



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Estabilidade de singularidades nuas

Ébano Vitor Lopes Martins

Vitória-ES

2019

Ébano Vitor Lopes Martins

Estabilidade de singularidades nuas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Júlio César Fabris

Vitória-ES

2019

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

M379e Martins, Ébano Vitor Lopes, 1994-
Estabilidade de singularidades nuas / Ébano Vitor Lopes
Martins. - 2019.
145 f. : il.

Orientador: Júlio César Fabris.
Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Buracos negros. 2. Singularidades nuas. 3. Relatividade Geral. 4. Estabilidade. 5. Teoria Einstein-Maxwell-dilaton. I. Fabris, Júlio César. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 53



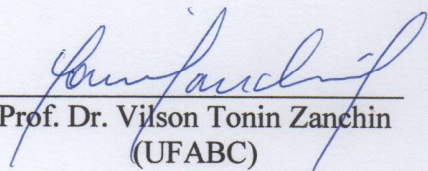
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

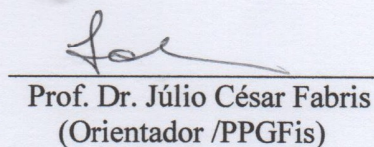
"Estabilidade de singularidades nuas"

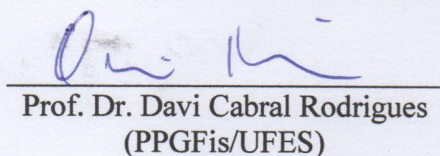
Ébano Vitor Lopes Martins

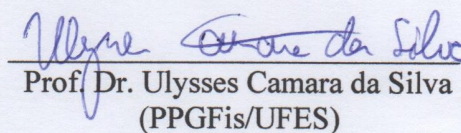
Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

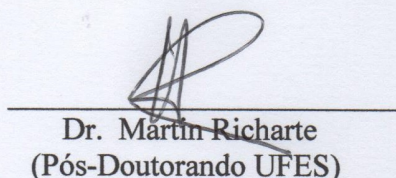
Aprovada por:


Prof. Dr. Wilson Tonin Zanchin
(UFABC)


Prof. Dr. Júlio César Fabris
(Orientador /PPGFis)


Prof. Dr. Davi Cabral Rodrigues
(PPGFis/UFES)


Prof. Dr. Ulysses Camara da Silva
(PPGFis/UFES)


Dr. Martin Richarte
(Pós-Doutorando UFES)

Vitória-ES, 29 de março de 2019.

À minha família e amigos.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Cláudia Lopes e Geraldo Martins, por me darem o sustento, educação e condições para que eu pudesse chegar até aqui.

Ao meu irmão e irmãs, pelo apoio e ajuda. Todas as caronas para a universidade e todas as vezes que me emprestaram o computador para que eu pudesse estudar.

Agradeço ao meu orientador Júlio, por todos os conselhos, pela paciência, por corrigir meus erros e por me ajudar durante todo esse período.

Ao Martín, que nesses últimos meses deu uma ajuda imprescindível para a conclusão dessa dissertação, com ajuda na escrita do texto e me ajudando a ser um profissional melhor.

À Fernanda, por me acompanhar, apoiar e incentivar durante esses anos. E por não me deixar desistir das minha metas e sonhos.

À todos os meus amigos, em especial nesse período de mestrado ao Carlos, Yago e Mateus, que sempre estiveram presentes nas brincadeira, discussões e nos momentos em que precisei de ajuda.

À CAPES pelo apoio financeiro para realização deste trabalho de pesquisa.

E por fim, agradeço à Deus que me permitiu viver tudo isso estes últimos anos.

Resumo

Alguns estudos mostraram resultados divergentes a respeito da estabilidade de soluções tipo singularidade nua presente na métrica de Schwarzschild com massa negativa. Este trabalho apresenta a comparação entre dois métodos divergentes entre si, e conclui que a solução é instável sob perturbações polares. Estudou-se também a estabilidade para a solução Einstein-Maxwell-dilaton (EMD) que tem um campo dilatônico acoplado ao campo de calibre. Foi feita a análise para o buraco negro e a singularidade nua presentes na solução através da perturbação com um campo escalar massivo e não massivo. Os resultados para as soluções tipo buraco negro se mostraram inconclusivas, enquanto que a singularidade nua é instável sob tais perturbações.

Palavras-chave: Buracos negros, Singularidades nuas, Relatividade Geral, Estabilidade, Solução EMD.

Abstract

Some studies have shown divergent results regarding the stability of naked singularity solutions present in the Schwarzschild metric with negative mass. This work presents the comparison between two divergent methods, and concludes that the solution is unstable under polar perturbations. Stability was also studied for the Einstein-Maxwell-dilaton (EMD) solution having a dilatonic field coupled to the gauge field. An analysis was made for the black hole and the naked singularity present in the solution through perturbation with a massive and non-massive scalar field. The results for black hole solutions were inconclusive, while the naked singularity is unstable under such perturbations.

Keywords: Black hole, Naked singularity, General Relativity, Stability, EMD solution.

Lista de Figuras

2.1. Cone de luz.	23
2.2. Cone de luz.	25
2.3. Diagrama de Kruskal	27
2.4. Diagrama conforme para a métrica de Minkowski	30
2.5. Diagrama conforme para a métrica de Schwarzschild	31
2.6. Sistema de fuga	32
2.7. Diagrama conforme para a métrica de Schwarzschild com $M < 0$	34
5.1. Diagrama de Penrose.	71
5.2. Potencial caso 2 para $l = 2$ e $b/r_0 = 2$	82
5.3. Potencial para o caso 3 com $l = 2$ e $ \beta /r_0 = 2$	88
5.4. Potencial caso 4 para $l = 2$ e $m = 2$	94
5.5. Potencial para o caso 5 com $l = 2$, $m = 2$ e $b/r_0 = 2$	100
5.6. Potencial caso 6 para $l = 2$, $m = 2$ e $ \beta /r_0 = 2$	105

Lista de Tabelas

5.1. Resumo	107
-----------------------	-----

Sumário

Lista de Figuras	7
Lista de Tabelas	8
Sumário	9
Introdução	12
1. Introdução a Relatividade Geral	14
1.1. Gravitação Newtoniana e Princípio da equivalência	14
1.2. Resultados matemáticos	15
1.3. Equações de Einstein	18
2. Solução de Schwarzschild	19
2.1. Métrica de Schwarzschild	19
2.1.1. Coordenadas de Eddington-Finkelstein	23
2.1.2. Extensão máxima	25
2.1.3. Diagrama Conforme	28
2.2. Métrica de Schwarzschild com massa negativa	31
2.3. Singularidades	34
3. Resultados matemáticos	37
3.1. Perturbações	37
3.2. O problema de Sturm-Liouville	42
3.2.1. Propriedades	43

3.3. Operadores auto-adjuntos	45
3.4. Condições para a estabilidade	47
4. Métodos	50
4.1. Método 1 - Gibbons et al.[1]	50
4.1.1. Perturbações gravitacionais	51
4.1.2. Análise da estabilidade	52
4.1.3. Análise da estabilidade	55
4.1.4. Uma condição de contorno para a estabilidade	58
4.2. Método 2 - Gleiser e Dotti	61
4.2.1. Equações perturbadas para a solução de Schwarzschild	61
4.2.2. Modificação do formalismo de Regge-Wheeler-Zerilli	62
4.2.3. Soluções estáticas	63
4.2.4. Soluções dependentes do tempo	64
4.2.5. Soluções instáveis	64
4.3. Comparação entre os métodos	65
5. Solução EMD	67
5.1. Solução da teoria EMD	68
5.2. Perturbação da solução EMD	70
5.2.1. Caso 1: $b = 0$ e $m^2 = 0$	73
5.2.2. Caso 2: $b > 0$ e $m^2 = 0$	77
5.2.3. Caso 3: $b = - \beta < 0$ e $m^2 = 0$	84
5.2.4. Caso 4: $b = 0$ e $m^2 \neq 0$	90
5.2.5. Caso 5: $b > 0$ e $m^2 \neq 0$	96
5.2.6. Caso 6: $b = - \beta < 0$ e $m^2 \neq 0$	102
Conclusão	108
A. Equação da geodésica	110
B. Função hipergeométrica	112
C. Função confluyente de Heun	114
C.1. Expansão em série de potência no ponto $z = 0$	114

C.2. Expansão no infinito	116
D. Campo escalar	118
E. Potencial Regge-Wheeler	121
F. Análise dos índices de deficiência	124
G. Análise dos pontos singulares na coordenada tartaruga	131
Referências Bibliográficas	140

Introdução

A teoria da Relatividade Geral (RG), desenvolvida por Einstein, descreve a gravidade como uma propriedade geométrica do espaço-tempo. Em particular, mostra como a curvatura do espaço-tempo é modificada na presença de matéria e/ou energia. Essa teoria é regida por equações que permitem soluções que descrevem buracos negros, que é um espaço-tempo onde a região externa está separada da região interna pelo horizonte de eventos. Este é uma hipersuperfície limite de máximo retorno.

Foi graças à Schwarzschild, em 1916[2], que uma solução tipo buraco negro surgiu como a primeira solução simetricamente esférica das equações de Einstein para o vácuo. O termo “buraco negro” foi introduzido, muito tempo depois, por Wheeler em 1967[3]. Ele é formado quando um corpo de massa M colapsa em um raio menor que $r = 2GM/c^2$, chamado raio gravitacional.

O mesmo tipo de solução das equações de Einstein pode ser encontrada tomando a massa como negativa nas equações de campo, porém com uma descrição física diferente. Nesse caso há a aparição de uma singularidade, assim como no buraco negro, porém ela não está coberta pelo horizonte: esse objeto é chamado de *singularidade nua*. Esse tipo de singularidade é acessível para um observador externo enquanto a singularidade do buraco negro não. Um ponto importante é saber se tais objetos podem existir ou não no universo, e nesse contexto estuda-se a estabilidade das soluções.

O artigo de Gibbons et al. [1], em 2004, foi o primeiro a estudar perturbativamente a singularidade nua presente na métrica de Schwarzschild com massa negativa. Nesse artigo as equações perturbadas são escritas na forma de uma equação tipo-Schrödinger e é analisada a positividade do auto-valor. Conclui-se que a singularidade é estável a partir de uma determinada escolha de um valor particular das condições de contorno,

que satisfazem as condições físicas do problema, e que garantem que o operador seja auto-adjunto. Entretanto, em 2006, Gleiser e Dotti [4], fizeram uma revisão desse artigo e usando um método diferente, encontraram que para qualquer auto-valor a solução é instável.

Essa divergência da estabilidade das singularidades nuas e o interesse em entender melhor esse objeto tão curioso foram as motivações desse trabalho. O objetivo é estudar a (in)estabilidade do caso singularidade nua da métrica de Schwarzschild, comparar ambos os métodos citados anteriormente e, posteriormente, aplicar a mesma análise para a solução Einstein-Maxwell-dilaton (EMD)[5]. A solução EMD é a teoria eficaz de baixa energia mais simples que surge na teoria das cordas. Há a presença de um campo escalar chamado campo de dilaton, que se acopla ao campo de calibre. Isso generaliza a teoria de Einstein-Maxwell adicionando o dilaton com seu respectivo termo cinético e também acoplado-o ao termo Maxwell na ação.

A dissertação foi organizada da seguinte forma. No capítulo 1 é feita uma pequena revisão da Relatividade Geral que é o material base que será usado até o final da dissertação. A solução de Schwarzschild é apresentada no capítulo 2 onde as estruturas básicas de buracos negros, como horizonte de eventos, singularidades e diagrama de Carter-Penrose, são apresentadas. Ambos capítulos são baseados em livros-textos de relatividade geral com ênfase na referência[6]. No capítulo 3 são apresentadas as ferramentas matemáticas, como os operadores auto-adjuntos e funções de quadrado integrável, que serão essenciais para a análise da estabilidade das soluções. A discussão principal dessa dissertação está no capítulo 4. Nele é feito o estudo dos artigos de Gibbons et al.[1] e Gleiser e Dotti[4] com ênfase na abordagem de cada um para lidar com a questão da estabilidade, além disso, no final é feita uma comparação entre eles, já que há uma divergência de resultados. Por fim, no capítulo 5, aplica-se a análise para a solução de EMD, abordando os vários casos possíveis de solução. Na Conclusão é descrito os resultados encontrados na dissertação de forma mais sucinta.

Capítulo 1

Introdução a Relatividade Geral

Relatividade Geral(RG) é a teoria de Einstein que estuda o espaço, tempo e a gravitação. A ideia principal dessa teoria é que a gravitação é intrínseca ao próprio espaço-tempo. Em particular, a gravidade que é sentida, por exemplo na Terra, é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo. Na RG a Gravitação é explicada como curvatura do espaço-tempo. Logo a RG é uma teoria da gravitação que emprega a geometria como ferramenta descritiva. Essa relação entre gravidade e curvatura é o que essa teoria tenta mostrar. Mas, antes da RG, já existia uma teoria da gravitação, a de Newton.

1.1. Gravitação Newtoniana e Princípio da equivalência

Na teoria Newtoniana a maneira de se abordar a gravitação é por meio de forças entre partículas. A força entre dois objetos de massa M e m_g separados por uma distância r é dada pela lei da gravitação universal

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm_g}{r^2}\hat{r}, \quad (1.1)$$

Essa mesma força, atuando em um objeto parado de massa inercial m_i para lhe dar uma aceleração, é dada pela segunda lei de Newton

$$\mathbf{F} = m_i\mathbf{a}. \quad (1.2)$$

Utilizando as equações (1.1) e (1.2), é possível calcular a aceleração sofrida por um

corpo devido a força gravitacional

$$a = - \left(\frac{m_g}{m_i} \right) \frac{GM}{r^2} \hat{r}. \quad (1.3)$$

As massas m_i e m_g possuem propriedades bem distintas, mas após um experimento da teoria newtoniana feito por Eötvös, pôde-se mostrar que

$$m_i = m_g. \quad (1.4)$$

Essa igualdade é válida no limite experimental, na RG parte-se desta igualdade, como um axioma e é isso que permite descrever a gravitação como geometria. Esse é chamado de ***Princípio da Equivalência Fraco***. A consequência desse princípio é que a aceleração em um referencial inercial é equivalente a aceleração gravitacional.

Albert Einstein fez um experimento mental que exemplifica esse fato: uma pessoa dentro de uma caixa acelerada para cima não consegue distinguir se ele realmente está sendo acelerado para cima ou se a caixa está parada sob o efeito de um campo gravitacional para baixo. Ou seja, um referencial linearmente acelerado relativo à um referencial inercial é localmente idêntico à um referencial estático sobre um campo gravitacional. Em outras palavras, localmente as leis da física se reduzem à relatividade restrita; é impossível detectar a existência de um campo gravitacional por experimentos locais. Isso ficou conhecido como Princípio de Equivalência de Einstein.

1.2. Resultados matemáticos

Uma ferramenta muito importante ao se trabalhar com a RG são os **Tensores**. Eles são objetos que seguem a seguinte lei de transformação frente à mudança de coordenadas

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_m} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_m}}{\partial x^{\nu'_m}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_m}, \quad (1.5)$$

e são úteis pois as equações tensoriais possuem a mesma forma em qualquer sistema de coordenadas. Além disso, eles estão definidos em uma variedade, que é um espaço n -dimensional localmente isomorfo ao R^n [6]. As componentes de um tensor também

mudam quando muda-se a base do espaço vetorial. Se um tensor é transformado como

$$T^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} T^{ij}, \quad (1.6)$$

então ele é dito **contravariante**. Se ele se transforma na forma

$$T_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} T_{ij}, \quad (1.7)$$

ele é chamado de **covariante**.

Também é necessário definir a **derivada covariante**, pois a derivada parcial não se transforma como um tensor. É dada por

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda. \quad (1.8)$$

O termo $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ é termo de correção para que a derivada se transforme como um tensor. Ele chama-se **conexão afim** e está ligado à ausência de um sistema cartesiano de coordenadas global. Matematicamente, está relacionado ao fato que o espaço tangente local, não coincide globalmente com o espaço-tempo.

Dados dois pontos quaisquer na variedade (superfície), é necessário ser capaz de medir a distância entre eles. Com isso define-se o **tensor métrico** $g_{\mu\nu}$ que possui as seguintes propriedades:

- É simétrico, ou seja $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$
- Possui inverso, ou seja $g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta_\sigma^\mu$,

onde δ_σ^μ é o delta de Kronecker.

Com a métrica definida, é possível introduzir o elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.9)$$

que efetivamente mede a distância entre dois pontos vizinhos na variedade. A dimensão temporal da métrica sempre terá o sinal contrário ao das dimensões espaciais, $(+, -, -, -)$ (que é a usada na dissertação) ou $(-, +, +, +)$, que é denominada assinatura da métrica.

Assumindo que $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ e $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$, ou seja a conexão é simétrica nos índices μ e ν , é possível mostrar que somente uma conexão afim é compatível com a métrica. Suas

componentes podem ser calculadas pelos **símbolos de Christoffel** dados por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}). \quad (1.10)$$

Calculando o comutador de derivadas covariantes aplicados a um tensor A_{ρ} , obtém-se

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]A_{\rho} = -R_{\rho\mu\nu}^{\alpha}A_{\alpha}, \quad (1.11)$$

onde $R_{\rho\mu\nu}^{\alpha}$ é chamado de **tensor de Riemann**, e é definido por

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}. \quad (1.12)$$

Tomando a contração do tensor de Riemann entre primeiro e o terceiro índice, chega-se à

$$R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} = R_{\mu\nu}, \quad (1.13)$$

que é um tensor simétrico chamado de **tensor de Ricci**. Ele pode ser calculado fazendo a contração de (1.12), resultando em

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda}. \quad (1.14)$$

O tensor de Riemann possui as seguintes propriedades

1. Antissimétrico em seus dois primeiros índices: $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$;
2. Antissimétrico em seus dois últimos índices: $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}$;
3. Invariante sob a troca do primeiro par de índices com o último: $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$;
4. A soma de permutações cíclicas dos últimos três índices anula-se: $R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu}$.

Calculando o traço deste tensor cria-se o **escalar de Ricci**

$$R_{\mu}^{\mu} = R. \quad (1.15)$$

E por fim, define-se o **Tensor de Einstein** por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (1.16)$$

1.3. Equações de Einstein

A ação de Einstein-Hilbert é dado por[7]

$$S[g] = \int \sqrt{-g} \left[\frac{c^4}{16\pi G} R + \mathcal{L}_m \right] dx^4, \quad (1.17)$$

onde \mathcal{L}_m é a lagrangiana de matéria. Fazendo a variação da ação com relação a $g^{\mu\nu}$, obtém-se

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \int \left[\frac{c^4}{16\pi G} R \left(\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \sqrt{-g} \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} dx^4. \quad (1.18)$$

Calculando cada termo de maneira independente, chega-se a

$$\begin{aligned} \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} &= R_{\mu\nu} + \text{divergências totais;} \\ \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} &= -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sqrt{-g}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

substituindo esses termos em (1.18), obtém-se

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \int \left[\frac{c^4}{16\pi G} R \left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sqrt{-g} + R_{\mu\nu} \right) - \frac{T_{\mu\nu}}{2} \right] \delta g^{\mu\nu} dx^4, \quad (1.20)$$

onde o **tensor energia-momento** foi definido como

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.21)$$

Aplica-se o princípio da mínima ação, ou seja, $\delta S = 0$, chega-se nas **equações de campo de Einstein**

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.22)$$

Capítulo 2

Solução de Schwarzschild

2.1. Métrica de Schwarzschild

Uma das aplicação mais simples que pode ser feita da teoria da gravitação é para um espaço-tempo vazio exterior à um corpo massivo, com simetria esférica, neutro e estático. Foi Schwarzschild, em 1916[2], que encontrou tal solução supondo essas características. Para uma solução exterior a um corpo esférico, usa-se as equações de Einstein no vácuo

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{2.1}$$

A hipótese da fonte ser um corpo estático implica que as componentes da métrica são independentes de t , e que não existe termos cruzados espaço-temporais ($dt dx^i$). Essa última condição é devido ao fato de que se for feita uma inversão temporal $t \rightarrow -t$, o termo dt^2 permanece invariante, porém os termos cruzados não. Como quer-se que a solução seja independente do tempo, esses termos tem de ser zero. Outra condição é a simetria esférica. Para impor essa condição, inicia-se com uma métrica simetricamente esférica, a métrica do espaço de Minkowski em coordenadas polares[6]

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2, \tag{2.2}$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. Uma possibilidade é multiplicar os termos da métrica por coeficiente separados que sejam funções arbitrária de (t, r, θ, ϕ) . Porém, para preservar a simetria esférica a forma de $d\Omega^2$ tem que ser mantida invariante. Portanto, para manter a invariância de $d\Omega^2$, e também a não dependência no tempo t , multiplica-se os termos da

métrica, somente, por uma função da coordenada radial r . Então

$$ds^2 = e^{2\alpha(r)} dt^2 - e^{2\beta(r)} dr^2 - e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2. \quad (2.3)$$

Devido a parametrização da coordenada radial, na Relatividade Geral não é possível saber com antecedência o que, por exemplo, a coordenada r significa. Por enquanto, define-se uma nova coordenada \bar{r} , tal que

$$\bar{r} = e^\gamma r, \quad \Rightarrow \quad d\bar{r} = e^\gamma dr + e^\gamma r d\gamma = \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right) e^\gamma dr. \quad (2.4)$$

Em termos de \bar{r} a métrica é escrita como

$$ds^2 = e^{2\alpha} dt^2 - e^{2\beta} \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{-2\gamma} d\bar{r}^2 - e^{2\gamma} \bar{r}^2 e^{-2\gamma} d\Omega^2, \quad (2.5)$$

$$ds^2 = e^{2\alpha} dt^2 - \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2(\beta-\gamma)} d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 d\Omega^2, \quad (2.6)$$

onde r é função de \bar{r} .

Agora renomeando $\bar{r} \rightarrow r$

$$\left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2(\beta-\gamma)} \rightarrow e^{2\beta}, \quad (2.7)$$

e com isso a métrica pode ser escrita como

$$ds^2 = e^{2\alpha} dt^2 - e^{2\beta} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (2.8)$$

Foi feito, simplesmente, uma troca de variável no qual o termo $e^{2\gamma}$ não existe.

Usando essa métrica e as equações de Einstein, é possível calcular as funções $\alpha(r)$ e $\beta(r)$. O primeiro passo é escrever os símbolos de Christoffel em função da métrica que são dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \partial_r \alpha, & \Gamma_{tt}^r &= e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha, & \Gamma_{rr}^r &= \partial_r \beta, \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-2\beta}, & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta, & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Esses são os termos não nulos, todos os outros são identicamente zero. As componentes

identicamente não nula do tensor de Ricci são

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= e^{2(\alpha-\beta)}[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\alpha], \\
R_{rr} &= -\partial_r^2\alpha - (\partial_r\alpha)^2 + \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\alpha, \\
R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta}[r(\partial_r\beta - \partial_r\alpha) - 1] + 1, \\
R_{\phi\phi} &= \sin^2\theta R_{\theta\theta}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Dada a condição (2.1), as componentes R_{tt} e R_{rr} do tensor de Ricci no vácuo, são relacionadas da seguinte forma

$$0 = e^{2(\beta-\alpha)}R_{tt} + R_{rr} = \frac{2}{r}(\partial_r\alpha + \partial_r\beta), \tag{2.11}$$

que implica em

$$\partial_r\alpha = -\partial_r\beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\beta + c, \tag{2.12}$$

onde c é uma constante de integração, e pode ser escolhida como sendo zero redefinindo t . Agora, a partir de $R_{\theta\theta}$ obtém-se

$$e^{2\alpha}(2r\partial_r\alpha + 1) = 1, \tag{2.13}$$

o que nos leva a

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{R_s}{r}, \tag{2.14}$$

onde R_s é uma constante. Substituindo na métrica, resulta

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \tag{2.15}$$

o termo R_s é conhecido por **raio de Schwarzschild**. Ele é determinado no limite de campo fraco, e nesse limite pode-se identificar a componente g_{tt} da métrica como

$$g_{tt} = 1 - \frac{2M}{r}, \tag{2.16}$$

onde M é a massa total da fonte que produz o campo. Longe da fonte ($r \rightarrow \infty$) a métrica de Schwarzschild se reduz ao caso do campo fraco. Então pode-se identificar

$$R_s = 2M. \tag{2.17}$$

Portanto, a métrica de Schwarzschild é dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.18)$$

onde M é a massa do objeto e r é a coordenada radial onde $r = 0$ representa o centro do objeto esférico.

Essa solução é assintoticamente plana e contém dois pontos em que a métrica diverge: $r = 0$ e $r = 2M$. Essas divergências podem ser interpretadas como “furos” no espaço-tempo, o que torna essas regiões, em geral, mal definidas. Esses pontos divergentes são conhecidos como singularidades. Entretanto, nem todos esse pontos são realmente singulares, já que a métrica depende do sistema de coordenadas adotado.

Uma maneira de entender melhor a estrutura causal desse espaço-tempo, é calculando as curvas radiais nulas, para os quais θ e ϕ são constantes e $ds^2 = 0$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (2.20)$$

Essa equação mede a inclinação do cone de luz em um plano $t - r$. Para r grande

$$r \Rightarrow \infty, \quad \frac{dt}{dr} = \pm 1, \quad (2.21)$$

que representa um espaço-tempo plano. Além disso, isso caracteriza um ângulo de 45° entre os eixos $t - r$. Próximo a superfície singular $r = 2M$

$$r \Rightarrow 2M, \quad \frac{dt}{dr} = \infty, \quad (2.22)$$

o cone de luz se fecha, como mostra a figura (2.2). Para um observador em $r > 2M$, um raio de luz, aparentemente, não consegue alcançar a superfície $r = 2M$, pelo menos nesse sistema de coordenadas.

Esse efeito é uma ilusão, e um raio de luz indo em direção à $r = 2M$ não teria problema algum em alcançar tal superfície. Mas um observador distante não saberia dizer o que

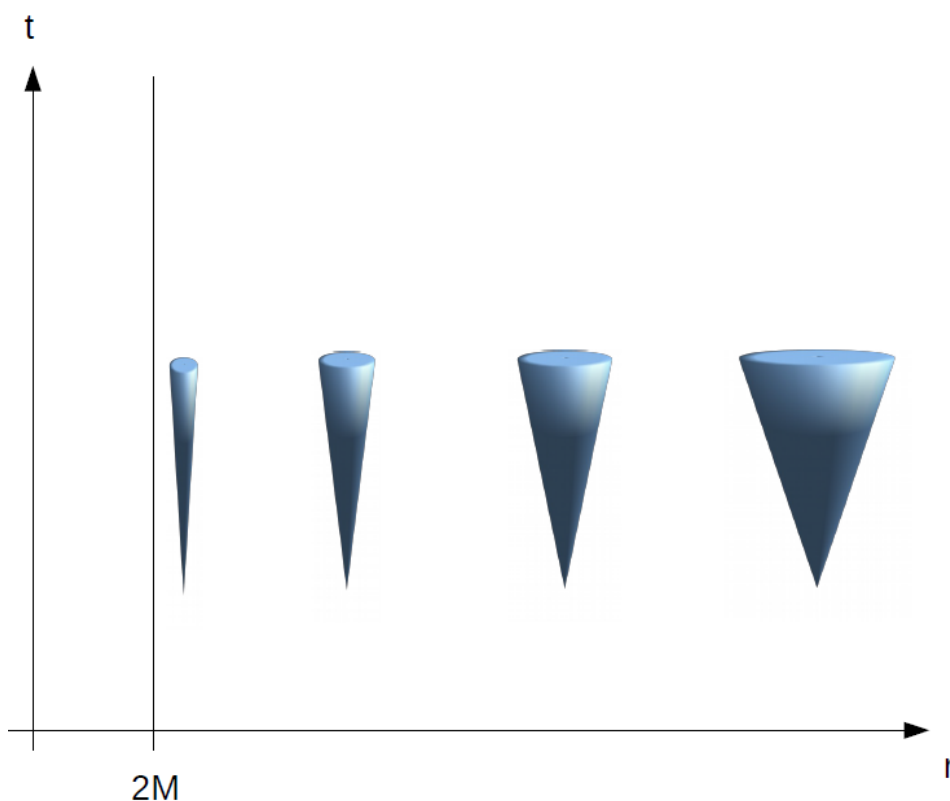


Figura 2.1.: Cone de luz.

acontece com ele. O observador veria o raio de luz se aproximar de $r = 2M$ cada vez mais e mais devagar e nunca o veria alcançar essa superfície.

A superfície $r = 0$ é realmente um ponto divergente, e é chamado de *singularidade física*. Já a singularidade em $r = 2M$ não é física; ele é um efeito devido ao sistema de coordenadas escolhido. Na métrica de Schwarzschild, a superfície $r = 2M$ é conhecida como *horizonte de eventos*. Esta é uma região do espaço-tempo de onde nem mesmo a luz pode escapar. A singularidade física envolta do horizonte de eventos é conhecida como *buraco negro*.

2.1.1. Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Um jeito de resolver o problema das singularidades é encontrar um sistema de coordenadas bem comportado em $r = 2M$, pois com o sistema de coordenadas atual, $dt/dr \Rightarrow \infty$ conforme aproxima-se dessa superfície. Uma maneira de fazer isso é mudando a coordenada t . Para isso resolve-se a equação (2.20), chegando ao seguinte resultado

$$t = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right). \quad (2.23)$$

Definindo uma nova coordenada x dada por

$$x \equiv r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right), \quad (2.24)$$

que é chamada *coordenada tartaruga*, tem-se a relação

$$\frac{dx}{dr} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1}. \quad (2.25)$$

Substituindo na métrica, obtém-se

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) (dt^2 - dx^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.26)$$

onde r está em função de x . Com essa mudança de coordenadas o cone de luz parece não se fechar, já que

$$r \Rightarrow 2M, \quad \frac{dt}{dx} = 1. \quad (2.27)$$

Além disso, os termos da métrica não divergem mais em $r = 2M$, pois, ambos g_{tt} e g_{rr} , tornam-se zero. Porém, ainda assim a métrica é degenerada.

Analisando a coordenada tartaruga, vê-se que o horizonte de eventos foi deslocado para o infinito, pois da equação (2.24) diverge, ou seja, o problema no horizonte de eventos ainda persiste. Portanto, é necessário fazer outras mudanças.

O próximo passo é definir outras novas coordenadas para contornar esse problema, tais como

$$v = t + x, \quad (2.28)$$

$$u = t - x. \quad (2.29)$$

Estas são conhecidas como *coordenadas de Eddington-Finkelstein* e são definidas de modo que $v = \text{constante}$ representa os raios de luz entrando e $u = \text{constante}$ represente os raios de luz saindo. A métrica é transformada em

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dv^2 - 2dvdr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.30)$$

Agora, parece que o problema começou a ser resolvido, pois não há mais uma divergência em $r = 2M$.

Com isso, conclui-se que $r = 2M$ é uma singularidade de coordenada somente no sistema original. Nas coordenadas de Eddington-Finkelstein $r = 2M$ é uma hipersuperfície qualquer do espaço-tempo e a condição para o cone de luz é

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0, & (\text{entrando}), \\ 2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & (\text{saindo}). \end{cases} \quad (2.31)$$

Nesse sistema de coordenadas os cones de luz são bem comportados em $r = 2M$. Os raios de luz que estão vindo em direção a $r = 2M$ não encontram problema algum para alcançar essa superfície; entretanto, os raios de luz não conseguem sair dessa superfície.

