

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ANDERSON DO NASCIMENTO ROUVER

**CORRELAÇÃO ENTRE A MASSA EFETIVA
(m^*), λ_{ab} E T_c DE CUPRATOS
SUPERCONDUTORES EM UM CENÁRIO DE
ENERGIA DE CASIMIR**

VITÓRIA
2018

ANDERSON DO NASCIMENTO ROUVER

**CORRELAÇÃO ENTRE A MASSA EFETIVA (m^*), λ_{ab} E
 T_c DE CUPRATOS SUPERCONDUTORES EM UM
CENÁRIO DE ENERGIA DE CASIMIR**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, para a obtenção de Título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu D'Azeredo Orlando

VITÓRIA
2018

ANDERSON DO NASCIMENTO ROUVER

**CORRELAÇÃO ENTRE A MASSA EFETIVA (m^*), λ_{ab} E
 T_c DE CUPRATOS SUPERCONDUTORES EM UM
CENÁRIO DE ENERGIA DE CASIMIR**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, para a obtenção de Título de Doutor em Física.

Apresentada em 17 de Maio de 2018

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos Tadeu D'Azeredo Orlando (Orientador)
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Prof. Dr. José Alexandre Nogueira
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Prof. Dr. Davi Cabral Rodrigues
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Prof. Dr. Cherlio Scandian
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Prof. Dr. João Francisco Justo
Universidade de São Paulo - USP

Profa. Dra. Eliana Navarro dos Santos Muccillo
Universidade de São Paulo - USP

Prof. Dr. Antonio Eduardo Martinelli
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

À toda minha família.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus.

Agradeço à minha família, especialmente a Dona Luzia (minha mãe), que deu-me todo apoio que uma mãe poderia dar a um filho. Agradeço aos meus irmãos Emerson, Wender e aos meus amigos, que estiveram ao meu lado, ajudando-me com apoio e sugestões.

Agradeço a minha esposa Juliana. Tudo isso só foi possível pela sua presença na minha vida. Obrigado por sua paciência e compreensão.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Marcos Tadeu D'Azeredo Orlando, por todos os direcionamentos e orientações. Aos professores que compõe a banca examinadora pela valiosa contribuição na avaliação deste trabalho.

Agradeço a todos os meus colegas de laboratório, principalmente Arthur e Jefferson que contribuíram significativamente para a realização deste trabalho.

Agradeço à Universidade Federal do Espírito Santo, ao Programa de Pós-Graduação em Física, aos professores, funcionários e principalmente aos alunos do PPGFIS.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro às minhas pesquisas.

“Comece fazendo o que é necessário, depois o que é possível, e de repente você estará fazendo o impossível.”

São Francisco de Assis

RESUMO

O efeito Casimir foi descoberto em 1948 e a sua relevância do efeito Casimir foi recentemente apontada em estudos sobre materiais como grafeno e cupratos supercondutores de alta temperatura. A relação entre a energia de Casimir e a energia de um condensado supercondutor com anisotropia caracterizada por alta bidimensionalidade já foi discutida em certos cenários teóricos. Este trabalho descreve a relação entre a massa efetiva dos portadores de carga ($m^* = \alpha m_e$, onde m_e é a massa do elétron) e os parâmetros macroscópicos característicos de várias famílias de Cupratos supercondutores (Cu-HTSC) de alta temperatura crítica (T_c) que possuem planos supercondutores de cobre e oxigênio (Cu-O). Verificou-se que existe uma expressão que correlaciona a massa efetiva, o comprimento de penetração de London no plano λ_{ab} , a temperatura crítica T_c e a distância d entre os planos supercondutores equivalentes de Cu-HTSC, revelando um comportamento assintótico de α como uma função de T_c e a linha que descreve o valor ideal de $\alpha \simeq 2$ ($m^* \simeq 2m_e$). Isto indica que existe uma região não adiabática, o que implica uma interação portador-rede e onde a temperatura crítica pode ter seu maior valor em Cu-HTSC.

ABSTRACT

The Casimir effect was discovered in 1948 and its relevance was recently pointed out in studies on materials such as graphene and high-temperature superconducting cuprates. The relationship between Casimir energy and the energy of a superconducting condensate with anisotropy characterized by high bidimensionality has already been discussed in certain theoretical scenarios. This work describes the relationship between the effective mass of the charge carriers ($m^* = \alpha m_e$, where m_e is the mass of the electron) and the macroscopic parameters characteristic of several families of high critical temperature (T_c) superconducting cuprates (Cu-HTSC) that have copper and oxygen superconducting planes (Cu-O). It has been found that there is an expression that correlates the effective mass, the London penetration length in the plane λ_{ab} , the critical temperature T_c and the distance d between the equivalent superconducting planes of Cu-HTSC, showing an asymptotic behavior of α as a function of T_c and the line describing the optimal value of $\alpha \simeq 2$ ($m^* \simeq 2m_e$). This indicates that a nonadiabatic region exists, which implies a carrier-lattice interaction and where the critical temperature may have its highest value in Cu-HTSC.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Curva da resistência elétrica medida no mercúrio em 1911 por Onnes.	16
Figura 2.1 – O efeito Meissner-Ochsenfeld em supercondutores.	23
Figura 2.2 – Amostra supercondutora cilíndrica localizada no interior de um solenóide.	24
Figura 2.3 – Gráfico usado para o cálculo da energia de condensação para um supercondutor.	26
Figura 2.4 – As variações espaciais do parâmetro de ordem ψ e do campo magnético H na vizinhança da interface Normal-Supercondutor.	31
Figura 2.5 – Comportamento da magnetização em função do campo magnético aplicado em supercondutores.	32
Figura 2.6 – Gap de energia.	34
Figura 2.7 – Estrutura cristalina dos Cu-HTSC.	45
Figura 3.1 – Cavidade retangular.	49
Figura 3.2 – Placas condutoras paralelas de área L^2 separadas por uma distância d . Assume-se que a placa inferior está no plano xy na origem do sistema.	54
Figura 3.3 – Continuidade dos campos (a) \vec{E}_\perp e (b) \vec{E}_\parallel e (c) do potencial escalar numa interface.	60
Figura 3.4 – Continuidade dos campos (a) \vec{B}_\perp e (b) \vec{B}_\parallel numa interface.	62
Figura 3.5 – Folhas finas de plasma com as ondas incidente, refletida (r) em $z = 0$, transmitida (a) em $z = 0$, refletida (b) em $z = d$ e transmitida (t) em $z = d$	67

Figura 4.1 –As camadas $n\text{CuO}_2$ ($n = 3$) são aproximadas por uma placa equivalente. Como exemplo, essas placas são desenhadas para célula unitária do supercondutor Hg-1223. O efeito Casimir ocorre entre essas duas placas equivalentes, onde d é a distância entre as placas equivalentes do supercondutor e coincide com o parâmetro de rede c	76
Figura 4.2 –Comportamento de α (calculado neste artigo) em função de T_c , plotado em escala logarítmica. Os pontos triangulares destacados (preenchidos) correspondem a amostras de Hg-1223 estudadas sob pressão.	79
Figura B.1 –A função $q(t)$ é o caminho que faz do funcional J um extremo.	109
Figura C.1 –Artigo publicado relacionado ao tema de estudo desta tese.	147

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Elementos químicos e ligas que são supercondutores e suas respectivas temperaturas críticas.	15
Tabela 2 – Valores de α calculados a partir dos valores de T_c , d e $\lambda_{ab}(0)$ encontrados na literatura. Usamos $d = c$ para todos os compostos apresentados. . . .	81

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	SUPERCONDUTIVIDADE	15
1.2	EFEITO CASIMIR	18
1.3	MOTIVAÇÃO	19
2	SUPERCONDUTIVIDADE	20
2.1	TEORIA DE LONDON	20
2.2	MODELO DE GINZBURG-LANDAU	23
2.2.1	Termodinâmica da Transição de Fase	23
2.2.2	Equações de Ginzburg-Landau	27
2.2.3	Energia de Superfície	30
2.3	SUPERCONDUTORES DO TIPO I E II	31
2.3.1	Rede de Abrikosov	32
2.4	MASSA EFETIVA	33
2.4.1	Energia de Banda	33
2.4.2	Equação de onda do elétron em um potencial periódico	34
2.5	COMPRIMENTO DE PENETRAÇÃO DE LONDON E O MODELO DE UEMURA	40
2.6	ENERGIA DE CONDENSAÇÃO PARA O ESTADO SUPERCONDUTOR	41
2.7	CUPRATOS SUPERCONDUTORES DE ALTA TEMPERATURA - Cu-HTSC	44

3	EFEITO CASIMIR	47
3.1	INTRODUÇÃO	47
3.2	CÁLCULO DA FORÇA DE CASIMIR	48
3.3	EFEITO CASIMIR PARA UMA FOLHA PLANA DE PLASMA - MODELO DE BARTON	58
3.3.1	Descrição do modelo	58
3.4	EFEITO CASIMIR PARA FOLHAS FINAS DE PLASMA - MODELO DE BORDAG	65
3.4.1	Descrição do modelo	65
4	O EFEITO CASIMIR EM CUPRATOS SUPERCONDUTORES DE ALTO T_C	75
4.1	EQUIVALÊNCIA ENTRE ENERGIA DE CASIMIR E ENERGIA DE CONDENSÇÃO	77
4.2	COMPORTAMENTO DE α PARA VÁRIOS Cu-HTSC	79
4.3	AVALIAÇÃO DE α ATRAVÉS DA MEDIÇÃO DO CALOR ESPECÍFICO	80
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	83
5.1	CONCLUSÕES	83
5.2	TRABALHOS FUTUROS	84
	REFERÊNCIAS	85
	APÊNDICES	93
	APÊNDICE A – OSCILADOR HARMÔNICO	93
	APÊNDICE B – QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO	100
B.1	NOTAÇÃO RELATIVÍSTICA	100
B.2	EQUAÇÕES DE MAXWELL	102
B.3	DINÂMICA DE LAGRANGE E HAMILTON	108

B.3.1	Densidade Lagrangeana	112
B.3.2	Densidade Lagrangiana do Campo Eletromagnético	114
B.3.3	Densidade Hamiltoniana	120
B.4	QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO	121
B.4.1	Calibre de Coulomb	122
B.4.2	Calibre de Lorentz	134
B.4.3	O Método de Gupta-Bleuler	144
APÊNDICE C – PUBLICAÇÕES GERADAS A PARTIR DESTA TESE		147

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 SUPERCONDUTIVIDADE

A história da supercondutividade começa em 1911, com o físico Kamerlingh Onnes, quando suas investigações sobre as propriedades das substâncias em baixas temperaturas o levaram, além da liquefação do hélio, à descoberta de um novo estado, chamado por ele de supercondutividade [1]:

Assim, o mercúrio em 4,2 K entrou em um novo estado, que, devido às suas particulares propriedades elétricas, pode ser chamado de estado de supercondutividade.

A Figura 1.1 mostra que a resistividade do mercúrio cai a zero abruptamente a 4,2 K. Alguns experimentos realizados nessa época mostravam que a supercondutividade em metais desaparecia, quando a amostra era aquecida além de uma determinada temperatura. Tal temperatura variava de material para material. A essa temperatura deu-se o nome de temperatura crítica (T_c).

A Tabela 1 mostra outros elementos químicos e compostos que foram estudados posteriormente e que também apresentaram propriedade supercondutora.

Tabela 1 – Elementos químicos e ligas que são supercondutores e suas respectivas temperaturas críticas.

Material	Al	Sn	Hg	Nb	UPt ₃	PbMo ₆ S ₈	Nb ₃ Sn	Nb ₃ Ga	Nb ₃ Ge
T_c (K)	1,2	3,8	4,2	9,5	0,45	15	18,1	20,3	23,9

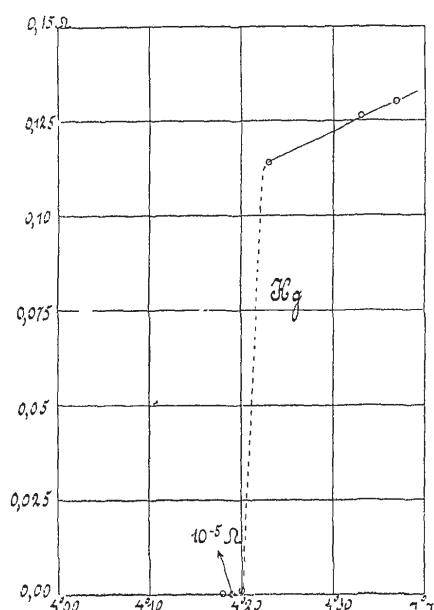


Figura 1.1 – Curva original da resistência elétrica medida no mercúrio em 1911 por Onnes [1].

Meissner e Ochsenfeld [2] tentaram explicar uma propriedade mais fundamental do que a resistência nula, a exclusão do fluxo magnético, quando uma amostra supercondutora é resfriada abaixo de sua temperatura de transição. Eles mostraram que, independente da amostra estar ou não sob um campo magnético, quando a temperatura é inferior a T_c , o fluxo magnético no seu interior é sempre nulo, ou seja, a amostra apresentava o diamagnetismo perfeito, propriedade que ficou conhecida como Efeito Meissner.

Em 1935, os irmãos F. e H. London [3] propuseram duas equações baseadas no eletromagnetismo para descrever a supercondutividade e o efeito Meissner.

Em 1950, uma outra visão do fenômeno da supercondutividade foi proposta por de Ginzburg e Landau [4]. Essa formulação baseava-se numa interpretação de transição de fase na qual um parâmetro de ordem aparece. Segue como consequência natural da teoria de Ginzburg-Landau (GL) a obtenção das equações de London. Tanto a teoria de London, como a de Ginzburg e Landau, serviram para estabelecer relações entre diferentes fenômenos da supercondutividade.

Em 1957, Bardeen, Cooper e Schrieffer propuseram uma teoria microscópica da supercondutividade na qual assumiam a existência de pares de elétrons ligados, denominados pares de Cooper, que formavam uma supercorrente e um gap de energia formado entre o estado normal e o estado supercondutor [5]. Tal teoria ficou conhecida como Teoria BCS. A partir disso, iniciou-se a busca por novos materiais supercondutores.

Josephson [6] apresentou uma abordagem para o cálculo das correntes de tunelamento transferidas através de uma junção. Tal efeito é conhecido como efeito Josephson.

Em 1973, o físico norte-americano B. Matthias descobriu o composto Nb_3Ge , com uma temperatura crítica de 23,9 K. Somente após mais de uma década, em 1986, os alemães K. A. Muller e J. G. Bednorz demonstraram que o material constituído por BaLaCuO superava o Nb_3Ge em temperatura de transição, tornando-se supercondutor a 30 K [7]. Esta descoberta lançou cientistas do mundo inteiro em uma corrida na busca por óxidos supercondutores com elevadas temperaturas de transição.

Em 1987, os físicos americanos Paul Chu e Maw-Kuen Wu descobriram o sistema composto por YBaCuO (Y-123) com temperatura crítica de 93 K [8]. Este fato é de grande importância porque a cerâmica Y-123 foi a primeira a exibir supercondutividade acima de 77 K que é a temperatura de liquefação do nitrogênio, que é mais fácil e econômico de trabalhar do que o hélio líquido, e também trouxe novas perspectivas de aplicações práticas destes materiais.

Em 1988 foram descobertos o sistema BiCaSrCuO com temperatura crítica de 110 K e o composto de TlCaBaCuO com temperatura crítica de 125 K.

Em 1993 ocorre a descoberta do fenômeno num composto de HgBaCaCuO , com temperatura de transição à pressão atmosférica de até 134 K [9]. Um ano depois, investigações sobre a influência da pressão hidrostática externa no fenômeno da supercondutividade, comprovou que, nos compostos de HgBaCaCuO , a pressão hidrostática pode elevar a temperatura de transição em até 30 K, elevando T_c para 160 K [10]. Em 2002, Passos *et al.* [11] investigaram a influência da oxigenação nas amostras supercondutoras do tipo $\text{HgReBaCuO}(1223)$.

Em 2001, Akimitsu *et al.* [12] comunicaram a descoberta de supercondutividade no composto binário diboreto de magnésio MgB_2 . As medições de resistividade e magnetização indicaram uma temperatura crítica T_c de aproximadamente 39 K, a mais elevada atingida por um supercondutor intermetálico.

Em 2008, Hosono *et al.* [13] descobriram a supercondutividade em compostos baseados em ferro, também conhecidos como "*iron pnictides*". Os compostos LaFeOP e $\text{LaFeAsO}_{1-x}\text{F}_x$ apresentavam supercondutividade em 4 K e 26 K respectivamente. As expectativas se deram por serem raros os casos de supercondutores com elementos magnéticos.

1.2 EFEITO CASIMIR

Em 1948, Casimir [14] previu a existência de uma força atrativa entre dois condutores paralelos e eletricamente neutros, o que pode ser interpretado como uma flutuação da energia de ponto zero das ondas eletromagnéticas. Este efeito foi chamado de efeito Casimir. Desde então, vários estudos têm focado neste tópico de pesquisa para verificá-lo experimentalmente [15–18]. O efeito Casimir parece ser cada vez mais importante na compreensão das interações em várias áreas da física [19], especialmente no desenvolvimento de novos métodos teóricos e computacionais. Outros trabalhos buscam estabelecer novos modelos para aplicações em diferentes materiais. Entre eles, destacamos o trabalho de Bordag [20] que, em 2006, estudou o efeito da energia de Casimir entre duas placas finas de plasma, modeladas por Barton [21]. O modelo Bordag [20] propôs que uma interação pode ocorrer para distâncias entre planos que são da ordem do comprimento de onda dos plasmons.

Em 2006, Bordag *et al.* [22] publicou um dos primeiros estudos sobre as interações de Casimir para o grafeno, modelando-o como uma folha de plasma. Baseado no modelo Bordag [20], Kempf [23] publicou um artigo sobre o efeito Casimir em Cuprates supercondutores de alta temperatura (Cu-HTSC), modelando-os também como folhas de plasma. Neste trabalho, Kempf [23] descreveu os planos CuO_2 como planos de plasma que interagem através das forças de Casimir [14]. Com esse cenário, a proposta Kempf [23] relaciona T_c à razão entre o número de transportadores de carga e sua massa efetiva.

Como descrito, a proposta de Kempf, associada à energia de Casimir e à proposta de Bordag, correlaciona a razão entre o número de portadores e a massa efetiva na temperatura de transição. Em Cu-HTSC, o número de portadores é difícil de avaliar, uma vez que poucas medidas diretas são realizadas em monocristais, como o termopoder ou o efeito Hall. Em policristais, essas medidas são de pouca confiabilidade. No entanto, Uemura *et al.* [24–26], indicou que existe outra maneira de obter a relação entre o número de portadores e a massa efetiva, mostrando que experimentos de relaxação múon-spin (μSR) estabelecem um método direto para medir λ (comprimento de penetração de profundidade de campo magnético) em supercondutores do tipo II [25]. Nos supercondutores $1/\lambda^2$ é essencialmente determinada pela densidade de portadores supercondutora (n_s/m^*) dividida pela massa efetiva. Uemura *et al.* [24] foram os primeiros a indicar uma correlação universal entre T_c e (n_s/m^*).

1.3 MOTIVAÇÃO

Neste trabalho, a proposta de Uemura *et al.* [24] e o modelo Kempf [23] foram associados, levando em conta que medidas de relaxação de muon-spin em supercondutores anisotrópicos ($\simeq 2D$) fornecem uma correlação entre n_s/m^* e o comprimento de penetração de London λ_{ab} (paralelo aos planos Cu-O). Considerando este procedimento, foi possível obter uma expressão que descreve o comportamento da massa efetiva em Cu-HTSC em função de $\lambda_{ab}(0)$ e T_c . Usando essa expressão, os dados obtidos através dessa nova correlação foram comparados com os valores encontrados na literatura.

Com isso, os capítulos deste trabalho estão apresentados da seguinte forma:

Capítulo 2: Apresentam-se tópicos da fenomenologia da supercondutividade, bem como os parâmetros relevantes dos Cu-HTSC;

Capítulo 3: São abordados aspectos gerais e os principais modelos da teoria do efeito Casimir em que este trabalho está baseado;

Capítulo 4: Apresentam-se detalhes sobre o efeito Casimir em Cu-HTSC, através da equivalência entre a energia de Casimir e a energia de condensação supercondutora. Neste capítulo também são apresentados dados sobre o comportamento da massa efetiva para vários Cu-HTSC;

Capítulo 5: É realizada a discussão dos resultados e a conclusão. Também estão relacionadas as propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

SUPERCONDUTIVIDADE

2.1 TEORIA DE LONDON

Numa tentativa de entender a condutividade ideal, os irmãos F. e H. London [3] utilizaram as equações de Maxwell para descrever as propriedades elétricas e magnéticas, onde se destacam a resistência nula e o diamagnetismo perfeito. As equações de Maxwell podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Quando um campo magnético é aplicado a um supercondutor, de acordo com a lei de Faraday, nele é induzido um campo elétrico e os superelétrons são acelerados livremente. Assim, a densidade de supercorrente que circula é dada por:

$$\vec{J}_s = n_s e \vec{v}_s,$$

onde n_s é a densidade de elétrons supercondutores e \vec{v}_s a velocidade dos mesmos.

Da segunda lei de Newton,

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} &= -e\vec{E} \\ m \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\vec{J}_s}{n_s e} \right) &= -e\vec{E} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m\vec{J}_s}{n_s e^2} \right) &= \vec{E}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

A Equação (2.1) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\vec{E} = \frac{m}{n_s e^2} \frac{\partial \vec{J}_s}{\partial t} \quad (2.2)$$

Os campos no interior da amostra devem satisfazer as equações de Maxwell, portanto

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \left[\frac{m}{n_s e^2} \frac{\partial \vec{J}_s}{\partial t} \right] &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \left[\frac{\partial \vec{J}_s}{\partial t} \right] + \frac{n_s e^2}{m} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Como a derivada pode ser trocada de ordem com o rotacional,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{\nabla} \times \vec{J}_s + \frac{n_s e^2}{m} \vec{B} \right] = 0. \quad (2.3)$$

Como o termo entre colchetes deve ser uma constante em relação ao tempo,

$$\vec{\nabla} \times \vec{J}_s + \frac{n_s e^2}{m} \vec{B} = \vec{F}(\vec{r}), \quad (2.4)$$

onde $\vec{F}(\vec{r})$ é uma função vetorial que pode, em princípio, depender de \vec{r} . Esse comportamento é válido para condutores perfeitos, mas não para supercondutores, cujos campos magnéticos internos devem sempre ser nulos (Efeito Meissner). A contribuição dos irmãos London [3] foi verificar que a solução particular da Equação (2.3) para um supercondutor é dada por

$$\vec{\nabla} \times \vec{J}_s + \frac{n_s e^2}{m} \vec{B} = 0. \quad (2.5)$$

Substituindo a Equação de Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_s$ e a identidade vetorial $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$ na Equação (2.5), a seguinte equação é obtida:

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{\mu_0 n_s e^2}{m} \vec{B}. \quad (2.6)$$

Define-se um comprimento característico, chamado de comprimento de penetração de London, como

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}} \quad (2.7)$$

Portanto, a Equação (2.6) pode ser reescrita como

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B}. \quad (2.8)$$

Supõe-se que um material supercondutor preencha toda a região em que $z > 0$ e que o campo tenha apenas a componente B_x e também que B_x dependa apenas de z . Neste caso, a equação torna-se

$$\frac{d^2}{dz^2} B_x - \frac{1}{\lambda_L^2} B_x = 0, \quad (2.9)$$

que tem como solução

$$B_x(z) = B_0 e^{-\frac{1}{\lambda_L} z} \quad (2.10)$$

De acordo com a solução da equação diferencial, o campo magnético \vec{B} decresce exponencialmente quando age sobre um supercondutor e deve ser apreciável somente até uma distância λ_L medida a partir da superfície do supercondutor.

De maneira analoga, da Equação (2.5) pode ser obtida a equação para a densidade de corrente \vec{J}_s :

$$\nabla^2 \vec{J}_s = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{J}_s. \quad (2.11)$$

que indica que a densidade de corrente circula pela amostra até uma profundidade λ_L , decrescendo exponencialmente à medida que entra no volume do supercondutor. O efeito Meissner encontra-se representado na Figura 2.1. Observa-se que um supercondutor, inicialmente a temperatura elevada (superior), é primeiramente resfriada (à esquerda) e depois colocada num campo magnético (inferior), então o campo magnético não pode penetrar o material (inferior). Esta é uma consequência de resistividade zero. Por outro lado, um supercondutor (superior) pode ser colocado em primeiro lugar num campo magnético (à direita) e, em seguida, resfriada

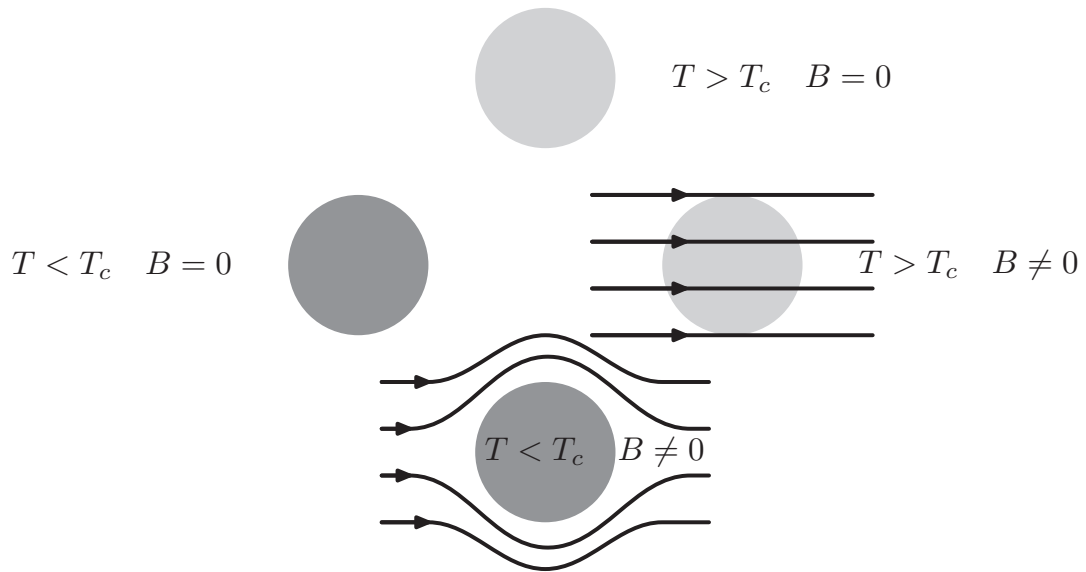


Figura 2.1 – O efeito Meissner-Ochsenfeld em supercondutores [27].

(inferior). Neste caso, o campo magnético também é expelido do sistema.

2.2 MODELO DE GINZBURG-LANDAU

O modelo de Ginzburg–Landau, elaborado em 1950, também é uma teoria fenomenológica, mas diferentemente do de London, tinha a vantagem de descrever corretamente a transição de fase supercondutora do ponto de vista termodinâmico [4].

2.2.1 Termodinâmica da Transição de Fase

Para um tratamento termodinâmico, considere uma amostra cilíndrica em um solenoide de área transversal A e volume $V = AL$, como mostrado na Figura 2.2.

A corrente na amostra pode ser obtido aplicando a Lei de Ampère ($\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = Ni$) e será igual a

$$i = \frac{L}{N}H.$$

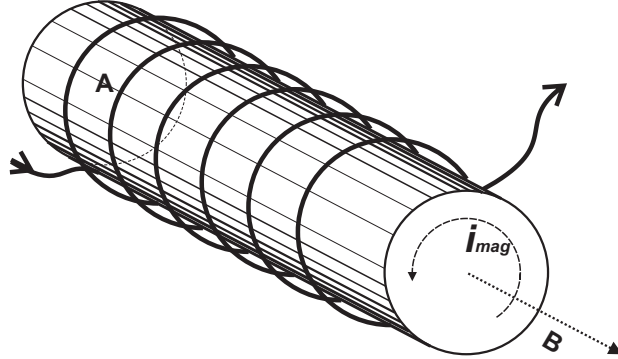


Figura 2.2 – Amostra supercondutora cilíndrica localizada no interior de um solenóide.

onde H é o campo aplicado na amostra e N é o número de voltas. O trabalho total será dado por $dW = -\varepsilon dq$ onde $\varepsilon = -NA \frac{d\vec{B}}{dt}$ é a f.e.m induzida pela mudança do fluxo magnético total através da amostra, sendo B o campo induzido na amostra. Portanto,

$$\begin{aligned}
 dW &= -\varepsilon dq \\
 &= \left[NA \frac{d\vec{B}}{dt} \right] i dt \\
 &= \left[NA \frac{d\vec{B}}{dt} \right] \left[\frac{L}{N} \vec{H} \right] dt \\
 &= AL \vec{H} d\vec{B} \\
 &= V \vec{H} d\vec{B} \\
 &= \mu_0 V \vec{H} (d\vec{M} + d\vec{H}) \\
 &= \mu_0 V \vec{H} \cdot d\vec{M} + \mu_0 V \vec{H} \cdot d\vec{H}.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Usou-se nas equações acima, a identidade $\vec{B} = \mu_0 (\vec{M} + \vec{H})$. Como não é de interesse a contribuição do trabalho feito pela auto-indutância do solenóide na amostra, a Equação (2.12) torna-se

$$dW = \mu_0 V \vec{H} \cdot d\vec{M}. \tag{2.13}$$

Da Primeira Lei da Termodinâmica, se tem que

$$\begin{aligned} dU &= TdS + dW \\ &= TdS + \mu_0 V \vec{H} \cdot d\vec{M}. \end{aligned}$$

Não é interessante que as variáveis sejam a Entropia e a Magnetização, pois tais grandezas não podem ser medidas diretamente em laboratório. Portanto define-se a energia livre de Gibbs:

$$\begin{aligned} G &= U - \mu_0 V \vec{H} \cdot \vec{M} - TS \\ dG &= dU - \mu_0 V (\vec{H} \cdot \vec{M}) - d(TS) \\ dG &= TdS + \mu_0 V \vec{H} \cdot d\vec{M} - \mu_0 V \vec{M} \cdot d\vec{H} - \mu_0 V \vec{H} \cdot d\vec{M} - TdS - SdT \\ dG &= -SdT - \mu_0 V \vec{M} \cdot d\vec{H}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Com a energia livre de Gibbs pode-se calcular a diferença de energia entre o estado normal (G_n) e supercondutor (G_s). Integrando a Equação (2.14), mas para $dT = 0$, se obtém

$$G_s(T, H_c) - G_s(T, 0) = \int_0^{H_c} dG = \mu_0 V \int_0^{H_c} \vec{M} \cdot d\vec{H}.$$

Pelo efeito Meissner, $\vec{M} = -\vec{H}$, portanto

$$G_s(T, H_c) - G_s(T, 0) = \mu_0 V \int_0^{H_c} \vec{H} d\vec{H} = \mu_0 V \frac{H_c^2}{2}.$$

Porém, para o campo crítico $G_s(T, H_c) = G_n(T, H_c)$. E como não há magnetização ($M = 0$) para o estado normal, $G_n(T, H_c) = G_n(T, 0)$. Logo,

$$G_s(T, H_c) = G_n(T, 0).$$

Dessa maneira,

$$G_s(T, 0) - G_n(T, 0) = -\mu_0 V \frac{H_c^2}{2}. \quad (2.15)$$

A Equação (2.15) mostra que, a campo zero, a energia no estado supercondutor é menor que a energia no estado normal, o que prova que o estado supercondutor é estável. O termo do lado direito da Equação (2.15) é chamado de energia de condensação.

O gráfico do campo crítico em função da temperatura crítica para um supercondutor do tipo I e do tipo II é mostrado na Figura 2.3.

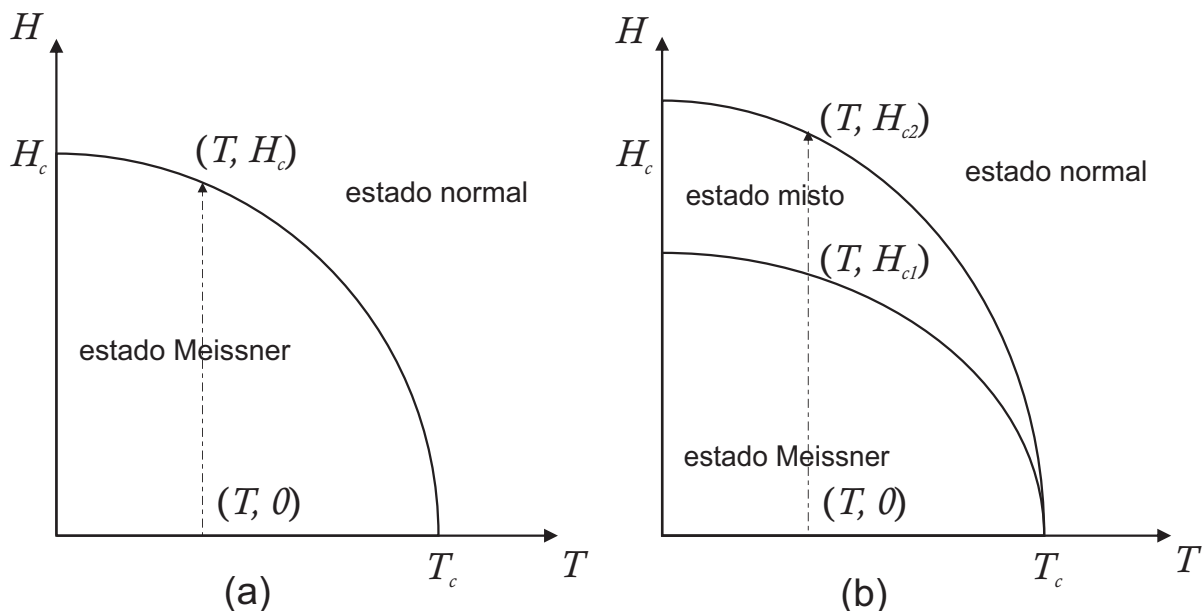


Figura 2.3 – Gráfico usado para o cálculo da energia de condensação para um supercondutor (a) do tipo I e (b) do tipo II.

Como já visto anteriormente,

$$\begin{aligned}
 G_s(T, H_c) &= G_n(T, H_c) \\
 dG_s(T, H_c) &= dG_n(T, H_c) \\
 -S_s dT - \mu_0 V \vec{M}_s \cdot d\vec{H} &= -S_n dT - \mu_0 V \vec{M}_n \cdot d\vec{H}.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Como, pelo efeito Meissner, a magnetização é $\vec{M}_s = -\vec{H}$ no estado supercondutor e $\vec{M}_n = 0$ no estado normal, a equação anterior se reduz a seguinte equação:

$$S_s - S_n = \mu_0 V \vec{H}_c \cdot \frac{d\vec{H}_c}{dT} \tag{2.17}$$

$$\Delta Q = T(S_s - S_n) = \mu_0 V T \vec{H}_c \cdot \frac{d\vec{H}_c}{dT}. \tag{2.18}$$

Como $d\vec{H}_c/dT < 0$, a Entropia no estado supercondutor é menor que a do estado normal, portanto ocorre uma diferença de energia entre as fases na transição a temperatura constante, sendo esta uma transição de 1ª ordem.

Na temperatura crítica T_c , onde $H_c = 0$, ocorre que $S_s = S_n$ e $\Delta Q = T(S_s - S_n) = 0$, o que mostra que não há diferença de energia entre as duas fases, sendo esta uma transição de segunda ordem.

2.2.2 Equações de Ginzburg-Landau

O modelo de Ginzburg-Landau [4] considera que a supercondutividade pode ser descrita por um parâmetro de ordem. Como a supercondutividade só aparece para temperaturas abaixo da temperatura crítica,

$$\begin{aligned}\Psi = 0 &\rightarrow T \geq T_c \\ \Psi \neq 0 &\rightarrow T < T_c.\end{aligned}\tag{2.19}$$

É possível escrever a densidade de energia livre como

$$g_s(T) = g_n(T) + a(T)|\Psi|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\Psi|^4 + \dots\tag{2.20}$$

pois o parâmetro de ordem é complexo e apenas as potências pares são reais e tem significado físico. Os parâmetros $a(T)$ e $b(T)$ são fenomenológicos e dependem suavemente da temperatura.

