UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA
MESTRADO EM ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

GÉSSICA GONÇALVES MARTINS

ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO DAS REPRESENTAÇÕES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO PÚBLICO DE SÃO MATEUS

SÃO MATEUS - ES
2018

GÉSSICA GONÇALVES MARTINS

ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO DAS REPRESENTAÇÕES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO PÚBLICO DE SÃO MATEUS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino na Educação Básica, na linha de pesquisa Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Lúcio Souza Fassarella

SÃO MATEUS - ES

2018

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Divisão de Biblioteca Setorial do CEUNES - BC, ES, Brasil)

M386e

Martins, Géssica Gonçalves, 1987-
Ensino de Análise Combinatória : um estudo das representações de professores de Matemática do Ensino Médio público de São Mateus / Géssica Gonçalves Martins. – 2018.
151 f. : il.

Orientador: Lúcio Souza Fassarella.
Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Universitário Norte do Espírito Santo.

1. Análise combinatória - Estudo e ensino. 2. Matemática (Ensino médio). 3. Professores de matemática. 3. Prática de ensino. I. Fassarella, Lúcio Souza. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Universitário Norte do Espírito Santo. III. Título.

CDU: 37

Elaborado por Marilzete de Almeida – CRB-6 ES-000721/O

GÉSSICA GONÇALVES MARTINS

ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO DAS REPRESENTAÇÕES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO PÚBLICO DE SÃO MATEUS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino na Educação Básica.

Aprovada em 02 de março de 2018.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Lúcio Souza Fassarella
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr. Moysés Gonçalves Siqueira Filho
Universidade Federal do Espírito Santo

Profª. Drª. Andressa Cesana
Universidade Federal do Espírito Santo

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelas oportunidades colocadas em meu caminho e porque Dele vem a força para continuar.

À minha família, pelo incentivo e por me ensinarem a humildade, a honestidade e o amor.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Lúcio Souza Fassarella, pela orientação completa e objetiva, pelas correções e sugestões durante toda pesquisa, por sua paciência, sempre. Enfim, por sua dedicação total a este trabalho.

Ao Prof. Dr. Moysés Gonçalves Siqueira Filho, por me acolher, sempre, em suas disciplinas, dando-me a oportunidade de aprender cada vez mais. Também por seus apontamentos cuidadosos, que ajudaram a melhorar a pesquisa.

À Prof.ª Dr.ª Andressa Cesana, pelo olhar atento, sempre disponível a ajudar, dando sugestões e colaborando imensamente com a escrita.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica que com carinho dedicaram seu tempo para nos ajudar nesta conquista.

Aos professores que aceitaram participar como sujeitos dessa pesquisa e com paciência contribuíram com suas perspectivas para essa investigação.

À professora Ana, que além de aceitar participar da entrevista, acolheu-me em suas aulas, com muita disponibilidade e carinho.

Aos queridos amigos, companheiros de turma, pela união e companheirismo. Especialmente este grupo de professores de matemática: Almir, Cezar, Mirian, Rosângela, Carlos, Roseane, Renata, Hairley, Andia, Alice e Jéssica. Amigos esses que me fizeram mais feliz nesses dois anos de convivência, e com os quais pude partilhar momentos importantes nesta caminhada.

Aos meus amigos que me incentivaram a persistir.

Enfim, a todos aqueles que de alguma forma estiveram presentes nessa caminhada.

Seremos reconhecidos socialmente como sujeitos do conhecimento e verdadeiros atores sociais quando começarmos a reconhecer-nos uns aos outros como pessoas competentes, pares iguais que podem aprender uns com os outros. Diante de outro professor, seja ele do pré-escolar ou da universidade, nada tenho a mostrar ou a provar – mas posso aprender com ele como realizar melhor nosso ofício comum (TARDIF, 2014, p. 244).

RESUMO

A Análise Combinatória tem sido considerada um tema difícil, tanto por alunos quanto por professores de Matemática, apesar da resolução de uma significativa classe de problemas de contagem requerer apenas conhecimentos básicos, dentre os quais o Princípio Multiplicativo. Vimos então que a razão principal das dificuldades didáticas com esse tema está na confluência de dois fatores: (i) os problemas combinatórios não admitem uma padronização que permita reduzir sua resolução à aplicação de algoritmos simples e (ii) o modo de ensinar Matemática na Educação Básica, que prioriza uma abordagem mecânica dos conteúdos. Corroborando esse entendimento, acreditamos que o ensino de Combinatória centralizado em definições e fórmulas, em detrimento do desenvolvimento do raciocínio estratégico, não favorece a aprendizagem e a capacidade de resolver problemas. Este é um estudo de campo exploratório-descritivo realizado ao longo dos anos 2016 e 2017 que, utilizando três instrumentos de coleta de dados (entrevista, questionário *on-line* e observação), pesquisou o tema com vinte professores de matemática das oito Escolas Estaduais de Ensino Médio de São Mateus/ES. Especificamente, buscamos analisar as representações dos professores relativas à Combinatória por meio dos pressupostos da História Cultural: representação, prática e apropriação, propostos por Roger Chartier; estratégias e táticas, por Michel De Certeau; cultura escolar, por Dominique Julia e disciplinas escolares, por André Chervel. Como resultado, constatamos que a maioria dos professores considera que a Análise Combinatória é um dos tópicos mais difíceis de ensinar no Ensino Médio e declara que o tema não foi devidamente estudado na sua formação inicial ou continuada. Além disso, para suprir essa carência eles utilizam apenas o livro didático e a internet. Os professores pesquisados também não se apercebem da autonomia que possuem em meio às relações de estratégia e tática, no contexto escolar.

Palavras-chave: Análise combinatória – Estudo e ensino. Matemática (Ensino médio). Professores de matemática – Prática de ensino. História cultural.

ABSTRACT

The Combinatorial Analysis has been considered a difficult subject by both students and teachers of Mathematics, although the resolution of a significant class of counting problems requires only basic knowledge, among which is the Multiplicative Principle. We saw that the main reason for the didactic difficulties with this theme lies in the confluence of two factors: (i) combinatorial problems do not admit a standardization that reduces its resolution to the application of simple algorithms and (ii) the way of teaching Mathematics in Basic Education, which prioritizes a mechanical approach to the content. Ratifying this understanding, we believe that the teaching of Combinatorial Analysis centralized in definitions and formulas, to the detriment of the development of the strategic reasoning, does not favor learning and the ability to solve problems. This is an exploratory-descriptive field study, carried out over the years 2016 and 2017, which, using three instruments of data collection (interview, on-line questionnaire and observation), researched the subject with twenty mathematics teachers from eight State High Schools in São Mateus / ES (Brazil). Specifically, we seek to analyze the representations of teachers related to the Combinatorial Analysis through the assumptions of Cultural History: representation, practice and appropriation, proposed by Roger Chartier; strategies and tactics, by Michel De Certeau; school culture, by Dominique Julia and school subjects, by André Chervel. As a result, we found that most teachers consider that Combinatorial Analysis is one of the most difficult topics to teach in High School and states that the topic was not properly studied in theirs initial or continuing education. In addition, to fill this gap, they use only the textbook and the internet. The researched teachers also do not realize the autonomy that they have in the ambit of the relations of strategy and tactics, in the school context.

Keywords: Combinatorial analysis – Study and teaching. Mathematics (High school). Mathematics teachers – Student teaching. Cultural history.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

CAEd/UFJF	Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação da Universidade Federal de Juiz de Fora
CEUNES	Centro Universitário do Norte do Espírito Santo
DMA	Departamento de Matemática Aplicada
FRM	Fundação Roberto Marinho
PAEBES	Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PFC	Princípio Fundamental da Contagem
PUC-SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
RP	Resolução de Problemas
SEDU	Secretaria de Estado da Educação do Espírito Santo
SEE	Secretaria de Estado de Educação de São Paulo
SER	Superintendência Regional de Educação

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A primeira técnica matemática apresentada à criança é contar, ou seja, saber quantos elementos tem determinado conjunto. Nesse sentido, as operações aritméticas são também motivadas por problemas de contagem. Por isso, a busca por técnicas de contagem está diretamente vinculada à forma pela qual as pessoas têm seu primeiro contato com a Matemática. Em linhas gerais, a Análise Combinatória, ou simplesmente Combinatória, é o ramo da matemática que nos permite resolver problemas nos quais é necessário enumerar e/ou classificar objetos de um conjunto finito, satisfazendo determinadas condições. Os problemas com enunciados simples tornam-se envolventes porque exigem raciocínio e criatividade para resoluções únicas. No entanto, é um assunto apontado como grande obstáculo para alunos e professores, fato que pode estar relacionado à forma mecânica com que tradicionalmente é trabalhado na Educação Básica, calcada em definições e fórmulas.

Iniciamos estudos sobre a temática Combinatória, quando de curso de especialização em Ensino na Educação Básica do CEUNES (Centro Universitário do Norte do Espírito Santo), durante os anos de 2012 e 2013. Na ocasião, tivemos a oportunidade de escolher um tema em que nos imprimia certa insegurança e, em nossa abordagem a outros professores, com mesma formação acadêmica, pudemos constatar indícios da mesma insegurança e dificuldades ao trabalhar com o ensino de Combinatória.

Apesar de ter sido um estudo superficial, apoiado em apenas um questionário, essa reflexão permitiu que os professores participantes dissessem dos seus conhecimentos e dos anseios relacionados ao tema. Essas percepções aumentaram em nós a vontade de pesquisar mais profundamente as convicções dos professores relativas ao processo de ensino e aprendizagem de Combinatória, bem como os fatores responsáveis por sua inadequação.

Como fruto desse trabalho, publicamos um artigo (MARTINS; SILVA, 2014), no qual mostramos pontos relevantes da pesquisa e indicamos alguns desdobramentos possíveis para outros estudos, que também nos levaram a propor esta nova pesquisa para o mestrado.

O foco principal da pesquisa de especialização foi a relação entre a formação inicial do professor e a sua prática ao desenvolver o processo de ensino e aprendizagem quanto ao tema Análise Combinatória. Assim o objetivo geral daquela pesquisa foi investigar as perspectivas dos professores de matemática formados no CEUNES, com relação à aplicação do tema Análise Combinatória em sala de aula.

A Teoria da Transposição Didática de Yves Chevallard fundamentou, teoricamente, as intenções desse trabalho, apesar de não termos nos aprofundado na teoria, em suas discussões. De maneira geral, pudemos constatar que os professores pesquisados não assimilaram com plenitude o conceito de Análise Combinatória e, também, a maioria acreditava que sua formação inicial em Licenciatura Plena em Matemática no CEUNES, não havia sido suficiente para lecionar o tema em questão.

Outro fato que chamou atenção foi que a maioria dos profissionais participantes respondeu que, para complementar seus estudos nessa área da matemática, recorreu aos livros do Ensino Médio e/ou à Internet. Essas fontes são importantes, mas sabemos que não são completas. A pesquisa também evidenciou que os professores não conhecem as diretrizes propostas pelo governo para nortear o ensino no Brasil e no Estado.

Assim, apontamos alguns desdobramentos para novas pesquisas:

a) o estudo de como estão interligadas as disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática do CEUNES que tratam dos conteúdos que sustentam o ensino de Análise Combinatória;
b) outro estudo seria acerca das dificuldades dos alunos do Ensino Médio na compreensão da Combinatória, indicando sugestões de problemas interessantes, bem como sugestões de como trabalhar esse conteúdo;
c) uma pesquisa a respeito de como o professor reconstrói determinado saber, investigando como ele desenvolve este conhecimento na sala de aula.

Apesar de termos tentando por outros caminhos, inicialmente, podemos dizer que nossa pesquisa de mestrado contempla, em alguma medida, o último desdobramento sugerido, com outro enfoque teórico e mais profundamente, mas procuramos avançar no sentido das relações do trabalho docente.

Depois, tivemos oportunidade de avançar nossos estudos sobre a temática cursando a disciplina Tópicos de Análise Combinatória e Probabilidade, do mestrado em Ensino na Educação Básica, no primeiro semestre de 2016, com professor Dr. Lúcio Souza Fassarella e mais cinco colegas professores de matemática. Com o objetivo de consolidar nossos conhecimentos e dominar princípios e metodologias didáticas para o ensino desses tópicos, estudamos a Combinatória e a Probabilidade com ênfase em aspectos didáticos. Dessa forma, compartilhando experiências, aprendemos muito do tratamento com esses conteúdos, principalmente a Combinatória.

Inicialmente, nossa pesquisa de mestrado seria em torno de um projeto de extensão concebido como um espaço de formação continuada para dialogar com professores de matemática sobre Combinatória, envolvendo teoria e prática, revisando o tema e discutindo aspectos do processo de ensino e aprendizagem. Buscamos o auxílio da Superintendência Regional de Educação (SER) de São Mateus, apresentando um projeto do curso, para intermediar nosso contato com os professores do Ensino Médio e discutirmos com sua equipe pedagógica a melhor forma de atendê-los, com relação à carga horária e cronograma. Fomos muito bem recebidos pelos responsáveis que, animados com o projeto, se comprometeram a fazer um levantamento para ver quantos professores gostariam de participar do curso.

Nosso projeto oferecia um curso de 40 horas, mas na oportunidade da visita à SER, fomos orientados a dobrar essa carga, porque seria mais interessante para os professores poderem utilizar na contagem de títulos em próximos processos seletivos. Finalizamos então a elaboração do projeto de formação continuada focalizando Combinatória, oferecendo 80 horas de curso, das quais 60 horas seriam distribuídas em quinze encontros de 4 horas cada e 20 horas seriam reservadas a atividades extraclasse inseridas na prática dos professores participantes.

A SRE nos retornou com uma lista de 17 professores interessados no curso. Elaboramos um ofício, por meio do CEUNES, solicitando um espaço na Superintendência para os encontros, pensando na viabilidade para os professores. Com a devida autorização do órgão, confirmamos então o curso. Os encontros aconteceriam no espaço da SRE, às quartas-feiras, das 18 horas às 22 horas, durante os meses de março, abril, maio e junho de 2017.

Para finalizar, enviamos por *e-mail* nossa proposta (APÊNDICE A) para os professores interessados, com todas as informações, inclusive um calendário para os encontros, e pedimos que confirmassem sua participação. Fomos surpreendidos com apenas três confirmações!

Voltamos mais duas vezes à SRE para conversar sobre essa divergência, mas não conseguimos avançar no sentido de formar uma turma com pelo menos dez professores, como pensávamos ser interessante. Diante do ocorrido, reconhecendo que não seria viável aplicar nosso projeto, passamos então para uma nova abordagem aos professores. Decidimos ir até as escolas, entrevistá-los sobre o assunto e observar como acontecem as aulas de Combinatória, e talvez descobrir porque nossa proposta inicial foi frustrada.

Temos, então, um conteúdo que requer princípios matemáticos básicos e que, no entanto, é apontado pelos professores como complicado e difícil de ensinar. Partindo da constatação dessa dificuldade, desenvolvemos uma pesquisa como o intuito de conhecer de modo aprofundado as relações dos professores do Ensino Médio com o saber referente à Combinatória e como eles abordam esse assunto nas suas aulas. Dessa forma, esta investigação possui a seguinte questão norteadora: **Quais são as representações[1] do professor de Matemática sobre Combinatória e como elas repercutem na sua prática pedagógica?**

O projeto assume a forma de uma pesquisa qualitativa do tipo exploratório-descritiva (GIL, 2010) realizada com professores que atuam na rede pública estadual de ensino de São Mateus – ES. Para coleta de dados, empregamos entrevista semiestruturada, questionário *on-line* e o método observacional (MARCONI; LAKATOS, 2011). Para análise das comunicações aplicamos a técnica de triangulação (TRIVIÑOS, 1992). O material coletado foi analisado a partir da sequência dada por Gil (2010), centrada na categorização para análise dos dados.

As três formas definidas para coleta de dados foram conduzidas sucessivamente:

---

1 Baseando-nos na História Cultural, especificamente por Roger Chartier (2002), entendemos que representações são registros ou comunicações, constituídos por um sujeito ou grupo em sua relação com o social, ou seja, associados e implicados por sua existência. Desse modo, estudar as representações significa compreender as narrativas por meio de uma reflexão que articula a comunicação e a realidade do sujeito numa reconstituição da experiência (vide Capítulo 3).

a) entrevista semiestruturada, feita com professores de Matemática que atual nas escolas urbanas da rede estadual da cidade São Mateus-ES, buscando conhecer formação acadêmica, experiência profissional e prática pedagógica no ensino de Análise Combinatória;
b) questionário *on-line*, com o fito de obter informações mais detalhadas sobre as representações relacionadas à Análise Combinatória;
c) e observação não participante da prática pedagógica nas escolas estaduais em São Mateus.

O aprofundamento das questões se dará por meio dos conceitos da História Cultural. Para isso, recorremos aos conceitos de **representação***,* **prática** e **apropriação,** propostos por Chartier (2002); **estratégia** e **tática**, apresentados por De Certeau (1994); e **cultura escolar**, por Julia (2001). Tais conceitos, explicitados em suas particularidades por nossa releitura no Capítulo 3 desse trabalho, possibilitaram a análise de todo material, partindo do seguinte objetivo geral: ***analisar as representações dos professores de Matemática relativas à Análise Combinatória e suas repercussões na prática pedagógica****.*

Dando um panorama do caminho que percorremos, alguns passos foram importantes em busca do nosso objetivo principal: 1) selecionamos um grupo de professores de matemática da rede estadual de ensino em São Mateus, que estavam ensinando Combinatória no Ensino Médio; 2) elaboramos e aplicamos uma entrevista semiestruturada junto ao grupo de professores selecionados; 3) produzimos e encaminhamos aos professores, por *e-mail*, um questionário *on-line*; e 4) observamos a realização do ensino de Combinatória com uma professora desse grupo.

Nesse sentido, foram estabelecidos dois objetivos específicos:

- considerar fatores que direta ou indiretamente influenciam o trabalho docente relativo à Combinatória;
- reconhecer as possibilidades pedagógicas do ensino de Combinatória.

Assim, o presente trabalho está estruturado como descrito a seguir.

O capítulo um apresenta alguns aspectos do ensino de Matemática, especificamente do ensino de Combinatória, que achamos relevantes para compreender mais sobre o trabalho docente. Destacamos alguns autores que, como profissionais da educação, nos ensinam com suas experiências e apontamos alguma bibliografia que percebemos importante, principalmente para o ensino da temática mencionada no nível médio.

No segundo capítulo, recordamos algumas produções acerca do ensino de Combinatória que nos ajudaram a traçar o formato desta pesquisa. Para tanto, realizamos buscas na plataforma da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações e, do que obtivemos, selecionamos sete dissertações e uma tese para nos ajudar a encontrar nosso próprio caminho.

Os pressupostos da História Cultural seguem apresentados no capítulo três, a partir de uma releitura nossa. Levantamos alguns questionamentos que, mesmo não sendo todos respondidos, fizeram parte de nossas reflexões.

Apresentamos a metodologia desta pesquisa, com mais detalhes, e fazemos alguns comentários gerais sobre os instrumentos para coleta de dados, no capítulo quatro.

O capítulo cinco traz uma descrição detalhada do material que coletamos na pesquisa de campo, já com algumas observações.

Passamos então ao capítulo seis, o qual traz nos aspectos da triangulação, uma apresentação e análise das representações que identificamos por meio dos três instrumentos de coleta de dados utilizados.

No capítulo de conclusão fazemos algumas considerações finais, inferências e deixamos algumas sugestões para novas pesquisas.

1 ESTUDANDO UM POUCO MAIS ACERCA DO ENSINO DE MATEMÁTICA E ESPECIFICAMENTE ACERCA DO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Frequentemente o professor de matemática se vê diante da situação de ter que desenvolver sua ação pedagógica em sala de aula a partir de uma formação que não lhe ensinou problematizar uma série de questões fundamentais à/para/da prática escolar. Mesmo que essa seja uma dificuldade contornável, é o professor que em seu trabalho precisa preencher esta lacuna, salientam Moreira e David (2016, p. 102).

Foi refletindo sobre a prática docente e as dificuldades que o professor encontra ao tentar executar seu ofício, que escrevemos este capítulo trazendo para o diálogo obras que percebemos relevantes em nossos estudos e que podem contribuir no sentido de ajudar o professor que busca complementar seu conhecimento, focalizando alguns aspectos do ensino de matemática e particularmente do ensino de Combinatória.

1.1 ENSINO DE MATEMÁTICA

A Matemática é uma área do conhecimento amplamente presente na escolaridade básica e, por vários motivos, seu ensino é justificado. Segundo Pais (2013), dentre as principais atribuições dessa disciplina é sua contribuição para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de abstração e para a formação intelectual do aluno. Sua presença é real nas contagens do dia a dia, no cotidiano dos alunos como cidadãos, estando presente na descrição científica de fenômenos físicos, químicos, biológicos e sociais. Além disso, é inegável sua utilização como instrumento de classificação e seleção nos testes e exames em geral. Igualmente, esses se tornam os principais argumentos dos professores para afirmar a relevância do ensino de matemática. No entanto, justificar não é suficiente para converter a Matemática ao mundo vivenciado pelo educando, no qual sua existência realmente tem sentido, os obstáculos são superados e o processo de ensino e aprendizagem é contemplado.

Dentre as possibilidades nesse movimento, não deve ser a Matemática resumida à sua importância prática. De fato, seus valores como ciência historicamente construída e seus valores utilitários têm que ser interpretados de maneira articulada, para que a vida escolar possa ultrapassar o plano da utilidade imediata. Como também não compõe uma opção interessante priorizar esse ensino por uma abordagem teórica e abstrata, apenas.

As estruturas matemáticas ancoradas em uma forte tradição exercem uma influência considerável na forma usual de conduzir a prática de ensino, como se fosse possível ensinar para sujeitos de outros grupos conforme o objetivo e os meios da matemática acadêmica, sem construir linhas de articulação entre os saberes científico e escolar. Nesse sentido, o desafio pedagógico está em combinar as diversas formas de comunicação no território de uma disciplina escolar.

As ações didáticas, por meio dos métodos e estratégias de ensino, têm a função de favorecer o que Pais (2013) chama de “fazer matemática na escola”. Essa é uma dinâmica oposta à prática de reprodução do saber e as tarefas mecanizadas, a fim de minimizar a repetição e expandir a criatividade. Compartilhadas por professores e alunos, as ações devem proporcionar ao aluno uma interação com o conteúdo, de modo que ele aceite o desafio de ser protagonista na elaboração do próprio conhecimento em um desenvolvimento diferenciado, mediado pelo professor.

> Em outros termos, o professor proporciona meios pelos quais o aluno é levado a fazer Matemática, no sentido de se envolver efetivamente com o conteúdo e buscar expandir sua autonomia e raciocínio. Por isso, a natureza dessas atividades afasta-se da visão na qual as estruturas são impostas como uma precedência (PAIS, 2013, p. 29).

Mais do que uma simples transferência de informação, a comunicação tem um sentido muito mais profundo como via facilitadora da aprendizagem, acrescentam Alro e Skovsmose (2010). Nesses termos, eles trazem uma definição mais específica para o diálogo no que se refere à comunicação na sala de aula de matemática. Para além de uma conversação convencional, dialogar implica estabelecer condições para que o aluno tenha liberdade de aprender.

Nessa construção, os autores destacam a aproximação como sendo um fenômeno que acontece quando os alunos expõem suas expectativas e apreensões diante as atividades propostas pelo professor. Esses momentos fornecem elementos pertinentes para análise da aprendizagem. Contudo, afirmam que nem sempre esse tipo de evento emerge da comunicação, podendo ser inibido por duas situações: 1) a sequência didática pode ter sido organizada de tal forma que as atividades fiquem nitidamente estabelecidas a ponto de os alunos não manifestarem nenhum questionamento; e 2) os alunos já admitiram um comportamento instrumentalizado e não se interessam mais pelo que estão fazendo. Oportunizar aos estudantes situações para que busquem a aproximação e exponham suas percepções quer dizer dar espaço para que ele seja protagonista da sua aprendizagem.

No ensino de Matemática, para que diálogo e aprendizagem possam caminhar juntos, ao professor cabe uma postura investigativa e não apenas questionadora. Investigativa no sentido de que, ao questionar seus alunos, não apenas espere respostas certas ou erradas, mas também procure fazer com que seja interessante toda a situação de conversação relacionada ao conteúdo. Em um diálogo com qualidade, as duas partes podem contribuir e o professor tem curiosidade e mostra interesse pelo olhar do aluno para determinada situação. A comunicação dentro da sala de aula, baseada no diálogo com qualidade, torna-se muito mais do que simples transferência de informação e dá condições ao processo de aprendizagem efetiva.

D'Ambrosio (2009) também valoriza a comunicação como ação que gera conhecimento no ensino da matemática. A troca com o outro enriquece o processo de construção do saber. Considerando a capacidade de processar informações de cada um, é na comunicação social que a compreensão do indivíduo se torna ampliada e comum ao grupo que vivencia uma realidade, ou seja, é quando as noções podem ser generalizadas num sistema de organização das concepções.

O mesmo autor faz um paralelo da educação com a produção em massa. Afirma que por muitas vezes no processo educativo, o aluno é tratado como um automóvel que ao final da linha de produção deve estar pronto para desempenhar algumas habilidades de acordo com o esperado pelo mercado comprador. Nesse sistema o professor é o montador que foi orientado a ensinar os conteúdos nos tempos programados, assim como na linha de produção. Essa é uma visão acentuada de uma educação que se resume ao treinamento de indivíduos para desempenhar tarefas limitadas e que por vezes é a educação que praticamos.

E assim, para D’ambrosio (2009, p. 68), o currículo determina a estratégia para educação através de três componentes: objetivos, métodos e conteúdos. Ele explica que esses componentes estão sempre interligados num mesmo processo. O fracasso de uma nova abordagem acontece quando um deles é modificado e os outros não são pensados para a modificação do conjunto. Lembra ainda o exemplo das calculadoras e computadores sendo utilizados com a manutenção dos conteúdos e objetivos. Para o sucesso de um novo método os outros dois vértices referentes ao currículo devem ser repensados.

D’ambrosio (2009, p. 69) alerta que, num sistema de educação massificado, o objetivo parece ser exatamente passar em testes e exames padronizados, o que acarreta a necessidade de também repensar as formas de avaliação que reproduzimos no ensino de matemática. Os alunos são preparados para exames internos e externos que nada dizem sobre a efetiva aprendizagem. É verdadeiro que os estudantes treinam para os exames e pouco aprendem com essa prática incentivada pela escola e educadores.

Sobre avaliação, segundo o autor compartilha uma realização que tem dado certo: sua avaliação e dos alunos é feita por meio de relatórios que cada estudante escreve sobre os aspectos de cada aula. Concordamos quando D’Ambrosio (2009) afirma que o processo de avaliar através de testes pouco tem a relatar sobre a aprendizagem e que contribui para o condicionamento do sujeito ao modelo de produção.

> Concluindo, a avaliação deve ser uma orientação para o professor na condução de sua prática docente e jamais um instrumento para reprovar ou reter alunos na construção de seus esquemas de conhecimento teórico e prático. Selecionar, classificar, filtrar, reprovar e aprovar indivíduos para isto ou aquilo não são missão de educador. Outros setores da sociedade devem se encarregar disso (D’AMBROSIO, 2009, p. 78).

A avaliação é um instrumento para auxiliar o professor no trabalho com cada aluno, para que possa atuar na singularidade do indivíduo e promover uma aprendizagem significativa. Além disso, sua leitura pode indicar as modificações necessárias à conduta docente de modo geral.

Sadovsky (2007) também escreve sobre esse modelo de produção social e cultural ao qual está condicionado o ensino da matemática, nos dizendo que é difícil descrever a atividade matemática sem cair em algum tipo de reducionismo, num sistema que subordina o tempo de aprendizagem dos conteúdos à lógica dos trimestres e bimestres. Perante os desafios, essa autora destaca a noção de modelagem como uma maneira de estruturar um projeto de ensino, e, inclusive, descreve a matemática de modo geral como uma atividade de modelagem. Num processo de modelagem três aspectos são essenciais: reconhecer uma problemática, escolher uma teoria para examiná-la e produzir conhecimento novo a respeito.

A atividade matemática como atividade de modelagem levanta debates que ajudam os alunos a compreenderem a natureza da ação matemática e os fundamentos do trabalho para o qual são convidados, dando sentido ao seu papel de produtor das interações ao abordar uma problemática. Numa tarefa de modelagem, os problemas, técnicas, representações, demonstrações e todas as zonas matemáticas não funcionam separadamente. Um trabalho desse tipo permite enxergar a atividade matemática de maneira integrada, fazendo surgir novas relações que permitem chegar a concepções mais gerais.

Analisar um recorte da realidade, por meio de um aporte teórico, oferece a possibilidade de enxergar numa perspectiva de maior generalidade o valor e o potencial do conhecimento tratado. Por isso, não deve existir um modo único de realização da modelagem; segundo a autora, "esta reflexão visa mais conceber a possibilidade do privado imerso no público que desentranhar modos concretos de implementação." (SADOVSKY, 2007, p. 87, grifos nossos).

Para mais, no campo da modelagem são muito importantes as relações entre os estudantes e as contribuições que um pode dar ao outro no momento da aprendizagem. Portanto, valorizar as vozes dos alunos para que trabalhem em grupos com autonomia para discutir e tentar organizar os trabalhos é realmente uma prática enriquecedora. No debate coletivo, surgem novos problemas que só têm sentido naquele contexto, ficando clara a produção do conhecimento.

Avançando um pouco mais nas questões relativas ao ensino, na próxima seção abordamos, mais especificamente, o ensino de Combinatória.

1.2 ENSINO DE COMBINATÓRIA

Basicamente, a Combinatória é o ramo da matemática que nos permite resolver problemas nos quais é necessário enumerar, contar ou classificar objetos de um conjunto finito. Uma definição mais geral é dada por Morgado e outros (1991, p.1) como sendo “a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas”. Permutações, arranjos e combinações constituem tipos especiais de problemas combinatórios. No entanto, representam apenas uma parte deles. Esses tipos configuram sem dúvida a parte mais simples e mais usual da Combinatória, tendo seu ensino sido privilegiado por permitir resolver uma grande quantidade de problemas e por sua aplicabilidade a problemas de probabilidades finitas, um campo de aplicação importante da Análise Combinatória.

O ensino de Combinatória é necessário na Educação Básica porque trata noções matemáticas fundamentais e trabalha processos ou habilidades cognitivas essenciais para o desenvolvimento intelectual: números, conjuntos, contagem, compreensão de texto, organização das ideias, raciocínio lógico, pensamento estratégico etc. Além disso, ela possui aplicações em diversas situações do cotidiano e em muitas outras disciplinas, tais como probabilidade, estatística, programação, teoria da informação, genética, gestão.

A exploração desse assunto pode começar desde o primeiro ciclo do Ensino Fundamental, pois seus problemas mais simples requerem apenas familiaridade com a noção de número e com processo de contagem. A Base Curricular Nacional menciona como objeto de conhecimento para o 1º ano do Fundamental os **Processos de Contagem** e para o 4º ano do Fundamental os **Problemas de Contagem**, sendo que nessa etapa do ensino já devem desenvolver a seguinte habilidade:

> Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais (BRASIL, 2017, p. 289).

Sobre os princípios básicos da Combinatória, Bachx, Poppe e Tavares (1975) indicam que é possível ensiná-los de forma clara e objetiva com base apenas no

Princípio Multiplicativo. Morgado e outros (1991, p. 18, grifo nosso) compartilham da mesma premissa quando afirmam que “o **Princípio da Multiplicação**, ao lado do **Princípio da Adição**, constitui a ferramenta básica para resolver os problemas de contagem abordados no 2º grau (atual Ensino Médio)”. Explicitamente, esses princípios básicos podem ser enunciados assim:

- **Princípio da Adição**: se A e B são conjuntos disjuntos (sem elementos em comum), então o número de elementos da sua união é igual à soma dos números de elementos de cada um deles.
- **Princípio da Multiplicação**: se uma tarefa pode ser dividida em duas etapas sucessivas, na qual a primeira pode ser realizada de n maneiras e a segunda pode ser realizada de m maneiras dada qualquer realização da primeira, então o número de maneiras de realizar essa tarefa é igual ao produto $n \times m$.

Apesar da simplicidade conceitual da parte da Combinatória que é pertinente à Educação Básica, o assunto é geralmente considerado muito difícil por alunos e professores. Isso pode estar relacionado à forma com que tradicionalmente ela é abordada, calcada em definições e na aplicação de fórmulas. Tal abordagem não é adequada para ensino dessa temática porque seus problemas não admitem uma padronização que permita reduzir as resoluções à aplicação de algoritmos simples. Na verdade, mesmo problemas típicos da Educação Básica podem exigir raciocínio e criatividade para serem resolvidos:

> Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos dessa parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução (MORGADO et al., 1991, p. 2).

Bachx, Poppe e Tavares (1975) apontam ainda que uma “forma didática eficiente” para ensinar esse assunto seria introduzir os conceitos por meio de problemas. Destacamos que, apesar de ser uma referência antiga, esses autores já acreditavam numa proposta de ensino que se mostrasse mais atraente aos estudantes, dessa parte da Matemática tão significativa, procurando resolver problemas considerados difíceis e complicados com raciocínios baseados somente na utilização sistemática do Princípio Multiplicativo.

Especificamente sobre a resolução de problemas combinatórios os autores Bachx, Poppe e Tavares (1975, p. 6 e 7), destacam duas importantes observações:

> 1) Se existe uma restrição causando dificuldades, então devemos satisfazê-la em primeiro lugar.
> 2) Se em certa posição um objeto causa dificuldade para a escolha de ocorrências de objetos em outras posições, então devemos dividir o problema em duas etapas, conforme o objeto ocupe ou não a posição considerada.

Utilizando termos próximos, os professores Morgado e Carvalho (2015, p. 108) descrevem um método para resolver problemas combinatórios que consiste em atender a três condições:

> 1) Postura. Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar.
> 2) Divisão. Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples.
> 3) Não adiar dificuldades. Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

O problema a seguir, utilizado por Morgado e Carvalho (2015, p. 108), bem como por Bachx, Poppe e Tavares (1975) (com alguma diferença, mas com mesmo sentido[2]), nos ajuda a perceber melhor a relevância dessas observações:

> Exemplo: Quantos são os números de três dígitos distintos?
> Solução: O primeiro dígito pode ser escolhido de 9 modos, pois ele não pode ser igual a 0. O segundo dígito pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro dígito. O terceiro dígito pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo dígito.
> A resposta é: $9x9x8 = 648$

Para resolver esse problema foi importante: 1) se colocar no papel da pessoa que iria escrever o número de três dígitos (postura); 2) dividir o problema em três momentos escolhendo cada dígito separadamente (divisão); 3) começar pelo primeiro dígito porque esta era a decisão mais restrita a ser tomada, visto que a casa das centenas não poderia ser ocupada pelo 0 (não adiar dificuldades).

Refletindo um pouco mais sobre esse terceiro momento, adiando a restrição mais relevante, vemos que: começando a escolha dos dígitos pelo último, há 10 modos de escolher o último dígito, em seguida 9 maneiras de escolher o dígito central sem

---

2 Em Bachx, Poppe e Tavares (1975, p. 6): Exemplo 4: Quantos números pares de dois algarismos podem ser formados com os algarismos significativos, sem repetir algarismos.

repetir o dígito já utilizado e, por fim, para o primeiro dígito vai "depender", pois se já tivermos usado o 0 haverá 8 possibilidades de escolha, mas se não tivermos utilizado o 0, serão 7 maneiras de escolher. Isso nos mostra que um problema pode tornar-se mais complicado e suscetível a erros se não tomamos primeiro a decisão mais restrita.

Ainda sobre formas de ensinar a Combinatória, Trevizam e Brolezzi (2016), em seu livro "Como ensinar Análise Combinatória", nos contam uma experiência bem sucedida em que utilizaram o conceito de situação adidática, da Teoria das Situações de Guy Brousseau[3], como ferramenta para uma aprendizagem mais significativa, propondo uma atividade que incentivou a investigação e criatividade dos alunos para construção do conhecimento pretendido e formalização das ideias acerca da Combinatória.

A situação adidática, segundo Trevizan e Brolezzi (2016), propõe que o aluno consiga construir o conhecimento formulando perguntas e encontrando soluções próprias, cabendo ao professor orientar e validar o conhecimento concebido. Esse tipo de atividade consiste de quatro etapas: situações de ação, situações de formulação, situações de validação e situações de institucionalização. A primeira etapa é o momento inicial onde o aluno, a partir da experiência com a atividade, inicia uma tentativa de resolver a situação mesmo não sendo capaz de verbalizar essa tentativa. No segundo momento, o aluno já traz algumas afirmações sobre a resolução. A terceira etapa se caracteriza pelas atitudes de tentar validar aquilo que se afirma. A quarta etapa já é chamada de didática, porque, nesse momento o objetivo é que o professor possa então validar e generalizar o conhecimento adquirido. Desse modo o papel do professor não é ensinar os conceitos de Combinatória diretamente aos alunos, mas sim propor atividades que favoreçam a construção desses conceitos pelos próprios alunos, tendo a formalização como objetivo final nesse processo.

Na sequência proposta por Trevizam e Brolezzi (2016), aos alunos era colocada uma narrativa fictícia na qual a personagem Marcela constantemente precisava realizar contagens indiretas. Durante a leitura do texto que contava a história de vida da

3 BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes en didactique des mathématiques. **Recherches em didactique des mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2 , p. 35 – 115, 1986.

personagem Marcela, os alunos se deparavam com vários desafios que a personagem precisava resolver. Sem precisar conhecer o conteúdo ou as fórmulas, os alunos foram provocados a raciocinar sobre cada desafio enfrentado pela personagem e formular hipóteses para ajudá-la a solucionar problemas de permutação simples, permutação com repetição, arranjo simples e combinação simples, entre outros.

Apesar das dificuldades encontradas em cada fase da situação adidática, nesse trabalho destaca-se o resultado satisfatório de uma atividade diferenciada, que concretamente despertou o interesse dos alunos, desafiando-os a construir um conhecimento próprio, potencializando a resolução de problemas combinatórios e favorecendo uma aprendizagem significativa deste conteúdo.

> Isso é o que tentamos propor o tempo todo com as situações adidáticas: que os alunos não aprendam apenas absorvendo as ideias que vêm de alguém, mas que aprendam experimentando, acertando, errando, tentando. Esse é o verdadeiro aprendizado: aquele que surge do próprio indivíduo aprendiz. Isso é situação adidática (TREVIZAM e BROLEZZI, 2013, p. 157).

O livro “Como Ensinar Análise Combinatória (TREVIZAM; BROLEZZI, 2016) nos mostrou uma sequência de problemas combinatórios contextualizados envolvidos numa narrativa convidativa, a qual acreditamos poder enriquecer o trabalho de muitos professores.

Além disso, para os professores que precisam se preparar para ensinar Combinatória e querem estudar sobre o assunto, referências ainda mais importantes são estas da Sociedade Brasileira de Matemática: “Análise Combinatória e Probabilidade” da Coleção do Professor de Matemática (MORGADO et al., 1991) e “Matemática Discreta”, da Coleção PROFMAT (MORGADO; CARVALHO, 2015).

O título “Análise Combinatória e Probabilidade” inicia a parte de Combinatória com uma revisão sobre Teoria de Conjuntos que ajuda a localizar o tema. Dando sequência ao estudo, trata da parte de combinações e permutações, técnicas de contagem pertinentes também ao ensino no nível do segundo ano do Ensino Médio. Passa então para uma abordagem a métodos mais avançados de contagem como, por exemplo, o princípio da inclusão-exclusão. E, para finalizar a parte de Combinatória, trabalha Números Binomiais. O último capítulo do livro é dedicado a Teoria das

Probabilidades, que utiliza muito a Combinatória. É uma obra repleta de problemas interessantes pelos quais os conceitos são estabelecidos.