Outra coisa interessante é que, apesar do cone de luz não se fechar, ele se inclina conforme se aproxima do ponto $r = 2M$, e quando o raio de luz ultrapassa esse raio, todo o caminho futuro estará na direção radial r

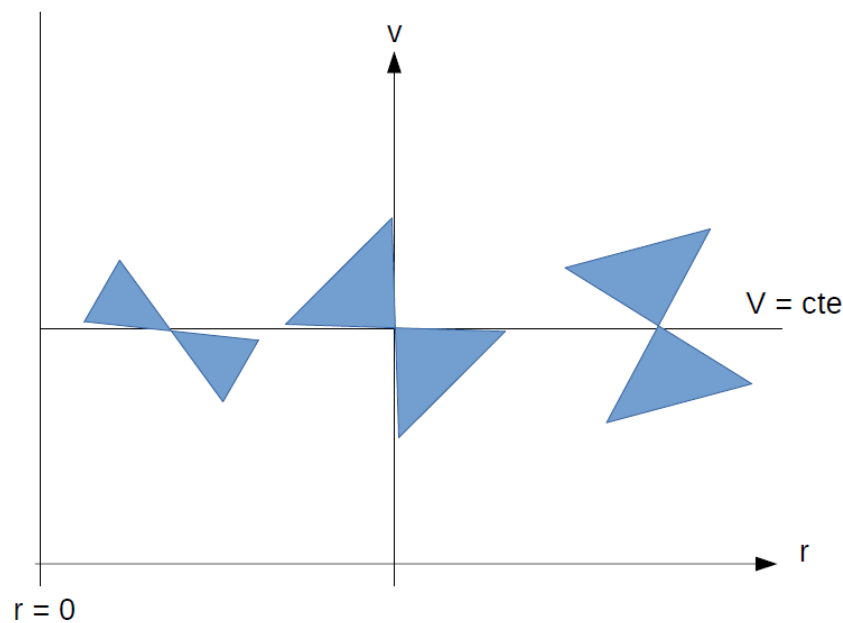


Figura 2.2.: Cone de luz.

A superfície $r = 2M$, sendo localmente regular, globalmente funciona como um ponto sem retorno: uma vez que uma partícula de teste passa por ela, ela nunca pode voltar.

2.1.2. Extensão máxima

Até agora foi feita uma troca de variáveis para tentar corrigir o problema da divergência em $r = 2M$, e encontrou-se uma coordenada, v onde a partícula que está indo em direção

ao horizonte de eventos não encontra nenhum problema. Porém, o observador em queda livre não consegue distinguir o horizonte de eventos de um outro ponto qualquer, como se o observador nunca alcançasse o horizonte. Ou seja, o sistema de coordenadas não consegue cobrir toda a variedade. Pode-se, porém utilizar u ao invés de v , nesse caso a métrica seria

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 + 2dudr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.32)$$

cuja solução para as curvas nulas é

$$\frac{du}{dr} = \begin{cases} 0, & (\text{entrando}), \\ -2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & (\text{saindo}). \end{cases} \quad (2.33)$$

Nesse caso, os raios de luz também podem alcançar a superfície $r = 2M$, porém, agora aparece um sinal negativo, ou seja, as curvas estão na direção do passado.

Com essas transformações, o espaço-tempo é estendido em duas regiões diferentes, passado e futuro. Porém, o objetivo é cobrir todo o espaço-tempo, e uma outra possível tentativa, é usar ambas as coordenadas, u e v de uma só vez na métrica,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv du - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.34)$$

onde r é definido por

$$\frac{1}{2}(v - u) = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right). \quad (2.35)$$

Nessas coordenadas $r = 2M$ é um ponto no infinito. Para colocá-lo em valor finito, é feita outra troca de coordenadas

$$T = \frac{1}{2}(V + U), \quad (2.36)$$

e

$$X = \frac{1}{2}(V - U), \quad (2.37)$$

onde

$$V = e^{v/4M} \quad e \quad U = -e^{-u/4M}. \quad (2.38)$$

Escrevendo a métrica em termos dessas novas variáveis, obtém-se

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (dT^2 - dX^2) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.39)$$

que, claramente só é singular em $r = 0$, e r é definido por

$$T^2 - X^2 = \left(1 - \frac{r}{2M}\right) e^{r/2M}. \quad (2.40)$$

Esse sistema de coordenadas (T, X, θ, ϕ) é conhecido como **coordenadas Kruskal**. Dessa relação é possível notar algumas regiões distintas:

$$\begin{cases} r = 2M & \Rightarrow & T = \pm X & (\text{retas}), \\ r = 0 & \Rightarrow & T^2 - X^2 = 1 & (\text{hipérboles}), \\ t \rightarrow \pm\infty & \Rightarrow & T = \pm X & (\text{retas}). \end{cases} \quad (2.41)$$

com isso, pode-se representar esses pontos como o diagrama da Figura (2.3), que é a

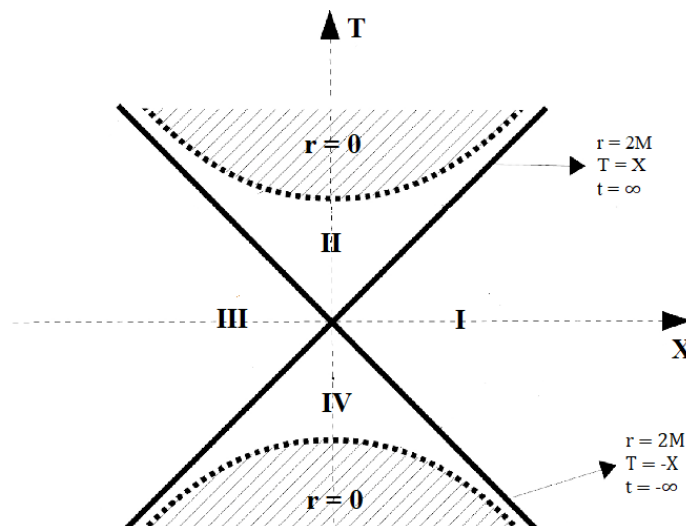


Figura 2.3.: Diagrama de Kruskal

extensão máxima da geometria de Schwarzschild e cobre toda a variedade descrita por essa solução.

No diagrama, I corresponde à $r > 2M$ que é a região onde a coordenada original é bem definida. II é a região sem retorno, qualquer partícula que a alcança necessariamente chegará em $r = 0$. A região III é idêntica à região II porém com o sinal do tempo invertido, nenhum observador pode entrar nessa região, somente sair. A região IV é um outro universo com a mesma estrutura de I , porém inacessível para qualquer observador em I .

2.1.3. Diagrama Conforme

Apesar do diagrama de Kruskal simplificar o entendimento da solução estudada, em alguns casos, é mais útil construir um diagrama onde as coordenadas estão em uma região finita do espaço-tempo. Na década de 60, dois pesquisadores, Brandon Carter e Roger Penrose, de maneira independente, encontraram tal diagrama e ele ficou conhecido como *diagrama conforme*[8].

Começa-se com o espaço de Minkowski em coordenadas polares

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.42)$$

os intervalos para as coordenadas temporal e radial são, respectivamente

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (2.43)$$

Para que as coordenadas estejam em um intervalo finito, faz-se a troca para coordenadas nulas, como feito anteriormente nas equações (2.28) e (2.29),

$$v' = t + r, \quad u' = t - r, \quad (2.44)$$

cujos intervalos são

$$-\infty < v' < \infty, \quad \infty < u' < \infty. \quad (2.45)$$

Escrevendo a métrica de Minkowski em termos das novas coordenadas,

$$ds^2 = dv' du' - \frac{1}{4}(v' - u')^2 d\Omega^2. \quad (2.46)$$

Ainda não tem-se um intervalo finito. Então faz-se uma nova troca de variáveis usando a função arco tangente

$$U' = \arctan(u'), \quad V' = \arctan(v'), \quad (2.47)$$

o que leva os intervalos a

$$-\pi/2 < U' < \pi/2, \quad -\pi/2 < V' < \pi/2. \quad (2.48)$$

Então, com essa nova troca, tem-se

$$dv' du' = \frac{1}{\cos^2 U' \cos^2 V'} dV' dU', \quad (2.49)$$

e

$$(v' - u')^2 = (\tan V' - \tan U')^2 = \left(\frac{\sin V'}{\cos U'} - \frac{\sin U'}{\cos V'} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 U' \cos^2 V'} \sin^2(V' - U'), \quad (2.50)$$

nessas coordenadas a métrica (2.46) é

$$ds^2 = \frac{1}{4 \cos^2 U' \cos^2 V'} [4 dV' dU' - \sin^2(V' - U') d\Omega^2]. \quad (2.51)$$

Essa métrica parece ter uma forma simples, porém ela pode ficar melhor escrevendo-a de volta na forma de coordenada tipo-tempo T e coordenada radial X

$$T = V' + U', \quad X = V' - U', \quad (2.52)$$

com os intervalos

$$0 \leq X < \pi, \quad T + X < \pi. \quad (2.53)$$

Dessa relações é possível escrever

$$V' = \frac{1}{2}(T + X) \quad e \quad U' = \frac{1}{2}(T - X), \quad (2.54)$$

e

$$2 \cos V' \cos U' = 2 \cos \left[\frac{1}{2}(T + X) \right] \left[\frac{1}{2}(T - X) \right] = \cos T + \cos X. \quad (2.55)$$

Agora, a métrica é

$$ds^2 = \frac{1}{(\cos T + \cos X)^2} (dT^2 - dX^2 - \sin^2 X d\Omega^2). \quad (2.56)$$

Pode-se dividir essa estrutura em diferentes regiões:

- $T = \pi, \quad X = 0 \Rightarrow$ futuro tipo-tempo (i^+),
- $T = 0, \quad X = \pi \Rightarrow$ infinito espacial (i^0),

- $T = -\pi, \quad X = 0 \Rightarrow$ passado tipo-tempo (i^-),
- $T = \pi - X, \quad 0 < X < \pi \Rightarrow$ futuro nulo (\mathcal{I}^+),
- $T = -\pi + X, \quad 0 < X < \pi \Rightarrow$ passado nulo (\mathcal{I}^-).

O diagrama conforme está representado na figura (2.4). A principal diferença desse diagrama para o de Kruskal é que todo o espaço-tempo está representado em uma região finita.

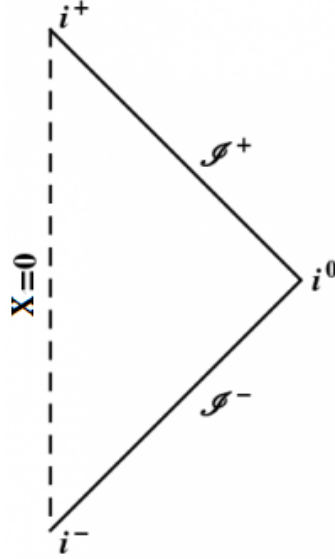


Figura 2.4.: Diagrama conforme para a métrica de Minkowski

Para a métrica de Schwarzschild, pode-se fazer um processo semelhante. Escrevendo a métrica em termos de (2.38), tem-se

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dV dU - r^2 d\Omega^2. \quad (2.57)$$

Usa-se, essencialmente, a mesma transformação feita no espaço-tempo plano para colocar as coordenadas em um intervalo finito

$$\tilde{V} = \arctan\left(\frac{V}{\sqrt{2M}}\right), \quad (2.58)$$

$$\tilde{U} = \arctan\left(\frac{U}{\sqrt{2M}}\right), \quad (2.59)$$

obtendo os intervalos os intervalos

$$-\frac{\pi}{2} < \tilde{V} < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \tilde{U} < \frac{\pi}{2}.$$

A figura (2.6) representa o diagrama conforme da extensão máxima da solução de Schwarzschild.

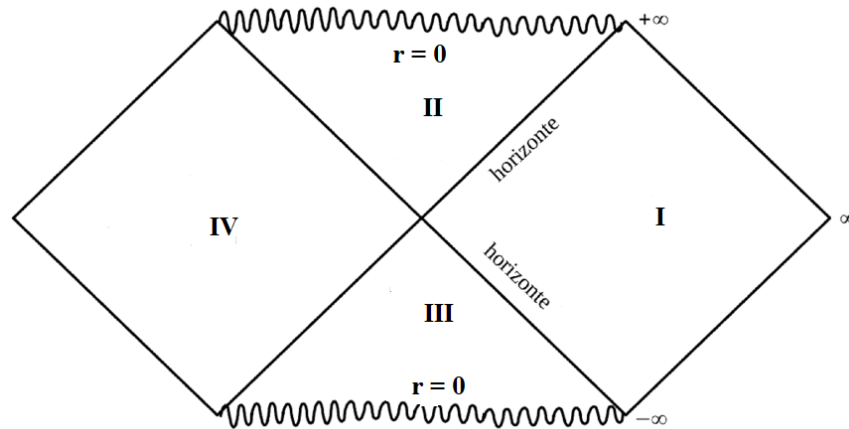


Figura 2.5.: Diagrama conforme para a métrica de Schwarzschild

2.2. Métrica de Schwarzschild com massa negativa

Geralmente, quando trabalha-se com a massa em uma equação física, ela é adotada, automaticamente, como sendo positiva. Porém, sendo ela uma constante, poderia, por exemplo, ser negativa. É óbvio que isso causa uma certa estranheza, já que essa ideia de massa negativa não faz parte do cotidiano e está longe do entendimento geral. Além disso, soluções como a de Schwarzschild com massa negativa representam uma singularidade nua (esse conceito será discutido na próxima seção), o que se assume ser fisicamente inaceitável.

Então por que estudar esse tipo de solução? A aceleração do universo requer um efeito de anti-gravidade, mas isto geralmente é obtido pela pressão negativa, muito embora uma densidade negativa também possa desempenhar tal papel. Mas, esta possibilidade é menos evocada devido a problemas de estabilidade. Porém, essa questão ganha relevância quando, as observações cosmológicas, que buscam testar as previsões da cosmologia a fim de refinar os modelos cosmológicos, mostram que a aceleração do fator de escala é devido a uma “matéria fantasma”, que é um tipo de matéria com energia cinética negativa. Essa ideia de anti-gravidade ganha ainda mais destaque no cenário científico com a descoberta da energia escura.

Problemas com massa negativa foram primeiramente analisados por Bondi[9], onde ele estudou alguns casos especiais com massa negativa na Relatividade Geral.



Figura 2.6.: Sistema de fuga

Como consequência do princípio de equivalência fraco, uma partícula de massa negativa caindo no campo gravitacional cairá com a mesma velocidade e na mesma direção que uma partícula de massa positiva. Um outro exemplo é a equação da geodésica, em que a massa se cancela, logo o movimento de uma partícula com massa negativa será o mesmo que o com massa positiva. Nesse modelo, um corpo com massa negativa repele as partículas de massa negativa e também as de massa positiva. Outra característica é que nesse modelo um corpo com massa positiva atrai partículas de massa negativa. Sendo assim, esse sistema irá se mover com uma aceleração constante, pois ao mesmo tempo em que a partícula de massa positiva atrai a de massa negativa, ela é repelida por essa. Esse tipo de solução é chamado de *sistema de fuga*.

A estrutura do espaço-tempo torna-se bastante diferente com a mudança do sinal da massa. Adotando a massa negativa na métrica de Schwarzschild resulta em

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\mu}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{\mu}{r}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.60)$$

onde $2M = -\mu < 0$. Nota-se que não tem mais a singularidade em $r = 2M$, ou seja, o *horizonte de eventos* não existe. Porém, a singularidade em $r = 0$ ainda se mantém. Portanto, nessa métrica com $M < 0$, tem-se uma *singularidade nua*, que é uma singularidade sem horizonte.

Alguns autores conseguem encontrar expressões explícitas para os modos instáveis da singularidade nua presente na métrica de Schwarzschild com massa negativa. Dessas expressões são selecionadas condições de contorno apropriadas na singularidade que asseguram a autoconsistência da perturbação linear, exigindo que os escalares de curvatura não obtenham correções que divirjam mais rapidamente na singularidade do que o termo

de ordem zero[10]. Essas questões serão analisadas com mais detalhes nos capítulos posteriores.

Diagrama conforme $M < 0$

O processo usado para analisar o diagrama conforme da métrica de Schwarzschild com massa negativa será o mesmo utilizado no caso com $M > 0$. Começando com a definição da coordenada tartaruga x

$$x = \int \left(1 + \frac{\mu}{r}\right)^{-1} dr, \quad (2.61)$$

cuja integral resulta

$$x = r - \mu \ln \left(\frac{r}{\mu} + 1 \right), \quad (2.62)$$

com $0 < x < \infty$.

A única diferença para o caso $M > 0$ são os sinais. Porém, isso resulta em uma completa mudança no espaço-tempo, como dito anteriormente. Utilizando a mesma troca de variáveis que foi feita no caso $M > 0$

$$v = t + x, \quad u = t - x, \quad (2.63)$$

obtem-se a métrica

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\mu}{r}\right) dvdu - r^2 d\Omega^2. \quad (2.64)$$

Faz-se a troca

$$V = e^{v/4M}, \quad U = -e^{-u/4M}, \quad (2.65)$$

cujos intervalos são

$$e^t < V < \infty, \quad -e^{-t} < U < \infty. \quad (2.66)$$

E para trazé-los à um intervalo finito, faz-se

$$\tilde{V} = \arctan(V), \quad \tilde{U} = \arctan(U). \quad (2.67)$$

O diagrama conforme é mostrado na figura 2.7. Esse diagrama assemelha-se ao de Minkowski, porém existe uma singularidade espacial em $r = 0$.

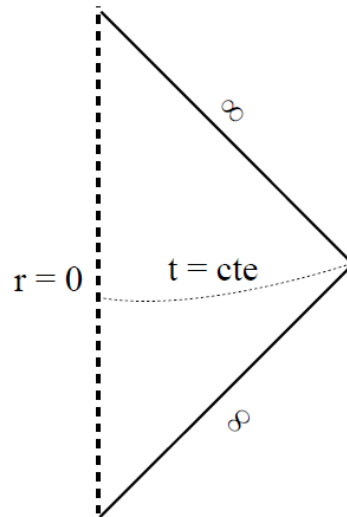


Figura 2.7.: Diagrama conforme para a métrica de Schwarzschild com $M < 0$

2.3. Singularidades

Graças aos estudos de Landau, Oppenheimer e Snyder [11], e posteriormente, pela análise de Harrison, Wheeler e Wakano, sabe-se que a estrela deve sofrer um colapso gravitacional quando esgota a sua fonte de energia nuclear, se não conseguir ejetar matéria suficiente de modo a reduzir a sua massa abaixo de uma massa crítica. Desde que o colapso se mantenha simetricamente esférico, a métrica no exterior da estrela ser Schwarzschild. Caso o colapso da estrela passe pelo raio de Schwarzschild, irá se formar um buraco negro.

Geralmente, em física, se lida com partículas, campos, etc. em um determinado espaço-tempo. Nesse contexto, uma singularidade é um ponto no espaço-tempo onde as grandezas físicas se tornam infinitas. Mas em Relatividade Geral o campo em estudo é a própria métrica do espaço-tempo. Esta teoria é estabelecida de modo que não podem existir pontos na variedade nos quais a métrica é singular, ou seja, a métrica não pode ser mal definida. Sendo assim, é necessário saber se existem pontos singulares no espaço-tempo, e se sim, usar algum método para contornar esse problema, como por exemplo estender a métrica de forma que ela se torne bem comportada.

Uma maneira de saber se o espaço-tempo tem uma singularidade física é através da existência de geodésicas incompletas: um espaço-tempo será singular quando é geodesicamente incompleto para geodésicas temporais ou nulas e não pode ser estendido. A condição de completude das geodésicas causais significa que qualquer geodésica temporal ou nula pode ser prolongada a valores arbitrariamente grandes do parâmetro afim, tanto

para o futuro como para o passado.

Além disso, pode-se relacionar a singularidade com a curvatura do espaço-tempo, pois uma singularidade deveria corresponder a um crescimento sem limite da curvatura conforme aproxima-se do ponto singular. Porém, identificar tal crescimento é de difícil caracterização. Uma possibilidade é escolher escalares em g_{ab} e R_{ab} e ver como se comportam, caso eles cresçam sem limite isso irá corresponder a uma singularidade.

No geral, esse problema é resolvido caso a singularidade esteja envolta do horizonte de eventos, pois ele proíbe um observador externo de ter informação sobre a singularidade, é como se o ponto singular fosse retirado do espaço-tempo. Entretanto o problema persiste no caso de uma singularidade nua. Com isso, surge algumas hipóteses que tentam formalizar essa questão, e isso será visto a seguir.

Espaço-tempo globalmente hiperbólico

Uma superfície de Cauchy é um "plano" no espaço-tempo que define um *instante de tempo*, em outras palavras ela fornece as condições iniciais e como elas evoluem. Um espaço-tempo que possua uma superfície de Cauchy diz-se um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Portanto, num espaço-tempo que não seja globalmente hiperbólico, o conhecimento das condições 'num determinado instante de tempo' não é suficiente para determinar a história completa do espaço-tempo, ou seja, há uma perda de previsibilidade.

Dada a infinita variedade de singularidades que podem ocorrer no espaço-tempo não globalmente hiperbólico, não é claro como encontrar uma descrição única da dinâmica. Entretanto é interessante saber se em tais espaços-tempo podem existir uma descrição que resulta em uma dinâmica única e aceitável, já que isso poderia dar dicas de como essas singularidades poderiam ser resolvidas. Isso foi feito em [12], onde foi mostrado que em qualquer espaço-tempo estático e não globalmente hiperbólico é possível definir dinâmica para um campo escalar. O procedimento é o que se segue. No espaço-tempo estático a equação de Klein-Gordon pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -A\Phi, \quad (2.68)$$

onde A é um operador no espaço de Hilbert. Então A é positivo e simétrico, e admite pelo menos uma extensão auto-adjunta. Escolhendo uma dessas extensões, A_E , para uma dada

condição inicial $(\Phi_0, \dot{\Phi}_0)$, pode-se definir

$$\Phi_t = \cos(A_E^{1/2}t)\Phi_0 + A_E^{-1/2} \sin(A_E^{1/2}t)\dot{\Phi}_0, \quad (2.69)$$

onde o $\cos(A_E^{1/2}t)$ e $A_E^{-1/2} \sin(A_E^{1/2}t)$ são operadores limitados definidos via teorema espectral.

Para todo t , Φ_t será definido no espaço de Hilbert. Portanto a equação (2.69) provê uma descrição satisfatória para (2.68), pelo menos para as condições iniciais $(\phi_0, \dot{\phi}_0)$. Note que uma escolha diferente de A_E , dará uma descrição diferente da dinâmica.

Censura cósmica

Como visto acima, um espaço-tempo que contém uma singularidade é problemático, pois não sabe-se como as condições iniciais irão evoluir. Roger Penrose [13] tentou resolver esse problema, afirmando que todas as singularidades que surgem das soluções das equações de Einstein deverão se localizar dentro de *horizontes de eventos*, e, portanto, não são acessíveis para observadores externos. Essa propriedade foi apelidada por Penrose de *censura cósmica*. Sendo assim, caso exista uma singularidade no espaço-tempo ela estará “escondida” e não irá afetar a previsibilidade do exterior.

Portanto, a conjectura da censura cósmica procura proibir a existência de singularidades nuas, e garantir que as superfícies de Cauchy existam, garantindo uma evolução causal.

Capítulo 3

Resultados matemáticos

Esse capítulo é uma revisão sucinta, sem muitos detalhes, do problema de perturbações de buraco negro. Será abordado as perturbações na métrica, assim como as condições para que haja estabilidade da solução entre outros aspectos.

3.1. Perturbações

Por mais que a censura cósmica seja uma conjectura ainda não provada, ela, de certa forma, proíbe a existência das singularidades nuas, ainda que estas sejam previstas teoricamente. Isso gera um certo impasse quanto a sua veracidade. Um modo de comprovar sua existência ou de descartá-la é estudar se elas são estáveis sob pequenas perturbações. Se elas não se mantêm sob pequenas perturbações, é provável que não existam, ou que só existam por um curto período de tempo.

Os estudos da estabilidade do buraco negro foram iniciados por Regge e Wheeler[14], em 1957, ao investigar a estabilidade do buraco negro de Schwarzschild para uma pequena perturbação na métrica. Eles estudaram as equações de Einstein linearizadas e obtiveram equações lineares, em primeira ordem, para perturbações da métrica de Schwarzschild.

No caso geral, faz-se uma pequena perturbação, $h_{\mu\nu}$, na métrica de fundo, $g_{\mu\nu}^{(0)}$, e busca-se linearizar as equações de Einstein. Ao final do processo encontra-se equações para $h_{\mu\nu}$. Aqui será feito para o caso de um buraco negro, mas o processo é o mesmo para as singularidade nua de Schwarzschild, onde é necessário somente mudar o sinal da massa nas equações.

A métrica perturbada é dada por

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

onde $|h_{\mu\nu}| \ll |g_{\mu\nu}^{(0)}|$, isto é, a perturbação na métrica é pequena. Como a perturbação na métrica é pequena, os termos de segunda ordem e superiores em $h_{\mu\nu}$ serão desconsiderados, e são usados somente os termos de primeira ordem, tal que o tensor de curvatura pode ser escrito como

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(0)} + \delta R_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

onde $\delta R_{\mu\nu}$ é um termo que contém somente os termos de primeira ordem em $h_{\mu\nu}$.

Como o espaço-tempo considerado é o vácuo, onde $R_{\mu\nu}^{(0)} = 0$, impõe-se que o espaço-tempo perturbado também o seja, ou seja $\delta R_{\mu\nu} = 0$. A expressão para $\delta R_{\mu\nu} = 0$ pode ser obtida considerando que os termos perturbados serão termos de segunda ordem em $h_{\mu\nu}$ e, como considera-se só os termos em primeira ordem, eles serão zero. Logo, para uma perturbação linear tem-se

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma_{\mu\lambda;\nu}^{\lambda} - \delta\Gamma_{\mu\nu;\lambda}^{\lambda}, \quad (3.3)$$

sendo que

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{(0)\lambda\alpha}(h_{\mu\alpha;\nu} + h_{\nu\alpha;\mu} - h_{\mu\nu;\alpha}). \quad (3.4)$$

O processo utilizado por Regge e Wheeler para obter $h_{\mu\nu}$ foi a separação de variáveis. Levando em conta que $g_{\mu\nu}^{(0)}$ é esfericamente simétrica, decompuseram $h_{\mu\nu}$ em harmônicos esféricos e estudaram seu comportamento. Isso equivale a uma expansão de um tensor de segunda ordem. Essa expansão, é construída através do produto tensorial de harmônicos esféricos vetoriais e foi elaborada por Zerilli[15] logo após Regge e Wheeler. Ele utilizou as representações irredutíveis do grupo de rotações, onde sob rotações, um tensor de segunda ordem pode ser decomposto em partes que se transformam com escalar, vetor ou tensor[16].

A decomposição é dada por

$$h_{\mu\nu} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{n=1}^{10} C_{lm}^n(t, r) (Y_{lm}^n)_{\mu\nu}(\theta, \phi), \quad (3.5)$$

onde $C_{lm}^n(t, r)$ são os coeficientes da expansão e Y_{lm}^n são os harmônicos esféricos. As expressões explícitas de $C_{lm}^n(t, r)$ e $(Y_{lm}^n)_{\mu\nu}(\theta, \phi)$ são dadas com mais detalhes em [17]

Para cada valor de l , as perturbações se dividem em dois conjuntos diferentes: os que se transformam como $(-1)^l$, que são as perturbações polares ou escalares, e os que se transformam como $(-1)^{(l+1)}$, que são as perturbações axiais ou vetoriais.

Eles, primeiro, analisaram as perturbações axiais cuja forma é

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -h_0 \frac{1}{\sin\theta} \partial_\phi Y_{lm} & h_0 \sin\theta \partial_\theta Y_{lm}, \\ 0 & 0 & -h_1 \frac{1}{\sin\theta} \partial_\phi Y_{lm} & h_1 \sin\theta \partial_\theta Y_{lm}, \\ * & * & \frac{1}{2} h_2 \frac{1}{\sin\theta} X_{lm} & -\frac{1}{2} h_2 \sin\theta W_{lm}, \\ * & * & * & -\frac{1}{2} h_2 \sin\theta X_{lm}, \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

onde os ” * ” denotam as componentes simétricas de $h_{\mu\nu}$ e

$$X_{lm} = 2 \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\phi} - \cot\theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\phi} \right), \quad (3.7)$$

$$W_{lm} = \left(\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\theta^2} - \cot\theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\phi^2} \right). \quad (3.8)$$

Devido à simetria esférica, as componentes com diferentes paridades e l não se misturam. A simetria na métrica de fundo também permite escolher $m = 0$, já que simplifica a dificuldade gerada pela dependência na variável ϕ . Assim a matriz $h_{\mu\nu}$ toma a forma

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & h_0 \sin\theta \partial_\theta Y_{lm}, \\ 0 & 0 & 0 & h_1 \sin\theta \partial_\theta Y_{lm}, \\ * & * & \frac{1}{2} h_2 \frac{1}{\sin\theta} X_{lm} & -\frac{1}{2} h_2 \sin\theta W_{lm}, \\ * & * & * & -\frac{1}{2} h_2 \sin\theta X_{lm}. \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Além disso, explorando a liberdade de calibre, Reege e Wheeler obtiveram uma forma ainda mais simples para $h_{\mu\nu}$ fixando o calibre. Dada uma transformação infinitesimal de coordenada que mantêm as equações invariantes

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu, \quad (3.10)$$

tem-se que

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}. \quad (3.11)$$

Dessa forma, para que a paridade seja preservada, a escolha feita foi $\xi^0, \xi^1 = 0$ e

$\xi^2 = \xi^3 = \Lambda(t, r)\epsilon^{i,j}\partial_j Y_{lm}(\theta, \phi)$, onde a forma de ξ^μ é

$$\xi^\mu = \Lambda \left(0, 0, -\frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi Y_{lm}, \sin\theta\partial_\theta Y_{lm} \right). \quad (3.12)$$

onde $\Lambda(t, r)$ é uma função arbitrária.

A escolha de Regge e Wheeler para fixar o calibre foi feita de forma que $\Lambda(t, r)$ anulasse a função $h_2(t, r)$ em (3.9). Esse é o calibre de Regge-Wheeler. Fixado o calibre, tem-se

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & h_0 \sin\theta \partial_\theta Y_{l0} \\ 0 & 0 & 0 & h_1 \sin\theta \partial_\theta Y_{l0} \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Usando (3.13), e levando em conta que $\delta R_{\mu\nu} = 0$, obtêm-se algumas equações triviais e outras não-triviais. As equações não-triviais derivam de δR_{23} , δR_{13} e δR_{03} , que são dadas, respectivamente, por

$$f^{-1}\frac{\partial h_0}{\partial t} - \frac{\partial(f h_1)}{\partial r} = 0, \quad (3.14)$$

$$f^{-1} \left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 h_0}{\partial t \partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial h_0}{\partial t} \right) + \frac{1}{r^2} [l(l+1) - 2] h_1 = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{2} f \left(\frac{\partial^2 h_0}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 h_1}{\partial t \partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial h_1}{\partial t} \right) + \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{2} l(l+1) \right) h_0 = 0, \quad (3.16)$$

onde $f(r) = (1 - \frac{2M}{r})$. Substituindo (3.14) em (3.15), tem-se que

$$f^{-1} \frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} - f^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[f \frac{\partial(f h_1)}{\partial r} \right] + \frac{2}{r} \frac{\partial(f h_1)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} [l(l+1) - 2] h_1 = 0. \quad (3.17)$$

Definindo

$$\Psi(t, r) = \frac{1}{r} f(r) h_1(t, r), \quad (3.18)$$

tem-se que

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{f}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[f \frac{\partial(r\Psi)}{\partial r} \right] + \frac{2f^2}{r^2} \frac{\partial(r\Psi)}{\partial r} + \frac{f\Psi}{r^2} [l(l+1) - 2] = 0. \quad (3.19)$$

Usando a transformação

$$dx = \frac{dr}{f(r)}, \quad (3.20)$$

a equação (3.19) pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(r)\Psi(t, x) = 0, \quad (3.21)$$

onde

$$V_A(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3}\right), \quad (3.22)$$

que é o potencial de Reege-Wheeler. Portanto as perturbações axiais são descritas por uma equação da onda com um potencial adicional.

No caso das perturbações polares, a análise segue o mesmo procedimento do caso axial, porém é bastante dificultada devido as equações não-triviais, que agora são 6. Zerilli[15] fez essa análise algum tempo depois de Reege e Wheeler. Nesse trabalho, ele analisou a perturbação, em um buraco negro, devido a queda de uma partícula teste movendo-se em sua direção. Ele considerou que o campo produzido pela partícula fosse como uma pequena perturbação do espaço-tempo, e isso contribuía como uma fonte do tipo função-delta[16].

