UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPIRITO SANTO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDENACIONAL-PROFMAT

MARCELO RODRIGUES SALLES

# UMA PROPOSTA DE PLANO DE AULA EM EDUCAÇÃO FINANCEIRA PARA O ENSINO MÉDIO

**DISSERTAÇÃO**

Vitória, agosto de 2018

MARCELO RODRIGUES SALLES

# UMA PROPOSTTA DE PLANO DE AULA EM EDUCAÇÃO FINANCEIRA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Espirito Santo como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática".

Orientador: Domingos Sávio Valério Silva, Dr.

Vitória, agosto de 2018

# FOLHA DE APROVAÇÃO

*Dedico esse trabalho à minha mãe, minha esposa, meus filhos, minha família e a Deus.*

AGRADECIMENTOS

• A Deus, por me dar saúde, sabedoria e oportunidades em minha vida.

• Ao Professor Dr. Domingos Sávio, por ter aceitado o desafio de me orientar e pela grande contribuição neste trabalho.

• À minha esposa, Marjorye, que sempre acreditou em meu potencial e me apoiou em todos os momentos.

• Aos meus filhos, João Guilherme e Heitor, que sempre foram fonte de inspiração para a superação dos momentos difíceis.

• Aos meus pais, Moysés (em memória) e Zeli, que sempre me ensinaram a ser honesto e acreditar em meu potencial.

• Aos meus colegas de turma e Professores do mestrado, com os quais passei momentos agradáveis e de crescimento intelectual e pessoal.

• Aos professores participantes da banca, pela disponibilidade em aceitar participar da defesa da dissertação.

• A todos que, direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste trabalho.

# RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é contribuir com o ensino da Educação Financeira, se valendo para isso de pesquisa realizada em artigos e outros trabalhos acadêmicos, constituindo material que evidencie como a Educação Financeira tem sido abordada no Brasil. Ao final é proposto um plano de aula, estruturado em resolução de exercícios, abordando os conceitos relativos à Educação Financeira e sua aplicação no cotidiano das pessoas. Para isso foi realizada toda a fundamentação teórica utilizada como base para o desenvolvimento das questões propostas, que procuraram em sua maioria abordar situações reais que podem ser aplicadas de forma simplificada em uma turma de ensino médio.

# Abstract

The main objective of this work is to contribute with the teaching of Financial Education, using research done in articles and other academic works, constituting material that shows how Financial Education has been approached in Brazil. At the end, a lesson plan, structured in the resolution of exercises, is proposed, addressing the concepts related to Financial Education and its application in people's daily lives. For this purpose, all the theoretical basis used for the development of the proposed questions was carried out, which sought to deal with real situations that can be applied in a simplified way in a high school class.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|---|---|
| BACEN | Banco Central do Brasil |
| CONEF | Comitê Nacional de Educação Financeira |
| ENEF | Estratégia Nacional de Educação Financeira |
| OCDE | Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico |
| PROFMAT | Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional |
| UFES | Universidade Federal do Espirito Santo |

# SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho procura contribuir com o ensino da Educação Financeira, se valendo para isso de pesquisa realizada em materiais divulgados na internet, com o objetivo de verificar a inserção do tema proposto, no nível médio de escolas de ensino regular.

Ao final é proposto um plano de aula estruturado em resolução de exercícios que envolvem tomadas de decisão em relação a diversas formas de consumo, abordando os conceitos relativos à Educação Financeira e sua aplicação no cotidiano das pessoas.

## 1.1 EDUCAÇÃO FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO

Diante das poucas iniciativas existentes em relação à aplicação da Educação Financeira nos ensinos fundamental e médio das escolas brasileiras, é proposto neste trabalho um plano de aula, embasado em termos didáticos, capaz de permitir aos alunos que estão concluindo o ensino médio, consciência e autonomia em relação à tomada de decisão frente situações de consumo ou investimento.

## 1.2 DELIMITAÇÃO DE ESCOPO

Embora seja um assunto que pode e deve ser introduzido já nas turmas iniciais de ensino infantil ou fundamental, este trabalho foi desenvolvido com foco em atividades voltadas para turmas do último ano do ensino médio.

A opção por este nível de ensino ocorreu porque geralmente nesta faixa de idade os alunos já possuem maturidade para compreenderem de forma mais clara o tema Educação Financeira, inclusive muitos já são participantes do mercado de trabalho, como empregados ou estagiários remunerados de empresas, possuindo, portanto, fonte de renda e participando ativamente do mercado financeiro e consumidor, por meios de transações bancárias, compra de bens e mercadorias e até mesmo realizando investimentos financeiros.

### 1.2.1 Justificativa

O tema abordado neste trabalho se justifica pela necessidade de embutir nos alunos do ensino médio os conceitos de Educação Financeira, mostrando a relevância do assunto decorrente da mudança de paradigma da atual sociedade brasileira, que passou a ter acesso a recursos que permitiram mais acesso às diversas formas de consumo existentes.

A complexidade na abordagem do tema ocorre principalmente por se tratar de uma alteração nos costumes presentes na sociedade, que até recentemente possuía uma gama muito restrita para utilização dos recursos disponíveis, reduzido basicamente à guarda do dinheiro em Caderneta de Poupança.

A intenção aqui se justifica pela busca de redução da disparidade existente entre os assuntos tradicionalmente abordados no ensino básico brasileiro em relação às mudanças econômicas vivenciadas pela sociedade nas últimas décadas, principalmente quanto à estabilização da moeda e controle da inflação. Desta forma a maior motivação deste trabalho é buscar a adequação dos cidadãos recém-formados à nova realidade que se apresenta.

## 1.3 OBJETIVOS

Este trabalho busca apresentar as iniciativas existentes quanto à aplicação da Educação Financeira no Brasil e propor um plano de aula baseado em uma firme base didática que permita ao aluno em vias de se formar ter conhecimento da influência da Educação Financeira na realização de seus planos, aspirando com isso formar cidadãos com capacidade e autonomia na tomada de decisões em relação à gestão dos seus recursos financeiros.

### 1.3.1 Objetivo Geral

Propor um plano de aula baseado em exercícios práticos que possa ser aplicado em turmas de ensino médio.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

1. Descrever a evolução da Educação Financeira no Brasil;
2. Descrever os conceitos de Educação Financeira;
3. Apresentar conceitos de matemática Financeira utilizados;
4. Apresentar como a Educação Financeira está inserida no cotidiano das pessoas, e;
5. Propor um Plano de Aula consistente abordando a aplicação prática da Educação Financeira em sala de aula;

## 1.4 METODOLOGIA

Nesta seção é descrita a metodologia utilizada na pesquisa e apresentada síntese dos procedimentos metodológicos que serviram para o desenvolvimento da dissertação.

### 1.4.1 Metodologia da Pesquisa

O projeto de pesquisa proposto primeiramente terá seu foco na obtenção dos tópicos-chave no estudo da educação financeira e na didática de ensino médio. Segundo Vergara (1997), os tipos de pesquisa devem ser subdivididos quanto aos fins, podendo ser: descritiva, exploratória, explicativa, aplicada, metodológica e intervencionista - e quanto aos meios, podendo ser: pesquisa de campo, de laboratório, documental, bibliográfica, experimental, participante, estudo de caso, pesquisa-ação ou ex post facto.

### 1.4.2 Procedimentos Metodológicos

Este trabalho foi realizado inicialmente por meio de pesquisa exploratória, pois exigiu um aprofundamento a respeito de materiais científicos relacionados ao assunto. Os métodos utilizados na etapa descritiva foram pesquisa de campo e documental em jornais, revistas, livros, internet, etc., visando obter material que pudesse ser utilizado no desenvolvimento das atividades em sala de aula. Para Lakatos & Marconi (1985), uma pesquisa de campo é utilizada com o objetivo de obter informações sobre determinado problema, para o qual se procura uma resposta, ou então para descobrir novos fenômenos ou a relação entre eles.

## 1.5 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

O trabalho está organizado em 5 capítulos correlacionados. O Capítulo 1, Introdução, apresentou por meio de sua contextualização o tema proposto neste trabalho. Da mesma forma foram estabelecidos os resultados esperados por meio da definição de seus objetivos e apresentadas as limitações do trabalho permitindo uma visão clara do escopo proposto.

O Capítulo 2 apresenta o histórico da Educação Financeira no Brasil

O Capítulo 3 apresenta os conceitos de matemática que servem de ferramentas para o desenvolvimento da Educação Financeira em sala de aula.

O Capítulo 4 apresenta uma relação de atividades, entre exercícios e problemas com dados retirados do cotidiano das pessoas para serem aplicados em sala de aula.

No Capítulo 5, são tecidas as conclusões do trabalho, relacionando os objetivos identificados inicialmente com os resultados alcançados.

# 2 EVOLUÇÃO DA EDUCAÇÂO FINANCEIRA

Neste capítulo é apresentado o histórico da Educação Financeira no Brasil, buscando demonstrar a evolução do tema ao longo dos anos e a importância para a sociedade nos dias atuais, levando em consideração as iniciativas realizadas para difundir o tema que encontra a maior expressão na Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF.

## 2.1 EDUCAÇÃO FINANCEIRA NO BRASIL

O conceito básico de Educação Financeira está relacionado com a capacidade das pessoas em realizar a gestão de seus recursos financeiros, conforme verificado a seguir.

Segundo a Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) a educação financeira é definida da seguinte forma:

> Processo mediante o qual os indivíduos e as sociedades melhoram a sua compreensão em relação aos conceitos e produtos financeiros, de maneira que, com informação, formação e orientação, possam desenvolver os valores e as competências necessários para se tornarem mais conscientes das oportunidades e riscos neles envolvidos e, então, poderem fazer escolhas bem informadas, saber onde procurar ajuda e adotar outras ações que melhorem o seu bem-estar. Assim, podem contribuir de modo mais consistente para a formação de indivíduos e sociedades responsáveis, comprometidos com o futuro.

A Educação Financeira surgiu juntamente com o sistema capitalista, na medida em que as pessoas precisaram entender como lidar com o dinheiro e os diversos reflexos trazidos para a sociedade, principalmente pela capacidade que uma adequada gestão de recursos financeiros pode proporcionar. Com o maior acesso ao capital, surgiram simultaneamente os conceitos de poupança, consumo, crédito, investimento e diversos outros temas, ligados basicamente à gestão de recursos financeiros.

Ao longo da história foram incorporados importantes elementos ao conceito de Educação Financeira como sua relação com o meio ambiente e a relevância do assunto para o desenvolvimento de países por meio da conscientização dos cidadãos em relação à boa gestão dos recursos disponíveis.

Verifica-se a existência de iniciativas com o objetivo de difundir a Educação Financeira no Brasil, geralmente realizadas por Instituições Financeiras, que costumam disponibilizar programas de planejamento financeiro para o público em geral e para seus empregados.

Seguindo essa linha, o Banco Central do Brasil publicou em 2013 o Caderno de Educação Financeira – Gestão de Finanças Pessoais, onde são apresentados conhecimentos básicos de Educação Financeira. Neste material a Educação Financeira é conceituada da seguinte forma:

> O aprendizado e a aplicação de conhecimentos práticos de educação financeira podem contribuir para melhorar a gestão de nossas finanças pessoais, tornando nossas vidas mais tranquilas e equilibradas sob o ponto de vista financeiro.

Portanto, é abordada uma definição prática e objetiva de Educação Financeira com um pensamento voltado eminentemente para a perspectiva do resultado financeiro do tema.

Também é mencionada pelo Banco Central do Brasil (BACEN) a defasagem de conhecimento das pessoas em relação ao tema e a importância da Educação Financeira visando acompanhar as mudanças ocorridas ao longo do tempo:

> Estamos sujeitos a um mundo financeiro muito mais complexo que o das gerações anteriores. No entanto, o nível de educação financeira da população não acompanhou esse aumento de complexidade. A ausência de educação financeira, aliada à facilidade de acesso ao crédito, tem levado muitas pessoas ao endividamento excessivo, privando-as de parte de sua renda em função do pagamento de prestações mensais que reduzem suas capacidades de consumir produtos que lhes trariam satisfação.

O artigo Paradigmas da Educação Financeira no Brasil, de 2007, utiliza o seguinte conceito:

> Processo de transmissão de conhecimento que permite o desenvolvimento de habilidades nos indivíduos, para que eles possam tomar decisões fundamentadas e seguras, melhorando o gerenciamento de suas finanças pessoais. Quando aprimoram tais capacidades, os indivíduos tornam-se mais integrados à sociedade e mais atuantes no âmbito financeiro, ampliando o seu bem-estar.

Identifica-se nos conceitos apresentados a importância do tema no que diz respeito ao resultado positivo de se ter uma população consciente em relação ao correto gerenciamento financeiro pessoal.

## 2.2 EDUCAÇÃO FINANCEIRA NAS ESCOLAS

Como reflexo da sociedade brasileira em geral, ainda não se verifica nas escolas a cultura de aplicação da Educação Financeira, ficando mais restrito ao ambiente de escolas particulares, que realizam programas específicos com o objetivo de incutir nos alunos a importância de saber lidar com o dinheiro de forma responsável, desde os primeiros anos escolares.

Ademais, não foi verificado no mercado editorial publicações que tratam didaticamente do tema, ficando limitado a livros de autoajuda como: *"Pai rico, Pai Pobre"; "Casais inteligentes enriquecem juntos"*, *"O homem mais rico da Babilônia"*, etc. Entretanto, apesar de conterem valiosas dicas e apresentarem formas de se realizar planejamento financeiro, estas edições não possuem caráter pedagógico adequado para serem aplicadas em sala de aula.

Com o objetivo de desenvolver a Educação Financeira no Brasil foi criada pelo Governo Federal, por meio do Decreto Federal 7.397/2010, a Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF, que consiste de uma associação de entidades governamentais, privadas e de associações civis que juntas formam o Comitê Nacional de Educação Financeira – CONEF.

Para assessorar o CONEF e apreciar, revisar e validar conteúdos e metodologias pedagógicas, relacionados à educação financeira, foi criado o Grupo de Apoio Pedagógico – GAP, que consiste de um colegiado presidido permanentemente pelo Ministério da Educação que desempenha funções de caráter deliberativo e consultivo ao avaliar e validar todo o material didático utilizado e disseminado no Programa Educação Financeira nas Escolas. Esses programas são operacionalizados pela Associação de Educação Financeira do Brasil – AEF Brasil, sediada em São Paulo e instituída por meio de convênio firmado junto ao CONEF.