“Matemática Discreta” (MORGADO; CARVALHO, 2015), apesar de dedicar apenas um capítulo ao estudo de Análise Combinatória, assim como a obra anterior, também trabalha o Princípio Fundamental da Contagem, Permutações e Combinações, o Triângulo Aritmético (Triângulo de Pascal) e o Binômio de Newton. Só não aprofunda o tema no sentido de técnicas mais avançadas de Contagem. Todavia, também é um livro rico em problemas capazes de envolver os alunos na construção dos conceitos.

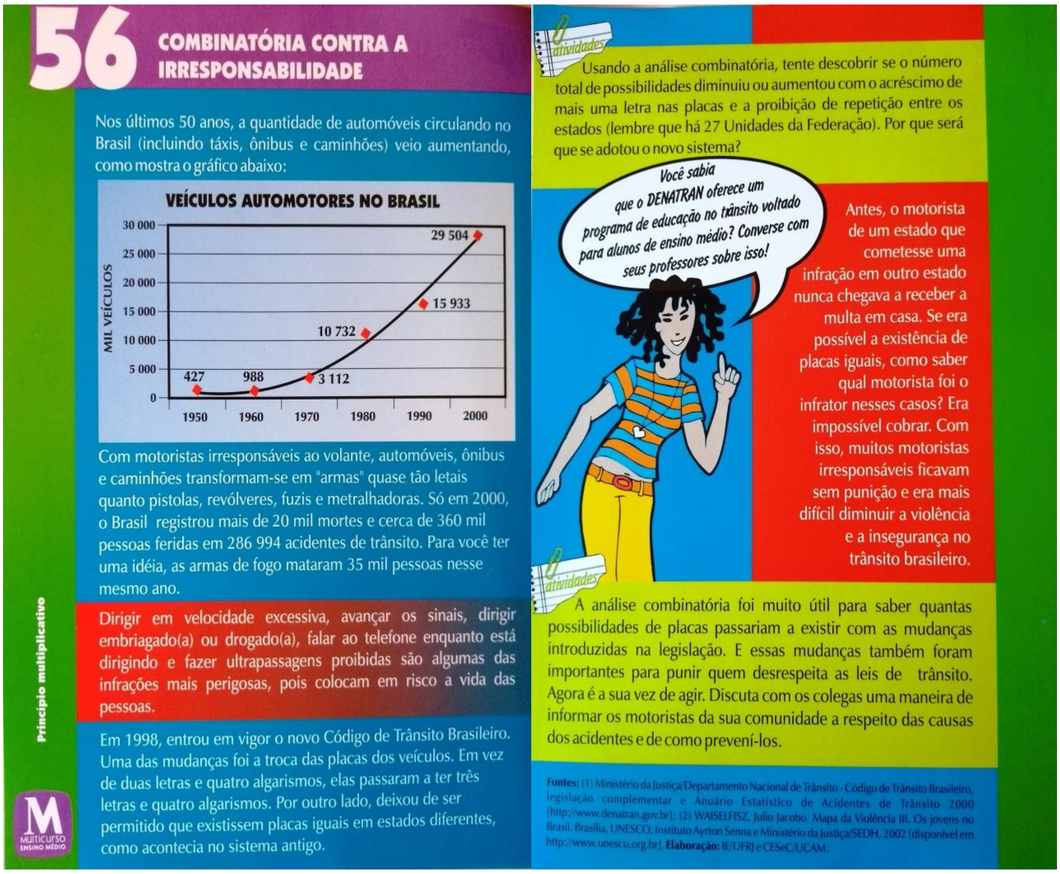
Relativamente a materiais importantes, alguns professores comentaram, durante a pesquisa de campo, sobre o material do Multicurso de Matemática. Tivemos então acesso ao conjunto completo desse material no Laboratório de ensino de Matemática do DMA do CEUNES. O Multicurso foi um programa de formação continuada desenvolvido pela Fundação Roberto Marinho (FRM), que veio com o objetivo de estimular os educadores a ampliar competências e modificar suas práticas de ensino. Em parceria com o Governo do Estado do Espírito Santo e a Secretaria de Estado da Educação, essa formação foi oferecida, entre 2008 e 2012, no Espírito Santo para mais de 1500 professores, alguns de São Mateus. O programa mesclava educação presencial, por meio de grupos de estudos e encontros de interação, com a aprendizagem em rede, em plataformas virtuais.

O material completo é destinado às três séries do Ensino Médio e um conjunto desse material tem, para cada ano: um livro do professor, um livro do aluno, um material “Matemática e Cidadania”. Inclui também vídeos com problemas relacionados a cada assunto estudado. Além disso, são dadas orientações para utilização da plataforma *on-line* e de todo material. A Combinatória segue contemplada no material destinado à segunda série (segundo ano do Ensino Médio).

Os livros mostram-se interessantes porque trazem os conteúdos distribuídos em aulas, ao invés de capítulos. O livro do professor, Borrdeaux (2005), apresenta em cada aula um planejamento do conteúdo, com objetivos, material a ser utilizado e uma sequência de passos para que o professor possa avançar com os alunos desenvolvendo os conceitos por meio dos problemas propostos. Pelo livro do aluno, Borrdeaux (2005), os estudantes podem acompanhar as atividades. A seção sobre Combinatória traz uma aula sobre o Principio Multiplicativo, aulas sobre permutações e aulas sobre combinações, dando sequência com a probabilidade, contemplando a parte desse assunto pertinente a essa etapa do ensino. O material apresenta uma grande quantidade de problemas contextualizados.

A parte do material que relaciona matemática e cidadania é composta por algumas fichas práticas, que trazem informações, reflexões e mensagens sobre diversos aspectos econômicos, sociais e culturais da realidade brasileira, associando-os, de forma direta ou indireta, aos temas da matemática que são trabalhados nas três séries do Ensino Médio. Com o objetivo de relacionar o aprendizado da Matemática à discussão dos problemas sociais e à promoção de valores da cidadania, no conjunto para o segundo ano, na ficha 56 (FIGURA 1), temos a Combinatória como uma aliada na questão da responsabilidade no trânsito. Além dos diversos problemas, o material oferece muitas ilustrações coloridas das situações propostas.

Figura 1 - Ficha 56, material do Multicurso referente à Combinatória



56 COMBINATÓRIA CONTRA A IRRESPONSABILIDADE

Nos últimos 50 anos, a quantidade de automóveis circulando no Brasil (incluindo táxis, ônibus e caminhões) veio aumentando, como mostra o gráfico abaixo:

Com motoristas irresponsáveis ao volante, automóveis, ônibus e caminhões transformam-se em "armas" quase tão letais quanto pistolas, revólveres, fuzis e metralhadoras. Só em 2000, o Brasil registrou mais de 20 mil mortes e cerca de 360 mil pessoas feridas em 286 994 acidentes de trânsito. Para você ter uma idéia, as armas de fogo mataram 35 mil pessoas nesse mesmo ano.

Dirigir em velocidade excessiva, avançar os sinais, dirigir embriagado(a) ou drogado(a), falar ao telefone enquanto está dirigindo e fazer ultrapassagens proibidas são algumas das infrações mais perigosas, pois colocam em risco a vida das pessoas.

Em 1998, entrou em vigor o novo Código de Trânsito Brasileiro. Uma das mudanças foi a troca das placas dos veículos. Em vez de duas letras e quatro algarismos, elas passaram a ter três letras e quatro algarismos. Por outro lado, deixou de ser permitido que existissem placas iguais em estados diferentes, como acontecia no sistema antigo.

Princípio multiplicativo

Multicurso Ensino Médio

atividades

Usando a análise combinatória, tente descobrir se o número total de possibilidades diminuiu ou aumentou com o acréscimo de mais uma letra nas placas e a proibição de repetição entre os estados (lembre que há 27 Unidades da Federação). Por que será que se adotou o novo sistema?

Antes, o motorista de um estado que cometesse uma infração em outro estado nunca chegava a receber a multa em casa. Se era possível a existência de placas iguais, como saber qual motorista foi o infrator nesses casos? Era impossível cobrar. Com isso, muitos motoristas irresponsáveis ficavam sem punição e era mais difícil diminuir a violência e a insegurança no trânsito brasileiro.

atividades

A análise combinatória foi muito útil para saber quantas possibilidades de placas passariam a existir com as mudanças introduzidas na legislação. E essas mudanças também foram importantes para punir quem desrespeita as leis de trânsito. Agora é a sua vez de agir. Discuta com os colegas uma maneira de informar os motoristas da sua comunidade a respeito das causas dos acidentes e de como preveni-los.

Fontes: (1) Ministério da Justiça/Departamento Nacional de Trânsito - Código de Trânsito Brasileiro, legislação complementar e Anuário Estatístico de Acidentes de Trânsito 2000 [http://www.denatran.gov.br]; (2) WAISELFISZ, Julio Jacobo. Mapa da Violência III. Os jovens no Brasil. Brasília, UNESCO, Instituto Ayrton Senna e Ministério da Justiça/SEDH, 2002 [disponível em http://www.unesco.org.br]. **Elaboração:** IE/UFRJ e CESeC/UCAM.

Fonte: Musumeci (2005).

Conhecer esse conjunto pode contribuir muito com novas ideias para que a prática docente não fique restrita aos algoritmos passados no quadro.

Depois de especificar alguns aspectos do ensino de Matemática, e particularmente do ensino de Combinatória, que achamos relevantes para compreender mais sobre o trabalho docente e o conteúdo foco da pesquisa, passamos no segundo capítulo, para revisão de algumas produções acerca do ensino de Combinatória que nos ajudaram delinear nosso trabalho.

2 RECORDANDO ALGUMAS PRODUÇÕES ACERCA DO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

O início de uma pesquisa científica é marcado pela busca de produções relacionadas à temática que se pretende estudar na nova pesquisa. Posto isto, buscamos na plataforma da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações as produções que abordaram o tema Análise Combinatória, sendo nossa última busca no dia 12 de março de 2017. Inicialmente, pesquisamos os trabalhos que apresentaram o termo "Análise Combinatória" em seu título, e encontramos 34 trabalhos, dos quais selecionamos 2 dissertações para fins de análise, porque tratavam diretamente da prática docente.

Também buscamos as pesquisas que traziam a palavra "combinatório", para nos referirmos aos termos "raciocínio combinatório[4]" e "problemas combinatórios", pois entendemos que essas pesquisas também tratam da mesma temática. Nessa nova busca, encontramos mais 32 produções, das quais selecionamos para analisar 5 dissertações e 1 tese de doutoramento, porque versavam sobre aspectos do ensino de Análise Combinatória.

Além disso, no XII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), conhecemos o trabalho do professor Jean Lazaro Coutinho (2015), realizado com professores, sobre formas de comunicação do conceito de combinação simples. Segue a descrição dos principais aspectos desses estudos e as possíveis interconexões com nosso trabalho.

Sturm (1999), em sua dissertação de mestrado intitulada “As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa”, traz sua experiência como professor-pesquisador, aplicando e analisando uma proposta alternativa para o ensino da Combinatória, sendo que o termo "alternativa" refere-se à maneira como o tema é trabalhado, dando mais abertura aos alunos e elegendo o raciocínio combinatório como primordial, ao invés de enfatizar a memorização e aplicação de fórmulas.

---

4 Raciocínio Combinatório é um termo muito utilizado nas pesquisas que trazem para suas análises o livro *Razonamiento Combinatório* de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994), por ser a tradução do termo espanhol.

Nesses termos, utilizando o diário de campo como principal instrumento para coleta dos dados, em uma turma do 2º ano do Ensino Médio, na qual o professor foi o próprio pesquisador, o autor analisou o conteúdo coletado, elegendo categorias em dois grupos: categorias relacionadas com as ações e reações dos sujeitos na sala de aula durante a pesquisa (grupo 1, com 4 categorias); e categorias relacionadas as reflexões dos acontecimentos nesse período de coleta de dados (grupo 2, com 5 categorias). As categorias eleitas para discussão no grupo 1 de informações foram: procedimentos dos alunos, reações dos alunos, interações, procedimentos e atuação do professor. E as categorias nomeadas no grupo 2 foram: a posição de pesquisador, o conteúdo e a proposta, a posição do professor, a relação dos alunos com o conteúdo e a proposta, alunos.

Baseado, principalmente, na obra *“Razonamiento Combinatório”* de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994)[5], sobre ensino de Combinatória, Sturm (1999) propôs trabalhar os problemas em 4 fases, nas quais seus alunos puderam concretizar sua aprendizagem dialogando com os colegas e com o professor, sendo essas as fases: 1) familiarização com problemas de contagem em geral; 2) estudo da notação fatorial; 3) levantamento e observação das características dos problemas que determinam seu modo de resolução; 4) relação das características (modo de resolver) com os temas em si e formalização dos conceitos/temas.

Concluindo, Sturm (1999) aponta que, apesar de utilizar problemas tradicionais, sua maior intenção foi uma abordagem alternativa, parecendo ter alcançado o objetivo, já que trabalhou os problemas de maneira mais aberta, primeiramente apresentando a situação problema, para somente depois chegar à sistematização conceitual como fruto de uma construção mútua. Também registra que tentou, preferencialmente, eleger maneiras mais autônomas para que os estudantes pudessem resolver as tarefas, como uso de diagramas de árvores e enumeração dos elementos. No entanto, indica iniciativas que poderiam ter premiado ainda mais sua proposta, como, por exemplo, pedir aos alunos que criassem enunciados relacionados ao tema para tentar compreender ainda mais a assimilação de cada um colocando-os frente a outros

---

5 BATANERO, M. C.; GODINO, J. D.; NAVARO-PELAYO, V. **Razonamiento Combinatório**. Madrid: Editorial Síntesis, 1994.

desafios, ou ainda, poderia tê-los avaliado por outros instrumentos que não a tradicional prova.

O primeiro aspecto que destacamos nessa pesquisa é a análise categorial do material coletado, que também utilizamos em nossa pesquisa para analisar as representações dos professores.

O segundo é a utilização de uma metodologia de ensino diferenciada, a partir da proposição de problemas sem prévia introdução teórica ou conceitual, combinada ao estímulo da discussão das tentativas de resolução. Deixando a formalização conceitual para ser feita somente depois do amadurecimento das ideias.

Nesse sentido, mesmo que a pesquisa de Sturm (1999) seja mais antiga, seus resultados são satisfatórios com relação ao ensino de Combinatória, quando trabalhado a partir de uma abordagem que deixa de lado o tratamento mecânico. Buscamos então investigar como acontece o ensino desse tema, hoje, em nossas escolas estaduais e como o trabalho do professor possibilita a aprendizagem.

Pesquisando com alunos, também em torno do tema Análise Combinatória, Esteves (2001) contou com a participação de 28 alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, divididos em dois grupos - grupo experimental e grupo de referência. A esses alunos foi aplicado um pré-teste, depois uma metodologia de ensino diferente para cada grupo e por fim um pós-teste. O grupo experimental estudou o assunto por meio de uma sequência didática elaborada pela pesquisadora, enquanto o grupo de referência tratou do tema seguindo as orientações apenas do livro didático.

Para planejar a sequência didática Esteves (2001) apropriou-se das concepções de Vergnaud[6] sobre resolução de problemas e ainda se fundamentou em Piaget e Inhelder[7]. Os alunos do grupo experimental, inicialmente em duplas, foram colocados frente a problemas mais simples de contagem. Na sequência, trabalharam problemas nos quais precisavam utilizar o princípio multiplicativo. Somente nos encontros finais é que a professora tratou de formalizar os conceitos, diferenciar os tipos

6 VERGNAUD, G. **El niño, las matemáticas y la realidad**: problemas de la enseñanza de las matemática en la escuela primária. México: Editorial Trillas, 1991.
7 PIAGET, J.; INHELDER, B. **La génese de i'dée d'hasard chez l'enfant**. París: Presses Universitaire de France, 1951.

de problemas e definir fórmulas. O outro grupo estudou seguindo os passos do livro em aulas tradicionais.

Em sua análise e conclusão ela aponta, principalmente, para os momentos dos erros e das dúvidas dos adolescentes. Sua análise mostrou, para os dois grupos, que tanto no pré-teste quanto no pós-teste eles apresentaram erros e tiveram dificuldades, principalmente em diferenciar os problemas e eleger estratégias para resolução das situações propostas nas duas metodologias aplicadas. No entanto, destaca que, no grupo experimental, o envolvimento e a autonomia dos alunos foram aspectos que tiveram grande destaque. Com esses alunos, as dúvidas e os erros emergiram naturalmente e em todo tempo, mostrando que aquelas situações faziam sentido para as duplas, fatores esses determinantes para o professor que precisa traçar uma estratégia de intervenção no processo de ensino-aprendizagem.

Esteves (2001) dialogou, em sua pesquisa, com a Teoria da Transposição Didática de Chevallard[8], a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e a Teoria da Aprendizagem de Piaget. Para analisar os livros didáticos e os documentos que orientam a escola, a pesquisadora aplicou o método de análise por categorias. Enquanto o material coletado em seu estudo de campo foi analisado tanto quantitativamente quanto qualitativamente. Nessa pesquisa, destacamos ainda os protocolos das resoluções apresentadas pelos alunos para os problemas de Combinatória, que, mais tarde, foram utilizadas por Costa (2003) em sua dissertação de mestrado.

Costa (2003) apresentou aos professores participantes de uma formação continuada, ofertada a partir de convênio firmado entre a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) e a Secretaria do Estado de Educação SEE daquele estado, em 2002, respostas dos alunos participantes da pesquisa de Esteves (2001) para que eles pudessem analisar e, assim, expor suas concepções[9] com relação ao ensino-aprendizagem da Combinatória. Em sua dissertação de mestrado – "As concep-

---

8 CHEVALLARD, Y. JOSHUA, M. A. ***La Transposition Didactique****: du savoir suivant au savoir enseignée. Suivie de um exemple de la transposition didactique*. Éditions la Pensée Sauvage, 1991.

9 Costa (2003) não apresenta nenhuma base teórica para utilizar-se da palavra concepções. No entanto, uma de suas citações diretas pode nos esclarecer o ele entende por concepções: "A maioria da bibliografia relativa ao tema tem seu foco no aluno. Mesmo os textos destinados ao professor discutem a Análise Combinatória em si ou propõe sugestões de ensino, sem colocar-se na posição do professor. Os textos não trazem a tona o pensamento do professor, sua relação com o tema, suas concepções, sua visão sobre a importância da Análise Combinatória. A importância de estudos desse tipo pode se revelar na possibilidade de dialogar com os professores que vem buscando alternativas para seu trabalho" (STURM, 1999, apud COSTA, 2003, p. 4).

ções dos professores de matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental" – Costa (2003), além de apresentar uma análise sistemática de livros didáticos e documentos norteadores do ensino, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e as diretrizes do Estado de São Paulo para o ensino, acreditando em uma proposta firmada na metodologia de ensino Modelagem Matemática; sobretudo conseguiu investigar as concepções dos professores de matemática colocando-os frente às resoluções de alunos para alguns problemas de Análise Combinatória.

Um grupo de 100 professores participou desse estudo, no qual o autor pôde discutir aspectos relativos ao material disponibilizado ao professor e sobre suas principais dificuldades ao trabalhar com esse tema, algumas delas desencadeadas pelo próprio material que lhes era oferecido pela SEE. Esse autor também esclarece suas análises das concepções dos professores investigados, baseadas no conceito de transposição didática de Ives Chevallard[10], utilizando-o também para subsidiar seus apontamentos sobre os documentos norteadores do ensino e aos livros didáticos.

Uma sequência parecida de pesquisas é iniciada por Pessoa (2009), que em sua tese de doutoramento contou com a participação de 568 alunos, desde o 2º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio, de quatro escolas de Pernambuco, sendo duas particulares e duas públicas. Na pesquisa, os alunos resolveram, individualmente, uma ficha contendo oito problemas de Combinatória (dois de cada tipo: produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação).

Os estudantes foram orientados a resolver da forma que eles quisessem e considerassem melhor, seja por desenhos, tabelas, gráficos, operações numéricas ou quaisquer outras formas. Assim, por meio da resolução de situações problema, a pesquisadora apontou alguns aspectos (quantitativos e qualitativos) relacionados ao desenvolvimento do raciocínio combinatório dos estudantes.

Com uma abordagem próxima a de Costa (2003), utilizando os protocolos dos alunos pesquisados por Pessoa (2009) e partindo da pergunta motivadora "Que conhecimentos sobre Combinatória e seu ensino têm professores que ensinam Matemáti-

---

10 CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique. Del saber sabio al saber enseñado**. Grenoble: La Pensée Sauvage Edition, 1991.

ca no Ensino Fundamental e Médio?", Rocha (2011) semiestruturou uma entrevista em três etapas e aplicou a seis professores que lecionavam nas várias etapas do ensino. Assim, ao pedir que os professores sujeitos de sua pesquisa analisassem as respostas dos alunos para as questões de Análise Combinatória, de maneira muito natural pode extrair e analisar as concepções[11] dos participantes sobre o ensino aprendizagem do tema, sem colocá-los na posição de estarem sendo avaliados pela pesquisa.

O quadro teórico da pesquisa de Rocha (2011) foi alicerçado em Shulman[12], no que diz respeito à importância do conhecimento do conteúdo e do conhecimento pedagógico do conteúdo, o que ajudou a autora a analisar os conhecimentos didáticos e os elementos que constituem a formação de professores; e também em Ball, Thames e Phelps[13], que propõem uma caracterização do conhecimento de professores que ensinam matemática. Além disso, utilizou a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, fundamentando a ideia da construção dos conceitos no processo ensino-aprendizagem de Combinatória.

A investigação de Rocha (2011) revelou que o formato dado para os cursos de formação parece ser um fator decisivo na conduta dos professores. Além disso, a pesquisadora verificou que professores que atuam nos anos iniciais, geralmente, possuem uma formação inicial menos aprofundada em relação ao conteúdo de Combinatória, razão pela qual abordam os problemas combinatórios de modo superficial (sem diferenciar características específicas dos problemas combinatórios). Porém, sugerem atividades que utilizam recursos variados (contextos diferenciados, relações entre outras áreas, materiais manipulativos, resolução de problemas e socialização das estratégias criadas pelos alunos).

---

11 Rocha (2011) também não utilizou uma referência específica para tratar de concepções, todavia destacamos uma citação direta de seu trabalho que nos esclarece um pouco sobre o que ela entende deste conceito: "[...] as crenças e concepções desses alunos, futuros professores não são consideradas nem discutidas, não propiciando uma formação reflexiva; [...] o ensino não parte dos conhecimentos prévios desses alunos, que já cursaram todo o Ensino Fundamental e médio e, além disso, não levam em consideração que a maioria deles já possui experiências profissionais como professores" (PAIVA, 2002, apud ROCHA, 2011, p. 26)

12 SHULMAN, L. S. Those who undertand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, [S.l.], Vol. 15, n. 2. p. 4-14, Feb., 1986.

13 BALL, D.L.; THAMES, M.H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: what makes it special? **Journal of teacher educacion**. [S.l.], v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008. Disponível em: <http://jte.sagepub.com/content/59/5/389>.

Ele ainda observa que os professores dos anos finais do Ensino Fundamental e do Médio valorizam aspectos mais formais em relação aos problemas combinatórios (ordenação, repetição, possibilidade, princípio multiplicativo), baseados geralmente nas vivências de suas formações ou em livros didáticos, e propõem atividades menos variadas (como questões mais clássicas e regras para facilitar a compreensão dos problemas).

Rocha (2011) finaliza destacando algumas necessidades: pesquisas acadêmicas que investiguem os domínios dos conhecimentos matemáticos, indicados por Ball, Thames e Phelps, necessários à função do ensino; espaços para discussão e reestruturação da prática docente em cursos de formação; instrumentalização dos cursos de formação inicial e continuada, para que possam entender que contribuições o ensino de um conteúdo matemático traz para o os envolvidos e para o contexto vivido.

Essas quatro pesquisas nos ajudaram na elaboração da nossa entrevista e do questionário *on-line*, no qual utilizamos alguns dos protocolos de alunos pesquisados por Esteves (2001) e Pessoa (2009) e, principalmente, sobre a forma como as pesquisas seguintes, Costa (2003) e Rocha (2011), procuraram interpelar os professores de matemática, de forma natural, sem submetê-los a qualquer tipo de avaliação, pedindo que respondessem algumas questões.

As pesquisas mencionadas apresentam uma abordagem diferenciada dos professores pesquisados ao pedir que os participantes avaliassem as respostas dos alunos para os problemas de Combinatória, conduta que também utilizamos em nossa entrevista e no questionário *on-line*. Além disso, as duas pesquisas, cujos sujeitos foram os alunos, apontam grande necessidade de se investigar a prática do professor sobre ensino de Combinatória.

Nossa pesquisa avança quando, além da entrevista e do questionário, procura observar as aulas para completar a proposta de nosso estudo sobre ensino de Combinatória, na tentativa de construir uma visão mais completa sobre o ensino desse assunto nas escolas estaduais em São Mateus.

Outra produção significativa para nós, considerando a abordagem que vamos propor, é a de Sabo (2010), intitulada “Saberes Docentes: a análise combinatória no

Ensino Médio". Esse autor traçou como objetivo principal investigar os saberes dos professores do Ensino Médio com relação à Combinatória, utilizando como instrumento a entrevista semiestruturada.

Sabo (2010) tentou compreender a relação entre a formação do professor de matemática e o trabalho com este assunto, fundamentando-se na Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard[14] e trazendo para delinear sua investigação a obra de Tardif (2002)[15], "Saberes docentes e formação profissional". Dessa forma, o autor entende que os saberes dos professores envolvem muitas questões, como suas vivências, suas personalidades, suas condições sociais, estando, assim, situados entre o indivíduo e o social. No que diz respeito especificamente à formação, Sabo (2010) afirma que o professor é protagonista de um processo contínuo atrelado à sua prática.

Após uma seleção, Sabo (2010) entrevistou seis professores e seus depoimentos foram foco principal da análise apresentada em sua pesquisa. O conteúdo coletado por filmagem foi transcrito e categorizado, tendo sido recortados trechos relevantes para serem tratados sob a perspectiva de cada professor participante e esclarecidos pela teoria eleita. Os trechos foram tratados em 9 classes: 1) Influência do Ensino Médio e Superior; 2) Participação em projetos e desenvolvimento profissional; 3) PCN e o Ensino de Análise Combinatória; 4) Uso de fórmulas - demonstrações e generalizações; 5) Dificuldades profissionais; 6) Valorização dos cálculos; 7) Uso do PFC (Princípio Fundamental da Contagem) - Enumeração - Árvore de possibilidades; 8) Ordem dos elementos e; 9) Conceitos fundamentais a serem discutidos no Ensino Médio. Inicialmente, também foi traçado o perfil de cada um dos seis colaboradores.

Sobre os resultados desse pesquisador, julgamos importante pontuar que ele indica a participação em grupos de formação continuada como uma considerável oportunidade para promoção dos saberes. Seu trabalho segue com a intenção de utilizar os resultados para planejar e orientar as atividades de um grupo de pesquisa da PUC-SP, que desenvolve projetos de formação continuada com professores da rede pública de São Paulo.

---

14 CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoria antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Vol 19, nº 2, pp. 221-266, 1999.

15 TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: editora Vozes, 2002.

Nosso trabalho, que também ouviu professores de matemática, procurou avançar em relação ao de Sabo (2010) ao utilizar, além da entrevista semiestruturada, o questionário *on-line* e a observação em sala de aula, na tentativa de perceber como realmente ocorre o trato do professor com o tema Combinatória.

Uma pesquisa mais recente com alunos, de Gerdenits (2014), destaca a metodologia de ensino Resolução de Problemas[16] e a utilização de materiais manipulativos como recursos para auxiliar os alunos a solucionar problemas de Combinatória. Essa experiência mostrou que, através da Resolução de Problemas e com auxílio do material, o ensino de Análise Combinatória tornou-se mais significativo para os alunos que consideravam esse assunto muito difícil, por suas fórmulas e definições.

A pesquisadora aplicou atividades diagnósticas nas turmas dos anos finais do Ensino Fundamental de uma escola estadual em Sorocaba, durante os anos de 2013 e 2014, podendo os alunos tentar responder as atividades propostas, livremente. A principal intenção dessas atividades era identificar dificuldades que os alunos apresentavam com relação à Combinatória.

A partir dessa apuração, a autora confeccionou materiais manipuláveis para auxiliar as aulas de Análise Combinatória e os testou com 21 alunos selecionados das turmas que participaram do diagnóstico. O material foi apresentado aos professores de matemática do Ensino Fundamental e Médio nas reuniões de Trabalho Pedagógico Coletivo, quando puderam tirar dúvidas e entrar em contato com material confeccionado.

Como principal conclusão da intervenção, Gerdenits (2014) afirma que, segundo alunos e professores, o material manipulável foi um grande simplificador na resolução de problemas de Combinatória, posto que facilitou a interpretação das atividades propostas e a contagem dos elementos para solução. Além disso, percebeu que os alunos ampliaram sua autonomia, argumentação e criatividade na busca de respostas para os problemas e na construção do conhecimento. Como desdobramento, a autora finaliza indicando que pretende utilizar o material nas turmas de Ensino Médio, já que os resultados foram satisfatórios nas turmas de Ensino Fundamental.

---

16 Gerdenits (2014) não escreve explicitamente em qual escola conceitual baseou-se para falar de Resolução de Problemas. Todavia utiliza Souza (2010) como referência para tratar desse conceito.

Essa pesquisa nos mostra resultados satisfatórios com a utilização de um material concreto e uma metodologia de ensino adequada. O conteúdo é o mesmo, a diferença está em como ele é trabalhado. Em nossa pesquisa, quisemos saber se em nossas escolas estaduais do Ensino Médio, os professores conhecem e utilizam alguma metodologia e/ou recurso para ensinar Combinatória, se seria esse um fator relevante para a prática, se os professores consideram adequada a forma de trabalho que propõe e se acreditam que um trabalho diferenciado pode favorecer avanços no processo ensino e aprendizagem.

Cunha (2015) também pesquisou com professores e acredita no potencial da formação continuada como alternativa para preencher algumas lacunas da trajetória acadêmica desses professores. Sua dissertação de mestrado, intitulada "Elaboração de problemas combinatórios por professores de matemática do Ensino Médio", mostrou-se também interessante para nós. Em sua abordagem, a pesquisadora, por meio de uma entrevista semiestruturada, propôs aos professores participantes da pesquisa que elaborassem problemas combinatórios a partir das situações de cada tipo de problemas e com as diferentes características do conceito. Assim, conseguiu obter informações relevantes sobre a prática desses professores, suas dificuldades, sobre as dificuldades de seus alunos e sobre o conhecimento que tinham acerca do tema e do currículo.

Além de elaborar problemas, foi pedido aos participantes que transformassem os problemas para as diferentes situações. A autora percebeu que os problemas de permutação e arranjo foram os que eles mais elaboraram corretamente. Os professores também pontuaram que é “mais fácil resolver problemas do que elaborá-los”. Durante a entrevista indicaram o que os alunos deveriam saber para resolvê-los. Cunha (2015) concluiu que a atividade proposta em sua pesquisa é favorável à formação de professores, tanto a inicial quanto a continuada, uma vez que leva os professores a refletirem sobre os conceitos e maneira como conduzem seu trabalho.

Nessa perspectiva, uma experiência enriquecedora para o desenvolvimento do nosso trabalho foi o XII Encontro Nacional de Educação Matemática, no qual conhecemos o trabalho de Coutinho (2015) sobre as formas de comunicação do conceito de combinação simples, e que tenta moldar uma Matemática para o ensino apoiado em um Estudo do conceito com professores de matemática. A Matemática para o ensino, conceito esclarecido pelo autor, trata das especificidades de uma matemática fomentada por professores ao ensinar (COUTINHO; BARBOSA, 2016). O Estudo de um Conceito com professores é entendido como uma estrutura de colaboração na qual os professores contribuem com seus conhecimentos acerca de determinado conceito matemático (COUTINHO; BARBOSA, 2016).

Na sua investigação, Coutinho (2015) sugeriu atividades de elaboração e resolução de problemas para que os professores pudessem indicar as diferentes realizações de um conceito em sua prática. Assim, a partir de uma revisão sistemática de literatura e com a criação de um espaço para que professores de matemática pudessem compartilhar suas realizações acerca da comunicação do conceito de combinação simples, as diversas maneiras utilizadas pelos professores do grupo para comunicar o conceito de combinação simples foram enquadradas nas perspectivas de quatro panoramas: panorama formalista, instrumental, ilustrativo e comparativo. Para eleger esse tipo de investigação e esse método para sistematização dos dados coletados, Coutinho se apoiou nas produções de Davis e Renert[17].

No panorama formalista, o conceito de combinação simples é explicado pela definição formal; no instrumental, a comunicação do conceito acontece a partir do uso de fórmulas e é caracterizado pelo foco em procedimentos mecânicos de cálculos; no ilustrativo, ocorre por meio de contagem dos agrupamentos, usando modelos concretos ou virtuais, diagrama de árvore das possibilidades, tabelas, desenhos, listagens dos agrupamentos; no panorama comparativo, a comunicação acontece por meio da comparação com o conceito de arranjo. Dessa forma, o autor destaca a variedade de formas de comunicar o conceito de combinação simples, perpassando pelos quatro panoramas, que, segundo ele são igualmente importantes quando utilizados nos momentos favoráveis.

Coutinho (2015) ainda salienta que o propósito do seu estudo é modelar a comunicação do conceito utilizando-se dos quatro panoramas, no qual a variabilidade de

---

17 DAVIS, B.; RENERT, M. Mathematisc-for-Teaching as shared dynamics participation. **For the Learning of Mathematics**, [S.l.], v. 29, n. 3, p. 37-43, 2009.
______. The math teachers know: profound understanding of emergent mathematics. New York: Routledge, 2014.
______. Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, [S.l.].v. 82, n. 2, p. 245- 265, Feb. 2012.

realizações torna-se relevante diante as particularidades de compreensão de cada aluno. Além disso, o tipo de investigação realizado com um grupo de professores de matemática, denominado Estudo do conceito, e que permite que todos possam contribuir com suas representações e conhecimentos acerca do tema escolhido, torna-se importante por sua forma de abordagem e por valorizar as diversas concepções do grupo colaborador a respeito da Matemática para o Ensino.

Sobre a valorização da formação continuada apontada por essas pesquisas, Lorenzato (2010) diz que refletir sobre a própria prática e manter-se atualizado, procurando aprender constantemente, pode ser o caminho para professores que desejam preencher as lacunas deixadas por sua formação inicial. Concordamos com a relevância do professor estar continuamente em formação para o aperfeiçoamento do trabalho docente e do processo de ensino e aprendizagem, e nossa pesquisa vai ao encontro dessa percepção na medida em que buscamos saber por que os professores não foram receptivos ao curso de formação continuada que propusemos inicialmente, reservando o bloco 6 de perguntas da entrevista para investigação desse aspecto.

3 COMBINANDO NOSSO OLHAR COM O DA HISTÓRIA CULTURAL

Partindo de nossa principal intenção, que consiste em analisar as representações dos professores de Matemática relativas à Análise Combinatória, percebendo suas repercussões na prática pedagógica, e entendendo que o conhecimento está em todos os aspectos conectados à cultura da qual partilha, buscamos fundamentar nossa investigação nas perspectivas da História Cultural. Para isso, dispomos dos conceitos de **representação***,* **prática** *e* **apropriação** propostos por Chartier (2002); **estratégias** e **táticas**, apresentados por De Certeau (1994); **cultura escolar**, por Julia (2001).

De modo geral, Chartier (2002) nos ajuda a analisar as representações e as práticas dos professores relativas ao ensino de Combinatória, constituídas pelas interações sociais deles. Isso num processo único, que consiste na associação das porções desses sujeitos, compreendendo as representações e as relações com o mundo social por meio da articulação de três componentes: a identificação das partes com o todo, num processo de classificação e construção da realidade; as práticas, que são as condutas específicas que demonstram a posição própria dos sujeitos ou grupos; e as formas institucionalizadas, ou seja, identificações fixadas que perduram na existência de determinada classe. Sendo importante, nessa significação, compreender que o discurso (fala ou registro) sempre está comprometido com a posição daquele que o profere e com a comunidade social da qual faz parte. Nesse sentido, sobre a construção dessa significação e a problemática da representação num contexto geral, o autor nos confirma que:

> A problemática do <mundo como representação>, moldado através das séries de discursos que o apreendem e o estruturam, conduz obrigatoriamente a uma reflexão sobre o modo como uma figuração desse tipo pode ser apropriada pelos leitores dos textos (ou das imagens) que dão a ver e a pensar o real. [...] Daí, [...] o interesse manifestado pelo processo por intermédio do qual é [...] diferenciadamente construída uma significação (CHARTIER, 2002, p. 23).

Consideramos então alguns questionamentos relativamente às porções do sujeito em nossa pesquisa:

a) Qual é a identificação dos professores de matemática, sujeitos dessa pesquisa, na construção do ensino de Combinatória?

b) Quais são as práticas, relativas ao ensino de Combinatória, que exprimem a posição desses professores?
c) Quais são as marcas transmitidas pelo complexo social que recaem sobre os professores ao trabalharem com esse tema, especificamente?

As representações são sempre determinadas pelos interesses daqueles que as concebem, nos explica Chartier (2002, p. 17), embora revestidas de um sentido real e completo do mundo social, assim constituídas, não são neutras e produzem práticas.

Nessa perspectiva, entendemos que **representações** são registros ou comunicações, constituídos por um sujeito ou grupo em sua relação com o social, ou seja, associados e implicados por sua existência. Desse modo, estudar as representações significa compreender as narrativas por meio de uma reflexão que articula a comunicação e a realidade do sujeito numa reconstituição da experiência.

De modo que sendo as **representações** as formas de ver, as **práticas** são as formas de fazer construídas pelas representações, ou seja, formas específicas de manifestação das representações. Estando sempre incorporadas aos sujeitos, as suas apropriações da experiência e as suas percepções do social, as práticas também nunca são neutras. Nesse sentido, entender a maneira pela qual práticas e discursos são articulados pelos atores sociais situa-se na conexão entre: a capacidade do sujeito (ou comunidade) e as restrições que o limitam.

Por isso, nessa investigação, não menos importantes, estão incorporadas a esse sistema as lutas de representações, consideradas por Chartier (2002) como sendo mecanismos pelos quais um grupo impõe ou tenta impor a sua concepção do mundo social, com seus valores e com seus domínios sobre outro grupo. O que nos leva a ponderar sobre a coexistência de alguns grupos em nosso estudo: professores e alunos; professores e sistema de ensino; professores de matemática e equipe escolar; professores e pesquisadores, dentre outros.

Compreender as práticas torna-se essencial, já que nesse sentido, as **práticas** constroem as **representações** e vice-versa, estando no centro desse sistema a **apropriação** única de cada sujeito, essa que remete à interpretação social e cultural intrínseca das **práticas** e **representações**, concretamente determinada pelas condições e processos de construção do sentido dado ao mundo social.

Nesses processos, segundo De Certeau (1994), os elementos de um sujeito - como a **prática**, a **representação** e a **apropriação -** são indissociáveis do contexto. É preciso então perceber dois níveis de operação: um no âmbito da **estratégia** e outro no campo da **tática**. Os dois são esquemas específicos determinados pela ação. O primeiro partindo daquele que determina a ordem e o segundo, daquele que trabalha com as possibilidades no campo que lhes é oferecido. Por essa combinação, os sujeitos criam para si o que o autor chama de **usos**, que são efeitos imprevistos inerentes às particularidades de um fazer que surgem das maneiras de utilizar-se da ordem. Esse autor ainda nos diz que não acredita na possibilidade de analisar todos os **usos**, mas que devemos minimamente tentar considerar suas diversas formas que, por vezes, se distanciam bastante do que lhes é imposto.