Zerilli obteve uma equação para perturbação polar com a mesma forma da equação de Reege-Wheeler, porém com o potencial dado por

$$V_P(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{2n^2(n+1)r^3 + 6n^2Mr^2 + 18nM^2r + 18M^3}{r^3(nr + 3M)^2}\right), \quad (3.23)$$

onde $n = \frac{1}{2}(l-1)(l+2)$

Para o caso da massa negativa, a única coisa que muda nas equações e potenciais é, como esperado, o sinal da massa. Basta trocar M por $-M$ que as mesmas equações são obtidas para a singularidade nua.

Algumas considerações sobre o potencial de Zerilli: existe um ponto, $r = r_c = -3M/n$, onde o potencial V_P diverge. Para o caso em que $M > 0$ isso não tem importância, pois o ponto de divergência será $r = -\frac{3M}{n} < 0$, e esse ponto está fora do intervalo de interesse. Entretanto, para $M < 0$ isso se torna relevante, pois $r = \frac{3M}{n} > 0$ e estará em um intervalo dentro do interesse do estudo.

Essa divergência causa grandes problemas na análise, e, na maior parte dos casos, os artigos buscam alternativas para contornar esse problema.

3.2. O problema de Sturm-Liouville

Outro tipo de equação que aparece no estudo das perturbações são as equações diferenciais parciais a partir do método de separação de variáveis. Nesse contexto o Problema de Sturm-Liouville aparece de modo natural no processo de resolução do problema. Uma equação diferencial de segunda ordem na forma

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] y + q(x)y = w\lambda(x)y, \quad (3.24)$$

para $x \in (a, b)$, com $p(x) > 0$ e $\lambda(x) > 0$, é chamado de **equação diferencial de Sturm-Liouville (SL)**[18].

Essa equação representa um problema de auto-valor. Resolvendo-a, é possível determinar w e y . Um exemplo da equação diferencial de Sturm-Liouville é a equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar}{2m} \Psi'' + V(x)\Psi = E\Psi, \quad (3.25)$$

no intervalo $[a, b]$.

Para a solução de uma equação diferencial no intervalo $[a, b]$ é necessário impor condições de contorno:

$$\begin{aligned} c_a y(a) + d_a y'(a) &= \alpha, \\ c_b y(b) + d_b y'(b) &= \beta. \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde $c_a, c_b, d_a, d_b, \alpha$ e β são constantes, e são chamadas de condições de contorno de **Dirichlet-Neumann**.

Quando $\alpha = \beta = 0$ as condições de contorno são ditas homogêneas. Existe também dois casos especiais onde

$$\begin{aligned} c_a y(a) = 0, \quad c_b y(b) = 0, & \quad (\text{condições de contorno de Dirichlet}), \\ d_a y'(a) = 0, \quad d_b y'(b) = 0, & \quad (\text{condições de contorno de Neumann}). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Se as condições de contorno forem na forma

$$\begin{aligned} y(a) &= y(b) \\ y'(a) &= y'(b) \quad , \end{aligned} \quad (3.28)$$

são chamadas de *periódicas*.

A equação de SL(3.24) com as condições de contorno de Dirichlet-Neumann(3.26) é definida como o *o problema de Sturm-Liouville*. Além disso, se $p(x) > 0$ e $\lambda(x) > 0$ em $x \in [a, b]$ então é chamado de *problema de Sturm-Liouville regular*. O objetivo é encontrar os valores de w para os quais a solução de y existe.

Como um exemplo, tem-se, novamente, a equação de Schrödinger para uma partícula na caixa em 1D dado por

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar}{2m}\Psi'' &= E\Psi & x \in [a, b], \\ \Psi(0) &= 0, \\ \Psi(L) &= 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

que é um problema de Sturm-Liouville. Os auto-valores e auto-funções são

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2mL^2}, \\ \Psi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \end{aligned} \tag{3.30}$$

com $n \in \mathbb{Z}^+$.

Se a partícula estiver movendo-se em círculos a equação de Schrödinger será

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar}{2m}\Psi'' &= E\Psi & x \in [a, b], \\ \Psi(0) &= \Psi(L), \\ \Psi'(0) &= \Psi'(L). \end{aligned} \tag{3.31}$$

que é um problema de Sturm-Liouville periódico. Os auto-valores e auto-funções são

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{4\hbar^2\pi^2n^2}{2mL^2}, \\ \Psi_n(x) &= A_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right). \end{aligned} \tag{3.32}$$

3.2.1. Propriedades

O problema de Sturm-Liouville no intervalo $[a, b]$ será chamado de singular caso ele obedeça qualquer uma das condições abaixo:

- $p(a) = 0$, a condição de contorno em a é descartada, e em b é as de Dirichlet-Neumann,
- $p(b) = 0$, a condição de contorno em b é descartada, e em a é as de Dirichlet-Neumann,
- $p(a) = p(b) = 0$ e não há condições de contorno,
- O intervalo $[a, b]$ é infinito,
- O operador de Sturm-Liouville é auto-adjunto no espaço de Hilbert.

Notas:

- Se $p(a) = 0$ não existe condições de contorno em a , então y é considerado uma solução se $y(a) < \infty$. Similarmente para os outros casos.
- Se o intervalo é infinito, então y deve ser quadrado integrável para ser considerado uma solução

Também é possível obter algumas informações sobre os auto-valores e auto-funções da equação de Sturm-Liouville sem, necessariamente, resolver a equação. Considere-se o problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned}
 -\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] y + q(x)y &= w\lambda(x)y, \\
 c_a y(a) + d_a y'(a) &= 0, \\
 c_b y(b) + d_b y'(b) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$

com produto interno definido como

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\lambda(x)dx,
 \tag{3.34}$$

onde $\lambda(x)$ é chamado de função peso.

Agora, definindo o operador de Sturm-Liouville como sendo

$$L = \frac{1}{\lambda(x)} \left(-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x) \right),
 \tag{3.35}$$

a equação diferencial de SL torna-se um equação de auto-valor

$$Ly = wy.
 \tag{3.36}$$

Para saber se o auto-valor w é positivo ou negativo, calcula-se o produto interno $\langle y, Ly \rangle$ dado por

$$\int_a^b -y \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] dx + \int_a^b q(x) y^2 dx = \int_a^b w \lambda(x) y^2 dx, \quad (3.37)$$

e integrando por partes a primeira integral obtém-se

$$[-y p(x) y']_0^\infty + \int_a^b p(x) (y')^2 dx + \int_a^b q(x) y^2 dx = w \int_a^b \lambda(x) y^2 dx, \quad (3.38)$$

como $p(x) > 0$ e $\lambda(x) > 0$, a primeira e terceira integral são positivas.

Portanto, a positividade do auto-valor será verificada se

$$\begin{aligned} q(x) &\geq 0, \\ -y p(x) y' &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Caso as condições sejam verdadeiras, então $w > 0$.

3.3. Operadores auto-adjuntos

Visto que, o problema de Sturm-Liouville é essencialmente um problema de auto-valor (3.36), é importante saber com que tipo de operador se está trabalhando, pois na equação

$$Ly = wy, \quad (3.40)$$

o que se mede é a quantidade w , por isso ela precisa ser um valor real e definir um conjunto completo de auto-função. Quem determinará essas propriedades é o operador L . Para que essas condições sejam satisfeitas o operador precisa ser *auto-adjunto*.

Operadores auto-adjuntos têm um papel importante na física. Eles são semelhantes aos operadores simétricos (hermitianos), entretanto não se pode confundí-los. Em alguns domínios as definições são iguais, porém existe operadores simétricos que não são auto-adjuntos, e é preciso definir bem cada um. De qualquer forma, se um operador for somente simétrico, é possível estender seu domínio para que ele se torne auto-adjunto. Essa extensão é chamada de *extensão auto-adjunta*.

Do ponto de vista matemático todas as extensões são possíveis. Já no âmbito físico cada

extensão gerará uma dinâmica diferente. Esse é um ponto chave nesse problema, pois é necessário escolher a extensão auto-adjunta que corresponda ao caso estudado.

Tem-se a seguinte definição[19].

Definição: Seja $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ um operador no espaço de Hilbert, o seu *adjunto* A^* é tal que

$$(A^*\Phi, \Psi) = (\Phi, A\Psi), \quad \Psi, \Phi \in D(A), \quad (3.41)$$

o domínio de A^* é dado por $D(A^*) = \{\Phi \mid (A^*\Phi, \Psi) = (\Phi, A\Psi); \forall \Psi \in D(A)\}$.

O operador A será *Simétrico*, ou *Hermitiano*, se

$$(A\Phi, \Psi) = (\Phi, A\Psi), \quad \Psi, \Phi \in D(A), \quad (3.42)$$

ou seja, $A^* = A$ com domínio $D(A) \subset D(A^*)$. Porém, se A é simétrico e

$$D(A) = D(A^*), \quad (3.43)$$

então A é um operador ***auto-adjunto***. Porém, mesmo que $D(A) \neq D(A^*)$ ainda existe a possibilidade de seu domínio ser estendido de forma que ele se torne auto-adjunto. Este operador com novo domínio é chamado de ***extensão auto-adjunta***, e pode ter até infinitas diferentes extensões. É importante notar que nem sempre o operador simétrico poderá ser estendido para um operador auto-adjunto. Esse problema foi estudado por John von Neumann[20] (1903-1957) que desenvolveu um critério para determinar a existência de extensões, chamado ***método de von Neumann*** ou ***método dos índices de deficiência***

Método dos índices de deficiência: Dado um operador simétrico T com domínio $D(T)$ denso no espaço de Hilbert H , denota-se por $K_{\pm}(T)$ os espaços gerados pelas soluções de ϕ das equações

$$T^*(\phi) = \pm i\phi \quad , \quad \phi \in D(T^*). \quad (3.44)$$

Os subespaços $K_{\pm}(T)$ são chamados *espaços de deficiência* e suas dimensões $n_{\pm} = \dim K_{\pm}(T)$ são chamadas *índices de deficiência*. Através desses índices, von Neumann mostrou que

- Se $n_+ = n_- = 0$, então o operador possui uma única extensão auto-adjunta, ou seja, ele é essencialmente auto-adjunto;
- Se $n_+ = n_- \neq 0$, então o operador pode possuir infinitas extensões auto-adjuntas;
- Se $n_+ \neq n_-$, o operador não possui extensões.

A ideia central desse teorema se deve ao fato que os auto-valores dos operadores auto-adjuntos precisam ser reais para que correspondam a observáveis físicos. Logo, se $n_+ = n_- = 0$ a equação (3.44) não tem solução e isso indica que o operador é auto-adjunto. Já para $n_+ = n_- \neq 0$, existem soluções com auto-valores imaginário, porém esses podem ser “excluídos” do domínio do operador, de forma a recuperar a propriedade de auto-adjunto.

3.4. Condições para a estabilidade

Com as definições feitas acima, é possível determinar condições suficientes para que haja estabilidade. Anteriormente, quando se fez a separação de variáveis, foi definido uma dependência temporal do tipo

$$R(t, r) = e^{-i w t} R(r), \quad (3.45)$$

com w podendo ser real ou imaginário.

Para que haja estabilidade, entre outras coisas, é necessário que a função $R(t, r)$ seja decrescente conforme $t \rightarrow \infty$. Ora, se $w = i k$ for imaginário, tem-se

$$R(t, r) = e^{k t} R(r), \quad (3.46)$$

o que, obviamente diverge com o passar do tempo. Logo, para que exista estabilidade, w tem que ser real.

Tendo isso em mente, pode-se fazer uma análise da equação para uma perturbação geral

$$-R_{xx} + V(r)R = w^2 R. \quad (3.47)$$

Multiplicando a equação por $R^*(r)$ e integrando, obtém-se

$$-\int_0^\infty R^* R'' dx + \int_0^\infty V |R|^2 dx = w^2 \int_0^\infty |R|^2 dx, \quad (3.48)$$

integrando por partes a primeira integral

$$-[R^* R']_0^\infty + \int_0^\infty |R'|^2 dx + \int_0^\infty V |R|^2 dx = w^2 \int_0^\infty |R|^2 dx. \quad (3.49)$$

Nota-se que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |R'|^2 dx &> 0, \\ \int_0^\infty |R|^2 dx &> 0, \end{aligned} \quad (3.50)$$

pois são termos quadráticos. Os outros dois termos irão depender das funções $R(x)$ e $V(r)$ que se está a trabalhar e variará para cada tipo de perturbação. Se

$$\begin{aligned} [-R^* R']_0^\infty &\geq 0, \\ V(r) &> 0, \end{aligned} \quad (3.51)$$

então $w^2 > 0$ e w será real, logo a solução será estável.

É claro que a positividade de w^2 não se verifica só nesse caso. Há outras combinações desses termos, mesmo para $V(r) < 0$ e $[-R R']_0^\infty \leq 0$, que garantirão a estabilidade. Porém, quando eles são positivos é condição suficiente para a estabilidade.

Além dessas condições, ainda é necessário verificar outras duas para garantir a estabilidade: a condição de que o operador seja auto-adjunto e que a função seja de quadrado integrável. A primeira condição garante que o auto-valor seja real, o que assegura que ele pode ser medido. Além da análise dos índices de deficiência mostrada na seção (3.3), também pode ser feito o seguinte cálculo. Multiplicando a equação (3.47) novamente por $R^*(x)$ e integrando duas vezes por partes, obtém-se

$$-[R^* R']_0^\infty + [R^{*'} R]_0^\infty - \int_0^\infty R R^{*''} dx + \int_0^\infty V |R|^2 dx = w^2 \int_0^\infty |R|^2 dx. \quad (3.52)$$

Repare que se os termos de borda forem nulos o operador será auto-adjunto, já que

$$\langle R, \hat{A}R \rangle = \langle \hat{A}R, R \rangle, \quad (3.53)$$

onde $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + V(r)$.

A segunda condição, que pode ser expressa como

$$\int_a^b ||R(r)||^2 dr < \infty, \quad (3.54)$$

garante que a função esteja contida no espaço de Hilbert. A preferência pelas funções de quadrado integrável para essa análise dá-se no sentido de que o problema pode, por exemplo, estar bem definido em outra norma como no espaço de funções de Sobolev[21].

Verificadas essas condições, pode-se afirmar que a solução será estável sob a perturbação. Vale ressaltar que em muitos casos busca-se condições para que se tenha a estabilidade da solução.

Capítulo 4

Métodos

Este capítulo irá seguir a análise de Gibbons et al.[1] e de Gleiser e Dotti[4] da estabilidade da singularidade nua presente na métrica de Schwarzschild com massa negativa, e compará-las a fim de se ter maior domínio dos métodos utilizados nesses estudos. Eles partem das equações perturbadas da métrica de Schwarzschild com massa negativa, e analisam como elas se comportam próximo da singularidade nua.

Em geral, para uma perturbação axial, o potencial é regular na região de interesse e os métodos concordam entre si. Porém, o potencial para uma perturbação polar é divergente no intervalo analisado e é necessário utilizar de artifícios matemáticos para contornar esse problema. E para esse potencial que os métodos divergem e uma análise mais precisa é necessária.

4.1. Método 1 - Gibbons et al.[1]

Esse artigo foi o pioneiro no estudo da estabilidade linear de uma solução tipo singularidade nua para massa negativa na métrica de Schwarzschild sob perturbações gravitacionais. A análise principal é concentrada nas perturbações polares, onde há uma divergência no potencial dificultando o estudo. A ideia crucial da análise é na escolha da condição de contorno em $r = 0$ para esse tipo de perturbação. Essa escolha é feita de modo que o Hamiltoniano seja auto-adjunto e a auto-função seja normalizável no intervalo analisado.

4.1.1. Perturbações gravitacionais

A mudança no sinal da massa na solução de Schwarzschild resulta na seguinte métrica

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\mu}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{\mu}{r}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.1)$$

onde $\mu = -2M$, que representa, como dito anteriormente, um espaço-tempo com uma singularidade nua em $r = 0$.

Para estudar a estabilidade é feita uma perturbação na métrica[14][15] e, com a equação perturbada, analisado como ela se comporta para t grande. A perturbação é do tipo

$$g_{ab} \rightarrow g_{ab}^{(0)} + h_{ab}, \quad (4.2)$$

onde $g_{\alpha\beta}^{(0)}$ é a métrica de fundo e $h_{\alpha\beta}$ é uma pequena perturbação. Como explicado na seção(3.1). Essa perturbação pode ser separada em três tipos: escalar (polar), vetorial (axial) e tensorial, onde o interesse principal é nos dois primeiros tipos. Essa divisão depende da paridade da transformação das coordenadas esféricas. Vale lembrar que, esse não é o único tipo de perturbação que se pode fazer para estudar a estabilidade da solução. Também pode ser feita, por exemplo, uma perturbação no campo escalar teste sem massa na métrica.[22][23]

O método para a resolução das equações foi detalhado no seção (3.1) e também no apêndice(E)[24]. Fazendo isso, chega-se na equação da onda para o escalar $\Phi(t,x)$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - V(r) \right) \Phi, \quad (4.3)$$

onde x é a coordenada tartaruga dada por

$$\frac{dr}{dx} = f(r), \quad (4.4)$$

$$x = \int \frac{dr}{f(r)} = r - \mu \log \left(1 + \frac{r}{\mu} \right), \quad (4.5)$$

com intervalo $0 < x < \infty$.

O potencial $V(r)$ é diferente para cada tipo de perturbação(ver seção 3.1). Para a

perturbação axial tem-se:

$$V_V = \frac{f(r)}{r^2} \left[\frac{3\mu}{r} + l(l+1) \right], \quad (4.6)$$

e para perturbação polar

$$V_P = \frac{f(r)}{(mr - 3\mu)^2} \left[-9\frac{\mu^3}{r^3} + 9m\frac{\mu^2}{r^2} - 3m^2\frac{\mu}{r} + 2m^2 + m^3 \right], \quad (4.7)$$

onde $m = (l-1)(l+2)$ e $l = 2, 3, 4, \dots$ é o momento angular. Os modos $l = 0$ e $l = 1$ não descrevem radiação gravitacional pelo teorema de Birkhoff.

Aqui é interessante notar que o potencial diverge em

$$r = \frac{3\mu}{m}, \quad (4.8)$$

que está dentro do intervalo da análise. Vale lembrar quando a massa é positiva essa divergência não existe, já que estaria em um r negativo. Isso causa sérios problemas no estudo das perturbações polares, e será tratado com mais cuidado em Gleiser e Dotti[4] onde eles escrevem a função de Zerilli[15] de uma maneira diferente a fim de contornar esse problema. Isso será detalhado na seção seguinte.

4.1.2. Análise da estabilidade

Com as equações do movimento e os potenciais, pode-se dar início a análise da estabilidade das equações. Porém, existe um problema devido ao fato de que o espaço-tempo com a singularidade nua não é globalmente hiperbólico[12][21], e isso impossibilita que haja evolução temporal das condições iniciais, a menos que sejam fixadas condições de contorno específicas na singularidade. Uma maneira de entender o problema é através dos operadores: pode-se entender a parte espacial do operador de onda como sendo um operador simétrico positivo atuando em um espaço L^2 de Hilbert, e então obter a dinâmica de campo escalar através de uma extensão auto-adjunta positiva apropriada de tal operador simétrico.[25][26]

Sendo o espaço-tempo estático não globalmente hiperbólico, define-se A como a parte espacial de (4.3)

$$A \equiv \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right), \quad (4.9)$$

A é um operador atuando no espaço de Hilbert $H = L^2(x, dx)$ em um tempo específico.

Como dito anteriormente, o operador A precisa ser auto-adjunto ou ter uma extensão

auto-adjunta, A_E , pois somente para esse tipo de operadores é possível satisfazer o teorema espectral e garantir que seu auto-valor seja real.[19]

Dada a extensão auto-adjunta, a evolução temporal de Φ é dada por[25]

$$\Phi_t = C_0 \cos(A_E^{1/2}t) + D_0 \sin(A_E^{1/2}t), \quad (4.10)$$

onde A_E corresponde ao auto-valor. Com as condições de contorno

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \Phi_0 \\ \dot{\Phi}(0) &= \dot{\Phi}_0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

tem-se

$$\Phi_t = \cos(A_E^{1/2}t)\Phi_0 + A_E^{-1/2} \sin(A_E^{1/2}t)\dot{\Phi}_0. \quad (4.12)$$

O interesse principal é na não negatividade de A_E . Se A_E é positivo então a dinâmica é classicamente estável; se A_E é negativo a dinâmica é instável. Isso se deve ao fato do comportamento das funções $A_E^{-1/2} \sin(A_E^{1/2}t)$ e $\cos(A_E^{1/2}t)$ serem limitadas para A_E positivo e, assim, Φ permanece limitada para qualquer t . Se A_E for negativo as funções trigonométricas se tornarão funções hiperbólicas e assim elas podem se tornar divergentes.

Para a análise da estabilidade, considera-se, como feito anteriormente, uma dependência no tempo do tipo

$$\Phi(x, t) = e^{-iwt}\Phi(x), \quad (4.13)$$

portanto, a equação (4.3) satisfaz

$$A\Phi(x) = w^2\Phi(x). \quad (4.14)$$

Fixada as condições de contorno na singularidade, o operador auto-adjunto A será positivo se $w^2 > 0$, ou seja w real.

Para determinar as possíveis condições de contorno, é necessário observar o comportamento assintótico do operador A e da variável x , pois não é possível expressar r em termos de x . O comportamento de x quando $r \rightarrow 0$ é

$$x \sim r - \mu \left[\ln(1) + \left(1 + \frac{r}{\mu}\right)^{-1} \frac{1}{\mu} r - \left(1 + \frac{r}{\mu}\right)^{-2} \frac{1}{\mu^2} r^2 \right], \quad (4.15)$$

próximo a singularidade

$$x \sim r - r + \frac{r^2}{2\mu} \rightarrow r^2 \sim 2\mu x, \quad (4.16)$$

Essa é a forma da coordenada tartaruga para um r pequeno. O próximo passo é analisar o comportamento assintótico do operador A para ambas as perturbações.

Perturbação axial

Para o potencial axial V_V tem a seguinte forma

$$A_A = -\frac{d^2}{dx^2} + \left(1 + \frac{\mu}{r}\right) \frac{1}{r^2} \left[\frac{3\mu}{r} + l(l+1)\right], \quad (4.17)$$

quando $r \rightarrow 0$, A torna-se

$$A_A \sim -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{3\mu^2}{r^4}, \quad (4.18)$$

substituindo (4.16), o operador para perturbação axial torna-se

$$A_A \sim -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{3}{4x^2}. \quad (4.19)$$

Repare que o potencial é na forma $V(x) = ax^{-2}$. O valor de $3/4$ no potencial é o limite para que o operador seja auto-adjunto. Na região $-1/4 < a < 3/4$ o operador não é auto-adjunto, mas ainda é possível construir soluções estáveis. Se $a < -1/4$ a extensão auto-adjunta implica em modos com $w^2 < 0$ [27].

Na equação (4.14),

$$-\frac{d^2}{dx^2}\Phi + \frac{3}{4x^2}\Phi = w^2\Phi, \quad (4.20)$$

cuja solução geral para $w^2 = 0$ é

$$\Phi_A \sim a_1 x^{-1/2} + b_1 x^{3/2}. \quad (4.21)$$

Perturbação polar

Para o potencial polar V_P , o operador A tem a forma

$$A_P = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{f(r)}{(mr - 3\mu)^2} \left[-9\frac{\mu^3}{r^3} + 9m\frac{\mu^2}{r^2} - 3m^2\frac{\mu}{r} + 2m^2 + m^3\right], \quad (4.22)$$

quando $r \rightarrow 0$, o operador A pode ser escrito como

$$A_P \sim -\frac{d^2}{dx^2} + \left(1 + \frac{\mu}{r}\right) \frac{1}{9\mu^2} \left[\frac{-9\mu^3}{r^3}\right], \quad (4.23)$$

$$A_P \sim -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\mu^2}{r^4}, \quad (4.24)$$

como $r^2 = 2\mu x$, tem-se

$$A_P \sim -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{4x^2}. \quad (4.25)$$

O valor $a = -1/4$ é o limite para a estabilidade. Aqui ainda existe a possibilidade de ter modos estáveis[28].

Na equação (4.14),

$$-\frac{d^2}{dx^2}\Phi - \frac{1}{4x^2}\Phi = w^2\Phi, \quad (4.26)$$

cuja solução geral para $w^2 = 0$ é

$$\Phi_P \sim a_0 x^{1/2} \log\left(\frac{x}{\mu}\right) + b_0 x^{1/2}. \quad (4.27)$$

Para uma determinada classe de potenciais singulares e $V(x) = c/x^2$, com o coeficiente c em um certo intervalo, o operador não é automaticamente auto-adjunto em seu domínio natural. Tais operadores admitem mais de uma extensão auto-adjunta, e o espectro e as consequências físicas irão depender dessa escolha[29]. Esse é o caso do operador para a perturbação polar. Isso será abordado com mais detalhe nas seções seguintes.

4.1.3. Análise da estabilidade

Com as soluções e os potenciais em mãos, a análise da estabilidade pode ser feita.

Potencial axial

Primeiro, será verificado se a função é de quadrado integrável. Antes é conveniente voltar para a variável r . A solução (4.21) na variável r é dada por

$$\Phi_A(r) \sim a_1 r^{-1} + b_1 r^3, \quad (4.28)$$

agora sim pode-se calcular a norma ao quadrado. Da (3.54) com a equação (4.21) , tem-se

$$\|\Phi_A(r)\|^2 = |a_1|^2 r^{-2} + |b_1|^2 r^6 + a_1^* b_1 r^2 + a_1 b_1^* r^2. \quad (4.29)$$

O fato da função ser bem comportada em zero, garante que a solução seja de quadrado integrável. Logo, para que a solução convirja $a_1 = 0$ em $x = 0$. Com isso, a solução é

$$\Phi_A(r) \sim b_1 r^3. \quad (4.30)$$

Com essa solução, verifica-se o comportamento do termo de borda dado por

$$\Phi_A \Phi'_A|_0 = 3b_1^2 [r^5]_0 = 0. \quad (4.31)$$

O próximo passo é verificar o potencial. Da equação (4.6)

$$V_A = \frac{f(r)}{r^2} \left[\frac{3\mu}{r} + l(l+1) \right], \quad (4.32)$$

que, obviamente, é positivo para todo o intervalo de r . E o último passo é verificar se o operador A é auto-adjunto. Para isso é necessário resolver a equação (3.44) para o operador A_A

$$-\Phi_{xx} + \frac{3}{4x^2}\Phi = \pm i\Phi. \quad (4.33)$$

A solução dessa equação é dada por

$$\Phi(x) = c_2 \sqrt{x} Y_1 \left[-(-1)^{\frac{1}{2} \mp \frac{1}{4}} x \right] - c_1 \sqrt{x} J_1 \left[(-1)^{\frac{1}{2} \mp \frac{1}{4}} x \right], \quad (4.34)$$

cuja solução do segundo tipo

$$\sqrt{x} Y_1 \left[-(-1)^{\frac{1}{2} \mp \frac{1}{4}} x \right], \quad (4.35)$$

diverge para $x \rightarrow 0$. Logo, tem-se que $n_+ = n_- = 1$ e a solução possui uma extensão auto-adjunta. É assumido que no infinito espacial a solução vai a zero.

Portanto, a solução é de quadrado integrável, possui o termo de borda nulo, seu potencial é positivo definido e seu operador apresenta uma extensão auto-adjunta. Com isso, a solução para uma perturbação axial é estável.

Potencial polar

Para a perturbação polar, cujo potencial é dado por

$$V_P = \frac{f(r)}{(mr - 3\mu)^2} \left[-9\frac{\mu^3}{r^3} + 9m\frac{\mu^2}{r^2} - 3m^2\frac{\mu}{r} + 2m^2 + m^3 \right], \quad (4.36)$$

a análise é bem mais difícil, pois o potencial V_P diverge em um valor dentro do intervalo $0 < r < \infty$. Esse problema surge por causa da massa negativa. Em Schwarzschild com massa positiva também existe essa divergência no potencial, porém o raio em que ocorre a divergência está fora do intervalo estudado.

Conforme feito anteriormente, é conveniente passar a solução para a variável r . De (4.27), tem-se

$$\Phi_P(r) = a_0 r \log\left(\frac{r^2}{\mu}\right) + b_0 r. \quad (4.37)$$

Fazendo a norma ao quadrado

$$\|\Phi_P(r)\|^2 = |a_0|^2 r^2 \left(\log\left(\frac{r^2}{\mu}\right)\right)^2 + |b_0|^2 r^2 + a_0^* b_0 r^2 \log\left(\frac{r^2}{\mu}\right) + a_0 b_0^* r^2 \log\left(\frac{r^2}{\mu}\right), \quad (4.38)$$

e, diferente do caso anterior, não é trivial a escolha da condição de contorno. O mesmo acontece com o termo de borda

$$\Phi_P \Phi'_P|_0 = a_0^2 r \log^2\left(\frac{r^2}{\mu}\right) + a_0^2 r \log\left(\frac{r^2}{\mu}\right) + 2a_0 b_0 r \log\left(\frac{r^2}{\mu}\right) + a_0 b_0 r + b_0^2 r = 0, \quad (4.39)$$

onde também não é trivial escolher as condições de contorno. Por esse motivo é definido a variável $q \equiv \frac{b_0}{a_0}$ para tentar encontrar uma extensão auto-adjunta.

A estratégia utilizada pelos autores, é mostrar que existe uma única condição de contorno $q = q_c$, tal que o auto-valor mínimo de A_P seja nulo, ou seja $w^2 = 0$. Essa condição crítica separa as extensões auto-adjuntas positivas e negativas. Por questão de simplicidade, será usado somente $l = 2$ daqui para frente.

Próximo do ponto singular, $r = r_c = \frac{3\mu}{4}$, a solução comporta-se como

$$\Phi \sim C_1 [(r - r_C)^2 + \dots] + C_2 [(r - r_C)^{-1} + \dots], \quad r \rightarrow r_C, \quad (4.40)$$

$C_2 = 0$ para que a solução seja bem comportada. Logo

$$\Phi \sim C_1 (r - r_C)^2, \quad r \rightarrow r_C, \quad (4.41)$$

isso implica que $\Phi = \Phi' = 0$ em $r = r_C$. Portanto trunca-se a solução em $r = r_C$ e substitui-se na solução para $r > r_C$ que também satisfaz $\Phi = \Phi' = 0$ nesse ponto. Além disso, Φ tem que ser zero nesse ponto para que a solução seja de quadrado integrável. Em especial o autor escolhe a função $\Phi = 0$ para $r > r_C$.

Resolvendo para perturbação polar e $w^2 = 0$, obtém-se a seguinte solução

$$\Phi = C_3 \frac{r(3\mu^3 - 6\mu r^2 + 4r^3)}{\mu^3(4r - 3\mu)} + C_4 \left[\frac{r(13\mu^3 - 24\mu^2 r + 12\mu r^2)}{3\mu^3(4r - 3\mu)} - \frac{r(3\mu^3 - 6\mu r^2 + 4r^3)}{\mu^3(4r - 3\mu)} \ln \left(\frac{r + \mu}{r} \right) \right]. \quad (4.42)$$

Multiplicando por $\frac{\mu^3(4r-3\mu)}{r(3\mu^3-6\mu r^2+4r^3)}$ e usando a condição de contorno $\Phi = \Phi' = 0$ em $r = 3\mu/4$

$$C_3 = C_4 \left[\log \left(\frac{r + \mu}{r} \right) - \frac{(13\mu^3 - 24\mu^2 r + 12\mu r^2)}{3(3\mu^3 - 6\mu r^2 + 4r^3)} \right], \quad (4.43)$$

em $r = r_c = \frac{3\mu}{4}$

$$C_3 = C_4 \left[\log \frac{7}{3} - \frac{4}{9} \right]. \quad (4.44)$$

Assim encontra-se uma solução normalizada no caso $w^2 = 0$.

Comparando essa relação com (4.27), a condição crítica para as condições de contorno é

$$q_c = 2 + \log \frac{98}{9}, \quad (4.45)$$

esse é um ponto de descontinuidade, que separa as solução estável da instável. Ou seja, para $q < q_C$ a solução será estável, e para $q > q_C$ a solução será instável.

