UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPIRITO SANTO
UFES

CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

PROFMAT

GEYSON SUZANO

MÚLTIPLOS APRENDIZADOS NO ENSINO DE FRAÇÕES E NÚMEROS DECIMAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Vitória– ES
2018

GEYSON SUZANO

MÚLTIPLOS APRENDIZADOS NO ENSINO DE FRAÇÕES E NÚMEROS DECIMAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de pós-graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como registro parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Professor Dr. Moacir Rosado Filho

UFES

Vitória– ES
2018

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

S968m Suzano, Geyson, 1979-
Múltiplos aprendizados no ensino de frações e números decimais na educação básica / Geyson Suzano. – 2018.
104 f. : il.

Orientador: Moacir Rosado Filho.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Brasil). 2. Educação básica. 3. Frações. 4. Aritmética. 5. Matemática – História. 6. Números decimais. I. Rosado Filho, Moacir, 1963-. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

Elaborado por Perla Rodrigues Lôbo – CRB-6 ES-527/O

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

SEXAGÉSIMA PRIMEIRA ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRE EM MATEMÁTICA

Ata da sessão de defesa da sexagésima primeira Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, do aluno Geyson Suzano, candidato ao grau de Mestre em Matemática. Às 16:00 horas do dia 24 de maio de 2018, na sala 32 do Prédio IC-1, o presidente da Comissão Examinadora, Prof. Dr. Moacir Rosado Filho – DMAT/UFES, iniciou a sessão apresentando a Comissão constituída por além dele próprio, Professor Orientador, o Prof. Dr. Alancardek Pereira Araujo (Examinador Interno – DMAT/UFES). Também fez parte da comissão examinadora a Prof.ª Dr.ª Maria Clara Schuwartz Ferreira (Examinadora Externa - IFES). A seguir, o presidente passou a palavra ao candidato que em 50 minutos apresentou a sua Dissertação intitulada: "Múltiplos Aprendizados no Ensino de Frações e Números Decimais na Educação Básica". Finda a apresentação, o presidente passou a palavra aos membros da Comissão para procederem a arguição. Finda a arguição, a Comissão retornou e o presidente informou aos presentes que a Dissertação foi Aprovada sem restrições. Logo após, o presidente declarou encerrada a sessão. Eu, Florêncio Ferreira Guimarães Filho, lavrei a presente Ata, que é assinada pelos membros da Comissão Examinadora. Vitória, 24 de maio de 2018.

Moacir Rosado Filho

Prof. Dr. Moacir Rosado Filho
Orientador - UFES

Alancardek Pereira Araujo

Prof. Dr. Alancardek Pereira Araujo
Membro Interno - UFES

Maria Clara Schuwartz Ferreira

Prof.ª Dr.ª Maria Clara Schuwartz Ferreira
Membro Externo – IFES/Vitória

Agradecimentos

A Deus todo poderoso, pelo dom da vida. Por conduzir meus passos e por ter me dado força e coragem para enfrentar os obstáculos que a vida apresenta.

Aos meus familiares e amigos, que sempre torceram para que eu alcançasse os objetivos aos quais estava disposto a lutar. Em especial às minhas irmãs.

Ao meu pai e minha mãe, que mesmo não estando presentes para se alegrarem por esta vitória, sempre me encaminharam para o bem.

Á minha esposa Aline, que entendeu todas as minhas ausências familiares neste período, me apoiando e incentivando em cada momento de desânimo e de falta de tempo.

Aos meus filhos João Pedro e Maria Alice, por me alegrar a cada dia que eu chegava exausto em casa, fazendo perceber que tudo estava valendo a pena.

Ao professor Moacir, pelo qual tenho uma admiração enorme, pela paciência, orientação e por compartilhar seu conhecimento comigo na construção desta dissertação. E aos professores Alancardek Pereira Araújo e Maria Clara Schuwartz Ferreira, por participarem desta banca.

Aos professores do PROFMAT turma 2016, especialmente ao professor Florêncio, pessoa admirável e profissional exemplar, incansável na arte de ensinar.

À Capes pelo apoio financeiro.

Enfim, aos meus colegas de turma que ingressaram comigo no PROFMAT em 2016, pela parceria e oportunidade de compartilharmos conhecimento. Em especial, aos amigos: Diego, Fábio, Lenise e Thaís por incansáveis momentos de estudo e amizade.

Resumo

A proposta deste trabalho é fazer o resgate do ensino de fração na Educação Básica. A ideia inicial é fazer um histórico sobre fração e números decimais, identificando quando e como surgiram os primeiros registros e a partir de qual necessidade foram introduzidos nas sociedades.

A partir daí, será feita uma apresentação sobre o ensino de fração na atualidade e como estão os índices relativos ao Brasil.

Para que se entenda este processo, será apresentado, neste trabalho, um diagnóstico qualitativo feito com professores da Educação Infantil e Ensino Fundamental (1ª Fase) sobre tempo de atuação, formação em Matemática e formação em frações e decimais, entre outros.

Será feita uma análise de questionários específicos, aplicados para alunos de 5º ano e 9º ano do Ensino Fundamental, e da 3ª série do Ensino Médio, com questões específicas de modelos aplicados no SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) com os respectivos descritores dos conteúdos estudados. Em seguida, serão discutidas as respostas dadas pelos alunos.

Consta também, neste trabalho, uma proposta de intervenção para o ensino de fração com exercícios e discussões de possíveis soluções para facilitar o aprendizado do conteúdo.

Palavras chaves: Aritmética, Frações, Números Decimais, História da Matemática, Educação Básica, SAEB.

Abstract

The proposal of this work is to make the rescue of elementary education in Basic Education. The initial idea is to make a history of fractions and decimals, identifying when and how the first records arose and from which need were introduced into societies.

From there will be a presentation on the teaching of fraction in the present and how are the indices relative to Brazil.

In order to understand this process, a qualitative diagnosis will be presented in this work with teachers of Early Childhood Education and Elementary Education (1st Phase) on time of action, formation in Mathematics and formation in fractions and decimals, among others.

It will be done an analysis of specific questionnaires, applied to 5th and 9th grade students of elementary and the third grade of high school, with specific questions of models applied in the SAEB (Basic Education Assessment System) with the respective descriptors of the contents studied. Next, the answers given by the students will be discussed.

This paper also proposes an intervention for the teaching of fraction with exercises and discussions of possible solutions to facilitate the learning of the content.

Keywords: Arithmetic, Fractions, Decimal Numbers, History of Mathematics, Basic Education.

Sumário

1. INTRODUÇÃO

A Matemática é vista por grande parte da comunidade escolar como uma área do conhecimento de aprendizado extremamente difícil. Assim, poucos ficam confortáveis com essa disciplina. A falta de conhecimento básico faz com que muitos, inclusive professores, não dominem o campo numérico e as operações. Não há como aprender Matemática sem assimilar a base da disciplina. Quando a base é fraca ou não existe, fica mais fácil abandonar o caminho, desistir de aprender.

A presente pesquisa propõe uma discussão sobre o ensino de fração desde sua primeira abordagem na 1ª fase do Ensino Fundamental até a conclusão do Ensino Médio (3ª série), passando pela formação acadêmica do professor que ministra aulas de Matemática na Educação Infantil e na 1ª fase do Ensino Fundamental (2º ao 5º ano) e não é especialista em Matemática.

Com mais de 20 anos ministrando aula de Matemática, foi possível notar algumas dificuldades que os alunos têm em números fracionários e decimais. É sabido que os números decimais resolvem grande parte de nossos problemas, mas com o conceito de fração é que há melhor percepção e entendimento sobre razões, escalas, porcentagens, possibilidades e probabilidade.

O caminho percorrido para embasar a discussão sobre o ensino de fração foi:

- Pesquisa em jornais e revistas;
- Referenciais teóricos sobre o ensino de fração;
- Histórico de frações e números decimais;

- Pesquisa com professores que lecionam na Educação Infantil e 1ª fase do Ensino Fundamental;
- Atividades diagnósticas com alunos;
- Proposta de atividades e intervenção.

Muitos estudos já apontam esta falta de aprendizagem do tema proposto que já até viraram notícias de jornal: ***“Dois terços dos alunos de 15 anos no Brasil não entendem frações. ”*** [1] e ***“Uma pesquisa realizada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul em 25 cidades brasileiras, com adultos de mais de 25 anos, mostra que 75% dos brasileiros não entendem frações.*** [1] ***”*** [2].

> *“Não saber usar frações ou porcentagens é cada vez mais grave, pois vivemos num mundo tecnológico, onde dominar essas operações é cada vez mais imperativo.*
>
> *Claudio Landim – Diretor Adjunto do Impa em 2013 em entrevista ao jornal.*

De acordo com Landim, se os alunos não são capazes de entender frações, percentuais ou gráficos, não conseguem compreender situações que exigem apenas interpretação direta do que foi informado num problema.

A dificuldade em aprender frações não é uma característica exclusiva de brasileiros. Em um artigo científico publicado na revista *scientific american em 28 de novembro de 2017 por Robert S. Siegler com o título Frações: Onde tudo vai mal. Por que os americanos têm tantos problemas com frações - e o que pode ser feito?* [3]

---

[1] - https://oglobo.globo.com/sociedade/educacao/dois-tercos-dos-alunos-de-15-anos-no-brasil-nao-entendem-fracoes-10968622. Acesso em 03/10/2017

[2] - http://noticias.band.uol.com.br/cidades/noticias/100000779053/pesquisa-mostra-que-75-dos-brasileiros-nao-entendem-fracoes.html

[3] - https://www.scientificamerican.com/article/fractions-where-it-all-goes-wrong/

Pode-se observar que as pesquisas feitas aqui no Brasil caminham na mesma direção. Muitas crianças nunca dominam frações. Quando perguntados se $\frac{12}{13}+\frac{7}{8}$ estava mais próximo de $1, 2, 19$ ou 21, apenas 24% de uma amostra nacionalmente representativa de mais de 20000 alunos do $8º$ ano responderam corretamente. Esse teste foi feito há quase 40 anos, o que deu a Hugo Lortie Forgues e a mim que o trabalho de inúmeros professores, treinadores de matemática, pesquisadores e comissões do governo fizesse uma diferença positiva. Nossas esperanças foram frustradas pelos dados; Descobrimos que, em todos esses anos, a precisão do mesmo problema melhorou apenas de 24% para 27%.

Por que as frações são tão difíceis de entender? Uma das principais razões é que o aprendizado das frações requer a superação de dois tipos de dificuldade: inerente e culturalmente contingente. As fontes inerentes de dificuldade são aquelas que derivam da natureza das frações, aquelas que confrontam todos os alunos em todos os lugares. Uma dificuldade inerente é a notação usada para expressar frações. Entender a relação $\frac{a}{b}$ é mais difícil do que entender a simples quantidade a, independentemente da cultura ou período de tempo em que a criança vive.

Dada a importância das frações dentro e fora da escola, a extensa evidência de que muitas crianças e adultos não as compreendem, e a inerente dificuldade do tema, o que deve ser feito? Considerando fatores culturalmente contingentes, aponta para várias etapas potencialmente úteis. Uma compreensão mais profunda das frações entre os professores provavelmente os ajudará a ensinar de maneira mais eficaz. Explicar o significado das frações para os alunos usando a linguagem clara (por exemplo, explicando que $\frac{3}{4}$ significa 3 de $\frac{1}{4}$ unidades) e solicitar que os autores de livros didáticos incluam problemas mais desafiadores são outras estratégias promissoras.

Esta pesquisa, portanto, surgiu da grande dificuldade encontrada no ensino de Matemática no momento em que o ensino de frações era extremamente necessário. Para que se entenda o processo, será abordado o ensino de fração desde a sua ideia inicial na Babilônia e no Egito antigo (como eram feitos os primeiros cálculos e como esta civilização entendia a ideia de dividir, de particionar e de fracionar aquilo que tinha), até os dias atuais, com o objetivo de mostrar como este problema atinge nossos estudantes em diversos níveis de ensino e de classe social (Escola pública e Escola particular).

Como base do estudo, serão utilizados os índices e descritores pertinentes ao ensino de fração no SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica). O eixo norteador do processo de entendimento do ensino de fração, nesta pesquisa, será estudado através de um questionário sobre tópicos, dificuldades e anseios de professores da Educação Infantil e da 1ª fase do Ensino Fundamental – até o 5º ano, onde será possível verificar o quanto é investido em carga horária, metodologias e aprofundamentos da formação deste profissional no ensino de Matemática.

Quanto ao ensino de fração na percepção da aprendizagem do aluno, o estudo das dificuldades será apresentado e discutido através das atividades que foram aplicadas para alunos de 5º e 9º ano do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio, para que seja feita comparações e reflexões sobre a aprendizagem dos níveis de ensino deste público da comunidade escolar.

Após estas discussões e verificações dos possíveis problemas na aprendizagem desses alunos, serão apresentadas, em forma de intervenção, sugestões de possíveis abordagens para que o ensino de fração seja mais aproveitado no ambiente escolar, tendo como objetivo a minimização dos problemas relacionados a este conteúdo tão importante para o ensino de Matemática.

Neste sentido, a pesquisa tem os seguintes objetivos a serem trabalhados.

OBJETIVOS GERAIS

- Analisar o aprendizado de Matemática, especificamente de fração e números decimais, de um grupo de professores da Educação Infantil e do Ensino Fundamental I.
- Analisar o Ensino de fração de 25 alunos do 5º ano e de 27 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental da Escola São Domingos e, de 14 alunos da 3ª série da EEEFM "Laranjeiras" através de um questionário diagnósticos sobre fração, seguindo o modelo de questões do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica".
- Agir sobre o resultado do questionário, analisando cada resultado, indicando os caminhos que foram percorridos para a se chegar aos resultados.
- Propor atividades que possam ser usadas para formação de professores e como análise, entendimento e aprofundamento de frações de números decimais para diversos públicos de alunos da Educação Básica.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar possíveis desvios de rota na aprendizagem de Matemática, especificamente fração, do professor que leciona na Educação Infantil e no Ensino Fundamental I.

- Analisar a formação acadêmica deste profissional e o tempo que é dedicado à Matemática na sua formação e nas formações continuadas na qual ele participa/participou.
- Verificar como os alunos do 5º ano e do 9º ano do Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio estão concluindo as respectivas séries em relação ao ensino de fração, através de um questionário diagnóstico.
- Identificar e agir sobre questões que apresentam maiores dificuldades de aprendizagem.
- Discutir possíveis soluções de alunos para justificar possíveis respostas.
- Sugerir atividades de introdução, analise e aprofundamento de frações e números decimais que podem ser usadas como atividades para a formação de professores e aprendizados de alunos.

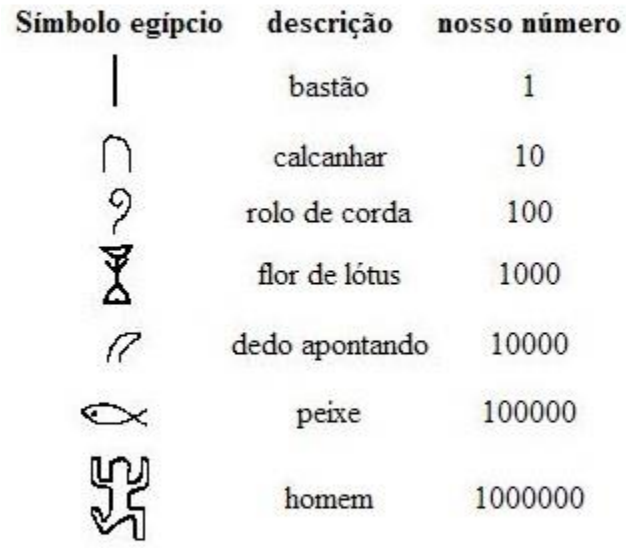
2. DESENVOLVIMENTO

2.1 – UM POUCO DE HISTÓRIA

Nos dias atuais, é muito importante ouvir que a Matemática deve ser contextualizada ou mais concreta, palpável. Isso acontece porque a grande maioria considera a Matemática muito mais difícil do que as outras disciplinas e porque ela tem uma peculiaridade que poucas têm: ela é bastante abstrata. Mas, ao mesmo tempo em que muitos a consideram difícil, por esse mesmo motivo, outra parcela da comunidade escolar a considera como a disciplina que tem o “poder” de agregar um saber abstrato por excelência, e, logo, ajuda a desenvolver o raciocínio e o pensamento lógico.

Há vários registros históricos de como as civilizações antigas representavam seus problemas numéricos, porém, não são muito seguros, devido ao fato de suas fontes serem muito escassas e fragmentadas. Não é negável que as primeiras formas de contagem surgiram da necessidade do homem em registrar quantidades, não somente a partir da contagem de animais, mas também com o intuito de se organizar a sociedade devido ao crescimento populacional. O aparecimento de registros de quantidades associados às primeiras formas de escrita está diretamente relacionado a esta nova forma de organização da sociedade.

Os egípcios desenvolveram um sistema de numeração e uma escrita na mesma época dos babilônios, por volta de 3000 a.E.C (ERA COMUM), e assim como nosso sistema de numeração, era decimal, diferenciando apenas do babilônio porque não era posicional e sim aditivo. Os símbolos usados pelos egípcios eram:



Símbolo egípcio	descrição	nosso número
	bastão	1
	calcanhar	10
	rolo de corda	100
	flor de lótus	1000
	dedo apontando	10000
	peixe	100000
	homem	1000000

Fonte: http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-egipcios.htm

Por exemplo, para escrever 5068, teríamos:

É sabido que fração é um tópico da Matemática que muitos têm dificuldade de aprender e assimilar, devido a diversos fatores que serão tratados nesta pesquisa. Neste momento, será analisado e discutido como o conceito de fração foi apresentado na primeira civilização do qual há registro histórico deste conteúdo.

2.1.1. – FRAÇÕES NO EGITO ANTIGO

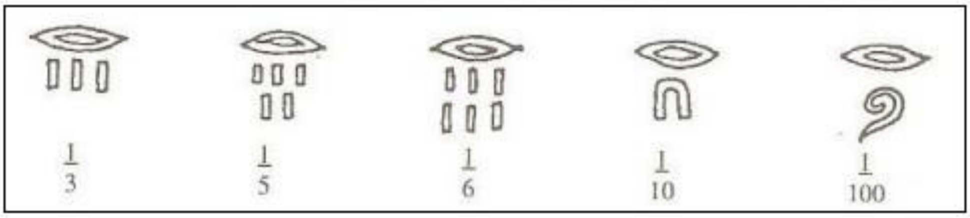
O conceito usado pelos egípcios é o que, para nós, equivale a uma fração com numerador 1, porém, não é possível comparar com a escrita atual. Para representar $\frac{1}{9}$ era escrito nove barras verticais e acima delas uma elipse, que representava o “numerador” 1.

