_C é o fator de escala no quadro de cordas, e t é o tempo cósmico, só é uma simetria para um potencial dilatônico constante, ou que seja no máximo uma função do dilaton deslocado. Na DFE é possível usar qualquer potencial $V(\phi)$ porque a simetria mora no quadro de Einstein; ao ser transferida para o quadro de cordas, a inversão de a se torna uma transformação possivelmente complicada, que depende do modelo cosmológico.

E, por fim, assim como no Cenário Pré-Big-Bang dilatônico, a DFE na gravitação de Einstein dá origem naturalmente a uma cosmologia antes do big-bang. Para nosso universo em expansão em $\eta > 0$, há duas soluções duais em $\eta < 0$;

uma, em contração, pode ser interpretada como um ricochete (singular); a outra, que será de nosso maior interesse, que se expande e deve se conectar à fase pós-big-bang através da superfície em $\eta = 0$ definida por uma classe de equivalência conforme $\{a = \infty\} \sim \{a = 0\}$. O universo dual anterior ao nosso deve possuir, também, um início desacelerado e um final dominado por Λ , e portanto tem uma duração finita no tempo conforme, muito embora o tempo cósmico seja ilimitado para o futuro. Nesse sentido, cada universo é eterno, mas repare que se perto de $\eta = 0$ surgir uma simetria conforme não haverá relógio que meça o tempo cósmico. Se conseguirmos elaborar uma descrição de como efeitos do universo antes do big-bang influenciam no universo após, definindo uma teoria para a superfície de travessia (holográfica?), temos o diagrama de Penrose abaixo:



Feito isso, e repetindo o procedimento, pode-se criar uma cadeia de aeons duais ligados por travessias conformes — uma idéia próxima, em espírito, da Cosmologia Conforme Cíclica proposta por [Penrose \(2007\)](#).

1.5 Organização desta tese

O texto principal deste trabalho se encontra dividido em três partes. A primeira é uma revisão da cosmologia usual do universo descrito pelo modelo padrão cosmológico acrescido da inflação;¹ a segunda traz uma descrição de dois modelos cosmológicos relevantes para o desenvolvimento da DFE e sua utilização enquanto cosmologia pré-big-bang. Na terceira parte se encontram os resultados originais dessa pesquisa, publicados em

A. A. Lima, U. Camara dS, & G. M. Sotkov. Scale factor self-dual cosmological models. **Journal of High Energy Physics**, v. 2015, n. 7, p. 1-18, (2015).

A. A. Lima, U. Camara dS, & G. M. Sotkov. Scale factor duality for conformal cyclic cosmologies. **Journal of High Energy Physics** 2016.11 (2016): 90.

¹A revisão de cosmologia presente nos Capítulos 2, 3 e 4 segue vários livros excelentes, em particular [Baumann \(2009\)](#); [Dodelson \(2003\)](#); [Durrer \(2008\)](#); [Gasperini \(2007\)](#); [Mukhanov \(2005\)](#); [Weinberg \(2008\)](#).

A. A. Lima, U. Camara dS, & G. M. Sotkov. Thermodynamics of scale factor dual universes. **Physical Review D**, v. 95, n. 4, p. 044033, (2017).

Alguns outros resultados originais, obtidos em colaboração com G. Sotkov e U. Camara dS e ainda não publicados aparecem no texto desta tese:

1. No §8.4, mostramos explicitamente que a DFE pode ser usada para se obter, indiretamente, transformações entre grandes e pequenas escalas na gravitação dilatônica com um potencial arbitrário.
2. No §9.6, mostramos que é possível estender a DFE em modelos autoduais como uma simetria $SO(1,1)$ atuando sobre o espaço dos parâmetros.
3. No Capítulo 13 (onde incluímos uma breve introdução à correspondência holográfica dS/CFT), analisamos o efeito da DFE como uma dualidade entre flutuações lineares, e sua aplicação no contexto da holografia e do grupo de renormalização holográfico para a construção de uma travessia conforme.

Definições utilizadas na Teoria da Relatividade Geral se encontram no Apêndice [A](#).

Parte I

O Universo Após o Big-Bang

Capítulo 2

O Universo, homogêneo e isotrópico

2.1 A métrica de Robertson-Walker

Da Terra, observamos que o céu se mostra o mesmo em todas as direções.¹ Seguindo o Princípio Cosmológico (Copernicano) de que não nos encontramos em um ponto privilegiado, e que não deve haver ponto privilegiado no Cosmo, a geometria de um modelo cosmológico que descreva as propriedades do Universo em larga escala é a de um ‘espaço de [Robertson \(1929\)](#) e [Walker \(1944\)](#)’, isto é, um espaço-tempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ com a topologia $\mathcal{M} = R \times \mathcal{K}$, sendo as folheações 3-dimensionais, \mathcal{K} , espaços Riemannianos completamente homogêneos e isotrópicos, e por isso com curvatura constante. (Ver, e.g. [Weinberg \(1972\)](#).) O tensor de Riemann para um espaço de curvatura constante tem a forma

$$R_{abcd}^{(3)} = K(\gamma_{ad}\gamma_{bc} - \gamma_{ab}\gamma_{cd}), \quad (2.1)$$

sendo caracterizado completamente pelo valor da constante K . A métrica da variedade Riemanniana \mathcal{K} , que pela hipótese de isotropia deve deixar invariante a métrica sobre a 2-esfera \mathcal{S}^2 , $\mathcal{S}^2 \subset \mathcal{K}$ e, portanto, tem a forma

$$ds_{\mathcal{K}}^2 = \lambda(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

¹Neste trabalho, quando dissermos ‘a Terra’, estaremos, em geral, nos referindo à nossa posição no Universo em larga escala, como um ponto em uma geodésica em um espaço-tempo de FLRW. Em escalas planetárias, como o Sol dá testemunha, o Universo não é homogêneo, e mesmo observações correspondentes a escalas cosmológicas, como a da Radiação Cósmica de Fundo, apresentam isotropia apenas após se eliminarem efeitos locais como a posição do planeta na Via Láctea e sua velocidade peculiar (em relação ao fluxo de Hubble). Assim, dizemos ‘a Terra’ cometendo um significativo abuso de linguagem.

deve satisfazer a condição de que seu tensor de Ricci seja compatível com (2.1)

$$R_{ab}^{(3)} = 2K\gamma_{ab}, \quad \text{e o escalar de curvatura} \quad R^{(3)} = \gamma^{ab}R_{ab}^{(3)} = 6K, \quad (2.2)$$

o que fixa a função $\lambda(r)$ como sendo $\lambda(r) = 1/(1 - Kr^2)$. Portanto, a métrica das seções espaciais do Universo em larga escala deve ter a forma

$$ds_{\mathcal{K}}^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.3)$$

com a constante K , cujo módulo pode ser absorvido na definição de unidades da “régua” radial, caracterizada por seu sinal. Para $K = 0$ é evidente que \mathcal{K} é simplesmente o espaço Euclidiano R^3 , escrito aqui em coordenadas esféricas. Para $K \equiv 1/\sqrt{\ell} > 0$, por causa da singularidade no denominador do coeficiente de dr^2 , a coordenada r é limitada entre $r \in (0, +1/\sqrt{K})$, e portanto pode ser transformada em um ângulo $\chi \in (0, +\frac{\pi}{2})$ tal que $r = \ell \sin\chi$. (Valores negativos de r não são possíveis uma vez que em $r = 0$ há uma singularidade do sistema de coordenadas.) Com isso fica evidente que a métrica

$$ds_{\mathcal{K}}^2 = \frac{dr^2}{1 - (r/\ell)^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) = \ell^2 \{d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\} \quad (2.4)$$

é a de uma 3-esfera \mathcal{S}^3 (e o espaço de RW com $K > 0$ tem a topologia de um cilindro $R \times \mathcal{S}^3$). Por fim, para $K < 0$ se pode fazer a mesma mudança de variáveis mas agora com $K \equiv i/\sqrt{\ell}$ levando a

$$ds_{\mathcal{K}}^2 = \frac{dr^2}{1 + (r/\ell)^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) = \ell^2 \{d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sinh^2\theta d\varphi^2)\},$$

que descreve o espaço hiperbólico tridimensional.

Com a simetria fixa das seções espaciais, a métrica do espaço-tempo de Robertson-Walker só pode depender da coordenada temporal x^0 de maneira a preservar o elemento de linha $ds_{\mathcal{K}}^2$ a cada instante, i.e. de maneira a folhear o espaço-tempo como $\mathcal{M} = R \times \mathcal{K}$. O ansatz mais geral a satisfazer essa condição é

$$ds^2 = -N^2(x^0)d(x^0)^2 + a^2(x^0)\gamma_{ab}(\mathbf{x}) dx^a dx^b, \quad (2.5a)$$

$$\text{com } ds_{\mathcal{K}}^2 \equiv \gamma_{ab}(\mathbf{x}) dx^a dx^b, \quad \text{ou seja } \gamma_{ab} = \delta_{ab} + K \frac{x_a x_b}{1 - K x_c x^c}. \quad (2.5b)$$

Denotemos $x^0 \equiv \tau$, e por brevidade escrevamos $df/d\tau \equiv \dot{f}$. Os símbolos de Christoffel (A.1) para (2.5) são

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \dot{N}/N; & \Gamma_{ij}^0 &= (a \dot{a}/N^2) \gamma_{ij}; \\ \Gamma_{0j}^i &= (\dot{a}/a) \delta_j^i; & \text{e } \Gamma_{jk}^i &= \Gamma_{jk}^i[\gamma]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Todos os outros são nulos. As conexões $\Gamma_{jk}^i[\gamma]$ indicam o símbolo de Christoffel da métrica espacial (2.3), i.e. $\Gamma_{jk}^i[\gamma] \equiv \frac{1}{2}\gamma^{il}(\partial_j\gamma_{lk} + \partial_k\gamma_{lj} - \partial_l\gamma_{jk})$, que *não depende de τ* . Segue que os observadores definidos pelo vetor tipo-tempo ∂_τ descrevem geodésicas: o vetor unitário na direção de ∂_τ ,

$$U^\mu \equiv \frac{1}{N(x^0)}\delta_0^\mu, \quad \text{tal que} \quad U_\mu U^\mu = -1, \quad (2.7)$$

obedece a equação das geodésicas:

$$U^\mu \nabla_\mu U^\alpha = 0. \quad (2.8)$$

Portanto o campo vetorial (2.7) define observadores em queda-livre. Derivando as conexões (2.6) se obtêm as componentes do tensor de Ricci (A.3):

$$R_{00} = -3\ddot{a}/a + 3(\dot{a}/a)(\dot{N}/N); \quad (2.9a)$$

$$R_{ij} = \left[a\ddot{a}/N^2 + 2(\dot{a}/N)^2 - a\dot{a}\dot{N}/N^3 \right] \gamma_{ij} + 2K \gamma_{ij}, \quad (2.9b)$$

assim como o escalar de curvatura

$$R = 6\ddot{a}/N^2 a + 6(\dot{a}/aN)^2 - 6\dot{a}\dot{N}/aN^3 + 6K/a^2. \quad (2.10)$$

Os últimos termos das Eqs.(2.9b) e (2.10) vêm das contribuições puramente espaciais dos símbolos $\Gamma_{ij}^a[\gamma]$, que acabam por formar o tensor de Ricci (2.2) das seções espaciais \mathcal{K} . As componentes R_{0i} são nulas como era de se esperar pela ausência de direções privilegiadas no espaço; note também que $R_{ij} \sim \delta_{ij}$ não seleciona nenhuma direção particular em \mathcal{K} . O único grau de liberdade contido na curvatura é o fator de escala $a(x^0)$. A função $N = \sqrt{-g_{00}}$, chamada de ‘função lapso’ — que atua como um multiplicador de Lagrange na ação de Einstein-Hilbert no formalismo de [Arnowitz *et al.* \(1960\)](#) — é livre, e está sujeita a uma “escolha de calibre”, i.e. à escolha do sistema de coordenadas por meio da definição da coordenada temporal; por isso para cada N a coordenada x^0 terá significados físicos diferentes. Há duas escolhas principais, correspondentes aos tempos cósmico e conforme.

Faça $N = 1$, viz.

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \right]. \quad (2.11)$$

Então a coordenada t marca a passagem ($-ds^2$) do tempo-próprio de um observador cuja posição espacial é fixa. Com $N = 1$, temos $U^\alpha = \partial_t$. Logo as órbitas de ∂_t são geodésicas tipo-tempo e t marca o tempo-próprio de observadores em queda-livre sujeitos apenas ao fluxo de Hubble. Por corresponder aos relógios de

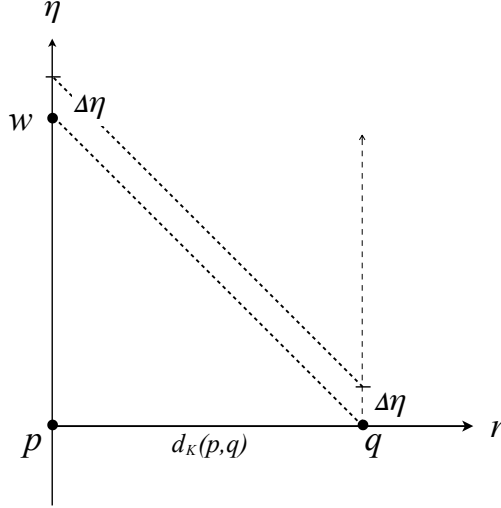


Figura 2.1: Diagrama conforme mostrando geodésicas nulas emitidas sobre a linha-de-mundo de um observador \mathcal{G} (e.g. uma galáxia) que passa pelo evento $q \in \mathcal{K}_0$ e recebidas por um segundo observador \mathcal{T} (e.g. a Terra) cuja linha-de-mundo passa pelo evento $p \in \mathcal{K}_0$. A superfície \mathcal{K}_0 corresponde ao tempo conforme η_0 . A primeira geodésica passa por q e a segunda cruza a linha de mundo em um outro evento correspondente a $\eta_0 + \Delta\eta$. Por construção, o intervalo de tempo conforme entre os eventos p e w sobre a linha-de-mundo de \mathcal{T} é igual à distância comóvel $d_K(p, q)$ entre p e q .

observadores sujeitos unicamente à gravidade do Universo em larga escala, a este t chamamos de ‘tempo cósmico’.

Faça agora $N(x^0) = a(x^0)$, $x^0 = \eta$ e

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-d\eta^2 + \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (2.12)$$

A função $a^2(\eta)$ atua como um fator conforme para uma métrica independente do tempo, e portanto η é chamado de ‘tempo conforme’. É imediato relacionar o tempo conforme com o tempo cósmico se soubermos a função $a = a(t)$:

$$d\eta = dt/a(t). \quad (2.13)$$

Geodésicas nulas são insensíveis a fatores conformes, que se fatoram no elemento de linha $ds^2 = 0$, e portanto entre dois eventos p e $q \in \mathcal{M}$, com coordenadas $\{\eta_p, r_p, 0, 0\}$ e $\{\eta_q, r_q, 0, 0\}$ (por conta da isotropia podemos considerar apenas a distância radial entre dois pontos quaisquer), ligados por uma geodésica nula vale

$\eta_p - \eta_q = d_K(p, q)$, com $d_K(p, q) \equiv \int_p^q du \sqrt{\gamma_{ab}(dx^a/du)(dx^b/du)} = \int_p^q \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = d_K(r_p) - d_K(r_q)$, onde

$$d_K(r) \equiv \begin{cases} \text{Arc sen}(r) & \text{para } K = 1 \\ r & \text{para } K = 0 \\ \text{Arc sinh}(r) & \text{para } K = -1 \end{cases} .$$

Portanto o tempo conforme é um parâmetro afim das geodésicas nulas, e a diferença entre tempos conformes mede a ‘*distância comóvel*’ percorrida por um fóton entre dois eventos, como mostrado na Fig.2.1.

*

O fator de escala

A distância entre os pontos p e q que realmente é medida por um observador no instante x^0 *não* é a distância comóvel $d_K(p, q)$ por causa da função $a^2(x^0)$ que multiplica o elemento de linha das seções espaciais na métrica (2.5a), e que tem o efeito de modificar a escala das réguas fundamentais, e por isso é chamada de ‘*fator de escala*’. Assim, a ‘*distância física*’, mensurável, é a distância-própria $\ell(x^0)$ entre os dois pontos p e q ,

$$\ell_{p,q}(x^0) = \int_p^q ds|_{x^0=\text{constante}} = a^2(x^0)d_K(p, q).$$

Para se detectar a variação do fator de escala ao longo do tempo se usa como régua fundamental os comprimentos de onda do espectro luminoso emitido por galáxias. Seja a Via Láctea o observador \mathcal{T} cuja linha-de-mundo passa pelo evento p e uma galáxia qualquer o observador \mathcal{G} cuja linha-de-mundo passa pelo evento q , com $p, q \in \mathcal{K}_0$, no instante conforme $\eta = \eta_0$. A galáxia emite radiação com período conforme $\Delta\eta$. A frente de onda emitida no evento q alcança \mathcal{T} no evento w , como mostrado na Fig.2.1. O período conforme observado por \mathcal{T} é o mesmo $\Delta\eta$ (pois o tempo conforme é insensível ao fator de escala sobre geodésicas nulas). O que se mede, entretanto, é a diferença de tempo cósmico entre as frentes de onda que, de acordo com a Eq.(2.13), é $\Delta t_w = a(t_w)\Delta\eta$; e da mesma forma o período físico da radiação emitida por \mathcal{G} é $\Delta t_q = a(t_q)\Delta\eta$. (Consideramos que o fator de escala não muda apreciavelmente no intervalo $\Delta\eta$.) Assim existe uma discrepância entre o comprimento λ_q da onda no instante em que é emitida e o seu comprimento λ_w quando observada, medida pelo ‘desvio para o vermelho’

$$z \equiv \frac{\lambda_w - \lambda_q}{\lambda_q} = -1 + \frac{a(t_w)}{a(t_q)}. \quad (2.14)$$

Em primeira ordem na diferença $(t_w - t_q)$, ou seja, para galáxias próximas da Terra, se pode expandir

$$a(t_w) = a(t_q) + (t_w - t_q) \frac{\dot{a}(t_q)}{a(t_q)} + \dots,$$

e como $c(t_w - t_q)$ é a distância (física) ℓ entre as galáxias, tem-se uma relação linear entre o desvio para o vermelho observado e a distância da galáxia que se observa: $z \approx H_0 \ell$. Esta é a ‘Lei de [Hubble \(1929\)](#)’, que mediu pela primeira vez a expansão do Universo. A relação fora deduzida teoricamente por [Lemaître \(1927\)](#), dois anos antes de sua comprovação observacional. O coeficiente (usamos um ponto para denotar derivada quanto ao tempo *cósmico*)

$$H(t) \equiv \dot{a}/a,$$

cujo valor *hoje* (ou em 1929, sem diferença apreciável) é conhecido como Constante de Hubble, e vale¹ $H_0 = 67.74 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ de acordo com os dados da [Planck Collaboration et al. \(2016c\)](#).

2.2 O tensor de energia-momento

O tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ deve possuir as mesmas simetrias da métrica e, portanto, no referencial adequado em que esta assume a forma diagonal (2.5), (1) as componentes de $T_{\mu\nu}$ não podem depender das coordenadas espaciais, devido à completa homogeneidade das seções \mathcal{K} ; e

(2) a projeção de $T_{\mu\nu}$ sobre as seções \mathcal{K} deve ser uma matriz diagonal, caso contrário haveria uma direção espacial privilegiada violando a isotropia.

A única direção privilegiada no espaço-tempo de Robertson-Walker é a direção tipo-tempo ao longo do vetor ∂_0 que define observadores em queda-livre seguindo geodésicas com vetor tangente (2.7), $U^\mu \equiv \frac{1}{N(x^0)} \delta_0^\mu$. A projeção ortogonal a essa direção é feita pelo tensor

$$P_\nu^\mu = U^\mu U_\nu + \delta_\nu^\mu \quad (\text{logo} \quad P_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} P_\nu^\alpha = U_\mu U_\nu + g_{\mu\nu}),$$

tal que para qualquer vetor V^μ temos $\perp V^\mu \equiv P_\nu^\mu V^\nu$ perpendicular a U^μ . Sendo assim, só pode existir um grau de liberdade no espaço gerado por $U^\mu U^\nu$ e outro nas três direções ortogonais representadas por $P^{\mu\nu}$; descreva-os, respectivamente, com as funções $\rho(x^0)$ e $P(x^0)$, e a única forma do tensor de energia-momento compatível com as condições (1) e (2) é

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu + P (U_\mu U_\nu + g_{\mu\nu}). \quad (2.15)$$

¹Unidade derivada do parsec (pc); 1Mpc = 10⁶pc, com 1pc = 3,26 anos-luz = 3,086 × 10¹⁸cm, ou seja 1Mpc ~ 3 × 10²² metros.

Explicitamente, as componentes

$$T_{00} = -N^2 \rho, \quad T_{ij} = a^2 P \delta_{ij} \quad \text{e} \quad T^{00} = -\frac{1}{N^2} \rho, \quad T^{ij} = \frac{1}{a^2} P \delta_{ij}, \quad (2.16a)$$

enquanto

$$T^\mu{}_\nu = \text{Diag}(-\rho, P, P, P). \quad (2.16b)$$

*

Um fluido isentrópico

O tensor de energia-momento com o formato (2.15) corresponde ao de um fluido cujas linhas de fluxo têm o campo U^μ como tangente. (Cf., e.g., [Hawking & Ellis \(1973\)](#).) A projeção $T^{\mu\nu}U_\mu U_\nu$ dá a densidade de energia percebida pelo observador que acompanha o fluxo. No sistema de referencial da Terra, em que $N = 1$, a densidade de energia observada é, portanto, $\rho(t)$. As componentes espaciais T_{ii} dão as pressões do fluido nas direções de x^i que aqui são dadas por uma única função $P(t)$, idêntica em todas as direções espaciais (i.e. o fluido é “isentrópico”). A diferença entre os diversos tipo de fluido cujo tensor tem a forma (2.15) está na relação entre as componentes espaciais e a componente temporal de $T^{\mu\nu}$. Isto é, os diferentes fluidos e, portanto, as diferentes possíveis dinâmicas do universo, são determinados por uma relação da forma

$$P = P(\rho), \quad \text{ou} \quad P/\rho \equiv w(\rho). \quad (2.17)$$

A última dessas equações corresponde à equação de estado do fluido (ou do gás) na sua descrição termodinâmica. A função $w(\rho)$ é conhecida como ‘parâmetro da equação de estado’, e assume valores constantes em diversos casos relevantes: um gás de fótons tem $w = \frac{1}{3}$ e um gás de poeira tem $w = 0$.

*

Um campo escalar

Para um campo escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$ com potencial $V(\phi)$, a Lagrangeana de matéria

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi), \quad (2.18)$$

dá o tensor de energia-momento (A.7),

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + V(\phi) \right), \quad (2.19)$$

que tem exatamente a forma (2.15), desde que se leia

$$\rho = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + V(\phi), \quad P = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.20a)$$

$$U^\mu = -(\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi)^{-1/2} \partial^\mu \phi. \quad (2.20b)$$

Repare que a analogia entre o campo escalar e um fluido existe mesmo para $\phi(\mathbf{x}, t)$; no caso de um universo homogêneo e isotrópico, temos necessariamente $\phi = \phi(t)$ e com isso

$$\rho \equiv \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi); \quad P \equiv \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.21)$$

*

A constante cosmológica

Originalmente introduzida por [Einstein \(1917\)](#) do lado esquerdo, “geométrico”, das equações de campo,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \varkappa^2 T_{\mu\nu},$$

a constante cosmológica Λ pode ser passada para o lado direito e interpretada como um tipo de matéria cujo tensor de energia-momento tem a forma específica $T_{\mu\nu} = -\varkappa^{-2} \Lambda g_{\mu\nu}$. Comparação com a Eq.(2.15) revela que isso equivale a um fluido com equação de estado

$$P = -\rho, \quad \text{logo} \quad w = -1,$$

e densidade de energia constante

$$\rho = \Lambda/\varkappa^2. \quad (2.22)$$

Além disso, comparação com a Eq.(A.9) deixa claro que a constante cosmológica pode ser obtida pela inclusão de um termo $\mathcal{L}_\Lambda \sim \Lambda$ constante na Lagrangeana de Einstein-Hilbert:

$$S = \frac{1}{2\varkappa^2} \int d^4 \sqrt{-g} (R - 2\Lambda).$$

Por outro lado, essa Lagrangeana constante corresponde a um campo escalar ϕ estacionado em uma configuração de vácuo, i.e. um extremo ϕ_* do potencial $V(\phi)$ tal que $\partial_\mu \phi = 0$ e portanto (2.18) se resume a $V(\phi_*) = \Lambda/\varkappa^2$.

2.3 As equações de Friedmann

A dinâmica do espaço-tempo de Robertson-Walker é descrita pelas Equações de Einstein (A.6),

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \varkappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

com uma possível constante cosmológica incluída no tensor de energia-momento. Usando as fórmulas (2.9) e (2.10) para montar o tensor de Einstein do lado

esquerdo, e com o tensor de energia-momento (2.16), chega-se a duas equações diferenciais de segunda ordem independentes,

$$\frac{1}{N^2} \left(\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} \right)^2 = \frac{\varkappa^2}{3} \rho - \frac{K}{a^2}, \quad (2.24a)$$

$$\frac{1}{N^2} \frac{da/d\tau}{a} \left[\frac{a}{da/d\tau} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} \right) + \frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} - \frac{1}{N} \frac{dN}{d\tau} \right] = -\frac{\varkappa^2}{6} (\rho + 3P). \quad (2.24b)$$

(A Eq.(2.24a) é simplesmente a componente 00 das equações de Einstein, enquanto (2.24b) é uma combinação das componentes 00 e 11.)

Além destas, o vínculo (A.8) fornecido pelas identidades de Bianchi implica na conservação do tensor de energia-momento,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.25)$$

o que, para o tensor de energia-momento do fluido perfeito, dá

$$(P + \rho)U^\mu \nabla_\mu U^\nu + U^\nu U^\mu \nabla_\mu (P + \rho) + (P + \rho)U^\nu \nabla_\mu U^\mu + \nabla^\nu P = 0.$$

Ao se multiplicar a equação acima por U_ν , e utilizando a Eq.(2.8) para o comportamento geodésico dos observadores U^α , temos uma ‘equação de continuidade’ para a variação da densidade de energia à medida que o fator de escala muda:

$$D\rho/d\tau = -(P + \rho)\nabla_\mu U^\mu,$$

sendo $D/d\tau \equiv U^\mu \nabla_\mu$, a derivada ao longo da curva definida pelo campo U^μ , parametrizada pelo parâmetro tipo-tempo τ . Como $\nabla_\mu U^\mu = dN^{-1}/d\tau + N^{-1}\Gamma_{0\mu}^\mu = -N^{-2}dN/d\tau + N^{-1}(N^{-1}dN/d\tau + 3a^{-1}da/d\tau)$, temos por fim

$$d\rho/d\tau = -3\frac{(\rho + P)}{a} da/d\tau. \quad (2.26)$$

Um par de equações diferenciais de segunda ordem, as Eqs.(2.24) são suficientes para determinar o fator de escala como função de τ uma vez especificada a matéria, i.e. a equação de estado (2.17) do fluido (ou o potencial $V(\phi)$ para um campo escalar). Portanto a Eq.(2.26) não pode ser uma terceira equação independente e, de fato, não é. É possível chegar a ela derivando-se a Eq.(2.24a) e usando o resultado para eliminar \ddot{a} na Eq.(2.24b).

No tempo cósmico t , com a função lapso $N = 1$, as Equações de Einstein (2.24) são conhecidas como Equações de Friedmann (1922, 1924):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{K}{a^2}; \quad (2.27a)$$

$$\ddot{a}/a = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3P). \quad (2.27b)$$

Denotamos $\dot{f} \equiv df/dt$. O conhecimento destas equações muito antes das análises de Robertson e Walker mostra que A. Friedmann chegou sozinho à métrica (2.11), e por isso a descrição do Universo através de um espaço-tempo homogêneo e isotrópico é geralmente dita uma ‘*cosmologia de Friedmann-Robertson-Walker*’ (*FRW*). A primeira pessoa a perceber que nestes modelos o Universo se expande após “surgir” de uma explosão (ou de um “átomo primordial”) foi [Lemaître \(1931\)](#). Por esse motivo os modelos cosmológicos da ‘Teoria do Big-Bang’ costumam ser chamados de ‘cosmologias de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker’ (*FLRW*). No tempo conforme $\eta = \int dt/a(t)$, as equações de Friedmann ficam

$$\left(\frac{a'}{a^2}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}; \quad (2.28a)$$

$$\frac{a''}{a^3} - \left(\frac{a'}{a^2}\right)^2 = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P), \quad (2.28b)$$

com $f' \equiv df/d\eta$. A equação da continuidade (2.26) mantém a mesma forma pois é independente da escolha da função lapso.

As equações para um campo escalar, usando a correspondência (2.21), ficam

$$(\dot{a}/a)^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) - K/a^2; \quad (2.29a)$$

$$\ddot{a}/a = -\frac{\kappa^2}{6} \left(\dot{\phi}^2 - V(\phi) \right); \quad (2.29b)$$

no tempo cósmico, e

$$(a'/a^2)^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{1}{2}(\phi'/a)^2 + V(\phi) \right) - K/a^2; \quad (2.30a)$$

$$a''/a^3 = -\frac{\kappa^2}{6} \left((\phi'/a)^2 - 4V(\phi) \right) - K/a^2 \quad (2.30b)$$

no tempo conforme. A Eq.(2.25) para a conservação do tensor de energia-momento dá a equação de Klein-Gordon

$$\ddot{\phi} + 3(\dot{a}/a)\dot{\phi} = -\partial_\phi V(\phi), \quad (2.31)$$

ou, no tempo conforme,

$$\phi'' + 2(a'/a)\phi' = -a^2 \partial_\phi V(\phi). \quad (2.32)$$

A derivada segunda do fator de escala com respeito ao tempo *cósmico*, d^2a/dt^2 , corresponde à aceleração da expansão cósmica, uma vez que o tempo cósmico corresponde ao tempo próprio na Via Láctea. Com isso se vê da Eq.(2.27b) que

$$\text{se } w(\rho) > -1/3 \quad \text{o universo } \textit{desacelera}: \quad \ddot{a} < 0; \quad (2.33a)$$

$$\text{e se } w(\rho) < -1/3 \quad \text{o universo } \textit{acelera}: \quad \ddot{a} > 0, \quad (2.33b)$$

onde usamos a equação de estado do fluido, Eq.(2.17). Contrariando todas as expectativas, a segunda possibilidade é a que se observa, com a aceleração da expansão cósmica tendo sido comprovada por [Riess *et al.* \(1998\)](#) e [Perlmutter *et al.* \(1999\)](#). Uma maneira comum de se medir a aceleração do fator de escala para $K = 0$ é através do chamado ‘*parâmetro de desaceleração*’

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{1}{2}(1 + 3w), \quad (2.34)$$

tal que $q > 0$ indica aceleração *negativa*, etc. Repare da Eq.(2.28b) que $a'' > 0$ não corresponde, necessariamente, a um universo acelerado.

2.4 Modelos cosmológicos

A solução das equações de campo (2.24) descritas na seção anterior fornece a evolução da geometria e da matéria no Universo. Uma vez conhecida a equação de estado, a Eq.(2.26) dá a maneira com que o fluido se “dilui” com o fator de escala, i.e.

$$ad\rho/da = -3(\rho + P) \quad \text{logo} \quad a(\rho) = \exp\left[-\frac{1}{3} \int \frac{d\rho/\rho}{(1+w)}\right]. \quad (2.35)$$

Invertendo a relação para se ter $\rho = \rho(a)$, a Eq.(2.27a) é uma equação de primeira ordem cuja solução é dada pela integral indefinida

$$\sqrt{(\mathcal{K}^2/3)} \tau(a) = \int da N^{-1} (a^2 \rho(a) - 3K/\mathcal{K}^2)^{-1/2}. \quad (2.36)$$

Claro que nem sempre é possível resolver a integral analiticamente e, mesmo quando sim, nem sempre é possível inverter analiticamente a função $\tau(a)$ para obter o fator de escala $a(\tau)$, o que não impede que se tire informações importantes mesmo nesses casos, como será exemplificado mais abaixo.

*

Fluidos barotrópicos

A classe mais simples de soluções analíticas das equações de Friedmann é dada por fluidos barotrópicos com $w = \text{constante}$. A integral em (2.35) é trivial, e

$$\rho = \rho_w \times a^{-3(1+w)}, \quad (2.37)$$

com ρ_w uma constante de integração. Para $K = 0$, a integral (2.36) também é imediata, e temos

$$a(t) = a_* t^{2/3(1+w)} \quad \text{e} \quad a(\eta) = a_* \eta^{2/(1+3w)}, \quad (2.38)$$

nos tempos cósmico ($N = 1$) e conforme ($N = a$), com a_* uma constante arbitrária de integração determinada pelas condições iniciais.

Os exemplos principais de fluidos barotrópicos são:

Radiação: Se o fluido é composto por partículas ultrarelativísticas (a altas energias, i.e. $p^2 \gg m^2$), equação de estado é a mesma de um gás de fótons na radiação de corpo-negro, $w = 1/3$; então

$$\rho = \rho_R/a^4 \quad \text{com} \quad w = \frac{1}{3}, \quad \text{e} \quad a = a_* \sqrt{t} = a_* \eta. \quad (2.39)$$

Poeira / Matéria Escura: Para partículas que se movem a baixas velocidades a pressão é nula e $w = 0$. É o caso do universo dominado por matéria fria (e.g. matéria escura). Então a densidade de energia se dilui com o volume espacial $V \sim a^3$, viz.

$$\rho = \rho_M/a^3, \quad \text{com} \quad w = 0, \quad \text{e} \quad a = a_* t^{2/3} = a_* \eta^2. \quad (2.40)$$

Constante Cosmológica: Para $w = -1$ a densidade de energia é constante e corresponde à constante cosmológica dada pela Eq.(2.22); então

$$\rho = \rho_\Lambda \quad \text{e} \quad a(t) = a_* e^{Ht} \quad a(\eta) = 1/(H\eta), \quad \text{com} \quad H = \sqrt{\rho_\Lambda/3}. \quad (2.41)$$

Outros casos que serão úteis são as equações de estado de objetos extensos com dimensão 1 e 2, i.e, cordas e paredes de domínio. Esses objetos são ‘defeitos topológicos’ que surgem em uma possível transição de fase no universo primordial, através do mecanismo de [Kibble \(1976\)](#); ver também, e.g., [Durrer \(1999\)](#); [Vilenkin & Shellard \(1994\)](#). Também são ingredientes de modelos cosmológicos contendo um gás de cordas ou de branas, propostos por [Alexander et al. \(2000\)](#); [Brandenberger & Vafa \(1989\)](#). A equação de estado para um gás de p -branas é deduzida no Apêndice F; cordas são 1-branas e paredes de domínio 2-branas.

Um gás de cordas: Um gás de cordas não relativísticas tem como equação de estado $w = -1/3$, e portanto

$$\rho = \rho_C/a^2, \quad \text{com} \quad w = -1/3, \quad \text{e} \quad a = a_* t = a_* \log \eta. \quad (2.42)$$

(Note que a fórmula (2.38) $a(\eta)$ não vale.) O termo de curvatura na Eq.(2.27a) tem a mesma dependência, e podemos tratá-lo como se fosse uma contribuição à densidade de energia correspondente a um gás de cordas, tendo em mente que nesse caso a densidade relativa $\rho_C = -K$ pode assumir valores *negativos* em universos fechados onde $K > 0$. (Essa interpretação geométrica do gás de cordas não é incomum, ver, e.g. [Kamenshchik & Khalatnikov \(2012\)](#).)

Um gás de branas: Um gás de branas, ou de paredes de domínio, não relativísticas tem como equação de estado $w = -2/3$, e portanto

$$\rho = \rho_{PD}/a, \quad \text{com} \quad w = -2/3, \quad \text{e} \quad a = a_* t^2 = a_*/\eta^2. \quad (2.43)$$

*

Mistura de fluidos não interagentes

A primeira generalização das soluções (2.37) consiste em se considerar uma mistura de mais de um fluido barotrópico, cada um com parâmetro constante na equação de estado, e todos não interagentes. Um conjunto de fluidos com densidade e pressão $\{\rho_{\{J\}}, P_{\{J\}}\}$ é dito “não interagente” se cada fluido obedece a equação da continuidade $\nabla_\mu T_{\{J\}}^{\mu\nu} = 0$ *separadamente*, ou seja, se

$$d\rho_{\{J\}}/d\eta + 3(\rho_{\{J\}} + P_{\{J\}})(a'/a) = 0 \quad (2.44)$$

para todo J ; com isso se pode determinar individualmente a evolução de cada componente com o fator de escala através da integral (2.35). O tensor de energia-momento total, que serve de fonte para as equações de Einstein/Friedmann é a soma $T^{\mu\nu} = \sum_J T_{\{J\}}^{\mu\nu}$, cujas componentes são também a soma das densidades e pressões, i.e.

$$\rho = \sum_J \exp \left[-\frac{1}{3} \int \frac{d\rho/\rho}{(1+w_J)} \right].$$

Se w_J são constantes a Eq.(2.37) dá

$$\rho = \sum_J \frac{\rho_J}{a^{3(1+w_J)}}, \quad (2.45)$$

com ρ_J constantes (não confundir com $\rho_{\{J\}}$, viz. $\rho_{\{J\}} = \rho_J/a^{3(1+w_J)}$). Quando fluidos interagem, apenas o tensor total, e não os tensores $T_{\{J\}}^{\mu\nu}$, satisfaz a equação da continuidade. (Para uma descrição um pouco mais detalhada, cf. §9.2.)

2.5 Geometria causal de universos FLRW

2.5.1 Horizontes de partícula e de eventos

O tempo conforme é um parâmetro afim para as geodésicas nulas, e em um diagrama η - r , onde r é a coordenada radial comóvel de (8.24) os cones de luz são descritos pelas retas

$$\mathcal{C}_*^\pm = \{r = \pm\eta + \eta_*\}. \quad (2.46)$$

O sinal positivo, \mathcal{C}^+ , corresponde a geodésicas que se afastam radialmente do evento $p = \{\eta_*, r_*\}$, o sinal negativo às geodésicas que se aproximam. Para um dado observador \mathcal{O} no instante η , o raio comóvel máximo r_P de seu cone de luz passado, se $r_P < \infty$, define uma esfera chamada de ‘*horizonte de partículas*’. Trata-se da fronteira entre os eventos que podem ter contactado \mathcal{O} até o instante η . A existência de um horizonte de partículas indica que η tem um “começo” em $\eta = \eta_i > -\infty$ ou, mais precisamente, que a linha-de-mundo de \mathcal{O} não é extensível infinitamente para o passado, como se vê na Fig.2.2. Em outras palavras, indica a existência de uma singularidade. Por outro lado, a existência de um raio comóvel máximo $r_F < \infty$ para o cone de luz futuro indica a existência de um ‘*horizonte cosmológico*’ (ou “horizonte de eventos cosmológico”), que determina o limite dos eventos que poderão eventualmente ser influenciados por \mathcal{O} .

Como se pode inferir da Fig.2.2, a existência de horizontes está associada à existência de uma “duração conforme finita” do universo. Se há uma singularidade em η_i “cortando” as geodésicas passadas do observador em p no instante conforme η , então o raio comóvel do horizonte de partículas é

$$r_P = \eta - \eta_i, \quad \text{e} \quad r_F = \eta_f - \eta \quad (2.47)$$

para um horizonte de eventos, onde η_f é o “final conforme” da vida universo, quando $a(\eta_f) = \infty$. Os raios físicos são, respectivamente,

$$\ell_P(\eta) = a(\eta)(\eta - \eta_i), \quad \text{e} \quad \ell_F(\eta) = a(\eta)(\eta_f - \eta). \quad (2.48)$$

No tempo cósmico, as r_P e r_F são escritos como as integrais

$$r_P(t) = \int_{t_i}^t dt/a(t), \quad r_F(t) = \int_t^{\infty} dt/a(t), \quad (2.49)$$

com $\ell(t) = a(t)r(t)$. Ainda é possível reescrever (2.49) em função apenas do fator de escala, através da mudança de variáveis $dt = Hda$, donde

$$r_P(a) = \int_0^a da/(Ha^2), \quad r_F(t) = \int_a^{\infty} da/(Ha^2). \quad (2.50)$$

Usando as Eqs.(2.47) e (2.50), temos uma expressão para a duração conforme do universo:

$$\eta_f - \eta_0 = \int_0^{\infty} da/(Ha^2) = r_P + r_F. \quad (2.51)$$

Nem sempre as integrais (2.50) convergem, entretanto, o que significa que nem sempre existem um ou os dois tipos de horizontes. Por exemplo, considere um universo em expansão em que, para $a \rightarrow 0$ ou para $a \rightarrow \infty$, o parâmetro da

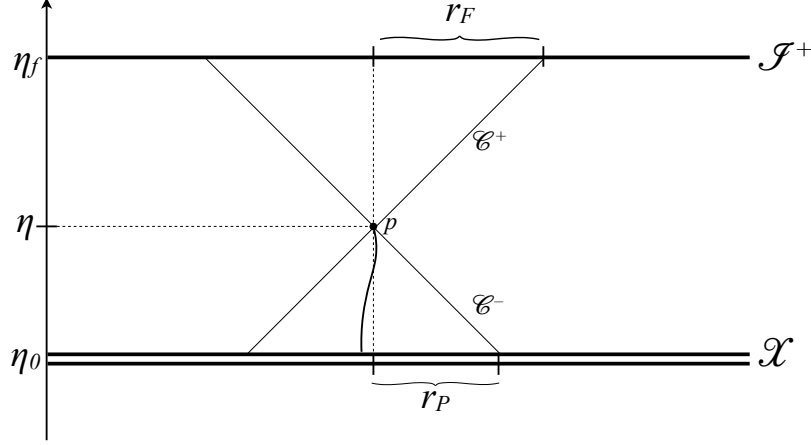


Figura 2.2: Horizonte de eventos (r_E) e de partículas (r_P).

equação de estado seja aproximadamente constante e valha a Eq.(2.37). Usando a Eq.(2.27a) para $K = 0$, temos $H = \sqrt{(\rho_w/3)}a^{-3(1+w)/2}$, logo

$$\int_x^a da/(Ha^2) = \sqrt{3/\rho_w} \int_x^a da a^{(3w-1)/2} \sim a^{(1+3w)/2} - x^{(1+3w)/2}.$$

Tomando o limite $x \rightarrow 0$ ou $x \rightarrow \infty$ temos, a menos de um possível sinal e um fator multiplicativo, r_P e r_F , respectivamente. Daí, e com o auxílio da Eq.(2.34), se conclui que

- 1) Se $w > -1/3$, então r_P é finito e r_F diverge; logo, universos que são desacelerados para a arbitrariamente grande não possuem horizonte de eventos, e universos desacelerados no big-bang, quando $a \rightarrow 0$, possuem horizonte de partículas.
- 2) Se $w < -1/3$, agora r_F é finito e r_P diverge; logo, universos que são acelerados para a arbitrariamente grande possuem um horizonte de eventos, e universos acelerados no big-bang, quando $a \rightarrow 0$, não possuem horizonte de partículas.

2.5.2 A esfera de Hubble e o horizonte aparente

Para um certo observador na origem do sistema de coordenadas em um universo de FLRW, a velocidade de afastamento de um ponto a uma distância física $\ell = ar$ é dada por

$$v \equiv \dot{\ell} = aHr = H\ell.$$

A expansão se torna superluminal (mais rápida que a luz) se $v > c$, o que corresponde a distâncias $\ell > \ell_H$ tal que $H\ell_H = c$, ou seja (devolvendo por um instante a velocidade da luz)

$$\ell_H = c/H, \tag{2.52}$$

o que define o ‘raio de Hubble’. A esfera de Hubble, com raio ℓ_H , é, assim, uma espécie de “horizonte dinâmico”, uma medida local que determina, a cada instante, os limites de uma região cujo interior está em contato causal. Isso deve ser comparado com a natureza intrinsecamente não-local dos horizontes de eventos e partícula, definidos com base em toda a evolução, passada ou futura, do Universo. (No caso do horizonte de eventos o problema é de ordem teleológica, já que para determinar $r_E(t)$ é necessário conhecer toda a história *futura* do Universo, coisa que, por definição, ainda não aconteceu.)

Pela conveniência de ser uma grandeza local, vamos utilizar o raio de Hubble como medida do tamanho (causal) do Universo.

De forma mais técnica, o raio de Hubble está ligado ao ‘horizonte aparente’ de um universo de FLRW.¹ Em um espaço esfericamente simétrico, uma superfície esférica \mathcal{S} é um ‘horizonte aparente’ se a expansão da família de geodésicas nulas futuras *exteriores* a \mathcal{S} é $\theta_+ > 0$, e enquanto a expansão das geodésicas futuras interiores a \mathcal{S} é $\theta_- = 0$. Em uma superfície esférica ‘normal’, $\theta_- < 0$ pois as geodésicas convergem para o centro. Intuitivamente, \mathcal{S} é uma superfície limítrofe a partir da qual as geodésicas nulas dirigidas ao interior de uma esfera *divergem* por causa da expansão do espaço. A expansão de uma família de geodésicas $\gamma(\lambda)$ ortogonal a uma superfície \mathcal{S} de área \mathcal{A} pode ser calculada como

$$\theta = (1/\mathcal{A})d\mathcal{A}/d\lambda, \quad (2.53)$$

onde λ é um parâmetro afim de γ . Esta equação é a fórmula mais simples para o cálculo de θ em um universo de FLRW. Escrevendo a métrica na forma

$$ds^2 = a^2(t) (-d\eta^2 + d\chi^2 + f^2(\chi)d\sigma^2), \quad (2.54)$$

onde $f(\chi) = \sinh \chi$, $\text{sen } \chi$, χ , para $K = -1, +1, 0$, uma esfera \mathcal{S} , de raio χ , possui área $\mathcal{A} = 4\pi a^2(t)f^2(\chi)$. Usando $\eta = \lambda$ como parâmetro afim, podemos calcular θ_{\pm} para as geodésicas radiais γ_{\pm} dirigidas para o exterior futuro (+) e para o interior futuro (-). Escrevendo por um momento $f' = df/d\chi$, temos

$$d\mathcal{A}/d\lambda = 4\pi d(a f)^2/d\eta = 8\pi a f (f da/d\eta + a df/d\eta) = 2\mathcal{A}(\dot{a} + (f'/f)d\chi/d\eta),$$

e pela Eq.(2.54) geodésicas nulas obedecem $d\chi/d\eta = \pm 1$. Assim, com a Eq.(2.53), temos

$$\theta_{\pm} = 2a(H \pm f'/(a f)), \quad (2.54)$$

com o sinal + (-) indicando que o raio ρ aumenta (diminui) para uma geodésica que se dirige ao exterior (interior) de \mathcal{S} . O horizonte aparente é definido por

¹As definições seguem Hayward (1994), com a nomenclatura original relacionada a buracos negros adaptada para espaços cosmológicos. Ver também Faraoni (2011) e Bousoo (2002).

$\theta_- = 0$ e, portanto, satisfaz $f'(\chi)/f(\chi) = aH$ cuja solução é $r_A = \ell_A/a$, com o raio físico

$$\ell_A = \frac{1}{\sqrt{H^2 + K/a^2}}. \quad (2.55)$$

Assim, enquanto K/a^2 for suficientemente pequeno (e, em particular, para $K = 0$) a esfera de Hubble coincide com o horizonte aparente.

É válido enfatizar a maior das diferenças entre a natureza local do horizonte aparente e do horizonte de Hubble, por um lado, e a natureza não-local do horizonte de partículas, por outro. O horizonte de partículas estabelece uma relação entre *eventos*. Se um ponto a uma distância comóvel r corresponde a um evento u fora do horizonte de partículas de um observador o , então uma pessoa em u *nunca* pode ter entrado em contato com o . Por outro lado, o horizonte aparente estabelece uma relação entre *distâncias, a cada instante*. Se r é a separação comóvel entre dois observadores, e $r_H(\eta) < r$ no instante η , então a comunicação entre ambos está proibida, mas apenas momentaneamente. Se em algum momento η' valer $r_H(\eta') > r$, então a comunicação passa a ser permitida.

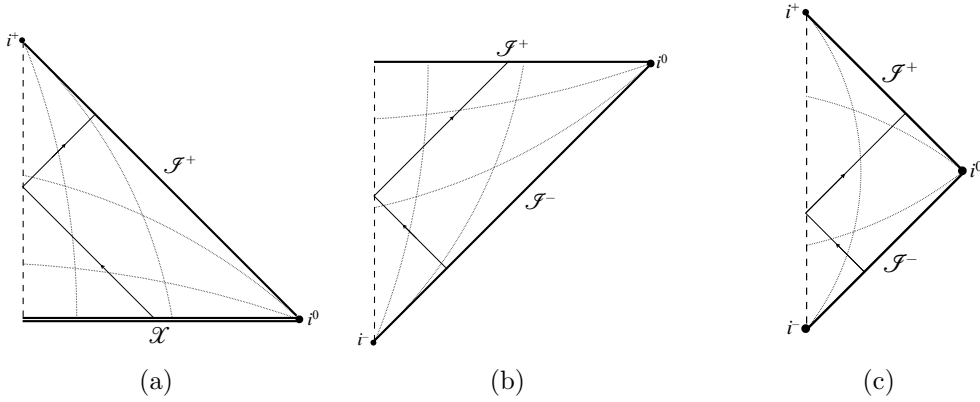


Figura 2.3: Diagramas de Penrose para universos com equação de estado constante e $K = 0$; (a) universo desacelerado; (b) universo acelerado; (c) universo com aceleração nula.

2.5.3 Diagramas de Penrose

Um gráfico como o da Fig.2.2 fornece uma representação “finita” do infinito temporal $\{t \rightarrow \infty\} \sim \{\eta \rightarrow \eta_f\}$, nos casos em que $\eta_f < \infty$. A compactificação completa do espaço-tempo pode ser feita por meios de diagramas de Penrose (ver

Apêndice B). Para encontrar os diagramas associados a um universo de FLRW, escreva a métrica no tempo conforme,

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + ds_{\mathcal{X}}^2), \quad (2.56)$$

de maneira que a dependência temporal corresponda a uma transformação de Weyl de uma métrica estática. Para $K = 1$, o termo em parênteses (cf. Eq.(2.4)),

$$ds_{\mathcal{E}}^2 = -d\eta^2 + d\chi^2 + \text{sen}^2\chi(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2), \quad (2.57)$$

já é o próprio cilindro de Einstein, e para $K = 0$ trata-se da métrica de Minkowski, que pode ser mapeada em $ds_{\mathcal{E}}^2$ pela transformação conforme (B.3), levando a

$$ds^2 = \Omega^2(\tau, \chi) ds_{\mathcal{E}}^2, \quad \text{com } \Omega^2(\eta) = \frac{1}{4} a^2(\tau, \chi) \sec^2\left(\frac{\chi+\tau}{2}\right) \sec^2\left(\frac{\chi-\tau}{2}\right). \quad (2.58)$$

(Cf. Eq.(B.9).) Transformação semelhante pode ser realizada para $K = -1$.

Num diagrama de Penrose, o infinito espacial fica compactificado pela transformação conforme (B.3), que mapeia o domínio infinito de $r \in (0, \infty)$ no domínio finito $(\tau \pm \chi) \in (-\pi, \pi)$, cf. Eq.(B.5). Com isso apenas, temos o digrama que mapeia Minkowski sobre uma “esquina” de \mathcal{E} , como descrito no §B.1. Nos espaços de FLRW, a presença de a^2 no fator conforme em (2.58) impõe um “corte” no diagrama de Minkowski, a depender se a se anula ou diverge para um tempo conforme finito. Como vimos no §2.5.1, universos assintoticamente acelerados no futuro têm $\eta_f < \infty$ e se assintoticamente acelerados no passado a singularidade está em $a(-\infty) = 0$; logo, no primeiro caso, o futuro infinito \mathcal{I}^+ corresponde à superfície tipo-espaço $\{\eta = \eta_f\}$, enquanto o passado infinito $\mathcal{I}^- \sim \{\eta = -\infty\}$ tem a mesma estrutura causal que em Minkowski: uma superfície nula. Para universos desacelerados, a lógica se inverte, i.e. a singularidade ocorre num tempo conforme finito e é, portanto, tipo-espaço, enquanto \mathcal{I}^+ é nulo. Os diagramas de fluidos perfeitos com w constante, ou seja, eternamente acelerados ou desacelerados, se encontram na Fig.2.3. Quando há duas fases de aceleração, primeiro desacelerada e depois acelerada (como é o caso do modelo de concordância), tanto a singularidade quanto o infinito são tipo-espaço e o diagrama tem a forma da Fig.2.4. Repare que se a ordem das fases fosse invertida, com o início acelerado e o final desacelerado, o universo tem infinito e singularidade nulas, e o diagrama tem a forma da Fig.B.1(b).

2.6 O Modelo Cosmológico Padrão

Na descrição do Universo em larga escala compatível com os dados observacionais advindos de diversas origens, e por isso conhecida como “modelo de concordância cósmica” (Ostriker & Steinhardt (1995)), ou “modelo cosmológico padrão”, o

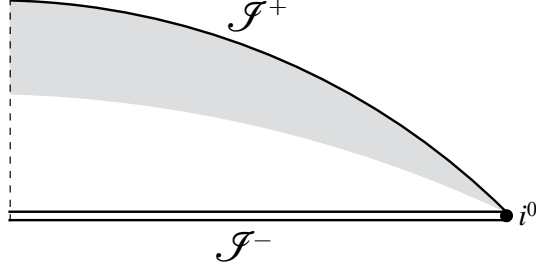


Figura 2.4: Diagrama de Penrose para universo com big-bang, começando desacelerado (porção branca) e assintoticamente acelerado (porção cinza).

tensor de energia-momento é composto por três fluidos não interagentes: matéria fria não-relativística que inclui tanto partículas “comuns” (bárions) quanto, e principalmente, matéria escura; partículas relativísticas, principalmente radiação (e neutrinos); e uma constante cosmológica Λ :

$$\rho = \rho_M/a^3 + \rho_R/a^4 + \rho_\Lambda.$$

Escrevendo a_0 para o valor do fator de escala hoje, e usando o subíndice 0 para outras grandezas avaliadas no tempo atual, é costume usar como parâmetros para as frações relativas da densidade de energia, em vez dos $\rho_{\{J\}}$ acima, $\Omega_{\{J\}}$ tais que

$$\rho = \frac{3H_0^2}{\kappa^2} [\Omega_M(a_0/a)^3 + \Omega_R(a_0/a)^4 + \Omega_\Lambda].$$

Pela a equação de Friedmann (2.27a), o coeficiente

$$3H_0^2/\kappa^2 \equiv \rho_{\text{crit}} \quad (2.59)$$

representa a densidade de energia do universo no instante atual, chamada de ‘densidade crítica’. Definindo ainda $\Omega_K \equiv -K/a_0^2 H_0^2$, e avaliando a Eq.(2.27a) hoje, se obtém a relação fixa

$$\Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1. \quad (2.60)$$

A Eq.(2.27a) dá a solução do tempo como uma função do fator de escala através da integral

$$t = \int_0^a da / \left[a H_0 \sqrt{\Omega_R(a_0/a)^4 + \Omega_M(a_0/a)^3 + \Omega_K(a_0/a)^2 + \Omega_\Lambda} \right], \quad (2.61)$$

com $t = 0$ quando $a = 0$; é vantajoso escrever a mesma integral com uma mudança de variáveis para o desvio para o vermelho z dado pela Eq.(2.14) (com $a_w \equiv a_0$), viz.

$$t(z) = H_0^{-1} \int_0^{1/(1+z)} d\xi / \left[\xi \sqrt{\Omega_R \xi^4 + \Omega_M \xi^3 + \Omega_K \xi^2 + \Omega_\Lambda} \right]. \quad (2.62)$$

2.6.1 A Radiação C3smica de Fundo (CMB)

A preval3ncia da ‘Teoria do Big-Bang’ sobre os outros modelos cosmol3gicos da d3cada de 60 (principalmente o ‘*steady state universe*’ de [Bondi & Gold \(1948\)](#) e [Hoyle \(1948\)](#)) se consolidou ap3s a descoberta da Radia3o C3smica de Fundo por [Penzias & Wilson \(1965\)](#). Liberada no instante de desacoplamento entre f3tons e b3rions, i.e. no momento de “recombina3o” (embora n3o tenha havido outra “combina3o” antes) entre el3trons e pr3tons em 3tomos de hidrog3nio, a CMB oferece evid3ncia de um Universo primordial quente. Sua temperatura atual 3 de

$$T_0 = 2,7260 \pm 0,0013 \text{ K}, \quad (2.63)$$

(cf. [Fixsen \(2009\)](#)) e corresponde a um espectro (tecnicamente perfeito) de corpo-negro, cuja distribui3o de f3tons segue a rela3o de Planck (uma distribui3o de Bose-Einstein com 2 graus de liberdade para as polariza3es de f3ton, cf. [Landau & Lifshitz \(1980\)](#))

$$dN_k(T) = \frac{1}{\pi^2} \frac{V k^2 dk}{e^{\hbar ck/k_B T} - 1}, \quad (2.64)$$

para o n3mero dN_k de f3tons com n3mero de onda entre k e $k + dk$. Durante a expans3o do Universo, a depend3ncia temporal do volume $V \sim a^3(t)$, enquanto $k = 2\pi/\lambda \sim 1/a(t)$, sendo $\lambda \sim a(t)$ o comprimento de onda (f3sico). Portanto o fator no numerador, $V k^2 dk$, fica invariante. No denominador, o argumento da fun3o exponencial tem a depend3ncia de k/T . Mas, como se pode ver da Eq.(2.66) em compara3o com a solu3o (2.39) para um universo preenchido por radia3o, a temperatura de corpo-negro se reescala como $T \sim 1/a(t)$, o que mant3m a raz3o k/T tamb3m invariante. Assim, a distribui3o de Planck 3 preservada ao longo da evolu3o do Universo e a CMB se mant3m com um espectro de corpo-negro at3 hoje, e desde a sua emiss3o. Ao mesmo tempo, o espectro 3 gradualmente deslocado na dire3o do vermelho por conta da diminu3o da temperatura com o inverso do fator de escala. Em termos do desvio para o vermelho (2.14), e tomando a temperatura atual como refer3ncia,

$$T = (1 + z) T_0. \quad (2.65)$$

O valor medido para z no instante do desacoplamento 3 $z_* \approx 1090$ (ver Eq.(2.71) abaixo), logo a temperatura original da CMB era de fato extremamente alta, $\sim 2974 \text{ K}$.

A densidade de energia a cada frequ3ncia $\omega = ck$ 3 dada pela F3rmula de Planck

$$d\rho_R(\omega; T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1},$$

e a densidade total é obtida com a integração¹ sobre todas as frequências, viz.

$$\rho_R(T) = \frac{\pi^2}{15} \frac{k_B^4}{(\hbar c)^3} T^4, \quad (2.66)$$

conhecida como ‘Lei de Stefan-Boltzmann’ (cf. Eq.(5.11), §5.1). Com a temperatura (2.63), e calculando a razão (há um fator de c^{-2} para conversão de unidades; $E = mc^2$)

$$c^{-2} \rho_R(T_0)/\rho_{\text{crit}} \approx \frac{4.63 \times 10^{-31} \text{ kg/m}^3}{8.62 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3} \approx 0.54 \times 10^{-4},$$

onde usamos o valor de ρ_{crit} dado abaixo, temos a densidade de energia relativa à radiação no Universo atual,

$$\Omega_R \sim 5.4 \times 10^{-5}.$$

2.6.2 O Modelo Λ CDM

Por isso se pode fixar $\Omega_R = 0$ sem prejuízo, de forma que o Universo fica descrito durante quase toda a sua história pelo chamado ‘modelo Λ CDM’, com apenas a constante cosmológica Λ , cujo valor é medido através de Ω_Λ , e poeira com densidade

$$\Omega_M = \Omega_b + \Omega_c, \quad (2.67)$$

correspondente a dois tipos de componentes com velocidades não-relativísticas (e portanto equação de estado $w = 0$): bárions, com densidade relativa Ω_b ; e matéria escura fria (*‘Cold Dark Matter’, CDM*), com densidade relativa Ω_c . O modelo Λ CDM é o mais simples, i.e. com o menor número de parâmetros livres (seis) a concordar com os dados observacionais. As últimas medições de [Planck Collaboration et al. \(2016a\)](#) determinam $\Omega_c h^2 \approx 0.1188$ e $\Omega_b h^2 \approx 0.02230$, onde $h \equiv H_0/(100 \text{ km/s/Mpc})$ é a “constante de Hubble reduzida”. A partir desses valores (e dos outros parâmetros livres do modelo), se calculam

$$H_0 \approx 67.74 \text{ km/s/Mpc}, \quad h = 0.6774; \quad (2.68a)$$

$$\Omega_b \approx 0.0486, \quad \Omega_c \approx 0.2589, \quad \Omega_M \approx 0.3089, \quad \Omega_\Lambda \approx 0.6911; \quad (2.68b)$$

$$\rho_{\text{crit}} \approx 8.62 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3. \quad (2.68c)$$

¹A integral é do tipo $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$, com $x = \hbar\omega/k_B T$, e está relacionada à Função zeta de Riemann, $\zeta(z) = \sum_{n=1}^\infty 1/n^z$; o resultado é (ver, e.g., [Landau & Lifshitz \(1980\)](#), §58)

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = (1 - 1/2^3)\Gamma(4)\zeta(4) = \pi^4/15.$$

Em suma, cerca de 69% do conteúdo energético do Universo é devido à constante cosmológica, e dos 30% de matéria restantes apenas cerca de 5% é a matéria bariônica que se observa em laboratórios, sendo a maioria, 26% da matéria não relativística composta de matéria escura. Com a Eq.(2.60) os valores (2.68b) colocam sobre o valor da “densidade de curvatura”

$$|\Omega_K| = |\Omega_\Lambda + \Omega_R + \Omega_M - 1| < 0.005, \quad (2.69)$$

um limite muito pequeno que indica que o Universo é, hoje, extremamente plano. É útil em cálculos ter o valor

$$H_0 = 67.7 \text{ km/s/Mpc} \approx 2.2 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1} \sim 10^{-61} t_{Pl}^{-1}. \quad (2.70)$$

(Com isso, por exemplo, pode-se calcular a densidade crítica (2.59))

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{3}{8\pi} (2.2 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1})^2 \times \frac{\text{kg} \cdot \text{s}^2}{6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3} \approx 8.6 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3.$$

O desvio para o vermelho da radiação cósmica de fundo desde sua emissão no desacoplamento entre fótons e bárions é

$$z_* \approx 1090, \quad (2.71)$$

com o que (2.62) fornece a idade do Universo quando do desacoplamento da CMB como sendo

$$t_* \approx 3.77 \times 10^6 \text{ anos}. \quad (2.72)$$

Com a mesma integral (2.62), em $z = 0$, obtemos a idade t_0 do Universo hoje (o tempo passado desde o big-bang):

$$t_0 = 13.799 \times 10^9 \text{ anos}. \quad (2.73)$$

O tempo conforme pode ser calculado da mesma maneira que o tempo cósmico, só há um fator a^{-1} a mais no integrando em (2.61). Seu valor atual é $\eta_0 = 4.7 \times 10^{10}$ anos. Por terminar em uma fase acelerada a duração conforme do Universo é finita: avaliando a integral de $a = 0$ até $a = \infty$ temos

$$\eta_f|_{\Lambda\text{CDM}} = 6.4 \times 10^{10} \text{ anos}. \quad (2.74)$$

Ou seja: já percorremos cerca de 70% da duração total conforme.

O raio do Universo observável é dado pelo raio de Hubble (2.52); com (2.68a) temos $H_0 = 67.7 \text{ km/s/Mpc} \approx 2.19 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ e

$$\ell_H(t_0) = c/H_0 \approx \{3 \times 10^9 \text{ (s/m)}\} / \{2.19 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}\} \sim 10^{27} \text{ m}. \quad (2.75)$$

Alternativamente, o raio do horizonte de partículas (2.50) é dado pela integral

$$\ell_P(t_0) = (ca_0/H_0) \times \int_0^1 da / \left(a^2 \sqrt{\Omega_M a^{-3} + \Omega_R a^{-4} + \Omega_\Lambda} \right).$$

Como $a(t_0) = 1$, avaliando a integral numericamente temos

$$\ell_P(t_0) \approx 3.2 \times \ell_H(t_0) \sim 10^{27} \text{ m.} \quad (2.76)$$

A mesma integral, com os limites 1 a ∞ dá para o horizonte de eventos (futuro) $\ell_F(t_0) \approx 1.14 \times \ell_H(t_0)$.

Capítulo 3

Cosmologia inflacionária

3.1 Paradoxos do modelo cosmológico padrão

Há dois problemas dinâmicos clássicos com as “condições iniciais” no modelo de concordância cósmica, caso se assuma a sua validade desde o instante inicial ou, pelo menos, desde o instante de Planck t_{Pl} . Sua origem está no fato de a expansão do Universo preenchido por matéria e radiação ser desacelerada, apresentando um horizonte de partículas.

*

Problema da planaridade

O primeiro problema é conhecido como ‘*problema da planaridade*’, e diz respeito ao valor muito pequeno da observado para a curvatura (2.69). Reescrevendo a Eq.(2.27a) na forma

$$\Omega_\Lambda + \Omega_R + \Omega_M - 1 = K/(aH)^2, \quad (3.1)$$

e lembrando que em cada uma das épocas passadas da evolução do Universo em que dominaram radiação e matéria o fator de escala evolui como $a \sim t^\alpha$, com $\alpha < 1$, temos que $aH \sim t^{\alpha-1}$ e

$$\Omega_\Lambda + \Omega_R + \Omega_M = 1 + K t^{2(1-\alpha)}, \quad \text{com } \alpha < 1.$$

Ou seja, o termo proporcional à curvatura *crece* durante uma expansão desacelerada e, portanto, a extensão do modelo de concordância ao tempo de Planck implica que, então, o valor de $\Omega_K(a) = -K/(aH)^2$ era ainda menor do que agora. O quão menor pode ser determinado se soubermos um valor de referência para o desvio para o vermelho e o parâmetro de Hubble em algum momento da história, pois

$$K/(a_{Pl}H_{Pl})^2 = (a_{\text{ref}}/a_{Pl})^2 (H_{\text{ref}}/H_{Pl})^2 (a_{\text{ref}}/a_0)^2 (H_{\text{ref}}/H_0)^2 \Omega_K.$$

Tomando como referência o desacoplamento dos fótons da CMB, no desvio para o vermelho (2.71), $z_* \approx 1100$, chega-se a

$$K/(a_{Pl}H_{Pl})^2 \approx (K/(a_0H_0)^2) \times 10^{-60}. \quad (3.2)$$

Entretanto, no modelo de concordância não há qualquer razão para esperar que $K/(a_{Pl}H_{Pl})^2$ não fosse de ordem 1; ou seja, não há qualquer explicação para um ajuste tão fino nas condições iniciais que fixam a curvatura das seções espaciais.

*

Problema do horizonte

O segundo grande paradoxo do modelo concordância é conhecido como ‘*problema do horizonte*’ e corresponde basicamente ao fato de que desde a singularidade ou, mais precisamente, desde o instante de Planck t_{Pl} até a formação da CMB pela recombinação do Hidrogênio e desacoplamento dos fótons, o que ocorre num desvio para o vermelho $z_* \approx 1100$, não se passou tempo suficiente para que o Universo tivesse se termalizado. Ainda assim, a radiação cósmica de fundo apresenta enorme homogeneidade, o que é impossível de explicar sem uma relação causal entre suas partes.

Para estimar o tamanho do problema, considere o raio físico do horizonte de partículas atual,

$$\ell_P(t_0) = a_0 \int_{t_{Pl}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)},$$

onde substituímos o big-bang em $t = 0$ pelo limite mais realístico de $t = t_{Pl}$. Como $a(t_{Pl}) > 0$, a integral acima é um número finito. Um limite inferior para este número é obtido ao substituirmos o integrando pelo seu menor valor ao longo do intervalo de integração $[t_{Pl}, t_0]$. Assumindo um universo em expansão, em que o fator de escala nunca diminui, este menor valor corresponde justamente o fator de escala do universo atual. Assim, o raio causal do Universo hoje é

$$\ell_{P0} > \ell_{\min} = c(t_0 - t_{Pl}) \sim 10^{26} \text{ m}. \quad (3.3)$$

A dependência temporal de ℓ_P é proporcional ao fator de escala, e o raio comóvel do horizonte de partículas, $r_P = \ell_P(t)/a(t)$, é constante. Para descobrir qual era o tamanho físico ℓ_{P*} , no momento t_* da recombinação do Hidrogênio, do raio $\ell(t)$ que hoje tem o valor (3.3), note que $\ell_P(t_*) = a(t_*)(\ell_P(t_0)/a_0)$, e o fator de proporcionalidade $a(t_*)/a_0 = (1 + z_*)^{-1} \sim 10^{-3}$. Ou seja, na época da emissão da CMB, o tamanho do Universo causal que temos hoje era mil vezes menor, da ordem de

$$\ell_P(t_*) > 10^{23} \text{ m}.$$

Considere agora (para fins de argumento) que entre o instante de Planck e o desacoplamento o universo seja dominado por radiação. Olhe para o raio físico de um domínio causal em t_{Pl} da ordem do comprimento de Planck, $\ell_I(t_{Pl}) = \ell_{Pl}$. Após expandir até o instante do desacoplamento, este domínio passa a ter o raio $\ell_I(t_*) = \{a(t_*)/a(t_{Pl})\}\ell_{Pl}$. Num universo preenchido por radiação, o fator de escala é proporcional ao inverso da temperatura de corpo negro, $a \sim 1/T$. (Cf. §5.1.) Logo $\ell_I(t_*) = \{T_{Pl}/T_*\}\ell_{Pl}$. A temperatura para o desacoplamento do Hidrogênio é da ordem de $T_* \sim 10^{-1}\text{eV}$, enquanto $T_{Pl} \sim 10^{28}\text{eV}$, logo

$$\ell_I(t_*) \sim 10^{29}\ell_{Pl} \sim 10^{-6}\text{m}.$$

O que se demonstrou aqui é que dentro da porção da radiação cósmica de fundo que se observa hoje há um número da ordem de

$$(\ell_P(t_*)/\ell_I(t_*))^3 \sim 10^{87}$$

“bolhas causais”, i.e. regiões que tiveram tempo de entrar em contato causal entre t_{Pl} e t_* . Na Fig.3.1 se vê um diagrama conforme esquematizando o problema: um observador o (nós) olhando em direções diametralmente opostas para a CMB recebe informações vindas de eventos p e q cujos cones de luz passados não se intersectam — e ainda assim a temperatura medida para os dois pontos é a mesma. Em resumo, assumindo apenas o modelo de concordância, chega-se à conclusão absurda de que 10^{87} regiões sem contato causal, de alguma forma, entraram em equilíbrio térmico no período entre t_{Pl} e t_* .

3.2 A evolução do raio de Hubble

Podemos descrever os problemas do Modelo Cosmológico Padrão em termos do horizonte de Hubble, cf. §2.5.2.

Quando a expansão do Universo obedece uma lei de potências,

$$a = (t/t_0)^\alpha, \quad \text{temos} \quad H = \alpha/t \quad \text{e} \quad \ddot{a} = \alpha(\alpha - 1)t_0^{-\alpha} t^{\alpha-2}. \quad (3.4)$$

Portanto em uma expansão desacelerada $0 < \alpha < 1$, e o raio de Hubble

$$\ell_H = t/\alpha, \quad (3.5)$$

que cresce linearmente, aumenta mais rápido que o tamanho físico de uma região com raio comóvel r constante, cujo tamanho físico $\ell = ar$ cresce como t^α . É o que ocorre em ambas as fases dominadas por radiação ($\alpha = 1/2$) e poeira ($\alpha = 2/3$) do modelo de concordância. Para o raio *comóvel* da esfera de Hubble,

$$r_H = \ell_H/a = \frac{t_0^\alpha}{\alpha} t^{1-\alpha}, \quad \text{temos} \quad \dot{r}_H = \frac{t_0^\alpha}{\alpha} (1 - \alpha) t^{-\alpha}, \quad (3.6)$$

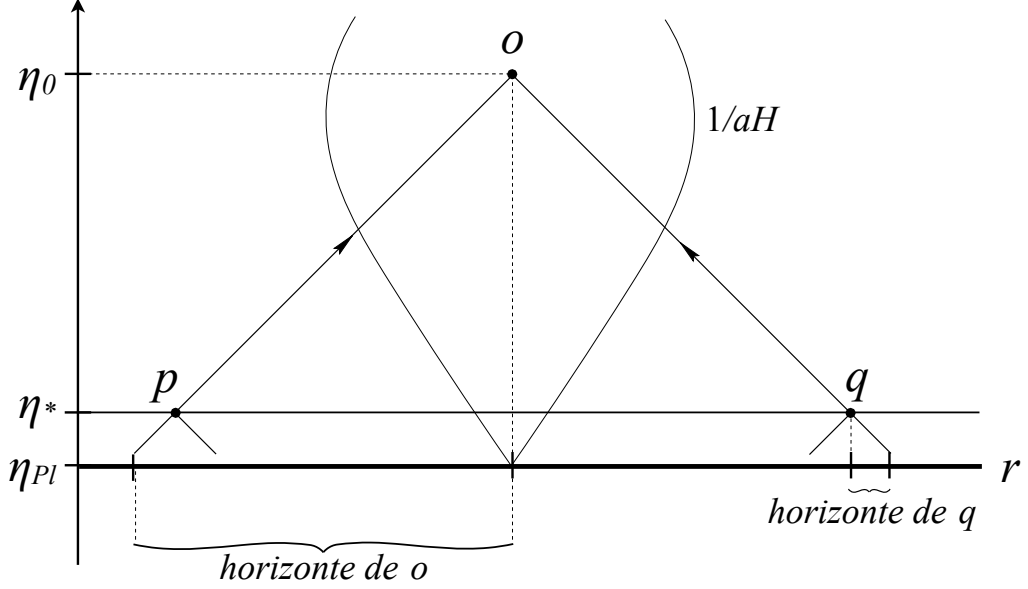


Figura 3.1: Relação entre os horizontes de partículas de um observador o e de pontos p e q sobre a superfície do último espalhamento de fótons (CMB). Vê-se também a evolução do raio comóvel da esfera de Hubble. Eixo vertical: tempo conforme; eixo horizontal: distância comóvel.

logo r_H sempre cresce com o tempo se $0 < \alpha < 1$, mas decresce se $\alpha > 1$. Ou seja, enquanto o Universo se encontra em expansão desacelerada, $1/aH$ cresce; se a expansão é desacelerada, $1/aH$ passa a diminuir. No modelo Λ CDM o Universo entra em uma fase acelerada dominada pela constante cosmológica em um instante $t \lesssim t_0$, a partir do qual o raio comóvel da esfera de Hubble passa então a decrescer, como se vê na Fig.3.1.

Agora, repare que ambos os problemas descritos no §3.1 podem ser formulados com base nessa simples observação a respeito da dinâmica de r_H , que $\dot{r}_H > 0$ em um universo desacelerado. A Eq.(3.1) pode ser escrita como

$$\Omega_\Lambda + \Omega_R + \Omega_M - 1 = K r_H^2;$$

uma vez que durante (quase) toda a vida do Universo r_H cresce, qualquer que seja o valor do lado esquerdo da equação hoje, no início da evolução desacelerada ele deveria ser bem menor. Ocorre que pela Eq.(2.69) temos $K r_H(t_0) < 10^{-3}$ e nada explica o motivo pelo qual no início do Universo se devesse ter $\Omega_\Lambda + \Omega_R + \Omega_M$ tão mais próximo de 1 (que é um valor instável).

O problema do horizonte pode ser reformulado trocando-se o horizonte de partículas pelo horizonte de Hubble. Não há nenhum impecílio conceitual, uma vez que para (3.4) temos $r_P = \int_0^t dt/a(t) = t_0^\alpha (1 - \alpha)^{-1} t^{1-\alpha} = \frac{\alpha}{1-\alpha} r_H$, ou seja, r_P

e r_H praticamente coincidem e, mais ainda,

$$r_P \gtrsim r_H \quad \text{para } 0 < \alpha < 1, \quad (3.7)$$

logo usar o raio de Hubble como limite causal é ser ainda mais conservador do que usar o horizonte de partículas. À medida que cresce (linearmente), o raio comóvel r_H passa a englobar escalas comóveis cada vez maiores; se r_H cresceu *desde sempre*, essas novas regiões que entram no horizonte a cada instante nunca tinham estado em contato causal com o interior da esfera de Hubble. Ainda assim, entre t_{Pl} e a criação da CMB toda região que entrou no horizonte de Hubble havia sido termalizada.

3.3 Inflação

O “universo inflacionário” introduzido por Guth (1981), elaborado por Linde (1982) e Albrecht & Steinhardt (1982), e que teve como precursor Starobinsky (1980), resolve os problemas do §3.1 introduzindo uma expansão acelerada no início do Universo, antes do domínio da radiação.

3.3.1 Aspectos gerais de um universo inflacionário

A discussão do fim do §3.2 deixa claro que os problemas do modelo de concordância vêm do fato de que o raio comóvel do horizonte de Hubble cresce *desde o início* da existência do Universo. A solução óbvia é encontrar um mecanismo que faça com que, antes de começar a crescer, r_H *diminua* até atingir o valor muito pequeno requerido. Como visto na Eq.(3.6), o raio comóvel da esfera de Hubble diminui se $\alpha > 1$, o que corresponde, pela Eq.(3.4), a uma expansão acelerada. De maneira mais geral, independentemente de a obedecer uma lei de potências, como $\dot{r}_H = -a^{-1}(1 + \dot{H}/H^2)$ o raio de Hubble decresce se

$$\varepsilon \equiv -\dot{H}/H^2 < 1. \quad (3.8)$$

No que diz respeito ao tipo de matéria necessária para que se obtenha um universo acelerado, como visto em (2.33), a equação de estado deve ter $w < -1/3$, o que dá uma pressão negativa e viola a condição forte de energia. O menor valor de w que não recai em problemas de estabilidade é $w = -1$; de acordo com (2.41) temos então $H = \text{constante}$ e logo $\varepsilon = 0$, com a expansão exponencial (a ‘inflação’)

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht}(dr^2 + r^2 d\theta^2) \quad (3.9)$$

de um universo de de Sitter, Eq.(2.41). Ao mesmo tempo, $r_H \sim e^{-Ht}$ diminui exponencialmente, o que torna de Sitter uma solução excelente para os problemas do modelo cosmológico padrão.

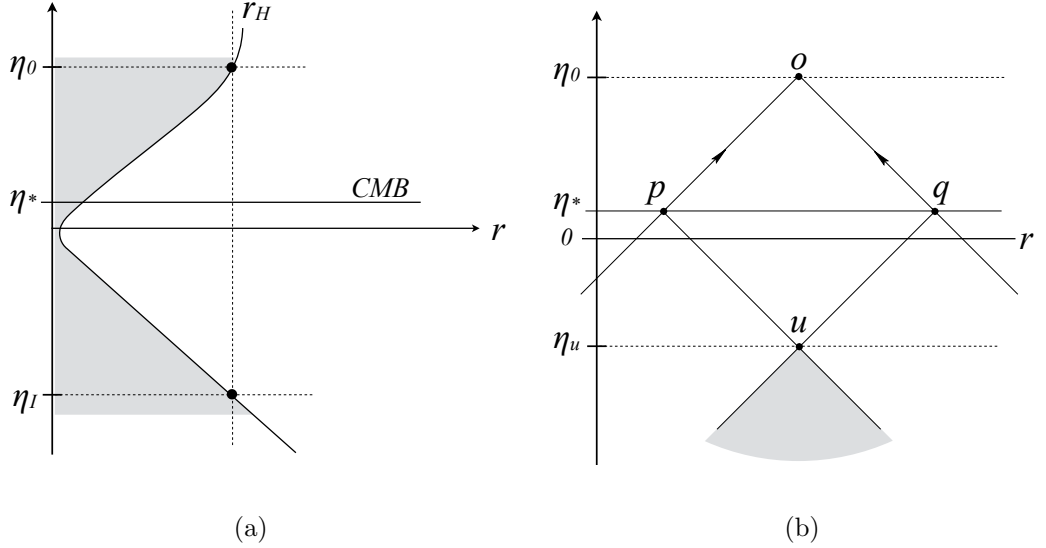


Figura 3.2: Causalidade em um Universo inflacionário. (a) A evolução do raio comóvel de Hubble $r_H = 1/aH$, que decresce durante uma expansão acelerada; a região tingida se encontra dentro da esfera de Hubble e as escalas que adentram o horizonte hoje (η_0) já estiveram em contato causal no passado (em algum instante η_I). (b) A inflação desloca o big-bang para longe no passado conforme, e os cones de luz de eventos p e q se prolongam dentro da fase acelerada até se intersectarem na região tingida. Logo p e q estiveram em contato causal.

A solução inflacionária é atrativamente simples. Olhando para a evolução do raio de Hubble na Fig.3.2(a), se, em algum momento durante a inflação $r_H \geq r_H(t_0)$, as escalas que observamos hoje, e que durante a expansão desacelerada do Universo estiveram sempre fora de contato causal, estavam então todas dentro da esfera de Hubble e podem ter se termalizado. À medida que r_H decresce, as escalas vão sucessivamente perdendo contato causal, e após o fim da inflação, quando r_H passa a crescer, elas voltam a entrar dentro do horizonte de Hubble. Outro ponto de vista é notar que, de acordo com o ponto 2) do final do §2.5.1, a expansão acelerada desloca a singularidade para $\eta \rightarrow -\infty$ (\mathcal{I}^- é uma superfície nula), logo os cones de luz de p e q na Fig.3.1 podem ser estendidos para o passado até que se sobreponham como na Fig.3.2(b). Repare que o ponto u onde os cones se intersectam tem como coordenada o tempo conforme η_u tal que $|\eta_0 - \eta_*| = |\eta_u - \eta_*|$.

A inflação acaba em algum instante próximo a $\eta = 0$, em que a aceleração do universo se anula e passa a ser negativa, iniciando a fase usual do modelo de concordância dominada por radiação a altas temperaturas. O mecanismo

responsável pela transição costuma ser chamado de ‘reaquecimento’ (*‘reheating’*), de acordo com [Albrecht *et al.* \(1982\)](#); [Kofman *et al.* \(1994\)](#); para uma revisão ver, e.g., [Allahverdi *et al.* \(2010\)](#); [Bassett *et al.* \(2006\)](#).

A duração mínima do período inflacionário deve ser tal que o passado causal se estenda pelo menos até η_I tal que $r_H(\eta_I)$ seja do tamanho de $r_H(\eta_0)$. Assim, todas as escalas que enxergamos hoje um dia já estiveram em contato causal (embora depois tenham, temporariamente, deixado de estar). Algumas aproximações mostram que para isso se deve ter $r_H(\eta_I)/r_H(\eta_F) \geq 10^{28}$. Isso resolve ambos os problemas do horizonte e da planaridade. Considerando o período inflacionário sendo quase de Sitter, de forma que o valor do parâmetro de Hubble seja constante e, ao fim da inflação, $H_F = H_I$, então $r_H(\eta_I)/r_H(\eta_F) = a(\eta_F)/a(\eta_I)$, e temos $a(\eta_F)/a(\eta_I) \geq 10^{28}$, ou

$$N_F \equiv \log \left[a(\eta_F)/a(\eta_I) \right] \geq 64. \quad (3.10)$$

Chama-se N_F de “número de e-folds” (“desdobramentos exponenciais”) da fase inflacionária.

3.3.2 Slow-roll

A pressão negativa necessária para inflar a expansão do Universo é obtida pela presença de um campo escalar σ , o ‘inflaton’, sujeito a um potencial $V(\sigma)$. As equações de movimento são (2.29) e (2.31), que escrevemos¹

$$H^2 = \frac{\varkappa^2}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 + V(\sigma) \right); \quad (3.11)$$

$$\ddot{\sigma} + 3H \dot{\sigma} = -V'(\sigma). \quad (3.12)$$

Desconsideramos aqui o termo de curvatura K/a^2 . Derivando a primeira equação e utilizando a segunda, temos $\dot{H} = -(\varkappa^2/2) \dot{\sigma}^2$ e podemos reescrever o parâmetro adimensional ε definido em (3.8) como

$$\varepsilon = \frac{\dot{\sigma}^2/2}{H^2/\varkappa^2}. \quad (3.13)$$

Usando a correspondência entre o campo escalar e um fluido termodinâmico, a equação de estado associada a σ tem parâmetro $w_\sigma = -1 + \frac{2}{3}\varepsilon$. Com isso, a condição necessária para que ocorra a inflação, $\varepsilon < 1$, então garante que $w_\sigma <$

¹Nesta seção, por praticidade, vamos usar $V' \equiv \partial_\sigma V$, etc. Não confundir com a notação para a derivada em respeito do tempo conforme geralmente utilizada em outros trechos. Mais importante, definimos o segundo parâmetro de slow-roll nas Eqs.(3.14) e (3.16) usando o símbolo universalmente aceito η , que aqui coincide com o símbolo usado para o tempo conforme. Esperamos que a diferença entre ambos seja identificável em cada contexto.

$-1/3$ e também implica que a energia cinética $\frac{1}{2}\dot{\sigma}^2$ seja menor que a energia total do campo, $\frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 + V = \frac{3}{\varkappa^2}H^2$. Ou seja, o campo escalar deve mudar *lentamente* na escala de tempo de Hubble $1/H$. Além disso, a condição $\varepsilon < 1$ deve ser satisfeita durante um tempo suficientemente grande na escala Hubble para que se obtenha a desigualdade (3.10), isso significa que a razão

$$\eta = \dot{\varepsilon}/(H\varepsilon) < 1. \quad (3.14)$$

Podemos reescrever ε e η em termos no número de e-folds (3.10), visto como uma grandeza contínua. Se a inflação começa para um certo valor a_I do fator de escala, defina

$$N(a) \equiv \int_{a_I}^a d \log a = \int_{t_I}^t dt H(t). \quad (3.15)$$

Como $dt = dN/H$, segue imediatamente que

$$\varepsilon = -\frac{d \log H}{dN} \quad \text{e} \quad \eta = \frac{d \log \varepsilon}{dN}. \quad (3.16)$$

Os parâmetros ε e η são chamados de ‘parâmetros de slow-roll’. A maneira mais simples de se implementar uma fase inflacionária é assegurar a validade das ‘condições de slow-roll’

$$\varepsilon, |\eta| \ll 1,$$

que significam que o inflaton desce (rolando) lentamente o potencial $V(\sigma)$. Isso impõe restrições sobre a forma de $V(\sigma)$, que podem ser encontradas com as seguintes aproximações.

1. Como já observado acima, para

$$\varepsilon \ll 1, \quad \text{temos} \quad \frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 \ll V \quad \text{logo} \quad H^2 \approx (\varkappa^2/3)V. \quad (3.17)$$

2. Usando a expressão (3.13) temos que $\dot{\varepsilon} = \varkappa^2(\dot{\sigma}/H^2)(\ddot{\sigma} - \dot{H}/H)$, logo

$$\eta = 2(\ddot{\sigma}/(H\dot{\sigma}) - \dot{H}/H^2) = 2(\ddot{\sigma}/(H\dot{\sigma}) + \varepsilon), \quad (3.18)$$

e se, junto com $\varepsilon \ll 1$, vale $|\eta| \ll 1$, então

$$|\ddot{\sigma}/H\dot{\sigma}| \ll 1, \quad \text{logo} \quad -V'(\sigma) \approx 3H\dot{\sigma}. \quad (3.19)$$

A aproximação vem do fato de que, sendo a aceleração do campo escalar pequena em relação à velocidade (o que “sustenta” a inflação), o termo de “fricção” (proporcional à velocidade $\dot{\sigma}$) na equação de Klein-Gordon (3.12) domina sobre a aceleração $\ddot{\sigma}$, e a “força” $-V'$ é quase igual à força de arrasto.

3. Tomando a razão das aproximações (3.17) e (3.19) para calcular (3.13), temos a primeira condição sobre $V(\sigma)$,

$$\varepsilon \approx \frac{2}{\varkappa^2} (\partial_\sigma V/V)^2 \ll 1. \quad (3.20)$$

Derivando a equação (3.19), $-V'' \dot{\sigma} \approx 3(\dot{H}/H^2 + \ddot{\sigma}/H\dot{\sigma})H^2\dot{\sigma}$, e usando (3.17), $V''/V \approx -\varkappa^2(\dot{H}/H^2 + \ddot{\sigma}/H\dot{\sigma}) = \varkappa^2(\varepsilon - \ddot{\sigma}/H\dot{\sigma}) = \varkappa^2(\varepsilon + \varepsilon - \eta/2)$, onde usamos (3.18). Logo

$$|2\varepsilon - \frac{1}{2}\eta| \approx \left| \frac{2}{\varkappa^2} \partial_\sigma^2 V/V \right| \ll 1. \quad (3.21)$$

As condições (3.20) e (3.21) mostram que a fase de slow-roll requer um potencial “muito plano”, i.e. cujas duas primeiras derivadas são muito pequenas.

A escolha de quais parâmetros usar para medir a inflação é relativamente ambígua, cf. [Liddle *et al.* \(1994\)](#). Por exemplo, é costume *definir* as razões (3.20) e (3.21) como “parâmetros de slow-roll potencial”

$$\varepsilon_V \equiv \frac{2}{\varkappa^2} (\partial_\sigma V/V)^2 \quad \text{e} \quad \eta_V \equiv \frac{2}{\varkappa^2} \partial_\sigma^2 V/V;$$

de acordo com a discussão acima a aproximação de slow-roll faz $\varepsilon \approx \varepsilon_V$ e $\eta_V \approx 2\varepsilon - \eta/2$. Uma definição especialmente vantajosa são os chamados “parâmetros de slow-roll de Hubble”,

$$\varepsilon_H \equiv 2(\partial_\sigma H/H)^2, \quad \text{e} \quad \eta_H \equiv 2\partial_\sigma^2 H/H. \quad (3.22)$$

Usando as equações de movimento é fácil verificar que ε_H coincide com o parâmetro original (3.8), e portanto a inflação definitivamente acaba se $\varepsilon_H \geq 1$. O parâmetro η_H se relaciona com (3.14) por $\eta_H = 2\varepsilon - \eta/2 \approx \eta_V$.

A aproximação de slow-roll é útil para determinar o número de e-folds a partir da forma do potencial. Em termos do inflaton, a integral (3.15) fica $N(\sigma) = \int d\sigma H/\dot{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{\varkappa^2}} \int d\sigma/\sqrt{\varepsilon}$, tendo sido usada a Eq.(3.13). Esta é uma expressão exata; assumindo que a inflação ocorre enquanto vale a fase de slow-roll, e por isso enquanto $\varepsilon \approx \varepsilon_V$, temos o número total de e-folds

$$N_F = \sqrt{\frac{2}{\varkappa^2}} \left| \int_{\sigma_I}^{\sigma_F} d\sigma/\sqrt{\varepsilon_V} \right|. \quad (3.23)$$

3.4 Inflação e o começo do tempo

É uma característica geral de modelos inflacionários que sejam *eternos para o futuro*. Isto é, regiões inflacionárias de espaço-tempo continuam sendo criadas

indefinidamente por um inflaton que se move sobre um potencial. Uma revisão a respeito é dada, e.g., por Guth (2007). No caso de modelos de inflação a campo grande, e.g., em que o inflaton desce o potencial a partir de valores próximos da escala de Planck, flutuações quânticas nessa região deixam um rastro eterno que bolhas que se formam; dentro de cada uma o inflaton desce o potencial e o universo infla, mas há sempre uma probabilidade de que outra bolha se forme.

Apesar de as bolhas inflacionárias serem criadas eternamente, dentro de um universo inflacionário as geodésicas são incompletas na direção do passado.

Como ilustração, considere primeiro o passado de geodésicas no espaço-tempo de de Sitter. A expansão exponencial (3.9) corresponde, na realidade, a uma folheação particular e incompleta do espaço de dS_4 (ver Apêndice D). Mais precisamente, as coordenadas da métrica inflacionária (3.9) cobrem apenas metade do espaço-tempo completo, e o diagrama causal nessas coordenadas, que tem a forma da Fig.B.2(b) para um universo acelerado, é a metade diagonal superior do diagrama completo (um quadrado). Considere uma curva tipo-tempo entre os pontos p e q na Fig.3.3(a); por cruzar o horizonte de eventos diagonal, o tempo-próprio $\tau(p, q)$ deve ser calculado com a métrica global (Eq.(D.2)) e é, naturalmente, finito; portanto também o é o tempo-próprio $\tau(p, u) < \tau(p, q)$ que liga p à superfície nula correspondente a $\{t = -\infty\}$ nas coordenadas da métrica (3.9). Por isso, se restritas à metade inflacionária do espaço de de Sitter, as curvas mostradas na Fig.3.3(a) são incompletas. (A situação é análoga à de uma geodésica que atravessa o horizonte de um buraco negro com um tempo-próprio finito, e é incompleta nas coordenadas de Schwarzschild.)

De forma mais geral, é há muito sabido (Borde (1994); Borde & Vilenkin (1994)) que regimes de inflação eterna não podem ser geodesicamente completos na direção do passado se a condição fraca de energia for válida. Mas a inflação eterna ocorre para valores do inflaton em que flutuações quânticas são necessariamente relevantes, e foi demonstrado (pelos mesmos autores, Borde & Vilenkin (1997)) que estas flutuações podem levar à violação da condição fraca de energia. Ainda assim, mais tarde, Borde *et al.* (2003) chegaram a uma nova prova de que um espaço-tempo inflacionário tem o passado incompleto, independentemente da validade da condição fraca de energia. A demonstração é surpreendentemente simples mesmo no caso geral em que a métrica não é homogênea e isotrópica; a hipótese necessária para a demonstração é chamada de “condição de expansão média”, e requer que a média H_M do fator de Hubble sobre uma geodésica seja positiva na direção do passado. Para ser mais precisos e ilustrar o método, vamos apresentar a demonstração do teorema no caso de um universo de FLRW.

Em uma geodésica nula o tempo conforme η é um parâmetro afim. Sejam t_i e t_f dois valores de referência do tempo cósmico, e escolha o parâmetro afim $\lambda = \eta/a_f$, com $a_f \equiv a(t_f) \geq a(t_i) \equiv a_i$, normalizado de tal forma que $d\lambda/dt|_{t=t_f} = 1$,

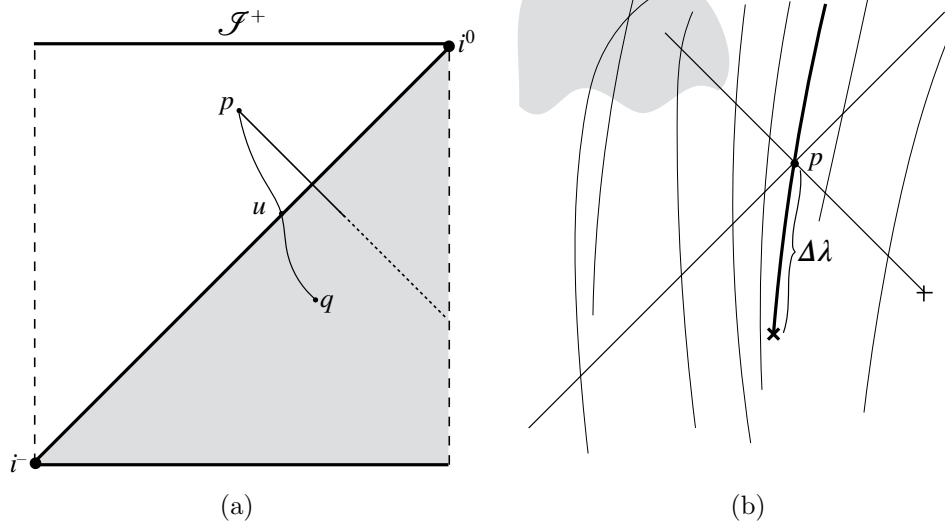


Figura 3.3: (a) As coordenadas da métrica inflacionária (3.9) correspondem à metade diagonal superior (em branco) do espaço completo de de Sitter. Por isso há curvas causais incompletas nessas coordenadas, que atingem o horizonte em um parâmetro afim finito. (b) Congruência de geodésicas tipo-tempo com expansão média positiva em um espaço inflacionário genérico.

ou seja: $d\lambda = (a(t)/a_f) dt$, e portanto

$$\int_{\lambda_i}^{\lambda_f} d\lambda (\dot{a}/a) = a_f^{-1} \int_{a_i}^{a_f} da = a_f^{-1}(a_f - a_i) \leq 1. \quad (3.24)$$

Definindo a expansão média

$$H_M \equiv \frac{1}{\lambda(t_f) - \lambda(t_i)} \int_{t_i}^{t_f} d\lambda H(\lambda) \quad (3.25)$$

sobre a geodésica, a desigualdade (3.24) implica em $H_M \leq (\lambda(t_f) - \lambda(t_i))^{-1}$. A condição necessária para a demonstração é que a expansão média seja positiva. Se isso é verdade, então

$$0 < H_M \leq (\lambda(t_f) - \lambda(t_i))^{-1} \quad \text{leva a} \quad \lambda(t_i) < \lambda(t_f). \quad (3.26)$$

Ou seja, partindo de um ponto p sobre a geodésica, em que $\lambda = \lambda_f$, como na Fig.3.3(b), e voltando na direção do passado, a geodésica termina antes que se percorra um comprimento afim *finito* $\Delta\lambda < \lambda_f - \lambda_i$. É fácil mostrar a mesma coisa para geodésicas tipo-tempo e, como já dito, a generalização para espaços que não são de FLRW também não é complicada.

A condição $H_M > 0$ significa que, ao redor de algum ponto p existe uma congruência de geodésicas que localmente (e em média) se afastam entre si, ou seja, que o espaço se expande localmente como na Fig.3.3(b). Isso é trivialmente satisfeito em um espaço de FLRW, mas o ponto da demonstração de [Borde *et al.* \(2003\)](#) é definir um equivalente da função de Hubble em espaços gerais, usando a velocidade relativa das geodésicas tipo-tempo (infinitesimalmente) vizinhas. É muito natural esperar que uma região com essas características, e de extensão grande o suficiente para conter o fim das geodésicas, exista em um espaço-tempo inflacionário, em que a expansão acelerada é razoavelmente homogênea em escalas da ordem de $1/H$. Nas regiões em que a inflação eventualmente chega ao fim, as geodésicas tipo-tempo podem desenvolver expansão negativa e formar cáusticas (levando à formação de galáxias, etc.), como indicado na região cinza da Fig.3.3(b).

A presença de geodésicas incompletas, com parâmetro afim finito, é o que define uma singularidade, e portanto, em suma, espaços-tempos inflacionários possuem uma singularidade no passado.

Capítulo 4

Flutuações no Universo de FLRW

4.1 Flutuações em primeira ordem

Sejam $h_{\mu\nu}(x)$ pequenas flutuações ao redor da métrica homogênea e isotrópica de FLRW $\bar{g}_{\mu\nu}$, de forma que a métrica total do universo seja

$$g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \bar{g}_{\mu\nu}(t) + h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t), \quad (4.1)$$

com $\bar{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -N^2(x^0)d(x^0)^2 + a^2(x^0)\delta_{ij}dx^i dx^j$,

(Eq.(2.5) com $K = 0$) e $h_{\mu\nu}$ sendo de primeira ordem em relação a $\bar{g}_{\mu\nu}$. No que segue, vamos identificar as grandezas de fundo (de ordem zero), sempre por uma barra. A perturbação da inversa da métrica é $h^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - \bar{g}^{\mu\nu}$, e satisfaz

$$h^{00} = -h_{00}; \quad h^{i0} = \frac{1}{a^2}h_{i0}; \quad h^{ij} = -\frac{1}{a^4}h_{ij}. \quad (4.2)$$

A análise do comportamento das perturbações lineares é convenientemente realizada após uma decomposição da matriz $h_{\mu\nu}$ no chamados modos escalares, vetoriais e (puramente) tensoriais (às vezes referida como SVT, *Scalar-Vector-Tensor*). Escreva a métrica como

$$h_{00} = -E \quad (4.3a)$$

$$h_{i0} = a \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} + G_i \right) \quad (4.3b)$$

$$h_{ij} = a^2 \left(A \delta_{ij} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial C_i}{\partial x^j} + \frac{\partial C_j}{\partial x^i} + D_{ij} \right) \quad (4.3c)$$

onde as funções do lado direito satisfazem

$$\partial_i C_i = \partial_i G_i = 0; \quad \partial_i D_{ij} = 0; \quad D_{ii} = 0. \quad (4.3d)$$

Esta decomposição é sempre possível, e extremamente útil devido ao fato, explorado abaixo, de que as equações para cada modo são desacopladas. Ou seja, as equações para a matriz D_{ij} no setor tensorial, por exemplo, se resolvem independentemente das equações para as funções E , F , A , B , no setor escalar.

A homogeneidade e isotropia da métrica de RW implicam que o tensor de fundo tem, necessariamente, a forma (2.15),

$$\bar{T}_{00} = -\bar{\rho}; \quad \bar{T}_{ij} = a^2 \bar{P} \delta_{ij}, \quad (4.4)$$

com a 4-velocidade do fluxo de partículas normalizada $\bar{g}_{\mu\nu} \bar{U}^\mu \bar{U}^\nu = -1$, sendo $\bar{U}_i = 0$ e $\bar{U}_0 = -1$, no tempo cósmico. O tensor total é

$$T_{\mu\nu} \equiv \bar{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu},$$

e assumo por enquanto que ele também possua a forma (2.15), com a 4-velocidade *total* U_μ normalizada por $g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1$. Em primeira ordem, as componentes espaciais da perturbação da velocidade, δU_i são variáveis dinâmicas completamente independentes, enquanto a componente temporal é fixa,

$$\delta U^0 = \delta U_0 = -\frac{1}{2} h^{00} = \frac{1}{2} h_{00}, \quad (4.5)$$

onde usamos (4.2) para obter a última igualdade, e a perturbação linear do tensor de energia momento fica

$$\begin{aligned} \delta T_{00} &= \delta\rho - \bar{\rho} h_{00}, & \delta T_{ij} &= \bar{P} h_{ij} + a^2 \delta_{ij} \delta P, \\ \delta T_{i0} &= \bar{P} h_{i0} - (\bar{P} + \bar{\rho}) \delta U_i, \end{aligned} \quad (4.6)$$

Como já observado, essas fórmulas são válidas apenas na ausência de componentes anisotrópicas de $T_{\mu\nu}$, mas na presença de anisotropias podemos usá-las para *definir* as flutuações do tensor não-perturbado $\bar{T}_{\mu\nu}$. Por exemplo, sabendo as flutuações da métrica $h_{\mu\nu}$, e dado o tensor de energia-momento não perturbado, podemos definir $\delta\rho$ através da primeira das Eqs.(4.6). A quebra da isotropia espacial faz com que as componentes ij da perturbação tenham um termo a mais em sua forma geral: $\delta T_{ij} = \bar{P} h_{ij} + a^2 \delta_{ij} \delta P + \Sigma_{ij}$. Decompondo esse ‘stress anisotrópico’ em modos SVT, viz. $\Sigma_{ij} \equiv \partial_i \partial_j \pi^S + \partial_i \pi_j^V + \pi_{ij}^T$, e fazendo o mesmo para $\delta U_i \equiv \partial_i \delta U + \delta U_i^V$, as componentes gerais do tensor energia-momento perturbado são

$$\delta T_{00} = \delta\rho - \bar{\rho} h_{00}, \quad (4.7a)$$

$$\delta T_{i0} = \bar{P} h_{i0} - (\bar{P} + \bar{\rho})(\partial_i \delta U + \delta U_i^V), \quad (4.7b)$$

$$\delta T_{ij} = \bar{P} h_{ij} + a^2 \delta_{ij} \delta P + \partial_i \partial_j \pi^S + \partial_i \pi_j^V + \pi_{ij}^T. \quad (4.7c)$$

É válido ressaltar que nem sempre os termos de stress anisotrópico são diferentes de zero. Em particular, eles se anulam para as perturbações de um campo escalar $\phi(t, \mathbf{x})$, mesmo que ϕ dependa explicitamente da posição espacial \mathbf{x} de forma anisotrópica, como veremos abaixo.

*

As equações de Einstein

Em ordem zero, as equações de Einstein assumem a forma das equações de Friedmann (2.27). Isso determina o fator de escala $a(t)$ em (4.3). Para encontrar as equações para as flutuações, linearize as equações de Einstein escritas na forma $R_{\mu\nu} = -8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})$. Temos

$$\delta R_{\mu\nu} = -8\pi G \delta S_{\mu\nu} \quad \text{onde} \quad (4.8)$$

$$\delta S_{\mu\nu} = \delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\bar{g}_{\mu\nu}\delta T + \bar{T}h_{\mu\nu}). \quad (4.9)$$

Podemos calcular \bar{T} facilmente, já que $\bar{T}^\mu{}_\nu = \text{Diag}(-\bar{\rho}, \bar{P}, \bar{P}, \bar{P})$,

$$\bar{T} = 3\bar{P} - \bar{\rho} = -\frac{3}{4\pi G} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 \right), \quad (4.10)$$

onde $H = \dot{a}/a$ e usamos na segunda igualdade as equações de Friedmann que são satisfeitas pelos tensores não perturbados. A perturbação do traço, δT é $\delta T^\mu{}_\nu = \delta(g^{\mu\alpha}T_{\alpha\nu}) = h^{\mu\alpha}\bar{T}_{\alpha\nu} + \bar{g}^{\mu\alpha}\delta T_{\alpha\nu}$, e usando então as Eqs.(4.2), (4.3) e (4.6), temos $\delta T = 3\delta P - \delta\rho$, levando finalmente a

$$\delta R_{\mu\nu} = -8\pi G \left[\delta T_{\mu\nu} + \frac{3}{8\pi G} (\ddot{a}/a + H^2) h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(3\delta P - \delta\rho) \bar{g}_{\mu\nu} \right]. \quad (4.11)$$

Após o cálculo da linearização do tensor de Ricci como função de $h_{\mu\nu}$ e suas derivadas, as Eqs.(4.11) são as equações para as flutuações de primeira ordem da métrica, tendo como fonte as flutuações do tensor de energia-momento. As equações para cada um dos modos SVT se separam, como já dito. Assim, para obter as equações dos modos tensoriais, fixamos a zero todas as grandezas escalares, e.g. $\delta P = \delta\rho = A = E = 0$, etc. Para obter as equações do setor escalar, fazemos $D_{ij} = 0$, etc. No contexto da cosmologia, os modos relevantes são os modos tensoriais, que dão origem a ondas gravitacionais, e os modos escalares, diretamente ligado às flutuações de temperatura na CMB.

