

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

PAULA MAYER DOS SANTOS SOUZA

DIMENSIONAMENTO OTIMIZADO DE PILARES DE
CONCRETO ARMADO DE ACORDO COM A NBR 6118:2014

PAULA MAYER DOS SANTOS SOUZA

**DIMENSIONAMENTO OTIMIZADO DE PILARES DE
CONCRETO ARMADO DE ACORDO COM A NBR 6118:2014**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Elcio Cassimiro Alves

VITÓRIA
2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial Tecnológica,
Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)
Sandra Mara Borges Campos – CRB-6 ES-000593/O

S729d Souza, Paula Mayer dos Santos, 1990-
Dimensionamento otimizado de pilares de concreto armado
de acordo com a NBR 6118:2014 / Paula Mayer dos Santos
Souza. – 2017.
190 f. : il.

Orientador: Elcio Cassimiro Alves.
Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade
Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Colunas. 2. Otimização estrutural. 3. Concreto de alta
resistência. 4. Engenharia de estruturas. 5. Resistência de
materiais. 6. Índice de esbeltez (Engenharia Civil). I. Alves, Elcio
Cassimiro. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro
Tecnológico. III. Título.

CDU: 624

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

**DIMENSIONAMENTO OTIMIZADO DE PILARES DE CONCRETO
ARMADO DE ACORDO COM A NBR 6118:2014**

Paula Mayer dos Santos Souza

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Espírito, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de Estruturas.

Aprovada no dia **15 de dezembro de 2017** por:



Prof. Dr. Elcio Cassimiro Alves
Doutor em Engenharia e Tecnologia Espaciais
Orientador - UFES



Prof. Dr. Lorenzo Augusto Ruschi e Luchi
Doutor em Engenharia Civil
Examinador Interno - UFES



Prof. Dr. Paulo César Mappa
Doutor em Engenharia Mecânica
Examinador Externo – CEFET-MG
Por meio de Videoconferência

Vitória – ES, dezembro de 2017

RESUMO

Esta dissertação trata do dimensionamento otimizado de pilares de concreto armado. Apresenta as formulações adotadas para o dimensionamento de seções retangulares, circulares, hexagonais e em “U” moderadamente esbeltas. Aborda, também, seções retangulares esbeltas em apenas uma das direções. Os cálculos são baseados na norma que define o procedimento para o projeto de estruturas de concreto, NBR 6118:2014. Assim, compreende concretos de resistência característica à compressão entre 20 e 90 MPa. O programa computacional desenvolvido foi implementado na plataforma *Matlab*, e utiliza o Método dos Pontos Interiores como algoritmo de otimização. Reúne exemplos que atestam a validade do programa computacional desenvolvido, bem como verificam as influências de determinadas características no dimensionamento. O estudo indica que o maior número de parâmetros liberados para a otimização permite uma redução considerável do custo total dos pilares.

Palavras Chave: Dimensionamento. Pilares. Otimização. Concreto de alta resistência. Esbeltez.

ABSTRACT

This work is about the reinforced concrete columns optimum design. It presents the formulations adopted for rectangular, circular, hexagonal and in “U” moderately slender sections design. It also covers slender rectangular sections in one direction. The design accords to Brazilian Code for procedures of concrete structures design, NBR 6118:2014. Thus, it comprises compressive strength concretes between 20 and 90 MPa. The developed computational program was implemented in the Matlab platform, and uses the Internal Point Method as an optimization algorithm. It gathers examples that attest the validity of the developed computational program, as well as verify the influences of certain characteristics in the design. The study indicates that the greater number of parameters released for optimization allows a considerable reduction in the total columns cost.

Keywords: Design. Columns. Optimization. High strength concretes. Slender.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO IDEALIZADO.....	36
FIGURA 2 – DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA AÇOS DE ARMADURA PASSIVA	37
FIGURA 3 – DOMÍNIOS DE DEFORMAÇÃO EM UMA SEÇÃO TRANSVERSAL.....	38
FIGURA 4 – DEFINIÇÃO DO COMPRIMENTO EQUIVALENTE DE UM ELEMENTO COMPRIMIDO ..	41
FIGURA 5 – ENVOLTÓRIA MÍNIMA DE 1ª ORDEM	45
FIGURA 6 – ENVOLTÓRIA MÍNIMA COM 2ª ORDEM	45
FIGURA 7 – RELAÇÃO MOMENTO-CURVATURA	50
FIGURA 8 – EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM LOCALIZADOS EM PILARES-PAREDE	53
FIGURA 9 – AVALIAÇÃO APROXIMADA DO EFEITO DE SEGUNDA ORDEM LOCALIZADO	54
FIGURA 10 – OBTENÇÃO DA EXCENTRICIDADE ACIDENTAL EM FUNÇÃO DAS IMPERFEIÇÕES GEOMÉTRICAS LOCAIS.....	56
FIGURA 11 – ESPAÇAMENTOS MÍNIMO E MÁXIMO ENTRE BARRAS LONGITUDINAIS.....	57
FIGURA 12 – PARÂMETROS <i>DEFAULT</i> DA FUNÇÃO <i>FMINCON</i> PARA O MÉTODO DOS PONTOS INTERIORES	67
FIGURA 13 – VARIÁVEIS ADOTADAS PARA AS SEÇÕES RETANGULARES	70
FIGURA 14 – VARIÁVEIS ADOTADAS PARA AS SEÇÕES CIRCULARES	71
FIGURA 15 – VARIÁVEIS ADOTADAS PARA AS SEÇÕES HEXAGONAIS.....	72
FIGURA 16 – VARIÁVEIS ADOTADAS PARA AS SEÇÕES EM “U”	73
FIGURA 17 – DIAGRAMA DE DEFORMAÇÕES EM SEÇÕES RETANGULARES NOS DOMÍNIOS 3, 4 E 4A	84
FIGURA 18 – DIAGRAMA DE DEFORMAÇÕES EM UMA BARRA GENÉRICA EM SEÇÕES RETANGULARES NOS DOMÍNIOS 3, 4 E 4A.....	85
FIGURA 19 – CÁLCULO DE $h(i)$	86
FIGURA 20 – DIAGRAMA DE DEFORMAÇÕES NO CONCRETO EM SEÇÕES RETANGULARES NOS DOMÍNIOS 3, 4 E 4A	90
FIGURA 21 – DEFINIÇÃO DAS COORDENADAS DE UM ELEMENTO DA SEÇÃO RETANGULAR ..	91
FIGURA 22 – BARRAS COM TENSÃO DUPLICADA NAS SEÇÕES RETANGULARES.....	93
FIGURA 23 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES NOS PILARES RETANGULARES NOS DOMÍNIOS 3, 4 E 4A.....	94
FIGURA 24 – DIAGRAMA DE DEFORMAÇÕES EM SEÇÕES RETANGULARES NO DOMÍNIO 5....	96

FIGURA 25 – DIAGRAMA DE DEFORMAÇÕES EM UMA BARRA GENÉRICA EM SEÇÕES RETANGULARES NO DOMÍNIO 5	96
FIGURA 26 – DIAGRAMA DE DEFORMAÇÕES NO CONCRETO EM SEÇÕES RETANGULARES NO DOMÍNIO 5	98
FIGURA 27 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES NOS PILARES RETANGULARES NO DOMÍNIO 5	99
FIGURA 28 – DISTRIBUIÇÃO E NUMERAÇÃO DAS BARRAS DE AÇO EM SEÇÕES CIRCULARES	101
FIGURA 29 – DISCRETIZAÇÃO DA SEÇÃO DE CONCRETO EM PILARES CIRCULARES	102
FIGURA 30 – DISTRIBUIÇÃO E NUMERAÇÃO DAS BARRAS DE AÇO EM SEÇÕES HEXAGONAIS	102
FIGURA 31 – SEÇÃO HEXAGONAL DIVIDIDA EM SEXTOS.....	103
FIGURA 32 – DISCRETIZAÇÃO DA SEÇÃO DE CONCRETO EM PILARES HEXAGONAIS	103
FIGURA 33 – DISTRIBUIÇÃO E NUMERAÇÃO DAS BARRAS DE AÇO EM SEÇÕES EM “U”	104
FIGURA 34 – DISCRETIZAÇÃO DA SEÇÃO DE CONCRETO EM PILARES EM “U”	105
FIGURA 35 – CONSIDERAÇÃO DA ENVOLTÓRIA DOS MOMENTOS MÍNIMOS	106
FIGURA 36 – INTERFACE GRÁFICA INICIAL DO PROGRAMA	108
FIGURA 37 – INTERFACE GRÁFICA PARA SEÇÕES RETANGULARES	110
FIGURA 38 – PÁGINA DE RESULTADOS PARA SEÇÕES RETANGULARES	111
FIGURA 39 – SEÇÃO ORIGINAL DO EXEMPLO 1	113
FIGURA 40 – SEÇÃO ORIGINAL DO EXEMPLO 2.....	117
FIGURA 41 – SEÇÃO ORIGINAL DO EXEMPLO 3.....	120
FIGURA 42 – SEÇÃO ORIGINAL DO EXEMPLO 4.....	123
FIGURA 43 – SEÇÃO ORIGINAL DO EXEMPLO 5.....	126
FIGURA 44 – SEÇÃO ORIGINAL DO EXEMPLO 6.....	129
FIGURA 45 – SEÇÃO ORIGINAL DO EXEMPLO 7.....	132
FIGURA 46 – SEÇÃO ORIGINAL DO EXEMPLO 8.....	135
FIGURA 47 – COMPRIMENTOS EQUIVALENTES DO ELEMENTO COMPRIMIDO PARA O EXEMPLO 8.....	135
FIGURA 48 – DIAGRAMA DE INTERAÇÃO M, N, 1/R GERADO PELO <i>SOFTWARE</i> DESENVOLVIDO	138
FIGURA 49 – DIAGRAMA DE INTERAÇÃO M, N, 1/R GERADO PELO <i>SOFTWARE</i> TQS.....	139

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – ASSUNTOS ABORDADOS PELOS AUTORES.....	33
TABELA 2 – VALORES DO COEFICIENTE ADICIONAL γ_n PARA PILARES E PILARES-PAREDE...	40
TABELA 3 – DIMENSÕES MÁXIMAS X COMPRIMENTO EQUIVALENTE PARA OBTENÇÃO DE PILAR ESBELTO.....	43
TABELA 4 – RESULTADOS OBTIDOS PARA O EXEMPLO 1.....	114
TABELA 5 – COMPARAÇÃO DOS CUSTOS OBTIDOS PARA O EXEMPLO 1	116
TABELA 6 – RESULTADOS OBTIDOS PARA O EXEMPLO 2.....	118
TABELA 7 – COMPARAÇÃO DOS CUSTOS OBTIDOS PARA O EXEMPLO 2	119
TABELA 8 – RESULTADOS OBTIDOS PARA O EXEMPLO 3.....	121
TABELA 9 – COMPARAÇÃO DOS CUSTOS OBTIDOS PARA O EXEMPLO 3	122
TABELA 10 – RESULTADOS OBTIDOS PARA O EXEMPLO 4.....	124
TABELA 11 – COMPARAÇÃO DOS CUSTOS OBTIDOS PARA O EXEMPLO 4	125
TABELA 12 – RESULTADOS OBTIDOS PARA O EXEMPLO 5.....	127
TABELA 13 – COMPARAÇÃO DOS CUSTOS OBTIDOS PARA O EXEMPLO 5.....	128
TABELA 14 – RESULTADOS OBTIDOS PARA O EXEMPLO 6.....	130
TABELA 15 – COMPARAÇÃO DOS CUSTOS OBTIDOS PARA O EXEMPLO 6.....	131
TABELA 16 – RESULTADOS OBTIDOS PARA O EXEMPLO 7.....	133
TABELA 17 – COMPARAÇÃO DOS CUSTOS OBTIDOS PARA O EXEMPLO 7	134
TABELA 18 – RESULTADOS OBTIDOS PARA O EXEMPLO 8.....	136
TABELA 19 – COMPARAÇÃO ENTRE MOMENTOS SOLICITANTES PARA PILAR MODERADAMENTE ESBELTO E ESBELTO	137
TABELA 20 – COMPARAÇÃO DOS CUSTOS OBTIDOS PARA O EXEMPLO 8	140

LISTA DE SÍMBOLOS

f_{ck}	Resistência característica do concreto à compressão
ε_{c2}	Deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico
ε_{cu}	Deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura
f_{cd}	Resistência de cálculo do concreto à compressão
E_s	Módulo de elasticidade do aço
σ_s	Tensão do aço de armadura passiva
ε_s	Deformação do aço de armadura passiva
f_{yk}	Resistência característica ao escoamento do aço de armadura passiva
f_{yd}	Resistência de cálculo ao escoamento do aço de armadura passiva
γ_s	Coeficiente de ponderação da resistência do aço
γ_n	Coeficiente adicional para majoração dos esforços em pilares e pilares-parede com dimensão inferior a 19 cm
l_e	Comprimento equivalente de um elemento comprimido
l_0	Distância entre as faces internas dos elementos que vinculam o pilar
h	Altura da seção transversal do pilar, medida no plano da estrutura em estudo
l	Distância entre eixos dos elementos que vinculam o pilar
λ	Índice de esbeltez
i	Raio de giração
I_x	Momento de inércia em torno do eixo x

I_y Momento de inércia em torno do eixo y

A_c Área de concreto da seção transversal

λ_1 Índice de esbeltez limite definido pela norma

$M_{1d,min}$ Momento de cálculo total mínimo de 1ª ordem

N_d Força normal de cálculo

e_1/h Excentricidade relativa de 1ª ordem na extremidade do pilar onde ocorre o momento de 1ª ordem de maior valor absoluto

α_b Coeficiente que representa as condições de vínculo nos apoios

M_A Maior valor absoluto de momento de 1ª ordem nos extremos do pilar obtido ao longo do pilar biapoiado e momento de 1ª ordem no engaste do pilar em balanço

M_B Momento de 1ª ordem no extremo do pilar

M_C Momento de 1ª ordem no meio do pilar em balanço

$M_{d,tot}$ Momento total máximo de cálculo no pilar

$M_{1d,A}$ Momento de 1ª ordem de cálculo atuante na seção crítica do pilar

$1/r$ Curvatura da seção crítica

ν Força normal adimensional

κ Rigidez adimensional

$M_{Rd,tot}$ Momento resistente total de cálculo

$M_{Sd,tot}$ Momento solicitante total de cálculo

γ_{f3} Coeficiente de ponderação das ações que considera os desvios gerados nas construções e as aproximações feitas em projeto do ponto de vista das solicitações

a_i Largura da faixa do pilar-parede para consideração dos esforços localizados de 2ª ordem

N_i Esforço normal solicitante de cálculo na faixa i

M_{ydi} Momento fletor solicitante de cálculo na faixa i

e_{cc} Excentricidade adicional devido à fluência

M_{sg} Momento característico solicitante devido à combinação quase permanente

N_{sg} Força normal característica solicitante devido à combinação quase permanente

e_a Excentricidade devido a imperfeições locais

φ Coeficiente de fluência

N_e Carga crítica de Euler

E_{ci} Módulo de elasticidade inicial

I_c Momento de inércia da seção transversal na direção considerada

θ_1 Desaprumo de um elemento vertical contínuo

N_{sd} Força normal solicitante de cálculo

ϕ_b Diâmetro das barras de aço

d_{ag} Dimensão máxima característica do agregado graúdo

$f_{(min)}$ Função objetivo que se deseja minimizar

C_c Custo do concreto

C_a Custo do aço

A_a Área de aço total na seção transversal

ρ Peso específico do aço

C_f Custo das formas

A_f Área de formas

x_1 Largura do pilar para seções retangulares, diâmetro do pilar para seções circulares, lado do pilar hexagonal e espessura das lâminas em seções em “U”

x_2 Altura do pilar para seções retangulares e área de aço total na seção para pilares circulares, hexagonais e em “U”

x_3 Área de aço total para pilares retangulares e profundidade da linha neutra em relação à borda comprimida para pilares circulares, hexagonais e em “U”

x_4 Profundidade da linha neutra em relação à borda comprimida para pilares retangulares e ângulo de inclinação da linha neutra para pilares circulares, hexagonais e em “U”

x_5 Ângulo de inclinação da linha neutra para pilares retangulares e resistência característica do concreto à compressão para pilares circulares, hexagonais e em “U”

x_6 Resistência característica do concreto à compressão para pilares retangulares

A Altura interna das seções em “U”

L Largura interna das seções em “U”

n_b Número de barras na seção transversal

S_x Espaçamento entre eixos das barras na direção x nas seções retangulares e em “U”. Nas seções em “U” refere-se apenas às barras distribuídas na largura interna da seção

d' Distância do eixo das barras longitudinais à face externa da seção

n_{sx} Número de espaçamentos entre barras na direção x nas seções retangulares

S_y Espaçamento entre eixos das barras na direção y nas seções retangulares e em “U”. Nas seções em “U” refere-se apenas às barras distribuídas nas alturas internas da seção

n_{sy} Número de espaçamentos entre barras na direção y nas seções retangulares

S_b Espaçamento entre eixos das barras nos pilares circulares, medido radialmente

S Espaçamento entre eixos das barras nos pilares hexagonais

n_{bx} Número de barras em cada face da largura interna das seções em “U”

n_{by} Número de barras em cada face das alturas internas das seções em “U”

N_{Rd} Força normal resistente de cálculo

$M_{x,Rd}$ Momento resistente de cálculo na direção x

$M_{x,Sd}$ Momento solicitante de cálculo na direção x

$M_{y,Rd}$ Momento resistente de cálculo na direção y

$M_{y,Sd}$ Momento solicitante de cálculo na direção y

$f_{ck,min}$ Valor mínimo exigido pela norma para a resistência característica do concreto à compressão em função da classe de agressividade do local da edificação

j Indicador das barras dispostas na direção x para as seções retangulares e em “U”

k Indicador das barras dispostas na direção y para as seções retangulares e em “U”

$\varepsilon_s(i)$ Deformação específica da armadura i

$h_s(i)$ Distância do eixo da armadura i à linha neutra da seção transversal

$h(i)$ Distância da borda comprimida da seção ao eixo da armadura i , medida perpendicularmente à linha neutra

$x(i)$ Distância na direção x do eixo da barra i à face externa do pilar que corresponde à borda mais comprimida da seção

$y(i)$ Distância na direção y do eixo da barra i à face externa do pilar que corresponde à borda mais comprimida da seção

$x_s(i)$ Distância na direção x do eixo da barra i ao centroide da seção transversal

$y_s(i)$ Distância na direção y do eixo da barra i ao centroide da seção transversal

n_{ax} Número que identifica o elemento de concreto na direção x para os pilares retangulares e para a largura interna dos pilares em “U”

n_{ay} Número que identifica o elemento de concreto na direção y para os pilares retangulares e para as alturas (altura interna + espessura) dos pilares em “U”

$\varepsilon_c(n_{ax}, n_{ay})$ Deformação específica do elemento n_{ax}, n_{ay} da seção de concreto

$h_c(n_{ax}, n_{ay})$ Distância do eixo do elemento n_{ax}, n_{ay} à linha neutra da seção transversal

$\sigma_c(n_{ax}, n_{ay})$ Tensão no elemento n_{ax}, n_{ay} da seção de concreto

α_c Parâmetro de redução da resistência do concreto à compressão

$h(n_{ax}, n_{ay})$ Distância da borda comprimida ao elemento n_{ax}, n_{ay} da seção de concreto, medida perpendicularmente à linha neutra

$x(n_{ax}, n_{ay})$ Distância na direção x do eixo do elemento de concreto n_{ax}, n_{ay} à face externa do pilar que corresponde à borda mais comprimida da seção

n_{divx} Número de divisões da seção de concreto na direção x nos pilares retangulares e na largura interna dos pilares em “U”

$y(n_{ax}, n_{ay})$ Distância na direção y do eixo do elemento de concreto n_{ax}, n_{ay} à face externa do pilar que corresponde à borda mais comprimida da seção

n_{divy} Número de divisões da seção de concreto na direção y nos pilares retangulares e nas alturas (altura interna + espessura) dos pilares em “U”

$x_c(n_{ax}, n_{ay})$ Distância na direção x do eixo do elemento de concreto n_{ax}, n_{ay} ao centroide da seção transversal

$y_c(n_{ax}, n_{ay})$ Distância na direção y do eixo do elemento de concreto n_{ax}, n_{ay} ao centroide da seção transversal

$A_c(n_{ax}, n_{ay})$ Área de concreto do elemento n_{ax}, n_{ay} dos pilares retangulares

n_{ar} Número que identifica o elemento de concreto na direção radial nas seções circulares e hexagonais

n_{aa} Número que identifica o elemento de concreto na direção axial nas seções circulares e hexagonais

n_{divr} Número de divisões da seção de concreto na direção radial para os pilares circulares e hexagonais

n_{diva} Número de divisões da seção de concreto na direção axial para os pilares circulares e hexagonais

n_{bc} Número de barras nos cantos de encontro entre a largura e as alturas internas dos pilares em “U”

n_{divesp} Número de divisões da seção de concreto na espessura dos pilares em “U”

n_{aesp} Número que identifica o elemento na espessura dos pilares em “U”

$M_{y, Sd, mín}$ Momento solicitante mínimo de cálculo atuante na direção y para que a verificação dos momentos mínimos seja atendida

$M_{x, Sd, mín}$ Momento solicitante mínimo de cálculo atuante na direção x para que a verificação dos momentos mínimos seja atendida

$M_{Sd,min}$ Resultante dos momentos solicitantes mínimos de cálculo atuante nas direções x e y para que a verificação dos momentos mínimos seja atendida

$M_{d,tot,min,xx}$ Momento solicitante mínimo de cálculo atuante na direção x em flexão composta normal

$M_{d,tot,min,yy}$ Momento solicitante mínimo de cálculo atuante na direção y em flexão composta normal

γ_f Coeficiente de ponderação das ações

e_x Excentricidade total na direção x

e_y Excentricidade total na direção y

N_{Sk} Esforço normal solicitante característico

$M_{x,Sk}$ Momento solicitante característico na direção x

$M_{y,Sk}$ Momento solicitante característico na direção y

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	19
1.1 OBJETIVO	20
1.2 JUSTIFICATIVAS.....	21
1.3 METODOLOGIA	23
1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO.....	26
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	27
2.1 ESTADO DA ARTE	27
2.2 AVANÇOS RECENTES DA NBR 6118.....	34
2.3 DIMENSIONAMENTO DE PILARES DE CONCRETO ARMADO	35
2.3.1 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS	36
2.3.2 HIPÓTESES BÁSICAS DO DIMENSIONAMENTO.....	38
2.3.3 DIMENSÕES LIMITES	40
2.3.4 MOMENTOS MÍNIMOS.....	44
2.3.5 EFEITOS LOCAIS DE SEGUNDA ORDEM	45
2.3.6 EFEITOS LOCALIZADOS DE 2ª ORDEM EM PILARES-PAREDE	53
2.3.7 CONSIDERAÇÃO DA FLUÊNCIA.....	55
2.3.8 DETERMINAÇÕES A RESPEITO DAS ARMADURAS.....	56
2.4 PROCESSOS DE OTIMIZAÇÃO	58
3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	68
3.1 O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	68
3.2 PILARES RETANGULARES.....	83
3.2.1 ESFORÇOS RESISTENTES NOS DOMÍNIOS 3, 4 E 4a.....	83
3.2.2 ESFORÇOS RESISTENTES NO DOMÍNIO 5.....	95
3.3 PILARES DE OUTRAS GEOMETRIAS	100
3.3.1 PILARES CIRCULARES	101
3.3.2 PILARES HEXAGONAIS.....	102
3.3.3 PILARES EM “U”	104
3.4 CONSIDERAÇÃO DOS MOMENTOS MÍNIMOS.....	105

3.5	O PROGRAMA	108
4.	APLICAÇÕES E RESULTADOS	112
4.1	EXEMPLO 1 – CARVALHO E PINHEIRO (2009)	112
4.2	EXEMPLO 2 – BORGES (2014)	117
4.3	EXEMPLO 3 – PILAR COM DIMENSÃO INFERIOR A 19 cm	120
4.4	EXEMPLO 4 – f_{ck} SUPERIOR A 50 MPa	123
4.5	EXEMPLO 5 – PILAR HEXAGONAL	126
4.6	EXEMPLO 6 – PILAR-PAREDE SIMPLES (RETANGULAR)	129
4.7	EXEMPLO 7 – PILAR EM “U”	132
4.8	EXEMPLO 8 – PILAR RETANGULAR ESBELTO.....	134
5.	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	
	141	
5.1	CONCLUSÕES	141
5.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	142
	REFERÊNCIAS	145
	APÊNDICE A – PILARES CIRCULARES	148
	APÊNDICE B – PILARES HEXAGONAIS.....	159
	APÊNDICE C – PILARES EM “U”	175
	APÊNDICE D – FLUXOGRAMA	190

1. INTRODUÇÃO

O dimensionamento de estruturas de concreto armado é, em geral, baseado na experiência do projetista que, a partir do projeto arquitetônico, realiza o lançamento inicial dos pilares. Nesta fase, tenta-se embuti-los totalmente, ou ao menos em parte, nas alvenarias definidas pela arquitetura para reduzir a interferência desses elementos nos ambientes. O posicionamento dos mesmos nos pavimentos de garagem e, em especial, com relação às vagas de estacionamento, também é observado.

Em seguida, o carregamento é calculado: cargas permanentes (peso próprio, revestimentos, paredes, por exemplo) e cargas acidentais (definidas de acordo com o uso da edificação, como pessoas, móveis, entre outros), de modo a se obter os esforços a que os pilares estão submetidos. Verifica-se, então, se a seção é capaz de resistir às solicitações e de atender às especificações da normalização vigente e, caso necessário, procedem-se alterações das dimensões. Novamente os esforços solicitantes são calculados a fim de garantir segurança ao dimensionamento.

Com a estrutura lançada, realiza-se a análise da estabilidade global do edifício, parte fundamental do dimensionamento principalmente devido ao contínuo aumento do número de andares nas edificações. A estabilidade pode ser garantida por estruturas de contraventamento como, por exemplo, pilares-parede retangulares ou em “U”, ou ainda por meio da utilização de pórticos, formados por vigas e pilares. Outra influência do maior número de andares e também do aumento dos vãos livres entre pilares diz respeito aos esforços solicitantes, que se tornaram muito maiores.

Inúmeras são as geometrias (formas e dimensões) das seções transversais e distribuições de armações que satisfazem cada situação. Em geral são selecionadas seções que causam menos incompatibilidades com as definições arquitetônicas que, por sua vez, exigem estruturas cada vez mais esbeltas. Em alguns casos, a arquitetura pode exigir que um pilar específico ou todo um pavimento possua pé-direito elevado. Nesses casos, são demandadas seções mais

rígidas para manter o índice de esbeltez adequado ou, então, devem ser adotados critérios mais rigorosos para o cálculo dos momentos de segunda ordem.

No dimensionamento de estruturas de concreto armado deseja-se obter uma seção capaz de resistir aos esforços solicitantes e, com a utilização dos métodos de otimização, procura-se, entre as possíveis, a mais econômica. Dessa forma, a presente pesquisa visa definir a geometria ótima, em virtude das solicitações existentes e das prescrições normativas. As variáveis que interferem no custo dos pilares de concreto armado são: o preço do concreto, em função da resistência característica à compressão (f_{ck}), o custo do aço e o custo das formas. Logo, as variáveis indiretas são as dimensões da seção e a armação a ser utilizada.

A obtenção da seção ótima pode ser feita utilizando programas computacionais que realizam cálculos iterativos, isto é, atualizam os valores das variáveis até encontrar o custo mínimo para o pilar. Nessa análise, não podem ser excluídos os critérios e as exigências determinados pelas normas de dimensionamento, a fim de que seja definida uma estrutura segura. A normalização atual que estabelece os procedimentos para o projeto de estruturas de concreto é a Norma Brasileira Registrada – NBR 6118:2014 da Associação Brasileira de Normas Técnicas – ABNT.

1.1 OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é desenvolver um programa computacional voltado ao dimensionamento otimizado de pilares de concreto armado de acordo com a NBR 6118:2014.

Nesse intuito, como objetivo específico, considera pilares com as seguintes características:

a) seção retangular, circular, hexagonal e em “U”;

- b) dimensões desde a mínima permitida pela referida norma (14 cm) até o máximo de 3 metros¹;
- c) resistência característica do concreto à compressão de 20 a 90 MPa;
- d) índice de esbeltez limitado a 90, exceto para o caso de pilares retangulares, cuja esbeltez permitida foi estendida a 140.

1.2 JUSTIFICATIVAS

O dimensionamento de pilares de concreto armado tem provocado interesse contínuo no meio acadêmico e junto aos projetistas. No entanto, a maioria dos últimos trabalhos publicados sobre o assunto está de acordo com a NBR 6118:2003. Assim, não contempla as modificações apresentadas pela revisão da norma lançada em 2014.

Soma-se a isso o fato de cada autor definir particularidades em seus trabalhos, ao adotar simplificações, deixando lacunas em relação ao tema. No caso do estudo de Sias (2014), foram identificados 4 aspectos que poderiam ser explorados de maneira a ampliar a abrangência do programa computacional, o que levou à proposição dos objetivos específicos já mencionados.

O primeiro aspecto diz respeito às dimensões. O programa de Sias (2014) considerava pilares de 20 a 160 cm. A proposta é aumentar a faixa partindo do mínimo permitido pela NBR 6118:2014 para pilares, que é 14 cm. Essa modificação visa atender edificações pequenas, com número de andares reduzido (casas, embasamentos de edifícios, por exemplo). Por outro lado, o limite máximo foi ampliado para 3 m, já que prédios muito altos exigem o emprego de pilares com uma das dimensões bem maior que a outra, denominados pilares-parede, a fim de melhorar a estabilidade global dos mesmos. Justifica-se, assim, a opção por considerar pilares de 14 cm a 3 m, de modo a atender às necessidades de projetistas de estruturas com ambas características.

¹ As restrições de dimensão dos pilares em “U” são: espessura das lâminas máxima de 50 cm, altura interna máxima de 3,0 m e largura interna máxima de 5,0 m.

Optou-se, também, por estender o valor máximo da resistência característica do concreto à compressão de 50 MPa, definido por Sias (2014), para 90 MPa, uma vez que a utilização de concretos com maior valor para essa resistência permite a redução das dimensões dos elementos estruturais, principalmente dos pilares, por serem solicitados essencialmente à compressão. Dessa forma, há um aumento da área livre dos pavimentos, que pode gerar mais vagas ou cômodos mais amplos, por exemplo. É possível, ainda, aproveitar as formas, por meio da manutenção da seção dos pilares em todo o edifício, utilizando resistências maiores nos andares inferiores e menores nos mais altos. Além disso, os concretos de alta resistência também possuem características melhores quanto à durabilidade devido à baixa permeabilidade e porosidade que, entre outras características, propiciam maior resistência aos ataques de cloretos e sulfatos, o que dificulta a corrosão das armaduras, conforme Monteiro (2000).

Concretos com esse tipo de resistência já foram utilizados em obras de grande porte, como *Petronas Towers*, na Malásia; *Pacific Tower*, nos Estados Unidos; *Melbourne Central Tower*, na Austrália, entre outras. Um exemplo, no Brasil, é o edifício *e-Tower*, localizado em São Paulo, que usou nos 4 andares inferiores (subsolos) concreto de 80 MPa em 5 pilares com o objetivo de obter seções menores para atender à arquitetura. Esta modificação permitiu a criação de 16 vagas extras.

Pilares em forma de “U” são muito utilizados em torno de elevadores e escadas principalmente com o objetivo de auxiliar no contraventamento da estrutura, sendo recorrentes em edifícios altos. Por outro lado, devido às definições arquitetônicas, pode ser necessária a utilização de outras geometrias de seções, como pilares hexagonais, octogonais e em “L”, por exemplo. Assim, é fundamental o desenvolvimento de formulações para o dimensionamento de seções com essas geometrias. O programa aqui proposto, como já mencionado, se volta para o cálculo de pilares retangulares e circulares, também abordados por Sias (2014), e engloba, ainda, os hexagonais e em “U”.

O último aspecto refere-se à esbeltez dos pilares, para a qual decidiu-se por estender de 90 a 140 apenas para os pilares de seção retangular. Justifica-se essa opção por serem poucas as ocasiões em que a utilização de pilares esbeltos é

imprescindível e, ao ocorrerem, normalmente se tratam de seções retangulares. Além disso, o gasto computacional, o tempo de processamento e o número de iterações necessários para a obtenção da curvatura pelo diagrama momento-esforço normal-curvatura utilizado para o cálculo do esforço local de segunda ordem pelo método do pilar-padrão acoplado a diagramas M, N, $1/r$ são elevados.

1.3 METODOLOGIA

O primeiro passo dado em busca deste trabalho foi a verificação de estudos já realizados na mesma linha dessa pesquisa. Assim, foram reunidos os últimos trabalhos desenvolvidos em várias universidades do Brasil, bem como consultadas normas e livros em torno do assunto. Obteve-se, com isso, a revisão bibliográfica apresentada no segundo capítulo desta dissertação.

A partir de então, recuperou-se os estudos de Sias (2014), revisando os parâmetros necessários para que o programa computacional aqui proposto tivesse sua utilização ampliada. Esses novos tópicos passaram a ser também foco dos estudos e deu-se início ao processo de adaptação.

Foi feita uma revisão no programa – desenvolvido na plataforma *Matlab* (versão R2013a) – de modo a verificar o que estava implementado e fazer os ajustes necessários com o intuito de refiná-lo. Analisou-se a função objetivo, as variáveis inseridas, as funções de restrição, o ponto inicial, o espaço de busca, os cálculos para obtenção da resistência, a consideração dos momentos mínimos, os efeitos de segunda ordem, entre outros.

Em seguida, inseriu-se as adaptações relacionadas às dimensões limites. A dimensão mínima permitida passou a ser 14 cm e a máxima 3 m. Para esta modificação, foi necessário inserir uma função com o coeficiente adicional recomendado pela norma para majorar os esforços solicitantes ao se utilizar seções com dimensões inferiores a 19 cm. Neste momento, observou-se também que, para os pilares circulares, esta função seria desnecessária, devido à área mínima definida pela NBR 6118:2014 que, para ser atendida, exige diâmetro do pilar circular

de 21 cm. Por outro lado, pilares retangulares com uma das dimensões acima de 2,0 m em geral são classificados como pilares-parede, requerendo, segundo a norma, uma análise de esforços localizados de segunda ordem. Assim, foi criada também uma função para o dimensionamento desses pilares considerando os esforços citados.

Realizou-se, então, a alteração dos valores da resistência característica do concreto à compressão, os quais foram estendidos a 90 MPa. Para tanto, foram acrescentados os parâmetros definidos pela norma para concretos com f_{ck} entre 50 e 90 MPa, conforme consta no item 2.3.1. Ainda com relação ao f_{ck} , definiu-se que o resultado deveria apresentar apenas as resistências disponíveis no mercado. Entretanto, o método de otimização adotado – Método dos Pontos Interiores – utiliza variáveis contínuas, logo, incluiu-se uma nova função para calcular a solução viável, em termos de mercado, a partir da solução encontrada originalmente pelo programa, isto é, o *software* identifica a seção ótima referente aos valores de f_{ck} inferior e superior ao encontrado e verifica qual delas é a mais econômica, chegando assim, à seção viável.

Neste momento foram testados os mesmos exemplos resolvidos por Sias (2014) para validação do programa, obtendo resultados muito semelhantes. Nos itens 4.1 e 4.2 são apresentados dois desses exemplos, o primeiro referente a um pilar retangular e o segundo a uma seção circular.

Na sequência, desenvolveu-se a formulação para os pilares hexagonais, obtida a partir da subdivisão da seção em sextos, cada qual com seus parâmetros específicos. Foram definidas as posições das barras, a forma de discretização da seção de concreto, a função objetivo, as funções de restrição e os demais critérios necessários para o dimensionamento de um pilar de seção hexagonal. Implementou-se, assim, essa formulação no programa computacional. Logo após, os mesmos itens foram desenvolvidos para as seções em “U”. Determinou-se que a largura e a altura internas das lâminas seriam fixas, definidas pelo usuário, uma vez que pilares com essa geometria são comumente utilizados em elevadores e escadas, os quais possuem dimensões preestabelecidas. Dessa forma, liberou-se para a otimização a espessura das lâminas e o f_{ck} . Analogamente aos pilares-

parede retangulares, foi necessário inserir uma função para a consideração dos efeitos de segunda ordem localizados nos pilares-parede em “U”.

Posteriormente, realizou-se a modificação em relação à esbeltez, inserindo-se a formulação para obtenção do diagrama momento-esforço normal- curvatura para as seções retangulares submetidas à flexo-compressão normal, do qual foi retirada a curvatura para o cálculo do efeito local de segunda ordem pelo método do pilar-padrão. O diagrama foi validado com o *software* comercial TQS, conforme mostrado no exemplo 8.

As adaptações promovidas tornaram necessária a alteração do “*guide*”, a interface do programa com o usuário, desde o acréscimo dos custos para os novos valores de f_{ck} até as geometrias inseridas e suas variáveis específicas. Realizou-se, ainda, pesquisa do custo dos materiais no mercado, por meio da solicitação de orçamento a várias empresas localizadas na região sudeste e da verificação dos custos segundo a Tabela SINAPI² da Caixa Econômica Federal. Desse modo, definiu-se os valores padrão (*default*) inseridos no programa computacional.

Além disso, optou-se por criar uma interface separada para os resultados, na qual são descritas informações acerca da solução ótima, os esforços solicitantes e resistentes e a razão entre eles, bem como as restrições de dimensões. São salientadas, na página de resultados, as restrições ativas, ou seja, aquelas que governam o dimensionamento.

Criou-se também verificações logo no início dos cálculos, para evitar que o usuário espere por uma solução que, desde o princípio, sabe-se que não será obtida. Por exemplo, se a seção já estiver definida, é verificado se a mesma atende à área mínima exigida pela norma, se não se trata de uma seção esbelta (exceto no caso de pilares retangulares), entre outros.

² SINAPI – Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil.

1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está estruturada em 5 capítulos. No capítulo 1 foram apresentados o tema, os objetivos, as justificativas e a metodologia utilizada no desenvolvimento deste trabalho e do programa computacional.

O capítulo 2 contém a revisão bibliográfica, que aborda dois eixos: o estado da arte e o referencial teórico. O primeiro contempla os estudos recentes sobre o tema, em especial, os desenvolvidos a partir de 2003, uma vez que nesse ano foi realizada revisão na norma que determina o procedimento para o projeto das estruturas de concreto. O segundo eixo reúne aspectos referentes à temática existentes na norma de 1980 e nas atualizações realizadas em 2003 e 2014. Discute também as definições necessárias para o dimensionamento das seções e a explicação sobre os métodos de otimização existentes, sobretudo, o adotado, denominado Método dos Pontos Interiores.

No capítulo 3 é descrita a formulação do problema. Nele, define-se o problema de otimização, são explicitados os cálculos dos esforços resistentes nos domínios 3, 4, 4a e 5 para os pilares retangulares, e também é demonstrada a numeração das barras e a discretização da seção de concreto para os pilares de outras geometrias. Além disso, este capítulo contém a formulação para a consideração dos momentos mínimos, a descrição do programa e algumas explicações de como utilizá-lo.

No capítulo 4 são apresentados os exemplos analisados no programa e os resultados obtidos, comparando-os com a literatura existente, com outros trabalhos desenvolvidos e também com o *software* comercial TQS.

O capítulo 5, por fim, traz a conclusão do trabalho, com os acréscimos realizados no programa e suas validações, bem como alguns ganhos em redução de custos. Compreende, ainda, sugestões para trabalhos futuros.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estado da arte e o referencial teórico compõem este capítulo. Vale destacar que o trabalho se baseia na NBR 6118:2014 e, além disso, foram consultadas referências consolidadas nos assuntos específicos, como Araújo (2003) e Carvalho e Pinheiro (2009) para o dimensionamento dos pilares, Vanderplaats (1998) e Herskovits (1995) em termos de otimização, e ainda França (1984, 1991) no que se refere à análise dos efeitos de segunda ordem em pilares esbeltos.

2.1 ESTADO DA ARTE

O estado da arte reúne estudos sobre o tema central deste trabalho, o dimensionamento de pilares de concreto armado, em especial, os realizados a partir de 2003, ano em que a NBR 6118 foi revisada.

Carvalho, Figueiredo, Furlan Junior e Kataoka (2003) estudaram a aplicação de pilares com dimensões inferiores a 20 cm segundo normas estrangeiras e compararam com duas versões da norma brasileira, a de 1980 e a de 2001. Este trabalho abordou exemplos tanto para pilares centrais, como para pilares laterais e de canto. Considerou também pilares moderadamente esbeltos (índices de esbeltez iguais ou inferiores a 90) e esbeltos (índices de esbeltez entre 90 e 140). As maiores diferenças encontradas para os pilares com dimensões abaixo de 20 cm nas duas versões da norma brasileira foram em relação ao coeficiente de segurança utilizado em cada uma delas e ao cobrimento mínimo exigido.

Bastos (2004) desenvolveu um programa computacional para o dimensionamento ótimo de pilares retangulares de concreto armado submetidos à flexo-compressão oblíqua. O método de otimização utilizado foi o de algoritmos genéticos, por sua facilidade de implementação e por trabalhar com variáveis discretas. O dimensionamento seguiu os critérios da NBR 6118:1980, entretanto, para expandir a abrangência do programa a concretos de altas resistências, foram disponibilizadas

outras opções de curvas tensão-deformação para a escolha do usuário. Alguns exemplos foram utilizados para comparar os resultados do programa com o dimensionamento tradicional, por meio de ábacos, e com outras técnicas de otimização.

As verificações a serem realizadas quando do dimensionamento segundo a NBR 6118:2003 foram estudadas por Scadelai (2004). O autor se preocupou principalmente em verificar os métodos de análise dos efeitos de 2ª ordem para pilares com índice de esbeltez inferior a 140, incluindo ainda a consideração da fluência, quando necessário. Foram mostrados exemplos com variações no índice de esbeltez, nos métodos de análise de 2ª ordem e no coeficiente α_b ³, com o objetivo de comparar os resultados dos métodos, suas facilidades e dificuldades e verificar os limites de abrangência em relação ao índice de esbeltez definido pela norma.

Rodrigues Júnior (2005) desenvolveu uma formulação de acordo com a NBR 6118:2003 para o cálculo ótimo de pilares para edifícios altos de concreto armado. Foi utilizada uma estratégia de solução em multinível para a otimização. Em nível global, as dimensões da seção e a resistência característica do concreto (f_{ck}) eram otimizadas e, a partir delas era calculada, em nível local, a armadura longitudinal dos pilares. Para a otimização, foram utilizadas apenas seções retangulares, porém, segundo o autor, a formulação admite seções transversais do tipo “U”, “L” e circulares.

Smaniotto (2005) apresentou um procedimento para o dimensionamento de pilares de seção retangular moderadamente esbeltos, submetidos à flexão composta oblíqua, esforços cortantes e torsões. Além disso, desenvolveu um programa na linguagem *Visual Basic* para realizar esse dimensionamento de forma otimizada. Tanto o procedimento quanto o programa seguem os critérios estabelecidos pela NBR 6118:2003. O autor comparou os resultados obtidos com os gerados pelo dimensionamento tradicional, por meio de ábacos adimensionais, e também com outros dois *softwares*: o Eberick, da empresa Alto QI, e o nFOCCA, desenvolvido por Medeiros em 2004.

³ α_b é um coeficiente que representa as condições de vínculo nos apoios do pilar isolado. O cálculo deste coeficiente pode ser visto no item 2.3.5 Efeitos locais de segunda ordem.

Miranda (2008) também fez um apanhado das verificações a serem realizadas quando do dimensionamento segundo a, então atual, NBR 6118:2003 e considerou pilares retangulares com a dimensão mínima permitida por essa norma: 12 cm. Ele se preocupou principalmente com as verificações de estabilidade da estrutura, dada pelos parâmetros α e γ_z . Além disso, fez um roteiro de projeto e cálculo de pilares e um exemplo completo de dimensionamento, desde a definição do carregamento e das geometrias até o cálculo de duas formas: uma utilizando o FTOOL – para a obtenção dos esforços – e os ábacos – para o dimensionamento –, e outra por meio do programa Eberick.

A análise dos métodos de cálculo do efeito de segunda ordem nos pilares foi tratada por Franco (2010). No estudo, foi utilizado um programa desenvolvido na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) e um procedimento proposto por Sussekund, em 1986, para efetuar o cálculo exato desse efeito. Além disso, os exemplos foram resolvidos pelos métodos aproximados recomendados pela NBR 6118:2003, para então comparar esses resultados com os métodos exatos. Também foi feito o estudo da fluência para pilares com índice de esbeltez acima de 90.

Alves (2013) desenvolveu um programa computacional para o dimensionamento ótimo de pilares retangulares submetidos à flexo-compressão normal de acordo com a NBR 6118:2007. O f_{ck} adotado foi de 40 MPa e as dimensões dos pilares foram limitadas de 12⁴ a 60 cm. O programa foi implementado na plataforma *Matlab* e é constituído por dois módulos, um referente à verificação estrutural, que obtém a resistência dos pilares, e outro ao processo de obtenção da solução ótima. O módulo de otimização contém dois métodos, um determinístico, a Programação Quadrática Sequencial, e um probabilístico, o Método dos Algoritmos Genéticos, com o intuito de verificar o mais eficaz para a minimização do custo dos pilares.

A autora ressaltou que ambos os métodos de otimização foram muito eficazes na obtenção da solução ótima, fornecendo resultados similares que apresentaram bom aproveitamento da resistência dos materiais e redução no custo da estrutura, em comparação com resultados obtidos por outros pesquisadores. Concluiu, entretanto, que a Programação Quadrática Sequencial obteve, em alguns exemplos, pilares

⁴ Dimensão mínima permitida para pilares pela NBR 6118:2007.

com custo inferior ao encontrado pelo Método dos Algoritmos Genéticos, mostrando-se assim, mais eficiente. Justificou esse fato por se utilizar, para o dimensionamento de pilares, funções objetivo e de restrições lineares. Além disso, frisou que o Método dos Algoritmos Genéticos apresenta um custo computacional superior.

Moraes (2013) realizou análise de um edifício como um todo, de modo a simular seu dimensionamento. Obteve os esforços nos pilares utilizando o *software* SAP2000 e, a partir desses, calculou alguns dos pilares com duas resistências características à compressão, 40 e 60 MPa. O objetivo foi verificar as vantagens da utilização de concretos de alto desempenho em pilares, o que foi comprovado, pois, neste caso, o aumento na resistência permitiu a redução da seção dos pilares e da armadura utilizada, uma vez que se convencionou a utilização de armadura mínima para efeitos do referido trabalho. Para a consideração de valores de f_{ck} acima de 50 MPa, a autora se baseou no projeto de revisão da NBR 6118 disponível em 2013 (cuja versão final passou a vigorar em 2014).

Rocha (2014) teve como objetivo determinar as vantagens e desvantagens da utilização de concretos de alta resistência em edifícios altos, com diferentes números de pavimentos, avaliando as modificações necessárias para o dimensionamento de acordo com a NBR 6118:2014. Para tanto, avaliou dois aspectos: a área ocupada por pilares no pavimento térreo, para mostrar quanto de área útil é possível ganhar ao aumentar a resistência do concreto, já que a maior resistência permite a redução das dimensões dos pilares; e o volume de concreto empregado em um pilar, para comparação do gasto total com o concreto, considerando o volume necessário e o custo de acordo com o f_{ck} adotado.

O trabalho usou o *software* TQS para modelagem e obtenção dos esforços de cálculo, bem como para a verificação da estabilidade global do edifício. Nele, foram criados 3 modelos, com 15, 20 e 25 pavimentos, utilizando pilares de seção quadrada, de dimensão mínima de 19 cm e esbeltez inferior a 90. Adotou-se, ainda, 11 simulações para cada um dos modelos variando o valor do f_{ck} nos pavimentos do edifício, considerando inicialmente 30 MPa para todos os pavimentos e finalizando em 90 MPa. Como resultado, Rocha (2014) observou que, para os 3 modelos, a redução da área dos pilares foi significativa, próxima de 45%,

mostrando-se assim efetiva, uma vez que fornece um grande aumento de área útil nos pavimentos inferiores da edificação. Por outro lado, o autor concluiu que a diferença obtida no volume do pilar, em torno de 30%, não compensa frente às dificuldades encontradas para obtenção do concreto com essas resistências e ao maior custo para a produção.