As frações utilizadas eram sempre com numerador 1, mas a fração $\frac{2}{3}$ também era usada, tendo ainda $\frac{1}{2}$ como fração como um símbolo especial.

É importante ressaltar que na escrita de frações egípcias, o símbolo oval tem um sentido ordinal. É como se fosse distribuído alguma coisa em n partes iguais e tomamos a n-ésima parte, a que conclui a subdivisão em n partes, ou seja, numa divisão para n pessoas, $\frac{1}{n}$ é o valor que a última pessoa vai ganhar.

Pode-se concluir, então, que as frações egípcias são aquelas com o numerador 1.

Representação hieróglifa egípcia de algumas frações unitárias.



Fonte: Ifrah, 1997a, p. 349.

As frações que não possuem numerador 1, podem ser convertidas em uma soma de frações egípcias utilizando o seguinte método, explicado abaixo em dois exemplos.

Exemplo: Deseja-se escrever $\frac{4}{5}$ como uma soma de frações com numerador 1.

1º passo: inverter $\frac{4}{5}$, obtendo $\frac{5}{4}$.

2º passo: verificar entre quais inteiros $\frac{5}{4}$ está inserido: $1 < \frac{5}{4} < 2$. Considerar o menor inteiro maior que a fração; logo 2.

3º passo: $\frac{1}{2}$ é a maior fração com numerador 1 menor que $\frac{4}{5}$. Subtrai-se $\frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{8-5}{10} = \frac{3}{10}$.

Logo, $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10}$.

Faça o mesmo processo com $\frac{3}{10}$.

Inverta $\frac{3}{10}$, obtendo $\frac{10}{3}$.

Tem-se, então, que $3 < \frac{10}{3} < 4$.

Logo, $\frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{6-5}{20} = \frac{1}{20}$.

Daí, $\frac{3}{10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$.

Logo, $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$.

Exemplo: Escrever $\frac{7}{9}$ como soma de frações egípcias:

1º passo: inverter $\frac{7}{9}$, obtendo $\frac{9}{7}$.

2º passo: verificar entre quais inteiros $\frac{9}{7}$ está inserido $1 < \frac{9}{7} < 2$. Considerar o menor inteiro maior que a fração; logo 2.

3º passo: $\frac{1}{2}$ é a maior fração com numerador 1 menor que $\frac{7}{9}$. Subtrai-se $\frac{7}{9} - \frac{1}{2} = \frac{14-9}{18} = \frac{5}{18}$.

Logo, $\frac{7}{9} = \frac{1}{2} + \frac{5}{18}$.

Faça o mesmo processo com $\frac{5}{18}$.

Inverta $\frac{5}{18}$, obtendo $\frac{18}{5}$.

Tem-se, então, que $3 < \frac{18}{5} < 4$.

Logo, $\frac{5}{18} - \frac{1}{4} = \frac{10-9}{36} = \frac{1}{36}$.

Daí, $\frac{5}{18} = \frac{1}{4} + \frac{1}{36}$.

Logo, $\frac{7}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{36}$.

Não é fácil perceber que qualquer número racional $\frac{m}{n}$, com $m < n$, possa ser escrito como soma de frações unitárias, porém, Leonardo Fibonacci (1170, 1240) conseguiu mostrar um método que sempre funciona para estas transformações. Ele não apresenta uma demonstração formal, como o faríamos hoje, mas dá um método inteiramente geral que resolve o problema. Em um artigo da Revista do Professor de

Matemática/Estágio OBMEP edição 2007, é possível mostrar o passo a passo para chegar a conclusão do problema.

A regra ... é que você divide o número maior pelo menor; e quando a divisão não é exata, verifique entre que dois naturais a divisão está. Tome a maior parte, subtraia-a, e conserve o resto ...

Em linguagem de hoje, a regra seria:

Subtraia da fração dada a maior fração unitária que não é maior do que ela. Repita o processo até obter 0.

Não é difícil demonstrar que o processo descrito por Fibonacci sempre funciona. Para mostrar que o método funciona, será demonstrado que os numeradores das diferenças sucessivas (mesmo antes de simplificar) decrescem estritamente. Pelo princípio da descida infinita de Fermat como toda sucessão estritamente decrescente de números naturais não negativos é finita, (Princípio da descida infinita de Fermat), o processo obrigatoriamente tem fim.

A prova segue da seguinte ideia:

Considere a fração $\frac{a}{b}$ com $a < b$.

Suponha que $b = qa + r, 0 \leq r < a$. Se $r = 0$, então, $\frac{a}{b} = \frac{1}{q}$ e a demonstração está terminada. Portanto, supor que $r \neq 0$.

Então, $\frac{b}{a} = q + \frac{r}{a}$ implicando $q < \frac{b}{a} < q + 1$, ou $\frac{1}{q} > \frac{a}{b} > \frac{1}{q+1}$.

Assim, $\frac{a}{b} - \frac{1}{q+1} = \frac{-r+a}{b(q+1)}$.

Mas, como $a - r < a$, os numeradores das diferenças sucessivas são estritamente decrescentes quando $r \neq 0$, o que queríamos demonstrar.

Segundo IFRAH, G.

> Embora o cálculo com frações tenha dado à matemática egípcia um caráter complicado e pesado, a maneira de operar com as frações unitárias foi praticada durante muitos anos, não só no período grego, mas também na Idade Média.

Consta historicamente, que os babilônios usavam em geral frações com denominador 60. Sendo provável que o uso do número 60 pelos babilônios se deve ao fato que é um número menor do que 100 com maior quantidade de divisores inteiros. Por sua vez, para os romanos, era constante usar frações com denominador 12, provavelmente por que o número 12 embora seja um número muito pequeno, possui um número expressivo de divisores inteiros.

Com o passar dos tempos, muitas notações foram usadas para representar frações. A atual maneira de representação data do século XVI.

Em 1948, os matemáticos Ernest Straus[1] e Paul Erdös[2] conjecturaram que, para qualquer que seja o número natural $n > 5$, existem números naturais a, b e c, distintos entre si, tais que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

---

(1) Ernst Gabor Straus, coautor de Erdös.

(2) Paul Erdös – matemático do século XX, nasceu em 26 de março de 1913 e morreu em 20 de setembro de 1996 com 83 anos de idade. Dedicou toda a sua vida a um único objetivo – a matemática –, sendo por isso um contraexemplo para os que pensam que a idade faz diminuir a produção matemática, pois mesmo na casa dos 70 anos chegou a publicar 50 artigos por ano. É a Erdös que se deve a frase: “Um matemático é a máquina que transforma café em teoremas” – Hoffman, Paul – O Homem Que Só Gostava de Números, editora Gradina, março de 2000.

Porém, até hoje não foi possível provar esta afirmativa. Só se mostrou por experimentos que é válida até $n < 10^{24}$.

2.2 – ANÁLISE DO ENSINO DE FRAÇÕES

É perceptível que o ensino de Matemática precisa ser mais aprofundado e melhor abordado nas escolas de Educação Básica. Quando se trata de fração, principalmente, muitas pessoas tem medo do conteúdo por não ter tido um primeiro contato com a matéria ou porque passaram por sua vida acadêmica sem que tenham entendido, aprendido ou vivenciado o assunto.

Por ser um conteúdo que precisa de um entendimento básico para se avançar, caso não tenha sido adquirido na base, o alcance do aprendizado poderá se tornar mais difícil. Podemos citar vários motivos pelos quais não se aprende fração na vida escolar. Temos o caso do não aprofundamento do conteúdo, ou falta de abordagem nas séries em que ele está inserido. Geralmente, quando não se sabe o conteúdo a ser aplicado, ou aborda-se de qualquer maneira ou nem sequer, contempla-se o conteúdo de forma adequada.

Em várias ocasiões atuais é comum acontecer momentos de discussão sobre o ensino de Matemática, principalmente em épocas em que os resultados de avaliações de larga escala nacional ou internacional são divulgados.
Em um estudo feito pelo Círculo da Matemática, projeto do instituto Tim com 2632 pessoas em 25 cidades nas 5 regiões do Brasil, entre julho e agosto de 2017, com o público com idade de 25 anos ou mais, concluiu-se que:

> “Os adultos não sabem Matemática básica, nem mesmo os que já concluíram o ensino superior ou estão na Universidade. Uma pesquisa concluída neste semestre mostra que quase metade (45,5%) das pessoas que têm 15 anos de estudo não entende fração. ”[3][3]

Essas pesquisas só corroboram o que vemos no dia a dia de nossa sociedade. Muitos cidadãos não são capazes de fazer comparações com frações, decimais ou percentuais, que facilitariam sua vida diária, e acabam caindo em armadilhas, por exemplo, do mercado financeiro. É um caso grave que atinge grande parcela da população, e o pior, que teve pelo menos um pouco de acesso à educação e que, de acordo com a pesquisa, já cursaram ou estão cursando o Ensino Superior. Àqueles que não tiveram acesso a uma educação comprometida e de qualidade, a situação tende a piorar.

2.3 – PESQUISAS SOBRE O ENSINO DE FRAÇÃO

2.3.1. – PESQUISA COM OS PROFESSORES DA EDUCAÇÃO INFANTIL E DO ENSINO FUNDAMENTAL I (2º AO 5º ANO)

Em uma pesquisa qualitativa com 58 professores da Educação Infantil e/ou 1ª fase do Ensino Fundamental (2º ao 5º ano) da escola São Domingos de Vitória – ES e do Colégio Marista Nossa Senhora da Penha de Vila Velha – ES, que foi aplicada em novembro de 2017, pode-se verificar como estão sendo abordados o ensino da Matemática em cursos de licenciatura e pós-graduação para a formação de professores. Em muitos casos, os professores desse segmento nunca nem sequer

---

[3] http://g1.globo.com/educacao/noticia/2015/12/nem-os-universitarios-dominam-matematica-basica-diz-pesquisa.html) - Acesso em 03/10/2017

tiveram contato com os princípios básicos de Matemática para que pudessem ensinar aos seus alunos na fase de ensino no qual atuam.

Para que se possa verificar como a Matemática e o ensino de fração estão sendo, ou foram abordados, em cursos de graduação e/ou pós-graduação para professores que ensinam este conteúdo nas séries iniciais, se iniciará, a partir deste momento, uma análise das respostas à pesquisa destes 58 professores voluntários que atuam na 1ª fase da Educação Básica.

O questionário que foi usado para que se pudesse analisar essas questões encontra-se aqui:

1) Você leciona em qual fase da Educação Básica?

( ) Educação Infantil.
( ) Ensino Fundamental.

2) Há quanto tempo você atua como professor (a)?

( ) 1 a 5 anos.
( ) 6 a 10 anos.
( ) 11 a 15 anos.
( ) acima de 15 anos.

3) Sua formação acadêmica é:

( ) Inferior à Licenciatura.
( ) Licenciatura em Pedagogia / Outra Licenciatura.
( ) Licenciatura e Especialização.
( ) Licenciatura e Mestrado.
( ) Licenciatura e Doutorado.

4) Em sua formação acadêmica foi destinado para o Ensino de Matemática a carga horária de:

( ) Até 60 horas.
( ) Entre 60 horas e 120 horas.
( ) Acima de 120 horas.

5) Dentro da carga horária disponibilizada para Matemática, foi destinado para o ensino de frações:

( ) Até 10 horas.
( ) Entre 10 horas e 30 horas.
( ) Entre 30 horas e 60 horas
( ) Acima de 60 horas.

6) Você considera que o ensino de frações, na sua formação acadêmica, foi:

( ) Inexistente.
( ) Pouco abordado.
( ) Satisfatório.
( ) Excelente.

7) Você acredita que o ensino de fração nas séries iniciais do Ensino Fundamental (1º ao 5º ano) é importante?

( ) Sim.
( ) Não.
( ) Não faz diferença, afinal os alunos estudarão novamente nas séries posteriores.

8) Ao trabalhar com frações, geralmente o aluno:

( ) Aprende pouco pela complexidade do conteúdo.
( ) Aprende bem, mas ainda fica com algumas dúvidas conceituais.
( ) Aprende com eficiência.
( ) Não aprende.

9) A instituição em que você trabalha proporciona momentos de formação continuada direcionada para a Matemática?

( ) Sim, esporadicamente.
( ) Sim, com bastante frequência.
( ) Não.

10) Você acredita ser importante uma formação continuada sobre o ensino de fração?

( ) Não, afinal me acrescentaria em nada.
( ) Sim, mas não participaria.
( ) Sim e participaria.

11) A partir do ano de 2014, de quantas formações continuadas sobre o ensino de frações você participou?

( ) Nenhuma
( ) 1.
( ) 2.
( ) 3.
( ) Mais que 3.

12) Quanto ao ensino de frações, o melhor caminho para introduzir o conteúdo é:

( ) Apresentar o conteúdo com formas e regras pré-definidas.
( ) Utilizar material concreto que desperte o interesse ao aprendizado do conteúdo.
( ) Mesclar formas e regras com material concreto.

13) Em sua escola, a carga horária semanal disponibilizada para o Ensino de Matemática é de

( ) 3 aulas.
( ) 4 aulas.
( ) 5 aulas.
( ) Mais de 5 aulas.
( ) Não fica bem definido, depende da semana e de cada particularidade.

14) O livro didático que é adotado em sua escola proporciona um bom aprendizado para o ensino de frações?

( ) Não.
( ) Parcialmente.
( ) Integralmente.

Outras considerações, caso queira colaborar:

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

Obrigado por sua participação!
Geyson Suzano

RESULTADOS

Ao ser perguntado sobre quanto tempo de atuação como professor a resposta foi:

Respostas	1 a 5 anos	6 a 10 anos	11 a 15 anos	Acima de 15 anos
Frequência absoluta	13	11	6	28
Percentual	22,41%	18,96%	10,34%	48,29%

A grande maioria já teve bastante tempo de atuação em sala de aula e trabalha com ensino de Matemática no Ensino Fundamental, visto que lecionam de forma polivalente.

Quanto à formação acadêmica desses professores, as perguntas foram direcionadas ao que estão aprendendo nas faculdades/universidades e sobre o ensino de Matemática, mais especificamente ensino de fração. As perguntas e respostas foram:

- Sua formação acadêmica é:

Respostas	Inferior à graduação	Licenciatura em pedagogia	Licenciatura + Especialização	Licenciatura + Mestrado	Licenciatura + Doutorado	Mais de uma licenciatura	Em branco
Frequência absoluta	0	27	28	1	0	1	1
Percentual	0%	46,6%	48,3%	1,7%	0%	1,7%	1,7%

Como a lei determina que professores tenham curso superior para atuar em salas de aula, não há nenhum professor desta pesquisa que não tenha pelo menos uma licenciatura plena, e a maioria absoluta é apenas licenciada/graduada ou tem licenciatura com especialização.

- Em sua formação acadêmica foi destinado para o ensino de Matemática a carga horária de:

Respostas	Até 60 horas	Entre 60 horas e 120 horas	Acima de 120 horas	Em branco
Frequência absoluta	17	32	7	2
Percentual	29,3%	55,2%	12,1%	3,4%

Como o estudo é feito a partir da formação Matemática dos professores, verifica-se que a carga horária para esses profissionais em Matemática está muito aquém do que seria o mínimo necessário para que se tenha base suficiente para trabalhar com o conteúdo.

Apenas 12,1% teve uma carga horária superior a 120 horas, o que não garante que foi estudado o conteúdo completo que é aplicado nos segmentos de atuação, de tal forma que consigam repassar a seus alunos.

Como informação complementar desta pergunta acrescento, neste momento, três exemplos de carga horária de Matemática em 3 cursos de Pedagogia ministrados na Grande Vitória.

Faculdade Novo Milênio

4º período

Disciplinas	Carga Semestre 400 horas
Alfabetização e Letramento II	30h
Avaliação da Aprendizagem	60h
História – Fundamentos e Metodologia	60h
Língua Portuguesa – Fundamentos e Metodologia	60h
Matemática - Fundamentos e Metodologia	60h
Estágio Supervisionado I – Educação Infantil	100h
Pesquisa na Prática Pedagógica II – O Projeto Pedagógico Curricular e o Plano de Ensino	30 h

5º período

Disciplinas	Carga Semestre 400 horas
Corpo e Movimento	60h
Geografia – Fundamentos e Metodologia	60h
Ciências Naturais – Fundamentos e Metodologia	60h
Avaliação e Currículo na Educação Infantil	60h
Estágio Supervisionado II – Séries Iniciais do Ensino Fundamental	100h
Pesquisa na Prática Pedagógica III – O Pedagogo na Educação Infantil e nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental	60h

Universidade Federal do Espírito Santo

4º PERÍODO				
Código	**Disciplina**	**Créditos**	**Carga Horária Semestral**	**Requisito**
TEP 02864	Matemática I (Conteúdo e Metodologia)	4	60	--
TEP 02856	Didática	4	60	--
LCE 02865	Alfabetização II	4	60	--
TEP 07554	Ciências Naturais (Conteúdo e Metodologia)	4	60	--
TEP 05986	Pesquisa, Extensão e Prática Pedagógica III	5	105	--
LCE 05987	Trabalho Docente na Educação Infantil	4	60	--

2

Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Educação
Curso de Pedagogia - Licenciatura

5º PERÍODO				
Código	**Disciplina**	**Créditos**	**Carga Horária Semestral**	**Requisito**
TEP 02867	Matemática II (Conteúdo e Metodologia)	4	60	Matemática I
EPS 03874	Gestão Educacional	4	60	--
LCE 02871	Português (Conteúdo e Metodologia)	4	60	--
EPS 03876	Trabalho e Educação	4	60	--
LCE 06261	Pesquisa, Extensão e Prática Pedagógica IV	5	105	--
LCE 06306	Fundamentos de LIBRAS	4	60	--

Faculdades Integradas Espírito-Santenses - FAESA

6º PERÍODO

- Avaliação Escolar
- Fundamentos e Metodologia de História / Geografia II
- Fundamentos e Metodologia de Ciências Naturais II
- Fundamentos e Metodologia da Língua Portuguesa I
- Fundamentos e Metodologia de Matemática I
- Empreendedorismo - EAD
- Estágio Supervisionado na Educação Infantil

7º PERÍODO

- Gestão e Organização em Espaços Escolares e não Escolares
- Pesquisa em Educação I
- Fundamentos e Metodologia da Língua Portuguesa II
- Fundamentos e Metodologia da Matemática II
- Estágio Supervisionado nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Pedagogia FAESA

- Quando a pergunta é direcionada ao ensino de fração, a situação fica ainda pior: Dentro da carga horária disponibilizada para Matemática, foi destinado para o ensino de frações:

Respostas	Até 10 horas	Entre 10h e 30h	Entre 30h e 60h	Acima de 60h	Em branco
Frequência absoluta	33	15	4	0	6
Percentual	56,9%	25,9%	7%	-	10,2%

De toda a carga horária do curso apenas 4 professores estudaram fração com uma carga horária entre 30h e 60h, ou seja, 7% dos entrevistados tiveram contato básico com o conteúdo abordado. Levando em consideração que fração é um conteúdo abordado de forma mais evidente no 4º e 5º ano do Ensino Fundamental, algumas lacunas não estão sendo sanadas nestas séries, e não é culpa de quem está lecionando. Há necessidade de reestruturação da carga horária de formação Matemática. Não há aproveitamento do conteúdo para a formação básica em Matemática se no máximo são oferecidos 120h de curso para a disciplina. Mas isto não será discutido aqui, pois o objetivo da pesquisa é discutir o ensino de fração.