Proveniente do sujeito de poder, a **estratégia** visa criar a base de onde procedem as relações do entorno social, com o objetivo de indicar a direção. Enquanto a **tática**, determinada pela ausência de um sujeito de poder, não necessariamente obedece à lei do lugar, sendo a forma de apropriação e utilização das possibilidades oferecidas pela **estratégia**. Conceitos que resumimos com as palavras do autor:

> Chamo de estratégia o cálculo (ou a manipulação) das relações de forças que se torna possível a partir do momento em que um sujeito de querer e poder [...] pode ser isolado.
> [...] um poder é a preliminar deste saber, e não apenas seu efeito ou seu atributo.
> [...] chamo de tática a ação calculada que é determinada pela ausência de um [sujeito] próprio. [...] a tática é movimento dentro do campo de visão do inimigo. [...] Aproveita as ocasiões e dela depende.
> [...] Em suma, a tática é a arte do fraco.
> [...] a tática é determinada pela ausência de poder assim como a estratégia é organizada pelo postulado de um poder (De CERTEAU, 1994, p. 99-101).

A partir disso, problematizando mais algumas questões em nossa pesquisa, podemos pensar em quais são os **usos** que os professores fazem das ordens que lhes são impostas pelo trabalho. Por exemplo, a ordem relativa aos conteúdos que precisam ministrar em um ano letivo, ou ainda a ordem de preparar os alunos para os exames externos. Todas essas inquietações que suscitamos são especificas de um grupo social e consequentemente de uma cultura específica que é a cultura inerente à escola.

Reconhecemos então que é pela cultura que todos esses campos relativos ao sujeito estão conectados. E sobre **cultura**, Farias e Mendes (2014) nos dizem que existem mais de cento e sessenta definições diferentes para esta palavra. Ressaltam ainda que, para além da definição assumida, o importante é o valor de qualquer cultura. Enfatizando que todo ser humano tem cultura e que nenhuma cultura é superior à outra. O sujeito como membro de uma família e como parte de uma sociedade carrega as marcas de suas crenças, vivências, valores, experiências vividas, memórias, conhecimentos, competências adquiridas, que constituem uma cultura que deve ser considerada e valorizada. Esses autores nos ensinam a dedicar um olhar sensível às particularidades, que mesmo estando inseridas na complexidade da sala de aula e da escola, devem ser valorizadas por suas especificidades e têm seu espaço na comunicação com o todo.

E é a partir do disposto por Julia (2001) que, no contexto da escola, entendemos a noção de **cultura escolar** como sendo um conjunto de normas e práticas que definem e permitem a transmissão dos conhecimentos, satisfazendo as finalidades de uma época, ordens essas que dependem inteiramente do corpo profissional que as utiliza. Para ele, um engano é pensar que o que fica documentado é suficiente para pensar as normas de uma cultura, já que o que acontece na realidade se dá também por meio das práticas dos sujeitos. Nesse sentido, as normas, o papel desempenhado pelo educador, os conteúdos ensinados e as práticas escolares são domínios que compõem a **cultura escolar**. Ele ainda nos diz que para examinar a "[...] cultura escolar convém recontextualizar as fontes das quais podemos dispor [...] e [...] não nos deixarmos enganar inteiramente [...] por elas" (JULIA, 2001, p. 15).

Neste contexto, as disciplinas são modos de transmissão da cultura que se dirigem a idades escolares diferentes e estão inteiramente relacionadas ao que impõem os conteúdos. Chervel (1990) esclarece que a função das disciplinas dentro do sistema escolar consiste em instruir de acordo com uma finalidade – podendo ser essa político-social, religiosa ou de guarda – por meio de um conteúdo que atende uma finalidade educativa. Ou seja, a função da educação é orientar de maneira conveniente o conjunto complexo de relações que vive determinada sociedade num determinado tempo. Portanto, ao ensino estão associadas finalidades que podem ainda ser analisadas pelo lado da lei que as impõe ou pelas práticas que as carregam.

O autor então destaca uma pergunta essencial que devemos sempre fazer: **por que a escola ensina o que ensina?** Em nosso caso, especificamente, podemos questionar: **por que a escola ensina Combinatória?** Chervel (1990) alerta que ao fazer essa pergunta devemos considerar o que cada um produz sobre sua escola, pois é essa produção que esclarecerá a problemática. Ao docente, nesse entorno, são colocados os conteúdos a serem trabalhados, por meio das disciplinas, a partir um sistema muito bem constituído pelo passar dos anos, que seguem afirmando suas finalidades sem que elas sejam reconhecidas pelos sujeitos que as praticam. Relativamente ao ensino o autor confirma que:

> O ensino escolar é esta parte da disciplina que põe em ação as finalidades impostas à escola, e provoca a aculturação conveniente. A descrição de uma disciplina não deveria então se limitar à apresentação dos conteúdos de ensino, os quais são apenas meios utilizados para alcançar um fim. Permanece o fato de que o estudo dos ensinos efetivamente dispensados é [...] tarefa essencial [...] (CHERVEL, 1990, p. 20).

Pensando nesse sistema de ensino orientado por disciplinas e suas finalidades, esse autor acrescenta que é na figura do professor que se encontra o momento de maior liberdade didática. Apesar de o professor ser pressionado pelas finalidades da disciplina escolar e a ele serem indicadas maneiras prontas de ensinar os conteúdos, o professor não é um agente passivo de uma didática acabada. Seguir nos caminhos da cultura cotidiana percebendo sua própria prática, seus usos e táticas, é compreender que as artes do fazer são lugar por excelência da liberdade e da criatividade fundamentais ao sujeito e a sociedade.

Julia (2001) nos deixa uma pergunta que constantemente podemos fazer: **o que sobra da escola depois da escola?** A partir dessa pergunta é possível problematizar: **quais são as marcas que a escola deixa nos indivíduos que por ela passam?** E, além disso, trazendo para nossa pesquisa: **O que a universidade deixou nos professores participantes da pesquisa?** Inquietações que estão inteiramente relacionadas ao estudo das disciplinas escolares e à pergunta feita por Chervel (1990) sobre **por que a escola ensina o que ensina**?

Tais perguntas nos levam a pensar no conteúdo escolhido para nossa análise e ainda podemos perguntar: **por que ensinar Combinatória? E o que fica desse conteúdo, quais as representações, para professores e alunos em suas diversas formas de prática e apropriação?**

Na sequência apresentamos os caminhos percorridos neste estudo, as particularidades dos sujeitos da pesquisa e os instrumentos utilizados para coleta dos dados.

4 ARRANJANDO OS CAMINHOS PERCORRIDOS

Tendo em vista os objetivos de nossa pesquisa, compreendemos que estamos diante de um estudo do tipo exploratório-descritivo. Para Gil (2010, p. 41), o estudo exploratório tem por objetivo tornar o problema mais explícito, a partir do aprimoramento das ideias, aliado ao estudo descritivo que prevê a descrição das características de um fenômeno bem como o estabelecimento das relações entre as variáveis. Por seus procedimentos técnicos, configura-se ainda como um estudo de campo, já que busca o aprofundamento de uma realidade específica. Gil (2010, p. 52) também nos explica que este tipo de estudo basicamente é desenvolvido por meio da observação direta das atividades do grupo estudado e também por entrevistas.

Sendo assim, como técnica para coleta de dados vamos utilizar a entrevista que, conforme Marconi e Lakatos (2011, p. 80), pode ser definida como uma interação concedida em que o investigador se apresenta frente ao investigado e lhe formula perguntas, com o objetivo de obter dados para investigação. Sendo importante a essa técnica que desde o primeiro momento o entrevistado sinta-se livre de qualquer pressão ou intimidação.

Em suas modalidades, a entrevista semiestruturada (APÊNDICE B) com perguntas abertas, definida por Triviños (1992, p. 145), se adéqua a este estudo, posto que, questões a respeito do tema investigado serão levantadas para que os respondentes possam expressar livremente suas opiniões. Em geral, esse tipo de entrevista parte de questionamentos básicos, apoiados em teorias e hipóteses, que serão completados com o surgimento de novas interrogativas, fruto das respostas dos informantes. Garantindo o anonimato dos participantes e a utilização das respostas apenas para esta investigação, os registros foram coletados utilizando gravador.

Bem como também empregamos a observação do tipo não participante que, de acordo com Marconi e Lakatos (2011, p. 78), pretende observar diretamente as atividades do grupo estudado sem integrar-se a elas. Por essa técnica o pesquisador se atém a observar algo que acontece sem tomar providência para que alguma coisa ocorra.

Enviamos também um questionário *on-line* (APÊNDICE C), na tentativa de complementar nossa coleta de dados. Para Marconi e Lakatos (2011, p. 86), o questionário é um instrumento de coleta de dados constituído por uma série de perguntas que devem ser respondidas por escrito sem a presença do pesquisador. Os autores observam que sempre junto a um questionário deve ser enviada uma nota explicando a natureza da pesquisa e seus procedimentos.

Por seus principais aspectos, temos então uma investigação qualitativa. Conforme Triviños (1992, p. 116), a pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como fonte direta dos dados e o pesquisador não se preocupa somente com os resultados, mas entende que a análise do processo em si é primordial.

Para Richardson (1989, p. 39),

> Os estudos que empregam uma metodologia qualitativa podem descrever a complexidade de determinado problema, analisar a interação de certas variáveis, compreender e classificar processos dinâmicos vividos por grupos sociais, contribuir no processo de mudança de determinado grupo e possibilitar, em maior nível de profundidade, o entendimento das particularidades do comportamento dos indivíduos.

Minayo (2007) coaduna com o exposto ao afirmar que uma investigação de cunho qualitativo se preocupa essencialmente com as interpretações que os humanos fazem a respeito de si mesmos, de como vivem, sentem e pensam, visto que, se aplica ao estudo das relações, das concepções, das percepções, crenças e/ou opiniões de um grupo ou processo social.

No processo de coleta e análise dos dados, a técnica de triangulação, explicada por Triviños (1992, p. 138), enriquece a compreensão e a explicação do núcleo desse estudo qualitativo, pois parte do princípio de que não existe fenômeno social que possa ser explicado isoladamente, sem raízes, ou sem significados, ou sem vinculações estreitas. De acordo com essa técnica, a investigação deve ser dirigida por três aspectos de interesse: “Processos e Produtos centrados no sujeito”; “Elementos Produzidos pelo meio do sujeito e que têm incumbência em seu desempenho na comunidade” e; aos “Processos e Produtos originados pela estrutura socioeconômica e cultural do macro-organismo social no qual está inserido o sujeito”.

No primeiro, averíguam-se as percepções do sujeito. Para o segundo a atenção deve ser ampliada para os elementos produzidos pelo meio no qual este sujeito está inserido: documentos, instrumentos legais, estatísticas e até fotografias. Já o terceiro enfoque desse tipo de análise refere-se a uma visão das forças e relações de produção da classe social estudada.

Para finalizar, sendo este um estudo de campo com análise qualitativa (GIL, 2010, p. 133 e 134), submetemos o material coletado a uma sequência de passos que envolvem a redução, categorização e interpretação dos dados retirados da pesquisa. A redução consiste em simplificar os dados descritos, como num processo de seleção. Já a categorização equivale à organização desses dados de forma que o pesquisador possa tirar conclusões. Por fim a interpretação busca acrescentar a descrição feita pela categorização, no sentido de levantar novos questionamentos e inferir conclusões sobre os temas eleitos.

Assim, definimos que esta é uma pesquisa de campo, de natureza exploratório-descritivo, que se utiliza da observação não participante, da entrevista semiestruturada e do questionário *on-line* como técnicas para coleta dos dados; em seu processo de análise dos dados seguirá uma sequência centrada na categorização que utiliza a triangulação com objetivo de ampliar a descrição e a explicação do foco em estudo. Posto isso, este é um estudo de campo, predominantemente qualitativo.

4.1 OS SUJEITOS DA PESQUISA

O foco de nossa pesquisa é o ensino de Combinatória. Este conteúdo é indicado pela Secretaria de Estado da Educação (SEDU), a partir da Matriz de Referência de Matemática[18] (MATRIZ, acesso 11 fev. 2018), para ser ensinado como último conteúdo do ano letivo no segundo ano do Ensino Médio das escolas estaduais. Visto isso, os sujeitos participantes de nossa pesquisa foram essencialmente os professores do Ensino Médio da rede estadual de ensino do Estado do Espírito Santo, em São Mateus, e que trabalham efetivamente com esse conteúdo no segundo ano.

A SEDU é órgão de natureza substantiva[19] e tem por finalidade a formulação e implementação das políticas públicas estaduais que garantam ao cidadão o direito à

18 Conferir Anexo A.
19 “Serva (1993, apud SILVA, 2016, p. 4) utiliza a denominação “organizações substantivas” para classificar a organização que, contrapondo-se às práticas tradicionais, reconhece a importância da individualidade de seus membros, buscando o equilíbrio entre o indivíduo e a organização. Ademais,

educação; a promoção dos diversos níveis, etapas e modalidades de educação ao seu nível de competência; a avaliação dos resultados da educação básica e a implementação da educação profissional de nível técnico. Esse órgão aplica uma Avaliação Diagnóstica da Aprendizagem– Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo (PAEBES TRImestral) –, cujo objetivo é dar suporte pedagógico ao professor em sala de aula, numa abordagem voltada para a avaliação formativa do aluno, de forma a identificar previamente suas necessidades e realizar atendimentos específicos, e, assim, evitar dificuldades no fluxo do desenvolvimento individual e assegurar melhores condições de aprendizagem.

A Matriz de Referência de Matemática (MATRIZ, acesso em 11 fev. 2018) apresenta o objeto desta avaliação e é formada por um conjunto de descritores que mostram as habilidades que são esperadas dos alunos em diferentes etapas de escolarização e passíveis de serem aferidas em testes padronizados de desempenho.

Em todo Estado a SEDU tem distribuídas onze Superintendências Regionais (SREs), que são suas sedes por região, sendo uma delas em São Mateus. Essa atende, além deste município, os municípios de Jaguaré, Pedro Canário e Conceição da Barra. Em São Mateus, são oito escolas, sendo seis no meio urbano e duas na zona rural. Para fins de nossa pesquisa, visitamos todas as escolas do meio urbano, buscando os professores em seu local de trabalho. As seis escolas são:

- EEEFM Américo Silvares;
- EEEFM Santo Antônio;
- CEETIFM Marita Motta Santos;
- EEEFM Pio XII;
- EEEM Wallace Castelo Dutra; e
- EEEM Ceciliano Abel de Almeida.

Para as entrevistas, abordamos vinte e nove professores que, em 2017, foram designados a trabalhar com as turmas de segundo ano do Ensino Médio, nas escolas estaduais urbanas, e que, pela orientação do órgão responsável, teriam que traba-

contrariando o princípio da competição, a organização alternativa (ou substantiva) trabalha com princípios de solidariedade e afetividade entre os membros, buscando a participação de cada um na vida da organização. Conforme Serva (1993), estas organizações não trabalham com o sentido de hierarquia, tentando reduzi-las ao máximo, organizando a divisão de tarefas por meio de rodízios e conforme aptidão e interesses individuais, e não por funções delimitadas pela organização”.

lhar a Combinatória com suas turmas. Desses vinte e nove professores, vinte nos deram consentimento para entrevista.

Com permissão obtida ainda na ocasião da entrevista, o questionário *on-line* foi enviado por e-*mail* aos vinte e nove professores. Todavia obtivemos retorno de apenas cinco professores.

A observação nos foi permitida por quatro dos professores entrevistados. Contudo, como a Combinatória é o último conteúdo a ser trabalhado no ano letivo, somente duas professoras conseguiram avançar o programa de ensino para ensiná-la em suas turmas. Dessas duas, só foi possível a observação com uma professora, porque as duas eram professoras no turno matutino e houve um conflito nos horários que não nos permitiu acompanhá-las, concomitantemente. Outro fator impeditivo foi o fato de todas as escolas seguirem a orientação da Matriz de Referência, para que os alunos possam estar preparados para as avaliações do PAEBES, então os conteúdos são trabalhados nas escola mais ou menos à mesma época, como previsto pelo documento. Por tais motivos, observamos somente a professora Ana (nome fictício), da Escola EEEFM Santo Antônio, que começou a ensinar Combinatória um pouco antes da outra professora.

Observamos que as pesquisas em geral aplicam o questionário antes das entrevistas, mas como não sabíamos se o questionário *on-line* nos daria um bom retorno, e já pretendíamos procurar os professores nas escolas para a entrevista, então optamos por perguntar se eles estariam dispostos a nos retornar com respostas utilizando esse instrumento de coleta de dados. Na ocasião todos disseram que aceitariam participar, apesar de a maioria não ter retornado.

Seguem então alguns comentários gerais sobre os instrumentos de coleta de dados utilizados por nós em nossa pesquisa de campo.

4.2 OS INSTRUMENTOS DE COLETAS DE DADOS

As entrevistas aconteceram no local de trabalho dos professores, sempre às quartas-feiras, porque esse era o dia da semana reservado para o planejamento da área de matemática da rede estadual de ensino (ocasião em que os alunos não tinham aula de matemática). Dessa maneira foi possível encontrar os professores na escola sem que estivessem nas salas de aula, para que, com a devida permissão, pudéssemos entrevistá-los. As conversas foram gravadas e tiveram duração média de uma hora. Seguimos a entrevista do tipo semiestruturada, com perguntas preestabelecidas que nortearam o diálogo com os professores pesquisados. As perguntas foram organizadas em sete blocos com interesses específicos assim como seguem descritos:

1. Identificação: nome, idade, *e-mail* e telefone do professor.
2. Formação acadêmica e experiência docente: nesse bloco perguntamos sobre a formação, curso de graduação, pós-graduação e outros cursos.
3. Sobre ensino de Análise Combinatória recebido pelo professor: aqui as questões nos trouxeram informações sobre a escolarização dos sujeitos e em quais momentos tiveram a oportunidade de estudar Análise Combinatória.
4. Sobre a prática de ensino de Análise Combinatória pelo professor: essas perguntas nos levaram a conhecer a prática desses profissionais com ensino de Análise Combinatória; em que ano ensinam; como ensinam; suas dificuldades; e as dificuldades dos alunos.
5. Sobre o aprofundamento da coleta de dados: neste bloco apresentamos aos professores as próximas fases de nossa pesquisa – a enquete *on-line* e a observação – pedindo sua colaboração futura.
6. Sobre a formação continuada: para finalizar também perguntamos a respeito da nossa proposta inicial de formação continuada apresentada a SRE, para saber se chegou ao conhecimento do grupo e se nossa proposta foi ou não interessante para eles.
7. Sobre um problema de Análise Combinatória: antecipando um dos tipos de questionamento propostos na enquete online, perguntamos aos professores suas impressões sobre um problema de Análise Combinatória.

Para a enquete *on-line*, utilizamos uma ferramenta do Google Drive para criar formulários e construímos um questionário com título “Avaliação do Ensino de Combinatória*”,* contendo quatro seções:

Seção 1. Identificação: perguntamos nome do professor, escola onde trabalha e há quanto tempo trabalha com ensino de Matemática.

Seção 2. Sobre ensino de Análise Combinatória: nessa seção fazemos perguntas relativas à prática desses profissionais com ensino de Análise Combinatória; sobre o material que utilizam; sobre os recursos para o ensino; sobre como ensinam; sobre como atuam nas dificuldades dos alunos; e sobre algumas noções relativas ao ensino de Análise Combinatória.

Seções 3 e 4. Sobre as respostas dos alunos: nessa seção solicitamos aos professores que analisassem respostas de alunos a quatro problemas de Análise Combinatória, com a intenção de extrair dos seus apontamentos as concepções relativas ao tema, sem fazer perguntas diretas que poderiam intimidá-los e limitar nossa obtenção de dados. Em outras palavras, pretendemos obter dados para construir inferências sobre o tratamento desse conteúdo na relação professor-aluno-conhecimento, sem que os professores tivessem a sensação de estarem sendo profissionalmente avaliados e consequentemente constrangidos.

A terceira etapa da coleta de dados se deu por meio da observação não participante da prática do ensino de Análise Combinatória, com a professora Ana, a partir da qual pudemos identificar com maior clareza aspectos pertinentes às representações relativas ao processo de ensino e aprendizagem do assunto.

5 PERMUTANDO COM O CAMPO DE PESQUISA

Passamos então a descrever e analisar os dados de nossa pesquisa de campo coletados pelos três instrumentos: entrevista semiestruturada, questionário *on-line* e observação sistemática não participante. No Quadro 1 mostramos as escolas que visitamos – Escolas Estaduais Urbanas de São Mateus – a quantidade de professores de Matemática por escola que trabalham com as turmas de segundo ano do Ensino Médio com os quais tivemos contato, os professores que nos concederam entrevistas e os professores que retornaram o questionário *on-line* que enviamos por *e-mail*. Destacamos também neste quadro, o nome fictício que demos à professora que nos recebeu para observação em suas aulas de Análise Combinatória (Ana).

Quadro 1 - Escolas visitadas

ESCOLAS ESTADUAIS URBANAS DE SÃO MATEUS	**PROFESSORES ABORDADOS**	**PROFESSORES ENTREVISTADOS**	**PROFESSORES RESPONDERAM QUESTIONÁRIO ONLINE**
EEEFM Américo Silvares	4	A1, A2	
EEEFM Santo Antônio	6	**Ana**, B2, B3, B4, B5	**Ana**, B3
CEETIFM Marita Motta Santos	3	C1, C2, C3	C1
EEEFM Pio XII	4	D1, D2, D3	
EEEM Wallace Castelo Dutra	6	E1, E2, E3	E4
EEEM Ceciliano Abel de Almeida	6	F1, F2, F3, F4	F5

Fonte: elaborado pela autora.

A SEDU, desde 2009, em parceria com o Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação da Universidade Federal de Juiz de Fora (CAEd/UFJF), elaborou o PAEBES TRImestral com o objetivo de acompanhar, trimestralmente, o desempenho dos estudantes das escolas estaduais. Dessa forma, aos professores, para que possam preparar seus alunos para estas avalições periódicas, é posta uma Matriz de Referência (MATRIZ, acesso em 11 fev. 2018) explicitando o conteúdo programático a ser avaliado em cada período de escolarização e o nível de operação mental necessário para a realização de determinadas tarefas.

Apesar de não ser nossa intenção avançar nesta discussão, torna-se fundamental questionar quanto ao instrumento da Universidade Federal de Juiz de Fora (CAEd/UFJF) utilizado pela SEDU do Espírito Santo para avaliar os estudantes das escolas estaduais. Sabemos que a referida Instituição de Ensino Superior é atuante nas vertentes de execução de programas de avaliação educacional, formação de especialistas de gestão da educação pública e desenvolvimento de tecnologias de administração escolar. No entanto, seu instrumento contempla as especificidades do sistema de ensino espírito-santense? É considerável que Instituições de Ensino Superior do estado, que partilham das peculiaridades do mesmo sistema de ensino, possam desenvolver e validar com confiabilidade um dispositivo para realizar essa avaliação.

Um fato é que nas escolas estaduais os professores são orientados a seguir ativamente a ordem dos conteúdos de acordo com essa Matriz de Referência, para que, em tempo, os alunos estejam preparados para as provas. Outro fato é que pela Matriz a Combinatória está prevista para o segundo ano do Ensino Médio. Devido a esses dois fatos, ao nos apresentarmos nas escolas dizendo o motivo de nossa visita e dizendo o tema de nossa pesquisa, automaticamente éramos direcionados aos professores que estavam trabalhando com essas turmas. Os outros professores, de antemão já afirmavam que não iriam trabalhar com esse conteúdo durante o ano e que então não gostariam de ser entrevistados.

Além disso, mesmo sendo professores do referido ano, alguns não puderam ou não quiseram ser entrevistados, o que resultou um total de 20 entrevistas no conjunto dos 29 professores que encontramos trabalhando com as turmas de segundo ano nestas escolas.

Para o questionário *on-line* o retorno foi pequeno. Os vinte e nove professores que abordamos nos autorizaram a enviar o questionário por *e-mail*, no entanto apenas cinco responderam.

De modo geral, as manifestações dos professores na entrevista e no questionário online relativas à Combinatória (excluindo as questões sobre as respostas de alunos) foram muito padronizadas e depreciativas, demonstrando uma negativa uniformidade. Consequentemente, pouco pudemos extrair dos registros sem mencionar opiniões redundantes.

Quanto à observação, nossa principal dificuldade foi ter que aguardar para que o conteúdo fosse ministrado, já que é o último conteúdo mencionado na Matriz de Referência para o respectivo ano. Quatro professores permitiram nossa presença em suas aulas, no entanto apenas duas professoras conseguiram trabalhar a Combinatória, das quais só pudemos observar uma devido a um conflito nos horários: as duas ministrariam o conteúdo no turno matutino e a mesma época. Optamos em observar com a professora que dedicaria mais tempo ao assunto.

Passamos então a descrever o que encontramos nesses três momentos, para analisar as representações dos professores, no próximo capítulo.

5.1 ENTREVISTAS

O primeiro bloco de perguntas da entrevista serviu para identificarmos os professores e obter seus contatos de *e-mail* e telefone para posteriores abordagens com questionário *on-line* e observação.

O segundo bloco de perguntas, sobre a formação desses professores, nos mostrou que todos os professores entrevistados são Licenciados em Matemática e têm pelo menos uma pós-graduação relacionada à grande área do Ensino ou da Educação, sendo que uma professora cursou o Mestrado, também na área de Educação Matemática. Outra informação importante foi sobre um curso ofertado pela SEDU aos professores do Estado, o Multicurso de Matemática, muito bem comentado por nove dos entrevistados que tiveram a oportunidade de fazer e conhecer o material disponibilizado.

Passamos então a perguntar especificamente sobre a Combinatória, no terceiro bloco, quando procuramos saber em quais momentos tiveram a oportunidade de estudar esse assunto na sua formação profissional, inicial ou continuada. As respostas foram unânimes no sentido de que **a abordagem do assunto sempre foi superfi-**

cial ao longo da formação, de modo que todos procuram estudar sozinhos esse tema quando precisaram ensinar. Todos lembraram vagamente de ter estudado Combinatória no nível Médio e apenas dois professores lembraram-se de ter estudado o tema no nível Superior, e esses afirmaram que isso foi feito de modo rápido e sem nenhum aprofundamento.

O quarto bloco de perguntas forneceu informações substanciais para nossa pesquisa. Nesse bloco perguntamos especificamente sobre o trabalho desses professores com o ensino de Análise Combinatória. Todos concordaram que esse assunto é ensinado no segundo ano do Ensino Médio seguindo a ordem indicada pela Matriz de Referência do Estado. Os professores também explicaram que esse documento funciona como fio condutor do seu trabalho, indicando **o quê** e **quando** cada tópico deve ser trabalhado. Todos os professores seguem a Matriz de Referência e demonstraram sentir-se um pouco pressionados pelo Estado que, **estrategicamente**, durante o ano, aplica a prova do PAEBES para acompanhar o rendimento dos alunos e saber se os tópicos indicados estão sendo trabalhados. Para esses professores é muito extensa a grade de conteúdos a serem trabalhados em um ano letivo, tendo que preparar os alunos para atender as expectativas de provas como o PAEBES. Declarando essa situação alguns docentes justificaram, nas entrevistas, que devido a isso nem sempre há tempo suficiente para um bom trabalho. Dessa forma, temos uma forte evidência de que os professores orientam seu ensino pelas avaliações externas.

Ainda no quarto bloco de perguntas, os professores também contaram que o material que mais usam para ensinar é o livro didático e que a Internet é sua fonte primeira de pesquisa. Nenhum professor indicou qualquer outro material específico usado na preparação ou realização de suas aulas.

Sobre metodologias de ensino, onze dos professores entrevistados afirmaram que ensinam a Combinatória utilizando-se da metodologia Resolução de Problemas (RP). No entanto, acreditamos que essa concepção gira mais em torno de colocar os alunos para fazerem exercícios do que propriamente a metodologia indicada, porque nenhum desses professores demonstrou na conversa, conhecer das diferentes perspectivas metodológicas da RP: o ensino **sobre** Resolução de Problemas, o ensino **para** a resolução de problemas, o ensino **através** da resolução de problemas e o ensino **por meio da** Resolução de Problemas[20]. Corroboram essa compreensão os dados coletados com a professora Ana: enquanto na sua entrevista ela nos disse que aplicava a metodologia RP, nas suas aulas ela não seguiu qualquer método, tendo colocado os alunos apenas para se exercitarem com algumas atividades de fixação.

No quinto bloco de perguntas quisemos saber se os professores aceitariam contribuir para o aprofundamento da nossa pesquisa respondendo o questionário *on-line* e/ou permitindo a observação das suas aulas de Combinatória. Apenas um professor se negou a responder o questionário *on-line*, os outros dezenove aceitaram responder. No entanto, vimos que apenas cinco deles retornaram. Sobre a observação apenas quatro professores aceitaram nos receber em suas aulas, todavia testemunhamos que apenas duas conseguiram chegar ao assunto, e para nós só foi possível observar a professora Ana. Para justificar que não poderiam nos receber em suas aulas, dois professores alegaram que isso atrapalharia a turma que já era bem agitada, enquanto o restante nos revelou que provavelmente não conseguiram avançar a ponto de contemplar todos os assuntos previstos pela Matriz.

As perguntas do sexto bloco, sobre a formação continuada que oferecemos em parceria com SRE, os professores nos mostraram que essa nossa primeira abordagem por meio do órgão não foi satisfatória, porque a maioria dos professores não ouviu falar do curso ou ouviu vagamente sem muitas informações. Eles também não demonstraram interesse em fazer o curso, muitos alegando falta de tempo e outros por não acharem esse um tema relevante.

O sétimo bloco de perguntas trazia um problema para que os professores tentassem resolver e pudessem falar tecnicamente sobre Combinatória, a fim de podermos estimar seu conhecimento e segurança com o assunto. Apenas a professora Ana tentou resolver rapidamente, os demais fizeram apenas comentários superficiais. A questão era:

---

20 O ensino sobre Resolução de Problemas (POLYA, 2006); o ensino para a resolução de problemas (ONUCHIC, 2014); o ensino através da resolução de problemas (ONUCHIC, 2014); o ensino por meio da Resolução de Problemas (SILVA; SIQUEIRA FILHO, 2011); e KRULIK, S. REYS, R. E. **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução: Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

> **De quantos modos podemos pintar um disco dividido em 3 setores congruentes usando 3 possibilidades de cor?**
>
> Resposta da professora: [após pensar um pouco e tentar desenhar, retornou] só existe 1 maneira de pintar esse disco.

Esta é uma questão de permutação circular, onde o que importa é a posição relativa das cores. Apesar de ter percebido que poderiam ocorrer contagens repetidas se as cores estivessem na mesma posição relativa umas das outras, ela ainda assim contou errado. A resposta certa seria duas maneiras. Mantendo uma das cores fixa numa posição o disco então poderia ser pintado de duas maneiras alternando a posição das outras duas cores.

A professora Ana, nesse sentido, mostrou-se precipitada, na entrevista e no questionário *on-line,* nos dando respostas instantâneas e curtas; e, nas aulas, passando apressadamente o conteúdo e as questões propostas. Inclusive por esse motivo, resolveu equivocadamente uma questão que utilizou para explicar Princípio Fundamental da Contagem, fato que discutiremos um pouco mais na descrição das aulas.

Mencionaremos agora sobre as respostas obtidas pelo questionário e na sequência descrevemos as aulas observadas, deixando para o próximo capítulo as análises das representações.

5.2 QUESTIONÁRIOS *ON-LINE*

As primeiras perguntas do questionário foram novamente para que os professores se identificassem.

A segunda seção abordou aspectos do ensino de Combinatória e os cinco professores que retornaram designaram o livro didático como principal instrumento utilizado nas aulas. Novamente, todos disseram que utilizam a metodologia RP para o ensino desse tópico, circunstância que já comentamos por nos parecer haver uma confusão entre a efetiva utilização da metodologia e a ação de colocar os alunos para resolver exercícios de fixação.

Na terceira seção pedimos que os professores analisassem algumas respostas de alunos para problemas de Combinatória.

Seguem os problemas e os respectivos comentários dos professores:

> **Problema 1**: Lançamos uma moeda 3 vezes, quantas sequências de cara e coroa podemos obter?
>
> **COMENTE ESTA RESPOSTA DE UM ALUNO:** "Há três lances com duas alternativas cada, portanto o resultado é 3x3.”.
>
> E4: Tentativa de elaborar estratégia aritmética sem verificação algébrica (ou geométrica).
>
> F4: Resolução errada, devemos considerar as possibilidades de resultados a serem encontrados em cada lançamento.
>
> C1: O aluno equivocou-se no final da resposta, considerou duas chances com 3 alternativas. Como estava inicialmente pensando, com três lances com duas alternativas, seria 2x2x2=8. O professor deve mostrar com recursos visual, como exemplo a arvore de possibilidade, ou ate mesmo, simular o lançamento das moedas.
>
> B3: Na hora de resolver a questão o aluno trocou a informação lançamentos e quantidade de opções a cada lançamento. Assim, em vez de responder que seriam 2 opções em cada laçamento, perfazendo um total de 2x2x2 = 8. O aluno compreendeu que seriam 2 lançamentos com 3 opções cada, sendo assim 3x3=9.
>
> Ana: Como são três lances e em cada lançamento há 2 possibilidades então são 2x2x2.

Os professores perceberam adequadamente o erro deste aluno. Sobretudo os professores C1 e B3 disseram exatamente como explicariam o erro cometido, valorizando o entendimento do aluno, implícito na resolução expressa, e apontando a confusão do mesmo ao efetuar a conta.

> **Problema 2:** Com 5 homens e 5 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal?
>
> **RESPOSTA DE UM ALUNO:** "A primeira pessoa do casal pode ser escolhida de 10 modos, pois ela pode ser homem ou mulher. Escolhida a primeira pessoa, a segunda pessoa só poderá ser escolhida de 5 modos, pois deve ter sexo diferente da primeira pessoa. Portanto, há 10x5 = 50 modos de formar um casal."
>
> E4: Raciocínio que um estudante no início da matéria possivelmente não chegaria
>
> F4: Considerando o casal formado por um homem e uma mulher, podemos considerar as possibilidades para cada sexo.

C1: O aluno não compreendeu que 10x5=50 dá pares com pessoas do mesmo sexo. Como exemplo, mulher-mulher. Temos 25 pares de casais com mesmo sexo. O certo seria 5 possibilidades para homens e 5 para mulheres, 5x5=25. O professor pode usar a ideia do princípio multiplicativo ou a arvore de possibilidades.

B3: Pela resposta apresentada, é possível perceber que o aluno compreendeu a questão e conseguiu formular um método de resolução que o propiciasse encontrar um resultado plausível. Mas, esqueceu de considerar a hipótese de que quando é formado um casal escolhido ao acaso, é possível ter em uma outra escolha o mesmo casal novamente só que com a ordem de escolha alterada. Assim como forma de auxiliar o aluno, enquanto docente, faria-o perceber que falta dividir por 2.

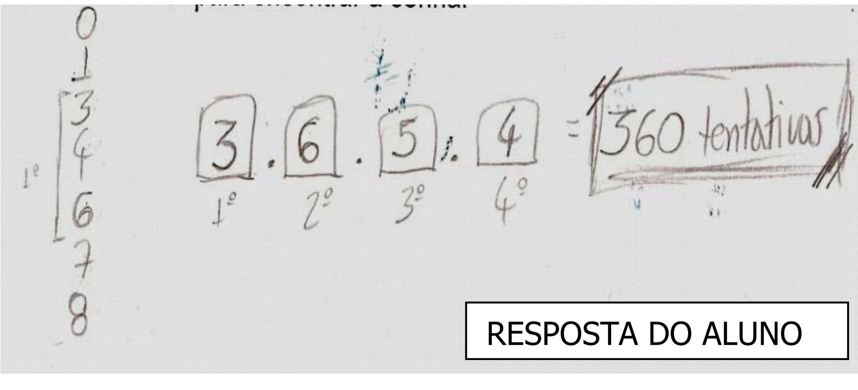
Ana: Se é um casal, não importa a ordem logo teremos 5 modos para cada um 5x5

O professor B3 apontou exatamente o que levou o aluno ao erro. Já a professora C1, apesar de ter percebido o erro do aluno, equivocou-se quando disse que a contagem excessiva era devido à contagem de casais do mesmo sexo. Bem como explicado pelo professor B3, na verdade o aluno contou duplamente os casais, só que numa ordem diferente. Sobre o comentário da professora Ana, podemos ver que, assim como veremos em alguns momentos da observação, ela se preocupou em enfatizar no seu comentário para o aluno que não importava a ordem dos elementos.

Problema 3: Laura esqueceu sua senha de acesso ao computador. Na tentativa de descobri-la, lembrou-se das seguintes informações: é um número de algarismos distintos, compreendido entre 3.000 e 7.000 e NÃO é composto pelos algarismos 2, 5 e 9. Identifique o número máximo de tentativas que Laura deverá fazer para encontrar a senha.

RESPOSTA DE UM ALUNO: Figura 2.

Figura 2 - Resposta de um aluno para problema 3 do questionário *on-line*



Fonte: Almeida (2010).

E4: Boa tentativa.

F4: Descrever melhor o processo desenvolvido para resolver a questão.

B3: Explicaria a ideia de estar entre, mostrando que a unidade não poderia ser zero.

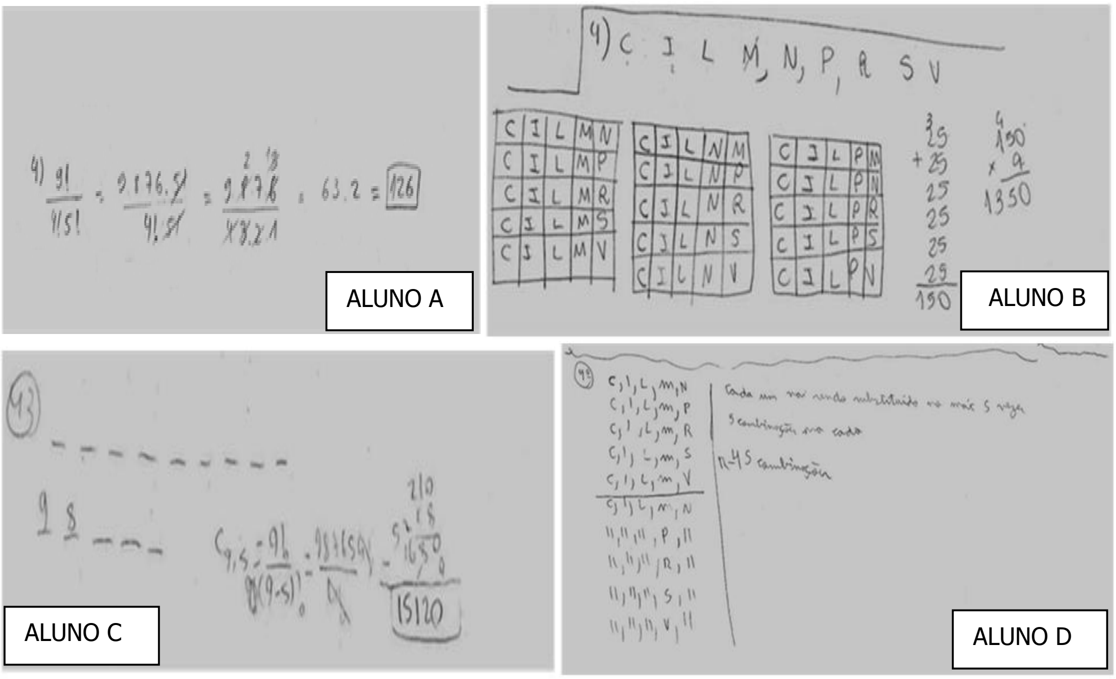
Ana: Nenhuma... Considero satisfatória a estratégia de resolução.