Pires e Silva (2014) desenvolveram um programa computacional para o dimensionamento ótimo de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexão oblíqua levando em consideração as não linearidades física e geométrica dos mesmos. O programa se aplica a pilares retangulares, de seção constante e distribuição simétrica de armadura e, nele, são verificadas as restrições de resistência, estabilidade e o cumprimento da norma em vigor (NBR 6118:2007). Para efetuar a otimização, as possíveis combinações de variáveis são calculadas e é selecionada a mais econômica que atende a todos os critérios.

Outro programa computacional foi desenvolvido por Cardoso Júnior (2014). Este também teve o objetivo de fazer a análise das não linearidades física e geométrica de pilares de concreto armado. Os dados de entrada são a geometria, as características dos materiais, a armação e os esforços solicitantes. O programa calcula os esforços de 1ª e 2ª ordem aos quais o pilar está submetido, seguindo os critérios da NBR 6118:2014, e verifica se a seção transversal é capaz de resistir aos esforços solicitantes. Alguns exemplos foram utilizados para comparar os resultados fornecidos pelo programa e pelo TQS, para assim, verificar a eficiência do programa desenvolvido. Vale ressaltar, que é permitida a utilização de concretos com resistência característica à compressão até 90 MPa.

Sias (2014) fez um estudo sobre os métodos de otimização existentes e, destes, selecionou três para implementar em um programa computacional de dimensionamento de pilares. São eles: o Método de Programação Quadrática Sequencial, o Método dos Pontos Interiores (métodos de programação matemática) e o Método dos Algoritmos Genéticos (método probabilístico). Ele fez uma análise para algumas seções e percebeu que os processos mais indicados foram os de programação matemática, ou seja, eles geraram resultados mais econômicos. Com isso, desenvolveu um programa utilizando o *software Matlab* para fazer o dimensionamento ótimo de pilares de concreto armado. No entanto, foram inseridas

algumas limitações, como as dimensões da seção dos pilares, a resistência característica do concreto (f_{ck}) limitada a 50 MPa, o índice de esbeltez até 90 e o dimensionamento de pilares de seções retangulares e circulares.

Os pilares-parede foram objeto de estudo de Medeiros (2016). Neste trabalho a autora realizou manualmente o dimensionamento de dois pilares-parede utilizando o método simplificado definido pela NBR 6118:2014. Inicialmente, considerou apenas os efeitos de 1ª e 2ª ordem e, em um segundo momento, fez a verificação dos efeitos de 2ª ordem localizados, dividindo o pilar-parede em faixas e analisando-as como pilares isolados equivalentes. Os mesmos pilares foram dimensionados também nos *softwares* comerciais: AltoQi Eberick, TQS e Cypecad. Notou-se que a consideração do efeito de 2ª ordem localizado pelo método simplificado da norma gerou uma diferença significativa na armação necessária comparada à encontrada quando do dimensionamento considerando apenas os efeitos de 1ª e 2ª ordem e que as faixas de extremidade precisam de maior concentração de barras.

Apesar do grande número de publicações sobre dimensionamento de pilares, ainda há necessidade de pesquisas voltadas para a inclusão deste em programas computacionais de otimização. Entre os tópicos menos tratados estão a utilização de pilares com dimensão inferior a 19 cm, a resistência característica do concreto à compressão acima de 50 MPa, a utilização de seções genéricas e os pilares esbeltos, conforme pode-se notar na Tabela 1.

O intuito de suprir essas lacunas motivou a presente dissertação. O início da pesquisa resultou em artigo de Souza e Alves (2016) que teve como objetivo verificar as adaptações necessárias ao dimensionamento de pilares para a consideração de concretos com resistência característica à compressão superior a 50 MPa a partir da NBR 6118:2014. Compreende, também, o dimensionamento de pilares com dimensão inferior à 19 cm e obtém a seção otimizada por meio do Método dos Pontos Interiores. São apresentados exemplos de validação do mesmo, bem como de verificação do funcionamento do programa com relação aos dois itens de referência. Os dois estudos estão destacados na Tabela 1.

Tabela 1 – Assuntos abordados pelos autores.

Autor (ano)	14 cm	f_{ck}	Esbeltez	Geometrias	Otimização	Ano da norma
CARVALHO, FIGUEIREDO, FURLAN JR E KATAOKA (2003)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1980 e 2001
BASTOS (2004)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	1980
SCADELAI (2004)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2003
RODRIGUES JR (2005)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	2003
SMANIOTTO (2005)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	2003
MIRANDA (2008)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2003
FRANCO (2010)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2003
ALVES (2013)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	2007
MORAES (2013)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2013
ROCHA (2014)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2014
PIRES E SILVA (2014)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	2007
CARDOSO JR (2014)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2014
SIAS (2014)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	2014
MEDEIROS (2016)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2014
SOUZA E ALVES (2016)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	2014
ESTA DISSERTAÇÃO	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	2014

2.2 AVANÇOS RECENTES DA NBR 6118

Em 2003 foi lançada uma revisão da norma técnica brasileira 6118, que trata do projeto de estruturas de concreto. A data anterior era de 1980. Nessa revisão vários elementos foram inseridos e alterados. A preocupação com a durabilidade das estruturas aumentou e o cobrimento mínimo passou a ser definido em função da classe de agressividade do ambiente em que está localizada a edificação. Esta norma passou a considerar a ação do vento em todas as estruturas, alterou os índices de esbeltez limites que determinam os cálculos dos efeitos de 2ª ordem a serem utilizados e passou a exigir a consideração dos efeitos da fluência para pilares com índice de esbeltez superior a 90. A determinação de área mínima de 360 cm² também foi inserida.

Na NBR 6118:1980 as dimensões dos pilares eram muito restritas e definidas de acordo com a laje que o pilar suportava e com a altura livre do mesmo. As denominadas paredes estruturais possuíam as mesmas características que os pilares-parede da norma de 2003, apesar de o tratamento desses não ser igual em ambas, principalmente no que se refere ao efeito de segunda ordem localizado, acrescentado na revisão. As taxas de armadura longitudinal mínima e máxima e os espaçamentos entre estribos também eram diferentes. Além disso, a NBR 6118:1980 considerava concretos com resistência característica à compressão superior a 9 MPa, enquanto a NBR 6118:2003 engloba concretos entre as classes C20 e C50 para os elementos estruturais, e admite C15 apenas para fundações.

Em 2014 a Associação Brasileira de Normas Técnicas publicou uma revisão da NBR 6118 na qual passou a tratar tanto de concretos do grupo I de resistência (C20 a C50) como do grupo II (C55 a C90), conforme classificação da NBR 8953:2009 (Concretos para fins estruturais). Concretos pertencentes ao grupo II de resistência possuem diferenças quanto aos cálculos de resistência à tração, módulo de elasticidade, deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico (ε_{c2}), deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura (ε_{cu}), entre outros. A norma também atualizou o diagrama tensão-deformação idealizado, devido a esse novo grupo de resistência.

Além disso, a partir de 2014, a NBR 6118 passou a adotar como dimensão mínima para os pilares 14 cm, ao invés dos 12 cm estipulados pela NBR 6118:2003. Outra modificação foi o acréscimo das envoltórias mínimas de 1ª e 2ª ordem no cálculo dos pilares de seção retangular. Foi adaptada também a consideração do efeito localizado de 2ª ordem em pilares-parede, fixando-se o limite máximo para o valor de α_b em 0,6, quando o momento solicitante é inferior ao mínimo. Outras alterações não foram citadas por não influenciarem no dimensionamento de pilares, escopo desta dissertação.

2.3 DIMENSIONAMENTO DE PILARES DE CONCRETO ARMADO

Elementos fundamentais para as estruturas de concreto armado, os pilares são responsáveis pela transmissão das cargas de todos os pavimentos para as fundações. Em geral, estão submetidos a esforços de compressão acrescidos de momentos fletores, logo, são dimensionados à flexo-compressão normal ou à flexo-compressão oblíqua. Além disso, a NBR 6118:2014 não permite o dimensionamento de pilares com carga centrada, portanto, considera-se ao menos um momento mínimo, estabelecido pela norma. Também podem estar submetidos a esforço cortante e momento torsor, entretanto, os dois últimos são usualmente desprezados, visto que são bem pequenos em relação aos demais (ALVES, 2013).

As geometrias mais utilizadas são as retangulares, entretanto, outras geometrias de seções podem ser necessárias por definição arquitetônica ou em algumas situações específicas, como por exemplo pilares circulares, hexagonais, octogonais, em forma de “L” ou de “U”, esse último utilizado principalmente em torno de elevadores. Segundo Pfeil (1975, p. 31),

O caso geral de uma seção de forma qualquer [...] é resolvido por tentativas, variando-se a posição da linha neutra até que as condições de equilíbrio sejam satisfeitas. Para uma linha neutra escolhida, ficam definidas a zona de concreto uniformemente comprimida e as deformações unitárias de todas as barras da armadura.

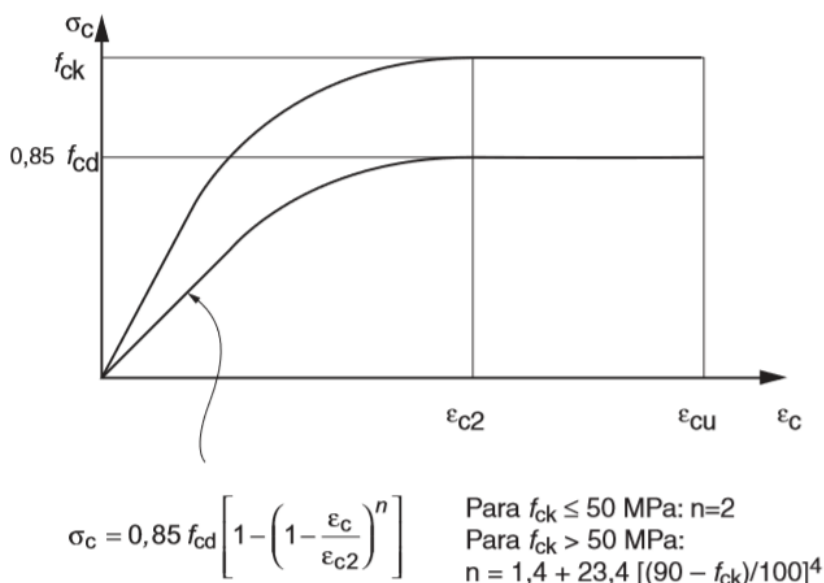
O dimensionamento dos pilares é realizado de maneira similar, independentemente da geometria da seção. As definições básicas admitidas são: as propriedades dos

materiais, as hipóteses básicas de dimensionamento, as dimensões limites para as seções, os momentos mínimos a serem considerados, os efeitos locais de 2ª ordem, os efeitos localizados de 2ª ordem em pilares-parede, a consideração da fluência (obrigatória para pilares com esbeltez superior a 90) e as determinações a respeito das armaduras definidas pela NBR 6118:2014, abordadas neste tópico.

2.3.1 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

Segundo a NBR 6118:2014, as tensões no concreto se distribuem de acordo com o diagrama tensão-deformação idealizado, conforme Figura 1.

Figura 1 – Diagrama tensão-deformação idealizado



Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014).

Para concretos com resistência característica à compressão (f_{ck}) entre 50 e 90 MPa, o valor da tensão de pico ($0,85 * f_{cd} = 0,85 * f_{ck}/1,4$) deve ser substituído por $0,85 * \left(1,0 - \frac{f_{ck}-50}{200} \right) * f_{cd}$, conforme item 17.2.2 da NBR 6118:2014. Essa tensão de pico é válida para seções em que a largura, medida paralelamente à linha neutra, não diminui a partir desta até a borda comprimida. Nos demais casos, esses valores são reduzidos a 90% dos calculados para a outra situação.

Além disso, os valores dos parâmetros de deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico (ε_{c2}) e deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura (ε_{cu}) variam de acordo com a resistência característica do concreto à compressão, e são definidos:

Para $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$

$$\varepsilon_{c2} = 2\text{‰} \quad (1)$$

$$\varepsilon_{cu} = 3,5\text{‰} \quad (2)$$

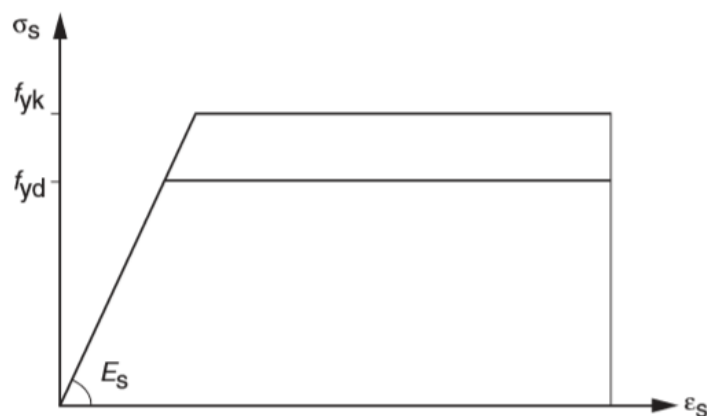
Para $50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$

$$\varepsilon_{c2} = 2,0\text{‰} + 0,085\text{‰} * (f_{ck} - 50)^{0,53} \quad (3)$$

$$\varepsilon_{cu} = 2,6\text{‰} + 35\text{‰} * \left(\frac{90 - f_{ck}}{100} \right)^4 \quad (4)$$

A NBR 6118:2014 admite o valor de 210 GPa para o módulo de elasticidade do aço (E_s) e permite utilizar o diagrama tensão-deformação ($\sigma_s \times \varepsilon_s$) simplificado mostrado na Figura 2. Este diagrama é válido para cálculos nos estados-limite de serviço e último, para aços com ou sem patamar de escoamento, e tanto para tração quanto para compressão.

Figura 2 – Diagrama tensão-deformação para aços de armadura passiva



Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014).

Entre a reta a e o domínio 2, têm-se ruptura por deformação plástica excessiva (alongamento do aço). Na reta a , toda a seção está uniformemente tracionada. No domínio 1 a seção continua tracionada, porém com pequena excentricidade, de modo que a tração não é uniforme, mas ainda não há compressão na seção. A linha neutra permanece externa à seção transversal. O domínio 2 é obtido quando há flexão simples ou composta, a linha neutra corta a seção, mas a ruptura é caracterizada pela deformação do aço ($\varepsilon_s = 10\text{‰}$) e não pelo concreto à compressão. Desse modo, o concreto não é totalmente exigido, já que sua deformação é inferior à de ruptura.

Por outro lado, entre o domínio 3 e a reta b a ruptura acontece por encurtamento limite do concreto. O domínio 3 ocorre em seções subarmadas submetidas à flexão simples ou em seções com flexão composta com ruptura do concreto à compressão e com escoamento do aço, ou seja, o concreto e o aço são bem aproveitados. O domínio 4, por sua vez, ocorre em seções superarmadas submetidas à flexão simples ou em seções submetidas à flexão composta (compressão com grandes excentricidades). O concreto rompe à compressão e o aço fica tracionado sem escoamento. Neste domínio, segundo Carvalho e Pinheiro (2009, p.264) “[...] a ruptura é frágil, sem aviso, pois o concreto se rompe sem que a armadura atinja sua deformação de escoamento (não há grandes deformações do aço nem fissuração significativa do concreto, que sirvam de advertência)”. Dessa forma, o concreto é bem aproveitado, mas o aço não, por não atingir o escoamento. O domínio 4a é caracterizado por seções submetidas à flexão composta com armaduras comprimidas. Neste caso o concreto rompe por compressão.

No domínio 5 tem-se compressão não-uniforme, sem tração, ou seja, a seção está totalmente comprimida, não é cortada pela linha neutra. A ruptura é frágil, pois não há fissuração nem deformação que sirvam de advertência. Por fim, a reta b possui compressão uniforme.

No caso de dimensionamento de pilares, os domínios utilizados vão do 3 ao 5, por se tratarem de cargas essencialmente de compressão, somadas a alguma excentricidade. A compressão pura, caso da reta b , não é calculada pois a norma exige que sejam considerados os efeitos das imperfeições geométricas e físicas.

A respeito da hipótese de manutenção das seções planas, Smaniotto (2005, p.10-11) salienta que

[...] nas peças de concreto estrutural submetidas a solicitações normais, é admitida a validade da hipótese de manutenção da forma plana da seção transversal até o E.L.U (estado limite último), desde que a relação: (distância entre as seções de momento fletor nulo / altura útil da seção) > 2. Com esta hipótese, as deformações normais específicas são, em cada ponto, proporcionais à sua distância à linha neutra da seção, inclusive quando a peça atinge o E.L.U. Tal hipótese não se aplica no dimensionamento de pilares-parede.

2.3.3 DIMENSÕES LIMITES

A NBR 6118:2014 permite a utilização de pilares com dimensão inferior a 19 cm, até o mínimo de 14 cm, desde que as ações solicitantes sejam majoradas pelos coeficientes indicados na Tabela 2.

Tabela 2 – Valores do coeficiente adicional γ_n para pilares e pilares-parede

b cm	19	18	17	16	15	14
γ_n	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25

Onde

$$\gamma_n = 1,95 - 0,05b$$

b é a menor dimensão da seção transversal, expressa em centímetros (cm).

NOTA: O coeficiente γ_n deve majorar os esforços solicitantes finais de cálculo quando de seu dimensionamento.

Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014).

Além disso, deve-se observar que, segundo a norma, a seção de concreto deve possuir área mínima de 360 cm². Outra definição acerca dos pilares é que nos casos em que a maior dimensão excede em 5 vezes a menor dimensão da seção transversal, os mesmos devem ser tratados como pilares-parede.

Segundo a NBR 6118:2014, o comprimento equivalente (l_e) de um elemento comprimido suposto vinculado em ambas as extremidades⁵ é o menor dos valores entre as equações (5) e (6):

$$l_e = l_0 + h \quad (5)$$

⁵ Para outras condições de vinculação, recomenda-se verificar a referência Carvalho e Pinheiro (2009).

$$l_e = l \quad (6)$$

Sendo

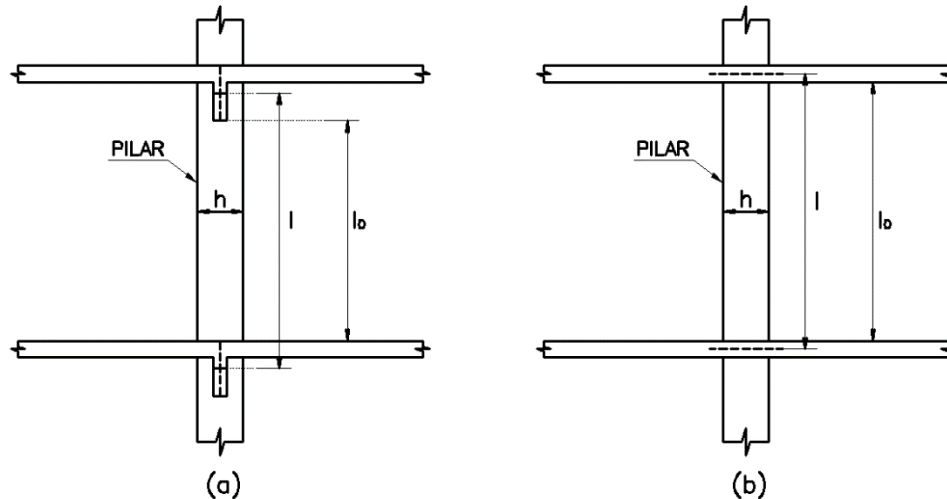
l_0 a distância entre as faces internas dos elementos que vinculam o pilar;

h a altura da seção transversal do pilar, medida no plano da estrutura em estudo; e

l a distância entre eixos dos elementos que vinculam o pilar.

A Figura 4 visa esclarecer essas definições. Na Figura 4-a tem-se um pilar vinculado por vigas e na Figura 4-b um pilar vinculado por lajes.

Figura 4 – Definição do comprimento equivalente de um elemento comprimido



Fonte: Carvalho e Pinheiro (2009).
Nota: Figura adaptada pela autora.

O índice de esbeltez (λ) do pilar é calculado em função de sua geometria e do comprimento equivalente do elemento comprimido (conhecido como comprimento de flambagem), e deve ser definido para cada direção principal e central de inércia, por meio das equações (7) e (8).

$$\lambda_x = \frac{l_{e,x}}{i_y} \quad (7)$$

$$\lambda_y = \frac{l_{e,y}}{i_x} \quad (8)$$

Em que

l_e é o comprimento equivalente do elemento comprimido nas direções x ou y; e

i é o raio de giração em torno dos eixos x e y, definido pela raiz quadrada da razão entre o momento de inércia (I_x ou I_y) e a área da seção transversal (A_c), conforme as equações (9) e (10):

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A_c}} \quad (9)$$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A_c}} \quad (10)$$

A partir do índice de esbeltez, os pilares são classificados na literatura como: curtos, quando possuem índice abaixo do limite⁶ (λ_1) definido pela NBR 6118:2014; moderadamente esbeltos, quando têm índices inferiores a 90 e superiores ao índice limite; esbeltos, cuja esbeltez está entre 90 e 140; e, acima de 140 têm-se os pilares muito esbeltos. Além disso, a norma não admite pilares com índice de esbeltez superior a 200, exceto no caso de elementos pouco comprimidos com força normal menor que $0,10 * f_{cd} * A_c$.

Assim, a Tabela 3 apresenta as dimensões máximas para que se tenha um pilar esbelto de acordo com o comprimento equivalente do elemento comprimido e com a geometria da seção transversal. No caso dos pilares retangulares, basta que uma das direções seja esbelta para que o mesmo receba essa classificação.

⁶ O cálculo do índice limite consta no item 2.3.5 Efeitos locais de segunda ordem.

Tabela 3 – Dimensões máximas x comprimento equivalente para obtenção de pilar esbelto

Comprimento equivalente (cm)	400	500	600	700	800	900	1000	1100
Dimensão (seção retangular, em cm)	15,40	19,25	23,09	26,94	30,79	34,64	38,49	42,34
Diâmetro (seção circular, em cm)	17,78 ^a	22,22	26,67	31,11	35,56	40,00	44,44	48,89
Lado (seção hexagonal, em cm)	9,74 ^a	12,17	14,61	17,04	19,47	21,91	24,34	26,78

^a Dimensões que fornecem pilares com área inferior a 360 cm², logo, não podem ser utilizadas.

Fonte: Souza, Gama e Alves (2017a).

Nota: Dados adaptados pela autora.

A partir da Tabela 3, pode-se concluir que a situação mais usual de pilar esbelto ocorre para pilares retangulares com 20 cm em ao menos uma das dimensões submetidos a pés-direitos duplos, considerando-se neste caso aproximadamente 6 metros para o l_e . Além desta situação, pilares esbeltos ocorrem apenas em casos específicos de pilares com alturas livres muito grandes e podem ser evitados adotando-se dimensões maiores do que as indicadas na tabela. Vale citar que, considerando-se um pilar retangular com 14 cm em sua menor dimensão, o comprimento equivalente máximo para que o mesmo não seja classificado como esbelto é 3,63 m.

Na Tabela 3 não estão contemplados os pilares em “U”, pois a esbeltez dos mesmos não depende apenas da espessura, mas também da largura e altura internas. Soma-se a isso o fato de que, pilares com essa geometria, em geral, possuem elevada rigidez, além de serem muito utilizados em escadas e elevadores, elementos que, normalmente, exigem vigamento a cada 3 m, logo, apresentam comprimento equivalente pequeno.

Em função do índice de esbeltez, da geometria da seção e da disposição das armaduras, a NBR 6118:2014 define os métodos de determinação dos efeitos locais de segunda ordem, conforme consta no item 2.3.5.

2.3.4 MOMENTOS MÍNIMOS

A NBR 6118 (ABNT, 2014, p.130) explica a necessidade de consideração de um momento mínimo conforme a seguir:

A ruptura frágil das seções transversais, quando da formação da primeira fissura, deve ser evitada considerando-se, para o cálculo das armaduras, um momento mínimo dado pelo valor correspondente ao que produziria a ruptura da seção de concreto simples, supondo que a resistência à tração do concreto seja dada por $f_{ctk,sup}$, devendo também obedecer às condições relativas ao controle da abertura de fissuras [...]

Além disso, a NBR 6118 determina que: “[...] devem ser consideradas as imperfeições geométricas do eixo dos elementos estruturais da estrutura descarregada. Essas imperfeições podem ser divididas em dois grupos: imperfeições globais e imperfeições locais” (ABNT, 2014, p.58).

As imperfeições globais estão relacionadas ao desaprumo da edificação, logo, não são contempladas neste trabalho, uma vez que o mesmo trata do dimensionamento isolado de pilares. Por outro lado, as imperfeições locais consideram a falta de retilidade do pilar em questão e, para combater esses efeitos, a norma recomenda, no item 11.3.3.4.3, a adoção de um momento de cálculo total mínimo de 1ª ordem ($M_{1d,mín}$) dado pela equação (11).

$$M_{1d,mín} = N_d * (0,015 + 0,03 * h) \quad (11)$$

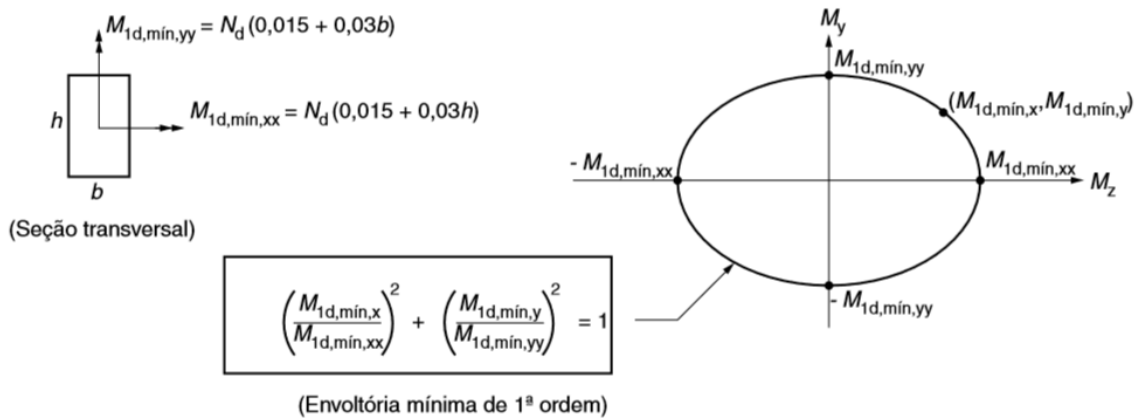
Em que

N_d é a força normal de cálculo; e

h é a altura total da seção transversal na direção considerada, em metros.

Nas estruturas reticuladas usuais, considera-se esse efeito atendido se o valor total de momento mínimo for respeitado. Além disso, para os pilares retangulares, tem-se uma envoltória mínima dos momentos de 1ª ordem, mostrada na Figura 5. Se a envoltória resistente englobar a mínima, a verificação estará atendida.

Figura 5 – Envoltória mínima de 1ª ordem

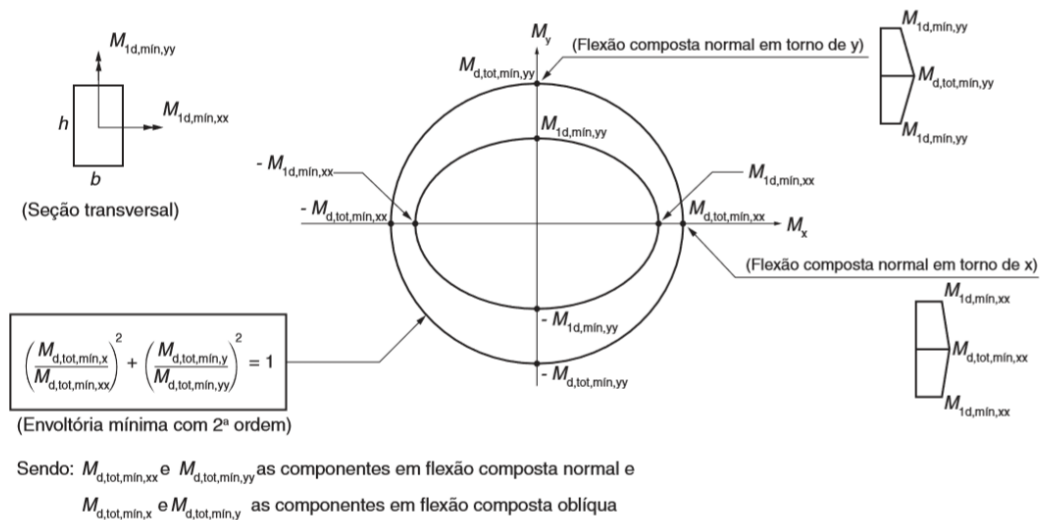


Sendo: $M_{1d,min,xx}$ e $M_{1d,min,yy}$ as componentes em flexão composta normal e
 $M_{1d,min,x}$ e $M_{1d,min,y}$ as componentes em flexão composta oblíqua

Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014).

Se for necessário determinar os momentos de 2ª ordem, a envoltória a ser utilizada é a envoltória mínima com 2ª ordem, definida pela Figura 6, cujos momentos estão definidos no item 2.3.5.

Figura 6 – Envoltória mínima com 2ª ordem



Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014).

2.3.5 EFEITOS LOCAIS DE SEGUNDA ORDEM

A análise de 1ª ordem, estuda a estrutura em sua configuração geométrica inicial, indeformada. A ação do carregamento sobre a estrutura gera uma deformação, e,

quando é realizada uma análise considerando a configuração deformada, tem-se uma análise de 2ª ordem.

Segundo Carvalho e Pinheiro (2009, p.313, grifo dos autores),

Devido à instabilidade surgem os esforços de flexão, e isso pode ocorrer mesmo nos pilares em que as ações normais são consideradas centradas. [...] No caso de haver compressão, a deformação da peça, que obrigatoriamente deve ser considerada, é a “**deformação de segunda ordem**” e a teoria que a considera também é chamada de segunda ordem.

A NBR 6118:2014 determina o método de obtenção dos efeitos locais de segunda ordem dos pilares em função do índice de esbeltez. Para tanto, define o índice de esbeltez limite (λ_1) por meio da equação (12).

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 * e_1/h}{\alpha_b} \quad (12)$$

Limitada por

$$35 \leq \lambda_1 \leq 90 \quad (13)$$

Em que

e_1/h é a excentricidade relativa de 1ª ordem na extremidade do pilar onde ocorre o momento de 1ª ordem de maior valor absoluto; e

α_b varia de acordo com a vinculação dos extremos do pilar isolado, que podem ser:

a) Pilares biapoiados sem cargas transversais

$$\alpha_b = 0,60 + 0,40 * \frac{M_B}{M_A} \quad (14)$$

Sendo

$$1,0 \geq \alpha_b \geq 0,4 \quad (15)$$

E M_A e M_B os momentos de 1ª ordem nos extremos do pilar. M_A é o maior valor absoluto obtido ao longo do pilar biapoiado e M_B recebe sinal positivo se tracionar a mesma face que M_A , e sinal negativo caso contrário.

b) Pilares biapoiados com cargas transversais significativas

$$\alpha_b = 1,0 \quad (16)$$

c) Pilares em balanço

$$\alpha_b = 0,80 + 0,20 * \frac{M_C}{M_A} \quad (17)$$

Desde que

$$1,0 \geq \alpha_b \geq 0,85 \quad (18)$$

E, nesse caso, M_A é o momento de 1ª ordem no engaste e M_C é o momento de 1ª ordem no meio do pilar.

d) Pilares biapoiados ou em balanço com momentos menores que o momento mínimo:

$$\alpha_b = 1,0 \quad (19)$$

Assim, de acordo com a classificação apresentada no item 2.3.3, tem-se:

- Pilares curtos ($\lambda \leq \lambda_1$)

Os esforços locais de segunda ordem em elementos isolados podem ser desprezados em pilares curtos, ou seja, que apresentam índice de esbeltez inferior ao índice limite.

- Pilares moderadamente esbeltos ($\lambda_1 < \lambda \leq 90$)

Neste caso é permitida a utilização de métodos aproximados para obtenção desses efeitos, são eles o método do pilar-padrão com curvatura aproximada e o método do

pilar-padrão com rigidez κ aproximada. É facultativa ainda a utilização do método do pilar-padrão acoplado a diagramas M, N, $1/r$.

O método do pilar-padrão com curvatura aproximada pode ser empregado em pilares com seção constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo. Por esse método o momento total máximo de cálculo no pilar ($M_{d,tot}$) é dado pela equação (20).

$$M_{d,tot} = \alpha_b * M_{1d,A} + N_d * \frac{l_e^2}{10} * \frac{1}{r} \geq M_{1d,A} \quad (20)$$

Em que

$M_{1d,A}$ é o momento de 1ª ordem de cálculo atuante na seção crítica do pilar;

N_d é a força normal de cálculo;

$1/r$ é a curvatura na seção crítica, obtida de acordo com a classe do f_{ck} adotado. Segundo Carvalho e Pinheiro (2009):

Para $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h * (\nu + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h} \quad (21)$$

Para $50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_{cu} + (f_{yd}/E_s)}{h * (\nu + 0,5)} \leq \frac{\varepsilon_{cu} + (f_{yd}/E_s)}{h} \quad (22)$$

Sendo

$$\nu = N_d / (A_c * f_{cd}) \quad (23)$$

E

h é a altura da seção na direção considerada; e

ν é a força normal adimensional.

O método do pilar-padrão com rigidez κ aproximada possui as mesmas restrições de utilização que o método do pilar-padrão com curvatura aproximada, porém pode ser empregado apenas em seções retangulares constantes. Neste caso, o momento total máximo de cálculo ($M_{d,tot}$) é obtido pela equação (24).

$$M_{d,tot} = \frac{\alpha_b * M_{1d,A}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 * \kappa / \nu}} \geq M_{1d,A} \quad (24)$$

Onde

κ é o valor da rigidez adimensional, dada por:

$$\kappa = 32 * \left(1 + 5 * \frac{M_{Rd,tot}}{h * N_d} \right) * \nu \quad (25)$$

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014, p.110), “Em um processo de dimensionamento, toma-se $M_{Rd,tot} = M_{Sd,tot}$. Em um processo de verificação, onde a armadura é conhecida, $M_{Rd,tot}$ é o momento resistente calculado com essa armadura e com $N_d = N_{Sd} = N_{Rd}$ ”.

Neste trabalho são dimensionados pilares com diversas seções, além das retangulares, portanto, utiliza-se o método do pilar-padrão com curvatura aproximada para a consideração dos efeitos locais de segunda ordem dos pilares moderadamente esbeltos. Acerca das seções diferentes das retangulares, Rodrigues Júnior (2005, p.74) afirma:

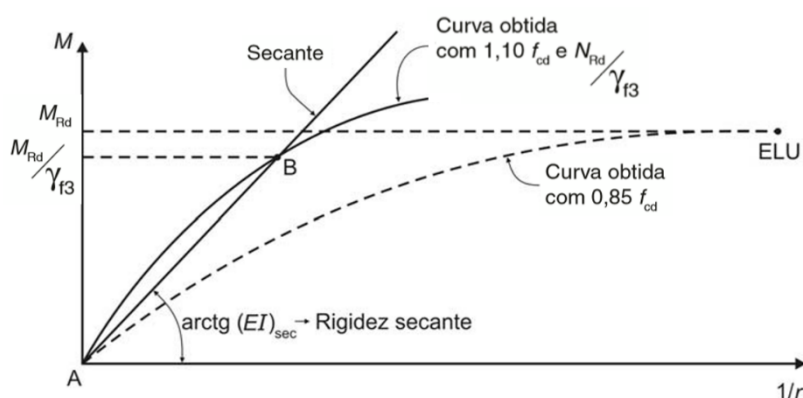
Para pilares com seções transversais do tipo “U” e “L”, para as quais o método do pilar-padrão com rigidez aproximada não é aplicável, é sempre admitida a hipótese de pilares curtos. Hipótese esta considerada consistente, pois, pilares com estas formas geométricas, apresentam, na grande maioria dos casos práticos, baixos valores de esbeltez. Quanto às seções circulares, o método do pilar padrão com curvatura aproximada é empregado, pois, nestes pilares, a flexão composta oblíqua é sempre transformada em flexo-compressão normal.

- Pilares esbeltos ($90 < \lambda \leq 140$)

A NBR 6118:2014 permite a utilização dos métodos simplificados do pilar-padrão e do pilar-padrão melhorado, com o emprego, para a curvatura da seção crítica, dos valores gerados em diagramas M, N, $1/r$ referentes a cada caso. É obrigatória, ainda, a consideração dos efeitos da fluência, descrita em 2.3.7, uma vez que $\lambda > 90$.

A norma define em seu item 15.3.1 que a relação momento-curvatura possui o aspecto da Figura 7. Essa relação representa o efeito da não linearidade física dos materiais e é obtida para cada seção, a partir da armadura adotada e em função da força normal atuante.

Figura 7 – Relação momento-curvatura



Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014).

O diagrama momento-força normal-curvatura representa a curvatura do eixo da barra associada a determinado par de esforço normal e momento fletor. Ou seja, utiliza-se, para a curvatura, a curva cheia AB da Figura 7 que pode ser linearizada de forma conservadora pela reta AB. Segundo a norma, adota-se 1,1 para o coeficiente de ponderação das ações que considera os desvios gerados nas construções e as aproximações feitas em projeto do ponto de vista das solicitações (γ_{f3}).

Conforme definido em Souza, Gama e Alves (2017b), as hipóteses adotadas para a obtenção do diagrama são: a hipótese de Navier-Bernoulli; rotações moderadas; aderência perfeita entre aço e concreto; comportamento não linear dos materiais (por meio dos diagramas tensão-deformação não lineares dos materiais); e ruptura da seção transversal definida pelas deformações limites do concreto e do aço.

A partir da hipótese de Navier-Bernoulli, tem-se que o campo de deslocamentos no interior da barra é dado por:

$$u(x, y) = u_0(x) - y * \frac{dv}{dx} \quad (26)$$

$$v(x, y) = v(x) \quad (27)$$

Logo, trata-se de uma distribuição linear de deformações longitudinais ao longo da altura da seção transversal, obtida por:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 - y * \frac{d^2v}{dx^2} \quad (28)$$

Assumindo como curvatura (χ) do eixo da barra a segunda derivada de v :

$$\chi = -\frac{d^2v}{dx^2} \quad (29)$$

Desta forma, substituindo (29) em (28), a deformação em um ponto genérico da seção transversal é:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + y * \chi \quad (30)$$

Assim, pela hipótese de aderência perfeita, as deformações relativas em cada elemento discretizado da seção de concreto e em cada barra de aço são:

$$\varepsilon_c(n_{ax}, n_{ay}) = \varepsilon_0 + y_c(n_{ax}, n_{ay}) * \chi \quad (31)$$

$$\varepsilon_s(i) = \varepsilon_0 + y_s(i) * \chi \quad (32)$$

Sendo

$\varepsilon_c(n_{ax}, n_{ay})$ a deformação no elemento discretizado da seção de concreto; e

$\varepsilon_s(i)$ a deformação em cada barra de aço.

Segundo Gama (2015, p.74),

A relação momento-curvatura-força normal é obtida através do controle das deformações pelo qual vão sendo adotadas curvaturas χ , de forma incremental, calculando-se assim os esforços internos (N, M) até que sejam equilibrados com os esforços externos (N_{ext} , M_{ext}) [...].

Para essa iteração, recomenda-se a utilização do método de Newton-Raphson, por exemplo, de modo a obter a raiz da função definida por:

$$f(N) = N_{ext} - N \quad (33)$$

$$\varepsilon_{0_{i+1}} = \varepsilon_{0_i} - \frac{f(N)}{f'(N)} \quad (34)$$

Para melhorar a convergência do algoritmo, o método de Newton pode ser adaptado e utilizado em conjunto com outros métodos de obtenção de raízes de função, como o método da bissecante, de modo a possuir um intervalo de solução, o qual é reduzido após cada iteração.

Esse método foi utilizado para o dimensionamento dos pilares esbeltos de seção retangular implementado no programa computacional desenvolvido. Vale ressaltar que é válido apenas para pilares retangulares submetidos à flexo-compressão normal. Para o caso de esforços de flexo-compressão oblíqua, o mesmo precisa sofrer adaptações, de modo a considerar a influência que o momento em uma das direções gera na outra, e assim, obter a curvatura correspondente de maneira correta.

- Pilares muito esbeltos ($140 < \lambda \leq 200$)

A NBR 6118 não permite, nesses casos, a utilização de métodos aproximados, sendo assim, determina o cálculo dos efeitos locais de segunda ordem pelo método geral, que “Consiste na análise não linear de 2ª ordem efetuada com discretização adequada da barra, consideração da relação momento-curvatura real em cada seção e consideração da não linearidade geométrica de maneira não aproximada” (ABNT, 2014, p.109). Além disso, os esforços solicitantes finais de cálculo devem ser majorados por um coeficiente adicional, calculado pela equação (35):

$$\gamma_{n1} = 1 + [0,01 * (\lambda - 140)/1,4] \quad (35)$$

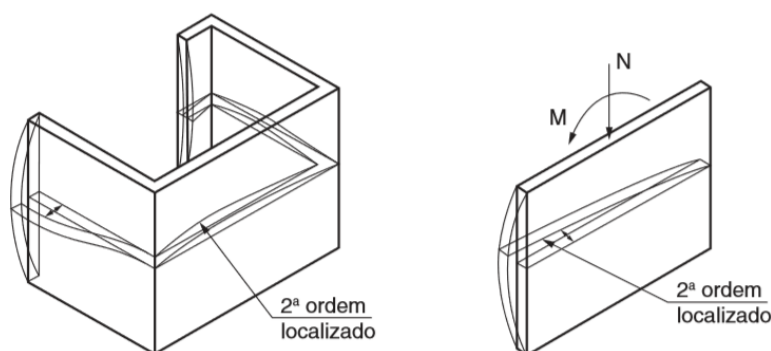
Este método não será aqui descrito uma vez que pilares muito esbeltos não são escopo deste trabalho.

2.3.6 EFEITOS LOCALIZADOS DE 2ª ORDEM EM PILARES-PAREDE

São denominados pilares-parede simples os pilares retangulares que apresentam uma das dimensões 5 vezes maior que a outra. Por sua vez, pilares em “U” são considerados pilares-parede compostos, visto que possuem 3 lâminas, caso em ao menos uma delas a espessura seja inferior a 1/5 da outra dimensão.

Para essa condição, a NBR 6118:2014 define que alguma região dos pilares-parede pode apresentar não retilidade maior que a do eixo do pilar em geral, na qual ocorrerão os chamados efeitos de 2ª ordem localizados. Esse efeito pode ser visto na Figura 8 e gera aumento dos esforços de flexão longitudinal e transversal nessa região.

Figura 8 – Efeitos de segunda ordem localizados em pilares-parede

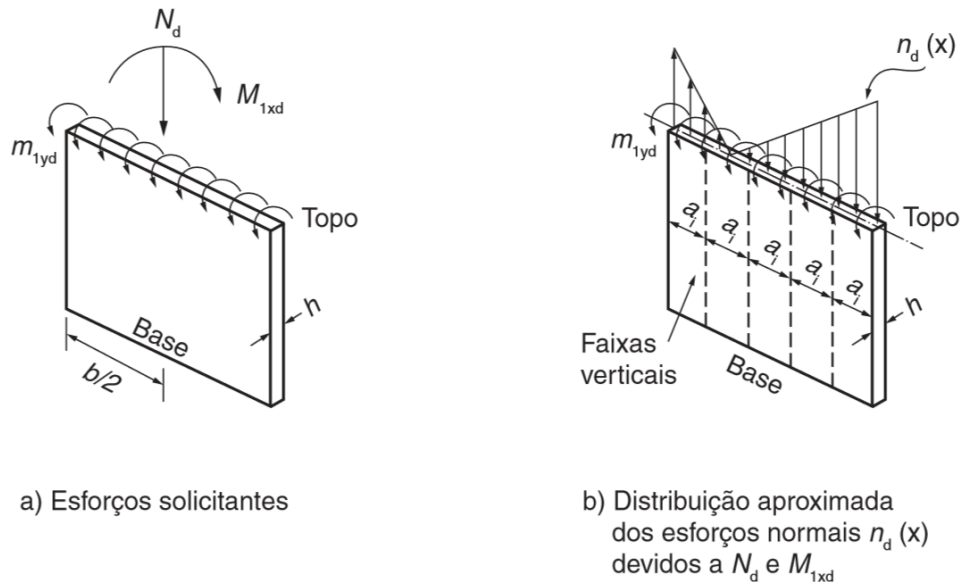


Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014).

Em seu item 15.9.2, a NBR 6118:2014 permite que sejam desprezados os efeitos localizados de segunda ordem dos pilares-parede com base e topo convenientemente fixados às lajes do edifício e cujas lâminas possuam esbeltez inferior a 35. Para os pilares-parede que não se enquadram nessa condição, mas que apresentam esbeltez inferior a 90, é definido um procedimento aproximado,

baseado na decomposição do mesmo em faixas verticais analisadas como pilares isolados. Essas faixas possuem largura a_i e estão submetidas a N_i (esforço normal) e M_{ydi} (momento fletor), conforme visualizado na Figura 9 e definido nas equações (36) e (37).

Figura 9 – Avaliação aproximada do efeito de segunda ordem localizado



Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014).

$$a_i = 3 * h \leq 100 \text{ cm} \quad (36)$$

$$M_{yid} = m_{1yd} * a_i \geq M_{1d,min} \quad (37)$$

Sendo h a espessura da lâmina.

Dessa forma, analisa-se os efeitos locais de 2ª ordem de cada faixa, observando que não é necessário adotar valores de α_b superiores a 0,6 quando $M_{yid} \leq M_{1d,min}$. Por outro lado, o efeito dos esforços de flexão transversal é combatido com o acréscimo dessa armadura nessas regiões, entretanto, o dimensionamento da armadura transversal não faz parte do escopo dessa pesquisa, logo não será aqui detalhado.

2.3.7 CONSIDERAÇÃO DA FLUÊNCIA

A consideração do efeito da fluência é obrigatória em pilares com esbeltez superior a 90. Segundo Araújo (2003, p.108), “A fluência do concreto pode ter uma importância significativa na capacidade resistente dos pilares. Em virtude da fluência, os deslocamentos transversais do eixo dos pilares crescem com o tempo, aumentando os momentos fletores solicitantes”.

Segundo a norma, a fluência pode ser considerada de maneira aproximada, pela excentricidade adicional e_{cc} , dada pela equação (38).

$$e_{cc} = \left(\frac{M_{sg}}{N_{sg}} + e_a \right) * \left(2,718^{\frac{\varphi * N_{sg}}{N_e - N_{sg}}} - 1 \right) \quad (38)$$

Em que N_e é a carga crítica de Euler, obtida por:

$$N_e = \frac{10 * E_{ci} * I_c}{l_e^2} \quad (39)$$

M_{sg} é o momento solicitante devido à combinação quase permanente;

N_{sg} é a força normal solicitante devido à combinação quase permanente;

φ é o coeficiente de fluência;

E_{ci} é o módulo de elasticidade inicial;

I_c é o momento de inércia; e

e_a é a excentricidade devido a imperfeições locais, calculada de acordo com a Figura 10 da qual, para a falta de retilidade do pilar, define-se:

$$e_a = \theta_1 * \left(\frac{l_e}{2} \right) \quad (40)$$

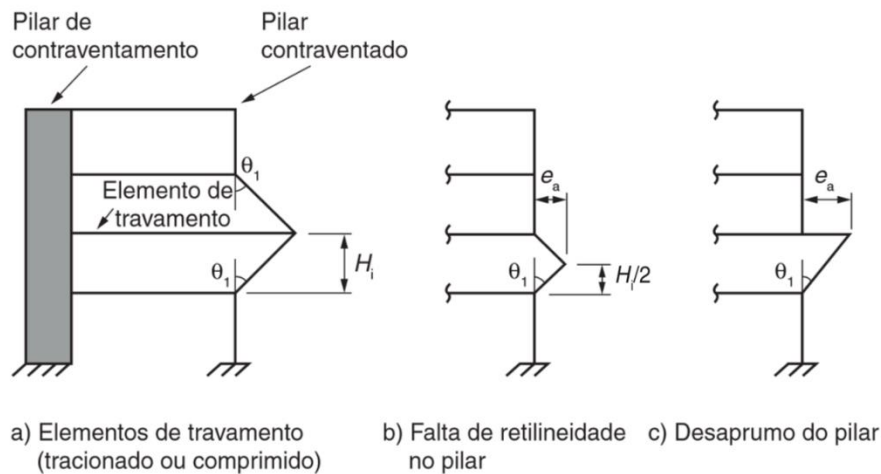
Sendo θ_1 o desaprumo de um elemento vertical contínuo, dado por:

$$\theta_1 = \frac{1}{100 * \sqrt{l_e}} \quad (41)$$

E limitado por:

$$\frac{1}{300} \leq \theta_1 \leq \frac{1}{200} \quad (42)$$

Figura 10 – Obtenção da excentricidade accidental em função das imperfeições geométricas locais



Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014).