Quando perguntado sobre o ensino de fração em sua formação acadêmica, a resposta comprova que, com a carga horária disponibilizada, não há como aprofundar este conteúdo com seus alunos. Os resultados são preocupantes.

- Como você considera que foi ministrado o ensino de fração na sua Licenciatura?

Respostas	Inexistente	Pouco abordado	Satisfatório	Excelente	Em branco
Frequência absoluta	3	43	11	0	1
Percentual	5%	74%	19%	0%	2%

Mesmo sendo pouco abordado, 95% dos entrevistados consideram que o ensino de fração nas séries iniciais é importante.

- Quanto ao aprendizado de fração, a percepção que os entrevistados têm é que o aluno:

Respostas	Aprende pouco pela complexidade do conteúdo.	Aprende bem, mas fica com dúvidas conceituais.	Aprende com eficiência	Em branco
Frequência absoluta	7	40	10	1
Percentual	12%	69%	17%	2%

As dúvidas conceituais aparecem para quase 70% dos professores entrevistados e levadas para as séries seguintes, e em alguns casos, como foi apresentado anteriormente, chegam a Universidade sem saber operar com números fracionários.

Quanto à formação continuada em Matemática, as perguntas e os resultados foram:

- A instituição em que você trabalha proporciona momentos de formação continuada direcionada para a Matemática?

Respostas	Sim, esporadicamente.	Sim, com bastante frequência.	Não.	Em branco.
Frequência absoluta	34	20	3	1
Percentual	59%	34%	5%	2%

Para apenas 7% dos entrevistados, não há investimento em formação Matemática. Já é possível perceber, pelo menos por enquanto, uma mudança de postura do governo e de escolas particulares no sentido de formar professores através de formações continuadas. Há iniciativas que atendem esta demanda, tais como: letramento matemático, PNAIC (Plano Nacional na Idade Certa).

- Você acredita ser importante uma formação continuada sobre o ensino de fração?

Respostas	Não, afinal em nada me acrescentaria.	Sim, mas não participaria.	Sim, participaria.	Em branco
Frequência absoluta	5	3	49	1
Percentual	8,5%	5,2%	84,5%	2%

Neste item, é perceptível que a maioria absoluta acredita ser importante a formação como base de seu conhecimento, para que se possa investir em um aprendizado mais eficaz sobre o conteúdo abordado.

- Quando se pergunta de quantas formações continuadas sobre o ensino de fração participaram a partir do ano de 2014, o resultado foi:

Respostas	Nenhuma	1 vez	2 vezes	3 vezes	Mais que 3 vezes
Frequência absoluta	41	6	8	2	1
Percentual	71%	10%	14%	3%	2%

Ou seja, apenas 2% dos entrevistados estão com uma carga horária de formação que contempla pelo menos uma formação de ensino de fração por ano. Se o problema foi identificado, qual a solução a ser tomada, senão o ensino do conteúdo. Não haverá mudança no resultado se não for investido no conteúdo que está com problema.

Considerando as perguntas que foram feitas neste questionário, observou-se que ao ser perguntado como deve-se introduzir o ensino de fração nas séries inicias, nenhum dos entrevistados considera que se deve introduzi-lo com uma apresentação do conteúdo com formas e regras pré-definidas. Em contrapartida, quase 85% deles acreditam que para garantir o aprendizado de fração nesta fase de ensino seja melhor utilizar material concreto que desperte o interesse ao aprendizado do conteúdo frente a quase 15% que indicam que para introduzir o conteúdo de fração é necessário mesclar formas e regras com material concreto. Como o conteúdo será introduzido nesta fase da escolaridade do aluno, é necessário que o entendimento de fração fique bem claro, bem definido e seja absorvido pelos estudantes.

Para que isso aconteça, é necessário que se entenda o que significa fração e como manuseá-la. O uso do material concreto nesta fase do conhecimento facilita este entendimento. Esta faixa etária aprende melhor manuseando, comparando e operacionalizando com este tipo de material. Para começar a operar e comparar frações equivalentes usando material concreto pode-se usar material dourado, blocos lógicos e régua de fração, por exemplo.

O que também ficou evidenciado na pesquisa é que a carga horária definida para o ensino de Matemática não é unificada, mas a maioria 86% conta com 5 ou mais aulas durante a semana.

3. QUESTIONÁRIOS SOBRE O APRENDIZADO DE FRAÇÃO.

Para que se entenda como o aprendizado de fração está sendo avaliado, foi aplicado um questionário usando os descritores do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) que tratam do ensino de fração nas seguintes séries: 5º e 9º do Ensino Fundamental de escola particular e 3ª série do Ensino Médio de escola pública. A comparação dos ensinos público e privado será abordada no questionário de 9º ano/ 3ª série, onde foi aplicado o mesmo questionário. Hoje em dia o SAEB é composto de 3 avaliações. São elas: ANA (Avaliação Nacional da Alfabetização), ANEB (Avaliação Nacional da Educação Básica) e Prova Brasil.

O questionário de 5º ano do Ensino Fundamental foi aplicado na Escola São Domingos, que fica localizada no bairro Bento Ferreira, Vitória, ES.

Foi realizada uma atividade com 10 questões de múltipla escolha aplicada para os alunos do 5º ano (25 alunos) no final do ano letivo de 2017 (Novembro) com o objetivo de verificar como está o conhecimento de fração ao final deste segmento.

As dez questões foram divididas de tal forma que fossem abordados somente os descritores contemplados no SAEB para o conteúdo de frações.

Os descritores do SAEB contemplados para o 5º ano do Ensino Fundamental explorados aqui na pesquisa foram:

- D21 – Identificar diferentes representações de um número racional.
- D23 – Identificar frações equivalentes.
- D24 – identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.
- D26 – Resolver problemas envolvendo noções de porcentagem

3.1. ANÁLISE DOS RESULTADOS DO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

O questionário diagnóstico aplicado para o público do 5º ano, foi:

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

PROFMAT

ATIVIDADE DIAGNÓSTICA DE FRAÇÕES – 5º Ano

Esta atividade faz parte de uma pesquisa mestrado em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, do Aluno Geyson Suzano, sobre o Ensino de Frações em toda a Educação Básica.
Por favor, responda com o máximo de seriedade possível para que possamos identificar os possíveis problemas na aprendizagem deste conteúdo. Obrigado.

Descritor: D21 – Identificar diferentes representações de um mesmo número racional.

1) André dividirá quatro barras de chocolate igualmente entre seus cinco netos. A fração da barra de chocolate que cada menino receberá é:

(A) $\frac{5}{4}$

(B) $\frac{4}{5}$

(C) $\frac{1}{5}$

(D) $\frac{1}{4}$

Representação e Cálculo

2) Aprendemos que fracionar é dividir, desta forma, observe as partes pintadas das figuras, as quais estão representadas na forma de fração, número decimal e porcentagem. Verifique qual delas apresenta todas as igualdades e formas de representações corretas.

Representação e Cálculo

a)  $= \frac{1}{2} = 0{,}5 = \frac{50}{100} = 50\%$

b)  $= \frac{1}{4} = 0{,}25 = \frac{40}{100} = 40\%$

c)  $= \frac{3}{3} = 0{,}3 = \frac{30}{100} = 30\%$

d)  $= \frac{1}{2} = 0{,}2 = \frac{20}{100} = 30\%$

3) Um dia tem 24 horas, 1 hora tem 60 minutos e 1 minuto tem 60 segundos. Que fração da hora corresponde a 35 minutos?

(A) $\frac{7}{4}$

(B) $\frac{7}{12}$

(C) $\frac{35}{24}$

(D) $\frac{60}{36}$

Representação e Cálculo

D23 - Identificar frações equivalentes.

4) Três irmãos recebem mesadas iguais. Pedro guarda 1/4 da sua mesada, Antônio guarda 5/20 da sua mesada e Maria guarda 3/12 de sua mesada.
Assinale a alternativa *correta*:

(A) Antônio guardou mais dinheiro que Pedro e este guardou mais dinheiro que Maria.
(B) Antônio guardou mais dinheiro que Maria e esta guardou mais dinheiro que Pedro.
(C) Maria guardou mais dinheiro que Pedro e este guardou mais dinheiro que Antônio.
(D) Pedro, Antônio e Maria guardaram igual quantia de dinheiro.

Representação e Cálculo

5) Observe as frações impressas em cada cartão abaixo:

$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{9}{15}$
Cartão 1	Cartão 2	Cartão 3	Cartão 4

Os cartões que onde se encontram impressas frações equivalentes são:

(A) 1 e 2
(B) 2 e 3
(C) 3 e 4
(D) 2 e 4

Representação e Cálculo

D24 - Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.

6) Um dia tem 24 horas, 1 hora tem 60 minutos e 1 minuto tem 60 segundos. Que fração da hora corresponde a 35 minutos?

(A) $\frac{7}{4}$
(B) $\frac{7}{12}$
(C) $\frac{35}{24}$
(D) $\frac{60}{35}$

Representação e Cálculo

7) Eva recebeu os amigos para a abertura da Copa do Mundo. Ela preparou uma pizza para o lanche e a dividiu em 4 pedaços iguais. Durante o intervalo foram consumidos 3 pedaços da pizza.
A fração que representa os pedaços da pizza que foram consumidos é

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{2}{3}$

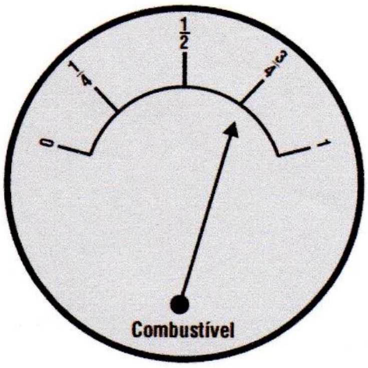
(D) $\frac{2}{5}$

Representação e Cálculo

8) No painel de um carro, o medidor de combustível registra a quantidade de gasolina ainda disponível no tanque, como mostra a ilustração abaixo. O número decimal que corresponde à parte do tanque que se encontra ocupada com combustível é

(A 0,25
(B)0,34
(C) 0,43
(D) 0,75

Representação e Cálculo



D25 - Resolver problema com números racionais expressos na forma decimal envolvendo diferentes significados da adição ou subtração

9) Renata comprou uma torta de coco e uma torta de chocolate. João comeu $\frac{1}{5}$ da torta de coco e Pedro comeu $\frac{2}{10}$ da torta de chocolate. Podemos afirmar que

(A) João e Pedro comeram a mesma quantidade da torta.
(B) Pedro comeu 1 pedaço a mais que João.
(C) João comeu 5 pedaços a menos que Pedro.
(D) Pedro comeu menos torta que João.

Representação e Cálculo

10) Na escola aprendi que um índice representado em porcentagem pode ser escrito como fração e decimal. Li no jornal que 50% dos brasileiros não sabem localizar o Brasil no mapa. Dizendo a mesma coisa de outra forma,

(A) ½ (metade) dos brasileiros não sabem localizar o Brasil no mapa.
(B) ¼ (um quarto) dos brasileiros não sabem localizar o Brasil no mapa.
(C) 1/8 (um oitavo) dos brasileiros não sabem localizar o Brasil no mapa.
(D) 1/16 (um dezesseis avos) dos brasileiros não sabem localizar o Brasil no mapa.

Representação e Cálculo

11) Leia o texto abaixo e responda a questão a seguir:

Fumo passivo: 600 mil mortes

CIGARRO: Situação para os não-fumantes é pior na Europa e na Ásia, diz estudo

No mundo todo, 603 mil pessoas morrem por ano em função do fumo passivo, segundo estudo dirigido pela Iniciativa Livre de Tabaco, da Organização Mundial da Saúde (OMS). Foram acompanhados dados de 2004 de 192 países, que apontaram que 40% das crianças e 30% dos adultos não-fumantes aspiram regularmente fumaça do cigarro de outras pessoas, sobretudo na Europa e na Ásia. O fumo passivo também é responsável anualmente por 379 mil mortes por insuficiência cardíaca, 165 mil por doenças respiratórias, 36,9 mil por asma e 21,4 mil por câncer de pulmão.

As formas irredutíveis das porcentagens de crianças (40%) e adultos (30%) que aspiram fumaça de cigarro de outras pessoas está representado em:

(A) $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{100}$

(B) $\frac{5}{2}$ e $\frac{10}{3}$

(C) $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{10}$

(D) $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{3}$

Representação e Cálculo

Obrigado por sua participação!

Geyson Suzano.

As questões 1 e 2 foram avaliadas de acordo com o descritor D21.

Descritor: D21 – Identificar diferentes representações de um mesmo número racional.

Questão 1) André dividirá quatro barras de chocolate igualmente entre seus cinco netos. A fração da barra de chocolate que cada menino receberá é:

a) $\frac{5}{4}$

b) $\frac{4}{5}$

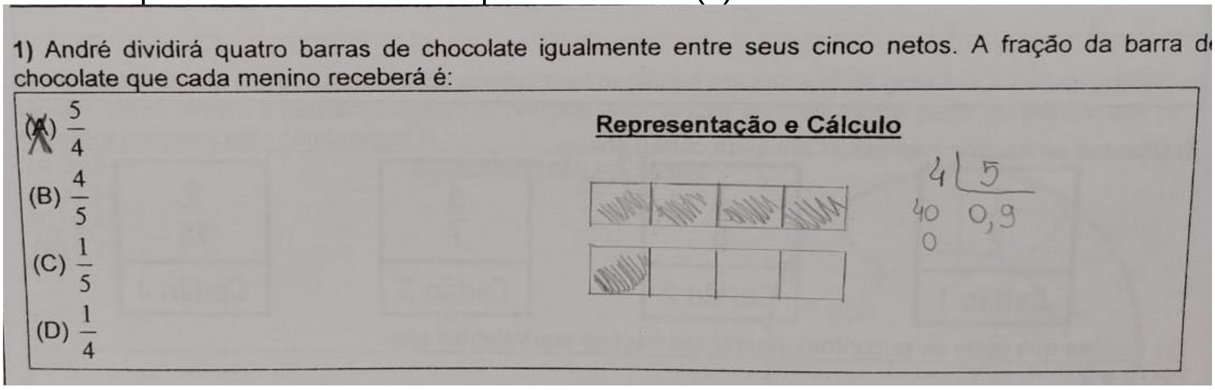
c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{1}{4}$

A opção correta é a letra **(b)**, e os resultados desta questão foram:

Respostas	a)	**b)**	c)	d)	Não respondeu
Frequências	11	**7**	3	2	2
Percentual	44%	**28**%	12%	8%	8%

Um exemplo de como o aluno respondeu a letra (a)



1) André dividirá quatro barras de chocolate igualmente entre seus cinco netos. A fração da barra de chocolate que cada menino receberá é:

(A) $\frac{5}{4}$

(B) $\frac{4}{5}$

(C) $\frac{1}{5}$

(D) $\frac{1}{4}$

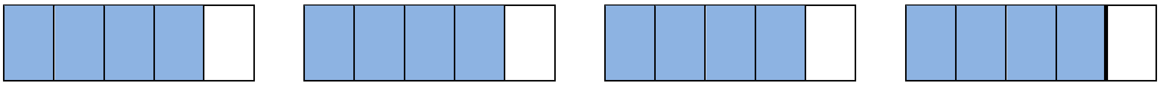
Representação e Cálculo

4 | 5

40 0,9

0

A maioria, que respondeu a letra (a), não se atentou que o que seria repartido é a barra de chocolate, ou seja, 4 barras para 5 pessoas. Sendo assim, cada um dos netos de André deve receber $\frac{4}{5}$ de cada barra, sendo assim, $0,8 = 80\%$ de cada barra. Em cada barra sobram 20%, juntando as 4 barras passa-se a ter 80% de cada barra. Assim, quem respondeu esta letra dividiu 5 netos para 4 barras. Neste grupo, como na maioria dos casos de fração, a concepção e entendimento do conteúdo não ficaram claros. A maioria errou a resposta. Neste público, fração, enquanto definição e algumas operações, já foram trabalhadas desde o 4º ano deste segmento. Uma solução para se responder esta questão por representação geométrica é a seguinte:



Na 1ª barra, o 1º neto ficou com 4 partes da primeira barra, restando apenas 1 barra. Na 2ª barra, o 2º neto recebeu 4 partes da 2ª barra, restando apenas 1 parte. O mesmo acontece com os 3º e 4º netos. O 5º neto recebe cada uma das partes que sobrou de cada um dos outros netos, logo, também fica com 4 partes da barra. Então, a melhor forma de representá-las é dada por $\frac{4}{5}$ de cada barra. O que mostra que a resposta correta é a letra **(b)**.