4.2 Flutuações tensoriais; ondas gravitacionais

Os modos tensoriais das equações de Einstein são os mais simples. Olhando as Eqs.(4.3), temos $h_{00} = h_{0j} = 0$ e $h_{ij} = a^2 D_{ij}$, com D_{ij} possuindo traço e

divergente nulos. As componentes da flutuação do tensor de Ricci são

$$\delta R_{00} = \delta R_{0j} = 0, \quad e \quad (4.12a)$$

$$\delta R_{ij} = \frac{1}{2}\nabla^2 D_{ij} - \frac{a^2}{2}\ddot{D}_{ij} - \frac{3}{2}a\dot{D}_{ij} + (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)D_{ij}. \quad (4.12b)$$

Da parte do tensor de energia-momento, a única contribuição aos modos tensoriais vem de π_{ij}^T na Eq.(4.7c), e as flutuações do tensor fonte $S_{\mu\nu}$, dadas pela Eq.(4.9) com (4.10), ficam $\delta S_{00} = \delta S_{0j} = 0$ e

$$\delta S_{ij} = \bar{P} a^2 D_{ij} + a^2 \pi_{ij}^T + \frac{3}{8\pi G}(\ddot{a}/a + H^2)a^2 D_{ij}. \quad (4.13)$$

Podemos agora montar as Eqs.(4.11). As componentes 00 e 0j são triviais (0 = 0), e restam as componentes espaciais ij . Usamos as equações de Friedmann para eliminar \bar{P} que aparece no primeiro termo da Eq.(4.13); igualando as Eqs.(4.12) e (4.13), temos por fim

$$a^{-2}\nabla^2 D_{ij} - \ddot{D}_{ij} - 3(\dot{a}/a)\dot{D}_{ij} = -16\pi G \pi_{ij}^T. \quad (4.14)$$

Repare que o lado esquerdo é simplesmente o Laplaciano da métrica de FLRW, $\bar{\square} = (-g)^{-1/2}\partial_\mu[(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\partial_\nu] = -\partial_t^2 - 3H\partial_t + a^{-2}\partial_{\mathbf{x}}^2$, e podemos escrever, de forma explicitamente covariante,

$$\bar{\square} D_{ij} = -16\pi G \pi_{ij}^T. \quad (4.15)$$

Logo D_{ij} obedece uma equação de onda com π_{ij}^T como fonte, ou seja, os modos tensoriais se comportam como uma ‘onda gravitacional’ se propagando sobre o espaço-tempo de FLRW.

*

A ação quadrática

Existe uma maneira alternativa de se chegar à Eq.(4.15), através da expansão direta da ação de Einstein-Hilbert como uma função quadrática de D_{ij} . Vamos ilustrá-la aqui no caso em que a métrica de fundo é o espaço de de Sitter, por simplicidade e porque nos será útil em outro lugar, mas não é difícil generalizar o procedimento para um espaço FLRW. Considere a ação (A.4),

$$S = \frac{1}{2\chi^2} \int d^4 \sqrt{-g} (R - 2\Lambda),$$

e faça uma perturbação $\delta g_{\mu\nu}$. Em primeira ordem, a menos do termo de borda usual,

$$\delta S = \frac{1}{2\chi^2} \int d^4 \sqrt{-\bar{g}} (\bar{R}_{\mu\nu} - \Lambda \bar{g}_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.16)$$

Impostas as equações de Einstein para a métrica de fundo de dS_4 , $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$, a primeira variação $\delta S = 0$, como era de se esperar. O primeiro termo não nulo de δS é o termo quadrático, portanto. Para obtê-lo, expanda mais uma vez o integrando de (4.16) em primeira ordem de $\delta g^{\mu\nu}$. O resultado, após se impor as equações de Einstein, é

$$\delta^2 S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4 \sqrt{\bar{g}} (\delta R_{\mu\nu} - \Lambda \delta g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.17)$$

(Note que a variação do determinante só contribui para a ordem cúbica.) Para flutuações tensoriais apenas os índices espaciais contribuem; usando $\delta g_{ij} = a^2 D_{ij}$, $\delta g^{ij} = -a^{-2} D_{ij}$ e a fórmula (4.12) para $\delta R_{\mu\nu}$, temos

$$\delta^2 S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4 \sqrt{\bar{g}} [a^2 \bar{\square} D_{ab} + a^2 (2H^2 + \ddot{a}/a) D_{ab} - a^2 \Lambda D_{ab}] [-a^{-2} D_{ab}].$$

Aqui está implícita uma soma simples (usando δ_{ab}) sobre os índices repetidos. O termo em parênteses, em dS_4 , é simplesmente $2H^2 + \ddot{a}/a = 3H^2 = \Lambda$, e com isso temos simplesmente $\delta^2 S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4 \sqrt{\bar{g}} D_{ab} \bar{\square} D_{ab}$, que com uma integração por partes dá

$$\delta^2 S = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^4 \sqrt{\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu D_{ab} \bar{\nabla}_\nu D_{ab}, \quad (4.18)$$

a menos de um termo de borda. Mas isso é simplesmente a ação para um campo D_{ab} sem massa se propagando no espaço-tempo com métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$, e a equação de campo é portanto a equação de Klein-Gordon $\bar{\square} D_{ab} = 0$, que coincide com (4.15). Essa formulação Lagrangeana reforça a interpretação de D_{ij} como um campo de spin 2 sobre o espaço de fundo, e permite inclusive sua quantização.

*

Polarizações

A Eq.(4.14) pode ser decomposta em duas equações escalares. Seja $D_{ij}(q, t)$ a transformada de Fourier da matriz $D_{ij}(\mathbf{x}, t) \equiv \int d^3 q D_{ij}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$. As condições de traço e divergente nulo se traduzem, para o modo de Fourier relativo ao vetor de onda \mathbf{q} , em $D_{ii}(\mathbf{q}, t) = 0$ e $q_i D_{ij}(\mathbf{q}, t) = 0$. A primeira condição é uma restrição sobre os seis elementos independentes da matriz (simétrica e 3×3); sobram 5 elementos livres. A segunda condição, $q_i D_{ij} = 0$, fornece mais um conjunto de 3 equações e portanto há somente 2 elementos livres ao todo em D_{ij} . São os graus de liberdade correspondendo aos dois modos de polarização das ondas gravitacionais. Escolhendo $\mathbf{q} = q \hat{\mathbf{z}}$ na direção x^3 (não há perda de generalidade

devido à isotropia da métrica de fundo), os modos tensoriais podem ser escritos em termos de duas funções escalares,

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

Outra escolha equivalente é definir um covetor complexo \mathbf{e} tal que

$$q^a e_a = 0, \quad \delta^{ab} e_a e_b = 0, \quad \text{e} \quad \delta^{ab} e_a^* e_b^* = 1. \quad (4.20)$$

As polarizações na direção \mathbf{q} são então dadas pela funções h_q e sua conjugada complexa h_q^* , tais que

$$D_{ab}(\mathbf{q}, t) = h_q e_a e_b + h_q^* e_a^* e_b^*. \quad (4.21)$$

De qualquer forma, a transformada de Fourier da Eq.(4.14), com $\pi_{ij}^T = 0$, fica

$$\ddot{h}_q + 3H \dot{h}_q - (q/a)^2 h_q = 0, \quad (4.22)$$

sendo h_q um modo de Fourier para qualquer uma das funções escalares que definimos.

4.3 Flutuações escalares e calibre de Newton

O cálculo dos modos escalares das flutuações é muito mais barroco. Existe na definição de $h_{\mu\nu}$ uma ambiguidade intrínseca devida ao fato de o Princípio da Equivalência tornar a Relatividade Geral invariante sob difeomorfismos, que por isso modificam a forma de $h_{\mu\nu}$ sem modificar o significado físico das equações; em suma, os difeomorfismos induzem ‘transformações de calibre’ em $h_{\mu\nu}$, o que é descrito em detalhes no Apêndice C. Os modos tensoriais D_{ij} são invariantes sob uma transformação calibre, mas os modos escalares (e vetoriais), não. Por isso, a análise das equações das flutuações escalares é sempre ambígua a não ser que ou se escolha desde o início e se mantenha até o fim em um calibre específico, e/ou que se trabalhe apenas com grandezas *invariantes* de calibre (que são, na verdade os objetos “físicos” da teoria). Duas combinações invariantes de calibre para as flutuações escalares da métrica são os chamados ‘*Potenciais de Bardeen*’

$$\Psi \equiv -\frac{1}{2} \left[A + aH(\dot{B} - 2F) \right], \quad \Phi \equiv \frac{1}{2} \left[E - a(\ddot{B} - 2\dot{F}) + aH(\dot{B} - 2F) \right].$$

Uma das escolhas mais convenientes de fixação de calibre para flutuações escalares é o chamado ‘Calibre de Newton’, em que $B = F = 0$ e

$$E \equiv 2\Phi ; \quad A \equiv -2\Psi. \quad (4.23)$$

As perturbações escalares da métrica, no tempo cósmico, ficam assim escritas

$$g_{00} = -1 - 2\Phi(t, \mathbf{x}); \quad g_{0i} = 0; \quad g_{ij} = a^2(t)(1 - 2\Psi(t, \mathbf{x}))\delta_{ij}. \quad (4.24)$$

(A prova de que é possível colocar a métrica nessa forma se encontra no fim do Apêndice C.)

Há 6 equações diferentes. Da Eq.(4.8), temos uma para a componente 00 (i.e. $\delta R_{00} = -8\pi G\delta S_{00}$), uma para as componentes $0j$, e duas para as componentes ij . São elas:

$$4\pi G (\delta\rho - \delta P - \nabla^2\pi^S) = \frac{1}{a^2}\nabla^2\Psi - H\dot{\Phi} - 2(2H^2 + \frac{\ddot{a}}{a})\Phi - \ddot{\Psi} + 6H\dot{\Psi} \quad (4.25a)$$

$$8\pi G a^2 \partial_i\partial_j\pi^S = \partial_i\partial_j(\Psi - \Phi) \quad (4.25b)$$

$$4\pi G(\bar{\rho} + \bar{P})\delta U = -(H\Phi + \dot{\Psi}) \quad (4.25c)$$

$$4\pi G (\delta\rho + 3\delta P + \nabla^2\pi^S) = \frac{1}{a^2}\nabla^2\Phi + 3H\dot{\Phi} + 6\frac{\ddot{a}}{a}\Phi + 3\ddot{\Psi} + 6H\dot{\Psi} \quad (4.25d)$$

A equação de conservação da energia fica

$$\delta\dot{\rho} + 3H(\delta\rho + \delta P) + \nabla^2\left(\frac{(\bar{\rho} + \bar{P})}{a^2}\delta U + H\pi^S\right) = 3(\bar{\rho} + \bar{P})\Psi,$$

e a conservação do momento

$$\delta P + \nabla^2\pi^S + \partial_0[(\bar{\rho} + \bar{P})\delta U] + 3H(\bar{\rho} + \bar{P})\delta U + (\bar{\rho} + \bar{P})\Phi = 0.$$

Assim como nas equações de Friedmann, deve-se assumir dado o tensor de energia-momento e uma relação constitutiva entre ρ e P (i.e. uma equação de estado), e uma fórmula para o termo de anisotropia π^S . Assim, as funções independentes a serem determinadas são três: Ψ (ou Φ), δP (ou $\delta\rho$) e δU . Há seis equações diferenciais acima, logo três são vínculos. Um pode ser colocado numa forma simples combinando as equações de maneira a eliminar $\ddot{\Psi}$, π^S e Φ , resultando em uma equação de Poisson para o potencial Ψ :

$$\frac{a^{-2}}{4\pi G}\nabla^2\Psi = \delta\rho - 3H(\bar{\rho} + \bar{P})\delta U. \quad (4.26)$$

Repare que (4.26) não descreve a evolução temporal de $\Psi(t, \mathbf{x})$; ela deve ser vista como uma *condição inicial* (que é preservada no tempo) sobre $\Psi(t_0, \mathbf{x})$. Em pequenas escalas, quando $\nabla^2\Psi$ domina sobre o termo com δU , esta equação equivale à equação de Newton para o campo gravitacional gerado pela densidade $\delta\rho$ (daí o nome do calibre). Outro vínculo relevante é a Eq.(4.25b), que determina Φ em termos de Ψ e vice-versa; se $\pi^S = 0$, ou seja, na ausência de fontes anisotrópicas,

$$\Phi = \Psi. \quad (4.27)$$

A correspondência (2.20) entre os tensores de energia-momento de um campo escalar e de um fluido perfeito é válida para um campo arbitrário $\varphi(t, \mathbf{x})$, que pode depender das coordenadas espaciais \mathbf{x} , logo num universo preenchido apenas por um campo escalar o tensor de energia-momento perturbado tem $\pi^S = 0$, impondo a condição (4.27). A mesma condição em escalas muito maiores que o raio de Hubble, como discutido mais abaixo. Assuma (4.27) a partir de agora.

*

Flutuações adiabáticas

Se a matéria pode ser descrita de maneira termodinâmica, a relação constitutiva entre ρ e P mencionada acima leva uma relação entre as flutuações determinada pela equação de Clausius (cf. Eq.(5.1))

$$\delta P = v_s^2 \delta \rho + T \delta S, \quad (4.28)$$

onde $v_s \equiv (\partial P / \partial \rho)_S$ é a velocidade do som no fluido e $T \equiv (\partial P / \partial S)_\rho$ sua temperatura. Dadas estas duas funções, pode-se combinar as Eqs.(4.25a)-(4.25d) e (4.26) para encontrar uma equação fechada para $\Phi = \Psi$, apresentada por [Bardeen \(1980\)](#) (cf. [Mukhanov et al. \(1992\)](#)):

$$\Phi'' + 3(1 + v_s^2) \mathcal{H} \Phi' - v_s^2 \nabla^2 \Phi + [2\mathcal{H}' + (1 + 3v_s^2) \mathcal{H}^2] \Phi = 4\pi G a^2 T \delta S. \quad (4.29)$$

Escrevemos a equação no tempo conforme, por conveniência, e $\mathcal{H} \equiv a'/a = aH$. Flutuações com $\delta S = 0$ costumam ser chamadas de ‘adiabáticas’. Note que, nesse caso, ρ e P são funções apenas de uma variável, a temperatura (que pode por sua vez ser parametrizada completamente pelo tempo). Assim, para todas as espécies que compõem o fluido total, uma flutuação adiabática tem a forma $\delta \rho_A = (\partial \bar{\rho}_A / \partial T) \delta T(\mathbf{x})$, logo $\delta \rho_R / \dot{\bar{\rho}}_R = \delta T / \dot{T} = \delta \rho_M / \dot{\bar{\rho}}_M$, para uma composição de radiação e matéria, por exemplo. Em termos de $w_A = \bar{P}_A / \bar{\rho}_A$, a equação de conservação $\dot{\bar{\rho}}_A = -3H(1 + w_A) \bar{\rho}_A$ permite escrever

$$\delta_A / (1 + w_A) = \delta_B / (1 + w_B), \quad \text{com} \quad \delta_A \equiv \delta \rho_A / \bar{\rho}_A.$$

Para fluidos perfeitos com equação de estado com parâmetro constante $c_s^2 = w$, vale $\mathcal{H} = 1/\eta$ e a Eq.(4.29) se simplifica bastante:

$$\Phi'' + \frac{6(1+w)}{1+3w} \eta^{-1} \Phi' + w \nabla^2 \Phi = 0, \quad (4.30)$$

cuja solução é proporcional a funções de Bessel. Em particular, em um universo dominado por poeira/matéria escura, temos $c_s^2 = w = 0$, e o Laplaciano some, deixando

$$\Phi'' + 6\eta^{-1} \Phi' = 0 \quad \text{logo} \quad \Phi(\eta, \mathbf{x}) = \mathcal{F}_1(\mathbf{x}) + \mathcal{F}_2(\mathbf{x}) \eta^{-5}. \quad (4.31)$$

O segundo modo decai rapidamente e o primeiro representa um perfil de flutuações espaciais que permanece *constante* com a evolução da métrica de fundo e deve obedecer a Eq.(4.26), sendo portanto determinado pela distribuição inicial de matéria. O que acabamos de mostrar é que desde que o Universo passa a ser dominado por matéria escura, o que ocorre desde antes da recombinação do hidrogênio e emissão da CMB, o potencial gravitacional Φ se encontra congelado. Mas antes dessa era de poeira Φ oscilava, e é necessário resolver a Eq.(4.29) detalhadamente para determinar as condições iniciais $\mathcal{F}(\mathbf{x})$. Em vez de seguir esse caminho, é costume acompanhar o desenvolvimento de uma outra grandeza \mathcal{R} .

*

Flutuação da curvatura

Uma maneira de se determinar as condições iniciais sobre Φ discutidas acima é através de uma lei de conservação válida para uma outra grandeza, denotada por \mathcal{R} , e relacionada à perturbação da curvatura (intrínseca) das superfícies espaciais. A forma explicitamente invariante de calibre dessa ‘perturbação da curvatura’ é $\mathcal{R} = A/2 + H\delta U$, que no calibre de Newton fica

$$\mathcal{R} = -\Psi + H\delta U. \quad (4.32)$$

A lei de conservação em questão diz respeito aos modos de Fourier \mathcal{R}_k , com $\mathcal{R} = \int d^3k \mathcal{R}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$. No limite em que o número de onda (comóvel) $q \ll aH$, então uma das soluções das Eqs.(4.25) tem

$$\mathcal{R}_k = \text{constante} \quad \text{e} \quad \Psi_k(t) = \Phi_k(t) = - \left(1 - (H/a) \int dt a \right) \mathcal{R}_k. \quad (4.33)$$

A outra solução tem $\mathcal{R}_k = 0$ e $\Psi_k(t) = \Phi_k(t) = \mathcal{C}_k H/a$, para uma constante \mathcal{C}_k . Durante uma expansão acelerada aH cresce, como mostrado no §3.2, e portanto o limite $k \ll aH$ passa a ser válido para um grande intervalo de números de onda k . Fisicamente, $aH = 1/r_H$ é o inverso do raio comóvel de Hubble, e se diz que as ondas, de comprimento comóvel $1/k$, estão ‘*saindo do horizonte*’. Em suma, durante uma fase de expansão acelerada (como na inflação), os modos escalares saem do horizonte e “congelam” em um valor constante de \mathcal{R}_k , no que permanecem até que, durante uma fase desacelerada subsequente (como no domínio de poeira) o raio r_H volte a diminuir e os comprimentos $1/k$ voltem a entrar no horizonte e oscilar com o tempo. Há uma razão fisicamente intuitiva para este comportamento: r_H age como uma barreira causal, e uma onda maior que esta escala está “fora de contato causal consigo mesma”, sendo portanto impossível que evolua com o tempo.

A demonstração de (4.33) pode ser feita diretamente usando as Eqs.(4.25) para determinar o comportamento de \mathcal{R} , na forma (4.32), no limite apropriado.

Uma prova muito geral, que não envolve a forma explícita do conteúdo material presente no universo, foi dada por [Weinberg \(2003\)](#) (ver [Weinberg \(2004\)](#) para um teorema análogo nos modos tensoriais, e [Weinberg \(2008\)](#) para uma revisão) e faz uso explícito da invariância de calibre de \mathcal{R} como uma simetria que é quebrada no universo homogêneo e isotrópico de fundo.

É possível encontrar uma equação de evolução para \mathcal{R} usando as Eqs.(4.25a)-(4.25d), no tempo conforme ($' = d/d\eta$), temos

$$\mathcal{R}'' + (aH - 2H'/H + H''/H') \mathcal{R}' - \nabla^2 \mathcal{R} = 0. \quad (4.34)$$

Considere o universo seja preenchido por um campo escalar ϕ e defina a função

$$z(\eta) \equiv a\dot{\phi}/H, \quad (4.35)$$

que só depende de grandezas de fundo. Uma vez que $z'/z = aH - H'/H + a\ddot{\phi}/\dot{\phi}$, e usando as equações de Friedmann para escrever $\dot{H} = -4\pi G\dot{\phi}^2$, temos

$$(1/a^2) (H'' - a'H'/a) = \ddot{H} = -8\pi G\dot{\phi}^2 (\ddot{\phi}/\dot{\phi}) = 2\dot{H} = 2H'(\ddot{\phi}/\dot{\phi})/a,$$

ou seja: $a\ddot{\phi}/\dot{\phi} = (H''/H' - aH)/2$, e $2z'/z = aH - 2H'/H + H''/H'$, o que é precisamente o termo entre parênteses na Eq.(4.34) que pode ser escrita, então,

$$\frac{d^2 \mathcal{R}}{d\eta^2} + \frac{2}{z} \frac{dz}{d\eta} \frac{d\mathcal{R}}{d\eta} - \nabla^2 \mathcal{R} = 0, \quad (4.36)$$

Esta equação é conhecida como ‘Equação de [Mukhanov \(1986\)](#)-[Sasaki \(1986\)](#)’. Podemos eliminar o termo de derivada linear \mathcal{R}' fazendo uma troca para a variável

$$v \equiv z\mathcal{R}. \quad (4.37)$$

A equação de MS para os modos de Fourier v_k toma a forma de uma equação para um oscilador,

$$v_k'' + (k^2 - z''/z) v_k = 0, \quad (4.38)$$

cuja frequência $(k^2 - z''/z)$ muda com o tempo de acordo com a função $z(\eta)$.

4.4 O céu iluminado pela Radiação Cósmica de Fundo

Nossa visão do céu se mapeia sobre a esfera S^2 . A (pequena) diferença de temperatura $\Delta T \equiv T(\hat{n}) - T_0$, observada ao redor da temperatura média atual da

CMB, $T_0 \equiv (4\pi)^{-1} \int d^2\hat{n} T(\hat{n}) \approx 2,7\text{K}$, é uma função (escalar) do vetor unitário $\hat{n} \in S^2$ que indica a direção da linha de visada, e portanto pode ser expandida em uma base de harmônicos esféricos:

$$\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} = \sum_{\ell, m} a_{\ell m} Y_{\ell}^m(\hat{n}).$$

O valor de ΔT medido em uma direção qualquer é alterado por detalhes do caminho específico percorrido pelo fóton. Para obter informação intrinsecamente cosmológica é preciso tirar médias estatísticas de ΔT . Fazendo uso de um Teorema Ergódico, assumimos que a média sobre diferentes pontos de observação seja equivalente à média sobre diferentes direções de observação a partir de um mesmo ponto. O Princípio Cosmológico se traduz aqui na suposição de que as médias $\langle \Delta T(\hat{n}_1) \Delta T(\hat{n}_2) \dots \rangle$ sejam invariantes de rotação, de modo que só dependam das *diferenças* entre os vetores direcionais, i.e. dos ângulos $\theta_{12} = \text{Arc cos } \hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2$. Assim, necessariamente $\langle \Delta T(\hat{n}) \rangle = 0$ (o que caracteriza estatisticamente ΔT como uma “flutuação”). Anisotropias da CMB são medidas pela correlação $\langle \Delta T(\hat{n}) \Delta T(\hat{n}') \rangle$. (Há outras correlações importantes referentes à polarização dos fótons, que são particularmente úteis para acessar informações sobre flutuações tensoriais.) A simetria rotacional impõe diagonalidade à correlação dos coeficientes¹

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = C_{\ell} \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'},$$

com o que a soma $\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell}^m(\hat{n}) Y_{\ell}^{-m}(\hat{n}') = (4\pi)^{-1} (2\ell + 1) P_{\ell}(\hat{n} \cdot \hat{n}')$ leva a

$$\left\langle \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \frac{\Delta T(\hat{n}')}{T_0} \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} (2\ell + 1) C_{\ell} P_{\ell}(\hat{n} \cdot \hat{n}'), \quad (4.39)$$

sendo P_{ℓ} os Polinômios de Legendre. Os números (reais) C_{ℓ} são o ‘*espectro da CMB*’. Esse espectro é *observável* através de análises estatísticas da CMB, como por exemplo a realizada pela equipe de [Planck Collaboration et al. \(2016a\)](#); um modelo cosmológico deve explicar o comportamento dos C_{ℓ} a partir das flutuações de grandezas físicas (Ψ , Φ , \mathcal{R} , $\delta\rho$, δP , o inflaton, etc.).

No universo pós-inflacionário há um inventário de radiação (fótons e neutrinos), matéria escura e bárions. As flutuações nas densidades de cada componente se relacionam entre si direta ou indiretamente, através das perturbações da métrica. Vimos no §4.3 que ao longo da inflação os modos de Fourier das flutuações da métrica deixam o horizonte de Hubble e param de oscilar; durante a fase desacelerada começam a reentrar no horizonte e oscilar outra vez. A influência na criação de anisotropias da CMB varia de acordo com o comportamento

¹As correlações indicadas aqui correspondem a médias estocásticas obtidas de diversas direções na esfera da CMB. Ver, e.g. [Durrer \(2008\)](#).

de Ψ_k e Φ_k após o reheating, a depender se os modos reentram no horizonte antes ou depois da recombinação do Hidrogênio. Modos com k alto (comprimento de onda curto) entram cedo no horizonte, e evoluem durante a era de radiação e a passagem para a era dominada por poeira, influenciando de maneira delicada a dinâmica das densidades de matéria. Por possuírem comprimento de onda curto, essas flutuações se imprimem na CMB em pequenas distâncias angulares: o ângulo no céu correspondente à escala de Hubble na recombinação é da ordem de $\theta_r \approx 1^\circ$, o que corresponde a um multipolo $\ell \sim 200$ nos coeficientes C_ℓ ; as flutuações que entram no horizonte de Hubble muito antes da emissão da CMB correspondem portanto a ângulos $\theta \ll 1^\circ$, e a multipolos $\ell > 200$. O efeito final é a existência de uma sucessão de “picos acústicos” na dependência de C_ℓ com ℓ , o primeiro dos quais ocorre a $\ell \approx 200$. A descrição desses efeitos é um assunto extenso e delicado; uma exposição detalhada é dada por [Durrer \(2008\)](#).¹

Por outro lado, comprimentos de onda maiores que o horizonte de Hubble no momento da recombinação permaneceram constantes ao longo de toda a evolução desacelerada, e se encontram ainda no mesmo estado em que se encontravam antes de saírem no horizonte, i.e. durante a fase inflacionária. Esses modos correspondem a ângulos $\theta \gg 1^\circ$, e a multipolos $\ell \ll 200$, e contém, portanto, informações preciosas a respeito do universo primordial inflacionário. Abaixo, vamos descrever de forma simplificada como essas informações — mais precisamente, o espectro de potências das flutuações inflacionárias — se encontram codificadas nos C_ℓ .

*

Informações sobre o Universo primordial

Como descrito no §2.6.1, a CMB é um gás de fótons com temperatura de corpo-negro seguindo a distribuição estatística de Planck (2.64), que podemos escrever esquematicamente como

$$f(\omega/T) = 1 / [\exp(\omega/T) - 1],$$

onde as frequências $\omega(t)$ sofrem um desvio para o vermelho proporcional a $1/a(t)$. A temperatura

$$T(x) = \bar{T}(t) + \delta T(t, \mathbf{x}),$$

tem valor de fundo homogêneo $\bar{T} \gg \delta T$, que fornece o espectro de corpo-negro e diminui com o aumento do fator de escala, $\bar{T}(t) \times a(t) = \text{constante}$, ver §5.1, logo a razão ω/\bar{T} é constante. A distribuição $f(\omega/T)$ obedece uma equação de Boltzmann, resultado do fato de o volume no espaço de fase ao longo da evolução

¹Ver também [Dodelson \(2003\)](#), e [Giovannini \(2007\)](#); [Mukhanov \(2005\)](#); [Weinberg \(2008\)](#).

do sistema se conservar (o teorema de Liouville) que, para fótons num “caminho livre”, tem a forma¹

$$df/d\eta = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{d\omega}{d\eta} \frac{df}{d\omega} + \frac{dx^i}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0 \quad (4.40)$$

O argumento da distribuição f pode ser escrito como $\omega/T = \omega_r/T_r$, para valores de referência arbitrários que denotamos pelo índice r relativo à recombinação. Expandindo $f(\omega/T)$ em primeira ordem para $T = \bar{T} + \delta T$,

$$f(\omega/T) \approx \left[\exp\left(\frac{\omega}{\bar{T}}\right) \exp\left(\frac{-\delta T/\bar{T}}{a(t)\bar{T}(t)}\right) - 1 \right]^{-1} \approx f(\omega/\bar{T}) \left[1 - \frac{\delta T}{\bar{T}} \frac{d \log f(\omega_r/\bar{T})}{d \log \omega_r} \right].$$

Tanto ω/\bar{T} quanto a derivada em colchetes na última igualdade são constantes, e por isso, em primeira ordem, a equação (4.40) se simplifica para

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{\delta T}{\bar{T}} \right) - \frac{d \log \omega_r}{d\eta} = 0. \quad (4.41)$$

(Repare a derivada total em $d(\delta T)/d\eta \approx \partial_\eta(\delta T) + (\partial x^i/\partial \eta)\partial_i(\delta T)$.)

Agora siga um fóton que se desacoplou da matéria na recombinação do hidrogênio e percorreu sua geodésica nula, sem colidir com nada, até atingir a sonda Planck em 2015. No calibre de Newton (4.24) e no tempo conforme, a condição $g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0$ leva a $p^0 = (1 - \Psi)k/a$, onde $k = \omega_r/a$ é o módulo da parte espacial do quadrimomento na métrica não perturbada, e $p^i = n^i(1 + \Phi)k/a$, com n^i um vetor unitário. Note que $p^0 \equiv d\eta/d\lambda$, e portanto a equação das geodésicas, $dp^\mu/d\lambda + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu p^\alpha p^\beta = 0$, após o cálculo dos símbolos de Christoffel para (4.24), dá, em primeira ordem,

$$\frac{d \log \omega_r}{d\eta} = -\frac{d\Psi}{d\eta} + \partial_\eta \Psi + \partial_\eta \Phi.$$

Com isso podemos integrar a Eq.(4.41), desde um instante inicial que escolhermos ser o instante da recombinação, η_r , até um instante final, η_0 , em que o fóton atinge os sensores de Planck. O resultado é uma relação entre a variação da temperatura e os potenciais gravitacionais:

$$\frac{\delta T}{\bar{T}} \Big|_{\eta_0} - \frac{\delta T}{\bar{T}} \Big|_{\eta_r} = -\Psi(\eta_0) + \int_{\eta_r}^{\eta_0} d\eta (\Psi' + \Phi'). \quad (4.42)$$

O primeiro termo no lado direito é conhecido como ‘*Efeito Sachs & Wolfe (1967)*’ (SW); corresponde ao desvio para o vermelho (logo na variação da temperatura)

¹Em geral, $df(\eta, \omega, \mathbf{x}, \mathbf{p})/d\eta = \mathcal{C}[f]$, onde $\mathcal{C}[f]$ depende da colisão dos fótons com outras partículas. O termo $(dp^i/d\eta)(\partial f/\partial p^i)$ que, a rigor, deve aparecer em (4.40) foi omitido por ser de segunda ordem. Ver em especial [Dodelson \(2003\)](#).

dos fótons que passam por um “poço” do potencial gravitacional. O segundo termo costuma ser chamado de “efeito Sachs-Wolfe integrado” e, numa descrição mais completa há também um termo devido ao movimento peculiar da Terra. O efeito SW domina em grandes escalas e durante a maior parte da evolução do Universo, em particular durante a era de dominação de poeira, quando se dá a criação de estruturas. De fato, como se vê na Eq.(4.31), nesse período Φ e Ψ não dependem de η , e portanto a integral se anula. (Mas note que tanto no Universo jovem quanto no Universo atual as contribuições respectivas de radiação e constante cosmológica ativam o último termo em (4.42).)

A variação na temperatura da CMB vista hoje tem, portanto, duas contribuições principais (nesse regime): o valor atual de Ψ , e o valor de $\delta T/\bar{T}$ no instante da recombinação, ou seja, variações intrínsecas de temperatura no instante de emissão da CMB. Por sua vez, estas variações dependem também do valor de Φ em η_r . Para flutuações adiabáticas num fluido com equação de estado w , $(\delta T/\bar{T})_r \approx 2\Phi_r/3(1+w)$, e $\Psi \approx \Phi$. Durante a emissão da CMB o Universo já é dominado por matéria, com $w = 0$, e portanto a Eq.(4.42) se resume a

$$(\delta T/\bar{T})|_{\eta_0} = \frac{1}{3}\Psi|_{\eta_r}. \quad (4.43)$$

Portanto, assumindo que os desvios observados hoje, ΔT , correspondem às perturbações δT , temos que $\langle(\Delta T/T_0)(\Delta T/T_0)\rangle = \frac{1}{9}\langle\Psi\Psi\rangle_r$. A determinação dos coeficientes C_ℓ pode ser obtida com alguma álgebra (ver, e.g. Durrer (2008)),

$$C_\ell \approx \frac{1}{9\pi^2} \int_0^\infty d(\log k) \mathcal{P}_\Psi(k) j_\ell^2[k(\eta_0 - \eta_r)], \quad (\text{efeito Sachs-Wolfe}) \quad (4.44)$$

onde $j_\ell(x)$ são funções de Bessel esféricas e $\mathcal{P}_\Psi(k)$ é o ‘espectro de potência’ de Ψ , definido na seção seguinte. O argumento de j_ℓ é a distância conforme percorrida pelo fóton entre hoje (η_0) e sua emissão na recombinação (η_r). Enfatizamos que a fórmula acima só é válida em *grandes* escalas; mais precisamente, é válida para flutuações cujos comprimentos de onda eram maiores que horizonte de Hubble (e portanto se encontravam congelados) no momento da recombinação do Hidrogênio, durante a era dominada por poeira; o que corresponde a ângulos $\theta \gg 1^\circ$, e a $\ell \ll 200$.

4.5 Espectros de potência

Vimos que as flutuações de temperatura são determinadas por Ψ que por sua vez, fora do horizonte, coincide com grandeza conservada \mathcal{R} , Eq.(4.33). Fica evidente da Eq.(4.39) que os C_ℓ só podem depender das médias $\langle\mathcal{R}(x)\mathcal{R}(y)\rangle$. A invariância rotacional da média estocástica mais uma vez impõe que $\langle\mathcal{R}(\mathbf{x}, t)\mathcal{R}(\mathbf{y}, t)\rangle$ só

dependa do módulo da distância $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ e com isso a função de correlação da transformada de Fourier deve ter a forma

$$\langle \mathcal{R}_k \mathcal{R}_{k'} \rangle \equiv k^{-3} \mathcal{P}_s(k) \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (4.45)$$

A função $\mathcal{P}_s(k)$ é chamada de ‘*espectro de potência*’ de \mathcal{R} .¹ Suas derivadas definem o ‘*índice espectral*’ n , também chamado de ‘*inclinação*’ (“*tilt*”), e o índice espectral ‘*fluido*’ (“*running*”), α ,

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \log \mathcal{P}_s}{d \log k} \quad \text{e} \quad \alpha_s \equiv \frac{dn_s}{d \log k}. \quad (4.46)$$

O espectro é a grandeza mensurável a partir das flutuações da CMB, como ilustrado pela Eq.(4.44). Com as definições acima se pode escrever

$$\mathcal{P}_s(k) = A_s(k_*) \left(\frac{k}{k_*} \right)^{-1+n_s(k) + \frac{1}{2}\alpha_s(k_*) \log(k/k_*)}, \quad (4.47)$$

para uma escala arbitrária de referência k_* . É nessa forma que se encontram os resultados de [Planck Collaboration et al. \(2016a\)](#).

O mesmo pode ser feito para os modos tensoriais, mas é costume utilizar uma notação um pouco diferente. A transformada de Fourier h_k de cada modo de polarização $h_{+, \times}$ tem uma função de correlação como em (4.45): $\langle h_k h_{k'} \rangle \equiv k^{-3} \mathcal{P}_h(k) \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$, mas como há dois modos de polarização, o chamado ‘*espectro tensorial*’ é definido por

$$\mathcal{P}_T(k) \equiv 2\mathcal{P}_h(k). \quad (4.48)$$

Além disso, é costume se definir o índice espectral tensorial sem a soma de -1 ,

$$n_T(k) \equiv \frac{d \log \mathcal{P}_T}{d \log k}. \quad (4.49)$$

Em geral, definiremos o espectro de potência $\mathcal{P}_X(k)$ de qualquer grandeza estocástica X_k por uma fórmula análoga a (4.45). Por exemplo, \mathcal{P}_ψ na Eq.(4.44) é o espectro de potência relativo à média do potencial de Bardeen Ψ .

4.6 Flutuações no universo inflacionário

O grande triunfo da teoria da inflação é fornecer uma *explicação* para a presença de flutuações primordiais: as flutuações do inflaton se comportam como

¹Também é comum chamar de ‘*espectro de potência*’ a função $\tilde{\mathcal{P}}(k)$ tal que $\langle \mathcal{R}_k \mathcal{R}_{k'}^* \rangle \equiv (2\pi)^3 \tilde{\mathcal{P}}(k) \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$.

um campo quântico cujo valor médio esperado no vácuo é diferente de zero. Usando a correspondência usual entre um fluido e o campo escalar, não é difícil determinar que perturbação da 4-velocidade corresponde $\delta U \equiv -\delta\phi/\dot{\bar{\phi}}$, de modo que a Eq.(4.32) dá

$$\mathcal{R} = -\Psi - H\delta\phi/\dot{\bar{\phi}}. \quad (4.50)$$

Portanto, durante a inflação, as médias $\langle \mathcal{R}_q \mathcal{R}_{q'} \rangle$ estão ligadas diretamente às funções de correlação do inflaton. Existe um calibre das flutuações chamado de ‘calibre (especialmente) plano’, no qual o potencial $\Psi = 0$, e \mathcal{R} é diretamente proporcional a $\delta\phi$ a menos de um fator que só depende da métrica de fundo. Além disso, como flutuações de um campo escalar não induzem anisotropias, e $\pi_S = 0$, então $\Psi = \Phi = 0$ e a teoria de perturbações escalares é equivalente à descrição do campo $\delta\phi$ se propagando sobre o universo de FLRW não perturbado. As correlações

$$\langle \delta\phi_k \delta\phi_{k'} \rangle = (\dot{\bar{\phi}}/H)^2 \langle \mathcal{R}_k \mathcal{R}_{k'} \rangle, \quad (4.51)$$

do lado esquerdo da igualdade, são os valores médios (dos modos de Fourier) do campo $\delta\phi$ após ele ser quantizado. Após a saída do horizonte de Hubble, esses modos perdem contato causal e deixam de oscilar, como visto no §4.3. Isso pode ser entendido, seguindo Polarski & Starobinsky (1996), como um processo de descoerência que transforma os valores médios quânticos $\langle \delta\phi_k \delta\phi_{k'} \rangle$ em correlações estatísticas (clássicas) de $\langle \mathcal{R}_k \mathcal{R}_{k'} \rangle$ após a entrada no horizonte durante a fase desacelerada dominada por matéria. A saída e o congelamento dos modos de Fourier de dentro do horizonte de Hubble durante a expansão acelerada são o coração do mecanismo inflacionário: as flutuações quânticas ficam preservadas (não decaem) e depois, quando clássicas, induzem as inomogeneidades na fase desacelerada pós-reheating.

Desejamos calcular $\langle \delta\phi_k \delta\phi_{k'} \rangle$ no regime de slow-roll. A ação para um campo escalar no universo de FLRW é dada por (2.18). Fazendo a perturbação de primeira ordem $\phi = \bar{\phi} + \delta\phi$, a perturbação em segunda ordem da ação (em primeira ordem a variação é zero após implementadas as equações de Friedmann) fica

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x [(\partial f/\partial\eta)^2 - \partial_{\mathbf{x}}f \cdot \partial_{\mathbf{x}}f + (\ddot{a}/a - a^2\partial_\phi^2 V(\phi)) f^2],$$

onde $f \equiv a\delta\phi$. No regime de slow-roll, $a^2\partial_\phi^2 V(\phi) \ll \ddot{a}/a$, e

$$S[f] = \int d^4x \frac{1}{2} [(\partial f/\partial\eta)^2 - \partial_{\mathbf{x}}f \cdot \partial_{\mathbf{x}}f + (a''/a)f^2]. \quad (4.52)$$

Aqui uma linha indica derivada com respeito ao tempo conforme η . As equações de Euler-Lagrange determinam a evolução de f . São simplesmente Para os modos

de Fourier $f_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{x} f(\eta, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$,

$$f_k'' + (k^2 - a''/a) f_k = 0, \quad (4.53)$$

que é igual à Eq.(4.38) para \mathcal{R}_k , com z substituído por a . A quantização canônica de f se dá impondo a relação de incerteza $[f(\eta, \mathbf{x}), \pi(\eta, \mathbf{x}')] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, ou $[f_k(\eta), \pi_k(\eta)] = i\delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$. O espaço de Fock se constrói a partir da definição dos operadores de aniquilação e criação α tais que $f_{\mathbf{k}}(\eta) = \alpha_{\mathbf{k}} f_k^{cl} + \alpha_{\mathbf{k}}^\dagger f_k^{cl*}$, com f_k^{cl} solução da equação clássica (4.53). A relação de incerteza induz sobre os α s a comutação $(f_k^{cl}, f_k^{cl*}) [\alpha_{\mathbf{k}}, \alpha_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$, onde o produto interno de Klein-Gordon (f_k, f_k^*)

$$(f_k^{cl}, f_k^{cl*}) \equiv -i(f_k^{cl} \partial_\eta f_k^{cl*} - f_k^{cl*} \partial_\eta f_k^{cl}) = 1 \quad (4.54)$$

deve ser normalizado para se obter o comutador usual $[\alpha_{\mathbf{k}}, \alpha_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$. Assumindo que o estado inicial do campo é um vácuo $|0\rangle$, aniquilado por α_k , e usando as regras de comutação se chega ao valor médio

$$\langle f_k f_{k'} \rangle \equiv \langle 0 | f_{\mathbf{k}}^\dagger f_{\mathbf{k}'} | 0 \rangle = (2\pi)^3 |f_k^{cl}|^2 \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}'),$$

e voltando a $\delta\phi = f/a$,

$$\langle \delta\phi_k \delta\phi_{k'} \rangle = (2\pi)^3 a^{-2} |f_k^{cl}|^2 \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (4.55)$$

Diferentes escolhas da solução f_k^{cl} correspondem a diferentes escolhas do vácuo. No espaço de de Sitter existe uma escolha preferencial, o vácuo de [Bunch & Davies \(1978\)](#), que assume no limite muito interior ao horizonte de Hubble os modos são insensíveis à presença da curvatura e se comportam como partículas livres de frequência positiva em Minkowski. A solução geral da Eq.(4.53) para $a = -1/H\eta$ é a família $f_k = A_\pm(k) e^{\pm ik\eta} (1 \pm i/k\eta)$, e a solução que obedece a condição apropriada em $\eta \rightarrow -\infty$, normalizada de acordo com (4.54) é

$$f_k^{BD} = (1/2k)^{1/2} (1 - i/k\eta) e^{-ik\eta}. \quad (4.56)$$

Substituindo $f^{cl} = f^{BD}$ na Eq.(4.55) dá

$$\langle \delta\phi_k \delta\phi_{k'} \rangle = (2\pi)^3 (H^2/2k^3) [1 + k^2/a^2 H^2] \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (4.57)$$

O modo k deixa o horizonte quando $k \leq aH$. Então o segundo termo nos colchetes se torna subdominante e, após algum tempo de inflação, desprezível. Defina $\mathcal{P}_{\delta\phi} = (2\pi)^3 H^2/2$, em analogia à Eq.(4.45). Em um espaço aproximadamente dS_4 , durante a fase de slow-roll, H varia lentamente com $\bar{\phi}$, e temos $\mathcal{P}_{\delta\phi} = (2\pi)^3 H^2(k)/2$, com $H^2(k)$ sendo $H^2(\bar{\phi})$ avaliado no instante de saída do

horizonte em que $a(\bar{\phi})H(\bar{\phi}) = k$. Por fim, usando (4.51) com a aproximação de que $\langle \delta\phi_k \delta\phi_{k'} \rangle = k^{-3} \mathcal{P}_{\delta\phi}(k) \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$, temos o espectro de potência escalar numa inflação de slow-roll:

$$\mathcal{P}_s(k) = \frac{(2\pi)^3}{2} (H^2(k)/\dot{\bar{\phi}})^2 = 2\pi^3 \left[\frac{H^2(\bar{\phi})}{\varepsilon_H(\bar{\phi})} \right]_{k=aH}, \quad (4.58)$$

onde ε_H é o parâmetro de slow-roll de Hubble (3.13). Isso fornece enfim uma relação entre o índice espectral (4.46) e os parâmetros de slow-roll (3.22). Lembrando que H é aproximadamente constante, temos

$$n_s - 1 = \frac{d \log \mathcal{P}_s}{d \log k} = \frac{d \log \mathcal{P}_s}{d \log aH} \approx \frac{d \log \mathcal{P}_s}{d \log a} = \frac{1}{H\mathcal{P}_s} \frac{d\mathcal{P}_s}{dt}.$$

ou seja,

$$n_s(k) = [1 - 2\varepsilon_H - \eta_H]_{k=aH}. \quad (4.59)$$

Como visto no §4.2, os modos tensoriais se dividem em dois modos escalares idênticos de polarização, que são guiados pela mesma equação (4.53), cf. Eq.(4.22). Portanto toda a formulação acima fornece o espectro de potência (4.48) $\mathcal{P}_T = 2\mathcal{P}_{\delta\phi}$, ou seja

$$\mathcal{P}_T = (2\pi)^3 H^2(\bar{\phi}), \quad (4.60)$$

de maneira que o índice tensorial n_T da Eq.(4.49) se escreve como

$$n_T(k) = 2\varepsilon_H \Big|_{k=aH}. \quad (4.61)$$

Repare que pela ausência do fator $H/\dot{\bar{\phi}}$ o resultado (4.60) para os modos tensoriais passa por menos aproximações que no caso escalar; a existência de um índice espectral não nulo na impressão das ondas gravitacionais na CMB é a predição mais forte do paradigma inflacionário, medindo diretamente o primeiro parâmetro de slow-roll.

Escrevendo \mathcal{P}_T na forma (4.47), i.e. $\mathcal{P}_T = A_T(q_*)(q/q_*)^{n_T}$, e inferindo $A_T(k_*)$ e $A_s(k_*)$ para uma dada escala de referência k_* a partir de (4.58) e (4.60), temos por fim a chamada ‘razão tensorial escalar’

$$r \equiv A_T/A_s = 16\varepsilon_H. \quad (4.62)$$

A amplitude escalar $A_s(k_*)$ pode ser medida diretamente da CMB, e para $k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ seu valor é $A_s \sim 10^{-9}$. E uma vez que $r \approx \mathcal{P}_T/\mathcal{P}_s$, e $\mathcal{P}_T \sim H^2$ mede o valor do raio de Hubble durante a inflação, uma medição de r fornece a ordem

de escala de energia durante a fase inflacionária. Uma vez que durante o slow-roll $H^2 \sim V$, temos

$$V \sim 10^{63} r \text{ MeV}.$$

É difícil medir diretamente n_T , e os resultados observacionais são dados tipicamente por n_s e r , que servem para parametrizar diferentes modelos inflacionários. As medições recentes de [Planck Collaboration *et al.* \(2016b\)](#) dão

$$n_s = 0.968 \pm 0.006 \quad r < 0.11. \quad (4.63)$$

O valor $n_s \approx 1$ revela que o espectro de potência \mathcal{P}_s é quase independente de k , logo todas as escalas são equivalentes (o chamado ‘espectro de [Harrison \(1970\)](#)-[Zeldovich \(1972\)](#)’), este efeito é de fato observado na CMB (ver fórmula (4.44)).

Capítulo 5

Tópicos sobre a termodinâmica do Universo

5.1 Termodinâmica de universos de FLRW

No universo espacialmente homogêneo e isotrópico, a cada instante de tempo todo o fluido deve estar em equilíbrio termodinâmico a uma temperatura T e pressão P constantes ao longo das seções espaciais \mathcal{K}_t ; caso contrário — se, por exemplo, P fosse uma função $P(\mathbf{x})$ sobre \mathcal{K}_t — seria quebrada a homogeneidade e o espaço-tempo não seria descrito pela métrica de FLRW. Em outras palavras, as grandezas termodinâmicas que descrevem o ‘fluido cósmico’ só podem variar com um único parâmetro $\lambda(t)$ correspondente ao tempo cósmico t ; com isso não podem ser todas independentes entre si, e é possível escolher uma delas como λ . Escolha $T = \lambda(t)$, e todas as grandezas termodinâmicas são funções apenas da temperatura.

Considere-se o sistema termodinâmico composto pelo fluido no interior de um volume arbitrário V . A energia interna do fluido, $E(T)$, sua pressão, $P(T)$, e sua entropia, $S(T)$, obedecem a relação fundamental da termodinâmica:

$$dE = TdS - PdV. \quad (5.1)$$

O volume V é arbitrariamente delimitado, mas a densidade de energia $\rho \equiv E/V$ é uma característica do fluido (de fato, a componente 00 do tensor de energia-momento $T^\mu{}_\nu$). Defina a densidade de entropia $s \equiv S/V$, e a relação fundamental $d(\rho V) = Td(sV) - PdV$ fica

$$\rho dV + V \frac{\partial \rho}{\partial T} dT = (Ts - P)dV + TV \frac{\partial s}{\partial T} dT.$$

A condição de integrabilidade de (5.1) é a igualdade dos coeficientes de dV e de

dT de cada lado da equação acima. Os coeficientes de dV dão

$$s(T) = \frac{1}{T} (\rho(T) + P(T)), \quad (5.2)$$

e os coeficientes de dT fornecem $\partial\rho/\partial T = T\partial s/\partial T$. Como ambas $\rho(T)$ e $s(T)$ são funções da temperatura apenas, as derivadas parciais podem ser substituídas por derivadas totais e com isso, ao se derivar $P(T)$ obtém-se, de acordo com a Eq.(5.2),

$$dP/dT = \frac{1}{T} (\varrho(T) + p(T)). \quad (5.3)$$

Se $V = V_0 \times a^3(t)$, com V_0 uma constante fixa, então a mudança no volume do sistema se deve apenas à expansão cósmica e é um processo termodinâmico reversível. A reversibilidade pode ser comprovada se demonstramos que a entropia é constante ao longo do processo, ou seja, para um volume comóvel unitário

$$S(a^3, T) \equiv a^3 s(T) = \frac{a^3}{T} (\varrho(T) + P(T)) = \text{constante}. \quad (5.4)$$

De fato, integrando a Eq.(5.3) para uma função $\rho = \rho(P)$ arbitrária temos

$$T(P) = \alpha \exp \left[\int dP/(P + \rho) \right] \quad (5.5)$$

o que, substituído em (5.2) dá para a densidade de entropia

$$s = \frac{1}{\alpha} (P + \rho) \exp \left[- \int dP/(P + \rho) \right]. \quad (5.6)$$

α é uma constante de integração (cf. Eq.(5.11) abaixo). Derivando com respeito ao tempo temos $\dot{s} = \frac{1}{\alpha} \exp \left[- \int \frac{dP}{P+\rho} \right] \dot{\rho}$, ou seja:

$$\dot{s}/s = \dot{\rho}/(\rho + P). \quad (5.7)$$

Agora, para $S = a^3 s$, temos $\dot{S} = a^3 \dot{s} + 3a^2 \dot{a} s = a^3 s (\dot{s}/s + 3H)$ e, usando (5.7),

$$\dot{S} = S \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho + P} + 3H \right). \quad (5.8)$$

Mas o termo entre parênteses se anula pela equação de continuidade, logo $\dot{S} = 0$.

A reversibilidade do processo termodinâmico de expansão do fluido devida à expansão do universo, expressa pela Eq.(5.4), permite que se use a temperatura como um relógio cósmico. Derivando a Eq.(5.4) temos que $3a^2 \dot{a} + a^3 (\partial s/\partial T) \dot{T} = 0$, logo

$$\frac{dT}{dt} = -3 \frac{(\partial s/\partial T) \dot{a}}{s(T) a},$$

cujo último termo pode ser eliminado pela equação de Friedmann $\dot{a}/a = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \sqrt{\rho}$ (num universo plano em expansão). Assim, sabendo a entropia e a (densidade de) energia interna como função de T sabemos como o tempo cósmico evolui com a temperatura ou vice-versa:

$$t = -\frac{1}{\sqrt{24\pi G}} \int dT \frac{(\partial s(T)/\partial T)}{s(T)\sqrt{\rho(T)}}. \quad (5.9)$$

É através dessa correspondência que se pode contar a história do início do Universo como uma sucessão (temporal) de processos a energias (temperaturas) conhecidas. Uma descrição detalhada pode ser encontrada, e.g., em [Weinberg \(2008\)](#) (ver também [Weinberg \(1993\)](#)).

No denominador do integrando de (5.9) é necessário saber $\rho = \rho(T)$, e para isso é suficiente saber a equação de estado $P = P(\rho)$, com o que se torna possível integrar a Eq.(5.5) e usar mais uma vez uma a equação de estado para obter $T = T(\rho)$. O exemplo mais simples (e significativo) vem de equações de estado lineares $p = w \rho$, com w constante, para as quais a integral é imediata e dá

$$\rho(T) = \text{constante} \times T^{\frac{(w+1)}{w}}, \quad (5.10)$$

descrevendo como a energia do fluido (ou gás) depende da sua temperatura. Para radiação (um gás de fótons), onde a equação de estado é $P = \frac{1}{3}\rho$, i.e. $w = \frac{1}{3}$, a relação (5.10) é a conhecida Lei de [Stefan et al. \(1879\)](#) e [Boltzmann \(1884\)](#). A nível de “termodinâmica clássica”¹ a constante, vinda da integração da Eq.(5.3), não pode ser determinada a não ser experimentalmente; no caso da radiação (de corpo negro), escrevendo aqui explicitamente a velocidade da luz c ,

$$\rho(T) = \frac{4\sigma_{SB}}{c} \times T^4, \quad (5.11)$$

σ_{SB} é a ‘constante de Stefan-Boltzmann’, e fica determinada a partir da distribuição estatística de Planck em termos da constante de Boltzmann como

$$\sigma_{SB} = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2}.$$

Ver, e.g., [Landau & Lifshitz \(1980\)](#). Note que isso determina também o valor de $S = a^3 s$ na Eq.(5.4), para radiação. Como $\rho = \rho_R/a^4$, a Eq.(5.11) dá $T = (c \rho_R/4\sigma_{SB})^{1/4} a^{-1}$. Além disso, $s = (4/3) \rho/T = (4^2 \sigma_{SB}/3c) T^3$, logo

$$S_R = \left(\frac{4^5 \rho_R^3 \sigma_{SB}}{3^4 c} \right)^{1/4}. \quad (5.11)$$

¹i.e., sem a Mecânica Estatística. Ver [Fermi \(1956\)](#).

*

Potenciais termodinâmicos

A função $\rho(T)$ determina a energia interna como função do volume e da temperatura, $E(V, T) = V\rho(T)$. Na relação fundamental (5.1), entretanto, a temperatura não entra como variável independente e o lado direito da igualdade revela que ali temos $E = E(V, S)$. A energia interna como função do volume e da entropia é dita um ‘potencial termodinâmico’ do sistema, uma vez que de suas derivadas se obtêm as outras duas grandezas termodinâmicas (no caso a temperatura e a pressão); basta olhar os coeficientes dos diferenciais na Eq.(5.1) para saber

$$P = -\frac{\partial E(V, S)}{\partial V}, \quad T = \frac{\partial E(V, S)}{\partial S}. \quad (5.12)$$

Para elevar a temperatura à condição de variável independente assim como ela aparece na Eq.(5.2), é necessário realizar uma ‘transformada de Legendre’ de $E(V, S)$, i.e.

$$dE = TdS - PdV = d(TS) - SdT - PdV \quad \text{logo} \quad d(E - TS) = -SdT - PdV,$$

e do lado direito temos T como variável independente como se deseja. Portanto, $F(V, T) \equiv E - TS$ é uma função do volume e da temperatura; trata-se de um novo potencial termodinâmico já que as outras grandezas (aqui a entropia e a pressão) são obtidas a partir de suas derivadas. Uma nova transformada de Legendre pode substituir V por P , levando ao potencial termodinâmico

$$\Phi(P, T) \equiv E - TS + PV, \quad (5.13)$$

do qual se obtêm volume $V = \partial\Phi(P, T)/\partial P$ e entropia $S = -\partial\Phi(P, T)/\partial T$. Os potenciais termodinâmicos $F(V, T)$ e $\Phi(P, T)$ são conhecidos como ‘energias livres’, respectivamente de Helmholtz e de Gibbs.

Ao redor do volume V delimitando o sistema termodinâmico, desenhe o volume $\bar{V} \gg V$, muito maior que o primeiro e cujo conteúdo funciona como um meio com o qual V se encontra em equilíbrio térmico. (Pode-se pensar em $\bar{V} \sim (1/H)^3$, da ordem do volume de Hubble, i.e. \bar{V} corresponde efetivamente ao “resto do universo”.) Qualquer processo deve obedecer a Segunda Lei da Termodinâmica, e a entropia total $S_0 = S + \bar{S}$ não pode decrescer. Da relação fundamental (5.1), vemos que S_0 é uma função de $E_0 = E + \bar{E}$ e $V_0 = V + \bar{V}$. Sendo $\bar{E} \gg E$ e $\bar{V} \gg V$, podemos expandir em primeira ordem

$$\begin{aligned} S_0(E_0, V_0) &= \bar{S}(E_0 - E, V_0 - V) + S(E, V) \approx \\ &\approx \bar{S}(E_0, V_0) - \left[\frac{\partial \bar{S}(\bar{E}, \bar{V})}{\partial \bar{E}} \right]_0 E - \left[\frac{\partial \bar{S}(\bar{E}, \bar{V})}{\partial \bar{V}} \right]_0 V + S(E, V). \end{aligned}$$

O subscrito $[\dots]_0$ indica que devemos avaliar as derivadas para os argumentos $\bar{E} = E_0$ e $\bar{V} = V_0$ relativos ao sistema total. Mas note que, pela segunda das Eqs.(5.12), a primeira das derivadas

$$\left[\frac{\partial \bar{S}(\bar{E}, \bar{V})}{\partial \bar{E}} \right]_0 = 1 / \left[\frac{\partial \bar{E}(\bar{V}, \bar{S})}{\partial \bar{S}} \right]_0 = 1/T_0.$$

Quanto à segunda, dividindo ambas as Eqs.(5.12),

$$P/T = - \frac{(\partial E / \partial V)_S}{(\partial E / \partial S)_V} = \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_E, \quad \text{vemos que} \quad \left[\frac{\partial \bar{S}(\bar{E}, \bar{V})}{\partial \bar{V}} \right]_0 = P_0/T_0.$$

Cf. §1.1. Voltando à Eq.(5.1), o que obtemos é que $S_0 = \bar{S} - (E + P_0V - T_0S)/T_0$. Mas a expressão em parênteses é precisamente o potencial de Gibbs (5.13) do sistema dentro do volume V , logo

$$S_0 = \bar{S} - \Phi(P_0, T_0)/T_0. \quad (5.12)$$

O sistema total entra em equilíbrio para o maior valor possível de S_0 e, portanto, *no equilíbrio termodinâmico o potencial de Gibbs se encontra em um mínimo.*

*

Desigualdades termodinâmicas

A cada instante t do tempo cósmico o fluido se encontra em equilíbrio termodinâmico com pressão e temperatura constantes, e resulta que as hipersuperfícies \mathcal{K}_t do universo de FRW são equipotenciais de $\Phi(P, T)$. Escolha uma dessas hipersuperfícies, digamos

$$\mathcal{K}_0 = \{\Phi(P_0, T_0) = \Phi_0 = \text{constante}\},$$

contendo os volumes V e \bar{V} do sistema e do meio, em equilíbrio térmico a temperatura e pressão T_0 e P_0 . Considere uma pequena variação δV do volume do sistema, mas *sem sair* da superfície \mathcal{K}_0 . Repare que, sob a ação apenas da gravidade no espaço-tempo homogêneo e isotrópico, qualquer variação δV se dá na direção tipo-tempo *perpendicular* a \mathcal{K}_0 — e é a dinâmica desta variação que até aqui vimos descrevendo. O que agora estamos considerando é uma variação na direção tipo-espaço *tangente* a \mathcal{K}_0 que, portanto, não pode ser efetuada pela gravitação de FRW apenas. Imagine então que δV seja realizada por um “agente externo”, por exemplo uma pequena variação no potencial gravitacional devida a perturbações da métrica. A flutuação retira o sistema do equilíbrio, e uma vez que no estado de equilíbrio Φ se encontra em um mínimo, então sob a variação a função só pode crescer; ou seja

$$\delta\Phi(P_0, T_0) = \delta E - T_0\delta S + P_0\delta V > 0. \quad (5.13)$$

Em primeira ordem, o lado direito da equação acima se anula por conta da relação fundamental (5.1). Devemos analisar $\delta E(V, S) = E(V + \delta V, S + \delta S) - E(V, S)$ até segunda ordem, portanto. Expandindo,

$$\delta E = \frac{\partial E}{\partial S} \delta S + \frac{\partial E}{\partial V} \delta V + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 E}{\partial S^2} \delta S^2 + \frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \delta V^2 + 2 \frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S} \delta V \delta S \right\}.$$

Todas as derivadas parciais são avaliadas com $\delta S = \delta V = 0$, no sistema em equilíbrio (e, portanto, de acordo com (5.12), temos de fato que os termos de primeira ordem são $T_0 \delta S - P_0 \delta V$). Com isso a condição (5.13) é uma condição sobre a expressão em chaves, que deve ser positiva:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial S^2} \delta S^2 + \frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \delta V^2 + 2 \frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S} \delta V \delta S > 0, \quad (5.14)$$

o que leva às condições (cf. §1.2)

$$\frac{\partial^2 E}{\partial S^2} > 0; \quad (5.15a)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial S^2} \frac{\partial^2 E}{\partial V^2} - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S} \right)^2 > 0. \quad (5.15b)$$

As ‘desigualdades termodinâmicas’ acima garantem a estabilidade do sistema termodinâmico sob pequenas flutuações para fora do equilíbrio. (Cf. Landau & Lifshitz (1980).) Cada uma diz respeito a uma propriedade física mensurável.

A Eq.(5.15a) é uma afirmação sobre o ‘calor específico’ do material que compõe o sistema termodinâmico. Os calores específicos a volume e a pressão constantes são definidos, respectivamente, por

$$C_v \equiv T(\partial S / \partial T)_V, \quad \text{e} \quad C_p \equiv T(\partial S / \partial T)_P. \quad (5.16)$$

De acordo com a relação fundamental (5.1), ao se fornecer uma energia $dE = T dS$ num processo a volume constante, a temperatura do corpo sofre um aumento dT tal que $dE = T(\partial S / \partial T)_V dT = C_v dT$, ou seja,

$$C_v = (\partial E / \partial T)_V, \quad (5.17)$$

logo C_v mede a quantidade de calor recebida pelo corpo para que sua temperatura aumente, a volume constante, em uma unidade (um Kelvin). Analogamente C_p . Pela Eq.(5.12),

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial E(S, V)}{\partial S} \right) = \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_V \equiv T / C_v,$$

logo a Eq.(5.15a) equivale a dizer que o calor específico a volume constante de qualquer corpo é sempre positivo,

$$C_v > 0, \quad (5.18)$$

e a Eq.(5.17), então garante que a energia interna é uma função monotônica crescente da temperatura. Também é possível mostrar usando as definições (5.16) que

$$C_p > C_v > 0, \quad (5.19)$$

Em suma, a condição (5.15a) garante que *em um sistema termodinamicamente estável, um aumento na temperatura corresponde a um aumento na energia interna.*

Usando as Eqs.(5.12), e o fato de que $\partial^2 E/\partial S\partial V = \partial^2 E/\partial V\partial S$, o lado esquerdo da Eq.(5.15b) fica

$$\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V \left(-\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S - \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S \left(-\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V = -\frac{\partial(T, P)}{\partial(S, V)},$$

e, desenvolvendo o Jacobiano, chegamos a

$$(\partial P/\partial V)_T < 0. \quad (5.20)$$

No processo sofrido pelo fluido em expansão no universo FRW o que se tem é a entropia, não a temperatura constante. Mas

$$(\partial P/\partial V)_T = \frac{\partial(P, T)}{\partial(V, T)} = \frac{\partial(P, T)/\partial(P, S)}{\partial(V, T)/\partial(V, S)} \frac{\partial(P, S)}{\partial(V, S)} = \frac{(\partial T/\partial S)_P}{(\partial T/\partial S)_V} (\partial P/\partial V)_S,$$

e $\frac{(\partial T/\partial S)_P}{(\partial T/\partial S)_V} = C_v/C_p$. Logo (5.20) em conjunto com (5.19) implicam que

$$(\partial P/\partial V)_S < 0. \quad (5.21)$$

As desigualdades (5.20) e (5.21) podem ser interpretadas como condições sobre a chamada ‘compressibilidade’ do sistema termodinâmico. As ‘compressibilidades isotérmica e adiabática’, K_T e K_S , se definem como

$$K_T \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \quad \text{e} \quad K_S \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S. \quad (5.22)$$

Medem a taxa de variação do volume do corpo ao se aplicar sobre ele uma pressão em um processo isotérmico ou adiabático. Uma vez que $(\partial P/\partial V) = -1/VK$, as desigualdades demonstradas equivalem a

$$K_T, K_S > 0. \quad (5.23)$$

Em suma, *em um sistema termodinamicamente estável, o aumento no volume em um processo isotérmico ou adiabático corresponde a uma diminuição da pressão.*

5.2 Entropias de horizontes

Na ausência de gravitação, um sistema termodinâmico isolado tende a se homogeneizar à medida que entra em equilíbrio térmico e atinge o valor máximo da entropia. Um gás se espalha dentro de um recipiente fechado porque ao se distribuir uniformemente atinge uma entropia muito maior do que em uma configuração em que as moléculas se concentrem ao redor de um único ponto. A presença de um campo gravitacional produz o efeito *inverso*: a configuração de *maior* entropia apresenta aglomerações. Num campo gravitacional homogêneo, por causa da variação do potencial químico, a configuração de maior entropia para o gás é aquela em que as moléculas estão concentradas próximas à parte inferior da caixa (como na atmosfera terrestre). Em geral, a configuração de maior entropia possível para um sistema ocorre se ele forma um buraco negro.

5.2.1 A entropia de Bekenstein-Hawking

As “quatro leis da mecânica de buracos negros” apresentadas por [Bardeen *et al.* \(1973\)](#) permitem descrever seu comportamento clássico a partir de leis análogas às da termodinâmica: Se κ é a gravidade superficial no horizonte de eventos que possui área A , e M é a massa do buraco negro (desconsideramos por simplicidade rotação e carga elétrica), então em qualquer processo clássico (por exemplo, a acreção de material estelar ou a colisão de dois buracos negros) κ é constante sobre o horizonte (Lei Zero),

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A \quad (\text{Primeira Lei}); \quad (5.24)$$

$$\delta A \geq 0 \quad (\text{Segunda Lei}). \quad (5.25)$$

Nessa que era, a princípio, uma analogia, a área do horizonte de eventos faz o papel da entropia confirmando especulações anteriores de [Bekenstein \(1972\)](#). Uma conexão mais profunda entre foi mais tarde estabelecida por [Hawking \(1975\)](#), ao demonstrar que buracos negros irradiavam com um espectro de corpo-negro a temperatura, em unidades naturais,

$$T_H = (2\pi)^{-1} \kappa \quad (5.26)$$

proporcional à gravidade superficial κ sobre o horizonte (o fato de κ ser constante sobre o horizonte é a “Lei Zero da termodinâmica de buracos negros”). Com isso se estabelece definitivamente uma ‘termodinâmica de buracos negros’, como descrita por [Hawking \(1976\)](#) e [Bekenstein \(1973\)](#). A entropia, associada à área A do horizonte de eventos, tem como coeficiente correto, em unidades naturais,¹

¹Devolvendo as constantes fundamentais, entropia e temperatura se lêem (note a ausência de G em T_H)

$$T_H = (\hbar/2\pi k_B c) \kappa; \quad S_{\text{BH}} = (c^3/G\hbar) A/4.$$

um fator simples de $1/4$, viz.

$$S_{\text{BH}} = A/4. \quad (5.27)$$

Esta é a conhecida fórmula de Bekenstein-Hawking. Com isso (5.24) se torna a relação fundamental da termodinâmica, $\delta E = T_H \delta S_{\text{BH}}$.

5.2.2 Horizontes aparentes

Um buraco negro é um espaço-tempo estacionário, mas em espaços dinâmicos é mais adequado utilizar uma definição local para o horizonte que não caia em problemas teleológicos, como discutido no §2.5.2, onde se argumenta pela utilização de horizontes aparentes como limite causal no caso de universos de FLRW. Apesar de sua termodinâmica não ser tão definitivamente bem definida como a dos buracos negros, o horizonte aparente, que denotaremos por \mathcal{H} , possui propriedades interessantes. Pode-se definir a entropia usual de Bekenstein-Hawking (um quarto da área), e a temperatura de Akbar & Cai (2007); Cai & Kim (2005),

$$S_A = \frac{1}{4}(4\pi\ell_A^2), \quad \text{e} \quad T_A = \frac{1}{2\pi\ell_A}. \quad (5.28)$$

A gravidade superficial do horizonte aparente é¹

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{-\text{Det } h}} \partial_A \left(\sqrt{-\text{Det } h} h^{AB} \partial_B R \right) \Big|_{\mathcal{H}},$$

e quando $R = \ell_A$ é dado pela Eq.(2.55), $\ell_A = 1/\sqrt{H^2 + K/a^2}$,

$$\kappa = -\frac{1}{\ell_A} \left(1 - \frac{1}{2H\ell_A} \dot{\ell}_A \right). \quad (5.29)$$

Considerando que ℓ_A muda *lentamente*, pode-se desconsiderar a derivada no interior dos parênteses e a temperatura de Cai-Kim (5.28) fica dada por $T_A \approx |\kappa|/2\pi$, como na Eq.(5.26). Aqui vale ressaltar que há outras prescrições para a temperatura do horizonte aparente, incluindo definir $T_A = -\kappa/2\pi$, que entretanto não é positiva definida por conta do termo em parênteses na Eq.(5.29). Para uma revisão das diferentes escolhas para a temperatura e os respectivos usos e limitações,

¹A gravidade superficial de um horizonte de Killing gerado pelo vetor de Killing ξ^μ estático é definida por κ tal que $\xi^\mu \nabla_\mu \xi^\nu = \kappa \xi^\nu$ sobre o horizonte. Em espaços dinâmicos, na ausência de um vetor de Killing tipo-tempo, pode-se utilizar o ‘vetor de Kodama’, uma generalização do vetor de Killing, ver Abreu & Visser (2010); Hayward (1998), para definir κ , que é o que fazemos. A definição, entretanto, não é única.

ver [Tian & Booth \(2015\)](#). Nós vamos assumir a prescrição (5.28). Vários trabalhos mostram a equivalência das equações de Friedmann com a relação termodinâmica fundamental sobre o horizonte aparente,

$$-dE = T_A dS_A \quad \text{equivale a} \quad \dot{H} = -4\pi(P + \rho).$$

Ver, e.g. [Akbar & Cai \(2007\)](#); [Cai & Kim \(2005\)](#); [Hayward \(1998\)](#); [Hayward et al. \(1999\)](#); [Tian & Booth \(2015\)](#). (A ligação entre a relação fundamental da termodinâmica e as equações de Einstein, observada por [Jacobson \(1995\)](#), parece ser um fato bastante geral, e ter um significado profundo; ver, e.g. [Padmanabhan \(2002\)](#).)

5.2.3 A entropia na gravitação de Gauss-Bonnet

Na vizinhança de uma singularidade, a ação de Einstein-Hilbert deve ser modificada. Considerando uma expansão em termos da curvatura, do tipo

$$\int d^4x \sqrt{-g} [R + \alpha(R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \dots) + \gamma(R^3 + \dots)],$$

os novos termos levam a equações de campo com altas derivadas (e, portanto, a problemas de instabilidade), a não ser nos casos em que se combinam para formar as densidades de Euler. Este é o teorema de [Lovelock \(1971\)](#). Mais precisamente, na Lagrangeana de Lovelock, os termos de ordem n no tensor de Riemann (e.g. R é de ordem 1, $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$ de ordem 2, $RR_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ de ordem 3, etc.) correspondem à densidade de Euler em $2n$ dimensões,

$$\frac{n!}{2^n} \delta_{[\mu_1}^{\alpha_1} \delta_{\nu_1}^{\beta_1} \dots \delta_{\mu_n}^{\alpha_n} \delta_{\nu_n}^{\beta_n}] R^{\mu_1\nu_1}{}_{\alpha_1\beta_1} \dots R^{\mu_n\nu_n}{}_{\alpha_n\beta_n}.$$

Fica evidente da antisimetria acima que os termos com $n > d/2$ são identicamente nulos, portanto para $d = 4$ a Lagrangeana se resume aos termos com $n = 0$ e $n = 1$, uma constante cosmológica e o escalar de Ricci, ou seja: a Lagrangeana de Einstein-Hilbert. O termo com $n = 2$, a densidade de Euler em 4 dimensões,

$$\chi_{GB} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}.$$

é conhecido como termo de Gauss-Bonnet (GB), e é previsto enquanto correção de primeira ordem pela teoria de cordas, [Boulware & Deser \(1985\)](#); [Zwiebach \(1985\)](#); para dimensões $d > 4$, ele é relevante dinamicamente, mas em $d = 4$ sua integral sobre o espaço-tempo fornece o genus da variedade. Com a inclusão do termo de GB, ação gravitacional fica

$$\frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [R - 2\lambda \ell_{GB}^2 (R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu})]. \quad (5.30)$$

É necessária a inclusão de um novo parâmetro ℓ_{GB} , com dimensão de comprimento, para compensar as novas derivadas da métrica; λ é um número adimensional. Por ser um invariante topológico em $d = 4$, a inclusão do termo de GB não modifica as equações de movimento (a variação $\delta\chi_{GB}/\delta g^{\mu\nu} = 0$), que permanecem idênticas às equações de Einstein. Apesar disso, o termo de Gauss-Bonnet contribui para a entropia de horizontes.

Considere uma teoria covariante de gravitação genérica, cuja Lagrangeana tem a forma $\mathcal{L}(g^{\mu\nu}, R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta})$; por exemplo, a gravitação de Einstein-Hilbert, ou a de Lovelock. A simetria sob difeomorfismos cria uma corrente conservada, e com ela uma carga de Noether. Foi mostrado por [Wald \(1993\)](#) que em um espaço-tempo onde ξ^α é um vetor de Killing possuindo um horizonte \mathcal{H} com esfera de bifurcação \mathcal{B} cuja gravidade superficial vale κ , a carga de Noether

$$\frac{2\pi}{\kappa} \oint_{\mathcal{B}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\alpha\beta\mu\nu}} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu}, \quad (5.31)$$

onde $\varepsilon_{\alpha\beta}$ é a forma binormal a \mathcal{B} , é a entropia de \mathcal{H} . Se \mathcal{L} é a Lagrangeana de Einstein-Hilbert, a integral acima sobre o horizonte de um buraco negro dá a entropia usual de Bekenstein-Hawking. Em um universo de FLRW, a fórmula (5.31) se reduz à seguinte expressão para a entropia do horizonte aparente:¹

$$S_A = 8\pi^2 (\varkappa H)^{-2} (1 - 2\lambda\ell_{GB}^2 H^2). \quad (5.32)$$

A contribuição do termo de GB para a entropia mesmo que ele não afete as equações de movimento vem do fato de que a carga de Noether-Wald é obtida de uma integral sobre uma superfície, em um procedimento independente da variação da ação. A Eq.(5.32), obtida por [Sinha \(2011\)](#),² pode ser interpretada como uma entropia de emaranhamento sobre o horizonte aparente, logo uma medição da entropia da matéria exterior ao horizonte.

5.3 A Segunda Lei da Termodinâmica, Generalizada

A introdução de uma entropia associada a horizontes de eventos leva a uma Segunda Lei Generalizada da Termodinâmica (SLG),

$$\delta(S_{\text{mat}} + S_{\text{grav}}) \geq 0. \quad (5.33)$$

¹O coeficiente do termo $8\pi^2/(\varkappa H)^2$ se reduz ao conhecido $\frac{1}{4}A = \pi/H^2$ quando se usa unidades geometrizadas em que $G = 1$, logo $\varkappa^2 = 8\pi G = 8\pi$.

²Ver também [Myers & Sinha \(2011\)](#).

5.3.1 Limites de entropia

A validade da Segunda Lei Generalizada impõe limites para o valor máximo possível para a entropia S_{mat} de um sistema termodinâmico. Considere um sistema com entropia S_{mat} que cai no interior de um buraco negro de área A . A entropia do sistema se perde atrás do horizonte de eventos, logo $\delta S_{\text{mat}} = -S_{\text{mat}} < 0$ e a Segunda Lei é violada a menos que A aumente o suficiente para que δS_{grav} compense a perda de S_{mat} . Mas a área do horizonte de eventos depende apenas da massa do buraco negro, e portanto δA depende apenas da massa (energia) E do sistema material, e *não* de S_{mat} . Deve haver, por isso, um limite fundamental superior para a entropia contida no sistema material, que impeça a violação da SLG; por estar associado à gravitação, este limite deve levar em conta tanto a energia interna E quanto as dimensões (a geometria) do sistema. Nesse sentido, [Bekenstein \(1981\)](#) argumenta que para um sistema com gravitação própria fraca vale

$$S_{\text{mat}} \leq 2\pi E R, \quad (5.34)$$

onde R é o raio da menor esfera que se pode traçar ao redor do sistema. Este ficou conhecido como '*limite de Bekenstein*'. (Devolvendo as constantes, $S_{\text{mat}} \leq (k_B/\hbar c) \times 2\pi E R$.)

Outro limite pode ser obtido considerando-se que um sistema de massa m só é gravitacionalmente estável se for maior que seu raio de Schwarzschild, isto é, se o raio R da menor esfera que contém o sistema for $R \geq 2m$, e o limite de Bekenstein então implica que ($E = m$, em unidades naturais) $S_{\text{mat}} \leq 2\pi m R \leq \pi R^2$; ou seja,

$$S_{\text{mat}} \leq A/4, \quad (5.35)$$

onde A é a área da menor esfera contendo o sistema. Em outras palavras, a entropia de um sistema material é sempre menor que a entropia que teria um buraco negro formado pelo seu conteúdo. Este é conhecido como o '*limite de entropia esférico*'.

Há outros tipos de limites similares. Tudo parece indicar que a área de um horizonte de eventos codifica toda a entropia contida em seu interior, e que há uma relação profunda entre geometria e informação (quântica). Uma revisão detalhada desse 'Princípio Holográfico' é dada por [Bousso \(2002\)](#).

5.3.2 A Segunda Lei Generalizada e a cosmologia

A formulação de uma Segunda Lei Generalizada para horizontes cosmológicos é problemática. Considere, por exemplo, o espaço-tempo de de Sitter, que possui um horizonte de eventos estático a uma distância $\ell_H = 1/H$ da origem, ver

Apêndice D. Nas coordenadas em que dS_4 descreve um universo de FRW com fator de escala $a = e^{Ht}$, H corresponde ao fator de Hubble, $H = \dot{a}/a$. A presença de um horizonte estático faz de dS_4 muito parecido com o espaço-tempo de Schwarzschild, em vários sentidos; em particular, como mostrado por Gibbons & Hawking (1977b), o horizonte cosmológico possui gravidade superficial κ constante, e irradia um espectro de corpo-negro com temperatura dada pela fórmula (5.26). Entretanto, como observado, por exemplo, por Davies & Davis (2002), há uma série de questões quanto à interpretação da área do horizonte de de Sitter como uma entropia. Em particular, a ausência de um parâmetro que faça o papel da massa do buraco negro torna ambíguo o cálculo de ganho e perda de entropia que leva, por exemplo, ao limite de Bekenstein descrito acima. Uma interpretação para a entropia na área de um buraco negro é como codificação dos graus de liberdade finitos escondidos na região interior ao horizonte, mas no caso de dS_4 a região inacessível é *infinita*: o horizonte cosmológico *envolve* o observador, e tudo a uma distância $\ell > \ell_H$ é causalmente inacessível. Nesse sentido, uma entropia finita, $A/4 = \pi^2/H$, codificaria infinitos graus de liberdade. Abordagens para o problema da SLG na cosmologia podem ser encontradas, por exemplos, em Brustein (2000); Davies & Davis (2002); Easther & Lowe (1999).

Recentemente, Bousso & Engelhardt (2015a) demonstraram um novo teorema no mesmo espírito da Eq.(5.25) a respeito do crescimento da área das superfícies (bidimensionais) espaciais que folheiam uma hipersuperfície (tridimensional) de assinatura não definida chamada de ‘*tela holográfica*’. A descrição do teorema se encontra no Apêndice G. Usando este resultado, os mesmos autores formularam uma definição unívoca de uma SLG cosmológica. Seja Σ uma superfície de Cauchy em um espaço-tempo, e $\sigma \subset \Sigma$ uma superfície tipo-espaço que divide Σ em duas porções que indicaremos por Σ_{in} e Σ_{ex} como na Fig.5.3.2. Bousso & Engelhardt (2016)) definem a ‘entropia generalizada de σ ’ como

$$S_{gen}(\sigma) \equiv (1/4)A(\sigma) + S_{ex} + \dots, \quad (5.36)$$

onde as reticências indicam possíveis contratermos na entropia de von Neumann sobre a superfície Σ_{ex} , dada por $S_{ex} = -\text{Tr} \rho_{ex} \log \rho_{ex}$, com a densidade de entropia ρ_{ex} correspondendo aos graus de liberdade (quânticos) em Σ_{ex} . Pode-se usar, alternativamente, S_{in} , a entropia sobre Σ_{in} , com o mesmo resultado final do crescimento da entropia generalizada.

Fazendo uma pequena deformação de Σ_{ex} numa das direções nulas k^μ que partem de σ , chega-se a uma nova superfície σ' com área A' e uma nova superfície exterior Σ'_{ex} com entropia S'_{ex} . Tome o limite em que $\delta A = A' - A$ e $\delta S_{ex} = S'_{ex} - S_{ex}$ tendem a zero. Se λ é o parâmetro afim da geodésica nula na direção em questão passando por $y \in \sigma$, então defina a ‘*expansão quântica*’ como

$$\Theta_k[\sigma; y] \equiv \lim_{\delta A \rightarrow 0} (4/\delta A) (dS_{gen}/d\lambda) \Big|_y. \quad (5.37)$$

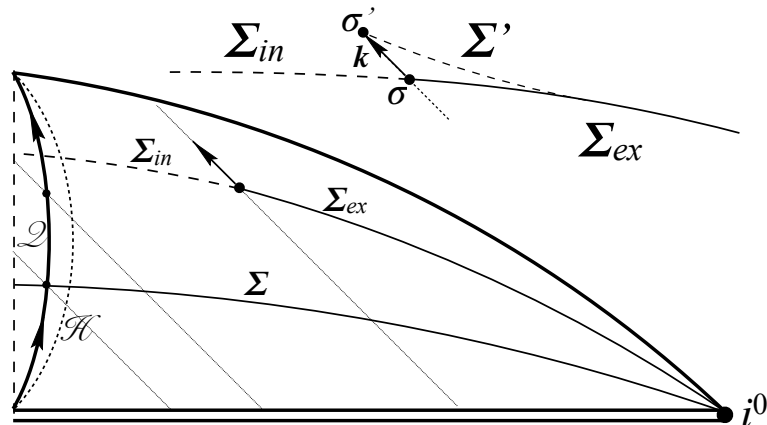


Figura 5.1: \mathcal{Q} é a tela-Q em um universo de FLRW com um big-bang e uma constante cosmológica. A entropia generalizada cresce na direção das setas (futuro). A linha pontilhada descreve a tela holográfica clássica \mathcal{H} , que coincide com o horizonte aparente. Ver Apêndice G. Acima do diagrama, mostra-se a construção geométrica, associada à definição de uma entropia generalizada para a 2-superfície σ que divide uma 3-superfície de Cauchy Σ , por meio de uma deformação da superfície exterior Σ_{ex} na direção nula k_μ , seguindo [Bousso & Engelhardt \(2016\)](#).

Θ é análoga à expansão θ de uma família de geodésicas nulas, e com isso se pode definir, analogamente à definição de uma tela holográfica (cf. Ap. G), uma ‘tela-Q’ como uma hipersuperfície folheada por superfícies σ em que $\Theta_k[\sigma] = 0$ em uma das direções. Com isso se pode, por fim, conjecturar que, “sendo \mathcal{Q} uma tela-Q com folheado $\sigma(r)$. Então a entropia generalizada $S_{gen}(r) \equiv S_{gen}[\sigma(r)]$ cresce estritamente ao longo da folheado:

$$dS_{gen}/dr > 0.$$

[Bousso & Engelhardt \(2016\)](#) demonstram a validade da conjectura em casos importantes, e dão motivos para se acreditar que ela seja válida sempre. Um exemplo concreto da validade da conjectura será dado no §10.3.3.

5.4 A entropia no Universo e a peculiaridade do big-bang

A Teoria da Relatividade Geral é invariante sob reflexões temporais. Isto é, dado um espaço-tempo com orientação temporal definida, a operação $\tau \mapsto -\tau$ sobre a coordenada tipo-tempo é um difeomorfismo e, pela covariância geral da teoria,

uma simetria das equações de campo. Assim, a assimetria entre passado e futuro, i.e. a seta do tempo observada na natureza, não pode ter sua origem na dinâmica da Relatividade; deve se tratar de um fenômeno estatístico introduzido por um análogo do Teorema-H de Boltzmann (ver [Pauli \(1973\)](#) ou, em maiores detalhes, [Tolman \(1938\)](#)): uma transição para um estado em que a entropia diminua é muito pouco provável.

5.4.1 Inventário de entropia

Estimativas das contribuições para a entropia total vindas de diversos tipos de processos são encontradas em [Bousso *et al.* \(2007\)](#), em [Frampton *et al.* \(2009\)](#) e, com valores mais detalhados, em [Egan & Lineweaver \(2010\)](#). Nesta seção vamos apresentar o raciocínio por trás das estimativas simplificadas das maiores contribuições relativas à matéria — CMB, estrelas, meio intergaláctico, etc. Para isso, será útil adiante uma estimativa de quantos bárions existem no Universo. A densidade de energia total do Universo hoje é dada por (cf. Eqs.(2.59) e (2.68c))

$$\rho_{\text{crit}} = 3H_0^2/8\pi G \approx 8.58 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3.$$

Apenas 4.8% desse valor, $\sim 4.1 \times 10^{-28} \text{ kg/m}^3$, corresponde a matéria bariônica, cf. Eq.(2.68b). A massa do conteúdo bariônico é amplamente dominada pela massa de prótons e nêutrons, $m_p \approx 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$; portanto no Universo há

$$\frac{4.1 \times 10^{-28} \text{ kg/m}^3}{1.67 \times 10^{-27}} \approx 0.25 \text{ núcleons por metro cúbico.} \quad (5.38)$$

O número total de bárions é obtido da massa total dentro do volume do Universo visível. De acordo com a Eq.(2.75), $c/H_0 \sim 10^{27} \text{ m}$, logo o volume de Hubble $\frac{4}{3}\pi(c/H_0)^3 \sim 4 \times 10^{81} \text{ m}^3$ e,

$$\text{NB (Número de núcleons no Universo observável)} \sim 10^{81}. \quad (5.39)$$

*

A entropia de estrelas e poeira iluminada (nós)

De acordo com o inventário cósmico de [Fukugita & Peebles \(2004\)](#), da fração Ω_b de bárions presentes no Universo (Eq.(2.68b), cerca de 0.002 acabaram formando estrelas (da sequência principal do diagrama de Hertzsprung-Russell). Com isso, consideramos que 10% dos bárions no Universo formam estrelas, e destes apenas 10% são utilizados nos processos de fusão, logo cerca de $\text{NB}/100 \sim 10^{79}$ contribuem para a entropia do processo de nucleossíntese estelar.

Para estimar a produção de entropia por bárion [Bousso *et al.* \(2007\)](#) consideram a energia por bárion gerada no processo de fusão mais comum, a fusão

de Hidrogênio em Hélio na cadeia próton-próton, cuja reação total, $4p \rightarrow {}_4\text{He}$ (contando apenas bárions), libera cerca de 27 MeV; logo ~ 7 MeV por bárion. As estrelas na sequência principal irradiam tipicamente no espectro do visível, a temperatura $T \sim 1$ eV. (E.g. o Sol, a temperatura de cerca de 6×10^3 K, ou 0.5 eV.) A entropia por bárion pode ser estimada como a razão da energia liberada por bárion no processo e a temperatura dos fótons finais ($E = TS$), ou seja $7 \text{ MeV} / 1 \text{ eV} \sim 10^6$. Levando em conta a fração de bárions que entra nesses processos, temos uma entropia total $\sim 10^4 \text{NB}$.

Uma observação feita por [Bousso *et al.* \(2007\)](#) é de que cerca de metade dos fótons emitidos pelas estrelas são absorvidos e reemitidos por material intergaláctico a uma temperatura bem menor, de cerca de 20 meV, no espectro do infravermelho. Isso corresponde a uma entropia

$$S_{\text{nós}} \sim \left(\frac{7 \text{ MeV}}{10 \text{ meV}} \times 10^{-2} \times \text{NB} \right) k_B \sim (10^6 \times \text{NB}) k_B \sim 10^{87} k_B.$$

O índice “nós” se refere ao fato de que parte dessa contribuição é advinda de nós mesmos — o planeta Terra faz parte da poeira intergaláctica que reprocessa a luz estelar. Como observado por [Schrödinger \(1944\)](#), ver também [Penrose \(1989b\)](#), é justamente o fato de o Sol banhar a Terra de maneira anisotrópica (há o dia e há a noite) com fótons de entropia menor do que os fótons (infravermelhos) que o planeta irradia termicamente — é essa atuação do Sol como “fonte de baixa entropia” — o principal motivo que permite a criação contínua e estável de sistemas altamente ordenados na superfície do planeta sem que haja uma violação *global* da Segunda Lei da Termodinâmica.¹

*

A entropia da Radiação Cósmica de Fundo

A entropia da CMB pode ser facilmente calculada. Sendo um gás de fótons a temperatura $T_0 = 2.726$ K, sua densidade de entropia é dada pela Eq.(5.2), com $P = \rho/3$,

$$s(T) = \frac{4}{3}\rho(T)/T,$$

e a densidade de energia obedece a Lei de Stefan-Boltzmann (5.11), logo

$$s_{\text{CMB}}(T_0) = \frac{4\pi^2}{45} \frac{k_B^4}{\hbar^3 c^3} T_0^3 \sim 1.5 \times 10^9 k_B/\text{m}^3. \quad (5.40)$$

¹A “entropia negativa” fornecida pelo Sol entra na cadeia alimentar através da fotossíntese (em particular, de fitoplâncton) e se propaga cadeia acima. Deve-se mencionar que há alguns microorganismos (quimiolitótróficos; exemplo notável são bactérias vivendo próximo a fontes termais no fundo do oceano, onde não há luz) que estão fora desse ciclo por não utilizarem a fotossíntese como fonte de energia, e sim compostos inorgânicos presentes no ambiente — a procura por indícios da presença desse tipo de vida primitiva é relevante para a astrobiologia.

Assim, no interior do volume de Hubble temos um número três ordens de grandeza maior do que $S_{\text{nós}}$,

$$S_{\text{CMB}} \sim 10^{90} k_B.$$

Esta é a maior contribuição para a entropia do Universo vinda de fontes “não-gravitacionais” (i.e. buracos negros, etc.); a segunda maior contribuição é $S_{\text{nós}}$. As estimativas da contribuição de outros tipos de processos podem ser encontradas em [Bousso *et al.* \(2007\)](#) e [Egan & Lineweaver \(2010\)](#). A entropia total devida a processos relativos à matéria presente no Universo hoje é, portanto,

$$S_{\text{mat}}(t_0) \approx S_{\text{CMB}} + S_{\text{nós}} \sim 10^{90} k_B. \quad (5.41)$$

Como visto no §5.1, a evolução do conteúdo material do Universo é adiabática (o Universo é um sistema termodinâmico fechado), e portanto deixa constante S_{mat} . Visto assim, o valor enorme de S_{mat} pode aparecer como um problema: Por que o Universo começou com uma entropia tão grande? (Ou, ainda: por que a entropia total $S_{\text{mat}} \sim 10^{90}$ e a “massa” total do Universo

$$48\% \times \rho_{\text{crit}} \times \frac{4}{3}\pi(c/H_0)^3 \sim 10^{55} \text{ kg} \sim 10^{64} m_{Pl},$$

cf. Eq.(5.38), são tão maiores que a escala de Planck?) No contexto da inflação, essa pergunta ficou conhecida como o “problema da entropia” (ver, e.g., [Linde \(1990, 2005\)](#)), e se argumenta que a solução existe em alguns modelos, embora não em todos. Por exemplo, em modelos de inflação caótica o inflaton pode começar o mais “alto” possível em seu potencial, de maneira que o universo tenha densidade de energia, tamanho e massa todos da ordem da escala de Planck e, também, uma entropia de ordem 1. Mais tarde, durante o reheating, se produz, de alguma maneira, a entropia toda que vemos hoje.

*

A entropia de todos os buracos negros no Universo

Considere agora a entropia Bekenstein-Hawking (5.27). Para um buraco negro de Schwarzschild (sem momento angular nem carga) de massa M , a área do horizonte é $4\pi r_S^2$, com $r_S = 2GM/c^2$,

$$A = 16\pi(G/c^2)^2 M^2 \approx 2.8 \times 10^{-53} \times (M/\text{kg})^2 \times \text{m}^2 \approx 10^{17} \times (M/\text{kg})^2 \times \ell_{Pl}^2.$$

De acordo com o inventário cósmico de [Fukugita & Peebles \(2004\)](#), a massa total de buracos negros no Universo é, aproximadamente,

$$\Sigma M_{\text{BN}} \approx 10^{-4} \times \rho_{\text{crit}} \times \frac{4}{3}\pi(c/H_0)^3 \sim 10^{-4} \times 4 \times 10^{55} \text{ kg} \sim 2 \times 10^{25} M_{\odot},$$

e se a distribuirmos em pequenos buracos negros de massa solar $M_{\odot} \sim 2 \times 10^{30}$ kg, cada um com área

$$A_{\odot} \approx 2.8 \times 10^{-53} \times (M_{\odot}/\text{kg})^2 \times \text{m}^2 \sim 10^8 \text{ m}^2 \sim 4 \times 10^{87} \ell_{Pl}^2,$$

vemos que *cada um deles* tem entropia da mesma ordem de $S_{\text{nós}}$, apenas duas ordens de grandeza menor do que a entropia de toda a CMB. Juntando todos os 10^{25} buracos negros chegamos a uma entropia total $\Sigma S_{\text{BN}} \sim 10^{25} \times 10^{87} = 10^{112}$. (Usamos “BN” para indicar a entropia de todos os buracos negros, e “BH” como atalho para Bekenstein-Hawking.) Este número é na verdade um limite *inferior* (e bastante módico) para a entropia de todos os buracos negros, já que grande parte de ΣM_{BN} não está em buracos negros pequenos mas sim nos buracos negros supermassivos (‘SMBH’, para *supermassive black holes*) no núcleo de galáxias, ver [Ferrarese & Merritt \(2000\)](#); [Kormendy & Richstone \(1995\)](#). Cada SMBH tem massa da ordem de 10^7 a $10^9 M_{\odot}$, e uma entropia de 10^{14} a 10^{18} vezes maior que a de um buraco negro de massa solar. Ou seja, só *um* SMBH possui entropia $S_{\text{SMBH}} \sim 10^{101} - 10^{105}$. Assumindo que haja cerca de 10^{15} SMBH no Universo, e escolhendo valores intermediários, podemos apresentar a estimativa de

$$\Sigma S_{\text{BN}} \sim 10^{118}, \quad (5.42)$$

i.e., praticamente toda a entropia do Universo hoje, $S_0 = \Sigma S_{\text{BN}} + S_{\text{mat}} \sim 10^{118}$, é devida às contribuições gravitacionais de buracos negros.

*

A Flecha do Tempo

A insignificância da entropia $S_{\text{mat}} \sim 10^{90}$ advinda de processo termodinâmicos “ordinários”, em comparação com a entropia de horizontes de eventos $S_{\text{BN}} \sim 10^{118}$, deixa evidente que, na presença da gravitação, os processos mais vantajosos do ponto de vista do aumento da entropia são aqueles envolvendo a aglomeração de matéria cujo limite extremo é a formação de buracos negros. Por isso, apesar do valor $S_{\text{mat}} \sim 10^{90}$, a distribuição homogênea da matéria no big-bang quente (ou no reheating) está associada a uma entropia total (relativamente) muito *baixa*.

De acordo com um conhecido argumento de [Penrose \(1979\)](#), esse fato pode explicar a existência de uma Seta do Tempo termodinâmica no nosso Universo: a entropia generalizada do universo primordial era muito *pequena*, porque não havia aglomerações e a entropia gravitacional era praticamente nula.¹ Assim,

¹Para comparação, no instante de Planck t_{Pl} , o raio de Hubble que se desenvolveu no nosso universo observável, $\ell_H(t_{Pl}) = (a(t_{Pl})/a_0) \times \ell_H(t_0)$, media $\ell_H(t_{Pl}) \sim 10^{31} \ell_{Pl}$. Se toda a matéria ali formasse um buraco negro de raio ℓ_H , teríamos um limite superior para a entropia (o ‘limite de Hubble’) dado por $\sim \ell_H^2 \sim 10^{62}$, o que é 30 ordens de grandeza menor do que a entropia da CMB sozinha, e quase 60 ordens menor que a entropia total que vemos hoje.

toda a evolução cósmica até hoje corresponde ao processo em direção ao máximo da entropia, durante o qual há a formação de estruturas: estrelas, galáxias, etc., e, em particular, buracos negros. A questão passa a ser, então, explicar a razão pela qual a entropia inicial era pequena e, com isso, explicar a existência da seta do tempo. Em certo sentido, isso corresponde a explicar a homogeneidade inicial do Universo, o que é naturalmente obtido pelo mecanismo da inflação, ou possíveis substitutos como o cenário pré-big-bang (cf. §6.3), como mostrado por [Veneziano \(1999\)](#). Entretanto [Penrose \(1989a,b\)](#) e outros, e.g. [Page \(1983\)](#), argumentam que mesmo o mecanismo inflacionário tem dificuldades para explicar o valor da entropia inicial porque, basicamente, o mecanismo faz ele próprio uso implícito da existência de uma seta do tempo (i.e. de uma Segunda Lei da termodinâmica). De acordo com [Wald \(2006\)](#), *nenhum* mecanismo dinâmico é capaz de explicar as condições iniciais de maneira completamente satisfatória. (Para um ponto de vista contrário, ver por exemplo [Carroll & Chen \(2004\)](#).)

5.4.2 A entropia do campo gravitacional e a Hipótese da Curvatura de Weyl

Se, por um lado, a baixa entropia do big-bang tem uma natureza *geométrica*: trata-se de uma singularidade “lisa”, de certa forma oposta à singularidade no interior de um buraco negro, por outro lado o comportamento típico de sistemas gravitacionais em colapso leva a ‘singularidades caóticas’, ou ‘singularidades BKL’ (para Belinskii-Khalatnikov-Lifshitz) no futuro, do tipo descrito por [Belinskii et al. \(1970, 1982\)](#). Por exemplo, durante um colapso anisotrópico o fator de escala se expande em algumas direções e se contrai em outras, com o volume físico total diminuindo; a expansão em cada direção dura apenas um intervalo de tempo finito até que, bruscamente, o fator de escala passe a se contrair, para depois bruscamente voltar a se expandir. Essas mudanças de comportamento são caóticas e análogas à mudança de direção de uma bola de bilhar, como descrito por [Damour et al. \(2003\)](#). Outra maneira de pensar a natureza da singularidade em um big-crunch é notar que à medida que o Universo se contrai a matéria aglomerada passa a formar buracos negros supermassivos que, por sua vez, se fundem em várias singularidades caóticas.

Por causa da simetria sob reflexões temporais da Relatividade Geral, era de se esperar que esse tipo de singularidade caótica encontrada no *futuro* das geodésicas de um espaço-tempo fosse também o tipo encontrado no *passado*, contradizendo a natureza “gravitacionalmente organizada” observada no big-bang. Uma definição precisa do que se quer dizer com a expressão em aspas requer uma definição de o que seria a ‘entropia do campo gravitacional’.

É muito razoável que a entropia do campo gravitacional esteja relacionada ao

tensor de Weyl. O tensor de Weyl, $W^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$, (cf. §H.2) é a parte de traço nulo do tensor de curvatura de Riemann,

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = W^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + Q^\alpha{}_{\beta\mu\nu},$$

onde

$$Q^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \delta_{[\gamma}^\alpha R_{\delta]\beta} - \delta_{[\gamma}^\sigma R^\alpha{}_{\delta]g_{\sigma\beta}} - \frac{1}{3} \delta_{[\gamma}^\alpha \delta_{\delta]}^\sigma g_{\sigma\beta} R.$$

contém toda a dependência de $R_{\alpha\mu\beta\nu}$ com o tensor de Ricci. É apenas $R_{\mu\nu}$, e não o tensor de curvatura completo $R_{\alpha\mu\beta\nu}$ que entra nas equações de Einstein para ser determinado pelo tensor de energia-momento, então se pode interpretar $W_{\alpha\mu\beta\nu}$ como o representante dos graus de liberdade da curvatura de um espaço-tempo que são independentes da matéria. Ou seja, o tensor de Weyl descreve o “campo gravitacional puro”. (Não é, todavia, completamente independente, por conta das identidades de Bianchi.) Além disso, é ele o principal responsável por ‘efeitos de maré’, i.e. pela distorção de famílias de geodésicas.

A construção de uma entropia do campo gravitacional deve envolver, portanto, apenas combinações escalares do tensor de Weyl, por exemplo $W_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} W^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$. (Note que as simetrias de W , que são as mesmas do tensor de Riemann, restringe bastante as combinações possíveis. Além disso, a propriedade de traço nulo inutiliza os escalares mais simples, os traços do próprio W .) Mas não é qualquer escalar obtido do tensor de Weyl que pode ser interpretado como entropia, como discutido por Clifton *et al.* (2013). Deve-se respeitar algumas condições: S_{grav} deve ser não-negativa e se anular se, e somente se, $W_{\alpha\mu\beta\nu} = 0$; deve medir localmente a anisotropia do campo gravitacional; aumentar à medida que estruturas gravitacionais se formam e coincidir com a entropia de Bekenstein-Hawking no caso de buracos negros. A proposta dos autores é uma construção altamente não trivial que satisfaz todas essas propriedades.

Independentemente da forma da função do tensor de Weyl que caracterize a entropia do campo gravitacional, a proposta de Penrose (1979) é de que a característica geométrica especial do big-bang seja o fato de que:

$$\begin{aligned} & \text{Em uma singularidade inicial, } W_{\alpha\mu\beta\nu} = 0; \\ & \text{esta é a Hipótese da Curvatura de Weyl (HCW).} \end{aligned}$$

Se verdadeira, a HCW resolve o problema da pouca entropia do big-bang anulando, nas proximidades da singularidade, a entropia gravitacional. Vem de S_{grav} a maior contribuição para a entropia total, $S_{\text{mat}} + S_{\text{grav}}$, e portanto a HCW permite inclusive que S_{mat} não precise se anular.

5.4.3 Singularidades isotrópicas

A anulação de parte do tensor de Riemann em uma singularidade onde $R_{\alpha\mu\beta\nu}$, ele próprio, diverge, é possível graças às propriedades de transformação conforme de $W_{\alpha\mu\beta\nu}$. Considere dois espaços-tempos $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ e $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathbf{g}})$, cujas métricas são ligadas por uma transformação de Weyl,

$$g_{\mu\nu} = \Omega^{-2}(x) \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (5.43)$$

com $x \in \mathcal{M}$. (Ver Apêndice H para deduções das várias fórmulas ligadas a esse tipo de transformação.) O tensor de Weyl com o primeiro índice contravariante é invariante sob essa transformação (por construção, cf. §H.2),

$$\tilde{W}^{\alpha}_{\mu\beta\nu} = W^{\alpha}_{\mu\beta\nu}, \quad \text{portanto} \quad W_{\alpha\mu\beta\nu} = \Omega^{-2}(x) \tilde{W}_{\alpha\mu\beta\nu}.$$

Se a métrica $g_{\mu\nu}$ for singular nos pontos em que $\Omega^{-1} = 0$, então $W_{\alpha\mu\beta\nu} = 0$ na singularidade, logo a existência de uma singularidade deste tipo é uma condição suficiente para que a HCW seja satisfeita. Estas são chamadas de ‘*singularidades isotrópicas*’. O adjetivo vem do fato de que, estando o comportamento singular restrito ao tensor de Ricci, uma congruência geodética (um aglomerado de partículas teste) adquire densidade infinita, mas o comportamento controlado do tensor de Weyl impede que forças de maré distorçam a congruência e criem anisotropias infinitas e/ou caóticas como nas singularidade de BKL (cf. §5.4.2). Uma definição precisa é dada por [Goode & Wainwright \(1985\)](#): Suponha ser possível folhear \mathcal{M} em superfícies tipo-espaço Σ_T para algum parâmetro $T > 0$ (o vetor ∂_T é tipo-tempo). Se existir o espaço-tempo $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathbf{g}})$ com a transformação (5.43) tal que $\Omega = \Omega(T)$ é uma função suficientemente contínua na vizinhança de $T = 0$ e com $\Omega(0) = 0$, enquanto $\tilde{g}_{\mu\nu}$ é *regular*, i.e. não possui nenhuma singularidade, então a 3-superfície $\Sigma_{T=0}$ é uma singularidade isotrópica. Fazendo uma hipótese sobre o limite das derivadas de Ω quando $T \rightarrow 0$:

$$\text{Lim } (\Omega''/\Omega)(\Omega/\Omega')^2 = \text{constante} < \infty,$$

é possível demonstrar que

$$\text{Lim } R_{\mu}^{\nu} R_{\nu}^{\mu} = \infty \quad \text{e} \quad \text{Lim } \frac{W^{\mu\nu}_{\alpha\beta} W^{\alpha\beta}_{\mu\nu}}{R_{\mu}^{\nu} R_{\nu}^{\mu}} = 0.$$

Ou seja, a definição implica que o tensor de Ricci diverge (trata-se de fato de uma singularidade), e domina o tensor de Weyl (mas não implica que ele se anule).

Uma singularidade isotrópica é, portanto, uma singularidade devida ao anulamento de uma única função Ω , e que pode ser “reescalada” por uma transformação de Weyl levando a uma métrica regular $\tilde{g}_{\mu\nu}$, cuja restrição à superfície tipo-espaço

$\Sigma_0 = \{\Omega = 0\}$ fornece uma estrutura interna, uma *geometria intrínseca* à singularidade. Além de [Goode & Wainwright \(1985\)](#), o trabalho de [Claudel & Newman \(1998\)](#) e, principalmente, de [Tod \(1990, 1991, 1992, 2003\)](#), e [Anguige & Tod \(1999a,b\)](#), mostra que a métrica (tridimensional) $\sigma_{ab} \equiv \tilde{g}_{\mu\nu}|_{\Sigma_0}$ é um conjunto de condições iniciais suficiente para definir um problema de Cauchy com solução unívoca para as equações de Einstein com diferentes tipos de matéria (desde fluidos politrópicos até campos de Yang-Mills).