O coeficiente de fluência considerado no *software* desenvolvido foi obtido em função da espessura fictícia por meio de interpolação linear dos valores fornecidos pela tabela 8.2 da NBR 6118:2014, considerando-se a umidade média do ambiente de 75% e t_0 de 30 dias.

2.3.8 DETERMINAÇÕES A RESPEITO DAS ARMADURAS

A NBR 6118:2014 também impõe alguns limites para as armaduras utilizadas nas seções de pilares de concreto armado. A área de aço longitudinal deve corresponder a, no mínimo, 0,4% da área de concreto e a, no máximo, 4% da mesma (fora das regiões de transpasse das armaduras). Além disso, a área de aço deve ser superior a 15% da razão entre a força normal solicitante de cálculo (N_{sd}) e a resistência de cálculo do aço ao escoamento (f_{yd}) e não é permitido o uso de

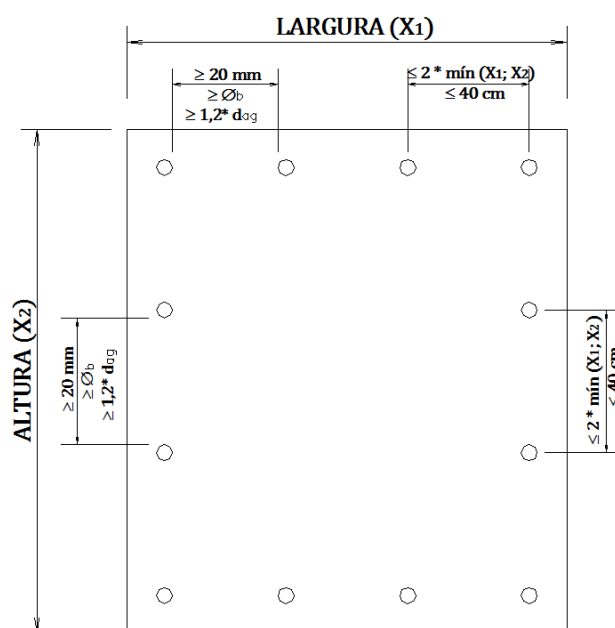
barras longitudinais com diâmetro inferior a 10 mm nem superior a 1/8 da menor dimensão da seção transversal.

Em seções poligonais, deve-se ter pelo menos 1 barra em cada vértice, e em seções circulares no mínimo 6 barras distribuídas ao longo do perímetro são exigidas. O espaçamento máximo entre eixos das barras deve ser menor ou igual a duas vezes a menor dimensão da seção transversal, sem exceder 40 cm e o espaçamento mínimo entre as faces das barras longitudinais, fora da região de emendas, deve ser igual ou superior ao maior dos seguintes valores:

- 20 mm;
- diâmetro da barra; e
- 1,2 vez a dimensão máxima característica do agregado graúdo.

No programa computacional desenvolvido, a restrição de espaçamento mínimo entre faces maior que 1,2 vez a dimensão máxima característica do agregado graúdo não foi inserida pois definiu-se que a mesma seria 16,6 mm (brita 1). De maneira que, ao atender à exigência de espaçamento mínimo de 20 mm, o terceiro tópico descrito está automaticamente atendido. A Figura 11 mostra as limitações de espaçamentos, mínimo e máximo, entre as barras longitudinais.

Figura 11 – Espaçamentos mínimo e máximo entre barras longitudinais



Fonte: Elaborada pela autora.

Sendo

ϕ_b o diâmetro das barras; e

d_{ag} a dimensão máxima característica do agregado graúdo.

2.4 PROCESSOS DE OTIMIZAÇÃO

Os processos de otimização são ferramentas utilizadas para a obtenção de uma solução ótima, que maximize ou minimize, determinada função. Segundo Vanderplaats (1998), muitos são os algoritmos propostos para a resolução numérica de problemas de otimização, nos quais são utilizadas diversas formas de programações, como lineares, quadráticas ou dinâmicas, que solucionam classes específicas de problemas de otimização. Por outro lado, para resolver situações gerais, são necessárias técnicas não lineares de programação.

Em geral, os processos de otimização são divididos em duas vertentes. A primeira trata dos processos probabilísticos, que se baseiam em probabilidades de ocorrências de eventos e em fenômenos da natureza. Esses métodos avaliam a função objetivo e, com a utilização de parâmetros estocásticos, resolvem o problema do ponto de vista probabilístico. Os métodos da Colônia de Formigas, Colônia de Abelhas, Recozimento Simulado são exemplos desses processos, entretanto, o que tem sido mais utilizado no dimensionamento de estruturas é o Método dos Algoritmos Genéticos⁷.

O Método dos Algoritmos Genéticos foi inspirado na teoria da evolução das espécies, desenvolvida por Charles Darwin. Dessa forma, segue o princípio da seleção natural, no qual apenas os indivíduos mais aptos sobrevivem e geram descendentes. De acordo com Bastos (2004), tem-se, inicialmente, uma população de indivíduos, possíveis soluções do problema, que são avaliados por uma função aptidão, que seleciona os mais adaptados. Em seguida, esses membros podem

⁷ Para maiores detalhes sobre a implementação deste método, é recomendável a leitura de referências como Argolo (2000) e Bastos (2004), pois os mesmos utilizaram este método em seus estudos.

sofrer mutações ou combinações de modo a gerarem indivíduos cada vez mais aptos, processos, esses, repetidos diversas vezes, representando sucessivas gerações, até a obtenção do ponto ótimo global.

Como vantagens do Método dos Algoritmos Genéticos, destacam-se: a possibilidade de utilização de variáveis contínuas ou discretas; o fato de não necessitarem de formulações complexas para o problema; a obtenção, comumente, da solução global, independente do ponto de partida; e não exigir que suas funções sejam contínuas ou diferenciáveis. Por outro lado, trata-se de um método com elevada robustez que necessita de um longo tempo de processamento computacional para obtenção dos resultados.

A segunda vertente, por sua vez, refere-se aos métodos determinísticos, que utilizam de formulações e métodos matemáticos para obtenção da solução. Dessa forma, manipulam as funções de definição do problema, bem como utilizam de suas derivadas de primeira e segunda ordem, de acordo com o método, para a resolução do mesmo. Alguns dos métodos são o Método de Newton, o Método de Quase-Newton, a Programação Quadrática Sequencial e o Método do Lagrangiano Aumentado. Destaca-se, ainda, o Método dos Pontos Interiores.

Em geral, os métodos de programação matemática tratam de funções objetivo e de funções de restrições contínuas e deriváveis em primeira e segunda ordem. O método da Programação Quadrática Sequencial, por exemplo, se baseia nas derivadas de primeira ordem, enquanto o Método dos Pontos Interiores, desenvolvido por Herskovits em 1995, possui uma região de busca, denominada região viável, a qual contém a solução do problema, determinada após as iterações necessárias.

O Método dos Pontos Interiores parte de um ponto inicial, pertencente à região viável. Define-se, então, uma direção de busca e o tamanho do passo, bem como o critério de convergência. Em seguida, utiliza-se o Método de Newton para solucionar o problema, de modo a obter a solução ótima que atenda às condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

A principal vantagem do Método dos Pontos Interiores em relação aos demais métodos determinísticos diz respeito à obtenção de um ponto viável sempre menor

ou igual aos demais, dado que os valores obtidos para a função objetivo são decrescentes a cada passo, mesmo que a convergência para o ponto ótimo não esteja garantida. Entretanto, as condições para a utilização deste método devem ser atendidas, ou seja, o problema necessita ter funções diferenciáveis, variáveis contínuas e apenas uma única função objetivo.

Pode-se perceber, nas descrições dos métodos probabilísticos e determinísticos, que ambos possuem alguns parâmetros em sua formulação. Seis são os elementos principais dos processos de otimização:

- Função objetivo: é a expressão à qual se deseja otimizar, escrita em função das variáveis. Pode ser de maximização ou minimização; linear ou não linear; e ainda diferenciável ou não.
- Variáveis de projeto: são os parâmetros alterados iterativamente até a obtenção do ponto ótimo, máximo ou mínimo, para a função objetivo. Podem ser discretas ou contínuas, de acordo com o espaço de busca.
- Funções de restrição: condições a serem atendidas pelo conjunto das variáveis para que a solução seja válida. Podem ser de igualdade ou de desigualdade; lineares ou não lineares; além de serem um elemento facultativo, que pode existir ou não.
- Espaço de busca: universo no qual é procurada a solução do problema, ou seja, os valores máximos e mínimos para as variáveis. São classificados em discretos ou contínuos, ao se tratarem de apenas alguns pontos preestabelecidos, ou de todo um intervalo contínuo, respectivamente.
- Ponto inicial: primeira solução a ser testada em termos da função objetivo e das funções de restrição. Em seguida, com a direção de busca e o tamanho do passo, novos pontos são obtidos sucessivamente.
- Ponto ótimo: ponto de valor máximo ou mínimo para a função objetivo definida. Pode ser local, caso seja uma “crista” ou um “vale” em apenas um trecho da vizinhança, ou global, considerando todo o espaço de busca.

De acordo com as características das funções objetivo e de restrições e do espaço de busca, os métodos podem ser adequados ou não para o problema. Desse modo, se as funções objetivo e de restrições forem lineares, a programação a ser utilizada deverá ser linear e se, no mínimo, uma delas for não linear, a programação também será não linear. Se o espaço de busca for um número definido de soluções possíveis, tem-se uma otimização discreta, caso contrário, se trata de otimização contínua. Além disso, o problema pode ser restrito ou não restrito, se possuir funções de restrições ou não, respectivamente, e os resultados apresentados podem ser máximos ou mínimos locais ou globais.

Conforme Vanderplaats (1998), um problema de otimização pode ser descrito pela seguinte formulação:

Minimizar $f(x)$

Sujeito a
$$\begin{cases} g(x) \leq 0; \\ h(x) = 0; \\ x^L \leq x \leq x^U. \end{cases}$$

Em que

$f(x)$ é a função objetivo;

x é o vetor das variáveis de projeto;

$g(x)$ são as restrições de desigualdade;

$h(x)$ são as restrições de igualdade; e

x^L e x^U são os limites, inferior e superior, respectivamente, do espaço de busca das variáveis.

Desta forma, obtém-se x^* que minimiza a função $f(x)$.

No caso de um problema de maximização, a função objetivo deve ser multiplicada por (-1) para que atenda ao padrão mostrado acima, implementado nos algoritmos. Analogamente, as funções de restrições de desigualdade precisam ser multiplicadas por (-1) quando forem indicadas com sinal de maior ou igual (\geq).

Sias (2014) realizou um exemplo teste para comparar os resultados fornecidos pelos diversos métodos de otimização para o problema de dimensionamento de pilares de concreto armado. Dessa forma, utilizou a função *fmincon*, existente no *Matlab*, para a otimização pelos métodos determinísticos: Programação Quadrática Sequencial e Pontos Interiores. E, para os probabilísticos, a função *ga*, para solucionar via Algoritmos Genéticos.

Os resultados obtidos pelos 3 métodos foram próximos, entretanto, os métodos matemáticos apresentaram custos totais inferiores para os pilares analisados. Assim, mostraram-se eficazes e apropriados para esse problema, visto que as funções objetivo e de restrições atendem aos requisitos para a utilização dos mesmos. Além disso, notou-se que o tempo de processamento necessário para a resolução pelo método dos Algoritmos Genéticos foi superior ao dos métodos determinísticos.

Assim, definiu-se a utilização do Método dos Pontos Interiores das Direções Viáveis para a obtenção da solução ótima no programa de dimensionamento desenvolvido. Conforme dito anteriormente, esse método considera apenas variáveis contínuas, entretanto, o problema em questão possui uma variável discreta, o f_{ck} . Nesse sentido, Argolo (2000, p.38) explica:

É frequente em problemas de otimização estrutural a utilização de espaços de busca com variáveis discretas. Esta situação é contornada assumindo-se um espaço de busca com variáveis contínuas que, após a otimização, fornecerão uma aproximação das variáveis de projeto para as disponíveis no espaço discreto.

Segundo Herskovits (1995), o Método dos Pontos Interiores é um algoritmo que utiliza o Método de Newton para a solução do sistema de equações não lineares de modo a satisfazer as condições de Karush-Kuhn-Tucker. O dimensionamento otimizado de pilares de concreto armado possui apenas restrições de desigualdade, logo, o problema a ser solucionado é:

Minimizar $f(x)$, sendo $x \in R^n$

Sujeito a $g(x) \leq 0$

Cujas condições de Karush-Kuhn-Tucker são:

$$\nabla f(x) + \nabla g(x) * \lambda = 0 \quad (43)$$

$$G(x) * \lambda = 0 \quad (44)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (45)$$

Sendo

$\nabla f(x)$ e $\nabla g(x)$ os gradientes das funções objetivo e de restrições, ou seja, as derivadas de 1ª ordem das funções $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente;

λ os multiplicadores de Lagrange; e

$G(x)$ a matriz diagonal que contém os valores das restrições, isto é, $G_{ii}(x) = g_i(x)$.

Assim, a solução do problema não linear de equações utilizando-se o Método de Newton é dada por:

$$\begin{bmatrix} H(x^k, \lambda^k) & \nabla g(x^k) \\ \Lambda^k * \nabla g^t(x^k) & G(x^k) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x^{k+1} - x^k \\ \lambda_0^{k+1} - \lambda^k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x^k) + \nabla g(x^k) * \lambda^k \\ G(x^k) * \lambda^k \end{bmatrix} \quad (46)$$

Em que

Λ é uma matriz diagonal para a qual $\Lambda_{ii} = \lambda_i$;

(x^k, λ^k) é o ponto inicial da iteração;

$(x^{k+1}, \lambda_0^{k+1})$ é a nova estimativa do ponto; e

$H(x^k, \lambda^k)$ é a Hessiana da função Lagrangiana, isto é, a derivada de 2ª ordem. Segundo Vanderplaats (1998), a Hessiana é calculada por:

$$H(x^k, \lambda^k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_1 \partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_1 \partial X_n} \\ \frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_2^2} & & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_2 \partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_n \partial X_1} & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_n \partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_n^2} \end{bmatrix} \quad (47)$$

Dessa forma, adotando-se S^k como uma matriz simétrica e positiva definida, a matriz identidade de $H(x^k, \lambda^k)$, tomando-se $d_0^k = (x^{k+1} - x^k)$ como direção de busca e definindo-se que λ_0^{k+1} é a nova estimativa de λ , reescreve-se o sistema da equação (46):

$$S^k * d_0^k + \nabla g(x^k) * \lambda_0^{k+1} = -\nabla f(x^k) \quad (48)$$

$$\Lambda^k * \nabla g^t(x^k) * d_0^k + G(x^k) * \lambda_0^{k+1} = 0 \quad (49)$$

Sabe-se que d_0 é uma direção de decréscimo de f . Entretanto, não é muito utilizada, já que quando uma restrição é nula, d_0 tende para a direção tangente ao conjunto viável. A equação (49) é equivalente a:

$$\lambda_i^k * \nabla g_i^t(x^k) * d_0^k + g_i(x^k) * \lambda_{0i}^{k+1} = 0 ; i = 1, \dots, m \quad (50)$$

Que implica que $\nabla g_i^t(x^k) * d_0^k = 0$ para todo i tal que $g_i(x^k) = 0$. Para evitar esse efeito, redefine-se o sistema linear das equações (48) e (49) em d^k e $\bar{\lambda}^{k+1}$. Além disso, adiciona-se um vetor negativo no lado direito da equação (49), com o intuito de defletir d_0^k para o interior da região viável. Essa deflexão é proporcional a ρ^k , valor positivo.

$$S^k * d^k + \nabla g(x^k) * \bar{\lambda}^{k+1} = -\nabla f(x^k) \quad (51)$$

$$\Lambda^k * \nabla g^t(x^k) * d^k + G(x^k) * \bar{\lambda}^{k+1} = -\rho^k * \lambda^k \quad (52)$$

Analogamente à expressão (50), reescreve-se a equação (52) em:

$$\lambda_i^k * \nabla g_i^t(x^k) * d^k + g_i(x^k) * \bar{\lambda}_i^{k+1} = -\rho^k * \lambda_i^k ; i = 1, \dots, m \quad (53)$$

Assim, $\nabla g_i^t(x^k) * d^k < 0$ para restrições ativas. Logo, d^k é uma direção viável. Desde que $d_0^{k^t} * \nabla f(x^k) < 0$, obtém-se limites para ρ^k que garantem que d^k é uma direção de decréscimo, dados por:

$$d^{k^t} * \nabla f(x^k) \leq \alpha * d_0^{k^t} * \nabla f(x^k) \quad (54)$$

Que implica que $d^{k^t} * \nabla f(x^k) < 0$. A taxa de descida referente a d^k é inferior à fornecida por d_0^k , entretanto, tem-se a garantia de ser uma direção viável.

Considerando-se o sistema linear auxiliar formado pelas equações (55) e (56):

$$S^k * d_1^k + \nabla g(x^k) * \lambda_1^{k+1} = 0 \quad (55)$$

$$\Lambda^k * \nabla g^t(x^k) * d_1^k + G(x^k) * \lambda_1^{k+1} = -\lambda^k \quad (56)$$

Deduz-se que:

$$d^k = d_0^k + \rho * d_1^k \quad (57)$$

Substituindo-se (57) em (54), chega-se a:

$$\rho \leq (\alpha - 1) * d_0^{k^t} * \nabla f(x^k) / [d_1^{k^t} * \nabla f(x^k)] \quad (58)$$

Assim, segundo Rodrigues Júnior (2005, p.90),

Definida a direção de busca, é necessário realizar uma busca linear restrita ao longo dessa direção, de forma a garantir que o ponto gerado esteja no interior da região viável. Além disso, é necessário atualizar os valores dos multiplicadores de Lagrange de maneira a assegurar a convergência para a solução correta.

Toda essa formulação para a resolução pelo Método dos Pontos Interiores encontra-se implementada no *software Matlab*. Nesse programa, o problema de otimização possui a seguinte estrutura:

Minimizar $F(X)$, sendo $X \in R^n$

$$\text{Sujeito a} \quad \left\{ \begin{array}{l} A^*X \leq B \\ Aeq^*X = Beq \\ C(X) \leq 0 \\ Ceq(X) = 0 \\ LB \leq X \leq UB \end{array} \right.$$

restrições lineares de desigualdade;
restrições lineares de igualdade;
restrições não lineares de desigualdade;
restrições não lineares de igualdade;
limites das variáveis.

Em que

$F(X)$ é a função objetivo; e

X é o vetor das variáveis de projeto.

A função *fmincon*, existente na biblioteca do *software Matlab*, realiza a otimização por algoritmos determinísticos, como o Método dos Pontos Interiores e a Programação Quadrática Sequencial, por exemplo. Assim, a partir do ponto inicial, $X0$, o *software* calcula a solução do problema utilizando o método definido nas opções. A sintaxe completa desta função, implementada no programa desenvolvido, está mostrada a seguir:

$$[X, FVAL, EXITFLAG] = \text{fmincon}(\text{FUN}, X0, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, \text{NONLCON}, \text{OPTIONS})$$

Dessa forma, a função objetivo a ser otimizada (*FUN*) recebe como valores de entrada o ponto inicial ($X0$), os coeficientes que definem as equações de restrições lineares (A, B, Aeq, Beq) e não lineares (*NONLCON*), o espaço de busca (limite inferior e superior, respectivamente) para as variáveis (LB, UB), e ainda os parâmetros para a otimização (*OPTIONS*). Por outro lado, a função *fmincon* fornece como dados de saída as variáveis (X), referentes ao ponto ótimo encontrado; o valor da função objetivo (*FVAL*) de acordo com as variáveis; e a condição de parada (*EXITFLAG*).

A Figura 12 apresenta os parâmetros preestabelecidos pelo *software Matlab*, para a resolução de problemas de otimização pelo Método dos Pontos Interiores utilizando a função *fmincon*. Eles podem ser redefinidos pelo usuário, por meio do *OPTIONS*.

Figura 12 – Parâmetros *default* da função *fmincon* para o Método dos Pontos Interiores

fmincon options:

Options used by current Algorithm ('interior-point'):
(Other available algorithms: 'active-set', 'sqp', 'trust-region-reflective')

Set by user:

Algorithm: 'interior-point'

Default:

```

AlwaysHonorConstraints: 'bounds'
    DerivativeCheck: 'off'
        Diagnostics: 'off'
    DiffMaxChange: Inf
    DiffMinChange: 0
        Display: 'final'
    FinDiffRelStep: 1.4901e-08
    FinDiffType: 'forward'
    FunValCheck: 'off'
    GradConstr: 'off'
        GradObj: 'off'
        HessFcn: []
        HessMult: []
        Hessian: 'bfgs'
    InitBarrierParam: 0.1000
    InitTrustRegionRadius: 'sqrt(numberOfVariables)'
    MaxFunEvals: 3000
    MaxIter: 1000
    MaxProjCGIter: '2*(numberOfVariables-numberOfEqualities)'
    ObjectiveLimit: -1.0000e+20
    OutputFcn: []
    PlotFcns: []
    ScaleProblem: 'none'
    SubproblemAlgorithm: 'ldl-factorization'
        TolCon: 1.0000e-06
        TolFun: 1.0000e-06
        TolProjCG: 0.0100
        TolProjCGAbs: 1.0000e-10
        TolX: 1.0000e-10
        TypicalX: 'ones(numberOfVariables,1)'
    UseParallel: 'never'

```

Fonte: *help* do software *Matlab*.

3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O programa computacional desenvolvido utiliza o Método dos Pontos Interiores como ferramenta para obtenção da solução ótima para o dimensionamento de pilares de concreto armado, conforme exposto no item 2.4. Dessa forma, neste capítulo é definido, inicialmente, o problema de otimização, que engloba a função objetivo, as variáveis de projeto, o ponto inicial, as funções de restrição e o espaço de busca. Em seguida, está descrita a formulação para obtenção da resistência da seção para um pilar retangular nos domínios 3, 4 e 4a e também no domínio 5. Define-se, ainda, a numeração das barras e a discretização da seção de concreto para as seções circulares, hexagonais e em “U”, uma vez que a capacidade resistente é obtida de maneira análoga à da seção retangular. Descreve-se, por fim, como é realizada a consideração dos momentos mínimos no *software* desenvolvido, bem como apresenta-se o programa, suas interfaces com o usuário e detalhes do funcionamento.

3.1 O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Conforme explicado no item 2.4, o problema de otimização se baseia em encontrar a solução ótima que maximize ou minimize a função objetivo. No caso do dimensionamento de pilares, a função objetivo é o custo total do pilar, por unidade de comprimento, que engloba o custo do concreto, do aço e das formas utilizadas. Assim, a função objetivo, a qual deseja-se minimizar, pode ser definida por:

$$f_{\min} = C_c * A_c + C_a * A_a * \rho + C_f * A_f \quad (59)$$

Em que

C_c é o custo do concreto (R\$/m³);

A_c é a área da seção transversal (m²);

C_a é o custo do aço (R\$/kg);

A_a é a área de aço total calculada para a seção transversal (m²);

ρ é o peso específico do aço (kg/m³);

C_f é o custo das formas (R\$/m²); e

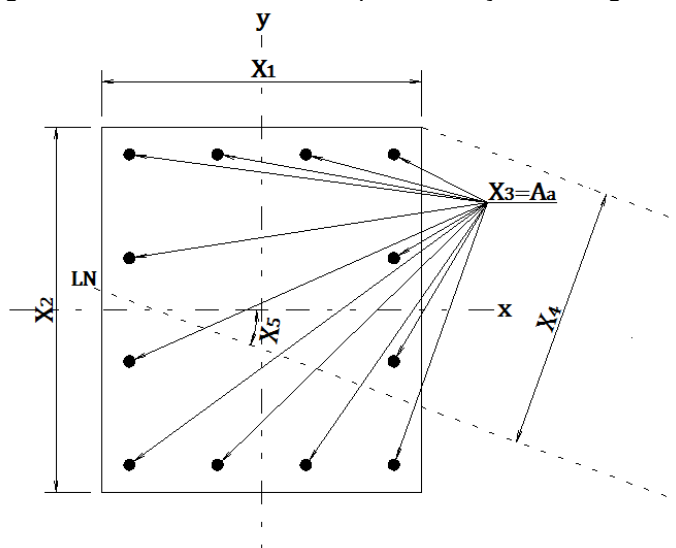
A_f é a área de formas, correspondente ao perímetro do pilar (m).

Para a obtenção da solução ótima da função objetivo definida na equação (59), são realizados cálculos iterativos que alteram os valores das variáveis sucessivamente, até encontrar o ponto de mínimo. Dessa forma, tem-se, no programa computacional desenvolvido, para seções retangulares, as seguintes variáveis:

- Largura da seção (x_1);
- Altura da seção (x_2);
- Área de aço total na seção ($x_3 = A_a$);
- Profundidade da linha neutra em relação à borda comprimida (x_4);
- Ângulo de inclinação da linha neutra (x_5); e
- Resistência característica do concreto à compressão ($x_6 = f_{ck}$).

De acordo com as opções de otimização selecionadas no programa x_1 , x_2 e x_6 podem ser fixas ou ter seus valores alterados. A Figura 13 ilustra as variáveis adotadas para as seções retangulares.

Figura 13 – Variáveis adotadas para as seções retangulares



Fonte: Elaborada pela autora.

A respeito das variáveis relativas à linha neutra pode-se afirmar, ainda, que

Na flexo-compressão normal, a profundidade da linha neutra, medida em relação a uma borda da seção transversal, é uma incógnita do problema. Entretanto, a orientação da linha neutra é conhecida, já que ela será sempre perpendicular ao plano de ação do momento fletor (ARAÚJO, 2003, p.15).

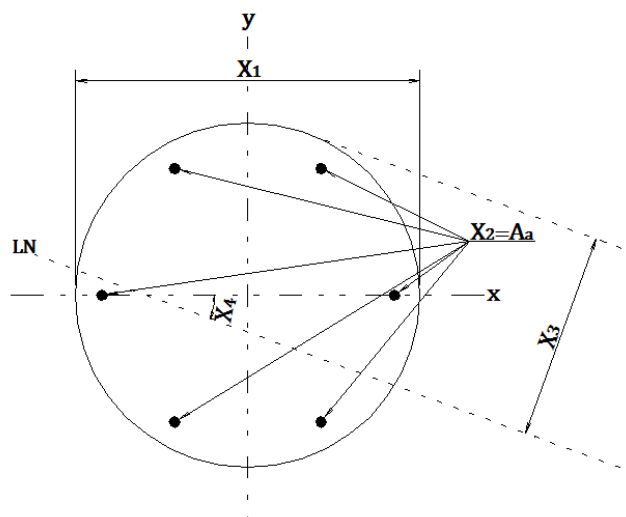
E, por outro lado, na flexo-compressão oblíqua, tanto a profundidade da linha neutra, quanto o seu ângulo de inclinação são desconhecidos.

As seções circulares, possuem basicamente as mesmas variáveis, porém ao invés das dimensões dos lados do retângulo, tem-se o diâmetro do pilar, conforme mostrado a seguir.

- Diâmetro da seção (x_1);
- Área de aço total da seção ($x_2 = A_a$);
- Profundidade da linha neutra em relação à borda comprimida (x_3);
- Ângulo de inclinação da linha neutra (x_4); e
- Resistência característica do concreto à compressão ($x_5 = f_{ck}$).

Nesse caso, as opções de otimização selecionadas no programa definem se x_1 e x_5 devem ser fixas ou ter seus valores alterados iterativamente. A Figura 14 mostra as variáveis adotadas para as seções circulares.

Figura 14 – Variáveis adotadas para as seções circulares



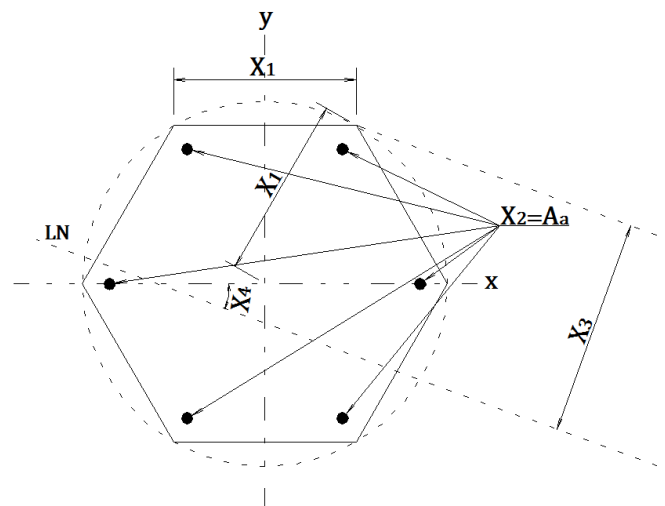
Fonte: Elaborada pela autora.

As seções hexagonais são muito similares às circulares, entretanto, tem-se o lado do hexágono ao invés do diâmetro do pilar, conforme mostrado a seguir.

- Lado do hexágono (x_1);
- Área de aço total da seção ($x_2 = A_a$);
- Profundidade da linha neutra em relação à borda comprimida (x_3);
- Ângulo de inclinação da linha neutra (x_4); e
- Resistência característica do concreto à compressão ($x_5 = f_{ck}$).

Assim como nos pilares circulares, x_1 e x_5 podem ser fixas ou ter seus valores alterados iterativamente. A Figura 15 mostra as variáveis adotadas para as seções hexagonais. Pode-se perceber, ainda pela Figura 15, que o lado do hexágono (x_1) corresponde ao raio da circunferência que circunscreve o mesmo.

Figura 15 – Variáveis adotadas para as seções hexagonais



Fonte: Elaborada pela autora.

Para as seções em “U” tem-se as dimensões internas da seção fixas, altura (A) e largura (L), além das seguintes variáveis:

- Espessura das lâminas do pilar (x_1);
- Área de aço total da seção ($x_2 = A_a$);
- Profundidade da linha neutra em relação à borda comprimida (x_3);
- Ângulo de inclinação da linha neutra (x_4); e
- Resistência característica do concreto à compressão ($x_5 = f_{ck}$).

E, dessa forma, as opções de otimização selecionadas no programa definem se as variáveis x_1 e x_5 são fixas ou possuem seus valores alterados. A Figura 16 ilustra as variáveis adotadas para as seções em “U”.

$$x_{1,0} = \frac{N_{sd}}{x_2 * 0,4 * x_6 * 1000} \quad (60)$$

A divisão por 1000 na equação (60) é devido à conversão de unidades, uma vez que o $f_{ck}(x_6)$ está em MPa e precisa ser transformado para kN/m² para ficar coerente com a força normal (N_{sd}), em kN, e com as dimensões que estão definidas, internamente ao programa, em metros.

- Se apenas a altura for liberada para otimização

$$x_{2,0} = \frac{N_{sd}}{x_1 * 0,4 * x_6 * 1000} \quad (61)$$

- Se a largura e a altura forem liberadas para otimização

$$x_{1,0} = x_{2,0} = \sqrt{\frac{N_{sd}}{0,4 * x_6 * 1000}} \quad (62)$$

Nos 3 casos anteriores, se o f_{ck} também for liberado para otimização, adota-se, para a obtenção das dimensões da seção, o f_{ck} mínimo permitido pela norma para a classe de agressividade em questão. Por outro lado, se apenas o f_{ck} for liberado para a otimização tem-se a conta inversa:

$$x_{6,0} = \frac{N_{sd}}{x_1 * x_2 * 0,4 * 1000} \quad (63)$$

- Pilares circulares

- Se apenas o diâmetro for liberado para otimização

$$x_{1,0} = \sqrt{\frac{4 * N_{sd}}{\pi * 0,4 * x_5 * 1000}} \quad (64)$$

- Se apenas o f_{ck} for liberado para otimização

$$x_{5,0} = \frac{4 * N_{Sd}}{\pi * x_1^2 * 0,4 * 1000} \quad (65)$$

- Pilares hexagonais

- Se apenas o lado do hexágono for liberado para otimização

$$x_{1,0} = \sqrt{\frac{4 * N_{Sd}}{6 * \sqrt{3} * 0,4 * x_5 * 1000}} \quad (66)$$

- Se apenas o f_{ck} for liberado para otimização

$$x_{5,0} = \frac{4 * N_{Sd}}{6 * x_1^2 * \sqrt{3} * 0,4 * 1000} \quad (67)$$

- Pilares em “U”⁸

- Se apenas a espessura da lâmina for liberada para otimização

$$x_{1,0} = 14 \text{ cm} \quad (68)$$

- Se apenas o f_{ck} for liberado para otimização

$$x_{5,0} = f_{ck,min} \quad (69)$$

O ponto inicial é o primeiro ponto a ser testado. A partir dele, são realizadas diversas iterações até a obtenção da solução ótima, que deve atender às funções de restrições, as quais, em geral, são recomendações e exigências da norma de dimensionamento. As funções de restrições inseridas no programa, citadas em 2.3, são:

⁸ Para os pilares em “U” não foi adotada a proposição de cálculo a partir da tensão máxima e da tensão solicitante, sendo atribuídos os valores mínimos permitidos pela norma.

- Área mínima da seção transversal

$$A_c \geq 360 \text{ cm}^2 \quad (70)$$

- Número de barras (n_b) mínimo na seção

- Pilares retangulares:

$$n_b \geq 4 \quad (71)$$

- Pilares circulares e hexagonais:

$$n_b \geq 6 \quad (72)$$

- Pilares em “U”:

$$n_b \geq 12 \quad (73)$$

- Taxas geométricas mínima e máxima

$$\max\left(0,004 * A_c; 0,15 * \frac{N_{sd}}{f_{yd}}\right) \leq A_a \leq 0,04 * A_c \quad (74)$$

- Espaçamento mínimo e máximo em cada direção

- Pilares retangulares:

$$\max(2 \text{ cm}; \phi_b) + \phi_b \leq S_x = \frac{x_1 - 2 * d'}{n_{sx}} \leq \min[40 \text{ cm}; 2 * \min(x_1; x_2)] \quad (75)$$

$$\max(2 \text{ cm}; \phi_b) + \phi_b \leq S_y = \frac{x_2 - 2 * d'}{n_{sy}} \leq \min[40 \text{ cm}; 2 * \min(x_1; x_2)] \quad (76)$$

Sendo

ϕ_b o diâmetro das barras de aço;

S_x o espaçamento entre eixos das barras na direção x, direção da largura da seção;

d' a distância do eixo das barras longitudinais à face externa da seção;

n_{Sx} o número de espaçamentos entre barras na direção x;

S_y o espaçamento entre eixos das barras na direção y, direção da altura da seção; e

n_{Sy} o número de espaçamentos entre barras na direção y.

- Pilares circulares:

$$\max(2 \text{ cm}; \phi_b) + \phi_b \leq S_b = \frac{\pi * (x_1 - 2 * d')}{n_b} \leq 40 \text{ cm} \quad (77)$$

Em que S_b é o espaçamento entre eixos das barras, medido radialmente.

- Pilares hexagonais:

$$\max(2 \text{ cm}; \phi_b) + \phi_b \leq S = \left(\frac{x_1 * \sqrt{3}}{2} - d' \right) * \frac{12}{\sqrt{3} * n_b} \leq 40 \text{ cm} \quad (78)$$

Sendo S o espaçamento entre eixos das barras.

- Pilares em “U”:

$$\max(2 \text{ cm}; \phi_b) + \phi_b \leq S_x = \frac{L + 2 * d'}{n_{bx} + 1} \leq \min(40 \text{ cm}; 2 * x_1) \quad (79)$$

$$\max(2 \text{ cm}; \phi_b) + \phi_b \leq S_y = \frac{A}{n_{by}} \leq \min(40 \text{ cm}; 2 * x_1) \quad (80)$$

Em que

S_x é o espaçamento entre eixos das barras na direção x (barras distribuídas na largura interna da seção);

L é a largura interna da seção em “U”;

n_{bx} é o número de barras em cada face da largura interna da seção, ou seja, na direção x;

S_y é o espaçamento entre eixos das barras na direção y (barras nas duas alturas internas da seção);

A é a altura interna da seção em “U”; e

n_{by} é o número de barras em cada face das alturas internas da seção, ou seja, na direção y.

- Diâmetro das barras de aço (ϕ_b), mínimo e máximo. Adotou-se 40 mm como limite máximo para o diâmetro da barra, de modo a estar de acordo com os diâmetros comerciais disponíveis.

- Pilares retangulares:

$$10 \text{ mm} \leq \phi_b \leq \min \left[\frac{1}{8} * \min(x_1; x_2); 40 \text{ mm} \right] \quad (81)$$

- Pilares circulares:

$$10 \text{ mm} \leq \phi_b \leq \min \left(\frac{x_1}{8}; 40 \text{ mm} \right) \quad (82)$$

- Pilares hexagonais:

$$10 \text{ mm} \leq \phi_b \leq \min \left(\frac{x_1 * \sqrt{3}}{8}; 40 \text{ mm} \right) \quad (83)$$

- Pilares em “U”:

$$10 \text{ mm} \leq \phi_b \leq \min \left(\frac{x_1}{8}; 40 \text{ mm} \right) \quad (84)$$

- Índice de esbeltez (λ) máximo. Neste trabalho considera-se 140 para o índice de esbeltez máximo de seções retangulares e 90 para as demais seções.

- Pilares retangulares:

$$\max(\lambda_x; \lambda_y) \leq 140 \quad (85)$$

- Pilares circulares, hexagonais e em “U”:

$$\max(\lambda_x; \lambda_y) \leq 90 \quad (86)$$

- Limites impostos pelos domínios de deformação

- Pilares retangulares:

- Domínios 3, 4 e 4a

$$x_4 \leq x_1 * \sin(x_5) + x_2 * \cos(x_5) \leq \frac{10\% * x_4}{\varepsilon_{cu}} \quad (87)$$

- Domínio 5

$$x_4 \geq x_1 * \sin(x_5) + x_2 * \cos(x_5) \quad (88)$$

- Pilares circulares:

- Domínios 3, 4 e 4a

$$x_3 \leq x_1 \leq \frac{10\% * x_3}{\varepsilon_{cu}} \quad (89)$$

- Domínio 5

$$x_3 \geq x_1 \quad (90)$$

- Pilares hexagonais:

- Domínios 3, 4 e 4a

$$x_3 \leq x_1 * \text{sen}(x_4) + x_1 * \sqrt{3} * \cos(x_4) \leq \frac{10\text{‰} * x_3}{\varepsilon_{cu}} \quad (91)$$

- Domínio 5

$$x_3 \geq x_1 * \text{sen}(x_4) + x_1 * \sqrt{3} * \cos(x_4) \quad (92)$$

- Pilares em “U”:

- Domínios 3, 4 e 4a

$$x_3 \leq (L + 2 * x_1) * \text{sen}(x_4) + (A + x_1) * \cos(x_4) \leq \frac{10\text{‰} * x_3}{\varepsilon_{cu}} \quad (93)$$

- Domínio 5

$$x_3 \geq (L + 2 * x_1) * \text{sen}(x_4) + (A + x_1) * \cos(x_4) \quad (94)$$

- Resistências devem ser superiores às solicitações

$$N_{Rd} \geq N_{Sd} \quad (95)$$

$$M_{x,Rd} \geq M_{x,Sd} \quad (96)$$

$$M_{y,Rd} \geq M_{y,Sd} \quad (97)$$

Sendo

N_{Rd} a força normal resistente de cálculo da seção transversal;

$M_{x,Rd}$ o momento resistente de cálculo na direção x;

$M_{x,Sd}$ o momento solicitante de cálculo na direção x;

$M_{y,Rd}$ o momento resistente de cálculo na direção y; e

$M_{y,Sd}$ o momento solicitante de cálculo na direção y.

Finalmente, tem-se o espaço de busca, ou, região viável, o qual deverá conter a solução ótima, dada para pilares retangulares por:

$$14 \text{ cm} \leq x_1 \leq 300 \text{ cm} \quad (98)$$

$$14 \text{ cm} \leq x_2 \leq 300 \text{ cm} \quad (99)$$

$$0,004 * A_c \leq x_3 \leq 0,04 * A_c \quad (100)$$

$$0 \leq x_4 \leq \infty \quad (101)$$

$$0 \leq x_5 \leq \frac{\pi}{2} \quad (102)$$

$$\text{máx}(20 \text{ MPa}; f_{ck,\text{mín}}) \leq x_6 \leq 90 \text{ MPa} \quad (103)$$

Sendo $f_{ck,\text{mín}}$ o valor mínimo exigido pela norma para a resistência característica do concreto à compressão em função da classe de agressividade do local da edificação.

Para pilares circulares tem-se como espaço de busca:

$$21,5 \text{ cm} \leq x_1 \leq 300 \text{ cm} \quad (104)$$

$$0,004 * A_c \leq x_2 \leq 0,04 * A_c \quad (105)$$

$$0 \leq x_3 \leq \infty \quad (106)$$

$$0 \leq x_4 \leq \frac{\pi}{2} \quad (107)$$

$$\text{máx}(20 \text{ MPa}; f_{ck,\text{mín}}) \leq x_5 \leq 90 \text{ MPa} \quad (108)$$

O diâmetro dos pilares circulares possui como limite inferior 21,5 cm devido à limitação de área mínima de 360 cm², imposta pela NBR 6118:2014.

Os pilares hexagonais apresentam como espaço de busca:

$$11,8 \text{ cm} \leq x_1 \leq 300 \text{ cm} \quad (109)$$

$$0,004 * A_c \leq x_2 \leq 0,04 * A_c \quad (110)$$

$$0 \leq x_3 \leq \infty \quad (111)$$

$$0 \leq x_4 \leq \frac{\pi}{2} \quad (112)$$

$$\text{máx}(20 \text{ MPa}; f_{ck,\text{mín}}) \leq x_5 \leq 90 \text{ MPa} \quad (113)$$

O lado dos pilares hexagonais possui como limite inferior 11,8 cm para que a área da seção transversal seja superior aos 360 cm² exigidos. Vale ressaltar, que, considerando-se esse valor mínimo para o lado, a menor dimensão da seção, perpendicular ao eixo x, apresenta 20,4 cm.

Por fim, o espaço de busca dos pilares em “U” é:

$$14 \text{ cm} \leq x_1 \leq 50 \text{ cm} \quad (114)$$

$$0,004 * A_c \leq x_2 \leq 0,04 * A_c \quad (115)$$

$$0 \leq x_3 \leq \infty \quad (116)$$

$$0 \leq x_4 \leq \frac{\pi}{2} \quad (117)$$

$$\text{máx}(20 \text{ MPa}; f_{ck,\text{mín}}) \leq x_5 \leq 90 \text{ MPa} \quad (118)$$

A espessura das lâminas dos pilares em “U” foi limitada em 50 cm pois nesse comprimento são distribuídas apenas 2 barras em cada direção, o que, ao se considerar a distância das barras à face externa da seção atende à limitação de distância máxima entre eixos das barras de 40 cm.

3.2 PILARES RETANGULARES

O dimensionamento de um pilar de concreto armado se baseia na verificação da capacidade resistente da seção transversal, a fim de compará-la com os esforços solicitantes. Desse modo, neste capítulo são calculados os esforços resistidos pelo aço e pelo concreto, para um pilar retangular, a partir do diagrama de deformações na seção transversal. Esse diagrama é definido a partir da posição da linha neutra, que determina o domínio de deformação.

3.2.1 ESFORÇOS RESISTENTES NOS DOMÍNIOS 3, 4 E 4a

O dimensionamento nos domínios 3, 4 e 4a foi agrupado pois todos apresentam como característica a deformação ε_{cu} (ponto B) na borda mais comprimida da seção. A diferença existente entre esses domínios refere-se à posição em que a linha neutra corta a seção transversal, conforme mostrado na Figura 3 do capítulo 2.

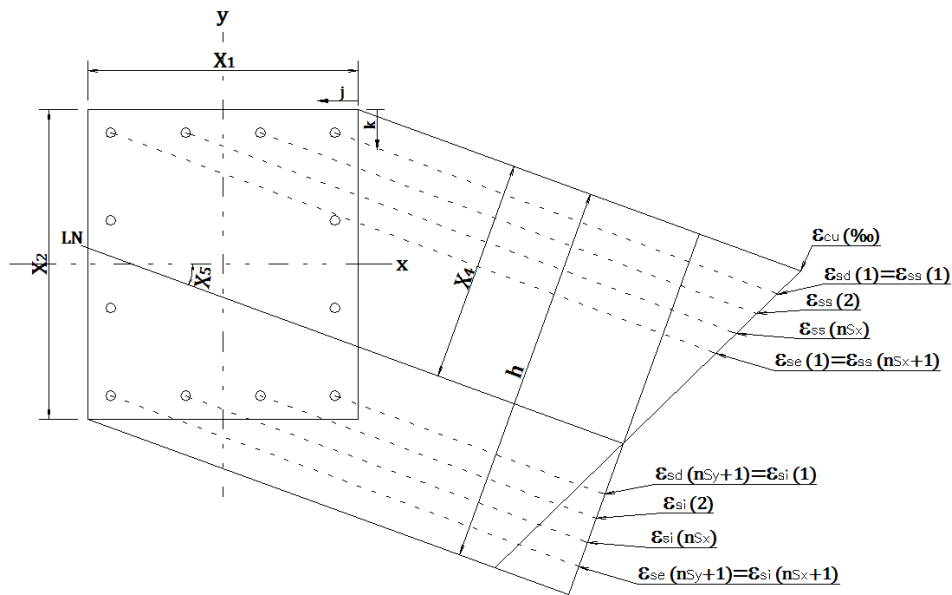
- **Cálculo das tensões nas barras de aço**

Inicialmente é calculada a deformação em cada barra de aço posicionada na seção transversal do pilar. A partir dela, pelo diagrama tensão-deformação, definido no item 2.3.1, obtém-se a tensão nas barras.

$$\sigma_s = E_s * \varepsilon_s \quad (119)$$

Para seções retangulares, o diagrama de deformações nos domínios 3, 4 e 4a é o mostrado na Figura 17.

Figura 17 – Diagrama de deformações em seções retangulares nos domínios 3, 4 e 4a



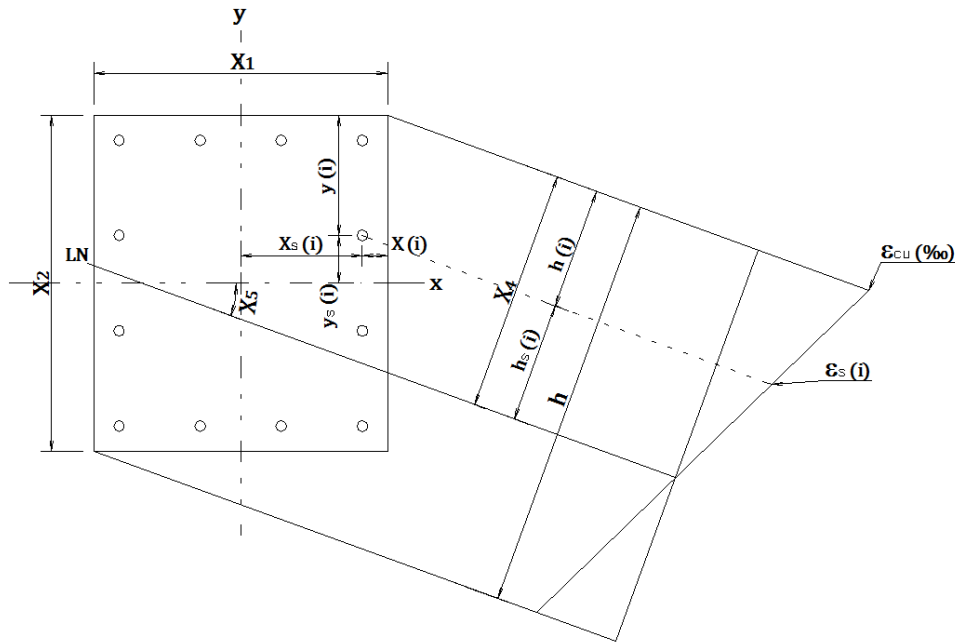
Fonte: Elaborada pela autora.