Outra maneira de representar este problema geometricamente é dada pelo seguinte modo: Na 1ª barra cada um dos netos recebe uma parte da barra, neto 1, neto 2, neto 3, neto 4 e neto 5. O mesmo acontece nas outras barras. Daí, é possível verificar que cada um recebeu uma parte de cada barra. Como são 4 barras, logo cada um recebe $\frac{4}{5}$.

1	2	3	4	5

1	2	3	4	5

1	2	3	4	5

1	2	3	4	5

Questão 2) Aprendemos que fracionar é dividir. Desta forma, observe as partes pintadas das figuras, as quais estão representadas na forma de fração, número decimal e porcentagem. Verifique qual delas apresenta todas as igualdades e formas de representações corretas.

a)  $= \frac{1}{2} = 0{,}5 = \frac{50}{100} = 50\%$

b)  $= \frac{1}{4} = 0{,}25 = \frac{40}{100} = 40\%$

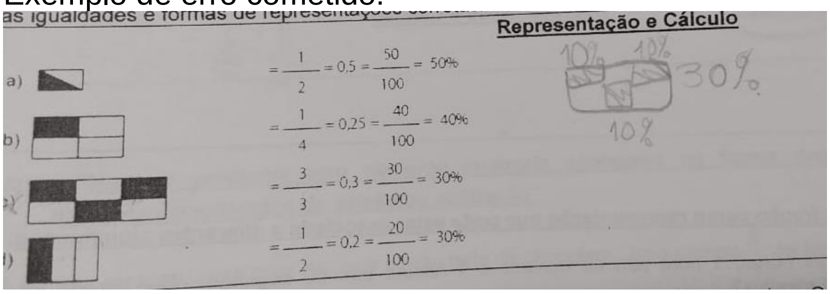
c)  $= \frac{3}{3} = 0{,}3 = \frac{30}{100} = 30\%$

d)  $= \frac{1}{2} = 0{,}2 = \frac{20}{100} = 30\%$

A opção correta é a letra **(a),** e o resultado desta questão foi:

Respostas	**a)**	b)	c)	d)	Não respondeu
Frequências	**19**	2	1	1	2
Percentual	**76%**	8%	4%	4%	8%

Exemplo de erro cometido:



Nesta questão, o percentual de acerto foi bastante considerável. A maioria absoluta conseguiu assimilar fração, decimal, fração com denominador 100 e porcentagem. Do total de 25 alunos, 4 erraram e 2 deixaram de fazer a questão, o que indica que comparação de figura geométrica com fração e porcentagem não ficou claro para este grupo específico. Uma maneira de representar esta situação para encontrar a resposta correta, é identificar qual fração das figuras está sendo utilizada e escrevê-la em forma de fração equivalente com denominador 100. Ou seja:

a) $\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\%$

b) $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$

c) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$

d) $\frac{1}{3} = \frac{33{,}34}{100} = 33{,}34\%$

As questões 3 e 4 foram avaliadas de acordo com o descritor D23.

D23 - Identificar frações equivalentes

Questão 3) Três irmãos recebem mesadas iguais. Pedro guarda $\frac{1}{4}$ da sua mesada, Antônio guarda $\frac{5}{20}$ da sua mesada e Maria guarda $\frac{3}{12}$ de sua mesada.

Assinale a alternativa *correta*:

a) Antônio guardou mais dinheiro que Pedro e este guardou mais dinheiro que Maria.

b) Antônio guardou mais dinheiro que Maria e esta guardou mais dinheiro que Pedro.

c) Maria guardou mais dinheiro que Pedro e este guardou mais dinheiro que Antônio.

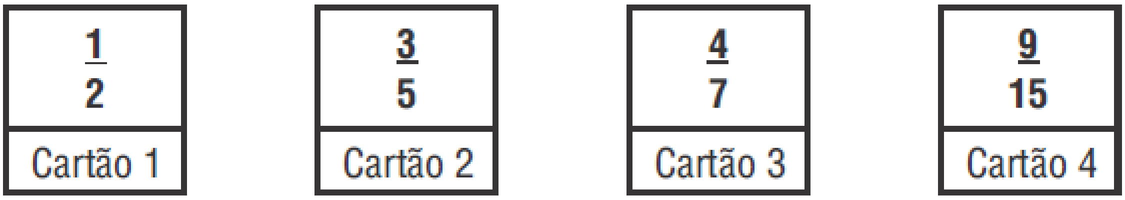
d) Pedro, Antônio e Maria guardaram igual quantia de dinheiro.

A resposta correta é a letra **(d)**, e os resultados da questão foram:

Respostas	a)	b)	c)	**d)**
Frequências	1	6	0	**18**
Percentual	4%	24%	0%	**72**%

Ao avaliar o índice de acerto desta questão, é perceptível que a maioria compreende o que significa fração equivalente e o que se pode encontrar a partir delas. Os alunos verificaram que $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ e $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$, logo $\frac{3}{12} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$. Os alunos que marcaram a letra (b) só analisaram os numeradores das frações, sem levar em consideração o denominador, ou seja, $5 > 3$ e $3 > 1$. Portanto, para este grupo Antônio guardou mais que Maria e esta, por sua vez, gastou mais que Antônio. O que é errado. Quem marcou a letra (a) não levou em consideração o que foi pedido e possivelmente marcou uma letra qualquer.

Questão 4) Observe as frações impressas em cada cartão abaixo:



Os cartões que onde se encontram impressas frações equivalentes são:

a) 1 e 2

b) 2 e 3

c) 3 e 4

d) 2 e 4

A resposta correta é a letra **(d)**, e os resultados da questão foram:

Respostas	a)	b)	c)	**d)**
Frequência	7	5	0	**13**
Percentual	28%	20%	0%	**52%**

Ao analisar as respostas, é perceptível que dos 18 que acertaram a questão 2, ao comparar agora os cartões de dois em dois, o número de acertos caiu para 13.

Percebe-se que o número de alunos que errou a questão 4, quando comparado com a questão 3, quase dobrou.

Quem respondeu a letra (a), usou equivalência de frações com soma, ou seja,

$\frac{1.3}{2+3} = \frac{3}{5}$.

Quem respondeu a letra (b), somou 1 no numerador e 2 no denominador da fração $\frac{3}{5}$ no cartão 2 e encontrou $\frac{4}{7}$, que equivale ao cartão 3.

O que deve ser observado é que mesmo a maioria acertando esta questão (13 alunos), um número bastante considerável errou esta questão (12 alunos). Levando em consideração a questão anterior, que teve o mesmo descritor, observa-se que estes alunos tiveram maior êxito quando as frações eram equivalentes e não tinham que comparar frações duas a duas para depois concluir se elas eram equivalentes ou não. O conceito de equivalência deste grupo está bem definido, o de comparação ainda não.

As questões 5, 6 e 7 foram avaliadas de acordo com o descritor D24.

D24 - Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.

Questão 5) Um dia tem 24 horas, 1 hora tem 60 minutos e 1 minuto tem 60 segundos. Que fração da hora corresponde a 35 minutos?

a) $\frac{7}{4}$

b) $\frac{7}{12}$

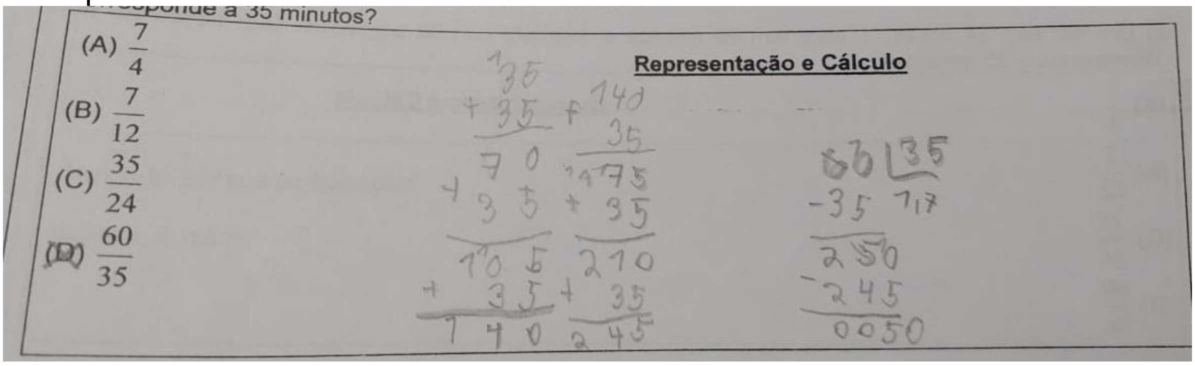
c) $\frac{35}{24}$

d) $\frac{60}{35}$

A resposta correta é a letra **(b)**, e os resultados da questão foram:

Respostas	a)	**b)**	c)	d)	Em branco
Frequências	1	**4**	6	9	5
Percentual	4%	**16**%	24%	36%	20%

Exemplo de erro cometido:



Esta questão mostra que além de não conseguir relacionar os tempos em fração, os alunos têm dificuldades com transformações de unidades de tempo simples, horas para minutos.

De 25 alunos, apenas 4 conseguiram relacionar que fração é correspondente aos 35 minutos quando relacionados a 1 hora (60 minutos). Quem respondeu $\frac{7}{4}$ não conseguiu fazer relação com nenhuma das medidas mencionadas. Apenas usou os valores de uma forma aleatória. (1 aluno respondeu desta forma).

Os que responderam $\frac{35}{24}$ apenas compararam 35 minutos com 24 horas, sem se atentar transformações que deveriam ser feitas. Usaram o número pelo número, sem o uso da interpretação. O que deve ser levado em consideração é a quantidade de alunos que errou esta questão. Um número bastante expressivo.

Quem respondeu $\frac{60}{35}$ tentou argumentar corretamente, porém fez a associação de uma forma errada. Usou qual fração de minutos há em uma hora se comparado a 35 minutos. Por isto o erro. Mas, 5 alunos nem sequer responderam à questão.

Há, neste caso, que se fazer uma intervenção que abranja as transformações de tempo e as comparações com suas frações correspondentes.

Questão 6) Eva recebeu os amigos para a abertura da Copa do Mundo. Ela preparou uma pizza para o lanche e a dividiu em 4 pedaços iguais. Durante o intervalo, foram consumidos 3 pedaços da pizza.

A fração que representa os pedaços da pizza que foram consumidos é:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{2}{5}$

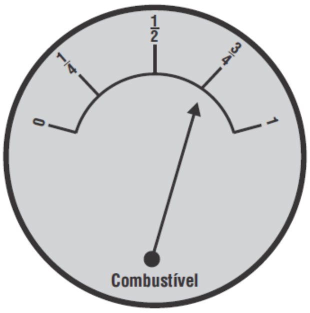
A resposta correta é a letra **(b),** e o resultado da questão é:

Respostas	a)	**b)**	c)	d)
Frequências	0	$\mathbf{23}$	2	0
Percentual	0%	$\mathbf{92}\%$	8%	0%

Quando a comparação é feita apenas com parte-todo de uma única situação, os alunos deste grupo tendem a acertar. O que não está definido ainda neste momento é a comparação feita a partir de outros fatores de comparação dentro de um mesmo problema.

Nesta questão, apenas 2 alunos marcaram a opção errada. Não houve neste caso nenhuma relação, mesmo que absurda, para justificar tal escolha, ou seja, não há possibilidade da resposta dar $\frac{2}{3}$. Caso a resposta deste grupo que errou tivesse dado $\frac{1}{3}$ (mesmo não tendo essa resposta), poderia ter havido uma confusão no que foi perguntado sobre o que foi consumido com o que restou da pizza que Eva preparou.

Questão 7) No painel de um carro, o medidor de combustível registra a quantidade de gasolina ainda disponível no tanque, como mostra a ilustração abaixo. O número decimal que corresponde à parte do tanque que se encontra ocupada com combustível é



a) 0,25

b) 0,34

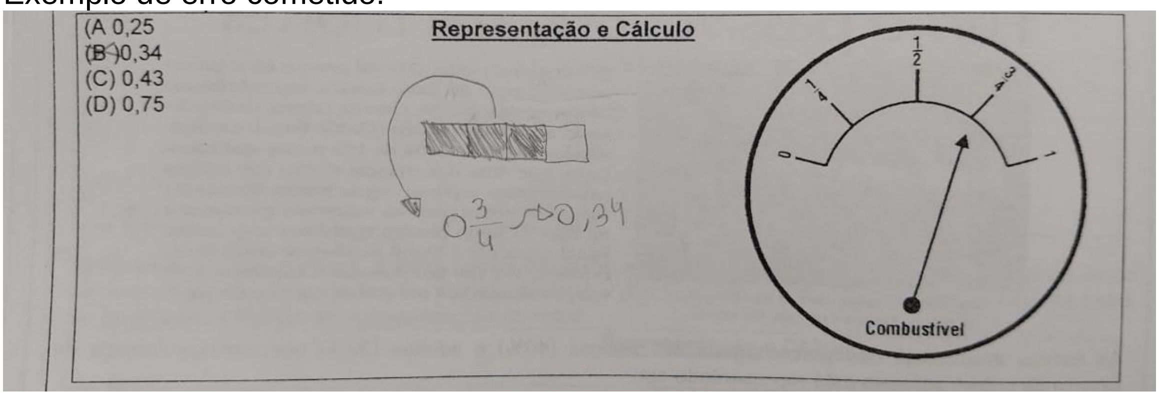
c) 0,43

d) 0,75

A resposta desta questão é a letra **(d),** e o resultado da questão é:

Respostas	a)	b)	c)	**d)**
Frequências	1	10	2	**12**
Percentual	4%	40%	8%	**48%**

Exemplo de erro cometido:



A questão faz com que o aluno tenha de comparar a capacidade do tanque com a quantidade de combustível que é representada pelo marcador.

Percebe-se que ao comparar o que se tem no tanque com o que isso representa em sua forma decimal, muitos alunos ainda erram sob este comando. Neste caso, o número de alunos que errou é superior ao número de alunos que acertou a questão. São 13 erros e 12 acertos. Quem assinalou a letra **(a)** não compreendeu que o comando perguntava sobre o que tem no tanque e não sobre o que falta para completar o tanque, o que deixaria a questão correta.

O que chama atenção nessa questão é um número muito alto de alunos respondendo que $\frac{3}{4}$ equivale a $0{,}34$.

No caso específico, preocupa-se o caso de ser feita uma representação fracionária e na forma decimal como se o decimal fosse formado em sua dezena pelo numerador e a unidade pelo denominador. Observa-se que o conceito de fração, neste caso, não ficou bem claro e nem entendido em sua forma mais conceitual e simples possível (fração em quantidades particionada de forma igual, ou seja, em quantas partes devemos dividir o inteiro e quantas partes devo considerar).

Se o tanque foi dividido em 4 partes, temos que cada parte representa $0{,}25$ do total, logo $\frac{3}{4} = 0{,}25 \,.\, 3 = 0{,}75$.

As questões 8 e 9 foram avaliadas de acordo com o descritor D26.

<u>D26 – resolver problemas envolvendo noções de porcentagem.</u>

Questão 8) Na escola aprendi que um índice representado em porcentagem pode ser escrito como fração e decimal. Li no jornal que 50% dos brasileiros não sabem localizar o Brasil no mapa. Dizendo a mesma coisa de outra forma,

a) ½ (metade) dos brasileiros não sabem localizar o Brasil no mapa.

b) ¼ (um quarto) dos brasileiros não sabem localizar o Brasil no mapa.

c) $\frac{1}{8}$ (um oitavo) dos brasileiros não sabem localizar o Brasil no mapa.

d) $\frac{1}{16}$ (um dezesseis avos) dos brasileiros não sabem localizar o Brasil no mapa.

A resposta correta é a letra **(a),** e o resultado da questão é:

Respostas	**a)**	b)	c)	d)
Frequência	$\mathbf{23}$	0	2	0
Percentual	$\mathbf{92}\%$	0	8%	0

A maioria dos alunos acertou a questão. A abordagem da mesma foi para comparar o que 50% equivale de uma fração. Apenas dois alunos erraram esta questão. Não há justificativa para eles terem respondido que 50% equivale a $\frac{1}{8}$.

Questão 9) Leia o texto abaixo e responda a questão a seguir:

Fumo passivo: 600 mil mortes

No mundo todo, 603 mil pessoas morrem por ano em função do fumo passivo, segundo estudo dirigido pela Iniciativa Livre de Tabaco, da Organização Mundial da Saúde (OMS). Foram acompanhados dados de 2004 de 192 países, que apontaram que 40% das crianças e 30% dos adultos não-fumantes aspiram regularmente fumaça do cigarro de outras pessoas, sobretudo na Europa e na Ásia. O fumo passivo também é responsável anualmente por 379 mil mortes por insuficiência cardíaca, 165 mil por doenças respiratórias, 36,9 mil por asma e 21,4 mil por câncer de pulmão.

CIGARRO: Situação para os não-fumantes é pior na Europa e na Ásia, diz estudo

As formas irredutíveis das porcentagens de crianças (40%) e adultos (30%) que aspiram fumaça de cigarro de outras pessoas está representado em:

a) $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{100}$

b) $\frac{5}{2}$ e $\frac{10}{3}$

c) $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{10}$

d) $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{3}$

A resposta correta é a letra **(c),** e o resultado da questão é:

Respostas	a)	b)	**c)**	d)	Em branco
Frequência	4	2	**17**	1	1
Percentual	16%	8%	**68%**	4%	4%

A abordagem da questão foi dada como correspondência entre o número percentual e sua fração. Os alunos que responderam a letra **(a)** identificaram que $\frac{40}{100}$ assim como $\frac{2}{5}$ está correto, porém, $\frac{30}{100}$ não identificado como $\frac{3}{10}$, e sim como $\frac{3}{100}$. O que pode ter acontecido com estes 4 alunos é que ao resolveram a primeira porcentagem já marcaram a letra (a), sem se atentarem para a sua parte da questão. Dois alunos responderam a letra **(b)** que indica porcentagens como frações inversas, ou seja, 40% = $\frac{5}{2}$ e 30% igual $\frac{10}{3}$. A maioria acertou a questão e identificou as porcentagens de forma correta: 40% = $\frac{2}{5}$ e 30% = $\frac{3}{10}$.

O aluno que respondeu a letra **(d)** não conseguiu fazer nenhuma comparação das porcentagens dadas com as frações correspondentes.

