UNIVERSIDADE FEDERAL
DO ESPÍRITO SANTO

JOSE CARLOS THOMPSON DA SILVA

UM ESTUDO DE COMBINATÓRIA COM ALUNOS DE 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Vitória

2019

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

Centro de Educação

Programa de Pós-Graduação em Educação

JOSE CARLOS THOMPSON DA SILVA

UM ESTUDO DE COMBINATÓRIA COM ALUNOS DE 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Tese de doutorado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação/CE/UFES, na área de Educação e Linguagens: Matemática do programa de doutorado, sob a orientação da professora Doutora Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner para obtenção do título de doutor em Educação.

Vitória

2019

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

S586e

Silva, Jose Carlos Thompson da, 1982-
Um estudo de combinatória com alunos de 5º ano do ensino fundamental / Jose Carlos Thompson da Silva. - 2019.
345 f.

Orientadora: Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner.
Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Educação.

1. Educação matemática. 2. Combinatória. 3. Raciocínio combinatório. 4. Resolução de problemas. 5. Anos iniciais do ensino fundamental. I. Santos-Wagner, Vânia Maria Pereira dos. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Educação. III. Título.

CDU: 37

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

JOSÉ CARLOS THOMPSON DA SILVA

UM ESTUDO DE COMBINATÓRIA COM ALUNOS DE 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Educação.

Aprovada em 25 de fevereiro de 2019.

COMISSÃO EXAMINADORA

Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner

Professora Doutora Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Universidade Federal do Espírito Santo

Professor Doutor Erineu Foerste
Universidade Federal do Espírito Santo

Professor Doutor Hiran Pinel
Universidade Federal do Espírito Santo

Professora Doutora Sandra Aparecida Fraga da Silva
Instituto Federal do Espírito Santo

Professor Doutor Luciano Lessa Lorenzoni
Instituto Federal do Espírito Santo

Celi A E Lopes

Professora Doutora Celi Espasandin Lopes
Universidade Estadual de Campinas

A Deus, fonte de todo conhecimento!

A Denise, pela compreensão e pela paciência em minhas inquietações!

Ao Calebe, Júlia e Carla por entenderem minhas ausências!

Deus, meu Deus
Tudo está tão difícil pra mim
Deus, meu Deus
Muitos me perguntam: Onde tu estás?
Dentro de mim
Minha alma se abateu
Mas Tua mão contudo me escondeu
Em Tua presença, oh Deus

Quando eu chorar, vou me lembrar
Que até aqui, Tua mão me sustentou
Digo a minha alma espera em Deus
Pois ainda O louvarei, eu O louvarei

Eu te louvarei, em meio a provação, em meio as lutas.
Eu te louvarei, eu te louvarei, venha o que vier.
Eu te louvarei, eu te louvarei
Louvarei, teu nome Senhor.

(BRUNA KARLA)

AGRADECIMENTOS

A Deus que me deu o dom da vida.

A minha esposa Denise e aos meus filhos pela compreensão, pelo apoio, paciência e atenção em todos os momentos de estudos.

A minha família pelo incentivo.

À Prof.ª Dra. Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner, por ter acreditado e pela nova amizade que fica para a vida, pela paciência e dedicação à orientação, leitura, correção e revisões deste trabalho.

Aos professores do programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo.

Aos funcionários do programa de Pós-Graduação pela atenção.

Ao professor Dr. Hiran Pinel, ao Prof. Dr. Erineu Foerste, à Prof.ª Dra. Regina Helena Silva Simões e ao Prof. Dr. Luciano Lessa Lorenzoni, à Prof.ª Dra. Sandra Aparecida Fraga da Silva e à Prof.ª Dra. Celi Espasandin Lopes pelas contribuições e atenção dadas a este trabalho.

Ao Prof. Dr. Geraldo Bull pelas contribuições em leituras de parte deste trabalho.

Às colegas participantes do Grupo de Estudo em Educação Matemática do Espírito Santo (GEEM-ES) pelo apoio e aprendizados semanais: Adriana Piumatti de Oliveira, Bernadete Verônica Hoffmann, Giseli Lipaus, Josiane Vieira Rangel, Kezia Fagundes Aguilar Correa, Leiva Bernardino, Regiane Ferreira da Silva, Regiane Lira Duarte Siqueira, Jaqueline Magalhães Brum, Zleinda Schultz, Alexsandra da Silva Senna e Dayane de Souza.

Aos colegas do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo, em especial à Simone Damm Zogaib e Thiarla Xavier Dal-Cin Zanon, pelos aprendizados, pelos trabalhos colaborativos e pelos laços de amizade criados e que ficarão mesmo com o distanciamento.

Aos professores e funcionários do Instituto Federal do Espírito Santo, pelo apoio e incentivo durante a realização do doutorado, em especial aos professores Alexandre Maia, Ana Paula, Leonardo Muniz e Lígia Arantes pelas leituras de partes deste trabalho.

À professora Bernadete que abriu as portas de sua sala de aula para que esta pesquisa fosse realizada. Aos alunos que de forma tão respeitosa e carinhosa colaboraram com este estudo. À diretora, pedagoga e todos os funcionários da escola que nos atenderam gentilmente.

RESUMO

Esta tese consiste em um estudo com foco em educação matemática. A pesquisa ocorreu em uma turma de quinto ano do ensino fundamental de uma escola pública municipal de Vitória, Espírito Santo. A pergunta central de pesquisa foi: Que estratégias alunos do quinto ano utilizam para resolver e elaborar tarefas que envolvem o raciocínio combinatório? Fundamentou-se no modelo combinatório implícito, sob a ótica da resolução de problemas. Utilizou-se de uma perspectiva qualitativa, interpretativa e naturalista como abordagem metodológica. Para a produção de dados em 2018, foi realizado um experimento de ensino com sete tarefas com essa turma de quinto ano. Para a escolha das tarefas, procedeu-se a um estudo documental de uma coleção de livros didáticos e de pesquisas de mestrado e doutorado com foco em combinatória. Paralelamente, fez-se uma pesquisa de caráter histórico-bibliográfico de combinatória. Procedeu-se à análise de dados de 15 alunos da turma no experimento de ensino. Os resultados mostraram que os alunos usaram estratégias diferenciadas de forma não sistemática e sistemática. Concluiu-se que era necessário trabalhar de forma gradual e explorar problemas de mesma estrutura de raciocínio combinatório. Nesse contexto, foi necessário fazer perguntas intermediárias que auxiliassem na compreensão do enunciado e chamassem a atenção dos alunos quanto aos parâmetros estabelecidos. Defendemos, nesta tese, que alunos do quinto ano do ensino fundamental participantes desta pesquisa usam estratégias de resolução de problemas que envolvem o raciocínio combinatório. Entretanto, esse raciocínio precisa ser explorado e abordado de modo integrado e intencional com outros tópicos ou conceitos matemáticos. Dessa forma, é possível contribuir para que alunos reconheçam e ampliem essas estratégias nos procedimentos de enumerações e contagem. E além disso, que reconheçam as relações entre as tarefas que envolvem a mesma estrutura do ponto de vista do raciocínio combinatório e sejam capazes de elaborar e resolver outras tarefas semelhantes.

Palavras-chave: Educação matemática. Combinatória. Raciocínio combinatório. Resolução de problemas. Anos iniciais do ensino fundamental.

ABSTRACT

This thesis consists of a study focusing on mathematics education. The field research work took place in a fifth grade class of a municipal public school in Vitória, Espírito Santo. The central research question was: What strategies do fifth-graders use to solve and elaborate tasks involving combinatorial reasoning? It was based on the implicit combinatorial model, from the point of view of problem solving. It used a qualitative, interpretative and naturalistic perspective as methodological approach. In order to collect and produce data in 2018, a teaching experiment with seven tasks was carried out with this fifth grade class. For the choice of tasks for the teaching experiment, it was done a documentary study of a collection of didactic books and of masters and doctoral studies with a combinatorial focus. At the same time, it was done a research of historical-bibliographic character of combinatorial. Data collected and produced from 15 students in the class in the teaching experiment were analyzed. The results showed that the students used differentiated strategies in a non-systematic and systematic way. It was concluded that it was necessary to work gradually and to explore problems of the same structure of combinatorial reasoning. In this context, it was necessary to ask intermediate questions that would aid in the comprehension of the statement and would draw the students' attention to the established parameters. We defend, in this thesis, that fifth year elementary students participating in this research use problem solving strategies that involve combinatorial reasoning. However, this reasoning needs to be explored and approached in an integrated and intentional way with other mathematical topics or concepts. In this way, it is possible to contribute to the students recognizing and amplifying these strategies in enumeration and counting procedures. In addition, they recognize the relationships between tasks involving the same structure from the point of view of combinatorial reasoning and are able to elaborating and solving similar ones.

Keywords: Mathematics education. Combinatorics. Combinatory reasoning. Problem solving. Early years of elementary school.

Lista de figuras

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. UM CAMINHAR ATÉ O FENÔMENO[1] DE INTERESSE

> [...] *somos como somos em congruência com nosso meio e que nosso meio é como é em congruência conosco*, e quando esta congruência se perde, não somos mais.
> (Maturana, 2002, p. 63)

1.1 Percurso

Neste capítulo, apresento algumas lembranças do ensino de raciocínio combinatório[2] ao longo de minha[3] vida escolar (desde os anos iniciais até a pós-graduação) que influenciaram em minha formação como professor e pesquisador dessa temática. Embora a palavra combinatória e os estudos sobre esse assunto só tenham aparecido na minha formação escolar no ensino médio, hoje percebo que as ideias que envolvem esse importante tema estão presentes em várias atividades que realizei. Nos anos iniciais do ensino fundamental, os professores trabalharam com as operações fundamentais: adição, subtração, multiplicação e divisão. Também me recordo de estudos com frações, números decimais e algumas figuras geométricas, porém, em nenhum momento, os docentes abordaram as relações desses conteúdos com a combinatória. Entretanto, me lembro de brincadeiras e outras situações que envolviam procedimentos de escolha, de contagem e outros que aparecem ao resolver tarefas de combinatória. Por exemplo, me recordo que era comum na hora do recreio brincar de cantigas de roda em que tínhamos que selecionar pessoas para dançar, brincadeiras envolvendo formação de equipes,

---

[1] O termo fenômeno é utilizado por nós com base nas perspectivas sobre o conhecimento e métodos de pesquisa de ROMBERG (1992). Segue a referência do texto original: Perspectives on scholarship and research methods. In: Grouws, D. A. (Ed.) Handbook of research on mathematics teaching and learning (p.49-64). NCTM, New York: Simon & Schuster, 1992.

[2] Forma de pensar, raciocinar quando um aluno resolver tarefas matemáticas (problemas, atividades, questões, exercícios) que envolvem agrupamentos, ordenações, escolhas de elementos, partições ou decomposições de números, entre outras características. Aprofundamos tal conceito no capítulo de fundamentação teórica.

[3] Ao longo de todo o trabalho, foi utilizada a primeira pessoa do plural em relação a situações vividas, reflexões ou decisões tomadas em conjunto pelo autor e sua orientadora e em alguns momentos por reflexões e pesquisas realizadas em parceria com as colegas de doutorado Thiarla Xavier Dal Cin Zanon e Simone Damm Zogaib. Experiências pessoais que se referem exclusivamente ao autor foram tratadas na primeira pessoa do singular.

competições que envolviam salto em altura, salto em distância, disputas entre times de futebol ou voleibol e verificar quem ficava como primeiro, segundo ou terceiro colocados, entre outras tarefas. Após o trabalho no ensino médio, estudos de mestrado e doutorado com foco em combinatória, observo que essas atividades experimentadas por mim na escola ou na rua na infância envolvem ideias de selecionar, ordenar, enumerar, agrupar e fazer contagem. Constato que essas ideias são fundamentais no processo de resolução de problemas/tarefas de combinatória e serão discutidas ao longo desta tese.