Percebe-se, a partir da Figura 17, que as barras distribuídas na largura (x_1), recebem o índice s ou i , se estiverem na face superior ou inferior da seção (observada em planta), respectivamente. Estas barras foram numeradas da direita para a esquerda, de 1 ($j = 0$) a $n_{sx} + 1$ ($j = n_{sx}$), sendo n_{sx} o número de espaçamentos entre barras na direção x . Já as barras distribuídas na altura (x_2) da seção, possuem o índice e ou d , por estarem posicionadas na face esquerda ou direita da seção, respectivamente. Por sua vez, foram numeradas de cima para baixo, de 1 ($k = 0$) a $n_{sy} + 1$ ($k = n_{sy}$), sendo n_{sy} o número de espaçamentos entre barras na direção y .

Com a numeração das barras definida, pode-se calcular a deformação de cada barra de aço pela equação (120), obtida por semelhança de triângulos na Figura 18. Dessa forma, está de acordo com Araújo (2003, p.12):

Em consequência da hipótese das seções planas, resulta uma distribuição linear das deformações normais ao longo da altura das seções transversais. Assim, a deformação em uma fibra genérica da seção transversal é diretamente proporcional à sua distância até a linha neutra.

Figura 18 – Diagrama de deformações em uma barra genérica em seções retangulares nos domínios 3, 4 e 4a



Fonte: Elaborada pela autora.

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{x_4} = \frac{\varepsilon_s(i)}{h_s(i)} \Rightarrow \varepsilon_s(i) = \frac{\varepsilon_{cu} * h_s(i)}{x_4} (\text{‰}) \quad (120)$$

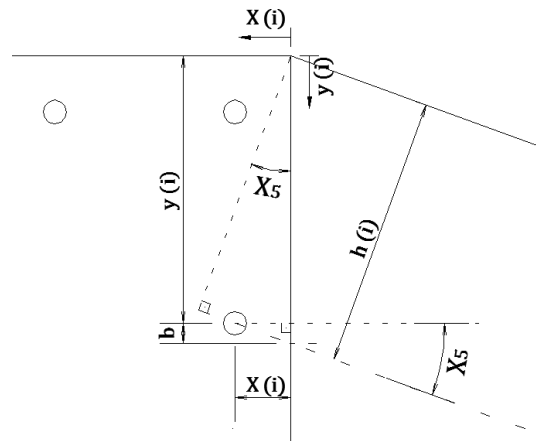
Onde $\varepsilon_s(i)$ é o valor da deformação específica da armadura i e $h_s(i)$ é a distância do eixo da armadura i à linha neutra da seção transversal. Assim, a tensão em cada barra de armadura é obtida por:

$$\sigma_s(i) = E_s * \varepsilon_s(i) = \frac{E_s * \varepsilon_{cu} * h_s(i)}{x_4} \quad (121)$$

Como a profundidade da linha neutra (x_4), é conhecida para cada caso, resta saber a expressão de $h_s(i)$ em função das demais variáveis para se obter a tensão em cada barra de aço. Ainda pela Figura 18, pode-se observar que:

$$h_s(i) = x_4 - h(i) \quad (122)$$

E, para determinar-se $h(i)$, distância da borda comprimida da seção ao eixo da armadura, medida perpendicularmente à linha neutra, utiliza-se a Figura 19.

Figura 19 – Cálculo de $h(i)$ 

Fonte: Elaborada pela autora.

Com base na Figura 19, tem-se que:

$$tg(x_5) = \frac{b}{x(i)} \Rightarrow b = tg(x_5) * x(i) \quad (123)$$

E

$$cos(x_5) = \frac{h(i)}{y(i) + b} \Rightarrow h(i) = cos(x_5) * [y(i) + b] \quad (124)$$

Substituindo-se (123) em (124):

$$h(i) = cos(x_5) * y(i) + cos(x_5) * tg(x_5) * x(i) \quad (125)$$

Como

$$tg(x_5) = \frac{sen(x_5)}{cos(x_5)} \quad (126)$$

Finalmente, chega-se à equação de $h(i)$:

$$h(i) = cos(x_5) * y(i) + sen(x_5) * x(i) \quad (127)$$

Assim, para cada barra, denominada conforme sua localização em planta na seção transversal, calcula-se as coordenadas $x(i)$ e $y(i)$ em função do espaçamento entre as barras na direção x (S_x) e na direção y (S_y):

$$S_x = \frac{x_1 - 2 * d'}{n_{Sx}} \quad (128)$$

$$S_y = \frac{x_2 - 2 * d'}{n_{Sy}} \quad (129)$$

Sendo d' a distância do eixo das barras longitudinais à face externa da seção.

Para as barras da face direita, com k variando de 0 a n_{Sy} ($k = 0, \dots, n_{Sy}$) tem-se:

$$x_d(k + 1) = d' \quad (130)$$

$$y_d(k + 1) = d' + k * S_y \quad (131)$$

$$x_{sd}(k + 1) = \frac{x_1}{2} - d' \quad (132)$$

$$y_{sd}(k + 1) = \frac{x_2}{2} - (d' + k * S_y) \quad (133)$$

Para as barras da face esquerda:

$$x_e(k + 1) = x_1 - d' \quad (134)$$

$$y_e(k + 1) = d' + k * S_y \quad (135)$$

$$x_{se}(k + 1) = -\frac{x_1}{2} + d' \quad (136)$$

$$y_{se}(k + 1) = \frac{x_2}{2} - (d' + k * S_y) \quad (137)$$

Para as barras da face superior, com j variando de 0 a n_{Sx} ($j = 0, \dots, n_{Sx}$):

$$x_s(j+1) = d' + j * S_x \quad (138)$$

$$y_s(j+1) = d' \quad (139)$$

$$x_{ss}(j+1) = \frac{x_1}{2} - (d' + j * S_x) \quad (140)$$

$$y_{ss}(j+1) = \frac{x_2}{2} - d' \quad (141)$$

Para as barras da face inferior:

$$x_i(j+1) = d' + j * S_x \quad (142)$$

$$y_i(j+1) = x_2 - d' \quad (143)$$

$$x_{si}(j+1) = \frac{x_1}{2} - (d' + j * S_x) \quad (144)$$

$$y_{si}(j+1) = -\frac{x_2}{2} + d' \quad (145)$$

Logo, os valores de $h(i)$ são:

$$h_d(k+1) = (d' + k * S_y) * \cos(x_5) + d' * \sin(x_5) \quad (146)$$

$$h_e(k+1) = (d' + k * S_y) * \cos(x_5) + (x_1 - d') * \sin(x_5) \quad (147)$$

$$h_s(j+1) = d' * \cos(x_5) + (d' + j * S_x) * \sin(x_5) \quad (148)$$

$$h_i(j+1) = (x_2 - d') * \cos(x_5) + (d' + j * S_x) * \sin(x_5) \quad (149)$$

Substituindo (122) e (146) a (149) em (121), tem-se, a tensão em cada barra:

$$\sigma_{sd}(k+1) = \frac{E_s * \varepsilon_{cu} * [x_4 - h_d(k+1)]}{x_4} \quad (150)$$

$$\sigma_{se}(k+1) = \frac{E_s * \varepsilon_{cu} * [x_4 - h_e(k+1)]}{x_4} \quad (151)$$

$$\sigma_{ss}(j+1) = \frac{E_s * \varepsilon_{cu} * [x_4 - h_s(j+1)]}{x_4} \quad (152)$$

$$\sigma_{si}(j+1) = \frac{E_s * \varepsilon_{cu} * [x_4 - h_i(j+1)]}{x_4} \quad (153)$$

Vale ressaltar que tanto as tensões de tração quanto as de compressão devem ser limitadas à tensão de cálculo ao escoamento do aço (f_{yd}). Ou seja, para as expressões (150) a (153), tem-se:

$$-f_{yd} \leq \sigma_s(i) \leq f_{yd} \quad (154)$$

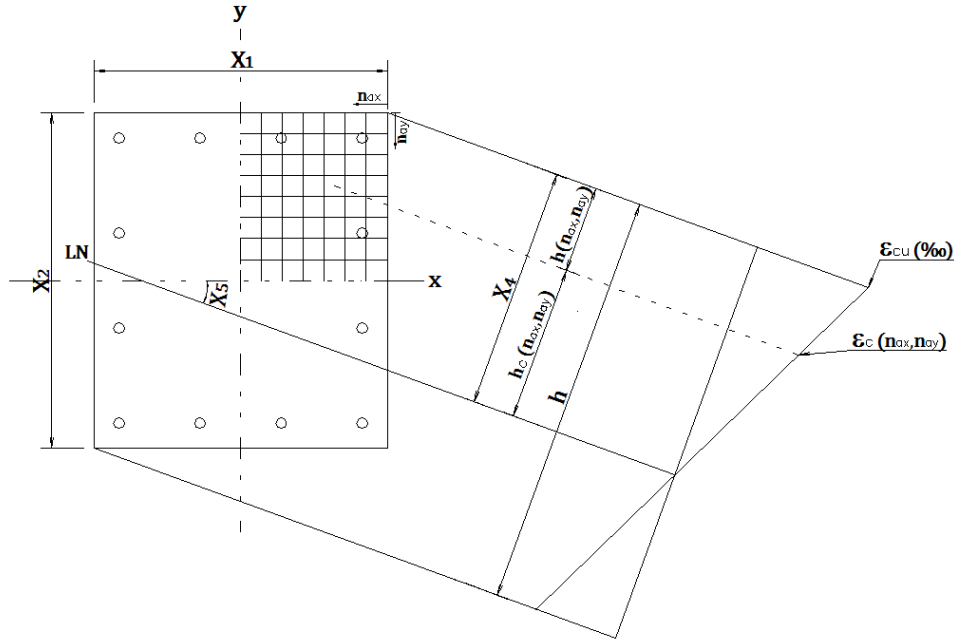
As coordenadas, que representam a distância nos eixos x e y, respectivamente, das barras ao centro de gravidade da seção transversal, $x_s(i)$ e $y_s(i)$, obtidas pelas expressões (132), (133), (136), (137), (140), (141), (144) e (145) são utilizadas para o cálculo do momento resistente da seção, mostrado ao final deste item.

- **Cálculo das tensões na seção de concreto**

Assim como desenvolvido para as barras de aço, a partir das deformações da seção transversal do pilar, pelo diagrama tensão-deformação idealizado do concreto, definido no item 2.3.1, obtém-se as tensões no concreto.

A seção de concreto precisa ser discretizada, de modo que se trabalhe com áreas menores, para que possa ser desconsiderada a variação de tensão nesses pequenos elementos. Dessa forma, no programa desenvolvido, as seções são divididas em 40 partes, tanto na direção x quanto na direção y. O diagrama de deformações no concreto nos domínios 3, 4 e 4a é dado pela Figura 20.

Figura 20 – Diagrama de deformações no concreto em seções retangulares nos domínios 3, 4 e 4a



Fonte: Elaborada pela autora.

Novamente, por semelhança de triângulos na Figura 20, pode-se calcular a deformação em cada elemento da seção de concreto discretizada pela equação (155). Nesta equação, os elementos são identificados pelos índices n_{ax} e n_{ay} de acordo com sua posição nas direções x e y respectivamente, conforme pode ser visto na Figura 20.

$$\varepsilon_c(n_{ax}, n_{ay})(\text{‰}) = \frac{\varepsilon_{cu} * h_c(n_{ax}, n_{ay})}{x_4} \quad (155)$$

A partir da deformação específica de cada elemento de concreto, $\varepsilon_c(n_{ax}, n_{ay})$, calcula-se a tensão, $\sigma_c(n_{ax}, n_{ay})$, nos mesmos, pela equação (156) definida pela norma conforme mostrado na Figura 1.

$$\sigma_c(n_{ax}, n_{ay}) = \alpha_c * f_{cd} * \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\varepsilon_c(n_{ax}, n_{ay})}{\varepsilon_{c2}} \right]^n \right\} \quad (156)$$

Os valores α_c , ε_{c2} e n variam em função da classe de resistência do concreto, conforme explicado no item 2.3.1. Assim, para a definição da tensão necessita-se apenas obter a expressão de $h_c(n_{ax}, n_{ay})$ em função das demais variáveis. Ainda pela Figura 20, pode-se observar que:

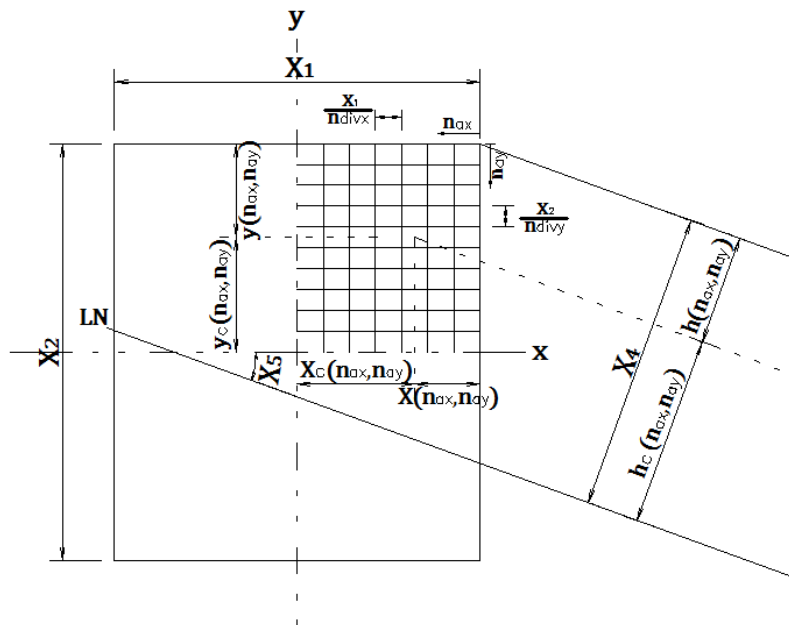
$$h_c(n_{ax}, n_{ay}) = x_4 - h(n_{ax}, n_{ay}) \quad (157)$$

E $h(n_{ax}, n_{ay})$ é análogo ao definido para as barras de aço e está mostrado na equação (158).

$$h(n_{ax}, n_{ay}) = \cos(x_5) * y(n_{ax}, n_{ay}) + \sin(x_5) * x(n_{ax}, n_{ay}) \quad (158)$$

Neste momento, as coordenadas de cada elemento precisam ser calculadas. Com o auxílio da Figura 21, pode-se defini-las pelas expressões (159) a (162).

Figura 21 – Definição das coordenadas de um elemento da seção retangular



Fonte: Elaborada pela autora.

$$x(n_{ax}, n_{ay}) = \frac{n_{ax} * x_1}{n_{divx}} - \frac{x_1}{2 * n_{divx}} \quad (159)$$

$$y(n_{ax}, n_{ay}) = \frac{n_{ay} * x_2}{n_{divy}} - \frac{x_2}{2 * n_{divy}} \quad (160)$$

$$x_c(n_{ax}, n_{ay}) = \frac{x_1}{2} - \left(\frac{n_{ax} * x_1}{n_{divx}} - \frac{x_1}{2 * n_{divx}} \right) \quad (161)$$

$$y_c(n_{ax}, n_{ay}) = \frac{x_2}{2} - \left(\frac{n_{ay} * x_2}{n_{divy}} - \frac{x_2}{2 * n_{divy}} \right) \quad (162)$$

Onde n_{divx} e n_{divy} são o número de divisões nas direções x e y, respectivamente.

Substituindo-se as equações (159) e (160) em (158), tem-se:

$$h(n_{ax}, n_{ay}) = \left(\frac{n_{ay} * x_2}{n_{divy}} - \frac{x_2}{2 * n_{divy}} \right) * \cos(x_5) + \left(\frac{n_{ax} * x_1}{n_{divx}} - \frac{x_1}{2 * n_{divx}} \right) * \sin(x_5) \quad (163)$$

O valor da deformação é dado, então, por:

$$\varepsilon_c(n_{ax}, n_{ay})(\%) = \frac{\varepsilon_{cu} * [x_4 - h(n_{ax}, n_{ay})]}{x_4} \quad (164)$$

Por fim, a tensão em cada elemento é obtida substituindo-se (164) em (156).

$$\sigma_c(n_{ax}, n_{ay}) = \alpha_c * f_{cd} * \left(1 - \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_{cu} * [x_4 - h(n_{ax}, n_{ay})]}{x_4 * \varepsilon_{c2}} \right\}^n \right) \quad (165)$$

É importante ressaltar que a tensão do concreto tem como limite inferior 0, pois as tensões de tração são desprezadas (conforme hipótese definida em 2.3.2), e como limite superior $\alpha_c * f_{cd}$, já que após atingir o estado plástico não se considera mais nenhum acréscimo na resistência do concreto. Então:

$$0 \leq \sigma_c(n_{ax}, n_{ay}) \leq \alpha_c * f_{cd} \quad (166)$$

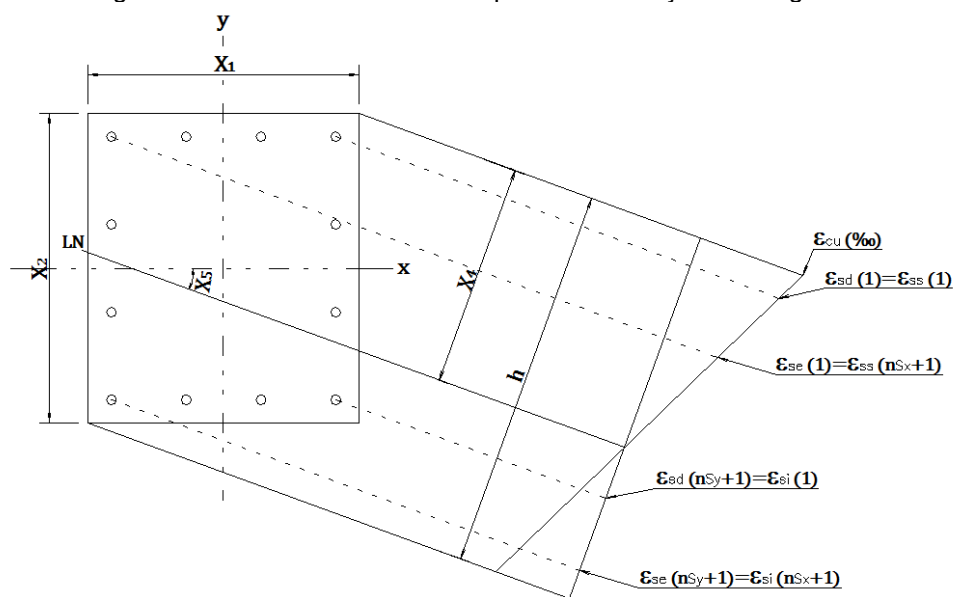
Note-se ainda que não foram retiradas da área da seção transversal os espaços tomados pelas barras, uma vez que representam uma porcentagem pequena. Conforme França (1984), tal procedimento é comumente aceito.

As distâncias dos elementos ao centro de gravidade da seção transversal, obtidas nas equações (161) e (162), são utilizadas no cálculo dos momentos resistentes pela seção de concreto, a seguir.

- **Capacidade resistente da seção transversal**

Conforme pode ser visto na Figura 22, as barras dos cantos da seção transversal dos pilares retangulares apareceriam duas vezes nos cálculos, pois elas estão sendo consideradas tanto nas camadas superiores e inferiores, quanto nas camadas da direita e esquerda. Portanto, para o cálculo final da resistência, esses valores foram reduzidos à metade no programa computacional. Ou seja, os valores $\sigma_{sd}(1)$, $\sigma_{ss}(1)$, $\sigma_{sd}(n_{sy} + 1)$, $\sigma_{si}(1)$, $\sigma_{se}(n_{sy} + 1)$, $\sigma_{si}(n_{sx} + 1)$, $\sigma_{se}(1)$ e $\sigma_{ss}(n_{sx} + 1)$ foram divididos por 2.

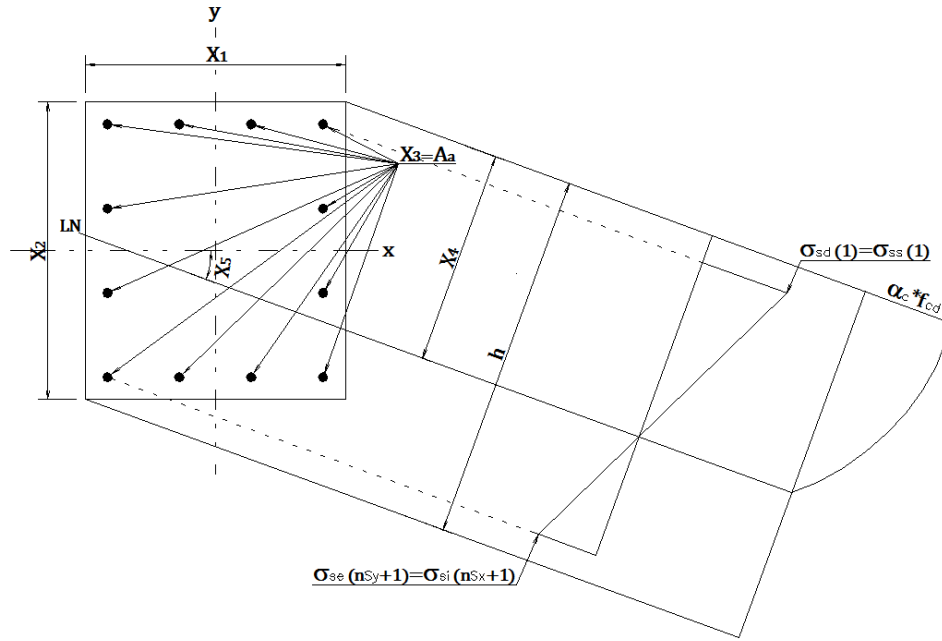
Figura 22 – Barras com tensão duplicada nas seções retangulares



Fonte: Elaborada pela autora.

A distribuição de tensões nos pilares retangulares nos domínios 3, 4 e 4a pode ser vista na Figura 23.

Figura 23 – Distribuição de tensões nos pilares retangulares nos domínios 3, 4 e 4a



Fonte: Elaborada pela autora.

Para calcular os esforços resistidos pela seção transversal, é necessário somar o que o concreto e o que as barras de armadura são capazes de resistir individualmente. Assim, para as forças axiais, basta multiplicar a tensão pela área de cada um dos elementos, conforme equação (167), na qual a primeira parcela corresponde à resistência da seção de concreto e a segunda às armaduras.

$$N_{Rd} = \sum_{n_{ax}=1}^{n_{divx}} \sum_{n_{ay}=1}^{n_{divy}} [\sigma_c(n_{ax}, n_{ay}) * A_c(n_{ax}, n_{ay})] + \frac{x_3}{n_b} * \left\{ \sum_{k=0}^{n_{Sy}} [\sigma_{sd}(k+1) + \sigma_{se}(k+1)] + \sum_{j=0}^{n_{Sx}} [\sigma_{ss}(j+1) + \sigma_{si}(j+1)] \right\} \quad (167)$$

Nessa equação, as tensões são as calculadas nas equações (150) a (153) e (152), x_3 corresponde à área de aço total, n_b ao número de barras existentes na seção transversal e a área de concreto de cada elemento, $A_c(n_{ax}, n_{ay})$, é dada pela multiplicação:

$$A_c(n_{ax}, n_{ay}) = \frac{x_1}{n_{divx}} * \frac{x_2}{n_{divy}} \quad (168)$$

Para obter os momentos resistentes é necessário calcular a distância das barras de aço até o centroide da seção transversal, bem como de cada elemento da seção de concreto discretizada ao mesmo. Assim, utilizando-se as distâncias definidas em (132), (133), (136), (137), (140), (141), (144), (145), (161) e (162), tem-se os momentos resistentes de cálculo na direção x ($M_{x,Rd}$) e na direção y ($M_{y,Rd}$).

$$\begin{aligned}
 M_{x,Rd} = & \sum_{n_{ax}=1}^{n_{divx}} \sum_{n_{ay}=1}^{n_{divy}} [\sigma_c(n_{ax}, n_{ay}) * A_c(n_{ax}, n_{ay}) * y_c(n_{ax}, n_{ay})] + \\
 & + \sum_{j=0}^{n_{S_x}} \left\{ \left(\frac{x_3}{n_b} \right) * [\sigma_{ss}(j+1) * y_{ss}(j+1) + \sigma_{si}(j+1) * y_{si}(j+1)] \right\} + \\
 & + \sum_{k=0}^{n_{S_y}} \left\{ \left(\frac{x_3}{n_b} \right) * [\sigma_{sd}(k+1) * y_{sd}(k+1) + \sigma_{se}(k+1) * y_{se}(k+1)] \right\}
 \end{aligned} \tag{169}$$

$$\begin{aligned}
 M_{y,Rd} = & \sum_{n_{ax}=1}^{n_{divx}} \sum_{n_{ay}=1}^{n_{divy}} [\sigma_c(n_{ax}, n_{ay}) * A_c(n_{ax}, n_{ay}) * x_c(n_{ax}, n_{ay})] + \\
 & + \sum_{j=0}^{n_{S_x}} \left\{ \left(\frac{x_3}{n_b} \right) * [\sigma_{ss}(j+1) * x_{ss}(j+1) + \sigma_{si}(j+1) * x_{si}(j+1)] \right\} + \\
 & + \sum_{k=0}^{n_{S_y}} \left\{ \left(\frac{x_3}{n_b} \right) * [\sigma_{sd}(k+1) * x_{sd}(k+1) + \sigma_{se}(k+1) * x_{se}(k+1)] \right\}
 \end{aligned} \tag{170}$$

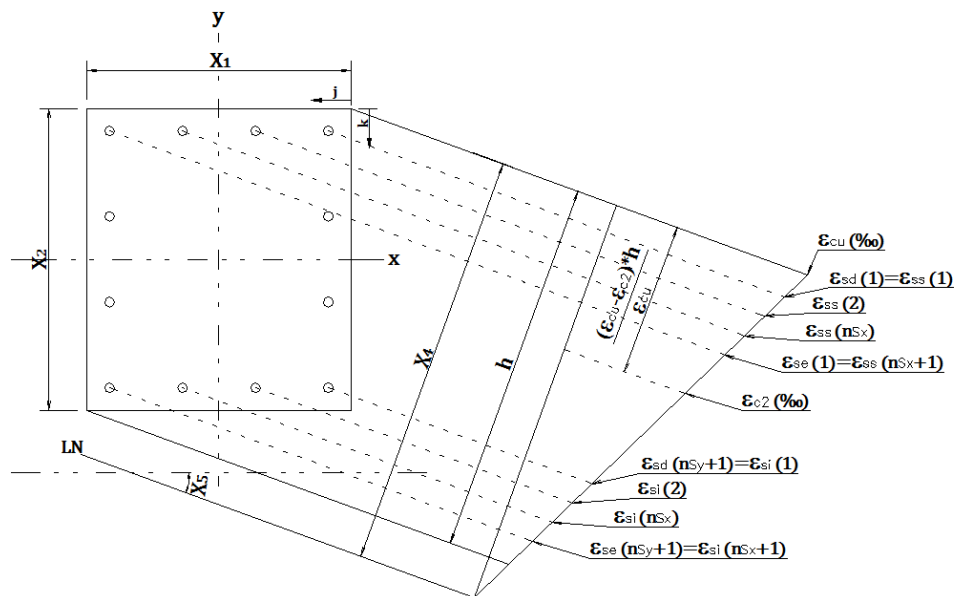
3.2.2 ESFORÇOS RESISTENTES NO DOMÍNIO 5

No domínio 5 a seção apresenta-se totalmente comprimida, isto é, a linha neutra está externa à seção transversal. Além disso, sua principal característica é a deformação ε_{c2} que ocorre na fibra situada a $(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h / \varepsilon_{cu}$ da borda superior da seção (ponto C indicado na Figura 3).

- **Cálculo das tensões nas barras de aço**

Analogamente ao dimensionamento segundo os domínios 3, 4 e 4a, mostrado no item 3.2.1, pode-se observar o diagrama de deformações das seções retangulares no domínio 5 exposto na Figura 24.

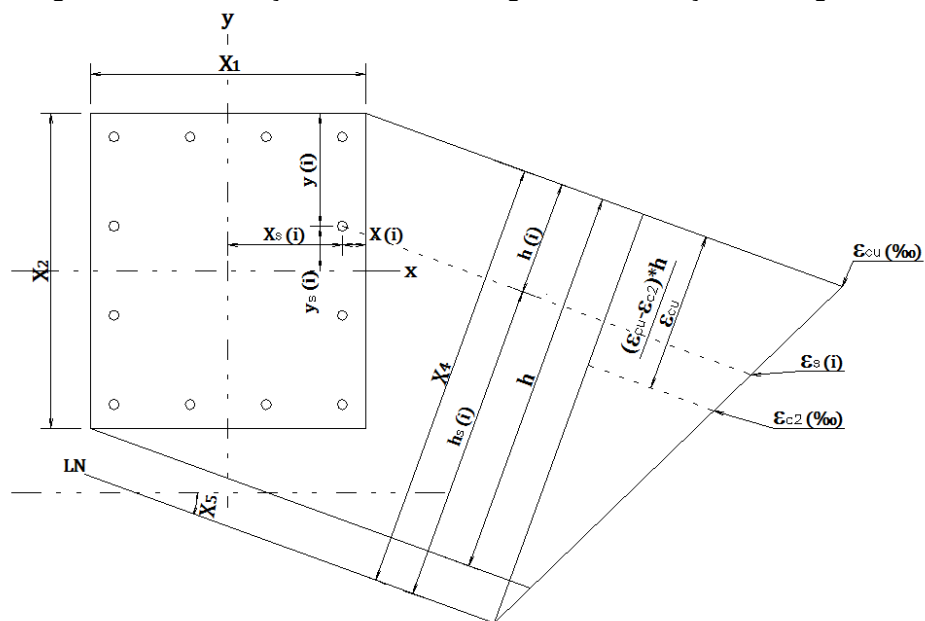
Figura 24 – Diagrama de deformações em seções retangulares no domínio 5



Fonte: Elaborada pela autora.

Assim, para calcular a deformação de cada barra de aço utiliza-se a equação (171), obtida por semelhança de triângulos na Figura 25.

Figura 25 – Diagrama de deformações em uma barra genérica em seções retangulares no domínio 5



Fonte: Elaborada pela autora.

$$\frac{\varepsilon_{c2}}{x_4 - \frac{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h}{\varepsilon_{cu}}} = \frac{\varepsilon_s(i)}{h_s(i)} \Rightarrow \varepsilon_s(i)(\%) = \frac{\varepsilon_{c2} * h_s(i) * \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} * x_4 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h} \quad (171)$$

Então, a tensão em cada barra de aço é dada por:

$$\sigma_s(i) = E_s * \varepsilon_s(i) = \frac{E_s * \varepsilon_{c2} * h_s(i) * \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} * x_4 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h} \quad (172)$$

Em que h é a medida, perpendicularmente à linha neutra, de toda a seção transversal, obtida analogamente a $h(i)$ por:

$$h = \cos(x_5) * x_2 + \sin(x_5) * x_1 \quad (173)$$

Os valores de $h_s(i)$ foram definidos em função de x_4 e $h(i)$, sendo que $h(i)$ de cada camada está descrito nas equações (146) a (149). Assim, a tensão em cada barra é dada pelas equações a seguir, em função da camada em que se encontra. Os índices k e j , assim como nos domínios 3, 4 e 4a, variam de 0 a n_{sy} e de 0 a n_{sx} , respectivamente.

$$\sigma_{sd}(k+1) = \frac{E_s * \varepsilon_{c2} * \varepsilon_{cu} * [x_4 - h_d(k+1)]}{\varepsilon_{cu} * x_4 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h} \quad (174)$$

$$\sigma_{se}(k+1) = \frac{E_s * \varepsilon_{c2} * \varepsilon_{cu} * [x_4 - h_e(k+1)]}{\varepsilon_{cu} * x_4 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h} \quad (175)$$

$$\sigma_{ss}(j+1) = \frac{E_s * \varepsilon_{c2} * \varepsilon_{cu} * [x_4 - h_s(j+1)]}{\varepsilon_{cu} * x_4 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h} \quad (176)$$

$$\sigma_{si}(j+1) = \frac{E_s * \varepsilon_{c2} * \varepsilon_{cu} * [x_4 - h_i(j+1)]}{\varepsilon_{cu} * x_4 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h} \quad (177)$$

Em se tratando do domínio 5 toda a seção se encontra comprimida. Dessa forma, o limite máximo para o valor da tensão nas barras é f_{yd} .

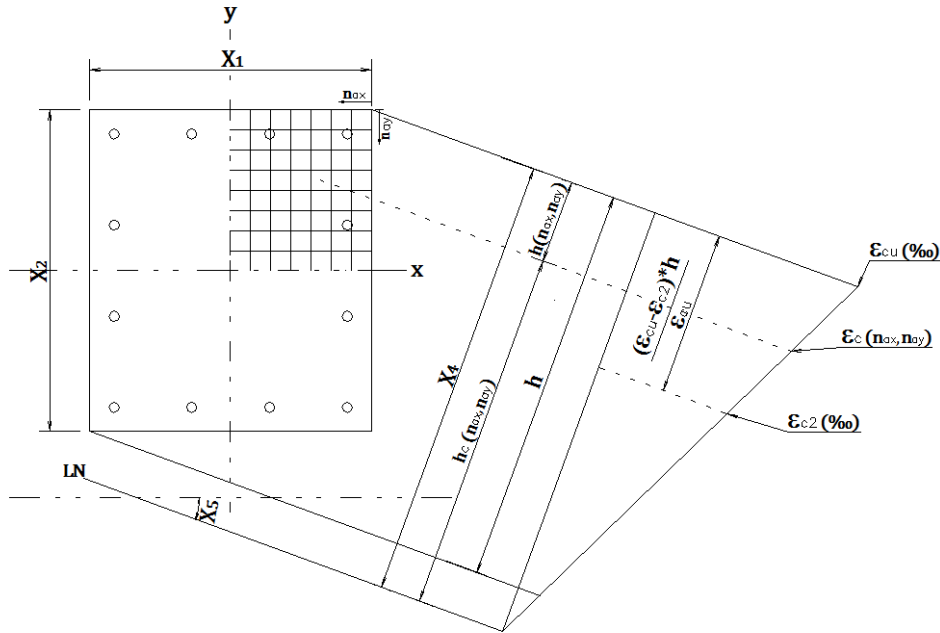
$$\sigma_s(i) \leq f_{yd} \quad (178)$$

- **Cálculo das tensões na seção de concreto**

No domínio 5, a deformação em cada elemento da seção de concreto é dada pela equação (179), definida com base na Figura 26.

$$\varepsilon_c(n_{ax}, n_{ay})(\%) = \frac{\varepsilon_{c2} * h_c(n_{ax}, n_{ay}) * \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} * x_4 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h} \quad (179)$$

Figura 26 – Diagrama de deformações no concreto em seções retangulares no domínio 5



Fonte: Elaborada pela autora.

Assim, com a expressão de $h(n_{ax}, n_{ay})$ definida na equação (163), calcula-se a deformação e a tensão resistente em cada elemento pelas equações (180) e (181).

$$\varepsilon_c(n_{ax}, n_{ay})(\%) = \frac{\varepsilon_{c2} * \varepsilon_{cu} * [x_4 - h(n_{ax}, n_{ay})]}{\varepsilon_{cu} * x_4 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h} \quad (180)$$

$$\sigma_c(n_{ax}, n_{ay}) = \alpha_c * f_{cd} * \left(1 - \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_{c2} * \varepsilon_{cu} * [x_4 - h(n_{ax}, n_{ay})]}{\varepsilon_{c2} * [\varepsilon_{cu} * x_4 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h]} \right\}^n \right) \quad (181)$$

Em que h é o calculado na equação (173).

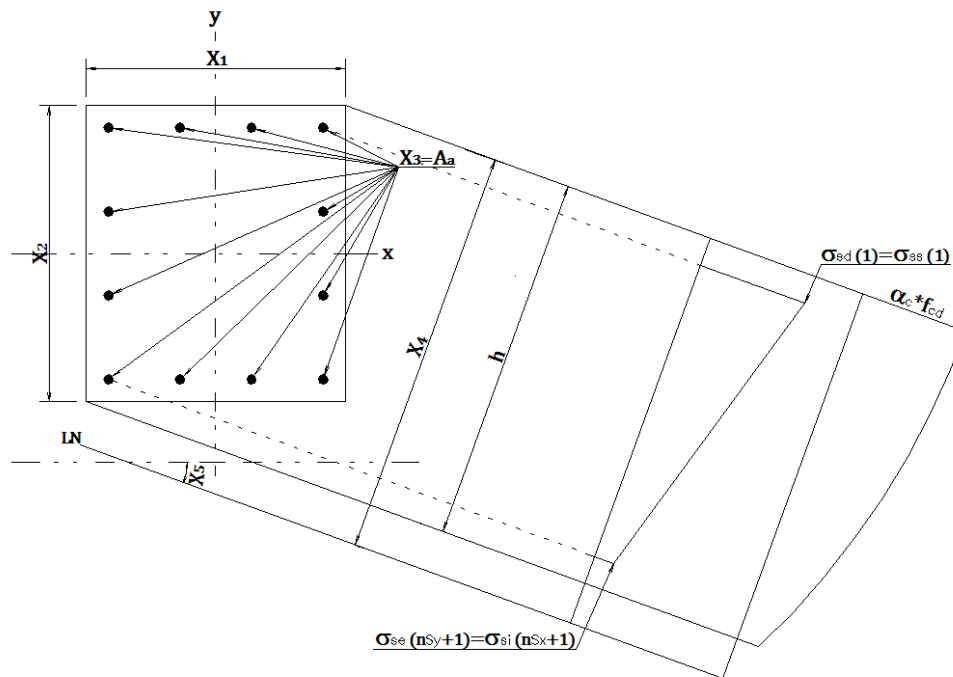
Novamente, a tensão nos elementos de concreto é limitada ao valor $\alpha_c * f_{cd}$.

$$\sigma_c(n_{ax}, n_{ay}) \leq \alpha_c * f_{cd} \quad (182)$$

- **Capacidade resistente da seção transversal**

A distribuição de tensões nos pilares retangulares no domínio 5 está mostrada na Figura 27.

Figura 27 – Distribuição de tensões nos pilares retangulares no domínio 5



Fonte: Elaborada pela autora.

Assim como em 3.2.1, a resistência total da seção é obtida somando-se as resistências das armaduras e dos elementos de concreto. Os parâmetros são os mesmos utilizados naquela seção, com exceção das tensões, que agora são as obtidas nas equações (174) a (177) e (181), deste item.

$$N_{Rd} = \sum_{n_{ax}=1}^{n_{divx}} \sum_{n_{ay}=1}^{n_{divy}} [\sigma_c(n_{ax}, n_{ay}) * A_c(n_{ax}, n_{ay})] +$$

$$+ \left(\frac{x_3}{n_b} \right) * \left\{ \sum_{k=0}^{n_{sy}} [\sigma_{sd}(k+1) + \sigma_{se}(k+1)] + \sum_{j=0}^{n_{sx}} [\sigma_{ss}(j+1) + \sigma_{si}(j+1)] \right\} \quad (183)$$

$$M_{x,Rd} = \sum_{n_{ax}=1}^{n_{divx}} \sum_{n_{ay}=1}^{n_{divy}} [\sigma_c(n_{ax}, n_{ay}) * A_c(n_{ax}, n_{ay}) * y_c(n_{ax}, n_{ay})] +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n_{sx}} \left\{ \left(\frac{x_3}{n_b} \right) * [\sigma_{ss}(j+1) * y_{ss}(j+1) + \sigma_{si}(j+1) * y_{si}(j+1)] \right\} + \quad (184)$$

$$+ \sum_{k=0}^{n_{sy}} \left\{ \left(\frac{x_3}{n_b} \right) * [\sigma_{sd}(k+1) * y_{sd}(k+1) + \sigma_{se}(k+1) * y_{se}(k+1)] \right\}$$

$$M_{y,Rd} = \sum_{n_{ax}=1}^{n_{divx}} \sum_{n_{ay}=1}^{n_{divy}} [\sigma_c(n_{ax}, n_{ay}) * A_c(n_{ax}, n_{ay}) * x_c(n_{ax}, n_{ay})] +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n_{sx}} \left\{ \left(\frac{x_3}{n_b} \right) * [\sigma_{ss}(j+1) * x_{ss}(j+1) + \sigma_{si}(j+1) * x_{si}(j+1)] \right\} + \quad (185)$$

$$+ \sum_{k=0}^{n_{sy}} \left\{ \left(\frac{x_3}{n_b} \right) * [\sigma_{sd}(k+1) * x_{sd}(k+1) + \sigma_{se}(k+1) * x_{se}(k+1)] \right\}$$

3.3 PILARES DE OUTRAS GEOMETRIAS

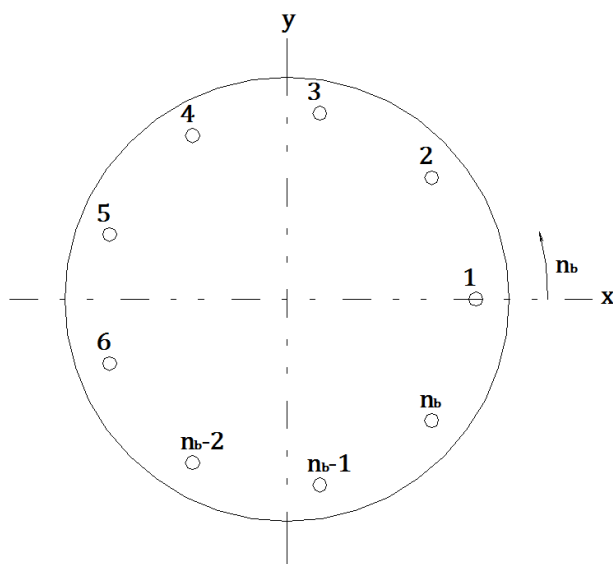
Os diagramas de deformações nos domínios 3, 4, 4a e 5 definidos para as seções retangulares são idênticos para as demais geometrias de seções, bem como a formulação para obtenção das tensões resistidas pelo aço e pela seção de concreto e da capacidade resistente da seção transversal. Dessa forma, são modificadas apenas a distribuição das barras de aço e a discretização da seção de concreto de modo a se tornarem condizentes com a geometria em estudo. Essas alterações estão contidas nos itens 3.3.1 a 3.3.3, enquanto o dimensionamento detalhado dos

pilares de seção circular, hexagonal e em “U” está apresentado nos APÊNDICES A, B e C, respectivamente.

3.3.1 PILARES CIRCULARES

Nos pilares circulares as barras são distribuídas radialmente e numeradas de 1 a n_b (número de barras na seção), contadas a partir da barra situada sobre o eixo x, à direita do eixo y, conforme mostrado na Figura 28.

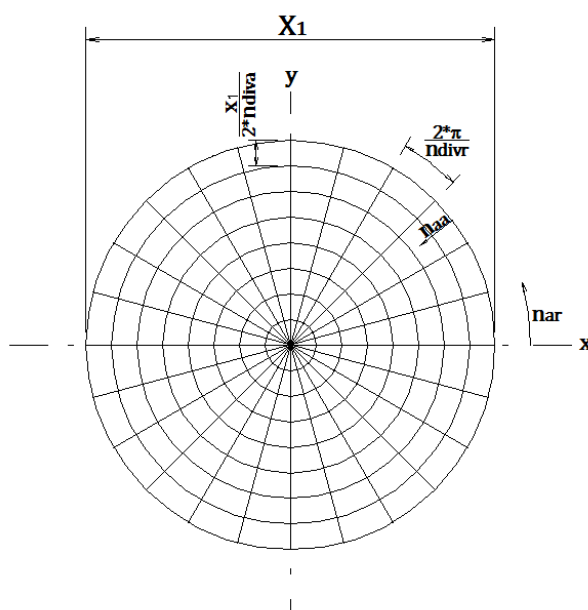
Figura 28 – Distribuição e numeração das barras de aço em seções circulares



Fonte: Elaborada pela autora.

Para o cálculo da resistência da seção de concreto, por sua vez, é necessário discretizar a seção de modo que se obtenha áreas menores, nas quais a variação de tensão possa ser desprezada. Assim, o programa computacional desenvolvido divide a seção circular axialmente em 20 círculos de igual espaçamento entre os raios e radialmente em 36 partes, formando ângulos centrais de 10° . Pode-se verificar essa divisão dos elementos na Figura 29. Cada elemento é representado por um par n_{ar}, n_{aa} (números inteiros que identificam o elemento de concreto nas direções radial e axial, respectivamente). Sendo assim, n_{ar} varia de 1 a 36 (n_{divr}) e n_{aa} varia de 1 a 20 (n_{diva}).

Figura 29 – Discretização da seção de concreto em pilares circulares

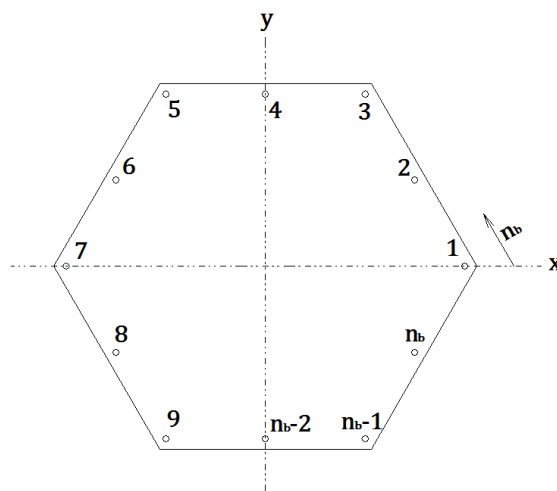


Fonte: Elaborada pela autora.

3.3.2 PILARES HEXAGONAIS

Nos pilares hexagonais as barras são distribuídas inicialmente uma em cada vértice do hexágono e, havendo necessidade, insere-se uma, ou quantas forem necessárias, em cada face. Desse modo, o número de barras total é sempre múltiplo de 6. As mesmas são numeradas de 1 a n_b , contadas a partir da barra situada sobre o eixo x, à direita do eixo y, conforme Figura 30.

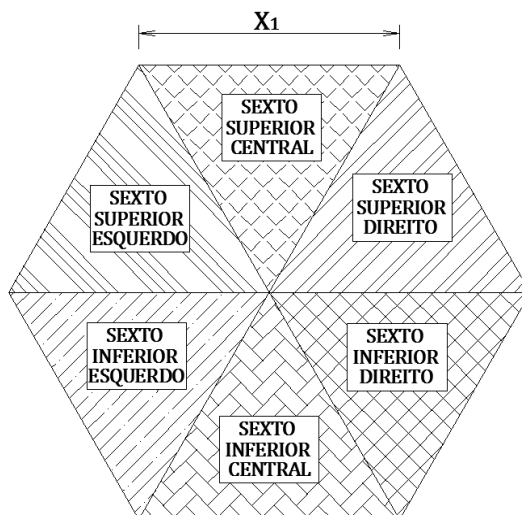
Figura 30 – Distribuição e numeração das barras de aço em seções hexagonais



Fonte: Elaborada pela autora.

É importante frisar que, para a obtenção da resistência das seções hexagonais, foi necessário dividi-las em 6 sextos (triangulares), cada qual com uma formulação específica (SOUZA; ALVES, 2017). Essa divisão pode ser vista na Figura 31.