Conforme apresentado no site da ENEF [14], as diretrizes que norteiam suas atividades são: atuar com informação, orientação e formação; gratuidade das ações e prevalência do interesse público e; gestão centralizada e ações descentralizadas.

As Instituições que compõem o ENEF são:

- Banco Central do Brasil;
- Comissão de Valores Mobiliários:
- Superintendência Nacional de Previdência Complementar;
- Superintendência de Seguros Privados – SUSEP;
- Ministério da Justiça;
- Ministério da Previdência Social;

- Ministério da Educação;
- Ministério da Fazenda;
- ANBIMA;
- B3 e;
- Federação Brasileira dos Bancos – FEBRABAN.

O projeto foi concebido em consonância com o conceito apresentado pela OCDE e é composto por programas setoriais em que cada associação desenvolve seus trabalhos de acordo com suas perspectivas e objetivos e, por programas realizados conjuntamente pelos participantes com o objetivo de difundir o tema da Educação Financeira.

Dentre os programas transversais desenvolvidos está o Programa Educação Financeira nas Escolas, desenvolvido no âmbito do Ministério da Educação, em que foram produzidos materiais didáticos, de livre acesso à população, voltados para o ensino fundamental e médio.

Analisando os volumes disponíveis para o ensino médio, formado por três livros de professor, três de aluno e três cadernos de questões se observa que a abordagem do tema é realizada por meio da apresentação didática de diversas situações do dia a dia dos alunos, entretanto o material é muito extenso sendo inviável sua aplicação completa na grade curricular atual. Portanto, pode ser utilizado adequadamente por meio da implementação pelas escolas de Programas específicos de Educação Financeira.

Conforme divulgação realizada pelo MEC, entre 2011 e 2012, cerca de 900 escolas públicas de ensino médio das redes estaduais do Ceará, Minas Gerais, Rio de Janeiro, São Paulo, Tocantins e do Distrito Federal participaram de projeto-piloto voltado para avaliar o impacto do uso do material didático produzido. Em 2015, escolas públicas do ensino fundamental das redes municipais de ensino de Joinville (SC) e de Manaus (AM) deram sequência à experiência.

Ainda conforme informações apresentadas pelo MEC, antes de trabalhar a educação financeira em sala de aula, os professores que aderiram ao programa e que participaram dos projetos-piloto foram capacitados pela AEF-Brasil.

Com o advento das sucessivas crises econômicas mundiais, que chamam cada vez mais atenção para a importância do tema e considerando o conjunto de conhecimentos essenciais para o fortalecimento da cidadania com o objetivo de ajudar as pessoas a tomar decisões financeiras autônomas e conscientes, foi incluída em 2017, pela Base Nacional Curricular Comum (BNCC), a Educação Financeira entre os temas transversais que deverão constar nos currículos de todo o Brasil.

Torna-se adequada a realização de estudo com a finalidade de buscar a melhor forma para a introdução do assunto na grade curricular básica, visto que se trata de um tema inerente a vários campos de conhecimento, não devendo ficar restrito apenas à disciplina de matemática.

# 3 MATEMÁTICA FINANCEIRA

Este capítulo tem o objetivo de demonstrar os principais conceitos de matemática, que podem ser utilizados como ferramentas para o desenvolvimento da Educação Financeira. Importante que os alunos tenham conhecimento dos conceitos básicos de matemática financeira, economia e finanças, como cálculo de taxas, definição de juros simples e compostos, inflação, consumo, poupança, etc.

Com esta finalidade, serão apresentados os conceitos matemáticos de sequências numéricas, definição de limite, progressão geométrica e séries finitas e infinitas, que fornecem a base teórica necessária para o entendimento da matemática financeira.

## 3.1 SEQUÊNCIA DE NÚMEROS REAIS

Uma sequência finita de números reais é uma função $f:\{1,2,\ldots,n\} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural $k$, $1 \leq k \leq n$, um número real $a_k$.

Uma sequência infinita de número reais é uma função $f:\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural $n$, um número real $a_n$. Com esta notação,

$$a_1 = f(1),\ a_2 = f(2),\ a_3 = f(3), \ldots, a_n = f(n), \ldots$$

e dizemos que $a_1$ é o primeiro termo, $a_2$ é o segundo termo e, em geral, $a_n$ é o $n$-ésimo termo da sequência.

Para uma sequência $f:\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ usaremos a notação $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ ou simplesmente $(a_n)_{n\geq 1}$. Analogamente, denotaremos $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ $ou$ $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ para uma sequência finita $f:\{1,2,\ldots,n\} \to \mathbb{R}$.

A seguir serão apresentados exemplos de sequências:

a) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ *(Infinita)*

b) $(-1, 1, -1, 1, \ldots (-1)^n, \ldots) = ((-1)^n)_{n\geq 1}$ *(Infinita)*

c) $(2, 4, 8, 16, 32, 64) = (2^n)_{1\leq n\leq 6}$ *(Finita)*

## 3.2 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA - PG

Progressão geométrica, ou simplesmente PG, é uma sequência numérica ordenada, que pode ser finita ou infinita, sendo que a partir do segundo elemento, os termos são calculados pelo produto do termo anterior por uma constante q denominada razão. Consequentemente, para calcular a razão de uma PG basta realizar a divisão de um termo qualquer pelo seu antecessor.

Assim, considerando uma PG $(a_{1,}a_{2,}a_{3,}\dots,a_{n-1,}\mathrm{a_n},\dots)$, para saber a razão, basta realizar a divisão de um termo pelo antecessor, como segue:

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\cdots,$$

onde $q$ é razão da PG.

Exemplo: A sequência $(a_n)=(1,2,4,8,16,32,64,128,256)$ é uma PG finita de razão $q=2$, onde:

$$a_1=1,a_2=2,a_3=4,\dots,a_9=256$$

### 3.2.1 Termo Geral de uma PG

Conhecendo-se o primeiro termo e a razão de uma PG é possível conhecer qualquer outro termo por meio da expressão do termo geral. Para deduzir esta relação basta utilizar a definição de PG, como segue:

$$a_2=a_1.q$$

$$a_3=a_2.q=a_1.q.q=a_1q^2$$

$$a_4=a_3.q=(a_1.q^2).q=a_1q^3$$

$$\vdots$$

$$a_n=a_1.q^{n-1}\ ,$$

onde $a_1$ é o primeiro termo, q é a razão e $a_n$ é o n-ésimo termo da PG.

Exemplo: $\left(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[6]{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)$, determine:

a) A razão da PG.
b) O quinto termo da PG.
c) O número de termos da PG.

**Resolução:**

a) Para o cálculo da razão, como se trata de uma PG, basta realizar a divisão do termo $a_2$ pelo termo $a_1$, portanto:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$$

b) Utilizando a expressão do termo geral da PG, temos:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

$$a_5 = \sqrt{2} . (\frac{1}{\sqrt[6]{2}})^4$$

$$a_5 = 2^{1/2} . 2^{-4/6}$$

$$a_5 = 2^{-1/6} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$$

c) Utilizando novamente a expressão do termo geral, temos:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{2} . (\frac{1}{\sqrt[6]{2}})^{n-1}$$

$$\frac{1}{2} = 2^{\frac{1}{2}} . \left(2^{-\frac{1}{6}}\right)^{n-1}$$

$$(2)^{-1} = (2)^{\frac{1}{2}} . (2)^{-\frac{n}{6}} . (2)^{\frac{1}{6}}$$

$$(2)^{-1} = (2)^{\frac{4}{6} - \frac{n}{6}}$$

$$-1 = \frac{4}{6} - \frac{n}{6}$$

$$n = 10$$

Portanto, trata-se de uma PG finita de 10 termos.

### 3.2.2 Soma dos n primeiros termos de uma PG

Outra expressão importante utilizada em matemática financeira é a que determina a soma dos n primeiros termos de uma PG. Assim, considerando uma PG $(a_{1,} a_{2,} a_{3,} \ldots, a_{n-1,} a_n, \ldots)$ e denotando por $S_n$ a soma dos seus n primeiros termos, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Multiplicando-se ambos os lados da equação anterior pela razão q da PG:

$$S_n . q = a_{1.} q + a_2 . q + \cdots + a_{n-1} . q + a_n . q$$

$$S_n . q = a_2 + a_3 \ldots + a_n + a_n . q$$

Como,

$$a_2 + a_3 \ldots + a_n = S_n - a_1$$

Temos,

$$S_n . q = S_n - a_1 + a_n . q$$

$$(q - 1) . S_n = a_n . q - a_1$$

Portanto,

$$S_n = \frac{a_n . q - a_1}{q - 1}, \qquad se\ q \neq 1.$$

Podemos reescrever a expressão acima substituindo o n-ésimo termo pela expressão do termo geral, como segue:

$$S_n = \frac{a_1 . q^{n-1} q - a_1}{q - 1}$$

$$S_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}, \qquad se\ \ q \neq 1\ e\ n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo: Determine a soma dos termos da PG (1, 2, 4, 8, 16).

**Resolução:** Para o cálculo da soma $S_n$ dos termos da PG, em que $a_1 = 1, q = 2\ e\ n = 5, temos$:

$$S_n = a_1.\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_n = 1.\frac{2^5 - 1}{2 - 1}$$

$$S_n = 31,$$

portanto, a soma dos cinco termos da PG é 31.

### 3.2.3 A Soma dos termos de uma PG infinita

Nesta seção estudaremos a soma dos termos de uma PG infinita, no caso específico em que o valor absoluto da razão q da progressão geométrica é menor do que 1 (um), ou seja $|q| < 1$.

Conforme verificado na seção 3.2.2, a soma dos $n$ primeiros termos de uma PG é dada por:

$$S_n = a_1.\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Usaremos como referência o artigo: *"A Soma dos Termos de uma PG Infinita"*, dos Professores Ulisses Lima Parente e Antônio Caminha M. Neto [8].

A proposição apresentada nos estudos de uma PG infinita é dada a seguir.

**Proposição**: $Se\ (a_{1,}\ a_{2,} a_{3,}\ ...)$ é $uma\ PG\ de\ razão\ |q| < 1, então$:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \frac{a_1}{1 - q}$$

Para se provar a proposição é preciso mostrar que a diferença entre a Soma dos termos de uma PG finita e a expressão apresentada se aproxima de zero à medida que n aumenta.

Se $q = 0$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = a_1 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = a_1 = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Se $0 < |q| < 1$, utilizamos a expressão da soma da PG finita, apresentada na seção 3.2.2, para obtermos,

$$\left|S_n - \frac{a_1}{1-q}\right| = \left|a_1.\frac{1-q^n}{1-q} - \frac{a_1}{1-q}\right| = \left|\frac{a_1 q^n}{1-q}\right| = \left|\frac{a_1}{1-q}\right|.|q|^n$$

Como, $0 < |q| < 1$, então $\frac{1}{|q|} > 1$. Assim, existe c$>$ 0 tal que $\frac{1}{|q|} = 1 + c$. Então, para n>1, temos:

$$\frac{1}{|q|^n} = (1+c)^n$$

Do binômio de Newton, temos:

$$(1+c)^n = 1 + nc + \frac{n(n-1)c^2}{2} + \cdots + c^n > nc,$$

Daí,

$$\frac{1}{|q|^n} > nc \quad ou \quad |q|^n < \frac{1}{nc}.$$

Logo, da última desigualdade e da equação (1), obtemos:

$$\left|S_n - \frac{a_1}{1-q}\right| = \left|\frac{a_1}{1-q}\right|.|q|^n < \left|\frac{a_1}{1-q}\right|.\frac{1}{nc}\,.$$

Escolhendo um número fixo $k$ de modo que o valor constante $\left|\frac{a_1}{1-q}\right|.\frac{1}{c}$ seja menor do que uma potência do tipo $10^k$, obtemos:

$$\left|S_n - \frac{a_1}{1-q}\right| < 10^k.\frac{1}{n}$$

Dado qualquer número $m \in \mathbb{N}$, podemos tornar a diferença entre os valores $S_n$ e $\frac{a_1}{1-q}$ tão pequena quanto quisermos, bastando para isso escolhermos $n > 10^{k+m}$. Pois, deste modo teremos,

$$10^k.\frac{1}{n} < \frac{1}{10^m},$$

que acarreta,

$$\left|S_n - \frac{a_1}{1-q}\right| < 10^k.\frac{1}{n} < \frac{1}{10^m}$$

Portanto, é possível tornar as somas $S_n$ de uma PG tão próximas de $\frac{a_1}{1-q}$ quanto quisermos, tomando n suficientemente grande, como queríamos demonstrar.

Para ilustrar a aplicação da expressão, vamos calcular a soma da PG $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \dots)$.

Com os dados apresentados, verificamos que a razão da PG é dada por:

$$q = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

Portanto,

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S = 2$$

## 3.3 JUROS

Para a atualização do valor do dinheiro ao longo do tempo é utilizado o conceito de juros, conforme apresentado no livro A matemática do Ensino Médio, volume 2 [6]:

> Alguém que dispõem de um capital C (chamado de principal), empresta-o a outrem por um certo período de tempo, e após esse período, recebe o seu capital C de volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de juros. A soma C+J é chamada de montante e será representada por M. A razão $i = \frac{J}{C}$ que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação e chamada de taxa de juros.

**A taxa de juros** é um índice que determina a variação percentual de um valor num determinado período de tempo. Por exemplo, um valor que passou de 2.000,00 para 2.200,00 em um mês, significa dizer que a taxa de crescimento foi de 10% ao mês. Este resultado é obtido pela divisão da variação de 200,00 (2.200,00 – 2.000,00) pelo valor inicial e posterior multiplicação do resultado por 100, como segue:

$$\left(\frac{200}{2000}\right)x100 = 10\%$$

Para a realização dos cálculos é preciso verificar que a cada período de tempo analisado, o dinheiro valoriza ou desvaloriza, portanto, conhecendo-se a taxa de variação do capital é possível conhecer o valor do dinheiro a cada período, somando o valor inicial aos juros computados. Essa soma é denominada de montante, assim:

$$M = C + J,$$

onde:

$M$ = Montante;

$C$ = Capital ou capital inicial;

$J$ = Juros do período.

