

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

WILLIAM C. ALGONER JORGE

**Extensão do modelo  $\Lambda$ CDM, baseada na Teoria  
Escalar-Tensorial da gravitação**

VITÓRIA  
2017

---

WILLIAM C. ALGONER JORGE

**EXTENSÃO DO MODELO  $\Lambda$ CDM, BASEADA NA TEORIA ESCALAR-TENSORIAL  
DA GRAVITAÇÃO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Ciências Físicas.

Orientador: Prof. Dr. Winfried Ernst Wilhelm Zimdahl

VITÓRIA  
2017



*A meus pais Justiniano e Olivia*

---

“Sometimes courage is the quiet voice at the end of the day  
saying:  
*I will try again tomorrow. ”*

*Thomas S. Monson.*

---

# RESUMO

As medições cosmológicas tanto da história de expansão  $H(z)$  como da história de crescimento  $f\sigma_8(z)$  amadureceram e, em conjunto, fornecem um importante teste ao modelo cosmológico da teoria escalar-tensorial, em particular a do tipo Brans-Dicke, que fornece uma extensão ao modelo  $\Lambda$ CDM. Nós contruímos uma expressão analítica explícita (através de um *ansatz*) como uma modificação da taxa de Hubble do modelo  $\Lambda$ CDM, na qual, é dada em termos de um parâmetro constante  $m$ , que quantifica as diferenças entre a dinâmica do fundo das teorias escalar-tensorial e a relatividade geral; realizando assim um análise estatístico de SNIa,  $H(z)$  e BAO para encontrar o ajuste mínimo do parâmetro constante. Para completar nosso sistema, introduzimos as equações das perturbações da dinâmica de fluidos, a extensão do  $\Lambda$ CDM, no que diz a respeito, desenvolve uma abordagem do fluido efetivo para a função de crescimento da matéria. Nós quantificamos o impacto de desvios do fundo padrão, da pressão anisotrópica e não negligenciando as componentes efetivas da perturbação de energia escura sobre a função de taxa de crescimento da matéria  $f\sigma_8$  e comparar estes resultados com as medições recentes da distorção de espaço para redshift (RSD).

---

# ABSTRACT

Cosmological measurements of both the expansion history  $H(z)$  and growth history  $f\sigma_8$  have matured, and the two together provide an important test of cosmological scalar-tensor theory, in particular the Brans-Dicke type which provides an extension to the  $\Lambda$ CDM model. We construct an explicit analytic expression (through an *ansatz*) as a modification of the Hubble rate of the  $\Lambda$ CDM model, in which it is given in terms of a constant parameter  $m$ , which quantifies the differences between the background dynamics of the scalar-tensor theories and general relativity, thus performing a statistical analysis SNIa,  $H(z)$  and BAO to find the minimum fitting of the constant parameter. To complete our system, we introduce equations of fluid dynamical perturbations, the extension of the  $\Lambda$ CDM in what regards develops an effective fluid approach for the matter growth function. We quantify the impact of deviations from standard background, of anisotropic stress and of non-vanishing perturbations of effective dark energy component on the matter growth rate function  $f\sigma_8$  and confront the results with redshift-space distortion (RSD) measurements.

---

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>Teoria da Gravitação</b>	<b>17</b>
2.1	Teoria da gravidade de Newton	18
2.2	Princípio de equivalência	19
2.3	Gravidade como curvatura do espaço-tempo	20
2.4	Coordenadas localmente inerciais	21
2.5	Curvatura intrínseca de uma variedade	22
2.6	Tensor de curvatura de Riemann	23
2.6.1	Propriedades do tensor de curvatura	25
2.6.2	Tensor de Ricci e a curvatura escalar	26
2.7	O tensor energia-momento	27
2.7.1	Tensor de energia-momento do fluido perfeito	29
2.7.2	Equação de continuidade	31
2.8	As equação de Einstein	31
2.8.1	As equação de Einstein no vácuo	34
2.8.2	Limite do campo fraco para as equações de Einstein	34
2.8.3	A constante cosmológica	36
2.9	A expansão do Universo	38
2.9.1	A equação de Friedmann: A necessidade da expansão do Universo	38
2.9.2	Parâmetros cosmológicos	41
2.9.3	Escalamentos com a expansão	43
2.9.4	Modelos cosmológicos	45
2.10	Modelos de energia escura	47
2.10.1	Modelo $\Lambda$ CDM	48
2.10.2	Modelo $\phi(t)$ CDM	48
2.11	Modelos de energia escura como modificação de gravidade	50
2.11.1	Gravidade $f(R)$	50

2.11.2	Teoria escalar-tensor . . . . .	50
2.11.3	Gravidade Gauss-Bonnet . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Teoria de Perturbação Linear</b>	<b>52</b>
3.1	Teoria das perturbações Newtonianas . . . . .	52
3.1.1	Equações do fluido perturbado . . . . .	53
3.1.2	Perturbações adiabáticas na matéria . . . . .	57
3.1.3	Matéria escura dentro do parâmetro de Hubble . . . . .	58
3.2	Perturbações cosmologicas relativistas . . . . .	60
3.2.1	Espaço-tempo perturbado . . . . .	60
3.2.2	Matéria perturbada . . . . .	66
3.2.3	Evolução das equações linearizadas . . . . .	70
3.2.4	Teoria de perturbações em termos de variáveis invariantes de calibre . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Teoria escalar-tensor</b>	<b>81</b>
4.1	Teoria de Brans-Dicke . . . . .	82
4.1.1	A forma de Dicke do principio de Mach . . . . .	82
4.2	Teoria Escalar-Tensorial . . . . .	89
4.2.1	Jordan-Frame vs Einstein-Frame . . . . .	94
4.2.2	Limite newtoniano e a constante gravitacional . . . . .	95
4.2.3	Interação de Fluidos . . . . .	99
4.2.4	Descrição do Einstein-Frame . . . . .	101
4.2.5	Descrição do Jordan-Frame . . . . .	108
4.2.6	Condições de estabilidade . . . . .	119
4.3	Análise Estatística . . . . .	121
4.3.1	Observações de Supernovas . . . . .	121
4.3.2	Restrições dos dados $H(z)$ . . . . .	122
4.3.3	Oscilações Acústicas de Barions (BAO) . . . . .	123
<b>5</b>	<b>Crescimento da matéria no modelo de energia escura como uma modificação da gravidade</b>	<b>127</b>
5.1	Crescimento linear das perturbações de matéria . . . . .	127
5.1.1	Perturbação escalar . . . . .	128
5.1.2	Fluidos imperfeitos . . . . .	129
5.1.3	Modelando a Pressão Anisotrópica . . . . .	134
5.1.4	Relação entre os potenciais . . . . .	139
5.1.5	Perturbações da Matéria . . . . .	142
5.1.6	Importância das perturbações de energia escura . . . . .	145
5.1.7	Breve descrição sobre galáxias Bias . . . . .	148
5.2	Análise de dados . . . . .	150

---

<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>155</b>
<b>A</b>	<b>Teoria de Brans-Dicke e invariância conforme</b>	<b>157</b>
A.1	Relatividade conforme . . . . .	158
<b>B</b>	<b>Mínimo variacional da ação de Jordan-Brans-Dicke</b>	<b>162</b>

## LISTA DE FIGURAS

- 4.1 Fração da matéria  $\Omega_m$  da energia total e fração da energia geométrica  $\Omega_x$  para valores negativos (painel acima) e valores negativos (painel abaixo) de  $m$ . As unidades logarítmicas são usadas no painel direito. Isso permite uma melhor visualização dos valores assintóticos no tempo primordial . . . . . 113
- 4.2 Parâmetro de equação de estado como função do fator de escala para valores negativos de  $m$  (painel esquerdo) valores positivos (painel direito). . . . . 115
- 4.3 Parâmetro de desaceleração para varios valores de  $m$  negativos (painel esquerdo) e positivos (painel direito). . . . . 115
- 4.4 Velocidade do som efetiva para varios valores de  $m$  negativo (painel esquerdo) e positivo (painel direito). . . . . 117
- 4.5 Parâmetro da equação de estado total para varios valores de  $m$ , negativos (painel esquerdo) e positivos (painel direito). . . . . 118
- 4.6 Dependência do fator de escala da velocidade do som adiabática efetiva total para varios valores de  $m$ , negativos (painel esquerdo) e positivos (painel direito). . . . . 119

- 4.7 Dependência de  $\omega^2$  vs  $m$  para o valor atual  $\Phi_b = 1$  (linha sólida) e para o valor constante  $\Phi_b < 1$  (linha tracejada) que, para  $m < 0$ , corresponde ao fator de escala no passado, ou seja,  $a < 1$ . o intervalo de instabilidade (valores de  $m$  da esquerda da interseção da curva  $\Phi_b$  com o eixo de  $\omega^2 = 0$ ) diminui para o passado, uma vez que o ponto de interseção se move à esquerda para  $\Phi_b < 1$ . A faixa cinza marca a região de instabilidade. Os valores observados de forma observacional estão inteiramente na parte estável do plano  $\omega^2 - m$ . Para  $m > 0$  a estabilidade é sempre garantida. . . . . 120
- 4.8 Restrições observacionais nos parâmetros do modelo. nós fixamos a hipersuperfície com o Planck prior  $H_0 = 67.8\text{km/s/Mpc}$  e mostrando contornos do nível de confiança  $1\sigma$  e  $2\sigma$  no plano  $\Omega_{m0}$  vs  $m$ . Apenas dados  $H(z)$  é representado pela região vermelha, dados BAO pela região verde e dados de Supernovae pela região Azul. . . . . 125
- 4.9 Restrições observacionais nos parâmetros do modelo. nós fixamos a hipersuperfície com o HST prior  $H_0 = 73.2\text{km/s/Mpc}$  mostrando contornos do nível de confiança  $1\sigma$  e  $2\sigma$  no plano  $\Omega_{m0}$  vs  $m$ . Apenas dados  $H(z)$  é representado pela região vermelha, dados BAO pela região verde e dados de Supernovae pela região Azul. . . . . 125
- 4.10 Os contornos obtidos a partir do total  $\chi^2$  são retratados pela linha sólida preta. Nesta painel nós mostramos a função de distribuição de probabilidade unidimensional (PDF) para parâmetros de  $m$  após a marginalização através de  $H_0$  e  $\Omega_{m0}$ . . . . . 126
- 5.1 Esta figura mostra o fator de crescimento  $g$  normalizados para os valores atuais. No painel direito mostra-se o comportamento do fator de crescimento no modelo de extensão de  $\Lambda\text{CDM}$ , sendo suprimido este crescimento a partir do valor aproximado do redshift  $z \approx 2$ . No painel esquerdo as linhas tracejadas de cor magenta e verde estão sob influência da extensão de  $\Lambda\text{CDM}$  e para valores de  $|\nu| = 10^{-5}$  da pressão anisotrópica. Nas linhas tracejadas azul e vermelha estão sob influência dos valores de  $|\mu| = 10^{-7}$  no modelo  $\Lambda\text{CDM}$ , negligenciando os outros parâmetros, assim, para  $\mu = +10^{-7}$  esta ajuda a diminuir o fator de crescimento . . . . . 147

- 5.2 Da mesma forma que a figura anterior, no painel direito observa-se o comportamento do fator de crescimento no redshift  $z \approx 5$ , na qual esta suprimida pela extensão de  $\Lambda$ CDM e também vemos como a perturbação da energia escura  $y$  consegue diminuir o fator de crescimento. Isto mostra-se claramente no painel esquerdo ao negligenciar os outros parâmetros com exceção do  $y$  e ver como a perturbação por si só influencia ao modelo  $\Lambda$ CDM, suprimindo o fator de crescimento para valores pequenos e positivos de  $y$ , por exemplo, linhas tracejadas vermelha e verde. . . . . 147
- 5.3 Painel esquerdo: mostra-se a dependência de  $f\sigma_8(z)$  em  $z$  se unicamente a dinâmica do fundo é mudado ( $\mu = \nu = y = 0$ ). para valores positivos de  $m$  diminuem a previsão do  $\Lambda$ CDM para  $z \lesssim 1$ , valores negativos de  $m$  corresponde a um deslocamento na direção oposta. As maiores alterações aparecem em  $z \approx 0.5$ . No painel direito: mostra a correspondentes as faixas evolutivas conjuntas de  $H(z)/H_0$  e  $f\sigma_8(z)$ . . . . . 151
- 5.4 No painel esquerdo: a dependência de  $f\sigma_8(z)$  em  $z$  para um valor no fundo  $\Lambda$ CDM com  $m = 0$  e  $\mu = \nu = 0$ . As diferentes curvas correspondem a diferentes contribuições de perturbações de energia escura. Para  $y > 0$  existe uma tendência de aumentar a curva do  $\Lambda$ CDM puro em pequenos redshift. Para  $y < 0$  a curva suprime o modelo puro  $\Lambda$ CDM para valores pequenos do redshift. No painel direito: a “constante” gravitacional efetiva. se  $y$  é de ordem um, ou seja, se as perturbações de energia escura são da mesma ordem que as perurbações de matéria, os desvios se tornaram inaceitavelmente grande, portanto as perturbações de energia escura tem que na faixa de  $-10^{-1} \lesssim y \lesssim +10^{-1}$ . . . . . 152
- 5.5 No painel esquerdo: dependência de  $f\sigma_8(z)$  em  $z$  no fundo do modelo  $\Lambda$ CDM para valores de  $m = 0$  com  $\nu = y = 0$ . As diferentes curvas correspondem a distintos valores do parâmetro anisotrópico  $\mu$ . Valores negativos de  $\mu$  suprimem a curva teórica comparada com o resultado de  $\Lambda$ CDM, valores positivos de  $\mu$  aumentam a curva. No painel direito: mostra-se a dependência do fator de escala com a “constante” gravitacional efetiva. . . . . 153

- 5.6 No painel esquerdo: dependência de  $f\sigma_8(z)$  em  $z$  para o fundo não padrão fixo  $m = +0.01$  com  $\mu = y = 0$ . As diferentes curvas correspondem a distintos valores do parâmetro anisotrópico  $\nu$ . Valores acima da ordem de  $\nu \approx \pm 10^{-5}$  o desvio do modelo padrão permanece pequeno. Para  $\nu = +10^{-4}$  torna-se inaceitavelmente grande e para  $y = +10^{-6}$  pode-se negligenciar a sua contribuição. No painel direito: a “constante” gravitacional efetiva podem variar entre os valores maiores e menores do que o valor padrão ao longo da expansão cósmica. . . . . 153
- 5.7 No painel esquerdo: dependência de  $f\sigma_8(z)$  em  $z$  para o modelo padrão no fundo  $m = 0$  com  $\nu = -10^{-5}$  e  $\mu = 0$ . As diferentes curvas correspondem a distintas contribuições da perturbação de energia escura. Esta figura descreve o efeito de cruzamento entre a pressão anisotrópica, induzida pela perturbação relativa, e perturbação da energia escura. Aqui, valores do mesmo sinal de ambas contribuições  $\nu$  e  $y$  suprimem a curva para  $f\sigma_8(z)$ , e sinal contrario de  $\nu$  e  $y$  fazem com que a curva aumente, em ambos os casos para baixos redshift ( $z \lesssim 1$ ). Isto corresponde a uma redução da “constante” gravitacional efetiva (painel direito). . . . . 154

---

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

A teoria da relatividade geral de Einstein provou com sucesso ao longo de muitos anos de testes experimentais [1, 99].

Desde que foi descoberto pela primeira vez por [78, 81], a expansão acelerada do Universo tem sido um dos maiores mistérios na física moderna. A tentativa de explicar esse fenômeno motivou os físicos a propor numerosos de modelos teóricos. Entre estes candidatos, a constante cosmológica que é a solução matematicamente mais simples. Embora a constante cosmológica seja capaz de adequar as observações, existe um problema crítico: o valor indicado pela constante cosmológica difere daquela estimada pela teoria do campo quântico em cerca de  $\sim 120$  ordem de magnitude [96]

Surgem abordagens alternativas para explicar a aceleração cósmica sem a constante cosmológica incluindo um número que introduz uma componente de energia exótica no Universo, a chamada energia escura. Os modelos propostos incluem dinâmica da energia de vácuo, fluido cósmicos, campos escalares e outros. Outras abordagens alteram a estrutura geométrica do espaço-tempo, ou seja, modificam a gravidade. Esses modelos, alguns deles motivados por teoria das cordas ou generalizações da Generalidade Geral, introduz modificações na evolução do tempo tardio do Universo, como a gravidade  $f(R)$ , a gravidade  $f(T)$ , dimensões extras, gravidade do escalar-tensorial e muitos outros.

Nesta tese, nos concentramos no modelo de teorias escalar-tensorial, explicitamente a do tipo Brans-Dicke [18, 19, 20, 27]. O interessante neste tipo de teoria da gravidade está relacionado com a expectativa de que no tempo tardio a expansão acelerado observada do Universo pode ser entendida sem a componente de energia escura. Em vez disso, é modificada (comparada com a teoria de Einstein) o setor geométrico que é suposto fornecer a dinâmica desejada. Isto pode ser visto como uma geometrização da energia escura.

Armado com o conhecimento teórico dos modelos de gravidade modificada. A primeira abordagem é testar modelos específicos de gravidade modificada usando observações. Portanto, o modelo escalar-tensorial do capítulo 4 foi testado por observações de SNIa,  $H(z)$  e BAO, em relação ao parâmetro  $m$ , obtendo assim a consistência da extensão  $\Lambda$ CDM.

Em geral, a teoria escalar-tensorial com base à dinâmica cosmológica pode substancialmente diferir da cosmologia padrão. Nosso foco aqui é a mais simples possível extensão do modelo padrão  $\Lambda$ CDM que a teoria escalar-tensorial pode fornecer. No nível do fundo, a equação de Friedmann em modelos de gravidade modificada sempre pode ser reformulada na equação de Friedmann na relatividade geral com energia escura. Sendo assim, nossa proposta é construir um modelo simples na qual é analiticamente resolvido no Einstein-frame. Com ajuda de uma transformada conforme, em seguida, nos permite obter a taxa de expansão de Hubble Jordan-frame.

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_{de}). \quad (1.1)$$

Aqui nós contamos com a descrição efetiva da relatividade geral da dinâmico Jordan-frame para determinar a geometria equivalente da energia escura. Ajustando a equação de estado para a energia escura,  $w_{de} = P_{de}/\rho_{de}$  sempre é possível imitar a expansão do fundo do Universo em modelos de gravidade modificada pela energia escura. Uma análise profunda à história de expansão em termos da taxa de Hubble pode levar a degenerescência mesmo que parametrizando a equação de estado. Esta degeneração é quebrada se incluímos observações determinadas pela formação de estrutura, assumindo que a influência da energia escura seja suave. A mais utilizada para a história de crescimento esta ligada diretamente em termos da taxa de crescimento  $f\sigma_8(z)$ .

Nós formulamos a consistência da extensão de  $\Lambda$ CDM usando teoria de perturbações lineares. Na extensão do modelo  $\Lambda$ CDM a equação que domina a expansão do Universo e o crescimento da matéria são dados por

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_T, \quad (1.2)$$

$$\frac{k^2}{a^2}\phi = -4\pi G_{eff}\rho_T\delta_T, \quad (1.3)$$

onde  $\rho_T$  é a densidade de energia total e  $\delta_T$  é o contraste da perturbação no calibre comóvel. As modificações da gravidade aparecem no setor gravitacional, dada por  $G_{eff}$ , na qual, introduzimos a pressão anisotrópica ( $\phi \neq \psi$ ) e pequenas contribuições da perturbação de energia escura. Trabalhamos no espaço de Fourier para perturbações. Em escalas do sub-horizonte, negligenciamos  $\dot{\psi}$  na equação

de continuidade e encontrar a equação de segunda ordem descrevendo a o crescimento da matéria  $\delta_m$

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m = -\frac{k^2}{a^2}\phi \quad (1.4)$$

Esta equação descreve como a densidade de perturbação cresce devido ao efeito do potencial Newtoniano  $\phi$ . Assim, a modificação da gravidade prevê uma taxa de crescimento diferente. Mas o crescimento da matéria não se importa se as perturbações da métrica são geradas (além da própria contribuição) pela modificação da gravidade ou por um fluido adicional de energia escura. Sua resposta a eles é idêntica.

Este trabalho está estruturada da seguinte maneira: no segundo capítulo será apresentado uma descrição da teoria geral da relatividade e alguns modelos cosmológicos atuais, assim como também alguns modelos de gravidade modifica que poderiam ser de interesse para futuras pesquisas. O terceiro capítulo, já com a perspectiva do objetivo principal do trabalho, apresentamos apresnetamos de forma resumida o formalismo de perturbações escalares, tanto as newtonianas como as relativísticas, que dará origem às estruturas em largas escalas no Universo.

O modelo da teoria escalar-tensorial, como uma extensão de  $\Lambda$ CDM, é então apresentada detalhadamente no quarto capítulo. Obtendo assim, uma expressão analítica para a taxa de Hubble, que esclarece explicitamente, mostrando como o impacto do campo escalar sobre a dinâmica cosmológica é a principal realização neste capítulo. Logo depois, enfrentamos os desvios do modelo com dados de Supernovas do tipo Ia, a idade diferencial de galáxias antigas e oscilações acústicas de bariônicas.

Tendo com objetivo de completar a historia da expansão do Universo através do parâmetro da taxa de Hubble. No quinto capítulo é aplicado o formalismo das perturbações lineares. Na qual, nós conduz a entender o crescimento da matéria através da taxa de crescimento. Neste capítulo se quantifica os desvios do fundo padrão, da pressão anisotrópica e a não negligencia da componente efetiva da perturbação de energia escura no crescimento da matéria, depois enfrentamos estes resultados as recentes medições da distorção do espaço de redshift (RSD).

---

## Capítulo 2

# TEORIA DA GRAVITAÇÃO

Einstein pensava que a lei da gravitação universal estava “ótima, mas incompleta”. Issac Newton jhavia descrito a interação gravitacional de duas massas (aquelas fórmulas que serve para descrever tal interação a maneira de uma força), mas nunca conseguiu examinar nem dar explicação de, por quê acontece tal coisa? Quer dizer: Newton descreveu o “fenómeno” mas não a sua “causa”. Poderia-se afirmar o fato de que a teoria Newtoniana faz uso da “ação a distância”, quer dizer, de uma força gravitacional que atua instantaneamente, enquanto que a teoria Einsteniana a interação gravitacional propaga-se à velocidade da luz, igual que a interação eletromagnética. Mas, de onde começou a duvida de Einstein: “sumiço instantâneo do sol”. Segundo o que Newton afirmava era que a gravidade é uma força instantânea, portanto, ao momento de desaparecer, a força de gravidade que mantém a Terra girando ao redor do Sol desapareceria. Einstein, chegou a uma genial explicação: a gravidade, cuja presença estava presente em todos os lugares por onde existe um corpo, não se tratava de um corpo de uma força em si, senão de uma geometria, a só presença de um corpo no espaço deformava o “espaço-tempo” e foi essa deformação que atraiu os corpos entre eles. Einstein não conseguiu deduzir realmente o que era que “gerava” a gravidade nos corpos com massa, mas, deu um passo mais além que Newton até a descrição do fenómeno gravitacional: descreveu o campo gravitacional.

As observações dizem-nos que em promedio 5% do universo está formado por matéria ordinaria; um 25% corresponde à matéria escura, que sabemos que existe porque interaciona gravitacionalmente com a matéria ordinaria; e outro 70% é a energia escura, as quais se sabe que existe porque de outro jeito não teria como explicar a expansão acelerada do Universo.

O modelo  $\Lambda$ CDM fornece a existência de energia escura, a qual, se ela não existisse, a atração gravitacional fornecida pela matéria impediria a expansão Universo, desacelerando, mas as observações

concluem o contrario. A energia escura é aquele que faz com que o Universo se expanda aceleradamente. A investigação parte da hipótese de que a energia escura poderia ser dinâmica. E o modelo mais aceito é conhecido como  $\Lambda$ CDM, que explica a aceleração do Universo por intermédio da constante cosmológica, cuja equação de estado teria o valor de  $-1$ , constante ao longo de toda a evolução do Universo.

Neste capítulo exibiremos as ferramentas necessárias para compreender a teoria da relatividade de Einstein, assim como também a expansão do Universo mediante o modelo  $\Lambda$ CDM, depois outras maneiras alternativas de poder explicar a expansão acelerada do Universo sem a inclusão da constante cosmológica, e sim modificando a gravidade.

## 2.1 Teoria da gravidade de Newton

Começamos considerando a força da gravidade na teoria clássica de Newton. Nesta teoria newtoniana, a força gravitacional  $\vec{f}$  sobre uma partícula teste de *massa gravitacional*  $m_G$  em uma posição específica do espaço é

$$\vec{f} = m_G \vec{g} = -m_g \vec{\nabla} \phi,$$

onde  $\vec{g}$  é o campo gravitacional produzido pelo potencial gravitacional  $\phi$  nessa posição. O potencial gravitacional vem da equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \tag{2.1}$$

onde  $\rho$  é a *densidade da matéria gravitacional* e  $G$  é a constante gravitacional de Newton. Esta é a equação do campo da teoria newtoniana.

Da equação (2.1) é deduzido que a gravidade newtoniana não é compatível com a gravidade especial. Esta equação não tem uma dependência explícita com o tempo, o que significa que o potencial  $\phi$ , e consequentemente a força  $\vec{f}$ , respondem rapidamente a qualquer alteração da densidade da matéria  $\rho$ . Isto viola o princípio de que nenhum sinal físico pode-se propagar a velocidades superiores que da luz.

Poderíamos tentar modificar (2.1) para “evitar” o problema da propagação instantânea. O operador de Laplace  $\nabla^2$  é equivalente ao operador d’Alembertiano  $\square$  – por exemplo no espaço de Minkowski

com assinatura  $(- + + +)$ – assim podemos escrever (2.1) como

$$\square\phi = 4\pi G\rho$$

Porém, esta equação não proporciona uma teoria relativista consistente. Não cumpre a exigência de covariância de Lorentz (princípio da relatividade especial) devido a que a densidade de matéria  $\rho$  não se transforma como um escalar de Lorentz. Significa que a magnitude física  $\rho$  depende do sistema de referência, pois depende de duas grandezas: (i) a massa, onde a medida depende do sistema de referência; (ii) o espaço, que apresenta contrações consideráveis no sistema de referência que se movimenta a altas velocidades. Portanto, a densidade de matéria não é um parâmetro invariante, senão que a sua medição dá resultados diferentes quando modificamos a velocidade do observador.

Por outro lado, a equação de movimento de uma partícula com massa inercial  $m_I$  em um campo gravitacional é

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{m_G}{m_I}\vec{\nabla}\phi$$

Experimentalmente está comprovado que a relação  $m_G/m_I$  que aparece na equação é *o mesmo para todas as partículas*. Com uma escolha apropriada das unidades podemos fazer essa relação igual a 1. Portanto, podemos ver que a trajetória que segue a partícula em um campo gravitacional é *independente da natureza da partícula*.

Aquela equivalência entre a massa gravitacional e inercial é uma coincidência na teoria de Newton verdadeiramente notável. Nesta teoria, a priori, não existe motivo nenhum pela qual a quantidade que determina a magnitude da força gravitacional sobre uma partícula deveria ser igual à quantidade que determina a “resistência” de uma partícula a uma força aplicada.

## 2.2 Princípio de equivalência

A igualdade entre a massa gravitacional e inercial levou a Einstein a um experimento mental do elevador em queda livre. Segue-se deste raciocínio que a aceleração de qualquer partícula com relação ao elevador é zero: a partícula e o elevador tem a mesma aceleração relativa à terra como resultado da equivalência entre a massa gravitacional e inercial.

Todas as observações “mentais” permaneceriam exatamente equivalentes se o campo gravitacional da terra fosse realmente uniforme. Mas é claro, isso não acontece, ele se comporta radialmente

e sua intensidade é proporcional a  $1/r^2$ . As partículas irão experimentar quedas radiais além de apresentarem forças de maré.

Porém, nós podemos considerar que o elevador cai durante um breve intervalo de tempo e que é espacialmente pequeno, portanto, poderíamos considera-lo com um sistema de referência inercial, e as leis da relatividade especial seria mantida dentro do elevador.

*Princípio de equivalência: Num laboratório que cai livremente e sem rotação tomando uma região pequena do espaço-tempo, as leis da física são as da relatividade especial.*

## 2.3 Gravidade como curvatura do espaço-tempo

As observações feitas anteriormente, levou a Einstein fazer uma ouçada e que simultaneamente deu uma descrição relativista da gravidade e também incorpora naturalmente o princípio de equivalência, e consequentemente a equivalência entre a massa gravitacional e inercial. Einstein propôs que *a gravidade não deveria ser considerado como uma força no sentido convencional senão como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, sendo esta curvatura causada pela presença da matéria*. Esta é a idéia principal da Teoria Geral da Gravidade.

Assim, a gravidade é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo e não a ação de nenhum quadrivetor  $\mathbf{f}$  que é definido sobre uma variedade espaço-tempo, enseguida a equação de movimento para uma partícula livre no espaço-tempo curvo

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = 0,$$

onde  $\mathbf{p}$  é o quadrimomento da partícula e  $\tau$  é o tempo proprio medido ao longo de sua linha de mundo. Portanto, a linha de mundo de uma partícula em queda livre sob a ação da gravidade é uma geodésica no espaço-tempo curvo.

O princípio de equivalência restringe uma possível geometria do espaço-tempo curvo para uma do tipo pseudo-Riemanniana, depois vamos deduzir. Matematicamente, o princípio de equivalência diz-nos que em qualquer ponto  $P$  do espaço-tempo temos como definir um sistema de coordenadas  $X^\mu$  de modo que no vizinhança de  $P$ , o elemento de linha do espaço-tempo assume a forma

$$ds^2 \approx \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu$$

cumprindo assim a igualdade no ponto  $P$ . Da equação da geodésica, daí resulta que o caminho seguido por uma partícula livre (que só se movimenta sob a influência da gravidade) na vizinhança de  $P$  e ela é dada por

$$\frac{d^2 X^i}{d\tau^2} \approx 0.$$

Considerando que  $[X^\mu] = (cT, X, Y, Z)$ , para  $\mu = 0$  a equação mostra que  $dT/d\tau = cte$ .

Assim, para  $\mu = 1, 2, 3$  obtemos que

$$\frac{d^2 X^\mu}{dT^2} \approx 0.$$

Assim, em um ambiente de  $P$  as coordenadas  $X^\mu$  fica definido um sistema cartesiano localmente inercial, na qual as leis da relatividade especial se conserva localmente. Na construção de um sistema de coordenadas como esta, o espaço-tempo dever ser uma variedade pseudo-Riemanniana. Em um sistema arbitrário de coordenadas  $x^\mu$ , o elemento de linha assume a forma geral

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

## 2.4 Coordenadas localmente inerciais

A curvatura do espaço-tempo nos impede encontrar coordenadas nas quais a métrica  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  para todos os pontos da variedade. Neste sentido, não é possível definir um sistema cartesiano *globalmente* inercial, como poderia ser feito no espaço-tempo pseudo-Euclidiano de Minkowski. Ao invés, estamos obrigados a usar um sistema arbitrário  $x^\mu$  que rotule os pontos da variedade, e no geral, estas coordenadas não tem significado físico simples.

Porém, pelo princípio de equivalência, os problemas da interpretação física das coordenadas podem ser superadas através de uma transformação destas, em cada ponto  $P$  do espaço-tempo, a um sistema localmente inercial  $X^\mu$ , que, em uma limitada região em torno de  $P$ , corresponde a um sistema cartesiano que cai livremente sem rotação. Matematicamente, corresponde a a construir ao redor de  $P$  um sistema de coordenadas  $X^\mu$  de tal forma que

$$g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}; (\partial_\sigma g_{\mu\nu})_P = 0. \quad (2.2)$$

O que significa que  $\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} = 0$  e o sistema de coordenadas vetorial em  $P$  estabelecem um conjunto ortonormal, i.e.

$$\mathbf{e}_{\mu}(P) \cdot \mathbf{e}_{\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

Na realidade, existem um número infinito de sistema de coordenadas localmente inerciais em  $P$ , todos eles estão relacionados pelas transformações de Lorentz. Quando um sistema  $X^{\mu}$  satisfaz as condições (2.2) e, por conseguinte, a condição (2.3), depois o sistema também será

$$X'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} X^{\nu},$$

onde  $\Lambda_{\nu}^{\mu}$  define as transformações de Lorentz. Desta forma, um sistema cartesiano em queda livre em um ponto  $P$  está relacionado por outras transformações de Lorentz. Para qualquer um destes sistemas de coordenadas, o vetor base temporária  $\mathbf{e}_o(P)$  é simplesmente o vetor quadrivelocidade normalizado  $\hat{u}(P)$  do origem do sistema no ponto ( $P$ ), e os vetores ortonormais de caráter espacial  $\mathbf{e}_i(P)$  define a orientação dos eixos espaciais no âmbito de referência.

Para pontos próximos a  $P$ , a métrica do sistema de referência localmente inercial  $X^{\mu}$  (onde o origem está em  $P$ ), está dada por

$$g_{\mu\nu} = \eta + \frac{1}{2} (\partial_{\sigma} \partial_{\rho})_P X^{\sigma} X^{\rho}.$$

O tamanho das segundas derivadas determina a região sobre a qual a aproximação  $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$  continua sendo válido.

## 2.5 Curvatura intrínseca de uma variedade

Quando nós falamos da curvatura espaço-tempo na relatividade geral, devemos evitar pensar que o espaço-tempo está incorporado em um espaço de dimensão superior. Qualquer conceito de “incorporação”, se tem ou não realismo físico, deveria ser irrelevante para nossa discussão. Somente nos interessa as propriedades intrínsecas da geometria.

$$ds^2 = \epsilon_1 (dX^1)^2 + \epsilon_2 (dX^2)^2 + \dots + \epsilon_N (dX^N)^2, \quad (2.4)$$

onde  $\epsilon_a = \pm 1$ , porém, os pontos das variedades são marcadas com outro sistema de coordenadas  $x^a$ ; então, no geral, o elemento de linha não teria a forma de (2.4). Assim, para qualquer variedade do elemento de linha está dado por

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b,$$

¿cómo podemos saber se uma geometria intrínseca da variedade em alguma região é plana ou curvada?

Por exemplo, vamos considerar um espaço tridimensional, descrito pelo elemento de linha

$$ds^2 = \frac{a^2}{a^2 - r^2} dr^2 + r^2 + d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi.$$

¿Existe alguma forma de dizer se a métrica de acima, ou qualquer outra mais complicada, corresponde a um espaço plano mas simplesmente parece complicado pela escolha de coordenadas?

Poderia ser muito tedioso e complicado descobrir qual é o sistema de coordenadas que reduz uma métrica para uma da forma (2.4). Portanto, precisamos de algo que nos diga se uma variedade é diretamente plana a partir de uma métrica  $g_{ab}$ , *independentemente das coordenadas a usar*.

¿Qual é o significado físico de tudo isto? Se em alguma região do espaço-tempo de quatro dimensões nós podemos reduzir o elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

à forma de Minkowski da relatividade especial, então não pode existir campo gravitacional nessa região. A equivalência de um elemento de linha genérico com a do Minkowski garante, portanto, que o campo gravitacional desaparece. A solução para este problema de encontrar uma maneira independente das coordenadas, de definir a curvatura do espaço-tempo nós levaria às equações da gravidade.

## 2.6 Tensor de curvatura de Riemann

Podemos encontrar a solução ao problema da medição da curvatura de uma variedade em qualquer ponto a partir da derivada parcial do vetor. Porém, diferem em um aspecto importante: *importa a ordem em que atua a derivada covariante e portanto, mudar a ordem, modifica o resultado*.

Para um campo escalar, a derivada covariante é simplesmente a derivada parcial, assim, a ordem de

diferenciação não importa. Contudo, vamos considerar um campo vetorial arbitrário definido em uma variedade, cujas componentes são  $v_a$ . A derivada covariante de  $v_a$  é dada por

$$\nabla_b v_a = \partial_b v_a - \Gamma_{ab}^d v_b.$$

Se fazemos uma segunda diferenciação covariante, por ser ela um tensor de rango 2, temos

$$\begin{aligned} \nabla_c \nabla_b v_a &= \partial_c (\nabla_b v_a) - \Gamma_{ac}^e \nabla_b v_e - \Gamma_{bc}^e \nabla_e v_a \\ &= \partial_c \partial_b v_a - (\partial_c \Gamma_{ad}^d) v_d - \Gamma_{ab}^d \partial_c v_d - \Gamma_{ac}^e (\partial_b v_e - \Gamma_{eb}^d v_d) - \Gamma_{bc}^e (\partial_e v_a - \Gamma_{ae}^d v_d). \end{aligned}$$

Se trocamos os índices  $b$  e  $c$  para obter a expressão  $\nabla_b \nabla_c v_a$  diferenciando com a equação anterior, obtemos

$$\nabla_c \nabla_b v_a - \nabla_b \nabla_c v_a = R_{abc}^d v_d \quad (2.5)$$

onde

$$R_{abc}^d \equiv \partial_b \Gamma_{ac}^d - \partial_c \Gamma_{ab}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d \quad (2.6)$$

este tensor chama-se de *tensor de curvatura* o *tensor de Riemann* e a equação (2.6) nos mostra que está definido em termos do tensor métrico  $g_{ab}$  e suas primeiras e segundas derivadas.

Então, devemos estabelecer como o tensor de curvatura está relacionado com a curvatura da variedade.

Em uma região plana da variedade, podemos escolher umas coordenadas de tal modo que que o elemento de linha tome a forma (2.4) em toda a região. Nestas coordenadas,  $\Gamma_{bc}^a$  e suas primeiras derivadas são zero, então

$$R_{abc}^d = 0$$

em qualquer ponto da região. Esta é uma rela tensorial, e por consequência deve-se manter em qualquer sistema de coordenadas. Por outro lado, se  $R_{abc}^d = 0$  em qualquer ponto da região da variedade, pode-se demonstrar que é possível escolher um sistema de coordenadas em que o elemento de linha tome a forma (2.4) e portanto, esta região será plana. Assim, a condição  $R_{abc}^d$  é necessária e suficiente para que na região de alguma variedade esta seja plana.

## 2.6.1 Propriedades do tensor de curvatura

O tensor de curvatura possui um certa quantidade de simetrias e satisfaz algumas identidades importantes. As simetrias do tensor pode ser derivado mais facilmente em termos de suas componentes covariantes. Podemos usar essas componentes do tensor métrico para abaixar um índice e consequentemente obter

$$R_{abcd} = g_{ae} R_{bcd}^e$$

No sistema de coordenadas arbitrarías, a forma explícita das componentes do tensor são

$$R_{abcd} = \frac{1}{2} (\partial_d \partial_a g_{bc} - \partial_d \partial_b g_{ac} + \partial_c \partial_b g_{ad} - \partial_c \partial_a g_{bd}) - g^{ef} (\Gamma_{eac} \Gamma_{fbd} - \Gamma_{ead} \Gamma_{fbc}).$$

Agora vamos considerar um sistema de coordenadas geodésicas sobre um ponto  $P$  Tensor de Ricci e a curvatura escalar (na qual  $\Gamma_{bc}^a(P) = 0$ , embora que não suas derivadas). As componentes covariantes do tensor de curvatura em  $P$  estão dadas por

$$(R_{abcd})_P = \frac{1}{2} (\partial_d \partial_a g_{bc} - \partial_d \partial_b g_{ac} + \partial_c \partial_b g_{ad} - \partial_c \partial_a g_{bd})_P.$$

A partir desta expressão, vemos que o tensor possui as seguintes simetrias em  $P$ :

$$R_{abcd} = -R_{bacd}$$

$$R_{abcd} = -R_{abdc}$$

$$R_{abcd} = R_{cdab}$$

Assim, podemos deduzir a seguinte identidade cíclica

$$R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = 0$$

Todos estes resultados são deduzidos a partir de um sistema de coordenada especial. Porém, trata-se de uma relações *tensoriais*, por tanto, *se são válidas em um sistema de coordenadas então também são válidas para qualquer outro sistema.*

Como qualquer tensor de rango 4, o tensor de curvatura poderia parecer que tem  $N^4$  componentes, porém, as simetrias deste reduzem o número de componentes independentes a  $N^2(N^2 - 1)/12$ . No caso do espaço-tempo de  $N = 4$  dimensões, teríamos 20 componentes independentes para o tensor

métrico. Lembremos que sempre é possível construir um sistema de coordenadas de tal forma que na vizinhança de algum ponto  $P$  o elemento de linha toma a forma (2.4). Lembremos também que foi deduzido que em um ponto  $P$  do espaço-tempo podemos estabelecer uma troca de coordenadas cartesianas locais, onde  $g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}$  e  $(\partial_\gamma g_{\mu\nu})_P = 0$  mas, no geral, não podem ser eliminadas as 20 combinações lineares das segundas derivadas da métrica  $(\partial_\sigma \partial_\gamma g_{\mu\nu})_P$ . As componentes do tensor de curvatura são estas combinações lineares.

O tensor de curvatura satisfaz também uma identidade diferencial, conhecida como a *identidade de Bianchi*

$$\nabla_e R_{abcd} + \nabla_c R_{abde} + \nabla_d R_{abec} = 0$$

## 2.6.2 Tensor de Ricci e a curvatura escalar

Podemos realizar uma contração no primeiro e segundo índice do tensor de curvatura para obter um novo tensor não zero de rango 2, que vamos chamar de *tensor de Ricci* e cujas componentes covariantes são

$$R_{ab} \equiv R_{abc}^c,$$

e cuja expressão explícita é

$$R_{ab} = \partial_c \Gamma_{ab}^c - \partial_b \Gamma_{ac}^c + \Gamma_{ab}^c \Gamma_{cd}^d - \Gamma_{ad}^c \Gamma_{bc}^d$$

Ao contrair o tensor de Ricci com o tensor métrico nos dá uma quantidade escalar, que é definida em cada ponto da variedade e que chamamos o *o escalar de curvatura*

$$R \equiv g^{ab} R_{ab} = R_a^a$$

As derivadas covariantes do tensor de Ricci e do escalar de curvatura, obedecem uma relação muito importante, que é a chave para a resolução das equações da relatividade geral. Subindo o índice  $a$  na identidade de Bianchi e na contração com  $d$ , obtemos

$$\nabla_e R_{bc} + \nabla_c R_{bae}^a + \nabla_a R_{bec}^a = 0$$

Utilizando as propriedades de simetria no segundo termo obtemos que

$$\nabla_e R_{bc} + \nabla_c R_{be} + \nabla_a R_{bec}^a = 0$$

se agora subimos o índice  $b$  e com a contração de  $e$  encontramos que

$$\nabla_b R_c^b + \nabla_c R + \nabla_a R_{bc}^{ab} = 0$$

Utilizando as propriedades de anti-simetria podemos escrever o terceiro termo como

$$\nabla_a R_{bc}^{ab} = \nabla_a R^{ba} c b = \nabla_a R_c^a = \nabla_b R_c^b$$

Então obtemos

$$2\nabla_b R_c^b - \nabla_c R = \nabla_b (2R_c^b - \delta_c^b R) = 0$$

Finalmente, subindo o índice  $c$ , obtemos o resultado mais procurado

$$\nabla_b \left( R^{bc} - \frac{1}{2} g^{bc} R \right) = 0.$$

O termo entre chave é chamado de *tensor de Einstein*

$$G^{ab} \equiv R^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} R$$

Este tensor é simétrico e possui somente uma divergência independente  $\nabla_a G^{ab}$  e que desaparece (por construção).

## 2.7 O tensor energia-momento

Continuemos com a ideia de Einstein de que a gravidade é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, devido a presença de matéria. Devemos obter um conjunto de equações que descrevam quantitativamente como a curvatura do espaço-tempo em um ponto está relacionada com a distribuição da matéria nesse ponto.

As equações de Maxwell na sua formulação tensorial relacionam o campo eletromagnético  $F$  em qualquer ponto com a sua fonte, o quadri-vetor densidade de corrente  $j$  nesse ponto. Assim, analo-

gamente, podemos pensar nas *equações que relacionam a curvatura com a sua fonte: a energia e o momento da matéria.*

Para construir as equações do campo gravitacional, em primeiro lugar, devemos encontrar uma forma *covariante* de expressar o *termo fonte*. A definição de covariante significa que todas as leis da física devem tomar a mesma forma em todos os sistemas de referência; as leis têm de expressar-se tensorialmente, devido a que os tensores são invariantes diante de transformações de Lorentz. Devemos encontrar um tensor que descreva a distribuição da matéria em cada ponto do espaço-tempo.

Consideremos um distribuição que dependa do tempo, onde as partículas não interagem entre elas, cada uma com massa em repouso  $m_0$ . Isto é o que se chama de *dust* na literatura científica. No ponto  $P$  do espaço-tempo podemos caracterizar a distribuição fornecendo a densidade da matéria  $\rho$  e o trivetor velocidade  $\vec{u}$  que são medidos em algum sistema inercial. Para simplicidade, consideramos um elemento de fluido no seu sistema em repouso instantâneo  $S$  em  $P$ , onde  $\vec{u} = \vec{0}$ . Neste marco referencial, a densidade própria está dada por  $\rho_0 = m_0 n_0$ , onde  $m_0$  é a massa em repouso das partículas e  $n_0$  é o número de partículas em uma unidade de volume.

Consideremos outro sistema de referência  $S'$  se movimentando com uma velocidade relativa  $v$  com relação a  $S$ . Neste sistema de referência, o volume sofre uma contração de Lorentz no sentido do movimento. Por tanto, o número de partículas por unidade de volume vai ser  $n' = \gamma n_0$ . Igualmente, a massa de cada partícula em  $S'$  será  $m' = \gamma m_0$ . Assim, a densidade de matéria em  $S'$  ira ser

$$\rho' = \gamma^2 \rho_0$$

Disso vamos concluir que a densidade de matéria não é um escalar. Porém, transforma-se com a componente 00 do tensor de rango 2. Isso sugere que o termo fonte nas equações do campo gravitacional é um tensor de rango 2. Em qualquer ponto do espaço, poderemos construir um tensor  $\mathbf{T}$  de rango 2 a partir do produto tensorial dos quadri-vetores velocidade, e que é consistente com a nossa exigência de transformação de  $\rho_0$

$$\mathbf{T}(x) = \rho_0(x) \mathbf{u}(x) \otimes \mathbf{u}(x), \quad (2.7)$$

onde  $\rho_0(x)$  é a densidade própria do fluido, i.e., que é medida por um observador comóvel com o fluxo local e  $\mathbf{u}(x)$  é o quadri-vetor velocidade. O tensor  $\mathbf{T}(x)$  é chamado de *tensor momento-energia* da distribuição de matéria. Daqui em diante designaremos à densidade própria como  $\rho$ .

No sistema arbitrário de coordenadas  $x^\mu$  no qual o quadri-vetor velocidade do elemento de fluido é

$u^\mu$ , as componentes contravariantes de (2.7) é

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$$

Para dar um significado físico às componentes do tensor energia-momento, vamos a considerar um sistema de coordenadas cartesianas localmente inercial em  $P$  onde as componentes do quadri-vetor velocidade do elemento de fluido são  $[u^\mu] = \gamma(c, \vec{u})$ . Neste sistema de referência, vamos escrever as componentes do tensor

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho u^0 u^0 = \gamma^2 \rho c^2 \\ T^{0i} &= T^{i0} = \rho u^0 u^i = \gamma^2 \rho u^i \\ T^{ij} &= \rho u^i u^j = \gamma^2 \rho u^i u^j, \end{aligned}$$

o significado físico de cada componente é

- $T^{00}$  é a densidade de energia das partículas
- $T^{0i}$  é o fluxo de energia  $xc^{-1}$  no sentido  $i$
- $T^{i0}$  é a densidade do momento  $xc$  no sentido  $i$
- $T^{ij}$  é o fluxo da componente  $i$  do momento por unidade de área no sentido  $j$ . É a componente  $i$  da força por unidade de área aplicada sobre uma superfície onde a normal está no sentido  $j$ .

### 2.7.1 Tensor de energia-momento do fluido perfeito

Ao generalizar nossa discussão para fluidos reais, devemos levar em conta o seguinte

- Além do movimento do fluido, cada partícula possui uma velocidade aleatória (térmica).
- Pode existir forças de interação entre as partículas que contribuem na energia potencial total do sistema.

O significado físico das componentes do tensor de energia-momento  $\mathbf{T}$ , nos dá uma ideia de como podemos generalizar sua forma para incluir as propriedades dos fluidos reais.

Consideremos  $\mathbf{T}$  em qualquer ponto  $P$  e trabalhem no sistema de coordenadas cartesiano localmente

inercial  $S$  que é o sistema em repouso instantâneo do elemento de fluido em  $P$ , Para o *dust*, a única componente não nula é  $T^{00}$ , vamos agora a considerar as componentes de  $\mathbf{T}$  no sistema  $S$  do fluido real.

- $T^{00}$ : é a densidade de energia total, incluindo qualquer energia potencial devido às forças entre as partículas e à energia cinética derivada do seu movimento térmico.
- $T^{0i}$ : embora que não exista movimento do volume total do fluido, a energia pode ser transmitida por condução de calor, assim, este é basicamente um termo de condução em  $S$ .
- $T^{i0}$ : de novo, embora que as partículas não sofram um movimento global, se o calor é transmitido, então a energia conduzirá um transporte de momento.
- $T^{ij}$ : o movimento térmico das partículas ira dar um incremento do fluxo de momento, de modo tal que  $T^{ij}$  é a pressão isotrópica no sentido  $i$  e  $T^{ij}(i \neq j)$  são os esforços da viscosidade no fluido.

Todas estas identificações são válidas para um fluido em geral. Um *fluido perfeito* é aquele onde as partículas não interagem entre elas e e onde não tiver docução de calor ou viscosidade em  $S$ . Assim, em  $S$ , para um fluido perfeito (é válido os principio de Pascal) as componentes do tensor  $\mathbf{T}$  são

$$[T^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

No geral, podemos escrever as componentes do tensor

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

válido para qualquer sistema cartesiano localmente inercial em  $P$ . Porém, obter uma expressão válida no sistema de coordenadas arbitrario simplesmente substituindo  $\eta^{\mu\nu}$  pelas funções da métrica  $g^{\mu\nu}$ . Assim, chegamos até uma expressão completamente covariante para as componentes do tensor energia-momento de um fluido perfeito,

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

Observamos que  $T^{\mu\nu}$  é simétrico e é composto por dois campos escalares,  $p$  e  $\rho$ , e um campo vetorial  $\mathbf{u}$  que caracteriza o fluido. Quando  $p \rightarrow 0$ , o fluido perfeito converte-se no que temos chamado de *dust*.

Repare que é possível dar expressões muito mais complicadas para representar o tensor em fluidos não perfeitos, para fluidos carregados ou até mesmo fluidos eletromagnéticos. Todos esses tensores são simétricos.

## 2.7.2 Equação de continuidade

Podemos deduzir que na conservação do momento e a energia no sistema arbitrário de coordenadas está dada pela equação

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.11)$$

A demonstração acima não faz referência explícita de que o espaço-tempo é Minkowskiano ou curvo. Embora que (2.11) é válida em ambos casos e para qualquer sistema de coordenadas, a interpretação da equação difere de um para outro caso. Se nós ignoramos a gravidade e assumimos que o espaço-tempo é de Minkowski, a relação (2.11) representa a conservação da energia e o momento. Na presença do campo gravitacional, porém, a energia e o momento da matéria não é conservada por si mesmos. Neste caso, a relação (2.11) representa uma equação de movimento da matéria sob a influência de um campo gravitacional.

## 2.8 As equação de Einstein

Estamos em condições de deduzir a forma das equações do campo gravitacional, propostas por Einstein. Vamos recapitular alguns resultados obtidos aqui e outros que são já conhecidos:

(i) A equação de campo na gravidade newtoniana

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho$$

(ii) Se a gravidade é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, para um campo gravitacional fraco, de modo tal que  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  (com  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ) e na qual a métrica é estática, então

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)$$

(iii) A maneira correta em descrever a matéria está dada pelo tensor momento-energia. Para um fluido perfeito, no sistema em repouso instantâneo, temos

$$T_{00} = \rho c^2$$

A combinação de estas observações sugerem que, no caso de uma campo gravitacional fraco e estático no regime de baixa velocidade, temos

$$\nabla^2 g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}$$

Assim, vemos que no regime do campo gravitacional fraco,  $\phi$  é essencialmente  $g_{00}$ . Por tanto, estas considerações sugerem que as equações de campo gravitacional deveriam ser equações em segundas derivadas dos coeficientes da métrica  $g_{\mu\nu}$ . Também, como foi dito, tem a ser as equações tensoriais que relacionam o campo com a fonte. Assim, as equações do campo gravitacional deveriam ser da forma

$$K_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

onde  $K_{\mu\nu}$  é um tensor de rango 2 relacionado com a curvatura do espaço-tempo e  $\kappa^2 = 8\pi G/c^4$ . Desde que a curvatura do espaço-tempo está expressada pelo tensor de curvatura  $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ , o tensor  $K_{\mu\nu}$  dever ser construído a partir de  $R_{\mu\nu\sigma\rho}$  e o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . Também,  $K_{\mu\nu}$  deveria ter as seguintes propriedades:

- Como dissemos antes, no limite newtoniano,  $K_{\mu\nu}$  deveria conter termos que são lineares nas segundas derivadas dos coeficientes da métrica.
- Uma vez que  $T_{\mu\nu}$  é simétrico, então  $K_{\mu\nu}$  deveria ser também simétrico.

O tensor de curvatura  $R_{\mu\nu\sigma\rho}$  já é linear nas segundas derivadas da métrica e por tanto, a maneira mais geral de  $K_{\mu\nu}$  que satisfaz as propriedades anteriores é

$$K_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + Rg_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

onde  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci,  $R$  é a curvatura escalar e  $a$ ,  $b$  e  $\lambda$  são constantes.

Se nós queremos que todos os termos de  $K_{\mu\nu}$  sejam lineares nas segundas derivadas de  $g_{\mu\nu}$ , então concluímos que  $\lambda = 0$ . Assim, temos que

$$K_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bRg_{\mu\nu}$$

Para encontrar as constantes  $a$  e  $b$ , lembremos que o tensor energia-momento satisfaz  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . Então, será necessário que

$$\nabla_\mu K^{\mu\nu} = \nabla_\mu (aR^{\mu\nu} + bRg^{\mu\nu}) = 0$$

Ficou demonstrado, anteriormente, que

$$\nabla_\mu \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0,$$

e levando em conta que  $\nabla_\mu g_{\mu\nu} = 0$ , obtemos que

$$\nabla_\mu K^{\mu\nu} = \left( \frac{1}{2}a + b \right) g^{\mu\nu} \nabla_\mu R = 0.$$

A quantidade  $\nabla_\mu R$ , em geral, não vai ser nulo em uma região do espaço-tempo, a menos que seja plana e que não tenha campo gravitacional. Assim, encontramos que  $b = -a/2$  e, consequentemente, as equações do campo gravitacional ficam como

$$a \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = \kappa^2 T_{\mu\nu}.$$

Para fixar a constante  $a$ , nós vamos a comparar o limite do campo gravitacional fraco destas equações com a equação de Poisson na gravidade newtoniana. Para que possua uma consistência com a teoria de Newton, devemos exigir que  $a = 1$  e assim

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Estas equações constituem *as equações de Einstein do campo gravitacional e formam a base matemática da Teoria da relatividade Geral*.