4.1.4. Uma condição de contorno para a estabilidade

Uma possível condição que garantiria que operador tivesse uma extensão auto-adjunta positiva é fazer $a_0 = 0$. O método para provar isso consiste em encontrar um operador de primeira ordem na forma

$$\tilde{D} \equiv \frac{d}{dx} + S, \quad (4.46)$$

com S sendo alguma função suave de r . Calculando o produto interno para o potencial V_P :

$$(\Phi, A\Phi) = - \int_0^\infty \Phi^* \Phi_{xx} dx + \int_0^\infty V_P |\Phi|^2 dx, \quad (4.47)$$

$$= -\Phi^* \Phi_x \Big|_0^\infty + \int_0^\infty (|\Phi_x|^2 + V_P |\Phi|^2) dx, \quad (4.48)$$

escrevendo em termos de \tilde{D}

$$(\Phi, A\Phi) = -\Phi^* (\tilde{D} - S) \Phi \Big|_0^\infty + \int_0^\infty (|\tilde{D}\Phi|^2 + V_P |\Phi|^2) dx, \quad (4.49)$$

$$= -\Phi^* \tilde{D}\Phi \Big|_0^\infty + S |\Phi|^2 \Big|_0^\infty + \int_0^\infty (|\tilde{D}\Phi|^2 - S^2 |\Phi|^2 + V_P |\Phi|^2) dx. \quad (4.50)$$

Introduzindo $S |\Phi|^2$ na integral

$$S = \int \frac{dS}{dr} dr, \quad (4.51)$$

e observando que

$$dr = f dx, \quad (4.52)$$

pode-se escrever

$$S = \int \frac{dS}{dr} f dx. \quad (4.53)$$

Então

$$(\Phi, A\Phi) = -\Phi^* \tilde{D}\Phi \Big|_0^\infty + \int_0^\infty (|\tilde{D}\Phi|^2 + \tilde{V}_P |\Phi|^2) dx, \quad (4.54)$$

onde

$$\tilde{V}_P \equiv V_P - S^2 + f \frac{dS}{dr}. \quad (4.55)$$

Aqui, a condição de nulidade no infinito permanece.

Além de analisar o termo de contorno, é necessário investigar a positividade de \tilde{V} , pois se \tilde{V} é positivo então o operador A será positivo definido. Isso vai depender da função S .

Escolhendo a seguinte função

$$S = -\frac{f}{r}, \quad (4.56)$$

e substituindo em (4.55),

$$\tilde{V}_P = V_P + f \frac{\mu}{r^3}. \quad (4.57)$$

Substituindo V_P nessa equação, obtêm-se

$$\tilde{V}_P = \frac{f}{(mr - 3\mu)^2} m \left[\frac{(mr - 3\mu)^2}{3r^2} + \frac{2}{3}m^2 + 2m \right]. \quad (4.58)$$

Pode-se notar que \tilde{V}_P é positivo, porém ele continua divergindo em $r = r_C$. Como visto anteriormente, Φ tem que ser zero nesse ponto para que a função seja integrável. Nesse sentido A_S é um operador simétrico positivo com domínio consistindo em funções suaves de suporte compacto satisfazendo a condição de regularidade em $r = r_C$.

Outro ponto é investigar como se comporta $\Phi^* \tilde{D} \Phi |_0$ nesse caso. A equação (4.27) escrita em termos de r é

$$\Phi_P = a_0 r \log \left(\frac{r^2}{\mu} \right) + b_0 r. \quad (4.59)$$

Expandindo o termo $\Phi^* \tilde{D} \Phi |_0$, obtêm-se

$$\begin{aligned} \Phi \left(\frac{d}{dx} - \frac{1}{r} \right) \Phi &= a_0^2 r \log^2 \left(\frac{r^2}{\mu} \right) + a_0^2 r \log \left(\frac{r^2}{\mu} \right) + 2a_0 b_0 r \log \left(\frac{r^2}{\mu} \right) + \\ &+ a_0 b_0 r + b_0^2 r - a_0^2 \left[r \log^2 \left(\frac{r^2}{\mu} \right) \right] + b_0^2 r + 2a_0 b_0 r \log \left(\frac{r^2}{\mu} \right). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Portanto, a_0 tem que ser zero para que a condição $\Phi^* \tilde{D} \Phi |_0$ não divirja em $r = 0$ resultando em um espaço-tempo estável.

4.2. Método 2 - Gleiser e Dotti

No artigo[4] os autores modificam o formalismo de Regge-Wheeler-Zerilli e provam que, para perturbações gravitacionais escalares, a escolha das constantes de integração não é algo trivial, e que todos os modos perturbativos escalares são instáveis.

4.2.1. Equações perturbadas para a solução de Schwarzschild

É possível, utilizando o gauge de Regge-Wheeler, descrever a perturbação polar por meio de quatro funções $H_0(r, t)$, $H_1(r, t)$, $H_2(r, t)$ e $K(r, t)$, no qual a métrica toma a forma,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (1 - \epsilon H_0 Y_{\ell, m}) dt^2 + 2 \epsilon H_1 Y_{\ell, m} dt dr + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (1 + \epsilon H_2 Y_{\ell, m}) dr^2 + r^2 (1 + \epsilon K Y_{\ell, m}) (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2), \quad (4.61)$$

aqui ϵ é um parâmetro que auxilia a controlar a ordem da perturbação. $Y_{\ell, m} = Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos, e, como feito anteriormente, pode-se restringir $m = 0$ sem perda de generalidade. As equações linearizadas de Einstein para a métrica (4.61) implicam $H_0(r, t) = H_2(r, t)$, e um conjunto de equações acopladas H_1 , H_2 and K . Essa equação pode ser resolvida em termos da função de Zerilli $\psi_Z(r, t)$,

$$\begin{aligned} K &= g(r)\psi_Z + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\partial\psi_Z}{\partial r}, \\ H_1 &= h(r)\frac{\partial\psi_Z}{\partial t} + r\frac{\partial^2\psi_Z}{\partial t\partial r}, \\ H_2 &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(h(r)\psi_Z + r\frac{\partial\psi_Z}{\partial r} \right) \right] - K, \end{aligned} \quad (4.62)$$

onde,

$$\begin{aligned} g(r) &= \frac{\lambda(\lambda + 1)r^2 + 3\lambda Mr + 6M^2}{r^2(\lambda r + 3M)}, \\ h(r) &= \frac{\lambda r^2 - 3\lambda r M - 3M^2}{(r - 2M)(\lambda r + 3M)}, \\ \lambda &= \frac{(\ell - 1)(\ell + 2)}{2}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

ψ_Z é uma solução da equação de Zerilli,

$$\frac{\partial^2 \psi_Z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi_Z}{\partial x^2} + V_P \psi_Z = 0, \quad (4.64)$$

onde x é a mesma coordenada tartaruga citada anteriormente. A relação (4.62) pode ser invertida, dando

$$\psi_Z(r, t) = \frac{r(r - 2M)}{(\lambda + 1)(\lambda r + 3M)} \left(H_2 - r \frac{\partial K}{\partial r} \right) + \frac{r}{\lambda + 1} K. \quad (4.65)$$

Aqui é considerado, como feito anteriormente, uma dependência no tempo na forma

$$\psi_Z(t, r) = e^{i\omega t} \psi(r), \quad (4.66)$$

chegando em uma equação tipo-Schrödinger

$$- \frac{d^2 \psi_Z}{dr_*^2} + V_P(r) \psi = \omega^2 \psi. \quad (4.67)$$

4.2.2. Modificação do formalismo de Regge-Wheeler-Zerilli

Devido às dificuldades na análise da estabilidade da métrica de Schwarzschild com massa negativa, é apresentado uma modificação no formalismo de Regge-Wheeler-Zerilli, a fim de tornar o estudo mais simples.

Segue-se o formalismo usado na seção anterior, mas ao invés de ψ_Z , usa-se

$$\zeta(t, r) = (2\lambda r - 3\mu) \Psi(t, r). \quad (4.68)$$

Substituindo em (4.64) e assumindo que função depende só de r , ou seja $\zeta = e^{i\omega t} X(r)$, encontra-se

$$X'' = \frac{(4\lambda r^2 + 6\lambda\mu r - 3\mu^2)}{(2\lambda r - 3\mu)(r + \mu)r} X' + \left[\frac{(4\lambda^2 r^2 - 6\lambda\mu r + 3\mu^2)}{(2\lambda r - 3\mu)(r + \mu)r^2} - \frac{r}{(r + \mu)^2} w^2 \right] X. \quad (4.69)$$

A expressão (4.69) não é do tipo Schrödinger, e os coeficientes X e X' divergem em $r = 3\mu/2\lambda$. O próximo passo é analisar o comportamento de w e as condições de contorno na singularidade nua.

4.2.3. Soluções estáticas

Para $w = 0$ a equação (4.69) torna-se

$$X'' - \frac{(4\lambda r^2 + 6\lambda\mu r - 3\mu^2)}{(2\lambda r - 3\mu)(r + \mu)r} X' - \frac{(4\lambda^2 r^2 - 6\lambda\mu r + 3\mu^2)}{(2\lambda r - 3\mu)(r + \mu)r^2} X = 0. \quad (4.70)$$

Resolvendo essa equação computacionalmente com $l = 2$, obtém-se a seguinte expressão para $X(r)$

$$X(r) = C_1 \frac{r(4r^3 - 6r^2 + 3\mu^3)}{3\mu^2 - 6\mu + 4} + C_2 \frac{r(4r^3 - 6r^2 + 3\mu^3) \left(\frac{\mu(12r^2 - 24r\mu + 13\mu^2)}{4r^3 - 6\mu r^2 + 3\mu^3} - 3 \log \left(\frac{r+\mu}{r} \right) \right)}{3\mu^5(3\mu^2 - 6\mu + 4)}, \quad (4.71)$$

onde C_1 e C_2 são constantes. Essa equação representa a solução independente do tempo para perturbação gravitacional com $w = 0$. Porém, ainda é necessário determinar as constantes para saber se elas são aceitáveis ou não para essa solução. Um procedimento que pode ser usado é investigar a mudança de algum invariante de curvatura. Nesse artigo foi escolhido o invariante de Kretschmann.

$$K = R_{abcd}R^{abcd}, \quad (4.72)$$

para $r \rightarrow 0$

$$K = \frac{12\mu^2}{r^6} - \varepsilon C_2 \left[\frac{36\mu^2}{r^7} + \dots \right] Y_{lm} - \varepsilon C_1 \left[\frac{C_3}{9\mu^2 r^3} + \dots \right] Y_{lm}. \quad (4.73)$$

Aqui, $C_2 = 0$ para que o termo de primeira ordem não cresça mais rápido que o termo de ordem zero.

Para $r \rightarrow \infty$

$$K = \frac{12\mu^2}{r^6} - \varepsilon C_1 \left[\frac{C_4}{r^{5-l}} + \dots \right] Y_{lm} + \varepsilon C_2 \left[\frac{K_l}{r^{l+7}} + \dots \right] Y_{lm}. \quad (4.74)$$

Aqui $C_1 = 0$ para que o termo de primeira ordem fique menor que o termo de ordem zero. Logo não existe uma escolha não trivial para o caso estático.

4.2.4. Soluções dependentes do tempo

Para a solução dependente do tempo, $w \neq 0$. Considerando a solução próxima à singularidade nua, obtém-se

$$X(r) = C_3 r + C_4 r \log r, \quad (4.75)$$

onde C_3 e C_4 são constantes. Em $r = 0$ a equação (4.75) é bem comportada para qualquer escolha das constantes. Entretanto, a primeira derivada $X'(r)$ diverge nesse ponto devido ao termo $\log(r)$, e como as perturbações dependem da derivada (ver eq. 4.62), é necessário impor que C_4 seja zero a fim de retirar a divergência. Isso implica que somente a solução

$$X(r) = C_3 r, \quad (4.76)$$

pode ser considerada para a análise. Isso fixa as condições de contorno em $r = 0$. Assim como no método anterior, se $w^2 > 0$ corresponde a uma oscilação, e, portanto, é estável. E se $w^2 < 0$ a perturbação será instável devido ao crescimento exponencial da parte temporal em $r \rightarrow \infty$, a menos que se possa excluir tais termos divergentes.

A próxima seção será destinada ao estudo desses casos instáveis. Mesmo que pareça que a solução seja estável, se existir pelo menos um caso onde a haja um crescimento exponencial da parte temporal, a solução será instável.

4.2.5. Soluções instáveis

Modos instáveis correspondem a $w^2 = -k^2$. O primeiro passo que o artigo[4] utiliza é encontrar uma solução numérica para um determinado k em um dado l . A primeira solução é encontrada para $l = 2$ e $k = \frac{\mu}{4}$. Outra solução é encontrada para $l = 3$ e $k = \frac{\mu}{20}$. Isso sugere que é possível encontrar uma solução para todos os l . Então encontra-se

$$X(r) = r e^{-kr} (r + \mu)^{k\mu} \left[C_1 + C_2 \int_{C_3}^r \frac{(2\lambda y - 3\mu)^2 e^{2ky}}{(y + \mu)^{2k\mu+1} y} dy \right], \quad (4.77)$$

onde

$$k = \frac{2\lambda(\lambda + 1)}{3\mu} = \frac{(l - 1)l(l + 1)(l + 2)}{6\mu}. \quad (4.78)$$

O termo da integral diverge para $r = 0$ e $r = \infty$. Portanto é feito $C_2 = 0$, transformando a equação em

$$\zeta(t, r) = C_1 r e^{-kr} (r + \mu)^{k\mu} e^{kt}. \quad (4.79)$$

Aqui, em $r = 0$ e $r = \infty$ a solução é bem comportada. Porém, se $t \rightarrow \infty$ a solução diverge. Ou seja, para $w^2 = -k^2$ existem soluções que são finitas próximo da singularidade nua e no infinito espacial, porém que crescem exponencialmente no tempo, caracterizando assim uma solução instável sob perturbações polares.

4.3. Comparação entre os métodos

Ambos os métodos concordam na estabilidade da solução de singularidade nua para a perturbação axial. Nesse caso, o operador A_V em (4.17) é auto-adjunto, o potencial é bem comportado no intervalo da análise e positivo definido. Portanto, o menor auto-valor de A_V é positivo e o espaço-tempo é estável para as perturbações axiais.

Por outro lado, para a perturbação polar os resultados são divergentes. Gibbons et al. tenta encontrar um valor, q_c , para o qual o operador A_S em (4.26) torna-se auto-adjunto. O valor encontrado está em (4.45), e, de acordo com a análise, para qualquer valor maior que esse o operador será auto-adjunto. Após isso é verificado uma condição para que o potencial V_P em (4.7) seja positivo, garantindo assim a estabilidade da solução. Eles encontram que para a função $S(r)$ em (4.1.4) o potencial se tornará positivo e será expresso por (4.58). Sendo assim, com o operador auto-adjunto e o potencial positivo, eles garantem que fixando a condição de contorno (4.45) o espaço-tempo é estável para as perturbações polares.

Gleiser e Dotti modificam a equação de Zerilli (4.68) para retirar a divergência na equação. Com a equação modificada, é feito o estudo do caso estático, $w = 0$, em (4.71) onde eles não encontram uma condição para para fixação das condições de contorno. Já para o caso não estático (4.75), a princípio, existe uma condição de contorno clara para a estabilidade da solução que é vista em (4.76), e parece que a solução é estável para a perturbação polar. Entretanto, ao se estudar as soluções instáveis, $w^2 = -k^2$, conclui-se que para qualquer valor de k , onde k é um inteiro positivo, a solução (4.77) diverge conforme $t \rightarrow \infty$, e portanto o espaço-tempo é instável para as perturbações polares.

O grande problema na análise da perturbação polar está na utilização da função de

Zerilli. Essa solução não é de C^2 portanto a métrica perturbada não satisfaz as equações de Einstein no vácuo. Além disso, Gibbons et al. tentam contornar o problema da divergência do potencial fazendo uma colagem da função no ponto divergente, $r_c = 3\mu/4$, assumindo que a função seja nula para todo $r > r_c$, porém há uma descontinuidade na região da colagem. Ou seja, foi imposto uma condição de colagem que não respeita a condição de diferenciabilidade da métrica e das perturbações. Não basta que a função seja da classe C^1 , tem que ser no mínimo C^2 . Por isso, Gleiser e Dotti redefinam a função de Zerilli para tirar esse polo artificial e analisar a estabilidade numa variável que tem soluções de classe C^∞ .

Capítulo 5

Solução EMD

Além das soluções assintoticamente planas, como a métrica de Schwarzschild e de Reissner-Nordström, onde em uma distância muito grande do buraco negro a região é descrita pela métrica de Minkowski, é possível ter vários outros tipos de soluções descrevendo buracos negros. Por exemplo, o buraco negro de Reissner-Nordström que é um buraco negro estático, com simetria esférica, o qual é definido por dois parâmetros: a massa M e a carga elétrica Q . Outro exemplo é o buraco negro assintoticamente anti-deSitter(AdS), que é um tipo de solução das equações de Einstein com constante cosmológica, onde o limite assintótico é descrito pela métrica AdS com uma região de curvatura constante, ou ainda soluções onde há o acoplamento de campos específicos à gravitação.

Nesse capítulo serão tratadas as soluções da teoria Einstein-Maxwell-dilaton(EMD)[5] onde a gravitação é acoplada a um campo escalar, o dilaton, e a um campo eletromagnético que, em princípio, poderá se acoplar ao campo escalar de forma não trivial. Este será o acoplamento abordado nesse capítulo. Esta teoria permite soluções assintoticamente planas, mas também soluções que não são nem assintoticamente planas e nem assintoticamente AdS. Este tipo de solução apresenta um interesse particular devido a sua conexão com teorias fundamentais, em particular com as teorias de cordas. O Dilaton é campo que aparece em teorias com dimensões extras (como por exemplo, na teoria de Kaluza-Klein) quando o volume compactificado das dimensões varia.

5.1. Solução da teoria EMD

A teoria EMD, que compreende o dilaton ϕ e um campo de vetor abeliano A_μ acoplados a gravidade, é dada pela ação:[30][5][31]

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \{ R - 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - e^{-2\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \}, \quad (5.1)$$

onde $F = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor eletromagnético.

A variação da ação (5.1) com relação a $g^{\mu\nu}$, A_μ e ϕ resulta em:

$$R_{\mu\nu} = 2\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + 2e^{-2\phi} \left(F_{\mu\beta} F_\nu^\beta - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2 \right), \quad (5.2)$$

$$\nabla_\nu (e^{-2\phi} F^{\mu\nu}) = 0, \quad (5.3)$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi = -\frac{1}{2} e^{-2\phi} F^2. \quad (5.4)$$

Soluções assintoticamente planas, com horizonte de eventos não degenerado, descrevendo buracos negros regulares eletrostáticos e magnetostáticos foram obtidas por Gibbons e Maeda[32], onde a métrica é dada, para a solução eletrostática, por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(1 - \frac{r_-}{r}\right) d\Omega^2. \quad (5.5)$$

O campo dilatônico e o campo elétrico são dados por:

$$e^{2\phi} = e^{2\phi_\infty} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right), \quad (5.6)$$

$$F^{tr} = \frac{Q}{r^2} e^{2\phi_\infty},$$

onde ϕ_∞ é o valor de ϕ no limite assintótico.

Utilizando as equações (5.2) e (5.6) pode-se calcular o escalar de curvatura R

$$R = -\frac{r_-^2}{2r^3} \frac{(r - r_+)}{(r - r_-)^2}, \quad (5.7)$$

nota-se uma divergência em $r = 0$ e $r = r_-$.

A massa e a carga são dadas por

$$M = \frac{r_+}{2}, \quad Q = e^{-\phi_\infty} \sqrt{\frac{r_+ r_-}{2}}. \quad (5.8)$$

Solução não assintoticamente plana[5]

Uma outra opção é analisar as soluções não assintoticamente planas, que podem ser obtidas utilizando o limite próximo ao horizonte da métrica (5.5). Primeiramente é introduzido um parâmetro auxiliar ϵ

$$r_+ = r_- + \epsilon b, \quad (5.9)$$

$$r = r_- + \epsilon r, \quad (5.10)$$

e, considerando $\epsilon \ll 1$, a métrica pode ser expressa como

$$ds^2 = \frac{\epsilon(r-b)}{(r_- + \epsilon r)} dt^2 - \frac{\epsilon(r_- + \epsilon r)}{(r-b)} dr^2 - \epsilon r(r_- + \epsilon r) d\Omega^2. \quad (5.11)$$

Os campos ficam

$$F^{tr} = \frac{Q}{(r_- + \epsilon r)^2} e^{2\phi_\infty}, \quad (5.12)$$

$$e^{2\phi(r)} = e^{2\phi_\infty} \left(\frac{\epsilon r}{r_- + \epsilon r} \right). \quad (5.13)$$

Para fazer o limite de $\epsilon \rightarrow 0$ troca-se as variáveis da seguinte forma:

$$r_- = \frac{r_0}{\epsilon}, \quad t = \frac{t}{\epsilon}, \quad \phi_\infty = -\log \epsilon. \quad (5.14)$$

Portanto, a métrica e os campos são expressos como

$$ds^2 = \frac{\epsilon(r-b)}{(r_0 + \epsilon^2 r)} dt^2 - \frac{\epsilon(r_0 + \epsilon^2 r)}{(r-b)} dr^2 - \epsilon r(r_0 + \epsilon^2 r) d\Omega^2, \quad (5.15)$$

$$F^{tr} = \frac{Q}{(r_0 + \epsilon^2 r)^2}, \quad (5.16)$$

$$e^{2\phi(r)} = \left(\frac{r}{r_0 + \epsilon^2 r} \right). \quad (5.17)$$

Quando faz-se $\epsilon \rightarrow 0$ tem-se

$$ds^2 = \frac{(r-b)}{r_0} dt^2 - \frac{r_0}{(r-b)} dr^2 - rr_0 d\Omega^2, \quad (5.18)$$

$$F^{tr} = \frac{Q}{r_0^2}, \quad (5.19)$$

$$e^{2\phi(r)} = \left(\frac{r}{r_0}\right), \quad (5.20)$$

$$M = \frac{b}{4}, \quad (5.21)$$

$$Q = \frac{r_0}{\sqrt{2}}, \quad (5.22)$$

onde b e r_0 estão relacionados com a massa, M , e a carga, Q , respectivamente. O escalar de curvatura é dado por

$$R = \frac{-(r-b)}{2r_0 r^2}, \quad (5.23)$$

e o invariante de Kretschmann

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{3b^2 + 6br - 11r^2}{4r_0^2 r^4}. \quad (5.24)$$

O diagrama de Penrose para os diferentes valores de b é mostrado na figura (5.1). O caso $b > 0$ representa um buraco negro com uma singularidade tipo-espaço escondida pelo horizonte de eventos em $r = b$. Esse diagrama é idêntico ao buraco negro de Schwarzschild. Para $b = 0$ tem-se um buraco negro extremo com uma singularidade nula. E o caso $b < 0$ descreve uma singularidade nua localizada em $r = 0$.

5.2. Perturbação da solução EMD

Como caso mais simples, será feita uma perturbação por um campo escalar $\Phi(t, r, \theta, \phi)$ massivo. Apesar de mais simples, as equações perturbadas tem o comportamento análogo às perturbações na métrica, e podem apresentar consequências interessantes. Alguns resultados, por exemplo, mostram que no espaço-tempo de Janis-Newman-Winicour (JNW), a singularidade nua contida na métrica é estável sob perturbações do campo escalar[22].

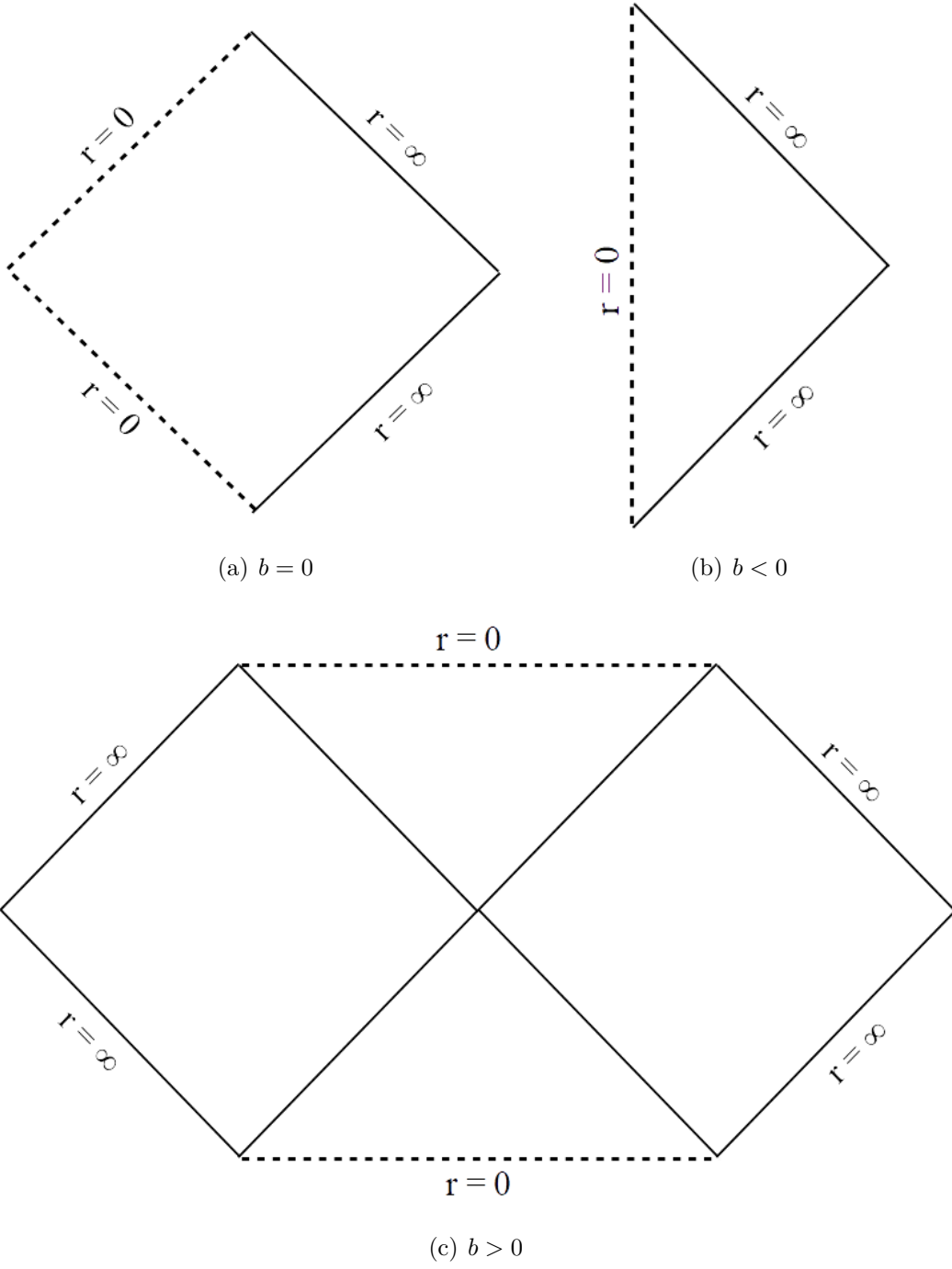


Figura 5.1.: Diagrama de Penrose.

A dinâmica do campo escalar massivo é dada pela equação de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\Phi = 0. \quad (5.25)$$

Utilizando a solução de EMD

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r_0 r d\Omega^2, \quad f(r) = \frac{r-b}{r_0} \quad (5.26)$$

e calculando os símbolos de Christoffel, obtém-se

$$\frac{\ddot{\Phi}}{f} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r f \Phi') - \frac{1}{r_0 r \sin \theta} \left[\partial_\theta(\sin \theta \partial_\theta \Phi) + \frac{\partial_\phi^2 \Phi}{\sin \theta} \right] + m^2 \Phi = 0. \quad (5.27)$$

Fazendo a separação de variáveis

$$\Phi(t, r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)e^{-i\omega t}, \quad (5.28)$$

chega-se à equação

$$-\frac{\omega^2 Y}{f} R - \frac{Y}{r} \frac{d}{dr} \left[r f \frac{dR}{dr} \right] - \frac{R}{r_0 r \sin \theta} \left[\partial_\theta(\sin \theta \partial_\theta Y) + \frac{\partial_\phi^2 Y}{\sin \theta} \right] + m^2 R Y = 0, \quad (5.29)$$

multiplicando por $\frac{r_0 r}{R Y}$, e lembrando que

$$\frac{1}{Y \sin \theta} \left[\partial_\theta(\sin \theta \partial_\theta Y) + \frac{\partial_\phi^2 Y}{\sin \theta} \right] = -l(l+1), \quad (5.30)$$

obtêm-se

$$\frac{\omega^2 r_0 r}{f} R(r) + r_0 \frac{d}{dr} [r f R'(r)] = [l(l+1) + m^2 r r_0] R(r). \quad (5.31)$$

Essa é a equação geral perturbada por uma campo escalar massivo. É possível transformar essa equação em uma equação tipo-Schrödinger. Para isso, será feito uma troca de variável na equação (5.31) do tipo

$$R(r) = \frac{\psi(r)}{\sqrt{r}} \rightarrow R' = \frac{\psi'}{r^{1/2}} - \frac{\psi}{2r^{3/2}}. \quad (5.32)$$

Substituindo na equação

$$-r_0 \left[f \left(\psi' r^{1/2} - \frac{\psi}{2r^{1/2}} \right) \right]' + \left(\bar{l}^2 + \bar{m}^2 r - \frac{\bar{w}^2 r}{f} \right) \frac{\psi}{r^{1/2}} = 0, \quad (5.33)$$

onde $\bar{l}^2 = l(l+1)$, $\bar{m}^2 = m^2 r_0$ e $\bar{w}^2 = w^2 r_0^2$. Desenvolvendo o termo da derivada, resulta

$$-r_0 \left[\psi'' f r^{1/2} + r^{1/2} f' \psi' - \frac{f' \psi}{2r^{1/2}} + \frac{f \psi}{4r^{3/2}} \right] + \left(\bar{l}^2 + \bar{m}^2 r - \frac{\bar{w}^2 r}{f} \right) \frac{\psi}{r^{1/2}} = 0. \quad (5.34)$$

Multiplicando por $r^{-1/2}$ e simplificando alguns termos, obtém-se

$$-r_0 [\psi'' f + f' \psi'] + \left[\frac{\bar{l}^2}{r} + \bar{m}^2 - \frac{\bar{w}^2}{f} - \frac{r_0 f}{4r^2} + \frac{r_0 f'}{2r} \right] \psi = 0, \quad (5.35)$$

e definindo

$$\frac{d}{dx} = f \frac{d}{dr}, \quad (5.36)$$

essa equação pode ser escrita como

$$-\psi_{xx} + f \left[\frac{\bar{l}^2}{r_0 r} + m^2 - \frac{f}{4r^2} + \frac{f'}{2r} \right] \psi = w^2 \psi, \quad (5.37)$$

ou em sua forma explícita

$$-\psi_{xx} + \frac{(r-b)}{r_0^2} \left[\frac{(l+1/2)^2}{r} + m^2 r_0 + \frac{b}{4r^2} \right] \psi = w^2 \psi. \quad (5.38)$$

Essa é uma equação tipo-Schrödinger. Usa-se essa equação pois ela facilita a análise do potencial. Nas seções que seguem, será estudado alguns caso para b e m^2 .

5.2.1. Caso 1: $b = 0$ e $m^2 = 0$

O caso $b = 0$ representa um buraco negro com o horizonte de eventos em $r = 0$. É um caso muito peculiar onde tem-se uma singularidade tipo luz. Nesse caso a função da métrica é dada por

$$f = \frac{r}{r_0}, \quad (0 < r < \infty) \quad (5.39)$$

e a equação perturbada (5.31) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dr} [r^2 R'(r)] + [\bar{w}^2 - \bar{l}^2] R(r) = 0, \quad (5.40)$$

onde

$$\bar{w}^2 = w^2 r_0^2 \quad \text{e} \quad \bar{l}^2 = l(l+1). \quad (5.41)$$

Esse é um problema de Sturm-Liouville com $p(r) = r^2$, $q(r) = \bar{l}^2$ e $\lambda(r) = 1$.