Como os juros no período são calculados pelo produto do capital inicial pela taxa de juros $i$, tem-se:

$$J = C.i$$

Assim, a expressão do montante pode ser reescrita da seguinte forma.

$$M = C + J$$

$$M = C + C.i$$

$$M = C.(1 + i)$$

Portanto, para se calcular o valor do dinheiro no início do período deve-se dividir o montante $M$ por $(1 + i)$ e para calcular o montante ao final do período deve-se multiplicar o capital C pelo mesmo fator $(1 + i)$.

Em matemática financeira existem vários tipos de taxas, como taxa nominal, taxa real, taxa equivalente, taxa proporcional, etc. Entretanto para a aplicação da Educação Financeira em nível médio de forma objetiva é recomendável que sejam trabalhados os conceitos de taxas nominal, taxa equivalente e taxa real, juntamente com o conceito de inflação.

### 3.3.1 Taxa Nominal de Juros

A taxa nominal de juros é usada para demonstrar a variação dos valores no tempo sem considerar os efeitos da inflação, geralmente utilizada para calcular os aumentos percentuais de empréstimos ou de investimentos.

Para tornar mais concreto aos alunos é interessante ilustrar o cálculo da taxa nominal de juros por meio de um exemplo simples como um empréstimo no valor de R$ 5 000,00 que é quitado ao final de seis meses por R$ 6.000,00, como segue.

$$Taxa\ Nominal = \frac{1.000{,}00}{5.000{,}00} = 0{,}20 = 20\%$$

Este exemplo mostra que a taxa nominal é dada pela divisão da diferença paga, pelo valor inicial do empréstimo, sendo portanto aplicação direta da definição de taxa de juros.

### 3.3.2 Inflação

Com o objetivo de abordar o assunto de forma prática em uma turma de ensino médio, não há necessidade de aprofundar muito na definição formal de inflação de preços. Uma forma interessante de introdução do assunto é por meio da apresentação de situações cotidianas que evidenciam a variação de preços dos serviços e mercadorias. Para ilustrar podem ser apresentados recortes de jornais e revistas contendo a divulgação de taxas de inflação oficial em certos períodos de tempo.

O objetivo final da discussão em sala de aula é fazer com que os alunos tenham conhecimento dos efeitos da inflação no dia a dia das pessoas em decorrência da variação de preços ao longo do tempo, que reflete diretamente na diminuição do poder de compra.

### 3.3.3 Taxa Real de Juros

A taxa real de juros é dada pela taxa nominal desconsiderando o efeito da inflação. Ou seja, é quanto um investimento rende acima da inflação num determinado período. Deste modo, se um capital $C$ é emprestado por uma taxa nominal $i_n$, em um certo período de tempo com uma taxa de inflação $i$, então a taxa real $i_r$ é dada por,

$$(1 + i_r)\, C = \frac{(1 + i_n)}{(1 + i)} C$$

Assim, deve ser salientado que em um cenário de inflação ela é menor do que a taxa nominal e pode ser calculada pela seguinte expressão matemática:

$$(1 + i_n) = (1 + i_r).(1 + i)$$

*onde:*

$i_n = taxa\ nominal$

$i_r = taxa\ real\ de\ juros$

$i = taxa\ de\ inflação\ do\ período$

Nota-se que, se a taxa de inflação for nula (igual a zero) as taxas de juros nominal e real serão coincidentes, portando em um cenário econômico hipotético de inflação zero o preço dos produtos não sofrem variação, ao passo que em uma situação de inflação negativa, denominada de deflação, a taxa nominal é menor do que a taxa real, ocasionando uma redução de preços.

### 3.3.4 Taxa Equivalente de Juros

É adequado, neste momento, destacar o conceito de capitalização que se refere ao acréscimo dos juros produzidos num período ao valor aplicado, que no próximo período também produzirão juros, formando o chamado "juros sobre juros"

Taxas Equivalentes são taxas que quando aplicadas ao mesmo capital, num mesmo intervalo de tempo, produzem montantes iguais. Portanto, considerando uma taxa $\boldsymbol{i_t}$ capitalizada a cada tempo t e uma taxa $\boldsymbol{i_q}$ capitalizada a cada tempo q, temos que num período total n, as taxas consideradas atualizam um capital C, $\boldsymbol{n/t}$ **e** $\boldsymbol{n/q}$ vezes, respectivamente, produzindo um mesmo montante M dado por:

$$M = C.(1 + i_{t)}{}^{n/t} = C.(1 + i_q)^{n/q}$$

Que implica,

$$(1+i_q)^{n/q} = (1+i_{t)}{}^{n/t}$$

$$(1+i_q) = ((1+i_t)^{n/t})^{q/n}$$

$$i_q = (1+i_{t)}{}^{\frac{q}{t}} - 1$$

Onde:

$\mathbf{i_q = taxa\ equivalente\ pretendida}$
$\mathbf{i_t = taxa\ do\ período\ dado}$
q = período $da\ taxa\ pretendida$

t = período $da\ taxa\ dada$

**Exemplo:** Determinar a taxa anual equivalente a 2,0% ao mês. Neste caso, $q = 12\ meses$ e $t = 1\ m$ês$s$ e $i_t = 0{,}02$. Assim,

$$\mathbf{i_q = (1 + i_t)^{q/t} - 1}$$

$$\mathbf{i_q = (1 + 0,02)^{12/1} - 1}$$

$$\mathbf{i_q = 0,2682}$$

$$\mathbf{i_q = 26,82\%}$$

Portanto, uma taxa de 2,0% ao mês equivale a uma taxa de 26,82% ao ano.

## 3.4 REGIME DE JUROS

A matemática financeira é o ramo da matemática que estuda o valor do dinheiro ao longo do tempo. Conforme visto na seção 3.3 o valor do dinheiro sofre variações em decorrência da aplicação das taxas de juros, incluindo a existência de inflação ou deflação no período analisado. O valor do capital no tempo pode ser atualizado por meio do regime de taxa de juros simples ou composto.

### 3.4.1 Juros Simples

No caso dos juros simples a taxa incide apenas sobre o capital inicial, portanto os juros ao longo do tempo t são dados por:

$$J = C.i.t$$

Como exemplo, os juros de um capital de R$ 1.000,00, aplicado a uma taxa de 5% ao mês, ao longo de seis meses são dados por:

$$J = C.i.t$$
$$J = 1000.0{,}05.6$$
$$J = 300$$

Assim, os juros no período serão de R$ 300,00, consequentemente ao final de seis meses o montante será de R$ 1.300,00.

### 3.4.2 Juros Compostos

Juros compostos, também conhecidos como juros sobre juros, são aplicados ao montante de cada período, ou seja, para cada período de tempo os juros são calculados por meio da multiplicação entre a taxa de juros e o montante do último período. Portanto, considerando que a taxa de juros i é fixa, os montantes calculados em cada período formam uma progressão geométrica de razão i, como veremos a seguir.

Dado o capital inicial C e a taxa de juros i, o cálculo dos juros J no primeiro período de tempo é dado por:

$$J_1 = C.i$$

Assim, o montante neste momento é:

$$M_1 = C + J_1$$
$$M_1 = C + C.i$$
$$M_1 = C(1+i)$$

No fim do segundo período os juros são:

$$J_2 = M_1.i = C(1+i).i$$

E o montante neste momento é dado por:

$$M_2 = M_1 + J_2$$
$$M_2 = C(1+i) + C(1+i).i$$
$$M_2 = C(1+i)(1+i)$$
$$M_2 = C(1+i)^2$$

Analogamente, no fim do terceiro período, tem-se:

$$M_3 = M_2 + J_3$$
$$M_3 = C(1+i)^2 + C(1+i)^2 . i$$
$$M_3 = C(1+i)^2(1+i)$$
$$M_3 = C(1+i)^3$$
$$\vdots$$
$$M_t = C(1+i)^t$$

Como verificado, os montantes $M_{1,}$ $M_{2,}$ $M_{3,}$ ... formam uma progressão geométrica de razão $(1+i), onde$ :

$M_t = Montante\ do\ capital\ no\ período\ de\ tempo\ t$

$C = Capital\ no\ início\ do\ primeiro\ período\ de\ tempo.$

$t = período\ de\ tempo\ analisado.$

Por meio desta expressão é possível verificar que o capital C, depois de t períodos de tempo, chamado de Valor Futuro (VF), valerá $VF = C \cdot (1+i)^t$. Deste modo, dado um valor futuro VF (capitalizado em t períodos de tempo), o Valor Presente (VP) é dado por $VP = \frac{VF}{(1+i)^t}$.

### 3.4.3 Série Uniforme de Pagamentos

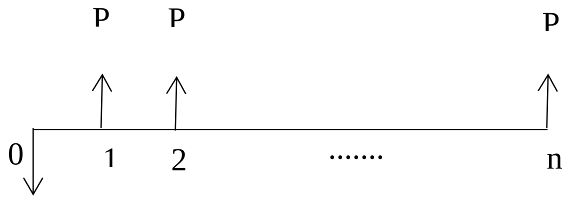
Segundo o livro A Matemática do Ensino Médio, volume 2 [6]:

> "Um conjunto de quantias (chamadas usualmente de pagamentos ou termos), referidas a épocas diversas, é chamada de série, ou de anuidade (apesar do nome, nada a ver com ano) ou, ainda, renda. Se esses pagamentos forem iguais e igualmente espaçados no tempo, a série é dita uniforme."

O estudo das séries pode ser dividido em séries finitas e séries infinitas. Para auxiliar na visualização das diversas situações apresentadas é utilizado o conceito de Fluxo de Caixa, que se trata de uma representação gráfica utilizada para mostrar as entradas e saídas de capital. O tempo é representado na horizontal e as entradas ou recebimentos são representados por setas verticais apontadas para cima e as saídas ou pagamentos são representados por setas verticais apontadas para baixo

#### 3.4.3.1 Série Uniforme de Pagamentos Finita

As séries uniformes são aquelas em que o capital é atualizado por meio de pagamentos iguais em intervalos de tempo constantes. Conforme demonstrado no fluxo de caixa a seguir, em que é considerando uma sequência uniforme de pagamentos iguais a P e um tempo antes da primeira parcela.




O valor presente VP da série no tempo zero é dado por:

$$VP = \frac{P}{1+i} + \frac{\mathrm{P}}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{\mathrm{P}}{(1+i)^n}$$

Como verificado, se trata de uma progressão geométrica com n termos, razão $\frac{1}{1+i}$ e primeiro termo $\frac{P}{1+i}$. Utilizando a expressão matemática da soma das parcelas, demonstrada na seção 3.2.2, temos:

$$S_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_n = a_1 . \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$VP = \frac{P}{1+i} \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+i}}$$

$$VP = P \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

#### 3.4.3.2 Série Uniforme de Pagamentos Infinita

Também existem as séries infinitas ou perpetuas de pagamentos, em que as prestações não possuem prazo determinado. Esta situação ocorre em contratos de aluguel ou investimentos financeiros que pagam renda enquanto o valor estiver investido. Nesta situação, fazendo o $n$ da expressão do valor presente VP tender ao infinito, obtemos

$$VP = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{P}{1+i} + \frac{\mathrm{P}}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{\mathrm{P}}{(1+i)^k} + \cdots$$

Trata-se, portanto, de uma PG infinita cujo primeiro termo é dado por $\frac{P}{1+i}$ e razão $\frac{1}{1+i}$, pois como $i > 0$, temos:

$$\frac{1}{1+i} < 1$$

Assim, utilizando a expressão da soma de uma PG infinita, conforme demonstrada na seção 3.2.3, temos:

$$VP = \frac{P}{1+i}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{1+i}\right)} = \frac{P}{i}$$

Portanto, para séries infinitas de pagamentos, a relação entre o valor presente e o valor da prestação é dado por:

$$VP = \frac{P}{i}$$

Portanto, é possível calcular o valor presente de um bem alugado ou de um investimento sem prazo determinado apenas com os valores da parcela e da taxa de juros. Consequentemente, dado o valor presente e a taxa é possível calcular o valor da prestação ou aluguel de um bem.

**Exemplo:** Um imóvel foi alugado, por tempo indeterminado, com prestações mensais de R$ 1500,00 a uma taxa de 2 % ao mês. Qual o valor do imóvel?

**Resolução:** Como o prazo do aluguel é indeterminado e o valor das parcelas é constante, podemos utilizar a expressão da série uniforme infinita ou perpetuidade. Desta forma, utilizando a expressão do valor presente VP.

$$VP = \frac{P}{i}$$

$$VP = \frac{1500}{0,02}$$

$$VP = 75.000,00$$

Portanto, apenas com o valor das prestações e da taxa de juros utilizada, foi possível calcular o valor presente do imóvel.

## 3.5 MATEMÁTICA FINANCEIRA APLICADA

Nas seções seguintes serão apresentadas aplicações práticas dos conceitos de matemática financeira, vistos até o momento, focando principalmente em produtos financeiros, como empréstimos, descontos e investimentos, além das definições de Previdência, Poupança, etc.

### 3.5.1 Empréstimos

Conforme definição apresentada no site do Banco Central do Brasil [13]:

> Empréstimo é um contrato que o cidadão faz com uma instituição financeira para receber uma quantia em dinheiro que deverá ser devolvida ao banco em prazo determinado, acrescida de juros e encargos. Os recursos obtidos no empréstimo não têm destinação específica e podem ser utilizados da maneira que o cliente preferir.

Portanto, empréstimo é o contrato realizado pelas pessoas em que os Bancos transferem recursos que devem ser devolvidos em determinado período de tempo acrescido de um valor determinado por uma taxa de juros que corresponde ao serviço prestado pela Instituição Financeira. Importante destacar que o dinheiro emprestado pode ser utilizado pelo devedor da forma que lhe convier, não ficando vinculada a alguma despesa ou compra específicas.

Como exemplos de empréstimos podem ser citados, o empréstimo consignado, o rotativo e o cheque especial.

