Universidade Federal Espírito Santo - UFES

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

Médias, Desigualdade das Médias e a Resolução de Problemas

Mariana Freitas Tacanho da Silva

Vitória - Espírito Santo

Abril de 2019

Médias, Desigualdade das Médias e a Resolução de Problemas

Mariana Freitas Tacanho da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFES como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho.

Vitória - Espírito Santo
Abril de 2019

Médias, Desigualdade das Médias e a Resolução de Problemas

Mariana Freitas Tacanho da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFES como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 26 de abril de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho (Orientador)
UFES

Prof. Dr. Moacir Rosado Filho
UFES

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes
UFCG

Dedico este trabalho, ao meu esposo Arthur e aos meus pais Rita de Cássia e José Manuel pelo amor incondicional que me dedicam e por serem exemplos que me impulsionam para a realização de meus sonhos.

Agradecimentos

A Deus por guiar meus passos até aqui, permitindo a realização de um sonho e por ter me dado força e disposição para a realização do curso e deste trabalho.

Ao meu esposo Arthur por estar sempre ao meu lado, apoiando, batalhando, compreendendo minha ausência e comemorando comigo todas as vitórias. Esta realização é nossa.

Aos meus pais que são meu exemplo de força e dedicação, que me incentivaram na realização do curso e deram força nos momentos difíceis.

A minha família querida, meus avós Manuel e Maria José, tios Maria de São José e João, meus cunhados Anderson, André e Juliana e a minha sogra Conceição pelo carinho e incentivo constante.

Ao meu professor orientador Florêncio Guimarães que tanto me ensinou e foi um grande exemplo de mestre e matemático.

Ao meu querido amigo de curso Felipe Caliari que tanto me auxiliou, tirando dúvidas, estudando e me ajudando a construir meu conhecimento.

A SBM, ao Profmat e a Universidade Federal do Espírito Santo pela realização do curso.

Aos professores que tanto se dedicaram para nos ensinar e contribuiram para a conquista do conhecimento que hoje tenho.

Aos meus colegas de turma, pois somente com o trabalho em equipe e os incentivos mútuos, conseguimos conquistar as aprovações e conclusão deste curso.

"Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas graças a Deus, não sou o que era antes". (Marthin Luther King)

Resumo

Um dos grandes desafios para o ensino da matemática atualmente é como torná-la mais acessível aos alunos de forma que consigam perceber sua presença em situações cotidianas. Neste âmbito, o importante conceito de média não é bem explorado nas escolas e as relações com situações práticas ficam restritas à média aritmética. Este trabalho explora as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática através de um estudo aprofundado de suas propriedades e por meio da resolução de problemas contextualizados. Procura-se também interpretar geometricamente as médias de segmentos. Interessantes problemas do dia a dia, mas pouco explorados na escola básica, são os que envolvem otimização. Geralmente, estas questões ficam restritas ao uso de derivadas do cálculo diferencial, permitindo suas discussões apenas em nível superior. Este trabalho propõe o uso da desigualdade entre as médias para a resolução de diversos problemas de otimização, separados segundo suas características, tornando-os acessíveis aos alunos de nível médio.

Palavras-chave: Médias, Desigualdade das Médias, Otimização.

Abstract

One of the significant challenges for teaching mathematics today is how to make it more accessible to students so that they can perceive their presence in everyday situations. In this context, the critical concept of mean is not well explored in schools, and the relations with practical situations are restricted to the arithmetic mean. This work examines the arithmetic, geometric, harmonic and quadratic means through an in-depth study of its properties and the resolution of contextualized problems. It is also sought to interpret geometrically the segments means. Interesting day-to-day problems, but little explored in elementary and secondary school, are those involving optimization. Generally, these questions are restricted to the use of differential calculus derivatives, allowing their discussions only at the higher level. This work proposes the use of the means inequalities for the resolution of several optimization problems, separated according to their characteristics, making them accessible to secondary school students.

Keywords: Means, , means inequalities, optimization.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio

LDB - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

MEC - Ministério da Educação

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PNLD - Programa Nacional do Livro e do Material Didático

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Justificativa

A matemática foi construída historicamente para atender necessidades das civilizações. É fruto da experiência humana e por isso está ligada aos valores da humanidade. Segundo os PCN - Ensino Médio (2000), provavelmente, não existe situação na vida moderna em que a matemática não esteja presente para interpretar, ordenar e quantificar. A matemática é usada como instrumento para resolver situações cotidianas, para dar suporte a outras áreas de conhecimento ou desenvolver habilidades cognitivas de raciocínio (BRASIL, 2002).

Por sua universalidade e precisão, a matemática ocupa posição de destaque enquanto ciência. Mas apesar de todo o prestígio e utilidade, a matemática é avaliada por muitos alunos como complicada, difícil e fria. Thomaz (1999, p. 194), em sua pesquisa, ressalta que "a matemática é uma disciplina que se destaca em relação às outras, muito mais pela dificuldade que representa para muitos alunos do que pela sua importância enquanto área de conhecimento". Isso se dá, ainda segundo a autora, pois os alunos trazem de sua vivência aprendizagens muitas vezes avançadas em termos de raciocínio matemático, mas os conceitos, da forma como são abordados na escola, não os permite criar ligações com as necessidades da vida (THOMAZ, 1999). É lamentável que as escolas não consigam passar aos alunos o significado da matemática para despertar seus interesses para o estudo desta área de conhecimento. Torna-se, então, urgente a mudança nas práticas docentes. Estas devem estar de acordo com as orientações dos documentos oficiais que regulam a educação brasileira e que, por sua vez, sugerem práticas diferenciadas e inteiradas com a realidade do aluno.

A BNCC – Ensino Médio (2018, p. 465) diz que a escola que acolhe as juventudes deve "favorecer a atribuição de sentido às aprendizagens, por sua vinculação aos desafios da realidade e pela explicitação dos contextos de produção e circulação dos conhecimentos". Já os PCN – Ensino Médio (2000, p. 6) sinalizam que "os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea". Ambos os documentos oficiais reforçam a importância de dar sentido ao conhecimento do aluno mediante a associação dos conceitos formais estudados em sala de aula com sua vivência fora da escola. A educação escolar deve preparar acima de tudo o aluno para a vida.

Garcia (2009) revela como objetivo principal do ensino da matemática a construção de conceitos, instrumentos, linguagem e do pensamento matemático, mas antes de tudo, deve-se buscar colaborar com o êxito do aluno no contexto social. Para Thomaz (1999, p. 195) "um professor que acredita nas potencialidades do aluno, que está preocupado com sua aprendizagem e com seu nível de satisfação, exerce práticas de sala de aula de acordo com esta posição". Uma destas práticas deve levar em conta a necessidade de o aluno perceber que a matemática reflete situações de seu cotidiano. Ele precisa sentir que a matemática vai além de exercícios repetitivos e descontextualizados, mas que é sim uma ferramenta importante para solucionar problemas concretos de sua vida. Thomaz (1999) ainda reforça que se desejarmos que a matemática seja um utensílio para auxiliar o aluno na compreensão do mundo ao seu redor, é necessário transformar a matemática escolar em conhecimento vivo.

Além da percepção de situações reais dentro da matemática, a BNCC – Ensino Médio (2018) ressalta a importância de formarmos na escola sujeitos críticos, responsáveis e conscientes. Para isso, cabe às escolas proporcionarem experiências a fim de assegurar o protagonismo do aluno frente a situações diversas. O aluno deve ser estimulado com desafios contemporâneos de cunho sociais, políticos, ambientais, econômicos e éticos e para isso, a alfabetização matemática crítica se faz necessária.

Pensando na formação do aluno como um cidadão consciente e em como a matemática pode contribuir nessa formação, um ramo da matemática ganha destaque, é a Estatística. Cazorla (2002) enfatiza a relevância da estatística na formação de um cidadão consciente, pois com o avanço tecnológico os meios de comunicação passaram a veicular diversas informações estatísticas que podem influenciar decisões importantes e que, por falta de conhecimento específico, são absorvidas facilmente, sem contestação, tornando o indivíduo vulnerável a propagandas tendenciosas e enganosas. Para Cazorla (2008, p. 46) quando "notícias veiculadas pela mídia, utilizam informações estatísticas (...), essas ganham credibilidade e são difíceis de serem contestadas pelo cidadão comum, que chega até a questionar a veracidade dessas informações, mas ele não está instrumentalizado para arguir e contra argumentar".

Ciente da importância de conhecimentos estatísticos e sua clara relação com a vida em sociedade, a BNCC – Ensino Médio (2018) e os PCN – Ensino Médio (2000) recomendam que desde o ensino fundamental sejam desenvolvidas nos alunos habilidades relativas à estatística para interpretar informações divulgadas pela mídia, elaborar relatórios e representações gráficas, compreender e obter medidas de tendência central como o importante conceito de média. Já no ensino médio, o trabalho deve buscar uma visão integral da matemática adaptada à realidade e diferentes contextos.

Dentro do ramo de estatística, um importante conceito ganha destaque: o conceito de média. Analisando as últimas avaliações do ENEM, percebe-se uma ênfase em problemas estatísticos, em especial, relacionados a média e seus desdobramentos. Os PCN – Ensino Médio incluem média na unidade temática de estatística, porém é um conceito que ultrapassa esse campo e pode ser aplicado em diferentes áreas da matemática. Média pode ser encontrada em diversas situações cotidianas, mas muitas vezes passam despercebidas. Reconhecer não só o procedimento para encontrar a média, mas entender o conceito e sua representatividade é muito importante (RUSSEL, MOKROS, 1992). Esta pesquisa pretende destacar a importância das médias e apresentar inúmeras situações onde elas podem ser aplicadas, seja diretamente ou através da desigualdade entre as médias.

Ainda que seja de extrema relevância entender a média, é necessário que ela faça sentido para o aluno e que este possa percebê-la em situações que vivencia em seu cotidiano. É necessário reforçar novamente a importância das práticas em sala de aula e das abordagens que são feitas no estudo deste conceito. Pesquisadores de educação matemática, têm discutido muito a respeito da contextualização da matemática como ferramenta para tornar os conceitos mais vivos para o aluno. "Contextualizar a Matemática é essencial para todos. Afinal, como deixar de relacionar os Elementos de Euclides com o panorama cultural da Grécia Antiga? Ou a adoção da numeração indo-arábica na Europa como florescimento do mercantilismo nos séculos XIV e XV? E não se pode entender Newton descontextualizado" (D'AMBROSIO, 2001). Os PCN+ Ensino Médio (2002) sinalizam quanto à importância de aprender a matemática de forma contextualizada, pois esse processo propicia ao aluno a compreensão e interpretação de situações, estimula a tomada de decisões, a argumentação e até a generalização.

Ao falar sobre ensino contextualizado é preciso ter atenção quanto ao seu significado. Segundo Fernandes (2011), boa parte dos professores entende que "o ensino contextualizado é aquele em que o professor deve relacionar o conteúdo a ser trabalhado com algo da realidade cotidiana do aluno. Esta realidade cotidiana é quase sempre interpretada como sendo a vida extraescolar dos educandos". Este pensamento está correto, porém não se pode pensar que os conteúdos mais difíceis de contextualizar não devem ser trabalhados. Ainda segundo o autor, devemos entender a contextualização como "recurso pedagógico para tornar a constituição de conhecimentos um processo permanente de formação de capacidades intelectuais superiores. Capacidades que permitem transitar inteligentemente do mundo da experiência imediata e espontânea para o plano das abstrações" (FERNANDES, 2011, p.7). Nessa pesquisa, pretende-se investigar o conceito de médias através de uma abordagem matemática contextualizada por meio da resolução de problemas diversos.

A resolução de problemas é fundamental para o ensino-aprendizagem da matemática. Segundo os PCN+ Ensino Médio (2002, p. 113) "na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução". Porém, para que isso aconteça, devem ser propostos problemas desafiadores e contextualizados. Ainda segundo os PCN+ Ensino Médio (2002), os problemas propostos não podem ser de apenas mera aplicação dos conceitos e técnicas, pois neste caso, o aluno utilizará estratégias de resolução semelhantes as já resolvidas, mas isso não garante uma aprendizagem significativa e nem que o aluno seja capaz de resolver outros problemas mais desafiadores.

Analisando as pesquisas de Onuchic (2012, 2015) percebe-se que até bem pouco tempo, ensinar resolução de problemas baseava-se no processo de repetição. O professor apresentava uma solução, passava uma lista enorme de exercícios semelhantes e o aluno os resolvia repetindo o método decorado. Mesmo com diversas pesquisas na área, o incentivo da BNCC e dos PCN para uma prática diferenciada nesta área, ainda hoje as habilidades de resolução de problemas dos estudantes precisam melhorar substancialmente. Os PCN sugerem a resolução de problemas como primeira etapa na construção de conceitos matemáticos em sala de aula. Ao utilizar o problema como objeto que inicia a construção do conhecimento matemático, "os estudantes passam a ter participação efetiva na constituição de sua aprendizagem, ou seja, são coautores da mesma e os professores são os incentivadores e mediadores desse processo através das atividades de ensino" (ONUNCHIC, 2015, p. 959). Segundo a autora, cabe ainda ao professor motivar os alunos a participarem na resolução dos problemas, pois somente assim será possível a aprendizagem.

Pensando na resolução de problemas matemáticos é impossível não destacar a bela obra de George Polya chamada "A arte de resolver problemas". Para Polya (1995) o dever mais importante do professor é auxiliar os alunos. "O professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que poderia ter ocorrido ao próprio estudante" (POLYA, 1995). O autor dividiu o processo de resolução de problemas em quatro etapas que são as seguintes: Compreender o problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. O autor sinaliza que não se deve eliminar etapas, pois cada fase tem sua importância e contribuirá para que o aluno se torne um bom solucionador de problemas. Quanto ao professor, Polya diz que este deve manter postura interativa em sala de aula, auxiliando os alunos, respondendo suas indagações, elaborando perguntas para auxiliar o seu raciocínio, mas deixando boa parte do trabalho ao estudante (POLYA, 1995). Nesta pesquisa, o processo de resolução de problemas está amparado na metodologia apresentada por George Polya.

Alguns problemas interessantes de matemática tratam de otimização de grandezas e muitos deles foram base para construção de teorias ao longo da história. Estes problemas, costumam ficar restritos aos estudos em nível superior e, nos livros didáticos, encontramos problemas desta natureza apenas relacionados a funções quadráticas. Porém, as questões cotidianas vão além destas funções e a proposta da presente pesquisa é tornar esses tipos de problemas acessíveis aos alunos de nível médio. Segundo Rech (2014) "problemas de otimização despertam a curiosidade e desafiam os jovens a buscar soluções para situações de relevante importância para a sociedade moderna. Estimula-se assim o gosto pelo estudo e pela compreensão da matemática".

Temos então, nessa pesquisa, uma associação dos conceitos e bases teóricas, apresentados com todo seu rigor, com situações práticas, procurando aproximar a teoria formal de médias e desigualdade das médias a situações cotidianas. Para isso, será utilizado o método de resolução de problemas orientando todo o estudo. Restringiremos os estudos aos alunos de nível médio, pois juntamente com o conceito de média, são necessários conhecimentos de outros campos da matemática que, somente nestas séries o aluno compreende.

1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é o estudo aprofundado das médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática e a resolução de problemas diversos, acessíveis a alunos de ensino médio, através da desigualdade das médias.

Os objetivos específicos do trabalho são:

- Apresentar definições de médias e propriedades;
- Aplicar as médias na resolução de problemas contextualizados;
- Analisar geometricamente as médias e desigualdades das médias de segmentos;
- Apresentar as desigualdades entre as médias;
- Resolver problemas diversos com a desigualdade das médias.

1.3 Organização da pesquisa

A presente pesquisa está dividida em seis capítulos. No Capítulo 1, apresentamos uma introdução, com as justificativas teóricas, motivação para o tema escolhido, objetivos gerais e específicos.

No Capítulo 2, definimos as médias mais conhecidas e aplicamos estas médias em problemas contextualizados. Realizamos comparação entre as médias aritmética e harmônica e suas relações com grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Apresentamos um método prático para o cálculo da média aritmética sem o uso de calculadora. Analisamos uma importante propriedade da média aritmética e seu desdobramento no princípio da casa dos pombos. Finalizamos com uma construção geométrica das médias de dois segmentos proposta por *Pappus de Alexandria*.

No Capítulo 3, apresentamos a desigualdade das médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática. Fornecemos demonstrações para as desigualdades e, especialmente para as médias aritmética e geométrica, realizamos duas provas distintas.

No Capítulo 4, trabalhamos com diversos problemas, resolvidos com o uso da desigualdade das médias divididos nos campos: algébrico, geométrico (plano, espacial e analítico), máximos e mínimos de funções, otimização, olímpicos e isoperimétrico. Muitos destes problemas foram resolvidos além da desigualdade, com cálculo diferencial para evidenciar a praticidade que a desigualdade promove na resolução do problema.

No Capítulo 5, apresentamos uma proposta para obter aproximações de raiz quadrada pelo uso das desigualdades das médias.

No Capítulo 6, apresentamos uma conclusão com as considerações sobre a pesquisa e proposta para continuação de estudos na área.

Capítulo 2

Médias

O conceito de média não se restringe apenas aos estudos matemáticos ou estatísticos, mas está cada dia mais presente na vida do ser humano. Em situações cotidianas, ao analisar seu desempenho em uma disciplina, o aluno calcula a média das notas obtidas nas avaliações e quando um grupo de amigos divide o valor da conta em um estabelecimento, cada um paga a média dos gastos. A média de pontos obtidos por uma determinada instituição em uma avaliação externa, o cálculo do preço médio de um produto, o cálculo do valor da cesta básica, entre outros, são aplicações de média. Muitas vezes, em situações cotidianas, usamos o conceito de média sem notar. Segundo Cazorla (2002, p. 2) "esse processo está tão arraigado que, às vezes, as pessoas não percebem o grau apurado de suas estimativas ...; aliás, muitas dessas pessoas nem conhecem o algoritmo da média, mas continuam a utilizar seu conhecimento intuitivo no planejamento de suas atividades rotineiras". Média faz parte de nossa vida e é de extrema importância e utilidade. Considerando sua relevância, os PCN+ Ensino Médio (2002), inserem o conceito de média como conteúdo proposto para trabalho no Ensino Médio. Este conceito deve ser ministrado nas aulas de matemática e é integrante da unidade temática estatística, como componente das medidas de tendência central.

Segundo Lima et. al (2009) uma média de uma sequência de números é o valor que substitui todos os elementos da sequência sem alterar uma certa característica. Esta caracterização da média é recente, porém o seu significado nem sempre foi o mesmo e sofreu alterações ao longo do tempo. Uma análise histórica do conceito de média é importante, pois trata-se de um meio de contextualizar a matemática, situando o aluno no espaço e tempo em que as mudanças do conceito ocorreram. Isso é um meio de despertar no aluno o interesse pela aprendizagem da matemática (FERNANDES, 2011). Ainda segundo a autora, a matemática utilizada hoje em dia é trabalhada por muitos professores como um produto pronto e desvinculado da realidade, mas ela é fruto de uma construção histórica que levou séculos para ser sistematizada e sempre buscando suprir as necessidades da sociedade (FERNANDES, 2011). Para os PCN+ Ensino Médio (2002) a dimensão histórica e a relação com a sociedade e cultura de diferentes épocas favorecem o conhecimento não só da matemática, mas de suas relações com outras áreas de conhecimento.

Para apresentar um pouco sobre a histórica da construção do conceito de média, utilizamos como principal fonte o artigo de Lavoie e Gattuso (1998). Segundo os autores, a média não foi amplamente utilizada até o século XIX. Porém, o conceito é muito mais antigo e sofreu mudanças em seu sentido ao longo dos tempos e em diferentes civilizações, de acordo com as necessidades de cada época. Um primeiro significado de média, relacionava o termo a algo central, que estava igualmente distante de dois extremos. Já no século XVII a média era usada para o cálculo da metade da soma de dois números e no século XVIII foi muito utilizada pelos eruditos em seus estudos de astronomia (LAVOIE, GATTUSO, 1998).

No século XIX, a média passou a ser usada nas ciências sociais e sua primeira aparição em livros foi em uma obra destinada a escolas de formação comerciais e homens de negócio chamada “Quick at Figures”. No século XX, o conceito de média foi introduzido na escola básica em um livro texto na França, onde os processos de adição e divisão eram explicados para então caracterizar a média (LAVOIE, GATTUSO, 1998).

Em 1969, a média foi introduzida em estatística juntamente com outras medidas de tendências centrais, apresentando uma comparação entre moda, média e mediana. E foi apenas nos anos 70 que a estatística, incluindo média, tornou-se parte do currículo de matemática no ensino escolar. Média passou a ser trabalhada em diferentes contextos, porém sem muito interesse em seu significado, mas com uma abordagem algorítmica com apenas problemas do tipo “Ache a média” (LAVOIE, GATTUSO, 1998). No Brasil, com a implementação da BNCC e dos PCN de ensinos médio e fundamental, buscou-se um olhar mais crítico para a formação do aluno e as médias são trabalhadas de forma contextualizada e com intuito de formar criticamente o aluno. Mesmo com esse olhar mais moderno para o ensino das médias, ainda verificamos muitas dificuldades na aprendizagem do conceito.

Segundo Mokros e Russell (1995, p. 37), a média “’é um objeto matemático de complexidade não reconhecida, que engana pela simplicidade do algoritmo de solução”. Alguns estudos (MOKROS e RUSSELL, 1995; CARVALHO, 2011; CAZORLA, 2012; STELLA, 2003) destacam que apesar de seu uso constante, o conhecimento de média e mais especificamente de média aritmética, se restringe ao domínio do seu algoritmo de cálculo. A maior parte dos alunos conhece o algoritmo, realiza o cálculo da média, mas possui dificuldade na interpretação dos resultados e do próprio conceito de média.