Já nos anos finais do ensino fundamental, me recordo de outros assuntos estudados em matemática, como: divisores e múltiplos de um número, potenciação, radiciação, porcentagem, expressões numéricas, equações e funções do primeiro e do segundo grau, polinômios, trigonometria no triângulo retângulo e geometria plana. Entretanto, não me lembro de nenhum professor ter ressaltado que tivéssemos estudado algo de combinatória[4]. Hoje, com o aprofundamento de meus estudos, vejo que o raciocínio combinatório envolve procedimentos de contagem que se valem de conceitos desses tópicos matemáticos estudados nos anos finais. Por exemplo: quando queremos fazer associações entre elementos de um conjunto e de outro; quando calculamos o número de diagonais de um polígono; e quando queremos saber quantos múltiplos de um número há em um determinado conjunto numérico. Além disso, percebo que ideias de combinatória estão presentes na arte, em construções de mosaicos e em outras tarefas que realizei no ensino fundamental. Mas meus professores não mencionaram essas relações.

Já no ensino médio, fiz o curso de habilitação para o exercício do magistério. Nesta etapa, os conteúdos matemáticos com maior ênfase dada pelos professores foram estudos com gráficos, tabelas e porcentagens, adição, subtração, multiplicação, números decimais, frações, divisores e múltiplos de um número, expressões numéricas, potenciação, radiciação e geometria plana. Porém, quando cursava o terceiro ano do curso, solicitei que os professores ensinassem conteúdos de matemática do ensino médio que fossem cobrados

[4] Parte da matemática discreta que estuda os conjuntos discretos, as configurações e transformações que podem ser obtidas de operações realizadas com seus elementos. No capítulo de fundamentação, trazemos uma discussão mais aprofundada desse assunto.

em vestibulares. Daí em diante, o professor de matemática trabalhou com matrizes, determinantes, sistemas lineares, sequências, progressões aritméticas e progressões geométricas. Em 1999, ainda cursando o terceiro ano do magistério, fiz o vestibular da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES) para o curso de Matemática. Fiz este exame no intuito de investigar meus conhecimentos, e vi que, em matemática, tive mais dificuldade nas questões de combinatória.

No quarto ano do curso de magistério, estudei trigonometria no triângulo retângulo, lei dos senos e dos cossenos e algumas operações trigonométricas. Ao final do ano, colegas do curso e eu solicitamos ao professor de matemática que explicasse conceitos de combinatória e binômio de Newton, pois esses eram assuntos cobrados em vestibulares. Então, em poucas aulas que restavam para findar o ano letivo, o professor falou sobre as fórmulas de arranjos, permutações e combinações simples, dando alguns exemplos. Na sequência, explicou o binômio de Newton, mas não houve um aprofundamento do assunto, e minha dedicação aos estudos de combinatória continuou após a conclusão do curso de magistério. Mesmo no pré-vestibular, permaneciam as dúvidas de quando deveria usar a fórmula de arranjo, combinação ou permutação, para tentar resolver questões de vestibulares. Talvez esse fato tenha sido por que o conteúdo foi trabalhado em blocos de temas, para depois apresentar uma lista de questões com diferentes situações.

Durante minha graduação, na licenciatura em Matemática, realizada na UFES, de 2003 a 2006, a combinatória foi utilizada como uma ferramenta para o cálculo de probabilidades na disciplina de Estatística, mas não houve um aprofundamento desse assunto. Recordo-me de que, para obter a solução de diferentes exercícios, recorria à combinatória, principalmente para solucionar problemas de álgebra ou questões que envolviam a teoria das probabilidades estudadas em Estatística[5].

Embora tenha começado a trabalhar com alunos dos anos iniciais desde 2000, não me recordo de que, naquela época, esse assunto era tratado em sala de aula com esse público escolar. Meu maior desafio começou em 2004,

---

[5] Em álgebra, a combinatória apareceu ao estudarmos a propriedade dos números inteiros. Para certas demonstrações, recorríamos a expressões binomiais. Em cálculo, usamos expressões binominais para demonstrar a regra da derivada da potência com expoente natural.

quando comecei a lecionar para turmas do ensino médio e tive de estudar mais detalhadamente o conteúdo de combinatória e probabilidades. Minha preocupação era conceituar e diferenciar as situações, além de saber estratégias de resolução que ajudassem na compreensão dos problemas. Agora percebo que durante esses meus estudos para preparar aulas eu queria obter um entendimento instrumental e um entendimento relacional (SKEMP, 1976) dos conceitos estudados em combinatória.

Assim, comecei em 2004 a ensinar o conteúdo de combinatória no ensino médio com o livro Matemática Fundamental (2.º grau, volume único) de Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr. (1994). Além de ser o mais usado pelos professores na época, esse também foi o livro de ensino médio em que estudei para os vestibulares da UFES. Ao trabalhar com alunos nesse nível, notei que eles tinham dificuldades de entender os conceitos e diferenciar os casos de arranjos e permutações, além de não compreender o uso das fórmulas. Apenas nos estudos de doutorado tive contato com o texto clássico de Skemp (1976) sobre entendimento instrumental e relacional. Conforme Skemp (1976) afirmava os dois entendimentos são necessários e se complementam nos processos de ensino e aprendizagem de matemática. De acordo com as ideias deste autor, um entendimento instrumental de conceitos de combinatória envolve saber as fórmulas e identificar ideias e modelos de alguns problemas/tarefas exemplificados em aulas e livros. Já segundo Skemp (1976) entendimento relacional de combinatória envolve saber quando usar determinada fórmula de combinatória e saber por que esta fórmula é adequada e saber como se chega nesta fórmula. Além disso, um entendimento relacional permite que o indivíduo que o possui perceba relações, conexões entre conceitos de combinatória e outros conceitos matemáticos.

No início, minhas aulas no ensino médio eram demonstrativas com exemplos e aplicação de fórmulas. Ao longo da carreira, fui buscando alternativas diferenciadas para ensinar esse conteúdo e tentando usar estratégias que ajudassem os alunos a compreender os conceitos e resolver os problemas. Conversava com colegas da área sobre o tema combinatória, mas eram unânimes em dizer que esse era um assunto difícil até mesmo para eles, pois tinham dificuldades de resolver questões desse conteúdo. Incomodava-me essa problemática relacionada à dificuldade de compreender os conceitos de combinatória e ensinar estratégias adequadas de resolução utilizada pelos alunos, pois nem sempre correspondiam aos conceitos envolvidos na estrutura do problema.

Por todos os motivos já citados, quando fui aprovado pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (Educimat) do instituto Federal do Espírito Santo (IFES) *campus* Vitória em agosto de 2012, dediquei-me a investigar os conhecimentos desse conteúdo que eram evidenciados por licenciandos na formação inicial de professores de matemática[6] (SILVA, 2014).

No mestrado, a pesquisa foi orientada pela professora doutora Sandra Aparecida Fraga da Silva[7]. Os sujeitos do estudo foram licenciandos em Matemática inseridos no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (Pibid). Durante a pesquisa, esses licenciandos em Matemática apresentaram dificuldades de compreender o uso de símbolos, códigos, bem como de identificar, classificar e compreender os conceitos de combinatória em diferentes situações de resolução de problemas. Vimos que o ensino de combinatória que os licenciandos tiveram no ensino médio e na graduação foi com exemplos e listas de questões para resolver. Ou seja, eles tiveram um ensino que propiciava apenas um entendimento instrumental de combinatória (SKEMP, 1976). Os licenciandos também deixaram claro que além do livro didático, eles não tiveram contato com outros materiais que os auxiliassem na aprendizagem e em estratégias de ensino. Uma das contribuições da pesquisa de mestrado foi provocar alguns diálogos, discussões, pensamentos e reflexões nos licenciandos sobre combinatória quando pensavam em um jogo envolvendo esses conceitos. Acredito que, estes futuros professores de matemática adquiriram e construíram parte de um conhecimento pedagógico desse conteúdo (SHULMAN, 1986).

Quando olho para a minha formação na educação básica e na graduação e o relato dos licenciandos acerca de aulas em combinatória apenas com resolução de listas e provas, vejo alguns paralelos. Parece que tivemos

[6] Na pesquisa de mestrado, investiguei os conhecimentos evidenciados por licenciandos em Matemática por meio da elaboração de um jogo sobre análise combinatória.
[7] Além da orientação da dissertação de mestrado, a professora doutora Sandra Aparecida Fraga da Silva instruiu-nos na organização de um guia didático sobre combinatória (SILVA; SILVA, 2014).

ensino de combinatória que favoreceu apenas entendimento instrumental desse tema (SKEMP, 1976). Assim, observo a reprodução de um modelo de ensino que precisa mudar para que ocorra um ensino de matemática que produza significados e entendimento relacional de conceitos estudados. Depois de ter realizado o mestrado e analisado minha experiência com esse conteúdo, surgiram outras inquietações concernentes aos anos iniciais da educação básica. Acredito que estas preocupações foram provocadas porque eu também atuava em turmas de quinto ano e assim comecei a refletir e questionar acerca do desenvolvimento do raciocínio combinatório de alunos desse ano escolar. Em 2014, ao ser aprovado no processo seletivo para o doutorado da UFES, na linha de pesquisa em Educação e Linguagens: Matemática, vi a oportunidade de prosseguir com os estudos e aprofundar a investigação sobre o tema.

1.2 Motivação do estudo

> “Por isso não desfalecemos; mas, ainda que o nosso homem exterior se corrompa, o interior, contudo se renova de dia em dia”.
> (II Coríntios 4. 16)

A relação com esta pesquisa foi sendo construída ao longo dos anos por meio de reflexões da minha prática, de laços construídos com a academia e com outros pesquisadores. Ao longo de minha trajetória como estudante de matemática, professor de matemática e posteriormente como pesquisador iniciante, fui percebendo a necessidade de aprimorar os estudos sobre combinatória. Mesmo enfrentando desafios e cansaços do trabalho, sempre me renovei a cada descoberta, principalmente ao ver que o trabalho desenvolvido trazia melhorias na qualidade da educação de meus alunos. Tais descobertas me motivaram e motivam, cada vez mais, a buscar novos conhecimentos. Para este estudo de doutorado, pensei em focalizar em combinatória e ter como participantes de pesquisa alunos dos anos iniciais pelos seguintes motivos:

a) Ao observar as crianças na sala de aula ou em suas brincadeiras, percebi que utilizam o raciocínio combinatório para solucionar problemas cotidianos, tais como organizar seus grupos ou suas brincadeiras de roda. Por exemplo, quando as crianças brincam de coelho na toca, elas precisam escolher quem vai formar a toca e quem será o coelho. Para isso, precisam fazer seleções, combinações, escolher em qual “toca” vai ficar, usar alguma estratégia de contagem de saída, entre outros procedimentos. Essas situações, em geral, não são aproveitadas para explorar conceitos de raciocínio combinatório nessa fase escolar.

b) Como professor dos anos iniciais do ensino fundamental, notei diversas dificuldades das crianças em usar estratégias para a resolução de atividades envolvendo o raciocínio combinatório. Por exemplo, num jogo conhecido como corrida dos cavalos que envolve o lançamento de dois dados e exige que o jogador observe a soma dos números sorteados, os alunos não possuíam de imediato uma estratégia que os ajudasse a escolher uma soma com a maior possibilidade de aparecer. Por exemplo, no lançamento de dois dados, a soma com o total sete é a que tem maior possibilidade de ser sorteada; além disso, não existe a possibilidade de sair a soma com um total menor que 2 ou maior que 12. Porém, sem a minha intervenção, os alunos não conseguiam fazer tais observações.

c) Ao trabalhar com os livros didáticos disponibilizados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), identifiquei a escassez de atividades que fizessem questionamentos intermediários que estimulassem o raciocínio combinatório. Por exemplo, em questões de livro didático que perguntavam quantas possibilidades existiam para uma determinada situação acontecer, notei a ausência de questões que estimulassem os alunos a sistematizar as possibilidades para encontrar todas as respostas e depois contar o total obtido. Além disso, percebi a quase ausência de elementos históricos que situassem a análise combinatória como uma construção humana e social e fizessem integração desse tópico com outros tópicos da matemática. Ademais, minhas experiências como professor em escolhas de livros didáticos nas escolas, orientações recebidas durante o mestrado e aprendizagens obtidas trabalhando com formação de professores sobre esta habilidade, me motivaram a analisar questões que envolviam o raciocínio combinatório numa coleção de livros didáticos dos anos iniciais.

d) As orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997, 1998) e de Pires (2012), que dizem que o raciocínio combinatório não deve ser desenvolvido como aplicação de fórmulas para resolver tarefas matemáticas. Esses documentos e essa pesquisadora argumentam que raciocínio combinatório deve ser desenvolvido a partir de exploração de diversas situações em que alunos pensem, dialoguem e sejam provocados a usar procedimentos pessoais para contar e enumerar, selecionar elementos, ordenar elementos, dentre outros. Porque é por meio de procedimentos pessoais que os alunos apresentam suas estratégias e soluções nos processos de contagem, enumeração e seleção. Assim, alunos podem tornar-se capazes de esgotar todas as possibilidades relacionadas ao problema ou tarefa e podem desenvolver raciocínio combinatório.

e) Minhas reflexões sobre pesquisas de mestrado como as de Pinheiro (2008), Almeida (2010), Alves (2010) e Vazquez (2011) levaram-me a pensar em estratégias diferenciadas de ensino de combinatória. Pensei em utilizar recursos didáticos variados para orientar e provocar meus alunos a resolver e pensar em problemas que envolvem o raciocínio combinatório.

f) O contato com os estudos de Borba (2010; 2013) que defendem que a combinatória seja trabalhada com alunos desde o início da escolarização e que o desenvolvimento do raciocínio combinatório depende da instrução escolar que o aluno recebe. Além disso, minha experiência com alunos desse nível escolar e o trabalho de mestrado que evidenciou que licenciandos em Matemática não tinham recordações desse assunto nos primeiros anos de sua escolarização me provocaram e fizeram refletir. Enfim, tudo isso levou-me a pensar sobre a relevância em investigar essa temática com alunos do quinto ano do ensino fundamental durante o doutorado. O intuito foi realizar um trabalho que auxiliasse o desenvolvimento do raciocínio combinatório desde os anos iniciais, na busca pela compreensão desse conteúdo mediante exploração de problemas e/ou tarefas que envolvem ideias e conceitos semelhantes.