O mínimo de energia será para $\partial g_s / \partial |\Psi|^2 = 0$, ou seja

$$\begin{aligned}0 &= a(T) \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial |\Psi|^2} + \frac{1}{2}b(T) \frac{\partial |\Psi|^4}{\partial |\Psi|^2} \\ &|\Psi|^2 = -\frac{a(T)}{b(T)}.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Então, a Equação (2.20) torna-se

$$\begin{aligned}g_s(T) &= g_n(T) + a(T) \left[-\frac{a(T)}{b(T)} \right] + \frac{1}{2}b(T) \left[-\frac{a(T)}{b(T)} \right]^2 \\ g_s(T) - g_n(T) &= -\frac{1}{2} \frac{a(T)^2}{b(T)}.\end{aligned}$$

Analisando a Equação (2.21), observa-se que:

$$b(T) > 0 \quad , \text{ senão a densidade de energia não teria um mínimo.}$$

$$a(T) = 0 \quad \text{para } T = T_c, \text{ pois } \Psi = 0.$$

$$a(T) < 0 \quad \text{para } T < T_c, \text{ pois } \Psi > 0.$$

Para um supercondutor em um campo externo uniforme, a densidade de energia livre de Gibbs pode ser escrita como

$$g_s = g_n + a|\Psi|^2 + \frac{b}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{4m} \left| \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \Psi - 2e\vec{A}\Psi \right|^2 + \frac{(\vec{\nabla} \times \vec{A})^2}{2\mu_0} - (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{H}_0$$

onde o 4º termo está relacionado à energia cinética e os dois últimos representam a densidade de energia magnética, sendo H_0 o campo externo aplicado. Daí, integrando no volume do supercondutor,

$$G_s = G_n + \int_V \left[a|\Psi|^2 + \frac{b}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{4m} \left| \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \Psi - 2e\vec{A}\Psi \right|^2 + \frac{(\vec{\nabla} \times \vec{A})^2}{2\mu_0} - (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{H}_0 \right] d^3r.$$

Tomando-se a variação de G_s :

$$\delta G_s [\Psi(r), \Psi^*(r), A(r)] = \int_V \left[\frac{\delta G_s}{\delta \Psi} \delta \Psi + \frac{\delta G_s}{\delta \Psi^*} \delta \Psi^* + \frac{\delta G_s}{\delta A} \delta A \right] d^3r.$$

pois G_s depende de $\Psi(r)$, $\Psi^*(r)$ e $A(r)$. Para o mínimo de energia, $\delta G_s = 0$ e então

$$\frac{\delta G_s}{\delta \Psi} = \frac{\delta G_s}{\delta \Psi^*} = \frac{\delta G_s}{\delta A} = 0.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \delta G_s = \int_V [a|\Psi|^2 + \frac{b}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{4m} \left| \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \Psi - 2e\vec{A}\Psi \right|^2 \\ + \frac{(\vec{\nabla} \times \vec{A})^2}{2\mu_0} - (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{H}_0] d^3r = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Primeiro, faz-se $\Psi(\vec{r})$ e $\vec{A}(\vec{r})$ invariantes e $\Psi^*(\vec{r})$ variante. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \delta G_s = & \int_V [a\Psi\delta\Psi^* \\ & + b\Psi|\Psi|^2\delta\Psi^* \frac{1}{4m} (-i\hbar\vec{\nabla}\delta\Psi^* - 2e\vec{A}\delta\Psi^*) \cdot (-i\hbar\vec{\nabla}\Psi - 2e\vec{A}\Psi)] d^3r = 0. \end{aligned}$$

que tem como soluções

$$a\Psi + 2b\Psi|\Psi|^2 + \frac{1}{4m} (-i\hbar\vec{\nabla} - 2e\vec{A})^2 \Psi = 0 \quad (2.23)$$

$$(-i\hbar\vec{\nabla}\Psi - 2e\vec{A}\Psi) \cdot \vec{n} = 0. \quad (2.24)$$

Agora, faz-se $\Psi^*(\vec{r})$ e $\vec{A}(\vec{r})$ invariantes e $\Psi(\vec{r})$ variante. Porém, a Equação (2.22) terá a mesma forma. Sendo assim, as equações serão análogas às duas soluções anteriores. As Equações (2.23) e (2.24) definem o parâmetro de ordem Ψ , pois Ψ é solução da primeira equação acima, e sua condição de contorno, pois da segunda equação $\vec{A} \cdot \vec{n} = 0$, ou seja, nenhuma supercorrente atravessa a superfície do supercondutor.

Faz-se agora $\Psi(\vec{r})$ e $\Psi^*(\vec{r})$ invariantes e $\vec{A}(\vec{r})$ variante.

$$\begin{aligned} \delta G_s = & \int_V \left\{ \frac{1}{4m} [(-i\hbar\vec{\nabla}\Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*) \cdot (-i\hbar\vec{\nabla}\Psi - 2e\vec{A}\Psi)] \delta A \right. \\ & \left. + \frac{(\vec{\nabla} \times \vec{A})(\vec{\nabla} \times \delta\vec{A})}{2\mu_0} - (\vec{\nabla} \times \delta\vec{A}) \cdot \vec{H}_0 \right\} d^3r = 0. \end{aligned}$$

Esta equação tem como solução

$$\vec{J}_s = i\hbar e \left[\Psi^* \vec{\nabla}\Psi - \Psi \vec{\nabla}\Psi^* \right] - \frac{2e^2 \vec{A}}{m} |\Psi|^2. \quad (2.25)$$

Essa é conhecida como a equação do modelo de Ginzburg-Landau. Para um estado coerente, ou seja, $\Psi = |\Psi| e^{i\theta}$, essa equação se torna a equação de London generalizada.

$$\vec{J}_s = \frac{2n_s e^2}{m} \left\{ \frac{\hbar \vec{\nabla}\theta}{2e} - \vec{A} \right\}. \quad (2.26)$$

Para o caso de um estado coerente, sendo que os portadores da corrente supercondutora são os

pares de Cooper, portanto $m \rightarrow 2m$. Portanto,

$$\vec{J}_s = \frac{1}{\lambda_L} \left\{ \frac{\hbar \vec{\nabla} \theta}{2e} - \vec{A} \right\}. \quad (2.27)$$

Essa é conhecida como a equação de London Generalizada. Para $\theta = 0$, esta equação se torna a equação proposta pela teoria de London.

$$J_s = -\frac{\vec{A}}{\lambda_L}. \quad (2.28)$$

Pelo fato de se reduzir a solução encontrada na teoria de London, o modelo de Ginzburg-Landau denota ser consistente e mais abrangente do que a teoria de London.

2.2.3 Energia de Superfície

Define-se a energia de superfície como a energia necessária para a formação do contorno entre as fases. Logo, a interface, onde $g_{sH} \neq g_n$, a energia de superfície por unidade de área é dada por

$$\sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{+\infty} (g_{sH} - g_n) dx \quad (2.29)$$

da qual se pode obter, usando as equações de Ginzburg-Landau a seguinte equação:

$$\sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\Phi_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\left(\frac{\xi}{\lambda_L} \right) \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \frac{H(H - H_c)}{2H_c^2 \lambda_L \xi} \right) \right] dx \quad (2.30)$$

onde $\xi(T) = \left(\frac{\hbar^2}{4m |a(T)|} \right)$, é chamado comprimento de coerência. Esta equação relaciona os conceitos de comprimento de coerência e comprimento de penetração com a energia de superfície de um supercondutor. Como o campo no interior do supercondutor é $H < H_c$, para a energia de superfície $\sigma_{ns} > 0$, resulta $\xi \gg \lambda_L$. Para $\sigma_{ns} < 0$ resulta $\xi \ll \lambda_L$.

Define-se aqui o parâmetro de Ginzburg-Landau como

$$\kappa = \frac{\lambda_L}{\xi}. \quad (2.31)$$

Portanto, se $\xi \gg \lambda_L$, tem-se $\kappa \ll 1$, e este é chamado de supercondutor do tipo I. A passa-

gem exata do positivo para o negativo da energia de superfície ocorre para $\kappa = 1/\sqrt{2}$. Abrikosov [28] mostrou que $\kappa > 1/\sqrt{2}$ para um grande número de ligas supercondutoras cujas propriedades magnéticas não tinham previamente sido bem compreendidas e denominou esses materiais de supercondutores do tipo II.

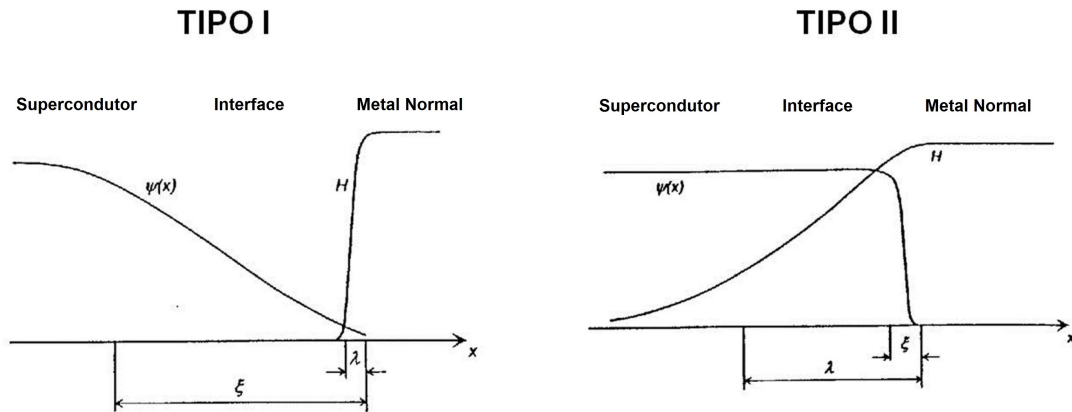


Figura 2.4 – As variações espaciais do parâmetro de ordem ψ e do campo magnético H na vizinhança da interface Normal-Supercondutor [29].

2.3 SUPERCONDUTORES DO TIPO I E II

A resposta dos supercondutores na presença de um campo magnético aplicado divide os supercondutores em dois tipos: tipo I e tipo II.

Considerando um supercondutor do tipo I, onde $\sigma_{ns} > 0$, o surgimento de domínios normais em seu interior aumentaria a energia livre da amostra além do aumento devido à superfície normal–supercondutora, e sendo assim, tal fato não ocorre. Dessa maneira, os supercondutores do tipo I apresentam apenas o estado Meissner e normal, onde o campo magnético penetra na amostra apenas se for maior que o valor crítico B_c .

Para um supercondutor do tipo II, onde $\sigma_{ns} < 0$, o surgimento de domínios normais diminuiria a energia livre da amostra, desde que o acréscimo de energia devido ao interior dos domínios normais não seja maior que a energia de superfície normal–supercondutora da amostra.

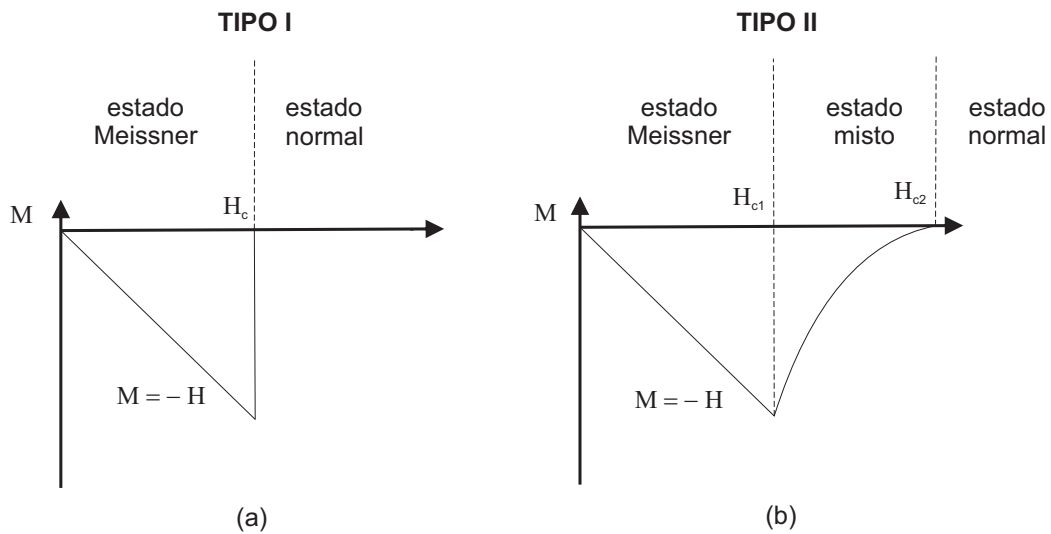


Figura 2.5 – Comportamento da magnetização em função do campo magnético aplicado em supercondutores do (a) tipo I e (b) tipo II.

2.3.1 Rede de Abrikosov

Os supercondutores do tipo II apresentam dois campos críticos: campo crítico inferior H_{c1} e superior H_{c2} . Abaixo de H_{c1} ocorre a exclusão total do campo magnético. Porém, para valores de campo aplicado entre H_{c1} e H_{c2} o efeito Meissner é apenas parcial, surgem domínios normais em seu interior onde o campo magnético penetra na amostra através de filamentos de vórtices quantizados e já não se pode considerar a existência do efeito Meissner, sendo esse estado chamado de estado misto.

Os vórtices de Abrikosov são filamentos normais que se formam no estado misto. Estes filamentos são estruturas cilíndricas, orientadas paralelamente à direção das linhas de indução do campo magnético aplicado. Acima de H_{c1} , o campo penetra na amostra através de filamentos de vórtices quantizados, formando uma rede triangular onde cada um contém um *quantum* de fluxo magnético, dado por

$$\phi_0 = \frac{\hbar}{2e} \quad (2.32)$$

Quanto maior a intensidade do campo magnético aplicado, maior o número de vórtices presentes na amostra e menor a distância entre eles, até que passam a se sobrepôr, reduzindo o domínio supercondutor na amostra. Quando o campo magnético aplicado é igual a H_{c2} , o supercondutor sofre uma transição para o estado normal.

2.4 MASSA EFETIVA

2.4.1 Energia de Banda

No modelo de elétrons livres dentro de uma cavidade retangular, escreve-se o hamiltoniano como

$$\hat{H}\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \varepsilon\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad (2.33)$$

onde

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (2.34)$$

Já os valores energéticos permitidos são dados por

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (2.35)$$

Para y e z fixos,

$$\begin{aligned} \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) &= \psi_{\vec{k}}(\vec{r} + L_x\hat{x}) \\ \frac{1}{\sqrt{V}}e^{ik_x x} &= \frac{1}{\sqrt{V}}e^{ik_x(x+L_x)} \\ e^{ik_x L_x} &= 1 \\ k_x &= \pm \frac{2\pi n_x}{L_x} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Da mesma forma,

$$k_y = \pm \frac{2\pi n_y}{L_y} \quad \text{e} \quad k_z = \pm \frac{2\pi n_z}{L_z} \quad (2.37)$$

com $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots$

Os elétrons em cristais são organizados em bandas de energia separadas por regiões em energia para as quais não existam orbitais de elétrons. Tais regiões proibidas são chamados de gaps de energia ou lacunas da banda, e resultam da interação das ondas de elétrons de condução com os íons do cristal [30]. A Figura 2.6 mostra a estrutura de banda para um gap de energia em

$$k = \pm \frac{2\pi}{a}$$

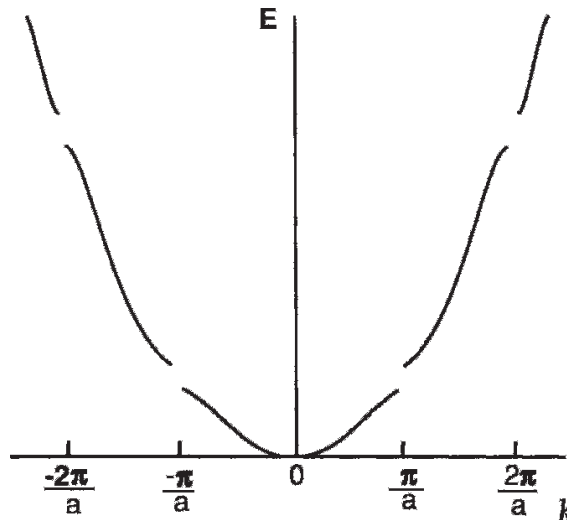


Figura 2.6 – Gap de energia [30].

A condição de Bragg $(k + L)^2 = k^2$ para difração de uma onda de vetor de onda k se torna em uma dimensão

$$k = \pm \frac{1}{2}G = \pm \frac{n\pi}{a} \quad (2.38)$$

onde $G = \frac{2\pi n}{a}$ é um vetor de rede recíproca e n é um número inteiro. As primeiras reflexões e o primeiro gap de energia ocorre em $k = \pm\pi/a$. A região no espaço entre $-\pi/a$ e $+\pi/a$ é a primeira zona de Brillouin desta estrutura. Outros gaps de energia ocorre para outros valores do inteiro n .

2.4.2 Equação de onda do elétron em um potencial periódico

A energia potencial é invariante sob uma translação da rede cristalina $U(\vec{r}) = U(\vec{r} + \vec{a})$, sendo $U(\vec{r})$ a energia potencial de um elétron em uma estrutura linear da constante de rede a . A função invariante sob uma translação da estrutura cristalina pode ser expandida como uma série de Fourier nos vetores da rede recíproca G . A série de Fourier para a energia potencial pode ser escrita como

$$U(\vec{r}) = \sum_G U_G e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} \quad (2.39)$$

Como a energia potencial deve ser uma função real,

$$U(\vec{r}) = \sum_{G>0} U_G \left(e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} + e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} \right) \quad (2.40)$$

Portanto, a equação de onda de um elétron no cristal é

$$\begin{aligned} H\psi(\vec{r}) &= \varepsilon\psi(\vec{r}) \\ \left(\frac{p^2}{2m} + U(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}) &= \varepsilon\psi(\vec{r}) \\ \left(\frac{p^2}{2m} + \sum_G U_G e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} \right) \psi(\vec{r}) &= \varepsilon\psi(\vec{r}) \end{aligned} \quad (2.41)$$

A função de onda $\psi(\vec{r})$ pode ser expressa como uma série de Fourier de todos os valores do vetor de onda permitidos pelas condições de contorno, de modo que,

$$\psi(\vec{r}) = \sum_k C_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (2.42)$$

onde k é real. Substituindo a Equação (2.42) na Equação (2.41),

$$\begin{aligned} \left(\frac{p^2}{2m} + \sum_G U_G e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} \right) \sum_k C_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} &= \varepsilon \sum_k C_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ \frac{p^2}{2m} \sum_k C_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \sum_G \sum_k U_G e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} C_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} &= \varepsilon \sum_k C_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Como o operador momento é $p = -i\hbar \frac{d}{dr}$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{d}{dr} \right)^2 \sum_k C_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \sum_G \sum_k U_G e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} C_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} &= \varepsilon \sum_k C_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} \sum_k C_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \sum_G \sum_k U_G e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} C_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} &= \varepsilon \sum_k C_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ \frac{\hbar^2}{2m} \sum_k k^2 C_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \sum_G \sum_k U_G C_k e^{i(\vec{k}+\vec{G})\cdot\vec{r}} &= \varepsilon \sum_k C_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ \frac{\hbar^2}{2m} \sum_k k^2 C_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \sum_G \sum_k U_G C_k e^{i(\vec{k}+\vec{G})\cdot\vec{r}} - \varepsilon \sum_k C_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Note que se k entra na expansão de Fourier, então, $k - G$ também pode entrar, desde que os autovetores $k - G$ estejam restritos ao conjunto $\frac{2\pi n}{L}$. Sendo assim, escrevendo

$$\psi(\vec{r}) = C_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + C_{k-G} e^{i(\vec{k}-\vec{G})\cdot\vec{r}} \quad (2.45)$$

a Equação (2.44) se torna

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m} \sum_k k^2 C_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \sum_G \sum_k U_G C_{k-G} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \varepsilon \sum_k C_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} &= 0 \\ \sum_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \left[\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \varepsilon \right) C_k + \sum_G U_G C_{k-G} \right] &= 0 \\ \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \varepsilon \right) C_k + \sum_G U_G C_{k-G} &= 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Fazendo $\lambda_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, a Equação acima se torna

$$(\lambda_k - \varepsilon) C_k + \sum_G U_G C_{k-G} = 0 \quad (2.47)$$

A Equação (2.47) é chamada de equação central. Portanto, escrevendo as equações para as duas componentes,

$$(\lambda_k - \varepsilon) C_k + U C_{k-G} = 0 \quad (2.48)$$

$$(\lambda_{k-G} - \varepsilon) C_{k-G} + U C_k = 0 \quad (2.49)$$

das quais se obtém

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 - \varepsilon (\lambda_{k-G} + \lambda_k) + \lambda_{k-G} \lambda_k - U^2 &= 0 \\ \varepsilon &= \frac{1}{2} (\lambda_{k-G} + \lambda_k) \pm \left[\frac{1}{4} (\lambda_{k-G} - \lambda_k)^2 + U^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Fazendo $\lambda_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, a Equação acima se torna

$$\begin{aligned}
\varepsilon_k &= \frac{1}{2} \left[\frac{\hbar^2 (k - G)^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right] \pm \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{\hbar^2 (k - G)^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right]^2 + U^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
\varepsilon_k &= \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{2m} [(k - G)^2 + k^2] \pm \left\{ \frac{1}{4} \frac{\hbar^2}{2m} [(k - G)^2 - k^2]^2 + U^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
\varepsilon_k &= \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{2m} [k^2 - 2kG + G^2 + k^2] \pm \left\{ \frac{1}{4} \frac{\hbar^2}{2m} [k^2 - 2kG + G^2 - k^2]^2 + U^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
\varepsilon_k &= \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{2m} [2k^2 - 2kG + G^2] \pm \left\{ \frac{1}{4} \frac{\hbar^2}{2m} [-2kG + G^2]^2 + U^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.51}
\end{aligned}$$

Fazendo $k = K + \frac{1}{2}G$, observa-se que

$$\varepsilon_K = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{2m} \left[2 \left(K + \frac{1}{2}G \right)^2 - 2 \left(K + \frac{1}{2}G \right) G + G^2 \right] \pm \left\{ \frac{1}{4} \frac{\hbar^2}{2m} \left[-2 \left(K + \frac{1}{2}G \right) G + G^2 \right]^2 + U^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Sendo assim,

$$\varepsilon_K = \frac{\hbar^2}{2m} \left[K^2 + \frac{1}{4}G^2 \right] \pm \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} K^2 G^2 + U^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Agora, fazendo $\lambda = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{G}{2} \right)^2$ e $\varepsilon_c = \lambda \pm U$, chega-se a seguinte Equação:

$$\varepsilon_K = \varepsilon_c + \frac{\hbar^2 K^2}{2m} \left(1 \pm \frac{2\lambda}{U} \right) \tag{2.52}$$

Esta ultima Equação pode ser escrita como

$$\varepsilon_K = \varepsilon_c + \frac{\hbar^2 K^2}{2m^*} \quad \text{onde} \quad \frac{m^*}{m} = \frac{1}{\left[1 \pm \frac{2\lambda}{U} \right]} \tag{2.53}$$

O ponto importante é que um elétron num potencial periódico é acelerado em relação à rede num campo elétrico ou magnético aplicado como se a massa do elétron fosse equivalente a uma massa efetiva [31].

Por definição, supondo que o pacote de ondas é composta de funções de onda reunidos perto de

um determinado vetor de onda k , a velocidade de grupo é

$$\nu_g = \frac{1}{\hbar} \frac{d\varepsilon}{dk} \quad (2.54)$$

Usando propriedades da derivada,

$$\begin{aligned} \frac{d\nu_g}{dt} &= \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dt} \frac{d\varepsilon}{dk} \\ &= \frac{1}{\hbar} \frac{d^2\varepsilon}{dk dt} \frac{dk}{dk} \\ &= \frac{1}{\hbar} \frac{d^2\varepsilon}{dk^2} \frac{dk}{dt} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Tendo em vista que o trabalho $\delta\varepsilon$ feito sobre o elétron pelo campo elétrico E no intervalo de tempo δt é

$$\delta\varepsilon = -eE\nu_g\delta t \quad (2.56)$$

e que

$$\delta\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{dk}\delta k = \hbar\nu_g\delta k \quad (2.57)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \hbar\nu_g\delta k &= -eE\nu_g\delta t \\ \delta k &= -\frac{eE}{\hbar}\delta t \end{aligned} \quad (2.58)$$

Sendo assim,

$$\hbar \frac{dk}{dt} = -eE \quad (2.59)$$

Escrevendo em termos da força externa \vec{F} ,

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{\vec{F}}{\hbar} \quad (2.60)$$

Substituindo a Equação (2.60) na Equação (2.55),

$$\begin{aligned}\frac{d\nu_g}{dt} &= \frac{1}{\hbar} \frac{d^2\varepsilon}{dk^2} \frac{\vec{F}}{\hbar} \\ \frac{d\nu_g}{dt} &= \left(\frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2\varepsilon}{dk^2} \right) \vec{F}\end{aligned}\quad (2.61)$$

Definindo $\hbar^2 \left(\frac{d^2\varepsilon}{dk^2} \right)^{-1}$ como a massa efetiva, a Equação (2.61) se torna a segunda lei de Newton. Dessa forma, define-se a massa efetiva m^* como

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2\varepsilon}{dk^2} \quad (2.62)$$

Outra característica dos Cu-HTSC pode ser associada ao modelo proposto por Lawrence e Doniach [32]. Trata-se de uma transição 2D-3D devido ao acoplamento por tunelamento Josephson dos planos supercondutores que ocorre quando se resfria a amostra até temperaturas próximas de T_c . Essa anisotropia, associada a mobilidade dos portadores de carga supercondutores, permite descrever a massa efetiva na forma tensorial, a saber:

$$\left(\frac{1}{m^*} \right)_{\mu\nu} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2\varepsilon}{dk_\mu dk_\nu} \quad (2.63)$$

Nos Cu-HTSC, a massa efetiva pode ser totalmente caracterizada por duas componentes: $m_a^* = m_b^* = m_{ab}^*$ e m_c^* [33], onde o fator de anisotropia é escrito como $m_c^* = \beta m_{ab}^*$. Dessa maneira, o tensor descrito na Equação (2.63) pode ser reescrito como segue:

$$m^* = \begin{pmatrix} m_{ab}^* & 0 & 0 \\ 0 & m_{ab}^* & 0 \\ 0 & 0 & \beta m_{ab}^* \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

A massa efetiva média m_{av}^* é igual a $(m_{ab}^{*2} m_c^*)^{1/3}$, conforme ref. [33]. Isto permite escrever a massa efetiva m^* desses cupratos como

$$\begin{aligned}m^* &= m_{av}^* \\ &= (m_{ab}^{*2} m_c^*)^{1/3} \\ &= \beta^{1/3} m_{ab}^*\end{aligned}\quad (2.65)$$

2.5 COMPRIMENTO DE PENETRAÇÃO DE LONDON E O MODELO DE UEMURA

A massa efetiva tem sido usada em vários modelos de campo médio. Em especial, Uemura *et al.* [24–26] estabeleceu uma forte correlação entre a temperatura crítica e as medidas de relaxação de múons (μSR) em supercondutores. A μSR está associada a largura inhomogênea dos campos magnéticos locais no estado de vortex sob a ação de um campo magnético externo alto. Usando essa informação, Uemura *et al.* [24] propôs a correlação entre a profundidade de penetração de London e a razão entre o número de portadores dividido pela massa efetiva, a saber:

$$\frac{1}{\lambda^2} \propto \frac{n}{m^*} \quad (2.66)$$

A profundidade de penetração do campo magnético λ é um parâmetro da supercondutividade que se relaciona com a densidade dos portadores n e a massa efetiva m^* da seguinte maneira:

$$\frac{1}{\lambda^2(0)} = \frac{\mu_0 n_{3D} q^2}{m^*} \frac{1}{1 + \frac{\xi}{l}} \quad (2.67)$$

onde μ_0 é permeabilidade magnética no vácuo, q é a carga dos portadores e n_{3D} é a densidade volumétrica de portadores. O segundo termo da equação (2.67) é um fator de correção relacionado ao comprimento de coerência ξ e ao livre caminho médio l . No limite de ξ/l tendendo a zero, tem-se

$$\lambda(0) = \sqrt{\frac{m^*}{\mu_0 n_{3D} q^2}} \quad (2.68)$$

Alguns trabalhos [34, 35] indicam que, para grandes anisotropias, a profundidade de penetração efetiva torna-se independente da anisotropia real, sendo exclusivamente determinada pela profundidade de penetração no plano, ou seja, λ_{ab} . Assim, utilizando a Equação (2.65) na Equação

(2.68), observa-se que

$$\begin{aligned}\lambda(0) &= \sqrt{\frac{m^*}{\mu_0 n_{3D} q^2}} \\ \lambda(0) &= \sqrt{\frac{\beta^{\frac{1}{3}} m_{ab}^*}{\mu_0 n_{3D} q^2}} \\ \lambda(0) &= \beta^{\frac{1}{6}} \sqrt{\frac{m_{ab}^*}{\mu_0 n_{3D} q^2}} \\ \lambda(0) &= \beta^{\frac{1}{6}} \lambda_{ab}(0)\end{aligned}\tag{2.69}$$

Sendo assim, a relação entre $\lambda_{ab}(0)$ e m_{ab}^* , análogas as Equações (2.66) e (2.68) são

$$\frac{1}{\lambda_{ab}^2(0)} \propto \frac{n}{m_{ab}^*}\tag{2.70}$$

$$\lambda_{ab}(0) = \sqrt{\frac{m_{ab}^*}{\mu_0 n_{3D} q^2}}\tag{2.71}$$

A densidade de portadores volumétrica n_{3D} pode ser relacionada com a densidade de portadores planar n_{2D} através da expressão $n_{2D} = n_{3D} d$ [36]. Portanto, a Equação (2.71) pode ser reescrita como:

$$\frac{\lambda_{ab}(0)}{d^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{m_{ab}^*}{\mu_0 n_{2D} q^2}}\tag{2.72}$$

2.6 ENERGIA DE CONDENSAÇÃO PARA O ESTADO SUPERCONDUTOR

O cálculo da densidade de estados pode ser feito considerando a energia de Fermi em duas dimensões. Essa configuração dos plasmons de superfície é análogo ao problema de uma partícula confinada num potencial bidimensional, descrita por uma função de onda $\psi(\vec{r})$, satisfazendo a equação de Schrodinger independente do tempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})\tag{2.73}$$

Esta equação também pode ser escrita como

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) = k^2 \psi(\vec{r}) \quad \text{onde} \quad k \equiv \frac{\sqrt{2m^*E}}{\hbar} \quad (2.74)$$

Utilizando o método de separação de variáveis,

$$\psi(\vec{r}) = X(\vec{x})Y(\vec{y}) \quad (2.75)$$

Substituindo a Equação (2.75) na Equação (2.73),

$$\begin{aligned} Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k^2 XY &= 0 \\ \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.76)$$

Como cada termo depende de uma variável diferente, podem ser igualados a constantes de forma que

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k_x^2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_y^2 \quad (2.77)$$

que tem como soluções, respectivamente

$$X = C_x e^{ik_x x} \quad \text{e} \quad Y = C_y e^{ik_y y} \quad (2.78)$$

Como os plasmôns estão limitados às placas de lado L , a escolha mais satisfatória para as condições de contorno é

$$X(x) = X(x + L) \quad \text{e} \quad Y(y) = Y(y + L) \quad (2.79)$$

que fornecem

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x \quad \text{e} \quad k_y = \frac{2\pi}{L} n_y \quad (2.80)$$

Dessa maneira, em um espaço tridimensional com eixos cartesianos k_x e k_y , os vetores de onda permitidos são aqueles cujas coordenadas ao longo dos eixos são fornecidas pelos múltiplos de $(2\pi/L)$ [37]. Portanto, a área de cada estado permitido ocupa é $(2\pi/L)^2$.

No espaço bidimensional dos momentos é possível trocar de coordenadas cartesianas para polares através da relação

$$dk_x dk_y = 2\pi k dk \quad (2.81)$$

O número de estados é a área total de todos os estados, dividida pela área de um único estado, multiplicado por 2 para dar conta do fato de que cada estado pode ter um spin para cima e um spin para baixo. Portanto

$$\begin{aligned} dN &= 2 \frac{2\pi k dk}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2} \\ &= 2 \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 2\pi k dk \end{aligned} \quad (2.82)$$

Como a energia dessa configuração é dada por,

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \longrightarrow dE = \frac{\hbar^2}{m^*} k dk \quad (2.83)$$

Substituindo a Equação (2.83) na Equação (2.82),

$$\begin{aligned} dN &= 2 \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 2\pi k dk \\ &= 2 \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 2\pi \frac{m^*}{\hbar^2} dE \end{aligned} \quad (2.84)$$

Portanto, a densidade de estados para o gás de Fermi em duas dimensões [30] é dada por

$$D(E_F) = \frac{dN}{dE} = \frac{m^* A}{\pi \hbar^2} \quad (2.85)$$

Da teoria BCS, a energia de condensação em temperatura nula [30] é dada por

$$\begin{aligned} E_{cond} &= -\frac{1}{2} D(E_F) \Delta^2(0) \\ E_{cond} &= -\frac{m^* A}{2\pi \hbar^2} \Delta^2(0) \end{aligned} \quad (2.86)$$

onde $\Delta(0)$ é a energia do gap supercondutor dada por

$$\Delta(0) = \eta k_B T_c \quad (2.87)$$

Substituindo esta última Equação na Equação (2.86),

$$E_{cond} = -\frac{m^* A \eta^2 k_B^2 T_c^2}{2\pi \hbar^2} \quad (2.88)$$

No capítulo 4 esta energia será relacionada com a energia do condensado supercondutora.

2.7 CUPRATOS SUPERCONDUTORES DE ALTA TEMPERATURA - Cu-HTSC

Os cupratos supercondutores de alta temperatura (Cu-HTSC), descobertos em 1986 [7], são esquematicamente descritos como sendo formados por dois componentes estruturais em sua célula unitária, a saber:

- Um bloco que funciona como um reservatório de carga cuja fórmula geral é $MBa_{2-x}O_{4-d}$, (com $M = La, Y, Tl, Hg, Bi, x = 0,1,2$) [38].
- Um conjunto de n planos de CuO_2 ($n = 1,2,3,4,5,6$) [38].

Como exemplo de estrutura dos Cu-HTSC, é apresentada na Figura 2.7 a célula unitária do supercondutor Hg-1223.

Até o momento, as maiores temperaturas de transição foram relatadas para o composto $HgBa_2Ca_2Cu_3O_{8+x}$, que pertence à família dos cupratos à base de mercúrio. Esta família, representada por $Hg-12(n-1)n$, tinha o maior $T_c (= 164K)$ sob pressão para o composto com $n = 3$.

Pelo modelo de transferência de carga, acredita-se que a supercondutividade ocorre predominantemente nos planos de CuO_2 , enquanto as outras camadas fornecem, de algum modo, portadores de carga ou um mecanismo de acoplamento necessário para a supercondutividade. Com base nesta hipótese, é instrutivo ver as camadas de óxido de cobre (CuO_2) como consistindo de camadas de condução [40].

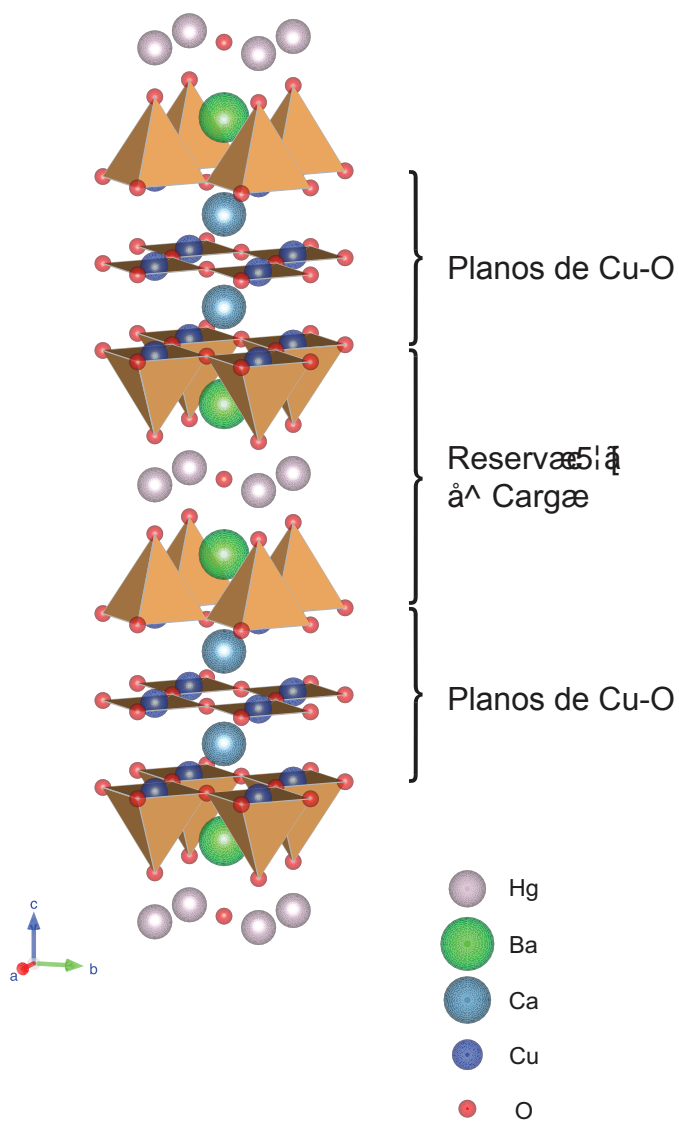


Figura 2.7 – Estrutura cristalina dos Cu-HTSC [39].