Em suas pesquisas, Mokros e Russell (1995) verificaram que a grande dificuldade dos alunos que participaram do estudo foi em relação ao desconhecimento da representatividade da média. Eles mostraram que, em um contexto que exige mais do que uma aplicação direta do algoritmo, adultos e crianças não têm conhecimento de como a média pode representar os dados. Citaram, no estudo, um exemplo onde o número médio de pessoas em uma casa é de 3,2 pessoas. De fato, é difícil imaginar que a média possa ser representada por um número que não esteja presente no conjunto de dados analisados. Para Mokros e Russell (1995) "Compreender o valor e o poder dessa estranha abstração requer um movimento em direção a uma matemática mais abstrata".

Já os estudos de Stella (2003), Carzola (2002) e Carvalho (2011), revelam deficiências na construção do conhecimento dos alunos quanto ao conceito de média e que têm origem no Ensino Fundamental e perduram até os cursos de graduação. Das dificuldades apresentadas, destacam-se problemas para calcular a média quando os valores não estão explícitos, uma vez que os alunos se limitam a memorizar o algoritmo, e dificuldades na leitura e interpretação dos enunciados e gráficos, fazendo com que os estudantes não consigam diferenciar quando usar média, moda e mediana e distinguir quando é melhor usar cada uma. Para Mokros e Russell (1995) "a introdução prematura do algoritmo para encontrar a média pode causar um curto-circuito no raciocínio de algumas crianças e que, para muitos, não está totalmente conectada ao desenvolvimento de ideias fundamentais sobre representatividade e equilíbrio". De fato, precisa-se construir muito bem nos alunos a ideia de média para só então apresentar os algoritmos.

Alguns estudos analisaram a presença das médias e formas de abordagem nos livros didáticos usados em escolas brasileiras (CARVALHO, 2011; STELLA, 2003). Por ser uma ferramenta muito importante e utilizada como apoio ao professor e alunos nas aulas de matemática, é necessário verificar como os livros didáticos apresentam as médias e como, de uma certa forma, influenciam o processo de ensino das médias nas escolas. Deve-se analisar se as dificuldades identificadas nas pesquisas quanto à compreensão do conceito sofre influência do tratamento dado pelos livros didáticos.

Em sua pesquisa, que pretendia analisar como a média era apresentada nos livros didáticos aprovados pelo PNLD 2011 dos anos finais de Ensino Fundamental, Carvalho (2011) destacou que todos os livros pesquisados já abordavam média aritmética simples e ponderada, mas, apesar disso, não propiciavam a compreensão do conceito de média e sua função estatística. Já, Stella (2013), que pesquisou a presença e abordagem das médias nos livros didáticos de ensino médio, entre outros estudos, destaca que os livros didáticos de ensino médio apresentam a média de forma algorítmica e, em sua maioria, no volume destinado apenas a terceira série do ensino médio. Os livros não citam o conceito de média e suas aplicações são simples, apenas como aplicação direta do algoritmo. É possível ver que as dificuldades presentes em todas as pesquisas quanto à aprendizagem de médias também são reflexo da forma de abordagem deste conceito nos materiais didáticos que apoiam os professores em suas aulas. O ideal seria uma reformulação dos livros com uma visão mais significativa das médias, mas ainda que isso não ocorra, o professor de matemática deve se manter atento e direcionar a construção do conceito de média destacando mais o seu significado do que apenas sua forma algorítmica.

Nas pesquisas citadas acima, é possível perceber ainda que os livros didáticos dão pouco destaque as médias e apresentam apenas os conceitos de média aritmética simples e ponderada. As médias geométrica, harmônica e quadrática, não ganham a devida atenção e passam despercebidas em situações que requerem sua aplicação. Como é possível, por exemplo, no contexto de juros compostos, falar de taxa média de juros sem conhecer a definição e o conceito de média geométrica? Por isso, torna-se indispensável um estudo sobre as médias aritmética simples e ponderada, geométrica, harmônica e quadrática.

Nesta pesquisa, pretende-se fazer uma análise de problemas contextualizados que envolvam médias, mas buscando combater o uso inconsciente dos algoritmos. Pretende-se, seguindo as orientações de Lima, et al (2009) e mostrar que a escolha da média adequada a cada situação depende do contexto e da composição do problema e que não há necessidade de decorar métodos, enunciados ou tipos de questões, pois os problemas orientam a construção de situações onde as médias aparecem naturalmente na resolução. Deseja-se também, modificar a ideia de que se um problema solicita o cálculo de uma média, essa média é necessariamente a aritmética, já que a formação do aluno é apenas dessa média. O objetivo é auxiliar alunos e professores na percepção das principais características dos problemas de cada tipo de média e dar liberdade para a construção de um raciocínio que não esteja preso a uma única fórmula. Também pretende-se fazer uma análise especial das médias aritmética e harmônica e suas relações com grandezas proporcionais. Além disso, será feito um estudo sobre uma propriedade da média aritmética que resulta no princípio das gavetas de Dirichlet e ainda será apresentada uma construção geométrica das médias que culmina na desigualdade das médias.

2.1 Média Aritmética

Dada uma lista de n números reais $x_1, x_2, x_3, ..., x_{\mathrm{n}}$, a média aritmética $\overline{x}$ é definida por:

$$\overline{x} = \tfrac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Segue-se que $\overline{x} + \overline{x} + ... + \overline{x} = n.\overline{x} = x_1 + x_2 + ... + x_n$, logo a soma de n termos iguais à média aritmética $\overline{x}$ gera como resultado a soma dos n números $x_1, x_2, x_3, ..., x_{\mathrm{n}}$.

2.1.1 Aplicações de Média Aritmética

Abaixo, analisaremos alguns exemplos de aplicação de média aritmética.

Exemplo 1: Determinar a média aritmética dos números 10, 14 e 18.

Solução:

$$\overline{x} = \frac{10+14+18}{3} = \frac{42}{3} = 14.$$

Exemplo 2: (ENEM 2013)

Cinco empresas de gêneros alimentícios encontram-se à venda. Um empresário, almejando ampliar os seus investimentos, deseja comprar uma dessas empresas. Para escolher qual delas irá comprar, analisa o lucro (em milhões de reais) de cada uma delas, em função de seus tempos (em anos) de existência, decidindo comprar a empresa que apresente o maior lucro médio anual. A Tabela 2.1 apresenta o lucro (em milhões de reais) acumulado ao longo do tempo (em anos) de existência de cada empresa.

Tabela 2.1: Lucro de empresas – questão ENEM

Empresa	Lucro	Tempo
F	R$ 24.000.000,00	3 anos
G	R$ 24.000.000,00	2 anos
H	R$ 25.000.000,00	2,5 anos
M	R$ 15.000.000,00	1,5 anos
P	R$ 9.000.000,00	1,5 anos

Fonte: O próprio autor

O empresário decidiu comprar a empresa:
a) F
b) G
c) H
d) M
e) P

Solução: É preciso resistir à tentação de calcular diretamente a média aritmética e entender, primeiro, o que o problema deseja.

Neste problema, o empresário irá comprar a empresa que apresentar o maior lucro médio anual. Logo queremos um lucro L tal que se o lucro anual fosse sempre L, iria gerar um lucro final igual ao da tabela, no período total apurado.

Para a empresa F: Se L é o lucro de cada ano, $3L = 24.000.000$, logo:

$$L = \frac{24000000}{3} = 8.000.000.$$

Para a empresa G: Se L é o lucro de cada ano, $2L = 24.000.000$, logo:

$$L = \frac{24000000}{2} = 12.000.000.$$

Para a empresa H: Se L é o lucro de cada ano, $2,5L = 25.000.000$, logo:

$$L = \frac{25000000}{2,5} = 10.000.000.$$

Para a empresa M: Se L é o lucro de cada ano, $1,5L = 15.000.000$, logo:

$$L = \frac{15000000}{1,5} = 10.000.000.$$

Para a empresa P: Se L é o lucro de cada ano, $1,5L = 9.000.000$, logo:

$$L = \frac{9000000}{1,5} = 6.000.000.$$

Portanto, o empresário irá comprar a empresa G e a resposta correta é o item b).

Repare que na resolução do problema, foram utilizadas informações do enunciado para obter uma expressão que fornecia a média aritmética como a média desejada. Logo, ao resolver cada problema, é possível encontrar a média solicitada interpretando o enunciado, ainda que não se saiba qual é.

Exemplo 3: (ESCOLA NAVAL RJ)

A média aritmética de 50 números é 38. Se dois dos números, 45 e 55, são suprimidos a média aritmética passa a ser:

a) 35,5

b) 37,5

c) 37,2

d) 37,52

Solução: Conhecida a média aritmética dos 50 números, entre eles 45 e 55, temos:

$$\frac{x_1+x_2+...+x_{48}+45+55}{50} = 38$$
$$x_1 + x_2 + ... + x_{48} = 50.38 - 100$$
$$x_1 + x_2 + ... + x_{48} = 1800$$
$$\frac{x_1+x_2+...+x_{48}}{48} = \frac{1800}{48} = 37,5.$$

Resposta correta: Letra b).

Exemplo 4: Um determinado produto alimentício sofreu alteração de preço durante 5 semanas consecutivas. Os preços constam na tabela 2.2 a seguir. Determine o preço médio deste produto durante o período total apurado.

Tabela 2.2: Preços de um Produto

Semana	Preço
1ª semana	R$ 3,55
2ª semana	R$ 2,98
3ª semana	R$ 3,25
4ª semana	R$ 3,47
5ª semana	R$ 3,10

Fonte: O próprio autor

Solução: Desejamos obter um preço P médio tal que, se o preço pago em todas as 5 semanas fosse o mesmo, o preço total pago no período fosse mantido. Sendo assim:

$$5P = 3,55 + 2,98 + 3,25 + 3,47 + 3,10$$
$$5P = 16,35$$
$$P = \frac{16,35}{5} = 3,27.$$

Logo o preço médio do produto foi de R$ 3,27.

Note que o preço médio foi obtido pela média aritmética dos preços semanais.

Exemplo 5: Em uma PA o quarto termo é 50 e o décimo quarto termo é 200. Determine o nono termo.

Solução: Usaremos para resolver o problema uma propriedade da PA apresentada abaixo:

Uma PA de três termos é da forma $(a - r, a, a + r)$. Assim:

$$a = \frac{(a-r)+(a+r)}{2}.$$

Desta forma, um termo qualquer de uma progressão aritmética (PA) pode ser obtido através da média aritmética dos seus dois termos vizinhos ou, ainda, de quaisquer dois termos simétricos em relação a ele.

$$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} = \frac{a_{n-2}+a_{n+2}}{2} = ... = \frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}.$$

Logo, para encontrarmos o nono termo da PA:

$$a_9 = \frac{a_4+a_{14}}{2} = \frac{50+200}{2} = 125.$$

Logo, o nono termo é 125.

Exemplo 6: Um grupo de amigos foi a um restaurante e a despesa ficou em 240 reais. Na hora de dividir a conta, em partes iguais, 2 pessoas disseram que estavam sem dinheiro e as outras pessoas tiveram que pagar 4 reais a mais cada uma. Quantas pessoas ao todo havia no grupo?

Solução: Se no grupo havia n pessoas, aplicando a média aritmética, antes e depois da redistribuição do valor da conta:

$$\frac{240}{n-2} = \frac{240}{n} + 4.$$

Daí,

$$\frac{240}{n-2} - \frac{240}{n} = 4.$$

Logo,

$$60n - 60(n-2) = n(n-2).$$

Assim,

$$n(n-2) = 120.$$

Como n é inteiro e positivo segue que $n = 12$. Portanto, no grupo havia 12 pessoas.

2.2 Média Geométrica

Dada uma lista de n números reais $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, a média geométrica G é definida por:

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Segue-se que $G^n = x_1 x_2 ... x_n$, logo o produto de n termos iguais à média geométrica G gera como resultado o produto dos n números $x_1, x_2, ..., x_n$.

2.2.1 Aplicações de Média Geométrica

Exemplo 1: Determinar a média geométrica dos números 4, 20 e 100.

Solução:

$$G = \sqrt[3]{4.20.100} = \sqrt[3]{8000} = 20$$

Exemplo 2: A população de um país cresceu 40% em uma década e cresceu 20% na década seguinte. Qual é, aproximadamente, a taxa média decenal de crescimento nesses 20 anos?

Solução: Para resolver esse problema, devemos utilizar as definições de aumento e diminuição da matemática financeira (juros compostos).

Um aumento de $i\%$ é representado por $(1 + i\%)$ enquanto uma diminuição de $i\%$ é representado por $(1 - i\%)$.

Portanto, um aumento de 40% será representado por $(1,40)$ e um aumento de 20% será representado por $(1,20)$.

Deve-se pensar que no primeiro decênio, a população, inicialmente de x pessoas, será de $x.(1,40)$. Já no segundo decênio, a população passará a ser de:

$$x.(1,40).(1,20) = x.1,68, \text{ (crescimento de 68\%).}$$

Naturalmente, para obter a taxa média, se calcularia a média aritmética dos crescimentos, mas este cálculo estaria correto?

Queremos um percentual de crescimento i tal que se em cada decênio, o crescimento populacional fosse igual a i, ao final de 20 anos, teríamos um crescimento total de 68%. Logo:

$$\begin{gathered} x.(1+i)(1+i) = x.(1,40)(1,20) \\ (1+i)^2 = (1,40)(1,20) \\ 1+i = \sqrt{(1,40)(1,20)} \cong 1,2961 \\ i = 0,2961 = 29,61\% \text{ a.d.} \end{gathered}$$

Portanto, a taxa média de crescimento é dada pela média geométrica dos aumentos decenais, deduzido de uma unidade.

Exemplo 3: No problema anterior, qual a taxa média anual de crescimento nesses 20 anos?

Solução: Seguindo o mesmo pensamento anterior, a taxa anual i que queremos deverá ser tal que se o crescimento anual fosse sempre igual a i, ao final de 20 anos, o crescimento total seria de 68%. Logo:

$$x.(1+i)^{20} = x.(1,40)(1,20)$$
$$(1+i)^{20} = (1,40)(1,20)$$
$$1+i = \sqrt[20]{(1,40)(1,20)} \cong 1,0263$$
$$i = 0,0263 = 2,63\% \text{ a.a.}$$

Portanto, a taxa média de crescimento anual é dada por $2,63\%$ a.a.

Exemplo 4: Sabe-se que as medidas dos lados de um retângulo são 10cm e 20cm. Determine as medidas dos lados de um quadrado que possua a mesma área do retângulo.

Solução: A área do retângulo é dada por:

$$A = 10.20 = 200cm^2.$$

A área do quadrado é dada por:

$$A = L^2 = 10.20.$$

Logo, o lado do quadrado é:

$$L = \sqrt{10.20} = 10\sqrt{2}cm.$$

Portanto, a medida do lado do quadrado será a média geométrica das medidas dos lados do retângulo de mesma área.

Exemplo 5: O 5° elemento de uma PG é 3402 e o 3° é 378. Determine o 4° termo desta PG.

Solução: Para resolver este problema, usaremos a seguinte propriedade da PG:

Uma PG de três termos é da forma $(\frac{a}{q}, a, aq)$. Assim:

$$a = \sqrt{\frac{a}{q}.aq}.$$

Desta forma, um termo qualquer de uma progressão geométrica (PG) pode ser obtido através da média geométrica dos seus dois termos vizinhos ou, ainda, de quaisquer dois termos simétricos em relação a ele.

$$a_n^2 = a_{n-1}.a_{n+1} = a_{n-2}.a_{n+2} = ... = a_{n-k}.a_{n+k}.$$

Logo, para encontrar o quarto elemento:

$$a_4^2 = a_3.a_5$$
$$a_4^2 = 378.3402$$
$$a_4 = \sqrt{378.3402}$$
$$a_4 = 1134.$$

2.3 Média Harmônica

Dada uma lista de n números reais $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, tem-se que a média harmônica H é o inverso da média aritmética dos inversos dos números:

$$H = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}{n}}$$

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}$$

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}.$$

Segue-se que a média harmônica h é o único número cuja soma de n termos iguais ao seu inverso $\frac{1}{h}$ gera como resultado a soma dos inversos dos n números $x_1, x_2, ..., x_n$. De fato:

$$h = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n} = \frac{n}{h}$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n} = \frac{1}{h}+\frac{1}{h}+...+\frac{1}{h} = \frac{n}{h}.$$

2.3.1 Aplicações de Média Harmônica

Exemplo 1: Determinar a média harmônica dos números 3, 6 e 9.

Solução:

$$H = \frac{3}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}} = \frac{3}{\frac{6+3+2}{18}} = \frac{3.18}{11} = \frac{54}{11}.$$

Exemplo 2: Um caminhão-pipa enche uma piscina em 20min enquanto outro caminhão leva meia hora para fazer o mesmo serviço. Juntos, os caminhões-pipa levarão quanto tempo?

Solução: Neste problema, é possível pensar que o tempo seria a média aritmética dos tempos que os caminhões levam para encher a piscina sozinhos. Logo, seria dado por $\frac{20+30}{2} = 25$ minutos. Mas este cálculo não leva em conta um fator muito importante que é a vazão de cada caminhão-pipa. Já que a quantidade de água que cada caminhão lança na piscina em um determinado período pode não ser o mesmo, o uso da média aritmética está incorreto nesse problema.

Primeiro, devemos lembrar que a vazão Q é dada por:

$$Q = \frac{V}{T}, \text{ onde}$$

Q = vazão, V = volume e T = tempo

As vazões dos caminhões 1 e 2 serão dadas por:

$$Q_1 = \frac{V_1}{T_1} \text{ e } Q_2 = \frac{V_2}{T_2}.$$

Quando os dois caminhões despejam água juntos, considere que levam o tempo T para encher a piscina. Assim, no tempo T, os volumes de água despejados pelos caminhões 1 e 2 são:

$$V_1 = Q_1.T \text{ e } V_2 = Q_2.T.$$

Logo, o total de água despejada no tempo T será:

$$V_1 + V_2 = (Q_1 + Q_2).T.$$

Para encher todo o volume V da piscina o tempo T será dado por:

$$V = (Q_1 + Q_2).T.$$

$$T = \frac{V}{Q_1+Q_2}.$$

Sendo V o volume total da piscina, Q_1 a vazão do primeiro caminhão-pipa e Q_2 a vazão do segundo caminhão-pipa, temos:

$$Q_1 = \frac{V}{20} \text{ e } Q_2 = \frac{V}{30}.$$

Logo:

$$T = \frac{V}{Q_1+Q_2} = \frac{V}{\frac{V}{20}+\frac{V}{30}} = \frac{1}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}} = \frac{1}{\frac{3+2}{60}} = \frac{60}{5} = 12 \text{ minutos}.$$

Repare que o tempo T para os dois caminhões encherem a piscina simultaneamente é dado por:

$$t = \frac{1}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}} = \frac{1}{2}.\frac{2}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}}.$$

Portanto, o tempo para que os dois caminhões encham a piscina juntos é dado pela metade da média harmônica dos tempos em que individualmente os caminhões enchem a piscina. E a média harmônica será o tempo para que os caminhões, trabalhando juntos, encham duas piscinas de mesmo volume. Repare que neste problema, as grandezas que variavam era o tempo e a vazão que são grandezas inversamente proporcionais.

Exemplo 3: Um veículo se desloca de uma cidade A para B com uma velocidade de 60 km/h. Na volta, fazendo o mesmo percurso, ele estava a uma velocidade de 80km/h. Qual é a velocidade média do percurso total?

Solução: A intuição nos conduz ao cálculo da média aritmética das velocidades, o que resultaria em uma velocidade média de 70km/h, mas devemos lembrar que nesse problema, a distância percorrida é fixa e o tempo do percurso varia de acordo com a velocidade. Como velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais, veremos que a média aritmética não é a média velocidade média pedida. Usando a fórmula da velocidade média, temos:

$$60 = \frac{s}{t_1} \text{ e } 80 = \frac{s}{t_2}, \text{ assim:}$$
$$t_1 = \frac{s}{60} \text{ e } t_2 = \frac{s}{80}$$
$$V_m = \frac{2.s}{t} = \frac{2.s}{t_1+t_2} = \frac{2.s}{\frac{s}{60}+\frac{s}{80}} = \frac{2}{\frac{1}{60}+\frac{1}{80}} = \frac{2}{\frac{4+3}{240}} = \frac{480}{7} \cong 68,6km/h.$$

Repare que a velocidade média do percurso total é dada pela média harmônica das velocidades de ida e volta. Neste problema, as grandezas que variavam era o tempo e a velocidade, que são grandezas inversamente proporcionais.

Exemplo 4: Pneus novos duram 40000 km, quando usados nas rodas dianteiras, e duram 60000 km, quando usados nas rodas traseiras. Com 4 pneus novos e fazendo um rodízio adequado entre eles, quantos quilômetros um carro pode rodar?

Solução: Sabe-se que o gasto do pneu é proporcional ao tempo de uso. Seja e a quantidade máxima de borracha que é gasta até o pneu perder sua vida útil. Logo, após percorrer 40000 km na dianteira do carro, o desgaste do pneu é igual a e, bem como após percorrer 60000 km na traseira, o desgaste do pneu também é igual a e.

I) Analisando os dois pneus que começaram na dianteira e, após rodagem de x km, com o rodízio, vão rodar y km na traseira até o desgaste total:

Suponha que os dois pneus percorreram x km na frente e, após o rodízio, percorreram y km na parte de trás.

Temos que se os pneus percorrerem 40000 km na parte dianteira, a quantidade de borracha gasta será e, e os pneus perderão sua vida útil. Logo, se os pneus percorrerem x km na parte dianteira, a quantidade de borracha gasta será de $e.\frac{x}{40000}$.

E se os pneus percorrerem 60000 km na parte traseira, a quantidade de borracha gasta será e, e os pneus perderão sua vida útil. Logo, se os pneus percorrerem y km na parte traseira, a quantidade de borracha gasta será de $e.\frac{y}{60000}$.