A observação do professor B3 foi equivocada para este problema, porque a restrição apontada por ele já havia sido contemplada na resolução, posto que essa não considerou o número 7 na primeira casa, o que indica o entendimento de que as possibilidades de senha terminam no número “6999”, mostrando que a aluna já havia entendido a ideia de estar entre.

Problema 4: Uma escola tem 9 professores (Cristiano, Isabel, Laura, Mateus, Nívea, Pedro, Roberto, Sandra e Vitor), dos quais 5 devem representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 5 professores pode-se formar?

RESPOSTA DE UM ALUNO: Figura 3.

Figura 3 - Respostas de alunos para problema 4 do questionário *on-line*



Fonte: Rocha (2011).

Junto com o problema 4 trouxemos essas quatro resoluções, sendo a resposta do aluno A a resolução correta e as outras três erradas, para que os professores pudessem avaliar e atribuir notas aos alunos. Todos deram nota máxima à resolução correta e notas menores às outras resoluções sem fazer comentários relevantes.

Comparando as resoluções, os professores poderiam, por exemplo, ter apontado que: o aluno A aplicou corretamente a fórmula de combinação simples e acertou a resposta; o aluno C, também recorreu à fórmula e chegou bem próximo da resolução correta, mas errou na sua utilização, dividindo $9!/(9-5)!$ quando deveria ter efetuado a divisão $9!/(9-5)!\,5!$; enquanto os alunos B e D tentaram por duas maneiras, mas não conseguiram se aproximar da resposta correta – pela contagem direta das possibilidades através do desenho, e pela multiplicação das quantidades indicadas no enunciado do problema.

Finalizando o questionário, fizemos uma pergunta sobre as dificuldades encontradas para responder o questionário e os professores o acharam extenso, alegando que para responder precisavam resolver os problemas e isso demandava um tempo maior.

5.3 OBSERVAÇÃO

A observação nos ajudou, sobretudo, a obter informações sobre aspectos da realidade, sobre os quais, por vezes, os indivíduos envolvidos não tinham consciência, mas que orientavam seu comportamento. Acompanhamos a professora Ana, que ministrou o conteúdo de Análise Combinatória em duas turmas de segundo ano do Ensino Médio na Escola Estadual EFM Santo Antônio. As turmas atendiam pelas siglas 2M04 e 2M05, a primeira com 26 alunos e a segunda com 29 alunos. Nosso principal instrumento para registro foi o diário de bordo, no qual fizemos todas as anotações do que vimos, e em alguns momentos utilizamos discretamente o gravador de voz.

Passamos então a descrever as aulas de Combinatória em cada turma, destacando aspectos das práticas e representações dos sujeitos envolvidos, principalmente os relativos ao professor, foco deste estudo.

5.3.1 Observação com a turma 2M04

Começamos com esta turma porque o conteúdo estava adiantado.

5.3.1.1 Primeira aula de Análise Combinatória – 14/11/2017

Esta aula foi a quinta do período matutino e teve duração de 55 minutos. Quando do início da atividade de observação, ao ser cumprimentada, a professora relatou que esperava não nos decepcionar.

Esta fala nos indica sua expectativa sobre nós, apesar de ter sido explicado na entrevista que a intenção não seria avaliar a prática da professora, mas sim observar e analisar aspectos inerentes ao ensino. Disso concluímos que receber um pesquisador não era uma situação confortável para essa professora. Tentamos então, deixá-la à vontade e também pedimos para que deixasse qualquer apresentação para o final da aula, visto que optamos pela observação não participante.

Seguimos então para a sala de aula, a turma estava agitada. A professora pediu silêncio e ordenou que todos abrissem o livro utilizado pela escola, Dante (2013), na página 243 para começar o conteúdo novo de Análise Combinatória.

Nesse momento, um dos alunos perguntou, em voz baixa, à professora:

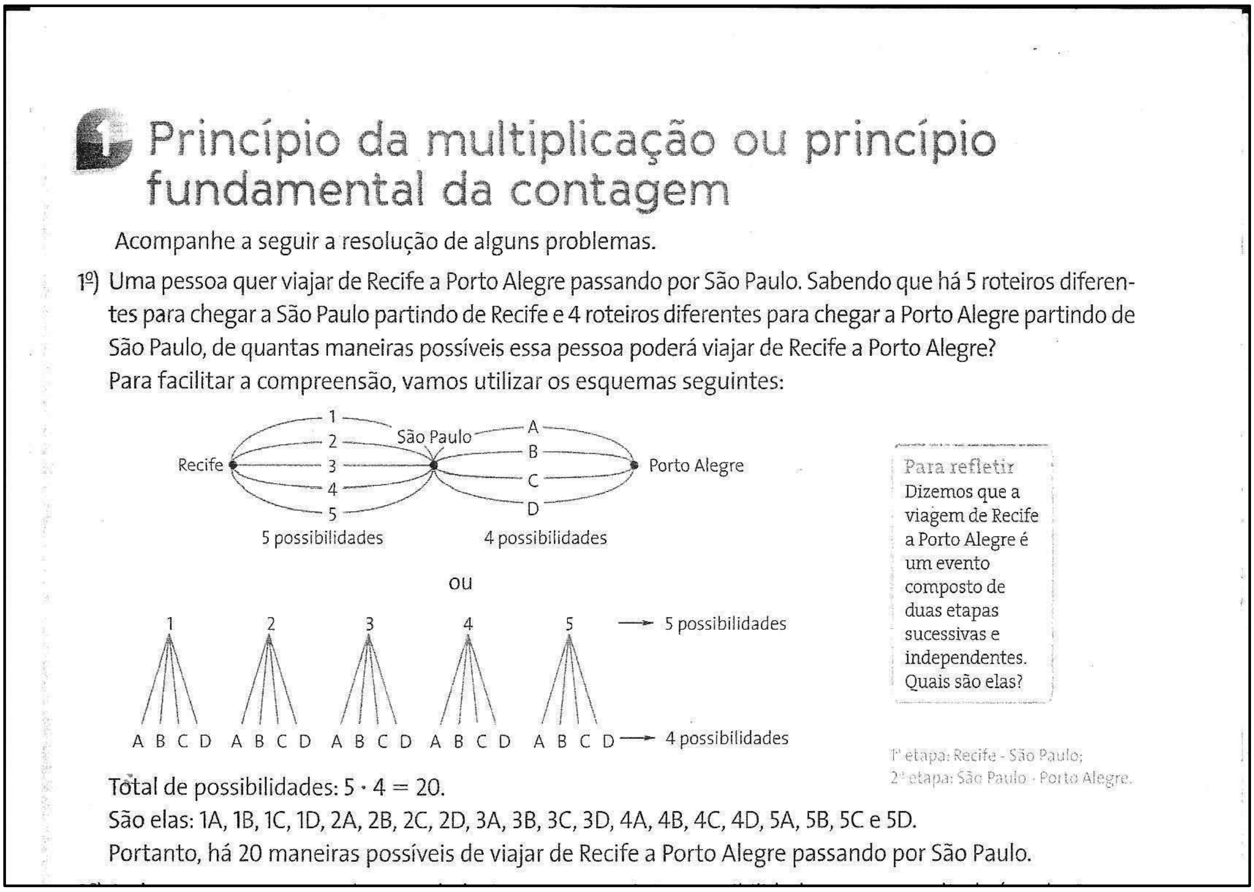
> **Aluno 1**: Onde ela está professora?
>
> **Professora**: Ela está ali, mas ela disse que vai se apresentar na última aula de Combinatória.

Ficou evidente que a turma tinha sido avisada de que haveria alguém observando as aulas de Análise Combinatória, não havendo mais manifestações a respeito do fato, depois da explicação dada pela professora.

Mesmo diante dessa ocorrência, consideramos positiva a opção de manter apresentações para o final do período de observação, não querendo que os alunos nos confundissem com estagiários que atuam como auxiliares, tirando dúvidas quando os alunos estão resolvendo exercícios nas aulas, em função de uma pareceria com o CEUNES.

A professora Ana deu continuidade à aula explicando o Princípio Fundamental da Contagem, lendo e resolvendo no quadro o primeiro, o segundo e o quarto exemplos indicados pelo livro, mostrados nas Figuras 4, 5 e 6, a seguir.

Figura 4 - Primeiro exemplo sugerido pelo livro para explicação do PFC



1 Princípio da multiplicação ou princípio fundamental da contagem

Acompanhe a seguir a resolução de alguns problemas.

1º) Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre?
Para facilitar a compreensão, vamos utilizar os esquemas seguintes:

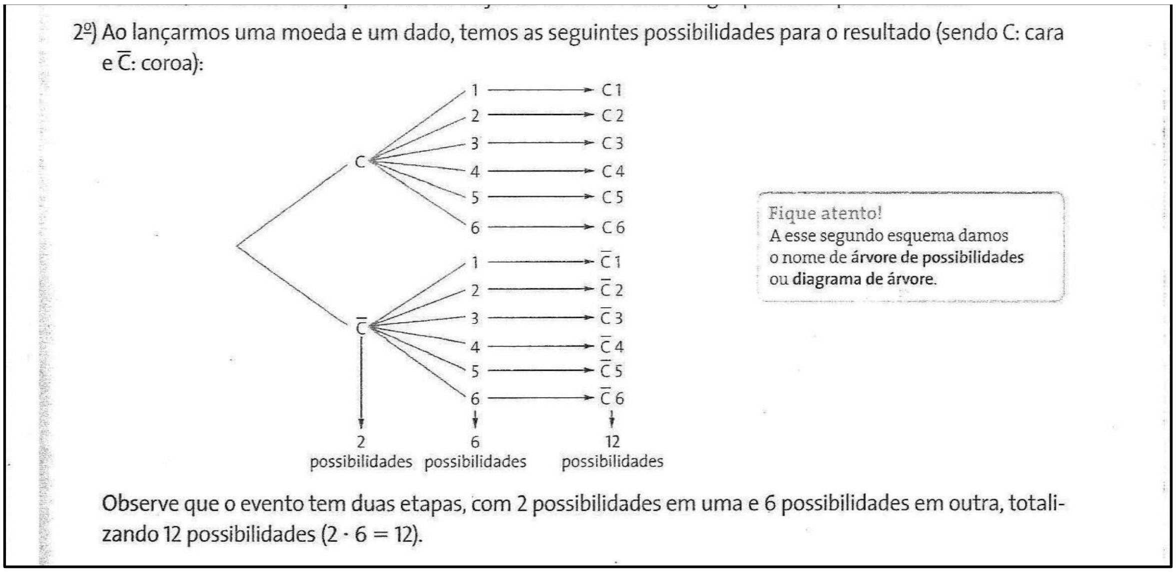
Para refletir
Dizemos que a viagem de Recife a Porto Alegre é um evento composto de duas etapas sucessivas e independentes. Quais são elas?

1ª etapa: Recife - São Paulo;
2ª etapa: São Paulo - Porto Alegre.

Total de possibilidades: $5 \cdot 4 = 20$.
São elas: 1A, 1B, 1C, 1D, 2A, 2B, 2C, 2D, 3A, 3B, 3C, 3D, 4A, 4B, 4C, 4D, 5A, 5B, 5C e 5D.
Portanto, há 20 maneiras possíveis de viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo.

Fonte: Dante (2013).

Figura 5 - Segundo exemplo sugerido pelo livro para explicação do PFC



2º) Ao lançarmos uma moeda e um dado, temos as seguintes possibilidades para o resultado (sendo C: cara e $\overline{C}$: coroa):

C: 1 → C 1; 2 → C 2; 3 → C 3; 4 → C 4; 5 → C 5; 6 → C 6

$\overline{C}$: 1 → $\overline{C}$ 1; 2 → $\overline{C}$ 2; 3 → $\overline{C}$ 3; 4 → $\overline{C}$ 4; 5 → $\overline{C}$ 5; 6 → $\overline{C}$ 6

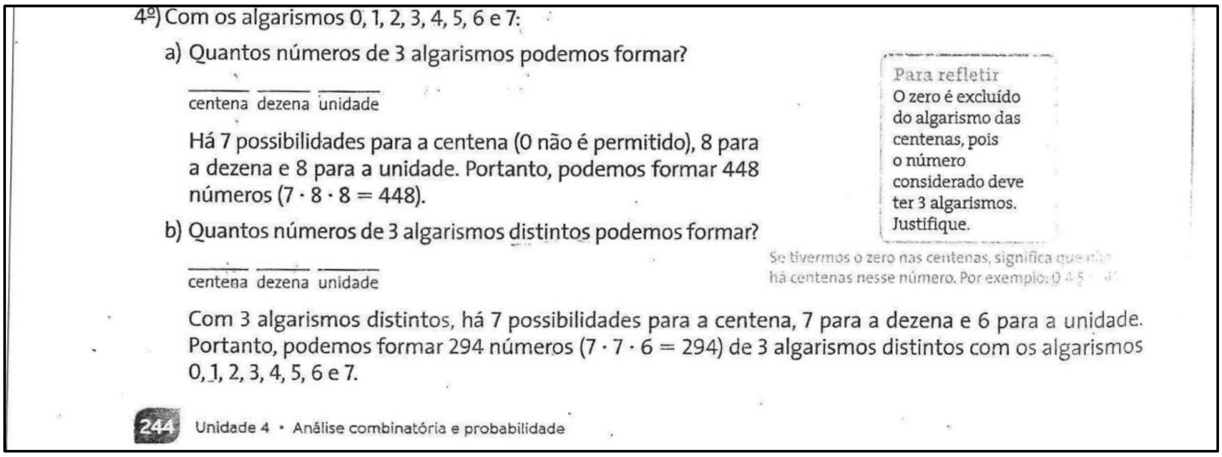
2 possibilidades | 6 possibilidades | 12 possibilidades

Fique atento!
A esse segundo esquema damos o nome de **árvore de possibilidades** ou **diagrama de árvore**.

Observe que o evento tem duas etapas, com 2 possibilidades em uma e 6 possibilidades em outra, totalizando 12 possibilidades ($2 \cdot 6 = 12$).

Fonte: Dante (2013).

Figura 6 - Quarto exemplo sugerido pelo livro para explicação do PFC



4º) Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7:

a) Quantos números de 3 algarismos podemos formar?

centena dezena unidade

Há 7 possibilidades para a centena (0 não é permitido), 8 para a dezena e 8 para a unidade. Portanto, podemos formar 448 números ($7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$).

b) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

centena dezena unidade

Com 3 algarismos distintos, há 7 possibilidades para a centena, 7 para a dezena e 6 para a unidade. Portanto, podemos formar 294 números ($7 \cdot 7 \cdot 6 = 294$) de 3 algarismos distintos com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

Para refletir
O zero é excluído do algarismo das centenas, pois o número considerado deve ter 3 algarismos. Justifique.

Se tivermos o zero nas centenas, significa que não há centenas nesse número. Por exemplo: 0 4 5

244 Unidade 4 • Análise combinatória e probabilidade

Fonte: Dante (2013).

Ao quarto exemplo do livro (FIGURA 6), a professora Ana acrescentou uma letra “c”, que não estava no livro e, em seguida, resolveu como reproduzido no diálogo:

> **Professora**: c) Quantos números de três algarismos distintos e múltiplos de cinco podemos formar, ainda com os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?
>
> **Professora**: Então, além de algarismos distintos o número tem que ser divisível por 5. E se um número é divisível por 5, como eu sei que ele é divisível por 5?

Após breve pausa ela mesma responde:

Professora: Olhando o último algarismo que tem que ser zero ou cinco. Então eu começo esse aqui analisando a última posição, eu só tenho duas opções para cá, ou 0 ou 5.

Agora, aqui na primeira posição eu sei que o zero não pode entrar e eu já estou usando alguém lá no final. Então vão sobrar quantos pra primeira posição?

Após breve pausa ela explica novamente:

Professora: O zero não pode, então jogo o zero fora; e eu to usando alguém aqui, que pode ser o zero e pode ser que não seja, pode ser o cinco; então, como eu já estou usando alguém aqui e o zero não pode, sobra 6 possibilidades pra essa posição.

Continuando, agora aqui [na posição do meio] se eu tinha oito números, usei um na primeira colocação, um na terceira colocação, então sobram seis para essa colocação.

Resolução: 6 x 6 x 2 = 72

Aluno 2: Não entendi, porque ali é seis e na segunda também é seis?

Professora: Aqui na primeira é seis porque não pode o 0, se não tivesse [que excluir] o 0 poderia ser sete. E na segunda é seis porque eu já usei dois números. Sem o zero fica mais facinho. Deixa eu ver se tem aqui um exemplo sem o zero (pausa). É não tem um exemplo sem o zero.

Aluno 2: Ainda não entendi.

Professora: Não entendeu? Então vamos fazer um aqui: se eu tivesse os 1, 2, 3, 4, 5 e eu quero números de 2 algarismo distintos, como ficaria?

Resolução: 5 x 4 = 20

A professora ensinou duas maneiras para resolver os dois primeiros exemplos (FIGURAS 4 e 5): primeiro enumerando as possibilidades (com desenho e árvore de possibilidades), depois usando o Princípio Multiplicativo, assim como o livro didático indicava.

O terceiro problema proposto, quarto do livro (Figura 6), as letras a) e b) foram resolvidas apenas pelo Princípio Multiplicativo, também seguindo roteiro do livro. Agora a letra c), que não era um exemplo do livro e acrescentava mais uma restrição ao problema, exigia um pouco mais de tempo para reflexão. Na verdade, como eram três restrições - a unidade só poderia ser ocupada pelo 0 ou 5, a casa da centena não poderia ser ocupada pelo 0, e os números tinham que ser todos distintos - para resolver essa questão, deveriam ter sido considerados dois casos:

> **Resolução**:
>
> 1º caso: com o 0 ocupando a unidade teríamos 7 x 6 x 1 = 42 possibilidades.
>
> 2º caso: com 5 ocupando a unidade teríamos 6 x 6 x 1 = 36 possibilidades.
>
> Somando os dois casos, a resposta correta seria: há 42 + 36 = 78 números com três algarismos distintos divisíveis por 5.

Como o exercício foi resolvido muito rapidamente, a professora e os alunos não perceberam esta lacuna na resolução.

Prosseguindo com a aula, a professora fez no quadro os exercícios resolvidos número 2 da página 245 (FIGURA 7) e o número 3 da página 246 (FIGURA 8). Explicou qual o significado de “anagramas” e resolveu o primeiro de duas maneiras: primeiro escrevendo todas as possibilidades e depois fazendo a multiplicação, mostrando Princípio Fundamental da Contagem. Já no segundo exemplo, ela resolveu da letra a) até a letra e) explicando apenas com o princípio fundamental da contagem. Quando a professora finalizou uma aluna comentou e ela confirmou:

> **Aluna 3**: É fácil!
>
> **Professora**: Muito fácil! Tudo questão de interpretação.

Figura 7 - Exercício resolvido número 2 da página 245 do livro utilizado

2. Quantos são os anagramas (diferentes disposições das letras de uma palavra) da palavra ANEL?

____ ____ ____ ____

Resolução:

Considerando as quatro letras: **a**, **n**, **e** e **l**, há 4 possibilidades para a primeira posição, 3 possibilidades para a segunda, 2 possibilidades para a terceira e 1 possibilidade para a quarta posição.
Pelo princípio fundamental da contagem, temos 24 possibilidades ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$), ou seja, são 24 anagramas.

Fonte: Dante (2013).

Figura 8 - Página 246 do livro utilizado

Fatorial

O valor obtido com P_n é também chamado **fatorial** do número natural n e indicado por $n!$ (lê-se "fatorial de n" ou "n fatorial").

Assim, temos $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, para $n \geq 1$.

Considera-se $0! = 1$.

> Fique atento!
> Podemos escrever:
> $n! = n \cdot (n-1)!$
> $15! = 15 \cdot 14 \cdot 13!$

Exemplos:

a) $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b) $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

c) $P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$

Exercícios resolvidos

3. Calcule quantos são os anagramas:
   a) da palavra PERDÃO;
   b) da palavra PERDÃO que iniciam com *P* e terminam em *O*;
   c) da palavra PERDÃO em que as letras A e O aparecem juntas e nessa ordem (ÃO);
   d) da palavra PERDÃO em que P e O aparecem nos extremos;
   e) da palavra PERDÃO em que as letras PER aparecem juntas, em qualquer ordem.

Resolução:

a) Basta calcular $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

b) P ___ ___ ___ ___ O

Devemos permutar as 4 letras não fixas, ou seja, calcular P_4:

$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Portanto, há 24 anagramas da palavra PERDÃO iniciados com *P* e terminados em *O*.

c) É como se a expressão ÃO fosse uma só letra: PERDÃO; assim, temos que calcular P_5:

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

d) P ___ ___ ___ ___ O

O ___ ___ ___ ___ P

Temos então $2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 48$; 48 anagramas.

e) Considerando PER como uma só letra, PERDÃO, temos que calcular P_4:

$P_4 = 4! = 24$

Como as 3 letras de PER podem aparecer em qualquer ordem, temos $P_3 = 3! = 6$ possibilidades de escrevê-las juntas.

Assim, o número total de anagramas pedido é:

$P_4 \cdot P_3 = 24 \cdot 6 = 144$; 144 anagramas

4. Simplifique as expressões:

a) $\frac{20!}{18!}$ b) $\frac{48! + 49!}{50!}$ c) $\frac{n!}{(n+1)!}$

Resolução:

a) $\frac{20!}{18!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18!}}{\cancel{18!}} = 380$

b) $\frac{48! + 49!}{50!} = \frac{48! + (49 \cdot 48!)}{50!} = \frac{\cancel{48!}\,(1+49)}{50 \cdot 49 \cdot \cancel{48!}} =$

$= \frac{\cancel{50}}{\cancel{50} \cdot 49} = \frac{1}{49}$

c) $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\,\cancel{n!}} = \frac{1}{n+1}$

5. Colocando todos os anagramas da palavra ÂNGULO listados em ordem alfabética, como em um dicionário, em que posição da lista estará a palavra:

a) ÂGLNOU? b) UONLGÂ? c) ÂNGULO?

Resolução:

a) Todas as letras estão em ordem alfabética, logo a palavra ÂGLNOU ocupa a 1ª posição.

b) As letras da palavra UONLGÂ estão na ordem inversa da 1ª posição, portanto esta palavra ocupa a última posição.

$P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Assim, UONLGÂ ocupa a 720ª posição.

c) Â G ___ ___ ___ ___ $\rightarrow P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Â L ___ ___ ___ ___ $\rightarrow P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Â N G L ___ ___ $\rightarrow P_2 = 2 \cdot 1 = 2$

Â N G O ___ ___ $\rightarrow P_2 = 2 \cdot 1 = 2$

Â N G U L O $\rightarrow P_1 = 1$

Assim,

$24 + 24 + 2 + 2 + 1 = 53$

Portanto, ocupa a 53ª posição.

246 Unidade 4 • Análise combinatória e probabilidade

Fonte: Dante (2013).

Continuando a sequência apresentada pelo livro, ela explicou o conceito de fatorial e ensinou a fazer algumas operações com fatorial, reproduzindo no quadro o exemplo 4, letras a) e b) dos exercícios resolvidos, na página 246 do livro adotado (FIGURA 8).

Quando a professora terminou três alunos se manifestaram dizendo:

> **Aluno 1**: Essa parte é fácil!
> **Aluno 4**: É mesmo...
> **Aluno 5**: Muito fácil!

A professora então pediu que fizessem as atividades 1, 2, 3 e 4, da página 247 do livro (FIGURA 9). No entanto a aula já estava acabando e as atividades foram deixadas para próxima aula.

5.3.1.2 Segunda e terceira aulas de Análise Combinatória – 17/11/2017

As duas últimas aulas da sexta-feira nessa turma eram de matemática, cada aula sempre com 55 minutos de duração. Como na última aula de matemática os alunos não tiveram tempo para fazer as atividades que a professora havia pedido, ela iniciou nesse dia, acrescentando àquelas atividades mais seis, seguindo a sequência do livro, pedindo que eles resolvessem as atividades da página 247 do livro, de 1 até 10 (FIGURA 9), e deu a eles uma hora para entregar e receber o visto.

Enquanto eles se organizavam, ela avisou sobre a última prova, que estava agendada para o dia 28/11/2017, contemplando os conteúdos: pirâmide, cilindro, cone, esfera e Análise Combinatória.

Nesse intervalo de tempo deixado para que os alunos tentassem resolver os exercícios, somente cinco alunos começaram imediatamente a tentar fazer as atividades, o restante da turma conversava em grupos menores, alguns usavam o aparelho celular e um aluno confeccionava algumas “faquinhas” usando tubos de caneta, pedaços de lâmina e um isqueiro.

Durante as aulas e também durante a atividade, os alunos sentavam livremente, divididos em grupos por afinidade, poucos deles permanecendo nas filas. Também não foi exigida nenhuma sistematização para que se dividissem em grupos ou para que resolvessem os exercícios. Esse momento era mesmo um pouco mais livre, com a única ordem de que tentassem resolver os problemas.

Na aula anterior, por uma mudança na escala dos estagiários, a professora havia ficado sozinha, mas nessa aula um dos estagiários estava novamente presente; no entanto, ele foi muito pouco solicitado, sendo que apenas uma aluna pediu sua ajuda.

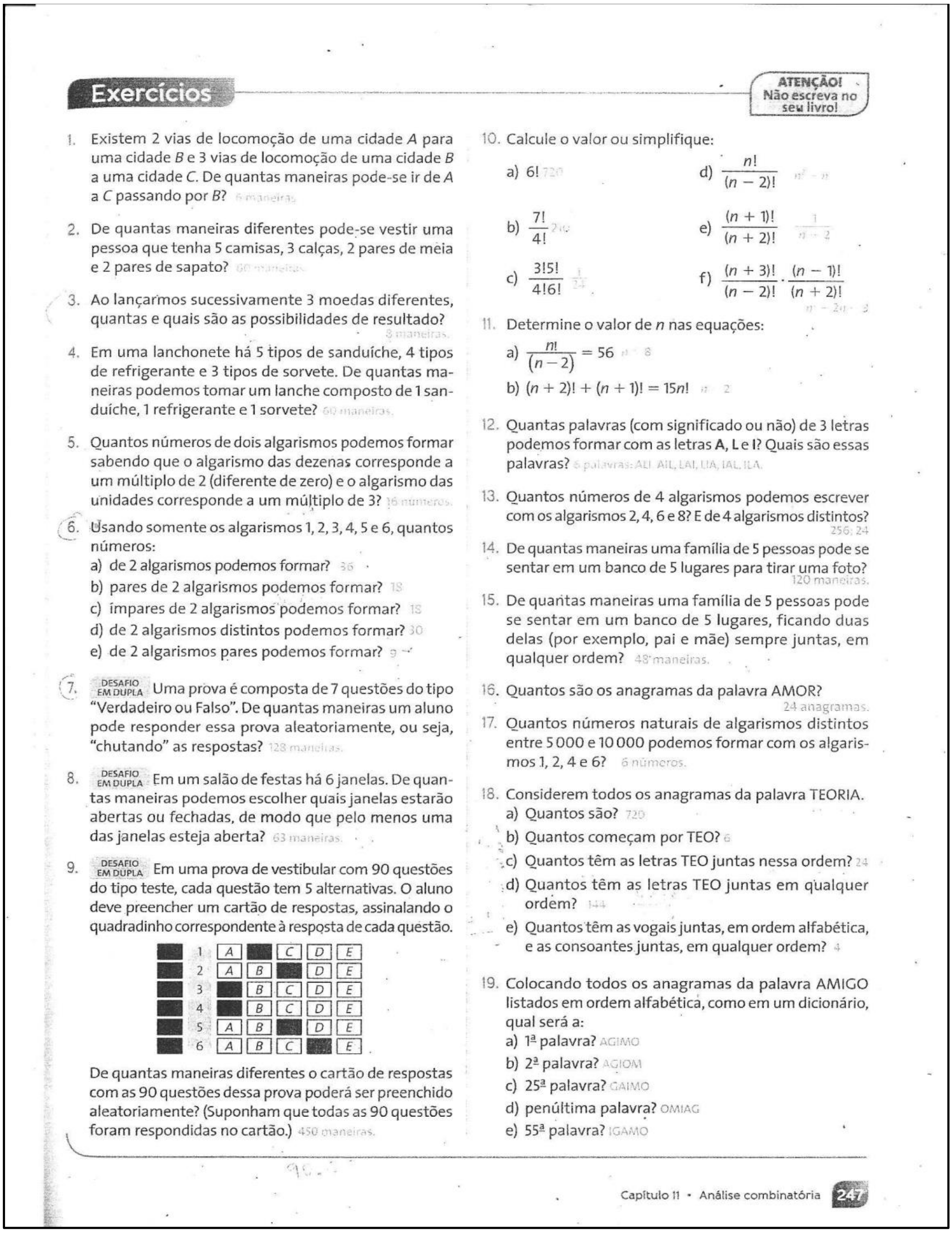
Passados trinta minutos, a maioria da turma manifestou-se preocupada com o visto e começou a fazer a atividade. Muitos não conseguiram e passaram a procurar os poucos que haviam terminado para copiarem. Percebemos que tanto os poucos alunos que começaram desde o início, quanto os mais despreocupados, sentiram dificuldade já nos primeiros exemplos. O número 1 (FIGURA 9), por exemplo, era idêntico ao primeiro exemplo dado pela professora (FIGURA 4) na primeira aula. Em geral, todo conteúdo exigido tinha sido explicado pela professora, tendo alguns alunos se manifestado, afirmando ter achado fácil parte do conteúdo. Contudo, a seguinte fala foi registrada quando tentavam resolver:

> **Aluna 6**: Aquele negócio de esferas era mais fácil. Esse negócio de possibilidades é maior palhaçada [risos].
>
> **Aluna 7**: Não era fácil também não.
>
> **Aluna 6**: Era fácil sim, só saber as fórmulas.

Depois de mais alguns minutos enquanto tentavam responder o número 7 (FIGURA 9) e conferir a resposta no final do livro, uma delas ainda falou:

> **Aluna 7**: O importante é encontrar a resposta, não interessa como.

Figura 9 - Página 247 do livro utilizado



Exercícios

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

1. Existem 2 vias de locomoção de uma cidade A para uma cidade B e 3 vias de locomoção de uma cidade B a uma cidade C. De quantas maneiras pode-se ir de A a C passando por B? 6 maneiras.

2. De quantas maneiras diferentes pode-se vestir uma pessoa que tenha 5 camisas, 3 calças, 2 pares de meia e 2 pares de sapato? 60 maneiras.

3. Ao lançarmos sucessivamente 3 moedas diferentes, quantas e quais são as possibilidades de resultado? 8 maneiras.

4. Em uma lanchonete há 5 tipos de sanduíche, 4 tipos de refrigerante e 3 tipos de sorvete. De quantas maneiras podemos tomar um lanche composto de 1 sanduíche, 1 refrigerante e 1 sorvete? 60 maneiras.

5. Quantos números de dois algarismos podemos formar sabendo que o algarismo das dezenas corresponde a um múltiplo de 2 (diferente de zero) e o algarismo das unidades corresponde a um múltiplo de 3? 16 números.

6. Usando somente os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números:
   a) de 2 algarismos podemos formar? 36
   b) pares de 2 algarismos podemos formar? 18
   c) ímpares de 2 algarismos podemos formar? 18
   d) de 2 algarismos distintos podemos formar? 30
   e) de 2 algarismos pares podemos formar? 9

7. DESAFIO EM DUPLA Uma prova é composta de 7 questões do tipo "Verdadeiro ou Falso". De quantas maneiras um aluno pode responder essa prova aleatoriamente, ou seja, "chutando" as respostas? 128 maneiras.

8. DESAFIO EM DUPLA Em um salão de festas há 6 janelas. De quantas maneiras podemos escolher quais janelas estarão abertas ou fechadas, de modo que pelo menos uma das janelas esteja aberta? 63 maneiras.

9. DESAFIO EM DUPLA Em uma prova de vestibular com 90 questões do tipo teste, cada questão tem 5 alternativas. O aluno deve preencher um cartão de respostas, assinalando o quadradinho correspondente à resposta de cada questão.

   De quantas maneiras diferentes o cartão de respostas com as 90 questões dessa prova poderá ser preenchido aleatoriamente? (Suponham que todas as 90 questões foram respondidas no cartão.) 450 maneiras.

10. Calcule o valor ou simplifique:
    a) $6!$ 720
    b) $\frac{7!}{4!}$ 210
    c) $\frac{3!5!}{4!6!}$ $\frac{1}{24}$
    d) $\frac{n!}{(n-2)!}$ $n^2 - n$
    e) $\frac{(n+1)!}{(n+2)!}$ $\frac{1}{n+2}$
    f) $\frac{(n+3)!}{(n-2)!} \cdot \frac{(n-1)!}{(n+2)!}$ $n^2 - 2n - 3$

11. Determine o valor de n nas equações:
    a) $\frac{n!}{(n-2)} = 56$ $n = 8$
    b) $(n+2)! + (n+1)! = 15n!$ $n = 2$

12. Quantas palavras (com significado ou não) de 3 letras podemos formar com as letras **A**, **L** e **I**? Quais são essas palavras? 6 palavras: ALI, AIL, LAI, LIA, IAL, ILA.

13. Quantos números de 4 algarismos podemos escrever com os algarismos 2, 4, 6 e 8? E de 4 algarismos distintos? 256; 24

14. De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode se sentar em um banco de 5 lugares para tirar uma foto? 120 maneiras.

15. De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode se sentar em um banco de 5 lugares, ficando duas delas (por exemplo, pai e mãe) sempre juntas, em qualquer ordem? 48 maneiras.

16. Quantos são os anagramas da palavra AMOR? 24 anagramas.

17. Quantos números naturais de algarismos distintos entre 5 000 e 10 000 podemos formar com os algarismos 1, 2, 4 e 6? 6 números.

18. Considerem todos os anagramas da palavra TEORIA.
    a) Quantos são? 720
    b) Quantos começam por TEO? 6
    c) Quantos têm as letras TEO juntas nessa ordem? 24
    d) Quantos têm as letras TEO juntas em qualquer ordem? 144
    e) Quantos têm as vogais juntas, em ordem alfabética, e as consoantes juntas, em qualquer ordem? 4

19. Colocando todos os anagramas da palavra AMIGO listados em ordem alfabética, como em um dicionário, qual será a:
    a) 1ª palavra? AGIMO
    b) 2ª palavra? AGIOM
    c) 25ª palavra? GAIMO
    d) penúltima palavra? OMIAG
    e) 55ª palavra? IGAMO

Capítulo 11 • Análise combinatória 247

Fonte: Dante (2013).

Passado o tempo marcado pela professora ela rapidamente deu os vistos para todos que mostraram os exercícios no caderno e foi para o quadro resolver as questões dizendo aos alunos antes de começar:

> **Professora**: Mega fácil, até a 3ª série responde.

Ao terminar a professora reafirmou:

> **Professora**: Viu como é fácil?!
>
> **Aluna 4**: Se eu soubesse não teria colado.

Logo depois disso, o sinal tocou avisando do final da aula e a professora se despediu.

5.3.1.3 Quarta aula de Análise Combinatória – 20/11/2017

Iniciando a aula a professora lembrou que era o dia da Consciência Negra, reforçou que a data da prova se aproximava e pediu que resolvessem mais algumas atividades do livro, ainda na página 247 do número 12 até o número 18 (FIGURA 9), valendo mais um visto para o final da aula.

Tudo aconteceu com a mesma dinâmica da aula anterior, os alunos sentavam livremente nos grupos, poucos continuavam nas filas sentados sozinhos. Novamente, poucos tentavam resolver as atividades. A professora atendia aqueles que pediam ajuda, enquanto a maioria conversava ou utilizava o celular e esperava para copiar de algum colega que tivesse respondido.

Passados alguns minutos, vendo que os alunos não estavam interessados, a professora disse:

> **Professora**: Será que eu não vou dar visto nem no caderno de Joãozinho [nome fictício para um dos poucos alunos aplicados da turma].

A professora então repreendeu um dos poucos alunos que ainda não tinham passado de ano, e não estava fazendo a atividade, perguntando:

> **Professora**: José [nome fictício] você ainda não passou de ano e não esta fazendo nada, por quê?

A turma conversava muito sobre o passeio de final de ano que fariam com toda a escola que seria no dia seguinte 21/11/2017. A professora então alertou que faltavam poucos minutos para acabar a aula, mas acabou também interagindo com eles conversando sobre o passeio. Em seguida alertou outra aluna:

> **Professora**: Joana [nome fictício] não vai dar tempo você colar não.

E continuo dizendo:

> **Professora**: A escala de interesse em Análise Combinatória está em qual posição hein?
>
> [pausa]
>
> Para próximo ano vocês vão precisar.
>
> [pausa]
>
> Próximo ano vou segurar as notas pra vocês ficarem interessados até o final do ano.

Chegando ao final da aula, poucos alunos receberam o visto e emprestaram para os outros copiarem. Como, nesse dia, houve apenas uma aula de Matemática, muitos alunos não conseguiram copiar a tempo de mostrar à professora.

5.3.1.4 Quinta aula de combinatória – 21/11/2017

Antes de iniciar a correção a professora permitiu àqueles alunos que não terminaram as atividades na última aula, que recebessem o visto por as terem trazido prontas. Em seguida, resolveu no quadro todos os exercícios.

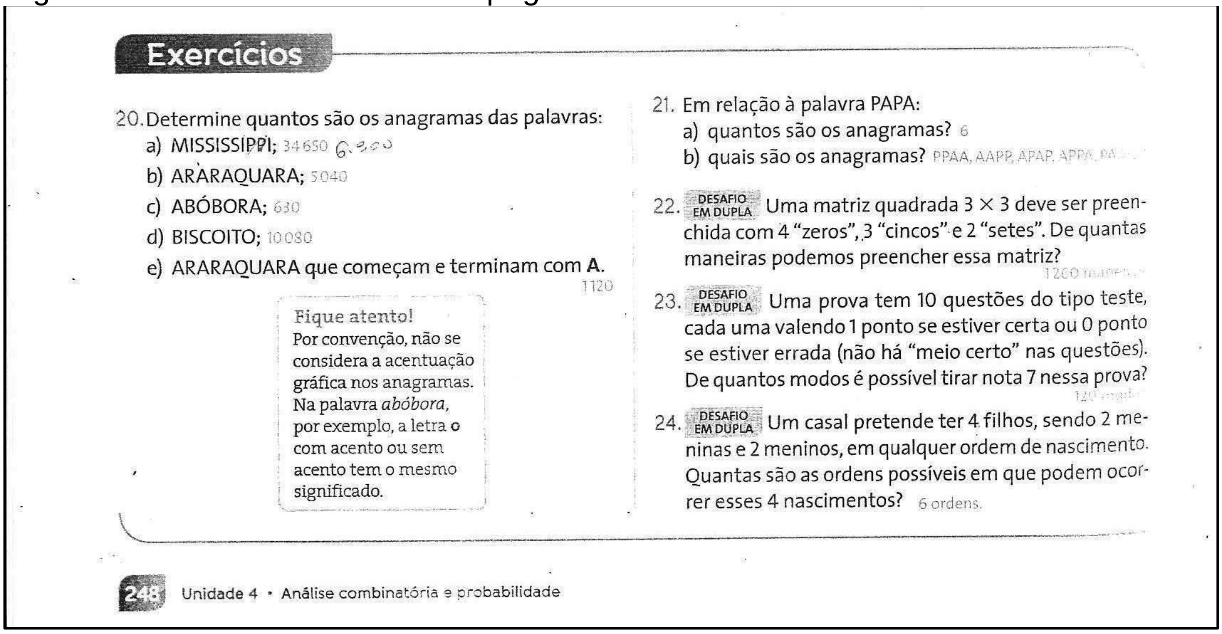
Dando sequência na página 248 do livro, a professora passou a explicar mais uma parte do conteúdo - permutações com repetição – utilizando com dois exemplos: 1) os anagramas da palavra BATATA e 2) os anagramas da palavra PARALELEPÍPEDO. Despois de resolver esses dois exemplos a professora resumiu como resolver este tipo de problema dizendo:

> **Professora**: Toda vez que houver repetição faz o fatorial e divide pelas letras repetidas.