A questão da validade da HCW, entretanto, é delicada. Os exemplos mais simples de singularidades isotrópicas satisfazem a HCW, são os universos de FLRW. Escrita no tempo conforme a métrica de Robertson-Walker tem a forma (5.43), com $\Omega(\eta) = a(\eta)$ e $ds^2 = -d\eta^2 + ds_{\mathcal{X}}^2$. Nesse caso, a superfície Σ_0 é simplesmente uma 3-esfera, o plano Euclidiano ou espaço de Lobatchevski, a depender do valor de K . E, uma vez que se pode fazer uma transformação conforme de das geometrias com $K \neq 0$ para a geometria plana (ver Eq.(2.58)), então o tensor de Weyl se anula nos três casos. Um dos resultados de [Goode & Wainwright \(1985\)](#) (Teorema 4.2) é que, se a matéria é um fluido irrotacional, a única parte não nula do tensor de Weyl sobre a singularidade isotrópica é proporcional ao tensor de Ricci S^a_b de σ_{ab} . Logo, a HCW só é satisfeita se S^a_b se anula, o que significa que (Σ_0, σ) é um espaço (3-dimensional e Riemanniano) de curvatura constante (cf. Eq.(2.2)). Ou seja, trata-se das mesmas condições iniciais que as de um universo de FLRW. Tendo em vista que a métrica σ_{ab} determina univocamente a solução das equações de Einstein, este, dentre outros motivos, levaram [Tod \(1987\)](#) a conjecturar que *as únicas* soluções em que a singularidade isotrópica possui tensor de Weyl nulo são os universos de FLRW. Resultados de seu trabalho subsequente corroboram a conjectura.

Parte II

O Universo Antes do Big-Bang

Capítulo 6

Cosmologia de cordas antes do Big-Bang

Vimos que com ou sem inflação, existe uma singularidade no passado cosmológico, e a Relatividade Geral falha, e se espera que uma modificação quântica da teoria na escala de Planck (da ordem de 10^{-33} cm) resolva este problema.

A formulação mais avançada de uma teoria de gravitação quântica é a Teoria de (super)Cordas, ver [Green *et al.* \(1987\)](#); [Polchinski \(1998a,b\)](#). Vamos nos restringir a cordas fechadas. A ação para uma corda se movendo em um espaço-tempo curvo pode ser obtida a partir de uma generalização da ação de Polyakov, viz.

$$S_\sigma = \frac{1}{2\lambda_s^2} \int_{\mathcal{W}} d^2\sigma |\gamma|^{1/2} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}, \quad (6.1)$$

em que a métrica $g_{\mu\nu}(X)$ do espaço-tempo em que se encontra embebida a folha-de-mundo \mathcal{W} da corda — com coordenadas intrínsecas σ^a e métrica intrínseca $\gamma_{ab}(\sigma)$, com $a, b = 0, 1$ e $\gamma \equiv \text{Det} \{\gamma_{ab}\}$ — deixa de ser a métrica plana, $\eta_{\mu\nu}$, de Minkowski em $(d + 1)$ dimensões, e passa a ser uma métrica curva sobre uma variedade \mathcal{M} . A ação (6.1) é conhecida como um ‘*modelo sigma não-linear*’. O espaço-tempo \mathcal{M} em que se encontra embebida a folha-de-mundo é comumente chamado de ‘espaço-alvo’, ou ‘*espaço-T*’ (a partir de “target space”), já que as coordenadas $X^\mu(\sigma^a)$ definem um mapa $\{\text{folha-de-mundo}\} \mapsto \mathcal{M}$. A curvatura do espaço-alvo \mathcal{M} pode ser pensada como um estado coerente de gravitons, um dos estados não massivos da corda bosônica. Mais precisamente, os estados quantizados da corda bosônica em um espaço-tempo *plano*, i.e., com $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, contém partículas com spin 2, ou seja, gravitons. A curvatura de \mathcal{M} , descrita por $g_{\mu\nu}$ no modelo sigma não-linear (6.1) pode ser pensada como uma interação entre a corda e os gravitons, sendo portanto natural que se generalize a ação para incluir, de maneira análoga, os outros dois modos não-massivos, correspondentes a

um potencial antisimétrico $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$ (a “2-forma de Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz”) e a um escalar ϕ , o ‘dilaton’, levando à ação

$$S_\sigma = \frac{1}{2\lambda_s^2} \int_{\mathcal{W}} d^2\sigma \sqrt{-\gamma} \left[\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu (\gamma^{ab} g_{\mu\nu} + \epsilon^{ab} B_{\mu\nu}) + \frac{\lambda_s^2}{4\pi} R(\gamma) \phi \right], \quad (6.2)$$

onde $R(\gamma)$ é o escalar de Ricci da folha-de-mundo e o tensor antisimétrico ϵ^{ab} é normalizado com $\gamma^{1/2} e^{12} = 1$. Nesta seção, vamos descrever como a ação (6.2) dá origem a uma descrição do Universo conhecida como ‘*Cenário Pré-Big-Bang*’.

6.1 Ação efetiva e gravitação dilatônica

A métrica curva $g_{\mu\nu}(X)$, por depender das coordenadas sobre a variedade \mathcal{M} , faz com que a ação do modelo sigma não-linear deixe de ser simplesmente quadrática nos campos X^ν e passe a descrever interações; com isso os campos devem satisfazer condições (dinâmicas) que garantam a invariância conforme da teoria sobre a folha-de-mundo. A nível de diagramas de árvore, estas equações podem ser obtidas a partir de uma ação efetiva em que o dilaton se comporta como um campo escalar acoplado não minimalmente à métrica:

$$S_{GD} = \frac{1}{2\lambda_s^{d-1}} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} e^{-\phi} \left[R + g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - 2\lambda_s^{d-1} V(\phi) - \frac{1}{12} H_{\alpha\beta\gamma} H^{\alpha\beta\gamma} \right], \quad (6.3)$$

com o tensor completamente antisimétrico $H_{\alpha\beta\gamma} \equiv \partial_\alpha B_{\beta\gamma} + \partial_\beta H_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma H_{\alpha\beta}$, e R sendo o escalar de curvatura do espaço-tempo, relativo à métrica $g_{\mu\nu}$. (Não confundir com o escalar de curvatura da folha-de-mundo, $R(\gamma)$, que se acopla ao dilaton na ação (6.2).) A ação efetiva gravi-dilatônica (6.3) é o ponto de partida para uma ‘*cosmologia de cordas*’, como descrita, e.g., por Gasperini (2007).¹

Pode-se somar a (6.3) uma ação S_{mat} corresponde à contribuição de matéria, tal que sua variação com respeito à métrica defina um tensor de energia-momento

$$\delta S_{mat} \equiv \frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (6.4)$$

como de costume. A Lagrangeana associada a S_{mat} sempre inclui a métrica para efeito de covariância, mas em geral pode incluir também o dilaton e, nesse caso,

¹Nesta seção seguimos de perto a discussão apresentada em Gasperini (2007). Observe, todavia, que lá o autor usa a assinatura oposta da métrica, i.e. (+ − −), e por isso o termo cinético na Lagrangeana de um campo escalar apresenta o sinal oposto. Além disso, Gasperini define o tensor de Riemann com o sinal *oposto* ao nosso (que seguimos a definição de Hawking & Ellis (1973) e Wald (2010)). Assim, nosso escalar de Ricci tem o sinal contrário ao seu. Isso implica em um sinal negativo global na definição, em Gasperini (2007), da ação de Einstein-Hilbert, viz.: $S = - \int d^4x \sqrt{-g} R / 2\kappa^2$, e um sinal negativo correspondente em outras ações, como por exemplo em (6.3), acompanhado de uma mudança do sinal do termo $\sim V(\phi)$.

assim como sua variação com respeito a $g^{\mu\nu}$ dá origem a $T_{\mu\nu}$, a variação com respeito a ϕ dá origem a uma “densidade de carga escalar” χ tal que

$$\delta S_{mat} \equiv -\frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \chi \delta\phi. \quad (6.5)$$

Da mesma forma, a variação com respeito a $B^{\mu\nu}$ leva a uma corrente antisimétrica $J_{\mu\nu}$, mas no que segue vamos desconsiderar a contribuição do potencial antisimétrico, fazendo $B_{\mu\nu} = 0$. Não é difícil efetuar a variação de (6.3) com respeito ao dilaton, $\delta S/\delta\phi = 0$. O resultado pode ser escrito como

$$R + 2\nabla^2\phi - g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + 2\lambda^{d-1}(V(\phi) - \partial V(\phi)/\partial\phi) = \lambda_s^{d-1} e^\phi \chi. \quad (6.6)$$

(Repare que a soma de V com $\partial V/\partial\phi$ é possível porque o dilaton é adimensional.) Na variação com respeito à métrica, $\delta S/\delta g^{\mu\nu} = 0$, o procedimento é similar ao que leva às equações de Einstein a partir da ação de Hilbert, com o detalhe de que o acoplamento do dilaton na forma $e^\phi R$ altera as derivadas totais responsáveis por eliminar as segundas derivadas da métrica na Lagrangeana. Nesse sentido, a rigor, pode-se incluir um contra-termo de borda em (6.3). A equação resultante,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} + \nabla_\mu\nabla_\nu\phi + \frac{1}{2}[\nabla_\alpha\phi\nabla^\alpha\phi - \nabla^2\phi - 2\lambda_s^{d-1}(V(\phi) - \partial_\phi V(\phi))] = \lambda_s^{d-1} e^\phi T_{\mu\nu}, \quad (6.7)$$

inclui o tensor de Einstein (os dois primeiros termos do lado esquerdo), e pode ser simplificada com o uso de (6.6) para eliminar o escalar de Ricci em favor do dilaton, levando por fim a

$$R_{\mu\nu} + \nabla_\mu\nabla_\nu\phi - \lambda_s^{d-1} \partial_\phi V g_{\mu\nu} = \lambda_s^{d-1} e^\phi (T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\chi g_{\mu\nu}). \quad (6.8)$$

A escolha de escrever os termos correspondentes ao dilaton e seu potencial no lado esquerdo das equações, junto com a parte geométrica correspondente à gravitação de Einstein, não é por acaso. Ao contrário de um campo escalar na gravitação de Einstein, o dilaton não é uma “fonte para a geometria” do espaço-tempo, e sim um campo fundamental do sistema gravi-dilatônico emergente da ação (6.2) para o modelo sigma não-linear. As fontes verdadeiras do sistema, χ e $T_{\mu\nu}$ (que podem incluir um campo escalar, digamos, σ), se encontram do lado direito das equações, acopladas tanto a ϕ quanto a $g_{\mu\nu}$.

*

O acoplamento de cordas

Nada foi dito até aqui sobre a constante λ_s , com dimensão de comprimento, que aparece na ação do modelo sigma não linear (6.2) e na ação efetiva (6.3)

para a gravitação dilatônica. Ela é necessária para tornar adimensional a ação de Nambu-Goto $\frac{1}{\hbar}S_{NG} = A/\lambda_s^2$, onde $A = -\int d^2\sigma\sqrt{-\gamma}$ é área da folha-de-mundo desenhada pela corda, que descreve a dinâmica de maneira equivalente à ação de Polyakov (6.1). λ_s é a *única* constante fundamental da teoria de cordas, e por isso naturalmente determina a escala de relevância da teoria, isto é, escalas comparáveis com λ_s são naturalmente “cordísticas” (por exemplo, assim como escalas comparáveis a \hbar são naturalmente “quânticas”).

Como foi mencionado mais acima, o modelo sigma não-linear (6.2) corresponde à interação da corda com os campos de fundo $g_{\mu\nu}$, ϕ e $B_{\mu\nu}$. A maneira de descrever as interações se dá quase como na Teoria Quântica de Campos. O objeto básico é a função de partição $Z \sim \exp -S$, de cuja expansão se obtém a soma de diagramas de Feynman. Os diagramas de Feynman da TQC são grafos em que as interações se representam como pontos ligados por linhas internas e externas e cada termo da expansão perturbativa inclui um número cada vez maior de laços nos diagramas. As cordas, por outro lado, em vez de linhas-de-mundo unidimensionais, formam superfícies-de-mundo bidimensionais e, por isso, sua interação não pode ser representada por grafos planos. O que corresponderia aos laços dos grafos de Feynman corresponde então ao número de furos (ou alças) das folhas-de-mundo, seu ‘genus’. De acordo com o Teorema de Gauss-Bonnet, o genus n de uma superfície bidimensional \mathcal{W} com métrica γ_{ab} é determinado pela ‘*característica de Euler*’

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{W}} d^2\sigma \sqrt{|\gamma|} R(\gamma) = 2 - 2n. \quad (6.9)$$

A superfície-de-mundo na Fig.6.1(a) é um exemplo típico de um termo de genus $n = 2$ na expansão de laços na interação de duas cordas. O menor valor possível para n é zero, correspondendo a uma superfície sem furos, como na Fig.6.1(b).

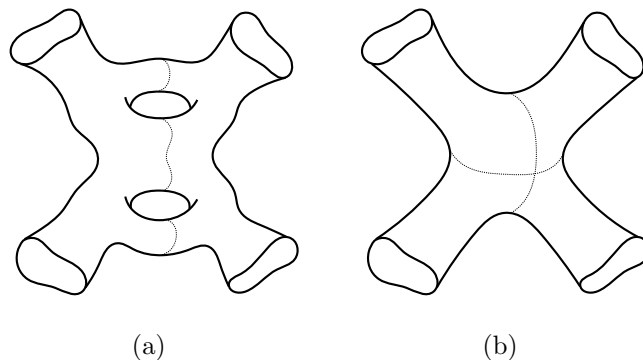


Figura 6.1: Superfície-de-mundo de genus (a) $n = 2$; (b) $n = 0$.

Separando uma parte correspondente ao valor médio constante do dilaton,

$$\phi = \langle \phi \rangle + \varphi, \quad \text{com} \quad \langle \phi \rangle = \text{constante}, \quad (6.10)$$

o acoplamento peculiar de ϕ com a curvatura da métrica bidimensional na ação (6.2) fornece simplesmente a característica de Euler da folha-de-mundo:

$$S_\sigma[\phi] = S_\sigma[\varphi] + \langle \phi \rangle \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{W}_n} d^2\sigma \sqrt{|\gamma|} R(\gamma) = S_\sigma[\varphi] + (1 - n)\langle \phi \rangle. \quad (6.11)$$

Assim, a soma sobre todos os diagramas com diferentes genera, i.e. sobre todas as topologias, fica

$$\sum_{\text{topologias}} \exp -S_\sigma[\phi] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{(n-1)\langle \phi \rangle} \exp -S_\sigma[\varphi], \quad (6.12)$$

onde em cada termo na última expressão $S_\sigma[\varphi]$ deve ser integrada sobre as folhas-de-mundo \mathcal{W}_n com n genera. (A função de partição inclui ainda a integral funcional sobre os campos X^μ , γ_{ab} , etc.) O que se conclui daí é que o parâmetro de acoplamento, que controla a expansão em laços da interação das cordas, é

$$g_s^2 = \exp \langle \phi \rangle, \quad (6.13)$$

uma grandeza dinâmica determinada pelo valor clássico do dilaton.

Em (6.12), ainda está presente na ação a métrica curva $g_{\mu\nu}$ que se encara como um campo interagindo com a corda. Para calcular os termos da somatória se faz uma *segunda* expansão, ao redor de uma solução clássica da corda, i.e. $X^\mu = \langle X^\mu \rangle + \lambda_s Y^\mu$, e se calcula a ação para as flutuações Y^μ . Repare que Y^μ são adimensionais, estando a dimensão separada na única constante dimensional da teoria, λ_s . Logo a expansão é válida para $Y^\mu \ll 1$. Se estas são escolhidas para ser coordenadas normais de Riemann, a métrica também se expande como

$$g_{\mu\nu}(X) = g_{\mu\nu}(\langle X \rangle) - (1/3) \lambda_s^2 R_{\mu\alpha\nu\beta}(\langle X \rangle) Y^\alpha Y^\beta,$$

e portanto a ação resultante da expansão de S_σ , descrevendo as flutuações quânticas Y^μ , tem como coeficientes não $g_{\mu\nu}$ mas suas derivadas na forma do tensor de curvatura. Esta ação deve ser renormalizada, e a renormalização deve preservar a simetria conforme presente na ação de Polyakov (6.1), que é invariante sob uma transformação de Weyl da métrica da folha-de-mundo, $\gamma_{ab} \mapsto \Omega^2(X)\gamma_{ab}$. A simetria deve ser assegurada termo a termo, e impõe uma série de restrições sobre os campos $g_{\mu\nu}$ (ou sobre seu tensor de curvatura), ϕ , etc. Em primeira ordem em λ_s e em ordem $n = 0$ na constante de acoplamento (6.13), ou seja, na ordem de g_s^{-2} , correspondendo a diagramas de árvore como na Fig.6.1(b), as restrições impostas

pela simetria conforme de \mathcal{W} sobre $g_{\mu\nu}$ e ϕ são nada mais que as equações da gravitação dilatônica, (6.6)-(6.8). A ação efetiva (6.3) é na realidade uma maneira “indireta” de chegar às mesmas equações (daí o nome ‘efetiva’), e só vale neste regime que descrevemos.

*

O quadro de Einstein

A ação efetiva (6.3) pode ser transformada em uma ação de Einstein-Hilbert (A.4) acoplada minimalmente a um campo escalar (2.18), através de uma transformação de Weyl da métrica $g_{\mu\nu} \mapsto \Omega^2 g_{\mu\nu}$. De acordo com a Eq.(H.18), o escalar de Ricci se transforma como $R \mapsto \Omega^{-2}R +$ derivadas de Ω . Portanto escolhendo $\Omega^2 \sim e^{-\phi}$ elimina-se o acoplamento do dilaton com o escalar de curvatura. Os termos extras provindos da transformação de R contêm derivadas de ϕ e se incorporam no termo cinético do dilaton, mudando seu coeficiente e fazendo com que se deva normalizar ϕ para se obter o coeficiente canônico da energia cinética de um campo escalar. Assim, para

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\mu\nu} &= (\varkappa/\lambda_s)^2 e^{-\phi} g_{\mu\nu}, & \tilde{\phi} &= [(d-1)\varkappa^{d-1}]^{-1/2} \phi, \\ \tilde{V}(\tilde{\phi}) &= (\lambda_s/\varkappa)^{d+1} \exp\left[\frac{2\varkappa^{(d-1)/2}}{(d-1)^{1/2}}\tilde{\phi}\right] V(\phi), \end{aligned} \quad (6.14)$$

a ação efetiva S_{GD} (com $H_{\alpha\beta\gamma} = 0$) assume a forma

$$S_{GD}^{EH} = \int d^{d+1}x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2\varkappa^{d-1}} \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \tilde{\phi} \partial_\nu \tilde{\phi} - \tilde{V}(\tilde{\phi}) \right]. \quad (6.15)$$

Ao se utilizar a métrica $g_{\mu\nu}$ e a ação gravidilatônica original (6.3), diz-se que se está no ‘quadro de cordas’ (*‘string frame’*). Após a transformação (6.14) e usando a ação (6.15), diz-se estar no ‘quadro de Einstein’ (*‘Einstein frame’*).

Para o sistema gravidilatônico puro, sem fontes de matéria, é impossível distinguir a teoria efetiva do quadro de cordas de um campo escalar com o potencial adequado na gravitação de Einstein, mas enfatize-se que a ação efetiva S_{GD} não é equivalente a uma ação de Einstein-Hilbert, e sim a uma ação de Einstein-Hilbert com um campo escalar. (Ou seja, se a ação S_{GD} está correta, há necessariamente um campo escalar no universo, mesmo que este esteja “congelado” como em (6.44).) Isso porque o dilaton não entra como fonte em S_{GD} , e sim como parte intrínseca da ação para a gravidade. Na presença de fontes, a ação total é

$$S_{GD}[\phi, g_{\mu\nu}] + S_{mat}[\phi, g_{\mu\nu}, \Psi],$$

com Ψ denotando coletivamente os campos de matéria. A métrica se acopla aos campos Ψ e suas derivadas de maneira a deixar a ação covariante, e assim ao se realizar a transformação de Weyl (6.14) o campo escalar $\tilde{\phi}$ acaba se acoplando aos Ψ

de maneira não convencional para a gravitação de Einstein, tornando distinguível a teoria de Relatividade Geral “pura” de uma teoria efetiva de gravitação de cordas no quadro de Einstein. O tensor de energia-momento $\tilde{T}_{\mu\nu}$ visto no quadro de Einstein é obtido de

$$(\delta S_{mat}/\delta\tilde{g}^{\mu\nu})\delta\tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{T}_{\mu\nu} \delta\tilde{g}^{\mu\nu}$$

e usando (6.14) se vê obtém a relação entre este e o tensor de energia-momento original $T_{\mu\nu}$, definido por (6.4) no quadro de cordas,

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = (\lambda_s/\alpha')^{d-1} e^\phi T_{\mu\nu}. \quad (6.16)$$

6.2 Dualidade do Fator de Escala

A teoria de cordas tem como simetria uma transformação chamada de ‘dualidade-T’. O exemplo mais simples aparece no espectro de energia de cordas bosônicas com uma dimensão espacial compactificada em um círculo de raio R . Se a dimensão compacta é a 25^a (em um espaço $M^{24,1} \times S^1$), então $X^{25}(\sigma^0, \sigma^1 + \pi) = X^{25}(\sigma^0, \sigma^1) + 2\pi w R$, onde w conta o número (inteiro) de voltas (‘winding number’) com que a corda enlaça o círculo. A quantização dos campos X^μ leva a valores discretos n/R para o momento na 25^a direção, e o espectro de energia da corda é dado pela massa ao quadrado

$$m^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2),$$

com $\tilde{N} - N = nw$, e onde N e \tilde{N} contam o número de voltas em cada sentido (horário, anti-horário). A T-dualidade (o ‘T’ se refere a ‘target-space’) é a simetria de m^2 sob a inversão $R \mapsto \alpha'/R$ e $n \mapsto w$. Ver, e.g. [Becker et al. \(2006\)](#); [Polchinski \(1998b\)](#). Há várias outras maneiras de entender a T-dualidade, cf., e.g., [Alvarez et al. \(1995\)](#) para uma revisão. Na cosmologia de cordas, é necessário generalizar a simetria para incluir um espaço-tempo em expansão, o que foi feito por [Veneziano \(1991\)](#). No que segue nos será importante apenas a realização da simetria para a ação efetiva gravitacional. Nesse caso, a dualidade diz respeito a *i*) campos clássicos, i.e. o fator de escala e o dilaton, e *ii*) dimensões não-compactas. A transformação de inversão $R \mapsto 1/R$ equivale à inversão do fator de escala $a(t) \mapsto 1/a(t)$, fornecendo uma maneira de se expressar o limite da gravitação em “altas energias” (com a pequeno) em termos da gravitação em “baixas energias” (com a grande). Esse é o ponto de partida para uma cosmologia de cordas antes do big-bang, como será discutido mais adiante no §6.3.

6.2.1 A inversão do fator de escala

Quando \mathcal{M} é um espaço-tempo de Robertson-Walker plano, com métrica (2.11) trivialmente estendida para $(d + 1)$ dimensões,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) dx_i dx_i, \quad (6.17)$$

$$i = 1, \dots, d,$$

as Eqs.(6.6) e (6.8) se tornam, na cosmologia de cordas, o correspondente às Equações de Friedmann. Assumindo que o dilaton acompanha a isotropia do espaço, e que a matéria tem a forma hidrodinâmica usual dada na Eq.(2.16), viz.

$$\phi = \phi(t), \quad \chi = \chi(t) \quad \text{e} \quad T^\mu{}_\nu = \text{Diag}(\rho(t), P(t), \dots, P(t)), \quad (6.17)$$

a Eq.(6.6) se torna uma equação para a função de Hubble $H = \dot{a}/a$:

$$2\ddot{\phi} - \dot{\phi}^2 + 2dH\dot{\phi} - 2d\dot{H} - d(d+1)H^2 = 2\lambda_s^{d-1} \left(\frac{1}{2}e^\phi \chi + \partial V/\partial\phi - V(\phi) \right). \quad (6.18)$$

As componentes espaciais da Eq.(6.8) ficam

$$\dot{H} - H\dot{\phi} + dH^2 = \lambda_s^{d-1} \left\{ \left(P - \frac{1}{2}\chi \right) e^\phi - \partial V/\partial\phi \right\}, \quad (6.19)$$

e a componente temporal da Eq.(6.7) dá a ligação com a densidade de energia ρ ,

$$\dot{\phi}^2 - 2dH\dot{\phi} + d(d-1)H^2 = \lambda_s^{d-1} \left(\rho e^\phi + V(\phi) \right), \quad (6.20)$$

cuja derivada, após se eliminar \dot{H} e $\ddot{\phi}$ com o auxílio das outras duas equações, leva a

$$\dot{\rho} + dH(P + \rho) = \frac{1}{2}\chi\dot{\phi}. \quad (6.21)$$

Comparação com a equação da continuidade (2.26) mostra que o dilaton impede que o tensor de energia-momento se conserve, i.e. $\nabla_\mu T^{\mu\nu} \neq 0$. A razão é óbvia: na gravitação de Einstein $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ como consequência das identidades de Bianchi para o tensor de Einstein, o que não ocorre no sistema gravi-dilatônico por conta dos termos extras do lado esquerdo da Eq.(6.7) (além do acoplamento de ϕ com $T_{\mu\nu}$ do lado direito).

Defina o ‘dilaton deslocado’

$$\bar{\phi} \equiv \phi - d \log a, \quad (6.22)$$

e considere o sistema gravi-dilatônico puro com o dilaton livre, ou seja, faça as fontes $T_{\mu\nu}$ e χ , e o potencial escalar $V(\phi)$ todos nulos. As equações (6.18)-(6.20) se escrevem

$$2\ddot{\bar{\phi}} - \dot{\bar{\phi}}^2 - dH^2 = 0, \quad (6.23a)$$

$$\dot{H} - H\dot{\bar{\phi}} = 0, \quad \dot{\bar{\phi}}^2 - dH^2 = 0. \quad (6.23b)$$

Este conjunto de equações é invariante sob a inversão do fator de escala:

$$a(t) \mapsto \tilde{a}(t) = 1/a(t); \quad \bar{\phi} \mapsto \bar{\phi}. \quad (6.24)$$

A verificação é imediata; basta reparar que a transformação da função de Hubble se resume a uma mera troca de sinal,

$$\tilde{H} = \dot{\tilde{a}}/\tilde{a} = ad(a^{-1})/dt = -H, \quad (6.25)$$

à qual as Eqs.(6.23) são insensíveis. Essa mesma troca de sinal — que indica que uma geometria em expansão, com $H > 0$, é mapeada por (6.24) em uma geometria em *contração*, com $H < 0$ (o que é óbvio; se a cresce com t , então $1/a$ diminui) — pode ser eliminada através de uma outra simetria das Eqs.(6.23): a reflexão temporal

$$t \mapsto -t, \quad (6.26)$$

cujo efeito sobre H é, também, uma mudança de sinal.

As transformações (6.24) e (6.26), sendo uma simetria *das equações* gravitacionais, atua como um *grupo* discreto sobre o espaço das soluções de (6.23), mapeando

$$\{a(t), \phi(t)\} \mapsto \{\tilde{a}(\pm t), \tilde{\phi}(\pm t)\}. \quad (6.27)$$

A nova solução $\{\tilde{a}(\pm t), \tilde{\phi}(\pm t)\}$ é dita *dual* à primeira, e as transformações são conhecidas como uma ‘*Dualidade do Fator de Escala*’, introduzida por Veneziano (1991) e Tseytlin (1991).

6.2.2 Simetria $O(d, d)$ da ação efetiva

A inversão do fator de escala da métrica (6.17) é na realidade apenas um caso específico de uma simetria global da ação efetiva (6.3) sob o grupo pseudo-ortogonal $O(d, d)$, encontrada por Meissner & Veneziano (1991) (ver também Gasperini & Veneziano (1992)). A simetria completa inclui a 2-forma $B_{\mu\nu}$; a métrica $g_{\mu\nu}$ é arbitrária desde que possua d isometrias de translação, com o que se pode escolher um sistema de coordenadas onde $g_{00} = 1$ e $g_{0i} = B_{0\mu} = 0$ e os campos restantes, ϕ , B_{ij} e g_{ij} sejam funções apenas da coordenada temporal $x^0 \equiv t$. Defina a matrizes ($d \times d$)

$$G \equiv \{g_{ij}\} \quad \text{e} \quad B \equiv \{B_{ij}\}, \quad \text{com inversas} \quad G^{-1} = \{g^{ij}\}, \quad \text{etc.}$$

Defina também (implicitamente) o dilatón deslocado $\bar{\phi}$ através de uma generalização de (6.22) para a métrica $g_{\mu\nu}$,

$$e^{-\bar{\phi}} \equiv \lambda_s^d \int d^d x \sqrt{\text{Det } g_{ij}} e^{-\phi}, \quad \text{ou} \quad \bar{\phi} \equiv \phi - \frac{1}{2} \log |\text{Det } G| \quad (6.28)$$

com a última igualdade válida para seções espaciais finitas, em que $\int d^d x \sqrt{\text{Det } g_{ij}} = V_d$, um volume finito que se possa absorver na definição do dilaton. Defina por fim a matriz ($2d \times 2d$)

$$M \equiv \begin{pmatrix} G^{-1} & -G^{-1}B \\ BG^{-1} & G - BG^{-1}B \end{pmatrix}, \quad \text{e seja } \eta = \begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

a métrica do grupo $O(d, d)$, com I sendo a identidade para matrizes ($d \times d$). A matriz $M \in O(d, d)$, já que $M^T \eta M = \eta$, como é fácil verificar. Com algum trabalho, pode-se reescrever a ação (6.3) como

$$S_{GD} = \frac{\lambda_s}{2} \int dt e^{-\bar{\phi}} \left[\dot{\bar{\phi}}^2 + \frac{1}{8} \text{Tr} \left(\dot{M} \dot{M}^{-1} \right) - V(\phi) \right], \quad (6.30)$$

tendo a integral sobre as seções espaciais sido absorvida na definição (6.28). Escrita nessa forma a ação se revela invariante sob a transformação

$$M \mapsto \tilde{M} = \Lambda^T M \Lambda, \quad \bar{\phi} \mapsto \tilde{\bar{\phi}}, \quad (6.31)$$

desde que $\Lambda \in O(d, d)$ i.e. $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$.

Basta verificar a invariância do termo matricial,

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\dot{\tilde{M}} \dot{\tilde{M}}^{-1}\} &= \text{Tr}\{\Lambda^T \dot{M} \Lambda \Lambda^{-1} \dot{M}^{-1} (\Lambda^T)^{-1}\} = \text{Tr}\{\Lambda^T \dot{M} \dot{M}^{-1} (\Lambda^T)^{-1}\} = \\ &= \text{Tr}\{\dot{M} \dot{M}^{-1} (\Lambda^T)^{-1} \Lambda^T\} = \text{Tr}\{\dot{M} \dot{M}^{-1}\}. \end{aligned}$$

(No último passo, lembre que $\text{Tr}\{ABC\} = \sum_{i,j,k} A_{ij} B_{jk} C_{ki} = \sum_{i,j,k} B_{jk} C_{ki} A_{ij} = \text{Tr}\{BCA\}$.) A transformação (6.31) é a forma completa da simetria de dualidade dos campos $\{g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi\}$. Em geral, como em M a métrica se mistura à 2-forma, a dualidade embaralha ambas. A inversão do fator de escala (6.24) vem do caso especial em que $\Lambda = \eta$ e, obviamente, $B = 0$; então

$$M = \begin{pmatrix} G^{-1} & \\ & G \end{pmatrix} \mapsto \tilde{M} = \eta^T M \eta = \begin{pmatrix} G & \\ & G^{-1} \end{pmatrix}. \quad (6.32)$$

Passamos por cima de um detalhe a respeito do potencial dilatônico $V(\phi)$. Ambas as transformações (6.31) e (6.24) deixam invariante o dilaton deslocado e, conseqüentemente, *não* deixam invariante o dilaton, i.e. $\tilde{\phi} \neq \phi$; no caso da inversão do fator de escala (6.24) a transformação $\tilde{\phi} = \phi - d \log \tilde{a} = \phi - d \log a = \tilde{\phi}$ dá

$$\phi \mapsto \tilde{\phi} = \phi - 2d \log a. \quad (6.33)$$

Quando se escreve a ação na forma (6.30), está claro que o termo cinético (simplesmente o dilaton deslocado ao quadrado) e a exponencial ficam invariantes sob

(6.31); porém o potencial dilatônico é, em geral, uma função de ϕ , e não de $\bar{\phi}$ — logo, a presença do potencial dilatônico $V(\phi)$ **quebra explicitamente a simetria** $O(d, d)$, no geral, e a simetria de inversão do fator de escala, em particular, a não ser nos casos em que V é constante ou no caso muito específico de funções $V(\bar{\phi})$ do dilaton deslocado.

6.2.3 Dualidade do fator de escala na presença de matéria

Até aqui, discutimos o sistema gravi-dilatônico puro, mas é possível adicionar fontes do tipo (6.4) e (6.5) de maneira a preservar a dualidade. A discussão a nível geral da simetria $O(d, d)$ é complicada e não entraremos no mérito; cf., e.g. Gasperini (2007) para uma revisão. Será suficiente para nossos propósitos voltar ao caso cosmológico em que a métrica é (6.17), e as equações gravi-dilatônicas na presença de densidade de energia ρ , pressão P e carga escalar χ são as Eqs.(6.18)-(6.20). Agora além do dilaton deslocado (6.22), defina

$$\bar{\rho} \equiv a^d \rho, \quad \bar{P} \equiv a^d P, \quad \bar{\chi} \equiv a^d \chi \quad (6.34)$$

e as Eqs.(6.18)-(6.20) se escrevem como

$$2\ddot{\bar{\phi}} - \dot{\bar{\phi}}^2 - dH^2 = \frac{1}{2}\bar{\chi} e^{\bar{\phi}}, \quad (6.35a)$$

$$\dot{H} - H\dot{\bar{\phi}} = \frac{1}{2}e^{\bar{\phi}}(\bar{P} - \bar{\chi}/2), \quad \dot{\bar{\phi}}^2 - dH^2 = e^{\bar{\phi}}\bar{\rho}. \quad (6.35b)$$

Estas são as Eqs.(6.23) com os termos correspondentes às fontes agora presentes no lado direito. Já foi mostrado que sob a inversão do fator de escala com dilaton deslocado constante, i.e. sob (6.24), o único efeito do lado esquerdo das equações acima é a mudança de sinal de H . Isso significa que os lados *direitos* da Eq.(6.35a) e da segunda das Eqs.(6.35b) devem ficar invariantes (logo $\tilde{\chi} = \bar{\chi}$), enquanto o lado direito da primeira das Eqs.(6.35b) deve simplesmente mudar de sinal (logo $\tilde{\chi} = -\bar{\chi}$). A conclusão que se tira é que, necessariamente, a carga escalar $\bar{\chi}$ deve ser nula para que haja a simetria e, de resto, as transformações

$$a(t) \mapsto \tilde{a}(t) = 1/a(t), \quad \bar{\phi} \mapsto \tilde{\bar{\phi}}, \quad \bar{\rho} \mapsto \tilde{\bar{\rho}}, \quad \bar{P} \mapsto \tilde{\bar{P}}, \quad (6.36)$$

$$\text{i.e. } \tilde{a}^d \tilde{\bar{\rho}} = a^d \bar{\rho} \quad \text{e} \quad \tilde{a}^d \tilde{\bar{P}} = -a^d \bar{P}, \quad (6.37)$$

e tendo $\chi = 0$, preservam a forma das Eqs.(6.35).

6.3 O Cenário Pré-Big-Bang

As novas soluções obtidas a partir da dualidade do fator de escala dão origem ao seguinte cenário cosmológico: Antes do big-bang o universo se encontra em

uma fase dominada pela física de cordas, com um dilaton guiando a evolução do fator de escala até a singularidade da qual emerge o universo quente (reheated) da cosmologia usual. As fases pré- e pós-big-bang são duais entre si.

6.3.1 Soluções duais

A dualidade do fator de escala fornece novas soluções (duais) a partir de uma dada solução original das Eqs.(6.35). Em conjunto, a inversão do fator de escala e a reflexão temporal fornecem três soluções distintas, além da original. Como exemplo, considere o sistema gravi-dilaton puro, regido pelas Eqs.(6.23), e faça o ansatz $a = (t/t_0)^\alpha$ para algum α . Com isso $H = \dot{a}/a = \alpha/t$, e a segunda das Eqs.(6.23b) dá $\dot{\bar{\phi}} = \alpha\sqrt{d}/t$, logo $\bar{\phi} = \alpha\sqrt{d} \log t + \text{constante}$. Esta solução deve ser consistente com pelo menos uma das outras equações; para o ansatz, $\dot{H} = -\alpha/t^2$ e a primeira das Eqs.(6.23b) mostra que para isso deve ser

$$\alpha = \pm 1/\sqrt{d}. \quad (6.38)$$

Escolhemos o sinal negativo. Portanto, uma solução para o sistema gravi-dilaton é

$$II : \quad \{a(t) = (t/t_0)^{-1/\sqrt{d}}, \quad \bar{\phi}(t) = -\log(t/t_0)\}. \quad (6.39)$$

As outras três soluções se obtém com uma inversão do fator de escala, (6.24),

$$I : \quad \{a(t) = (t/t_0)^{1/\sqrt{d}}, \quad \bar{\phi}(t) = -\log(t/t_0)\}, \quad (6.40)$$

e em seguida para I e II temos as soluções correspondentes com tempo refletido,

$$III : \quad \{a(t) = (-t/t_0)^{-1/\sqrt{d}}, \quad \bar{\phi}(t) = -\log(-t/t_0)\}, \quad (6.41)$$

$$IV : \quad \{a(t) = (-t/t_0)^{1/\sqrt{d}}, \quad \bar{\phi}(t) = -\log(-t/t_0)\}, \quad (6.42)$$

Os gráficos se encontram na Fig.6.2. É útil escrever o escalar de curvatura

$$R = 2d\dot{H} + d(d+1)H^2, \quad \text{que para as soluções consideradas fica } R \sim H^2,$$

pois se $H \sim 1/t$ então $\dot{H} \sim H^2$; assim, o crescimento de H indica crescimento da curvatura, e vice-versa. Seguimos com a descrição de cada tipo de evolução.

I) Um universo em *expansão* ($H > 0$) *desacelerada* e singular em $t = 0$ ($H \rightarrow \infty$), cuja curvatura decresce com o tempo; o fator de escala na Fig.6.2(b) cresce com o tempo, tendo sido nulo na singularidade que é, portanto, um big-bang. O universo se desenvolve no intervalo de tempo $t \in (0, \infty)$.

(\Downarrow Reflexão Temporal)

II) Com uma reflexão temporal temos um universo em *contração acelerada* com $t \in (-\infty, 0)$, terminando em um big-crunch. A função de Hubble é refletida sobre o eixo horizontal (pois $H \mapsto -H$) e sobre o eixo vertical (pois $t \mapsto -t$).

(\Downarrow Inversão do Fator de Escala)

III) Ainda no intervalo $t \in (-\infty, 0)$, e com uma inversão do fator de escala, a solução *II* é mapeada em outro universo em expansão acelerada, pois $H \mapsto \tilde{H} = -H > 0$. Seu fator de escala $\tilde{a}(t) = 1/a(-t)$ agora *diverge* em $t = 0$, onde ainda assim há uma singularidade pois $\tilde{H}(0) = \infty$. Por outro lado, o fator de escala se anula em $t \rightarrow -\infty$ onde $R = 0$.

(\Downarrow Reflexão Temporal)

IV) Com uma segunda reflexão temporal, voltamos ao intervalo $t \in (0, \infty)$ em um universo que é como em *III* com o tempo ao contrário. Começa singular e com fator de escala infinito em $t = 0$, e se contrai desaceleradamente até $a = 0$ em $t = \infty$.

As soluções *I* e *III* representam o exemplo mais simples do panorama chamado de *Cenário Pré-Big-Bang*, elaborado por [Gasperini & Veneziano \(1993\)](#). (Ver [Gasperini & Veneziano \(2003\)](#) para uma revisão.)

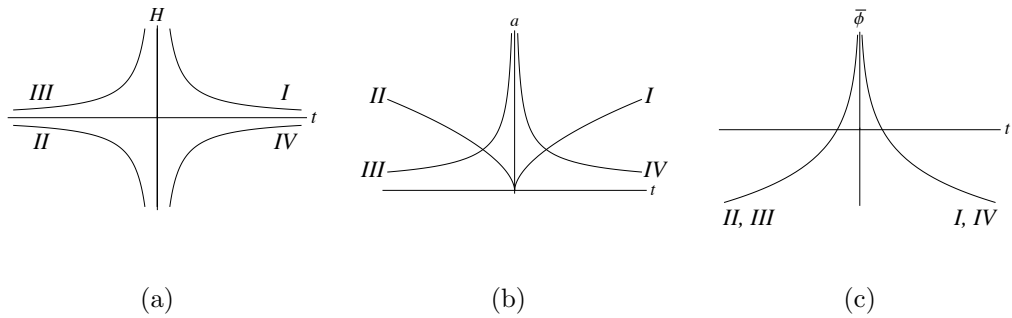


Figura 6.2: (a) Função de Hubble, (b) fator de escala, (c) dilaton deslocado para as quatro soluções duais (6.39)-(6.42).

6.3.2 A evolução pré-big-bang

Vamos descrever em mais detalhes a dinâmica do universo no cenário pré-big-bang em um universo como o da seção anterior, mas preenchido por um fluido perfeito de equação de estado $P = w\rho$. Por praticidade, considere o espaço-tempo como sendo quadridimensional, com $d = 3$, assumindo já a compactificação de dimensões internas. A equação da continuidade fornece como de costume $\rho = \rho_w a^{-3(1+w)}$, e portanto a densidade deslocada (6.34) é $\bar{\rho} = \rho_w a^{-3w}$. Como antes, faça o ansatz $a = t^\alpha$, e suponha, motivado pelo que se encontrou anteriormente, $\bar{\phi} = -\beta \log t$. A segunda das equações (6.35b) então requer $3w\alpha - \beta - 2 = 0$, e a Eq.(6.35) (com $\bar{\chi} = 0$) impõe $\beta(2 - \beta) - 3\alpha^2 = 0$, e temos um sistema de duas equações algébricas para α e β , com soluções

$$\alpha = \frac{2w}{1 + 3w^2}, \quad \beta = \frac{2}{1 + 3w^2}.$$

Isso resolve completamente o ansatz para a e $\bar{\phi}$, dando como solução do sistema gravidilatônico com fluido perfeito (devolvemos $\phi = \bar{\phi} + 3 \log a$)

$$\begin{aligned} a(t) &= t^{\frac{2w}{1+3w^2}}, & \phi(t) &= \frac{2(3w-1)}{1+3w^2} \log t; \\ \rho(t) &= \rho_w a^{-3(1+w)}(t), & P &= w\rho. \end{aligned} \quad (6.43)$$

No início quente do universo preenchido por radiação $w = 1/3$, e (6.43) é idêntica à solução na gravitação de Einstein, porque *o dilaton se encontra fixo*,

$$\begin{aligned} a(t) &= t^{1/2}, & \text{e } \phi &= \text{constante} & \text{para } P &= \rho/3, \\ & & & & \text{com } t &\in (0, \infty). \end{aligned} \quad (6.44)$$

Esta solução, a expansão desacelerada partindo de uma singularidade em $t = 0$, é a conhecida fase de radiação pós-big-bang da cosmologia usual, dada em (2.39). Corresponde à solução *I* da seção anterior. A fase pré-big-bang é obtida por uma transformação de dualidade correspondente à solução *III*. Com uma transformação (6.36) composta com uma inversão temporal, (6.43) se mapeia em outra solução do sistema gravi-dilatônico:

$$\begin{aligned} a(t) &= (-t)^{-1/2}, & \text{e } \phi &= -3 \log -t, & \text{com } t &\in (-\infty, 0) \\ & & \text{e } P &= -(1/3)\rho, & \rho &= \rho_* a^{-2}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Logo o fluido antes do big-bang é um gás de cordas (2.42) e o dilaton, congelado na fase de radiação, é aqui dinâmico e influencia na evolução do universo.

Assim, a história cósmica começa em $t = -\infty$, com a solução (6.45). O fator de escala, $a = 1/(-t)^{1/2}$, é assintoticamente nulo no passado, mas isso *não*

configura uma singularidade porque o dilaton $\phi = -3 \log(-t)$ se encontra em seu ‘vácuo perturbativo’, i.e.

$$\phi = -\infty, \quad \dot{\phi} = 0, \quad \text{para } t \rightarrow -\infty.$$

Isto significa que o parâmetro de acoplamento $g_s^2 = e^\phi$, dado na Eq.(6.13), tende a zero e portanto nos encontramos em um regime em que a acurácia da descri o em termos da a o efetiva (6.3)   extremamente alta.   o dilaton que guia a evolu o da fun o de Hubble de acordo com a Eq.(6.23b), e como se pode ver no vácuo perturbativo $H = 0$ para $\dot{\phi} = 0$. De fato, aqui $H = \frac{1}{2}(-t)^{-3/2}$ se anula em $t \rightarrow -\infty$. Logo $R \sim H^2 = 0$, e não são o estado inicial do universo *não*   singular como seu escalar de curvatura   nulo. Em suma, trata-se de um início absolutamente trivial para o universo: com energias muito baixas e acoplamento de intera o g_s muito fraco — o *oposto* de um big-bang quente e singular. O universo se expande aceleradamente, até que no limite $t \rightarrow 0^-$, $H^2 \sim R \rightarrow \infty$ e se chega a uma singularidade. Na realidade, neste limite o dilaton também diverge, $\phi \sim -\log 0 = \infty$ (o que explica a singularidade apesar da expansão), e portanto se entra em uma fase não-perturbativa, com $g_s^2 \gg 1$. De acordo com a discussão do  6.1, a a o efetiva gravidilatônica deixa então de ser válida, e entram em cena corre oes de altas ordens da teoria de cordas que, espera-se, evitem a singularidade.

  assim que o Cenário Pré-Big-Bang resolve o problema das condi oes iniciais do Universo: elas não são nada peculiares, o universo começa em um vácuo perturbativo simples, e   direcionado pelo dilaton a uma fase não-perturbativa, cuja descri o exata não se conhece, mas após a qual o dilaton congela e de onde emerge o universo quente dominado por radia o e sujeito   gravita o de Einstein, que observamos.

6.3.3 Ricochetes e ecpirose

Concluímos esta se o e este capítulo com uma breve discussão a respeito de outra classe importante de modelos cosmológicos que se estendem para antes do big-bang, baseados na teoria-M, em um mundo de branas.

O primeiro exemplo   o ‘Universo Ecpir tico’ de [Khoury et al. \(2001\)](#), que acontece em um espaço-tempo com 5 dimensões onde vivem duas branas com $3 + 1$ dimensões cada; uma   o nosso universo, e a outra   uma ‘brana escondida’. Ambas estão separadas por uma distância finita na quinta coordenada, tipo-espaço, sobre a qual existe uma terceira brana, paralela às outras, que surge próxima   brana escondida (por exemplo, em um processo de nuclea o) e se move em dire o   brana visível (nosso universo) guiada por um potencial negativo. A aproxima o   percebida na brana visível como uma contra o do universo. A

colisão da brana interior com a nossa transfere parte da energia cinética daquela para esta, induzindo a criação de partículas e radiação a uma alta (porém finita) temperatura que enxergamos como o big-bang. ‘Conflagração’ em grego se diz ‘ecpirose’. O fato de o big-bang ser criado por um único objeto macroscópico (a brana invisível) que teve um tempo indefinidamente longo para se “termalizar” resolve o problema do horizonte, e a suposição de que a brana interior é criada num estado quase plano correspondente ao estado fundamental da teoria-M (um estado BPS) resolve o problema da planaridade. Pequenas flutuações quânticas nas branas explicam as flutuações da CMB.

Uma elaboração do cenário acima consiste em se utilizar apenas duas branas, com a distância entre ambas parametrizada na brana visível por um campo escalar ϕ com um potencial $V(\phi)$ adequado (Fig.6.3). A colisão entre as branas corresponde ao colapso dessa quinta dimensão (espacial). Após a colisão, as branas se afastam (e o universo se expande), mas são eventualmente trazidas mais uma vez ao encontro uma da outra devido à forma de $V(\phi)$, que deve interpolar entre valores positivos e negativos. Outra colisão ocorre, e o processo se repete para sempre. Este é o modelo de ‘Universo Cíclico’ de [Steinhardt & Turok \(2002a,b\)](#). A dinâmica é descrita pela ação (efetiva, 4-dimensional)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{\kappa^2} R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) + \beta^2(\phi) (\rho_R + \rho_M) \right], \quad (6.46)$$

onde além de ϕ há a presença de radiação (ρ_R) e poeira (ρ_M) acopladas a ϕ pela função $\beta(\phi)$, cuja forma depende dos detalhes da teoria de cordas de onde se deriva (6.46), e está relacionada à geometria das branas. As equações de movimento são, com $\kappa^2 = 1$,

$$H^2 = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V + \beta^4 (\rho_R + \rho_M) \right], \quad (6.47)$$

$$\ddot{a}/a = -\frac{1}{6} \left[\dot{\phi}^2 - V + \beta^4 \left(\frac{1}{2} \rho_M + \rho_R \right) \right]. \quad (6.48)$$

A equação para ϕ é

$$\ddot{\phi} + 3H \dot{\phi} = -\partial_\phi V - \beta^3 \rho_M \partial_\phi \beta,$$

e a equação para os fluidos pode ser escrita na forma usual

$$\alpha d\rho_J/d\alpha = -3(\rho_J + p_J), \quad J = R, M,$$

desde que se defina o ‘fator de escala na brana’ $\alpha = \beta(\phi) a$. A forma do acoplamento $\beta(\phi)$ deve ser tal que na singularidade, onde $a = 0$, a função α não se anule e com isso a densidade de radiação produzida na brana, $\sim 1/\alpha^4$, seja finita, assim como a densidade de matéria. Por isso a singularidade devida ao colapso instantâneo da quinta dimensão é muito amenizada, e em particular não

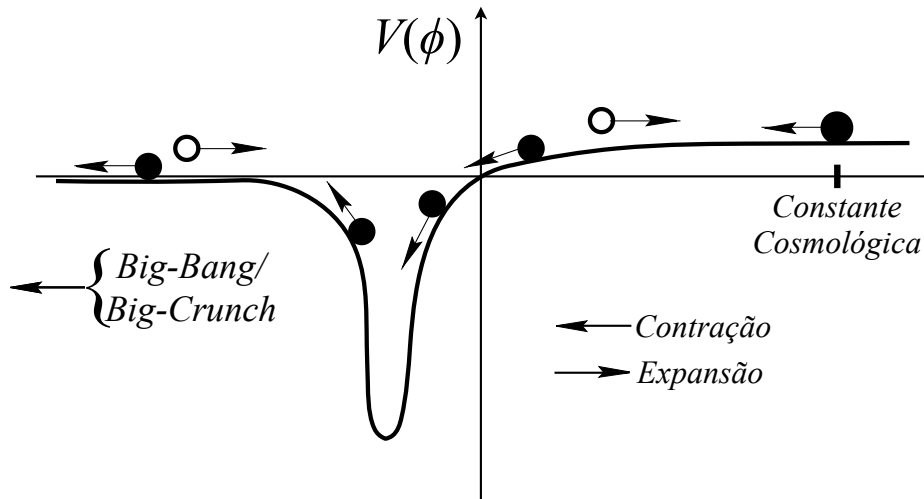


Figura 6.3: Potencial no universo cíclico.

há qualquer problema com a coordenada temporal. Isso resolve o problema do big-bang, de acordo com [Steinhardt & Turok \(2002b\)](#).

Fenomenologicamente, o potencial $V(\phi)$ deve ter uma forma como na Fig. 6.3. Em toda a região do lado esquerdo, onde $V < 0$, a evolução do universo é desacelerada, i.e. $\ddot{a} < 0$, como se pode ver da Eq.(6.48). Atualmente ϕ se encontra (próximo) à posição mais à direita, onde o valor positivo de V garante aceleração positiva. No valor máximo de ϕ , correspondente à separação máxima entre as branas, o universo se torna de Sitter. Então a aceleração começa a diminuir e se anula em $V = 0$, e em seguida o universo entra numa fase de expansão desacelerada. Depois de um tempo o valor muito negativo de V anula H , Eq.(6.47), o universo pára de se expandir e começa a se contrair em direção ao big-crunch em $\phi = -\infty$, com a energia gravitacional perdida aumentando o valor da energia cinética de ϕ . Após o ricochete, o campo retorna, passando de novo pelo vale (fases dominada por radiação e depois por matéria), subindo o planalto na direita (nova fase acelerada análoga à nossa condição atual) e parando, para voltar ao ponto de partida. Assim, o modelo incorpora a constante cosmológica como peça fundamental do mesmo modelo que descreve o equivalente da fase inflacionária: sem o planalto do lado direito do potencial, ϕ não pára e recomeça o ciclo. As flutuações observacionalmente relevantes são criadas na fase de contração, quando o universo se encontra quase estático e são, por isso, quase invariantes de escala como deveriam. Uma diferença fundamental é a predição de um índice espectral desviado para o azul nos modos tensoriais, distinta da predição inflacionária.

Seguindo [Khoury et al. \(2002\)](#), é possível passar a ação (6.46) para o quadro de

cordas tomando ϕ como (proporcional a) o dilaton, de forma que o acoplamento de cordas $g_s^2 = e^\phi$. Portanto, o ricochete, em $\phi = -\infty$, ocorre no regime de acoplamento *fraco*, $g_s^2 \rightarrow 0$. Essa é uma diferença fundamental entre os modelos ecpiróticos e o Cenário Pré-big-bang.

Uma idéia central, comum a todos esses modelos, é a substituição do big-bang por um ricochete no qual a gravitação de Einstein é corrigida pela teoria fundamental em questão (super-cordas, etc.), evitando a singularidade. O mesmo acontece no Cenário Pré-big-bang do §6.3: usando (6.14) se vê que no quadro de Einstein a solução (6.45) para o universo antes do big-bang tem fator de escala

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = (-t)^{-1} \\ \phi = -\log(-t)^3 \end{array} \right\} \mapsto a_E^2 = (-t)^3, \quad t \in (-\infty, 0).$$

Ou seja, muito embora $a^2 = 1/(-t)$ cresça e, no quadro de cordas, se tenha uma expansão acelerada, no quadro de Einstein o universo sofre uma contração até um big-crunch, que é identificado com o big-bang da fase de radiação seguinte, onde o dilaton se encontra fixo.

Por fim, notamos que modelos de universo pré-big-bang contendo ricochetes podem ter várias origens diferentes dessa apresentada nos cenários acima; em vez de se modificar diretamente a teoria da gravitação pode-se introduzir, por exemplo, um gás de cordas próximo à singularidade. Para uma lista de diversas possibilidades dentro e fora da teoria de cordas, ver a revisão recente de [Brandenberger & Peter \(2017\)](#). Além disso, cordas e branas podem modificar o paradigma inflacionário de outras maneiras além das que mencionamos. Para uma revisão, ver, e.g., [Quevedo \(2002\)](#).

Capítulo 7

Cosmologia Conforme Cíclica

A Cosmologia Conforme Cíclica (CCC), é um esquema proposto por [Penrose \(2010\)](#) que fornece uma solução para o paradoxo da baixa entropia do big-bang (cf. §5.4.2) dentro da Relatividade Geral, sem a presença de um big-crunch, sem utilizar a Teoria de Cordas, e oferecendo uma alternativa à inflação. O argumento qualitativo é descrito em detalhes por [Penrose \(2010\)](#), e os pontos essenciais são apresentados de maneira muito mais breve em [Penrose \(2006\)](#); ver também, [Penrose \(2007\)](#).

7.1 Princípios

A motivação fundamental da CCC é encontrar uma implementação dinâmica da Hipótese da Curvatura de Weyl. Isso é obtido com o seguinte mecanismo.

7.1.1 Os aeons

A evolução do Universo se dá em ‘ciclos de tempo’; cada ciclo começa em um big-bang e termina em um futuro infinito \mathcal{I}^+ tipo-espaço. O tempo conforme de cada um tem, portanto, domínio finito, $\eta \in (\eta_1, \eta_2)$, após o qual o ciclo seguinte se inicia, com $\eta \in (\eta_2, \eta_3)$, etc. No tempo cósmico, $t \in (0, \infty)$, os ciclos são eternos, e por isso cada ciclo é chamado de um ‘*aeon*’ (do grego *aiôn*, ‘eternidade’).

A geometria de cada aeon segue as equações clássicas de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu},$$

sem nenhum tipo de correção (quântica, de cordas, etc.). Nesta seção escreveremos a constante cosmológica separada do tensor de energia-momento.

Após a ‘região de transição’ descrita no §7.1.2, o Universo passa a ser dominado por radiação e segue sua evolução como no modelo cosmológico padrão, *sem*

passar por uma fase inflacionária. Cada aeon possui uma constante cosmológica (que Penrose (2010) assume ter sempre o mesmo valor) e, portanto, termina em uma expansão acelerada assintoticamente de Sitter em \mathcal{I}^+ . Isso dá conta dos problemas de planaridade, e o problema do horizonte é resolvido automaticamente pelo “passado eterno” do Universo.

7.1.2 A superfície de transição

A transição entre dois aeons ocorre em uma ‘*superfície de transição*’ (‘*crossover*’) \mathcal{X} que é a identificação entre o big-bang do aeon futuro com o infinito \mathcal{I}^+ do aeon passado. Trata-se de uma identificação conforme, onde se supõe que as métricas $\hat{g}_{\mu\nu}$, do aeon passado, e $\check{g}_{\mu\nu}$, do aeon futuro,¹ são ligadas por transformações de Weyl:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \Omega g_{\mu\nu}, \quad \check{g}_{\mu\nu} = \omega g_{\mu\nu}. \quad (7.1)$$

A ‘*métrica de transição*’ $g_{\mu\nu}$ é, por definição, regular sobre a variedade

$$\mathcal{M} = \hat{\mathcal{M}} \cup \mathcal{X} \cup \check{\mathcal{M}}.$$

Com isso o big-bang de $\check{g}_{\mu\nu}$ corresponde a $\omega = 0$ e, no mínimo, se assemelha a uma singularidade isotrópica (ver §5.4.3). Além de não possuir singularidades, impõe-se que a métrica de transição seja finita, com o que o futuro infinito de $\hat{g}_{\mu\nu}$ então corresponde a $\Omega = \infty$. Assim, sobre a superfície de transição, temos

$$\mathcal{X} = \{\Omega^{-1} = 0\} = \{\omega = 0\}, \quad (7.2)$$

e se assume a ‘*hipótese recíproca*’, de que

$$\Omega \times \omega = -1, \quad \text{logo} \quad \check{g}_{\mu\nu} = \omega^4 \hat{g}_{\mu\nu}, \quad \text{e} \quad \hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^4 \check{g}_{\mu\nu}. \quad (7.3)$$

(Poderia ser qualquer constante no lado direito da equação, mas normalização é sempre possível porque $g_{\mu\nu}$ só é definida a menos de reescalamentos.) Essa construção só é válida *numa vizinhança* da superfície tipo-espaço \mathcal{X} , e não ao longo de toda a evolução dos aeons. Isto é, se T é um parâmetro temporal determinado pelo vetor tipo-tempo ∂_T proporcional à normal de \mathcal{X} , e tal que $\mathcal{X} = \{T = 0\}$, então as Eqs.(7.1) e (7.3) são válidas apenas numa região $T \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ para algum $\varepsilon > 0$.

¹A notação com circunflexos e haçeks será padrão, e segue Penrose (2010). Como mnemônica, se pode pensar no cone de luz de um ponto em \mathcal{X} : o circunflexo corresponde à metade pretérita do cone, \wedge , e portanto ao aeon “anterior”; já o haček corresponde à metade futura do cone, \vee , e portanto ao aeon “posterior”.

7.2 Equações

Alguns detalhes de uma formulação precisa dos princípios apresentados acima são fornecidos nos apêndices de [Gurzadyan & Penrose \(2013\)](#); [Penrose \(2010\)](#). Nós aqui seguiremos a apresentação mais elaborada de [Tod \(2013\)](#).

Considere dois aeons consecutivos, $\hat{\mathcal{A}} \equiv (\hat{\mathcal{M}}, \hat{\mathbf{g}})$ e $\check{\mathcal{A}} \equiv (\check{\mathcal{M}}, \check{\mathbf{g}})$. (Podemos encarar $\check{\mathcal{A}}$ como o nosso Universo.) Em cada um, são satisfeitas separadamente as equações de Einstein,

$$\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\hat{R}\hat{g}_{\mu\nu} + \hat{\Lambda}\hat{g}_{\mu\nu} = \hat{T}_{\mu\nu}, \quad \text{e} \quad \check{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\check{R}\check{g}_{\mu\nu} + \check{\Lambda}\check{g}_{\mu\nu} = \check{T}_{\mu\nu}. \quad (7.4)$$

Na vizinhança da transição, as métricas são dadas por (7.1) e (7.3);

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad \check{g}_{\mu\nu} = \omega^2 g_{\mu\nu}; \quad \omega = -1/\Omega \quad (7.5)$$

$$\text{logo} \quad \check{g}_{\mu\nu} = \Omega^{-4} \hat{g}_{\mu\nu}. \quad (7.6)$$

O sinal negativo na hipótese recíproca garante que ω seja uma função contínua e suave na transição entre aeons: $\omega > 0$ em $\check{\mathcal{A}}$, se anula no big-bang e portanto deve ser $\omega < 0$ em $\hat{\mathcal{A}}$. Mais precisamente, uma vez que a superfície de transição

$$\mathcal{X} = \{\omega = 0\} \sim \{\Omega = \infty\} \quad (7.7)$$

é, por definição, tipo-espaço, então o vetor $N^\mu \equiv \nabla^\mu \omega$, normal a \mathcal{X} , é um vetor tipo-tempo, permitindo assim que se encare ω como uma coordenada temporal no espaço-tempo regular $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$. Se impomos $N^\mu \neq 0$ sobre \mathcal{X} , então ω deve mudar de sinal após se anular. [Gurzadyan & Penrose \(2013\)](#) propõem que seja satisfeita uma ‘hipótese da massa-de-repouso suprimida’ (HMRS), significando que, na vizinhança de \mathcal{X} ,

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \omega \nabla_\nu \omega = -1 + (2 - Q) \omega^2 + \text{O}[\omega^3], \quad (7.8)$$

i.e. que $N_\mu N^\mu = -1$ em segunda ordem em ω . A constante Q fica indeterminada, e se relaciona com um possível mecanismo de geração de massa-de-repouso em $\check{\mathcal{A}}$. O motivo para a nomenclatura se explica mais abaixo.

O problema que se deve resolver consiste em encontrar um procedimento que permita a determinação unívoca da função Ω ; então a métrica atual fica determinada em função da métrica do universo antes do big-bang. A transformação entre o escalar de Ricci de $\hat{\mathcal{A}}$ e o da métrica de transição,

$$R = \Omega^2 \hat{R} - 6\Omega^3 \hat{\square} \Omega^{-1}, \quad (7.9)$$

(cf. Eq.(H.18), com $d = 4$, e trocando $\Omega \rightarrow \Omega^{-1}$, $\check{g} \rightarrow g$ e $g \rightarrow \hat{g}$) sugere que se possa encarar a extensão do fator conforme $\omega = -\Omega^{-1}$ do aeon futuro $\check{\mathcal{A}}$ sobre o aeon anterior $\hat{\mathcal{A}}$ como um campo $\varpi \equiv -\omega$ que se propaga obedecendo

$$\hat{\square} \varpi - \frac{1}{6} \hat{R} \varpi = -\frac{1}{6} R \varpi^3. \quad (7.10)$$

Os Princípios da CCC descritos no §7.1 impõem que na vizinhança de \mathcal{X} a matéria perca toda a massa e se torne invariante conforme, logo o traço de $\hat{T}_{\mu\nu}$ se anula perto de \mathcal{S}^+ e, durante a transição, o escalar de curvatura \hat{R} é uma constante dada pelas equações de Einstein: $\hat{R} = 4\hat{\Lambda} - \hat{g}^{\mu\nu}\hat{T}_{\mu\nu} \rightarrow 4\hat{\Lambda}$. Vamos fazer o ansatz de que a métrica de transição também possua curvatura constante $R \equiv 4\lambda$. A equação para ϖ fica, então

$$\hat{\square}\varpi - (2/3)\hat{\Lambda}\varpi = (2/3)\lambda\varpi^3. \quad (7.11)$$

Este é um caso particular da equação de Yamabe (1960)¹. Penrose (2010) assume que $\hat{\Lambda} = \lambda = \check{\Lambda}$, mas não vamos impor essa condição. De posse da métrica de $\hat{\mathcal{A}}$, e estando fixo o valor de λ , a solução da Eq.(7.11) determina ω .

A interpretação de ϖ como um campo pode ser estendida para o comportamento da matéria em $\hat{\mathcal{A}}$ como função da matéria antes do big-bang. Sob a transformação (7.6), $\check{g}_{\mu\nu} = \Omega^{-4}\hat{g}_{\mu\nu}$, os tensores de Ricci das duas métricas se transformam de acordo com a Eq.(H.16),

$$\hat{R}_{\mu\nu} = \check{R}_{\mu\nu} - 2\check{\nabla}_{\mu}\Upsilon_{\nu} + 2\Upsilon_{\mu}\Upsilon_{\nu} - \check{g}_{\mu\nu}\check{g}^{\alpha\beta}(\check{\nabla}_{\alpha}\Upsilon_{\beta} + 2\Upsilon_{\alpha}\Upsilon_{\beta}), \quad (7.12)$$

onde, aqui, escrevemos $\Upsilon_{\mu} \equiv 2\partial_{\mu}\log\Omega$. Para os escalares de curvatura, temos $\hat{R} = \hat{g}^{\mu\nu}(\check{R}_{\mu\nu} + \dots)$; a Eq.(7.6) dá, para as inversas das métricas, $\check{g}^{\mu\nu} = \Omega^4\hat{g}^{\mu\nu}$, e ficamos com (cf. Eq.(H.18))

$$\hat{R} = \Omega^{-4}[\check{R} - 6\check{g}^{\mu\nu}(\Upsilon_{\mu}\Upsilon_{\nu} + \check{\nabla}_{\mu}\Upsilon_{\nu})], \quad (7.13)$$

onde $\check{R} = \check{g}^{\mu\nu}\check{R}_{\mu\nu}$, etc. Podemos agora montar o tensor de Einstein usando as Eqs.(7.12) e (7.13). Do lado direito, o fator Ω^{-4} na Eq.(7.13) se cancela no produto $\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$, e temos a transformação “linear”

$$\hat{G}_{\mu\nu} = \check{G}_{\mu\nu} + 2\Upsilon_{\mu}\Upsilon_{\nu} - 2\check{\nabla}_{\mu}\Upsilon_{\nu} + 2\check{g}_{\mu\nu}\check{g}^{\alpha\beta}\check{\nabla}_{\alpha}\Upsilon_{\beta} + \check{g}_{\mu\nu}\check{g}^{\alpha\beta}\Upsilon_{\alpha}\Upsilon_{\beta}. \quad (7.14)$$

A hipótese (7.4) de que em ambos os aeons valem as equações de Einstein faz da Eq.(7.14) uma relação entre os tensores de energia-momento,

$$\check{T}_{\mu\nu} = \hat{T}_{\mu\nu} - 2\Upsilon_{\mu}\Upsilon_{\nu} + 2\check{\nabla}_{\mu}\Upsilon_{\nu} - 2\check{g}_{\mu\nu}\check{g}^{\alpha\beta}\check{\nabla}_{\alpha}\Upsilon_{\beta} - \check{g}_{\mu\nu}\check{g}^{\alpha\beta}\Upsilon_{\alpha}\Upsilon_{\beta} \quad (7.15)$$

($8\pi G = 1$). Assim, a contribuição (geométrica) vinda de Ω através das transformações de Weyl entre os aeons pode ser descrita como uma contribuição aditiva ao tensor da matéria em $\check{\mathcal{A}}$ comparada ao tensor da matéria em $\hat{\mathcal{A}}$. Uma

¹Que descreve a deformação de uma variedade Riemanniana em uma estrutura Riemanniana de curvatura constante. Fraseado por Lee & Parker (1987), este é o ‘Problema de Yamabe’: “Dada uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 3$ e métrica g , encontre uma métrica conforme a g e que possua escalar de curvatura constante.” Aqui, $n = 4$.

vez que $\Upsilon_\mu = -\frac{2}{\varpi}\partial_\mu\varpi$, o lado direito da Eq.(7.15) se reescreve como

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{\mu\nu} &= \hat{T}_{\mu\nu} + \Phi_{\mu\nu}, \quad \text{onde} \\ \Phi_{\mu\nu} &= -\frac{4}{\varpi^2}\check{\nabla}_\mu\varpi\check{\nabla}_\nu\varpi - \frac{4}{\varpi}\check{\nabla}_\mu\check{\nabla}_\nu\varpi + \frac{4}{\varpi}\left(\check{\square}\varpi - \frac{2}{\varpi}\check{g}^{\alpha\beta}\check{\nabla}_\alpha\varpi\check{\nabla}_\beta\varpi\right)\check{g}_{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (7.16)$$

(Usamos o fato de que, sendo ϖ uma função escalar, sua derivada parcial é igual à derivada covariante (com qualquer métrica), i.e. $\partial_\mu\varpi = \check{\nabla}_\mu\varpi$.)

A métrica do aeon $\hat{\mathcal{A}}$ é a de um espaço-tempo com constante cosmológica positiva $\hat{\Lambda} \equiv 3\hat{H}^2$, e assintoticamente, assume a forma de uma expansão de Starobinskii (1983),

$$d\hat{s}^2 = -d\hat{t}^2 + e^{2\hat{H}\hat{t}}\left(a_{ij} + e^{-2\hat{H}\hat{t}}b_{ij} + e^{-3\hat{H}\hat{t}}c_{ij} + \dots\right)dx^i dx^j, \quad (7.17)$$

com a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} funções de x^i e não do tempo, i.e. toda a dependência temporal é colocada em potências de $e^{\hat{H}\hat{t}}$. Para $t \rightarrow \infty$, esta é uma solução para as equações de Einstein com uma constante cosmológica positiva, desde que se respeite um conjunto de restrições: o tensor b_{ij} não é independente, mas se relaciona com a_{ij} ,

$$b_{ij} = \hat{H}^{-2}\left({}_{(3)}R_{ij}[a] - \frac{1}{4}{}_{(3)}R[a]a_{ij}\right), \quad (7.18)$$

onde ${}_{(3)}R_{ij}[a]$ é tensor de Ricci obtido da métrica 3-dimensional definida por a_{ij} , e ${}_{(3)}R[a] \equiv a^{ij}{}_{(3)}R_{ij}[a]$ é o escalar correspondente. O tensor c_{ij} , por sua vez, deve obedecer as 4 condições

$$a^{ij}c_{ij} = 0 \quad \text{e} \quad a^{ij}\nabla_j c_{ki} = 0. \quad (7.19)$$

Além dessas restrições, há três funções livres em a_{ij} , ajustáveis pela invariância da métrica sob redefinições das coordenadas x^i , e existe ainda uma liberdade de calibre na transformação $\hat{t} \mapsto \hat{t} + \phi(x^i)$ em conjunto com $x^i \mapsto x^i - (1/2\hat{H})e^{-2\hat{H}\hat{t}}a^{ij}\partial_j\phi$, que preserva a forma da métrica com $a_{ij} \mapsto e^{2\hat{H}\phi}a_{ij}$ e $c_{ij} \mapsto e^{-\hat{H}\phi}c_{ij}$. Por fim, a_{ij} e c_{ij} são, evidentemente, simétricos. Tudo isso faz com que haja apenas 4 funções independentes, duas em cada tensor, e são os únicos graus de liberdade do problema. Todos os outros termos da expansão (7.17) ficam determinados a partir de a_{ij} e c_{ij} . É claro que a presença de um tensor de energia-momento que se comporta assintoticamente como $T_{\mu\nu} \sim O(e^{-3\hat{H}\hat{t}})$ (sem incluir em $T_{\mu\nu}$ a constante cosmológica que está presente por definição), não altera a discussão. Seguindo a expansão de Starobinskii, $\varpi \equiv 1/\Omega$ pode ser obtido do seguinte ansatz:

$$\varpi = e^{-\hat{H}\hat{t}}\varpi_1 + e^{-2\hat{H}\hat{t}}\varpi_2 + e^{-3\hat{H}\hat{t}}\varpi_3 + \dots \quad (7.20)$$

com os ϖ_n funções (possivelmente) das coordenadas espaciais x^i . Substitua agora na Equação de Yamabe (7.11), com o operador de Laplace-Beltrami calculado

com a métrica (7.17), e resolva ordem a ordem. O resultado é que ϖ_1 e ϖ_2 são arbitrários e ϖ_n , com $n > 2$, não são. Com isso a métrica de transição, restrita à superfície $\mathcal{X} = \{\hat{t} = \infty\}$, é

$$g_{ij} = \varpi_1^2 a_{ij}.$$

A expansão exponencial na Eq.(7.17) tende a tornar a métrica isotrópica rapidamente. (O que é, basicamente, o motivo pelo qual a inflação funciona.) No limite $\hat{t} \rightarrow \infty$, o tensor de Weyl satisfaz $\hat{W}_{\alpha\beta\mu\nu} \hat{W}^{\alpha\beta\mu\nu} \rightarrow 0$, matando quase todos os graus de liberdade gravitacionais (Starobinskii (1983)), e levando à implementação da Hipótese da Curvatura de Weyl, como requerido pela CCC. De forma mais geral, a invariância conforme de $W^\alpha_{\beta\mu\nu}$ garante que $\hat{W}^\alpha_{\beta\mu\nu} = W^\alpha_{\beta\mu\nu} = \check{W}^\alpha_{\beta\mu\nu}$, logo

$$\check{W}_{\alpha\beta\mu\nu} = \omega^2 W_{\alpha\beta\mu\nu} \quad \text{e} \quad \hat{W}_{\alpha\beta\mu\nu} = \Omega^2 W_{\alpha\beta\mu\nu}.$$

Sendo $g_{\mu\nu}$ regular, $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ é finito, e portanto no big-bang

$$\check{W}_{\alpha\beta\mu\nu} = \omega^2 W_{\alpha\beta\mu\nu} \rightarrow 0 \quad \text{em } \mathcal{X},$$

e a HCW fica automaticamente satisfeita. Mas além disso, para que $\hat{W}_{\alpha\beta\mu\nu}$ não seja divergente do outro lado da transição, quando $\Omega = \infty$, é necessário que

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} \rightarrow 0. \tag{7.21}$$

Com isso, nessa construção, a comunicação de graus de liberdade de um aeon para o outro ocorre por meio apenas da derivada normal do tensor de Weyl, como argumentado por Gurzadyan & Penrose (2013). De fato, a derivada de $\check{W}_{\alpha\beta\mu\nu}$ na direção normal a \mathcal{X} , i.e. $\check{g}^{\gamma\delta} N_\gamma \check{\nabla}_\delta \check{W}_{\alpha\beta\mu\nu} = \omega^{-2} g^{\gamma\delta} N_\gamma \check{\nabla}_\delta \check{W}_{\alpha\beta\mu\nu}$, vale

$$\frac{D}{d\omega} \check{W}_{\alpha\beta\mu\nu} = \omega^{-2} \frac{d}{d\omega} (\omega^2 W_{\alpha\beta\mu\nu}) = dW_{\alpha\beta\mu\nu}/d\omega \neq 0 \quad \text{em } \mathcal{X}.$$

A aplicação mais simples deste formalismo para a CCC é, evidentemente, em uma métrica de FLRW escrita no tempo conforme:

$$d\hat{s}^2 = \hat{a}(\hat{\eta}) ds^2, \quad d\check{s}^2 = \check{a}(\check{\eta}) ds^2, \tag{7.22}$$

$$\text{com } ds^2 = -d\eta^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j \tag{7.23}$$

servindo como métrica de transição (que é, evidentemente, regular), desde que

$$\Omega = c_1 \hat{a}(\hat{\eta}), \quad \omega = c_2 \check{a}(\check{\eta}), \quad \text{logo} \quad \check{a}(\check{\eta}) = -c/\hat{a}(\hat{\eta}), \tag{7.24}$$

de acordo com a hipótese recíproca de $\Omega = -1/\omega$. Mas não vamos entrar em detalhes aqui; o assunto será abordado no Capítulo 11.

*

Estrutura conforme e Relatividade em de Sitter

A discussão acima tenta seguir de perto a formulação original do problema matemático da transição entre aeons na CCC, como apresentado por [Gurzadyan & Penrose \(2013\)](#) e elaborado por [Tod \(2013\)](#), através da solução da Equação de Yamabe. Pode-se, todavia, abordar a transição entre aeons de outras maneiras, e descrevemos agora um exemplo particularmente interessante.

Encarando a constante cosmológica $\Lambda > 0$ como uma propriedade geométrica fundamental, pode-se argumentar, seguindo [Aldrovandi *et al.* \(2007\)](#), em favor de uma modificação do Princípio de Equivalência: referenciais em queda livre, localmente livres de gravitação, devem corresponder não ao espaço-tempo de Minkowski, mas sim ao espaço-tempo de de Sitter. Ou seja, a relatividade restrita deve ser uma ‘relatividade restrita de de Sitter’. Assim como Minkowski, dS_4 é um espaço-tempo com simetria máxima, mas com curvatura finita $\sim \Lambda$, que induz uma escala (de Hubble) invariante $L = \sqrt{3/\Lambda}$. Olhando L como escala máxima tal como c é um limite máximo para a velocidade, a relatividade de de Sitter possui dois novos limites “ultra- e não-relativísticos”, dados por L indo a zero ou ao infinito. O limite “não-relativístico” $L \rightarrow \infty$ recupera o espaço-tempo de Minkowski, com $\Lambda = 0$, e no limite oposto, quando $L \rightarrow 0$, o hiperbolóide (D.1) que forma dS_4 se degenera em um cone quadridimensional \mathcal{C} . A natureza desse espaço-tempo \mathcal{C} pode ser compreendida através dos 10 vetores de Killing geradores do grupo de simetrias de dS_4 , que é isomórfico ao grupo conforme $SO(4,1)$, ver §13.1. Com uma parametrização apropriada dos geradores, vê-se que no limite “ultra-relativístico” em que $L \rightarrow 0$ o gerador de translações, P^μ , se separa da álgebra de Lie e resta apenas um vetor K^μ , correspondente a transformações especiais conformes, formando, junto com os ‘boosts’ de Lorentz, um grupo análogo ao grupo de Poincaré mas com as transformações conformes substituindo as translações. Assim, \mathcal{C} é um espaço-tempo em que as noções usuais de tempo e espaço, ditadas por P^μ , perdem o sentido, tendo sido substituídas por transformações conformes K^μ . Ou seja, o cone com $L = 0$ possui simetria conforme, sua singularidade é isotrópica com tensor de Weyl nulo, e com isso foi proposto por [Araujo *et al.* \(2015\)](#) que \mathcal{C} pode servir como o espaço-tempo de “ponte” entre dois aeons.

Na ‘relatividade geral de de Sitter’, a nova formulação do Princípio de Equivalência tem consequências *dinâmicas*, descritas, e.g. por [Aldrovandi & Pereira \(2009\)](#), e a constante cosmológica pode mudar com o tempo de uma maneira específica à medida em que o tensor de energia-momento se converte numa “corrente conforme” equivalente ao “tensor de energia-momento melhorado” de [Callan *et al.* \(1970\)](#). (Deve-se notar que [Gurzadyan & Penrose \(2013\)](#) mencionam o tensor de energia-momento melhorado como uma possível fonte de matéria escura

na CCC; ver também [Penrose \(2017\)](#).) Essa dinâmica da constante cosmológica pode ser usada para abordar a questão do pequeno valor atual de Λ e o problema da coincidência, e também pode atuar como o mecanismo levando L desde o seu grande valor atual até um limite ultrarelativístico, no futuro, em que $L \rightarrow 0$. Estritamente, L não deve chegar a zero: flutuações ao redor de \mathcal{C} para $L \sim \ell_{Pl}$ podem dar origem a um universo “inflacionário”, ou seja, a um novo big-bang.

7.3 Fenomenologia e problemas

No seu argumento para a realização da CCC, [Penrose \(2010\)](#) faz algumas hipóteses físicas que são, no mínimo, arriscadas. A justificativa apresentada para a identificação conforme das métricas físicas $\check{g}_{\mu\nu}$ e $\hat{g}_{\mu\nu}$ na transição entre aeons vem da hipótese de que, na vizinhança de \mathcal{X} , toda a matéria seja invariante conforme e, portanto, sem massa. Isso não é exatamente um problema no futuro de \mathcal{X} , onde logo após o big-bang a energia pode ser alta o suficiente para restaurar a simetria conforme, mas é um problema no passado de \mathcal{X} , onde o Universo se encontra no final da sua evolução. Neste ponto, [Penrose \(2010\)](#) sugere que:

1. Após um tempo suficientemente longo, buracos negros supermassivos no interior das galáxias terão capturado a maior parte da matéria no Universo, até que sejam eles as únicas estruturas restantes. Após mais um tempo suficientemente longo, esses buracos negros evaporam completamente, eliminando quase toda a massa-de-repouso no Universo.
2. [Penrose \(2007, 2010\)](#) reconhece que é inevitável que pelo menos alguma matéria escape dos horizontes de eventos dos buracos negros e acabe isolada no interior de seu próprio horizonte de eventos cosmológico. No momento não há qualquer evidência de que essas partículas isoladas venham a decair em partículas sem massa. O problema é particularmente difícil no que diz respeito a elétrons isolados, por causa da conservação da carga elétrica. A única maneira de resolver a questão é postular algo como o decaimento da massa-de-repouso de todas as partículas, em algum tipo de “mecanismo de anti-Higgs”. Por outro lado, no Modelo Padrão (de partículas) a existência de partículas sem massa e eletricamente carregadas é uma impossibilidade tanto teórica quanto observacional — o decaimento de um fóton em um par de partícula anti-partícula seria observável nos aceleradores atuais, e entretanto nunca foi detectado.
3. Além de servir como mecanismo de eliminação da massa de repouso, os buracos negros também serviriam para eliminar a *entropia* da matéria. Entretanto, apesar da ausência de uma solução definitiva para os paradoxos

encontrados em um tratamento semiclássico, há muitas indicações de que a evaporação de buracos negros é, afinal, unitária. Para uma revisão recente da questão, ver, e.g., [Marolf \(2017\)](#).

4. Uma das predições feitas por [Gurzadyan & Penrose \(2010\)](#) é a de que ondas gravitacionais geradas durante a colisão dos últimos buracos negros supermassivos no fim de \mathcal{A} ficariam impressas na matéria presente no início de \mathcal{A} , através dos graus de liberdade contidos na perturbação da derivada do tensor de Weyl. Durante a espiral de coalescimento (uma “versão supermassiva” do evento observado por [LIGO-VIRGO Collaboration et al. \(2016\)](#)), seriam geradas várias ondas concêntricas com um fim abrupto no instante em que ocorre a fusão. A impressão indireta das ondas na CMB teria a forma de círculos concêntricos em que a variação da temperatura seria muito menor do que o esperado pelo modelo cosmológico padrão. Em uma série de publicações, [Gurzadyan & Penrose \(2010, 2011\)](#); [Gurzadyan & Penrose \(2013\)](#) afirmaram ter *encontrado* esses círculos nos mapas de temperatura fornecidos pela WMAP; de acordo com os autores, a presença dos círculos forneceria uma evidência observacional em favor da CCC. Entretanto, com uma análise detalhada dos dados, vários grupos independentes, [Hajian \(2011\)](#); [Moss et al. \(2011\)](#); [Wehus & Eriksen \(2011\)](#) e mais tarde [DeAbreu et al. \(2015\)](#) verificaram a existência, de fato, de círculos, mas mostraram que estes são, na verdade, perfeitamente compatíveis com o espectro esperado do modelo Λ CDM. (Uma análise curiosa da história e seus desdobramentos é apresentada por [Eriksen & Wehus \(2011\)](#).)
5. Muito recentemente, [Penrose \(2017\)](#) propôs que partículas escalares de massa altíssima, da ordem da massa de Planck, $\sim 10^{-5}$ gramas, sejam as componentes da matéria escura, geradas no aeon anterior ao nosso, e correspondentes ao campo escalar ω , nas linhas do que foi descrito no §7.2. Aparte a existência ou não da CCC e de aeons anteriores, o ponto mais interessante da proposta talvez seja uma sugestão concreta para uma possível verificação do decaimento de matéria escura. De acordo com [Creswell et al. \(2017\)](#), há uma suposta correlação entre os ruídos de fundo medidos nos dois interferômetros do LIGO, uma afirmação que foi questionada pela equipe da colaboração LIGO-VIRGO. De acordo com a proposta de Penrose, a correlação entre os ruídos deve sim ser verdadeira, sendo causada não por defeito de estatística ou por ruídos terrestres, mas sim por ondas gravitacionais legítimas, emitidas no decaimento de partículas de matéria escura presentes na galáxia que hospeda os buracos negros cuja colisão deu origem à medição principal. Se este for o caso, basta apontar os detectores para outras galáxias (onde há aglomeração de matéria escura) para mais

uma vez se medir uma correlação entre “ruídos” (com o intervalo de tempo correspondente à posição da galáxia em questão).

*

Independente das particularidades fenomenológicas da proposta original, é a noção de uma “transição conforme” entre um infinito futuro tipo-espaço \mathcal{I}^+ e um big-bang a idéia principal do formalismo da CCC que nos interessará futuramente. Outras maneiras de implementá-la, além das que mencionamos acima, serão exploradas na parte III desta tese.

Parte III

Dualidade do Fator de Escala no Tempo Conforme

Capítulo 8

A Dualidade do Fator de Escala

A pesquisa apresentada nesta tese se dedica a modelos cosmológicos relacionados a uma dualidade de inversão do fator de escala no tempo conforme, na gravitação de Einstein. A idéia é similar à dualidade original introduzida na cosmologia de cordas por Veneziano (1991), e que revisamos no §6.2: desejamos implementar uma simetria que relacione pequenas escalas (altas energias) a grandes escalas (baixas energias) na evolução do Universo. Como veremos a seguir, as características da transformação $a \mapsto 1/a$ são distintas para cada escolha de coordenada temporal. Por exemplo, no tempo cósmico a dualidade necessariamente viola a condição fraca de energia, enquanto no tempo conforme a condição é preservada (dentro de um limite). Neste Capítulo 8 descrevemos em detalhes as propriedades da dualidade no tempo conforme, e os capítulos seguintes serão devotados a explorar suas consequências na construção de diversos tipos de cosmologias.

8.1 A dualidade do fator de escala na gravitação de Einstein

Desejamos implementar uma simetria de inversão do fator de escala nas equações de Friedmann. No ansatz geral da métrica de Robertson-Walker, dado pela Eq.(2.5),

$$ds^2 = -N^2(\tau)d\tau^2 + a^2(\tau)ds_{\mathcal{H}}^2, \quad (8.1)$$

com uma coordenada tipo-tempo $x^0 = \tau$ arbitrária e determinada pela escolha da função lapso $N(\tau)$, as equações de Friedmann são

$$\frac{1}{N^2} \left(\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} \right)^2 = \frac{\varkappa^2}{3} \rho - \frac{K}{a^2}, \quad (8.2a)$$

$$\frac{1}{N^2} \frac{da/d\tau}{a} \left[\frac{a}{da/d\tau} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} \right) + \frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} - \frac{1}{N} \frac{dN}{d\tau} \right] = -\frac{\varkappa^2}{6} (\rho + 3P). \quad (8.2b)$$

A inversão do fator de escala corresponde à transformação

$$a \mapsto \tilde{a} = c^2/a, \quad (8.3)$$

onde c é uma constante positiva adimensional. O objetivo é que, após a transformação, as Eqs.(8.2) sejam preservadas. Neste caso, a função \tilde{a} , sendo também uma solução das equações de Friedmann, corresponde ao fator de escala de um ‘universo dual’ àquele descrito por a . Uma vez que

$$\frac{1}{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{d\tau} = -\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau}, \quad (8.4)$$

a inversão do fator de escala naturalmente mapeia

$$\text{universos em } \textit{expansão} \mapsto \text{universos em } \textit{contração},$$

mas como as derivadas temporais só estão presentes ao quadrado, as equações (8.2) são explicitamente invariantes sob a transformação linear

$$\tau \mapsto \pm\tau + \text{constante}. \quad (8.5)$$

Uma composição de ambas as transformações (8.3) e (8.5) têm o efeito de mudar o sinal em (8.4), levando a um mapa entre dois universos que se expandem ou contraem. Repare que o termo de curvatura K/a^2 em princípio viola a simetria, e por isso faça, por enquanto, $K = 0$.

A função lapso $N(\tau)$ não possui dinâmica; corresponde a uma escolha (de calibre) do sistema de coordenadas. Sendo a o único grau de liberdade da métrica (8.1), a evolução da função N é regulada por sua evolução, $N(\tau) = N(a(\tau))$, e a forma da função lapso dual \tilde{N} tem que coincidir com a forma de N . Caso contrário, além da inversão do fator de escala (8.3) estaríamos realizando uma troca de coordenadas, ou seja

$$\tilde{N} = N(\tilde{a}). \quad (8.6)$$

A transformação (8.3) introduz novos termos do lado esquerdo das equações de movimento e por isso sua invariância requer uma transformação das fontes, isto é, de P e ρ . Usando a Eq.(8.4), a Eq.(8.2a) (com $K = 0$) dá

$$\tilde{N}^2 \tilde{\rho} = \frac{3}{\varkappa^2} \left(\frac{1}{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{d\tau} \right)^2 = \frac{3}{\varkappa^2} \left(-\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} \right)^2 = N^2 \rho,$$

ou seja, a transformação para a densidade de energia é simplesmente

$$N^2 \rho = \tilde{N}^2 \tilde{\rho}. \quad (8.7a)$$

Estando definida $\tilde{\rho}$, a Eq.(8.2b) fornece, mesmo que de maneira um tanto implícita, a transformação da pressão $P \mapsto \tilde{P}$. Partindo da equação dual

$$\frac{1}{\tilde{N}^2} \frac{d\tilde{a}/d\tau}{\tilde{a}} \left[\frac{\tilde{a}}{d\tilde{a}/d\tau} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{d\tau} \right) + \frac{1}{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{d\tau} - \frac{1}{\tilde{N}} \frac{d\tilde{N}}{d\tau} \right] = -\frac{\varkappa^2}{6} (\tilde{\rho} + 3\tilde{P}),$$

e usando (8.4), temos

$$\begin{aligned} -\frac{\varkappa^2}{6} (\tilde{\rho} + 3\tilde{P}) &= -\frac{1}{\tilde{N}^2} \frac{da/d\tau}{a} \left[\frac{a}{da/d\tau} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{d\tau} \right) - \frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} - \frac{1}{\tilde{N}} \frac{d\tilde{N}}{d\tau} \right] \\ &= \left(\frac{N}{\tilde{N}} \right)^2 \frac{\varkappa^2}{6} (\rho + 3P) + \frac{1}{\tilde{N}^2} \left(\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} \right) \left[2 \left(\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} \right) - \frac{1}{N} \frac{dN}{d\tau} + \frac{1}{\tilde{N}} \frac{d\tilde{N}}{d\tau} \right] \\ &= \left(\frac{N}{\tilde{N}} \right)^2 \frac{\varkappa^2}{6} (\rho + 3P) + \left(\frac{N}{\tilde{N}} \right)^2 \left(\frac{1}{Na} \frac{da}{d\tau} \right)^2 \left[2 - \frac{\delta N}{\delta a} \left(\frac{1}{N} + \frac{c^2}{a^2 \tilde{N}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Na última linha, usamos a Eq.(8.6) para eliminar \tilde{N} e sua derivada:

$$\begin{aligned} dN/d\tau &= (\delta N/\delta a)(da/d\tau) \quad \text{e} \\ d\tilde{N}/d\tau &= (\delta N/\delta a)(d\tilde{a}/d\tau) = -c^2 a^{-2} (\delta N/\delta a)(da/d\tau). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$-\tilde{N}^2 (\tilde{\rho} + 3\tilde{P}) = N^2 (\rho + 3P) + 2N^2 \left[2 - \frac{a}{c^2} \frac{\delta N}{\delta a} \left(\frac{c^2}{N} + \frac{\tilde{a}^2}{\tilde{N}} \right) \right] \rho. \quad (8.7b)$$

As Eqs.(8.7) fornecem a transformação das fontes, para qualquer escolha da função N . Em outras palavras, escolhida a função lapso, temos a transformação adequada de P e ρ para que as Equações de Friedmann sejam simétricas sob a inversão (8.3). A relação pode ser escrita também em termos da equação de estado para o fluido,

$$P(\rho) \equiv w(\rho) \rho.$$

Com a transformação da energia (8.7a), a fórmula (8.7b) fornece diretamente

$$\tilde{w}(\tilde{\rho}) = -w(\rho) - \frac{2}{3} \left[3 - \frac{a}{c^2} \frac{\delta N}{\delta a} \left(\frac{c^2}{N} + \frac{\tilde{a}^2}{\tilde{N}} \right) \right]. \quad (8.8)$$

Existem duas escolhas usuais para o lapso na métrica de Robertson-Walker: uma corresponde ao tempo cósmico, com $N = 1$, e a outra ao tempo conforme, com $N = a$.

*

A dualidade do fator de escala no tempo cósmico

No tempo cósmico $\tau = t$, com $N = 1$, as equações de Friedmann (8.2) assumem sua forma usual:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\chi^2}{3}\rho; \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\chi^2}{6}(\rho + 3P), \quad (8.9)$$

com $K = 0$. As Eqs.(8.7) dão as transformações de simetria

$$\tilde{a}(t) = c^2/a(t); \quad \tilde{\rho} = \rho, \quad \tilde{P} = -P - 2\rho, \quad (8.10)$$

e a Eq.(8.4) expressa a invariância, modulo um sinal, da função de Hubble:

$$\tilde{H}(t) = -H(t), \quad \tilde{H}(\tilde{t}) = H(t) \quad (8.11)$$

onde $\tilde{t} = -t + \text{constante}$ corresponde à reflexão temporal (8.5). As Eqs.(8.10)-(8.11), foram descobertas por [Dabrowski *et al.* \(2003\)](#) e também analisadas por [Chimento & Lazkoz \(2003\)](#) (ver também [Chimento & Zimdahl \(2008\)](#)), que as utilizaram para descrever modelos fantasmas (cf. §8.3.1) em termos de cosmologias com um campo escalar usual. De fato, essa transformação é muito apropriada para tanto, já que mapeia parâmetros de equação de estado, de acordo com a Eq.(8.8),

$$\tilde{w} = -w - 2, \quad (8.12)$$

o que deixa evidente que qualquer fluido com $w < 1$ será mapeado em um dual com $\tilde{w} < -1$, e portanto todas as cosmologias usuais têm como dual uma cosmologia fantasma. Ou seja, o fluido dual sempre viola a Condição Fraca de Energia. Em particular,

$$w = \frac{1}{3} \quad (\text{radiação}) \quad \mapsto \quad \tilde{w} = -\frac{7}{3} \quad (\text{“radiação dual”}); \quad (8.13)$$

os autores usam estes dois fluidos duais como base para a construção de outros fluidos com equação de estado arbitrária.

A relação entre diferentes valores de w e seu dual \tilde{w} pode ser lida na Fig.8.1. É imediato ver que todos os universos duais possuem parâmetro de desaceleração (2.34) negativos, i.e. $\tilde{q} = \frac{1}{2}(1 + 3\tilde{w}) < 0$, a não ser que $w < -\frac{5}{3}$. Logo existem universos desacelerados (com $w > -1/3$) mapeados em universos acelerados (com $\tilde{w} < -5/3$), e existem universos acelerados mapeados em universos também acelerados.

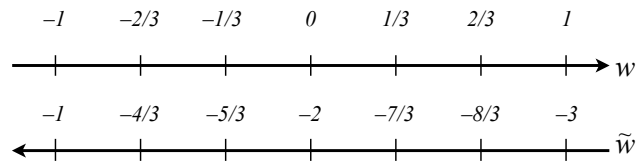


Figura 8.1: Eq.(8.12). Cada valor de w se encontra acima de seu dual.

8.2 A Dualidade do Fator de Escala no tempo conforme (DFE)

A base da pesquisa nesta tese é a dualidade do fator de escala determinada por (8.3) e (8.7), no tempo conforme η . Com $N = a$ e $\tau = \eta$, as equações de Friedmann se escrevem

$$\left(\frac{a'}{a^2}\right)^2 = \frac{\varkappa^2}{3}\rho - \frac{K}{a^2}; \quad \frac{a''}{a^2} - \frac{1}{a}\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = -\frac{\varkappa^2}{6}(\rho + 3P). \quad (8.14)$$

O apóstrofo sempre vai indicar derivada a respeito de η . De acordo com as Eqs.(8.7) temos

$$\tilde{a}(\eta) = c^2/a(\tilde{\eta}); \quad \text{com } \tilde{\eta} = \pm\eta + \text{constante}, \quad \text{e} \quad (8.15a)$$

$$\tilde{a}^2(\tilde{\rho} + 3\tilde{P}) = -a^2(\rho + 3P), \quad (8.15b)$$

$$\tilde{a}^2\tilde{\rho} = a^2\rho. \quad (8.15c)$$

As Eqs.(8.15) dão as transformações de simetria que deixam invariantes as equações de Friedmann no tempo conforme. Em tudo o que segue, ao nos referirmos a ‘*dualidade do fator de escala (DFE)*’ estaremos nos referindo a estas fórmulas em específico, a não ser que se diga explicitamente o contrário.

8.2.1 Universos acelerados & desacelerados

A transformação (8.15b) deixa claro que a dualidade do fator de escala mapeia exclusivamente universos acelerados em universos desacelerados, e deixa invariante um universo com aceleração zero. Em termos do parâmetro de desaceleração, $\tilde{q} = -q$. A Eq.(8.8) dá a transformação do parâmetro da equação de estado,

$$\tilde{w}(\tilde{\rho}) = -w(\rho) - \frac{2}{3}, \quad (8.16)$$

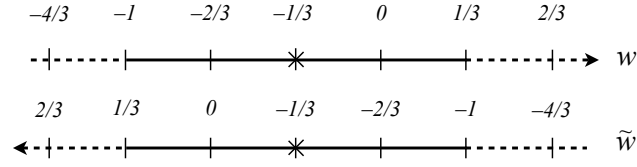


Figura 8.2: Eq.(8.16). Cada valor de w se encontra acima de seu dual.

que pode ser visualizada na Fig.8.2. A transformação é simétrica por reflexão sobre o ponto $w = -1/3 = \tilde{w}$, e por isso o intervalo $[-1, 1/3]$, cujo centro é $-1/3$, é invariante sob a transformação. Então para qualquer fluido que tenha $-1 \leq w(\rho) \leq 1/3$ o fluido dual também terá $-1 \leq \tilde{w}(\rho) \leq 1/3$ e portanto ambos preservam a Condição Fraca de Energia. Vamos nos concentrar principalmente em equações de estado que permaneçam dentro deste intervalo, mas veja o §8.3.1.

*

Exemplos de universos duais

Usando a solução (2.37) para a equação da continuidade, a densidade de energia se dilui com o fator de escala de acordo com

$$\rho = \rho_w \times a^{-3(1+w)} \quad \text{para } w = \text{constante.} \quad (8.17)$$

As Eq.(8.16) e (8.15c) mostram que a densidade dual obedece $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_w \times a^{-3(1+\tilde{w})} = \tilde{\rho}_w \times a^{1-3w}$, com as constantes ρ_w e $\tilde{\rho}_w$ ligadas uma a outra,

$$\rho = \rho_w a^{-3(1+w)} \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}_w \tilde{a}^{-1+3w}; \quad (8.18)$$

$$\text{com } \tilde{\rho}_w = c^{2(1+3w)} \rho_w, \quad (8.19)$$

Seguem os exemplos mais importantes de pares de fluidos duais com w constante.

— *Radiação & Constante Cosmológica:*

$$w = 1/3 \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{w} = -1 \quad (8.20a)$$

$$\rho = \rho_R a^{-4} \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}_\Lambda, \quad (8.20b)$$

$$\rho_R / \tilde{\rho}_\Lambda = c^{-4}. \quad (8.20c)$$

— *Poeira (matéria escura) & Paredes de Domínio Cóslicas:*

$$w = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{w} = -2/3 \quad (8.21a)$$

$$\rho = \rho_M a^{-3} \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{PD} \tilde{a}^{-1}, \quad (8.21b)$$

$$\rho_M / \tilde{\rho}_{PD} = c^{-2}. \quad (8.21c)$$

— *Gás de cordas, autodual:*

$$w = -1/3 = \tilde{w} \quad (8.22a)$$

$$\rho = \rho_C a^{-2} \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}_C \tilde{a}^{-2}, \quad (8.22b)$$

$$\rho_C / \tilde{\rho}_C = 1. \quad (8.22c)$$

O gás de cordas é o exemplo mais simples de um fluido (parcialmente) *autodual*, isto é, que se transforma em si mesmo a menos do valor parâmetro ρ_C .

Como se pode ver da Eq.(8.2a), a contribuição da curvatura para as Equações de Friedmann pode ser tratada como uma componente $\rho = \rho_C/a^2$ da densidade de energia, com

$$\rho_C = -3K/\kappa^2, \quad (8.23)$$

e esta dependência com o inverso do quadrado do fator de escala é a mesma do gás de cordas, correspondente a $w = -1/3$. Ou seja:

O termo de curvatura nas Equações de Friedmann é invariante sob as transformações (8.15). Portanto, a Dualidade do Fator de Escala no tempo conforme é uma simetria dos universos de Friedmann com curvatura não-nula.

É este o motivo de mantermos o termo de curvatura nas Eqs.(8.14) (comparar com as Eqs.(8.9) no tempo cósmico).

8.2.2 Geometria conforme de universos duais

No tempo conforme, a métrica de FLRW

$$ds^2 = a^2(\eta)\{-d\eta^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)\} \quad (8.24)$$

tem no fator de escala um fator conforme $\Omega^2(x) = a^2(\eta)$. Portanto, a DFE é uma transformação de Weyl, $\Omega(\eta) \mapsto 1/\Omega(\eta)$, e, como toda transformação conforme, deixa invariante a estrutura dos cones de luz do espaço-tempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$. No que segue, analisamos em algum detalhe as propriedades geométricas dessa transformação.

*

O tempo conforme e a dualidade

Usando a Equação de Friedmann na Eq.(8.15c), escreva a DFE como

$$\tilde{a} = c^2/a, \quad \tilde{a}\tilde{H} = \pm aH, \quad (8.25)$$

onde $H \equiv (1/a)(da/dt) = a'/a^2$ é a função de Hubble. O sinal \pm surge ao se tirar a raiz quadrada de (8.15c). O sinal é positivo se ambos os universos duais se expandem (ou contraem), e negativo se um contrai e o outro se expande. Não há, em (8.25), nenhuma menção (explícita) à transformação de η enquanto argumento das funções. Escreva

$$\eta - \eta_0 = \int_{t_0}^t dt/a(t) = \int_{a_0}^a da/(Ha^2), \quad (8.26)$$

com uma constante de integração arbitrária tal que $a(\eta_0) = a_0$. Usando as Eqs.(8.25), com $d\tilde{a}/\tilde{a} = (a/c^2)d(c^2/a) = -da/a$, temos

$$\eta(a) - \eta_0 = \int_{a_0}^a \frac{1}{Ha} \frac{da}{a} = - \int_{\tilde{a}(a_0)}^{\tilde{a}(a)} \frac{1}{\tilde{H}\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{\tilde{a}}. \quad (8.27)$$

Ora, a última integral é simplesmente o tempo conforme dual, $\tilde{\eta}(\tilde{a}) - \tilde{\eta}_0 = \int_{\tilde{a}_0}^{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}'}{\tilde{H}'\tilde{a}'^2}$, com zero fixado em $\tilde{\eta}(\tilde{a}_0) = \eta_0$, tal que $\tilde{a}_0 \equiv \tilde{a}(a_0) = c^2/a_0$. Ou seja:

$$\tilde{\eta}(\tilde{a}) = -\eta(a) + \eta_*, \quad (8.28)$$

com $\eta_* = \tilde{\eta}_0 + \eta_0$, o que é nada mais que a transformação linear do tempo conforme escrita em (8.15a), aqui com o sinal negativo, $\tilde{\eta} = -\eta + \text{constante}$. Se tivéssemos escolhido $\tilde{a}\tilde{H} = -aH$, é imediato ver que chegaríamos a $\tilde{\eta} = \eta + \text{constante}$. A interpretação física é óbvia: a inversão do fator de escala sempre liga um universo que se expande a um dual em contração, e para que haja expansão em ambos é necessária a inversão temporal.

*

Mapas de horizontes

A transformação (8.28) mapeia $\mathcal{C}^\pm \mapsto \mathcal{C}^\mp$, como se vê da Eq.(2.46). Além disso, usando a Eq.(2.50) é imediato perceber que a transformação dual (8.27) atua sobre os horizontes com

$$r_P = \int_0^a \frac{1}{Ha} \frac{da}{a} = - \int_\infty^{\tilde{a}} \frac{1}{\tilde{H}\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{\tilde{a}} = \tilde{r}_F, \quad (8.29)$$

mostrando que a DFE mapeia horizontes (de eventos) cosmológicos e em horizontes de partículas, e vice-versa. Repare que nem sempre um espaço-tempo cosmológico possui os dois tipos de horizonte como na Fig.2.2. Ali, o universo tem uma “vida conforme”

$$\eta_f = \int_0^\infty \frac{1}{Ha} \frac{da}{a} = r_P + r_F \quad (8.30)$$

finita. (Cf. Eq.(2.51).) Mas pode acontecer de se ter um horizonte de partículas mas não um horizonte cosmológico, i.e. $r_F = \infty = \eta_f$ apesar de r_P ser finito; é o que ocorre em universos desacelerados, e.g. um universo de radiação. Nesse caso, seu dual terá um horizonte cosmológico mas não um horizonte de partículas, i.e. $\tilde{r}_F = r_P$ finito, enquanto $\tilde{r}_P = r_F = \infty$; é o que ocorre com universos acelerados. A Eq.(8.29) mostra que um par de universos duais possui a mesma duração, pois

$$\tilde{\eta}_f = \tilde{r}_P + \tilde{r}_F = r_F + r_P = \eta_f, \quad (8.31)$$

o que vale tanto para universos com η_f finito como para aqueles que não possuem um dos tipos de horizonte, caso em que $\eta_f = \tilde{\eta}_f = \infty$.