Com base nessas observações, estudos, reflexões e conversas com a orientadora e colegas de curso, fui instigado a mapear a produção de teses de doutorado e dissertações de mestrado sobre o ensino de análise combinatória nas universidades públicas e privadas e nos institutos federais brasileiros de todas as regiões, no período de 1999 a 2017. Os dados desse mapeamento estão apresentados de forma detalhada no capítulo 2 desta tese.

1.3 Justificativa de investigação

O foco inicial de estudo foi identificar estratégias intuitivas que alunos do quinto ano (sem ter um estudo formal de combinatória) usam para resolver problemas de adição ou multiplicação que envolvem o raciocínio combinatório. Uma das justificativas para a escolha de nossa investigação com alunos do quinto ano parte do mapeamento de pesquisas de mestrado e doutorado de 1999 a 2017. Nesse mapeamento só identificamos seis pesquisas que realizaram algo sobre esse assunto com alunos nos anos iniciais. Além disso, nos últimos anos, coleções de livros didáticos, como a de Dante (2016), já trazem problemas que envolvem o raciocínio combinatório nos anos iniciais e queríamos investigar como alunos os resolveriam.

Trago também reflexões provenientes de outras experiências profissionais, pois, ao trabalhar com esse conteúdo com alunos do quinto ano, de 2009 a 2016, observei que eles produzem alguns tipos de enumerações quando questionados a descobrir quantas possibilidades existem ou identificam para contar algo. Entretanto, constatei em alguns casos que enumerações eram feitas sem sistematização, ou seja, eram escritas de forma aleatória. Notei também que os alunos não procuravam verificar se o total de possibilidades correspondia ao total da contagem enunciada por eles. Isso talvez tenha ocorrido pela falta de compreensão do que se pedia no problema. Se olharmos a obra clássica de Polya[8] (1995/1945), ele assim nos orienta: “A primeira coisa a fazer com um problema é compreendê-lo bem*: Quem entende*

[8] A obra foi publicada originalmente em inglês em 1945. Estamos usando a tradução que foi publicada em língua portuguesa de 1995.

mal, mal responde. Precisamos distinguir claramente a meta que desejamos alcançar*: Pense no fim antes de começar”* (POLYA, 1995/1945, p.140, grifo do autor).

Minhas experiências com alunos do sexto ao nono ano do ensino fundamental mostraram que eles se preocupam mais em fazer operações com os dados sem muitas vezes compreender o enunciado do texto da tarefa/do problema. Também não costumam usar estratégias diferenciadas para solucionar os problemas. Em relação aos alunos do ensino médio, trabalhando este conteúdo por 14 anos, observei que os estudantes têm dificuldades de diferenciar os tipos de problemas e reconhecer que operação, fórmula ou estratégia devem utilizar. Veja a seguir um exemplo de tipos de situações que ocorriam em aulas.

Com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, determine quantos números naturais de 5 algarismos podem ser formados?

Em problemas como este, alunos do ensino médio resolviam por fórmula de permutação simples fazendo 5! (fatorial de 5), sem atentar que podemos repetir o mesmo elemento cinco vezes para formar um determinado número de cinco algarismos. Como exemplo disso, temos o número 22.222. Uma das possíveis causas de os alunos não construírem números com algarismos repetidos nesse problema é o fato de que o enunciado não explicite que os números construídos podem ser com algarismos distintos ou com algarismos repetidos. Portanto um aluno que não pensou neste caso de repetir algarismos, ou que não soube resolver ou que o professor não dialogou com o mesmo sobre esta particularidade, nem sempre conseguirá distinguir ou pensar nas restrições ou nas reposições dos elementos conforme a escrita do enunciado.

Outros alunos de ensino médio resolviam pela fórmula de combinação simples $C_5^5 = \frac{5!}{(5-5)!5!}$, não atentando que os números formados poderiam ser diferentes pela ordem. Por exemplo, o número 12.345 é diferente do número 34.512. Além disso, esse problema envolve a repetição de elementos, o que implica que a operação mais adequada seria a de arranjos completos, quando a amostra é ordenada com repetição de elementos.

Tais equívocos cometidos pelos alunos de ensino médio incomodavam-me, o que me levava a buscar estratégias de ensino para ajudá-los a entender os conceitos e a estrutura matemática de um problema antes de resolvê-los. Ou seja, é preciso que alunos entendam e conheçam que a estrutura matemática de um problema envolve os conceitos e ideias matemáticas implícitas, subjacentes no enunciado de um problema e/ou tarefa matemática. Em problemas de combinatória, como o proposto antes, entender e conhecer a estrutura de um problema exigia que conceitos básicos, como seleção e ordenação de elementos fossem ensinados e discutidos em turmas do ensino médio. Talvez eles tivessem explorado informalmente situações onde tiveram que selecionar ou ordenar elementos a partir de alguma regra mencionada na tarefa. Ou tenham aprendido desde os anos iniciais essas ideias elementares de selecionar e ordenar sem compreender direito isso. Fazia essas suposições por ter observado que alunos de ensino médio demonstravam não saber esses princípios elementares.

Quando atuei como professor em cursos e programas de formação inicial e continuada de professores, identifiquei que docentes e futuros professores (de matemática, ou que ensinam matemática) tinham dificuldades de classificar os tipos de problemas combinatórios, bem como enunciar os conceitos envolvidos. Além disso, demonstraram não saber usar diferentes estratégias de ensino desse conteúdo e tinham dificuldades de identificar se haviam encontrado todas as possibilidades ou não. Vejamos, a seguir, um exemplo de problema trabalhado na oficina com professoras dos anos iniciais realizada no Pacto Nacional Pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), em 2014.

Figura 1 – Problema do quebra-cabeça com cores

ATIVIDADE 3: QUEBRA-CABEÇAS COM CORES

Recorte e pinte a faixa formada por quadradinhos entregue por seu professor, de acordo com as cores sugeridas na figura abaixo.

AM	VM	VD	AZ	AM	VM	VD	AZ

Legenda:

AM = amarelo; **VM** = vermelho; **VD** = verde; **AZ** = azul.

Dobre nas linhas entre os quadradinhos e pinte o verso da mesma cor que a da frente.

A atividade consiste em dobrar a fita nas linhas marcadas, sobrepondo um quadrado sobre o outro com um efeito sanfona e através de dobras e de sobreposições formar padrões ordenados pré-definidos com algumas das quatro cores.

Fonte: VAZQUEZ, 2011, p. 58

Para resolverem o problema: Quantos padrões podemos formar usando quatro cores distantes da fita? As professoras manipularam as fichas para ver quais eram as possibilidades. Por exemplo, elas encontraram as possibilidades: amarelo, azul, vermelho e verde; amarelo, azul, verde e vermelho; amarelo, verde, vermelho e azul, e assim por diante, totalizando 24 possibilidades. Com a minha intervenção, em seguida fizeram possibilidades de casos com repetição e sem repetição de cores, mas não tinham certeza de que tivessem encontrado todos os resultados possíveis. Somente após as discussões das resoluções, conseguiram associar os procedimentos de organizar fichas com cálculos de multiplicação. Durante minhas intervenções, conversei com as professoras sobre tarefas que envolvem o raciocínio combinatório cuja ordem era relevante ou não, isto é, tarefas de raciocínio combinatório em que, ao alterar a ordem em que os elementos aparecem, eles geram novas possibilidades.

Além dos argumentos já apresentados na motivação deste estudo, também justificamos a realização desta pesquisa de doutorado com algumas razões citadas por Kapur (1970, p. 114, tradução nossa[9]), que consideramos relevantes para o desenvolvimento de raciocínio combinatório por meio do ensino de ideias combinatórias. Esse autor assim comentava em seu texto de 1970:

> (a) Como combinatória não depende de cálculos, seus problemas podem ser trabalhados em uma fase inicial do currículo escolar. De fato ela tem problemas adequados para todos os níveis de escolarização. (b) Pode ser usado para treinar estudantes nos

---

[9] (a) Since it does not depend on calculus, its problems can be taken up at an early stage in the school curriculum. In fact it has problems suitable for all grades. (b) It can be used to train students in the concepts of enumeration (counting with counting through counting without counting), making conjectures, generalizations, optimization, existence, systematic thinking etc. (c) Applications to physics, chemistry, biology, network analysis, design of experiments, communication theory, symmetry, probability, dynamic programming, number theory, topology, recreational mathematics etc. can be indicated. (d) The need for creation of more mathematics can be created in the minds of the students. A large number of challenging problems can be indicated to them. (e) Distinction between plausible and rigorous proofs can be brought out. (f) Enough motivation for working with computers can be provided. (g) Students can appreciate the powers and limitations of mathematics as well as the powers and limitations of computers through combinatorial mathematics. (h) It can help in the development of concepts of mapping, relations, functions, equivalence relations, equivalence classes, isomorphisms etc. rather clearly. (i) Some of the great victories of the human mind over challenging problems can be indicated. (j) Most of the combinatorial problems and their applications have been developed recently and so students can get a feeling for the growth of mathematics. (k) This can help in developing the combinatorial attitude of mind which examines all possibilities, enumerates them and finds out the best possibility and thus leads to clearheaded thinking (KAPUR, 1970, p. 114).

> conceitos de enumeração (contagem com contar por meio de contagem sem contar), fazer conjecturas, generalizações, otimização, existência, pensamento sistemático etc. (c) Também podem ser indicadas aplicações à física, química, biologia, análise de redes, design de experimentos, topologia, teoria de comunicação, simetria, probabilidade, programação dinâmica, teoria de números, topologia, matemática recreativa etc. (d) A necessidade de criação de novas matemáticas pode ser criada na mente de estudantes. Um grande número de problemas desafiadores também pode ser indicado por elas. (e) Distinção entre provas plausíveis e rigorosas podem ser trazidas. (f) Pode fornecer bastante motivação para trabalhar com computadores. (g) Estudantes podem apreciar os poderes e limitações de computadores por meio da matemática combinatória. (h) Pode ajudar claramente no desenvolvimento de conceitos de mapear, relações, funções, relações de equivalência, classes de equivalência, isomorfismos etc. (i) Algumas das grandes vitórias da mente humana sobre problemas desafiadores podem ser indicadas. (j) A maioria dos problemas de combinatória e suas aplicações têm sido desenvolvidas recentemente e assim estudantes podem obter um sentimento para o crescimento de matemática. (k) Isto pode desenvolver a atitude mental de combinatória que examina todas as possibilidades, as enumera e encontra a melhor possibilidade e isso conduz à clareza de pensamento.