Observamos que não está correto dizer que “divide pelas letras repetidas”, mas “para cada letra repetida, deve-se dividir pelo fatorial do número de vezes em que ela ocorre”. A frase informal da professora indica a operação correta e pode até ser interpretada corretamente pelos alunos depois de um exemplo, mas tal imprecisão na linguagem não deveria ocorrer. De acordo com Lorensatti (2009, p. 95) “as dificuldades, [...] podem ter início na falta de compreensão da linguagem utilizada no enunciado, refletindo-se em uma representação mental inadequada”.

Em seguida pediu aos alunos que resolvessem mais dois problemas, os números 20 e 21 da página 248 (FIGURA 10).

Figura 10 - Exercícios 20 e 21 da página 248 do livro utilizado



Exercícios

20. Determine quantos são os anagramas das palavras:
a) MISSISSIPPI; 34 650
b) ARARAQUARA; 5040
c) ABÓBORA; 630
d) BISCOITO; 10 080
e) ARARAQUARA que começam e terminam com **A**. 1120

Fique atento!
Por convenção, não se considera a acentuação gráfica nos anagramas. Na palavra *abóbora*, por exemplo, a letra **o** com acento ou sem acento tem o mesmo significado.

21. Em relação à palavra PAPA:
a) quantos são os anagramas? 6
b) quais são os anagramas? PPAA, AAPP, APAP, APPA,

22. DESAFIO EM DUPLA Uma matriz quadrada 3 × 3 deve ser preenchida com 4 “zeros”, 3 “cincos” e 2 “setes”. De quantas maneiras podemos preencher essa matriz?

23. DESAFIO EM DUPLA Uma prova tem 10 questões do tipo teste, cada uma valendo 1 ponto se estiver certa ou 0 ponto se estiver errada (não há “meio certo” nas questões). De quantos modos é possível tirar nota 7 nessa prova?

24. DESAFIO EM DUPLA Um casal pretende ter 4 filhos, sendo 2 meninas e 2 meninos, em qualquer ordem de nascimento. Quantas são as ordens possíveis em que podem ocorrer esses 4 nascimentos? 6 ordens.

248 Unidade 4 • Análise combinatória e probabilidade

Fonte: Dante (2013).

A aula já estava terminando, então a professora passou a dar algumas orientações. Avisou que nas próximas duas aulas ensinaria arranjo simples e combinação simples. Também falou que depois disso só restaria uma aula antes da prova e que esta aula seria para revisão do conteúdo anterior, referente a **sólidos**.

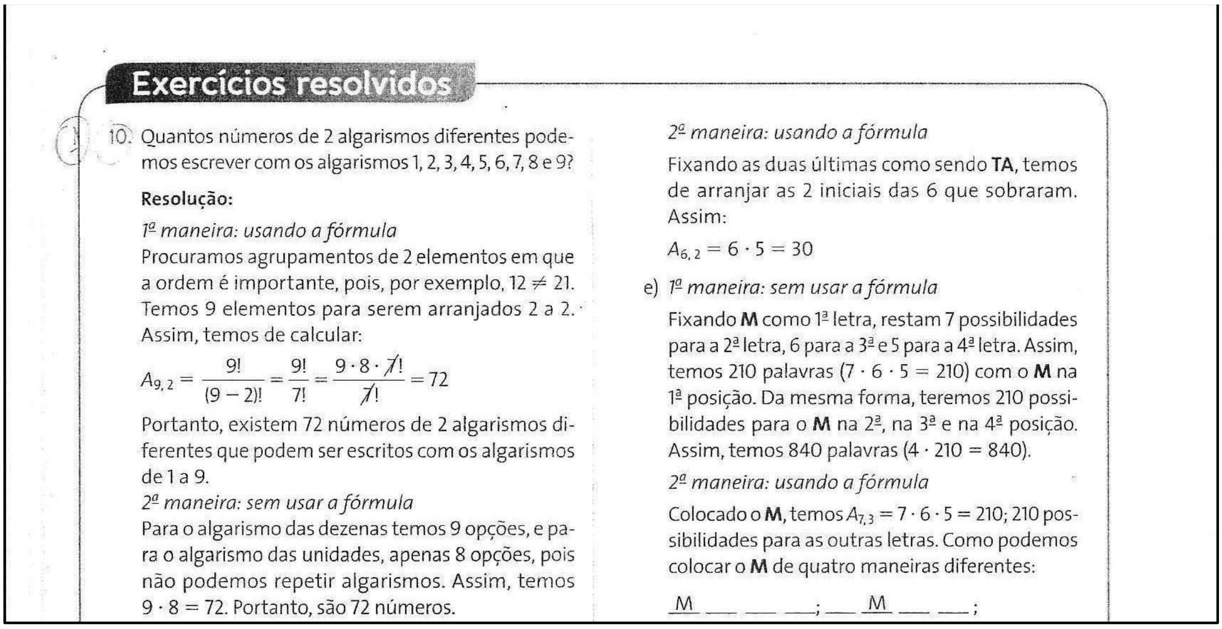
5.3.1.5 Sexta e sétima aulas de Combinatória – 24/11/2017

A professora iniciou pedindo que os alunos abrissem o livro na página 249 para que acompanhassem a explicação sobre arranjo simples e combinação simples. Lendo rapidamente o conceito de arranjo simples a professora passou logo para os alunos a fórmula para resolver esses problemas. Continuou dizendo que também iria passar uma fórmula para os problemas de combinação simples e, para que eles soubessem decidir qual fórmula utilizar, explicou a diferença entre os dois:

> **Professora**: Quando a ordem dos elementos importa usamos arranjo simples e quando não importa usamos combinação simples.

Passou então para o exemplo 10 da página 251 de arranjo simples mostrado na Figura 11.

Figura 11 - Exemplo 10 da página 251 do livro utilizado



Exercícios resolvidos

10. Quantos números de 2 algarismos diferentes podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Resolução:

1ª maneira: usando a fórmula

Procuramos agrupamentos de 2 elementos em que a ordem é importante, pois, por exemplo, 12 ≠ 21. Temos 9 elementos para serem arranjados 2 a 2. Assim, temos de calcular:

$$A_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7}!}{\cancel{7}!} = 72$$

Portanto, existem 72 números de 2 algarismos diferentes que podem ser escritos com os algarismos de 1 a 9.

2ª maneira: sem usar a fórmula

Para o algarismo das dezenas temos 9 opções, e para o algarismo das unidades, apenas 8 opções, pois não podemos repetir algarismos. Assim, temos $9 \cdot 8 = 72$. Portanto, são 72 números.

2ª maneira: usando a fórmula

Fixando as duas últimas como sendo **TA**, temos de arranjar as 2 iniciais das 6 que sobraram. Assim:

$A_{6,2} = 6 \cdot 5 = 30$

e) *1ª maneira: sem usar a fórmula*

Fixando **M** como 1ª letra, restam 7 possibilidades para a 2ª letra, 6 para a 3ª e 5 para a 4ª letra. Assim, temos 210 palavras ($7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$) com o **M** na 1ª posição. Da mesma forma, teremos 210 possibilidades para o **M** na 2ª, na 3ª e na 4ª posição. Assim, temos 840 palavras ($4 \cdot 210 = 840$).

2ª maneira: usando a fórmula

Colocado o **M**, temos $A_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$; 210 possibilidades para as outras letras. Como podemos colocar o **M** de quatro maneiras diferentes:

M ___ ___ ___; ___ M ___ ___;

Fonte: Dante (2013).

Lendo o problema, a professora Ana convidou os alunos a refletirem se a ordem dos elementos importava e, após uma pausa breve, continuou a explicação do exemplo:

> **Professora**: A ordem importa. Então vamos resolver usando a fórmula de arranjo.

A professora então resolveu utilizando a fórmula, assim como mostra a **1ª maneira** de resolver o exemplo, na Figura 11. Continuando no mesmo exemplo acrescentou:

> **Professora**: Só que eu acho muito mais fácil analisar as possibilidades e resolver sem a fórmula.

Ela então resolveu da **2ª maneira** indicada pelo livro, analisando as possibilidades e sem usar a fórmula, assim como podemos ver também na Figura 11. Uma aluna então comentou:

> **Aluna 8:** Caiu muito disso no PAEBES.
>
> **Professora**: É, alguns conteúdos vocês não estudaram a tempo da prova.

Os alunos, no dia 22/11/2017, haviam passado pelo terceiro PAEBES do ano. Os conteúdos de cada prova do PAEBES estão pré-estabelecidos na Matriz de Referência (ANEXO A). Nessa Matriz, a Análise Combinatória está prevista para prova do terceiro trimestre do segundo ano do Ensino Médio, pelo descritor D06 – "Utilizar métodos de contagem na resolução de problemas" - juntamente com mais dois conteúdos nos descritores D07 – "Executar operações entre matrizes" - e D15 – "Utilizar sistema de equações polinomiais de 1º grau na resolução de problemas".

A Matriz também propõe uma ordem para que os conteúdos sejam trabalhados durante o ano. A Combinatória segue estabelecida no terceiro trimestre como último conteúdo, depois dos descritores D7 e D15, obedecendo esta ordem. Fato que parece estar relacionado à sequência proposta para o terceiro ano do Ensino Médio que inicia com tópicos de Probabilidade.

Para cada prova são elaborados quatro cadernos diferentes a serem aplicados em todas as Escolas Estaduais. Essa turma, respondeu o Caderno de código C1103 (ANEXO B). Depois da prova, o CAEd/UFJF disponibiliza, além dos gabaritos, uma tabela com a distribuição dos descritores nas questões da prova. Analisando a prova e olhando para a referida tabela, constatamos que as questões de matemática - nos intervalos de 14 a 26 e de 40 a 52 – contemplam o descritor D06, referente a Combinatória, em sete questões, e os descritores D07 e D15, em nove questões cada um.

Voltando para as aulas da professora Ana, até o dia da prova, os alunos só haviam estudado completamente o conteúdo referente ao descritor D015, tinham iniciado o conteúdo do descritor D06 (Análise Combinatória) e não haviam estudado nada referente ao conteúdo do descritor D07.

A professora, que já havia nos apontado a falta de tempo para ensinar todos os conteúdos do ano letivo, comentou então com a turma sobre a prova ser aplicada antes que os conteúdos fossem trabalhados, quando na verdade ela não havia conseguido ensiná-los a tempo:

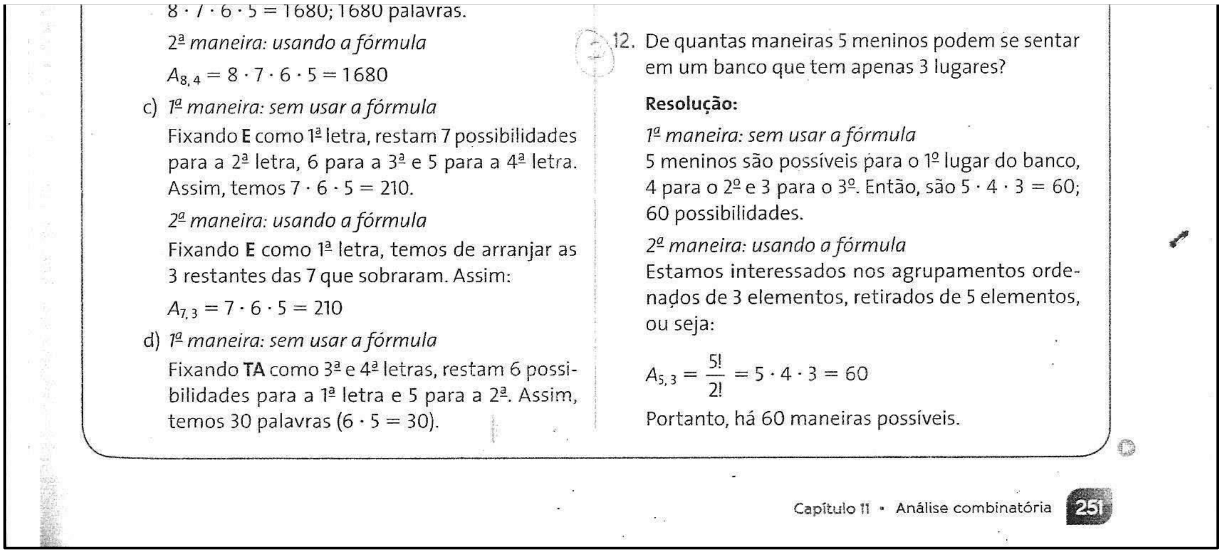
Professora: O PAEBES está adiantado.

Os alunos então perguntaram sobre mais duas questões do PAEBES, mas a professora preocupada em voltar ao conteúdo, não avançou nesse sentido, apenas esclareceu superficialmente, dizendo que não haviam mesmo estudado todo aquele conteúdo.

Sobre o sistema de avaliação da prova PAEBES, nota-se que, depois de aplicada a avaliação, os professores não são supervisionados com relação aos conteúdos que deveriam ter trabalhado para a prova, estabelecidos na Matriz. E os alunos recebem uma quantidade de pontos pré-definida dentro da disciplina, no boletim da escola, apenas por comparecerem no dia da avaliação, independentemente do rendimento que tiveram na prova. Expressão de que, na verdade, a preocupação principal da escola com respeito a essa avaliação não é verificar a aprendizagem dos alunos, mas sim, garantir o demonstrativo quantitativo gerado ao final do processo.

A professora então voltou à sua explicação, com a leitura do problema 12, da página 251 (FIGURA 12).

Figura 12 - Problema 12 da página 251 do livro utilizado



$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$; 1680 palavras.

2ª maneira: usando a fórmula

$A_{8,4} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$

c) *1ª maneira: sem usar a fórmula*

Fixando **E** como 1ª letra, restam 7 possibilidades para a 2ª letra, 6 para a 3ª e 5 para a 4ª letra. Assim, temos $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

2ª maneira: usando a fórmula

Fixando **E** como 1ª letra, temos de arranjar as 3 restantes das 7 que sobraram. Assim:

$A_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

d) *1ª maneira: sem usar a fórmula*

Fixando **TA** como 3ª e 4ª letras, restam 6 possibilidades para a 1ª letra e 5 para a 2ª. Assim, temos 30 palavras ($6 \cdot 5 = 30$).

12. De quantas maneiras 5 meninos podem se sentar em um banco que tem apenas 3 lugares?

Resolução:

1ª maneira: sem usar a fórmula

5 meninos são possíveis para o 1º lugar do banco, 4 para o 2º e 3 para o 3º. Então, são $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; 60 possibilidades.

2ª maneira: usando a fórmula

Estamos interessados nos agrupamentos ordenados de 3 elementos, retirados de 5 elementos, ou seja:

$A_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Portanto, há 60 maneiras possíveis.

Capítulo 11 • Análise combinatória 251

Fonte: Dante (2013).

Novamente ela resolveu o problema para a turma, primeiro usando a formula de arranjo, e depois sem a fórmula, como indicava a resolução do livro. E um aluno comentou:

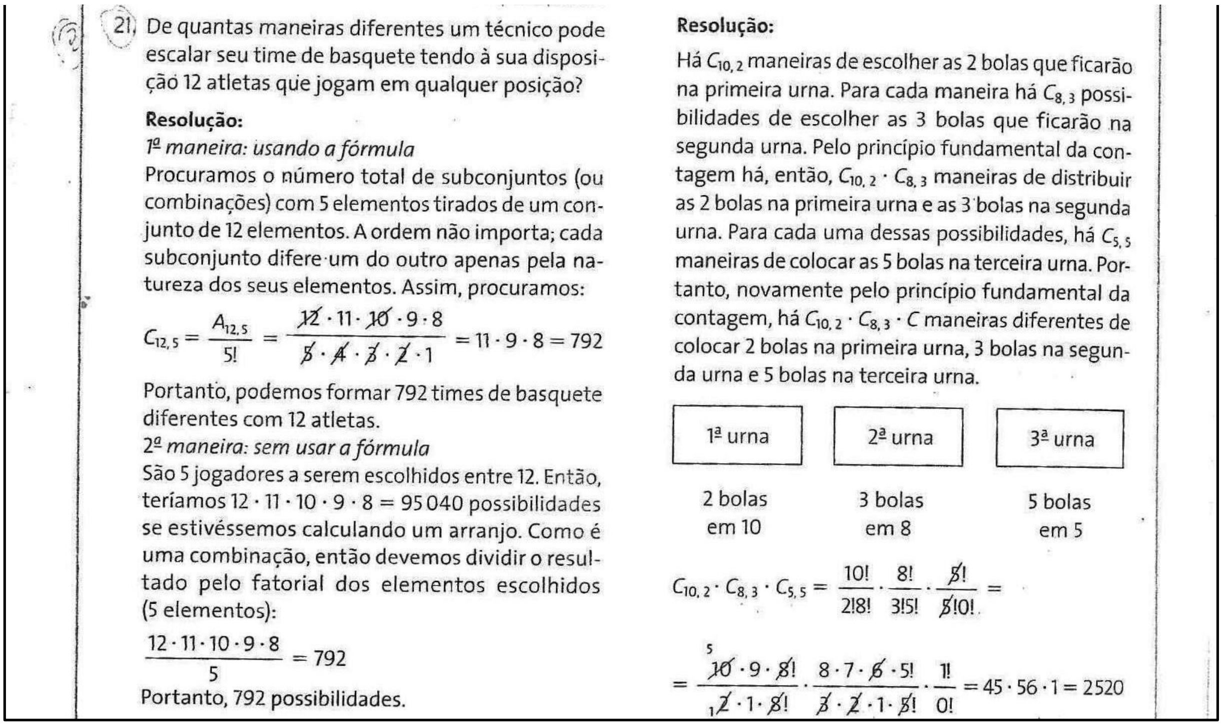
> **Aluno 5**: Com a fórmula fica mais fácil... opa... ou não sem a fórmula fica mais fácil.
>
> **Professora**: Eu acho arranjo mais fácil sem a fórmula.

Passando a ensinar combinação simples, a professora, da mesma forma, apresentou aos alunos a fórmula e passou a resolver o problema 21, da página 258 (FIGURA 13). Lendo o problema ela mostrou para os alunos que não importava a ordem e, assim como no livro, primeiro resolveu usando a fórmula de combinação simples e, depois, sem usar a fórmula. Quando a professora terminou, um dos alunos iniciou o seguinte diálogo:

> **Aluno 4**: Professora esse problema não está certo, em um time não tem como não pensar nas habilidades, não da pra colocar, por exemplo, um goleiro na linha.
>
> **Professora**: Mas agora só estamos pensando na equipe toda.
>
> **Aluno 4**: Mas tem que pensar em tudo.
>
> **Professora**: Vai ter outro pra pensar nisso.

Professora: Vocês só tem que lembrar que para um importa a ordem importa e para o outro não importa.

Figura 13 - Problema 21 da página 258 do livro utilizado



21. De quantas maneiras diferentes um técnico pode escalar seu time de basquete tendo à sua disposição 12 atletas que jogam em qualquer posição?

Resolução:

1ª maneira: usando a fórmula

Procuramos o número total de subconjuntos (ou combinações) com 5 elementos tirados de um conjunto de 12 elementos. A ordem não importa; cada subconjunto difere um do outro apenas pela natureza dos seus elementos. Assim, procuramos:

$$C_{12,5} = \frac{A_{12,5}}{5!} = \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10} \cdot 9 \cdot 8}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792$$

Portanto, podemos formar 792 times de basquete diferentes com 12 atletas.

2ª maneira: sem usar a fórmula

São 5 jogadores a serem escolhidos entre 12. Então, teríamos $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95\,040$ possibilidades se estivéssemos calculando um arranjo. Como é uma combinação, então devemos dividir o resultado pelo fatorial dos elementos escolhidos (5 elementos):

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5} = 792$$

Portanto, 792 possibilidades.

Resolução:

Há $C_{10,2}$ maneiras de escolher as 2 bolas que ficarão na primeira urna. Para cada maneira há $C_{8,3}$ possibilidades de escolher as 3 bolas que ficarão na segunda urna. Pelo princípio fundamental da contagem há, então, $C_{10,2} \cdot C_{8,3}$ maneiras de distribuir as 2 bolas na primeira urna e as 3 bolas na segunda urna. Para cada uma dessas possibilidades, há $C_{5,5}$ maneiras de colocar as 5 bolas na terceira urna. Portanto, novamente pelo princípio fundamental da contagem, há $C_{10,2} \cdot C_{8,3} \cdot C$ maneiras diferentes de colocar 2 bolas na primeira urna, 3 bolas na segunda urna e 5 bolas na terceira urna.

1ª urna	2ª urna	3ª urna
2 bolas em 10	3 bolas em 8	5 bolas em 5

$$C_{10,2} \cdot C_{8,3} \cdot C_{5,5} = \frac{10!}{2!8!} \cdot \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{\cancel{5}!}{\cancel{5}!0!} =$$

$$= \frac{\overset{5}{\cancel{10}} \cdot 9 \cdot \cancel{8}!}{{}_1\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{8}!} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5!}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{5}!} \cdot \frac{1!}{0!} = 45 \cdot 56 \cdot 1 = 2520$$

Fonte: Dante (2013).

A professora então resolveu para eles, no quadro, mais um exemplo de combinação simples, o exercício 40, da página 259 (FIGURA 14), dessa vez, apenas usando a fórmula dada. Quando terminou um aluno perguntou:

Aluno 1: Na prova vamos poder usar calculadora?

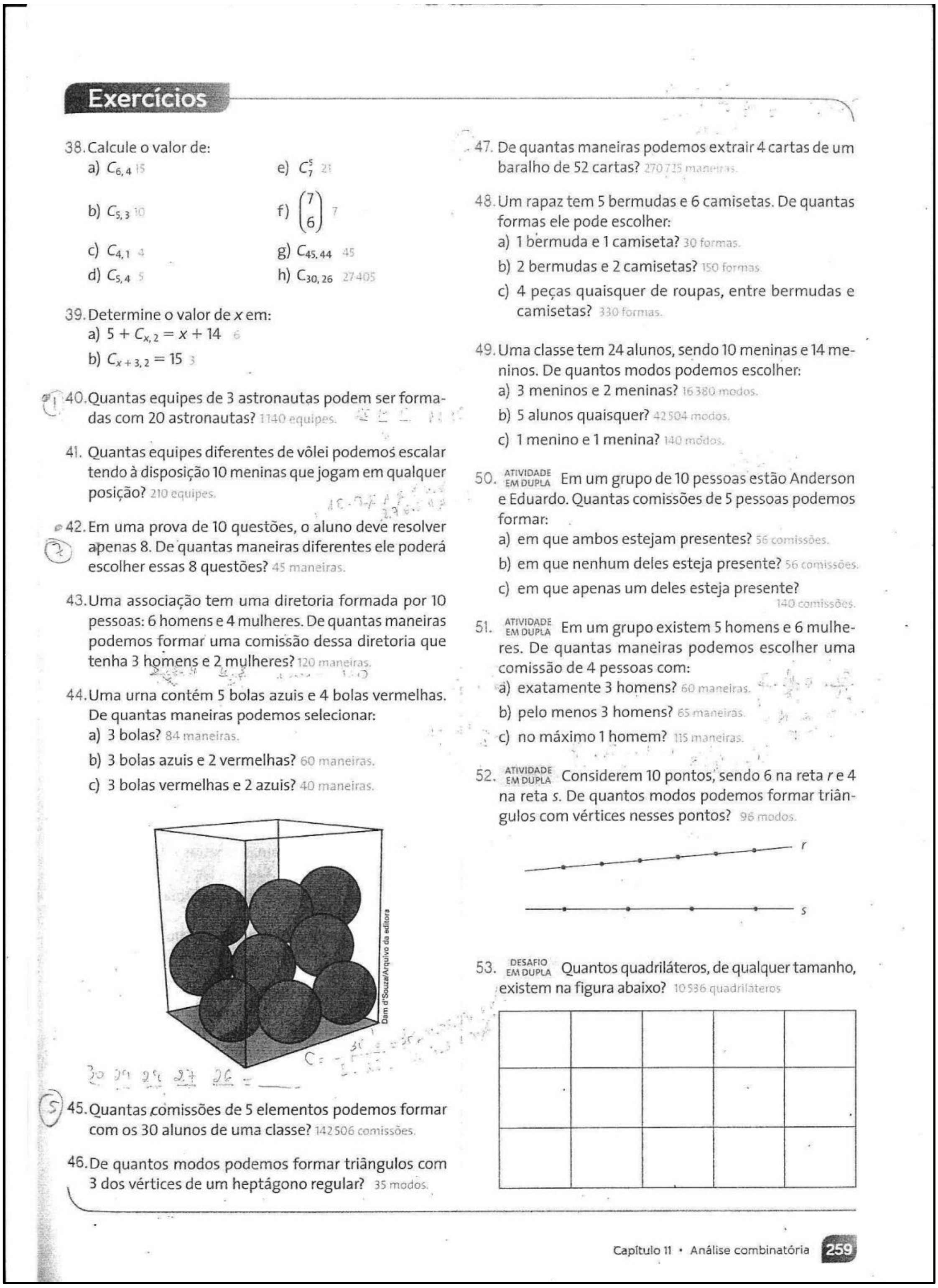
Professora: Pode sim e a prova vai ser em dupla também.

Aluno 1: Então vou fazer com Luan [o estagiário].

Professora: Quando vocês tem que chamar ele [estagiário], vocês quase não chamam.

Aluno 1: É porque todo mundo tem Internet, e na prova não pode usar Internet.

Figura 14 - Página 259 do livro utilizado



Exercícios

38. Calcule o valor de:
a) $C_{6,4}$ 15
b) $C_{5,3}$ 10
c) $C_{4,1}$ 4
d) $C_{5,4}$ 5
e) C_7^5 21
f) $\binom{7}{6}$ 7
g) $C_{45,44}$ 45
h) $C_{30,26}$ 27405

39. Determine o valor de x em:
a) $5 + C_{x,2} = x + 14$ 6
b) $C_{x+3,2} = 15$ 3

40. Quantas equipes de 3 astronautas podem ser formadas com 20 astronautas? 1140 equipes.

41. Quantas equipes diferentes de vôlei podemos escalar tendo à disposição 10 meninas que jogam em qualquer posição? 210 equipes.

42. Em uma prova de 10 questões, o aluno deve resolver apenas 8. De quantas maneiras diferentes ele poderá escolher essas 8 questões? 45 maneiras.

43. Uma associação tem uma diretoria formada por 10 pessoas: 6 homens e 4 mulheres. De quantas maneiras podemos formar uma comissão dessa diretoria que tenha 3 homens e 2 mulheres? 120 maneiras.

44. Uma urna contém 5 bolas azuis e 4 bolas vermelhas. De quantas maneiras podemos selecionar:
a) 3 bolas? 84 maneiras.
b) 3 bolas azuis e 2 vermelhas? 60 maneiras.
c) 3 bolas vermelhas e 2 azuis? 40 maneiras.

Dam d'Souza/Arquivo da editora

45. Quantas comissões de 5 elementos podemos formar com os 30 alunos de uma classe? 142 506 comissões.

46. De quantos modos podemos formar triângulos com 3 dos vértices de um heptágono regular? 35 modos.

47. De quantas maneiras podemos extrair 4 cartas de um baralho de 52 cartas? 270 725 maneiras.

48. Um rapaz tem 5 bermudas e 6 camisetas. De quantas formas ele pode escolher:
a) 1 bermuda e 1 camiseta? 30 formas.
b) 2 bermudas e 2 camisetas? 150 formas.
c) 4 peças quaisquer de roupas, entre bermudas e camisetas? 330 formas.

49. Uma classe tem 24 alunos, sendo 10 meninas e 14 meninos. De quantos modos podemos escolher:
a) 3 meninos e 2 meninas? 16 380 modos.
b) 5 alunos quaisquer? 42 504 modos.
c) 1 menino e 1 menina? 140 modos.

50. ATIVIDADE EM DUPLA Em um grupo de 10 pessoas estão Anderson e Eduardo. Quantas comissões de 5 pessoas podemos formar:
a) em que ambos estejam presentes? 56 comissões.
b) em que nenhum deles esteja presente? 56 comissões.
c) em que apenas um deles esteja presente? 140 comissões.

51. ATIVIDADE EM DUPLA Em um grupo existem 5 homens e 6 mulheres. De quantas maneiras podemos escolher uma comissão de 4 pessoas com:
a) exatamente 3 homens? 60 maneiras.
b) pelo menos 3 homens? 65 maneiras.
c) no máximo 1 homem? 115 maneiras.

52. ATIVIDADE EM DUPLA Considerem 10 pontos, sendo 6 na reta r e 4 na reta s. De quantos modos podemos formar triângulos com vértices nesses pontos? 96 modos.

r

s

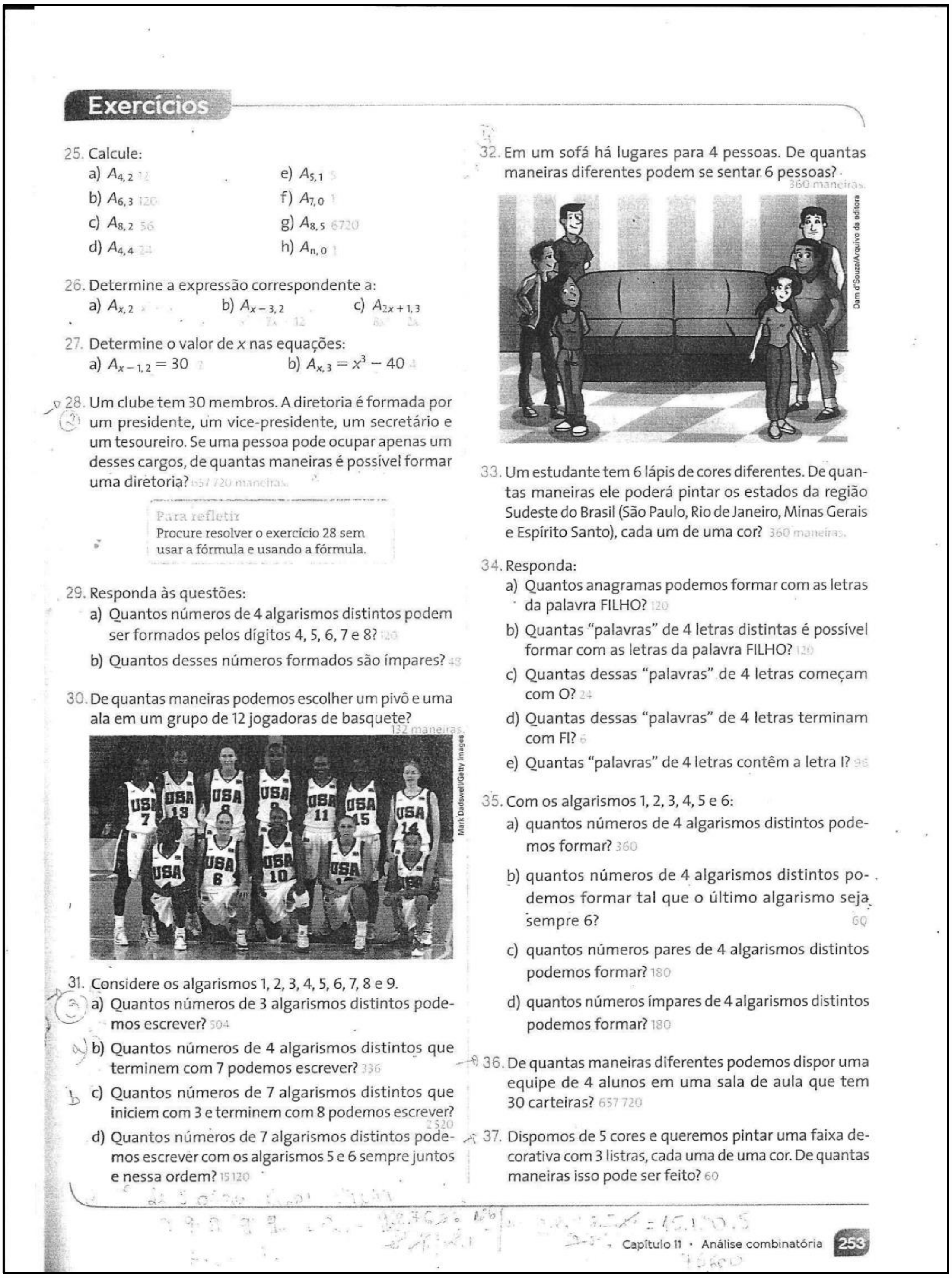
53. DESAFIO EM DUPLA Quantos quadriláteros, de qualquer tamanho, existem na figura abaixo? 10 536 quadriláteros

Capítulo 11 • Análise combinatória 259

Fonte: Dante (2013).

Encerrando o diálogo, a professora então pediu à turma que resolvesse os exercícios 28, 29, 31 e 36, da página 253 (FIGURA 15) e os exercícios 42, 43, 45 e 47, da página 259 (FIGURA 14).

Figura 15 – Página 253 do livro utilizado



Exercícios

25. Calcule:
 a) $A_{4,2}$ 12
 b) $A_{6,3}$ 120
 c) $A_{8,2}$ 56
 d) $A_{4,4}$ 24
 e) $A_{5,1}$ 5
 f) $A_{7,0}$ 1
 g) $A_{8,5}$ 6720
 h) $A_{n,0}$ 1

26. Determine a expressão correspondente a:
 a) $A_{x,2}$ $x^2 - x$
 b) $A_{x-3,2}$ $x^2 - 7x + 12$
 c) $A_{2x+1,3}$ $8x^3 - 2x$

27. Determine o valor de x nas equações:
 a) $A_{x-1,2} = 30$ 7
 b) $A_{x,3} = x^3 - 40$ 4

28. Um clube tem 30 membros. A diretoria é formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Se uma pessoa pode ocupar apenas um desses cargos, de quantas maneiras é possível formar uma diretoria? 657 720 maneiras.

Para refletir
Procure resolver o exercício 28 sem usar a fórmula e usando a fórmula.

29. Responda às questões:
 a) Quantos números de 4 algarismos distintos podem ser formados pelos dígitos 4, 5, 6, 7 e 8? 120
 b) Quantos desses números formados são ímpares? 48

30. De quantas maneiras podemos escolher um pivô e uma ala em um grupo de 12 jogadoras de basquete? 132 maneiras.

31. Considere os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.
 a) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos escrever? 504
 b) Quantos números de 4 algarismos distintos que terminem com 7 podemos escrever? 336
 c) Quantos números de 7 algarismos distintos que iniciem com 3 e terminem com 8 podemos escrever? 2520
 d) Quantos números de 7 algarismos distintos podemos escrever com os algarismos 5 e 6 sempre juntos e nessa ordem? 15 120

32. Em um sofá há lugares para 4 pessoas. De quantas maneiras diferentes podem se sentar 6 pessoas? 360 maneiras.

33. Um estudante tem 6 lápis de cores diferentes. De quantas maneiras ele poderá pintar os estados da região Sudeste do Brasil (São Paulo, Rio de Janeiro, Minas Gerais e Espírito Santo), cada um de uma cor? 360 maneiras.

34. Responda:
 a) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra FILHO? 120
 b) Quantas "palavras" de 4 letras distintas é possível formar com as letras da palavra FILHO? 120
 c) Quantas dessas "palavras" de 4 letras começam com O? 24
 d) Quantas dessas "palavras" de 4 letras terminam com FI? 6
 e) Quantas "palavras" de 4 letras contêm a letra I? 96

35. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6:
 a) quantos números de 4 algarismos distintos podemos formar? 360
 b) quantos números de 4 algarismos distintos podemos formar tal que o último algarismo seja sempre 6? 60
 c) quantos números pares de 4 algarismos distintos podemos formar? 180
 d) quantos números ímpares de 4 algarismos distintos podemos formar? 180

36. De quantas maneiras diferentes podemos dispor uma equipe de 4 alunos em uma sala de aula que tem 30 carteiras? 657 720

37. Dispomos de 5 cores e queremos pintar uma faixa decorativa com 3 listras, cada uma de uma cor. De quantas maneiras isso pode ser feito? 60

Capítulo 11 • Análise combinatória 253

Fonte: Dante (2013).

Assim como das outras vezes em que a professora propôs que resolvessem os exercícios, tanto ela quanto o estagiário foram pouco requisitados para dúvidas. Poucos alunos efetivamente fizeram as atividades e maior parte da turma conversava e esperava para copiar de algum colega, que eventualmente tivesse respondido.

A professora então disse que teríamos outra visão da turma, se a tivéssemos acompanhado, desde o início do ano. Também disse que veríamos que eles eram muito mais interessados do que agora, que eles já estavam cansados e muitos já não precisavam mais de nota para passar de ano. Ela ainda nos explicou que eles (os alunos) não conseguem perceber que, no próximo ano, vão precisar desse conteúdo.

Já se aproximava novamente o final da aula e a professora entregou uma lista de exercícios para revisar o conteúdo referente a Sólidos para corrigirem juntos na próxima aula que seria a última antes da prova.

5.3.1.6 Últimas aulas

A aula seguinte foi uma aula onde a professora resolveu a lista de exercícios de revisão do conteúdo ministrado antes da Combinatória e que também cairia na prova. No dia 28/11/2017, os alunos fizeram a última avaliação do ano, aplicada pela professora. Na aula posterior à prova, sem nenhum questionamento dos alunos, a professora pediu aos que ainda não tinham média para passar de ano, apenas quatro alunos, que apenas copiassem a prova toda para que pudessem ganhar mais alguns pontos. Com os pontos acrescidos desses alunos apenas um aluno na turma ficou para recuperação e teria que fazer mais uma prova na semana seguinte.

5.3.2 Observação com a Turma 2M05

Essa turma estava um pouco mais atrasada com relação ao conteúdo. Além disso, era mais agitada do que a outra. Segundo a professora, nessa turma os alunos eram mais unidos, consequentemente, conversavam mais, enquanto a outra turma era mais individualista e tinha pequenos grupos definidos, o que a tornava menos barulhenta.

O conteúdo de Análise Combinatória foi iniciado com eles no dia 21/11/2017, tiveram mais duas aulas sobre o assunto no dia 23/11/2017, e fizeram a prova também no dia 28/11/2017.

5.3.2.1 Primeira aula de Combinatória – 21/11/2017

Nesse dia, a professora iniciou o conteúdo com a turma da mesma maneira que começou com a outra turma, pedindo que abrissem o livro utilizado pela escola, Dante (2013), na página 243 e ensinou o Princípio Fundamental da Contagem com os mesmos três exemplos mostrados nas Figuras 4, 5 e 6. Também acrescentou ao terceiro exemplo a mesma variação, perguntando na letra: **c) Quantos números de 3 algarismos distintos e múltiplos de 5 podemos formar, ainda com os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?** Novamente a questão foi resolvida de maneira incorreta.

Como esta turma era ainda mais agitada do que a outra, foi ainda mais difícil alguém perceber qualquer lacuna na resolução, tanto por parte da professora quanto dos alunos. Só uma aluna que tinha o hábito de, em todas as vezes que a professora voltava o olhar para a turma tentando obter um pouco de silêncio, repetidamente afirmar não ter entendido e pedir à professora que explicasse mais uma vez, sem fazer nenhuma pergunta mais especifica. O fato é que essa não era uma aluna que conversava com os colegas, pelo contrário, ela estava sempre quieta prestando atenção e, mesmo assim, pedia novamente explicação. A professora sempre repetia a explicação.