Por fim, em um espaço-tempo de FLRW o raio físico ℓ_A do horizonte aparente, é dado por (2.55), $\ell_A = 1/\sqrt{H^2 + K/a^2}$. Sob a transformação de dualidade, como $a^2\rho = \tilde{a}^2\tilde{\rho}$ e, de acordo com as equações de Friedmann, $\rho = \frac{6}{\kappa^2}(H^2 + K/a^2)$, ficamos com

$$\tilde{r}_A = \tilde{\ell}_A/\tilde{a} = \ell_A/a = r_A. \quad (8.32)$$

Ou seja, *o raio comóvel do horizonte aparente é invariante sob a DFE.*

*

Diagramas de Penrose duais

O elemento de linha $d\tilde{s}^2$ do universo dual pode ser escrito na mesma forma (B.9)

$$d\tilde{s}^2 = \frac{1}{4} \tilde{a}^2(\tilde{\eta}(\tilde{\chi}, \tilde{\tau})) \sec^2\left(\frac{\tilde{\chi}+\tilde{\tau}}{2}\right) \sec^2\left(\frac{\tilde{\chi}-\tilde{\tau}}{2}\right) (-d\tilde{\tau}^2 + d\tilde{\chi}^2 + \text{sen}^2\tilde{\chi} d\phi^2), \quad (8.33)$$

Vamos nos concentrar no caso mais interessante em que ambos os universos se expandem, e portanto há uma reflexão de η . De acordo com as Eqs.(B.3), é fácil ver que as coordenadas sobre o cilindro de Einstein ficam mapeadas em

$$\tau \mapsto \tilde{\tau} = -\tau; \quad (8.34a)$$

$$\chi \mapsto \tilde{\chi} = \chi; \quad (8.34b)$$

$$a(\chi, \tau) \mapsto \tilde{a}(\tilde{\chi}, \tilde{\tau}) = c^2/a(\chi, -\tau). \quad (8.34c)$$

As consequências destas transformações para o diagrama de Penrose do universo dual são as seguintes.

O formato do diagrama causal: Em primeiro lugar, fica claro que o formato do diagrama dual é o mesmo formato do diagrama original, mas espelhado sobre o eixo $\tau = 0$. Isto é: se p é um ponto do diagrama original, ele passa a ser mapeado em \tilde{p} no diagrama dual de acordo com

$$p = \{\chi, \tau\} \mapsto \tilde{p} = \{\chi, -\tau\}. \quad (8.35)$$

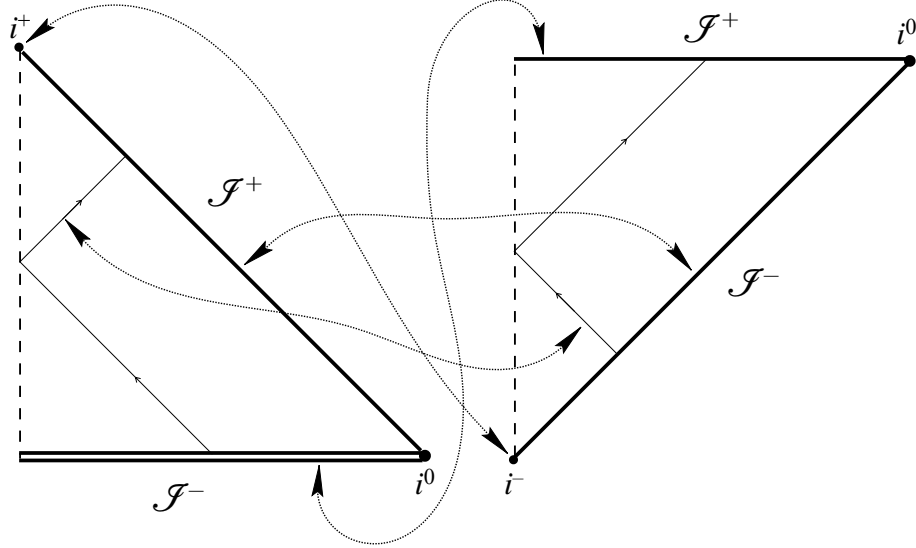


Figura 8.3: Diagramas de Penrose duais para universos com w constante.

Os infinitos i^\pm e i^0 : Consequentemente, os infinitos tipo-tempo passam a ser invertidos, i.e.

$$i^+ \mapsto i^- ; \quad i^- \mapsto i^+, \quad (8.36)$$

enquanto o infinito tipo-espaço fica invariante: $i^0 \mapsto i^0$. Note que caso um diagrama não possua, digamos, i^+ , seu dual não possuirá i^- .

Os infinitos \mathcal{I}^\pm : Vamos considerar universos do tipo big-bang, em que o fator de escala $a(\eta)$ tem domínio $a \in (0, \infty)$. Neste caso o domínio do fator de escala dual é também a semi-reta, com o mapa sendo dado pela Eq.(8.34c) $a \in (0, \infty) \mapsto \tilde{a} \in (\infty, 0)$, e com isso

$$\mathcal{I}^+ \mapsto \mathcal{I}^- ; \quad \mathcal{I}^- \mapsto \mathcal{I}^+. \quad (8.37)$$

Combinando (8.35) e (8.37) temos que se um espaço-tempo possui singularidade tipo-espaço e infinito futuro tipo-luz, seu dual vai possuir \mathcal{I}^- tipo-luz e \mathcal{I}^+ tipo-espaço. Daí se conclui que, se desejarmos que a DFE seja uma simetria do universo em questão (i.e., que ele seja *autodual* no sentido do Capítulo 9), então a estrutura causal da singularidade deve ser igual à estrutura causal do futuro infinito (ambos tipo-espaço ou nulos). O mapa entre singularidade e infinito futuro é o limite extremo da propriedade da DFE de mapear escalas grandes em pequenas, e vice-versa.

Os cones de luz: Os cones de luz são as retas de inclinação unitária, i.e. $\chi - \chi' = \pm(\tau - \tau')$, com \pm correspondendo a cones futuro e passado, respectivamente. Logo, se \mathcal{C}_p^\pm são os cones futuro e passado do ponto $p \in (\mathcal{M}, \mathbf{g})$, e \tilde{p} é dado por (8.35)

$$\mathcal{C}_p^\pm \mapsto \mathcal{C}_{\tilde{p}}^\mp. \quad (8.38)$$

Os horizontes cosmológicos de evento e de partícula: O horizonte de eventos de um observador é por definição o cone passado de sua posição em \mathcal{I}^+ ; o horizonte de partículas é por definição o cone futuro de sua posição em \mathcal{I}^- . As relações (8.37) e (8.38), portanto, significam que *Horizontes de eventos* \mapsto *Horizontes de partícula*, e *Horizontes de partícula* \mapsto *Horizontes de eventos*. Ambos os horizontes só se tornam relevantes se os respectivos cones de luz não englobam o espaço-tempo inteiro. É fácil ver então que se \mathcal{I}^+ é tipo-espaço há horizonte de eventos; se \mathcal{I}^- é tipo-espaço há horizonte de partículas. (Em um universo autodual deve haver os dois tipos de horizontes ou nenhum, o que é coerente com o que foi dito em 8.2.2. sobre \mathcal{I}^\pm possuírem a mesma estrutura.) Comparar com §8.2.2.

8.3 A dualidade e o campo escalar

As transformações (8.15) para um campo escalar σ sujeito ao potencial $V(\sigma)$ podem ser obtidas através da correspondência (2.21) com o tensor de energia-momento de um fluido perfeito:

$$\rho = \frac{1}{2}(\sigma'/a)^2 + V, \quad P = \frac{1}{2}(\sigma'/a)^2 - V. \quad (8.39)$$

Primeiro note que, da Eq.(8.15b) e com o auxílio da Eq.(8.15c), a pressão dual $\tilde{P} = -(a^2/\tilde{a}^2)(P + 6\rho)$, de onde se pode escrever

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \tilde{V} + \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}'/\tilde{a}) = (a/\tilde{a})^2 \rho \\ \tilde{P} &= -\tilde{V} + \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}'/\tilde{a}) = -(a/\tilde{a})^2(P + 6\rho); \end{aligned}$$

que por subtração fornecem $\tilde{a}^2\tilde{V} = 3a^2V + 2(\sigma')^2$. Usando a equação de Friedmann (2.30a) para o campo escalar, com $K = 0$, elimina-se a derivada do campo no lado direito, portanto

$$\tilde{a}^2\tilde{V} = -a^2V + 12(a'/a)^2. \quad (8.40)$$

Sabendo o fator de escala como função de σ a Eq.(8.40) fornece a transformação do potencial. Será de útil uma fórmula que forneça essa relação entre a e σ a partir

do conhecimento da equação de estado $w = P/\rho$ de um fluido com densidade de energia $\rho = \rho(a)$. Tal fórmula pode ser obtida como segue. Das Eqs.(8.39) temos que $(\sigma'/a)^2 = (1+w)\rho$, e dividindo esta pela equação da continuidade na forma $a d\rho/da = -3(P+\rho)$ temos que

$$d\sigma/d\eta = a' d\sigma/da = \pm \sqrt{-\frac{1}{3}a^3 (d\rho/da)}. \quad (8.41)$$

Agora, usando a primeira das Eqs.(8.14) para eliminar $da/d\eta$ obtemos a integral

$$\sigma(a) = \pm \int da \sqrt{\frac{2a (d\rho/da)}{6K - a^2\rho}}. \quad (8.42)$$

(Aqui $\kappa^2 = 8\pi G = 1$.) É esta a fórmula desejada, que pode (ao menos em princípio) ser invertida para fornecer $a = a(\sigma)$ e daí completar a transformação dual de $\tilde{V}(\tilde{\sigma})$ na Eq.(8.40). Para encontrar transformação do campo dual, i.e. $\sigma = \sigma(\tilde{\sigma})$, note que da Eq.(8.41) segue que

$$(d\sigma/d\rho)^2 = -\frac{1}{3}a^3(d\rho/da)(d\rho/d\eta)^{-2} = -\frac{1}{3}a^3(da/d\rho)(a')^{-2}.$$

Usando mais uma vez a primeira das Eqs.(8.14) e a equação da continuidade,

$$d\sigma/d\rho = \pm \frac{\sqrt{2/3}}{\rho \sqrt{1+w}}. \quad (8.43)$$

Uma equação idêntica é válida para o campo dual e portanto

$$d\sigma/d\tilde{\sigma} = (d\rho/d\tilde{\rho}) (\tilde{\rho}\sqrt{1+\tilde{w}})/(\rho\sqrt{1+w}).$$

Usando a Eq.(8.15c) para calcular $d\tilde{\rho}/d\rho$, com alguma manipulação se obtém

$$d\sigma/d\tilde{\sigma} = \pm \sqrt{\frac{1-3\tilde{w}}{1-3w}} = \pm \sqrt{\frac{3(1+w)}{1-3w}}. \quad (8.44)$$

Sabendo $\rho = \rho(a)$ e $a = a(\sigma)$, a Eq.(8.44) dá a relação entre os campos duais.

*

Superpotencial

Existe uma maneira de se expressar a dualidade entre os campos escalares sem a necessidade de se recorrer à descrição termodinâmica (8.39). O método consiste na substituição das equações de Friedmann por um sistema de equações

diferenciais de primeira ordem. Defina uma função $W(a)$, que chamaremos de ‘superpotencial’,¹ tal que

$$(a'/a)^2 = (\varkappa^2/4) (a^2W^2 - 4K/\varkappa^2), \quad (8.45a)$$

$$\sigma'^2 = -(1/2) a^3 d(W^2)/da. \quad (8.45b)$$

Derivando as equações acima, vê-se que este sistema de primeira ordem *resulta no* sistema de segunda ordem das Eqs.(2.30a) e (2.31), viz.

$$(a'/a^2)^2 = (\varkappa^2/6) [(\sigma'/a)^2 + 2V(\sigma)] + K/a^2, \quad \sigma'' + 2(a'/a)\sigma' = -a^2 dV/d\sigma,$$

desde que o potencial tenha a forma

$$V(\sigma) = (3/2)W^2 + (a/4) d(W^2)/da. \quad (8.46)$$

Ou seja, existe uma *classe* de modelos cosmológicos, tais que $V(\sigma)$ respeita o vínculo (8.46), que pode ser descrita pelo sistema (8.45). (Em outras palavras, soluções do sistema de primeira ordem sempre são soluções do sistema de segunda ordem original, mas o contrário não é verdade.) Este formalismo troca a especificação do potencial $V(\sigma)$ (i.e. da Lagrangeana) pela especificação do superpotencial, já que a solução do sistema (8.45) requer que se saiba de antemão a função $W(a)$. Note que isso é também equivalente a se especificar a equação de estado na representação termodinâmica: a equação de Friedmann (2.28a) mostra que $W^2 = (2/3)\rho$, então fornecer $W(a)$ é fornecer uma solução da Eq.(2.35) e, portanto, equivalentemente, a fornecer uma equação de estado $w(\rho)$. As soluções cosmológicas usuais com w constante são todas descritíveis por superpotenciais simples através da Eq.(2.37).

Uma vez que, sob a DFE, $(\tilde{a}'/\tilde{a})^2 = (a'/a)^2$, a Eq.(8.45a) que define o superpotencial dá a transformação simples

$$a^2W^2 = \tilde{a}^2\tilde{W}^2. \quad (8.47)$$

Derivando esta relação, é fácil encontrar a transformação do potencial (8.46),

$$\tilde{V} = -(a/c)^4 V + 2(a/c)^4 W^2. \quad (8.48)$$

A transformação do campo pode ser obtida a partir da razão entre as Eqs.(8.45),

$$(da/d\sigma)^2 = \frac{(\varkappa^2/2)(a^2W^2 - 4K)}{-adW^2/da}, \quad (8.49)$$

¹Apesar de aparentemente ad hoc, o sistema (8.45) surge naturalmente no contexto de paredes de domínio em teorias de supergravitação, e é de lá que se tira o nome ‘superpotencial’; ver Cvetič & Soleng (1995, 1997). Existe uma continuação analítica simples que transforma paredes de domínio em espaços de Robertson-Walker, o que leva a aplicações cosmológicas do sistema de primeira ordem; ver, e.g., Skenderis *et al.* (2007); Townsend (2008).

cuja solução fornece $a(\sigma)$. Observe que

$$da/d\sigma = (d\tilde{\sigma}/d\sigma) \times (da/d\tilde{\sigma}) = -(d\tilde{\sigma}/d\sigma) \times (c/\tilde{a})^2 \times (d\tilde{a}/d\tilde{\sigma}),$$

e se pode encontrar $d\tilde{\sigma}/d\sigma$ usando a equação dual à Eq.(8.49). Fazendo $K = 0$ por simplicidade, e eliminando dW^2/da em favor do potencial V através de (8.46), com alguma manipulação se chega a

$$d\sigma/d\tilde{\sigma} = \varepsilon \sqrt{\frac{2V(\sigma) - 3W^2(\sigma)}{W^2(\sigma) - 2V(\sigma)}}, \quad (8.50)$$

onde $\varepsilon = \text{Sinal}[-(da/d\sigma)/(d\tilde{a}/d\tilde{\sigma})]$. Sabendo $W(\sigma)$, a integração da equação acima dá $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\sigma)$. As fórmulas (8.47)-(8.50) equivalem às transformações já encontradas em termos da descrição termodinâmica, como se pode verificar facilmente.

8.3.1 Modelos fantasmas

Uma componente ‘*fantasma*’ na matéria do universo é um fluido, ou um campo escalar equivalente, tal que a equação de estado é ‘supernegativa’,

$$w < -1.$$

Esses modelos foram introduzidos por Caldwell (2002)¹ para tentar explicar a então recém observada expansão acelerada do Universo. Para um campo escalar, a condição fantasma $P < -\rho$, de acordo com a identificação (2.21), significa que

$$(1/2)\dot{\sigma}^2 - V(\sigma) < -[(1/2)\dot{\sigma}^2 + V(\sigma)] \quad \text{ou seja} \quad \dot{\sigma}^2 < 0.$$

Evidentemente, um campo escalar comum não satisfaz essa condição, e por isso um ‘campo fantasma’ se obtém através de uma modificação (“desesperada”, segundo Gibbons (2003)) da Lagrangeana (2.18), invertendo-se o sinal da energia cinética:

$$\mathcal{L}_{fantasma} = +\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma - V(\sigma). \quad (8.51)$$

No caso homogêneo e isotrópico, a analogia com o fluido perfeito fica então

$$\rho = -\frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 + V, \quad \text{e} \quad P = -\frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 - V, \quad (8.52)$$

¹Que explica sua escolha para a nomenclatura como “A phantom is something which is apparent to the sight or other senses but has no corporeal existence—an appropriate description for a form of energy necessarily described by unorthodox physics”.

de modo que a condição $P/\rho < -1$ equivale a $-\dot{\sigma}^2 < 0$ e é satisfeita automaticamente. De maneira pragmática, obtém-se um fluido fantasma a partir de um fluido comum fazendo uma “rotação de Wick” na derivada

$$\dot{\sigma}_{fantasma} = i\dot{\sigma}_{comum}. \quad (8.53)$$

Como discutido por [Carroll *et al.* \(2003\)](#), fluidos fantasmas violam todas as condições de energia, já que $\rho + P < 0$, e a energia negativa torna o campo fantasma instável, permitindo reações em cadeia descontroladas como o decaimento de um ‘fantom’ em um número infinito de partículas.

Como visto acima, a dualidade do fator de escala no tempo cósmico expressa na Eq.(8.10) mapeia modelos fantasmas em modelos cosmológicos usuais (ver Fig.8.1). Assim, de acordo com [Chimento & Lazkoz \(2003\)](#), é possível descrever a dinâmica exótica dos primeiros em termos da dinâmica conhecida dos segundos. Algo similar ocorre no caso da DFE no tempo conforme (8.15): modelos fantasmas com $-5/3 < \tilde{w} < -1$ podem ser descritos por um fluido dual não-fantasma desacelerado, com $1/3 < w < 1$. Entretanto, como se discutiu no §8.2.1, a DFE (8.15) permite mapas entre modelos duais em que nenhum dos dois é fantasmagórico, e é neles que vamos nos concentrar principalmente. Mas logo abaixo apresentaremos ao menos uma situação em que uma transformação do campo comum para um campo fantasma é relevante, e por isso vale a pena uma breve discussão.

*

A DFE para campos fantasmas

Como se pode ver claramente da Eq.(8.44), a transformação entre σ e $\tilde{\sigma}$ só está bem definida para equações de estado não fantasmas, i.e. $w, \tilde{w} > -1$. Caso contrário, o lado direito da equação se torna um número imaginário, isto é

$$d\sigma/d\tilde{\sigma} = \pm\sqrt{\frac{3(1+w)}{1-3w}} = \pm i\sqrt{\frac{3|1+w|}{1-3w}}$$

quando σ é fantasma (logo $w + 1 < 0$). Agora, uma vez que o único parâmetro de evolução nas equações de movimento é o tempo, temos que $d\sigma/d\tilde{\sigma} = \sigma'/\tilde{\sigma}'$, e no caso em que σ é um fantasma devemos usar a prescrição (8.53), o que cancela i (e muda um sinal, mas que é irrelevante por conta do \pm). Ou seja, se a dualidade mapeia um campo σ fantasma em um campo $\tilde{\sigma}$ não fantasma, então a fórmula (8.44) deve ser corrigida para

$$d\sigma_{fantasma}/d\tilde{\sigma} = \pm i\sqrt{\frac{3|1+w|}{1-3w}}. \quad (8.54)$$

Da mesma forma, usando o superpotencial, a fórmula (8.50) fica

$$(d\sigma/d\tilde{\sigma})^2 = \frac{-2V(\sigma) + 3W^2(\sigma)}{W^2(\sigma) - 2V(\sigma)}. \quad (8.55)$$

8.4 A DFE como uma (nova) transformação na gravitação dilatônica

Apesar de a DFE ser implementada no quadro de Einstein, nada impede que se passe ao quadro de cordas e se analise os efeitos da transformação. Obtém-se, assim, uma relação entre soluções duais da gravitação dilatônica que, é claro, é muito distinta da dualidade do §6.2. Pode-se esquematizar o processo como

$$\begin{array}{ccc} \text{Sol. no quadro de Einstein} & \xrightarrow{\text{DFE (8.15)}} & \text{Sol. dual no quadro de Einstein} \\ \text{Transf. (6.14)} \downarrow & & \downarrow \text{Transf. (6.14)} \\ \text{Sol. no quadro de cordas} & \xrightarrow{?} & \text{Sol. dual no quadro de cordas} \end{array}$$

Suponha que não haja fontes externas no quadro de cordas, e que portanto o campo escalar σ no quadro de Einstein seja (proporcional a) o dilatón ϕ . As soluções em cada quina do diagrama acima são dadas por

$$\begin{array}{ccc} a(\eta), \sigma, V(\sigma) & \xrightarrow{\text{DFE (8.15)}} & \tilde{a}(\tilde{\eta}), \tilde{\sigma}, \tilde{V}(\tilde{\sigma}) \\ \text{Transf. (6.14)} \downarrow & & \downarrow \text{Transf. (6.14)} \\ a_C(\eta), \phi, V_C(\phi) & \xrightarrow{?} & \tilde{a}_C(\tilde{\eta}), \tilde{\phi}, \tilde{V}_C(\tilde{\phi}) \end{array}$$

De acordo com a transformação (6.14), ϕ e σ são idênticos a menos de uma constante multiplicativa que torna ϕ adimensional,

$$\sigma = (2\kappa^2)^{-1/2} \phi = \phi/\sqrt{2}, \quad (8.56)$$

onde na última igualdade usamos unidades com $\kappa^2 = 1$. As mudanças relevantes se dão na forma do fator de escala e do potencial,

$$a_C = (\kappa/\lambda_s) e^{-\phi} a, \quad V_C = (\lambda_s/\kappa)^4 e^{\phi} V(\phi), \quad (8.57)$$

e analogamente para os duais.

Não há uma fórmula geral para $a_C \mapsto \tilde{a}_C$, correspondente à transformação ‘?’ . Isso porque, ao contrário da dualidade (6.24), que é uma simetria da ação gravidilatônica, a DFE (8.15) é uma transformação *on-shell*. Como se pode ver da Eq.(8.42), a relação entre a e σ depende intrinsecamente da forma de $\rho(a)$, que se obtém através da integração de uma das equações de movimento. Com isso, as fórmulas explícitas para a transformação $\tilde{a}_C = f(a_C)$ dependem de cada caso, e a representação de nossa dualidade no quadro de cordas *não* é uma inversão do fator de escala a_C . Por exemplo, para a classe de fluidos autoduais parametrizadas por um número real $\delta > 0$, e introduzida no Capítulo 9, a transformação no quadro de cordas é derivada no §9.5, Eq.(9.58):

$$1 + (\tilde{a}_C/c)^{2\delta} = \frac{(a_C/c)^{2\delta} + 1}{\left[[(a_C/c)^{2\delta} + 1]^2 - 1\right]^{1/2}}.$$

Apesar de muito mais elaborada do que a simples inversão do fator de escala, a fórmula acima preserva a propriedade de que pequenas e grandes escalas são trocadas, i.e. $a_C \ll 1$ é mapeado em $\tilde{a}_C \gg 1$, etc.

Um ponto muito importante aqui é que a transformação acima é válida na presença de um potencial dilatônico nada trivial, dado na Eqs.(9.56). Lembre que uma das características fundamentais da dualidade $O(d, d)$ da gravitação dilatônica é o fato de que o potencial dilatônico $V_C(\phi)$ deve ser *necessariamente* constante (ou uma função muito específica, do dilaton deslocado; ver fim do §6.2.2). Assim, a capacidade de implementar a transformação de escalas na presença de $V_C(\phi)$ é um mérito da DFE. Para deixar claro esse ponto, apresentamos agora o seguinte exemplo: partindo de um sistema gravidilatônico com o dilaton livre, i.e. $V_C = 0$, aplicamos a DFE e encontramos o potencial dual $\tilde{V}_C(\tilde{\phi})$. Como veremos, $\tilde{V}_C \neq 0$, ou seja, a DFE *cria* um potencial dilatônico.

*

Criação de potencial dilatônico

Considere a solução do sistema gravidilatônico com $V_C = 0$. De acordo com a transformação (8.57) isso significa que o potencial V no quadro de Einstein também se anula. Para analisar a solução das equações no quadro de Einstein, usamos um superpotencial dado pela restrição (8.46),

$$0 = V = (3/2)W^2 + (a/4) d(W^2)/da,$$

cuja integração é imediata: $W^2 = W_*^2 a^{-6}$. Há duas soluções para o sistema de primeira ordem (8.45) com esse superpotencial: uma em contração, outra em expansão. Ambas podem ser escritas como

$$a(\eta) = a_* (|\eta|/\eta_*)^{1/2}, \quad \sigma(\eta) = \sqrt{3} \log(|\eta|/\eta_*), \quad (8.58)$$

com $\eta > 0$ correspondendo à expansão, e $\eta < 0$ à contração. Daí se tem

$$a(\sigma) = a_* \exp \left[\frac{1}{\sqrt{12}} \sigma \right] \quad \text{e} \quad a_C(\phi) = a_* \exp \left[\left(\frac{1}{\sqrt{24}} - 1 \right) \phi \right]. \quad (8.59)$$

onde usamos (8.56) e (8.57). A fórmula para $a(\sigma)$ também pode ser obtida da Eq.(8.49).

O superpotencial dual se encontra da Eq.(8.47), $\tilde{W}^2 = \tilde{W}_*^2 \tilde{a}^2$. As soluções para o sistema de primeira ordem são

$$\tilde{a}(\tilde{\eta}) = \tilde{a}_* (|\tilde{\eta}|/\tilde{\eta}_*)^{-1/2}, \quad \tilde{\sigma}(\tilde{\eta}) = \sqrt{3} \log(|\tilde{\eta}|/\tilde{\eta}_*), \quad (8.60)$$

mas agora $\tilde{\eta} < 0$ corresponde a uma expansão, e $\tilde{\eta} > 0$ a uma contração. Temos

$$\tilde{a}(\tilde{\sigma}) = \tilde{a}_* \exp \left[-\frac{1}{2} \tilde{\sigma} \right], \quad \text{e} \quad \tilde{a}_C(\tilde{\phi}) = \tilde{a}_* \exp \left[- \left(1 + \frac{1}{\sqrt{8}} \right) \tilde{\phi} \right]. \quad (8.61)$$

Note que para $V = 0$ a equação de estado correspondente é $w = 1$, e o campo dual corresponde a $\tilde{w} = -5/3$, ou seja, $\tilde{\sigma}$ é um campo fantasma. A transformação entre os campos pode ser obtida de $a(\sigma) = c/\tilde{a}(\tilde{\sigma})$ ou da Eq.(8.55) com $V = 0$, e temos

$$\sigma = \sqrt{3} \tilde{\sigma}, \quad \text{logo} \quad \phi = \sqrt{3} \tilde{\phi}, \quad (8.62)$$

o que leva à transformação entre a_C e \tilde{a}_C por comparação entre (8.61) e (8.59),

$$\tilde{a}_C/\tilde{a}_* = (a_*/a_C)^{\frac{\sqrt{24}+1}{\sqrt{24}-1}}. \quad (8.63)$$

Como esperado, não se trata de uma inversão simples, mas como o expoente é maior que zero temos $a_C \ll 1$ mapeado em $\tilde{a}_C \gg 1$, e vice-versa.

Por fim, podemos calcular o potencial \tilde{V}_C , “dual” ao potencial $V_C = 0$. Usando diretamente a Eq.(8.46) para o superpotencial $\tilde{W}^2 = \tilde{W}_*^2 \tilde{a}^2$, ou usando a Eq.(8.48) com $V = 0$, chegamos ao potencial exponencial

$$\tilde{V}_C(\tilde{\phi}) = 2(\lambda_s/\varkappa)^4 \tilde{\eta}_*^{-2} \exp \left[-\frac{(\sqrt{8}-1)}{\sqrt{8}} \tilde{\phi} \right]. \quad (8.64)$$

8.5 Discussão

A dualidade apresentada neste capítulo é a base de todo o trabalho desenvolvido nesta tese; por isso achamos por bem fazer aqui uma recapitulação de suas principais características.

Historicamente, a expressão ‘dualidade do fator de escala’ se refere à simetria presente na gravitação dilatônica descrita no §6.2. Apesar disso, por questão de praticidade, neste trabalho utilizamos a expressão e seu acrônimo ‘DFE’ para

denotar a nossa ‘dualidade do fator de escala no tempo conforme (na gravitação de Einstein)’.

A DFE é uma simetria *on-shell* da gravitação de Einstein em um universo de FLRW no tempo conforme. Preserva, portanto, a forma das equações de Friedmann, e serve como um mapa no espaço das suas soluções. O mapa sempre relaciona universos acelerados e universos desacelerados; em particular, um universo preenchido por radiação é dual ao universo preenchido por uma constante cosmológica (positiva). Pode-se ligar: a) um universo em expansão a outro em contração, ou b) dois universos em expansão (ou contração). Para fluidos com parâmetro da equação de estado $w \in [-1, 1/3]$, a DFE preserva a condição fraca de energia.

A dualidade atua como uma simetria de Weyl discreta, invertendo o fator conforme $\Omega \sim a$. Mapeia, assim, pequenas escalas físicas em grandes escalas, e vice-versa. Em particular, mapeia um big-bang (uma singularidade tipo-espaço) sobre um infinito futuro \mathcal{I}^+ tipo-sepaço.

Para qualquer potencial $V(\sigma)$ na gravitação de Einstein, pode-se passar ao quadro de cordas e encontrar o potencial dilatônico $V_C(\phi)$ correspondente. Assim, a relação de dualidade entre dois potenciais $V(\sigma)$ e $\tilde{V}(\tilde{\sigma})$ leva a uma relação entre os respectivos potenciais dilatônicos; reciprocamente, dado um V_C é sempre possível passar ao quadro de Einstein. Assim, a DFE fornece uma transformação da gravitação dilatônica que inclui potenciais V_C não-triviais. A forma da transformação do fator de escala a_C no quadro de cordas só pode ser identificada a cada caso, e não é uma inversão simples mas, em geral, fornece uma relação do tipo $\{a_C \ll 1\} \mapsto \{\tilde{a}_C \gg 1\}$, etc.

Capítulo 9

Fluidos Autoduais

O objetivo deste capítulo é implementar a dualidade do fator de escala equanto *simetria* de um único universo. Isto é: o mapa $(\mathcal{M}, \mathbf{g}) \mapsto (\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathbf{g}})$ definido pelas Eqs.(8.15) deve ligar não dois universos distintos cujos fluidos apresentam cada um sua própria equação de estado, relacionadas pela Eq.(8.16); mas sim único universo que deve apresentar, portanto, uma equação de estado *invariante* sob a transformação (8.16). As condições para que se tenha

$$(\mathcal{M}, \mathbf{g}) \mapsto (\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathbf{g}}) = (\mathcal{M}, \mathbf{g})$$

em um universo de FLRW,

$$\tilde{a}(\eta) = a(\tilde{\eta}), \quad \tilde{\rho}(\tilde{a}) = \rho(\tilde{a}), \quad \tilde{P}(\tilde{a}) = P(\tilde{a}), \quad (9.0)$$

quando aplicadas às Eqs.(8.15) da DFE, levam a

$$a(\eta) = c^2/a(2\eta_c - \eta); \quad (9.1a)$$

$$\rho(\Omega a) = \Omega^{-2}\rho(a), \quad w(\rho) + w(\Omega^{-2}\rho) = -\frac{2}{3}, \quad (9.1b)$$

$$\text{onde } \Omega \equiv c^2/a^2. \quad (9.1c)$$

Um modelo cosmológico simétrico sob as transformações (9.1) será dito *autodual*.

Algumas observações gerais sobre a implementação da autodualidade:

1. A autodualidade é uma simetria discreta sob o grupo cíclico de ordem 2, Z_2 . A operação (9), repetida uma vez, leva ao elemento (modelo cosmológico) original, uma vez que $\tilde{\tilde{a}} = a$, etc. Sobre isso, ver o §9.6 abaixo.
2. Por se tratar de um único universo, as derivadas $da/d\eta$ e $d\tilde{a}/d\tilde{\eta}$ devem ter o mesmo sinal (ou seja, ou o universo se expande ou se contrai); logo a transformação do tempo conforme é necessariamente uma reflexão (8.28), $\tilde{\eta} = -\eta + 2\eta_c$, com η_c uma constante que corresponde ao valor crítico em que $\tilde{a}(\eta_c) = a(\eta_c)$, i.e. ao ponto fixo da transformação de inversão do fator de escala.

-
3. Uma vez que a DFE mapeia acelerações com sinais opostos, um universo autodual deve possuir uma fase acelerada e outra desacelerada; as fases serão mapeadas uma na outra e portanto o ponto fixo da transformação deve corresponder ao ponto de transição em que a aceleração se anula: $d^2a(\eta_c)/dt^2 = 0$. (Note que a derivada é com respeito ao tempo *cósmico*, que é o que mede a aceleração da expansão; cf. Eq.(2.34) e discussão correspondente.) Como (9.1) apresenta apenas um ponto fixo, correspondente a $\eta = \eta_c$, não se pode ter, por exemplo, quatro (ou mais) fases de aceleração em um universo autodual.
4. Se um universo em expansão começa com a fase desacelerada e termina com a fase acelerada, então ele possui um horizonte de partículas e um horizonte de eventos, cf. §8.2.2. Usando a simetria de translação de η podemos colocar a singularidade na origem, $a(\eta = 0) = 0$, e aí teremos $a(\eta_f) = \infty$ para um $\eta_f = r_P + r_F$, dado pela Eq.(8.30), que mede a duração conforme do universo. Por construção, o diagrama conforme de um universo autodual deve ser simétrico sob as transformações descritas no §8.2.2 e, assim, segue que

$$\eta_c = \frac{1}{2}\eta_f.$$

Isso também pode ser verificado diretamente da Eq.(9.1a): se $a(0) = 0$ então $a(2\eta_c) = c^2/0 = \infty$.

5. A DFE sempre mapeia altas escalas em pequenas escalas, e vice-versa. No caso da autodualidade, como se trata de um único espaço-tempo, isso equivale a uma *simetria entre o início e o final* do universo. Isto é, o universo próximo ao big-bang, com $a \ll c$ é equivalente, sob a DFE, ao universo “velho”, com $a \gg c$.

*

O restante deste capítulo será destinado a construir e analisar composições de fluidos que satisfaçam as condições (9.1b) e dão origem a universos autoduais. No entanto, é possível construir um universo autodual simplesmente “colando” dois universos duais no ponto fixo da transformação. Considere, por exemplo, o par Poeira/Paredes de Domínio (8.21). A solução (B.10) dá

$$a(\eta) = A\eta^2 \quad \text{para } w = 0, \quad \text{e} \quad \tilde{a}(\tilde{\eta}) = \tilde{A}(-\tilde{\eta})^{-2} \quad \text{para } \tilde{w} = -2/3, \quad (9.2)$$

com A e \tilde{A} constantes arbitrárias. Para construir um universo autodual, impomos que $a(\eta_c) = \tilde{a}(\eta_c)$, logo as constantes devem ser escolhidas tais que $\eta_c^4 A = \tilde{A}$. O fator de escala autodual fica dado por

$$a(\eta) = \begin{cases} A\eta^2 & \text{se } 0 \leq \eta \leq \eta_c \\ A\eta_c^4/(2\eta_c - \eta)^2 & \text{se } \eta_c \leq \eta \leq 2\eta_c, \end{cases} \quad (9.3)$$

representada na Fig.9.1. É imediato verificar que (9.3) satisfaz as condições (9.1). Trata-se de uma solução das equações de Friedmann com uma descontinuidade da matéria em $\eta = \eta_c$. Neste ponto, em que $a(\eta_c) = \tilde{a}(\eta_c) = c$, não só a função é contínua, mas sua primeira derivada também o é, como se vê da Eq.(8.4) (com o sinal invertido por causa da composição com a reflexão temporal).¹ A segunda derivada, todavia, é descontínua por causa da mudança no sinal da aceleração.

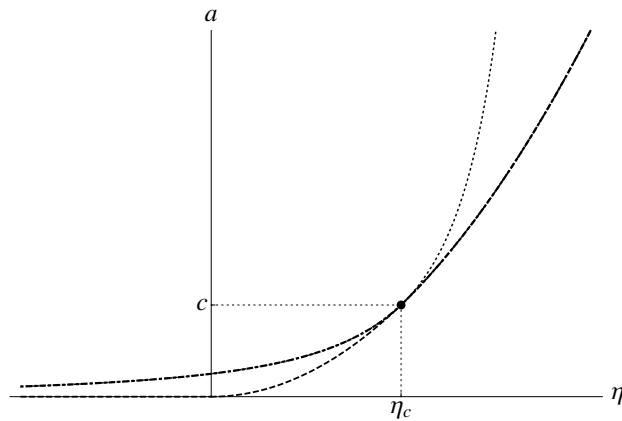


Figura 9.1: Solução autodual por colagem. A linha tracejada representa a solução com $w = 0$, $a \sim \eta^2$; a linha pontilhada a solução dual com $\tilde{w} = -2/3$, $\tilde{a} \sim 1/(2\eta_c - \eta)^2$. A linha ponto-tracejada é a solução autodual contínua (9.3).

9.1 Composições de fluidos duais com w constante

O método mais simples de se obter um universo autodual sem recorrer à colagem de duas soluções exemplificado na Fig.9.1 é a composição de pares de fluidos duais não interagentes, com os parâmetros ajustados de maneira apropriada.

*

Um par de fluidos

Os fluidos autoduais mais simples são obtidos pela composição (2.45) para um par de fluidos duais, i.e.

$$\rho = \frac{\rho_w}{a^{3(1+w)}} + \frac{\rho_{\tilde{w}}}{a^{3(1+\tilde{w})}} \quad \text{com} \quad \tilde{w} = -w - \frac{2}{3}. \quad (9.4)$$

¹Repare que a Eq.(8.4) vale para qualquer dualidade do fator de escala na gravitação de Einstein, e portanto este método de construir modelos autoduais por colagem de duas soluções duais no ponto fixo sempre gera uma função contínua e com primeira derivada contínua, mesmo na a dualidade no tempo cósmico descrita no §8.1.

A condição (9.1b), que se lê

$$\frac{\rho_w}{a^{3(1+w)}} + \frac{\rho_{\tilde{w}}}{a^{3(1+\tilde{w})}} = \frac{c^4}{a^4} \left(\frac{\rho_w}{\tilde{a}^{3(1+w)}} + \frac{\rho_{\tilde{w}}}{\tilde{a}^{3(1+\tilde{w})}} \right) = \frac{c^4}{a^4} \left(\frac{\rho_w c^{-3(1+w)}}{a^{-3(1+w)}} + \frac{\rho_{\tilde{w}} c^{-3(1+\tilde{w})}}{a^{-3(1+\tilde{w})}} \right),$$

impõe restrições sobre os parâmetros, e ao final a densidade autodual é dada por

$$\rho = \rho_w a^{-3(1+w)} + \rho_{\tilde{w}} a^{3w-1} \quad (9.5a)$$

$$\text{com } \rho_w/\rho_{\tilde{w}} = c^{2(1+3w)}. \quad (9.5b)$$

A autodualidade é evidente: sob a DFE o primeiro termo se mapeia no segundo, e com a restrição sobre as densidades relativas a expressão fica invariante.

*

Dois pares de fluidos e modelo Λ CDM

O método acima é facilmente generalizado: pode-se simplesmente combinar dois ou mais pares de fluidos duais, por exemplo

$$\rho = \rho_\Lambda + \frac{\rho_R}{a^4} + \frac{\rho_M}{a^3} + \frac{\rho_{PD}}{a} + \frac{\rho_C}{a^2}, \quad (9.6)$$

que fornece o modelo Λ CDM acrescido de radiação, curvatura e um gás de paredes de domínio. O termo de curvatura pode ser ignorado fazendo-se $\rho_C = 0$, uma vez que ele é seu próprio dual. Mas o termo exótico ρ_{PD}/a correspondente às paredes de domínio é o dual do termo de poeira ρ_M/a^3 e, se for suprimido, a relação (9.5b) cancela automaticamente toda a poeira. Mais precisamente, a Eq.(9.5b) fixa as densidades relativas dos pares duais como

$$\rho_R/\rho_\Lambda = (\rho_M/\rho_{PD})^2 = c^4. \quad (9.7)$$

(Logo $\rho_{PD} = 0$ implica $\rho_M = c^2 \rho_{PD} = 0$.)

Vale notar que não só não há evidências de existência de um gás de paredes de domínio no universo atual, como também a razão entre as densidades relativas de radiação e da constante cosmológica deve ser muito pequena, da ordem de $\rho_R/\rho_\Lambda \sim 10^{-4}/(0.7) \sim 10^{-4}$.

9.2 Generalizações e o gás de Chaplygin

A interação entre dois fluidos pressupõe uma troca de energia que impede que cada um obedeça a equação da continuidade separadamente. Em vez da Eq.(2.44) se tem

$$\begin{aligned} d\rho_{\{1\}}/d\eta + 3(\rho_{\{1\}} + P_{\{1\}})(a'/a) &= Q(\eta) \\ d\rho_{\{2\}}/d\eta + 3(\rho_{\{2\}} + P_{\{2\}})(a'/a) &= -Q(\eta), \end{aligned}$$

para alguma função $Q(\eta)$ que descreve a interação através da troca de energia. A diferença no sinal traduz o fato de que a energia perdida por um dos fluidos é transferida completamente para o outro, de forma que o tensor de energia-momento $T^{\mu\nu} = T_{\{1\}}^{\mu\nu} + T_{\{2\}}^{\mu\nu}$ satisfaz a equação da continuidade como deve ser. Com mais de dois fluidos, é necessário um conjunto de funções de transferência Q_J tais que $d\rho_{\{J\}}/d\eta + 3(\rho_{\{J\}} + P_{\{J\}})(a'/a) = Q_J(\eta)$, com $\sum_J Q_J = 0$. Para resolver o conjunto de equações, é necessário o conhecimento das funções de transferência, mas essas dependem diretamente da física particular dos fluidos envolvidos. Apesar de ser possível descrever fenomenologicamente alguns cenários de interação utilizando-se de algum ansatz para as funções Q — por exemplo, pode-se descrever a interação entre matéria e energia escuras, como em [Fraga *et al.* \(2010\)](#); [Jamil & Rahaman \(2009\)](#) —, não é fácil utilizar esse método para encontrar modelos autoduais. Nossa abordagem, portanto, será outra.

9.2.1 Uma família de fluidos autoduais

Com o objetivo de encontrar um fluido autodual com duas componentes que possua suficiente generalidade, assumimos o ansatz

$$\rho = (B a^r + D a^s)^t. \quad (9.8)$$

Os dois parâmetros B e D correspondem às densidades relativas de cada componente — vamos considerar B e $D > 0$ —, e as potências r , s e t são livres desde que se satisfaçam as condições de autodualidade (9.1b). A condição de que $\rho(\tilde{a}) = c^{-4} a^4 \rho(a)$ impõe

$$(c^{2r} B a^{-r} + c^{2s} D a^{-s})^t = (c^{-4/t} B a^{r+4/t} + c^{-4/t} D a^{s+4/t})^t. \quad (9.9)$$

Igualando as potências temos duas possibilidades. Ou $-r = r+4/t$ e $-s = s+4/t$ logo $r = s = -2/t$, ou então $-r = s + 4/t$ e $-s = r + 4/t$, logo

$$r + s = -4/t, \quad (9.10)$$

o que inclui $r = s = -2/t$ como um caso particular e dá, portanto, a condição sobre as potências em (9.8). Além disso, os coeficientes das potências de a dos dois lados da Eq.(9.9) devem coincidir,

$$\begin{cases} c^{2r} B = c^{-4/t} D \\ c^{2s} D = c^{-4/t} B \end{cases} \quad \text{logo} \quad \begin{cases} B/D = c^{-2r-4/t} \\ B/D = c^{2s+4/t} \end{cases} ;$$

as duas condições à direita são equivalentes de acordo com a Eq.(9.10), i.e.

$$B/D = c^{s-r}. \quad (9.11)$$

Com a Eq.(9.10) há apenas dois expoentes independentes no ansatz (9.8). Renomeie $r \equiv -3(1 + \beta)$, $s \equiv -3(1 + \gamma)$, logo $1/t = \frac{3}{4}(2 + \beta + \gamma)$, e

$$\rho = \left(B a^{-3(1+\beta)} + D a^{-3(1+\gamma)} \right)^{\frac{4}{3(\gamma+\beta+2)}}, \quad (9.12)$$

com $D = B c^{3(\gamma-\beta)}$.

Esta é a família de fluidos autoduais que desejávamos, parametrizada por γ e β . Usando a equação da continuidade, o (hipotético) parâmetro $w = P/\rho$ se comporta com a de acordo com

$$(1 + w)\rho = -\frac{1}{3}a d\rho/da. \quad (9.13)$$

Diferenciando a densidade de energia (9.12) encontramos

$$1 + w(a) = \frac{4(1 + \beta)}{3(\beta + \gamma + 2)} \left[\frac{B a^{-3(1+\beta)} + \left(\frac{1+\gamma}{1+\beta}\right) D a^{-3(1+\gamma)}}{B a^{-3(1+\beta)} + D a^{-3(1+\gamma)}} \right]. \quad (9.14)$$

Um dos parâmetros γ ou β é sempre maior que o outro; assuma $\gamma > \beta$. Nos limites assintóticos em que $a \rightarrow 0$ e $a \rightarrow \infty$ dominam os termos com expoente γ e β , respectivamente, e o parâmetro da equação de estado assume os valores constantes

$$w_\gamma = \frac{\gamma - 3\beta - 2}{3(\gamma + \beta + 2)}, \quad w_\beta = \frac{\beta - 3\gamma - 2}{3(\gamma + \beta + 2)}, \quad (9.15)$$

respectivamente. Como observado acima, a autodualidade relaciona estes limites através da DFE e por isso, como era de se esperar, a soma

$$w_\gamma + w_\beta = -2/3. \quad (9.16)$$

Em outras palavras, nos limites assintóticos o fluido autodual (9.12) se comporta como pares de fluidos duais com equação de estado constante. Por exemplo, para $\gamma = 3\beta + 2$, temos como assintóticos os pares Poeira/Paredes Cóslicas e repare que esses limites são obtidos para toda uma família de fluidos com densidade de energia

$$\rho = a^{-9(1+\beta)} \left(B a^{6(1+\beta)} + D \right)^{\frac{1}{3(1+\beta)}} \quad (9.17)$$

parametrizada livremente por β . No que segue, vamos considerar apenas $(1 + \beta)$ e $(1 + \gamma)$ positivos.

9.2.2 O gás de Chaplygin modificado

Fazer o ansatz da forma de $\rho = \rho(a)$ é útil para a busca de uma forma autodual, mas passa por cima de um ponto importante. O que define um fluido isentrópico (na ausência de cisalhamento, torções e etc.) é a existência de uma equação de estado que dê P como função de ρ e, como visto no §2.4, é a partir de $P(\rho)$ que se obtém a função $\rho(a)$, integrando-se a equação da continuidade $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, cf. Eq.(2.35). O ansatz que fizemos passa por cima desse processo, e não há garantia de que uma dada função $\rho(a)$, como por exemplo (9.8) ou (9.12), corresponda a alguma equação de estado. Assim, para garantir que estamos de fato lidando com um fluido, é necessário tentar reconstruir a função $P(\rho)$ a partir de (9.8). Isso corresponde a expressar o lado direito da Eq.(9.13),

$$1 + w = -\frac{1}{3}t \rho^{-1/t}(rBa^r + sDa^s),$$

em termos de ρ , o que requer que se encontre $a = a(\rho)$ invertendo o ansatz (9.8). Essa inversão, que corresponde às soluções de uma equação do tipo $x^r + x^s + \text{constante} = 0$, é, em geral, impossível, mas um caso especial em que a solução é imediata corresponde a anular um dos expoentes, digamos $r = 0$. Então $a^s = -B/D + \rho^{1/t}/D$ e temos a equação de estado

$$w(\rho) = -1 - \frac{1}{3}ts + \frac{1}{3}tsB\rho^{-1/t}.$$

Os dois parâmetros independentes s e t podemos substituir por $w_* \equiv -1 - ts/3$ e $\delta \equiv 1/t$, de forma que

$$w(\rho) = w_* - (w_* + 1)B\rho^{-\delta}. \quad (9.18)$$

Esta equação de estado é análoga à de um ‘*gás de Chaplygin modificado*’, apresentado por Benaoum (2002), para o qual $P = A\rho - B/\rho^n$, com $n \geq 1$, e que pode ser obtido a partir de um campo taquiônico com um potencial específico na gravitação de Einstein.¹ Sua fenomenologia enquanto modelo de quintessência é amplamente discutida, cf. e.g. Chimento (2004); Debnath *et al.* (2004); Fabris *et al.* (2011); Lu *et al.* (2008); Saadat & Pourhassan (2013, 2014).

¹No trabalho original de Chaplygin (1902), o gás com equação de estado $P = -A/\rho$ é usado para modelar a pressão negativa criada por um aerofólio que permite que a asa de um avião levante vôo. Um século depois o modelo foi introduzido como uma “alternativa à quintessência” por Kamenshchik *et al.* (2001); a pressão negativa, agora usada para explicar a aceleração da expansão do universo, pode ser obtida através da ação de Nambu-Goto para uma D -brana em um espaço-tempo com dimensões $(D + 1) + 1$. As variações sobre o gás de Chaplygin incluem o “gás de Chaplygin generalizado”, com equação de estado $P = -A/\rho^\alpha$, $\alpha \in (0, 1]$, introduzido por Bento *et al.* (2002), além do “gás modificado” utilizado no texto — que corresponde à composição do gás “generalizado” com um segundo fluido com equação de estado comum, i.e. linear.

Aqui, o interesse principal será em utilizar (9.20) enquanto modelo qualitativo de um universo autodual que tenha flexibilidade suficiente para descrever uma evolução mais elaborada do que os exemplos de dois fluidos não-interagentes do §9.1. Na Eq.(9.18), entretanto, não está imposta a autodualidade. Para isso, é necessária a restrição (9.10) que, como agora estamos assumindo $r = 0$, dá $ts = -4$ ou $w_* = 1/3$, ou seja

$$P = \frac{1}{3} \rho - \frac{4\rho_\Lambda^\delta}{3} \rho^{1-\delta}. \quad (9.19)$$

Aqui, definimos $B \equiv \rho_\Lambda^\delta$; fazendo também $D \equiv \rho_R^\delta$, a Eq.(9.12) fica

$$\rho = \left(\rho_\Lambda^\delta + \rho_R^\delta a^{-4\delta} \right)^{\frac{1}{\delta}}, \quad (9.20a)$$

$$\text{com } \rho_R/\rho_\Lambda = c^4. \quad (9.20b)$$

O motivo da renomeação das densidades relativas é óbvio: quando $a^{-4\delta} \sim 0$ a densidade de energia se comporta como uma constante cosmológica $\rho \sim \rho_\Lambda = \frac{1}{\kappa^2} \Lambda$, e no limite oposto, quando $a^{-4\delta} \gg 1$, a densidade de energia se dilui como radiação (seu par dual), $\rho \sim \rho_R/a^4$. Repare que a condição sobre as densidades relativas (9.20b), determinada na Eq.(9.12) e especializada para $\beta = -1$, corresponde exatamente à condição (9.7) para o caso de fluidos não interagentes — na realidade, a densidade (9.20a) dá a combinação simples de radiação e constante cosmológica para $\delta = 1$.

9.3 Campo escalar e o potencial autodual

Usando a descrição do tensor de energia-momento em termos de um campo escalar, a equação de estado (9.19) fornece um potencial simétrico sob inversão do fator de escala. Das Eqs.(8.39) segue que $V = \frac{1}{2}(\rho - P) = \frac{1}{3} (1 - 2\rho_\Lambda^\delta \rho^{-\delta}) \rho$. Para encontrar $\rho = \rho(\sigma)$ basta usar a Eq.(8.43):

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \int \frac{d\rho}{\rho \sqrt{1 + w(\rho)}} = \pm 2^{-1/2} \int d\rho \rho^{-1} (1 - \rho_\Lambda^\delta \rho^{-\delta})^{-1/2};$$

com a mudança $x = \sqrt{1 - \rho_\Lambda^\delta \rho^{-\delta}}$, $\sigma = \pm \frac{\sqrt{2}}{\delta} \int dx/(1 - x^2) = \pm \frac{\sqrt{2}}{\delta} \text{Arc th } x$ e

$$\rho(\sigma) = \rho_\Lambda \left(\cosh \left[\frac{\delta}{\sqrt{2}} (\sigma - \sigma_0) \right] \right)^{2/\delta}. \quad (9.21)$$

Daí fica determinado o potencial correspondente ao gás de Chaplygin modificado:

$$V(\sigma) = \frac{\rho_\Lambda}{3} \left\{ \left[\cosh^2 \left(\frac{\delta}{\sqrt{2}} (\sigma - \sigma_0) \right) \right]^{\frac{1}{\delta}} + 2 \left[\cosh^2 \left(\frac{\delta}{\sqrt{2}} (\sigma - \sigma_0) \right) \right]^{\frac{1-\delta}{\delta}} \right\}. \quad (9.22)$$

A autodualidade de $V(\sigma)$ se verifica usando a Eq.(8.44) ou, alternativamente, calculando $a(\sigma)$ a partir da Eq.(8.42), ou ainda, e mais eficientemente, usando as Eqs.(9.21) e (9.20) para se obter

$$a(\sigma) = c \left(\sinh \left[\frac{\delta}{\sqrt{2}}(\sigma - \sigma_0) \right] \right)^{-1/2\delta}. \quad (9.23)$$

com o coeficiente $c = (\rho_R/\rho_\Lambda)^{1/4}$ dado pela Eq.(9.20b). Com a inversão do fator de escala temos então que

$$\sinh \left(\frac{\delta}{\sqrt{2}}(\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_0) \right) \sinh \left(\frac{\delta}{\sqrt{2}}(\sigma - \sigma_0) \right) = 1. \quad (9.24)$$

Usando a Eq.(9.24) se verifica que de fato $V(\tilde{\sigma}) = V(\sigma)$.

A natureza do potencial autodual (9.22) depende qualitativamente do valor de δ . $V(\sigma)$ possui um extremo em $\sigma = \sigma_0$ correspondendo a um vácuo em que o espaço-tempo se torna de Sitter, com constante cosmológica determinada pela densidade de energia $\rho(\sigma_0) = \rho_\Lambda$ da Eq.(9.21), e com $\partial_\sigma^2 V(\sigma_0) = m_\sigma^2$ sendo a massa do campo escalar correspondente:

$$m_\sigma^2 = (d^2V/d\sigma^2)|_{\sigma_0} = \frac{1}{3}(3 - 2\delta) \rho_\Lambda \delta. \quad (9.25)$$

Assim, σ_0 é um máximo de $V(\sigma)$ (e portanto um vácuo instável) para $\delta > 3/2$ e um mínimo para $0 < \delta < 3/2$. No primeiro caso, o potencial tem a forma de um fundo de garrafa cujos dois mínimos, em

$$\sigma_\pm = \sigma_0 \pm \frac{\sqrt{2}}{\delta} \text{Arc ch } \sqrt{2(\delta - 1)}, \quad \text{onde } V(\sigma_\pm) = \frac{2^{1/\delta}}{3} \delta (\delta - 1)^{-1+1/\delta} \rho_\Lambda,$$

se degeneram no único mínimo global ao se diminuir os valores de δ abaixo do limite $3/2$; para $\delta < 0$ o extremo se torna um máximo global, como ilustrado na Fig.9.2.

Ao mudar o sinal de δ , mudam as condições iniciais para o fator de escala. De acordo com a Eq.(9.23)

$$\{a(\sigma_0) = \infty, \quad a(\infty) = 0\} \quad \text{para } \delta > 0, \quad (9.26)$$

$$\{a(\sigma_0) = 0, \quad a(\infty) = \infty\} \quad \text{para } \delta < 0. \quad (9.27)$$

Portanto para $\delta > 0$ o campo começa no alto e desce o potencial em direção ao vácuo em σ_0 ; logo o universo começa com a fase de radiação (com $\dot{\sigma}^2 = 4V$) e termina na fase de de Sitter (com $\dot{\sigma} = 0$). Por outro lado, para $\delta < 0$, o campo começa no vácuo de de Sitter, com energia cinética nula sobre o máximo global em σ_0 , e rola potencial abaixo na direção de $\sigma \rightarrow \infty$, onde volta a ter energia cinética nula à medida que o potencial tende a zero enquanto o universo se comporta com a equação de estado $P/\rho \rightarrow 1/3$. Essas características aparecem com a solução do fator de escala enquanto função do tempo no §9.4.1 abaixo; cf. Fig.9.4.

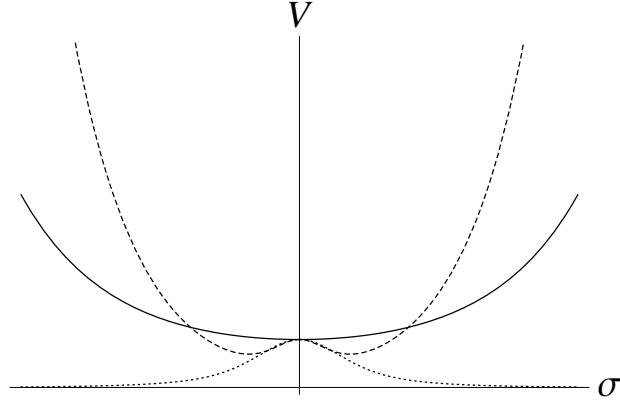


Figura 9.2: Potencial autodual (9.22) para diferentes valores de δ ; aqui $\sigma_0 = 0$. Linha pontilhada: $\delta < 0$; Linha contínua: $0 < \delta < 3/2$; Linha tracejada: $\delta > 3/2$.

9.4 Aspectos do gás de Chaplygin modificado

O gás de Chaplygin modificado (9.19) servirá como referência para universos simétricos sob a DFE nos capítulos subsequentes, e por conta disso vamos agora analisar em detalhes suas várias características.

9.4.1 Solução analítica para as Equações de Friedmann

A solução das Equações de Friedmann, $a = a(\eta)$, pode ser obtida implicitamente na forma $\eta = \eta(a)$ para a densidade de energia (9.20). A primeira das Eqs.(8.14) dá $a' = \frac{\kappa}{\sqrt{3}} a^2 (\rho_\Lambda^\delta + \rho_R^\delta a^{-4\delta})^{1/2\delta}$, ou seja

$$\frac{\kappa}{\sqrt{3}} (\eta - \eta_*) = c^{-1} \rho_\Lambda^{-1/2} \int (1 + (a/c)^{4\delta})^{-1/2\delta} d(a/c), \quad (9.28)$$

onde usamos a Eq.(9.20b). A integral indefinida acima é uma função Beta de Euler incompleta, que por sua vez é ligada à função Hipergeométrica, cf. Eq.(1.6),

$$\int_0^x z^{p-1} (1-z)^{q-1} dz = \frac{x^p}{p} F[p, (1-q); (p+1); x]. \quad (9.29)$$

Fazendo $z = -(a/c)^{4\delta}$, a integral (9.28) assume a forma do lado esquerdo da fórmula (9.29), com $p = 1/4\delta$ e $q = 1 - 1/2\delta$. Como resultado, fixando a constante de integração de maneira que fique a singularidade $a = 0$ em $\eta = 0$, temos

$$\eta(a) = \frac{3^{1/2}}{c\rho_\Lambda^{1/2}} (a/c) F\left[\frac{1}{2\delta}, \frac{1}{4\delta}; 1 + \frac{1}{4\delta}; -(a/c)^{4\delta}\right]. \quad (9.30)$$

Repare que $\eta = \eta(a/c)$ é na verdade uma função da razão a/c . Com isso, a função $a(\eta)$ corresponde grosso modo à inversa de uma função Hipergeométrica e

portanto nem sempre pode ser obtida analiticamente. Seu comportamento pode ser inferido, entretanto, do gráfico da função (9.30), traçado na Fig.9.3. Existem

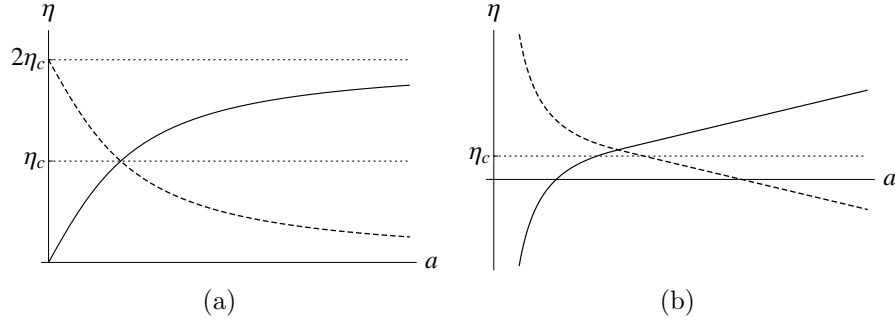


Figura 9.3: Tempo conforme como função do fator de escala, Eq.(9.30). Linhas contínuas representam $\eta(a/c)$, linhas tracejadas representam $\eta(c/a)$. (a) $\delta > 0$; (b) $\delta < 0$.

dois tipos de comportamento assintótico muito diferentes, correspondendo ao sinal de δ que faz com que o argumento da Hipergeométrica se anule ou divirja nos limites $a \rightarrow 0$ e $a \rightarrow \infty$. Estes limites são relacionados entre si por conta da simetria de autodualidade inerente à solução. Aqui, a autodualidade surge como consequência de uma relação entre Hipergeométricas:

$$F[a, b; c; z] = \frac{\Gamma(b-a)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} F\left[a, a-c+1; a-b+1; \frac{1}{z}\right] + \frac{\Gamma(a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-z)^{-b} F\left[b, b-c+1; b-a+1; \frac{1}{z}\right]. \quad (9.31)$$

Substituindo os parâmetros de (9.30), se chega a

$$\eta(a/c) = -\eta(c/a) + 2\eta_c, \quad \eta_c = \frac{3^{1/2}}{8c\delta\rho_\Lambda^{1/2}} \frac{\{\Gamma(1/4\delta)\}^2}{\Gamma(1/2\delta)}. \quad (9.32)$$

a constante η_c vem do segundo termo de (9.31), onde $F[a, 0; c; 1/z] = 1$ e cujo fator $(-z)^{-b} = c/a$ é cancelado. A Eq.(9.32) deixa claro que a solução dual $\eta(c/a)$ é obtida a partir de $\eta(a/c)$ por uma reflexão sobre a linha η_c , o que se ilustra na Fig.9.3, e relaciona os dois limites assintóticos $a \rightarrow 0$ e $a \rightarrow \infty$:

$$\eta(0) = -\eta(\infty) + 2\eta_c. \quad (9.33)$$

Basta, portanto, analisar o limite $a = 0$ na fórmula (9.30). Expandindo a série Hipergeométrica,

$$\eta(a) = \frac{3^{1/2}}{c\rho_\Lambda^{1/2}} (a/c) \left[1 - \frac{(1/2\delta)(1/4\delta)}{(1+1/4\delta)} (a/c)^{4\delta} + \frac{(1+1/2\delta)(1+1/4\delta)}{2(2+1/4\delta)} (a/c)^{8\delta} - \dots \right],$$

vemos que:

— Se $\delta > 0$, os expoentes são todos positivos e portanto $\eta(0) = 0$. A Eq.(9.33) dá então que $\eta(\infty) = \eta_f \equiv 2\eta_c < \infty$. (Apesar de todos os termos da série divergirem para $a \rightarrow \infty$, os termos se cancelam.) É este o comportamento mostrado na Fig.9.3(a).

— Se $\delta < 0$, as potencias $(a/c)^{n4\delta}$ dentro das chaves todas divergem em $a \rightarrow 0$, e todas se anulam no limite oposto $a \rightarrow \infty$, caso em que, portanto, $F[a, b; c; z] \rightarrow 1$ e o fator $(a/c) \rightarrow \infty$ faz com que $\eta(\infty) = \infty$. Com a Eq.(9.33) temos então $\eta(0) = -\infty$. É este o comportamento mostrado na Fig.9.3(b).

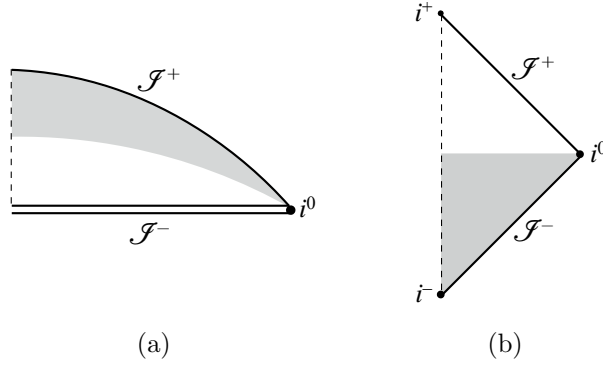


Figura 9.4: Diagramas conformes para os universos preenchidos pelo gás de Chazy modificado, correspondentes às soluções da Fig.9.3. Porções cinza corresponde a $\ddot{a} > 0$, e brancas a $\ddot{a} < 0$. (a) $\delta > 0$; (b) $\delta < 0$.

Os dois tipos de comportamento verificados na Fig.9.3 dizem respeito às condições de contorno do problema. Para $\delta > 0$ o universo *começa* dominado por radiação, que domina a densidade de energia (9.20) para pequenos valores do fator de escala, para ser dominado pela constante cosmológica ρ_Λ em sua fase final. Assim, a expansão começa desacelerada e *depois* passa a ser acelerada. A ordem das diferentes fases de aceleração importa porque um universo desacelerado possui uma singularidade tipo-espaço e um acelerado possui um infinito tipo-espaço como no diagrama da Fig.9.4(a) — em outras palavras, o tempo conforme percorre um domínio finito $[0, 2\eta_c]$. Já para $\delta < 0$, ocorre o contrário: o universo começa dominado pela *constante cosmológica*, logo seu passado infinito é o do espaço-tempo de de Sitter (em coordenadas planas), e portanto uma superfície nula. Seu futuro infinito é dominado por radiação e também é uma superfície nula, resultando no diagrama da Fig.9.4(b) e no domínio infinito do tempo conforme $\eta \in (-\infty, +\infty)$. Note que esses resultados estão de acordo com a mudança na forma do potencial escalar (9.22), ver Fig.9.2, como foi discutido no §9.3. (Note que a descrição que acabamos de apresentar assume que o universo se

expande, por isso dizemos que $a = 0$ é o começo, e $a = \infty$ o fim do universo. Na verdade, é a relação entre o comportamento de a e de $\rho(a)$ que é relevante aqui, e que influencia a forma dos diagramas na Fig.9.4, e *não* a parametrização de $a(\eta)$. Ou seja, naturalmente existem as mesmas soluções com o comportamento temporal invertido, correspondendo a universos em contração.)

O mapa entre as curvas duais definido pela Eq.(9.32) e ilustrado nas Figs.9.3 pode ser usado para se construir geometricamente a correspondência entre dois “pontos duais” de um universo autodual. Isto é, a autodualidade, atuando como simetria de um universo com fator de escala $a(\eta)$, mapeia o valor a_* do fator de escala no instante conforme η_* sobre o valor c^2/a_* que o fator de escala vem a assumir em um *outro instante* $\tilde{\eta}_*$. Para encontrar a correspondência entre estes eventos basta olhar a Fig.9.5. A função original (para $\delta > 0$, linha contínua) é mapeada na função dual (linha tracejada) da qual se obtém, por projeção vertical, a posição dos pontos correspondentes aos valores de c^2/a . Vê-se assim que $\tilde{\eta}_* = \eta_* + 2\tau_*$, logo $\tilde{\eta}_* = 2\eta_c - \eta_*$, como na Eq.(9.32).

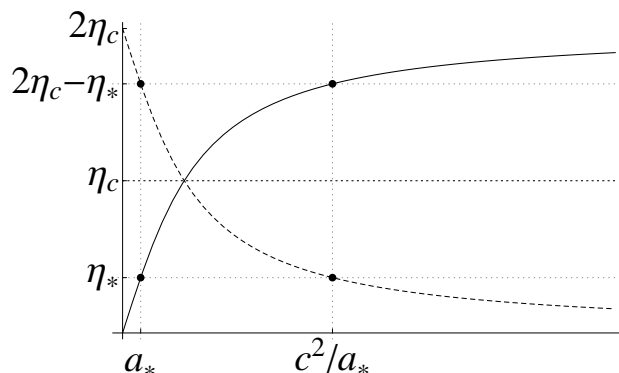


Figura 9.5: Descrição geométrica da autodualidade. A curva contínua é $\eta(a/c)$ e a tracejada $\eta(c/a)$. Cada par de pontos sobre uma mesma curva, como indicado, são relacionados por uma inversão do fator de escala.

9.4.2 Cosmologia autodual pós-inflacionária

Já foi mencionado no §9.2.2 que a fenomenologia do gás de Chaplygin modificado enquanto modelo para o universo velho, i.e. após a inflação e até a era da energia escura, é amplamente discutida na literatura, incluindo verificações observacionais. Enfatizamos que nosso interesse é utilizá-lo enquanto um modelo qualitativo, e quase sempre supersimplificado, para universos autoduais. Apresentamos agora algumas das possibilidades nesse sentido.

Em primeiro lugar, existem dois casos em que a fórmula (9.30) é facilmente inversível, levando a uma expressão analítica para o fator de escala $a = a(\eta)$. São

eles $\delta = 1/2$ e $1/4$.

— *O universo de radiação com uma constante cosmológica e curvatura.*

Para $\delta = 1/2$, a densidade de energia (9.20) se comporta como

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_\Lambda + \frac{\rho_R}{a^4} + \frac{\rho_C}{a^2}, \quad \text{com } P = \frac{1}{3}\rho - \frac{4}{3}\sqrt{\rho_\Lambda \rho}; \\ &\text{com } \rho_R/\rho_\Lambda = c^4 \quad \text{e} \quad \rho_C = 2\sqrt{\rho_R \rho_\Lambda}. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Ou seja, o universo está preenchido por radiação, uma constante cosmológica e um gás de cordas cósmicas — ou uma curvatura negativa $K = -\frac{\kappa^2}{3}\rho_C$, cf. Eq.(8.23). A concordância deste modelo com dados observacionais foi realizada por Lu *et al.* (2015), com resultados razoáveis. A Hipergeométrica (9.30) se torna aqui $F[1, 1/2; 3/2; z] = z^{-1/2} \text{Arc th } z^{1/2}$, logo

$$a(\eta) = c \tan \left[\frac{3^{1/2} c}{\rho_\Lambda^{1/2}} \eta \right], \quad (9.35)$$

com $0 < \eta < 2\eta_c$, onde $\eta_c = 3^{1/2}\pi/4c\rho_\Lambda^{1/2}$ é dado pela Eq.(9.32). A solução simples para o fator de escala permite que se passe ao tempo cósmico, viz.

$$t = \int a(\eta) d\eta = -c\alpha \log [\cos (\eta/\alpha)],$$

com $\alpha \equiv \rho_\Lambda^{1/2}/3^{1/2}c$, e daí o fator de escala se lê

$$a(t) = c \sqrt{e^{2t/c\alpha} - 1}. \quad (9.36)$$

Mais ainda, é possível encontrar como se realiza a DFE no tempo conforme *em termos do tempo cósmico*. Podemos encontrar a transformação de t sob a dualidade (8.15) fazendo $\tilde{t} = \int \tilde{a}(\tilde{\eta})d\tilde{\eta} = -\int d\eta c^2/a(\eta)$, o que dá a transformação nada trivial

$$e^{-2\tilde{t}/\alpha c} = 1 - e^{-2t/\alpha c}. \quad (9.37)$$

— *O modelo Λ CDM autodual.*

Para $\delta = 1/4$, a densidade de energia $\rho = (\rho_\Lambda^{1/4} + \rho_R^{1/4} a^{-1})^4$ dá o modelo Λ CDM acrescido dos ingredientes que o tornam autodual, i.e. o modelo (9.6) com valores específicos de ρ_{PD} , ρ_M e ρ_C relacionados aos parâmetros ρ_R e ρ_Λ ; expandindo a potência

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_\Lambda + \frac{\rho_R}{a^4} + \frac{\rho_M}{a^3} + \frac{\rho_{PD}}{a} + \frac{\rho_C}{a^2}, \\ &\text{com } \rho_M = 4(\rho_R^3 \rho_\Lambda)^{1/4}, \quad \rho_{PD} = 4(\rho_R \rho_\Lambda^3)^{1/4}, \quad \rho_C = 6(\rho_R \rho_\Lambda)^{1/2}. \end{aligned} \quad (9.38)$$

A Hipergeométrica em (9.30) fica $F[2, 1; 2; z] = 1/(1 - z)$, de onde se tira

$$a(\eta) = \frac{\eta/\ell}{1 - \eta/c\ell}, \quad (9.39)$$

com $\ell = \sqrt{3/\rho_\Lambda}$. Esta é talvez a função mais simples que se pode imaginar interpolando entre o fator de escala do universo de radiação, $a \approx \eta/\ell$, para $\eta/\ell \ll 1$; e o fator de escala de de Sitter com raio ℓ , i.e. $a \approx -\ell/\eta$, para $\eta/\ell \gg 1$.

Além desses dois casos em que é possível encontrar a solução analítica $a = a(\eta)$, existe ainda um terceiro que vale a pena ser observado.

— *Da radiação à poeira e à constante cosmológica.*

Para $\delta = 3/4$, a densidade de energia (9.20) apresenta a seguinte expansão com o inverso do fator de escala:

$$\rho = (\rho_\Lambda^{3/4} + \rho_R^{3/4} a^{-3})^{4/3} = \rho_\Lambda + \frac{(4/3)(\rho_R^3 \rho_\Lambda)^{1/4}}{a^3} + O[1/a]^5. \quad (9.40)$$

Assim, trata-se de um universo que, como todos os outros com $\delta > 0$, começa dominado por radiação, com $\rho \sim \rho_R/a^4$ para $a \ll (\rho_R/\rho_\Lambda)^{1/4}$; mas após um tempo suficientemente grande, o que resta é apenas uma constante cosmológica Λ e *poeira*, com uma densidade relativa $\rho_M = (4/3)(\rho_R^3 \rho_\Lambda)^{1/4}$. (Isto é um terço do parâmetro correspondente no modelo (9.38).) Serve, portanto, como uma boa simulação para o modelo Λ CDM.

9.4.3 Modelos inflacionários autoduais

Os modelos com $\delta < 0$ não são bons representantes de universos pós-inflacionários porque *começam* como de Sitter e *terminam* como radiação, como foi observado algumas vezes mais acima, cf. Fig.9.4(b). Por este mesmo motivo eles são *candidatos naturais a modelos inflacionários* específicos que transicionem para o universo radiativo após um reheating, com as duas fases ligadas pela inversão do fator de escala.

A forma do potencial em linha pontilhada da Fig.9.2 indica que o tipo de inflação obtida nestes modelos autoduais é do tipo conhecido como “*hilltop inflation*”, introduzido por Boubekur & Lyth (2005), ver também Kohri *et al.* (2007). Nesses modelos o potencial tem um máximo que pode ser aproximado por

$$V(\sigma) \approx V_0 \left(1 - \frac{1}{2} |\eta_0| (\sigma/m_{Pl})^2 + \dots \right), \quad (9.41)$$

onde o parâmetro $\eta_0 \equiv m^2 m_{Pl}^2 / V_0$, relacionado à massa m negativa do campo no vácuo instável em $\sigma = 0$, é o segundo dos parâmetros de slow-roll

$$\epsilon \equiv \frac{1}{2} m_{Pl}^2 (\partial_\sigma V/V)^2 \quad \text{e} \quad \eta \equiv m_{Pl}^2 (\partial_\sigma^2 V/V) \quad (9.42)$$

avaliado em $\sigma = 0$. O inflaton começa próximo ao vácuo, rola para uma planície, e a fase infalcionária dura até que as condições de slow-roll $\epsilon \ll 1$ e $|\eta| \ll 1$ sejam violadas.

Fixando por simplicidade $\sigma_0 = 0$, nas proximidades do vácuo o potencial (9.22) tem a forma (9.41), viz.

$$V(\sigma) = \rho_\Lambda \left[1 - \frac{1}{2}|\delta| \left(1 + \frac{2}{3}|\delta|^2 \right) \sigma^2 + O[\sigma^4] \right], \quad (9.43)$$

com $|\eta_0| = |\delta| \left(1 + \frac{2}{3}|\delta|^2 \right) \approx |\delta|$ se $|\delta| \ll 1$; usamos $m_{Pl} = \mathcal{M}^2 = 1$. Na realidade, o parâmetro $\eta(\sigma) = \eta_0$ permanece constante até onde for válida a aproximação quadrática para o potencial, enquanto $\epsilon = \delta^2 \sigma^2$. Segue que a aproximação é válida ao menos até que $\sigma = m_{Pl}$, e tomando este como o fim da inflação, o número de desdobramentos exponenciais (e-foldings) do fator de escala até o final da era inflacionária, $N = \int^{\sigma_{fim}} d \log a = \int^{\sigma_{fim}} H dt$ pode ser escrito, durante a fase de slow-roll, como

$$N(\sigma) = \int_{\sigma_{fim}}^{\sigma} d\sigma / \{ \partial_\sigma V / V \}. \quad (9.44)$$

Logo, aqui temos $N = -\frac{1}{2|\delta|} \int_1^\sigma \frac{d\sigma}{\sigma}$ e podemos parametrizar, portanto, $\sigma = e^{-2|\delta|N}$. O índice spectral e a razão escalar/tensorial de perturbações que deixam o horizonte faltando N e-foldings para o fim da inflação são dados por

$$n_s = 1 + 2\eta - 6\epsilon \quad \text{e} \quad r = 16\epsilon, \quad (9.45)$$

cf. Eqs. (4.59) e (4.62), que no caso presente ficam

$$n_s = 1 - 4|\delta| - 12\delta^2 e^{-4|\delta|N}, \quad r = 32\delta^2 e^{-8|\delta|N}. \quad (9.46)$$

Com isso, para o caso típico de $N = 60$, tomando, e.g., $\delta \sim -0.075$ temos $n_s \sim 0.97$ e $r \sim 10^{-5}$, em concordância com os valores observacionais (4.63).

À primeira vista, o potencial autodual (9.22) parece pertencer a uma classe de modelos inflacionários conhecidos como ‘atratores- α ’, apresentados por Kallosh *et al.* (2013) em uma generalização da ‘classe universal’ de modelos de inflação superconforme descrita por Kallosh & Linde (2013). Tais modelos têm o potencial com a forma

$$V(\sigma) = f^2 [\tanh(\sigma/\sqrt{6\alpha})] \quad (9.47)$$

para um função f genérica, e sua universalidade reside no fato de que, no limite em que $N \gg 1$, todos esses potenciais levam assintoticamente aos mesmos seguintes valores de r e n_s :

$$r = 12\alpha/N^2 \quad \text{e} \quad n_s = 1 - 2/N, \quad (9.48)$$

que se encontram na região favorecida por [Planck Collaboration *et al.* \(2016b\)](#). Este comportamento é muito diferente da dependência exponencial obtida na Eq.(9.46) para o potencial autodual. Entretanto, $V(\sigma)$ possui sim a forma (9.47) dos modelos atratores- α de [Kallosch *et al.* \(2013\)](#). Definindo

$$\Phi^2 \equiv 6 \tanh^2 \left(\sigma/\sqrt{6\alpha} \right), \quad \text{com} \quad \alpha \equiv 1/3\delta^2, \quad (9.49)$$

com um pouco de álgebra se verifica facilmente da Eq.(9.22) que

$$V(\sigma) = f^2(\Phi/\sqrt{6}) = \rho_\Lambda \left[\frac{1 - \frac{2}{3}\Phi^2/6}{(1 - \Phi^2/6)^{1/\delta}} \right]. \quad (9.50)$$

Para explicar o porquê de o potencial autodual *não ser* um atrator- α , i.e. não resultar em (9.48), *apesar* de possuir a forma (9.47), é necessário explicar o mecanismo que gera o resultado (9.48) para um grande classe de funções $f^2(\tanh \frac{\sigma}{\sqrt{6\alpha}})$.

Para uma função genérica $f(\sigma)$, a mudança para $f(\Phi)$ atua como uma transformação que “encurta” o eixo das abcissas resultando num aplainamento de f para valores de $\Phi \approx \pm\sqrt{6}$. Por esse motivo, as funções $f(\Phi/\sqrt{6})$ possuem, tipicamente, um planalto nas regiões em que seu argumento é da ordem da unidade. Ou seja, se o potencial tem a forma (9.47), tipicamente ele apresenta um planalto onde ocorre slow-roll e portanto inflação. Considere esse intervalo mencionado em que $\Phi^2 \approx 6$, i.e. a “fronteira” do intervalo conforme $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$, onde $\sigma \gg \sqrt{6\alpha}$ e portanto

$$\Phi/\sqrt{6} = (1 - e^{-2\sigma/\sqrt{6\alpha}})/(1 + e^{-2\sigma/\sqrt{6\alpha}}) \approx (1 - e^{-2\sigma/\sqrt{6\alpha}})^2,$$

logo

$$\Phi/\sqrt{6} \approx 1 - 2e^{-2\sigma/\sqrt{6\alpha}}. \quad (9.51)$$

Suponha agora que a função $f(\Phi/\sqrt{6})$ seja expansível em uma série de potências próximo a $\Phi = \sqrt{6}$, ou seja,

$$\text{com} \quad x \equiv 1 - \Phi/\sqrt{6} \ll 1, \quad \text{suponha} \quad V = f^2 = V_* - \sum_n C_n x^n. \quad (9.52)$$

Truncando a série no termo com a menor potência, que vamos assumir ser algum $p \geq 1$, de modo que, usando (9.51),

$$V = V_* - 2^p C e^{-2p\sigma/\sqrt{6\alpha}}, \quad (9.53)$$

podemos parametrizar σ com o número de e-foldings através de (9.44). Temos

$$\partial_\sigma V/V \approx (2^{p+1} C p)/(V_* \sqrt{6\alpha}) e^{-2p\sigma/\sqrt{6\alpha}}, \quad (9.54)$$

e a integral (9.44) dá $e^{-2p\sigma/\sqrt{6\alpha}} = \frac{V_*6\alpha}{2^{p+2}p^2C}(1/N)$ desde que $V_* \neq 0$. Devolvendo este resultado à Eq.(9.54), e calculando também a segunda derivada de V , obtemos os parâmetros de slow-roll (9.42) $\epsilon = \frac{3\alpha}{4p^2}(1/N^2)$ e $\eta = -1/N$, e com a Eq.(9.45),

$$r = 12\alpha p^{-2}/N^2, \quad n_s = 1 - 2/N + O[1/N^2]. \quad (9.55)$$

Este é o resultado (9.48), apresentado por [Kallosh *et al.* \(2013\)](#) para $p = 1$,¹ i.e. assumindo que a série (9.52) possua o primeiro termo, linear em x . Repare que, no limite $N \gg 1$, temos $x \sim 1/N \ll 1$, o que justifica o corte da série na potência mais baixa. As fórmulas (9.55) *não dependem* do coeficiente C , sendo portanto insensíveis à forma específica da função f . Ou seja: trata-se de um comportamento universal, ao qual os modelos são “atraídos” após um grande número de e-foldings.

Ocorre que em alguns casos muito específicos, f *não pode* ser expandida na série (9.52). Uma das possibilidades é que haja uma singularidade em $\Phi = \sqrt{6}$, e é exatamente isso que há na função (9.50) se $\delta > 0$, pois $f^2 \sim (1 - \Phi^2/6)^{-1/\delta}$ diverge. Tal singularidade não ocorre nos modelos em que $\delta < 0$, e como a análise feita acima na realidade não depende de a potência p em (9.53) ser um número inteiro, poderia se esperar que esses modelos pertencessem à classe dos atratores- α . Porém a forma do potencial (9.50), representada na Fig.9.6, é mais uma vez muito específica:

$$f^2 = \frac{\rho_\Lambda}{3}(x^{1/|\delta|} + 2x^{1+1/|\delta|}),$$

o que corresponde a um potencial (9.53) com $V_* = 0$. Assim a Eq.(9.54) não é válida, impedindo que se chegue à fórmula “universal” (9.55). Ao contrário, o mesmo cálculo leva à Eq.(9.46).

9.5 Potencial dilatônico autodual e dualidade no quadro de cordas

No §8.4 mostramos como a DFE, analisada no quadro de cordas, atua sobre o potencial dilatônico de forma não-trivial. A forma da transformação da DFE, válida on-shell, é diferente em cada modelo quando efetuada no quadro de cordas. Aqui, mostramos essa realização no caso do potencial autodual, e assim fornecemos mais um exemplo de simetria entre grandes e pequenas escalas na cosmologia cordas com potencial dilatônico.

A passagem para o quadro de cordas se dá por meio da transformação (6.15). Interessa-nos descrever o campo escalar σ como uma representação do dilaton ϕ ,

¹A demonstração feita aqui é uma pequena generalização do argumento dado por [Kallosh & Linde \(2013\)](#), onde os autores usam $\alpha = p = 1$.

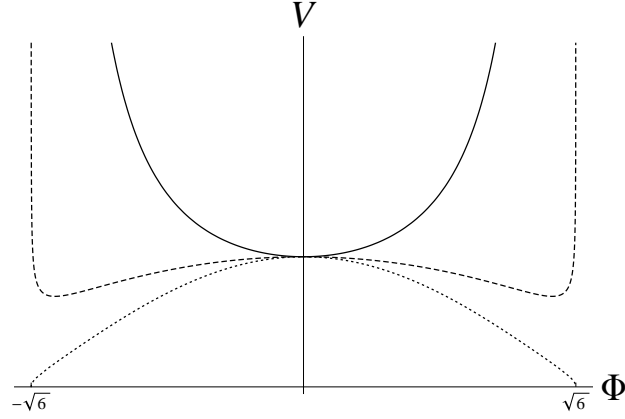


Figura 9.6: Potencial autodual (9.50) para diferentes valores de δ . Linha pontilhada: $\delta < 0$; Linha contínua: $0 < \delta < 3/2$; Linha tracejada: $\delta > 3/2$.

isto é, consideramos a ausência de matéria na ação gravidilatônica. Nesse caso, a transformação se reduz a (cf. Eqs.(8.56)-(8.57))

$$\sigma = \phi/\sqrt{2\kappa^2}, \quad a_C = (\kappa/\lambda_s)e^{-\phi}a_E, \quad V_C = (\lambda_s/\kappa)^4 e^\phi V_E(\phi),$$

aqui usamos um índice E para indicar o quadro de Einstein, por uma questão de clareza. É fácil escrever $V_C(\phi)$ para o potencial autodual (9.22),

$$V_C(\phi) = \frac{\rho_\Lambda}{3} \lambda_s^4 e^\phi \left\{ [\cosh^2(2\delta\phi)]^{\frac{1}{\delta}} + 2 [\cosh^2(2\delta\phi)]^{\frac{1-\delta}{\delta}} \right\}. \quad (9.56)$$

(Fazemos $\sigma_0 = 0$.) Usando (9.23) podemos escrever também o fator de escala no quadro de cordas como função do dilaton, $a_C(\phi) = \frac{\kappa}{\lambda_s} c e^{-\phi} [\sinh(2\delta\phi)]^{-1/2\delta}$, assim como a transformação direta entre os quadros de corda e de Einstein:

$$(a_C/c)^{2\delta} = \sqrt{1 + (a_E/c)^{4\delta}} - 1. \quad (9.57)$$

Por construção, a DFE, que leva $a_E \mapsto \tilde{a}_E = c^2/a_E$, preserva a forma do potencial (9.56), e, assim, é uma dualidade no quadro de cordas com potencial dilatônico não trivial e não nulo, o que é impossível para a dualidade do fator de escala de Veneziano (1991), descrita no §6.2, que mapeia $a_C \mapsto 1/a_C$. No quadro de cordas, ação da DFE é

$$1 + (\tilde{a}_C/c)^{2\delta} = \frac{(a_C/c)^{2\delta} + 1}{\left[[(a_C/c)^{2\delta} + 1]^2 - 1 \right]^{1/2}}, \quad (9.58)$$

e, apesar da forma complicada, é imediato ver que permanece a propriedade de ser $a_C \ll 1$ mapeado em $\tilde{a}_C \gg 1$, e vice-versa. Ou seja, mapeia pequenas escalas em grandes escalas.

*

O potencial autodual e o Cenário Pré-Big-Bang

Ver o campo escalar autodual como o dilaton no quadro de Einstein tem algumas consequências para a interpretação das soluções da equação de Friedmann. No quadro de Einstein, o potencial autodual $V_E(\sigma)$ é par, e portanto, as soluções

$$a_E^{2\delta}(\sigma) = -1/\sinh(\delta\sigma/\sqrt{2}), \quad \text{para } \sigma \in (-\infty, 0), \quad (9.59a)$$

$$\text{e } a_E^{2\delta}(\sigma) = 1/\sinh(\delta\sigma/\sqrt{2}), \quad \text{para } \sigma \in (0, \infty) \quad (9.59b)$$

são equivalentes. Porém, no quadro de cordas, $V_C \sim e^\phi V_E$ não é par, e a escolha do sinal de $\sigma \sim \phi$ dá origem a soluções distintas. Além disso, como $e^\phi = e^{\sqrt{2}\sigma} = g_s^2$ é o acoplamento de cordas, o limite $\sigma \rightarrow +\infty$ corresponde a um acoplamento forte, onde a ação gravidilatônica deixa de ser válida e se deve utilizar efeitos não perturbativos. Por sua vez, o limite $\sigma \rightarrow -\infty$ leva a um acoplamento fraco.

É instrutivo comparar os modelos autoduais com as cosmologias pré-big-bang discutidas no §6.3, em que a singularidade é substituída por um ricochete. Para $\delta > 0$, e no quadro de Einstein, a singularidade de $a_E(\sigma)$ se encontra em $\sigma = \pm\infty$ e, a partir de uma solução em que $a_E(\eta)$ se expande, i.e. $|\sigma(\eta)|$ vai de $|\infty|$ até zero, podemos encontrar outra solução em que a_E se contrai fazendo $\eta \mapsto -\eta$.

Considere a solução (9.59b) em contração, começando na fase de Sitter em $\sigma = 0$, com acoplamento $g_s^2 = 1$, e indo em direção ao big-crunch em $\sigma = +\infty$ onde $g_s^2 \rightarrow \infty$. Usando a DFE, a solução dual *sem* inversão temporal é um universo em expansão que começa no big-bang em $\sigma = +\infty$, também no regime de acoplamento forte, e se expande até a fase de Sitter em $\sigma = 0$, onde $g_s^2 = 1$. Toda a evolução se dá, portanto, num regime de acoplamento (muito) forte, com $g_s^2 > 1$, e a prescrição do sistema enquanto solução da ação gravidilatônica não é confiável.

Já as soluções com $\sigma < 0$ estão automaticamente no regime de acoplamento fraco, com $g_s^2 \leq 1$. Em particular, a singularidade em $\sigma = -\infty$ tem $g_s^2 \rightarrow 0$. Portanto, uma solução do tipo big-crunch/big-bang tem o ricochete no regime de acoplamento muito fraco, *ao contrário* do que acontece no Cenário Pré-Big-Bang de Veneziano (§6.3), no qual se supõe que o ricochete ocorra em um regime de acoplamento forte, dominado por efeitos não-perturbativos da teoria de cordas. Nesse sentido, nossa solução é mais próxima do que ocorre nos modelos ecpiróticos do §6.3.3, muito embora o potencial autodual $V_C(\phi)$ esteja longe da forma específica mostrada na Fig.6.3. Além disso, vale notar que, enquanto no cenário de Veneziano o fator de escala no quadro de cordas se *expande* antes do big-bang (ou seja, o ricochete só aparece no quadro de Einstein), aqui a solução é do tipo ricochete nos dois quadros, como se pode ver calculando, por exemplo,

$a'_C/a_C = a'_E/a_E + \frac{1}{2}\sigma' \leq 0$ antes do big-bang, já que ambos os termos do lado direito são negativos.

9.6 Simetrias no espaço dos parâmetros dos fluidos autoduais

A dualidade do fator de escala no tempo conforme pode ser vista como uma operação \mathfrak{g}_c sobre o espaço \mathcal{F} das soluções das equações de Friedmann, e sobre o espaço dos parâmetros da densidade de energia. Exploramos, agora, algumas de suas propriedades de simetria.

9.6.1 A DFE como uma simetria discreta Z_2

Uma solução $f \in \mathcal{F}$ da Equações de Friedmann é determinada pelo fator de escala $a(\eta)$ que resolve a equação de 1ª ordem (2.28a) para uma certa densidade de energia $\rho(a)$ que fica determinada pela equação de estado $P/\rho = w(\rho)$ através da equação de continuidade (2.26). (Note que não fazemos menção às diferentes possíveis condições iniciais de $a(\eta)$. Assumimos que estas são sempre tais que $a(\eta)$ tenha a “maior extensão possível”; para universos em expansão com um big-bang, e.g., isso significa as condições iniciais usuais, i.e. $a(0) = 0$, $a(\infty) = \infty$.)

Podemos assim descrever uma solução como o conjunto $f = \begin{bmatrix} a(\eta) \\ \rho(a) \end{bmatrix}$.

Denote a atuação da DFE sobre \mathcal{F} como \mathfrak{g}_c , determinada pelo parâmetro c presente na inversão do fator de escala (8.3), com o mapa $f \mapsto \tilde{f}$ dado por

$$\tilde{f} = \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{\rho}(\tilde{a}) \end{bmatrix} = \mathfrak{g}_c[f] = \begin{bmatrix} c^2/a \\ c^{-4} a^4 \rho(a) \end{bmatrix}. \quad (9.60)$$

Para um dado c fixo, o conjunto $\mathfrak{D}_c = \{\mathfrak{g}_c, 1\}$, onde $1[f] = f$ denota a operação identitária, forma um grupo cíclico,

$$\mathfrak{D}_c = \{\mathfrak{g}_c, 1\} = Z_2$$

já que a inversa $\mathfrak{g}_c^{-1} = \mathfrak{g}_c$, pois $\mathfrak{g}_c^2 = 1$, como se pode facilmente verificar. É esta a simetria que vimos usando até aqui, e que será utilizada em quase todo este trabalho.

A composição de duas operações de dualidade \mathfrak{g}_c e $\mathfrak{g}_{c'}$, com parâmetros $c \neq c'$, não possui uma estrutura de grupo sobre \mathcal{F} . De fato, considere

$$\mathfrak{g}_{c'} \cdot \mathfrak{g}_c[f] = \mathfrak{g}_{c'} \begin{bmatrix} c^2/a \\ c^{-4} a^4 \rho(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c'/c)^2 a \\ (c'/c)^{-4} \rho(a) \end{bmatrix} \equiv f_{c'}$$

O conjunto $f_{c'.c}$ é mais uma vez solução das equações de Friedmann, logo $f_{c'.c} \in \mathcal{F}$, e não é, em geral, equivalente a f pois os parâmetros de ρ são reescalados. Logo $\mathfrak{g}_{c'} \cdot \mathfrak{g}_c$ não corresponde nem a uma transformação de dualidade do fator de escala (não há inversão de a), nem à identidade. Mas faça uma terceira operação, com um novo parâmetro c'' :

$$\mathfrak{g}_{c''} \cdot \mathfrak{g}_{c'} \cdot \mathfrak{g}_c[f] = \mathfrak{g}_{c''} \left[\begin{array}{c} (c'/c)^2 a \\ (c'/c)^{-4} \rho(a) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} (cc''/c')^2/a \\ (cc''/c')^{-4} a^4 \rho(a) \end{array} \right],$$

e se vê que

$$\mathfrak{g}_{c''} \cdot \mathfrak{g}_{c'} \cdot \mathfrak{g}_c = \mathfrak{g}_{cc''/c'}. \quad (9.61)$$

Ou seja, existe uma estrutura de grupo com um número ímpar de operações \mathfrak{g}_c com diferentes valores de c , mas não com um número par.

9.6.2 Autodualidade parcial e simetria SO(1,1) no espaço das densidades relativas

Dizemos que um fluido é '*parcialmente autodual*' se sua equação de estado permanece invariante sob a DFE, mas os parâmetros de $\rho(a)$ podem mudar. O exemplo mais simples é a composição (9.4), viz.

$$\rho = \frac{\rho_w}{a^{3(1+w)}} + \frac{\rho_{\tilde{w}}}{a^{3(1+\tilde{w})}} \quad \text{com} \quad \tilde{w} = -w - \frac{2}{3},$$

mas sem impor uma relação entre ρ_w e $\rho_{\tilde{w}}$ como na Eq.(9.5b). De forma mais geral, todos os exemplos de fluidos (perfeitamente) autoduais apresentados se tornam parcialmente autoduais quando se relaxa a condição correspondente a (9.5b); e.g. o gás de Chaplygin modificado é parcialmente autodual se não valer a relação (9.20b).

O efeito da DFE sobre os parâmetros ρ_w e $\rho_{\tilde{w}}$ é

$$a \mapsto \mathfrak{g}_c[a] = c^2/a \equiv \tilde{a}$$

$$\rho(a) \mapsto \mathfrak{g}_c[\rho(a)] = c^4 \tilde{a}^{-4} \left[\frac{\rho_w}{(c^2/\tilde{a})^{3(1+w)}} + \frac{\rho_{\tilde{w}}}{(c^2/\tilde{a})^{1-3w}} \right] = \frac{c^{-2(1+3w)} \rho_w}{\tilde{a}^{1-3w}} + \frac{c^{2(1+3w)} \rho_{\tilde{w}}}{\tilde{a}^{3(1+w)}},$$

ou seja: \mathfrak{g}_c troca ρ_w e $\rho_{\tilde{w}}$, e reescala ambos com uma potência de c . No espaço dos parâmetros isso pode ser descrito como

$$\mathfrak{g}_c \begin{pmatrix} \rho_w \\ \rho_{\tilde{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c^{2(1+3w)} \\ c^{-2(1+3w)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_w \\ \rho_{\tilde{w}} \end{pmatrix}. \quad (9.62)$$

Repare que

$$\begin{pmatrix} 0 & c^{2(1+3w)} \\ c^{-2(1+3w)} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^{2(1+3w)} & 0 \\ 0 & c^{-2(1+3w)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.63)$$

e a matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

realiza a troca entre ρ_w e $\rho_{\tilde{w}}$, e corresponde à inversão do fator de escala. J fornece uma representação de Z_2 , já que $J^2 = 1$. Em uma matriz qualquer,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}, \quad \text{logo} \quad J \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

ou seja, numa matriz diagonal se trocam os elementos. Assim, a composição

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{c'} \cdot \mathfrak{g}_c &= \begin{pmatrix} c^{2(1+3w)} & 0 \\ 0 & c^{-2(1+3w)} \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} c'^{2(1+3w)} & 0 \\ 0 & c'^{-2(1+3w)} \end{pmatrix} J = \\ &= \begin{pmatrix} c^{2(1+3w)} & 0 \\ 0 & c^{-2(1+3w)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'^{-2(1+3w)} & 0 \\ 0 & c'^{2(1+3w)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c/c')^{2(1+3w)} & 0 \\ 0 & (c/c')^{-2(1+3w)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

é diagonal e não possui a forma de (9.62), entretanto uma terceira operação

$$\begin{aligned} & \mathfrak{g}_{c''} \cdot \mathfrak{g}_{c'} \cdot \mathfrak{g}_c = \\ &= \begin{pmatrix} c''^{2(1+3w)} & 0 \\ 0 & c''^{-2(1+3w)} \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} (c/c')^{2(1+3w)} & 0 \\ 0 & (c/c')^{-2(1+3w)} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (cc''/c')^{2(1+3w)} \\ (cc''/c')^{-2(1+3w)} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

levando à mesma lei de composição geral obtida em (9.61),

$$\mathfrak{g}_{c''} \cdot \mathfrak{g}_{c'} \cdot \mathfrak{g}_c = \mathfrak{g}_{cc''/c'}. \quad (9.64)$$

Escrevendo a Eq.(9.62) como

$$\begin{pmatrix} \tilde{\rho}_w \\ \tilde{\rho}_{\tilde{w}} \end{pmatrix} \equiv \mathfrak{g}_c \begin{pmatrix} \rho_w \\ \rho_{\tilde{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c^{2(1+3w)} \\ c^{-2(1+3w)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_w \\ \rho_{\tilde{w}} \end{pmatrix},$$

se vê que o produto $\rho_w \rho_{\tilde{w}} = \tilde{\rho}_w \tilde{\rho}_{\tilde{w}}$ fica invariante sob atuação de \mathfrak{g}_c . Esta invariância é reflexo de uma simetria contínua parametrizada por c . Definindo $\rho_{\pm} \equiv \frac{1}{2}(\rho_w \pm \rho_{\tilde{w}})$, e analogamente para $\tilde{\rho}_{\pm}$, temos que

$$\rho_w \rho_{\tilde{w}} = \rho_+^2 - \rho_-^2 = \text{invariante.}$$

Ou seja, nesta base no espaço dos parâmetros fica claro que \mathfrak{g}_c atua como o grupo $SO(1,1)$. Explicitamente,

$$\begin{pmatrix} \tilde{\rho}_+ \\ \tilde{\rho}_- \end{pmatrix} = \mathfrak{g}_c \begin{pmatrix} \rho_+ \\ \rho_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha(1+3w) & \sinh \alpha(1+3w) \\ \sinh \alpha(1+3w) & \cosh \alpha(1+3w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_+ \\ \rho_- \end{pmatrix},$$

com $\alpha = \log c^2$.

Mais uma vez, insistimos que a estrutura da transformação acima se repete em equações de estado mais complicadas; assim, em (9.7) temos duas simetrias $SO(1,1)$ agindo separadamente nos dois pares de parâmetros duais. De maneira bem geral, isso ocorre também na relação (9.11) entre os parâmetros B e D da família geral de fluidos autoduais (9.8) e, em particular, no caso do gás de Chaplygin modificado, Eq.(9.20b).

Por fim, a autodualidade *exata* ocorre quando um fluido parcialmente auto-dual, cujos parâmetros são ligados por (9.62), é *invariante* sob a ação de \mathfrak{g}_c :

$$\mathfrak{g}_c \begin{pmatrix} \rho_w \\ \rho_{\tilde{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_w \\ \rho_{\tilde{w}} \end{pmatrix}. \quad (9.65)$$

Trata-se, então, de um autovetor da matriz (9.63), e é imediato ver que a relação necessária entre as componentes ρ_w e $\rho_{\tilde{w}}$ coincide com (9.5b) e com as fórmulas análogas para os outros fluidos autoduais discutidos, e.g. Eq.(9.20b).

Capítulo 10

Termodinâmica e a dualidade do fator de escala

10.1 Dualidade das grandezas termodinâmicas

As transformações de dualidade (8.15) atuam sobre o sistema termodinâmico limitado pelo volume $V = V_0 a^3$ mapeando-o no ‘sistema termodinâmico dual’ composto pelo fluido dual, cuja equação de estado é determinada por (8.16), contido no interior de um volume $\tilde{V} = \tilde{V}_0 \tilde{a}^3$. As Eqs.(8.15) não dizem nada a respeito do volume comóvel constante V_0 e, por consequência, o parâmetro \tilde{V}_0 no universo dual não pode ser determinado pelas transformações da DFE. No entanto, por “sistema termodinâmico dual” nos referimos àquele no qual o sistema termodinâmico original se transforma após a ação da DFE *apenas*, isto é: mantendo invariantes todos os possíveis parâmetros aos quais ela não afeta. Portanto faça $\tilde{V}_0 \equiv V_0$.

Podemos agora ver que a dualidade do fator de escala mapeia o volume $V \mapsto \tilde{V} = V_0 c^6 / a^3$, ou seja

$$\tilde{V} = \frac{V_0^2 c^6}{V}. \quad (10.1)$$

A densidade de energia obedece a Eq.(8.15c), $\tilde{a}^2 \tilde{\rho} = a^2 \rho$, que em termos de E e de $V \sim a^{1/3}$ se lê como

$$\frac{\tilde{E}}{\tilde{V}^{1/3}} = \frac{E}{V^{1/3}}. \quad (10.2)$$

Em conjunto com (10.2), a Eq.(8.15b) fornece, implicitamente, a transformação da pressão do fluido. É imediato escrever

$$\tilde{V}^{1/3} \left(3\tilde{P} + \frac{\tilde{E}}{\tilde{V}} \right) = -V^{1/3} \left(3P + \frac{E}{V} \right). \quad (10.3)$$

Usando a Eq.(5.2) se pode eliminar P , transformando (10.3) em uma relação que envolve a temperatura e a entropia:

$$\tilde{V}^{-1/3} \left(\tilde{S}\tilde{T} - \frac{2}{3}\tilde{E} \right) = -V^{-1/3} \left(ST - \frac{2}{3}E \right). \quad (10.4)$$

Na Eq.(10.3) a transformação $P \mapsto \tilde{P}$, apesar de escrita de forma implícita, está bem definida porque tanto a transformação da energia quanto do volume são dadas, de forma independente, por (10.1) e, em composição, por (10.2). Na Eq.(10.4), todavia, só está definida a transformação do produto ST , e não de S e T separadamente. Ainda assim, sendo ambas as entropias constantes durante a evolução adiabática do universo de FRW, (10.4) dita o comportamento da relação $T \mapsto \tilde{T}$ a menos de uma possível “renormalização” da temperatura para incluir o valor constante de S .

Uma vez que não há mais relações da DFE disponíveis, fica então impossível determinar a relação entre os valores das entropias duais S e \tilde{S} (mas note que as densidades de entropia duais são sempre recíprocas: $s = \frac{S\tilde{S}}{c^3} \times 1/\tilde{s}$). A não ser, é claro, no caso de um fluido autodual. Aí a DFE é uma simetria do sistema termodinâmico, relacionando estados com energia $E(V, S)$ a estados com energia $\tilde{E}(\tilde{V}, \tilde{S})$ dentro da *mesma* evolução adiabática. Portanto é evidente que, sendo a entropia constante,

$$\tilde{S} = S \quad \text{para um fluido autodual.} \quad (10.5)$$

10.2 Termodinâmica do gás de Chaplygin modificado

Desejamos estabelecer os elementos da termodinâmica do fluido selecionado pela simetria de inversão do fator de escala no §9.2.2, com equação de estado (9.19),

$$P = \frac{1}{3}\rho - \frac{4}{3}\rho_\Lambda^\delta \rho^{1-\delta}. \quad (10.6)$$

Temos $dP/dT = \frac{1}{3} (1 + 4(\delta - 1)\rho_\Lambda^\delta \rho^{-\delta}) d\rho/dT$, e como $P + \rho = \frac{4}{3}\rho (1 - \rho_\Lambda^\delta \rho^{-\delta})$ a Eq.(5.3) permite determinar a relação diferencial entre ρ e T :

$$\frac{dT}{T} = \frac{\rho^\delta - 4(1 - \delta)\rho_\Lambda^\delta}{4(\rho^\delta - \rho_\Lambda^\delta)} \frac{d\rho}{\rho}, \quad (10.7)$$

cuja integral fornece¹

$$T^{4\delta} = (\rho^\delta - \rho_\Lambda^\delta)^{4\delta-3} \times \rho^{4(1-\delta)\delta} \times \text{constante}.$$

No limite em que a densidade de energia é alta, $\rho \gg \rho_\Lambda$, a relação se simplifica consideravelmente, e se torna

$$T^4 \sim \text{constante} \times \rho, \quad \rho \gg \rho_\Lambda.$$

Como era de se esperar, visto que nesse mesmo limite a Eq.(10.6) se reduz à equação de estado para um gás de fótons, a relação acima coincide com a Lei de Stefan-Boltzmann para a energia interna da radiação de corpo negro como função da temperatura. Assim, escolhemos a constante de integração multiplicativa de maneira a corresponder com a Eq.(5.11), e temos

$$4\sigma_{SB} T^4 = \rho \left(1 - \rho_\Lambda^\delta / \rho^\delta\right)^{4 - \frac{3}{\delta}}. \quad (10.8)$$

Note que no limite oposto

$$T \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \rho \rightarrow \rho_\Lambda,$$

o que era também esperado uma vez que a Eq.(10.6) se torna $p = -\rho_\Lambda$, a matéria se comporta como uma constante cosmológica e o espaço-tempo se torna de Sitter, que é efetivamente vazio.