### 3.5.2 Financiamentos

Conforme definição apresentada no site do Banco Central do Brasil:

> Assim como o empréstimo bancário, o financiamento também é um contrato entre o cliente e a instituição financeira, mas com destinação específica dos recursos tomados, como, por exemplo, a aquisição de veículo ou de bem imóvel. Geralmente o financiamento possui algum tipo de garantia, como, por exemplo, alienação fiduciária ou hipoteca.

Diante do conceito apresentado, financiamento é similar ao empréstimo quanto à forma de obtenção do recurso financeiro, pois também se trata da transferência de recurso de banco que deverá ser devolvido no futuro pelo cliente acrescentado dos juros.

Contudo, no financiamento o valor é liberado pela instituição ao cliente, mas está vinculado à compra de um produto específico, para a realização de algum investimento ou até mesmo para pagamento de serviços prestados por fornecedores. Como exemplos existem os financiamentos imobiliários, de automóveis, para construção ou reforma de residência ou estabelecimento comercial, etc.

### 3.5.3 Sistemas de amortização.

Para a compreensão dos sistemas de amortização existentes é preciso primeiro estar claro o conceito de amortização, que se refere à redução de uma dívida. Se em um determinado período foi realizado o pagamento $P$ para redução do valor principal $C,$ acrescido dos juros J, a amortização $A$ é dada por,

$$A = (C + J) - P, onde\ P > J$$

Os sistemas de amortização predominantemente utilizados atualmente são o PRICE, o Sistema de Amortização Constante – SAC e o Sistema Americano.

#### 3.5.3.1 Sistema PRICE – Parcelas Constantes.

Também chamado de sistema de parcelas fixas ou Sistema Francês de amortização é caracterizado por pagamentos periódicos iguais e amortização crescente ao longo do tempo.

Conforme pode ser verificado na definição, este sistema se adequa ao conceito de séries finitas demonstradas na seção 3.4.3.1, séries uniformes de pagamentos, assim, para se calcular o valor das prestações basta utilizar a expressão:

$$VP = P\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Com o valor das parcelas calculado, deve-se calcular o valor dos juros $J_k$ em cada período k, por meio da multiplicação do saldo $S_{k-1}$ do início de cada período pela taxa de juros $i$.

$$J_k = S_{k-1}.i$$

Assim, para saber o valor da amortização $A_k$ em cada período $k,$ basta subtrair os juros do valor de cada parcela.

$$A_k = P - J_k$$

Finalizando, o saldo de cada período $S_k$ é calculado pela diferença entre o saldo anterior e a amortização do período $k$.

$$S_k = S_{k-1} - A_k$$

A forma mais simples de resolver problemas que envolvam o pagamento de parcelas constantes é por meio da formação de uma tabela em que as linhas representam cada período $k$ e são preenchidas sucessivamente, desde o período inicial até o pagamento da última parcela no período n. Para financiamentos muito longos pode ser necessária utilização do Excel ou algum outro programa específico para realização de cálculos.

Para ilustrar este tipo de financiamento, foi utilizado exemplo do livro A Matemática do Ensino Médio, Volume 2 [6], como segue.

Uma dívida de R$ 150,00 é paga, em 4 meses, pelo sistema francês (PRICE) com juros de 8% ao mês. Faça a planilha de amortização.

**Resolução:**
Calcula-se o valor da parcela constante da seguinte forma.

$$VP = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$P = VP\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

Com os dados do problema, temos.

$$P = 150\frac{0{,}08}{1-(1{,}08)^{-4}}$$

$$P = 45{,}29$$

O Valor dos Juros no primeiro mês é dado pela multiplicação do saldo inicial $S_0$ de R$ 150,00 pela taxa de juros i de 8%.

$$J_1 = S_0 \cdot i$$

$$J_1 = 150 \cdot 0{,}08$$

$$J_1 = 12$$

Assim, o valor da amortização é dado por:

$$A_1 = P - J_1$$
$$A_1 = 45{,}29 - 12$$
$$A_1 = 33{,}29$$

Então, o saldo no fim do primeiro mês será de:

$$S_1 = S_0 - A_1$$
$$S_1 = 150 - 33{,}29 = 116{,}71$$

Repetindo os mesmos cálculos até o mês 4, teremos a seguinte tabela de Amortização PRICE.

| **Período** | **Parcela** | **Amortização** | **Juros** | **Saldo Devedor** |
|---|---:|---:|---:|---:|
| 0 | - | - | - | 150,00 |
| 1 | 45,29 | 33,29 | 12,00 | 116,71 |
| 2 | 45,29 | 35,95 | 9,34 | 80,76 |
| 3 | 45,29 | 38,83 | 6,46 | 41,93 |
| 4 | 45,29 | 41,93 | 3,35 | 0,00 |

#### 3.5.3.2 Sistema SAC – Amortizações Constantes.

Conhecido como Sistema de Amortização Constante, é caracterizado por pagamentos mensais decrescentes e amortização constante ao longo do tempo.

Neste sistema, o primeiro passo é realizar o cálculo do valor da amortização, que é o mesmo em todos os períodos, por meio da divisão entre o valor da dívida pela quantidade n de parcelas.

$$A = \frac{Dívida\ Total}{n}$$

Posteriormente, deve-se calcular o valor dos saldos devedores $S_k$, de cada período, por meio da subtração do saldo anterior pela amortização, portanto.

$$S_k = S_{k-1} - A_k$$

Para o cálculo dos juros de cada período $k$, basta multiplicar o saldo anterior $S_{k-1}$ pela taxa de juros $i$ do financiamento.

$$J_k = S_{k-1}.\, i$$

Para finalizar, o valor da parcela de cada período é dado pela soma da amortização e dos juros.

$$P_k = A_k + J_k$$

Assim, como no sistema PRICE de amortização, a forma mais adequada para resolução destes tipos de problemas é por meio da montagem da tabela linha por linha.

Utilizando o mesmo exemplo anterior, temos o valor da amortização $A$:

$$A = \frac{Dívida\ Total}{n}$$

$$A = \frac{150}{4} = 37{,}5$$

Cálculo do Saldo, após o primeiro mês:

$$S_1 = S_0 - A_1$$

$$S_1 = 150 - 37{,}5 = 112{,}50$$

Cálculo dos juros do primeiro mês:

$$J_1 = S_0\ x\ i$$

$$J_1 = 150\ x\ 0{,}08 = 12$$

No fim do primeiro mês o valor da parcela será dado por:

$$P_1 = A_1 + J_1$$

$$P_k = 37{,}50 + 12 = 49{,}50$$

Repetindo os mesmos cálculos até o mês 4, teremos a seguinte tabela de Amortização SAC.

| **Período** | **Parcela** | **Amortização** | **Juros** | **Saldo Devedor** |
|---|---:|---:|---:|---:|
| 0 | - | - | - | 150,00 |
| 1 | 49,50 | 37,50 | 12,00 | 112,50 |
| 2 | 46,50 | 37,50 | 9,00 | 75,00 |
| 3 | 43,50 | 37,50 | 6,00 | 37,50 |
| 4 | 40,50 | 37,50 | 3,00 | 0,00 |

No sistema de amortização constante, o total de juros pagos ao final do período é inferior aos juros pagos no sistema PRICE, mesmo sendo considerada a mesma taxa de juros e o mesmo período. Esta situação ocorre porque no SAC a amortização do saldo devedor é mais rápida, ou seja, o valor financiado é devolvido mais rapidamente ao credor, gerando menos pagamento de juros ao final da operação. Também é possível constatar que o valor das parcelas do SAC é decrescente ao longo do tempo, enquanto no sistema PRICE as parcelas são constantes.

#### 3.5.3.3 Sistema Americano de Amortização

Caracterizado por pagamentos periódicos de juros, não havendo amortizações mensais e prevendo a amortização total da dívida inicial em um único pagamento ao final do período.

O Sistema Americano de Amortização é um tipo de quitação de empréstimo que favorece aqueles que desejam pagar o valor principal através de uma única parcela, porém os juros devem ser pagos periodicamente ou, dependendo do contrato firmado entre as partes, os juros são capitalizados e pagos junto ao valor principal.

Desta forma, conforme verificado não existem muitos cálculos a serem realizados, apenas a multiplicação do valor da dívida pela taxa de juros utilizada. Como os juros são pagos periodicamente, ao final do contrato restará somente o valor principal da dívida.

Considerando o mesmo exemplo e que os juros serão pagos mensalmente, temos:

$$J = S \; x \; i$$

$$J = 150 \; x \; 0{,}08 = 12{,}00$$

Assim, todo mês serão pagos os juros de R$ 12,00 e o saldo permanecerá o mesmo até o fim do período, conforme tabela a seguir.

| **Período** | **Juros** | **Parcela** | **Saldo Devedor** |
|---|---:|---:|---:|
| 0 | - | - | 150,00 |
| 1 | 12,00 | 12,00 | 150,00 |
| 2 | 12,00 | 12,00 | 150,00 |
| 3 | 12,00 | 12,00 | 150,00 |
| 4 | 12,00 | 162,00 | 0,00 |

Comparando com os sistemas SAC e PRICE é verificado que os juros pagos são ainda maiores, pois o saldo devedor não sofre amortizações ao longo do período, ocasionando um valor maior de juros totais ao fim da operação.

### 3.5.4 Desconto comercial

O comércio em geral utiliza os termos à vista e a prazo, geralmente como marketing, para tentar induzir o cliente. Na maioria das vezes as pessoas não se preocupam em avaliar financeiramente qual a melhor opção de compra. O cálculo que deve ser realizado para verificar qual a melhor alternativa é pertinente à matemática financeira e está inserido no contexto do tema de descontos financeiros.

Quando uma loja oferece ao cliente a possibilidade de pagamento a prazo, os cálculos referentes ao valor da mercadoria no tempo já foi considerado. Constantemente, são apresentados na mídia economistas afirmando que sempre a melhor opção é o pagamento à vista, pois desta forma é possível negociar um desconto no valor pago. Entretanto é preciso ser levada em consideração a condição em que se encontra a pessoa interessada, pois não é sempre que se dispõem do recurso financeiro no momento da compra.

### 3.5.5 Desconto Bancário

Conforme apresentado no livro A matemática do Ensino médio [6]:

> "Quando um banco empresta dinheiro (crédito pessoal ou desconto de duplicatas), o tomador do empréstimo emite uma nota promissória, que é um papel no qual o tomador se compromete a pagar ao banco, em uma data fixada, uma certa quantia, que é chamada de valor de face da promissória. O Banco então desconta a promissória para o cliente, isto é recebe a promissória de valor de face F e entrega ao cliente uma quantia A (menor que F, naturalmente), A diferença F-A é chamada de desconto."

Conforme apresentado no mesmo livro, os bancos calculam um valor D a ser subtraído do valor total da duplicata ou nota promissória utilizada $F$.

$$A = F - D$$

O valor $D$ é um percentual do valor $F$, sendo calculado com base em uma taxa de desconto $d$ estabelecida pelo banco e pelo tempo $t$ da operação de desconto, conforme segue.

$$D = F.d.t$$

Portanto, com base nas duas fórmulas apresentadas, chega-se diretamente ao valor a ser emprestado.

$$A = F - F.d.t$$

$$A = F(1 - d.t)$$

A taxa $d$, utilizada pelos bancos também é denominada taxa de desconto simples por fora. Importante verificar que quanto maior a taxa de desconto utilizada, menor será o valor emprestado.

### 3.5.6 Cartão de crédito

Provavelmente o meio de pagamento mais utilizado atualmente é o cartão de crédito, que possibilita o consumo antecipado pelas pessoas para pagamento em data futura. O cartão de crédito é classificado na modalidade de crédito rotativo, funcionando como a antecipação de uma margem de valor para ser gasto pelo cliente.

Este meio de pagamento foi criado para facilitar o consumo das pessoas, mas pode se tornar um problema sério caso não seja devidamente utilizado, pois os encargos cobrados são muito altos e pode virar uma dívida impagável caso não haja controle.

Todas as compras realizadas com o cartão de crédito são cobradas por meio de fatura, enviada mensalmente, com data de vencimento escolhida pelo cliente, que ainda tem a opção de efetuar o pagamento total cobrado, somente o mínimo ou algum valor intermediário, postergando o pagamento do restante para o mês seguinte mediante cobrança de juros.

Em uma turma de ensino médio, considerando o objetivo de inserir os conceitos de Educação Financeira é adequado esclarecer para os alunos as facilidades que um cartão de crédito propicia, mas também atentar para os perigos que existem quando não utilizado de forma adequada, devido às altas taxas de juros. Em dezembro de 2016, segundo o Banco Central, a taxa de juros do cartão de crédito chegou a 484,6% ao ano.

Para evitar o alto endividamento dos clientes de cartão de crédito, a partir de abril de 2017 as regras de pagamento sofreram alterações. Na prática, o consumidor não vai mais ficar preso ao rotativo do cartão, popularmente conhecido como pagamento mínimo da fatura.

Sempre que o consumidor entrar no crédito rotativo, depois de 30 dias o banco terá de oferecer ao cliente um parcelamento do saldo devedor. O consumidor também fica com a opção de, depois desse prazo, fazer o pagamento à vista. Caso ele não escolha nenhuma das duas alternativas, ficará inadimplente e não poderá utilizar mais o cartão.

### 3.5.7 Previdência

Existem, basicamente, dois tipos de previdência, a social e a privada. A Previdência Social funciona basicamente como um seguro para a pessoa que contribuiu, durante um período mínimo, para o Instituto Nacional de Seguridade Social - INSS e deixa de atuar no mercado de trabalho em decorrência de idade, doença ou invalidez. Para ter direito, o trabalhador paga uma contribuição mensal durante determinado tempo, que depende do tipo de aposentadoria escolhido ou tipo trabalho exercido. A soma de todas as contribuições dos cidadãos forma um fundo com a finalidade de pagar ao contribuinte quando ele para de trabalhar e se aposenta.

Com o aumento da expectativa de vida das pessoas, é cada vez mais comum ouvir se falar da importância de poupar e investir pensando em manter o mesmo padrão de vida no futuro. A alternativa de maior procura com este objetivo é a previdência privada em que o contribuinte busca complementar sua aposentadoria pelo INSS. Neste caso, o poupador paga uma mensalidade para uma instituição financeira administrar, com o propósito de receber um benefício no momento que deixar de trabalhar e perder a remuneração que possui enquanto está trabalhando.