No espaço-tempo de quatro dimensões,  $g_{\mu\nu}$  tem 10 componentes independentes e por tanto, na relatividade geral temos 10 equações independentes para o campo. Porém, na teoria de Newton tínhamos só uma equação para o campo. Além disso, as equações de Einstein *não são lineares* em  $g_{\mu\nu}$ , enquanto a gravidade de Newton é linear no campo  $\phi$ . Podemos apreciar que isto faz uma teoria muito complicada.

### 2.8.1 As equação de Einstein no vácuo

Em geral,  $T_{\mu\nu}$  contém todas as maneiras nas que se pode manifestar a energia e o momento. Uma região do espaço-tempo onde  $T_{\mu\nu} = 0$  chama-se de *vácuo* e por tanto carece de matéria ou radiação. As equações do campo neste caso é

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Estas são as 10 equações com 10 incógnitas  $g_{\mu\nu}$ . Isto não significa que  $R_{\mu\nu\sigma}^{\rho} = 0$ , porque o tensor de curvatura possui 20 componentes independentes enquanto o tensor de Ricci possui 10. Por tanto, é possível satisfazer as equações do campo no espaço vazio com um tensor de curvatura de componentes não nulas. Um tensor de curvatura não nulo representa um campo gravitacional que não desaparece, pelo que concluimos a possível existência de campos gravitacionais no espaço vazio.

### 2.8.2 Limite do campo fraco para as equações de Einstein

Antes de encontrar as equações de Einstein, sugerimos que nós só precisamos considerar as componentes 00. Usando uma expressão alternativa para as equações, podemos escrever

$$R_{00} = \kappa^2 \left( T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00} \right)$$

Vamos supor que o espaço está fracamente curvado e por tanto, existe um sistema de coordenadas onde  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , com  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  e onde é estacionária. Neste caso  $g_{00} \approx -1$ . Da definição do

tensor de Ricci encontramos que  $R_{00}$  é dado por

$$R_{00} = \partial_0 \Gamma_{0\mu}^\mu - \partial_\mu \Gamma_{00}^\mu + \Gamma_{0\mu}^\nu \Gamma_{\nu 0}^\mu - \Gamma_{00}^\nu \Gamma_{\nu\mu}^\nu$$

Em nosso sistema de coordenadas  $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$  são pequenos, assim não serão considerados os dois últimos termos da equação anterior. Também, desde que métrica é estacionária, temos que

$$R_{00} = -\partial_i \Gamma_{00}^i$$

Podemos deduzir que  $\Gamma_{00}^i \approx \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00}$  até a primeira ordem em  $h_{\mu\nu}$  e por tanto

$$R_{00} \approx -\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} \quad (2.14)$$

Substituindo em nossa equação de campo, obtemos que

$$\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} \approx \kappa^2 \left( T_{00} - \frac{1}{2} T \right)$$

Se assumimos que a distribuição da matéria é de modo que  $p/c^2 \ll \rho$ , o tensor de energia-momento é

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu,$$

obtemos que  $T = \rho c^2$ . Consideramos também que as partículas do fluido tem velocidades pequenas comparadas com as da luz. Podemos fazer uma aproximação  $\gamma = 1$  e consequentemente  $u_0 \approx c$ . Com tudo isso, a equação fica como

$$\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} \approx \frac{1}{2} \kappa^2 \rho c^2$$

Podemos escrever  $\delta^{ij} \partial_i \partial_j = \nabla^2$ . Da expressão  $g_{00} = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)$  temos que  $h_{00} = -\frac{2\phi}{c^2}$  e, finalmente obtemos que

$$\nabla^2 \phi \approx 4\pi G \rho, \quad (2.15)$$

que é a equação de Poisson na gravidade newtoniana. Daqui que nós obtemos o valor para a constante  $a$ .

### 2.8.3 A constante cosmológica

As equações de Einstein são

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

Mas estas equações não são as únicas. Logo após de sua formação, Einstein propôs uma modificação conhecida como o *termo cosmológico*.

Na obtenção das equações, propusemos que o tensor  $K_{\mu\nu}$  fosse da forma

$$K_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

Assumimos que somente continha termos que são lineares nas segundas derivadas de  $g_{\mu\nu}$ , e nos levou a afirmar que  $\Lambda = 0$ .

Lembremos que a relação  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$  da a entender que  $\nabla_\mu K^{\mu\nu} = 0$ . Nós sabemos também que  $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$ . Assim, podemos adicionar qualquer constante que multiplique a  $g_{\mu\nu}$  pela esquerda da equação (2.16), obtendo um conjunto consistente de equações do campo, que vamos escrever como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

onde  $\Lambda$  é uma constante universal da natureza conhecida como *constante cosmológica*. Escrevendo a equação em termos dos componentes mistos e contraindo, encontramos que

$$R = \kappa^2 T + 4\Lambda$$

Substituindo esta expressão em (2.16), obtemos a forma alternativa das equações do campo

$$R_{\mu\nu} = \kappa^2 \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right) + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

Pode ser comprovada que no limite de campo fraco, a equação deo campo da gravidade newtoniana que é conduzida a partir das equações de Einstein é

$$\nabla^2 \phi = 4\phi G\rho - \Lambda c^2$$

Para uma massa  $M$  esférica, a intensidade do campo gravitacional vem dada pela expressão

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi = -\frac{GM}{r^2}\hat{r} + \frac{c^2\Lambda r}{3}\hat{r}$$

Assim, podemos ver como neste caso o termo da constante cosmológica corresponde a uma *repulsão gravitacional* onde a força aumenta linearmente com  $r$ .

Einstein introduziu este termo nas suas equações porque não conseguia contruir um modelo estático do universo. suas equações previam um universo que ou bem estava em expansão ou em contração. Quando Einstein fez seu trabalho em torno de 1916, os cientistas pensavam que a Via Láctea era o universo todo, o que Einstein interpretou como uma distribuição uniforme de estrelas fixas. Ao introduzir  $\Lambda$ , Einstein construiu um modelo estático do universo. Anos depois, se descobriu que a Via Láctea foi só uma das muitas galáxias no universo. Também, para 1929, Edwin Hubble descobriu a expansão do universo com a medição de distâncias e *redshifts* de galáxias externas. Provou-se que o universo estava em expansão e não houve mais a necessidade de um termo cosmológico.

Hoje em dia, a constante cosmológica se interpreta de maneira diferente. Lembremos que o tensor energia-momento de um fluido perfeito é

$$T^{\mu\nu} = (\rho + \frac{p}{c^2})u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}.$$

Imaginemos agora um tipo de substância que possua a seguinte equação de estado

$$p = -\rho c^2,$$

esta equação significa que a substância hipotética possui pressão negativa. O tensor energia-momento desta substância seria

$$T_{\mu\nu} = -pg_{\mu\nu} = \rho c^2 g_{\mu\nu}$$

Existem dois aspectos em destaque desta equação. O primeiro deles é que o tensor  $T$  desta substância desconhecida *depende só do tensor métrico*. Esta é uma propriedade intrínseca do vazio e podemos chamar  $\rho$  como a densidade de energia do vácuo  $\rho_{vac}$ . O segundo aspecto a destacar é que a forma de  $T_{\mu\nu}$  é a mesma que a da constante cosmológica na equação (2.17). Por tanto, podemos interpretar a constante cosmológica como uma *constante universal que fixa a densidade de energia do vácuo*

$$\rho_{vac}c^2 = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad (2.19)$$

Assim chamaremos ao tensor de energia-momento do vácuo como  $T_{\mu\nu}^{vac} = \rho_{vac}c^2 g_{\mu\nu}$ , e escrevemos as equações do campo gravitacional como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{vac}), \quad (2.20)$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor de energia-momento de qualquer forma de matéria ou radiação.

O cálculo da densidade do vácuo é um dos mais maiores problemas físicos sem solução. Pensa-se que deve existir um mecanismo que faz com que a constante cosmológica seja muito pequena. Alguns físicos têm pensado que deve existir um mecanismo que faz que  $\Lambda$  seja *extamente igual a zero*. Mas nos últimos anos tem crescido evidência de que a constante cosmológica é pequena mas não é zero. A evidência mais firme veio da observação de *Supernovas tipo Ia* na qual indicou que a expansão do universo esta acelerando. Se poderia imaginar que a gravidade da matéria no universo conduziria a que expansão desacelera. Porém, si a constante cosmológica não é nula, a pressão negativa do vácuo poderia fazer que o universo acelere sua expansão.

## 2.9 A expansão do Universo

### 2.9.1 A equação de Friedmann: A necessidade da expansão do Universo

[73, 74]

A conhecida solução de Friedmann, que relata a evolução do fator de escala  $a$  do Universo como uma função do tempo, obtém-se explicitamente substituindo a métrica de FLRW nas equações de Einstein. No entanto, esta equação pode-se obter também através de argumentos Newtonianos, como segue-se. Começamos considerando uma esfera de raio físico (o *proprio*)  $\mathbf{ar}$ , onde  $\mathbf{r}$  é o *raio comóvel*, que é independente do tempo. Assim, o afastamento comóvel entre dois pontos no espaço *no* muda o motivo da expansão do Universo.

Suponhamos, também, que a matéria está distribuido homogêneamente no espaço, de tal forma que um ponto sob a superfície da esfera está submetido somente à ação gravitacional da massa envolvida no interior dela ( $M(\mathbf{ar})$ ; o resultado equivalente desde conhecido resultado Newtoniano é o *teorema de Birkhoff*).

Portanto, a conservação da energia por unidade de massa expressa-se como:

$$\underbrace{\frac{1}{2}(\dot{a}r)^2}_{\text{energia cínica}} - \underbrace{\frac{GM(ar)}{ar}}_{\text{energia potencial}} = \underbrace{E_{tot.}}_{\text{energia total}} = cte. \quad (2.21)$$

Tendo  $M(ar) = \frac{4}{3}\pi\rho(ar)^3$ , e olhando que a obtenção relativista formal também permite determinar  $E_{tot.}$ ,

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_T a^2 = -\kappa^2 c^2, \quad (2.22)$$

que é a equação de Friedmann, onde  $\kappa^2$  é o fator geométrico da métrica de FLRW.

Na equação (2.22),  $\rho_T$  inclui todas as possíveis contribuições à densidade de energia do Universo: massa, radiação e  $\Lambda$  (também conhecida como “energia do vácuo”)

$$\rho_T = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda, \quad (2.23)$$

onde  $\rho_\Lambda$  se define em (2.19). Podemos escrever a contribuição do vácuo explicitamente

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3}a^2(\rho_m + \rho_r) - \frac{\Lambda c^2 a^2}{3} = -\kappa^2 c^2. \quad (2.24)$$

Uma maneira alternativa da equação de Friedmann utilizada obtém-se derivando com respeito ao tempo (chama-se a “a forma  $\ddot{a}$ ”)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho_T + \frac{3p_T}{c^2} \right). \quad (2.25)$$

Da equação (2.25) observamos que  $\ddot{a} \neq 0$  sempre que  $\rho_T + 3p_T/c^2 \neq 0$ , independentemente do valor de  $\dot{a}$ . Isto acontece para todas as formas de energia nas quais a pressão tem o mesmo sinal que a densidade; no caso particular, para matéria e radiação. Quer dizer, neste caso o fator de escala não pode permanecer constante ainda se imediatamente  $\dot{a} = 0$ . Neste caso, *o Universo está acelerado*, já seja pq está em *expansão* (com  $\dot{a} > 0$ ) ou *contração* (com  $\dot{a} < 0$ ), é possível de que atravesse de um dos estados ao outro. Porém, Einstein, ante a falta de evidência da expansão em seu momento. introduz o termo  $\Lambda$  ao invés de agourar a expansão do Universo.

Comparando os termos  $\Lambda g_{\mu\nu}$  e  $8\pi G T_{\mu\nu}/c^4$  da equação de Einstein, depara-se que  $\Lambda$  é equivalente a

um sistema (na realidade, um fluido) com densidade e pressão conhecido por

$$\rho_\Lambda = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G}, \quad p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2. \quad (2.26)$$

Em presença do termo comológico, fica fácil ver que as equações (2.25) e (2.26) que neste caso sim podemos ter um Universo em equilíbrio (quer dizer, com  $\ddot{a} = 0$ ) se

$$\Lambda_{eq} = \frac{4\pi G}{c^2}(\rho_m + 2\rho_r), \quad (2.27)$$

onde negligenciamos a pressão da matéria. Portanto, este equilíbrio é instável. Escrevendo a equação (2.25) e introduzindo o valor do equilíbrio de  $\Lambda$  como  $\Lambda_{eq} = 8\pi G\rho_\Lambda/c^2$ , com  $\rho_\Lambda = \rho_{m0}/2 + \rho_{r0}$ , e considerando um valor da densidade total  $\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda$  levemente diferente do valor de equilíbrio  $\rho_0 = \rho_{m0} + \rho_{r0} + \rho_\Lambda$ , para estudar a estabilidade em torno dele. Obtém-se (novamente negligenciando a pressão da matéria):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G\rho_0}{3} \left( \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right), \quad (2.28)$$

onde  $\rho \propto 1/V \propto a^{-3}$ , com  $\rho = \rho(t)$  e  $a = a(t)$ . Portanto

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0 \left[ \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 - 1 \right]. \quad (2.29)$$

Considerando que a perturbação é pequena:  $a = (1 + \epsilon)a_0$ ,  $\epsilon \ll 1$ , temos

$$\ddot{\epsilon} \approx 4\pi G\rho_0\epsilon, \quad (2.30)$$

com uma solução

$$\epsilon_\pm \propto e^{\pm \sqrt{4\pi G\rho_0} t}, \quad (2.31)$$

de maneira que o estado “+” cresce exponencialmente no tempo, mostrando uma instabilidade. Assim, o modelo estático continua sendo possível, apesar de  $\Lambda$ .

Da equação de Friedmann (2.22) podemos observar que

$$\rho_T = \rho_c \equiv \frac{3}{8\pi G} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^3 \equiv \frac{3}{8\pi G} H^2, \quad (2.32)$$

onde  $H$  é o *parâmetro de Hubble*, ou taxa de Hubble, então,  $k = 0$ . Quer dizer, para  $\rho = \rho_c$ , o Universo

é plano. Similarmente,  $E_{tot} = 0$ .

Por outra parte:

$$\rho_T > \rho_c \Rightarrow k = 1 \Rightarrow E_{tot} < 0 \Rightarrow \text{Universo fechado,}$$

$$\rho_T < \rho_c \Rightarrow k = -1 \Rightarrow E_{tot} > 0 \Rightarrow \text{Universo aberto.}$$

Se  $E_{tot} \geq 0$ , a expansão continua por sempre ( que é semelhante a uma pedra jogada para cima com  $v > v_{esc}$ ). Se  $E_{tot} < 0$ , a expansão finalmente atingira, e acontecerá um etapa de contração no futuro.

Uma vez aceito o fato que o Universo está em expansão, uma extrapolação até o passado sugere que aintigamente o Universo foi mais compacto e estava mais estreito, até o devido momento em que a densidade (e também a temperatura) deveriam divergir: **O Big Bang** (uma singularidade).

## 2.9.2 Parâmetros cosmológicos

[73] É conveniente definir varios parâmetros adimensionais

—A. Parâmetro de densidade—

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho}{3} \left(\frac{a}{\dot{a}}\right)^2 \equiv \frac{8\pi G\rho}{3H^2}, \quad (2.33)$$

onde  $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ , é a *taxa de Hubble* (lembrar que  $v = Hr$  na lei de Hubble). O parâmetro  $\Omega$  pode ser definido para cada uma das densidades que contribuem à densidade total do Universo: matéria, radiação e  $\Lambda$ , sendo simbolizados com suas respectivas contribuições como  $\Omega_m$ ,  $\Omega_r$  e  $\Omega_\Lambda$ .

—B. “h-zinho”—

$$h = \frac{H_0}{100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}}, \quad (2.34)$$

onde  $H_0$  é o valor atual da taxa de Hubble.

Em termos destas variáveis, a densidade atual do Universo pode ser apresentado como

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1.88 \times 10^{-29} \Omega h^2 \text{ g cm}^{-3} \\ &= 2.78 \times 10^{11} \Omega h^2 M_\odot \text{ Mpc}^{-3}. \end{aligned}$$

—C. Parâmetro de desaceleração—

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \quad (2.35)$$

—D. Fator de escala normalizado— a seu valor atual  $a_0$

$$a \equiv \frac{a}{a_0}. \quad (2.36)$$

Em termos de  $\Omega$  e  $H$ , a equação de Friedmann (2.22) pode-se reescrever como

$$\frac{kc^2}{H^2 a^2} = \Omega_T - 1, \quad (2.37)$$

onde  $\Omega_T \equiv \rho_T/\rho_c \equiv \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda$ .

Em termos de  $q$ , a forma  $\ddot{a}$  da equação de Friedmann (2.25) pode ser reescrever como

$$q = \frac{4\pi G}{3H^2} \left( \rho_T + \frac{3p_T}{c^2} \right). \quad (2.38)$$

Para escrever esta equação explicitamente em termos das diferentes contribuições a  $\rho_T$  (2.23) e  $p_T$ , repara que na maioria dos casos a matéria é não-relativista, conforme  $3p_m \ll \rho_m$ . Para a radiação, lembremos que

$$p_r = \frac{1}{3}u_r, \quad (2.39)$$

onde  $u_r$  é a densidade de energia radiativa, que satisfaz  $u_r = \rho_r c^2$ . Finalmente, usando a equação (2.26) para  $p_\Lambda$ , temos que

$$\rho_T + \frac{3p_T}{c^2} = \rho_m + 2\rho_r - 2\rho_\Lambda, \quad (2.40)$$

pelo que (2.38) pode-se reescrever

$$q = \frac{1}{2}\Omega_m + \Omega_r - \Omega_r. \quad (2.41)$$

Da equação (2.37), olhamos que, para um Universo plano ( $k = 0$ ), deve-se ter  $\Omega_T = 1$ , no qual

$$q = \frac{3}{2}\Omega_m + 2\Omega_r - 1, \quad (2.42)$$

Forma  $\ddot{a}$  para um Universo plano.

Por último, em termos de  $a$ ,  $H$  escreve-se como

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.43)$$

### 2.9.3 Escalamentos com a expansão

[74]

De acordo com a Expansão do Universo, uma serie de quantidades físicas varia de uma forma bem definida. A formulação mais importante nesta discussão é a do “observador comóvel”, aquele que se movimenta em conjunto com a expansão do Universo e em repouso com a média da matéria nas redondezas.

#### Redshift cosmológico

Considerando um sinal luminosa que ao tempo  $t$  passa próximo a um observador comóvel  $O_1$ , que mede o comprimento de onda  $\lambda(t)$ . Pouco depois, em  $t + \Delta t$ , passa próximo a outro observador  $O_2$ , que mede  $\lambda(t + \Delta t)$ . Pela lei de Hubble,  $O_2$  move-se com respeito de  $O_1$  com uma velocidade

$$v = Hl = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) c \Delta t, \quad (2.44)$$

onde  $l$  é a distancia entre  $O_1$  e  $O_2$ . Se os dois observadores estão suficientemente próximos,  $v \gg c$ , e aplica-se a expressão não-relativista do efeito Doppler

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \Delta t, \quad (2.45)$$

portanto,

$$\lambda(t + \Delta t) = (1 + \Delta\lambda)\lambda(t) = \left[1 + \frac{\dot{a}}{a}\Delta t\right] \lambda(t). \quad (2.46)$$

Se expandimos o lado direito a primeira ordem

$$\lambda(t) + \dot{\lambda}\Delta t = \lambda(t) + \lambda(t)\frac{\dot{a}}{a}\Delta t, \quad (2.47)$$

sendo assim

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.48)$$

que provoca

$$\lambda(t) \propto a(t), \quad (2.49)$$

e

$$\nu(t) \propto \frac{1}{a(t)}, \quad (2.50)$$

ou

$$\frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{a_o}{a_e} \equiv 1 + z \Rightarrow a(t) = \frac{1}{1 + z}, \quad a_0 = 1, \quad (2.51)$$

onde  $z$  é o redshift, e os subscritos “o” e “e” tem como significado “na posição do observador” e “na posição onde o fóton foi emitido”. O subscrito “0” indica o tempo atual.

### Escalamento de quantidades físicas

[52, 73] Como mencionado a densidade de matéria esta dada simplesmente como o inverso do volume.

Portanto

$$\rho_m(t) \propto \frac{1}{a^3(t)} \propto (1 + z)^3. \quad (2.52)$$

Por outro lado, a densidade de energia radiativa cresce como  $\nu/V$ , pelo que

$$\rho_r(t) \propto \frac{1}{a^4(t)} \propto (1 + z)^4. \quad (2.53)$$

Observe que isto implica que não existe conservação global de energia, pois a densidade total da energia diminui mais rapidamente que o inverso do volume do Universo [74].

Por último, pode-se demonstrar que o momento tri-dimensional  $p = m\nu$  cresce como

$$p \propto \nu \propto \frac{1}{a(t)}. \quad (2.54)$$

Conhecendo estes agrupamentos, é possível reescrever a nova equação de Friedmann (formas de  $\dot{a}$  e  $\ddot{a}$ ) em termos dos valores atuais de  $H$ ,  $\Omega$  e  $\rho$ . Observe que em cosmologia se acostuma olhar as coisas desde o hoje até o passado, tomando  $z = 0$  para hoje.

Note que os valores atuais com subscritos “0”. Reparar que

$$\rho_m(t) = \rho_{m0}[1 + z(t)]^3 \Rightarrow \Omega_m = \Omega_{m0}(1 + z)^3 \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \quad (2.55)$$

$$\rho_r(t) = \rho_{r0}[1 + z(t)]^4 \Rightarrow \Omega_r = \Omega_{r0}(1 + z)^4 \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \quad (2.56)$$

$$\rho_\Lambda = cte \Rightarrow \Omega_\Lambda = cte \left(\frac{H_0}{H}\right)^2, \quad (2.57)$$

onde nas igualdades da direita tem-se usado a definição da densidade crítica (2.33), observando que depende do tempo.

Prosseguindo com a equação de Friedmann (2.37) e expandindo as contribuições

$$\frac{kc^2}{H^2 a^2} = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda - 1, \quad (2.58)$$

Definimos o *parâmetro de curvatura* como

$$\Omega_R \equiv \frac{kc^2}{H_0^2 a_0^2}, \quad (2.59)$$

consequimos

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_{r0}(1 + z)^4 + \Omega_{m0}(1 + z)^3 - \Omega_R(1 + z)^2 + \Omega_\Lambda. \quad (2.60)$$

Esta é uma equação muito importante que liga o valor da taxa de Hubble no passado com o redshift  $z$  e os valores atuais dos varios parâmetros de densidade.

Notando que  $\Omega_R = \Omega_{T0} - 1$ , também podemos escrever

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_{r0}(1 + z)^4 + \Omega_{m0}(1 + z)^3 - (\Omega_{T0} - 1)(1 + z)^2 + \Omega_\Lambda. \quad (2.61)$$

onde

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Omega_T(z) = 1. \quad (2.62)$$

## 2.9.4 Modelos cosmológicos

[73]

Todo os discutido até agora diz ao respeito do “Universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker”,

termo que refere-se aos modelos onde aplica-se a métrica de Robertson-Walker, e que estão governados pela equação de Friedmann. Dentro de estes modelos, existem varias possibilidades.

### Modelo estático de Einstein

Como discutido na seção 2.9.1, só notar reparar a forma de  $\ddot{a}$  da equação de Friedmann (2.25), a condição de aceleração zero implica

$$\rho_T + \frac{3p_T}{c^2} = 0. \quad (2.63)$$

Negligenciando as contribuições da matéria e radiação à pressão, assim como a  $\rho_r$  (que é uma boa aproximação para  $z \lesssim 10^4$ ), temos  $p_T = p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$ . Portanto

$$\rho_T = \rho_m + \rho_\Lambda = 3\rho_\Lambda, \Rightarrow \rho_m = 2\rho_\Lambda. \quad (2.64)$$

Além disso,  $\rho_T > 0$ , e portanto, a equação de Friedmann (2.22) com  $\dot{a} = 0$ , obtém-se

$$k > 0 \Rightarrow \text{Universo fechado}. \quad (2.65)$$

como já visto na seção 2.9.1, este modelo é instável.

### Modelo de de-Sitter

Neste modelo, o Universo está vazio, e só tem a contribuição do vacuo ( $\Lambda$ ), que satisfaz  $\rho_\Lambda = cte$ . (quer dizer, não é diluída com a expansão).

Neste caso, da equação de Friedmann (2.22), com  $\rho_T = \rho_\Lambda = cte$ ,

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda a^2 = -kc^2, \quad (2.66)$$

vemos que, conforme o Universo se expandem o termo  $kc^2$  torna-se progressivamente menos importante em relação aos outros dois, e assintoticamente o Universo alcança a evolucionar de acordo a

$$\dot{a} = \left( \frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3} \right)^{1/2} a, \quad (2.67)$$

com uma solução

$$R \propto \text{Exp} \left[ \left( \frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3} \right)^{1/2} t \right] = \text{Exp} \left[ \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} t \right]. \quad (2.68)$$

Isso significa, a expansão acelera exponencialmente, igual como aconteceu ao perturbar o modelo estático de Einstein equação (2.31).

O caso  $k = 0$ , na qual (2.67) sempre se consegue, e corresponde que a taxa de Hubble em verdade seja constante (ver equação 2.24) com  $\rho_m = \rho_r = k = 0$

$$H = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}. \quad (2.69)$$

O Universo será plano e aberto. Este caso é semelhante ao *Universo estacionário* de Hoyle, Bondi e Gold, embora sem matéria. Dado que no Universo a matéria existe, para sustentar a constância de sua densidade, o modelo do Universo estacionário requer a *criação contínua de matéria*, ao ritmo de aproximadamente 1 átomo de  $H$  por  $m^{-3}$  cada 30 Giga anos ( $Gr$ ). Este modelo pode ter sido aplicado durante a *época inflacionária* e também mais recentemente ( $z \lesssim 1$ ), se hoje  $\Lambda$  domina a expansão.

## 2.10 Modelos de energia escura

Sabemos que hoje o Universo está acelerando, de acordo com os dados obtidos por medidas de distância de Luminosidade de Supernovas Tipo Ia (SN Ia), pelos grupos *Supernova Cosmology Project* [81], e *High Redshift Supernova Team* [78]. A fonte para tal aceleração é o que chamamos de *Energia Escura*, da qual sua origem ainda não foi identificada. A energia escura se distingue das espécies comuns, tais como matéria bariônica e da radiação, no sentido de que tem pressão negativa. Esta pressão negativa leva à expansão acelerada do Universo, contrabalançando a força gravitacional. As observações SN Ia mostram que cerca de 70% da presente energia do Universo é composta por energia escura.

Dos modelos de energia escura que encontramos na literatura, o candidato mais simples seria a constante cosmológica, que é interpretada como a densidade de energia do vácuo, no entanto este sofre de dois problemas [30], sendo assim outros modelos surgiram na tentativa de resolve-los. Existem dois métodos, modificação da gravidade e da *matéria*. Primeiro iremos seguir com a modificação da matéria, onde focamos em modelos de quinta-essência. Depois com modelos de energia escura como modificação da gravidade.

### 2.10.1 Modelo $\Lambda$ CDM

O mais simples candidato a energia escura é a constante cosmológica  $\Lambda$ , que chamamos assim porque sua densidade de energia é constante no tempo e no espaço. De fato o modelo  $\Lambda$ CDM mostrou ser consistente com um grande número de observações. Apesar de sua simplicidade, é geralmente difícil de explicar por que a escala de energia da constante cosmológica necessária para a aceleração cósmica, hoje, é muito pequena em relação ao previsto pela física de partículas, que é de cerca de  $10^{121}$  vezes maior do que a densidade de energia observada.

### 2.10.2 Modelo $\phi(t)$ CDM

Nós usamos o termo *quinta-essência* para designar um campo escalar canônico  $\phi$  com um potencial  $V(\phi)$  que interage com todas as outras componentes apenas através da gravidade padrão. O modelo de quinta-essência é, portanto, descrito pela ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa^2} R + \mathcal{L}_\phi \right] + S_m, \quad \mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \quad (2.70)$$

onde  $\kappa^2 = 8\pi G$  e  $R$  é o escalar de Ricci.

Considera-se um fluido com densidade de energia  $\rho_M$ , pressão  $p_M$ , e equação de estado  $w_M = p_M/\rho_M$ . Aqui o índice  $M$  é utilizado para um fluido perfeito geral (incluindo o caso de um fluido total) sem especificar matéria não-relativística ou radiação. Mais tarde, devemos utilizar o índice  $M$  para especificar matéria não-relativística. O fluido satisfaz a equação de continuidade, isto é,

$$\dot{\rho}_M + 3H(\rho_M + p_M) = 0 \quad (2.71)$$

O tensor de energia-momento da quinta-essência é calculado utilizando a seguinte relação

$$T_{\mu\nu}^\phi = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\phi)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.72)$$

Concluimos que

$$T_{\mu\nu}^\phi = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right] \quad (2.73)$$

Em um fundo FLRW, a densidade de energia  $\rho_\phi$  e a pressão  $p_\phi$  do campo são

$$\rho_\phi = T_{00}^\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{3}T_{ii}^\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (2.74)$$

o que nos dá a seguinte equação de estado

$$w_\phi \equiv \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} \quad (2.75)$$

No Universo plano ( $K = 0$ ) onde as seguintes equações de movimento são

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}(\rho_{de} + \rho_m) = \frac{\kappa^2}{3} \left[ \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \rho_m \right] \quad (2.76)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2}(\rho + p) = -\frac{\kappa^2}{2}(\dot{\phi}^2 + \rho_m + p_m) \quad (2.77)$$

onde  $\rho = \rho_\phi + \rho_m$ , e  $p = p_\phi + p_m$ . a variação da ação (2.70) com relação a  $\phi$  temos que

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 \quad (2.78)$$

onde  $V_{,\phi} \equiv dV/d\phi$ . A equação de Klein-Gordon (2.78) pode ser igualmente obtida por meio da equação de continuidade  $\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = 0$ , ou por combinação das equações (2.67), (2.76) e (2.77).

Durante a época de dominação da radiação ou da matéria, a densidade de energia do fluido  $\rho_M$  domina sobre o da quinta-essência, isto é  $\rho_M \gg \rho_\phi$ . Exigimos que  $\rho_\phi$  acompanhe  $\rho_M$  de modo que a densidade de energia escura emerge em momentos tardios. se este comportamento de rastreamento ocorre ou não depende da forma do potencial  $V(\phi)$ . Se o potencial possui uma crava muito empinada, de modo que a condição  $\dot{\phi}^2 \gg V(\phi)$  é sempre satisfeita, a equação de estado do campo é dada por  $w_\phi \simeq 1$  a partir da equação (2.75). Neste caso, a densidade de energia do campo, evolui como  $\rho_\phi \propto a^{-6}$  o que diminui muito mais rápido do que a densidade do fluido de fundo.

Portanto, exige-se a condição  $w_\phi < -1/3$  para realizar a aceleração tardia do tempo cósmico, que se traduz na condição  $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$ . Por isso, o potencial escalar precisa ser suficientemente plano para o campo evoluir lentamente ao longo do potencial.

## 2.11 Modelos de energia escura como modificação de gravidade

Existem uma serie de modelos a serem discutidas para uma “gravidade modificada”, na qual, o origem da energia escura é identificada como uma modificação da gravidade. Isto incluiria a gravidade  $f(R)$ , teorias escalar-tensor, gravidade Gauss-Bonnet, etc. Nessas teorias pode-se modificar as leis de gravidade de modo que a expansão acelerada do Universo no tempo tardio é realizado sem o requerimento de uma componente de matéria da energia escura.

### 2.11.1 Gravidade $f(R)$

Um dos mais simples modelos de gravidade modificada é a chamada gravidade  $f(R)$ , na qual, a ação quadri-dimensional é por alguma função geral  $f(R)$  do escalar de Ricci  $R$ :

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m(g_{\mu\nu}, \Psi_m), \quad (2.79)$$

onde  $\kappa^2 = 8\pi G$ , e  $S_m$  é uma ação da matéria com campo de matéria  $\Phi_m$ . Com  $G$  sendo um *bare* de constante gravitacional: vamos ver que valor observado será em geral diferente. O campo material em  $g_{\mu\nu}$  corresponde ao frame físico (que aqui é o Jordan-frame). Existem duas abordagens para derivar as equações de campo para a ação (2.79), uma é o formalismo métrico e a outra o formalismo de Palatini [22, 38].

### 2.11.2 Teoria escalar-tensor

Como vimos na seção anterior para modelos de energia escura, existem modelos, ou a maioria, de energia escura que depende de campos escalares. Campos escalares têm uma longa história na cosmologia, começando da teoria de Brans-Dicke [18, 19, 31] em que a gravidade é mediada por um campo escalar, além do campo do tensor métrico [23, 34, 40]. A teoria de Brans-Dicke foi uma tentativa de reviver o princípio de Mach (segundo a qual a inércia surge quando um corpo é acelerado em relação à distribuição de massa global no Universo) juntando a constante gravitacional a um campo cósmico. A teoria de Brans-Dicke é um exemplo particular da teoria escalar-tensor. Este é provavelmente um exemplo simple de modelos de gravidade modificada e, como tal, uma das alternativas mais intensamente estudadas na Relatividade Geral. Após a descoberta da aceleração cósmica, eles foram invocados por vários autores [20, 34] para generalizar a constante cosmológica e explicar o problema

do ajuste fino e o problema da coincidência. No capítulo 4, discutiremos as suas propriedades como candidatos de energia escura.

### 2.11.3 Gravidade Gauss-Bonnet

As teorias  $f(R)$  e escalar-tensor adicionam ao campo tensor gravitacional um novo grau de liberdade, um campo escalar. No entanto, isso certamente não sucumbe o intervalo de possíveis modificações da gravidade. Um possibilidade esta em adicionar ao lagrangiano de Einstein as funções gerais dos tensores de Ricci e Riemann, ou seja,  $f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}, \dots)$  [24]. Existe uma maneira de modificar a gravidade com a combinação dos tensores de Ricci e Riemann que mantém as equações em segunda ordem na métrica e não necessariamente da origem a instabilidades, chamado termo de Gauss-Bonnet acoplado a campos escalares [4, 21, 69, 70]. O termo de Gauss-Bonnet é topologicamente uma quantidade invariante, que contribui para a dinâmica em quatro dimensões, que é acoplado a um campo escalar que evoluindo dinamicamente. Tendo assim a possibilidade de realizar uma aceleração cósmica no tempo tardio na presença do termo Gauss-Bonnet acoplado ao campo escalar  $\phi$ .

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) - f(\phi)R_{GB}^2 \right] + S_m(g_{\mu\nu}, \Phi_m), \quad (2.80)$$

onde  $V(\phi)$  e  $f(\phi)$  são funções de  $\phi$ , e  $R_{GB}^2$  é o termo de Gauss-Bonnet (GB) definido por

$$R_{GB}^2 \equiv R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (2.81)$$

---

# Capítulo 3

## TEORIA DE PERTURBAÇÃO LINEAR

Neste capítulo, apresenta-se uma revisão das perturbações cosmológicas Newtonianas e relativistas. Em um universo inhomogêneo, a métrica requer das funções adicionais  $\psi$  e  $\phi$  que correspondem ao potencial Newtoniano e à perturbação à curvatura espacial, respectivamente. Portanto, damos maior ênfase às perturbações relativistas na escala no sub-horizonte do invariante de calibre. Primeiro fornecemos uma introdução a essa teoria e através da teoria Newtoniana, para ter um enfoque maior do que poderia tratar-se posteriormente quando se faz de maneira relativista. Com transformações de coordenadas chegamos a uma escolha de medir as perturbações e construir quantidades invariantes de calibre que são importantes para essas variáveis e são as únicas que contêm um significado físico. Para determinar a sua evolução, apresentamos as equações estimadas das equações de campo de Einstein e a conservação em termos dessas variáveis. Encontrando assim, na parte final como evoluciona a perturbação da matéria.

### 3.1 Teoria das perturbações Newtonianas

A gravidade Newtoniana é uma descrição adequada da relatividade geral em escalas dentro do raio de Hubble e para matéria não relativista, ou seja, matéria escura fria (CDM, siglas em inglês) e os barions depois do desacoplamento. Começaremos com a teoria das perturbações Newtonianas [55] porque é mais intuitivo do que o tratamento total na relatividade geral (RG).

### 3.1.1 Equações do fluido perturbado

Consideremos um fluido não-relativístico com densidade de massa  $\rho$ , pressão  $p \ll \rho$  e velocidade  $v$ . Denotamos o vetor posição do elemento de fluido por  $\mathbf{r}$  e o tempo por  $t$ . As equações de movimento são dadas pela dinâmica de fluidos <sup>1</sup>. A conservação da massa implica a *equação de continuidade*

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + (\rho v^r)_{,r} = 0, \quad r = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

enquanto a conservação do momento nos leva à *equação de Euler*

$$\frac{\partial}{\partial t}v^r + (v^m \nabla_m)v_r = -\frac{1}{\rho}p_{,r} - \phi_{,r}. \quad (3.2)$$

A equação anterior é simplesmente “ $F = ma$ ” para um elemento de fluido. O potencial gravitacional  $\phi$  é determinado pela *equação de Poisson*

$$\nabla^r \nabla_r \phi \equiv \Delta \phi = 4\pi G \rho. \quad (3.3)$$

Estas equações devem implicar a evolução de pequenas perturbações em torno do fundo homogêneo. Portanto, vamos a decompor todas as quantidades em valores de fundo e as perturbadas— por exemplo,  $\rho(t, \mathbf{x}) = \rho_0(t) + \hat{\rho}(t, \mathbf{x})$ , e e do mesmo jeito para a pressão, a velocidade e o potencial gravitacional. Assumindo que as flutuações são pequenas, nós podemos linearizar as equações (3.1) e (3.2), ou seja, nós podemos ignorar os produtos de flutuações.

#### Espaço estático

Aqui vamos a considerar um espaço estático. É fácil ver que a solução para o fundo é  $\rho_0 = \text{const.}$ ,  $p_0 = \text{const.}$  e  $v^a = v_0^a = 0$  (fluido em repouso). A evolução de equação de continuidade até primeira ordem

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho} + \rho_0 \hat{v}^r_{,r} = 0, \quad (3.4)$$

e a equação de Euler

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{v}_r + \frac{1}{\rho_0}\hat{p}_{,r} + \hat{\phi}_{,r} = 0, \quad (3.5)$$

<sup>1</sup>Landau and Lifshitz, Mecânica de fluidos.

e a equação de Poisson

$$\hat{\phi}_{,rr} = 4\pi G\hat{\rho}. \quad (3.6)$$

Misturando as equações  $\frac{\partial}{\partial t}(3.4)$ ,  $(3.5)_a$  e  $(3.6)$ , encontramos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{\rho} - c_s^2\Delta\hat{\rho} - 4\pi G\rho_0\hat{\rho} = 0, \quad (3.7)$$

para perturbações adiabáticas, as perturbações da pressão e densidade está relacionado por  $\hat{p} = c_s^2\hat{\rho}$ , onde  $c_s$  é chamada de *velocidade do som*. Assim a equação (3.7) será resolvida por uma onda plana <sup>2</sup>, onde  $w = c_s k$ , com  $k \equiv |\mathbf{k}|$ .

Agora da equação (3.7) podemos ter a relação de dispersão

$$w^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_0, \quad (3.8)$$

onde podemos observar que para  $w^2 > 0$   $w$ -real representará oscilações, mas quando  $w^2 < 0$  terá  $w$ -imaginário que representaria instabilidades. No caso limite quando a frequência das oscilações é zero,  $w^2 = 0$ , veremos que existe um número de onda crítico

$$k_J \equiv \frac{\sqrt{4\pi G\rho_0}}{c_s}. \quad (3.9)$$

Para escalas pequenas (ou seja, um número de ondas bem grande),  $k > k_J$ , vemos o domínio da pressão e encontramos as oscilações sem a componente da gravidade. Contudo, em escalas maiores,  $k < k_J$ , há um domínio da gravidade, a frequência  $w$  torna-se imaginário e as *flutuações crescem exponencialmente*. Então um crossover acontece no *comprimento de Jeans*

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}. \quad (3.10)$$

<sup>2</sup>*Espaço de Fourier*.— A maneira mais geral de resolver equações do tipo (3.7) é expandindo  $\hat{\rho}$  nas componentes de Fourier

$$\hat{\rho}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{\rho}_k(t).$$

Então, a equação (3.7) torna-se no espaço de momentos como

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c_s^2 k^2\right)\hat{\rho}_k = 0,$$

que tem como solução

$$\hat{\rho}_k = A_k \exp^{i w_k t} + B_k \exp^{-i w_k t}, \quad w_k \equiv c_s k.$$

- $\lambda < \lambda_J = \frac{2\pi}{k_J}$ ,  $k > k_J$ , ondas do som.
- $\lambda > \lambda_J$ ,  $k < k_J$ , instabilidades.

## Expansão do espaço

Na expansão do espaço, temos a relação usual entre coordenadas físicas e coordenadas comóveis  $\mathbf{x}$ ,

$$\mathbf{r}(t) = a(t)\mathbf{x}. \quad (3.11)$$

O campo de velocidade é dado por

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = H\mathbf{r} + \mathbf{v}, \quad (3.12)$$

onde  $H\mathbf{r}$  é o fluxo de Hubble e  $\mathbf{v} = a\dot{\mathbf{x}}$  é uma velocidade adequada. No espaço-tempo estático, as derivadas do espaço e do tempo são definidos de  $t$  e  $\mathbf{r}$  foram independentes. Em uma expansão espaço-tempo isto não é mais o caso. Então, é conveniente usar as derivadas do espaço definidas com respeito às coordenadas comóveis  $\mathbf{x}$ , que vamos a denotar por  $\nabla_{\mathbf{x}}$ . Usando (3.11), temos

$$\nabla_{\mathbf{r}} = a^{-1}\nabla_{\mathbf{x}}. \quad (3.13)$$

A relação entre derivadas temporais em  $\mathbf{r}$  fixo e em  $\mathbf{x}$  fixo é

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} - H\mathbf{x}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}. \quad (3.14)$$

De agora em diante vamos a desconsiderar o subíndice  $\mathbf{x}$ , tendo esta consideração, veremos as equações do fluido no universo em expansão:

- *Equação de continuidade*

Substituindo (3.13) e (3.14) para  $\nabla_{\mathbf{r}}$  e  $\partial_t$  na equação de continuidade (3.1), obtemos

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - H\mathbf{x}\cdot\nabla\right][\rho_0(1 + \delta)] + \frac{1}{a}\nabla\cdot[\rho_0(1 + \delta)(H\mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{v})] = 0, \quad (3.15)$$

Aqui, introduzimos a *densidade fracionária de perturbação*,  $\delta \equiv \frac{\hat{\rho}}{\rho_0}$ . As vezes  $\delta$  é chamada de *densidade de contraste*.

Vamos a analisar ordem por ordem na teoria de perturbações: - Em flutuações a ordem zero, temos

$$\frac{\rho_0}{\partial t} + 3H\rho_0 = 0, \quad (3.16)$$

usamos  $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} = 3$ . Reconhecemos isto como a equação de continuidade para uma densidade de *massa* homogênea,  $\rho_0 \propto a^{-3}$ .

- em flutuações de primeira ordem, temos

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - H\mathbf{x} \cdot \nabla \right] [\rho_0 \delta] + \frac{1}{a} \nabla \cdot [\rho_0 H a \mathbf{x} \delta + \rho_0 v] = 0, \quad (3.17)$$

escrevemos como

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - 3H\rho_0 \right] \delta + \rho_0 \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\rho_0}{a} \nabla \cdot \hat{v} = 0. \quad (3.18)$$

Com ajuda da equação de continuidade a ordem-zero, obtem-se

$$\dot{\delta} = -\frac{1}{a} \nabla \cdot \hat{v}, \quad (3.19)$$

onde “.” indica a derivada com respeito ao tempo.

- *Equação de Euler*

Fazemos a mesma manipulação em (3.2), leva a

$$\dot{\hat{v}} + H\hat{v} - \frac{1}{a\rho_0} \nabla \hat{p} - \frac{1}{a} \nabla \hat{\phi}. \quad (3.20)$$

Na ausência de pressão e da perturbação gravitacional, esta equação simplesmente diz que  $v \propto a^{-1}$ .

- *Equação de Poisson*

Esta expressão será obtida ao dizer que a equação (3.122) torna-se

$$\Delta \hat{\phi} = 4\pi G a^2 \rho_0 \delta. \quad (3.21)$$

### 3.1.2 Perturbações adiabáticas na matéria

Considerando umas perturbações adiabáticas [43, 57] de um fluido com única componente não-relativística. Misturando  $\partial_t(3.19)$  com  $\nabla(3.20)$  e (3.21), obtem-se

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{c_s^2}{a^2}\Delta\delta = 4\pi G\rho\delta,$$

no espaço de momentos

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = \left[ 4\pi G\rho - \frac{k^2 c_s^2}{a^2} \right] \delta. \quad (3.22)$$

Para resolver esta equação é preciso primeiro encontrar a solução de fundo que dá as funções  $a(t)$ ,  $H(t) = \dot{a}/a$  e  $\rho(t)$ .

Isto implica o mesmo comprimento de Jeans como em (3.10), mas ao contrário do caso de um espaço-tempo estático, agora depende do tempo via  $\rho(t)$  e  $c_s(t)$ . Comparando com (3.7), a equação de movimento na expansão espaço-tempo inclui o termo de atrito,  $2H\dot{\delta}$ .

A solução da equação (3.22) depende do sinal do fator dentro dos colchetes. O primeiro termo é devido a à gravidade. Se este termo domina, as perturbações crescem. O segundo termo é devido a gradientes de pressão. A pressão tenta resistir à compressão, por isso, se este termo domina, obtemos uma solução oscilante. O número de onda para os quais os termos são iguais,

$$k_J = \frac{a\sqrt{4\pi G\rho}}{c_s}, \quad (3.23)$$

é chamado o *número de onda de Jeans*, e o comprimento de onda correspondente é  $\Lambda = 2\pi/k_J$ , como o *comprimento de Jeans*. Para a matéria não-relativística  $c_s \ll 1$ , de modo que o comprimento de Jeans é muito menor do que o comprimento de Hubble,  $k_J \gg \mathcal{H} \equiv aH$ . Assim, podemos aplicar a teoria newtoniana para ambas as escalas maiores e menores do que o comprimento de Jeans.

Para escalas muito menores que o comprimento de Jeans,  $k \ll k_J$ , então podemos aproximar a equação (3.22) por

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} + \frac{k^2 c_s^2}{a^2}\delta = 0. \quad (3.24)$$

As soluções são oscilantes,  $\delta(t) \sim e^{iwt}$ , onde  $w = c_s k/a$ . Estas oscilações são amortecidas pelo termo  $2H\dot{\delta}$ , de modo que a amplitude das oscilações diminui com o tempo. Não há crescimento de estruturas em escalas de sub-Jeans.

Para escalas maiores do que o comprimento de Jeans (mas ainda **sub-horizonte**),  $\mathcal{H} \ll k \ll k_J$ , podemos aproximar a equação (3.22)

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\rho\delta = 0 \quad (3.25)$$

### 3.1.3 Matéria escura dentro do parâmetro de Hubble

A estrutura newtoniana descreve a evolução das flutuações da matéria. Podemos aplicar esta evolução da matéria escura e escalas sub-horizonte. (Ignoraremos pequenos efeitos devido aos barions).

- Durante a *época do domínio da matéria*, a equação (3.22)

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G\rho_m\delta_m = 0, \quad (3.26)$$

onde deixamos de considerar o termo de pressão, então  $c_s = 0$  para flutuações de CDM linearizadas. (O efeito não linear produz uma velocidade de som finita, mas pequena) Já que  $a \propto t^{2/3}$ , temos  $H = 2/3t$  e conseqüentemente

$$\ddot{\delta}_m + \frac{4}{3t}\dot{\delta}_m - \frac{2}{3t^2}\delta_m = 0, \quad (3.27)$$

onde usamos  $4\pi G\rho_m = \frac{3}{2}H^2$ . O teste  $\delta_m \propto t^p$  oferece as duas soluções seguintes:

$$\delta_m \begin{cases} t^{-1} & \propto & a^{-3/2} \\ t^{2/3} & \propto & a \end{cases} \quad (3.28)$$

Portanto, o *modo crescente* ( $\delta_m \propto a$ ) de flutuações da matéria escura cresce como o fator de escala. Este é um resultado famoso que vale a pena lembrar.

- Durante a *época do domínio da radiação*, a equação (3.22) é modificado a

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G \sum_I \rho_I \delta_I = 0, \quad (3.29)$$

onde a soma é sobre a matéria e radiação. (Isto é a flutuação da densidade *total*  $\hat{\rho} = \hat{\rho}_m + \hat{\rho}_r$  a qual origina  $\hat{\phi}$ !) As flutuações da radiação em escalas menores do que o raio de Hubble oscilam como ondas de som (suportando uma forte pressão de radiação) e sua densidade de contraste em média do tempos desaparece. Para provar isto, requiere-se rigorosamente a teoria de perturbações relativista. Segue-se que a CDM é essencialmente o único componente agrupado durante as oscilações acústicas

da radiação, e então

$$\ddot{\delta}_m + \frac{1}{t}\dot{\delta}_m - 4\pi G\rho_m\delta_m \approx 0. \quad (3.30)$$

Como  $\delta_m$  evolui apenas em intervalos de tempo cosmológicos (não tem a pressão de suporte para que seja feito de outra forma), temos

$$\ddot{\delta}_m \sim H^2\delta_m \sim \frac{8\pi G}{3}\rho_r\delta_m \gg 4\pi G\rho_m\delta_m, \quad (3.31)$$

onde usamos que  $\rho_r \gg \rho_m$ . Podemos, portanto, ignorar o último termo em (3.30) em comparação aos outros. Então encontramos

$$\delta_m \begin{cases} \text{const.} \\ \ln t \propto \ln a. \end{cases} \quad (3.32)$$

Vemos que a rápida expansão devido ao não agrupamento efetivo da radiação reduz o crescimento de  $\delta_m$  apenas a um logaritmo. Este é outro fato que vale a pena lembrar: precisamos esperar até que o universo se torne dominado pela matéria para que as flutuações da densidade da matéria escura cresçam significativamente.

• Durante a época do domínio de  $\Lambda$

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G \sum_I \rho_I \delta_I = 0, \quad (3.33)$$

onde  $I = m, \Lambda$ . Tanto quanto podemos dizer, a energia escura não agrupa (quase por definição), então podemos escrever

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G\rho_m\delta_m, \quad (3.34)$$

notar que este não é a mesma que (3.26). porque  $H$  é diferente. De fato, no regime onde a constante cosmológica,  $\Lambda$ , domina  $H^2 \approx \text{const.} \gg 4\pi G\rho_m$ . Deixando o último termo da equação anterior, obtemos

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m \approx 0, \quad (3.35)$$

que tem a seguinte solução

$$\delta_m \begin{cases} \text{const.} \\ \exp^{-2Ht} \propto a^{-2}. \end{cases} \quad (3.36)$$

Vemos que as flutuações da matéria param de crescer uma vez que a energia escura vem dominar.

## 3.2 Perturbações cosmológicas relativistas

O tratamento Newtoniano de perturbações cosmológicas é inadequado em escalas maiores que o raio Hubble, e para fluidos relativistas (como fótons e neutrinos). A descrição correta requer de um tratamento completo relativista-geral que agora vamos desenvolver.

### 3.2.1 Espaço-tempo perturbado

A ideia básica é considerar pequenas perturbações  $\hat{g}_{\mu\nu}$  em torno da métrica que descreve o fundo homogêneo e isotrópico  $\bar{g}_{\mu\nu}$ , (métrica de FLRW).

Através das equações de Einstein, as perturbações métricas serão acopladas às perturbações na distribuição de matéria.

#### Perturbações da métrica

Para evitar distrações técnicas desnecessárias, apenas vamos apresentar o caso de um espaço-tempo plano no fundo da métrica FLRW,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j. \quad (3.37)$$

A métrica perturbada pode então ser escrita como

$$ds^2 = -(1 + 2A)dt^2 + 2a^2(t)F_{,i}dt dx^i + a^2(t)[(\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j], \quad (3.38)$$

Onde  $A$ ,  $B_i$  e  $h_{ij}$  são funções de espaço e tempo. Vamos a adotar uma convenção útil na qual os índices latinos em vetores espaciais e tensores serão levantados e abaixados com  $\delta_{ij}$ , ou seja,  $h_i^i = \delta_{ij}h_{ij}$ .

### Escalar, Vetores e Tensores

Será extremamente útil realizar uma decomposição escalar-vetorial-tensorial (SVT) [64] das perturbações. Para um 3-vetor, isto deveria ser familiar. O que simplesmente significa que podemos dividir qualquer 3-vetor no gradiente de um escalar e um vetor sem divergências

$$B_i \rightarrow \tilde{F}_{,i} = \underbrace{\partial_i F}_{\text{escalar}} + \underbrace{\mathbf{F}_{,i}}_{\text{vetor}}, \quad (3.39)$$

com  $\partial^i B_i = 0$ . Da mesma maneira, qualquer tensor de segunda ordem pode ser escrito como

$$h_{ij} = \underbrace{2C\delta_{ij} + 2\partial_{(i}\partial_{j)}E}_{\text{escalar}} + \underbrace{2\partial_{(i}\mathbf{E}_{j)}}_{\text{vetor}} + \underbrace{2\mathbf{E}_{ij}}_{\text{tensor}}, \quad (3.40)$$

onde

$$\partial_{(i}\partial_{j)}E \equiv \left( \partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2 \right) E, \quad (3.41)$$

$$\partial_{(i}\mathbf{E}_{j)} \equiv \frac{1}{2}(\partial_i\mathbf{E}_j + \partial_j\mathbf{E}_i). \quad (3.42)$$

Como antes mencionado, as quantidades sem divergência, dos vetores e tensores, serão nulos, ou seja,  $\partial^i E_i = 0$  e  $\partial^i E_{ij} = 0$ . A perturbação tensorial de traço nulo,  $E_i^i = 0$ . Os 10 graus de liberdade da métrica foram assim decompostos em 4 + 4 + 2 graus de liberdade SVT:

- *escalares* :  $A, F, C, E$
- *vetores* :  $\mathbf{F}_i, \mathbf{E}_i$
- *tensores* :  $E_{ij}$

O que torna a decomposição SVT tão eficaz é o fato de que as equações de Einstein para escalares, vetores e tensores não se misturam em ordem linear e podem, por conseguinte, ser tratados por separado. Nós estaremos interessados principalmente em flutuações escalares e as densidades de per-

turbações associadas. As perturbações vetoriais são responsáveis por produzir campos magnéticos e não são produzidas pela inflação, e mesmo que fossem, elas decairiam rapidamente com a expansão do universo. As perturbações tensoriais são uma previsão importante da inflação que dá o espectro de ondas gravitacionais primordiais, mas não será estudado neste trabalho.

### Problema de calibre

Antes de continuarmos, temos de enfrentar uma sutileza muito importante. As perturbações da métrica em (3.38) não são definidos de forma única, mas dependem de nossa escolha de coordenadas ou da *escolha de calibre*. Em particular, quando escrevemos uma métrica perturbada, nós escolhemos implicitamente um tempo específico do fatiamento do espaço-tempo e definimos coordenadas espaciais específicas nessas fatias de tempo. Se fazemos uma escolha diferente de coordenadas, podemos alterar os valores das variáveis de perturbação. Isto pode até introduzir perturbações fictícias. Estas são perturbações hipotéticas que podem surgir por uma escolha inconveniente de coordenadas, mesmo se no fundo seja perfeitamente homogêneo.