A professora também resolveu para eles anagramas com letras todas distintas e passou a explicar operações com fatorial, bem como na outra turma. Notamos, nessa hora, a mesma reação da outra turma, em que algumas alunas se manifestaram dizendo que aquela parte do conteúdo era fácil.

Para finalizar a aula ela pediu que os alunos fizessem em casa, para mostrar na próxima aula, as atividades da página 247 do livro, de 1 até 10 (FIGURA 9), assim como havia pedido na outra turma. A diferença foi que a outra turma teve tempo de tentar resolver junto com os colegas, em sala de aula.

5.3.2.2 Segunda e terceira aulas de Combinatória – 23/11/2017

A professora começou a aula e, mesmo com muito barulho, passou dando os vistos nos cadernos. Deu continuidade resolvendo no quadro os problemas. Quando terminou, pediu que fizessem mais algumas atividades, as mesmas que a outra turma fez, no entanto, reduzindo a quantidade: na página 247 os números 13 e 16 (FIGURA 9), na página 248 o número 20 (FIGURA 10), e a folha de revisão sobre sólidos.

Os alunos conversavam bastante, alguns tentando resolver as atividades, mas a maioria fazia outras coisas, não relacionadas ao conteúdo. A professora então explicou para eles, rapidamente, permutações com repetição, a partir do exemplo da página 248, que pedia os anagramas da palavra PARALELEPIPEDO, e disse a eles que também cairia na prova.

Assim como a outra turma, essa também havia feito o PAEBES, no dia 22/11/2017, e assim que a professora terminou o último exemplo, um aluno perguntou sobre o conteúdo desta prova:

> **Aluno 9**: Professora, e Matrizes, que caiu no PAEBES?
>
> **Professora**: É a próxima matéria que não vai dar tempo de ensinar.
>
> **Aluno 9**: O PAEBES esta adiantado.

Passados alguns minutos, antes de terminar a aula, a professora resolveu as atividades do livro que havia pedido e lembrou que, na aula seguinte seria aplicada a última prova do ano. Ela só não resolveu com essa turma a lista de exercícios de revisão do conteúdo anterior, porque não havia mais tempo.

5.3.2.3 Últimas aulas

Assim como na outra turma, os alunos fizeram a mesma prova, também em dupla. Na aula seguinte, a professora também pediu que os alunos que estavam abaixo da média copiassem a prova toda. Eram apenas seis alunos. Desses, apenas dois teriam que fazer a prova de recuperação na próxima semana, pois, mesmo com o acréscimo dos pontos dado pela atividade de copiar a prova, eles ainda ficaram devendo alguns pontos.

6 TRIANGULAÇÃO DAS REPRESENTAÇÕES

A técnica de triangulação tem por principal objetivo alcançar uma maior amplitude na descrição e compreensão do foco em estudo, partindo de princípios que afirmam “que é impossível conceber a existência isolada de um fenômeno social, sem raízes históricas, sem significados culturais e sem vinculações estreitas e essenciais com a macrorrealidade social” (TRIVIÑOS, 1992, p. 138). Segundo essa técnica, tendo determinados os sujeitos, o interesse pelo fenômeno social deve seguir dirigido pelos três aspectos que já explicitamos no quarto capítulo. A partir disso, elegemos algumas categorias de representações para analisar, apresentadas como seguem, encaixadas nesses aspectos.

6.1 PRIMEIRO ASPECTO - PROCESSOS E PRODUTOS CENTRADOS NO SUJEITO

O primeiro aspecto nos leva a apresentar, enquanto pesquisadores, a discussão que fazemos das percepções, ações e comportamentos dos sujeitos pesquisados, segundo Triviños (1992, p. 140). Por isso, nesse aspecto, tratamos as representações: que os professores têm de sua própria formação; as que expressam sobre a complexidade da Combinatória, e as que demonstram pelo uso que fazem da metodologia de ensino resolução de problemas.

6.1.1 Representação relativa à formação profissional pessoal

Todos os entrevistados afirmaram terem recebido instruções bem simples sobre Combinatória, no nível básico, e que não estudaram o assunto no Ensino Superior. Esse recorte de uma das entrevistas representa bem os professores entrevistados com relação a essa categoria:

> **B3**: No Ensino Médio estudei Combinatória no 3° ano em 2004, muito rápido, bem simples, através de fórmulas. O professor mostrava a fórmula, depois exemplos e exercícios. E na faculdade não vimos.

Uma professora disse que estudou Combinatória apenas quando teve que ensinar no Ensino Médio:

> **G1**: Só para ensinar, no ano passado quando trabalhei com 2º ano.

6.1.2 Representação relativa à complexidade da Combinatória

Esta representação naturalmente está numa relação de causa e efeito com a primeira: a falta de conhecimento sobre o conteúdo e sobre como ensiná-lo é causa de insegurança para abordar o assunto e isso impacta negativamente no aprendizado dos alunos.

Os entrevistados tipicamente consideram que Combinatória é difícil de ensinar e aprender. Em geral, eles estimam que uma pequena parte da turma desenvolva nos estudos quando o tema é Análise Combinatória. Vejamos algumas manifestações.

> **G1**: De uma turma de 30 alunos, geralmente [o número dos] que conseguem desenvolver bem dá uns 5 ou 6 só, porque [poucos] se dedicam.
>
> **F2**: Eles têm muita dificuldade, principalmente no ensino público; em uma sala de 35 alunos somente 5 conseguem desenvolver o conteúdo.

A fala da Professora C1 mostra que ela sente insegurança para ensinar Combinatória em comparação a outros temas da matemática:

> **C1**: Esse é o único conteúdo que eu resolvo todos os problemas com antecedência, antes de levar para os alunos (...).

A Professora F1 acredita que a dificuldade dos alunos com Combinatória decorre do fato de não haver um procedimento padronizado para eles resolverem os problemas:

> **F1**: Essa parte de Análise Combinatória é complicada para eles [os alunos] justamente porque não têm modelo, são muitos "se"; então, para o aluno eu acho muito pesado.

Todavia, os professores concordam que os pré-requisitos para aprender Análise Combinatória são básicos. Realmente, há muitos trabalhos afirmando que os problemas de contagem no nível Médio da Educação Básica requerem apenas conhecimentos elementares e dois princípios básicos: o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação (MORGADO et al., 1991; BACHX; POPPE; TAVARES, 1975). As manifestações dos professores estão em conformidade com essa opinião, em geral, reconhecendo que para resolver problemas de Análise Combinatória, os alunos só precisam interpretar o enunciado e saber as operações básicas. A fala da Professora F3 é ilustrativa:

> **F3**: Então, para aprender Combinatória, os alunos têm que saber interpretar, multiplicar e dividir.

A professora Ana, em sua entrevista, também afirmou que acha esse conteúdo muito difícil, quando nos respondeu a pergunta:

> **Pesquisadora**: Você acha que Combinatória é um assunto difícil de ensinar?
>
> **Professora**: Sim! Acho um conteúdo complexo.

No entanto, notamos que durante as aulas, a professora procurou sempre afirmar para os alunos que o conteúdo era fácil.

Primeira aula:

> **Professora**: Muito fácil! Tudo questão de interpretação.

Segunda e terceira aulas:

> **Professora**: Mega fácil, até a 3ª série responde.
>
> **Professora**: Viu como é fácil?!

Sobre as representações da professora, vimos que, na ocasião da entrevista, ela reconheceu que achava o conteúdo complexo, conquanto, perante a turma, sempre afirmava o contrário. Identificamos então que, **afirmar para os alunos que Análise Combinatória é um assunto fácil** era uma **estratégia** da professora, usada para persuadi-los de que o conteúdo não era tão difícil e tentar motivá-los a aprender o assunto.

Relativamente aos alunos, sempre que a professora sugeria que o conteúdo era simples, observamos que eles concordavam em dizer que era mesmo descomplicado:

> **Aluna 3** (turma 2M05): É fácil!
>
> **Aluno 1** (turma 2M05): Essa parte é fácil!
>
> **Aluno 4** (turma 2M05): É mesmo...
>
> **Aluno 5** (turma 2M05): Muito fácil!

Depois das atividades resolvidas no quadro:

> **Aluna 4** (turma 2M05): Se eu soubesse não teria colado. [Concordando com a professora]

Porém, essas afirmações dos alunos não se confirmaram quando tiveram que resolver as atividades sozinhos; pelo contrário, eles sentiram grandes dificuldades e não se dedicaram.

Observamos que apenas dois alunos se destacaram resolvendo as atividades, sem demonstrar dificuldades. A minoria que tentou resolver sentiu dificuldade, já nos primeiros exercícios e (com pouca frequência) solicitou ajuda da professora ou do estagiário, enquanto a maioria da turma ficou esperando para copiar dos poucos colegas que tentavam fazer.

Percebemos então que **confirmar para ela que o conteúdo era mesmo fácil**, era uma **tática** dos alunos para satisfazer a professora, naquele momento. O comportamento deles era uma maneira que encontraram para atender rapidamente a expectativa gerada pela **estratégia** lançada pela professora, que sempre afirmava que o conteúdo era muito fácil. Evidência de que isso não correspondia à realidade é o fato de que os alunos, nas primeiras atividades relativas ao tema, demonstraram muita dificuldade e falta de motivação.

Ainda sobre as dificuldades sentidas, lembramos aqui as falas das alunas:

> **Aluna 6** (turma 2M05): Aquele negócio de esferas era mais fácil. Esse negócio de possibilidades é maior palhaçada [risos].
>
> **Aluna 7** (turma 2M05): [esfera] Não era fácil também não.
>
> **Aluna 6** (turma 2M05): Era fácil sim, só saber as fórmulas.
>
> **Aluna 7** (turma 2M05): O importante é encontrar a resposta, não interessa como.

A partir dessas falas, além da dificuldade que sentiram ao tentar resolver as atividades, podemos pontuar duas questões sobre **cultura escolar** nessa turma: primeiro, sobre a esperança que os alunos depositam nas fórmulas, indicando que, para eles, são elas que tornam determinado conteúdo mais fácil; e segundo, sobre seus objetivos diante dos problemas, eles não estavam preocupados em aprender a solucionar, mas sim em garantir uma resposta que poderia ser verificada no final do livro; seu objetivo era apenas utilizar os números dados pelo enunciado sem qualquer reflexão sobre como solucionar a questão.

6.1.3 Representação relativa à metodologia de ensino Resolução de Problemas

As entrevistas e a observação nos mostraram que a concepção que os professores têm da metodologia de ensino Resolução de Problemas gira mais em torno de colocar os alunos para fazerem exercícios do que utilizar efetivamente a metodologia indicada no ensino de Combinatória.

Os exercícios são problemas propostos pelo livro ou extraídos da Internet, como disseram os professores entrevistados. Isso explica explicitamente a razão da confusão: os professores pensam que a metodologia RP se resume a propor questões que servem para fixação. Certamente, há também da parte deles o desconhecimento da definição mais técnica de “problema” como uma questão, que se tem interesse em resolver, para a qual não temos um método ou estratégia pré-definida de resolução, tal como em Onuchic e Allevato (2005, p. 221). Considerando que a resolução de problemas é tema dos documentos curriculares oficiais e que os professores participaram de formação continuada, concluímos que essa confusão indica que as instituições, orientações e as estratégias governamentais para aperfeiçoar os docentes da rede pública não têm sido suficientes para esclarecer essas diferentes concepções.

6.2 SEGUNDO ASPECTO - ELEMENTOS PRODUZIDOS PELO MEIO DO SUJEITO E QUE TÊM INCUMBÊNCIA EM SEU DESEMPENHO NA COMUNIDADE

Lançando um olhar para esse segundo ângulo da triangulação trazemos neste subitem as representações relativas aos elementos produzidos pelo meio escolar, destinados ao consumo dos membros dessa comunidade, que, de alguma forma, conduzem a prática desses membros, conforme Triviños (1992, p. 140). Nesse sentido, entendemos que a presença da pesquisadora foi um elemento produzido pelo meio desde o momento em que a instituição permitiu nossa presença e deu abertura para pesquisa, por ser também essa uma questão de cultura daquela escola, portanto um elemento produzido pelo meio que interferiu no funcionamento do grupo. Outros produtos, o livro didático e a *Internet*, são instrumentos fornecidos pelo meio, questão também de cultura escolar, que vimos terem grande expressão na conduta do trabalho docente. E por fim, as políticas de ação oficiais, a Matriz de Referência e o PAEBES que, consumidas pelos sujeitos, direcionam completamente sua prática pedagógica.

6.2.1 Representação relativa à pesquisadora

Ao nos receber a professora disse que esperava não nos decepcionar. Essa manifestação nos diz muito sobre suas expectativas e sobre sua relação com a pesquisadora. Ainda na ocasião da entrevista, quando pedimos permissão para participar de suas aulas, enfatizamos que não era nossa proposta avaliar seu trabalho, mas sim pesquisar os aspectos inerentes ao ensino de Combinatória, para compreender melhor acerca das representações relativas a esse assunto e como elas alcançam o ambiente da sala de aula. Mesmo assim, a presença de uma pesquisadora não era uma situação totalmente confortável para aquela professora.

No entanto, podemos dizer que esse não foi um fator que modificou sua prática. Reconhecemos que ela pode ter ficado um pouco insegura, inicialmente, mas como nos esforçamos para que nossa presença quase não fosse notada durante as aulas, acreditamos que ela seguiu com sua maneira natural de ensinar.

Para os alunos, a representação é outra, eles minimamente notaram minha presença na sala de aula e não demonstraram nenhuma expectativa ao meu respeito. Nesse sentido, para eles, a observadora era apenas uma pessoa que assistia às aulas. Percebemos que essa é uma questão de cultura escolar, própria da instituição que mantém uma parceria com o CEUNES e recebe, ao longo do ano letivo, estagiários e alunos de projetos da Universidade. Assim, os professores estão sempre acompanhados de alunos dos cursos de licenciatura, o que torna a presença de professores em formação muito natural para a turma.

6.2.2 Representações relativas ao livro didático e a Internet

Para todos os entrevistados, o livro didático e a Internet são as únicas fontes de consulta para estudo individual e preparação das aulas de Combinatória. Eles não procuram preencher as lacunas deixadas pela sua formação inicial com uma bibliografia consistente ou alternativas de aprendizado (tais como cursos de formação continuada ou ensino a distância). Embora não tenhamos informações detalhadas sobre o que conseguem da Internet (que possui recursos de excelente qualidade), presumimos que suas fontes são bastante limitadas, uma vez que eles devem recorrer a essa alternativa, principalmente para contornar rapidamente as deficiências diante da urgência em exercer seu papel junto aos seus alunos, no processo de ensino e aprendizagem.

F1: Estudo o livro didático e outros recursos de Internet.

O livro didático não pode ser o determinante de todo o processo de ensino, desvalorizando a função do docente. Segundo Pais (2013), esse é um valioso instrumento, mas não deve determinar a parte essencial da ação do professor.

6.2.3 Representações relativas à Matriz de Referência e o PAEBES

Os professores apontam a Matriz de Referência de Matemática como documento norteador da escolha e organização dos conteúdos a serem trabalhados em suas aulas, sentindo-se pressionados a ensinar o que pede o documento, para que os alunos estejam preparados, periodicamente, para o PAEBES.

A Matriz de Referência de Matemática foi elaborada para orientar a construção de instrumentos de avaliação do Programa Brasil Alfabetizado e, com isso, tornou-se a maior referência para o trabalho que o professor desenvolve junto a seus alunos. Em linhas gerais ela é um enquadramento das competências, uma tabela que organiza as habilidades e conteúdos que o aluno deve desenvolver a cada trimestre. Segundo a fonte desse quadro (CAEd/UFJF), ele ainda auxilia o professor a avaliar a evolução da turma no decorrer do ano letivo.

Constatamos que, no documento, a Análise Combinatória deve ser trabalhada ao final do terceiro trimestre, relacionada ao descritor D6 – "Utilizar métodos de contagem na resolução de problemas", logo depois do conteúdo de Matrizes, sendo o último conteúdo do ano letivo.

As respostas dos professores, na entrevista, mostram que eles levam bastante em conta esta avaliação externa quanto às questões que abordam em sala de aula:

> **B3**: Os documentos influenciam sim, hoje mais do que antes, porque nós temos o PAEBES que ranqueia as escolas e as turmas. Essa prova é estabelecida a cada trimestre e precisamos ensinar determinados conteúdos em um espaço de tempo (que muitas vezes não dá tempo) para que eles façam bem as provas.
>
> **A2**: (...) como esse assunto é do Ensino Médio, eu busco muito trabalhar questões que já caíram no PAEBES, que é a maior preocupação deles [os alunos].

Sobre as observações, assim como os outros professores entrevistados, a professora Ana também nos disse que segue o conteúdo de acordo com a Matriz de Referência para preparar os alunos para o PAEBES. Todavia, vimos nas aulas que o conteúdo não foi trabalhado a tempo da avaliação. Nota-se então que, mesmo sentindo-se cobrada a preparar os alunos para a referida prova, ela não conseguiu ensinar a Combinatória, a tempo.

Outro fato é que a professora não sofre nenhuma penalidade e também não é cobrada posteriormente pela SEDU, ou pela escola, por não ter ensinado todos os conteúdos. O mesmo acontece com os alunos, que não são avaliados pela escola por seu rendimento, mas recebem uma pontuação na disciplina apenas por comparecerem no dia da prova.

Por essas duas circunstâncias, podemos então conjecturar, a partir de De Certeau (1994), que a prova é uma estratégia do governo para tentar forçar os professores a trabalharem os conteúdos como pedem na Matriz, ao mesmo tempo que é uma tática da professora afirmar que precisa trabalhar rapidamente os conteúdos, naquela ordem, justificando sua maneira de ensinar pelo fato de que precisa atender às expectativas desse órgão.

Além disso, pelo fato dessa estratégia do governo não chegar a ser uma exigência, é mais uma cobrança do que uma imposição, podemos dizer que ainda resta alguma autonomia para a professora, que pode escolher, por exemplo, a ordem que vai trabalhar os conteúdos dentro do trimestre. Como fez conosco, quando nos contou que ensinou a Combinatória antes de Matrizes, para que pudéssemos observar, invertendo a ordem proposta pela Matriz de Referência.

Para mais, evidenciamos que, apesar da estratégia posta, novas opções de conduta são conquistadas por meio da tática. Avaliamos, embasados em Chervel (1990), ser lastimável que esse momento de autonomia profissional quase nunca seja consciente. O docente, apesar de conseguir certa autonomia, segue “no automático”, tentando passar a maior parte do conteúdo como indicado pela Matriz, perdendo, dessa forma, a oportunidade de conduzir com liberdade e criatividade a sua prática.

6.3 TERCEIRO ASPECTO - PROCESSOS E PRODUTOS ORIGINADOS PELA ESTRUTURA SOCIOECONÔMICA E CULTURAL DO MACRO-ORGANISMO SOCIAL NO QUAL ESTÁ INSERIDO O SUJEITO

A terceira perspectiva de análise refere-se aos modos e relações de produção da classe social, nos diz Triviños (1992, p. 140). Nesse ponto, percebemos que a representação que os professores demonstraram com relação à formação continuada é uma produção socioeconômica e cultural advinda das forças e relações às quais estão submetidos como classe profissional. E para finalizar evidenciamos compreensões que tivemos sobre a qualidade do ensino de Combinatória, desencadeadas também por essa estrutura socioeconômica e cultural que produz comportamentos e norteia a conduta dos membros da comunidade escolar.

6.3.1 Representação relativa à formação continuada

Conforme dissemos na Introdução, procuramos realizar uma formação continuada sobre Combinatória com os professores vinculados à Superintendência Regional de Educação de São Mateus (SRE). Como não houve interesse significativo, na entrevista perguntamos aos professores se haviam recebido a proposta e sobre suas razões para participar ou não da formação continuada.

Dos 20 entrevistados, 6 não receberam a proposta. Com exceção de 3 professores, todos os outros entrevistados disseram não ter interesse na formação continuada, por dois fatores: 10 professores alegaram falta de tempo disponível, tanto devido às condições de trabalho, quanto para preservar sua vida pessoal; e 7 professores responderam que acham o assunto desinteressante para uma formação continuada:

> **F2**: Não fiquei sabendo da formação. E eu não participaria, porque depois que a gente começa a trabalhar [...] a gente tem uma vida e no meu tempo livre eu não faria o curso não.
>
> **D1**: Sim fiquei sabendo da formação. Não me dispus a fazer porque eu acabei de assumir concurso e eu não daria conta.
>
> **B2**: Sim eu fiquei sabendo da formação, mas não faria porque não tem uso.

O professor pesquisado não pode ser considerado isoladamente do seu meio social, das condições de trabalho da sua classe e nem tampouco de sua vida pessoal. Seu discurso, concepções e práticas sofrem os impactos do macro-organismo social no qual está inserido. Observamos, assim, que o modo como o professor está tipicamente inserido no seu meio tem dificultado seu acesso à formação continuada, um importante instrumento de atualização e qualificação profissional.

Nesse tópico nos chamou muita atenção a fala do professor E1 sobre a formação continuada. Mesmo estando prestes a se aposentar, prontamente nos disse que teria muito interesse em participar da formação:

> **E1**: Eu ouvi falar sim nesse curso e coloquei sim meu nome na lista, com certeza eu iria participar.

6.3.2 Representação relativa à qualidade do ensino de Combinatória

Refletimos um pouco mais a respeito da letra c), criada pela professora Ana para complementar o quarto problema do livro (FIGURA 6), que foi resolvido equivocadamente. Como já comentamos, para a contagem correta era preciso dividir em casos o problema, o primeiro caso com o zero na última posição e o segundo caso com o cinco na última posição, já que o zero também era restrição da casa da centena. Para resolução correta seria preciso aliar o Princípio Multiplicativo ao Princípio da Adição, somando os dois casos.

Esse erro é comum na resolução de problemas combinatórios, nos quais não se pode facilmente verificar os resultados. Para constatação, seria necessária a enumeração direta de todas as possibilidades de números, o que ainda não asseguraria a contagem correta. Nesse sentido, acreditamos que a única maneira de perceber a lacuna deixada pela resolução incompleta seria dedicar mais tempo a pensar em todas as possibilidades a serem contempladas. Um dos alunos insistiu dizendo que não tinha entendido, no entanto, também não conseguiu dizer exatamente qual era sua dúvida.

Os professores em geral comentam que são muitos conteúdos a serem contemplados em um ano letivo e que, geralmente, os últimos conteúdos tem que ser trabalhados rapidamente ou são deixados para próximo ano. Uma consequência disso é uma depreciação na qualidade do ensino desses assuntos. Outro fato é que nessa etapa do ano, os alunos, e também a professora, já reclamam de cansaço e almejam as férias, alguns alunos já tem nota suficiente para passar, e tudo isso contribui para essa falta de motivação no trabalho com os últimos conteúdos.

No caso das escolas estaduais, que seguem a Matriz de Referência, os dois últimos conteúdos são Matrizes e Combinatória. A professora nos contou que, se fosse seguir a ordem prescrita, ela teria que trabalhar Matrizes e não teria tempo de ensinar Combinatória; no entanto, ela escolheu a ordem da oferta dos conteúdos, para que pudéssemos concluir nossa pesquisa.

Vale a pena lembrar que, para nossa pesquisa tínhamos a previsão de fazer quatro observações em escolas diferentes. Todavia, devido a esses fatos, só a professora Ana conseguiu contemplar esse tema e os outros três professores, que aceitaram nos receber, não tiveram tempo de ensinar Combinatória.

A falha na resolução da professora é muito comum e não acarretaria prejuízos se fosse identificada a tempo de ser corrigida, conquanto, a falta de tempo e o cansaço relatados pelos sujeitos são fatores importantes, que prejudicam o ensino, particularmente no caso da Combinatória, que exige maior tempo de dedicação e reflexão para resoluções completas dos problemas.

Uma situação propícia à aprendizagem, que poderia ter acontecido, seria se os sujeitos envolvidos tivessem identificado a lacuna deixada pela resolução e passado a analisar o erro. Isso tornaria o momento favorável para que todos pudessem contribuir para solucionar corretamente o problema. Cury (2013, p. 29), nos diz do potencial da análise de erros, afirmando que talvez seja essa a melhor maneira de (re)construir um conhecimento.

7 CONTAGEM DOS DESFECHOS DE NOVOS COMEÇOS

Recordando os trabalhos que mencionamos no capítulo 1, e que nos ajudaram a delimitar nossa investigação, podemos dizer que todos deixam contribuições para o ensino de Combinatória, ora com foco no ensino, ora com foco na aprendizagem. Os que pesquisaram diretamente o trabalho do professor contribuíram claramente com nossa forma de pesquisar, que procurou avançar em alguns aspectos. E as pesquisas que trabalharam com o discente deixaram claro que o conteúdo é o mesmo, a diferença está em como ele é trabalhado, para que sejam alcançados resultados satisfatórios. Poderá o professor leitor desta pesquisa, adaptando tais experiências à sua realidade, convenientemente utilizá-las.

No segundo capítulo nos aprofundamos um pouco mais nos aspectos inerentes ao ensino de Matemática e, especialmente ao ensino de Combinatória, apresentando alguma literatura pertinente e acessível para que o professor não fique limitado ao livro didático e a Internet. Nesse sentido, apresentamos livros que acreditamos poder dar suporte ao docente que não estudou Combinatória, durante sua formação, mas precisa, por vezes sozinho, se preparar para ensinar esse conteúdo.

A partir de pressupostos da História Cultural, respondemos a pergunta norteadora da pesquisa: **Quais são as representações do professor de Matemática sobre Análise Combinatória e como elas repercutem na sua prática pedagógica?** Além disso, fomentamos muitos outros questionamentos, que nos ajudaram a problematizar a análise que propusemos, mesmo não sendo nossa intenção respondê-los todos.

Entendemos que nossas conclusões têm um caráter relativo, no sentido de que outras categorias poderiam surgir a partir da análise de outros pesquisadores. Como já foi dito, perceber as representações significa compreender as narrativas por meio de uma reflexão que articula a comunicação e a realidade do sujeito, numa reconstituição da experiência, passando pela apropriação do pesquisador, em um processo pelo qual é construída uma significação.

Nessa perspectiva, com a entrevista, com o questionário *on-line* e com a observação, elencamos oito representações, que encaixamos nos aspectos da triangulação:

representação sobre a formação profissional pessoal, representação relativa à complexidade da Combinatória, representação relativa à pesquisadora, representações relativas ao livro didático e a Internet, representações relativas a Matriz de Referência e o PAEBES, representação relativa à formação continuada, representação relativa à qualidade do ensino de Análise Combinatória, representação relativa a metodologia de ensino Resolução de Problemas. A partir delas, verificamos no grupo de professores participantes desta pesquisa, os seguintes fatos:

- os professores carecem de conhecimento sobre Combinatória e de alternativas didáticas para ensinar esse assunto – fato que tem origem nas suas deficiências de formação, abarcando a Educação Básica, a graduação e a formação continuada;
- essa carência de conhecimento pedagógico repercute diretamente em inadequações na prática de ensino, que, metodologicamente, está restrita à aplicação de exercícios e não possui fontes de referência sistematizada;
- práticas de ensino inadequadas impactam negativamente a aprendizagem, o que, pelo menos parcialmente, explica a opinião generalizada de que os alunos e professores achem Combinatória muito difícil;
- os professores não se apercebem da própria autonomia em meio às relações de estratégia e tática, no contexto escolar, por conseguinte, se contentam em justificar o resultado do seu trabalho com base no que lhes é imposto.
- mesmo tendo participado de formações e cursos de especialização, a maioria dos professores mostrou que não compreende totalmente os conceitos da metodologia de ensino de Resolução de Problemas. Em suas falas e na prática percebemos que existe uma confusão entre a efetiva utilização da metodologia e a ação de colocar os alunos para resolver exercícios de fixação.

Também ficou constatado que, apesar da Combinatória ser um tema com requisitos muito básicos, é considerada elaborada e muito complicada, tanto por professores quanto por alunos, já que seus problemas exigem raciocínio e criatividade. Ainda que as resoluções dos problemas de Combinatória não se enquadrem num padrão simples, consideramos um equívoco dizer que essa característica é a causa principal das dificuldades de ensino e aprendizagem do assunto. Antes, essa ideia reflete mais **o preconceito de que o aprendizado da Matemática precisa ser mediado por fórmulas ou procedimentos padronizados do que o resultado de uma reflexão sobre a prática pedagógica**.

Acerca da formação recebida pelos professores, sobre Combinatória, verificamos que eles relatam não terem estudado adequadamente o assunto na Educação Básica e nem em algum momento da sua formação acadêmica, inicial ou continuada. Isso está em pleno acordo com a história recente da formação de professores de Matemática, nos cursos de licenciatura em Matemática oferecidos pela Universidade Federal do Espírito Santo, em São Mateus: a Combinatória só passou a figurar explicitamente no programa do curso de Matemática – Licenciatura, ofertado pelo Centro Universitário Norte do Espírito Santo, a partir de 2018.

Para mais, uma cadeia de fatores contribui para que os professores não tenham interesse em espaços de formação continuada, mesmo percebendo a Combinatória como um tema que não dominam, tal como a alegação de que não é fácil dedicar tempo aos estudos, depois de inserido no regime escolar de trabalho.

Nossos dados corroboram a tese de que as dificuldades para ensinar Combinatória na Educação Básica decorrem mais da falta de formação específica dos professores do que das características intrínsecas ao assunto. Tal situação requer ações específicas das instituições responsáveis pela Educação Básica e formação de professores.

O professor que não teve oportunidade de aprofundar o estudo do tema, tipicamente recorre a poucos recursos para estudo individual e preparação das aulas. O livro didático tem seu valor reconhecido, mas não deve ser seguido como um roteiro e constituir a única fonte para a preparação das aulas. A Internet certamente pode ajudar, nela encontramos todo tipo de conteúdo, informações acerca de todos os tópicos. Todavia, as informações podem ser de boa ou má qualidade, e os professores não devem se apropriar de qualquer informação dessa fonte, sendo necessário saber selecionar.

Além disso, é fato notável que este conteúdo seja deixado como último assunto do ano letivo e que, em decorrência disso, muitas vezes não chega a ser trabalhado. A prova que direciona o ensino de Matemática para o segundo ano do nível médio na

Educação Básica Estadual – PAEBES – cobra Combinatória no terceiro trimestre do ano letivo, junto com outros dois conteúdos, de forma equilibrada.

Vimos também que o professor pesquisado carrega uma noção superficial da metodologia Resolução de Problemas, confundindo a verdadeira utilização dessa metodologia com a ação de aplicar exercícios de fixação, percebemos isso tanto através das respostas das entrevistas como também na observação.

Foi interessante, ainda, identificar na observação das aulas da professora Ana, que ela, intuitivamente, usou os quatro panoramas apontados por Coutinho (2015) para comunicação do conceito de combinação simples: o **panorama formalista**, no qual o conceito é explicado pela definição formal; o **instrumental**, em que a comunicação acontece a partir do uso de fórmulas; o **ilustrativo**, o fazendo por meio de contagem dos agrupamentos; e o **panorama comparativo**, no qual a comunicação acontece por meio da comparação com o conceito de arranjo. Mesmo a professora não tendo feito isso de maneira totalmente consciente, ela pode valorizar a variabilidade de realizações, o que se torna relevante diante as particularidades de compreensão de cada aluno.

Considerando o caso da professora Ana como típico entre os professores entrevistados (o que pode não ser verdade, mas é uma hipótese razoável), concluímos que o ensino de Combinatória é precário, principalmente devido a diversas circunstâncias extrínsecas ao assunto, as quais envolvem a formação docente, a prática docente, o contrato didático, o currículo prescrito e o currículo "realizado".

Nossa pesquisa fomenta algumas perguntas que não foram respondidas e poderiam ser abordadas futuramente, como por exemplo: por que a escola ensina Combinatória, da forma que ensina? Além disso, mesmo não tendo avançado na discussão de cunho político, pensamos ser válido questionar: por que esta relação estreita entre a SEDU do Espírito Santo e o CAEd/UFJF? Não teria o Estado condições de adotar uma política pública própria, e talvez mais adequada às suas necessidades?

Outro possível desdobramento de nosso estudo seria a realização de uma formação continuada sobre o tema em questão, de forma a atender as carências especificas que encontramos no ensino público de nossas escolas estaduais. Além disso, para que isso aconteça é necessário um processo anterior de conscientização, a fim de evitar o desinteresse pelo curso por parte dos professores.

Motivar espaços para formação sobre essa temática torna-se essencial, já que, mesmo tratando de noções matemáticas tão fundamentais, a Combinatória segue sendo anulada, ao invés de valorizada por sua significação no aperfeiçoamento de processos ou habilidades cognitivas essenciais para o desenvolvimento intelectual dos alunos. Isso não significa somente ensinar aos professores o conteúdo, mesmo porque essa lacuna, o estudo individual e uma bibliografia pertinente, podem preencher. Porém, importa ainda mais capacitar para que sejam potencializadas as condições de ensino e aprendizagem, favorecendo o aluno protagonista do processo educacional.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. L. de. **Ensinando e aprendendo Análise Combinatória com ênfase na comunicação matemática: um estudo com o 2º ano do Ensino Médio**. 2010. 166 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais, 2010.

ALRO, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. Tradução de Orlando Figueiredo. 2ª edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

BACHX, A. de C.; POPPE, L. M. B.; TAVARES, R. N. O. **Prelúdio à análise combinatória**. São Paulo: Editora Nacional, 1975.

BATANERO, M. C.; GODINO, J. D.; NAVARO-PELAYO, V. **Razonamiento combinatorio**. Madrid: Editorial Síntesis, 1996.

BORRDEAUX, A. L. et al. **Matemática, segunda série, ensino médio: livro do professor**. Coleção Multicurso. Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho, 2005.

BORRDEAUX, A. L. et al. **Matemática, segunda série, ensino médio: livro do aluno**. Coleção Multicurso. Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho, 2005.

DE CERTEAU, M. **A invenção do cotidiano**: artes de fazer, v. 1. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 1994.

CHARTIER, R. **A história cultural**: entre práticas e representações. 2. ed. Bertrand Brasil. Rio de Janeiro, 2002.

CHARTIER, R. A “NOVA” História Cultural. In: GARNICA, A. V. M. (org.). Pesquisa em história da educação matemática no Brasil: sob o signo da pluralidade. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, Porto Alegre, v. 2, p. 177-229, 1990.

COSTA, C. **As concepções dos professores de Matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no ensino fundamental**. 161 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

COSTA C. A. da. **As concepções dos professores de matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório**. São Paulo: Bucher Acadêmico, 2011.

COUTINHO, J. L. da E.; BARBOSA, J. C. Uma matemática para o ensino de combinação simples a partir de um estudo do conceito com professores. **Revista Educ. Matem. Pesq**. São Paulo, n. 2, v. 18 p. 783-808, 2016.

COUTINHO, J. L. da E. **Matemática para o ensino do conceito de combinação simples**. Salvador, 2015. 119 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.

CUNHA, M. de J. G. da. **Elaboração de problemas combinatórios por professores de matemática do Ensino Médio**. Recife, 2015. 138 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. 18ª edição. Campinas, SP: Papirus, 2009.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicação. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

ESTEVES, I. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos - 8ª série do ensino fundamental**. São Paulo, 2001. 203 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC. São Paulo: PUC, 2001.

FARIAS, C. A.; MENDES, I. A. As culturas são as marcas das sociedades humanas. In: MENDES, I. A.; FARIAS, C. A. (orgs.). **Práticas socioculturais e educação matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.

FOMIN D.; GENKIN S.; ITENBERG I. **Círculos Matemáticos - A Experiência Russa**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

GERDENITS, G. A. M. **Raciocínio combinatório : uma proposta para professores de matemática do ensino fundamental – anos finais**. Sorocaba, 2014. 170 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2014.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 5ª edição. São Paulo: Atlas, 2010.

JULIA, D. A cultura escolar como objeto histórico. **Revista Brasileira de História da Educação**. Campinas, n. 1, p. 9-43, jan./abr. 2001.

LORENSATTI, E. J. C. Linguagem matemática e Língua Portuguesa: diálogo necessário na resolução de problemas matemáticos. **Revista Conjectura**. Caxias do Sul, n. 2, v. 14, p. 89 – 99, 2009.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 3 ed. rev. São Paulo: Autores Associados, 2010 (Coleção Formação de professores).

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Técnicas de pesquisa:** planejamento e execução de pesquisas, amostragens e técnicas de pesquisa, elaboração, análise e interpretação de dados. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2011.

MARTINS, G. G.; da SILVA, J. D. Reflexão sobre o ensino de análise combinatória no Ensino Médio: percepções de professores formados no CEUNES–UFES. **Revista de Educação em Ciências e Matemática**. Amazônia, n. 21, v. 11, p. 44-52, 2014.

MATRIZ de referência: Matemática. Disponível em: <http://paebestri.caedufjf.net/wpcontent/uploads/2015/05/ES_PAEBESTRI_2017_MATRIZ-MT.pdf>. Acesso em 11 fev. 2018.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, 2017. Disponível em: <*http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf*>. Acesso em 18 jan. 2018, às 12h27min.

MINAYO, M. C. de S. **O desafio do conhecimento**: pesquisa qualitativa em saúde. 12. ed. São Paulo: Hucitec, 2007.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. 2ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção PROFMAT).

MORGADO, A. C. et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

MOREIRA, P. C. DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor**: licenciatura e prática docente. 2. Ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.

MUSUMECI, L. **Matemática, segunda série, ensino médio**: fichas de matemática e cidadania. Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho, 2005. (Coleção Multicurso).

NETO A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar**: Combinatória. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

NUNES T.; CARRAHER D.; SCHLIEMANN A. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 2011.

ONUCHIC, L. de la R.; et al. **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí: Paco Editorial: 2014.

ONUCHIC, L. de La R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo; Marcelo de Carvalho Borba. (Org.). **Educação matemática:** pesquisa em movimento. 3. ed. São Paulo: Cortez, 2005, cap. 12, p. 213-231.

PAIS, L. C. **Ensinar e aprender Matemática**. 2ª edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

PESSOA, C. **Quem dança com quem:** o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. Recife. 267 f. Tese (Doutorado) Pós-graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2009.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2006.

RICHARDSON, R. J. **Pesquisa social**: métodos e técnicas. 2ª edição. São Paulo: Atlas, 1989.

ROCHA, C. de A. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios**: diversos olhares, diferentes conhecimentos. 2011. 192 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

SABO, R. D. **Saberes docentes**: a análise combinatória no Ensino Médio. 2010. 210 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SADOVSKY, P. **O ensino de matemática hoje**: enfoques, sentidos e desafios. Tradução: Antonio de Padua Danesi. São Paulo: Ática, 2007.

SILVA, Circe Mary Silva da; SIQUEIRA FILHO, Moysés Gonçalves. **Matemática**: Resolução de Problemas. Brasília: Liber Livro, 2011.

SILVA, T. V. da. Organizações alternativas: uma análise das práticas organizacionais de uma cooperativa de mídia social. In: Congresso Brasileiro de Estudos Organizacionais, n. IV, Porto Alegre - R.S., 2016. **Anais**. Porto Alegre: CBEO, 2016. p.1-23.

SOUZA, A. C. P. **Análise combinatória no Ensino Médio apoiada na metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de matemática através da Resolução de Problemas**. 2010. 343 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

STURM, W. **As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa**. 1999. 132 f. Dissertação (Mestrado para Faculdade de Educação), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

TARDIF M. **Saberes docentes e formação profissional**. 17 ed. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2014.

TREVIZAN, W. A.; BROLEZZI A. C. **Como ensinar análise combinatória**. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1992.

APÊNDICES

APÊNDICE A – PROPOSTA DE CURSO

Curso: Formação Continuada em Análise Combinatória.
Carga horária: 80 horas.
Professora: Géssica Gonçalves Martins.
Período: março/2017 à junho/2017.