### 3.5.8 Investimentos

Nas seções seguintes serão descritas formas de investimentos financeiros utilizados com o objetivo de obtenção de rendimentos dos valores poupados. Não é o objetivo deste trabalho se aprofundar nas peculiaridades dos vários produtos de investimento existentes no mercado, portanto serão apresentadas as modalidades mais utilizadas atualmente no Brasil.

#### 3.5.8.1 Caderneta de Poupança

A forma de investimento mais popular do Brasil é a caderneta de Poupança, em que os valores depositados são remunerados por uma taxa de juros fixa de 0,5% ao mês mais a taxa referencial – TR do período. Destaca-se ainda a ausência de cobrança de imposto de renda sobre os rendimentos auferidos.

Recentemente a forma de remuneração da poupança foi alterada, passando a depender do valor da taxa básica de juros da economia denominada Selic. Para depósitos realizados a partir de 4 de maio de 2012, sempre que a Selic ficar em 8,5% ao ano ou abaixo, o rendimento será de 70% da Selic mais a TR, caso a SELIC seja superior à 8,5% ao ano, a forma de remuneração permanece como a tradicional.

#### 3.5.8.2 Títulos Públicos Federais

Atualmente é muito difundida nas mídias a possibilidade de se investir em títulos públicos federais, que representam papeis emitidos pelo Governo Federal e consistem de ativos de renda fixa, ou seja, que rendem um valor fixo predeterminado, e possuem a finalidade de captar recursos para o financiamento da dívida pública e as atividades do Governo, como educação, saúde e infraestrutura.

Por ser um investimento garantido pelo governo brasileiro, o risco é considerado muito baixo. O investidor tem a vantagem de poder escolher a forma como será remunerado e o prazo, existindo títulos pré ou pós-fixados de curto, médio ou longo prazo. Para os pré-fixados, é possível saber a remuneração no fim do investimento, ao passo que os títulos pós-fixados são atualizados ao fim da aplicação através de índices financeiros de inflação ou juros da economia.

#### 3.5.8.3 Fundos de Investimento

Os fundos de investimento reúnem o dinheiro de diversas pessoas, chamadas de cotistas, com o objetivo de contratar gestores para gerenciar o capital arrecadado, almejando desta forma a obtenção de ganhos a partir de aplicações financeiras realizadas no mercado de capital.

Todo fundo de investimento deve possuir um regulamento, onde são estabelecidas as regras de funcionamento que se aplicam igualmente a todos os cotistas. Ao comprar cotas de um determinado fundo, são aceitas as regras de funcionamento quanto à aplicação, resgate, horários, custos, etc.

Nesta forma de investimento coletiva, os recursos podem ser aplicados em diversos tipos de produtos financeiros, com diferentes graus de rentabilidade e risco, dependendo das características e finalidade que o fundo for concebido.

#### 3.5.8.4 Investimento em Renda Variável

Existem também os investimentos cuja remuneração ou forma de cálculo não é conhecida no momento da aplicação, portanto, não possuem rendimento predeterminado.

O investimento no mercado de ações, que representam partes do capital de uma empresa colocadas em negociação, é a forma mais conhecida de renda variável. Os preços das ações sofrem constantes variações refletindo os interesses distintos dos agentes do mercado. Diferente da renda fixa, onde o investidor não perde o capital investido inicialmente, mesmo havendo o risco dos juros serem muito baixos, na renda variável os juros podem ser negativos, ou seja, o investidor pode perder parte do capital inicialmente investido.

Apesar de possuir maior risco, o investimento na renda variável permite retornos muito maiores do que os da renda fixa.

Para a realização dos investimentos em renda variável existem basicamente dois tipos de investidores, o fundamentalistas, que analisam os fundamentos financeiros e econômicos das empresas e os analistas técnicos ou analistas gráficos, que realizam a análise dos investimentos com base nos gráficos dos preços das ações ao longo do tempo.

# 4 PLANO DE AULA

Nesse capítulo é descrita a importância da metodologia de resolução de atividades em sala de aula, com base em trabalhos de pesquisas realizados, assim como proposto na Base Nacional Curricular Comum – BNCC.

Também é apresentado o plano de aula baseada na resolução de problemas contendo situações reais e questões retiradas de livros. Foram utilizados recortes de jornais e propagandas de internet contendo anúncios de financiamento à taxa zero, pagamento à vista ou a prazo, etc.

## 4.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Com o propósito de estimular uma maior participação dos alunos no processo de aprendizagem optou-se pela estratégia de fazer o participante perceber a matemática mais próxima da sua realidade por meio da resolução de problemas do cotidiano, tornando a metodologia como uma abordagem interessante e adequada ao contexto que se apresenta.

Conforme descreve Marco Antônio Moretto dos Santos em sua Dissertação Educação Financeira e Resolução de exercícios [11]:

> "A matemática deve apontar caminhos aos educandos, por onde a resolução de problemas torna-se mais adequada, sem limitar-se à memorização de fórmulas, que em geral servem para situações específicas de um problema. Esta matemática deve exercitar a capacidade do aluno interpretar, supor, inferir, buscar meios de solucionar problemas, fazer aproximações, tomar decisões entre alternativas."

Na mesma Dissertação é destacada a necessidade da abordagem de temas matemáticos práticos no sentido de estimular os alunos em sala de aula com assuntos de interesse deles.

> "É necessário que os conteúdos matemáticos tenham sentido a partir da leitura crítica do mundo. Quando não cumpre este papel, a matemática acaba sendo vista pelos alunos como uma disciplina que serve apenas para cumprir a carga horária, cujos cálculos ensinados carecem de um propósito prático, real."

Em relação ao uso de temas do cotidiano a própria Base Nacional Curricular Comum – BNCC, em sua 2° versão revista, menciona a importância para a construção permanente do conhecimento da seguinte forma:

> “Também na escola, a matemática deve ser vista como um processo em permanente construção, como mostra a História da matemática. Seu estudo não deve se reduzir a apropriação de um aglomerado de conceitos. O estudante deve ser motivado a, em seu percurso escolar, questionar, formular, testar e validar hipóteses, buscar contra exemplos, modelar situações, verificar a adequação da resposta a um problema, desenvolver linguagens e, como consequência, construir formas de pensar que o levem a refletir e agir de maneira crítica sobre as questões com as quais ele se depara em seu cotidiano.”

Diante das perspectivas apresentadas foram selecionados problemas de aplicação prática e situações reais para a elaboração do plano de aula, conforme apresentado a seguir.

## 4.2 PLANO DE AULA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Importante destacar que o Plano de Aula é desenvolvido com base em resolução de problemas reais e não se resume apenas em resolução de exercícios utilizados em livros didáticos, como geralmente é realizado.

Almeja-se que o aluno utilize ao máximo possível o senso crítico e procure soluções que não dependem necessariamente de aplicação de fórmulas ou a utilização de uma sequência de resolução, pois o objetivo deste trabalho é fugir do padrão de utilização de métodos de memorização de conteúdo em que o aluno busca somente conseguir boas notas nas avaliações periódicas.

A seguir são apresentados os problemas, de criação própria ou selecionados de livros, e indicadas as resoluções que o professor pode explorar junto com os alunos em sala de aula.

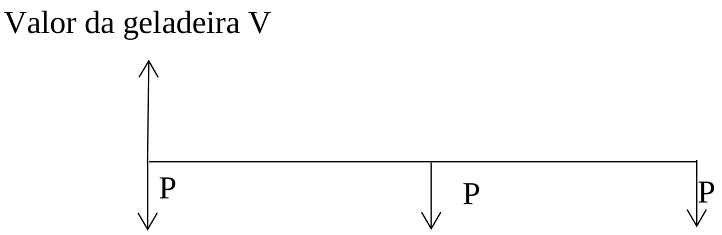
### 4.2.1 Pagamento parcelado, questão retirada do livro A Matemática do Ensino Médio, volume 2[6].

Uma geladeira custa R$ 1.000,00 (mil reais) à vista e pode ser paga em três prestações mensais iguais. Se forem cobrados juros de 6% ao mês sobre o saldo devedor, determine o valor da prestação, supondo que a primeira prestação é paga:

a) No ato da compra;
b) Um mês após a compra;
c) Dois meses após a compra.

**Resolução:**

**a)**




Nesta situação, sendo o valor da geladeira V e das parcelas P, onde é exigida uma entrada no pagamento e conforme apresentado no fluxo de caixa, tem-se:

$$V = P + \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2}$$

Como pode ser verificado, trata-se de uma PG de razão $\frac{1}{1+i}$ e primeiro termo P. Realizando a soma dos três termos:

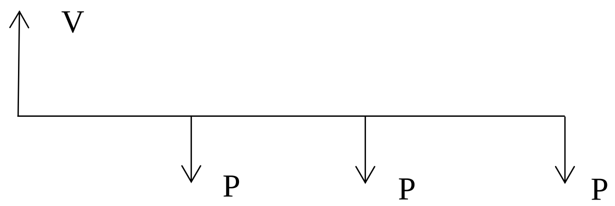
$$V = P\,\frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^3 - 1}{\frac{1}{1+i} - 1}$$

$$V = P\,\frac{\left(\frac{1}{1,06}\right)^3 - 1}{\frac{1}{1,06} - 1} = P.2,83$$

$$P = \frac{1000}{2,83} = 352,93$$

Portanto, no caso da primeira parcela P ser paga no início do período, o valor das três parcelas será de R$ 352,93.

**b)**



Nesta situação, conforme apresentado no fluxo de caixa:

$$V = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3}$$

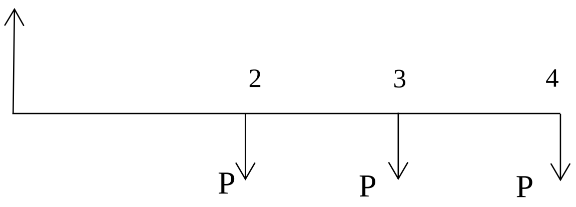
Analogamente ao item a), também é formada uma PG, mas com o primeiro termo $\frac{P}{1+i}$.

$$V = \frac{P}{1+i} \frac{(\frac{1}{1+i})^3 - 1}{\frac{1}{1+i} - 1}$$

$$V = \frac{P}{1{,}06} \frac{(\frac{1}{1{,}06})^3 - 1}{\frac{1}{1{,}06} - 1} = P.2{,}67$$

$$P = \frac{1000}{2{,}67} = 374{,}11$$

c)




Nesta situação, conforme apresentado no fluxo de caixa acima:

$$V = \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \frac{P}{(1+i)^4}$$

Também é formada uma PG, mas com o primeiro termo $\frac{P}{1+i^2}$.

$$V = \frac{P}{(1+i)^2} \frac{(\frac{1}{1+i})^3 - 1}{\frac{1}{1+i} - 1}$$

$$V = \frac{P}{(1{,}06)^2}\frac{(\frac{1}{1{,}06})^3 - 1}{\frac{1}{1{,}06} - 1} = P.2{,}52$$

$$P = \frac{1000}{2{,}52} = 396{,}56$$

**Considerações:**

Nesta questão é interessante, após a resolução dos três itens, questionar os alunos quanto ao aumento do valor da parcela em relação ao adiamento do primeiro pagamento. Os alunos devem ter consciência de que quanto maior o tempo para iniciar a amortização da dívida, maior será o valor pago.

### 4.2.2 Melhor opção de empréstimo, questão retirada do livro A Matemática do Ensino Médio, volume 2[6]

Determine a melhor e a pior alternativa para tomar um empréstimo por três meses:

a) Juros simples de 16% ao mês;
b) Juros compostos de 15% ao mês;
c) Desconto bancário com taxa de desconto de 12% ao mês.

**Resolução:**

**a)** Para o sistema de juros simples, basta realizar o produto da taxa de juros ao mês pela quantidade de meses do empréstimo, assim, considerando:

$J_{periodo} = Juros\ no\ Período.$
$i = taxa\ de\ juros\ mensal.$
$t = quantidade\ de\ períodos.$

Temos:

$$J_{periodo} = C \cdot i \cdot t = C \cdot 0{,}16 \cdot 3 = 0{,}48 \cdot C$$

Portanto, a taxa de juros no período é de 48%.

**b)** Para o sistema de juros compostos, é preciso calcular o valor da taxa equivalente no período de três meses, assim, considerando:

$J_{periodo} = \; Juros \; no \; Período.$
$i = \; taxa \; de \; juros \; mensal.$
$t = \; quantidade \; de \; períodos.$

Temos:

$$1 + J_{periodo} = (1 + i)^3$$
$$1 + J_{periodo} = (1{,}15)^3 = 1{,}520875$$
$$J_{periodo} = 1{,}520875 - 1 = 0{,}520875$$

Portanto, a taxa de juros do período é de 52,09%.

**c)** Utilizando diretamente a fórmula de desconto bancário e considerando:

$P = Valor \; presente, ou \; seja, valor \; recebido \; no \; ato \; da \; operação \; pelo \; cliente.$
$A = Valor \; de \; face \; do \; título \; utilizado.$
$d = \; taxa \; de \; desconto \; mensal.$
$t = \; quantidade \; de \; períodos.$

Temos:

$$P = A(1 - dt) = A(1 - 0{,}12 \cdot 3) = 0{,}64 \cdot A$$

Portanto, o cliente receberá do banco 64% do valor de face A e terá que pagar em três meses o total de A reais. Assim, considerando: a taxa juros do período i, tem-se:

$$A = 0{,}64A \cdot (1 + i)$$
$$1 + i = \frac{A}{0{,}64A}$$
$$i = \frac{A}{0{,}64A} - 1 = 0{,}5625$$

Portanto, a taxa efetiva de juros do período é de 56,25%.

**Considerações:**

Diante da resolução dos três itens é possível concluir que a melhor opção para realização do empréstimo é a primeira, pois possui a menor taxa de juros no período, ao passo que a pior opção, ou seja, aquela com maior taxa de juros no período é a letra c, pois possui uma taxa de 56% de juros em três meses.