A revisão da literatura revela que Putilin *et al.* [41] foram os primeiros a sintetizar o composto $\text{HgBa}_2\text{CuO}_{4+d}$ (Hg-1201), que mostrou $T_c = 94$ K. A família de Cu-HTSC com mercúrio (Hg) foi sintetizada por outros grupos com sucesso no final do século passado [9, 41–43]. Nosso grupo tem investigado as características físicas e químicas da família $\text{Hg-12}(n-1)_n$ desde 1998 [11, 44, 45].

Capítulo 3

EFEITO CASIMIR

3.1 INTRODUÇÃO

Em 1948, Casimir e Polder [46] mostraram que, em consequência da velocidade finita de propagação do campo eletromagnético, a energia de interação interatômica diminuía com o inverso da sexta potência da distância entre os átomos quando estes estavam bem próximos e com o inverso da sétima potência quando estes estavam a grandes distâncias. Em 1992, numa carta a Milonni [47], Casimir relata o encontro que teve com Niels Bohr a cerca de sua recente descoberta. Nesse encontro, lhe foi sugerido por Bohr considerar a energia de ponto zero do vácuo:

"No verão ou outono de 1947 (mas não estou absolutamente certo de que não tenha sido um pouco antes ou depois), mencionei memeraus resultados a Niels Bohr durante uma caminhada. 'Isto é ótimo' disse ele. 'Isto é algo novo'. Disse-lhe que estava intrigado com a forma extremamente simples das expressões para a interação a grandes distâncias e ele resmungou algo sobre a energia do ponto zero. Isto foi tudo, mas colocou-me em uma nova pista. Descobri que calcular as variações da energia do ponto zero leva realmente aos mesmos resultados dos cálculos que fiz com Polder... Em 29 de maio de 1948 apresentei meu trabalho sobre a atração entre duas placas perfeitamente condutoras à Academia Real Holandesa de Artes e Ciências. O trabalho foi publicado no decorrer daquele ano."

Então, também em 1948, Casimir [14] previu a existência de uma força atrativa entre duas placas condutoras, paralelas e eletricamente neutras e que esta força pode ser interpretada como uma flutuação da energia de ponto zero das ondas eletromagnéticas. Esse efeito ficou conhecido como Efeito Casimir.

3.2 CÁLCULO DA FORÇA DE CASIMIR

Como pode ser visto na Equação (B.114), o potencial vetor \vec{A} associado a uma onda eletromagnética no vácuo pode ser descrito pela equação de onda

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = 0 \quad (3.1)$$

Usando o método de separação de variáveis, se faz

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}) q(t) \quad (3.2)$$

onde $q(t)$ é uma função que depende somente do tempo e $\vec{v}(\vec{r})$ é uma função que depende somente de \vec{r} . Substituindo a Equação (3.2) na Equação (3.1),

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} &= 0 \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{v}(\vec{r}) q(t)}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{v}(\vec{r}) q(t) &= 0 \\ \vec{v}(\vec{r}) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} - q(t) \nabla^2 \vec{v}(\vec{r}) &= 0 \\ \frac{1}{c^2} \frac{1}{q(t)} \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} - \frac{1}{v(\vec{r})} \nabla^2 \vec{v}(\vec{r}) &= 0 \\ \frac{1}{c^2} \frac{1}{q(t)} \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} &= \frac{1}{v(\vec{r})} \nabla^2 \vec{v}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Observe que o lado direito depende apenas de \vec{r} , enquanto o lado esquerdo depende apenas do tempo. Portanto os dois lados devem ser igualados a uma constante $-k^2$. O sinal de menos deve-se ao fato dos autovalores do Laplaciano serem negativos. Dessa forma, o lado direito da Equação (3.3) se torna

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(\vec{r})} \nabla^2 \vec{v}(\vec{r}) &= -k^2 \\ \nabla^2 \vec{v}(\vec{r}) + k^2 \vec{v}(\vec{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Já o lado direito da Equação (3.3) se torna

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{1}{q(t)} \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} &= -k^2 \\ \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} + c^2 k^2 q(t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Fazendo $\omega = ck$ (conhecida como relação de dispersão), segue que

$$\frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} + \omega^2 q(t) = 0 \quad (3.6)$$

Agora, considera-se uma cavidade retangular de lados L_x , L_y e L_z (Figura 3.1), onde \vec{v} pode ser escrito em função das suas coordenadas, ou seja,

$$v(r) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (3.7)$$

Substituindo a Equação (3.7) na Equação (3.4),

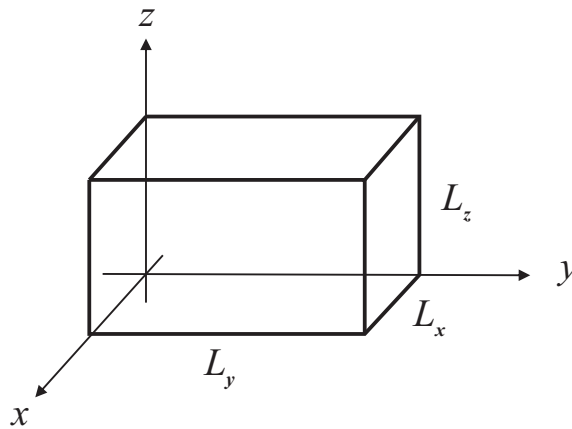


Figura 3.1 – Cavidade retangular.

$$\begin{aligned} \nabla^2 v(r) + k^2 v(r) &= 0 \\ YZ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + XZ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + XY \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 XYZ &= 0 \\ \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como cada termo depende de uma variável diferente, podem ser igualados a constantes de forma que

$$\begin{aligned}\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} &= -k_x^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} &= -k_y^2 \\ \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} &= -k_z^2\end{aligned}$$

que tem como soluções, respectivamente

$$X = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x) \quad (3.9)$$

$$Y = C \sin(k_y y) + D \cos(k_y y) \quad (3.10)$$

$$Z = E \sin(k_z z) + F \cos(k_z z) \quad (3.11)$$

Note que

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (3.12)$$

Reescreve-se a $\vec{v}(\vec{r})$ como

$$v_i = (A_i \sin(k_x x) + B_i \cos(k_x x)) (C_i \sin(k_y y) + D_i \cos(k_y y)) (E_i \sin(k_z z) + F_i \cos(k_z z)) \quad (3.13)$$

Como v_i deve se anular nas fronteiras da cavidade, as condições de contorno serão dadas por

$$\text{Em } x = 0 \text{ e } x = L_x \quad \begin{cases} v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\text{Em } y = 0 \text{ e } y = L_y \quad \begin{cases} v_x = 0 \\ v_z = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\text{Em } z = 0 \text{ e } z = L_z \quad \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Portanto, em $y = 0$ a Equação (3.13) se torna

$$0 = (A_x \sin(kx) + B_x \cos(kx)) D_x (E_x \sin(kz) + F_x \cos(kz)) \quad (3.17)$$

Isto implica em $D = 0$. Agora, em $z = 0$,

$$0 = (A_x \sin(k_x x) + B_x \cos(k_x x)) C_x \sin(k_y y) F_x \quad (3.18)$$

Isto implica em $F_x = 0$. Dessa forma, agora a Equação (3.13) fica

$$v_x = (A_x \sin(k_x x) + B_x \cos(k_x x)) C_x \sin(k_y y) E_x \sin(k_z z) \quad (3.19)$$

Analogamente, é possível obter

$$v_y = A_y \sin(k_x x) (C_y \sin(k_y y) + D_y \cos(k_y y)) E_y \sin(k_z z) \quad (3.20)$$

$$v_z = A_z \sin(k_x x) C_z \sin(k_y y) (E_z \sin(k_z z) + F_z \cos(k_z z)) \quad (3.21)$$

Como visto na Equação (B.111), $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. O que implica em

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.22)$$

Daí,

$$\begin{aligned} & k_x (A_x \cos(k_x x) - B_x \sin(k_x x)) C_x \sin(k_y y) E_x \sin(k_z z) + \\ & + A_y \sin(k_x x) k_y (C_y \cos(k_y y) - D_y \sin(k_y y)) E_y \sin(k_z z) + \\ & + A_z \sin(k_x x) C_z \sin(k_y y) k_z (E_z \cos(k_z z) - F_z \sin(k_z z)) = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Esta equação deve ser satisfeita em qualquer ponto da cavidade, inclusive em $(x = 0, y, z)$, $(x, y = 0, z)$ e $(x, y, z = 0)$. Para $(x = 0, y, z)$,

$$k_x A_x C_x \sin(k_y y) E_x \sin(k_z z) = 0 \quad (3.24)$$

Para $(x, y = 0, z)$ e $(x, y, z = 0)$, respectivamente,

$$A_y \sin(k_x x) k_y C_y E_y \sin(k_z z) = 0 \quad (3.25)$$

$$A_z \sin(k_x x) C_z \sin(k_y y) k_z E_z = 0 \quad (3.26)$$

Portanto é necessário ter $A_i C_i E_i = 0$. Logo, a Equação (3.23) é escrita como

$$\begin{aligned} & k_x B_x \sin(k_x x) C_x \sin(k_y y) E_x \sin(k_z z) + \\ & + A_y \sin(k_x x) k_y D_y \sin(k_y y) E_y \sin(k_z z) + \\ & + A_z \sin(k_x x) C_z \sin(k_y y) k_z F_z \sin(k_z z) = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

e as Equações (3.19)-(3.21) se tornam

$$v_x = B_x \cos(k_x x) C_x \sin(k_y y) E_x \sin(k_z z) \quad (3.28)$$

$$v_y = A_y \sin(k_x x) D_y \cos(k_y y) E_y \sin(k_z z) \quad (3.29)$$

$$v_z = A_z \sin(k_x x) C_z \sin(k_y y) F_z \cos(k_z z) \quad (3.30)$$

Renomeando as constantes,

$$v_x = N_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \quad (3.31)$$

$$v_y = N_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \quad (3.32)$$

$$v_z = N_z \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \quad (3.33)$$

Com $x = L_x$,

$$0 = N_x \cos(k_x L_x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \quad (3.34)$$

Portanto, é necessário ter $k_x L_x = n\pi$. Ou seja,

$$k_x = \frac{l\pi}{L_x} \quad \text{onde } l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.35)$$

Analogamente,

$$k_y = \frac{m\pi}{L_y} \quad \text{onde } m = 0,1,2,3,\dots \quad (3.36)$$

$$k_z = \frac{n\pi}{L_z} \quad \text{onde } n = 0,1,2,3,\dots \quad (3.37)$$

Sendo assim, da Equação (3.12) se obtém

$$k = \sqrt{\frac{l^2\pi^2}{L_x^2} + \frac{m^2\pi^2}{L_y^2} + \frac{n^2\pi^2}{L_z^2}} \quad (3.38)$$

Portanto,

$$\omega_{l,m,n} = c k_{l,m,n} = \pi c \sqrt{\left(\frac{l}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_z}\right)^2} \quad (3.39)$$

A energia de ponto zero entre as placas, segundo a Equação (B.238), será dada por

$$(2) \frac{1}{2} \sum_{l,m,n} \hbar\omega_{l,m,n} = \pi\hbar c \sum_{l,m,n} \sqrt{\left(\frac{l}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_z}\right)^2} \quad (3.40)$$

O fator 2 vem do fato de existirem duas polarizações possíveis para o campo eletromagnético quando $l, m, n \neq 0$. Quando um dos coeficientes for nulo, a contribuição do respectivo coeficiente nulo deve ser dividida por dois [14]. Percebe-se isto derivando a Equação (3.27) obtendo

$$k_x v_x + k_y v_y + k_z v_z = 0 \quad (3.41)$$

A Equação acima mostra que um dos k 's é combinação dos outros dois. Sendo assim, existem apenas duas polarizações para todos os k 's diferentes de zero e apenas uma polarização se algum deles for zero.

A situação física de interesse corresponde à Figura 3.2 e pode ser obtida a partir da Figura 3.1 no limite em que se faz $L_x = L_y = L$ e $L_z = d$ com $L \gg d$. Portanto, a energia de ponto zero entre as placas será dada por

$$(2) \frac{1}{2} \sum_{l,m,n} \hbar\omega_{l,m,n} = \pi\hbar c \sum_{l,m,n} \sqrt{\left(\frac{l}{L}\right)^2 + \left(\frac{m}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{d}\right)^2} \quad (3.42)$$

Para L muito grande pode-se considerar k_x e k_y como variáveis contínuas [47]. Sendo assim, o

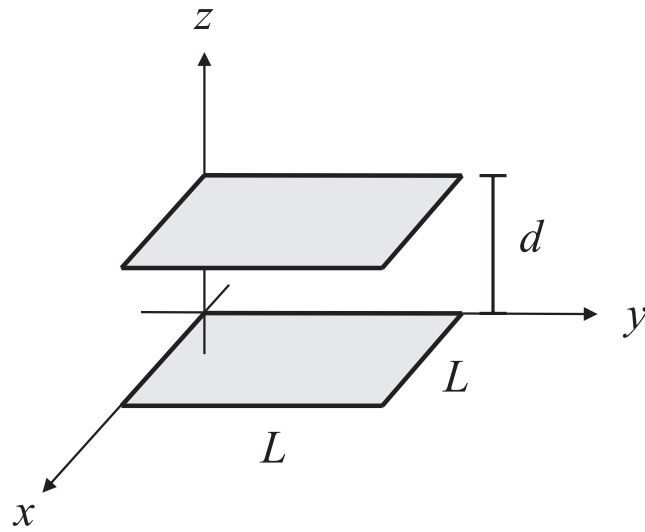


Figura 3.2 – Placas condutoras paralelas de área L^2 separadas por uma distância d . Assume-se que a placa inferior está no plano xy na origem do sistema.

somatório sobre l e m pode ser substituído por uma integral:

$$\sum_{l,m} \rightarrow \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \int \int dk_x dk_y \quad (3.43)$$

Portanto,

$$E(d) = (2) \frac{1}{2} \sum_{l,m,n} \hbar \omega_{l,m,n} \rightarrow \frac{L^2}{\pi^2} (\hbar c) \sum_n \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2} \right] dk_x dk_y \quad (3.44)$$

Da mesma forma, para $L_z = d$ muito grande, a soma em n pode se substituída por uma integral [47]:

$$\sum_n \rightarrow \frac{d}{\pi} \int dk_z \quad (3.45)$$

Sendo assim,

$$E(\infty) = \frac{L^2}{\pi^2} (\hbar c) \frac{d}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \right] dk_x dk_y dk_z \quad (3.46)$$

A energia potencial do sistema quando as placas são separadas por uma distância d é $U(d) = E(d) - E(\infty)$. Está é a energia de interação entre duas placas paralelas separadas por uma

distância d . Logo,

$$U(d) = \frac{L^2}{\pi^2} (\hbar c) \left\{ \sum_n \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2} \right] dk_x dk_y - \frac{d}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \right] dk_x dk_y dk_z \right\} \quad (3.47)$$

Utilizando coordenadas polares no plano $k_x k_y$, onde r é o raio polar e θ é o ângulo polar, com $dk_x dk_y = r dr d\theta$, $k_x = r \cos \theta$ e $k_y = r \sin \theta$, a Equação (3.47) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} U(d) &= \frac{L^2 \hbar c}{\pi^2} \left\{ \sum_n \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \left[\sqrt{r^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2} \right] r dr d\theta - \frac{d}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{r^2 + k_z^2} \right] r dr d\theta dk_z \right\} \\ &= \frac{L^2 \hbar c \pi}{\pi^2} \left\{ \sum_n \int_0^\infty \left[\sqrt{r^2 + \frac{n^2 \pi^2}{d^2}} \right] r dr - \frac{d}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{r^2 + k_z^2} \right] r dr dk_z \right\} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Com a intenção de limitar o comportamento da integral, se introduz uma função de corte (*cutoff function*) $f(k) = f\left(\sqrt{r^2 + k_z^2}\right)$. Fisicamente, as placas exercem pouca influência por não oferecerem obstáculo para ondas com comprimento de onda pequeno, da ordem de $1/a_0$, onde a_0 é o raio de Bohr. Este efeito é conhecido como divergência ultravioleta. Com o intuito de contornar essa divergência se faz

$$f(k) = \begin{cases} 1 & \text{para } k < k_m \\ 0 & \text{para } k \gg k_m \end{cases} \quad (3.49)$$

Portanto,

$$U(d) = \frac{L^2 \hbar c \pi}{\pi^2} \left\{ \sum_n \int_0^\infty \left[\sqrt{r^2 + \frac{n^2 \pi^2}{d^2}} \right] f\left(\sqrt{r^2 + \frac{n^2 \pi^2}{d^2}}\right) r dr - \frac{d}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{r^2 + k_z^2} \right] f\left(\sqrt{r^2 + k_z^2}\right) r dr dk_z \right\}$$

Segue que,

$$U(d) = \frac{L^2 \hbar c}{2\pi} \left\{ \sum_n \int_0^\infty \left[\frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{d^2 r^2}{\pi^2} + n^2} \right] f \left(\frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{d^2 r^2}{\pi^2} + n^2} \right) r dr \right. \\ \left. - \frac{d}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{d^2 r^2}{\pi^2} + \frac{d^2 k_z^2}{\pi^2}} \right] f \left(\frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{d^2 r^2}{\pi^2} + \frac{d^2 k_z^2}{\pi^2}} \right) r dr dk_z \right\} \quad (3.50)$$

Fazendo as substituições

$$x = \frac{d^2 r^2}{\pi^2} \quad \rightarrow \quad dx = \frac{2d^2}{\pi^2} r dr \\ \kappa = \frac{d k_z}{\pi} \quad \rightarrow \quad d\kappa = \frac{d}{\pi} dk_z$$

a Equação (3.50) se torna

$$U(d) = \frac{L^2 \hbar c}{2\pi} \left\{ \sum_n \int_0^\infty \left[\frac{\pi}{d} \sqrt{x + n^2} \right] f \left(\frac{\pi}{d} \sqrt{x + n^2} \right) \frac{\pi^2}{2d^2} dx \right. \\ \left. - \frac{d}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\frac{\pi}{d} \sqrt{x + \kappa^2} \right] f \left(\frac{\pi}{d} \sqrt{x + \kappa^2} \right) \frac{\pi^2}{2d^2} dx \frac{\pi}{d} d\kappa \right\} \quad (3.51)$$

Simplificando,

$$U(d) = \frac{L^2 \hbar c \pi^3}{4\pi d^3} \left\{ \sum_n \int_0^\infty \left[\sqrt{x + n^2} \right] f \left(\frac{\pi}{d} \sqrt{x + n^2} \right) dx \right. \\ \left. - \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{x + \kappa^2} \right] f \left(\frac{\pi}{d} \sqrt{x + \kappa^2} \right) dx d\kappa \right\} \quad (3.52)$$

Fazendo

$$F(\kappa) \equiv \int_0^\infty \left[\sqrt{x + \kappa^2} \right] f \left(\frac{\pi}{d} \sqrt{x + \kappa^2} \right) dx \quad (3.53)$$

a Equação (3.52) fica

$$U(d) = \frac{\pi^2 \hbar c}{4d^3} L^2 \left\{ \frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^\infty F(n) - \int_0^\infty F(\kappa) d\kappa \right\} \quad (3.54)$$

Lembrando que o fator meio multiplicando $F(0)$ na Equação (3.54) refere-se a uma única li-

berdade de polarização quando o $n = 0$. De acordo com a fórmula do somatório de Euler-Maclaurin¹,

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} F(\kappa) = -\frac{1}{2}F(0) - \frac{1}{12}F'(0) + \frac{1}{720}F'''(0) \dots \quad (3.55)$$

Derivando a Equação (3.53), porém fazendo a substituição $u = x + \kappa^2$, se obtém

$$F(\kappa) = \int_{\kappa^2}^{\infty} \sqrt{u} f\left(\frac{\pi}{d}\sqrt{u}\right) du \quad (3.56)$$

Utilizando o método de integração por partes,

$$\begin{aligned} F(\kappa) &= \left[\frac{2}{3} u^{3/2} f\left(\frac{\pi}{d} u^{1/2}\right) \right] \Big|_{\kappa^2}^{\infty} - \int_{\kappa^2}^{\infty} \frac{2}{3} u^{3/2} f'\left(\frac{\pi}{d} u^{1/2}\right) du \\ &= -\frac{2}{3} \kappa^3 f\left(\frac{\pi}{d} \kappa\right) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F'(\kappa) &= -2\kappa^2 f\left(\frac{\pi}{d} \kappa\right) - \frac{2}{3} \kappa^3 f'\left(\frac{\pi}{d} \kappa\right) \rightarrow F'(0) = 0 \\ F''(\kappa) &= -4\kappa f\left(\frac{\pi}{d} \kappa\right) - 2\kappa^2 f'\left(\frac{\pi}{d} \kappa\right) \rightarrow F''(0) = 0 \\ F'''(\kappa) &= -4f\left(\frac{\pi}{d} \kappa\right) - 4\kappa f'\left(\frac{\pi}{d} \kappa\right) \rightarrow F'''(0) = -4 \end{aligned}$$

As demais derivadas de ordens superiores serão nulas assumindo que todas as derivadas da função de corte desaparecem quando $\kappa = 0$ [47]. Portanto, a Equação (3.55) fica

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} F(\kappa) = -\frac{1}{2}F(0) - \frac{4}{720} \quad (3.58)$$

Substituindo a Equação (3.58) na Equação (3.54), segue que

$$\begin{aligned} U(d) &= \frac{\pi^2 \hbar}{4d^3} L^2 \left\{ \frac{1}{2}F(0) - \frac{1}{2}F(0) - \frac{4}{720} \right\} \\ U(d) &= -\frac{\pi^2 \hbar c}{720d^3} L^2 \end{aligned} \quad (3.59)$$

¹Ver fórmula 3.6.28 do *Handbook of Mathematical Functions* [48].

Como $F(d) = -\vec{\nabla}U(d)$, então

$$F(d) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240d^4} L^2 \quad (3.60)$$

Portanto, a força atrativa por unidade de área entre as placas é

$$F(d) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240d^4} \quad (3.61)$$

Sendo assim, existe uma força atrativa entre duas placas metálicas que independe do material das placas que pode ser interpretada como uma pressão de ponto zero das ondas eletromagnéticas [14].

3.3 EFEITO CASIMIR PARA UMA FOLHA PLANA DE PLASMA - MODELO DE BARTON

Em 2005, Barton [21] propõe o modelo das folhas de plasma como uma folha plana infinitamente fina e indefinidamente estendida no plano xy . Este modelo é essencialmente hidrodinâmico, pois considera o plasma um fluido contínuo com densidade de massa nm e densidade de carga ne , além de uma imóvel carga total nula uniformemente distribuída.

3.3.1 Descrição do modelo

Seja o deslocamento do fluido $\vec{\xi}$, com carga superficial e densidade de corrente dadas, respectivamente, por

$$\sigma = -ne\vec{\nabla}_{\parallel} \cdot \vec{\xi} \quad (3.62)$$

$$\vec{J} = ne\dot{\vec{\xi}} \quad (3.63)$$

onde \parallel indica a componente do vetor paralela a placa. Da mesma forma, escreve-se $\vec{s} = \vec{r}_{\parallel} = (x, y)$. Nesse caso, a segunda lei de Newton pode ser escrita como

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\xi}(s, t) = e \vec{E}_{\parallel}(s, z = 0, t) \quad (3.64)$$

Como o deslocamento dos elétrons é puramente tangencial ao plano da folha, expressa-se todas as variações temporais por um fator comum

$$\vec{\xi}(\vec{x}, t) = \vec{\xi}(\vec{x})e^{-i\omega t} \quad (3.65)$$

Portanto, a Equação (3.64) fica

$$\begin{aligned} m\vec{\xi}(\vec{x})\frac{\partial^2}{\partial t^2}e^{-i\omega t} &= e\vec{E}_{\parallel} \\ -m\omega^2\vec{\xi}(\vec{x})e^{-i\omega t} &= e\vec{E}_{\parallel} \\ -m\omega^2\vec{\xi}(\vec{x}, t) &= e\vec{E}_{\parallel} \\ \vec{\xi}(\vec{x}, t) &= -\frac{e}{m\omega^2}\vec{E}_{\parallel} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Substituindo a Equação (3.66) na Equação (3.62),

$$\begin{aligned} \sigma &= -ne\vec{\nabla}_{\parallel} \cdot \left(-\frac{e}{m\omega^2}\vec{E}_{\parallel} \right) \\ &= \frac{ne^2}{m\omega^2}\vec{\nabla}_{\parallel} \cdot \vec{E}_{\parallel} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Agora, substituindo a Equação (3.65) na Equação (3.63),

$$\begin{aligned} \vec{J} &= ne\dot{\vec{\xi}} \\ &= -i\omega ne\vec{\xi} \end{aligned} \quad (3.68)$$

As equações de Maxwell, já usando a Equação (3.65), são

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad (3.69)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.70)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad (3.71)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} - \frac{i\omega}{c^2} \vec{E} \quad (3.72)$$

Vale lembrar que no espaço livre, onde ρ e \vec{J} se anulam. As condições de contorno para o campo \vec{E} são obtidas analisando seu comportamento numa distribuição superficial de densidade de carga σ , escolhendo uma superfície (Figura 3.3) [49], sobre a qual é aplicada a lei de Gauss

e a Equação (3.74).

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A \quad (3.73)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (3.74)$$

O campo \vec{E}_\perp (Figura 3.3a), perpendicular a superfície, aplicando a Equação (3.73) fica

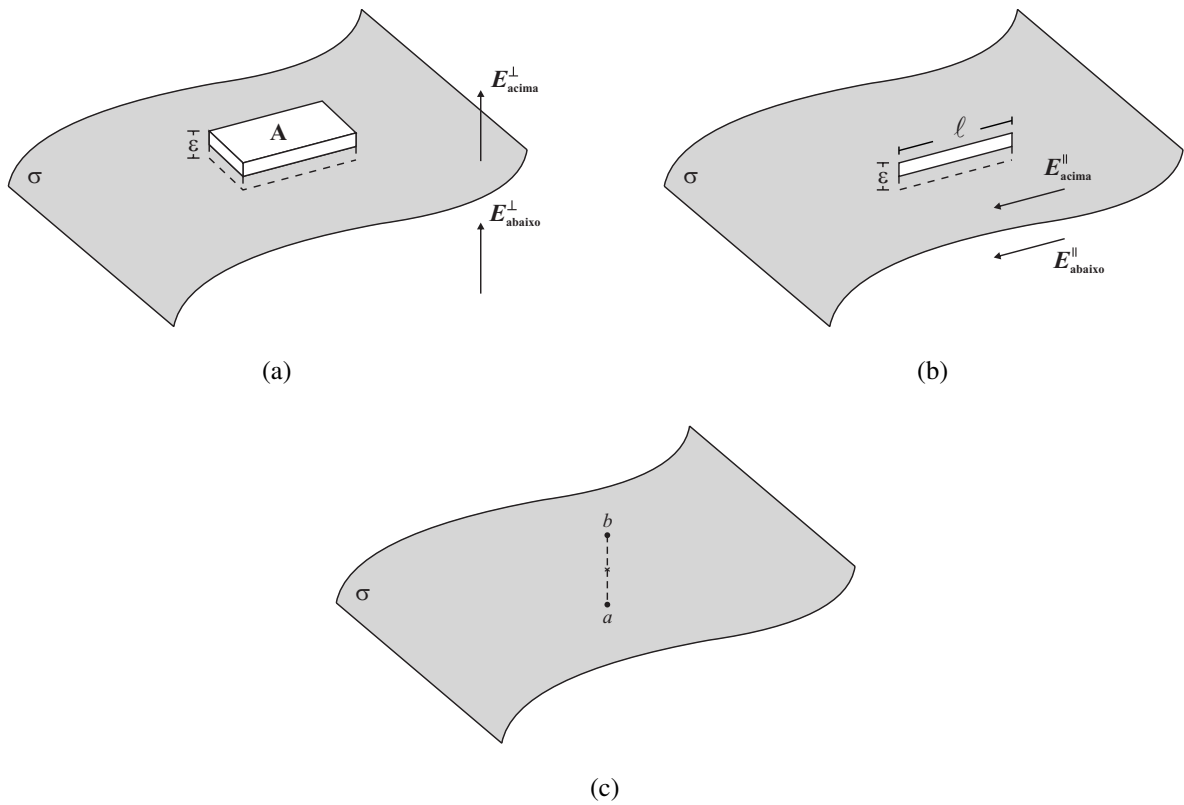


Figura 3.3 – Continuidade dos campos (a) \vec{E}_\perp e (b) \vec{E}_\parallel e (c) do potencial escalar numa interface.

$$\vec{E}_{acima}^\perp - \vec{E}_{abaixo}^\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.75)$$

Substituindo a Equação (3.67) na Equação (3.75),

$$\begin{aligned} \vec{E}_{acima}^\perp - \vec{E}_{abaixo}^\perp &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{ne^2}{m\omega^2} \vec{\nabla}_\parallel \cdot \vec{E}_\parallel \end{aligned} \quad (3.76)$$

Multiplicando e dividindo por c^2 ,

$$\begin{aligned}\vec{E}_{acima}^{\perp} - \vec{E}_{abaixo}^{\perp} &= \frac{ne^2}{mc^2\epsilon_0} \frac{c^2}{\omega^2} \vec{\nabla}_{\parallel} \cdot \vec{E}_{\parallel} \\ &= \frac{\Omega c^2}{\omega^2} \vec{\nabla}_{\parallel} \cdot \vec{E}_{\parallel}\end{aligned}\quad (3.77)$$

onde Ω é um parâmetro com dimensão de número de onda (m^{-1}), por isso chamado de comprimento de onda característico, definido por

$$\Omega = \frac{ne^2}{mc^2\epsilon_0}\quad (3.78)$$

Como já visto anteriormente, o campo elétrico é o gradiente de um potencial escalar, ou seja, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$. Portanto

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\Phi_{acima} - \vec{\nabla}\Phi_{abaixo} &= \frac{\Omega c^2}{\omega^2} \vec{\nabla}_{\parallel} \cdot \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{\nabla}\Phi_{acima} - \vec{\nabla}\Phi_{abaixo} &= \frac{\Omega c^2}{\omega^2} \vec{\nabla}_{\parallel} \cdot (-\vec{\nabla}\Phi) \\ \vec{\nabla}\Phi_{acima} - \vec{\nabla}\Phi_{abaixo} &= -\frac{\Omega c^2}{\omega^2} \vec{\nabla}_{\parallel} (\vec{\nabla}_{\parallel} \cdot \Phi) \\ \Phi_{acima} - \Phi_{abaixo} &= -\frac{\Omega c^2}{\omega^2} \vec{\nabla}_{\parallel} \cdot \Phi \\ \Phi_{acima} - \Phi_{abaixo} &= -\frac{\Omega c^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}\end{aligned}\quad (3.79)$$

Porém, como se trata de duas placas, adiciona-se um fator 2 a Equação anterior. Logo,

$$\Phi_{acima} - \Phi_{abaixo} = -2 \frac{\Omega c^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}\quad (3.80)$$

O campo \vec{E}_{\parallel} (Figura 3.3b), paralelo a superfície, aplicando a Equação (3.74) no limite em que ϵ tende a zero fica

$$\vec{E}_{acima}^{\parallel} - \vec{E}_{abaixo}^{\parallel} = 0\quad (3.81)$$

Utilizando a definição do potencial escalar dado por

$$\Phi_{acima} - \Phi_{abaixo} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}\quad (3.82)$$

na Figura 3.3c observa-se que, a medida que o caminho tende a zero, a Equação (3.82) se torna

$$\Phi_{acima} - \Phi_{abaixo} = 0 \quad (3.83)$$

As Equações (3.80) e (3.83) são as condições de polarização para o campo eletromagnético.

As condições de contorno para o campo \vec{B} são obtidas analisando seu comportamento numa distribuição superficial de corrente \vec{J} , escolhendo uma superfície (Figura 3.4) [49], sobre a qual é aplicada a lei de Ampère e a Equação (3.85).

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \quad (3.84)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \quad (3.85)$$

O campo \vec{B}_\perp (Figura 3.4a), perpendicular a superfície, aplicando a Equação (3.85) é

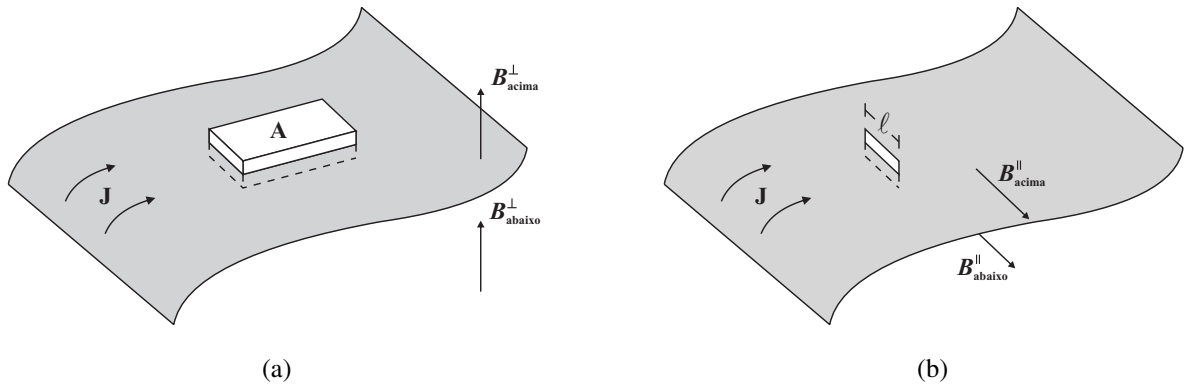


Figura 3.4 – Continuidade dos campos (a) \vec{B}_\perp e (b) \vec{B}_\parallel numa interface.

$$\vec{B}_{acima}^\perp - \vec{B}_{abaixo}^\perp = 0 \quad (3.86)$$

Da equação (3.71) se obtém

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x} = i\omega B_z$$

Daí, escreve-se

$$\vec{B}^\perp = \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial \parallel} \vec{E}^\parallel \quad (3.87)$$

Substituindo a Equação (3.87) na Equação (3.86),

$$\begin{aligned}\vec{B}_{acima}^{\perp} - \vec{B}_{abaixo}^{\perp} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial_{\parallel}} \vec{E}_{acima}^{\parallel} - \frac{\partial}{\partial_{\parallel}} \vec{E}_{abaixo}^{\parallel} &= 0\end{aligned}\quad (3.88)$$

Como já visto anteriormente, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$. Portanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial_{\parallel}} \vec{\nabla}\Phi_{acima} - \frac{\partial}{\partial_{\parallel}} \vec{\nabla}\Phi_{abaixo} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial_{\parallel}} \Phi_{acima} - \frac{\partial}{\partial_{\parallel}} \Phi_{abaixo} &= 0\end{aligned}\quad (3.89)$$

O campo \vec{B}_{\parallel} (Figura 3.4b), paralelo a superfície, aplicando a Equação (3.84) é

$$\vec{B}_{acima}^{\parallel} - \vec{B}_{abaixo}^{\parallel} = \mu_0 \vec{J} \times \hat{z}\quad (3.90)$$

Substituindo as Equações (3.68) e (3.66) na Equação (3.90),

$$\begin{aligned}\vec{B}_{acima}^{\parallel} - \vec{B}_{abaixo}^{\parallel} &= \mu_0 (J_y \hat{x} - J_x \hat{y}) \\ &= -i\omega n e \mu_0 (\xi_y \hat{x} - \xi_x \hat{y}) \\ &= -i\omega n e \mu_0 \left(\frac{e}{m\omega^2} E_y \hat{x} - \frac{e}{m\omega^2} E_x \hat{y} \right) \\ &= -i \frac{\omega n e^2 \mu_0}{m\omega^2} (E_y \hat{x} - E_x \hat{y}) \\ &= -\frac{i}{\omega} \frac{n e^2}{m c^2 \epsilon_0} (E_y \hat{x} - E_x \hat{y}) \\ &= -\frac{i}{\omega} \Omega (E_y \hat{x} - E_x \hat{y}) \\ &= -\frac{i}{\omega} \Omega \vec{E}^{\parallel}\end{aligned}\quad (3.91)$$

Da equação (3.71), se obtém

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega B_x + i\omega B_y$$

Daí, escreve-se

$$\vec{B}^{\parallel} = \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}^{\parallel}\quad (3.92)$$

Agora, substituindo a Equação (3.92) na Equação (3.91),

$$\begin{aligned} \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\vec{E}_{acima}^{\parallel} - \vec{E}_{abaixo}^{\parallel} \right) &= -\frac{i}{\omega} \Omega \vec{E}^{\parallel} \\ \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}_{acima}^{\parallel} - \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}_{abaixo}^{\parallel} &= -\Omega \vec{E}^{\parallel} \end{aligned} \quad (3.93)$$

Como já visto anteriormente, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$. Portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \vec{\nabla}\Phi_{acima} - \frac{\partial}{\partial z} \vec{\nabla}\Phi_{abaixo} &= \Omega \vec{\nabla}\Phi \\ \frac{\partial}{\partial z} \Phi_{acima} - \frac{\partial}{\partial z} \Phi_{abaixo} &= \Omega \Phi \end{aligned} \quad (3.94)$$

Porém, como se trata de duas placas, adiciona-se um fator 2 a Equação anterior. Logo,

$$\frac{\partial}{\partial z} \Phi_{acima} - \frac{\partial}{\partial z} \Phi_{abaixo} = 2\Omega\Phi \quad (3.95)$$

As Equações (3.89) e (3.95) são as condições de polarização para o campo eletromagnético.