Assim, o desgaste total e dos pneus, que iniciaram na frente e, após o rodízio, passaram para trás, será dado pela soma dos desgastes na frente e atrás, logo:

$$\frac{ex}{40000} + \frac{ey}{60000} = e \tag{2.1}$$

II) Analisando os dois pneus que começaram na traseira e, após rodagem de x km, com o rodízio, vão rodar y km na dianteira até o desgaste total:

Suponha que os dois pneus percorreram x km na parte traseira e, após o rodízio, percorreram y km na parte dianteira.

Temos que se os pneus percorrerem 60000 km na parte traseira, a quantidade de borracha gasta será e, e os pneus perderão sua vida útil. Logo, se os pneus percorrerem x km na parte traseira, a quantidade de borracha gasta será de $e.\frac{x}{60000}$.

E se os pneus percorrerem 40000 km na parte dianteira, a quantidade de borracha gasta será e, e os pneus perderão sua vida útil. Logo, se os pneus percorrerem y km na parte dianteira, a quantidade de borracha gasta será de $e.\frac{y}{40000}$.

Assim, o desgaste total e dos pneus, que iniciaram atrás e, após o rodízio, passaram para frente, será dado pela soma dos desgastes na frente e atrás, logo:

$$\frac{ex}{60000} + \frac{ey}{40000} = e \tag{2.2}$$

Juntando as equações (2.1) e (2.2), temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{x}{40000} + \frac{y}{60000} = 1 \\ \frac{x}{60000} + \frac{y}{40000} = 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

Para resolver o sistema acima, vamos analisar um sistema similar:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \end{cases}$$

Somando as equações, temos:

$$x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+y\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2$$

$$(x+y)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2$$

Portanto,

$$x+y=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Concluímos que a soma do total de quilômetros é a média harmônica de a e b. E ainda, resolvendo o sistema (2.3):

$$bx+ay=ax+by=ab.$$

Como $a\neq b$:

$$(b-a)\,x=(b-a)\,y\Rightarrow x=y.$$

No sistema que desejamos resolver, $a=40000$ e $b=60000$, logo:

$$x+y=\frac{2}{\frac{1}{40000}+\frac{1}{60000}}=48000, \text{ então } x=y=24000 \text{ km}.$$

Portanto, um jogo de quatro pneus dura no máximo 48000 km e, para conseguir esta quilometragem, deve-se percorrer no máximo 24000 km na dianteira e 24000 km na traseira, independente da quantidade de rodízios que serão feitos. Destacamos que a quilometragem máxima é a média harmônica das quilometragens máximas percorridas por um pneu estando sempre na frente ou sempre atrás. Repare ainda que neste problema, duas grandezas variavam, o desgaste do pneu por quilômetro e a vida útil do pneu, que são grandezas inversamente proporcionais.

2.4 Média Quadrática

Dada uma lista de $n>1$ números reais $x_1,x_2,x_3,...,x_n$, a média quadrática Q é a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos números $x_1,x_2,x_3,...,x_n$. É portanto definida por:

$$Q=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}}$$

Para resolução dos problemas a seguir, faz-se necessário apresentar a definição de dois importantes conceitos estatísticos: desvio padrão e erro médio quadrático.

I) O *desvio padrão* (DP) de um conjunto de dados é definido, em estatística, por:

$$DP = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}, \text{ onde:}$$

$\overline{x}$ é a média aritmética dos dados;
x_i é o valor na posição i no conjunto de dados
n é a quantidade de dados.

II) O *erro médio quadrático* (EMQ), usado para medir a qualidade de uma lista de aproximações, é definido, em estatística, por:

$$EMQ = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \widehat{x_i})^2}{n}, \text{ onde}$$

x_i é o valor real;
$\widehat{x_i}$ é a aproximação;
n é a quantidade de aproximações

2.4.1 Aplicações de Média Quadrática

Exemplo 1: Determinar a média quadrática dos números 1, 2, 4 e 8.

Solução:

$$Q = \sqrt{\frac{1^2+2^2+4^2+8^2}{4}} = \sqrt{\frac{1+4+16+64}{4}} = \sqrt{21,25} \cong 4,61.$$

Exemplo 2: Em uma equipe de remo os atletas possuem as seguintes alturas: 1,55m, 1,75m e 1,80m. Qual é o valor do desvio padrão da altura desta equipe?

Solução: Calculando a média aritmética das alturas:

$$\overline{x} = \frac{1{,}55+1{,}75+1{,}80}{3} = 1,68.$$

O desvio padrão será:

$$DP = \sqrt{\frac{(1{,}55-1{,}68)^2+(1{,}75-1{,}68)^2+(1{,}80-1{,}68)^2}{3}}$$
$$DP = \sqrt{\frac{(-0{,}13)^2+(0{,}02)^2+(0{,}12)^2}{3}} = \sqrt{\frac{0{,}0317}{3}} \cong 0,1028.$$

Exemplo 3: Dadas duas listas de aproximações do número 4, calcule o erro médio quadrático destas listas e determine qual é a lista que possui menor erro de aproximação.

Lista 1: 3,6 ; 4,1 ; 4,5 ; 3,3

Lista 2: 3,7 ; 4,2 ; 5

Solução: O erro médio quadrático da primeira lista será:

$$EMQ_1 = \frac{(4-3{,}6)^2+(4-4{,}1)^2+(4-4{,}5)^2+(4-3{,}3)^2}{4}$$
$$EMQ_1 = \frac{(0{,}4)^2+(0{,}1)^2+(0{,}5)^2+(0{,}7)^2}{4}$$
$$EMQ_1 = \frac{0{,}16+0{,}01+0{,}25+0{,}49}{4} = \frac{0{,}91}{4} = 0,2275.$$

O erro médio quadrático da segunda lista será:

$$EMQ_2 = \frac{(4-3{,}7)^2+(4-4{,}2)^2+(4-5)^2}{4}$$
$$EMQ_2 = \frac{(0{,}3)^2+(0{,}2)^2+(1)^2}{4}$$
$$EMQ_2 = \frac{0{,}09+0{,}04+1}{4} = \frac{1{,}13}{4} = 0,2825.$$

Logo,

$$EMQ_2 > EMQ_1$$

Assim, a Lista 1 é a que apresenta o menor erro EMQ_1.

2.5 Média Aritmética Ponderada

Dada uma lista de $n > 1$ números reais $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, com pesos respectivamente iguais a $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$, a média aritmética ponderada P é definida por:

$$P = \frac{p_1x_1+p_2x_2+...+p_nx_n}{p_1+p_2+...+p_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

Repare que:

$$p_1x_1 = \underbrace{x_1 + x_1 + ... + x_1}_{p_1 \ vezes} \ ; \ p_2x_2 = \underbrace{x_2 + x_2 + ... + x_2}_{p_2 \ vezes} \ ; \ ... \ ; \ p_nx_n = \underbrace{x_n + x_n + ... + x_n}_{p_n \ vezes}$$

Assim, calcular a média ponderada é o mesmo que tomar a média aritmética dos números:

$$\underbrace{x_1, x_1, ..., x_1}_{p_1 \ vezes}, \ \underbrace{x_2, x_2, ..., x_2}_{p_2 \ vezes}, \ ..., \ \underbrace{x_n, x_n, ..., x_n}_{p_n \ vezes}$$

2.5.1 Aplicações de Média Aritmética Ponderada

Exemplo 1: Calcule a média ponderada dos valores 10, 20 e 30 sabendo que seus pesos são 3, 2 e 1 respectivamente.

Solução:

$$P = \frac{10.3+20.2+30.1}{3+2+1} = \frac{30+40+30}{6} = \frac{100}{6} \cong 16,67.$$

Exemplo 2: ENEM 2017

A avaliação de rendimento de alunos de um curso universitário baseia-se na média ponderada das notas obtidas nas disciplinas pelos respectivos números de créditos, como mostra a tabela 2.3.

Tabela 2.3: Média de Notas – Questão ENEM

Avaliação	Média de notas (M)
Excelente	$9 < M \leq 10$
Bom	$7 \leq M \leq 9$
Regular	$5 \leq M < 7$
Ruim	$3 \leq M < 5$
Péssimo	$M < 3$

Fonte: O próprio autor

Quanto melhor a avaliação de um aluno em determinado período letivo, maior sua prioridade na escolha de disciplinas para o período seguinte. Determinado aluno sabe que se obtiver avaliação "Bom"ou "Excelente"conseguirá matrícula nas disciplinas que deseja. Ele já realizou as provas de 4 das 5 disciplinas em que está matriculado, mas ainda não realizou a prova da disciplina I, conforme a tabela 2.4.

Para que atinja seu objetivo, a nota mínima que ele deve conseguir na disciplina I é:

a) 7,00

b) 7,38

c) 7,50

d) 8,25

e) 9,00

Tabela 2.4: Notas e Créditos – Questão ENEM

Disciplinas	Notas	Número de Créditos
I		12
II	8,00	4
III	6,00	8
IV	5,00	8
V	7,50	10

Fonte: O próprio autor

Solução: Vamos calcular o valor da nota necessária para obter avaliação "Bom". Para isso, a média deverá ser maior do que ou igual a 7.

Como cada disciplina possui uma quantidade de créditos distinta, a média final será dada pela média ponderada das notas do aluno. Logo:

$$M_p = \frac{x.12+8.4+6.8+5.8+7{,}5.10}{12+4+8+8+10} = \frac{12x+32+48+40+75}{42} = \frac{12x+195}{42}.$$

Devemos ter:

$$\begin{gathered} M_p = \frac{12x+195}{42} \geq 7 \\ 12x + 195 \geq 294 \\ 12x \geq 99 \\ x \geq \frac{99}{12} \\ x \geq 8,25. \end{gathered}$$

Portanto, a nota mínima que ele deve conseguir na disciplina I é 8,25. Resposta correta, letra d).

Exemplo 3: Uma empresa de comunicação conta com duas categorias de funcionários: Telemarketing e diretoria. Os funcionários da primeira categoria recebem R$1.050,00 mensalmente, enquanto os da segunda recebem R$ 10.000,00. Sabendo que essa empresa possui 50 funcionários no setor de telemarketing e 5 diretores, qual é o salário médio pago a eles?

Solução: Nesta questão, a quantidade de diretores e funcionários de telemarketing é diferente, logo a média aritmética simples não poderá ser aplicada. Desejamos obter um valor S de salário que, se pago a todos os funcionários, o somatório final dos pagamentos seja mantido. Assim, temos:

$$50S + 5S = 1050.(50) + 10000.(5)$$

$$S(50+5) = 1050.(50) + 10000.(5)$$
$$S = \frac{1050.(50)+10000.(5)}{(50+5)}$$
$$S = \frac{52500+50000}{55} = \frac{102500}{55} \cong 1863,64.$$

Portanto, o salário médio final é dado pela média ponderada dos salários dos funcionários de telemarketing e diretores.

2.6 Uma Análise sobre a Média Aritmética e a Média Harmônica

Os problemas que envolvem média aritmética e média harmônica possuem características especiais e uma análise desses casos é muito interessante e útil para auxiliar o processo de compreensão das médias e a resolução de exercícios.

Temos que a média harmônica é o inverso da média aritmética dos inversos dos elementos de uma lista. Mas devemos refletir sobre a aplicação dessas médias e pensar se elas têm alguma relação com grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Para isso, vamos analisar alguns problemas.

2.6.1 Grandezas Proporcionais

Para entender as médias aritmética e harmônica, precisamos definir e compreender graficamente as grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Como fonte principal dos dados a seguir foi utilizado o site Matika (2018).

2.6.1.1 Grandezas Diretamente Proporcionais

Se x e y são grandezas diretamente proporcionais, temos:

$$\frac{y}{x} = k \text{ , com } k > 0 \text{ constante. Logo:}$$

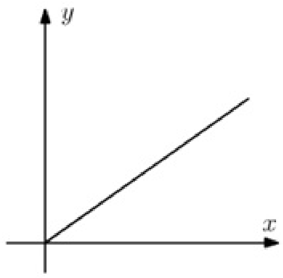
$$y = xk.$$

Portanto, o gráfico que representa duas grandezas x e y, diretamente proporcionais, possui o formato de uma reta que passa pela origem e a inclinação desta reta é a própria constante de proporcionalidade entre y e x:

Temos:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-0}{x-0} = \frac{y}{x} = k.$$

Figura 2.1: Gráfico de Grandezas Diretamente Proporcionais



2.6.1.2 Grandezas Inversamente Proporcionais

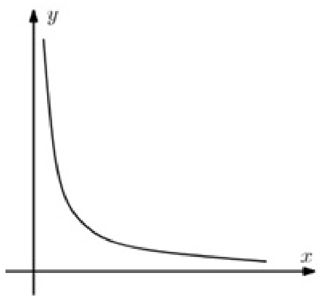
Se x e y são grandezas inversamente proporcionais, temos:

$$x.y = k, \text{ com } k > 0 \text{ constante. Logo:}$$

$$y = \frac{k}{x}.$$

Portanto, o gráfico que representa duas grandezas x e y, inversamente proporcionais, possui o formato de uma hipérbole. Repare que conforme o valor de x aumenta, y diminui e que se x diminuir, se aproximando de zero, o valor de y aumenta. O gráfico abaixo, representa a relação de grandezas x e y positivas.

Figura 2.2: Gráfico de Grandezas Inversamente Proporcionais



2.6.2 Problemas sobre Média Aritmética e Média Harmônica

Exemplo 1: Um carro percorre metade de certa distância d com velocidade v_1 e percorre a outra metade com velocidade v_2. Qual é a sua velocidade média?

Solução: Neste problema, temos uma distância percorrida fixa que em cada percurso será de $\frac{d}{2}$, velocidades v_1 e v_2 e os tempos t_1 e t_2 da primeira metade e da segunda metade do percurso respectivamente. Como a distância é fixa, temos uma relação entre duas grandezas, velocidade e tempo, que são inversamente proporcionais. Na medida que a velocidade aumenta, o tempo de percurso diminui e vice-versa, logo o tempo varia de acordo com a velocidade. Mas em que isso poderia impactar no cálculo da média? A velocidade média não seria a média aritmética das velocidades dos dois percursos? Vamos analisar o caso:

Na primeira parte do trajeto, a distância percorrida é $\frac{d}{2}$, com velocidade v_1 em um tempo t_1, enquanto na segunda parte do trajeto a distância percorrida é $\frac{d}{2}$, com velocidade v_2 em um tempo t_2. Logo:

$$v_1 = \frac{\frac{d}{2}}{t_1} \text{ e } v_2 = \frac{\frac{d}{2}}{t_2}.$$

Assim,

$$t_1 = \frac{d}{2v_1} \text{ e } t_2 = \frac{d}{2v_2}.$$

A velocidade média total dos dois percursos será:

$$V_m = \frac{d}{t_1+t_2} = \frac{d}{\frac{d}{2v_1}+\frac{d}{2v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}.$$

Portanto, a velocidade média, quando estão relacionadas grandezas inversamente proporcionais, velocidade e tempo, é dada pela média harmônica das velocidades dos dois percursos. Perceba que a média harmônica apareceu naturalmente na resolução.

Exemplo 2: Um carro tem velocidade v_1 durante metade do tempo t de percurso e tem velocidade v_2 durante a outra metade do tempo. Qual a sua velocidade média?

Solução: Neste problema, temos o tempo de trajeto fixo que em cada percurso será de $\frac{t}{2}$, velocidades v_1 e v_2 e distâncias d_1 e d_2 da primeira metade e da segunda metade do percurso respectivamente. Como o tempo é fixo, temos uma relação entre duas grandezas, velocidade e distância percorrida, que são diretamente proporcionais. Na medida que a velocidade aumenta, a distância percorrida aumenta e quando uma diminui a outra também diminui, logo a distância varia de acordo com a velocidade. Vamos analisar o caso:

Na primeira parte do trajeto, a distância percorrida é d_1, com velocidade v_1 em um tempo $\frac{t}{2}$, enquanto na segunda parte do trajeto a distância percorrida é d_2, com velocidade v_2 em um tempo $\frac{t}{2}$. Logo:

$$v_1 = \frac{d_1}{\frac{t}{2}} \text{ e } v_2 = \frac{d_2}{\frac{t}{2}}.$$

Assim,

$$d_1 = \frac{v_1 t}{2} \text{ e } d_2 = \frac{v_2 t}{2}.$$

A velocidade média total dos dois percursos será:

$$V_m = \frac{d_1+d_2}{t} = \frac{\frac{v_1 t}{2}+\frac{v_2 t}{2}}{t} = \frac{v_1+v_2}{2}.$$

Portanto, a velocidade média, quando estão relacionadas grandezas diretamente proporcionais, velocidade e distância, é dada pela média aritmética das velocidades dos dois percursos. Perceba que a média aritmética apareceu naturalmente na resolução.

Com os problemas analisados, é possível perceber a diferença nos problemas de média aritmética e média harmônica. No primeiro, os cálculos envolvem grandezas diretamente proporcionais e no segundo grandezas inversamente proporcionais.

2.6.3 Análise Gráfica das Médias Aritmética e Harmônica

Para realizar uma análise do comportamento gráfico das médias aritmética e harmônica, é necessário levar em consideração os gráficos das grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Vamos restringir a análise para grandezas de valores estritamente positivos.

I) Grandezas Diretamente Proporcionais

Sejam x e y grandezas diretamente proporcionais, logo

$$\frac{y}{x} = k \text{ , com } k > 0 \text{ constante. Portanto}$$

$$y = kx.$$

A relação entre as grandezas x e y diretamente proporcionais é dada por uma função afim cujo domínio restringiremos aos reais positivos.

Dados x_1 e x_2 pertencentes ao domínio da função, sejam $y_1 = k.x_1$ e $y_2 = k.x_2$.

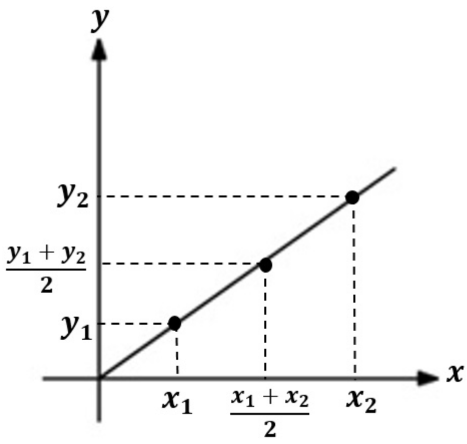
A média aritmética de x_1 e x_2 é dada por

$$\frac{x_1+x_2}{2}.$$

A imagem correspondente à média aritmética de x_1 e x_2 será

$$y = k.\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{kx_1+kx_2}{2} = \frac{y_1+y_2}{2}.$$

Figura 2.3: Média Aritmética de Grandezas Diretamente Proporcionais



Logo, a imagem correspondente à média aritmética de x_1 e x_2 é a média aritmética das imagens correspondentes y_1 e y_2.

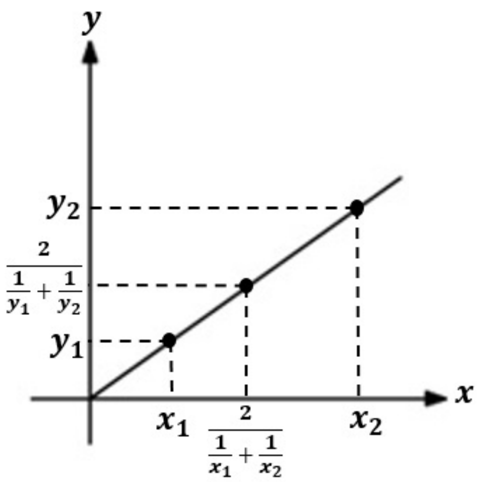
Por outro lado, a média harmônica de x_1 e x_2 é dada por

$$\frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}.$$

A imagem correspondente à média harmônica de x_1 e x_2 será

$$y = k.\left(\frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}\right) = \frac{2k(x_1x_2)}{x_1+x_2} = \frac{2k^2x_1x_2}{k(x_1+x_2)} = \frac{2y_1y_2}{y_1+y_2} = \frac{2}{\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}}.$$

Figura 2.4: Média Harmônica de Grandezas Diretamente Proporcionais



Logo, a imagem correspondente à média harmônica de x_1 e x_2 é a média harmônica das imagens correspondentes y_1 e y_2.

II) Grandezas Inversamente Proporcionais

Sejam x e y grandezas inversamente proporcionais, logo

$$x.y = k, \text{ com } k > 0 \text{ constante. Portanto}$$

$$y = \frac{k}{x}.$$

A relação entre as grandezas x e y inversamente proporcionais é dada por uma função racional particular cujo domínio restringiremos aos reais positivos.

Dados x_1 e x_2 pertencentes ao domínio da função, sejam $y_1 = \frac{k}{x_1}$ e $y_2 = \frac{k}{x_2}$.

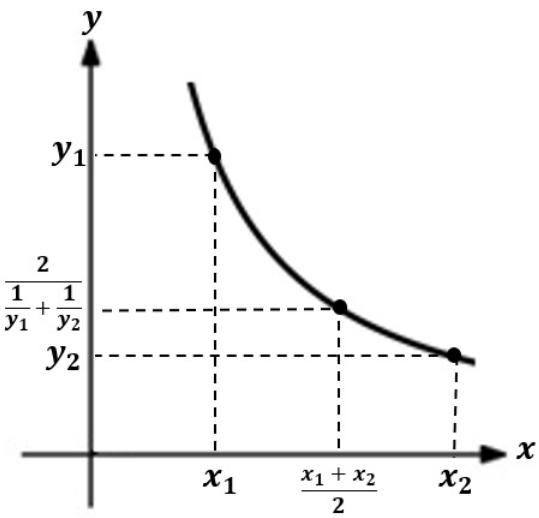
A média aritmética de x_1 e x_2 é dada por

$$\frac{x_1+x_2}{2}.$$

A imagem correspondente à média aritmética de x_1 e x_2 será

$$y = \frac{k}{\frac{x_1+x_2}{2}} = \frac{2k}{x_1+x_2} = \frac{2}{\frac{x_1+x_2}{k}} = \frac{2}{\frac{1}{\frac{k}{x_1}}+\frac{1}{\frac{k}{x_2}}} = \frac{2}{\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}}.$$

Figura 2.5: Média Aritmética de Grandezas Inversamente Proporcionais



Logo, a imagem correspondente à média aritmética de x_1 e x_2 é a média harmônica das imagens correspondentes y_1 e y_2.