Por exemplo, vamos a considerar um espaço-tempo homogêneo da métrica FRW (3.37) e fazemos a seguinte alteração de coordenadas espaciais,  $x^i \mapsto \tilde{x}^i = x^i - \xi^i(t, \mathbf{x})$ . Nós assumimos que  $\xi^i$  é pequeno de modo que ele também possa ser tratada como uma perturbação. Usando  $dx^i = d\tilde{x}^i + \xi^i_{,t} dt + \xi^i_{,k} d\tilde{x}^k$ , então a equação (3.37) se torna

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ 2\xi_{i,0} d\tilde{x}^i dt + (\delta_{ij} + 2\partial_{(i}\xi_{j)}) d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j \right], \quad (3.43)$$

onde descartamos termos que são quadráticos em  $\xi^i$  e definimos  $\xi_{i,0} \equiv \partial_t \xi_i$ . Aparentemente nós introduzimos as perturbações da métrica  $F_i = \xi_{i,0}$  e  $E_i = \xi_i$ . Mas estes são só *modos de calibre* apenas fictícias que podem ser removidos ao voltar às coordenadas antigas.

Do mesmo jeito, podemos mudar nosso tempo, fatiando,  $t \mapsto t + \xi^0(t, \mathbf{x})$ . A densidade homogênea do universo fica perturbado,  $\rho(t) \mapsto \rho(t + \xi^0(t, \mathbf{x})) = \bar{\rho}(t) + \xi^0 \dot{\bar{\rho}}$ . Assim, mesmo em um universo não-perturbado, uma troca da coordenada temporal pode introduzir uma perturbação de densidade fictícia

$$\hat{\rho} = \xi^0 \dot{\bar{\rho}} \quad (3.44)$$

Do mesmo jeito, podemos remover uma perturbação real na densidade de energia, pela escolha de a hipersuperfície de tempo constante para coincidir com a hipersuperfície de densidade de energia

constante. Depois  $\hat{\rho} = 0$  apesar de que existem inomogeneidades. E  $\hat{\rho}$  no puro grau de liberdade físico pode conter efeitos de coordenadas.

Esses exemplos ilustram que precisamos de um caminho mais físico para identificar verdadeiras perturbações. Uma maneira de fazer isso é definir perturbações de tal forma que elas não mudam sob uma troca de coordenadas.

## Transformações de Calibre

Consideremos a transformação de coordenadas

$$x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu \equiv x^\mu + \xi^\mu(t, \mathbf{x}), \quad (3.45)$$

vamos a escrever as componentes espaciais do vetor infinitesimal  $\xi^\mu = (\xi^0, \xi^i)$  como

$$\xi^i = \partial^i \zeta + \xi_\perp^i = \zeta^i + \xi_\perp^i \quad (3.46)$$

Nós dividimos a deslocação espacial  $\xi^i$  em uma função escalar,  $\zeta$ , e  $\xi_\perp^i$  um 3-vetor com divergência zero ( $\xi_{\perp,i}^i = 0$ ). Desejamos saber como a métrica se transforma sob esta troca de coordenadas. O truque consiste em explorar a invariância do intervalo espaço-tempo,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}) d\tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\beta, \quad (3.47)$$

Onde usou-se um conjunto diferente de índices *fictícios* em ambos os lados para tornar as seguintes linhas mais claras. Escrevendo  $d\tilde{x}^\alpha = (\partial\tilde{x}^\alpha/\partial x^\mu) dx^\mu$  (e do mesmo jeito para  $dx^\beta$ ), então, encontramos

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu} \frac{\partial\tilde{x}^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu} \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}). \quad (3.48)$$

Isso relaciona a métrica nas antigas coordenadas,  $g_{\mu\nu}$ , à métrica nas novas coordenadas,  $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ .

Vamos ver que (3.48) implica a transformação das perturbações métricas em (3.38). Resolveremos a componente-00, considere que  $\mu = \nu = 0$  em (3.48):

$$g_{00}(x) = \frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial t} \frac{\partial\tilde{x}^\beta}{\partial t} \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}). \quad (3.49)$$

Vemos que o único termo que contribui ao lado esquerdo é aquele com  $\alpha = \beta = 0$ . Se consideramos, por exemplo,  $\alpha = 0$  e  $\beta = i$ . A componente fora da diagonal da métrica  $\tilde{g}_{0i}$  é proporcional a  $\tilde{B}_i$ , então é uma

perturbação de primeira ordem. Mas  $\partial\tilde{x}^i/\partial t$  é proporcional à variável de primeira ordem  $\xi^i$ , então o produto é de segunda ordem e pode ser omitido. Um argumento semelhante é válido para  $\alpha = i$  e  $b = j$ .

A equação (3.49), portanto, reduz-se a

$$g_{00}(x) = \left(\frac{\partial\tilde{t}}{\partial t}\right)^2 \tilde{g}_{00}(\tilde{x}). \quad (3.50)$$

Substituindo (3.45) e (3.38), obtemos

$$(1 + 2A) = (1 + \xi^0)^2(1 + 2\tilde{A}) \quad (3.51)$$

$$= (1 + 2\xi^0 + \dots)(1 + 2\tilde{A}) \quad (3.52)$$

$$= (1 + 2\xi^0 + 2\tilde{A} + \mathcal{O}_2), \quad (3.53)$$

onde  $\dot{\xi}^0 = \partial_0\xi^0$ . Assim, encontramos que, na primeira ordem, a perturbação métrica  $A$  transforma-se como

$$A \mapsto \tilde{A} = A - \dot{\xi}^0. \quad (3.54)$$

Do mesmo jeito podemos repetir os argumentos usados para obter as outras componentes métricas, e mostrar que

$$F_i \mapsto \tilde{F}_i = F_i + \xi_{,i}^0 - \dot{\xi}_{\perp}^0, \quad (3.55)$$

$$h_{ij} \mapsto \tilde{h}_{ij} = h_{ij} - 2H\xi^0\delta_{ij} - \xi_{\perp,j,i} - \xi_{\perp,i,j}, \quad (3.56)$$

onde  $H = \dot{a}/a$  é o parâmetro de Hubble.

Em termos da decomposição SVT, nós obtemos

$$A \mapsto A - \dot{\xi}^0, \quad (3.57)$$

$$F \mapsto F + \xi^0 - \dot{\zeta}, \quad F_i \mapsto F_i - \dot{\xi}_{\perp,i}, \quad (3.58)$$

$$C \mapsto C - H\xi^0 - \frac{1}{3}\nabla^2\zeta, \quad (3.59)$$

$$F \mapsto E - \zeta, \quad E_i \mapsto E_i - \xi_{\perp,i}, \quad E_{ij} \mapsto E_{ij}. \quad (3.60)$$

## Perturbações invariantes de calibre

Uma maneira de evitar os *problemas de calibre* é definir combinações especiais de perturbações métricas que não se transformam sob uma troca de coordenadas. Estas são as *variáveis Bardeen*:

$$\phi \equiv A + (B - \dot{E}), \quad (3.61)$$

$$\psi \equiv -C - H(B - \dot{E}) + \frac{1}{3}\nabla^2 E, \quad (3.62)$$

$$\psi_i \equiv \dot{E}_i - B_i, \quad \mathbf{E}_{ij}. \quad (3.63)$$

Estas variáveis invariante de calibre podem ser consideradas como as perturbações do espaço-tempo “reais”, desde que não possam ser removido por uma transformação de calibre.

Portanto, se substituimos as equações (3.58) e (3.60) dentro das equações (4.64) e (3.62), somente  $\xi^0$  e  $\zeta$  contribuiriam às transformações de perturbações métricas escalares e escolhendo-os adequadamente, podemos fazer que duas das quatro funções  $A, C, F, E$  desapareçam.

## Fixando um calibre

Uma solução alternativa (mas relacionado) ao problema do calibre é *fixar o calibre* acompanhar *todas* as perturbações (métrica e matéria). Por exemplo, podemos usar de maneira livre as funções de calibre  $\xi^0$  e  $\zeta$  para definir duas das quatro perturbações métricas escalares igual a zero:

—*Calibre Newtoniano*— A escolha de

$$B = E = 0,$$

dá uma métrica

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + a^2(1 - 2\psi)\delta_{ij}dx^i dx^j. \quad (3.64)$$

Aqui, vamos a renomear as duas perturbações métricas restante,  $A \equiv \phi$  e  $C \equiv -\psi$ , a fim de fazer contato com os potenciais Bardeen em (4.64) e (3.62). Para perturbações que decaem na infinidade espacial, o calibre Newtoniano é único (ou seja, o calibre é fixado completamente). Neste calibre, a física parece muito simples, uma vez que as hipersuperfícies de tempo constante são ortogonais as curvas do espaço-tempo dos observadores nas coordenadas em repouso (onde  $B = 0$ ) e a geometria

induzida das hipersuperfícies de tempo constante é isotrópica (onde  $E = 0$ ). Na ausência da pressão anisotrópica,  $\phi = \psi$ . Notar a similitude da métrica ao limite usual do campo fraco da Relatividade Geral sobre o espaço de Minkowski; veremos que  $\phi$  desempenha o papel do potencial gravitacional. O calibre Newtoniano é uma ferramenta muito usual na escolha de calibres para estudar a formação de estruturas a grande escala.

### 3.2.2 Matéria perturbada

No fundo, a matéria em um universo homogêneo e isotrópico toma a forma de um fluido perfeito

$$\bar{T}^{\mu}_{\nu} = (\bar{\rho} + \bar{p})\bar{u}^{\mu}\bar{u}_{\nu} - \bar{p}\delta^{\mu}_{\nu}, \quad (3.65)$$

onde  $\bar{u}_{\mu} = \delta_{\mu}^0$ ,  $\bar{u}^{\mu} = -\delta_0^{\mu}$  para um observador comovel. Agora, consideremos pequenas perturbações para o tensor energia-momento

$$T^{\mu}_{\nu} = \bar{T}^{\mu}_{\nu} + \hat{T}^{\mu}_{\nu}. \quad (3.66)$$

#### Perturbações do tensor energia-momento

No universo perturbado, a densidade de energia  $\rho$ , a pressão  $p$  e a quadri-velocidade  $u^{\mu}$  podem ser funções de posição. Além disso, o tensor de energia-momento agora pode ter a contribuição da pressão anisotrópica,  $\Pi^{\mu}_{\nu}$ . A perturbação do tensor de energia-momento é

$$\hat{T}^{\mu}_{\nu} = (\hat{\rho} + \hat{p})\bar{u}^{\mu}\bar{u}_{\nu} + (\bar{\rho} + \bar{p})(\hat{u}^{\mu}\bar{u}_{\nu} + \bar{u}^{\mu}\hat{u}_{\nu}) - \hat{p}\delta^{\mu}_{\nu} - \Pi^{\mu}_{\nu} + q^{\mu}u_{\nu} + q_{\nu}u^{\mu}. \quad (3.67)$$

A parte espacial do tensor da pressão anisotrópica pode ser escolhido para que seja de traço nulo,  $\Pi^i_i = 0$ , já que seu traço sempre pode ser absorvido em uma redefinição da pressão isotrópica,  $p$ . O tensor de pressão anisotrópica também pode ser escolhido para que seja ortogonal a  $u^{\mu}$ , ou seja,  $u^{\mu}\Pi_{\mu\nu} = 0$ . Sem perda de generalidade, então podemos definir  $\Pi^{\mu}_{\mu} = \Pi_{\mu\nu}u^{\mu} = q_{\mu}u^{\mu} = 0$ . Particular ênfase será dada a fluidos perfeitos, isto é, aqueles em que a pressão é isotrópica não será considerada ( $\Pi_{\mu\nu} = 0$ ), e não há fluxo de calor ( $q_{\mu} = 0$ ). Nós vamos mantê-lo por enquanto, mas em algum instante vamos a desconsiderar-lo.

Vamos a encontrar a perturbação da quadri-velocidade, mas para isso, nós mesmos restringimos as

perturbações escalares, será descrito pelo elemento de linha

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + 2a^2 F_{,i} dt dx^i + a^2 [(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}] dx^i dx^j. \quad (3.68)$$

Os elementos do tensor métrico escalar, divididos segundo sua ordem será Antes de começar com as

Tensor métrico escalar	
Fundo	Perturbado
$\bar{g}_{00} = -1$	$\hat{g}_{00} = -2\phi$
$\bar{g}_{0i} = \bar{g}_{i0} = 0$	$\hat{g}_{0i} = \hat{g}_{i0} = a^2 F_{,i}$
$\bar{g}_{ij} = \bar{g}_{ji} = a^2 \delta_{ij}$	$\hat{g}_{ij} = \hat{g}_{ji} = 2a^2 (-\psi \delta_{ij} + E_{,ij})$

Tabela 3.1: Elementos do tensor métrico

perturbações da quadri-velocidade  $u^\mu$ , devemos ter em considerção do que foi feito para perturbações da métrica na qual pequenos desvios na homogeneidade e isotropia, provocaram pequenas flutuações, então, estes desvios também acontecem na quadri-velocidade, de tal maneira que pode ser escrito como a soma de um termo no fundo  $\bar{u}^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , que tem uma perturbação de ordem  $\hat{u}^\mu$

$$u^\mu = \bar{u}^\mu + \hat{u}^\mu. \quad (3.69)$$

Em geral, a quadri-velocidade é um vetor ortonormal  $u_\mu u^\mu = -1$ . Utilizando a equação anterior, desconsiderando os termos de ordem superior à primeira ordem, obtemos

$$u_\mu u^\mu = -1 \quad (3.70)$$

$$(\bar{u}_\mu \hat{u}_\mu)(\bar{u}^\mu + \hat{u}^\mu) = -1 \quad (3.71)$$

$$\hat{u}^0 = \hat{u}_0. \quad (3.72)$$

Além disso, se queremos levantar ou abaixar índices, podemos expressar em termos da métrica total

$$u_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu \quad (3.73)$$

$$\bar{u}_\mu + \hat{u}_\mu = (\bar{g}_{\mu\nu} + \hat{g}_{\mu\nu})(\bar{u}^\nu + \hat{u}^\nu) \quad (3.74)$$

$$\hat{u}_\mu = \bar{g}_{\mu\nu} \hat{u}^\nu + \hat{g}_{\mu\nu} \bar{u}^\nu. \quad (3.75)$$

A equação anterior nos fornece os vínculos para as componentes da perturbação da quadri-velocidade

$$\begin{cases} \hat{u}_0 = -\hat{u}^0 + \hat{g}_{00} & \Rightarrow \hat{u}_0 = \hat{u}^0 = \frac{1}{2}\hat{g}_{00} = -\phi, \\ \hat{u}_m = a^2\delta_{m\nu}\hat{u}^\nu + \hat{g}_{m0} & \Rightarrow \hat{u}_m = a^2\hat{u}^m + a^2F_{,m}. \end{cases} \quad (3.76)$$

Sob uma transformação de calibre, a quadri-velocidade será

$$\tilde{u}_\mu = u_\mu + \xi_{,\mu}^\nu u_\nu + \xi^\nu u_{\mu,\nu} \quad (3.77)$$

$$\tilde{\tilde{u}}_\mu + \tilde{\hat{u}}_\mu = \bar{u}_\mu + \hat{u}_\mu + \xi_{,\mu}^\nu (\bar{u}_\nu + \hat{u}_\nu) + \xi^\nu (\bar{u}_\mu + \hat{u}_\mu)_{,\nu}. \quad (3.78)$$

Na primeira ordem, a componente temporal da equação acima corresponde à transformação de calibre para o parâmetro de perturbação  $\phi$ , enquanto a componente espacial resulta em

$$\tilde{\tilde{u}}_i + \tilde{\hat{u}}_i = \bar{u}_i + \hat{u}_i + \xi_{,i}^\nu (\bar{u}_\nu + \hat{u}_\nu) + \xi^\nu (\bar{u}_i + \hat{u}_i)_{,\nu} \quad (3.79)$$

$$\tilde{\hat{u}}_i = \hat{u}_i - \xi_{,i}^0. \quad (3.80)$$

Vamos a escrever as componentes espaciais da perturbação da quadri-velocidade como o gradiente tridimensional de uma função escalar, desconsideramos o termo vetorial já que nós estamos interessados apenas nos escalares, então,  $\hat{u}_i \equiv v_{,i}$ , obtemos

$$\tilde{v}_{,i} = v_{,i} - \xi_{,i}^0 \Rightarrow \tilde{v} = v - \xi^0. \quad (3.81)$$

Desta maneira, podemos definir o *calibre comóvel*, que é fixado através das escolhas  $\tilde{v} = v^c = 0$  e  $\tilde{F} = F^c = 0$ . O termo  $\xi^0$  fica determinado através da equação (3.81)

$$\xi^0 = v, \quad (3.82)$$

Substituindo a equação (3.82) na transformação (3.80), concluímos que se um observador neste referencial não será capaz de ver as perturbações das componentes espaciais da quadri-velocidade. Então, os termos  $\phi^c$ ,  $E^c$ ,  $\psi^c$  dentro do calibre comóvel podem ser determinados a partir das informações da

tabela 3.2.2

$$\phi^c = \phi + \xi_{,0}^0 \quad (3.83)$$

$$\phi^c = \phi + \nu_{,0}, \quad (3.84)$$

$$E^0 = E + \zeta a^2 \quad (3.85)$$

$$E_{,0}^c = E_{,0} + (\zeta a^{-2})_{,0} \quad (3.86)$$

$$E_{,0}^c = E_{,0} + \nu a^{-2} - F, \quad (3.87)$$

$$\psi^c = \psi - \xi^0 H \quad (3.88)$$

$$\psi^c = \psi - \nu H. \quad (3.89)$$

Para uma perturbação de qualquer quantidade escalar cujo termo esteja associado ao fundo homogêneo e isotrópico só depende do tempo  $s(t, x^i) = \bar{s}(t) + \hat{s}(t, x^i)$ , é possível definir uma quantidade escalar invariante de calibre

$$\hat{s}^c = \hat{s} + \xi^0 \bar{s}_{,0}. \quad (3.90)$$

A formulação de uma teoria perturbativa em termos desta quantidade invariante de calibre é justificada no calibre comóvel ( $\xi^0 = \nu = 0$ ), neste caso a quantidade adquire significado físico.

As perturbações do tensor energia-momento, são  $\hat{T}_0^0 = \hat{\rho}$ , da densidade de energia, e  $\hat{T}_a^0 = (\rho + p)\hat{u}_a$ , do fluxo de energia.

A perturbação do tensor energia-momento para a pressão

$$\hat{T}_a^b = \hat{p}\delta_a^b + \Pi_a^b \quad (3.91)$$

### 3.2.3 Evolução das equações linearizadas

Nosso próximo passo é derivar as equações de Einstein perturbadas,  $\hat{G}_{\mu\nu} = 8\pi G\hat{T}_{\mu\nu}$ , da métrica perturbada e o tensor energia-momento. Começaremos com o calibre Newtoniano

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1+2\phi) & 0 \\ 0 & a^2(1-2\psi)\delta_{ab} \end{pmatrix}. \quad (3.92)$$

Aqui, não encontraremos situações onde a pressão anisotrópica desempenhe um papel significativo. Nesta sessão que nós assumiremos que a pressão anisotrópica seja zero,  $\Pi_{ab} = 0$ . Como veremos esó nós exigira que  $\phi = \psi$ .

#### Coefficientes de conexão perturbadas

Para derivar as equações de campo, primeiro vamos precisar dos coeficientes de conexão perturbadas. Lembrando que

$$\Gamma_{\beta\delta}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(g_{\beta\mu,\delta} + g_{\delta\mu,\beta} - g_{\beta\delta,\mu}) \quad (3.93)$$

Onde a métrica (3.92) é diagonal, seu inverso é muito simples

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1+2\phi & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2}(1+2\psi)\delta_{ab} \end{pmatrix}. \quad (3.94)$$

Substituindo (3.92) e (3.94) em (3.93), dá

$$\hat{\Gamma}_{00}^0 = \dot{\phi}, \quad (3.95)$$

$$\hat{\Gamma}_{0b}^0 = \dot{\phi}_{,b}, \quad (3.96)$$

$$\hat{\Gamma}_{00}^a = \frac{1}{a^2}\dot{\phi}_{,a}, \quad (3.97)$$

$$\hat{\Gamma}_{bd}^0 = a^2\delta_{ab}[2H(\phi + \psi) + \dot{\psi}], \quad (3.98)$$

$$\hat{\Gamma}_{b0}^a = -\dot{\psi}\delta_{ab}, \quad (3.99)$$

$$\hat{\Gamma}_{bd}^a = -[\psi_{,d}\delta_{ba} + \psi_{,b}\delta_{da} - \psi_{,a}\delta_{bd}]. \quad (3.100)$$

## Equações perturbadas de Einstein

Vamos a calcular as equações de Einstein linearizadas no calibre Newtoniano. Requeremos da perturbação do tensor de Einstein,  $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ , então, primeiro precisamos calcular a perturbação do tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  e do escalar  $R$ .

—*Tensor de Ricci.*— Devemos nós lembrar que o tensor de Ricci pode ser expresso em termos da conexão, como

$$R_{\beta\delta} = \Gamma_{\beta\delta,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha,\delta}^{\alpha} + \Gamma_{\nu\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\beta\delta}^{\nu} - \Gamma_{\nu\delta}^{\alpha}\Gamma_{\beta\alpha}^{\nu} \quad (3.101)$$

Substituindo as perturbações das conexões dos coeficientes (3.95)-(3.100), encontramos

$$\hat{R}_{00} = \frac{1}{a^2}\phi_{,aa} + 3\ddot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + 6\frac{\dot{a}}{a}\dot{\psi}, \quad (3.102)$$

$$\hat{R}_{b0} = 2\dot{\psi}_{,b} + 2\frac{\dot{a}}{a}\phi_{,b} \quad (3.103)$$

$$\hat{R}_{bd} = -a^2\ddot{\psi}\delta_{bd} - a^2H\dot{\phi}\delta_{bd} - 6a^2H\dot{\psi}\delta_{bd} - 2a^2\dot{H}(\phi + \psi)\delta_{bd} - 6a^2H^2(\phi + \psi)\delta_{bd} \quad (3.104)$$

$$-\phi_{,bd} + \psi_{,bd} + \Delta\psi\delta_{bd}. \quad (3.105)$$

—*Escalar de Ricci.*— Agora é relativamente simples calcular o escalar de Ricci

$$\begin{aligned} \hat{R} &= \hat{g}^{00}R_{00} + \hat{g}^{ab}R_{ab} + g^{00}\hat{R}_{00} + g^{ab}\hat{R}_{ab} \\ \hat{R} &= 2\phi R_{00} + \frac{2}{a^2}\psi\delta_{ab}R_{ab} - \hat{R}_{00} + \frac{1}{a^2}\delta_{ab}\hat{R}_{ab}, \end{aligned}$$

No fundo temos

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ab} = a^2\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\delta_{ab}, \quad R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) \quad (3.106)$$

—*Tensor de Einstein.*— Agora é uma questão de juntar todos nossos resultados anteriores. a componente 00 é

$$\begin{aligned}\hat{G}_0^0 &= \hat{g}^{00}R_{00} + g^{00}\hat{R}_{00} - \frac{1}{2}\hat{R} = 2\phi R_{00} - \hat{R}_{00} - \frac{1}{2}\hat{R} \\ \hat{G}_0^0 &= \phi R_{00} - \frac{1}{a^2}\psi\delta_{ab}R_{ab} - \frac{1}{2}\hat{R}_{00} - \frac{1}{2a^2}\delta_{ab}\hat{R}_{ab},\end{aligned}$$

substituindo (3.102), (3.105) e (3.106) na última equação, onde muitos dos termos cancelam-se que leva a um resultado simples

$$\hat{G}_0^0 = -\frac{2}{a^2}\Delta\psi + 6H\dot{\psi} + 6H^2\phi. \quad (3.107)$$

As componentes espaço-espaço são

$$\begin{aligned}G_b^a &= g^{am}R_{mb} - \frac{1}{2}\delta_{ab}R \\ \hat{G}_b^a &= \hat{g}^{am}R_{mb} + g^{am}\hat{R}_{mb} - \frac{1}{2}\delta_{ab}\hat{R} \\ \hat{G}_b^a &= \frac{2}{a^2}[2\ddot{\psi} + R_{ab} + \frac{1}{a^2}\hat{R}_{ab} - \frac{1}{2}\delta_{ab}\hat{R}],\end{aligned}$$

substituindo e arrumando-lo (só um pouco!) produz uma combinação

$$\hat{G}_b^a = \delta_{ab} \left[ 2\ddot{\psi} + 6H\dot{\psi} + 2H\dot{\phi} + \phi(4\dot{H} + 6H^2) \right] + \frac{1}{a^2}(\psi_{,ab} - \phi_{,ab}) - \frac{1}{a^2}(\Delta\psi - \Delta\phi) \quad (3.108)$$

$$a \neq b : \quad \hat{G}_b^a = \frac{1}{a^2}(\psi_{,ab} - \phi_{,ab}) \quad (3.109)$$

Sem incluir pressão anisotrópica:

$$\Pi_{anis} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = \phi \quad (3.110)$$

Em termos do tempo conforme:  $dt = ad\eta$

$$\mathcal{H} = \frac{a'}{a} = aH, \quad \dot{\psi} = \frac{1}{a}\psi', \quad \ddot{\psi} = -\frac{1}{a^2}\mathcal{H}\psi' + \frac{1}{a^2}\psi'', \quad \dot{H} = \frac{1}{a^2}[\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2]. \quad (3.111)$$

Depois temos

$$a^2\hat{G}_0^0 = -2\Delta\psi + 6\mathcal{H}\psi' + 6\mathcal{H}^2\psi, \quad (3.112)$$

$$a^2\hat{G}_{b0}^a = 2\psi'_{,b} + 2\mathcal{H}\psi_{,b}, \quad (3.113)$$

$$\frac{a^2}{6}\hat{G}_a^a = \psi'' + 3\mathcal{H}\psi' + [2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2]\psi. \quad (3.114)$$

Substituindo o tensor de Einstein perturbado, a métrica e o tensor de energia-momento na equação de Einstein dando a equação de movimento para uma métrica perturbada e a equação de Friedman de ordem-zero:

- Começemos com a parte do traço-livre da equação  $ab$ ,  $G_{ab} = 8\pi GT_{ab}$ . Uma vez que descartamos a pressão anisotrópica, não existe nenhuma fonte do lado direito da equação (3.114), obtemos

$$\partial_{\langle i} \partial_{j \rangle} (\psi - \phi) = 0. \quad (3.115)$$

Se tivéssemos mantido a pressão anisotrópica, o lado direito deveria ser  $8\pi Ga^2 \Pi_{ab}$ . Na ausência de pressão anisotrópica (e assumindo um decaimento apropriado no infinito), obtemos <sup>3</sup>

$$\psi = \phi. \quad (3.116)$$

Então, existe apenas um grau de liberdade que seja invariante de calibre na métrica. Na sequência, vamos escrever todas as equações em termos de  $\psi$ .

- Continuando, consideramos a equação 00,  $\hat{G}_0^0 = 8\pi GT_0^0$ . Usando a equação (3.112), obtemos

$$a^2 \hat{G}_0^0 = -2\Delta\psi + 6\mathcal{H}\psi' + 6\mathcal{H}^2\psi = -8\pi G\hat{\rho}a^2, \quad (3.117)$$

que reduz-se a

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho\delta + 3\mathcal{H}(\psi' + \mathcal{H}\phi'). \quad (3.118)$$

- Da equação 0b,  $\hat{G}_{b0} = 8\pi G\hat{T}_{b0}$ , com

$$-8\pi G(\rho + p)\hat{u}_b = 2(\psi'_{,b} + \mathcal{H}\psi_{,b}) \quad (3.119)$$

$$-4\pi Ga^2(\rho + p)v_{,b} = (\psi' + \mathcal{H}\psi)_{,b}, \quad (3.120)$$

assumimos que a perturbação decaie no infinito, esta última equação pode ser integrada, para obter

$$-4\pi Ga^2(\rho + p)v = \psi' + \mathcal{H}\psi. \quad (3.121)$$

<sup>3</sup>No espaço de Fourier, a equação (3.115) torna-se

$$(k_a k_b - \frac{1}{3} \delta_{ab} k^2)(\psi - \phi) = 0.$$

Para  $k$  finitos, portanto, devemos ter  $\psi = \phi$ . Para  $k = 0$ ,  $\psi - \phi = const.$  seria uma solução. Porém, a constante deve ser zero, uma vez que a média das perturbações desaparece.

- substituindo a equação (3.121) na equação de Einstein 00 (3.118), fornece

$$\Delta\psi = 4\pi G a^2 \rho \delta^c, \quad (3.122)$$

onde  $\rho \delta^c \equiv \rho \delta - 3\mathcal{H}(\rho - p)v$ .

Isto é da forma da *equação de Poisson*, mas com a uma densidade de origem dada pela variável invariante de calibre  $\delta^c$  da equação (3.90) onde  $s = \rho$  e  $\xi^0 = v$ . Segue-se que  $\delta^c$  é o contraste de densidade no *calibre comóvel* e vemos da equação (3.122) que isto é o origem do termo do potencial gravitacional  $\psi$ .

- Finalmente, consideramos o traço da equação  $ab$ , ou seja,  $\hat{G}_a^a = 8\pi G \hat{T}_a^a$ . Da equação (3.114) (com  $\psi = \phi$ ) e (3.91),

$$\frac{a^2}{6} 8\pi G \hat{p} \delta_a^a = \psi'' + 3\mathcal{H}\psi' + [2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2]\psi, \quad (3.123)$$

$$4\pi G \hat{p} a^2 = \psi'' + 3\mathcal{H}\psi' + [2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2]\psi. \quad (3.124)$$

De fato, as equações de Einstein e equações de conservação de energia e momento constituem um conjunto redundante (mas consistente!) de equações devido às identidades de Bianchi.

### 3.2.4 Teoria de perturbações em termos de variáveis invariantes de calibre

Neste ponto, além da quadri-velocidade (3.76), a densidade de energia  $\bar{\rho}$ , a pressão  $\bar{p}$  e o escalar de expansão,  $\bar{\Theta}$  (denotados por uma barra superior) também deverão ser divididos em um termo que descreve o fundo homogêneo e isotrópico e um termo perturbativo de primeira ordem, denotado por um chapéu.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \hat{g}_{\mu\nu} \\ \bar{u}_\mu = u_\mu + \hat{u}_\mu \\ \bar{\rho} = \rho + \hat{\rho} \\ \bar{p} = p + \hat{p} \\ \bar{\Theta} = \Theta + \hat{\Theta} \end{array} \right. \quad (3.125)$$

O princípio cosmológico permite estabelecer que no fundo homogêneo e isotrópico  $\rho_{\mu\nu}$  seja dada pela métrica FLRW, a quadri-velocidade seja  $u_{\mu\nu} = (1, 0, 0, 0)$  e que a densidade  $\rho$ , pressão  $p$  e o escalar

de expansão  $\Theta$  não possuem dependência espacial. Em particular, a densidade e a pressão devem satisfazer

$$\begin{cases} \bar{\rho} = \sum_n \bar{\rho}_n \\ \bar{p} = \sum_n p_n \end{cases} \quad (3.126)$$

onde  $n$  representa os possíveis componentes do universo.

A quantidade que nos interessa e que vai descrever as estruturas no Universo é denominada contraste de densidade  $\delta$ , é definida como a razão entre a perturbação da densidade de energia e seu valor no fundo homogêneo e isotrópico.

$$\delta \equiv \frac{\hat{\rho}}{\rho} \Rightarrow \frac{\dot{\hat{\rho}}}{\rho} - \delta \frac{\dot{\rho}}{\rho}. \quad (3.127)$$

Encontrando uma relação dos escalares para a densidade, pressão e escalar de expansão com uma descrição de invariante de calibre comóvel dada em (3.90)

$$\begin{cases} \hat{\rho}^c = \hat{\rho} + v\dot{\hat{\rho}} \\ \hat{p}^c = \hat{p} + v\dot{\hat{p}} \\ \hat{\Theta}^c = \hat{\Theta} + v\dot{\hat{\Theta}} \end{cases} \quad (3.128)$$

Ainda que esse desenvolvimento não utilize explicitamente a métrica as quantidades dinâmicas  $\hat{\rho}^c$ ,  $\hat{p}^c$  e  $\hat{\Theta}^c$ , cujos termos no fundo possuem apenas dependência temporal, devem ser escritas no calibre comóvel, onde assumem de fato o papel de densidade, pressão e escalar de expansão.

## Equações de conservação

### —Balanço de energia - equação de continuidade—

Um aspecto importante para que um universo esteja em expansão é descrever que a dinâmica de um fluido perfeito são dadas pela leis de conservação. O balanço de energia, para um fluido perfeito pode ser obtido através da projeção da derivada covariante do tensor energia-momento da quadri-velocidade  $u_\mu$

$$\begin{aligned} -u_\mu T^{\mu\nu}_{;\nu} &= 0 \\ \rho_{;\nu} u^\nu + \rho u^\nu_{;\nu} - p_{;\nu} u^\nu + p u^\nu_{;\nu} &= 0. \end{aligned}$$

Para o fundo homogêneo e isotrópico é conveniente definir o escalar de expansão  $\Theta \equiv u_{;v}^{\mu} = 3\frac{\dot{a}}{a}$ , e então

$$\dot{\rho} + \Theta(\rho + p) = 0, \quad (3.129)$$

onde foi usado que  $\dot{\rho} = \rho_{;v}u^v$ .

Levando estas quantidades dinâmicas ao nível perturbativo de primeira ordem

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_{;\mu}u^{\mu} + \rho_{\mu}\hat{u}^{\mu} = \hat{\rho}u^0 + \dot{\rho}\hat{u}^0 \quad (3.130)$$

e

$$[\Theta(\hat{\rho} + p)] = \hat{\Theta}(\rho + p) + \Theta(\hat{\rho} + \hat{p}). \quad (3.131)$$

Assim, a conservação da energia perturbada:

$$\dot{\rho}\hat{u}^0 + \hat{\rho} + \Theta(\hat{\rho} + \hat{p}) + \hat{\Theta}(\rho + p) = 0. \quad (3.132)$$

Dividindo a equação anterior por  $\rho$  é possível introduzir o contraste de densidade definido na equação (3.127)

$$\delta + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\delta + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\hat{u}^0 + \hat{\Theta}\left(1 + \frac{p}{\rho}\right) + \Theta\left(\delta + \frac{\hat{p}}{\rho}\right) = 0, \quad (3.133)$$

dividindo a relação para  $\hat{\rho}^c$  por  $\rho$ , obtém-se uma relação invariante de calibre para o contraste de densidade

$$\delta^c = \delta + v\frac{\dot{\rho}}{\rho} \Rightarrow \delta = \delta^c - \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)v + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\dot{v}, \quad (3.134)$$

agora, vamos utilizar a equação (3.76), então a equação (3.133) pode ser escrita como

$$\delta^c - \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)v - \frac{\dot{\rho}}{\rho}\dot{v} + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\left(\delta^c - \frac{\dot{\rho}}{\rho}v\right) - \frac{\dot{\rho}}{\rho}\phi + \hat{\Theta}^c\left(1 + \frac{p}{\rho}\right) - \hat{\Theta}\left(1 + \frac{p}{\rho}\right)v \quad (3.135)$$

$$+ \Theta\left(\delta^c - \frac{\dot{\rho}}{\rho}v\right) + \Theta\left(\frac{\hat{p}^c - \dot{p}v}{\rho}\right) = 0 \quad (3.136)$$

Segundo a equação (3.129), o termo  $\frac{\dot{\rho}}{\rho}$  pode ser escrito em termos do balanço de energia no fundo homogêneo e isotrópico  $\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\Theta\left(1 + \frac{p}{\rho}\right)$ , de modo que o balanço de energia no nível perturbativo

assume a seguinte forma

$$\delta^c - \Theta \frac{p}{\rho} \delta + \hat{\Theta}^c \left(1 + \frac{p}{\rho}\right) + \Theta \left(1 + \frac{p}{\rho}\right) (\dot{v} + \phi) + \Theta \frac{\hat{p}^c}{\rho} = 0. \quad (3.137)$$

### —Balço do momento—

Outra lei de conservação importante é o balanço do momento, que por sua vez pode ser obtido através da projeção da derivada covariante no tensor  $h_{\mu\nu}$ , onde  $h_{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu$ , é um tensor de projeção ortogonal à quadri-velocidade.

$$h_{\alpha\mu} T_{;\nu}^{\mu\nu} = (g_{\alpha\mu+u_\alpha u_\mu}) [\rho u^\mu u^\nu + p(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu)]_{;\nu} = 0 \quad (3.138)$$

$$(\rho + p) \dot{u}_\alpha - h_\alpha^\nu p_{;\nu} = 0 \quad (3.139)$$

Essas leis de conservação podem ser utilizadas para determinar a dinâmica dos fluidos perfeitos com a especificação da equação de estado.

Da equação (3.139) temos que  $\dot{u}_m = u_{m;\alpha} u^\alpha$ , portanto o limite a primeira ordem

$$(\rho + p) \hat{u}_m = - (h_m^\nu p_{;\nu})^\wedge. \quad (3.140)$$

Para uma análise masi cuidadosa, vamos a resolver separadamente cada perturbação da derivada total da quadri-velocidade

$$\hat{u}_m = (u_{m;\nu} u^\nu)^\wedge = (u_{m;\nu})^\wedge u^\nu + u_{m;\nu} \hat{u}^\nu = (u_{m,0} - \Gamma_{m0}^\alpha u_\alpha)^\wedge + (u_{m,\nu} - \Gamma_{m\nu}^\alpha u_\alpha) \hat{u}^\nu,$$

$$\hat{u}_m = \dot{u}_m + \hat{\Gamma}_{m0}^0 - \frac{\dot{a}}{a} \hat{u}_m + \frac{\dot{a}}{a} g_{mn} \hat{u}^n. \quad (3.141)$$

Temos que

$$u^m = g^{m\nu} u_\nu \Rightarrow \hat{u}^m = \hat{g}^{m\nu} u_\nu + g^{m\nu} \hat{u}_\nu, \quad (3.142)$$

$$\Rightarrow g_{am} u^m = -g_{am} \hat{g}^{m0} + \hat{u}_a, \quad (3.143)$$

também temos

$$\Gamma_{m0}^0 = \frac{1}{2} g^{0\mu} (g_{\mu m,0} + g_{\mu 0,m} - g_{m0,\mu}). \quad (3.144)$$

Perturbando a primeira ordem o símbolo de Christoffel de acordo com sua definição, depois teremos

$$\Gamma_{m0}^{\hat{0}} = \frac{1}{2}\hat{g}^{0\mu}(g_{\mu m,0}) + \frac{1}{2}g^{0\mu}(g_{\mu m,0} + g_{\mu 0,m} - g_{m0,\mu})^{\wedge} = \frac{\dot{a}}{a}g_{\mu m}\hat{g}^{0\mu} - \frac{1}{2}\hat{g}_{00,m}. \quad (3.145)$$

substituindo (3.142) e (3.145) em (3.141), e obtém-se

$$\hat{u}_m = \dot{u}_m - \frac{1}{2}\hat{g}_{00,m}. \quad (3.146)$$

De (3.140) podemos encontrar a outra parte da perturbação

$$(h_m^y p_{,y})^{\wedge} = [(g_m^y + u^y u_m)p_{,y}]^{\wedge} = [p_{,m} + u_m \dot{p}]^{\wedge}, \quad (3.147)$$

$$(h_m^y p_{,y})^{\wedge} = \hat{p}_{,m} + \dot{p}\hat{u}_m. \quad (3.148)$$

Lembrando que  $\hat{u}_m = v_{,m}$

$$(h_m^y p_{,y})^{\wedge} = (\hat{p} + v\dot{p})_{,m} = \hat{p}_{,m}^c, \quad (3.149)$$

de (3.146), (3.149) e lembrando que  $\hat{g}_{00} = -2\phi$ , depois substituímos em (3.140), obtém-se, com o limite a primeira ordem, o balanço do momento no nível perturbativo

$$\dot{v} + \phi = -\frac{\hat{p}^c}{\rho + p}. \quad (3.150)$$

A conservação da energia e do momento no nível perturbativo podem ser descritas pela combinação das equações (3.137) e (3.150), pelo qual teremos uma equação bem mais simplificada

$$\delta^c - \Theta \frac{p}{\rho} \delta^c + \hat{\Theta}^c \left(1 + \frac{p}{\rho}\right) = 0. \quad (3.151)$$

### **Equações de segunda ordem para a densidade de contraste total**

A equação de evolução de  $\Theta$

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 + 2\sigma^2 - 2\omega^2 - 4\pi G(\rho + 3p) - \dot{u}_{,\alpha}^{\alpha} = 0. \quad (3.152)$$

Esta equação determina a evolução do parâmetro  $\Theta$  ao longo da curva e é conhecida, em cosmologia, como a equação de Raychaudhuri. Ela pode ser usada para demonstrar que o universo descrito pela equação de Friedmann é singular, assumindo a validade de algumas hipóteses como, por exemplo, a chamada condição de energia forte, dada por  $\rho + 3p > 0$ .

Precisamos determinar a perturbação do escalar de expansão,  $\Theta$ , no caso vamos a considerar as perturbações a primeira ordem, por tanto, o cisalhamento ( $\sigma$ , que produz a forma diferente mas tendo o mesmo volume) e a vorticidade ( $\omega$ , da origem a uma rotação), a qual será dada por

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 - \dot{u}^\mu_{;\mu} + 4\pi G(\rho + 3p) = 0 \quad (3.153)$$

No entanto, antes de poder perturbar esta a equação anterior, precisamos reescrever a equação do balanço do momento (3.139)

$$\dot{u}^\mu = g^{\mu\nu}\dot{u}_\nu = -g^{\mu\nu}\left(\frac{h^\lambda_\nu p_{,\lambda}}{\rho + p}\right) \quad (3.154)$$

$$\dot{u}^\mu_{;\mu} = \left[-g^{\mu\nu}\left(\frac{h^\lambda_\nu p_{,\lambda}}{\rho + p}\right)\right]_{;\mu} = -g^{\mu\nu}\left[\left(\frac{h^\lambda_\nu p_{,\lambda}}{\rho + p}\right)_{;\mu} - \Gamma^\gamma_{\mu\nu}\frac{h^\lambda_\gamma p_{,\lambda}}{\rho + p}\right], \quad (3.155)$$

de forma que a equação de Raychaudhuri (3.153) será re-escrita como

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 + g^{\mu\nu}\left[\left(\frac{h^\lambda_\nu p_{,\lambda}}{\rho + p}\right)_{;\mu} - \Gamma^\gamma_{\mu\nu}\frac{h^\lambda_\gamma p_{,\lambda}}{\rho + p}\right] + 4\pi G(\rho + 3p) = 0. \quad (3.156)$$

Se perturbamos a expressão anterior, esta tomara a seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\Theta}} - \hat{\Theta}\phi + \frac{2}{3}\hat{\Theta}\hat{\Theta} + g^{\mu\nu}\left[\left(\frac{\hat{p}_{,\nu} + \hat{u}_\nu\dot{\hat{p}} + \delta^0_\nu\phi\dot{\hat{p}} - \delta^0_\nu\hat{p}_{,0}}{\rho + p}\right)_{;\mu} \right. \\ \left. - \Gamma^\gamma_{\mu\nu}\left(\frac{\hat{p}_{,\gamma} + \hat{u}_\gamma\dot{\hat{p}} + \delta^0_\gamma\phi\dot{\hat{p}} - \delta^0_\gamma\hat{p}_{,0}}{\rho + p}\right)\hat{\Gamma}^\gamma_{\mu\nu}\left(\frac{\delta^\lambda_\gamma p_{,\lambda} + u^\lambda u_\gamma p_{,\lambda}}{\rho + p}\right)\right] \\ + \hat{g}^{\mu\nu}\left[\left(\frac{\delta^\lambda_\nu p_{,\lambda} + u^\lambda u_\nu p_{,\lambda}}{\rho + p}\right)_{;\mu} - \Gamma^\gamma_{\mu\nu}\left(\frac{\delta^\lambda_\gamma p_{,\lambda} + u^\lambda u_\gamma p_{,\lambda}}{\rho + p}\right)\right] + 4\pi G(\hat{\rho} - 3\hat{p}) = 0. \end{aligned}$$

Nesta última equação, os termos que contém a métrica  $g^{\mu\nu}$  contém o balanço do momento no fundo, e que tem que ser anulado. Então, ao ter a métrica de FLRW que é diagonal, vamos a escrever da seguinte forma

$$\dot{\hat{\Theta}} - \hat{\Theta}\phi + \frac{2}{3}\hat{\Theta}\hat{\Theta} + \frac{\Delta\hat{p}^c}{a^2(\rho + p)} + 4\pi G(\hat{\rho} - 3\hat{p}) = 0. \quad (3.157)$$

Esta equação pode ser trocada em função de variáveis dinâmicas invariantes de calibre, dadas por la expressão mostrada em (3.128)

$$\dot{\hat{\Theta}}^c + \frac{2}{3}\Theta\hat{\Theta}^c + 4\pi G(\rho\delta^c + 3\hat{p}^c) + \frac{\Delta\hat{p}^c}{a^2(\rho + p)} - \ddot{\Theta}v - \dot{\Theta}(\dot{v} + \phi) - \frac{2}{3}\Theta\dot{\Theta}v - 4\pi G(\dot{\rho} + 3\dot{p})v = 0, \quad (3.158)$$

que se reduz a

$$\dot{\hat{\Theta}}^c + \frac{2}{3}\Theta\hat{\Theta}^c + 4\pi G\rho\delta^c + \frac{\Delta\hat{p}^c}{a^2(\rho + p)} = 0. \quad (3.159)$$

Vamos a isolar a perturbação do escalar de expansão  $\hat{\Theta}^c$  que vêm da equação de conservação de energia e do balanço do momento (3.151)

$$\hat{\Theta}^c = -\frac{1}{\left(1 + \frac{p}{\rho}\right)}\left(\delta^c - \Theta\frac{p}{\rho}\delta^c\right), \quad (3.160)$$

derivando com respeito ao tempo e substituindo na equação (3.159)

$$\dot{\hat{\Theta}}^c = \frac{2}{3}\Theta\frac{1}{\left(1 + \frac{p}{\rho}\right)}\left(\dot{\delta}^c - \Theta\frac{p}{\rho}\dot{\delta}^c\right) - 4\pi G\rho\dot{\delta}^c - \frac{\Delta\dot{\hat{p}}^c}{a^2(\rho + p)}. \quad (3.161)$$

Agora, vamos a diferenciar a equação de conservação de energia e do balanço do momento (3.151) com respeito ao tempo e substituir ao resultado da equação anterior, então teremos

$$\dot{\delta}^c + \delta^c H\left(2 - 6\frac{p}{\rho} + 3\frac{\dot{p}}{\dot{\rho}}\right) + \delta^c H^2\left(-\frac{3}{2} - 12\frac{p}{\rho} + \frac{9p^2}{2\rho^2} + 9\frac{\dot{p}}{\dot{\rho}}\right) = \frac{\Delta\dot{\hat{p}}^c}{\rho a^2}. \quad (3.162)$$

Em cosmologia é sempre comum representar a escala temporal em função do fator de escala  $a(t)$ , e torna-la como variável independente. Os passos relevantes para a troca de variáveis serão

$$\dot{\delta}^c = \delta^{c'} aH, \quad \dot{H} = -\frac{3}{2}\left(1 + \frac{p}{\rho}\right)H^2, \quad \delta^c = \delta^{c''} a^2 H^2 - \frac{1}{2}\left(1 + 3\frac{p}{\rho}\right)aH^2\delta^{c'}, \quad (3.163)$$

onde a linha indica a derivada com respeito ao fator de escala. Resultando em

$$\dot{\delta}^c + \left[2 - 6\frac{p}{\rho} + 3\frac{\dot{p}}{\dot{\rho}}\right]H\delta^c = a^2 H^2 \left[\delta^{c''} + \left(\frac{3}{2} - \frac{15p}{2\rho} + 3\frac{p'}{\rho'}\right)\frac{\delta^{c'}}{a}\right] \quad (3.164)$$

A equação (3.162) é escrito com a variável dependente do fator de escala, então a equação final para perturbações cosmológicas é

$$\delta^{c''} + \left(\frac{3}{2} - \frac{15p}{2\rho} + 3\frac{p'}{\rho'}\right)\frac{\delta^{c'}}{a} - \left[\frac{3}{2} + 12\frac{p}{\rho} - \frac{9p^2}{2\rho^2} - 9\frac{p'}{\rho'}\right]\frac{\delta^c}{a^2} = \frac{1}{a^2 H^2} \frac{\Delta\dot{\hat{p}}^c}{a^2 \rho}. \quad (3.165)$$

---

# Capítulo 4

## TEORIA ESCALAR-TENSOR

Neste capítulo estudamos um modelo que se ajuste melhor às observações fornecidas pelo modelo  $\Lambda$ CDM, nós estamos interessados em uma do tipo de gravidade modificada, especificamente a da teoria escalar-tensorial com a finalidade de que a expansão acelerada seja entendida sem a componente da energia escura, assim, modificar o setor geométrico para depois fornecer a dinâmica desejada. Portanto, isto pode ser visto como uma geometrização da energia escura. Nosso foco aqui é a extensão mais simples possível do modelo padrão  $\Lambda$ CDM que a teoria escalar-tensorial pode oferecer.

Começamos com uma breve resenha de como foi obtida o modelo de Brans-Dicke e a própria generalização. Depois construímos um modelo simples mediante a generalização da densidade de matéria, através de um *ansatz*  $f(a)$ , este modelo será resolvido no referencial de Einstein. Com ajuda de uma transformada conforme mostramos como o campo escalar  $\Phi$ , a qual é dada como uma certa força do fator de escala, entra na taxa de expansão de Hubble, dando um impacto sobre a dinâmica cosmológica, no referencial de Jordan. Aqui nós contamos com uma descrição efetiva da relatividade geral da dinâmica no referencial de Jordan para determinar a geometria equivalente da energia escura. Sendo assim, o nosso objetivo principal será em encontrar a taxa de Hubble.

## 4.1 Teoria de Brans-Dicke

### 4.1.1 A forma de Dicke do princípio de Mach

A teoria de Brans-Dicke são uma classe de teorias em que o acoplamento gravitacional efetivo evolui com o tempo, e assintoticamente atinge valores de  $G$ . O acoplamento é determinado por um campo escalar,  $\phi$ , de tal modo que assintoticamente tende ao valor de  $G^{-1}$ . Como veremos em breve, as origens da teoria de Brans-Dicke estão no princípio de Mach segundo o qual a propriedade de inércia dos corpos materiais surge por causa de sua interação com a matéria distribuída no universo. No contexto moderno, a teoria de Brans-Dicke tentou resgatar o cenário inflacionário de alguns de seus problemas.

Como mencionado anteriormente, a teoria de Brans-Dicke está intrinsecamente ligada ao princípio de Mach. Vejamos primeiro esta conexão.

Como sabemos, os referenciais inerciais são definidos como aqueles referenciais na qual a segunda lei de Newton é válida, isto é, aqueles referenciais pelas quais, se uma força  $\vec{F}$  atuando sobre um ponto de massa  $m$ , então a aceleração produzida é dada por [18, 20, 31],

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (4.1)$$

Haverá uma classe de referencial em que este seria realizado. Tais referenciais terão velocidade relativa que será uma constante no tempo. -Esta é uma condição necessária, mas não o suficiente.- A seguir, suponha que nós temos outro referencial que esta acelerando em relação a uma classe previa de referencial com uma aceleração  $\vec{A}$  para a mesma força  $\vec{F}$  aplicado à massa,  $m$ , temos,

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{A}. \quad (4.2)$$

Essa nova classe de referencial são não-inercial. Note que  $\vec{F}$  é uma força externa independente. Assim  $m\vec{A}$  não dependa da força externa mas somente da massa  $m$ .

Isso nos leva à questão de saber quem determina se um referencial é inercial ou não. que é determinado pela distribuição da matéria em partes distantes do universo. Isto implica que a distribuição da matéria do universo determina as leis locais da mecânica. Este, por sua vez, leva a algumas implicações interessantes para o espaço vazio. Se considerarmos uma partícula teste, de massa  $m$ , e

assumimos que o universo é de outra forma vazio, então não força atuando sobre a partícula

$$m\vec{a} = 0. \quad (4.3)$$

Uma visão Newtoniana seria que a aceleração é zero. Isto, porém, não é correto desde o ponto de vista “Machiana” porque como não há outra matéria no universo, também não há alusã de referencial com que medir a aceleração. Portanto, de acordo com isso, a aceleração é uma quantidade indeterminada. Então (4.3) implica que a massa é zero. Que leva a uma consequência direta ao fato que não há outra matéria no universo. Como a massa da partícula é uma medida da inercia, esta claramente demonstrado a conexão entre a inercia e a distribuição da matéria do universo.

Onde temos algumas consequências interessantes no contexto da cosmologia em que o universo se expande com o tempo. Em tais casos, o princípio de Mach implica que a massa inercial evolui com o tempo. Entretanto, para quantificar a mudança da massa com o tempo é preciso definir a unidade fundamental da massa em relação a qual pode-se medir a mudança. A massa de Planck é uma boa unidade de massa. A razão pela qua é uma boa unidade é que é definida puramente em termos de constantes fundamentais

$$m_{pl} = \left( \frac{hc}{2\pi G} \right)^{1/2} \approx 2.176470(51) \times 10^{-8} kg \quad (4.4)$$

Então medimos a massa da partícula em termos de um parâmetro  $\chi$  que é definido entre a proporção da massa de uma partícula para a massa do Planck

$$\chi = \left( \frac{2\pi m^2}{hc} \right)^{1/2} \sqrt{G}, \quad (4.5)$$

assim tudo o que nós podemos medir é a evolução de  $\chi$ .

Para ver a conexão com a teoria de Brans-Dicke, devemos notar que para uma mudança em  $\chi$ , podemos escolher manter  $m$  constante mas apropriadamente variar  $G$ . - Mantemos  $h$  e  $c$  tão constantes como queremos deixar a relatividade especial e a física quântica inalteradas.- Isto é a abordagem de Brans-Dicke.

Para dar a esta abordagem uma base mais formal e precisa, vejamos a natureza da variação de  $G$ . Vamos considerar a distribuição de massas puntuais com massas  $m_i$  e o vetor posição  $\vec{r}_i G^{-1}$  em um ponto com o vetor posição  $\vec{r}$  é e dado por,

$$G^{-1} \sim \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \quad (4.6)$$

Esta é a solução da equação para o campo escalar,

$$\square\phi = \sum_{i=1}^N m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (4.7)$$

Deste modo o valor de  $G^{-1}$  é determinado pelo campo escalar  $\phi$ , que é chamado campo de Brans-Dicke.

O modelo desenvolvido por Brans-Dicke possuía como objetivo apresentar uma teoria de gravitação relativística alternativa compatível com o *princípio de Mach* de reação inercial, que enuncia que as propriedades inerciais locais são determinadas pela distribuição total de massa do universo. Assim, a constante gravitacional deveria ser uma função desta distribuição e esta relação pode ser escrita na forma [20]

$$\frac{1}{\kappa^2} \approx \frac{m}{r}, \quad (4.8)$$

onde  $m$  e  $r$  representam a massa e o raio do universo até o limite visível, respectivamente, e  $\kappa^2$  é a constante gravitacional.