As razões apresentadas por Kapur (1970) fazem-nos refletir que combinatória é um assunto que permite a integração com vários tópicos da matemática e com outras áreas de conhecimento, pois está presente no cotidiano das pessoas. Portanto, ideias de combinatória podem ser trabalhadas em diversos níveis de ensino, desde que o professor saiba esse conteúdo, saiba ensiná-lo e saiba como esse conteúdo se relaciona com outros conceitos matemáticos, de modo a fazer adaptações necessárias para o ano escolar e faixa etária de alunos. Ou seja, o professor precisa ter conhecimento do conteúdo de combinatória, ter conhecimento pedagógico desse conteúdo e ter conhecimento curricular de matemática como afirma Shulman (1986). Além disso, o professor deve dialogar com seus alunos acerca dos enunciados de problemas e tarefas que envolvam raciocínio combinatório e trabalhar com problemas de acordo com a maturidade dos alunos (POLYA, 1995/1945; SANTOS, 1997). Caso o professor proceda dessa forma ele poderá contribuir para desenvolver o raciocínio combinatório de seus alunos.

A partir de todos os argumentos já mencionados para motivação e justificativa do estudo decidimos investigar estratégias de alunos de quinto ano e delineamos a seguinte questão central de nosso estudo: *Que estratégias* *alunos do quinto ano utilizam para resolver e elaborar tarefas*[10] *que envolvem o raciocínio combinatório?* Essa questão fez-nos pensar que conceitos matemáticos já aprendidos pelos alunos e problemas explorados em livros didáticos estudados por eles podem influenciar nas estratégias de resolução. Esse pensamento conduziu-nos a duas outras perguntas secundárias como desdobramentos necessários de nossa pesquisa: 1) Que relações podem ser construídas da combinatória com outros tópicos de matemática e qual a relevância do estudo desse assunto para a aprendizagem matemática com base na história?; 2) Que tarefas matemáticas podem ser exploradas na coleção Ápis do autor Dante (2016) e têm o potencial para trabalhar e desenvolver o raciocínio combinatório?

1.4 Objetivos

O objetivo geral da pesquisa é investigar o desenvolvimento do raciocínio combinatório de alunos do quinto ano do ensino fundamental para resolver e elaborar tarefas/problemas que envolvem adição com a ideia de partição[11] e multiplicação com a ideia de princípio multiplicativo em tarefas de alocação[12]. No que concerne aos objetivos específicos, indicamos:

I) Objetivos relacionados à questão central de pesquisa:

- Investigar o raciocínio combinatório intuitivo dos alunos ao resolver e ao elaborar problemas de adição ou de multiplicação que aparecem em pesquisas ou em livros didáticos (ou adaptados de ambos).
- Construir com os alunos estratégias de resolução que auxiliem no processo de enumeração e contagem de problemas de raciocínio combinatório.

II) Objetivos relacionados às outras questões:

- Investigar tarefas matemáticas da coleção de livros do autor Dante (2016) que envolvem o raciocínio combinatório.

---

[10] Utilizamos em matemática o termo tarefas, quando pensamos em problemas ou em atividades matemáticas que são trabalhados em aulas (SANTOS-WAGNER, 2008).

[11] Envolve fatos fundamentais da adição e a ideia de decompor uma quantidade em diferentes parcelas ou de decompor um grupo em subconjuntos.

[12] Envolve a ideia de inserir ou colocar objetos, cores ou elementos em um determinado espaço ou local.

- Investigar, por meio de um estudo histórico-bibliográfico, problemas antigos de combinatória que têm conexões com problemas contemporâneos de matemática.

Tendo em vista as justificativas apresentadas, as questões e objetivos de pesquisa, organizamos esta tese da seguinte forma: no capítulo 2, apresentamos o mapeamento de pesquisas na área; no 3, tratamos da fundamentação teórica sobre a combinatória e resolução de problemas, no 4, recorremos a um breve histórico do desenvolvimento da combinatória e a classificação das operações matemáticas que envolvem o raciocínio combinatório; no 5, procedemos a uma análise documental de livros didáticos; no 6, apresentamos a metodologia e os procedimentos de pesquisa; no 7, trazemos os estudos exploratórios, o estudo definitivo e a análise de dados. No 8, finalizamos com as considerações para o fechamento desta tese.

2 OUTROS OLHARES SOBRE O FENÔMENO "ANÁLISE COMBINATÓRIA"

2.1 Introdução

Neste capítulo vamos olhar para o fenômeno ''Análise Combinatória'' a partir do que encontramos em pesquisas brasileiras já defendidas de mestrado e doutorado com foco nesta temática. Assim, fizemos uma revisão de literatura. Segundo Lüdke e André (2003), um investigador faz uma revisão de literatura não apenas para conhecer o que já foi desenvolvido e investigado sobre o tema, mas também para confrontar dados, evidências e informações oriundas de trabalhos que precederam a pesquisa que pretende desenvolver. Ademais, Romanowski e Ens (2006, p. 39) dizem que as análises de pesquisas "[...] possibilitam examinar as ênfases e temas abordados nas pesquisas; os referenciais teóricos que subsidiaram as investigações; a relação entre o pesquisador e a prática pedagógica [...]". Esses últimos autores também comentam que, por meio de revisões de literatura, é possível pensar em novas ideias e sugerir e/ou propor outras pesquisas. Fizemos um estudo do tipo estado do conhecimento com foco em combinatória. Por isso, analisamos as dissertações de mestrado e teses de doutorado produzidas no Brasil que tratam de combinatória com alunos dos anos iniciais do ensino fundamental no período de 1999 a 2017. A seguir, falamos sobre o percurso metodológico seguido para fazer este mapeamento de estudos encontrados. Depois trazemos as pesquisas identificadas e relevantes para esta investigação de doutorado. Concluímos o capítulo com uma síntese e algumas reflexões.

2.2. Percurso metodológico da investigação da revisão de literatura

A revisão de literatura iniciou com o levantamento de dissertações e teses relativas ao Ensino/Educação Matemática produzidas no Brasil e divulgadas pela Revista Zetetiké[13], vinculada à Universidade Estadual de Campinas – Unicamp. Depois fizemos buscas no site da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), sites de universidades brasileiras públicas e privadas. Além disso, usamos o alerta do Google Acadêmico com palavras-chave, tais como: combinatória, análise

[13] Zetetiké – FE/Unicamp – v. 20, n. 38 – jul/dez 2012.

combinatória, combinação, permutação, arranjo, princípio multiplicativo, triângulo aritmético, binômio de Newton, Pascal, contagem, raciocínio combinatório, anos iniciais e livro didático, para a identificação de trabalhos com o nosso tema de estudo.

Apoiamos-nos em Romberg (1992), Kilpatrick (1996) e Fiorentini e Lorenzato (2012) para nos embasar sobre pesquisas em educação matemática e em Romanowski e Ens (2006) e Pagani e Allevato (2014) como aporte teórico na organização de mapeamento de estudos do tipo estado da arte ou estado do conhecimento. Com base nesses autores, utilizamos os seguintes procedimentos metodológicos: (1) identificação de questões orientadoras para direcionar as buscas; (2) estabelecimento de critérios para a seleção das produções; (3) identificação e listagem de instituições de ensino superior; (4) localização dos programas de pós-graduação de mestrado e doutorado; (5) levantamento das produções; (6) leitura inicial das produções e elaboração de planilha de registro de dados e informações; (7) leitura e análise dos textos/estudos, buscando categorias de interpretação; e (8) elaboração de síntese com reflexões, comentários e críticas das pesquisas, buscando evidenciar o desenvolvimento na investigação dessa temática.

A limitação do mapeamento das pesquisas nesse período de 1999 a 2017 ocorreu por alguns motivos. Primeiro por considerarmos a época posterior à publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) que já esclareciam que o raciocínio combinatório pode e deve ser explorado desde os anos iniciais. Além disso, o desenvolvimento de estudos exploratórios em 2016, dois exames de qualificação durante o doutorado, e estudo definitivo influenciaram a delimitação deste período. Por último, o prazo para a escrita desta tese até fevereiro de 2019 também interferiu para demarcar este período. Apresentamos, no quadro a seguir, o quantitativo anual de pesquisas em combinatória que encontramos.

Quadro 1 – Produção anual de pesquisas de mestrado e doutorado em análise combinatória

ANO	MESTRADO		DOUTORADO	TOTAL
	ACADÊMICO	PROFISSIONAL		
1999	01	-	-	01
2000	-	-	-	-

2001	01	-	01	02
2002	-	-	-	-
2003	01	-	-	01
2004	-	-	-	-
2005	-	01	-	01
2006	-	01	-	01
2007	-	-	-	-
2008	01	02	-	03
2009	01	04	01	06
2010	04	03	-	07
2011	02	06	-	08
2012	03	04	01	08
2013	01	28	-	29
2014	03	22	-	25
2015	06	20	02	28
2016	04	14	-	18
2017	-	06	-	06
TOTAL	28	111	05	144

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores[14].

Identificamos 144 trabalhos envolvendo análise combinatória, com o total de 139 dissertações de mestrado e apenas cinco teses de doutorado. Verificamos que, em 2005, aparece a primeira dissertação de mestrado profissional com essa temática e que, desde 2011, o quantitativo de dissertações de mestrado profissional supera o de mestrado acadêmico. Acreditamos que esse fato se deva à regulamentação dos mestrados profissionais pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) mediante a Portaria n.º 17/2009, atualizada em 28/6/2017 pela Portaria n.º 131. Também supomos que o crescimento de pesquisas com essa temática se deva ao fato de que alguns pesquisadores, como Sabo (2010), relatarem que professores sentiam dificuldade em abordar esse assunto e estudantes tinham dificuldades em compreender conceitos relacionados a esse conteúdo. Entre os programas de mestrado, merece destaque o crescimento dessas produções no Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT). É o maior quantitativo, com 76

[14] Elaborado por três pesquisadores: o pesquisador deste estudo de doutorado em parceria com outra pesquisadora de doutorado em combinatória e pela pesquisadora (orientadora).

dissertações. Verificamos, ainda, que o maior número de produções foi desenvolvido na região sudeste e, em segundo lugar, vem a região nordeste, conforme pode ser visto no quadro a seguir.

Quadro 2 – Quantitativo de trabalhos sobre combinatória mapeados de 1999 a 2017

Região	Dissertação de mestrado		Tese de doutorado
	Acadêmico	**Profissional**	
Sudeste	11	52	3
Sul	1	9	1
Nordeste	13	33	1
Norte	1	10	0
Centro-Oeste	0	9	0
Total	28	111	5

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Ao analisarmos o quadro 2, observamos que a região sudeste é a que teve o maior quantitativo de trabalhos desenvolvidos nos mestrados acadêmicos, profissional e também nos doutorados. De modo geral, as pesquisas de mestrado (acadêmico e profissional) e doutorado trataram dos seguintes temas:

- ✓ Aprendizagem de combinatória de alunos dos anos iniciais (4);
- ✓ Aprendizagem de alunos dos anos finais do ensino fundamental (10);
- ✓ Aprendizagem de alunos do ensino médio (31);
- ✓ Alunos do segundo ano do ensino fundamental ao terceiro ano do ensino médio (1);
- ✓ Aprendizagem de alunos da EJA ou PROEJA (4);
- ✓ Alunos do ensino médio regular e da EJA (1);
- ✓ Alunos de ensino médio e professores (1)
- ✓ Conhecimento de professores em combinatória em formação inicial e continuada (13);
- ✓ Conteúdo de combinatória em livros didáticos ou documentos oficiais (5);
- ✓ Abordagem teórica e/ou prática sobre conceitos de combinatória (69);
- ✓ Softwares (5).

Para produzirmos esta tese, concentramo-nos em leituras e estudos de trabalhos desenvolvidos com alunos dos anos iniciais do ensino fundamental, pois nossa pesquisa de doutorado focalizou em alunos do quinto ano do ensino fundamental. Desse mapeamento, temos divulgado resultados em eventos científicos, como no 7.º Seminário Nacional de Licenciatura em Matemática (ZANON; ZOGAIB; SANTOS-WAGNER; SILVA, 2016), no XII Encontro de Pesquisa em Educação da Região Sudeste (ZANON; SILVA; SANTOS-WAGNER, 2016) e na 6ª Semana de Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo (SILVA; ZANON; SANTOS-WAGNER, 2017).