Derivando o primeiro termo da equação (5.40) tem-se

$$r^2 R''(r) + 2r R'(r) + (\bar{w}^2 - \bar{l}^2) R(r) = 0, \quad (5.42)$$

cuja solução é

$$R(r) = Ar^{\gamma_+} + Br^{\gamma_-}, \quad (5.43)$$

onde

$$\gamma_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(l+1/2)^2 - \bar{w}^2}. \quad (5.44)$$

Para que uma solução seja estável $w^2 > 0$. Isso irá se confirmar se o operador for auto-adjunto e o seu potencial positivo. Além disso é útil observar como a solução se comporta nas bordas do intervalo para saber se tais soluções são permitidas (ver seção 3.4).

Portanto, sabendo a solução, o primeiro passo é avaliar se o operador é simétrico e para isso analisa-se o termo de borda

$$|\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*|, \quad (5.45)$$

nos limites do intervalo. Lembrando que $\psi = Rr^{1/2}$, e além disso a solução tem que estar na variável tartaruga, que nesse caso é dada por

$$x = r_0 \log r, \quad (-\infty < x < \infty). \quad (5.46)$$

Sendo assim, a solução pode ser escrita como

$$\psi(x) = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}, \quad (5.47)$$

onde $\alpha^2 = \frac{1}{r_0^2}(w^2 - (l + 1/2)^2)$.

O termo de borda para $\alpha \in \mathbb{R}$ será

$$|\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*|_{-\infty}^{\infty} = 2i\alpha(|A|^2 - |B|^2), \quad (5.48)$$

que claramente só será zero, e consequentemente simétrico, se $|A|^2 = |B|^2$.

Se $\alpha \in \mathbb{C}$ então a solução é

$$\psi(x) = Ae^{-\alpha x} + Be^{\alpha x}, \quad (5.49)$$

e o termo de borda é dado por

$$|\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*|_{-\infty}^{\infty} = 2\alpha(A^*B - AB^*), \quad (5.50)$$

que será zero se $A, B \in \mathbb{R}$.

Além dessa condição, também foi verificado através do teorema de von-Neumann que o operador possui índices de deficiência $n_+ = n_- = 1$ (conferir apêndice F), ou seja o operador possui infinitas extensões auto-adjuntas.

O potencial para essas condições será dado pela equação (G.4) com $b = m = 0$, obtendo

$$V(r) = \frac{1}{r_0^2} \left(l + \frac{1}{2} \right)^2. \quad (5.51)$$

É fácil ver que o potencial é uma constante positiva para todo r , o que indica que a solução seja estável. Mas, para poder afirmar sobre a estabilidade ainda se faz necessário avaliar se a função é de quadrado integrável e se o termo $\psi^* \psi_x = 0$.

Será analisado o comportamento da solução nos limites assintóticos na medida $L^2((0, \infty), dr)$, e com o produto interno definido por

$$\|R(r)\|_{\lambda}^2 = \langle R(r), R(r) \rangle = \int_0^{\infty} R^* R dr. \quad (5.52)$$

1. Para $\bar{w} \in \mathbb{R}$ a norma ao quadrado é dada por:

$$\|R(r)\|^2 = r^{-1} \left(|A|^2 r^2 \sqrt{(l+1/2)^2 - \bar{w}^2} + |B|^2 r^{-2} \sqrt{(l+1/2)^2 - \bar{w}^2} + 2AB \right). \quad (5.53)$$

Em $r \rightarrow 0$ tem-se o seguinte comportamento

- Se $\bar{w}^2 > (l + 1/2)^2$, então a solução será oscilatória crescente e não irá convergir.
- Caso contrário, se $\bar{w}^2 < (l + 1/2)^2$ a solução será bem comportada se $B = 0$ e $\sqrt{(l + 1/2)^2 - \bar{w}^2} > 1/2$, ou seja há um valor máximo para \bar{w} .

E quando $r \rightarrow \infty$

- Se $\bar{w}^2 > (l + 1/2)^2$, então a solução será oscilatória decrescente e irá convergir.
- Se $\bar{w}^2 < (l + 1/2)^2$ a solução irá convergir se $A = 0$.

Ou seja, para \bar{w} real não existe soluções de quadrado integrável.

2. Para $\bar{w}^2 = -k^2$, a norma ao quadrado torna-se

$$\|R(r)\|^2 = r^{-1} \left(|A|^2 r^2 \sqrt{(l+1/2)^2 + k^2} + |B|^2 r^{-2} \sqrt{(l+1/2)^2 + k^2} + 2AB \right). \quad (5.54)$$

Aqui o termo dentro da raiz sempre é positivo e maior que $1/2$.

Para que a solução seja bem comportada em $r \rightarrow 0$, $B = 0$ e $\sqrt{(l + 1/2)^2 + k^2} > 1/2$. Já para $r \rightarrow \infty$ $A = 0$ para que haja a conversão. Ou seja, para \bar{w} imaginário também não existe soluções de quadrado integrável.

Já o termo de borda $\psi^* \psi_x$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ é dado por

$$|\psi^* \psi_x|_{-\infty}^{\infty} = AB^* e^{2i\alpha x} - A^* B e^{-2i\alpha x}, \quad (5.55)$$

onde já foi considerado $|A|^2 = |B|^2$. Repare que é uma função limitada, porém não se anula nos limites.

Para $\alpha \in \mathbb{C}$ tem-se

$$|\psi^* \psi_x|_{-\infty}^{\infty} = |B|^2 e^{2\alpha x} - |A|^2 e^{-2\alpha x}, \quad (5.56)$$

que diverge nos limites.

Mesmo o operador possuindo extensão auto-adjunta e seu potencial positivo não pode-se concluir, a princípio, sobre a estabilidade, já que tanto as soluções com valores de \bar{w} imaginário quanto as com valores reais não são de quadrado integrável e também não tem o termo de borda $\psi^*\psi_x$ nulo.

Esse problema pode ser gerado pela escolha das condições de contorno, visto que o operador possui infinitas extensões auto-adjuntas (ver apêndice F) e isso significa que talvez para alguma outra condição de contorno a solução pode estar contida no espaço de Hilbert. Outro ponto é o fato do espaço tempo não ser assintoticamente plano.

5.2.2. Caso 2: $b > 0$ e $m^2 = 0$

Essa solução representa um buraco negro com o horizonte em $r = b$. Aqui, $f(r)$ é dado por

$$f = \frac{(r-b)}{r_0}, \quad (b < r < \infty) \quad (5.57)$$

e a equação (5.31), torna-se

$$-\frac{d}{dr} \left[r(r-b) \frac{dR(r)}{dr} \right] + \left[\bar{l}^2 - \frac{\bar{w}^2 r}{(r-b)} \right] R(r) = 0. \quad (5.58)$$

Note que aqui também tem-se um problema de Sturm-Liouville com $p(r) = r(r-b)$, $q(r) = \bar{l}^2$ e $\lambda(r) = \frac{r}{(r-b)}$.

Desenvolvendo o termo da derivada, obtém-se

$$\begin{aligned} -r(r-b)R''(r) - (2r-b)R'(r) + \left[\bar{l}^2 - \frac{\bar{w}^2 r}{(r-b)} \right] R(r) &= 0 \\ R''(r) + \frac{(2r-b)}{r(r-b)}R'(r) + \left[\frac{\bar{w}^2}{(r-b)^2} - \frac{\bar{l}^2}{r(r-b)} \right] R(r) &= 0. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Essa equação é semelhante a uma equação Hipergeométrica. Fazendo a troca de variável

$$y = 1 - \frac{r}{b}, \quad \begin{cases} r \rightarrow b & \Rightarrow y \rightarrow 0 \\ r \rightarrow \infty & \Rightarrow y \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (5.60)$$

suas derivadas serão

$$\frac{d}{dr} = -\frac{1}{b} \frac{d}{dy}, \quad \frac{d^2}{dr^2} = \frac{1}{b^2} \frac{d^2}{dy^2}. \quad (5.61)$$

Substituindo em (5.59) é possível escreve-la como

$$\begin{aligned} \frac{R_{yy}}{b^2} - \frac{b(1-2y)}{-b^2(1-y)y} \frac{R_y}{b} + \left[\frac{\bar{w}^2}{(by)^2} - \frac{\bar{l}^2}{-b^2(1-y)y} \right] R &= 0, \\ R_{yy} + \frac{(1-2y)}{(1-y)y} R_y + \left[\frac{\bar{w}^2}{y^2} + \frac{\bar{l}^2}{(1-y)y} \right] R &= 0, \\ y(1-y)R_{yy} + (1-2y)R_y + \left[\frac{\bar{w}^2}{y} + \bar{l}^2 - \bar{w}^2 \right] R &= 0. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Para que essa equação fique na forma da hipergeométrica, é necessário fazer mais algumas substituições, começando por

$$R(y) = y^p f(y); \quad (5.63)$$

$$R_y = y^p f_y + p y^{p-1} f; \quad R_{yy} = y^p f_{yy} + 2p y^{p-1} f_y + p(p-1) y^{p-2} f; \quad (5.64)$$

que substituindo na equação (5.62) fica

$$y(1-y) [f_{yy} + 2p y^{-1} f_y + p(p-1) y^{-2} f] + (1-2y) [f_y + p y^{-1} f] + \left[\frac{\bar{w}^2}{y} + \bar{l}^2 - \bar{w}^2 \right] f = 0. \quad (5.65)$$

Colocando f , f_y e f_{yy} em evidência tem-se

$$y(1-y)f_{yy} + [(1+2p) - 2(1+p)y] f_y + \left[\frac{p^2 + \bar{w}^2}{y} - p^2 - p - \bar{w}^2 + \bar{l}^2 \right] f = 0. \quad (5.66)$$

Uma escolha interessante é fazer

$$p^2 + \bar{w}^2 = 0, \quad (5.67)$$

já que esse termo é mais complicado de se trabalhar. Sendo assim

$$p = i\bar{w}. \quad (5.68)$$

Portanto, tem-se

$$y(1-y)f_{yy} + [(1+2i\bar{w}) - 2(1+i\bar{w})y]f_y + [\bar{l}^2 - i\bar{w}]f = 0. \quad (5.69)$$

Agora definindo

$$a = i(\bar{w} + \lambda) + \frac{1}{2}, \quad b = i(\bar{w} - \lambda) + \frac{1}{2}, \quad c = 2i\bar{w} + 1 \quad (5.70)$$

onde

$$\lambda^2 = \bar{w}^2 - \bar{l}^2 - 1/4, \quad (5.71)$$

obtem-se

$$y(1-y)f_{yy} + [c - (1+a+b)y]f_y - abf = 0, \quad (5.72)$$

que é uma equação hipergeométrica. A solução é dada por

$$f(y) = AF(a, b; c; y) + By^{1-c}F(a-c+1, b-c+1; 2-c; y), \quad (5.73)$$

e em termos de $R(y)$, tem-se

$$R(y) = Ay^{i\bar{w}}F(a, b; c; y) + By^{-i\bar{w}}F(a-c+1, b-c+1; 2-c; y). \quad (5.74)$$

onde A e B são constantes. Essa é a solução da equação (5.58).

Algumas observações sobre essa função:

1. Se $\Re(c) > 1$, então a segunda solução é singular em $y = 0$, portanto se as condições de contorno exigirem uma solução finita em $y = 0 \rightarrow B = 0$.
2. A solução (5.74) é invariante com respeito a permutação $a \leftrightarrow b$.

Nesse caso $\Re(c) = 1$, portanto ainda não se pode concluir nada sobre a solução.

Para $y \rightarrow 0$ a função hipergeométrica comporta-se como:

$$F(a, b; c; 0) = 1. \quad (5.75)$$

portanto

$$R(y) = Ay^{i\bar{w}} + By^{-i\bar{w}}. \quad (y \rightarrow 0) \quad (5.76)$$

Já pra $y \rightarrow \infty$ tem-se

$$F(a, b; c; y) = C_1(-y)^{-a} + C_2(-y)^{-b}, \quad (5.77)$$

e para

$$F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c, y) = C_1(-y)^{-a+c-1} + C_2(-y)^{-b+c-1}. \quad (5.78)$$

Com isso obtém-se

$$R(y) = y^{-1/2} [Cy^{-i\lambda} + Dy^{i\lambda}]. \quad (y \rightarrow \infty) \quad (5.79)$$

Encontrada as soluções pode-se dar continuidade a análise da estabilidade. Como feito anteriormente, primeiro será verificado se o operador é simétrico e para isso usa-se a coordenada tartaruga definida como

$$x = r_0 \log \left(\frac{r}{b} - 1 \right) \quad \rightarrow \quad (-y) = e^{x/r_0}. \quad (-\infty < x < \infty) \quad (5.80)$$

A solução na coordenada tartaruga quando $r \rightarrow b (x \rightarrow -\infty)$ é dada por

$$\psi(x) = Ae^{iwx} + Be^{-iwx}, \quad (5.81)$$

lembrando que $\psi = Rr^{1/2}$. Com isso o termo de borda é

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*| = 2iw(|A|^2 - |B|^2), \quad (5.82)$$

que só será nulo se $|A|^2 = |B|^2$.

No infinito espacial, com $\lambda \in \mathbb{R}$, a solução na coordenada tartaruga será

$$\psi(x) = Ce^{-i\lambda x} + De^{i\lambda x}, \quad (5.83)$$

cujo termo de borda é dado por

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*| = 2i\lambda(|D|^2 - |C|^2), \quad (5.84)$$

e novamente só será simétrico se $|D|^2 = |C|^2$.

Para $\bar{w} = ik$, o que implica $\lambda \in \mathbb{C}$, o termo de borda próximo ao horizonte comporta-se como

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*| = 2k(A^*B - AB^*), \quad (5.85)$$

que é simétrico se $A, B \in \mathbb{R}$. E para $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*| = 2k(D^*C - DC^*), \quad (5.86)$$

que é simétrico se $C, D \in \mathbb{R}$.

Portanto o operador é simétrico tanto para $\bar{w} \in \mathbb{R}$ quando para $\bar{w} \in \mathbb{C}$. Além disso, foi verificado(ver apêndice F) que os índices de deficiência para esse operador são $n_+ = n_- = 1$, ou seja ele possui infinitas extensões auto-adjuntas.

Para a análise do potencial recorre-se a equação na coordenada tartaruga (G.4) com $b > 0$ e $m = 0$, obtendo

$$V(r) = \frac{(r-b)}{r_0} \left[\frac{\bar{l}^2}{rr_0} + \frac{1}{4rr_0} + \frac{b}{4r^2r_0} \right], \quad (5.87)$$

e os limites assintóticos são

$$V(r) \sim \begin{cases} \frac{r}{b} - 1, & r \rightarrow b \\ (l + 1/2)^2 + \frac{1}{4}r^{-1} + \dots, & r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.88)$$

Observando o potencial fica claro que ele é sempre positivo para $r > b$. Esse fato do potencial ser positivo e a condição de que o operador é auto-adjunto indica estabilidade. Porém ainda é necessário verificar se a solução é de quadrado integrável.

Para o cálculo da norma ao quadrado será usada a medida $L^2((0, \infty), \left| \frac{y-1}{y} \right| dy)$, e o produto interno definido por

$$\|R(y)\|_\lambda^2 = \langle R(y), R(y) \rangle = \int_0^\infty R^* R \frac{|y-1|}{|y|} dy. \quad (5.89)$$

1. $\bar{w} \in \mathbb{R}$.

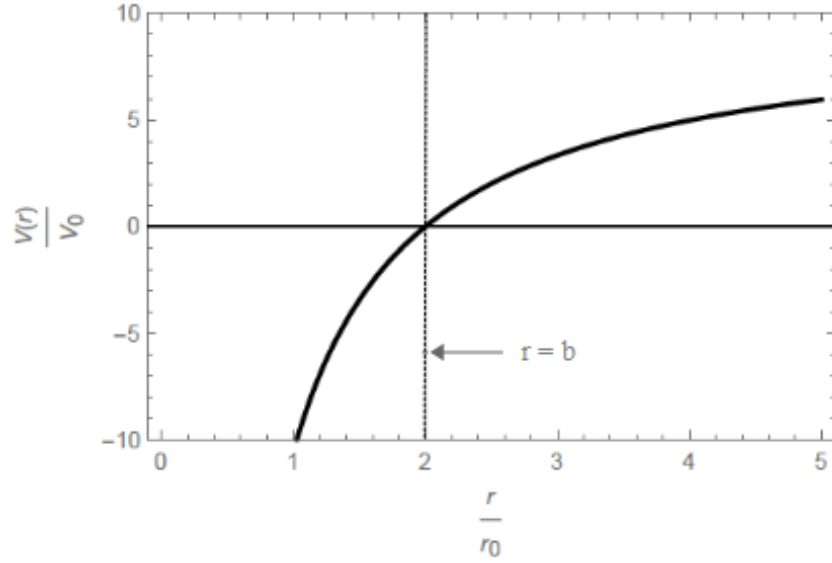


Figura 5.2.: Potencial caso 2 para $l = 2$ e $b/r_0 = 2$.

Essa é uma solução oscilatória. Quando $y \rightarrow 0$, a norma ao quadrado é dada por

$$\|Ay^{i\bar{w}} + By^{-i\bar{w}}\|^2 \left| \frac{y-1}{y} \right| \rightarrow \infty, \quad (y \rightarrow 0) \quad (5.90)$$

que diverge próximo ao horizonte de eventos.

Já pra $y \rightarrow \infty$, a norma ao quadrado é escrita como

$$\|R(y)\|^2 \left| \frac{y-1}{y} \right| \sim |C|^2 [y^{-2i\lambda-1} + y^{2i\lambda-1} + 2] \quad (y \rightarrow \infty) \quad (5.91)$$

Olhando a expressão de λ (5.71), é possível ver que ele pode adquirir tanto valores reais quanto imaginários. Portanto vale a seguinte análise

- Se $\bar{w}^2 > \bar{l}^2 + 1/4$, ou seja $\lambda \in \mathbb{R}$, a solução converge para qualquer valor de λ .
- Se $\bar{w}^2 < \bar{l}^2 + 1/4$, tem-se que $\lambda \in \mathbb{C}$ e portanto a equação torna-se

$$\|R(y)\|^2 \left| \frac{y-1}{y} \right| \sim |C|^2 [y^{2\lambda-1} + y^{-2\lambda-1} + 2] \sim \infty \quad (y \rightarrow \infty) \quad (5.92)$$

Portanto a solução é bem comportada no infinito para $\lambda \in \mathbb{R}$. Porém, pode-se concluir que a solução não é de quadrado integrável, já que para $y \rightarrow 0$ a solução não converge.

2. $\bar{w} = ik$.

A solução para $y \rightarrow 0$ torna-se

$$R(y) = Ay^{-k} + By^k, \quad (5.93)$$

cuja norma ao quadrado é

$$\|Ay^{-k} + By^k\|^2 \left| \frac{y-1}{y} \right| \sim A^2 y^{-2k-1} + B^2 y^{2k-1} + 2AB y^{-1}, \quad (y \rightarrow 0) \quad (5.94)$$

que converge se $A = 0$ para todo $k > 1/2$.

Quando $\bar{w} = ik$, implica que $\lambda \in \mathbb{C}$, portanto em $y \rightarrow \infty$ tem-se

$$R(y) = y^{-1/2} [Cy^\lambda + Dy^{-\lambda}]. \quad (5.95)$$

Sendo assim, a norma ao quadrado é

$$\|R(y)\|^2 \left| \frac{y-1}{y} \right| = \left[|CD^*|^2 y^{-1} + |C^*D|^2 y^{-1} + |C|^2 y^{-1+2\bar{\lambda}} + |D|^2 y^{-1-2\bar{\lambda}} \right] \quad (5.96)$$

$$\sim 0, \quad (y \rightarrow \infty)$$

cujo termo dominante é o segundo, portanto pode-se fazer $C = 0$. Essa função, com w imaginário, também converge. Ou seja, a solução com $w \in \mathbb{C}$ é de quadrado integrável.

Esse resultado é curioso, já que a solução com $w \in \mathbb{R}$ não é de quadrado integrável enquanto que a solução instável é de quadrado integrável.

O último passo é verificar o termo de borda $|\psi^* \psi_x|$. Para $\bar{w} \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |\psi^* \psi_x| = AB^* e^{2iwx} - A^* B e^{-2iwx}, \quad (5.97)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\psi^* \psi_x| = DC^* e^{2i\lambda x} - D^* C e^{-2i\lambda x}, \quad (5.98)$$

ambas são limitadas, porém não são nulas.

Para $\bar{w} = ik$ tem-se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |\psi^* \psi_x| = |B|^2 e^{2kx} - |A|^2 e^{-2kx}, \quad (5.99)$$

que é zero se $|A|^2 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\psi^* \psi_x| = |C|^2 e^{2\lambda x} - |D|^2 e^{-2\lambda x}, \quad (5.100)$$

que é zero se $|C|^2 = 0$. Isso confirma as escolhas para que a solução seja de quadrado integrável para $w \in \mathbb{C}$.

Até aqui foi visto que o operador possui infinitas extensões auto-adjuntas e seu potencial é positivo definido, portanto de acordo com o teorema w^2 deveria ser positivo. Porém, da equação (5.90), vê-se que a solução não é de quadrado integrável para $\bar{w} \in \mathbb{R}$, assim como no caso anterior. Além disso o termo da borda $\psi^* \psi_x$ não é nulo, o que impossibilita de afirmar sobre a positividade de w^2 . Pode ser que escolhendo um espaço diferente que não seja o de Hilbert, como por exemplo Sobolev, Hilbert equipado[33], o operador seja de quadrado integrável o que permitiria afirmar sobre a estabilidade. Porém, por enquanto a questão da instabilidade é inconclusiva.

5.2.3. Caso 3: $b = -|\beta| < 0$ e $m^2 = 0$

Nesse contexto, quando $b = -|\beta| < 0$, é o caso em que há uma singularidade nua. A solução para esse caso é a mesma do caso anterior (5.72):

$$y(1-y)f_{yy} + [c - (1+a+b)y]f_y - abf = 0, \quad (5.101)$$

a única diferença é a definição da variável y , que agora é:

$$y = 1 + \frac{r}{|\beta|}, \quad \begin{cases} r \rightarrow 0 & \Rightarrow y \rightarrow 1 \\ r \rightarrow \infty & \Rightarrow y \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (5.102)$$

A solução em torno de $y = 1$ é dada por

$$f(y) = AF(a, b; a+b+1-c; 1-y) + B(1-y)^{c-a-b} F(c-b, c-a; 1+c-a-b; 1-y). \quad (5.103)$$

Porém, essa solução só é válida se $c - a - b \notin \mathbb{Z}$, o que, olhando (5.70), não se cumpre já que a soma é nula. Para contornar o problema, analisa-se o comportamento assintótico

da equação (5.101) ao invés da hipergeométrica. Para essa análise, primeiro faz-se a troca

$$z = 1 - y, \quad \begin{cases} y \rightarrow 1 & \Rightarrow & z \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \infty & \Rightarrow & z \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (5.104)$$

transformando a equação (5.101) em

$$z(1-z)f_{zz} - [c - (1+a+b)(1-z)]f_z - abf(z) = 0. \quad (5.105)$$

Em $z \rightarrow 0$ ($y \rightarrow 1$) tem-se

$$zf_{zz} + f_z + (\bar{l}^2 - i\bar{w})f = 0, \quad (5.106)$$

cuja solução é dada por

$$f(z) = c_1 I_0 \left(2\sqrt{i\bar{w} - \bar{l}^2} \sqrt{z} \right) + c_2 K_0 \left(2\sqrt{i\bar{w} - \bar{l}^2} \sqrt{z} \right). \quad (5.107)$$

Escrevendo $R(y)$:

$$R(y) = c_1 y^{i\bar{w}} I_0 \left(2\sqrt{i\bar{w} - \bar{l}^2} \sqrt{1-y} \right) + c_2 y^{i\bar{w}} K_0 \left(2\sqrt{i\bar{w} - \bar{l}^2} \sqrt{1-y} \right). \quad (5.108)$$

No limite assintótico ($y \rightarrow 1$), a função de segundo tipo diverge, portanto faz-se $c_2 = 0$. A função de primeiro tipo no limite assintótico próximo da origem é dada por

$$I_\nu(z) \sim z^\nu \quad \rightarrow \quad I_0(z) \sim 1. \quad (5.109)$$

Portanto

$$R(y) = c_1 y^{i\bar{w}}. \quad (y \rightarrow 1) \quad (5.110)$$

Para $y \rightarrow \infty$ o comportamento assintótico da equação (5.101) é dado por

$$y^2 f_{yy} + (2i\bar{w} + 2)y f_y - (\bar{l}^2 - i\bar{w})f = 0, \quad (5.111)$$

cuja solução é

$$f(y) = d_1 y^{\gamma^+} + d_2 y^{\gamma^-}, \quad (5.112)$$

onde

$$\gamma_{\pm} = - \left(i\bar{w} + \frac{1}{2} \right) \pm \sqrt{(l+1/2)^2 - \bar{w}^2}. \quad (5.113)$$

Escrevendo em termos de $R(y)$ tem-se

$$R(y) = y^{-1/2} \left(d_1 y^{\sqrt{(l+1/2)^2 - \bar{w}^2}} + d_2 y^{-\sqrt{(l+1/2)^2 - \bar{w}^2}} \right). \quad (y \rightarrow \infty) \quad (5.114)$$

Dada a solução é possível fazer a análise da estabilidade. O procedimento para verificar o termo de borda será o mesmo apresentado nas seções anteriores. Primeiro escreve-se a solução encontrada na coordenada tartaruga, que nesse caso é dada por

$$x = r_0 \log \left(1 + \frac{r}{|\beta|} \right) \rightarrow (y = e^{x/r_0}). \quad (0 < x < \infty) \quad (5.115)$$

Para $w \in \mathbb{R}$ a solução quando $x \rightarrow 0$ na coordenada tartaruga será

$$\psi(x) = c_1 e^{iwx} (1 - e^{x/r_0})^{1/2}, \quad (5.116)$$

onde $\psi = Rr^{1/2}$. Nesse contexto o termo de borda é dado por

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*| = 2|c_1|^2 iw(1 - e^{x/r_0}) = 0. \quad (5.117)$$

Quando $x \rightarrow \infty$ a solução é

$$\psi(x) = d_1 e^{i\alpha x} + d_2 e^{-i\alpha x}, \quad (5.118)$$

onde $\alpha^2 = \frac{1}{r_0^2}(w^2 - (l+1/2)^2)$. Portanto o termo de borda para $\alpha \in \mathbb{R}$ será

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*| = 2i\alpha(|d_1|^2 - |d_2|^2), \quad (5.119)$$

que claramente só será zero, e conseqüentemente simétrico, se $|d_1|^2 = |d_2|^2$.

Para $w = ik$, o que também implica $\alpha \in \mathbb{C}$, a solução comporta-se próximo a origem como

$$\psi(x) = c_1 e^{-kx} (1 - e^{x/r_0})^{1/2}, \quad (5.120)$$

e o termo de borda é dado por

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*| = 0. \quad (5.121)$$

No infinito a solução é dada por

$$\psi(x) = d_1 e^{-\alpha x} + d_2 e^{\alpha x}, \quad (5.122)$$

e o termo de borda é dado por

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*| = 2\alpha(d_1^* d_2 - d_1 d_2^*), \quad (5.123)$$

que será zero se $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Conclui-se então que os operadores são simétricos. Além disso, seus índices de deficiência foram calculados usando o método de von Neumann (ver apêndice F) encontrando $n_+ = n_- = 2$, ou seja, possui extensão auto-adjunta.

O potencial é dado por (G.4) como $b = -|\beta|$ e $m = 0$

$$V(r) = \frac{(r + |\beta|)}{r_0} \left[\frac{\bar{l}^2}{rr_0} + \frac{1}{4rr_0} - \frac{|\beta|}{4r^2 r_0} \right], \quad (5.124)$$

com os limites assintóticos

$$V(r) \sim \begin{cases} -\frac{1}{4}r^{-2} - (l + 1/2)^2 r^{-1} + \dots, & r \rightarrow 0 \\ (l + 1/2)^2 - \frac{1}{4}r^{-1} + \dots, & r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.125)$$

Note que $V(r)$ não é positivo definido, portanto w^2 pode possuir valores negativos.

Para verificar se a função é de quadrado integrável, a medida do espaço de funções é $L^2((1, \infty), \frac{|y-1|}{|y|} dy)$, e o produto interno definido por

$$\|R(y)\|_\lambda^2 = \langle R(y), R(y) \rangle = \int_1^\infty R^* R \frac{|y-1|}{|y|} dy, \quad (5.126)$$

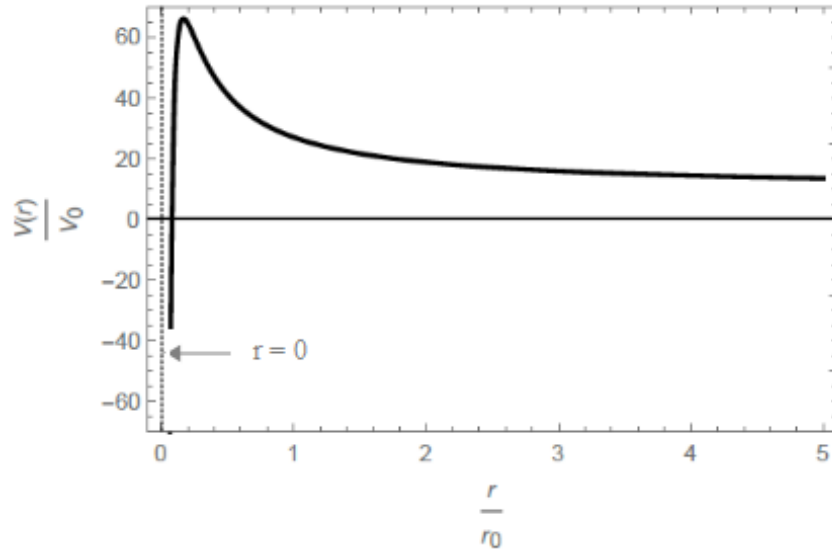


Figura 5.3.: Potencial para o caso 3 com $l = 2$ e $|\beta|/r_0 = 2$.

portanto, a norma ao quadrado próximo a singularidade nua é

$$\left\| c_1 y^{i\bar{w}} I_0 \left(2\sqrt{i\bar{w} - l^2} \sqrt{1-y} \right) \right\|^2 \left| \frac{y-1}{y} \right| \sim 0 \quad (y \rightarrow 1) \quad (5.127)$$

quando $y \rightarrow 1$ a solução converge. Repare que aqui a solução irá convergir tanto para w real quanto imaginário. A norma para $y \rightarrow \infty$ será dada por

$$\|R(y)\|^2 = y^{-1} \left(|d_1|^2 y^{2\sqrt{(l+1/2)^2 - \bar{w}^2}} + |d_2|^2 y^{-2\sqrt{(l+1/2)^2 - \bar{w}^2}} \right). \quad (y \rightarrow \infty) \quad (5.128)$$

Nesse caso há algumas possibilidade para \bar{w} :

1. Se $\bar{w}^2 > (l + 1/2)^2$ a solução será uma onda e irá convergir.
2. Se $\bar{w}^2 < (l + 1/2)^2$, tem-se:
 - Se $0 > \sqrt{(l + 1/2)^2 - \bar{w}^2} < 1/2$, então a solução irá convergir para quaisquer valores de A e B .
 - Se $\sqrt{(l + 1/2)^2 - \bar{w}^2} > 1/2$, não converge.

3. Se $\bar{w}^2 = -k^2$, o termo dentro da raiz sempre será positivo e

$$2\sqrt{(l + 1/2)^2 + k^2} - 1 < 0 \quad (5.129)$$

$$l^2 + l + 1/4 + k^2 < 1/4 \quad (5.130)$$

$$\bar{l}^2 + k^2 < 0, \quad (5.131)$$

isso é impossível, já que l e k são positivos. Ou seja, $d_1 = 0$ para que a solução convirja.

Portanto, tanto para w real quanto w imaginário tem uma solução de quadrado integrável.