Reunindo as quatro equações de polarização para o campo eletromagnético, escreve-se

$$\Phi_{acima} - \Phi_{abaixo} = -2 \frac{\Omega c^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (\text{TM}) \quad (3.96)$$

$$\Phi_{acima} - \Phi_{abaixo} = 0 \quad (\text{TE}) \quad (3.97)$$

$$\frac{\partial}{\partial_{\parallel}} \Phi_{acima} - \frac{\partial}{\partial_{\parallel}} \Phi_{abaixo} = 0 \quad (\text{TM}) \quad (3.98)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Phi_{acima} - \frac{\partial}{\partial z} \Phi_{abaixo} = 2\Omega\Phi \quad (\text{TE}) \quad (3.99)$$

As duas polarizações são rotuladas da seguinte maneira: Se $E_z = 0$ as ondas são chamadas de TE (transversais elétricas); se $B_z = 0$ as ondas são chamadas de TM (transversais magnéticas) [20, 21].

As condições de contorno da onda TE são semelhantes às de um potencial delta positivo, o qual não admite estados ligados, não havendo superfície de plasmons. Nas condições de contorno da onda TM, devido à existência do parâmetro negativo $\frac{2\Omega c^2}{\omega^2}$, que torna o potencial negativo, é permitido que haja estados ligados, o que leva a concluir que a superfície de plasmons só existe para a polarização TM [20].

As Equações (3.96)-(3.99) são as condições de contorno para o campo eletromagnético para uma folha plana de plasma. Na próxima seção, estas condições serão aplicadas no problema de

duas placas paralelas separadas por uma distância d .

3.4 EFEITO CASIMIR PARA FOLHAS FINAS DE PLASMA - MODELO DE BORDAG

Em 2006, Bordag [20] investigou o efeito Casimir para placas finas de plasma e para um material dielétrico. Porém, aqui será abordado somente o modelo das placas finas de plasma. Ele assume que os plasmons de superfície (ondas de propagação ao longo da superfície) dominam a força de Casimir em pequenas separações enquanto em grandes separações os fótons (as ondas de propagação perpendicular às superfícies) dominam.

Como pode ser visto no apêndice B, a energia de ponto zero é dada por

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 \hbar \omega_k$$

A energia de ponto zero E_0 pode ser representada pelas contribuições de fótons e plasmons, ou seja,

$$E_0 = E_{\text{total}} = E_{\text{plasmons}} + E_{\text{fótons}} \quad (3.100)$$

3.4.1 Descrição do modelo

Como pode ser visto no apêndice B.2, um campo escalar Φ associado a uma onda eletromagnética no vácuo pode ser descrito pela equação de onda

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (3.101)$$

Da mesma maneira que na Seção B.4.1, a solução para a Equação (3.101) pode ser expandido em uma transformada de Fourier do tipo

$$\Phi(\vec{x}, t) = \int d\omega \int dk^3 F(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (3.102)$$

3.4. EFEITO CASIMIR PARA FOLHAS FINAS DE PLASMA - MODELO DE BORDAG66

Substituindo na Equação (3.101),

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= 0 \\
 \nabla^2 \int dw \int dk^3 F(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int dw \int dk^3 F(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} &= 0 \\
 \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \int dw \int dk^3 F(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} &= 0 \\
 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2} \omega^2 \right) \int dw \int dk^3 F(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} &= 0 \\
 \left(-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \int dw \int dk^3 F(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} &= 0 \\
 \left(-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \Phi(\vec{x}, t) &= 0 \quad (3.103)
 \end{aligned}$$

Admite-se a mesma orientação das folhas adotada na Figura 3.2. Portanto, escreve-se

$$k_{\parallel}^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (3.104)$$

de modo que

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi(k_{\parallel}, z) = 0 \quad (3.105)$$

Para duas folhas finas de plasma (Figura 3.5), é preciso soluções de espalhamento para a Equação (3.105) no qual

$$\Phi(k_{\parallel}, z) = \begin{cases} e^{ikz} + r e^{-ikz} & \text{para } z < 0 \\ a e^{ikz} + b e^{-ikz} & \text{para } 0 < z < d \\ t e^{ikz} & \text{para } z > 0 \end{cases} \quad (3.106)$$

onde r e t são, respectivamente, os coeficientes de reflexão e transmissão, e

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2} \quad \text{ou} \quad \omega = c \sqrt{k_{\parallel}^2 + k^2} \quad (3.107)$$

Como visto no final da Seção 3.3, é suficiente utilizar apenas as condições de contorno para a polarização TM, dadas pelas Equações (3.96) e (3.98).

3.4. EFEITO CASIMIR PARA FOLHAS FINAS DE PLASMA - MODELO DE BORDAG67

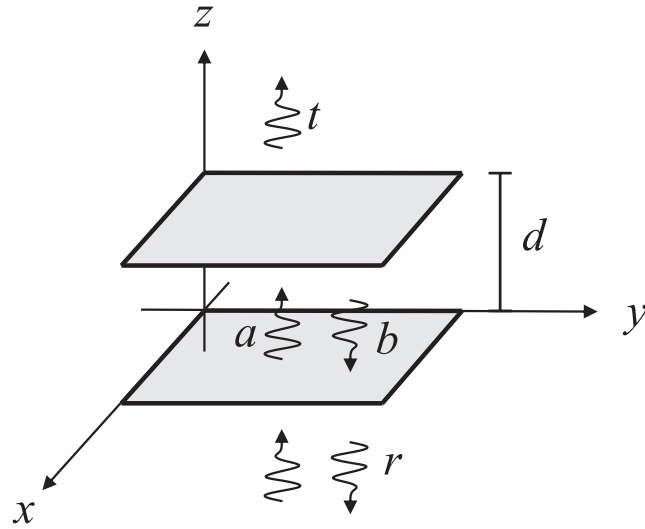


Figura 3.5 – Folhas finas de plasma com a onda incidente, refletida (r) em $z = 0$, transmitida (a) em $z = 0$, refletida (b) em $z = d$ e transmitida (t) em $z = d$.

Portanto, usando as condições de contorno para a polarização TM,

$$\Phi_{acima}(0) - \Phi_{abaixo}(0) = -2 \frac{\Omega c^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi(0)}{\partial z} \quad (3.108)$$

$$\frac{\partial}{\partial_{\parallel}} \Phi_{acima}(0) - \frac{\partial}{\partial_{\parallel}} \Phi_{abaixo}(0) = 0 \quad (3.109)$$

$$\Phi_{acima}(d) - \Phi_{abaixo}(d) = -2 \frac{\Omega c^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi(d)}{\partial z} \quad (3.110)$$

$$\frac{\partial}{\partial_{\parallel}} \Phi_{acima}(d) - \frac{\partial}{\partial_{\parallel}} \Phi_{abaixo}(d) = 0 \quad (3.111)$$

Substituindo a Equação (3.106) na Equação (3.109),

$$ika - ikb - ik + ikr = 0$$

$$a - b - 1 + r = 0$$

$$r = 1 - a + b \quad (3.112)$$

$$a - b = 1 - r \quad (3.113)$$

3.4. EFEITO CASIMIR PARA FOLHAS FINAS DE PLASMA - MODELO DE BORDAG68

Substituindo a Equação (3.106) na Equação (3.111),

$$\begin{aligned}
 ikte^{ikd} - ikae^{ikd} + ikbe^{-ikd} &= 0 \\
 te^{ikd} - ae^{ikd} + be^{-ikd} &= 0 \\
 te^{ikd} - ae^{ikd} &= -be^{-ikd} \\
 t - a &= -b \frac{e^{-ikd}}{e^{ikd}} \\
 a - t &= be^{-2ikd}
 \end{aligned} \tag{3.114}$$

Substituindo a Equação (3.106) na Equação (3.108),

$$\begin{aligned}
 a + b - 1 - r &= -2 \frac{\Omega c^2}{\omega^2} (ik - ikr) \\
 a + b - 1 - r &= -2 \frac{\Omega c^2}{\omega^2} (ik - ikr) \\
 a + b &= 1 + r - 2 \frac{\Omega c^2}{\omega^2} (ik - ikr) \\
 a + b &= 1 - 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} + r + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} r \\
 a + b &= 1 - 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} + \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) r
 \end{aligned} \tag{3.115}$$

Substituindo a Equação (3.106) na Equação (3.110),

$$\begin{aligned}
 te^{ikd} - ae^{ikd} - be^{-ikd} &= -2 \frac{\Omega c^2}{\omega^2} ikte^{ikd} \\
 te^{ikd} + 2 \frac{\Omega c^2}{\omega^2} ikte^{ikd} &= ae^{ikd} + be^{-ikd} \\
 \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) te^{ikd} &= ae^{ikd} + be^{-ikd} \\
 \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) t &= ae^{ikd} + b \frac{e^{-ikd}}{e^{ikd}} \\
 \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) t &= a + be^{-2ikd}
 \end{aligned} \tag{3.116}$$

3.4. EFEITO CASIMIR PARA FOLHAS FINAS DE PLASMA - MODELO DE BORDAG69

Agora, substituindo a Equação (3.114) na Equação (3.116),

$$\begin{aligned}
 \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) t &= a + be^{-2ikd} \\
 \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) t &= a + a - t \\
 \left(2 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) t &= 2a \\
 \left(1 + ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) t &= a
 \end{aligned} \tag{3.117}$$

Portanto, substituindo a Equação (3.117) na Equação (3.116),

$$\begin{aligned}
 \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) t &= a + be^{-2ikd} \\
 \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) t &= \left(1 + ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) t + be^{-2ikd} \\
 \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) t - \left(1 + ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) t &= be^{-2ikd} \\
 ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} t &= be^{-2ikd} \\
 ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} t e^{2ikd} &= b
 \end{aligned} \tag{3.118}$$

Substituindo a Equação (3.112) na Equação (3.115)

$$\begin{aligned}
 a + b &= 1 - 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} + \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) (1 - a + b) \\
 a + b &= 1 - 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} + \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) - \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) a + \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) b \\
 a + b &= 2 - \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) a + \left(1 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2}\right) b \\
 a + b &= 2 - a - 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} a + b + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} b
 \end{aligned} \tag{3.119}$$

3.4. EFEITO CASIMIR PARA FOLHAS FINAS DE PLASMA - MODELO DE BORDAG70

Simplificando,

$$\begin{aligned}
 2a &= 2 + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} a + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} b \\
 2a + 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} a - 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} b &= 2 \\
 2a \left(1 + ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} \right) - 2ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} b &= 2 \\
 a \left(1 + ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} \right) - ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} b &= 1
 \end{aligned} \tag{3.120}$$

Substituindo aqui as Equações (3.117) e (3.118),

$$\begin{aligned}
 \left(1 + ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} \right) t \left(1 + ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} \right) - ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} \left(ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} t e^{2ikd} \right) &= 1 \\
 \left(\frac{\omega^2 + ik\Omega c^2}{\omega^2} \right)^2 t - \left(ik \frac{\Omega c^2}{\omega^2} \right)^2 e^{2ikd} t &= 1 \\
 \left[(\omega^2 + ik\Omega c^2)^2 - (ik\Omega c^2)^2 e^{2ikd} \right] t &= \omega^4
 \end{aligned} \tag{3.121}$$

$$\left[1 + \frac{(k\Omega c^2)^2}{(\omega^2 + ik\Omega c^2)^2} e^{2ikd} \right] t = \frac{\omega^4}{(\omega^2 + ik\Omega c^2)^2} \tag{3.122}$$

Portanto,

$$t = \frac{\omega^4}{\left[1 + \frac{(k\Omega c^2)^2}{(\omega^2 + ik\Omega c^2)^2} e^{2ikd} \right]} \tag{3.123}$$

Na polarização TM, os plasmons de superfície se formam nos pólos de t no eixo imaginário $k = i\kappa$. O pólo da Equação (3.123) será quando

$$\begin{aligned}
 (\omega^2 + ik\Omega c^2)^2 - (ik\Omega c^2)^2 e^{2ikd} &= 0 \\
 (\omega^2 + ik\Omega c^2)^2 &= (ik\Omega c^2)^2 e^{2ikd} \\
 \omega^2 + ik\Omega c^2 &= \pm i^2 k\Omega c^2 e^{ikd} \\
 \omega^2 - \kappa\Omega c^2 &= -\sigma \kappa\Omega c^2 e^{-\kappa d} \\
 \frac{\omega^2 - \kappa\Omega c^2}{\kappa\Omega c^2} &= -\sigma e^{-\kappa d}
 \end{aligned} \tag{3.124}$$

onde $\sigma = \pm 1$. Para $\sigma = +1$ a função de onda é simétrica e para $\sigma = -1$ é anti-simétrica. Para duas placas, a solução para κ pode ser encontrada e é denominada por κ_σ . Para uma única placa,

3.4. EFEITO CASIMIR PARA FOLHAS FINAS DE PLASMA - MODELO DE BORDAG71

a solução para κ pode ser encontrada fazendo $d \rightarrow \infty$ na Equação (3.124), e é denominada por κ_{single} . Ou seja,

$$\begin{aligned}\omega^2 + ik\Omega c^2 &= 0 \\ \omega^2 &= -ik\Omega c^2\end{aligned}\quad (3.125)$$

Utilizando a Equação (3.107),

$$\begin{aligned}c^2 (k^2 + k_{\parallel}^2) &= ik\Omega c^2 \\ ((i\kappa)^2 + k_{\parallel}^2) &= \Omega\kappa_{\text{single}} \\ -\kappa_{\text{single}}^2 + k_{\parallel}^2 &= \Omega\kappa_{\text{single}} \\ \kappa_{\text{single}}^2 + \Omega\kappa_{\text{single}} - k_{\parallel}^2 &= 0\end{aligned}\quad (3.126)$$

Resolvendo a equação do segundo grau acima para κ_{single} encontra-se

$$\kappa_{\text{single}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\Omega^2 + 4k_{\parallel}^2} - \Omega \right)\quad (3.127)$$

A energia do vácuo quântico por unidade de área é dada pela soma das contribuições das energias dos fótons e dos plasmões. Bordag [50] obtém que energia de vácuo é dada pela fórmula

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \int \frac{dk_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left\{ \sum_{\sigma=\pm 1} \omega(k_{\parallel}, i\kappa_{\sigma}) + \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi i} \omega(k_{\parallel}, k) \frac{\partial}{\partial k} \ln \frac{t(k)}{t(-k)} \right\}\quad (3.128)$$

Nesta formula as divergências ultravioletas, comentado na Seção 3.2, estão presentes [20]. Para remover essas divergências, se faz a subtração das contribuições do caso de uma placa, removendo assim termos que não dependem da distância entre as placas e que não contribuem para a energia de Casimir.

$$\omega(k_{\parallel}, i\kappa_{\sigma}) \longrightarrow \omega(k_{\parallel}, i\kappa_{\sigma}) - \omega(k_{\parallel}, i\kappa_{\text{single}})\quad (3.129)$$

O primeiro termo da Equação (3.128), dado pelo somatório, é a contribuição dos plasmões de superfície para a energia. Ou seja,

$$E_{\text{plasmon}} = \frac{\hbar}{2} \int \frac{dk_{\parallel}}{(2\pi)^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \omega(k_{\parallel}, i\kappa_{\sigma})\quad (3.130)$$

3.4. EFEITO CASIMIR PARA FOLHAS FINAS DE PLASMA - MODELO DE BORDAG72

Substituindo aqui a Equação (3.129),

$$\begin{aligned} E_{\text{plasmon}} &= \frac{\hbar}{2} \int \frac{dk_{\parallel}}{(2\pi)^2} \sum_{\sigma=\pm 1} (\omega(k_{\parallel}, i\kappa_{\sigma}) - \omega(k_{\parallel}, i\kappa_{\text{single}})) \\ &= \frac{\hbar c}{8\pi^2} \int dk_{\parallel} \sum_{\sigma=\pm 1} \left(\sqrt{k_{\parallel}^2 - \kappa_{\sigma}^2(k_{\parallel}, \Omega, d)} - \sqrt{k_{\parallel}^2 - \kappa_{\text{single}}^2(k_{\parallel}, \Omega, d)} \right) \end{aligned} \quad (3.131)$$

Vale lembrar que a integral está em coordenadas cartesianas $dx dy$ apesar de estar escrito dk_{\parallel} , onde $k_{\parallel}^2 = k_x^2 + k_y^2$ (Equação (3.104)). Portanto, fazer a transformação para coordenadas polares implica na mudança $dk_{\parallel} \rightarrow 2\pi k_{\parallel} dk_{\parallel}$. Essa equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$E_{\text{plasmon},\sigma} = \frac{\hbar c}{4\pi} \int_0^{\infty} dk_{\parallel} k_{\parallel} \omega_{\sigma}(\Omega, k_{\parallel}, d) \quad (3.132)$$

onde

$$\omega_{\sigma}(\Omega, k_{\parallel}, d) = \sqrt{k_{\parallel}^2 - \kappa_{\sigma}^2(k_{\parallel}, \Omega, d)} - \sqrt{k_{\parallel}^2 - \kappa_{\text{single}}^2(k_{\parallel}, \Omega, d)} \quad (3.133)$$

Fazendo ainda a substituição $k_{\parallel} \rightarrow k_{\parallel}/d$, segue que

$$E_{\text{plasmon},\sigma} = \frac{\hbar c}{4\pi d^3} \int_0^{\infty} dk_{\parallel} k_{\parallel} d \omega_{\sigma}(\Omega, k_{\parallel}/d, d) \quad (3.134)$$

Agora, fazendo a substituição $k_{\parallel} \rightarrow k_{\parallel} \sqrt{\Omega d}$, se obtém

$$E_{\text{plasmon},\sigma} = \frac{\hbar c \sqrt{\Omega d}}{4\pi d^3} g(\Omega d) \quad (3.135)$$

onde

$$g(\Omega d) = \sqrt{\Omega d} \int_0^{\infty} dk_{\parallel} k_{\parallel} d \omega_{\sigma}(\Omega, k_{\parallel} \sqrt{\Omega/d}, d) \quad (3.136)$$

Os cálculos da função $g(x)$ são essencialmente numéricos [20] e fornecem o seguinte resultado:

$$g(x) = \begin{cases} -0,7022427 & \text{para } \sigma = 1 \quad \text{plasm\~{o}ns sim\~{e}tricos} \\ 0,639449 & \text{para } \sigma = -1 \quad \text{plasm\~{o}ns anti-sim\~{e}tricos} \end{cases} \quad (3.137)$$

3.4. EFEITO CASIMIR PARA FOLHAS FINAS DE PLASMA - MODELO DE BORDAG73

Portanto, a Equação (3.135) se torna

$$E_{\text{plasmon},\sigma=+1} = 0,05090 \hbar c \frac{\sqrt{\Omega}}{d^{5/2}} \quad (3.138)$$

$$E_{\text{plasmon},\sigma=-1} = -0,05589 \hbar c \frac{\sqrt{\Omega}}{d^{5/2}} \quad (3.139)$$

A contribuição da polarização TM para a energia é a soma da contribuição dos dois plasmôns, ou seja,

$$E_{\text{TM}} = -0,005 \hbar c \frac{\sqrt{\Omega}}{d^{5/2}} \quad (3.140)$$

Substituindo aqui a definição de Ω , dado pela Equação (3.78), segue que a energia por unidade de área é dada por

$$E_{\text{TM}} = -0,005 \hbar c d^{-5/2} \sqrt{\frac{ne^2}{mc^2 \epsilon_0}} \quad (3.141)$$

Essa equação representa a contribuição dos plasmôns na energia de Casimir para duas folhas de plasma. Na próxima seção, será estudado como Kempf [23] aplicou esse modelo para estimar a temperatura crítica de cupratos supercondutores.

Para placas finas de plasma, a energia de Casimir é dominada por plasmons de superfície (isto é, ondas de propagação ao longo da superfície) em pequenas separações (escala nanométrica), enquanto em grandes separações os fótons (ondas de propagação perpendicular as superfícies) dominam [20]. Sendo assim, a energia de Casimir para uma onda TM (transversal magnética) é [20]:

$$E_{\text{cas}} = -5 \times 10^{-3} \frac{\hbar c A}{d^{5/2}} \sqrt{\Omega} \quad (3.142)$$

onde Ω tem dimensão de número de onda (m^{-1}), por isso chamado de comprimento de onda característico. O parâmetro Ω é proporcional à densidade de cargas na folha de plasma e é definido por [21] como

$$\Omega = \frac{2\pi n_{2D} q^2}{mc^2} \quad (3.143)$$

Na equação (3.143) n_{2D} representa a densidade de carga planar ao longo das placas e q a carga dos portadores. Porém, a Equação (3.143) esta escrita em unidades gaussianas. Transformando para unidades do sistema internacional, onde a carga possui um fator de conversão de $1/4\pi\epsilon_0$,

3.4. EFEITO CASIMIR PARA FOLHAS FINAS DE PLASMA - MODELO DE BORDAG74

esta mesma equação se torna

$$\Omega = \frac{\mu_0 n_{2D} q^2}{2m} \quad (3.144)$$

onde m é a massa efetiva dos portadores de carga e ϵ_0 é a permissividade elétrica no vácuo. Também foi utilizada a relação $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$. Considerando que a massa dos portadores nos planos de plasma é $m = m_{ab}^*$, a Equação (3.142) pode ser reescrita como

$$E_{cas} = \frac{-5 \times 10^{-3} \hbar c A}{2^{\frac{1}{2}} d^{\frac{5}{2}}} \sqrt{\frac{\mu_0 n_{2D} q^2}{m_{ab}^*}} \quad (3.145)$$

No próximo capítulo esta energia será relacionada a energia de condensação supercondutora, da qual será obtida uma relação importante para a temperatura crítica.

Capítulo 4

O EFEITO CASIMIR EM CUPRATOS SUPERCONDUTORES DE ALTO T_C

Em 2008, Kempf [23] sugeriu a ocorrência do efeito Casimir entre os planos de CuO_2 nos cupratos supercondutores. Ele estimou a temperatura crítica de cupratos supercondutores a partir do resultado obtido por Bordag [20] para a contribuição dos plasmôns na energia de Casimir para duas folhas de plasma. No regime de pequenas distâncias (escala nanométrica) essa energia de condensação é igual a energia de Casimir [51, 52].

Em supercondutores de alta temperatura (HTSC) o efeito Casimir entre as placas pode ser atribuído às camadas de óxido de cobre $n\text{CuO}_2$ que, inicialmente não estão no estado supercondutor e, transicionam para o estado supercondutor abaixo de uma temperatura crítica T_c .

A interpretação é que cada conjunto de camadas $n\text{CuO}_2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) pode ser aproximado por uma placa de plasma equivalente, ou seja, uma placa representando a associação paralela de placas condutoras de Cu-O. Portanto, a distância d entre os planos equivalentes do supercondutor coincide com o parâmetro de rede c , como mostrado na Fig. 4.1.

Uemura *et al.* [24–26] estabeleceu uma forte correlação entre T_c e n/m^* e λ , a saber: $\frac{1}{\lambda^2} \propto \frac{n}{m^*}$, através de medidas de relaxação de múons σ que reflete a largura inhomogênea dos campos locais no estado de vortex sob um campo externo alto. A μSR representa diferentes regiões do supercondutor em relação ao seu volume. Utilizando essa proposta, investiga-se uma relação T_c e λ a partir da Equação (3.145).

O parâmetro de penetração λ é um parâmetro da supercondutividade que se relaciona com a

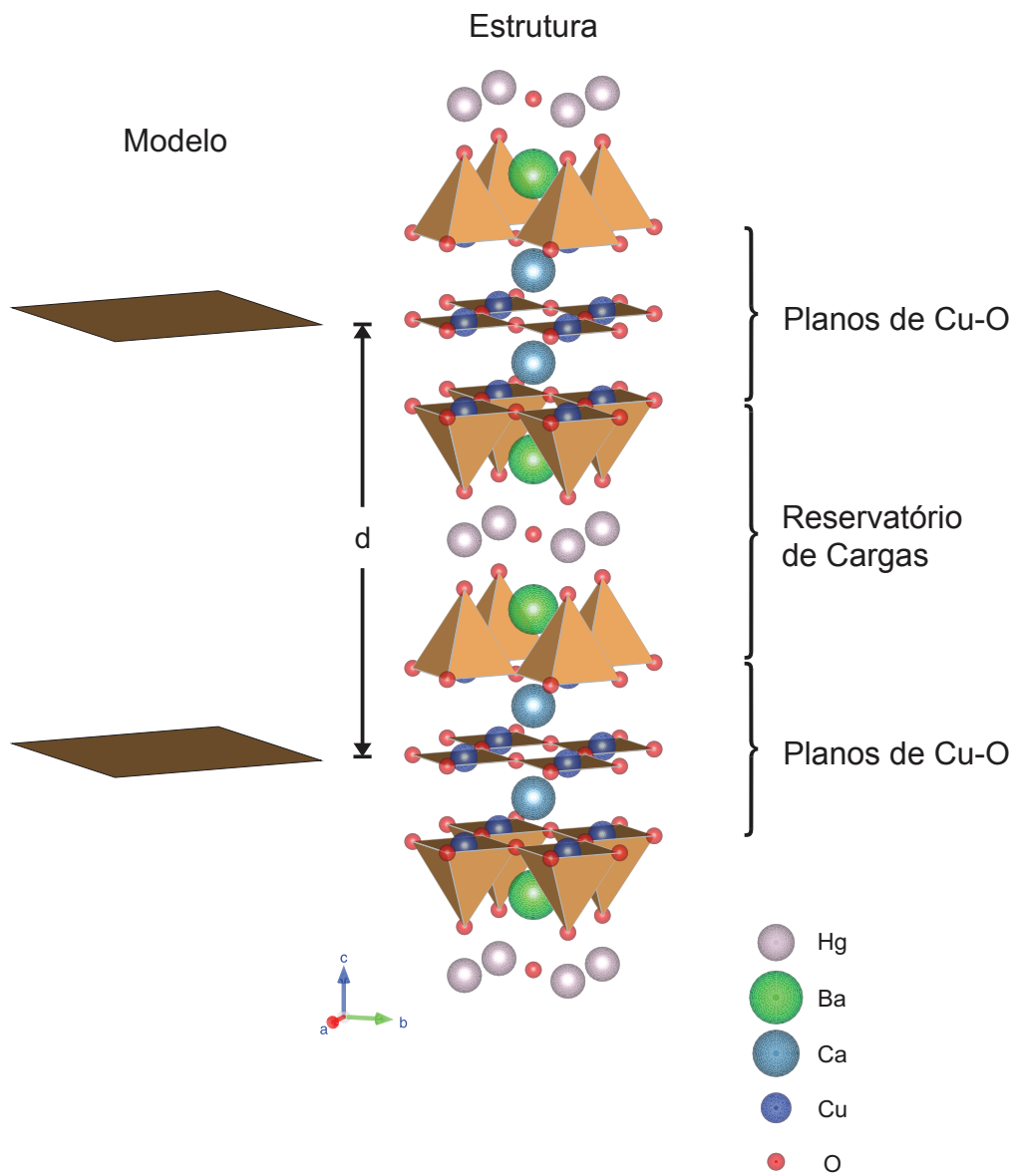


Figura 4.1 – As camadas $n\text{CuO}_2$ ($n = 3$) são aproximadas por uma placa equivalente. Como exemplo, essas placas são desenhadas para célula unitária do supercondutor Hg-1223. O efeito Casimir ocorre entre essas duas placas equivalentes, onde d é a distância entre as placas equivalentes do supercondutor e coincide com o parâmetro de rede c [39].

densidade dos portadores n_{2D} e a massa efetiva m^* através da Equação (2.72).

Alguns trabalhos [34, 35] demonstram que, para grandes anisotropias, a profundidade de penetração efetiva torna-se independente da anisotropia real e é exclusivamente determinada pela profundidade de penetração no plano λ_{ab} . Portanto, a equação (3.145) pode ser reescrita como

$$E_{cas} = -\frac{5 \times 10^{-3} \hbar c A}{2^{\frac{1}{2}} d^2} \frac{1}{\lambda_{ab}(0)} \quad (4.1)$$

Nesta Equação, a energia de Casimir está relacionada com um parâmetro supercondutor: o comprimento de penetração de London, $\lambda_{ab}(0)$, indicando uma possível correlação entre as duas teorias.

4.1 EQUIVALÊNCIA ENTRE ENERGIA DE CASIMIR E ENERGIA DE CONDENSAÇÃO

Kempf [23] propôs que no regime de pequenas distâncias (escala nanométrica) a energia de condensação E_{cond} é igual a energia de Casimir E_{cas} :

$$E_{cond} = E_{cas} \quad (4.2)$$

Seguindo esse modelo, utiliza-se as equações (4.1) e (2.88) para escrever que a temperatura de transição pode ser descrita como:

$$\begin{aligned} E_{cond} &= E_{cas} \\ -\frac{m^* A \eta^2 k_B^2 T_c^2}{2\pi \hbar^2} &= -\frac{5 \times 10^{-3} \hbar c A}{2^{\frac{1}{2}} d^2 \lambda_{ab}(0)} \\ -\frac{m^* \eta^2 k_B^2 T_c^2}{2\pi \hbar^2} &= -\frac{5 \times 10^{-3} \hbar c}{2^{\frac{1}{2}} d^2 \lambda_{ab}(0)} \\ T_c^2 &= \frac{\pi \hbar^3 c}{10^2 2^{\frac{1}{2}} \eta^2 k_B^2 m^* d^2 \lambda_{ab}(0)} \\ T_c &= \frac{1}{10 \eta k_B} \left[\frac{\pi \hbar^3 c}{2^{\frac{1}{2}} m^* d^2 \lambda_{ab}(0)} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

A equação (4.3) apresenta $\eta = 1.76$ como parâmetro BCS, d sendo a distância entre as camadas $n\text{CuO}_2$, k_B é a constante de Boltzman, $\lambda_{ab}(0)$ o comprimento de penetração London paralelo ao plano ab .

A massa efetiva dos portadores m^* tem sido relacionada como um múltiplo da massa do elétron [23, 45]. Este trabalho usará para a massa efetiva dos portadores de carga a expressão proposta:

$$m^* = \alpha m_e \quad (4.4)$$

onde α é um escalar adimensional e m_e é massa do elétron. O parâmetro $m^* = \alpha m_e$ representa um fator relacionado com a massa efetiva dos portadores de carga supercondutores, que surge da convolução da simetria molecular dos CuO_2 (por exemplo, octaédrico, piramidal, etc.) com a simetria do cristal.

$$\left(\frac{1}{m^*} \right)_{\mu\nu} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 \varepsilon}{dk_\mu dk_\nu} \quad (4.5)$$

Dessa forma, a equação (4.3), com as constantes calculadas é:

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{1}{10\eta k_B} \left[\frac{\pi \hbar^3 c}{2^{\frac{1}{2}} \alpha m_e d^2 \lambda_{ab}(0)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ T_c &= \frac{1}{10\eta k_B} \left[\frac{\pi \hbar^3 c}{2^{\frac{1}{2}} m_e} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\alpha d^2 \lambda_{ab}(0)} \right]^{1/2} \\ T_c(\alpha, d, \lambda_{ab}) &= M \left[\frac{1}{\alpha d^2 \lambda_{ab}(0)} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde

$$M = \frac{1}{10\eta k_B} \left[\frac{\pi \hbar^3 c}{2^{\frac{1}{2}} m_e} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.7)$$

A principal relação apontada pela Equação (4.6) é que T_c é uma função de $\alpha^{\frac{1}{2}}$, d e $\lambda_{ab}^{\frac{1}{2}}(0)$. Assim, a mobilidade dos portadores α pode ser calculada através dos parâmetros T_c , d e $\lambda_{ab}(0)$:

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{1}{10\eta k_B} \right)^2 \left[\frac{\pi \hbar^3 c}{2^{\frac{1}{2}} m_e} \right] \left[\frac{1}{T_c^2 d^2 \lambda_{ab}(0)} \right] \\ \alpha(T_c, d, \lambda_{ab}) &= \frac{M^2}{T_c^2 d^2 \lambda_{ab}(0)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

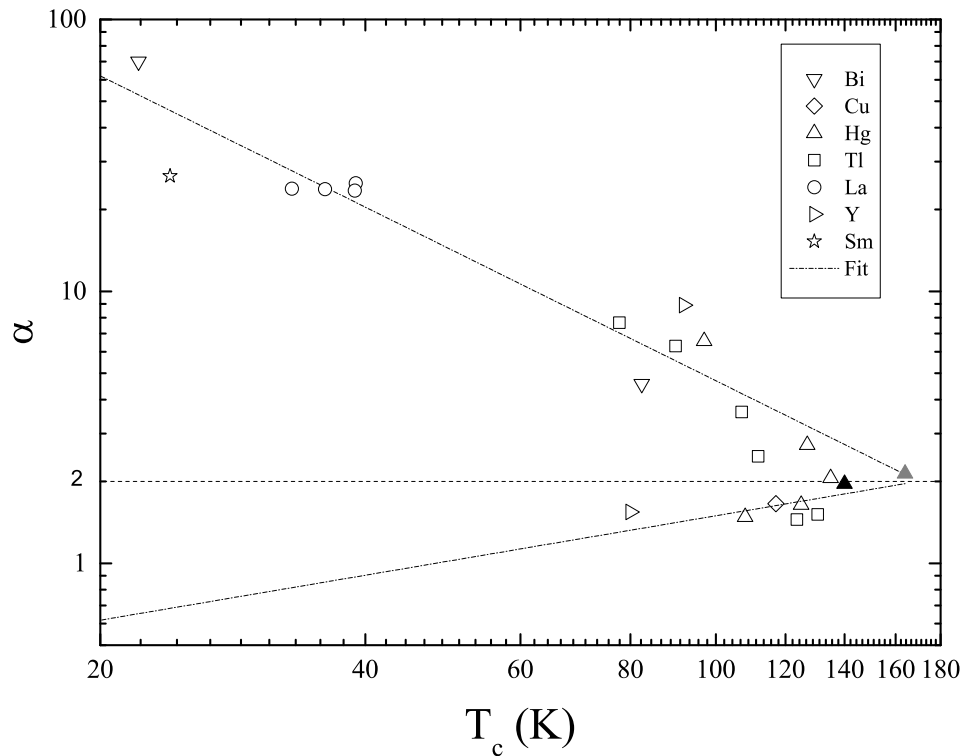


Figura 4.2 – Comportamento de α (calculado neste artigo) em função de T_c , plotado em escala logarítmica. Os pontos triangulares destacados (preenchidos) correspondem a amostras de Hg-1223 estudadas sob pressão e seus dados foram retirados dos artigos [53] (preto) e [10] (cinza).

Na Tabela 2 são apresentados valores de α calculados a partir dos valores de T_c , $\lambda_{ab}(0)$ e d encontrados na literatura.

A Equação (4.6) se diferencia da equação obtida por Kempf [23] basicamente por estar em função do comprimento de penetração. Esta ideia foi pensada a partir da correlação experimental encontrada por Uemura [24]. Dessa forma, a Equação (4.6) está escrita em função de parâmetros que são encontrados abundantemente na literatura. Isso permite comparar os valores que são encontrados com esta equação com os valores calculados neste trabalho.

4.2 COMPORTAMENTO DE α PARA VÁRIOS Cu-HTSC

A partir dos dados apresentados na Tabela 2, foi analisado o comportamento de α (calculado neste artigo) em função de T_c (extraído da literatura), como mostrado na Fig. 4.2. Observe que o valor mais alto de T_c ocorre para $\alpha = 2.0 \pm 0.1$.

Além disso, foi encontrada uma tendência assintótica que sugere que existe uma interação entre

os portadores de carga e a rede na região $\alpha \geq 2$ que otimiza a temperatura crítica para $\alpha \simeq 2$. O gráfico ainda mostra que essa interação cai rapidamente para $\alpha < 2$.

Os valores de α obtidos são o resultado dessa interação portador-rede ou indicativo de placas de plasmons. Considerando que α representa a dificuldade de mobilidade da carga devido à interação com a rede, o gráfico da Fig. 4.2 indica que esta interação com a rede é otimizada quando os portadores tem uma massa efetiva de dois elétrons (pares de Cooper), o que implica que neste momento, os portadores atingem a mobilidade máxima, sempre mantendo uma interação com a rede. Deste ponto ($\alpha < 2$), entende-se que a mobilidade dos portadores aumenta, mas sua interação com a rede cristalina reduz significativamente, dificultando a correlação entre carga.