2.3. Os trabalhos identificados

Na busca que realizamos nos repositórios digitais das universidades das cinco regiões brasileiras, encontramos cinco dissertações de mestrado: Pedrosa Filho (2008) na PUC-SP; Silva (2010), Melo (2012), Azevedo (2013) e Vega[15] (2014) na UFPE; e uma tese de doutorado: Pessoa[16] (2009) na UFPE, cujas pesquisas envolveram alunos dos anos iniciais. A Universidade Federal de Pernambuco é uma instituição que contém um grupo[17] de pesquisa com foco em combinatória. A seguir, comentamos cada uma das pesquisas que envolveram alunos dos anos iniciais.

Pedrosa Filho (2008), em sua pesquisa intitulada *Uma experiência de introdução do raciocínio combinatório com alunos do primeiro ciclo do ensino fundamental (7-8 anos)*, investigou a aquisição e o desenvolvimento de noções introdutórias ao raciocínio combinatório, de crianças entre 7 e 8 anos de idade, que cursavam o primeiro ciclo do ensino fundamental. Seu estudo procurou responder às seguintes questões: *É possível criar situações que possibilitem a introdução de noções iniciais que favoreçam o desenvolvimento da análise combinatória direcionada a crianças do primeiro ciclo do ensino fundamental? O uso do material manipulável favorece a introdução do raciocínio combinatório para crianças desse ciclo de ensino?* (PEDROSA FILHO, 2008, p. 36-37). O

---

[15] Embora na pesquisa de Vega (2014) tenha sido realizado um estudo efetivo do tipo sondagem com 128 alunos do 6º ano de uma escola particular do Recife, a validação do instrumento e o estudo piloto foram realizados com alunos do 5º ano. Trazemos aqui apenas alguns apontamentos evidenciados dessa pesquisa em relação aos alunos do quinto ano.

[16] A tese de Pessoa (2009) não envolveu apenas alunos dos anos iniciais.

[17] O Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatório e Probabilístico - GERAÇÃO, é coordenado pela Professora Dra. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba desde 2009. O grupo está registrado no Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco e tem por objetivo o desenvolvimento e a divulgação de estudos relativos ao conhecimento de combinatória e probabilidade.

trabalho de natureza qualitativa foi fundamentado na teoria dos campos conceituais de Vergnaud, na teoria dos registros de representação de Duval, e nos pressupostos da engenharia didática francesa. Os sujeitos da pesquisa eram 20 alunos, dos quais oito alunos do segundo ano (quatro meninas e quatro meninos) e 12 alunos do terceiro ano (seis meninas e seis meninos) do ensino fundamental I (ciclo I), com idades entre 7 e 8 anos. As crianças realizaram duas tarefas em duplas: a primeira atividade visava determinar combinações de roupas em modelos com peças imantadas; e a segunda objetivava descobrir possibilidades de caminhos em um quadriculado para chegar a um determinado destino.

A avaliação no trabalho de Pedrosa Filho (2008) ocorreu oralmente durante todo o processo de investigação e por meio de registros dos alunos ao longo dos roteiros de aula, usando jogos e materiais manipulativos. Ao analisar o documento do PCN (BRASIL, 1997), o Plano Nacional do Livro Didático – PNLD (BRASIL, 2007) e coleções de livros didáticos, Pedrosa Filho (2008) comenta que, quando os documentos oficiais passaram a sugerir o ensino do raciocínio combinatório, esse conteúdo começou a ser apresentado em alguns livros didáticos.

O pesquisador concluiu que o uso de materiais manipulativos foi fundamental para ampliar os tipos de estratégias dos alunos na resolução de problemas combinatórios. Em geral, as estratégias dos alunos apresentadas no trabalho de Pedrosa foram desenho, listagem e cálculo. Além disso, contribuiu para a organização de ideias, leitura dos enunciados dos problemas, contagem e visualização dos diferentes casos possíveis de construir. Pedrosa Filho (2008) refletiu ao concluir seu trabalho que: a) falta uma conscientização por parte do professor de que o ensino de combinatória deve acontecer de forma contextualizada e participativa, permitindo ao aluno construir as próprias estratégias de contagem; b) é importante fazer a leitura da atividade com os alunos e, aos poucos, estimulá-los a desenvolver habilidades de leitura e interpretação; c) é preciso dar liberdade aos alunos para buscar as próprias estratégias e, assim, resolver as atividades propostas. Ademais, o pesquisador constatou, ainda, que o material manipulável associado ao trabalho em duplas d) possibilitou o uso da contagem de um em um elemento, até obter o resultado solicitado, e) contribuiu para visualizar as possibilidades dos casos de combinatória e f) ajudou na interpretação dos problemas.

Pessoa (2009), em sua tese – *Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2.º ano do ensino fundamental ao 3.º ano do ensino médio* – fez as seguintes perguntas de pesquisa: *Como ocorre o desenvolvimento do raciocínio combinatório desde o início do ensino fundamental até o término do ensino médio? Como se dá o desempenho de alunos nos diversos tipos de problemas de combinatória?* Para responder a essas perguntas, ela realizou um estudo de natureza qualitativa e quantitativa envolvendo 568 alunos, dos quais 255 eram do segundo ao quinto ano do ensino fundamental. A pesquisadora realizou testes *post-hoc*[18], que continha oito questões envolvendo produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação. Ela identificou que não houve diferenças significativas de desempenho entre os alunos do segundo, terceiro e quarto anos, mas eles apresentaram desempenho significativamente inferior aos alunos do quinto ano, ao comparar com o número de acertos entre os alunos desses anos escolares. A autora usou as seguintes categorias de análise de estratégias apresentadas pelos alunos: a) não explicitou estratégia; b) adição e/ou subtração; c) divisão; d) desenho; e) árvore de possibilidades; f) quadro/diagrama; g) listagem de possibilidades; h) adição inadequada de parcelas repetidas; i) adição adequada de parcelas repetidas; j) multiplicação inadequada; l) multiplicação adequada; m) princípio fundamental da contagem (PFC); n) uso inadequado de fórmulas; o) uso adequado de fórmulas; e p) percepção ou busca de regularidade.

A tese sustentada por Pessoa (2009) foi a de que o desenvolvimento do raciocínio combinatório é um processo longo e se amplia mediante experiências extraescolares e escolares. Com base no PCN (BRASIL, 1997), Pessoa (2009) entende que os processos de contagem de possibilidades devem ser aprendidos de modo simplificado e explicativo, de acordo com cada tipo de problema combinatório. Ou seja, o uso de estratégias para resolver problemas envolvendo o raciocínio combinatório deve ter sentido para os alunos. Eles precisam aprender a usar as mesmas e entender porque

[18] Teste estatístico com análise de gráficos.

determinada estratégia é adequada para algumas tarefas. Os alunos precisam entender o que fazem e porque fazem uso de determinada estratégia de contagem ou outra. Pouco adianta para os alunos o uso de estratégias e uso de fórmulas em questões do tipo modelo sem que haja a real compreensão do uso das mesmas.

Assim, ao analisar as pesquisas de Pedrosa Filho (2008) e Pessoa (2009), nos parece que os livros didáticos buscam atender ao que está proposto no PCN (BRASIL, 1997). Porém, a partir das leituras desses estudos nos parece que o ensino do raciocínio combinatório nos livros didáticos e pelos professores ainda é trabalhado de forma isolada nos anos iniciais, sem considerar: a) os diferentes tipos de problemas; b) as estratégias que são possíveis desenvolver com estudantes desse nível e sem triangulação (confirmação ou refutação em três momentos distintos) do que foi entendido pelos alunos ou do que precisa ainda ser explorado com problemas semelhantes; c) a necessidade de fazer perguntas intermediárias para facilitar o entendimento dos enunciados das tarefas; d) e as propostas de elaboração, aplicação e explicação dos problemas pelos próprios alunos. As pesquisas de Pedrosa Filho (2008) e Pessoa (2009) fazem-nos refletir sobre a necessidade do professor examinar as estratégias dos alunos, identificar possíveis obstáculos e atentar para os erros recorrentes cometidos por eles, pois podem evidenciar concepções equivocadas sobre conceitos. Por isso, esses obstáculos não devem ser desprezados, mas analisados e refletidos pelos docentes e discentes.

Embora Pessoa (2009) não dê exemplos de obstáculos que existam no ensino do raciocínio combinatório, ela cita as diferentes origens para os obstáculos fundamentados em Brousseau[19] (1983) e Perrin-Glorian[20] (1995). Os obstáculos[21] são os (1) relacionados às limitações do sujeito, ou seja, de

---

[19] BROUSSEAU, Guy. Lês obstacles éistemologiques et lês problèmes em mathématiques. **Recherches en didactique des mathématiques** nº 4.2, p. 164-198, 1983.

[20] PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. Utilização da noção de obstáculo na didática da matemática. **CEMA – Caderno de Educação Matemática,** São Paulo, v 2, p. 78-104, 1995.

[21] "Brousseau (1983) retoma as idéias de Bachelard sobre obstáculos e amplia esta discussão, colocando que existem diferentes origens para os obstáculos, o que leva a formas diferentes de tratamento didático: (1) os de origem ontogenética, que aparecem pelas limitações do sujeito a um momento do seu desenvolvimento; (2) os de origem didática, que dependem de escolhas didáticas ou de um projeto educativo, resultantes, assim, de transposições didáticas; (3) os de origem epistemológica, que tiveram um papel importante no desenvolvimento

origem ontogenética; (2) relacionados à didática empregada no processo de ensino; (3) de origem epistemológica; e (4) de origem cultural. Defendemos que esses obstáculos também podem ser pensados quando ensinamos combinatória para estudantes de diferentes níveis escolares e também dos anos iniciais. Além disso, verificamos em nossa experiência docente que gostos, preferências e experiências de vida dos alunos quando precisam ler, entender e resolver problemas/tarefas de combinatória podem criar obstáculos tanto no processo de ensino quanto de aprendizagem de combinatória.

Silva (2010) investigou se a explicitação da correspondência um-para-muitos auxiliava as crianças na resolução de problemas de raciocínio combinatório do tipo produto cartesiano. O estudo foi desenvolvido com 40 crianças com idade de 8 anos que cursavam o terceiro ano do ensino fundamental de uma escola particular da cidade de Recife. Foram aplicados 12 problemas envolvendo produto cartesiano: quatro continham situações em que a correspondência um-para-muitos estava implícita no enunciado; quatro situações em que a correspondência um-para-muitos estava explícita e acompanhada de uma representação gráfica; e quatro situações explicitavam a correspondência um-para-muitos vinha acompanhada de exemplos dos princípios invariantes do raciocínio combinatório. Os resultados da pesquisa de Silva (2010) evidenciaram que as crianças tiveram melhor desempenho nas tarefas em que a correspondência um-para-muitos estava evidenciada nos enunciados, acompanhada de uma representação gráfica ou com exemplos dos princípios invariantes[22].

A pesquisa de Melo (2012) teve por objetivo investigar o efeito da explicitação dos princípios invariantes sobre o desempenho e as estratégias

histórico dos conhecimentos e cuja rejeição precisou ser integrada explicitamente no saber transmitido. Perrin-Glorian (1995) acrescenta a esta lista o obstáculo de origem cultural como aquele que corresponde a certas maneiras de pensar social e culturalmente" (PESSOA, 2009, p. 46-47). No capítulo de fundamentação teórica, retomamos uma breve discussão sobre esses obstáculos.

[22] Fátima vai viajar para casa de sua tia. Na mala ela colocou 5 saias (amarela, rosa, azul, preta e marrom) e 2 blusas (verde e vermelha). Ele pode combinar as saias e as blusas para formar conjuntos. Mas ninguém veste todas as saias e todas as blusas de uma só vez; só usa uma saia e uma blusa de cada vez, não é? Combinando as saias com as blusas, ela pode ter conjuntos diferentes, não pode? Nessa viagem, Fátima quer usar uma roupa diferente a cada dia, ela não quer repetir os conjuntos. Por exemplo, um dia ela pode usar a saia rosa com a blusa verde. No outro dia, ela pode usar a mesma saia rosa com a blusa vermelha, já seria uma roupa diferente, não é? Combinando todas as saias com todas as blusas, quantos conjuntos diferentes Fátima pode formar? (SILVA, 2010, p. 72).

adotadas por crianças na resolução de problemas de combinação. As perguntas que nortearam a pesquisa foram as seguintes: *Será que, se os princípios invariantes da combinação forem explicitados nos enunciados dos problemas de combinação, ocorrerá o mesmo fenômeno que aquele apresentado no estudo de Silva e Spinillo*[23] *(2010)? Que estratégias as crianças adotam na resolução de problemas de combinação quando há a explicitação dos princípios invariantes?* O estudo foi desenvolvido em duas etapas: na primeira, foram analisados dados de outra pesquisa envolvendo 60 crianças de 8 anos de idade que eram alunos de terceiro ano do ensino fundamental de escolas particulares da cidade de Recife, os quais foram organizados em dois grupos: os participantes do Grupo 1 resolveram problemas de produto cartesiano e os do Grupo 2 resolveram problemas de combinação, e ambos os grupos resolveram problemas sem explicitação dos princípios invariantes e problemas com explicitação dos princípios invariantes; na segunda, participaram do estudo 90 crianças com idade entre 8 e 10 anos, na qual os sujeitos eram estudantes do terceiro ano (os mesmos estudantes do Grupo 2 da primeira etapa), quarto e quinto anos do ensino fundamental de escolas particulares da região metropolitana do Recife que resolveram problemas sem explicitação dos princípios invariantes, problemas com explicitação dos princípios invariantes[24] e explicitação dos princípios invariantes acompanhados de desenhos.