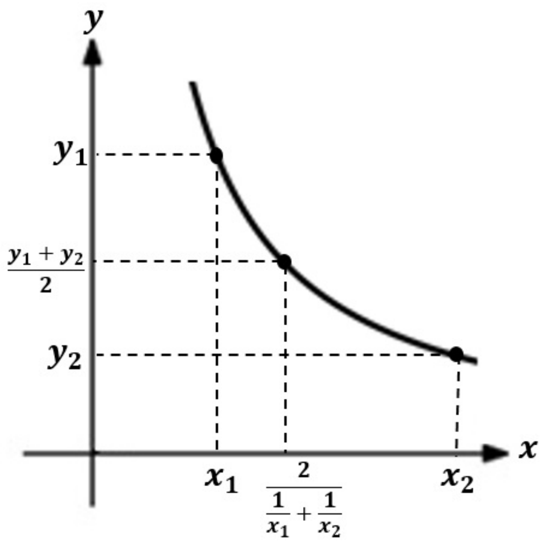
Por outro lado, a média harmônica de x_1 e x_2 é dada por

$$\frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}.$$

A imagem correspondente à média harmônica de x_1 e x_2 será

$$y = \frac{k}{\frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}} = \frac{k}{\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}} = \frac{k(x_1+x_2)}{2x_1x_2} = \frac{kx_1}{2x_1x_2} + \frac{kx_2}{2x_1x_2} = \frac{k}{2x_1} + \frac{k}{2x_2} = \frac{y_1+y_2}{2}.$$

Figura 2.6: Média Harmônica de Grandezas Inversamente Proporcionais



Logo, a imagem correspondente à média harmônica de x_1 e x_2 é a média aritmética das imagens correspondentes y_1 e y_2.

2.7 Método Prático para o Cálculo da Média Aritmética de Números sem Calculadora

Para o cálculo da média aritmética, especialmente quando temos uma grande quantidade de números, muitas vezes encontramos dificuldades para a realização da soma dos termos devido aos resultados serem números muito grandes e o uso da calculadora se torna indispensável.

Desejamos apresentar uma forma prática para o cálculo da soma dos termos que dispensa o uso da calculadora.

Para isso, considere n números para os quais desejamos calcular a média aritmética. Seja S_n a soma destes números. A média aritmética será dada por:

$$M_a = \frac{S_n}{n}.$$

Se considerarmos o número k como uma aproximação para a média aritmética desejada, temos:

$$M_a = \frac{S_n}{n} = \frac{(S_n - n.k) + n.k}{n} = \frac{(S_n - n.k)}{n} + k = \frac{(a_1 - k) + (a_2 - k) + ... + (a_n - k)}{n} + k.$$

Portanto, propomos como método, somar os termos $(a_i - k)$, com $i \in \{1, 2, ..., n\}$ para facilitar o cálculo, uma vez que somar números positivos com negativos mantém a soma com um total baixo, ao contrário de apenas somar os termos.

Exemplo 1: Calcule a média aritmética dos números 25, 35 e 60.

Solução: Dados os números 25, 35 e 60, vamos determinar um valor aproximado para a média aritmética. Seja $k = 45$ a aproximação para a média aritmética. Podemos construir a tabela:

Tabela 2.5: Tabela de números - questão 1

a_n	$a_n - 45$
25	-20
35	-10
60	15

Fonte: O próprio autor

Sendo assim, temos $S_{(a_n - 45)} = -15$ e $\frac{-15}{3} = -5$.

Logo, a média aritmética será: -5 + 45 = 40.

De fato,

$$\frac{25+35+60}{3} = \frac{120}{3} = \frac{(25-45)+(35-45)+(60-45)}{3} + 45 = \frac{-15}{3} + 45 = -5 + 45 = 40.$$

Este cálculo torna-se mais prático quando calculamos a média de uma quantidade maior de números conforme exemplo abaixo.

Exemplo 2: Dada a sequência (24, 13, 32, 55, 60, 80, 21, 7, 12, 43), calcule a média aritmética dos termos.

Solução: De maneira análoga ao exemplo anterior, vamos determinar um valor aproximado para a média aritmética. Seja $k = 35$ a aproximação para essa média. Podemos construir a seguinte tabela:

Tabela 2.6: Tabela de números - questão 2

a_n	$a_n - 35$
24	-11
13	-22
32	-3
55	20
60	25
80	45
21	-14
7	-28
12	-23
43	8

Fonte: O próprio autor

Sendo assim, temos $S_{(a_n-35)} = -3$ e $\frac{-3}{10} = -0,3$.

Logo, a média aritmética será: $-0,3 + 35 = 34,7$.

2.8 Uma Importante Propriedade da Média Aritmética

A média aritmética possui uma propriedade muito importante:

Proposição: Se a média aritmética dos números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ é igual a $\overline{x}$, pelo menos um dos números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ é maior que ou igual a $\overline{x}$.

Demonstração: Suponha por absurdo que para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tem-se:

$$x_i < \overline{x}.$$

Logo,

$$x_1 + x_2 + ... + x_n < n\overline{x}.$$

Dividindo a desigualdade por n:

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} < \frac{n\overline{x}}{n}.$$

Portanto,

$$\overline{x} < \overline{x}, \text{ o que é uma contradição.}$$

Assim, existe um $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $x_i \geq \overline{x}$.

2.8.1 Aplicação da Propriedade da Média Aritmética

Exemplo 1: Mostre que, em um grupo de 100 pessoas, há sempre pelo menos 9 pessoas que nasceram no mesmo mês.

Solução: Sendo $x_1, x_2, ..., x_{12}$ as quantidades de pessoas nascidas em cada mês do ano, temos:

$$x_1 + x_2 + ... + x_{12} = 100.$$

Calculando o número médio de pessoas por mês, teremos:

$$100 \div 12 = 8,333...$$

Logo, aplicando a propriedade da média aritmética, em algum mês do ano, o número de nascidos será maior do que ou igual a $8,333...$ Mas como a quantidade de nascidos no mês é um valor inteiro, é garantido que em um mês do ano o número de nascidos seja pelo menos 9.

Exemplo 2: $(TJ - PI2015/FGV)$ Um grupo de 6 estagiários foi designado para rever 50 processos e cada processo deveria ser revisto por apenas um dos estagiários. No final do trabalho, todos os estagiários trabalharam e todos os processos foram revistos. É correto afirmar que:

(A) um dos estagiários reviu 10 processos;
(B) todos os estagiários reviram, cada um, pelo menos 5 processos;
(C) um dos estagiários só reviu 2 processos;
(D) quatro estagiários reviram 7 processos e dois estagiários reviram 6 processos;
(E) pelo menos um dos estagiários reviu 9 processos ou mais.

Solução: Calculando o número médio de processos por estagiário, temos:

$$50 \div 6 = 8,\bar{3}$$

Logo, aplicando a propriedade, como a média de processos por pessoa é de $8,\bar{3}$, é possível garantir que uma das pessoas reviu um número maior do que ou igual a $8,\bar{3}$. Mas como o número de processos é inteiro, um estagiário reviu pelo menos 9 processos. Assim, a resposta correta é o item (E).

Exemplo 3: João convidou 49 amigos para a sua festa de aniversário. Podemos afirmar que em sua festa existiam pelo menos:

a) 5 pessoas que fazem aniversario no mesmo mês?

b) 8 pessoas que nasceram no mesmo ano?

c) 7 pessoas que nasceram no mesmo dia da semana?

d) 2 pessoas que nasceram no mês de janeiro?

Solução: Analisando cada item:

a) Como são 49 amigos e 12 meses do ano, a média aritmética dos amigos por mês do ano será:

$$49 \div 12 = 4,08\bar{3}$$

Logo, aplicando a propriedade da média aritmética, existe um mês para o qual o número de aniversariantes é maior ou igual a $4,08\bar{3}$, mas como a quantidade de pessoas é inteira, isso garante que existem 5 pessoas que fazem aniversário no mesmo mês. Portanto, o item a) está correto.

b) O número 49 não é suficientemente grande para podermos assegurar a afirmação, diante do número de anos que os convidados podem ter nascido. Portanto, não podemos afirmar que o item b) está correto.

c) Como são 49 pessoas e sete dias da semana, calculando a média aritmética da quantidade de pessoas por dia da semana, temos:

$$49 \div 7 = 7$$

Logo, aplicando a propriedade da média aritmética, há pelo menos um dia da semana para o qual a quantidade de nascidos será maior do que ou igual a 7. Portanto, o item c) está correto.

d) Conforme a resolução do item a), a propriedade nos garante que existam pelo menos 5 pessoas que fazem aniversário no mesmo mês, mas não garante um mês específico. Logo, não podemos afirmar que o item d) esteja correto.

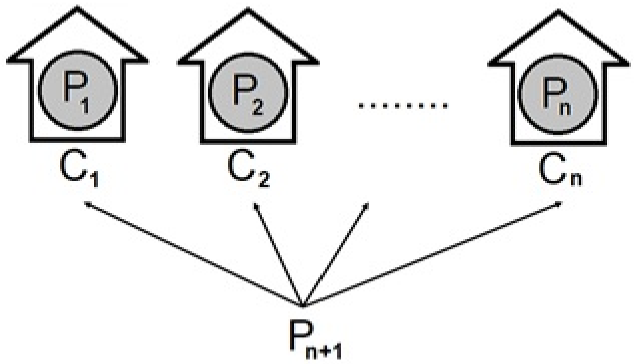
2.8.2 O Princípio da Casa dos Pombos

Uma consequência imediata da propriedade da média aritmética é o chamado Princípio das Gavetas de Dirichlet, também conhecido como Princípio da Casa dos Pombos. "É um instrumento elementar para tratar problemas matemáticos relacionados à existência de elementos de conjuntos validando certas exigências." (OLIVEIRA; FERNANDEZ, 2012, p. 143).

Uma versão mais simples do princípio da casa dos pombos é dada por:

Proposição: Se distribuirmos $N+1$ pombos em N casas, então alguma das casas contém dois ou mais pombos.

Figura 2.7: Princípio da casa dos pombos



Na figura acima, em cada casa $C_i, 1 \leq i \leq N$, coloca-se um único pombo denotado por P_i. O pombo restante, denotado por P_{n+1}, deve ir para alguma das casas, juntando-se ao que já se encontrava nela.

Demonstração: O número médio de pombos por casa será dado por $(n+1) \div n$ que é maior do que 1. Logo, de acordo com a propriedade da média aritmética, haverá pelo menos uma casa com um número de pombos maior do que ou igual 2.

2.8.2.1 Aplicações do Princípio da Casa dos Pombos

O princípio da casa dos pombos ou princípio das gavetas, apesar de sua simplicidade, é bastante útil para resolução de diversos problemas. Não é difícil detectar quando o princípio pode ser usado, mas para aplicá-lo é preciso identificar em cada situação quem faz papel das gavetas (casas) e quem faz papel dos objetos (pombos), o que geralmente é a maior dificuldade.

Exemplo 1: Numa floresta crescem 1.000 jaqueiras. É conhecido que a jaqueira não contém mais do que 600 frutos. Prove que existem 2 jaqueiras na floresta que têm a mesma quantidade de frutos.

Solução: Neste problema, as casas serão as possíveis quantidades de frutos que uma jaqueira poderia ter. Logo serão 601 casas, identificadas pelos números $0, 1, 2, ..., 600$ que representam as quantidades de frutos da árvore de cada casa. As jaqueiras representam os pombos que serão distribuídos pelas casas. Considerando que existam jaqueiras com todas as quantidades possíveis de frutos, distribuímos 601 jaqueiras, uma em cada casa, como existem 1000 jaqueiras e $1000 > 602 = 601 + 1$, o Princípio da Casa dos Pombos, nos garante que existem duas jaqueiras com a mesma quantidade de frutos.

Repare que este problema poderia ser resolvido aplicando a propriedade da média aritmética, já que a média aritmética do número de jaqueiras pelas quantidades possíveis de frutos é maior do que 1, o que garante que existam 2 jaqueiras com mesma quantidade de frutos. Mas a média aplicada não é fácil de ser percebida como os pombos e as casas, logo o uso do princípio da casa dos pombos, possibilitou a condução correta do raciocínio nesta questão.

Exemplo 2: Mostre que, em toda reunião de n pessoas, há sempre duas pessoas com o mesmo número de conhecidos.

Solução: Os pombos serão as n pessoas e as casas serão as possíveis quantidades de conhecidos que uma pessoas possa ter nessa reunião, que são $0, 1, 2, ..., n–1$. Perceba que temos n pombos para n casas, mas as casas de número 0 e $n–1$ não podem ser ocupadas simultaneamente, pois se uma pessoa não conhece ninguém na reunião, não é possível que outra pessoa conheça todos os presentes. Sendo assim, a quantidade de pombos n para serem distribuídos em $n–1$ casas, garante, pelo Princípio da Casa dos Pombos, que existem dois pombos na mesma casa, o que implica que duas pessoas possuem a mesma quantidade de conhecidos.

Resolver este problema pela propriedade da média aritmética é também bem simples, pois a média aritmética do total de pessoas pelas possíveis quantidades de conhecidos será dada por $\frac{n}{(n-1)} > 1$. Logo, existem duas pessoas com mesma quantidade de conhecidos.

Exemplo 3: Num colégio com 16 salas são distribuídas canetas nas cores preta, azul e vermelha para realizar uma prova de concurso. Se cada sala recebe canetas da mesma cor então prove que existem pelo menos 6 salas que receberam canetas da mesma cor.

Solução: Consideramos neste caso, as 16 salas como os pombos e as 3 cores de caneta como as casas. Podemos dispor cada sala em uma das três cores. Como $16 = 5.3 + 1$, dispondo 5 salas em cada cor, ainda restará uma sala que terá a mesma cor de outras cinco salas. Logo, pelo princípio da casa dos pombos, haverá 6 salas que receberam a mesma cor de canetas.

A solução deste caso pela propriedade da média aritmética é fácil, pois são 16 salas e 3 cores de canetas possíveis, logo a média aritmética das salas pelas cores de caneta será dada por $16 \div 3 = 5,\bar{3} > 5$, logo, existem 6 salas que receberam a mesma cor de caneta.

Exemplo 4: Dados 8 números inteiros, mostre que existem dois deles cuja diferença é divisível por 7.

Solução: Consideremos os 8 números como sendo os pombos e os 7 restos possíveis na divisão por 7 sendo as casas. Como $8 = 7 + 1$, pelo princípio da casa dos pombos, existem dois números dentro dos oito dados que têm o mesmo resto quando divididos por 7. Além disso, se dois números possuem o mesmo resto na divisão por 7, então a diferença entre eles será divisível por 7.

Exemplo 5: Um médico receitou a um paciente 48 comprimidos para serem tomados durante um período de 30 dias, mas com a condição dele tomar pelo menos 1 comprimido por dia. Mostre que em algum período de dias consecutivos o paciente tomou exatamente 30 comprimidos.

Solução: Seja S_n a quantidade de comprimidos que o paciente tomou do 1º ao n-ésimo dia. Na divisão de S_n por 30, temos os restos r_n possíveis onde $0 \leq r_n \leq 29$, logo 30 restos possíveis.

Dividindo em dois casos:

Caso 1: Existem inteiros tais que o resto da divisão de S_n por 30 é 0, logo $S_n = 0$ ou $S_n = 30$, pois $S_n \geq 60$ passaria dos 48 comprimidos.

O caso $S_n = 0$ é impossível, pois o paciente deve tomar um comprimido por dia. Logo, $S_n = 30$, então em um período de dias consecutivos foram tomados 30 comprimidos.

Caso 2: O resto da divisão de S_n por 30 não é 0 para todo n. Teremos $1 \leq r_n \leq 29$, portanto 29 restos possíveis. Como temos trinta valores para S_n, temos, pelo princípio da casa dos pombos, que existem $m \neq n$ tal que S_n e S_m têm mesmo resto, logo $S_n - S_m = 30$

comprimidos.

Portanto, em um intervalo de n+1 até m dias foram tomados exatamente 30 comprimidos.

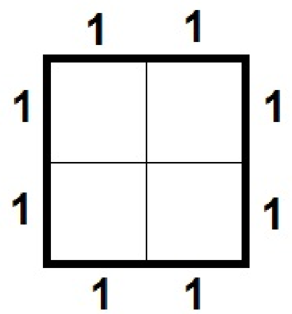
Exemplo 6: Considere um cubo de aresta 2.

a) Escolha 5 pontos ao acaso sobre a superfície de uma das faces. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor ou igual a $\sqrt{2}$

b) Agora escolha 9 pontos ao acaso na região do cubo. Mostre que existem pelo menos dois pontos que se encontram a uma distância menor do que ou igual a $\sqrt{3}$ um do outro.

Solução: a) Pelo Teorema de Pitágoras, $\sqrt{2}$ é o valor da diagonal de um quadrado de lado 1. Portanto, dividindo a face quadrada de lado 2 do cubo em 4 quadrados de lado 1, a distância de dois pontos neste quadrado de lado 1 é menor do que ou igual a $\sqrt{2}$

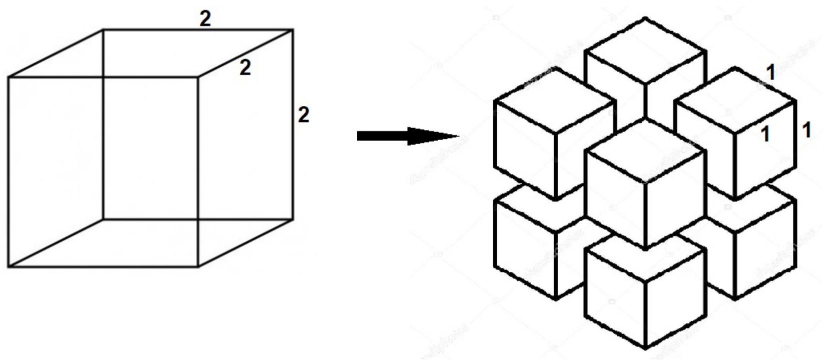
Figura 2.8: Face do cubo



Neste caso, os 5 pontos são os pombos e os 4 quadrados de lado 1 são as casas. Logo, se distribuirmos 4 pontos, um em cada quadrado de lado 1 (casa), o quinto ponto estará em um quadrado que já possui outro ponto, o que nos garante, pelo Princípio da Casa dos Pombos, que o segmento entre eles terá comprimento menor do que ou igual a $\sqrt{2}$.

b) Sabemos que $\sqrt{3}$ é o valor da diagonal de um cubo de arestas 1. Portanto, dividindo o cubo de arestas 2 em 8 cubos de arestas 1, a distância de dois pontos na região do cubo de aresta 1 é menor do que ou igual a $\sqrt{3}$.

Figura 2.9: Cubo



Agora, os 9 pontos são os pombos e os cubos de aresta 1 são as casas. Escolhendo 9 pontos na região do cubo e distribuindo 8, um em cada cubo menor de aresta 1, o nono ponto estará na região interna de um cubo com aresta 1 que contém algum outro ponto, o que nos garante, pelo Princípio da Casa dos Pombos, que a distância entre esses dois pontos será menor do que ou igual a $\sqrt{3}$.

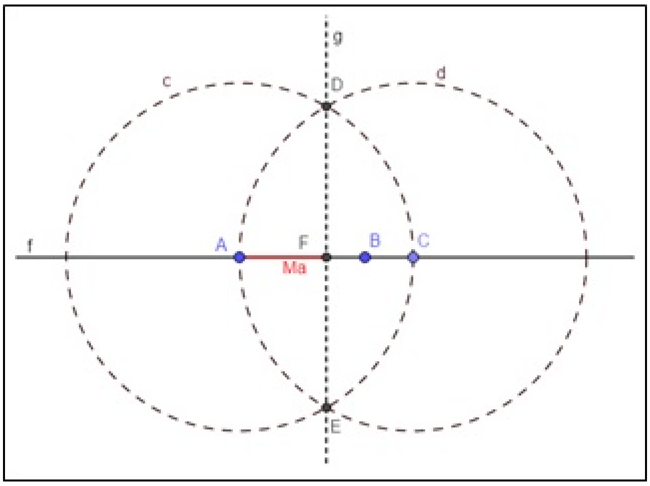
Com os problemas analisados, é possível constatar que o Princípio da Casa dos Pombos é de fato uma consequência da propriedade da média aritmética. Os problemas solucionados com este princípio podem ser resolvidos mediante o uso da propriedade da média, mas em alguns casos, identificar os itens envolvidos na média não é simples e a ideia de casas e pombos facilita o raciocínio. Existem, ainda, casos onde identificar o princípio das gavetas como técnica de resolução é fácil, mas escolher corretamente o que representa gavetas e objetos requer bastante habilidade, o que inviabilizaria a solução direta por média aritmética. Portanto, tendo a disposição os dois métodos, basta que a escolha de um seja feita para que, com trabalho cuidadoso, se obtenha o resultado desejado no exercício.

2.9 Construção Geométrica das Médias de Dois Segmentos

Pappus de Alexandria (290-350), importante geômetra grego, conhecido pela autoria de muitos textos sobre cientistas da antiga civilização grega, autor da obra *Coleção Matemática*, um tratado grego composto por oito livros, no terceiro livro desta coleção, onde trata da teoria das médias, apresentou uma simples e bela construção geométrica das médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, buscando representar as médias em um semicírculo. Esta construção, conhecida como *As Médias de Pappus*, inspirou a construção das médias de dois segmentos a seguir.

2.9.1 Construção da média aritmética de dois segmentos

Figura 2.10: Construção da média aritmética



Dados dois segmentos de comprimentos a e b, trace sobre uma reta suporte f o segmento AB de comprimento a e o segmento BC adjacente ao primeiro de comprimento b.

Trace um círculo c de centro A e raio AC e um círculo d de centro em C e raio AC. Sejam D e E pontos de interseção dos círculos c e d.