Considerando o cenário do efeito Casimir, sugerimos que as placas podem ser interpretadas como membranas plasmáticas que vibram e interagem entre si através do espaço entre os planos. Do ponto de vista da supercondutividade, se a interação entre os portadores e a rede é suficientemente forte, a massa efetiva dos portadores é influenciada pela rede. Este fato pode ser explicado pela existência do efeito do oxigênio isotópico na profundidade de penetração de London no plano ab , λ_{ab} [54]. Assim, é possível classificar a região $\alpha \geq 2$ como não-adiabática, onde T_c é otimizado para $\alpha \simeq 2$. Para $\alpha < 2$, a região se torna quase adiabática, tendendo rapidamente a uma região fortemente adiabática, onde um desacoplamento portador-rede aparece.

4.3 AVALIAÇÃO DE α ATRAVÉS DA MEDIÇÃO DO CALOR ESPECÍFICO

Com o intuito de validar os dados apresentados nesse trabalho, resolveu-se calcular o calor específico da amostra Hg-1223 e comparar com os valores encontrados na literatura. Para tal, partiu-se da equação

$$\gamma = \frac{1}{3}\pi^2 D(E_F)k_B^2 \quad (4.9)$$

onde γ é a constante de Sommerfeld [30]. Usando a Equação (2.85), escreve-se

$$\gamma = \frac{1}{3} \frac{\pi m_e A k_B^2}{\hbar^2} \alpha \quad (4.10)$$

Tabela 2 – Valores de α calculados a partir dos valores de T_c , d e $\lambda_{ab}(0)$ encontrados na literatura. Usamos $d = c$ para todos os compostos apresentados.

Composto	Ref.	T_c (K)	$\lambda_{ab}(0)$ (nm)	a (Å)	d (Å)	α	$\gamma_{cal.}$ $\left(\frac{mJ}{mol K^2}\right)$	$\gamma_{lit.}$ $\left(\frac{mJ}{mol K^2}\right)$
Sm(La _{0.8} Sr _{0.2})CuO _{4-δ}	[55]	24(1)	395(20)		15.500(2)	27(3)		
La _{1.9} Sr _{0.1} CuO ₄	[36]	33(7)	320(16)	3.7839(8)	13.211(4)	24(9)	34(13)	
La _{1.875} Sr _{0.125} CuO ₄	[36]	36(5)	270(14)	3.7784(8)	13.216(4)	24(6)	33(9)	
La _{1.85} Sr _{0.15} CuO ₄	[56]	38.9(1)	234(12)	3.7949(4)	13.214(1)	23(1)	33(2)	
La _{1.85} Sr _{0.15} CuO ₄	[36, 57]	39(2)	219(10)	3.7949(4)	13.226(3)	25(3)	35(4)	4.5(1)
Tl-1212	[58]	77.7(1)	214(5)	3.8566(4)	12.100(1)	7.7(2)	11.2(3)	
YBa ₂ Cu ₄ O ₈	[36, 59]	80(2)	198(10)	3.86(1)	27.240(6)	1.5(1)	2.3(2)	4.9(2)
Bi-2212	[57, 60]	82.4(2)	200(6)	5.1300(5)	15.300(2)	4.6(1)	11.8(4)	14(1)
Tl-2201	[61, 62]	90(1)	213(11)	3.8637(4)	11.560(1)	6.3(3)	9.3(5)	6.5(1)
YBa ₂ Cu ₃ O ₇	[36, 57]	92(1)	142(3)	3.8198(1)	11.676(3)	8.9(3)	12.8(4)	13(1)
Hg-1201	[63, 64]	97(1)	260(13)	3.8825(3)	9.510(1)	6.6(4)	9.7(5)	3(1)
Tl-2212	[61, 65]	107(1)	164(8)	3.8550(4)	14.650(1)	3.6(2)	5.3(3)	3.7(7)
Hg-1245	[66, 67]	108(1)	171(9)	3.849(1)	22.200(2)	1.5(1)	2.2(1)	
Tl-1223	[58]	111.7(1)	186(5)	3.8429(4)	15.900(2)	2.48(7)	3.6(1)	9(1)
Cu-1234	[68]	117(1)	198(10)	3.8580(4)	17.980(2)	1.7(1)	2.4(1)	
Hg-1234	[68]	125(1)	157(8)	3.8580(4)	18.988(2)	1.6(1)	2.4(1)	
Hg-1212	[42, 57, 63]	127(1)	205(10)	3.860(1)	12.693(7)	2.7(1)	4.0(2)	
Tl-1234	[69]	131(1)	156(8)	3.8490(4)	19.005(2)	1.5(1)	2.2(1)	
Hg-1223	[42, 63, 70]	135(1)	154(8)	3.854(1)	15.855(8)	2.1(1)	3.0(2)	1.88(1)
Hg,Re-1223 (1GPa)	[45, 53]	140(1)	147(7)		15.766(2)	2.0(1)		
Hg,Re-1223 (31GPa)	[10]	164(1)	110(6)		13.103(1)	2.1(1)		

Dessa forma, utilizando os valores das constantes, os dados encontrados na literatura e α calculado, foram calculados também os valores da constante de Sommerfeld γ_{cal} , apresentados na Tabela 2, usando a Equação (4.10). Estes valores foram comparados com os valores obtidos na literatura, γ_{lit} .

Ao correlacionar os valores obtidos para α ($m^* = \alpha m_e$) com os valores medidos encontrados para γ do calor específico, encontramos uma concordância apenas para uma das amostras ($\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$). Para apenas uma outra amostra ($\text{La}_{1.85}\text{Sr}_{0.15}\text{CuO}_4$) os valores não estão na mesma ordem de grandeza. Para todas as outras, os valores não coincidem, porém estão na mesma ordem de grandeza. Os valores de γ_{cal} foram encontrados através da Equação (4.10) utilizando os valores de α calculados a partir da Equação (4.8). Não foram encontrados todos os valores γ_{lit} para os compostos analisados.

Capítulo 5

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

5.1 CONCLUSÕES

Este trabalho propõe uma correlação entre os seguintes parâmetros macroscópicos: o comprimento de penetração de London no plano λ_{ab} , a temperatura crítica T_c , a distância d entre os planos supercondutores equivalentes do Cu-HTSC e a massa efetiva ($m^* = \alpha m_e$) dos portadores de carga. Isto foi realizado utilizando a ideia original proposta por Kempf *et al.* [23] para associar a energia de Casimir e a energia de um condensado supercondutor com a anisotropia caracterizada pela alta bidimensionalidade. A correlação proposta foi baseada na aproximação da energia de Casimir para placas de plasma descrita por Bordag *et al.* [20] e na proposta Uemura *et al.* [25,26], que mostrou uma correlação entre o comprimento de penetração de London λ_{ab} e o parâmetro n/m^* .

Considerando a correlação aqui proposta como referência e os dados encontrados na literatura, verificamos que a temperatura crítica aumenta quando a mobilidade dos portadores nos cupratos supercondutores cresce até um ponto $\alpha \simeq 2$ que otimiza a temperatura crítica. Entende-se que esta região ($\alpha \geq 2$) é caracterizada por um comportamento não adiabático entre os portadores e a rede cristalina, onde existe uma correlação entre a energia de Casimir e a energia de condensação supercondutora na matriz cristalina. Além disso, com base nos dados obtidos, foi proposto que a energia de Casimir descrita por Bordag [20] para placas de plasma descreve bem o comportamento de Cu-HTSCs, como sugerido por Kempf [23]. Além disso, vale ressaltar que

este cenário está de acordo com a relação proposta por Uemura [26].

Neste trabalho, verificamos que é possível avaliar o parâmetro escalar α na massa efetiva, conhecendo os seguintes parâmetros macroscópicos: comprimento de penetração de London no plano λ_{ab} , a temperatura crítica T_c e a distância d entre os planos supercondutores equivalentes nas famílias de cupratos supercondutores.

O fato de a massa efetiva ser um parâmetro associado ao estado supercondutor indica que o sistema é não adiabático. Isto confirma a sugestão proposta por Khasanov *et al.* [54] em que os Cu-HTSCs são considerados supercondutores não adiabáticos, indicando uma forte interação entre os portadores de carga e o plano Cu-O (placas de plasma). Neste cenário, o efeito isotópico do oxigênio no plano ab demonstra claramente que a rede planar de Cu-O desempenha um papel importante na física dos cupratos [54], que está relacionado com a massa efetiva no plano ab, m_{ab}^* .

5.2 TRABALHOS FUTUROS

Com base nos resultados obtidos neste estudo e aqueles apresentados na literatura [71,72], a fim de obter maiores temperaturas críticas em Cu-HTSC, dois métodos podem ser considerados:

- Redução da distância d entre Cu-O planos (como indicado por experimentos de pressão), o que causa uma diminuição na distância entre os planos de Cu-O.
- Um processo de dopagem nos planos Cu-O que aumenta a densidade do portador.

Nesse sentido, nosso grupo vem realizando novos experimentos de dopagem para aumentar o caráter metálico dos planos para obter temperaturas mais altas em Cu-HTSC.

Outra perspectiva que surge a partir da discussão da ocorrência do efeito Casimir é abordar outras estruturas de alta bidimensionalidade através do modelo dielétrico ou de placas finas de plasma, ambas descritas por Bordag [20]. Aqui foi utilizado apenas o modelo para placas finas de plasma para cupratos supercondutores.

Com o intuito de melhorar a qualidade dos dados calculados em comparação com os encontrados na literatura, pode-se pensar num fator de correção. Esse fator pode estar associado, por exemplo, à quantidade de planos de cobre da estrutura supercondutoras em questão.

REFERÊNCIAS

- [1] ONNES, H. K. Further experiments with liquid helium. G. On the electrical resistance of pure metals, etc. VI. On the sudden change in the rate at which the resistance of mercury disappears. **Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden**, v. 124c, p. 818–821, 1911.
- [2] MEISSNER, W.; OCHSENFELD, R. Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit. **Die Naturwissenschaften**, v. 21, n. 44, p. 787–788, nov 1933. ISSN 0028-1042.
- [3] LONDON, F.; LONDON, H. The Electromagnetic Equations of the Supraconductor. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 149, n. 866, p. 71–88, mar 1935. ISSN 1364-5021.
- [4] GINZBURG, V. L.; LANDAU, L. D. On the Theory of Superconductivity. **Zh. Eksp. Teor. Fiz.**, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, v. 1064, p. 1064–1082, 1950.
- [5] BARDEEN, J.; COOPER, L. N.; SCHRIEFFER, J. R. Theory of Superconductivity. **Physical Review**, v. 108, n. 5, p. 1175–1204, dez 1957. ISSN 0031-899X.
- [6] JOSEPHSON, B. D. Possible new effects in superconductive tunnelling. **Physics Letters**, v. 1, n. 7, p. 251–253, jul 1962. ISSN 00319163.
- [7] BEDNORZ, J. G.; MULLER, K. A. Possible highT_c superconductivity in the Ba-La-Cu-O system. **Physica B: Condensed Matter**, v. 64, n. 2, p. 189–193, jun 1986. ISSN 0722-3277.
- [8] WU, M. et al. Superconductivity at 93 K in a new mixed-phase Y-Ba-Cu-O compound system at ambient pressure. **Physical Review Letters**, v. 58, n. 9, p. 908–910, mar 1987. ISSN 0031-9007.
- [9] SCHILLING, A. et al. Superconductivity above 130 K in the Hg–Ba–Ca–Cu–O system. **Nature**, v. 363, n. 6424, p. 56–58, mai 1993. ISSN 0028-0836.

- [10] GAO, L. et al. Superconductivity up to 164 K in $\text{HgBa}_2\text{Ca}_{m-1}\text{Cu}_m\text{O}_{2m+2+\delta}$ ($m=1, 2,$ and 3) under quasihydrostatic pressures. **Physical Review B**, v. 50, n. 6, p. 4260–4263, ago 1994. ISSN 0163-1829.
- [11] PASSOS, C. A. C. et al. Effects of oxygen content on the properties of the $\text{Hg}_{0.82}\text{Re}_{0.18}\text{Ba}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{8+d}$ superconductor. **Superconductor Science and Technology**, v. 15, n. 8, p. 1177–1183, aug 2002. ISSN 09532048.
- [12] NAGAMATSU, J. et al. Superconductivity at 39 K in magnesium diboride. **Nature**, v. 410, n. 6824, p. 63–4, mar 2001. ISSN 0028-0836.
- [13] KAMIHARA, Y. et al. Iron-based layered superconductor $\text{La}[\text{O}(1-x)\text{F}(x)]\text{FeAs}$ ($x = 0.05$ - 0.12) with $T(c) = 26$ K. **Journal of the American Chemical Society**, v. 130, n. 11, p. 3296–7, mar 2008. ISSN 1520-5126.
- [14] CASIMIR, H. B. G. On the attraction between two perfectly conducting plates. **Proc. K. Ned. Akad. Wet.**, v. 51, p. 793–795, 1948.
- [15] SPARNAAY, M. J. Measurements of attractive forces between flat plates. **Physica**, v. 24, n. 6-10, p. 751–764, 1958. ISSN 00318914.
- [16] LAMOREAUX, S. K. Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6 μm Range. **Physical Review Letters**, v. 78, n. 1, p. 5–8, jan 1997. ISSN 0031-9007.
- [17] MOHIDEEN, U.; ROY, A. Precision Measurement of the Casimir Force from 0.1 to 0.9. **Physical Review Letters**, v. 81, n. 21, p. 4549–4552, 1998. ISSN 0031-9007.
- [18] KLIMCHITSKAYA, G. L.; MOHIDEEN, U.; MOSTEPANENKO, V. M. The Casimir force between real materials: Experiment and theory. **Reviews of Modern Physics**, v. 81, n. 4, 2009.
- [19] WOODS, L. M. et al. Materials perspective on Casimir and van der Waals interactions. **Reviews of Modern Physics**, v. 88, n. 4, p. 045003, nov 2016. ISSN 0034-6861.
- [20] BORDAG, M. The Casimir effect for thin plasma sheets and the role of the surface plasmons. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 39, n. 21, p. 6173–6185, mai 2006. ISSN 0305-4470.

- [21] BARTON, G. Casimir effects for a flat plasma sheet: I. Energies. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 38, n. 13, p. 2997–3019, abr 2005. ISSN 0305-4470.
- [22] BORDAG, M. et al. Lifshitz-type formulas for graphene and single-wall carbon nanotubes: Van der Waals and Casimir interactions. **Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics**, v. 74, n. 20, p. 1–9, 2006. ISSN 10980121.
- [23] KEMPF, A. On the Casimir effect in the high- T_c cuprates. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 41, n. 16, p. 164038, abr 2008. ISSN 1751-8113.
- [24] UEMURA, Y. J. et al. Universal Correlations between T_c and n_{sm}^* (Carrier Density over Effective Mass) in High- T_c Cuprate Superconductors. **Physical Review Letters**, v. 62, n. 19, p. 2317–2320, mai 1989. ISSN 0031-9007.
- [25] UEMURA, Y. J. et al. Basic similarities among cuprate, bismuthate, organic, Chevrel-phase, and heavy fermion superconductors shown by penetration depth measurements. **Physical Review Letters**, v. 66, n. 20, p. 2665–2668, 1991. ISSN 0031-9007.
- [26] UEMURA, Y. J. Condensation, excitation, pairing, and superfluid density in high- T_c superconductors: the magnetic resonance mode as a roton analogue and a possible spin-mediated pairing. **Journal of Physics: Condensed Matter**, v. 16, n. 40, p. S4515–S4540, oct 2004. ISSN 0953-8984.
- [27] ANNETT, J. F. **Superconductivity, Superfluids and Condensates**. Oxford: Oxford University Press, 2003. 140 p.
- [28] ABRIKOSOV, A. A. Magnetic properties of superconductors of the second group. **Jetp**, v. 5, n. 6, p. 1174–1182, 1957. ISSN 00385646.
- [29] SCHMIDT, V. V. **The Physics of Superconductors - Introduction to Fundamentals and Applications**. Berlin: Springer-Verlag, 1997. 109 p.
- [30] POOLE, C. P. J. et al. **Superconductivity**. 2. ed. New York: Elsevier, 2007. 671 p. ISBN 9780120887613.
- [31] KITTEL, C. **Introduction to Solid State Physics**. 8. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2005. 703 p. ISBN 047141526X.

- [32] LAWRENCE, W. E.; DONIACH, S. Theory of Layer-Structure Superconductors. **Proceedings of the Twelfth International Conference on Low Temperature Physics**, p. 361–362, 1971.
- [33] PUŻNIAK, R.; USAMI, R.; YAMAUCHI, H. Overdoped regime of the high- T_c superconductor $\text{HgBa}_2\text{CuO}_{4+\delta}$ and the relation between normal and superconducting carrier densities. **Physical Review B**, American Physical Society, v. 53, n. 1, p. 86–89, jan 1996. ISSN 0163-1829.
- [34] LUETKENS, H. et al. Field and temperature dependence of the superfluid density in $\text{LaFeAsO}_{1-x}\text{F}_x$ superconductors: a muon spin relaxation study. **Physical review letters**, v. 101, n. 9, p. 097009, ago 2008. ISSN 0031-9007.
- [35] FESENKO, V. I.; GORBUNOV, V. N.; SMILGA, V. P. Analytical properties of muon polarization spectra in type-II superconductors and experimental data interpretation for mono- and polycrystalline HTSCs. **Physica C: Superconductivity**, v. 176, n. 4-6, p. 551–558, jun 1991. ISSN 09214534.
- [36] HARSHMAN, D. R.; MILLS, A. P. Concerning the nature of high- T_c superconductivity: Survey of experimental properties and implications for interlayer coupling. **Physical Review B**, v. 45, n. 18, p. 10684–10712, mai 1992. ISSN 0163-1829.
- [37] ASHCROFT. **Física do Estado Sólido**. São Paulo: Cengage Learning, 2011. 826 p. ISBN 978-85-221-0902-9.
- [38] PARK, C.; SNYDER, R. L. Structures of High-Temperature Cuprate Superconductors. **Journal of the American Ceramic Society**, v. 78, n. 12, p. 3171–3194, dez 1995. ISSN 00027820.
- [39] ORLANDO, M. T. D. et al. superconducting cuprates in a Casimir energy scenario. **Physics Letters A**, Elsevier B.V., v. 1, p. 1–6, 2018. ISSN 0375-9601.
- [40] JORGENSEN, J. D. Defects and Superconductivity in the Copper Oxides. **Physics Today**, v. 44, n. 6, p. 34, 1991. ISSN 00319228.
- [41] PUTILIN, S. N. et al. Superconductivity at 94 K in $\text{HgBa}_2\text{CuO}_{4+\delta}$. **Nature**, v. 362, n. 6417, p. 226–228, mar 1993. ISSN 0028-0836.

- [42] FUKUOKA, A. et al. Dependence of T_c and transport properties on the Cu valence in $\text{HgBa}_2\text{Can-1Cu}_n\text{O}_{2(n+1)+x}$ ($n=2,3$) superconductors. **Physical Review B**, v. 55, n. 10, p. 6612–6620, mar 1997. ISSN 0163-1829.
- [43] ORLANDO, M. T. D. et al. Effects of re-doping on superconducting properties and formation of Hg-1223 superconductors. **Physica C: Superconductivity**, v. 328, n. 3-4, p. 257–269, dez 1999. ISSN 09214534.
- [44] PASSOS, C. A. C. et al. Resistivity study of the pseudogap phase for (Hg,Re)-1223 superconductors. **Physical Review B**, v. 74, n. 9, p. 094514, set 2006. ISSN 1098-0121.
- [45] ORLANDO, M. T. D. et al. Pressure effect on Hg-12(n-1)n superconductors and Casimir effect in nanometer scale. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 42, n. 2, p. 025502, jan 2009. ISSN 1751-8113.
- [46] CASIMIR, H. B. G.; POLDER, D. The Influence of Retardation on the London-van der Waals Forces. **Physical Review**, v. 73, n. 4, p. 360–372, fev 1948. ISSN 0031-899X.
- [47] MILONNI, P. W. **The Quantum Vacuum**. 1. ed. San Diego: Academic Press, Inc, 1994. 522 p.
- [48] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions**. 9. ed. New York: Dover Publications, Inc., 1970. 1072 p.
- [49] GRIFFITHS, D. J. **Eletrodinamica**. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2011. 402 p.
- [50] BORDAG, M.; MOHIDEEN, U.; MOSTEPANENKO, V. M. New developments in the Casimir effect. **Physics reports**, 2001.
- [51] BIMONTE, G. et al. Variations of Casimir energy from a superconducting transition. **Nuclear Physics B**, v. 726, n. 3, p. 441–463, out 2005. ISSN 05503213.
- [52] CALLONI, E. et al. Towards weighing the condensation energy to ascertain the Archimedes force of vacuum. **Physical Review D**, v. 90, n. 2, p. 022002, jul 2014. ISSN 1550-7998.
- [53] ORLANDO, M. T. D. et al. Hg,Re-1223 system: T_c dependence on hydrostatic pressure and thermopower measurements. **Physica C: Superconductivity**, v. 364-365, p. 350–352, nov 2001. ISSN 09214534.

- [54] KHASANOV, R. et al. The oxygen isotope effect on the in-plane penetration depth in cuprate superconductors. **Journal of Physics: Condensed Matter**, v. 16, n. 40, p. S4439–S4455, out 2004. ISSN 0953-8984.
- [55] SUTJAHJA, I. M. et al. Intrinsic parameters of a T*-phase SmLa_{0.8}Sr_{0.2}Cu_{4-x} single crystal and the fluctuation effects deduced from magnetization data. **Physical Review B**, v. 65, n. 21, p. 214528, jun 2002. ISSN 0163-1829.
- [56] ZALESKI, A. J.; KLAMUT, J. Influence of Ni and Zn substitution on anisotropy of the penetration depth in La_{1.85}Sr_{0.15}CuO₄. **Physical Review B**, v. 59, n. 21, p. 14023–14030, jun 1999. ISSN 0163-1829.
- [57] GINSBERG, D. M. **Physical properties of high temperature superconductors II**. Singapore: World Scientific, 1990. 700 p.
- [58] WAHL, A. et al. Superconducting fluctuations in TI-based single crystals: Evidence of universal features and derivation of basic parameters. **Physical Review B**, v. 51, n. 14, p. 9123–9128, abr 1995. ISSN 0163-1829.
- [59] JUNOD, A. et al. Specific heat of the superconductor YBa₂Cu₄O₈ from 1.5 to 330 K. **Physica C: Superconductivity**, v. 168, n. 1-2, p. 47–56, jun 1990. ISSN 09214534.
- [60] BAKER, P. J. et al. Tuning the Interlayer Spacing of High-T_c Bi-Based Superconductors by Intercalation: Measuring the Penetration Depth and the Two-Dimensional Superfluid Density. **Physical Review Letters**, v. 102, n. 8, p. 087002, fev 2009. ISSN 0031-9007.
- [61] COUACH, M. et al. Reversible mixed state, specific heat under magnetic field and superconducting fluctuations in the normal state of the high T_c Hg-1223. **Physics Letters A**, v. 188, n. 1, p. 85–90, mai 1994. ISSN 03759601.
- [62] LORAM, J. W. et al. The electronic specific heat of cuprate superconductors. **Physica C: Superconductivity**, v. 235-240, p. 134–137, dez 1994. ISSN 09214534.
- [63] PUŻNIAK, R. Temperature dependence of superconducting carrier density and effective mass in HgBa₂Can-1CunO_y. **Physica C: Superconductivity**, v. 282-287, p. 1459–1460, ago 1997. ISSN 09214534.

- [64] ABAKUMOV, A. M. et al. Effect of Fluorination on the Structure and Superconducting Properties of the Hg-1201 Phase. **Physical Review Letters**, v. 80, n. 2, p. 385–388, jan 1998. ISSN 0031-9007.
- [65] BRAUN, E. et al. Specific heat and thermal expansion of the Bi and Tl high temperature superconductors near T_c . **Zeitschrift für Physik B Condensed Matter**, v. 84, n. 3, p. 333–341, out 1991. ISSN 0722-3277.
- [66] KWON, Y.-T. et al. Reversible magnetization and superconducting properties of the four-layered superconductor with. **Solid State Communications**, v. 152, n. 20, p. 1870–1873, out 2012. ISSN 00381098.
- [67] PARK, M.-S. et al. Evidence of strong anisotropic behavior in the five-layered superconductor $\text{Hg Ba}_2\text{Ca}_4\text{Cu}_5\text{O}_{12+y}$ from equilibrium magnetization measurements. **Physical Review B**, v. 77, n. 2, p. 024519, jan 2008. ISSN 1098-0121.
- [68] KIM, M.-S. et al. Two-dimensional nature of four-layer cuprate superconductors. **Physical Review B**, v. 63, n. 13, p. 134513, mar 2001. ISSN 0163-1829.
- [69] KIM, K.-H. et al. Enhanced two-dimensional properties of the four-layered cuprate high- T_c superconductor $\text{Tl Ba}_2\text{Ca}_3\text{Cu}_4\text{O}_y$. **Physical Review B**, v. 70, n. 9, p. 092501, set 2004. ISSN 1098-0121.
- [70] CALEMCZUK, R. et al. Superconducting transition and specific heat of Hg-based cuprates. **Physica C: Superconductivity**, v. 235-240, n. 94, p. 1743–1744, dez 1994. ISSN 09214534.
- [71] ORLANDO, M. T. D. et al. Effect of hydrostatic pressure on $\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{(8+x)}$ superconductor doped with Re. **Physical Review B**, v. 61, n. 22, p. 15454–15461, jun 2000. ISSN 0163-1829.
- [72] MITO, M. et al. Uniaxial strain effects on the superconducting transition in Re-doped Hg-1223 cuprate superconductors. **Physical Review B**, v. 95, n. 6, p. 064503, 2017. ISSN 2469-9950.
- [73] COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOE, F. **Quantum mechanics - Volume One**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1977. 898 p.

- [74] ZETTILI, N. **Quantum Mechanics: Concepts and Applications**. 2. ed. West Sussex: John Wiley & Sons, Inc., 2009. 671 p. ISBN 9780470026786.
- [75] RYDER, L. H. **Quantum Field Theory**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1996. 487 p.
- [76] LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007. 386 p.
- [77] DALARSSON, M.; DALARSSON, N. **Tensor calculus, relativity, and cosmology**. 1. ed. California: Elsevier, 2005. 280 p.
- [78] THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011. 575 p. ISBN 978-85-221-0906-7.
- [79] REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. **Fundamentos da Teoria Eletromagnética**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 1982. 516 p.
- [80] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. **Física Matemática - Métodos matemáticos para engenharia e física**. Tradução d. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. 900 p.
- [81] MANDL, F.; SHOW, G. **Quantum Filed Theory**. 2. ed. Manchester: Wiley, 2010. ISBN 9780471496830.
- [82] GREINER, W.; REINHARDT, J. **Field Quantization**. Berlin, Heidelberg: Springer, 1996. 461 p.
- [83] GUPTA, S. N. Theory of Longitudinal Photons in Quantum Electrodynamics. **Proceedings of the Physical Society. Section A**, v. 63, n. 7, p. 681–691, jul 1950. ISSN 0370-1298.
- [84] BLEULER, K. A New Method for the treatment of longitudinal and scalar photons. **Helv. Phys. Acta**, v. 23, p. 567–586, 1950.

APÊNDICE A

OSCILADOR HARMÔNICO

O oscilador harmônico é um problema importante para todos os ramos da física, como mecânica clássica, eletrodinâmica, mecânica estatística, estado sólido, entre outros. Trata-se de um sistema físico que consiste em uma massa pontual m presa a uma mola de constante elástica k . O sistema está sujeito a uma energia potencial da forma

$$V(x) = \frac{kx^2}{2} \quad (\text{A.1})$$

onde x é a coordenada de movimento da partícula. Como a frequência de oscilação (angular) é dada por $\omega = \sqrt{k/m}$, pode-se escrever a energia potencial como

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2. \quad (\text{A.2})$$

O Hamiltoniano de uma partícula de massa m que oscila com uma frequência angular ω sob a influência de um potencial harmônico unidimensional é

$$H = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{p_x^2}{2m} \quad (\text{A.3})$$

Na mecânica quântica, as quantidades clássicas x e p são substituídas, respectivamente, pelos operadores \hat{x} e \hat{p} , dados por

$$\hat{x} = x \quad (\text{A.4})$$

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{A.5})$$

Portanto, agora é possível escrever o hamiltoniano do oscilador harmônico em função dos operadores \hat{x} e \hat{p} ,

$$\hat{H} = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}_x^2}{2m} \quad (\text{A.6})$$

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} \left(\frac{m\omega\hat{x}^2}{\hbar} + \frac{\hat{p}_x^2}{m\hbar\omega} \right) \quad (\text{A.7})$$

Agora, introduz-se os seguintes operadores adimensionais,

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} \quad (\text{A.8})$$

$$\hat{P}_x = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\hat{p}_x \quad (\text{A.9})$$

Calculando o comutador entre \hat{x} e \hat{p}_x se obtém

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{p}_x] \psi(\vec{r}) &= \hat{x}\hat{p}_x\psi(\vec{r}) - \hat{p}_x\hat{x}\psi(\vec{r}) \\ &= -i\hbar x \frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial x} - i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (x\psi(\vec{r})) \\ &= \cancel{-i\hbar x \frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial x}} + i\hbar\psi(\vec{r}) + \cancel{i\hbar x \frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial x}} \\ &= i\hbar\psi(\vec{r}) \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} [\hat{p}_x, \hat{x}] \psi(\vec{r}) &= \hat{p}_x\hat{x}\psi(\vec{r}) - \hat{x}\hat{p}_x\psi(\vec{r}) \\ &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (x\psi(\vec{r})) + i\hbar x \frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial x} \\ &= \cancel{-i\hbar\psi(\vec{r}) - i\hbar x \frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial x}} + \cancel{i\hbar x \frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial x}} \\ &= -i\hbar\psi(\vec{r}) \end{aligned}$$

Portanto, escreve-se as relações de comutação

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \quad (\text{A.10})$$

$$[\hat{p}_x, \hat{x}] = -i\hbar \quad (\text{A.11})$$

Consequentemente, escreve-se também as relações de comutação

$$[\hat{X}, \hat{P}_x] = \left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x}, \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} \hat{p}_x \right] = \frac{1}{\hbar} [\hat{x}, \hat{p}_x] = \frac{1}{\hbar} (i\hbar) = i \quad (\text{A.12})$$

$$[\hat{P}_x, \hat{X}] = \left[\frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} \hat{p}_x, \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} \right] = \frac{1}{\hbar} [\hat{p}_x, \hat{x}] = \frac{1}{\hbar} (-i\hbar) = -i \quad (\text{A.13})$$

Portanto, reescrevendo o hamiltoniano,

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{X}^2 + \hat{P}_x^2) \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{X}^2 + i [\hat{X}, \hat{P}_x] + \hat{P}_x^2 + 1) \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{X}^2 + i\hat{X}\hat{P}_x - i\hat{P}_x\hat{X} + \hat{P}_x^2 + 1) \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} [(\hat{X} - i\hat{P}_x)(\hat{X} + i\hat{P}_x) + 1] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Com o intuito de compactar a Equação (A.14), são introduzidos os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger da seguinte forma:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}_x) \quad (\text{A.15})$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} - i\hat{P}_x) \quad (\text{A.16})$$

Dessa forma, a relação de comutação entre os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger é dada por

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} \\ &= \frac{1}{2} (\hat{X} + i\hat{P}_x)(\hat{X} - i\hat{P}_x) - \frac{1}{2} (\hat{X} - i\hat{P}_x)(\hat{X} + i\hat{P}_x) \\ &= \frac{1}{2} (\hat{X}^2 - i\hat{X}\hat{P}_x + i\hat{P}_x\hat{X} + \hat{P}_x^2) - \frac{1}{2} (\hat{X}^2 + i\hat{X}\hat{P}_x - i\hat{P}_x\hat{X} + \hat{P}_x^2) \\ &= \frac{1}{2} (-i\hat{X}\hat{P}_x + i\hat{P}_x\hat{X}) - \frac{1}{2} (i\hat{X}\hat{P}_x - i\hat{P}_x\hat{X}) \\ &= \frac{i}{2} [\hat{P}_x, \hat{X}] - \frac{i}{2} [\hat{X}, \hat{P}_x] \\ &= \frac{i}{2} (-i) - \frac{i}{2} (i) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] &= \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger \\
&= \frac{1}{2} (\hat{X} - i\hat{P}_x) (\hat{X} + i\hat{P}_x) - \frac{1}{2} (\hat{X} + i\hat{P}_x) (\hat{X} - i\hat{P}_x) \\
&= \frac{1}{2} (\hat{X}^2 + i\hat{X}\hat{P}_x - i\hat{P}_x\hat{X} + \hat{P}_x^2) - \frac{1}{2} (\hat{X}^2 - i\hat{X}\hat{P}_x + i\hat{P}_x\hat{X} + \hat{P}_x^2) \\
&= \frac{1}{2} (i\hat{X}\hat{P}_x - i\hat{P}_x\hat{X}) - \frac{1}{2} (i\hat{X}\hat{P}_x + i\hat{P}_x\hat{X}) \\
&= \frac{i}{2} [\hat{X}, \hat{P}_x] - \frac{i}{2} [\hat{P}_x, \hat{X}] \\
&= \frac{i}{2} (i) - \frac{i}{2} (-i) \\
&= -1
\end{aligned} \tag{A.18}$$

O hamiltoniano pode ser reescrito em função dos operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger substituindo as Equações (A.15) e (A.16) na Equação (A.14),

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \tag{A.19}$$

ou ainda

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) \tag{A.20}$$

onde $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ é conhecido como o operador número ou operador número de ocupação. Portanto, a Equação (A.20) representa o hamiltoniano do oscilador harmônico.

Destaca-se aqui que \hat{H} e \hat{N} comutam entre si, ou seja,

$$\begin{aligned}
[\hat{H}, \hat{N}] &= \hat{H}\hat{N} - \hat{N}\hat{H} \\
&= \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) \hat{N} - \hat{N} \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) \\
&= \hbar\omega \hat{N}^2 + \frac{1}{2} \hbar\omega \hat{N} - \hbar\omega \hat{N}^2 - \frac{1}{2} \hbar\omega \hat{N} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Em consequência, \hat{H} e \hat{N} possuem um conjunto de autoestados comuns, a ser denotado por $|n\rangle$, de forma que

$$\hat{N} |n\rangle = n |n\rangle \tag{A.22}$$

e

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (\text{A.23})$$

Portanto, substituindo a Equação (A.23) na Equação (A.20), resulta que os autovalores de \hat{H} são

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A.24})$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$. Portanto, na mecânica quântica, a energia do oscilador harmônico é quantizada e não pode assumir qualquer valor arbitrário. Aqui será omitida a demonstração de que n deve ser um número inteiro positivo, porém pode ser encontrada nas referências [73] e [74] deste trabalho.