A não ser em casos muito específicos do parâmetro δ , a Eq.(10.8) é, evidentemente, impossível (ou no mínimo muito difícil) de se inverter para que se obtenha $\rho = \rho(T)$. Consequentemente, encontrar expressões exatas para as grandezas termodinâmicas como função da temperatura é, em geral, ou de todo impossível ou resulta em fórmulas tão complicadas cuja interpretação se torna obscura. Uma maior compreensão pode ser obtida ao se explorar a simetria sob a dualidade do fator de escala.

¹Note que, apesar da forma à primeira vista embaraçada, o lado direito da Eq.(10.7) pode ser escrito de maneira simples como

$$4\delta \frac{dT}{T} = \frac{\rho^\delta - A}{\rho^\delta - B} \frac{d\rho}{\rho}, \quad \text{com} \quad A = 4(1-\delta)\rho_\Lambda^\delta \quad \text{e} \quad B = \rho_\Lambda^\delta,$$

e como $d\rho/\rho = d\rho^\delta/(\delta\rho^{\delta-1}\rho)$, fazendo $x = \rho^\delta$ temos simplesmente uma razão de polinômios:

$$4\delta \frac{dT}{T} = \frac{x-A}{x-B} \frac{dx}{x} = \frac{dx}{x-B} - \frac{A}{B} \left(\frac{dx}{x-B} - \frac{dx}{x} \right).$$

A integração se torna trivial, $4\delta \log T = \frac{B-A}{B} \log(x-B) + \frac{A}{B} \log x + \text{constante}$, e voltando às variáveis e parâmetros originais temos o resultado do texto.

10.2.1 Temperaturas duais

Da fórmula (9.19) para a diluição da energia com o fator de escala,

$$\rho = \left(\rho_\Lambda^\delta + \frac{\rho_R^\delta}{a^{4\delta}} \right)^{1/\delta}, \quad (10.9)$$

segue diretamente a lei de transformação da densidade de energia; como

$$a^{4\delta} = \rho_R^\delta / (\rho^\delta - \rho_\Lambda^\delta) = c^{8\delta} / \tilde{a}^{4\delta} = c^{8\delta} (\tilde{\rho}^\delta - \tilde{\rho}_\Lambda^\delta) / \tilde{\rho}_R^\delta,$$

temos

$$\rho^\delta - \rho_\Lambda^\delta = \left(\frac{\rho_R \tilde{\rho}_R}{c^8} \right)^\delta \frac{1}{\tilde{\rho}^\delta - \tilde{\rho}_\Lambda^\delta}, \quad (10.10)$$

o que mostra que altas energias, i.e. $\rho \gg \rho_\Lambda$, são mapeadas em baixas energias, i.e. $\rho \approx \rho_\Lambda$.

Com (10.9) também podemos parametrizar o fator de escala com a temperatura. Usando diretamente a Eq.(10.8),

$$\left(\frac{4\sigma_{SB}}{\rho_R} \right)^{1/4} T = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{\rho_\Lambda^\delta}{\rho_R^\delta} a^{4\delta} \right)^{\frac{1-\delta}{\delta}}, \quad (10.11)$$

e queremos determinar o mapa

$$T \mapsto \tilde{T}, \quad \text{correspondente a } a \mapsto \tilde{a} = c^2/a.$$

Manipulando a Eq.(10.11),

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\sigma_{SB}}{\rho_R} \right)^{\frac{1}{4}} T &= \frac{1}{a} \left(1 + \frac{\rho_\Lambda^\delta}{\rho_R^\delta} a^{4\delta} \right)^{\frac{1-\delta}{\delta}} = \left(\frac{\rho_\Lambda}{\rho_R} \right)^{1-\delta} a^{3-4\delta} \left(\frac{\rho_R^\delta}{\rho_\Lambda^\delta} a^{-4\delta} + 1 \right)^{\frac{1-\delta}{\delta}} = \\ &= c^{2(3-4\delta)} \left(\frac{\rho_\Lambda}{\rho_R} \right)^{1-\delta} \tilde{a}^{-3+4\delta} \left(\frac{\tilde{\rho}_\Lambda^\delta}{\tilde{\rho}_R^\delta} \tilde{a}^{4\delta} + 1 \right)^{\frac{1-\delta}{\delta}}, \end{aligned}$$

o último termo em parênteses tem a mesma forma que aparece na relação original (10.11), mas agora na versão dual; isto é:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\sigma_{SB}}{\rho_R} \right)^{\frac{1}{4}} T &= c^{2(3-4\delta)} \left(\frac{\rho_\Lambda}{\rho_R} \right)^{1-\delta} \tilde{a}^{-3+4\delta} \left(\frac{\tilde{\rho}_\Lambda^\delta}{\tilde{\rho}_R^\delta} \tilde{a}^{4\delta} + 1 \right)^{\frac{1-\delta}{\delta}} = \\ &= c^{2(3-4\delta)} \left(\frac{\rho_\Lambda}{\rho_R} \right)^{1-\delta} \tilde{a}^{-3+4\delta} \times \left(\frac{4\sigma_{SB}}{\tilde{\rho}_R} \right)^{1/4} \tilde{a} \tilde{T}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\lambda T/\tilde{T} = a^{2(1-2\delta)}, \quad \text{com} \quad \lambda \equiv \left(\frac{\tilde{\rho}_R}{\rho_R}\right)^{1/4} \left(\frac{\rho_R}{\rho_\Lambda}\right)^{1-\delta} c^{-2}. \quad (10.12)$$

Isolando o fator de escala na Eq.(10.12), $a = (\lambda T/\tilde{T})^{1/2(1-2\delta)}$, e substituindo do lado direito da Eq.(10.11),

$$\left(\frac{4\sigma_{SB}}{\rho_R}\right)^{1/4} T = \frac{1}{(\lambda T/\tilde{T})^{1/2(1-2\delta)}} \left(1 + \frac{\rho_\Lambda^\delta}{\rho_R^\delta} (\lambda T/\tilde{T})^{2\delta/(1-2\delta)}\right)^{\frac{1-\delta}{\delta}};$$

temos, com algum malabarismo,

$$(T\tilde{T})^{\frac{1}{2(1-2\delta)}} \left(\lambda^{-\frac{\delta}{1-2\delta}} \rho_R^\delta T^{-\frac{2\delta}{1-2\delta}} + \lambda^{\frac{\delta}{1-2\delta}} \rho_\Lambda^\delta \tilde{T}^{-\frac{2\delta}{1-2\delta}}\right)^{\frac{1-\delta}{\delta}} = \frac{(4\sigma_{SB})^{1/4} \rho_R^{\frac{3-4\delta}{4}}}{\lambda^{1/2}}. \quad (10.13)$$

Para escrever a relação de maneira simétrica entre grandezas duais, como

$$\rho_R = c^4 \tilde{\rho}_\Lambda \quad \text{e} \quad \rho_\Lambda = c^{-4} \tilde{\rho}_R, \quad (10.14)$$

note que o parâmetro λ definido na Eq.(10.12) pode ser escrito como

$$\lambda = (\rho_R/\tilde{\rho}_R)^{\frac{3-4\delta}{4}} c^{2(1-2\delta)}, \quad \text{com o dual} \quad \tilde{\lambda} = (\tilde{\rho}_R/\rho_R)^{\frac{3-4\delta}{4}} c^{2(1-2\delta)}, \quad (10.15)$$

$$\text{e portanto} \quad \lambda \cdot \tilde{\lambda} = c^{4(1-2\delta)}. \quad (10.16)$$

Olhe para os coeficientes das temperaturas duais na soma entre parênteses da Eq.(10.13). O coeficiente de $\tilde{T}^{-\frac{2\delta}{1-2\delta}}$ é $\lambda^{\frac{\delta}{1-2\delta}} \rho_\Lambda^\delta$, que pela Eq.(10.16) acima fica

$$\left(\lambda^{\frac{1}{1-2\delta}} \rho_\Lambda\right)^\delta = \left(c^4 \tilde{\lambda}^{\frac{1}{1-2\delta}} \rho_\Lambda\right)^\delta = \left(\tilde{\lambda}^{\frac{1}{1-2\delta}} \tilde{\rho}_R\right)^\delta,$$

tendo, portanto, a mesma forma do coeficiente de $T^{-\frac{2\delta}{1-2\delta}}$, mas com os parâmetros duais. Por fim, do lado direito da Eq.(10.13), o termo $\rho_R^{\frac{3-4\delta}{4}} \lambda^{-1/2}$ se escreve

$$\rho_R^{\frac{3-4\delta}{2}} \lambda^{-1} = \rho_R^{\frac{3-4\delta}{2}} \times (\tilde{\rho}_R/\rho_R)^{\frac{3-4\delta}{4}} c^{-2(1-2\delta)} = (\tilde{\rho}_R \rho_R)^{\frac{3-4\delta}{4}} c^{-2(1-2\delta)},$$

que também é explicitamente simétrico sob uma troca de parâmetros duais. Com isso, podemos reescrever a Eq.(10.13), viz.

$$(T\tilde{T})^{\frac{1}{2(1-2\delta)}} \left[\left(\mathbf{a} T\right)^{-\frac{2\delta}{1-2\delta}} + \left(\tilde{\mathbf{a}} \tilde{T}\right)^{-\frac{2\delta}{1-2\delta}}\right]^{\frac{1-\delta}{\delta}} = \frac{(4\sigma_{SB})^{1/4} (\rho_R \tilde{\rho}_R)^{\frac{3-4\delta}{8}}}{c^{1-2\delta}}, \quad (10.17)$$

$$\text{com} \quad \mathbf{a} \equiv \sqrt{\tilde{\lambda}} \rho_R^{\frac{2\delta-1}{2}}.$$

Repare que esta fórmula só é bem definida para $\delta \neq 1/2$, caso contrário se deve voltar diretamente à Eq.(10.12), cujo lado direito se torna $a^0 = 1$, resultando em

$$\tilde{T} = \lambda T \quad \text{para} \quad \delta = 1/2. \quad (10.18)$$

As Eqs.(10.17) e (10.18) fornecem a realização da DFE em termos da temperatura do gás de Chaplygin (10.6). No caso específico de autodualidade (completa), temos $\rho_R = \tilde{\rho}_R$, $\lambda = \tilde{\lambda}$, etc., e as fórmulas se simplificam. Da Eq.(10.15) é imediato ver que $\lambda = \tilde{\lambda} = c^{1-2\delta}$, logo $\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}} = (c/\rho_R)^{\frac{1-2\delta}{2}}$, e finalmente

$$(T\tilde{T})^{\frac{1}{2(1-2\delta)}} \left[T^{-\frac{2\delta}{1-2\delta}} + \tilde{T}^{-\frac{2\delta}{1-2\delta}} \right]^{\frac{1-\delta}{\delta}} = c^\delta (4\sigma_{SB}/\rho_R)^{1/4}, \quad (10.19)$$

para o fluido autodual.

O ponto fixo da transformação (10.17) se obtém fazendo $T = \tilde{T} = T_*$,

$$T_* = \frac{c^{1-2\delta} \left(\mathbf{a}^{-\frac{2\delta}{1-2\delta}} + \tilde{\mathbf{a}}^{-\frac{2\delta}{1-2\delta}} \right)^{\frac{1-\delta}{\delta}}}{(4\sigma_{SB})^{1/4} (\rho_R \tilde{\rho}_R)^{\frac{3-4\delta}{8}}}; \quad (10.20)$$

e no caso autodual,

$$T_* = 2^{\frac{1-\delta}{\delta}} c^{-\delta} (\rho_R/\sigma_{SB})^{1/4}. \quad (10.21)$$

As curvas descritas pelas Eqs.(10.17) e (10.18) no plano T - \tilde{T} podem ser vistas na Fig.10.1. Percebe-se a existência de diferenças qualitativas de comportamento a depender do domínio do parâmetro δ ; segue a análise desses comportamentos.

Tome os limites assintóticos $T \rightarrow 0$ e $T \rightarrow \infty$, e use a Eq.(10.17) para obter qual o comportamento da temperatura dual. Existem três possibilidades: ou $\tilde{T} \rightarrow 0$, ou $\tilde{T} \rightarrow \infty$, ou $\tilde{T} \rightarrow \text{constante}$. Escreva

$$(T\tilde{T}^{4\delta-3})^{\frac{1}{2(1-2\delta)}} \left[1 + (\mathbf{a}T/\tilde{\mathbf{a}}\tilde{T})^{-\frac{2\delta}{1-2\delta}} \right]^{\frac{1-\delta}{\delta}} = \text{constante}; \quad (10.22)$$

a igualdade deve ser consistente nos vários limites.

1. Para $\delta > 3/4$.

(Linhas pontilhadas na Fig.10.1.)

Se $T \rightarrow 0$ e $(T/\tilde{T}) \rightarrow \text{constante} \geq 0$, o termo em chaves em (10.22) tende a $[\dots] \rightarrow \text{constante}$, enquanto o termo em parênteses diverge. Logo a equação não é consistente.

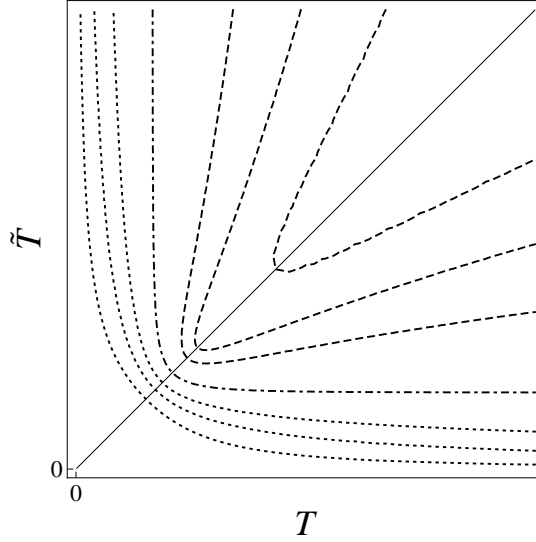


Figura 10.1: Relação entre temperaturas duais para $\delta > 0$, a partir da Eq.(10.17). Linhas tracejadas correspondem a $0 < \delta < 3/4$, e linhas pontilhadas a $\delta > 3/4$; a linha ponto-tracejada corresponde ao caso limite $\delta = 3/4$. A diagonal corresponde à transformação linear do caso $\delta = 1/2$.

Se $\tilde{T} \rightarrow 0$ mais rápido que T , de modo que $T, \tilde{T} \rightarrow 0$ e $T/\tilde{T} \rightarrow \infty$, o lado esquerdo de (10.22) fica proporcional a

$$(T\tilde{T}^{4\delta-3})^{\frac{1}{2(1-2\delta)}} \times (T/\tilde{T})^{-\frac{2(1-\delta)}{1-2\delta}} \rightarrow \infty,$$

e a equação de novo não é consistente.

Mas se $T \rightarrow 0$ e $\tilde{T} \rightarrow \infty$, o termo em chaves tende a 1, e precisamos ter $T\tilde{T}^{4\delta-3} \rightarrow \text{constante}$, o que é possível. Ou seja, usando a simetria da Eq.(10.22) sob a troca de T e \tilde{T} , podemos escrever:

Para $\delta > 3/4$, a relação assintótica entre as temperaturas duais é:

$$T \rightarrow 0 \iff \tilde{T} \sim 1/T^{1/(4\delta-3)} \rightarrow \infty; \quad (10.23a)$$

$$\tilde{T} \rightarrow 0 \iff T \sim 1/\tilde{T}^{1/(4\delta-3)} \rightarrow \infty. \quad (10.23b)$$

2. Para $\delta = 3/4$.

(Linha ponto-tracejada na Fig.10.1.)

A Eq.(10.22) é simplesmente

$$T^{-1} \left[1 + (\alpha T / \tilde{\alpha} \tilde{T})^3 \right]^{\frac{1}{3}} = \text{constante}.$$

Se $T \rightarrow \infty$, é imediato ver que é preciso ter $(\mathbf{a}/\tilde{\mathbf{a}})/\tilde{T} \rightarrow \text{constante}$, ou seja, usando a simetria entre T e \tilde{T} , temos

Para $\delta = 3/4$, a relação assintótica entre as temperaturas duais é:

$$T \rightarrow \infty \iff \tilde{T} \rightarrow \text{constante}; \quad (10.24a)$$

$$\tilde{T} \rightarrow \infty \iff T \rightarrow \text{constante}; \quad (10.24b)$$

Além disso, é fácil verificar que o limite $T \rightarrow 0$ é inconsistente, e as temperaturas nunca se anulam.

3. Para $1/2 < \delta < 3/4$.

(Linhas tracejadas na Fig.10.1.)

Consideremos $T \rightarrow \infty$. Suponha que com $C < \infty$, tenhamos

$$T/\tilde{T} \rightarrow C \geq 0 \Rightarrow \tilde{T} \rightarrow \infty \quad \text{com} \quad T \rightarrow \tilde{T}^\eta,$$

e $\eta < 1$ para $C = 0$; ou $\eta = 1$ para $C \neq 0$. Logo $0 < \eta \leq 1$. O termo em chaves na Eq.(10.22) tende então a uma constante e para que a equação seja satisfeita é preciso que se tenha

$$T\tilde{T}^{4\delta-3} = T/\tilde{T}^{|4\delta-3|} \rightarrow \text{constante} \Rightarrow T \rightarrow \tilde{T}^{|4\delta-3|},$$

e como $\eta = |4\delta - 3| > 1$ para $\delta > 1/2$, temos uma contradição.

Portanto, a razão das temperaturas dentro das chaves no lado direito da Eq.(10.22) sempre diverge, e podemos escrever, no limite,

$$(T\tilde{T}^{4\delta-3})^{\frac{1}{2(1-2\delta)}} \times (T/\tilde{T})^{-\frac{2(1-\delta)}{1-2\delta}} = \text{constante},$$

ou

$$T^{-(4\delta-3)}\tilde{T}^{-1} = T^{|4\delta-3|}/\tilde{T} = \text{constante},$$

e com isso conclui-se duas coisas: em primeiro lugar, vemos que \tilde{T} não se anula nunca. Por simetria, isso implica que T também nunca se anula. Em segundo lugar, temos a seguinte relação assintótica:

Para $1/2 < \delta < 3/4$, a relação assintótica entre as temperaturas duais é:

$$T \rightarrow \infty \iff \tilde{T} \sim T^{|4\delta-3|} \rightarrow \infty; \quad (10.25a)$$

$$\tilde{T} \rightarrow \infty \iff T \sim \tilde{T}^{|4\delta-3|} \rightarrow \infty. \quad (10.25b)$$

4. Para $0 < \delta < 1/2$.

Quando $0 < \delta < 1/2$ o sinal dos expoentes de T e \tilde{T} se invertem simultaneamente. O efeito é o seguinte: à medida que $\delta \searrow 1/2$, a curva paramétrica $T(\tilde{T})$ se fecha sobre a reta $T \sim \tilde{T}$, que vale para $\delta = 1/2$, cf. Eq.(10.18). Assim, quando $\delta < 1/2$ os papéis de T e \tilde{T} se invertem, e por causa da simetria de reflexão a curva paramétrica “volta por onde veio”, repetindo o padrão de $\delta > 3/4$, mas agora com T e \tilde{T} trocados.

10.2.2 Instabilidades termodinâmicas

A transformação (10.25) indica um comportamento anômalo do fluido para $\delta \leq \frac{3}{4}$. O que se observa em (10.25) é que se $T(\rho)$ é muito grande, então $\tilde{T} = T(\tilde{\rho})$ também o é, ou seja, a função $T = T(\rho)$ não é uma função monotônica decrescente. A partir de algum ponto crítico em que $T = T_{cr}$, a temperatura do fluido começa a *umentar* enquanto sua densidade de energia *decrece*. Isso pode ser confirmado ao se calcular a derivada

$$dT/d\rho = \frac{1}{16\sigma_{SB}} \rho^{-\frac{3+2\delta}{2}} (\rho^\delta - \rho_\Lambda^\delta) [\rho^\delta + 4(\delta - 1)\rho_\Lambda^\delta] \quad (10.26)$$

a partir da Eq.(10.8). O termo $(\rho^\delta - \rho_\Lambda^\delta) \geq 0$, já que ρ_Λ é o valor mínimo da densidade de energia, mas o termo em colchetes pode se anular e mudar de sinal para $\delta < 1$. Nesse caso, temos uma densidade crítica

$$\rho_{cr} = 4^{1/\delta} (1 - \delta)^{1/\delta} \rho_\Lambda, \quad \text{em que } (dT/d\rho)|_{\rho_{cr}} = 0. \quad (10.27)$$

Ainda assim, se $\rho_{cr} < \rho_\Lambda$ o sistema nunca chega ao estado em que $dT/d\rho$ se anula, e portanto o comportamento anômalo da temperatura só ocorre quando $4^{1/\delta} (1 - \delta)^{1/\delta} > 1$, i.e. quando $\delta \leq 3/4$. Então com a Eq.(10.8) se encontra o valor da temperatura crítica $T(\rho_{cr})$, em que a função $T(\rho)$ alcança seu mínimo:

$$T_{cr} = (3 - 4\delta)^{\frac{4\delta-3}{4\delta}} (4 - 4\delta)^{\frac{1-\delta}{\delta}} (\rho_\Lambda/4\sigma_{SB})^{1/4}. \quad (10.28)$$

É este o valor da temperatura nas quinas das curvas tracejadas da Fig.10.1. A explicação para o fenômeno em questão é que o gás para o qual $\delta \leq 3/4$ possui um calor específico negativo; de fato, de acordo com a Eq.(5.17), quando $\rho < \rho_{cr}$

$$C_v = (\partial E/\partial T)_V = V d\rho/dT < 0 \quad \text{se } \delta \leq 3/4. \quad (10.29)$$

Isso contraria a desigualdade termodinâmica (5.18) e se conclui que nesse caso o gás de Chaplygin generalizado é termodinamicamente instável.

Outras possíveis restrições nos valores possíveis de δ vêm da condição de estabilidade (5.23). Na compressibilidade adiabática (5.22), a derivada é avaliada

em um processo em que a entropia permanece constante, o que é o caso na expansão do universo através do fator de escala. Portanto podemos escrever

$$VK_S = -(\partial V/\partial P)_S = V_0 da^3/dP = -3V_0a^2(da/d\rho)(d\rho/dP).$$

A derivada

$$d\rho/da = -4(\rho_\Lambda^\delta + \rho_R^\delta/a^{4\delta})^{\frac{1-\delta}{\delta}} \rho_R^\delta a^{-4\delta-1} < 0,$$

e portanto a condição de que $K_S > 0$ equivale a

$$dP/d\rho > 0. \quad (10.30)$$

Com a equação de estado (10.6),

$$dP/d\rho = \frac{1}{3}\rho^{-\delta} [\rho^\delta + 4(\delta - 1)\rho_\Lambda^\delta], \quad (10.31)$$

e se observa imediatamente que $P(\rho)$, assim como a temperatura, não é uma função monotônica da densidade de energia. Mais que isso, o termo em colchetes, que determina o sinal de $dP/d\rho$, é idêntico ao termo em colchetes na Eq.(10.26). Ou seja, para $\delta \leq 3/4$ não só a temperatura atinge o valor mínimo T_{cr} para depois começar a crescer, mas a pressão também apresenta o mesmo comportamento, atingindo o valor mínimo

$$P_{cr} = -\frac{4}{3}\delta(4 - 4\delta)^{\frac{1-\delta}{\delta}} \rho_\Lambda, \quad (10.32)$$

após o que passa a aumentar à medida que o volume se expande. Assim, nesses casos, a condição (10.30) é violada ou, conseqüentemente,

$$K_S < 0 \quad \text{para} \quad \delta < 3/4, \quad (10.33)$$

reforçando o fato de que então o gás é termodinamicamente instável.

Apesar de a requisição de uma compressibilidade positiva não restringir valores de δ diferentes daqueles já excluídos pela condição (10.29), existe ainda um último detalhe. A derivada $dP/d\rho$ que analisamos é, na realidade, a velocidade da propagação (adiabática) do som no gás, viz.

$$v_s^2 = dP/d\rho \quad (10.34)$$

e deve, evidentemente, ser positiva mas também ser menor do que a velocidade da luz $c^2 = 1$. Entretanto, para $\delta = 3/2$ temos o limite da velocidade superluminal $v_s^2(\rho_\Lambda) = 1$, ou seja

$$v_s^2(\rho_\Lambda) = \frac{4\delta-3}{3} \geq 1 \quad \text{para} \quad \delta \geq 3/2. \quad (10.35)$$

(Repare que $v_s^2|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow -\infty$ para $\delta < 0$, violando toda e qualquer possibilidade de estabilidade perto do big-bang. Isso explica a ausência da análise dos casos $\delta < 0$ no §10.2.1.)

Com tudo isto, que se encontra representado na Fig.10.2, conclui-se que

O gás de Chaplygin é termodinamicamente consistente apenas para $\delta \in (\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$.

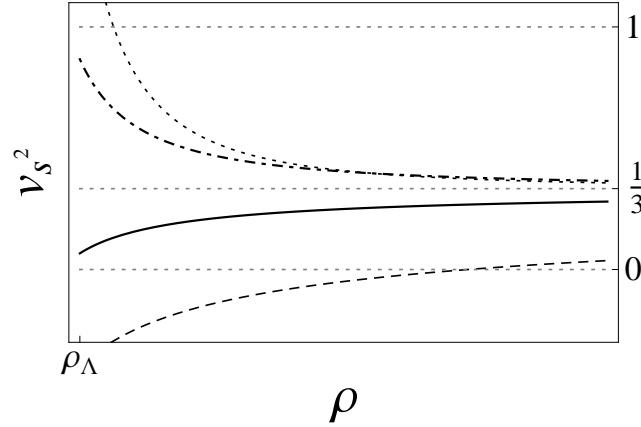


Figura 10.2: Velocidade do som como função da densidade de energia, de acordo com a Eq.(10.34). Linha pontilhada: $\delta > \frac{3}{2}$; Linha tracejada: $0 < \delta < \frac{3}{2}$; Linha contínua: $\frac{3}{4} < \delta < 1$; Linha ponto-tracejada: $1 < \delta < \frac{3}{2}$.

10.3 Termodinâmica dual de horizontes aparentes

No que diz respeito a propriedades termodinâmicas de horizontes em universos de FLRW, a formulação mais apropriada corresponde ao horizonte aparente \mathcal{H} , §2.5.2, sobre o qual as equações de Friedmann correspondem à relação fundamental da termodinâmica (§5.2.2), e cujo raio (físico), (2.55), é

$$\ell_A = 1/\sqrt{H^2 + K/a^2}. \quad (10.36)$$

10.3.1 Transformações gerais

Como no §5.2.2, seguindo Cai & Kim (2005), associamos ao horizonte aparente temperatura e entropia

$$T_A = \frac{1}{2\pi\ell_A}, \quad S_A = \frac{1}{4G}(4\pi\ell_A^2). \quad (10.37)$$

As transformações de dualidade de T_A e S_A são encontradas mais facilmente do que suas análogas do §10.1, e dependem apenas da transformação de ℓ_A . Agora note que o raio comóvel

$$r_A = \ell_A/a = 1/\sqrt{a^2H^2 + K} \quad (10.38)$$

permanece *invariante* sob a DFE, que preserva $aH = \pm\tilde{a}\tilde{H}$, cf. Eq.(8.32). Ou seja, o raio físico se transforma como

$$\tilde{\ell}_A/\tilde{a} = \ell_A/a. \quad (10.39)$$

Daí se tira imediatamente para entropia e temperatura que

$$\tilde{a}\tilde{T}_A = aT_A, \quad \text{e} \quad \tilde{S}_A/\tilde{a}^2 = S_A/a^2. \quad (10.40)$$

Em um espaço-tempo esfericamente simétrico, com métrica h_{AB} nas seções ortogonais às superfícies esféricas

$$ds^2 = h_{AB}(x^0, x^1) dx^A dx^B + R^2(x^0, x^1) d\sigma^2, \quad A, B = 0, 1,$$

a ‘energia de Misner & Sharp (1964)’ contida dentro da esfera de raio R é definida por

$$E_{MS}(R) \equiv \frac{1}{2G} R (1 - h^{AB} \partial_A R \partial_B R). \quad (10.41)$$

A definição (10.41) é puramente geométrica e mede a energia no interior das esferas através da deformação da métrica. A função R define o raio geométrico das superfícies esféricas, e no caso de um universo de FLRW

$$h_{AB} = \text{Diag} [-1, a^2(t)/(1 - Kr^2)], \quad R(t, r) = a(t)r,$$

e temos o raio físico como de se esperar. Considere agora $K = 0$. A energia de Misner-Sharp tem uma interpretação intuitiva,

$$E_{MS} = \frac{1}{2} H^2 R^3, \quad (10.42)$$

e com as equações de Friedmann temos que $E_{MS} = (\varkappa^2/8\pi) \times (4\pi/3)R^3 \rho$. Ou seja, E_{MS} é simplesmente (G vezes) a energia correspondente à densidade ρ em um volume físico esférico de raio R . Quando o volume é o interior do horizonte aparente, a Eq.(10.42) se simplifica de forma curiosamente “holográfica”,

$$E_{MS}|_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \ell_A, \quad (10.43)$$

que depende *linearmente* do raio da esfera. Assim, a transformação dual vinda de (10.39) é simplesmente

$$\mathcal{E}_A/a = \tilde{\mathcal{E}}_A/\tilde{a}, \quad (10.44)$$

onde $\mathcal{E}_A \equiv E_{MS}|_{\mathcal{H}}$ é a energia de Misner-Sharp correspondente ao horizonte aparente. A entropia do fluido no interior de $V_A = \frac{4}{3}\pi\ell_A^3$ é

$$\mathcal{S}_A = \frac{4}{3}\pi\ell_A^3 s, \quad (10.45)$$

onde a densidade de entropia s é a mesma da Eq.(5.2), e muda como $s \sim 1/a^3$. Logo $\mathcal{S}_A \sim 1/(aH)^3$, e sendo aH invariante sob a DFE temos

$$\mathcal{S}_A = \tilde{\mathcal{S}}_A. \quad (10.46)$$

A equação de Friedmann (2.27a) pode ser escrita como

$$1/\ell_A^2 = (3/\varkappa^2) \rho. \quad (10.47)$$

Dada uma equação de estado para o fluido e, a partir daí e pela Eq.(2.35), obtida a função $\rho = \rho(a)$, então se pode, em princípio, inverter a Eq.(10.47) e resolver a como função de ℓ_A , para enfim expressar (10.40) como uma relação apenas entre entropias e entre temperaturas duais. Vamos dar um exemplo.

10.3.2 O caso do fluido autodual

Para o gás de Chaplygin modificado (9.20a), a Eq.(10.47) fica

$$\varkappa^2/(3\ell_A^2) = (\rho_\Lambda^\delta + \rho_R^\delta a^{-4\delta})^{1/\delta},$$

com o que se pode isolar a ,

$$a^{4\delta} = \frac{(3\rho_R/\varkappa^2)^\delta \ell_A^{2\delta}}{1 - (\ell_A/\ell_\Lambda)^{2\delta}}, \quad \text{onde} \quad \ell_\Lambda \equiv 1/\sqrt{(\varkappa^2/3)\rho_\Lambda} = \sqrt{3/\Lambda}$$

é o raio de Hubble no limite dS_4 , onde só resta a constante cosmológica. Daí é fácil eliminar a nas Eqs.(10.40). Por exemplo, para a temperatura, escrevendo $a^{4\delta} T_A^{4\delta} = \tilde{a}^{4\delta} \tilde{T}_A^{4\delta}$, temos

$$\frac{(3\rho_R/\varkappa^2)^\delta T_A^{2\delta}}{1 - (T_\Lambda/T_A)^{2\delta}} = \frac{(3\tilde{\rho}_R/\varkappa^2)^\delta \tilde{T}_A^{2\delta}}{1 - (\tilde{T}_\Lambda/\tilde{T}_A)^{2\delta}},$$

onde $T_\Lambda \equiv 1/(2\pi\ell_\Lambda)$, etc. Para o caso perfeitamente autodual, $\tilde{\rho}_R = \rho_R$ e $T_\Lambda = \tilde{T}_\Lambda$, e a expressão se simplifica,

$$\tilde{T}_A^{2\delta} - T_\Lambda^{2\delta} = \frac{T_\Lambda^{4\delta}}{T_A^{2\delta} - T_\Lambda^{2\delta}}. \quad (10.48)$$

Para a entropia, $S_A \sim \ell_A^2$, o cálculo é análogo e leva à expressão simples

$$\tilde{S}_A^\delta = S_\Lambda^\delta - S_A^\delta. \quad (10.49)$$

Nos casos com $\delta > 0$, S_Λ e T_Λ são a entropia e temperatura finais do universo, enquanto para $\delta < 0$ são os valores iniciais. No primeiro caso, T_Λ é o valor mínimo

de T_A , que decresce do valor infinito na singularidade à medida que o universo se torna vazio e assintoticamente dS_4 ; temos

$$T_\Lambda \leq T_A \leq \infty \quad \text{para } \delta > 0, \quad \text{enquanto } 0 \leq T_A \leq T_\Lambda \quad \text{para } \delta < 0.$$

No último caso o universo começa no vácuo dS_4 e se expande eternamente sendo preenchido por radiação na sua fase final. A radiação se dilui e não há a presença de um horizonte térmico como o de de Sitter, levando a $T \rightarrow 0$. Em ambos os casos, a fórmula (10.48) troca valores altos e baixos de T_A , deixando invariante o ponto intermediário $T_A = 2^{1/\delta} T_\Lambda$. Por sua vez, S_A sempre cresce (ver discussão abaixo), com o detalhe de que

$$0 \leq S_A \leq S_\Lambda \quad \text{para } \delta > 0, \quad \text{enquanto } S_\Lambda \leq T_A \leq \infty \quad \text{para } \delta < 0.$$

O (problemático) limite $S_A \rightarrow 0$ no universo com um big-bang resulta de que $r_A \rightarrow 0$ próximo à singularidade, e o valor final S_Λ é limitado pelo horizonte finito e estático de dS_4 . Para $\delta > 0$ o tamanho físico, ℓ_A não atinge um valor finito mas diverge no fim da vida do universo, e por isso a entropia do seu interior, cuja densidade é finita, também diverge.

10.3.3 A Segunda Lei Generalizada e o gás de Chaplygin modificado

A Segunda Lei da termodinâmica é satisfeita automaticamente para a entropia de Bekenstein-Hawking S_A , já que

$$dS_A/dt = -\pi \ell_A^4 d(H^2 + K/a^2)/dt = -2\pi H \ell_A^4 (\dot{H} - 2K/a^2),$$

e, das equações de Friedmann, $\dot{H} = -(1/2)(\rho + P) + K/a^2$ (com $\varkappa^2 = 1$), logo

$$dS_A/dt = \pi H \ell_A^4 (\rho + P) \geq 0 \quad (10.50)$$

em um universo em expansão ($H > 0$), desde que $P + \rho \geq 0$, i.e. se for válida a Condição Nula de Energia. A CNE é sempre satisfeita classicamente, embora possa ser violada em processos quânticos.

O crescimento da entropia do *fluido* no interior do horizonte aparente, todavia, é mais delicado. A expansão do universo é um processo adiabático para o fluido presente no interior de um volume comóvel fixo, o que se expressa na Eq.(5.4); mas a entropia do fluido dentro do horizonte aparente, cujo volume comóvel *não* é fixo, não é (por consequência) constante. Seja S_0 a constante tal que $s = S_0/a^3$, então $\mathcal{S}_A = \frac{4\pi}{3} S_0 (aH)^{-3}$, e usando as Equações de Friedmann se vê que

$$d\mathcal{S}_A/dt = \frac{2\pi}{3} \frac{S_0 a}{(aH)^4} (\rho + 3P). \quad (10.51)$$

Logo $d\mathcal{S}_A/dt \geq 0$ requer um universo desacelerado (a Condição Forte de Energia), e portanto é violada na presença de uma constante cosmológica ou em uma fase inflacionária.

A violação do crescimento monotônico de \mathcal{S}_A é consequência da diminuição do raio comóvel da esfera de Hubble em um Universo acelerado (cf. §3.2). Termodinamicamente, a violação do crescimento da entropia indica que o fluido no interior do horizonte aparente não é um sistema termodinâmico isolado (e a interação com o meio exterior pode ser encarada como responsável pela diminuição de r_A); à medida que r_A diminui, o fluido no interior de \mathcal{H} atravessa a esfera de Hubble e deixa o sistema. Considerando o próprio horizonte aparente como o complemento do sistema termodinâmico, a entropia generalizada

$$S_{gen} = S_A + \mathcal{S}_A \quad (10.52)$$

deveria crescer,

$$d(S_A + \mathcal{S}_A)/dt \geq 0. \quad (10.53)$$

Isso é possível desde que o crescimento de S_A seja suficiente para contrabalancear a diminuição de \mathcal{S}_A durante uma fase acelerada. Mas nem sempre é verdade, como mostra o seguinte exemplo.

Para o gás de Chaplygin modificado, usando nas Eqs.(10.50) e (10.51) as expressões para P e ρ em termos do fator de escala,

$$d(S_A + \mathcal{S}_A)/da = \frac{96\pi^2 \rho_R^\delta a^{-4(\delta+1)}}{(\rho_\Lambda^\delta + \rho_R^\delta a^{-4\delta})^{1+1/\delta}} \left[1 + \frac{\sqrt{3} S_0}{8\pi \rho_R^\delta} \frac{(\rho_R^\delta - \rho_\Lambda^\delta a^{4\delta})}{a^3 (\rho_\Lambda^\delta + \rho_R^\delta a^{-4\delta})^{1/2\delta}} \right].$$

A Segunda Lei é satisfeita se a expressão em chaves for positiva para todo a . Mas para $\delta > 0$, no limite $a \rightarrow \infty$, temos

$$\left[\dots \right] \rightarrow 1 - \frac{\sqrt{3} S_0 \rho_\Lambda^{\delta-1/2}}{8\pi \rho_R^\delta} a^{4\delta-3},$$

que é negativo para qualquer $\delta > 3/4$ porque o segundo termo diverge com a . No caso limite em que $\delta = 3/4$, em que o expoente de a se anula, resta uma condição sobre o coeficiente, que deve ser menor que 1, ou seja: $\rho_\Lambda^{1/4} \leq 8\pi \rho_R^{3/4} / \sqrt{3} S_0$. Usando (5.11) para S_0 , concluímos que

para o gás de Chaplygin modificado, a soma das entropias do horizonte aparente e do fluido em seu interior só cresce para $\delta < 3/4$ e, para $\delta = 3/4$, se

$$\rho_\Lambda^{1/4} \leq 2\pi\sqrt{3}/(4^5 \sigma_{SB})^{1/4}.$$

Note que para $\delta < 3/4$ há outros problemas termodinâmicos relacionados ao comportamento da temperatura do fluido (§10.2.1) e à sua estabilidade (§10.2.2).

Em resumo, encontramos instabilidades termodinâmicas de três tipos.

No §10.2.2, vimos que o calor específico e a capacidade térmica do gás de Chaplygin modificado são negativos se $\delta < 3/4$. Aqui estamos descrevendo um gás homogêneo em equilíbrio, mas é válido notar que, muito embora seja proibido para sistemas extensivos, outros tipos de sistema apresentam sim um calor específico negativo, o que está ligado a uma transição de fase de primeira ordem. Em particular, essa é uma característica notável de certos sistemas astrofísicos, como em estrelas e aglomerados de estrelas, em que a presença do potencial gravitacional leva a ‘instabilidades gravotérmicas’ relacionadas à diferença de densidade entre o centro e os limites do “gás” em questão. Ver, e.g. a revisão de Lynden-Bell (1999).

Além da restrição de que $\delta > 3/4$ para que se tenha $C_v > 0$, vimos que se $\delta > 3/2$ a velocidade do som $v_s^2 = dP/d\rho$ é superluminal para $\delta > 3/2$; logo esses modelos apresentam um segundo tipo de inconsistência e chegamos à restrição $3/4 < \delta < 3/2$.

Por fim, a Segunda Lei Generalizada, formulada sobre a soma simples da entropia do horizonte aparente e a entropia do fluido contido no seu interior só é válida ou para $\delta < 3/4$, em contradição com a primeira restrição acima, ou para o caso muito específico em que $\delta = 3/4$, dada uma restrição sobre o valor máximo do parâmetro ρ_Λ .

*

A violação de (10.53) para quase todos os modelos de gás de Chaplygin modificado termodinamicamente estáveis diz menos sobre a entropia dos fluidos em si do que sobre a definição de entropia generalizada adotada. Isso fica evidente para o caso $\delta = 1$, que é simplesmente radiação com uma constante cosmológica. Não há nada de misterioso sobre a entropia de um gás de fótons, logo o problema deve estar na definição de o que é, aqui, o sistema termodinâmico isolado para o qual deve valer a Segunda Lei. O problema pode estar simplesmente na escolha do horizonte aparente como limite do sistema termodinâmico e, associado a isso, na utilização da sua área como entropia. Uma alternativa plausível é que se use, no lugar, o horizonte de eventos cosmológico; Davies & Davis (2002) mostram que nesse caso a soma das entropias cresce para alguns exemplos de fluidos simples, incluindo o universo de radiação com constante cosmológica que corresponde aqui a $\delta = 1$. Entretanto, como já discutido nos §§5.2.2 e 5.3.2, o horizonte de eventos possui uma série de desvantagens sobre o horizonte aparente em um espaço-tempo dinâmico.

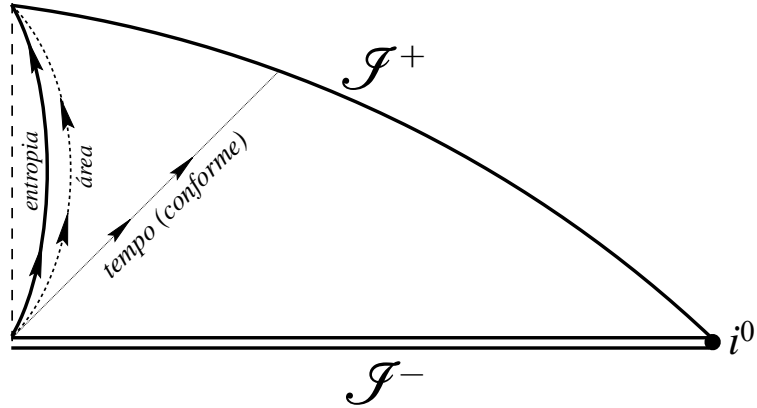


Figura 10.3: Direções do crescimento: da área do horizonte aparente (linha tracejada); de S_{gen} sobre uma tela-Q pretérita, \mathcal{Q} (linha cheia); do tempo conforme sobre uma geodésica nula (linha diagonal).

A solução (que julgamos estar) correta é a de [Bousso & Engelhardt \(2016\)](#), uma construção geométrica razoavelmente mais elaborada esquematizada no §5.3.2 e no Apêndice G. Considere a entropia generalizada de *qualquer* superfície bidimensional (fechada) σ como sendo $(1/4)$ de sua área mais a entropia da matéria em seu interior. Isso é o que fizemos em (10.52) para o caso específico de σ ser (uma folha do) o horizonte aparente. O horizonte aparente \mathcal{H} é uma superfície especial por ser uma ‘tela holográfica pretérita’ (§G.1) em um espaço-tempo de FLRW. O crescimento de sua área é, portanto, assegurado pelo Teorema de [Bousso & Engelhardt \(2015a\)](#) (cf. §G.2), e se verifica na Eq.(10.50). A partir de \mathcal{H} se constrói (§G.3) uma ‘tela-Q’ sobre a qual S_{gen} cresce para o futuro monotonicamente.

Capítulo 11

Cosmologias duais do tipo conforme cíclicas

Assim como acontece com a dualidade presente na cosmologia de cordas descrita no §6.3, a dualidade do fator de escala no tempo conforme dá origem a cosmologias pré-big-bang, mas na gravitação de Einstein; os universos antes e depois do big-bang formam um par dual. Há duas classes de modelos: do tipo Contração-Expansão, em que antes do big-bang o universo colapsa em um big-crunch; e do tipo expansão-expansão, em que ambas as fases pré- e pós-big-bang se expandem. Neste capítulo, analisamos em detalhes este último caso, e a sua ligação com o modelo da CCC apresentado no Capítulo 7.

11.1 Universo dual antes do big-bang

Sejam $\hat{\mathcal{A}} \equiv \{\hat{a}(\hat{\eta}); \hat{\rho}(\hat{a}); \hat{P}\}$ e $\check{\mathcal{A}} \equiv \{\check{a}(\check{\eta}); \check{\rho}(\check{a}); \check{P}\}$ um par de universos duais,

$$\check{a}(\check{\eta}) = c^2/\hat{a}(\hat{\eta}) \quad \text{e} \quad \hat{w} + \check{w} = -2/3; \quad (11.1)$$

e suponha que estejam *ambos em expansão*, de maneira que a Eq.(8.15c) dá

$$\check{a} \check{H} = \hat{a} \hat{H}. \quad (11.2)$$

(Em rigor podem estar ambos em contração, mas esse caso não será de nosso interesse. Desejamos que sempre um dos universos tenha comportamento similar ao nosso Universo observável.) Como discutido no §8.2.2, isto fixa a transformação dos tempos conformes, $\hat{\eta} \mapsto \check{\eta}$ como sendo composta de uma *reflexão* e uma *translação*:

$$\check{\eta}(\check{a}) = -\hat{\eta}(\hat{a}) + \eta_*. \quad (11.3)$$

A constante de integração η_* é livre, e corresponde à invariância das equações de Friedmann sob uma translação temporal que permite que se escolha a “origem do tempo”. Mas a reflexão temporal deve ser realizada de acordo com os argumentos das funções $\eta(a)$. Faça $\eta_* = 0$, e se pode omitir os indicadores:

$$\eta(\check{a}) = -\eta(\hat{a}). \quad (11.4)$$

Agora fixe o big-bang de $\hat{\mathcal{S}}$ em $\eta|_{\hat{a}=0} = 0 = -\eta|_{\hat{a}=\infty}$, e temos em $\eta = 0$ a transição do fim ($\hat{a} \rightarrow \infty$) de $\hat{\mathcal{S}}$ para o big-bang de $\check{\mathcal{S}}$, como mostrado na Fig.11.1(a). Ao

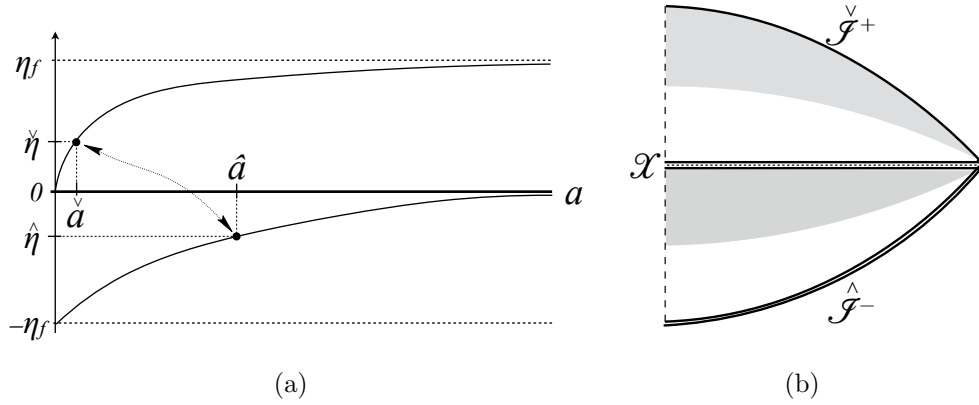


Figura 11.1: Dois universos duais ligados por $\{\check{a} = 0\} \sim \{\hat{a} = \infty\}$. (a) Funções $\hat{\eta}(\hat{a})$ e $\check{\eta}(\check{a})$. Os pontos indicados pelas setas são ligados pela dualidade, com $\check{a} = c^2/\hat{a}$. (b) Diagramas de Penrose para universos duais com fase acelerada; porções sombreadas indicam as regiões com aceleração positiva.

se realizar o mapa conforme de $\hat{\mathcal{S}}$ e $\check{\mathcal{S}}$ sobre o cilindro de Einstein \mathcal{E} , gerando os diagramas de Penrose, o tempo conforme é o eixo de \mathcal{E} , e os diagramas para os aeons duais, Fig.11.1(b), ficam um sobre o outro (logo um *depois* do outro), unidos pela superfície de transição

$$\mathcal{X} \equiv \{(\hat{a} = \infty) \sim (\check{a} = 0)\} = \{\eta = 0\}. \quad (11.5)$$

Indicamos \mathcal{X} por uma linha tripla nos diagramas: é a identificação de uma singularidade (linha dupla) com um infinito conforme $\hat{\mathcal{S}}^+$ (linha simples).

Note que é fundamental que $\hat{\mathcal{S}}^+$ seja tipo-espaço, o que é garantido por construção pela transformação da matéria sob a DFE (ver ítem 8.2.2 do §8.2.2): o big-bang de $\hat{\mathcal{S}}$ é uma fase de expansão desacelerada para que a singularidade seja tipo-espaço; esta fase é mapeada pela dualidade numa fase final de expansão acelerada de $\check{\mathcal{S}}$, o que leva a um infinito tipo-espaço. (Ver §2.5.3, em particular a Fig.2.4.) Isto é válido mesmo se $\check{\mathcal{S}}$ for desacelerado durante toda a sua vida

conforme, que é então, infinita, com $\check{\mathcal{I}}^+$ nulo mas $\hat{\mathcal{I}}^+$ tipo-espaço e os diagramas duais são do tipo mostrado na Fig.8.3. No que segue, nosso interesse será em universos com duas fases de aceleração, começando com aceleração negativa, de forma que tanto \mathcal{I}^+ quanto a singularidade são sempre tipo-espaço nos dois universos, como mostrado na Fig.11.1. A duração conforme, Eq.(8.30), é invariante sob a DFE, cf. Eq.(8.31).

Em resumo, a transformação de dualidade

$$\check{a}(\eta) = c^2/\hat{a}(-\eta), \quad \text{com } \eta \in (0, \eta_f) \quad (11.6)$$

mapeia $\check{\mathcal{A}}$, com $\hat{\eta} \in 0, \eta_f$, em um universo $\hat{\mathcal{A}}$ antes do big-bang, com $\hat{\eta} \in (-\eta_f, 0)$.

11.2 Dualidade do fator de escala enquanto uma transformação de Weyl

Sejam $\hat{\mathcal{A}}$ e $\check{\mathcal{A}}$ dois universos como os da seção anterior, ambos tendo duas fases de aceleração, com início em expansão acelerada e fim em expansão desacelerada. Vamos chamar $\hat{\mathcal{A}}$ e $\check{\mathcal{A}}$ de ‘aeons’, por serem eternos no tempo cósmico $t \in (0, \infty)$, apesar de finitos no tempo conforme $\eta \in (0, \eta_f)$.

O aeon futuro é o espaço-tempo $(\check{\mathcal{M}}, \check{\mathbf{g}})$, e o aeon passado o espaço-tempo $(\hat{\mathcal{M}}, \hat{\mathbf{g}})$. Ambos são espaços de FLRW, e vamos considerar seções espaciais planas, com elementos de linha

$$d\check{s}^2 = \check{a}^2(\check{\eta}) (-d\check{\eta}^2 + d\mathbf{x}^2), \quad \text{e} \quad d\hat{s}^2 = \hat{a}^2(\hat{\eta}) (-d\hat{\eta}^2 + d\mathbf{x}^2). \quad (11.7)$$

As variedades $\hat{\mathcal{M}}$ e $\check{\mathcal{M}}$ são ambas subvariedades disjuntas de uma mesma ‘variedade suporte’ \mathcal{M} . Para métricas do tipo (11.7), \mathcal{M} é \mathbf{R}^4 com $x^0 = \eta \in [-\eta_f, +\eta_f]$, e $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ é Minkowski, com $g_{\mu\nu}$ tendo elemento de linha

$$ds^2 = -d\eta^2 + d\mathbf{x}^2. \quad (11.8)$$

Por outro lado, em $\check{\mathcal{M}}$, $\check{\eta} = \eta \in (0, \eta_f)$, e em $\hat{\mathcal{M}}$, $\hat{\eta} = \eta \in (-\eta_f, 0)$. A superfície de transição (11.5) liga os dois aeons, e assim

$$\mathcal{M} = \hat{\mathcal{M}} \cup \mathcal{X} \cup \check{\mathcal{M}}.$$

Com isso, a menos de uma constante multiplicativa, podemos escrever as métricas da Eq.(11.7) na forma

$$\hat{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x); \quad \check{g}_{\mu\nu}(x) = \omega^2(x)g_{\mu\nu}(x), \quad (11.9)$$

com $x \in \mathcal{M}$,

e onde, seguindo (11.6), definimos

$$\omega(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{c} \check{a}(\eta) \\ -\frac{1}{c} \check{a}(-\eta) \end{cases} \quad \text{e} \quad \Omega(\eta) = \begin{cases} -c/\check{a}(\eta) = -\frac{1}{c} \hat{a}(-\eta); & \eta > 0 \\ c/\check{a}(-\eta) = \frac{1}{c} \hat{a}(\eta); & \eta < 0 \end{cases}. \quad (11.10)$$

Os fatores de c são inseridos para que, por construção,

$$\Omega(x)\omega(x) = -1, \quad (11.11)$$

enquanto os fatores de escala sejam duais. Por exemplo, para $\eta > 0$, temos

$$-1 = \omega(\eta) \times \Omega(\eta) = \frac{1}{c^2} \hat{a}(\eta) \times (-\check{a}(-\eta)).$$

O sinal negativo no lado direito da Eq.(11.11) garante que a função $\omega(\eta)$ seja contínua em $\eta = 0$, onde $\omega(0) = 0$, como na Fig.11.2. Repare que desenhamos ω e Ω divergindo para algum η_f finito, que é o caso que nos interessa, mas a construção (11.10) funciona no limite $\eta_f = \infty$, em que, por exemplo, $\check{\mathcal{A}}$ é sempre desacelerado e $\hat{\mathcal{A}}$ sempre acelerado.

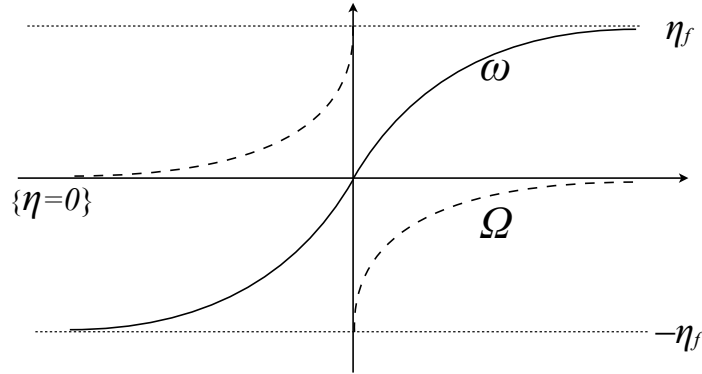


Figura 11.2: Fatores conformes definidos em (11.10).

*

A origem conforme da transformação da matéria na DFE

A transformação específica da matéria na DFE, Eqs.(8.15b) e (8.15c), é consequência da transformação de Weyl (11.9) com a imposição das Equações de Einstein em ambos $\check{\mathcal{A}}$ e $\hat{\mathcal{A}}$.

Podemos ligar as métricas dos dois aeons diretamente:

$$d\check{s}^2 = \omega^2 \Omega^{-2} d\hat{s}^2 = \Omega^{-4} d\hat{s}^2, \quad (11.12)$$

e ao se relacionar as métricas de $\check{\mathcal{A}}$ e $\hat{\mathcal{A}}$ pelo reescalamto conforme $\check{g}_{\mu\nu} = \Omega^{-4}\hat{g}_{\mu\nu}$, a condição de que valham as equações de Einstein separadamente para ambas $\check{g}_{\mu\nu}$ e $\hat{g}_{\mu\nu}$ fornece uma ligação entre os tensores de energia-momento $\hat{T}_{\mu\nu}$ e $\check{T}_{\mu\nu}$ dada pela Eq.(7.16), viz.

$$\begin{aligned} \check{T}_{\mu\nu} &= \hat{T}_{\mu\nu} + \Phi_{\mu\nu}, \quad \text{onde} \\ \Phi_{\mu\nu} &= -\frac{4}{\varpi^2}\check{\nabla}_\mu\varpi\check{\nabla}_\nu\varpi - \frac{4}{\varpi}\check{\nabla}_\mu\check{\nabla}_\nu\varpi + \frac{4}{\varpi}\left(\check{\square}\varpi - \frac{2}{\varpi}\check{g}^{\alpha\beta}\check{\nabla}_\alpha\varpi\check{\nabla}_\beta\varpi\right)\check{g}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Vê-se na Fig.11.2 que o campo escalar $\varpi = -\omega$ atravessa de maneira suave a fronteira entre aeons. Em $\check{\mathcal{A}}$, a definição (11.10) dá

$$\varpi = -\frac{1}{e}\check{a}(\eta). \quad (11.14)$$

Com a métrica na forma de FLRW, podemos calcular as componentes de $\Phi_{\mu\nu}$, e encontrar como se relaciona a matéria em $\check{\mathcal{A}}$ e $\hat{\mathcal{A}}$ de maneira explícita. Para isso, precisamos de alguns resultados. O primeiro termo de $\Phi_{\mu\nu}$ só não se anula na componente 00, para a qual $\check{\nabla}_0\varpi\check{\nabla}_0\varpi = (\varpi')^2$, onde $f' = \partial_0 f = \partial f/\partial\eta$. Usando as usando as conexões da métrica (2.6), vê-se que a derivada covariante dupla

$$\check{\nabla}_\mu\check{\nabla}_\nu\varpi = \partial_\mu\partial_\nu\varpi - \check{\Gamma}_{\mu\nu}^0\partial_0\varpi,$$

tem componentes não nulas

$$\check{\nabla}_0\check{\nabla}_0\varpi = \varpi'' - (\check{a}'/\check{a})\varpi', \quad \check{\nabla}_i\check{\nabla}_i\varpi = -(\check{a}'/\check{a})\varpi'.$$

Com $x^0 = \eta$, o operador de Laplace-Beltrami

$$\check{\square} = \frac{1}{\sqrt{-\check{g}}}\partial_\mu(\sqrt{-\check{g}}\partial^\mu) = \frac{1}{\check{a}^4}\partial_\mu(\check{a}^4\partial^\mu) = \partial_\mu\partial^\mu + \frac{4\check{a}'}{\check{a}}\partial^0 = \partial_\mu(\check{a}^{-2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu) + \frac{4\check{a}'}{\check{a}}\check{g}^{0\mu}\partial_\mu,$$

fica

$$\check{\square} = \frac{1}{\check{a}^2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - \frac{2\check{a}'}{\check{a}^3}\partial_0,$$

e como homogeneidade e isotropia impõem $\varpi = \varpi(x^0)$,

$$\check{\square}\varpi = -\frac{1}{\check{a}^2}\varpi'' - \frac{2\check{a}'}{\check{a}^3}\varpi'. \quad (11.15)$$

Por fim,

$$\check{g}^{\alpha\beta}\check{\nabla}_\alpha\varpi\check{\nabla}_\beta\varpi = \check{g}^{00}\varpi'\varpi' = -\frac{1}{\check{a}^2}(\varpi')^2. \quad (11.16)$$

Com tudo isso, se obtém

$$\Phi_{00} = -4\left(\frac{\varpi'}{\varpi}\right)^2 - 4\frac{\varpi''}{\varpi} + 4\frac{\check{a}'}{\check{a}}\frac{\varpi'}{\varpi} + \left(-\frac{4}{\check{a}^2}\frac{\varpi''}{\varpi} - 8\frac{\check{a}'}{\check{a}^3}\frac{\varpi'}{\varpi} + \frac{8}{\check{a}^2}\frac{\varpi'^2}{\varpi^2}\right)(-\check{a}^2),$$

ou seja,

$$\Phi_{00} = -12(\varpi'/\varpi)^2 + 12(\check{a}'/\check{a})(\varpi'/\varpi). \quad (11.17)$$

Usando a Eq.(11.14) para ϖ , temos $\check{a}'/\check{a} = \phi'/\phi$, donde

$$\Phi_{00} = 0. \quad (11.18)$$

As outras componentes possivelmente não nulas de $\Phi_{\mu\nu}$ são os outros elementos de sua diagonal; para estas, o primeiro termo é nulo, e ficamos com

$$\Phi_{ii} = 4\frac{\check{a}'\varpi'}{\check{a}\varpi} + \left(-\frac{4}{\check{a}^2}\frac{\varpi''}{\varpi} - 8\frac{\check{a}'\varpi'}{\check{a}^3\varpi} + \frac{8}{\check{a}^2}\frac{\varpi'^2}{\varpi^2}\right)\check{a}^2 = 4\left[\left(\frac{\check{a}'}{\check{a}}\right)^2 - \frac{\varpi''}{\varpi}\right],$$

(sem soma sobre os índices repetidos) onde usamos mais uma vez $\check{a}'/\check{a} = \varpi'/\varpi$. Como $\varpi'' = -\frac{1}{c}\check{a}''$, temos por fim

$$\Phi_{ii} = 4(\check{a}'/\check{a})^2 - 4(\check{a}''/\check{a}). \quad (11.19)$$

(Sem soma sobre os índices repetidos.)

De posse destes resultados, podemos calcular a relação entre as pressões e densidades dos fluidos dos dois aeons, usando a Eq.(11.13), e lembrando que os $T_{\mu\nu}$ têm componentes (2.16a). A relação entre as componentes 00 é simplesmente

$$\check{T}_{00} = \hat{T}_{00}, \quad \text{ou seja,} \quad \check{a}^2\check{\rho} = \hat{a}^2\hat{\rho}. \quad (11.20)$$

Já as componentes espaciais ficam

$$\check{a}^2\check{P} = \hat{a}^2\hat{P} + \frac{4}{\check{a}}\left(\frac{\check{a}'^2}{\check{a}} - \check{a}''\right).$$

A expressão em parênteses é a contribuição de Φ_{ii} . Agora, o fator de escala satisfaz as equações de Friedmann (2.28), e usando a Eq.(2.28b), temos a igualdade

$$\check{a}^2\check{P} = \hat{a}^2\hat{P} + 2\check{a}^2\left(\check{P} + \frac{1}{3}\check{\rho}\right),$$

que, reorganizada de maneira mais simétrica com o auxílio da Eq.(11.20), fica

$$\check{a}^2(3\check{P} + \check{\rho}) = -\hat{a}^2(3\hat{P} + \hat{\rho}). \quad (11.21)$$

As fórmulas (11.20) e (11.21) são as transformações da DFE, Eqs.(8.15b) e (8.15c). O que mostramos aqui pode ser descrito da seguinte forma: o campo ϖ , correspondente à geometria do universo de FLRW $\hat{\mathcal{A}}$, atua no universo dual $\check{\mathcal{A}}$ de maneira a mudar o sinal da aceleração. Em particular, se em $\hat{\mathcal{A}}$ há uma constante cosmológica pura, o campo ϖ correspondente tem em $\check{\mathcal{A}}$ o comportamento de radiação. Pode-se usar o argumento inverso: a DFE descreve a constante cosmológica como sendo efeito do campo ϖ correspondente a radiação. De forma mais geral, qualquer “energia escura” violando a Condição Forte de Energia pode ser descrita dessa forma em termos de matéria “comum” que satisfaz a CFE.

11.3 A dualidade do fator de escala como uma cosmologia conforme cíclica de FLRW

Toda a discussão do §11.2 acima é muito próxima do formalismo descrito no Capítulo 7 para a Cosmologia Conforme Cíclica. Na realidade, o que fica claro, em particular com o §11.2, é que a dualidade do fator de escala no tempo conforme é uma realização dos princípios básicos da CCC em universos de FLRW. A maioria das questões fenomenológicas da CCC não pode ser abordada com a geometria idealizada dos espaços homogêneos e isotrópicos. Por exemplo, a Hipótese da Curvatura de Weyl é satisfeita de maneira trivial. O fenômeno mais relevante aqui é a simples existência de modelos pré-big-bang assintoticamente de Sitter ligados ao big-bang por uma superfície de transição conforme \mathcal{X} . Das hipóteses da CCC, além da existência de \mathcal{X} e da relação recíproca (11.11), podemos ainda analisar a ‘hipótese da massa-de-repouso suprimida’ (HMRS), descrita na Eq.(7.8).

*

A hipótese da massa-de-repouso suprimida

Desejamos escrever $\nabla_\mu \omega \nabla^\mu \omega \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \omega \nabla_\nu \omega$ como uma expansão em ω . Aqui, de acordo com (11.8), $g_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e sendo ω , dado pela (11.10), função de η apenas, então

$$\nabla_\mu \omega \nabla^\mu \omega = -\frac{1}{c^2} (\check{a}'(\eta))^2, \quad \text{para } \eta > 0. \quad (11.22)$$

Usando a primeira das equações de Friedmann, (2.28a) (com $K = 0$), temos

$$\nabla_\mu \omega \nabla^\mu \omega = -\frac{1}{3c^2} \check{a}^4 \check{\rho}; \quad \eta > 0. \quad (11.23a)$$

Já para $\eta < 0$, temos $\nabla_\mu \omega \nabla^\mu \omega = -c^2 \left(\frac{\hat{a}'(\eta)}{\hat{a}^2(\eta)} \right)^2$, ou seja,

$$\nabla_\mu \omega \nabla^\mu \omega = -\frac{c^2}{3} \hat{\rho}; \quad \eta < 0. \quad (11.23b)$$

A HMRS (7.8) é de que

$$\nabla_\mu \omega \nabla^\mu \omega = -1 + (2 - Q)\omega^2 + O[\omega^3], \quad (11.24)$$

com Q constante, i.e. não existe o termo linear na expansão. Para ω dado por (11.10), a hipótese acima se lê

$$\nabla_\mu \omega \nabla^\mu \omega = -1 + \frac{(2-Q)}{c^2} \check{a}^2(\eta) + O[\check{a}^3(\eta)]; \quad \eta > 0, \quad (11.25a)$$

$$\nabla_\mu \omega \nabla^\mu \omega = -1 + c^2(2 - Q)\hat{a}^{-2}(\eta) + O[\hat{a}^{-3}(\eta)]; \quad \eta < 0, \quad (11.25b)$$

e, comparando estas com as Eqs.(11.23), obtemos uma condição sobre as densidades de energia nos dois aeons nas proximidades da superfície de transição:

$$\begin{aligned}\check{\rho} &= 3c^2 \check{a}^{-4} + 3(Q-2)\check{a}^{-2} + O[\check{a}^{-1}] ; \\ \hat{\rho} &= \frac{3}{c^2} + 3(Q-2)\hat{a}^{-2} + O[\hat{a}^{-3}].\end{aligned}\tag{11.26}$$

Ou seja, o início de \mathcal{A} é dominado por radiação,

$$\check{\rho} \approx \check{\rho}_R/\check{a}^4, \quad \text{com} \quad \check{\rho}_R = 3c^2;$$

o final de \mathcal{A} é dominado por uma constante cosmológica,

$$\hat{\rho} \approx \hat{\rho}_\Lambda, \quad \text{com} \quad \hat{\rho}_\Lambda = 3/c^2,$$

estando as densidades, portanto, ligadas como determina a DFE, (8.20), viz.

$$c^4 = \check{\rho}_R/\hat{\rho}_\Lambda.\tag{11.27}$$

Note que, implícita na escolha de -1 para o termo de ordem zero na expansão (11.24), está a condição de normalização de $\partial_\mu\omega$ em \mathcal{X} , i.e. $g^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega|_{\mathcal{X}} = -1$. Como se vê de (11.27), esta condição fixa o valor da constante cosmológica $\hat{\Lambda} = 3/c^2$. Para ser mais geral, defina

$$N_\mu \equiv f \partial_\mu\omega, \quad \text{com} \quad f \equiv (3/c^2\hat{\rho}_\Lambda)^{1/2} = (3\check{\rho}_R/c^2)^{1/2},\tag{11.28}$$

onde assumimos (11.27), e imponha uma versão equivalente da HMRS:

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu}N^\mu N^\nu &= -1 - \frac{\check{Q}_2}{c^2}\check{a}^2 - \frac{\check{Q}_3}{c^2}\check{a}^3 - \frac{\check{Q}_4}{c^2}\check{a}^4 + O[\check{a}^5] \quad \text{para } \eta > 0 \\ g_{\mu\nu}N^\mu N^\nu &= -1 - \frac{\hat{Q}_2}{c^2}\hat{a}^{-2} - \frac{\hat{Q}_3}{c^2}\hat{a}^{-3} - \frac{\hat{Q}_4}{c^2}\hat{a}^{-4} + O[\hat{a}^{-5}] \quad \text{para } \eta < 0\end{aligned}\tag{11.29}$$

supondo que as potências sejam todas inteiras ao menos até ordem 4. Comparação com (11.26) mostra que as densidades de energia têm a forma

$$\begin{aligned}\check{\rho} &= \check{\rho}_R \check{a}^{-4} + \check{\rho}_C \check{a}^{-2} + \check{\rho}_{PD} \check{a}^{-1} + \dots \\ \hat{\rho} &= \hat{\rho}_\Lambda + \hat{\rho}_C \hat{a}^{-2} + \hat{\rho}_M \hat{a}^{-3} + \hat{\rho}_R \hat{a}^{-4} + \dots\end{aligned}\tag{11.30}$$

Com a condição de normalização de N^μ (e não de $\partial_\mu\omega$ diretamente), o fator f^2 em (11.28) introduz uma relação entre os coeficientes:

$$\begin{aligned}\check{Q}_2 &= c^2\check{\rho}_C/\check{\rho}_R, \quad \check{Q}_3 = c^3\check{\rho}_{PD}/\check{\rho}_R, \quad \check{Q}_4 = c^4\check{\rho}_\Lambda/\check{\rho}_R, \\ \text{e } \hat{Q}_2 &= c^{-2}\hat{\rho}_C/\hat{\rho}_\Lambda, \quad \hat{Q}_3 = c^{-3}\hat{\rho}_M/\hat{\rho}_\Lambda, \quad \hat{Q}_4 = c^{-4}\hat{\rho}_R/\hat{\rho}_\Lambda.\end{aligned}$$

Assumindo que sejam universais, i.e. que $\check{Q}_2 = \hat{Q}_2$, $\check{Q}_3 = \hat{Q}_3$ e $\check{Q}_4 = \hat{Q}_4$, então se introduz, em conjunto com (11.27), as seguintes relações entre as densidades dos tipos de matéria em cada aeon,

$$\check{\rho}_{PD}/\hat{\rho}_M = c^{-2}, \quad \check{\rho}_C/\hat{\rho}_C = 1. \quad (11.31)$$

A primeira dessas equações é a transformação da DFE para o par de fluidos duais Poeira-Paredes de Domínio, Eqs.(8.21). A segunda das equações mostra que se há um gás de cordas com densidade relativa $\hat{\rho}_C$ em $\hat{\mathcal{A}}$, ele passa para $\check{\mathcal{A}}$ com a mesma densidade. (Newman (2014) fixa $Q_2 = 0$, logo impõe a ausência de um gás de cordas no início e final dos aeons. Uma expansão similar das densidades em componentes de fluidos perfeitos foi encontrada por Meissner & Nurowski (2015).)

Conceitualmente, o detalhe mais importante de (11.30) é que não existe, no início de $\check{\mathcal{A}}$, um fluido de poeira/matéria-escura. Vem daí a motivação para a nomenclatura: *a hipótese da supressão da massa-de-reposou equivale à inexistência do termo $\check{\rho} \sim \check{a}^{-3}$, i.e. não há matéria bariônica no início do universo*. As expansões (11.30) mostram que (na presença apenas de potências inteiras do fator de escala) os fluidos perfeitos permitidos no final do aeon $\hat{\mathcal{A}}$ são todos os possíveis no modelo padrão: constante cosmológica $\hat{\rho}_\Lambda$, poeira/matéria escura fria $\hat{\rho}_M$ e radiação $\hat{\rho}_R$, incluindo também, possivelmente, um gás de cordas $\hat{\rho}_C$. Já no início de $\check{\mathcal{A}}$, só estão permitidos radiação, o mesmo gás de cordas, e um gás de paredes de domínio $\check{\rho}_{PD}$. Se valem as relações (11.31), este último está ligado diretamente à presença de poeira/matéria-escura em $\hat{\mathcal{A}}$, e $\check{\rho}_{PD} = 0$ se e somente se $\hat{\rho}_M = 0$.

A condição de que haja apenas potências inteiras na expansão (11.29) é desnecessariamente restritiva. Considere um gás de Chaplygin preenchendo $\check{\mathcal{A}}$,

$$\check{\rho} = \check{a}^{-4} (\check{D} + \check{B}\check{a}^{4\delta})^{1/\delta}. \quad (11.32)$$

A autodualidade faz com que em $\hat{\mathcal{A}}$ haja um fluido do mesmo tipo, com diferentes valores de D e B . Na vizinhança de \mathcal{X} temos

$$\check{\rho} = \check{D}^{1/\delta}\check{a}^{-4} + \frac{\check{B}\check{D}^{1-\delta}}{\delta}\check{a}^{-4(1-\delta)} + O[\check{a}^{-4(1-2\delta)}], \quad (11.33)$$

logo para $\delta \geq 1/2$ a condição de supressão da massa-de-reposou é obedecida. Para $\delta = 1/2$, temos uma série de fato igual à (11.26), com um termo $\sim \check{a}^{-2}$, e $Q = 2 + \check{B}\check{D}^{1-\delta}/3\delta$. Se $\delta > 1/2$, a expansão não é exatamente da forma (11.26), podendo inclusive contar com potências irracionais de \check{a} ; porém a característica desejada de que $g^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega \approx -1$ até ordem superior a ω^2 fica preservada. Note, por outro lado, que impondo ao gás de Chaplygin que a expansão só possua potenciais inteiras leva a uma restrição sobre os valores de δ , viz. $\delta = 1/2, 3/4$

ou 1. Em particular, para $\delta = 3/4$, temos um modelo curioso. Na vizinhança do big-bang temos radiação e paredes de domínio, porque $\check{\rho} \approx \check{\rho}_R/\check{a}^4 + \check{\rho}_{PD}/\check{a}$, mas para \check{a} suficientemente grande, surge uma contribuição de poeira, $\check{\rho} \approx \check{\rho}_\Lambda + \check{\rho}_M/\check{a}^3$. Isso é uma realização perfeita da HMRS: por motivos óbvios, deve haver matéria bariônica em \mathcal{A} , ela deve ser suprimida apenas nas proximidades do big-bang.

11.4 Extensões cíclicas de cosmologias duais

A construção do §11.1 se estende para uma sequência infinita de aeons duais.

No espaço-tempo suporte $(\mathcal{M}, \mathbf{g}) = M^{(3,1)}$, particione o eixo temporal $\eta \in \mathbf{R}$ em infinitos intervalos $I_j = [(j-1)\eta_f, j\eta_f]$, com $j \in \mathbf{Z}$ números inteiros. Sobre um intervalo, digamos I_0 , defina o fator de escala $a_1(\eta_1)$, solução das equações de Einstein para o fluido com equação de estado w_j , com duração conforme finita η_f e com $\eta_1 \in I_1$. Nos intervalos adjacentes, $I_{\pm 1}$, defina as soluções duais, e assim por diante. A sequência de aeons \mathcal{A}_j , caracterizados por

$$\mathcal{A}_j = \{a_j(\eta_j); \quad \eta_j \in [(j-1)\eta_f, j\eta_f]; \quad j \in \mathbf{Z}\}, \quad (11.34)$$

e mostrados na Fig.11.3, tem cada fator de escala $a_j(\eta_j)$ se relacionando com seus adjacentes por

$$a_{j+1}(\eta_{j+1}) = \frac{c^2}{a_j(2j\eta_f - \eta_{j+1})}; \quad a_{j-1}(\eta_{j-1}) = \frac{c^2}{a_j(2(j-1)\eta_f - \eta_{j-1})}, \quad (11.35)$$

como na Fig.11.3(a) e as densidades e pressões dos fluidos

$$\begin{aligned} a_j^2 \rho_j &= a_{j+1}^2 \rho_{j+1}, & a_j^2(3P_j + \rho_j) &= -a_{j+1}^2(3P_{j+1} + \rho_{j+1}), \\ & & w_j + w_{j+1} &= -\frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (11.36)$$

Ao fim de cada intervalo I_j temos uma superfície de transição

$$\mathcal{X}_j = \{a_j(j\eta_f) = \infty \sim a_{j+1}(j\eta_f) = 0\},$$

marcando o fim de \mathcal{A}_j e o big-bang de \mathcal{A}_{j+1} .

Na Fig.11.3 vemos alguns aeons da sequência infinita, tanto o comportamento do fator de escala, Fig.11.3(a), quanto um diagrama de Penrose, Fig.11.3(b). Neste último, vale notar que quanto mais distante da linha central \mathcal{X}_0 , a área correspondente aos aeons \mathcal{A}_j diminui por causa da geometria conforme (próximo às bordas do diagrama há uma compressão das distâncias), mas todos tem a mesma duração η_f no tempo conforme, como indicado na Fig.11.3(a). Apesar da sequência ser infinita, a simetria Z_2 faz com que haja, de fato, apenas duas soluções distintas, infinitamente repetidas. Isto é,

$$a_j(\eta_j) = a_{j+2}(\eta_{j+2}) \quad \forall j, \quad \text{com} \quad \rho_j = \rho_{j+2}, \quad \text{etc.} \quad (11.37)$$

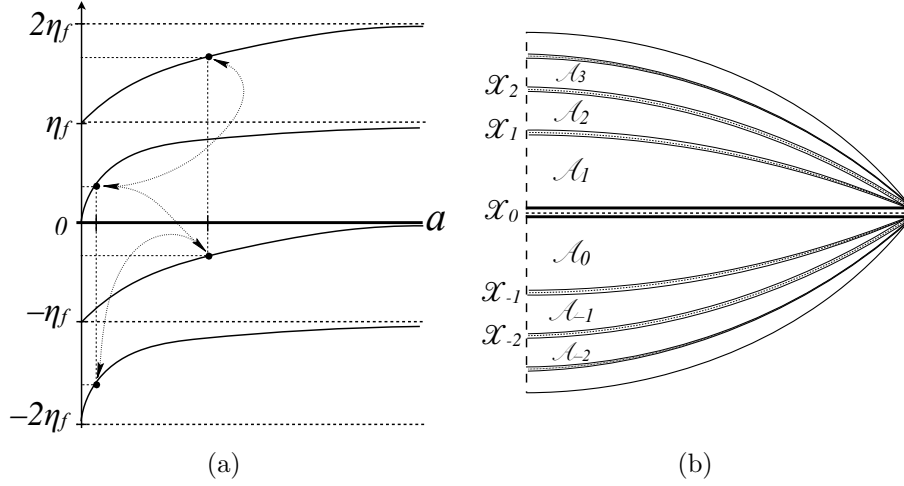


Figura 11.3: Sequências de aeons. (a) Evolução dos fatores de escala $\eta_j(a_j)$. Pontos ligados pelas setas são diretamente mapeados pela DFE. (b) Diagrama de Penrose de diversos aeons consecutivos.

Como um exemplo concreto, tome o caso simples de um gas de Chaplygin (11.32) com $\delta = 1/2$:

$$\rho = (\sqrt{\rho_\Lambda} + \sqrt{\rho_R} a^{-2})^2. \quad (11.38)$$

(Este exemplo satisfaz a hipótese da massa suprimida como visto acima.) É trivial integrar o fator de escala diretamente de (9.28); para o aeon \mathcal{A}_1 , com big-bang em $\eta_1 = 0$ e argumento no intervalo $I_1 = [0, \eta_f]$, temos

$$a_1(\eta_1) = (\rho_{R1}/\rho_{\Lambda1})^{1/4} \tan\left(\frac{\pi}{2}\eta_1/\eta_f\right),$$

onde $\eta_f = 3\pi/2(\rho_{R1}/\rho_{\Lambda1})^{1/4}$. Com a Eq.(11.35), podemos encontrar os aeons adjacentes, por exemplo

$$a_0(\eta_0) = c^2 (\rho_{\Lambda1}/\rho_{R1})^{1/4} \cot\left[-\frac{\pi}{2}\eta_0/\eta_f\right] = (\rho_{R0}/\rho_{\Lambda0})^{1/4} \tan\left[\frac{\pi}{2}(\eta_0 + \eta_f)/\eta_f\right],$$

onde usamos a identidade $\tan(x \pm \pi/2) = -\cot x = \cot(-x)$ na última passagem e a relação (9.20b) entre as constantes. Sendo o fluido autodual, a diferença entre as soluções adjacentes está meramente na redefinição das constantes, e no deslocamento do intervalo de η , levado a cabo pela adição de η_f na última igualdade. É útil usar a $a_0(\eta_0)$ para determinar o próximo aeon, \mathcal{A}_{-1} , e mostrar que $a_{-1} = a_1$, com o domínio do fator de escala deslocado de $-2\eta_f$. Mais uma

vez usando (11.35), temos

$$\begin{aligned} a_{-1}(\eta_{-1}) &= \frac{c^2}{a_0(-\eta_{-1} - 2\eta_f)} = \\ &= (\rho_{R1}/\rho_{\Lambda1})^{1/4} \tan \left[-\frac{\pi}{2} \frac{(\eta_{-1} + 2\eta_f)}{\eta_f} \right] = (\rho_{R1}/\rho_{\Lambda1})^{1/4} \tan \left[\frac{\pi}{2} \eta_{-1}/\eta_f \right] \end{aligned}$$

como esperado.

*

Paisagem de aeons parcialmente duais

A simetria Z_2 responsável pela repetição eterna de apenas duas soluções, expressa em (11.37), é consequência de se manter constante em todas as operações de dualidade o parâmetro c na inversão do fator de escala, como demonstrado no §9.6. Desejamos construir uma cadeia em que cada aeon seja ligado ao seu adjacente por transformações de dualidade com diferentes valores de c . Vamos considerar aqui somente o caso de fluidos parcialmente autoduais, em que vale a discussão do §9.6.2, e será suficiente analisar o caso mais simples da composição de radiação e constante cosmológica, cujos parâmetros denotaremos por

$$\rho(a) = \Lambda + R/a^4. \quad (11.39)$$

A atuação de uma transformação de dualidade sobre os parâmetros Λ e R é dada pela Eq.(9.62), com $w = 1/3$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{R} \\ \tilde{\Lambda} \end{pmatrix} = \mathfrak{g}_c \begin{pmatrix} R \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c^4 \\ c^{-4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ \Lambda \end{pmatrix}. \quad (11.40)$$

Por conta da simetria $SO(1,1)$ no espaço dos parâmetros, o produto $R\Lambda$ é um invariante sob \mathfrak{g}_c , para qualquer c ; por sua vez c fica determinado pelas razões $c^4 = \tilde{R}/\Lambda = R/\tilde{\Lambda}$. Sejam R_1 e Λ_1 os parâmetros de uma solução, e aplique uma série de transformações \mathfrak{g}_{12} , \mathfrak{g}_{23} , \mathfrak{g}_{34} , etc. com

$$\mathfrak{g}_{n,n+1} \equiv \begin{pmatrix} 0 & c_{n,n+1}^4 \\ c_{n,n+1}^{-4} & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} R_{n+1} \\ \Lambda_{n+1} \end{pmatrix} = \mathfrak{g}_{12} \cdot \mathfrak{g}_{23} \cdot \mathfrak{g}_{34} \cdots \mathfrak{g}_{n,n+1} \begin{pmatrix} R_1 \\ \Lambda_1 \end{pmatrix}. \quad (11.41)$$

Nas linhas do que foi discutido no §9.6.2, as operações $\mathfrak{g}_{n,n+1}$ são uma composição de um reescalamento e uma inversão, e só atuam como uma inversão do fator de escala a_1 para n par. Em particular, $\mathfrak{g}_{n,n+1}$ não formam um grupo como no caso de c fixo. Entretanto a duração conforme de cada aeon é, por construção, sempre a mesma independente do valor de c , e assim é possível particionar a reta real

e construir uma sequência de aeons como na Fig.11.3, com a diferença que os parâmetros das soluções não se repetem.

Forma-se, então, uma paisagem (um “*landscape*”) de universos com diferentes valores das constantes cósmicas, sempre relacionados aos parâmetros do universo que o precede, e tais que

$$R_1\Lambda_1 = R_2\Lambda_2 = \dots = R_n\Lambda_n = \dots$$

$$\text{e } c_{n,n+1}^4 = R_n/\Lambda_{n+1} = R_{j+1}/\Lambda_n. \quad (11.42)$$

11.5 Entropia de Gauss-Bonnet na superfície de travessia

Um dos objetivos principais da CCC é zerar a curvatura de Weyl no big-bang, e com isso explicar a baixa entropia inicial do Universo, e a seta do tempo. No contexto de espaços de FLRW o tensor de Weyl se anula ab initio, e a princípio no há como discutir a questão.

Desejamos aqui discutir a questão da diferença de entropia entre aeons a partir de outro ponto de vista, tomando como medida a entropia generalizada (5.36),

$$S = \frac{1}{4}A_H + S_{\text{fluido}}, \quad (11.43)$$

onde $A_H = 4\pi/H^2$ é a área do horizonte aparente. A parte não-geométrica de S escrevemos como sendo devida à presença do fluido preenchendo o universo; na vizinhança da travessia, a contribuição relevante é a de A_H . Considere uma transição $\mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ entre dois aeons duais consecutivos. A superfície \mathcal{S}_{12} tem duas faces; no fim de \mathcal{A}_1 , a entropia é a de dS_4 ,

$$\hat{S}_1 = \pi\ell_{H|1}^2, \quad \text{e } \check{S}_2 = 0$$

é a entropia no início de \mathcal{A}_2 , onde o horizonte aparente possui área nula. Uma entropia exatamente zero é certamente não físico, mas isso é efeito da aproximação de avaliarmos a área exatamente na singularidade. Essa *perda* de entropia na passagem entre aeons é fundamental para evitar o paradoxo de Tolman: se a entropia sempre cresce entre os aeons, então ela deve ter um valor nulo em um “aeon primordial”, que poderia ser interpretado como o “início do universo”; o problema da existência de um big-bang é então apenas jogado para trás no tempo.

A discussão da diferença de entropias entre aeons fica mais rica com a introdução de um termo de Gauss-Bonnet na ação gravitacional. Como observado no §5.2.3, essa correção é esperada e, apesar de não afetar a dinâmica, introduz uma constante na entropia do horizonte aparente, que fica

$$S = \frac{8\pi^2}{\varkappa^2} \ell_H^2 - \frac{16\pi^2}{\varkappa^2} \lambda\ell_{GB}^2. \quad (11.44)$$

Se $\lambda < 0$ (como sugerido pela teoria de cordas), há um valor mínimo para a entropia, e mesmo sobre a singularidade onde $\ell_H = 0$, temos $S_{GB} = \frac{16\pi^2}{\varkappa^2} |\lambda| \ell_{GB}^2 > 0$. Assim, cada aeon começa com uma “entropia primordial”. Vamos considerar uma sequência de aeons duais \mathcal{A}_j , como no §11.4. Há então duas possibilidades: a) considerar as diferenças de entropias entre aeons, e b) considerar a entropia total nas travessias.

- (a) Consideremos diferenças $\Delta_{ij}S$ entre as entropias (11.44) de cada aeon. Entre \mathcal{A}_2 e \mathcal{A}_1 , a perda de entropia $\Delta S_{\mathcal{X}} \equiv (\check{S} - \hat{S})_{\mathcal{X}}$, fica dada por

$$-\varkappa^2 \Delta_{21}S = 8\pi^2 \ell_{H|1}^2 + 16\pi^2 \lambda (\ell_{GB|1}^2 - \ell_{GB|2}^2). \quad (11.45)$$

Uma possibilidade é impor continuidade, escolhendo

$$\lambda = -\frac{\ell_{H|1}^2}{2(\ell_{GB|2}^2 - \ell_{GB|1}^2)}, \quad \text{então} \quad \Delta_{12}S_{\mathcal{X}} = 0. \quad (11.46)$$

Nesse caso o proceso de transição é (nesses termos) adiabático. Repare que na travessia seguinte $\mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}_3$, como \mathcal{A}_3 é idêntico a \mathcal{A}_1 , temos $-\varkappa^2 \Delta_{32}S = 8\pi^2 \ell_{H|2}^2 + 16\pi^2 \lambda (\ell_{GB|2}^2 - \ell_{GB|1}^2)$, e a escolha (11.46) leva a

$$-\Delta_{32}S = 8\pi^2 (\ell_{H|2}^2 + \ell_{H|1}^2) / \varkappa^2.$$

Como $\Delta S < 0$, há um *ganho* de entropia na passagem entre aeons, proporcional às entropias dos horizontes de eventos finais. Na transição seguinte, $\Delta_{43}S$ volta a se anular, e assim por diante. Em média, portanto, a entropia cresce ao longo da cadeia; como mencionado acima, essa construção leva inevitavelmente a uma transição no passado onde a entropia assume um valo mínimo antes de se tornar negativa.

Uma construção com o mesmo espírito pode ser feita da seguinte maneira. Considere uma “transição primordial” onde, digamos, $\ell_{GB} = \ell_{Pl}$. A Eq.(11.44) dá a entropia primordial $S_0 = 8\pi^2 |\lambda|$. (Lembre que $\varkappa^2 = 2\ell_{Pl}^2$.) Imagine que cada aeon seja autodual, logo

$$\ell_{H|1} = \ell_{H|2} = \ell_{H|j} = \ell_H.$$

Então faça a entropia aumentar em quanta discretos de S_0 em cada transição, impondo que no aeon \mathcal{A}_j o valor de ℓ_{GB} seja $\ell_{GB|j}^2 = (j+1)\ell_{Pl}^2$. A perda de entropia entre cada aeon é sempre

$$-\Delta_{j+1,j}S = 8\pi^2 (\ell_H^2 / \ell_{Pl}^2) - S_0 = \frac{8\pi^2}{\ell_{Pl}^2} (\ell_H^2 - |\lambda| \ell_{Pl}^2),$$

e podemos ajustar $|\lambda| = \ell_H^2/\ell_{Pl}^2$ de forma que se tenha $\Delta S = 0$ em todas as transições. Apesar das transições “adiabáticas”, a entropia sempre cresce em cada aeon \mathcal{A}_j , desde $(j+1)S_0$ até $(j+1)S_0 + 8\pi^2\ell_H^2/\varkappa^2$.

É bom enfatizar que essa discussão é puramente qualitativa. Por exemplo, se ℓ_H corresponde à constante cosmológica atual, o acoplamento do termo de Gauss-Bonnet especificado acima é enorme, $|\lambda| = \ell_H^2/\ell_{Pl}^2 \sim 10^{122}$.

- (b) Como foi dito mais acima, a existência de um aeon primordial “recria” o problema do big-bang. Na CCC, há uma destruição da entropia ao fim de cada aeon, e o aeon seguinte começa com entropia muito baixa. Consideremos então a *soma* das entropias em uma transição $\mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$,

$$\varkappa^2 \Sigma_{12} S = 8\pi^2 \ell_{H|1}^2 - 16\pi^2 \lambda (\ell_{GB|1}^2 + \ell_{GB|2}^2). \quad (11.47)$$

Se $\lambda > 0$, é possível eliminar a entropia de dS_4 com o termo de GB, fazendo

$$\lambda = \frac{\ell_{H|1}^2}{2(\ell_{GB|1}^2 + \ell_{GB|2}^2)}, \quad \text{logo} \quad \Sigma_{12} S = 0.$$

Na passagem seguinte, entretanto, $\varkappa^2 \Sigma_{23} S = 8\pi^2 (\ell_{H|2}^2 - \ell_{H|1}^2)$. Assim, embora a entropia cresça, se $\ell_{H|2} > \ell_{H|1}$ há sempre uma perda nas transições, e periodicamente a entropia se anula por completo. Note que, em aeons autoduais, como $\ell_{H|2} = \ell_{H|1}$, temos $\Sigma_{23} S = 0$, ou seja: a entropia total em *todas* as transições se anula.

Repare que assumir $\lambda > 0$ leva imediatamente a um limite inferior para a área do horizonte aparente, algo típico da gravitação de Gauss-Bonnet, como se vê da Eq.(11.44): $\ell_H^2 > 2\lambda\ell_{GB}^2$. Com a escolha para λ feita acima, isso dá

$$\ell_{H|j}^2 > \frac{\ell_{GB|j}^2 \ell_{H|1}^2}{\ell_{GB|1}^2 + \ell_{GB|2}^2}.$$

Em \mathcal{A}_1 , a desigualdade é trivialmente satisfeita, enquanto em \mathcal{A}_2 ela leva à condição $1 + \ell_{GB|1}^2/\ell_{GB|2}^2 > \ell_{H|1}^2/\ell_{H|2}^2$, que em universos autoduais também é trivial.

11.6 DFE vs. CCC

Vale recapitular, enfim, as semelhanças e diferenças entre a DFE e a CCC proposta por Penrose.

Pré-big-bang e superfície de travessia conforme: A DFE dá origem naturalmente a um universo em expansão antes do big-bang, com uma duração infinita no tempo cósmico (por isso chamado de um ‘aeon’), mas finita no tempo conforme (se após o big-bang desacelerado a evolução entra em uma fase final acelerada). Os fatores de escala efetuam uma transformação conforme entre uma ‘métrica de transição’, plana e não singular, e as métricas de FLRW de cada aeon. Os fatores conformes respectivos, ligados pela dualidade, satisfazem a hipótese recíproca de Penrose (7.3), que coincide com (11.11). A superfície tipo-espaço onde $\hat{a}^{-1} = \check{a} = 0$ (ou $\Omega^{-1} = \omega = 0$) pode ser interpretada como uma transição conforme entre aeons. Esse é o esquema geral da proposta da cosmologia conforme, que, portanto, encaixa-se naturalmente à DFE.

Hipótese recíproca: A simetria conforme da CCC só aparece na transição entre aeons, no fim de $\hat{\mathcal{A}}$ e no início de $\check{\mathcal{A}}$, quando toda a matéria presente no Universo (supostamente) se torna sem massa. Nessa vizinhança $\eta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ao redor da superfície $\mathcal{X} = \{\eta = 0\}$, as métricas do tipo $f^2(x)g_{\mu\nu}$ constituem uma só classe conforme associada à métrica de transição não singular $g_{\mu\nu}$, e o fator conforme de $\check{\mathcal{A}}$ fica determinado pelo de $\hat{\mathcal{A}}$ através da hipótese recíproca $\omega = -1/\Omega$. Longe de \mathcal{X} , e.g. na fase dominada por poeira, a simetria conforme é quebrada, e a dinâmica é independente das transformações da travessia.

A DFE está restrita a universos FLRW, e a hipótese recíproca então se traduz na inversão dos fatores de escala. Mas como o fator de escala é uma única função de uma única variável completamente determinada pelas equações de Friedmann, sua inversão na vizinhança de \mathcal{X} determina *toda* sua evolução ao longo do aeon. Em outras palavras, enquanto na CCC a hipótese $\Omega\omega = -1$ só vale para $|\eta| \approx 0$, na DFE ela vale para todo $\eta \in (-\eta_f, +\eta_f)$.

‘Ciclos’: Penrose assume que todos os aeons possuam o mesmo valor para a constante cosmológica, e o mesmo tipo de matéria: os fluidos do modelo padrão cosmológico, mais algum campo que seja responsável pela dinâmica da transição. Por isso o ‘cíclica’ da CCC. Considerando que o universo de FLRW na DFE se inicie dominado por radiação e termine com uma constante cosmológica, vimos que, em primeiro lugar, não é necessário que a constante cosmológica do aeon dual apresente o mesmo valor, embora isso possa ser ajustado pelo parâmetro c . Além disso, à exceção da radiação e constante cosmológica, o conteúdo material “intermediário” pode diferir entre aeons vizinhos. Em particular, no aeon dual ao modelo Λ CDM a matéria escura é substituída por um gas de branas, e nesse sentido o modelo

Λ CDM *não* é “cíclico” quando usamos a DFE. Ou seja, para obter aeons cíclicos é necessário que cada um seja autodual; no mínimo, parcialmente autodual: nesse caso, há diferenças entre valores dos parâmetros (e.g. Λ), mas as espécies de fluidos são sempre as mesmas.

Transformação da matéria: Apesar do que foi dito no ponto anterior, os resultados do §11.2 mostram que a transformação específica da matéria na DFE, com $\tilde{w} = -w - 2/3$, pode ser encontrada seguindo o mesmo procedimento usado para a CCC no §7.2. Ou seja, apesar de não fornecer, necessariamente, aeons cíclicos, a DFE pode ser vista como uma realização da CCC em universos exatamente FLRW.

Entropias: A abordagem para o problema da entropia proposta por Penrose (ver, e.g., Penrose (2007)) difere drasticamente da nossa. Em primeiro lugar, Penrose assume que o horizonte cosmológico de dS_4 *não* está associado a qualquer entropia: a entropia gravitacional se resume à de buracos negros e a alguma quantidade associada ao tensor de Weyl (ver §5.4.2). Em segundo lugar, ele assume que a singularidade de um buraco negro *destrói* informação, e após uma evaporação completa a entropia codificada na área do horizonte *desaparece*. Esse é o mecanismo de “redução do espaço de fase” em $\hat{\mathcal{A}}$ que permite que $\check{\mathcal{A}}$ se inicie contendo baixa entropia e satisfazendo a Hipótese de Curvatura de Weyl.

Nós fazemos suposições completamente diferentes. Assumindo a validade da segunda lei generalizada para a cosmologia, a entropia do universo que termina sua vida assintoticamente dS_4 é ditada pela constante cosmológica. Conjecturamos que a mudança de entropia entre um aeon e o seguinte é um fenômeno que ocorre na superfície de transição, e descrevemos algumas possibilidades ilustrativas usando um termo de Gauss-Bonnet, mas o assunto permanece em aberto.

Em resumo, a nível de um universo completamente homogêneo e isotrópico, os universos pré-big-bang obtidos com a DFE são perfeitamente compatíveis com a CCC. As possíveis diferenças surgem ao se introduzir flutuações lineares, e em como estendê-las através de \mathcal{X} .

Capítulo 12

Flutuações em universos duais e inflação antes do big-bang

No último capítulo, mostramos como a Dualidade do Fator de Escala no tempo conforme pode servir como princípio de construção para um universo antes do big-bang. Sejam $\hat{\mathcal{A}}$ e $\check{\mathcal{A}}$ os espaços-tempos correspondendo a universos duais pós- e pré-big-bang, respectivamente, conectados pela superfície de transição

$$\mathcal{X} \equiv \{(\hat{a} = \infty) \sim (\check{a} = 0)\} \quad (12.1)$$

(Eq.(11.5)). Se $\hat{\mathcal{A}}$ é assintoticamente dS_4 , com a energia dominada por uma constante cosmológica positiva, o big-bang após a transição ocorre em uma fase de radiação. A hipótese a ser explorada neste capítulo é de que a fase acelerada no fim de $\hat{\mathcal{A}}$ possa servir como substituta para o que seria a inflação usual de $\check{\mathcal{A}}$, atuando como uma “inflação antes do big-bang”. Nesse caso, \mathcal{X} faz o papel de uma superfície de reheating. Fisicamente, a própria existência de um aeon antes do big-bang só faz sentido se algum tipo de informação “atravessar” \mathcal{X} . Caso contrário, $\hat{\mathcal{A}}$ e $\check{\mathcal{A}}$ são apenas dois modelos cosmológicos com certas propriedades mútuas, porém disjuntos: nem há por que dizer que um esteja “antes” do outro. Nosso objetivo é analisar se e como as flutuações em $\hat{\mathcal{A}}$ podem ser estendidas até $\check{\mathcal{A}}$, e quais as características das flutuações nesses modelos inflacionários construídos a partir da DFE.

12.1 Continuidade dos modos das flutuações entre aeons

Para descrever de maneira geral as flutuações lineares, consideremos um campo escalar livre $\varphi(x)$ sobre o espaço-tempo de FLRW. A equação de movimento é

$$\varphi'' + 2(a'/a)\varphi' - \partial_{\mathbf{x}}^2\varphi = 0, \quad (12.2)$$

junto com as equações de Friedmann. Nessa equação, φ pode ser um dos modos de polarização das ondas gravitacionais, Eq.(4.22), ou a flutuação do inflaton no calibre plano; com a substituído por $z = a\dot{\phi}/H$, temos a equação de Mukhanov-Sasaki (4.38) em que φ equivale à variável de Mukhanov $v = z\mathcal{R}$. Em uma evolução com lei de potências, em que $a \sim \eta^{-\alpha}$ para α constante, $z = \text{constante} \times a$ e a equação de Mukhanov-Sasaki se reduz diretamente à Eq.(12.2); note que isso acontece para fluidos perfeitos, em que, de acordo com a Eq.(2.38),

$$\alpha = -\frac{2}{(1+3w)} = \text{constante}, \quad \text{e} \quad \dot{\phi}^2/H^2 = (1+w)\bar{\rho}/H^2 = \frac{z^2(1+w)}{3} \quad (12.3)$$

é uma constante independente de k .

Também nos interessa a função $f(x) = a(\eta)\varphi(x)$, cujos modos de Fourier obedecem

$$f_k'' + [k^2 - (a''/a)]f_k = 0. \quad (12.4)$$

Essa é a equação de um oscilador com frequência variável $\omega^2(\eta) = k^2 - C(\eta)$, onde $C \equiv a''/a$, e se pode quantizar a variável f_k da maneira canônica. Num regime em que a variação de $C(\eta)$ é muito menor do que a frequência, i.e. que $C'/C \ll \omega$, o oscilador f_k sente o efeito da mudança de frequência muito lentamente, e se pode definir um ‘vácuo adiabático’ como sendo o vácuo usual do espaço de Fock de um oscilador com frequência ω . Se o fator de escala obedece a lei de potências

$$a/a_* = (\eta/\eta_*)^\alpha$$

a Eq.(12.4) tem uma solução exata bem conhecida. Ela se resume a

$$f_k'' + \left[k^2 - \frac{\alpha(\alpha-1)}{\eta^2} \right] f_k = 0, \quad (12.5)$$

e com a substituição $f = \sqrt{\eta}u(\eta)$ temos

$$\eta^2 u'' + \eta u' + \left(-\frac{1}{4} - \alpha(\alpha-1) + k^2 \eta^2 \right) u = 0,$$

isto é, uma equação de Bessel com índice $\nu^2 = \frac{1}{4} + \alpha(\alpha-1)$ e argumento $k\eta$. Então escrevemos a solução geral de (12.5) como

$$f_k(\eta) = A_k \sqrt{k\eta} H_\nu^{(1)}(k\eta) + B_k \sqrt{k\eta} H_\nu^{(2)}(k\eta), \quad (12.6)$$

$$\nu = -\alpha + 1/2.$$

O índice é solução da equação $\frac{1}{4} + \alpha(\alpha-1) - \nu^2 = 0$. A solução para o fator de escala dual se obtém fazendo $\alpha \mapsto -\alpha$, logo

$$\tilde{\nu} + \nu = 1. \quad (12.7)$$

A escolha das funções de Hankel (e não de Bessel) como base das soluções se deve ao fato de que, no limite $k\eta \gg 1$,

$$H_\nu^{(1),(2)} \approx i\sqrt{\frac{2}{\pi k\eta}} \exp[\pm(ik\eta - i\epsilon_\nu)], \quad (12.8)$$

onde ϵ_ν é uma fase independente de $k\eta$. Logo a decomposição em ondas livres no regime adiabático fica explícita. A condição de que só haja partículas com frequência positiva, fixa $A_k = 0$.

Estamos interessados no comportamento das soluções no limite oposto, quando $k\eta \approx 0$, na vizinhança da travessia entre aeons. Voltemos à flutuação $\varphi_k = f_k/a$, cujo comportamento para um fator de escala qualquer pode ser determinado a partir dos limites da Eq.(12.2). Sua transformada de Fourier,

$$\frac{d^2}{d(k\eta)^2}\varphi_k + 2(aH/k)\frac{d}{d(k\eta)}\varphi_k + \varphi_k = 0, \quad (12.9)$$

é a equação de um oscilador amortecido, e o comportamento das soluções depende da intensidade do termo de amortecimento, controlado pelo coeficiente $(k/a)^{-1}/(\frac{1}{2}H^{-1})$, razão entre o comprimento de onda físico do modo k e metade do raio da esfera de Hubble, que delimita a região de domínio causal. Assim, se o comprimento de onda é muito menor do que o horizonte de Hubble, o termo de amortecimento é desprezível, f_k se encontra no regime adiabático e o modo $\varphi_k(\eta)$ oscila livremente como por exemplo em (12.8); por outro lado, se a onda é muito maior que a esfera de Hubble, partes da mesma onda se encontram in-comunicáveis e a oscilação deve ser congelada, o que de fato acontece devido à dominância do termo de amortecimento. Um mesmo modo pode ser congelado ou descongelado com o passar do tempo, a depender da dinâmica da métrica de fundo, e da evolução de $H(\eta)$ em relação a $k\eta$. Para sermos precisos: fora do horizonte, o termo de amortecimento domina e temos

$$\varphi_k'' + 2(a'/a)\varphi_k' = 0.$$

Esta equação tem *duas* soluções; uma delas é a que discutimos, $\varphi_k^0 = \text{constante}$, e a segunda solução pode ser verificada imediatamente: a solução geral é

$$\varphi_k(\eta) \approx \varphi_k^0 + c_k \int d\eta a^{-2}(\eta). \quad (12.10)$$

Em um universo em expansão, a solução não-constante decai, e a solução constante domina se o modo permanece por tempo suficiente fora do horizonte de Hubble. Em outras palavras, as oscilações que saem do horizonte “congelam”, e têm suas amplitudes preservadas.

O produto aH diverge em $\eta = 0^-$ em uma expansão acelerada, e em $\eta = 0^+$, próximo ao big-bang de uma expansão desacelerada, portanto numa transição

entre aeons, no limite $\eta \rightarrow 0$ *todos* os modos de Fourier estão fora do horizonte de Hubble. Logo há sempre uma solução constante para $\varphi_k(\eta)$, dada por φ_k^0 na Eq.(12.10) em ambos os limites. Considerando que o universo acelerado é a fase pré-big-bang de seu dual desacelerado, há então uma maneira óbvia de se estender as flutuações de um aeon para o outro: igualando os modos constantes na transição.