Na formulação Newtoniana da gravitação a interação devida a uma distribuição da matéria de densidade  $\rho = \rho(x, y, z)$  é descrita por um potencial gravitacional escalar  $\phi$  de modo a satisfazer a equação de Piosson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho = \frac{\kappa^2}{2} \rho, \quad (4.9)$$

onde  $\kappa^2 = 8\pi G$ . Desta forma, é possível comparar  $1/\kappa^2$ , ou  $1/G$ , com o campo escalar  $\Phi$  médio associado à densidade de massa do universo.

O procedimento seguido por Brans e Dicke parte da lagrangiana usual dado na teoria de Einstein incluindo matéria que contém diretamente o  $\kappa^2$  multiplicando as contribuições da matéria. Mantendo o campo diretamente acoplado à matéria que inevitavelmente leva a mudanças no comportamento local da matéria, as equações de movimento, como um resultado das variações em  $\Phi$ . Assim, em ordem a incorporar o princípio de Mach por meio da “*constante*” gravitacional variável. Sendo assim, começamos com a ação padrão de Einstein, como

$$\delta \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{1}{2} \tilde{R} + \kappa^2 \mathcal{L}_m \right] = 0, \quad (4.10)$$

onde  $\tilde{R}$  é o escalar de curvatura associado a métrica física  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  e  $\mathcal{L}_m$  é o lagrangiano da matéria “usual”, a priori derivado de alguns partículas clássicas ou modelos quânticos. Este lagrangiano da matéria

contêm os campos materiais  $\Psi_m$  acoplados exclusivamente à métrica  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ , preservando o princípio de equivalência. A equação (4.10) claramente não é suficiente, desde que não fornece nenhuma equação de campo para o novo campo,  $\kappa^2$ . Para continuar vamos rever alguns aspectos do famoso “princípio de equivalência”. No artigo de Dicke [19] muitas vezes destacou que precisamos distinguir duas maneiras de ver: **–o Princípio de equivalência fraco–** afirma que todos os corpos no mesmo ponto de espaço-tempo em um determinado campo gravitacional será submetido sob a mesma aceleração. Nos referiremos a isso como o princípio de equivalência “fraco”, WEP (siglas em inglês). Por enquanto, isso não quer dizer que exclui os possíveis efeitos da gravidade além da aceleração. **–o princípio de equivalência Forte–** e é um assunto mais sólido, que na atualidade é importante para a teoria da relatividade geral de Einstein, é que a *só* influência da gravidade é através da métrica, e pode assim (além dos efeitos das marés) ser localmente, aproximadamente se transforma, indo para um frame de referência apropriadamente acelerado. Isto é o princípio de equivalência “forte”, SEP (siglas em inglês).

Dividindo (4.10) por  $\kappa^2$  segue que

$$\delta \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{1}{2\kappa^2} \tilde{R} + \mathcal{L}_m \right] = 0 \quad (4.11)$$

A ação em (4.10) com variável  $\kappa^2$ , claramente mudará a equação geodésica de uma partícula teste, assim, possivelmente o princípio de equivalência fraco, WEP, e até a conservação da massa. Mas em 1960 Brans e Dicke, modificam a equação (4.11) para que este concorde com o WEP. Para assegurar as equações geodésicas para partículas pontuais, foi isolado  $\kappa^2$  da matéria de (4.10) e fazendo a substituição de  $1/G \rightarrow \Phi$  tem-se

$$\delta \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{1}{16\pi} \Phi \tilde{R} + \mathcal{L}_m \right] = 0, \quad (4.12)$$

lembrando que  $\kappa^2 = 8\pi G$ .

No entanto, devemos observar o seguinte. Enquanto parece que temos mantido as equações geodésicas para partículas teste, sabemos que os movimentos dos corpos são ainda mais complexos. Acontece que o acoplamento de um novo, campo escalar,  $\Phi$  diretamente ao campo gravitacional da origem a efeitos potencialmente observáveis para o movimento de configurações da matéria para o qual a energia gravitacional contribui significativamente. Isto é conhecido como o efeito “Dicke-Nordtvedt” e foi investigado no sistema terra-lua com o refletor de laser lunar, levando a possíveis violações de até o mesmo WEP para massas estendidas. Precisamos equações de campo para  $\Phi$ , então ação para este

novo campo escalar será proporcionado

$$\delta \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{1}{16\pi} \Phi \tilde{R} + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_\Phi \right] = 0. \quad (4.13)$$

Notemos que ao permitir um novo campo escalar, nós estamos abrindo as portas para outras consequências. Uma vez que a gravidade está universalmente acoplada para toda a física, o acoplamento direto de  $\Phi$  à geometria,  $\Phi R$ , significa que  $\Phi$  está universalmente acoplado em algum sentido. Como consequência de (4.13), é que nós permite uma possível violação do SEP, desde a gravidade, a interação universal de massas, pode influenciar a física local, não somente através da geometria, mas também ao mudar o local universalmente acoplado  $\Phi$ , assim mudando a estrutura gravitacional interna.

O requerimento que as equações de campo de  $\mathcal{L}_\Phi$  sejam de segunda ordem. Além dessa restrição, parece não haver mais restrições *a priori*. Uma escolha padrão para um campo escalar pode ser

$$\mathcal{L}_\Phi = -\omega \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi \partial_\mu \Phi, \quad (4.14)$$

resulta em uma equação de onda para  $\Phi$  com  $R$  como fonte parece natural. Porém, o acoplamento constante  $\omega$  precisaria ter as mesmas dimensões que a “constante” gravitacional  $G$  e que é o novo campo que foi substituído. Mas, uma das motivações para estender a teoria de Einstein é eliminar a constante dimensional,  $G$ . Então, se aparece uma constante de acoplamento, esta tem que aparecer adimensionalmente. Uma escolha mínima natural é

$$\mathcal{L}_\Phi = -\frac{w}{\Phi} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi \partial_\mu \Phi, \quad (4.15)$$

no qual o campo escalar  $\Phi$  tem dimensões do inverso da constante gravitacional,

$$[\Phi] = [G^{-1}]. \quad (4.16)$$

A equação (4.15) é o termo cinético do lagrangiano usual para um campo escalar, lembrando que neste caso não está sendo considerada a dinâmica associada a este campo ( $V(\Phi) = 0$ ), e o campo escalar no denominador foi introduzido de modo a manter a constante  $w$ , que será único parâmetro adimensional da teoria de Brans-Dicke. Assim, é possível escrever o lagrangiano como

$$\mathcal{L}_{BD} = \sqrt{-\tilde{g}} \left( \Phi \tilde{R} - \frac{w}{\Phi} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi \partial_\mu \Phi \right) + 16\pi \mathcal{L}_m. \quad (4.17)$$

O princípio de acoplamento mínimo da RG enuncia que o funcional ação descreve o acoplamento entre os campos de matéria e as outras interações deve ser uma deformação mínima do funcional

ação da Relatividade Especial [20], substituindo-se a métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  por  $g_{\mu\nu}$  e as derivadas parciais  $\partial_\mu$  pelas respectivas derivadas covariantes  $\nabla_\mu$ . ou seja, a passagem de uma teoria para outra não deve ser feita adicionando-se termos explicitamente dependentes do tensor de curvatura. Se o acoplamento entre o campo escalar e a métrica fosse realizado somente pelo termo cinético (4.15), o acoplamento seria dito *mínimo*. No entanto, o primeiro termo à direita de (4.17) não pode ser obtido obedecendo-se a esta regra, uma vez que no espaço tempo de Minkowski  $R = 0$  e este termo desapareceria. Desta forma, note que o acoplamento entre o campo escalar e a gravidade é feito não-minimamente.

Assim, tem-se

$$\mathcal{S}_{BD} \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left( \Phi \tilde{R} - \frac{w}{\Phi} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi \partial_\mu \Phi \right) + \mathcal{S}_m(\Psi_m, \tilde{g}_{\mu\nu}), \quad (4.18)$$

e as equações de campo são obtidas aplicando-se o princípio variacional com relação aos campos  $\tilde{g}^{\mu\nu}$  e o campo escalar  $\Phi$ . Logo, variando-se (4.17) com relação a  $\Phi$  segue que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{BD}}{\partial \Phi} = \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} + \frac{w}{\Phi^2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi \sqrt{-\tilde{g}} \quad (4.19)$$

novamente diferenciando (4.17) com relação a  $\partial_\sigma \Phi$  tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{BD}}{\partial(\partial_\sigma \Phi)} &= -\frac{w}{\Phi} \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma \Phi)} \left( \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi \partial_\mu \Phi \right) \sqrt{-\tilde{g}} \\ &= -2 \frac{w \sqrt{-\tilde{g}}}{\Phi} \partial^\sigma \Phi \end{aligned} \quad (4.20)$$

Depois, segue que

$$\begin{aligned} \partial_\sigma \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{BD}}{\partial(\partial_\sigma \Phi)} \right) &= -2w \partial_\sigma \left[ \frac{1}{\Phi} \sqrt{-\tilde{g}} \partial^\sigma \Phi \right] \\ &= -2w \left[ -\frac{1}{\Phi^2} (\partial_\sigma \Phi) \sqrt{-\tilde{g}} \partial^\sigma \Phi + \frac{1}{\Phi} (\partial_\sigma \Phi) \partial_\sigma \sqrt{-\tilde{g}} + \frac{1}{\Phi} \sqrt{-\tilde{g}} \partial_\sigma \partial^\sigma \Phi \right] \\ &= 2 \frac{w}{\Phi^2} (\partial_\sigma \Phi) (\partial^\sigma \Phi) \sqrt{-\tilde{g}} - 2 \frac{w}{\Phi} \left[ (\partial^\sigma \Phi) \partial_\sigma \sqrt{-\tilde{g}} + \sqrt{-\tilde{g}} \partial_\sigma \partial^\sigma \Phi \right] \\ &= \left[ 2 \frac{w}{\Phi^2} (\partial_\sigma \Phi) (\partial^\sigma \Phi) \sqrt{-\tilde{g}} - 2 \frac{w}{\Phi} \tilde{\square} \Phi \right] \sqrt{-\tilde{g}}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{\square} \Phi &= \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial_\mu \left[ \sqrt{-\tilde{g}} \partial^\mu \Phi \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \left( \partial_\mu \sqrt{-\tilde{g}} \right) \partial^\mu \Phi + \partial_\mu \partial^\mu \Phi. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Diferenciando (4.19) e (4.21) na equação de Euler-Lagrange

$$\partial_\sigma \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{BD}}{\partial (\partial_\sigma \Phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{BD}}{\partial \Phi} = 0 \quad (4.23)$$

temos que

$$\frac{w}{\Phi} \partial^\sigma \Phi \partial_\sigma \Phi - 2w \frac{\tilde{\square} \Phi}{\Phi} - \tilde{R} = 0. \quad (4.24)$$

As equações para o campo  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  são obtidas variando (4.17) com relação a  $g^{\mu\nu}$  e suas primeiras derivadas, tendo como resultado (ver B)

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2}{\Phi} \tilde{T}_{\mu\nu} + \frac{w}{\Phi^2} \left( \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\rho\sigma} \partial_\rho \Phi \partial_\sigma \Phi \right) + \frac{1}{\Phi} (\partial_\mu \partial_\nu \Phi - \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\square} \Phi). \quad (4.25)$$

Note que o primeiro termo à direita de (4.25) é o termo de fonte usual da Relatividade Geral, ou seja, o tensor de energia-momento derivado do lagrangiano de matéria e obtido na seção 2.7. O segundo termo desta soma é o tensor de energia-momento do campo escalar, obtido pela variação de (4.15) dada por

$$\begin{aligned} \sqrt{-\tilde{g}} T_{\mu\nu}^\Phi &= \frac{\partial \mathcal{L}_\Phi}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}} \left[ \frac{w}{\Phi} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\alpha\sigma} \partial_\alpha \Phi \partial_\sigma \Phi \right] \\ &= \frac{w}{\Phi} \partial_\alpha \Phi \partial_\sigma \Phi \left[ \frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\sigma}}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}} \sqrt{-\tilde{g}} + \tilde{g}^{\alpha\sigma} \frac{\partial \sqrt{-\tilde{g}}}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}} \right] \\ &= \frac{w}{\Phi} \partial_\alpha \Phi \partial_\sigma \Phi \left[ \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\sigma \sqrt{-\tilde{g}} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\sigma} \tilde{g}_{\mu\nu} \sqrt{-\tilde{g}} \right] \\ \therefore T_{\mu\nu}^\Phi &= \frac{w}{\Phi} \left[ \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\sigma} \partial_\alpha \Phi \partial_\sigma \Phi \right]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ambos surgem na equação de campo acoplados ao acoplamento gravitacional  $1/\Phi$ .

O terceiro termo de (4.25), por sua vez, é o resultado direto do fato de o acoplamento entre o campo escalar e a curvatura ter sido feito não-minimamente. Porém, ao contrair (4.25) multiplicando tanto na esquerda como na direita por  $\tilde{g}^{\mu\nu}$ , obtém-se

$$-\tilde{R} = \frac{\kappa^2}{\Phi} \tilde{T} - \frac{w}{\Phi^2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{3}{\Phi} \tilde{\square} \Phi, \quad (4.27)$$

onde  $\tilde{T} = \tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{T}_{\mu\nu}$  é o traço do tensor de energia-momento. Ao combiná-la com (4.24) resulta em uma nova equação de onda para  $\Phi$  dada por

$$\tilde{\square}\Phi = \frac{\kappa^2}{2w + 3}\tilde{T}, \quad (4.28)$$

ou seja, o campo escalar possui como fonte o traço do tensor de energia-momento, apesar de não estar acoplado à parte material do lagrangiano. A origem de (4.28) está justamente no fato de que (4.25) possui termos resultantes do acoplamento não-mínimo em (4.17). Por tanto, um campo material que originalmente acopla-se somente ao campo tensorial  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  aparece, finalmente, acoplado ao campo escalar na equação de movimento, por meio da equação representada por (4.28)

É importante ressaltar ainda que, como o tensor de energia-momento para a matéria mantém-se inalterado, continua sendo verdadeira a lei de conservação

$$\nabla_{\mu}\tilde{T}^{\mu\nu} = 0 \quad (4.29)$$

Note que o traço  $\tilde{T}$  for nulo e se campo escalar  $\Phi$  for constante à equação (4.25) reduz-se aquela encontrada para a Relatividade geral em 2 se for feita a identificação de  $G = 1/\Phi$ , e (4.28) se transforma em uma identidade.

Em resumo, a Teoria de Brans-Dicke é, de uma certa maneira, a extensão mais simples da Relatividade Geral, introduzindo um campo escalar  $\Phi$  como mediador da interação gravitacional juntamente com a métrica do espaço-tempo, o que fica evidenciado por (4.28), de tal modo que o campo escalar não exerça influência de maneira direta sobre a matéria, uma vez que só aparece acoplado a ela na equações de campo.

## 4.2 Teoria Escalar-Tensorial

As teorias escalar-tensor esta acoplado não-minimamente com o lagrangiano de Einstein-Hilbert. Onde a função que contém o campo escalar  $\Phi$  se acopla não minimamente com o escalar de Ricci. Então, na ação será considerado quando um acoplamento não estandar entre o campo escalar e a geometria esta presente [16, 84].

$$S(g_{\mu\nu}, \Phi) = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [F(\Phi)R - Z(\Phi)(\nabla\Phi)^2 - 2U(\Phi)] + S_m(g_{\mu\nu}) \quad (4.30)$$

a partir do qual obtemos as equações de Einstein  $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ , onde  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  é o tensor de Einstein e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor de energia-momentum efetivo que contém as contribuições do acoplamento não-minimo, e o termo da energia potencial e cinética são

$$F(\Phi) \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) = \kappa^2 T_{\mu\nu} + Z(\Phi) \left( \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} (\nabla \Phi)^2 \right) + \nabla_\mu \nabla_\nu F(\Phi) - g_{\mu\nu} \square F(\Phi) - g_{\mu\nu} U(\Phi) \quad (4.31)$$

onde  $\kappa^2 = 8\pi G_*$ .  $R$  é o escalar de Ricci.  $F(\Phi)$ ,  $Z(\Phi)$  são funções arbitrárias do campo escalar  $\Phi$  que estão acoplados com a gravidade e  $U(\Phi)$  é uma função genérica que descreve o potencial de auto-interação. A variação da função  $F(\Phi)$  descreve a variação da constante gravitacional  $G_*$ . O limite da teoria escalar-tensor à relatividade geral pode ser obtida fixando  $F(\Phi) = \Phi_0 \simeq 1$  ( $\Phi_0$  sendo uma constante) ou por esfriando da dinâmica de  $\Phi$  usando a função  $Z(\Phi)$  ou do potencial  $U(\Phi)$  [84].

Esta relação vêm naturalmente da teoria de Brans-Dicke [19]. Se for reorganizado através das substituições:  $\Phi = F(\Phi)$ ,  $\omega(\Phi) = -\frac{F(\Phi)}{[2F'(\Phi)^2]}$ ; a peculiaridade é que explica o principio de Mach, que tem forças inerciais dentro do contexto das interações gravitacionais.

Diferenciando a ação com respeito ao campo escalar  $\Phi$  obtemos a equação de Klein-Gordon

$$2Z(\Phi)\square\Phi = -\frac{dF}{d\Phi}R - \frac{dZ}{d\Phi}(\nabla\Phi)^2 + 2\frac{dU}{d\Phi}. \quad (4.32)$$

Se uma redifinição é feita de tal modo que  $F(\Phi) = \Phi$  e introduzindo o parâmetro de acoplamento  $\omega(\Phi)$  em vez de  $Z(\Phi)$ , nós temos uma teoria escalar-tensor baseada também na ação de Jordan-frame

$$S(g_{\mu\nu}, \Phi) = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \Phi R - \frac{\omega(\Phi)}{\Phi} (\nabla\Phi)^2 - U(\Phi) \right] + S_m(g_{\mu\nu}) \quad (4.33)$$

que tem um acoplamento mínimo na parte da matéria

$$S_m = \int d^4x \sqrt{-g} L_m(g_{\mu\nu}), \quad (4.34)$$

$L_m$  simboliza o lagrangiano da matéria e é considerada que depende somente da métrica  $g_{\mu\nu}$ . A equação de campo dinâmico é

$$\Phi \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) = \kappa^2 T_{\mu\nu} + \frac{\omega(\Phi)}{\Phi} \left( \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} (\nabla\Phi)^2 \right) + \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \square \Phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} U, \quad (4.35)$$

onde o tensor de energia-momento é obtido pelo caminho usual

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (4.36)$$

A dinâmica do campo escalar  $\Phi$  é ditado por

$$2\frac{\omega(\Phi)}{\Phi}\square\Phi = -R - \frac{1}{\Phi}\frac{d\omega(\Phi)}{d\Phi}(\nabla\Phi)^2 + \frac{\omega(\Phi)}{\Phi^2} + \frac{dU}{d\Phi}. \quad (4.37)$$

Vamos ter em consideração que a função  $\omega(\Phi)$  não está definida *a priori*. Não tem nada definido ainda, ao momento de introduzir a teoria, que nós faça supor alguma forma especial o valor particular de  $\omega$ . É aqui que o acoplamento é um parâmetro livre que deve ajustar-se a alguma evidencia observacional e experimental que não esteja em contradição com as previsões da teoria.

A partir das equações do campo, é possível utilizar a contração de (4.35) em (4.37) para obter a equação para  $\Phi$  de um jeito mais operativa.

$$\square\Phi = \frac{1}{2\omega(\Phi) + 3} \left( \kappa^2 T - \frac{d\omega(\Phi)}{d\Phi} (\nabla\Phi)^2 + \Phi \frac{dU}{d\Phi} - 2U \right), \quad (4.38)$$

claramente nota-se a diferença com a equação (4.28), o campo material aparece acoplado ao campo escalar na equação de movimento e adicionalmente depende do parâmetro de acoplamento  $\omega(\Phi)$  e o potencial  $U(\Phi)$ , ambos dependentes do campo escalar. onde

$$\square\Phi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left[(-g)^{1/2}\partial^\mu\Phi\right]$$

que implica o acoplamento do traço  $T \equiv Tr(T_{\mu\nu})$ , é a forma contraída do tensor de energia-momento da matéria. Utilizando esta forma da equação e o limite fraco, podemos ver que quando  $\omega$  tem uma tendência ao infinito, o acoplamento entre a métrica e o campo cresce até ser universal, que é compatível com a solução  $\Phi = \text{constante}$ . De (4.38), é claro que para um valor de  $T$  finito,  $\square\Phi = O(1/\omega)$  para  $\omega \rightarrow \infty$ , depois,  $\Phi \sim \Phi_0 + O(1/\omega)$ . Então, o significado de  $\omega(\Phi)$  é otorgar um grau de acoplamento entre a métrica e o campo escalar. Para conteúdos de matéria com  $T \neq 0$ , quanto mais grande é  $\omega$  mais se parece à teoria da Relatividade Geral. Para  $T = 0$ , a teoria pode mostrar diferenças ainda no limite  $\omega \rightarrow \infty$ .

Adotando uma transformação conforme

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{\Phi}\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2b(\varphi)}\tilde{g}_{\mu\nu} \quad (4.39)$$

do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  bem como uma redefinição do termo de potencial

$$V(\varphi) = \frac{U(\Phi)}{2\kappa^2\Phi^2} \quad (4.40)$$

e

$$\frac{1}{4\Phi^2} \left( \frac{d\Phi}{d\varphi} \right)^2 = \left( \frac{db}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\kappa^2}{4\omega(\Phi) + 6}, \quad (4.41)$$

obtemos a ação do Einstein-frame

$$S(\tilde{g}_{\mu\nu}, \varphi) = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{1}{2\kappa^2} \tilde{R} - \frac{1}{2} (\tilde{\nabla}\varphi)^2 - \tilde{V}(\varphi) \right] + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{L}_m(e^{2b(\varphi)} \tilde{g}_{\mu\nu}), \quad (4.42)$$

em que a parte da matéria esta acoplada no-minimamente ao setor gravitacional.

Tendo como equação de movimento dada por

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{R} = \kappa^2 \left[ \tilde{T}_{\mu\nu} + \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} ((\tilde{\nabla}\varphi)^2 + 2V(\varphi)) \right], \quad (4.43)$$

$$\square\varphi - \frac{dV}{d\varphi} = -\frac{da}{d\varphi} T \quad (4.44)$$

Vamos restringir a modelos cosmológicos homogêneos e isotrópicos espacialmente planos com a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, FLRW, e assumindo uma estrutura de fluido perfeito para o tensor energia-momentum da matéria com densidade de energia  $\rho_m$ , uma pressão  $p_m$  e uma quadri-velocidade  $u^\mu$ ,

$$T_{\mu\nu} = \rho_m u_\mu u_\nu + p_m h_{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu, \quad (4.45)$$

onde  $u_\mu u^\mu = -1$ ,  $\rho > 0$  e  $p > 0$ . As equações de movimento para o universo FLRW, mais relevantes, no Jordan-frame são

$$H^2 = \frac{\kappa^2 \rho_m}{3\Phi} + \frac{1}{3\Phi} \left[ \frac{1}{2} \frac{\omega(\Phi)}{\Phi} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)^2 - 3H \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} U \right], \quad (4.46)$$

onde  $H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$  é a taxa de Hubble no Jordan-frame e  $a$  é o fator de escala no mesmo frame,

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\kappa^2 \rho_m + p_m}{2\Phi} - \frac{1}{2\Phi} \left[ \frac{\omega(\Phi)}{\Phi} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)^2 - H \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{d^2\Phi}{dt^2} \right] \quad (4.47)$$

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + 3H\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2\omega + 3} \left( \kappa^2 (\rho_m - 3p_m) - \frac{d\omega}{d\Phi} \left( \frac{d\Phi}{dt} \right)^2 - \Phi \frac{dU}{d\Phi} + 2U \right), \quad (4.48)$$

também temos a conservação da matéria

$$\frac{d\rho_m}{dt} + 3H(\rho_m + p_m) = 0. \quad (4.49)$$

As relações correspondentes da equação de movimento no Einstein-frame são

$$\tilde{H}^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[ \tilde{\rho}_m + \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \right)^2 + \tilde{V} \right], \quad (4.50)$$

onde  $\tilde{H} = \frac{1}{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}}$  é a taxa de Hubble no Einstein-frame e  $\tilde{a}$  o fator de escala no mesmo frame, bem como

$$\frac{d\tilde{H}}{d\tilde{t}} = -\frac{\kappa^2}{2} \left[ \tilde{\rho}_m + \tilde{p}_m + \left( \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \right)^2 \right], \quad (4.51)$$

$$\frac{d\tilde{\rho}_m}{d\tilde{t}} + 3\tilde{H}(\tilde{\rho}_m + \tilde{p}_m) = -\frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \frac{db}{d\varphi} (-\tilde{\rho}_m + 3\tilde{p}_m) \quad (4.52)$$

e

$$\frac{d^2\varphi}{d\tilde{t}^2} + 3\tilde{H}\frac{d\varphi}{d\tilde{t}} + \tilde{V}_{,\varphi} = \frac{db}{d\varphi} (-\tilde{\rho}_m + 3\tilde{p}_m). \quad (4.53)$$

onde introduzimos a notação  $\tilde{V}_{,\varphi} = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \varphi}$ .

Diferente de Jordan-frame, aqui a componente da matéria não é separadamente conservada. A coordenada temporal e os fatores de escala da métrica de FLRW de ambos os frames são relacionados por

$$dt = e^b d\tilde{t} \quad \text{e} \quad a = e^b \tilde{a}, \quad (4.54)$$

respectivamente, A pressão da matéria e a densidade de energia da matéria transforma-se como

$$p_m = e^{-4b} \tilde{p}_m \quad \text{e} \quad \rho_m = e^{-4b} \tilde{\rho}_m, \quad (4.55)$$

respectivamente. Isso significa que  $\frac{p_m}{\rho_m} = \frac{\tilde{p}_m}{\tilde{\rho}_m}$ , isto é, o parâmetro da equação de estado da matéria permanece invariante.

### 4.2.1 Jordan-Frame vs Einstein-Frame

Os frames de Jordan e Einstein aparecem regularmente na literatura e em muitas das ocasiões em conflito. Afirma-se frequentemente que existem diferenças entre ambos frames [11, 35, 36, 58, 86, 94], chegando a afirmar que somente um dos frames corresponde ao frame físico. Nada mais longe da realidade. Os autores que afirmam isso [94], se sustentam na ideia de que dois teorias físicas diferentes podem ser matematicamente equivalentes sem ser fisicamente. Esta afirmação não é de todo incoerente e pode ser correta em alguns cenários bem restritos. Por exemplo, seja  $\mathcal{T}_1$  o modelo padrão da física de partículas, e seja  $\mathcal{T}_2$  o modelo padrão mas com as atribuições de “esquerda” e “direita” trocadas. De acordo com isto  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$  diferem devido à quebra de paridade na interação fraca. Então, Ambas teorias serão equivalentes?. Claramente serão matematicamente, desde que os estados de  $\mathcal{T}_1$  correspondem-se um a um com os estados de  $\mathcal{T}_2$ . No entanto, desde o seguinte ponto de vista, não são equivalentes. Sempre podemos escolher objetos exteriores para uma teoria e definir os conceitos de esquerda e direita, em relação a este padrão a teoria  $\mathcal{T}_1$  será a certa enquanto que  $\mathcal{T}_2$  não estaria em concordância com os experimentos.

Porém, existe outro ponto de vista, segundo a qual as teorias  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$  são fisicamente equivalentes. A diferença entre as duas teorias se fundamenta em um critério arbitrário do que é esquerda e direita. Se nós tivéssemos que testar o modelo de partículas de uma *civilização alienígena*, não compreenderíamos a sua convenção de direita e esquerda, e afirmariamos de forma natural que o modelo estará correto se houver alguma escolha, de tal maneira que a teoria esta em concordância com os experimentos. Deste ponto de vista, um teoria estará em concordância com os experimentos se existe alguma outra escolha de convenção de modo que, as previsões da teoria estão em concordância com os experimentos. Respectivamente, uma teoria só pode ser considerada incorreta se existir uma discordância com os experimentos sob todas as escolhas de convenção.

Em outro contexto, onde a afirmação dada em [94] pode ter sentido quando se atribui uma caracterização incompleta de uma teoria física. Em um caso especial isto aconteceria se a teoria representa uma parte de uma teoria completa, e se as interações dessa teoria completa determinam algumas das convenções usadas na interpretação da teoria mais particular. Um exemplo claro disto é o eletromagnetismo. Se consideramos um eletromagnetismo livre de fontes, esta será matematicamente equivalente a um teoria dual na qual as funções dos campos magnéticos e elétricos foram trocadas. Porém, esta equivalencia matematica não é física, uma vez que expandimos a teoria para incluir acomplamentos carregados, há cargas elétricas, mas não monopolos magnéticos.

Com todo o anterior chegamos a uma conclusão de que se duas teorias são matematicamente equivalentes será também fisicamente, sempre que (i) as convenções arbitrárias na interpretação da teoria

não sejam fixas e (ii) a teoria seja completa e abranja todos os graus de liberdade que estão envolvidas nas grandezas relacionadas com a teoria. A ação mais geral das teorias escalar-tensor é completa e contém todos os graus de liberdade necessários, e portanto, segundo discutido acima, todas as representações conformes são fisicamente equivalentes.

Além disso, do anteriormente mostrado, podemos utilizar outros argumentos para afirmar a equivalência entre os frames de Einstein e o frame de Jordan [25, 27, 34, 63]. Quando escolhemos um frame conforme estamos escolhendo um sistema de unidades, como esclareceu Dicke em 1961 [19]. Quando mudamos de um sistema de unidades a outro, o resultado entre a antiga unidade de comprimento e a nova é geralmente uma constante, independente do espaço e do tempo, quer dizer, a escolha de uma frame conforme não é mais do que uma escolha de unidades físicas. Os diferentes frames, falando superficialmente, podem ser considerados com distintas normalizações da teoria e são observacionalmente indistinguíveis [27], ao contrário do que se afirma na literatura.

## 4.2.2 Limite newtoniano e a constante gravitacional

Vamos a considerar o limite newtoniano (gravidade fraca e movimento lento) para determinar a constante gravitacional efetiva. É estabelecido que  $U(\Phi) = 0$  que nos daria uma melhor simplicidade na descrição deste limite. No referencial de Jordan, a equação de uma geodésica  $u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0$  (com  $u^\mu$  a quadri-velocidade) produz a equação de movimento newtoniano

$$g_{00} \simeq -(1 + 2\phi), \quad g_{ij} \simeq \delta_{ij}, \quad (4.56)$$

onde  $\phi$  é o potencial gravitacional newtoniano produzido pela densidade de energia da massa  $\rho$  como

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (4.57)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional efetivo que irá ser determinado daqui a pouco.

Mas antes disso, de acordo com [97] iremos adotar as principais características seguidas pela regra *post-Newtonian bookkeeping*, que pode ser entendida de melhor maneira se primeiro consideramos este sistema *bookkeeping* para assim manter o trajeto de “pequenas quantidades”.

No sistema solar, o potencial gravitacional  $U$ , não é maior do que a ordem de  $10^{-5}$  (nas unidades geometrizadas,  $U$  teria que ser sem dimensão).

A matéria que compõe o Sol e os planetas está sob pressão  $p$ , mas essa pressão geralmente é menor

do que a densidade de energia gravitacional de matéria ; em outras palavras

$$\frac{p}{\rho} \lesssim U, \quad (4.58)$$

ou seja,  $p/\rho$  é  $\sim 10^{-5}$  no Sol, e seria  $\sim 10^{-10}$  na terra. A relação que existe entre o potencial gravitacional newtoniano,  $U$ , com a velocidade dos planetas é  $v^2 \lesssim U$ . Estas “pequenas quantidades” são chamadas de *bookkeeping* que denota a sua “ordem de pequenez”:

$$U \sim v^2 \sim \frac{p}{\rho} \sim, O_2 \quad (4.59)$$

assim,  $|\partial/\partial t|/|\partial/\partial x| \sim O_1$ . Depois, nosso limite newtoniano deve ser da ordem até  $O_2$ , tendo em mente estas considerações, a equação (3) vem a ser<sup>1</sup>

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\kappa^2 \rho}{2(\Phi) + 3}, \quad (4.60)$$

a solução desta equação até segunda ordem  $O_2$  pode ser escrito como

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{\kappa^2}{4\pi(2_0 + 3)} \int \frac{d^3 x' \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (4.61)$$

onde  $\Phi_0$  designa o valor de  $\Phi$  no espaço infinito e temos a expansão de  $\Phi$  sendo o valor assintótico deste como  $\Phi_0 \equiv (\Phi)_0$ .

Então, na equação (4.35) podemos multiplicar por  $g^{\mu\nu}$ , e obtemos

$$\Phi R = -\kappa^2 T + \frac{1}{\Phi} \partial^\nu \Phi \partial_\nu \Phi - 3\Box \Phi,$$

substituindo esta expressão em (2)

$$\begin{aligned} \Phi R_{\mu\nu} &= \kappa^2 \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) + \frac{(\Phi)}{2\Phi} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \frac{3}{2} g_{\mu\nu} \Box \Phi + \frac{(\Phi)}{\Phi} \left( \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla \Phi)^2 \right) \\ &\quad + \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \Box \Phi \\ &= \kappa^2 \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) + \frac{3(\Phi)}{2\Phi} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{(\Phi)}{2\Phi} g_{\mu\nu} (\nabla \Phi)^2 + \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Box \Phi, \end{aligned} \quad (4.62)$$

onde o último termo da direita é  $\Box \Phi = g^{00} \nabla_0 \nabla_0 \Phi + g^{ij} \nabla_i \nabla_j \Phi$ , substituindo na equação acima

$$\Phi R_{\mu\nu} = \kappa^2 \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) + \frac{3(\Phi)}{2\Phi} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{(\Phi)}{2\Phi} g_{\mu\nu} (\nabla \Phi)^2 + \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left( g^{00} \nabla_0 \nabla_0 \Phi + g^{ij} \nabla_i \nabla_j \Phi \right),$$

<sup>1</sup>o segundo termo da direita em (4.39) é maior do que a ordem  $O_2$

do mesmo jeito para  $(\nabla\Phi)^2 = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\Phi\nabla_\beta\Phi = g^{00}(\nabla_0)^2 + g^{ij}\nabla_i\Phi\nabla_j\Phi$

$$\begin{aligned}\Phi R_{\mu\nu} &= \kappa^2\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) + \frac{3(\Phi)}{2\Phi}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - \frac{(\Phi)}{2\Phi}g_{\mu\nu}(g^{00}(\nabla_0\Phi)^2 + g^{ij}\nabla_i\Phi\nabla_j\Phi) \\ &\quad + \nabla_\mu\nabla_\nu\Phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(g^{00}\nabla_0\nabla_0\Phi + g^{ij}\nabla_i\nabla_j\Phi),\end{aligned}$$

evaluando a componente de  $R_{00}$

$$\begin{aligned}\Phi R_{00} &= \kappa^2\left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T\right) + \frac{3(\Phi)}{2\Phi}\partial_0\Phi\partial_0\Phi - \frac{(\Phi)}{2\Phi}g_{00}(g^{00}(\nabla_0\Phi)^2 + g^{ij}\nabla_i\Phi\nabla_j\Phi) \\ &\quad + \nabla_0\nabla_0\Phi + \frac{1}{2}g_{00}(g^{00}\nabla_0\nabla_0\Phi + g^{ij}\nabla_i\nabla_j\Phi),\end{aligned}$$

de seção 2.8.2, na equação acima vemos que o primeiro termo da direita é  $\kappa^2\frac{\rho}{2}$  e  $g_{00} \approx -1$ .

Tendo estas considerações, voltamos em (4.62)

$$\Phi R_{00} = \kappa^2\frac{\rho}{2} + \frac{3(\Phi)}{2\Phi}\partial_0\Phi\partial_0\Phi - \frac{(\Phi)}{2\Phi}g_{00}(\nabla\Phi)^2 + \nabla_0\nabla_0\Phi + \frac{1}{2}g_{00}\square\Phi,$$

tomando as considerações do limite newtoniano até segunda ordem  $\mathcal{O}_2$ , onde também no espaço infinito  $\Phi \approx \Phi_0$  e  $\omega_0 \approx \omega(\Phi_0)$ , obtemos

$$\begin{aligned}\Phi R_{00} &= \kappa^2\frac{\rho}{2} + \frac{3_0}{2\Phi}\partial_0\Phi\partial_0\Phi - \frac{0}{2\Phi}g_{00}(\nabla\Phi)^2 + \nabla_0\nabla_0\Phi + \frac{1}{2}g_{00}\nabla^2\Phi \\ \Phi R_{00} &= \frac{1}{2}\kappa^2\rho - \frac{1}{2}\nabla^2\Phi,\end{aligned}$$

usando a equação (4.60),

$$\Phi R_{00} = \frac{1}{2}\kappa^2\rho + \frac{\kappa^2\rho}{2(2_0 + 3)},$$

do  $R_{00}$  do (citar apendice)

$$-\Phi_0\left(\frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_i\partial_j h_{00}\right) = \frac{\kappa^2}{2}\left(\frac{2\omega_0 + 4}{2\omega + 3}\right)\rho \quad (4.63)$$

$$\Phi_0\nabla^2\phi = \frac{\kappa^2}{2}\left(\frac{2\omega_0 + 4}{2 + 3}\right)\rho. \quad (4.64)$$

a expressão (4.63) nós podemos escrever como

$$\square^2 h_{00} = -\kappa^2\Phi_0^{-1}\left(\frac{2_0 + 4}{2 + 3}\right)\rho. \quad (4.65)$$

Para uma distribuição geral, e que seja localizada,  $\rho(\mathbf{x})$ , temos

$$h_{00} = -\frac{\kappa^2}{4\pi\Phi_0} \left( \frac{2_0 + 4}{2_0 + 3} \right) \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cong -\frac{\kappa^2}{4\pi\Phi_0} \left( \frac{2_0 + 4}{2_0 + 3} \right) \frac{M}{r},$$

onde  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \cong r$  e  $M \equiv \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}')$ . Substituindo em  $g_{00} = \eta_{00} + h_{00}$

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = -1 - \frac{\kappa^2}{4\pi} \frac{M}{r} \left( \frac{2_0 + 4}{2_0 + 3} \right). \quad (4.66)$$

Nós queremos obter o correto limite Newtoniano, lembrando que  $\kappa^2 = 8\pi G_*$ , temos

$$g_{00} \rightarrow -1 - \frac{2G_*M}{r}. \quad (4.67)$$

Comparando as expressões (4.66) e (4.67) vemos que  $\Phi_0$  e  $G_*$  estão relacionadas por

$$\Phi_0 = \frac{1}{G_*} \left( \frac{2_0 + 4}{2_0 + 3} \right). \quad (4.68)$$

Observe que quando  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\Phi_0^{-1} \rightarrow G_*$ , e a teoria de Jordan-Brans-Dicke tende à Relatividade Geral.

A partir da expressão (4.64) podemos comparar com (4.57), podemos encontrar a constante gravitacional efetiva

$$4\pi G\rho = \frac{1}{\Phi_0} \frac{\kappa^2}{2} \left( \frac{2_0 + 4}{2_0 + 3} \right) \rho$$

$$G = \frac{\kappa^2}{8\pi} \left( 1 + \frac{1}{2_0 + 3} \right) \frac{1}{\Phi_0} = \frac{\kappa^2}{8\pi} \left[ \frac{1}{\Phi} \left( 1 + \frac{1}{(2_0 + 3)} \right) \right]_{\Phi_0},$$

da igualdade em (4.41)

$$G = G_* \left[ \exp^{2b(\varphi)} \left( 1 + \frac{2}{\kappa^2} \left( \frac{db}{d\varphi} \right)^2 \right) \right]_{\varphi_0}, \quad (4.69)$$

onde  $\varphi_0$  é o valor assintótico de  $\varphi$  que corresponde a  $\Phi_0$  na qual temos usado a igualdade da equação (4.41) e  $\kappa^2 = 8\pi G_*$ . Assim  $G$  é uma quantidade que é medida pelo experimento do tipo Cavendish [98]. Como  $G$  envolve  $\varphi$ , a massa de um corpo auto-gravitante depende de  $\varphi$ , e daí que o principio de equivalencia forte é violado na teoria escalar-tensor.

Agora vamos a considerar o limite Newtoniano de Einstein-frame. Onde também consideramos  $V(\varphi) = 0$  para simplificar nosso trabalho, temos uma métrica  $g_{00} \simeq -(1 + 2\tilde{\varphi})$ ,  $\tilde{g}_{ij} \simeq \delta_{ij}$ , tendo em consideração o limite Newtoniano para este frame, como na seção 2.8.2, ou podendo ser feito

com os mesmos procedimentos no Jordan-frame, mas agora usando as equações (4.43) e (4.44) e torna-se

$$\begin{aligned}\nabla^2 \tilde{\varphi} &= \frac{\kappa^2}{2} \tilde{\rho}, \\ \nabla^2 \varphi &= \frac{db}{d\varphi} \tilde{\rho}.\end{aligned}$$

Caso similar ao feito em  $\Phi$ , a solução de  $\varphi$  até a segunda ordem  $O(2)$  é dado por

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{1}{4\pi} \frac{db}{d\varphi} \Big|_{\varphi_0} \int \frac{d^3 x' \tilde{\rho}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (4.70)$$

Depois a equação de movimento da partícula dada em (4.71)<sup>2</sup> no limite Newtoniano torna-se

$$\underbrace{\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2}}_{\text{aceler}} = -\nabla \tilde{\varphi} - \frac{db}{d\varphi} \nabla \varphi$$

$$\begin{aligned}-\tilde{G} \int d^3 x' \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tilde{\rho}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} &= -G_* \int d^3 x' \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tilde{\rho}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} - \frac{1}{4\pi} \left( \frac{db}{d\varphi} \Big|_{\varphi_0} \right)^2 \int d^3 x' \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tilde{\rho}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ \tilde{G} &= G_* + \frac{1}{4\pi} \left( \frac{db}{d\varphi} \Big|_{\varphi_0} \right)^2 \\ \tilde{G} &= G_* + \frac{2}{\kappa^2} G_* \left( \frac{db}{d\varphi} \Big|_{\varphi_0} \right)^2 \\ \tilde{G} &= G_* \left[ 1 + \frac{2}{\kappa^2} \left( \frac{db}{d\varphi} \right)^2 \right]_{\varphi_0}\end{aligned} \quad (4.72)$$

a expressão (4.72) é constante gravitacional efetiva  $\tilde{G}$  no Einstein-frame.

Se nós comparamos (4.69) e (4.72) encontramos a relação entre  $G$  e  $\tilde{G}$  de ambos os frames, vemos que estão relacionados por  $G = e^{-2b(\varphi_0)} \tilde{G}$ .

### 4.2.3 Interação de Fluidos

Para um sistema de dois componentes [33, 100], o tensor de energia-momento total é dividido em uma parte de matéria  $T_m^{\mu\nu}$  e a parte  $T_x^{\mu\nu}$  que é suposto a descrever uma forma da dinâmica da energia

<sup>2</sup>O movimento de uma partícula com quadri-velocidade  $\tilde{u} = e^{b(\varphi)} u^\mu$  no Einstein-frame é dado por [27]

$$\tilde{u}^\nu \tilde{\nabla}_\nu \tilde{u}^\mu = -(\tilde{u}^\mu \tilde{u}^\nu + \tilde{g}^{\mu\nu}) \partial_\nu a(\varphi). \quad (4.71)$$

escura,

$$T^{\mu\nu} = T_m^{\mu\nu} + T_x^{\mu\nu}. \quad (4.73)$$

Para ambas partes assumimos a estrutura de um fluido perfeito, ou seja,

$$T_A^{\mu\nu} = \rho_A u_A^\mu u_A^\nu + p_A h_A^{\mu\nu}, \quad h_A^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u_A^\mu u_A^\nu, \quad A = m, x. \quad (4.74)$$

Para componentes  $T_m^{\mu\nu}$  e  $T_x^{\mu\nu}$  separadamente conservadas, o modelo  $\Lambda$ CDM pode ser visto como um caso especial com  $\rho_x = \rho_\Lambda = \text{const.}$  e  $p_m = 0$ . Geralmente, a conservação total do tensor energia-momento  $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$  é compatível com o acoplamento entre ambas componentes,

$$T_{m;\nu}^{\mu\nu} = Q^\mu, \quad T_{x;\nu}^{\mu\nu} = -Q^\nu, \quad (4.75)$$

onde a quantidade  $Q^\mu$  aparece como uma fonte (ou coletor) no balanço individual das equações. As equações separadas do balanço de energia são

$$-u_{m\nu} T_{m;\nu}^{\mu\nu} = \rho_{m,\alpha} u_m^\alpha + \Theta_m \rho_m = -u_{m\alpha} Q^\alpha \quad (4.76)$$

e

$$-u_{x\nu} T_{x;\nu}^{\mu\nu} = \rho_{x,\alpha} u_x^\alpha + \Theta_x (\rho_x + p_x) = -u_{x\alpha} Q^\alpha \quad (4.77)$$

Em geral, cada componente têm suas próprias quadrivelocidades  $u_A^\mu$  com  $g_{\mu\nu} u_A^\mu u_A^\nu = -1$ . As taxas  $\Theta_A$  são definidas como  $\Theta_A = u_{A;\alpha}^\alpha$ . Para a dinâmica do fundo assumimos todas que as quadri-velocidades coincidem, ou seja,  $u_m^\alpha = u_x^\alpha = u^\alpha$ . No equilíbrio do momento segue-se que

$$h_{m\mu}^\alpha T_{m;\nu}^{\mu\nu} = \rho_m \dot{u}_m^\alpha = h_{m\mu}^\alpha Q^\mu \quad (4.78)$$

e

$$h_{x\mu}^\alpha T_{x;\nu}^{\mu\nu} = (\rho_x + p_x) \dot{u}_x^\alpha + p_{x,\mu} h_x^{\alpha\mu} = -h_{x\mu}^\alpha Q^\mu, \quad (4.79)$$

onde  $\dot{u}_A^\alpha \equiv u_{A;\nu}^\alpha u_A^\nu$ . A equação (4.78) implica que na presença de um termo de acoplamento o movimento do fluido CDM em geral não é geodésico.

O termo de interação  $Q^\mu$  pode ser dividido em partes proporcionais e perpendiculares para a quadri-

velocidade total, de acordo a

$$Q^\mu = u^\mu Q + \bar{Q}^\mu, \quad (4.80)$$

onde  $Q = -u_\mu Q^\mu$  e  $\bar{Q}^\mu = h^\mu_\alpha Q^\alpha$ , com  $u_\mu \bar{Q}^\mu = 0$ . Alternativamente, a divisão semelhante em relação à quadri-velocidade da matéria pode ser útil.

No fundo homogêneo e isotrópico o conjunto de equações (4.76) e (4.77) reduz-se a

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = Q, \quad \dot{p}_x + 3H(1 + w_x)p_x = -Q, \quad (4.81)$$

onde  $w_x \equiv p_x/\rho_x$  é o parâmetro da equação de estado (EoS) da componente da energia escura. As equações (4.78) e (4.79) são satisfeitas identicamente.

## 4.2.4 Descrição do Einstein-Frame

### A.Relações gerais

As equações do Einstein-frame (4.50)-(4.53) são de uma estrutura efetiva de dois componentes na qual a matéria interage com um campo escalar. Nós associamos uma densidade de energia efetiva  $\tilde{\rho}_\varphi$  e uma pressão efetiva  $\tilde{p}_\varphi$  ao campo escalar (de maneira similar a 2.10.2), que são respectivamente

$$\tilde{\rho}_\varphi = \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \right)^2 + \tilde{V} \quad \text{e} \quad \tilde{p}_\varphi = \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \right)^2 - \tilde{V}, \quad (4.82)$$

Das equações (4.52) e (4.53) podemos assumir que ambos os componentes de energia escura e matéria escura não se conservam separadamente, mas interagem uns com os outros, como nas equações (4.76) e (4.77), de tal forma que as equações de equilíbrio assume a forma

$$\frac{d\tilde{\rho}_m}{d\tilde{t}} + 3\tilde{H}(1 + \tilde{w}_m)\tilde{\rho}_m = Q \equiv \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \frac{db}{d\varphi} (1 - 3\tilde{w}_m)\tilde{\rho}_m \quad (4.83)$$

e

$$\frac{d\tilde{\rho}_\varphi}{d\tilde{t}} + 3\tilde{H}(1 + \tilde{w})\tilde{\rho}_\varphi = -Q = -\frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \frac{db}{d\varphi} (1 - 3\tilde{w}_m)\tilde{\rho}_m, \quad (4.84)$$

respectivamente, onde  $\tilde{w}_m = \frac{\tilde{p}_m}{\tilde{\rho}_m}$  é o parâmetro da equação de estado da matéria e  $\tilde{w} = \frac{\tilde{p}_\varphi}{\tilde{\rho}_\varphi}$  é o parâmetro de equação de estado para o campo escalar. Devemos notar a diferença entre o parâmetro da equação de estado  $w$  e o acomplamento  $\omega$  na ação da teoria escalar-tensor. Notar que a interação desaparece ao considerar o caso especial de  $\tilde{w}_m = 1/3$ . A densidade de energia total  $\tilde{\rho}$  e a pressão total  $\tilde{p}$  são

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_m + \tilde{\rho}_\varphi, \quad \tilde{p} = \tilde{p}_m + \tilde{p}_\varphi, \quad (4.85)$$

para o qual a equação de conservação total é

$$\frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}} + 3\tilde{H}(\tilde{\rho} + \tilde{p}) = 0 \quad (4.86)$$

se mantém

## B. Modelando a interação

Admite-se uma interação entre a energia escura (4.84) e matéria escura (4.83), onde  $Q$  simboliza as interações. No caso especial onde  $\tilde{p}_m = 0$ . Nós assumimos, sem perda de generalidade, que a densidade de energia do fluido pode ser escrito a partir da solução de (4.83) pode ser escrito como

$$\tilde{\rho}_m = \tilde{\rho}_{m0} \left( \frac{\tilde{a}_0}{a} \right)^3 f(\tilde{a}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\tilde{\rho}_m}{d\tilde{t}} + 3\tilde{H}\tilde{\rho}_m = \frac{\tilde{\rho}_m}{f} \frac{df}{d\tilde{t}}, \quad (4.87)$$

onde  $\tilde{\rho}_{m0}$  e  $\tilde{a}_0$  são constantes,  $\tilde{a}_0 = 1$  para o valor de atual do fator de escala. Geralmente, uma interação [33, 93, 100] modifica o comportamento de  $\tilde{a}^{-3}$  da densidade de energia da matéria, portanto, se multiplicamos este comportamento por uma função  $f(\tilde{a})$  que é arbitrária dependente do tempo, esta função  $f(\tilde{a})$  codifica os efeitos de uma interação entre a matéria e o campo escalar. Vamos comparar a equação (4.83) e (4.87), na qual segue que

$$\frac{1}{f} \frac{df}{d\tilde{t}} = \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \frac{db}{d\varphi} \quad \Rightarrow \quad f = e^{b(\varphi)}. \quad (4.88)$$

Na ausência de interação significa que a constante  $f$ , é equivalente a  $\varphi = \varphi_0 = \text{constante}$ . Escevendo a derivada temporal de  $f(\tilde{a})$  como

$$\frac{df}{d\tilde{t}} = \frac{df}{d\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = \frac{df}{d\tilde{a}} \tilde{a}\tilde{H}, \quad (4.89)$$

A equação (4.84) torna-se

$$\frac{d\tilde{\rho}_\varphi}{d\ln \tilde{a}} + 3(1 + \tilde{w})\tilde{\rho}_\varphi = -\tilde{\rho}_{m_0}\tilde{a}^{-3} \frac{df}{d\ln \tilde{a}}. \quad (4.90)$$

Integrando por partes<sup>3</sup> esta última expressão

$$\tilde{\rho}_\varphi = \exp\left(-3(1 + \tilde{w}) \int \ln \tilde{a}\right) \left[ - \int \frac{df}{d(\ln \tilde{a})} \tilde{\rho}_{m_0} \tilde{a}^{-3} \exp\left(3(1 + \tilde{w}) \int d(\ln \tilde{a})\right) d(\ln \tilde{a}) + C \right],$$

sendo a constante  $C = \tilde{\rho}_{\varphi 0}$

$$\tilde{\rho}_\varphi = \tilde{a}^{-3(1+\tilde{w})} \left[ - \int \frac{df}{d(\ln \tilde{a})} \tilde{\rho}_{m_0} \tilde{a}^{-3} \tilde{a}^{3(1+\tilde{w})} d(\ln \tilde{a}) + \tilde{\rho}_{\varphi 0} \right] \quad (4.92)$$

Para o parâmetro de equação de estado constante  $\tilde{w}$  a solução desta equação é

$$\tilde{\rho}_\varphi = \tilde{\rho}_{\varphi 0} \tilde{a}^{-3(1+\tilde{w})} - \tilde{\rho}_{m_0} \tilde{a}^{-3(1+\tilde{w})} \int_{\tilde{a}_0}^{\tilde{a}} d\tilde{a} \frac{df}{d\tilde{a}} \tilde{a}^{3\tilde{w}}. \quad (4.93)$$

Para uma interação dada  $f(\tilde{a})$ , a taxa de Hubble (4.50) é determinado pela soma de  $\tilde{\rho}_m$  de (4.87) com (4.89) e  $\tilde{\rho}_\varphi$  da equação (4.93).

Para construir um modelo explicitamente solucionável nós vamos assumir um comportamento de lei de potência da função de interação  $f(\tilde{a})$ .

$$f(\tilde{a}) = \tilde{a}^{3m}. \quad (4.94)$$

Claramente, para  $m = 0$  a função  $f$  torna-se constante e há uma ausência de interação.

Com (4.94) a solução explícita de (4.93) será

$$\tilde{\rho}_\varphi = \left( \tilde{\rho}_{\varphi 0} + \frac{m}{\tilde{w} + m} \tilde{\rho}_{m_0} \right) \tilde{a}^{-3(1+\tilde{w})} - \frac{m}{\tilde{w} + m} \tilde{\rho}_{m_0} \tilde{a}^{-3(1-m)}. \quad (4.95)$$

através de

$$\frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \frac{db}{d\varphi} = 3m\tilde{H}, \quad \frac{d\varphi}{d\ln \tilde{a}} \frac{db}{d\varphi} = 3m, \quad (4.96)$$

<sup>3</sup> a solução da equação diferencial não homogênea de primeira ordem será

$$\begin{aligned} y' + a(x)y &= b(x) \\ y &= \text{Exp}\left(-\int a(x)dx\right) \left[ \int b(x)\text{Exp}\left(\int a(x)dx\right) dx + C \right]. \end{aligned} \quad (4.91)$$

o termo de interação  $Q$  torna-se

$$Q = 3m\tilde{H}\tilde{\rho}_m. \quad (4.97)$$

**C. A equação de estado efetivo e a taxa de expansão de Hubble para uma dependência linear— $b(\varphi) = K\varphi$ —**

Com o propósito de obter as expressões analíticas para as dinâmicas nós consideramos um caso simples de uma dependência linear

$$b = b(\varphi) = K\varphi, \quad K = \sqrt{\frac{\kappa^2}{4\omega + 6}}, \quad (4.98)$$

onde a expressão para  $K$  segue da equação (4.41). Isto implica também as seguintes relações

$$\varphi = \frac{3m}{K} \ln \tilde{a}, \quad b = 3m \ln \tilde{a}, \quad e^b = \tilde{a}^{3m}, \quad \frac{db}{d\tilde{t}} = 3m\tilde{H}, \quad (4.99)$$

assim como

$$\Phi = e^{-2K\varphi} = e^{-2b} = \tilde{a}^{-6m}. \quad (4.100)$$

A potência  $m$  é uma medida direta da força de interação. O caso de interação livre  $m = 0$  corresponde a  $\varphi = \varphi_0 = \text{constante}$ , isto é,  $\tilde{V} = \tilde{\rho}_\varphi$  e, conseqüentemente, para  $\tilde{w} = -1$ , é equivalente ao modelo  $\Lambda$ CDM. Para  $m > 0$  nós temos  $Q > 0$  enquanto que para  $m < 0$  o contrário,  $Q < 0$ , 'e válido. A primeira equação em (4.100) relaciona o campo escalar  $\Phi$  e  $\varphi$  sem nós sequer especificar um potencial  $V(\varphi)$ .