Analisando os resultados dos questionários dos alunos do 5º ano, é fácil perceber que a maioria dos alunos deste segmento estão em um nível mais básico em relação ao estudo e ensino de frações. Quando é pedido para comparar, por exemplo, duas frações e verificar quais são equivalentes, a maioria faz, mas, quando se pede para comparar duas a duas e só depois verificar qual dupla de frações são equivalentes, o número de acerto diminui consideravelmente, como vimos em questões anteriores.

É possível citar vários motivos para justificar tal fato, porém, a proposta da pesquisa é identificar os possíveis problemas e apresentar algumas possíveis intervenções. Esta dinâmica será apresentada no final da pesquisa com sugestões de atividades apresentadas no livro aberto de fração, idealizados por professores e organizado pelo IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada).

3.2. ANÁLISE DOS RESULTADOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL E 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO.

As questões foram aplicadas para 27 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental da Escola São Domingos (colégio particular em Vitória/ES) e para 14 alunos do Ensino Médio da EEEFM “Laranjeiras” (colégio público de Serra/ES). Neste questionário, será possível, além de analisar os dados de cada questão em cada segmento, ainda comparar o aprendizado entre os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e da 3ª Série do Ensino Médio, a partir dos mesmos conceitos elaborados nas questões.

A seguir, será mostrada cada questão com seu respectivo descritor e as tabelas de resultados para cada um dos seguintes segmentos estudados.

Os descritores do SAEB contemplados para o 9º ano do Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio explorados aqui na pesquisa foram:

- D17 – Identificar a localização de números racionais na reta numérica.
- D21 – Reconhecer diferentes representações de um número racional.
- D22 – identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.
- D24 – Identificar frações equivalentes.
- D25 – Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais.
- D26 – Resolver problema com números racionais que envolvam as operações.

O questionário aplicado para este público, foi:

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

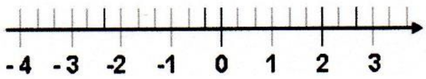
PROFMAT

ATIVIDADE DIAGNÓSTICA DE FRAÇÕES – 9º Ano

Esta atividade faz parte de uma pesquisa mestrado em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, do Aluno Geyson Suzano, sobre o Ensino de Frações em toda a Educação Básica.
Por favor, responda com o máximo de seriedade possível para que possamos identificar os possíveis problemas na aprendizagem deste conteúdo. Obrigado.

Descritor: - D17 - Identificar a localização de números racionais na reta numérica

1) Em uma aula de Matemática, o professor apresentou aos alunos uma reta numérica como a da figura a seguir.



O professor marcou o número $\frac{4}{11}$ nessa reta.

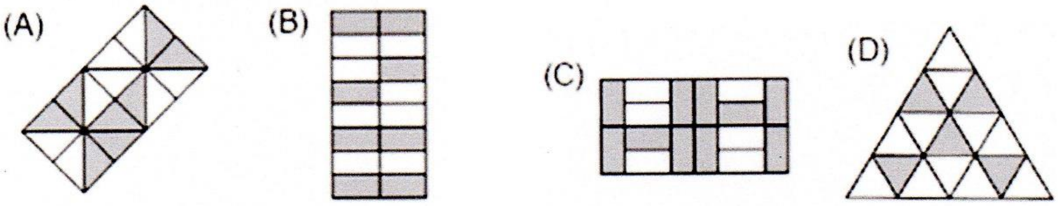
Esse número foi marcado entre que pontos da reta numérica?

(A) – 4 e – 3.
(B) – 3 e – 2.
(C) 0 e 1.
(D) 3 e 4.

Representação e Cálculo

D21 - Reconhecer as diferentes representações de um número racional

2) Cada uma das figuras seguintes está dividida em 16 partes iguais. Em qual delas a parte cinza corresponde a 5/8 da área total?



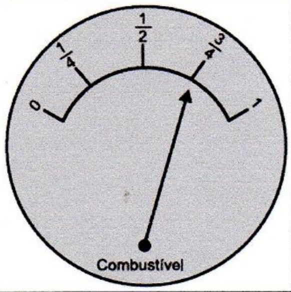
(A) A
(B) B
(C) C
(D) D

Representação e Cálculo

3) No painel de um carro, o medidor de combustível registra a quantidade de gasolina ainda disponível no tanque, como mostra a ilustração abaixo.
O número decimal que corresponde à parte do tanque que se encontra ocupada com combustível é:

(A) 0,25
(B) 0,34
(C) 0,43
(D) 0,75

Representação e Cálculo



D22 - Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.

4) Uma emissora de rádio realizou uma pesquisa para identificar os gêneros musicais preferidos pelas pessoas.

- $\frac{1}{4}$ prefere rock;
- $\frac{1}{2}$ prefere pagode;
- $\frac{1}{5}$ prefere MPB;
- O restante não tem preferência por um gênero especifico.

A fração que representa o número de pessoas que não têm preferência por um gênero específico é

(A) $\frac{1}{20}$
(B) $\frac{2}{10}$
(C) $\frac{3}{40}$
(D) $\frac{2}{30}$

Representação e Cálculo

5) Observe os cartões abaixo e determine o cartão cujo valor equivale a **– 0,75**.

$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{75}{10}$	$\frac{7}{5}$
A	B	C	D

(A) A.
(B) B.
(C) C.
(D) D.

Representação e Cálculo

D24 - Identificar frações equivalentes.

6) Para conseguir certa tonalidade de azul um pintor usa 2 latas de tinta branca para 5 latas de tinta azul escuro.
Então quantas latas de tinta branca ele precisa para diluir em 10 latas de tinta azul escuro?

(A) 5 latas de tinta.
(B) 10 latas de tinta.
(C) 4 latas de tinta.
(D) 7 latas de tinta.

Representação e Cálculo

7) Quatro alunos estão lendo um livro de 270 páginas que a professora de literatura solicitou.

Maria leu $\frac{3}{4}$, Carla $\frac{9}{12}$, Patrícia $\frac{9}{13}$ e Pedro $\frac{5}{7}$. Os alunos que leram a mesma quantidade de página até o momento são:

(A) Maria e Carla.
(B) Maria e Pedro.
(C) Patrícia e Pedro.
(D) Carla e Patrícia.

Representação e Cálculo

D25 - Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).

8) Seja $M = 0{,}03 + \sqrt{49} - \left(4 \cdot \frac{3}{2}\right)$. O valor de M é:

(A) 103
(B) 0,103
(C) 10,3
(D) 1,03

Representação e Cálculo

9) O valor da expressão $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)$ é :

(A) $\frac{17}{30}$

(B) $\frac{7}{15}$

(C) $\frac{1}{15}$

(D) $\frac{7}{30}$

Representação e Cálculo

D26 - Resolver problema com números racionais que envolvam as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).

10) Marcos exercita-se todos os dias no parque de seu bairro. Ele caminha $\frac{2}{6}$ de hora e corre mais $\frac{2}{3}$ de hora. Qual o tempo total de atividades físicas Marcos faz diariamente?

(A) $\frac{2}{9}$ de hora.

(B) $\frac{4}{9}$ de hora.

(C) 1 hora.

(D) 2 horas.

Representação e Cálculo

11) A estrada que liga Recife a Caruaru será recuperada em três etapas. Na primeira etapa, será recuperada $\frac{1}{6}$ da estrada e na segunda etapa $\frac{1}{4}$ da estrada. Uma fração que corresponde a terceira etapa é

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{5}{12}$

(C) $\frac{7}{12}$

(D) $\frac{12}{7}$

Representação e Cálculo

D28 - Resolver problema que envolva porcentagem.

12) Você sabe que as frações estão presentes no nosso dia a dia. Então você pode afirmar que ¼ de um dia, ¼ de uma hora, ¼ de um quilo, ¼ de um litro e ¼ de um ano é respectivamente o mesmo que:

(A) 4 h, 45min, 500g, 200mℓ e 9meses.

(B) 6 h, 15 min, 250g, 250mℓ e 3 meses.

(C) 8 h, 20 min, 250g, 500mℓ e 4 meses.

(D) 12 h, 30min, 500g, 600mℓ e 6meses.

Representação e Cálculo

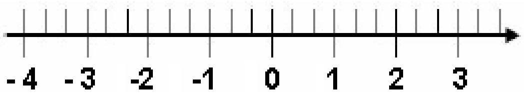
Obrigado por sua participação!

Geyson Suzano.

A questão 1 foi avaliada de acordo com o descritor D17.

D17 – Identificar a localização de números racionais na reta numérica.

Questão 1) Em uma aula de Matemática, o professor apresentou aos alunos uma reta numérica como a da figura a seguir.



O professor marcou o número $\frac{4}{11}$ nessa reta. Esse número foi marcado entre que pontos da reta numérica?

a) -4 e -3

b) -3 e -2

c) 0 e 1

d) 3 e 4

A resposta correta é a letra **(c).**

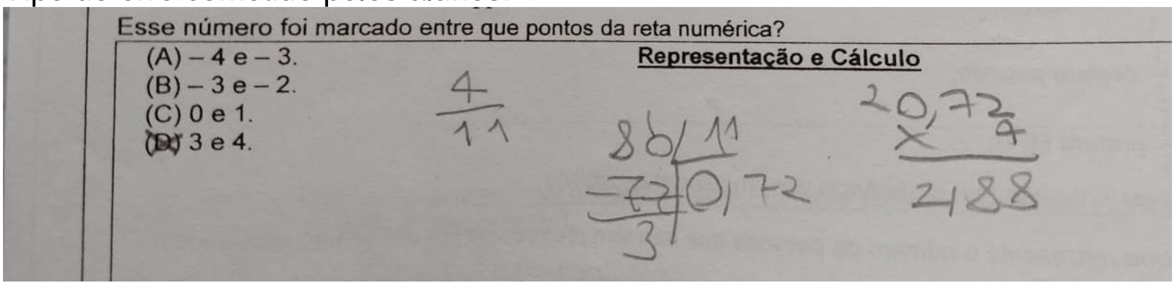
Respostas dos alunos do 9º ano.

Respostas	a)	b)	**c)**	d)
Frequência	3	1	**19**	8
Percentual	12%	4%	76%	32%

Respostas dos alunos da 3ª série.

Respostas	a)	b)	**c)**	d)
Frequência	0	5	**4**	5
Percentual	0%	35,7%	**28,6**%	35,7%

Tipo de erro cometido pelos alunos:



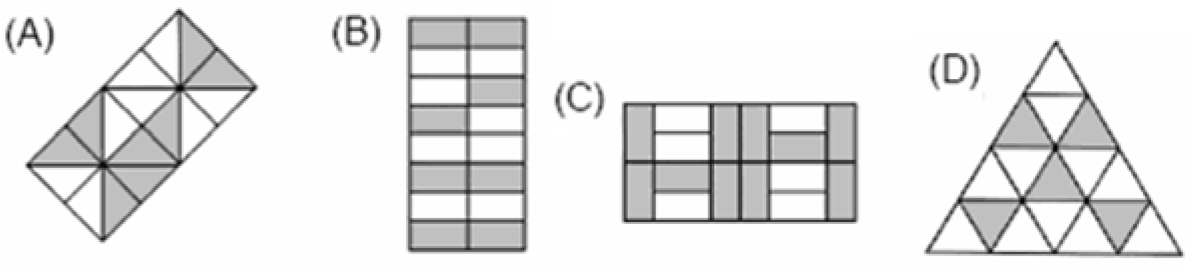
O objetivo da questão era observar se os alunos dos dois segmentos sabem localizar números na reta numérica. Os alunos do 9º ano em sua maioria acertaram a resposta (19 alunos). Já os da 3ª Série, em sua maioria, erraram a resposta (10 alunos).

Quem marcou a letra (a) (entre -3 e -4) entendeu que $\frac{4}{11}$ é número menor que 0. As duas primeiras opções dão a opção de números negativos para este grupo. O conceito de fração própria não está muito bem definido. A fração $\frac{4}{11}$ é um número positivo que está entre 0 e 1, mas para 9 alunos é um número negativo. Um outro fator que chamou muito a atenção foi que 13 alunos do total de entrevistados afirmaram que $\frac{4}{11}$ está entre 3 e 4. Caso bastante grave, visto que este conteúdo foi abordado para os alunos no final de cada segmento.

As questões 2 e 3 foram avaliadas de acordo com o descritor D21.

<u>D21 – Reconhecer diferentes representações de um número racional.</u>

Questão 2) Cada uma das figuras seguintes está dividida em 16 partes iguais. Em qual delas a parte cinza corresponde a $\frac{5}{8}$ da área total?



a) A.

b) B.

c) C.

d) D.

A resposta correta é a letra **(c)**.

O resultado dos alunos do 9º ano foi

Respostas	a)	b)	**c)**	d)	Em branco
Frequência	0	0	**22**	8	1
Percentual	0%	0%	**71,2**%	25.6%	3,2%

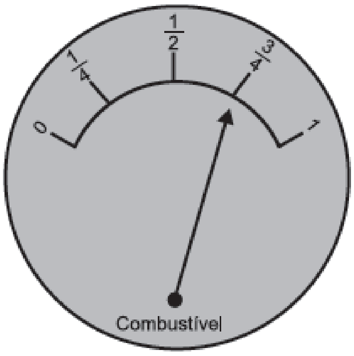
O resultado dos alunos da 3ª série foi

Respostas	a)	b)	**c)**	d)
Frequência	2	0	**12**	0
Percentual	14,2%	0%	**85,8**%	0%

O objetivo da questão era encontrar a fração equivalente a $\frac{5}{8}$ de uma figura dividida em 16 partes iguais. A maioria dos alunos acertou a questão nos dois segmentos, porém é preciso observar os erros cometidos. No caso do 9º ano, 8 alunos marcaram a opção (d) que indicava 5 triângulos pintados, mas os alunos não se atentaram à pergunta que era $\frac{5}{8}$ e não $\frac{5}{16}$, o que pode ser classificado como erro conceitual ou como falta de atenção. No grupo da 3ª série, apenas 2 alunos responderam a letra (a), ou seja, não há explicação lógica para encontrar $\frac{8}{16}$ em função de $\frac{5}{8}$. Esse tipo de questão tem nível cognitivo fácil e tem a função de fazer com que o aluno entenda e aplique o conceito de fração equivalente através de figuras que são divididas em partes iguais.

Questão 3) No painel de um carro, o medidor de combustível registra a quantidade de gasolina ainda disponível no tanque, como mostra a ilustração abaixo.

O número decimal que corresponde à parte do tanque que se encontra ocupada com combustível é:



a) 0,25

b) 0,34

c) 0,43

d) 0,75

A resposta correta é a letra **(d).**

O resultado dos alunos do 9º ano foi

Respostas	a)	b)	c)	**d)**
Frequência	0	0	0	**31**
Percentual	0%	0%	0%	**100**%

O resultado dos alunos da 3ª série foi

Respostas	a)	b)	c)	**d)**
Frequência	1	0	0	**13**
Percentual	7,1%	0%	0%	**92, 9**%

Nos dois segmentos o percentual de acertos foi excelente. Somente 1 aluno respondeu a letra (a), que diz justamente o que falta para completar o tanque. Em geral, os dois segmentos apresentaram bons resultados em relação a este descritor. O objetivo da questão é comparar um número decimal com sua fração correspondente.

A questão 4 foi avaliada de acordo com o descritor D22.

<u>D22 – Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.</u>

Questão 4) Uma emissora de rádio realizou uma pesquisa para identificar os gêneros musicais preferidos pelas pessoas.

- $\frac{1}{4}$ prefere rock;
- $\frac{1}{2}$ prefere pagode;
- $\frac{1}{5}$ prefere MPB;
- O restante não tem preferência por um gênero especifico.

A fração que representa o número de pessoas que não têm preferência por um gênero específico é

a) $\frac{1}{20}$

b) $\frac{2}{10}$

c) $\frac{3}{40}$

d) $\frac{2}{30}$

A resposta correta é a letra **(a).**

O resultado dos alunos do 9º ano foi

Respostas	**a)**	b)	c)	d)
Frequência	$\mathbf{23}$	5	3	0
Percentual	$\mathbf{74,2}\%$	16,1%	9,7%	0%

O resultado dos alunos da 3ª série foi

Respostas	**a)**	b)	c)	d)
Frequência	$\mathbf{8}$	0	3	3
Percentual	$\mathbf{57,2}\%$	0%	$21,4\%$	$21,4\%$

O objetivo da questão era identificar quanto falta para completar o todo. Como $\frac{19}{20}$ preferiram algum gênero musical, somente $\frac{1}{20}$ não preferem gênero musical algum. Apesar de a maioria dos alunos ter acertado a questão, os alunos do 9º ano se saíram melhor que os alunos da 3ª série. É importante destacar que, no 9º ano, mais de $\frac{1}{4}$ dos alunos terminaram o ciclo do Ensino Fundamental sem ter adquirido este conceito. Na 3ª série a situação é mais complicada pois, $42,8\%$ dos alunos terminaram o Ensino Médio sem conseguir resolver a situação proposta. Os que marcaram a letra (b) ou a letra (d) não fizeram nenhuma correspondência com o problema, visto que as frações equivalentes não têm denominadores 10 e 30. Já os que marcaram a letra (c), encontraram fração equivalente com denominador 40 $(2.4.5)$ e não analisaram o restante, marcando logo a opção que tem denominador 40. A questão em si não trazia nenhuma complexidade em sua resolução, porém o aluno precisa entender fração equivalente e soma dessas frações, para depois identificar qual é o restante da fração correspondente. Tanto no Ensino Fundamental I, quanto no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio, há muita dificuldade em se trabalhar com problemas que envolvam frações que avançam para conceitos além de parte-todo e equivalência de frações. A maioria dos problemas deste modelo causa dificuldade de interpretação e na identificação do caminho a ser percorrido.

As questões 5 e 6 foram avaliadas de acordo com o descritor D24.

D24 – Identificar frações equivalentes

Questão 5) Para conseguir certa tonalidade de azul um pintor usa 2 latas de tinta branca para 5 latas de tinta azul escuro. Então quantas latas de tinta branca ele precisa para diluir em 10 latas de tinta azul escuro?

a) 5 latas de tinta.

b) 10 latas de tinta.

c) 4 latas de tinta.

d) 7 latas de tinta.