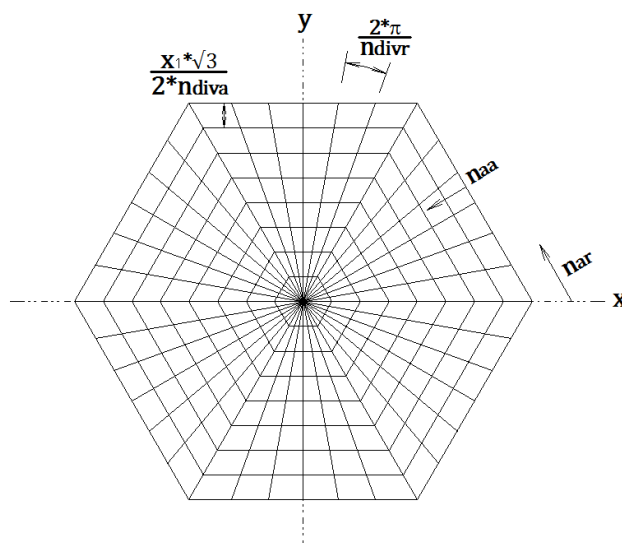
Figura 31 – Seção hexagonal dividida em sextos



Fonte: Souza e Alves (2017).

Para a obtenção da resistência da seção de concreto, a seção hexagonal foi discretizada axial e radialmente. O programa divide a seção hexagonal em 20 hexágonos de igual espaçamento entre si, gerando seções em forma de trapézios e triângulos (em sua parte mais interna), como pode ser notado na Figura 32, e radialmente em 36 partes, 6 em cada sexto, formando ângulos centrais de 10° . Dessa forma, cada elemento discretizado possui uma identificação dada por um par n_{ar}, n_{aa} em que n_{ar} varia de 1 a 36 (n_{divr}) e n_{aa} varia de 1 a 20 (n_{diva}).

Figura 32 – Discretização da seção de concreto em pilares hexagonais

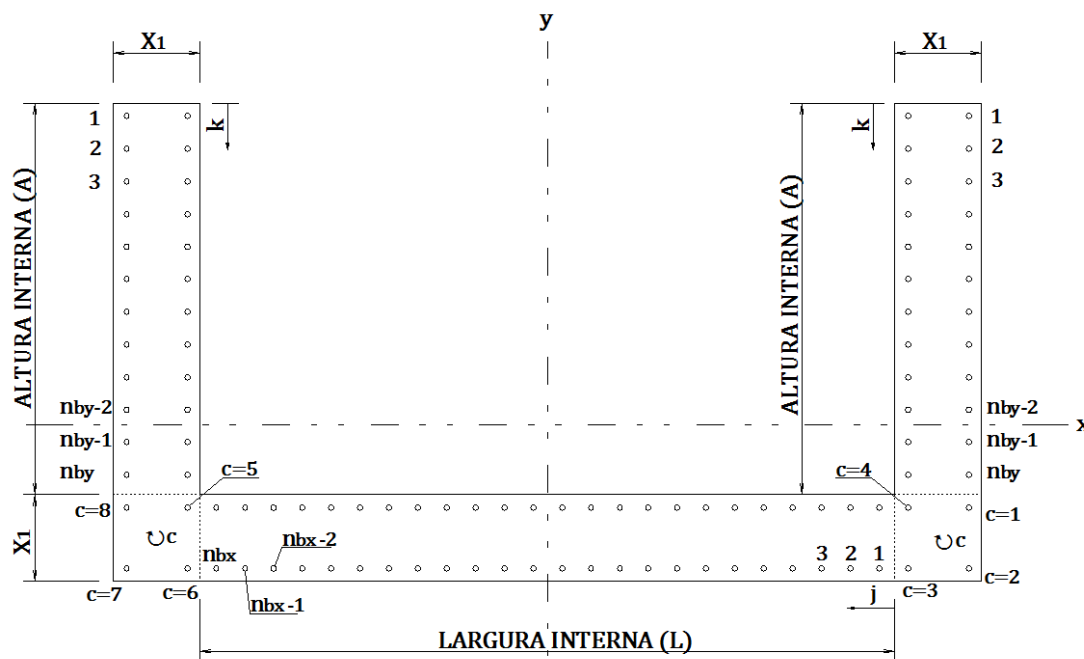


Fonte: Elaborada pela autora.

3.3.3 PILARES EM “U”

Nos pilares em “U” as barras são distribuídas ao longo da altura interna (direção vertical) e da largura interna (direção horizontal). Além disso, tem-se 8 barras, 4 em cada encontro entre as alturas e a largura. As barras distribuídas na largura (paralelas ao eixo x) foram numeradas da direita para a esquerda de 1 a n_{bx} ($j = 1$ a n_{bx}), sendo n_{bx} o número de barras em cada face da largura interna. Já as barras distribuídas na altura (direção vertical) foram numeradas de cima para baixo de 1 a n_{by} ($k = 1$ a n_{by}), sendo n_{by} o número de barras em cada face da altura interna, igual para ambas as paredes. Por sua vez, as barras localizadas nos cantos foram numeradas de 1 a 8 (n_{bc}), em sentido horário, primeiramente as do canto direito ($c = 1$ a 4) e, na sequência, as do canto esquerdo ($c = 5$ a 8). Essa numeração de barras pode ser melhor visualizada na Figura 33.

Figura 33 – Distribuição e numeração das barras de aço em seções em “U”

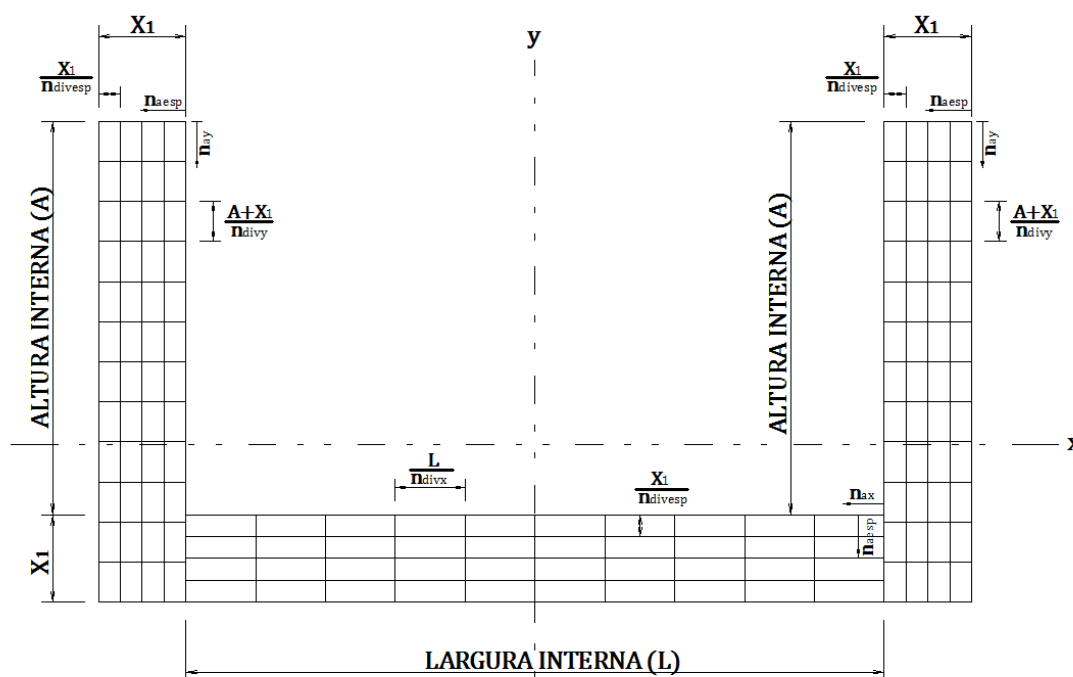


Fonte: Elaborada pela autora.

Para o cálculo da resistência da seção de concreto, o programa computacional desenvolvido divide cada uma das alturas internas da seção em “U”, acrescidas do trecho de encontro com a largura, em sua espessura (direção x) em 8 partes ($n_{divesp} = 8$) e em sua altura (direção y) em 48 partes ($n_{divy} = 48$). Assim, cada

elemento das alturas é identificado por n_{aesp} , numerado da direita para esquerda, que varia de 1 a 8, e n_{ay} contado de cima para baixo, que varia de 1 a 48. Os elementos da largura interna, por sua vez, são divididos em sua direção x em 40 partes ($n_{divx} = 40$) e em sua espessura em 8 partes ($n_{divesp} = 8$) estando representados por n_{aesp} numerado de cima para baixo, variando de 1 a 8 e n_{ax} da direita para a esquerda, com variação de 1 a 40. Pode-se verificar essa divisão dos elementos na Figura 34.

Figura 34 – Discretização da seção de concreto em pilares em “U”



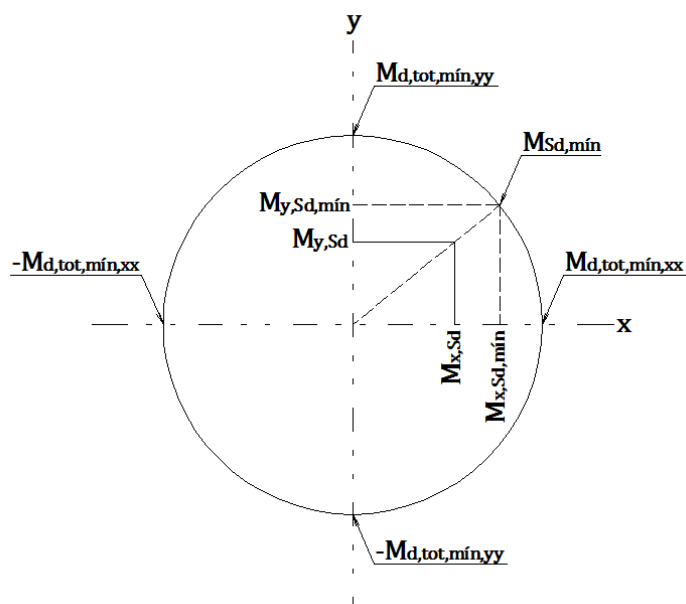
Fonte: Elaborada pela autora.

3.4 CONSIDERAÇÃO DOS MOMENTOS MÍNIMOS

Para todas as seções deve-se verificar se a envoltória mínima de 1ª ou 2ª ordem, mostradas nas Figuras 5 e 6 do item 2.3.4 está sendo atendida, ou seja, se a envoltória dos momentos resistentes engloba a dos momentos solicitantes. É importante ressaltar que, se os momentos solicitantes forem inferiores aos momentos mínimos, os últimos devem ser utilizados nos cálculos. Nesses casos o

momento mínimo correspondente pode ser obtido com base na Figura 35 e por meio das equações (191) e (192), conforme definido em Sias (2014).

Figura 35 – Consideração da envoltória dos momentos mínimos



Fonte: Sias (2014).

Nota: Figura adaptada pela autora.

Onde

$M_{y,Sd,mín}$ é o momento solicitante mínimo de cálculo atuante na direção y para que a verificação dos momentos mínimos seja atendida;

$M_{x,Sd,mín}$ é o momento solicitante mínimo de cálculo atuante na direção x para que a verificação dos momentos mínimos seja atendida;

$M_{Sd,mín}$ é a resultante dos momentos solicitantes mínimos de cálculo atuante nas direções x e y para que a verificação dos momentos mínimos seja atendida;

$M_{d,tot,mín,xx}$ é o momento solicitante mínimo de cálculo atuante na direção x em flexão composta normal; e

$M_{d,tot,mín,yy}$ é o momento solicitante mínimo de cálculo atuante na direção y em flexão composta normal.

Conforme definido pela NBR 6118:2014 e mostrado na Figura 6, da página 45 (item 2.3.4), tem-se que a envoltória de mínima com 2ª ordem é dada por:

$$\left(\frac{M_{x,Sd,mín}}{M_{d,tot,mín,xx}} \right)^2 + \left(\frac{M_{y,Sd,mín}}{M_{d,tot,mín,yy}} \right)^2 = 1 \quad (186)$$

E

$$\frac{M_{x,Sd,mín}}{M_{y,Sd,mín}} = \frac{M_{x,Sd}}{M_{y,Sd}} \Rightarrow M_{x,Sd,mín} = M_{y,Sd,mín} * \frac{M_{x,Sd}}{M_{y,Sd}} \quad (187)$$

Substituindo-se (187) em (186):

$$\left(\frac{M_{y,Sd,mín} * \frac{M_{x,Sd}}{M_{y,Sd}}}{M_{d,tot,mín,xx}} \right)^2 + \left(\frac{M_{y,Sd,mín}}{M_{d,tot,mín,yy}} \right)^2 = 1 \quad (188)$$

Isolando-se $M_{y,Sd,mín}^2$:

$$M_{y,Sd,mín}^2 * \left(\frac{M_{x,Sd}^2}{M_{y,Sd}^2 * M_{d,tot,mín,xx}^2} + \frac{1}{M_{d,tot,mín,yy}^2} \right) = 1 \quad (189)$$

$$M_{y,Sd,mín}^2 * \left(\frac{M_{x,Sd}^2 * M_{d,tot,mín,yy}^2 + M_{y,Sd}^2 * M_{d,tot,mín,xx}^2}{M_{y,Sd}^2 * M_{d,tot,mín,xx}^2 * M_{d,tot,mín,yy}^2} \right) = 1 \quad (190)$$

Da qual, obtém-se:

$$M_{y,Sd,mín} = \sqrt{\frac{M_{y,Sd}^2 * M_{d,tot,mín,xx}^2 * M_{d,tot,mín,yy}^2}{M_{x,Sd}^2 * M_{d,tot,mín,yy}^2 + M_{y,Sd}^2 * M_{d,tot,mín,xx}^2}} \quad (191)$$

E, substituindo-se (191) em (187):

$$M_{x,Sd,mín} = \sqrt{\frac{M_{y,Sd}^2 * M_{d,tot,mín,xx}^2 * M_{d,tot,mín,yy}^2}{M_{x,Sd}^2 * M_{d,tot,mín,yy}^2 + M_{y,Sd}^2 * M_{d,tot,mín,xx}^2}} * \frac{M_{x,Sd}}{M_{y,Sd}} \quad (192)$$

3.5 O PROGRAMA

O programa computacional de dimensionamento otimizado de pilares de concreto armado foi desenvolvido na plataforma *Matlab*. Para a otimização utilizou-se o Método dos Pontos Interiores, existente na biblioteca de recursos do *software*, por meio da função *fmincon*. O dimensionamento é realizado com base nas definições da NBR 6118:2014 citadas no item 2.3 e um fluxograma de funcionamento do mesmo pode ser visto no APÊNDICE D.

A interface gráfica inicial do programa computacional está apresentada na Figura 36. Nela, o primeiro tópico a ser definido pelo usuário é a geometria da seção transversal, que pode ser retangular, circular, hexagonal ou em “U”. De acordo com a geometria selecionada, a interface é modificada, ficam visíveis os retângulos referentes às dimensões e uma imagem da seção. As opções de otimização também são atualizadas. As geometrias retangular e em “U” possuem ainda a opção de dimensionamento por faixas para os casos de pilar-parede. Com relação aos esforços solicitantes, é importante frisar que o usuário deve inserir os valores característicos.

Figura 36 – Interface gráfica inicial do programa

Dados de Entrada

Seção transversal
Selecione

Geometria
Comprimento Equivalente (l_e) [cm]
 d^* [cm] (cobr. + estribo + 0,5diam.)

Esforços solicitantes (valores característicos)
Nsk [kN]
Mxask [kN.m] Myask [kN.m]
Mxbask [kN.m] Mybsk [kN.m]

Obs.:
- Nsk positivo para compressão.
- Mxask e Myask são os maiores valores absolutos do momento ao longo do pilar biapoado.
- Mxbask e Mybsk são os menores valores absolutos do momento ao longo do pilar biapoado.

Materiais
CLASSE DE AGRESSIVIDADE
CONCRETO - f_{ck} [MPa]
500 AÇO - f_{yk} [MPa]

Preços dos Materiais

315.00	CONCRETO C20 [R\$/m³]	397.98	CONCRETO C45 [R\$/m³]	707.72	CONCRETO C70 [R\$/m³]
326.57	CONCRETO C25 [R\$/m³]	464.56	CONCRETO C50 [R\$/m³]	768.99	CONCRETO C75 [R\$/m³]
336.22	CONCRETO C30 [R\$/m³]	524.86	CONCRETO C55 [R\$/m³]	830.26	CONCRETO C80 [R\$/m³]
346.84	CONCRETO C35 [R\$/m³]	585.17	CONCRETO C60 [R\$/m³]	891.53	CONCRETO C85 [R\$/m³]
358.42	CONCRETO C40 [R\$/m³]	646.44	CONCRETO C65 [R\$/m³]	952.81	CONCRETO C90 [R\$/m³]
6.00	AÇO [R\$/kg]	50.00	FORMA [R\$/m²]		

Otimização
☐ Otimizar f_{ck}

CALCULAR
LIMPAR

Fonte: Elaborada pela autora.

Os dados de entrada comuns a todas as geometrias são: o comprimento equivalente (l_e), definido conforme equações (5) e (6) do item 2.3.3; a distância do eixo das barras longitudinais à face externa do pilar (d' , dada pela soma do cobrimento adotado, com o diâmetro do estribo utilizado e com metade do diâmetro da barra de armação longitudinal); a classe de agressividade do ambiente em que será inserida a edificação; as características dos materiais; e os esforços solicitantes característicos.

Para a definição dos custos dos materiais foi solicitado orçamento a várias empresas, em toda a região sudeste. Os valores fornecidos foram comparados com os da tabela SINAPI, da Caixa Econômica Federal, em julho de 2017, apresentando-se muito consistentes. Por outro lado, não foram obtidos, junto às empresas, os custos para os concretos com f_{ck} acima de 50 MPa, justificando, assim, a utilização, para o concreto, dos valores encontrados na tabela SINAPI, referente à cidade de Vitória. Vale ressaltar que alguns valores de f_{ck} não possuíam preço na tabela SINAPI, portanto, os mesmos foram obtidos por interpolação linear entre os custos existentes.

Sabe-se que, no mercado, o custo do aço varia de acordo com o diâmetro das barras, entretanto, esse fato foi desprezado nesse estudo, no qual foi adotado um valor por quilo. Os custos considerados para a resolução dos exemplos apresentados no item 4 podem ser vistos na Figura 36. É importante salientar que é permitido ao usuário modificar esses dados e que, a definição precisa dos preços dos materiais, influencia direta e fortemente nos resultados fornecidos pelo programa. Dessa forma, para a utilização do mesmo, os custos devem ser levantados de maneira adequada para não se obter resultados distorcidos.

É permitido ao usuário limpar, a qualquer momento, todos os dados, obtendo novamente a página mostrada na Figura 36. Existe também uma guia “ajuda” que descreve algumas informações importantes para o correto funcionamento do programa.

Para as seções retangulares devem ser inseridos também os esforços solicitantes característicos devidos à combinação quase permanente, pois os mesmos são necessários para o cálculo do efeito da fluência nos pilares esbeltos. No entanto,

caso o comprimento do pilar seja pequeno, ou seja, se o usuário souber que não se trata de um pilar esbelto, pode-se adotar valores nulos para esses esforços sem que haja prejuízo ao dimensionamento. A página referente às seções retangulares pode ser vista na Figura 37.

Figura 37 – Interface gráfica para seções retangulares

Dados de Entrada

Seção transversal: Retangular

Geometria

Comprimento Equivalente (le) [cm]:
 d' [cm] (cobr. + estribo + 0,5diam.):
 Largura [cm]:
 Altura [cm]:

Materiais

CLASSE DE AGRESSIVIDADE:
 CONCRETO - fck [MPa]:
 AÇO - fyk [MPa]:

Esforços solicitantes (valores característicos)

Nsk [kN], Mxask [kN.m], Mxbask [kN.m], Mxsg [kN.m], Nsg [kN], Myask [kN.m], Mybsk [kN.m], Mysg [kN.m]

Obs.:

- Nsk positivo para compressão.
- Mxask e Myask são os maiores valores absolutos do momento ao longo do pilar biapoiado.
- Mxbask e Mybsk são os menores valores absolutos do momento ao longo do pilar biapoiado.
- Nsg, Mxsg e Mysg são os esforços solicitantes devidos à combinação quase permanente.

Preços dos Materiais

315.00	CONCRETO C20 [R\$/m³]	397.98	CONCRETO C45 [R\$/m³]	707.72	CONCRETO C70 [R\$/m³]
326.57	CONCRETO C25 [R\$/m³]	464.56	CONCRETO C50 [R\$/m³]	768.99	CONCRETO C75 [R\$/m³]
336.22	CONCRETO C30 [R\$/m³]	524.86	CONCRETO C55 [R\$/m³]	830.26	CONCRETO C80 [R\$/m³]
346.84	CONCRETO C35 [R\$/m³]	585.17	CONCRETO C60 [R\$/m³]	891.53	CONCRETO C85 [R\$/m³]
358.42	CONCRETO C40 [R\$/m³]	646.44	CONCRETO C65 [R\$/m³]	952.81	CONCRETO C90 [R\$/m³]
6.00	AÇO [R\$/kg]	50.00	FORMA [R\$/m²]		

Otimização

☐ Otimizar fck
☐ Otimizar Largura
☐ Otimizar Altura

CALCULAR
LIMPAR

Fonte: Elaborada pela autora.

Com todos esses valores, basta definir quais parâmetros serão otimizados. Ao se clicar no botão “calcular”, o programa verifica inicialmente se há adequação às restrições definidas pela NBR 6118:2014 e pelo programa. Em caso de inadequação, surgem avisos na tela que informam ao usuário o motivo do erro. Por outro lado, se tudo estiver correto, o programa realiza o dimensionamento otimizado da seção e mostra, então, uma nova página com os dados iniciais e os resultados obtidos. São fornecidas as dimensões da seção, o valor da resistência característica do concreto à compressão, o custo total por metro de pilar, o número de barras e a área de aço totais. Nesta tela, pode-se observar, ainda, as restrições ativas, ou seja, as determinantes para o resultado. No caso de pilares retangulares e em “U”, apresenta-se, também, o número de barras em cada direção, na forma “número de faces *versus* número de barras por face”, excluindo-se as barras dos cantos.

Vale ressaltar que, na página de resultados, os esforços solicitantes são os de cálculo, obtidos pela multiplicação dos esforços característicos, informados pelo

usuário, por 1,4 (γ_f – coeficiente de ponderação das ações), conforme definido pela NBR 6118:2014 em sua tabela 11.1 para as combinações de ações normais, tanto permanentes quanto variáveis gerais. Os momentos solicitantes são os momentos finais de cálculo, incluindo a verificação dos momentos mínimos de 1ª e 2ª ordem. Além disso, caso alguma dimensão da seção seja inferior a 19 cm, os esforços estão também majorados pelo coeficiente γ_n , definido no item 2.3.3. A página de resultados para seções retangulares está mostrada na Figura 38.

Figura 38 – Página de resultados para seções retangulares

Fonte: Elaborada pela autora.

O programa define iterativamente o valor do f_{ck} mais econômico, porém está liberado para pesquisar valores no intervalo contínuo de 20 a 90 MPa, conforme explicado no item 1.3. Assim, a partir do f_{ck} obtido, os cálculos são refeitos para os valores comerciais imediatamente superior e inferior ao encontrado, definindo-se a solução viável, ou seja, a que apresenta valores referentes à seção otimizada para o f_{ck} disponível no mercado.

Ainda na página de resultados, o usuário tem a opção de retornar à página inicial, clicando em “voltar”, ou sair e fechar todo o *Matlab*, ao clicar no botão “sair do *Matlab*”. A guia “ajuda” explicita as variáveis apresentadas na página de resultados e apresenta como são consideradas as restrições ativas para as verificações realizadas pelo programa.

4. APLICAÇÕES E RESULTADOS

Foram testados, no *software* desenvolvido, alguns exemplos com resultados conhecidos na literatura, a fim de verificar a eficácia do programa e o efeito das modificações nele inseridas. Dessa forma, os 2 primeiros exemplos têm por objetivo validar o *software* com a literatura existente e com o trabalho de Sias (2014), enquanto os demais foram validados com o *software* comercial TQS (V19.11).

Em geral, os exemplos foram calculados no programa por três vezes. A primeira com todos os dados da seção definidos (seção original), ou seja, apenas com a área de aço otimizada; a segunda com as dimensões (ou pelo menos uma delas) liberadas para serem otimizadas; e a terceira considerando também o f_{ck} para a otimização. Em alguns casos específicos foi interessante realizar outro dimensionamento, conforme descrito e justificado no exemplo. O comprimento efetivo considerado foi de 3,0 m, valor médio para pé-direito de edifícios, exceto para o exemplo 8 referente ao pilar esbelto, no qual o dimensionamento foi realizado também para o comprimento de 6,0 m.

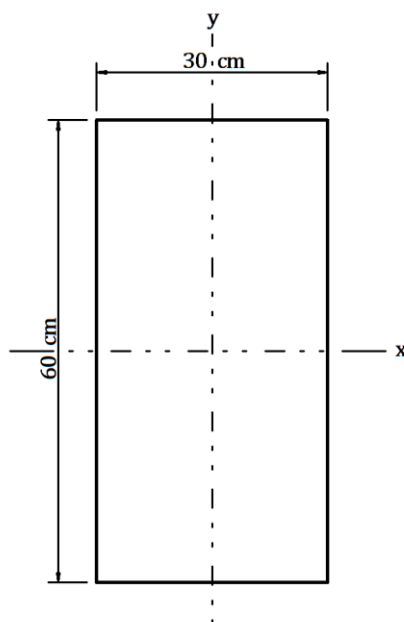
Os exemplos 6 e 7, que se referem aos pilares-parede, foram dimensionados por dois métodos distintos, o tradicional e o por faixas definido pela NBR 6118:2014. Desse modo, não foram otimizadas nem as dimensões nem o f_{ck} , uma vez que o dimensionamento por faixas exige repetidas iterações e cálculos mais refinados. Assim, a otimização praticamente inviabilizaria a obtenção de resultados devido ao elevado tempo gasto no processamento.

4.1 EXEMPLO 1 – CARVALHO E PINHEIRO (2009)

O primeiro exemplo analisado foi retirado do capítulo 4 de Carvalho e Pinheiro (2009), exemplo 4.11. Trata-se de uma seção retangular, submetida à força normal de cálculo $N_{sd} = 1550$ kN, com excentricidades totais $e_x = 7,5$ cm e $e_y = 20$ cm. O f_{ck} adotado foi de 20 MPa, aço CA-50, e a distância da borda da seção ao eixo das

barras de armação (d') de 3 cm. A seção original definida pelos autores possuía 30 cm de largura e 60 cm de altura e está representada na Figura 39.

Figura 39 – Seção original do exemplo 1



Fonte: Elaborada pela autora.

Os esforços solicitantes característicos na seção são:

$$N_{Sk} = N_{sd}/\gamma_f = 1550/1,4 = 1107,14 \text{ kN} \quad (193)$$

$$M_{x,Sk} = N_{Sk} * e_y = 1107,14 * 0,20 = 221,43 \text{ kN.m} \quad (194)$$

$$M_{y,Sk} = N_{Sk} * e_x = 1107,14 * 0,075 = 83,03 \text{ kN.m} \quad (195)$$

Os autores dimensionaram a seção por meio de ábacos. Na primeira tentativa obtiveram área de aço de 48,5 cm² e, após fazer um rearranjo das barras longitudinais, a segunda tentativa forneceu uma área de aço de 39,6 cm².

A Tabela 4 apresenta os resultados obtidos tanto por Carvalho e Pinheiro (2009), como por Sias (2014) e pelo *software* desenvolvido nesta dissertação.

Tabela 4 – Resultados obtidos para o exemplo 1

AUTOR	ANÁLISE	B (cm)	H (cm)	As (cm ²)	f_{ck} (MPa)
Carvalho e Pinheiro (2009)	Seção original	30,00	60,00	48,50	20
	Segunda tentativa	30,00	60,00	39,60	20
Sias (2014)	Seção original	30,00	60,00	40,30	20
	Dimensões otimizadas	40,77	70,72	11,53	20
	Dimensões e f_{ck} otimizados	31,68	58,61	7,43	45
Esta dissertação	Seção original	30,00	60,00	40,30	20
	Dimensões otimizadas	40,77	70,72	11,53	20
	Dimensões e f_{ck} otimizados	31,68	58,61	7,43	45

A partir da análise da Tabela 4, pode-se observar que, mantendo-se a seção original, a área de aço obtida pelos *softwares* foi muito próxima da definida pelos autores em sua segunda tentativa, a diferença foi inferior a 2%. Com apenas as dimensões liberadas para a otimização, os programas computacionais aumentaram a área de concreto da seção transversal e reduziram a área de aço, utilizando, inclusive, a área de aço mínima determinada pela norma de dimensionamento ($0,4\% * A_c$), tratando-se, assim, de uma restrição ativa.

Notou-se também que, para os dois primeiros dimensionamentos realizados pelos *softwares*, todos os esforços solicitantes estavam totalmente equilibrados com os esforços resistidos pela seção encontrada, ou seja, tanto o esforço normal quanto os momentos em torno dos eixos x e y, foram restrições ativas no problema. Dessa

forma, conclui-se que a seção está com 100% de aproveitamento em relação à capacidade resistente.

Por sua vez, com o acréscimo do f_{ck} liberado para a otimização, percebe-se que há uma redução tanto na seção transversal de concreto, em virtude do aumento do valor do f_{ck} , como na área de aço necessária, entretanto esta última permaneceu sendo a mínima para a seção adotada. Além disso, as dimensões da seção ótima obtida pelos *softwares* foram muito próximas das da seção original definida pelos autores, porém, com uma área de aço muito menor, uma vez que foi utilizado um valor maior para o f_{ck} . Nesse caso, apenas os momentos foram as restrições ativas determinantes no dimensionamento, enquanto, para o esforço normal, foi aproveitada apenas 66% da capacidade resistente da seção transversal.

Nota-se ainda que os resultados aqui obtidos e os de Sias (2014) foram idênticos, pois para valores de f_{ck} inferiores a 50 MPa não houve alteração na formulação, apenas na definição do ponto inicial.

O custo de cada seção está definido na Tabela 5, a qual apresenta na coluna “diferença”, a diferença percentual do custo total da seção em comparação com o da segunda tentativa definida pelos autores Carvalho e Pinheiro (2009).

Tabela 5 – Comparação dos custos obtidos para o exemplo 1

AUTOR	ANÁLISE	Consumo concreto (m³/m)	Consumo aço (kg/m)	Consumo formas (m²/m)	Custo total (R\$/m)	Diferença (%)
Carvalho e Pinheiro (2009)	Seção original	0,18	38,07	1,80	375,14	13
	Segunda tentativa	0,18	31,09	1,80	333,22	0
Sias (2014)	Seção original	0,18	31,63	1,80	336,50	1
	Dimensões otimizadas	0,29	9,05	2,23	256,63	-23
	Dimensões e f_{ck} otimizados	0,19	5,83	1,81	199,18	-40
Esta dissertação	Seção original	0,18	31,63	1,80	336,50	1
	Dimensões otimizadas	0,29	9,05	2,23	256,63	-23
	Dimensões e f_{ck} otimizados	0,19	5,83	1,81	199,18	-40

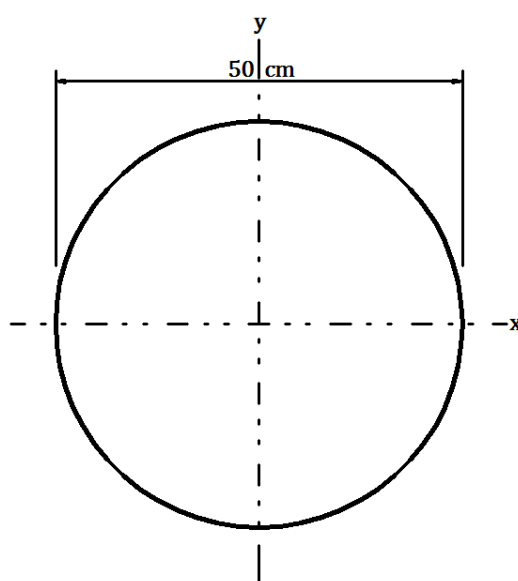
Em relação ao custo das seções, pode-se notar que o valor obtido pelos autores em sua segunda tentativa ficou muito próximo do fornecido pelos *softwares* para a mesma seção, uma vez que a diferença na área de aço encontrada foi pequena. Entretanto, apenas com a otimização das dimensões, passou-se a ter uma redução de 23% em relação ao menor valor encontrado pelos autores, e com a seção e o f_{ck} otimizados a redução alcançou 40%.

Percebe-se ainda que com a otimização dos parâmetros, a solução encontrada pelos *softwares* tendeu para a redução no consumo de aço, ou seja, para reduzir o custo, nesse caso, foi interessante substituir o aço, e o custo por ele implicado, pelo aumento do consumo de concreto e formas ou simplesmente pelo aumento do gasto com o f_{ck} mais elevado, que possibilita redução de consumo para os 3 materiais.

4.2 EXEMPLO 2 – BORGES (2014)

Este exemplo trata de um pilar circular com 50 cm de diâmetro, esforço normal característico de 600 kN, momento característico em torno do eixo x de 150 kN.m, $f_{ck} = 25$ MPa e $d' = 2,5$ cm. O autor encontrou em seus cálculos $13,55 \text{ cm}^2$ como área de aço necessária para essa seção. A seção original encontra-se representada na Figura 40.

Figura 40 – Seção original do exemplo 2



Fonte: Elaborada pela autora.

Os resultados obtidos por Borges (2014) e pelos *softwares* podem ser vistos na Tabela 6.

Tabela 6 – Resultados obtidos para o exemplo 2

AUTOR	ANÁLISE	ϕ (cm)	As (cm ²)	f_{ck} (MPa)
Borges (2014)	Seção original	50,00	13,55	25
Sias (2014)	Seção original	50,00	10,51	25
	Diâmetro otimizado	51,24	8,25	25
	Diâmetro e f_{ck} otimizados	43,70	6,00	45
Esta dissertação	Seção original	50,00	10,51	25
	Diâmetro otimizado	51,24	8,25	25
	Diâmetro e f_{ck} otimizados	43,73	6,01	45

Este exemplo foi utilizado para validar as implementações referentes aos pilares circulares. Pela análise dos resultados para a seção original, tem-se que a área de aço obtida pelos *softwares* foi um pouco menor que a encontrada por Borges (2014). Esta diferença deu-se, possivelmente, devido à forma de discretização da seção efetuada por cada autor. Borges (2014) dividiu a seção em retângulos, enquanto nos *softwares* a discretização foi feita nos sentidos axial e radial da seção, formando, assim, setores de coroa circular, conforme mostrado no item 3.3.1.

Em seguida, com o diâmetro liberado para a otimização, o mesmo aumentou um pouco enquanto a área de aço diminuiu, e, com o diâmetro e o f_{ck} otimizados tanto a área de aço quanto a área de concreto diminuiram devido ao aumento do f_{ck} . Nota-se, também, que os *softwares* forneceram resultados muito próximos, porém não exatamente iguais uma vez que o ponto inicial foi modificado no presente estudo.

Observou-se, ainda, que a restrição que governou os três dimensionamentos foi a resistência da seção ao momento em torno do eixo x. Junto a ela, tem-se a área de aço, que foi uma restrição ativa, já que correspondeu à mínima exigida pela norma,

tanto no segundo dimensionamento – em que o diâmetro estava liberado para a otimização – quanto no terceiro – com o diâmetro e o f_{ck} otimizados.

Uma comparação dos custos de cada solução pode ser verificada na Tabela 7. Nesta, a coluna “diferença” refere-se à comparação entre os custos de cada dimensionamento com o custo total da seção original encontrado por Borges (2014).

Tabela 7 – Comparação dos custos obtidos para o exemplo 2

AUTOR	ANÁLISE	Consumo concreto (m³/m)	Consumo aço (kg/m)	Consumo formas (m²/m)	Custo total (R\$/m)	Diferença (%)
Borges (2014)	Seção original	0,20	10,64	1,57	206,48	0
Sias (2014)	Seção original	0,20	8,25	1,57	192,16	-7
	Diâmetro otimizado	0,21	6,47	1,61	186,67	-10
	Diâmetro e f_{ck} otimizados	0,15	4,71	1,37	156,62	-24
Esta dissertação	Seção original	0,20	8,25	1,57	192,16	-7
	Diâmetro otimizado	0,21	6,48	1,61	186,67	-10
	Diâmetro e f_{ck} otimizados	0,15	4,72	1,37	156,75	-24

A partir da análise dos custos, nota-se que, mesmo para a seção original, o dimensionamento efetuado pelos *softwares* ficou mais econômico, uma vez que o consumo de aço foi ligeiramente inferior ao indicado pelo autor. Percebe-se também que a partir da liberação dos parâmetros a serem otimizados, os resultados

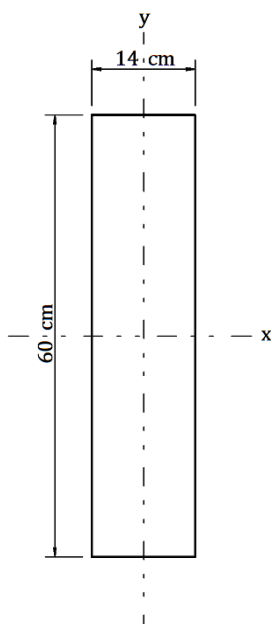
melhoraram, chegando a atingir 24% de redução no custo total em relação à seção definida por Borges (2014).

Assim como no exemplo 1, a partir da otimização das variáveis, o consumo de aço foi reduzido, por meio da adoção da área mínima exigida pela NBR 6118:2014, para a obtenção das seções mais econômicas. E, com a otimização do f_{ck} , todos os consumos foram reduzidos, possibilitando economia ainda superior à obtida com a otimização do diâmetro da seção.

4.3 EXEMPLO 3 – PILAR COM DIMENSÃO INFERIOR A 19 cm

Este item visa simular uma imposição arquitetônica de se embutir o pilar em alvenaria, logo, que uma das dimensões seja a mínima permitida pela norma: 14 cm. Para tanto, foi definido como seção original, um pilar retangular com 14 cm de largura e 60 cm de altura, $d' = 3$ cm, f_{ck} de 30 MPa e aço CA-50 submetido a um esforço normal característico de 857,14 kN, que corresponde a 1500 kN para o esforço de cálculo, considerando-se o coeficiente adicional γ_n utilizado para pilares com dimensões inferiores a 19 cm. A seção original pode ser vista na Figura 41.

Figura 41 – Seção original do exemplo 3



Fonte: Elaborada pela autora.

Os resultados encontrados pelo TQS e pelo *software* desenvolvido podem ser vistos na Tabela 8. Neste exemplo, optou-se por otimizar separadamente as dimensões da seção para, assim, validar e observar os resultados gerados pelo programa para pilares com dimensão inferior a 19 cm.

Tabela 8 – Resultados obtidos para o exemplo 3

Software	ANÁLISE	B (cm)	H (cm)	As (cm²)	f_{ck} (MPa)
TQS	Seção original	14,00	60,00	27,60	30
Software proposto	Seção original	14,00	60,00	26,59	30
	Altura otimizada	14,00	107,57	7,85	30
	Largura otimizada	17,38	60,00	4,71	30
	Altura e f_{ck} otimizados	14,00	67,30	6,28	50

Ao se comparar os resultados obtidos para a seção original pelos dois programas tem-se que a diferença encontrada foi pequena e se deve, provavelmente, à distribuição das barras na seção transversal. Com a otimização de apenas uma das dimensões da seção, a mesma tornou-se maior para que a área de aço pudesse ser consideravelmente reduzida. Por fim, com a liberação da altura e do f_{ck} para a otimização, a altura ficou um pouco maior que a definida originalmente e a área de aço foi reduzida devido à utilização do f_{ck} de 50 MPa.

Observou-se também que, em todos os dimensionamentos realizados, as verificações dos três esforços foram restrições ativas, mostrando assim que a otimização realizada possibilitou um aproveitamento de 100% da capacidade resistente da seção transversal.

Os custos obtidos para essas seções estão mostrados na Tabela 9. A coluna “diferença” refere-se à comparação entre os custos de cada análise com o custo total da seção original definida pelo TQS.

Tabela 9 – Comparação dos custos obtidos para o exemplo 3

Software	ANÁLISE	Consumo concreto (m³/m)	Consumo aço (kg/m)	Consumo formas (m²/m)	Custo total (R\$/m)	Diferença (%)
TQS	Seção original	0,08	21,67	1,48	232,24	0
Software proposto	Seção original	0,08	20,87	1,48	227,50	-2
	Altura otimizada	0,15	6,16	2,43	209,20	-10
	Largura otimizada	0,10	3,70	1,55	134,63	-42
	Altura e f_{ck} otimizados	0,09	4,93	1,63	157,67	-33

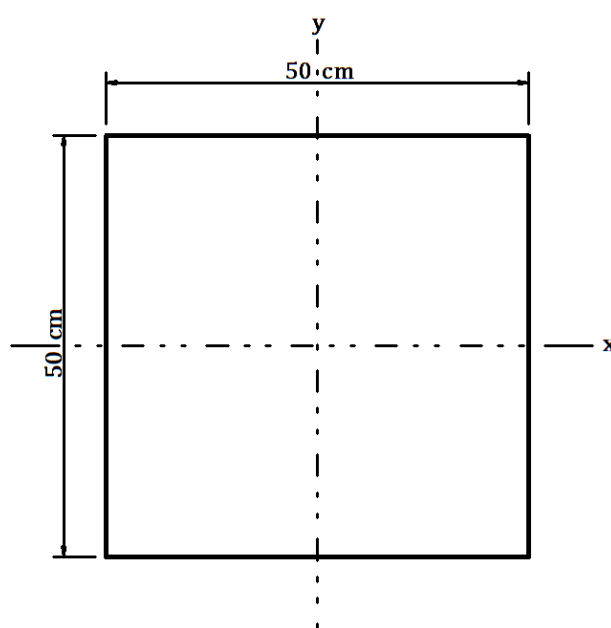
Após a análise dos custos do exemplo 3, nota-se que, para a seção original definida e o f_{ck} de 30 MPa, a diferença obtida para o custo da seção foi muito pequena, em torno de 2%, quando comparada com o TQS. Com a otimização da altura obteve-se aumento do consumo de concreto e formas e redução no consumo de aço, gerando um custo total 10% inferior. A otimização da altura e do f_{ck} possibilitou a redução do consumo de aço e o aumento do consumo de concreto e formas em virtude do aumento da resistência característica do concreto, chegando a uma redução de 33% no custo total da seção ao considerar f_{ck} de 50 MPa.

Com a otimização da largura, o esforço solicitante normal de cálculo deixou de ser 1500 kN (pois o coeficiente adicional varia em função da dimensão inferior a 19 cm), o que motivou a maior redução no custo total da seção (42%). Lembra-se, ainda, que os momentos mínimos solicitantes de cálculo são obtidos a partir do esforço normal, logo, também foram inferiores aos da seção inicial. A consideração desta dimensão otimizada teve como único objetivo mostrar que o programa é capaz de encontrar valores inferiores a 19 cm para as dimensões da seção.

4.4 EXEMPLO 4 – f_{ck} SUPERIOR A 50 MPa

Este exemplo possui um pilar com carga elevada para verificar a utilização dos valores de f_{ck} acima de 50 MPa, inseridos no programa computacional por este trabalho. Dessa forma, a seção original, mostrada na Figura 42, é uma seção quadrada com 50 cm de lado, f_{ck} de 60 MPa, $d' = 3$ cm, aço CA-50 e esforço normal característico de 7142,86 kN, correspondente a N_{sd} de 10000 kN.

Figura 42 – Seção original do exemplo 4



Fonte: Elaborada pela autora.

O programa desenvolvido encontrou resultado próximo ao do *software* comercial TQS, conforme mostrado na Tabela 10. Neste exemplo, optou-se por verificar também o resultado fornecido pelo programa proposto com apenas o f_{ck} liberado para a otimização, além das 3 análises (seção original, dimensões otimizadas e dimensões e f_{ck} otimizados) realizadas em todos os exemplos.

Tabela 10 – Resultados obtidos para o exemplo 4

Software	ANÁLISE	B (cm)	H (cm)	As (cm²)	f_{ck} (MPa)
TQS	Seção original	50,00	50,00	77,50	60
Software proposto	Seção original	50,00	50,00	79,61	60
	f_{ck} otimizado	50,00	50,00	53,36	90
	Dimensões otimizadas	55,55	55,55	34,50	60
	Dimensões e f_{ck} otimizados	60,23	60,23	34,50	45

A partir da análise da Tabela 10, pode-se notar que a alteração dos parâmetros relativos aos valores de f_{ck} superiores a 50 MPa foi bem sucedida, uma vez que os resultados encontrados para o dimensionamento de seções com esses valores de resistência mostraram-se consistentes. A área de aço encontrada pelo TQS foi inferior à do programa desenvolvido, pois o TQS utiliza em seus cálculos dos esforços de segunda ordem o método do pilar-padrão acoplado a diagramas M, N, $1/r$, que é um método mais preciso que o método do pilar-padrão com curvatura aproximada utilizado neste trabalho. No entanto, esta diferença mostra que o *software* está até um pouco conservador, o que aumenta a confiabilidade nos resultados obtidos pelos dimensionamentos otimizados por ele realizados.

Com apenas o f_{ck} liberado para a otimização, como já era esperado devido ao esforço solicitante definido, o f_{ck} obtido foi superior ao da seção original. Este acréscimo de resistência do concreto possibilitou uma redução da área de aço. A otimização apenas das dimensões provocou um aumento da área de concreto em prol da redução da área de aço. Com as dimensões e o f_{ck} otimizados, a área de aço obtida foi a mesma que a anterior, porém as dimensões encontradas foram maiores e o f_{ck} menor. Observa-se, ainda, que, a otimização das dimensões encontrou nos dois dimensionamentos seções quadradas, conforme esperado, visto que a solicitação inicial era apenas de esforço normal e, dessa forma, os momentos mínimos considerados foram iguais em ambas as direções. Por fim, vale ressaltar

que, em todos os dimensionamentos realizados, o esforço normal foi a restrição ativa.

Os custos obtidos para este exemplo podem ser vistos na Tabela 11, na qual a coluna “diferença” apresenta a variação em relação ao custo da seção original encontrada pelo TQS.

Tabela 11 – Comparação dos custos obtidos para o exemplo 4

Software	ANÁLISE	Consumo concreto (m³/m)	Consumo aço (kg/m)	Consumo formas (m²/m)	Custo total (R\$/m)	Diferença (%)
TQS	Seção original	0,25	60,84	2,00	611,32	0
Software proposto	Seção original	0,25	62,49	2,00	621,26	2
	f_{ck} otimizado	0,25	41,89	2,00	589,52	-4
	Dimensões otimizadas	0,31	27,08	2,22	454,13	-26
	Dimensões e f_{ck} otimizados	0,36	27,08	2,41	427,32	-30

Pela análise dos custos, nota-se que para a seção original a diferença encontrada foi de 2%, pois o consumo de aço no *software* desenvolvido foi levemente superior ao do TQS. A otimização apenas do f_{ck} apresentou custo total da seção 4% inferior ao da seção original encontrada pelo TQS, entretanto, quando comparado à seção original determinada pelo programa, a redução foi de 5%. Isso se deve ao custo mais elevado dos concretos de maior resistência, que acaba comprometendo a economia gerada pela redução do consumo de aço na seção otimizada.