Como último passo, verifica-se os termo de borda $|\psi^*\psi_x|$. Para $w \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\psi^*\psi_x| = |c_1|^2 [iw(1 - e^{x/r_0}) - 1/2r_0e^{x/r_0}] = -\frac{c_1}{2r_0}, \quad (5.132)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\psi^*\psi_x| = 0. \quad (5.133)$$

Para $w = ik$ tem-se

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\psi^*\psi_x| = |c_1|^2 e^{-2kx} [-k(1 - e^{x/r_0}) - 1/2r_0e^{x/r_0}] = -\frac{c_1}{2r_0}, \quad (5.134)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\psi^*\psi_x| = -|d_2|^2 e^{-2\lambda x} \sim 0. \quad (5.135)$$

Note que as funções com $w = ik$ são de quadrado integrável, o operador é auto-adjunto e além disso o potencial é negativo. Dessa análise, conclui-se que a solução para $b = -|\beta| < 0$ é instável sob perturbações de um campo escalar externo. Essa é a mesma conclusão encontrada no caso das perturbações polares para a singularidade nua da métrica de Schwarzschild.

Método Clément et al.

Na literatura[5] há uma análise da estabilidade desse mesmo caso, porém os autores concluem que a solução de singularidade nua é estável sob tais perturbações. O método utilizado por eles será descrito a seguir.

A equação de partida é:

$$-\frac{d}{dr} \left[r(r + |\beta|) \frac{dR(r)}{dr} \right] + \left[\bar{l}^2 - \frac{\bar{w}^2 r}{(r + |\beta|)} \right] R(r) = 0, \quad (5.136)$$

onde $\bar{l}^2 = l(l + 1)$ e $\bar{w}^2 = w^2 r_0^2$. Faz-se então a seguinte troca de variável

$$\frac{d}{dr_*} = r(r + |\beta|) \frac{d}{dr} \quad \rightarrow \quad r_* = \frac{1}{|\beta|} \log \left(\frac{r}{r + |\beta|} \right), \quad (5.137)$$

com o intervalo $-\infty < r_* < 0$.

Com isso, a equação (5.136) é escrita na forma

$$-\frac{d^2 R}{dr_*^2} + r(r + |\beta|) \left[\bar{l}^2 - \frac{\bar{w}^2 r}{(r + |\beta|)} \right] R(r) = 0, \quad (5.138)$$

$$-\frac{d^2 R}{dr_*^2} + [r(r + |\beta|)\bar{l}^2 - \bar{w}^2 r^2] R(r) = 0. \quad (5.139)$$

No caso instável, tem-se $w^2 = -k^2$ e a equação acima é escrita como

$$-\frac{d^2 R}{dr_*^2} + [r(r + |\beta|)\bar{l}^2 + k^2 r^2] R(r) = 0. \quad (5.140)$$

Como $r > 0$, a segunda derivada será sempre positiva. Portanto, não pode haver soluções limitadas para o caso instável. Com isso os autores concluem que a solução é estável sob tais perturbações.

A princípio não sabe-se ao certo o porque da diferença nos resultados, já que ambos os métodos aparentam estar corretos e o resultado não deveria depender da variável usada. Uma das possibilidades é a forma como eles escrevem o potencial, já que a equação utilizada não está na forma da equação tipo-Schrödinger.

5.2.4. Caso 4: $b = 0$ e $m^2 \neq 0$

A equação (5.31) com $b = 0$ e $m^2 \neq 0$ torna-se

$$-\frac{d}{dr} [r^2 R'(r)] + [\bar{l}^2 + m^2 r_0 r - \bar{w}^2] R(r) = 0, \quad (5.141)$$

note que essa função é uma equação diferencial de Sturm-Liouville com $p(r) = r^2$, $q(r) = \bar{l}^2 + m^2 r_0 r$ e $\lambda(r) = r_0^2$.

Expandindo o termo da derivada tem-se

$$r^2 R'' + 2rR' + (\alpha - \beta r)R = 0, \quad (5.142)$$

onde para facilitar os cálculos foi usado

$$\alpha = \bar{w}^2 - \bar{l}^2; \quad \beta = m^2 r_0. \quad (5.143)$$

É possível resolver essa equação analiticamente. Fazendo a substituição

$$y(r) = r^{1/2}, \quad (5.144)$$

as derivadas irão transformar-se da seguinte forma

$$\frac{d}{dr} = \frac{1}{2} r^{-1/2} \frac{d}{dy} \quad (5.145)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} &= \left(\frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d}{dr} \right) = \frac{1}{2} r^{-1/2} \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2} r^{-1/2} \frac{d}{dy} \right) = \\ &= \frac{1}{4} r^{-1} \frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{4} r^{-3/2} \frac{d}{dy}. \end{aligned} \quad (5.146)$$

Substituindo na equação (5.142)

$$\frac{1}{4} r R_{yy} + \frac{3}{4} r^{1/2} R_y + (\alpha - \beta r) R = 0. \quad (5.147)$$

Agora colocando toda a expressão na variável y e simplificando-a obtém-se

$$y^2 R_{yy} + 3y R_y + 4(\alpha - \beta y^2) R = 0. \quad (5.148)$$

Essa equação é quase uma equação de Bessel modificada que tem a forma

$$z^2 R_{zz} + z R_z - (z^2 + \nu^2) R = 0. \quad (5.149)$$

Para deixá-la nesta forma basta fazer a substituição

$$R(y) = y^{-1}f(y), \quad (5.150)$$

cujas derivadas são

$$R_y(y) = -y^{-2}f(y) + y^{-1}f_y(y); \quad R_{yy}(y) = 2y^{-3}f(y) - 2y^{-2}f_y(y) + y^{-1}f_{yy}(y). \quad (5.151)$$

Substituindo em (5.217) obtém-se

$$y^2 f_{yy}(y) + y f_y(y) + [(4\alpha - 1) - 4\beta y^2]f(y) = 0, \quad (5.152)$$

e renomeando as variáveis

$$z^2 = 4\beta y^2 \quad e \quad \nu^2 = 1 - 4\alpha, \quad (5.153)$$

tem-se uma equação de Bessel dada por

$$z^2 f_{zz}(z) + z f_z(z) - (z^2 + \nu^2)f(z) = 0, \quad (5.154)$$

cujas soluções são

$$f(z) = c_1 I_\nu(z) + c_2 K_\nu(z). \quad (5.155)$$

Voltando para a variável R , tem-se

$$R(z) = \frac{1}{z} \{c_1 I_\nu(z) + c_2 K_\nu(z)\}. \quad (5.156)$$

Para $z \ll 1$, a função de Bessel modificada de primeiro tipo comporta-se como

$$I_\nu \sim \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)}, \quad (z \ll 1) \quad (5.157)$$

já a solução $K_\nu(z)$ comporta-se como

$$K_\nu \sim -\frac{1}{2}\Gamma(\nu) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}, \quad (z \ll 1) \quad (5.158)$$

com $\Re(\nu) > 0$.

Encontrada a solução, pode-se então partir para a análise da estabilidade, começando com a definição da coordenada tartaruga x dada por

$$x = r_0 \log r \quad \rightarrow \quad r = e^{\frac{x}{r_0}} \sim z^2. \quad (-\infty < x < \infty) \quad (5.159)$$

Nessa coordenada a solução pode ser escrita como

$$\psi(x) = (c_1 I_\nu(x) + c_2 K_\nu(x)) e^{-x/2r_0}, \quad (5.160)$$

onde $\psi(r) = R(r)r^{1/2}$. Portanto a solução próxima ao horizonte de eventos é dada por

$$\psi(x) = c_1 e^{(\nu-1/2)x/r_0} + c_2 e^{-(\nu+1/2)x/r_0}. \quad (5.161)$$

Sendo assim, o termo de borda para $x \rightarrow -\infty$ ($z \rightarrow 0$) é dado por

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*| = 2\nu(c_1 c_2^* - c_1^* c_2), \quad (5.162)$$

Esse termo será nulo se c_1 ou c_2 for zero.

No infinito espacial a função se comporta como

$$I_\nu \sim e^z z^{-1/2}, \quad K_\nu \sim e^{-z} z^{-1/2} \quad (z \gg 1) \quad (5.163)$$

Com isso a solução na coordenada tartaruga pode ser escrita como

$$\psi(x) \sim (c_1 e^{\frac{x}{r_0}} + c_2 e^{-\frac{x}{r_0}}) e^{-x/2r_0}, \quad (5.164)$$

e o termo de borda

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*| = 0, \quad (5.165)$$

ou seja, o operador é simétrico. Além disso, os índices de deficiência para esse operador são $n_+ = n_- = 1$ o que garante que o operador tem infinitas extensões auto-adjuntas (ver apêndice F). Vale notar que como $R(\nu) > 1$ essas soluções valem para $\nu \in \mathbb{R}$, e isso compreende tanto soluções com $\omega \in \mathbb{R}$ quanto $w \in \mathbb{C}$.

O potencial para esse caso possui uma expressão bem simples. Fazendo $b = 0$ e $m \neq 0$ na equação (G.4), tem-se

$$V(r) = \frac{1}{r_0} \left[\frac{\bar{l}^2}{r_0} + \frac{1}{4r_0} + m^2 r \right], \quad (5.166)$$

e os limites assintóticos são

$$V(r) \sim \begin{cases} (l + 1/2)^2 + \dots, & r \rightarrow 0 \\ (l + 1/2)^2 + m^2 r + \dots, & r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.167)$$

É fácil notar que $V(r) > 0$ para todo r , já que $m^2 > 0$ e $\bar{l}^2 > 0$.

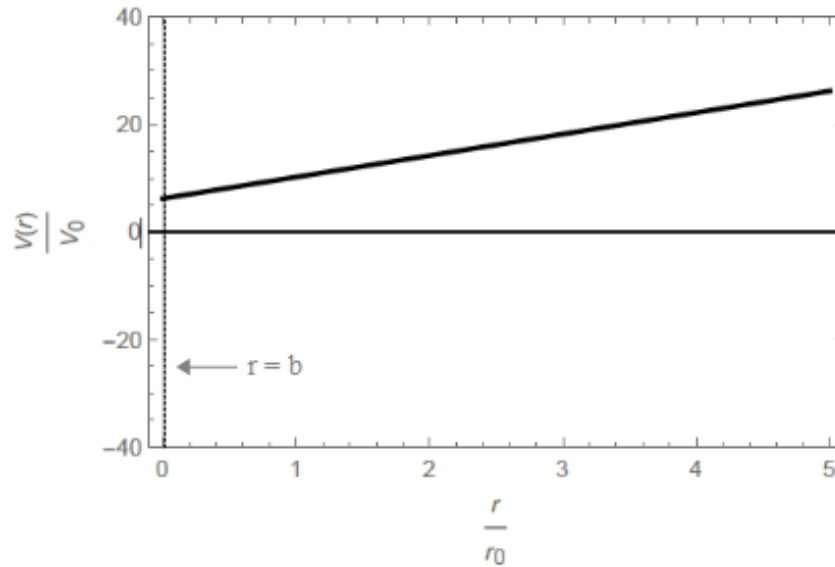


Figura 5.4.: Potencial caso 4 para $l = 2$ e $m = 2$.

Para saber se a solução é de quadrado integrável será usado a medida $L^2((0, \infty), \lambda(z)dz)$ o espaço de Hilbert das funções de quadrado integrável com produto interno definido por

$$\|R(z)\|_{\lambda}^2 = \langle R(z), R(z) \rangle = \int_0^{\infty} R^* R \lambda(z) dz \quad (5.168)$$

onde $\lambda(z)$ é a função peso.

Para $z \ll 1$, do cálculo da norma ao quadrado obtém-se

$$|z^{-1}(c_1 I_{\nu}(z) + c_2 K_{\nu}(z))|^2 \sim |c_1|^2 z^{2(\nu-1)} + |c_2|^2 z^{-2(\nu+1)} + (c_1^* c_2 + c_2^* c_1) z^{-2}, \quad (z \ll 1) \quad (5.169)$$

como $\nu > 0$ para que a solução convirja em $z \rightarrow 0$ pode-se escolher $c_2 = 0$ com $\nu > 1$.

Lembrando que $\nu^2 = 1 - 4(w^2 r_0^2 - l(l+1))$, tem-se

$$\begin{aligned} 1 - 4(w^2 r_0^2 - l(l+1)) &> 1 \\ -4(w^2 r_0^2 - l(l+1)) &> 0 \\ w^2 r_0^2 - l(l+1) &< 0, \end{aligned} \tag{5.170}$$

aqui é necessário avaliar dois caso separados:

- Se $w^2 > 0$, isso implica que

$$w^2 r_0^2 < l(l+1), \tag{5.171}$$

então w^2 possui um valor máximo, ou seja, $w_{máx}^2 < \frac{l(l+1)}{r_0^2}$.

- Quando $w^2 = -k^2 < 0$, que é um caso onde há instabilidade, tem-se que

$$-k^2 r_0^2 - l(l+1) < 0, \tag{5.172}$$

ou seja, essa relação é sempre satisfeita.

Para $z \gg 1$ a norma ao quadrado será expressa por

$$|z^{-1} c_1 I_\nu(z)|^2 \sim e^{2z} z^{-3} \quad (z \gg 1), \tag{5.173}$$

que claramente diverge para $z \rightarrow \infty$. Ou seja, a solução não é de quadrado integrável.

Como último passo será o cálculo do termo de borda $|\psi^* \psi_x|$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |\psi^* \psi_x| = \frac{1}{r_0} (v - 1/2) |c_1|^2 e^{(2\nu-1)x/r_0} = 0, \quad \text{se } \nu > 1/2. \tag{5.174}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\psi^* \psi_x| \sim e^{e^{\frac{x}{r_0}}} \sim \infty. \tag{5.175}$$

Novamente o operador é auto-adjunto e o potencial é positivo, o que indicaria que $w^2 > 0$, porém a função não é de quadrado integrável. Então a estabilidade da solução para o caso $b = 0$ e $m \neq 0$ é, a princípio, é inconclusiva sob perturbação de um campo escalar massivo externo.

5.2.5. Caso 5: $b > 0$ e $m^2 \neq 0$

Aqui o ponto de partida é, novamente, a equação (5.31)

$$-\frac{d}{dr}[r(r-b)R'(r)] + [\bar{l}^2 + m^2 r_0 r]R(r) = \frac{\bar{w}^2 r}{(r-b)}R(r), \quad (5.176)$$

onde tem-se o problema de Sturm-Liouville com $p(r) = r(r-b)$, $q(r) = \bar{l}^2 + m^2 r_0 r$ e $\lambda(r) = r/(r-b)$.

Aqui será feito o mesmo procedimento das seções anteriores. Definindo

$$y = 1 - \frac{r}{b}, \quad (5.177)$$

a equação (5.176) torna-se semelhante a equação (5.62) com o termo $\bar{m}^2 r$ adicionado, e com isso é possível escrever

$$y(1-y)R_{yy} + (1-2y)R_y + \left[\frac{\bar{w}^2}{y} + \bar{m}^2(1-y) + \bar{l}^2 - \bar{w}^2 \right] R = 0, \quad (5.178)$$

onde $\bar{m}^2 = m^2 b r_0$. Simplificando ainda mais, tem-se

$$y(1-y)R_{yy} + (1-2y)R_y + \left[\bar{\nu}^2 + \frac{\bar{w}^2}{y} - \bar{m}^2 y \right] R = 0, \quad (5.179)$$

com $\bar{\nu}^2 \equiv \bar{l}^2 + \bar{m}^2 - \bar{w}^2$. Fazendo a mudança de variável

$$R(y) = y^p f(y), \quad (5.180)$$

que é a mesma feita anteriormente, encontra-se

$$y(1-y)f_{yy} + [(1+2p) - 2(1+p)y]f_y + \left[\frac{p^2 + \bar{w}^2}{y} - p^2 - p + \bar{\nu}^2 - \bar{m}^2 y \right] f = 0. \quad (5.181)$$

Para facilitar o cálculo, quer-se que

$$p^2 + \bar{w}^2 = 0. \quad (5.182)$$

Uma opção é fazer $p = i\bar{w}$. Com isso, tem-se

$$y(1-y)f_{yy} + [(1+2i\bar{w}) - 2(1+i\bar{w})y]f_y + [\mu - \bar{m}^2y]f = 0, \quad (5.183)$$

onde $\mu = \bar{w}^2 - i\bar{w} + \nu^2$.

Essa é uma equação confluyente de Heun, que aparece em vários outros campos da física moderna. As soluções das equações de Heun generalizam muitas funções matemáticas conhecidas, incluindo as hipergeométricas, funções de Mathieu, funções de onda esferoidais, funções esferoidais de Coulomb, e muitos outros amplamente utilizados em física matemática e matemática aplicada[34][35][36]. Para mais detalhes, conferir apêndice (C). A equação confluyente de Heun é dada por

$$H_{yy} + \left(\frac{\gamma}{y} + \frac{\delta}{y-1} + \epsilon\right)H_y + \frac{\alpha y - q}{y(y-1)}H = 0, \quad (5.184)$$

cuja solução é

$$H(q, \alpha, \gamma, \delta, \epsilon; y) = C_1 e^{-\epsilon y} H_c(q - \epsilon\gamma, \alpha - \epsilon(\gamma + \delta), \gamma, \delta, -\epsilon; y) + \quad (5.185)$$

$$+ C_2 y^{1-\gamma} H_c(q + (\gamma - 1)(\delta - \epsilon), \alpha + \epsilon(1 - \gamma), 2 - \gamma, \delta, \epsilon; y). \quad (5.186)$$

Para deixar a equação (5.183) na mesma forma basta dividi-la por $y(y-1)$, obtendo

$$f_{yy} + \left[\frac{2(1+i\bar{w})}{y-1} - \frac{(1+2i\bar{w})}{y(y-1)}\right]f_y + \left[\frac{\bar{m}^2y - \mu}{y(y-1)}\right]f = 0, \quad (5.187)$$

e desenvolvendo o termo que multiplica f_y

$$f_{yy} + \left[\frac{1}{y-1} + \frac{(1+2i\bar{w})}{y}\right]f_y + \left[\frac{\bar{m}^2y - \mu}{y(y-1)}\right]f = 0 \quad (5.188)$$

Para obter a solução é necessário identificar os parâmetros. Comparando com a equação de Heun tem-se

$$\begin{cases} \epsilon = 0, & \alpha = \bar{m}^2 \\ \delta = 1, & q = \mu \\ \gamma = 1 + 2i\bar{w} \end{cases} \quad (5.189)$$

Com isso, a solução será

$$f(y) = C_1 H_c(\mu, \bar{m}^2, 1 + 2i\bar{w}, 1, 0, y) + C_2 y^{-2i\bar{w}} H_c(\mu + 2i\bar{w}, \bar{m}^2, 1 - 2i\bar{w}, 1, 0, y), \quad (5.190)$$

ou em termos de $R(y)$

$$R(y) = C_1 y^{i\bar{w}} H_c(\mu, \bar{m}^2, 1 + 2i\bar{w}, 1, 0, y) + C_2 y^{-i\bar{w}} H_c(\mu + 2i\bar{w}, \bar{m}^2, 1 - 2i\bar{w}, 1, 0, y), \quad (5.191)$$

onde $H_c(y)$ é a função de Heun.

Para a análise dessa solução, faz-se o uso do limites assintóticos descritos no apêndice C. A expansão em série de potência para a função confluyente de Heun, tal que $H_c(0) = 1$, é bem conhecida para $\gamma \notin \mathbb{Z}_0^-$. Para o limite em que $y \rightarrow 0$ tem-se

$$H_c(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n, \quad (b_0 = 1) \quad (5.192)$$

ou seja, um polinômio.

Já para $y \rightarrow \infty$ a expansão é dada por

$$H_{c\pm}(q, \alpha, \gamma, \delta, \epsilon; y) = y^\Lambda e^{\pm 2i\sqrt{\alpha y}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n y^{-\frac{n}{2}}, \quad (B_0 = 1) \quad (5.193)$$

onde

$$\Lambda = \frac{1}{4} - \frac{\gamma + \delta}{2}. \quad (5.194)$$

Essa expansão só é valida no caso especial $\epsilon = 0$, $\alpha \neq 0$.

Para os parâmetros (5.189) tem-se

$$H_{c\pm}(\mu, \bar{m}^2, 1 + 2i\bar{w}, 1, 0, y) = y^{(-3/4 - i\bar{w})} e^{\pm 2i\bar{m}\sqrt{y}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n y^{-\frac{n}{2}} \quad (5.195)$$

e

$$H_{c\pm}(\mu + 2i\bar{w}, \bar{m}^2, 1 - 2i\bar{w}, 1, 0, y) = y^{(-3/4 + i\bar{w})} e^{\pm 2i\bar{m}\sqrt{y}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n y^{-\frac{n}{2}}. \quad (5.196)$$

Com as expansões assintóticas, pode-se escrever as soluções próximas ao horizonte

($y \rightarrow 0$) como

$$R(y) = Ay^{i\bar{w}} + By^{-i\bar{w}}, \quad (y \rightarrow 0) \quad (5.197)$$

e no infinito espacial ($y \rightarrow \infty$)

$$R(y) = C_1 y^{-3/4} e^{\pm 2i\bar{m}\sqrt{y}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n y^{-\frac{n}{2}} + C_2 y^{-3/4} e^{\pm 2i\bar{m}\sqrt{y}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n y^{-\frac{n}{2}}. \quad (5.198)$$

Agora, pode-se fazer a análise da estabilidade da solução. Para a análise da simetria do operador, faz-se necessário o uso da coordenada tartaruga dada por

$$x = r_0 \log \left(\frac{r}{b} - 1 \right) \rightarrow (-y) = e^{x/r_0}. \quad (-\infty < x < \infty) \quad (5.199)$$

Sendo $\psi = Rr^{1/2}$, a solução para $y \rightarrow 0$ ($x \rightarrow -\infty$) na coordenada tartaruga é

$$\psi(x) = Ae^{iwx} + Be^{-iwx}. \quad (5.200)$$

Essa é a mesma solução do caso com campo escalar não massivo. O termo de borda próximo ao horizonte é

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*| = 2iw(|A|^2 - |B|^2), \quad (5.201)$$

que só será nulo se $|A|^2 = |B|^2$. Para $\bar{w} = ik$ o termo de borda comporta-se como

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*| = 2k(A^* B - AB^*), \quad (5.202)$$

que é simétrico se $A, B \in \mathbb{R}$.

No infinito a solução pode ser escrita como

$$\psi(x) = Ce^{-3x/4r_0} e^{\pm 2i\bar{m}e^{x/2r_0}}, \quad (5.203)$$

cujo termo de borda é

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*) \sim \lim_{x \rightarrow \infty} (|C|^2 e^{-\frac{1}{2}x}) = 0. \quad (5.204)$$

Portanto o operador é simétrico para qualquer w . Com isso, pode-se concluir que o operador possui extensão auto-adjunta, já que ele é simétrico e seus índices de deficiência são $n_+ = n_- = 1$ (ver apêndice F).

Parte-se então para o estudo do potencial dado pela equação (G.4). Para $f = (r - b)/r_0$ e $m \neq 0$ tem-se

$$V(r) = \frac{(r - b)}{r_0} \left[\frac{\bar{l}^2}{rr_0} + m^2 + \frac{1}{4rr_0} + \frac{b}{4r^2r_0} \right], \quad (5.205)$$

e os limites assintóticos são

$$V(r) \sim \begin{cases} -\frac{1}{4}r^{-2} - (l + 1/2)^2r^{-1} + \dots, & r \rightarrow 0 \\ (l + 1/2)^2 + \frac{1}{4}r^{-1} + m^2r + \dots, & r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.206)$$

que é positivo para todo $r > b$.

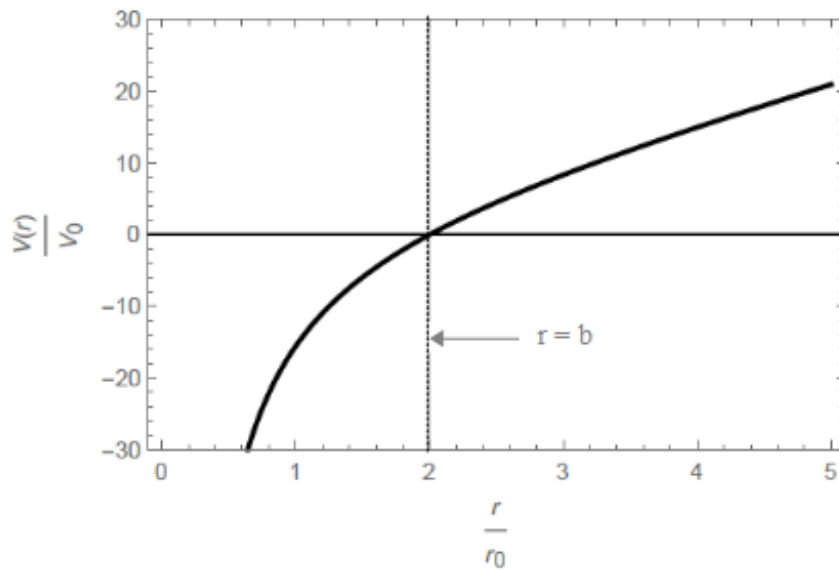


Figura 5.5.: Potencial para o caso 5 com $l = 2$, $m = 2$ e $b/r_0 = 2$.

Continuando a análise, é preciso avaliar se as funções são de quadrado integrável. A norma ao quadrado será calculada na medida $L^2((0, \infty), \left| \frac{y-1}{y} \right| dy)$ do espaço de Hilbert das funções de quadrado integrável com produto interno definido por

$$\|R(y)\|_\lambda^2 = \langle R(y), R(y) \rangle = \int_0^\infty R^* R \left| \frac{y-1}{y} \right| dy. \quad (5.207)$$

1. $w \in \mathbb{R}$.

A norma ao quadrado próximo ao horizonte é dada por

$$\|R(y)\|^2 \left| \frac{y-1}{y} \right| \rightarrow \infty, \quad (y \rightarrow 0) \quad (5.208)$$

ou seja, não converge.

No infinito espacial, a norma ao quadrado será

$$\|R(y)\|^2 \left| \frac{y-1}{y} \right| \sim y^{-3/2} \rightarrow 0. \quad (y \rightarrow \infty) \quad (5.209)$$

Logo, nesse limite assintótico a solução é converge. Porém a solução não é de quadrado integrável.

2. $w = \mathbb{C}$.

Fazendo $w = ik$ a solução torna-se

$$R(y) = Ay^{-k} + By^k, \quad (5.210)$$

cuja norma ao quadrado e dada por

$$\|R(y)\|^2 \left| \frac{y-1}{y} \right| \sim A^2 y^{-2k-1} + B^2 y^{2k-1} + 2AB y^{-1}, \quad (y \rightarrow 0) \quad (5.211)$$

que tende a zero se $A = 0$ para todo $k > 0$. Com isso a função converge.

Em $y \rightarrow \infty$

$$\|R(y)\|^2 \sim y^{-3/2} \rightarrow 0, \quad (y \rightarrow \infty) \quad (5.212)$$

que converge para esse assintótico. Logo a solução para $\bar{w} \in \mathbb{C}$ é de quadrado integrável.

Para finalizar, ainda resta a análise do termo de borda $|\psi^* \psi_x|$. Para $\bar{w} \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |\psi^* \psi_x| = AB^* e^{2iwx} - A^* B e^{-2iwx}, \quad (5.213)$$

que é limitado, mas não se anula. Para $\bar{w} = ik$ tem-se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |\psi^* \psi_x| = |B|^2 e^{2kx} - |A|^2 e^{-2kx}, \quad (5.214)$$

que é zero se $|A|^2 = 0$.

Já no infinito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\psi^* \psi_x| \sim |C|^2 e^{-x/2} \sim 0. \quad (5.215)$$

Mesmo o operador possuindo uma extensão auto-adjunta e seu potencial sendo positivo para todo $r > b$, o fato da função com $w \in \mathbb{R}$ não ser de quadrado integrável não permite, a princípio, afirmar sobre a estabilidade da solução. Portanto para $b > 0$ e $m \neq 0$ o resultado é inconclusivo.

5.2.6. Caso 6: $b = -|\beta| < 0$ e $m^2 \neq 0$

Como já discutido em seções anteriores, o caso em que $b = -|\beta| < 0$ tem as mesmas soluções que o caso b positivo, porém aqui é necessário tomar um cuidado especial com a definição de \bar{m}^2 que agora será

$$\bar{m}^2 = -m^2 r_0 |\beta| \equiv -\bar{M}^2. \quad (5.216)$$

Além disso, muda-se também a definição da variável y que já foi definida anteriormente (5.217) como

$$y = 1 + \frac{r}{|\beta|}, \quad \begin{cases} r \rightarrow 0 & \Rightarrow y \rightarrow 1 \\ r \rightarrow \infty & \Rightarrow y \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (5.217)$$

Nesse caso a equação diferencial fica

$$f_{yy} + \left[\frac{1}{y-1} + \frac{(1+2i\bar{w})}{y} \right] f_y - \left[\frac{\bar{M}^2 y + \mu}{y(y-1)} \right] f = 0, \quad (5.218)$$

cuja a solução em $R(y)$ é

$$R(y) = C_1 y^{i\bar{w}} H_c(\mu, -\bar{M}^2, 1 + 2i\bar{w}, 1, 0, y) + C_2 y^{-i\bar{w}} H_c(\mu + 2i\bar{w}, -\bar{M}^2, 1 - 2i\bar{w}, 1, 0, y). \quad (5.219)$$

A expansão da função de Heun em torno do ponto $y = 1$ é dada por (ver C.1)

$$H_c(q, \alpha, \gamma, \delta, \epsilon, y) = C_1 H_c(q - \alpha, -\alpha, \delta, \gamma, -\epsilon, 1 - y) + C_2 H_c(q - \alpha, -\alpha, \delta, \gamma, -\epsilon, 1 - y). \quad (5.220)$$

Com isso, o limite assintótico para $y \rightarrow 1$ com $\gamma \notin \mathbb{Z}_0^-$ será

$$H_c(1 - y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (1 - y)^n, \quad (b_0 = 1) \quad (5.221)$$

enquanto que para $y \rightarrow \infty$ sendo $\epsilon = 0$ e $\alpha \neq 0$, será

$$H_{c\pm}(\mu + \bar{M}^2, \bar{M}^2, 1, 1 + 2i\bar{w}, 0, 1 - y) = (1 - y)^{(-3/4 - i\bar{w})} e^{\pm 2i\bar{M}\sqrt{1-y}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n (1 - y)^{-\frac{n}{2}}, \quad (5.222)$$

e

$$H_{c\pm}(\mu + 2i\bar{w} + \bar{M}^2, \bar{M}^2, 1, 1 - 2i\bar{w}, 0, 1 - y) = (1 - y)^{(-3/4 + i\bar{w})} e^{\pm 2i\bar{M}\sqrt{1-y}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n (1 - y)^{-\frac{n}{2}}. \quad (5.223)$$

Então, a solução de $R(y)$ é expressa como

$$R(y) = C_1 (1 - y)^{i\bar{w}} + C_2 (1 - y)^{-i\bar{w}}, \quad (y \rightarrow 1) \quad (5.224)$$

$$R(y) = A_1 (1 - y)^{-3/4} e^{\pm 2i\bar{M}\sqrt{1-y}} + A_2 (1 - y)^{-3/4} e^{\pm 2i\bar{M}\sqrt{1-y}}. \quad (y \rightarrow \infty) \quad (5.225)$$

Com as soluções em mãos, é possível analisar a estabilidade da solução. Sendo a coordenada tartaruga dada por

$$x = r_0 \log \left(\frac{r}{|\beta|} + 1 \right) \rightarrow y = e^{x/r_0}, \quad (0 < x < \infty) \quad (5.226)$$

a solução com $w \in \mathbb{R}$ para $(y \rightarrow 1)$ pode ser escrita como

$$\psi(x) = C_1(1 - e^{x/r_0})^{i\bar{w}+1/2} + C_2(1 - e^{x/r_0})^{-i\bar{w}+1/2}, \quad (5.227)$$

onde $\psi = Rr^{1/2}$. Com isso, o termo de borda é dado por

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*| = 2i\bar{w}(|C_2|^2 - |C_1|^2)e^{x/r_0} = 0. \quad (5.228)$$

No infinito a solução é

$$\psi(x) = Ce^{-x/4} e^{\mp 2\bar{M}e^{x/2}}, \quad (5.229)$$

e seu termo de borda é identicamente zero

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*| = 0. \quad (5.230)$$

Já para $\bar{w} = ik$ a solução para $(y \rightarrow 1)$ pode ser escrita na forma

$$\psi(x) = C_1(1 - e^{x/r_0})^{-k+1/2} + C_2(1 - e^{x/r_0})^{k+1/2}, \quad (5.231)$$

e o seu termo de borda também é identicamente zero

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*| = 0. \quad (5.232)$$

Portanto o operador é simétrico para todo w e além disso, foi mostrado no apêndice (F) que seus índices de deficiência são $n_+ = n_- = 2$, ou seja possui infinitas extensões auto-adjuntas.