### 4.2.3 Comprando um celular, questão de autoria própria.

Uma loja oferece quatro possibilidades de compra para um aparelho de celular, conforme apresentado na **Figura 1**:


**Figura 1 - Opções de compra de celular para o problema 1.**

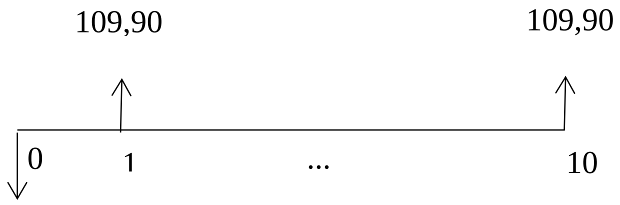
Qual a opção mais vantajosa, considerando que o cliente não possui o cartão da loja e para obtê-lo terá que pagar uma anuidade de R$ 60,00?

**Resolução:**

Para a análise desta questão é importante verificar qual a taxa de juros que torna o valor presente do produto menor do que o valor à vista (no boleto) oferecido pela loja, entretanto para realizar o cálculo da taxa mais vantajosa seria necessária a utilização de uma calculadora financeira, que não é o objetivo deste trabalho. Desta forma, uma maneira simples é considerar taxas de juros, iniciando pela taxa média das cadernetas de poupança, de aproximadamente 0,6% e aumentar gradativamente até que o valor presente seja inferior ao valor à vista. Assim, utilizando a relação

$$Valor\ Presente = Parcela\frac{(1-(1+i)^{-10})}{i}, tem - se:$$

**1º Opção – Realizando a compra em 10 parcelas sem adquirir o cartão da loja.**




**Para i = 0,6% (seis décimos por cento):**

$$Valor\ Presente \quad Valor\ Presente = 109{,}90\,\frac{(1 - 1{,}006^{-10})}{0{,}006} = 1.063{,}59$$

Portanto, como o valor presente é superior ao valor à vista, a melhor opção é a compra no boleto, de R$ 989,10.

**Para i = 1,0% (um por cento), tem-se:**

$$Valor\ Presente = 109{,}90\,\frac{1 - 1{,}01^{-10}}{0{,}01} = 1.040{,}90$$

Ainda assim, em termos financeiros, a compra à vista é mais vantajosa.

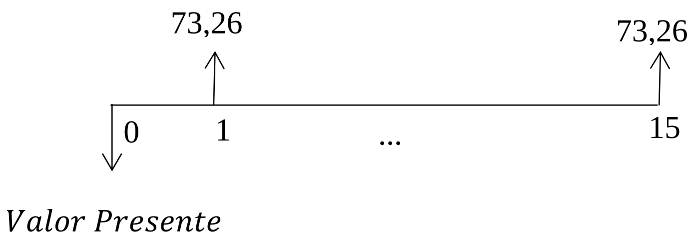
**Para i = 2,0% (dois por cento):**

$$Valor\ Presente = 109{,}90\,\frac{1 - 1{,}02^{-10}}{0{,}02} = 987{,}19$$

Neste caso como o valor presente é inferior ao valor à vista, seria mais vantajosa a compra parcelada.

**2º Opção – Realizando a compra adquirindo simultaneamente o cartão da loja.**

Para adquirir o cartão da loja o cliente precisa pagar a anuidade de R$ 60,00, que será cobrada na fatura seguinte do cartão. Para simplificar será considerado que a primeira parcela do cartão vencerá em um mês.




Neste caso serão analisadas duas situações, a compra em uma única vez, pagando, portanto o valor à vista de R$ 934,15, e posteriormente parcelando em 15 vezes no cartão da loja. Assim:

$$Valor\ presente = \frac{934{,}15 + 60}{1 + i}$$

Para i = 0,6%, Valor presente = R$ 988,22. Nesta situação a melhor opção é a compra por meio da aquisição do cartão da loja, pois o valor presente das parcelas é inferior ao valor cobrado via boleto.

Considerando então a compra parcelada em 15 vezes, tem-se:

**Para i = 0,6% (seis décimos por cento):**

Considerando também que a anuidade será paga na primeira parcela que ocorrerá em um mês, temos.

$$Valor\ Presente = \frac{60}{1{,}006} + 73{,}26\,\frac{1 - 1{,}006^{-15}}{0{,}006} = 1.107{,}54$$

Portanto, como o valor presente é superior ao valor à vista, neste caso a melhor opção também é a compra à vista.

**Para i = 1,0% (um por cento), teremos:**

$$Valor\ Presente = \frac{60}{1{,}01} + 73{,}26\,\frac{1 - 1{,}01^{-15}}{0{,}01} = 1.075{,}16$$

Portanto, a compra à vista é mais vantajosa em termos financeiros.

**Para i = 2% (dois por cento):**

$$Valor\ Presente = \frac{60}{1{,}02} + 73{,}26\frac{1 - 1{,}02^{-15}}{0{,}02} = 1.000{,}16$$

Neste caso como o valor presente continua superior ao valor à vista, ainda é mais vantajosa a compra no boleto.

**Para i = 2,5% (dois e meio por cento):**

$$Valor\ Presente = \frac{60}{1{,}025} + 73{,}26\frac{1 - 1{,}025^{-15}}{0{,}025} = 965{,}60$$

Como o valor presente é inferior ao valor à vista, é mais vantajoso a compra por meio da aquisição do cartão da loja.

Pode-se concluir que financeiramente a melhor opção, caso o cliente disponha do dinheiro em mãos, é a compra parcela em 15 vezes com o cartão da loja, desde que o cliente não consiga uma aplicação que possua uma taxa de juros de aproximadamente 2,5%. Caso contrário, ou seja, não consiga uma aplicação financeira com rentabilidade neste patamar, a melhor opção é o pagamento à vista

**Considerações:**

A utilização desta questão em sala de aula é interessante para mostrar ao aluno como as empresas oferecem alternativas de compras de seus produtos. Esta situação é propícia para verificar se o aluno tem condições de tomar decisão quando há mais possibilidades além da escolha direta entre comprar à vista ou a prazo.

Demonstra também como existem no mercado atualmente estratégias de venda de produtos associadas ao produto desejado pelo cliente. Neste caso é constatada a possibilidade do cliente se render à aquisição do cartão da loja, visto que aparentemente o mesmo garante desconto na compra do produto. Adquirindo o cartão, além de realizar propaganda para a loja que tem sua logomarca estampada no mesmo, atrai o cliente para que volte a utilizar o cartão em outras compras do seu interesse, aumentando assim a possibilidade de venda da empresa fornecedora.

Por fim, é recomendado abordar na resolução da questão o conceito de fluxo de caixa e consequente cálculo da taxa de juros existente, com o objetivo de verificar qual o menor valor financeiro da compra, não deixando de mencionar a economia que o cliente pode ter investindo o valor nos próximos meses em vez de realizar a compra parceladamente.

### 4.2.4 Compra a Prazo ou à vista, questão de autoria própria.

No anúncio mostrado na Figura 2 é apresentada uma promoção de páscoa em que o carro pode ser comprado à vista ou a prazo, nas seguintes condições:

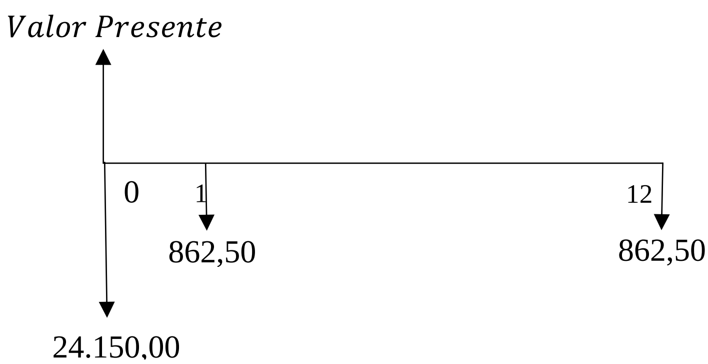
1 – pagamento à vista de R$ 34.500,00 ou;

2 – entrada de 24.150,00 mais doze parcelas de R$ 862,50.


**Figura 2 - Anúncio de jornal com financiamento sem juros.**

Diante das opções apresentadas qual a condição mais vantajosa para se comprar o carro?

**Resolução:** De acordo com o enunciado, o fluxo de caixa é representado da seguinte forma:



Considerando a taxa de 0,6% ao mês (juros de poupança):

$$Valor\ Presente = 24.150{,}00 + 862{,}50\,\frac{(1 - 1{,}006^{-12})}{0{,}006} = 34.107{,}40$$

Portanto, como o valor presente é inferior ao valor à vista, neste caso é melhor comprar a prazo, pois qualquer investimento com taxa igual ou superior a 0,6% ao mês torna a compra à vista a pior opção.

**Considerações:**

Nesta questão são apresentados elementos que podem ser trabalhados em sala de aula, provocando no aluno a iniciativa de verificar a taxa aplicada no pagamento parcelado. Uma forma interessante de aplicação desta questão é deixar os alunos formarem grupos de discussão e monitorar quais seriam as dúvidas surgidas.

Inicialmente, sem realizar cálculos, o aluno pode ser levado a acreditar que o pagamento à vista seja mais vantajoso, pois já está embutido no ideal das pessoas que sempre o pagamento à vista é melhor, entretanto no caso proposto o valor a vista e a prazo é o mesmo, portanto caso não haja uma diminuição no valor pago em uma única parcela a melhor opção é a primeira, pois o valor a ser pago de entrada pode ser aplicado e após a quitação da compra ainda restará um valor para o comprador.

### 4.2.5 Financiamento com taxa de juros zero, questão de autoria própria.

Uma concessionária de automóveis realiza uma promoção conforme mostrado na Figura 3.


**Figura 3 - Anúncio de parcelamento com taxa zero.**

De acordo com as informações apresentadas, responda:

a) O que mais chama atenção no anúncio?
b) De acordo com o apresentado, qual o valor da parcela se o total a ser pago for dividido em 20 vezes?
c) E se for pago em apenas uma parcela?
d) Qual a melhor forma de pagamento? Parcelado ou à vista?
e) Caso haja uma aplicação financeira com rendimento de 0,5% ao mês, qual seria o ganho do cliente que optar em parcelar o pagamento do carro em vinte vezes?

**Resolução:**

a) O que mais chama a atenção do anúncio é o fato do veículo ser financiado com uma taxa zero de juros, conforme em destaque no próprio encarte.

b) No caso de ser dividido em 20 (vinte) vezes, como a taxa é zero, a parcela deve ser calculada como segue:

$$Parcela = \frac{valor}{n} = \frac{53.440}{20} = 2.672$$

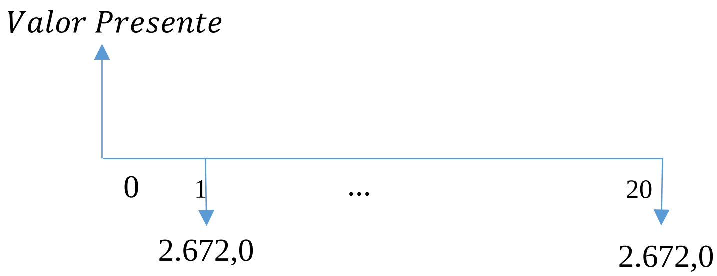
Assim, o valor da parcela para pagamento em 20 vezes nas condições anunciadas (taxa zero) é de R$ 2.672,00.

c) Como a taxa de juros é zero, o valor a ser pago em uma única prestação é o mesmo do enunciado, pois:

$$Parcela = \frac{valor}{n} = \frac{53.440}{1} = 53.440$$

d) Considerando que não há juros, a melhor opção é o parcelamento no maior número de parcelas possíveis, pois o dinheiro a ser pago pode ser rentabilizado em alguma aplicação no mercado financeiro.

e) Como o cliente optou por parcelar o valor em 20 (vinte) vezes, considerando que o primeiro pagamento ocorra somente no mês seguinte à compra (postecipado), temos:




O valor da parcela já havia sido calculado no item b, portanto, agora basta calcular o valor presente, utilizando a relação: $PMT\,\frac{(1-(1+i)^{-n})}{i}$. Assim, temos:

$$Valor\ Presente = 2.672\,\frac{(1 - 1{,}005^{-20})}{0{,}005} = 50.7340{,}38$$

Esse seria o valor suficiente para a aquisição do veículo, portanto o cliente economizaria a diferença de R$ 2.705,62 (dois mil setecentos e cinco reais e sessenta e dois centavos).

**Considerações:**

Nesta questão é apresentado um anúncio utilizado frequentemente pelas revendedoras de automóveis em que é oferecida taxa de juros zero para o cliente parcelar a compra, ou seja, caso o cliente escolha dividir o pagamento não haverá aumento no valor futuro do automóvel.

A importância deste problema se traduz basicamente em fazer o aluno refletir sobre a verdadeira intenção do anúncio e estimulá-lo a pensar sobre qual a vantagem existiria se a compra fosse realizada à vista.

Torna-se adequado também mostrar ao aluno a vantagem que pode existir na situação em que o cliente mesmo possuindo condições de realizar a compra à vista, optar pela compra parcelada e realizar uma aplicação financeira.

Na situação apresentada, após fornecer um tempo para o aluno responder é possível verificar a capacidade do mesmo em elaborar um fluxo de caixa, mostrando os rendimentos que o cliente pode obter com a opção de investir o valor e pagar parceladamente.

### 4.2.6 Pagando com cartão de crédito, questão de autoria própria.

Na **Figura 4** é apresentada uma fatura de cartão de crédito em que são mostradas as formas de pagamentos possíveis, como pagamento total, do valor mínimo e várias opções de parcelamento da fatura. Diante das informações apresentadas, responda:

a) Qual o valor dos juros da próxima fatura se o cliente optar por pagar o valor mínimo?
b) Caso decida parcelar a fatura quanto será pago de juros se decidir por 6, 12, 18 e 24 meses?
c) Considerando os juros nominais calculados na letra b, determinar as taxas efetivas dos respectivos períodos.