Fazendo a escolha de um caso especial para um potencial exponencial,

$$V(\varphi) = V_0 e^{-\lambda\varphi}, \quad (4.101)$$

temos da equação (4.41),

$$\varphi = -\frac{1}{2K} \ln \Phi \quad \Rightarrow \quad V = V_0 \Phi^{\frac{\lambda}{2K}} \quad (4.102)$$

e a relação da equação (4.40) nos fornece a lei de potencia do potencial

$$U(\Phi) = U_0 \Phi^{2+\frac{4}{2K}}, \quad U_0 = 2\kappa^2 V_0. \quad (4.103)$$

Com ajuda de (4.96) a igualdade da equação (4.84) para  $\tilde{\rho}_\varphi$  pode ser escrito como

$$\frac{d\tilde{\rho}_\varphi}{d\tilde{t}} + 3\tilde{H} (1 + \tilde{w}^{eff}) \tilde{\rho}_\varphi = 0, \quad (4.104)$$

com o parâmetro da equação de estado efetivo

$$\tilde{w}^{eff} = \tilde{w} + m \frac{\tilde{\rho}_m}{\tilde{\rho}_\varphi}, \quad (4.105)$$

correspondente a uma pressão efetiva  $\tilde{p}_\varphi^{eff} = \tilde{w}^{eff} \tilde{\rho}_\varphi$ . A interação modifica o “bare” do parâmetro da equação de estado  $\tilde{w}$ . A modificação é linear no parâmetro de interação  $m$ . Da mesma forma, a igualdade da matéria (4.83) toma a forma de uma equação conservada

$$\frac{d\tilde{\rho}_m}{d\tilde{t}} + 3\tilde{H} (1 - m) \tilde{\rho}_m = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\rho}_m = \tilde{\rho}_{m0} \tilde{a}^{-3(1-m)}. \quad (4.106)$$

Já que a partir de (4.100) temos  $\tilde{a} = e^{\frac{K}{3m}\varphi}$ , segue que a densidade de energia da matéria pode ser escrito em termos do campo escalar como

$$\tilde{\rho}_m = \tilde{\rho}_{m0} \tilde{a}^{-3(1-m)} = \tilde{\rho}_{m0} e^{-\frac{1-m}{m} K \varphi}. \quad (4.107)$$

Essa estrutura exponencial nos permite escrever

$$\tilde{\rho}_m = -\frac{m}{K(1-m)} \tilde{\rho}_{m,\varphi}, \quad (4.108)$$

que é de interesse em definir um potencial efetivo. Então, a equação (4.84) (para  $\tilde{\rho}_m = 0$ ) é equivalente a

$$\frac{d^2\varphi}{d\tilde{t}^2} + 3\tilde{H} \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} + \tilde{V}_{,\varphi}^{eff} = 0, \quad (4.109)$$

Onde em  $\tilde{V}^{eff}$  agora está incluída a interação,

$$\tilde{V}^{eff} = \tilde{V} + \tilde{V}_{int} \equiv \tilde{V} - \frac{m}{(1-m)} \tilde{\rho}_m. \quad (4.110)$$

Por causa da representação em (4.107), o potencial de interação é do tipo exponencial. Pode-se introduzir quantidades efetivas

$$\tilde{\rho}_\varphi^{eff} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \right)^2 + \tilde{V}^{eff} \quad \text{and} \quad \tilde{p}_\varphi^{eff} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \right)^2 - \tilde{V}^{eff}, \quad (4.111)$$

para o qual, da equação (4.109),

$$\frac{d\tilde{\rho}_\varphi^{eff}}{d\tilde{t}} + 3\tilde{H} (1 + \tilde{W}^{eff}) \tilde{\rho}_\varphi^{eff} = 0 \quad (4.112)$$

é valido com

$$\tilde{W}^{eff} = \frac{\tilde{p}_\varphi^{eff}}{\tilde{\rho}_\varphi^{eff}} = \frac{\tilde{p}_\varphi + \frac{m}{1-m}\tilde{\rho}_m}{\tilde{\rho}_\varphi - \frac{m}{1-m}\tilde{\rho}_m} = \frac{\tilde{w} + \frac{m}{1-m}r}{1 - \frac{m}{1-m}r}. \quad (4.113)$$

Para  $\tilde{w} = -1$  nós temos também  $\tilde{W}^{eff} = -1$ .

Junto com a equação (4.107) a densidade de energia total torna-se

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_m + \tilde{\rho}_\varphi = \frac{1}{1 + m/\tilde{w}} \tilde{\rho}_{m0} \tilde{a}^{-3(1-m)} + \left( \tilde{\rho}_{\varphi 0} + \frac{m}{\tilde{w} + m} \tilde{\rho}_{m0} \right) \tilde{a}^{-3(1+\tilde{w})}. \quad (4.114)$$

Para o valor atual nós temos  $\tilde{\rho}_0 = \tilde{\rho}_{m0} + \tilde{\rho}_{\varphi 0}$ . Introduzindo as quantidades fracionais

$$\tilde{\Omega}_{m0} = \frac{8\pi G \tilde{\rho}_{m0}}{3\tilde{H}_0^2}, \quad \tilde{\Omega}_{\varphi 0} = \frac{8\pi G \tilde{\rho}_{\varphi 0}}{3\tilde{H}_0^2} = 1 - \tilde{\Omega}_{m0}, \quad (4.115)$$

o quadrado da taxa de Hubbel é

$$\frac{\tilde{H}^2}{\tilde{H}_0^2} = \frac{1}{1 + m/\tilde{w}} \left\{ \tilde{\Omega}_{m0} \tilde{a}^{-3(1-m)} + \left[ 1 + \frac{m}{\tilde{w}} - \tilde{\Omega}_{m0} \right] \tilde{a}^{-3(1+\tilde{w})} \right\}. \quad (4.116)$$

O caso da não interação  $m = 0$  corresponde ao modelo  $w$ CDM. Como já mencionado, desde que  $\varphi =$  constante, a única possibilidade aqui é  $\tilde{w} = -1$ , isto é, o modelo  $\Lambda$ CDM.

A seguir vamos nos concentrar no caso  $\tilde{w} = -1$ , mas considerando que  $m$  seja diferente de zero. Sob estas condições  $\tilde{H}^2$  Consiste em uma parte constante, como o modelo  $\Lambda$ CDM mas modificada pela presença de  $m$  e a parte da matéria na qual o parâmetro  $m$  modifica o comportamento convencional  $\tilde{a}^{-3}$ :

$$\frac{\tilde{H}^2}{\tilde{H}_0^2} = e^{K\varphi} \frac{\tilde{\Omega}_{m0} \tilde{a}^{-3}}{1 - m} + 1 - \frac{\tilde{\Omega}_{m0}}{1 - m}. \quad (4.117)$$

Essas pequenas modificações tornam a dinâmica Einstein-frame diferente daquele do modelo  $\Lambda$ CDM model. Alternativamente, esta solução pode ser interpretada em um contexto puramente da relatividade geral com a componente  $\varphi$  pertencente à parte da matéria das equações de campo, interagindo com a matéria não relativista.

Para o parâmetro de desaceleração

$$\tilde{q} = -1 - \frac{\tilde{a} d\tilde{H}}{\tilde{H} d\tilde{a}} \quad (4.118)$$

nós encontramos

$$\tilde{q} = \frac{1}{2} \frac{(1 - 3m)\tilde{\Omega}_{m0}\tilde{a}^{-3(1-m)} - 2[1 - m - \tilde{\Omega}_{m0}]}{\tilde{\Omega}_{m0}\tilde{a}^{-3(1-m)} + [1 - m - \tilde{\Omega}_{m0}]} \quad (4.119)$$

Para  $m = 0$  seu valor atual é consistentemente reduzido a  $\tilde{q}_0 = -1 + \frac{3}{2}\tilde{\Omega}_{m0}$ .

Agora nós vamos verificar a consistência que pode ser executado da seguinte forma. Com (4.99) nós temos

$$\left(\frac{d\varphi}{d\tilde{t}}\right)^2 = \frac{9m^2}{K^2}\tilde{H}^2 \quad (4.120)$$

Levando em consideração  $\tilde{H}^2 = \frac{\kappa^2}{3}(\tilde{\rho}_m + \tilde{\rho}_\varphi)$  resulta em

$$\tilde{w} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{d\tilde{t}}\right)^2 - V}{\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{d\tilde{t}}\right)^2 + V} = \frac{3m^2(2\omega + 3)(\tilde{\rho}_m + \tilde{\rho}_\varphi) - V}{3m^2(2\omega + 3)(\tilde{\rho}_m + \tilde{\rho}_\varphi) + V} \quad (4.121)$$

que é equivalente a

$$\tilde{w} = -1 + \frac{6m^2(2\omega + 3)\frac{(\tilde{\rho}_m + \tilde{\rho}_\varphi)}{V}}{1 + 3m^2(2\omega + 3)\frac{(\tilde{\rho}_m + \tilde{\rho}_\varphi)}{V}} = -1 + \mathcal{O}(m^2) \quad (4.122)$$

Em geral, nossa suposição inicial de que uma constante  $\tilde{w}$  não parece ser compatível com a dinâmica de  $\varphi$  em (4.120). No entanto, as correções para o valor constante  $\tilde{w} = -1$  são quadráticas no parâmetro de interação  $m$ , não aparece um termo linear em  $m$  em (4.122). Nossa abordagem será, portanto, consistente, se nos restringirmos para  $\tilde{w} = -1$  e para modificações da equação de estado efetivo (4.105) que são lineares em  $m$ . Uma vez que  $m$  quantifica os desvios do modelo  $\Lambda$ CDM, espera-se que  $m$  seja pequeno.

## 4.2.5 Descrição do Jordan-Frame

Com  $H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$  a transformação (4.54) nos permite estabelecer a relação entre as taxas de Hubble de ambos os frames:

$$H = e^{-b} (1 + 3m) \tilde{H}. \quad (4.123)$$

Com

$$f = e^b = \frac{a}{\tilde{a}} \quad (4.124)$$

e (4.94) nós temos

$$a = \tilde{a}^{3m+1} \Rightarrow \tilde{a} = a^{\frac{1}{3m+1}} \Rightarrow \frac{\tilde{a}}{a} = a^{-\frac{3m}{3m+1}}, \quad (4.125)$$

ou seja, a potência  $m$  quantifica a diferença do fator de escala em ambos os frames. Para  $m = 0$  temos  $\tilde{a} = a$  e a dinâmica em ambos os frames se reduz ao modelo  $\Lambda$ CDM. Combinando (4.99) e (4.125) gera  $b$  em termos do fator de escala  $a$  de Jordan-frame.

$$b = \frac{3m}{1+3m} \ln a, \quad \frac{db}{dt} = \frac{3m}{1+3m} H. \quad (4.126)$$

Para a taxa de Hubble, segue-se que

$$H = \frac{\tilde{a}}{a} (1 + 3m) \tilde{H}. \quad (4.127)$$

A densidade de energia da matéria em ambos os frames esta relacionada por

$$\rho_m = e^{-4b} \tilde{\rho}_m = \left(\frac{\tilde{a}}{a}\right)^4 \tilde{\rho}_{m0} \tilde{a}^{-3(1-m)} = a^{-\frac{12m}{1+3m}} \tilde{\rho}_{m0} \tilde{a}^{-3(1-m)} = \rho_{m0} a^{-3}, \quad (4.128)$$

onde usamos  $\tilde{\rho}_{m0} = \rho_{m0}$ . Como esperado, recuperamos o comportamento característico  $a^{-3}$  para matérias não-relativística conservadas separadamente no Jordan-frame.

Usando as relações (4.125) e (4.116) em (4.127) nós obtemos o quadrado da taxa de Hubble no Jordan-frame

$$H^2 = (1 + 3m)^2 \tilde{H}_0^2 \left\{ \frac{\tilde{\Omega}_{m0}}{1 + m/\tilde{w}} a^{-\frac{3m+3}{3m+1}} + \left[ 1 - \frac{\tilde{\Omega}_{m0}}{1 + m/\tilde{w}} a^{-\frac{6m+3(1+\tilde{w})}{3m+1}} \right] \right\}. \quad (4.129)$$

Obviamente,  $H_0^2 = (1 + 3m)^2 \tilde{H}_0^2$ . Isto implica  $\tilde{\Omega}_{m0} = (1 + 3m)^2 \Omega_{m0}$ . Então, para  $\tilde{w} = -1$ ,

$$\frac{H^2}{H_0^2} = A\Omega_{m0}a^{-3+\frac{6m}{1+3m}} + [1 - A\Omega_{m0}]a^{-\frac{6m}{1+3m}}, \quad A \equiv \frac{(1 + 3m)^2}{1 - m}, \quad (4.130)$$

ou, tendo também

$$a^{\frac{6m}{1+3m}} = e^{2b} = \Phi^{-1}, \quad (4.131)$$

o quadrado da taxa de Hubble pode ser escrito como

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{A\Omega_{m0}a^{-3}}{\Phi} + [1 - A\Omega_{m0}] \Phi. \quad (4.132)$$

Esta expressão é nosso principal resultado. Que representa a taxa de Hubble (Jordan-frame) de nosso modelo da teoria escalar-tensor. A partir da estrutura (4.132) é obvio notar, como o campo escalar  $\Phi$  modifica a dinâmica cosmologica comparada com a relatividade geral com base ao modelo padrão. Para  $m = 0$ , que é equivalente a  $\Phi = 1$ , recuperamos o modelo  $\Lambda$ CDM e a dinâmica de Jordan-frame coincide com a dinâmica no Einstein-frame. Para qualquer  $m \neq 0$ , que é equivalente a  $\Phi \neq 1$ , a expressão (4.132) mostra claramente que é testável, um modelo alternativo com desvios presumivelmente pequenos do modelo  $\Lambda$ CDM. Notar que as modificações do modelo  $\Lambda$ CDM são diferentes daquele do Einstein-frame. Um caso particular, quando não existe parte constante mesmo para  $\tilde{w} = -1$ .

### Equação efetiva do potencial

Devemos enfatizar que a solução de (4.131) é uma consequência da solução da equação do fluido dinâmico macroscópico para a densidades de energia sob a suposição (4.94). Isto não é uma solução de (4.48) em si, que exigiria uma expressão explícita para o potencial  $U$ . A solução exata desconhecida da equação de campo escalar (4.48) é substituído aqui pela solução efetiva em (4.131) que foi obtido utilizando as aproximações (4.94) e (4.98) no fluido dinâmico macroscópico. Nosso mecanismo nos permite obter conseguir uma expressão explícita para o campo escalar  $\Phi$  e para a taxa de Hubble sem resolver a equação do campo escalar em (4.48).

De (4.131) encontra-se

$$\Phi' = -\frac{6m}{1 + 3m} \frac{\Phi}{a} \quad (4.133)$$

e

$$\Phi'' = 6m \frac{1 + 9m}{(1 + 3m)^2} \frac{\Phi}{a^2}. \quad (4.134)$$

ainda mais,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Phi' aH = -\frac{6m}{1 + 3m} \Phi H, \quad (4.135)$$

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = (\Phi' aH)' aH = \Phi'' a^2 H^2 + \Phi' (aH^2 + a^2 H' H). \quad (4.136)$$

Aqui precisamos de  $H'$ . Diferenciando a equação (4.132), produz

$$2HH' = -H_0^2 \left[ 3 \frac{1+m}{1+3m} A\Omega_{m0} a^{-3} \frac{1}{a\Phi} + \frac{6m}{1+3m} [1 - A\Omega_{m0}] \frac{\Phi}{a} \right]. \quad (4.137)$$

Usando também

$$\Phi H^2 = H_0^2 [A\Omega_{m0} a^{-3} + (1 - A\Omega_{m0}) \Phi^2], \quad (4.138)$$

podemos escrever

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + 3H \frac{d\Phi}{dt} = -9H_0^2 \frac{m}{(1+3m)^2} [(1+m)A\Omega_{m0} a^{-3} + 2(1 - A\Omega_{m0}) \Phi^2]. \quad (4.139)$$

Nossa expressão (4.131) pode ser visto como a solução da equação (4.139). Podemos introduzir aqui

$$a^{-3} = \Phi^{\frac{1+3m}{2m}},$$

em seguida a equação (4.139) é da forma

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + 3H \frac{d\Phi}{dt} + U_{\Phi}^{eff} = 0, \quad (4.140)$$

onde  $U_{\Phi}^{eff}$  é dado pela expressão do lado direito de (4.139) com o sinal oposto. Portanto, a dinâmica de nosso  $\Phi$  é de um campo escalar com potencial  $U^{eff}$ . Para  $m = 0$  a derivada de  $U_{\Phi}^{eff}$  desaparece, correspondente a um potencial efetivo constante e compatível com  $\Phi = 1$ , assim recuperamos o modelo  $\Lambda$ CDM. Deve ter em mente, no entanto, que a dinâmica de  $\Phi$  descreve os desvios do modelo  $\Lambda$ CDM, não este modelo em si.

A correspondente densidade de energia total pode ser escrito como

$$\rho = A \frac{\rho_m}{\Phi} + \rho_0 (1 - A\Omega_{m0}) \Phi, \quad (4.141)$$

ou, separando a parte da matéria como em (4.46)

$$\rho = \frac{\rho_m}{\Phi} + (A - 1) \frac{\rho_m}{\Phi} + \rho_0 [1 - A\Omega_{m0}] \Phi. \quad (4.142)$$

Ao aparecer o campo escalar  $\Phi$  nestas expressões muda as contribuições relativas da matéria e o equivalente de energia escura. Nosso modelo codifica os desvios da descrição escalar-tensor do modelo  $\Lambda$ CDM inteiramente no parâmetro constante  $m$  que é suposto a ser pequeno. Para que seja mais definitiva, devemos assumir  $|m| < \frac{1}{3}$ . Sob estas condições,  $\Phi$  decai com  $a$  para  $m > 0$  enquanto aumenta para  $m < 0$ . É exatamente na época atual  $a = 1$  que  $\Phi(a = 1) = 1$ . Para  $m > 0$  temos  $\Phi > 1$  no passado ( $a < 1$ ), para  $m < 0$ , por outro lado,  $\Phi$  aumenta de  $\Phi < 1$  em  $a < 1$  até o presente  $\Phi(a = 1) = 1$ . Para  $a \ll 1$  vemos que nesse limite a expressão da direita de (4.142) só contribuiria o primeiro e o segundo termo, mas o primeiro termo se cancela com uma parte do segundo termo, sendo assim a nossa abordagem para a densidade de energia

$$\rho \approx A\rho_{m0}a^{-3}a^{\frac{6m}{1+3m}} \quad (a \ll 1). \quad (4.143)$$

No limite de um futuro distante  $a \gg 1$ , da expressão (4.142) podemos observar que os dois primeiros termos da direita somem, devido a essa consideração, ficando só o terceiro termo, na qual a densidade de energia será aproximadamente

$$\rho \approx \rho_0 (1 - A\Omega_{m0}) a^{-\frac{6m}{1+3m}} \quad (a \gg 1). \quad (4.144)$$

Dependendo do sinal de  $m$  pode decair ( $m > 0$ ) ou aumentar ( $m < 0$ ).

A fração da matéria torna-se

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho} = \frac{\Omega_{m0}a^{-3}}{A\Phi^{-1}\Omega_{m0}a^{-3} + [1 - A\Omega_{m0}]\Phi}. \quad (4.145)$$

Podemos introduzir uma descrição efetiva da relatividade geral, definindo uma componente  $\rho_x = \rho - \rho_m$ ,

$$\frac{\rho_x}{\rho_0} = [1 - A\Omega_{m0}] a^{-\frac{6m}{1+3m}} + \Omega_{m0}a^{-3} \left[ A a^{\frac{6m}{1+3m}} - 1 \right], \quad (4.146)$$

que é equivalente a

$$\rho_x = \left(\frac{A}{\Phi} - 1\right)\rho_m + \rho_0 [1 - A\Omega_{m0}] \Phi \quad (4.147)$$

com uma contribuição fracional

$$\Omega_x = \frac{\rho_x}{\rho} = \frac{(A\Phi^{-1} - 1)\Omega_{m0}a^{-3} + [1 - A\Omega_{m0}] \Phi}{A\Phi^{-1}\Omega_{m0}a^{-3} + [1 - A\Omega_{m0}] \Phi}. \quad (4.148)$$

Logo, em altos redshift,

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho} \approx \frac{1}{A}a^{-\frac{6m}{1+3m}}, \quad \Omega_x = \frac{\rho_x}{\rho} \approx 1 - \frac{1}{A}a^{-\frac{6m}{1+3m}} \quad (a \ll 1). \quad (4.149)$$

Para  $m > 0$  a densidade de energia efetiva  $\rho_x$  torna-se negativo para pequenos valores de  $a$ . Durante a combinação  $1 - A\Omega_{m0}$  permanece sempre positivo para pequenos valores de  $m$  e  $\Omega_{m0}$  da ordem 0.3, a combinação  $A a^{\frac{6m}{1+3m}} - 1$  mudará seu sinal com o aumento do fator de escala. Essa mudança de sinal ocorrerá em um valor  $a_c$ , dado por

$$A a_c^{\frac{6m}{1+3m}} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_c = \left[ \frac{1 - m}{(1 + 3m)^2} \right]^{\frac{1+3m}{6m}}. \quad (4.150)$$

numericamente, é direto verificar que valores  $O|m| \gtrsim 0.1$  muda drasticamente a dinâmica comparada em comparação com a do modelo padrão. Particularmente, para  $m > 0$  a combinação  $A a^{\frac{6m}{1+3m}} - 1$  é negativa para pequenos valores de  $a$ . Com o aumento de  $a$  obtém-se uma mudança para valores positivos em  $a_c \approx 0.25$  para  $m = 0.1$ , correspondente a um redshift  $z_c \approx 3$  e em  $a_c \approx 0.31$  (redshift  $z_c \approx 2.2$ ) para  $m = 0.01$ . Para  $m < 0$  o termo  $A a^{\frac{6m}{1+3m}} - 1$  é positivo em  $a \ll 1$  mas mudará o sinal. Para  $m = -0.1$  isso acontece em  $a_c \approx 0.39$  (redshift  $z_c \approx 1.6$ ), para  $m = -0.01$  o valor correspondente é  $a_c \approx 0.08$  ( $z_c \approx 11.6$ ). O comportamento da densidade de energia fracionária é mostrada na Fig.4.1. O painel direito usa unidades logarítmicas mostrando os valores assintóticos de  $\Omega_m$  e  $\Omega_x$  em tempos primordiais. Deveria ser enfatizado novamente que a “densidade de energia”  $\rho_x$  não representa um resíduo material, em outras palavras, é de origem geométrica. O fato que a quantidade  $\rho_x$  pode tornar-se negativo não afeta o modelo. o que importa aqui é a taxa de Hubble, que é sempre bem comportada. Para completar a analogia, a componente  $\rho_x$  é suposto a obedecer a equação de conservação

$$\frac{d\rho_x}{dt} + 3H(1 + w_x)\rho_x = 0 \quad (4.151)$$

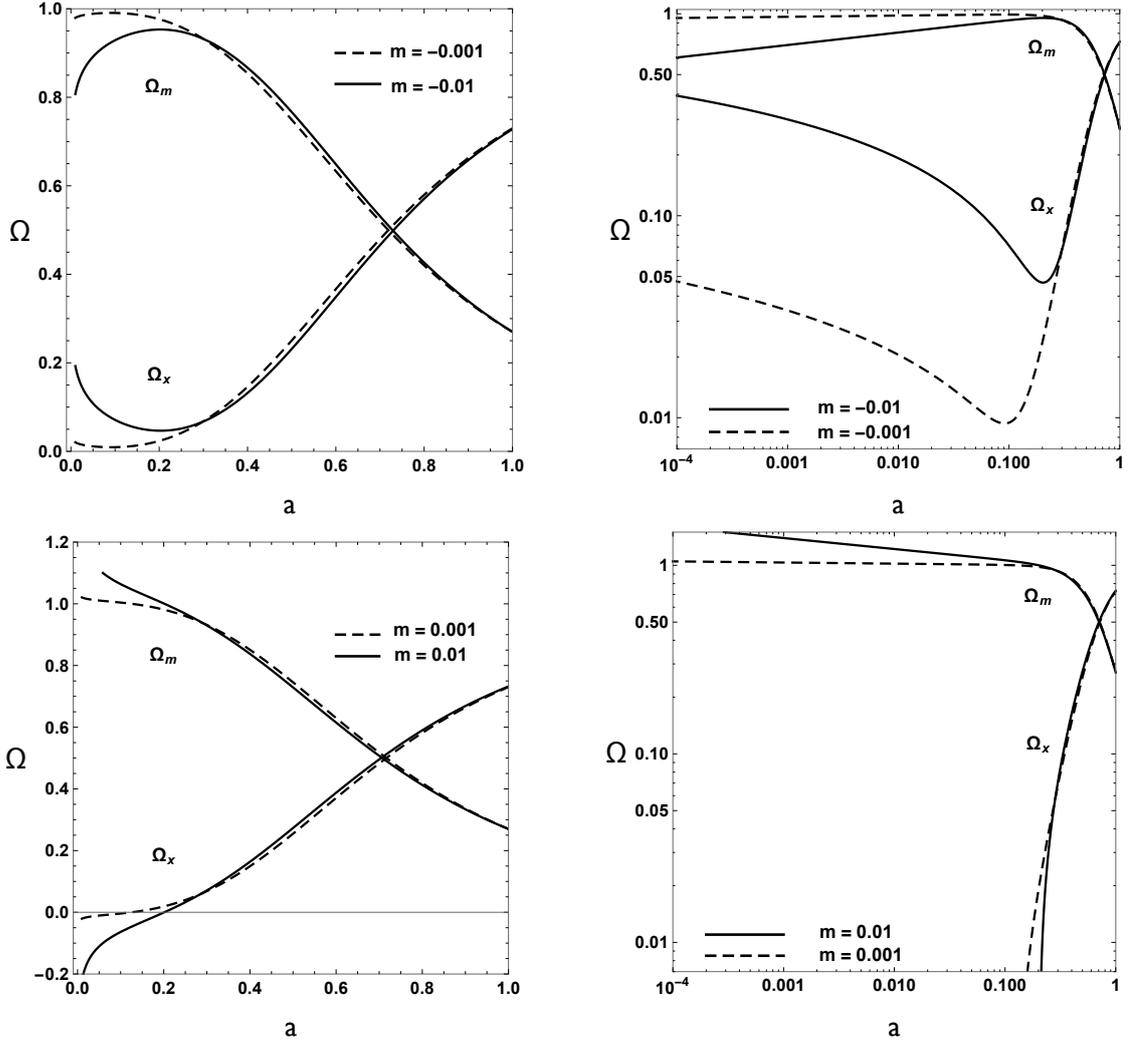


Figura 4.1: Fração da matéria  $\Omega_m$  da energia total e fração da energia geométrica  $\Omega_x$  para valores negativos (painel acima) e valores positivos (painel abaixo) de  $m$ . As unidades logarítmicas são usadas no painel direito. Isso permite uma melhor visualização dos valores assintóticos no tempo primordial

com um  $w_x$  como parâmetro de equação de estado. Através de  $\frac{d\rho_x}{dt} = \frac{d\rho_x}{da} \frac{da}{dt} \equiv \rho'_x a H$  nós obtemos

$$\rho'_x a + 3(1 + w_{eff})\rho_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + w_x = -\frac{1}{3} \frac{\rho'_x a}{\rho_x}. \quad (4.152)$$

Um cálculo direto concede

$$w_x = -1 + \frac{\frac{2m}{1+3m} [1 - A\Omega_{m0}] \Phi + \Omega_{m0} a^{-3} \left[ \frac{1+m}{1+3m} A\Phi^{-1} - 1 \right]}{[1 - A\Omega_{m0}] \Phi + \Omega_{m0} a^{-3} [A\Phi^{-1} - 1]}. \quad (4.153)$$

A equação (4.153) estabelece uma relação entre a constante, o “bare” do parâmetro da equação de estado  $\tilde{w} = -1$  no Einstein-frame e o parâmetro de equação de estado efetivo  $w_x$  no Jordan-frame,

geralmente dependente do tempo. Para  $m = 0$  recuperamos  $w_x = \tilde{w} = -1$ . Em altos redshift

$$w_x \approx -1 + \frac{\left[ \frac{1+m}{1+3m} A \Phi^{-1} - 1 \right]}{[A \Phi^{-1} - 1]} \quad (a \ll 1). \quad (4.154)$$

O valor de  $w_x$  pode ser próximo de zero em altos redshift, ou seja, imitando poeira, mas a densidade de energia efetiva será negativa em  $m > 0$ . Já um valor bastante pequeno de  $|m| \neq 0$  mudará substancialmente o comportamento de esta densidade de energia equivalente comparada com a densidade de energia do modelo padrão. O valor atual do parâmetro de equação de estado é

$$w_x = -1 + \frac{\frac{2m}{1+3m} + 3m\Omega_{m0}}{1 - \Omega_{m0}} \quad (a = 1). \quad (4.155)$$

Dado que  $|m|$  é pequeno, isso permanece nas proximidades de  $w_x = 1$ . No futuro distante  $w_x$  aproxima-se

$$w_x \approx -1 + \frac{2m}{1 + 3m} \quad (a \gg 1). \quad (4.156)$$

A evolução do parâmetro de equação de estado efetivo  $w_x$  é visualizado em Fig.4.2 com diferentes valores de  $m$ . Para pequeno valores de  $a$  temos  $w_x > 0$  mas haverá uma mudança em  $w_x < 0$  bem antes da época atual. A densidade de energia efetiva muda de um regime “phantom” para uma fase tardia com  $\rho_x > 0$ . Devido a uma troca de sinal em  $\rho_x$ , o ponto de transição  $\rho_x = 0$  é acompanhado por uma singularidade em  $w_x$  neste ponto para  $m$  positivo.

O resultado para o parâmetro de desaceleração  $q = -1 - a \frac{H'}{H}$  é

$$q = \frac{1}{2} \frac{\frac{1-3m}{1+3m} A \Omega_{m0} a^{-3} \Phi^{-1} - \frac{2}{1+3m} [1 - A \Omega_{m0}] \Phi}{A \Omega_{m0} a^{-3} \Phi^{-1} + [1 - A \Omega_{m0}] \Phi}. \quad (4.157)$$

Como mostra da Fig.4.3, ele muda desde uma valor de alto redshift

$$q \approx \frac{1}{2} \frac{1 - 3m}{1 + 3m} \quad (a \ll 1), \quad (4.158)$$

perto de  $1/2$ , ao valor próximo a  $-1$ ,

$$q \approx -\frac{1}{1 + 3m} \quad (a \gg 1), \quad (4.159)$$

em tempos tardios. A expressão explicita para a pressão é

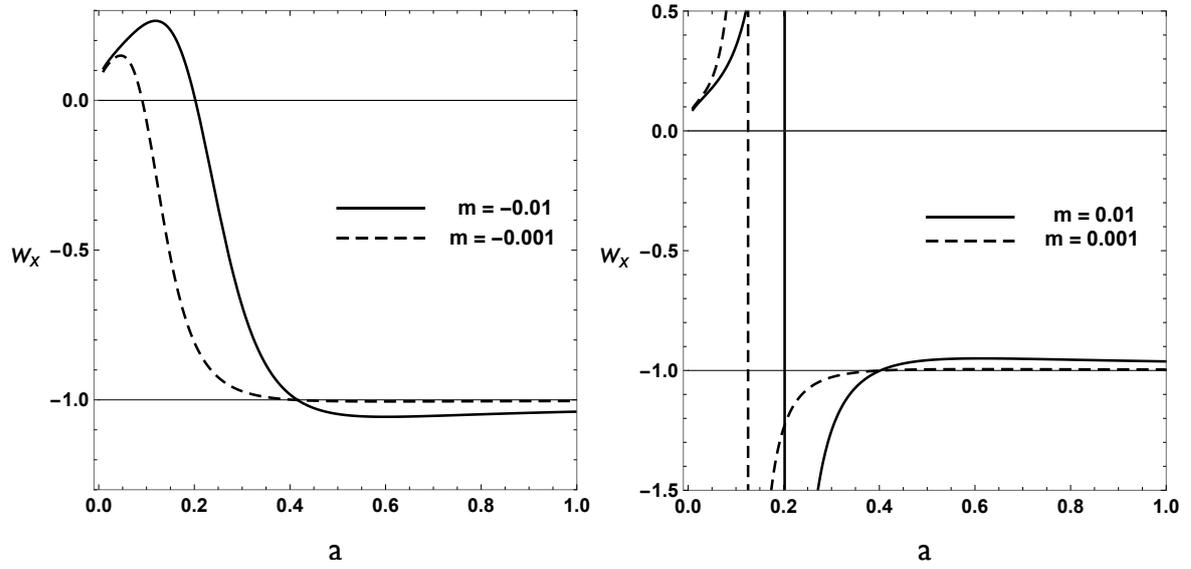


Figura 4.2: Parâmetro de equação de estado como função do fator de escala para valores negativos de  $m$  (painel esquerdo) valores positivos (painel direito).

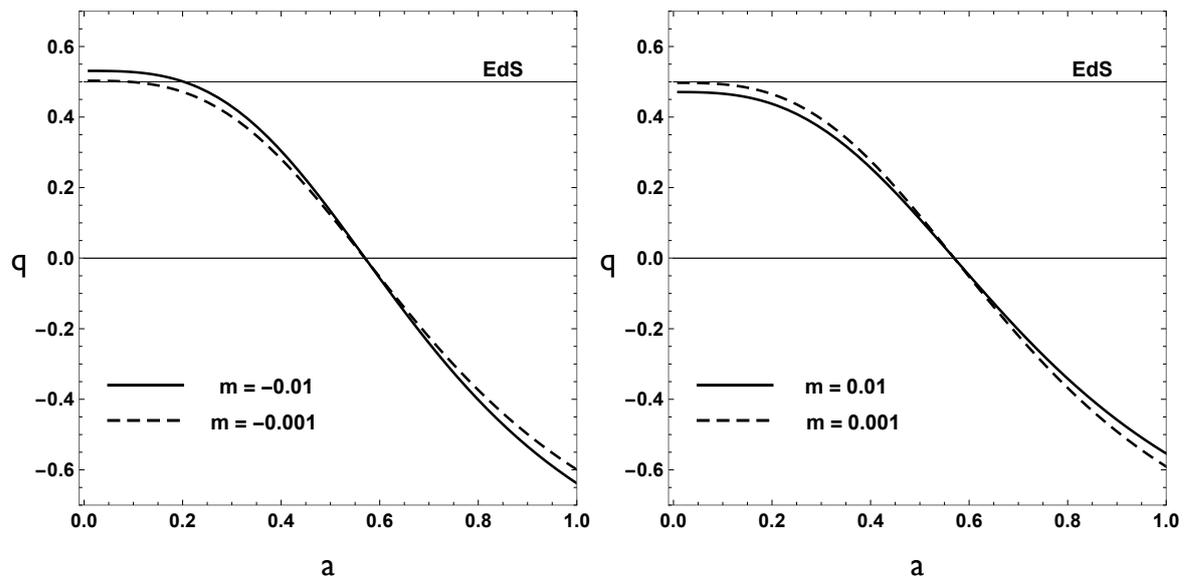


Figura 4.3: Parâmetro de desaceleração para varios valores de  $m$  negativos (painel esquerdo) e positivos (painel direito).

$$p_x = w_{eff}\rho_x = -\rho_x + \frac{2m}{1+3m}\rho_0 [1 - A\Omega_{m0}] \Phi + \rho_0\Omega_{m0}a^{-3} \left[ \frac{1+m}{1+3m}A\Phi^{-1} - 1 \right]. \quad (4.160)$$

Diferenciando e usando  $\dot{\Phi} = -\frac{6m}{1+3m}H\Phi$  gera

$$\dot{p}_x = -\dot{\rho}_x - 3H\rho_0 \left\{ \left( \frac{2m}{1+3m} \right)^2 [1 - A\Omega_{m0}] \Phi + \Omega_{m0}a^{-3} \left[ \left( \frac{1+m}{1+3m} \right)^2 A\Phi^{-1} - 1 \right] \right\}. \quad (4.161)$$

desde que

$$\dot{\rho}_x = -3H\rho_0 \left\{ \frac{2m}{1+3m} [1 - A\Omega_{m0}] \Phi + \Omega_{m0}a^{-3} \left[ \frac{1+m}{1+3m}A\Phi^{-1} - 1 \right] \right\}, \quad (4.162)$$

encontramos que

$$\frac{\dot{p}_x}{\dot{\rho}_x} = -1 + \frac{\left( \frac{2m}{1+3m} \right)^2 [1 - A\Omega_{m0}] \Phi + \Omega_{m0}a^{-3} \left[ \left( \frac{1+m}{1+3m} \right)^2 A\Phi^{-1} - 1 \right]}{\frac{2m}{1+3m} [1 - A\Omega_{m0}] \Phi + \Omega_{m0}a^{-3} \left[ \frac{1+m}{1+3m}A\Phi^{-1} - 1 \right]}. \quad (4.163)$$

Em altos redshift esta quantidade (que corresponde à velocidade do som adiabática) é consideravelmente menor que 1, pode até ser próximo de zero. O limite do futuro distante é

$$\frac{\dot{p}_x}{\dot{\rho}_x} \approx -1 + \frac{2m}{1+3m} \quad (a \gg 1). \quad (4.164)$$

Embora isso não pareça diferir substancialmente do modelo padrão, o comportamento intermediário faz. Como visualizado na Fig.4.4, esta quantidade muda de sinal nos pontos com  $\dot{\rho}_x = 0$  que implica uma singularidade em  $\frac{\dot{p}_x}{\dot{\rho}_x}$ . Recordar que a densidade de energia  $\rho_x$  é uma quantidade efetiva que simula a energia escura mas não pertence à parte matéria das equações de campo. Isto é de origem inteiramente geométrico.

Podemos definir o parâmetro de equação de estado total  $w \equiv \frac{p}{\rho} = \frac{p_x}{\rho}$  que resulta em

$$w \equiv \frac{p}{\rho} = \frac{p_x}{\rho} = -\frac{1}{1+3m} \frac{(1+m)[1 - A\Omega_{m0}] \Phi + 2mA\Phi^{-1}\Omega_{m0}a^{-3}}{[1 - A\Omega_{m0}] \Phi + A\Phi^{-1}\Omega_{m0}a^{-3}}. \quad (4.165)$$

Cujos limites são

$$w \approx -\frac{2m}{1+3m} \quad (a \ll 1) \quad (4.166)$$

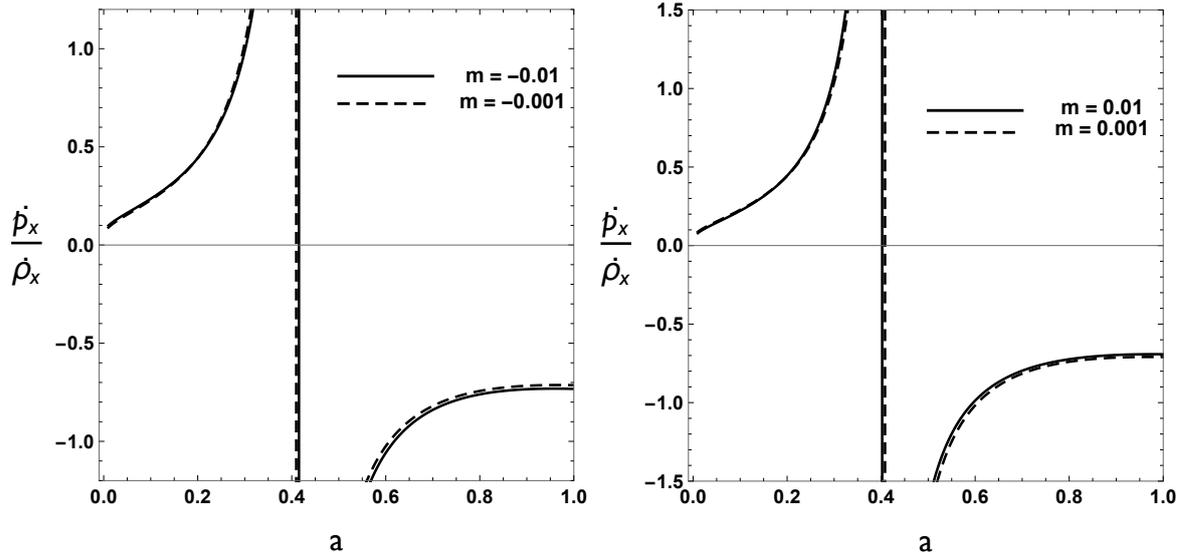


Figura 4.4: Velocidade do som efetiva para varios valores de  $m$  negativo (painel esquerdo) e positivo (painel direito).

e

$$w \approx -\frac{1+m}{1+3m} \quad (a \gg 1), \quad (4.167)$$

ou seja, em altos redshift  $w$  é próximo a zero, no limite do futuro distante é próximo a  $-1$ . O parâmetro de equação de estado é visualizado na Fig.4.5. Isto é bem composto para todos os valores de  $m$ .

Com

$$\frac{\rho+p}{\rho_0} = \frac{1+m}{1+3m} A \Phi^{-1} \Omega_{m0} a^{-3} + \frac{2m}{1+3m} [1 - A \Omega_{m0}] \Phi, \quad (4.168)$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho_0} = -3H \left\{ \frac{1+m}{1+3m} A \Phi^{-1} \Omega_{m0} a^{-3} + \frac{2m}{1+3m} [1 - A \Omega_{m0}] \Phi \right\} = -3H \frac{\rho+p}{\rho_0} \quad (4.169)$$

e

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho_0} = \frac{\dot{\rho}_x}{\rho_0} = 3H \frac{2m(1+m)}{(1+3m)^2} [(1 - A \Omega_{m0}) \Phi + \Omega_{m0} a^{-3} A \Phi^{-1}] \quad (4.170)$$

encontramos

$$\frac{\dot{\rho}}{\dot{\rho}_0} = -\frac{2m(1+m)}{1+3m} \frac{(1 - A \Omega_{m0}) \Phi + \Omega_{m0} a^{-3} A \Phi^{-1}}{2m [1 - A \Omega_{m0}] \Phi + (1+m) A \Phi^{-1} \Omega_{m0} a^{-3}}. \quad (4.171)$$

Esta adiabaticidade da velocidade do som efetiva do meio cósmico como um todo tem um limite em

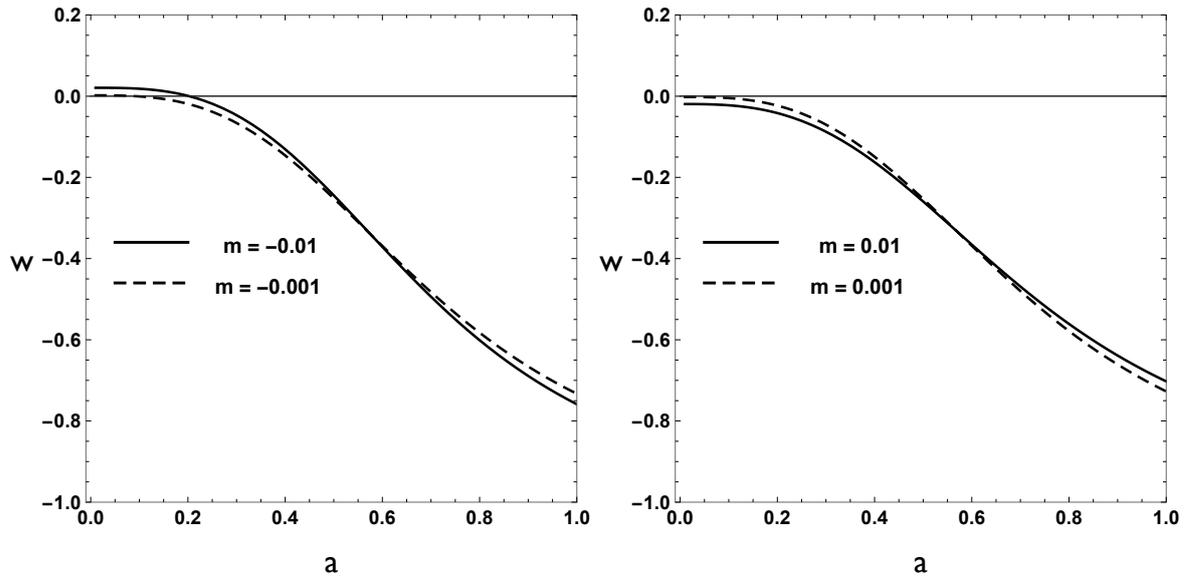


Figura 4.5: Parâmetro da equação de estado total para varios valores de  $m$ , negativos (painel esquerdo) e positivos (painel direito).

altos redshift

$$\frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \approx -\frac{2m}{1+3m} \quad (a \ll 1), \quad (4.172)$$

ou seja, para valores pequenos, e

$$\frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \approx -\frac{1+m}{1+3m} \quad (a \gg 1), \quad (4.173)$$

no futuro distante, um valor próximo a  $-1$ .

À medida que  $m > 0$  a derivada da pressão total  $\dot{p}$  é sempre positivo e a derivada da densidade de energia total  $\dot{\rho}$  é sempre negativo, a quantidade  $\frac{\dot{p}}{\dot{\rho}}$  permanece negativo em todo o intervalo. para  $m < 0$ , em contrapartida,  $\dot{p}$  é sempre negativo mas  $\dot{\rho}$  pode alterar o seu sinal para valores suficientemente grandes de  $a$ , que da origem a uma divergência em  $\frac{\dot{p}}{\dot{\rho}}$  no valor critico

$$a_s = \left[ \frac{(1-|m|)A\Omega_{m0}}{2|m|(1-A\Omega_{m0})} \right]^{\frac{1}{3} \frac{1-3|m|}{1+|m|}} \quad (m < 0). \quad (4.174)$$

Para  $a < a_s$  a relação  $\frac{\dot{p}}{\dot{\rho}}$  é positiva, para  $a > a_s$  isto é negativo desde que  $\rho$  começa a crescer em  $a = a_s$ . Isso é consistente com o limite do futuro distante em (4.144). Exceto para um grande desvio do modelo padrão com  $m = -0.1$ , essas singularidades ocorrem em um futuro distante. Fig.4.6 mostra

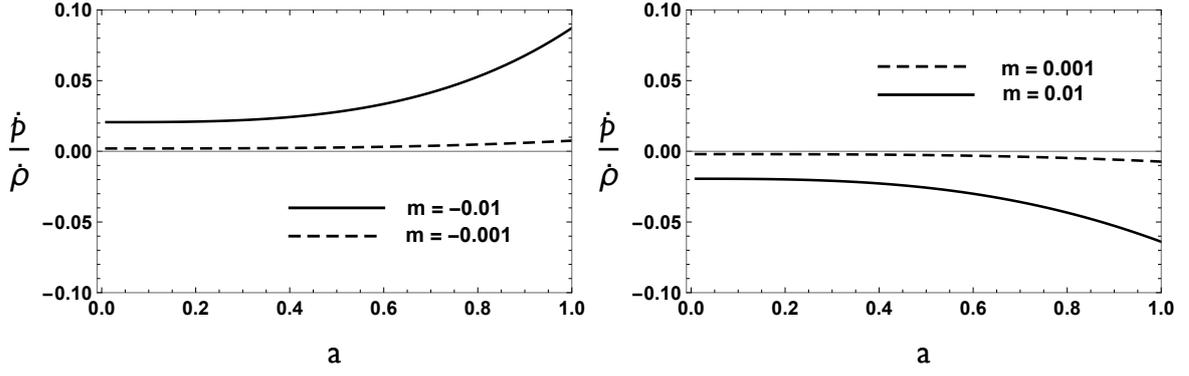


Figura 4.6: Dependência do fator de escala da velocidade do som adiabática efetiva total para varios valores de  $m$ , negativos (painel esquerdo) e positivos (painel direito).

a dependência de  $\frac{\dot{\rho}}{\rho}$  no fator de escala para varios valores de  $m$ .

#### 4.2.6 Condições de estabilidade

Verificamos aqui a estabilidade simplificada da solução para  $\Phi$ , deixando uma análise verdadeira da perturbação para ser objeto do próximo capítulo. Introduzimos uma decomposição

$$\Phi = \Phi_b + \Phi_1 \quad (4.175)$$

com a nossa solução do “fundo”  $\Phi_b$  e uma perturbação (homogênea)  $\Phi_1$  de acordo com

$$\Phi_b = a^{-\frac{6m}{1+3m}}, \quad \Phi_1 \ll \Phi_b. \quad (4.176)$$

Linearizando, produz

$$\Phi^{\frac{1+3m}{2m}} = (\Phi_b + \Phi_1)^{\frac{1+3m}{2m}} \approx \Phi_b^{\frac{1+3m}{2m}} + \frac{1+3m}{2m} \Phi_b^{\frac{1+3m}{2m}} \Phi_1 \quad (4.177)$$

e

$$\Phi^2 = (\Phi_b + \Phi_1)^2 \approx \Phi_b^2 + 2\Phi_b\Phi_1. \quad (4.178)$$

Introduzindo essas decomposições em (4.139) fornece-nos, em primeira ordem, com uma equação para  $\Phi_1$ ,

$$\frac{d^2\Phi_1}{dt^2} + 3H\frac{d\Phi_1}{dt} + 9H_0^2 \left[ \frac{1}{2} \frac{1+m}{1+3m} A\Omega_{m0} \Phi_b^{\frac{1+m}{2m}} + \frac{4m}{(1+3m)^2} (1 - A\Omega_{m0}) \Phi_b \right] \Phi_1 = 0. \quad (4.179)$$

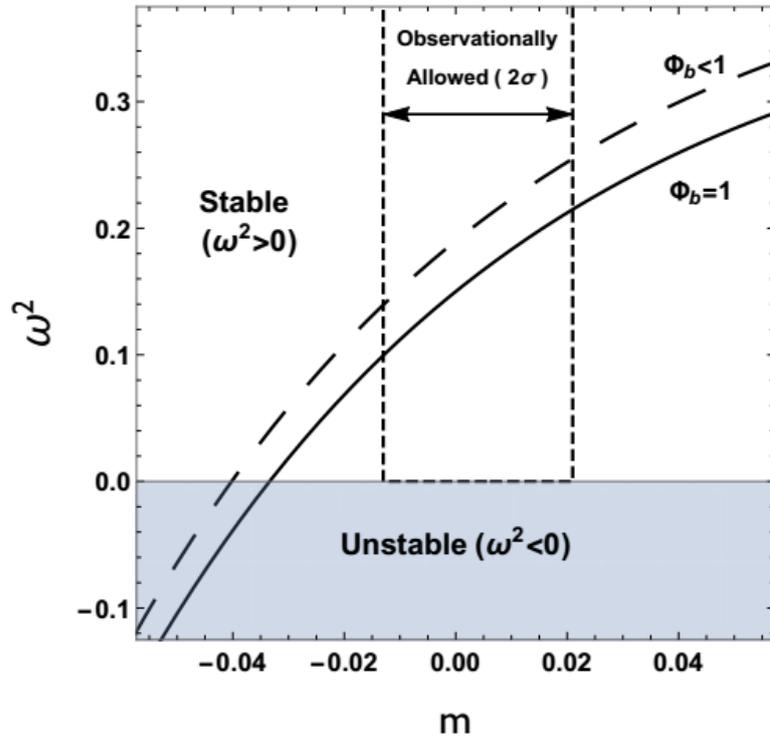


Figura 4.7: Dependência de  $\omega^2$  vs  $m$  para o valor atual  $\Phi_b = 1$  (linha sólida) e para o valor constante  $\Phi_b < 1$  (linha tracejada) que, para  $m < 0$ , corresponde ao fator de escala no passado, ou seja,  $a < 1$ . o intervalo de instabilidade (valores de  $m$  da esquerda da interseção da curva  $\Phi_b$  com o eixo de  $\omega^2 = 0$ ) diminui para o passado, uma vez que o ponto de interseção se move à esquerda para  $\Phi_b < 1$ . A faixa cinza marca a região de instabilidade. Os valores observados de forma observacional estão inteiramente na parte estável do plano  $\omega^2 - m$ . Para  $m > 0$  a estabilidade é sempre garantida.

Esta é uma equação para um oscilador harmônico amortecido com uma frequência  $\omega$  dependente do tempo, dado por

$$\omega^2 = 9H_0^2 \left[ \frac{1}{2} \frac{1+m}{1+3m} A\Omega_{m0} \Phi_b^{\frac{1+m}{2m}} + \frac{4m}{(1+3m)^2} (1 - A\Omega_{m0}) \Phi_b \right]. \quad (4.180)$$

A perturbação  $\Phi_1$  é delimitada, ou seja, não há instabilidade para qualquer  $\omega^2 > 0$ . Para valores positivos de  $m$  isto é sempre garantido. Para valores negativos  $m < 0$  o segundo termo nos colchetes teve que dominar o primeiro para quebrar a condição  $\omega^2 > 0$ . Mas, desde que é impusemos  $|m| \ll 1$  isto pode acontecer apenas sob a condição extrema  $a > a_{cr}$  onde  $a_{cr}$  é um valor crítico, dado por

$$a_{cr}^{\frac{3}{1-3|m|}} = \frac{1-2|m|}{|m|} (1-|m|) \frac{A\Omega_{m0}}{1-A\Omega_{m0}}. \quad (4.181)$$

Segue-se que uma instabilidade pode ocorrer, no máximo, no limite do futuro distante  $a > a_{cr}$  onde  $a_{cr} \gg 1$  devido à dependência inversa em  $|m|$ . Este valor de  $a_{cr}$  é da mesma ordem que o fator de escala crítico derivado anteriormente em (4.174). Na Fig.4.2.6 descrevemos a dependência em (4.180) de  $\omega^2$  em  $m$  para o valor atual  $\Phi_b = 1$  (linha sólida) e para um valor constante  $\Phi_b < 1$  (linha tracejada)

que corresponde a um fator de escala no passado, ou seja,  $a < 1$ , para  $m < 0$ . A faixa cinza representa a parte instável  $\omega^2 < 0$ .

A região observacionalmente permitida para  $m$  (ver o análise estatístico da próxima seção) encontra-se inteiramente na região estável, mesmo para os valores negativos admitidos de  $m$ . Na direção do passado, a região admissíveis de valores negativos de  $m$  aumenta pois a interseção da linha tracejada com  $\omega^2$  é deslocada para a esquerda.

Com ajuda da decomposição (4.175) a taxa de Hubble (4.132) pode ser dividido em uma parte do fundo  $H_b$  e linear, Perturbação homogênea  $H_1$  sobre este fundo também. Já que com  $a^{-3} = \Phi^{\frac{1+3m}{2m}}$  a evolução temporal da taxa de Hubble (4.132) é completamente determinado pela dinâmica de  $\Phi$ , encontramos  $H_1 \propto \Phi_1$ , ou seja, a taxa de Hubble perturbada herda as propriedades de estabilidade das perturbações do campo escalar.