O potencial é dado pela equação (G.4) com $f = (r + |\beta|)/r_0$ e $m \neq 0$

$$V(r) = \frac{(r + |\beta|)}{r_0} \left[\frac{\bar{l}^2}{rr_0} + m^2 + \frac{1}{4rr_0} - \frac{|\beta|}{4r^2r_0} \right], \quad (5.233)$$

e com os limites assintóticos

$$V(r) \sim \begin{cases} -\frac{1}{4}r^{-2} + (l + 1/2)^2 r^{-1} + \dots, & r \rightarrow 0 \\ (l + 1/2)^2 - \frac{1}{4}r^{-1} + m^2 r + \dots, & r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.234)$$

Obviamente há casos em que ele é negativo. A variável r adquire valores dados por

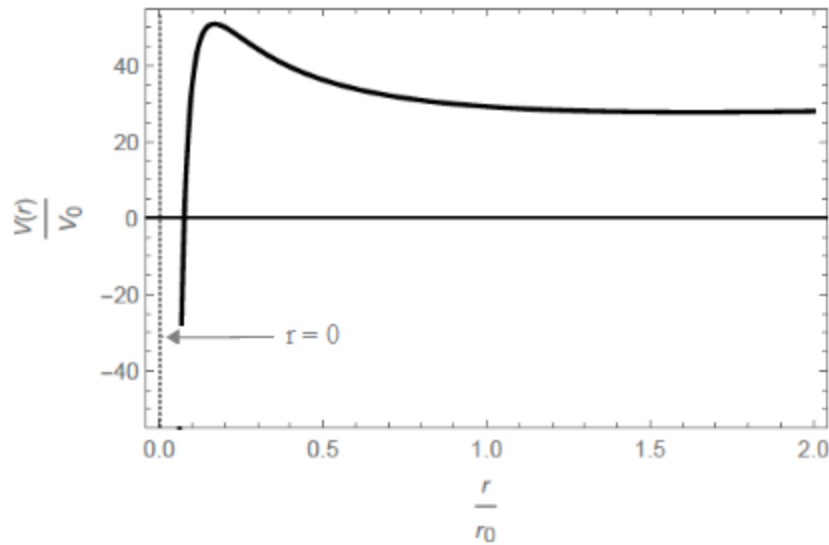


Figura 5.6.: Potencial caso 6 para $l = 2$, $m = 2$ e $|\beta|/r_0 = 2$.

$$r = \left[- \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2} \right)^4 + |\beta| m^2 r_0} \right] / 2m^2 r_0. \quad (5.235)$$

Para verificar se a função é de quadrado integrável, a medida do espaço de funções é $L^2((1, \infty), \frac{|y-1|}{|y|} dy)$, e o produto interno definido por

$$\|R(y)\|_\lambda^2 = \langle R(y), R(y) \rangle = \int_1^\infty R^* R \frac{|y-1|}{|y|} dy. \quad (5.236)$$

1. $w \in \mathbb{R}$.

Para $(y \rightarrow 1)$, a norma ao quadrado é dada por

$$\|R(y)\|^2 \left| \frac{y-1}{y} \right| \sim 0, \quad (y \rightarrow 1) \quad (5.237)$$

portanto, finita.

Para $y \rightarrow \infty$ a norma ao quadrado é

$$\|R(y)\|^2 \left| \frac{y-1}{y} \right| \sim y^{-3/2}, \quad (y \rightarrow \infty) \quad (5.238)$$

que converge para esse assintótico. Logo a solução é de quadrado integrável.

2. $w \in \mathbb{C}$.

Estudando as soluções instáveis $w = ik$ em $y \rightarrow 1$ tem-se

$$R(y) = C_1(1-y)^{-k} + C_2(1-y)^k, \quad (5.239)$$

e a norma ao quadrado e dada por

$$\|R(y)\|^2 \left| \frac{y-1}{y} \right| \sim (|C_1|^2(1-y)^{-2k} + |C_2|^2(1-y)^{2k} + C_1C_2)(y-1) \sim 0. \quad (y \rightarrow 1) \quad (5.240)$$

Para que seja finito, $C_1 = 0$. Com isso a função converge.

Para $y \rightarrow \infty$, as soluções instáveis são

$$R(y) = A_1(1-y)^{-3/4}e^{\pm 2i\bar{M}\sqrt{y}} + A_2(1-y)^{-3/4}e^{\pm 2i\bar{M}\sqrt{y}}, \quad (5.241)$$

e calculando a norma ao quadrado obtém-se

$$\|R(y)\|^2 \left| \frac{y-1}{y} \right| \sim y^{-3/2}, \quad (y \rightarrow \infty) \quad (5.242)$$

que converge para esse assintótico. Logo a solução é de quadrado integrável.

Com último passo, resta a análise do termo de borda $|\psi^*\psi_x|$. Para $\bar{w} \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |\psi^*\psi_x| \sim e^{x/r_0} \sim 0, \quad (5.243)$$

ou seja, nulo. Para $\bar{w} = ik$ tem-se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |\psi^*\psi_x| \sim (|C_1|^2(1 - e^{x/r_0})^{-k} + |C_2|^2(1 - e^{x/r_0})^k) e^{x/r_0} \sim 0. \quad (5.244)$$

Já no infinito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\psi^*\psi_x| \sim |C|^2 e^{\mp 2\bar{M}e^{x/2r_0}}, \quad (5.245)$$

somente será zero a função ψ_- .

Como as funções com $w = ik$ são de quadrado integrável, o operador possui extensão auto-adjunta e seu potencial é negativo, pode-se concluir que a solução para $b = -|\beta| < 0$

é instável sob perturbações de um campo escalar externo.

Tabela 5.1.: Resumo

Caso	Índices de deficiência	Potencial	Quadrado integrável	Conclusão
$b = 0, m = 0$	$n_+ = n_- = 1$	$V(r) > 0$	Não	-
$b > 0, m = 0$	$n_+ = n_- = 1$	$V(r) > 0$	Não	-
$b < 0, m = 0$	$n_+ = n_- = 2$	$V(r) < 0$	Sim	Instável
$b = 0, m \neq 0$	$n_+ = n_- = 1$	$V(r) > 0$	Não	-
$b > 0, m \neq 0$	$n_+ = n_- = 1$	$V(r) > 0$	Não	-
$b < 0, m \neq 0$	$n_+ = n_- = 2$	$V(r) < 0$	Sim	Instável

Conclusão

Neste trabalho foi feito um estudo sobre estabilidade da solução tipo singularidade nua presente na métrica de Schwarzschild com massa negativa e também a análise da estabilidade da solução EMD. O foco principal foi na comparação entre dois métodos usados para a análise da estabilidade da solução de singularidade nua: Gibbons et al. e Gleiser e Dotti. Para a perturbação axial não há divergência entre os métodos. Entretanto, a perturbação polar gera maior dificuldade, pois, para $M < 0$, o potencial polar diverge em um ponto dentro do intervalo de interesse. A estratégia de Gibbons et al. é fazer uma colagem da função no ponto de divergência e assumindo um ponto crítico onde a solução deixaria de ser estável, eles encontram uma condição de contorno que garante a estabilidade. Já Gleiser e Dotti modificam a equação de Zerilli a fim de simplificar as equações e assim poder integrá-las. O resultado é que para qualquer valor de $w^2 = -k^2$ existe solução, portanto a solução para perturbação polar é instável.

Essas questões sobre a estabilidade foram discutidas com detalhe na dissertação. Para a análise da estabilidade é necessário que as soluções obedeçam algumas propriedades, entre elas ser de quadrado integrável, que seu operador seja auto-adjunto ou ter uma extensão auto-adjunto e o potencial para a perturbação ser positivo. Se essas propriedades forem verificadas para w real então tem-se estabilidade; caso contrário a questão é mais sutil e exige uma análise mais detalhada.

Em geral, o método usado por Gibbons et al. é eficaz na análise da estabilidade, porém não foi feita uma análise cuidadosa sobre a função que é solução das perturbações polares. Tal solução é a função de Zerilli, e ela possui uma divergência no intervalo $(0, \infty)$ para a métrica de Schwarzschild com $M < 0$. Além disso há uma descontinuidade na colagem feita no ponto divergente. Gleiser e Dotti, propõem uma modificação na equação de Zerilli

a fim de retirar tal divergência e fazer uma análise mais clara e fazem uma integração direta das equações mostrando que a solução cresce exponencialmente para $t \rightarrow \infty$.

A estabilidade da solução EMD através da perturbação por um campo escalar massivo também foi analisado na dissertação. Dada a solução foi verificada as propriedades mencionadas acima para algumas condições de b e m .

Para os casos em que há um buraco negro os operadores possuem extensão auto-adjunta e o potencial é positivo, porém as soluções não são de quadrado integrável. Isso cria um problema na análise já que o uso das condições para a estabilidade deixa de ser válido, e a questão se torna, a princípio, inconclusiva. Esse problema pode estar relacionado com as escolhas das condições de contorno, que afetam diretamente o resultado, ou pelo fato do espaço-tempo não ser assintoticamente plano. Já para os casos em que há uma singularidade nua esse problema não existe, pois as soluções são de quadrado integrável. Nesses casos, além das funções serem de quadrado integrável, o operador é auto-adjunto, e seu potencial é negativo. Esta última propriedade, junto com o fato da solução ser de quadrado integrável, garante que existam soluções para $w = ik$ que serão limitadas nos limites do intervalo. Sendo assim, as soluções tipo singularidade nua são instáveis.

Esses resultados são interessantes tendo em vista a estabilidade da solução de buraco negro e singularidade nua da métrica EMD. Porém ainda se faz necessário saber o comportamento dessa solução quando feita uma perturbação na métrica, que é uma análise muito mais completa da estabilidade.

Apêndice A

Equação da geodésica

Considere a ação

$$S = \int ds, \quad (\text{A.1})$$

onde $ds^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. A ideia é encontrar a geodésica entre dois eventos tipo-tempo. Para isso é necessário fazer a variação da ação. Mas antes faz-se uma parametrização com respeito ao parâmetro λ . Fazendo isso tem-se:

$$S = \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda. \quad (\text{A.2})$$

Agora variando a ação com relação a x^μ e utilizando o princípio da ação mínima tem-se

$$\delta S = \int \delta \left(\sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \right) d\lambda = \int \frac{\delta \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)}{2\sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}} d\lambda = 0. \quad (\text{A.3})$$

Aplicando a regra do produto é possível encontrar

$$\int \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \partial_\alpha g_{\mu\nu} \delta x^\alpha + 2g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) d\lambda = 0. \quad (\text{A.4})$$

Integrando por partes o último termo e simplificando os termos obtém-se

$$\int \left(-2g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} + \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \partial_\nu g_{\mu\alpha} \right) \delta x^\mu d\lambda = 0. \quad (\text{A.5})$$

Multiplicando por $-\frac{1}{2}$ e agrupando os termos

$$\int \left(g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} (\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\alpha\nu}) \right) \delta x^\mu d\tau = 0, \quad (\text{A.6})$$

e como a integral é nula a única opção é que o integrando seja zero. Multiplicando pelo inverso do tensor métrico $g^{\mu\beta}$ tem-se

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{\mu\beta} (\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\alpha\nu}) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (\text{A.7})$$

A segunda parcela é o símbolo de Christoffel, sendo assim

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma^\beta_{\alpha\nu} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Essa equação é equivalente a segunda lei de Newton e ela representa o movimento de uma partícula livre.

Apêndice B

Função hipergeométrica

Esse apêndice será dedicado ao estudo da função hipergeométrica. Irá ser seguido o procedimento usado nas notas de aula de Sotkov e da Silva[37] onde eles fazem o estudo das funções especiais.

Seja a EDO de segunda ordem

$$z(z-1)\frac{d^2y(z)}{dz^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{dy(z)}{dz} - aby(z) = 0. \quad (\text{B.1})$$

Ela possui singularidades regulares nos pontos $z = 0$, $z = 1$ e $z = \infty$. O procedimento para encontrar a solução será via série de potências

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{n+k}; \quad k \in \mathbb{R}; \quad g_0 \neq 0. \quad (\text{B.2})$$

O raio de convergência da série é $|z| \ll 1$ para $\text{Re}(c - a - b) > 0$. Substituindo a expansão na equação (B.1) e separando termo a termo, obtém-se a relação para k :

$$k(k+c-1) = 0. \quad (\text{B.3})$$

No caso em que $k = 0$ e escolhendo $g_0 = 1$, chega-se à igualdade

$$y(z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)z^n}{\Gamma(c+n)n!} \equiv F(a, b; c; z), \quad (\text{B.4})$$

onde $F(a, b; c; z)$ é a função hipergeométrica.

Já para $k = 1 - c$ a segunda solução também pode ser escrita em termos da hiper-

geométrica

$$y(z) = z^{1-c}F(a+1-c, b+1-c; 2-c; z). \quad (\text{B.5})$$

A solução geral da equação (B.1) é

$$y(z) = C_1F(a, b; c; z) + C_2z^{1-c}F(a+1-c, b+1-c; 2-c; z), \quad (\text{B.6})$$

onde C_1 e C_2 são constantes.

No limite assintótico em que $|z| \ll 0$ a hipergeométrica comporta-se como

$$F(a, b; c; 0) = 1. \quad (\text{B.7})$$

Para $|z| \rightarrow \infty$ a expansão assintótica é dada por

$$y(z) = C_1z^{-a}F(a, a+1-c; 1+a-b; 1/z) + C_2y^{-b}F(b, 1+b-c; 1+b-a; /z), \quad (\text{B.8})$$

onde

$$C_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}, \quad C_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}. \quad (\text{B.9})$$

Ambas equações são soluções gerais da EDO (B.1), descritas em termos da série de potências centrada em uma das singularidades regulares.

Apêndice C

Função confluyente de Heun

A equação diferencial de Heun foi introduzida por Karl Heun em 1889 como uma generalização das funções hipergeométricas. Ela é uma equação de Fuchs com quatro pontos singulares regulares, o qual são usualmente escolhidos como $z = 0, 1, a, \infty$. Porém, aqui será abordado o caso em que $a \rightarrow \infty$ e com dois pontos singulares regulares $z = 0, 1$ e um ponto irregular $z = \infty$.

A equação confluyente de Heun é dada na seguinte forma:

$$H_c''(z) + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \epsilon \right) H_c'(z) + \frac{\alpha z - q}{z(z-1)} H_c(z) = 0, \quad (\text{C.1})$$

onde $q, \gamma, \delta, \alpha, \epsilon$ são parâmetros que pertencem ao conjunto complexo e a relação entre eles é dada por $a + b + 1 = \delta + \gamma$, onde $ab = \alpha$. Será usado a notação $H_c(q, \alpha, \gamma, \delta, \epsilon; z)$

Existem 6 soluções para a equação (C.1). Para as soluções próximas de $z = 0$ e $z = 1$ é utilizado o método de Frobenius, enquanto que duas soluções em $z = \infty$ são obtidas através de expansões assintóticas.

C.1. Expansão em série de potência no ponto $z = 0$

A expansão em série de potência para a função confluyente de Heun, tal que $H_c(0) = 1$, é bem conhecida para $\gamma \notin \mathbb{Z}_0^-$. Tem-se para a primeira solução

$$Hl_c(q, \alpha, \gamma, \delta, \epsilon; z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad (\text{C.2})$$

onde o coeficiente b_n é relacionado por

$$P_n b_n = Q_n b_{n-1} + R_n b_{n-2}, \quad (\text{C.3})$$

e

$$P_n = n(\gamma - 1 + n), \quad Q_n = -q + (n - 1)(\gamma + \delta - \epsilon + n - 2), \quad R_n = (n - 2)\epsilon + \alpha. \quad (\text{C.4})$$

As condições iniciais são: $b_{-1} = 0, b_0 = 1$. A função hipergeométrica de Heun $H_c(z)$ é analítica em $|z| < 1$ e o teorema de Cauchy garante que a série converge.

A segunda solução pode ser definida como:

$$H_{s_c}(q, \alpha, \gamma, \delta, \epsilon; z) = \sum_{n=1-\gamma}^{\infty} s_n z^n, \quad (\text{C.5})$$

onde

$$P_n s_n = Q_n s_{n-1} + R_n s_{n-2}, \text{ para } n > 1 - \gamma \text{ e } s_n = 1, s_{n-1} = 0. \quad (\text{C.6})$$

A escolha de Hl_c para $\gamma \notin \mathbb{Z}_0^-$ não é única, poderia ser uma combinação linear

$$Hl_c(q, \alpha, \gamma, \delta, \epsilon; z) + CH_{s_c}(q, \alpha, \gamma, \delta, \epsilon; z) \quad (\text{C.7})$$

para uma constante arbitrária C .

Para $\gamma \notin \mathbb{Z}_0^-$, substituindo diretamente em (C.1) obtém-se a seguinte relação:

$$H_c(q, \alpha, \gamma, \delta, \epsilon; z) = e^{-\epsilon z} Hl_c(q - \epsilon\gamma, \alpha - \epsilon(\gamma + \delta), \gamma, \delta, -\epsilon; z). \quad (\text{C.8})$$

Ou seja,

$$Hl_c(q, \alpha, \gamma, \delta, \epsilon; z) + CH_{s_c}(q, \alpha, \gamma, \delta, \epsilon; z) = e^{-\epsilon z} Hl_c(q - \epsilon\gamma, \alpha - \epsilon(\gamma + \delta), \gamma, \delta, -\epsilon; z). \quad (\text{C.9})$$

onde

$$C = - \sum_{n=0}^{n=1-\gamma} c_n \frac{\epsilon^{1-\gamma-n}}{(1-\gamma-n)!}. \quad (\text{C.10})$$

Considere agora a função H_{s_c} para um γ arbitrário. Existem duas situações que merecem

atenção: $\gamma = 1$ e $\gamma \neq 1$. Para $\gamma \neq 1$, pode-se usar a seguinte representação:

$$Hs_c(q, \alpha, \gamma, \delta, \epsilon; z) = z^{1-\gamma} Hl_c(q + (\gamma - 1)(\delta - \epsilon), \alpha + \epsilon(1 - \gamma), 2 - \gamma, \delta, \epsilon; z). \quad (\text{C.11})$$

Note que essa função inclui (C.5) como caso particular, justificando a maneira de introduzir as funções. Para $\gamma = 2, 3, \dots$, a expansão contém um termo logarítmico.

Para $\gamma = 1$, pode-se encontrar a representação

$$Hs_c(q, \alpha, \gamma, \delta, \epsilon; z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n + \log(z) \sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n. \quad (\text{C.12})$$

C.2. Expansão no infinito

Nessa seção, será abordada a expansão da equação confluyente de Heun no infinito. Assumindo que $\epsilon \neq 1$, espera-se encontrar soluções do tipo

$$Ha_{c,\infty}(q, \alpha, \gamma, \delta, \epsilon; z) = (-z)^{-\frac{\alpha}{\epsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{n!}{(\epsilon z)^n}, \quad (\text{C.13})$$

onde β_n está relacionado da seguinte forma

$$\beta_n = \tilde{Q}_n \beta_{n-1} + \tilde{R}_n \beta_{n-2}, \quad (\text{C.14})$$

e as condições iniciais são escolhidas como:

$$\beta_{-1} = 0, \quad \beta_0 = 1. \quad (\text{C.15})$$

A segunda solução pode ser introduzida observando a equação (C.8)

$$Hb_{c,\infty}(q, \alpha, \gamma, \delta, \epsilon; z) = e^{-\epsilon z} Ha_{c,\infty}(q - \epsilon\gamma, \alpha - \epsilon(\gamma + \delta), \gamma, \delta, -\epsilon; z). \quad (\text{C.16})$$

No caso especial $\epsilon = 0$, $\alpha \neq 0$, a solução é expressa da seguinte forma:

$$H_{c\pm}(z) = z^\Lambda e^{\pm 2i\sqrt{\alpha}z} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^{-\frac{n}{2}}, \quad (\text{C.17})$$

onde

$$\Lambda = \frac{1}{4} - \frac{\gamma + \delta}{2}. \quad (\text{C.18})$$

No caso de $\alpha = \epsilon = 0$, a equação confluyente de Heun reduz a uma função hipergeométrica.

Apêndice D

Campo escalar

O interesse do estudo de perturbações escalares se deve ao fato delas serem mais simples, entretanto o seu comportamento é similar a perturbações mais complexas. Para estudar a dinâmica do campo escalar no espaço-tempo, é considerado inicialmente um campo sem massa que satisfaz a equação de Klein-Gordon

$$\square\Phi = 0, \quad (\text{D.1})$$

aqui, \square é o d'Alembertiano. Desenvolvendo esse operador, tem-se

$$\square\Phi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi = 0, \quad (\text{D.2})$$

$$\square\Phi = g^{\mu\nu}[\partial_\mu\partial_\nu\Phi - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda\partial_\lambda\Phi] = 0, \quad (\text{D.3})$$

onde Γ são os símbolos de Christoffel. Primeiro é necessário calculá-los para uma métrica geral na forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = f(r) dt^2 - f(r)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (\text{D.4})$$

Substituindo na equação (D.3)

$$\begin{aligned} \square\Phi = f^{-1} \left[\ddot{\Phi} - \frac{1}{2} f' f \Phi' \right] - f \left[\Phi'' + \frac{f'}{2f} \Phi' \right] - \frac{1}{r^2\theta} [\partial_\theta^2\Phi + r f \Phi'] + \\ - \frac{1}{\sin^2\theta} [\partial_\phi^2\Phi + \cos\theta \sin\theta \partial_\theta\Phi + r \sin^2\theta f \Phi']. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Agrupando os termos das derivadas, chega-se a seguinte forma

$$f^{-1} \ddot{\Phi} + r^{-2} [r^2 f \Phi']' + r^{-2} \left(\partial_\theta^2 \Phi + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \Phi + \cot \theta \partial_\theta \Phi \right) = 0. \quad (\text{D.6})$$

Fazendo a separação de variáveis

$$\Phi = \frac{R(t, r)}{r} Y(\theta, \phi), \quad (\text{D.7})$$

encontra-se

$$\frac{-Y}{r f} \ddot{R} + \frac{Y}{r^2} \left[r^2 f \left(\frac{R}{r} \right)' \right]' + \frac{R}{r^3} \left(\partial_\theta^2 Y + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 Y + \cot \theta \partial_\theta Y \right) = 0. \quad (\text{D.8})$$

Multiplicando a expressão por $r^3/R Y$, e lembrando que

$$\frac{1}{Y} \left(\partial_\theta^2 Y + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 Y + \cot \theta \partial_\theta Y \right) = -l(l+1), \quad (\text{D.9})$$

obtem-se

$$-\ddot{R} + \frac{f}{r} \left[r^2 f \left(\frac{R}{r} \right)' \right]' = \frac{l(l+1)}{r^2} f R. \quad (\text{D.10})$$

Para a métrica de Schwarzschild, $f = (1 - \frac{2M}{r})$. Expandindo o termo da derivada, a expressão pode ser escrita como

$$-\ddot{R} + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left[-\frac{2M R}{r^3} + \frac{2M R'}{r^2} + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) R'' \right] = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{l(l+1)}{r^2} R. \quad (\text{D.11})$$

Agrupando os termos de derivada segunda e derivada primeira

$$-\ddot{R} + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left[-\frac{2M R}{r^3} + \frac{d}{dr} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dR}{dr} \right] \right] = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{l(l+1)}{r^2} R. \quad (\text{D.12})$$

Utilizando a transformação de coordenadas *tartaruga*

$$\frac{d}{dx} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{d}{dr} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dr} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \frac{d}{dx}. \quad (\text{D.13})$$

onde x é a coordenada tartaruga, a equação é simplificada ficando na forma da equação

da onda

$$\frac{\partial^2 R(t, r)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R(t, r)}{\partial t^2} - V(r) R(t, r) = 0, \quad (\text{D.14})$$

onde $V(r)$ é dado por

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3}\right) R. \quad (\text{D.15})$$

Essa é a equação que tem que ser resolvida, caso se esteja fazendo perturbações escalares.

Apêndice E

Potencial Regge-Wheeler

Neste apêndice será mostrado um outro método para encontrar a equação de Regge - Wheeler. Para isso, será usada o procedimento do livro do Chandrasekhar[24].

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\psi} (d\phi - wdt - q_2 dr - q_3 d\theta)^2 - e^{2\mu_2} dr^2 - e^{2\mu_3} d\theta^2, \quad (\text{E.1})$$

cujo os coeficientes para o caso da métrica de dilaton são

$$e^{2\nu} = e^{-2\mu_2} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \frac{\Delta}{r^2}, \quad e^\psi = r \sin \theta, \quad e^{\mu_3} = r, \quad (\text{E.2})$$

e

$$w = q_2 = q_3 \neq 0, \quad \Delta = r^2 - 2M r. \quad (\text{E.3})$$

As equações que relacionam essas quantidades são

$$R_{12} = R_{13} = 0, \quad (\text{E.4})$$

resultando em

$$(e^{3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3} Q_{23})_{,3} = -e^{3\psi-\nu-\mu_2+\mu_3} Q_{02,0} \quad (\delta R_{12} = 0), \quad (\text{E.5})$$

$$(e^{3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3} Q_{23})_{,2} = +e^{3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3} Q_{03,0} \quad (\delta R_{13} = 0), \quad (\text{E.6})$$

onde

$$Q_{AB} = q_{A,B} - q_{B,A} \quad e \quad Q \equiv \Delta \sin^3 \theta Q_{23}. \quad (\text{E.7})$$

Substituindo os valores de ν , ψ , μ_2 e μ_3 obtém-se

$$\frac{1}{r^4 \sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial \theta} = -(w_{,2} - q_{2,0})_{,0}, \quad (\text{E.8})$$

$$\frac{\Delta}{r^4 \sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial r} = (w_{,3} - q_{3,0})_{,0}. \quad (\text{E.9})$$

Assumindo que as perturbações têm uma dependência no tempo

$$q \sim e^{i\sigma t}, \quad (\text{E.10})$$

(E.8) e (E.9) irão ficar na forma

$$\frac{1}{r^4 \sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial \theta} = -i\sigma w_2 - \sigma^2 q_2, \quad (\text{E.11})$$

e

$$\frac{\Delta}{r^4 \sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial r} = i\sigma w_3 + \sigma^2 q_3. \quad (\text{E.12})$$

Derivando (E.11) em θ e (E.12) em r e somando, obtém-se

$$\frac{1}{\sin^3 \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\Delta}{r^4} \frac{\partial Q}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right] = -\sigma^2 (q_{2,3} - q_{3,2}). \quad (\text{E.13})$$

Multiplicando por $(r^4 \sin^3 \theta)$ chega-se à seguinte equação

$$r^4 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\Delta}{r^4} \frac{\partial Q}{\partial r} \right] + \sin^3 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right] = -r^4 \sigma^2 \frac{Q}{\Delta}. \quad (\text{E.14})$$

Pode-se fazer uma separação de variáveis substituindo

$$Q(r, \theta) = Q(r) C_{l+2}^{-3/2}(\theta), \quad (\text{E.15})$$

onde C_n^ν é a função de Gegenbauer. Substituindo (E.15) na equação (E.14), chega-se a

$$\Delta \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\Delta}{r^4} \frac{\partial Q}{\partial r} \right] - \frac{\mu^2 \Delta Q}{r^4} + \sigma^2 Q = 0, \quad (\text{E.16})$$

onde $\mu^2 = (l-1)(l+2)$ está associado com o momento angular. Fazendo novamente a

troca de variáveis para a coordenada *tartaruga*

$$\frac{d}{dx} = \frac{\Delta}{r^2} \frac{d}{dr}, \quad (\text{E.17})$$

obtem-se

$$\Delta \left[-\frac{1}{r^3} \frac{dQ}{dx} + \frac{1}{\Delta} \frac{d^2Q}{dx^2} \right] - \frac{\mu^2 \Delta Q}{r^3} + \sigma^2 Q = 0. \quad (\text{E.18})$$

Substituindo $Q = r^{1/2} Z$

$$Z'' - \frac{\Delta}{r^5} [(\mu^2 + 2)r - 6M] Z + \sigma^2 Z = 0, \quad (\text{E.19})$$

e definindo

$$V(r) = \frac{\Delta}{r^5} [(\mu^2 + 2)r - 6M], \quad (\text{E.20})$$

encontra-se a equação tipo onda

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \sigma^2 \right) Z = V Z. \quad (\text{E.21})$$

Essa é a mesma equação de Regge-Wheeler encontrada anteriormente no capítulo 3.1.

Apêndice F

Análise dos índices de deficiência

Aqui será verificado se os operador para a perturbação do campo escalar massivo são auto-adjuntos ou possuem extensão auto-adjunta. Será analisado a equação

$$-R''(x) + \frac{(r-b)}{r_0^2} \left[\frac{(l+1/2)^2}{r} + m^2 r_0 + \frac{b}{4r^2} \right] R(x) = w^2 R(x), \quad (\text{F.1})$$

para os possíveis valores de b e m .

Caso $b = 0$ e $m = 0$

Para encontrar os índices de deficiência será usado a solução na coordenada tartaruga. A transformação é dada por

$$\frac{d}{dx} = \frac{r}{r_0} \frac{d}{dr} \Rightarrow x = r_0 \log r, \quad (\text{F.2})$$

onde

$$\begin{cases} r \rightarrow 0, & x \rightarrow -\infty \\ r \rightarrow \infty, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{F.3})$$

A equação (G.4) será escrita na coordenada tartaruga como

$$-R''(x) + \frac{1}{r_0^2} \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 R(x) = w^2 R(x). \quad (\text{F.4})$$

Para verificar os índices de deficiência basta resolver a equação

$$\hat{A}R = \pm iR, \quad (\text{F.5})$$

onde

$$\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{r_0^2} \left(l + \frac{1}{2} \right)^2. \quad (\text{F.6})$$

Resolvendo a equação (F.4), obtém-se a seguinte solução

$$R(x) = c_1 e^{-x\sqrt{\alpha^2 \mp i}} + c_2 e^{x\sqrt{\alpha^2 \mp i}}, \quad (\text{F.7})$$

com $\alpha^2 = \frac{1}{r_0^2} \left(l + \frac{1}{2} \right)^2$.

Como α^2 é sempre positivo, quando $x \rightarrow -\infty$ a primeira solução irá divergir, enquanto que a segunda irá a zero. Portanto os índices de deficiência são

$$n_+ = n_- = 1. \quad (\text{F.8})$$

Sendo assim, o operador possui extensão auto-adjunta.