**Pagamento total**
**R$ 2.327,94**

**Pagamento mínimo***
**R$ 349,19**

**Vencimento**
**20/04/2017**

***Lembre-se: ao pagar o valor mínimo, você arcará com taxas e encargos apontados nesta fatura, incidentes sobre a diferença entre o valor total e o valor pago. Valor máximo dos encargos em caso de pagamento mínimo até o vencimento: R$ 368,56.**

| **CET** | **No Período** | **Anual** |
|---|---|---|
| CET FINANCIAMENTO | 17,77 %A.M. | 612,57 %A.A. |
| CET COMPRAS PARCELADAS COM JUROS | 10,51 %A.M. | 232,09 %A.A. |
| CET PARCELAMENTO DE FATURA | 10,51 %A.M. | 232,09 %A.A. |
| CET SAQUE | 10,51 %A.M. | 232,09 %A.A. |

| **Encargos** | **No Período** | **Máx.Próx.Período** |
|---|---|---|
| ROTATIVO | 16,89 %A.M. | 18,00 %A.M. |
| COMPRAS PARCELADAS COM JUROS | 9,90 %A.M. | 10,90 %A.M. |
| SAQUE | 17,50 %A.M. | 18,00 %A.M. |

IOF **0,0082 % ao dia + 0,38 %**

**Parcelamento de Fatura** - Uma opção para organizar o seu orçamento.

| | | |
|---|---|---|
| **6x R$ 428,61** | **9x R$ 302,97** | **12x R$ 240,72** |
| **15x R$ 203,71** | **18x R$ 302,97** | **24x R$ 148,87** |

**Limites do seu cartão**

| | | |
|---|---|---|
| **Limite de crédito** | **R$** | **11.300,00** |
| **Limite de saque** | **R$** | **1.695,00** |

**Limites do seu cartão**

| | | |
|---|---|---|
| **Limite de crédito** | **R$** | **2.026,58** |

**Figura 4 – Fatura real de cartão de crédito.**

**Resolução:**

a) De acordo com dados apresentados na fatura da figura 4:

$$Pagamento\ Total = 2.327{,}94$$
$$Pagamento\ Mínimo = 349{,}19$$
$$Valor\ Máximo\ dos\ Encargos = 368{,}56$$

Como o cliente optou pelo pagamento mínimo da fatura, incidirão juros do rotativo e do IOF sobre o valor restante. Assim:

$$Rotativo = 16{,}68\%\ a.m$$

$$IOF = 0{,}0082\%\ a.d + 0{,}38\%$$

Para facilitar os cálculos será considerado o período exato de 1 mês entre o pagamento das duas faturas. Desta forma:

$$Base\ de\ cálculo = 2.327{,}94 - 349{,}19 = 1.978{,}75$$

$$Rotativo = Base\ de\ Cálculo \cdot Rotativo = 1.978{,}75 \cdot 0{,}1668 = 330{,}06$$

$$IOF = Base\ de\ cálculo(n\ x\ IOF + IOF\ adicional) = 1.978{,}75\left(30\frac{0{,}0082}{100} + \frac{0{,}38}{100}\right) = 12{,}39$$

Portanto, o total de encargos pelo pagamento mínimo da fatura é dado por:

$$Encargos = Rotativo + IOF = 330{,}06 + 12{,}39 = 342{,}45.$$

b) Para a resolução deste item basta considerar as opções apresentadas na fatura, conforme relacionadas na Tabela 1.

Tabela 1 - Relação dos Juros calculados por período de parcelamento.

| **Número de parcelas** | **Valor da parcela (R$)** | **Valor Total** | **Juros** |
|---|---|---|---|
| 6 | 428,61 | 2.571,66 | 243,72 |
| 12 | 240,72 | 2.888,64 | 560,70 |
| 18 | 179,15 | 3.224,70 | 896,76 |
| 24 | 148,87 | 3.572,88 | 1.244,94 |

c) Como as taxas calculadas na letra b são nominais, para o cálculo das taxas efetivas deve-se proceder da seguinte maneira:

1 – Para 6 (seis) meses:

$$I_n = \frac{Juros}{Fatura} = \frac{243{,}72}{2.327{,}94} = 10{,}47\%$$

Deve-se posteriormente realizar o cálculo da taxa mensal:

$$In(mensal) = \frac{In}{6} = \frac{10{,}47}{6} = 1{,}75\%$$

Utilizando a relação de taxa equivalente, apresentada na seção 3.3.4, tem se:

$$In = (1 + In(mensal))^6 - 1 = \left(1 + \frac{1,75}{100}\right)^6 - 1 = 10,97\% \text{ a.s}$$

O valor dos juros apresentado na tabela se refere ao período do parcelamento, ou seja, para o caso do pagamento em 6 (seis) parcelas, os juros pagos no período de seis meses e assim sucessivamente. Portanto, o cálculo é dado pela subtração entre o valor total pago e o valor da fatura, assim, ainda para o período de seis meses, tem-se:

$$Juros = 2.571,66 - 2.327,94 = 243,72$$

**Considerações:**

Nesta questão é abordada utilização do cartão de crédito como forma de pagamento.

Na primeira alternativa é abordado o conceito de pagamento mínimo, devendo ser salientado para o aluno quais são as consequências da prática recorrente de pagamento de valor menor do que o total do fatura, em decorrência das altas taxas de juros praticadas.

A alternativa b é utilizada para explorar as novas regras dos cartões de crédito, em que não é mais permitido o pagamento do valor mínimo reiteradamente. Deve ser estimulado ao aluno avaliar as possibilidades de parcelamento da fatura em que são utilizados juros mais baixos. Assim é possível comparar os juros pagos utilizando o rotativo do cartão ou aderindo a uma das alternativas de parcelamento.

### 4.2.7 Financiando seu imóvel, questão de autoria própria.

Na figura 5 são apresentadas informações referentes a uma simulação de compra de imóvel realizada em um site específico para essa finalidade.

| | |
|---|---|
| Tipo de Imóvel | Residencial |
| Condição de Imóvel | Imóvel usado |
| Localização | ES / Vila Velha |
| Simular a partir do | Valor / Renda |
| Valor do imóvel | 200.000,00 |
| Percentual financiado | 70 % ou valor financiado: 140.000,00 |
| Prazo (meses) | 360 (30 anos) |
| Idade do proponente | 37 anos |

Simular financiamentos

**Figura 5 - Dados para Financiamento de Imóvel.**

Considerando os dados apresentados, determine:

a) O Valor da parcela, considerando uma taxa de juros de 10% ao ano e utilizando o sistema de amortização PRICE.

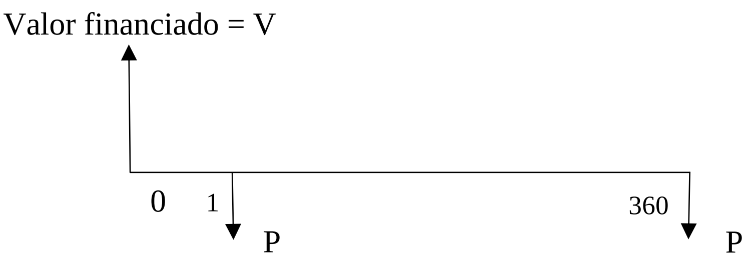
b) Caso fosse utilizado o sistema de amortização constante, qual seria a amortização mensal do contrato?

c) Construa a tabela PRICE do financiamento, demonstrando os cálculos das três primeiras linhas.

d) Construa a tabela SAC do financiamento, demonstrando as três primeiras linhas.

**Resolução:**

**a)** O fluxo de caixa do financiamento é representado da seguinte forma:




Importante verificar que o imóvel custa R$ 200 mil, entretanto, conforme mostrado na tela, o financiamento é de 70% do valor, portanto, R$ 140 mil. Assim:

$$V = P\,\frac{(1-(1+i)^{-n})}{i}$$

Como a taxa apresentada na tabela está em base anual, é preciso antes calcular a taxa equivalente mensal.

$$1 + i_m = \sqrt[12]{(1+i)}$$

$$i_m = \sqrt[12]{1{,}10} - 1$$

$$i_m = 0{,}8\%$$

Portanto, esta será a taxa utilizada nos cálculos, como segue:

$$P = V\,\frac{i}{(1-(1+i)^{-n})}$$

$$P = 140.000\,\frac{0{,}008}{(1-(1{,}008)^{-360})}$$

$$P = 1.184{,}25$$

Logo, o valor da parcela nas condições da simulação apresentada é de R$ 1.185,25.

**b)** No caso do SAC, para calcular o valor da amortização A, basta dividir o valor financiado pela quantidade n de parcelas.

$$A = \frac{V}{n}$$

$$A = \frac{140.000}{360}$$

$$A = 388{,}89$$

Portanto, a amortização mensal do contrato será de R$ 388,89.

**c)** Para montar a tabela do sistema PRICE será utilizada a parcela calculada no item a. Os juros são obtidos por meio da multiplicação da taxa mensal, calculada no item b, pelo saldo devedor no início do período. A amortização é dada pela diferença entre o valor da parcela e da amortização. Por fim, o saldo devedor de cada período é dado pela diferença entre o saldo do mês anterior e a amortização do mês atual. Assim:

**No fim do primeiro mês, n=1:**

$Juros_1 = 0{,}008 \times 140000 = 1.116{,}38$

$A_1 = P - J_1 = 1.184{,}25 - 1.116{,}38 = 67{,}87$

$S_1 = S_0 - A_1 = 140.000 - 67{,}87 = 139.932{,}13$

**No fim do segundo mês, n=2:**

$Juros_2 = 0{,}008 \times 139.932{,}13 = 1.115{,}84$

$A_2 = P - J_2 = 1.184{,}25 - 1.115{,}84 = 68{,}41$

$S_2 = S_1 - A_2 = 139.932{,}13 - 68{,}41 = 139.863{,}72$

**No fim do terceiro mês, n=3:**

$Juros_3 = 0{,}008 \times 139.863{,}72 = 1.115{,}29$

$A_3 = P - J_3 = 1.184{,}25 - 1.115{,}29 = 68{,}96$

$S_3 = S_2 - A_3 = 139.863{,}72 - 68{,}96 = 139.863{,}72 = 139.794{,}76$

Com os valores calculados, as três primeiras linhas da tabela PRICE serão preenchidas da seguinte forma:

| n | Parcela (R$) | Amortização (R$) | Juros (R$) | Saldo (R$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | 140.000,00 |
| 1 | 1.184,25 | 67,87 | 1.116,38 | 139.932,13 |
| 2 | 1.184,25 | 68,41 | 1.115,84 | 139.863,72 |
| 3 | 1.184,25 | 68,95 | 1.115,29 | 139.794,76 |

**d)** Para montar a tabela do SAC será utilizada a amortização calculada no item b. Os juros de cada mês são calculados por meio da multiplicação da taxa mensal pelo saldo devedor no início do período e as parcelas são dadas pelo soma dos juros com a amortização. Por fim, o saldo devedor de cada período é dado pela diferença entre o saldo do mês anterior e a amortização do mês atual. Assim:

**No fim do primeiro mês, n=1:**

$Juros_1 = 0{,}008 \times 140000 = 1.116{,}38$

$P_1 = A + J_1 = 388{,}89 + 1.116{,}38 = 1.505{,}27$

$S_1 = S_0 - A_1 = 140.000 - 388{,}89 = 139.611{,}11$

**No fim do segundo mês, n=2:**

$$Juros_2 = 0{,}008 \times 139.611{,}11 = 1.113{,}28$$
$$P_2 = A + J_2 = 388{,}89 + 1.113{,}28 = 1502{,}17$$
$$S_2 = S_1 - A_2 = 139.611{,}11 - 388{,}89 = 139.222{,}22$$

**No fim do terceiro mês, n=3:**

$$Juros_3 = 0{,}008 \times 139.222{,}22 = 1.110{,}18$$
$$P_2 = A + J_2 = 388{,}89 + 1.110{,}18 = 1.499{,}07$$
$$S_3 = S_2 - A_3 = 139.222{,}22 - 388{,}89 = 138.833{,}33$$

Com os valores calculados, as três primeiras linhas da tabela SAC será preenchida da seguinte forma:

| n | Parcela (R$) | Amortização (R$) | Juros (R$) | Saldo (R$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | 140.000,00 |
| 1 | 1.505,27 | 388,89 | 1.116,38 | 139.611,11 |
| 2 | 1.502,17 | 388,89 | 1.113,28 | 139.222,22 |
| 3 | 1.499,07 | 388,89 | 1.110,18 | 138.833,33 |

**Considerações:**

A importância desta questão reside em estimular o aluno a entender como são calculados os financiamentos de longo prazo. É adequado deixar claro que são utilizados valores reais, inclusive quanto à taxa de juros e prazo da operação.

Deve ser dado destaque também em relação à variação das parcelas, dos juros e das amortizações, chamando a atenção para o fato de que as parcelas no SAC começam maiores, mas vão reduzindo ao longo do tempo e que mesmo os sistemas sendo equivalentes, os juros pagos no sistema SAC são inferiores, pois o financiamento é amortizado mais rápido.

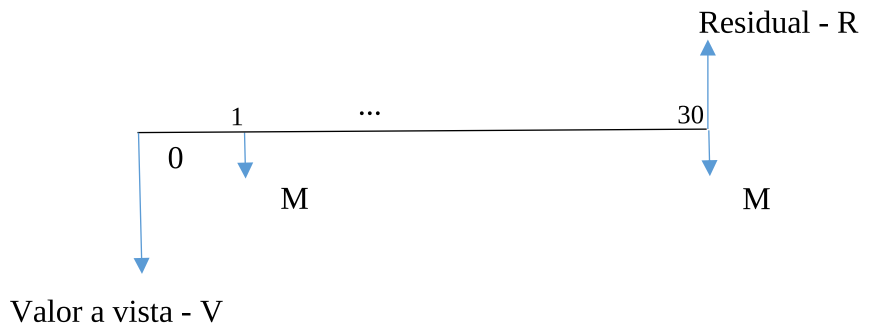
### 4.2.8 Comprar ou alugar? Questão de autoria própria.

Um equipamento pode ser alugado por R$75,00 mensais ou comprado por R$2.000,00. A vida útil do equipamento é de 30 meses e o valor residual ao fim desse período é de R$300,00. Se o equipamento for comprado, há um custo mensal de R$5,00 de manutenção.

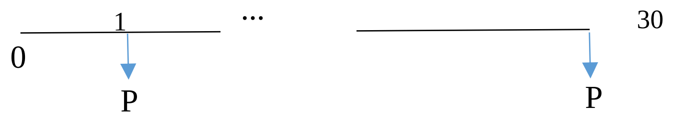
Considerando uma taxa de atualização de 1% ao mês, qual a melhor alternativa entre comprar ou alugar?