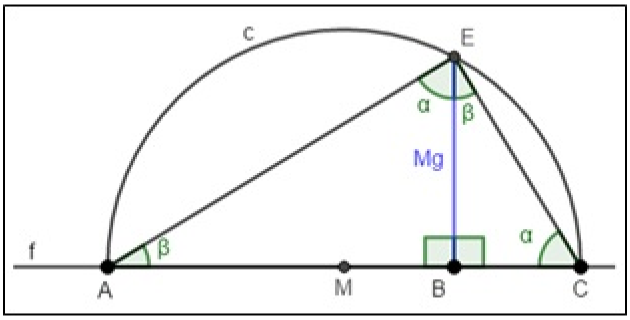
Trace a reta DE e fixe o ponto F de interseção das retas f e DE.

Note que AF é ponto médio de AC, logo:

$$M_a = \overline{AF} = \frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

2.9.2 Construção da média geométrica de dois segmentos

Figura 2.11: Construção da média geométrica



Dados dois segmentos de comprimentos a e b, trace sobre uma reta suporte f o segmento AB de comprimento a e o segmento BC adjacente ao primeiro de comprimento b.

Fixe M o ponto médio de AC e trace o semicírculo C de centro em M e raio AM.

Trace uma perpendicular à reta f pelo ponto B e fixe E, ponto de interseção com o semicírculo C.

Analisando os triângulos, ACE, ABE e BCE, temos $A\widehat{E}B = E\widehat{C}B$ e $B\widehat{A}E = B\widehat{E}C$.

Logo, pelo caso de semelhança AA, temos:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$$

$$\frac{\overline{BE}}{a} = \frac{b}{\overline{BE}}$$

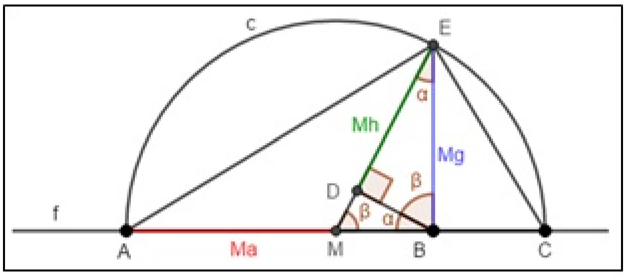
$$\overline{BE}^2 = ab$$

$$\overline{BE} = \sqrt{ab}$$

$$M_g = \overline{BE} = \sqrt{ab}.$$

2.9.3 Construção da média harmônica de dois segmentos

Figura 2.12: Construção da média harmônica



A partir da construção das médias aritmética e geométrica é possível construir a média harmônica dos segmentos AB e BC.

Sendo M ponto médio de AC e $\overline{BE} = M_g = \sqrt{ab}$, com $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$, trace o segmento EM.

Trace o segmento BD perpendicular a EM, com $D \in EM$.

Analisando os triângulos, MBE, BDM e BED, temos $B\widehat{E}D = D\widehat{B}M$ e $D\widehat{B}E = D\widehat{M}B$.

Temos ainda $\overline{EM} = \overline{AM} = M_a = \frac{a+b}{2}$ e $\overline{BE} = M_g = \sqrt{ab}$.

Logo, pelo caso de semelhança AA,

$$\frac{\overline{ED}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{ME}}$$

$$\frac{\overline{ED}}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}}$$

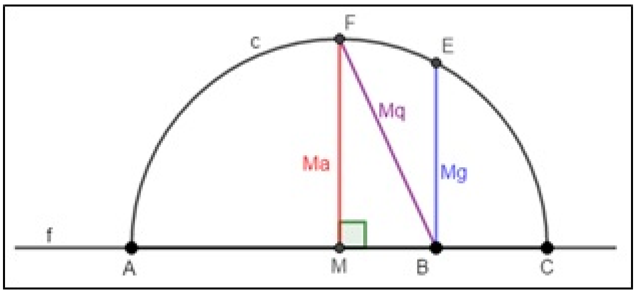
$$\overline{ED} = \frac{\sqrt{ab}.\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}}$$

$$\overline{ED} = \frac{2ab}{a+b}$$

$$M_h = \overline{ED} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

2.9.4 Construção da média quadrática de dois segmentos

Figura 2.13: Construção da média quadrática



A partir da construção das médias aritmética e geométrica é possível construir a média quadrática dos segmentos AB e BC.

Temos $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ e $\overline{MF} = \overline{MC} = \frac{a+b}{2}$ com MF perpendicular à reta f. Logo,

$$\overline{MB} = \overline{MC} - \overline{BC} = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}.$$

Trace o segmento BF.

Pelo Teorema de Pitágoras, aplicado no triângulo retângulo BFM, temos:

$$\overline{BF}^2 = \overline{MF}^2 + \overline{MB}^2$$

$$\overline{BF}^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{4} + \frac{a^2-2ab+b^2}{4}$$

$$\overline{BF}^2 = \frac{2a^2+2b^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{2}$$

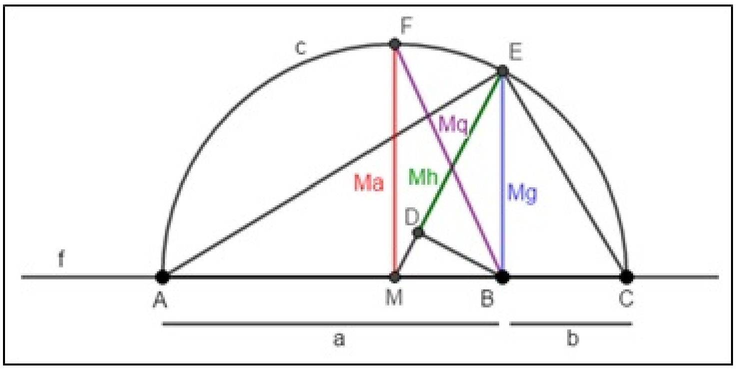
$$M_q = \overline{BF} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

2.9.5 Análise geométrica das Médias Aritmética, Geométrica, Harmônica e Quadrática

Temos abaixo a representação geométrica das quatro médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática de dois segmentos quaisquer AB e BC, de comprimentos a e b respectivamente.

Na construção, tomamos $a > b$, mas é similar para o caso $b > a$.

Figura 2.14: Médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática



i) Analisando o triângulo retângulo MBF, pelo Teorema de Pitágoras

$$\overline{BF}^2 = \overline{MF}^2 + \overline{MB}^2,$$

mas como $M_q = \overline{BF}$ e $M_a = \overline{MF}$ temos

$$(M_q)^2 = (M_a)^2 + \overline{MB}^2 \geq (M_a)^2 \Leftrightarrow (M_q)^2 \geq (M_a)^2 \Leftrightarrow M_q \geq M_a.$$

E ainda,

$$M_q = M_a \Leftrightarrow \overline{MB} = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{BC}.$$

ii) Analisando o triângulo retângulo BEM, pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{ME}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{MB}^2,$$

mas como $M_a = \overline{ME}$ e $M_g = \overline{BE}$ temos

$$(M_a)^2 = (M_g)^2 + \overline{MB}^2 \geq (M_g)^2 \Leftrightarrow (M_a)^2 \geq (M_g)^2 \Leftrightarrow M_a \geq M_g.$$

E ainda,

$$M_a = M_g \Leftrightarrow \overline{MB} = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{BC}.$$

iii) Analisando o triângulo retângulo EBD, pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{BE}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{BD}^2,$$

mas como $M_g = \overline{BE}$ e $M_h = \overline{DE}$ temos

$$(M_g)^2 = (M_h)^2 + \overline{BD}^2 \geq (M_h)^2 \Leftrightarrow (M_g)^2 \geq (M_h)^2 \Leftrightarrow M_g \geq M_h.$$

E ainda,

$$M_g = M_h \Leftrightarrow \overline{BD} = 0 \Leftrightarrow B \text{ e } M \text{ são coinscidentes} \Leftrightarrow M_a = M_g \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{BC}.$$

Logo, conclui-se que:

$$M_q \geq M_a \geq M_g \geq M_h.$$

E, além disso:

$$M_q = M_a = M_g = M_h \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{BC}.$$

A desigualdade acima, denominada *Desigualdade das Médias*, é de extrema importância e possui muitas aplicações práticas na resolução de problemas de diferentes áreas do conhecimento. No capítulo que segue, iremos abordar este tema.

Capítulo 3

Desigualdades das Médias

Neste capítulo, ampliaremos o estudo sobre as desigualdades das médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, realizando demonstrações para casos com n números positivos. Apresentaremos diversas aplicações e problemas interessantes, onde utilizamos estas desigualdades na resolução. O objetivo é mostrar que esta é uma ferramenta versátil, que pode ser aplicada em problemas de diversas áreas da matemática, como problemas algébricos, geométricos, otimização, entre outros, e atingir um público ainda de nível médio, sem a necessidade de conceitos mais avançados de matemática.

3.1 Desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica

Para realizar a demonstração, vamos provar três *Lemas*.

Lema 1: Sejam $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ positivos, tais que:

$$x + y = a + b,$$

Se $x \geq a$ e $y \geq b$, então $x = a$ e $y = b$

Demonstração: Como $x + y = a + b$ então $(x - a) + (y - b) = 0$.

Como $x \geq a$ e $y \geq b$, temos que $x - a \geq 0$ e $y - b \geq 0$.

Portanto, $0 \leq x - a \leq (x - a) + (y - b) = 0 \Rightarrow x - a = 0 \Rightarrow x = a$.

Por outro lado, $0 \leq y - b \leq (x - a) + (y - b) = 0 \Rightarrow y - b = 0 \Rightarrow y = b$.

Lema 2: Dada uma lista de n termos $a_1, a_2, ..., a_n$, se $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$, então:

$$G = \sqrt[n+r]{a_1 a_2 ... a_n \underbrace{GG...G}_{r\ vezes}} = \frac{a_1+a_2+...+a_n+\underbrace{G+G+...+G}_{r\ vezes}}{n+r}$$

Demonstração: Como $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$,

$$G^n = a_1 a_2 ... a_n \text{ e } nG = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

Então:

$$\sqrt[n+r]{a_1 a_2 ... a_n G^r} = \sqrt[n+r]{G^n G^r} = G = \frac{(n+r)G}{n+r} = \frac{nG+rG}{n+r} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+rG}{n+r}.$$

Provando, assim, o *Lema*.

O lema a seguir, mostra que a média geométrica não se altera, se inserirmos novos termos a uma lista, iguais a sua própria média geométrica.

Lema 3: Seja $a_1, a_2, ..., a_n$ uma lista de n números reais positivos. Pondo $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$, considere a lista aumentada $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{2m}$, com $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{2m} = G$. Então:

$$M_g(2m) = \sqrt[2m]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2m}} = G = M_g(n).$$

Demonstração: Como $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$, então $a_1 a_2 \cdots a_n = G^n$. Logo

$$\sqrt[2m]{a_1 a_2 ... a_n \underbrace{GG...G}_{2m-n\ vezes}} = \sqrt[2m]{G^n G^{2m-n}} = G.$$

Proposição 1: Se $a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais positivos, com $n \geq 2$, então:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n},$$

ou seja,

$$m_g(a_1, a_2, ..., a_n) \leq m_a(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Além disso, a igualdade vale se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Demonstração: Para o caso $n = 2$, temos

$$\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 = a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2} \geq 0.$$

Logo

$$a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2}.$$

Portanto

$$M_a = \frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2} = M_g.$$

E ainda, se $M_a = M_g$, então

$$\frac{a_1+a_2}{2} = \sqrt{a_1a_2} \Rightarrow \left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Vamos mostrar agora que se o resultado vale para todo $m = 2^k < n$, com $n \geq 3$, então o resultado também vale para n.

Com efeito, dado um número natural $n \geq 3$, suponha que o resultado vale para todo $m = 2^k < n$ e seja $a_1, a_2, ..., a_n$ uma lista de n números reais positivos. Existe um número natural k tal que $m = 2^k < n \leq 2^{k+1} = 2m$.

Pondo $G = \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$, considere a lista aumentada com $2m$ números $a_1, a_2, ..., a_n$, $a_{n+1}, ..., a_{2m}$, com $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{2m} = G$. Pelo Lema 3, a média geométrica da lista aumentada não muda, ou seja, $M_g(2m) = M_g(n) = G$.

Sejam ainda $M_a(n) = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ a média aritmética dos n números e $M_a(2m)$ a média aritmética da lista aumentada com $2m$ números. Então

$$M_a(2m) = \frac{a_1+...+a_{2m}}{2m} = \frac{a_1+a_2+...+a_n+(2m-n)G}{2m} = \frac{nM_a(n)+(2m-n)G}{2m}.$$

Temos ainda

$$M_a(2m) = \frac{a_1+...+a_{2m}}{2m} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2+...+a_m}{m} + \frac{a_{m+1}+a_{m+2}+...+a_{2m}}{m}\right).$$

Pela hipótese feita sobre n, a desigualdade vale para $m = 2^k$, logo

$$\frac{a_1+a_2+...+a_m}{m} \geq \sqrt[m]{a_1a_2...a_m}$$

$$\frac{a_{m+1}+a_{m+2}+...+a_{2m}}{m} \geq \sqrt[m]{a_{m+1}a_{m+2}\cdots a_{2m}}.$$

Portanto,

$$M_a(2m) \geq \frac{\sqrt[m]{a_1a_2...a_m}+\sqrt[m]{a_{m+1}a_{m+2}...a_{2m}}}{2}.$$

Pelo caso $m = 2$,

$$\frac{\sqrt[m]{a_1a_2...a_m}+\sqrt[m]{a_{m+1}a_{m+2}...a_{2m}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[m]{a_1...a_m}\,\sqrt[m]{a_{m+1}...a_{2m}}}$$

$$= \sqrt{\sqrt[m]{a_1a_2...a_{2m}}} = \sqrt[2m]{a_1...a_{2m}} = M_g(2m) = G.$$

A última igualdade deve-se ao lema 3.

Portanto,

$$\frac{nM_a(n)+(2m-n)G}{2m} = M_a(2m) \geq G.$$

Daí

$$M_a(n) \geq G = M_g(n).$$

Suponha agora que $M_a(n) = M_g(n)$.

Aplicando o Lema 2, temos

$$M_g(2m) = \sqrt[2m]{a_1...a_n a_{n+1}...a_{2m}} = \frac{a_1+a_2+...+a_{2m}}{2m} = M_a(2m).$$

Como

$$M_a(2m) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2+...+a_m}{m} + \frac{a_{m+1}+a_{m+2}+...+a_{2m}}{m}\right)$$

$$\geq \frac{\sqrt[m]{a_1a_2...a_m}+\sqrt[m]{a_{m+1}a_{m+2}...a_{2m}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[m]{a_1...a_m}\,\sqrt[m]{a_{m+1}...a_{2m}}} = M_g(2m)$$

e $M_a(2m) = M_g(2m)$, então

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2+...+a_m}{m} + \frac{a_{m+1}+a_{m+2}+...+a_{2m}}{m}\right) \overset{(1)}{=} \frac{\sqrt[m]{a_1a_2...a_m}+\sqrt[m]{a_{m+1}a_{m+2}...a_{2m}}}{2}$$

$$\overset{(2)}{=} \sqrt{\sqrt[m]{a_1a_2...a_m}\,\sqrt[m]{a_{m+1}a_{m+2}...a_{2m}}}.$$

Da igualdade (1) e pelo Lema 1,

$$\sqrt[m]{a_1a_2...a_m} = \frac{a_1+a_2+...+a_m}{m} \text{ e } \sqrt[m]{a_{m+1}a_{m+2}...a_{2m}} = \frac{a_{m+1}+a_{m+2}+...+a_{2m}}{m}.$$

Como o caso da igualdade vale para m por hipótese, então

$$a_1 = a_2 = ... = a_m \text{ e } a_{m+1} = a_{m+2} = ... = a_{2m} \tag{3.1}$$

Da igualdade (2), como o caso da igualdade vale para $m = 2$,

$$\sqrt[m]{a_1a_2...a_m} = \sqrt[m]{a_{m+1}a_{m+2}...a_{2m}} \tag{3.2}$$

De (3.1) e (3.2), temos:

$$a_1 = \sqrt[m]{a_1a_2...a_m} = \sqrt[m]{a_{m+1}a_{m+2}...a_{2m}} = a_{2m}.$$

Logo, $a_1 = a_2 = ... = a_m = a_{m+1} = ... = a_{2m}$.

Em particular, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Agora, podemos usar o Principio da Boa Ordenação para mostrar que o resultado vale para todo $n \geq 2$. Suponha que o resultado é falso para algum número natural e seja $n \geq 3$ o menor número natural tal que o resultado é falso. Então o resultado vale para todo $m = 2^k < n$. Pelo que mostramos, valendo o resultado para $m = 2^k < n$, o resultado valeria para n, o que não ocorre. Portanto, o resultado vale para todo $n \geq 2$.

O caso onde os termos sendo iguais, então as médias aritmética e geométrica dos termos são iguais será provado abaixo.

Demonstração: Dado um número natural n, considere uma lista de n termos $a_1, a_2, ..., a_n$. Suponha que $a_1 = a_2 = ... = a_n$, logo

$$M_a(n) = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} = \frac{na_1}{n} = a_1 = \sqrt[n]{(a_1)^n} = \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} = M_g(n).$$

Portanto, $M_g(n) \leq M_a(n)$ e a igualdade vale se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

3.2 Desigualdade entre Médias Geométrica e Harmônica

Proposição 2: Dados $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais positivos tem-se:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n},$$

ou seja,

$$m_h(a_1, a_2, ..., a_n) \leq m_g(a_1, a_2, ..., a_n)$$

Além disso, a igualdade vale se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$

Demonstração: Para demonstrar essa proposição, vamos usar a desigualdade já estabelecida entre as médias aritmética e geométrica para números reais positivos.

Se $a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais positivos, então $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ..., \frac{1}{a_n}$ também são.

Assim, aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para números reais positivos segue que:

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}...\frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}{n} = \frac{1}{H}.$$

Então:

$$\frac{1}{G} \leq \frac{1}{H} \Rightarrow H \leq G.$$

Se $H = G$ temos:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}...\frac{1}{a_n}} = \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}{n}.$$

Logo, pela desigualdade das médias aritmética e geométrica:

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = ... = \frac{1}{a_n} \Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n.$$

3.3 Desigualdade entre Médias Aritmética e Quadrática

Proposição 3: Dados $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais positivos tem-se:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}},$$

Ou seja,

$$m_a(a_1, a_2, ..., a_n) \leq m_q(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Além disso, a igualdade vale se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Demonstração: Sejam A e Q as médias aritmética e quadrática dos termos a_i, com $i \in \{1, 2, ..., n\}$ respectivamente.

Sabe-se que $(a_i - A)^2 \geq 0$. Desta forma, temos:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (a_i - A)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2A.\sum_{i=1}^{n} a_i + n.A^2 = nQ^2 - 2.A.n.A + nA^2 =$$
$$nQ^2 - nA^2 = n\,(Q^2 - A^2).$$

Portanto, temos $n\,(Q^2 - A^2) \geq 0$, o que resulta em $Q^2 \geq A^2$. Concluímos que $Q \geq A$.

E ainda, a igualdade vale se, e somente se, $\sum_{i=1}^{n} (a_i - A)^2 = 0$. Portanto, devemos ter, para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $a_i = A$. O que significa que $a_1 = a_2 = ... = a_n = A$.

3.4 Desigualdade das médias harmônica, geométrica, aritmética e quadrática

Teorema: (Desigualdade das Médias).

Para toda coleção de números reais positivos $a_1, a_2, ..., a_n$, verificam-se as seguintes desigualdades:

$$M_q \geq M_a \geq M_g \geq M_h.$$

Além disso, em cada caso a igualdade ocorre se, e somente se,

$$a_1 = a_2 = ... = a_n.$$

As desigualdades acima decorrem das proposições $(1), (2)$ e (3) provadas anteriormente.

Trata-se de um importante teorema matemático que nos fornece diversas aplicações em diferentes áreas e é uma excelente ferramenta na resolução de problemas.

Capítulo 4

Aplicações das Desigualdades das Médias na Resolução de Problemas

Segundo Polya (1995) "uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema". Mesmo que o problema seja modesto, mas se é desafiador e desperte as faculdades de invenção, quem o resolver gozará o triunfo da descoberta.

A desigualdade das médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática pode ser uma excelente ferramenta para resolução de problemas de otimização no ambiente algébrico, de funções reais, geométrico, isoperimétrico, entre outros.

Para destacar sua aplicabilidade, iremos apresentar diversos problemas, onde o uso das desigualdades facilita a resolução, tornando possível sua aplicação para alunos de nível médio e estudantes de olimpíadas. Desejamos instigar no aluno o gosto pela matemática, com problemas acessíveis e atrativos, mas desafiadores, conforme orientação de Polya (1995). Procura-se, sempre que possível, discutir problemas contextualizados para que o aluno perceba a matemática em situações cotidianas seguindo as orientações dos PCN Ensino Médio (2000).

Alguns problemas serão resolvidos de dois modos, utilizando conceitos de cálculo diferencial e integral e através da desigualdade das médias, a fim de evidenciar a facilidade de resolução pelo segundo método.

4.1 Problemas Algébricos

Nesta seção, iremos apresentar e resolver oito problemas exclusivamente algébricos que abordam desigualdades, todos atendendo às especificações determinadas pelo Teorema da Desigualdade das Médias. Iremos restringir as resoluções ao método que utiliza estas desigualdades, nosso objeto de estudo. A característica geral destes problemas é a necessidade da manipulação algébrica das expressões para que seja possível a aplicação da desigualdade.