## 4.3 Análise Estatística

A existência da energia escura é suportada por um certo número de observações. Isso inclui (i) a idade do Universo em comparação com a idade de estrelas de baixa massa em aglomerados globulares, (ii) observações de supernovas tipo Ia (SN Ia), (iii) a radiação cósmica de fundo (BAO, em inglês), (iv) oscilações acústicas de bárions (BAO, em inglês), e (v) Estruturas em Larga Escala (LSS).

Em um Universo CDM a idade cósmica pode ser menor do que a idade das estrelas mais velhas. A energia escura pode explicar esta discrepância, pois a sua presença pode aumentar a idade cósmica.

Nosso principal objetivo nesta seção é para testar a viabilidade da expansão do fundo prevista por (4.132), com base nas observações disponíveis. Um interesse particular aqui é obter restrições sobre o parâmetro  $m$  que é responsável por sugerir desvios do modelo  $\Lambda$ CDM.

Para comparar (4.132) com os dados, restringimos os parâmetros com os seguintes conjuntos de dados observacionais.

### 4.3.1 Observações de Supernovas

A explosão de estrelas como supernovas é extremamente luminosa e libera grande quantidade de radiação. As supernovas podem ser classificadas de acordo com as linhas de absorção de elementos

químicos. Se o espectro de uma supernova inclui uma linha espectral do hidrogênio, é classificada como tipo II. Caso contrário, é chamada de Tipo I. A explosão do Tipo Ia ocorre quando a massa de uma anã branca num sistema binário ultrapassa o limite de Chandrasekhar. Uma vez que a luminosidade absoluta de tipo Ia é quase constante no pico de brilho, a distância de uma SN Ia pode ser determinada medindo a sua luminosidade observada (aparente). Assim, a SN Ia é como uma *vela padrão*, através da qual a distância de luminosidade pode ser medida por observação.

Para começar o nosso análise usamos os dados da Supernovae da compilação Joint Light-Curve Analysis (JLA) [13]. Usaremos o conjunto de dados binados facilitado pela referência [13] com a correspondente matriz covariância  $\mathbf{C}$ . Este teste se basa nos módulos de distância observados  $\mu_{obs}(z)$  de cada dados binados SN Ia em um determinado redshift  $z$ .

$$\mu_{th}(z) = 25 + 5\text{Log} \frac{d_L(z)}{Mpc}, \quad (4.182)$$

onde a distância de luminosidade, no espaço plano da métrica FLRW, é dado pela fórmula

$$d_L(z) = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (4.183)$$

Conhecend a taxa de expansão de Hubble nos permite calcular o valor teórico previsto  $\mu_{th}(z_i)$  para um redshift dado  $z_i$ . Os dados binados JLA contém 31 pontos de dados. Para uma amostra de Supernova JLA, a função  $\chi^2$  é construída de acordo com

$$\chi_{SN}^2 = (\mu_{th}(\mathbf{z}) - \mu_{obs}(\mathbf{z}))^\dagger \mathbf{C}^{-1} (\mu_{th}(\mathbf{z}) - \mu_{obs}(\mathbf{z})). \quad (4.184)$$

### 4.3.2 Restrições dos dados $H(z)$

Uma segunda fonte observacional vem da avaliação de dados de idade diferencial de galáxias antigas que evoluíram passivamente [49, 50, 91]. A taxa de expansão e a idade diferencial do Universo,  $dz/dt$ , estão ligadas pela equação

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}. \quad (4.185)$$

Os detalhes do método para calcular  $dz/dt$  da idade absoluta é dado por [87]. Os dados observacionais compreende em medições da taxa de Hubble  $H_{obs}(z_i)$  em redshift  $z_i$ , com as correspondentes incertezas

do desvio padrão  $\sigma_i$ .

Para restringir parâmetros cosmológicos  $\mathbf{p}$  do modelo de interesse nós calculamos a função  $\chi_H^2$

$$\chi_H^2(H_0, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{28} \frac{[H_{th}(z_i; H_0, \mathbf{p}) - H_{obs}(z_i)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (4.186)$$

onde  $H_{th}(z_i; H_0, \mathbf{p})$  é o valor previsto pelo modelo da taxa de Hubble.  $H_{th}(z_i; H_0, \mathbf{p}) = H_0 E(z; \mathbf{p})$ , então da equação (4.186) encontra-se

$$\chi_H^2(H_0, \mathbf{p}) = H_0^2 \sum_{i=1}^{28} \frac{E^2(z_i; \mathbf{p})}{\sigma_i^2} - 2H_0 \sum_{i=1}^{28} \frac{H_{obs}(z_i) E(z_i; \mathbf{p})}{\sigma_i^2} + \sum_{i=1}^{28} \frac{H_{obs}^2(z_i)}{\sigma_i^2}. \quad (4.187)$$

onde  $\chi_H^2$  depende dos parâmetros do modelo  $\mathbf{p}$  bem como no parâmetro de incômodo  $H_0$  cujo valor não é conhecido exatamente. Os dados usados aqui, consiste de 28 pontos de dados listados em [37], mas previamente compilado em [62].

### 4.3.3 Oscilações Acústicas de Barions (BAO)

A escala de oscilações acústicas de barions é calculado através de

$$D_V(z) = \left[ (1+z)^2 D_A^2(z) \frac{cz}{H(z)} \right]^{1/3}, \quad (4.188)$$

onde  $D_A(z)$  é a distância do diâmetro angular. Os valores para  $D_V$  tem sido reportados na literatura por várias pesquisas de galáxias. Em nossa análise nós usamos os dados em  $z + 0.2$  e  $z = 0.35$  do SDSS [72, 76], dados em  $z = 0.44, 0.6$  e  $0.73$  dos WiggleZ [15] e um ponto de dado em  $z = 0.106$  da pesquisa de 6dFGRS [14].

Para nosso análise estatístico nós construímos a função chi-quadrado de cada amostra.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(f^{th}(z_i) - f^{obs}(z_i))^2}{\sigma_i^2}, \quad (4.189)$$

onde  $f = (H, D_V)$  para os conjuntos de dados de  $H(z)$  e BAO, respectivamente. O numero de pontos de dados  $z_i, f^{obs}(z_i)$  em cada conuntos é, respectivamente,  $N_H$  e  $N_{BAO}$  enquanto que  $\sigma_i$  é o erro observacional associado a cada observação  $f^{obs}$  e  $f^{th}$  é o valor teórico previsto pelo modelo escalar-tensor.

Adicionando informações de todas as amostras de dados, podemos construir a função total do chi-

quadrado como

$$\chi_{Total}^2 = \chi_{SN}^2 + \chi_H^2 + \chi_{BAO}^2. \quad (4.190)$$

Consideramos a taxa de expansão (4.132) como um modelo com três parâmetros livres,  $H_0$ ,  $\Omega_{m0}$  e  $m$ . Nosso principal interesse é em restrições sobre o último.

Vamos fixar dois parâmetros das hipersuperfícies  $H_0$ : o prior de Planck  $H_0 = 67.8\text{km/s/Mpc}$  [3] e a recente delimitação do Hubble Space Telescope (HST)  $H_0 = 73.2\text{km/s/Mpc}$  [82]. Esses prior em  $H_0$  nos permite expandir o plano  $\Omega_{m0}$  vs  $m$ . Isto pode ser visto nos painéis da Fig.4.8 e Fig.4.9, onde a região de confiança  $1\sigma$  e  $2\sigma$  são mostrados em vermelho para os dados  $H(z)$ , para os dados de Supernovae de região azul e para dados BAO de região verde, para ambos prior de  $H_0$ . Os contornos combinados são obtidos a partir da função total do chi-quadrado (4.190) são dados pela linha solida preta. A partir destes gráficos é evidente que os valores preferidos de  $m$  dependem do prior  $H_0$ . Com o prior Planck os valores positivos de  $m$  são os preferidos, enquanto o prior HST prevê resultados em uma preferência por  $m$  negativo.

É interessante evidenciar que, em ambos os gráficos bidimensionais o modelo  $\Lambda\text{CDM}$ , expressado pela linha horizontal em  $m = 0$ , situa-se fora da região do nível de confiança  $2\sigma$  da função total ( $\chi_{Total}^2$ ).

A fim de obter restrições específicas em  $m$ , aplicamos a análise estatística Bayesiana. Com este procedimento obtemos uma função de distribuição de probabilidade unidimensional (PDF) depois de marginalizar a função likelihood.

$$\mathcal{L} = A e^{-\chi_{Total}^2(H_0, \Omega_{m0}, m)/2}, \quad (4.191)$$

sobre os parâmetros  $H_0$  e  $\Omega_{m0}$ .

O resultado do PDF para o parâmetro  $m$  é mostrado no painel da Fig.4.10. Embora os valores positivos para o parâmetro  $m$  sejam ligeiramente nosso preferido, o pico da distribuição foi obtido em  $m = 0.004_{-0.011(1\sigma) - 0.017(2\sigma)}^{+0.011(1\sigma) + 0.017(2\sigma)}$  que indica a concordância do modelo com o modelo  $\Lambda\text{CDM}$ .

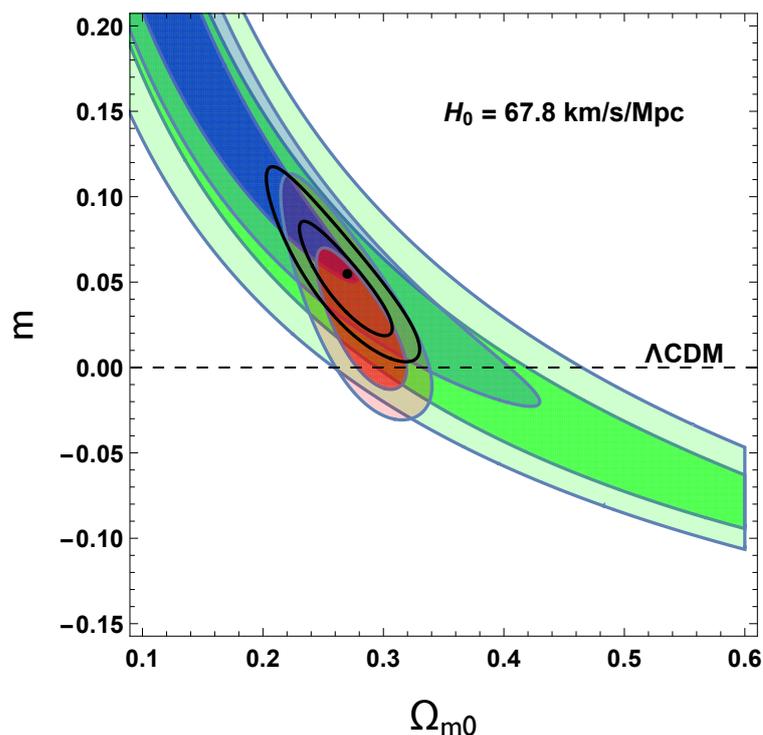


Figura 4.8: Restrições observacionais nos parâmetros do modelo. nós fixamos a hipersuperfície com o Planck prior  $H_0 = 67.8 \text{ km/s/Mpc}$  e mostrando contornos do nível de confiança  $1\sigma$  e  $2\sigma$  no plano  $\Omega_{m0}$  vs  $m$ . Apenas dados  $H(z)$  é representado pela região vermelha, dados BAO pela região verde e dados de Supernovae pela região Azul.

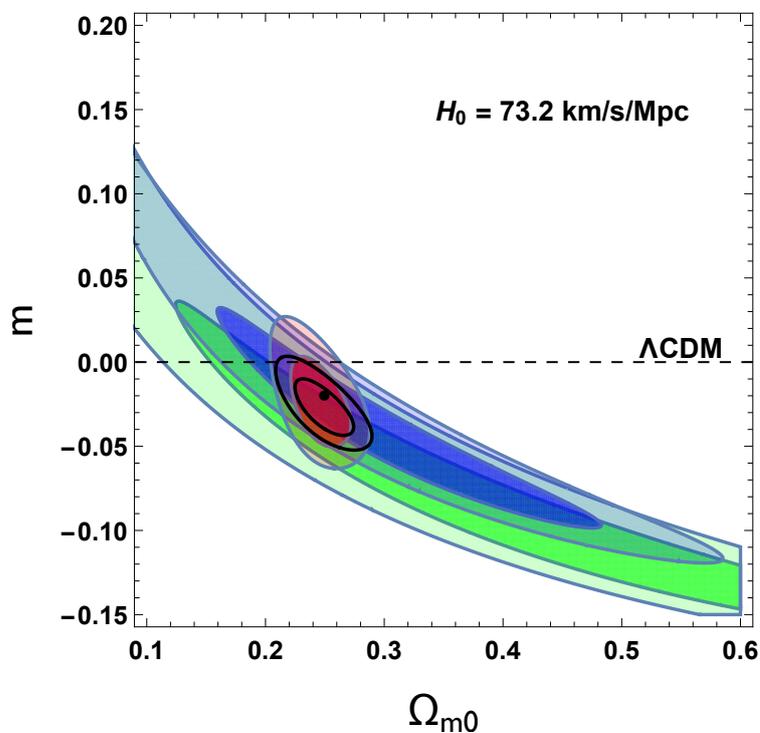


Figura 4.9: Restrições observacionais nos parâmetros do modelo. nós fixamos a hipersuperfície com o HST prior  $H_0 = 73.2 \text{ km/s/Mpc}$  mostrando contornos do nível de confiança  $1\sigma$  e  $2\sigma$  no plano  $\Omega_{m0}$  vs  $m$ . Apenas dados  $H(z)$  é representado pela região vermelha, dados BAO pela região verde e dados de Supernovae pela região Azul.

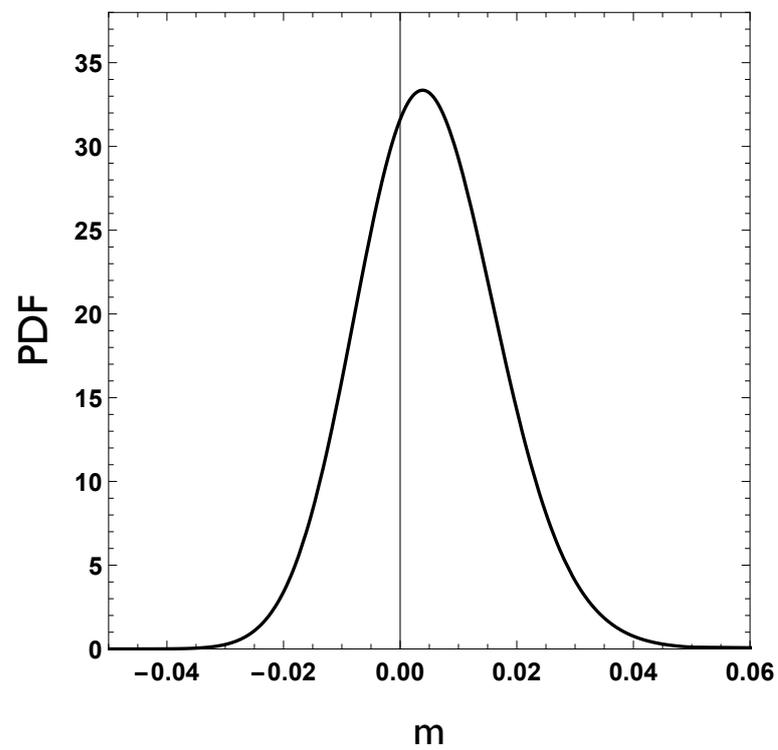


Figura 4.10: Os contornos obtidos a partir do total  $\chi^2$  são retratados pela linha sólida preta. Nesta painel nós mostramos a função de distribuição de probabilidade unidimensional (PDF) para parâmetros de  $m$  após a marginalização através de  $H_0$  e  $\Omega_{m0}$ .

---

 Capítulo **5**

# CRESCIMENTO DA MATÉRIA NO MODELO DE ENERGIA ESCURA COMO UMA MODIFICAÇÃO DA GRAVIDADE

## 5.1 Crescimento linear das perturbações de matéria

Além da história de expansão do universo, o crescimento da estrutura de grande escala pode também fornecer restrições importantes na energia escura e na gravidade modificada. A taxa de crescimento da estrutura em grande escala é derivada através das perturbações da matéria  $\delta_m = \frac{\hat{\rho}_m}{\rho_m}$ , no regime linear.

Neste capítulo introduzimos a nossa notação e apresentamos as principais ferramentas básicas que serão necessárias para estudar o crescimento linear das perturbações da matéria, no contexto de diferentes tipos de energia escura e leis gravitacionais, pelo menos em escalas onde aplica-se uma aproximação quase-estática. Desde que estamos dentro na era dominante da matéria, podemos desprezar as componentes de radiação do parâmetro de expansão de Hubble. Agora, para diferentes tipos de energia escura a equação diferencial básica de segunda ordem, que governa a dinâmica das perturbações lineares da matéria  $\delta_m$  em escalas do sub-horizontes é [8, 80, 90]

$$\ddot{\delta}_m + 2\tilde{\nu}H\dot{\delta}_m - 4\pi G\tilde{\mu}\rho_m\delta_m = 0, \quad (5.1)$$

onde  $(\cdot)$  denota a derivada com respeito ao tempo  $t$ , e  $H(a) \equiv \frac{\dot{a}}{a}$  é a taxa de Hubble. Fica claro que a natureza da energia escura esta espelhada no coeficiente de amortecimento  $\tilde{\nu}$  e o efeito da gravidade modifica é introduzido através de um resposta adimensional  $\tilde{\mu} \equiv G_{eff}/G$ , onde  $G_{eff}$  é uma “cons-

tante” gravitacional efetiva e é igual à constante gravitacional de Newton  $G$  na Relatividade Geral. As quantidades  $\tilde{\nu}$  e  $\tilde{\mu}$  são funções gerais do fator de escala e possivelmente do número de onda  $k$  das perturbações no espaço de Fourier. No caso de campos escalares como modelos de energia escura (quintessência e similares) que aderem a Relatividade Geral, portanto, temos  $\tilde{\nu} = \tilde{\mu} = 1$ ; no caso, se permitimos interações no setor escuro, em geral obtemos  $\tilde{\nu} \neq 1$  e  $\tilde{\mu} \neq 1$ . O caso para modelos inhomogêneos de energia escura [26] (dentro da RG) ou para modelos de gravidade modificada pode-se mostrar que  $\tilde{\nu} = 1$  e  $\tilde{\mu} \neq 1$ .

A seguir buscaremos as ferramentas necessárias para encontrar o crescimento das perturbações da matéria para  $\nu = 1$  e  $\mu \neq 1$  ou  $G_{eff}$ .

### 5.1.1 Perturbação escalar

O elemento de linha da perturbação escalar:

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + 2a^2 F_{,B} dt dx^i + a^2 [(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}] dx^i dx^j. \quad (5.2)$$

A equação de balanço para um fluido perfeito

$$\dot{\rho} + \Theta(\rho + p) = 0, \quad \dot{\rho} \equiv \rho_{,m} u^m. \quad (5.3)$$

As quantidades a primeira ordem

$$(\dot{\rho})^\wedge = \hat{\rho}_{,m} u^m + \rho_{,m} \hat{u}^m = \hat{\rho} u^0 + \dot{\rho} \hat{u}^0 \quad (5.4)$$

e

$$[\Theta(\rho + p)]^\wedge = \hat{\Theta}(\rho + p) + \Theta(\hat{\rho} + \hat{p}). \quad (5.5)$$

Tendo em consideração todas as expressões do elemento de linha de (5.2), então a perturbação escalar da expansão, sabendo que  $\Theta = u^\mu_{;\mu}$ , então temos:

$$\hat{\Theta} = \frac{1}{a^2}(\Delta v + \Delta \chi) - 3\dot{\psi} - 3H\phi, \quad \chi \equiv a^2(\dot{E} - F), \quad (5.6)$$

onde  $\Delta$  é o Laplaciano tri-dimensional.

Segue-se que as perturbações no balanço de energia em (5.3) pode ser escrito como

$$\left(\frac{\hat{\rho}}{\rho+p} - 3\psi\right) + \frac{3H}{\rho+p} \underbrace{\left(\hat{p} - \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}}\hat{\rho}\right)}_{\hat{p}_{nad}} + \frac{1}{a^2}(\Delta v + \Delta\chi) = 0 \quad (5.7)$$

Aqui a quantidade da perturbação invariante de calibre  $\frac{\hat{\rho}}{\rho+p} - 3\psi$  aparece naturalmente. Observe-se também a segunda expressão de (5.7) onde aparece a combinação  $\hat{p}_{nad} \equiv \hat{p} - \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}}\hat{\rho}$  que representa a parte não-adiabática da perturbação da pressão. Desaparece para perturbações adiabáticas.

Será conveniente definir a quantidade  $\zeta$ :

$$\zeta \equiv \frac{1}{3} \frac{\hat{\rho}}{\rho+p} - \psi. \quad (5.8)$$

Em grandes escalas o termo da gradiente espacial são desprezíveis.

Para grandes escalas, então temos

$$\dot{\zeta} \approx -H \frac{\hat{p}}{\rho+p}, \quad (5.9)$$

que é válido. Conseqüentemente, se as perturbações da pressão são puramente adiabáticas, a quantidade  $\zeta$  permanece aproximadamente constante:

$$\hat{p} = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}}\hat{\rho} \Rightarrow \hat{p}_{na} = 0 \quad \zeta \approx constant. \quad (5.10)$$

### 5.1.2 Fluidos imperfeitos

Voltando às considerações feitas sobre fluidos de forma geral dada na seção 3.2.2, como qualquer tensor simétrico de segunda ordem, portanto, dado o campo vetorial tipo tempo  $u^\mu$  representando a direção normal da hiper-superfície (no caso de Friedmann, as hiper-superfícies são homogêneas e isotrópicas), podemos sempre decompor o tensor de energia momento  $T_{\mu\nu}$ , sendo assim um fluido imperfeito, que pode ser dividido de acordo com

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p h_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu, \quad (5.11)$$

os primeiros dois termos da equação são conhecidas para um fluido perfeito. Os tensores  $q_\mu$  e  $\Pi_{\mu\nu}$  satisfazem os vínculos

$$\begin{aligned} q_\mu u^\mu &= 0, \\ \Pi_{\mu\nu} u^\mu &= 0, \\ \Pi_{\mu\nu} g^{\mu\nu} &= 0, \\ \Pi_{\mu\nu} &= \Pi_{\nu\mu}. \end{aligned}$$

A partir destas propriedades obtemos da equação (5.11)

$$\rho = T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu, \quad p = \frac{1}{3} h^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \quad q_\mu = -h_\mu^\nu T_{\nu\sigma} u^\sigma, \quad (5.12)$$

$$\Pi_{\mu\nu} \equiv h_m^\sigma h_\nu^\tau T_{\sigma\tau} + p h_{\mu\nu} = h_m^\sigma h_\nu^\tau T_{\sigma\tau} + \frac{1}{3} h_{\mu\nu} h^{\sigma\tau} T_{\sigma\tau}. \quad (5.13)$$

Todas as expressões acima são medidas na hiper-superfícies descritos por  $u^\mu$ ,  $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$  é o projetor-métrico e que tem por sinal  $(-1, 1, 1, 1)$ , ou seja,  $u_\mu u^\mu = -1$

## Equações de conservação

A expressão covariante da conservação total de energia obtem-se por

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (5.14)$$

Para projetar essa equação vetorial, paralela e ortogonalmente ao vetor  $u^\mu$  na direção do tempo, só multiplicamos (5.14) por  $u^\mu$ , ou seja,

$$(\rho u^\mu u^\nu)_{;\nu} u_\mu + (p h^{\mu\nu})_{;\nu} u_\mu + \Pi^{\mu\nu}_{;\nu} u_\mu + (q^\mu u^\nu + q^\nu u^\mu)_{;\nu} u_\mu = 0. \quad (5.15)$$

Desenvolvendo cada uma delas, obtem-se a equação de conservação de energia [71]

$$-\left[ \dot{\rho} + \rho\Theta + p\Theta - \dot{q}^\mu u_\mu + q^\mu_{;\mu} - (\Pi^{\mu\nu} u_\mu)_{;\nu} + \Pi^{\mu\nu} u_{\mu;\nu} \right] = 0, \quad (5.16)$$

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\Theta + \nabla_\mu q^\mu + \dot{u}_\mu q^\mu + \sigma_{\mu\nu} \Pi^{\mu\nu} = 0, \quad (5.17)$$

onde tem-se as definições  $\dot{\rho} = \rho_{;\mu} u^\mu$  e  $u^\mu_{;\nu} u_\mu = 0$ .

Agora vamos a projetar a equação (5.11) no espaço ortogonal a  $u_\mu$ , para isso multiplicamos (5.11) por  $h^\alpha_\mu$

$$T^\mu{}_{;\mu} h^\alpha_\mu = 0 \quad (5.18)$$

Por partes, temos

$$(\rho u^\mu u^\nu)_{;\nu} h^\alpha_\mu = \rho \dot{u}^\mu h^\alpha_\mu = \rho \dot{u}^\alpha, \quad (5.19)$$

$$(p h^{\mu\nu})_{;\nu} h^\alpha_\mu = p_{;\nu} h^{\alpha\nu} + p \dot{u}^\alpha, \quad (5.20)$$

$$(q^\mu u^\nu)_{;\nu} h^\alpha_\mu = \dot{q}^\mu h^\alpha_\mu + q^\alpha \Theta, \quad (5.21)$$

$$(q^\nu u^\mu)_{;\nu} h^\alpha_\mu = q^\nu \left( \frac{\Theta}{3} h^\alpha_\nu + \sigma^\alpha{}_\nu + \omega^\alpha{}_\nu \right), \quad (5.22)$$

$$\Pi^{\mu\nu}{}_{;\nu} h^\alpha_\mu = \Pi^{\alpha\nu}{}_{;\nu} + \dot{u}_\nu \Pi^{\alpha\nu} \quad (5.23)$$

Coletando os termos, obtém-se

$$(\rho + p) \dot{u}^\alpha + \nabla^\alpha p + \nabla_\nu \Pi^{\alpha\nu} + \dot{u}_\nu \Pi^{\alpha\nu} + h^\alpha_\nu \dot{q}^\nu + \left[ \omega^\alpha{}_\nu + \sigma^\alpha{}_\nu + \frac{4}{3} \Theta h^\alpha_\nu \right] q^\nu = 0. \quad (5.24)$$

No fundo homogêneo e isotrópico  $q^\mu = \dot{u}_\mu = \Pi_{\alpha\nu} = \sigma_{\alpha\nu} = \omega_{\alpha\nu} = 0$ . Para o formalismo das perturbações pode ser considerado quantidades que sejam de primeira ordem. Em perturbações lineares os produtos dessas quantidades são desconsideradas. Sob estas condições as equações de conservação são

$$\dot{\rho} + \Theta(\rho + p) + \nabla_\mu q^\mu = 0 \quad (5.25)$$

e

$$(\rho + p) \dot{u}^\alpha + \nabla^\alpha p + \nabla_\nu \Pi^{\alpha\nu} + h^\alpha_\nu \dot{q}^\nu + \frac{4}{3} \Theta h^\alpha_\nu q^\nu = 0. \quad (5.26)$$

Tendo estas equações nós podemos perturbar estas conservações de forma semelhante ao capítulo 3. Vamos a considerar o tensor de energia-momento sem fluxo de calor,

$$\hat{T}_0^0 = \hat{\rho}, \quad \hat{T}_a^0 = (\rho + p)\hat{u}_a, \quad \hat{T}_a^b = \hat{\rho}\delta_a^b + \Pi_a^b. \quad (5.27)$$

Usando a perturbação escalar dada na equação (5.6), obtem-se a equação de campo perturbada de ordem 00

$$\hat{G}_0^0 = \frac{1}{a^2}\Delta\psi - \frac{2}{a^2}H\Delta\chi + 6H\dot{\psi} + 6H^2\phi = -\kappa\hat{\rho}, \quad (5.28)$$

e assim encontrando também a componente  $0\alpha$  da métrica

$$\hat{G}_{0\alpha} \equiv 2\dot{\psi}_{,\alpha} + 2H\phi_{,\alpha} = -\kappa(\rho + p)v_{,\alpha}, \quad (5.29)$$

com o qual a equação (5.28) será equivalente a

$$\Delta\psi + H\Delta\chi - 3Ha^2\dot{\psi} - 3H^2a^2\phi = 4\pi G\hat{\rho}a^2 \quad (5.30)$$

e assim, encontramos também a componente  $0\alpha$  da equação (5.29)

$$3H\dot{\psi} + 3H^2 = -4\pi G(3H(\rho + p))va^2. \quad (5.31)$$

O primeiro termo na direita da equação (5.30) será considerado como uma quantidade invariante de calibre, sendo assim teremos o calibre do potencial gravitacional como

$$\psi^\chi = \psi + H\chi, \quad (5.32)$$

logo a equação (5.31) em (5.30), tem-se

$$\Delta\psi^\chi = 4\pi Ga^2(\hat{\rho} - 3H(\rho + p)v) = 4\pi Ga^2\hat{\rho}^c = \frac{3}{2}H^2\frac{\hat{\rho}^c}{\rho}, \quad (5.33)$$

o que dá

$$\frac{1}{a^2}\Delta\psi^\chi = 4\pi G\hat{\rho}^c \quad \Rightarrow \quad \frac{\kappa^2}{a^2}\psi^\chi = -4\pi G\rho\delta^c, \quad (5.34)$$

ou

$$\delta^c = -\frac{2}{3} \frac{\kappa^2}{a^2 H^2} \psi^c. \quad (5.35)$$

Podemos observar que o potencial gravitacional fica determinado pela perturbação da densidade total. Em escalas do sub-horizonte questões do calibre não tem importancia e podemos omitir os sobrescritos que indicam a informação sobre as deifinições do invariante de calibre.

Para encontrar a relação entre a pressão anisotrópica e os potenciais gravitacionais, vamos a considerar a métrica (5.2) no calibre  $F = E = 0$  e assim deixamos a pressão anisotrópica ser o único fenômeno de fluido imperfeito.

$$\hat{G}_a^a = 3 \left[ 2\ddot{\psi} + 6H\dot{\psi} + 2H\dot{\phi} + \phi(4\dot{H} + 6H^2) \right] + \frac{1}{a^2} (\Delta\psi - \Delta\phi) - \frac{3}{a^2} (\Delta\psi - \Delta\phi), \quad (5.36)$$

ou seja,

$$\hat{G}_a^a = 3 \left[ 2\ddot{\psi} + 6H\dot{\psi} + 2H\dot{\phi} + \phi(4\dot{H} + 6H^2) \right] - \frac{2}{a^2} (\Delta\psi - \Delta\phi). \quad (5.37)$$

Considerando a combinação

$$\begin{aligned} \hat{G}_b^a - \frac{1}{3} \delta_b^a \hat{G}_m^m &= \delta_{ab} \left[ 2\ddot{\psi} + 6H\dot{\psi} + 2H\dot{\phi} + \phi(4\dot{H} + 6H^2) \right] \\ &+ \frac{1}{a^2} (\psi_{,ab} - \phi_{,ab}) - \frac{1}{a^2} \delta_{ab} (\Delta\psi - \Delta\phi) \\ &- \frac{1}{3} \delta_b^a 3 \left[ 2\ddot{\psi} + 6H\dot{\psi} + 2H\dot{\phi} + \phi(4\dot{H} + 6H^2) \right] + \frac{1}{3} \delta_b^a \frac{2}{a^2} \delta_{ab} (\Delta\psi - \Delta\phi), \end{aligned} \quad (5.38)$$

que produz um diferença de potenciais  $\psi - \phi$

$$\hat{G}_b^a - \frac{1}{3} \delta_b^a \hat{G}_m^m = \frac{1}{a^2} \left( \partial_a \partial_b - \frac{1}{3} \delta_{ab} \Delta \right) (\psi - \phi). \quad (5.39)$$

As componentes relevantes do tensor energia-momento são

$$\hat{T}_b^a = \hat{p} \delta_{ab} + \Pi_b^a, \quad \hat{T}_a^a = 3\hat{p}. \quad (5.40)$$

Considerando a combinação

$$\hat{T}_b^a - \frac{1}{3} \delta_{ab} \hat{T}_m^m = \Pi_b^a. \quad (5.41)$$

Desde que

$$\Pi_b^a = g^{am} \Pi_{mb} = \frac{1}{a^2} \delta_{am} \Pi_{mb} = \frac{1}{a^2} \Pi_{ab} \quad (5.42)$$

e

$$\Pi_{ab} = \left( h_a^m h_b^n - \frac{1}{3} h_{ab} h^{mn} \right) \Pi_{,mn} = \left( \delta_a^m \delta_b^n - \frac{1}{3} a^2 \delta_{ab} a^{-2} \delta_{mn} \right) \Pi_{,mn} \quad (5.43)$$

ou

$$\Pi_{ab} = \left( \partial_a \partial_b - \frac{1}{3} \delta_{ab} \Delta \right) \Pi, \quad (5.44)$$

segue relação à pressão anisotrópica,

$$\hat{T}_b^a - \frac{1}{3} \delta_{ab} \hat{T}_m^m = \Pi_b^a = \frac{1}{a^2} \left( \partial_a \partial_b - \frac{1}{3} \delta_{ab} \Delta \right) \Pi. \quad (5.45)$$

A parte espacial da equação de Einstein pode ser escrito como

$$\hat{G}_b^a - \frac{1}{3} \delta_b^a \hat{G}_m^m = \kappa \left( \hat{T}_b^a - \frac{1}{3} \delta_{ab} \hat{T}_m^m \right), \quad (5.46)$$

das equações (5.39) e (5.45) encontramos

$$\psi - \phi = \kappa \Pi, \quad (5.47)$$

a diferença dos potenciais  $\psi - \phi$  é diretamente proporcional à pressão anisotrópica. Notamos que ao considerar o calibre  $F = E = 0$  as quantidades  $\psi$  e  $\phi$  coincide com os Potenciais de Bardeen  $\Psi$  e  $\Phi$ , respectivamente.

### 5.1.3 Modelando a Pressão Anisotrópica

A perturbação total da densidade de energia que determina o potencial, em principio, pode ser obtido da dinâmica do campo escalar exata (4.35) e (4.38). A primeira ordem encontra-se (ver, por exemplo, [27, 48])

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{\rho}_m}{\Phi} + \frac{1}{\kappa^2 \Phi} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\omega}{\Phi} \left[ 2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \hat{\Phi}_{,0} + \left( \frac{d\omega}{d\Phi} \frac{\hat{\Phi}}{\omega} - \frac{\hat{\Phi}}{\Phi} - 2\phi \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right] - 3H \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + H \hat{\Phi} \right) + 3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} (2H\phi + \psi) + \frac{1}{2} \frac{dU}{d\Phi} \hat{\Phi} + \frac{1}{a^2} \delta_{ab} \hat{\Phi}_{,ab} \right\}. \quad (5.48)$$

e

$$\hat{p} = \frac{1}{\Phi}(\hat{p}_m - p\hat{\Phi}) + \frac{1}{\kappa^2\Phi} \left\{ \frac{1}{2\Phi} \left[ 2 \frac{\partial\Phi}{\partial t} \frac{d\hat{\Phi}}{dt} + \left( \frac{d\omega}{d\Phi} \frac{\hat{\Phi}}{\omega} - \frac{\hat{\Phi}}{\Phi} - 2\phi \right) \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{d^2\hat{\Phi}}{dt^2} + 2H \frac{d\hat{\Phi}}{dt} - 2 \left( \frac{d^2\Phi}{dt^2} + 2H \frac{d\Phi}{dt} \right) \phi - \frac{d\Phi}{dt} (\dot{\phi} - 2\dot{\psi}) - \frac{1}{2} \frac{dU}{d\Phi} \hat{\Phi} - \frac{2}{3} \frac{\nabla^2 \hat{\Phi}}{a^2} \right\}. \quad (5.49)$$

Relações análogas podem ser obtidas para as perturbações das outras quantidades de fluidos, bem como para as suas contrapartes das componentes individuais [27, 48]. Conseqüentemente, iremos fortalecer nosso ponto a ser estudado na qual, em adiante, vamos a considerar uma abordagem que é independente dos detalhes do potencial.

Em contrapartida, a perturbação da densidade de energia comóvel  $\delta$  obedece as equações de conservação da dinâmica de fluidos de  $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$  em primeira ordem. Em geral, na presença de perturbações da pressão, não haverá equação fechada para  $\delta^c$ . A dinâmica de  $\delta^c$  será acoplado a perturbações relativas (entropia) dentro do sistema. Além disso, a dinâmica de fluidos não especifica a pressão anisotrópica. Sem entrar nos detalhes dessa dinâmica acoplada, é direto ver como as densidades de perturbações total e relativas estão relacionadas às perturbações de matéria observacionalmente relevantes.

### Perturbação relativa da entropia

Perturbações com a propriedade  $\frac{\hat{p}}{\hat{\rho}} = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}}$ , são chamados de perturbações adiabáticas.

Se  $p = p(\rho)$ , as perturbações são necessariamente adiabáticas. No caso geral, as perturbações podem ou não podem ser adiabáticas. Em último caso, as perturbações podem ser divididas em uma componente adiabática e não adiabática ou uma *perturbação da entropia*. Uma perturbação da entropia é uma perturbação na relação de entropia por partícula.

Para perturbações adiabáticas nós temos assim

$$c_s^2 = \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}} = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \Rightarrow \frac{\hat{\rho}_i}{\hat{\rho}_j} = \frac{\dot{\rho}_i}{\dot{\rho}_j}, \quad (5.50)$$

onde  $c_s^2$  é a velocidade do som. Se não existe transferencia de energia entre as componentes no fundo, a equação de continuidade da energia é satisfeita por eles separadamente,

$$\dot{\rho}_i = -3H(\rho_i + p_i) \equiv -3H(1 + w_i)\rho_i, \quad (5.51)$$

assim para perturbações adiabáticas

$$\frac{\delta_i}{1+w_i} = \frac{\delta_j}{1+w_j}. \quad (5.52)$$

Nós podemos definir uma *perturbação relativa da entropia* entre dois componentes do fluido  $i$  e  $j$ , que acaba por ser um indicador invariante de calibre devido à forma como as perturbações da densidade  $\hat{\rho}_i$  se transformam. Este é realmente o tipo de quantidade mais comum chamado na literatura de “perturbação da entropia” [51, 54, 59]

$$S_{ij} \equiv -3H \left( \frac{\hat{\rho}_i}{\dot{\rho}_i} - \frac{\hat{\rho}_j}{\dot{\rho}_j} \right) = \frac{\delta_i}{1+w_i} - \frac{\delta_j}{1+w_j}, \quad (5.53)$$

para descrever um desvio no caso adiabático.

Então nós podemos escrever as perturbações relativas entre componentes  $x$  e  $m$  descritas como uma combinação (invariante de calibre)  $\frac{\delta_x}{1+w_x} - \frac{\delta_m}{1+w_m}$  (com  $\delta_x = \frac{\hat{\rho}_x}{\rho_x}$  e  $\delta_m = \frac{\hat{\rho}_m}{\rho_m}$ ). Portanto, defimos uma perturbação realtiva da densidade de energia  $S_m$  como diferencia entre a perturbações total e da matéria pura, mas como a pressão da matéria é zero, então será possible usar [29, 41, 45]

$$S_m = \frac{\delta^c}{1+w} - \delta_m^c, \quad (5.54)$$

onde  $\delta_m^c = \delta_m - 3H(1+w)v$ . Por enquanto mantemos a sobreescrita  $c$  para indicar que a quantidade correspondente é um invariante de calibre e definido com respeito ao potencial de velocidade comóvel  $v$ . Uma descrição completa da dinâmica de perturbação em primeira ordem pode ser escrita com um sistema acoplado de equações de segunda ordem de  $\delta^c$  e  $S_m$  como é mostrado em [29, 101].

## Perturbação da Pressão

Neste contexto a (geralmente não-adiabática) perturbação da pressão isotrópica que é uma perturbação da pressão efetiva de componente  $x$  esta associada à densidade de energia através do quadrado da velocidade do som em concordância com  $\hat{p}_x^c = \hat{p}^c = c_x^2 \hat{\rho}_x^c$ , onde a velocidade do som é definida como o coeficiente que relaciona as perturbações de pressão e perturbações de densidade de energia é uma parâmetro fenomenológico. Geralmente a adiabaticidade no sistema de 2 componentes, uma componente  $m$  (sem pressão) e  $x$ , podendo ser determinado a expressão da perturbação de pressão da componente  $x$  sendo ela dependente explicitamente da perturbação total da densidade de energia e a

perturbação relativa da entropia  $S_m$ , com

$$\hat{\rho}_x^c = \hat{\rho}^c - \hat{\rho}_m^c = \rho \delta^c - \rho_m \delta_m^c \quad e \quad \delta_m^c = \frac{\delta^c}{1 + w} - S_m \quad (5.55)$$

Para obter a perturbação da pressão isotrópica, utilizamos o segundo termo do lado esquerdo da equação (5.7) tem-se

$$\hat{p}_{nad} = \hat{p} - \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \hat{\rho} = \hat{p}^c - \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \hat{\rho}^c = \hat{p}_x^c - \frac{\dot{p}_x}{\dot{\rho}_x + \dot{\rho}_m} (\hat{\rho}_m^c + \hat{\rho}_x^c) = \hat{p}_x^c - \frac{\dot{p}_x}{\dot{\rho}_x \left(1 + \frac{\dot{\rho}_m}{\dot{\rho}_x}\right)} (\hat{\rho}_m^c + \hat{\rho}_x^c), \quad (5.56)$$

com  $\dot{\rho}_x = -\Theta(\rho_x + p_x)$  e  $\dot{\rho}_m = -\Theta\rho_m$ , obtem-se a perturbação da pressão não-adiabática como

$$\hat{p}_{nad} = \hat{p}_x^c - \frac{\dot{p}_x (\rho_x + p_x)}{\dot{\rho}_x (\rho + p)} (\hat{\rho}_m^c + \hat{\rho}_x^c) \quad (5.57)$$

$$= \hat{p}_x^c - \frac{\dot{p}_x (\rho_x + p_x)}{\dot{\rho}_x (\rho + p)} \hat{\rho}_m^c - \frac{\dot{p}_x}{\dot{\rho}_x} \left(1 - \frac{\rho_m}{\rho + p}\right) \hat{\rho}_x^c \quad (5.58)$$

$$= \hat{p}_x^c - \frac{\dot{p}_x}{\dot{\rho}_x} \hat{\rho}_x^c + \frac{\dot{p}_x}{\dot{\rho}_x} \frac{\rho_m}{(\rho + p)} \hat{\rho}_x^c - \frac{\dot{p}_x (\rho_x + p_x)}{\dot{\rho}_x (\rho + p)} \hat{\rho}_m^c \quad (5.59)$$

$$\hat{p}_{nad} = \hat{p}_x^c - \frac{\dot{p}_x}{\dot{\rho}_x} \hat{\rho}_x^c + \rho_m \frac{(\rho_x + p_x)}{(\rho + p)} \frac{\dot{p}_x}{\dot{\rho}_x} \left[ \frac{\hat{\rho}_x^c}{\rho_x + p_x} - \frac{\hat{\rho}_m^c}{\rho_m} \right]. \quad (5.60)$$

E em termos da perturbação da pressão total  $\hat{p}^c$

$$\hat{p}^c = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \hat{\rho}^c + \hat{p}_{nad} = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \hat{\rho}^c + \hat{p}_x^c - \frac{\dot{p}_x}{\dot{\rho}_x} \hat{\rho}_x^c + \rho_m \frac{(\rho_x + p_x)}{(\rho + p)} \frac{\dot{p}_x}{\dot{\rho}_x} \left[ \frac{\hat{\rho}_x^c}{\rho_x + p_x} - \frac{\hat{\rho}_m^c}{\rho_m} \right]. \quad (5.61)$$

Primeiro vamos a considerar que o último termo em (5.61), com  $\hat{\rho}_x^c = \hat{\rho}^c - \hat{\rho}_m^c$  e considerando a equação (5.54) isto pode ser escrito como

$$\frac{\hat{\rho}_x^c}{\rho_x + p_x} - \frac{\hat{\rho}_m^c}{\rho_m} = \frac{\rho + p}{\rho_x + p_x} \left( \frac{\hat{\rho}^c}{\rho + p} - \frac{\hat{\rho}_m^c}{\rho_m} \right) = \frac{\rho + p}{\rho_x + p_x} \left( \frac{\hat{\rho}^c}{\rho + p} - \delta_m^c \right) = \frac{\rho + p}{\rho_x + p_x} S_m. \quad (5.62)$$

Aqui será necessário suposições sobre  $\hat{p}_x^c$ , pelo qual assumimos

$$\hat{p}_x^c = c_x^2 \hat{\rho}_x^c. \quad (5.63)$$

Então a equação (5.61) torna-se

$$\hat{p}^c = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \rho \delta^c + \left( c_x^2 - \frac{\dot{p}_x}{\dot{\rho}_x} \right) \hat{\rho}_x^c + \rho_m \frac{\dot{p}_x}{\dot{\rho}_x} S_m. \quad (5.64)$$

No próximo passo eliminamos  $\hat{\rho}_x^c$  contida no segundo termo na equação anterior, por

$$\hat{\rho}_x^c = \hat{\rho}^c - \hat{\rho}_m^c = (\rho + p) \left[ \frac{\hat{\rho}^c}{\rho + p} - \frac{\rho_m}{\rho + p} \delta_m^c \right], \quad (5.65)$$

considerando a equação (5.54) e substituir no termo entre chaves na anterior equação

$$\hat{\rho}_x^c = (\rho + p) S_m + (\rho + p) \delta_m^c - \rho_m \delta_m^c = (\rho + p) S_m + (\rho_x + p_x) \left( \frac{\rho \delta^c}{\rho + p} - S_m \right) \quad (5.66)$$

$$\hat{\rho}_x^c = \rho_m S_m + \left( \frac{\rho_x + p_x}{\rho + p} \right) \rho \delta^c. \quad (5.67)$$

Substituindo na equação (5.64), obtemos a perturbação da pressão total

$$\hat{p}^c = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \rho \delta^c + \left( c_x^2 - \frac{\dot{p}_x}{\dot{\rho}_x} \right) \left[ \rho_m S_m + \left( \frac{\rho_x + p_x}{\rho + p} \right) \rho \delta^c \right] + \rho_m \frac{\dot{p}_x}{\dot{\rho}_x} S_m \quad (5.68)$$

$$\hat{p}^c = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \rho \delta^c + c_x^2 \rho_m S_m + c_x^2 \left( \frac{\rho_x + p_x}{\rho + p} \right) \rho \delta^c - \frac{\dot{p}_x}{\dot{\rho}_x} \left( \frac{\rho_x + p_x}{\rho + p} \right) \rho \delta^c, \quad (5.69)$$

na equação anterior podemos usar a relação  $\frac{\dot{p}_x}{\dot{\rho}} = \left( \frac{\rho_x + p_x}{\rho + p} \right)$ , onde o primeiro e o último termo da direita são anuladas, para assim obter

$$\hat{p}^c = c_x^2 \left( \frac{\rho_x + p_x}{\rho + p} \right) \rho \delta^c + c_x^2 \rho_m S_m. \quad (5.70)$$

Observando claramente que ambas expressões 5.55 e 5.70 estão determinados pelas componentes  $\delta^c$  e  $S_m$ . Com um parâmetro de velocidade de som efetiva  $c_x^2$ . O primeiro termo em (5.70) representa a parte adiabática (isotrópica) da perturbação de pressão, o segundo termo é responsável pela não-adiabaticidade.

A parte não-adiabática torna-se

$$\hat{p}_{nad} = \left( c_x^2 \frac{\rho_x + p_x}{\rho + p} - \frac{\dot{p}_x}{\dot{\rho}} \right) \rho \delta^c + c_x^2 \rho_m S_m. \quad (5.71)$$

No caso especial de uma componente adiabática  $x$ , o primeiro termo desaparece e encontramos

$$\hat{p}_{nad} = c_x^2 \rho_m S_m = \frac{\dot{p}_x}{\dot{\rho}_x} \rho_m S_m \quad (c_x^2 = \frac{\dot{p}_x}{\dot{\rho}_x}), \quad (5.72)$$

ou seja, a parte não-adiabática é inteiramente devido às perturbações relativas da densidade de energia  $S_m$ . Contudo, podemos dizer que as perturbações de pressão estão determinados pela solução do

sistema acoplado por  $\delta^c$  e  $S_m$ .

Para um sistema fechado, suposições sobre pressão anisotrópica são necessárias. Num sentido estrito, todas as quantidades  $\delta$ ,  $\hat{p}$  e também a pressão anisotrópica  $\Pi$  serão dadas em termos das perturbações  $\hat{\Phi}$  do campo escalar básico [9, 27, 48] de forma maneira semelhante à perturbação da densidade de energia  $\hat{\rho}$  é dada em fórmula (5.48). Resolvendo a equação para  $\Phi$  em primeira ordem determinará as quantidades do fluido efetivo. No entanto, o procedimento atual não depende da dinâmica exata do campo escalar. Em vez disso, usamos as equações de conservação da dinâmica de fluidos que não requerem a dinâmica exata do campo escalar. Como já mencionado, isso é possível devido à circunstância de que a dinâmica gravitacional que é relevante para as perturbações da matéria não depende explicitamente do campo escalar. A dinâmica gravitacional só depende do campo escalar através da energia-momentum do meio cósmico.

#### 5.1.4 Relação entre os potenciais

A perturbação da matéria estão relacionados com a perturbação da densidade total  $\delta^c$  e à perturbações relativa  $S_m$  por

$$\delta_m^c = \frac{\delta^c}{1+w} - S_m. \quad (5.73)$$

Formalmente, esta é uma identidade de (5.54). Onde a dinâmica cosmológica é descrita por um sistema acoplado de equações de segunda ordem para  $\delta^c$  e  $S_m$ , então, a relação (5.73) pode ser usado para encontrar as perturbações da matéria a partir das soluções deste sistema [45, 101]. Parece natural supor que a pressão anisotrópica pode ser expressa em termos da combinação da perturbação de dois variáveis independentes  $\delta^c$  e  $S_m$ . Isto é uma relação semelhante apresentada em (5.70) para a pressão isotrópica. Portanto, escrevemos uma ansatz para a pressão anisotrópica

$$\frac{\pi G}{3}\Pi = \mu\delta^c + \nu\frac{\rho_m}{\rho}S_m, \quad (5.74)$$

com coeficientes  $\mu$  e  $\nu$  que deve ser determinado observacionalmente. Este ansatz é semelhante à relação dada em (5.70) em que a velocidade do som efetivo da componente da energia escura é introduzida. Repara que os coeficientes  $\mu$  e  $\nu$  tem um comportamento semelhante ao quadrado da velocidade do som expressões em (5.70). Com este ansatz é possível fechar o sistema para  $\delta^c$  e  $S_m$ . A relação (5.74) é inteiramente fenomenológico mas nos permitirá colocar limites sobre a magnitude da pressão anisotrópica.

Agora,  $\Pi$  é conhecido para dar origem a uma diferença nos potenciais  $\phi$  e  $\psi$  como em (5.47), que vem da componente espacial da equação de campo, assim, também consideramos um calibre longitudinal  $\chi$  na equação (5.35). Portanto, segue que a equação (5.74) poderá ser expresso como

$$\psi - \phi = 3 \left( \mu \delta^c + v \frac{\rho_m}{\rho} S_m \right). \quad (5.75)$$

Esta é reescrita como

$$\psi - \phi = 3 \left[ \mu + v \frac{\rho_m}{\rho} \frac{S_m}{\delta^c} \right] \delta^c = 3 \left[ \mu + v \frac{\rho_m}{\rho} \frac{S_m}{\delta^c} \right] \left( -\frac{2}{3} \frac{\kappa^2}{a^2 H^2} \right) \psi \quad (5.76)$$

ou, especificamente

$$\psi - \phi = -2 \frac{\kappa^2}{a^2 H^2} \left[ \mu + v \frac{\rho_m}{\rho} \frac{S_m}{\delta^c} \right] \psi, \quad (5.77)$$

o que resulta em

$$\phi = \left[ 1 + 2 \frac{\kappa^2}{a^2 H^2} \left( \mu + v \frac{\rho_m}{\rho} \frac{S_m}{\delta^c} \right) \right] \psi. \quad (5.78)$$

A diferença nos potenciais gravitacionais  $\phi$  e  $\psi$ , e as consequências para o crescimento da matéria, tem sido amplamente utilizadas para discriminar a gravidade modificada da relatividade geral com a ajuda de diferentes parametrizações para o deslizamento gravitacional  $\frac{\psi}{\phi}$  [10, 12, 17, 42, 46, 79, 89, 90, 92]. Enfatizamos, no entanto, que (5.78) não é apenas uma parametrização do deslizamento gravitacional  $\frac{\psi}{\phi}$ . O conhecimento dessa relação dos potenciais requer a solução de toda a dinâmica de perturbação do sistema acoplado para  $\delta^c$  e  $S_m$ . A expressão geral para  $\delta^c$  é

$$\delta^c = \frac{\rho_m}{\rho} \delta_m^c + \frac{\rho_x}{\rho} \delta_x^c \quad (5.79)$$

e tendo também a relação em (5.54). Em geral, é preciso resolver o sistema acoplado para  $\delta^c$  e  $S_m$  para obter as perturbações da matéria em (5.73).

Em muitos estudos da taxa de crescimento da perturbação de matéria a perturbação de energia escura são triviais. Isto corresponde ao assumir  $\delta_x^c = 0$  na equação anterior. No entanto, essa suposição será estritamente justificado para modelos de  $\Lambda$ CDM. Na dinâmica de modelos de energia escura  $\delta_x^c$  é diferente de zero e as perturbações são acopladas à perturbações de energia escura. Negligenciando esta influência, pode resultar em uma interpretação incorreta de dados observacionais [85].

Por outra parte, para modelos específicos o acoplamento pode, de fato, ser mostrado como triviais em pequenas escalas [101]. Afim de obter uma equação de segunda ordem para  $\delta_m^c$ , devemos assumir

aqui uma relação simples de proporcionalidade  $\delta_x^c = y\delta_m^c$  entre  $\delta_x^c$  e  $\delta_m^c$ , onde  $y$  é uma constante de proporcionalidade. Para um valor diferente de zero, e de primeira ordem, a perturbação de energia escura serão relevantes.

Com esta simplificação drástica efetuada ao assumir o fator proporcionalidade  $y$  como o parâmetro de magnitude relativa das perturbações de energia escura,

$$\delta_x^c = y\delta_m^c. \quad (5.80)$$

O fator  $y$  é esperado para ser dependente da escala,<sup>1</sup> mas em nossa aproximação severa podemos ignorar isso.