Na primeira etapa dos estudos, a pesquisadora observou que houve maior facilidade por parte dos alunos em resolver problemas envolvendo produto cartesiano em comparação com os problemas de combinação e que a explicitação dos princípios invariantes nos problemas de combinação não colaborou para a melhoria do desempenho dos alunos de terceiro ano do

[23] SPINILLO, Alina Galvão; SILVA, Juliana Ferreira Gomes da. Making explicit the principles governing combinatorial reasoning: does it help children to solve cartesian product problems? In: Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 34., 2010, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: PME, 2010. p. 26-224.

[24] No pula-pula só podem pular duas crianças por vez. Cinco crianças (Laura, Maria, João, Luiz e Danilo) querem brincar no pula-pula. Nem todas as crianças brincarão ao mesmo tempo no pula-pula porque tem cinco crianças querendo pular e só duas podem entrar no pula-pula de cada vez, não é? As duplas devem ser formadas por duas crianças, então, uma criança não pode brincar sozinha no pula-pula, não é? Podem ser formadas várias duplas de crianças para brincar no pula-pula, não pode? Por exemplo, uma dupla de crianças pode ser: Laura e Maria. Outra dupla diferente seria Laura e João, não seria? Com todas essas crianças, quantas duplas diferentes de crianças podem ser formadas para brincar de cada vez no pulapula? (MELO, 2012, p. 91-92).

ensino fundamental. Na segunda etapa, foi evidenciado que as explicitações dos princípios invariantes e as explicitações com desenhos contribuíram para a melhoria do desempenho dos alunos do 4.º ano do ensino fundamental. Além disso, Melo (2012) constatou que a explicitação dos invariantes combinatórios presentes no enunciado e a explicitação dos invariantes acompanhados de desenho favoreceram o desenvolvimento de estratégias mais apropriadas para os estudantes de terceiro, quarto e quinto ano do ensino fundamental.

Em relação às estratégias, a pesquisadora evidenciou que os alunos utilizaram procedimentos que não contribuíram para encontrar a resposta correta (caracterizados por cálculos inadequados para o problema ou pela fixação de um dos elementos, sem que os alunos percebessem que o mesmo elemento poderia ser combinado mais de uma vez), procedimentos que indicavam indícios do raciocínio combinatório (caracterizados pela capacidade de construir relações um-para-muitos usando algum início de sistematização ou não) e procedimentos que apresentavam soluções combinatórias e ajudaram a encontrar respostas apropriadas (caracterizados por soluções com a utilização ou não de um padrão sistemático identificável na formação das combinações, mas com o esgotamento de todas as combinações).

A*lunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades: é melhor no papel ou no computador?* Esse foi o título da dissertação de mestrado de Azevedo (2013). De caráter quantitativo e qualitativo, a pesquisa teve por objetivo analisar a influência da construção de árvores de possibilidades na resolução de problemas combinatórios com *lápis e papel* ou com o uso do *software* educativo Diagramas de Árbol. Neste estudo participaram 40 alunos do quinto ano do ensino fundamental de duas escolas da rede pública municipal do Recife. Essa pesquisa foi fundamentada em conceitos de esquemas da teoria de Piaget relacionada com a teoria de Vergnaud sobre o campo conceitual das estruturas multiplicativas com a combinatória. A pesquisa também se fundamentou em Pessoa e Borba[25] (2009) sobre o ensino de

[25] PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **Zetetiké** – Cempem – FE – Unicamp – v.17, n.31 – jan./jun. p. 105-150, 2009.

combinatória e em Borba e Penteado[26] (2010) e Goos[27] (2010) sobre o uso da tecnologia na sala de aula. Foram aplicados testes de questões durante encontros com os alunos, e os registros foram escritos em papel e por meio de um *software* educacional.

A pesquisa evidenciou que: a) os grupos com intervenção em combinatória demonstraram maior variedade na utilização de representações simbólicas nos pós-testes e utilização de estratégias sistemáticas de resolução dos problemas; b) houve melhor desempenho nos problemas de produto cartesiano*;* c) maior quantitativo de erros nos problemas de permutação; d) o uso do *software* contribuiu para a construção de representações simbólicas dos alunos, uma vez que tinham de transcrever o que aprenderam no sistema virtual para o papel, e Azevedo concluiu que é importante o uso de outras representações simbólicas desde os primeiros anos de escolarização.

A árvore de possibilidade pode ser uma estratégia de ensino para trabalhar diferentes situações combinatórias com alunos dos anos iniciais, segundo a pesquisa de Azevedo (2013). O *software* árvore de Árbol, articulado com a representação escrita, pode contribuir para a aprendizagem de significados de conceitos do raciocínio combinatório. Desse modo, as pesquisas de Pedrosa Filho (2008), Pessoa (2009) e Azevedo (2013) fazem-nos pensar que diferentes escolhas de etapas combinatórias podem interferir no grau de dificuldade de resolução dos problemas e o trabalho com múltiplas representações (jogo, material manipulável, *software*) pode permitir aos alunos ampliar o conhecimento matemático e os tipos de estratégias sistematizadas desse conteúdo.

A dissertação de Vega (2014) teve por objetivo analisar a influência do número de etapas de escolha na resolução dos diversos tipos de problemas combinatórios (produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação) com base na seguinte questão: *Qual mais fácil de resolver com 2, 3 ou 4 etapas de escolha: produto cartesiano, arranjo, combinação ou permutação?* A pesquisa quantitativa e qualitativa foi desenvolvida em três etapas: validação do instrumento, estudo piloto e estudo efetivo. A dissertação é fundamentada na

---

[26] BORBA, Marcelo; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora. Coleção Tendências em Educação Matemática. 2010.
[27] GOOS, Merrilyn. What counts? Technology and mathematics teaching and learning. ***Teacher***, *215*, p. 22-25. 2010.

teoria dos campos conceituais de Vergnaud[28] (1986, 1991, 1996), em particular o campo conceitual das estruturas multiplicativas, no raciocínio combinatório (Borba, 2010)[29] e no que diz respeito a significados do raciocínio combinatório (Pessoa e Borba, 2009). Vega (2014) informa-nos que há evidências de noções intuitivas do raciocínio combinatório em crianças desde a educação infantil, por isso defende que os problemas podem ser explorados desde cedo. Por meio de sondagem, Vega (2014) observou o desempenho de alunos ao resolver problemas combinatórios com diferentes números de etapas de escolha.

A validação do instrumento consistiu na aplicação de teste de sondagem com 41 alunos do quinto ano do ensino fundamental e o estudo piloto com quatro alunos do quinto ano de outra escola da cidade de Recife. A pesquisadora investigou se os problemas combinatórios utilizados no teste eram passíveis de resolução a fim de atender à proposta de etapas de escolha e ao efeito da ordem dos tipos de problemas na apresentação das questões. Os alunos resolveram individualmente um teste contendo oito problemas de combinatória contendo produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação. Foram comparados problemas com duas, três e quatro etapas de escolha. Os resultados obtidos mostraram que o tipo e as etapas de escolha influenciam no desempenho dos alunos, podendo aumentar ou diminuir a dificuldade de os estudantes compreenderem o que fizeram para resolverem os problemas. Portanto, essa investigação nos leva a refletir sobre o papel do professor ao elaborar e propor questões em aulas de matemática e a analisar o que se pretende e o que se espera do aluno ao resolvê-las.

Por meio das leituras, diálogos e reflexões que fizemos sobre as investigações de Pedrosa Filho (2008), Pessoa (2009), Silva (2010), Melo (2012), Azevedo (2013) e Vega (2014), entendemos que os conhecimentos de alguns princípios do raciocínio combinatório podem ser desenvolvidos antes do ensino médio e modelados por situações do cotidiano. Ao resolver um

---

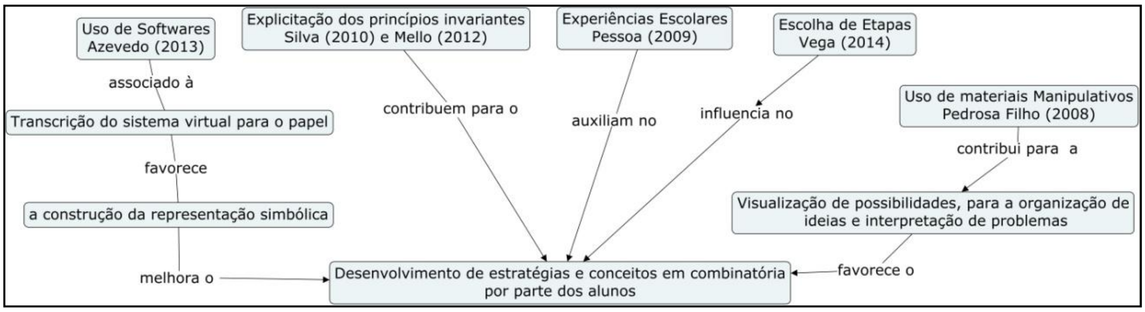
[28] VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, v 1. p. 75-90, 1986.
__________. **El nino, lãs matemáticas y La realidad.** Problemas de La enseñanza de lãs matemáticas em La escuela primaria. México: Trillas, 1991.
__________. A teoria dos campos conceptuais. In. BRUM, Jean, (Org.) **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, p. 155-191, 1996.
[29] BORBA, R. O raciocínio combinatório na educação básica. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática. Bahia. **Anais...** Bahia: Salvador, 2010. p. 1-16.

problema de combinatória, o aluno precisa utilizar diversas habilidades, e não apenas as relacionadas a memorizar, registrar informações e aplicá-las mecanicamente. Para isso, é necessário que conheça e compreenda os significados, as relações e propriedades matemáticas relacionadas ao raciocínio combinatório que aparecem de forma clara ou implícita nos enunciados das tarefas.

2.4 Síntese e reflexões do pesquisador

As pesquisas desenvolvidas com alunos dos anos iniciais permitem compreender que há necessidade de um trabalho que envolva o uso de diferentes recursos e estratégias para auxiliar na enumeração e no entendimento de possibilidades combinatórias. Nota-se também a necessidade de intervenções docentes que auxiliem na sistematização de estratégias, além de investigar as possíveis causas de obstáculos advindos de experiências pessoais (escolares ou não) que podem influenciar na compreensão de conceitos. A partir desses estudos de mestrado e doutorado, organizamos um esquema de ações em forma de um mapa conceitual que podem colaborar para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Figura 2 - Mapa conceitual de dissertações e tese que investigaram alunos dos anos iniciais



Fonte: Elaborado pelos pesquisadores.

Para compreendermos melhor a causa de os alunos apresentarem maior dificuldade em um determinado tipo de problema combinatório, conforme nos orienta Santos-Wagner (2008), precisamos fazer uma leitura atenta e compreensiva da questão com os alunos. Ou seja, é necessário que alunos iniciem fazendo leitura silenciosa do problema e depois deve ser feita uma leitura oral coletiva acompanhada de questionamentos para averiguar se alunos entenderam ou não o problema e se compreenderam as palavras usadas no texto (ou enunciado). Autores como Polya (1995/1945), Santos (1997) e Santos-Wagner (2008) dizem que um problema deve ser bem escolhido, quando queremos trabalhar com nossos alunos em sala de aula, e esses autores comentam que cada problema não deve ser nem muito difícil nem muito fácil. Afinal, se um professor quer despertar o desejo no aluno de resolver um problema, ele deve querer provocar e motivar seus alunos para pensarem em como resolver o mesmo. Ou seja, o aluno deve compreender o problema e desejar resolvê-lo.