Problema 1: $(ITA/2002)$ Mostre que:

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 > C_{8,4} \text{ com } x,y>0$$

Solução: Como, $x, y > 0$ então $\frac{x}{y} > 0$ e $\frac{y}{x} > 0$, logo podemos aplicar a desigualdade das médias aritmética e geométrica para os termos $\frac{x}{y}$ e $\frac{y}{x}$:

$$\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{y}.\frac{y}{x}} = 1,$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2,$$

Logo,

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2\right)^4 \geq (2+2)^4 = 256 > 70 = C_{8,4},$$

Problema 2: Se x, y e z são números positivos, qual o valor mínimo da expressão:

$$(x+y+z)\,.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right),$$

Solução 1: Usando a desigualdade $M_a \geq M_g$:

Temos:

$$(x+y+z)\,.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = 1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1 = \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+3.$$

Do problema 1, aplicando a desigualdade $M_a \geq M_g$, temos:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2, \frac{x}{z}+\frac{z}{x} \geq 2 \text{ e } \frac{y}{z}+\frac{z}{y} \geq 2.$$

Logo,

$$(x+y+z)\,.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+3 \geq 2+2+2+3 = 9.$$

O valor mínimo da expressão será 9 se, e somente se:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$$

$$\frac{x}{z} = \frac{z}{x} \Leftrightarrow x^2 = z^2 \Leftrightarrow x = z.$$

Portanto, se $x = y = z$, o valor mínimo será 9.

Solução 2: Usando a desigualdade $M_a \geq M_h$:

A escolha da ferramenta correta, pode simplificar muito a resolução do problema. Vejamos outra solução para esse problema.

Aplicando a desigualdade $M_a \geq M_h$:

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$$

$$(x+y+z)\,.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9.$$

E ainda, o valor mínimo será 9 se, e somente se, $x = y = z$

.

Problema 3: Se x, y e z > 0 prove que:

$$\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

Solução: Como, x, y e z > 0, podemos aplicar a desigualdade das médias aritmética e harmônica. Assim:

$$\frac{(x+y)+(y+z)+(z+x)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}}$$

$$\Rightarrow 2(x+y+z) \geq \frac{9}{\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}}$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right) \geq \frac{9}{x+y+z}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

E a igualdade vale se, e somente se, $x+y = y+z = z+x \Leftrightarrow x = y = z$.

Portanto, a desigualdade está provada.

Problema 4: Se a, b e c são inteiros positivos que satisfazem a condição $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} = 3$ prove que abc é um cubo perfeito.

Solução: Como a, b e c são inteiros positivos, podemos aplicar a desigualdade das médias aritmética e geométrica. Logo:

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}} \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3.$$

Como a igualdade só ocorre se, e somente se, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ e pelo enunciado $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} = 3$, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = 1.$$

E portanto $a = b = c$.

Logo, $a.b.c = a.a.a = a^3$, que é um cubo perfeito.

Problema 5: Prove que:

$$\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2.$$

Solução: Antes de iniciar a resolução, vamos reescrever o termo $\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}}$:

$$\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} = \frac{a^2+2+1}{\sqrt{a^2+2}} = \frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+2}} = \sqrt{a^2+2} + \frac{1}{\sqrt{a^2+2}}.$$

Reescrevendo a fração desta forma, identificamos a possibilidade de aplicação da desigualdade das médias aritmética e geométrica.

$$\frac{\sqrt{a^2+2}+\frac{1}{\sqrt{a^2+2}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{a^2+2}.\frac{1}{\sqrt{a^2+2}}} = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2+2} + \frac{1}{\sqrt{a^2+2}} \geq 2.$$

Temos ainda que:

$$\sqrt{a^2+2} + \frac{1}{\sqrt{a^2+2}} = 2 \Rightarrow \sqrt{a^2+2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+2}} \Rightarrow a^2+2 = 1 \Rightarrow a^2 = -1.$$

o que é um absurdo. Portanto, concluímos que:

$$\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2.$$

Problema 6: Mostre que para todo a, b e c reais positivos vale a desigualdade:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{9}{3+a+b+c}.$$

Solução: Como a, b e c são positivos, aplicaremos a desigualdade das médias aritmética e harmônica:

$$\frac{(a+1)+(b+1)+(c+1)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{9}{a+b+c+3}.$$

A igualdade vale se, e somente se, $a+1=b+1=c+1 \Leftrightarrow a=b=c$.

Portanto, a desigualdade está provada.

Problema 7: Sejam $x>0$ e $y>0$ números reais tais que $x+y=2$. Mostre que $x.y \leq 1$.

Solução: Aplicando a desigualdade das médias quadrática e aritmética aos termos x e y, temos

$$\sqrt{\tfrac{x^2+y^2}{2}} \geq \tfrac{x+y}{2}.$$

Como $x+y=2$, então

$$\sqrt{\tfrac{x^2+y^2}{2}} \geq \tfrac{2}{2}=1 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2.$$

Temos

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2.$$

E como $x+y=2$

$$x^2+y^2=2^2-2xy=4-2xy.$$

Assim,

$$x^2+y^2 \geq 2 \Rightarrow 4-2xy \geq 2 \Rightarrow 2xy \leq 2 \Rightarrow xy \leq 1.$$

E $xy=1$ se, e só se, $x=y=1$.

Problema 8: Prove que se $a+b=1$, onde a e b são números positivos:

$$\left(a+\tfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\tfrac{1}{b}\right)^2 \geq \tfrac{25}{2}.$$

Solução: Como a e b são números positivos, vamos aplicar a desigualdade das médias quadrática e aritmética:

$$\sqrt{\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2}} \geq \frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \left(a+\tfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\tfrac{1}{b}\right)^2 \geq \tfrac{1}{2}\left(a+\tfrac{1}{a}+b+\tfrac{1}{b}\right)^2.$$

Como $a+b=1$ e $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{a.b}$, temos:

$$\left(a+\tfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\tfrac{1}{b}\right)^2 \geq \tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{a.b}\right)^2.$$

Agora, pela desigualdade das médias aritmética e geométrica, temos:

$$a.b \leq \left(\tfrac{a+b}{2}\right)^2=\left(\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{a.b} \geq 4.$$

Logo,

$$\left(a+\tfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\tfrac{1}{b}\right)^2 \geq \tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{a.b}\right)^2 \geq \tfrac{1}{2}\left(1+4\right)^2 \geq \tfrac{25}{2}.$$

4.2 Problemas Geométricos

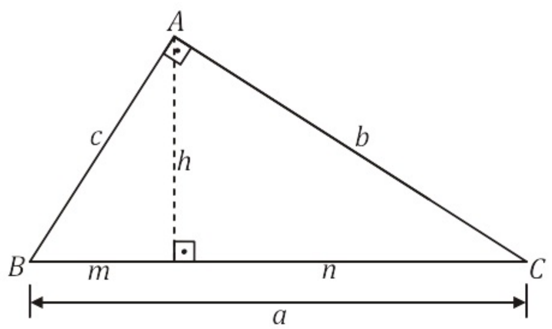
Nesta seção, iremos discutir problemas geométricos que abordam desigualdades das médias. Os problemas serão divididos em três subseções: geometria plana, espacial e analítica. Serão discutidos dois problemas de geometria plana, três de geometria espacial e quatro de geometria analítica. Para a resolução, faremos uso de teoremas adicionais bastante conhecidos de geometria como o teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos, área e perímetro de polígonos, volume e área de sólidos, entre outros. Vamos nos restringir às aplicações destes teoremas, sem suas demonstrações formais, mas estas podem ser encontradas em livros e disponíveis na internet.

4.2.1 Problemas de Geometria Plana

Problema 1: Prove que dado um triângulo retângulo qualquer, a altura relativa à hipotenusa é menor ou igual à metade da hipotenusa.

Solução: Seja o triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a. Sejam ainda, m a projeção do lado c sobre a hipotenusa e n a projeção do lado b sobre a hipotenusa, conforme figura abaixo:

Figura 4.1: Triângulo Retângulo



Temos $m + n = a$. Como todos os segmentos a, b, c, m e n são positivos, podemos aplicar a desigualdade das médias aritmética e geométrica, obtendo:

$$\sqrt{m.n} \leq \tfrac{m+n}{2}.$$

Pela semelhança de triângulos, obtemos a seguinte relação métrica no triângulo retângulo:

$$h^2 = m.n.$$

Substituindo esta relação na desigualdade das médias, temos:

$$\sqrt{m.n} \leq \tfrac{m+n}{2} \Rightarrow \sqrt{h^2} \leq \tfrac{m+n}{2} \Rightarrow h \leq \tfrac{m+n}{2} = \tfrac{a}{2}.$$

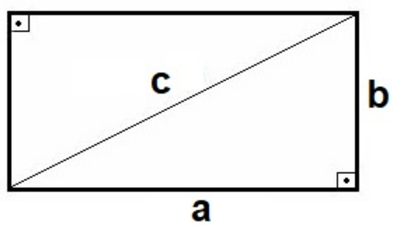
Portanto, a altura relativa à hipotenusa é menor ou igual à metade da hipotenusa.

Problema 2: De todos os retângulos com a mesma medida de diagonal, determine qual tem:

a) Maior perímetro.
b) Maior área.

Solução: a) Sejam a, b o comprimento e altura de um retângulo de diagonal c.

Figura 4.2: Retângulo com Diagonal c



O perímetro $P = 2a + 2b$. Como a, $b > 0$, aplicando a desigualdade das médias aritmética e quadrática, temos:

$$\tfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{\tfrac{a^2+b^2}{2}}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$. Assim:

$$\tfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{\tfrac{c^2}{2}} \Rightarrow \tfrac{a+b}{2} \leq \tfrac{c}{\sqrt{2}} \Rightarrow 4\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leq 4.\tfrac{c}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2(a+b) \leq 2\sqrt{2}c.$$

O perímetro máximo é $2\sqrt{2}c$ e ocorre se, e somente se $a = b$, ou seja:

$$2a^2 = c^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{c^2}{2} \Leftrightarrow a = \frac{c}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}c}{2} = b.$$

Portanto, de todos os retângulos com mesma diagonal c, o de maior perímetro é o quadrado de lado $\frac{\sqrt{2}c}{2}$.

b) A área será dada por $S = a.b$.

Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica, temos:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow c^2 \geq 2ab \Leftrightarrow \frac{c^2}{2} \geq ab = S.$$

A área máxima é $S = \frac{c^2}{2}$ e ocorre se, e somente se, $a = b = \frac{\sqrt{2}c}{2}$.

Portanto, de todos os retângulos com mesma diagonal c, o de maior área é o quadrado de lado $\frac{\sqrt{2}c}{2}$.

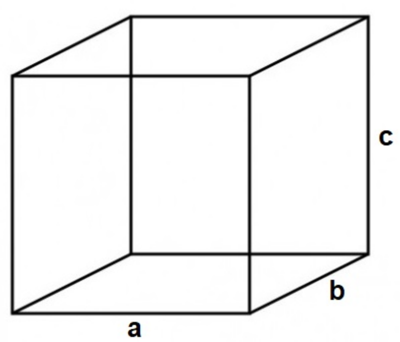
4.2.2 Problemas de Geometria Espacial

Problema 1: O volume de um paralelepípedo é 216 cm^3 e sua área total é 216 cm^2. Prove que o paralelepípedo é um cubo.

Solução: Seja um paralelepípedo com as seguintes dimensões:

Comprimento: a
Largura: b
Altura: c

Figura 4.3: Paralelepípedo



O volume V do paralelepípedo é dado por:

$$V = a.b.c = 216.$$

A área total do paralelepípedo é dada por:

$$A_t = 2.(ab + ac + bc) = 216 \Rightarrow ab + bc + ac = 108.$$

Aplicando a desigualdade das médias aritmética e harmônica, temos:

$$M_g \geq M_h \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3.abc}{ab+bc+ac} = \frac{3abc}{108} = \frac{abc}{36}$$

$$\Rightarrow 36 \geq \frac{abc}{\sqrt[3]{abc}} = (abc)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow abc \leq 6^3 = 216.$$

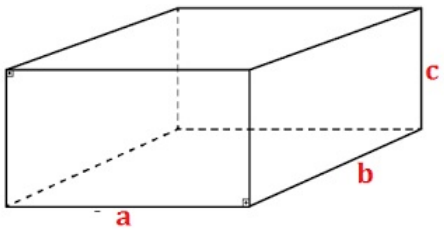
Mas como $V = abc = 216$, então a igualdade ocorre e se, e somente se, $a = b = c = 6$.

Sendo assim, o paralelepípedo é um cubo de aresta com medida 6.

Problema 2: Dado um paralelepípedo reto com a soma das medidas das arestas constantes, determine suas dimensões para que seu volume seja máximo.

Solução: Sejam a, b e c os comprimentos das arestas de um paralelepípedo reto, conforme figura abaixo.

Figura 4.4: Paralelepípedo Reto



O volume do paralelepípedo é dado por $V = a.b.c$.

Como as medidas a, b e c são positivas, vamos aplicar a desigualdade das médias aritmética e geométrica. Assim, temos:

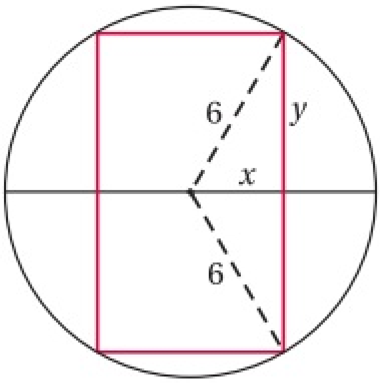
$$M_a \geq M_g \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow V = abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{3^3}.$$

Como, $a + b + c$ é constante, o volume máximo será $V = \frac{(a+b+c)^3}{3^3}$ e ocorrerá se, e somente se $a = b = c$.

Sendo assim, o paralelepípedo reto com maior volume será um cubo.

Problema 3: Encontre as dimensões do cilindro circular reto de maior área lateral que pode ser inscrito numa esfera de raio 6 m.

Figura 4.5: Cilindro Inscrito na Esfera



Solução: A figura representa a interseção do sólido com o plano que contém o eixo do cilindro, onde o raio da base do cilindro mede x metros e sua altura mede $2y$ metros.

A área lateral do cilindro será $A = 4\pi xy$ e, pelo Teorema de Pitágoras, aplicado ao triângulo retângulo de catetos medindo x e y e hipotenusa 6, temos $36 = x^2 + y^2$. Vamos aplicar a desigualdade das médias aritmética e geométrica aos termos x^2 e y^2.

$$18 = \frac{36}{2} = \frac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{x^2.y^2} = xy = \frac{A}{4\pi} \Rightarrow A \leq 72\pi.$$

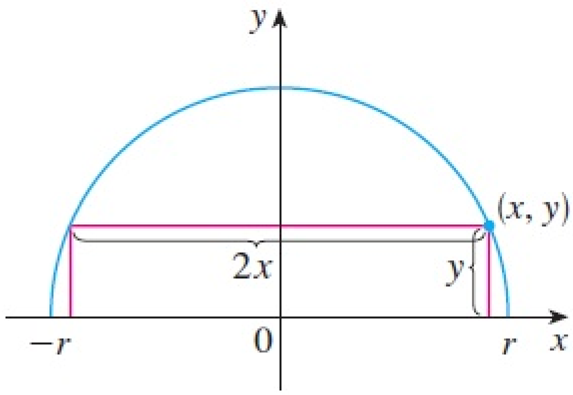
Portanto a área lateral do cilindro é menor do que ou igual a 72π e será igual se, e somente se, $x^2 = y^2$.

Substituindo na equação $36 = x^2 + y^2$, obtemos $x = y = 3\sqrt{2}$ metros, que são as dimensões do cilindro circular reto de maior área lateral inscrito na esfera.

4.2.3 Problemas de Geometria Analítica

Problema 1: Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um semicírculo de raio r.

Figura 4.6: Retângulo Inscrito no Semicírculo



Solução: Considere o semicírculo $x^2 + y^2 = r^2$, com $y \geq 0$, de centro na origem. Logo, o retângulo inscrito deverá possuir dois vértices sobre o semicírculo.

Seja (x, y) o vértice que está no primeiro quadrante. Logo, o retângulo possui lados medindo y e $2x$ e sua área será $A = 2xy$.

Como (x, y) pertence ao círculo, temos $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Assim:

$$A = 2x\sqrt{r^2 - x^2} \text{ e } A^2 = 4x^2\left(r^2 - x^2\right).$$

Quando A é máximo, A^2 é máximo. Logo, vamos aplicar a desigualdade das médias aritmética e geométrica entre os termos x^2 e $r^2 - x^2$.

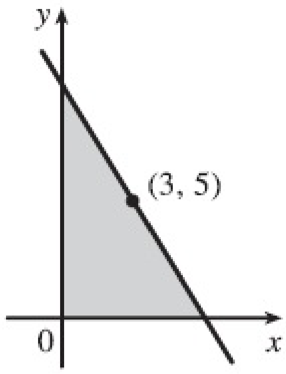
$$\tfrac{x^2+r^2-x^2}{2} \geq \sqrt{x^2\left(r^2 - x^2\right)} \Rightarrow \tfrac{r^4}{4} \geq x^2\left(r^2 - x^2\right) \Rightarrow r^4 \geq 4x^2\left(r^2 - x^2\right) = A^2.$$

A igualdade $A^2 = r^4$ ou $A = r^2$ ocorre se, e somente se, $x^2 = r^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

Como $0 \leq x = \frac{r}{\sqrt{2}} \leq r$, a área máxima do retângulo inscrito é $A = r^2$.

Problema 2: Encontre uma equação da reta que passa pelo ponto $(3, 5)$ e que delimita a menor área do primeiro quadrante.

Figura 4.7: Reta que Passa por (3,5)



Solução: Seja m o coeficiente angular da reta que passa por $(3, 5)$, onde $m < 0$.

A equação da reta é $y - 5 = m\,(x - 3) \Rightarrow y = mx + (5 - 3m)$.

A interseção da reta com o eixo OY é $y = 5 - 3m$ e a interseção com o eixo OX é $x = -\frac{5}{m} + 3$.

Assim, a área do triângulo formado pela reta e os eixos OX e OY é dada por:

$$A(m) = \tfrac{1}{2}\,(5 - 3m)\left(-\tfrac{5}{m} + 3\right) = 15 - \tfrac{25}{2m} - \tfrac{9m}{2}.$$

Como $m < 0$, $-\frac{25}{2m}$ e $-\frac{9m}{2}$ são positivos. Portanto, vamos aplicar a desigualdade das médias aos termos $-\frac{25}{2m}$ e $-\frac{9m}{2}$.

$$\frac{-\frac{25}{2m} - \frac{9m}{2}}{2} \geq \sqrt{\left(-\tfrac{25}{2m}\right) \cdot \left(-\tfrac{9m}{2}\right)} = \sqrt{\tfrac{225}{4}} = \tfrac{15}{2} \Rightarrow -\tfrac{25}{2m} - \tfrac{9m}{2} \geq 15 \Rightarrow 15 - \tfrac{25}{2m} - \tfrac{9m}{2} \geq 30 \Rightarrow$$

$$A \geq 30.$$

A área mínima será igual a 30 se, e somente se, $-\frac{25}{2m} = -\frac{9m}{2} \Leftrightarrow m^2 = \frac{25}{9} \Leftrightarrow$

$$m = -\tfrac{5}{3}.$$

Logo, a equação da reta é $y = -\frac{5}{3}x + 10$.

Problema 3: Qual é o maior valor que a soma das coordenadas de um ponto, pertencente à circunferência $x^2 + y^2 = 50$ pode assumir?

Solução: Seja um ponto $P = (x, y)$ pertencente a circunferência $x^2 + y^2 = 50$. Como queremos a maior soma para os termos x e y, devemos considerar o ponto P pertencente ao primeiro quadrante, pois x e y serão positivos.

Assim, podemos aplicar a desigualdade das médias aritmética e quadrática aos termos x e y:

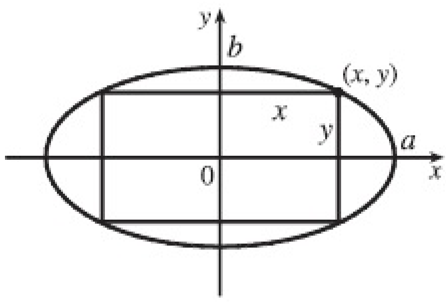
$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = 5 \Rightarrow x+y \leq 10.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $x = y = 5$. Logo, $P = (5,5)$.

Portanto, a maior soma das coordenadas de um ponto pertencente à circunferência dada é 10.

Problema 4: Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito na elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Figura 4.8: Retângulo Inscrito na Elipse



Solução: Seja (x_0, y_0) um ponto como vértice do retângulo. Como (x_0, y_0) pertence a elipse, temos:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Aplicando a desigualdade das médias geométrica e quadrática aos termos $\frac{x_0}{a}$ e $\frac{y_0}{b}$:

$$\sqrt{\frac{x_0}{a} \cdot \frac{y_0}{b}} \leq \sqrt{\frac{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2x_0y_0 \leq ab.$$

A área do retângulo será $A = (2x_0)(2y_0) = 4x_0y_0 \Rightarrow A \leq 2ab$.

A área máxima será igual a $2ab$ se, e somente se, $\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b}$.

Assim, $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x_0^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{a\sqrt{2}}{2} < a$ e $y_0 = \frac{b\sqrt{2}}{2} < b$.

Portanto, a área do maior retângulo é $2ab$.

4.3 Máximos e Mínimos de Funções

Nesta seção, resolveremos seis problemas que tratam da otimização de funções contínuas com variáveis reais positivas. Esta restrição visa atender a exigência da desigualdade das médias, aplicada apenas para termos positivos. Trabalharemos os exercícios de duas formas, através da desigualdade das médias e através da teoria de cálculo diferencial e integral, aplicando o teste da derivada primeira, a fim de otimizar funções contínuas. Nos limitaremos a aplicação do teste da derivada, sem defini-lo formalmente já que o objetivo desta pesquisa é tornar possível a abordagem de exercícios sobre otimização para alunos de nível médio através do método da desigualdade das médias. Porém, como iremos restringir o domínio das funções aos reais positivos, faz-se necessário o conhecimento de cálculo para a resolução de problemas que não possuam essas restrições.