Caso: $b > 0$, $m = 0$

Aqui, basta colocar $m = 0$ nas equações do caso $b > 0$ e $m \neq 0$. Com a equação (F.28) fica como

$$-\frac{d^2}{dx^2}R(x) + \frac{R(x)}{r_0} e^{\frac{x}{r_0}} \left(\frac{l^2}{r_0} \left(e^{\frac{x}{r_0}} + b \right)^{-1} + \frac{1}{4r_0} \left(e^{\frac{x}{r_0}} + b \right) + b \frac{1}{4r_0} \left(e^{\frac{x}{r_0}} + b \right)^2 \right) = \pm iR(x). \quad (\text{F.9})$$

Sua solução é dada por funções hipergeométricas

$$\begin{aligned} R(x) = & C_1 F\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 \mp 4ir_0^2 + 4l^2}}{2} + \left[-\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\right] r_0 \sqrt{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 \mp 4ir_0^2 + 4l^2}}{2} + \right. \\ & \left. + \left[-\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\right] r_0 \sqrt{2}, 1 + [\pm i - 1] r_0 \sqrt{2}, -\frac{e^{x/r_0}}{b}\right) e^{[-\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}] \sqrt{2}x} \sqrt{e^{x/r_0} + b} + \\ & + C_2 F\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 \mp 4ir_0^2 + 4l^2}}{2} - \left[-\frac{1}{2} \mp \frac{i}{2}\right] r_0 \sqrt{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 \mp 4ir_0^2 + 4l^2}}{2} + \right. \\ & \left. - \left[-\frac{1}{2} \mp \frac{i}{2}\right] r_0 \sqrt{2}, 1 + [1 \mp i] r_0 \sqrt{2}, -\frac{e^{x/r_0}}{b}\right) e^{[\frac{1}{2} \mp \frac{i}{2}] \sqrt{2}x} \sqrt{e^{x/r_0} + b}. \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Aqui, assim como no caso massivo, somente uma solução será bem comportada próximo ao horizonte de eventos. Sendo assim, os índices de deficiência são

$$n_+ = n_- = 1, \quad (\text{F.11})$$

ou seja, o operador possui extensão auto-adjunta.

Caso: $b < 0$, $m = 0$

Nesse caso, a equação na coordenada tartaruga será:

$$-\frac{d^2}{dx^2}R(x) + \frac{R(x)}{r_0}e^{\frac{x}{r_0}} \left(\frac{l^2}{r_0} \left(e^{\frac{x}{r_0}} - b \right)^{-1} + \frac{1}{4r_0} \left(e^{\frac{x}{r_0}} - b \right) - b \frac{1}{4r_0} \frac{1}{\left(e^{\frac{x}{r_0}} - b \right)^2} \right) = \pm iR(x), \quad (\text{F.12})$$

cuja solução é dada por

$$\begin{aligned} R(x) = & C_1 F\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 \mp 4ir_0^2 + 4\bar{l}^2}}{2} + \left[-\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\right] r_0\sqrt{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 \mp 4ir_0^2 + 4\bar{l}^2}}{2} + \right. \\ & \left. + \left[-\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\right] r_0\sqrt{2}, 1 + [\pm i - 1]r_0\sqrt{2}, \frac{e^{x/r_0}}{b}\right) e^{[-\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}]\sqrt{2}x} \sqrt{b - e^{x/r_0}} + \\ & + C_2 F\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 \mp 4ir_0^2 + 4\bar{l}^2}}{2} - \left[-\frac{1}{2} \mp \frac{i}{2}\right] r_0\sqrt{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 \mp 4ir_0^2 + 4\bar{l}^2}}{2} + \right. \\ & \left. - \left[-\frac{1}{2} \mp \frac{i}{2}\right] r_0\sqrt{2}, 1 + [1 \mp i]r_0\sqrt{2}, \frac{e^{x/r_0}}{b}\right) e^{[\frac{1}{2} \mp \frac{i}{2}]\sqrt{2}x} \sqrt{b - e^{x/r_0}}. \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

Calculando seus índices de deficiência em $r \rightarrow 0$ é possível ver que as duas solução são finitas nesse limite, e portanto

$$n_+ = n_- = 2, \quad (\text{F.14})$$

ou seja, o operador possui extensão auto-adjunta.

Caso $b = 0$ e $m \neq 0$

Nesse caso

$$f = \frac{r}{r_0} \quad (\text{F.15})$$

portanto, a equação (G.4) é escrita como

$$-R''(x) + \frac{r}{r_0} \left[\frac{\bar{l}^2}{r_0 r} + m^2 + \frac{1}{4rr_0} \right] R(x) = w^2 R(x). \quad (\text{F.16})$$

Escrevendo o potencial na coordenada tartaruga x

$$\frac{d}{dx} = \frac{r}{r_0} \frac{d}{dr} \quad \Rightarrow \quad x = r_0 \log r, \quad (\text{F.17})$$

onde

$$\begin{cases} r \rightarrow 0, & x \rightarrow -\infty \\ r \rightarrow \infty, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{F.18})$$

Com isso, a equação torna-se

$$-\frac{d^2}{dx^2} R(x) + \frac{R(x)}{r_0} e^{\frac{x}{r_0}} \left(\frac{\bar{l}^2}{r_0} e^{-\frac{x}{r_0}} + m^2 + e^{-\frac{x}{r_0}} \frac{1}{4r_0} \right) = w^2 R(x), \quad (\text{F.19})$$

onde $\bar{l}^2 = l(l+1)$.

Com essa equação pode-se analisar se o operador é ou não auto-adjunto. Para verificar isso, é necessário resolver a equação

$$\hat{A}R = \pm iR \quad (\text{F.20})$$

onde \hat{A} é o operador

$$\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{r_0} e^{\frac{x}{r_0}} \left(\frac{\bar{l}^2}{r_0} e^{-\frac{x}{r_0}} + m^2 + e^{-\frac{x}{r_0}} \frac{1}{4r_0} \right), \quad (\text{F.21})$$

e encontrar seus índices de deficiência para $\pm i$. Resolvendo a equação (F.20) encontra-se

$$R(x) = C_1 J_{\sqrt{1+4l^2 \mp 4ir_0^2}} \left(2im\sqrt{r_0} e^{1/2 \frac{x}{r_0}} \right) + C_2 Y_{\sqrt{1+4l^2 \mp 4ir_0^2}} \left(2im\sqrt{r_0} e^{1/2 \frac{x}{r_0}} \right). \quad (\text{F.22})$$

A função de Bessel do segundo tipo, Y_ν , diverge próximo ao horizonte de eventos ($x \rightarrow -\infty$). Como só há uma solução para $\pm i$, os índices de deficiência são

$$n_+ = n_- = 1. \quad (\text{F.23})$$

Ou seja, o operador possui extensão auto-adjunta.

Caso $b > 0$ e $m \neq 0$

Aqui

$$f = \frac{(r-b)}{r_0} \quad (\text{F.24})$$

na equação (G.4) tem-se

$$-R''(x) + \frac{(r-b)}{r_0} \left[\frac{\bar{l}^2}{r_0 r} + m^2 + \frac{1}{4rr_0} + \frac{b}{4r_0 r^2} \right] R(x) = w^2 R(x). \quad (\text{F.25})$$

Introduzindo a variável tartaruga,

$$\frac{d}{dx} = \left(\frac{r-b}{r_0} \right) \frac{d}{dr} \quad \Rightarrow \quad x = r_0 \log \left(\frac{r}{b} - 1 \right), \quad (\text{F.26})$$

com

$$\begin{cases} r \rightarrow b, & x \rightarrow -\infty \\ r \rightarrow \infty, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{F.27})$$

Substituindo essa nova variável na equação acima tem-se

$$-\frac{d^2}{dx^2} R(x) + \frac{R(x)}{r_0} e^{\frac{x}{r_0}} \left(\frac{l^2}{r_0} \left(e^{\frac{x}{r_0}} + b \right)^{-1} + m^2 + \frac{1}{4r_0} \frac{1}{\left(e^{\frac{x}{r_0}} + b \right)} + b \frac{1}{4r_0} \frac{1}{\left(e^{\frac{x}{r_0}} + b \right)^2} \right) = \pm i R(x).$$

A solução da eq (F.20) é uma função confluyente de Heun dada por

$$R(x) = C_1 H_c \left(0, (1 \mp i) \sqrt{2} r_0, 0, b m^2 r_0, -b m^2 r_0 - \bar{l}^2, -\frac{1}{b} e^{\frac{x}{r_0}} \right) e^{(1/2 \mp i/2) \sqrt{2} x} \sqrt{e^{\frac{x}{r_0}} + b} + \\ + C_2 H_c \left(0, (-1 \mp i) \sqrt{2} r_0, 0, b m^2 r_0, -b m^2 r_0 - \bar{l}^2, -\frac{1}{b} e^{\frac{x}{r_0}} \right) e^{(-1/2 \mp i/2) \sqrt{2} x} \sqrt{e^{\frac{x}{r_0}} + b}.$$

No limite assintótico, a primeira solução tende a zero enquanto que a segunda solução diverge para $\pm i$. Com isso conclui-se que os índices de deficiência são

$$n_+ = n_- = 1, \quad (\text{F.28})$$

ou seja, o operador é auto-adjunto.

Caso $b = -|\beta| < 0$ e $m \neq 0$

Tem-se

$$f = \frac{(r + |\beta|)}{r_0} \quad (\text{F.29})$$

a equação (G.4) fica na forma

$$-R''(x) + \frac{(r + |\beta|)}{r_0} \left[\frac{\bar{l}^2}{r_0 r} + m^2 + \frac{1}{4rr_0} - \frac{|\beta|}{4r_0 r^2} \right] R(x) = w^2 R(x). \quad (\text{F.30})$$

Sendo

$$\frac{d}{dx} = \left(\frac{r + |\beta|}{r_0} \right) \frac{d}{dr} \Rightarrow x = r_0 \log \left(\frac{r}{|\beta|} + 1 \right) \quad (\text{F.31})$$

com

$$\begin{cases} r \rightarrow 0, & x \rightarrow 0 \\ r \rightarrow \infty, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{F.32})$$

Substituindo essa nova variável na eq (F.30), tem-se

$$-\frac{d^2}{dx^2} R(x) + \frac{R(x)}{r_0} e^{\frac{x}{r_0}} \left(\frac{l^2}{r_0} \left(e^{\frac{x}{r_0}} - |\beta| \right)^{-1} + m^2 + \frac{1}{4r_0} \frac{1}{\left(e^{\frac{x}{r_0}} - |\beta| \right)} - |\beta| \frac{1}{4r_0 \left(e^{\frac{x}{r_0}} - |\beta| \right)^2} \right) = \pm i R(x) \quad (\text{F.33})$$

Resolvendo a eq. (F.20) a solução será

$$R(x) = C_1 H_c \left(0, (1 \pm i) \sqrt{2} r_0, 0, -m^2 |\beta| r_0, m^2 |\beta| r_0 - l^2, \frac{1}{|\beta|} e^{\frac{x}{r_0}} \right) e^{(1/2 \pm i/2) \sqrt{2} x} \sqrt{e^{\frac{x}{r_0}} - |\beta|} + \\ + C_2 H_c \left(0, (-1 \pm i) \sqrt{2} r_0, 0, -m^2 |\beta| r_0, m^2 |\beta| r_0 - l^2, \frac{1}{|\beta|} e^{\frac{x}{r_0}} \right) e^{(-1/2 \pm i/2) \sqrt{2} x} \sqrt{e^{\frac{x}{r_0}} - |\beta|}.$$

Nesse caso, ambas as soluções são bem comportadas tanto para $+i$ quanto para $-i$ e por

isso seus os índices de deficiência são

$$n_+ = n_- = 2, \tag{F.34}$$

ou seja, o operador possui extensão auto-adjunta.

Apêndice G

Análise dos pontos singulares na coordenada tartaruga

Nesse apêndice será resolvido os casos para o campo escalar não massivos na coordenada tartaruga, a fim de conferir os resultados e apresentar uma abordagem matemática diferente[22]. Para essa análise será usado algumas preposições e teoremas[19]:

Proposição 1: Suponha que $V(x)$ é uma função real contínua no intervalo $(0, \infty)$ e H o operador $-d^2/dx^2 + V(x)$, então

1. H é simétrico.
2. Se $\psi \in D(H^*)$, então ψ é continuamente diferenciável, ψ' é absolutamente contínua, ψ'' é localmente L^2 , $-\psi'' + V\psi \in L^2(0, \infty)$, e

$$H^*\psi = -\psi'' + V\psi. \quad (\text{G.1})$$

3. H tem índices de deficiência iguais.

Dada a equação

$$-\phi''(x) + V(x)\phi(x) = \lambda\phi(x), \quad (\text{G.2})$$

tem-se o seguinte teorema

Teorema 1: Seja $V(x)$ uma função real e contínua no intervalo $(0, \infty)$.

1. Se $\text{Im } \lambda \neq 0$, então pelo menos uma solução de (G.3) está em L^2 próximo de zero ou próximo do infinito.
2. Se para $\lambda \in \mathbb{C}$, ambas as soluções de (G.3) estão em L^2 próximo do infinito ou de zero então, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, ambas as soluções estão em L^2 .

Aqui vale uma análise sobre a classificação do intervalo. O procedimento consiste em classificar os limites do intervalo como pontos regulares ou singulares. Nesse contexto há outra classificação. A função $V(x)$ está no caso *círculo limite* no infinito(ou zero) se para algum λ , todas as soluções de

$$-\phi''(x) + V(x)\phi(x) = \lambda\phi(x), \quad (\text{G.3})$$

são de quadrado integrável. Se $V(x)$ não está no caso círculo limite, então é dito que ele está no caso *ponto limite*. Para os limites tipo círculo limite é necessário escolher com cuidado as condições de contorno para que haja a garantia de que o operador será auto-adjunto. Essa análise é equivalente ao cálculo dos índices de deficiência feito no apêndice anterior.

Teorema 2: Seja $V(x)$ uma função real e contínua no intervalo $(0, \infty)$. Então $H = -d^2/dx^2 + V(x)$ é essencialmente auto-adjunto em $C_0^\infty(0, \infty)$ se e somente se $V(x)$ é um ponto limite em ambos zero e infinito.

Dada essas definições será estudado os casos de ponto limite e círculo limite com $b = 0$, $b > 0$, $b < 0$ da equação

$$-\psi_{xx} + \frac{(r-b)}{r_0^2} \left[\frac{(l+1/2)^2}{r} + m^2 r_0 + \frac{b}{4r^2} \right] \psi = w^2 \psi. \quad (\text{G.4})$$

.

Caso $b = 0$ e $m = 0$

Nessas condições a coordenada tartaruga é dada por

$$\frac{d}{dx} = \frac{r}{r_0} \frac{d}{dr} \Rightarrow x = r_0 \log r, \quad (\text{G.5})$$

onde

$$\begin{cases} r \rightarrow 0, & x \rightarrow -\infty \\ r \rightarrow \infty, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{G.6})$$

Portanto, a equação torna-se

$$-R''(x) + \frac{1}{r_0^2} \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 R(x) = w^2 R(x). \quad (\text{G.7})$$

Definindo

$$C^2 = w^2 - \frac{1}{r_0^2} \left(l + \frac{1}{2} \right)^2, \quad (\text{G.8})$$

a solução pode ser escrita como

$$R \sim Ae^{iCx} + Be^{-iCx}. \quad (\text{G.9})$$

Para qualquer $w^2 < \frac{1}{r_0^2} \left(l + \frac{1}{2} \right)^2$ ou $w \in \mathbb{C}$, existirá soluções tal que $C \in \mathbb{C}$. Sendo assim, a exponencial ficará real e uma das soluções irá a zero e a outra irá crescer quando $x \rightarrow \pm\infty$. Pode-se concluir então que somente uma das soluções é de quadrado integrável e portanto o limite é tipo *ponto limite*.

Caso $b > 0$ e $m = 0$

A coordenada tartaruga, x , é dada por

$$\frac{d}{dx} = f \frac{d}{dr} \quad \rightarrow \quad x = r_0 \log \left(\frac{r}{b} - 1 \right), \quad (\text{G.10})$$

onde seu intervalo é $-\infty < x < \infty$.

Substituindo essa nova variável em (G.4) chega-se em

$$-\frac{d^2}{dx^2} R(x) + \frac{R(x)}{r_0^2} e^{\frac{x}{r_0}} \left(\frac{\bar{l}^2}{\left(e^{\frac{x}{r_0}} + 1 \right)} + \frac{1}{4 \left(e^{\frac{x}{r_0}} + 1 \right)} + \frac{1}{4 \left(e^{\frac{x}{r_0}} + 1 \right)^2} \right) = w^2 R(x). \quad (\text{G.11})$$

- limite: $-\infty$.

Nesse limite, a equação (G.38) pode ser escrita como

$$-R''(x) + Ce^{x/r_0}R(x) = w^2R(x), \quad (\text{G.12})$$

onde $C = \frac{1}{r_0^2}(\bar{l}^2 + \frac{1}{2})$.

Se todas as soluções são de quadrado integrável com relação a $w^2 = 0$ então isso será verdade para qualquer w . Quando $w^2 = 0$ tem-se

$$-R''(x) + Ce^{x/r_0}R(x) = 0. \quad (\text{G.13})$$

Fazendo a troca para a variável $\sqrt{\chi}$, onde $\chi = Ce^{x/r_0}$, essa equação pode ser escrita como uma equação de Bessel modificada cuja solução é dada por

$$R \sim A_1 I_0(2r_0\sqrt{C}e^{x/r_0}) + A_2 K_0(2r_0\sqrt{C}e^{x/r_0}). \quad (\text{G.14})$$

Quando $x = -\infty$ as funções comportam-se como

$$I_0(2r_0\sqrt{C}e^{x/r_0}) \sim cte; \quad K_0(2r_0\sqrt{C}e^{x/r_0}) \sim x. \quad (\text{G.15})$$

Essas funções não são de quadrado integrável, portanto *ponto limite*. Esse resultado é o mesmo encontrado na variável y .

- limite: $+\infty$.

Nesse caso o termo do potencial será uma constante, e a solução torna-se

$$-R''(x) + (C_0^2 - w^2)R(x) = 0, \quad (\text{G.16})$$

onde $C_0 = \frac{\bar{l}^2}{r_0^2} + \frac{1}{4r_0^2}$. A solução geral nesse limite é

$$R \sim D_1 e^{ikx} + D_2 e^{-ikx}, \quad (\text{G.17})$$

onde $k^2 = w^2 - C_0^2$. Fica claro que existe uma escolha de $w \in \mathbb{R}$ tal que $k \in \mathbb{C}$. Nesse caso a exponencial ficará real, uma das soluções irá a zero quando $x \rightarrow \infty$ e a

outra irá crescer, e assim, somente uma dessas soluções é de quadrado integrável. Conclui-se então que o limite $+\infty$ é tipo *ponto limite*.

Note que o resultado é a mesmo encontrado na coordenada y , como era de se esperar. Próximo ao horizonte de eventos a solução não é de quadrado integrável. Mas mesmo assim, como discutido anteriormente, isso não afeta a física do problema. Portanto, como foi verificado que o operador é auto-adjunto e o potencial é positivo, pode-se concluir que a solução é estável.

Caso $b < 0$ e $m = 0$

Aqui a coordenada tartaruga será

$$\frac{d}{dx} = f \frac{d}{dr} \quad \rightarrow \quad x = r_0 \log \left(\frac{r}{b} + 1 \right), \quad (\text{G.18})$$

onde seu intervalo é $0 < x < \infty$. Escrevendo a equação radial nessa coordenada obtém-se

$$-\frac{d^2}{dx^2} R(x) + \frac{R(x)}{r_0^2} e^{\frac{x}{r_0}} \left(\frac{\bar{l}^2}{\left(e^{\frac{x}{r_0}} - 1 \right)} + \frac{1}{4 \left(e^{\frac{x}{r_0}} - 1 \right)} - \frac{1}{4 \left(e^{\frac{x}{r_0}} - 1 \right)^2} \right) = w^2 R(x). \quad (\text{G.19})$$

- limite $x = 0$.

Nesse limite o termo dominante é $(e^x - 1)^{-2}$, e a equação acima pode ser escrita como

$$-R''(x) - \frac{R(x)}{4r_0^2(e^{x/r_0} - 1)^2} = w^2 R(x). \quad (\text{G.20})$$

A solução para $w = 0$ é

$$R(x) = C_1 P_{-1/2+i/2} \left((e^x - 2) e^{-x} \right) \sqrt{e^x - 1} e^{-x/2} + C_2 Q_{-1/2-i/2} \left((e^x - 2) e^{-x} \right) \sqrt{e^x - 1} e^{-x/2}, \quad (\text{G.21})$$

onde P_l e Q_l são os polinômios de Legendre. Quando $x = 0$, ambas as solução tendem a zero. Portanto, esse limite é *círculo limite*.

- limite $x = \infty$.

Nesse limite a solução irá se comportar como

$$-R''(x) + (C_0^2 - w^2)R(x) = 0, \quad (\text{G.22})$$

onde $C_0 = \frac{\bar{l}^2}{r_0^2} + \frac{1}{4r_0^2}$.

Essa solução é igual ao caso $b > 0$, e como concluído anteriormente será *ponto limite*.

Caso $b = 0$ e $m \neq 0$

A coordenada tartaruga é dada por

$$\frac{d}{dx} = \frac{r}{r_0} \frac{d}{dr} \Rightarrow x = r_0 \log r, \quad (\text{G.23})$$

onde

$$\begin{cases} r \rightarrow 0, & x \rightarrow -\infty \\ r \rightarrow \infty, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{G.24})$$

Com isso a equação torna-se

$$-\frac{d^2}{dx^2}R(x) + \frac{R(x)}{r_0} e^{\frac{x}{r_0}} \left(\frac{\bar{l}^2}{r_0} e^{-\frac{x}{r_0}} + m^2 + e^{-\frac{x}{r_0}} \frac{1}{4r_0} \right) = w^2 R(x). \quad (\text{G.25})$$

- limite $x \rightarrow -\infty$.

Nesse limite a equação pode ser escrita como

$$-\frac{d^2}{dx^2}R + C_0^2 R = w^2 R, \quad (\text{G.26})$$

onde $C_0^2 = \frac{1}{r_0^2} (l + 1/2)^2$.

Essa solução já foi calculada anteriormente e sua solução é dada por

$$R = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad (\text{G.27})$$

onde $k^2 = C_0^2 - w^2$. Essa solução é ponto limite, já que uma das soluções irá a zero em $x \rightarrow -\infty$ e a outra irá divergir.

- limite $x \rightarrow \infty$.

Nesse limite o termo da exponencial irá dominar e a solução será

$$-\frac{d^2}{dx^2}R + \frac{m^2}{r_0}e^{x/r_0}R = w^2R. \quad (\text{G.28})$$

A solução dessa equação também já foi calculada e ele é dada por

$$R(x) \rightarrow c_1 I_0 \left(2\sqrt{e^{\frac{x}{r_0}} m^2} \sqrt{r_0} \right) + 2c_2 K_0 \left(2\sqrt{e^{\frac{x}{r_0}} m^2} \sqrt{r_0} \right). \quad (\text{G.29})$$

Quando $x \rightarrow \infty$ a primeira solução diverge, portanto tem-se um ponto limite.

Caso $b > 0$ e $m \neq 0$

A coordenada tartaruga é dada por

$$\frac{d}{dx} = f \frac{d}{dr} \quad \rightarrow \quad x = r_0 \log \left(\frac{r}{b} - 1 \right), \quad (\text{G.30})$$

onde seu intervalo é $-\infty < x < \infty$.

A equação geral torna-se

$$-\frac{d^2}{dx^2}R(x) + \frac{R(x)}{r_0^2}e^{\frac{x}{r_0}} \left(\frac{\bar{l}^2}{\left(e^{\frac{x}{r_0}} + 1\right)} + m^2 r_0 + \frac{1}{4 \left(e^{\frac{x}{r_0}} + 1\right)} + \frac{1}{4 \left(e^{\frac{x}{r_0}} + 1\right)^2} \right) = w^2 R(x). \quad (\text{G.31})$$

O próximo passo é fazer a análise dos pontos singulares

- limite $x \rightarrow -\infty$.

Nesse limite a equação se assemelha ao caso $b > 0$ e $m = 0$

$$-R''(x) + C_1 e^{x/r_0} R(x) = w^2 R(x), \quad (\text{G.32})$$

onde $C_1 = \frac{1}{r_0^2}(\bar{l}^2 + \frac{1}{2} + \bar{m}^2)$. A conclusão é a mesma que o caso anterior: quando $x = -\infty$ as funções comportam-se como

$$I_0(2r_0\sqrt{C_1}e^{x/r_0}) \sim cte; \quad K_0(2r_0\sqrt{C_1}e^{x/r_0}) \sim x, \quad (\text{G.33})$$

e não são de quadrado integrável, portanto ponto limite.

- limite $x \rightarrow \infty$.

Nesse limite tem-se

$$-R''(x) + \frac{m^2}{r_0} e^{x/r_0} R(x) = w^2 R(x), \quad (\text{G.34})$$

que é a mesma equação quando $x \rightarrow \infty$ para $b = 0$ e $m \neq 0$. Portanto tem-se um ponto limite.

Caso $b = -|\beta| < 0$ e $m \neq 0$

Tem-se

$$f = \frac{(r + |\beta|)}{r_0}, \quad (\text{G.35})$$

e a coordenada tartaruga dada por

$$\frac{d}{dx} = \left(\frac{r + |\beta|}{r_0} \right) \frac{d}{dr} \Rightarrow x = r_0 \log \left(\frac{r}{|\beta|} + 1 \right) \quad (\text{G.36})$$

com

$$\begin{cases} r \rightarrow 0, & x \rightarrow 0 \\ r \rightarrow \infty, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{G.37})$$

Nessa variável tem-se

$$-\frac{d^2}{dx^2} R(x) + \frac{R(x)}{r_0^2} e^{\frac{x}{r_0}} \left(\frac{\bar{l}^2}{\left(e^{\frac{x}{r_0}} - 1 \right)} + m^2 r_0 + \frac{1}{4 \left(e^{\frac{x}{r_0}} - 1 \right)} - \frac{1}{4 \left(e^{\frac{x}{r_0}} - 1 \right)^2} \right) = w^2 R(x). \quad (\text{G.38})$$

Nos limites singulares:

- limite $x \rightarrow 0$

A equação comporta-se como

$$-\frac{d^2}{dx^2} R(x) - \left(\frac{1}{2r_0(e^{x/r_0} - 1)} \right)^2 R(x) = w^2 R(x) \quad (\text{G.39})$$

A solução para $w = 0$ é

$$R(x) = C_1 P_{-1/2+i/2}((e^x - 2)e^{-x}) \sqrt{e^x - 1} e^{-x/2} + \quad (\text{G.40}) \\ + C_2 Q_{-1/2-i/2}((e^x - 2)e^{-x}) \sqrt{e^x - 1} e^{-x/2},$$

onde P_l e Q_l são os polinômios de Legendre. Quando $x = 0$, ambas as soluções tendem a zero. Portanto, esse limite é *círculo limite*.

- limite $x \rightarrow \infty$

Como era de se esperar, quando $x \rightarrow \infty$ a solução é a mesma dos casos anteriores

$$-R''(x) + \frac{m^2}{r_0} e^{x/r_0} R(x) = w^2 R(x), \quad (\text{G.41})$$

que é um ponto limite.

Referências Bibliográficas

- [1] G. W. Gibbons, S. A. Hartnoll, and A. Ishibashi, “On the stability of naked singularities with negative mass,” *Progress of theoretical physics*, vol. 113, no. 5, pp. 963–978, 2005.
- [2] K. Schwarzschild, “On the gravitational field of a mass point according to einstein’s theory,” *arXiv preprint physics/9905030*, 1999.
- [3] J. A. Wheeler, “Mechanism of fission,” *Physics Today*, vol. 20, no. 11, p. 49, 1967.
- [4] R. J. Gleiser and G. Dotti, “Instability of the negative mass schwarzschild naked singularity,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 23, no. 15, p. 5063, 2006.
- [5] G. Clement, D. Gal’tsov, and C. Leygnac, “Linear dilaton black holes,” *Physical Review D*, vol. 67, no. 2, p. 024012, 2003.
- [6] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*. 2004.
- [7] R. M. Wald, *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [8] E. Felinska, “Carter-penrose diagrams and black holes,” 2010.
- [9] H. Bondi, “Negative mass in general relativity,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 29, no. 3, p. 423, 1957.
- [10] G. Dotti and R. J. Gleiser, “Gravitational instability of the inner static region of a reissner–nordström black hole,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 27, no. 18, p. 185007, 2010.
- [11] R. PINTO, “A conjectura de censura cósmica de a a b.”

- [12] R. M. Wald, “Dynamics in nonglobally hyperbolic, static space-times,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 21, no. 12, pp. 2802–2805, 1980.
- [13] R. Penrose, “Naked singularities,” *Annals of the New York Academy of Sciences*, vol. 224, no. 1, pp. 125–134, 1973.
- [14] T. Regge and J. A. Wheeler, “Stability of a schwarzschild singularity,” *Physical Review*, vol. 108, no. 4, p. 1063, 1957.
- [15] F. J. Zerilli, “Effective potential for even-parity regge-wheeler gravitational perturbation equations,” *Physical Review Letters*, vol. 24, no. 13, p. 737, 1970.
- [16] K. H. C. C. Branco, *Sobre o papel de modos quase-normais na descrição de aspectos quânticos da gravitação*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, Instituto de Física, São Paulo, 2005.
- [17] F. J. Zerilli, “Tensor harmonics in canonical form for gravitational radiation and other applications,” *Journal of mathematical Physics*, vol. 11, no. 7, pp. 2203–2208, 1970.
- [18] Charudatt Kadolkar, “Sturm-Liouville Theory.” <http://www.iitg.ac.in/physics/fac/charu/courses/ph402/index.htm>, 2019.
- [19] M. Reed and B. Simon, “Methods of modern mathematical physics ii: Fourier analysis, self-adjointness (academic, new york, 1975),” *Google Scholar*, pp. 144–145, 1980.
- [20] J. Von Neumann and A. W. Burks, *Theory of self-reproducing automata*. University of Illinois Press Urbana, 1996.
- [21] A. Ishibashi and A. Hosoya, “Who’s afraid of naked singularities,” *Phys. Rev. D*, vol. 60, p. 104028, 1999.
- [22] A. Sadhu and V. Suneeta, “A naked singularity stable under scalar field perturbations,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 22, no. 04, p. 1350015, 2013.
- [23] C. Chirenti, J. Skákala, and A. Saa, “Quasinormal modes from a naked singularity,” in *Relativity and Gravitation*, pp. 339–346, Springer, 2014.
- [24] S. Chandrasekhar and K. S. Thorne, “The mathematical theory of black holes,” 1985.

- [25] A. Ishibashi and R. M. Wald, “Dynamics in non-globally-hyperbolic static spacetimes: Iii. anti-de sitter spacetime,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 21, no. 12, p. 2981, 2004.
- [26] A. Ishibashi and R. M. Wald, “Dynamics in non-globally-hyperbolic static spacetimes: Ii. general analysis of prescriptions for dynamics,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 20, no. 16, p. 3815, 2003.
- [27] A. M. Essin and D. J. Griffiths, “Quantum mechanics of the $1/x^2$ potential,” *American journal of physics*, vol. 74, no. 2, pp. 109–117, 2006.
- [28] D. Bouaziz and M. Bawin, “Singular inverse-square potential: renormalization and self-adjoint extensions for medium to weak coupling,” *Physical Review A*, vol. 89, no. 2, p. 022113, 2014.
- [29] T. Fülöp, “Singular potentials in quantum mechanics and ambiguity in the self-adjoint hamiltonian,” *arXiv preprint arXiv:0708.0866*, 2007.
- [30] V. Ferrari, M. Pauri, and F. Piazza, “Quasinormal modes of charged, dilaton black holes,” *Physical Review D*, vol. 63, no. 6, p. 064009, 2001.
- [31] G. T. Marques, *Termodinâmica de Buracos Negros Dilatônicos*. PhD thesis, Tese de Doutorado em Física, Universidade Federal do Espírito Santo, Brasil, 2008.
- [32] G. W. Gibbons and K.-i. Maeda, “Black holes and membranes in higher-dimensional theories with dilaton fields,” *Nuclear Physics B*, vol. 298, no. 4, pp. 741–775, 1988.
- [33] A. Bohm, M. Gadella, and J. Dollard, *Dirac Kets, Gamow Vectors, and Gel’fand Triplets: The Rigged Hilbert Space Formulation of Quantum Mechanics: Lectures in Mathematical Physics at the University of Texas at Austin*. Springer, 1989.
- [34] O. V. Motygin, “On evaluation of the confluent heun functions,” *arXiv preprint arXiv:1804.01007*, 2018.
- [35] A. Ronveaux, *Heun’s Differential Equations*. Oxford, England: Oxford University Press, 1995.

- [36] S. Y. Slavyanov and W. Lay, *The Heun Class of Equations*. Special Functions: A Unified Theory Based on Singularities. Oxford, England: Oxford University Press, 2000.
- [37] G. M. S. e U. Camara da Silva, “Notas de funções especiais,” UFES, 2017.