As pesquisas de Silva (2010) e de Melo (2012) levam-nos a refletir sobre como o professor deve atuar em sala de aula quanto introduzir tarefas e/ou problemas combinatórios. Quando o professor for introduzir problemas combinatórios em suas turmas, ele precisa dialogar com alunos e alunas, para garantir que todos entendam a situação proposta. Assim, o professor deve questionar o que entenderam do enunciado, que expliquem com suas palavras o que leram e compreenderam e o que pensam que deve ser feito (POLYA, 1995/1945; SANTOS-WAGNER, 2008). Depois deste diálogo, o professor também pode dar algumas sugestões ou construir junto com os alunos representações que colaborem para o entendimento do enunciado. Essas estratégias docentes podem auxiliar para o desenvolvimento de estratégias sistemáticas pelos alunos que auxiliem-nos no processo de enumeração e de contagem de possibilidades.

No que diz respeito às novas práticas pedagógicas que buscam contribuir para superar os obstáculos epistemológicos, consideramos que o erro deixa de ter conotação de fracasso e passa a ser encarado como parte importante dos processos de ensino e de avaliação da aprendizagem. Assim como Santos (1997), Pavanello e Nogueira (2006) argumentam que os elementos da avaliação envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem (o aluno, o professor e o saber) devem ser considerados para que a avaliação em matemática ultrapasse os limites de mera classificação de notas e alcance nova concepção como estratégia para orientar a prática pedagógica. Isso possibilita que professor e aluno compreendam sua relação com o saber matemático. Desse modo, o estudante torna-se sujeito do processo de avaliação e não é visto pelo professor apenas como objeto a ser avaliado. De acordo com Cury (2015) a análise qualitativa das respostas dos alunos, pode ser uma das formas de aproveitar os erros e por meio de processos investigativos realizar questionamentos que auxiliem os estudantes a (re)construir seus conhecimentos.

De acordo com Pavanello e Nogueira (2006), conceber a matemática como pronta, acabada e perfeita e como um modelo a ser seguido pelas demais ciências implica compreendê-la como um conjunto de teoremas deduzidos de maneira lógica, partindo de afirmações consideradas universalmente verdadeiras. Tal forma de pensar a matemática reduz os atos de ensinar e aprender à transmissão de conhecimentos do professor para o aluno, ou seja, a aprendizagem acontece por recepção. Por outro lado, considerar a matemática como uma elaboração humana dentro de um contexto histórico e social permite ao aprendiz construir o conhecimento mediante a própria atividade. Pavanello e Nogueira (2006) defendem uma postura intermediária em que a matemática, mesmo originada em ações concretas no mundo real, é também constituída de abstrações e generalizações.

Neste sentido, as pesquisas de Pedrosa Filho (2008), Pessoa (2009), Silva (2010), Melo (2012), Azevedo (2013) e Vega (2014), influenciaram o nosso trabalho de doutorado. Essas investigações nos fizeram pensar em utilizar recursos didáticos que pudessem contribuir com a construção de estratégias de resolução de problemas que envolvem o raciocínio combinatório. Ou seja, esses estudos anteriores nos mostraram que materiais manipuláveis ou outro recurso didático podem auxiliar o desenvolvimento de estratégias que ajudem alunos na visualização de possibilidades e de sistematização. Além disso, rever essas pesquisas nos fez refletir acerca de como selecionar problemas que explicitassem nos enunciados invariantes combinatórios. Assim, o estudo dos resultados destas pesquisas nos mostrou que devemos: (a) atentar para o número de etapas de escolhas e a ordem de grandeza das soluções quando propomos problemas de raciocínio combinatório; (b) discutir com os alunos sobre diferentes formas de organização e representação dos elementos no processo de sistematização; e (c) pensar atentamente na organização das sequências de tarefas tendo em vista o nível escolar dos alunos e os conteúdos matemáticos já estudados. Apenas quando o professor (ou o professor-pesquisador) estiver atento que precisa considerar estes três aspectos citados em seus planejamentos e ações pedagógicas, o professor estará favorecendo que seus alunos compreendam enunciados, procurem resolver os problemas propostos e sejam estimulados a usar estratégias intuitivas e a desejarem aprender com os outros alunos e o professor outras estratégias. Os trabalhos dos pesquisadores mencionados, também nos apontaram para a necessidade de ouvir os alunos durante e após o processo de compreensão e resolução do problema e de propor aos alunos a elaboração e resolução de problemas envolvendo o raciocínio combinatório a partir de tarefas que foram trabalhadas durante a pesquisa.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo está organizado em três seções: na primeira, fazemos uma discussão teórica sobre combinatória e raciocínio combinatório; na segunda, tratamos de pressupostos teóricos da resolução de problemas; e, na terceira, trazemos algumas reflexões e aprendizados do pesquisador.

3.1 Combinatória e raciocínio combinatório

Aqui apresentamos tanto nossa compreensão de combinatória e raciocínio combinatório com suporte nos estudos de Bachx, Poppe, Tavares (1975); Machado (1986); Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991); Hazzan (1993); Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996); Borba (2010) – quanto nossas experiências ao trabalhar com esse assunto como professor e pesquisador. No quadro a seguir, trazemos algumas definições sobre análise combinatória.

Quadro 3 - Definição de combinatória

Autor	Definição
Bachx, Poppe e Tavares[30]	"A Análise Combinatória, ou simplesmente Combinatória, é o ramo da Matemática que nos permite resolver problemas em que, basicamente, é necessário 'escolher e arrumar' os objetos de um conjunto" (BACHX; POPPE; TAVARES, 1975, p. 1).
Machado[31]	"A análise Combinatória é a parte da Matemática onde estudamos as técnicas de contagem de agrupamentos que podem ser feitos com elementos de um dado conjunto. São basicamente dois tipos de agrupamentos que podemos formar: um em que se leva em conta a ordem dos elementos dentro do agrupamento e outro onde a ordem dos elementos é irrelevante" (MACHADO, 1986, p. 118).
Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez [32]	"De maneira geral, podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas. Dois tipos de problemas que ocorrem frequentemente em Análise Combinatória

[30] Estes autores, além de professores, foram fundadores do Grupo de Estudos de Matemática do Estado da Guanabara e responsáveis pela formação de um núcleo de estudo e desenvolvimento didático de matemática. O livro foi escrito com o objetivo de tornar o estudo de combinatória mais acessível aos estudantes interessados pelo assunto.

[31] O livro escrito pelo professor é destinado a estudantes do 2.º grau, a vestibulandos e aos que desejam recordar assuntos em cursos básicos de faculdade.

[32] O livro foi escrito como parte de um projeto de treinamento para professores de matemática do 2.º grau, levando em consideração a experiência dos autores em ensinar análise combinatória a alunos nesse nível escolar.

	são: 1) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições. 2) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas" (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991, p. 1).
Hazzan[33]	"A análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos *agrupamentos formados sob certas condições*. À primeira vista pode parecer desnecessária a existência desses métodos. Isto de fato é verdade, se o número de elementos que queremos contar for pequeno. Entretanto, se o número de elementos a serem contados for grande, esse trabalho torna-se quase impossível sem o uso de métodos especiais" (HAZZAN, 1993, p. 1).
Batanero, Godino e Navarro-Pelayo[34]	"A combinatória, ou análise combinatória como historicamente se conhece, estuda – segundo descreve Ribnikov (1988) – os conjuntos discretos e as configurações que podem ser obtidas a partir de seus elementos mediante certas transformações que originam mudanças na estrutura ou na composição deles. A estrutura destes conjuntos pode ser muito complexa, dependendo das relações existentes entre seus elementos. A primeira tarefa da análise combinatória consiste em estudar tais estruturas discretas e expressas suas propriedades, empregando métodos matemáticos" (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 17-18, tradução nossa)[35].

[33] O livro escrito pelo professor Samuel Hazzan faz parte de uma coleção denominada Fundamentos de Matemática Elementar e destina-se a alunos em preparativos para exames de vestibulares, aos universitários que necessitam rever a matemática elementar e também a alunos do colegial que se interessarem por mais consistência na área da matemática.

[34] Os professores e pesquisadores escreveram o livro como um instrumento didático básico para uso de professores, estudantes e pesquisadores. Oferece instruções psicológicas, curriculares e didáticas para o ensino de combinatória em diferentes níveis escolares. A pesquisadora Carmen Batanero orienta faz muito tempo pesquisas com foco em combinatória e em probabilidade na Espanha. É professora do Departamento de Didática da Matemática da Universidade de Granada (UGR) e é também coordenadora do Grupo de Pesquisa em Educação Estatística da UGR com mais de 100 artigos publicados entre o período de 1983 e 2015. Carmen Batanero estudou na Universidade Complutense de Madrid 5 em Matemática, que terminou em 1971, para então obter o Diploma Superior em Estatística da mesma universidade. Em 1983 ele obteve um doutorado em matemática na Universidade de Granada.

[35] La Combinatoria, o Análisis Combinatorio como históricamente se le conoce, estudia – según describe Ribnikov (1988) – los conjuntos discretos y las configuraciones que puedem obtenerse a partir de sus elementos mediante ciertas transformaciones que originan cambios em la estructura o la composición de los mismos. La estructura de estos conjuntos puede ser muy compleja dependiendo de las relaciones existentes entre sus elementos. La primeira tarea del análisis combinatorio consiste em estudiar tales estructuras discretas y expresar sus propiedades, empleando métodos matemáticos (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 17- 18).

Borba[36]	“A Combinatória é conhecida como a arte de contar, pois nas situações combinatórias são enumeradas maneiras possíveis de combinar dados objetos. Dessa forma, a Combinatória se constitui num ramo da Matemática que estuda técnicas de contagem – direta e implícita – de agrupamentos possíveis, a partir de elementos dados, que satisfaçam a determinadas condições” (BORBA, 2010, p.3).

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Ao analisarmos o quadro, observamos que Bachx, Poppe e Tavares (1975), Machado (1986) e Borba (2010) definem a combinatória como parte da matemática. Porém, em Morgado et al. (1991), verificamos que aparece destacado o estudo de relações discretas semelhante ao que dizem os pesquisadores espanhóis Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), ao mencionarem os conjuntos discretos. Além dessa observação, verificamos que Machado (1986) traz uma explicação um pouco mais detalhada do que seria “arrumar” na definição de Bachx, Poppe e Tavares (1975), pois envolve a ordem dos elementos dentro do agrupamento. Machado (1986), Hazzan (1993) e Borba (2010) consideram que a combinatória se encarrega de fazer contagem, enquanto Morgado et al. (1991) acrescentam que, além da contagem, analisa a existência e a classificação de subconjuntos.

Observamos que os pesquisadores espanhóis Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), além de focalizarem nesses aspectos mencionados pelos demais autores, orientam que outras análises também devem ser realizadas ao examinarem a estrutura ou a composição dos conjuntos mencionados na tarefa. Ademais esses pesquisadores comentam que é necessário examinar, investigar as relações existentes entre os elementos dessas estruturas ou conjuntos. Um exemplo de operação entre os elementos de um agrupamento é a permutação, que modifica a ordem relativa entre eles. Outro exemplo que podemos citar é a do produto cartesiano que consiste em construir correspondências entre distintos elementos de conjuntos discretos. De acordo com a natureza dos elementos (iguais ou distintos), estas e outras operações podem alterar a composição dos agrupamentos gerando novas configurações combinatórias. Por exemplo, quando queremos permutar

[36] A professora e pesquisadora desenvolve e orienta trabalhos de pesquisa sobre esta temática.

elementos iguais entre si, temos um tipo de agrupamento diferente daquele que possui apenas elementos distintos. Além disso, o critério de ordenação só gera novas possibilidades quando estamos permutando elementos distintos. Estas e outras características devem ser analisadas durante o processo de resolução de problemas que envolvem o raciocínio combinatório.