A resposta correta é a letra **(c).**

O resultado dos alunos do 9º ano foi

Respostas	a)	b)	**c)**	d)
Frequência	1	1	**27**	2
Percentual	3,15%	3,15%	**87,2**%	6,3%

O resultado dos alunos da 3ª série foi

Respostas	a)	b)	**c)**	d)
Frequência	1	0	**13**	0
Percentual	7,1%	0%	**92,9**%	0%

Na questão foi abordado o conceito de fração enquanto razão, e foi pedido que se encontrasse a fração correspondente do que foi pedido. Apesar de, nesta questão, ter acontecido uma abordagem tranquila, este tipo de fração quase não é trabalhado. A maioria absoluta nos dois segmentos acertou a questão, porém é necessário que se observe os erros atribuídos à questão. No 9º ano e na 3ª série, 5 alunos no total erraram a questão, sendo que 2 deles marcaram a letra (a), o que não há qualquer justificativa para isto. O aluno que marcou a letra (b) indicou que a quantidade de latas de tinta branca deve ser igual a quantidade de tinta azul, o que não faz parte do procedimento pedido. Já os alunos que marcaram a letra (d), usaram a seguinte estratégia: como o número de latas azuis escuro teve aumento de 5 latas, logo o número de latas de tinta branca também deve ter um aumento de 5 latas. Sendo assim, serão necessárias 7 latas de tinta branca, o que está errado, pois não foi trabalhada a proporção da quantidade pedida.

Questão 6) Quatro alunos estão lendo um livro de 270 páginas que a professora de literatura solicitou. Maria leu $\frac{3}{4}$, Carla $\frac{9}{12}$, Patrícia $\frac{9}{13}$ e Pedro $\frac{5}{7}$. Os alunos que leram a mesma quantidade de página até o momento são:

a) Maria e Carla.
b) Maria e Pedro.
c) Patrícia e Pedro.
d) Carla e Patrícia.

A resposta correta é a letra **(a).**

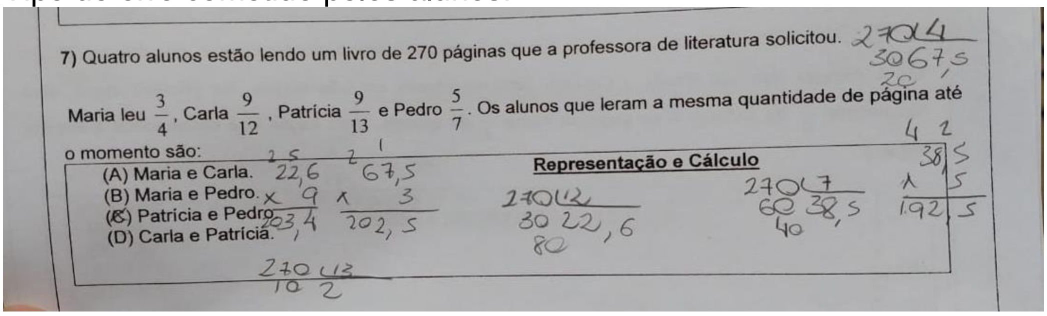
O resultado dos alunos do 9º ano foi

Respostas	**a)**	b)	c)	d)
Frequência	**26**	1	3	1
Percentual	**84**%	3,2%	9,6%	3,2%

O resultado dos alunos da 3ª série foi

Respostas	**a)**	b)	c)	d)
Frequência	**14**	0	0	0
Percentual	**100**%	0%	0%	0%

Tipo de erro cometido pelos alunos:



7) Quatro alunos estão lendo um livro de 270 páginas que a professora de literatura solicitou.

Maria leu $\frac{3}{4}$, Carla $\frac{9}{12}$, Patrícia $\frac{9}{13}$ e Pedro $\frac{5}{7}$. Os alunos que leram a mesma quantidade de página até o momento são:

(A) Maria e Carla.
(B) Maria e Pedro.
(C) Patrícia e Pedro.
(D) Carla e Patrícia.

Representação e Cálculo

Na 3ª serie, todos os alunos acertaram a questão. Entre os alunos do 9º ano, o percentual de alunos foi bastante alto, porém ainda apareceram alguns erros nas questões. Dentre estes, temos:

- 1 aluno assinalou Maria e Pedro, ou seja, $\frac{3}{4} = \frac{5}{7}$, somou-se 2 ao numerador e 3 ao denominador de $\frac{3}{4}$, chegando a $\frac{5}{7}$.
- 3 alunos que marcaram Patrícia e Pedro, sendo $\frac{9}{13} = \frac{5}{7}$. Estes usaram a seguinte estratégia: subtraia 4 do numerador e 6 do denominador de $\frac{9}{13}$, chegando a $\frac{5}{7}$.
- 1 aluno disse que Carla e Patrícia leram a mesma quantidade de páginas, ou seja, $\frac{9}{12} = \frac{9}{13}$.

As questões 7 e 8 foram avaliadas de acordo com descritor D25.

<u>D25 – Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).</u>

Questão 7) Seja $M = 0{,}03 + \sqrt{49} - \left(4 \cdot \frac{3}{2}\right)$. O valor de M é:

a) 103

b) 0,103

c) 10,3

d) 1,03

A resposta correta é a letra **(d).**

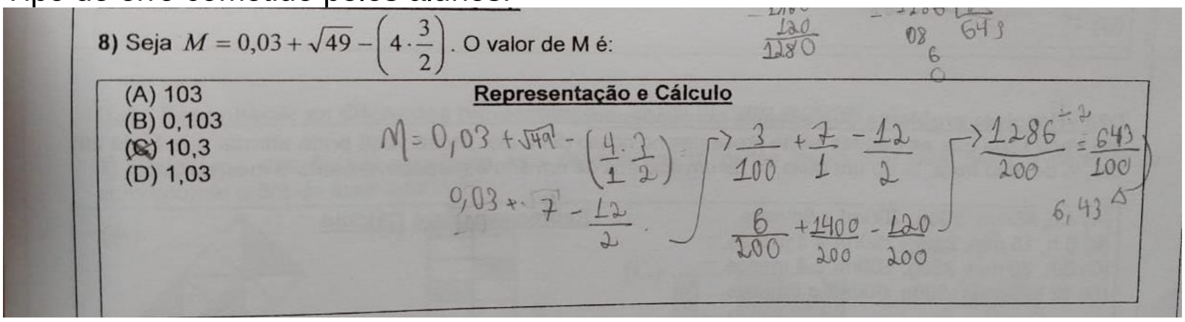
O resultado dos alunos do 9º ano foi

Respostas	a)	b)	c)	**d)**	Em branco
Frequência	2	2	4	**22**	1
Percentual	6,45%	6,45%	12,9%	**71**%	3,2

O resultado dos alunos da 3ª série foi

Respostas	a)	b)	c)	**d)**
Frequência	0	1	3	**10**
Percentual	0%	7,1%	21,3%	**71, 6**%

Tipo de erro cometido pelos alunos:



Efetuar cálculos com frações e números decimais sempre foi um problema no ensino da Matemática. Entender frações, trabalhar com as ordens das operações, conjecturar um caminho a seguir e verificar se está no caminho certo, causa no aluno, de forma geral, um transtorno total. Se a base e o entendimento sobre o ensino de fração não estão bem definido, não há o que se avançar neste processo. Neste caso especifico, o número de erros nos dois segmentos ficou próximo de 30%, o que pelo nível cognitivo da questão ficou bastante alto. A raiz exata e o produto de um número natural com a fração que resulta em outro número natural tinha a função de facilitar a resolução da mesma. Ao analisar os erros cometidos, duas respostas (as letras (a) e (c)) precisam ser observadas pontualmente, pois trata do sentido daquilo que se está resolvendo. Tanto as respostas dadas como $10{,}3$ como 103 estão fora do propósito da questão, visto que não há caminho possível para se justificar a resposta dada, que não ultrapassaria $1{,}1$. Já os alunos que responderam $0{,}103$ podem ter apenas se confundido na hora de fazer as operações com as referidas casas decimais.

Questão 8) O valor da expressão $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)$ é:

a) $\frac{17}{30}$

b) $\frac{7}{15}$

c) $\frac{1}{15}$

d) $\frac{7}{30}$

A resposta correta é a letra **(a).**

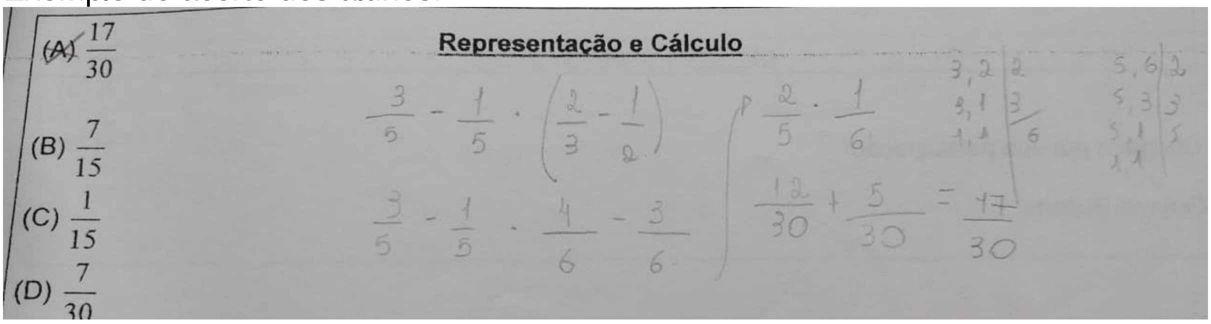
O resultado dos alunos do 9º ano foi

Respostas	**a)**	b)	c)	d)
Frequência	**10**	5	10	6
Percentual	**32,2**%	16,1%	32,2%	19,5%

O resultado dos alunos da 3ª série foi

Respostas	**a)**	b)	c)	d)
Frequência	**3**	3	8	0
Percentual	**21,3**%	21,3%	57,4%	0%

Exemplo de acerto dos alunos:



De toda a atividade diagnóstica, esta foi a questão em que aconteceu o maior índice de erros. O objetivo da questão era de identificar o grau de aprendizado dos alunos ao trabalhar com questões de operações básicas de fração (subtração e multiplicação). Neste caso, o índice de acerto da questão foi de aproximadamente 32% no 9º do Ensino Fundamental, e de aproximadamente 21% na 3ª série do Ensino Médio. Ambos os índices estão muito abaixo do esperado para alunos que estão concluindo ciclos de aprendizagem.

A abordagem da questão visa justamente verificar se o aluno sabe operacionar. É possível observar que não há qualquer contextualização que faça com que o aluno se perca no enunciado ou tire conclusões equivocadas sobre o conteúdo abordado. Assim, especificamente, é importante analisar de uma forma mais profunda os erros cometidos pelos alunos destes dois segmentos. Os alunos que responderam $\frac{7}{30}$ usaram a seguinte estratégia:

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{5} - \frac{1}{6} = \frac{12-5}{30} = \frac{7}{30}$$

O erro atribuído a este item aconteceu em vários momentos, como foi identificado acima. Na segunda parte da igualdade, o aluno subtraiu antes de multiplicar e, dentro dos parênteses, fez uma operação erradamente. Em seguida, fez as operações corretamente, porém como já havia errado os passos anteriores, errou a questão e marcou a letra **(d).**

Os alunos que marcaram $\frac{1}{15}$ usaram a seguinte estratégia:

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5} x \frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

O erro aconteceu quando para resolver a primeira parte da expressão, o aluno usou a subtração antes da multiplicação. Todo o processo seguinte está correto. É possível perceber que, como o índice de erros nos dois segmentos foi muito alto, faltou considerar somente a ordem das operações.

Já os alunos que marcaram $\frac{7}{15}$ não conseguiram traçar um caminho pertinente que pelo menos justificasse a resposta dada.

É preciso que haja investimento de tempo no aprendizado de fração. Muitos alunos não conseguem operacionar com problemas nem de nível cognitivo fácil como esse, que cobrava simplesmente que o aluno utilizasse regras simples de operações básicas de fração com parênteses e com mais de uma operação no problema. Este problema abordado neste momento se agrava ainda mais quando estamos falando de alunos que estão concluindo duas fases importantes da educação básica.

As questões 9 e 10 foram avaliadas de acordo com o descritor D26.

D26 - Resolver problema com números racionais que envolvam as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).

Questão 9) Marcos exercita-se todos os dias no parque de seu bairro. Ele caminha $\frac{2}{6}$ de hora e corre mais $\frac{2}{3}$ de hora. Qual o tempo total de atividades físicas que Marcos faz diariamente?

a) $\frac{2}{9}$ de hora.

b) $\frac{4}{9}$ de hora.

c) 1 hora.

d) 2 horas.

A resposta correta é a letra **(c).**

O resultado dos alunos do $9^{\underline{o}}$ ano foi

Respostas	a)	b)	**c)**	d)
Frequência	1	0	**26**	4
Percentual	3,2%	0%	**84**%	12,8%

O resultado dos alunos da $3^{\underline{a}}$ série foi

Respostas	a)	b)	**c)**	d)
Frequência	2	2	**10**	0
Percentual	14,2%	14,3%	**71,6**%	0%

A questão é de fácil abordagem, por se tratar de medida de tempo, em que a hora deve ser transformada em minutos, estes devem ser considerados e divididos em partes iguais a 6 e a 3. Os alunos de $9^{\underline{o}}$ ano conseguiram aplicar com mais eficiência as propriedades deste conteúdo. Apesar de ser uma questão em que o conteúdo cobrado faz parte o tempo inteiro do seu cotidiano, o índice de erros é preocupante, uma vez que 16% dos alunos do 9º ano e $28{,}4\%$ da $3^{\underline{a}}$ série não identificaram como estratégia inicial a transformação de hora para minutos e não têm habilidade de particionar esses minutos, para resolverem a situação problema. O que chama atenção, especificamente, é a familiaridade que estes grupos de alunos já deveriam ter com este tipo de problemas.

Questão 10) A estrada que liga Recife a Caruaru será recuperada em três etapas. Na primeira etapa, será recuperada $\frac{1}{6}$ da estrada e na segunda etapa $\frac{1}{4}$ da estrada. Uma fração que corresponde a terceira etapa é

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{7}{12}$

d) $\frac{12}{7}$

A resposta correta é a letra **(c).**

O resultado dos alunos do 9º ano foi

Respostas	a)	b)	**c)**	d)
Frequência	2	9	**20**	0
Percentual	6,3%	29,1%	**64,6%**	0%

O resultado dos alunos da 3ª série foi

Respostas	a)	b)	**c)**	d)
Frequência	3	3	**8**	0
Percentual	21,5%	21,5%	**57%**	0%

O resultado foi praticamente igual ao da questão número 4. O propósito da questão é identificar todo o percurso percorrido, para se encontrar o total de percurso percorrido para se encontrar o total do percurso que já foi completado, e verificar, usando de frações equivalentes, o que falta para completar o todo.

Não é o objetivo da pesquisa, mas, é nítido que o aprendizado em escolas públicas está bastante defasado em relação à escolas particulares devido a diversos fatores. Falta de acompanhamento sério pela equipe pedagógica e de incentivo à qualificação profissional são possíveis problemas que precisam ser sanados. Ao comparar os descritores desta seção com os alunos do 9º ano e da 3ª série era para justificar este fato. O ensino de fração está defasado e com problemas em todos os segmentos da sociedade, porém quando se é analisado no ensino público, a situação tende a piorar.

Para tentar melhorar estes resultados da pesquisa dos alunos dos 3 segmentos abordados, será trabalhado na próxima seção, estratégias de aprendizagem para diversos públicos.

4. PROPOSTA DE INTERVENÇÃO

Desde os primeiros contatos com o ensino de fração, o aluno deve ser incentivado e orientado a entender o conceito deste conteúdo. Não há sucesso em seu aprendizado se a abordagem for rasa ou ineficaz.

Historicamente vimos que o uso de fração já se iniciava desde os povos antigos. Segundo Boyer (1974, p. 9-10)

> "Os homens da Idade da Pedra não usavam frações, mas, com o advento das culturas mais avançadas da Idade do Bronze, parece ter surgido a necessidade de fração e de notações para frações. "

A dificuldade de entendimento do conteúdo vem de longa data. A escrita e as ideias eram mais difíceis de compreender. Hoje tem-se a facilidade para a escrita porém, a interpretação e estruturação do número fracionário passa por problemas conceituais que dificultam o trabalho com este conteúdo.

De acordo com Caraça (1989, p.35)

> "... os números racionais nascem a partir do momento em que o homem encontre dificuldade para imprimir uma razão não exata, quando há uma impossibilidade de divisão, assim feita uma subdivisão da unidade em n partes iguais, onde uma dessas partes caiba m vezes na grandeza a medir, a dificuldade surge quando m não é divisível por n."

Assim como a própria Matemática, o conceito de fração passou por todo processo gradual até que se pudesse chegar na representação utilizada nos dias atuais. Para Boyer (1974, p.4), portanto

> "... a noção de fração de racional, porém, surgiu relativamente tarde e em geral não estava relacionada de perto com os sistemas para os inteiros. "

Mesmo há tanto tempo que surgiu o conceito de fração, ensinar e aprender este conteúdo ainda é um desafio. Há muitas situações em que o professor destinado a ensinar este conteúdo não está adequadamente preparado para tal função, problema identificado em pesquisa anterior. Em sua formação docente e prática pedagógica não há tempo hábil para adquirir este conhecimento. Portanto, o processo de ensino e aprendizado se torna complexo, pois traz dificuldades específicas. O problema é que se o estágio de compreensão não for alcançado no momento, em idades nos quais os alunos precisam entender o conceito básico de fração, este tipo de problema pode ser transportado por todo o processo educacional do estudante, podendo chegar a adultos que não sabem tomar decisões quando se deparam com problemas individuais ou coletivos, de procedência fracional, decimal ou percentual. Este processo não é limitado somente no Ensino Fundamental. O que se identifica é que na prática de sala de aula, muitos alunos, que são classificados como de nível médio ou superior, também apresentam deficiências e dificuldades ao trabalhar com frações e trazem consigo desconhecimento relativo a números racionais, o que acarreta prejuízos frente ao entendimento de novos conceitos matemáticos.