Sobre o curso

A principal proposta desse projeto de pesquisa e formação continuada é dialogar com professores de matemática sobre o tema Análise Combinatória, envolvendo teoria e prática, revisando o tema Combinatória e discutindo aspectos do processo de ensino-aprendizagem. Totalizando 80h, serão 60h distribuídas em 15 encontros com 4h cada e 20h reservadas a atividades extra classe inseridas na prática dos professores participantes. Os encontros acontecerão no espaço da SRE, às quartas-feiras das 18h as 22h, durante os meses de março, abril, maio e junho de 2017.

Ementa

- Revisão dos princípios fundamentais da contagem, com ênfase em aspectos didáticos;
- Estudo de situações típicas (permutações, combinações, arranjos, permutação com repetição, combinações completas);
- Didática da combinatória: aspectos e tópicos pedagógicos no ensino e aprendizagem da combinatória;
- Propostas metodológicas de ensino e a utilização de recursos pedagógicos para o ensino-aprendizagem da Combinatória (Resolução de Problemas, Modelagem Matemática, materiais manipuláveis e jogos).

Objetivos

- Revisar conteúdos elementares de Combinatória.
- Confrontar os participantes com as possibilidades e dificuldades no ensino de Combinatória.
- Discutir metodologias de ensino de Combinatória adequadas para a Educação Básica.

Metodologia

Aulas dialogadas com exercícios, tarefas extraclasse, uma oficina para construção de materiais manipuláveis.

Avaliação

Participação nas aulas, realização de tarefas extraclasse.

Cronograma dos Encontros

Encontro	Data	Tópico
01	22/03	Apresentação e adequação do programa; Resolução de problemas de Combinatória.
02	29/03	Princípio fundamental da contagem e problemas de Combinatória; Lista de exercícios e sugestão de texto para leitura prévia.
03	05/04	Roda de conversa sobre os textos sugeridos; Permutação, combinação, arranjo; Resolução de Problemas (problema das tampas).
04	12/04	Permutação com repetição e combinações completas; Resolução de Problemas; Sugestão de texto para leitura.
05	19/04	Roda de conversa sobre os textos sugeridos; Programar oficina material manipulável.
06	26/04	Oficina para construção de material manipulável para problemas de Combinatória. Sugestão de aplicação para apresentação futura.
07	03/05	Outros métodos de contagem - O Princípio da Inclusão-Exclusão

08	10/05	Análise dos livros didáticos utilizados e do Currículo Estadual.
09	17/05	Metodologias de Ensino: Resolução de Problemas, Modelagem, Jogos.
10	24/05	Metodologias de Ensino: Resolução de Problemas, Modelagem Matemática, Jogos.
11	31/05	Noções de Probabilidade como aplicação da Combinatória.
12	07/06	Problemas de Probabilidade
13	14/06	Apresentação das atividades extraclasse - trabalho com as metodologias de ensino e recursos.
14	21/06	Apresentação das atividades extraclasse - trabalho com as metodologias de ensino e recursos.
15	28/06	Avaliação do curso e confraternização

Bibliografia

Livros

- MORGADO A. C. et.al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- NETO A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar: Combinatória**. Rio de Janeiro: SBM, 2002.
- COSTA C. A. da. **As concepções dos professores de matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório**. São Paulo: Bucher Acadêmico, 2011.
- NUNES T., CARRAHER D., SCHLIEMANN A. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 2011.

- FOMIN D., GENKIN S., ITENBERG I. **Círculos Matemáticos - A Experiência Russa**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

- ACZEL A. D. **Quais são as suas chances?**. Rio de Janeiro: Best Seller, 2007.

- MLODINOW L. **O andar do Bêbado - como o acaso determina nossas vidas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

Teses e Dissertações

- ESTEVES, I. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos - 8ª série do ensino fundamental**. São Paulo, 2001, Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC. São Paulo: PUC, 2001.

- PESSOA, C. **Quem dança com quem:** o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. Tese. Pós-graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2009.

- ROCHA, C. de A. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos.** Recife, 2011. Dissertação (mestrado), Universidade Federal de Pernambuco, CE, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica.

Artigos

- Lúcio Fassarella: *A resposta é plausível? Comentários baseados em um cálculo de probabilidades*. **Revista do Professor de Matemática** nº 70 (2009): p.1-5.

- José M. Lopes: *O Bozó no Ensino de Probabilidades*. **Revista do Professor de Matemática** nº 74

- **Sequência Didática Matemática** (texto) - Professor Lúcio Fassarella.

- BOAS, J. V. COUTINHO, J. L. da E. A questão é arranjo ou combinação? um olhar para o princípio fundamental em Análise Combinatória. **Anais do XII ENEM (mini-curso)**, São Paulo - SP, 2016.

- BORBA, R. E. de S. R. Combinando na vida e na escola: limites e possibilidades. **Anais do XII ENEM (mesa redonda)**, São Paulo - SP, 2016.

- COUTINHO, J. L. da E. BARBOSA, J. C. Uma matemática para o ensino do conceito de Combinação Simples a partir de uma revisão sistemática de literatura. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Pernambuco, 2015, vol. 6, nº 2.

APÊNDICE B – ROTEIRO DE ENTREVISTA

Identificação da Pesquisa: Instituição, Programa, Data

Seu nome, meu nome, etc.

1. Identificação

1.1. Nome:

1.2. Idade:

1.3. E-mail:

2. Formação acadêmica e experiência docente

2.1. Graduação: (curso, instituição, ano de inicio e de término)

2.2. Complementação pedagógica: (curso, instituição, inicio e de término)

2.3. Pós graduação: (curso, instituição, ano de inicio e de término)

2.4. Outros cursos: (curso, instituição, ano de inicio e de término)

2.5. Tempo de atuação no ensino de Matemática:

2.6. Número de escolhas que já lecionou:

2.7. Escola(s) onde leciona atualmente:

2.8. Carga horária semanal:

2.9. Quantidade de turmas:

2.10. Quantidade de alunos por turma:

3. Sobre o ensino de Combinatória recebido pelo professor

3.1. Você estudou Combinatória no Ensino Médio? Se puder, qualifique o ensino que recebeu nesse momento e avalie sua aprendizagem.

3.2. Você estudou Combinatória na Graduação? Se puder, qualifique o ensino que recebeu nesse momento e avalie sua aprendizagem.

3.3. Você estudou Combinatória em outra oportunidade, além da Educação Básica e Graduação? Se puder, qualifique o ensino que recebeu em cada situação e avalie sua aprendizagem.

4. Sobre a prática de ensino de Combinatória pelo professor

4.1. Você conhece as propostas dos PCN's e/ou das diretrizes curriculares do Estado do Espírito Santo para o tema Combinatória? Esses documentos influenciam na preparação das suas aulas? Como?

4.2. Em que série você aborda Combinatória? Quanto tempo é reservado para esse tema?

4.3. Como você planeja suas aulas de Combinatória? Descreva.

4.4. Quais os pré-requisitos para se aprender Combinatória? Em geral, seus alunos possuem esses pré-requisitos quando você aborda esse tema?

4.5. Você utiliza alguma metodologia específica para ensinar Combinatória?

4.6. Quais recursos você utiliza para preparar suas aulas de Combinatória? Descreva em linha gerais.

4.7. Você utiliza algum livro didático para ensinar Combinatória? Qual(is)?

4.8. Como você utiliza o livro didático na preparação das aulas?

4.9. Como pensa que o aluno deve utilizar o livro didático para estudar?

4.10. Você ensina estratégias para os alunos abordarem problemas de Combinatória? Quais?

[ ] Enumeração.

[ ] Elaboração de esquemas ou diagramas das situações.

[ ] Identificação dos problemas nos tipos "combinação", "arranjo", "permutação" e aplicação subsequente de uma fórmula adequada.

[ ] Outros.

4.11. Descreva como acontecem as aulas de Combinatória?

4.12. Como você avalia seus alunos com relação a aprendizagem de Combinatória?

4.13. Você acha que Combinatória é um assunto difícil de ensinar? Por que?

5. Sobre o aprofundamento da coleta de dados

5.1. Você me permite copiar seu planejamento referente ao ensino de Combinatória na última vez que abordou o tema nessa escola?

5.2. Você ainda vai ensinar Combinatória neste ano? Quando?

5.3. Caso positivo, você permitiria que a pesquisadora observasse suas aulas de Combinatória, para complementar a pesquisa, se houver oportunidade?

5.4. Você aceitaria participar de uma enquete online? Esclarecimento: nessa enquete buscamos dados que nos permitam analisar mais detalhadamente aspectos específicos dos recursos que o professor participante emprega no ensino e a avaliação de Combinatória.

6. Sobre a formação continuada

6.1. Sobre a formação continuada em Análise Combinatória que foi oferecida em parceria com a SRE. Chegou ao seu conhecimento? Você se dispôs a participar? Por que?

6.2. Sobre a carga horária do curso proposto ter sido 80h, acha que é insuficiente, adequada ou extensa?

7. Sobre um problema de combinatória

7.1. Fale sobre este problema. Ele é interessante? Ele é difícil? Em geral, seus alunos seriam capazes de resolvê-lo depois de suas aulas?

De quantos modos podemos pintar um disco dividido em 3 setores congruentes usando 3 possibilidades de cor?

AUTORIZAÇÃO

Eu ____, portador do RG número _______________________, concedo o uso desta entrevista, gravada, transcrita e textualizada, a Géssica Gonçalves Martins, portadora do RG 1427582130 SSP/BA, como fonte de dados para discussão e análise em sua Dissertação de Mestrado, orientada pelo professor Drº Lúcio Souza Fassarella, desenvolvida na Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), Centro Universitário Norte do Espírito Santos (CEUNES), por meio do Programa de Pós-graduação em Ensino na Educação Básica (PPGEEB).

Data:____de______________________ de 2017.

____

Assinatura

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO

Avaliação do Ensino de Combinatória

Questionário visando apreciar os recursos docentes no processo ensino de Análise Combinatória. Solicitamos que o participante responda todas as questões, mas o questionário pode nos ser enviado parcialmente respondido se isso não for possível.

1. **Endereço de e-mail** *

2. **Nome do professor**

3. **Escola onde trabalha**

4. **A quanto tempo trabalha com ensino de matemática?**

Seção 1 - Sobre ensino de Combinatória

5. **Combinações, arranjos e permutações são tipos importantes de problemas de Combinatória. Descreva a melhor maneira de abordá-los no Ensino Médio.**

6. **Indique os métodos ou instrumentos didáticos que você utiliza nas aulas de Combinatória.**
Marque todas que se aplicam.

- [ ] Múltiplas abordagens (desenhos, esquemas, diagramas, ...)
- [ ] Metodologia Resolução de Problemas
- [ ] Livro didático
- [ ] Quadro e giz
- [ ] Recursos áudio-visuais
- [ ] Material concreto
- [ ] Metodologia Investigação Matemática
- [ ] Outro: ______

7. **No ensino de Combinatória, quais são as fontes dos problemas que propõe aos alunos? Marque todas as opções que se verificam:**
Marque todas que se aplicam.

- [ ] Problemas já trabalhados em anos anteriores
- [ ] Problemas propostos em livros didáticos
- [ ] Problemas propostos em exames extra-escolares (PEBES, ENEM, Prova Brasil, ...)
- [ ] Problemas obtidos da Internet
- [ ] Outro: ______________________

8. **Ao ensinar Combinatória, se um aluno demonstra dificuldade em aprender um conceito ou resolver um problema, que ações você toma a respeito? Marque todas as opções que se verificam:**
Marque todas que se aplicam.

- [ ] Procuro identificar a dificuldade e descobrir alternativas de abordagem para ajudá-lo a superá-la.
- [ ] Oriento o aluno a estudar o conteúdo específico no caderno, livro didático ou outro lugar.
- [ ] Escolho/elaboro problemas específicos para auxiliar o aluno a desenvolver sua intuição.
- [ ] Se discuti o tema com cuidado, não acho que precise fazer mais nada.
- [ ] Não sei o que fazer.
- [ ] Outro: ______________________

9. **Quais são as capacidades e/ou noções que o aluno desenvolve no processo ensino-aprendizagem de Combinatória? Marque todas as opções que se verificam:**
Marque todas que se aplicam.

- [ ] Noção de equação.
- [ ] Habilidade para criar estratégias.
- [ ] Raciocínio lógico.
- [ ] Noção de parâmetro.
- [ ] Capacidade de analisar dados.
- [ ] Noção de demonstração.
- [ ] Representação por desenho.
- [ ] Noção de diagrama.
- [ ] Organização de informações e dados.
- [ ] Senso crítico.
- [ ] Noção de sistema
- [ ] Outro: ______________________

Seção 2 - Sobre as respostas dos alunos

Para cada pergunta, considere a resolução apresentada por um estudante. Para cada solução comente sobre o procedimento utilizado pelo aluno e como você explicaria eventuais erros a eles.

Problema 1: Lançamos uma moeda 3 vezes, quantas sequências de cara e coroa podemos obter?

10. **COMENTE ESTA RESPOSTA DE UM ALUNO: "Há três lances com duas alternativas cada, portanto o resultado é 3x3."**

Problema 2: Com 5 homens e 5 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal?

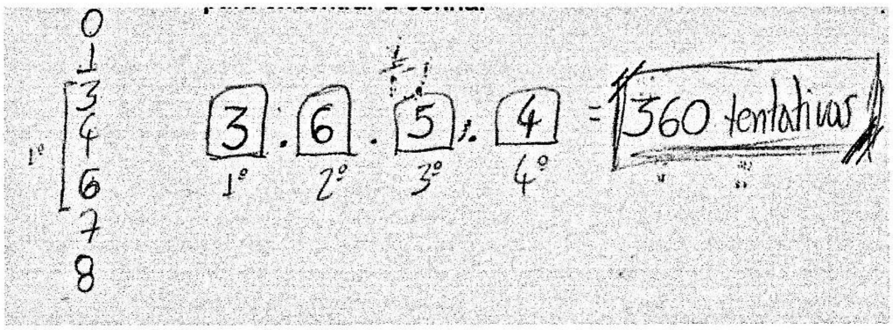
11. **COMENTE ESTA RESPOSTA DE UM ALUNO: "A primeira pessoa do casal pode ser escolhida de 10 modos, pois ela pode ser homem ou mulher. Escolhida a primeira pessoa, a segunda pessoa só poderá ser escolhida de 5 modos, pois deve ter sexo diferente da primeira pessoa. Portanto, há 10x5 = 50 modos de formar um casal."**

Seção 3 - Ainda sobre as respostas dos alunos

Nessa seção pedimos ao professor para analisar as resoluções dos alunos, visando identificar eventuais erros, explicitar pressupostos implícitos e propor uma intervenção didática.

Problema 3: Laura esqueceu sua senha de acesso ao computador. Na tentativa de descobri-la, lembrou-se das seguintes informações: é um número de algarismos distintos, compreendido entre 3.000 e 7.000 e NÃO é composto pelos algarismos 2, 5 e 9. Identifique o número máximo de tentativas que Laura deverá fazer para encontrar a senha.

Resposta do aluno:



12. **a) Este problema é adequado ao Ensino Médio? Por que?**

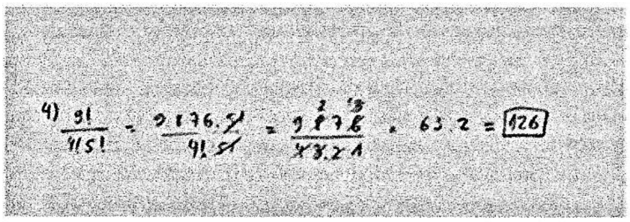
13. **b) Que nota você daria a este aluno?**
Marcar apenas uma oval.

0	1	2	3
◯	◯	◯	◯

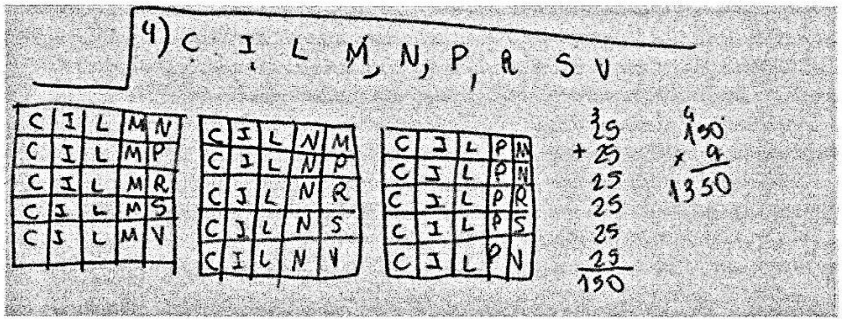
14. **c) Sobre a resolução, quais observações ou sugestões você daria ao aluno?**

Problema 4: Uma escola tem 9 professores (Cristiano, Isabel, Laura, Mateus, Nívea, Pedro, Roberto, Sandra e Vitor), dos quais 5 devem representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 5 professores pode-se formar?

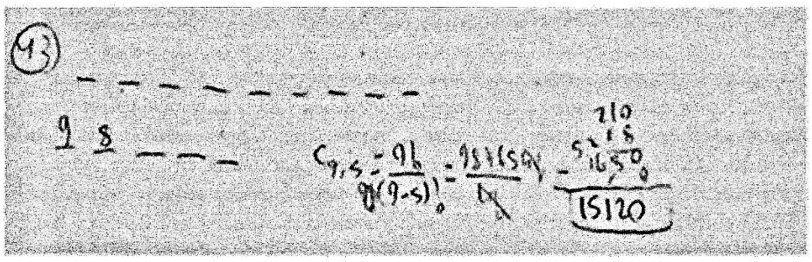
Aluno A



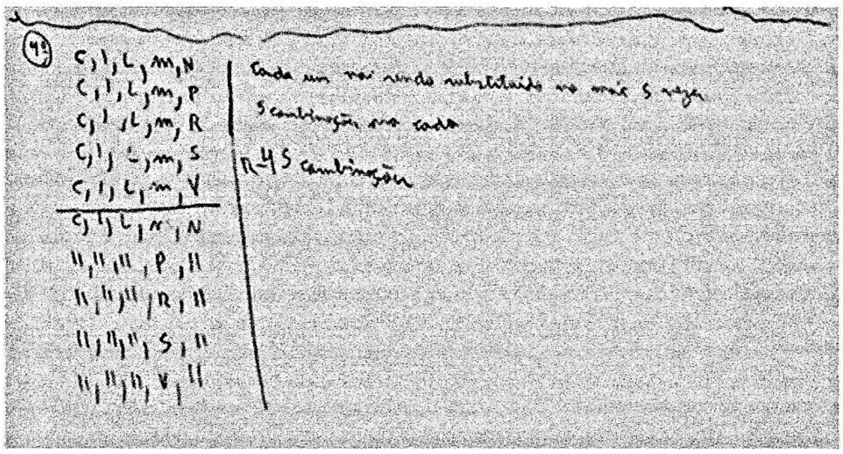
Aluno B



Aluno C



Aluno D



15. (a) Este problema é adequado para o Ensino Médio? Por quê?

16. **(b) Dos 4 alunos qual apresentou o melhor desenvolvimento?**
Marcar apenas uma oval.

- Aluno A
- Aluno B
- Aluno C
- Aluno D

17. **(c) Dos 4 alunos qual apresentou o pior desenvolvimento?**
Marcar apenas uma oval.

- Aluno A
- Aluno B
- Aluno C
- Aluno D

18. **(d) Que nota você daria para o aluno A?**
Marcar apenas uma oval.

0	1	2	3

19. **Escreva as observações que você daria a esse aluno:**

20. **Que nota você daria para o aluno B?**
Marcar apenas uma oval.

0	1	2	3

21. **Escreva as observações que você daria a esse aluno:**

22. **Que nota você daria para o aluno C?**
Marcar apenas uma oval.

0	1	2	3
◯	◯	◯	◯

23. **Escreva as observações que você daria a esse aluno:**

24. **Que nota você daria para o aluno D?**
Marcar apenas uma oval.

0	1	2	3
◯	◯	◯	◯

25. **Escreva as observações que você daria a esse aluno:**

Sobre o questionário

26. **Quais foram as maiores dificuldades encontradas ao preencher este questionário?**
Marque todas que se aplicam.

- [ ] Responder as questões da Seção 1, de caráter didático e metodológico
- [ ] Na Seção 2 e Seção 3, a resolução dos problemas
- [ ] Na Seção 2, decidir sobre o conteúdo de cada comentário
- [ ] Na Seção 3, decidir sobre as observações e sugestões para dar aos alunos
- [ ] Outro: ____________________

- [ ] Envie para mim uma cópia das minhas respostas.

Powered by
Google Forms

ANEXOS

ANEXO A – MATRIZ DE REFERÊNCIA – MATEMÁTICA – PAEBESTRI 2017

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO
Governo do Estado do Espírito Santo

Matriz de Referência de Matemática - Ensino Médio

CAEd Faculdade de Educação Universidade Federal de Juiz de Fora

Temas	Descritores	1º ano Trimestres			2º ano Trimestres			3º ano Trimestres		
		1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º
Números e operações	**D1**: Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações.	X								
	D2: Corresponder números reais à pontos da reta numérica.	X								
	D3: Utilizar a relação que descreve o número de elementos da reunião de conjuntos na resolução de problemas.	X								
	D4: Utilizar conhecimentos aritméticos na resolução de problemas.	X								X
	D5: Utilizar proporcionalidade entre grandezas interdependentes na resolução de problemas.	X								
	D6: Utilizar métodos de contagem na resolução de problemas.						X			
	D7: Executar operações entre matrizes.						X			
Álgebra e funções	**D8**: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.	X								
	D9: Identificar padrões em uma sequência de números ou de figuras.	X								
	D10: Traduzir em linguagem algébrica uma situação descrita textualmente.	X								
	D11: Utilizar propriedades de progressões aritméticas na resolução de problemas.	X								
	D12: Utilizar propriedades de progressões geométricas na resolução de problemas.				X					
	D13: Utilizar equação polinomial de 1º grau na resolução de problemas.	X								
	D14: Determinar o conjunto solução de um sistema de equações lineares.	X								X
	D15: Utilizar sistema de equações polinomiais de 1º grau na resolução de problemas.	X					X			X
	D16: Utilizar porcentagem na resolução de problemas.			X						
	D17: Utilizar juros simples na resolução de problemas.			X						
	D18: Utilizar juros compostos na resolução de problemas.					X				
	D19: Corresponder pontos do plano cartesiano a pares ordenados.		X							X
	D20: Identificar gráficos que podem representar funções.		X							
	D21: Identificar o domínio e o conjunto imagem de uma função.		X							
	D22: Identificar zeros, regiões de crescimento e de decrescimento ou máximos e mínimos de uma função a partir de seu gráfico.		X							
	D23: Corresponder uma função polinomial do 1º grau a seu gráfico.		X							
	D24: Utilizar inequação polinomial de 1º grau na resolução de problemas.		X							
	D25: Utilizar equação polinomial de 2º grau na resolução de problemas.	X								
	D26: Corresponder uma função polinomial de 2º grau a seu gráfico.		X							
	D27: Utilizar as coordenadas do vértice de uma função polinomial de 2º grau na resolução de problemas de máximo ou mínimo.		X							
	D28: Corresponder uma função exponencial a seu gráfico.				X					
	D29: Determinar o conjunto solução de uma equação exponencial.				X					

	D30: Utilizar função exponencial na resolução de problemas.				X					
	D31: Corresponder uma função trigonométrica a seu gráfico.								X	
	D32: Determinar o conjunto solução de uma equação trigonométrica.								X	
	D33: Utilizar funções trigonométricas na resolução de problemas.								X	
Geometria, grandezas e medidas	D34: Utilizar propriedades das medidas de ângulos de figuras planas na resolução de problemas.			X						
	D35: Utilizar semelhança entre polígonos na resolução de problemas.			X						
	D36: Utilizar congruência de polígonos na resolução de problemas.			X						
	D37: Reconhecer polígonos por meio de suas propriedades.			X						
	D38: Utilizar o Teorema de Pitágoras na resolução de problemas.			X						
	D39: Utilizar o cálculo da medida do perímetro de figuras planas na resolução de problemas.			X						
	D40: Utilizar o cálculo da medida da área de figuras planas na resolução de problemas.			X						
	D41: Utilizar relações métricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas.					X				
	D42: Utilizar razões trigonométricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas.					X				
	D43: Utilizar a lei dos senos ou a lei dos cossenos na resolução de problemas.					X				
	D44: Corresponder figuras tridimensionais às suas planificações ou vistas.					X			X	
	D45: Utilizar o cálculo da medida de área da superfície dos principais sólidos geométricos na resolução de problemas.								X	
	D46: Utilizar o cálculo da medida de volume dos principais sólidos geométricos na resolução de problemas.					X			X	
	D47: Utilizar o Teorema de Euler para determinar o número de faces, de vértices ou de arestas de poliedros convexos.								X	
Estatística e probabilidade	D48: Identificar dados apresentados em tabelas ou gráficos.			X						
	D49: Inferir informações a partir de dados dispostos em tabelas ou gráficos.				X			X		
	D50: Utilizar dados apresentados em tabelas ou gráficos na resolução de problemas.			X	X			X		
	D51: Utilizar medidas de tendência central na resolução de problemas.				X			X		
	D52: Utilizar medidas de dispersão na resolução de problemas.							X		
	D53: Utilizar medidas de dispersão e medidas de tendência central na resolução de problemas.							X		
	D54: Utilizar noções de probabilidade na resolução de problemas.				X					
	D55: Utilizar conhecimentos de probabilidade como recurso para a construção de argumentação.							X		
	D56: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística.							X		x
	D57: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de probabilidade.							X		
Totais de descritores		13	8	11	8	6	3	8	7	5

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO
Governo do Estado do Espírito Santo

Matriz de Referência de Matemática - Ensino Médio

CAEd

Temas	Descritores	Classes	1º ano Trimestres 1º	1º ano 2º	1º ano 3º	2º ano Trimestres 1º	2º ano 2º	2º ano 3º	3º ano Trimestres 1º	3º ano 2º	3º ano 3º
Números e operações	**D1**: Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações.	**C1.1**: Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações.	X								
	D2: Corresponder números reais à pontos da reta numérica.	**C2.1**: Corresponder números reais, em representação decimal, à pontos da reta numérica.	X								
		C2.2: Corresponder números racionais, em representação fracionária, à pontos da reta numérica.	X								
	D3: Utilizar a relação que descreve o número de elementos da reunião de conjuntos na resolução de problemas.	**C3.1**: Utilizar a relação que descreve o número de elementos da reunião de conjuntos na resolução de problemas.	X								
	D4: Utilizar conhecimentos aritméticos na resolução de problemas.	**C4.1**: Utilizar as quatro operações básicas na resolução de problemas aritméticos.	X								
	D5: Utilizar proporcionalidade entre grandezas interdependentes na resolução de problemas.	**C5.1**: Utilizar proporcionalidade direta entre duas grandezas interdependentes na resolução de problemas.	X								
		C5.2: Utilizar proporcionalidade inversa entre duas grandezas interdependentes na resolução de problemas.	X								
		C5.3: Utilizar proporcionalidade direta e/ou inversa entre pelos menos três grandezas interdependentes na resolução de problemas.	X								
	D6: Utilizar métodos de contagem na resolução de problemas.	**C6.1**: Utilizar o princípio multiplicativo na resolução de problemas de contagem.						X			
		C6.2: Utilizar os princípios aditivo e multiplicativo na resolução de problemas de contagem.						X			
		C6.3: Utilizar permutação com repetição na resolução de problemas de contagem.						X			
		C6.4: Utilizar combinação simples na resolução de problemas de contagem.						X			
	D7: Executar operações entre matrizes.	**C7.1**: Executar operações de adição e subtração entre matrizes e/ou multiplicação de uma matriz por um escalar.						X			
		C7.2: Executar operações de multiplicação entre matrizes.						X			
	D8: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.	**C8.1**: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.	X								
	D09: Identificar padrões em uma sequência de números ou de figuras.	**C9.1**: Identificar o padrão de formação de uma sequência de figuras.	X								
		C9.2: Identificar o padrão de formação de uma sequência numérica.	X								
	D10: Traduzir em linguagem algébrica uma situação descrita textualmente.	**C10.1**: Traduzir em linguagem algébrica uma situação descrita textualmente.	X								
	D11: Utilizar propriedades de progressões aritméticas na resolução de problemas.	**C11.1**: Utilizar propriedades de progressões aritméticas na determinação de termos de uma sequência na resolução de problemas.	X								
		C11.2: Utilizar propriedades de progressões aritméticas na determinação da soma de termos de uma sequência na resolução de problemas.	X								
	D12: Utilizar propriedades de progressões geométricas na resolução de problemas.	**C12.1**: Utilizar propriedades de progressões geométricas na determinação de termos de uma sequência na resolução de problemas.				X					
		C12.2: Utilizar propriedades de progressões geométricas na determinação da soma de uma quantidade finita de termos de um sequência na resolução de problemas.				X					
		C12.3: Utilizar propriedades de progressões geométricas na determinação da soma de infinitos termos de um sequência na resolução de problemas.				X					
	D13: Utilizar equação polinomial de 1º grau na resolução de problemas.	**C13.1**: Utilizar equação polinomial de 1º grau na resolução de problemas.	X								
	D14: Determinar o conjunto solução de um sistema de equações lineares.	**C14.1**: Determinar o conjunto solução de um sistema de duas equações lineares à duas incógnitas.	X								
		C14.2: Determinar o conjunto solução de um sistema de três equações lineares à três incógnitas.	X								
	D15: Utilizar sistema de equações polinomiais de 1º grau na resolução de problemas.	**C15.1**: Utilizar sistema de equações polinomiais de 1º grau, com duas equações à duas incógnitas, na resolução de problemas.	X					X			
		C15.2: Utilizar sistema de equações polinomiais de 1º grau, com três equações à três incógnitas, na resolução de problemas.						X			
	D16: Utilizar porcentagem na resolução de problemas.	**C16.1**: Utilizar porcentagem na resolução de problemas.			X						
	D17: Utilizar juros simples na resolução de problemas.	**C17.1**: Utilizar juros simples na resolução de problemas.			X						
	D18: Utilizar juros compostos na resolução de problemas.	**C18.1**: Utilizar juros compostos na resolução de problemas.					X				

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO
Governo do Estado do Espírito Santo

Matriz de Referência de Matemática - Ensino Médio

CAEd

Temas	Descritores	Classes	1º ano Trimestres 1º	1º ano 2º	1º ano 3º	2º ano Trimestres 1º	2º ano 2º	2º ano 3º	3º ano Trimestres 1º	3º ano 2º	3º ano 3º
Álgebra e funções	**D19**: Corresponder pontos do plano cartesiano a pares ordenados.	**C19.1**: Corresponder pontos do plano cartesiano a pares ordenados.		X							
	D20: Identificar gráficos que podem representar funções.	**C20.1**: Identificar gráficos que podem representar funções.		X							
	D21: Identificar o domínio e o conjunto imagem de uma função.	**C21.1**: Identificar o domínio de uma função a partir de sua lei de formação.		X							
		C21.2: Identificar o conjunto imagem de uma função a partir de sua lei de formação.		X							
		C21.3: Identificar o conjunto imagem de uma função a partir de seu gráfico.		X							
	D22: Identificar zeros, regiões de crescimento e de decrescimento ou máximos e mínimos de uma função a partir de seu gráfico.	**C22.1**: Identificar zeros, regiões de crescimento e de decrescimento ou máximos e mínimos de uma função a partir de seu gráfico.		X							
	D23: Corresponder uma função polinomial do 1º grau a seu gráfico.	**C23.1**: Corresponder uma função polinomial do 1º grau a seu gráfico, dentre gráficos de outras funções polinomiais do 1º grau.		X							
		C23.2: Corresponder uma função polinomial do 1º grau a seu gráfico, dentre gráficos de funções diversas.		X							
	D24: Utilizar inequação polinomial de 1º grau na resolução de problemas.	**C24.1**: Utilizar inequação polinomial de 1º grau na resolução de problemas.		X							
	D25: Utilizar equação polinomial de 2º grau na resolução de problemas.	**C25.1**: Utilizar equação polinomial de 2º grau na resolução de problemas.	X								
	D26: Corresponder uma função polinomial de 2º grau a seu gráfico.	**C26.1**: Corresponder uma função polinomial de 2º grau a seu gráfico, dentre gráficos de outras funções polinomiais de 2º grau.		X							
		C26.2: Corresponder uma função polinomial de 2º grau a seu gráfico, dentre gráficos de funções diversas.		X							
	D27: Utilizar as coordenadas do vértice de uma função polinomial de 2º grau na resolução de problemas de máximo ou mínimo.	**C27.1**: Utilizar as coordenadas do vértice de uma função polinomial de 2º grau na resolução de problemas de máximo ou mínimo.		X							
	D28: Corresponder uma função exponencial a seu gráfico.	**C28.1**: Corresponder uma função exponencial a seu gráfico, dentre gráficos de outras funções exponenciais.				X					
		C28.2: Corresponder uma função exponencial a seu gráfico, dentre gráficos de funções diversas.				X					
	D29: Determinar o conjunto solução de uma equação exponencial.	**C29.1**: Determinar o conjunto solução de uma equação exponencial.				X					
	D30: Utilizar função exponencial na resolução de problemas.	**C30.1**: Utilizar função exponencial na resolução de problemas.				X					
	D31: Corresponder uma função trigonométrica a seu gráfico.	**C31.1**: Corresponder uma função trigonométrica a seu gráfico, dentre gráficos de funções trigonométricas de mesmo tipo.								X	
		C31.2: Corresponder uma função trigonométrica a seu gráfico, dentre gráficos de outros tipos funções trigonométricas.								X	
	D32: Determinar o conjunto solução de uma equação trigonométrica.	**C32.1**: Determinar o conjunto solução de uma equação trigonométrica.								X	
	D33: Utilizar funções trigonométricas na resolução de problemas.	**C33.1**: Utilizar funções trigonométricas na resolução de problemas.								X	
	D34: Utilizar propriedades das medidas de ângulos de figuras planas na resolução de problemas.	**C34.1**: Utilizar propriedades das medidas de ângulos determinados por uma transversal com um feixe de retas paralelas.			X						
		C34.2: Utilizar propriedades das medidas de ângulos em polígonos na resolução de problemas.			X						
	D35: Utilizar semelhança entre polígonos na resolução de problemas.	**C35.1**: Utilizar semelhança entre triângulos na resolução de problemas.			X						
		C35.2: Utilizar semelhança entre polígonos com mais de três lados na resolução de problemas.			X						
	D36: Utilizar congruência de polígonos na resolução de problemas.	**C36.1**: Utilizar congruência de polígonos na resolução de problemas.			X						
	D37: Reconhecer polígonos por meio de suas propriedades.	**C37.1**: Reconhecer polígonos por meio de suas propriedades.			X						
	D38: Utilizar o Teorema de Pitágoras na resolução de problemas.	**C38.1**: Utilizar o Teorema de Pitágoras na resolução de problemas.			X						
	D39: Utilizar o cálculo da medida do perímetro de figuras planas na resolução de problemas.	**C39.1**: Utilizar o cálculo da medida do perímetro de polígonos na resolução de problemas.			X						
		C39.2: Utilizar o cálculo da medida do perímetro de circunferência na resolução de problemas.			X						
		C40.1: Utilizar o cálculo da medida da área de triângulos na resolução de problemas.			X						

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO
Governo do Estado do Espírito Santo

Matriz de Referência de Matemática - Ensino Médio

CAEd

Temas	Descritores	Classes	1º ano			2º ano			3º ano		
			Trimestres			Trimestres			Trimestres		
			1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º
Geometria, grandezas e medidas	D40: Utilizar o cálculo da medida da área de figuras planas na resolução de problemas.	C40.2: Utilizar o cálculo da medida da área de paralelogramos na resolução de problemas.			X						
		C40.3: Utilizar o cálculo da medida da área de trapézios na resolução de problemas.			X						
		C40.4: Utilizar o cálculo da medida da área de hexágono regular na resolução de problemas.			X						
		C40.5: Utilizar o cálculo da medida da área de círculo ou de setor circular na resolução de problemas.			X						
		C40.6: Utilizar a composição ou decomposição de uma figura em figuras mais simples para calcular a medida de sua área na resolução de problemas.			X						
	D41: Utilizar relações métricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas.	C41.1: Utilizar as relações da altura e dos catetos como médias geométricas de outros elementos em um triângulo retângulo na resolução de problemas.					X				
		C41.2: Utilizar o Teorema de Pitágoras na resolução de problemas.					X				
	D42: Utilizar razões trigonométricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas.	C42.1: Utilizar razões trigonométricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas.					X				
	D43: Utilizar a lei dos senos ou a lei dos cossenos na resolução de problemas.	C43.1: Utilizar a lei dos senos na resolução de problemas.					X				
		C43.2: Utilizar a lei dos cossenos na resolução de problemas.					X				
	D44: Corresponder figuras tridimensionais às suas planificações ou vistas.	C44.1: Corresponder figuras tridimensionais às suas vistas.					X			X	
		C44.2: Corresponder figuras tridimensionais às suas planificações.					X			X	
	D45: Utilizar o cálculo da medida de área da superfície dos principais sólidos geométricos na resolução de problemas.	C45.1: Utilizar o cálculo da medida de área da superfície lateral ou total de um prisma na resolução de problemas.								X	
		C45.2: Utilizar o cálculo da medida de área da superfície lateral ou total de um cilindro na resolução de problemas.								X	
		C45.3: Utilizar o cálculo da medida de área da superfície lateral ou total de um cone na resolução de problemas.								X	
		C45.4: Utilizar o cálculo da medida de área da superfície lateral ou total de uma pirâmide na resolução de problemas.								X	
		C45.5: Utilizar o cálculo da medida de área da superfície de uma esfera na resolução de problemas.								X	
	D46: Utilizar o cálculo da medida de volume dos principais sólidos geométricos na resolução de problemas.	C46.1: Utilizar o cálculo da medida de volume de um prisma na resolução de problemas.					X			X	
		C46.2: Utilizar o cálculo da medida de volume de um cilindro na resolução de problemas.					X			X	
		C46.3: Utilizar o cálculo da medida de volume de um cone na resolução de problemas.					X			X	
		C46.4: Utilizar o cálculo da medida de volume de uma pirâmide na resolução de problemas.					X			X	
		C46.5: Utilizar o cálculo da medida de volume de uma esfera na resolução de problemas.					X			X	
	D47: Utilizar o Teorema de Euler para determinar o número de faces, de vértices ou de arestas de poliedros convexos.	C47.1: Utilizar o Teorema de Euler para determinar: ou o número de faces, ou o de vértices, ou o de arestas de um poliedro convexo, sendo dadas as outras duas quantidades.								X	
		C47.2: Utilizar o Teorema de Euler para determinar o número de vértices de um poliedro convexo, sendo dadas as quantidades de cada tipo de face que o constitui.								X	
ística e probabilidade	D48: Identificar dados apresentados em tabelas ou gráficos.	C48.1: Identificar dados apresentados em tabelas.			X						
		C48.2: Identificar dados apresentados em gráficos.			X						
	D49: Inferir informações a partir de dados dispostos em tabelas ou gráficos.	C49.1: Inferir informações a partir de dados dispostos em tabelas.				X			X		
		C49.2: Inferir informações a partir de dados dispostos em gráficos.				X			X		
	D50: Utilizar dados apresentados em tabelas ou gráficos na resolução de problemas.	C50.1: Utilizar dados apresentados em tabelas na resolução de problemas.			X	X			X		
		C50.2: Utilizar dados apresentados em gráficos na resolução de problemas.			X	X			X		
	D51: Utilizar medidas de tendência central na resolução de problemas.	C51.1: Utilizar a média aritmética simples de uma coleção de dados na resolução de problemas.				X			X		
		C51.2: Utilizar a média aritmética ponderada de uma coleção de dados na resolução de problemas.				X			X		
		C51.3: Utilizar a moda de uma coleção de dados na resolução de problemas.				X			X		
		C51.4: Utilizar a mediana de uma coleção de dados na resolução de problemas.				X			X		
		C51.5: Utilizar pelo menos duas medidas de tendência central de uma coleção de dados na resolução de problemas.				X			X		
	D52: Utilizar medidas de dispersão na resolução de problemas.	C52.1: Utilizar o desvio padrão de uma distribuição na resolução de problemas.							X		
	D53: Utilizar medidas de dispersão e medidas de tendência central na resolução de problemas.	C53.1: Utilizar medidas de dispersão e medidas de tendência central na resolução de problemas.							X		
		C54.1: Utilizar a probabilidade de ocorrência de um evento em um espaço amostral equiprovável na resolução de problemas.				X					

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO
Governo do Estado do Espírito Santo

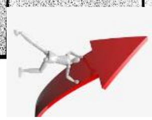
Matriz de Referência de Matemática - Ensino Médio

CAEd

Temas	Descritores	Classes	1º ano			2º ano			3º ano		
			Trimestres			Trimestres			Trimestres		
			1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º
Est	**D54**: Utilizar noções de probabilidade na resolução de problemas.	**C54.2**: Utilizar a probabilidade de ocorrência da reunião de dois eventos, em um espaço amostral equiprovável, na resolução de problemas.				X					
		C54.3: Utilizar a probabilidade de ocorrência de eventos independentes na resolução de problemas.				X					
		C54.4: Utilizar probabilidade condicional na resolução de problemas.				X					
	D55: Utilizar conhecimentos de probabilidade como recurso para a construção de argumentação.	**C55.1**: Utilizar conhecimentos de probabilidade como recurso para a construção de argumentação.							X		
	D56: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística.	**C56.1**: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística.							X		
	D57: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de probabilidade.	**C57.1**: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de probabilidade.							X		
Totais de classes			19	12	21	20	13	8	14	18	0

Conteúdo Básico Comum de Matemática - 2º Ano - Ensino Médio

Ref.	Conteúdos			Descritores
1º trimestre	Estatística e Probabilidade	O tratamento da informação	Resolução de problemas com dados apresentados em tabelas e gráficos.	D49: Inferir informações a partir de dados dispostos em tabelas ou gráficos.
			Construção de gráficos diversos retratando problemas do cotidiano.	D50: Utilizar dados apresentados em tabelas ou gráficos na resolução de problemas.
		Medidas de tendência central	Média	D51: Utilizar medidas de tendência central na resolução de problemas.
			Moda	
			Mediana	
		Introdução à probabilidade	Espaço amostral, eventos e cálculo	D54: Utilizar noções de probabilidade na resolução de problemas.
	Álgebra e funções	Progressão Geométrica	Sequências, progressão geométrica e suas aplicações	D12: Utilizar propriedades de progressões geométricas na resolução de problemas.
		Função Exponencial	Conceito e gráfico	D28: Corresponder uma função exponencial a seu gráfico.
			Aplicações	D29: Determinar o conjunto solução de uma equação exponencial.
		Função Logarítmica	Conceito e gráfico	D30: Utilizar função exponencial na resolução de problemas.
			Aplicações	
2º trimestre	Números e operações	Educação Financeira	Juros compostos	D18: Utilizar juros compostos na resolução de problemas.
			Compra à vista e compra a prazo.	
			Aumento e desconto.	
			Juros sobre juros e descontos sucessivos.	
	Geometria, grandezas e medidas	Trigonometria	Relações métricas no triângulo retângulo.	D41: Utilizar relações métricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas.
			Trigonometria no triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente.	D42: Utilizar razões trigonométricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas.
			Trigonometria em triângulo qualquer: lei dos senos e lei dos cossenos.	D43: Utilizar a lei dos senos ou a lei dos cossenos na resolução de problemas.
			Medidas de distâncias inacessíveis.	
		Geometria Espacial	A visualização e análise das formas poliédricas.	D44: Corresponder figuras tridimensionais às suas planificações ou vistas.
			Volume dos principais sólidos geométricos.	D46: Utilizar o cálculo da medida de volume dos principais sólidos geométricos na resolução de problemas.
			Resolução de problemas envolvendo conceitos geométricos de figuras planas e espaciais.	
3º trimestre	Números e operações	Noções de matrizes	Conceitos.	D7: Executar operações entre matrizes.
			Tipos de matrizes e suas operações básicas.	D15: Utilizar sistema de equações polinomiais de 1º grau na resolução de problemas.
		Determinantes	Introdução.	
			Determinante de matriz quadrada.	
		Sistemas Lineares	Sistemas lineares e suas aplicações	
		Análise combinatória	Princípio fundamental da contagem.	D6: Utilizar métodos de contagem na resolução de problemas.
			Métodos de contagem	



ANEXO B – CADERNO DE PROVAS C1103 – PAEBES

C1103

ATENÇÃO!