*

Radiação e de Sitter

O exemplo mais simples é o par dual de um universo de radiação precedido por um universo de de Sitter. Em dS_4 , $a = (-H\eta)^{-1}$, e a Eq.(12.5) fica

$$f_k'' + [k^2 - 2/\eta^2] f_k = 0;$$

uma solução é $e^{ik\eta}(1 + i/k\eta)$ e outra seu conjugado complexo, logo

$$\varphi_k(\eta) = A_k^+ e^{ik\eta}(1 - ik\eta) + A_k^- e^{-ik\eta}(1 + ik\eta). \quad (12.11)$$

A função de Hubble é constante, e a razão aH/k é simplesmente $1/|k\eta|$, logo o modo se encontra no interior do horizonte se $|k\eta| \gg 1$; a solução acima é então uma combinação de ondas livres. Para $|k\eta| \ll 1$, φ_k se encontra fora do horizonte de Hubble. Expandindo a exponencial $e^{\pm ik\eta} \approx 1 \pm ik\eta - k^2\eta^2$, os termos lineares se cancelam com a contribuição de $(1 \mp ik\eta)$, e temos

$$A_k^\pm (1 \mp ik\eta) e^{\pm ik\eta} \approx A_k^\pm \pm iA_k^\pm k^3 \eta^3,$$

como previsto pela Eq.(12.10). A solução não constante, $\sim (k\eta)^3$ decai à medida que $\eta \rightarrow 0$ em direção ao futuro infinito \mathcal{I}^+ . Em dS_4 a expansão acelerada faz com que os comprimentos de onda se estiquem e saiam, um a um, da região causal (cujo raio físico H^{-1} é constante) no instante em que $\eta = 1/k$ (como é costume generalizado, ignoramos um fator de 2 na definição de “saída do horizonte”). Em \mathcal{I}^+ todos os modos estão congelados.

O universo dual, pela DFE, é preenchido por radiação, e tem $a = \eta$. A Eq.(12.5) é simplesmente $f_k'' + k^2 f_k = 0$, e portanto $\varphi_k(\eta) = B_k^+ \eta^{-1} e^{ik\eta} + B_k^- \eta^{-1} e^{-ik\eta}$. A razão aH/k é, mais uma vez, $1/k\eta$, e, mais uma vez, os modos se encontram fora do horizonte para $k\eta \ll 1$. Para encontrar a solução constante, podemos escrever

$$\varphi_k(\eta) = C_k^-(k\eta)^{-1}(e^{ik\eta} - e^{-ik\eta}) + C_k^+(k\eta)^{-1}(e^{ik\eta} + e^{-ik\eta}). \quad (12.12)$$

A função no primeiro termo é simplesmente $2i(\text{sen}x)/x \rightarrow 2i$ quando $x = k\eta \rightarrow 0$. O segundo termo, $C_k^+(k\eta)^{-1}(e^{ik\eta} + e^{-ik\eta}) \approx 2C_k^+/k\eta$, está de acordo com a

Eq.(12.10): de fato decai com o passar do tempo mas *diverge* no limite em que $\eta \rightarrow 0$, no big-bang.

Escolhendo as soluções com modo constante em $\eta \rightarrow 0$ nas Eqs.(12.11) e (12.12), e impondo continuidade em $\eta = 0$,

$$\varphi_k(\eta) = \begin{cases} A_k^+ e^{ik\eta}(1 - ik\eta) + A_k^- e^{-ik\eta}(1 + ik\eta), & \eta < 0 \\ (A_k^+ + A_k^-) \frac{\text{sen}k\eta}{k\eta}, & \eta > 0 \end{cases} \quad (12.13)$$

A dependência em k dos coeficientes pode ser determinada impondo-se, no interior do horizonte em dS_4 , em $\eta \rightarrow -\infty$, onde f_k se comporta como um campo livre, a normalização com o produto interno de Klein-Gordon (4.54). O resultado é que

$$A_k^\pm = \sqrt{\xi_\pm/2k}, \quad \text{com} \quad |\xi_-|^2 - |\xi_+|^2 = 1. \quad (12.14)$$

Os valores relativos dos ξ_\pm parametrizam a escolha do vácuo inicial; escolhendo apenas modos com frequência positiva $\xi_+ = 0$, e

$$\varphi_k(\eta) = \begin{cases} (2k)^{-1/2} e^{-ik\eta}(1 + ik\eta), & \eta < 0 \\ (2k)^{-1/2} \text{sen}k\eta/k\eta, & \eta > 0 \end{cases} \quad (12.15)$$

*

Lei de potências

Podemos voltar ao exemplo mais geral de uma potência arbitrária de η , assumindo dois aeons $\hat{\mathcal{A}}$ e $\check{\mathcal{A}}$ com fatores de escala respectivos

$$a(\eta) = \begin{cases} \hat{a} = \hat{a}_* (-\eta)^{-\alpha}, & \eta < 0 \\ \check{a} = \check{a}_* \eta^{\tilde{\alpha}}, & \eta > 0 \end{cases}, \quad (12.16)$$

com α e $\tilde{\alpha} > 0$. Assumimos $\alpha > 1$, de modo que em $\eta < 0$ temos uma expansão acelerada. Se \hat{a} e \check{a} são duais pela DFE, $\alpha = \tilde{\alpha}$.

Considere um modo $\phi_k(\eta)$ que sai do horizonte no instante $\eta_{ex} < 0$ na fase acelerada de $\hat{\mathcal{A}}$, passa pela travessia para $\check{\mathcal{A}}$ em $\eta = 0$, e reentra no horizonte em $\eta_{re} > 0$ durante a fase desacelerada. Para evitar expressões desnecessariamente desajeitadas envolvendo as funções de Hankel (12.6), é mais usar os limites assintóticos da Eq.(12.4), com a seguinte aproximação:

$$\phi_k = \begin{cases} (2/k)^{1/2} \hat{a}^{-1}(\eta) \exp(-ik\eta), & \eta < \eta_{ex} \\ A_k + B_k \int^\eta d\eta/\hat{a}^2(\eta), & \eta_{ex} < \eta < 0 \\ \tilde{A}_k + \tilde{B}_k \int^\eta d\eta/\check{a}^2(\eta), & 0 < \eta < \eta_{re} \\ (2/k)^{1/2} \check{a}^{-1}(\eta) [c_+(k) \exp(-ik\eta) + c_-(k) \exp(ik\eta)], & \eta_{re} < \eta \end{cases} \quad (12.17)$$

que assume um vácuo simples (de Bunch-Davis) como condição inicial no interior do horizonte em $\eta < \eta_{ex}$, e usa a Eq.(12.10) quando o modo está fora do horizonte. Para cada número (comóvel) de onda k , a saída do horizonte ocorre quando $k = aH$; para (12.28), $aH = \alpha/(-\eta)$, então $\eta_{ex} = -\alpha/k$. A reentrada ocorre quando mais uma vez $k = aH$, e $\eta_{re} = \tilde{\alpha}/k$. Podemos determinar o modo oscilante final após a reentrada no horizonte impondo a continuidade e derivabilidade de ϕ_k nas transições.

Continuidade na saída do horizonte implica

$$(2/k)^{1/2} e^i = A_k a_{ex} + B_k a_{ex} \int_{\eta_*}^{\eta_{ex}} d\eta/a^2.$$

O limite inferior η_* da integral indefinida $\int^\eta d\eta/a^2$ dá a condição de contorno da solução não-constante fora do horizonte. Uma escolha apropriada aqui é especificá-la sobre a saída do horizonte, i.e. $\eta_* = \eta_{ex}$; assim $\int^{\eta_{ex}} d\eta/a^2 = \int_{\eta_{ex}}^{\eta_{ex}} d\eta/a^2 = 0$, e temos

$$A_k = (2/k)^{1/2} e^i a_{ex}^{-1}. \quad (12.18)$$

B_k é determinada pela continuidade de ϕ'_k , $B_k = -(2/k)^{1/2} e^i (ik a_{ex} + a'_{ex})$. Continuidade em $\eta = 0$ requer $\tilde{B}_k = 0$, já que a integral $\int^\eta d\eta/\hat{a}^2$ diverge em $\eta = 0$. (Com isso, na região $0 < \eta < \eta_{re}$, estamos impondo que ϕ_k seja *exatamente* constante.) Logo

$$\tilde{A}_k = A_k + B_k \int_{\eta_{ex}}^0 d\eta/\hat{a}^2 = \sqrt{\frac{2}{k}} e^i \left[\check{a}_{ex}^{-1} - (ik \check{a}_{ex} + \check{a}'_{ex}) \frac{\alpha^{1+2\alpha}}{\hat{a}_*^2 (1+2\alpha)} k^{-(1+2\alpha)} \right].$$

Finalmente, na reentrada no horizonte em η_{re} temos duas equações e duas constantes, c_\pm . A primeira equação é a continuidade de ϕ_k , e a segunda vem da continuidade de ϕ'_k ,

$$(2/k)^{1/2} a_{re}^{-1} (c_+ e^{-i} + c_- e^i) = \tilde{A}_k, \quad -\frac{1}{ik} \frac{a'_{re}}{a_{re}} (c_+ e^{-i} + c_- e^i) = c_+ e^{-i} - c_- e^i.$$

A solução é

$$e^i c_- = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} k} \tilde{A}_k (a_{re} + ik^{-1} a'_{re}), \quad e^{-i} c_+ = -e^i c_- + \sqrt{\frac{1}{2} k} \tilde{A}_k a_{re}.$$

*

Espectro de potências

O espectro de potência $\mathcal{P}_\varphi(k; \eta)$ do campo φ é definido como na Eq.(4.45),

$$\mathcal{P}_\varphi(k, \eta) = k^3 \langle \varphi_k \varphi_{-k} \rangle = k^3 |\varphi_k(\eta)|^2. \quad (12.19)$$

Uma vez que φ_k se torna constante fora do horizonte, o valor do espectro fica congelado até a reentrada. No exemplo acima, $|A_k|^2$ na Eq.(12.17) fornece o espectro de potência na saída do horizonte, e a dependência em k fornece o índice espectral.

Se φ for interpretado como a flutuação do inflaton $\bar{\phi}$, o espectro escalar

$$\mathcal{P}_s = k^3 \langle \mathcal{R}_k \mathcal{R}_{-k} \rangle = (H/\dot{\bar{\phi}})^2 \mathcal{P}_\varphi = \text{constante} \times |A_k|^2,$$

onde usamos a Eq.(12.3). Na Eq.(12.18) para A_k , o fator de escala a_{re} depende implicitamente de k , ambos a_{re} e a_{ex} são avaliados em $|k\eta| = 1$, viz.

$$a_{ex} = \hat{a}_* k^\alpha \quad a'_{ex} = \alpha \hat{a}_* k^{1+\alpha}, \quad a_{re} = \check{a}_* k^{-\tilde{\alpha}}, \quad a'_{re} = \tilde{\alpha} \check{a}_* k^{1-\tilde{\alpha}}.$$

Com isso,

$$|A_k|^2 = \frac{2}{\hat{a}_*^2} k^{-(1+2\alpha)}, \quad (12.20)$$

Usando a Eq.(4.45), encontra-se o espectro de potencia escalar

$$\mathcal{P}_s(k) = \text{constante} \times k^3 |A_k|^2 = \text{constante} \times k^{2(1-\alpha)}$$

e o índice espectral $n_s = 1 + d \log \mathcal{P}_s / d \log k$ fica então

$$n_s = 3 - 2\alpha. \quad (12.21)$$

Para um espaço de de Sitter, $\alpha = 1$, e temos o resultado esperado $n_s = 1$: o espectro é invariante de escala. O índice tensorial é $n_T = n_s - 1$, i.e.

$$n_T = 2(1 - \alpha). \quad (12.22)$$

12.2 Um universo pré-big-bang dual ao modelo de concordância

Postular a validade estrita da DFE na formulação de um universo pré-big-bang implica que o aeon passado é dual ao modelo cosmológico de concordância. Mais precisamente, considere que após o big-bang a densidade de energia do universo é o modelo Λ CDM com radiação,

$$\check{\rho} = \check{\rho}_\Lambda + \frac{\check{\rho}_R}{\check{a}^4} + \frac{\check{\rho}_M}{\check{a}^3}; \quad \text{a energia dual} \quad \hat{\rho} = \hat{\rho}_\Lambda + \frac{\hat{\rho}_R}{\hat{a}^4} + \frac{\hat{\rho}_{PD}}{\hat{a}} \quad (12.23)$$

é, então, o conteúdo antes do big-bang. O universo dual funciona como uma espécie de fase inflacionária cujo reheating ocorre na superfície de transição. A

primeira coisa a ser notada é que antes dessa inflação existe um período desacelerado dominado por radiação, dual à constante cosmológica atual. Em seguida, a fase acelerada antes do big-bang tem duas etapas: o final assintoticamente de Sitter, dual à era de radiação do nosso aeon, é precedido uma fase dominada por um gás de branas dual à era de dominação de matéria escura e poeira, como ilustrado na Fig.12.1.

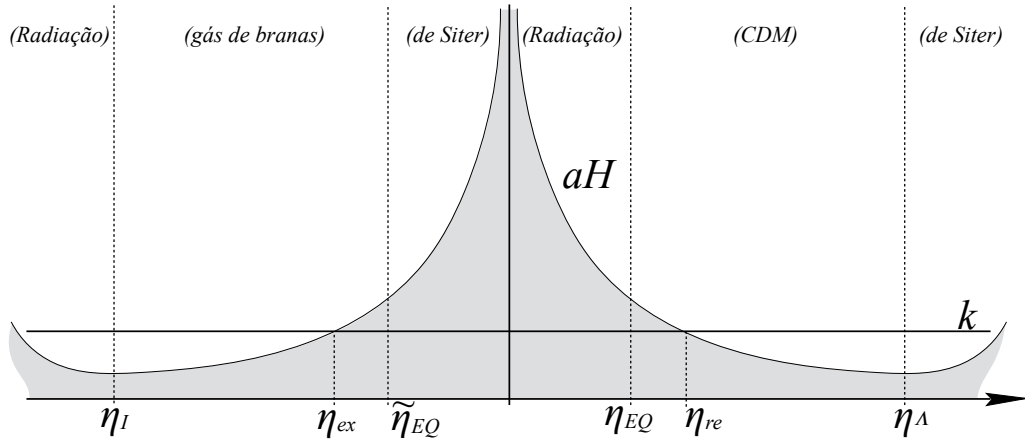


Figura 12.1: Universo dual antes do big-bang do modelo de concordância.

Inflação com um gás de branas

O gás de branas com densidade $\hat{\rho}_{PD}$ é o fluido dual à poeira e matéria escura, como discutido no §9.1, e

$$(\check{\rho}_M/\hat{\rho}_{PD})^2 = \check{\rho}_R/\hat{\rho}_\Lambda = c^{-4}, \quad (12.24)$$

ver Eqs.(8.20)-(8.21). A transição entre as eras de dominação por radiação e por poeira, após o big-bang, e de dominação pelo gás de branas e pela constante cosmológica, antes, ocorre quando as respectivas razões entre as densidades relativas,

$$R \equiv \frac{\check{\rho}_R/\check{a}^4}{\check{\rho}_M/\check{a}^3} \quad \text{e} \quad \tilde{R} \equiv \frac{\hat{\rho}_{PD}/\hat{a}}{\hat{\rho}_\Lambda}$$

ficam menor que 1. Usando (12.24), e como $\check{a}(-\eta) \cdot \hat{a}(\eta) = c^2$, é fácil obter a identidade $R(-\eta) \cdot \tilde{R}(\eta) = 1$. Logo o instante η_{EQ} de igualdade entre radiação e poeira após o big-bang, e o instante $\tilde{\eta}_{EQ}$ de igualdade entre o gás de branas e a constante cosmológica antes do big-bang são relacionados por

$$\eta_{EQ} = -\tilde{\eta}_{EQ}. \quad (12.25)$$

A invariância do raio comóvel do horizonte aparente sob a DFE, Eq.(8.32), para $K = 0$ equivale a $\hat{a}\hat{H} = \check{a}\check{H}$. Uma vez que a condição $k = |aH|$ determina a entrada e a saída do horizonte de Hubble, se o modo ϕ_k deixa o horizonte em $\eta_{ex} < 0$ sua reentrada então ocorre no instante dual

$$\eta_{re} = -\eta_{ex}. \quad (12.26)$$

Juntas, as Eqs.(12.25) e (12.26) significam que os modos que entram no horizonte após o big-bang durante a fase de dominação de poeira saíram do horizonte durante a fase dominada pelo gás de branas, o que se pode ver facilmente de maneira geométrica na Fig.12.1, onde a região sombreada indica o exterior do horizonte de Hubble. Ou seja, a “inflação sentida” pelos modos de Fourier que entram no horizonte durante a fase dominada por matéria, e que determina seu espectro de potências, é uma inflação produzida por um gás de branas. Esses modos incluem os que entram no horizonte após a recombinação do Hidrogênio e emissão da CMB.

Os modos de Fourier que só vêm a entrar no horizonte após a recombinação são precisamente os responsáveis pelo efeito Sachs-Wolfe e pela formação de estruturas em larga escala, e seu espectro de potência primordial pode ser medido diretamente dos coeficientes C_ℓ com multipolos $\ell \ll 200$, através da fórmula (4.44), como descrito no §4.4. Por permanecerem congelados fora do horizonte no instante da recombinação, são também os que melhor preservam o espectro de potências primordial obtido na saída do horizonte de Hubble durante a fase acelerada. O valor observacional para seu índice espectral concorda com as previsões inflacionárias de slow-roll (quase de Sitter): o espectro é quase invariante de escala, com $n_s \approx 1$. E, entretanto, o espectro obtido em um universo dominado por um gás de branas é inaceitavelmente vermelho,

$$n_s = -1 \quad (\text{gás de branas}) \quad (12.27)$$

como se obtém da Eq.(12.21) com $\alpha = 2$.

A presença de um gás de branas é uma das possibilidades dentro da proposta iniciada por Brandenberger & Vafa (1989); Tseytlin & Vafa (1992) de que se incluía elementos da teoria de cordas no conteúdo material do universo primordial. Esse panorama ficou conhecido como ‘cosmologia de gás de cordas’ (*‘string gas cosmology’*) por incluir um conjunto de cordas cósmicas cuja temperatura apresenta, como consequência da dualidade-T, um limite máximo (de Hagedorn) que previne a existência da singularidade inicial. Além de cordas, é possível incluir branas com todas as dimensões permitidas no espaço-tempo, o que foi feito por Alexander *et al.* (2000).¹ Dentre os efeitos desses objetos na cosmologia primordial, Brandenberger *et al.* (2004) mostraram que o gás de branas pode ser

¹Repare que há uma diferença fundamental entre esse tipo de modelo e os cenários ec-

responsável por uma fase “inflacionária” de expansão acelerada, impelida pela equação de estado $w = -2/3$, como a que encontramos aqui. Essa equação de estado é válida enquanto a separação entre branas é muito menor que o raio de Hubble (possibilitando a descrição como um gás), uma condição que é naturalmente violada após um período suficientemente longo de expansão acelerada, na qual o raio de Hubble decresce; assim, a ‘inflação de branas’ acaba por conta própria. Entretanto, ao fim da fase acelerada há uma superpopulação das paredes de domínio (que deveriam decair antes de se iniciar o modelo de concordância), e a densidade de energia é baixa demais, sendo necessário especificar algum outro mecanismo para criar o reheating. Além disso, há o problema do índice espectral inadequado (12.27).

No universo pré-big-bang com energia (12.23) os problemas do reheating e da população excessiva de branas deixam de existir porque $\hat{\Lambda}$ domina sobre a energia eventualmente e, com isso, a inflação não acaba quando as branas deixam o horizonte de Hubble; com a continuação da expansão acelerada, todas as eventuais branas restantes (com dimensão mais baixa) são diluídas. O reheating, por sua vez, além de estar, aqui, relacionado ao problema da transição conforme entre aeons, não ocorre ao fim da era dominada pelo gás de branas, e sim no universo de de Sitter. O problema do índice espectral, entretanto, permanece, como já descrevemos. Uma possível solução vem do fato de que as flutuações no gás de branas *não* são equivalentes a flutuações adiabáticas de um (único) campo escalar como o inflaton; há modos de flutuações de isocurvatura que podem interagir com os modos adiabáticos e mudar o espectro, como observado por [Brandenberger et al. \(2004\)](#). Deve-se notar que as flutuações nos modelos ecpiróticos e no cenário pré-big-bang gravidilatônico também possuem um índice espectral inadequado nas flutuações escalares (mas lá $n_s > 1$, um desvio para o azul), um problema que pode ser abordado justamente com o uso de flutuações de isocurvatura, a partir a introdução de um ‘curvaton’, que interage com as flutuações adiabáticas somente após a reentrada no horizonte, durante a era de radiação, como sugerido por [Lyth & Wands \(2002\)](#).¹ A possibilidade de se obter o índice espectral correto no aeon dominado pelo gás de branas, usando um curvaton ou outro mecanismo,

piróticos descritos no §6.3.3 em que o universo inteiro é uma brana 4-dimensional embebida num espaço-tempo com 5 dimensões, ou de outros cenários de inflação em mundos-de-branas “intrinsecamente cordísticos”, como os propostos por [Burgess et al. \(2001\)](#); [Dvali & Tye \(1999\)](#); [Herdeiro et al. \(2002\)](#), etc. Na cosmologia com um gás de branas, as branas são superfícies tridimensionais no universo quadridimensional usual da gravitação de Einstein (ou dilatônica, a depender do regime de escalas), e aparecem como origem para fontes de *matéria*, i.e., no tensor de energia-momento.

¹Recentemente, [Gasperini \(2017\)](#) mostrou que esse mecanismo está associado ao crescimento do acoplamento de cordas (i.e. do dilaton), e que é possível obter um índice espectral apropriado sendo que no passado remoto o sistema se encontra em um regime perturbativo (logo possui ‘trivialidade assintótica pretérita’).

requer investigação.

Domínio de radiação antes da inflação

A segunda característica marcante da dinâmica do aeon dual é a presença de uma fase de radiação *antes* do início da expansão acelerada correspondente à inflação, dual à era dominada pela constante cosmológica $\tilde{\Lambda}$ do modelo Λ CDM. O parâmetro da equação de estado de um gás de p-branas, Eq.(F.3),

$$w_p = \frac{(p+1)}{3}v^2 - \frac{p}{3}$$

depende da velocidade média dos pontos das branas, v , e no limite ultrarelativístico, quando $v \rightarrow 1$, temos $w_p = 1/3$ para qualquer p . Assim, o plasma primordial pode conter as 2-branas que mais tarde, em energias mais baixas com $v \ll 1$, iniciam a fase acelerada com a equação de estado $w_2 = -2/3$. Talvez seja válido notar que, como observado por [Brandenberger *et al.* \(2004\)](#) de acordo com resultados de [Nagasawa & Brandenberger \(1999, 2003\)](#), a presença de (campos de calibre em) um plasma a temperatura finita pode servir para estabilizar defeitos topológicos instáveis como branas do tipo não-BPS.

Considerações a respeito de uma possível fase radiativa antes do início da inflação foram feitas por [Hirai \(2003\)](#); [Marozzi *et al.* \(2011\)](#); [Powell & Kinney \(2007\)](#) e outros; ver [Das *et al.* \(2015\)](#) para uma revisão mais recente. A presença de uma fase desacelerada antes da inflação pode atuar como um mecanismo para a renormalização das flutuações no limite infravermelho em que $k \ll 1$, no qual o mecanismo de renormalização por subtração adiabática não é bem definido. Mas as motivações também podem ser “fenomenológicas”: uma vez que a inflação não resolve o problema da singularidade, cf. §3.4, suas “condições iniciais” permanecem em aberto. Em modelos inflacionários que duram por pouco mais de 60 e-folds essas condições podem ter consequências observáveis.

Para ilustrar essas consequências, considere uma transição súbita do fator de escala no instante $-\eta_I < 0$,

$$a(\eta) = \begin{cases} (a_I/\eta_I)(-\eta), & \eta < \eta_I \\ a_I(-\eta/\eta_I)^{-\alpha}, & \eta > \eta_I \end{cases}. \quad (12.28)$$

A continuidade da derivada e do fator de Hubble requer $\eta_I = -1/\alpha$. Vamos considerar que a fase acelerada seja impulsionada por um campo escalar $\bar{\phi}$; no regime de slow-roll, portanto, $\alpha \approx -1$, mas não vamos impor essa restrição porque a inflação descrita acima começa com um gás de branas e $\alpha = 2$. Na fase radiativa, há tanto flutuações φ do campo escalar como flutuações termodinâmicas do plasma, e estas em geral se acoplam através do potencial de Bardeen Φ . Mas Φ decai durante o domínio de radiação enquanto se encontra dentro do horizonte,

e sua contribuição para o espectro de potência de $\mathcal{R} = \Phi + (H/\dot{\phi})\varphi$ pode ser ignorada. Além disso, como mostrado por [Powell & Kinney \(2007\)](#), sob certas condições razoáveis as flutuações do inflaton se desacoplam e podem ser tratadas de maneira independente.

Já foi observado que durante a fase de radiação a Eq.(12.4) se reduz a um oscilador com frequência constante,

$$f_k'' + k^2 f_k = 0.$$

Ou seja, $a''/a = 0$ e, portanto, os modos f_k não sentem o efeito da expansão do universo. Isso deriva do fato de que num universo de radiação o escalar de Ricci $R = 0$, e a equação para um campo com acoplamento não-mínimo, $(\square + \xi R)\varphi = 0$ é a mesma para qualquer valor de ξ , incluindo o acoplamento conforme $\xi = 1/6$. Assim, o universo de radiação tem uma característica especial: é possível definir um vácuo para f_k como se este fosse um campo livre em Minkowski:

$$f_k = (2k)^{-1/2} e^{-ik\eta}, \quad \text{e} \quad \varphi_k(\eta) = a^{-1}(2k)^{-1/2} e^{-ik\eta}, \quad \eta < \eta_I. \quad (12.29)$$

A evolução do fator de escala não produz partículas, i.e. f_k permanece no vácuo acima até o início da fase acelerada. Na fase acelerada, para $\eta > \eta_I$, a solução da Eq.(12.4) é dada pelas funções de Hankel (12.6). Escreva

$$\begin{aligned} \varphi_k(\eta) &= a^{-1} (A_k u(z) + B_k u^*(z)), \\ \text{onde } u(z) &= \sqrt{\frac{4}{\pi}} z^{1/2} H_\nu^{(2)}(z), \quad \nu = \alpha + 1/2 \quad \text{e} \quad z \equiv -k\eta. \end{aligned} \quad (12.30)$$

Impondo a continuidade de φ_k e de sua derivada em η_I temos um sistema algébrico de duas equações para as constantes A_k e B_k ,

$$\begin{aligned} A_k \partial_z u(z_I) + B_k \partial_z u^*(z_I) &= -ik(2k)^{-1/2} e^{-ik\eta_I} \\ A_k u(z_I) + B_k u^*(z_I) &= (2k)^{-1/2} e^{-ik\eta_I}. \end{aligned}$$

A solução pode ser encontrada usando uma propriedade do Wronskiano das funções de Hankel, viz.

$$H_\nu^{(2)}(z) \partial_z H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(1)}(z) \partial_z H_\nu^{(2)}(z) = 4i/\pi z,$$

que equivale a $u(z) \partial_z u^*(z) - u^*(z) \partial_z u(z) = -i$, e temos

$$\begin{aligned} A_k &= -i(2k)^{-1/2} e^{-ik\eta_I} [\partial_z u^*(z_I) - ik u^*(z_I)], \\ B_k &= i(2k)^{-1/2} e^{-ik\eta_I} [\partial_z u(z_I) - ik u(z_I)]. \end{aligned} \quad (12.31)$$

Assim, ao contrário do que é costume nas flutuações inflacionárias, no limite ultravioleta, em que $k \gg 1$ e $z \rightarrow -\infty$ não temos um vácuo de Bunch-Davies

(que corresponderia a $B_k = 0$) na fase acelerada; há uma mistura de frequências negativas e positivas.

Desejamos avaliar o efeito sobre o espectro de potências $\mathcal{P}_\varphi = k^3|\varphi_k|^2$. Dentro da fase acelerada, em que vale (12.30),

$$|\varphi_k|^2 = a^{-2}(\eta) \left[(|A_k|^2 + |B_k|^2) |u(z)|^2 + A_k B_k^* u^2(z) + A_k^* B_k (u^*(z))^2 \right], \quad (12.32)$$

e nos interessa o regime no interior do horizonte, para $z \ll 1$. As funções de Hankel satisfazem

$$H_\nu^{(1)}(z) \approx p_\nu z^\nu + i q_\nu z^{-\nu} + \dots \quad H_\nu^{(2)}(z) \approx p_\nu^* z^\nu - i q_\nu z^{-\nu} + \dots$$

Na fase acelerada $\nu > 0$, e.g. em de Sitter $\nu = 3/2$ e no gás de branas $\nu = 5/2$, o primeiro termo é irrelevante e temos $u \approx -u^*$; logo $u^2 = -|u|^2 = (u^*)^2$, e

$$|\varphi_k|^2 = |A_k - B_k|^2 a^{-2} |u(z)|^2.$$

O fator $a^{-2}|u|^2$ corresponde à amplitude do espectro inflacionário usual, em que as flutuações se encontram no vácuo de Bunch-Davies no interior do horizonte, e podemos escrever, comparativamente,

$$\mathcal{P}_\varphi^{Rad} = |A_k - B_k|^2 \mathcal{P}_\varphi^{BD}. \quad (12.33)$$

Ou seja, o efeito da fase radiativa nos modos em grandes escalas é uma modificação do espectro por um fator multiplicativo, comparando-se com o esperado em modelos de inflação pura. O fator, $|A_k - B_k|^2$, é uma função complicada de k ; uma expressão analítica é dada por [Das *et al.* \(2015\)](#). Para k alto, $|A_k - B_k|^2 \sim 1$, e para pequenos k seu efeito mais pronunciado é o de suprimir a amplitude do espectro; de acordo com [Marozzi *et al.* \(2011\)](#), seu valor é tipicamente da ordem de $\sim 1/2$, logo a amplitude do espectro é reduzida pela metade.

Este efeito é bastante conhecido, tendo sido obtido, e.g., por [Marozzi *et al.* \(2011\)](#); [Powell & Kinney \(2007\)](#). Uma explicação intuitiva para a supressão da amplitude em grandes escalas pode ser dada seguindo [Powell & Kinney \(2007\)](#). É de se esperar que haja flutuações em todas as escalas k tanto durante quanto antes do começo da inflação. A amplitude de φ_k decai com o fator de escala enquanto dura a fase de radiação e enquanto os modos se encontram dentro do horizonte na fase acelerada. Assim, em geral, as flutuações produzidas na época pré-inflacionária são diluídas e não interferem no espectro de potências no aeon atual (ou após o reheating). Assim como acontece durante a inflação, é de se esperar que flutuações sejam criadas em todas as escalas durante a fase radiativa. Os modos produzidos em η em escalas $k \sim a(\eta)H(\eta)$ saem do horizonte pouco depois de serem criados e preservam sua amplitude. Em geral, estes modos são

produzidos dentro da fase inflacionária, mas uma exceção. Modos produzidos no fim da fase radiativa, com escala $k \sim a_I H_I$ carregam informação do vácuo em que se encontravam quando produzidos e, por terem viajado por pouco tempo antes de sair do horizonte, não são completamente diluídos. Por isso a diferença (12.33) só aparece para pequenos valores de k , enquanto para grandes valores k voltamos a ter $\mathcal{P}_\varphi^{Rad} \approx \mathcal{P}_\varphi^{BD}$.

Pela DFE, o instante η_I em que começa a fase inflacionária é dual ao instante η_Λ quando se inicia o domínio de $\check{\Lambda}$ no nosso universo, i.e. $\eta_I = -\eta_\Lambda$, ver Fig.12.1. Por causa da simetria do raio comóvel do horizonte de Hubble, os modos produzidos durante a fase de radiação pré-inflacionária em escalas $k \approx a_I H_I$ voltam a entrar no horizonte em $\eta \lesssim \eta_\Lambda$. No momento nos encontramos coincidentemente próximos do início da fase acelerada, $\eta_0 \gtrsim \eta_\Lambda$, e portanto os efeitos da fase de radiação devem ser observados em escalas correspondentes à do universo atual.

12.3 Exemplo: universo autodual com $\delta = 1/2$

Em universos perfeitamente autoduais acontece um efeito curioso se tentamos fazer contínuas as flutuações ao longo de uma cadeia de aeons. A função $|aH|$ é periódica em η , com período η_f , e sempre diverge em $\eta = n\eta_f$, com n inteiro. Quando $k > aH$ o campo $\phi_k(\eta)$ oscila amortecidamente, e quando $k < aH$ o amortecimento domina. Na cadeia de aeons, o problema equivale a uma mecânica quântica unidimensional em um potencial periódico $V = aH$ como na Fig.12.2, e a continuidade em toda a cadeia só é possível para valores discretos de k .

Como exemplo, considere o modelo com $\delta = 1/2$, i.e.

$$\rho = (\rho_\Lambda^{1/2} + \rho_R^{1/2}/a^2)^2.$$

Repare que se trata de um universo contendo radiação, uma constante cosmológica e uma curvatura negativa. A solução para o fator de escala se obtém facilmente por integração direta de (9.28); a hipergeométrica geral (9.30) se simplifica, levando a

$$a(\eta) = a_* \tan(\pi\eta/2\eta_f). \quad (12.34)$$

A Eq.(12.4),

$$f_k'' + [k^2 + (\pi^2/2\eta_f^{-2}) \cos^{-2}(\pi\eta/2\eta_f)] f_k = 0,$$

tem como solução

$$f_k(\eta) = A_k \left[\cos k\eta + \frac{\pi}{2\eta_f} k^{-1} \tan \frac{\pi}{2\eta_f} \eta \sin k\eta \right] - B_k \left[\sin k\eta - \frac{\pi}{2\eta_f} k^{-1} \tan \frac{\pi}{2\eta_f} \eta \cos k\eta \right],$$

e portanto

$$\phi_k(\eta) = A_k \left[\cot \frac{\pi}{2\eta_f} \eta \cos k\eta + \frac{\pi}{2\eta_f} k^{-1} \sin k\eta \right] - B_k \left[\cot \frac{\pi}{2\eta_f} \eta \sin k\eta - \frac{\pi}{2\eta_f} k^{-1} \cos k\eta \right].$$

Regularidade em $\eta = 0$ impõe $A_k = 0$, e então

$$\phi_k(\eta) = B_k \left[\frac{\pi}{2\eta_f} k^{-1} \cos k\eta - \cot \frac{\pi}{2\eta_f} \eta \sin k\eta \right] \quad (12.35)$$

é regular também em $\eta = \eta_f$, onde $\phi_k(\eta_f) = \frac{B_k \pi}{2k\eta_f} \cos k\eta_f$. Então começando do aeon \mathcal{A}_1 onde $\eta \in [0, \eta_f]$, passa-se ao aeon \mathcal{A}_2 onde $\eta \in [\eta_f, 2\eta_f]$. As flutuações para diferentes valores de k estão representadas na Fig.12.2 com as ondas em linha tracejada; o eixo horizontal é o tempo conforme. Para baixos valores de k os modos estão fora do horizonte (abaixo do “potencial” aH em linha pontilhada), e as flutuações são fortemente suprimidas, enquanto para maiores valores de k , $\phi_k(\eta)$ oscila (mais) livremente. Também é possível ver na Fig.12.2 que, apesar da regularidade em $\eta = 0$ e η_f , em $\eta = 2\eta_f$ a cotangente no segundo termo de (12.35) diverge, e é impossível passar a \mathcal{A}_3 . Isso não pode ser remediado ajustando a constante B_k arbitrária; a única maneira de se obter continuidade de ϕ_k em todas as passagens, fazendo o termo $\cot \frac{\pi}{2\eta_f} \eta \sin k\eta$ finito em $\eta = n\eta_f$ para n inteiro, é cancelando a divergência da cotangente com o seno, i.e. impondo

$$k = \pi n / 2\eta_f, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (12.36)$$

Uma oscilação desse tipo é representada pela onda contínua na Fig.12.2.

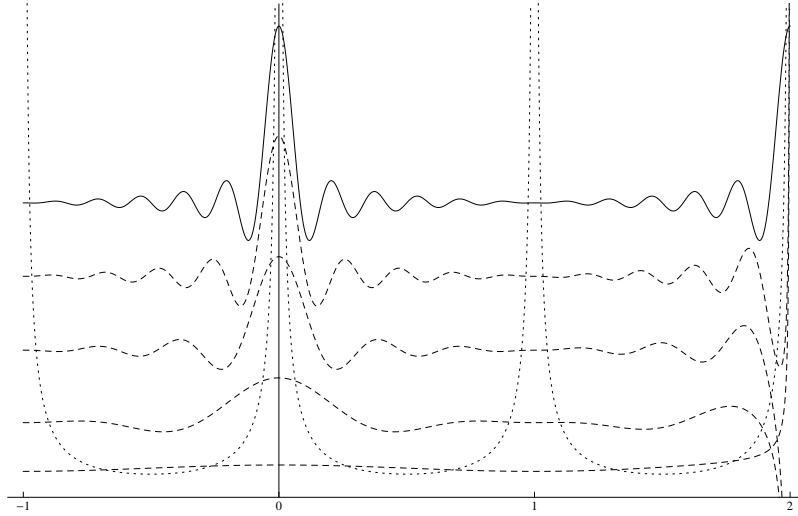


Figura 12.2: Flutuações em uma cadeia de aeons autoduais.

Essa quantização de k é uma característica genérica das condições de contorno periódicas que emergem em uma cadeia de aeons perfeitamente autoduais. Mas note que η_f em (12.36) é a duração conforme de toda a evolução dos universos, e é tipicamente um número grande (por exemplo, no modelo Λ CDM $\eta_f \sim 10^{10}$ anos, ver Eq.(2.74)), logo a densidade de níveis discretos é extremamente alta, e o espectro é, na prática, contínuo.

12.4 Dualidade de flutuações adiabáticas

Até aqui, discutimos os efeitos de flutuações sobre universos cuja métrica de fundo é relacionada pela DFE. Nesta seção, nosso objetivo é descrever uma dualidade *das próprias flutuações*, compatível com a inversão do fator de escala. Tal dualidade foi implementada na gravitação dilatônica por [Brustein et al. \(1998\)](#); [Copeland et al. \(1997\)](#); nesse caso, enquanto a dualidade do fator de escala corresponde à dualidade-T da teoria cordas, a dualidade das flutuações está relacionada a uma simetria da teoria de cordas conhecida como ‘dualidade-S’, que inverte o sinal do dilaton e, portanto, mapeia o acoplamento de cordas $g_s \mapsto 1/g_s$.

Seguimos [Brustein et al. \(1998\)](#). Considere a teoria de um campo escalar $\phi(x)$ com ação

$$S = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} d\eta a^2(\eta) [(\partial_\eta \phi)^2 - \partial_{\mathbf{x}}\phi \cdot \partial_{\mathbf{x}}\phi]. \quad (12.37)$$

Trata-se da ação para um campo escalar sem massa em um universo de FLRW, mas os resultados que descreveremos são válidos em outras situações em que a ação possua a mesma forma. A função $a(\eta)$ (nesse caso) é o fator de escala da métrica de fundo, e é predeterminada pelas equações de Friedman. A equação de campo é a equação de Klein-Gordon para ϕ ,

$$\phi'' + 2(a'/a)\phi' - \partial_{\mathbf{x}}^2\phi = 0. \quad (12.38)$$

Com o momento canônico conjugado $\pi = \partial\mathcal{L}/\partial\phi'$,

$$\pi(x) = a^2(\eta) \partial_\eta \phi(x),$$

podemos escrever a Hamiltoniana

$$H[\phi, \pi] = \int d^3\mathbf{x} [\phi'(x)\pi(x) - \mathcal{L}] = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} [a^{-2}\pi^2 + a^2 |\partial_{\mathbf{x}}\phi|^2],$$

ou, em modos de Fourier,

$$H[\phi, \pi] = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{k} [a^{-2}\pi_k \pi_{-k} + a^2 k^2 \phi_k \phi_{-k}], \quad (12.39)$$

As equações de Hamilton, $\phi'_k = \delta H/\delta\pi_k$ e $\pi'_k = -\delta H/\delta\phi_k$, dão o par de equações de primeira ordem

$$\phi'_k = a^{-2}\pi_{-k}, \quad \text{e} \quad \pi'_k = -a^2 k^2 \phi_{-k}.$$

A Hamiltoniana (12.39) e, conseqüentemente, as equações de Hamilton, são simétricas sob a transformação

$$\begin{aligned} a(\eta) &\mapsto \tilde{a}(-\eta) = c^2/a(\eta) \\ \phi_k(\eta) &\mapsto \tilde{\phi}_k(-\eta) = -\frac{1}{c^2} k^{-1} \pi_k(\eta) \\ \pi_k(\eta) &\mapsto \tilde{\pi}_k(-\eta) = c^2 k \phi_k(\eta). \end{aligned} \quad (12.40)$$

Chamaremos essa transformação de dualidade-S. (Na cosmologia de cordas, a função a está associada ao acoplamento efetivo, $a = 1/g_s^2(\eta)$; logo a transformação liga acoplamentos fortes e fracos.) A verificação da invariância de $H[\phi, \pi]$ é imediata: em suma, (12.40) troca o termo quadrático em π pelo termo quadrático em ϕ , e vice-versa. Por preservar a Hamiltoniana (e os parênteses de Poisson), esta é uma transformação canônica.

A transformação (12.40) é uma extensão da DFE às flutuações lineares sobre o universo homogêneo e isotrópico.

Como já observado, para $f(x) = a(\eta)\phi(x)$ a equação de campo (12.38) se resume à Eq.(12.4), que coincide com a Eq.(4.53) para as flutuações escalares do dilaton no calibre plano. Para a flutuação da curvatura \mathcal{R} , vale a equação de Mukhanov-Sasaki (4.36),

$$\mathcal{R}'' + 2(z'/z)\mathcal{R} - \partial_{\mathbf{x}}^2\mathcal{R} = 0,$$

que é exatamente a Eq.(12.38), com a substituído por $z = a\dot{\phi}/H$, onde aqui $\bar{\phi}$ é o campo escalar de fundo. Assim, a equação de MS acima possui uma simetria do tipo (12.40) com a inversão $z \mapsto 1/z$, o que *não* corresponde, em geral, a uma inversão do fator de escala.¹ Se a geometria de fundo é guiada por um fluido perfeito com equação de estado w constante, ou um campo escalar que crie uma lei de potências, então, como observado na Eq.(12.3),

$$z = a\dot{\phi}/H = \frac{(1+w)z}{\sqrt{3}}(a/a_*)^{-(1+3w)/2}.$$

Assim, a inversão $z \mapsto 1/z$ equivale a $a \mapsto 1/a$ ou $w \mapsto -w - 2/3$, que é precisamente a transformação correta para a DFE. Além disso, vimos no §4.2 que os modos de polarização de ondas gravitacionais também se comportam como campos escalares sem massa se propagando sobre a métrica de fundo, e são, portanto, descritos pela mesma ação (12.37). Assim, pode-se encarar ϕ na discussão que segue como flutuações lineares escalares ou tensoriais em um universo de FLRW com fator de escala $a(\eta)$.

¹Vale notar que há outra simetria da Eq.(4.36) que foi chamada de “dualidade” por Wands (1999); há sempre duas funções, $a(\eta)$ e $\tilde{a} \equiv C a(\eta) \int_{\eta_*}^{\eta} d\eta/a^2(\eta)$, que resultam no *mesmo* “potencial” $a''/a = \tilde{a}''/\tilde{a}$. No caso de uma lei de potências, $a \sim \eta^\alpha$, a equação de MS tem a forma (12.5), e a simetria corresponde ao fato de que há duas soluções α para um único valor do coeficiente $\mu^2 = \alpha(\alpha - 1)$. Assim, as flutuações f_k em dS_4 , com $\alpha = -1$, obedecem a mesma equação que num universo com poeira, que tem $\alpha = 2$. Repare que essa dualidade é bastante diferente da que estamos utilizando aqui: no nosso caso, o potencial a''/a *não* fica invariante sob inversão do fator de escala; a DFE mapeia soluções diferentes de equações diferentes.

*

Condições de contorno e a dualidade

A escolha do vácuo de Bunch-Davies é uma condição de contorno para a solução da Eq.(12.4), que junto com a normalização (12.14) determina completamente a solução f_k ou

$$\phi_k(\eta) = (2k)^{-1/2} e^{-ik\eta} (1 + ik\eta).$$

Trata-se de uma especificação de condições de contorno mistas, de Dirichlet (na escolha do vácuo de BD, fazendo $A^+ = 0$) e de Neumann (na normalização do produto de Klein-Gordon), sobre a superfície inicial $\mathcal{B}_0 = \{\eta = -\infty\}$. Note que esta é apenas uma possibilidade. As duas condições de contorno necessárias para fixar completamente a solução da equação de Klein-Gordon podem ser prescritas de mais de uma maneira. Por exemplo, pode-se impor condições de Dirichlet sobre duas superfícies, uma em \mathcal{B}_1 e outra em $\mathcal{B} = \{\eta = \eta_c\}$; escolhendo apenas frequências positivas em \mathcal{B}_0 , a solução

$$\phi_k(\eta) = \varphi_k^0 \frac{(1 + ik\eta)}{(1 + ik\eta_c)} e^{-ik(\eta - \eta_c)}$$

satisfaz a condição $\phi_k|_{\mathcal{B}} = \varphi_k^0$, ou seja $\phi^0(x)|_{\mathcal{B}} = \varphi(\mathbf{x})$, para uma função qualquer φ^0 em \mathcal{B} . Esta solução será útil no Capítulo 13 para determinar a função de onda do universo.

Considere a solução $\phi(x)$ em $\eta < 0$, determinada por uma condição de Dirichlet em $\mathcal{B} = \{\eta = \eta_c\}$. A dualidade-S (12.40) mapeia

$$\phi_k(\eta_c) \mapsto -c^{-2} k^{-1} \tilde{\pi}_k(-\eta_c), \quad \text{onde} \quad \tilde{\pi}_k(-\eta) = -\tilde{a}^2(-\eta) \partial_\eta \tilde{\phi}_k(-\eta).$$

Logo a solução dual $\tilde{\phi}(x)$, com $\eta > 0$, satisfaz uma condição de Neumann sobre a superfície (dual) $\tilde{\mathcal{B}} = \{\eta = -\eta_c\}$. Vice-versa, e.g., se $\tilde{\phi}(x)$ for determinada por uma condição de Dirichlet em $\tilde{\mathcal{B}}$, então $\phi(x)$ está sujeita a uma condição de Neumann sobre \mathcal{B} . Em resumo, *a dualidade-S mapeia condições de contorno de Dirichlet em Neumann, e vice-versa.*

A dualidade das condições de contorno imposta pela dualidade-S não é trivial. Em um par de universos duais, as soluções $\phi_k(\eta)$ e $\tilde{\phi}_k(\eta)$ da equação (12.4) têm, cada uma, duas constantes de integração, necessitando portanto 4 condições de contorno ao todo. Em princípio, estas condições são independentes. Para obter a solução (12.15), impusemos: (i) A regularidade de (12.12) em $\eta = 0$; (ii) continuidade em $\eta = 0$; (iii) condição de apenas frequências positivas em $\eta = -\infty$; e (iv) normalização de Klein-Gordon em $\eta = -\infty$. As condições (i)-(iii) são de Dirichlet, e (iv) é uma condição de Neumann. Com a dualidade-S, entretanto,

a relação entre $\phi_k(\eta)$ e $\tilde{\pi}_k$ determina uma das condições, e restam apenas 3, impossibilitando certas configurações, como por exemplo (12.15).

De fato, a solução geral em dS_4

$$\phi_k(\eta) = A_k^+ e^{ik\eta}(1 - ik\eta) + A_k^- e^{-ik\eta}(1 + ik\eta)$$

tem momento conjugado ($\pi_k = a^2 \phi_k'$)

$$\pi_k(\eta) = ik\eta^{-1}(A_k^+ e^{ik\eta} - A_k^- e^{-ik\eta}).$$

Já a solução (12.12) no universo de radiação pode ser escrita como

$$\tilde{\phi}_k(\eta) = \eta^{-1}(B_k^+ e^{ik\eta} + B_k^- e^{-ik\eta}).$$

Impondo a dualidade-S, $\tilde{\phi}_k(\eta) = -\frac{1}{c^2} k^{-1} \pi_k(-\eta)$, temos as condições

$$-iA_k^- = c^2 B_k^+; \quad iA_k^+ = c^2 B_k^-.$$

Impor regularidade de $\tilde{\phi}_k$ em $\eta = 0$ requer $B_k^+ = -B_k^-$, logo $A_k^- = A_k^+$ e é impossível escolher apenas $A^+ = 0$; há necessariamente uma mistura de modos com frequência positiva e frequência negativa em dS_4 .

12.5 Discussão

Para um par de universos duais, nós vimos que é possível estender as flutuações entre aeons impondo a continuidade dos modos de Fourier que se congelam no interior do horizonte de Hubble, e considerar o universo dual ao universo atual como uma inflação “pré-big-bang”. Se for dual ao modelo Λ CDM com radiação, essa inflação possui algumas características peculiares: é assintoticamente de Sitter no futuro, mas começa com uma lei de potências correspondente a um gás de branas; há também uma fase radiativa desacelerada pré-inflacionária.

Nas discussões acima, nós consideramos a DFE como uma simetria “exata”, no sentido de que a aplicamos a toda a evolução do modelo pós-big-bang para obter o universo inflacionário dual, com suas componentes de energia. Pode-se argumentar que o mais plausível é que a DFE, com sua simetria “quase-conforme” de inversão do fator de escala, seja válida apenas assintoticamente, isto é: que para obter o universo pré-big-bang se deva restringir a efetuar a transformação de dualidade na era radiativa do início do universo, quando não há massa de repouso. Nesse caso, a inflação antes do big-bang não possui uma fase prévia desacelerada e, por ser dual a um universo cuja dinâmica é próxima do universo de radiação, desvia pouco da dinâmica de dS_4 (o que evitaria a presença de índices espectrais exóticos como (12.27)).

Para além da construção de modelos, a característica principal dessa proposta de uma inflação pré-big-bang reside na natureza da superfície \mathcal{X} de “reheating”, onde se efetua a transição conforme. Essa questão não apareceu de forma explícita nas discussões acima pelo mesmo motivo com que as predições de modelos inflacionários são insensíveis à teoria do fim da inflação: os modos constantes fora do horizonte não sentem essa parte da dinâmica. Mas na inflação usual a dinâmica da métrica é contínua, sejam quais forem os detalhes específicos do mecanismo de reaquecimento, enquanto a colagem dos modos de Fourier que efetuamos atravessa uma descontinuidade drástica do fator de escala da métrica de fundo. Implicitamente, nós assumimos que as flutuações (congeladas fora do horizonte) são insensíveis ao rescalamento conforme infinito $\{\hat{a} = \infty\} \sim \{\tilde{a} = 0\}$. Isso reflete, de certa forma, a idéia da CCC de que na transição entre aeons o que importa é a métrica de ligação regular $g_{\mu\nu}$, tal que $\hat{g}_{\mu\nu} = \Omega g_{\mu\nu}$ e $\check{g}_{\mu\nu} = \omega g_{\mu\nu}$ — no tempo conforme, as flutuações h_{ij} , Φ e Ψ equivalem a pequenas flutuações de $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, com o fator de escala tendo sido fatorado. Mas assumir isso, embora justificável até certo ponto, não deixa de ser uma hipótese arriscada. A eventual descrição da física envolvida na identificação de toda uma classe conforme de métricas pode ter efeitos sobre a maneira de se descrever as flutuações. Por exemplo, pode ser necessária a identificação de classes duais de flutuações ligadas pela dualidade-S, impondo restrições sobre as condições de contorno que podem ter efeitos sobre, por exemplo, os espectros de potência.

De todo modo, um mecanismo que crie um reheating conforme onde se possa efetuar um reescalamento de inversão do fator de escala está longe de ser encontrado e, em última instância, conciliar a DFE com o universo inflacionário pode requerer uma mudança conceitual drástica de paradigma. No capítulo seguinte, apresentamos um caminho possível.

Capítulo 13

A DFE em um universo holográfico

As grandezas observacionais previstas pelos modelos inflacionários são as funções de correlação (os espectros de potência) das flutuações da métrica e da matéria no universo após o reheating, que apresentam uma série de propriedades dentre as quais a que mais se destaca é a quase-invariância de escala. A explicação do paradigma inflacionário segue o espírito da física de partículas: postula a existência de um campo escalar (que nunca foi observado) com um potencial apropriado, que se acopla à gravitação da maneira usual e induz a dinâmica quase-de Sitter do espaço-tempo. Existe uma explicação completamente diferente para o mesmo fenômeno: É amplamente discutido, e.g. por [Antoniadis *et al.* \(2012\)](#); [Creminelli *et al.* \(2012\)](#); [Lyth & Riotto \(1999\)](#), que muito das propriedades das correlações previstas pela inflação estão relacionadas não à existência do dilaton, mas sim às simetrias do espaço (quase-) dS_4 . Assintoticamente, de Sitter é dual a uma teoria conforme, como proposto por [Strominger \(2001a\)](#). Em conjunto, essas duas observações abrem a possibilidade de se formular a questão do universo primordial *holograficamente*.

Descrever a inflação através da holografia, como um fluxo do grupo de renormalização na teoria dual, é uma proposta feita originalmente por [Strominger \(2001b\)](#), e desenvolvida de maneira operacional por vários autores,¹ em particular [Bzowski *et al.* \(2013\)](#); [Larsen *et al.* \(2002\)](#), seguindo a reformulação da dualidade dS/CFT introduzida por [Maldacena \(2003\)](#). Esta é uma mudança drástica de paradigma, que pode ser esquematizada da seguinte forma: O espaço-tempo cosmológico possui uma TQC dual, da qual ele é o correspondente holográfico. As correlações de objetos geométricos como $\langle \mathcal{R}_k \mathcal{R}_{k'} \rangle$ no lado gravitacional da dualidade correspondem a valores médios de operadores quânticos $\langle \mathcal{O}_k \mathcal{O}_{k'} \rangle$ na teoria

¹Uma lista incompleta inclui [Halverson \(2004\)](#); [Larsen & McNeese \(2003, 2004\)](#); [Larsen *et al.* \(2002\)](#); [McFadden & Skenderis \(2010b\)](#); [van der Schaar \(2004\)](#).

de campos, e o regime de baixas energias, semiclássico, da gravitação corresponde a um regime ultravioleta da TQC. Conhecendo a TQC holográfica, é inclusive possível substituir o regime de altas energias da gravitação (i.e. a fase singular *antes* da inflação) por uma descrição em termos da TQC dual e, nesse regime, não existe o espaço-tempo, no sentido geométrico da Teoria da Relatividade; esta é a proposta de um ‘universo holográfico’, de [McFadden & Skenderis \(2010b\)](#).¹

Por sua vez, uma inflação descrita pela Dualidade do Fator de Escala se encaixa nesse quadro holográfico muito melhor do que no paradigma inflacionário por um motivo simples: a holografia reformula completamente o conceito do reheating. Na inflação, o espaço-tempo é quase de Sitter por um intervalo de tempo, e o reheating induz uma transição da geometria para a de um universo de radiação antes de que se chegasse à borda $\mathcal{I}^+|_{dS}$. Por outro lado, na holografia é justamente em $\mathcal{I}^+|_{dS}$ que “reside” o ponto fixo conforme da teoria de campos dual à inflação — e é precisamente sobre $\mathcal{I}^+|_{dS}$ que a DFE mapeia o início singular de um universo de radiação. Com isso em mente, este capítulo é dedicado a revisar a formulação operacional da inflação holográfica, e aplicá-la à DFE.

13.1 Simetria conforme na borda de dS_4

Para definir uma teoria conforme no futuro infinito de dS_4 é preciso, em primeiro lugar, que \mathcal{I}^+ seja invariante sob o grupo conforme e, além disso, que os campos presentes em dS_4 se estendam à borda e se comportem como campos quase-primários. (Ver Apêndice E.)

*

SO(4,1) e o grupo conforme em de Sitter

O espaço de de Sitter de raio $L = 1/H$ é definido pela forma quadrática (D.1), que é simplesmente a distância covariante

$$dS_4 \quad : \quad \eta_{AB}X^AX^B = 1/H^2, \quad (A, B = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (13.1)$$

de um ponto X à origem de $M^{(4,1)}$, ou seja, uma pseudo-esfera num espaço pseudo-Euclidiano (e, portanto, um hiperbolóide de uma folha; ver Fig.D.1). Assim, por construção, dS_4 é invariante sob as transformações de Lorentz em $M^{(4,1)}$, que formam o grupo $SO(4,1)$ e cujos geradores

$$J_{AB} = X_A \frac{\partial}{\partial X^B} - X_B \frac{\partial}{\partial X^A}, \quad (13.2)$$

¹Ver [McFadden & Skenderis \(2010a\)](#) para uma discussão um pouco mais extensa, e [Afshordi et al. \(2017a,b\)](#) para uma discussão recente incluindo comparação com os últimos resultados observacionais.

onde $X_A \equiv \eta_{AB}X^B$, satisfazem a álgebra de Lie $so(4,1)$:

$$[J_{AB}, J_{CD}] = -\eta_{AC}J_{BD} + \eta_{BC}J_{AD} - \eta_{BD}J_{AC} + \eta_{AD}J_{BC}. \quad (13.3)$$

As componentes espaciais iJ_{ij} , com $i, j = 1, \dots, 3$, são evidentemente geradores de rotações em $R^3 \subset M^{(4,1)}$ ($\eta_{ij} = \delta_{ij}$). Os outros elementos J_{iA} e J_{04} também têm uma interpretação sobre o espaço Euclidiano; definindo

$$iP_j = J_{j4} - J_{j0}; \quad K_j = i(J_{j4} + J_{j0}); \quad D = -iJ_{40}, \quad (13.4)$$

é imediato verificar que os comutadores em (13.3) se separam para formar a álgebra do grupo conforme (E.17). Ou seja: $so(4,1)$, a álgebra das simetrias de dS_4 , é isomórfica à álgebra das transformações conformes de R^3 .

Mas o grupo conforme não age necessariamente sobre as seções espaciais de dS_4 , aliás há mais de uma maneira de se folhear o hiperbolóide em seções espaciais, como mostrado no §D.1. A folheação que nos interessa é em coordenadas planas, que descrevem um universo acelerado com constante cosmológica $\Lambda = 3H^2/\mathcal{L}^2$, e, em particular, no tempo conforme. A parametrização (D.6) induz, a partir da métrica de $M^{(4,1)}$, o elemento de linha de dS_4

$$ds^2 = \frac{1}{H^2\eta^2}(-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j), \quad (13.5)$$

com

$$\eta = -\frac{L^2}{X^0 + X^4} \quad \text{e} \quad x^i = -\frac{LX^i}{X^0 + X^4},$$

e os geradores (13.2) com as redefinições (13.4), se escrevem

$$D = -i(\eta\partial_\eta + x^i\partial_i); \quad K_i = 2H x_i D - H^2(-\eta^2 + \mathbf{x}^2)P_i \quad (13.6)$$

$$P_i = -iH^{-1}\partial_i; \quad J_{ij} = x_i\partial_j - x_j\partial_i. \quad (13.7)$$

As seções espaciais na métrica (13.5), definidas por $\eta = \text{constante}$, têm a geometria de R^3 , e os geradores P_i e J_{ij} induzem translações e rotações infinitesimais das coordenadas x^i . Para $|\lambda| \ll 1$, as transformações infinitesimais geradas por D , $x^\mu \mapsto x'^\mu = (1 + i\lambda D)x^\mu$, cf. Eq.(E.15), são

$$\delta_D\eta = \lambda\eta, \quad \text{e} \quad \delta_D x^i = \lambda x^i, \quad (13.8)$$

e para K_i , $x^\mu \mapsto x'^\mu = (1 + iH^{-1}b^j K_j)x^\mu$ com $|b/H| \ll 1$, (note que b^i tem dimensão de 1/comprimento, logo o parâmetro adimensional é b^i/H)

$$\delta_K\eta = 2b^j x_j \eta, \quad \text{e} \quad \delta_K x^i = 2b^j x_j x^i - (\mathbf{x}^2 - \eta^2)b^i. \quad (13.9)$$

A transformação $\delta_D x^i$ está de acordo com o esperado para o gerador de dilatações; já a transformação $\delta_K x^i$, resultado da atuação do gerador de transformações

conformes especiais, *não coincide* com as transformações infinitesimais de R^3 , que deveriam ser (o termo em parênteses da Eq.(E.11)) $2b^i x_j x^i - \mathbf{x}^2 b^i$. A diferença está no termo $\eta^2 b^i$, que se anula (assintoticamente) no futuro infinito $\mathcal{I}^+ = \{\eta = 0\}$. Assim, *o grupo de simetrias de dS_4 , $SO(4,1)$, atua, assintoticamente para $H\eta \ll 1$, e exatamente na borda $\mathcal{I}^+ = \{\eta = 0\}$, como o grupo conforme das seções espaciais da métrica (13.5).*

A simetria conforme presente em \mathcal{I}^+ está diretamente relacionada às isometrias do interior do espaço (i.e., para $\eta < 0$ arbitrário). de Sitter é um espaço-tempo de simetria máxima: por definição, possui o número máximo de isometrias possível, 10 (em geral, $D(D+1)/2$ em D dimensões. Ver, e.g. Weinberg (1972)), cada uma correspondente a um vetor de Killing $\xi_\mu^{(I)}$, solução de

$$\nabla_\mu \xi_\nu^{(I)} + \nabla_\nu \xi_\mu^{(I)} = 0, \quad I = 1, \dots, 10. \quad (13.10)$$

Na métrica (13.5), isto equivale a

$$\eta^{-1} \partial_\eta \xi_0^{(I)} = 0, \quad (13.11a)$$

$$-(H\eta)^{-1} \partial_\eta \xi_i^{(I)} + \partial_i \xi_0^{(I)} - 2H \xi_i^{(I)} = 0, \quad (13.11b)$$

$$\partial_i \xi_j^{(I)} + \partial_j \xi_i^{(I)} - 2H e^{2Ht} \delta_{ij} \xi_0^{(I)} = 0. \quad (13.11c)$$

Para encontrar as 10 soluções (vetoriais), note que os vetores de Killing são as transformações infinitesimais de coordenadas que preservam a métrica, e com ela a forma quadrática (13.1). Portanto uma combinação dos $\xi_\mu^{(I)}$ deve fornecer os geradores de $so(4,1)$ e, de fato, há $5 \times (5-1)/2 = 10$ geradores antisimétricos J_{AB} para corresponder aos 10 vetores de Killing de dS_4 . Em suma, restringindo os geradores $J_{AB}(x^\mu)$ ao hiperbolóide, e os decompndo em uma combinação linear de 10 vetores independentes, chega-se indiretamente às soluções das Eqs.(13.11); mas é exatamente esse o processo que resulta nos geradores (13.6). Os operadores P_i , K_i e D fornecem $3 + 3 + 1 = 7$ vetores linearmente independentes, e os operadores (antisimétricos) de rotação J_{ij} fornecem mais 3, completando os 10 vetores que preservam (13.1). A título de exemplo, escritos explicitamente em coordenadas os vetores de Killing correspondentes a D e K_a , $a = 1, 2, 3$, ficam

$$\begin{aligned} \{\xi_{(D)}^0 = \eta, \quad \xi_{(D)}^i = x^i\}, \\ \{\xi_{(K_a)}^0 = 2Hx^a \eta, \quad \xi_{(K_a)}^i = H(2x^a - \mathbf{x}^2 + \eta^2)x^i\}. \end{aligned}$$

*

Campos escalares na borda de dS_4 ; funções de correlação

Considere um campo escalar livre $\phi(x)$, com massa m . A ação

$$S[\phi] = - \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \quad (13.12)$$

fornece a equação de Klein-Gordon

$$(-\square + m^2)\phi(x) = 0. \quad (13.13)$$

Pelo que se discutiu acima, as simetrias de dS_4 devem fazer com que ϕ se comporte como um campo conforme (quase-primário) no limite de \mathcal{S}^+ .

A função de 2-pontos avaliada em um vácuo invariante sob o grupo $\text{SO}(4,1)$ dá origem à função de Green (ou de Wightman), solução de

$$(-\square_x + m^2)G(x, x'; m^2) = (-g)^{-1/2} \delta^4(x - x'). \quad (13.14)$$

A simetria sob $\text{SO}(4,1)$ implica que G só pode depender de x e x' através da distância geodética covariante ou, alternativamente, através da função $z(x, x')$ definida no §D.2. Em coordenadas planas (Eq.(D.11))

$$z(x, x') = 1 - \frac{1}{4\eta\eta'} \left(-(\eta - \eta')^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 \right). \quad (13.15)$$

Usando a fórmula (D.12) para o Laplaciano, a Eq.(13.14) fica

$$\left[z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} + 2(1-2z) \frac{d}{dz} - \frac{m^2}{H^2} \right] G(z; m^2) = 0, \quad (13.16)$$

para $x \neq x'$; isto é uma equação hipergeométrica (cf. §I.3), com solução

$$G(z; M^2) = C_M F[w_+, w_-; 2; z], \quad (13.17)$$

$$\text{onde } w_{\pm} = \frac{3}{2} \pm \nu, \quad \text{com } \nu \equiv \sqrt{(3/2)^2 - (m/H)^2}. \quad (13.18)$$

Próximo à borda, $\eta, \eta' \rightarrow 0$, $z \approx -(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 / 4\eta\eta'$ diverge, e tomando o limite assintótico de $F(z)$ dado pela Eq.(I.5),

$$G(x, x'; m^2)|_{\eta, \eta' \rightarrow 0} \approx \frac{C_+ (\eta\eta')^{w_+}}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{2w_+}} + \frac{C_- (\eta\eta')^{w_-}}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{2w_-}}, \quad (13.19)$$

onde C_{\pm} são constantes que só dependem de m^2 e H . Consideramos apenas o intervalo $0 < m^2/H^2 < 9/4$, em que w_{\pm} são números reais e $0 < w_- < w_+$, e com isso $G(x, x'; m^2)|_{\mathcal{S}^+} = 0$. A dependência espacial coincide com a forma (E.34), o que mostra que perto de \mathcal{S}^+ um campo massivo em dS_4 se comporta como um operador quase-primário com dimensão conforme $\Delta = w$.

*

Perto de \mathcal{S}^+ , a equação de Klein-Gordon (13.13), escrita em coordenadas planas,

$$[\eta^2 \partial_\eta^2 - 2\eta \partial_\eta - \eta^2 \partial_{\mathbf{x}}^2 + m^2/H^2] \phi(x) = 0, \quad (13.20)$$

tem o termo contendo a derivada espacial suprimido por continuidade:

$$[\eta^2 \partial_\eta^2 - 2\eta \partial_\eta + m^2/H^2] \phi(x) = 0. \quad (13.21)$$

O ansatz $\phi \sim \eta^w$ é uma solução desta equação assintótica desde que $w = w_\pm$. Isto, é claro, era de se esperar já que estamos efetivamente resolvendo a mesma equação (13.16) cujo limite assintótico encontramos em (13.19). Portanto o campo se comporta, assintoticamente, como

$$\phi(x) \approx \eta^{w_-} \Phi_0(\mathbf{x}), \quad \text{perto de } \mathcal{S}^+ = \{\eta = 0\}. \quad (13.22)$$

A função

$$\Phi_0(\mathbf{x}) \equiv [\eta^{-w_-} \phi(x)]_{\eta \rightarrow 0} \quad (13.23)$$

serve como uma condição de contorno de Dirichlet que determina $\phi(x)$ em $\eta < 0$, isto é, a solução da equação de Klein-Gordon (13.13) pode ser escrita como

$$\phi(x) = \int_{\mathcal{S}^+} d^3 \mathbf{x}' K(x; \mathbf{x}') \Phi_0(\mathbf{x}'), \quad (13.24)$$

para uma função $K(x; \mathbf{x}')$ chamada de ‘propagador interior-superfície’ (*‘bulk-to-boundary’*) que satisfaz

$$(-\square_x + m^2)K(x; \mathbf{x}') = 0 \quad (13.25)$$

para x no interior de dS_4 e $\mathbf{x}' \in \mathcal{S}^+$. Pode-se determinar K a partir de G por meio do teorema de Green, que leva a

$$\phi(x) = - \int_{\mathcal{S}^+} d^3 \mathbf{x}' \sqrt{|\gamma|} n_\mu \Phi_0(\mathbf{x}') \eta^{w_-} g^{\mu\nu} \partial'_\nu G(x, x'; m^2),$$

onde γ_{ab} é a métrica induzida por $g_{\mu\nu}$ sobre a borda, à qual n_μ é a 1-forma normal. Comparação com a Eq.(13.24) mostra que o propagador interior-superfície é dado pela derivada normal da função de Green em \mathcal{S}^+ ,

$$K(x; \mathbf{x}') = - [\eta^{w_-} \sqrt{\gamma} n_\mu g^{\mu\nu} \partial'_\nu G(x, x'; m^2)]_{\eta' \rightarrow 0}. \quad (13.26)$$

O lado direito deve ser entendido como um limite. A métrica induzida numa superfície $\{\eta' = \text{constante}\}$ é $\gamma_{ij} = (H\eta')^{-2} \delta_{ij}$, logo

$$\sqrt{\text{Det } \gamma(x')} n_\mu g^{\mu\nu}(x') = -(H\eta')^{-2} \delta_0^\nu, \quad (13.27)$$

e $K(x; \mathbf{x}') = [(H\eta')^{-2} \eta'^{w_-} \partial_{\eta'} G(x, x'; m^2)]_{\eta'=0}$. O limite da derivada da função de Green é obtido da Eq.(13.19),

$$\eta'^{-2+w_-} \partial_{\eta'} G \approx \frac{w_+ C_+ \eta'^{w_+}}{[-\eta'^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2]^{w_+}} \eta'^{w_++w_- - 3} + \frac{w_- C_- \eta'^{w_-}}{[-\eta'^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2]^{w_-}} \eta'^{2w_- - 3}.$$

(Note a presença do termo $-\eta'^2$ nos numeradores, ausente em (13.19) porque lá $\eta \rightarrow 0$.) O expoente de η' no primeiro termo se anula, já que $w_- + w_+ = 3$; no segundo termo $2w_- - 3 = -2\sqrt{9/4 - (m/H)^2} < 0$, e por isso para que a expressão não divirja se deve tomar $C_- = 0$. Isso determina o propagador interior-superfície como uma função *finita* (para $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$) em \mathcal{S}^+ ,

$$K(\mathbf{x}, \eta; \mathbf{x}') = \frac{w_+ C_+}{H^2} \frac{\eta^{w_+}}{[-\eta^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2]^{w_+}}. \quad (13.28)$$

Para $m^2 = 0$, a solução da Eq.(13.13)

$$\square_x \varphi(x) = 0, \quad (13.29)$$

não é mais a hipergeométrica (13.17), já que $w_- = 0$. (Usamos $\varphi(x)$ para diferenciar o campo escalar sem massa do campo massivo $\phi(x)$.) Como estamos interessados na solução assintótica, em que $\eta \rightarrow 0$, podemos usar a expressão (13.21) para o Laplaciano,

$$\square_x \varphi(x) \approx -(\eta^2 \partial_\eta^2 - 2\eta \partial_\eta) \varphi(x) = 0. \quad (13.30)$$

É evidente que uma solução assintótica é a função “constante”

$$\varphi(x) = \varphi_0(\mathbf{x}) \quad \text{que corresponde ao expoente } w_- = 0.$$

(Essa é a solução “congelada” fora do horizonte usada nos modelos inflacionários.) A segunda solução é $\varphi(x) = \eta^3 f_2(\mathbf{x})$, o que corresponde ao valor de $w_+ = 3$ para $m^2 = 0$, e morre no limite $\eta \rightarrow 0$. É a função congelada $\varphi_0(\mathbf{x})$ que serve como condição de contorno de Dirichlet para $\varphi(x)$ (fazendo o papel análogo a Φ_0 no caso massivo), e podemos escrever (analogamente à Eq.(13.24)), $\varphi(x) = \int_{\mathcal{S}^+} d^3 \mathbf{x}' J(x; \mathbf{x}') \varphi_0(\mathbf{x}')$, com o propagador $J(x; \mathbf{x}') = C \eta^3 (-\eta^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2)^{-3}$.

Os resultados dessa discussão mostram que:

1. Campos escalares em dS_4 se comportam como campos conformes quase-primários na borda \mathcal{S}^+ , com dimensão conforme w_\pm , solução da equação

$$m^2/H^2 = w(3 - w). \quad (13.31)$$

Portanto é possível definir uma teoria conforme em \mathcal{S}^+ usando os campos $\phi(x)$ em dS_4 .

-
2. A função $\Phi_0(\mathbf{x})$ em \mathcal{I}^+ , tal que $\phi(x) \approx \eta^{w-} \Phi_0(\mathbf{x})$, determina completamente o campo no interior de dS_4 por meio do propagador $K(x; \mathbf{x})$.

Isso motiva a definição de uma *dualidade holográfica* entre o interior de dS_4 e uma CFT_3 em \mathcal{I}^+ . A correspondência entre a borda de de Sitter e uma teoria conforme foi originalmente proposta por [Strominger \(2001a\)](#), diretamente inspirado na ‘dualidade calibre/gravitação’ (*‘gauge/gravity’*) entre o espaço de *anti*-de Sitter e teorias conformes descoberta por [Maldacena \(1999\)](#) e elaborada por [Gubser et al. \(1998\)](#); [Witten \(1998\)](#).¹

13.2 dS/CFT

Seguindo [Maldacena \(2003\)](#), identificamos a ‘*função de onda do Universo*’ com a função de partição de uma teoria conforme Euclidiana dual

$$\Psi[h_{ab}, \phi] = Z_{CFT}[h_{ab}, \phi]. \quad (13.32)$$

Essa fórmula requer alguma explicação.

A função de onda do Universo deve ser entendida no sentido de [Hartle & Hawking \(1983\)](#). No formalismo de [Feynman \(1948\)](#), a função de onda de uma partícula com um certo estado inicial é descrita pela integral de caminho² (omitimos um fator de normalização), $\psi(x, t) = \int [\mathcal{D}x(t)] \exp(iS[x(t)])$, onde $S[x, t]$ é a ação clássica. A função de onda $\Psi[h_{ab}, \phi]$ associada à uma 3-superfície tipo-espaço \mathcal{S} , com métrica h_{ab} , induzida pela métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo $\mathcal{M} \supset \mathcal{S}$, é a integral funcional $\Psi[h_{ab}, \phi] = \int [\mathcal{D}g_{\mu\nu}] [\mathcal{D}\phi] \exp(iS[g_{\mu\nu}, \phi])$, em que a integral em $g_{\mu\nu}$ é sobre todas as configurações de geometria do espaço-tempo que induzam h_{ab} , e a integral em ϕ é sobre os campos restritos às condições de contorno em \mathcal{S} .

¹Para uma revisão da dualidade AdS/CFT, ver, e.g., [Aharony et al. \(2000\)](#). Ao contrário da AdS/CFT, a dualidade no espaço de de Sitter não possui uma realização precisa na teoria de cordas, mas mesmo a AdS/CFT pode ser formulada sem recorrer a isso, tendo sido antecipada por [Brown & Henneaux \(1986\)](#) usando apenas o grupo assintótico de simetrias de AdS_3 , quase uma década antes do trabalho de Maldacena. E de Sitter, como mostrado, possui o grupo conforme como simetria assintótica. A ausência de uma formulação de cordas faz com que a teoria de campos dual a dS_d não seja conhecida, mas [McFadden & Skenderis \(2010b\)](#) constroem o dicionário holográfico mapeando o espaço-tempo cosmológico em uma parede de domínio assintoticamente AdS_4 , seguindo o procedimento de [Skenderis & Townsend \(2006, 2007\)](#), e efetuam os cálculos holográficos usando AdS/CFT. Depois voltam à cosmologia com uma continuação analítica. Com isso, propõem fenomenologicamente uma definição explícita de um protótipo de teoria de Yang-Mills 3-dimensional com grupo de calibre $SU(N)$, admitindo o limite de $N \gg 1$, e que, na gravitação dual, reproduz os resultados das últimas observações cosmológicas, como anunciado por [Afshordi et al. \(2017b\)](#).

²Ver [Feynman et al. \(2010\)](#). Para a formulação da teoria de campos em termos de integrais de caminho, ver, e.g., [Zinn-Justin \(2002\)](#).

Podemos tomar aqui h_{ab} como perturbações das seções espaciais do universo de FLRW. Assim como na mecânica quântica $\psi(x, t)$ pressupõe uma posição inicial x_0 , Ψ pressupõe uma configuração inicial para os campos, por exemplo o vácuo invariante de dS_4 (o vácuo de Bunch-Davies) longe da borda, i.e. para $\eta \rightarrow -\infty$. No limite semiclássico, a integral funcional pode ser aproximada por seu ponto de sela e, desconsiderando um fator multiplicativo

$$\Psi[h_{ab}, \phi] = \exp(iS_{cl}[h_{ab}, \phi]), \quad (13.33)$$

com h_{ab} e ϕ soluções das equações de campo clássicas. A função de onda serve como um peso probabilístico para o valor esperado dos campos,

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle = \int [\mathcal{D}\phi] |\Psi|^2 \phi(x_1) \cdots \phi(x_n). \quad (13.34)$$

Se os campos dão origem às flutuações cosmológicas, (13.34) determina as funções de correlação de observáveis e os espectros de potência descritos no §4.5.

Em uma teoria de campos Euclidiana em 3 dimensões com ação $S_{QFT}[\mathcal{O}(x)]$, as funções de correlação, $\langle \cdots \rangle = \int [\mathcal{D}\mathcal{O}] e^{-S_{QFT}(\cdots)}$, dos campos (operadores) $\mathcal{O}(x)$, podem ser obtidas a partir da função de partição

$$Z[J] = \int [\mathcal{D}\mathcal{O}] \exp[-S_{QFT} + \int d^3\mathbf{x} J(\mathbf{x})\mathcal{O}(\mathbf{x})] \quad (13.35)$$

por meio de derivadas funcionais com respeito às fontes J acopladas linearmente,

$$\langle \mathcal{O}(\mathbf{x}_1) \cdots \mathcal{O}(\mathbf{x}_n) \rangle = \frac{1}{Z(0)} \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}_n)} Z(J) \right]_{J=0}.$$

(Enfatizamos que estamos considerando uma teoria Euclidiana. Note o expoente real na função de partição.) Assim, a identificação (13.32) da função de onda do universo com a função de partição de uma teoria (conforme) de campos em \mathcal{I}^+ faz com que ϕ e h_{ab} na Eq.(13.33) devam ser interpretados não como os campos mas como as fontes da teoria dual. Mais precisamente, as fontes da CFT_3 são as funções assintóticas $\Phi_0(\mathbf{x})$ definidas pela Eq.(13.23), e as correlações dos operadores conformes são expressas em termos de derivadas da função de onda do universo:

$$\langle \mathcal{O}(\mathbf{x}_1) \cdots \mathcal{O}(\mathbf{x}_n) \rangle = (-i)^n \frac{\delta^n \Psi}{\delta \Phi_0(\mathbf{x}_1) \cdots \delta \Phi_0(\mathbf{x}_n)} \Big|_{\Phi_0=0}, \quad (13.36)$$

e uma fórmula similar para h_{ab} . Pode-se escrever, portanto,

$$\Psi[h_{ab}, \Phi_0] = \exp \left[\sum_n \frac{1}{n!} \int d^3\mathbf{x}_1 \cdots \int d^3\mathbf{x}_n \left[\langle \mathcal{O}(\mathbf{x}_1) \cdots \mathcal{O}(\mathbf{x}_n) \rangle \Phi_0(\mathbf{x}_1) \cdots \Phi_0(\mathbf{x}_n) + \langle \mathcal{O}^{ab}(\mathbf{x}_1) \cdots \mathcal{O}^{cd}(\mathbf{x}_n) \rangle h_{ab}(\mathbf{x}_1) \cdots h_{cd}(\mathbf{x}_n) \right] \right], \quad (13.37)$$

onde \mathcal{O}^{ab} é o operador que se acopla à métrica como fonte, e corresponde ao tensor de energia-momento da CFT, como será discutido abaixo. No limite semiclássico (13.33), o lado direito da Eq.(13.36) equivale às derivadas da ação clássica para flutuações em dS_4 , i.e.

$$\left. \frac{\delta^n \Psi}{\delta \Phi_0(\mathbf{x}_1) \cdots \delta \Phi_0(\mathbf{x}_n)} \right|_{\Phi_0=0} = \left. \frac{\delta^n S_{cl}}{\delta \Phi_0(\mathbf{x}_1) \cdots \delta \Phi_0(\mathbf{x}_n)} \right|_{\Phi_0=0}, \quad (13.38)$$

logo para encontrar as funções de correlação devemos escrever a ação on-shell $S_{cl}[\Phi_0]$ como função dos campos na borda.

*

Correlações duais

A relação holográfica entre a função de dois pontos $\langle \mathcal{O}(\mathbf{x}_1) \mathcal{O}(\mathbf{x}_2) \rangle$ e o valor esperado $\langle \varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2) \rangle$ é dada pela fórmula apresentada por Maldacena (2003):

$$\langle \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}} \rangle_{reg} = -\frac{1}{2\text{Re}\langle \mathcal{O}_{\mathbf{k}} \mathcal{O}_{-\mathbf{k}} \rangle_{reg}}. \quad (13.39)$$

Para a demonstração, escreva a parte escalar de (13.37) em termos das componentes de Fourier,

$$\begin{aligned} \Psi[\varphi] = \exp & \left[\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{k} \int d^3\mathbf{k}' \langle \mathcal{O}_{\mathbf{k}} \mathcal{O}_{\mathbf{k}'} \rangle \varphi_{\mathbf{k}}^0 \varphi_{\mathbf{k}'}^0 + \right. \\ & \left. + \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n!} \left[\prod_{a=1}^n \int d^3\mathbf{k}_a \right] \langle \mathcal{O}_{\mathbf{k}_1} \cdots \mathcal{O}_{\mathbf{k}_n} \rangle \left[\prod_{a=1}^n \varphi_{\mathbf{k}_a}^0 \right] \right]. \end{aligned}$$

Para a função de 2-pontos basta o termo quadrático. Temos

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{\mathbf{k}}^0 \varphi_{-\mathbf{k}}^0 \rangle &= \int [\mathcal{D}\varphi_k^0] |\Psi|^2 \varphi_{\mathbf{k}}^0 \varphi_{-\mathbf{k}}^0 = \int [\mathcal{D}\varphi_k^0] \varphi_{\mathbf{k}}^0 \varphi_{-\mathbf{k}}^0 \exp \left[\frac{1}{2} \varphi_q^0 \cdot K(q, q') \cdot \varphi_{q'}^0 \right], \\ \text{onde } \varphi_q^0 \cdot K(q, q') \cdot \varphi_{q'}^0 &\equiv \int d^3\mathbf{q} \int d^3\mathbf{q}' \varphi_q^0 \{ 2\text{Re}\langle \mathcal{O}_q \mathcal{O}_{q'} \rangle \delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \} \varphi_{q'}^0. \end{aligned}$$

O termo em chaves define o operador $K(q, q')$, e a integral funcional se resolve encontrando o operador inverso $D(q, q')$ tal que $\int d^3\mathbf{k} D(q, k) K(k, q') = \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$. É imediato verificar que $D(q, q') = [2\text{Re}\langle \mathcal{O}_q \mathcal{O}_{q'} \rangle]^{-1} \delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{q}')$, e o resultado da integral Gaussiana,

$$\begin{aligned} & \int [\mathcal{D}\varphi_k^0] \varphi_{\mathbf{k}}^0 \varphi_{-\mathbf{k}}^0 \exp \left[\frac{1}{2} \varphi_q^0 \cdot K(q, q') \cdot \varphi_{q'}^0 \right] = \\ & = \frac{\delta^2}{\delta J_k \delta J_{-k}} \exp \left[\frac{1}{2} \varphi_q^0 \cdot K(q, q') \cdot \varphi_{q'}^0 + J_q \cdot \varphi_q^0 \right] \Bigg|_{J=0} = D(k, k') \end{aligned}$$

é a fórmula (13.39), na qual o subscrito *reg* denota a omissão da função delta.

*

Função de dois pontos para um operador escalar

Calculamos agora o valor médio do produto de um campo sem massa $\varphi(x)$ em dois pontos distintos, ambos na borda; o procedimento serve de exemplo para iluminar o significado da fórmula (13.34) e o uso da função de onda do universo $\Psi = \exp(iS_{cl}[\varphi])$.

Comece reescrevendo a ação no interior de dS_4 , Eq.(13.12) por meio de uma derivada total:

$$\begin{aligned} S[\phi] &= - \int d^4x \frac{1}{2} \left[\sqrt{|g|} g_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi + m^2 \phi^2 \right] = \\ &= - \int d^4x \sqrt{|g|} \frac{1}{2} \left[\nabla^\mu (g_{\mu\nu} \phi \nabla^\nu \phi) + \phi (-\square + m^2) \phi \right]. \end{aligned}$$

A ação $S_{cl}[\phi]$ é obtida impondo-se a equação de movimento, $(-\square + m^2)\phi = 0$, que anula o último termo. O que sobra é uma divergência, $\int_{dS_4} d^4x \sqrt{|g|} \nabla^\mu (g_{\mu\nu} \phi \nabla^\nu \phi)$, que pode ser avaliada na borda,

$$S_{cl}[\phi] = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{I}^+} d^3\mathbf{x} \sqrt{|\gamma|} n_\mu \phi \partial^\mu \phi. \quad (13.40)$$

Usando a Eq.(13.27), e avaliando a ação sobre a superfície $\{\eta = \eta_c\}$, para mais tarde tomar $\eta_c \rightarrow 0$,

$$S_{cl}|_{\eta_c} = -\frac{1}{2H^2} \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{\phi \partial_\eta \phi}{\eta^2} \right]_{\eta_c} = -\frac{(2\pi)^3}{2H^2} \int d^3\mathbf{k} \left[\frac{\phi_k \partial_\eta \phi_{-k}}{\eta^2} \right]_{\eta_c}, \quad (13.41)$$

onde realizamos a transformada de Fourier de $\phi(\mathbf{x}, \eta) = \int d^3\mathbf{k} \phi_{\mathbf{k}}(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$.

O resultado acima vale para qualquer m^2 ; agora consideramos $\phi = \varphi$, com $m^2 = 0$. Ψ mede a amplitude de transição entre duas configurações, e portanto é preciso que a solução da equação de Klein-Gordon satisfaça uma certa condição de contorno no passado que caracterize o estado inicial do universo, e que coincida com o perfil $\varphi_0(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \eta_c)$ sobre a superfície final. A solução da (transformada de Fourier da) equação de Klein-Gordon (13.20),

$$[\eta^2 \partial_\eta^2 - 2\eta \partial_\eta - \eta^2 k^2] \varphi_k = 0,$$

que se encontra no vácuo de Bunch-Davies em $\eta \rightarrow -\infty$ e que, no limite oposto em que $\eta \rightarrow \eta_c$ dá a função φ_k^0 é a razão de duas soluções (4.56),

$$\varphi_k = \varphi_k^0 \frac{(1 + ik\eta)e^{-ik\eta}}{(1 + ik\eta_c)e^{-ik\eta_c}}, \quad (13.42)$$

que inserida na ação (13.41) dá

$$S_{cl} = -\frac{(2\pi)^3}{2H^2} \int d^3\mathbf{k} \frac{k^2 \varphi_{\mathbf{k}}^0 \varphi_{-\mathbf{k}}^0}{\eta_c(1+ik\eta_c)} \approx -\frac{(2\pi)^3}{2H^2} \int d^3\mathbf{k} k^2 \varphi_{\mathbf{k}}^0 \varphi_{-\mathbf{k}}^0 \left[\frac{1}{\eta_c} - ik \right] \quad (13.43)$$

para $\eta_c \rightarrow 0$. A prescrição (13.34) usa como peso o módulo de $e^{iS_{cl}}$, que só inclui a parte imaginária de (13.43), cancelando o termo divergente $\sim 1/\eta_c$. Assim

$$\langle \varphi_{\mathbf{k}}^0 \varphi_{\mathbf{k}'}^0 \rangle = \int [\mathcal{D}\varphi_k^0] \exp \left[-\frac{(2\pi)^3}{H^2} \int d^3\mathbf{q} \int d^3\mathbf{q}' \varphi_{\mathbf{q}}^0 q^3 \delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \varphi_{\mathbf{q}'}^0 \right] \varphi_{\mathbf{k}}^0 \varphi_{\mathbf{k}'}^0.$$

A integral funcional é Gaussiana e pode ser efetuada sem muita dificuldade, levando a

$$\langle \varphi_{\mathbf{k}}^0 \varphi_{\mathbf{k}'}^0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} (H^2/2) k^{-3} \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (13.44)$$

Este é o mesmo resultado obtido através da quantização canônica do inflaton na Eq.(4.57); mais adiante veremos como se pode descrever a inflação holograficamente.

*

O tensor de energia-momento da CFT dual

Em um espaço-tempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ que possui uma borda $\partial\mathcal{M}$ com métrica induzida h_{ab} , há uma prescrição devida a [Brown & York \(1993\)](#) que fornece um tensor de energia-momento “quasilocal” que inclui os efeitos do próprio campo gravitacional, e é definido por

$$T^{ab} \equiv -2(\text{Det } h)^{-1/2} \frac{\delta S_{cl}}{\delta h_{ab}}. \quad (13.45)$$

(Não confundir T_{ab} nesta seção com o tensor de energia-momento da matéria na Relatividade Geral.) A ação é a ação clássica gravitacional com o termo de [Gibbons & Hawking \(1977a\)](#), Eq.(A.5), mas regularizada de maneira apropriada porque se a borda $\partial\mathcal{M}$ se encontra no infinito, como é o caso em dS_4 , o termo de Gibbons-Hawking diverge. Essa regularização foi feita, em AdS, por [Balasubramanian & Kraus \(1999\)](#) que usaram (13.45) para definir o tensor de energia-momento da CFT dual. O mesmo pode ser realizado no caso de de Sitter, como observado por [Strominger \(2001a\)](#).

Assim como para um operador escalar, a fonte é o valor assintótico Φ_0 do campo escalar em dS_4 , a fonte de T_{ab} deve corresponder ao valor assintótico de uma flutuação tensorial em dS_4 com dois índices e traço nulo na parte gravitacional, ou seja: os modos tensoriais da flutuação da métrica, h_{ab} . A fórmula (13.45) identifica $\mathcal{O}^{ab} = -\frac{1}{2}T^{ab}$ na Eq.(13.37),

$$\Psi[h_{ab}] = \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_n \frac{1}{n!} \int d^3\mathbf{x}_1 \cdots \int d^3\mathbf{x}_n \langle T^{ab}(\mathbf{x}_1) \cdots T^{cd}(\mathbf{x}_n) \rangle h_{ab}(\mathbf{x}_1) \cdots h_{cd}(\mathbf{x}_n) \right]. \quad (13.46)$$

A função de 2-pontos de T_{ab} deve ter a forma (E.41)

$$\langle T^{ab}(\mathbf{x}_1)T^{cd}(\mathbf{x}_2) \rangle = \frac{C_T}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^6} P^{abcd}, \quad (13.47)$$

onde, com $I^{ab}(\mathbf{x}) = g^{ab} - \frac{2}{x^2}x^ax^b$,

$$P^{abcd} = \frac{1}{2} [I^{ad}(\mathbf{x}_{12})I^{bc}(\mathbf{x}_{12}) + I^{ac}(\mathbf{y}_{12})I^{bd}(\mathbf{x}_{12})] - \frac{1}{3}\delta^{ab}\delta^{cd}.$$

A constante C_T é a carga central da teoria, e podemos encontrar sua relação com o valor esperado da métrica. Larsen & Strominger (2014) usaram a correspondência holográfica para estimar o valor de $C_T \sim 1/H^2 \sim 10^9$ a partir da amplitude do espectro de potência tensorial (4.62). Com a decomposição (4.21) de h_{ab} em modos de polarização,

$$\Psi[h_{ab}] = \int [\mathcal{D}h_{ab}] e^{-S_{QFT}} \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{k} (h_k T_k + h_{-k} T_{-k}) \right],$$

e o problema se decompõe em dois campos sem massa. A correlação $\langle h_k h_{k'} \rangle$ foi calculada em (13.44), e a Eq.(13.39) dá

$$\langle T_k T_{k'} \rangle = (2\pi)^3 (2/H^2) k^3 \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}').$$

Efetuando a transformada de Fourier, temos (13.47) com

$$C_T = 2/H^2. \quad (13.48)$$

13.3 $(a)dS/pCFT$

A observação de um espectro de potência *quase* invariante de escala na CMB sugere uma generalização da correspondência dS_4/CFT_3 através da perturbação da teoria conforme com um operador cujo acoplamento (fonte) é um campo homogêneo $\phi(\eta)$,

$$S_{pCFT} = S_{CFT} + \phi \int d^3\mathbf{x} \mathcal{O}(\mathbf{x}), \quad (13.49)$$

cf. Eq.(E.42). A evolução das seções espaciais do universo de FLRW assintoticamente de Sitter (o que denotaremos por $(a)dS$) é interpretada como o fluxo do grupo de renormalização sob a mudança do parâmetro de escala λ igual ao fator de escala $a(\eta)$. Com isso, a TQC₃ dual a cada seção espacial sai do ponto fixo conforme guiada pela função beta holográfica

$$\beta(\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial \log a}, \quad \text{e com dimensão anômala } \gamma(\phi) = \frac{\partial \beta}{\partial \phi}. \quad (13.50)$$

No lado gravitacional da correspondência, o campo escalar serve como fonte das equações de Einstein e satisfaz as equações de Friedmann (2.29), que combinadas podem ser escritas como $\dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = -\frac{1}{2}Ha(d\phi/da)$. Todas as variáveis podem ser parametrizadas por um único parâmetro, digamos o tempo cósmico, de modo que, sendo $\beta = a\partial\phi/\partial a = a\dot{\phi}/\dot{a}$, temos a relação

$$\beta(\phi) = -\frac{2}{H} \frac{dH}{d\phi} \quad (13.51)$$

ligando a função beta da TQC à evolução da geometria por meio da função de Hubble.

As flutuações na CMB são derivadas das correlações do campo escalar $\varphi(x)$, flutuação linear de ϕ . A estratégia é calcular as correlações do operador dual $\mathcal{O}(\mathbf{x})$ na pCFT, resolvendo a equação do grupo de renormalização, e a partir delas obter as correlações de $\varphi(x)$ através da correspondência holográfica usando a fórmula (13.39), mas com a função de dois pontos $\langle \mathcal{O}(\mathbf{x}_1) \mathcal{O}(\mathbf{x}_2) \rangle$ da teoria conforme perturbada, e o valor esperado $\langle \varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2) \rangle$ no universo de FLRW assintoticamente dS_4 .

Funções de 2-pontos e a equação de Callan-Symanzik

A violação da simetria conforme não quebra a simetria rotacional, e a função de 2-pontos $\langle \mathcal{O}(\mathbf{x}_1) \mathcal{O}(\mathbf{x}_2) \rangle = G(r; \phi)$ só depende da distância $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$. A transformada de Fourier $G(k; \phi)$, que satisfaz a Equação de Callan-Symanzik (E.47),

$$\left[-k \frac{\partial}{\partial k} + \beta(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi} + 3 + 2\gamma(\phi) \right] G(k; \phi) = 0, \quad \text{com } \gamma(\phi) \equiv \partial\beta/\partial\phi. \quad (13.52)$$

sendo $k = |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|$. A solução é dada pelas Eqs.(E.50) e (E.49),

$$G(k; \phi) = k^3 G_0(\bar{\phi}) \exp \left[2 \int_{k'=aM}^{k'=k} d \log \left(\frac{k'}{aM} \right) \gamma(\bar{\phi}) \right]. \quad (13.53)$$

Aqui, introduzimos a escala M e o ‘acoplamento fluido’ (*‘running coupling’*)

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}(k/a, \phi), \quad \text{tal que } \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \log k} = \beta(\bar{\phi}) \quad \text{e} \quad \bar{\phi}(M, \phi) = \phi. \quad (13.54)$$

A segunda condição permite que se faça uma mudança de variáveis em (13.53), e se escreva, alternativamente,

$$G(k; \phi) = k^3 G_0(\bar{\phi}) \exp \left[2 \int_{\bar{\phi}(k/a, \phi)}^{\bar{\phi}(M, \phi)} du \frac{\gamma(u)}{\beta(u)} \right]. \quad (13.55)$$

Usando (13.39), a solução (13.53) dá a função de correlação do campo escalar:

$$\langle \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}} \rangle_{reg} = -\frac{k^{-3}}{2} \frac{1}{G_0(\bar{\phi})} \exp \left[-2 \int_{k'=aM}^{k'=k} d \log \left(\frac{k'}{aM} \right) \gamma(\bar{\phi}) \right].$$

A função $1/G_0$ tem dimensão de inverso do comprimento, e podemos escrever $1/G_0(\bar{\phi}) = \mathcal{A}_s(\bar{\phi}) H^2(\bar{\phi})$, onde a ‘função de Hubble fluida’ é dada por

$$H(\bar{\phi}) = H(\phi) \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{\bar{\phi}(k/a, \phi)}^{\bar{\phi}(M, \phi)} du \beta(u) \right]. \quad (13.56)$$

No ponto fixo, onde $\beta = 0$, isso leva à solução correta para $\langle \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}} \rangle$, e fora do ponto fixo a forma específica da exponencial dá $\beta(\bar{\phi}) = -2H^{-1}(\phi) \partial_{\phi} H(\bar{\phi})$, o que é consistente com (13.51). Assim, temos

$$\langle \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}} \rangle_{reg} = -\frac{1}{2} \mathcal{A}_s(\bar{\phi}) k^{-3} H^2(\phi) \exp \left[- \int_{k'=aM}^{k'=k} d \log \left(\frac{k'}{aM} \right) (\beta(\bar{\phi}) + 2\gamma(\bar{\phi})) \right]. \quad (13.57)$$

Índices espectrais a partir da holografia

Os cálculos feitos até aqui levaram em conta o campo ϕ se propagando sobre a métrica de fundo homogênea e isotrópica. Isso corresponde ao calibre plano, em que todas as flutuações escaleam-se alocadas no campo. A grandeza invariante de calibre \mathcal{R} , descrita no §4.3, se relaciona com ϕ através de (cf. Eq.(4.50))

$$\mathcal{R} = (H/\dot{\phi})\varphi = \varphi/\beta(\phi).$$

Logo o espectro de potência $\mathcal{P}_s(k) = \frac{1}{2\pi^2} k^3 \langle \mathcal{R}_k \mathcal{R}_{-k} \rangle$ fica dado pela Eq.(13.57),

$$\mathcal{P}_s(k) = \frac{H^2(\phi)}{(2\pi)^2 \beta^2(\phi)} \mathcal{A}_s(\bar{\phi}) \exp \left[- \int_{k'=aM}^{k'=k} d \log \left(\frac{k'}{aM} \right) (\beta(\bar{\phi}) + 2\gamma(\bar{\phi})) \right]. \quad (13.58)$$

Esta fórmula, obtida por Larsen & McNeese (2004), é válida para *qualquer* valor de k , e fornece uma expressão para o espectro de potência que não é uma aproximação para o limite $k \ll aH$, como é costume no contexto inflacionário. Mas para fazer uso da Eq.(13.58), é necessário saber algo sobre a função $\mathcal{A}_s(\bar{\phi})$. Ela é parte do comportamento dinâmico da teoria, e por isso não pode ser determinada pela equação de Callan-Symanzik (que só lê o comportamento de escala). \mathcal{A}_s determina a função de 2-pontos na escala $k = aM$, onde o expoente se anula, e em geral \mathcal{A}_s deve depender de M de forma que a expressão total lhe seja independente. Se $M \gg H$, a escala em questão está bem no interior do

horizonte de Hubble, e se a teoria se encontra próxima ao ponto fixo, num espaço quase dS_4 , a Eq.(13.57) deve reproduzir a Eq.(13.44), logo $\mathcal{A}_s \approx (2\pi)^3$.

Da parametrização (4.47), $\mathcal{P}_s = A_s(k_*)(k/k_*)^{n_s-1}$, ou $n_s - 1 = k\partial_k \log \mathcal{P}_s$, a Eq.(13.58) dá o índice espectral em termos dos parâmetros holográficos:

$$n_s = 1 - \beta^2 - 2\gamma. \quad (13.59)$$

Usando a Eq.(13.51) para a função beta holográfica, e comparando com os parâmetros de slow-roll de Hubble (3.22), verifica-se que a expressão acima coincide com a fórmula (4.59) para a inflação no regime de slow-roll.

13.4 A DFE e a inflação holográfica

Podemos combinar a DFE e o paradigma holográfico em dois passos:

1. O universo pós-inflacionário começa numa fase de radiação, no regime de acoplamento forte, com $a \ll 1$. O horizonte de Hubble cresce com o tempo, e flutuações que entram no horizonte oscilam em seu interior. As condições iniciais são determinadas por correlações na entrada do horizonte.
2. Essas correlações são determinadas (indiretamente) pela pCFT₃ que é o holograma do universo (a) dS_4 determinado pela DFE, e no qual (pela inversão do fator de escala) o regime gravitacional é de acoplamento fraco. A superfície $\mathcal{S}^+|_{dS_4}$ corresponde ao ponto conforme UV da teoria de campos holográfica; neste ponto fixo, há uma perturbação com um operador relevante acoplado a um campo Φ (ou ϕ), e um fluxo do grupo de renormalização leva a teoria em direção ao IR. Cada valor da escala de energia $\lambda = a$ corresponde a uma das seções espaciais no lado gravitacional. As correlações de campos nessas seções são determinadas pelas correlações dos operadores na TQC₃ correspondente, obtidas da função beta e da dimensão anômala através da Eq.(13.57).

O esquema se encontra ilustrado na Fig.13.1. Note que, de acordo com a reflexão do tempo conforme,

$$\eta \mapsto \tilde{\eta} = -\eta,$$

necessária para que o universo inflacionário esteja também em expansão (Eq.(8.28)), a passagem do tempo no universo pós-inflacionário tem o mesmo sentido que o fluxo do grupo de renormalização. Entretanto, enfatizamos que apesar dessa diferença de sinal o universo inflacionário está em *expansão* (por construção), e sua evolução *termina* em $\mathcal{S}^+|_{dS}$ onde $\tilde{\eta} = 0$. A inversão de sinal do tempo conforme pode ser entendida geometricamente de maneira simples: as superfícies

$\tilde{a} = \text{constante}$ próximas à borda de dS_4 , descritas no holograma pela $pCFT_3$ próxima ao ponto UV, são duais (pela DFE) às superfícies $a = \text{constante}$ próximas ao big-bang. Assim, como mencionado na introdução deste Capítulo, nessa interpretação a superfície

$$\mathcal{X} = \{a = 0\} \sim \{\tilde{a} = \infty\}$$

não corresponde ao fim da inflação holográfica. Na realidade, o universo pré-inflacionário com $\tilde{\eta} < 0$ é eterno (para o futuro), tanto quanto o universo pós-inflacionário (ambos têm, inclusive, a mesma duração conforme) — ambos são “aeons”. Por outro lado, não se “atravessa de um aeon para o outro”; a conexão entre ambos é através de um holograma, a $pCFT_3$.

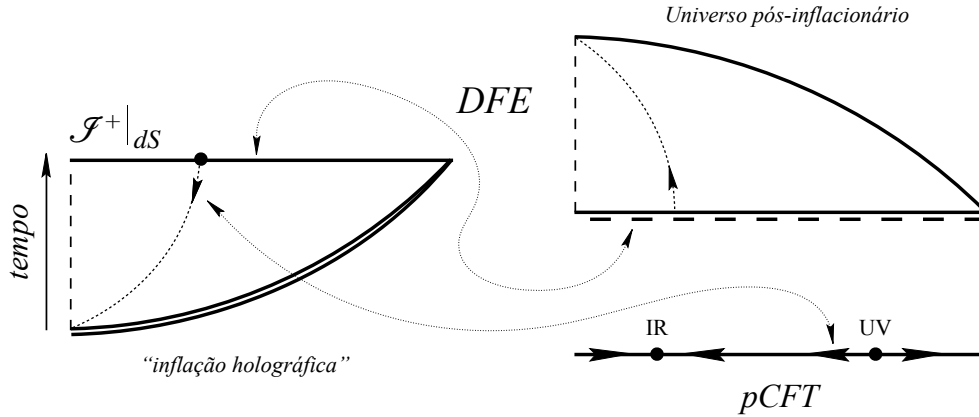


Figura 13.1: Inflação holográfica e a DFE

13.5 Fluxo do GR em universos duais

Vamos considerar a proposta acima em dois exemplos em que é possível encontrar uma forma exata para a função beta: o modelo de universo autodual e a fase desacelerada do modelo de concordância, sem constante cosmológica pós-inflacionária, e seu dual.¹

¹Neste capítulo há uma ambiguidade de sentidos para a palavra ‘dual’: 1) dualidade a respeito de uma transformação da DFE, que vimos consideramos ao longo de toda esta tese; ou 2) dualidade entre a (p)CFT₃ e (a)dS₄. Para tentar causar a menor ambiguidade possível, vamos tentar nos referir a (2) pelo nome completo ‘dualidade holográfica’, sempre que for possível haver confusão. Assim, em geral, dizer simplesmente ‘dual’ é uma referência à DFE.

O universo autodual

Descrito como um campo escalar ϕ , o modelo do gás de Chaplygin modificado é caracterizado pelo potencial (9.22)

$$V(\phi) = \frac{\Lambda}{3} \left[\left(\cosh^2 \frac{\delta\phi}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{1}{\delta}} + 2 \left(\cosh^2 \frac{\delta\phi}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{1-\delta}{\delta}} \right].$$

Aqui mudamos a notação da §9.3, e usamos ϕ em vez de σ , para não destoar das equações que acabamos de deduzir. O potencial possui um vácuo dS_4 com raio $L = \sqrt{3/\Lambda}$ em $\phi = 0$, onde a massa $m_\phi^2 = (d^2V/d\phi^2)|_{\phi=0}$, dada pela Eq.(9.25), pode ser escrita na forma (13.31)

$$L^2 m_\phi^2 = \gamma_{UV}(\gamma_{UV} - 3), \quad \text{com } \gamma_{UV} \equiv -2\delta. \quad (13.60)$$

(Repare que aqui temos $\gamma = -w$, comparando com a Eq.(13.31); w correspondia à dimensão de operadores sob rescalamento de \mathbf{x} , na borda de dS_4 , enquanto que aqui o rescalamento do campo homogêneo é com o tempo η , correspondente ao fluxo do RG; por isso o sinal se inverte, como se pode ver na Eq.(13.19).) De fato, a solução para o fator de escala, Eq.(9.23),

$$a(\phi) = c [\sinh(\delta\phi/\sqrt{2})]^{-1/2\delta}, \quad (13.61)$$

mostra que próximo ao vácuo, para $\phi \ll 1$, $\phi \approx \text{constante} \times a^{-2\delta}$.

Para $\delta > 0$, o limite acima corresponde a $a \gg 1$, logo se trata do regime infravermelho na gravitação, correspondente ao acoplamento fraco na fase inflacionária. Holograficamente, a é a escala de energia da teoria dual, e portanto estamos no limite UV da teoria de campos perturbada por um operador relevante, $\gamma_{UV} < 0$. O fluxo (inverso) do grupo de renormalização retira a teoria do ponto fixo, os valores médios $\langle \mathcal{O}_k \mathcal{O}_{k'} \rangle$ mudam de acordo com a equação de Callan-Symanzik e o espectro das flutuações de ϕ se desvia do espectro de Harrison-Zel'dovich de acordo com a Eq.(13.59). Podemos calcular as funções holográficas (13.50), para ϕ

$$\beta(\phi) = -2\sqrt{2} \tanh \frac{\delta}{\sqrt{2}}\phi, \quad \gamma(\phi) = -\frac{2\delta}{\cosh^2 \frac{\delta}{\sqrt{2}}\phi}. \quad (13.62)$$

Como era de se esperar, no vácuo em $\phi = 0$ temos $\beta(0) = 0$ e $\gamma(0) = \gamma_{UV}$. As equações de Friedmann deslocam ϕ em direção a $\phi \rightarrow \infty$, e $\beta(\phi)$ cresce monotonicamente até o valor $\beta(\infty) = 2$. (Repare que para $\delta > 0$ o regime $\phi = \infty$ corresponde a $a = 0$, i.e. a um big-bang; o fluxo é contrário ao tempo.)