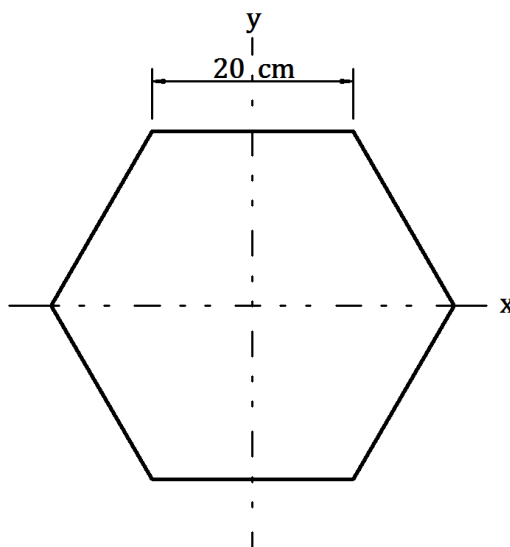
Com a otimização das dimensões obteve-se diminuição de 26% no valor total, e com a liberação também do f_{ck} , o valor obtido foi ainda menor, pois, neste caso, foi utilizado um concreto com resistência inferior à da seção original, porém com maior

consumo de concreto e formas e menor consumo de aço, quando comparados à seção original. Dessa forma, conclui-se que, neste exemplo, com todos os parâmetros liberados para a otimização, a maior resistência fornecida pelos valores de f_{ck} acima de 50 MPa não superou o maior custo dos mesmos, fazendo com que a solução encontrada adotasse f_{ck} inferior a 50 MPa.

4.5 EXEMPLO 5 – PILAR HEXAGONAL

O exemplo proposto simula a necessidade de utilização de um pilar hexagonal. Os dados da seção original são: lado de 20 cm, $d' = 3$ cm, f_{ck} de 30 MPa e aço CA-50. O pilar em questão está submetido a um esforço normal característico de 1428,57 kN, que corresponde a 2000 kN para o esforço de cálculo, e momento fletor característico de 40 kN.m em torno dos eixos x e y. A seção original deste exemplo está representada na Figura 43.

Figura 43 – Seção original do exemplo 5



Fonte: Elaborada pela autora.

A seção original foi validada com o *software* TQS e os resultados obtidos estão na Tabela 12. Neste exemplo, definiu-se por realizar também o dimensionamento otimizando-se apenas o f_{ck} .

Tabela 12 – Resultados obtidos para o exemplo 5

Software	ANÁLISE	Lado (cm)	As (cm²)	f_{ck} (MPa)
TQS	Seção original	20,00	17,10	30
Software proposto	Seção original	20,00	18,42	30
	Lado otimizado	22,24	6,90	30
	f_{ck} otimizado	20,00	6,90	40
	Lado e f_{ck} otimizados	18,77	6,90	45

Dessa forma, nota-se que o *software* desenvolvido encontrou, para a seção original, uma área de aço muito próxima da obtida pelo *software* comercial TQS. A diferença, em torno de 5%, provavelmente ocorreu devido à maior precisão do método de obtenção dos esforços de 2ª ordem, assim como no exemplo anterior. Além disso, a forma de discretização da seção de concreto adotada pelo TQS é retangular, enquanto o programa desenvolvido discretiza a seção axial e radialmente, o que também influencia nos resultados.

Em seguida, com a otimização do lado da seção hexagonal, percebe-se que há uma tendência de redução da área de aço e de acréscimo na área de concreto da seção transversal. Já com apenas o f_{ck} liberado para ser otimizado, a área de aço encontrada manteve-se igual à da análise anterior, enquanto o f_{ck} foi elevado para 40 MPa. Por fim, com a otimização tanto do lado da seção quanto do f_{ck} , a área de aço permaneceu inalterada enquanto o comprimento do lado da seção foi reduzido, em virtude do aumento do f_{ck} para 45 MPa.

Outro ponto observado foi que a área de aço otimizada manteve-se inalterada em todos os dimensionamentos com ao menos um dos parâmetros liberados para a otimização. Isso se deu, provavelmente, pela distribuição das barras considerada para essa seção e pelo fato de esta área de aço ser suficiente, e a mais econômica, em todos os dimensionamentos, enquanto os outros parâmetros sofreram variação.

No momento do dimensionamento pelo programa desenvolvido, notou-se ainda que, para os quatro cálculos, todas as restrições referentes aos esforços foram ativas, o que indica que a seção está com 100% de aproveitamento de sua capacidade resistente. O aproveitamento foi menor, porém ainda acima de 90%, apenas quando liberou-se somente o f_{ck} e em relação aos momentos em torno de ambos os eixos.

Os custos encontrados para o exemplo 5 podem ser vistos na Tabela 13, na qual a diferença apresentada se refere ao custo da seção original obtida pelo TQS.

Tabela 13 – Comparação dos custos obtidos para o exemplo 5

Software	ANÁLISE	Consumo concreto (m³/m)	Consumo aço (kg/m)	Consumo formas (m²/m)	Custo total (R\$/m)	Diferença (%)
TQS	Seção original	0,10	13,42	1,20	175,48	0
Software proposto	Seção original	0,10	14,46	1,20	181,72	4
	Lado otimizado	0,13	5,42	1,33	142,44	-19
	f_{ck} otimizado	0,10	5,42	1,20	129,75	-26
	Lado e f_{ck} otimizados	0,09	5,42	1,13	125,21	-29

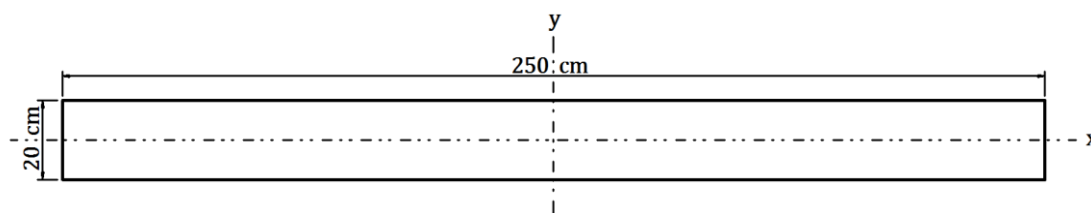
Após a análise dos custos do exemplo 5, verifica-se que, para o f_{ck} de 30 MPa, o custo total da seção foi reduzido em 19%, em relação ao da seção definida pelo TQS, por meio da otimização do comprimento do lado e da área de aço necessária. Por sua vez, mantendo-se o lado da seção original fixo e otimizando-se o f_{ck} a economia obtida foi de 26%. E, por fim, com a otimização tanto da dimensão quanto da resistência do concreto, a economia chegou a 29%, devido à redução do consumo de concreto, aço e formas possibilitada pela utilização de um valor superior para o f_{ck} em relação ao da seção original.

Frisa-se, ainda, que o resultado obtido para a seção original foi praticamente o mesmo que o do TQS, o que valida a formulação desenvolvida e implementada no programa computacional para os pilares hexagonais.

4.6 EXEMPLO 6 – PILAR-PAREDE SIMPLES (RETANGULAR)

Conforme explicado anteriormente, um pilar-parede simples é um pilar retangular cuja maior dimensão excede o valor da menor em 5 vezes. Este é o caso do exemplo aqui analisado. Para tanto, foi adotada uma seção com 250 cm de largura e 20 cm de altura, $d' = 4$ cm e $f_{ck} = 30$ MPa, com os seguintes esforços solicitantes característicos: $N_{sk} = 4250$ kN, $M_{xask} = 57,57$ kN.m, $M_{yask} = 2000$ kN.m, $M_{xbsk} = 35,07$ kN.m e $M_{ybsk} = 1250$ kN.m. Apresenta-se, na Figura 44, a seção original definida.

Figura 44 – Seção original do exemplo 6



Fonte: Elaborada pela autora.

Para este exemplo foram realizadas duas formas distintas de dimensionamento: uma considerando os esforços localizados de 2ª ordem existentes, por meio da decomposição da seção em faixas, as quais são analisadas como pilar isolado, conforme determinado pela NBR 6118:2014, e outra desconsiderando estes esforços, ou seja, realizando o dimensionamento tradicional para os pilares retangulares (apenas com o intuito de comparação, já que não é permitido pela norma). Esses dois dimensionamentos foram executados também no *software* TQS, como forma de validação da análise. Os quatro resultados estão apresentados na Tabela 14.

Tabela 14 – Resultados obtidos para o exemplo 6

ANÁLISE	Software	B (cm)	H (cm)	As (cm²)	f_{ck} (MPa)
Dimensionamento por faixas	TQS	250,00	20,00	120,60	30
	Software proposto	250,00	20,00	101,45	30
Dimensionamento tradicional	TQS	250,00	20,00	29,40	30
	Software proposto	250,00	20,00	26,06	30

Para o exemplo analisado, pode-se perceber que, no dimensionamento por faixas, a área de aço encontrada pelo TQS foi superior à do programa computacional desenvolvido, uma vez que os programas utilizaram diferentes critérios para a distribuição de armadura na seção. O TQS manteve o espaçamento entre barras constante e considerou barras também na altura da seção, enquanto o *software* proposto analisa cada faixa separadamente, inserindo 4 barras nos cantos, adicionando a quantidade necessária na maior dimensão da faixa e mantendo espaçamento constante apenas internamente à faixa. Além disso, apesar de não otimizar as dimensões nem o f_{ck} (até porque cada seção poderia encontrar um valor diferente para o f_{ck} ótimo), a área de aço do programa é a otimizada para cada faixa. Por fim, vale ressaltar que os esforços solicitantes em cada uma das faixas foram comparados, e os dois *softwares* utilizaram valores similares, o que valida a implementação realizada para este método.

Da mesma forma, para o dimensionamento tradicional, a área de aço necessária encontrada pelo TQS foi um pouco superior à do programa desenvolvido. Esta diferença é explicada pelo fato de o número de discretizações realizado pelo TQS ser menor (729 elementos, enquanto o programa desenvolvido utiliza 1600), o que gera elementos com o dobro da área dos utilizados pelo programa elaborado, e, tratando-se de uma seção com essas proporções, reduz-se a precisão dos resultados.

Faz-se necessário notar também a enorme diferença de área de aço obtida pelas duas formas de dimensionamento em ambos os programas. A análise por faixas

exigida pela norma torna a armação desses pilares muito robusta. Esta questão já foi abordada por Araújo (2007), que considera que a decomposição em faixas e a análise das mesmas como pilares isolados superestima os efeitos localizados de segunda ordem. Em seu estudo, o autor realizou análises por placa de pilares-parede com diferentes condições de apoio e esforços solicitantes utilizando o método dos elementos finitos e comparou-as com o processo simplificado definido pela norma para a consideração dos efeitos de segunda ordem localizados. Os resultados obtidos possibilitaram ao autor concluir que esses esforços possuem pequena relevância e, portanto, poderiam ser desprezados para o dimensionamento no estado-limite último.

Com relação às restrições ativas, tem-se que, no dimensionamento tradicional, todas as verificações dos esforços obtiveram 100% de aproveitamento, enquanto no dimensionamento por faixas, a restrição ativa foi apenas o esforço normal.

Os custos encontrados para o exemplo 6 podem ser vistos na Tabela 15. A coluna “diferença” apresenta uma comparação com o custo total obtido pelo dimensionamento por faixas do TQS.

Tabela 15 – Comparação dos custos obtidos para o exemplo 6

ANÁLISE	Software	Consumo concreto (m³/m)	Consumo aço (kg/m)	Consumo formas (m²/m)	Custo total (R\$/m)	Diferença (%)
Dim. por faixas	TQS	0,50	94,67	5,40	1006,14	0
	Software proposto	0,50	79,64	5,40	915,95	-9
Dim. tradicional	TQS	0,50	23,08	5,40	576,58	-43
	Software proposto	0,50	20,46	5,40	560,87	-44

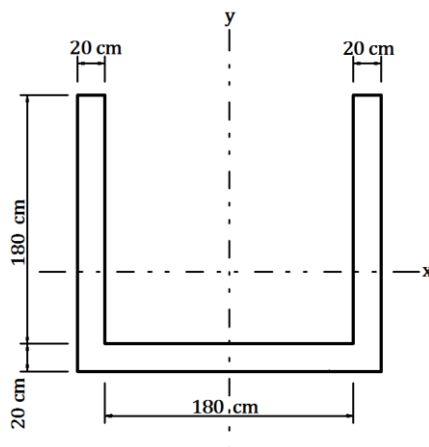
A análise da Tabela 15 permite concluir que os custos obtidos pelos dois programas, para cada dimensionamento realizado, foram próximos e coerentes. Logo, tem-se que a implementação executada para os pilares-parede retangulares está validada e atende às especificações da NBR 6118:2014.

Além disso, o custo total da seção encontrado pelo dimensionamento tradicional, tanto pelo TQS quanto pelo *software* desenvolvido, foi aproximadamente 40% inferior ao do dimensionamento por faixas. Dessa forma, observa-se que o dimensionamento por faixas eleva em muito o custo total da seção, uma vez que aumenta consideravelmente o consumo de aço. Consequentemente, percebe-se a influência da consideração dos efeitos localizados de segunda ordem, exigida pela norma, no custo.

4.7 EXEMPLO 7 – PILAR EM “U”

A utilização de pilar em “U” é muito comum em torno de elevadores, conforme dito anteriormente. Desse modo, para a exemplificação do dimensionamento de um pilar com esta geometria, considerou-se as dimensões padrão de um elevador (1,80m x 1,80 m), definindo-se, assim, 180 cm de altura e de largura internas e espessura de 20 cm para o pilar. Esta seção está representada na Figura 45. O d' considerado foi de 3,5 cm, f_{ck} de 35 MPa, submetido aos esforços característicos solicitantes: $N_{sk} = 7115$ kN, $M_{xask} = 4795$ kN.m e $M_{yask} = 576,4$ kN.m.

Figura 45 – Seção original do exemplo 7



Fonte: Elaborada pela autora.

Por também se tratar de um pilar-parede, novamente foram realizadas duas formas de dimensionamento: a que considera a divisão por faixas e a tradicional. Os resultados, tanto por meio do TQS quanto do programa desenvolvido, estão mostrados na Tabela 16.

Tabela 16 – Resultados obtidos para o exemplo 7

ANÁLISE	Software	Espessura (cm)	As (cm²)	f_{ck} (MPa)
Dimensionamento por faixas	TQS	20,00	98,20	35
	Software proposto	20,00	102,18	35
Dimensionamento tradicional	TQS	20,00	46,40	35
	Software proposto	20,00	46,40	35

Para esse exemplo, nota-se que no dimensionamento por faixas as áreas de aço obtidas pelos programas foram muito próximas, e ambas superiores ao dobro da encontrada pelo dimensionamento tradicional. Os esforços considerados pelos programas em cada faixa foram comparados e verificou-se que se trataram de valores similares, tendo-se, assim, a validação da implementação realizada.

Para o dimensionamento tradicional, os dois *softwares* encontraram a mesma área de aço, a qual é a área mínima exigida pela norma, confirmando o atendimento desta restrição pelo programa aqui proposto. Além da área de aço mínima, o momento em torno do eixo x foi uma restrição ativa, enquanto no dimensionamento por faixas, a maior parte das faixas apresentou o esforço normal como restrição ativa. Novamente frisa-se que o dimensionamento tradicional foi realizado apenas com o objetivo de comparação e validação da implementação realizada pois, de acordo com a norma em vigor, é necessária a divisão do pilar em faixas e a análise das mesmas como pilares isolados. A Tabela 17 contém uma comparação dos custos obtidos pelos *softwares* para este exemplo.

Tabela 17 – Comparação dos custos obtidos para o exemplo 7

ANÁLISE	Software	Consumo concreto (m³/m)	Consumo aço (kg/m)	Consumo formas (m²/m)	Custo total (R\$/m)	Diferença (%)
Dim. por faixas	TQS	1,16	77,09	12,00	1464,86	0
	Software proposto	1,16	80,21	12,00	1483,59	1
Dim. tradicional	TQS	1,16	36,42	12,00	1220,88	-17
	Software proposto	1,16	36,42	12,00	1220,88	-17

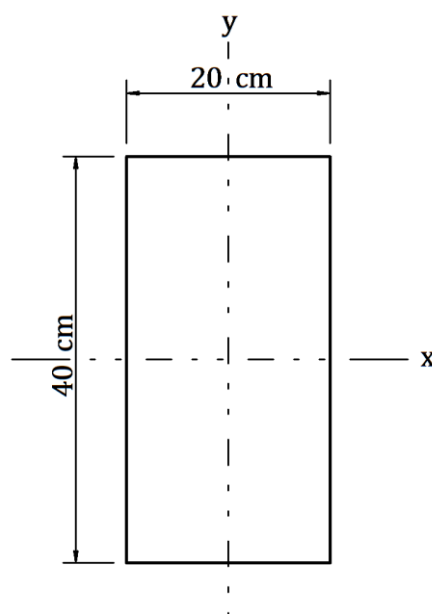
Após a análise dos custos do exemplo 7, nota-se que, com os valores das dimensões e do f_{ck} definidos, a diferença encontrada nos custos da seção ocorre devido ao consumo de aço, única variável liberada para a otimização. Percebe-se ainda, que os valores obtidos pelos *softwares* para cada um dos dimensionamentos foram muito próximos, mostrando-se coerentes. Além disso, o consumo de aço mais que dobrou nos dimensionamentos por faixas, o que elevou o custo total da seção.

4.8 EXEMPLO 8 – PILAR RETANGULAR ESBELTO

Para avaliação da implementação referente aos pilares esbeltos, bem como da influência dos efeitos de segunda ordem e dos efeitos da fluência no dimensionamento dos mesmos, a seção original deste exemplo foi calculada duas vezes no *software* desenvolvido, a primeira com índice de esbeltez abaixo de 90, pilar moderadamente esbelto, e a segunda considerando-se um pilar esbelto ($90 \leq \lambda \leq 140$).

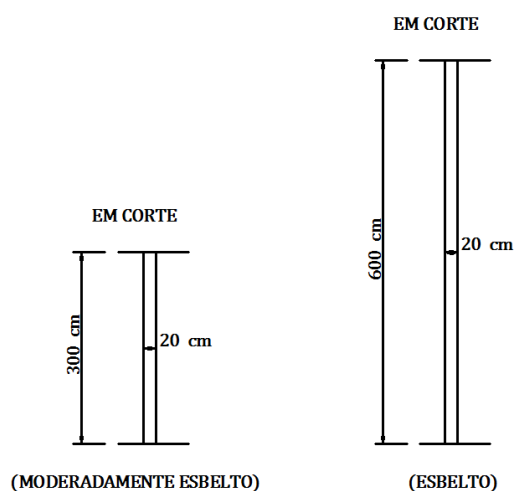
O exemplo calculado refere-se a um pilar retangular com 20 cm de largura e 40 cm de altura, submetido à força normal característica N_{sk} de 600 kN, inteiramente devido à combinação quase permanente. O f_{ck} considerado foi de 20 MPa, aço CA-50 e d' de 4 cm. Inicialmente, o comprimento equivalente do elemento comprimido foi de 3,0 m e, em seguida, este valor foi alterado para 6,0 m. A seção definida está apresentada na Figura 46, enquanto os comprimentos do elemento comprimido podem ser vistos na Figura 47.

Figura 46 – Seção original do exemplo 8



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 47 – Comprimentos equivalentes do elemento comprimido para o exemplo 8



Fonte: Elaborada pela autora.

Ambos os dimensionamentos para a seção original foram também calculados pelo *software* TQS. Em seguida, no *software* desenvolvido, o pilar esbelto foi dimensionado também com a altura liberada para a otimização, mantendo-se os 20 cm da largura fixo, uma vez que esta é a dimensão responsável pela esbeltez do pilar e, por fim, com a altura e o f_{ck} otimizados. Os resultados estão apresentados na Tabela 18.

Tabela 18 – Resultados obtidos para o exemplo 8

Software	ANÁLISE	B (cm)	H (cm)	As (cm²)	f_{ck} (MPa)
TQS	Seção original (moderadamente esbelto)	20,00	40,00	7,50	20
	Seção original (esbelto)	20,00	40,00	18,40	20
Software proposto	Seção original (moderadamente esbelto)	20,00	40,00	9,37	20
	Seção original (esbelto)	20,00	40,00	16,74	20
	Altura otimizada (esbelto)	20,00	55,13	4,71	20
	Altura e f_{ck} otimizados (esbelto)	20,00	28,60	3,14	45

Para o exemplo analisado, pode-se perceber que, para a seção original, e com o pilar ainda moderadamente esbelto os resultados obtidos pelos *softwares* foram próximos, entretanto, o TQS utilizou uma área de aço menor devido à maior precisão do método para obtenção dos esforços de segunda ordem. Por outro lado, para a seção original esbelta, o programa desenvolvido obteve uma área de aço inferior à do TQS. Essa diferença influencia diretamente nos efeitos de segunda ordem encontrados, uma vez que são realizados cálculos iterativos até a obtenção do equilíbrio da seção. Ou seja, a partir da distribuição de aço considerada para a seção, o diagrama momento-esforço normal-curvatura é gerado e, assim, os programas consideraram curvaturas diferentes em seu dimensionamento. Outro

aspecto que influencia os resultados é a utilização do método do pilar-padrão com rigidez κ aproximada pelo *software* TQS, que é mais preciso que o método do pilar-padrão com curvatura aproximada considerado no programa desenvolvido, que neste caso mostrou-se contrário à segurança.

Em seguida, com as opções de otimização definidas, pode-se observar que, mantendo-se o f_{ck} e a largura fixos, a altura da seção sofreu aumento para que a área de aço pudesse ser reduzida e, assim, encontrar uma seção mais econômica. Por outro lado, com a altura e o f_{ck} otimizados, tanto a altura quanto a área de aço sofreram redução em virtude do aumento do f_{ck} para 45 MPa.

A influência dos efeitos de segunda ordem e da fluência nos momentos solicitantes mínimos atuantes no pilar esbelto analisado pode ser vista na Tabela 19, na qual esses esforços são comparados com os do pilar moderadamente esbelto. Esta tabela foi obtida com os dados estabelecidos para a seção original e apresenta apenas os momentos em torno da direção de menor inércia, responsável pela esbeltez do pilar e para qual o mesmo foi dimensionado.

Tabela 19 – Comparação entre momentos solicitantes para pilar moderadamente esbelto e esbelto

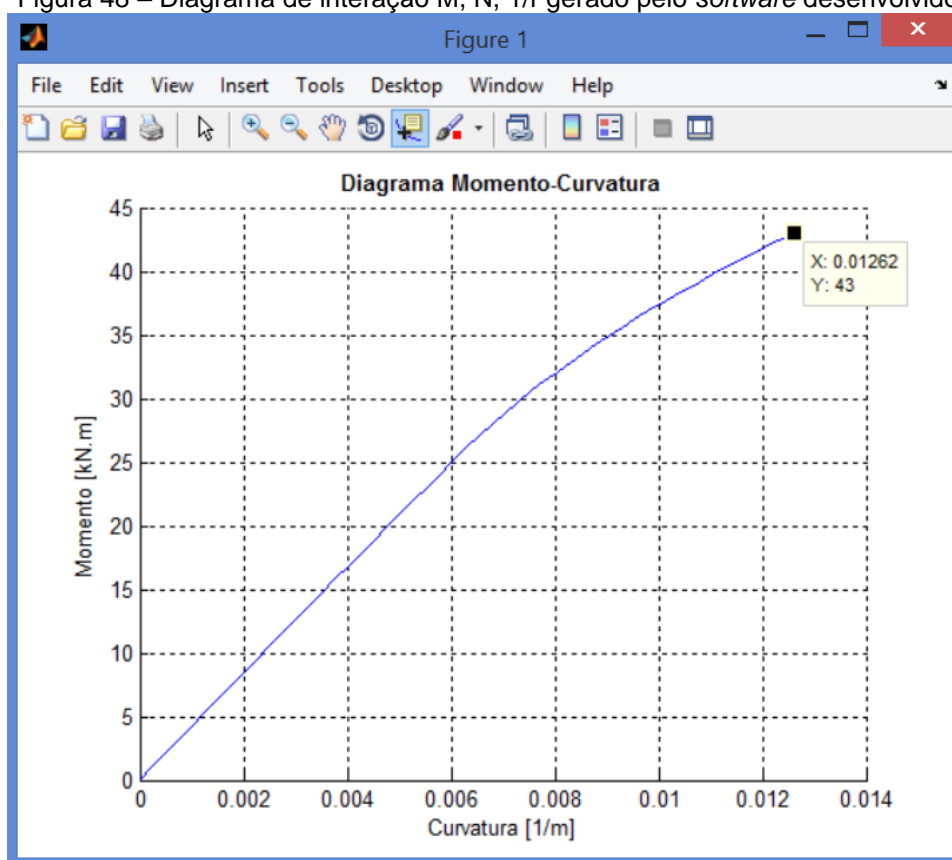
Comprimento equivalente (m)	Esbeltez (menor inércia)	1ª ordem (kN.m)	Fluência (kN.m)	2ª ordem (kN.m)	Total (kN.m)
3,0	51,96	17,64	-	15,30	32,94
6,0	103,92	17,64	19,16	12,74	49,54

A partir da Tabela 19, verifica-se que o momento de primeira ordem não sofre alteração, uma vez que depende unicamente da dimensão da seção e do esforço normal solicitante de cálculo. Além disso, o momento gerado pela fluência não precisa ser considerado para os pilares com índice de esbeltez inferior a 90. Por fim, é interessante comentar que o momento de segunda ordem para o pilar esbelto é inferior ao do moderadamente esbelto, tendo em vista que a análise torna-se mais refinada pela consideração do método do pilar-padrão acoplado a diagramas M, N, $1/r$. Dessa forma, a curvatura obtida é mais precisa e possui valor inferior ao do método simplificado. O diagrama utilizado para obtenção da curvatura está

mostrado na Figura 48 e foi validado com o gerado pelo TQS, apresentado na Figura 49. Vale ressaltar que para a obtenção do diagrama pelo TQS foram utilizados os dados da solução otimizada definida pelo programa computacional desenvolvido.

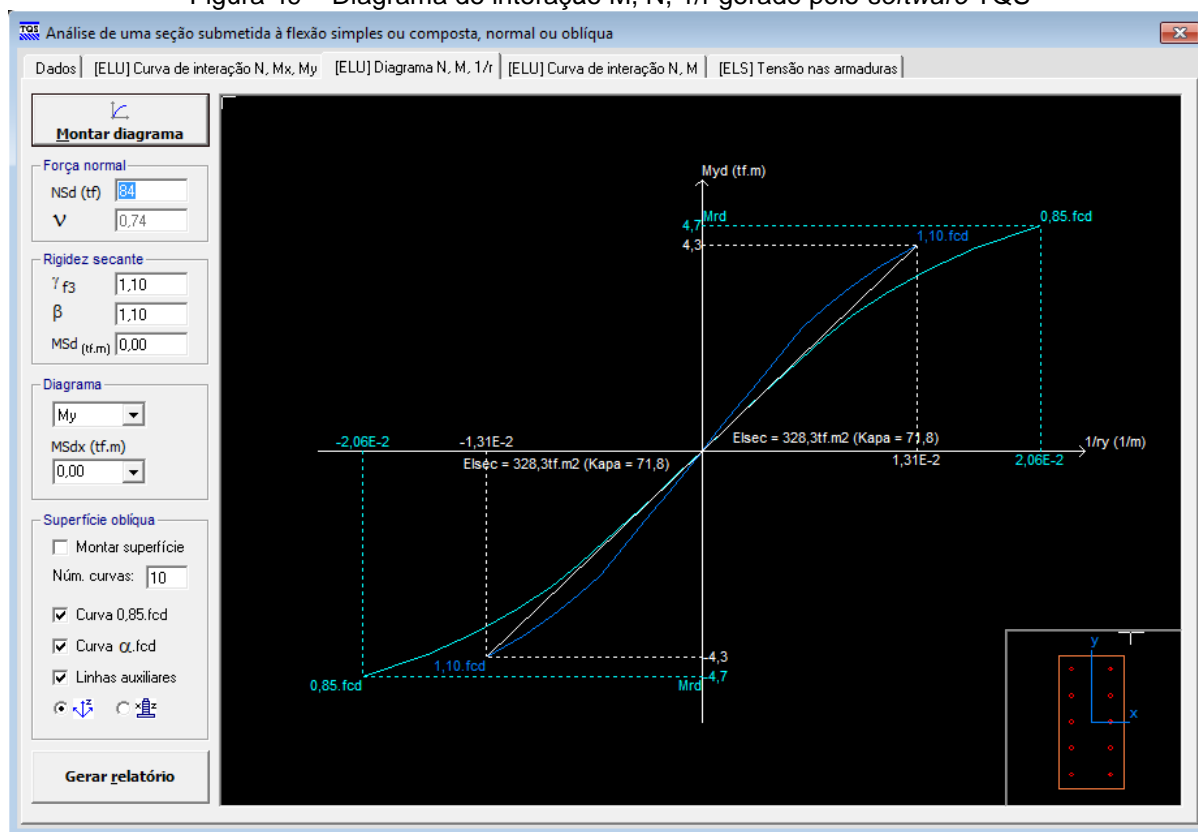
Conclui-se, assim, que o momento total solicitante nos pilares esbeltos é superior ao dos pilares moderadamente esbeltos devido à exigência de consideração dos efeitos da fluência e, portanto, a área de aço necessária para este caso é maior que a do anterior.

Figura 48 – Diagrama de interação M, N, $1/r$ gerado pelo *software* desenvolvido



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 49 – Diagrama de interação M, N, 1/r gerado pelo software TQS



Fonte: Software TQS (V19.11).

Os custos referentes aos dimensionamentos realizados nos programas computacionais estão apresentados na Tabela 20. A diferença foi obtida comparando-se o custo total de cada análise com o da seção original esbelta encontrada pelo TQS.

Tabela 20 – Comparação dos custos obtidos para o exemplo 8

Software	ANÁLISE	Consumo concreto (m³/m)	Consumo aço (kg/m)	Consumo formas (m²/m)	Custo total (R\$/m)	Diferença (%)
TQS	Seção original (mod. esbelto)	0,08	5,89	1,20	120,53	-30
	Seção original (esbelto)	0,08	14,44	1,20	171,86	0
Software proposto	Seção original (mod. esbelto)	0,08	7,36	1,20	129,32	-25
	Seção original (esbelto)	0,08	13,14	1,20	164,05	-5
	Altura otimizada (esbelto)	0,11	3,70	1,50	132,05	-23
	Altura e f_{ck} otimizados (esbelto)	0,06	2,46	0,97	86,15	-50

Após a análise dos custos, conclui-se que, havendo possibilidade de utilização do pilar moderadamente esbelto, a redução do custo é considerável, acima de 25%, quando comparado ao pilar esbelto. Além disso, considerando-se a seção original definida para os pilares esbeltos, o resultado apresentado pelo *software* forneceu custo 5% inferior ao do TQS para a seção, apenas com a otimização da área de aço. Com a altura otimizada, a redução passou a ser de 23% e, otimizando-se também o f_{ck} o custo foi aproximadamente reduzido à metade. Verifica-se, assim, a importância da otimização dos parâmetros para a economia do projeto.

5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

5.1 CONCLUSÕES

Este trabalho, desde o princípio, se dedicou a aprofundar o estudo em torno do dimensionamento de pilares, reduzindo o número de simplificações adotadas. Com isso, foi possível ampliar a abrangência do programa computacional desenvolvido.

O espaço de busca definido no programa permitiu a utilização do mesmo por projetistas tanto de pequenas residências como de grandes edifícios, uma vez que se passou a considerar dimensões de 14 cm a 3 m. Além disso, a modificação das dimensões gerou a possibilidade de utilização de pilares-parede, bem como a necessidade da implementação do dimensionamento dos mesmos por faixas, para que o programa pudesse atender à recomendação da NBR 6118:2014 referente aos efeitos localizados de segunda ordem em pilares com essa característica.

Ao ter como base a NBR 6118:2014, o estudo englobou os critérios para o dimensionamento de estruturas com concretos dos grupos I e II de resistência (20 a 90 MPa). A utilização de valores de f_{ck} acima de 50 MPa mostrou-se interessante para situações com carga elevada e geometria definida. Por outro lado, com as dimensões liberadas para a otimização, esses valores de resistência não fizeram parte da solução otimizada, em virtude do alto custo. Além disso, em geral, as concreteiras da região sudeste não possuem valor predefinido para os concretos de alta resistência devido à ainda pequena utilização dos mesmos.

O acréscimo das geometrias hexagonal e em “U” no programa computacional foi realizado de maneira adequada, por meio das formulações desenvolvidas analogamente às das seções retangulares e circulares. Já com relação aos pilares retangulares esbeltos, sabe-se que um importante passo foi dado na direção do dimensionamento dos mesmos, porém ainda há o que se aprimorar. Vale ressaltar que as implementações realizadas foram validadas com o *software* TQS (V19.11). Desse modo, ao contemplar essas características, o trabalho realizado representa um ganho para o meio acadêmico e técnico.

A análise dos exemplos mostrou que mesmo com valores de seção e f_{ck} definidos, o *software* pode ser utilizado, pois fornece a área de aço otimizada em função dos esforços solicitantes. Pode-se perceber também que, quanto maior o número de parâmetros liberados para a otimização, melhor o resultado obtido em termos de custo. A redução dos custos encontrada nos exemplos foi significativa, chegando a ser superior a 40% em alguns.

Durante a realização desta pesquisa, percebeu-se que a norma brasileira se refere, em determinados aspectos, apenas ao dimensionamento de pilares retangulares, revelando uma lacuna com relação ao dimensionamento de pilares de outras geometrias. Notou-se ainda que, em outros aspectos, a mesma se faz superficial, uma vez que exige determinada verificação, porém não explicita como realizá-la. Esses dois fatos dificultaram o desenvolvimento do trabalho, fizeram com que outras fontes fossem consultadas para obtenção de referência, bem como exigiram a adoção de algumas considerações.

No programa desenvolvido, a criação de uma página específica para os resultados possibilitou uma melhor análise dos mesmos, por meio da identificação das restrições ativas. Permitiu também a verificação da consideração adequada dos momentos mínimos exigidos pela norma e a visualização direta do aproveitamento da capacidade resistente da seção, a partir da inserção da razão entre esforços solicitantes e resistentes.

Por outro lado, não houve preocupação com o tempo de processamento gasto pelo programa, que é pequeno para os casos de dimensionamento e aumenta proporcionalmente à complexidade da análise desejada, principalmente quando a geometria é em “U” e quando se trata de pilares retangulares esbeltos.

5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

As limitações e simplificações adotadas por este trabalho indicam caminhos para o prosseguimento dos estudos no assunto.

Com a realização do estudo, notou-se que alguns aspectos podem ser mais refinados desde os dados de entrada do programa, como, por exemplo, a definição do cobrimento das armaduras (ao invés do d'), a opção de modificar o valor do coeficiente de ponderação das ações γ_n adotado e, ainda, a possibilidade de o usuário definir as condições de vinculação do pilar e o comprimento do pé-direito. Assim, o programa obteria internamente o d' e o comprimento equivalente do elemento comprimido.

A discretização da seção foi padronizada para cada uma das geometrias, independentemente das dimensões das seções. Uma modificação interessante seria analisar e definir faixas de dimensões com número adequado de divisões, de modo que um bom resultado seja alcançado e que o esforço computacional dispensado não se torne um impedimento para o cálculo.

Outra limitação diz respeito à área de aço considerada no programa, uma vez que se trata da área de aço calculada e não da efetiva. Assim, ao considerar a área de aço calculada e o número de barras na seção, não se tem a garantia de que a bitola obtida corresponde a um dos diâmetros comerciais. Neste caso, seria necessário transformar a área de aço calculada em área de aço efetiva na seção ou realizar uma otimização discreta, considerando os diâmetros comerciais.

Com relação aos resultados obtidos, na maioria dos dimensionamentos realizados, o critério de parada foi a obtenção de um ponto ótimo, mínimo, que satisfizesse as funções de restrição e, a partir do qual, foram encontradas reduções no valor da função objetivo inferiores à tolerância definida. Nesse sentido, seria válido acrescentar ao final do processamento, uma caixa de diálogo que apresente o critério de parada do dimensionamento.

Além das geometrias consideradas neste trabalho, uma possível continuação poderia incluir o dimensionamento de outras geometrias, como as seções octogonais e em “L”. Com relação aos pilares-parede, pode-se liberar a otimização das dimensões do mesmo, desde que se mantenha a característica determinante para essa classificação. Modificações podem ser realizadas, também, no dimensionamento dos pilares-parede por faixas, para que o mesmo apresente

distribuição regular (espaçamento constante) das armações, assim como observado no *software* TQS, de modo a facilitar a execução do pilar em campo.

Há ainda o que se desenvolver no que se refere aos pilares esbeltos. Para os retangulares, uma possibilidade seria obter o diagrama momento-esforço normal-curvatura para os pilares em flexo-compressão oblíqua, bem como realizar a implementação do método do pilar-padrão melhorado (método do pilar-padrão com rigidez κ aproximada) para a obtenção do momento solicitante total de cálculo na seção a partir da curvatura fornecida pelo diagrama M, N, $1/r$. Além disso, uma opção seria realizar a implementação para as outras geometrias, apesar do pouco uso.

REFERÊNCIAS

ALVES, Laura Rebel Moreira. **Dimensionamento ótimo de pilares de concreto armado submetidos à flexo-compressão normal utilizando programação matemática e algoritmos genéticos**. 2013. 106f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campos dos Goytacazes, 2013.

ARAÚJO, José Milton. **Curso de concreto armado**. Volume 3. 2ª Edição. Rio Grande: Editora Dunas, 2003.

ARGOLO, Walter Paiva de. **Otimização de seções de concreto armado submetida a flexo-compressão reta utilizando algoritmos genéticos**. 2000. 141f. Dissertação (Mestrado em Ciências em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2000.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto e execução de obras de concreto armado – Procedimento. Rio de Janeiro, 1980.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS: **NBR 8953**: Concretos para fins estruturais. Rio de Janeiro, 2009.

BASTOS, Erich Araújo. **Otimização de Seções Retangulares de Concreto Armado Submetidas à Flexo-Compressão Oblíqua Utilizando Algoritmos Genéticos**. 2004. 151f. Dissertação (Mestrado em Ciências em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

BORGES, Leonardo Marcarini. **Desenvolvimento de programa para dimensionamento de pilares circulares em concreto armado**. 2014. 80f. Dissertação (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.

CARDOSO JÚNIOR, Sander David. **Sistema computacional para análise não linear de pilares de concreto armado**. 2014. 55f. Monografia (Especialista em Gestão de Projetos de Sistemas Estruturais) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

CARVALHO, Roberto Chust; FIGUEIREDO, Jasson R.; FURLAN JUNIOR, Sydney; KATAOKA, Luciana Tiemi. **Análise, dimensionamento e detalhamento de pilares com espessuras inferiores a 20cm de acordo com as prescrições da nova norma NB1**. V Simpósio EPUSP sobre estruturas de concreto. São Paulo, 2003.

CARVALHO, Roberto Chust; PINHEIRO, Libânio Miranda. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. Volume 2. 1ª Edição. São Paulo: Editora PINI, 2009.

FRANÇA, Ricardo Leopoldo e Silva. **Relações momento-curvatura em peças de concreto armado submetidas a flexão oblíqua composta**. 1984. 291f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1984.

FRANÇA, Ricardo Leopoldo e Silva. **Contribuição ao estudo dos efeitos de segunda ordem em pilares de concreto armado**. 1991. 228f. Dissertação (Doutorado em Engenharia) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1991.

FRANCO, Telmo Rezende. **Análise do efeito de segunda ordem em pilares segundo a NBR6118 e pelos métodos exatos**. 2010. 67f. Dissertação (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

GAMA, Paulo Vitor Calmon Nogueira da. **Contribuições ao dimensionamento de torres eólicas de concreto**. 2015. 203f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

HERSKOVITS, José. A view of nonlinear optimization. **Advances in Structural Optimization**. p. 71-116, 1995.

MEDEIROS, Mayara de Freitas. **Dimensionamento e detalhamento de pilares-parede**. 2016. 77f. Dissertação (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2016.

MIRANDA, Lucas Rodrigo. **Cálculo e detalhamento prático de pilares para edificações de pequeno e médio porte**. 2008. 198f. Dissertação (Mestrado em Construção Civil) – Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2008.

MONTEIRO, Marcos. **Pilares de concreto armado de alto desempenho: estudo dos diagramas de interação momento fletor x força normal**. 2000. 243f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2000.

MORAES, Samantha Boechat de. **Dimensionamento de pilares com concreto de alto desempenho em estruturas de edifícios**. 2013. 110f. Dissertação (Graduação em Engenharia Civil) – Escola Politécnica – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

PFEIL, Walter. **Concreto armado: dimensionamento**. 2ed. Revista e atualizada. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos; Brasília, INL; São Paulo, Ed. da Universidade de São Paulo, 1975.

PIRES, Susana de Lima; SILVA, Maria Cecília Amorim Teixeira da. **Otimização de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexão oblíqua**

considerando as não linearidades física e geométrica. VII Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas. Rio de Janeiro, 2014.

ROCHA, Marcelo Rodolfo. **Projeto de edifícios com uso de concreto de alta resistência em pilares: comparação de volumes e áreas.** 2014. 107f. Dissertação (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

RODRIGUES JÚNIOR, Sandoval José. **Otimização de pilares de edifícios altos de concreto armado.** 2005. 154f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

SCADELAI, Murilo Alessandro. **Dimensionamento de pilares de acordo com a NBR 6118:2003.** 2004. 124f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

SIAS, Francesco Mayer. **Dimensionamento ótimo de pilares de concreto armado.** 2014. 153f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.

SOUZA, Paula Mayer dos Santos; ALVES, Elcio Cassimiro. Dimensionamento otimizado de pilares de concreto de alta resistência. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 58., 2016, Belo Horizonte. **Anais do 58º Congresso Brasileiro do Concreto.** Belo Horizonte: IBRACON, 2016.

SOUZA, Paula Mayer dos Santos; ALVES, Elcio Cassimiro. Dimensionamento otimizado de pilares hexagonais de concreto armado. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 59., 2017, Bento Gonçalves. **Anais do 59º Congresso Brasileiro do Concreto.** Bento Gonçalves: IBRACON, 2017.

SOUZA, Paula Mayer dos Santos; GAMA, Paulo Vitor Calmon Nogueira da; ALVES, Elcio Cassimiro. Dimensionamento otimizado de pilares esbeltos de concreto armado. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 59., 2017, Bento Gonçalves. **Anais do 59º Congresso Brasileiro do Concreto.** Bento Gonçalves: IBRACON, 2017a.

SOUZA, Paula Mayer dos Santos; GAMA, Paulo Vitor Calmon Nogueira da; ALVES, Elcio Cassimiro. Projeto ótimo de pilares esbeltos de concreto armado. **Engineering and Science.** v. 2, n. 6, p. 60-75, 2017b.

SMANIOTTO, Alberto. **Dimensionamento e detalhamento automático de pilares retangulares submetidos à flexão composta oblíqua.** 2005. 120f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2005.

VANDERPLAATS, Garret N. **Numerical optimization techniques for engineering design.** Second edition. Colorado Springs, Col, 1998.

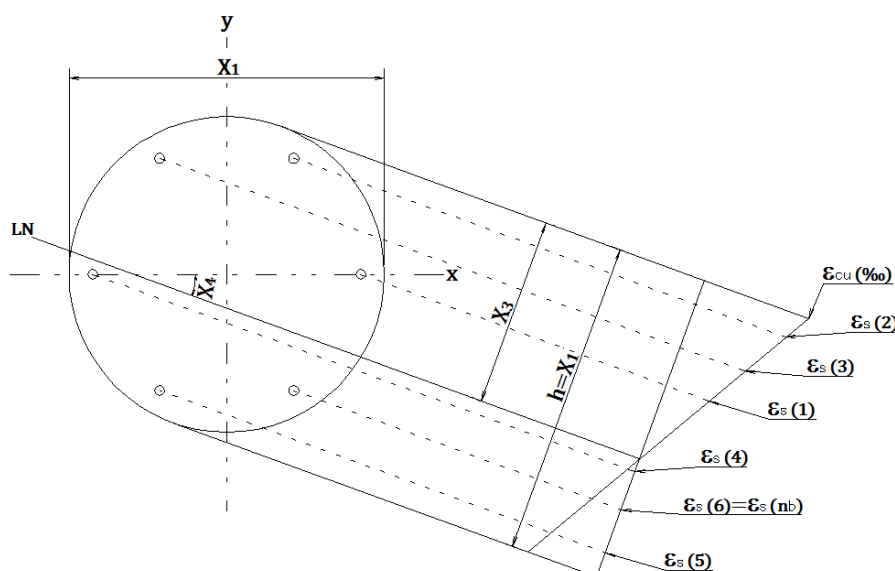
APÊNDICE A – PILARES CIRCULARES

A.1 ESFORÇOS RESISTENTES NOS DOMÍNIOS 3, 4 E 4a

- Cálculo das tensões nas barras de aço

Analogamente à seção retangular, descrita no item 3.2, a seção circular possui o diagrama de deformações nos domínios 3, 4 e 4a mostrado na Figura 50.

Figura 50 – Diagrama de deformações em seções circulares nos domínios 3, 4 e 4a

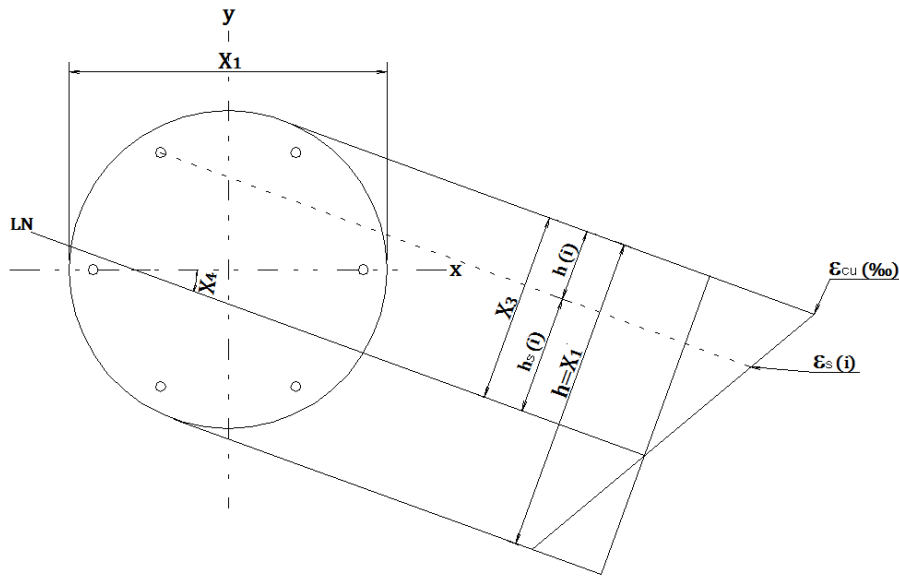


Fonte: Elaborada pela autora.

Com base nas variáveis definidas em 3.1 e na numeração das barras citada em 3.3.1, pode-se calcular a deformação em uma barra genérica pela equação (196) obtida por semelhança de triângulos, observada na Figura 51.

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{x_3} = \frac{\varepsilon_s(i)}{h_s(i)} \Rightarrow \varepsilon_s(i) = \frac{\varepsilon_{cu} * h_s(i)}{x_3} (\text{‰}) \quad (196)$$

Figura 51 – Diagrama de deformações em uma barra genérica em seções circulares nos domínios 3, 4 e 4a



Fonte: Elaborada pela autora.

A tensão em cada barra será, então:

$$\sigma_s(i) = E_s * \varepsilon_s(i) = \frac{E_s * \varepsilon_{cu} * h_s(i)}{x_3} \quad (197)$$

Pela Figura 51, tem-se ainda que:

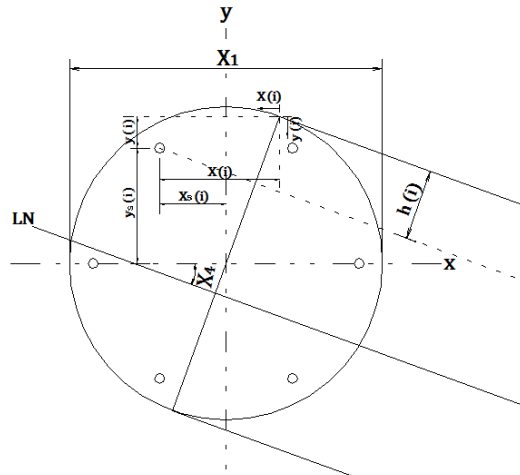
$$h_s(i) = x_3 - h(i) \quad (198)$$

Em que $h(i)$, analogamente à equação (127), é dado por:

$$h(i) = \cos(x_4) * y(i) + \sin(x_4) * x(i) \quad (199)$$

Para as seções circulares, as coordenadas $x(i)$ e $y(i)$ das barras são calculadas nas equações (200) a (203) e podem ser vistas na Figura 52.