Este tipo de problema não é exclusivo de professores e estudantes brasileiros. Em uma pesquisa feita por dois psicólogos do Departamento de Psicologia da Oxford Brookes University no Reino Unido, Teresinha Nunes e Peter Bryant, é possível identificar como nasce o pensamento matemático, principalmente sobre o significado sobre a representação fracionária dos números racionais. Na pesquisa, foram analisadas as semelhanças referentes ao aprendizado desde operários na Universidade de Pernambuco que mal sabiam ler, mas, que entendiam muito da escala que estavam sempre presente em seu cotidiano até crianças de Londres. Nos dois casos eles perceberam semelhanças.

Quando se apropriam na pesquisa sobre a grande dificuldade relacionada ao próprio ensino de frações afirmam que:

> "Com as frações as aparências enganam. As vezes crianças parecem ter uma compreensão completa de frações e, ainda assim, não a tem. Elas usam os termos certos, elas falam sobre frações coerentemente, elas resolvem alguns problemas fracionários, mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba"

Para que se possa identificar, amenizar e direcionar o ensino de fração, e com isso melhorar este aprendizado, foi pensado uma proposta de intervenção que visa mostrar caminhos para que haja solução possível.

4.1 DEFINIÇÃO DE FRAÇÃO

O significado do termo fração pode ser dado por:

1. Ato ou efeito de dividir, romper, partir, quebrar: a fração do pão.
2. Porção de um todo, em relação a ele.
3. Em relação a Matemática: " Expressão que indica uma ou mais partes". Ou ainda, fração é uma ou são várias partes iguais de uma grandeza ou de uma grandeza vista como um todo. Se dividirmos uma grandeza em uma, duas ou mais partes iguais, por fração dessa grandeza entendemos qualquer número inteiro dessas partes iguais.

4.2 – CLASSIFICAÇÃO DE FRAÇÕES

As frações podem ser classificadas das seguintes formas.

4.2.1 FRAÇÕES PRÓPRIAS.

As frações próprias são aquelas em que o numerador é menor que o denominador. Elas correspondem à ideia intuitiva de fração, a de considerar algumas partes de um inteiro dividido.

$$\frac{3}{7}, \frac{4}{5}, \frac{7}{12}, \frac{73}{101}, \ldots$$

4.2.2 FRAÇÕES IMPRÓPRIAS

As frações improprias são aquelas em que o numerador é maior do que o denominador. Ultrapassam a ideia intuitiva de fração, pois são considerados mais partes do que os obtidos pela divisão de unidades.

$$\frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{17}{15}, \frac{173}{31}, \ldots$$

4.2.3 FRAÇÕES APARENTES

As frações aparentes são aquelas em que o numerador é múltiplo do denominador, ou seja, representam um número inteiro.

$$\frac{21}{7}, \frac{40}{5}, \frac{24}{12}, \frac{100}{10}, \ldots$$

Reciprocamente, todo número inteiro n pode ser escrito em forma de frações aparentes.

$$n = \frac{n}{1} = \frac{2n}{2} = \frac{3n}{n} = \frac{4n}{n} = \ldots$$

4.2.4 FRAÇÕES IRREDUTÍVEIS

Uma fração irredutível não pode ser simplificada, ou seja, se o numerador e o denominador são primos entre si. Lembrando que, dados dois números naturais a e b, eles são ditos primos entre si, quando o máximo divisor comum entre eles é igual a 1.

4.3 SIGNIFICADOS DAS FRAÇÕES

Apesar de muitas pessoas, inclusive muitos professores que lecionam frações, acharem que só se resolve fração por parte-todo, existem outras formas significativas e importantes de se entender e trabalhar com problemas e operações fracionárias. Existem muitos matemáticos e professores estudiosos sobre o assunto que afirmam que quando o aluno é restringido a pensar fração somente como parte-todo, uma parte de seu conhecimento que deveria ser ampliado para que se facilitasse o aprendizado está sendo reduzido ao mínimo necessário, limitando a compreensão do conceito. Este problema não aparece nas aulas. Os livros didáticos, os quais muitos usam como única ferramenta de trabalho e de consulta, só trazem situações-problema que abordam este caminho. O problema fica ainda mais extensivo quando ao analisar as provas de larga escala que são utilizadas, principalmente no Brasil, para averiguar o aprendizado do conteúdo pelos estudantes, só contemplam em sua maioria somente este tipo de questão.

Existem cinco significados que são sugeridos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): Fração como número, fração como parte-todo, fração como medida, fração como quociente e fração como operador multiplicativo.

A seguir será discriminado cada um deles:

4.3.1 FRAÇÃO COMO NÚMERO

A fração é representada como pontos na reta numérica, assim como os inteiros, não precisando se referir a quantidade especifica (discreta). Um exemplo que pode ser dado como este tipo de fração é: represente $\frac{4}{5}$ em sua forma decimal. Há duas formas de representação fracionária: a ordinária e a decimal.

4.3.2 FRAÇÃO COMO PARTE-TODO

É a partição de um todo (contínuo ou discreto) em n partes iguais, em que cada parte pode ser representada como $\frac{1}{n}$. Parte-todo é definido por um dado todo dividido em partes iguais em situações estáticas, onde a utilização de um procedimento de dupla contagem é suficiente para se chegar a uma representação completa. É possível usar como exemplo o seguinte exemplo: Pedro dividiu sua herança em 7 partes iguais. Dessas, um de seus filhos ficou com 3 dessas partes. Logo, este filho ficou com $\frac{3}{7}$ da herança. A dupla contagem ocorre da seguinte forma: o numerador representa a parte que será destinada a este filho e o denominador representa em quantas partes o todo foi dividido.

4.3.3 FRAÇÃO COMO MEDIDA

Algumas medidas envolvem fração por se referirem a quantidades extensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis. Por exemplo, a probabilidade de um evento é medida pelo quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

4.3.4 FRAÇÃO COMO QUOCIENTE

Neste caso, é evidenciada a ideia de divisão. Por exemplo: Três chocolates devem ser divididos para 4 crianças. Que fração de chocolate cada criança irá receber?

4.3.5 FRAÇÃO COMO OPERADOR MULTIPLICATIVO

A fração como operador multiplicativo tem um papel transformador, em que a fração $\frac{a}{b}$ funciona em quantidades contínuas para reduzir ou ampliar a quantidade no processo. Este tipo de fração pode ser visto como valor escalar aplicado a uma quantidade.

Após a apresentação deste casos e significados de fração, como forma de intervenção para melhora dos resultados, serão sugeridas atividades que abordam o conteúdo e as estratégias de resolução de cada uma delas, com objetivos e encaminhamentos.

4.4 PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Estas propostas tem o objetivo de melhorar o aprendizado de fração para alunos e professores, de tal forma, que resulte em um melhor resultado em possíveis trabalhos futuros ou em avalições, do qual este aluno participará.

4.4.1 ATIVIDADE 1 – TANGRAM

PÚBLICO ALVO:

- Formação de professores que lecionam na Educação Infantil e no Ensino Fundamental I.
- Alunos a partir 4º ano do Ensino Fundamental

OBJETIVOS:

1) Identificar as figuras que compõe o Tangram e fazer relações sobre elas.

2) Identificar as frações encontradas nas figuras encontradas e discuti-las sobre que parte fazem do todo.

3) Construir figuras através de sobreposições e identificar quais junções representam figuras do mesmo Tangram.

4) Identificar as frações do todo correspondentes no Tangram.

5) Identificar as porcentagens que cada figura menor representa do todo.

6) Comparar frações e porcentagens nas relações das figuras do Tangram.

7) Operacionalizar com as figuras e suas respectivas frações correspondentes.

8) Identificar as frações equivalentes através das figuras do Tangram.

9) Operacionalizar com adição e subtração de frações equivalentes e com frações que possam ser transformadas em frações equivalentes.

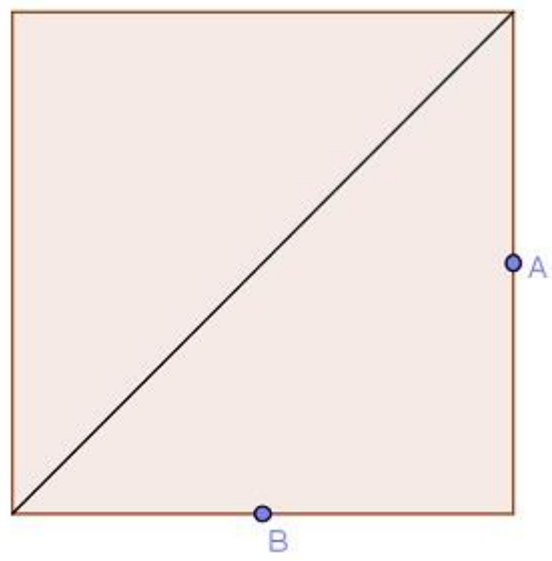
10) Calcular as áreas das figuras planas encontradas e identificar que fração representa do total.

11) Encontrar relações entre frações e porcentagens, e desenvolver cálculos pertinentes a séries propostas.

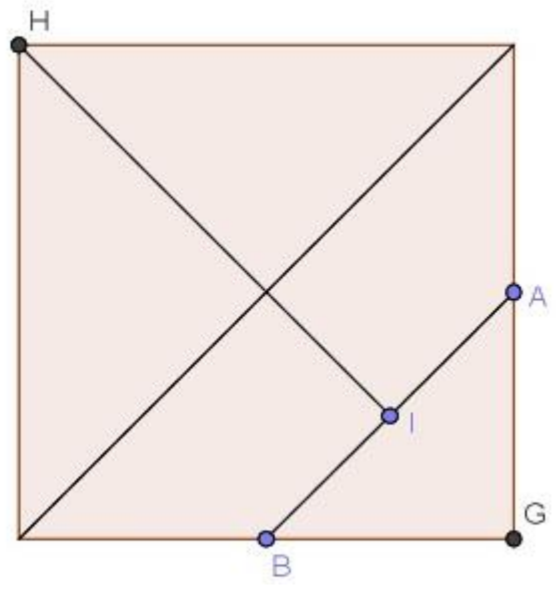
METODOLOGIA:

1) Construir um quadrado de lado 10 cm (ou maior) – Utilize papel milimetrado para facilitar a construção.

2) Traçar uma das diagonais e marcar dois pontos médios (A e B) dos lados do quadrado.

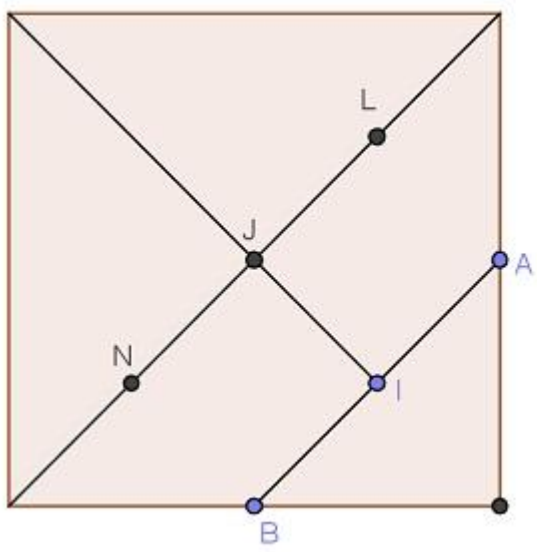


3) Traçar o segmento de reta AB paralelo à diagonal traçada anteriormente.

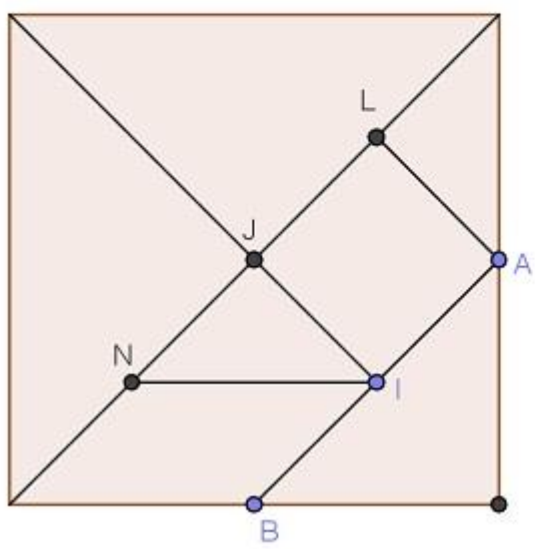


4) Traçar a outra diagonal do quadrado até o segmento AB.

5) Dividir a primeira diagonal traçada em quatro partes (segmentos) iguais.

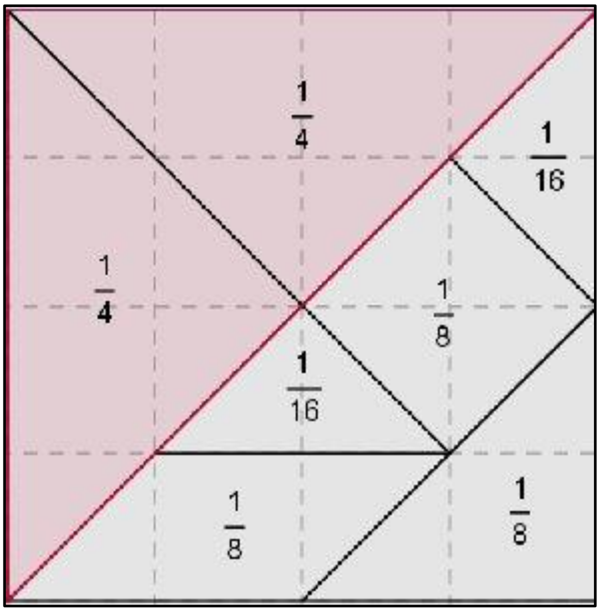


6) Traçar os segmentos IN e AL.



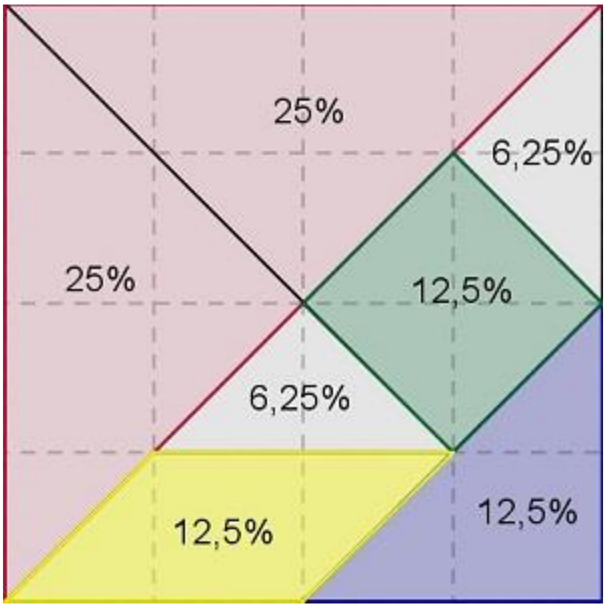
Observe que o quadrado ficou dividido em sete peças que são as sete peças do Tangram.

Para que os alunos possam entender melhor a atividade, peça para que eles construam o quadrado em papel milimetrado. Com a sua ajuda, o aluno irá explorar e registrar, em cada figura, a fração que corresponde do total, ou seja, do quadrado que gerou as sete peças do Tangram, como na figura do exemplo abaixo.



Tangram de porcentagens

Faça outra construção com os alunos utilizando um quadrado do mesmo tamanho do anterior. Explore-o por meio de comparação das figuras e coloque em cada figura o percentual que cada uma corresponde do quadrado que gerou as sete peças do Tangram.



DIÁLOGO PARA CONSTRUÇÃO DOS CONHECIMENTOS COM OS ALUNOS

1) Agrupe as peças do Tangram de acordo com o número de lados e responda:

a) Quantos triângulos tem o Tangram?

5 triângulos.

Todos são iguais?

Não. São 2 triângulos que representam $\frac{1}{4}$ do Tangram cada um, 2 que representam $\frac{1}{16}$ do Tangram cada um e 1 que representa $\frac{1}{8}$.

O que podemos dizer sobre eles?

Que as somas de suas áreas representam $\frac{3}{4}$ da área total do Tangram.

b) Quantos quadriláteros tem o Tangram?

São dois: 1 quadrado e um paralelogramo.

Todos são iguais?

Não. É 1 quadrado que representa $\frac{1}{8}$ da área do Tangram e 1 paralelogramo que representa $\frac{1}{8}$.

O que podemos dizer sobre eles?

Que as somas de suas áreas representam $\frac{1}{4}$ da área total do Tangram.

2) Usando qualquer peça do Tangram, construa triângulos com a quantidade de peças indicadas e indique que fração do todo, cada figura representa.

a) Com duas peças;

1º Triângulo: $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$

2º Triângulo: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

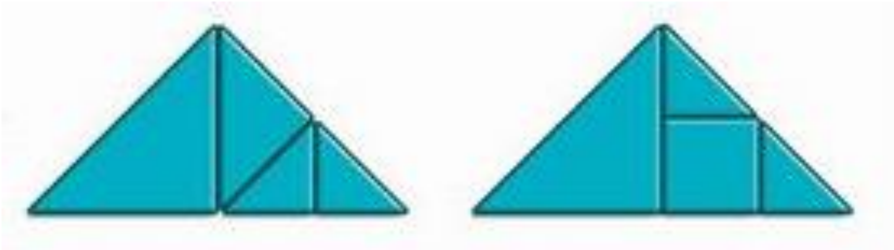
b) Com três peças;

1º Triângulo: $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

2º Triângulo: $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{3}{8}$

3º Triângulo: $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$

c) Com quatro peças;



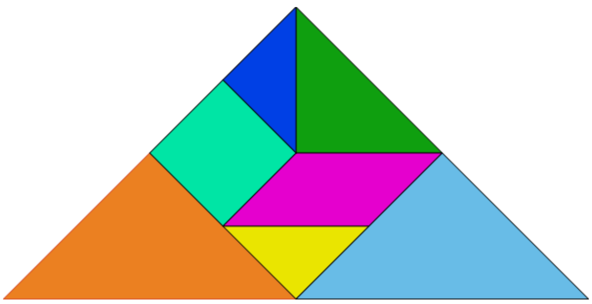
1º Triângulo: $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$

2º Triângulo: $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$

d) Com cinco peças;

$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

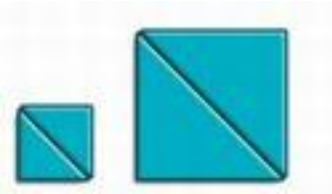
e) Com 7 peças.



Representa o todo.