O modelo é por construção autodual, o que significa que o regime próximo ao big-bang é equivalente ao regime próximo à borda, ou que $\phi = \infty$ é equivalente

a $\phi = 0$. Mas no limite $a \rightarrow 0$ o comportamento de escala do campo ϕ é mal definido; é impossível expandir $\beta(\phi)$ ao redor de $\phi \rightarrow \infty$, e portanto não se pode terminar a dimensão anômala γ . Note que $-\frac{1}{2}\beta = (1 - e^{-2\delta\phi/\sqrt{2}})/(1 + e^{-2\delta\phi/\sqrt{2}})$, e ao redor do ponto $\phi = \infty$ um parâmetro pequeno é dado por $e^{-2\delta\phi/\sqrt{2}}$, que pode ser usado para a construção de um novo campo Φ com transformação de escala bem definida. Defina, assim,

$$\Phi = \Phi_0 \tanh \frac{\delta}{\sqrt{2}}\phi, \quad \text{com} \quad \Phi_0 = \sqrt{2}/\delta, \quad (13.63)$$

tal que o domínio infinito $\phi \in (0, \infty)$ corresponde ao domínio finito $\Phi \in [0, \Phi_0]$. (cf. Eq.(9.49).) O fator de escala (13.61) fica escrito como

$$a(\Phi) = c [(\Phi_0^2 - \Phi^2)/\Phi^2]^{1/4\delta}, \quad (13.64)$$

e temos uma *nova* função beta, $\beta_\Phi = \partial\Phi/\partial \log a$,

$$\beta_\Phi = \gamma_{UV} \Phi [1 - (\Phi/\Phi_0)^2]. \quad (13.65)$$

Há dois pontos fixos em que β_Φ se anula. O primeiro em $\Phi = 0$, correspondente ao vácuo dS_4 no IR gravitacional em que $a \rightarrow \infty$ para $\delta > 0$; o segundo, em $\Phi = \Phi_0$, corresponde à singularidade em que $a = 0$. Podemos calcular as dimensões anômalas

$$\gamma(0) = -2\delta = \gamma_{UV} \quad \text{e} \quad \gamma(\Phi_0) = 4\delta = \gamma_{IR}. \quad (13.66)$$

O resultado em $\Phi = 0$, coincidindo com o que encontramos para ϕ , era esperado porque no limite $\phi \ll 1$ a Eq.(13.63) dá $\Phi \approx \phi$ e as funções beta coincidem. Ao redor do outro ponto fixo $g \equiv \Phi_0 - \Phi \ll 1$, e usando a Eq.(13.64), podemos escrever

$$(a/c)^{4\delta} = \frac{(2\Phi_0 - g)}{(\Phi_0 - g)^2} g \approx \frac{2}{\Phi_0} g \ll 1.$$

Logo o campo g se rescala com peso $4\delta > 0$ com a escala de energia a .

Escrevendo o fator conforme

$$\Omega \equiv c^2/a^2, \quad \text{logo} \quad \Omega(\Phi) = \left(\frac{\Phi^2/\Phi_0^2}{1 - \Phi^2/\Phi_0^2} \right)^{1/2\delta},$$

vemos que a transformação da DFE para Φ é homogênea e tem a forma de uma transformação de Weyl, $\tilde{\Phi} = \Omega^{-\delta}\Phi$, e $\tilde{a} = \Omega a$. Alternativamente, podemos escrever $\tilde{\Phi}^2 + \Phi^2 = \Phi_0^2$, que após uma diferenciação com relação a $\log a = -\log \tilde{a}$, fornece a transformação da função β_Φ , descrevendo o comportamento do fluxo ao redor do big-bang em termos do fluxo na vizinhança de \mathcal{I}^+ ,¹

$$\Phi \beta_\Phi = \tilde{\Phi} \tilde{\beta}_\Phi.$$

¹Compare com a transformação análoga para $\beta(\phi)$. Temos $\tilde{\beta}_\phi/\beta_\phi = -d\tilde{\phi}/d\phi$ e, usando a Eq.(8.44) para a transformação dos campos, chega-se a $\beta_\phi^2 + \tilde{\beta}_\phi^2 = 2$.

*

O termo cinético do campo Φ .

Fazemos aqui um parênteses para observar que o campo Φ é um campo escalar com termo cinético não-canônico, determinado por uma métrica K_{IJ} do tipo “modelo-sigma”, i.e. sua Lagrangeana tem a forma

$$\mathcal{L}_\Phi = - \left[\frac{1}{2} K_{IJ} g_{\mu\nu} \partial_\mu \Phi^I \partial_\nu \Phi^J + V(\Phi^I) \right].$$

Tais Lagrangeanas são comuns em modelos cosmológicos com mais de um campo, e sua presença só modifica as equações de Friedmann através da correspondência com um fluido perfeito,

$$\rho = \frac{1}{2} K_{IJ} \dot{\Phi}^I \dot{\Phi}^J + V(\Phi), \quad P = \frac{1}{2} K_{IJ} \dot{\Phi}^I \dot{\Phi}^J - V(\Phi),$$

enquanto a equação de Klein-Gordon agora se escreve $\ddot{\Phi}^I + 3H\dot{\Phi}^I = -K^{IJ}\partial_{\Phi^J}V$.

No modelo em questão aqui, $V(\Phi)$ é o potencial autodual escrito em termos de Φ , (Eq.(9.50)),

$$V(\Phi) = \rho_\Lambda \left[\frac{1 - \frac{2}{3}\Phi^2/\Phi_0^2}{(1 - \Phi^2/\Phi_0^2)^{1/\delta}} \right],$$

e como há um único campo, os índices I, J são triviais, com a métrica K_{IJ} sendo apenas a função escalar

$$K(\Phi) = \frac{1}{(1 - (\Phi/\Phi_0)^2)^2}.$$

Lembre que $\Phi_0 = \sqrt{2/\delta}$. É imediato verificar que na vizinhança do vácuo dS_4 em $\Phi/\Phi_0 \ll 1$ a métrica acima se torna simplesmente δ_{IJ} e o campo se torna canônico.

*

Φ e a deformação da CFT

No lado da CFT, não há qualquer problema na troca do campo ϕ pelo campo Φ . Para gerar o fluxo do grupo de renormalização que retira a CFT do ponto UV, é preciso perturbá-la com um operador relevante. Uma possibilidade é um operador caracterizado pelo acoplamento com o campo ϕ correspondente ao inflaton canônico, mas há outras e, em geral, pode haver mais de uma perturbação em direções diferentes (embora se suponha que uma domine). Assim, Φ corresponde simplesmente a um outro operador dual, diferente daquele que se acopla a ϕ .

O espectro das correlações na CFT é desviado do espectro invariante de escala pelo fluxo induzido pelo operador \mathcal{O} que perturba a teoria. Vimos acima que esse

desvio é idêntico ao obtido pela inflação no regime de slow-roll quando \mathcal{O} se acopla a ϕ , que obedece as equações de Friedmann, que levam à Eq.(13.51). Perturbar a teoria com um operador diferente \mathcal{O}' poderia modificar esse resultado. Mas quando \mathcal{O}' é dual a Φ , uma vez que $\Phi \approx \phi$ na vizinhança do ponto UV onde se calcula o espectro, o desvio do tipo slow-roll permanece válido. A diferença só se torna relevante longe do ponto UV; Φ então descreve uma trajetória bem comportada até outro ponto fixo IR em Φ_0 . A interpretação da singularidade enquanto esse ponto IR do fluxo do grupo de renormalização deve ser melhor investigada.

O modelo de concordância, assintoticamente

Como um segundo exemplo, consideramos a inflação hológrfica gerada pelo universo dual ao início do modelo de concordância. Isto é, consideramos como modelo pós-inflacionário o universo preenchido por poeira e radiação,

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho_R}{\tilde{a}^4} + \frac{\rho_M}{\tilde{a}^3}.$$

Usamos um til nas variáveis pós-inflacionárias porque nosso objetivo é trabalhar no universo inflacionário e só depois aplicar a DFE. O universo dual inflacionário é preenchido por uma constante cosmológica Λ e por um gás de branas,

$$\rho = \Lambda + \frac{\rho_{PD}}{a}. \quad (13.67)$$

Desconsiderar a constante cosmológica pós-inflacionária e a radiação pré-inflacionária que lhe é dual permite que se encontre uma solução simples para o fator de escala. Usando a Eq.(8.42) obtemos uma integral analítica para $\phi(a)$, que se inverte,

$$a(\phi) = \frac{\rho_{PD}/\Lambda}{\sinh^2 \frac{1}{2^{3/2}} \phi}. \quad (13.68)$$

Daí se obtém $\rho(\phi)$, e com a equação de estado correspondente a (13.67), dada por $P = -\frac{2}{3}\rho - \frac{1}{3}\Lambda$, temos o potencial escalar $V = \frac{1}{2}(\rho - P)$,

$$V(\phi) = \frac{1}{6}\Lambda(1 + 5 \cosh^2 \frac{1}{2^{3/2}} \phi).$$

Há um mínimo em $\phi = 0$, onde $V = \Lambda$, correspondendo a um vácuo dS_4 . A função beta holográfica $\beta = \partial\phi/\partial \log a$ se calcula de (13.68), $\beta(\phi) = -\tanh \frac{1}{2^{3/2}} \phi$, possui um zero no vácuo dS_4 correspondendo a um ponto fixo e a dimensão anômala $\gamma(0) = -1/2$.

Mais uma vez definindo o campo $\Phi = \Phi_0 \tanh \frac{1}{2^{3/2}} \phi$, com $\Phi_0 = 2^{3/2}$, encontramos facilmente a nova função beta $\beta_\Phi = \partial\Phi/\partial \log a$,

$$\beta_\Phi = \frac{1}{2}\Phi [(\Phi/\Phi_0)^2 - 1]. \quad (13.69)$$

A função apresenta dois pontos fixos, um em $\Phi = 0$ correspondente ao mesmo vácuo dS_4 onde $a = \infty$, e o outro em $\Phi = \Phi_0$, correspondente a $\phi = \infty$ e $a = 0$. Derivando $\gamma = \partial\beta/\partial\Phi$, obtemos as dimensões anômalas em cada um,

$$\gamma(0) = -\frac{1}{2} = \gamma_{UV}, \quad \text{e} \quad \gamma(\Phi_0) = 1 = \gamma_{IR}. \quad (13.70)$$

A função beta junto com γ_{UV} e com a (função) carga central holográfica (13.48),

$$C(\phi) = 1/(\ell_{Pl}H(\phi))^2, \quad C(0) = 1/\ell_{Pl}^2\Lambda,$$

determinam a CFT_3 . Isso fixa as correlações fora do horizonte na fase pós-inflacionária.

Mapas entre pCFTs

Nos dois exemplos acima, perturbando a CFT_3 no UV com o campo apropriado Φ , obtemos um fluxo até um segundo ponto fixo IR que corresponde, na gravitação a uma singularidade com $a = 0$. No exemplo autodual, por construção, esse ponto é diretamente ligado ao ponto UV pela DFE. Para o modelo de radiação e poeira, não: o ponto IR encontrado corresponde ao limite $a \rightarrow 0$ no universo acelerado, e desejamos saber se em $\tilde{a} = 0$, no universo de radiação dual ao limite dS_4 onde ocorre o ponto UV, existe um campo $\tilde{\Phi}$ que dê origem a uma função beta com uma dimensão anômala bem definida.

A passagem do modelo (13.67) para o universo de radiação e poeira apresenta algumas complicações. A ligação entre ϕ e $\tilde{\phi}$, dada pela Eq.(8.44), é complicada:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_0) = & -2\sqrt{3} \log \left[\sqrt{6 \cosh \frac{\phi}{2^{3/2}} + \sqrt{5 + 3 \cosh \frac{\phi}{2^{3/2}}}} \right] + \\ & + 2 \log \left[\frac{2\sqrt{2} \cosh \frac{\phi}{2^{3/2}} + \sqrt{5 + 3 \cosh \frac{\phi}{2^{3/2}}}}{2\sqrt{2} \cosh \frac{\phi}{2^{3/2}} - \sqrt{5 + 3 \cosh \frac{\phi}{2^{3/2}}}} \right], \end{aligned}$$

ao contrário do modelo autodual, cuja transformação (9.24) é simples. Consideremos o limite assintótico na vizinhança do ponto UV em $\phi = 0$. Para $\phi \ll 1$, a fórmula acima se reduz a

$$\exp \left[-\frac{1}{2^{3/2}}(\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_0) \right] \approx (\sqrt{3} + \frac{3}{2})\frac{1}{8}\phi^2.$$

Ou seja, $\phi \ll 1$ corresponde a $\tilde{\phi} \gg 1$. Com a inversão do fator de escala $\tilde{a} = c^2/a$, isso permite que se encontre

$$\tilde{a}(\tilde{\phi}) \approx e^{-\tilde{\phi}/2^{3/2}},$$

e logo a função beta correspondente, $\tilde{\beta} = \partial\tilde{\phi}/\partial\log\tilde{a}$, $\tilde{\beta} \approx -2\sqrt{2}$. Repare que este é o mesmo comportamento da função β_ϕ na Eq.(13.62) quando $\phi \rightarrow \infty$. Seguindo os argumentos dos exemplos anteriores, entretanto, podemos definir $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_0 \tanh \frac{1}{2\sqrt{2}}\tilde{\phi}$, com $\tilde{\Phi}_0 = 2\sqrt{2}$. Então

$$\tilde{a} \approx \left(\frac{\tilde{\Phi}_0 - \tilde{\Phi}}{\tilde{\Phi}_0 + \tilde{\Phi}} \right)^{1/2},$$

logo

$$\tilde{\beta}_{\tilde{\Phi}} = -1 + (\tilde{\Phi}/\tilde{\Phi}_0)^2, \quad \text{com} \quad \tilde{\beta}_{\tilde{\Phi}}(\tilde{\Phi}_0) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma(\tilde{\Phi}_0) = 2.$$

Ou seja, temos mais uma vez um ponto IR, com dimensão anômala $\gamma_{IR} > 0$, no big-bang de radiação, assim como encontrado na Eq.(13.70).

13.6 Discussão

Descrever a inflação como o regime UV da pCFT é uma abordagem que coincide com a de [van der Schaar \(2004\)](#). Esta é a situação apropriada para a combinação da holografia com a DFE se quisermos relacionar as correlações no início do universo pós-inflacionário com as correlações na borda *future* de dS_4 do universo dual. Vale mencionar que também é possível posicionar a inflação num ponto fixo IR da pCFT₃, como feito, por exemplo, por [Larsen et al. \(2002\)](#) e por [Bzowski et al. \(2013\)](#). Nesse caso, o ponto conforme corresponde ao passado \mathcal{I}^- de dS_4 , e o regime inflacionário ocorre em acoplamentos fortes na teoria gravitacional, i.e. para $a \ll 1$. Um exemplo desse segundo tipo é dado pelos modelos autoduais com $\delta < 0$. Vimos no §9.4 que o potencial tem então um *máximo* em $\phi = 0$, o universo *começa* como de Sitter e evolui para o domínio de radiação para $a \rightarrow \infty$, um comportamento típico de inflação do tipo hilltop. Repare que nesse caso a dimensão anômala $\gamma = -2\delta > 0$ e se perturba a teoria com um operador irrelevante, como é o apropriado num ponto fixo IR.

Levando a dualidade às últimas consequências, caso saibamos a teoria de campos podemos interpretar as correlações das flutuações da métrica que entram no horizonte durante a fase desacelerada como sendo determinadas, através da Eq.(13.39), diretamente pelos valores médios dos operadores da teoria de campos. O fato de que a pCFT₃ possui uma descrição em termos do interior de um espaço-tempo $(a)dS_4$ significa que as correlações são também duais ao espectro de um campo escalar em um universo acelerado quase de Sitter e, assim, na prática, obtemos resultados similares aos da inflação usual. A inflação “acaba” quando a TQC se afasta suficientemente do ponto UV, de forma que os valores médios dos operadores não possuam mais um espectro quase invariante de escala. No bulk, isso acontece, aproximadamente, quando a aceleração se anula. Podemos estimar o valor do acoplamento Φ correspondente no modelo autodual de maneira

simples: por causa da simetria de autodualidade, a aceleração é zero quando o fator de escala satisfaz $a/c = c/a$. Usando a Eq.(13.64), vemos imediatamente que isso acontece para $\Phi^2 = \frac{1}{2}\Phi_0^2$, i.e. a aproximadamente 2/3 do intervalo $(0, \Phi_0)$.

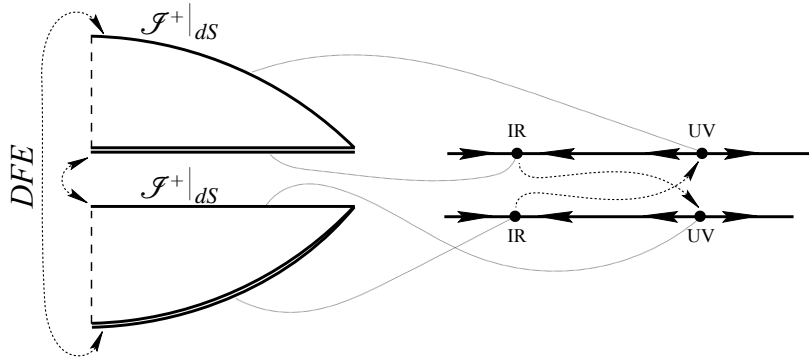


Figura 13.2: Mapas entre teorias holográficas.

*

Nos exemplos do §13.5, perturbamos o ponto UV da teoria conforme com o operador \mathcal{O}_Φ , com dimensão $\Delta_{UV} = 3 + \gamma_{UV}$, acoplado ao campo Φ que possui as propriedades de escala adequadas (em oposição a ϕ). Sabendo a solução exata da geometria em termos de Φ , foi possível encontrar funções beta exatas para as TQCs que no limite IR, quando o fator de escala tende a um big-bang, possuem outro ponto fixo onde $\Phi = \Phi_0$. Aqui, a combinação da holografia com a DFE leva à agradável possibilidade de se mapear essa teoria de campos em regime de acoplamento forte no IR em uma (outra) teoria conforme em acoplamento fraco no UV. O mapeamento é automaticamente induzido pela DFE, e representado na Fig.13.2.

Há uma ressalva. O mapa da Fig.13.2 é bem definido quando ambos os universos duais (pela DFE) possuem o futuro $(a)dS_4$, e portanto uma pCFT₃ holográfica bem definida no UV. Já em casos como (13.67), em que há apenas *uma* borda $\mathcal{F}^+|_{dS}$, o mapa funciona para o ponto IR correspondente ao big-bang no universo de radiação, mas o outro big-bang, no universo dominado por um gás de branas, é mapeado pela DFE no infinito de um universo *desacelerado* (dominado por poeira) em que, pela ausência das simetrias assintóticas de de Sitter, não existe uma interpretação holográfica estabelecida.

Capítulo 14

Conclusão

Os resultados da pesquisa apresentada nesta tese têm como ponto de origem um fato simples: a existência de uma simetria das equações de Friedmann sob a inversão do fator de escala. A grande utilidade desse tipo de simetria é relacionar a física em regime de altas energias e pequenas escalas com a física de baixas energias e grandes escalas — sabendo descrever fenômenos em um dos dois regimes, temos também o comportamento no limite oposto. Isso torna uma simetria de inversão do fator de escala particularmente útil para a descrição do universo primordial, em que a gravitação se encontra em um regime de altíssimas energias e a geometria se torna singular, e oferece, assim, uma possível direção para a abordagem do problema da singularidade inicial.

Preservação das equações de Friedmann sob a inversão $a \mapsto 1/a$ requer uma transformação conjunta dos campos de matéria que depende (apenas) do calibre temporal escolhido; diferentes calibres têm efeitos muito distintos sobre a transformação da dinâmica. Nossa simetria de Dualidade do Fator de Escala usa o tempo conforme, e é caracterizada por inverter o sinal da aceleração através de uma transformação específica da equação de estado, $\tilde{w} = -\frac{2}{3} - w$. Essa relação dual entre universos acelerados e desacelerados sinaliza mais uma vez que a DFE pode ter aplicação na descrição do universo primordial, na transição entre a fase inflacionária e o universo desacelerado.

Toda a Parte III desta tese foi dedicada a explorar consequências e aplicações da DFE na construção de modelos cosmológicos. Como conclusão, relembramos agora os resultados principais e mencionamos alguns problemas em aberto.

*

Mapas entre soluções, universos autoduais e simetria assintótica

A DFE definida no Capítulo 8 é antes de tudo um *mapa entre soluções* das equações de Friedmann. Dado *qualquer* universo de FLRW, com seu conteúdo

material e sua evolução do fator de escala $a(\eta)$ particular, sempre existe um universo dual com o conteúdo material definido pela Eq.(8.16). (Na verdade, para cada solução existem *duas* soluções duais, ver abaixo.) O regime de altas energias de uma solução corresponde ao regime de baixas energias de *outra* solução, correspondente a um universo diferente, preenchido, em geral, por uma espécie diferente de matéria. Por exemplo, baixas energias no universo de de Sitter se mapeiam no regime de altas energias de um universo radiativo.

No Capítulo 9 introduzimos o conceito e deduzimos exemplos de universos autoduais sob a DFE. Isso promove o *mapa* que é a DFE a uma *simetria*. O espaço-tempo de Robertson-Walker tem o fator de escala como único grau de liberdade, e forçar uma simetria discreta sobre o comportamento de a é extremamente restritivo. Apesar de os modelos que encontramos, em particular toda a classe de 1-parâmetro de modelos do tipo gás de Chaplygin modificado, cuja consistência termodinâmica foi analisada no Capítulo 10, terem servido como ‘toy-models’ ao longo de todo o trabalho, o Universo descrito pelo modelo de concordância cósmica não apresenta a simetria de autodualidade.

Aparte os valores específicos das densidades relativas das componentes, a densidade de energia do modelo Λ CDM com radiação coincide com as de um universo autodual se introduzirmos um gás de branas. Um gás desse tipo não seria uma proposta muito fora da realidade no universo primordial, servindo como uma possibilidade inflacionária, como discutido no §12.2. Mas a inversão do fator de escala é uma simetria discreta do tipo Z_2 , e um universo autodual deve ser simétrico com relação a um *único* ponto invariante sob a DFE e no qual, portanto, a aceleração é zero. Ou seja: é uma restrição dinâmica da autodualidade, independente do conteúdo material, que a aceleração do fator de escala troque de sinal apenas uma vez. Portanto é impossível que um universo contendo poeira, radiação e uma constante cosmológica, como o nosso, seja autodual e, ao mesmo tempo, possua uma fase inicial inflacionária. (Ou seja, as branas de um “modelo de concordância autodual” devem dominar na fase final, após o domínio de poeira, o que é absolutamente irrealista.)

Por outro lado, não seria realístico esperar que a DFE fosse uma simetria exata do universo de FLRW. Uma simetria de fato sob a inversão do fator de escala é similar a uma simetria de Weyl, e faz mais sentido, portanto, em alguma escala de energia do universo primordial. Assim, é interessante investigar a viabilidade de modelos inflacionários que apresentem a autodualidade como simetria assintótica. Uma possibilidade nesse contexto é que a DFE relacione a fase inflacionária com a fase pós-reheating, e isso foi obtido em um dos exemplos analisados aqui: nos modelos de gás de Chaplygin modificado com $\delta < 0$ do §9.4.3. Outra possibilidade é que a dualidade leve a uma fase desacelerada *pré*-inflacionária, como encontramos no §12.2.

*

Ricochetes e a DFE

Para cada solução das equações de Friedmann, existem *dois* universos duais: um em expansão e outro em contração. De fato, sem a reflexão do tempo conforme feita na Eq.(8.28), a transformação de inversão do fator de escala, $a(\eta) \mapsto c^2/a(\eta)$, relaciona um universo em expansão a outro em contração (correspondendo ao sinal negativo na Eq.(8.25)). Esses modelos não foram abordados em detalhes, e por isso fazemos aqui um breve comentário a seu respeito.

Seja \mathcal{A} um universo típico em expansão (por exemplo o modelo Λ CDM), em que o fator de escala $a(\eta)$ tem $a(0) = 0$ e $a(\eta_f) = \infty$, com $\eta \in [0, \eta_f]$ onde η_f pode ser infinito se não há uma fase final acelerada. Considere seu dual $\tilde{\mathcal{A}}$, com $\tilde{a}(\eta) = c^2/a(\eta)$. Fazendo uma translação da origem do tempo, podemos escrever

$$\tilde{a}(\eta) = c^2/a(\eta + \eta_f),$$

de modo que o fator de escala $\tilde{a}(\tilde{\eta})$ tem $\tilde{\eta} \in [-\eta_f, 0]$, com $\tilde{a}(-\eta_f) = \infty$ e $\tilde{a}(0) = 0$. Assim, na superfície $\eta = 0 = \tilde{\eta}$ se encontram ambas as singularidades: o big-bang de \mathcal{A} e o big-crunch de $\tilde{\mathcal{A}}$. Isto pode muito bem ser encarado como um universo de ricochete, e serve como modelo de cosmologia pré-big-bang de forma inclusive mais usual do que a transição conforme que invocamos nos modelos duais de expansão/expansão. Na passagem entre aeons, o fator de escala é, evidentemente, contínuo, mas suas derivadas sofrem uma descontinuidade se os modelos não possuírem exatamente a mesma densidade de energia próximo ao ricochete. Por exemplo, vimos que o universo em contração dual ao modelo Λ CDM com radiação é preenchido por radiação, outra constante cosmológica e um gás de branas. Repare que, aqui, a ordem das fases é invertida em relação ao que vimos nos modelos de expansão/expansão: o universo *começa* acelerado, sendo assintoticamente dS_4 no passado, passa pelo domínio do gás de branas e *termina* desacelerado e dominado por radiação no big-crunch, como ilustrado na Fig.14 (porções sombreadas indicam aceleração positiva).

Ricochetes são comuns no contexto de cosmologia pré-big-bang (ver, e.g., [Brandenberger & Peter \(2017\)](#) para uma revisão recente), mas apresentam características perigosas de instabilidade por causa da presença de singularidades caóticas de [Belinskii et al. \(1970, 1982\)](#). Pequenas anisotropias presentes no início da fase de contração são amplificadas de forma caótica durante o colapso gravitacional, como descrito no §5.4.3. Evitar uma singularidade caótica no big-crunch, portanto, requer ou um ajuste fino nas condições iniciais do colapso, ou um mecanismo que previna o desenvolvimento das divergências anisotrópicas. Existem tais mecanismos, um deles é através de uma equação de estado efetiva $w \gg 1$

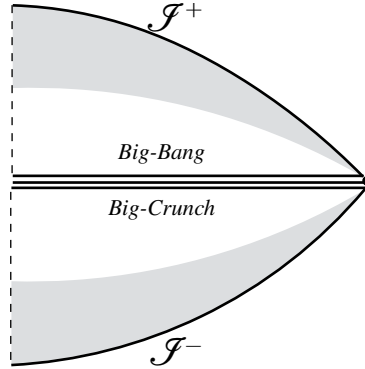


Figura 14.1: Universos duais em contração/expansão.

durante a contração. Isso gera uma densidade de energia proporcional a $a^{-3(1+w)}$; a densidade das anisotropias se escala com a^{-6} e é, portanto, diluída pela equação de estado com $w \gg 1$. Este é o mecanismo presente, por exemplo, nos modelos do tipo epirótico. Nos modelos autoduais, entretanto, ele apresenta um problema grave: introduzindo um campo ϕ com equação de estado efetiva $w \gg 1$ antes do big-crunch obtemos um campo dual $\tilde{\phi}$, após o ricochete, cuja equação de estado é $\tilde{w} = -\frac{2}{3} - w \ll -1$. Ou seja, a estabilidade das anisotropias requer um campo fantasma após o ricochete que viola drasticamente a condição fraca de energia, e introduz instabilidades taquiônicas discutidas no §8.3.1; ver também Hsu *et al.* (2004); Kallosh *et al.* (2008).

*

Potenciais dilatônicos, o Cenário Pré-Big-Bang e a CCC

A dualidade do fator de escala na gravitação dilatônica leva ao Cenário Pré-Big-Bang descrito no Capítulo 6. Nesse caso a dualidade requer que o potencial dilatônico V seja uma função do “dilaton deslocado”, fazendo com que os modelos que possuem um par dual sejam razoavelmente restritos, geralmente apresentando um potencial constante. Por sua vez, a DFE é uma dualidade construída na gravitação de Einstein, e qualquer modelo com um potencial arbitrário de um campo escalar será mapeado em outro modelo, com outro potencial determinado pelas Eqs.(8.15), e cujo fator de escala é o inverso do original. Ora, pode-se passar ao quadro de cordas através do procedimento usual, e obter os dois modelos dilatônicos correspondentes. Os fatores de escala assim obtidos, no quadro de cordas não são, é claro, ligados por uma inversão simples, mas os exemplos que mostramos nos §§8.4 e 9.5 fornecem transformações entre altas e baixas energias, como é desejado. Isso é um resultado importante, e por si só uma motivação da DFE no tempo conforme, porque podemos ver o procedimento sob a ótica

inversa: começando com um universo \mathcal{U}_C com potencial arbitrário na gravitação dilatônica, passamos ao quadro de Einstein e obtemos \mathcal{U}_E , que se mapeia em $\tilde{\mathcal{U}}_E$ sob uma transformação da DFE, e voltamos ao quadro de cordas para obter $\tilde{\mathcal{U}}_C$, assim “indiretamente dual” ao universo original.

No Cenário Pré-Big-Bang da gravitação dilatônica, a fase pré-big-bang se contrai quando vista no quadro de Einstein, e acaba em um ricochete, mas no quadro de cordas ambas as fases pré- e pós-big-bang se expandem, o período antes do big-bang funcionando como uma inflação. No caso da DFE, um raciocínio análogo permitiu interpretar as soluções duais como estando “antes do big-bang”, mas na gravitação de Einstein. Nosso interesse no Capítulo 11 foi em universos duais que se *expandem*. Há então o problema imediato de que não há dilaton para guiar a dinâmica através da singularidade (nem se pode recorrer ao argumento de uma fase não-perturbativa da teoria de cordas). O que há é o elemento principal da Cosmologia Conforme Cíclica descrita no Capítulo 7: a transição não se dá através de uma singularidade, como num ricochete, e sim através de uma “superfície conforme”, onde se deve “identificar” fatores de escala inversamente proporcionais, com

$$a(\eta) \cdot \tilde{a}(-\eta) = c^2.$$

Essa proposta é conceitualmente muito peculiar, e requer mecanismos como, por exemplo, uma gravitação de Weyl onde exista uma simetria conforme do espaço-tempo. Não é claro como se pode obter a gravitação de Einstein a partir de uma gravitação de Weyl que fosse válida, digamos, no universo primordial, e menos claro ainda é como se pode restaurar a simetria conforme (4-dimensional) no fim de um universo descrito pela gravitação de Einstein; seria necessário uma espécie de mecanismo de Higgs inverso, que causasse o decaimento da massa bariônica. Apesar da escassez de detalhes conhecidos, julgamos conceitualmente interessante e digna de atenção o conceito de uma transição conforme.

De certa forma, a DFE pode ser vista como a realização da CCC para um espaço-tempo de FLRW. A transformação da matéria na DFE coincide com o limite homogêneo e isotrópico de fórmulas obtidas para a CCC, como mostrado no §11.2. A CCC requer uma inversão apenas assintótica dos fatores de Weyl, mas num universo de FLRW, em que o fator de escala (um fator de Weyl, no tempo conforme) é o único grau de liberdade, tal transformação é forçosamente “rígida”, afeta a dinâmica como um todo e possibilita apenas a uma versão “esquemática” das propriedades da CCC. Ou seja, a ‘Hipótese Recíproca’ corresponde simplesmente à inversão do fator de escala e, para uma soma de fluidos perfeitos, a restrição, também assintótica, da ‘hipótese da massa de repouso suprimida’ equivale à ausência total de um termo de poeira na dinâmica do universo. Com modelos um pouco mais maleáveis, como o Gás de Chaplygin modificado, conseguimos emular melhor algumas dessas propriedades no §11.3. Como indica o

nome, a CCC postula a repetição cíclica de universos similares ao nosso, enquanto uma “cadeia de aeons” construída com a DFE alterna (de maneira cíclica) entre conteúdos materiais diferentes. Uma exceção são universos autoduais, e nesse caso a variação do parâmetro c da DFE atua como o grupo $SO(1,1)$ nas densidades relativas das componentes da energia. Por fim, uma das motivações principais da CCC diz respeito à Hipótese da Curvatura de Weyl, e à busca de um mecanismo que tornasse pequena a entropia (gravitacional) próximo ao big-bang. Na transição entre aeons, analisamos o efeito da entropia de Wald ligada a um termo de Gauss-Bonnet, mas a solução para o problema da origem da Segunda Lei da Termodinâmica permanece em aberto. Seria interessante investigá-la nos modelos de inflação pré-big-bang que consideramos no Capítulo 12, e ver como se pode formular o problema no cenário holográfico do Capítulo 13.

*

Inflação antes do big-bang, flutuações

Apesar do problema da continuidade do fator de escala na “passagem conforme” entre aeons duais, uma das propriedades dinâmicas mais interessantes da DFE é a preservação do raio comóvel do horizonte aparente. Num universo plano, isso equivale a uma simetria do valor do raio (comóvel) de Hubble nos instantes duais $\pm\eta$, antes e depois do big-bang. Flutuações adiabáticas da métrica e da matéria com comprimento de onda maior que o horizonte de Hubble travam suas amplitudes em um valor constante, fenômeno responsável pela amplificação de flutuações primordiais no universo inflacionário. Assim, as flutuações que deixam o horizonte no instante $\eta = \eta_{ex} < 0$ durante a expansão acelerada pré-big-bang voltam a entrar no horizonte no instante simétrico $\eta_{re} = -\eta_{ex} > 0$ após o big-bang, tendo permanecido constantes durante a transição. É perfeitamente possível impor a continuidade dos modos de Fourier dessas soluções constantes, assim como se faz na inflação através do reheating. Isso foi realizado no Capítulo 12 e usado para analisar a aceleração pré-big-bang como um universo inflacionário cuja evolução é determinada pela DFE.

Essa análise pressupõe, é claro, que de fato as flutuações fora do horizonte sejam insensíveis à mudança da física na transição conforme. Seria interessante investigar com cuidado a viabilidade do procedimento em modelos, por exemplo, de gravitação de Weyl. De qualquer forma, impor a continuidade dos modos de Fourier é uma abordagem que se encaixa nas linhas gerais da proposta da CCC: denotando a métrica do universo antes do big-bang por $\hat{g}_{\mu\nu} = \Omega(x)g_{\mu\nu}$, e após por $\check{g}_{\mu\nu} = \omega(x)g_{\mu\nu}$, a transição obedece a hipótese recíproca $\Omega \cdot \omega = -1$, enquanto a métrica $g_{\mu\nu}$ é regular. A singularidade está, portanto, toda no fator conforme $\omega \rightarrow 0$, e o big-bang é uma singularidade isotrópica. Se definirmos os fatores de Weyl recíprocos como no §11.2, as flutuações de $\hat{g}_{\mu\nu}$ e $\check{g}_{\mu\nu}$ podem ser vistas como flutuações da métrica regular $g_{\mu\nu}$.

*

Holografia

Uma mudança radical do paradigma inflacionário é a proposta de uma inflação holográfica revisada no Capítulo 13: as condições iniciais das correlações das flutuações que entram no horizonte de Hubble no universo desacelerado são determinadas holograficamente por uma teoria de campos Euclidiana 3-dimensional perturbada ao redor de um ponto fixo conforme. A inflação enquanto modelo preditivo das flutuações do universo isotrópico pode ser substituída por essa pCFT₃. De fato, a dualidade entre uma CFT₃ e a borda de dS_4 permite que se descreva o fluxo do grupo de renormalização na pCFT₃ como um universo 4-dimensional assintoticamente de Sitter. Ao contrário do que acontece na bem estabelecida dualidade AdS/CFT, não é possível obter explicitamente a TQC dual a partir da teoria de cordas, e é necessário uma abordagem mais fenomenológica, mas os resultados de modelos de universos holográficos estão de acordo com as observações recentes, ver [Afshordi *et al.* \(2017a\)](#).

A combinação da DFE com a holografia pode ser realizada de forma bem natural. As flutuações em um universo desacelerado \mathcal{U} são determinadas pela pCFT₃ que é um holograma do universo acelerado $\tilde{\mathcal{U}}$, obtido de \mathcal{U} pela aplicação da DFE. Na prática, os resultados obtidos são equivalentes aos da inflação pré-big-bang do Capítulo 12, mas conceitualmente o problema da transição conforme é completamente reformulado. Os universos duais não se “conectam” diretamente em uma transição onde vale uma gravitação conforme. Eles são “disjuntos”, e apenas (as correlações de) suas flutuações se relacionam indiretamente através da existência de uma pCFT₃ Euclidiana holográfica. A grande pergunta em aberto aqui é: qual é essa teoria conforme, e quais restrições e propriedades a DFE impõe sobre ela? Nos exemplos do §13.5 as propriedades da função beta holográfica que derivamos, as cargas centrais e as dimensões dos operadores indicam as propriedades da TQC respectiva. Será possível encontrar uma descrição microscópica correspondente?

Perturbando a CFT holográfica com o operador apropriado, encontramos um fluxo exato do GR desde o ponto UV na borda de dS_4 até um ponto IR correspondente à singularidade inicial. A interpretação holográfica da função beta próximo ao ponto UV é bem estabelecida pelas simetrias assintóticas de dS_4 , mas a sua continuação até a singularidade ainda requer alguma atenção. Um fato possivelmente relacionado é o resultado de [Larsen & McNees \(2004\)](#), de que a equação de Callan-Symanzik pode ser deduzida puramente através da requisição da invariância por difeomorfismos de um espaço-tempo com borda. Nesse contexto, também é interessante a seguinte questão: os cálculos holográficos no bulk, incluindo o uso da função de onda do universo, utilizam a ação com uma condição de contorno de Dirichlet. Vimos no §12.4 que existe uma transformação canônica

das flutuações que, junto com a inversão do fator de escala, preserva a ação mas troca as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann. Talvez essa troca possa levar a algum efeito interessante na holografia. Em uma direção similar, pode-se lembrar o resultado de [Maldacena \(2011\)](#) mostrando que, na gravitação conforme (de Weyl) quadridimensional, impor uma condição de contorno de Neumann leva à gravitação de Einstein através da função de onda de um universo assintoticamente dS_4 . É interessante investigar como a DFE e a dualidade canônica das flutuações se encaixam nesse argumento.

Além disso, vimos que a combinação da DFE com a holografia induz um mapa entre dois pontos fixos das funções beta holográficas, relacionando um ponto UV com acoplamento fraco (correspondente à borda futura de dS_4) em um ponto IR com acoplamento forte (correspondente ao big-bang dual). A interpretação e as consequências desse mapa devem ser investigadas com cuidado no futuro, e mais uma vez sugerem a possibilidade de se encarar o big-bang de radiação holograficamente, enquanto uma teoria conforme. Uma possível descrição da passagem entre esses pontos fixos IR e UV duais em termos da TQC holográfica seria um grande avanço na direção de se realizar, de fato, a transição conforme entre aeons.

Parte IV

Apêndices

Apêndice A

Notações e definições

Um *espaço-tempo* $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ é um par composto por uma variedade diferenciável quadridimensional \mathcal{M} , com métrica $g_{\mu\nu}$, Lorentziana com assinatura $-+++$. Índices gregos correm de 0 a 3, com x^0 sendo a coordenada temporal. Índices latinos correm de 1 a 3 e indicam as componentes espaciais de vetores. Usamos a notação de Einstein em que índices repetidos indicam um somatório. Nossa convenção de sinais segue [Wald \(2010\)](#): o tensor de curvatura de Riemann, definido tal que $(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha)V_\mu \equiv R_{\alpha\beta\mu}{}^\nu V_\nu$, pode ser escrito através das conexões compatíveis com a métrica,

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0, \quad \text{logo} \quad \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}), \quad (\text{A.1})$$

como

$$R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta = \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\beta - \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\beta + \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\beta - \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\beta, \quad (\text{A.2})$$

de onde se obtém tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}{}^\alpha = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\beta. \quad (\text{A.3})$$

A Ação de Einstein-Hilbert é escrita como

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat}[g_{\mu\nu}, \Psi], \quad (\text{A.4})$$

onde \mathcal{L}_{mat} é a Lagrangeana covariante correspondente ao conjunto de campos de matéria Ψ . Em um espaço-tempo com uma borda $\partial\mathcal{M}$, deve-se adicionar um termo de borda à parte gravitacional, que se torna

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (R - 3\Lambda) + \frac{1}{\kappa^2} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{|\gamma|} K. \quad (\text{A.5})$$

Aqui, $K \equiv (g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu) K_{\mu\nu}$ é o traço da curvatura extrínseca de $\partial\mathcal{M}$, n^μ seu vetor normal e γ_{ab} a métrica induzida sobre $\partial\mathcal{M}$ através da restrição de $(g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu)$. O novo termo é necessário porque na variação de $\int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R$ que leva às equações de Einstein, geralmente se despreza um termo de borda

$$\int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu \delta v^\mu = \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{|\gamma|} n_\mu \delta v^\mu,$$

onde $\delta v^\mu = \nabla_\nu (\delta g^{\mu\nu}) - g^{\alpha\beta} \nabla^\mu (\delta g_{\alpha\beta})$, sob o pretexto de que $\delta g_{\mu\nu} = 0$ em $\partial\mathcal{M}$. Para analisar fenômenos envolvendo explicitamente a borda, esse argumento deixa de ser válido e é preciso adicionar um contratermo na ação para tornar o problema bem definido. É possível expressar $\delta v^\mu n_\mu$ como o traço da curvatura extrínseca $\mathcal{K}_{\mu\nu} = -\nabla_{(\mu} n_{\nu)}$, i.e. $n_\mu \delta v^\mu = 2\delta\mathcal{K}$, levando à Eq.(A.5). Ver, e.g., [Wald \(2010\)](#). Dito isto, a variação de (A.5) com respeito à métrica, $\delta S/\delta g^{\mu\nu} = 0$, dá origem às Equações de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (\text{A.6})$$

onde o tensor de energia-momento

$$T_{\mu\nu} \equiv -2(-g)^{-1/2} \delta \{ \sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat} \} / \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.7})$$

é conservado por causa das Equações de Bianchi, $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$,

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Efetuando a variação do determinante da métrica na definição acima se chega a

$$T_{\mu\nu} = -2(\delta\mathcal{L}_{mat}/\delta g^{\mu\nu}) + \mathcal{L}_{mat} g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.9})$$

O limite de campos fracos e a comparação com a gravitação Newtoniana mostram que $\kappa^2 \equiv 8\pi G$, sendo G a constante gravitacional de Newton. Nesta tese usamos frequentemente unidades tais que

$$\kappa^2 \equiv 8\pi G = 1. \tag{A.10}$$

A Teoria da Relatividade Geral é descrita por [Hawking & Ellis \(1973\)](#); [Misner *et al.* \(1973\)](#); [Wald \(2010\)](#); [Weinberg \(1972\)](#).

Apêndice B

Diagramas de Penrose para universos de FLRW

O diagrama de Penrose de um espaço-tempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ esfericamente simétrico é um mapa conforme sobre o cilindro \mathcal{E} conhecido como o “Universo estático de Einstein”, de métrica

$$ds_{\mathcal{E}}^2 = -d\tau^2 + d\chi^2 + \text{sen}^2\chi do^2, \quad (\text{B.1})$$

com $do^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$ o elemento de linha sobre a 2-esfera.

B.1 Minkowski

A métrica (B.1) é conforme à métrica plana de Minkowski,

$$ds_M^2 = -d\eta^2 + dr^2 + r^2 do^2, \quad (\text{B.2})$$

através da transformação $\{\eta, r\} \mapsto \{\tau, \chi\}$ definida por

$$r = \frac{1}{2} \left[\text{tg} \left(\frac{\chi+\tau}{2} \right) + \text{tg} \left(\frac{\chi-\tau}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \sec \left(\frac{\chi+\tau}{2} \right) \sec \left(\frac{\chi-\tau}{2} \right) \text{sen} \chi, \quad (\text{B.3a})$$

$$\eta - \eta_0 = \frac{1}{2} \left[\text{tg} \left(\frac{\chi+\tau}{2} \right) - \text{tg} \left(\frac{\chi-\tau}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \sec \left(\frac{\chi+\tau}{2} \right) \sec \left(\frac{\chi-\tau}{2} \right) \text{sen} \tau; \quad (\text{B.3b})$$

com a qual se estabelece entre as métricas (B.1) e (B.2) a relação

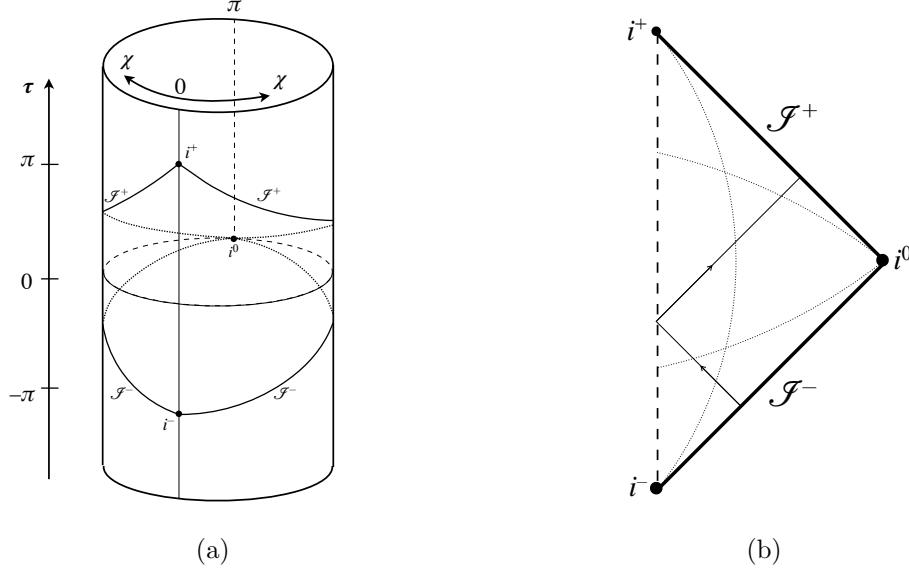


Figura B.1: (a) Universo de Einstein com o diamante do Espaço-tempo de Minkowski. (b) Diagrama de Penrose para $M^{(3,1)}$.

$$ds_M^2 = \Omega_M^2(\tau, \chi) ds_{\mathcal{E}}^2 \quad \text{com} \quad \Omega_M^2(\eta) = \frac{1}{4} \sec^2\left(\frac{\chi+\tau}{2}\right) \sec^2\left(\frac{\chi-\tau}{2}\right). \quad (\text{B.4})$$

Fazendo $do^2 = 0$ sem perda de generalidade (é um espaço isotrópico), \mathcal{E} pode ser desenhado na Fig.B.1(a) como um cilindro bidimensional, de altura τ e ângulo χ . Os domínios infinitos de r e η se mapeiam em domínios finitos de χ e τ ,

$$-\pi < \tau \pm \chi < \pi, \quad \chi \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad r > 0, \quad -\infty < \eta < \infty, \quad (\text{B.5})$$

o que restringe todo o espaço de Minkowski ao interior de um losango (um “diamante”) em \mathcal{E} , traçado também na Fig.B.1(a). As arestas do diamante correspondem aos diferentes tipos de limite com os quais se chega ao infinito em $M^{(3,1)}$ onde diverge o fator conforme Ω_M . Os limites $\eta \rightarrow \pm\infty$, como se vê da Eq.(B.3a), correspondem à divergência de $|\text{tg } \frac{\chi \pm \tau}{2}|$, o que ocorre sobre quatro “semi-círculos” em \mathcal{E} ; dois na “metade superior” com $\tau > 0$:

$$\mathcal{I}^+ = \{\chi + \tau = \pi\} \cup \{\chi - \tau = -\pi\}, \quad (\text{B.6})$$

e dois na “metade inferior” com $\tau < 0$:

$$\mathcal{I}^+ = \{\chi + \tau = -\pi\} \cup \{\chi - \tau = \pi\}. \quad (\text{B.7})$$

É evidente que \mathcal{I}^\pm são hipersuperfícies nulas (retas de inclinação unitária no plano τ - χ) e por isso chamados de ‘*futuro nulo*’ (\mathcal{I}^+) e ‘*passado nulo*’ (\mathcal{I}^-). Os pontos (as “quinas” de \mathcal{I}^\pm)

$$i^\pm \equiv \{\chi = 0, \tau = \pm\pi\} \quad (\text{B.8})$$

são chamados de ‘*infinitos tipo-tempo*’, por serem o passado infinito (i^-) e o futuro infinito (i^+) de todas as curvas tipo-tempo inextensíveis. Já o ponto

$$i^0 \equiv \{\chi = \pm\pi, \tau = 0\} \quad (\text{B.9})$$

é chamado de ‘*infinito tipo-espaço*’ por ser o início e o fim das curvas tipo-espaço inextensíveis. O diagrama de Penrose é o desenho sobre o plano τ - χ obtido ao se “desenrolar” o desenho de sobre o cilindro \mathcal{E} , como na Fig.B.1(b). Vamos adotar a iconografia padrão em que uma linha cheia indica um infinito \mathcal{I} , os pontos \bullet indicam os infinitos i e a linha tracejada vertical indica a singularidade das coordenadas correspondente $\chi = 0$ em \mathcal{E} , ou a $r = 0$ em $M^{(3,1)}$. Estão traçados exemplos de uma curva tipo-tempo inextensível e duas curvas tipo-espaço. Também há *uma* geodésica nula que sai de \mathcal{I}^- no passado infinito e chega a \mathcal{I}^+ . A “reflexão” em $\chi = 0$ corresponde simplesmente a uma mudança angular na 2-esfera θ - ϕ (não representada nas figuras) que ocorre quando o raio de luz que vem em direção ao observador na origem passa por ele e continua o caminho “pelas suas costas” (grosseiramente, na direção $-r$).

B.2 Universos de FLRW

Para mapear um universo FLRW plano sobre \mathcal{E} , basta multiplicar a métrica de Minkowski pelo fator de escala, ou seja

$$ds_{\text{FLRW}}^2 = \Omega^2(\tau, \chi) ds_{\mathcal{E}}^2 \quad \text{com} \quad \Omega^2(\eta) = \frac{1}{4} a^2(\tau, \chi) \sec^2\left(\frac{\chi+\tau}{2}\right) \sec^2\left(\frac{\chi-\tau}{2}\right). \quad (\text{B.9})$$

O fator conforme é o mesmo da Eq.(B.4), mas agora multiplicado por a^2 enquanto função de $\eta(\tau, \chi)$ de acordo com as Eqs.(B.3). A diferença crucial vem do fato de que a existência de uma singularidade inicial faz com que as geodésicas não sejam extensíveis até o infinito no passado (quando há uma singularidade no futuro, e.g. um big-crunch, as geodésicas não são extensíveis para o futuro). De maneira prática, agora além de o espaço-tempo ficar limitado em \mathcal{E} pelas superfícies \mathcal{S} e i onde Ω_M diverge, devemos levar em conta que o fator de escala, por si só, também pode: (i) Se anular em uma singularidade para $\tau > -\pi$, ou (ii) Divergir mais rápido que Ω_M . Vamos ilustrar estes pontos usando os universos com w constante. Da Eq.(8.17) pode-se usar (8.14) diretamente para integrar

$$a(\eta) = \frac{a_*}{(\eta_* - \eta_0)^{2/(1+w)}} \left[\frac{1+3w}{3(1+w)} (\eta - \eta_0) \right]^{2/(1+3w)}, \quad w \neq -1/3. \quad (\text{B.10})$$

Como fica óbvio do expoente, existem três classes qualitativamente diferentes de solução, de acordo com se $w \leq -1/3$.

Se $w > -1/3$, o universo se expande desaceleradamente, e tem uma singularidade em η_0 , onde $a(\eta_0) = 0$. A superfície $\mathcal{X} = \{\eta = \eta_0\}$ fica definida sobre \mathcal{E} pela Eq.(B.3b) $\sec\left(\frac{\chi+\tau}{2}\right) \sec\left(\frac{\chi-\tau}{2}\right) \sin\tau = 0$, e como $\sec x \neq 0$ sempre, temos

$$\mathcal{X} = \{\eta = \eta_0\} = \{\tau = 0\}. \quad (\text{B.11})$$

Em geral, a solução (B.10) só fica definida para $\eta > \eta_0$, quando a expressão em chaves é positiva. A singularidade \mathcal{X} , no passado (finito) de todas as geodésicas tipo-tempo e nulas (um big-bang) corta ao meio o diamante do diagrama de Penrose de $M^{(3,1)}$, resultando no diagrama mostrado na Fig.B.2(b). Não existem nem \mathcal{S}^- nem i^- : as geodésicas tipo-tempo e nulas não são inextensíveis até o passado infinito; elas são *incompletas*.

Se $w < -1/3$ o universo é acelerado. O expoente muda de sinal, e portanto em $\eta = \eta_0$ o fator de escala *diverge*, $a(\eta_0) = \infty$. Isto significa que o futuro causal do espaço-tempo, definido pela superfície $\mathcal{S}^+ = \{\eta = \eta_0\}$ ocorre a um tempo conforme *finito* e é portanto uma superfície tipo-espaço. Já o limite em que $a = 0$ só ocorre para $\eta \rightarrow -\infty$ e portanto é uma hipersuperfície nula \mathcal{S}^- . O diagrama de Penrose é o da Fig.B.2(b).

Note aqui a diferença entre \mathcal{S}^+ nas Figs.B.2(a) e B.2(b), e no universo. No primeiro caso, assim como em $M^{(3,1)}$ na Fig.B.1(b), o infinito futuro tem que ser decomposto em duas partes, $\mathcal{S}^+ \cup i^+$, já que as geodésicas nulas todas terminam em \mathcal{S}^+ e as geodésicas tipo-tempo todas terminam em i^+ . No segundo caso, ambos os tipos de geodésica causal terminam sobre a mesma superfície tipo-

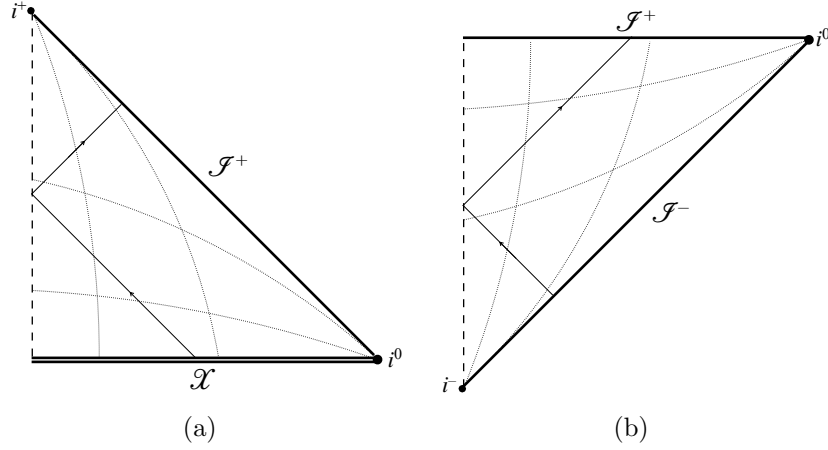


Figura B.2: (a) universo desacelerado ($-1/3 < w < 1$); (b) universo acelerado ($-1 < w < -1/3$).

espaço \mathcal{I}^+ — por isso aqui não serve o nome “infinito nulo”.

Por fim, há o caso limite em que $w = -1/3$ e o universo possui aceleração zero. O fator de escala não é dado pela Fórmula (B.10), e o tempo conforme agora é dado por $\eta - \eta_0 = \frac{t_0}{a_0} \int \frac{dt}{t} = \frac{t_0}{a_0} \log\left(\frac{t}{t_0}\right)$, e seu domínio é toda a reta real: $\eta \in (-\infty, +\infty)$ à medida que $t \in (0, \infty)$, portanto o domínio de τ é todo o intervalo $(-\pi, +\pi)$. O fator de escala

$$a(t) = \frac{a_0}{t_0} t \quad \text{no tempo conforme fica} \quad a(\eta) = a_0 \exp\left[\frac{a_0}{t_0}(\eta - \eta_0)\right].$$

A Eq.(B.3b) mapeia a singularidade $a = 0$ ($\eta = -\infty$) na superfície nula $\mathcal{I}^- = \{\chi + \tau = -\pi\} \cup \{\chi - \tau = \pi\}$, e o futuro infinito é mapeado em $\mathcal{I}^+ = \{\chi + \tau = \pi\} \cup \{\chi - \tau = -\pi\}$, como em $M^{(3,1)}$. Assim, o diagrama de Penrose para $w = -1/3$ é idêntico ao da Fig.B.1(b), mantendo-se em mente que em \mathcal{I}^- o fator de escala se anula.

*

Curvatura espacial positiva

Universos com $K = -1$, por possuírem sessões espaciais abertas e infinitas como no caso $K = 0$, tem estrutura causal muito similar à descrita acima. Por outro lado, a topologia compacta dos espaços de Robertson-Walker com $K = 1$ leva a diagramas de Penrose diferentes e mais simples. De fato, a métrica de

FLRW no tempo conforme para $K = 1$ é simplesmente

$$ds^2 = a^2(\eta) ds_{\mathcal{E}}^2 \quad (\text{B.11})$$

(cf. Eq.(2.4)), logo o fator conforme é igual ao fator de escala — sem a contribuição Ω_M necessária para se compactificar as sessões espaciais infinitas dos universos abertos. Com isso, a porção de \mathcal{E} que descreve esses modelos cosmológicos é limitada apenas pelos zeros e infinitos de $a(\eta)$ que, sendo função apenas da coordenadas temporal $\eta = \tau$, leva sempre a fronteiras tipo-tempo e, portanto, a diagramas de Penrose que são sempre retângulos como na Fig.B.3. Sua largura π é sempre igual ao domínio de χ , viz. $\chi \in (0, \pi)$, com as linhas horizontais $\tau = \text{constante}$ percorrendo todo o círculo (dão a volta no cilindro de Einstein) e tendo topologia $S \times S^2 = S^3$ (lembre que cada ponto no diagrama sempre tem a topologia S^2); portanto as bordas verticais devem ser identificadas. A altura do retângulo fica determinada pelo domínio de $\tau \in (\tau_i, \tau_f)$ tal que $a(\tau_i)$ e $a(\tau_f)$ diverjam ou se anulem.

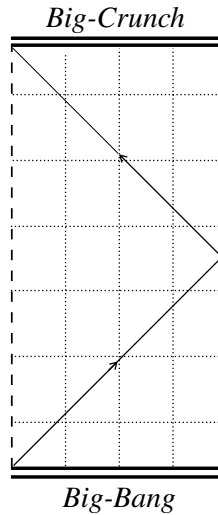


Figura B.3: Universo com $K = 1$ e $w = 0$.

Por exemplo, a solução para o fator de escala com $K = 1$ e preenchido por poeira, com $w = 0$, é

$$a = a_0(1 - \cos \eta), \quad (\text{B.12})$$

logo há um big-bang em $\eta_i = 0$ e um big-crunch em $\eta_f = 2\pi$ e a altura do

diagrama, $\eta_f - \eta_i = 2\pi$, é duas vezes maior que sua largura, como na Fig.B.3. Isso significa que uma geodésica nula, partindo da origem em um polo da esfera, em $\chi = 0$, durante o big-bang, chega no polo oposto — i.e. à outra borda do diagrama, que corresponde a $\{\chi = \pi\}$ — na metade da duração conforme do universo, em $\eta = \pi/2$, quando o fator de escala assume o seu valor máximo a_0 e depois começa a decrescer em direção ao big-crunch. No instante final η_f , a geodésica, após dar uma volta completa na seção espacial do universo, retorna ao ponto de partida $\chi = 0$.

Apêndice C

Calibres nas flutuações cósmicas

Suponha uma mudança de coordenadas infinitesimal (um difeomorfismo)

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x), \quad (\text{C.1})$$

com ϵ^μ de primeira ordem, i.e. $O[\epsilon^\mu] = O[h_{\mu\nu}] = O[\delta\rho] = O[\delta P]$, etc. Um campo tensorial $W_{\mu\nu}(x)$ sobre o espaço-tempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ é mapeado em um campo tensorial $W'_{\mu\nu}$ através da regra usual $W'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} W_{\alpha\beta}(x)$, mas, em primeira ordem,

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \delta_{\alpha\mu} - \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \epsilon^\alpha}{\partial x^\gamma} = \delta_{\alpha\mu} - \partial \epsilon^\alpha / \partial x^\mu,$$

e portanto

$$W'_{\mu\nu}(x') = W_{\mu\nu}(x) - \partial_\mu \epsilon^\alpha W_{\alpha\nu}(x) - \partial_\nu \epsilon^\beta W_{\mu\beta}(x). \quad (\text{C.2})$$

Por outro lado, sendo $x' = x + \epsilon$, podemos expandir o lado esquerdo da última equação acima em uma série de Taylor ao redor de x ,

$$W'_{\mu\nu}(x') = W'_{\mu\nu}(x + \epsilon) = W'_{\mu\nu}(x) + \epsilon^\alpha \partial_\alpha W'_{\mu\nu}(x), \quad (\text{C.3})$$

sempre em primeira ordem. Juntando (C.2) e (C.3), temos a diferença dos dois

campos tensoriais avaliados no mesmo ponto x do espaço-tempo,

$$W'_{\mu\nu}(x) - W_{\mu\nu}(x) = -\epsilon^\alpha \partial_\alpha W'_{\mu\nu} - W_{\alpha\nu} \partial_\mu \epsilon^\alpha - W_{\mu\beta} \partial_\nu \epsilon^\beta. \quad (\text{C.4})$$

Vista desta forma, como a comparação entre os campos \mathbf{W} e \mathbf{W}' em um mesmo ponto, o difeomorfismo (C.1) é chamado de transformação *ativa* do espaço-tempo; se encarado como uma troca de coordenadas usual, diz-se que se trata de uma transformação *passiva*.

Separando o tensor original entre um “tensor de fundo”, $\bar{W}_{\mu\nu}$, e uma perturbação de primeira ordem, $\delta W_{\mu\nu}$, com $O[\delta W_{\mu\nu}] = O[\epsilon^\mu]$, podemos escrever o tensor transformado \mathbf{W}' com uma separação semelhante:

$$W'_{\mu\nu}(x) = \bar{W}_{\mu\nu}(x) + \delta W_{\mu\nu}(x) + \Delta\delta W_{\mu\nu}(x) \quad (\text{C.5})$$

ou seja: $\Delta\delta W_{\mu\nu}(x) \equiv W'_{\mu\nu}(x) - W_{\mu\nu}(x)$, usando o *mesmo* tensor de fundo, e alocando a diferença toda na parte relativa à perturbação. Isso é possível uma vez que de acordo com a Eq.(C.4) a variação $\Delta\delta W_{\mu\nu}$ é uma grandeza da mesma ordem que $\delta W_{\mu\nu}$, $O[\Delta\delta W_{\mu\nu}] = O[\delta W_{\mu\nu}]$. Repare que *o símbolo Δ indica uma variação devida ao difeomorfismo, e **não** uma perturbação da perturbação*. Substituindo a Eq.(C.5), que serve como uma *definição* de $\Delta\delta W_{\mu\nu}$, na Eq.(C.4), temos¹

$$\Delta\delta W_{\mu\nu}(x) = -\epsilon^\alpha \partial_\alpha \bar{W}_{\mu\nu} - \bar{W}_{\alpha\nu} \partial_\mu \epsilon^\alpha - \bar{W}_{\mu\beta} \partial_\nu \epsilon^\beta. \quad (\text{C.6})$$

Esta transformação é dita uma ‘*transformação de calibre*’.

A Teoria da Relatividade Geral é, por construção, invariante sob difeomorfismos. Em outras palavras, qualquer sistema de coordenadas no espaço-tempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ é tão bom quanto qualquer outro para descrever fenômenos físicos — e portanto a ambiguidade na definição das perturbações de $W_{\mu\nu}$ corresponde a uma ambiguidade na descrição de grandezas físicas: por exemplo, a separação entre a métrica de fundo $\bar{g}_{\mu\nu}$ e a perturbação $h_{\mu\nu}$ é arbitrária. Podemos encontrar um novo sistema de coordenadas onde a métrica *não está perturbada*, i.e. onde $\Delta h_{\mu\nu} = -h_{\mu\nu}$. Vice-versa: se temos um tensor que consideramos perturbado, isso que vemos como uma perturbação pode ser simplesmente fruto de uma escolha desajeitada do sistema de coordenadas. Em suma, todas as flutuações dos §§4.1 e 4.1, separadas na “parte FRW + flutuações”, possuem interpretação física ambígua. A métrica $g_{\mu\nu}(x)$, vista em um sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$, descreve

¹O que fizemos aqui, na realidade, foi nada menos que calcular a derivada de Lie do campo $W_{\mu\nu}$; viz. $\mathcal{L}_\epsilon W_{\mu\nu} = \Delta\delta W_{\mu\nu}$.

o campo gravitacional; com uma troca de coordenadas para um novo sistema $\{x'^\mu\}$ a métrica assume uma nova forma $g'_{\mu\nu}(x')$ que também descreve o *mesmo* campo gravitacional. Sendo $g_{\mu\nu}$ um campo tensorial do mesmo tipo que $W_{\mu\nu}$, sua variação devida ao difeomorfismo é dada pela Eq.(C.6), i.e.

$$\Delta h_{\mu\nu} = -\epsilon^\alpha \partial_\alpha \bar{g}_{\mu\nu} - \bar{g}_{\alpha\nu} \partial_\mu \epsilon^\alpha - \bar{g}_{\mu\beta} \partial_\nu \epsilon^\beta. \quad (\text{C.7})$$

Por sua vez, o tensor de energia-momento também se transforma de acordo com a Eq.(C.6), o que mantém as equações de Einstein invariantes:

$$\Delta \delta T_{\mu\nu} = -\epsilon^\alpha \partial_\alpha \bar{T}_{\mu\nu} - \bar{T}_{\alpha\nu} \partial_\mu \epsilon^\alpha - \bar{T}_{\mu\alpha} \partial_\nu \epsilon^\alpha. \quad (\text{C.8})$$

Até agora não usamos em momento algum o fato de ser $\bar{\mathbf{g}}$ a métrica de FRW (ou qualquer outra métrica). Voltando ao contexto cosmológico podemos escrever explicitamente as componentes das transformações de calibre $\Delta h_{\mu\nu}$ dadas por (C.7), a saber

$$\Delta h_{00} = -2 \dot{\epsilon}_0 ; \quad (\text{C.9a})$$

$$\Delta h_{0j} = 2H\epsilon_j - \dot{\epsilon}_j - \partial_j \epsilon_0 ; \quad (\text{C.9b})$$

$$\Delta h_{ij} = 2a\dot{a} \epsilon_0 \delta_{ij} - \partial_i \epsilon_j - \partial_j \epsilon_i . \quad (\text{C.9c})$$

Aqui, os índices de ϵ^μ são abaixados com a métrica de fundo (uma vez que ϵ^μ já é de primeira ordem), i.e. $\epsilon_\mu = \bar{g}_{\mu\nu} \epsilon^\nu$, logo

$$\epsilon_0 = -\epsilon^0 ; \quad \epsilon_j = a^2 \epsilon^j. \quad (\text{C.10})$$

Com o tensor de energia-momento não-perturbado sendo o de um fluido perfeito, Eq.(4.4), temos

$$\Delta \delta T_{00} = 2\bar{\rho} \dot{\epsilon}_0 + \dot{\bar{\rho}} \epsilon_0 ; \quad (\text{C.11a})$$

$$\Delta \delta T_{0j} = 2H\bar{P} \epsilon_j + \bar{\rho} \partial_j \epsilon_0 - \bar{P} \dot{\epsilon}_j ; \quad (\text{C.11b})$$

$$\Delta \delta T_{ij} = \partial_0(a^2 \bar{P}) \epsilon_0 \delta_{ij} - \bar{P} (\partial_i \epsilon_j + \partial_j \epsilon_i). \quad (\text{C.11c})$$

Podemos decompor a parte espacial do vetor ϵ^μ em modos escalar e vetorial

como no §4.1; defina a função escalar ϵ^S e o vetor sem divergência¹ ϵ_i^V tais que

$$\epsilon_i = \partial_i \epsilon^S + \epsilon_i^V; \quad \text{com} \quad \partial_i \epsilon_i^V = 0. \quad (\text{C.12})$$

Com isso as Eqs.(C.9) fornecem as transformações das funções A , B , C_i , D_{ij} , E , F e G_j em que decompomos a perturbação da métrica (4.3). Temos

$$\Delta A = 2H \epsilon_0; \quad \Delta B = -2a^{-2} \epsilon^S; \quad \Delta C_j = -a^{-2} \epsilon_j^V; \quad (\text{C.13a})$$

$$\Delta D_{ij} = 0; \quad \Delta E = 2\dot{\epsilon}_0; \quad (\text{C.13b})$$

$$\Delta F = a^{-1} (2H \epsilon^S - \epsilon_0 - \dot{\epsilon}^S); \quad \Delta G_j = a^{-1} (2H \epsilon_j^V - \dot{\epsilon}_j^V). \quad (\text{C.13c})$$

Da mesma forma, as Eqs.(4.4) dão a transformação das perturbações do tensor de energia-momento (4.6):

$$\Delta \delta P = \dot{P} \epsilon_0; \quad \Delta \delta \rho = \dot{\rho} \epsilon_0; \quad \Delta \delta U = -\epsilon_0; \quad \Delta \delta U_j^V = 0. \quad (\text{C.14a})$$

Há duas maneiras de tratar perturbações adequadamente: ou se trabalha apenas com combinações de grandezas que sejam invariantes de calibre, ou se escolhe um calibre (i.e. um sistema de coordenadas) e se permanece com ele até o fim — é isto que se faz no texto ao se adotar o calibre de Newton. Repare que a partir da forma geral (4.3) se chega ao calibre de Newton, em que $E = 2\Phi$ e $A = -2\Psi$, da seguinte forma: Escolhendo ϵ^S , fixamos ΔB de modo a ter $B = 0$. Dado esse ϵ^S , escolhemos ϵ_0 e fixamos ΔF de modo a ter $F = 0$. (Se \tilde{B} e \tilde{F} são as funções antes da mudança de coordenadas que acarreta na mudança de calibre, o que desejamos é fazer $\Delta B = -\tilde{B}$ e $\Delta F = -\tilde{F}$. É imediato ver das Eqs.(C.13) que isto dá $\epsilon^S = \frac{1}{2}a^2 \tilde{B}$ e $\epsilon_0 = a\tilde{F} - \frac{1}{2}a^2 \dot{\tilde{B}}$. Estas fórmulas não têm muita serventia, entretanto, o importante é que é sim possível fazer com que as novas funções B e F se anulem.)

¹Cf. discussão após Eqs.(4.3).

Apêndice D

O espaço-tempo de de Sitter

D.1 Geometria

O espaço de de Sitter, dS_4 , é o espaço-tempo com curvatura constante positiva $R = 12/L^2$. Trata-se de um espaço-tempo com simetria máxima: possui 10 vetores de Killing. (Assim, como a esfera, o plano e o espaço hiperbólico são os espaços Riemannianos com curvatura constante e simetria máxima, de Sitter, Minkowski e Anti-de Sitter são os espaços-tempos correspondentes.)

A estrutura global é a de um hiperbolóide de uma folha embebido no espaço de Minkowski em 5 dimensões, Fig.D.1, deixando evidente a invariância sob a ação do grupo de simetria $SO(4,1)$, como descrito abaixo. Se $\{X^A\}$ são coordenadas em $M^{(4,1)}$, o hiperbolóide de uma folha de raio L é definido por

$$\mathcal{H} : -(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 + (X^4)^2 = L^2. \quad (\text{D.1})$$

A geometria intrínseca de dS_4 é obtida parametrizando-se o hiperbolóide com diferentes conjuntos de coordenadas $\{x^\mu\}$ tais que $X^A(x)$ satisfaçam a Eq.(D.1), e a métrica, em cada sistema de coordenadas, é induzida pela métrica de Minkowski sobre \mathcal{H} , ou seja, é tal que

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \{-(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 + (dX^4)^2\}_{\mathcal{H}}$$

com os X^A sujeitos à Eq.(D.1). Há três parametrizações principais.

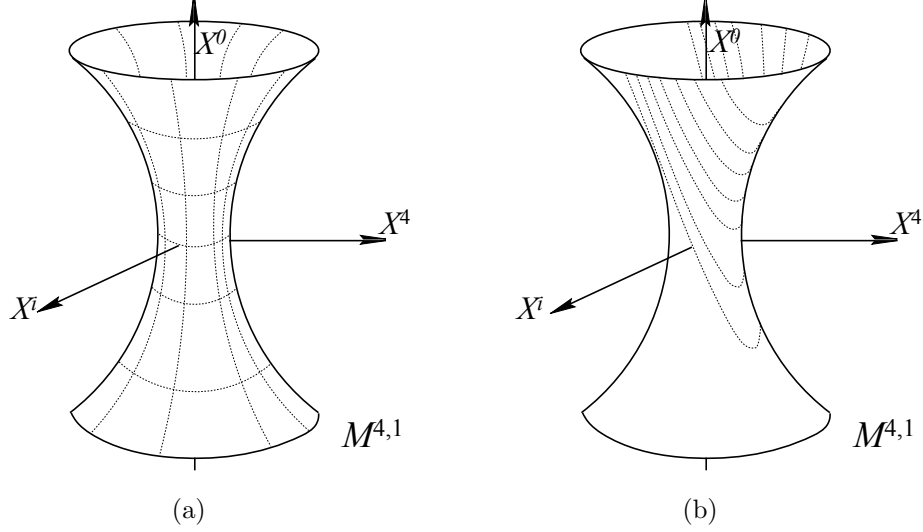


Figura D.1: Hiperbolóide (D.1) que descreve o espaço de de Sitter dS_4 embebido no espaço de Minkowski 5-dimensional $M^{4,1}$. (a) Folheação esférica (global); (b) Folheação plana (inflacionária).

(i) *Folheação esférica.*

Definindo $\{x^\mu\}$ tais que $X^0 = L \sinh(t/L)$ e $X^a = L \cosh(t/L)\omega^a$, onde ω^a , com $a = 1, 4$, parametrizam¹ a 3-esfera, folheia-se o hiperbolóide transversalmente como na Fig.D.1(a). Há uma correspondência unívoca entre cada círculo $\{X^0 = \text{constante}\}$ na Fig.D.1(a) e os valores de t , logo as superfícies com t constante, são esferas $S^3 \in M^{(4,1)}$, com raio $L \cosh t/L$. Isto também pode ser visto a partir das

¹As coordenadas angulares θ^a , $a = 1, \dots, D-1$, sobre a esfera S^{D-1} , com domínio

$$0 < \theta^k < \pi, \quad \text{para } k = 1, \dots, D-2, \quad \text{e } 0 < \theta^{D-1} < 2\pi,$$

são parametrizadas por

$$\omega^1 = \cos \theta^1, \quad \omega^2 = \sin \theta^1 \cos \theta^2, \quad \omega^3 = \sin \theta^1 \sin \theta^2 \cos \theta^3, \dots, \quad \omega^D = \sin \theta^1 \sin \theta^2 \dots \sin \theta^{D-1}.$$

É imediato verificar que $\sum_{i=1}^D (\omega^i)^2 = 1$. No caso simples de S^2 , temos as coordenadas azimutal, $\theta^1 \equiv \theta$, e polar, $\theta^2 \equiv \phi$. O elemento de linha sobre S^{D-1} é $do^2 = \sum_{i=1}^D (d\omega^i)^2$, que com a condição de normalização dos ω se torna

$$do^2 = (d\theta^1)^2 + \sin^2 \theta^1 (d\theta^2)^2 + \dots + \sin^2 \theta^1 \sin^2 \theta^2 \dots \sin^2 \theta^{D-2} (d\theta^{D-1})^2.$$

seções espaciais da métrica induzida sobre o hiperbolóide,

$$ds^2 = -dt^2 + L^2 \cosh^2(t/L) [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (\text{D.2})$$

Essa é uma métrica para um espaço de Roberston-Walker com curvatura $K = 1$; o fator de escala começa indefinidamente grande em $t = -\infty$ e decresce até o valor mínimo $a = L$ em $t = 0$ (a garganta do hiperbolóide), para depois voltar a crescer e divergir em $t \rightarrow +\infty$. As coordenadas cobrem *todo* o espaço dS_4 , no sentido de que o domínio de cada um dos X^A é $X^0 \in (-\infty, +\infty)$ e $X^a \in [L, \infty)$. Este é portanto um sistema de coordenadas ‘global’. O diagrama conforme, típico de uma cosmologia de FLRW com curvatura positiva (cf. §B.2) é o quadrado visto na Fig.D.2(a). Cada ponto tem a topologia de S^2 , e as linhas horizontais $\{t = \text{constante}\}$ são, na verdade, um círculo esticado correspondendo à coordenada angular $\chi \in (0, \pi)$. Cada linha vertical corresponde à linha-de-mundo de um observador em $\chi = \text{constante}$.

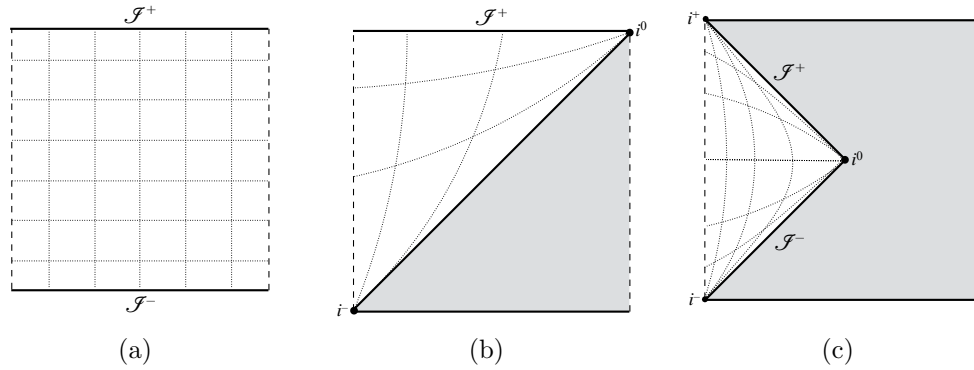


Figura D.2: de Sitter em três sistemas de coordenadas. (a) Coordenadas globais (D.2); (b) Coordenadas inflacionárias (D.4); (c) Coordenadas estáticas (D.6).

(ii) *Folheação plana.*

Definindo $\{t, x^i\}$ tais que

$$X^0 = L \sinh t/L + \frac{1}{2L} e^{t/L} \delta_{ij} x^i x^j, \quad X^4 = L \cosh t/L - \frac{1}{2L} e^{t/L} \delta_{ij} x^i x^j, \quad (\text{D.3a})$$

$$X^i = e^{t/L} x^i, \quad \text{com } i = 1, 2, 3, \quad (\text{D.3b})$$

temos um sistema de coordenadas que cobre apenas *metade* do hiperbolóide, já que $X^4 + X^0 = L e^{t/L} > 0$. As superfícies $\{t = \text{constante}\}$ folheiam a metade do

hiperbolóide em hipérboles oblíquas como na Fig.D.1(b). A métrica induzida é

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2t/L} d\mathbf{x}^2, \quad (\text{D.4})$$

do tipo Robertson-Walker com $K = 0$, que é a solução (2.41) das equações de Einstein na presença apenas de uma constante cosmológica

$$\Lambda = 3/(\kappa^2 L^2), \quad \text{e com fator de Hubble constante } H = 1/L. \quad (\text{D.5})$$

Corresponde a um universo que se expande exponencialmente desde $t = -\infty$ até $t = +\infty$, e funciona como limite de um espaço-tempo inflacionário, cf. §3.3.1. A expansão acelerada faz com que o diagrama de Penrose tenha a forma da Fig.B.2(b). Assim como a folheação cobre apenas metade de \mathcal{H} , o diagrama conforme cobre apenas metade do quadrado observado nas coordenadas globais, como indicado na Fig.D.2(b). A superfície nula $\{t = -\infty\}$ que serve de limite para o diagrama nas coordenadas planas é um horizonte de eventos estático para um observador na origem.

No tempo conforme η , o fator de escala é dado por $-1/H\eta = e^{Ht}$, que determina também $t(\eta)$. O futuro infinito \mathcal{I}^+ se encontra em $\eta = 0$ (correspondendo a $t = \infty$), logo em η se pode fazer uma expansão ao redor de \mathcal{I}^+ , tornando-o uma coordenada particularmente útil para o estudo da borda de dS_4 . Fazendo a mudança de coordenadas nas Eqs.(D.3), temos a parametrização de \mathcal{H}

$$\begin{aligned} X^0 &= \frac{L}{2} (\eta/L - L/\eta) - \frac{1}{2} \delta_{ij} x^i x^j / \eta, \\ X^4 &= -\frac{L}{2} (\eta/L + L/\eta) + \frac{1}{2} \delta_{ij} x^i x^j / \eta, \\ X^i &= Lx^i / \eta, \quad \text{com } i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

(iii) *Folheação estática.*

A existência do horizonte de eventos fica mais evidente no sistema de coordenadas $\{t, r, \theta, \phi\}$ com

$$X^0 = L(1 - r^2/L^2)^{1/2} \sinh t/L, \quad X^4 = L(1 - r^2/L^2)^{1/2} \cosh t/L, \quad X^i = r\omega^i.$$

A métrica assume então a forma estática (não há presença de t em $g_{\mu\nu}$)

$$ds^2 = -(1 - r^2/L^2)dt^2 + (1 - r^2/L^2)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2, \quad (\text{D.6})$$

que possui a mesma estrutura da métrica de um buraco negro de Schwarzschild

$$ds^2 = -(1 - r_S^2/r^2)dt^2 + (1 - r_S^2/r^2)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2,$$

com L fazendo o papel análogo ao raio de Schwarzschild r_S onde se localiza o horizonte de eventos do buraco negro (caracterizados pelo anulamento das expressões em parênteses, coeficientes de dt^2). Mas note a diferença fundamental: enquanto em Schwarzschild $r > r_S$, em de Sitter $r < L$ logo o sistema de coordenadas estáticas de de Sitter corresponde ao *interior* do horizonte de eventos em $r = L$. Com isso, a parte do diagrama conforme correspondente é a quina no interior dos horizontes futuro e passado de um observador na origem, mostrada na Fig.D.2(c). (Mais uma vez, o sistema de coordenadas não cobre todo o hiperbolóide \mathcal{H} .)

Existem outras parametrizações possíveis (em particular, há um sistema de coordenadas em que a métrica tem a forma de Robertson-Walker com $K = -1$, logo, curiosamente, dS_4 contém os três tipos de curvatura possíveis num cenário cosmológico). Para mais detalhes sobre a geometria ver, e.g., [Hawking & Ellis \(1973\)](#); [Moschella \(2006\)](#).

D.2 Geodésicas

Através de uma continuação analítica $X^0 = i\tilde{X}^0$, o hiperbolóide (D.1) se torna uma esfera S^4 , de raio $L = 1/H$, embebida em R^5 . Denotemos essa esfera por EdS_4 (a partir de espaço ‘Euclidiano de de Sitter’). A projeção (i.e. o produto interno) do vetor $X^A \in R^5$ sobre o vetor X'^A , $\delta_{AB}X^AX'^B$, define o ângulo $\theta(X, X')$ entre ambos:

$$\delta_{AB}X^AX'^B = |X| \times |X'| \cos\theta(X, X'). \quad (\text{D.6})$$

As geodésicas sobre a esfera são seus grandes arcos (os meridianos), de modo que a distância geodética entre dois pontos X^A e X'^A em EdS_4 , formando entre si um ângulo θ , é $d(X, X') = L\theta(X, X')$. Usando (D.6), podemos escrever $d(X, X') = H^{-1}\text{Arc cos}(H^2\delta_{AB}X^AX'^B)$, já que $|X| = L = H^{-1}$ para $X \in EdS_4$. Desfazendo

a continuação analítica, voltamos a dS_4 e temos que o arco de geodésica sobre o hiperbolóide, separando os pontos $X^A, X'^A \in dS_4$, tem comprimento

$$\gamma(x, x') = H^{-1} \text{Arc cos} \left(H^2 \eta_{AB} X^A(x) X'^B(x') \right), \quad (\text{D.7})$$

onde x^μ indica um ponto sobre dS_4 , ou seja, com X^A restrito ao hiperbolóide. Note que o fato de η_{AB} não ser positiva definida faz com que o lado direito seja complexo para pontos separados por um distância tipo-tempo. Para evitar números imaginários, defina a função

$$z(x, x') \equiv \frac{1}{2} (1 + \cos H\gamma(x, x')). \quad (\text{D.8})$$

Explicitamente,

$$z(x, x') = \frac{1}{2} \left(1 + H^2 \eta_{AB} X^A(x) X'^B(x') \right), \quad (\text{D.9})$$

e calculando o quadrado da distância entre X e X' ,

$$(X - X')^2 = \eta_{AB} (X^A - X'^A)(X^B - X'^B) = 2(1 - z(x, x'))/H^2, \quad (\text{D.10})$$

portanto $z(x, x') < 1$ corresponde a uma separação tipo-espaço entre x^μ e x'^μ ; $z > 1$ a uma separação tipo-tempo; e se $z = 0$ ou 1 , então x^μ e x'^μ estão separados por uma distância nula.

No texto principal fazemos uso de z em coordenadas planas no tempo conforme. Usando a parametrização (D.6) na Eq.(D.10), após um pouco de álgebra a expressão se simplifica consideravelmente, resultando em

$$1 - z(x, x') = \frac{1}{4\eta\eta'} \left(-(\eta - \eta')^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 \right). \quad (\text{D.11})$$

Seja $f(z)$ uma função que só dependa dos pontos x e x' através da distância covariante. O operador de Laplace se torna o operador diferencial em z (cf. [Folacci \(1991\)](#))

$$\square f(z) = -H^2 \left[z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} + 2(1-2z) \frac{d}{dz} \right] f(z). \quad (\text{D.12})$$

Para a demonstração, fazemos a continuação analítica para EdS_4 ; nas coordenadas globais (D.2) que são as coordenadas usuais da esfera S^4 , com $r = it$

$$ds^2 = dr^2 + L^2 \cos^2(r/L) [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)],$$

o operador $\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ é simplesmente o Laplaciano em coordenadas esféricas,

$$\square = \partial_r^2 + 3 \cot r \partial_r + \sin^{-2} r \nabla_{S^3}^2, \quad (\text{D.13})$$

onde $\nabla_{S^3}^2$ é o Laplaciano em S^3 e fizemos $L = 1$. É evidente que a separação entre quaisquer pontos $x, x' \in S^4$ pode ser colocada em termos de, apenas, r , estando fixos os outros ângulos (qualquer segmento de grande arco na esfera pode ser usado para traçar o equador), assim se pode desconsiderar o último termo em (D.13). Sem perda de generalidade, os ângulos χ , θ e ϕ podem ser colocados todos iguais a zero. Assim, temos $X^0 = \sin r$ e $X^4 = \cos r$, de modo que a (versão Euclidiana da) Eq.(D.9) dá $z(x, x') = \frac{1}{2}(1 + \sin r \sin r' + \cos r \cos r')$. A mesma simetria permite que se fixe por fim um dos r sobre o equador; faça $r' = 0$, com isso $z = \frac{1}{2}(1 + \cos r)$. Efetuando essa troca de variáveis, o operador $\square = \partial_r^2 + 3 \cot r \partial_r$ fica escrito em termos de z como $\square = -[z(1-z)(d^2/dz^2) + 2(1-2z)(d/dz)]$. Devolvendo $L = 1/H$, esta é a fórmula (D.12). Escrita desta forma, trata-se de uma equação explicitamente covariante, então válida em qualquer sistema de coordenadas, e desfazendo a continuação analítica escrevemos \square em dS_4 como função de $z(x, x')$.

Apêndice E

Teorias Conformes

Um ‘*transformação conforme*’ entre dois espaços(-tempos) $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ e $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathbf{g}})$ é tal que a métrica é preservada a menos de um ‘*fator conforme*’ multiplicativo:

$$\tilde{g}_{ab}(\tilde{x}) = \Omega^2(x)g_{ab}(x). \quad (\text{E.1})$$

Assim, enquanto uma transformação de coordenadas (um difeomorfismo) deixa invariantes as distâncias $g_{ab}(x^a - y^a)(x^b - y^b)$ entre os pontos x^a e y^a , uma transformação conforme (um ‘conformofismo’) preserva apenas *ângulos* entre direções.

Vamos nos concentrar nos espaços planos R^n e $M^{(n-1),1}$, com $g_{ab} = \delta_{ab}$ ou η_{ab} , e dimensão $n > 2$. Efeitos de transformações conformes em espaços-tempos curvos são descritos no Apêndice H. Aqui usamos índices latinos tanto para espaços Euclidianos quanto pseudo-Euclidianos.

E.1 Transformações conformes de R^n e $M^{(n-1),1}$

As transformações conformes de um espaço(-tempo) com dimensão $n \geq 3$ são composições de três operações fundamentais:

1. Difeomorfismos usuais, que preservam o produto interno $g_{ab}x^ax^b$, e que tem fator conforme trivial $\Omega^2 = 1$. No espaço Euclidiano estes são as rotações e translações de R^n ; no espaço de Minkowski, as transformações de Poincaré.

Estas transformações têm a forma geral

$$x^i \mapsto x'^i = R^i_j x^j + a^i, \quad R^i_j \in O(n) \text{ (ou } O(n-1,1)). \quad (\text{E.2})$$

2. Dilatações: o fator conforme é uma *constante*, $\Omega = 1/\lambda > 0$. Trata-se, portanto, de um rescalamento global das coordenadas:

$$x^a \mapsto x'^a = \lambda x^a, \quad \lambda > 0. \quad (\text{E.3})$$

3. ‘Transformações conformes especiais’: a transformação não trivial das coordenadas de um espaço-tempo que satisfaz a condição (E.1) é

$$x^a \mapsto x'^a = \frac{x^a - b^a x^2}{1 - b_i x^i + b^2 x^2}, \quad (\text{E.4})$$

para a qual o fator conforme tem a forma

$$\Omega^2(x) = (1 - 2b_i x^i + b^2 x^2)^2. \quad (\text{E.5})$$

Pode-se interpretar mais facilmente o significado de (E.4) reescrevendo-a,

$$x'^i/x'^2 = -b^i + x^i/x^2; \quad (\text{E.6})$$

ou seja, uma inversão ($x \mapsto 1/x$) seguida de uma translação por um vetor b^i com dimensão $[b] = [1/x]$.

Podemos sistematizar as transformações conformes (E.2)-(E.5) escrevendo

$$x^a \mapsto x'^a = [\mathcal{R}_\Omega]^a_b x^b, \quad \text{com} \quad [\mathcal{R}_\Omega]^a_b(x) = \Omega^{-1}(x) (\partial x'^a / \partial x^b), \quad (\text{E.7})$$

e a condição

$$g_{ab} dx'^a dx'^b = \Omega^2 g_{ab} dx^a dx^b \quad \text{requer} \quad [\mathcal{R}_\Omega]^c_a [\mathcal{R}_\Omega]^c_b = g_{ab}. \quad (\text{E.8})$$

A última igualdade é simplesmente $\mathcal{R}^T \cdot \mathcal{R} = 1$, logo $\mathcal{R} \in O(n)$. Isso deixa evidente que as transformações conformes formam um grupo (que *não* é, todavia,

$O(n)$). Para $\Omega = 1$, $[\mathcal{R}_1]_b^a$ são as translações e rotações (E.2) formando o grupo $O(n) \times T_n$. Para dilatações, temos simplesmente

$$[\mathcal{R}_D]_b^a = \lambda \delta_b^a \quad \text{para dilatações com } \Omega = 1/\lambda. \quad (\text{E.9})$$

As transformações conformes especiais não podem ser representadas diretamente na forma (E.7) porque não são transformações lineares, mas sendo, entretanto, equivalentes a uma composição de translações com inversões, cf. Eq.(E.6), é suficiente que haja uma matriz $[\mathcal{R}_\Omega]_b^a$ correspondendo a estas últimas. A matriz desejada, $[\mathcal{R}_I]_b^a(x) \equiv I_b^a(x)$, é

$$I^{ab}(x) = g^{ab} - \frac{2}{x^2} x^a x^b. \quad (\text{E.10})$$

É imediato ver que $x'^a = I^a_b x^b = x^a/x^2$. É fácil verificar que $I^a_b \in O(n)$. Note que $\text{Det } I = -1$ e, como era de se esperar, a inversão não pode ser deformada na matriz identidade, mas uma transformação conforme especial, sendo uma composição de duas inversões (e uma translação), sim.

As fórmulas (E.2)-(E.5) são obtidas através da integração (exponenciação) das transformações infinitesimais correspondentes, que são por sua vez induzidas por uma transformação de coordenadas $x'^i = x^i + \epsilon^i(x)$, sob a qual a métrica $g'_{ij} = (\partial x^a / \partial x'^i)(\partial x^b / \partial x'^j) g_{ab}$ fica $g'_{ij} = g_{ij} - (\partial_i \epsilon_j + \partial_j \epsilon_i) = \Omega^2 g_{ij}$, logo

$$\partial_i \epsilon_j + \partial_j \epsilon_i = f(x) g_{ij} \quad \text{com } f = (2/n) \partial_i \epsilon^i.$$

A última equação se obtém do traço da anterior. Derivando a primeira das equações acima se obtém uma relação entre as derivadas segundas de ϵ_i e a derivada primeira de f , que levam a

$$(n-1)(n-2) \partial_i \partial_j f = 0, \quad \text{e, tomando o traço, } \partial^2 f = 0.$$

Portanto, para $n \geq 3$, f deve ser no máximo uma função linear em x , e por consequência ϵ_μ deve ser quadrática. Com alguma manipulação, se chega à seguinte decomposição

$$\epsilon_i = a_i - \omega_{ij} x^j + \lambda x_i - (b_i x^2 - 2x_i b_j x^j), \quad (\text{E.11})$$

com $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. Aqui, os parâmetros são todos infinitesimais, e sua exponenciação dá origem às transformações finitas (E.2)-(E.4). O primeiro termo, de ordem zero em x , dá origem às translações, e o segundo termo, proporcional a ω , dá as transformações de Lorentz quando exponenciado. O termo λx_i dá origem às dilatações e por fim o termo não linear entre parênteses gera as transformações conformes especiais.

E.2 Álgebra de Lie

Uma ‘álgebra de Lie’ é um espaço vetorial \mathcal{V} munido de uma operação interna bilinear, antisimétrica, chamada de ‘parênteses de Lie’, ou ‘comutador’, denotada por $[\cdot, \cdot]$, e que obedece a identidade de Jacobi:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0, \quad (\text{E.12})$$

para $A, B, C \in \mathcal{V}$. Dois exemplos típicos são $\mathcal{V} = R^3$, com $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$; e \mathcal{V} igual ao espaço $M(R, n)$ das matrizes reais $n \times n$, com $[A, B] = AB - BA$.

Inserindo uma métrica em $M(R, n)$, um grupo de Lie G pode ser encarado como uma superfície suave neste espaço. Os vetores (que para grupos matriciais como $\text{SO}(n)$, $\text{SO}(m, n)$, etc., são também matrizes) no espaço tangente \mathcal{T}_G ao redor da origem (i.e. da matrix identidade I) são chamados de ‘geradores’ de G , uma vez que para $X \in \mathcal{T}_G$ o mapa exponencial $\exp X$ dá uma matriz em G , e portanto X é uma transformação infinitesimal correspondente a um elemento de G . (O mapa exponencial de uma matriz X é definido como a série de potências $\exp X = 1 + \frac{1}{1!}X + \frac{1}{2!}X^2 + \dots$.) Para cada grupo G , os vetores geradores devem obedecer algumas condições. Por exemplo, se $G = \text{SO}(n)$, então os geradores X são matrizes $n \times n$ antisimétricas. O espaço tangente \mathcal{T}_G ao redor da identidade, munido com os parênteses de Lie na forma do comutador das matrizes em \mathcal{T}_G , forma uma ‘álgebra de Lie, \mathfrak{g} , do grupo G ’, completamente caracterizada pelos parênteses de Lie de seus elementos, que deve ser uma operação fechada, isto é, seu resultado é uma combinação linear de vetores $X_a \in \mathfrak{g}$, $[X_a, X_b] = f_{ab}^c X_c$, determinada pelas ‘constantes de estrutura’ f_{ab}^c .

Pode-se representar os geradores de uma álgebra de Lie através de um campo vetorial em R^n associando a cada elemento $X \in \mathfrak{g}$ o ‘campo vetorial linear’ $V_X \in R^n$ tal que para $x \in R^n$ $V_X^i(x) = X^i_j x^j$. Este campo define um conjunto de curvas integrais às quais é tangente, parametrizadas por algum parâmetro $t \in R$,

e determinadas pela equação diferencial

$$dx^i/dt = -X^i_j x^j(t), \quad \text{cuja solução é imediata: } x(t) = \exp(-tX)x_0, \quad (\text{E.13})$$

sendo $x_0 \equiv x(0)$. Isso permite representar os geradores de G como *operadores diferenciais*. Para uma transformação infinitesimal de R^n induzida pelo gerador X e parametrizada por t , a Eq.(E.13) mostra que o ponto x é mapeado em

$$\delta x^i = x'^i - x^i = -(\hat{X} \cdot x^i) \delta t. \quad (\text{E.14})$$

Por exemplo, para uma translação infinitesimal, $x'^i = x^i + a^i \delta t$, é imediato ver que $\hat{X} = -a^i \partial_i$; para uma rotação infinitesimal, $x'^i = x^i + \delta t \omega^{ij} x_j$, com ω_{ij} antisimétrica, logo $\hat{X} = -\omega^{ij} \frac{1}{2} (x_i \partial_j - x_j \partial_i)$. Não é difícil verificar a validade de (E.13); por exemplo uma translação finita é obtida do gerador $-a^i \partial_i$ pelo mapa exponencial

$$\exp(ta^j \partial_j) x^i \equiv \left(1 + ta^j \partial_j + \frac{1}{2} t^2 a^k \partial_k (a^j \partial_j) + \dots\right) x^i = x^i + ta^j \delta_j^i + 0 = x^i + ta^i.$$

É costume redefinir os geradores trocando (E.14) por

$$x'^i = (1 + i\epsilon^A T_A) x^i, \quad (\text{E.15})$$

onde A é um conjunto de índices e ϵ^A um conjunto de parâmetros infinitesimais. Por exemplo, no caso da translação acima, $i\epsilon_A = a^i \delta t$, e $T_A = -i\partial_i$. Com essa convenção, para as transformações infinitesimais do grupo conforme (E.11), a representação dos geradores como operadores diferenciais é

$$\begin{aligned} J_{ab} &= i(g_{ac} x^c \partial_b - g_{bc} x^c \partial_a) \\ P_a &= -i\partial_a \\ D &= -ix^a \partial_a \\ K_a &= -i(2g_{ac} x^c x^b \partial_b - g_{bc} x^b x^c \partial_a). \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Para transformações conformes do espaço Euclidiano R^n , $g_{ab} = \delta_{ab}$ é a métrica de Euclides, e J_{ab} são os geradores das rotações. Mas as fórmulas acima são válidas também em espaços pseudo-Euclidianos $R^n_{(p,q)}$, como por exemplo Minkowski $M^{(3,1)} \equiv R^4_{(1,3)}$, em que $g_{ab} = \eta_{ab}$, e J_{ab} são então transformações de

Lorentz. Vale verificar como D gera as dilatações finitas. Usando (E.13),

$$\begin{aligned}\exp(itD)x^i &\equiv (1 + tx^j \partial_j + \frac{1}{2}t^2 x^k \partial_k (x^j \partial_j) + \dots)x^i = \\ &= x^i + tx^i + \frac{1}{2}t^2 x^k \partial_k (x^j \delta_j^i) + \dots = e^t x^i,\end{aligned}$$

que é (E.3) com $\lambda = e^t$. Por fim, a álgebra de Lie dos geradores (E.16) pode ser obtida aplicando-se seu comutador sobre uma função f em R^n ; após um cálculo tedioso se chega a

$$\begin{aligned}[J_{ab}, J_{cd}] &= -i(g_{ac}J_{cd} - g_{bc}J_{ad} + g_{ad}J_{cb} - g_{bd}J_{ca}) ; \\ [J_{ab}, P_c] &= -i(g_{ac}P_b - g_{bc}P_a) ; \quad [J_{ab}, K_c] = -i(g_{ac}K_b - g_{bc}K_a) ; \\ [P_a, K_b] &= -2i(g_{ab}D + J_{ab}) ; \quad [P_a, D] = -iP_a ; \quad [K_a, D] = iK_a ; \\ [J_{ab}, D] &= [P_a, P_b] = [K_a, K_b] = 0.\end{aligned}\tag{E.17}$$

Repare que os comutadores da álgebra de Poincaré, J_{ab} e P_a , junto com o operador de dilatação D , formam uma subálgebra fechada, sendo então possível uma teoria ser covariante e invariante de escala, mas não invariante sob transformações conformes especiais.

E.3 Campos conformes

A variação de um campo (clássico) $\Phi(x)$ sob uma transformação induzida por (E.16) fornece uma nova representação do Grupo Conforme em termos dos operadores G_A tais que

$$\Phi'(x') = (1 - i\epsilon_A G^A)\Phi(x).$$

O apóstrofo em Φ' indica que o grupo conforme age não somente sobre as coordenadas mas também sobre o próprio campo. Por exemplo, se Φ é um campo vetorial, a atuação do subgrupo $\text{SO}(n)$ (ou $\text{SO}(n-1, 1)$) induz uma rotação (ou transformação de Lorentz). Em geral, $\Phi_{\mathcal{I}}(x)$ possui um índice spinorial \mathcal{I} sobre o qual atua uma representação de $\text{O}(n)$ (ou $\text{SO}(n-1, 1)$). Para encontrar a representação G^A é útil usar um método de indução (ver, e.g., Francesco *et al.* (2012)), em que primeiro consideramos a transformação do campo *sem mudança de coordenadas*. Escolhendo como ponto fixo a origem $x = 0$, a ação dos geradores

sobre o campo $\Phi(0)$ (que é dito um ‘campo primário’) é

$$\begin{aligned} J_{ab}^{\mathcal{I}} \Phi_{\mathcal{I}}(0) &= S_{ab}^{\mathcal{I}} \Phi_{\mathcal{I}}(0), \\ D\Phi_{\mathcal{I}}(0) &= \tilde{\Delta} \Phi_{\mathcal{I}}(0), \\ K_a \Phi_{\mathcal{I}}(0) &= \kappa_a \Phi_{\mathcal{I}}(0). \end{aligned}$$

Para formar uma representação do grupo conforme, os operadores κ_a , $\tilde{\Delta}$ e $S_{ab}^{\mathcal{I}}$ satisfazem a álgebra (E.17), mas para $P_a = 0$, i.e.

$$\begin{aligned} [S_{ab}^{\mathcal{I}}, S_{cd}^{\mathcal{I}}] &= -i (g_{ac} S_{cd}^{\mathcal{I}} - g_{bc} S_{ad}^{\mathcal{I}} + g_{ad} S_{cb}^{\mathcal{I}} - g_{bd} S_{ca}^{\mathcal{I}}) ; \\ [S_{ab}^{\mathcal{I}}, \kappa_c] &= -i (g_{ac} \kappa_b - g_{bc} \kappa_a) ; \\ [\kappa_a, \tilde{\Delta}] &= i \kappa_a ; \quad [S_{ab}^{\mathcal{I}}, \tilde{\Delta}] = [\kappa_a, \kappa_b] = 0. \end{aligned} \tag{E.18}$$

Uma vez que $[S_{ab}^{\mathcal{I}}, \tilde{\Delta}] = 0$, pode-se mostrar que $\tilde{\Delta} \equiv -i\Delta I$ é um múltiplo da matriz identidade I , o que por sua vez força $\kappa_a = 0$ (já que $[\kappa_a, \tilde{\Delta}] = i\kappa_a$).

Para encontrar a ação dos geradores sobre $\Phi(x)$, fora da origem, se utiliza o gerador de translações P_a , já que $\Phi(x) = \exp(-ix^a P_a) \Phi(0)$. Assim, em x , cada operador O atua como $\exp(ix^a P_a) O \exp(-ix^a P_a)$, o que pode ser avaliado usando a álgebra (E.17) (e a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff), e.g. $\exp(-ix^a P_a) D \exp(ix^a P_a) = D + x^a P_a$. Calculando as translações de J_{ab} e K_a , chegamos a

$$\begin{aligned} J_{ab}^{\mathcal{I}} \Phi_{\mathcal{I}}(x) &= [i(x_a \partial_b - x_b \partial_a) + S_{ab}^{\mathcal{I}}] \Phi_{\mathcal{I}}(x), \\ D\Phi_{\mathcal{I}}(x) &= -i [x^a \partial_a + \Delta] \Phi_{\mathcal{I}}(x), \\ K_a \Phi_{\mathcal{I}}(x) &= [-2ix_a x^b \partial_b + ix^2 \partial_b - 2ix_a \Delta + x^a S_{ab}^{\mathcal{I}}] \Phi_{\mathcal{I}}(x). \end{aligned} \tag{E.19}$$

Estaremos interessados principalmente em campos escalares, para os quais $S_{ab}^{\mathcal{I}} = 0$. O efeito de uma transformação finita é obtido a partir da exponenciação de (E.19), que leva a

$$\Phi'(x') = |\partial x' / \partial x|^{-\Delta/n} \Phi(x), \quad \text{ou} \quad \Phi'(x') = \Omega^{\Delta}(x) \Phi(x), \tag{E.20}$$

onde $|\partial x' / \partial x| = \text{Det} [\partial x'^i / \partial x^j] = \Omega^{-n}(x)$ é o Jacobiano da transformação (E.1).