Agora, você vai responder a questões de Língua Portuguesa.

Leia os textos abaixo.

Texto 1

Velhos problemas municipais

Em inúmeros municípios, está se discutindo o que fazer com o lixo urbano, onde deixar os nossos "restos". Mas não é só isso. Tal como o lixo urbano, os demais problemas municipais convencionais e antigos precisam ser discutidos coletivamente, analisados de forma integrada e planejados participativamente (governos e cidadãos). [...]

Indubitavelmente[1], são inúmeras e divergentes as temáticas municipais que devem ser contempladas quando se pensa em desenvolvimento local e crescimento regional dos municípios e em qualidade de vida e satisfação dos cidadãos. Como exemplos de temáticas municipais, podem ser citados: agricultura; ciência e tecnologia; [...] meio ambiente; saúde; segurança; serviços; transporte etc.

Não são dramas apenas de responsabilidade do governo municipal, pois incluem as demais esferas de governo (estaduais e federal). Nós, cidadãos, também [...] temos de fazer nossa parte [...]. "Nossa parte" diz respeito a simples atitudes cotidianas e também a atividades mais formais e planejadas. [...]

Para tanto, elaborar e executar um Planejamento Estratégico Municipal é fundamental [...]. O Planejamento Estratégico Municipal é o mais relevante instrumento que contempla todas as questões municipais [...].

Para minimizar os "velhos" problemas [...], proponho elaborar um planejamento do município que tenha um caráter abrangente, coerente, factível operacional e estratégico para mais de quatro anos. E que ele contemple todas as temáticas ou "velhas" questões municipais.

***Vocabulário:**

[1]Indubitavelmente: algo que não se pode duvidar.

REZENDE, Denis Alcides. Disponível em: <http://www.gazetadopovo.com.br/opiniao/artigos/velhos-problemas-municipais-bfwe0shtw44i8asmjtrqz63pq>. Acesso em: 29 ago. 2017. Fragmento.

Texto 2

Onde colocar o lixo?

O lixo é, hoje, uma das maiores preocupações no mundo. Os resíduos sólidos urbanos [...] e a sua destinação constituem pauta nas reuniões de gestores públicos e de ambientalistas [...], em razão dos seus efeitos à saúde pública. [...]

É preciso ter claro que o aumento na geração de lixo é um problema que cresce vertiginosamente, agravado pelo fato de que nem sempre o lixo produzido é coletado. Há estudos indicando que entre 30% e 50% do lixo gerado nas cidades não é recolhido, nem recebe o destino adequado.

Somente com uma ação integrada entre o gestor público [...] e o cidadão [...] é que poderemos melhorar a difícil tarefa de dar um destino correto para os resíduos sólidos urbanos [...].

Sendo assim, há de se concluir que o lixo é um problema de responsabilidade não só dos gestores públicos, mas também da sociedade e de cada um individualmente. [...]

MAIADANA, Carlos Dimei Fogaça. Disponível em: <https://www.gazetadigital.com.br/conteudo/show/secao/60/materia/244879/t/onde-colocar-o-lixor->. Acesso em: 23 fev. 2017. Fragmento.

01) (P110378H6) Sobre o descarte do lixo, os autores desses textos (P110378H6_SUP)

A) apresentam pontos de vista complementares.
B) defendem posicionamentos idênticos.
C) expõem argumentos contraditórios.
D) exprimem posições infundadas.
E) revelam opiniões incoerentes.

Leia novamente os textos "Velhos problemas municipais" e "Onde colocar o lixo?" para responder às questões abaixo.

02) (P110379H6) Um argumento utilizado pelo autor do Texto 1 para defender a sua ideia está no trecho:

A) "Em inúmeros municípios, está se discutindo o que fazer com o lixo urbano,...". (ℓ. 1)

B) "Indubitavelmente, são inúmeras e divergentes as temáticas municipais...". (ℓ. 5)

C) "Como exemplos de temáticas municipais, podem ser citados: agricultura; ciência e tecnologia;...". (ℓ. 7-8)

D) "'Nossa parte' diz respeito a simples atitudes cotidianas e também a atividades mais formais e planejadas.". (ℓ. 12-13)

E) "Para tanto, elaborar e executar um Planejamento Estratégico Municipal é fundamental...". (ℓ. 14)

03) (P110380H6) No Texto 1, no trecho "E que **ele** contemple..." (ℓ. 19), o termo destacado refere-se a

A) caráter.

B) governo municipal.

C) instrumento.

D) meio ambiente.

E) planejamento.

04) (P110381H6) No Texto 2, no trecho "Há estudos indicando que entre 30% e 50% do lixo gerado nas cidades não é recolhido,..." (ℓ. 5-6), para dar credibilidade a seu discurso, o autor faz uso de

A) conhecimentos de senso comum.

B) dados estatísticos.

C) fatos históricos.

D) opinião de especialista na área.

E) relato de experiência.

05) (P110382H6) No Texto 2, no trecho "... **nem** recebe o destino adequado." (ℓ. 6-7), o termo em destaque expressa ideia de

A) adição.

B) alternância.

C) conclusão.

D) explicação.

E) oposição.

Leia o texto abaixo.

São Paulo, 12 de dezembro de 2013.

Caros Editores da *Revista Viagens e Lazer*,

Antes de mais nada, gostaria de agradecer a matéria publicada no mês de outubro, intitulada "Lugares Inóspitos¹ do Planeta", pela riqueza de detalhes e das fotos acrescidas ao texto.

Após ler a matéria, fiz uma lista dos locais que me interessam conhecer, uma vez que sou antropólogo² e um grande viajante e explorador de lugares.

Quanto a isso, tenho uma sugestão para o próximo mês, a inclusão de uma matéria sobre as ilhas Fiji. Estive ali durante dois anos de minha vida e pude contemplar belezas naturais estonteantes. Parabéns pelo trabalho!

Agradeço a atenção!

João Ribeiro, Porto Alegre (Rio Grande do Sul)

***Vocabulário:**

¹inóspitos: sem condições de habitação por seres humanos.

²antropólogo: pessoa que se dedica ao estudo aprofundado da humanidade.

Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/carta-do-leitor/>. Acesso em: 23 fev. 2017. (P110383H6_SUP)

06) (P110383H6) Qual é o tema desse texto?

A) A lista de lugares preferidos do leitor.

B) A matéria publicada em uma revista.

C) A perfeição dos lugares paradisíacos.

D) As belezas naturais das ilhas Fiji.

E) As viagens de um antropólogo.

Leia novamente o texto "São Paulo, 12 de..." para responder às questões abaixo.

07) (P110384H6) Qual trecho desse texto apresenta uma opinião?

A) "... gostaria de agradecer a matéria publicada...". (ℓ. 3)
B) "... fiz uma lista dos locais que me interessam...". (ℓ. 5)
C) "... tenho uma sugestão para o próximo mês,...". (ℓ. 7)
D) "... a inclusão de uma matéria sobre as ilhas Fiji.". (ℓ. 7-8)
E) "... pude contemplar belezas naturais estonteantes.". (ℓ. 8-9)

08) (P110385H6) De acordo com esse texto, é possível perceber que o autor

A) é um leitor assíduo da revista.
B) explorou locais inabitáveis.
C) planeja fotografar lugares do planeta.
D) pretende morar nas ilhas Fiji.
E) publicou uma matéria na revista.

09) (P110386H6) Qual é a finalidade desse texto?

A) Contar uma história.
B) Divulgar uma campanha publicitária.
C) Ensinar uma tarefa.
D) Expressar um ponto de vista.
E) Vender um produto.

Leia o texto abaixo.

Alguém tem alguma sugestão de nome para mudar?

Outro dia fui comprar um abajur. A mocinha me olhou e perguntou:

– Luminária?

Eu olhei em volta, tinha uma porção de abajur.

– Não, abajur mesmo, eu disse.

– De teto?

Fiquei olhando meio pasmo para a vendedora, para o teto, para a rua. Ou eu estava muito velho ou ela estava muito nova.

No meu tempo – e isso faz pouco tempo –, o abajur a gente punha no criado-mudo, na mesinha da sala.

E lá em cima era lustre. – Lustre?

Descobri que agora é tudo luminária. Passou por *spot*, virou luminária. [...]

Pra que mudar o nome das coisas? [...]

Quer coisa mais bonita do que criado-mudo? [...]

Pois agora as lojas vendem mesa-de-apoio. [...]

E tem umas palavras que surgem de repente, do nada. Quer ver?: luau. Isso é novo. Quando eu era jovem, se alguém falasse essa palavra ou fosse participar de um luau, era olhado meio de lado. [...]

Mas a vantagem de ser um pouco mais velho é saber que o computador que hoje todo mundo tem em casa e que na intimidade é chamado de micro nasceu com o nome de cérebro-eletrônico. Sabia dessa? E sabia que o primeiro computador, perdão, cérebro-eletrônico, pesava 14 toneladas? E que, na inauguração do primeiro, os gênios da época diziam que até o final do século se poderia fazer computadores de apenas uma tonelada? [...]

E agora me diga: por que é que em algumas casas existe jardim de inverno e não jardim de verão? E, se você quiser mudar o nome desta crônica para linguiça, pode. [...]

PRATA, Mário. Disponível em: <http://pocafe.blogspot.com.br/2005/10/mario-prata-algum-tem-alguma-sugesto.html?m=0>. Acesso em: 9 mar. 2017. Fragmento. (P110387H6_SUP)

10) (P110389H6) No trecho "**Isso** é novo." (ℓ. 15), o termo destacado refere-se a

A) computador.
B) jardim de inverno.
C) luau.
D) luminária.
E) mesa-de-apoio.

Leia novamente o texto "Alguém tem alguma..." para responder às questões abaixo.

11) (P110388H6) Nesse texto, a expressão "meio de lado" (ℓ. 17) foi usada para

A) demonstrar abandono.
B) expressar decepção.
C) indicar direção.
D) mostrar desconfiança.
E) sugerir mudança.

12) (P110387H6) Qual trecho desse texto apresenta uma opinião?

A) "Eu olhei em volta, tinha uma porção de abajur.". (ℓ. 3)
B) "Fiquei olhando meio pasmo para a vendedora, para o teto, para a rua.". (ℓ. 6)
C) "Quer coisa mais bonita do que criado-mudo?". (ℓ. 13)
D) "... o computador [...] nasceu com o nome de cérebro-eletrônico.". (ℓ. 18-20)
E) "... sabia que o primeiro computador, [...] pesava 14 toneladas?". (ℓ. 20-21)

13) (P110390H6) No trecho "**<u>Ou</u>** eu estava muito velho **<u>ou</u>** ela estava muito nova." (ℓ. 6-7), os termos em destaque apresentam ideia de

A) adição.
B) alternância.
C) comparação.
D) explicação.
E) oposição.

ATENÇÃO!

Agora, você vai responder a questões de Matemática.

14) (M110311H6) Uma determinada empresa fabrica materiais escolares, dedicando-se exclusivamente à produção de cadernos, livros e agendas. Esses materiais podem ter quatro diferentes tipos de acabamento: apenas brochura, apenas espiral, capa dura com brochura e capa dura com espiral. Essa empresa tem disponíveis cinco opções de cores para a capa dura e três opções de tamanho para o espiral, porém não produz agendas com apenas brochura.
Quantas variações de materiais escolares essa empresa produz?

A) 15
B) 27
C) 71
D) 81
E) 180

15) (M110320H6) Observe as matrizes M e N abaixo.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Qual é a matriz $3 \cdot M - N$?

A) $\begin{bmatrix} -3 & 18 \\ 6 & -3 \\ -27 & -3 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -1 \\ -9 & -1 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & -1 \\ -9 & -1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 9 \\ -9 & 13 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 3 & 14 \\ 4 & 9 \\ -9 & 13 \end{bmatrix}$

16) (M110330H6) Em um campeonato de *videogame*, os participantes combinaram que o vencedor de cada partida ganharia 5 pontos e que o derrotado perderia 1 ponto. O participante Felipe jogou todas as 80 partidas, terminando o campeonato com 100 pontos. Em nenhuma partida houve empate entre os participantes.
Quantas partidas desse campeonato Felipe venceu?

A) 5
B) 20
C) 25
D) 30
E) 50

17) (M110314H6) Uma academia de ginástica disponibiliza algumas opções de plano de atividades para seus clientes. O cliente pode escolher frequentar essa academia em um, dois, três ou seis dias da semana, com ou sem acompanhamento pessoal. Além disso, há possibilidade do cliente optar por fazer uma, duas ou nenhuma atividade extra.
De quantas formas diferentes um cliente pode elaborar seu plano de atividades nessa academia?
A) 3
B) 9
C) 24
D) 27
E) 84

18) (M110322H6) Observe as matrizes abaixo.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Qual é a matriz X·Y?

A) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 0 & -14 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}$

19) (M110332H6) Uma loja de doces começou a comercializar três novos sabores de bombons: Romeu e Julieta, floresta negra e churros. Em determinado dia, Paula, Luíza e Vitória compraram bombons desses novos sabores. Paula comprou 1 bombom de Romeu e Julieta, 2 de floresta negra e 1 de churros, gastando R$ 9,00. Luíza comprou 1 bombom de floresta negra e 1 de churros, pagando R$ 5,00. Vitória, por sua vez, gastou R$ 4,00 comprando 2 bombons de churros.
Dentre esses novos sabores, qual é o preço, em reais, do bombom mais caro?
A) R$ 2,00
B) R$ 2,25
C) R$ 2,50
D) R$ 3,00
E) R$ 3,50

20) (M110316H6) Fernanda deseja organizar em uma fileira, na prateleira de sua cozinha, três vidros de molhos de pimenta, dois de maionese, um de tomate, um de iogurte e um de gergelim.
De quantas formas diferentes Fernanda pode organizar sua prateleira de molhos em uma fileira?
A) 120
B) 336
C) 3 360
D) 5 040
E) 40 320

21) (M110324H6) Observe as matrizes abaixo.

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Qual é a matriz J·K?

A) $\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 11 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

22) (M110333H6) Uma empresa renovou a pintura das casas de um condomínio residencial. Esse condomínio é composto por 44 casas, as quais podem ter 1 ou 2 pavimentos. Para pintar todas elas, essa empresa utilizou, ao todo, 192 latas de tinta iguais. Para pintar cada casa de 1 pavimento, foram utilizadas 3 latas de tinta e, para cada casa de 2 pavimentos, 5 latas.
Quantas casas de 1 pavimento foram pintadas nesse condomínio?

A) 14
B) 20
C) 22
D) 24
E) 30

23) (M110318H6) Observe as matrizes X e Y abaixo.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$$

Qual é a matriz Y – 3·X?

A) $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -11 & 1 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -11 & 7 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -11 & 19 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 11 & -19 \end{bmatrix}$

24) (M110328H6) Beatriz precisou ir à padaria duas vezes. Na primeira vez, ela comprou 2 pães de queijo e 1 lata de refrigerante, pagando R$ 8,00 por essa compra. Na segunda vez, ela comprou 6 pães de queijo e 5 latas de refrigerante, pagando R$ 30,00. O preço unitário de cada produto não sofreu alteração nas duas compras. Quanto custa, em reais, um pão de queijo que Beatriz comprou nessa padaria?

A) R$ 2,50
B) R$ 2,60
C) R$ 2,70
D) R$ 3,00
E) R$ 4,40

25) (M110323H6) Observe a matriz T abaixo.

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz T^3 está representada em

A) $\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

B) $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$.

C) $\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$.

D) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$.

E) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

26) (M110336H6) Janaína vende cachorro-quente de dois tipos: o simples, com uma salsicha, que custa R$ 3,80 e o especial, com duas salsichas, que custa R$ 4,60. Em um determinado dia, ela iniciou suas vendas com R$ 33,60 em seu caixa e vendeu 15 cachorros-quentes simples a mais do que cachorros-quentes especiais. Ao final desse dia, ela contabilizou R$ 267,00 em seu caixa.
Quantos cachorros-quentes, ao todo, Janaína vendeu nesse dia?

A) 21
B) 36
C) 57
D) 65
E) 73

ATENÇÃO!

Agora, você vai responder a questões de Língua Portuguesa.

Leia os textos abaixo.

Texto 1

A impontualidade do amor

Você está sozinho. [...] Em frente à tevê, [...] espera o telefone tocar. Bem que podia ser hoje, bem que podia ser agora, um amor novinho em folha.

Trimmm! É sua mãe, quem mais poderia ser? Amor nenhum faz chamadas por telepatia. Amor não atende com hora marcada. Ele pode chegar antes do esperado e encontrar você [...] sem disposição para relacionamentos sérios. Ele passa batido e você nem aí. [...] Por que o amor nunca chega na hora certa?

Agora, por exemplo, que você está de banho tomado e camisa jeans. Agora que você está empregado, lavou o carro e está com grana para um cinema. Agora que você pintou o apartamento, ganhou um porta-retrato e começou a gostar de jazz. Agora que você está com o coração às moscas e morrendo de frio.

O amor aparece quando menos se espera e de onde menos se imagina. Você passa uma festa inteira hipnotizado por alguém que nem o enxerga, e mal repara em outro alguém que só tem olhos pra você. [...] Sentindo-se um ET perdido na cidade grande, você busca refúgio numa locadora de vídeo, sem prever que ali mesmo, na locadora, irá encontrar a pessoa que dará sentido a sua vida. O amor é que nem tesourinha de unhas, nunca está onde a gente pensa. [...]

MEDEIROS, Martha. Disponível em: <http://www.refletirpararefletir.com.br/cronicas-martha-medeiros-amor>. Acesso em: 5 abr. 2017. *Adaptado para fins didáticos. Fragmento.

Texto 2

Querido John

Acho que devo explicar por que pulei no mar para recuperar a bolsa. Não pensei que ela me veria como algum tipo de herói [...]. Tinha a ver com a vivacidade do seu sorriso e o calor de sua risada. Enquanto mergulhava na água, já sabia o quão ridícula fora minha reação, mas aí já era tarde demais. Toquei na água, mergulhei e emergi. [...]

Demorei um minuto para localizar a bolsa enquanto o sol caía, e as ondas do mar faziam seu melhor para levar-me de volta ao píer. Nadei até a lateral e ergui a bolsa acima da água o máximo que pude, embora ela já estivesse ensopada. A maré tornou minha volta à costa mais fácil do que eu temia, e às vezes eu olhava para cima e via quatro pessoas acompanhando meu percurso.

Finalmente, senti o fundo e segui para fora da arrebentação. Chacoalhei o cabelo para tirar a água, atravessei a areia e os encontrei na metade da praia. Estendi a bolsa.

"Aqui está."

"Obrigada", disse a morena, e, quando seus olhos encontraram os meus, senti um clique, como uma chave destravando um cadeado. Acredite, não sou romântico. Embora já tenha ouvido muito sobre amor à primeira vista, nunca acreditei nisso e ainda não acredito. Mesmo assim, havia algo ali, real e reconhecível, e eu não conseguia desviar o olhar.

De perto, ela era mais bonita do que eu notara de primeira, mas sua beleza tinha menos a ver com as feições do que com seu jeito de ser. Não era apenas a ligeira abertura entre os dentes, mas também a forma casual com que ela ajeitava uma mecha de cabelo rebelde, sua postura solta.

"Você não tinha que ter feito isso", disse ela com a voz um tanto maravilhada. "Eu ia pegar." [...]

SPARKS, Nicholas. Disponível em: <http://sarinhapinheiro.blogspot.com.br/2010/06/trecho-do-livroquerido-john.html>. Acesso em: 5 abr. 2017. Fragmento.

(P110365H6_SUP)

27) (P110365H6) Qual trecho do Texto 2 se relaciona com a temática do Texto 1?

A) "Demorei um minuto para localizar a bolsa enquanto o sol caía, e as ondas do mar faziam seu melhor...". (ℓ. 5-6)

B) "Nadei até a lateral e ergui a bolsa acima da água o máximo que pude, embora ela já estivesse ensopada.". (ℓ. 6-7)

C) "A maré tornou minha volta à costa mais fácil do que eu temia, e às vezes eu olhava para cima e via quatro pessoas...". (ℓ. 7-8)

D) "... quando seus olhos encontraram os meus, senti um clique, como uma chave destravando um cadeado.". (ℓ. 13-14)

E) "... ela era mais bonita do que eu notara de primeira, mas sua beleza tinha menos a ver com as feições do que com seu jeito de ser.". (ℓ. 17-18)

28) (P110366H6) Qual trecho do Texto 1 apresenta a ideia defendida pela autora?

A) "Bem que podia ser hoje, bem que podia ser agora,...". (ℓ. 1-2)

B) "Amor nenhum faz chamadas por telepatia.". (ℓ. 3)

C) "Agora que você pintou o apartamento,...". (ℓ. 8-9)

D) "Agora que você está com o coração às moscas...". (ℓ. 9-10)

E) "O amor aparece quando menos se espera...". (ℓ. 11)

29) (P110367H6) No Texto 1, no trecho "... você busca refúgio numa locadora de vídeo, sem prever que ali mesmo, na locadora, irá encontrar a pessoa que dará sentido a sua vida." (ℓ. 13-15), para dar credibilidade a seu discurso, a autora faz uso de

A) argumento de autoridade.

B) fato histórico.

C) relação de causa e consequência.

D) relato de situações imaginadas.

E) senso comum.

30) (P110368H6) No Texto 1, a expressão "passa batido" (ℓ. 5) foi usada para

A) sugerir normalidade.

B) indicar desatenção.

C) expressar intensidade.

D) demonstrar impacto.

E) apontar casualidade.

31) (P110369H6) No Texto 2, o narrador demonstra ser

A) aventureiro.

B) curioso.

C) engraçado.

D) prestativo.

E) tímido.

Leia o texto abaixo.

Nunca te vi, sempre te amei

De todas as tarefas que fazem parte da rotina de redação de *Galileu*, a mais prazerosa certamente é ler as cartas dos leitores. Os fãs da revista são de fato especiais e suas cartas traduzem isso. São criativos, curiosos, observadores e não deixam passar nada. Fazem perguntas tão difíceis quanto imprevisíveis. Querem saber de tudo: do monstro do Lago Ness ao Projeto Genoma Humano. E não se contentam com respostas pela metade. Ler as dúvidas que aparecem nas cartas, os comentários sobre as reportagens passadas e as sugestões de futuras é gratificante para qualquer jornalista. [...]

Felizmente, a revista conta com uma arma secreta para satisfazer tantas pessoas exigentes. Vou apresentá-la agora: Luiz Francisco Senne, nosso secretário de produção, professor de português, roqueiro, colecionador de discos de vinil e livros usados, e responsável pelo atendimento aos leitores. Kiko, como é muito mais conhecido, sabe também driblar as angústias dos nossos jovens amigos em apuros.

Muitos pedem ajuda a *Galileu* quando recebem dos professores uma tarefa complicada e não sabem a quem recorrer. Kiko responde delicada, mas firmemente: não dá para fazer o trabalho escolar no lugar do aluno (é festa agora?). Mas simpatiza com o drama de leitores como este cuja mensagem é reproduzida [...]: "Vocês não poderiam dar uma dica de como ir bem numa prova de física porque o meu cérebro está cansado?" Atendendo ao apelo levado aos repórteres por Kiko, *Galileu* oferece a seus leitores a matéria "Os cientistas alertam: não deveríamos existir", do editor Marcelo Ferroni. Ela mostra que a física pode ser criativa em vez de uma aula chata. Quer ver?

FRANÇA, Martha San Juan. Disponível em: <http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT640728-1712,00.html>. Acesso em: 31 ago. 2017. Fragmento. (P110370H6_SUP)

32) (P110370H6) Qual trecho apresenta a informação principal desse texto?

A) "De todas as tarefas que fazem parte da rotina de redação de *Galileu*, a mais prazerosa certamente é ler as cartas dos leitores.". (ℓ. 1-2)
B) "Vou apresentá-la agora: Luiz Francisco Senne, nosso secretário de produção, professor de português, roqueiro,...". (ℓ. 9-10)
C) "Kiko, como é muito mais conhecido, sabe também driblar as angústias dos nossos jovens amigos em apuros.". (ℓ. 11-12)
D) "Muitos pedem ajuda a *Galileu* quando recebem dos professores uma tarefa complicada e não sabem a quem recorrer.". (ℓ. 13-14)
E) "Kiko responde delicada, mas firmemente: não dá para fazer o trabalho escolar no lugar do aluno...". (ℓ. 14-15)

33) (P110372H6) Há uma opinião no trecho:

A) "Querem saber de tudo: do monstro do Lago Ness ao Projeto Genoma Humano.". (ℓ. 4-5)
B) "Felizmente, a revista conta com uma arma secreta...". (ℓ. 8)
C) "... sabe também driblar as angústias dos nossos jovens amigos em apuros.". (ℓ. 11-12)
D) "... simpatiza com o drama de leitores como este...". (ℓ. 15-16)
E) "Atendendo ao apelo levado aos repórteres por Kiko,...". (ℓ. 17-18)

34) (P110371H6) No trecho "Vou apresentá-**la** agora:...". (ℓ. 9), o termo destacado refere-se à

A) arma secreta.
B) dica.
C) matéria.
D) revista.
E) tarefa complicada.

Leia o texto abaixo.

Interrogação

Não sei se isto é amor. Procuro o teu olhar,
Se alguma dor me fere, em busca de um abrigo;
E apesar disso, crê! nunca pensei num lar
Onde fosses feliz, e eu feliz contigo.
Por ti nunca chorei nenhum ideal desfeito.
E nunca te escrevi nenhuns versos românticos. [...]
Se é amar-te não sei. Não sei se te idealizo [...]
Mas sinto-me sorrir de ver esse sorriso [...]
Eu não sei se é amor. Será talvez começo... [...]

PESSANHA, Camilo. Disponível em: <http://www.casadobruxo.com.br/poesia/c/camilo02.htm>. Acesso em: 9 set. 2017. Fragmento. (P110373H6_SUP)

35) (P110374H6) No verso "**Mas** sinto-me sorrir de ver esse sorriso...", o termo em destaque indica

A) adição.
B) conclusão.
C) condição.
D) explicação.
E) oposição.

36) (P110373H6) Nesse texto, o eu lírico mostra-se

A) amedrontado.
B) ansioso.
C) arrependido.
D) confuso.
E) surpreso.

Leia o texto abaixo.

A "geração z" e os meios de comunicação de massa

O desenvolvimento e a inovação dos meios de comunicação de massa têm deixado profundas marcas nas relações interpessoais e no cotidiano das pessoas. Essas mudanças são observadas e se refletem na atual conjuntura em que vivemos – a chamada "geração z". [...]

A indústria dos meios de comunicação de massa é um setor que realiza grandes investimentos para proporcionar à sociedade, cada vez mais, formas diferentes de as pessoas se manterem informadas e de se comunicarem. Disponibiliza-se uma gama de informações e de possibilidades que atendam aos mais variados gostos. [...]

A "geração z" – como é conhecida a geração de pessoas nascidas sob o advento da internet e do *boom* tecnológico – [...] representa a era da facilidade, em que, através de apenas um *clic*, pode-se chegar a lugares distantes, conhecer outras culturas ou até conversar com dezenas de pessoas ao mesmo tempo. A busca pela praticidade tem instituído novas formas de comunicação e alterado os relacionamentos humanos. O mundo virtual já faz parte da realidade das pessoas, e os valores socialmente aprendidos têm se chocado com as novas tendências de comportamento, fazendo surgir consequências como sedentarismo, dependência virtual, isolamento social, entre outros.

Diante do exposto, pode-se concluir que, de fato, os meios de comunicação têm alterado não só o comportamento, bem como o estilo de vida das pessoas. [...]

MENDES, Emily. Disponível em: <http://www.letraseeartes.com.br/2012/09/os-meios-de-comunicacao-e-massa-e-o.html>. Acesso em: 8 mar. 2017. Fragmento. (P110375H6_SUP)

37) (P110377H6) Esse texto tem por finalidade

A) contar uma história.
B) defender uma ideia.
C) ensinar uma tarefa.
D) fazer uma propaganda.
E) relatar um fato.

Leia novamente o texto "A 'geração z' e os meios..." para responder às questões abaixo.

38) (P110375H6) A informação principal desse texto está no trecho:

A) "A indústria dos meios de comunicação de massa é um setor que realiza grandes investimentos...". (ℓ. 4-5)
B) "Disponibiliza-se uma gama de informações e de possibilidades que atendam aos mais variados gostos.". (ℓ. 6-7)
C) "... como é conhecida a geração de pessoas nascidas sob o advento da internet e do *boom* tecnológico...". (ℓ. 8-9)
D) "... representa a era da facilidade, em que, através de apenas um *clic*, pode-se chegar a lugares distantes,...". (ℓ. 9-10)
E) "A busca pela praticidade tem instituído novas formas de comunicação e alterado os relacionamentos humanos.". (ℓ. 11-12)

39) (P110376H6) Nesse texto, o termo "*boom*" (ℓ. 9) foi usado para

A) demonstrar rápida expansão.
B) indicar barulho estridente.
C) marcar desorganização.
D) mostrar incômodo.
E) sugerir superioridade.

ATENÇÃO!

Agora, você vai responder a questões de Matemática.

40) (M110310H6) Paulo é dono de um restaurante que oferece pratos executivos para seus clientes. Esse prato é composto por uma salada, uma carne, uma bebida e uma sobremesa. Para compor esse prato, o restaurante oferece 2 tipos de saladas, 5 tipos de carnes, 4 tipos de bebidas e 3 tipos de sobremesa. Quantas possibilidades diferentes de prato executivo esse restaurante disponibiliza para seus clientes?

A) 14
B) 56
C) 120
D) 152
E) 1 001

41) (M110319H6) Observe as matrizes M, N e O apresentadas abaixo.

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

O resultado da operação $2 \cdot M + N - 2 \cdot O$ é a matriz

A) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

B) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

C) $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

D) $\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

E) $\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$.

42) (M110329H6) Para preparar uma mistura dos produtos X e Y, com massa total igual a 80 gramas, um técnico de laboratório gastou R$ 38,00, sendo que cada grama do produto X custou R$ 0,30 e cada grama do produto Y, R$ 0,50.
Considerando que a mistura não gerou nenhuma perda de massa, quantos gramas do produto X foram utilizados no preparo dessa mistura?

A) 10
B) 32
C) 40
D) 63
E) 70

43) (M110312H6) Ao estudar historicamente as eleições para a prefeitura de uma determinada cidade, um analista político concluiu que, nos próximos cinco mandatos, os três partidos de maior influência (PX, PY e PZ) deverão assumir a prefeitura da cidade, de maneira que o partido PX assumirá dois mandatos, o partido PY, um mandato e o partido PZ, dois mandatos.
De acordo com esse estudo, nos próximos cinco mandatos, quantas são as possíveis maneiras desses partidos assumirem essa prefeitura?

A) 10
B) 20
C) 30
D) 60
E) 120

44) (M110321H6) Observe as matrizes abaixo.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 6 & 1 \\ 9 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Qual é a matriz $R \cdot S$?

A) $\begin{bmatrix} -23 & -92 & 4 \\ -21 & -90 & 6 \\ -23 & -92 & 4 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -1 & 10 & -3 \\ 12 & 6 & 18 \\ 27 & 52 & 35 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 3 & -8 & 0 \\ -2 & 6 & 3 \\ 9 & 32 & 2 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 9 \\ -4 & 6 & 24 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 8 & 30 & 6 \\ 32 & 26 & 7 \\ 8 & 30 & 6 \end{bmatrix}$

45) (M110331H6) Márcio, Eduardo e Manuela fizeram a prova de um determinado processo seletivo. Nessa prova constavam 10 questões de cada uma das 3 áreas de conhecimento abordadas. As questões de Língua Portuguesa valiam x, as de Matemática, y e as de Legislação, z. Márcio acertou 4 questões de Língua Portuguesa, 3 de Matemática e 1 de Legislação, atingindo um total de 290 pontos. Eduardo acertou 1 de Língua Portuguesa, 2 de Matemática e 3 de Legislação, obtendo um total de 260 pontos. Manuela acertou 2 de Língua Portuguesa, 1 de Matemática e 1 de Legislação, totalizando 150 pontos.
Nessa prova, qual foi o maior valor atribuído a uma questão?

A) 50
B) 70
C) 120
D) 140
E) 290

46) (M110315H6) O salão onde Marta dá aulas de tecido acrobático possui quatro tecidos idênticos pendurados e cada tecido pode ser utilizado por um aluno de cada vez. Em uma de suas aulas, estavam presentes onze alunos.
De quantas maneiras diferentes quatro desses alunos podem subir nos quatro tecidos durante essa aula?
A) 15
B) 44
C) 330
D) 7 920
E) 14 641

47) (M110325H6) Observe as matrizes abaixo.

$$F = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Qual é a matriz $-2(F-G)$?

A) $\begin{bmatrix} 18 & -8 & 2 \\ -12 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 10 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -9 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} -18 & 8 & -2 \\ 12 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

48) (M110334H6) Durante 3 dias, uma loja registrou, em razão da variação de preço, a quantidade de unidades vendidas de um produto. No primeiro dia, a unidade desse produto foi vendida por R$ 3,00, no segundo dia, por R$ 5,00 e, no terceiro dia, por R$ 4,00. Ao final desses 3 dias, contabilizando somente a venda desse produto, ficou registrado o arrecadamento total de R$ 56 760,00. As vendas variaram de forma que a quantidade vendida no primeiro dia foi o dobro da quantidade total vendida nos outros dois dias e, no segundo dia, foi vendido o triplo da quantidade do último dia.
No total, quantas unidades desse produto foram vendidas nesses três dias?
A) 14 190
B) 15 609
C) 15 840
D) 16 512
E) 18 920

49) (M110317H6) Uma doceria produz bolos de três sabores diferentes. Esses bolos podem ter apenas uma cobertura, apenas um recheio, uma cobertura e um recheio ou nenhuma cobertura e nenhum recheio. Para a montagem do bolo a doceria disponibiliza dois sabores de cobertura e cinco opções de recheio. Quantos bolos diferentes podem ser montados nessa doceria?
A) 10
B) 26
C) 30
D) 54
E) 81

50) (M110326H6) Observe as matrizes abaixo.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Qual é a matriz $-3U + V$?

A) $\begin{bmatrix} -9 & 36 \\ 3 & 3 \\ -9 & -9 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -1 & -12 \\ 7 & -1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 7 & -1 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 3 & -12 \\ -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 5 & -22 \\ -5 & -1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$

51) (M110335H6) O gerente de uma loja de calçados encomendou 108 pares de sandálias novas nos tamanhos 36, 37 e 38. Nessa encomenda, a quantidade de pares do tamanho 36 foi o dobro do total de pares dos outros dois tamanhos e a quantidade de pares do tamanho 37 foi um terço da quantidade de pares do tamanho 38.
Quantos pares dessa sandália no tamanho 37 essa loja encomendou?

A) 8.
B) 9.
C) 12.
D) 27.
E) 36.

52) (M110327H6) Observe as matrizes abaixo.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Qual é a matriz $P - 3(Q + R)$?

A) $\begin{bmatrix} 16 & -13 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -2 & -11 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 2 & -17 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} -14 & -13 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}$