3) Usando qualquer peça do Tangram, construa quadrados com a quantidade de peças indicadas e indique que fração do todo cada figura representa.

a) Com duas peças;



1º Quadrado: $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$

2º Quadrado: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

b) Com três peças;

Quadrado formado: $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

c) Com quatro peças;

1º Quadrado: $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$

2º Quadrado: $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$

3º Quadrado: $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$

d) Com cinco peças;

Quadrado formado: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$

e) Com 7 peças.

Representa o todo.

4) Após construir e indicar as frações correspondentes, chegamos a qual conclusão?

Pode-se criar situações com os alunos para que eles cheguem a solução das frações equivalentes ou que possam se tornar equivalentes. Agrupam-se as figuras e façam as comparações para concluir o trabalho.

4.4.2 ATIVIDADE 2 – PROBLEMA DOS 35 CAMELOS – LIVRO: “O HOMEM QUE CALCULAVA.

O Problema dos 35 Camelos

(...) “Poucas horas havia que viajávamos sem interrupção, quando nos ocorreu uma aventura digna de registro, na qual o meu companheiro Beremiz, com grande talento, pôs em prática as suas habilidades de exímio algebrista. Encontramos, perto de um antigo abrigo para peregrinos, meio abandonado, três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos. Por entre pragas e impropérios gritavam possessos, furiosos:

- Não pode ser!

- Isto é um roubo!

- Não aceito!

O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.

- **SOMOS IRMÃOS – ESCLARECEU O MAIS VELHO – E RECEBEMOS, COMO HERANÇA, ESTES 35 CAMELOS. SEGUNDO VONTADE EXPRESSA DE MEU PAI, DEVO RECEBER A METADE, O MEU IRMÃO HAMED NAMIR UMA TERÇA PARTE E O HARIM, O MAIS JOVEM, DEVE TOCAR APENAS A NONA PARTE. NÃO SABEMOS, POREM, COMO DIVIDIR DESSA FORMA 35 CAMELOS E A CADA PARTILHA PROPOSTA SEGUE-SE A RECUSA DOS OUTROS DOIS, POIS METADE DE 35 É 17,5. COMO FAZER A PARTILHA SE A TERÇA PARTE E A NONA PARTE DE 35 TAMBÉM NÃO SÃO EXATAS?**

- É muito simples – atalhou Beremiz. – Encarrego-me de fazer, com justiça, essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que, em boa hora, aqui nos trouxe! Neste ponto, procurei intervir na questão:

- Não posso consentir em semelhante loucura! Como poderíamos concluir viagem, se ficássemos sem camelo?

- Não te preocupes com o resultado, meu amigo de Bagdad! – replicou em voz baixa Beremiz.

– Sei muito bem o que estou a fazer. Cede-me o teu camelo e verás no fim a que conclusão quero chegar.

Tal foi o tom de segurança com que ele falou que não tive dúvida em entregar-lhe o meu belo animal, que, imediatamente, foi reunido aos 35 ali presentes, para serem, repartidos pelos três herdeiros.

- Vou meus amigos – disse ele, dirigindo-se aos três irmãos – fazer a divisão justa e exata dos camelos que são agora, como veem, em número de 36. E, voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:

- Deverias receber, meu amigo, a metade de 35, isto é, 17,5. Receberás a metade de 36 e, portanto 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saíste lucrando com esta divisão. E dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:

- E tu Hamed Namir, deverias receber um terço de 35, isto é 11 e pouco. Vais receber um terço de 36, isto é 12. Não poderás protestar, pois também tu saíste com visível lucro na transação. E disse, por fim, ao mais novo:

- E tu, jovem Harim Namir, segundo a vontade de teu pai, deverias receber uma nona parte de 35, isto é, 3 e tanto. Vais receber uma nona parte de 36, isto é, 4. O teu lucro foi igualmente notável. Só tens a agradecer-me pelo resultado! E concluiu com a maior segurança e serenidade:

- Pela vantajosa divisão feita entre os irmãos Namir – partilha em que todos os três saíram lucrando – couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo e 4 ao terceiro, o que dá um resultado (18 + 12 + 4) de trinta e quatro camelos. Dos trinta e seis camelos, sobraram, portanto dois. Um pertence, como sabem ao meu amigo e companheiro, outro toca por direito a mim, por ter resolvido, a contento de todos, o complicado problema da herança!

- Sois inteligente, ó estrangeiro! – exclamou o mais velho dos três irmãos. – Aceitamos a vossa partilha na certeza de que foi feita com justiça e equidade! E o astucioso Beremiz tomou logo posse de um dos belos camelos do grupo e disse-me, entregando-me pela rédea o animal que me pertencia:

- Poderás agora, meu amigo, continuar a viagem no teu camelo manso e seguro! Tenho outro, especialmente para mim! E continuamos a nossa jornada para Bagdad.

PÚBLICO ALVO:

- Formação de professores da Educação Infantil e do Ensino Fundamental I
- Alunos a partir do 6º ano do Ensino Fundamental.

OBJETIVOS:

1) Identificar as frações contidas na história.

2) Calcular o mínimo múltiplo comum.

3) Encontrar as frações equivalentes ao mesmo denominador.

4) Calcular soma de frações equivalentes.

5) Analisar a quantidade relativa que foi dada a cada irmão e somá-las.

6) Verificar que quantidade recebida é menor que o total repartido.

7) Justificar a resposta a partir de cálculos.

METODOLOGIA:

1) Ao encontrar as frações dadas pelo problema, registre:

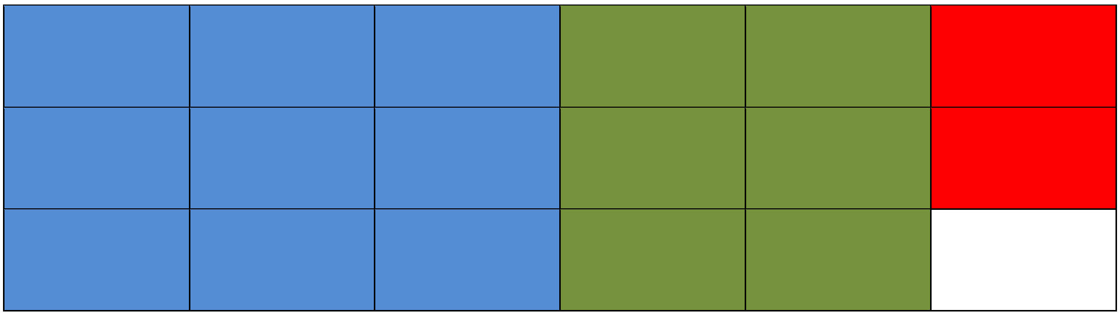
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}$$

2) Depois encontre suas respectivas frações equivalentes:

$$\frac{9}{18}, \frac{6}{18}, \frac{2}{18}$$

3) Some as frações equivalentes:

$$\frac{9}{18} + \frac{6}{18} + \frac{2}{18} = \frac{17}{18}$$



O primeiro recebeu 9 camelos (retângulos azuis), o segundo recebeu 6 camelos (retângulos verdes) e o terceiro recebeu 2 camelos (retângulos vermelhos).

4) Perceba que foi dividido em 18 partes, mas só foram encontradas 17 partes. Mas, o problema fala de 35 camelos.

5) O problema fala de 35 camelos, portanto, encontrando a fração equivalente, temos:

$$\frac{17}{18} = \frac{34}{36}$$

6) Logo, concluir que o primeiro recebeu 18 camelos, o segundo recebeu 12 camelos e o terceiro recebeu 4 camelos. Todos receberam mais que a divisão anteriormente. E Beremiz, o que propôs a resolução dos problemas, sai ganhando 1 camelo.

7) Pedir aos alunos que justifiquem com suas palavras sobre o problema.

4.4.3 ATIVIDADE 3 – PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA – PORTAL OBMEP

Os problemas de Olimpíadas de Matemática podem ser trabalhados como desafios ou como sugestões para turmas Olímpicas.

OBJETIVOS DAS OLIMPÍADAS:

1) Estimular o estudo da Matemática.

2) Aperfeiçoar a capacitação dos professores.

3) Descobrir jovens talentos.

A seguir, cada problema e seu público alvo.

PÚBLICO ALVO:

- 5º e 6º anos do Ensino Fundamental

PROBLEMA 1

Maria foi trabalhar e deixou dinheiro para seus três filhos, com este bilhete:

Dividam o dinheiro igualmente. Beijos!

O primeiro filho chegou, pegou sua parte do dinheiro e saiu. O segundo filho chegou e não viu ninguém. Pensando que era o primeiro, pegou sua parte do dinheiro e saiu. O terceiro encontrou quatro notas de 5 reais. Achou que era o último, pegou tudo e saiu. Quanto em dinheiro a mãe havia deixado para os filhos?

Sugestão de resposta:

a) Separar em retângulos e identificar quanto cada um pegou.

O primeiro pegou a terça parte.

O segundo não sabendo que o primeiro já havia pego, pegou a terça parte do que sobrou.

O terceiro pegou as 4 notas de R$5,00; logo, pegou R$ 20,00.

Então cada um deles recebeu:

O primeiro recebeu R$ 15,00, o segundo recebeu R$ 10,00 e o terceiro recebeu R$ 20,00. Sendo assim, a mãe deixou R$ 45,00 para eles.

b) A outra solução pode ser dada por:

O primeiro pegou $\frac{1}{3}$, o segundo pegou a terça parte do que sobrou, logo $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ e o terceiro pegou R$ 20,00, totalizando o dinheiro que ela deixou. Então podemos representar da seguinte forma:

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x + 20 = x$$

$$\frac{3x}{9} + \frac{2x}{9} + \frac{180}{9} = \frac{9x}{9}$$

$$9x - 5x = 180$$

$$4x = 180$$

$$x = 45$$

Logo, a mãe deixou R$ 45,00 para que fosse dividido entre os filhos.

PÚBLICO ALVO:

- 6º ano do Ensino Fundamental

PROBLEMA 2) Simplifique a fração:

$$\frac{2004 + 2004}{2004 + 2004 + 2004}$$

Esse problema foi indicado porque muitos alunos resolvem este tipo de questão simplificando os denominadores pela soma de termos:

$$\frac{\mathbf{2004} + \mathbf{2004}}{\mathbf{2004} + \mathbf{2004} + \mathbf{2004}} = \frac{1}{2004}$$

Erradamente, pois não é permitido simplificar a partir de uma soma sem antes encontrar os fatores comuns e usar a fatoração disponível. A resposta correta é:

$$\frac{2004 + 2004}{2004 + 2004 + 2004} = \frac{2004\,(1 + 1)}{2004\,(1 + 1 + 1)} = \frac{2}{3}$$

PÚBLICO ALVO:

- A partir do 6º ano do Ensino Fundamental

PROBLEMA 3) Simplifique a seguinte expressão:

$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100}\right)$.

Este problema pode ser pensado de forma separada e depois agrupar novamente, para que se possa fazer as multiplicações. Perceba que:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{4-1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\vdots$$

$$\left(1-\frac{1}{100}\right)=\frac{100-1}{100}=\frac{99}{100}$$

Então:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{98}{99}\cdot\frac{99}{100}=\frac{1}{100}$$

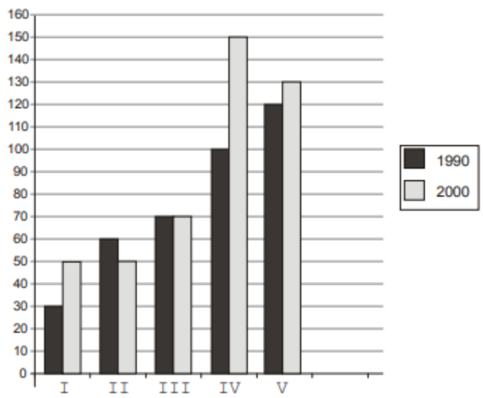
Como tem-se um produto com denominador e numerador subsequentes iguais, logo são simplificados. Então resta apenas o numerador 1 e o denominador 100, ao final. Portanto, a resposta é $\frac{1}{100}$.

PÚBLICO ALVO:

- A partir do $6^{\underline{o}}$ ano do Ensino Fundamental

PROBLEMA 4) OBMEP – NÍVEL 1 – 2016 – Questão 13

No gráfico estão representadas as populações das cidades I, II, III, IV e V em 1990 e 2000, em milhares de habitantes. Por exemplo, em 1990 a população da cidade II era de 60000 habitantes e em 2000 a cidade IV tinha 150000 habitantes.



Qual cidade teve o maior aumento percentual de população de 1990 a 2000?

a) I

b) II

c) III

d) IV

e) V

Solução:

Resposta: Alternativa (a).

As informações do gráfico são dadas nas três primeiras colunas da tabela abaixo:

Cidade	População em 1990	População em 2000	Aumento da população	Aumento proporcional da população
I	30	50	$50 - 30 = 20$	$\frac{20}{30}$
II	60	50	decresceu	não teve
III	70	70	$70 - 70 = 0$	0
IV	100	150	$150 - 100 = 50$	$\frac{50}{100}$
V	120	130	$130 - 120 = 10$	$\frac{10}{120}$

Como $\frac{20}{30}$ é maior que $\frac{50}{100}$ e $\frac{10}{120}$. Concluímos que o maior aumento percentual de população entre 1990 e 2000 ocorreu na cidade I .

Na forma percentual, $\frac{20}{30} \approx 67\%$, $\frac{50}{100} = 50\%$ e $\frac{10}{120} \approx 8{,}3\%$.

PÚBLICO ALVO:

- A partir do 6º ano do Ensino Fundamental

PROBLEMA 5) OBMEP – NÍVEL 1 – 2016 – Questão 16

Em uma caixa quadrada há 4 bolas brancas e 2 bolas pretas, e numa caixa redonda há 6 bolas, todas pretas. Paula quer que tanto na caixa quadrada quanto na redonda a razão entre a quantidade de bolas brancas e o total de bolas em cada caixa seja a mesma. Quantas bolas brancas Paula precisa tirar da caixa quadrada e passar para a caixa redonda?

a) Nenhuma.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

Resposta: Alternativa (d).

Solução 1: Cada vez que passa uma bola branca da caixa quadrada para a redonda, tanto o número de bolas brancas quanto o total de bolas na caixa quadrada diminui de 1; já na caixa redonda, tanto o número de bolas brancas quanto o total de bolas aumenta de 1.

Número de bolas brancas passadas da caixa quadrada para a redonda	0	1	2	3	4
Caixa quadrada: $\frac{\text{bolas brancas}}{\text{total de bolas}}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{2}$
Caixa redonda: $\frac{\text{bolas brancas}}{\text{total de bolas}}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{10}$

Como $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$, Paula terá de passar 3 bolas brancas da caixa quadrada para a redonda.

Solução 2: Seja x o número de bolas brancas que Paula deve transferir da caixa quadrada para a caixa redonda. Então,

$$\frac{4-x}{6-x} = \frac{x}{6+x}$$

e resolvendo esta equação obtemos x = 3.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foi mostrado como o conceito de fração foi introduzido nas civilizações e foi avançando até os dias atuais. Apesar deste conteúdo já ter sido inserido e identificado há tanto tempo, ainda há muitas lacunas que dificultam o aprendizado do conteúdo.

O movimento feito aqui foi no sentido de investigar e entender, através de um questionário diagnóstico, como o professor que inicia a ideia e as primeiras concepções de Matemática está sendo preparado e orientado a trabalhar a disciplina, especificamente fração. A discussão foi feita em cima da carga horária acadêmica e de formação continuada deste conteúdo.

Nos questionários aplicados, para os alunos de 5º ano e 9º ano de Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio, constatamos o que muitas avaliações institucionais ou de larga escala apresentam: ainda há muita dificuldade na base da aprendizagem Matemática, fazendo com que o aprendizado fracionário caminhe a passos lentos. Conseguimos mostrar nos questionários que muitos alunos terminam ciclos de aprendizagem sem ter aprendido o mínimo necessário sobre o conteúdo.

Concluindo o trabalho, após passar por todos os conceitos necessários para o aprendizado de fração, são sugeridas algumas propostas para melhoria do conceito fracionário. Alguns pontos são importantes pois, vem da base do conhecimento de fração usando Tangram, passam por problemas através de uma história do livro “O Homem que Calculava” para que fosse trabalhada a interpretação dos problemas e avançássemos para aprofundarmos os conhecimentos matemáticos em questões de Olimpíadas de Matemática.

A proposta final desta dissertação é que possa ser usada por alunos e professores de alunos e professores de todos os segmentos da Educação Básica e do Ensino Superior, para pesquisa, estudo e aprofundamento acerca dos conceitos matemáticos expostos e discutidos aqui.

Para possíveis trabalhos futuros, este material poderá ser usado como referência para colaboração, intervenção e para análise de resultados de atividades que podem ser reaplicadas para o público que participou desta pesquisa. Neste sentido, se fará necessário verificar se as intervenções fizeram efeito.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LIMA, Elon Lages. “Grandezas Proporcionais”. In: *Meu professor de Matemática e outras histórias*, p. 125-141. 5.ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

TINOCO, Lucia A. A. (Coord.). *Razões e Proporções*. Projeto Fundão, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro: Ed. UFRJ, 1996.

RIPOLL, Cydara Cavedon, SIMAS Fabio Luiz Borges, BORTOLOSSI Humberto José, GIRALDO Victor Augusto, REZENDE Wanderley Moura, QUINTANEIRO Wellerson da Silva. Frações no Ensino Fundamental – Volume I. 2016 / versão 2.0 de Fevereiro de 2017. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS)

ROQUE, Tatiana. Tópicos de História da Matemática / Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira Carvalho. – Rio de Janeiro: SBM, 2012

RABELO, Mauro. Avaliação Educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro / Mauro Rabelo. Rio de Janeiro: SBM, 2013

Revista do professor de Matemática – Sociedade Brasileira

Portal da OBMEP

BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974

_____. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília, MEC/SEF, 2001

CARAÇA, Bento de Jesus. Conceitos fundamentais de Matemática. 9ª edição Lisboa, 1989.

TAHAN, Malba. O Homem que Calculava. 58ª edição. Rio de Janeiro, Editora Record, 2002

IFRAH, G. História Universal dos Algarismos. Tomo 1. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1997 (a).

https://www.scientificamerican.com/article/fractions-where-it-all-goes-wrong/