Em particular, para uma dilatação (E.3),

$$\Phi'(\lambda x) = \lambda^{-\Delta} \Phi(x). \quad (\text{E.21})$$

O número (real) Δ é, por isso, chamado de ‘*dimensão conforme*’, ou ‘*dimensão de escala*’ do campo $\Phi(x)$, que é dito um campo ‘quase-primário’. Numa teoria de campos quase-primários, uma transformação de escala mapeia a parte cinética da ação em

$$\int d^n x g^{ab} \partial_a \Phi \partial_b \Phi \mapsto \int d^n x \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \Omega^2 g^{ab} \lambda^{-2\Delta} \partial_a \Phi \partial_b \Phi = \int d^n x \lambda^n \lambda^{-2} g^{ab} \lambda^{-2\Delta} \partial_a \Phi \partial_b \Phi.$$

Para que haja simetria conforme a ação deve permanecer invariante e, portanto, as potências de λ devem todas se cancelar: $n - 2 - 2\Delta = 0$. Ou seja, uma teoria escalar só é invariante conforme para campos de dimensão conforme

$$\Delta = (n - 2)/2. \quad (\text{E.22})$$

Além disso, termos de interação polinomais $g_p \int d^n x \Phi^p$ se transformam como

$$\int d^n x \Phi^p \mapsto \int d^n x \lambda^n \lambda^{-p\Delta} \Phi^p,$$

de onde se conclui que em n dimensões a única interação invariante de escala tem $p = n/\Delta$, ou, usando (E.22),

$$V = g \int d^n x \Phi^{2n/(n-2)}. \quad (\text{E.23})$$

*

O tensor de energia-momento

Considere uma teoria com ação $S[\Phi]$ funcional de campos Φ e suas derivadas primeiras, e invariante sob transformações conformes. Assim, por hipótese, a ação é invariante sob translações infinitesimais $x^a \mapsto x^a + \epsilon^a$, com ϵ^a constante, e portanto se $x^a \mapsto x^a + \epsilon^a(x)$, a variação de S só pode depender então das

derivadas $\partial_b \epsilon_a(x)$,

$$\delta S = \int d^n x T^{ab}(x) \partial_a \epsilon_b(x). \quad (\text{E.24})$$

O tensor T^{ab} é o tensor de energia-momento da teoria. Impostas as equações de movimento (i.e. '*on-shell*'), $\delta S = 0$ para variações arbitrárias, e com isso uma integração por partes leva a

$$\partial_a T^{ab} = 0. \quad (\text{E.25})$$

Para transformações de Lorentz ou rotações infinitesimais, $\epsilon_a = \omega_{ab} x^b$, com ω_{ab} antisimétrica, e portanto covariância da ação requer

$$\delta S = \int d^n x T^{ab} \partial_a \epsilon_b = \int d^n x T^{ab} \omega_{ab} = 0, \quad \text{logo} \quad T^{ab} = T^{ba}. \quad (\text{E.26})$$

E uma dilatação corresponde a $\epsilon^a = \lambda x^a$, portanto

$$\delta S = \int d^n x T^{ab} \partial_a \epsilon_b = \lambda \int d^n x g_{ab} T^{ab},$$

e invariância de escala requer que o traço se anule:

$$g_{ab} T^{ab} = 0. \quad (\text{E.27})$$

Invariância sob transformações conformes especiais não impõe nenhuma nova condição. De fato, para $\epsilon_b = b_b x^2 - 2x_b b_c x^c$,

$$\delta S = \int d^n x T^{ab} (2x_a b_b - 2b_c x^c g_{ab} - 2b_a x_b) = 2 \int d^n x [(x_a b_b - b_a x_b) T^{ab} - b_c x^c T^a_a] = 0,$$

onde usamos (E.26) e (E.27).

A simetria de T^{ab} permite reescrever (E.24) como

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^n x T^{ab} (\partial_a \epsilon_b + \partial_b \epsilon_a) = -\frac{1}{2} \int d^n x T^{ab} \delta g_{ab},$$

onde na última igualdade usamos a variação da métrica sob uma troca infinitesimal de coordenadas, e com isso o tensor de energia-momento fica dado pela Eq.(A.9),

$$T_{ab} \equiv -2\delta S/\delta g^{ab}. \quad (\text{E.28})$$

Por fim, note que como $\partial_a \epsilon_b$ possui dimensão zero, a dimensão canônica de T^{ab} deve ser tal que cancele a dimensão de $d^n x$, ou seja:

$$\Delta_T = n. \quad (\text{E.29})$$

E.4 Funções de correlação

A quantização da teoria promove os campos a operadores. Considere uma teoria cuja ação (clássica) é invariante conforme, e contenha um conjunto de campos $\{\Phi\}$, dos quais um subconjunto $\{\phi_A(x)\}$ são campos quase-primários, e os outros possíveis campos se possa expressar como uma combinação linear dos ϕ_A e suas derivadas. Assumindo a existência de um vácuo $|0\rangle$ invariante sob transformações conformes, i.e. $D|0\rangle = 0$, $J_{ab}|0\rangle = 0$, $K_a|0\rangle = 0$, etc., a função de correlação de p pontos é dada pela integral funcional (com $Z \equiv \int[\mathcal{D}\Phi] e^{-S[\Phi]}$)

$$\langle \phi_1(x_1) \cdots \phi_p(x_p) \rangle = \frac{1}{Z} \int[\mathcal{D}\Phi] \phi_1(x_1) \cdots \phi_p(x_p) e^{-S[\Phi]}. \quad (\text{E.30})$$

O requerimento de invariância sob o grupo conforme é extremamente restritivo e permite que se determine completamente a forma das funções de 2- e 3-pontos apenas com argumentos de simetria. Para a função de dois pontos

$$G(x_1, x_2) \equiv \langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \frac{1}{Z} \int[\mathcal{D}\Phi] \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) e^{-S[\Phi]}. \quad (\text{E.31})$$

(Vamos considerar sempre campos escalares quase-primários.) Em primeiro lugar, invariância sob rotações ou transformações de Lorentz (para a quais o Jacobiano é unitário) e sob translações implica que $\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = G(|x_1 - x_2|)$ só pode depender da distância covariante entre os dois pontos. Sob uma transformação conforme vale (E.20). A ação é supostamente invariante e assumimos que a

medida de integração $[\mathcal{D}\Phi]$ também o seja, de forma que

$$\langle \phi_1(x'_1)\phi_2(x'_2) \rangle = \frac{1}{Z} \int [\mathcal{D}\Phi] |\partial x'_1/\partial x_1|^{-\Delta_1/n} \phi_1(x_1) |\partial x'_2/\partial x_2|^{-\Delta_2/n} \phi_2(x_2) e^{-S[\Phi]}.$$

Os Jacobianos são funções apenas das coordenadas, e saem da integral funcional (em Φ), de onde se conclui que

$$\langle \phi_1(x'_1)\phi_2(x'_2) \rangle = |\partial x'_1/\partial x_1|^{-\Delta_1/n} |\partial x'_2/\partial x_2|^{-\Delta_2/n} \langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) \rangle. \quad (\text{E.32})$$

Para uma transformação de escala com $x' = \lambda x$, temos $|\partial x'/\partial x| = \lambda^n$, logo

$$G(\lambda|x_1 - x_2|) = \lambda^{-(\Delta_1+\Delta_2)} G(|x_1 - x_2|)$$

é uma função homogênea de uma variável real $x_{12} \equiv |x_1 - x_2|$ e grau $-(\Delta_1 + \Delta_2)$. Pelo teorema de Euler¹

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) \rangle = \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}}. \quad (\text{E.33})$$

Aplicando agora uma transformação conforme especial, Eqs.(E.4) e (E.5), e sabendo que vale (E.33), a fórmula (E.32) dá

$$\frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} = \frac{(\Omega_1\Omega_2)^{(\Delta_1+\Delta_2)/2}}{\Omega_1^{\Delta_1}\Omega_2^{\Delta_2}} \times \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}},$$

onde $\Omega(x) = 1 - b_a x^a + b^2 x^2$. Ou seja, a constante C_{12} deve ser zero a menos que seja $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$, caso em que o fração extra do lado direito se torna 1. Portanto, com base apenas nas simetrias conformes, a função de 2-pontos de dois operadores quase-primários é

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) \rangle = \begin{cases} \frac{C_{12}}{|x_1-x_2|^{2\Delta}} & \text{se } \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta \\ 0 & \text{se } \Delta_1 \neq \Delta_2 \end{cases}. \quad (\text{E.34})$$

¹Se $G(z_i) = \lambda^{-k} G(kz_i)$ é uma função homogênea de grau k , então $z_i \partial G / \partial z_i = kG$. Para uma função de uma variável apenas, a equação pode ser imediatamente integrada, resultando em $G = \text{constante} \times z^k$.

A determinação da função de 3-pontos segue a mesma lógica. Invariância de translação e rotação faz com que

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3) \rangle \equiv G(x_{12}, x_{23}, x_{31}), \quad \text{onde } x_{ab} \equiv |x_a - x_b|,$$

e a invariância de dilatação,

$$G(\lambda x_{12}, \lambda x_{23}, \lambda x_{31}) = \lambda^{-(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)} G(x_{12}, x_{23}, x_{31}),$$

implica que

$$G(x_{12}, x_{23}, x_{31}) = \frac{C_{123}}{x_{12}^\alpha x_{23}^\beta x_{31}^\gamma}, \quad \text{com } \alpha + \beta + \gamma = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3.$$

Por fim a simetria conforme especial fornece um sistema linear que fixa os expoentes α , β e γ em termos dos Δ_i . O resultado final é que

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3) \rangle = \frac{C_{123}}{x_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} x_{23}^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1} x_{31}^{\Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2}}. \quad (\text{E.35})$$

Para funções de n -pontos com $n > 3$ as restrições de simetria sob as transformações conformes não são suficientes para determinar completamente a dependência em x_i porque com 4 pontos se pode construir as ‘razões anarmônicas’

$$\xi = (x_{12}x_{34})^2 / (x_{13}x_{24})^2 \quad \text{e} \quad \zeta = (x_{12}x_{34})^2 / (x_{23}x_{34})^2,$$

que são por si só invariantes conformes. Com isso dada alguma $G(x_1, \dots, x_n)$ invariante, há sempre a liberdade de multiplicá-la por outra função arbitrária $f(\xi, \eta)$, pois $f(\xi, \zeta)G(x_1, \dots, x_n)$ também será invariante conforme.

*

Campos Tensoriais

Se $\Phi^{\mathcal{I}}(x)$ é um campo quase-primário tensorial, com \mathcal{I} indicando um conjunto de índices sobre os quais atua $O(n)$ (ou $O(n-1, 1)$), então

$$\Phi^{\mathcal{I}}(x') = \Omega^{-\Delta/n} \Lambda_{\mathcal{J}}^{\mathcal{I}}[\mathcal{R}_\Omega] \Phi^{\mathcal{J}}(x), \quad \text{com } \Omega = |\partial x' / \partial x|,$$

onde $\Lambda_{\mathcal{J}}^{\mathcal{I}}[\mathcal{R}_\Omega]$ é a representação adequada de $O(n)$ (ou do grupo de Lorentz) quando \mathcal{R} é uma rotação. (Cf. (E.7) e discussão subsequente.) Por exemplo, para campos vetoriais $\mathcal{I} = a$, e $\Lambda_{\mathcal{J}}^{\mathcal{I}} = \mathcal{R}^a_b \in O(n)$; para um campo tensorial T^{ab} , $\mathcal{I} = ab$, e $\Lambda_{\mathcal{J}}^{\mathcal{I}} = \mathcal{R}^a_c \mathcal{R}^b_d$, etc.

A regra obtida para o campo escalar (caso em que $\Lambda = 1$), Eq.(E.34), implica que a função de 2-pontos para dois campos de mesma dimensão Δ tem a forma

$$\langle \Phi_1^{\mathcal{I}_1}(x_1) \Phi_2^{\mathcal{I}_2}(x_2) \rangle = \frac{1}{x_{12}^{2\Delta}} P^{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2}(x_{12}),$$

com a condição de invariância conforme do tensor P expressa evidentemente por

$$\Lambda^{\mathcal{I}_1}_{\mathcal{J}_1}[\mathcal{R}(x_1)] \Lambda^{\mathcal{I}_2}_{\mathcal{J}_2}[\mathcal{R}(x_2)] P^{\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2}(x_{12}) = P^{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2}(x'_{12}) = P^{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2}(\lambda x_{12}) = P^{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2}(x_{12}).$$

Uma solução dessa equação é

$$P^{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2}(x_{12}) = \Lambda^{\mathcal{I}_1}_{\mathcal{J}_1}[I(x_{12})] G^{\mathcal{J}_1 \mathcal{I}_2}, \quad (\text{E.36})$$

onde $G^{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2}$ é invariante sob rotações R :

$$\Lambda^{\mathcal{I}_1}_{\mathcal{J}_1}[R] \Lambda^{\mathcal{I}_2}_{\mathcal{J}_2}[R] G^{\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2} = G^{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2}, \quad (\text{E.37})$$

como se pode verificar; cf. [Osborn & Petkou \(1994\)](#).

A primeira conclusão que se tira da fórmula (E.36) é de que a função de correlação de campos com spin diferente (i.e. com $\mathcal{I}_1 \neq \mathcal{I}_2$) é sempre zero, já que nesse caso não existe G que satisfaça a condição (E.37). E.g. para um campo vetorial e um tensor, $\langle \phi^a T^{cd} \rangle = 0$. Para índices vetoriais, $\mathcal{I} = a$, a representação é trivial, $\Lambda^a_b = \mathcal{R}^a_b$, logo $\Lambda^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}}[I(x_{12})] = I^a_b(x_{12})$. Nesse caso um tensor G^{ab} invariante sob rotações (ou transformações de Lorentz) é simplesmente a métrica, e a Eq.(E.36) fornece diretamente a função de correlação para dois campos vetoriais ϕ^a

$$\langle \phi_1^a(x'_1) \phi_2^b(x'_2) \rangle = \frac{C}{x_{12}^{2\Delta}} I^{ab}(x_{12}), \quad (\text{E.38})$$

se $\Delta_1 = \Delta_2$, ou zero se $\Delta_1 \neq \Delta_2$. Note que I^{ab} pode ser escrito na forma

$$I^{ab}(x_{12}) = \frac{1}{2} x_{12}^2 \partial_1^a \partial_2^b \log x_{12}^2. \quad (\text{E.39})$$

Também nos interessa a função de 2-pontos do tensor de energia-momento. Na representação tensorial de grau 2,

$$\Lambda^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}}[\mathcal{R}_{\Omega}(x)] = \Lambda^{ab}_{cd}[\mathcal{R}_{\Omega}(x)] = [\mathcal{R}_{\Omega}(x)]^a_c [\mathcal{R}_{\Omega}(x)]^b_d,$$

logo (E.36) fica

$$P^{abcd}(x_{12}) = I^a_c(x_{12}) I^b_d(x_{12}) G^{abcd},$$

com o tensor G^{abcd} formado por combinações lineares da métrica. Para T^{ab} simétrico G^{abcd} deve ser simétrico nos pares ab e cd , logo

$$G^{abcd} = \frac{1}{2}(g^{ac}g^{bd} + g^{ad}g^{bc}) + \alpha g^{ab}g^{cd}. \quad (\text{E.40})$$

Para $g_{ab}T^{ab} = 0$, G^{abcd} deve ter traço total nulo e portanto $\alpha = -1/n$. Assim, (e notando que $g_{cd}I^{ac}I^{db} = g^{ac}$)

$$\langle T^{ab}(x_1)T^{cd}(x_2) \rangle = \frac{C}{x_{12}^{2\Delta}} \left[\frac{1}{2} [I^{ad}(x_{12}) I^{bc}(x_{12}) + I^{ac}(x_{12}) I^{bd}(x_{12})] - \frac{1}{n} g^{ab}g^{cd} \right]. \quad (\text{E.41})$$

E.5 Teorias conformes perturbadas

Nesta seção, em especial, trabalhamos em $n = 3$ dimensões.

Pode-se perturbar uma teoria conforme com a inserção de um operador $\mathcal{O}(\mathbf{x})$ com acoplamento $g(\mathbf{x})$,

$$S_{pCFT} = S_{CFT} + \int d^3\mathbf{x} g \mathcal{O}(\mathbf{x}), \quad (\text{E.42})$$

o que equivale a inserir mais uma fonte $-g$ na função de partição (13.35),

$$Z[J, g] = \int [\mathcal{D}\mathcal{O}] \exp \left[-S_{QFT} + \int d^3\mathbf{x} J(\mathbf{x})\mathcal{O}(\mathbf{x}) - \int d^3\mathbf{x} g\mathcal{O}(\mathbf{x}) \right].$$

Expandindo $\exp - \int d^3 \mathbf{x} g \mathcal{O}$, as funções de correlação da teoria perturbada, e.g. $\langle \mathcal{O}(\mathbf{x}_1) \mathcal{O}(\mathbf{x}_2) \rangle = \delta^2 Z / \delta J(\mathbf{x}_1) \delta J(\mathbf{x}_2) |_{J=g=0}$, são dadas em função das correlações da CFT,

$$\langle \mathcal{O}(\mathbf{x}_1) \mathcal{O}(\mathbf{x}_2) \rangle = \langle \mathcal{O}(\mathbf{x}_1) \mathcal{O}(\mathbf{x}_2) \rangle_{CFT} + \int d^3 \mathbf{x}' g \langle \mathcal{O}(\mathbf{x}_1) \mathcal{O}(\mathbf{x}_2) \mathcal{O}(\mathbf{x}') \rangle_{CFT} + \dots$$

Uma maneira eficiente de se calcular $\langle \mathcal{O}(\mathbf{x}_1) \mathcal{O}(\mathbf{x}_2) \rangle$ sem somar essa série é através do formalismo do Grupo de Renormalização (de Wilson).

Considere a função de 2-pontos $G(r; g)$ de um operador que, na teoria conforme, possui dimensão conforme Δ . Aqui, $r \equiv |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$. Sob uma transformação de escala, por definição, $G(r/\lambda; 0) = \lambda^{-2\Delta} G(r; 0)$. Suponha válida essa lei de escala na teoria perturbada, com $g \neq 0$. Em uma transformação infinitesimal $\lambda = e^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon$, defina a função¹

$$\beta \equiv - \frac{\partial g}{\partial \log \lambda}, \quad (\text{E.43})$$

de forma que

$$G(r; g) = \lambda^{2\Delta} G(r/\lambda; g(\lambda)) = (1 - 2\Delta\varepsilon) G((1 - \varepsilon)r; g_0 - \beta\varepsilon),$$

com $g_0 \equiv g|_{\varepsilon=0}$. Expandindo G na última igualdade, obtém-se

$$\left(r \frac{\partial}{\partial r} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + 2\Delta \right) G(r; g) = 0. \quad (\text{E.44})$$

Na pCFT, a dimensão conforme Δ passa a depender da escala. Por inspeção da Eq.(E.42) vê-se que, se a perturbação não quebrasse a simetria conforme então g se rescala como $g \mapsto \lambda^{\Delta-3}$. Assim, sob uma transformação infinitesimal, $\delta g = -(\Delta + 3)\varepsilon$, o que, com a Eq.(E.43) mostra que $\Delta = 3 + \beta/g$. Perto do ponto conforme, ambos g e β tendem a zero, e a dimensão conforme do operador,

$$\Delta = 3 + \partial\beta/\partial g, \quad (\text{E.45})$$

¹Note que a função beta definida aqui tem o sinal oposto da função beta holográfica (13.50); por isso diz-se que na holografia há um “fluxo inverso” do GR.

depende da ‘*dimensão anômala*’ $\gamma(g) \equiv \partial\beta/\partial g$. A equação completa é então

$$\left[r \frac{\partial}{\partial r} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + 6 + 2\gamma(g) \right] G(r; g) = 0, \quad (\text{E.46})$$

uma ‘*equação de Callan-Symanzik*’.

Se $\beta = 0$, e constante, a solução da equação de Callan-Symanzik é trivial: $G(r; 0) = c/r^{2\Delta}$, que é o comportamento correto da função de correlação na CFT. Logo $\beta \neq 0$ caracteriza a perturbação da CFT é uma função beta não nula. É costume introduzir a seguinte nomenclatura: O valor de $g = g_*$ para o qual $\beta(g_*) = 0$ é chamado de ‘*ponto fixo*’ da teoria. Expandindo ao redor de um ponto fixo, com $\partial\beta/\partial g = \gamma$,

$$\beta_{\mathcal{O}}(g) = \gamma(g_*)(g - g_*) + \dots = \lambda \partial g / \partial \lambda.$$

Se $\gamma(g_*) > 0$, então $\partial g / \partial \lambda \leq 0$ para $g \leq g_*$ e, portanto, à medida que λ cresce $g \rightarrow g_*$. Como o crescimento de λ equivale ao infravermelho (‘*infrared*’), i.e. grandes comprimentos de onda, diz-se que g_* é um ponto fixo estável no IR. Caso contrário, se $\gamma(g_*) < 0$, então $g \rightarrow g_*$ à medida que λ diminui, o que equivale ao ultravioleta, e diz-se que o ponto crítico é estável no UV.

Considere um ponto fixo, por exemplo, estável no UV, e um operador \mathcal{O} com $\gamma < 0$. A dimensão $\Delta_{\mathcal{O}}(g_{UV}) < 3$, e o procedimento de renormalização, ao diminuir a escala λ , faz com que o termo perturbativo $\int d^3\mathbf{x} g \mathcal{O}(\mathbf{x})$ na Eq.(E.42) aumente, perturbando ainda mais a teoria e a distanciando do ponto fixo. Diz-se nesse caso que \mathcal{O} é um operador ‘*relevante*’ (no UV). Por outro lado, um operador \mathcal{O}' , que possua $\gamma' < 0$, terá $\Delta_{\mathcal{O}'} > 3$, e ao se diminuir a escala o termo $\int d^3\mathbf{x} g \mathcal{O}'(\mathbf{x})$ será proporcional a uma potencia positiva de λ e portanto tende a zero. Por isso \mathcal{O}' é incapaz de afastar a teoria do ponto fixo UV, e diz-se que se trata de um operador ‘*irrelevante*’.

A Eq.(E.46) rege a maneira como a teoria perturbada caminha entres pontos fixos à medida que se efetua transformações de escala, um processo conhecido como ‘fluxo do grupo de renormalização’, o nome sendo herdado da TQC. (Ver, e.g. Peskin & Schroeder (1995); Zinn-Justin (2002).)

*

Solução da Equação de Callan-Symanzik

Tome a transformada de Fourier $G(k; g) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x G(r; \phi) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, que satis-

faz (note que se trata de transformadas de Fourier de funções pramente radiais)

$$\left[-k \frac{\partial}{\partial k} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + 3 + 2\gamma(g) \right] G(k; g) = 0, \quad (\text{E.47})$$

onde $k \equiv |\mathbf{k}|$. Introduza o ‘acoplamento fluido’ (porque flui com o fluxo do GR; em inglês, ‘*running coupling*’)

$$\bar{g}(k/a; g) \quad \text{tal que} \quad k \partial \bar{g} / \partial k = \beta(\bar{g}), \quad (\text{E.48})$$

e a escala M tal que $\bar{g}(M; g) \equiv g$. A solução de (E.47) é dada por

$$G(k; g) = k^3 G_0(\bar{g}) \exp \left[2 \int_{\bar{g}(k/a; g)}^{\bar{g}(M; g)} du \frac{\gamma(u)}{\beta(u)} \right], \quad (\text{E.49})$$

e podemos usar a relação (E.48) para realizar uma mudança de variáveis,

$$G(k; g) = k^3 G_0(\bar{g}) \exp \left[2 \int_{k'=aM}^{k'=k} d \log \left(\frac{k'}{aM} \right) \gamma(\bar{g}) \right]. \quad (\text{E.50})$$

Para verificar que as fórmulas acima são de fato soluções de (E.47), é útil escrever (E.48) como

$$\int_{\bar{\varphi}(M, \varphi)}^{\bar{\varphi}(k/a, \varphi)} du / \beta(u) = \int_{k'=aM}^{k'=k} d \log \left(\frac{k'}{aM} \right) = \int_{k'=aM}^{k'=k} dk' / k', \quad (\text{E.51})$$

de cujas derivadas¹ se deduz que $\partial \bar{\varphi} / \partial \varphi = \beta(\bar{\varphi}) / \beta(\varphi)$.

¹Usando a Regra de Leibniz (não confundir com o teorema de Newton, sob risco de ofender os mortos) para a derivada de uma integral:

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} dt f(x, t) = f(x, b(x)) b'(x) - f(x, a(x)) a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} dt \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}.$$

Apêndice F

Equação de estado para um gás de p-branas

Desejamos aqui encontrar a equação de estado para um gás de p-branas em um espaço-tempo com $d + 1$ dimensões. Seguimos de perto a dedução apresentada por [Boehm & Brandenberger \(2003\)](#).

Sejam x^μ , com $\mu = 0, 1, \dots, d$ coordenadas no espaço-T sobre o qual se move uma p-brana \mathcal{B} com coordenadas intrínsecas σ^A , $A = 0, 1, \dots, p$, em sua folha-de-mundo. Se $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-T, a métrica induzida em \mathcal{B} é $\gamma_{AB} = g_{\mu\nu} X^\mu_{,A} X^\nu_{,B}$, onde $X^\mu(\sigma)$ são as coordenadas de \mathcal{B} . A ação de Dirac-Born-Infeld é o volume de \mathcal{B} ,

$$S_p = -T_p \int d^{p+1}\sigma e^{-\phi} |\gamma|^{1/2}, \quad (\text{F.1})$$

onde ϕ é o dilaton e T_p a tensão. Vamos considerar um regime em que o dilaton é constante definir a tensão efetiva $\tau_p = T_p e^{-\phi} = T_p/g_s$, onde g_s é o acoplamento de cordas. Escreva a ação como uma integral sobre o espaço-tempo,

$$S_p = -\tau_p \int d^{d+1}x \left[\int d^{p+1}\sigma |\gamma(\sigma)|^{1/2} \delta^{d+1}(x^\mu - X^\mu(\sigma)) \right].$$

O tensor de energia-momento de \mathcal{B} é então dado pela fórmula usual,

$$T^{\mu\nu}(x) = -2|g|^{-1/2}\delta S_p/\delta g_{\mu\nu}, \quad \text{ou} \quad \delta S_p = -\frac{1}{2}\int d^{d+1}x T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}.$$

A dependência em $g_{\mu\nu}$ se encontra na métrica induzida; temos $\delta\sqrt{-\gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\delta\gamma_{AB}$, e $\delta\gamma_{AB}/\delta g_{\mu\nu} = X^\mu{}_{,A}X^\nu{}_{,B}$, logo

$$T^{\mu\nu}(x) = -\tau_p \int d^{p+1}\sigma |\gamma(\sigma)|^{1/2} \gamma^{AB} X^\mu{}_{,A} X^\nu{}_{,B} \delta^{d+1}(x^\mu - X^\mu(\sigma)).$$

A densidade energia ρ da brana é dada pela componente T^{00} , e seu vetor momento por T^{0j} . Assim como a ação de Nambu-Goto, (F.1) é invariante por reparametrizações da folha-de-mundo, e podemos escolher as $p+1$ coordenadas σ^A tais que

$$\sigma^0 = X^0, \quad \gamma_{00} = -\sqrt{-\gamma}, \quad \gamma_{0a} = 0$$

com $a = 1, \dots, p$. Nesse calibre, $T^{00}(x) = \tau_p \int d^{p+1}\sigma \delta^{d+1}(x^\mu - X^\mu(\sigma))$; escrevendo explicitamente a função delta,

$$T^{00} = \tau_p \int d^{p+1}\sigma \delta^d(x^j - X^j(\sigma))\delta(x^0 - \sigma^0),$$

e integrando sobre σ^0 temos a densidade de energia

$$\rho = \tau_p \int d^p\sigma \delta^d(x^j - X^j(\sigma)), \quad \text{e} \quad E = \int d^d x \rho(x^j) = \tau_p V_p, \quad (\text{F.2})$$

é a energia total da brana, com $V_p = \int d^p\sigma$ o volume da folha-de-mundo de \mathcal{B} . Num espaço-tempo com seções espaciais compactas (e.g. um toro) E_p é finita; note que τ_p pode ser portanto interpretada como a densidade volumétrica de energia. O vetor (densidade espacial de) momento π^j é dado por T^{0j} . No calibre escolhido, $\gamma^{AB} X^0{}_{,A} X^j{}_{,B} = \gamma^{00} X^j{}_{,0} = -\dot{X}^j/\sqrt{-\gamma}$, logo

$$T^{0j} = \tau_p \int d^p\sigma \dot{X}^j \delta^d(x^j - X^j(\sigma)), \quad \text{e} \quad \Pi^j = \tau_p \int d^p\sigma \dot{X}^j$$

é o momento total, $\Pi^j = \int d^d x \pi^j$.

A pressão é obtida a partir da média espacial do traço $g_{ij}T^{ij}$. Precisamos calcular $\gamma^{AB} X^i{}_{,A} X_{i,B}$; no calibre escolhido, em que $\sigma^0 = X^0$, temos $X^0{}_{,a} = 0 =$

$\partial\sigma^0/\partial\sigma^a = 0$ por construção, logo $\gamma_{ab} \equiv g_{\mu\nu}X^\mu_{,a}X^\nu_{,b} = g_{ij}X^i_{,a}X^j_{,b}$; contraindo essa igualdade com γ^{ab} , temos $\gamma^{ab}\gamma_{ab} = \gamma^{ab}X^i_{,a}X_{i,b}$. Agora,

$$\gamma^{AB}X^i_{,A}X_{i,B} = \gamma^{00}X^i_{,0}X_{i,0} + \gamma^{ab}X^i_{,a}X_{i,b} = \gamma^{00}\dot{\mathbf{X}}^2 + \gamma^{ba}\gamma_{ab},$$

pois $\gamma_{0a} = 0$. Como $\gamma^{ba}\gamma_{ab} = \delta^a_a = p$, $T^i_i = \tau_p \int d^p\sigma \left[\dot{X}^i \dot{X}_i + p|\gamma|^{\frac{1}{2}} \right] \delta^{d+1}(x^\mu - X^\mu(\sigma))$, e como $-\sqrt{-\gamma} = \gamma_{00} = X^\mu_{,0}X_{\mu,0} = -1 + \dot{\mathbf{X}}^2$, temos finalmente

$$T^i_i = \tau_p \int d^p\sigma \left[(p+1)\dot{X}^i \dot{X}_i - p \right] \delta^{d+1}(x^\mu - X^\mu(\sigma)).$$

Tomando a média $\langle T^i_i \rangle$ sobre as posições “espaciais” σ^a sobre a brana, a velocidade (transversal) $\langle \dot{X}^i \dot{X}_i \rangle$ se torna independente de σ^a e sai da integral; obtemos assim a pressão $P \equiv \langle T^i_i \rangle/d$

$$P \equiv \frac{1}{d}\langle T^i_i \rangle = \left[(p+1)\langle \dot{X}^i \dot{X}_i \rangle/d - p/d \right] \tau_p \int d^p\sigma \delta^{d+1}(x^\mu - X^\mu(\sigma)).$$

A integral restante é simplesmente a densidade de energia (F.2), e com isso temos a equação de estado

$$P/\rho = w_p, \quad \text{com} \quad w_p = \frac{(p+1)}{d}v^2 - \frac{p}{d}, \quad (\text{F.3})$$

onde v^2 é a velocidade média quadrada de um ponto na brana.

No espaço-tempo quadridimensional, $d = 3$. No limite ultrarelativístico, $v^2 \approx 1$, e $w_p \approx 1/3$ logo branas com qualquer p se comportam como um gás de radiação. No limite não relativístico, com $v^2 \approx 0$, temos

$$w_p = -\frac{1}{3}p. \quad (\text{F.4})$$

Há três valores possíveis para p em seções espaciais tridimensionais, $p = 1, 2, \text{ e } 3$. Uma 3-brana ocupa todo o espaço-tempo, e tem $w = -1$, sendo equivalente a uma constante cosmológica. Uma 2-brana aparece como uma membrana nas seções espaciais (e forma uma folha-de-mundo tridimensional no espaço-tempo), o que se costuma chamar de parede de domínio. Uma 1-brana é uma corda cósmica.

Apêndice G

Teorema de área e a entropia generalizada na cosmologia

Aqui damos uma descrição do argumento de [Bousso & Engelhardt \(2015a\)](#) para o crescimento das áreas das superfícies marginalmente anti-capturadas que folheiam uma tela holográfica pretérita. Em seguida, indicamos como esse teorema pode ser usado na definição de uma segunda lei generalizada em espaços cosmológicos ([Bousso & Engelhardt \(2016\)](#)).

G.1 Definições — telas holográficas

— Em um espaço-tempo esfericamente simétrico, por um ponto p passam quatro famílias de geodésicas nulas, classificadas pelas direções de acordo com a Fig.G.1: (1) Passado exterior, (2) Passado interior, (3) futuro exterior, (4) futuro interior. Uma superfície \mathcal{B} de codimensão 2 é dita ‘*normal*’ se as geodésicas futuro interior γ_- e futuro exterior γ_+ possuem expansão $\theta_{\pm} \gtrsim 0$, como na Fig.G.1(a). Isso quer dizer que raios de luz emitidos na superfície \mathcal{B} em direção ao seu interior convergem, enquanto raios emitidos em direção ao seu exterior divergem. Este é o comportamento intuitivo, que ocorre na ausência de gravidade, e daí a nomenclatura.

— Por outro lado, uma superfície σ de codimensão 2 é dita ‘*marginalmente anti-capturada*’ (‘marginally anti-trapped’) se $\theta_+ > 0$ mas $\theta_- = 0$, como na Fig.G.1(b). Nesse caso, os raios de luz emitidos em σ em direção ao exterior

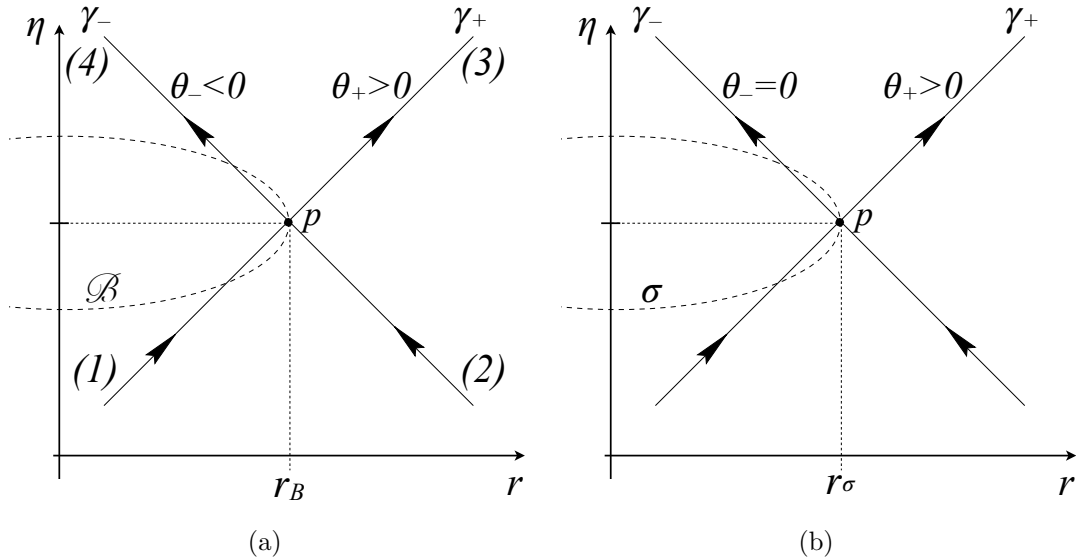


Figura G.1: Diagramas conformes para espaços esfericamente simétricos mostrando as famílias de geodésicas nulas para (a) Uma superfície normal \mathcal{B} ; (b) Uma superfície σ marginalmente anti-capturada.

divergem normalmente; porém os raios em direção ao interior *param* de convergir, localmente. O termo ‘marginalmente’ denota a situação limite; uma superfície é dita ‘*anti-capturada*’ se $\theta_- > 0$, caso em que as geodésicas nulas γ_- divergem em ambas as direções, isolando causalmente um observador no interior da superfície da região exterior.

— Uma hipersuperfície \mathcal{H} , de codimensão 1, é uma ‘*tela holográfica pretérita*’ (‘past holographic screen’) se é folheada por superfícies marginalmente anti-capturadas.

(Essas definições são relevantes em espaços cosmológicos. Conceitos análogos, com índices + trocados por $-$ e $>$ por $<$ são utilizados no contexto de buracos negros; diz-se então ‘superfície capturada’ e ‘tela holográfica futura’.)

G.2 Teorema para o crescimento da área

Teorema

Em uma tela holográfica pretérita \mathcal{H} , as áreas de suas superfícies marginalmente anti-capturadas σ crescem *monotonicamente*, para o futuro em segmentos tipo-tempo e para o exterior em segmentos tipo-espaço.

O detalhe importante é o aumento monotônico. Com as adaptações necessárias (futuro \rightarrow passado, etc.), o teorema também é válido para telas holográficas futuras, que surgem no contexto de colapso gravitacional e são o caso analisado em mais detalhes por [Bousso & Engelhardt \(2015a\)](#). Aqui, como já vimos fazendo, adaptamos todas as pequenas demonstrações para o caso de telas holográficas pretéritas, que são do nosso interesse cosmológico. Com essa ressalva, toda a discussão e os exemplos abaixo seguem de perto o artigo citado.

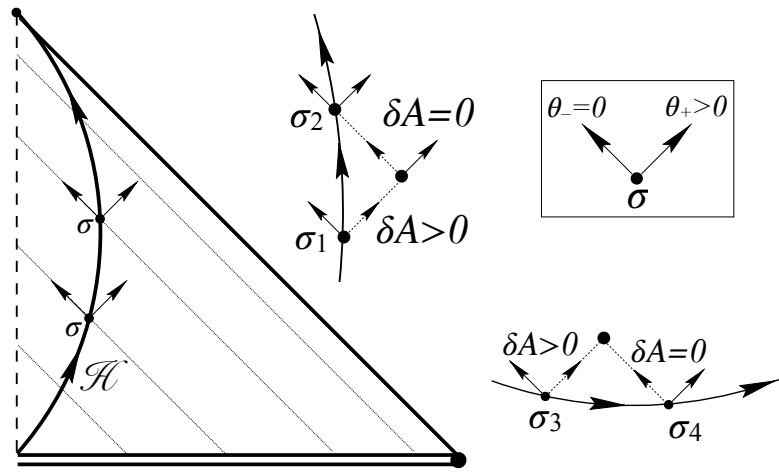


Figura G.2: Tela holgráfica \mathcal{H} para um universo de Friedmann desacelerado; \mathcal{H} é uma superfície tipo-tempo. A área das folheações σ cresce na direção das setas. Por definição, todas as folhas σ (superfícies espaciais bidimensionais que folheiam \mathcal{H}) são superfícies marginalmente anti-capturadas, logo a expansão da direção interior futura é zero. Vê-se também a construção geométrica (deformações da superfície nas direções nulas) que demonstram que a área de uma tela holográfica pretérita sempre cresce para o futuro num segmento tipo-tempo, e para o exterior num segmento tipo-espaço.

Em espaços esfericamente simétricos é fácil entender o que acontece. Em segmentos tipo-tempo de \mathcal{H} , a área das seções σ cresce para o futuro porque se pode deformar infinitesimalmente a superfície ao longo das direções nulas, como na Fig. G.2. Saindo de σ_1 , com área A_1 , e deslocando-se na direção nula exterior, por ser $\theta_+ > 0$, chega-se a uma superfície com área $A' = A_1 + \delta A > A_1$. Daí se prossegue para σ_2 na direção nula interior em que $\theta_- = 0$ e, portanto, não há perda ou ganho de área, de modo que ao fim $A_2 = A' > A_1$. Enfatizamos que o processo deve ser encarado como um limite em que $\delta A \rightarrow 0$. De forma completamente análoga, um segmento tipo-espaço de \mathcal{H} teria área aumentando na direção exterior. Portanto a monotonicidade em segmentos tipo-espaço e em segmentos tipo-tempo está garantida. Basta demonstrar que é impossível

que uma tela holográfica apresente uma esquina entre os dois tipos de segmento que viole a monotonicidade, como por exemplo na Fig.G.3(a). Na vizinhança de uma esquina desse tipo há uma folha-de-luz \mathcal{N} que parte de uma das superfícies $\sigma_1 \in \mathcal{H}$, onde, por definição sua expansão é $\theta_1 = 0$. A mesma folha-de-luz intersecta \mathcal{H} uma segunda vez na superfície σ_2 onde, também por definição, $\theta_2 = 0$. Isso leva a uma contradição, porque a expansão de uma mesma folha-de-luz se anular em dois pontos diferentes viola as condições nula e genérica de energia, que são assumidas para a validade do teorema.

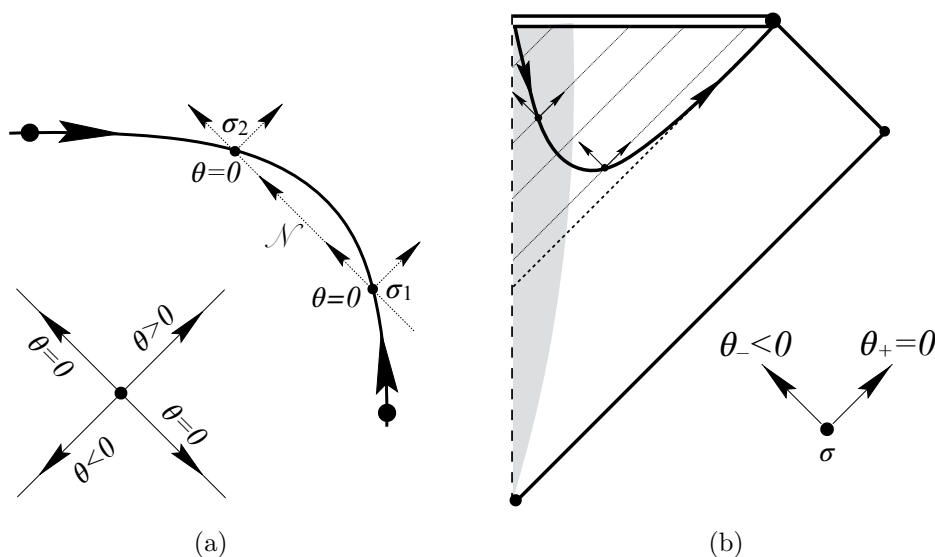


Figura G.3: (a) Formato de segmento de tela holográfica que viola a monotonicidade do aumento da área das folhas. As quatro folhas de luz partindo de cada superfície $\sigma \in \mathcal{H}$ têm expansão θ como indicado no canto esquerdo inferior. Portanto na vizinhança da esquina há uma folha de luz \mathcal{N} (linha pontilhada) em que a expansão se anula em dois pontos diferentes. (b) Tela holográfica futura no colapso de uma esfera de poeira (região cinza) formando um buraco negro. Em uma tela holográfica *futura*, as superfícies σ são marginalmente capturadas: por definição, a folha de luz com expansão nula é na direção futura e *exterior*, como indicado no canto direito.

No exemplo mostrado na Fig.G.2, \mathcal{H} é inteira tipo-tempo e pode parecer desnecessário considerar esquinas entre segmentos de duas naturezas causais diferentes, mas nem sempre é esse o caso. Na Fig.G.3(b) mostramos o exemplo de um colapso de Oppenheimer-Snyder, em que \mathcal{H} é uma tela holográfica *futura*, folheada por superfícies marginalmente capturadas (e completamente contida dentro do horizonte de eventos). Na região preenchida por poeira, \mathcal{H} é tipo-tempo (e as

áreas aumentam na direção do *passado*), mas na região onde há vácuo \mathcal{H} passa a ser tipo-espaço; a junção é tal que não viola a monotonicidade do aumento das áreas.

A demonstração completa do teorema, na ausência de simetria esférica, é bastante elaborada, e se encontra em [Bousso & Engelhardt \(2015b\)](#).

G.3 SLG na cosmologia

Uma tela-Q pode ser vista como uma tela holográfica em que, em vez de se extremizar a expansão θ em uma das direções nulas, se extremiza a expansão quântica Θ , definida em (5.37),

$$\Theta_k[\sigma; y] \equiv \lim_{\delta A \rightarrow 0} (4/\delta A)(dS_{gen}/d\lambda)\Big|_y,$$

e, portanto, a entropia generalizada. Mais precisamente, para cada σ há duas direções nulas futuras, ver Fig.G.4; se $\Theta_k = 0$ sobre toda σ , então diz-se que σ é uma ‘*superfície quântica marginal*’. Se na direção nula oposta, $\Theta_l[\sigma] > 0$, então σ é uma ‘*superfície quântica marginalmente anti-capturada*’. Uma tela-Q é, por definição, uma hipersuperfície \mathcal{Q} folheada por superfícies quânticas marginais. Se for folheada por superfícies quânticas marginalmente anti-capturadas, \mathcal{Q} é uma ‘*tela-Q pretérita*’. (Como no caso clássico, há definições análogas para uma tela-Q futura, mais relevante no caso de buracos negros.)

Em casos esfericamente simétricos, o crescimento de S_{gen} ao longo de \mathcal{Q} pode ser demonstrado do mesmo jeito que se mostrou o teorema das áreas no §G.2, com pequenas deformações em zigue-zague ao redor de \mathcal{Q} . Nesses casos, em geral \mathcal{Q} fica mais próxima da origem (tem um raio menor) do que \mathcal{H} , como mostrado na Fig.G.4. O motivo é que a tela holográfica clássica, \mathcal{H} , é encontrada sob a condição de que $dA = 0$, e a tela-Q se obtém de

$$d(A/4 + S_{ex}) = 0.$$

Olhe para $\sigma_1 \subset \mathcal{H}$, que divide uma superfície de Cauchy Σ . Por definição, a variação da área de σ_1 na direção k^μ é zero. Deslocando-se nessa direção, e deformando-se Σ_{ex} , aumenta-se a entropia S_{ex} . Mas dessa forma se chega a superfícies no interior de \mathcal{H} , onde a expansão (clássica) $\theta < 0$ (dentro de \mathcal{H} as superfícies são normais, em oposição a anti-capturadas), logo a área passa a diminuir. Ou seja, seguindo na direção de k^μ , temos $dA < 0$ e $dS_{ex} > 0$, logo

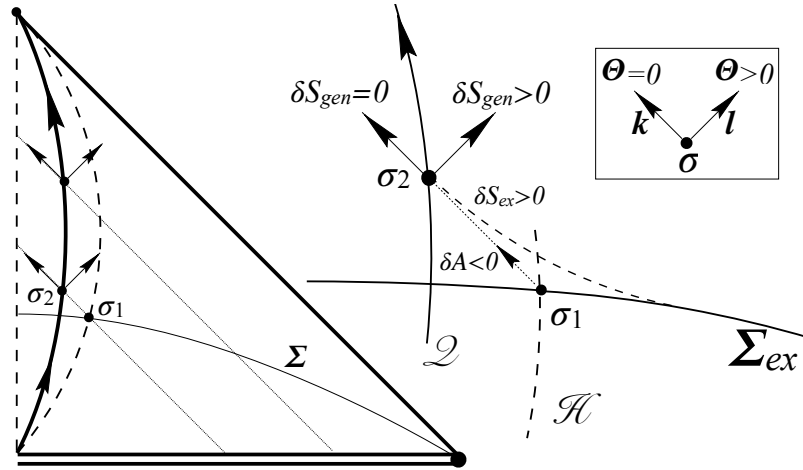


Figura G.4: Tela-Q para um universo de Friedmann desacelerado. A entropia generalizada cresce na direção das setas. Por definição, todas as folhas σ (superfícies espaciais bidimensionais que folheiam \mathcal{Q}) são superfícies quânticas marginalmente anti-capturadas, logo a expansão quântica na direção k^μ , interior futura é zero, e na direção l^μ é positiva. Vê-se também a construção geométrica que demonstra que \mathcal{Q} está no interior da tela holográfica clássica \mathcal{H} .

para alguma σ_2 se terá $dS_{gen}[\sigma_2] = 0$: então $\sigma_2 \subset \mathcal{Q}$.

Apêndice H

(Fórmulas para) Transformações de Weyl

Dado um espaço tempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, põe-se a pergunta: Seja um segundo espaço-tempo $(\mathcal{M}, \tilde{\mathbf{g}})$, composto da mesma variedade diferenciável porém com uma métrica (Lorentziana) diferente; qual a condição para que a estrutura causal de ambos seja idêntica?

Em outras palavras, desejamos encontrar o mapa

$$\mathbf{g} \mapsto \tilde{\mathbf{g}} \tag{H.1}$$

entre as métricas \mathbf{g} e $\tilde{\mathbf{g}}$ que preserve os cones de luz de \mathcal{M} . Para tanto, consideremos uma base do espaço tangente T_p de um ponto $p \in \mathcal{M}$,

$$\{\mathbf{t}, \mathbf{x}_a\}, \tag{H.2}$$

onde $a = 1, \dots, d-1$, sendo d a dimensão do espaço-tempo.¹ Escrevemos \mathbf{t} como o vetor tipo-tempo, e \mathbf{x}_a como vetores tipo-espaço. Seja esta base ortonormal com respeito a \mathbf{g} , isto é $\mathbf{g}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = -1 = -\mathbf{g}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_a)$, e $\mathbf{g}(\mathbf{x}_a, \mathbf{t}) = 0$. Então, por construção, os vetores $\mathbf{n}_{a,\pm} = \mathbf{t} \pm \mathbf{x}_a$ são nulos, estando sobre o cone de luz em p . Se o mapa (H.1) preserva a estrutura causal, então por hipótese $\mathbf{n}_{a,\pm}$ são também

¹Enfatizamos que, aqui, a não se trata de índice tensorial, mas só indica a qual vetor da base nos referimos. Em notação de componentes, temos $[\mathbf{x}_a]^\mu = x_{(a)}^\mu$.

vetores nulos com respeito a $\tilde{\mathbf{g}}$, isto é: $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{n}_{a,\pm}, \mathbf{n}_{a,\pm}) = 0$ ou $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_a) \pm 2\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_a, \mathbf{t}) = 0$. Subtraindo estas duas equações, vemos que \mathbf{t} é ortogonal a cada um dos vetores \mathbf{x}_a , também com respeito a $\tilde{\mathbf{g}}$:

$$\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_a, \mathbf{t}) = 0, \quad (\text{H.3})$$

e portanto

$$\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = -\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_a). \quad (\text{H.4})$$

Podemos construir uma outra classe de vetores nulos em p , $\mathbf{m}_{a,b} = \mathbf{t} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x}_a + \mathbf{x}_b)$, com $b \neq a$. É imediato verificar que dada a ortogonalidade da base escolhida com respeito a \mathbf{g} , temos $\mathbf{g}(\mathbf{m}_{a,b}, \mathbf{m}_{a,b}) = 0$. Por hipótese, então também devemos ter $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{m}_{a,b}, \mathbf{m}_{a,b}) = 0$, ou seja $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) + \frac{1}{2}[\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_a) + \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_b)] + \frac{2}{\sqrt{2}}\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{t}, \mathbf{x}_b) + \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) = 0$. Mas, de acordo com (H.3), o quarto termo é nulo; de acordo com (H.4), a soma dos três primeiros termos também se anula:

$$\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) + \frac{1}{2}[\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_a) + \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_b)] = \frac{1}{2}[\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_a) + \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_b)] = 0;$$

de onde se conclui a ortogonalidade dos vetores tipo-espaço da base (H.2), também com respeito a $\tilde{\mathbf{g}}$,

$$\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) = 0. \quad (\text{H.5})$$

Concluimos assim, a partir de (H.3) e (H.5), que (H.2) é uma base ortogonal também com respeito a ambas as métricas \mathbf{g} e $\tilde{\mathbf{g}}$. Da Eq.(H.4), temos que $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{t}, \mathbf{t})/\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_a) = -1 = \mathbf{g}(\mathbf{t}, \mathbf{t})/\mathbf{g}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_a)$. Portanto, podemos afirmar que em cada ponto $p \in \mathcal{M}$, $\tilde{\mathbf{g}} = \Omega^2(p)\mathbf{g}$. A função $\Omega^2 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, que chamaremos de ‘*fator conforme*’, deve ser positiva definida, para que um vetor tipo-tempo com respeito a uma métrica não seja tipo-espaço com respeito à outra. Encontramos assim a transformação desejada.

H.1 Transformações de Weyl

Escreva a ‘transformação de Weyl’ encontrada acima, e sua inversa

$$\tilde{\mathbf{g}} = \Omega^2(p) \mathbf{g}, \quad \tilde{\mathbf{g}}^{-1} = \frac{1}{\Omega^2(p)} \mathbf{g}^{-1}. \quad (\text{H.6})$$

A seguir, obtemos as transformações de diversos objetos geométricos sob (H.6).

*

Conexões

Considere os símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu, \nu} + g_{\beta\nu, \mu} - g_{\mu\nu, \beta}), \quad \text{e} \quad \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} (\tilde{g}_{\beta\mu, \nu} + \tilde{g}_{\beta\nu, \mu} - \tilde{g}_{\mu\nu, \beta}),$$

de duas métricas relacionadas por (H.6). Temos

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} \Omega^{-2} g^{\alpha\beta} \Omega^2 (g_{\beta\mu, \nu} + g_{\beta\nu, \mu} - g_{\mu\nu, \beta}) + \frac{1}{2} \Omega^{-2} g^{\alpha\beta} 2\Omega (g_{\beta\mu, \nu} \Omega_{, \mu} + g_{\beta\nu, \mu} \Omega_{, \nu} - g_{\mu\nu, \beta} \Omega_{, \beta}),$$

portanto,

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + S_{\mu\nu}^{\alpha}, \quad (\text{H.7a})$$

$$S_{\mu\nu}^{\alpha} = \Omega^{-1} (\delta_{\mu}^{\alpha} \Omega_{, \nu} + \delta_{\nu}^{\alpha} \Omega_{, \mu} - g_{\mu\nu} \Omega_{, \alpha}). \quad (\text{H.7b})$$

*

O tensor de Riemann

Sabendo (H.7), podemos calcular a transformação do tensor de Riemann,

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma_{\beta\delta, \gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma, \delta}^{\alpha} + \Gamma_{\gamma\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\beta\delta}^{\sigma} - \Gamma_{\delta\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^{\sigma}.$$

Consideremos coordenadas geodésicas para a métrica \mathbf{g} , de modo que

$$\begin{aligned} \tilde{R}^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} &= R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} + \\ &+ S_{\beta\delta, \gamma}^{\alpha} - S_{\beta\gamma, \delta}^{\alpha} + S_{\gamma\sigma}^{\alpha} S_{\beta\delta}^{\sigma} - S_{\delta\sigma}^{\alpha} S_{\beta\gamma}^{\sigma}, \end{aligned}$$

calculando, as contração de $S_{\mu\nu}^\alpha$, temos

$$\begin{aligned}\tilde{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} - R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} &= 2\Omega^{-1}(\delta_{[\delta}^\alpha \partial_{\gamma]} \partial_{\beta}\Omega - g_{\beta[\delta} \partial_{\gamma]}\partial^\alpha\Omega) - \\ &\quad - 4\Omega^{-2}(\delta_{[\delta}^\alpha \partial_{\gamma]}\Omega \partial_{\beta}\Omega - g_{\beta[\delta} \partial_{\gamma]}\Omega \partial^\alpha\Omega + \frac{1}{2}\delta_{[\gamma}^\alpha g_{\delta]\beta} \partial_\sigma\Omega \partial^\sigma\Omega).\end{aligned}$$

Esta é uma expressão tensorial, válida em qualquer sistema de coordenadas, desde que restituamos as derivadas covariantes quando necessário. Uma vez que $\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}\Omega = 0$ para a função escalar $\Omega(x)$, não é necessário simetrizar as derivadas de segunda ordem. Assim, em um sistema de coordenadas qualquer,

$$\tilde{R}^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} - \Omega^{-2} R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = 4\Omega^{-3}\delta_{[\delta}^{[\alpha} \nabla_{\gamma]} \nabla^{\beta]}\Omega - 8\Omega^{-4} \left(\delta_{[\delta}^{[\alpha} \nabla_{\gamma]}\Omega \nabla^{\beta]}\Omega + \frac{1}{4}\delta_{[\gamma}^\alpha \delta_{\delta]}^\beta \nabla_\sigma\Omega \nabla^\sigma\Omega \right).$$

Usando

$$\delta_{[\gamma}^{[\alpha} \delta_{\delta]}^{\beta]} = \frac{1}{2}(\delta_{[\gamma}^\alpha \delta_{\delta]}^\beta - \delta_{[\gamma}^\beta \delta_{\delta]}^\alpha) = \frac{1}{2}(\delta_{[\gamma}^\alpha \delta_{\delta]}^\beta + \delta_{[\delta}^\beta \delta_{\gamma]}^\alpha) = \delta_{[\gamma}^\alpha \delta_{\delta]}^\beta, \quad (\text{H.8})$$

e reescrevendo derivadas covariantes como

$$\{\Omega^{-2}\nabla_\sigma\Omega\} \Omega^{-2}\nabla^\sigma\Omega = \nabla_\sigma(\Omega^{-1}) \nabla^\sigma(\Omega^{-1}). \quad (\text{H.9})$$

temos por fim a relação entre os tensores de Riemann ligados por uma transformação conforme:

$$\tilde{R}^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = \Omega^{-2} R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} + \delta_{[\gamma}^{[\alpha} \Omega^{\beta]}\delta_{\delta]}; \quad (\text{H.10a})$$

$$\Omega^{\beta}{}_{\delta} = 4\Omega^{-1} g^{\beta\sigma}(\Omega^{-1})_{;\delta\sigma} - 2\delta_{\delta}^{\beta} g^{\sigma\tau}(\Omega^{-1})_{;\sigma}(\Omega^{-1})_{;\tau}. \quad (\text{H.10b})$$

*

O tensor e o escalar de Ricci

Com a fórmula (H.10), podemos facilmente calcular o tensor de Riemann $\tilde{R}^{\beta}{}_{\delta}$. Somando α e γ ,

$$\tilde{R}^{\alpha\beta}{}_{\alpha\delta} = \Omega^{-2} R^{\alpha\beta}{}_{\alpha\delta} + \delta_{[\alpha}^{\alpha} \Omega^{\beta]}\delta_{\delta]}. \quad (\text{H.11})$$

Agora, segue alguma álgebra. É necessário usar

$$\delta_{[\alpha}^{[\alpha} \Omega^{\beta]}_{\delta]} = \frac{1}{4} \{ (d-2) \Omega^\beta_{\delta} + \delta^\beta_{\delta} \Omega^\alpha_{\alpha} \}; \quad (\text{H.12})$$

e também

$$\delta_{[\alpha}^{[\alpha} \Omega^{\beta]}_{\delta]} = (d-2) \Omega^{-1} g^{\beta\sigma} (\Omega^{-1})_{;\delta\sigma} - \delta^\beta_{\delta} g^{\sigma\tau} [(d-1) (\Omega^{-1})_{;\sigma} (\Omega^{-1})_{;\tau} - \Omega^{-1} (\Omega^{-1})_{;\sigma\tau}]. \quad (\text{H.13})$$

Os dois últimos termos da última igualdade podem ser reescritos de forma mais compacta, notando que

$$(\Omega^{d-2})_{;\sigma\tau} = (d-2) \Omega^d \{ (d-3) \nabla_\sigma (\Omega^{-1}) \nabla_\tau (\Omega^{-1}) + \Omega^{-3} \nabla_\sigma \nabla_\tau \Omega \},$$

onde usamos (H.9). Agora, temos

$$\nabla_\sigma \nabla_\tau (\Omega^{-1}) = -\nabla_\sigma (\Omega^{-2} \nabla_\tau \Omega) = 2\Omega^{-3} \nabla_\sigma \Omega \nabla_\tau \Omega - \Omega^{-2} \nabla_\sigma \nabla_\tau \Omega, \quad (\text{H.14})$$

e portanto

$$(\Omega^{d-2})_{;\sigma\tau} = (d-2) \Omega^d [(d-1) \nabla_\sigma (\Omega^{-1}) \nabla_\tau (\Omega^{-1}) - \nabla_\sigma \nabla_\tau (\Omega^{-1})]. \quad (\text{H.15})$$

Isso leva à relação procurada:

$$\tilde{R}^\beta_{\delta} = \Omega^{-2} R^\beta_{\delta} + (d-2) \Omega^{-1} g^{\beta\sigma} (\Omega^{-1})_{;\delta\sigma} - (d-2)^{-1} \Omega^{-d} \delta^\beta_{\delta} g^{\sigma\tau} (\Omega^{d-2})_{;\sigma\tau}. \quad (\text{H.16})$$

Por fim, podemos tomar o traço da equação acima, para obter o escalar de Ricci:

$$\tilde{R} = \Omega^{-2} R + (d-2) \Omega^{-1} g^{\mu\nu} (\Omega^{-1})_{;\mu\nu} - d(d-2)^{-1} \Omega^{-d} g^{\mu\nu} (\Omega^{d-2})_{;\mu\nu}, \quad (\text{H.17})$$

ou ainda, usando as Eqs.(H.9), (H.14) e (H.15),

$$\tilde{R} = \Omega^{-2} R - 2(d-1) \Omega^{-3} g^{\mu\nu} \Omega_{;\mu\nu} - (d-1)(d-4) \Omega^{-4} g^{\mu\nu} \Omega_{;\mu} \Omega_{;\nu}. \quad (\text{H.18})$$

H.2 O Tensor de Weyl

Tendo encontrado as fórmulas para as transformações dos tensores de curvatura sob o mapa (H.6), é possível construir uma combinação destes objetos que seja invariante conforme.

Da Eq.(H.11), usando o resultado (H.12),

$$\tilde{R}^\beta{}_\delta - \Omega^{-2} R^\beta{}_\delta = \frac{1}{4}\{(d-2)\Omega^\beta{}_\delta + \delta_\delta^\beta \Omega^\alpha{}_\alpha\}, \quad (\text{H.19})$$

segue imediatamente que o escalar de Ricci é proporcional ao traço do tensor $\Omega^\alpha{}_\beta$, viz.

$$\tilde{R} - \Omega^{-2} R = \frac{1}{2}(d-1)\Omega^\alpha{}_\alpha. \quad (\text{H.20})$$

Assim, podemos reescrever o lado direito da relação (H.10) em termos de uma combinação do escalar e do tensor de Ricci, eliminando $\Omega^\alpha{}_\beta$:

$$\begin{aligned} \tilde{R}^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} - \Omega^{-2} R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} &= \delta_{[\gamma}^{[\alpha} \Omega^{\beta]}{}_{\delta]} \\ &= \frac{4}{d-2} \delta_{[\gamma}^{[\alpha} \left(\tilde{R}^{\beta]}{}_{\delta]} - \Omega^{-2} R^{\beta]}{}_{\delta]} \right) - \frac{1}{d-2} \delta_{[\gamma}^\alpha \delta_{\delta]}^\beta \Omega^\sigma{}_\sigma \\ &= \frac{4}{d-2} \delta_{[\gamma}^{[\alpha} \left(\tilde{R}^{\beta]}{}_{\delta]} - \Omega^{-2} R^{\beta]}{}_{\delta]} \right) - \\ &\quad - \frac{2}{(d-1)(d-2)} \delta_{[\gamma}^\alpha \delta_{\delta]}^\beta \left(\tilde{R} - \Omega^{-2} R \right). \end{aligned}$$

Aqui, usamos a relação (H.19) para eliminar $\Omega^\alpha{}_\beta$ na segunda igualdade, e a relação (H.20) para eliminar $\Omega^\sigma{}_\sigma$ na última igualdade. Usamos também a identidade (H.8). Contraindo ambos os lados da equação com $\tilde{\mathbf{g}} = \Omega^2 \mathbf{g}$, podemos abaixar o índice β ; com isto, os fatores Ω^{-2} do lado direito da equação somem (lembre que está entendido que o índices dos tensores em $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ têm índices levantados com a métrica correspondente, \mathbf{g}) e ficamos com

$$\begin{aligned} \tilde{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} - R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} &= \frac{2}{d-2} \left\{ \delta_{[\gamma}^\alpha \left(\tilde{R}_{\delta]\beta} - R_{\delta]\beta} \right) - \delta_{[\gamma}^\sigma \left(\tilde{R}^\alpha{}_{\delta]} \tilde{g}_{\sigma\beta} - R^\alpha{}_{\delta]} g_{\sigma\beta} \right) \right\} - \\ &\quad - \frac{2}{(d-1)(d-2)} \delta_{[\gamma}^\alpha \delta_{\delta]}^\sigma \left(\tilde{g}_{\sigma\beta} \tilde{R} - g_{\sigma\beta} R \right). \end{aligned}$$

Fica então claro, separando em cada lado da equação as grandezas correspondentes a cada métrica, que o tensor

$$W^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} - \frac{2}{d-2} \{ \delta_{[\gamma}^\alpha R_{\delta]\beta} - \delta_{[\gamma}^\sigma R^\alpha{}_{\delta]g_{\sigma\beta}} \} + \frac{2}{(d-1)(d-2)} \delta_{[\gamma}^\alpha \delta_{\delta]}^\sigma g_{\sigma\beta} R \quad (\text{H.20})$$

é um invariante conforme, isto é

$$\tilde{W}^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = W^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}. \quad (\text{H.21})$$

O tensor (H.2) é conhecido como ‘*Tensor de Weyl*’. É imediato obter a fórmula com todos os índices covariantes:

$$W_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{2}{d-2} \{ g_{\alpha[\gamma} R_{\delta]\beta} - g_{\beta[\gamma} R_{\delta]\alpha} \} + \frac{2}{(d-1)(d-2)} g_{\alpha[\gamma} g_{\delta]\beta} R. \quad (\text{H.22})$$

Note que, como discutido ao fim do §H.1, a posição dos índices é crucial; por exemplo, neste caso $\tilde{W}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Omega^2 W_{\alpha\beta\gamma\delta}$, e portanto, ao contrário de (H.2), o tensor (H.22) *não* é um invariante conforme.

É imediato ver, da Eq.(H.22), que o tensor de Weyl possui as mesmas simetrias do tensor de Riemann:

$$W_{(\alpha\beta)\gamma\delta} = W_{\alpha\beta(\gamma\delta)} = 0; \quad W_{\alpha\beta\gamma\delta} = W_{\gamma\delta\alpha\beta}; \quad (\text{H.23})$$

aqui, $T_{(\alpha\dots\beta)}$, etc., denota a simetrização dos índices em parênteses.

Considere o traço de \mathbf{W} obtido ao se contrair os índices α e γ , em (H.2):

$$\begin{aligned} W^\alpha{}_{\beta\alpha\delta} &= R_{\beta\delta} - \frac{1}{d-2} \{ (d-2)R_{\beta\delta} + g_{\beta\delta}R \} + \frac{1}{d-2} g_{\beta\delta}R \\ &= -\frac{1}{d-2} g_{\beta\delta}R + \frac{1}{d-2} g_{\beta\delta}R \\ &= 0. \end{aligned}$$

Desta forma, usando as simetrias (H.23), temos que

$$W^\alpha{}_{\beta\alpha\delta} = -W^\alpha{}_{\beta\delta\alpha} = -W_{\beta}{}^\alpha{}_{\alpha\delta} = -W_{\delta\alpha}{}^\alpha{}_{\beta} = -W_{\alpha\delta\beta}{}^\alpha = 0.$$

Os outros traços possíveis de \mathbf{W} são triviais, do tipo $W^\alpha{}_{\alpha\gamma\delta} = W_{\beta\delta}{}^\alpha{}_{\alpha} = 0$,

que se anulam devido à antissimetria dos pares de índices contraídos. Portanto, concluímos que *todos os traços possíveis do tensor de Weyl se anulam*. É às vezes dito que \mathbf{W} é “a parte sem traço do tensor de Riemann”.

Apêndice I

Fórmulas especiais

I.1 Manipulação de Jacobianos

Ao lidar com derivadas do tipo $(\partial x/\partial y)_z$ onde o subscrito significa manter z constante (i.e. $x = x(y, z)$), o cálculo de razões de derivadas parciais é realizado de maneira simples usando as propriedades de ‘Jacobianos’ $\partial(A, B)/\partial(C, D)$, definidos como

$$\frac{\partial(A, B)}{\partial(C, D)} = \text{Det} \begin{pmatrix} \partial A/\partial C & \partial A/\partial D \\ \partial B/\partial C & \partial B/\partial D \end{pmatrix}.$$

É óbvio de sua definição que a derivada $(\partial x/\partial y)_z$ podem ser escrita como o Jacobiano $(\partial x/\partial y)_z = \partial(x, z)/\partial(y, z)$. Também da definição, é automática a propriedade de antisimetria $\partial(A, B)/\partial(C, D) = -\partial(B, A)/\partial(C, D) = -\partial(A, B)/\partial(D, C)$, que equivale à troca de linhas ou colunas do determinante. Por fim, usando a multiplicação de matrizes e a regra da cadeia para as derivadas parciais que compõem seus elementos, também é imediato mostrar que os Jacobianos obedecem sua própria “regra da cadeia” na forma

$$\frac{\partial(A, B)}{\partial(C, D)} = \frac{\partial(A, B)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(C, D)},$$

que implica, em particular, em

$$\frac{1}{\partial(A, B)/\partial(C, D)} = \frac{\partial(C, D)}{\partial(A, B)}.$$

Com isso se pode calcular, por exemplo,

$$\begin{aligned} \frac{(\partial E/\partial V)_S}{(\partial E/\partial S)_V} &= \frac{\partial(E, S)}{\partial(V, S)} \bigg/ \frac{\partial(E, V)}{\partial(S, V)} = \frac{\partial(E, S)}{\partial(V, S)} \frac{\partial(S, V)}{\partial(E, V)} = \\ &= -\frac{\partial(E, S)}{\partial(V, S)} \frac{\partial(V, S)}{\partial(E, V)} = -\frac{\partial(E, S)}{\partial(E, V)} = -(\partial S/\partial V)_E. \end{aligned}$$

Repare no sinal, que mostra que não se pode simplesmente “cancelar” os ∂E no primeiro membro da equação, como se faria em uma regra da cadeia de derivadas ordinárias.

I.2 Condição para uma forma quadrática positiva

A desigualdade (5.14) equivale a afirmar que a forma quadrática

$$Q = \Gamma_{AB} \delta X^A \delta X^B, \quad \text{com} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial S^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial S \partial V} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial S \partial V} & \frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \delta X = \begin{pmatrix} \delta S \\ \delta V \end{pmatrix}$$

deve ser positiva definida. A afirmação pode ser verificada diagonalizando a matriz Γ e exigindo que os elementos da matriz resultante sejam, cada um, positivos. Isso porque o processo de diagonalização, sendo uma transformação ortogonal, não muda o valor de Q , e com a quadrática estando diagonalizada a ausência de termos cruzados permite avaliar cada coeficiente separadamente. Esses coeficientes serão os autovalores de Γ . Para demonstrar as Eqs.(5.15) abrevie $\Gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Os autovalores λ_{\pm} são as soluções da equação característica $\text{Det}(\Gamma - \lambda I) = 0$, que aqui são as raízes de um polinômio do segundo grau:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(a + c \pm \sqrt{(a + c)^2 - 4ac + 4b^2} \right).$$

Queremos as condições para que ambos os autovalores $\lambda_{\pm} > 0$. Siga os seguintes passos. (1) Se $\sqrt{\{(a+c)^2 + \dots\}} > |a+c|$ pelo menos um dos autovalores é negativo, viz. $\lambda_- < 0$; para que isso não aconteça é necessário que $-4ac + 4b^2 < 0$, i.e. $ac - b^2 > 0$, que é a Eq.(5.15b). (2) Se a e c têm sinais opostos então $ac - b^2 < 0$, o que contraria (1) e portanto a e c têm o mesmo sinal. (3) De (2) se conclui imediatamente que $a > 0$ caso contrário teríamos $a + c < 0$ e necessariamente $\lambda_- < 0$; a condição $a > 0$ é a Eq.(5.15a).

I.3 Função Hipergeométrica de Gauss

[Cf., e.g., Bateman et al. (1955); Dennery & Krzywicki (1996).]

A Função Hipergeométrica (de Gauss), denotada por $F[\alpha, \beta; \gamma; z]$ (ou ${}_2F_1[\alpha, \beta; \gamma; z]$) é expressa pela série de potências

$$F[\alpha, \beta; \gamma; z] = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(n+1)} z^n, \quad (\text{I.0})$$

que converge para $|z| < 1$, ou pela integral de Euler

$$F[\alpha, \beta; \gamma; z] = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 dt (1-tz)^{-\alpha} (1-t)^{\gamma-\beta-1}, \quad (\text{I.1})$$

válida por continuação analítica sobre todo \mathbb{C} com o corte $|\arg(1-z)| < \pi$. É uma solução da equação diferencial

$$z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta - 1)]\frac{dF}{dz} - \alpha\beta F = 0. \quad (\text{I.2})$$

É fácil ver que $F[\alpha, \beta; \gamma; z]$ é simétrica sob a troca de α e β , e se um deles, digamos $\alpha = 0$, a integral de Euler mostra imediatamente que $F[0, \beta; \gamma; z] = F[\alpha, 0; \gamma; z] = 1$, logo a Hipergeométrica deixa de ser uma solução não-trivial da equação diferencial. Tanto a equação diferencial quanto a solução acima são singulares nos pontos $z = 0, 1, \infty$. Usando a representação (I.1) em $z = 1$ a

integral se reduz à Função Beta de Euler

$$B[x, y] \equiv \int_0^1 dt t^{x-1}(1-t)^{y-1} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad (\text{I.3})$$

de onde se tira imediatamente que

$$F[\alpha, \beta; \gamma; 1] = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \beta)\Gamma(\gamma - \alpha)}. \quad (\text{I.4})$$

No limite em que $|z| \rightarrow \infty$,

$$F[\alpha, \beta; \gamma; z] \approx \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \alpha)}(-z)^{-\alpha} + \{\beta \leftrightarrow \alpha\}. \quad (\text{I.5})$$

Uma representação integral alternativa da Hipergeométrica,

$$F[\alpha, \beta; \gamma; x] = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_1^\infty (z-x)^{-\alpha}(z-1)^{\gamma-\beta-1} z^{\alpha-\gamma} dz,$$

tem uma relação útil com a Função Beta Incompleta de Euler,

$$B_x[p; q] \equiv \int_0^x z^{p-1}(1-z)^{q-1} dz,$$

levando à solução para uma classe de integrais indefinidas. Com a mudança de variáveis $y = x/z$, que mapeia o intervalo de integração $z \in (0, x) \mapsto y \in (\infty, 1)$,

$$B_x[p; q] = \int_1^\infty (x/y)^{p-1}(1-x/y)^{q-1}(x/y^2) dy = x^p \int_1^\infty (y-x)^{q-1} y^{-(p+q)} dy,$$

e fazendo $\alpha = 1 - q$, $\beta = p$, $\gamma = 1 + p$ temos a Hipergeométrica a menos do coeficiente de funções Gamma $\Gamma(\gamma)/\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta) = \beta = p$, ou seja

$$\int_0^x z^{p-1}(1-z)^{q-1} dz = \frac{x^p}{p} F[p, (1-q); (p+1); x]. \quad (\text{I.6})$$

Referências

- Abreu, G. & Visser, M. (2010). *Physical Review D*, **82** (4), 044027. [73](#)
- Afshordi, N., Coriano, C., Delle Rose, L., Gould, E., & Skenderis, K. (2017a). *Physical Review Letters*, **118** (4), 041301. [215](#), [244](#)
- Afshordi, N., Gould, E., & Skenderis, K. (2017b). *Physical Review D*, **95** (12), 123505. [215](#), [221](#)
- Aharony, O., Gubser, S. S., Maldacena, J., Ooguri, H., & Oz, Y. (2000). *Physics Reports*, **323**, 183–386. [221](#)
- Akbar, M. & Cai, R.-G. (2007). *Phys. Rev. D*, **75** (8), 084003. [73](#), [74](#)
- Albrecht, A. & Steinhardt, P. J. (1982). *Physical Review Letters*, **48** (17), 1220. [38](#)
- Albrecht, A., Steinhardt, P. J., Turner, M. S., & Wilczek, F. (1982). *Physical Review Letters*, **48** (20), 1437. [40](#)
- Aldrovandi, R., Almeida, J. B., & Pereira, J. (2007). *Classical and Quantum Gravity*, **24** (6), 1385. [112](#)
- Aldrovandi, R. & Pereira, J. G. (2009). *Foundations of Physics*, **39**, 1–19. [112](#)
- Alexander, S., Brandenberger, R., & Easson, D. (2000). *Physical Review D*, **62** (10), 103509. [22](#), [202](#)
- Allahverdi, R., Brandenberger, R., Cyr-Racine, F.-Y., & Mazumdar, A. (2010). *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, **60**, 27–51. [40](#)
- Alvarez, E., Alvarez-Gaume, L., & Lozano, Y. (1995). *Nuclear Physics B- Proceedings Supplements*, **41** (1-3), 1–20. [94](#)
- Anguige, K. & Tod, K. (1999a). *Annals of Physics*, **276** (2), 294–320. [86](#)

- Anguige, K. & Tod, K. P. (1999b). *Annals of Physics*, **276** (2), 257–293. [86](#)
- Antoniadis, I., Mazur, P. O., & Mottola, E. (2012). *JCAP*, **9**, 024. [214](#)
- Araujo, A., Jennen, H., Pereira, J., Sampson, A., & Savi, L. (2015). *General relativity and gravitation*, **47** (12), 151. [112](#)
- Arnowitt, R., Deser, S., & Misner, C. W. (1960). *Physical Review*, **117** (6), 1595. [13](#)
- Balasubramanian, V. & Kraus, P. (1999). *Communications in Mathematical Physics*, **208**, 413–428. [225](#)
- Bardeen, J. M. (1980). *Physical Review D*, **22** (8), 1882. [53](#)
- Bardeen, J. M., Carter, B., & Hawking, S. W. (1973). *Communications in Mathematical Physics*, **31** (2), 161–170. [72](#)
- Bars, I., Chen, S.-H., Steinhardt, P. J., & Turok, N. (2012). *Physical Review D*, **86** (8), 083542. [6](#)
- Bassett, B. A., Tsujikawa, S., & Wands, D. (2006). *Reviews of Modern Physics*, **78** (2), 537. [40](#)
- Bateman, H., Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., & Tricomi, F. G. (1955). *Higher Transcendental Functions*, volume 1. New York: McGraw-Hill. [304](#)
- Baumann, D. (2009). *arXiv preprint arXiv:0907.5424*, . [8](#)
- Becker, K., Becker, M., & Schwarz, J. H. (2006). *String theory and M-theory: A modern introduction*. Cambridge: Cambridge University Press. [94](#)
- Bekenstein, J. D. (1972). *Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985)*, **4** (15), 737–740. [72](#)
- Bekenstein, J. D. (1973). *Physical Review D*, **7** (8), 2333. [72](#)
- Bekenstein, J. D. (1981). *Physical Review D*, **23** (2), 287. [76](#)
- Belinskii, V. A., Khalatnikov, I. M., & Lifshitz, E. M. (1970). *Advances in Physics*, **19** (80), 525–573. [3](#), [83](#), [240](#)
- Belinskii, V. A., Khalatnikov, I. M., & Lifshitz, E. M. (1982). *Advances in Physics*, **31** (6), 639–667. [3](#), [83](#), [240](#)

REFERÊNCIAS

- Benaoum, H. B. (2002). *ArXiv High Energy Physics - Theory e-prints*, . [142](#)
- Bento, M., Bertolami, O., & Sen, A. (2002). *Physical Review D*, **66** (4), 043507. [142](#)
- Boehm, T. & Brandenberger, R. (2003). *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2003** (06), 008. [285](#)
- Boltzmann, L. (1884). *Annalen der Physik*, **258** (6), 291–294. [67](#)
- Bondi, H. & Gold, T. (1948). *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **108** (3), 252–270. [30](#)
- Borde, A. (1994). *Physical Review D*, **50** (6), 3692. [43](#)
- Borde, A., Guth, A. H., & Vilenkin, A. (2003). *Physical review letters*, **90** (15), 151301. [43](#), [45](#)
- Borde, A. & Vilenkin, A. (1994). *Physical Review Letters*, **72** (21), 3305. [43](#)
- Borde, A. & Vilenkin, A. (1997). *Physical Review D*, **56** (2), 717. [43](#)
- Boubekeur, L. & Lyth, D. H. (2005). *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2005** (07), 010. [150](#)
- Boulware, D. G. & Deser, S. (1985). *Physical Review Letters*, **55** (24), 2656. [74](#)
- Bousso, R. (2002). *Reviews of Modern Physics*, **74** (3), 825. [26](#), [76](#)
- Bousso, R. & Engelhardt, N. (2015a). *Physical review letters*, **115** (8), 081301. [77](#), [176](#), [288](#), [290](#)
- Bousso, R. & Engelhardt, N. (2015b). *Physical Review D*, **92** (4), 044031. [292](#)
- Bousso, R. & Engelhardt, N. (2016). *Phys. Rev. D*, **93** (2), 024025. [77](#), [78](#), [176](#), [288](#)
- Bousso, R., Harnik, R., Kribs, G. D., & Perez, G. (2007). *Physical Review D*, **76** (4), 043513. [79](#), [80](#), [81](#)
- Brandenberger, R. (2017). *International Journal of Modern Physics D*, **26** (01), 1740002. [2](#)
- Brandenberger, R., Easson, D. A., & Mazumdar, A. (2004). *Physical Review D*, **69** (8), 083502. [202](#), [203](#), [204](#)

REFERÊNCIAS

- Brandenberger, R. & Peter, P. (2017). *Foundations of Physics*, **47** (6), 797–850. [3](#), [105](#), [240](#)
- Brandenberger, R. & Vafa, C. (1989). *Nuclear Physics B*, **316** (2), 391–410. [22](#), [202](#)
- Brown, J. D. & Henneaux, M. (1986). *Communications in Mathematical Physics*, **104** (2), 207–226. [221](#)
- Brown, J. D. & York, J. W. (1993). *Physical Review D*, **47** (4), 1407. [225](#)
- Brustein, R. (2000). *Phys. Rev. Lett.* **84** (gr-qc/9904061), 2072. [77](#)
- Brustein, R., Gasperini, M., & Veneziano, G. (1998). *Physics Letters B*, **431**, 277–285. [209](#)
- Bunch, T. S. & Davies, P. C. (1978). In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* volume 360 pp. 117–134, The Royal Society. [62](#)
- Burgess, C. P., Majumdar, M., Nolte, D., Quevedo, F., Rajesh, G., & Zhang, R.-J. (2001). *Journal of High Energy Physics*, **2001** (07), 047. [203](#)
- Bzowski, A., McFadden, P., & Skenderis, K. (2013). *Journal of High Energy Physics*, **2013** (4), 47. [214](#), [236](#)
- Cai, R.-G. & Kim, S. P. (2005). *Journal of High Energy Physics*, **2**, 050. [73](#), [74](#), [170](#)
- Caldwell, R. R. (2002). *Physics Letters B*, **545** (1), 23–29. [130](#)
- Callan, C. G., Coleman, S., & Jackiw, R. (1970). *Annals of Physics*, **59** (1), 42–73. [112](#)
- Carroll, S. M. & Chen, J. (2004). *arXiv preprint hep-th/0410270*, . [83](#)
- Carroll, S. M., Hoffman, M., & Trodden, M. (2003). *Physical Review D*, **68** (2), 023509. [131](#)
- Chaplygin, S. (1902). *Scientific Memoirs*, , 1–121. [142](#)
- Chimento, L. P. (2004). *Physical Review D*, **69** (12), 123517. [142](#)
- Chimento, L. P. & Lazkoz, R. (2003). *Physical review letters*, **91** (21), 211301. [120](#), [131](#)

- Chimento, L. P. & Zimdahl, W. (2008). *International Journal of Modern Physics D*, **17**, 2229–2254. [120](#)
- Claudel, C. M. & Newman, K. P. (1998). In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* volume 454 pp. 1073–1107, The Royal Society. [86](#)
- Clifton, T., Ellis, G. F., & Tavakol, R. (2013). *Classical and Quantum Gravity*, **30** (12), 125009. [84](#)
- Copeland, E. J., Lidsey, J. E., & Wands, D. (1997). *Nuclear Physics B*, **506**, 407–420. [209](#)
- Creminelli, P., Norena, J., & Simonović, M. (2012). *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2012** (07), 052. [214](#)
- Creswell, J., von Hausegger, S., Jackson, A. D., Liu, H., & Naselsky, P. (2017). *arXiv preprint arXiv:1706.04191*, . [114](#)
- Cvetič, M. & Soleng, H. H. (1995). *Physical Review D*, **51** (10), 5768. [129](#)
- Cvetič, M. & Soleng, H. H. (1997). *Physics Reports*, **282** (4), 159–223. [129](#)
- Dabrowski, M. P., Stachowiak, T., & Szydłowski, M. (2003). *Physical Review D*, **68** (10), 103519. [120](#)
- Damour, T., Henneaux, M., & Nicolai, H. (2003). *Classical and Quantum Gravity*, **20** (9), R145. [83](#)
- Das, S., Goswami, G., Prasad, J., & Rangarajan, R. (2015). *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2015** (06), 001. [204](#), [206](#)
- Davies, P. C. W. & Davis, T. M. (2002). *Foundations of Physics*, **32** (12), 1877–1889. [77](#), [175](#)
- DeAbreu, A., Contreras, D., & Scott, D. (2015). *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2015** (12), 031. [114](#)
- Debnath, U., Banerjee, A., & Chakraborty, S. (2004). *Classical and Quantum Gravity*, **21** (23), 5609. [142](#)
- Dennerly, P. & Krzywicki, A. (1996). *Mathematics for Physicists*. New York: Dover. [304](#)
- Dodson, S. (2003). *Modern cosmology*. Massachusetts: Academic press. [8](#), [57](#), [58](#)

- Durrer, R. (1999). *New astronomy reviews*, **43** (2), 111–156. [22](#)
- Durrer, R. (2008). *The cosmic microwave background*, volume 401. Cambridge University Press Cambridge. [8](#), [56](#), [57](#), [59](#)
- Dvali, G. & Tye, S.-H. H. (1999). *Physics Letters B*, **450** (1), 72–82. [203](#)
- Easther, R. & Lowe, D. (1999). *Physical Review Letters*, **82** (25), 4967. [77](#)
- Egan, C. A. & Lineweaver, C. H. (2010). *The Astrophysical Journal*, **710** (2), 1825. [79](#), [81](#)
- Einstein, A. (1917). *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, **part 1**, 142–152. [18](#)
- Eriksen, H. & Wehus, I. (2011). *arXiv preprint arXiv:1105.1081*, . [114](#)
- Fabris, J., Velten, H., Ogouyandjou, C., & Tossa, J. (2011). *Physics Letters B*, **694** (4), 289–293. [142](#)
- Faraoni, V. (2011). *Physical Review D*, **84** (2), 024003. [26](#)
- Fermi, E. (1956). *Thermodynamics*. Nova Iorque: Dover. [67](#)
- Ferrarese, L. & Merritt, D. (2000). *The Astrophysical Journal Letters*, **539** (1), L9. [82](#)
- Feynman, R. P. (1948). *Reviews of Modern Physics*, **20** (2), 367. [221](#)
- Feynman, R. P., Hibbs, A. R., & Styer, D. F. (2010). *Quantum mechanics and path integrals*. Courier Corporation. [221](#)
- Fixsen, D. (2009). *The Astrophysical Journal*, **707** (2), 916. [30](#)
- Folacci, A. (1991). *Journal of mathematical physics*, **32** (10), 2828–2838. [266](#)
- Fraga, B., Pinto-Neto, N., Zimdahl, W., *et al.* (2010). *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2010** (04), 008. [140](#)
- Frampton, P. H., Hsu, S. D., Kephart, T. W., & Reeb, D. (2009). *Classical and Quantum Gravity*, **26** (14), 145005. [79](#)
- Francesco, P., Mathieu, P., & Sénéchal, D. (2012). *Conformal field theory*. Springer Science & Business Media. [273](#)
- Friedmann, A. (1922). *Zeitschrift für Physik*, **10**, 377–386. [19](#)

- Friedmann, A. (1924). *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, **21** (1), 326–332. [19](#)
- Fukugita, M. & Peebles, P. (2004). *The Astrophysical Journal*, **616** (2), 643. [79](#), [81](#)
- Gasperini, M. (2007). *Elements of string cosmology*. Cambridge University Press. [8](#), [89](#), [98](#)
- Gasperini, M. (2017). *ArXiv e-prints*, [arXiv:1707.05763v1 \[gr-qc\]](#). [203](#)
- Gasperini, M. & Veneziano, G. (1992). *Physics Letters B*, **277** (3), 256–264. [96](#)
- Gasperini, M. & Veneziano, G. (1993). *Astroparticle Physics*, **1** (3), 317–339. [3](#), [100](#)
- Gasperini, M. & Veneziano, G. (2003). *Physics Reports*, **373** (1), 1–212. [100](#)
- Gibbons, G. (2003). *arXiv preprint hep-th/0302199*, . [130](#)
- Gibbons, G. W. & Hawking, S. W. (1977a). *Physical Review D*, **15** (10), 2752. [225](#)
- Gibbons, G. W. & Hawking, S. W. (1977b). *Physical Review D*, **15** (10), 2738. [77](#)
- Giovannini, M. (2007). *International Journal of Modern Physics A*, **22** (16n17), 2697–2894. [57](#)
- Goode, S. & Wainwright, J. (1985). *Classical and Quantum Gravity*, **2** (1), 99. [85](#), [86](#)
- Green, M. B., Schwarz, J. H., & Witten, E. (1987). [88](#)
- Gubser, S. S., Klebanov, I. R., & Polyakov, A. M. (1998). *Physics Letters B*, **428** (1), 105–114. [221](#)
- Gurzadyan, V. & Penrose, R. (2010). *arXiv preprint arXiv:1011.3706*, . [114](#)
- Gurzadyan, V. & Penrose, R. (2011). *arXiv preprint arXiv:1104.5675*, . [114](#)
- Gurzadyan, V. G. & Penrose, R. (2013). *Eur. Phys. J. Plus*, **128** (arXiv: 1302.5162), 22. [108](#), [111](#), [112](#), [114](#)
- Guth, A. H. (1981). *Physical Review D*, **23** (2), 347. [2](#), [38](#)

- Guth, A. H. (2007). *Journal of Physics A Mathematical General*, **40**, 6811–6826. [43](#)
- Hajian, A. (2011). *The Astrophysical Journal*, **740** (2), 52. [114](#)
- Halyo, E. (2004). *Journal of High Energy Physics*, **2004** (02), 062. [214](#)
- Harrison, E. R. (1970). *Physical review D*, **1** (10), 2726. [64](#)
- Hartle, J. B. & Hawking, S. W. (1983). *Physical Review D*, **28** (12), 2960. [221](#)
- Hawking, S. W. (1965). *Physical Review Letters*, **15**, 689–690. [1](#)
- Hawking, S. W. (1975). *Communications in mathematical physics*, **43** (3), 199–220. [72](#)
- Hawking, S. W. (1976). *Physical Review D*, **13** (2), 191. [72](#)
- Hawking, S. W. & Ellis, G. F. R. (1973). *The large scale structure of space-time*, volume 1. Cambridge university press. [17](#), [89](#), [249](#), [265](#)
- Hayward, S. A. (1994). *Physical Review D*, **49** (12), 6467. [26](#)
- Hayward, S. A. (1998). *Classical and Quantum Gravity*, **15** (10), 3147. [73](#), [74](#)
- Hayward, S. A., Mukohyama, S., & Ashworth, M. (1999). *Physics Letters A*, **256** (5), 347–350. [74](#)
- Herdeiro, C., Hirano, S., & Kallosh, R. (2002). *Journal of High Energy Physics*, **2001** (12), 027. [203](#)
- Hirai, S. (2003). *Classical and Quantum Gravity*, **20** (9), 1673. [204](#)
- Hoyle, F. (1948). *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **108**, 372. [30](#)
- Hsu, S. D., Jenkins, A., & Wise, M. B. (2004). *Physics Letters B*, **597** (3), 270–274. [241](#)
- Hubble, E. (1929). *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **15** (3), 168–173. [16](#)
- Jacobson, T. (1995). *Physical Review Letters*, **75** (7), 1260. [74](#)
- Jamil, M. & Rahaman, F. (2009). *The European Physical Journal C*, **64** (1), 97–105. [140](#)

- Kallosh, R., Kang, J. U., Linde, A., & Mukhanov, V. (2008). *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2008** (04), 018. [241](#)
- Kallosh, R. & Linde, A. (2013). *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2013** (07), 002. [151](#), [153](#)
- Kallosh, R., Linde, A., & Roest, D. (2013). *The Journal of high energy physics*, **2013** (11), 1–13. [151](#), [152](#), [153](#)
- Kallosh, R., Linde, A., & Roest, D. (2014). *Journal of High Energy Physics*, **8**, 52. [6](#)
- Kamenshchik, A., Moschella, U., & Pasquier, V. (2001). *Physics Letters B*, **511** (2), 265–268. [142](#)
- Kamenshchik, A. Y. & Khalatnikov, I. M. (2012). *International Journal of Modern Physics D*, **21**, 1250004–1–1250004–8. [22](#)
- Khoury, J., Ovrut, B. A., Seiberg, N., Steinhardt, P. J., & Turok, N. (2002). *Phys. Rev. D*, **65** (8), 086007. [104](#)
- Khoury, J., Ovrut, B. A., Steinhardt, P. J., & Turok, N. (2001). *Physical Review D*, **64** (12), 123522. [102](#)
- Kibble, T. W. B. (1976). *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **9** (8), 1387. [22](#)
- Kofman, L., Linde, A., & Starobinsky, A. A. (1994). *Physical Review Letters*, **73** (24), 3195. [40](#)
- Kohri, K., Lin, C.-M., & Lyth, D. H. (2007). *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2007** (12), 004. [150](#)
- Kormendy, J. & Richstone, D. (1995). *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **33** (1), 581–624. [82](#)
- Landau, L. & Lifshitz, E. (1980). *Statistical Physics, Part 1: Volume 5*. Butterworth-Heinemann. [30](#), [31](#), [67](#), [70](#)
- Larsen, F. & McNees, R. (2003). *Journal of High Energy Physics*, **2003** (07), 051. [214](#)
- Larsen, F. & McNees, R. (2004). *Journal of High Energy Physics*, **2004** (07), 062. [214](#), [228](#), [244](#)
- Larsen, F. & Strominger, A. (2014). *ArXiv e-prints*, . [226](#)

REFERÊNCIAS

- Larsen, F., van der Schaar, J. P., & Leigh, R. G. (2002). *Journal of High Energy Physics*, **4**, 047. [214](#), [236](#)
- Lee, J. M. & Parker, T. H. (1987). *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, **17** (1), 37–91. [109](#)
- Lemaître, G. (1927). In: *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* volume 47 pp. 49–59,. [16](#)
- Lemaître, G. (1931). *Nature*, **127** (3210), 706. [20](#)
- Liddle, A. R., Parsons, P., & Barrow, J. D. (1994). *Physical Review D*, **50** (12), 7222. [42](#)
- LIGO-VIRGO Collaboration, Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T., Abernathy, M., Acernese, F., Ackley, K., Adams, C., Adams, T., Addesso, P., Adhikari, R., *et al.* (2016). *Physical review letters*, **116** (6), 061102. [114](#)
- Linde, A. (1990). *Particle physics and inflationary cosmology*. Switzerland: Harwood Academic Publishers. [81](#)
- Linde, A. (2005). *Physica Scripta*, **2005** (T117), 40. [81](#)
- Linde, A. D. (1982). *Physics Letters B*, **108** (6), 389–393. [2](#), [38](#)
- Lovelock, D. (1971). *Journal of Mathematical Physics*, **12** (3), 498–501. [74](#)
- Lu, J., Geng, D., Xu, L., Wu, Y., & Liu, M. (2015). *Journal of High Energy Physics*, **2015** (2), 1–26. [149](#)
- Lu, J., Xu, L., Li, J., Chang, B., Gui, Y., & Liu, H. (2008). *Physics Letters B*, **662** (2), 87–91. [142](#)
- Lynden-Bell, D. (1999). *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **263** (1-4), 293–304. [175](#)
- Lyth, D. H. & Riotto, A. (1999). *Physics Reports*, **314** (1), 1–146. [214](#)
- Lyth, D. H. & Wands, D. (2002). *Physics Letters B*, **524**, 5–14. [203](#)
- Maldacena, J. (1999). In: *AIP Conference Proceedings CONF-981170* volume 484 pp. 51–63, AIP. [221](#)
- Maldacena, J. (2003). *Journal of High Energy Physics*, **2003** (05), 013. [6](#), [214](#), [221](#), [223](#)

- Maldacena, J. (2011). *arXiv preprint [arXiv:1105.5632]*, . 5, 245
- Mannheim, P. D. (2012). *Foundations of Physics*, **42** (3), 388–420. 5
- Marolf, D. (2017). *Reports on progress in physics. Physical Society (Great Britain)*, . 114
- Marozzi, G., Rinaldi, M., & Durrer, R. (2011). *Physical Review D*, **83** (10), 105017. 204, 206
- McFadden, P. & Skenderis, K. (2010a). In: *Journal of Physics: Conference Series* volume 222 p. 012007, IOP Publishing. 215
- McFadden, P. & Skenderis, K. (2010b). *Physical Review D*, **81** (2), 021301. 214, 215, 221
- Meissner, K. & Veneziano, G. (1991). *Physics Letters B*, **267** (1), 33–36. 96
- Meissner, K. A. & Nurowski, P. (2015). *arXiv preprint arXiv:1506.03280*, . 185
- Misner, C. W. & Sharp, D. H. (1964). *Physical Review*, **136** (2B), B571. 171
- Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman and Company. 249
- Moschella, U. (2006). In: *Einstein, 1905–2005* pp. 120–133. Springer. 265
- Moss, A., Scott, D., & Zibin, J. P. (2011). *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2011** (04), 033. 114
- Mukhanov, V. (1986). *JETP Lett*, **41**, 493. 55
- Mukhanov, V. (2005). *Physical foundations of cosmology*. Cambridge university press. 8, 57
- Mukhanov, V. F., Feldman, H. A., & Brandenberger, R. H. (1992). *Physics Reports*, **215** (5-6), 203–333. 53
- Myers, R. C. & Sinha, A. (2011). *Journal of High Energy Physics*, **2011** (1), 125. 75
- Nagasawa, M. & Brandenberger, R. (1999). *Physics Letters B*, **467** (3), 205–210. 204
- Nagasawa, M. & Brandenberger, R. (2003). *Physical Review D*, **67** (4), 043504. 204

- Newman, E. T. (2014). *General Relativity and Gravitation*, **46**, 1717. [185](#)
- Osborn, H. & Petkou, A. (1994). *Annals of Physics*, **231** (2), 311–362. [280](#)
- Ostriker, J. P. & Steinhardt, P. J. (1995). *ArXiv Astrophysics e-prints*, . [28](#)
- Padmanabhan, T. (2002). *Classical and Quantum Gravity*, **19** (21), 5387. [74](#)
- Page, D. (1983). *Nature*, **304**, 39–41. [83](#)
- Pauli, W. (1973). *Statistical mechanics*, volume 4 of *Pauli Lectures on Physics*. New York: Dover. [79](#)
- Penrose, R. (1965). *Physical Review Letters*, **14**, 57–59. [1](#)
- Penrose, R. (1979). In: *General Relativity: An Einstein centenary survey* pp. 581–638,. [82](#), [84](#)
- Penrose, R. (1989a). *Annals of the New York Academy of Sciences*, **571** (1), 249–264. [83](#)
- Penrose, R. (1989b). *The emperor’s new mind: Concerning computers, minds, and the laws of physics*. Oxford University Press. [80](#), [83](#)
- Penrose, R. (2006). In: *Proceedings of EPAC* pp. 2759–2763,. [106](#)
- Penrose, R. (2007). In: *Dark Matter, and Black Hole Evaporation. IGC Inaugural Conference, Penn State University, State College* pp. 7–11,. [8](#), [106](#), [113](#), [193](#)
- Penrose, R. (2010). *Cycles of time: an extraordinary new view of the universe*. Random House. [106](#), [107](#), [108](#), [109](#), [113](#)
- Penrose, R. (2017). *arXiv preprint [arXiv:1707.04169]*, . [113](#), [114](#)
- Penzias, A. A. & Wilson, R. W. (1965). *The Astrophysical Journal*, **142**, 419–421. [30](#)
- Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., Knop, R., Nugent, P., Castro, P., Deustua, S., Fabbro, S., Goobar, A., Groom, D., *et al.* (1999). *The Astrophysical Journal*, **517** (2), 565. [21](#)
- Peskin, M. E. & Schroeder, D. V. (1995). *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press. [283](#)
- Planck Collaboration, Adam, R., Ade, P. A. R., Aghanim, N., Akrami, Y., Alves, M. I. R., Argüeso, F., Arnaud, M., Arroja, F., Ashdown, M., & et al. (2016a). *Astronomy and Astrophysics*, **594**, A1. [31](#), [56](#), [60](#)

- Planck Collaboration, Ade, P., Aghanim, N., Arnaud, M., Arroja, F., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Ballardini, M., Banday, A., Barreiro, R., *et al.* (2016b). *Astronomy & Astrophysics*, **594**, A20. [64](#), [152](#)
- Planck Collaboration, Ade, P. A. R., Aghanim, N., Arnaud, M., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Banday, A. J., Barreiro, R. B., Bartlett, J. G., & *et al.* (2016c). *Astronomy and Astrophysics*, **594**, A13. [16](#)
- Polarski, D. & Starobinsky, A. A. (1996). *Classical and Quantum Gravity*, **13** (3), 377. [61](#)
- Polchinski, J. (1998a). *String theory: Volume 2, superstring theory and beyond*. Cambridge university press. [88](#)
- Polchinski, J. (1998b). *String theory: Volume 1, an introduction do the bosonic string*. Cambridge university press. [88](#), [94](#)
- Powell, B. A. & Kinney, W. H. (2007). *Physical Review D*, **76** (6), 063512. [204](#), [205](#), [206](#)
- Quevedo, F. (2002). *Classical and Quantum Gravity*, **19** (22), 5721. [105](#)
- Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., Clocchiatti, A., Diercks, A., Garnavich, P. M., Gilliland, R. L., Hogan, C. J., Jha, S., Kirshner, R. P., *et al.* (1998). *The Astronomical Journal*, **116** (3), 1009. [21](#)
- Robertson, H. P. (1929). *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **15** (11), 822–829. [11](#)
- Saadat, H. & Pourhassan, B. (2013). *Astrophysics and Space Science*, **343** (2), 783–786. [142](#)
- Saadat, H. & Pourhassan, B. (2014). *International Journal of Theoretical Physics*, **53** (4), 1168–1173. [142](#)
- Sachs, R. K. & Wolfe, A. M. (1967). *The Astrophysical Journal*, **147** (1), 73–90. [58](#)
- Sasaki, M. (1986). *Progress of Theoretical Physics*, **76** (5), 1036–1046. [55](#)
- Schrödinger, E. (1944). *What is life?: The physical aspect of the living cell*. Cambridge University Press. [80](#)
- Sinha, A. (2011). *Classical and Quantum Gravity*, **28** (8), 085002. [75](#)

- Skenderis, K. & Townsend, P. K. (2006). *Physical review letters*, **96** (19), 191301. [221](#)
- Skenderis, K. & Townsend, P. K. (2007). *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **40** (25), 6733. [221](#)
- Skenderis, K., Townsend, P. K., & Van Proeyen, A. (2007). *Journal of High Energy Physics*, **8**, 036. [129](#)
- Starobinskii, A. (1983). *JETP lett*, **37** (1). [110](#), [111](#)
- Starobinsky, A. A. (1980). *Physics Letters B*, **91** (1), 99–102. [2](#), [38](#)
- Stefan, J., Staatsdruckerie, & Hof, K.-K. (1879). *Über die Beziehung zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur*. Aus der kk Hof-und Staatsdruckerei. [67](#)
- Steinhardt, P. J. & Turok, N. (2002a). *Phys. Rev. D*, **65** (12), 126003. [103](#)
- Steinhardt, P. J. & Turok, N. (2002b). *Science*, **296** (5572), 1436–1439. [103](#), [104](#)
- Strominger, A. (2001a). *Journal of High Energy Physics*, **10**, 034. [6](#), [214](#), [221](#), [225](#)
- Strominger, A. (2001b). *Journal of High Energy Physics*, **11**, 049. [6](#), [214](#)
- 't Hooft, G. (2015). *International Journal of Modern Physics D*, **24**, 1543001. [5](#)
- Tian, D. W. & Booth, I. (2015). *Physical Review D*, **92** (2), 024001. [74](#)
- Tod, K. P. (1987). *Classical and Quantum Gravity*, **4** (5), 1457. [86](#)
- Tod, K. P. (1990). *Classical and Quantum Gravity*, **7** (1), L13. [86](#)
- Tod, K. P. (1991). *Classical and Quantum Gravity*, **8** (4), L77. [86](#)
- Tod, K. P. (1992). *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, **50**, 69–93. [86](#)
- Tod, K. P. (2003). *Classical and Quantum Gravity*, **20** (3), 521. [86](#)
- Tod, K. P. (2013). *arXiv preprint arXiv:1309.7248*, . [108](#), [112](#)
- Tolman, R. C. (1931). *Physical Review*, **38** (9), 1758. [2](#)
- Tolman, R. C. (1938). *The principles of statistical mechanics*. Courier Corporation. [79](#)

- Townsend, P. K. (2008). *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **41** (30), 304014. [129](#)
- Tseytlin, A. A. (1991). *Modern Physics Letters A*, **6** (19), 1721–1732. [96](#)
- Tseytlin, A. A. & Vafa, C. (1992). *Nuclear Physics B*, **372** (1-2), 443–466. [202](#)
- van der Schaar, J. P. (2004). *Journal of High Energy Physics*, **1**, 070. [214](#), [236](#)
- Veneziano, G. (1991). *Physics Letters B*, **265**, 287–294. [94](#), [96](#), [117](#), [154](#)
- Veneziano, G. (1999). *Physics Letters B*, **454**, 22–26. [83](#)
- Vilenkin, A. & Shellard, E. P. S. (1994). *Cosmic Strings and Other Topological Defects*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge: Cambridge University Press. [22](#)
- Wald, R. M. (1993). *Phys. Rev. D*, **48**, R3427–R3431. [75](#)
- Wald, R. M. (2006). *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, **37** (3), 394–398. [83](#)
- Wald, R. M. (2010). *General Relativity*. University of Chicago Press. [89](#), [247](#), [248](#), [249](#)
- Walker, A. (1944). *Journal of the London Mathematical Society*, **19** (76 Part 4), 219–226. [11](#)
- Wands, D. (1999). *Physical Review D*, **60** (2), 023507. [210](#)
- Wehus, I. K. & Eriksen, H. K. (2011). *The Astrophysical Journal Letters*, **733**, L29. [114](#)
- Weinberg, S. (1972). *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley New York. [11](#), [217](#), [249](#)
- Weinberg, S. (1993). *The first three minutes: a modern view of the origin of the universe*. Basic Books. [67](#)
- Weinberg, S. (2003). *Physical Review D*, **67** (12), 123504. [55](#)
- Weinberg, S. (2004). *Physical Review D*, **69** (2), 023503. [55](#)
- Weinberg, S. (2008). *Cosmology*. Oxford University Press. [8](#), [55](#), [57](#), [67](#)
- Witten, E. (1998). *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, **2**, 253–291. [221](#)

REFERÊNCIAS

- Yamabe, H. (1960). *Osaka Mathematical Journal*, **12** (1), 21–37. [109](#)
- Zeldovich, Y. B. (1972). *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **160** (1), 1P–3P. [64](#)
- Zinn-Justin, J. (2002). *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. International Series of Monographs on Physics (Book 113). Oxford: Clarendon Press, 4 edition. [221](#), [283](#)
- Zwiebach, B. (1985). *Physics Letters B*, **156** (5-6), 315–317. [74](#)