Note que a menor valor (o estado fundamental) não é igual a zero, mas

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega \quad (\text{A.25})$$

Esta energia é chamada de energia de ponto zero e será discutida no Capítulo (3). O significado físico dos operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger ficam mais evidentes tomando

$$\left[\hat{N}, \hat{a} \right] = \left[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a} \right] = \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} = \left[\hat{a}^\dagger, \hat{a} \right] \hat{a} = (-1) \hat{a} = -\hat{a} \quad (\text{A.26})$$

$$\left[\hat{N}, \hat{a}^\dagger \right] = \left[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger \right] = \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{a}^\dagger \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger \right] = \hat{a}^\dagger (1) = \hat{a}^\dagger \quad (\text{A.27})$$

pois agora, usando essas duas relações de comutação, escreve-se

$$\begin{aligned} \left[\hat{N}, \hat{a} \right] |n\rangle &= -\hat{a} |n\rangle \\ \hat{N} \hat{a} |n\rangle - \hat{a} \hat{N} |n\rangle &= \hat{a} |n\rangle \\ \hat{N} \hat{a} |n\rangle &= \hat{a} \hat{N} |n\rangle - \hat{a} |n\rangle \\ \hat{N} \hat{a} |n\rangle &= n \hat{a} |n\rangle - \hat{a} |n\rangle \\ \hat{N} \hat{a} |n\rangle &= (n - 1) \hat{a} |n\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] |n\rangle &= \hat{a}^\dagger |n\rangle \\
\hat{N} \hat{a}^\dagger |n\rangle - \hat{a}^\dagger \hat{N} |n\rangle &= \hat{a}^\dagger |n\rangle \\
\hat{N} \hat{a}^\dagger |n\rangle &= \hat{a}^\dagger \hat{N} |n\rangle + \hat{a}^\dagger |n\rangle \\
\hat{N} \hat{a}^\dagger |n\rangle &= n \hat{a}^\dagger |n\rangle + \hat{a}^\dagger |n\rangle \\
\hat{N} \hat{a}^{-\dagger} |n\rangle &= (n + 1) \hat{a}^\dagger |n\rangle
\end{aligned} \tag{A.29}$$

As equações (A.28) e (A.29) mostram que $\hat{a} |n\rangle$ é autoestado de \hat{N} com autovalor $(n - 1)$. Isto implica que, quando \hat{a} opera em $|n\rangle$, diminui n por uma unidade e por isso, é conhecido como operador aniquilação ou abaixamento. Da mesma forma, $\hat{a}^\dagger |n\rangle$ é autoestado de \hat{N} com autovalores $(n + 1)$. Isto implica que, quando \hat{a}^\dagger opera em $|n\rangle$, aumenta n por uma unidade e por isso, é conhecido como operador criação ou levantamento. Sendo assim, é possível escrever

$$\hat{a} |n\rangle = c_n |n - 1\rangle \tag{A.30}$$

onde c_n é uma constante a ser determinada pela exigência de que os estados $|n\rangle$ serem normalizados para todos os valores de n . Dessa forma, da Equação (A.30) se obtém

$$(\langle n | \hat{a}^\dagger) (\hat{a} |n\rangle) = \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = |c_n|^2 \langle n - 1 | n - 1\rangle = |c_n|^2 \tag{A.31}$$

Por outro lado, da Equação (A.22) se obtém

$$(\langle n | \hat{a}^\dagger) (\hat{a} |n\rangle) = \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = \langle n | \hat{N} |n\rangle = n \langle n | n\rangle = n \tag{A.32}$$

Portanto,

$$|c_n|^2 = n \tag{A.33}$$

Substituindo a Equação (A.33) na Equação (A.30),

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n - 1\rangle \tag{A.34}$$

Esta equação mostra que aplicações repetidas do operador \hat{a} em $|n\rangle$ geram uma seqüência de autovetores $|n - 1\rangle, |n - 2\rangle, |n - 3\rangle, \dots$

Utilizando a algebra proposta pela Equação (A.34), porém trocando n por $n + 1$,

$$\begin{aligned}
 \hat{a} |n + 1\rangle &= \sqrt{n + 1} |n\rangle \\
 \hat{a}^\dagger \hat{a} |n + 1\rangle &= \sqrt{n + 1} \hat{a}^\dagger |n\rangle \\
 \hat{N} |n + 1\rangle &= \sqrt{n + 1} \hat{a}^\dagger |n\rangle \\
 (n + 1) |n + 1\rangle &= \sqrt{n + 1} \hat{a}^\dagger |n\rangle \\
 \hat{a}^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n + 1} |n + 1\rangle
 \end{aligned} \tag{A.35}$$

Esta equação mostra que aplicações repetidas do operador \hat{a}^\dagger em $|n\rangle$ geram uma seqüência de autovetores $|n + 1\rangle, |n + 2\rangle, |n + 3\rangle, \dots$

A Equação (A.35) pode ser reescrita como

$$|n + 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n + 1}} \hat{a}^\dagger |n\rangle \tag{A.36}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
 |1\rangle &= \hat{a}^\dagger |0\rangle \\
 |2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{a}^\dagger |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger)^2 |0\rangle \\
 |3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{a}^\dagger |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2}} (\hat{a}^\dagger)^3 |0\rangle \\
 |4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{4}} \hat{a}^\dagger |3\rangle = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 3 \cdot 2}} (\hat{a}^\dagger)^4 |0\rangle
 \end{aligned} \tag{A.37}$$

Então, assim por diante, chega-se a

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \tag{A.38}$$

Além disso, os estados $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, \dots, |n\rangle, \dots$ são simultâneamente autoestados de H e N ; o conjunto $|n\rangle$ constitui uma base ortonormal e completa:

$$\langle n | n' \rangle = \delta_{n',n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1 \tag{A.39}$$

APÊNDICE B

QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

B.1 NOTAÇÃO RELATIVÍSTICA

O intervalo ds entre dois eventos infinitesimalmente próximos, com coordenadas (x, y, z, t) e $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$, é dado por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (\text{B.1})$$

Usando a notação tensorial, na qual

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (\text{B.2})$$

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) \quad (\text{B.3})$$

pode-se reescrever a Equação (B.1) da seguinte forma,

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (\text{B.4})$$

Um quadri vetor tipo x^μ , com o índice sobrescrito, é chamado de vetor contravariante e do tipo x_μ , com o índice subscrito, é chamado de vetor covariante. O produto interno entre vetores contravariante e covariante é um invariante (escalar) [75]. Para simplificar a notação o somatório

é suprimido, de forma que

$$\sum_{\mu=0}^3 dx^\mu dx_\mu \longrightarrow dx^\mu dx_\mu \quad (\text{B.5})$$

A relação entre x^μ e x_μ é dada pela introdução o tensor métrico $g^{\mu\nu}$:

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad (\text{B.6})$$

$$= g^{\mu 0} x_0 + g^{\mu 1} x_1 + g^{\mu 2} x_2 + g^{\mu 3} x_3 \quad (\text{B.7})$$

Essa operação é chamada de levantamento de índice. Como a Equação (B.6) deve concordar com as Equações (B.2) e (B.3), a matriz $g^{\mu\nu}$ é construída, a saber,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

A matriz $g_{\mu\nu}$ define uma métrica no espaço de Minkowski e seus elementos são chamados de componentes do tensor métrico [76]. É conveniente introduzir os elementos $g^{\mu\nu}$ da inversa de $g_{\mu\nu}$ de maneira que a operação abaixamento de índice é dada por

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad (\text{B.9})$$

Portanto, verifica-se que

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Uma vez que o tensor métrico é um tensor simétrico, existe um tensor métrico misto [77] dado por

$$g^{\mu\gamma} g_{\gamma\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (\text{B.11})$$

que torna possível as operações

$$x_\mu = g_{\mu\gamma} g^{\gamma\nu} x_\nu = \delta_\mu^\nu x_\nu \quad (\text{B.12})$$

$$x^\mu = g^{\mu\gamma} g_{\gamma\nu} x^\nu = \delta_\nu^\mu x^\nu \quad (\text{B.13})$$

O operador nabla quadridimensional é dado por

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad (\text{B.14})$$

Sendo assim,

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad (\text{B.15})$$

A divergência de um campo vetorial V^μ é dada por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \partial_\mu V^\mu \quad (\text{B.16})$$

O rotacional de um campo vetorial V^μ é escrito como

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{V} \right)^{\mu\nu} = \partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu \quad (\text{B.17})$$

A divergência do gradiente, chamado de operador d'Alembertiano, é a versão quadridimensional do laplaciano:

$$\square^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (\text{B.18})$$

B.2 EQUAÇÕES DE MAXWELL

As equações de Maxwell são escritas da seguinte forma,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{lei de Gauss}) \quad (\text{B.19})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{sem nome}) \quad (\text{B.20})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{lei de Faraday}) \quad (\text{B.21})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{lei de Ampère com a correção de Maxwell}) \quad (\text{B.22})$$

Sabe-se que, se o divergente de um campo vetorial (\vec{B}) se anula (em toda parte), então \vec{B} pode ser expresso como o rotacional de um potencial vetor (\vec{A}):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \iff \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{B.23})$$

Portanto, substituindo a Equação (B.23) na Equação (B.21),

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (\text{B.24})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (\text{B.25})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{B.26})$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{B.27})$$

Sabe-se que, se o rotacional de um campo vetorial (\vec{F}) se anula (em toda parte), então \vec{F} pode ser escrito como o gradiente de um potencial escalar (V):

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \iff \vec{F} = -\nabla V \quad (\text{B.28})$$

Como a grandeza entre parênteses na Equação (B.27) se anula, pode ser escrita como o gradiente de um escalar:

$$\begin{aligned} \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\nabla \phi \\ \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Dividindo todos os termos por c ,

$$\frac{\vec{E}}{c} = -\nabla \frac{\phi}{c} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{B.30})$$

Escrevendo o 4-vetor Potencial como

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) \quad (\text{B.31})$$

nota-se que

$$\frac{E^i}{c} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \quad (\text{B.32})$$

A Equação (B.32) contém as componentes do rotacional 4-dimensional identificado por

$$F^{i0} = -F^{0i} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \quad (\text{B.33})$$

onde

$$F^{i0} = \frac{E^i}{c} \quad (\text{B.34})$$

Portanto,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & & & \\ E_y/c & & & \\ E_z/c & & & \end{pmatrix} \quad (\text{B.35})$$

Para completar esta matriz, escreve-se

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\partial^1 & -\partial^2 & -\partial^3 \\ A^1 & A^2 & A^3 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{-(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2)}_{-B_x} \hat{i} - \underbrace{(\partial^1 A^3 - \partial^3 A^1)}_{B_y} \hat{j} - \underbrace{(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1)}_{-B_z} \hat{k} \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Estas também são componentes do rotacional 4-dimensional identificado por

$$F^{ij} = -F^{ji} = \partial^i A^j - \partial^j A^i \quad (\text{B.37})$$

onde

$$F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k \quad (\text{B.38})$$

Portanto,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.39})$$

Esta matriz permite escrever

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (\text{B.40})$$

$F^{\mu\nu}$ é chamado de tensor campo eletromagnético. Ao satisfazer as Equações (B.23) e (B.29), por consequência, a Equação (B.40) satisfaz as Equações de Maxwell (B.21) e (B.20). Porém, existe uma maneira elegante de combinar as Equações (B.21) e (B.20) de modo que não seja necessário efetuar qualquer referência explícita ao potencial vetor \vec{A} . Dessa forma, escreve-se

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \partial_i B^i &= 0 \\ \partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3 &= 0 \\ \partial_1 F^{32} + \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{21} &= 0 \\ \partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{E})^k &= -\frac{\partial}{\partial t} B^k \\ -\epsilon^{ijk} \partial^i E^j &= -\frac{\partial}{\partial t} B^k \\ \partial^i E^j - \partial^j E^i &= \partial_t (B^k) \\ \frac{1}{c} \partial_t \underbrace{(-B^k)}_{F^{ij}} + \partial^i \underbrace{\left(\frac{E^j}{c}\right)}_{F^{j0}} + \partial^j \underbrace{\left(-\frac{E^i}{c}\right)}_{F^{0i}} &= 0 \\ \partial^0 F^{ij} + \partial^i F^{j0} + \partial^j F^{0i} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

As Equações (B.41) e (B.42) podem ser escrita de forma generalizada como

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0 \quad (\text{B.43})$$

Portanto, é possível escrever as Equações de Maxwell (B.21) e (B.20) a partir da Equação (B.43), conhecida como Identidade de Bianchi.

Reescreve-se a Equação (B.19) de maneira que

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \partial_i \frac{E^i}{c} &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\rho}{c} \\ \partial_i F^{i0} &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\rho}{c} \\ \partial_i F^{i0} &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{c\rho}{c^2} \\ \partial_i F^{i0} &= \mu_0 c \rho \\ \partial_i F^{i0} &= \mu_0 J^0 \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

onde $J^\nu = (c\rho, \vec{J})$. De forma similar, a Equação (B.22) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ -\epsilon^{ijk} B^k &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ -(\partial^2 B^3 - \partial^3 B^2) + (\partial^1 B^3 - \partial^3 B^1) - (\partial^1 B^2 - \partial^2 B^1) &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ -(\partial^2 F^{21} - \partial^3 F^{13}) + (\partial^1 F^{21} - \partial^3 F^{32}) - (\partial^1 F^{13} - \partial^2 F^{32}) &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ -\partial^2 F^{21} + \partial^3 F^{13} + \partial^1 F^{21} - \partial^3 F^{32} - \partial^1 F^{13} + \partial^2 F^{32} &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_1 F^{12} + \partial_3 F^{32} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{23} &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

Colocando as derivadas em evidência,

$$\begin{aligned}
 \partial_1 (F^{11} + F^{12} + F^{13}) + \partial_2 (F^{21} + F^{22} + F^{23}) + \partial_3 (F^{31} + F^{32} + F^{33}) &= \mu_0 \vec{J} + \underbrace{\frac{1}{c} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}}_{\partial_0} \vec{E} \\
 \partial_j F^{ji} &= \mu_0 J^i + \partial_0 \underbrace{\frac{E^i}{c}}_{F^{i0}} \\
 -\partial_0 \underbrace{F^{i0}}_{-F^{0i}} + \partial_j F^{ji} &= \mu_0 J^i \\
 \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} &= \mu_0 J^i \quad (\text{B.46})
 \end{aligned}$$

Dessa forma, com $\mu = 0, j$, segue que

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \mu_0 J^i \quad (\text{B.47})$$

Perceba então que as Equações de Maxwell (B.19) e (B.22) são satisfeitas pela equação

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \quad (\text{B.48})$$

Substituindo a Equação (B.40) na Equação (B.48), escreve-se

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \mu_0 J^\nu \\
 \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= \mu_0 J^\nu \\
 \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu &= \mu_0 J^\nu \\
 \partial^\mu \partial_\mu A^\nu - g_{\mu\nu} \partial^\nu g^{\nu\mu} \partial_\mu A^\mu &= \mu_0 J^\nu \\
 \partial^\mu \partial_\mu A^\nu - \delta^{\mu\nu} \partial^\nu \partial_\mu A^\mu &= \mu_0 J^\nu \\
 \partial^\mu \partial_\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu &= \mu_0 J^\nu \\
 \square^2 A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) &= \mu_0 J^\nu \quad (\text{B.49})
 \end{aligned}$$

Na ausência de fontes, $J^\nu = 0$. Sendo assim,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{B.50})$$

Portanto,

$$\square^2 A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0 \quad (\text{B.51})$$

Nas seções (B.4.1) e (B.4.2) será discutida a quantização canônica do campo eletromagnético impondo duas condições, chamadas de calibre de Coulomb e calibre de Lorentz, sobre a quantidade

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (\text{B.52})$$

B.3 DINÂMICA DE LAGRANGE E HAMILTON

Sempre que um processo físico acontece, a natureza minimiza certas quantidades. Em 1835, Hamilton enunciou o seguinte princípio:

De todos os caminhos possíveis nos quais um sistema dinâmico pode se mover de um ponto a outro em um intervalo de tempo específico (consistente com quaisquer restrições), o caminho real seguido é aquele que minimiza a integral de tempo da diferença entre as energia cinéticas e potenciais [78].

O princípio de Hamilton também pode ser escrito como

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (\text{B.53})$$

onde δ é uma notação abreviada para representar a variação, T é a energia cinética e U a energia potencial. Em coordenadas generalizadas, T e U , podem ser escritas como

$$T = T(q_i, \dot{q}_i, t), \quad U = U(q_i, t) \quad (\text{B.54})$$

Identificando a Lagrangiana como a diferença entre essas duas quantidades:

$$L \equiv T - U = L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (\text{B.55})$$

Portanto, a Equação (B.53) se torna

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \quad (\text{B.56})$$

O problema do cálculo de variações é determinar a função $q(t)$ de tal modo que o funcional

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (\text{B.57})$$

chamado de Ação, seja um extremo, ou seja, um máximo ou um mínimo [78]. Escreve-se então $q = q(\alpha, t)$ de modo que, para $\alpha = 0$, a função $q = q(0, t) = q(t)$ seja um mínimo. Dessa forma,

$$q(\alpha, t) = q(0, t) + \alpha \eta(t) \quad (\text{B.58})$$

onde $\eta(t)$ é alguma função de t que tem uma primeira derivada contínua e que desaparece em

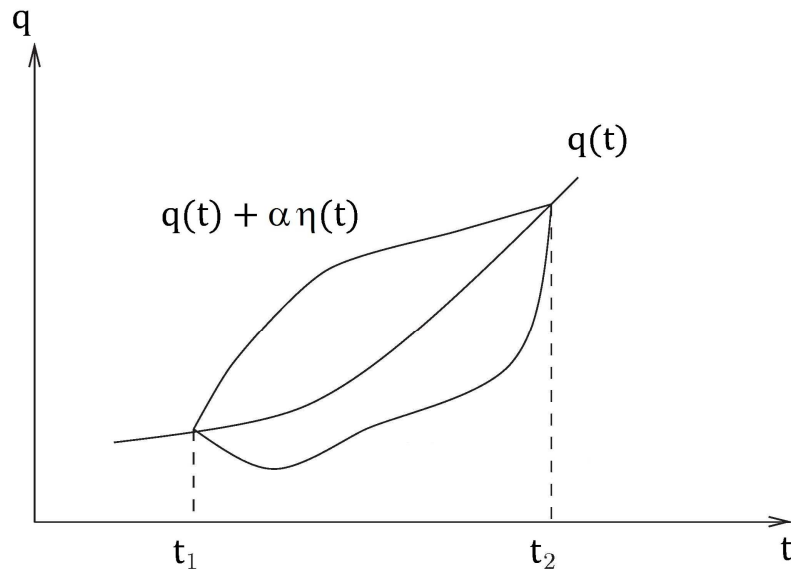


Figura B.1 – A função $q(t)$ é o caminho que faz do funcional J um extremo.

t_1 e t_2 , ou seja,

$$\eta(t_1) = \frac{q(\alpha, t_1) - q(0, t_1)}{\alpha} = 0 \quad e \quad \eta(t_2) = \frac{q(\alpha, t_2) - q(0, t_2)}{\alpha} = 0 \quad (\text{B.59})$$

A condição para que a integral tenha um extremo é dada por

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (\text{B.60})$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i; t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\eta}{dt} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i} \eta(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_u \underbrace{\frac{d\eta}{dt}}_{dv} dt \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

Integrando o segundo termo por partes,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i} \eta(t) dt + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_u \underbrace{\eta(t)}_v \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\eta(t)}_v \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)}_{du} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \eta(t) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \eta(t) \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \eta(t) dt \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

Sendo assim, considerando a Equação (B.60) para qualquer $\eta(t)$ se obtém

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{B.63})$$

conhecida como as equações de movimento de Lagrange. Identifica-se aqui, a quantidade de movimento generalizada como

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 \right) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= m \dot{q}_i \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= p_i\end{aligned}\tag{B.64}$$

Substituindo a Equação (B.64) na Equação (B.63),

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} p_i &= 0 \\ \dot{p}_i &= \frac{\partial L}{\partial q_i}\end{aligned}\tag{B.65}$$

A lagrangiana que descreve um sistema que não interage com nada fora do sistema (sistema fechado) não pode depender explicitamente do tempo, ou seja,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0\tag{B.66}$$

De forma que

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial t}} \\ &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i\end{aligned}\tag{B.67}$$

Substituindo a Equação de movimento de Lagrange, Equação (B.63), no primeiro termo do lado direito da Equação (B.67),

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \\ &= \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)\end{aligned}\tag{B.68}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} - \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(L - \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) &= 0\end{aligned}\tag{B.69}$$

A quantidade entre parênteses é constante no tempo e pode ser igualada a uma constante H , conhecida como hamiltoniana. Dessa forma,

$$H = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\tag{B.70}$$

Substituindo a Equação (B.64) na Equação (B.70), se obtém

$$H = p_i \dot{q}_i - L\tag{B.71}$$

B.3.1 Densidade Lagrangeana

Na teoria de campos, $\varphi(q,t)$ desempenha um papel análogo ao $q(t)$, e descreve um sistema com um número infinito de graus de liberdade, uma vez que, em cada momento, φ tem um valor independente em cada ponto no espaço. Considerando-se que o campo $\varphi(q,t)$ é um campo contínuo, o seu tratamento lagrangiano consiste na substituição da coordenada generalizada (q_i) por uma função contínua φ e a velocidade generalizada (\dot{q}_i) é mudada para o gradiente dessa função $\partial_\nu \varphi$.

A lagrangiana de um sistema contínuo pode ser expressa em termos da integral espacial de uma função \mathcal{L} conhecida como densidade lagrangiana [76], ou seja

$$L = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\nu \varphi) d^3x\tag{B.72}$$

Por simplicidade, é habitual assumir que \mathcal{L} depende apenas de φ e suas primeiras derivadas.

Portanto, a Equação (B.57) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$S(\varphi) = \int L dt = \int dt \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\nu \varphi) d^3x = \int_R \mathcal{L}(\varphi, \partial_\nu \varphi) d^4x\tag{B.73}$$

onde R a região no espaço de Minkowski $dt \times d^3x$. A ação S é agora um funcional do campo φ e, como feito na Seção B.3, resta procurar um campo φ para o qual a ação seja um extremo. Escreve-se então

$$\varphi' = \varphi + \delta\varphi \quad (\text{B.74})$$

onde φ é o campo que extremiza a ação e $\delta\varphi$ é a variação do mesmo. $\delta\varphi$ é nula no contorno. Sendo assim,

$$S(\varphi + \delta\varphi) = \int_R \mathcal{L}(\varphi + \delta\varphi, \partial_\nu(\varphi + \delta\varphi)) d^4x \quad (\text{B.75})$$

Expandindo S até primeira ordem de $\delta\varphi$,

$$\begin{aligned} S(\varphi + \delta\varphi) &= \underbrace{\int_R \mathcal{L}(\varphi, \partial_\nu\varphi) d^4x}_{S(\varphi)} + \int_R \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\varphi}\delta(\partial_\nu\varphi) \right] d^4x \\ S(\varphi + \delta\varphi) &= S(\varphi) + \int_R \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\varphi}\delta(\partial_\nu\varphi) \right] d^4x \\ \underbrace{S(\varphi + \delta\varphi) - S(\varphi)}_{\delta S} &= \int_R \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\varphi}\delta(\partial_\nu\varphi) \right] d^4x \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

Sabendo que $\delta(\partial_\nu\varphi) = \partial_\nu(\delta\varphi)$, então

$$\delta S = \int_R \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi d^4x + \int_R \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\varphi}}_u \underbrace{\partial_\nu(\delta\varphi)}_{dv} d^4x \quad (\text{B.77})$$

Integrando o segundo termo por partes,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_R \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi d^4x + \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\varphi}}_u \underbrace{\delta\varphi}_v \Big|_{\delta R}^0 - \int_R \underbrace{\delta\varphi}_v \underbrace{\left(\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\varphi}\right)}_{du} d^4x \\ &= \int_R \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi - \left(\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\varphi}\right)\delta\varphi \right) d^4x \\ &= \int_R \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\varphi} \right) \delta\varphi d^4x \end{aligned} \quad (\text{B.78})$$

Como δS deve ser igual a zero, o termo entre parênteses se anula. Com isso, as Equações de Euler, dadas pela Equação (B.63), reescritas para a densidade lagrangeana são

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi)} \right] = 0 \quad (\text{B.79})$$

B.3.2 Densidade Lagrangeana do Campo Eletromagnético

A densidade Lagrangeana do campo eletromagnético pode ser construída a partir dos elementos fundamentais que o compõe. São eles:

- A^μ : um determinado campo vetorial.
- ∂A^μ : Taxas de variação desse campo vetorial.
- $J_\mu A^\mu$: A interação de A^μ com a corrente J_μ , que já foi observada na Equação (B.48).

A densidade Lagrangeana precisa ser uma quantidade real, ou seja, deve ser composta por combinações de A^μ , ∂A^μ e $J_\mu A^\mu$ que sejam quantidades escalares e termos de segunda ordem. As combinações possíveis são:

- $A_\mu A^\mu$
- $(\partial_\mu A^\mu)^2$, $(\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu)$ e $(\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu)$
- $J_\mu A^\mu$

Portanto, a possibilidade mais geral para densidade Lagrangeana seria

$$\mathcal{L} = \alpha (\partial_\mu A^\mu)^2 + \beta (\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu) + \gamma (\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu) + \delta A_\mu A^\mu + \epsilon J_\mu A^\mu \quad (\text{B.80})$$

onde α , β , γ , δ e ϵ são coeficientes que acompanham cada termo. Para a densidade lagrangeana dada pela Equação (B.80), as equações de Lagrange ficam

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right] = 0 \quad (\text{B.81})$$

O primeiro termo é resolvido aplicando a derivada em todos os termos, de forma que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} &= 2\alpha \partial_\mu A^\mu \frac{\partial}{\partial A_\mu} (\partial_\mu A^\mu) + \beta \left[(\partial_\mu A^\nu) \frac{\partial}{\partial A_\mu} (\partial^\mu A_\nu) + (\partial^\mu A_\nu) \frac{\partial}{\partial A_\mu} (\partial_\mu A^\nu) \right] + \\ &+ \gamma \left[(\partial_\mu A^\nu) \frac{\partial}{\partial A_\mu} (\partial_\nu A^\mu) + (\partial_\nu A^\mu) \frac{\partial}{\partial A_\mu} (\partial_\mu A^\nu) \right] + \delta \left[A_\mu \frac{\partial}{\partial A_\mu} A^\mu + A^\mu \frac{\partial}{\partial A_\mu} A_\mu \right] + \epsilon J_\mu \frac{\partial}{\partial A_\mu} A^\mu \end{aligned}$$

Trocando a ordem das derivadas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} &= 2\alpha \partial_\mu A^\mu \partial_\mu \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial A_\mu} \right) + \beta \left[(\partial_\mu A^\nu) \partial^\mu \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial A_\mu} \right) + (\partial^\mu A_\nu) \partial_\mu \left(\frac{\partial A^\nu}{\partial A_\mu} \right) \right] \\ &+ \gamma \left[(\partial_\mu A^\nu) \partial_\nu \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial A_\mu} \right) + (\partial_\nu A^\mu) \partial_\mu \left(\frac{\partial A^\nu}{\partial A_\mu} \right) \right] + \delta \left[A_\mu \frac{\partial A^\mu}{\partial A_\mu} + A^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\mu} \right] + \epsilon J_\mu \frac{\partial A^\mu}{\partial A_\mu} \end{aligned}$$

Usando o tensor métrico,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} &= 2\alpha \partial_\mu A^\mu \partial_\mu g^{\mu\mu} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial A_\mu} \right) + \beta \left[(\partial_\mu A^\nu) \partial^\mu g^\nu \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial A_\mu} \right) + (\partial^\mu A_\nu) \partial_\mu g^{\nu\mu} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial A_\mu} \right) \right] + \\ &+ \gamma \left[(\partial_\mu A^\nu) \partial_\nu g^{\mu\mu} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial A_\mu} \right) + (\partial_\nu A^\mu) \partial_\mu g^{\nu\mu} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial A_\mu} \right) \right] + \delta \left[A_\mu g^{\mu\mu} \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\mu} + A^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\mu} \right] + \epsilon J_\mu g^{\mu\mu} \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\mu} \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} &= 2\alpha \partial_\mu A^\mu \cancel{\partial_\mu g^{\mu\mu}} + \beta \left[(\partial_\mu A^\nu) \cancel{\partial^\mu g^\nu} + (\partial^\mu A_\nu) \cancel{\partial_\mu g^{\nu\mu}} \right] + \gamma \left[(\partial_\mu A^\nu) \cancel{\partial_\nu g^{\mu\mu}} + (\partial_\nu A^\mu) \cancel{\partial_\mu g^{\nu\mu}} \right] \\ &+ \delta [A_\mu g^{\mu\mu} + A^\mu] + \epsilon J_\mu g^{\mu\mu} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} &= \delta [A^\mu + A^\mu] + \epsilon J^\mu \\ &= 2\delta A^\mu + \epsilon J^\mu \end{aligned} \tag{B.82}$$

Da mesma forma, o segundo termo é resolvido aplicando a derivada em todos os termos, de forma que

$$\begin{aligned} \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right] &= \partial_\nu \left[2\alpha (\partial_\mu A^\mu) \frac{\partial (\partial_\mu A^\mu)}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} + \beta \left\{ (\partial_\mu A^\nu) \frac{\partial (\partial^\mu A_\nu)}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} + (\partial^\mu A_\nu) \frac{\partial (\partial_\mu A^\nu)}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right\} \right] \\ &+ \gamma \left\{ (\partial_\mu A^\nu) \frac{\partial (\partial_\nu A^\mu)}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} + (\partial_\nu A^\mu) \frac{\partial (\partial_\mu A^\nu)}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right\} + \delta \left\{ A_\mu \frac{\partial A^\mu}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} + A^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right\} + \epsilon J_\mu \frac{\partial A^\mu}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \end{aligned}$$

Usando o tensor métrico,

$$\partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right] = \partial_\nu \left[2\alpha (\partial_\mu A^\mu) \delta_\mu^\nu g^{\mu\mu} \frac{\partial (\partial_\nu A_\mu)}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} + \beta \left\{ (\partial_\mu A^\nu) g^{\mu\nu} \delta_\nu^\mu \frac{\partial (\partial_\nu A_\mu)}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} + (\partial^\mu A_\nu) \delta_\mu^\nu g^{\nu\mu} \frac{\partial (\partial_\nu A_\mu)}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right\} + \gamma \left\{ (\partial_\mu A^\nu) g^{\mu\mu} \frac{\partial (\partial_\nu A_\mu)}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} + (\partial_\nu A^\mu) \delta_\mu^\nu g^{\nu\mu} \frac{\partial (\partial_\nu A_\mu)}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right\} \right]$$

$$\begin{aligned} \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right] &= \partial_\nu [2\alpha (\partial_\mu A^\mu) \delta_\mu^\nu g^{\mu\mu} + \beta \{ (\partial_\mu A^\nu) g^{\mu\nu} \delta_\nu^\mu + (\partial^\mu A_\nu) \delta_\mu^\nu g^{\nu\mu} \} + \\ &\quad + \gamma \{ (\partial_\mu A^\nu) g^{\mu\mu} + (\partial_\nu A^\mu) \delta_\mu^\nu g^{\nu\mu} \}] \\ &= \partial_\nu [2\alpha g^{\mu\mu} \delta_\mu^\nu (\partial_\mu A^\mu) + \beta \{ (\delta_\mu^\nu \partial_\nu g^{\nu\mu} A_\mu) g^{\mu\nu} \delta_\nu^\mu + (g^{\mu\nu} \partial_\nu \delta_\nu^\mu A_\mu) \delta_\mu^\nu g^{\nu\mu} \} + \\ &\quad + \gamma \{ (\delta_\mu^\nu \partial_\nu g^{\nu\mu} A_\mu) g^{\mu\mu} + (\partial_\nu g^{\mu\mu} A_\mu) \delta_\mu^\nu g^{\nu\mu} \}] \\ &= \partial_\nu [2\alpha g^{\mu\mu} \delta_\mu^\nu (\partial_\mu A^\mu) + \beta \{ 2\delta_\mu^\nu g^{\nu\mu} g^{\mu\mu} \delta_\nu^\mu \partial_\nu A_\mu \} + \gamma \{ 2\delta_\mu^\nu g^{\nu\mu} g^{\mu\mu} \partial_\nu A_\mu \}] \\ &= \partial_\nu [2\alpha g^{\mu\mu} \delta_\mu^\nu (\partial_\mu A^\mu) + 2\beta g^{\mu\nu} \delta_\nu^\mu \partial_\mu A^\nu + 2\gamma g^{\nu\mu} \partial_\mu A^\nu] \end{aligned} \quad (\text{B.83})$$

Portanto, substituindo as Equações (B.82) e (B.83) na Equação (B.81),

$$\begin{aligned} 2\delta A^\mu + \epsilon J^\mu - \partial_\nu [2\alpha g^{\mu\mu} \delta_\mu^\nu (\partial_\mu A^\mu) + 2\beta g^{\mu\nu} \delta_\nu^\mu \partial_\mu A^\nu + 2\gamma g^{\nu\mu} \partial_\mu A^\nu] &= 0 \\ 2\delta A^\mu + \epsilon J^\mu - 2\alpha g^{\mu\mu} \delta_\mu^\nu \partial_\nu (\partial_\mu A^\mu) - 2\beta g^{\mu\nu} \delta_\nu^\mu \partial_\nu (\partial_\mu A^\nu) - 2\gamma g^{\nu\mu} \partial_\nu (\partial_\mu A^\nu) &= 0 \\ 2\delta A^\mu + \epsilon J^\mu - 2\alpha \partial^\mu (\partial_\mu A^\mu) - 2\beta \delta_\nu^\mu \partial^\mu (\partial_\mu A^\nu) - 2\gamma \partial^\mu (\partial_\mu A^\mu) &= 0 \\ 2\delta \delta_\nu^\mu A^\nu + \epsilon \delta_\nu^\mu J^\nu - 2\alpha \delta_\nu^\mu \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) - 2\beta \delta_\nu^\mu \partial^\mu (\partial_\mu A^\nu) - 2\gamma \delta_\nu^\mu \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) &= 0 \\ \delta_\nu^\mu [2\delta A^\nu + \epsilon J^\nu - 2\alpha \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) - 2\beta \partial^\mu (\partial_\mu A^\nu) - 2\gamma \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu)] &= 0 \\ 2\delta A^\nu + \epsilon J^\nu - 2\alpha \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) - 2\beta \partial^\mu (\partial_\mu A^\nu) - 2\gamma \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) &= 0 \\ 2\delta A^\nu + \epsilon J^\nu - 2(\alpha + \gamma) \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) - 2\beta \square^2 A^\nu &= 0 \end{aligned}$$

Esta última Equação pode ser reescrita como

$$\beta \square^2 A^\nu + (\alpha + \gamma) \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = \delta A^\nu + \frac{1}{2} \epsilon J^\nu \quad (\text{B.84})$$

Considerando o enfoque em descrever o eletromagnetismo, compara-se a Equação (B.84) com a Equação (B.49), dada por

$$\square^2 A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = \mu_0 J^\nu \quad (\text{B.85})$$

Sendo assim, pode ser feita a escolha $\alpha + \gamma = \frac{1}{2\mu_0}$, $\beta = -\frac{1}{2\mu_0}$, $\delta = 0$ e $\epsilon = -1$. Portanto, a Equação (B.80) se torna

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \alpha (\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2\mu_0} (\partial_\mu A^\nu) (\partial^\mu A_\nu) + \left(\frac{1}{2\mu_0} - \alpha \right) (\partial_\mu A^\nu) (\partial_\nu A^\mu) - J_\mu A^\mu \\
&= \alpha [(\partial_\mu A^\mu)^2 - (\partial_\mu A^\nu) (\partial_\nu A^\mu)] - \frac{1}{2\mu_0} (\partial_\mu A^\nu) (\partial^\mu A_\nu) + \frac{1}{2\mu_0} (\partial_\mu A^\nu) (\partial_\nu A^\mu) - J_\mu A^\mu \\
&= \alpha [(\partial_\mu A^\mu) (\partial_\mu A^\mu) - (\partial_\mu \delta_\mu^\nu A^\mu) (\partial_\nu A^\mu)] - \frac{1}{2\mu_0} [(\partial_\mu A^\nu) (\partial^\mu A_\nu) - (\partial_\mu A^\nu) (\partial_\nu A^\mu)] - J_\mu A^\mu \\
&= \alpha [(\cancel{\partial_\mu A^\mu}) (\cancel{\partial_\mu A^\mu}) - (\cancel{\partial_\mu A^\mu}) (\cancel{\partial_\mu A^\mu})] - \frac{1}{2\mu_0} [(\partial_\mu A^\nu) (\partial^\mu A_\nu) - (\partial_\mu A^\nu) (\partial_\nu A^\mu)] - J_\mu A^\mu \\
&= -\frac{1}{2\mu_0} [(\partial_\mu A^\nu) (\partial^\mu A_\nu) - (\partial_\mu A^\nu) (\partial_\nu A^\mu)] - J_\mu A^\mu \tag{B.86}
\end{aligned}$$

Agora, a Equação (B.86) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{2\mu_0} \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu A^\nu) (\partial^\mu A_\nu) - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\nu) (\partial_\nu A^\mu) - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\nu) (\partial_\nu A^\mu) + \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\nu) (\partial^\mu A_\nu) \right] - J_\mu A^\mu \\
&= -\frac{1}{4\mu_0} [(\partial_\mu A^\nu) (\partial^\mu A_\nu) - (\partial_\mu A^\nu) (\partial_\nu A^\mu) - (\partial_\mu A^\nu) (\partial_\nu A^\mu) + (\partial_\mu A^\nu) (\partial^\mu A_\nu)] - J_\mu A^\mu \\
&= -\frac{1}{4\mu_0} [(\partial_\mu g^{\nu\nu} A_\nu) (\partial^\mu A_\nu) - (\partial_\mu g^{\nu\nu} A_\nu) (\partial_\nu A^\mu) - (\delta_\mu^\nu \partial_\nu A^\nu) (\partial_\nu \delta_\nu^\mu A^\nu) + \\
&\quad + (\delta_\mu^\nu \partial_\nu A^\nu) (\delta_\nu^\mu \partial^\nu A_\nu)] - J_\mu A^\mu \\
&= -\frac{1}{4\mu_0} [(\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu g^{\nu\nu} A_\nu) - (\partial_\mu A_\nu) (g^{\nu\nu} \partial_\nu A^\mu) - (\partial_\nu \delta_\nu^\mu A^\nu) (\delta_\nu^\mu \partial_\nu A^\nu) + \\
&\quad + (\partial_\nu \delta_\nu^\mu A^\nu) (\partial^\nu \delta_\nu^\mu A_\nu)] - J_\mu A^\mu \\
&= -\frac{1}{4\mu_0} [(\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\nu A^\mu) - (\partial_\nu A^\mu) (\partial_\mu A^\nu) + (\partial_\nu A^\mu) (\partial^\nu A_\mu)] - J_\mu A^\mu \\
&= -\frac{1}{4\mu_0} [(\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\nu A^\mu) - (\partial_\nu g^{\mu\mu} A_\mu) (\partial_\mu A^\nu) + (\partial_\nu g^{\mu\mu} A_\mu) (\partial^\nu A_\mu)] - J_\mu A^\mu \\
&= -\frac{1}{4\mu_0} [(\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\nu A^\mu) - (\partial_\nu A_\mu) (g^{\mu\mu} \partial_\mu A^\nu) + (\partial_\nu A_\mu) (\partial^\nu g^{\mu\mu} A_\mu)] - J_\mu A^\mu \\
&= -\frac{1}{4\mu_0} [\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu] - J_\mu A^\mu \\
&= -\frac{1}{4\mu_0} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - J_\mu A^\mu \\
&= -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu \tag{B.87}
\end{aligned}$$