Então

$$\delta^c = \left( \frac{\rho_m}{\rho} + y \frac{\rho_x}{\rho} \right) \delta_m^c = (\Omega_m + y(1 - \Omega_m)) \delta_m^c, \quad \Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho} \quad (5.82)$$

e de (5.54), obtem-se

$$S_m = - \left( \frac{\rho_x + p_x}{\rho + p} - y \frac{\rho_x}{\rho + p} \right) \delta_m^c. \quad (5.83)$$

Agora, a relação relevante  $\frac{\rho_m}{\rho} \frac{S_m}{\delta^c}$  em (5.78) reduz a

$$\frac{\rho_m}{\rho} \frac{S_m}{\delta^c} = - \frac{\rho_x + p_x}{\rho + p} + y \frac{1 - \Omega_m}{\Omega_m + y(1 - \Omega_m)} \quad (5.84)$$

substituindo em (5.78), obtemos que esta equação torna-se  $\frac{\phi}{\psi}$

$$\frac{\phi}{\psi} = 1 + 2 \frac{k^2}{a^2 H^2} \left[ \mu - \nu \left( \frac{\rho_x + p_x}{\rho + p} - y \frac{1 - \Omega_m}{\Omega_m + y(1 - \Omega_m)} \right) \right]. \quad (5.85)$$

<sup>1</sup>Na literatura podemos encontrar para a matéria [68, 85], e durante a dominação da matéria, a perturbação da densidade de perturbação comóvel é extremamente simples,  $\delta_m^c = \delta_m^c(a=1)a$ . Para a energia escura encontra-se

$$\delta_x^c = \frac{1 + w_x}{1 - 3w_x} \delta_m^c. \quad (5.81)$$

Dependendo dos valores da equação do parâmetro de estado  $w_x$  e da velocidade do som  $c_x^2$ , o contraste da densidade de energia escura pode ser da ordem  $\delta_x^c \sim 0.06\delta_m^c$  e da ordem de  $\delta_x^c \sim 0.01\delta_m^c$ , para  $w_x = -0.8$  e  $w_x = -0.95$ , respectivamente (é claro se  $w_x = -1$  estamos lidando com uma constante cosmológica e, portanto, por definição não tem perturbações). Isso nós leva a intuir que a força relativa das densidades de perturbações comóveis na energia escura e matéria é constante em grandes escalas

O parâmetro  $y$  quantifica o papel das perturbações da componente geométrica da energia escura. Para  $y = 0$  não existem perturbações da energia escura ( $\delta_x = 0$ ). Ou seja, a relação dos potenciais será

$$\frac{\phi}{\psi} = 1 + 2 \frac{\kappa^2}{a^2 H^2} \left( \mu - \nu \frac{\rho_x + p_x}{\rho + p} \right), \quad (\delta_x = 0) \quad (5.86)$$

Observamos também que nesta aproximação o termo  $\nu$  só contribui para  $m \neq 0$ . Se, além disso,  $p_x = -\rho_x$ , que corresponde a  $m = 0$ , o caso do modelo  $\Lambda$ CDM com  $\phi = \psi$  é recuperado. Com a suposição de (5.80) as perturbações da matéria pode ser calculado sem resolver explicitamente o sistema acoplado das equações de perturbação. Em muitos estudos, as perturbações da energia escura foram assumidas a ser desprezíveis, pelo menos, em escalas do sub-horizonte. O cálculo explícito confirmou isso para casos especiais [101]. Mas em qualquer teoria consistente da dinâmica da energia escura, essas perturbações aparecem naturalmente e devem ser levadas em consideração [2, 5, 7, 32, 53, 65, 83, 84, 88].

### 5.1.5 Perturbações da Matéria

Na literatura, as perturbações da matéria são tratadas de forma diferente. Nas abordagens usuais, as equações de Poisson (modificadas) são diretamente acopladas às equações de conservação da matéria. O ponto de partida é a conservação de energia a primeira ordem para a matéria

$$\hat{\rho}_m + \dot{\rho}_m \hat{u}^0 + \hat{\Theta}_m \rho_m + \Theta \hat{\rho}_m = 0, \quad (5.87)$$

ou

$$\delta_m + 3H\phi + \hat{\Theta}_m = 0, \quad (5.88)$$

onde a perturbação de  $\Theta_m \equiv u_{m;\alpha}^\alpha$  (parte da matéria) é dado explicitamente por (5.6), alternativamente pode ser expressada por

$$\hat{\Theta}_m = -\frac{\kappa^2}{a^2} (v_m - \chi) - 3\dot{\psi} - 3H\phi. \quad (5.89)$$

Então, a conservação de energia da matéria torna-se

$$\delta_m - 3\dot{\psi} - \frac{k^2}{a^2} (v_m + \chi) = 0. \quad (5.90)$$

A conservação do momento a primeira ordem da componente da matéria produz

$$\dot{v}_m = -\phi. \quad (5.91)$$

Diferenciando a equação de conservação da energia em (5.90), usando a conservação do momento em (5.91), e só assim podemos ter novamente a conservação da energia, a qual resulta em

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m + \frac{k^2}{a^2}(\phi + \chi) = 3(\ddot{\psi} + 2H\dot{\psi}). \quad (5.92)$$

A primeira ordem isso ainda é extato. Considerando um calibre  $\chi = 0$  e com a aproximação quase-estática do sub-horizonte  $\frac{k}{aH} \gg 1$ , obtemos da última equação acima uma que pode ser aproximada por

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m + \frac{k^2}{a^2}\phi \approx 0. \quad (5.93)$$

Em nossa notação a equação de Poisson (modificada) dada em (5.34) para  $\psi$  será

$$\frac{\kappa^2}{a^2}\psi = -4\pi G\rho\delta. \quad (5.94)$$

Em escalas do sub-horizonte podemos largar o sobrescrito  $c$  uma vez que a questão do calibre são dadas como irrelevantes. com (5.94) temos a equação de Poisson para  $\psi$ , mas para encontrar a perturbação da densidade de matéria precisamos a equação de Poisson para  $\phi$ . Com a suposição

$$\psi = \gamma\phi \quad (5.95)$$

nós teremos

$$\frac{\kappa^2}{a^2}\phi = -4\pi G_{eff}\rho\delta, \quad G_{eff} = \frac{G}{\gamma}. \quad (5.96)$$

e conseqüentemente, temos

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi\frac{G}{\gamma}\rho\delta = 0. \quad (5.97)$$

Coma a nossa relação (5.82) isto resulta numa equação fechada para  $\delta_m$ ,

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G_{eff}\rho\Omega_m\delta_m = 0. \quad (5.98)$$

Ma literatura o efeito da energia escura é introduzido através do termo  $2H$  que é o amortecimento de Hubble e o efeito da gravidade modificada é introduzida através da “contante” gravitacional efetiva  $G_{eff}$ . Mas, em nossa abordagem, também usamos as equações de conservação de primeira ordem para a matéria, mas de uma maneira diferente.

Por tanto, com a combinação das relações (5.82) e (5.85) a “constante” gravitacional efetiva  $G_{eff}$  é

$$G_{eff} = \left[ 1 + y \frac{(1 - \Omega_m)}{\Omega_m} \right] \left[ 1 + 2 \frac{k^2}{a^2 H^2} \left( \mu - \nu \left( \frac{\rho_x + p_x}{\rho + p} - y \frac{1 - \Omega_m}{\Omega_m + y(1 - \Omega_m)} \right) \right) \right] G. \quad (5.99)$$

Observamos que no caso mais simples (não nosso caso) podemos despreziar as perturbações da energia escura,  $\delta_x$ . Só então obtemos uma equação de maneira simples para (5.98), onde é considerada a combinação da em (5.86) para obter o  $G_{eff}$ , que torna-se

$$G_{eff} = \left[ 1 + 2 \frac{k^2}{a^2 H^2} \left( \mu - \nu \frac{\rho_x + p_x}{\rho + p} \right) \right] G, \quad (\delta_x = 0). \quad (5.100)$$

Então, observamos que neste caso nós podemos considerar também o feito em nossa abordagem, ao ser considerada a equação de conservação a primeira ordem para a matéria, mas de uma maneira diferente. Para encontrar as perturbações da matéria no caso de  $\delta_x = 0$ , usamos a equação dada em (5.98), e assim, podemos encontra-la usando a nova relação obtida em (5.100) que deveria garantir as perturbações da matéria, nesta abordagem.

Agora, voltando a nossa abordagem, As perturbações da matéria calculadas em (5.98) deve coincidir com as perturbações de nossa abordagem.

Tendo

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2}(1 + w) \quad (5.101)$$

Da relação (5.99) observamos que o acoplamento gravitacional efetivo depende do fator de escala. A equação mestre (5.98) para perturbações no regime em pequenas esclas, escalas no sub-horizonte (isto é, número de onda  $k$  grande) pode ser resolvido trocando a variável independente do tempo para o fator de escala  $a$ , então, nós temos

$$\delta_m'' + \frac{3}{2}(1 - w) \frac{\delta_m'}{a} - \frac{3}{2} \frac{G_{eff}}{G} \Omega_m \frac{\delta_m}{a^2} = 0, \quad (5.102)$$

onde a linha significa a derivada em relação ao fator de escala  $a$ .

Frequentemente, a equação (5.102) pode ser escrito em termos de uma derivada logarítmica:

$$\frac{d^2 \delta_m}{d \ln a^2} + \left( 2 + \frac{dH/d \ln a}{H} \right) \frac{d \delta_m}{d \ln a} - \frac{3}{2} \frac{G_{eff}}{G} \Omega_m \delta_m = 0. \quad (5.103)$$

Na ausência de pressão anisotrópica ( $\mu = \nu = 0$  um  $\nu$  positivo aumenta  $G_{eff}$ , um  $\nu$  negativo diminui-lo. Um  $\mu$  negativo tende a reduzir  $G_{eff}$ . Para  $\frac{k^2}{a^2 H^2} |\mu| > \frac{1}{2}$  pode até tornar-se negativo. O impacto do termo  $\nu$  é esperado a ser pequeno, pois  $\rho_x + p_x$  é próximo de zero. Para escalas de ordem de  $k \approx 0.1 h \text{Mpc}^{-1}$  o valor atual do fator  $\frac{k^2}{a^2 H^2}$  é (restaurando apropriadamente as unidades)  $\frac{k^2 c^2}{H_0^2} \approx 1.8 \cdot 10^5$ . Consequentemente, uma pressão anisotrópica com  $|\mu|$  da ordem de  $|\mu| \approx 10^{-6}$  deve ter um impacto notável no acoplamento gravitacional efetivo.

### 5.1.6 Importância das perturbações de energia escura

Para poder explicar a importância das perturbações da energia escura, vamos começar apresentando pelo fator de crescimento linear da perturbação de matéria  $g \equiv \frac{\Delta_m}{a}$  que parametriza a estrutura de crescimento na matéria escura, além disso o crescimento linear  $\Delta_m = \frac{\delta_m(a)}{\delta_m(a=1)}$ . Aqui vamos supor que, em vez de normalizar as perturbações da densidade de matéria para um alto redshift, vamos calibrar por sua amplitude atual. Isso se assemelha a corrigir o  $\sigma_8$  5.108. Embora as observações não tenham determinado isso com precisão, podemos explorar as consequências.—Na literatura, por exemplo [47, 53, 66] encontramos que o fator de crescimento é normalizado de modo que  $g = 1$  para  $a \ll 1$  (usando que  $\Delta_m \propto a$  durante a dominação da matéria e em escalas do sub-horizonte).— Assim, com o intuito de obter o fator de crescimento normalizado por seus valores de hoje, assumimos que  $g = 1$  para  $a = 1$ .

Começamos notando que o fator de crescimento não é unicamente determinado pela história de expansão do Universo (e, portanto,  $w_x$ ). Ainda, os principais efeitos da energia escura seja mudar o  $H$ , conduzindo a  $g > 1$  [56] em tempos tardios, existe uma ligação adicional através do potencial gravitacional  $\phi$ . Diferentes perturbações de energia escura levará a uma evolução diferente de  $\phi$ , que pode modificar o comportamento de  $g$ . Convencionalmente se assume que perturbações de energia escura são triviais [75].

Na Fig.5.1.6 mostramos como o fator de crescimento da matéria muda em resposta a grandes perturbações de energia escura.

Um aumento das perturbações de energia escura levam a perturbações da métrica melhoradas. A matéria, por sua vez cai nos poços potenciais criados pela energia escura, levando a um aumento do

fator de crescimento. Mesmo que  $g$  não seja exclusivamente determinado por  $H$  em (5.98), ou pela equação de estado  $w_x$ , percebemos que isso sempre *augmenta* a medida que diminuimos a pressão anisotrópica  $\Pi$ . Observando a evolução da equação (5.98) e (5.100) para  $\Pi = 0$  ( $\Leftrightarrow \phi = \psi$ ), no painel direito da Fig.5.1.6 notamos que o fator de crescimento das perturbações da matéria fica determinado pelos valores de  $m$ , e justamente quando o redshift  $z \approx 3$  verifica-se claramente que suprime o fator crescimento.

Ao considerar a pressão anisotrópica aparece uma modificação somente no setor gravitacional, a qual é representada pelas perturbações da métrica. A matéria não se importa se as perturbações da métrica são geradas (além de sua própria contribuição) por uma modificação da gravidade ou por um fluido adicional de energia escura. Sua resposta é de forma idêntica. Dito de outra forma, se a energia escura e matéria escura em conjunto podem criar  $\phi$  e  $\psi$  de (5.86) o fator de crescimento será o mesmo que no cenário da teoria escalar-tensorial.

Então, vemos imediatamente que, para gerar essas perturbações métricas, precisaremos introduzir um pressão anisotrópica onde  $\phi \neq \psi$ . Isto aparenta ser uma maneira muito genérica de modificar a gravidade que também está presente no modelo escalar-tensorial. No painel esquerdo da Fig.5.1.6 nota-se que o fator de crescimento é suprimido pela extensão do modelo  $\Lambda$ CDM dentro do redshift  $z \approx 2$  como mostra a a linha tracejada de cor verde, assim como também encheramos uma queda do fator de crescimento para valores  $|\nu| = 10^{-5}$ . De forma similar se negligenciamos a extensão do modelo  $\Lambda$ CDM (para valores de  $m = 0$ ) observa-se que o fator de crescimento aumenta e diminui de acordo com a contribuição da pressão anisotrópica, sendo que diminui ao considerar  $\mu = +10^{-7}$  dada pela linha vermelha tracejada e aumenta quando  $\mu = -10^{-7}$  linha azul tracejada.

Seguindo o mesmo raciocínio, e tendo em consideração o efeito que gera a perturbação da energia escura dada em (5.79) no fator de crescimento, e negligenciando a pressão anisotrópica (5.99) ocorre a alteração do setor gravitacional. Ao examinar o efeito da perturbação da energia escura contida em  $y$ , e desconsiderando ainda qualquer outra contribuição (além do modelo de extensão  $\Lambda$ CDM), o setor gravitacional declarado pela “constante” gravitacional efetiva muda com  $G_{eff} = \left[1 + y \frac{(1-\Omega_m)}{\Omega_m}\right]$ . Não obstante, observa-se claramente o efeito que possui  $y$  no painel direito da Fig.5.1.6. A inclusão do modelo da extensão  $\Lambda$ CDM suprime o fator de crescimento, porém agora para um redshift  $z \approx 5$ , os efeitos da perturbação da energia escura depende dos valores de  $y$ , por conseguinte, para valores positivos o fator de crescimento aumenta e para valores negativos os mesmo diminui, como mostra o painel esquerdo da Fig.5.1.6.

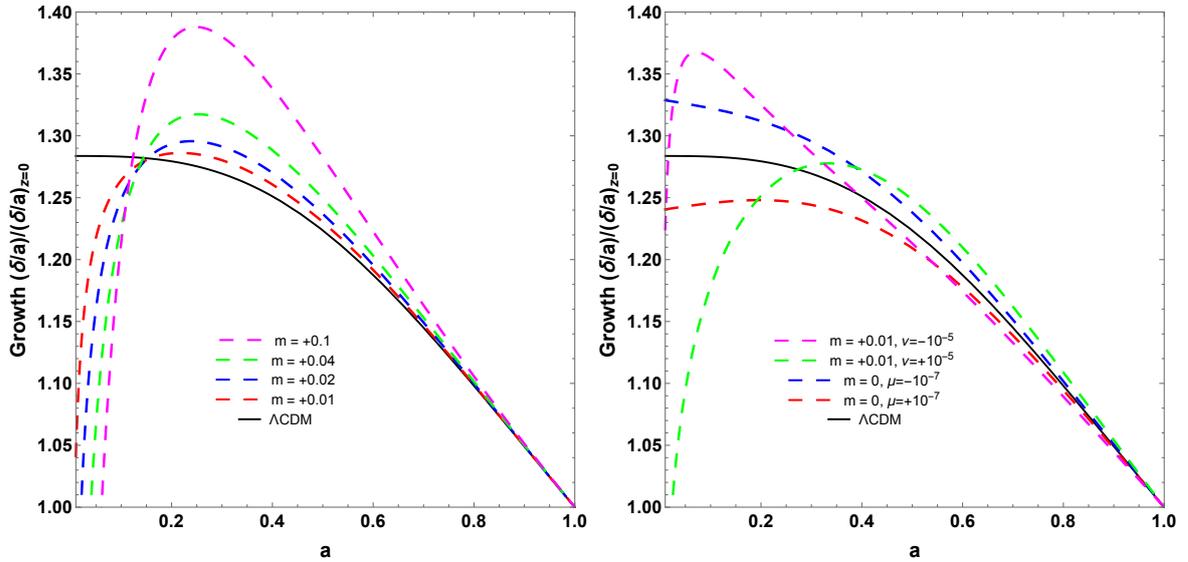


Figura 5.1: Esta figura mostra o fator de crescimento  $g$  normalizados para os valores atuais. No painel direito mostra-se o comportamento do fator de crescimento no modelo de extensão de  $\Lambda$ CDM, sendo suprimido este crescimento a partir do valor aproximado do redshift  $z \approx 2$ . No painel esquerdo as linhas tracejadas de cor magenta e verde estão sob influência da extensão de  $\Lambda$ CDM e para valores de  $|\nu| = 10^{-5}$  da pressão anisotrópica. Nas linhas tracejadas azul e vermelha estão sob influência dos valores de  $|\mu| = 10^{-7}$  no modelo  $\Lambda$ CDM, negligenciando os outros parâmetros, assim, para  $\mu = +10^{-7}$  esta ajuda a diminuir o fator de crescimento

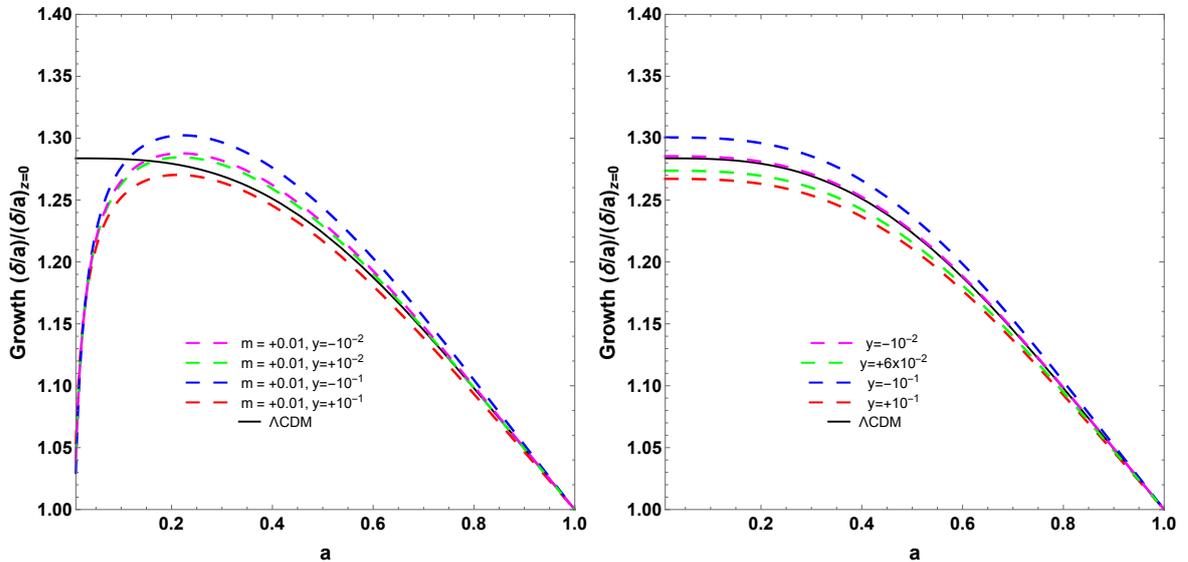


Figura 5.2: Da mesma forma que a figura anterior, no painel direito observa-se o comportamento do fator de crescimento no redshift  $z \approx 5$ , na qual esta suprimida pela extensão de  $\Lambda$ CDM e também vemos como a perturbação da energia escura  $y$  consegue diminuir o fator de crescimento. Isto mostra-se claramente no painel esquerdo ao negligenciar os outros parâmetros com exceção do  $y$  e ver como a perturbação por si só influencia ao modelo  $\Lambda$ CDM, suprimindo o fator de crescimento para valores pequenos e positivos de  $y$ , por exemplo, linhas tracejadas vermelha e verde.

### 5.1.7 Breve descrição sobre galáxias Bias

Na literatura se assume que de fato a distribuição de galáxias é direta e linearmente proporcional à densidade de matéria. No entanto, isto é em uma suposição *a priori* injustificada. Porque, não temos nenhuma teoria convincente sobre a formação de galáxias, não podemos ter a certeza da conexão entre a distribuição de matéria e a distribuição de galáxias. Parece bastante plausível assumir que, em média, uma região com maior densidade de matéria será marcada pela presença de mais galáxias. Portanto, para encontrar uma relação galáxia-matéria, será suposto assumir *galáxia linear*, onde diz que a densidade de perturbações na distribuição de galáxias  $\delta_{gal}$  formam um reflexo tendencioso da densidade de perturbações de matéria

$$\delta_{gal} \equiv b\delta, \quad (5.104)$$

onde  $b$  é o fator de bias conectando a perturbação total da matéria  $\delta$  e as perturbações da galáxia  $\delta_{gal}$ . Em outras palavras, para valores positivos  $b > 1$  a distribuição de galáxia seria melhorada se for localizada em uma região de alta densidade. Em circunstâncias especiais, pode-se pensar também em *antibias* ( $b < 0$ ).

O fator de bias  $b$  para as galáxias tempranas pode, portanto, ser esperado para ser maior, deve-se pensar sobre um fator  $b \approx 2$  para essas galáxias tempranas. Enquanto para galáxias tardias parecem tender para  $b \approx 1$ .

De (5.104) temos que  $\sigma_{8,gal} \equiv \sigma_8 b$  como uma função de  $\sigma_8$  para “Lyman break galaxies” (LBGs) [60, 61, 89] para modelos padrão  $\Lambda$ CDM,  $\sigma_{8,gal}$  é a rms das flutuações de massa das contagens dessas galáxias em esferas de radio  $8h^{-1}Mpc$  para hoje, e com  $\sigma_8 = 0.8$ . Isso sugere que os descendentes do brilho de LBGs estão provavelmente entre as galáxias mais brilhantes em  $z \sim 0$ , enquanto as mais fracas pode desenvolver em uma população mais típica de galáxias no tempo atual. Isto, potencialmente, fornece uma maneira poderosa de restringir a taxa de crescimento da estrutura [77].

### Medições RSD

As distorções do espaço de redshift, de sua sigla em inglês RSD, são provas muito importantes da estrutura a grande escala proporcionando medições de  $f\sigma_8(z)$ . Isto pode ser conseguido medindo a relação do monopolo e dos multipolos quadropolares do espectro de potência do espaço de redshift que depende de  $\beta = f/b$  [89? ].

As medições de perturbações em termos de densidade de galáxias  $\delta_{gal}$ , que estão relacionados às

perturbações de matéria por  $\delta_{gal} \equiv b\delta_m$ . Assim, as medições iniciais da taxa de crescimento fornece valores de taxa de crescimento  $f$  dividido pelo fator bias  $b$  conduzindo a um parâmetro  $\beta = \frac{f}{b}$ .

Este parâmetro medido é sensível ao valor de bias  $b$  que podem variar no intervalo  $b \in [1, 3]$ . Este fator de incerteza torna difícil combinar valores de  $\beta$  de diferentes regiões e diferentes pesquisas levam a conjunto de dados não confiáveis de  $\beta(z_i)$  [61, 65].

A combinação mais confiável é o produto  $f(z)\sigma_8(z) \equiv f\sigma_8(z)$  é independente de bias, e como toda bias dependência em esta combinação portanto anulam-se. A combinação  $f\sigma_8(z)$  pode ser obtido usando lentes fracas ou RSD.

Uma prova da observação alternativa  $\delta(z)$  é a dependência do redshift da rms das flutuações de massa  $\sigma_8(z)$  definida por [67]

$$\sigma^2(R, z) = \int_0^\infty W^2(kR) \Delta^2(k, z) \frac{dk}{k} \quad (5.105)$$

com

$$W(kR) = 3 \left( \frac{\sin(kR)}{(kR)^3} - \frac{\cos(kR)}{(kR)^2} \right) \quad (5.106)$$

$$\Delta^2(kz) = 4\pi k^3 P_\delta(k, z), \quad (5.107)$$

com  $R = 8h^{-1} Mpc$  e  $P_\delta(k, z)$  o espectro de potência de massa no redshift  $z$  e  $W(kR)$  é a função janela do experimento no espaço de Fourier. Para definir a função  $\sigma_8(z)$  calculado teoricamente será preciso definir a amplitude para hoje  $\sigma_8(z = 0)$  conectada ao crescimento linear  $\delta(z)$

$$\sigma_8 = \frac{\delta(z)}{\delta(z = 0)} \sigma_8(z = 0). \quad (5.108)$$

Foram realizados vários estudos de distorções do espaço de redshift (RSD) para medir a combinação de parâmetros  $f\sigma_8(z)$ , onde para modelos com crescimento independente da escala será definida como [3]

$$f(z) = \frac{d \ln \delta}{d \ln a} \quad (5.109)$$

e

$$f\sigma_8(z) = -(1+z) \frac{\sigma_8(z=0)}{\delta(z=0)} \frac{d}{dz} \delta(z), \quad (5.110)$$

A combinação de parâmetros  $f\sigma_8(z)$  é insensível às diferenças entre o agrupamento de galáxias e a matéria escura, isto é, para a galáxia bias [89].

## 5.2 Análise de dados

A equação (5.102) descreve como a expansão acelerada tardia tende a regular as perturbações da matéria. Pesquisas atuais de galáxias fornecem dados observacionais para a combinação  $f\sigma_8$  onde a taxa de crescimento linear  $f$  é definido como  $f = \frac{d \ln \delta_m}{d \ln a}$  e  $\sigma_8$  é a flutuação da massa da RMS em esferas com radio  $8h^{-1}Mpc$ . Em termos da quantidade  $f$ , a equação (5.102) pode ser reformulado na forma

$$\frac{df}{d \ln a} + f^2 + \frac{1}{2}(1 - 3w)f = \frac{3}{2} \frac{G_{eff}}{G} \Omega_m. \quad (5.111)$$

Esta equação dependente do fator de escala é valido no regime linear, se espera a quebra para modos não lineares. Devemos traçar a evolução das sobre densidades da matéria a partir do momento intenso na época dominada da matéria até hoje. Para permanecer no regime linear, nós fixamos o valor de  $k = 0.1hMpc^{-1}$  em nossos análises, onde esse  $k$  é o comprimento de onda do modo correspondente às distâncias de  $8h^{-1}Mpc$ . Com esta suposição, a evolução temporal da normalização  $\sigma_8$  segue a amplitude  $\delta_m$  tal que [67]

$$\sigma_8(z, k) = \frac{\delta_m(z, k)}{\delta(0, k)} \sigma_8(0, k) \quad (5.112)$$

e

$$f\sigma_8(z, k) = -(1+z) \frac{\sigma_8(0, k)}{\delta_m(0, k)} \frac{d}{dz} \delta_m(z, k). \quad (5.113)$$

Infelizmente, a quantidade de dados  $f(z)\sigma_8(z)$  atualmente disponível não é representativa (um par de dezenas) para uma análise estatística. Além disso, a variação nos dados ainda é alta, reduzindo a confiança em qualquer resultado estatístico *a posteriori*. O que pode ser feito, no entanto, é avaliar o impacto da alteração dos valores dos parâmetros do modelo em comparação com a curva de referência no modelo  $\Lambda$ CDM. Para a variação da distribuição da matéria hoje, assumimos  $\sigma_8(z=0) = 0.8$  que é compatível com o modelo fiducial da cosmologia padrão conforme determinado pelo satélite Planck. Este valor é tendencioso em relação à variância na distribuição de galáxias mas a combinação  $f\sigma_8$  é independente do fator de bias [89]. Em nossa análise, usamos um conjunto de crescimento “Gold” que consiste em 18 pndos de dados das medições de RSD de  $f\sigma_8$  listados em [65]. Em seguida, estudamos a influência de diferentes combinações de parâmetros na função de crescimento e na “constante” gravitacional efetiva. Começamos por considerar o impacto de cada um dos parâmetros, separadamente.

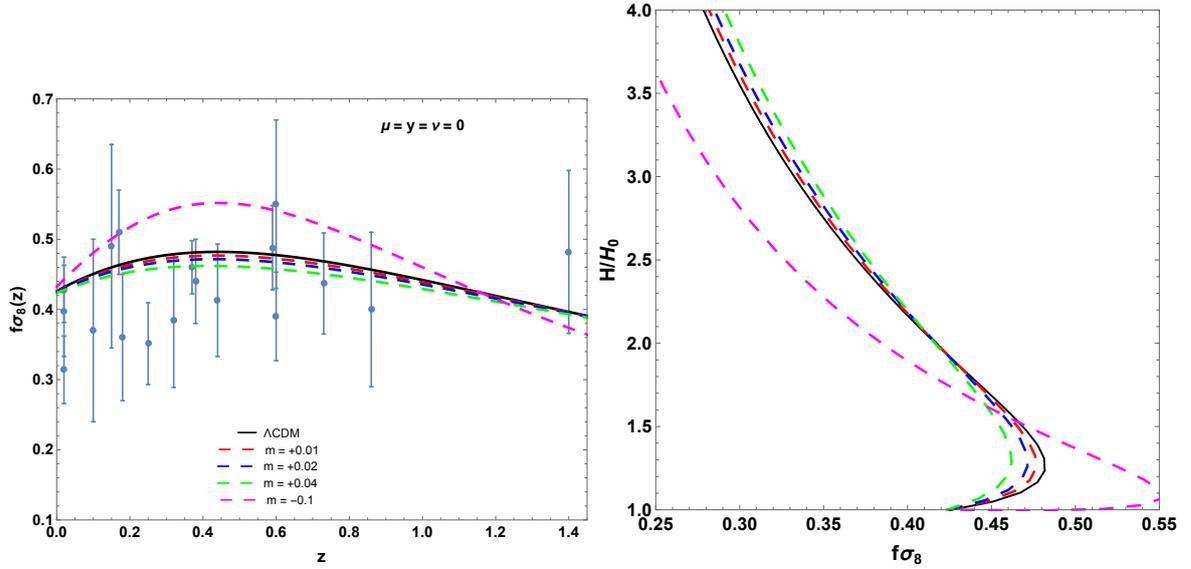


Figura 5.3: Painel esquerdo: mostra-se a dependência de  $f\sigma_8(z)$  em  $z$  se unicamente a dinâmica do fundo é mudado ( $\mu = \nu = \gamma = 0$ ). para valores positivos de  $m$  diminuem a previsão do  $\Lambda$ CDM para  $z \lesssim 1$ , valores negativos de  $m$  corresponde a um deslocamento na direção oposta. As maiores alterações aparecem em  $z \approx 0.5$ . No painel direito: mostra a correspondentes as faixas evolutivas conjuntas de  $H(z)/H_0$  e  $f\sigma_8(z)$ .

O painel esquerdo da Fig.5.2 mostra a dependência do reshit da função de crescimento  $f\sigma_8(z)$  se apenas a dinâmica do fundo é alterada, ou seja, quando a pressão anisotrópica e perturbação de energia escura estão ausentes ( $\mu = \nu = \gamma = 0$ ). Valores positivos de  $m$  diminuem as previsões do modelo em relação a  $\Lambda$ CDM. Valores negativos resultam em uma mudança na direção oposta para  $z \lesssim 1$ . Para todos os valores de  $m$  as maiores mudanças aparecem em  $z \approx 0.5$  que da a impressão de ser a faixa de redshift ideal para a busca de efeitos de fundo no  $f\sigma_8$  observável. Vale ressaltar que, se apenas  $m \neq 0$  mas  $\mu = \nu = \gamma = 0$  a “constante” gravitacional efetiva reduz-se ao seu valor Newtoniano, isto é,  $G_{eff} = G$ . O painel direito da Fig.5.2 combina a faixa evolutiva de  $H(z)/H_0$  e  $f\sigma_8(z)$  como sugerido em [65]. Essas faixas conjuntas são particularmente úteis para o caso variável de  $m$ , pois tanto no fundo quanto as perturbações são afetadas simultaneamente.

Na Fig.5.2 crecervemos o impacto da perturbação de energia escura em  $f\sigma_8(z)$  para o valor de  $m = 0$  no fundo  $\Lambda$ CDM na ausência de pressão anisotrópica ( $\mu = \nu = 0$ ). As diferentes curvas correspondem a diferentes contribuições fracionárias  $\gamma$  de perturbações de energia escura. Existe uma tendência para aumentar a curva pura  $\Lambda$ CDM em redshift pequeno para valores positivos de  $\gamma$ . Para  $\gamma < 0$  a curva é reduzida. A correspondente “constante” gravitacional efetiva é mostrada no painel direito. Se o parâmetro  $\gamma$  da perturbação de energia escura torna-se da ordem de um, os desvios do modelo padrão tornam-se inaceitáveis. Isto implica que, na escala em questão, as perturbações da energia escura são pelo menos uma ordem de grandeza menor que as perturbações da matéria. Fig.5.2 demonstra

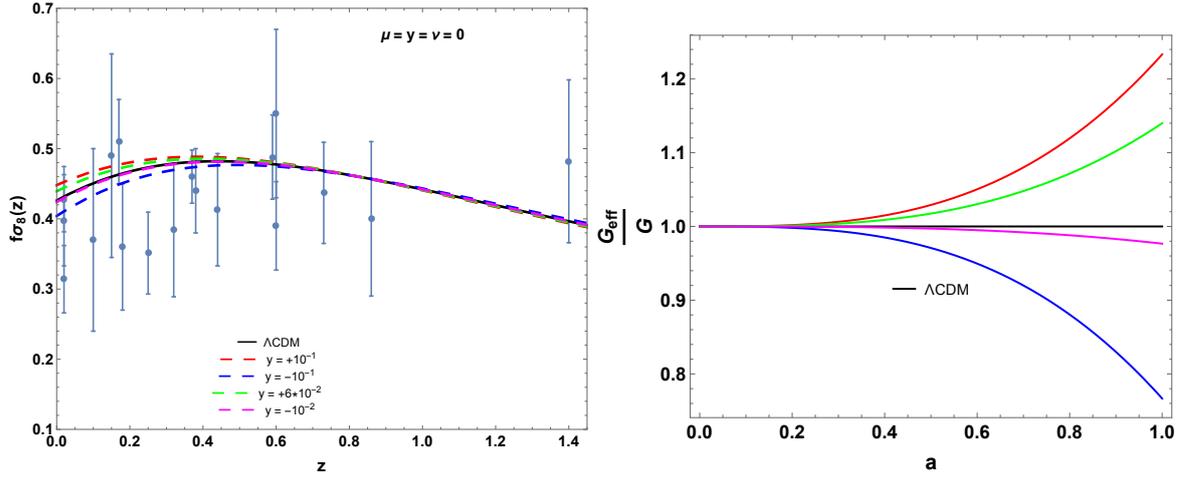


Figura 5.4: No painel esquerdo: a dependência de  $f\sigma_8(z)$  em  $z$  para um valor no fundo  $\Lambda$ CDM com  $m = 0$  e  $\mu = \nu = 0$ . As diferentes curvas correspondem a diferentes contribuições de perturbações de energia escura. Para  $y > 0$  existe uma tendência de aumentar a curva do  $\Lambda$ CDM puro em pequenos redshift. Para  $y < 0$  a curva suprime o modelo puro  $\Lambda$ CDM para valores pequenos do redshift. No painel direito: a “constante” gravitacional efetiva. se  $y$  é de ordem um, ou seja, se as perturbações de energia escura são da mesma ordem que as perturbações de matéria, os desvios se tornaram inaceitavelmente grande, portanto as perturbações de energia escura tem que na faixa de  $-10^{-1} \lesssim y \lesssim +10^{-1}$ .

a influência do parâmetro anisotrópico  $\mu$  em  $f\sigma_8(z)$  para o valor do fundo fixo  $m = 0$  no caso de não haver acoplamento de  $\Pi$  às perturbações relativas ( $\nu = 0$ ) e ausência de perturbações de energia escura ( $y = 0$ ). O painel da direita mostra a correspondente influência de  $\mu$  na “constante” gravitacional efetiva. A Fig.5.2 visualiza a influência do parâmetro anisotrópico  $\nu$  em  $f\sigma_8(z)$  e a “constante” gravitacional efetiva para o valor de fundo fixo  $\mu = 0$  e para  $\mu = y = 0$ . A influência de  $\nu$  separadamente em  $f\sigma_8(z)$  é mais fraca do que a influência separada de  $\mu$  da mesma ordem (comparar com Fig.5.2). Além disso, ele atua na direção oposta. A Fig.5.2 Retrata a relevância do termo cruzado que envolve ambos  $\nu$  e  $y$  na expressão (5.99) para  $G_{eff}$ . Diferente da situação da Fig.5.2, neste termo os valores positivos de  $y$  abaixam a curva para  $f\sigma_8$  (para  $z \lesssim 1$ ), correspondendo a uma “constante” gravitacional efetiva reduzida.

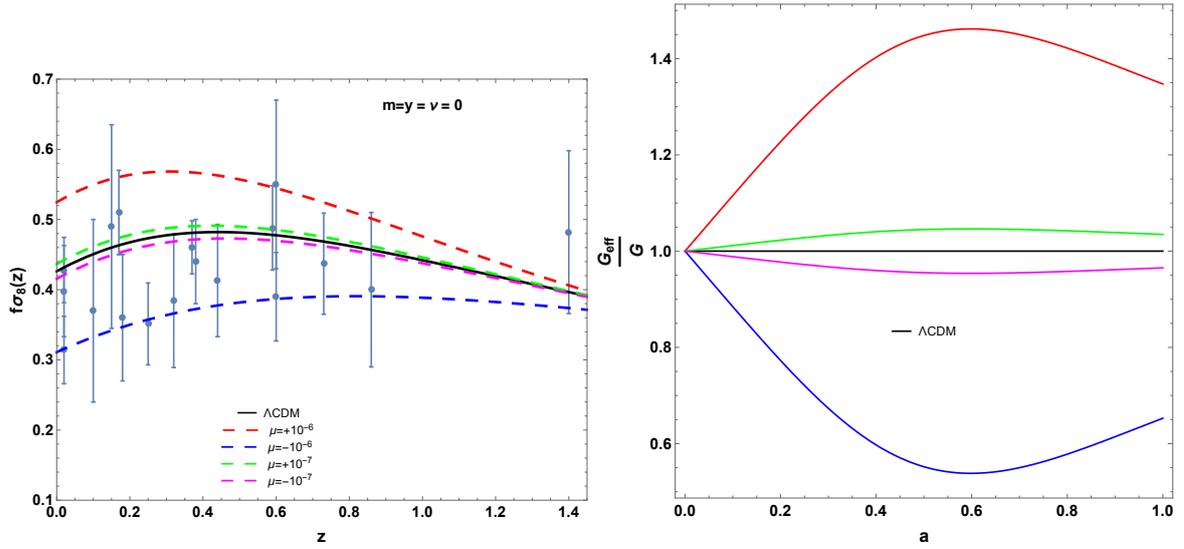


Figura 5.5: No painel esquerdo: dependência de  $f\sigma_8(z)$  em  $z$  no fundo do modelo  $\Lambda$ CDM para valores de  $m = 0$  com  $\nu = y = 0$ . As diferentes curvas correspondem a distintos valores do parâmetro anisotrópico  $\mu$ . Valores negativos de  $\mu$  suprimem a curva teórica comparada com o resultado de  $\Lambda$ CDM, valores positivos de  $\mu$  aumentam a curva. No painel direito: mostra-se a dependência do fator de escala com a “constante” gravitacional efetiva.

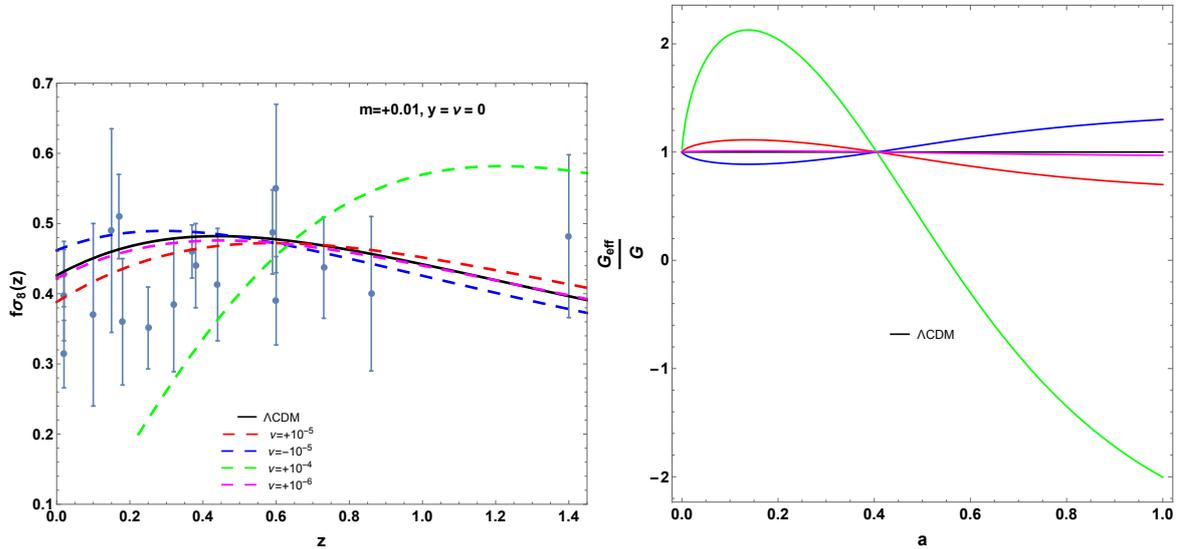


Figura 5.6: No painel esquerdo: dependência de  $f\sigma_8(z)$  em  $z$  para o fundo não padrão fixo  $m = +0.01$  com  $\mu = y = 0$ . As diferentes curvas correspondem a distintos valores do parâmetro anisotrópico  $\nu$ . Valores acima da ordem de  $\nu \approx \pm 10^{-5}$  o desvio do modelo padrão permanece pequeno. Para  $\nu = +10^{-4}$  torna-se inaceitavelmente grande e para  $y = +10^{-6}$  pode-se negligenciar a sua contribuição. No painel direito: a “constante” gravitacional efetiva podem variar entre os valores maiores e menores do que o valor padrão ao longo da expansão cósmica.

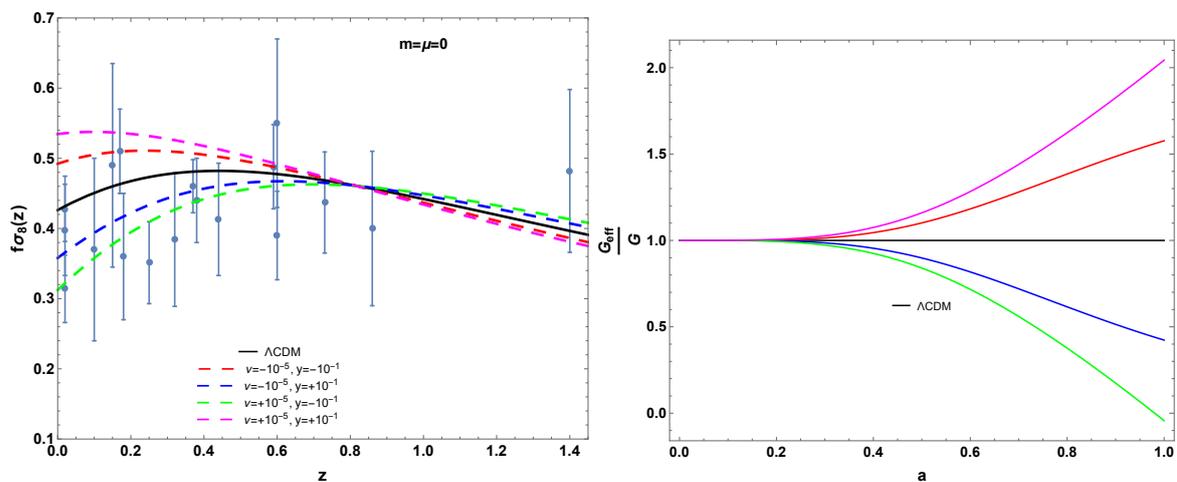


Figura 5.7: No painel esquerdo: dependência de  $f\sigma_8(z)$  em  $z$  para o modelo padrão no fundo  $m = 0$  com  $\nu = -10^{-5}$  e  $\mu = 0$ . As diferentes curvas correspondem a distintas contribuições da perturbação de energia escura. Esta figura descreve o efeito de cruzamento entre a pressão anisotrópica, induzida pela perturbação relativa, e perturbação da energia escura. Aqui, valores do mesmo sinal de ambas contribuições  $\nu$  e  $y$  suprimem a curva para  $f\sigma_8(z)$ , e sinal contrário de  $\nu$  e  $y$  fazem com que a curva aumente, em ambos os casos para baixos redshift ( $z \lesssim 1$ ). Isto corresponde a uma redução da “constante” gravitacional efetiva (painel direito).

---

# Capítulo 6

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A descoberta da expansão acelerada do Universo veio relativamente tarde em nosso estudo do cosmos, mas ao mostrar que a gravidade pode agir de forma repulsiva, abriu muitas novas questões sobre a natureza da gravidade e o que Universo poderia conter. Portanto, será que a aceleração esta sendo conduzida pela energia escura? Ou é a propria relatividade geral que está em erro, exigindo modificações em grandes escalas para explicar a aceleração tardia?. Hoje em dia sabemos que a expansão do Universo pode acelerar sem a constante cosmologica devido à modificação da gravidade em escalas cosmológicas.

As histórias da expansão cósmica e o crescimento cósmico são observações fundamentais que descrevem nosso Universo, através de duas quantidades,  $H(z)$  e  $f\sigma_8(z)$ , como funções de redshift que contém informações cosmológicas.

Com o intuito de poder resolver estas questões, o presente trabalho foi desenvolvido ao estudo de uma classe de modelos cosmológicos das teorias escalar-tensorial, que foi estabelecida como uma simples extensão do modelo  $\Lambda$ CDM. Com o objetivo de encontrar uma expressão da taxa de Hubble, que seria uma maneira de explicar a história da expansão. Obtivemos o nosso principal resultado dada pela equação analítica (4.132) que é uma quantidade explícita da diferença do modelo padrão através de um parâmetro constante  $m$  que define as dinâmicas do campo escalar  $\Phi$ , através da qual é discutida a dinâmica do fundo em detalhes. Além do mais, este parâmetro  $m$  ajuda desenvolver uma interação entre ambos fluidos dinâmicos.

Após de estabelecer as bases matemáticas, respeitando as unidades [31], para ir de Einstein-Frame para o Jordan-Frame, o modelo é submetido a testes cosmológicos para o parâmetro  $m$  com dados de SNIa,  $H(z)$  e BAO restringindo valores muito pequenos de  $m$ , próximos a  $m = 0$  que simularia o

---

modelo  $\Lambda$ CDM, com uma ligeira preferência por valores positivos.

Por outra parte, com base na extensão do modelo  $\Lambda$ CDM, o foco do trabalho é também estudar separadamente e influências associadas aos desvios do fundo  $\Lambda$ CDM, da pressão anisotrópica e não negligenciando as perturbações de energia escura. Assim a aplicação da dinâmica perturbativa esta em investigar o crescimento da matéria, e a influência que têm a pressão anisotrópica e perturbações de energia escura como parte da modificação no setor gravitacional, como parte do  $G_{eff}$  que é a “constante” gravitacional efetiva.

Na qual, mesmo para um valor pequeno e não sendo negligenciado este parâmetro  $m$ , fornece desvios da dinâmica do fundo que levam a pequenas correções da predição de  $\Lambda$ CDM para  $f\sigma_8$ , onde estes desvios são bem consideráveis em um redshift de cerca de 0.5; certamente modifica o cenário do crescimento da matéria.

Como trabalho futuro, em andamento, descreve-se uma análise detalhada do sistema completo de equações da perturbação acoplada para  $\delta^c$  e  $S_m$  seguindo o raciocínio executado em (3.2.4), mas agora incluindo o fluxo de calor.

---

 Apêndice **A**

## TEORIA DE BRANS-DICKE E INVARIÂNCIA CONFORME

Outro dos assuntos mais controvertidos da literatura, além da equivalência física entre os frames de Jordan e Einstein, é a convergência da teoria de Brans-Dicke à relatividade geral no limite  $\omega \rightarrow \infty$  quando o tensor de energia-momento for cancelada  $T = 0$ . Baseadas nas propriedades conformes da teoria de Brans-Dicke, tentaremos nesta seção dar uma breve explicação da convergência a RG neste limite e daremos também alguns contra-exemplos à crença estendida de que toda solução com  $T \neq 0$  converge sempre à solução da relatividade geral.

Seja  $S_{BD}$  a ação de Brans-Dicke no frame de Jordan:

$$\frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (\Phi R - \frac{\omega}{\Phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi) + S_M,$$

onde  $S_M$  é a parte da ação que esta associada à matéria e que é independente do campo escalar  $\Phi$ .

Vamos esquecer por um momento da parte associada à matéria e vamos nós concentrar na parte puramente gravitacional. Se aplicamos uma transformada conforme:

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2 \tilde{g}_{\mu\nu},$$

onde  $(x^\alpha)$  é uma função duas vezes diferenciável diferente de zero. Agora descrevemos em mais detalhe sobre as transformada conforme.

## A.1 Relatividade conforme

Vamos supor que temos duas variedades de espaço-tempo  $\mathcal{M}$ ,  $\tilde{\mathcal{M}}$  com métricas  $g_{\mu\nu}$ ,  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  e que tem a mesma coordenada  $x^\mu$ . Dizemos que duas variedades são *conforme* um a outro se eles estão relacionados pela seguinte *transformada conforme*:

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2(x)\tilde{g}_{\mu\nu} \quad (\text{A.1})$$

e a função  $\Omega$  que é chamado como um fator conforme deve ser uma função duas vezes diferenciável de coordenadas  $x^\mu$  e está no intervalo  $0 < \Omega < \infty$ . As transformadas conforme se encolhem ou se esticam das distâncias entre os dois pontos descritos pelo mesmo sistema de coordenadas  $x^\mu$  nas variedades  $\mathcal{M}$ ,  $\tilde{\mathcal{M}}$ , respectivamente, mas eles preservam os ângulos entre os vetores (em particular, vetores nulos que definem cones de luz) que leva a uma conservação da estrutura causal (global) da variedade [44].

Se tomamos a constante  $\Omega$ , então nós lidamos com as chamadas *transformação de escala* [40]. De fato, as transformações conforme são transformações de escala *localizadas*  $\Omega = \Omega(x)$ .

Por outro lado, as *transformações de coordenada*  $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu$  apenas renomeia as coordenadas e não altera a geometria, e eles são completamente *diferentes* das transformações conforme. Isto é crucial, já que transformações conforme leva a uma *física diferente* em variedades conformemente relacionadas  $\mathcal{M}$ ,  $\tilde{\mathcal{M}}$  [40].

Uma vez que isso usualmente será relacionado a um *acoplamento diferente* de um campo físico à gravidade, estaremos falando sobre diferentes *referenciais* em que a física é estudada (em [39] podemos ter uma visão ligeiramente diferente).

Em  $D = 4$  dimensões do espaço-tempo, o determinante da métrica  $g = \det[g_{\mu\nu}]$  se transforma como:

$$\sqrt{-g} = \Omega^4 \sqrt{-\tilde{g}} \quad (\text{A.2})$$

É óbvio que a partir da equação (A.1) que as seguintes relações para as métricas inversas e os intervalos do espaço possuem:

$$g^{\mu\nu} = \Omega^{-2}\tilde{g}^{\mu\nu} \quad (\text{A.3})$$

$$ds^2 = \Omega^2 d\tilde{s}^2 \quad (\text{A.4})$$

Finalmente, a noção de planicidade conforme significa que:

$$g_{\mu\nu}\Omega^{-2}(x) = \tilde{g}_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu}, \quad (\text{A.5})$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica plana de Minkowski.

A utilização de (A.1) aos coeficientes do símbolos de Chistoffel dado por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} + \frac{1}{\Omega}(\tilde{\delta}_{\mu}^{\lambda}\Omega_{,\nu} + \tilde{\delta}_{\nu}^{\lambda}\Omega_{,\mu} - \tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}^{\lambda\kappa}\Omega_{,\kappa}), \quad \Gamma_{\mu\nu}^{\nu} = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\nu} + 4\frac{\Omega_{,\mu}}{\Omega} \quad (\text{A.6})$$

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{1}{\Omega}(\delta_{\mu}^{\lambda}\Omega_{,\nu} + \delta_{\nu}^{\lambda}\Omega_{,\mu} - g_{\mu\nu}g^{\lambda\kappa}\Omega_{,\kappa}), \quad \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^{\nu} - 4\frac{\Omega_{,\mu}}{\Omega} \quad (\text{A.7})$$

Os tensores de Riemann, tensores de Ricci e escalares de Ricci nos dois referenciais relacionado com  $g_{\mu\nu}$  e  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  transforma-se como (usamos a convenção de sinais (-+++), a convenção do tensor de Riemann  $R_{\nu\lambda\kappa}^{\mu} = \Gamma_{\nu\kappa,\lambda}^{\mu} - \Gamma_{\nu\lambda,\kappa}^{\mu} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu} - \Gamma_{\kappa\mu}^{\nu}\Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}$ , e a definição do tensor de Ricci  $R_{\nu\kappa} = R_{\nu\mu\kappa}^{\mu}$ )

$$R_{\nu\lambda\kappa}^{\mu} = \tilde{R}_{\nu\lambda\kappa}^{\mu} + \frac{1}{\Omega} \left[ \tilde{\delta}_{\kappa}^{\mu}\Omega_{;\nu\lambda} - \tilde{\delta}_{\lambda}^{\mu}\Omega_{;\nu\kappa} + \tilde{g}_{\nu\lambda}\Omega_{;\kappa}^{\mu} - \tilde{g}_{\nu\kappa}\Omega_{;\lambda}^{\mu} \right] \quad (\text{A.8})$$

$$+ \frac{2}{\Omega^2} \left[ \tilde{\delta}_{\lambda}^{\mu}\Omega_{,\nu}\Omega_{,\kappa} - \tilde{\delta}_{\kappa}^{\mu}\Omega_{,\nu}\Omega_{,\lambda} + \tilde{g}_{\nu\kappa}\Omega^{\mu}\Omega_{,\lambda} - \tilde{g}_{\nu\lambda}\Omega^{\mu}\Omega_{,\kappa} \right] + \frac{1}{\Omega^2} \left[ \tilde{\delta}_{\kappa}^{\mu}\tilde{g}_{\nu\lambda} - \tilde{\delta}_{\nu}^{\mu}\tilde{g}_{\lambda\kappa} \right] \tilde{g}_{\theta\Omega}\Omega_{,\theta}^{\mu},$$

$$\tilde{R}_{\nu\lambda\kappa}^{\mu} = R_{\nu\lambda\kappa}^{\mu} - \frac{1}{\Omega} \left[ \delta_{\kappa}^{\mu}\Omega_{;\nu\lambda} - \delta_{\lambda}^{\mu}\Omega_{;\nu\kappa} + g_{\nu\lambda}\Omega_{;\kappa}^{\mu} - g_{\nu\kappa}\Omega_{;\lambda}^{\mu} \right] \quad (\text{A.9})$$

$$+ \frac{1}{\Omega^2} \left[ \delta_{\kappa}^{\mu}g_{\nu\lambda} - \delta_{\lambda}^{\mu}g_{\nu\kappa} \right] g_{\theta\Omega}\Omega_{,\theta}^{\mu},$$

$$R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} + \Omega^{-2} \left[ 4\Omega_{,\mu}\Omega_{,\nu} - \Omega_{,\sigma}\Omega^{\sigma}\tilde{g}_{\mu\nu} \right] - \Omega^{-1} \left[ 2\Omega_{;\mu\nu} + \tilde{\square}\Omega\tilde{g}_{\mu\nu} \right] \quad (\text{A.10})$$

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 3\Omega^{-2}\Omega_{,\rho}\Omega^{\rho}g_{\mu\nu} + \Omega^{-1} \left[ 2\Omega_{;\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\Omega \right], \quad (\text{A.11})$$

$$R = \Omega^{-2} \left[ \tilde{R} - 6\frac{\tilde{\square}\Omega}{\Omega} \right] \quad (\text{A.12})$$

$$\tilde{R} = \Omega^2 \left[ R + 6\frac{\square\Omega}{\Omega} - 12g^{\mu\nu}\frac{\Omega_{,\mu}\Omega_{,\nu}}{\Omega} \right], \quad (\text{A.13})$$

e os operadores d'Alembertianos mudam sob a equação (A.1) como:

$$\square\phi = \Omega^{-2} \left( \tilde{\square}\phi + 2\tilde{g}^{\mu\nu}\frac{\Omega_{,\mu}}{\Omega}\phi_{,\nu} \right) \quad (\text{A.14})$$

$$\tilde{\square}\phi = \Omega^{-2} \left( \square\phi - 2g^{\mu\nu}\frac{\Omega_{,\mu}}{\Omega}\phi_{,\nu} \right) \quad (\text{A.15})$$

Nessas formulas de d'Alembertianos  $\square$  tomado com relação à métrica  $g_{\mu\nu}$  é diferente de  $\tilde{\square}$  que é tomado com relação a uma métrica conformemente redimensionado  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ . O mesmo refere-se às deri-

vadas covariantes  $\tilde{\gamma}$  e  $\tilde{\gamma}$ ; dentro de (A.8)-(A.11). Observar que algumas dessas quantidades são dadas em [44] em uma forma diferente. Também, observe que a regra em (A.12) compõe só de dois termos, enquanto que a regra inversa (A.13) compõe de três termos. Isto mostra o fato de que as regras das transformações simples e inversas não são simétricas.