Figura 52 – Cálculo das coordenadas de uma barra de aço genérica na seção circular



Fonte: Elaborada pela autora.

$$x_s(i) = \left(\frac{x_1}{2} - d'\right) * \cos \left[(i - 1) * \frac{2\pi}{n_b} \right] \quad (200)$$

$$y_s(i) = \left(\frac{x_1}{2} - d'\right) * \sen \left[(i - 1) * \frac{2\pi}{n_b} \right] \quad (201)$$

$$x(i) = \frac{x_1}{2} * \sen(x_4) - x_s(i) = \frac{x_1}{2} * \sen(x_4) - \left(\frac{x_1}{2} - d'\right) * \cos \left[(i - 1) * \frac{2\pi}{n_b} \right] \quad (202)$$

$$y(i) = \frac{x_1}{2} * \cos(x_4) - y_s(i) = \frac{x_1}{2} * \cos(x_4) - \left(\frac{x_1}{2} - d'\right) * \sen \left[(i - 1) * \frac{2\pi}{n_b} \right] \quad (203)$$

Desse modo, tem-se que:

$$\begin{aligned} h(i) = & \left\{ \frac{x_1}{2} * \cos(x_4) - \left(\frac{x_1}{2} - d'\right) * \sen \left[(i - 1) * \frac{2\pi}{n_b} \right] \right\} * \cos(x_4) + \\ & + \left\{ \frac{x_1}{2} * \sen(x_4) - \left(\frac{x_1}{2} - d'\right) * \cos \left[(i - 1) * \frac{2\pi}{n_b} \right] \right\} * \sen(x_4) \end{aligned} \quad (204)$$

Com todas as variáveis da seção circular definidas, é possível, então, escrever a equação das tensões nas barras de aço:

$$\sigma_s(i) = \frac{E_s * \varepsilon_{cu} * [x_3 - h(i)]}{x_3} \quad (205)$$

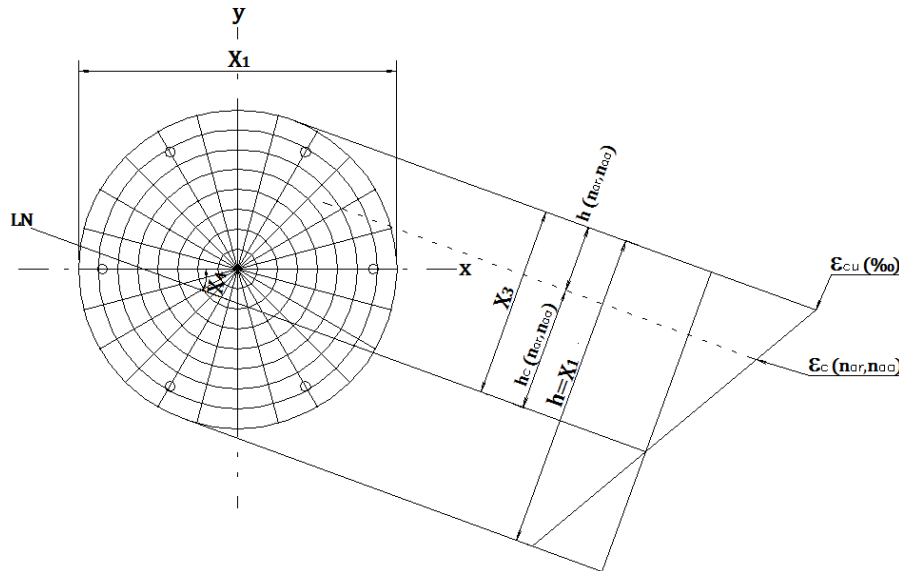
Assim como nas seções retangulares, nas seções circulares tanto as tensões de tração quanto as de compressão devem ser limitadas à tensão de escoamento de cálculo do aço (f_{yd}). Ou seja, para a expressão (205), tem-se como limitantes:

$$-f_{yd} \leq \sigma_s(i) \leq f_{yd} \quad (206)$$

- **Cálculo das tensões na seção de concreto**

Para as seções circulares nos domínios 3, 4 e 4a, o diagrama de deformações é o mostrado na Figura 53.

Figura 53 – Diagrama de deformações no concreto em seções circulares nos domínios 3, 4 e 4a



Fonte: Elaborada pela autora.

Por semelhança de triângulos na Figura 53, tem-se:

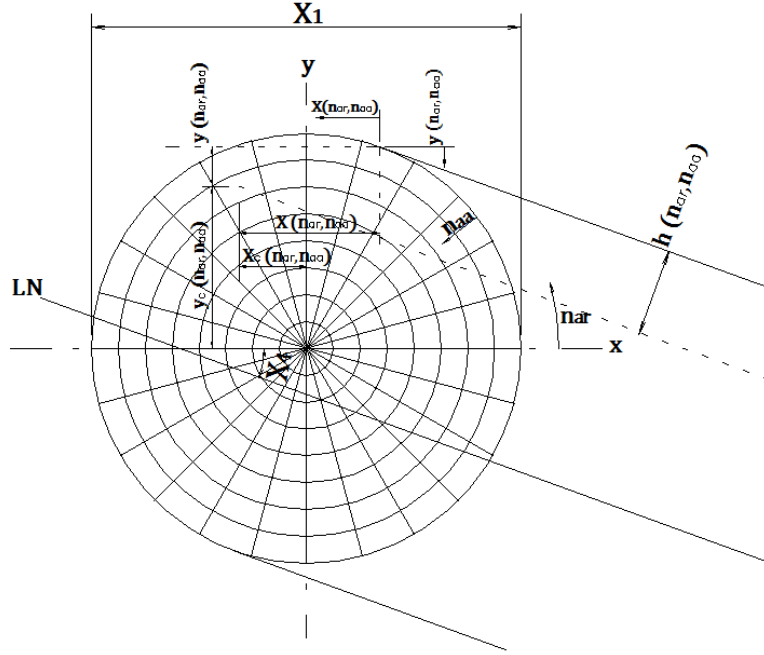
$$\frac{\varepsilon_{cu}}{x_3} = \frac{\varepsilon_c(n_{ar}, n_{aa})}{h_c(n_{ar}, n_{aa})} \Rightarrow \varepsilon_c(n_{ar}, n_{aa}) = \frac{\varepsilon_{cu} * h_c(n_{ar}, n_{aa})}{x_3} \quad (207)$$

A partir da deformação específica de cada elemento, $\varepsilon_c(n_{ar}, n_{aa})$, calcula-se a tensão, $\sigma_c(n_{ar}, n_{aa})$, nos mesmos, analogamente à equação (156), pela equação (208).

$$\sigma_c(n_{ar}, n_{aa}) = \alpha_c * f_{cd} * \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\varepsilon_c(n_{ar}, n_{aa})}{\varepsilon_{c2}} \right]^n \right\} \quad (208)$$

Conforme discretização da seção de concreto apresentada no item 3.3.1, verifica-se a divisão e as coordenadas dos elementos na Figura 54.

Figura 54 – Definição das coordenadas de um elemento de concreto na seção circular



Fonte: Elaborada pela autora.

$$x_c(n_{ar}, n_{aa}) = \left(\frac{x_1}{2} - \frac{n_{aa} * x_1}{2 * n_{diva}} + \frac{x_1}{4 * n_{diva}} \right) * \cos \left[(n_{ar} - 1) * \frac{2\pi}{n_{divr}} + \frac{2\pi}{2 * n_{divr}} \right] \quad (209)$$

$$y_c(n_{ar}, n_{aa}) = \left(\frac{x_1}{2} - \frac{n_{aa} * x_1}{2 * n_{diva}} + \frac{x_1}{4 * n_{diva}} \right) * \sin \left[(n_{ar} - 1) * \frac{2\pi}{n_{divr}} + \frac{2\pi}{2 * n_{divr}} \right] \quad (210)$$

$$x(n_{ar}, n_{aa}) = \frac{x_1}{2} * \sin(x_4) - x_c(n_{ar}, n_{aa}) \quad (211)$$

$$y(n_{ar}, n_{aa}) = \frac{x_1}{2} * \cos(x_4) - y_c(n_{ar}, n_{aa}) \quad (212)$$

Onde n_{ar} e n_{aa} são números inteiros utilizados para representar cada elemento de concreto na direção radial e axial, respectivamente e n_{divr} e n_{diva} correspondem ao

número de divisões nas direções radial e axial. Assim, n_{aa} varia de 1 a 20 (n_{diva}) e n_{ar} de 1 a 36 (n_{divr}).

Substituindo-se (211) e (212) em (199), obtém-se para $h(n_{ar}, n_{aa})$:

$$h(n_{ar}, n_{aa}) = \left[\frac{x_1}{2} * \cos(x_4) - y_c(n_{ar}, n_{aa}) \right] * \cos(x_4) + \left[\frac{x_1}{2} * \sin(x_4) - x_c(n_{ar}, n_{aa}) \right] * \sin(x_4) \quad (213)$$

E assim, pela equação (208), pode-se escrever:

$$\sigma_c(n_{ar}, n_{aa}) = \alpha_c * f_{cd} * \left(1 - \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_{cu} * [x_3 - h(n_{ar}, n_{aa})]}{\varepsilon_{c2} * x_3} \right\}^n \right) \quad (214)$$

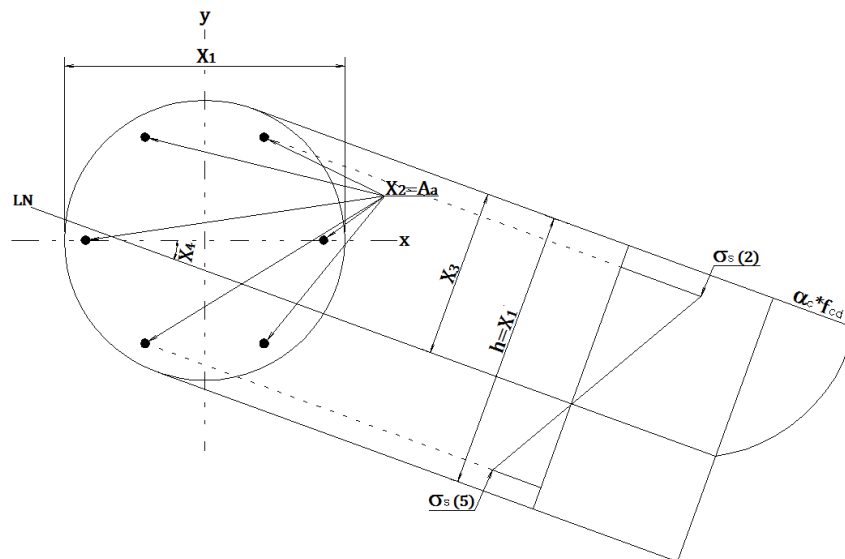
Assim como nas seções retangulares, limitado a:

$$0 \leq \sigma_c(n_{ar}, n_{aa}) \leq \alpha_c * f_{cd} \quad (215)$$

- **Capacidade resistente da seção transversal**

Da mesma forma que na seção retangular, a Figura 55 mostra como estão distribuídos os esforços na seção transversal em pilares circulares.

Figura 55 – Determinação dos esforços resistentes em pilares circulares nos domínios 3, 4 e 4a



Fonte: Elaborada pela autora.

Desta forma, as expressões do esforço normal e momentos resistentes ficam assim descritas:

$$N_{Rd} = \sum_{n_{ar}=1}^{n_{divr}} \sum_{n_{aa}=1}^{n_{diva}} [\sigma_c(n_{ar}, n_{aa}) * A_c(n_{ar}, n_{aa})] + \frac{x_2}{n_b} * \sum_{i=1}^{n_b} \sigma_s(i) \quad (216)$$

$$M_{x,Rd} = \sum_{n_{ar}=1}^{n_{divr}} \sum_{n_{aa}=1}^{n_{diva}} [\sigma_c(n_{ar}, n_{aa}) * A_c(n_{ar}, n_{aa}) * y_c(n_{ar}, n_{aa})] + \frac{x_2}{n_b} * \sum_{i=1}^{n_b} [\sigma_s(i) * y_s(i)] \quad (217)$$

$$M_{y,Rd} = \sum_{n_{ar}=1}^{n_{divr}} \sum_{n_{aa}=1}^{n_{diva}} [\sigma_c(n_{ar}, n_{aa}) * A_c(n_{ar}, n_{aa}) * x_c(n_{ar}, n_{aa})] + \frac{x_2}{n_b} * \sum_{i=1}^{n_b} [\sigma_s(i) * x_s(i)] \quad (218)$$

As tensões são as calculadas nas expressões (205) e (214), e as coordenadas x_c , y_c , x_s e y_s , são dadas em (209), (210), (200) e (201), respectivamente. Além disso x_2 representa a área total de aço na seção e n_b o número de barras de armadura. A área de cada elemento de concreto é dada por:

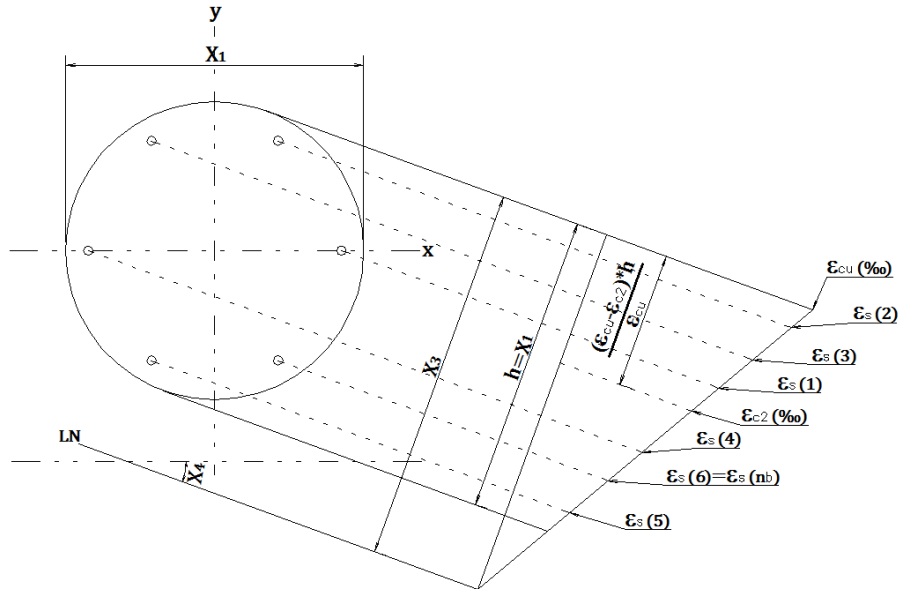
$$A_c(n_{ar}, n_{aa}) = \frac{2 * \pi}{n_{divr}} * \left[\frac{(2 * n_{diva} + 1) * x_1}{4 * n_{diva}} - n_{aa} * \frac{x_1}{2 * n_{diva}} \right] * \frac{x_1}{2 * n_{diva}} \quad (219)$$

A.2 ESFORÇOS RESISTENTES NO DOMÍNIO 5

- **Cálculo das tensões nas barras de aço**

O diagrama de deformações das seções circulares no domínio 5 está mostrado na Figura 56.

Figura 56 – Diagrama de deformações nas barras de aço em seções circulares no domínio 5

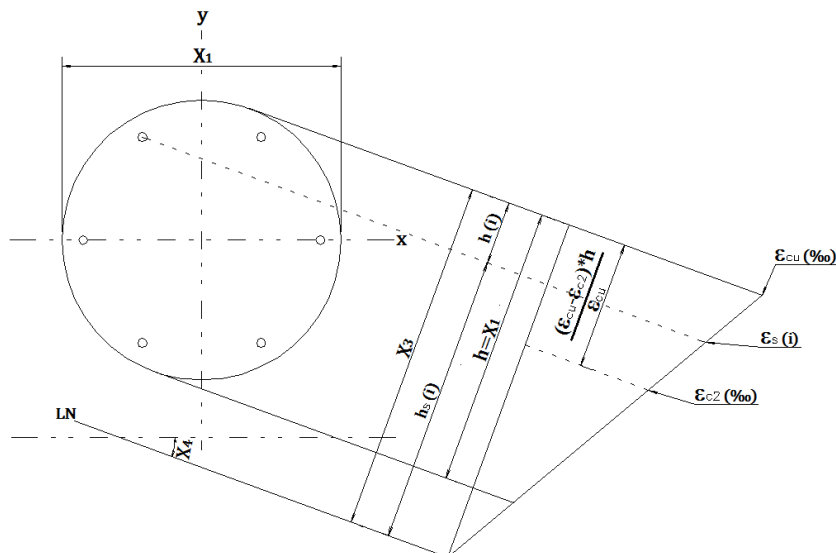


Fonte: Elaborada pela autora.

A deformação em uma barra genérica pode ser vista na Figura 57, a partir da qual define-se, por semelhança de triângulos, a relação:

$$\frac{\varepsilon_{c2}}{x_3 - \frac{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h}{\varepsilon_{cu}}} = \frac{\varepsilon_s(i)}{h_s(i)} \Rightarrow \varepsilon_s(i)(\%) = \frac{\varepsilon_{c2} * h_s(i) * \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} * x_3 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h} \quad (220)$$

Figura 57 – Diagrama de deformações em uma barra de aço genérica em seções circulares no domínio 5



Fonte: Elaborada pela autora.

Substituindo o valor de deformação na fórmula de tensão, tem-se:

$$\sigma_s(i) = E_s * \varepsilon_s(i) = \frac{E_s * \varepsilon_{c2} * h_s(i) * \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} * x_3 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h} \quad (221)$$

Os valores das coordenadas das barras, bem como a distância $h(i)$ de cada uma, são os mesmos definidos nas equações (202) a (204). Assim, substituindo-se (198) em (221), obtém-se:

$$\sigma_s(i) = \frac{E_s * \varepsilon_{c2} * [x_3 - h(i)] * \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} * x_3 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h} \quad (222)$$

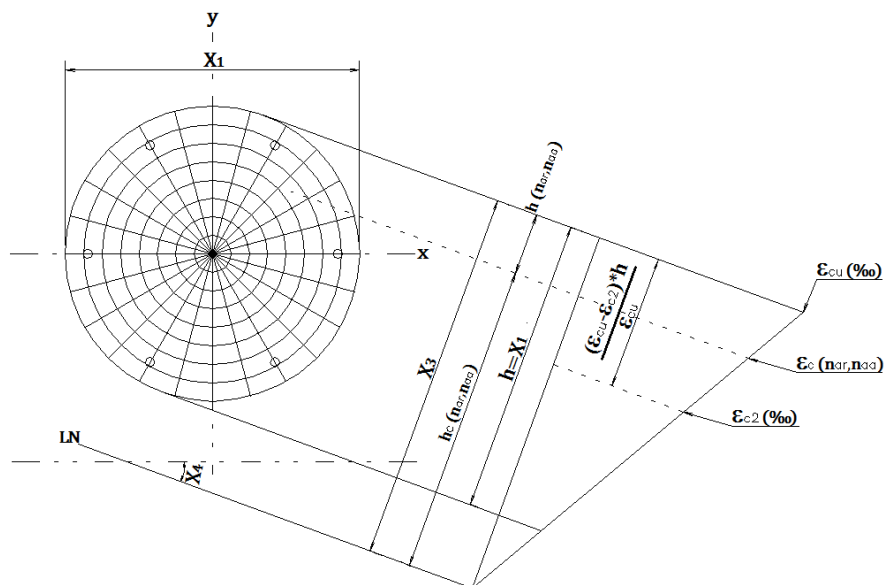
Sendo h dado por x_1 , como pode ser visto na Figura 57. Assim como a seção retangular, no domínio 5, toda a seção está comprimida e o limite máximo para o valor da tensão nas barras é f_{yd} .

$$\sigma_s(i) \leq f_{yd} \quad (223)$$

- **Cálculo das tensões na seção de concreto**

Para seções circulares, o diagrama de deformações no concreto é o mostrado na Figura 58.

Figura 58 – Diagrama de deformações no concreto em seções circulares no domínio 5



Fonte: Elaborada pela autora.

$$N_{Rd} = \sum_{n_{ar}=1}^{n_{divr}} \sum_{n_{aa}=1}^{n_{diva}} [\sigma_c(n_{ar}, n_{aa}) * A_c(n_{ar}, n_{aa})] + \frac{x_2}{n_b} * \sum_{i=1}^{n_b} \sigma_s(i) \quad (227)$$

$$M_{x,Rd} = \sum_{n_{ar}=1}^{n_{divr}} \sum_{n_{aa}=1}^{n_{diva}} [\sigma_c(n_{ar}, n_{aa}) * A_c(n_{ar}, n_{aa}) * y_c(n_{ar}, n_{aa})] + \quad (228)$$

$$+ \frac{x_2}{n_b} * \sum_{i=1}^{n_b} [\sigma_s(i) * y_s(i)]$$

$$M_{y,Rd} = \sum_{n_{ar}=1}^{n_{divr}} \sum_{n_{aa}=1}^{n_{diva}} [\sigma_c(n_{ar}, n_{aa}) * A_c(n_{ar}, n_{aa}) * x_c(n_{ar}, n_{aa})] + \quad (229)$$

$$+ \frac{x_2}{n_b} * \sum_{i=1}^{n_b} [\sigma_s(i) * x_s(i)]$$

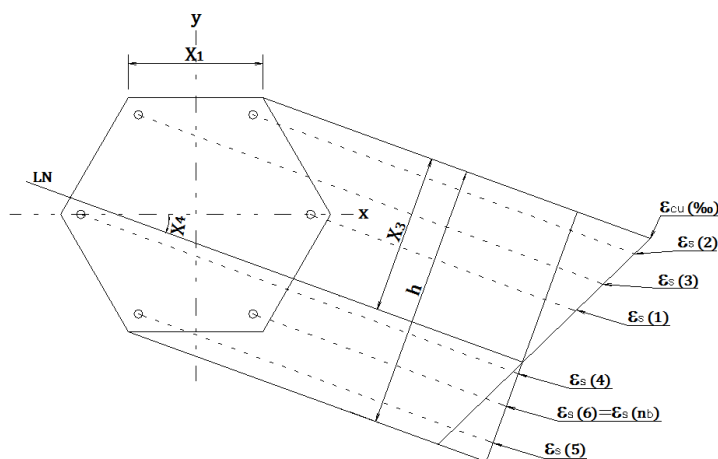
APÊNDICE B – PILARES HEXAGONAIS

B.1 ESFORÇOS RESISTENTES NOS DOMÍNIOS 3, 4 E 4a

- **Cálculo das tensões nas barras de aço**

A seção hexagonal possui o diagrama de deformações nos domínios 3, 4 e 4a mostrado na Figura 60.

Figura 60 – Diagrama de deformações em seções hexagonais nos domínios 3, 4 e 4a

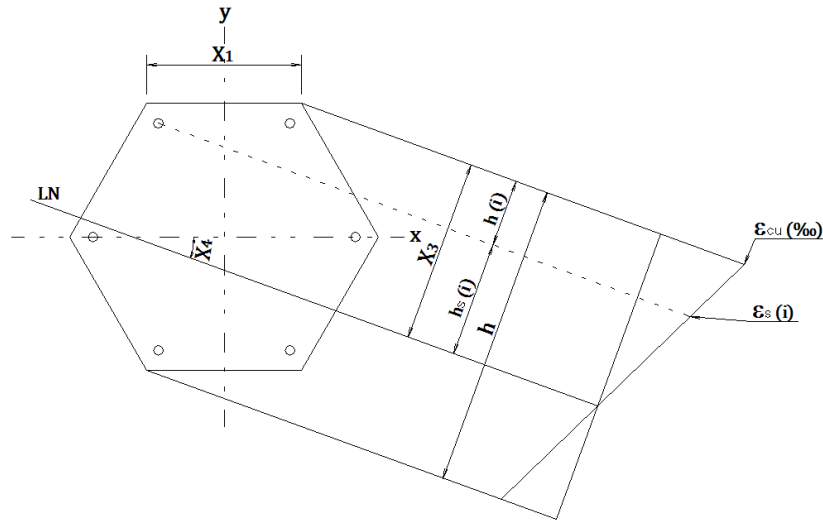


Fonte: Elaborada pela autora.

Com base nas variáveis definidas em 3.1 e na numeração das barras citada em 3.3.2, pode-se calcular a deformação em uma barra genérica pela equação (230) obtida por semelhança de triângulos, observada na Figura 61.

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{x_3} = \frac{\varepsilon_s(i)}{h_s(i)} \Rightarrow \varepsilon_s(i) = \frac{\varepsilon_{cu} * h_s(i)}{x_3} (\text{‰}) \quad (230)$$

Figura 61 – Diagrama de deformações em uma barra genérica em seções hexagonais nos domínios 3, 4 e 4a



Fonte: Elaborada pela autora.

A tensão em cada barra será, então:

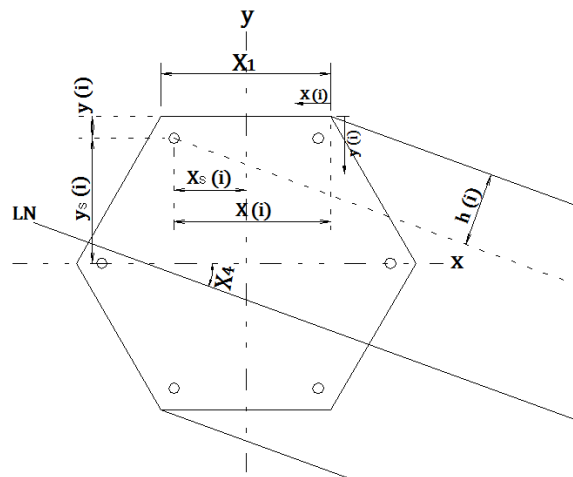
$$\sigma_s(i) = E_s * \varepsilon_s(i) = \frac{E_s * \varepsilon_{cu} * h_s(i)}{x_3} \quad (231)$$

Pela Figura 61, tem-se ainda que:

$$h_s(i) = x_3 - h(i) \quad (232)$$

Sendo $h(i)$ calculado conforme definido na equação (199) em função das coordenadas das barras mostradas na Figura 62.

Figura 62 – Cálculo das coordenadas de uma barra de aço genérica na seção hexagonal



Fonte: Elaborada pela autora.

Para as seções hexagonais, as coordenadas das barras são as calculadas nas equações (234) a (245), uma vez que a seção foi dividida em 6 sextos (triangulares), cada qual com uma formulação específica. Assim, para cada barra, denominada conforme sua localização em planta na seção transversal, calculam-se as coordenadas $x(i)$ e $y(i)$ em função do espaçamento entre eixos das barras (S_b), obtido pela equação (233).

$$S_b = \frac{(x_1 * \sqrt{3}/2 - d') * 12}{\sqrt{3} * n_b} \quad (233)$$

Barras do sexto superior direito, com i variando de 1 a $\frac{n_b}{6}$:

$$x_{s,ssd}(i) = x_1 - \frac{d'}{\text{sen}(2\pi/6)} - S_b * (i - 1) * \cos(2\pi/6) \quad (234)$$

$$y_{s,ssd}(i) = S_b * (i - 1) * \text{sen}(2\pi/6) \quad (235)$$

Barras do sexto superior central, com i variando de $\frac{n_b}{6} + 1$ a $2 * \frac{n_b}{6}$:

$$x_{s,ssc}(i) = \frac{y_{s,ssc}(i)}{\text{tg}(2\pi/6)} - S_b * \left[i - \left(\frac{n_b}{6} + 1 \right) \right] \quad (236)$$

$$y_{s,ssc}(i) = \frac{x_1 * \sqrt{3}}{2} - d' \quad (237)$$

Barras do sexto superior esquerdo, com i variando de $\frac{2*n_b}{6} + 1$ a $3 * \frac{n_b}{6}$:

$$x_{s,sse}(i) = x_1 - \frac{d'}{\text{sen}(2\pi/6)} + S_b * \left(\frac{3 * n_b}{6} + 1 - i \right) * \cos(2\pi/6) \quad (238)$$

$$y_{s,sse}(i) = S_b * \left(\frac{3 * n_b}{6} + 1 - i \right) * \text{sen}(2\pi/6) \quad (239)$$

Barras do sexto inferior esquerdo, com i variando de $\frac{3*n_b}{6} + 1$ a $4 * \frac{n_b}{6}$:

$$x_{s,sie}(i) = - \left[x_1 - \frac{d'}{\text{sen}(2\pi/6)} \right] + S_b * \left[i - \left(\frac{3 * n_b}{6} + 1 \right) \right] * \cos(2\pi/6) \quad (240)$$

$$y_{s,sie}(i) = -S_b * \left[i - \left(\frac{3 * n_b}{6} + 1 \right) \right] * \text{sen}(2\pi/6) \quad (241)$$

Barras do sexto inferior central, com i variando de $\frac{4*n_b}{6} + 1$ a $5 * \frac{n_b}{6}$:

$$x_{s,sic}(i) = \frac{y_{s,sic}(i)}{\text{tg}(2\pi/6)} - S_b * \left[i - \left(\frac{4 * n_b}{6} + 1 \right) \right] \quad (242)$$

$$y_{s,sic}(i) = - \left(\frac{x_1 * \sqrt{3}}{2} - d' \right) \quad (243)$$

Barras do sexto inferior direito, com i variando de $\frac{5*n_b}{6} + 1$ a n_b :

$$x_{s,sid}(i) = x_1 - \frac{d'}{\text{sen}(2\pi/6)} - S_b * (n_b + 1 - i) * \cos(2\pi/6) \quad (244)$$

$$y_{s,sid}(i) = -S_b * (n_b + 1 - i) * \text{sen}(2\pi/6) \quad (245)$$

Logo, para todos os sextos, $h(i)$ é dado por:

$$h(i) = \left[\frac{x_1 * \sqrt{3}}{2} - y_{s,s}(i) \right] * \cos(x_4) + \left[\frac{x_1}{2} - x_{s,s}(i) \right] * \text{sen}(x_4) \quad (246)$$

Substituindo-se (232) em (231), tem-se, em função de (246), a tensão em cada barra de aço:

$$\sigma_s(i) = \frac{E_s * \varepsilon_{cu} * [x_3 - h(i)]}{x_3} \quad (247)$$

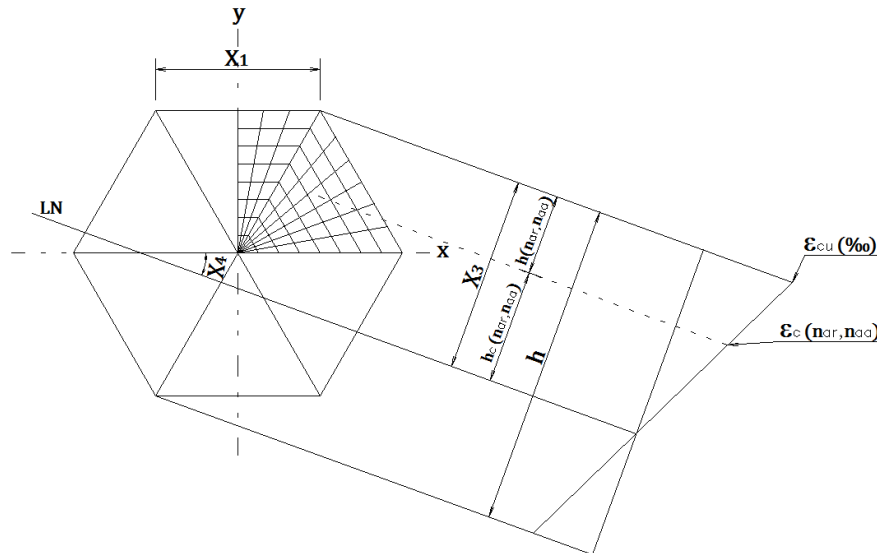
Analogamente às demais seções, ambas as tensões de tração e de compressão devem ser limitadas à tensão de escoamento de cálculo do aço (f_{yd}). Ou seja, para a expressão (247), tem-se como limitantes:

$$-f_{yd} \leq \sigma_s(i) \leq f_{yd} \quad (248)$$

- **Cálculo das tensões na seção de concreto**

O diagrama de deformações no concreto em seções hexagonais nos domínios 3, 4 e 4a é dado pela Figura 63.

Figura 63 – Diagrama de deformações no concreto em seções hexagonais nos domínios 3, 4 e 4a



Fonte: Elaborada pela autora.

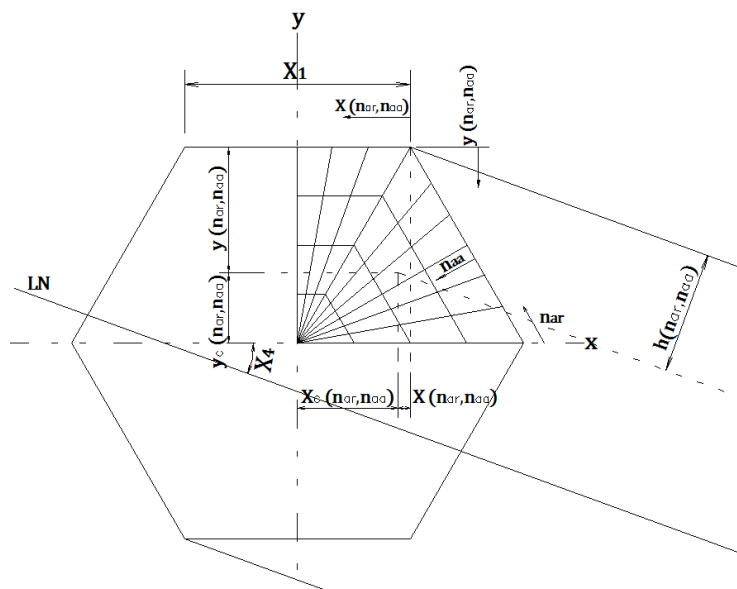
Por semelhança de triângulos na Figura 63, pode-se calcular a deformação em cada elemento da seção de concreto discretizada, conforme equação (249).

$$\varepsilon_c(n_{ar}, n_{aa}) = \frac{\varepsilon_{cu} * h_c(n_{ar}, n_{aa})}{x_3} \quad (249)$$

Conforme discretização da seção de concreto apresentada no item 3.3.2, cada elemento discretizado possui uma identificação dada por n_{ar} e n_{aa} que variam de 1 a 36 (n_{divr}) e de 1 a 20 (n_{diva}), respectivamente. Aqui serão descritas apenas as equações do sexto superior direito, tendo em vista que os demais sextos são

obtidos de forma análoga, porém com pequenas adaptações. A divisão da seção, bem como suas coordenadas podem ser vistas na Figura 64.

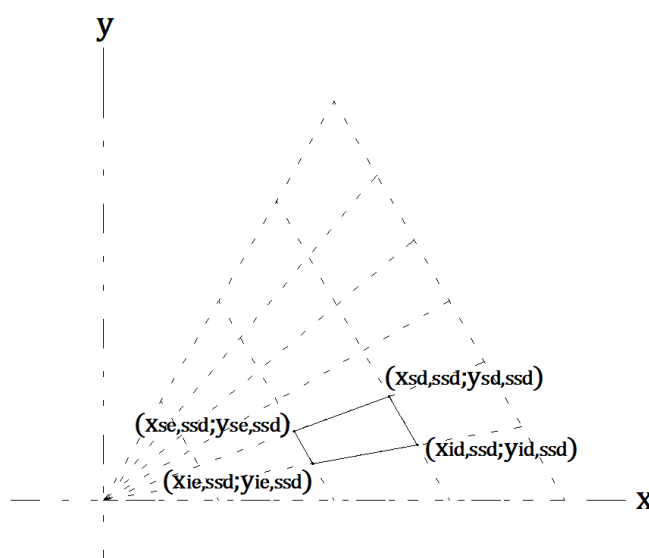
Figura 64 – Definição das coordenadas de um elemento de concreto na seção hexagonal



Fonte: Elaborada pela autora.

Dessa forma, para a obtenção do centro de gravidade dos trapézios irregulares primeiramente foram calculadas as coordenadas das 4 extremidades. Assim, para o sexto superior direito ($n_{aa} = 1$ a $n_{diva} - 1$ e $n_{ar} = 1$ a $n_{divr}/6$), as coordenadas das extremidades são mostradas na Figura 65 e dadas pelas equações (250) a (257).

Figura 65 – Definição das coordenadas das extremidades dos trapézios do sexto superior direito da seção hexagonal



Fonte: Elaborada pela autora.

$$x_{id,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = \left[x_1 - x_1 * \frac{(n_{aa} - 1)}{n_{diva}} \right] * \frac{tg(2\pi/6)}{tg[2\pi * (n_{ar} - 1)/n_{divr}] + tg(2\pi/6)} \quad (250)$$

$$y_{id,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = x_{id,ssd} * tg[2\pi * (n_{ar} - 1)/n_{divr}] \quad (251)$$

$$x_{sd,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = \left[x_1 - x_1 * \frac{(n_{aa} - 1)}{n_{diva}} \right] * \frac{tg(2\pi/6)}{tg(2\pi * n_{ar}/n_{divr}) + tg(2\pi/6)} \quad (252)$$

$$y_{sd,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = x_{sd,ssd} * tg(2\pi * n_{ar}/n_{divr}) \quad (253)$$

$$x_{ie,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = \left(x_1 - x_1 * \frac{n_{aa}}{n_{diva}} \right) * \frac{tg(2\pi/6)}{tg[2\pi * (n_{ar} - 1)/n_{divr}] + tg(2\pi/6)} \quad (254)$$

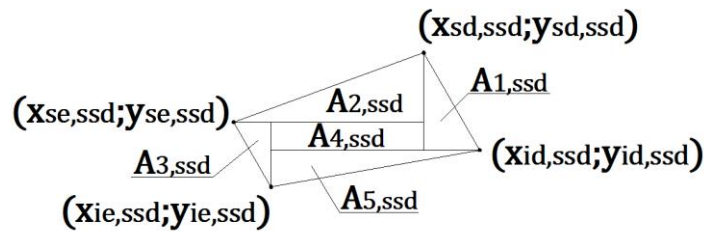
$$y_{ie,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = x_{ie,ssd} * tg[2\pi * (n_{ar} - 1)/n_{divr}] \quad (255)$$

$$x_{se,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = \left(x_1 - x_1 * \frac{n_{aa}}{n_{diva}} \right) * \frac{tg(2\pi/6)}{tg(2\pi * n_{ar}/n_{divr}) + tg(2\pi/6)} \quad (256)$$

$$y_{se,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = x_{se,ssd} * tg(2\pi * n_{ar}/n_{divr}) \quad (257)$$

A área total do trapézio é dividida, então, em 5 áreas menores, em formas de triângulos e retângulos, delimitadas pelos pontos das extremidades. Essas áreas podem ser vistas na Figura 66. Assim, por meio do momento estático, são definidas as coordenadas do centro de gravidade de cada elemento discretizado, conforme definido nas equações (263) e (264).

Figura 66 – Áreas para obtenção das coordenadas do centro de gravidade dos trapézios no sexto superior direito da seção hexagonal



Fonte: Elaborada pela autora.

$$A_{1,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = \frac{(x_{id,ssd} - x_{sd,ssd}) * (y_{sd,ssd} - y_{id,ssd})}{2} \quad (258)$$

$$A_{2,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = \frac{(x_{sd,ssd} - x_{se,ssd}) * (y_{sd,ssd} - y_{se,ssd})}{2} \quad (259)$$

$$A_{3,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = \frac{(x_{ie,ssd} - x_{se,ssd}) * (y_{se,ssd} - y_{ie,ssd})}{2} \quad (260)$$

$$A_{4,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = (x_{sd,ssd} - x_{ie,ssd}) * (y_{se,ssd} - y_{id,ssd}) \quad (261)$$

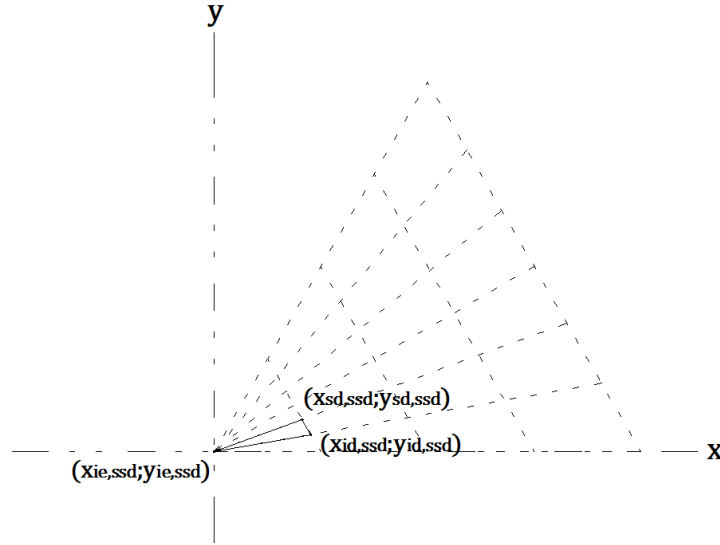
$$A_{5,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = \frac{(x_{id,ssd} - x_{ie,ssd}) * (y_{id,ssd} - y_{ie,ssd})}{2} \quad (262)$$

$$\begin{aligned} x_{c,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = & \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5} * \left\{ A_1 * \left[\frac{(x_{id} - x_{sd})}{3} + x_{sd} \right] + \right. \\ & + A_2 * \left[\frac{(x_{sd} - x_{se}) * 2}{3} + x_{se} \right] + A_3 * \left[\frac{(x_{ie} - x_{se}) * 2}{3} + x_{se} \right] \\ & \left. + A_4 * \left[\frac{(x_{sd} - x_{ie})}{2} + x_{ie} \right] + A_5 * \left[\frac{(x_{id} - x_{ie})}{3} + x_{ie} \right] \right\} \end{aligned} \quad (263)$$

$$\begin{aligned} y_{c,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = & \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5} * \left\{ A_1 * \left[\frac{(y_{sd} - y_{id})}{3} + y_{id} \right] + \right. \\ & + A_2 * \left[\frac{(y_{sd} - y_{se})}{3} + y_{se} \right] + A_3 * \left[\frac{(y_{se} - y_{ie}) * 2}{3} + y_{ie} \right] + \\ & \left. A_4 * \left[\frac{(y_{se} - y_{id})}{2} + y_{id} \right] + A_5 * \left[\frac{(y_{id} - y_{ie}) * 2}{3} + y_{ie} \right] \right\} \end{aligned} \quad (264)$$

Além disso, é necessário calcular as tensões resistidas pelas áreas triangulares internas à discretização, identificadas por $n_{aa} = n_{diva}$ e com n_{ar} variando de 1 a $n_{divr}/6$, para o sexto superior direito. Dessa forma, analogamente às áreas trapezoidais, foram definidas inicialmente as coordenadas das extremidades desses elementos, conforme Figura 67 e equações (265) a (270).

Figura 67 – Definição das coordenadas das extremidades dos triângulos do sexto superior direito da seção hexagonal



Fonte: Elaborada pela autora.

$$x_{id,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = \left[x_1 - x_1 * \frac{(n_{aa} - 1)}{n_{diva}} \right] * \frac{tg(2\pi/6)}{tg[2\pi * (n_{ar} - 1)/n_{divr}] + tg(2\pi/6)} \quad (265)$$

$$y_{id,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = x_{id,ssd} * tg[2\pi * (n_{ar} - 1)/n_{divr}] \quad (266)$$

$$x_{sd,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = \left[x_1 - x_1 * \frac{(n_{aa} - 1)}{n_{diva}} \right] * \frac{tg(2\pi/6)}{tg(2\pi * n_{ar}/n_{divr}) + tg(2\pi/6)} \quad (267)$$

$$y_{sd,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = x_{sd,ssd} * tg(2\pi * n_{ar}/n_{divr}) \quad (268)$$

$$x_{ie,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = \left(x_1 - x_1 * \frac{n_{aa}}{n_{diva}} \right) * \frac{tg(2\pi/6)}{tg[2\pi * (n_{ar} - 1)/n_{divr}] + tg(2\pi/6)} \quad (269)$$

$$y_{ie,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = x_{ie,ssd} * tg[2\pi * (n_{ar} - 1)/n_{divr}] \quad (270)$$

Os coeficientes a e b das equações das retas ($y = a * x + b$) que interligam os pontos médios das arestas dos triângulos e o centro do hexágono foram então calculados para obtenção das coordenadas do centro de gravidade dos triângulos.

$$a_{ie,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = \frac{y_{ie,ssd} - (y_{id,ssd} + y_{sd,ssd})/2}{x_{ie,ssd} - (x_{id,ssd} + x_{sd,ssd})/2} \quad (271)$$

$$b_{ie,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = y_{ie,ssd} - a_{ie,ssd} * x_{ie,ssd} \quad (272)$$

$$a_{sd,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = \frac{y_{sd,ssd} - (y_{id,ssd} + y_{ie,ssd})/2}{x_{sd,ssd} - (x_{id,ssd} + x_{ie,ssd})/2} \quad (273)$$

$$b_{sd,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = y_{sd,ssd} - a_{sd,ssd} * x_{sd,ssd} \quad (274)$$

As coordenadas do centro de gravidade são dadas pelas equações (275) e (276).

$$x_{c,tri,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = \frac{b_{sd,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) - b_{ie,ssd}(n_{ar}, n_{aa})}{a_{ie,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) - a_{sd,ssd}(n_{ar}, n_{aa})} \quad (275)$$

$$y_{c,tri,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = a_{ie,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) * x_{cg,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) + b_{ie,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) \quad (276)$$

Substituindo-se (263) e (264), bem como (275) e (276), em (199), obtém-se para $h(n_{ar}, n_{aa})$:

$$h(n_{ar}, n_{aa}) = \left[\frac{x_1 * \sqrt{3}}{2} - y_c(n_{ar}, n_{aa}) \right] * \cos(x_4) + \left[\frac{x_1}{2} - x_c(n_{ar}, n_{aa}) \right] * \sin(x_4) \quad (277)$$

E assim, pela equação (208), pode-se escrever:

$$\sigma_c(n_{ar}, n_{aa}) = \alpha_c * f_{cd} * \left(1 - \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_{cu} * [x_3 - h(n_{ar}, n_{aa})]}{\varepsilon_{c2} * x_3} \right\}^n \right) \quad (278)$$

Assim como nas outras seções, limitado a:

$$0 \leq \sigma_c(n_{ar}, n_{aa}) \leq \alpha_c * f_{cd} \quad (279)$$

- **Capacidade resistente da seção transversal**

A distribuição dos esforços resistentes na seção transversal dos pilares hexagonais nos domínios 3, 4 e 4a pode ser vista na Figura 68.

(A_c) é dada pela soma das áreas A_1 a A_5 , descritas em (258) a (262), enquanto a área de cada elemento triangular ($A_{c,tri}$) é dada pela equação (284).

$$base_{ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = \sqrt{(x_{id,ssd} - x_{sd,ssd})^2 + (y_{sd,ssd} - y_{id,ssd})^2} \quad (283)$$

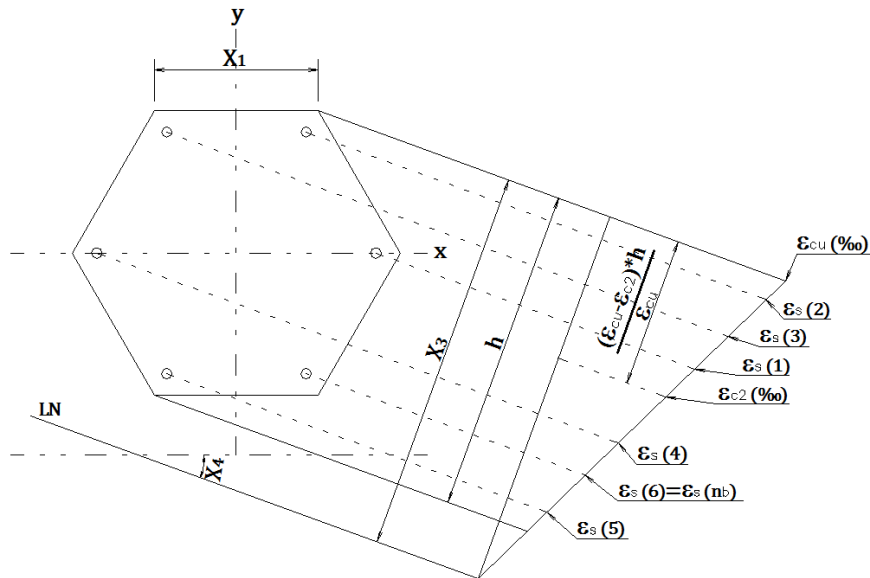
$$A_{c,tri,ssd}(n_{ar}, n_{aa}) = \frac{base_{ssd}(n_{ar}, n_{aa}) * x_1 * \sqrt{3}}{4 * n_{diva}} \quad (284)$$

B.2 ESFORÇOS RESISTENTES NO DOMÍNIO 5

- **Cálculo das tensões nas barras de aço**

O diagrama de deformações das seções hexagonais no domínio 5 está mostrado na Figura 69.