Portanto, o campo eletromagnético pode ser descrito pela densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu \tag{B.88}$$

Ainda é possível mostrar que através da Equação (B.88) se obtém a Equação (B.48). Inicia-se a partir da Equação (B.79), que reescrita para o campo A , é

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right] = 0 \quad (\text{B.89})$$

Derivando a Equação (B.88) com relação a A_μ , se obtém o primeiro termo da Equação (B.89), ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} &= \frac{\partial}{\partial A_\mu} \left[-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu \right] \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} \frac{\partial}{\partial A_\mu} [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] - J_\mu \frac{\partial A^\mu}{\partial A_\mu} \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} \frac{\partial}{\partial A_\mu} [(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] - J_\mu g^{\mu\mu} \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\mu} \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} \left[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \frac{\partial}{\partial A_\mu} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \frac{\partial}{\partial A_\mu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \right] - J^\mu \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} \left[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \left(\partial^\mu \frac{\partial A^\nu}{\partial A_\mu} - \partial^\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial A_\mu} \right) + (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \left(\partial_\mu \frac{\partial A_\nu}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\mu} \right) \right] - J^\mu \end{aligned}$$

Usando a propriedade do tensor métrico,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} &= -\frac{1}{4\mu_0} \left[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \left(\partial^\mu g^{\nu\mu} \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\mu} - \partial^\nu g^{\mu\mu} \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\mu} \right) + (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \left(\partial_\mu \delta_\nu^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\mu} \right) \right] - J^\mu \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} \left[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \left(\cancel{\partial^\mu g^{\nu\mu}} \overset{0}{\partial^\nu g^{\mu\mu}} \right) + (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \left(\cancel{\partial_\mu \delta_\nu^\mu} \overset{0}{\partial_\nu (1)} \right) \right] - J^\mu \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -J^\mu \quad (\text{B.90})$$

Agora, para encontrar o segundo termo da Equação (B.89), segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} &= \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \left[-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \left[-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] - \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} [J_\mu A^\mu] \\
&= -\frac{1}{4\mu_0} \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{4\mu_0} \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} [(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)]
\end{aligned} \tag{B.91}$$

Usando a regra da cadeia,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} &= -\frac{1}{4\mu_0} \left[(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \right. \\
&\quad \left. + (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \right] \\
&= -\frac{1}{4\mu_0} \left[(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \left(\frac{\partial \partial_\mu A_\nu}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} - \frac{\partial \partial_\nu A_\mu}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \left(\frac{\partial \partial^\mu A^\nu}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} - \frac{\partial \partial^\nu A^\mu}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right) \right]
\end{aligned} \tag{B.92}$$

Portanto, usando o tensor métrico,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} &= -\frac{1}{4\mu_0} \left[(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \left(\delta_\mu^\nu \delta_\nu^\mu \frac{\partial \partial_\nu A_\mu}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} - \frac{\partial \partial_\nu A_\mu}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \left(g^{\mu\nu} g^{\nu\mu} \frac{\partial \partial_\nu A_\mu}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} - g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} \frac{\partial \partial_\nu A_\mu}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right) \right] \\
&= -\frac{1}{4\mu_0} [(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\delta_\mu^\nu \delta_\nu^\mu - 1) + (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (g^{\mu\nu} g^{\nu\mu} - g^{\mu\mu} g^{\nu\nu})] \\
&= -\frac{1}{4\mu_0} [\delta_\mu^\nu \delta_\nu^\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu A^\nu - \delta_\mu^\nu \delta_\nu^\mu \partial^\nu A^\mu + \partial^\nu A^\mu + g^{\mu\nu} g^{\nu\mu} \partial_\mu A_\nu - g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} \partial_\mu A_\nu - \\
&\quad - g^{\mu\nu} g^{\nu\mu} \partial_\nu A_\mu + g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} \partial_\nu A_\mu] \\
&= -\frac{1}{4\mu_0} (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu + \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu) \\
&= -\frac{1}{4\mu_0} (4\partial^\nu A^\mu - 4\partial^\mu A^\nu) \\
&= -\frac{1}{\mu_0} (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) \\
&= -\frac{1}{\mu_0} F^{\nu\mu}
\end{aligned} \tag{B.93}$$

Substituindo as Equações (B.90) e (B.93) na Equação (B.89) se obtém

$$\begin{aligned} -J^\mu - \partial_\nu \left[-\frac{1}{\mu_0} F^{\nu\mu} \right] &= 0 \\ -J^\mu + \frac{1}{\mu_0} \partial_\nu F^{\nu\mu} &= 0 \\ \partial_\nu F^{\nu\mu} &= \mu_0 J^\mu \end{aligned} \quad (\text{B.94})$$

A Equação (B.94) é idêntica a Equação (B.48). Então, pode-se dizer que a partir da densidade lagrangeana dada pela Equação (B.88) chega-se a forma covariante das Equações de Maxwell, dadas pela Equação (B.48), o que significa que o campo eletromagnético pode ser descrito pela densidade lagrangeana dada pela Equação (B.88).

A Equação (B.88) pode ser escrita para o vácuo, onde as distribuições de cargas e correntes são nulas, de forma que

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{B.95})$$

B.3.3 Densidade Hamiltoniana

Em termos da notação covariante para o campo φ , a Equação (B.79) se torna

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi_\mu)} \right] = 0 \quad (\text{B.96})$$

Como visto na Equação (B.64), o momento p_i é dado por $\partial L / \partial \dot{q}_i$. Portanto, em analogia, define-se o momento canonicamente conjugado ao campo φ_μ [76] como

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \varphi_\mu)} \quad (\text{B.97})$$

A Hamiltoniana desse sistema contínuo deve ser expressa em termos da integral espacial de uma função \mathcal{H} conhecida como densidade lagrangeana [76], ou seja

$$H = \int \mathcal{H} d^3q \quad (\text{B.98})$$

Reescrevendo a Equação (B.70) para φ ,

$$\begin{aligned} H &= \dot{\varphi}_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_\mu} - L \\ \int \mathcal{H} d^3 q &= \int \dot{\varphi}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_\mu} d^3 q - \int \mathcal{L} d^3 q \\ \mathcal{H} &= \dot{\varphi}_\mu \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_\mu}}_{\pi^\mu} - \mathcal{L} \end{aligned} \quad (\text{B.99})$$

Portanto

$$\mathcal{H} = \dot{\varphi}_\mu \pi^\mu - \mathcal{L} \quad (\text{B.100})$$

Como observado na Equação (B.14),

$$\partial_0 = \frac{1}{c} \partial_t \longrightarrow \partial_0 c = \partial_t \quad (\text{B.101})$$

Sendo assim,

$$\pi^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi_\mu)} \quad (\text{B.102})$$

e

$$\mathcal{H} = c \pi^\mu \partial_0 \varphi_\mu - \mathcal{L} \quad (\text{B.103})$$

B.4 QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DO CAMPO ELETRO-MAGNÉTICO

A quantização da mecânica decorre das relações de comutação de Heisenberg

$$[q_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (\text{B.104})$$

$$[q_i, q_j] = 0 \quad (\text{B.105})$$

$$[p_i, p_j] = 0 \quad (\text{B.106})$$

onde q e p referem-se a posição e momento da partícula, medido ao mesmo tempo. Portanto, em analogia, escreve-se as relações de comutação entre φ e π [75]:

$$[\varphi(x, t), \pi(y, t)] = i\hbar\delta(x - y) \quad (\text{B.107})$$

$$[\varphi(x, t), \varphi(y, t)] = 0 \quad (\text{B.108})$$

$$[\pi(x, t), \pi(y, t)] = 0 \quad (\text{B.109})$$

B.4.1 Calibre de Coulomb

Considera-se um campo livre A^μ onde não há cargas ou correntes (J_0). O calibre de Coulomb consiste na seguinte escolha:

$$\phi = A^0 = 0 \quad (\text{B.110})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial_i A^i = 0 \quad (\text{B.111})$$

Portanto, a Equação (B.52) fica

$$\partial_i A^i = 0 \quad (\text{B.112})$$

e a Equação (B.51) torna-se a equação de onda. Ou seja,

$$\square^2 A^i = 0 \quad (\text{B.113})$$

ou seja,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = 0 \quad (\text{B.114})$$

A Equação (B.114) é a forma da equação de onda para o potencial vetor. A solução para a Equação (B.113) pode ser expandido em uma serie de Fourier do tipo

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int dk^3 N_k \vec{\epsilon}_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} a_k(t) \quad (\text{B.115})$$

onde $\vec{\epsilon}_k$ é o vetor de polarização da onda, que atribui o caráter vetorial para o potencial vetor \vec{A} e N_k é uma constante de normalização a ser determinada. Aplicando o divergente na equação (B.120),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \int dk^3 N_k \vec{\nabla} \cdot \vec{\epsilon}_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} a_k(t) \quad (\text{B.116})$$

Em coordenadas cartesianas, a Equação (B.116) será

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \int dk^3 N_k \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{i} \epsilon_x + \hat{j} \epsilon_y + \hat{k} \epsilon_z \right) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} a_k(t) \\
&= \int dk^3 N_k \left(\epsilon_x \frac{\partial}{\partial x} + \epsilon_y \frac{\partial}{\partial y} + \epsilon_z \frac{\partial}{\partial z} \right) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} a_k(t) \\
&= \int dk^3 N_k (\epsilon_x k_x + \epsilon_y k_y + \epsilon_z k_z) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} a_k(t) \\
&= \int dk^3 N_k \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} a_k(t)
\end{aligned} \tag{B.117}$$

Pela Equação (B.111), a Equação (B.117) deve ser nula. Portanto, segue que

$$\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_k = 0 \tag{B.118}$$

ou seja, o calibre de Coulomb imprime uma condição de transversalidade para o campo, onde os vetores de polarização são perpendiculares ao vetor de onda, descartando a possibilidade da presença de fótons longitudinais.

É possível escolher um sistema de referência que contenha dois vetores de polarização transversais ao vetor de onda \vec{k} . Sendo assim, escreve-se $\epsilon(k,1)$ e $\epsilon(k,2)$, de tal maneira que

$$\epsilon(k,\lambda) \cdot \epsilon(k,\lambda') = \delta_{\lambda\lambda'} \tag{B.119}$$

Portanto, reescreve-se a Equação (B.115), incluindo os graus de liberdade dos vetores de polarização:

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \int dk^3 N_k \sum_{\lambda=1}^2 \vec{\epsilon}_k^\lambda e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} a_{k\lambda}(t) \tag{B.120}$$

Substituindo a Equação (B.120) na Equação (B.114),

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \int dk^3 N_k \sum_{\lambda=1}^2 \vec{\epsilon}_k^\lambda e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} a_{k\lambda}(t) = 0 \tag{B.121}$$

$$\int dk^3 N_k \sum_{\lambda=1}^2 \vec{\epsilon}_k^\lambda e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \left(\frac{\ddot{a}_{k\lambda}(t)}{c^2} + k^2 a_{k\lambda}(t) \right) = 0 \tag{B.122}$$

$$\ddot{a}_{k\lambda}(t) + c^2 k^2 a_{k\lambda}(t) = 0 \tag{B.123}$$

Fazendo

$$\omega_k = c |k| \tag{B.124}$$

segue que

$$\ddot{a}_{k\lambda}(t) + \omega^2 a_{k\lambda}(t) = 0 \quad (\text{B.125})$$

A Equação (B.124) é conhecida como relação de dispersão [79]. Supondo $a_k(t) = a_k e^{\lambda t}$, se obtém

$$\lambda = \pm i\omega_k \quad (\text{B.126})$$

Portanto,

$$a_{k\lambda}(t) = a'_{k\lambda} e^{-i\omega_k t} + a''_{k\lambda} e^{i\omega_k t} \quad (\text{B.127})$$

Portanto, a Equação (B.120), torna-se

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int dk^3 N_k \sum_{\lambda=1}^2 \vec{\epsilon}_k^\lambda e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} (a'_{k\lambda} e^{-i\omega_k t} + a''_{k\lambda} e^{i\omega_k t}) \quad (\text{B.128})$$

$$= \int dk^3 N_k \sum_{\lambda=1}^2 \vec{\epsilon}_k^\lambda \left(a'_{k\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_k t} + a''_{k\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega_k t} \right) \quad (\text{B.129})$$

Para que a $\vec{A}(\vec{x}, t)$ seja consistente com uma descrição física, deve ter uma solução real, ou seja $\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}^*(\vec{x}, t)$. Isto leva a

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int dk^3 N_k \sum_{\lambda=1}^2 \vec{\epsilon}_k^\lambda \left(a_{k\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_k t} + a_{k\lambda}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega_k t} \right) \quad (\text{B.130})$$

As grandezas $a_{k\lambda}$ e $a_{k\lambda}^*$ no processo de quantização serão consideradas como operadores lineares. Portanto, é conveniente denotá-las por

$$a_k \longrightarrow \hat{a}_k \quad (\text{B.131})$$

$$a_k^* \longrightarrow \hat{a}_k^\dagger \quad (\text{B.132})$$

onde os operadores satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[\hat{a}_{k'\lambda}, \hat{a}_{k\lambda}^\dagger] = \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \quad (\text{B.133})$$

$$[\hat{a}_{k'\lambda}, \hat{a}_{k\lambda}] = 0 \quad (\text{B.134})$$

$$[\hat{a}_{k'\lambda}^\dagger, \hat{a}_{k\lambda}^\dagger] = 0 \quad (\text{B.135})$$

Portanto, a Equação (B.130) poder ser reescrita como

$$\hat{A}(\vec{x}, t) = \int dk^3 N_k \sum_{\lambda=1}^2 \left(\hat{a}_{k\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_k t} + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega_k t} \right) \quad (\text{B.136})$$

Sendo assim, fazendo

$$u_k(\vec{x}, t) = N_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_k t} \longrightarrow u_k^*(\vec{x}, t) = N_k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega_k t} \quad (\text{B.137})$$

se obtem

$$\hat{A}(\vec{x}, t) = \int dk^3 \sum_{\lambda=1}^2 \left[\hat{a}_{k\lambda} u_k(\vec{x}, t) + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger u_k^*(\vec{x}, t) \right] \quad (\text{B.138})$$

Como visto na Equação (B.102), o momento canonicamente conjugado a A é dado por

$$\pi^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)} \quad (\text{B.139})$$

Dessa maneira, usando a Equação (B.93) segue que

$$\pi^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)} = -\frac{1}{c} \frac{1}{\mu_0} F^{0\mu} \quad (\text{B.140})$$

$$= -\frac{1}{c} \frac{1}{\mu_0} (\partial^0 A^\mu - \partial^\mu A^0)$$

$$= -\frac{1}{c} \frac{1}{\mu_0} \partial^0 A^\mu \quad (\text{B.141})$$

Sendo assim,

$$\pi^0 = -\frac{1}{c} \frac{1}{\mu_0} \partial^0 A^0 = 0 \quad (\text{B.142})$$

$$\pi^i = -\frac{1}{c} \frac{1}{\mu_0} \partial^0 A^i \quad (\text{B.143})$$

Portanto, substituindo a Equação (B.136) na Equação (B.143), se obtem

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(\vec{x}, t) &= -\frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int dk^3 N_k \sum_{\lambda=1}^2 \left(\hat{a}_{k\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_k t} + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega_k t} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0 c^2} i \int dk^3 N_k \sum_{\lambda=1}^2 \omega_k \left(\hat{a}_{k\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_k t} - \hat{a}_{k\lambda}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega_k t} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.144})$$

ou

$$\hat{\pi}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\mu_0 c^2} i \int dk^3 \sum_{\lambda=1}^2 \omega_k \left(\hat{a}_{k\lambda} u_k - \hat{a}_{k\lambda}^\dagger u_k^* \right) \quad (\text{B.145})$$

Fazendo o comutador entre $\hat{A}(\vec{x}, t)$ e $\hat{\pi}(\vec{y}, t)$,

$$\begin{aligned} [\hat{A}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] &= \frac{i}{\mu_0 c^2} \int dk'^3 N_{k'} \int dk^3 N_k \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \omega_k \left(\hat{a}_{k'\lambda} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x} - i\omega_{k'} t} + \hat{a}_{k'\lambda}^\dagger e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x} + i\omega_{k'} t} \right) \left(\hat{a}_{k\lambda} e^{i\vec{k} \cdot \vec{y} - i\omega_k t} \right. \\ &\quad \left. + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{y} + i\omega_k t} \right) - \frac{i}{\mu_0 c} \int dk'^3 N_{k'} \int dk^3 N_k \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \omega_k \left(\hat{a}_{k\lambda} e^{i\vec{k} \cdot \vec{y} - i\omega_k t} \right. \\ &\quad \left. + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{y} + i\omega_k t} \right) \left(\hat{a}_{k'\lambda} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x} - i\omega_{k'} t} + \hat{a}_{k'\lambda}^\dagger e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x} + i\omega_{k'} t} \right) \end{aligned}$$

Portanto, multiplicando os termos se obtém

$$\begin{aligned} [\hat{A}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] &= \frac{1}{\mu_0 c^2} i \int dk'^3 N_{k'} \int dk^3 N_k \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \omega_k \left\{ \hat{a}_{k'\lambda} \hat{a}_{k\lambda} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x} - i\omega_{k'} t} e^{i\vec{k} \cdot \vec{y} - i\omega_k t} + \right. \\ &\quad \left. + \hat{a}_{k'\lambda} \hat{a}_{k\lambda}^\dagger e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x} - i\omega_{k'} t} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{y} + i\omega_k t} + \hat{a}_{k'\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda} e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x} + i\omega_{k'} t} e^{i\vec{k} \cdot \vec{y} - i\omega_k t} + \hat{a}_{k'\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda}^\dagger e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x} + i\omega_{k'} t} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{y} + i\omega_k t} - \right. \\ &\quad \left. - \hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k'\lambda} e^{i\vec{k} \cdot \vec{y} - i\omega_k t} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x} - i\omega_{k'} t} - \hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k'\lambda}^\dagger e^{i\vec{k} \cdot \vec{y} - i\omega_k t} e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x} + i\omega_{k'} t} - \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k'\lambda} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{y} + i\omega_k t} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x} - i\omega_{k'} t} - \right. \\ &\quad \left. - \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k'\lambda}^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{y} + i\omega_k t} e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x} + i\omega_{k'} t} \right\} \end{aligned}$$

Agrupando os termos,

$$\begin{aligned} [\hat{A}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] &= \frac{1}{\mu_0 c^2} i \int dk'^3 N_{k'} \int dk^3 N_k \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \omega_k \left\{ \cancel{[\hat{a}_{k'\lambda}, \hat{a}_{k\lambda}]} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x} - i\omega_{k'} t} e^{i\vec{k} \cdot \vec{y} - i\omega_k t} + \right. \\ &\quad \left. + [\hat{a}_{k'\lambda}, \hat{a}_{k\lambda}^\dagger] e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x} - i\omega_{k'} t} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{y} + i\omega_k t} + [\hat{a}_{k'\lambda}^\dagger, \hat{a}_{k\lambda}] e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x} + i\omega_{k'} t} e^{i\vec{k} \cdot \vec{y} - i\omega_k t} + \right. \\ &\quad \left. + \cancel{[\hat{a}_{k'\lambda}^\dagger, \hat{a}_{k\lambda}]} e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x} + i\omega_{k'} t} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{y} + i\omega_k t} \right\} \end{aligned}$$

Com as relações de comutação dadas pelas Equações (B.133), (B.134) e (B.135), segue que

$$\begin{aligned} [\hat{A}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] &= \frac{1}{\mu_0 c^2} i \int dk'^3 N_{k'} \int dk^3 N_k \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \omega_k \left\{ \delta(\vec{k}' - \vec{k}) e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x} - i\omega_{k'} t} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{y} + i\omega_k t} + \right. \\ &\quad \left. + \delta(\vec{k}' - \vec{k}) e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x} + i\omega_{k'} t} e^{i\vec{k} \cdot \vec{y} - i\omega_k t} \right\} \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \left[\hat{A}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t) \right] &= \frac{1}{\mu_0 c^2} i \int dk'^3 N_{k'} \int dk^3 N_k \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \omega_k \left\{ \delta(\vec{k}' - \vec{k}) e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \vec{k} \cdot \vec{y}) - i(\omega_{k'} - \omega_k)t} + \right. \\ &\quad \left. + \delta(\vec{k}' + \vec{k}) e^{-i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \vec{k} \cdot \vec{y}) + i(\omega_{k'} - \omega_k)t} \right\} \end{aligned}$$

Usando a propriedade da delta de Dirac [80] dada por

$$f(a) = \int_{x_0}^x f(x) \delta(x - a) dx \quad (\text{B.146})$$

observa-se que

$$\left[\hat{A}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t) \right] = \frac{1}{\mu_0 c^2} i \int dk^3 N_k^2 \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \omega_k \left\{ e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} + e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right\}$$

Como a representação integral da Delta de Dirac [80] é dada por

$$\delta^3(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} dk^3 \quad (\text{B.147})$$

então, segue que

$$\begin{aligned} \left[\hat{A}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t) \right] &= \frac{1}{\mu_0 c} i N_k^2 \omega_k \left\{ (2\pi)^3 \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) + (2\pi)^3 \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \right\} \\ &= \frac{1}{\mu_0 c^2} i N_k^2 \omega_k 2(2\pi)^3 \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= \frac{1}{\mu_0 c^2} i 2\omega_k (2\pi)^3 N_k^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (\text{B.148})$$

Portanto, para que a relação de comutação dada pela Equação (B.107) seja satisfeita, se obtém

$$N_k = c \sqrt{\frac{\mu_0 \hbar}{2\omega_k (2\pi)^3}} \quad (\text{B.149})$$

Note que as relações de comutação

$$\left[\hat{A}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t) \right] = i\hbar \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{B.150})$$

$$\left[\hat{A}(\vec{x}, t), \hat{A}(\vec{y}, t) \right] = 0 \quad (\text{B.151})$$

$$\left[\hat{\pi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t) \right] = 0 \quad (\text{B.152})$$

são satisfeitas caso os operadores $a(k)$ e $a^\dagger(k)$ satisfaçam as relações de comutação

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{k'\lambda}, \hat{a}_{k\lambda}^\dagger] &= \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \\ [\hat{a}_{k'\lambda}, \hat{a}_{k\lambda}] &= 0 \\ [\hat{a}_{k'\lambda}^\dagger, \hat{a}_{k\lambda}^\dagger] &= 0 \end{aligned}$$

Substituindo a Equação (B.149) na Equação (B.130) se obtém

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int dk^3 c \sqrt{\frac{\mu_0 \hbar}{2\omega_k (2\pi)^3}} \sum_{\lambda=1}^2 \vec{\epsilon}_k^\lambda \left(\hat{a}_{k\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_k t} + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega_k t} \right) \quad (\text{B.153})$$

que também pode ser escrito como

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int dk^3 \sum_{\lambda=1}^2 \vec{\epsilon}_k^\lambda \left\{ \hat{a}_{k\lambda} u_k(\vec{x}, t) + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger u_k^*(\vec{x}, t) \right\} \quad (\text{B.154})$$

onde

$$u_k(\vec{x}, t) = c \sqrt{\frac{\mu_0 \hbar}{2\omega_k (2\pi)^3}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_k t} \quad (\text{B.155})$$

Reescrevendo a Equação (B.103) para o campo A ,

$$\mathcal{H} = c \pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L} \quad (\text{B.156})$$

Substituindo as Equações (B.95) e (B.141),

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{\mu_0} \partial^0 A^\mu \partial_0 A_\mu + \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{B.157})$$

Usando as Equações (B.39) e (B.110),

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\frac{1}{\mu_0} \partial^0 A^i \partial_0 A_i + \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} (\partial^0 A^i - \partial^i A^0) (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) + \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} F^{0i} F_{0i} + \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \frac{E^2}{c^2} + \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{B.158})$$

Explicitando os termos,

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{4\mu_0} (F_{0\nu}F^{0\nu} + F_{i\nu}F^{i\nu}) \\ &= \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{4\mu_0} (F_{00}F^{00} + F_{0j}F^{0j} + F_{i0}F^{i0} + F_{ij}F^{ij})\end{aligned}\quad (\text{B.159})$$

De acordo com a Equação (B.39),

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{4\mu_0} \left(-\frac{E^2}{c^2} - \frac{E^2}{c^2} + F_{ij}F^{ij} \right) \\ &= \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{4\mu_0} \left(-2\frac{E^2}{c^2} + F_{ij}F^{ij} \right) \\ &= \epsilon_0 E^2 - \frac{1}{2\mu_0} \frac{E^2}{c^2} + \frac{1}{4\mu_0} F_{ij}F^{ij} \\ &= \epsilon_0 E^2 - \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{4\mu_0} F_{ij}F^{ij} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{4\mu_0} F_{ij}F^{ij}\end{aligned}\quad (\text{B.160})$$

Usando a Equação (B.40),

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{4\mu_0} (\partial^i A^j - \partial^j A^i) (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{4\mu_0} (\partial^i A^j \partial_i A_j - \partial^i A^j \partial_j A_i - \partial^j A^i \partial_i A_j + \partial^j A^i \partial_j A_i) \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{4\mu_0} (\partial^i A^j \partial_i A_j - \partial^i A^j \partial_j A_i + \partial^j A^i \partial_j A_i - \partial^j A^i \partial_i A_j)\end{aligned}\quad (\text{B.161})$$

A Equação (B.23), escrita na notação tensorial ficará

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \vec{e}_i \quad (\text{B.162})$$

onde ϵ_{ijk} é chamado tensor de Levi-Civita. Dessa maneira,

$$B^2 = \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)^2 = \epsilon^{ijk} \epsilon_{iml} \partial_j A_k \partial^l A^m \quad (\text{B.163})$$

onde $\epsilon^{ijk}\epsilon_{iml} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 B^2 &= \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)^2 = \epsilon^{ijk}\epsilon_{iml}\partial_j A_k \partial^l A^m \\
 &= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) \partial_j A_k \partial^l A^m \\
 &= \delta_{jl}\delta_{km}\partial_j A_k \partial^l A^m - \delta_{jm}\delta_{kl}\partial_j A_k \partial^l A^m \\
 &= \partial_l A_m \partial^l A^m - \partial_m A_l \partial^l A^m
 \end{aligned} \tag{B.164}$$

Portanto, a Equação (B.161) se torna

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{4\mu_0} (B^2 + B^2) \\
 &= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{4\mu_0} (2B^2) \\
 &= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)
 \end{aligned} \tag{B.165}$$

Sendo assim, o operador Hamiltoniano é escrito na forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dx^3 \tag{B.166}$$

Deve-se ressaltar que com as condições impostas pelo calibre de Coulomb, a Equação (B.29) ficará

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \quad \text{ou} \quad \vec{E}(\vec{x}, t) = -c \partial_0 A^i \tag{B.167}$$

Substituindo a Equação (B.154) na Equação (B.167), encontra-se o campo elétrico em função de u_k , da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(\vec{x}, t) &= -c \partial_0 A^i \\
 &= -c \partial_0 \int dk^3 \vec{\epsilon}_k^\lambda \sum_{\lambda=1}^2 \left\{ \hat{a}_{k\lambda} u_k(\vec{x}, t) + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger u_k^*(\vec{x}, t) \right\} \\
 &= -c \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int dk^3 \sum_{\lambda=1}^2 \vec{\epsilon}_k^\lambda \left\{ \hat{a}_{k\lambda} u_k(\vec{x}, t) + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger u_k^*(\vec{x}, t) \right\} \\
 &= \int dk^3 i\omega_k \sum_{\lambda=1}^2 \vec{\epsilon}_k^\lambda \left\{ \hat{a}_{k\lambda} u_k(\vec{x}, t) - \hat{a}_{k\lambda}^\dagger u_k^*(\vec{x}, t) \right\}
 \end{aligned} \tag{B.168}$$

Substituindo a Equação (B.154) na Equação (B.162), encontra-se o campo elétrico em função de u_k , da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{x}, t) &= \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \vec{e}_i \\
&= \epsilon_{ijk} \partial_j \int dk^3 \sum_{\lambda=1}^2 \vec{e}_k^\lambda \left\{ \hat{a}_{k\lambda} u_k(\vec{x}, t) + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger u_k^*(\vec{x}, t) \right\} \vec{e}_i \\
&= \int dk^3 i k \sum_{\lambda=1}^2 \vec{e}_k^\lambda \left\{ \hat{a}_{k\lambda} u_k(\vec{x}, t) - \hat{a}_{k\lambda}^\dagger u_k^*(\vec{x}, t) \right\} \quad (\text{B.169})
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo as Equações (B.168) e (B.169) na Equação (B.166),

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int dx^3 \sum_{\lambda=1}^2 \left\{ \epsilon_0 \left[\int dk^3 i \omega_k \vec{e}_k^\lambda \left(\hat{a}_k u_k - \hat{a}_k^\dagger u_k^* \right) \right]^2 + \frac{1}{\mu_0} \left[\int dk^3 i k \vec{e}_k^\lambda \left(\hat{a}_k u_k - \hat{a}_k^\dagger u_k^* \right) \right]^2 \right\}$$

Dai,

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2} \int dx^3 \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \left\{ \epsilon_0 \left[\int dk^3 i \omega_k \vec{e}_k^\lambda \left(\hat{a}_{k\lambda} u_k - \hat{a}_{k\lambda}^\dagger u_k^* \right) \right] \cdot \left[\int dk'^3 i \omega_{k'} \vec{e}_{k'}^{\lambda'} \left(\hat{a}_{k'\lambda'} u_{k'} - \hat{a}_{k'\lambda'}^\dagger u_{k'}^* \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\mu_0} \left[\int dk^3 i k \vec{e}_k^\lambda \left(\hat{a}_{k\lambda} u_k - \hat{a}_{k\lambda}^\dagger u_k^* \right) \right] \cdot \left[\int dk'^3 i k' \vec{e}_{k'}^{\lambda'} \left(\hat{a}_{k'\lambda'} u_{k'} - \hat{a}_{k'\lambda'}^\dagger u_{k'}^* \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2} \int dx^3 \int dk^3 \int dk'^3 \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \left\{ \vec{e}_k^\lambda \cdot \vec{e}_{k'}^{\lambda'} \left[-\epsilon_0 \omega_k \omega_{k'} \left(\hat{a}_k \hat{a}_{k'} u_k u_{k'} - \hat{a}_k \hat{a}_{k'}^\dagger u_k u_{k'}^* - \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} u_k^* u_{k'} + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k'\lambda'}^\dagger u_k^* u_{k'}^* \right) - \frac{1}{\mu_0} k k' \left(\hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k'\lambda'} u_k u_{k'} - \hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k'\lambda'}^\dagger u_k u_{k'}^* - \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k'\lambda'} u_k^* u_{k'} + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k'\lambda'}^\dagger u_k^* u_{k'}^* \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Colocando o termo entre parenteses em evidencia,

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= -\frac{1}{2} \int dx^3 \int dk^3 \int dk'^3 \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \left\{ \vec{e}_k^\lambda \cdot \vec{e}_{k'}^{\lambda'} \left[\left(\epsilon_0 \omega_k \omega_{k'} + \frac{1}{\mu_0} k k' \right) \left(\hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k'\lambda'} u_k u_{k'} - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k'\lambda'}^\dagger u_k u_{k'}^* - \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k'\lambda'} u_k^* u_{k'} + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k'\lambda'}^\dagger u_k^* u_{k'}^* \right) \right] \right\} \quad (\text{B.170})
\end{aligned}$$

Da Equação (B.155), observa-se que

$$\begin{aligned} \int dx^3 u_k u_{k'} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dx^3 \frac{\mu_0 c^2 \hbar}{\sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega_k t} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}-i\omega_{k'} t} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dx^3 \frac{\mu_0 c^2 \hbar}{\sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} e^{-i(\omega_k+\omega_{k'})t} \end{aligned} \quad (\text{B.171})$$

Aplicando a Equação (B.147),

$$\int dx^3 u_k u_{k'} = \mu_0 c^2 \hbar \frac{\delta^3(\vec{k} + \vec{k}')}{\sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} e^{-i(\omega_k + \omega_{k'})t} \quad (\text{B.172})$$

Analogamente,

$$\int dx^3 u_k u_{k'}^* = \mu_0 c^2 \hbar \frac{\delta^3(\vec{k} - \vec{k}')}{\sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} \quad (\text{B.173})$$

$$\int dx^3 u_k^* u_{k'} = \mu_0 c^2 \hbar \frac{\delta^3(-\vec{k} + \vec{k}')}{\sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} \quad (\text{B.174})$$

$$\int dx^3 u_k^* u_{k'}^* = \mu_0 c^2 \hbar \frac{\delta^3(-\vec{k} - \vec{k}')}{\sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} e^{i(\omega_k + \omega_{k'})t} \quad (\text{B.175})$$

Portanto, a Equação (B.170) se torna

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\frac{1}{2} \mu_0 c^2 \hbar \int dk^3 \int dk'^3 \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \left\{ \vec{\epsilon}_k^\lambda \cdot \vec{\epsilon}_{k'}^{\lambda'} \left[\left(\epsilon_0 \omega_k \omega_{k'} + \frac{1}{\mu_0} k k' \right) \left(\hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k'\lambda'} \frac{\delta^3(\vec{k} + \vec{k}')}{\sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} e^{-i(\omega_k + \omega_{k'})t} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k'\lambda'}^\dagger \frac{\delta^3(\vec{k} - \vec{k}')}{\sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} - \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k'\lambda'} \frac{\delta^3(-\vec{k} + \vec{k}')}{\sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k'\lambda'}^\dagger \frac{\delta^3(-\vec{k} - \vec{k}')}{\sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} e^{i(\omega_k + \omega_{k'})t} \right) \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

Usando a Equação (B.146),

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\frac{1}{2} \mu_0 c^2 \hbar \int \frac{dk^3}{2\omega_k} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \left\{ \vec{\epsilon}_k^\lambda \cdot \vec{\epsilon}_{-k}^{\lambda'} \left(\epsilon_0 \omega_k^2 - \frac{1}{\mu_0} k^2 \right) \hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{-k\lambda'} e^{-i2\omega_k t} - \vec{\epsilon}_k \cdot \vec{\epsilon}_k \left(\epsilon_0 \omega_k^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\mu_0} k^2 \right) \hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda}^\dagger - \vec{\epsilon}_k^\lambda \cdot \vec{\epsilon}_k^{\lambda'} \left(\epsilon_0 \omega_k^2 + \frac{1}{\mu_0} k^2 \right) \hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda}^\dagger + \vec{\epsilon}_k^\lambda \cdot \vec{\epsilon}_{-k}^{\lambda'} \left(\epsilon_0 \omega_k^2 - \frac{1}{\mu_0} k^2 \right) \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{-k\lambda'}^\dagger e^{i2\omega_k t} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.176})$$

Usando a relação de dispersão (Equação (B.124)), nota-se que $\epsilon_0 \omega_k^2 = \frac{1}{\mu_0} k^2$. Logo, o primeiro

e o quarto termo se anulam. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= -\frac{1}{2}\mu_0 c^2 \hbar \int \frac{dk^3}{2\omega_k} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \left\{ -\vec{\epsilon}_k^\lambda \cdot \vec{\epsilon}_k^{\lambda'} \left(\varepsilon_0 \omega_k^2 + \frac{1}{\mu_0} k^2 \right) \hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda}^\dagger - \vec{\epsilon}_k^\lambda \cdot \vec{\epsilon}_k^{\lambda'} \left(\varepsilon_0 \omega_k^2 + \frac{1}{\mu_0} k^2 \right) \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda} \right\} \\
&= \frac{1}{2}\mu_0 c^2 \hbar \int \frac{dk^3}{2\omega_k} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \left\{ \vec{\epsilon}_k^\lambda \cdot \vec{\epsilon}_k^{\lambda'} \left(\varepsilon_0 \omega_k^2 + \frac{1}{\mu_0} k^2 \right) \hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda}^\dagger + \vec{\epsilon}_k^\lambda \cdot \vec{\epsilon}_k^{\lambda'} \left(\varepsilon_0 \omega_k^2 + \frac{1}{\mu_0} k^2 \right) \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda} \right\} \\
&= \frac{1}{2}\mu_0 c^2 \hbar \int \frac{dk^3}{2\omega_k} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \left\{ \vec{\epsilon}_k^\lambda \cdot \vec{\epsilon}_k^{\lambda'} \left(\varepsilon_0 \omega_k^2 + \frac{1}{\mu_0} k^2 \right) \left(\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2}\mu_0 c^2 \hbar \int \frac{dk^3}{2\omega_k} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \left\{ \vec{\epsilon}_k^\lambda \cdot \vec{\epsilon}_k^{\lambda'} \left(\varepsilon_0 \omega_k^2 + \varepsilon_0 \omega_k^2 \right) \left(\hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda}^\dagger + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2}\mu_0 \varepsilon_0 c^2 \hbar \int dk^3 \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \vec{\epsilon}_k^\lambda \cdot \vec{\epsilon}_k^{\lambda'} \omega_k \left(\hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda}^\dagger + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda} \right) \\
&= \frac{1}{2} \int dk^3 \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \vec{\epsilon}_k^\lambda \cdot \vec{\epsilon}_k^{\lambda'} \left(\hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda}^\dagger + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda} \right) \hbar \omega_k \tag{B.177}
\end{aligned}$$

Utilizando a relação de comutação dada pela Equação (B.133) e sabendo que $\vec{\epsilon}_k^\lambda \cdot \vec{\epsilon}_k^{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}$,

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2} \int dk^3 \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \delta_{\lambda\lambda'} \left(1 + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda} + \hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \right) \hbar \omega_k \\
&= \frac{1}{2} \int dk^3 \sum_{\lambda=1}^2 \left(2\hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda} + 1 \right) \hbar \omega_k \tag{B.178}
\end{aligned}$$

Na Equação (B.178) também foi utilizada a relação de dispersão dada pela Equação (B.124).