**Resolução:**

Para a compra do equipamento o fluxo de caixa é dado por:




Considerando o fluxo uniforme equivalente, no período de 30 meses:




Igualando os dois fluxos no tempo 0, temos:

$$V + \frac{M}{(1+i)} + \frac{M}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{M}{(1+i)^n} + \frac{M}{(1+i)^n} = P \cdot \frac{(1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$2000 + \frac{5}{1{,}01} + \frac{5}{1{,}01^2} + \cdots + \frac{5}{(1{,}01)^{30}} + \frac{300}{(1{,}01)^{30}} = P \cdot \frac{(1-(1{,}01)^{-30}}{0{,}01}$$

Resolvendo a expressão, chega-se ao valor de $P = 82{,}50$

Portanto, nas condições colocadas, o custo mensal para compra e manutenção do equipamento é de R$ 82,50, portanto, a melhor opção é alugar a máquina por R$ 75,00 ao mês.

**Considerações:**

Questão interessante, pois exercita a capacidade de análise dos alunos em relação à tomada de decisão quanto às possibilidades financeiras existentes, utilizando para isso os conceitos de fluxo de caixa, valor residual e custo. Em um primeiro momento pode parecer que a compra é a melhor opção, entretanto os cálculos demonstram que o aluguel é mais interessante.

### 4.2.9 Pensando no futuro, questão de autoria própria.

Supondo juros de 0,5% ao mês, quanto se deve investir mensalmente, durante 35 anos, para ao fim desse prazo obter uma renda de 2 (dois) mil reais por tempo indeterminado?

**Resolução:**

Para facilitar a resolução deste problema é adequado que o mesmo seja desmembrado em duas partes, o momento da acumulação, onde o dinheiro é investido e o momento das retiradas mensais.

Iniciando pela parte das retiradas, é importante saber qual deve ser o montante M que proporcionará um rendimento mensal P igual ao valor desejado e por tempo indeterminado, ou seja, mesmo com a retirada de R$ 2 mil por mês o montante acumulado deve permanecer o mesmo.

Logo, considerando a taxa de rentabilidade $i$, de 0,5% ao mês, tem-se:

$$M.i = P$$

$$M.0{,}005 = 2000$$

$$M = \frac{2000}{0{,}005} = 400.000$$

Portanto, ao final do período de acumulação o montante deverá ser de R$ 400 mil. Assim, calculando o valor presente do período de 35 anos de acumulação:

$$VP = \frac{VF}{(1+i)^n}$$

Lembrando que a taxa é mensal, portanto o tempo de 35 anos deve ser multiplicado por 12 (quantidade de meses em um ano), totalizando 420 meses.

Em seguida, utilizando a relação entre os valores depositados e o valor presente, tem-se:

$$VP = P\,\frac{(1-(1+i)^{-n})}{i}$$

Igualando as duas expressões:

$$VF = P\,\frac{(1-(1+i)^{-n})}{i}.(1+i)^{n}$$

Isolando o valor de P, tem-se:

$$P = VF.\frac{i}{(1+i)^{n}.(1+i)^{n}}$$

$$P = 400000.\frac{0{,}005}{(1{,}005)^{420}.(1{,}005)^{420}}$$

$$P = 280{,}76$$

Finalmente, para que uma pessoa consiga uma renda perpétua de R$ 2.000,00, com uma taxa de 0,5% ao mês, é preciso depositar mensalmente o valor de R$ 280,00 durante 35 anos.

#### 4.2.10 Previdência

Para se aposentar com comodidade, João realiza alguns cálculos e estima valores para uma aposentadoria mensal. Considerando que o fundo de previdência complementar garante um rendimento de 10% a.a e a remuneração do João seja de R$ 5.000,00, e que passe a depositar 10% do seu salário e prevê trabalhar por mais 30 anos.

a) Determine o valor que será depositado mensalmente por João, caso sejam mantidos os dados iniciais.

b) Calcule o montante que João teria reservado ao final dos trinta anos de participação, considerando que neste período tivesse depositado mensalmente seu dinheiro numa conta poupança que rende uma média de 6% a. a de juros. Desconsiderar também a inflação do período.

c) Qual será o montante juntado ao fim dos 30 anos se João tivesse optado por aderir ao fundo de pensão?

**Resolução:**

**a)** Como será depositado 10% da remuneração, o valor é dado por:

$$Valor\ Mensal = remuneraçãox\frac{10}{100} = 5.000x0{,}1 = 500$$

Portanto, o valor depositado mensalmente por João é de R$ 500,00.

**b)** Os depósitos mensais de R$ 500,00 por mês, determinam a cada ano o montante guardado de R$ 6.000,00. Considerando o rendimento da aplicação, de 6% ao ano, temos:


Assim, utilizando a relação $VP = PMT\frac{(1-(1+i)^{-n})}{i}$, tem-se:

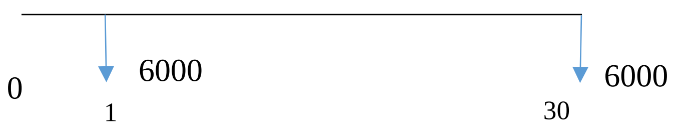
$$VP = \frac{6000(1-(1{,}06)^{-30})}{0{,}06} = 82.588{,}99$$

Como este é o valor presente, é preciso ainda calcular o valor futuro da seguinte forma:

$$VF = VP(1+i)^{30} = 82.588{,}99(1{,}06)^{30} = 474.349{,}12$$

Portanto, o valor total arrecadado ao longo dos 30 anos será de R$ 474.349,12.

**c)** Este item é análogo ao item anterior, entretanto, deve-se considerar a taxa anual de 10% ao ano, assim:



Utilizando a relação $VP = PMT\frac{(1-(1+i)^{-n})}{i}$, tem-se:

$$VP = 6.000\frac{(1-(1,1)^{-30})}{0,1} = 56.561,49$$

Como este é o valor presente, é preciso ainda calcular o valor futuro da seguinte forma:

$$VF = VP(1+i)^{30} = 56.561,49(1,1)^{30} = 986.964,14$$

Portanto, o valor total arrecadado ao longo dos 30 anos será de R$ 986.964,14.

**Considerações:**

Nessa questão é apresentada definição de previdência e busca-se analisar se o aluno consegue resolver problemas envolvendo uma quantidade de informação relevante. Observa-se que os itens da questão estão em ordem crescente de complexidade, com o objetivo de fazer o aluno absorver os conceitos separadamente e propiciar ao professor avaliar a capacidade de o aluno organizar os dados de modo a chegar a suas conclusões de forma clara e fundamentada.

No item a é exigida do aluno a montagem do fluxo de caixa considerando os depósitos realizados e a cobrança da taxa de administração.

O item b é um complemento do item a em que é verificada a capacidade do aluno em calcular o montante acumulado ao longo do tempo, além de estimular a percepção dos efeitos que os juros compostos geram nas aplicações.

Para finalizar, o item c insere informações tornando os cálculos mais próximos da realidade com o objetivo de exigir que o aluno ajuste ou refaça o fluxo e aplique os mesmos conceitos dos itens a e b, com o objetivo de fixar melhor os conceitos apresentados, além de demonstrar os efeitos que uma pequena diferença na taxa juros provoca no montante final da aplicação.

## 4.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo foram mostrados exemplos de como a educação financeira pode ser abordada em sala de aula considerando situações práticas. O objetivo foi selecionar problemas relacionados a assuntos que estão diariamente nos meios de comunicação e que são pertinentes a uma adequada compreensão dos alunos quanto a planejamento financeiro, incentivo ao consumo consciente, formas de pagamento, anúncio comerciais atrativos com técnicas de marketing, utilização do cartão de crédito, Previdência, etc.

Importante destacar que as questões não estão expostas em ordem de dificuldade, como tradicionalmente é colocado nos livros didáticos, pois o objetivo é que os alunos resolvam da forma que melhor lhes convierem, cabendo ao professor a melhor forma de aplicação em sala de aula.

Ao final das resoluções realizadas pelos alunos é recomendável que o professor esclareça as dúvidas individuais para todo o grupo, buscando maior participação de todos e podendo assim verificar como eles pensam e agem diante das situações apresentadas.

Por fim é importante que o professor oriente os alunos que apesar da individualidade de cada um é possível e saudável que as pessoas tenham consciência do valor do dinheiro no tempo e que um bom planejamento financeiro permite, mesmo para aqueles que não dispõem de muitos recursos, a realização dos seus sonhos.

# 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi buscado demonstrar como a educação financeira tem se desenvolvido ao longo do tempo, apresentando as iniciativas de órgãos da sociedade civil, tanto privadas quanto públicas, concretizadas principalmente pelo desenvolvimento da Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF, que possui trabalhos realizados por meio dos seus programas transversais, com destaque para o Projeto Educação Financeiro nas Escolas, que já produziu interessante material para ser aplicado na rede de ensino básico regular.

Ressalta-se a importância de se apresentar aos alunos os conceitos básicos de matemática financeira que são utilizados para um bom desenvolvimento da educação financeira. Essa abordagem é realizada no sentido específico de permitir ao aluno a obtenção de conhecimento de forma direta das ferramentas utilizadas para a tomada de decisões frente às formas de consumo e investimentos existentes. Com esta finalidade, a apresentação buscou abordar basicamente a definição de taxas de juros e suas aplicações nas operações de financiamento, de investimento, sistemas de amortização, regimes de juros, previdência, etc.

Ainda com fim de difundir entre os alunos a importância da educação financeira e aplicação do conceito de taxas, foram apresentadas possibilidades de investimentos existentes atualmente no mercado, salientando os benefícios que podem ser obtidos mediante adequado gerenciamento dos recursos financeiros em produtos alinhados aos objetivos almejados.

As situações apresentadas para serem discutidas em sala de aula procuram auxiliar a melhoria do conhecimento relativo à prática da matemática Financeira no ensino médio, tanto por parte do aluno quanto do professor. Foram abordados assuntos do cotidiano, com o objetivo de gerar discussões que promovam o amadurecimento dos educandos. As atividades escolhidas retratam situações do dia a dia com as quais os alunos se deparam a todo o momento. Entretanto é adequado que os alunos estejam familiarizados aos principais conteúdos de matemática Financeira.

# REFERÊNCIAS


[1] Araújo, Fernando Cosenza e Calife, Flavio Estevez. Artigo A história não contada da Educação Financeira no Brasil. Disponível em: < http://www.boavistaservicos.com.br/wp-content/uploads/2014/08/A-hist%C3%B3ria-n%C3%A3o-contada-da-educa%C3%A7%C3%A3o-financeira-no-Brasil.pdf >. Acessado em dezembro de 2016.

[2] BARBOSA, Gláucia Sabadini. Dissertação de mestrado Educação Financeira Escolar: Planejamento Financeiro. Disponível em: <http://www.ufjf.br/mestradoedumat/files/2011/05/Disserta%C3%A7%C3%A3o_GlauciaSabadini_20151.pdf >. Acessado em janeiro de 2017.

[3] Celso Silva de Carvalho, Luiz. de Souza Elia, Bruno: Alberto Decotelli, Carlos: **Matemática Financeira Aplicada, volume 2:** Editora FGV, 2009.

[4] HUAMAN HUANCA, Roger Ruben. A resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem-avaliação de matemática na e além da sala de aula. 2006. 247 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2006. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/91004>

[5] MUNIZ, Leonardo de Oliveira. Noções de Matemática Financeira no Ensino Médio: Relato de Atividades desenvolvidas. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=83996>. Acessado em dezembro de 2016.

[6] Lima, Elon Lages. Cezar Pinto Carvalho, Paulo.; Wagner, Eduardo: César Morgado, Augusto: **A Matemática do Ensino Médio, volume 2:** SBM, 2016.

[7] MATTA, Rodrigo Octávio Beton e AMARAL, Sueli Angélica do. Oferta e demanda de informação financeira pessoal: o Programa de Educação Financeira do Banco Central do Brasil e os universitários do Distrito Federal. Disponível em: <http://enancib.ibict.br/index.php/enancib/ixenancib/paper/viewFile/3057/2183 >. Acessado em fevereiro de 2017.

[8] Parente, Ulisses Lima. Neto, Antônio Caminha M. Neto. Artigo A Soma dos Termos de uma PG Infinita. < https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/a10w5cypxbks4.pdf>. Acessado em julho de 2018.

[9] PEGORETTI, Jordon Luiz. Dissertação de Mestrado A Matemática Financeira e a Inclusão Bancária dos Alunos do Ensino Médio. Disponível em: <http://www.ufjf.br/mestradoedumat/files/2011/05/Disserta%C3%A7%C3%A3o-_-Marcelo-Bergamini-Campos.pdf >. Acessado em novembro de 2016.

[10] Santos, Marco Antônio Moretto . Dissertação de mestrado Educação Financeira e Resolução de Problemas: Contribuição para o Ensino de matemática na Educação de Jovens e Adultos. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/66866/000871959.pdf?sequence=1>. Acessado em janeiro de 2017.[10] SAVOIA, José Roberto Ferreira. Saito, André Taue e Santan, Flávia

de Angelis. Artigo Paradigmas da educação financeira no Brasil. Disponível em: <http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/rap/article/view/6620>. Acessado em novembro de 2016.

[11] Santos, Marco Antônio Moretto . Dissertação de mestrado Educação Financeira e Resolução de Problemas: Contribuição para o Ensino de matemática na Educação de Jovens e Adultos. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/66866/000871959.pdf?sequence=1>. Acessado em janeiro de 2017.

[12] ZUPAN, Leonardo Spyrídes Boabaid. Dissertação de Mestrado Projeto de Pesquisa sobre Educação Financeira para Alunos do Ensino Fundamental. Disponível em: <http://tcc.bu.ufsc.br/Adm289664.pdf >. Acessado em outubro de 2016.

[13] Site www.brasil.gov.br/economia-e-emprego/2009/11/empréstimos, BACEN (Banco Central do Brasil). Economia e Emprego/Empréstimos. Acessado em dezembro 2016.

[14] Site http://www.vidaedinheiro.gov.br/pagina-23-no-brasil.html, BRASIL, Estratégia Nacional de Educação Financeira. Acessado em dezembro de 2016.