Figura 69 – Diagrama de deformações nas barras de aço em seções hexagonais no domínio 5

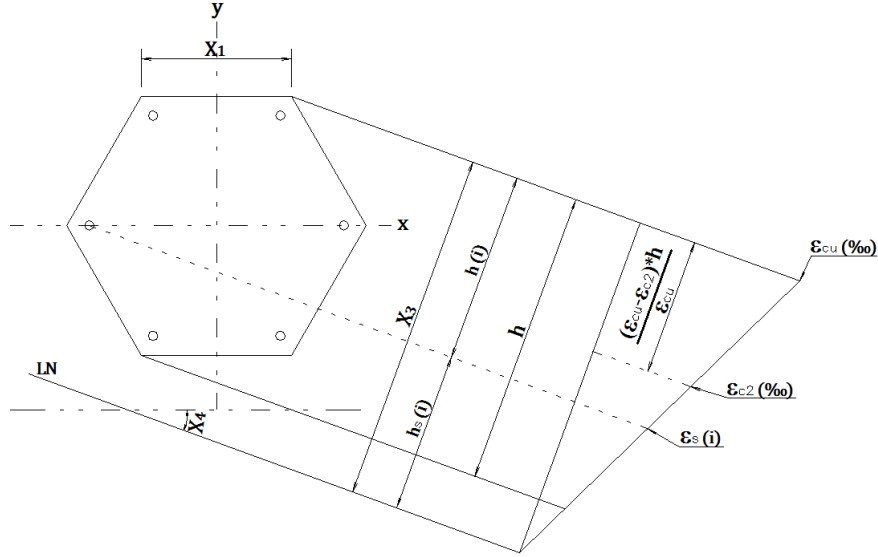


Fonte: Elaborada pela autora.

A deformação em uma barra genérica pode ser vista na Figura 70, a partir da qual define-se, por semelhança de triângulos, a relação:

$$\frac{\varepsilon_{c2}}{x_3 - \frac{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h}{\varepsilon_{cu}}} = \frac{\varepsilon_s(i)}{h_s(i)} \Rightarrow \varepsilon_s(i)(\%) = \frac{\varepsilon_{c2} * h_s(i) * \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} * x_3 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h} \quad (285)$$

Figura 70 – Diagrama de deformações em uma barra de aço genérica em seções hexagonais no domínio 5



Fonte: Elaborada pela autora.

Substituindo o valor de deformação na fórmula de tensão, tem-se:

$$\sigma_s(i) = E_s * \varepsilon_s(i) = \frac{E_s * \varepsilon_{c2} * h_s(i) * \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} * x_3 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h} \quad (286)$$

Os valores das coordenadas das barras, bem como a distância $h(i)$ de cada uma, são os mesmos definidos nas equações (234) a (246). E, substituindo-se (232) em (285), obtém-se, para (286):

$$\sigma_s(i) = \frac{E_s * \varepsilon_{c2} * [x_3 - h(i)] * \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} * x_3 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h} \quad (287)$$

Em que h é dado por

$$h = x_1 * \sqrt{3} * \cos(x_4) + x_1 * \sin(x_4) \quad (288)$$

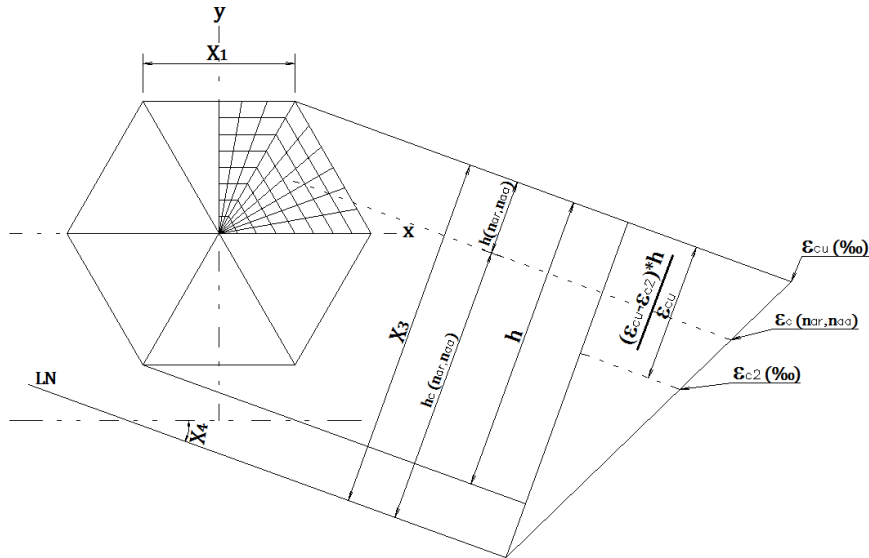
Além disso, assim como as demais seções, no domínio 5, toda a seção está comprimida e o limite máximo para o valor da tensão nas barras é f_{yd} .

$$\sigma_s(i) \leq f_{yd} \quad (289)$$

- **Cálculo das tensões na seção de concreto**

Para seções hexagonais, o diagrama de deformações no concreto é o mostrado na Figura 71.

Figura 71 – Diagrama de deformações no concreto em seções hexagonais no domínio 5



Fonte: Elaborada pela autora.

Por semelhança de triângulos na Figura 71, tem-se para as deformações:

$$\varepsilon_c(n_{ar}, n_{aa})(\%) = \frac{\varepsilon_{c2} * h_c(n_{ar}, n_{aa}) * \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} * x_3 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h} \quad (290)$$

Com os valores de $h(n_{ar}, n_{aa})$ de cada elemento de concreto definidos na expressão (277) e com h dado por (288), tem-se para a tensão:

$$\sigma_c(n_{ar}, n_{aa}) = \alpha_c * f_{cd} * \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_{cu} * [x_3 - h(n_{ar}, n_{aa})]}{\varepsilon_{cu} * x_3 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h} \right)^n \right] \quad (291)$$

$$\begin{aligned}
M_{x,Rd} = & \sum_{n_{ar}=1}^{n_{divr}} \sum_{n_{aa}=1}^{n_{diva}-1} [\sigma_c(n_{ar}, n_{aa}) * A_c(n_{ar}, n_{aa}) * y_c(n_{ar}, n_{aa})] + \\
& + \sum_{n_{ar}=1}^{n_{divr}} [\sigma_c(n_{ar}, n_{aa}) * A_{c,tri}(n_{ar}, n_{aa}) * y_{c,tri}(n_{ar}, n_{aa})] + \frac{x_2}{n_b} * \sum_{i=1}^{n_b} [\sigma_s(i) * y_s(i)]
\end{aligned} \tag{294}$$

$$\begin{aligned}
M_{y,Rd} = & \sum_{n_{ar}=1}^{n_{divr}} \sum_{n_{aa}=1}^{n_{diva}-1} [\sigma_c(n_{ar}, n_{aa}) * A_c(n_{ar}, n_{aa}) * x_c(n_{ar}, n_{aa})] + \\
& + \sum_{n_{ar}=1}^{n_{divr}} [\sigma_c(n_{ar}, n_{aa}) * A_{c,tri}(n_{ar}, n_{aa}) * x_{c,tri}(n_{ar}, n_{aa})] + \frac{x_2}{n_b} * \sum_{i=1}^{n_b} [\sigma_s(i) * x_s(i)]
\end{aligned} \tag{295}$$

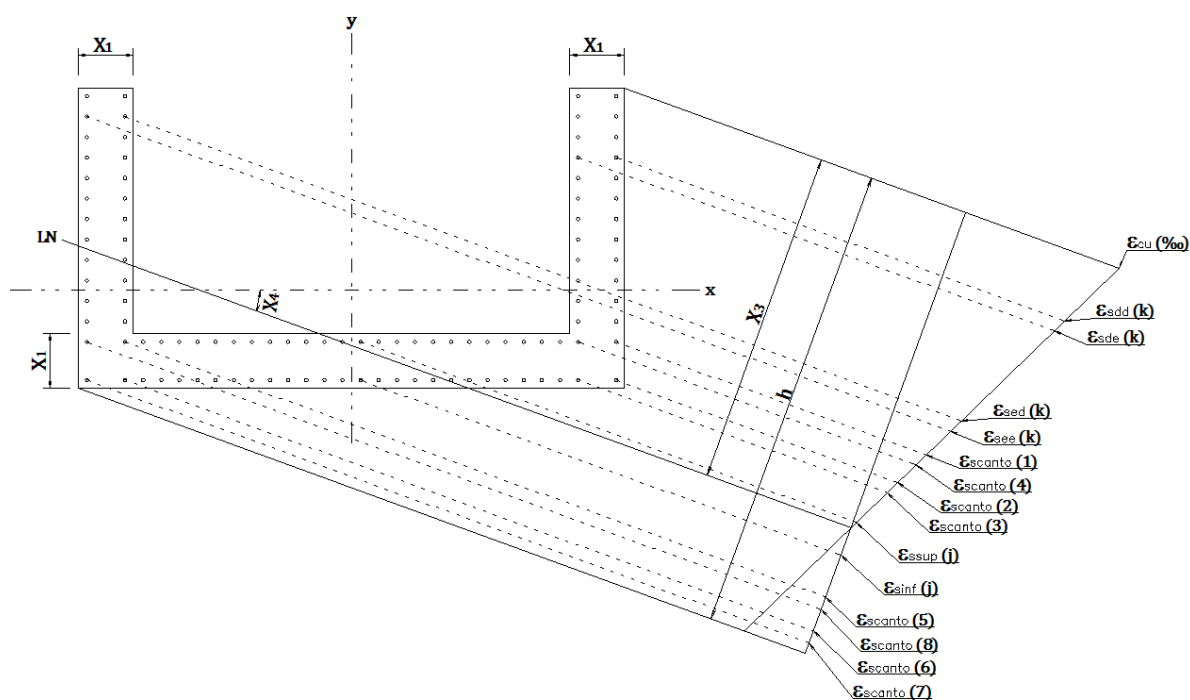
APÊNDICE C – PILARES EM “U”

C.1 ESFORÇOS RESISTENTES NOS DOMÍNIOS 3, 4 E 4a

- Cálculo das tensões nas barras de aço

Analogamente às demais seções, a seção em “U” possui o diagrama de deformações nos domínios 3, 4 e 4a mostrado na Figura 73.

Figura 73 – Diagrama de deformações em seções em “U” nos domínios 3, 4 e 4a

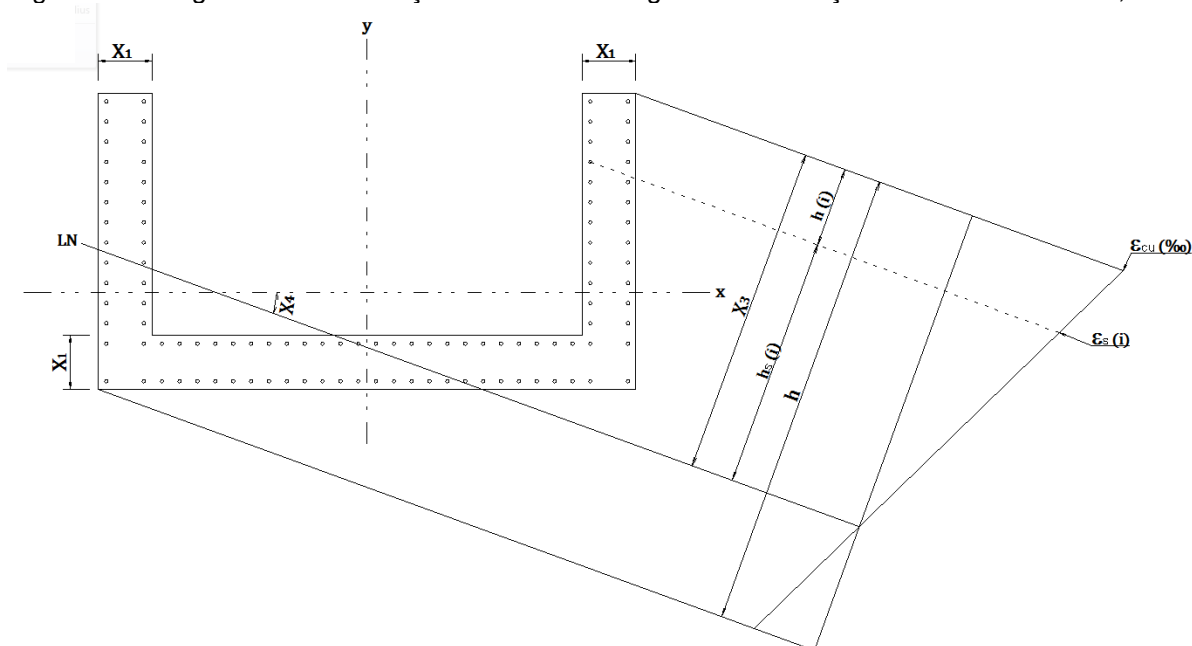


Fonte: Elaborada pela autora.

Com base nas variáveis definidas em 3.1 e na numeração das barras citada em 3.3.3, pode-se calcular a deformação em uma barra genérica pela equação (296) obtida por semelhança de triângulos, observada na Figura 74.

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{x_3} = \frac{\varepsilon_s(i)}{h_s(i)} \Rightarrow \varepsilon_s(i) = \frac{\varepsilon_{cu} * h_s(i)}{x_3} (\text{‰}) \quad (296)$$

Figura 74 – Diagrama de deformações em uma barra genérica em seções “U” nos domínios 3, 4 e 4a



Fonte: Elaborada pela autora.

A tensão em cada barra será, então:

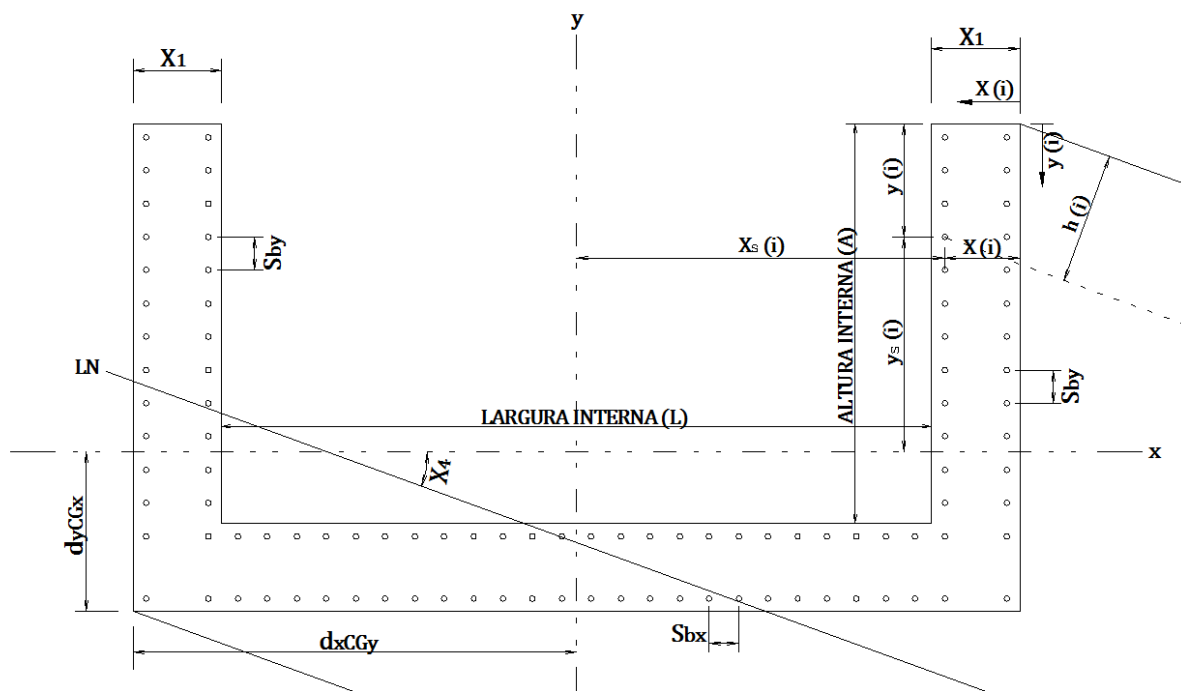
$$\sigma_s(i) = E_s * \varepsilon_s(i) = \frac{E_s * \varepsilon_{cu} * h_s(i)}{x_3} \quad (297)$$

Pela Figura 74, tem-se ainda que:

$$h_s(i) = x_3 - h(i) \quad (298)$$

Sendo $h(i)$ calculado conforme definido na equação (199) em função das coordenadas das barras. Para as seções em “U”, as coordenadas das barras são calculadas de acordo com sua posição na seção transversal e podem ser vistas na Figura 75.

Figura 75 – Cálculo das coordenadas de uma barra de aço genérica na seção em “U”



Fonte: Elaborada pela autora.

Para as barras da lâmina direita (face direita), com k variando de 1 a n_{by} , tem-se:

$$x_{dd}(k) = d' \quad (299)$$

$$y_{dd}(k) = d' + (k - 1) * S_{by} \quad (300)$$

$$x_{sdd}(k) = 2 * x_1 + L - d_{xCGy} - d' \quad (301)$$

$$y_{sdd}(k) = A + x_1 - d_{yCGx} - [d' + (k - 1) * S_{by}] \quad (302)$$

Sendo S_{by} o espaçamento entre barras na direção y , dado pela equação (303), d_{xCGy} a distância na direção x do canto inferior esquerdo da seção ao eixo y obtido pela expressão (304) e d_{yCGx} a distância na direção y do canto inferior esquerdo da seção ao eixo x , calculada por (305), conforme pode ser visto na Figura 75.

$$S_{by} = A/n_{by} \quad (303)$$

$$d_{xCGy} = \frac{(A + x_1) * x_1^2/2 + L * x_1 * (L/2 + x_1) + (A + x_1) * x_1 * (3 * x_1/2 + L)}{AreaU} \quad (304)$$

$$d_{yCGx} = \frac{x_1 * (A + x_1)^2/2 + L * x_1^2/2 + x_1 * (A + x_1)^2/2}{AreaU} \quad (305)$$

Em que

$$AreaU = 2 * (A + x_1) * x_1 + L * x_1 \quad (306)$$

Para as barras da lâmina direita (face esquerda) tem-se:

$$x_{de}(k) = x_1 - d' \quad (307)$$

$$y_{de}(k) = d' + (k - 1) * S_{by} \quad (308)$$

$$x_{sde}(k) = x_1 + L + d' - d_{xCGy} \quad (309)$$

$$y_{sde}(k) = A + x_1 - d_{yCGx} - [d' + (k - 1) * S_{by}] \quad (310)$$

Para as barras da lâmina esquerda (face direita) tem-se:

$$x_{ed}(k) = x_1 + L + d' \quad (311)$$

$$y_{ed}(k) = d' + (k - 1) * S_{by} \quad (312)$$

$$x_{sed}(k) = -d_{xCGy} + x_1 - d' \quad (313)$$

$$y_{sed}(k) = A + x_1 - d_{yCGx} - [d' + (k - 1) * S_{by}] \quad (314)$$

Para as barras da lâmina esquerda (face esquerda) tem-se:

$$x_{ee}(k) = 2 * x_1 + L - d' \quad (315)$$

$$y_{ee}(k) = d' + (k - 1) * S_{by} \quad (316)$$

$$x_{see}(k) = -d_{xCGy} + d' \quad (317)$$

$$y_{see}(k) = A + x_1 - d_{yCGx} - [d' + (k - 1) * S_{by}] \quad (318)$$

Para as barras da largura interna (face inferior), com j variando de 1 a n_{bx} , tem-se:

$$x_{inf}(j) = x_1 - d' + j * S_{bx} \quad (319)$$

$$y_{inf}(j) = A + x_1 - d' \quad (320)$$

$$x_{sinf}(j) = x_1 + L - d_{xCGy} + d' - j * S_{bx} \quad (321)$$

$$y_{sinf}(j) = d' - d_{yCGx} \quad (322)$$

Sendo S_{bx} o espaçamento entre barras na direção x, dado pela equação (323):

$$S_{bx} = (L + 2 * d') / (n_{bx} + 1) \quad (323)$$

Para as barras da largura interna (face superior), tem-se:

$$x_{sup}(j) = x_1 - d' + j * S_{bx} \quad (324)$$

$$y_{sup}(j) = A + d' \quad (325)$$

$$x_{ssup}(j) = x_1 + L - d_{xCGy} + d' - j * S_{bx} \quad (326)$$

$$y_{ssup}(j) = x_1 - d' - d_{yCGx} \quad (327)$$

Para as barras dos cantos, tem-se:

$$x_{canto}(1) = x_{canto}(2) = d' \quad (328)$$

$$x_{canto}(3) = x_{canto}(4) = x_1 - d' \quad (329)$$

$$x_{canto}(5) = x_{canto}(6) = x_1 + L + d' \quad (330)$$

$$x_{canto}(7) = x_{canto}(8) = 2 * x_1 + L - d' \quad (331)$$

$$y_{canto}(1) = y_{canto}(4) = y_{canto}(5) = y_{canto}(8) = A + d' \quad (332)$$

$$y_{canto}(2) = y_{canto}(3) = y_{canto}(6) = y_{canto}(7) = A + x_1 - d' \quad (333)$$

$$x_{scanto}(1) = x_{scanto}(2) = 2 * x_1 + L - d_{xCGy} - d' \quad (334)$$

$$x_{scanto}(3) = x_{scanto}(4) = x_1 + L + d' - d_{xCGy} \quad (335)$$

$$x_{scanto}(5) = x_{scanto}(6) = x_1 - d_{xCGy} - d' \quad (336)$$

$$x_{scanto}(7) = x_{scanto}(8) = d' - d_{xCGy} \quad (337)$$

$$y_{scanto}(1) = y_{scanto}(4) = y_{scanto}(5) = y_{scanto}(8) = x_1 - d_{yCGx} - d' \quad (338)$$

$$y_{scanto}(2) = y_{scanto}(3) = y_{scanto}(6) = y_{scanto}(7) = d' - d_{yCGx} \quad (339)$$

Desse modo, tem-se que:

$$h(i) = y(i) * \cos(x_4) + x(i) * \sin(x_4) \quad (340)$$

Com todas as variáveis da seção em “U” definidas, é possível, então, escrever a equação das tensões nas barras de aço:

$$\sigma_s(i) = \frac{E_s * \varepsilon_{cu} * [x_3 - h(i)]}{x_3} \quad (341)$$

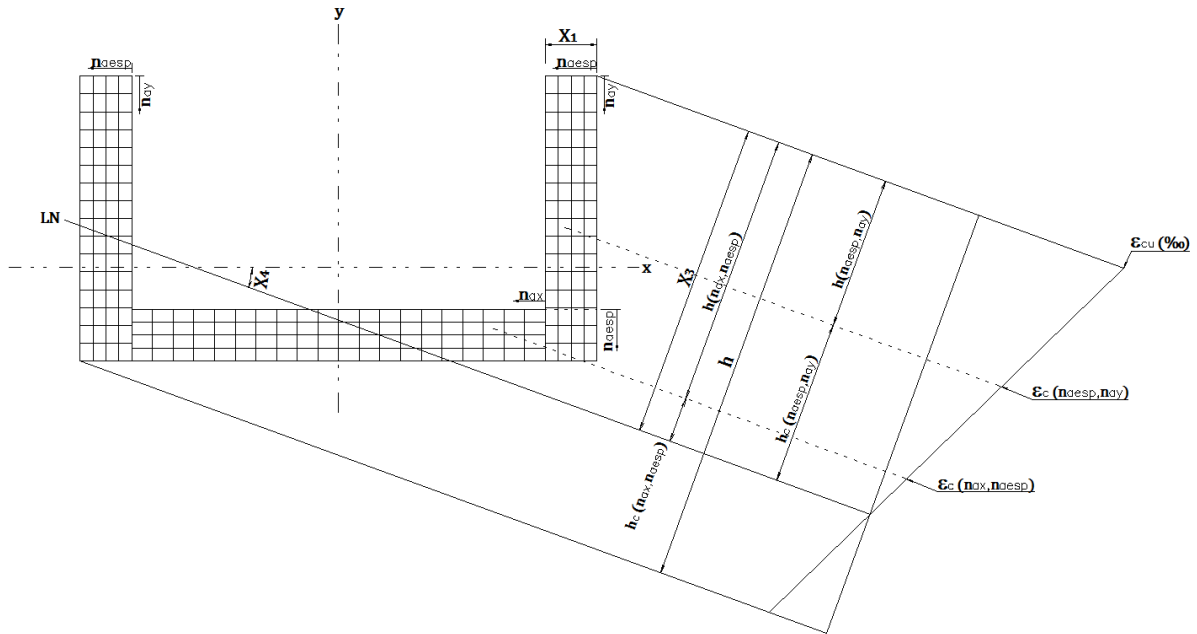
Assim como nas demais seções, tanto as tensões de tração quanto as de compressão devem ser limitadas à tensão de escoamento de cálculo do aço (f_{yd}). Ou seja, para a expressão (341), tem-se como limitantes:

$$-f_{yd} \leq \sigma_s(i) \leq f_{yd} \quad (342)$$

- **Cálculo das tensões na seção de concreto**

Para as seções em “U” nos domínios 3, 4 e 4a, o diagrama de deformações é o mostrado na Figura 76.

Figura 76 – Diagrama de deformações no concreto em seções em “U” nos domínios 3, 4 e 4a



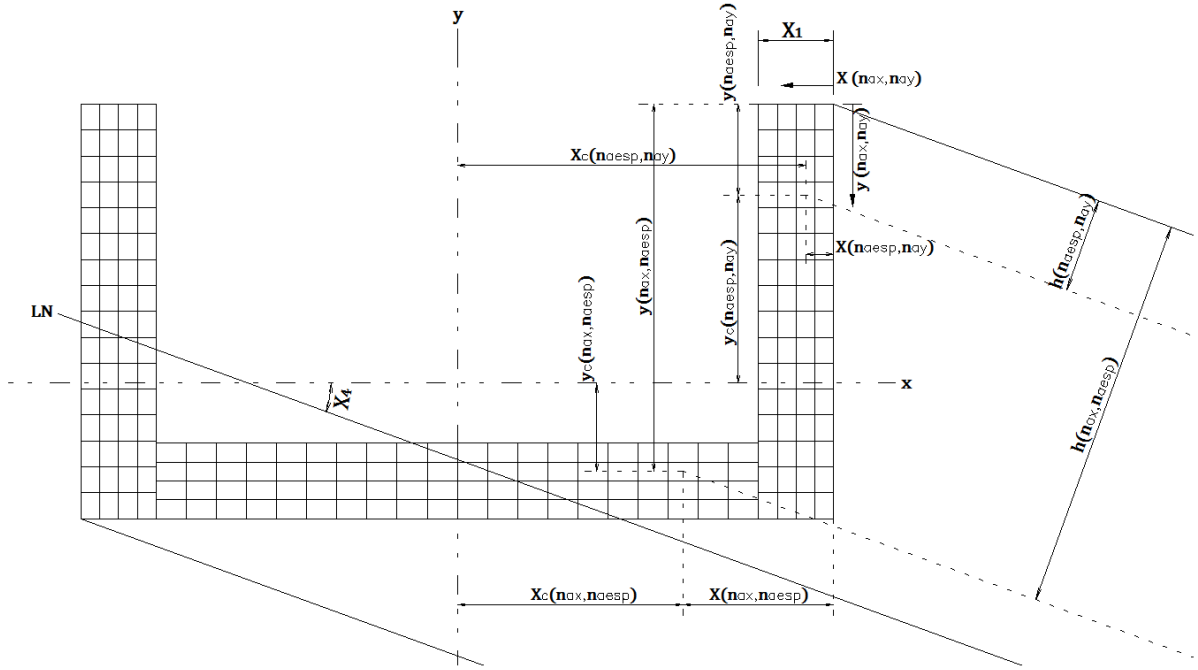
Fonte: Elaborada pela autora.

Por semelhança de triângulos na Figura 76, tem-se:

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{x_3} = \frac{\varepsilon_c(n_{ax}, n_{ay})}{h_c(n_{ax}, n_{ay})} \Rightarrow \varepsilon_c(n_{ax}, n_{ay}) = \frac{\varepsilon_{cu} * h_c(n_{ax}, n_{ay})}{x_3} \quad (343)$$

Conforme discretização da seção de concreto apresentada no item 3.3.3, verifica-se a divisão e as coordenadas dos elementos na Figura 77.

Figura 77 – Definição das coordenadas de um elemento de concreto na seção em “U”



Fonte: Elaborada pela autora.

Para os elementos da lâmina direita (altura interna + espessura), com n_{aesp} variando de 1 a n_{divesp} e com n_{ay} variando de 1 a n_{divy} , tem-se:

$$x_{ld}(n_{aesp}, n_{ay}) = 0,5 * S_{esp} + (n_{aesp} - 1) * S_{esp} \quad (344)$$

$$y_{ld}(n_{aesp}, n_{ay}) = 0,5 * S_y + (n_{ay} - 1) * S_y \quad (345)$$

$$x_{cld}(n_{aesp}, n_{ay}) = 2 * x_1 + L - d_{xCGy} - x_{ld}(n_{aesp}, n_{ay}) \quad (346)$$

$$y_{cld}(n_{aesp}, n_{ay}) = x_1 + A - d_{yCGx} - y_{ld}(n_{aesp}, n_{ay}) \quad (347)$$

Onde S_{esp} é dado pela equação (348) e S_y é obtido por meio da expressão (349).

$$S_{esp} = x_1 / n_{divesp} \quad (348)$$

$$S_y = (x_1 + A) / n_{divy} \quad (349)$$

Para os elementos da lâmina esquerda (altura interna + espessura), tem-se:

$$x_{le}(n_{aesp}, n_{ay}) = x_1 + L + 0,5 * S_{esp} + (n_{aesp} - 1) * S_{esp} \quad (350)$$

$$y_{le}(n_{aesp}, n_{ay}) = 0,5 * S_y + (n_{ay} - 1) * S_y \quad (351)$$

$$x_{cle}(n_{aesp}, n_{ay}) = x_1 - d_{xCGy} - [0,5 * S_{esp} + (n_{aesp} - 1) * S_{esp}] \quad (352)$$

$$y_{cle}(n_{aesp}, n_{ay}) = x_1 + A - d_{yCGx} - y_e(n_{aesp}, n_{ay}) \quad (353)$$

Para os elementos da lâmina inferior (largura interna), com n_{ax} variando de 1 a n_{divx} e n_{aesp} variando de 1 a n_{divesp} tem-se:

$$x_{linf}(n_{ax}, n_{aesp}) = x_1 + 0,5 * S_x + (n_{ax} - 1) * S_x \quad (354)$$

$$y_{linf}(n_{ax}, n_{aesp}) = A + 0,5 * S_{esp} + (n_{aesp} - 1) * S_{esp} \quad (355)$$

$$x_{clinf}(n_{ax}, n_{aesp}) = x_1 + L - d_{xCGy} - [0,5 * S_x + (n_{ax} - 1) * S_x] \quad (356)$$

$$y_{clinf}(n_{ax}, n_{aesp}) = x_1 - d_{yCGx} - [0,5 * S_{esp} + (n_{aesp} - 1) * S_{esp}] \quad (357)$$

Em que S_x é dado por:

$$S_x = L/n_{divx} \quad (358)$$

Analogamente à (340), tem-se:

$$h(n_{ax}, n_{ay}) = y(n_{ax}, n_{ay}) * \cos(x_4) + x(n_{ax}, n_{ay}) * \sin(x_4) \quad (359)$$

E assim, a tensão em cada elemento de concreto é dada por:

$$\sigma_c(n_{ax}, n_{ay}) = \alpha_c * f_{cd} * \left(1 - \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_{cu} * [x_3 - h(n_{ax}, n_{ay})]}{\varepsilon_{c2} * x_3} \right\}^n \right) \quad (360)$$

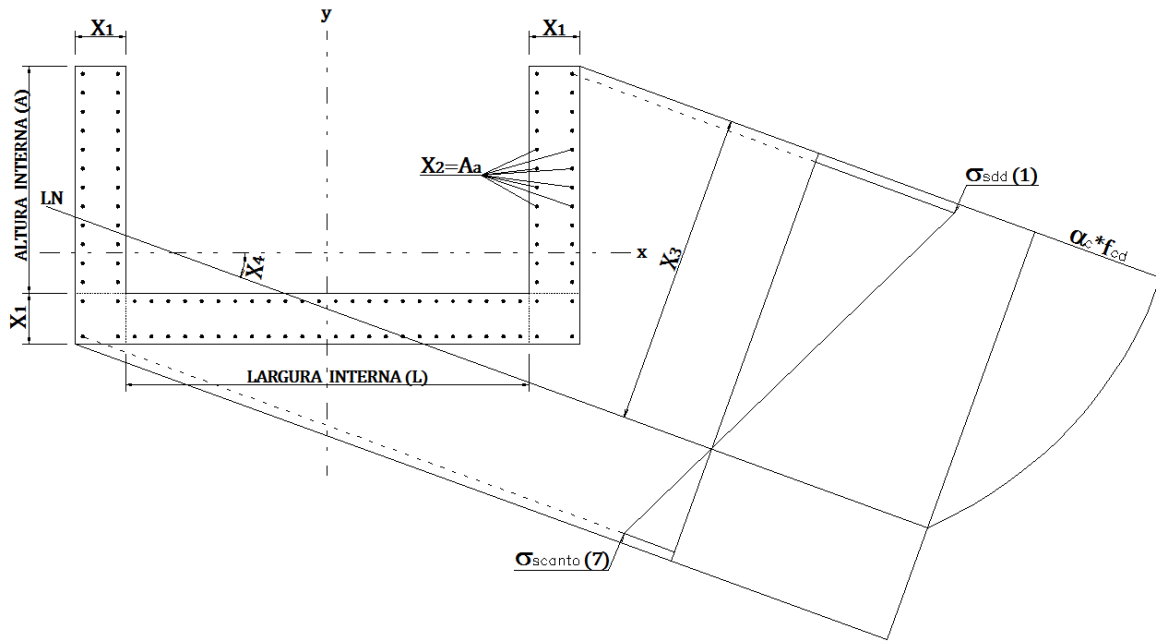
Assim como as demais seções, limitado a:

$$0 \leq \sigma_c(n_{ax}, n_{ay}) \leq \alpha_c * f_{cd} \quad (361)$$

- **Capacidade resistente da seção transversal**

A Figura 78 mostra como estão distribuídos os esforços resistentes na seção transversal de pilares em “U” nos domínios 3, 4 e 4a.

Figura 78 – Determinação dos esforços resistentes em pilares em “U” nos domínios 3, 4 e 4a



Fonte: Elaborada pela autora.

Desta forma, as expressões do esforço normal e momentos resistentes ficam assim descritas:

$$N_{Rd} = \sum_{n_{ax}=1}^{n_{divx}} \sum_{n_{ay}=1}^{n_{divy}} [\sigma_c(n_{ax}, n_{ay}) * A_c(n_{ax}, n_{ay})] + \frac{x_2}{n_b} * \sum_{i=1}^{n_b} \sigma_s(i) \quad (362)$$

$$M_{x,Rd} = \sum_{n_{ax}=1}^{n_{divx}} \sum_{n_{ay}=1}^{n_{divy}} [\sigma_c(n_{ax}, n_{ay}) * A_c(n_{ax}, n_{ay}) * y_c(n_{ax}, n_{ay})] + \frac{x_2}{n_b} * \sum_{i=1}^{n_b} [\sigma_s(i) * y_s(i)] \quad (363)$$

$$\begin{aligned}
M_{y,Rd} = & \sum_{n_{ax}=1}^{n_{divx}} \sum_{n_{ay}=1}^{n_{divy}} [\sigma_c(n_{ax}, n_{ay}) * A_c(n_{ax}, n_{ay}) * x_c(n_{ax}, n_{ay})] + \\
& + \frac{x_2}{n_b} * \sum_{i=1}^{n_b} [\sigma_s(i) * x_s(i)]
\end{aligned} \tag{364}$$

Nas quais para as tensões de concreto deve-se somar os valores obtidos nas 3 lâminas, isto é, das tensões nos elementos identificados por n_{ax}, n_{aesp} (localizados na largura interna) e dos elementos n_{aesp}, n_{ay} (localizados nas alturas da seção). As tensões são as calculadas nas expressões (341) e (360), as coordenadas x_c e y_c dos elementos de concreto são dadas em (346), (347), (352), (353), (356) e (357), enquanto as coordenadas das barras de aço (x_s e y_s) são obtidas em (301), (302), (309), (310), (313), (314), (317), (318), (321), (322), (326), (327) e (334) a (339) em função de sua posição na seção transversal. Além disso x_2 representa a área total de aço na seção e n_b o número de barras de armadura. A área de cada elemento de concreto é dada pela equação (365) para os elementos das alturas e pela expressão (366) para os elementos da largura interna.

$$A_c(n_{aesp}, n_{ay}) = S_{esp} * S_y = \frac{x_1}{n_{divesp}} * \frac{A + x_1}{n_{divy}} \tag{365}$$

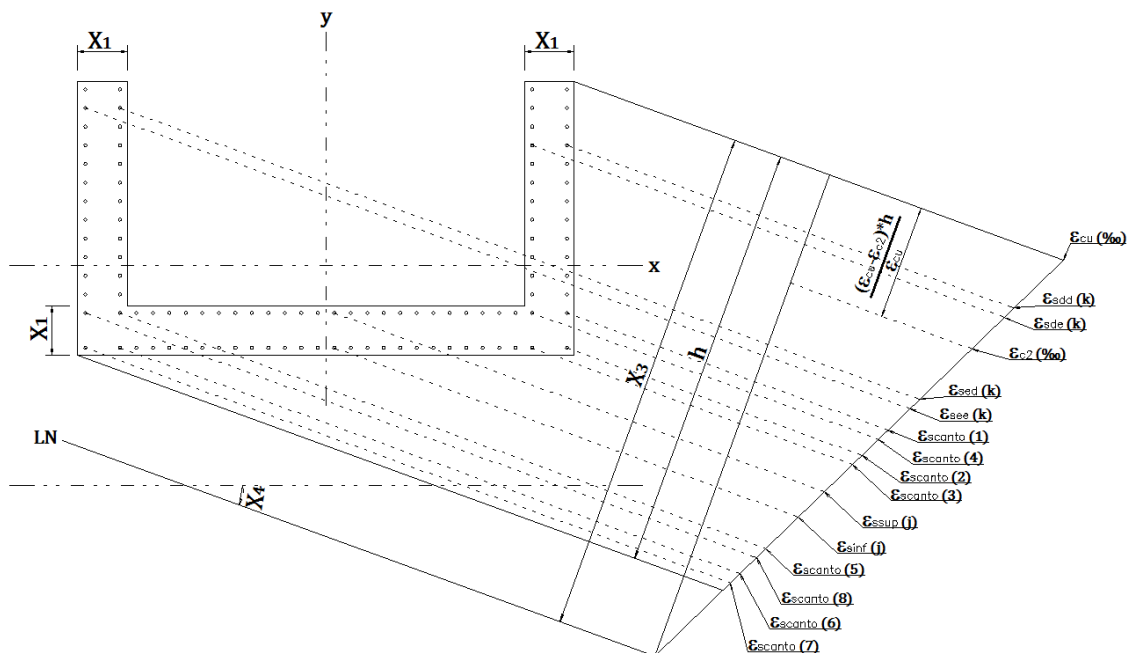
$$A_c(n_{ax}, n_{aesp}) = S_x * S_{esp} = \frac{L}{n_{divx}} * \frac{x_1}{n_{divesp}} \tag{366}$$

C.2 ESFORÇOS RESISTENTES NO DOMÍNIO 5

- **Cálculo das tensões nas barras de aço**

O diagrama de deformações das seções em “U” no domínio 5 está mostrado na Figura 79.

Figura 79 – Diagrama de deformações nas barras de aço em seções em “U” no domínio 5

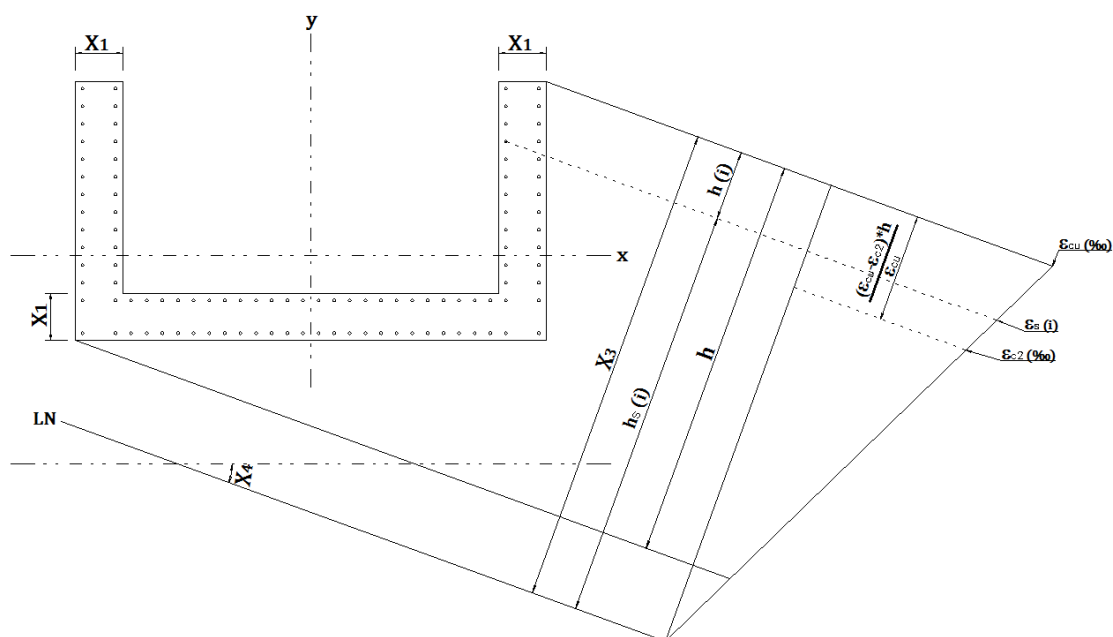


Fonte: Elaborada pela autora.

A deformação em uma barra genérica pode ser vista na Figura 80, a partir da qual define-se, por semelhança de triângulos, a relação:

$$\frac{\varepsilon_{c2}}{x_3 - \frac{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h}{\varepsilon_{cu}}} = \frac{\varepsilon_s(i)}{h_s(i)} \Rightarrow \varepsilon_s(i)(\%) = \frac{\varepsilon_{c2} * h_s(i) * \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} * x_3 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h} \quad (367)$$

Figura 80 – Diagrama de deformações em uma barra de aço genérica em seções em “U” no domínio 5



Fonte: Elaborada pela autora.

Substituindo o valor de deformação na fórmula de tensão, tem-se:

$$\sigma_s(i) = E_s * \varepsilon_s(i) = \frac{E_s * \varepsilon_{c2} * h_s(i) * \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} * x_3 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h} \quad (368)$$

Os valores das coordenadas das barras são os definidos nas equações (299), (300), (307), (308), (311), (312), (315), (316), (319), (320), (324), (325) e (328) a (333), assim como a distância $h(i)$ de cada uma, é dada pela expressão (340). Dessa forma, substituindo-se (298) em (368), obtém-se:

$$\sigma_s(i) = \frac{E_s * \varepsilon_{c2} * [x_3 - h(i)] * \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} * x_3 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h} \quad (369)$$

Sendo h dado pela equação (370), conforme pode ser visto na Figura 80.

$$h = (A + x_1) * \cos(x_4) + (L + 2 * x_1) * \sin(x_4) \quad (370)$$

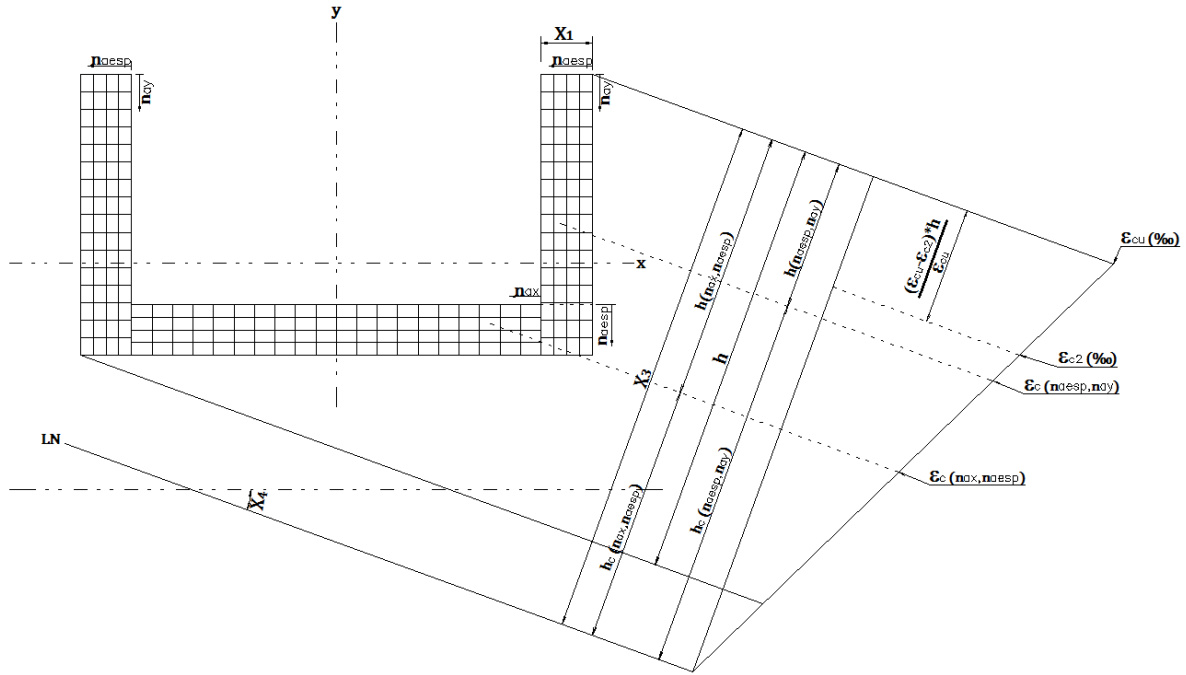
Assim como as demais seções, no domínio 5, toda a seção está comprimida e o limite máximo para o valor da tensão nas barras é f_{yd} .

$$\sigma_s(i) \leq f_{yd} \quad (371)$$

- **Cálculo das tensões na seção de concreto**

Para seções em “U”, o diagrama de deformações no concreto é o mostrado na Figura 81.

Figura 81 – Diagrama de deformações no concreto em seções em “U” no domínio 5



Fonte: Elaborada pela autora.

Por semelhança de triângulos na Figura 81, tem-se para as deformações:

$$\varepsilon_c(n_{ax}, n_{ay})(\%) = \frac{\varepsilon_{c2} * h_c(n_{ax}, n_{ay}) * \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} * x_3 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h} \quad (372)$$

Com os valores de $h(n_{ax}, n_{ay})$ de cada elemento de concreto definidos na expressão (359), tem-se para a tensão:

$$\sigma_c(n_{ax}, n_{ay}) = \alpha_c * f_{cd} * \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_{cu} * [x_3 - h(n_{ax}, n_{ay})]}{\varepsilon_{cu} * x_3 - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) * h} \right)^n \right] \quad (373)$$

Limitado a:

$$\sigma_c(n_{ax}, n_{ay}) \leq \alpha_c * f_{cd} \quad (374)$$

APÊNDICE D – FLUXOGRAMA