Em comparação com a Equação (A.20), o hamiltoniano do campo eletromagnético quantizado dado pela Equação (B.178) representa uma soma de hamiltonianos formalmente análogos ao do oscilador harmônico. Isto representa a soma do número de fótons em cada modo multiplicado pela energia de um fóton em cada um dos modos, além de

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 \hbar \omega_k \tag{B.179}$$

representando a energia das flutuações de vácuo em cada um dos modos. Então, pode-se dizer que o hamiltoniano para o campo eletromagnético quantizado consiste no somatório de infinito termos de hamiltoniano de osciladores harmônicos descrevendo o comportamento de uma oscilação em cada ponto do espaço.

A Equação (B.179) é a energia no campo eletromagnético, quando existem zero fótons presentes, também chamada de energia do vácuo. Uma manifestação macroscópica da energia do vácuo é conhecida como efeito Casimir.

B.4.2 Calibre de Lorentz

O calibre de Lorentz consiste na seguinte escolha:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{B.180})$$

Portanto, a Equação (B.52) fica

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (\text{B.181})$$

e a Equação (B.51) torna-se a equação de onda. Ou seja,

$$\square^2 A^\nu = 0 \quad (\text{B.182})$$

Lembrando que pela Equação (B.140) calcula-se a componente temporal do momento canonicamente conjugado. Então, escreve-se

$$\begin{aligned} \pi^0 &= -\frac{1}{c} \frac{1}{\mu_0} F^{00} \\ &= -\frac{1}{c} \frac{1}{\mu_0} (\partial^0 A^0 - \partial^0 A^0) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.183})$$

e

$$\begin{aligned} \pi^i &= -\frac{1}{c} \frac{1}{\mu_0} F^{0i} \\ &= -\frac{1}{c} \frac{1}{\mu_0} (\partial^0 A^i - \partial^i A^0) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.184})$$

O resultado da Equação (B.183) manifesta uma incoerência, pois a relação (B.150) não pode ser obedecida. Portanto é preciso uma outra densidade lagrangeana que não a dada pela Equação

(B.88). Utilização a densidade lagrangeana de Fermi [81], dada por

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\mu_0} \zeta (\partial_\sigma A^\sigma)^2 \quad (\text{B.185})$$

onde ζ é um parametro que pode assumir valores inteiros.

A lagrangeana dada pela Equação (B.185) deve satisfazer as equações de Euler, dadas pela Equação (B.89), ou seja,

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right] = 0 \quad (\text{B.186})$$

Derivando a Equação (B.185) com relação a A_μ , se obtem o primeiro termo da Equação (B.186), ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A_\mu} &= \frac{\partial}{\partial A_\mu} \left[-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\mu_0} \zeta (\partial_\sigma A^\sigma)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} \frac{\partial}{\partial A_\mu} [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] - \frac{1}{2\mu_0} \zeta \frac{\partial}{\partial A_\mu} (\partial_\sigma A^\sigma)^2 \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} \frac{\partial}{\partial A_\mu} [(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] - \frac{1}{2\mu_0} \zeta \frac{\partial}{\partial A_\mu} (\partial_\sigma A^\sigma)^2 \quad (\text{B.187}) \end{aligned}$$

Como os termos não depende explicitamente de A_ν , mas sim de ∂A_ν , logo

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A_\mu} = 0 \quad (\text{B.188})$$

Agora, para encontrar o segundo termo da Equação (B.186), segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} &= \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \left[-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\mu_0} \zeta (\partial_\sigma A^\sigma)^2 \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \left[-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] - \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \left[\frac{1}{2\mu_0} \zeta (\partial_\sigma A^\sigma)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\mu_0} \zeta \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} (\partial_\sigma A^\sigma)^2 \quad (\text{B.189}) \end{aligned}$$

O primeiro termo da Equação (B.189) já foi calculado anteriormente, a partir da Equação (B.91) e resultando na Equação (B.93), ou seja

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{1}{\mu_0} F^{\nu\mu} - \frac{1}{2\mu_0} \zeta \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} (\partial_\sigma A^\sigma)^2 \quad (\text{B.190})$$

Usando a propriedade do tensor métrico, rescreve-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} &= -\frac{1}{\mu_0} F^{\nu\mu} - \frac{1}{2\mu_0} \zeta \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} (g^{\sigma\rho} \partial_\sigma A_\rho)^2 \\
&= -\frac{1}{\mu_0} F^{\nu\mu} - \frac{1}{2\mu_0} \zeta g^{\sigma\rho} g^{\sigma\rho} \frac{\partial (\partial_\sigma A_\rho)^2}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \\
&= -\frac{1}{\mu_0} F^{\nu\mu} - \frac{1}{2\mu_0} \zeta g^{\sigma\rho} g^{\sigma\rho} \left[2 \partial_\sigma A_\rho \frac{\partial (\partial_\sigma A_\rho)}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right] \\
&= -\frac{1}{\mu_0} F^{\nu\mu} - \frac{1}{\mu_0} \zeta g^{\sigma\rho} g^{\sigma\rho} \left[\partial_\sigma A_\rho \frac{\partial (\partial_\sigma A_\rho)}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right]
\end{aligned} \tag{B.191}$$

Como $\frac{\partial (\partial_\sigma A_\rho)}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = \delta_{\sigma\nu} \delta_{\rho\mu}$, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} &= -\frac{1}{\mu_0} F^{\nu\mu} - \frac{1}{\mu_0} \zeta g^{\sigma\rho} g^{\sigma\rho} [\partial_\sigma A_\rho \delta_{\sigma\nu} \delta_{\rho\mu}] \\
&= -\frac{1}{\mu_0} F^{\nu\mu} - \frac{1}{\mu_0} \zeta g^{\nu\mu} g^{\nu\mu} \partial_\nu A_\mu \\
&= -\frac{1}{\mu_0} F^{\nu\mu} - \frac{1}{\mu_0} \zeta g^{\nu\mu} \partial_\nu A^\mu
\end{aligned} \tag{B.192}$$

Portanto, substituindo as Equações (B.188) e (B.192) na Equação (B.186) se obtém

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right] &= 0 \\
0 - \partial_\nu \left[-\frac{1}{\mu_0} F^{\nu\mu} - \frac{1}{\mu_0} \zeta g^{\nu\mu} \partial_\nu A^\mu \right] &= 0 \\
\frac{1}{\mu_0} \partial_\nu [F^{\nu\mu} + \zeta g^{\nu\mu} \partial_\nu A^\mu] &= 0 \\
\frac{1}{\mu_0} \partial_\nu [F^{\nu\mu} - \zeta g^{\mu\nu} \partial_\nu A^\nu] &= 0 \\
\partial_\nu F^{\nu\mu} - \zeta g^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\nu A^\nu &= 0 \\
\partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) + \zeta \partial^\mu \partial_\nu A^\nu &= 0 \\
\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu \partial^\mu A^\nu + \zeta \partial^\mu \partial_\nu A^\nu &= 0 \\
\Box^2 A^\mu - (1 - \zeta) \partial^\mu \partial_\nu A^\nu &= 0
\end{aligned} \tag{B.193}$$

Fazendo a escolha $\zeta = 1$, chamada de calibre de Feynman, a Equação (B.193) torna-se a equação de onda. Ou seja,

$$\Box^2 A^\mu = 0 \tag{B.194}$$

Portanto, constata-se que a nova densidade lagrangeana dada pela Equação (B.185) satisfaz

a Equação de onda. Através das equações (B.139) e (B.192) é possível calcular o momento canonicamente conjugado para a nova densidade lagrangeana. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
 \pi^\mu &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_0 A_\mu)} \\
 &= -\frac{1}{c} \frac{1}{\mu_0} F^{0\mu} - \frac{1}{c} \frac{1}{\mu_0} \zeta g^{0\mu} \partial_0 A^0 \\
 &= -\frac{1}{c} \frac{1}{\mu_0} (\partial^0 A^\mu - \partial^\mu A^0) - \frac{1}{c} \frac{1}{\mu_0} \zeta g^{0\mu} \partial_0 A^0
 \end{aligned} \tag{B.195}$$

Dessa maneira, já utilizando $\zeta = 1$ calcula-se as componentes temporal e espacial do momento canonicamente conjugado

$$\pi^0 = -\frac{1}{c} \frac{1}{\mu_0} \partial_0 A^0 \tag{B.196}$$

$$\pi^i = -\frac{1}{c} \frac{1}{\mu_0} (\partial^0 A^i - \partial^i A^0) \tag{B.197}$$

Sendo assim, a incoerência que ocorre na Equação (B.183) não ocorre mais na Equação (B.196) calculada a partir da densidade lagrangeana dada pela Equação (B.185).

Reescrevendo a Equação (B.185) em função da Equação (B.40), segue que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}' &= -\frac{1}{4\mu_0} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2\mu_0} (\partial_\nu A^\nu)^2 \\
 &= -\frac{1}{4\mu_0} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2\mu_0} (\partial_\nu A^\nu)^2 \\
 &= -\frac{1}{4\mu_0} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu \delta_\mu^\nu A_\nu \partial^\mu \delta_\mu^\nu A^\mu + \delta_\nu^\mu \partial_\mu A_\mu \delta_\mu^\nu \partial^\mu A^\mu) - \frac{1}{2\mu_0} (\partial_\nu A^\nu)^2 \\
 &= -\frac{1}{4\mu_0} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu) - \frac{1}{2\mu_0} (\partial_\nu A^\nu)^2
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= -\frac{1}{4\mu_0} (2\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - 2\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2\mu_0} \partial_\nu A^\nu \partial_\nu A^\nu \\
&= -\frac{1}{2\mu_0} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2\mu_0} \partial_\nu A^\nu \partial_\nu A^\nu \\
&= -\frac{1}{2\mu_0} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2\mu_0} \partial_\nu g_\mu^\nu A^\mu \partial_\nu A^\nu \\
&= -\frac{1}{2\mu_0} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2\mu_0} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu \\
&= \frac{1}{2\mu_0} (-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu) \\
&= \frac{1}{2\mu_0} [-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + (\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu)] \tag{B.198}
\end{aligned}$$

Incluindo termos que se anulam,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \frac{1}{2\mu_0} \{-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + [\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + A_\nu (\partial^\nu \partial_\mu A^\mu) - A_\nu (\partial^\nu \partial_\mu A^\mu) - \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu]\} \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \{-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + [\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + A_\nu (\partial^\nu \partial_\mu A^\mu) - g_{\nu\mu} A^\mu (\partial^\nu \partial_\mu A^\mu) - \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu]\} \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \{-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + [\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + A_\nu (\partial^\nu \partial_\mu A^\mu) - A^\mu (\delta_\nu^\nu \partial_\nu \partial_\mu A^\mu) - \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu]\} \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \{-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + [\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + A_\nu (\partial^\nu \partial_\mu A^\mu) - A^\mu (\partial_\nu \partial_\mu A^\nu) - \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu]\} \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \{-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + [\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + A_\nu (g^{\nu\mu} \partial_\mu \partial_\mu A^\mu) - A^\mu (\delta_\nu^\mu \partial_\mu \partial_\nu A^\nu) - \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu]\} \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \{-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + [\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + A_\nu (\partial_\mu \partial^\nu A^\mu) - A^\mu (\partial_\mu \partial_\nu A^\nu) - \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu]\} \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \{-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + [\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + A_\nu (\partial_\mu \partial^\nu A^\mu)] - [(\partial_\mu \partial_\nu A^\nu) A^\mu + \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu]\}
\end{aligned}$$

Reconhecendo nos termos entre colchetes, a regra da cadeia,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \frac{1}{2\mu_0} \{-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial_\mu [A_\nu \partial^\nu A^\mu] - \partial_\mu [(\partial_\nu A^\nu) A^\mu]\} \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \{-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial_\mu [A_\nu (\partial^\nu A^\mu) - (\partial_\nu A^\nu) A^\mu]\} \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \{-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial_\mu [A_\nu (\partial^\nu A^\mu) - (\partial_\nu A^\nu) g^{\mu\nu} A_\nu]\} \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \{-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial_\mu [A_\nu (\partial^\nu A^\mu) - (\partial^\mu A^\nu) A_\nu]\} \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \{-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial_\mu [A_\nu (\partial^\nu A^\mu) - (\delta_\nu^\mu \partial^\nu A^\nu) A_\nu]\} \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \{-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial_\mu [A_\nu (\partial^\nu A^\mu) - (\partial^\nu A^\mu) A_\nu]\} \tag{B.199}
\end{aligned}$$

Como o termo entre colchetes da Equação (B.199) se anula, segue que

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2\mu_0} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \quad (\text{B.200})$$

Portanto, o momento canonicamente conjugado pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \pi^\mu &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_0 A_\mu)} \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial (\partial_0 A_\mu)} \left[-\frac{1}{2\mu_0} \partial_0 A_\mu \partial^0 A^\mu \right] \\ &= -\frac{1}{c} \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial (\partial_0 A_\mu)}{\partial (\partial_0 A_\mu)} \partial^0 A^\mu - \frac{1}{c} \frac{1}{2\mu_0} \partial_0 A_\mu \frac{\partial (\partial^0 A^\mu)}{\partial (\partial_0 A_\mu)} \\ &= -\frac{1}{c} \frac{1}{2\mu_0} \partial^0 A^\mu - \frac{1}{c} \frac{1}{2\mu_0} \partial^0 A^\mu \\ &= -\frac{1}{c} \frac{1}{\mu_0} \partial^0 A^\mu \end{aligned} \quad (\text{B.201})$$

Note que a Equação (B.201) é idêntica a Equação (B.141). Sendo assim, como no calibre de Lorentz, $\hat{\pi}$ possui uma relação com \hat{A} idêntica a relação estabelecida entre eles no calibre de Coulomb. Segue deste resultado, que as relações de comutação entre $\hat{\pi}$ e \hat{A} no calibre de Lorentz são

$$\left[\hat{A}^\mu(\vec{x}, t), \hat{\pi}^\nu(\vec{y}, t) \right] = i\hbar g^{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{B.202})$$

$$\left[\hat{A}^\mu(\vec{x}, t), \hat{A}^\nu(\vec{y}, t) \right] = 0 \quad (\text{B.203})$$

$$\left[\hat{\pi}^\mu(\vec{x}, t), \hat{\pi}^\nu(\vec{y}, t) \right] = 0 \quad (\text{B.204})$$

Agora, calculando a relação de comutação entre $\partial_\mu \hat{A}^\mu$ e \hat{A}^ν

$$\begin{aligned} \left[\partial_\mu \hat{A}^\mu(\vec{x}, t), \hat{A}^\nu(\vec{y}, t) \right] &= \left[\partial_0 \hat{A}^0(\vec{x}, t) + \partial_i \hat{A}^i(\vec{x}, t), \hat{A}^\nu(\vec{y}, t) \right] \\ &= \left[\partial_0 \hat{A}^0(\vec{x}, t), \hat{A}^\nu(\vec{y}, t) \right] + \left[\partial_i \hat{A}^i(\vec{x}, t), \hat{A}^\nu(\vec{y}, t) \right] \\ &= -\mu_0 \left[\pi^0(\vec{x}, t), \hat{A}^\nu(\vec{y}, t) \right] + \partial_i \left[\hat{A}^i(\vec{x}, t), \hat{A}^\nu(\vec{y}, t) \right] \\ &= -i\mu_0 \hbar g^{0\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (\text{B.205})$$

O resultado obtido na Equação (B.205) implica em

$$\partial_\mu \hat{A}^\mu \neq 0 \quad (\text{B.206})$$

A Equação (B.206) expressa uma contradição com a Equação (B.181), impossibilitando a quantização canônica no calibre de Lorentz. Este resultado é discutido na Seção B.4.3. Por hora, continuando com o processo de quantização do campo eletromagnético no calibre de Lorentz, reescreve-se a Equação (B.103) para o campo A ,

$$\mathcal{H} = c \pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L} \quad (\text{B.207})$$

Substituindo as Equações (B.200) e (B.201),

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -c^2 \mu_0 \pi^\mu \pi_\mu + \frac{1}{2\mu_0} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \\ &= -c^2 \mu_0 \pi^\mu \pi_\mu + \frac{1}{2\mu_0} \partial_0 A_\nu \partial^0 A^\nu + \frac{1}{2\mu_0} \partial_i A_\nu \partial^i A^\nu \\ &= -c^2 \mu_0 \pi^\mu \pi_\mu + \frac{1}{2} c^2 \mu_0 \pi_\mu \pi^\mu + \frac{1}{2\mu_0} \partial_i A_\nu \partial^i A^\nu \\ &= -\frac{1}{2} c^2 \mu_0 \pi^\mu \pi_\mu + \frac{1}{2\mu_0} \partial_i A_\nu \partial^i A^\nu \end{aligned} \quad (\text{B.208})$$

Portanto,

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int \left(-c^2 \mu_0 \pi^\mu \pi_\mu + \frac{1}{\mu_0} \partial_i A_\nu \partial^i A^\nu \right) dx^3 \quad (\text{B.209})$$

Analogamente a Seção B.4.1, se faz

$$\hat{A}^\mu(\vec{x}, t) = \int dk^3 \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon^\mu(k, \lambda) \left\{ \hat{a}_{k\lambda} u_k(\vec{x}, t) + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger u_k^*(\vec{x}, t) \right\} \quad (\text{B.210})$$

Substituindo a Equação (B.210) na Equação (B.201), se obtém

$$\begin{aligned} \hat{\pi}^\mu(\vec{x}, t) &= -\frac{1}{\mu_0} \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int dk^3 \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon^\mu(k, \lambda) \left\{ \hat{a}_{k\lambda} u_k(\vec{x}, t) + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger u_k^*(\vec{x}, t) \right\} \\ &= \frac{1}{\mu_0 c^2} i \int dk^3 \sum_{\lambda=0}^3 \omega_k \epsilon^\mu(k, \lambda) \left\{ \hat{a}_{k\lambda} u_k(\vec{x}, t) - \hat{a}_{k\lambda}^\dagger u_k^*(\vec{x}, t) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.211})$$

Substituindo as Equações (B.210) e (B.211) na Equação (B.209),

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{1}{2} \int \left(-c^2 \mu_0 \pi^\mu \pi_\mu + \frac{1}{\mu_0} \partial_i A_\nu \partial^i A^\nu \right) dx^3 \\ &= \frac{1}{2} \int dx^3 \sum_{\lambda, \lambda'=0}^3 \left\{ -c^2 \mu_0 \left[\frac{i}{\mu_0 c^2} \int dk^3 \omega_k \epsilon^\mu(k, \lambda) \left(\hat{a}_{k\lambda} u_k - \hat{a}_{k\lambda}^\dagger u_k^* \right) \right] \left[\frac{i}{\mu_0 c^2} \int dk'^3 \omega_{k'} \epsilon_\mu(k, \lambda') \left(\hat{a}_{k\lambda'} u_{k'} - \hat{a}_{k\lambda'}^\dagger u_{k'}^* \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \hat{a}_{k\lambda'}^\dagger u_{k'}^* \right) \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[\partial_i \int dk^3 \epsilon_\mu(k, \lambda) \left(\hat{a}_{k\lambda} u_k + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger u_k^* \right) \right] \left[\partial^i \int dk'^3 \epsilon^\mu(k, \lambda') \left(\hat{a}_{k\lambda'} u_{k'} + \hat{a}_{k\lambda'}^\dagger u_{k'}^* \right) \right] \right\}\end{aligned}$$

Derivando,

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{1}{2} \int dx^3 \sum_{\lambda, \lambda'=0}^3 \left\{ -\varepsilon_0 \left[\int dk^3 \omega_k \epsilon^\mu(k, \lambda) \left(\hat{a}_{k\lambda} u_k - \hat{a}_{k\lambda}^\dagger u_k^* \right) \right] \left[\int dk'^3 \omega_{k'} \epsilon_\mu(k, \lambda') \left(\hat{a}_{k\lambda'} u_{k'} - \hat{a}_{k\lambda'}^\dagger u_{k'}^* \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \hat{a}_{k\lambda'}^\dagger u_{k'}^* \right) \right] - \frac{1}{\mu_0} \left[\int dk^3 k \epsilon_\mu(k, \lambda) \left(\hat{a}_{k\lambda} u_k - \hat{a}_{k\lambda}^\dagger u_k^* \right) \right] \left[\int dk'^3 k' \epsilon^\mu(k, \lambda') \left(\hat{a}_{k\lambda'} u_{k'} - \hat{a}_{k\lambda'}^\dagger u_{k'}^* \right) \right] \right\}\end{aligned}\quad (\text{B.212})$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\hat{H} &= -\frac{1}{2} \int dx^3 \int dk^3 \int dk'^3 \sum_{\lambda, \lambda'=0}^3 \left\{ \epsilon^\mu(k, \lambda) \cdot \epsilon_\mu(k, \lambda') \left[\varepsilon_0 \omega_k \omega_{k'} \left(\hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda'} u_k u_{k'} - \hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda'}^\dagger u_k u_{k'}^* - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda'} u_k^* u_{k'} + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda'}^\dagger u_k^* u_{k'}^* \right) + \frac{1}{\mu_0} k k' \left(\hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda'} u_k u_{k'} - \hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda'}^\dagger u_k u_{k'}^* - \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda'} u_k^* u_{k'} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda'}^\dagger u_k^* u_{k'}^* \right) \right] \right\}\end{aligned}\quad (\text{B.213})$$

Colocando o termo entre parenteses em evidencia,

$$\begin{aligned}\hat{H} &= -\frac{1}{2} \int dx^3 \int dk^3 \int dk'^3 \sum_{\lambda, \lambda'=0}^3 \left\{ \epsilon^\mu(k, \lambda) \cdot \epsilon_\mu(k, \lambda') \left[\left(\varepsilon_0 \omega_k \omega_{k'} + \frac{1}{\mu_0} k k' \right) \left(\hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda'} u_k u_{k'} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda'}^\dagger u_k u_{k'}^* - \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda'} u_k^* u_{k'} + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda'}^\dagger u_k^* u_{k'}^* \right) \right] \right\}\end{aligned}\quad (\text{B.214})$$

Dada a semelhança entre as Equações (B.170) e (B.214), o resultado da Equação (B.214) também será semelhante a Equação (B.177). Ou seja,

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \int dk^3 \sum_{\lambda, \lambda'=0}^3 \epsilon^\mu(k, \lambda) \cdot \epsilon_\mu(k, \lambda') \left(\hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda}^\dagger + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda} \right) \hbar \omega_k \quad (\text{B.215})$$

Os vetores de polarização formam um sistema ortonormal quadri-dimensional, ou seja,

$$\epsilon^\mu(k, \lambda) \cdot \epsilon_\mu(k, \lambda') = g_{\lambda\lambda'} \quad (\text{B.216})$$

onde λ pode assumir os seguintes valores: $\lambda = 0$ relativo à polarização do tipo tempo, $\lambda = 1, 2$ relativos às polarizações espaciais transversais e $\lambda = 3$ relativo ao estado de polarização longitudinal.

Portanto, como os termos fora da diagonal na Equação (B.8) são nulos, se faz $\lambda = \lambda'$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\frac{1}{2} \int dk^3 \sum_{\lambda=0}^3 g_{\lambda\lambda} \left(\hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda}^\dagger + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda} \right) \hbar\omega_k \\ &= \frac{1}{2} \int dk^3 \sum_{\lambda=0}^3 (-g_{\lambda\lambda}) \left(\hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda}^\dagger + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda} \right) \hbar\omega_k \end{aligned} \quad (\text{B.217})$$

Utilizando a relação de comutação dada pela Equação (B.133),

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2} \int dk^3 \sum_{\lambda=0}^3 (-g_{\lambda\lambda}) \left(1 + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda} + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda} \right) \hbar\omega_k \\ &= \frac{1}{2} \int dk^3 \sum_{\lambda=0}^3 (-g_{\lambda\lambda}) \left(2\hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda} + 1 \right) \hbar\omega_k \\ &= \int dk^3 \sum_{\lambda=0}^3 (-g_{\lambda\lambda}) \left(\hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_k \end{aligned} \quad (\text{B.218})$$

Explicitando os termos,

$$\hat{H} = \int dk^3 \left(-\hat{a}_{k0}^\dagger \hat{a}_{k0} + \hat{a}_{k1}^\dagger \hat{a}_{k1} + \hat{a}_{k2}^\dagger \hat{a}_{k2} + \hat{a}_{k3}^\dagger \hat{a}_{k3} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_k \quad (\text{B.219})$$

Da Equação (A.34) se obtém

$$\hat{a}_{k\lambda} |0\rangle = 0 \quad (\text{B.220})$$

que é normalizado: $\langle 0|0\rangle = 1$. Além disso, da Equação (A.38),

$$|n_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_k!}} \left(\hat{a}_{k\lambda}^\dagger \right)^{n_k} |0\rangle \quad (\text{B.221})$$

Portanto, para criar um fóton a partir do vácuo, se tem

$$|1_k\rangle = \hat{a}_{k\lambda}^\dagger |0\rangle \quad (\text{B.222})$$

que pode ser escrita como

$$|1_k\rangle = \int dk'^3 F_k(k') \hat{a}_{k'\lambda}^\dagger |0\rangle \quad (\text{B.223})$$

sendo $F_k(k')$, chamada de função distribuição de densidade [82], onde é válida a normalização

$$\int dk'^3 |F_k(k')|^2 = 1 \quad (\text{B.224})$$

Sendo assim,

$$\langle 1_k | 1_k \rangle = \int dk''^3 \int dk'^3 F_k(k'') F_k(k') \langle 0 | \hat{a}_{k''\lambda} \hat{a}_{k'\lambda}^\dagger | 0 \rangle \quad (\text{B.225})$$

onde $a(k)$ e $a^\dagger(k)$ satisfaçam as relações de comutação

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{k\lambda}, \hat{a}_{k'\lambda'}^\dagger] &= g_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ [\hat{a}_{k\lambda}, \hat{a}_{k'\lambda'}] &= 0 \\ [\hat{a}_{k\lambda}^\dagger, \hat{a}_{k'\lambda'}^\dagger] &= 0 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle 1_k | 1_k \rangle &= \int dk''^3 \int dk'^3 F_k(k'') F_k(k') \langle 0 | \hat{a}_{k''\lambda} \hat{a}_{k'\lambda}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \int dk''^3 \int dk'^3 F_k(k'') F_k(k') \langle 0 | (\hat{a}_{k''\lambda}^\dagger \hat{a}_{k'\lambda} - g_{\lambda\lambda}) \delta(k'', k') | 0 \rangle \\ &= \int dk''^3 \int dk'^3 F_k(k'') F_k(k') \langle 0 | -g_{\lambda\lambda} \delta(k'', k') | 0 \rangle \\ &= -g_{\lambda\lambda} \int dk'^3 |F_k(k')|^2 \langle 0 | 0 \rangle \\ &= -g_{\lambda\lambda} \end{aligned} \quad (\text{B.226})$$

Note que a norma do estado contendo um fóton escalar ($\lambda = 0$) é negativa, o que impossibilita uma interpretação quântica do problema no calibre de Lorentz, uma vez que pela Mecânica Quântica a norma deveria ser real e positiva [74]. O que leva a uma conclusão de que fótons escalares não são detectados, sendo descartados por argumentos físicos.

B.4.3 O Método de Gupta-Bleuler

Como visto nas Equações (B.206) e (B.226), o calibre de Lorentz traz inconsistências para a teoria. Para resolver essas contradições utiliza-se o Método de Gupta-Bleuler. Pelo método, para um subespaço do espaço de Hilbert $|\phi\rangle$, o valor esperado da Equação (B.206) satisfaz a condição do calibre de Lorentz dada pela Equação (B.181), ou seja,

$$\langle\phi|\partial_\mu\hat{A}^\mu|\phi\rangle=0 \quad (\text{B.227})$$

Escrevendo o operador \hat{A} em duas partes, uma positiva $A^{(+)}$ e outra negativa $A^{(-)}$, relacionados respectivamente aos operadores de aniquilação e criação,

$$\hat{A}^\mu(\vec{x},t)=A^{\mu(+)}(\vec{x},t)+A^{\mu(-)}(\vec{x},t) \quad (\text{B.228})$$

onde $[A^{\mu(+)}]^\dagger=A^{\mu(-)}$. Agora, a seguinte condição, sugerida pela primeira vez por S. Gupta [83] e estendida por K. Bleuler [84], é assumida para a parte aniquilação do calibre de Lorentz:

$$\partial^\mu A_\mu^{(+)}(\vec{x},t)|\phi\rangle=0 \quad (\text{B.229})$$

que resulta na condição correspondente

$$\langle\phi|\partial^\mu A_\mu^{(-)}(\vec{x},t)=0 \quad (\text{B.230})$$

Note que as Equações (B.229) e (B.230) implicam na Equação (B.227), ou seja,

$$\langle\phi|\partial_\mu\hat{A}^\mu|\phi\rangle=\langle\phi|\partial^\mu A_\mu^{(+)}(\vec{x},t)|\phi\rangle+\langle\phi|\partial^\mu A_\mu^{(-)}(\vec{x},t)|\phi\rangle=0 \quad (\text{B.231})$$

Usando a parte positiva de frequência do operador \hat{A} da Equação (B.153), encontra-se a restrição

$$\int dk^3 c \sqrt{\frac{\mu_0 \hbar}{2\omega_k (2\pi)^3}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega_k t} \sum_{\lambda=0}^3 k_\mu \epsilon^\mu(k, \lambda) \hat{a}_{k\lambda} |\phi\rangle = 0$$

$$\int dk^3 c \sqrt{\frac{\mu_0 \hbar}{2\omega_k (2\pi)^3}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega_k t} [k_\mu \epsilon^\mu(k, 0) \hat{a}_{k0} + k_\mu \epsilon^\mu(k, 1) \hat{a}_{k1} + k_\mu \epsilon^\mu(k, 2) \hat{a}_{k2} + k_\mu \epsilon^\mu(k, 3) \hat{a}_{k3}] |\phi\rangle = 0$$

Como consequência da transversalidade dos vetores de polarização, $k_\mu \epsilon^\mu(k, 1) = k_\mu \epsilon^\mu(k, 2) = 0$. Portanto,

$$\int dk^3 c \sqrt{\frac{\mu_0 \hbar}{2\omega_k (2\pi)^3}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_k t} [k_\mu \epsilon^\mu(k, 0) \hat{a}_{k0} - k_\mu \epsilon^\mu(k, 3) \hat{a}_{k3}] |\phi\rangle = 0 \quad (\text{B.232})$$

Daí, se obtém

$$\hat{L}_k |\phi\rangle \equiv (\hat{a}_{k0} - \hat{a}_{k3}) |\phi\rangle = 0 \quad (\text{B.233})$$

e, por consequência

$$\langle\phi| \hat{L}_k^\dagger \equiv \langle\phi| (\hat{a}_{k0}^\dagger - \hat{a}_{k3}^\dagger) = 0 \quad (\text{B.234})$$

Essa condição proporciona uma ligação entre os fótons longitudinais e escalares. Obviamente, as equações (B.233) e (B.234) implicam em valores esperados do número de fótons longitudinais e escalares iguais para cada estado admissível $|\phi\rangle$:

$$\langle\phi| \hat{a}_{k0}^\dagger \hat{a}_{k0} |\phi\rangle = \langle\phi| \hat{a}_{k3}^\dagger \hat{a}_{k3} |\phi\rangle \quad (\text{B.235})$$

O valor esperado da Hamiltoniana, dada pela Equação (B.218),

$$\begin{aligned} \langle\phi| \hat{H} |\phi\rangle &= \int dk^3 \langle\phi| \left(-\hat{a}_{k0}^\dagger \hat{a}_{k0} + \hat{a}_{k1}^\dagger \hat{a}_{k1} + \hat{a}_{k2}^\dagger \hat{a}_{k2} + \hat{a}_{k3}^\dagger \hat{a}_{k3} + \frac{1}{2} \right) |\phi\rangle \hbar k \\ &= \int dk^3 \sum_{\lambda=1}^2 \langle\phi| \left(\hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right) |\phi\rangle \hbar \omega_k \end{aligned} \quad (\text{B.236})$$

Portanto,

$$\hat{H} = \int dk^3 \sum_{\lambda=1}^2 \left(\hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_k \quad (\text{B.237})$$

A Equação (B.237) representa a hamiltoniana do campo eletromagnético. Note que a Equação (B.237) é idêntica a Equação (B.178). Sendo assim, com o método de Gupta-Bleuler é possível notar que, além de eliminar as contradições que surgem da utilização do calibre de Lorentz, os estados de polarização longitudinal e escalar não contribuem para o cálculo da energia.

A energia das flutuações de vácuo é dada por

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 \hbar \omega_k \quad (\text{B.238})$$

Essa solução é idêntica a Equação B.179 e é também chamada de energia do vácuo ou energia de ponto zero. Veja que o resultado obtido aqui, por meio do calibre de Lorentz, é idêntico ao obtido através do calibre de Coulomb.

APÊNDICE C

PUBLICAÇÕES GERADAS A PARTIR DESTA TESE

Doctopic: Condensed matter **ARTICLE IN PRESS** PLA:25034

Physics Letters A ●● (●●●●) ●●●●●●

Contents lists available at [ScienceDirect](#)

 **Physics Letters A** 

www.elsevier.com/locate/pla

Correlation among the effective mass (m^*), λ_{ab} and T_c of superconducting cuprates in a Casimir energy scenario

M.T.D. Orlando, A.N. Rouver, J.R. Rocha, A.S. Cavichini *

Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, Espírito Santo 29075-910, Brazil

ARTICLE INFO

Article history:

Received 2 February 2018
Received in revised form 29 March 2018
Accepted 1 April 2018
Available online xxxx
Communicated by R. Wu

Keywords:

Casimir effect
Superconductivity
Condensate energy

ABSTRACT

The relevance of the Casimir effect, discovered in 1948, has recently been pointed out in studies on materials such as graphene and high-temperature superconducting cuprates. In particular, the relationship between Casimir energy and the energy of a superconducting condensate with anisotropy characterized by high bidimensionality has already been discussed in certain theoretical scenarios. Using this proposal, this work describes the relationship between the effective mass of the charge carriers ($m^* = \alpha m_e$) and the macroscopic parameters characteristic of several families of high- T_c superconducting cuprates (Cu-HTSC) that have copper and oxygen superconducting planes (Cu-O). We have verified that an expression exists that correlates the effective mass, the London penetration length in the plane λ_{ab} , the critical temperature T_c and the distance d between the equivalent superconducting planes of Cu-HTSC. This study revealed that the intersection between the asymptotic behavior of α as a function of T_c and the line describing the optimal value of $\alpha \simeq 2$ ($m^* \simeq 2m_e$) indicates that a nonadiabatic region exists, which implies a carrier-lattice interaction and where the critical temperature can have its highest value in Cu-HTSC.

© 2018 Elsevier B.V. All rights reserved.

Figura C.1 – Artigo publicado relacionado ao tema de estudo desta tese.