Para o tensor e Einstein nós temos:

$$G_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu} + \frac{1}{\Omega^2} \left[ 4\Omega_{,\mu}\Omega_{,\nu} - \Omega_{,\lambda}\Omega^{,\lambda}\tilde{g}_{\mu\nu} \right] - \frac{2}{\Omega} \left[ \Omega_{;\mu\nu} - \tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{\square}\Omega \right], \quad (\text{A.16})$$

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \frac{3}{\Omega^2}\Omega_{,\mu}\Omega^{,\nu}g_{\mu\nu} + \frac{2}{\Omega} \left[ \Omega_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu}\square\Omega \right]. \quad (\text{A.17})$$

Uma importante característica das transformações conforme é que eles preservam o tensor de curvatura de Weyl:

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\lambda\kappa} &= R_{\mu\nu\lambda\kappa} - \frac{1}{D-2} \left( R_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa} - R_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda} + R_{\nu\kappa}g_{\mu\lambda} - R_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} \right) \\ &+ \frac{1}{(D-1)(D-2)} R(g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa} - g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda}) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

na qual temos (observe que o primeiro índice é levantado)

$$C^{\mu}_{\nu\lambda\kappa} = \tilde{C}^{\mu}_{\nu\lambda\kappa}, \quad (\text{A.19})$$

Sob (A.1) é um invariante das transformações conforme. O conjunto de propriedades completas das transformações conforme de quantidades geométricas e físicas pode ser encontrado em [28]. Aplicando estes resultados, a maior parte da ação pode-se escrever

$$\mathcal{L}_{BD} \sqrt{-g} = \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \Omega^2 \Phi \tilde{R} - \frac{6\Phi\tilde{\square}\Omega}{\Omega^5} + \frac{\omega}{\Omega^2\Phi} \tilde{g}^{\mu\nu} \nabla_{\mu}\Phi \nabla_{\nu}\Phi \right]$$

agora suponhamos uma transformação da forma

$$\Omega = \Phi^{\alpha},$$

assumindo  $\alpha \neq 1/2$ , vamos redefinir o campo escalar [34], como

$$\Phi \rightarrow \tilde{\Phi} = \Phi^{1-2\alpha}$$

a ação gravitacional escreve-se

$$\mathcal{L}_{BD} \sqrt{-g} = \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \tilde{\Phi} \tilde{R} + \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\Phi}} \tilde{g}^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \Phi \nabla_{\nu} \Phi \right],$$

com

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega - 6\alpha(\alpha - 1)}{(1 - 2\alpha)^2}.$$

Como podemos ver a ação não associada à matéria permanece invariante sob uma transformação  $\mathcal{F}_{\alpha}$  consistente numa mudança de escala e uma troca do campo escalar para  $\alpha \neq 1/2$ . Ou seja, as transformações [34]

$$\mathcal{F}_{\alpha} : (M, g_{\mu\nu}^{(\omega)}, \Phi^{(\omega)}) \rightarrow (M, \tilde{g}_{\mu\nu}^{(\tilde{\omega})}, \tilde{\Phi}^{(\tilde{\omega})}), \quad (\text{A.20})$$

mapeam o espaço de Brans-Dicke  $(M, g_{\mu\nu}^{(\omega)}, \Phi^{(\omega)})$  em outro espaço do mesmo tipo; onde ambos espaços pertencem a uma mesma classe equivalente  $\mathcal{E}$ . Observe que as transformações  $\mathcal{F}_{\alpha}$  pertence a um grupo abeliano de simétrias com uma singularidade  $\alpha = 1/2$ . Aqui destacamos a importancia que, quando a parte da ação que está associada à matéria  $S_M$  é incluída no tratamento anterior, a invariância conforme é violada. Isso é fácil de ver desde um ponto de vista físico, quando uma teoria contém massas terá também uma escala de massas associadas e por tanto não será invariante sob troca de escala. Uma vez feita esta observação fica claro que sempre que  $T = 0$  a teoria será invariante sob transformações conforme. O argumento anterior nos permite entender por que a teoria de Brans-Dicke não se reduz à relatividade geral no limite  $\omega \rightarrow \infty$  se  $T = 0$ . Como se viu uma troca no parâmetro de Brans-Dicke  $\omega \rightarrow \tilde{\omega}$  que é equivalente a uma transformação  $\mathcal{F}_{\alpha}$  para um valor permitido do parâmetro  $\alpha$ . No caso particular podemos considerar uma troca no parâmetro de tal forma que  $\tilde{\omega} \gg 1$  (*isto é possível devido a que a função  $\tilde{\omega}_{\alpha}$  tem um polo em  $\alpha = 1/2$* ), que pode-se ver como um caso equivalente ao limite  $\omega \rightarrow \infty$ , na qual espera-se recuperar a relatividade geral. Segundo os argumentos anteriores, neste limite simplesmente move o espaço de Brans-Dicke  $(M, g_{\mu\nu}^{(\omega)}, \Phi^{(\omega)})$  dentro de uma classe equivalente  $\mathcal{E}$ ; e uma vez que a relatividade geral não é uma invariante conforme [95] e por tanto não pertence à classe mencionada, então concluímos que não pode ser obtida a partir da teoria de Brans-Dicke se  $T = 0$ . Cabe observar que a condição  $T \neq 0$  não é uma condição necessaria nem suficiente para que as soluções exatas na teoria de Brans-Dicke possa ser reduzida às correspondentes soluções das equações de Einstein. De fato existe certas soluções com  $T \neq 0$  que não se reduzem às soluções relativistas gerais quando  $\omega \rightarrow \infty$ , como pode ser o exemplo dos problemas com simetria cilíndrica [6].

# Apêndice B

## MÍNIMO VARIACIONAL DA AÇÃO DE JORDAN-BRANS-DICKE

Uma outra maneira de se obter as equações de movimento para o campo gravitacional é através da minimização do variacional da ação, para isso, seja a ação de Brans-Dicke para os campos na ausência de matéria dada de acordo com

$$S = \int (R\Phi - w \frac{\Phi^i \Phi_{,i}}{\Phi}) \sqrt{-g} d\Omega. \quad (\text{B.1})$$

Calculando o variacional da expressão temos dois tipos de equações. Uma em termos da variação da métrica como de costume nos procedimentos de Einstein-Hilbert, e outra em termos da variação do campo escalar. Nota-se a presença em ambas as equações do acoplamento escalar-tensorial exigido como hipótese inicial

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int \left( R\Phi - w \frac{\Phi^i \Phi_{,i}}{\Phi} \right) \sqrt{-g} d\Omega \\ &= \int \left[ \delta(R)\Phi + R\delta(\Phi) - w\delta \left( \frac{\Phi^i \Phi_{,i}}{\Phi} \right) \right] \sqrt{-g} d\Omega + \int \left( R\Phi - w \frac{\Phi^i \Phi_{,i}}{\Phi} \right) \delta(\sqrt{-g} d\Omega). \end{aligned}$$

Lideraremos a priori com as respectivas variações de  $\delta \left( \frac{\Phi^i \Phi_{,i}}{\Phi} \right)$ .

$$\delta \left( \frac{\Phi^i \Phi_{,i}}{\Phi} \right) = \delta \left( g^{ik} \frac{\Phi_{,k} \Phi_{,i}}{\Phi} \right) = \delta(g^{ik}) \frac{\Phi_{,k} \Phi_{,i}}{\Phi} + g^{ik} \delta \left( \frac{1}{\Phi} \right) \Phi_{,k} \Phi_{,i} + g^{ik} \frac{1}{\Phi} \delta(\Phi_{,k} \Phi_{,i}).$$

Das regras dos variacionais de uma função associamos

$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{1}{\Phi} \right) &= -\frac{\delta\Phi}{\Phi^2} \\ , g^{ik} \frac{1}{\Phi} \delta(\Phi_{,k} \Phi_{,i}) &= g^{ik} \frac{1}{\Phi} [\delta(\Phi_{,k}) \Phi_{,i} + \Phi_{,k} \delta(\Phi_{,i})]. \end{aligned}$$

Como os índices da segunda expressão acima estão contraídos, reduzidos fica em

$$g^{ik} \frac{1}{\Phi} [\delta(\Phi_{,k}) \Phi_{,i} + \Phi_{,k} \delta(\Phi_{,i})] = 2 \frac{1}{\Phi} \Phi^{,i} \delta(\Phi)_{,i}.$$

Pode-se reescrever a expressão acima levando em conta uma generalização das regras de derivação

$$2 \frac{1}{\Phi} \Phi^{,i} \delta(\Phi)_{,i} = 2 [\ln \Phi]^{,i} (\delta\Phi)_{,i} = 2 [\ln \Phi]^{,i} \delta(\Phi)_{,i}.$$

Agora é necessário realizarmos uma transformação de derivadas totais, a fim de tratar o processo de integração seja utilizado algum tipo de divergência

$$2 [\ln \Phi]^{,i} \delta(\Phi)_{,i} = 2 \left( (\ln \Phi)^{,i} \delta\Phi \right)_{,i} - 2 \left( [\ln \Phi]^{,i} \right)_{,i} \delta\Phi,$$

portando o variacional da primeira parte da ação  $S$  será

$$\begin{aligned} \delta S_1 &= \int \left[ R \delta(\Phi) - w \delta \left( \frac{\Phi^{,i} \Phi_{,i}}{\Phi} \right) \right] \sqrt{-g} d\Omega \\ &= \int \left\{ R \delta\Phi + w \Phi^{,i} \Phi_{,i} \frac{\delta\Phi}{\Phi^2} - 2w \left( [\ln \Phi]^{,i} \delta\Phi \right)_{,i} + 2w \left( (\ln \Phi)^{,i} \right)_{,i} \delta\Phi - \delta\Phi - w \frac{\Phi^{,k} \Phi_{,i}}{\Phi} \delta g^{ik} \right\} \sqrt{-g} d\Omega. \end{aligned}$$

Tendo em vista o teorema da divergência de Gauss, a integral da divergência deverá se anular nas regiões de fronteira, ou seja

$$2w \int \left( [\ln \Phi]^{,i} \delta\Phi \right)_{,i} \sqrt{-g} d\Omega = 0.$$

A dúvida que talvez poderia surgir nessa etapa é: Sabe-se que em termos de derivadas usuais, a integral da divergência é nula quando nós tratamos de situações em que o campo se anula no infinito (condições de contorno). Mas o que de fato nos garante que a integral da derivada covariante também deverá ser nula? Primeiramente podemos entender de um modo discursivo através da idéia básica que uma derivada covariante é de fato uma derivada usual “corrigida”, e que não deixa de ser um processo de medida da taxa de variação de uma grandeza. Sendo assim, somado com o fato das nossas soluções desejadas serem finitas e comportadas, concluímos que será nula.

Não saísseitos podemos visualizar matematicamente a partir das seguintes considerações. Como  $\partial^i [\ln \Phi] \delta\Phi$  se transforma como um  $B^i$ , teremos que  $\left( [\ln \Phi]^{,i} \delta\Phi \right)_{,i} \equiv B^i_{,i}$ .

Uma vez que  $B^i_{,i} = \frac{\partial}{\partial x^i} B^i + \Gamma^i_{ki} B^k$ , e também sabendo que  $\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{im} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} g_{mi} + \frac{\partial}{\partial x^i} g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ki} \right)$ , ao analisarmos a expressão poderemos concluir que os dois últimos termos poderão ser simplificados se for levado em conta que o índice  $i$  poderá comutar com o índice  $m$  do termo  $\frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial}{\partial x^i} g_{mk} = \frac{1}{2} g^{mi} \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ik}$ , ou

seja  $\frac{1}{2}g^{im}\frac{\partial}{\partial x^i}g_{mk} - \frac{1}{2}g^{im}\frac{\partial}{\partial x^m}g_{ki} = \frac{1}{2}g^{mi}\frac{\partial}{\partial x^m}g_{ik} - \frac{1}{2}g^{im}\frac{\partial}{\partial x^m}g_{ki}$ .

Portanto

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}g_{mi} + \frac{\partial}{\partial x^i}g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m}g_{ki}\right) = \Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2}g^{im}\frac{\partial}{\partial x^k}g_{mi}.$$

O resultado acima é genérico no sentido que é válido para métricas não necessariamente diagonais. No entanto o resultado que pretendemos encontrar é tanto válido para uma métrica diagonal, quanto uma métrica completa. Por via de simplificação, analisa-seo caso de uma métrica do tipo diagonal para concluir um resultado que também é valido a uma métrica  $g^{ab}$  qualquer  $\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2}g^{ii}\frac{\partial}{\partial x^k}g_{ii}$ .

Notemos que

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2}g^{ii}\frac{\partial}{\partial x^k}g_{ii} = \frac{1}{2}g^{00}\frac{\partial}{\partial x^k}g_{00} + \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial}{\partial x^k}g_{11} + \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial}{\partial x^k}g_{22} + \frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial}{\partial x^k}g_{33}.$$

Partindo do fato que  $\frac{d}{dx^n}\ln(A) = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x^n}A$ , então,  $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^k}g_{00} = \frac{1}{2}\frac{1}{g_{00}}\frac{\partial}{\partial x^k}g_{00}$  e  $g_{00}g^{00} = 1$ , concluí-se que

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^k}g_{00} = \frac{1}{2}\frac{1}{g_{00}}\frac{\partial}{\partial x^k}g_{00} = \frac{1}{2}g^{00}\frac{1}{g^{00}}\frac{\partial}{\partial x^k}g_{00}.$$

Desse modo a expressão  $\Gamma_{ki}^i$  poderá ser reduzida a

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2}g^{ii}\frac{\partial}{\partial x^k}g_{ii} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^k}\ln g_{ii}$$

Sendo assim  $B_{;i}^i = \frac{\partial}{\partial x^i}B^i + \Gamma_{ki}^i B^k = \frac{\partial}{\partial x^i}B^i + \frac{1}{2}B^k\frac{\partial}{\partial x^k}\ln g_{ii}$ ; levando em conta a arbitrariedade indicial consequente das contrações,  $\frac{1}{2}B^k\frac{\partial}{\partial x^k}\ln g_{ii} \equiv \frac{1}{2}B^i\frac{\partial}{\partial x^i}\ln g_{ii}$ , ou seja,  $B_{;i}^i = \frac{\partial}{\partial x^i}(B^i + B^i \ln \sqrt{g_{ii}})$ , que por ser uma divergência e apresentar os limites adequados, deverá ser nula sobre a integração. Dessa forma a ação do campo escalar ficará,

$$\begin{aligned}\delta S_1 &= \int \left[ R\delta(\Phi) - w\delta\left(\frac{\Phi^i\Phi_{;i}}{\Phi}\right) \right] \sqrt{-g}d\Omega, \\ \delta S_1 &= \int \left\{ R\delta\Phi + w\Phi^i\Phi_{;i}\frac{1}{\Phi^2}\delta\Phi + 2w([\ln \Phi]_{;i})\delta\Phi - w\frac{\Phi^k\Phi_{;i}}{\Phi}\delta g^{ik} \right\} \sqrt{-g}d\Omega \\ \delta S_1 &= \int \left\{ R + w\Phi^i\Phi_{;i}\frac{1}{\Phi^2} + 2w([\ln \Phi]_{;i}) \right\} \delta\Phi \sqrt{-g}d\Omega - \int w\frac{\Phi^k\Phi_{;i}}{\Phi}\delta g^{ik} \sqrt{-g}d\Omega.\end{aligned}$$

Sabendo que  $([\ln \Phi]^{;i})_{;i} = \left(\frac{\Phi^{;i}}{\Phi}\right)_{;i} = \frac{1}{\Phi}(\Phi^{;i})_{;i} - \frac{1}{\Phi^2}\Phi^{;i}\Phi_{;i}$ , a ação se reduzirá a

$$\begin{aligned} S &= \int \left\{ R + w \frac{1}{\Phi^2} \Phi^{;i} \Phi_{;i} + 2w \frac{1}{\Phi} (\Phi^{;i})_{;i} - 2w \frac{1}{\Phi^2} \Phi^{;i} \Phi_{;i} \right\} \delta \Phi \sqrt{-g} d\Omega - \int w \frac{\Phi_{;k} \Phi_{;i}}{\Phi} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega \\ &= \int \left\{ R - w \frac{1}{\Phi^2} \Phi^{;i} \Phi_{;i} + 2w \frac{1}{\Phi} (\Phi^{;i})_{;i} \right\} \delta \Phi \sqrt{-g} d\Omega - \int w \frac{\Phi_{;k} \Phi_{;i}}{\Phi} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega. \end{aligned}$$

Além do termo acima encontrado que resulta no variacional do tensor métrico, a ação completa possui outros termos dependentes de  $\delta g^{ik}$  se agora estudarmos a segunda parte da ação, que resultará no variacional dos termos tensoriais

$$S_2 = \int \Phi \delta R \sqrt{-g} d\Omega + \int \left( \Phi R - w \frac{1}{\Phi} \Phi^{;i} \Phi_{;i} \right) \delta(\sqrt{-g}) d\Omega.$$

A fim de reduzir a expressão calculamos o variacional do Escalar de Curvatura

$$\delta R = \delta(g^{ik} R_{ik}) = \delta(g^{ik}) R_{ik} + g^{ik} \delta(R_{ik}).$$

É sabido que o tensor de Ricci definido em termos dos Símbolos de Christoffel são dados por

$$R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{il}^l + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l,$$

e o cálculo do variacional do tensor de Ricci é

$$\delta R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l} \delta \Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x^k} \delta \Gamma_{il}^l + \delta \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m + \Gamma_{ik}^l \delta \Gamma_{lm}^m - \delta \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l - \Gamma_{il}^m \delta \Gamma_{km}^l.$$

Em Relatividade Geral os ditos Símbolos de Christoffel não são tensores, pois transformam-se como os mesmos em termos de primeira ordem

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x'^l}{\partial x^n} \Gamma_{mk}^n + \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} \frac{\partial^2 x'^n}{\partial x^j \partial x^i}.$$

No entanto o variacional dos Símbolos de Christoffel,

$$\delta \Gamma_{ij}^l = \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x'^l}{\partial x^n} \delta \Gamma_{mk}^n,$$

são estruturas que se transformam como tensores. Se combinarmos esse fato com a estrutura geral das derivadas covariantes de um Tensor misto  $A_i^{jk}$  qualquer

$$(A_{jk}^i)_{;l} = \frac{\partial}{\partial x^l} A_{ijk}^i + \Gamma_{ml}^i A_{jk}^m - \Gamma_{jl}^m A_{mk}^i - \Gamma_{kl}^m A_{jm}^i.$$

Pode-se reduzir a expressão do variacional do tensor de Ricci  $\delta R_{ik}$ , reescrevendo-o sobre as seguintes contrações

$$\begin{aligned} (\delta\Gamma_{ik}^l)_{;l} &= \frac{\partial}{\partial x^l} \delta\Gamma_{ik}^l + \Gamma_{ml}^l \delta\Gamma_{ik}^m - \Gamma_{il}^m \delta\Gamma_{mk}^l - \Gamma_{kl}^m \delta\Gamma_{im}^l, \\ (\delta\Gamma_{il}^l)_{;k} &= \frac{\partial}{\partial x^k} \delta\Gamma_{il}^l + \Gamma_{km}^l \delta\Gamma_{il}^m - \Gamma_{ik}^m \delta\Gamma_{lm}^l - \Gamma_{lk}^m \delta\Gamma_{im}^l. \end{aligned}$$

Sendo assim

$$\begin{aligned} (\delta\Gamma_{ik}^l)_{;l} - (\delta\Gamma_{il}^l)_{;k} &= \\ \frac{\partial}{\partial x^l} \delta\Gamma_{ik}^l + \Gamma_{ml}^l \delta\Gamma_{ik}^m - \Gamma_{il}^m \delta\Gamma_{mk}^l - \Gamma_{kl}^m \delta\Gamma_{im}^l - \frac{\partial}{\partial x^k} \delta\Gamma_{il}^l - \Gamma_{km}^l \delta\Gamma_{il}^m + \Gamma_{ik}^m \delta\Gamma_{lm}^l + \Gamma_{lk}^m \delta\Gamma_{im}^l \\ \frac{\partial}{\partial x^l} \delta\Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x^k} \delta\Gamma_{il}^l + \Gamma_{ml}^l \delta\Gamma_{ik}^m - \Gamma_{il}^m \delta\Gamma_{mk}^l - \Gamma_{km}^l \delta\Gamma_{il}^m + \Gamma_{ik}^m \delta\Gamma_{lm}^l. \end{aligned}$$

Essa expressão acima é equivalente ao variacional do tensor de Ricci, portanto

$$\delta R_{ik} = (\delta\Gamma_{ik}^l)_{;l} - (\delta\Gamma_{il}^l)_{;k}.$$

O variacional de  $\Gamma_{jk}^i$  é

$$\delta\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \delta(g^{im}) \left( \frac{\partial}{\partial x^k} g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{jk} \right) + \frac{1}{2} g^{im} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \delta g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} \delta g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} \delta g_{jk} \right),$$

Analisando estruturalmente a expressão acima, o primeiro termo, pode ser escrito por meio da utilização de uma outra conexão

$$\Gamma_{jk}^n = \frac{1}{2} g^{nm} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{jk} \right),$$

que deve estar devidamente contraída por meio de  $g_{na}$ ;

$$\begin{aligned} g_{na} \Gamma_{jk}^n &= \frac{1}{2} g_{na} g^{nm} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{jk} \right) = \frac{1}{2} \delta_a^m \left( \frac{\partial}{\partial x^k} g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{jk} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} g_{aj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ak} - \frac{\partial}{\partial x^a} g_{jk} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{jk} \right). \end{aligned}$$

Sabendo disso, escrevemos o variacional dos Símbolos de Christoffel sobre essas considerações

$$\delta\Gamma_{jk}^i = \delta(g^{im}) g_{na} \Gamma_{jk}^n + \frac{1}{2} g^{im} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \delta g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} \delta g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} \delta g_{jk} \right).$$

Pode-se, a critério de simplificação, analisar os termos  $\delta(g^{im}) g_{na}$ , em relação às transformações de

coordenadas, de modo que

$$g^{im}g_{na} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} \frac{\partial x^m}{\partial x'^q} g'^{pq} \frac{\partial x^r}{\partial x'^n} \frac{\partial x^s}{\partial x'^a} g'_{rs} = \delta_n^i \delta_a^m \delta_p^r \delta_q^s g'^{pq} g'_{rs} = \delta_n^i \delta_a^m g'^{rs} g'_{rs},$$

sendo assim,  $\delta(g^{im}g_{na}) = \delta g^{im}g_{na} + g^{im}\delta g_{na} = 0 \rightarrow \delta g^{im}g_{na} = -g^{im}\delta g_{na}$ . Portanto com a utilização da forma acima definida,  $\delta\Gamma_{jk}^i$  ficará

$$\delta\Gamma_{jk}^i = -g^{im}\delta g_{na}\Gamma_{jk}^n + \frac{1}{2}g^{im} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \delta g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} \delta g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} \delta g_{jk} \right).$$

Mais uma vez recorreremos às regiões de transformação das derivadas covariantes de um tensor qualquer  $A_{ij}$ , a fim de estabelecer uma transformação reduzida ao tensor  $\delta\Gamma_{jk}^i$

$$(A_{jk})_{;l} = \frac{\partial}{\partial x^l} A_{jk} - \Gamma_{lj}^m g_{mk} - \Gamma_{lk}^m g_{mj},$$

seguindo a regra geral de diferenciação covariante, escrevemos as derivadas do variacional dos tensores métricos como

$$\begin{aligned} (\delta g_{mj})_{;k} &= \frac{\partial}{\partial x^k} g_{mj} - \Gamma_{km}^n g_{nj} - \Gamma_{kj}^n g_{nm}, \\ (\delta g_{mk})_{;j} &= \frac{\partial}{\partial x^j} g_{mk} - \Gamma_{jm}^n g_{nk} - \Gamma_{jk}^n g_{nm}, \\ (\delta g_{jk})_{;m} &= \frac{\partial}{\partial x^m} g_{jk} - \Gamma_{mj}^n g_{nk} - \Gamma_{mk}^n g_{nj}, \end{aligned}$$

ou seja, podemos reagrupar as expressões acima a fim de obtermos  $\delta\Gamma_{jk}^i$

$$\begin{aligned} (\delta g_{mj})_{;k} + (\delta g_{mk})_{;j} - (\delta g_{jk})_{;m} &= \frac{\partial}{\partial x^k} g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{jk} - \Gamma_{km}^n g_{nj} - \Gamma_{jm}^n g_{nk} \\ &+ \Gamma_{mj}^n g_{nk} - \Gamma_{kj}^n g_{nm} - \Gamma_{jk}^n g_{nm} + \Gamma_{mk}^n g_{nj} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{jk} - 2\Gamma_{kj}^n g_{nm}. \end{aligned}$$

Quando a semi-soma das derivadas covariantes do tensor métrico são contraídas pela métrica  $g^{im}$ , encontramos  $\frac{1}{2}g^{im} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{jk} - 2\Gamma_{kj}^n g_{nm} \right)$  que é exatamente o variacional de  $\Gamma_{jk}^i$ . Portanto

$$\delta\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{im} \left[ (\delta g_{mj})_{;k} + (\delta g_{mk})_{;j} - (\delta g_{jk})_{;m} \right].$$

Finalmente podemos escrever o variacional do tensor de Ricci em termos das derivadas covariantes do tensor métrico  $g_{ab}$ , já que o variacional do Tensor de Ricci está escrito em termos do variacional do Símbolo do Christoffel e esse por sua vez é diretamente relacionado com  $\delta g_{ab}$ .

Assim, se  $\delta R_{ik} = (\delta \Gamma_{ik}^l)_{;l} - (\delta \Gamma_{il}^l)_{;k}$  e  $\delta \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{im} [(\delta g_{mj})_{;k} + (\delta g_{mk})_{;j} - (\delta g_{jk})_{;m}]$ , são válidos, concluí-se

$$\begin{aligned} \delta R_{ik} &= \left( \frac{1}{2} g^{lm} [(\delta g_{mi})_{;k} + (\delta g_{mk})_{;i} - (\delta g_{ik})_{;m}] \right)_{;l} - \left( \frac{1}{2} g^{lm} [(\delta g_{mi})_{;l} + (\delta g_{ml})_{;i} - (\delta g_{il})_{;m}] \right)_{;k} \\ &= \frac{1}{2} g^{lm} [(\delta g_{mi})_{;k;l} + (\delta g_{mk})_{;i;l} - (\delta g_{ik})_{;m;l} - (\delta g_{mi})_{;l;k} - (\delta g_{ml})_{;i;k} + (\delta g_{il})_{;m;k}]. \end{aligned}$$

Logo

$$\delta R_{ik} = \frac{1}{2} g^{lm} [(\delta g_{mk})_{;j;l} - (\delta g_{ik})_{;m;l} - (\delta g_{ml})_{;i;k} + (\delta g_{il})_{;m;k}].$$

Com esse resultado, o primeiro termo relacionado com a variação da segunda ação,  $\int \Phi \delta(R) \sqrt{-g} d\Omega$ , será

$$\begin{aligned} \delta S_2 &= \int \Phi \delta(R_{ik} g^{ik}) \sqrt{-g} d\Omega = \int \Phi (\delta R_{ik} g^{ik} + R_{ik} \delta g^{ik}) \sqrt{-g} d\Omega \\ &= \int \Phi \left( \frac{1}{2} g^{lm} [(\delta g_{mk})_{;j;l} - (\delta g_{ik})_{;m;l} - (\delta g_{ml})_{;i;k} + (\delta g_{il})_{;m;k}] g^{ik} \right) \sqrt{-g} d\Omega. \end{aligned}$$

Analisando o argumento da expressão

$$\frac{1}{2} g^{lm} g^{ik} [(\delta g_{mk})_{;i;l} - (\delta g_{ik})_{;m;l} - (\delta g_{ml})_{;i;k} + (\delta g_{il})_{;m;k}],$$

e utilizando do fato que:  $g^{ik} \delta g_{mk} = -g_{mk} \delta g^{ik}$  para quaisquer índices, teremos

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{2} g^{lm} g_{mk} (\delta g^{ik})_{;i;l} + \frac{1}{2} g^{lm} g_{ik} (\delta g^{ik})_{;m;l} + \frac{1}{2} g^{ik} g_{ml} (\delta g^{ml})_{;i;k} - \frac{1}{2} g^{ik} g_{il} (\delta g^{ml})_{;m;k} \\ &= -\frac{1}{2} (\delta g^{il})_{;i;l} + \frac{1}{2} (g_{ik} \delta g^{ik})_{;l}^l + \frac{1}{2} (g_{ml} \delta g^{ml})_{;k}^k - \frac{1}{2} (\delta g^{mk})_{;m;k}. \end{aligned}$$

Como esses termos acima definidos são componentes e estão sendo somadas, se utilizarmos o fato que as expressões estão devidamente contraídas

$$-\frac{1}{2} (\delta g^{il})_{;i;l} - \frac{1}{2} (\delta g^{mk})_{;m;k} = -(\delta g^{ab})_{;a;b}$$

e que

$$\frac{1}{2} (g_{ik} \delta g^{ik})_{;l}^l + \frac{1}{2} (g_{ml} \delta g^{ml})_{;k}^k = (g_{pq} \delta g^{pq})_{;q}^q,$$

onde  $a, b, p$  e  $q$  foram utilizados para mostrar a conveniência imposta pelos índices mudos. Portanto,

o argumento da expressão simplificado será

$$(g_{ik}\delta g^{ik})_{;l}^{:l} - (\delta g^{il})_{;i;l}.$$

Tendo isso em vista, concluímos que

$$\begin{aligned} & \int \Phi \left( \frac{1}{2} g^{lm} [(\delta g_{mk})_{;i;l} - (\delta g_{ik})_{;m;l} - (\delta g_{ml})_{;i;k} + (\delta g_{il})_{;m;k}] g^{ik} \right) \sqrt{-g} d\Omega \\ &= \int \Phi \left[ (g_{ik}\delta g^{ik})_{;l}^{:l} - (\delta g^{il})_{;i;l} \right] \sqrt{-g} d\Omega = \int \Phi \left[ (g_{ik}\delta g^{ik})_{;l}^{:l} - (\delta g^{il})_{;i;l} \right] \sqrt{-g} d\Omega. \end{aligned}$$

Se compararmos os termos acima com os de uma integração por partes

$$\begin{aligned} & \int \Phi \left[ (g_{ik}\delta g^{ik})_{;l}^{:l} - (\delta g^{il})_{;i;l} \right] \sqrt{-g} d\Omega \\ &= \Phi \left[ (g_{ik}\delta g^{ik})_{;l}^{:l} - (\delta g^{il})_{;i;l} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int \left[ (g_{ik}\delta g^{ik})_{;l}^{:l} - (\delta g^{il})_{;i;l} \right] \Phi_{;l} \sqrt{-g} d\Omega, \end{aligned}$$

e considerando que tanto o campo escalar quanto o tensor métrico sejam comportados de forma a se anularem nas regiões de fronteira, teremos

$$\begin{aligned} & \int \Phi \left[ (g_{ik}\delta g^{ik})_{;l}^{:l} - (\delta g^{il})_{;i;l} \right] \sqrt{-g} d\Omega = - \int \left[ (g_{ik}\delta g^{ik})_{;l}^{:l} - (\delta g^{il})_{;i;l} \right] \Phi_{;l} \sqrt{-g} d\Omega \\ &= - \int \left[ (g_{ik}\delta g^{ik})_{;l}^{:l} \right] \Phi_{;l} \sqrt{-g} d\Omega + \int \left[ (\delta g^{il})_{;i;l} \right] \Phi_{;l} \sqrt{-g} d\Omega. \end{aligned}$$

Agora, se calculamos essas novas duas integrações por partes, também levando em conta as condições de borda acima discutidas, encontramos

$$\int \left[ (g_{ik}\delta g^{ik})_{;l}^{:l} \right] \Phi_{;l} \sqrt{-g} d\Omega = - \int \left[ (\Phi_{;l})^{:l} \right] g_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega,$$

e

$$\int \left[ (\delta g^{il})_{;i;l} \right] \Phi_{;l} \sqrt{-g} d\Omega = - \int \left[ (\Phi_{;l})_{;i} \right] \delta g^{il} \sqrt{-g} d\Omega.$$

Organizando os termos

$$\begin{aligned} & \int \Phi \left[ (g_{ik}\delta g^{ik})_{;l}^{:l} - (\delta g^{il})_{;i;l} \right] \sqrt{-g} d\Omega = \int (\Phi_{;l})^{:l} g_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega - \int \Phi_{;l;i} \delta g^{il} \sqrt{-g} d\Omega \\ &= \int (g_{ik} \Phi_{;l}^{:l} - \Phi_{;l;i}) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega. \end{aligned}$$

Portanto

$$\int \Phi(g^{ik}\delta R_{ik} + \delta g^{ik}R_{ik})\sqrt{-g}d\Omega = \int (g_{ik}\Phi_{,l}^i - \Phi_{,k;i} + \Phi R_{ik})\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega. \quad (\text{B.2})$$

Por fim, resta conhecer o valor de  $\delta\sqrt{-g}$ , para completar os correspondentes termos de  $\delta S_R$ . Mas sabemos que

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}g_{ik}\delta g^{ik}}{2},$$

desse modo

$$\begin{aligned} \int \left(\Phi R - w\frac{1}{\Phi}\Phi^i\Phi_{,i}\right)\delta(\sqrt{-g})d\Omega &= \int \left[\Phi R - w\frac{1}{\Phi}\Phi^i\Phi_{,i}\right]\left(-\frac{\sqrt{-g}g_{ik}\delta g^{ik}}{2}\right)d\Omega \\ &= -\int \frac{1}{2}g_{ik}\left[\Phi R - w\frac{1}{\Phi}\Phi^i\Phi_{,i}\right]\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega. \end{aligned}$$

Com esses resultados pode-se escrever por completo  $\delta S_2$

$$\begin{aligned} \delta S_2 &= \int \Phi\delta(R)\sqrt{-g}d\Omega + \int \frac{1}{2}g_{ik}\left[\Phi R - w\frac{1}{\Phi}\Phi^i\Phi_{,i}\right]\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega \\ &= \int \left(g_{ik}\Phi_{,l}^i - \Phi_{,k;i} - \frac{1}{2}g_{ik}\left[\Phi R - w\frac{1}{\Phi}\Phi^i\Phi_{,i}\right] + \Phi R_{ik}\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega. \end{aligned}$$

Finalmente unindo os variacionais  $\delta\Phi$  e  $\delta g^{ik}$  temos

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int \left(\Phi R - w\frac{\Phi^i\Phi_{,i}}{\Phi}\right)\sqrt{-g}d\Omega \\ &= \int \left(g_{ik}\Phi_{,l}^i - \Phi_{,k;i} - \frac{1}{2}g_{ik}\left[\Phi R - w\frac{1}{\Phi}\Phi^i\Phi_{,i}\right] - w\frac{\Phi_{,k}\Phi_{,i}}{\Phi} + \Phi R_{ik}\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega \\ &+ \int \left\{\Phi R - w\frac{1}{\Phi^2}\Phi^i\Phi_{,i} + 2w\frac{1}{\Phi}(\Phi^i)_{,i}\right\}\delta\Phi\sqrt{-g}d\Omega. \end{aligned}$$

Considerando válida para todo e qualquer  $\delta\Phi$  e  $\delta g^{ik}$ , para que a ação possua valor nulo, devemos exigir que

$$g_{ik}\Phi_{,l}^i - \Phi_{,k;i} - \frac{1}{2}g_{ik}\left[\Phi R - w\frac{1}{\Phi}\Phi^i\Phi_{,i}\right] - w\frac{\Phi_{,k}\Phi_{,i}}{\Phi} + \Phi R_{ik} = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$R - w\frac{1}{\Phi^2}\Phi^i\Phi_{,i} + 2w\frac{1}{\Phi}(\Phi^i)_{,i} = 0, \quad (\text{B.4})$$

onde  $(\Phi^i)_{;i}$  é o operador D' Alembertiano em coordenadas Curvelíneas

$$\square\Phi = \Phi^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g}\Phi^i).$$

Se rearranjarmos a expressão que anula o variacional para todo  $\delta g^{ik}$ , encontramos

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{1}{\Phi} (\Phi_{,k;i} - g_{ik}\Phi^l_{;l}) + \frac{w}{\Phi^2} \left( \Phi_{,k}\Phi_{,i} - \frac{1}{2}g_{ik}\Phi^l_{;l}\Phi_{,i} \right). \quad (\text{B.5})$$

É importante notar que a equação acima, a parte da esquerda, corresponde exatamente à equação de Einstein. No entanto, a parte da direita difere com a existência de termos dependentes do campo escalar.

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, M. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. Adhikari, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, 116(6):061102, 2016.
- [2] L. Abramo, R. Batista, L. Liberato, and R. Rosenfeld. Structure formation in the presence of dark energy perturbations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2007(11):012, 2007.
- [3] P. A. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. Banday, R. Barreiro, J. Bartlett, N. Bartolo, et al. Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 594:A13, 2016.
- [4] L. Amendola, C. Charmousis, and S. C. Davis. Constraints on gauss–bonnet gravity in dark energy cosmologies. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2006(12):020, 2006.
- [5] L. Amendola, S. Fogli, A. Guarnizo, M. Kunz, and A. Vollmer. Model-independent constraints on the cosmological anisotropic stress. *Physical Review D*, 89(6):063538, 2014.
- [6] L. A. Anchordoqui, S. E. P. Bergliaffa, M. L. Trobo, and G. S. Birman. Cylindrically symmetric spinning brans–dicke space–times with closed timelike curves. *Modern Physics Letters A*, 14(17):1105–1111, 1999.
- [7] S. Basilakos. The growth index of matter perturbations using the clustering of dark energy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 449(2):2151–2155, 2015.
- [8] S. Basilakos and S. Nesseris. Testing einstein’s gravity and dark energy with growth of matter perturbations: Indications for new physics? *Physical Review D*, 94(12):123525, 2016.

- 
- [9] R. A. Battye and J. A. Pearson. Effective action approach to cosmological perturbations in dark energy and modified gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(07):019, 2012.
- [10] R. Bean and M. Tangmatitham. Current constraints on the cosmic growth history. *Physical Review D*, 81(8):083534, 2010.
- [11] S. Bellucci, V. Faraoni, and D. Babusci. Scalar gravitational waves and einstein frame. *Physics Letters A*, 282(6):357–361, 2001.
- [12] E. Bertschinger and P. Zukin. Distinguishing modified gravity from dark energy. *Physical Review D*, 78(2):024015, 2008.
- [13] M. e. a. Betoule, R. Kessler, J. Guy, J. Mosher, D. Hardin, R. Biswas, P. Astier, P. El-Hage, M. König, S. Kuhlmann, et al. Improved cosmological constraints from a joint analysis of the sdss-ii and snls supernova samples. *Astronomy & Astrophysics*, 568:A22, 2014.
- [14] F. Beutler, C. Blake, M. Colless, D. H. Jones, L. Staveley-Smith, L. Campbell, Q. Parker, W. Saunders, and F. Watson. The 6df galaxy survey: baryon acoustic oscillations and the local hubble constant. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 416(4):3017–3032, 2011.
- [15] C. Blake, E. A. Kazin, F. Beutler, T. M. Davis, D. Parkinson, S. Brough, M. Colless, C. Contreras, W. Couch, S. Croom, et al. The wigglez dark energy survey: mapping the distance–redshift relation with baryon acoustic oscillations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 418(3):1707–1724, 2011.
- [16] B. Boisseau. Exact cosmological solution of a scalar-tensor gravity theory compatible with the  $\lambda$  cdm model. *Physical Review D*, 83(4):043521, 2011.
- [17] B. Boisseau, G. Esposito-Farese, D. Polarski, and A. A. Starobinsky. Reconstruction of a scalar-tensor theory of gravity in an accelerating universe. *Physical Review Letters*, 85(11):2236, 2000.
- [18] C. Brans. Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. ii. *Physical Review*, 125(6):2194, 1962.
- [19] C. Brans and R. H. Dicke. Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical Review*, 124(3):925, 1961.
- [20] C. H. Brans. The roots of scalar-tensor theory: an approximate history. *arXiv preprint gr-qc/0506063*, 2005.

- 
- [21] G. Calcagni, S. Tsujikawa, and M. Sami. Dark energy and cosmological solutions in second-order string gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 22(19):3977, 2005.
- [22] S. Capozziello. Curvature quintessence. *International Journal of Modern Physics D*, 11(04):483–491, 2002.
- [23] S. Capozziello, S. Nojiri, and S. Odintsov. Dark energy: the equation of state description versus scalar-tensor or modified gravity. *Physics Letters B*, 634(2):93–100, 2006.
- [24] S. M. Carroll, A. De Felice, V. Duvvuri, D. A. Easson, M. Trodden, and M. S. Turner. Cosmology of generalized modified gravity models. *Physical Review D*, 71(6):063513, 2005.
- [25] R. Catena, M. Pietroni, and L. Scarabello. Einstein and Jordan frames reconciled: a frame-invariant approach to scalar-tensor cosmology. *Physical Review D*, 76(8):084039, 2007.
- [26] A. H. Chamseddine and V. Mukhanov. Inhomogeneous dark energy. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(02):040, 2016.
- [27] T. Chiba and M. Yamaguchi. Conformal-frame (in) dependence of cosmological observations in scalar-tensor theory. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2013(10):040, 2013.
- [28] M. P. Dabrowski, J. Garecki, and D. B. Blaschke. Conformal transformations and conformal invariance in gravitation. *Annalen der Physik*, 18(1):13–32, 2009.
- [29] S. del Campo, J. C. Fabris, R. Herrera, and W. Zimdahl. Cosmology with Ricci dark energy. *Physical Review D*, 87(12):123002, 2013.
- [30] A. Del Popolo and M. Le Delliou. Small scale problems of the  $\Lambda$ CDM model: A short review. *Galaxies*, 5(1):17, 2017.
- [31] R. H. Dicke. Mach’s principle and invariance under transformation of units. *Physical Review*, 125(6):2163, 1962.
- [32] J. N. Dossett and M. Ishak. Effects of dark energy perturbations on cosmological tests of general relativity. *Physical Review D*, 88(10):103008, 2013.
- [33] J. C. Fabris, B. Fraga, N. Pinto-Neto, and W. Zimdahl. Transient cosmic acceleration from interacting fluids. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(04):008, 2010.
- [34] V. Faraoni. *Cosmology in scalar-tensor gravity*, volume 139. Springer Science & Business Media, 2004.

- 
- [35] V. Faraoni and E. Gunzig. Einstein frame or Jordan frame? *International journal of theoretical physics*, 38(1):217–225, 1999.
- [36] V. Faraoni, E. Gunzig, and P. Nardone. Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology. *arXiv preprint gr-qc/9811047*, 1998.
- [37] O. Farooq and B. Ratra. Hubble parameter measurement constraints on dark energy. *The Astrophysical Journal*, 764(2):138, 2013.
- [38] S. Fay, R. Tavakol, and S. Tsujikawa.  $f(r)$  gravity theories in Palatini formalism: Cosmological dynamics and observational constraints. *Physical Review D*, 75(6):063509, 2007.
- [39] E. E. Flanagan. The conformal frame freedom in theories of gravitation. *Classical and Quantum Gravity*, 21(15):3817, 2004.
- [40] Y. Fujii and K.-i. Maeda. *The scalar-tensor theory of gravitation*. Cambridge University Press, 2003.
- [41] A. R. Fuño, W. Hipólito-Ricaldi, and W. Zimdahl. Matter perturbations in scaling cosmology. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 457(3):2958–2967, 2016.
- [42] R. Gannouji and D. Polarski. The growth of matter perturbations in some scalar–tensor de Sitter models. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2008(05):018, 2008.
- [43] C. Gordon. Adiabatic and entropy perturbations in cosmology. *arXiv preprint astro-ph/0112523*, 2001.
- [44] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time*, volume 1. Cambridge University Press, 1973.
- [45] W. Hipólito-Ricaldi, H. Velten, and W. Zimdahl. Viscous dark fluid universe. *Physical Review D*, 82(6):063507, 2010.
- [46] A. Hojjati, L. Pogossian, and G.-B. Zhao. Testing gravity with CAMB and CosmoMC. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(08):005, 2011.
- [47] D. Huterer, D. Kirkby, R. Bean, A. Connolly, K. Dawson, S. Dodelson, A. Evrard, B. Jain, M. Jarvis, E. Linder, et al. Growth of cosmic structure: Probing dark energy beyond expansion. *Astroparticle Physics*, 63:23–41, 2015.

- 
- [48] J.-c. Hwang and H. Noh. Classical evolution and quantum generation in generalized gravity theories including string corrections and tachyons: Unified analyses. *Physical Review D*, 71(6):063536, 2005.
- [49] R. Jimenez and A. Loeb. Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages. *The Astrophysical Journal*, 573(1):37, 2002.
- [50] R. Jimenez, L. Verde, T. Treu, and D. Stern. Constraints on the equation of state of dark energy and the hubble constant from stellar ages and the cosmic microwave background. *The Astrophysical Journal*, 593(2):622, 2003.
- [51] D. Kazakov and G. Smadja. *Particle Physics and Cosmology: The Interface: Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Particle Physics and Cosmology: The Interface Cargèse, France, 4-16 August 2003*, volume 188. Springer Science & Business Media, 2006.
- [52] E. Kolb and M. Turner. *The early universe*, volume 69. Westview press, 1994.
- [53] M. Kunz and D. Sapone. Dark energy versus modified gravity. *Physical review letters*, 98(12):121301, 2007.
- [54] D. Langlois and A. Riazuelo. Correlated mixtures of adiabatic and isocurvature cosmological perturbations. *Physical Review D*, 62(4):043504, 2000.
- [55] A. R. Liddle and D. H. Lyth. *Cosmological inflation and large-scale structure*. Cambridge University Press, 2000.
- [56] E. V. Linder and A. Jenkins. Cosmic structure growth and dark energy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 346(2):573–583, 2003.
- [57] D. H. Lyth and A. R. Liddle. *The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure*. Cambridge University Press, 2009.
- [58] G. Magnano and L. M. Sokolowski. Physical equivalence between nonlinear gravity theories and a general-relativistic self-gravitating scalar field. *Physical Review D*, 50(8):5039, 1994.
- [59] E. Majerotto, J. Väliviita, and R. Maartens. Adiabatic initial conditions for perturbations in interacting dark energy models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 402(4):2344–2354, 2010.
- [60] H. Mo and M. Fukugita. Constraints on the cosmic structure formation models from early formation of giant galaxies. *The Astrophysical Journal Letters*, 467(1):L9, 1996.

- 
- [61] H. Mo, F. Van den Bosch, and S. White. *Galaxy formation and evolution*. Cambridge University Press, 2010.
- [62] M. Moresco, L. Verde, L. Pozzetti, R. Jimenez, and A. Cimatti. New constraints on cosmological parameters and neutrino properties using the expansion rate of the universe to  $z = 1.75$ . *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(07):053, 2012.
- [63] J. Morris. Consistency of equations of motion in conformal frames. *Physical Review D*, 90(10):107501, 2014.
- [64] V. Mukhanov. *Physical foundations of cosmology*. Cambridge university press, 2005.
- [65] S. Nesseris, G. Pantazis, and L. Perivolaropoulos. Tension and constraints on modified gravity parametrizations of  $g_{\text{eff}}(z)$  from growth rate and planck data. *Physical Review D*, 96(2):023542, 2017.
- [66] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos. Crossing the phantom divide: theoretical implications and observational status. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2007(01):018, 2007.
- [67] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos. Testing  $\lambda$  cdm with the growth function  $\delta(a)$ : Current constraints. *Physical Review D*, 77(2):023504, 2008.
- [68] S. Nesseris and D. Sapone. Accuracy of the growth index in the presence of dark energy perturbations. *Physical Review D*, 92(2):023013, 2015.
- [69] I. P. Neupane and B. M. Carter. Towards inflation and dark energy cosmologies from modified gauss–bonnet theory. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2006(06):004, 2006.
- [70] S. Nojiri, S. D. Odintsov, and M. Sasaki. Gauss-bonnet dark energy. *Physical Review D*, 71(12):123509, 2005.
- [71] M. Novello, N. Neto, S. Bergliaffa, et al. Programa mínimo de cosmologia. *ICRA Brasil, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) e Ministério da Ciência e Tecnologia*, 2010.
- [72] N. Padmanabhan, X. Xu, D. J. Eisenstein, R. Scalzo, A. J. Cuesta, K. T. Mehta, and E. Kazin. A 2 per cent distance to  $z = 0.35$  by reconstructing baryon acoustic oscillations—i. methods and application to the sloan digital sky survey. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 427(3):2132–2145, 2012.
- [73] J. A. Peacock. *Cosmological physics*. Cambridge university press, 1999.

- 
- [74] P. J. E. Peebles. *Principles of physical cosmology*. Princeton University Press, 1993.
- [75] W. J. Percival. Cosmological structure formation in a homogeneous dark energy background. *Astronomy & Astrophysics*, 443(3):819–830, 2005.
- [76] W. J. Percival, B. A. Reid, D. J. Eisenstein, N. A. Bahcall, T. Budavari, J. A. Frieman, M. Fukugita, J. E. Gunn, Ž. Ivezić, G. R. Knapp, et al. Baryon acoustic oscillations in the sloan digital sky survey data release 7 galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 401(4):2148–2168, 2010.
- [77] W. J. Percival and M. White. Testing cosmological structure formation using redshift-space distortions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 393(1):297–308, 2009.
- [78] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. Knop, P. Nugent, P. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. Groom, et al. Measurements of  $\omega$  and  $\lambda$  from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2):565, 1999.
- [79] F. Piazza, H. Steigerwald, and C. Marinoni. Phenomenology of dark energy: exploring the space of theories with future redshift surveys. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014(05):043, 2014.
- [80] M. A. Resco and A. L. Maroto. Parametrizing growth in dark energy and modified gravity models. *arXiv preprint arXiv:1707.08964*, 2017.
- [81] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009, 1998.
- [82] A. G. Riess, L. M. Macri, S. L. Hoffmann, D. Scolnic, S. Casertano, A. V. Filippenko, B. E. Tucker, M. J. Reid, D. O. Jones, J. M. Silverman, et al. A 2.4% determination of the local value of the hubble constant based on observations with the nasa/esa hubble space telescope, obtained at the space telescope science institute, which is operated by aura, inc., under nasa contract nas 5-26555. *The Astrophysical Journal*, 826(1):56, 2016.
- [83] I. D. Saltas and M. Kunz. Anisotropic stress and stability in modified gravity models. *Physical Review D*, 83(6):064042, 2011.
- [84] J. B. Sanchez and L. Perivolaropoulos. Evolution of dark energy perturbations in scalar-tensor cosmologies. *Physical Review D*, 81(10):103505, 2010.

- 
- [85] D. Sapone and M. Kunz. Fingerprinting dark energy. *Physical Review D*, 80(8):083519, 2009.
- [86] M. Shibata, K. Nakao, and T. Nakamura. Scalar-type gravitational wave emission from gravitational collapse in brans-dicke theory: Detectability by a laser interferometer. *Physical Review D*, 50(12):7304, 1994.
- [87] J. Simon, L. Verde, and R. Jimenez. Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential. *Physical Review D*, 71(12):123001, 2005.
- [88] Y.-S. Song, L. Hollenstein, G. Caldera-Cabral, and K. Koyama. Theoretical priors on modified growth parametrisations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(04):018, 2010.
- [89] Y.-S. Song and W. J. Percival. Reconstructing the history of structure formation using redshift distortions. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2009(10):004, 2009.
- [90] H. Steigerwald, J. Bel, and C. Marinoni. Probing non-standard gravity with the growth index: a background independent analysis. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014(05):042, 2014.
- [91] D. Stern, R. Jimenez, L. Verde, M. Kamionkowski, and S. A. Stanford. Cosmic chronometers: constraining the equation of state of dark energy. i:  $H(z)$  measurements. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(02):008, 2010.
- [92] S. Tsujikawa. Matter density perturbations and effective gravitational constant in modified gravity models of dark energy. *Physical Review D*, 76(2):023514, 2007.
- [93] C. Z. Vargas, W. S. Hipólito-Ricaldi, and W. Zimdahl. Perturbations for transient acceleration. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(04):032, 2012.
- [94] D. N. Vollick. On the viability of the palatini form of  $1/r$  gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 21(15):3813, 2004.
- [95] R. M. Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [96] S. Weinberg. The cosmological constant problem. *Reviews of modern physics*, 61(1):1, 1989.
- [97] C. M. Will. *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge University Press, 1993.
- [98] C. M. Will. *Was Einstein right?: putting general relativity to the test*. Basic Books, 1993.

- [99] C. M. Will. The confrontation between general relativity and experiment. *Living reviews in relativity*, 17(1):4, 2014.
- [100] W. Zimdahl. Interactions in the dark sector of the universe. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 11(02):1460014, 2014.
- [101] W. Zimdahl, H. Borges, S. Carneiro, J. Fabris, and W. Hipolito-Ricaldi. Non-adiabatic perturbations in decaying vacuum cosmology. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(04):028, 2011.