Problema 1: Se $x \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, prove que:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Primeira Solução: Pelo teste da derivada primeira

Temos $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0$.

Logo, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

Temos $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Portanto, $x = 1$ é ponto crítico da função.

Se $x < 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2} > 1 \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} < 0$. Logo, a função f é decrescente se $x < 1$.
Se $x > 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2} < 1 \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} > 0$. Logo, a função f é crescente se $x > 1$.

Portanto, pelo teste da derivada primeira, $x = 1$ é ponto de mínimo da função.

Logo, $f(1) = 1 + 1 = 2$ é valor mínimo da função e assim, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Segunda Solução: Pela desigualdade das médias

Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica, temos:

$$\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x.\frac{1}{x}} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

E a igualdade só ocorre se, e somente se $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$.

Problema 2: Para $x > 0$ qual o valor mínimo de:

$$y = x^2 + \tfrac{1}{x}.$$

Primeira Solução: Pelo teste da derivada primeira

Obtendo os pontos críticos da função contínua:

$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$.

Temos $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2} = x^3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Portanto, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ é ponto crítico da função.

Se $x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow 2x^3 < 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3-1}{x^2} < 0$. Logo, a função f é decrescente se $x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Se $x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow 2x^3 > 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3-1}{x^2} > 0$. Logo, a função f é crescente se $x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Portanto, pelo teste da derivada primeira, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ é ponto de mínimo da função.

Logo, $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{1+2}{\sqrt[3]{4}} = 3.\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ é valor mínimo da função e assim:

$$x^2 + \tfrac{1}{x} \geq 3.\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}.$$

Segunda Solução: Pela desigualdade das médias

Vamos reescrever a expressão:

$$x^2 + \tfrac{1}{x} = x^2 + \tfrac{1}{2x} + \tfrac{1}{2x}.$$

Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica:

$$\frac{x^2+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}}{3} \geq \sqrt[3]{x^2.\tfrac{1}{2x}.\tfrac{1}{2x}} \Rightarrow x^2 + \tfrac{1}{x} \geq 3.\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}.$$

E a igualdade só ocorre se, e somente se $x^2 = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Problema 3: Qual é o valor mínimo da função $f(x) = 6x + \frac{24}{x^2}$, quando $x > 0$?

Primeira Solução: Pelo teste da derivada primeira

Calculando a primeira derivada e os pontos críticos da função:

$f'(x) = 6 - \frac{48}{x^3}$.

$f'(x) = 6 - \frac{48}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{48}{x^3} = 6 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$.

Se $x < 2 \Rightarrow \frac{48}{x^3} < 6 \Rightarrow f'(x) = 6 - \frac{48}{x^3} < 0$. Logo, a função f é decrescente se $x < 2$.
Se $x > 2 \Rightarrow \frac{48}{x^3} > 6 \Rightarrow f'(x) = 6 - \frac{48}{x^3} > 0$. Logo, a função f é crescente se $x > 2$.

Portanto, pelo teste da derivada primeira, $x = 2$ é ponto de mínimo da função.

Logo, $f(2) = 12 + \frac{24}{4} = 18$ é valor mínimo da função e assim:

$$6x + \frac{24}{x^2} \geq 18.$$

Segunda Solução: Pela desigualdade das médias

Vamos reescrever a função:

$$f(x) = 6x + \frac{24}{x^2} = 3x + 3x + \frac{24}{x^2}.$$

Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica:

$$\frac{3x+3x+\frac{24}{x^2}}{3} \geq \sqrt[3]{3x.3x.\frac{24}{x^2}} \Rightarrow 6x + \frac{24}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{216} \Rightarrow 6x + \frac{24}{x^2} \geq 18.$$

E a igualdade ocorre se, e somente se $3x = \frac{24}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$.

Problema 4: Ache o máximo da função:

$$f(x) = x^2\,(3 - x), \text{ com } 0 \leq x \leq 3.$$

Primeira Solução: Pelo teste da derivada primeira

$$f(x) = x^2\,(3 - x) = 3x^2 - x^3.$$

Calculando a primeira derivada, temos:

$f'(x) = -3x^2 + 6x.$

Sendo assim, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x\,(-x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

Como $0 \leq x \leq 3$, se $0 < x < 2 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6x > 0$. Logo, a função f é crescente se $0 \leq x \leq 3$.

Se $2 < x \leq 3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6x < 0$. Logo, a função f é decrescente se $2 < x \leq 3$.

Portanto, pelo teste da derivada primeira, $x = 2$ é ponto de máximo da função.

Então $f(2) = 12 - 8 = 4$ é o valor máximo da função, com $0 \leq x \leq 3$.

Segunda Solução: Pela desigualdade das médias

Reescrevendo a expressão:

$$y = x^2\,(3-x) = \tfrac{1}{2}x^2\,(6-2x)\,.$$

Para aplicar a desigualdade das médias entre os termos x, x e $(6-2x)$, devemos ter $x \geq 0$ e $6 - 2x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 3$.

Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica:

$$M_a \geq M_g \Leftrightarrow \tfrac{x+x+6-2x}{3} \geq \sqrt[3]{x^2\,(6-2x)} \Leftrightarrow 2 \geq \sqrt[3]{2x^2\,(3-x)} \Leftrightarrow 4 \geq x^2\,(3-x).$$

E a igualdade ocorre se, e somente se $x = 6 - 2x \Leftrightarrow x = 2$. Como $2 \in [0, 3]$, o valor máximo da função é $y = 4$ quando $x = 2$.

Problema 5: Determine o máximo da função:

$$f(x) = x^4\,(1-2x^2),\text{ com } 0 \leq x \leq \tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

Primeira Solução: Pelo teste da derivada primeira

Temos: $x^4\,(1-2x^2) = x^4 - 2x^6$. Calculando a primeira derivada:

$f'(x) = 4x^3 - 12x^5 = 4x^3\,(1-3x^2)$.

E $f'(x) = 4x^3\,(1-3x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Como $0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, devemos ter apenas como pontos críticos $x = 0$ e $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Se $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3x^2 < 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3(1-3x^2) > 0$. Logo, a função f é crescente se $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Se $\frac{\sqrt{3}}{3} < x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 3x^2 > 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3(1-3x^2) < 0$. Logo, a função f é decrescente se $\frac{\sqrt{3}}{3} < x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, pelo teste da derivada primeira, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ é ponto de máximo da função.

Logo, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{9}\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{27}$ é valor máximo da função.

Segunda Solução: Pela desigualdade das médias

Reescrevendo a função:

$$f(x) = x^2.x^2.\,(1-2x^2).$$

Para aplicar a desigualdade das médias entre os termos x^2, x^2 e $(1-2x^2)$, devemos ter $x^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ e $1-2x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pela interseção dos intervalos, devemos ter $0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$M_a \geq M_g \Leftrightarrow \left(\frac{x^2+x^2+1-2x^2}{3}\right)^3 \geq x^2.x^2.\,(1-2x^2) \Leftrightarrow \frac{1}{27} \geq x^4\,(1-2x^2).$$

E a igualdade ocorre se, e somente se $x^2 = 1-2x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Como $0 \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\frac{\sqrt{3}}{3} < 0$, o valor máximo da função é $y = \frac{1}{27}$ quando $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Problema 6: Qual é o valor máximo da função:

$$f(x) = sen(x) + cos(x), \text{ com } 0 < x < \tfrac{\pi}{2}.$$

Primeira Solução: Pelo teste da derivada primeira

Calculando a primeira derivada da função, temos:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow sen(x) = cos(x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$, logo $x = \frac{\pi}{4}$ é ponto crítico da função.

Se $x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow cos(x) > sen(x) \Rightarrow f'(x) = cos(x) - sen(x) > 0$. Logo, a função f é crescente se $x < \frac{\pi}{4}$.

Se $x > \frac{\pi}{4} \Rightarrow cos(x) < sen(x) \Rightarrow f'(x) = cos(x) - sen(x) < 0$. Logo, a função f é decrescente se $x > \frac{\pi}{4}$.

Portanto, pelo teste da derivada primeira, $x = \frac{\pi}{4}$ é ponto de máximo da função.

E $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ é o valor máximo da função.

Segunda Solução: Pela desigualdade das médias

Como o domínio da função é $0 < x < \frac{\pi}{2}$, temos $sen(x) > 0$ e $cos(x) > 0$. Assim, vamos aplicar a desigualdade das médias aritmética e quadrática aos termos $sen(x)$ e $cos(x)$.

$$\frac{sen(x)+cos(x)}{2} \leq \sqrt{\frac{sen^2(x)+cos^2(x))}{2}} \Rightarrow sen(x) + cos(x) \leq 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

E a igualdade ocorre se, e somente se, $sen(x) = cos(x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

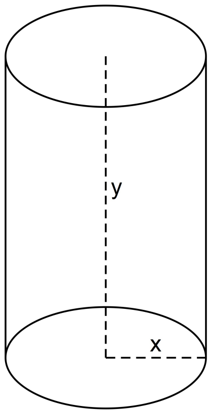
Logo, o valor máximo da função é $\sqrt{2}$.

4.4 Problemas de Otimização Diversos

Nesta seção, apresentamos diversos problemas contextualizados envolvendo otimização de grandezas. Nestes problemas, procuramos solucionar questões práticas e interessantes, mostrando a beleza da matemática e sua aplicabilidade em situações cotidianas. Os problemas serão resolvidos com o uso das desigualdades das médias para evidenciar a simplicidade da aplicação.

Problema 1: Uma certa indústria fabrica produtos enlatados e deseja minimizar seus custos na produção das latas cilíndricas que armazenam os produtos. Considerando que o volume V da lata é constante, quais devem ser as dimensões da lata para que o custo de produção seja mínimo?

Figura 4.9: Lata Cilíndrica



Solução: Considerando o eixo coordenado disposto conforme Figura 4.9, o raio da base do cilindro será x e a altura será y, com $x > 0$ e $y > 0$. Sendo assim, o volume do cilindro será dado por:

$$V = \pi.x^2.y \Rightarrow y = \tfrac{V}{\pi.x^2}.$$

Já a área total da lata cilíndrica, considerando a tampa, será dada por:

$$A = 2\pi.x.y + 2\pi.x^2 = 2\pi x^2 + \tfrac{2V}{x} = 2\pi x^2 + \tfrac{V}{x} + \tfrac{V}{x}.$$

Como $x > 0$ e $V > 0$, aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica aos termos $2\pi x^2$, $\frac{V}{x}$ e $\frac{V}{x}$:

$$M_a \geq M_g \Leftrightarrow \tfrac{2\pi x^2+\frac{V}{x}+\frac{V}{x}}{3} \geq \sqrt[3]{2\pi x^2.\tfrac{V}{x}.\tfrac{V}{x}} \Leftrightarrow \tfrac{A}{3} \geq \sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

A área será mínima se, e somente se:

$$2\pi x^2 = \tfrac{V}{x} \Leftrightarrow x^3 = \tfrac{V}{2\pi} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\tfrac{V}{2\pi}}.$$

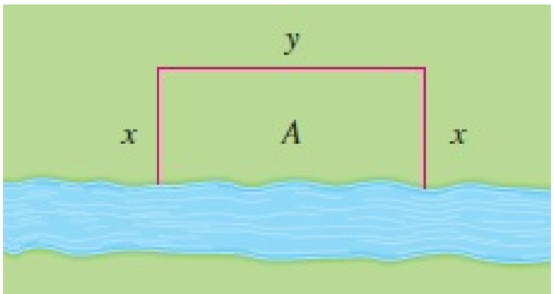
Ou seja, a área é mínima quando:

$$y = \frac{V}{\pi.\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{\tfrac{V}{\pi}}.2^{\frac{2}{3}} = 2\sqrt[3]{\tfrac{V}{2\pi}} = 2x.$$

Logo, o cilindro de área mínima é o equilátero onde $y = 2x$.

Problema 2: Um fazendeiro tem 1 200 m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem a maior área?

Figura 4.10: Campo Retangular



Fonte: (STEWART, 2013, p. 294)

Solução: Sejam x e y a profundidade e a largura do retângulo (em metros). Assim, a área do terreno será dada em termos de x e y por:

$$A = x.y.$$

Temos ainda que o comprimento total da cerca é de 1200 m. Assim:

$$2x + y = 1200 \Rightarrow y = 1200 - 2x.$$

Logo, $A = x\,(1200 - 2x)$, onde $0 \leq x \leq 600$ para que A seja positivo.

Considerando o intervalo de x, os termos $2x$ e $1200 - 2x$ são positivos. Podemos, então, aplicar a desigualdade das médias aritmética e geométrica destes termos, obtendo:

$$\tfrac{2x+1200-2x}{2} \geq \sqrt{2x\,(1200-2x)} \Rightarrow 600 \geq \sqrt{2x\,(1200-2x)} \Rightarrow 360000 \geq 2A$$
$$\Rightarrow A \leq 180000.$$

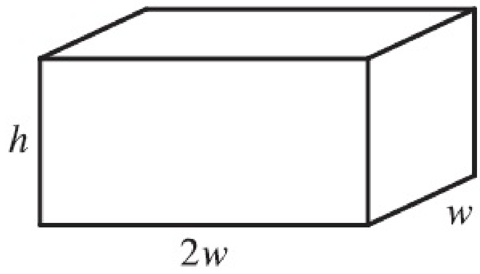
A igualdade ocorre se, e somente se, $2x = 1200 - 2x \Leftrightarrow 4x = 1200 \Leftrightarrow x = 300$.

E assim, temos $y = 600$.

Portanto, as dimensões do campo são $x = 300$ e $y = 600$ com área máxima de $180.000m^2$.

Problema 3: Um contêiner para estocagem, em forma de paralelepípedo, com uma tampa aberta deve ter um volume de 10 m^3. O comprimento de sua base é o dobro da largura. O material para a base custa R$10,00 por metro quadrado. O material para os lados custa R$6,00 por metro quadrado. Encontre o custo dos materiais para o mais barato desses contêineres.

Figura 4.11: Contêiner



Solução: Dadas, as dimensões do paralelepípedo w, $2w$ e h, o seu volume é determinado por:

$$V = 2w.w.h = 10 \Rightarrow h = \frac{5}{w^2}.$$

O custo dos materiais será:

$$10.\left(2w^2\right) + 6\left[2\left(2wh\right) + 2\left(hw\right)\right] = 20w^2 + 36wh.$$

Logo,

$$C(w) = 20w^2 + 36w\left(\frac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \frac{180}{w}.$$

Para verificar o custo mínimo, vamos calcular a desigualdade das médias aritmética e geométrica entre os termos $20w^2$, $\frac{90}{w}$ e $\frac{90}{w}$:

$$\frac{20w^2+\frac{90}{w}+\frac{90}{w}}{3} \geq \sqrt[3]{20w^2.\frac{90}{w}.\frac{90}{w}} \Rightarrow \frac{C}{3} \geq \sqrt[3]{162000} \Rightarrow C \geq 3\sqrt[3]{162000} \cong 163,54.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $20w^2 = \frac{90}{w} \Leftrightarrow w^3 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow w = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$.

Desta forma, o custo mínimo dos materiais é, aproximadamente, R\$163,54.

Problema 4: Um copo de papel em forma de cone é feito de maneira a conter 27 cm^3 de água. Ache a altura e o raio do copo que usa a menor quantidade possível de papel.

Figura 4.12: Copo em Forma de Cone

Solução: O volume V e a área lateral S do cone com raio r e altura h são dados por:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ e } S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}.$$

Considere $A = S^2$. Quando A é mínimo, S é mínimo, assim vamos minimizar A.

Sabendo que $A = S^2$ e $V = 27$, temos: $\frac{1}{3}\pi r^2 h = 27 \Rightarrow r^2 = \frac{81}{\pi h}$.

Logo,

$$A = \pi^2 r^2 \left(r^2 + h^2\right) = \pi^2 \left(\frac{81}{\pi h}\right)\left(\frac{81}{\pi h} + h^2\right) = \frac{81^2}{h^2} + 81\pi h.$$

Vamos calcular a desigualdade das médias aritmética e geométrica para os termos $\frac{81^2}{h^2}$, $\frac{81\pi h}{2}$ e $\frac{81\pi h}{2}$, todos positivos.

$$\frac{A}{3} = \frac{\frac{81^2}{h^2} + \frac{81\pi h}{2} + \frac{81\pi h}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{81^2}{h^2} . \frac{81\pi h}{2} . \frac{81\pi h}{2}} = 81\sqrt[3]{\frac{81\pi^2}{4}} \Rightarrow A \geq 243\sqrt[3]{\frac{81\pi^2}{4}}.$$

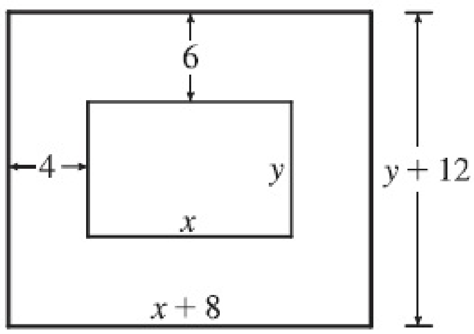
E a igualdade ocorre, se e somente se, $\frac{81^2}{h^2} = \frac{81\pi h}{2} \Leftrightarrow \frac{162}{\pi} = h^3 \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{\frac{162}{\pi}} = 3\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \cong 3,722$.

Como $r^2 = \frac{81}{\pi h} \Rightarrow r^2 = \frac{81}{\pi . 3\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}} = \frac{27}{\sqrt[3]{6\pi^2}} \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6\pi^2}} \cong 2,632$.

Portanto, a área é mínima para o cone de raio $r = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6\pi^2}}$ e altura $h = 3\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$.

Problema 5: As margens superiores e inferiores de um pôster têm 6 cm e cada margem lateral tem 4 cm. Se a área do material impresso no pôster é de 384 cm^2, encontre as dimensões do pôster com a menor área.

Figura 4.13: Pôster



Solução: Temos $x.y = 384 \Rightarrow y = \frac{384}{x}$.

A área total é $A = (8+x)\left(12+\frac{384}{x}\right) = 12\left(40+x+\frac{256}{x}\right)$.

Para obtermos a área mínima, vamos calcular a desigualdade das médias aritmética e geométrica dos termos x e $\frac{256}{x}$, todos positivos.

$\frac{x+\frac{256}{x}}{2} \geq \sqrt{x.\frac{256}{x}} \Rightarrow x+\frac{256}{x} \geq 32 \Rightarrow 40+x+\frac{256}{x} \geq 72 \Rightarrow 12\left(40+x+\frac{256}{x}\right) \geq 864.$

Logo, $A \geq 864$.

E teremos a área mínima igual a 864 se, e somente se, $x = \frac{256}{x} \Leftrightarrow x^2 = 256 \Leftrightarrow x = 16$ e portanto, $y = \frac{384}{16} = 24$.

Portanto, as dimensões do pôster são $24cm$ e $36cm$.

4.5 Problemas de Olimpíadas

Nesta seção iremos trabalhar com problemas de olimpíadas que podem ser resolvidos pela desigualdade das médias. Estes problemas possuem nível de dificuldade superior aos trabalhados anteriormente, portanto podem ser propostos aos alunos de ensino médio como desafios.

Problema 1: (Baltic-way) Prove que se a, b, c e d são números reais positivos, então temos:

$$\frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a} \geq 4.$$

Solução:

Aplicando a desigualdade das médias aritmética e harmônica:

$$\frac{\frac{a+c}{a+b}+\frac{c+a}{c+d}}{2} \geq \frac{2}{\frac{a+b}{a+c}+\frac{c+d}{c+a}} \Rightarrow \frac{a+c}{a+b} + \frac{c+a}{c+d} \geq \frac{4(a+c)}{a+b+c+d} \text{ (i)}$$

De maneira análoga, pela desigualdade das médias:

$$\frac{\frac{b+d}{b+c}+\frac{d+b}{d+a}}{2} \geq \frac{2}{\frac{b+c}{b+d}+\frac{d+a}{d+b}} \Rightarrow \frac{b+d}{b+c} + \frac{d+b}{d+a} \geq \frac{4(b+d)}{a+b+c+d} \text{ (ii)}$$

Somando (i) e (ii), temos:

$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a}\geq 4.$$

Problema 2: (China-90) Quais pontos (x, y) satisfazem a equação abaixo?

$$\log\left(x^3+\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{1}{9}\right)=\log(x)+\log(y).$$

Solução:

$$\log\left(x^3+\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{1}{9}\right)=\log(x)+\log(y)\Rightarrow\log\left(x^3+\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{1}{9}\right)=\log(x.y)\Rightarrow x^3+\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{1}{9}=x.y.$$

Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica:

$$x.y=x^3+\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{1}{9}\geq 3\sqrt[3]{x^3.\tfrac{1}{3}y^3.\tfrac{1}{9}}\Rightarrow x^3+\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{1}{9}\geq xy.$$

A igualdade ocorre se e somente se, $x^3=\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{9}\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ e $y=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Logo, o ponto que satisfaz a igualdade é $(\frac{1}{\sqrt[3]{9}},\frac{1}{\sqrt[3]{3}})$.

Problema 3: (Novo México) Encontre o termo mínimo da sequência:

$$\sqrt{\tfrac{7}{6}}+\sqrt{\tfrac{96}{7}},\sqrt{\tfrac{8}{6}}+\sqrt{\tfrac{96}{8}},\sqrt{\tfrac{9}{6}}+\sqrt{\tfrac{96}{9}},...,\sqrt{\tfrac{95}{6}}+\sqrt{\tfrac{96}{95}}.$$

Solução: O termo geral desta sequência é: $\sqrt{\frac{n}{6}}+\sqrt{\frac{96}{n}}$, com $7\leq n\leq 95$.

Como todos os termos são positivos, aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica:

$$\sqrt{\tfrac{n}{6}}+\sqrt{\tfrac{96}{n}}\geq 2.\sqrt{\sqrt{\tfrac{n}{6}}.\sqrt{\tfrac{96}{n}}}=4.$$

E a igualdade ocorre se, e somente se, $\sqrt{\frac{n}{6}}=\sqrt{\frac{96}{n}}\Rightarrow n=\sqrt{576}=24.$

Portanto, o termo mínimo da sequência é: $\sqrt{\frac{24}{6}}+\sqrt{\frac{96}{24}}$.

Problema 4: (Bielorussia-99) Se a, b e c são números reais positivos e $a^2+b^2+c^2=3$ prove que:

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac}\geq\frac{3}{2}.$$

Solução: Vamos aplicar a desigualdade das médias aritmética e harmônica:

$$\frac{(1+ab)+(1+bc)+(1+ac)}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac}}\Rightarrow(3+ab+bc+ac).\left(\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac}\right)\geq 9\Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geq \frac{9}{ab+bc+ac+3}.$$

Sabe-se que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ e, por hipótese, $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ segue que $ab + ac + bc \leq 3$ e assim, reescrevemos a expressão:

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geq \frac{9}{ab+bc+ac+3}.$$

Da seguinte forma:

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geq \frac{9}{ab+bc+ac+3} \geq \frac{9}{3+3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

Ou seja,

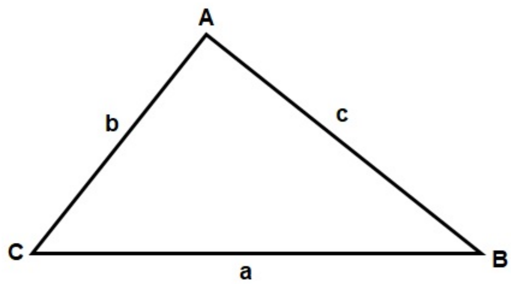
$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geq \frac{3}{2}.$$

4.6 Problemas Isoperimétricos

O termo isoperimétrico vem de isoperimetria que significa “com perímetro igual”. Sendo assim, isoperimetria, na Matemática, é o estudo de figuras geométricas que possuem mesmo perímetro. Um importante resultado da isoperimetria é de que entre todos os polígonos de n lados de mesmo perímetro, o que tem maior área é o regular. Nesta seção, não propomos a demonstração formal desse resultado, mas buscamos explorar a aplicação da desigualdade das médias na resolução de problemas isoperimétricos envolvendo triângulo, retângulo e losango.

Problema 1: De todos os triângulos com perímetro fixo L, qual é o de maior área?

Figura 4.14: Triângulo ABC



Solução: Seja um triângulo ABC, conforme Figura 4.14, de perímetro $L = a+b+c$ fixo e semiperímetro $p = \frac{L}{2}$. Pela fórmula de Heron, a área do triângulo ABC é dada por:

$$A = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

Como queremos maximizar a área com perímetro constante, devemos maximizar o termo $(p-a)(p-b)(p-c)$. Como os termos $(p-a),(p-b)$ e $(p-c)$ são positivos, vamos aplicar a desigualdade das médias aritmética e geométrica:

$$\frac{p-a+p-b+p-c}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow \frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow$$

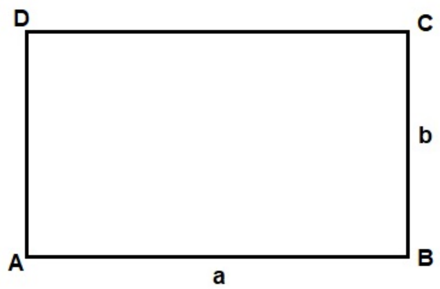
$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq (p-a)(p-b)(p-c) \Rightarrow \frac{p^4}{3^3} \geq p(p-a)(p-b)(p-c) = A^2 \Rightarrow \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \geq A$$
$$\Rightarrow A \leq \frac{L^2}{12\sqrt{3}}.$$

Sendo assim, a área máxima é $A = \frac{L^2}{12\sqrt{3}}$ e ocorre se, e somente se, $a = b = c$.

Portanto, de todos os triângulos com mesmo perímetro o de área máxima é o regular (triângulo equilátero).

Problema 2: De todos os retângulos com perímetro fixo L, qual é o de maior área?

Figura 4.15: Retângulo ABCD



Solução: Seja um retângulo de lados adjacentes a e b. Seu perímetro $L = 2a + 2b$ é fixo. E sua área $A = a.b$. Como $a > 0$ e $b > 0$, vamos aplicar a desigualdade das médias aritmética e geométrica:

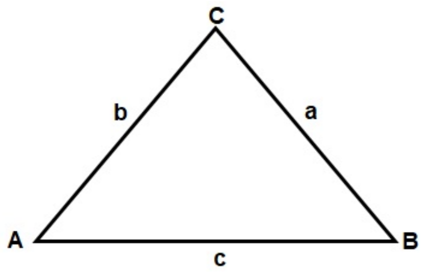
$$\frac{2a+2b}{2} \geq \sqrt{4ab} \Rightarrow \frac{L}{2} \geq 2\sqrt{A} \Rightarrow A \leq \frac{L^2}{16}.$$

Portando, a área máxima é $A = \frac{L^2}{16}$ se, e somente se, $a = b$.

Portanto, de todos os retângulos com mesmo perímetro o que possui área máxima é o regular (quadrado).

Problema 3: De todos os triângulos de base fixa $\overline{AB}$ com perímetro fixo L, qual é o de maior área?

Figura 4.16: Triângulo de Base Fixa



Solução: Seja um triângulo ABC, conforme Figura 4.16, de perímetro $L = a+b+c$ fixo e semiperímetro $p = \frac{L}{2}$. Pela fórmula de Heron, a área do triângulo ABC é dada por:

$$A = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

Como queremos maximizar a área com base $AB = c$ e perímetro constantes, devemos maximizar o termo $(p-a)\,(p-b)$. Como os termos $(p-a)$ e $(p-b)$ são positivos, vamos aplicar a desigualdade das médias aritmética e geométrica:

$$\frac{p-b+p-a}{2} \geq \sqrt{(p-b)\,(p-a)} \Rightarrow \frac{\frac{2(a+b+c)}{2}-b-a}{2} \geq \sqrt{(p-b)\,(p-a)}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{2} \geq \sqrt{(p-b)\,(p-a)} \Rightarrow \frac{c^2}{4} \geq (p-b)\,(p-a)$$

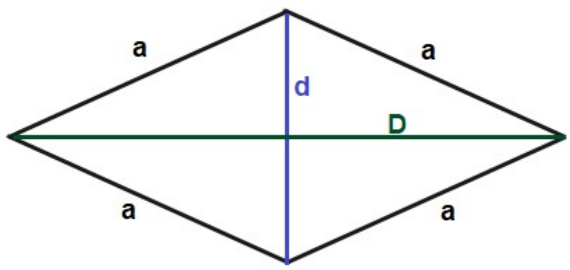
$$\Rightarrow \frac{c^2p(p-c)}{4} \geq p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c) = A^2 \Rightarrow A \leq \frac{c}{2}\sqrt{p\,(p-c)}.$$

Logo, a área máxima é $A = \frac{c}{2}\sqrt{p\,(p-c)}$ se, e somente se, $a = b$.

Portanto, de todos os triângulos com base AB fixa e perímetro L, o de maior área é o isósceles.

Problema 4: De todos os losangos com perímetro fixo P, qual é o de maior área?

Figura 4.17: Losango



Solução: Seja um losango de lado medindo a e diagonais medindo d (a menor) e D (a maior). Seu perímetro $P = 4a$. A sua área é dada por $A = \frac{D.d}{2}$.

Como as diagonais se encontram ao meio e pelo Teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow D^2 + d^2 = 4a^2 = \frac{P^2}{4}.$$

Vamos aplicar a desigualdade das médias aos termos D^2 e d^2.

$$\frac{D^2+d^2}{2} \geq \sqrt{D^2.d^2} \Rightarrow \frac{p^2}{8} \geq \sqrt{4A^2} = 2A \Rightarrow A \leq \frac{p^2}{16}.$$

Portanto, a área máxima é $A = \frac{p^2}{16}$ se, e somente se $D = d$. Logo, o losango é um quadrado.

Assim, de todos os losangos com perímetro fixo o de maior área é um quadrado.

Capítulo 5

Aproximação de Raiz Quadrada pela Desigualdade das Médias

Vimos ao longo dos capítulos anteriores diversas aplicações para as desigualdades das médias, especialmente na resolução de problemas de otimização. O uso dessa ferramenta matemática possibilita discussões destes problemas com alunos do ensino médio além das funções quadráticas. Porém, as desigualdades das médias não têm aplicação restrita a otimização e podemos utilizá-las em situações diversas.

Carneiro (2001) apresentou uma proposta interessante para o uso das desigualdades das médias no cálculo de aproximação de raízes quadradas. A seguir, enunciamos e faremos uso do método, além de justificar a sua validade.

Para o método, serão utilizadas as desigualdades entre as médias harmônica, geométrica e quadrática. Lembramos que para os termos $a > 0$ e $b > 0$:

$$M_h = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b},\ M_g = \sqrt{ab} \text{ e } M_a = \frac{a+b}{2}.$$

Além disso, usamos as duas propriedades a seguir:

1. $M_h \leq M_g \leq M_a$ com a igualdade ocorrendo se os termos a e b são iguais.

2. $\sqrt{M_h M_a} = M_g$.

A demonstração para o item 1 já foi realizada no Capítulo 3. E a prova da propriedade 2 para dois termos a e b é direta:

$$\sqrt{M_h M_a} = \sqrt{\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)} = \sqrt{ab} = M_g.$$

Vamos usar estas propriedades para obter uma aproximação para $\sqrt{5}$.

Sabemos que $5 = 1.5$, logo, pela propriedade 1:

$$\frac{2.1.5}{1+5} \leq \sqrt{1.5} \leq \frac{1+5}{2} \Rightarrow \frac{10}{6} \leq \sqrt{5} \leq 3 \Rightarrow 1,666... \leq \sqrt{5} \leq 3.$$

Vamos repetir o processo para obter uma aproximação ainda melhor para $\sqrt{5}$. Fazendo $5 = \frac{10}{6}.3$:

$$\frac{2.\frac{10}{6}.3}{\frac{10}{6}+3} \leq \sqrt{\frac{10}{6}.3} \leq \frac{\frac{10}{6}+3}{2} \Rightarrow \frac{15}{7} \leq \sqrt{5} \leq \frac{7}{3}.$$

Aplicando o processo sucessivamente obtemos:

$$2,23404 \cong \frac{105}{47} \leq \sqrt{5} \leq \frac{47}{21} \cong 2,23809$$

$$2,23606 \cong \frac{4935}{2207} \leq \sqrt{5} \leq \frac{2207}{987} \cong 2,23606$$

O último resultado é uma aproximação impressionante, já que realizamos o procedimento apenas três vezes.

Para justificar os passos acima, sejam H_n e A_n as médias harmônica e aritmética na iteração n. Temos:

$$H_n = \frac{2H_{n-1}A_{n-1}}{H_{n-1}+A_{n-1}} \text{ e } A_n = \frac{H_{n-1}+A_{n-1}}{2}, \text{ para } n = 1, 2, ...$$

Para calcular a aproximação da raiz quadrada de um número $N > 1$ onde $N = a.b$, com $0 < a < b$, pelas propriedades das médias apresentadas, para todo n:

$$H_n < \sqrt{H_n A_n} = \sqrt{H_{n-1}A_{n-1}} = ... = \sqrt{ab} = \sqrt{N} < A_n.$$

Assim,

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{1+\frac{H_{n-1}}{A_{n-1}}}{2} < \frac{1+1}{2} = 1 \Rightarrow A_n < A_{n-1}.$$

E

$$\frac{H_n}{H_{n-1}} = \frac{A_{n-1}}{A_n} > 1 \Rightarrow H_n > H_{n-1}.$$

Logo, a sequência crescente formada pelos H_n é limitada superiormente por $\sqrt{N}$ e converge para um número real p. Já a sequência decrescente formada pelos A_n é limitada inferiormente por $\sqrt{N}$ e converge para um número real q. Então:

$$A_n - H_n = \frac{H_{n-1}+A_{n-1}}{2} - \frac{2H_{n-1}A_{n-1}}{H_{n-1}+A_{n-1}} = \frac{(H_{n-1}+A_{n-1})^2 - 4H_{n-1}A_{n-1}}{2(H_{n-1}+A_{n-1})} = \frac{(A_{n-1}-H_{n-1})^2}{4A_n}.$$

Usando limite obtemos: $q - p = \frac{(q-p)^2}{4q}$.

Suponha que $p \neq q \Rightarrow q - p = 4q$, logo $3q = -p$ o que é impossível para p e q positivos. Assim, $p = q = \sqrt{N}$.

Portanto, as sequências H_n e A_n são aproximações de $\sqrt{N}$, por falta e excesso respectivamente, cada vez melhores.

Capítulo 6

Considerações finais

Ao longo desta pesquisa, procuramos aprofundar os estudos das médias mais conhecidas, analisando suas propriedades e características. Além disso, apresentamos a desigualdade das médias como uma ferramenta prática e eficiente na resolução de problemas de otimização. Nos preocupamos, ao longo do trabalho de sempre buscar relações nos conceitos abordados com situações cotidianas, de forma atraente, e que despertasse o interesse dos alunos pelo aprofundamento dos estudos dos conceitos e da própria matemática. Mesmo mantendo um bom grau de rigor, trabalhamos com uma linguagem compatível aos alunos do ensino médio, tornando possível o estudo de otimização aos alunos que não conhecem Cálculo Diferencial.

Mediante análise de outros trabalhos voltados para este tema, buscamos diferenciar esta pesquisa com o estudo de diversas propriedades das médias. Além da contextualização das médias através de problemas interessantes, muitos de concursos, intensificamos a análise das médias, com destaque para a aritmética e harmônica, analisando o perfil de problemas onde elas são aplicadas, suas relações com grandezas proporcionais e o princípio da casa pombos como consequência de uma propriedade da média aritmética. Além disso, apresentamos uma grande variedade de questões possíveis de serem resolvidas com a desigualdade das médias, separadas em grupos de acordo com sua natureza algébrica, de otimização, isoperimétricos, etc.

Uma dificuldade percebida na resolução dos problemas é a escolha das médias e dos termos para os quais a desigualdade será aplicada. Pretende-se com o estudo sistematizado desta ferramenta, que os alunos aprimorem a habilidade de manipulação de expressões algébricas e que se desafiem na resolução de outros problemas por esse método. Procura-se despertar a curiosidade e a vontade de aprender dos alunos.

Além de estimular os alunos, pretendemos conscientizar professores da importância das médias. O professor precisa, antes de tudo, compreender que média vai muito além da aritmética e é necessário adequar suas práticas para que o aluno consiga relacionar o conceito a situações cotidianas, explorando problemas contextualizados. Portanto, esperamos que este trabalho tenha cumprido seu objetivo que é trabalhar médias e desigualdade das médias de forma acessível aos alunos de ensino médio.

Como não pretendemos que este trabalho seja cansativo, mas sim estimulante e desafiador, propomos ao leitor que deseja dar continuidade ao estudo aqui iniciado, que complemente seus estudos pelas referências bibliográficas listadas na pesquisa. Destacamos especialmente as obras de Lima et. al (2009) que apresenta as médias, demonstrações para as desigualdades e exercícios de aplicação, a obra de Stewart (2013) que apesar de ser sobre cálculo diferencial, apresenta diversos problemas de otimização que podem estimular o uso do método e o livro de Gomes C. (2010) que foi elaborado como ferramenta de preparação para olimpíadas, possuindo um capítulo dedicado a desigualdade das médias e com muitos problemas resolvidos por ela.

Como proposta de continuidade da pesquisa, pretende-se elaborar uma sequência didática abrangendo todo o conteúdo aqui abordado que deverá ser aplicada a alunos de diferentes séries. Em seguida, deverá ser feito um levantamento dos dados e sistematização dos resultados para averiguar a eficácia da proposta e a qualidade da aprendizagem dos alunos ao utilizar a desigualdade das médias na resolução de problemas de otimização.

Referências Bibliográficas

ANDREESCU, T.; MUSHKAROV O.; STOYANOV, L. *Geometric Problems on Maxima and Minima*. 1ª ed. Boston, EUA: Birkhäuser Basel, 2006

ARAUJO, F. Médias e problemas de otimização. *Revista Professor de Matemática*, n. 76, São Paulo, p. 27-29, 2011

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018

BRASIL. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*: Matemática. Brasília: SEF/MEC, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais + para o Ensino Médio: Matemática*. Brasília: SEF/MEC, 2002.

CARNEIRO, J. Raiz Quadrada Utilizando Médias. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 45, p. 21-28, 2001

CARVALHO, J. I. F. *Média Aritmética nos Livros Didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental*. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, 20111

CAZORLA, I. M. *A relação entre a habilidade viso-pictórica e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos*. Campinas, 335p., 2002. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2002.

CAZORLA, I.M.; CASTRO, F.C. *O Papel da Estatística na Leitura do Mundo*: o letramento estatístico. Publicitário UEPG C. Hum.; C. Soc.; Ling.; Letras e Artes. Ponta Grossa, p. 45-53, 2008.

D'ALEXANDRIE, P. *La collection mathématique III.* Ed. Paul Ver Eecke. Paris: Desclée de Brouwer, 1933

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática.* Campinas, Papirus (Coleção Perspectiva em Educação Matemática), 2001.

DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicações.* 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. v. 3.

FERNANDES, S. da S. *A contextualização no ensino da Matemática:* um estudo com alunos e professores do Ensino Fundamental da Rede Particular de Ensino do Distrito Federal. Brasília: UCB, 2011, p.1-16.

FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Mathematical Circles*: Mathematical world. EUA: American Mathematical Society, 1996

FONTE, A. *Médias, desigualdades e problemas de otimização.* 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Pernambuco

GARCIA, V. C. *Fundamentação teórica para as perguntas primárias: O que é matemática? Por que ensinar? Como se ensina e como se aprende?* Porto Alegre, v. 32, n. 2, p. 176 – 184, 2009

GOMES C., GOMES, J. *Tópicos de Matemática: Olimpíadas – ITA – IME.* Vol. 1. Rio Grande do Norte: Vestseller, 2010

GOUVEIA, R. Desvio Padrão. *Toda Matéria*, 2018. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/desvio-padrao>. Acesso em: 10 dez. 2018

KAZARINOFF, N. *Geometric Inequalities (New Mathematical Library).* 1ª ed. EUA: American Mathematical Society, 1975

LAVOIE, P.; GATUSSO, L. *An Historical Exploration of the Conception of Average.* In Proceeding of the Fifth International Conference on Teaching Statistics. Singapour: International Statistical Institute. p. 1051 – 1058. 1998

LIMA, E. et al. *Matemática para o Ensino Médio - volume 2.* 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009

LIMA, E. et al. *A Matemática no Ensino Médio – volume 4.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

LIMA, E. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias.* 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012

LIMA, J. et al. *O princípio das gavetas de Dirichlet.* Encontro de Ensino, Pesquisa E Extensão, Presidente Prudente. Anais: Colloquium Exactarum, vol. 6, n. Especial, p. 11-19, 2014

MANFRINO, R.; ORTEGA, J.; DELGADO, R. *Inequalities* - A Mathematical Olympiad Approach. Boston, EUA: Birkhäuser, 2009

MATIKA, Gráfico de grandezas diretamente proporcionais. *Matika*, 2018. Disponível em: <https://matika.com.br/grandezas-diretamente-e-inversamente-proporcionais/grafico-de-grandezas-diretamente-proporcionais>. Acesso em: 05 nov. 2018

MATIKA, Gráfico de grandezas inversamente proporcionais. *Matika*, 2018. Disponível em: <https://matika.com.br/grandezas-diretamente-e-inversamente-proporcionais/grafico-de-grandezas-inversamente-proporcionais>. Acesso em: 05 nov. 2018

MATIKA, Média harmônica. *Matika*, 2018. Disponível em: <https://matika.com.br/media/media-harmonica>. Acesso em: 10 dez. 2018

MUNDO EDUCAÇÃO. Exercícios sobre Média Ponderada. 2018.
Disponível em <https://exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-media-ponderada.htm>. Acesso em: 05 nov. 2018

NIVEN, I. *Maxima and Minima Without Calculus.* 6ª ed. Cambridge, EUA: Cambridge University Press, 1981

OLIVEIRA, K.; FERNANDEZ, A. *Iniciação à Matemática*: um curso com problemas e soluções. 2ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012

ONUCHIC, L. R. *A Resolução de Problemas na Educação Matemática*: Onde Estamos e Para Onde Iremos?. In: IV Jornada Nacional DE Educação Matemática, Passo Fundo, 2012.

ONUCHIC, L. R.; JUNIOR, L. C. L. *Ensino e Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas Como Prática Sociointeracionista.* Bolema, Rio Claro (SP), v. 29, n. 53, p. 955-978, 2015

PAIVA, M. *Matemática: Paiva.* 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015. v. 2.

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas.* Rio de janeiro: Interciência, 1995

RECH, R. *Resolvendo Problemas de Otimização no Ensino Médio.* Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/705-4.pdf Acesso em: 01 mar. 2019.

RIGODANZO, M. *Desigualdade das Médias e a Resolução de Problemas Geométricos.* 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Santa Maria, Rio Grande do Sul

RUSSELL, S.; MOKROS, J. *Children's Concepts of Average and Representativeness* Journal for Research in Mathematics Education, 26(1), p. 20-39, 1995

RUSSELL, S.; MOKROS, J. *Research into practive:* What do children understand about avarage? Edited by Donald L. Chambers. Teaching Children Mathematics, V. 2, n. 6, p. 360-364, 1996.

STELLA, C. A. *Um estudo sobre o conceito de média com alunos do Ensino Médio.* São Paulo, 2003. 181 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2003

STEWART, J. *Cálculo - volume I.* Tradução de EZ2 Translate. 7ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013

THOMAZ, T.C. *Não gostar de Matemática: que fenômeno é este?* Cadernos de Educação/

UFPel, Pelotas, n. 12, 1999.

TIKHOMIROV, V. *Stories About Maxima And Minima*: Mathematical world. Vol 1. EUA: American Mathematical Society, 1990