Borba (2010) evidencia que a combinatória envolve processos de enumeração, seja de forma direta ou indireta. Essa autora comenta que alguns problemas que envolvem raciocínio combinatório solicitam para enumerar as maneiras possíveis de combinar determinados objetos. Por exemplo, quando queremos saber de quantas formas três pessoas podem se posicionar para tirarem fotos juntas uma ao lado da outra será necessário pensar nas diversas possibilidades e em enumerar as mesmas. Borba (2010) também recomenda que se deve aproveitar estratégias espontâneas desenvolvidas pelos alunos quando resolvem algumas tarefas de combinatória, estimulando-os a pensarem sobre generalizações possíveis. Hazzan (1993) parece dar maior destaque aos métodos formais de resolução para os problemas de contagem. O autor destaca que embora o princípio fundamental forneça o instrumento básico para resolver tarefas de combinatória; "[...] sua aplicação direta na resolução de problemas pode às vezes tornar-se trabalhosa" (HAZZAN, 1993, p. 15). A partir dessa argumentação o autor apresenta deduções de fórmulas para o cálculo de diferentes tipos de agrupamentos. Além disso, explora diversos problemas de provas e demonstrações como, por exemplo: Usando a relação de Euler, prove que: $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$ (HAZZAN, 1993, p. 76). Hazzan parece estimular o uso de diferentes fórmulas matemáticas relacionadas aos problemas que envolvem o raciocínio combinatório.

Vemos que a combinatória é a parte da matemática discreta[37] em que se estudam os tipos de (i) estruturas de conjuntos (propriedades que permitem conceituar noções intuitivas e definir certas operações matemáticas a partir dos elementos desse conjunto); (ii) relações entre seus elementos; (iii) operações (ou técnicas) de contagem, de enumeração, de classificação ou de análise de

[37] Para nós, a matemática discreta focaliza estudos de conjuntos finitos em que seus elementos são discretos, desconexos e podem ser enumerados. A matemática contínua envolve estudos de relações e funções envolvendo conjuntos como os números reais e outros que aparecem no contínuo.

existência de certas possibilidades. Isso é feito com base nos elementos de um ou mais conjuntos discretos, segundo condições estabelecidas.

Para nós, a análise combinatória (ou combinatória) é um campo da matemática que estuda os tipos de estruturas de conjuntos em que são analisadas as relações entre os elementos, os diferentes procedimentos de contagem, de enumerações, de classificação ou de análise de existência de certas possibilidades. Além disso, envolve processos sistemáticos de escolhas entre os elementos de um ou mais conjuntos atendendo a certos critérios ou parâmetros estabelecidos. De acordo com Batanero, Godino e Nacarro-Pelayo (1996):

> Sobre os conjuntos discretos é realizada determinada classe de operações. Algumas delas originam a mudança da estrutura, isto é, das inter-relações entre os elementos dos conjuntos, outras modificam a composição destes. Um exemplo entre as operações mais simples do primeiro tipo seriam as permutações de elementos provenientes de uma mudança de ordem relativa a eles, e o segundo tipo, a obtenção de amostras ou subconjuntos de um dado conjunto ou do n-ésimo produto cartesiano desse conjunto. Também aparece entre as transformações combinatórias o estabelecimento de correspondência entre diferentes conjuntos discretos de objetos. Com frequência, as ações mencionadas se aplicam mais de uma vez (reiteradamente), além disso, nas mais diversas combinações, quando diferentes condições são impostas. Esta é uma das razões pelas quais se apresentam possibilidades praticamente inesgotáveis de criar construções discretas, as quais são denominadas de configurações combinatórias, que são objeto de estudo deste ramo da matemática, especialmente os processos de formação dessas configurações e contagem delas (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 18, tradução nossa)[38].

Entre as operações solicitadas em problemas que envolvem o raciocínio combinatório, estão as permutações, que podem ser entendidas como as diferentes formas de ordenar os elementos de um conjunto. Suponhamos que,

---

[38] Sobre los conjuntos discretos se realizan cierta clase de peraciones. Algunas de ellas originan el cambio de laestructura, o sea, d las interrelaciones entre los elementos de los conjuntos, otras modifican la composición de éstos. Un ejemplo entre las operaciones más simples del primer tipo seírn las permutaciones de elementos, que originan un cambio en el orden relativo de los mismos, y del segundo tipo, la obtención de muestras o subconjuntos a partir de un conjunto dado o del producto cartesiano n-ésimo de dicho conjunto. También figura entre las transformaciones Combinatorias el establecimento de correspondencias entre distintos conjuntos discretos de objetos. Con frecuencia, las acciones mencionadas se aplican más de una vez (reiteradamente) y, además, em las combinaciones más diversas, cuando se imponen diferentes condiciones. Esta es una de las razones por la que se presentan posibilidades prácticamente inagotables de crear construcciones discretas, las cuales se denominan configuraciones Combinatorias, que son el objeto de estudio de esta rama de las Matemáticas, especialmente los procesos de formación de estas configuraciones y recuento de las mismas (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 18).

alguém tenha cinco livros de autores diferentes (Jorge Amado, Machado de Assis, José de Alencar, Graciliano Ramos e Guimarães Rosa) e deseje organizá-los em uma estante, de modo que os livros fiquem um ao lado do outro. De quantas formas isso é possível? Quais são as maneiras de fazer a arrumação? Como cada livro é de autor diferente, a ordem em que eles estiverem arrumados geram novas possibilidades, portanto existem 120 maneiras diferentes de permutar os cinco livros. Agora imaginemos que uma pessoa deseje comprar um sorvete de um determinado sabor (morango, flocos e chocolate) e a pessoa pode comprar em pote ou na casquinha. Quais são as possibilidades? As possibilidades são comprar sorvete de morango no pote ou sorvete de morango na casquinha, comprar sorvete de flocos no pote ou comprar sorvete de flocos na casquinha e assim por diante com os demais sabores. Esse tipo de tarefa envolve a ideia de produto cartesiano, que consiste na construção dos possíveis pares ordenados que você pode formar combinando o sabor do sorvete com o tipo de recipiente (casquinha ou pote).

Ideias como essas estão presentes nos problemas de raciocínio combinatório em que as configurações do conjunto original são alteradas à medida que reagrupamos seus elementos de acordo com os critérios estabelecidos no enunciado (no texto) da tarefa (problema) proposta. Mas como fazer a contagem? Como devemos pensar para chegar aos resultados? Será que um professor pode dialogar, questionar e provocar pensamentos que auxiliem os alunos a pensarem no texto da tarefa, entender o que precisam considerar de critérios estabelecidos sem dizer o que eles devem fazer? Que estratégias ou procedimentos foram adotados para resolver o problema? Além de entendermos o que é a combinatória, interessa-nos saber como alunos do quinto ano desenvolvem o raciocínio combinatório pelo viés da resolução de problemas. Sobre o raciocínio combinatório, Borba (2010), define-o como

> [...] um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar os elementos destes, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis. Este modo de pensar é útil no cotidiano – por estar presente em situações variadas como organizações de equipes, de campeonatos esportivos, de cardápios etc. – bem como é aplicado em variadas áreas do conhecimento – tais como Biologia, Química, Estatística, Ciências da Computação dentre outras – em situações classificatórias, por exemplo. O desenvolvimento do raciocínio combinatório, portanto, é de extrema

> relevância e deve ser alvo do ensino formal na Educação Básica (BORBA, 2010, p. 3).

O raciocínio combinatório está presente não só em situações escolares, mas também no cotidiano das pessoas desde a infância. De forma semelhante Pessoa e Borba (2009) nos informam o que concebem como raciocínio combinatório. Essas autoras entendem o raciocínio combinatório como um modo de pensar presente na análise de situações em que elementos de determinados conjuntos devem ser agrupados atendendo a critérios específicos de escolha e/ou ordenação. Além disso, o número de agrupamentos possíveis pode ser determinado de forma direta contando os casos um a um ou de forma indireta por meio de um cálculo específico. O raciocínio combinatório exige uma forma de pensar em que as ideias sejam encadeadas e contribuam para a organização do pensamento de modo que seja possível obter de forma direta ou indireta as possibilidades solicitadas num problema.

De acordo com Dewey (1979), há quatro sentidos diferentes para a palavra pensamento. O primeiro está relacionado ao que se passa na nossa mente, em nossos sonhos e devaneios, ou seja, ideias desordenadas que passam pela nossa cabeça de forma desregrada. O segundo refere-se a uma atividade mental de representação consciente, mas as ideias não se apresentam numa sequência ordenada. Neste caso, as ideias não se apoiam nas anteriores ou em algo a elas relacionado. Podemos pensar em vários casos, mas que não estejam relacionados entre si. Outro sentido de pensamento que encontramos em Dewey (1979) trata do pensamento encadeado, ou seja, as ideias são representações mentais oriundas de uma cadeia sucessiva de reflexões que derivam de conexões estabelecidas de forma lógica entre as ideias. A sequência de ideias encadeadas possibilita chegar a um alvo (ou a um propósito estabelecido).

Encontramos ainda em Dewey (1979) outro sentido para pensamento: a crença. Temos a crença primitiva, que pode estar fundamentada naquilo que é evidenciado no que podemos ver (ou seja: uma evidência não examinada ou não investigada). A crença posterior apoia-se num estudo cuidadoso, mais amplo e intencional sobre o aspecto que se deseja observar, fazendo verificações e análises de possíveis resultados em comparação com outras crenças. Isto é um processo de investigação. Por fim, o pensamento reflexivo, que, segundo Dewey (1979), apresenta cinco fases, a saber:

> (1) as sugestões, nas quais o espírito salta para uma possível solução; (2) uma intelectualização da dificuldade ou perplexidade que foi sentida (diretamente experimentada) e que passa, então, a constituir um problema a resolver, uma questão cuja resposta deve ser procurada; (3) o uso de uma sugestão em seguida a outra, como ideia-guia ou hipótese, a iniciar e guiar a observação e outras operações durante a coleta de fatos; (4) a elaboração mental da ideia ou suposição, como ideia ou suposição (raciocínio, no sentido de parte da inferência e não da inferência inteira); e (5) a verificação da hipótese, mediante ação exterior ou imaginativa (DEWEY, 1979, p. 111-112).

Estes tipos de pensamentos apresentados por Dewey têm ligação com o que os pesquisadores espanhóis discutem em seus trabalhos sobre sistematização e não sistematização de estratégias intuitivas de alunos ao resolverem problemas combinatórios. Quando o aluno dá alguma resposta que aparentemente pode não ter nenhum sentido com o que é solicitado no problema de combinatória, tal resposta pode ser apenas um devaneio. Quando apresenta uma resposta incompleta sem sistematização o pensamento pode ser desordenado sem que as ideias estejam apoiadas nas anteriores. Já no pensamento sistemático as ideias apoiam-se nas anteriores de modo que os alunos consigam encontrar todas ou quase todas as possibilidades. Em situações que envolvem o raciocínio combinatório, os problemas podem solicitar que sejam listadas as possibilidades de realizar algum tipo de agrupamento ou quantificar o total de possibilidades de realizar um determinado tipo de agrupamento. Além disso, podem exigir a recursividade ou uma generalização dos procedimentos de resolução, e, dependendo da estrutura da tarefa, é necessário o desenvolvimento de diferentes técnicas de contagem e isso exige sempre a reflexão dos sujeitos em verificar se sua resposta atende ao que está sendo solicitado no problema.

Para nós, o raciocínio combinatório é *o modo de pensar sobre diferentes estratégias para resolver problemas que envolvem seleção, alocação, partição, enumeração, ordenação, contagem, otimização, classificação, associações entre elementos de um ou mais conjunto e análise de existência de possibilidades mediante certas condições estabelecidas.* À medida que desenvolvemos o raciocínio combinatório e alguma capacidade de realizar operações combinatórias, diminuímos algumas dificuldades de enumerar ou contar os números possíveis de casos dados que se podem mesclar e combinar, sem que tenhamos omitido alguma possibilidade que deva ser considerada na solução do problema. Portanto, para que esse raciocínio seja desenvolvido, é preciso que os alunos tenham condições de sugerir algum tipo de resolução. A partir desta ideia, os alunos precisam testar ou investigar estratégias que pensaram para resolver a tarefa, para que se convençam da validade ou não de certas estratégias. Ademais, os alunos precisam aprender a exibir quais são as possibilidades que encontraram para resolver a tarefa proposta e saber contar quantas foram essas possibilidades. Todas estas etapas precisam ser exploradas pelos alunos e eles precisam notar que as ideias tenham conexões entre si.

Uma classificação dos problemas combinatórios a partir dos procedimentos de resolução é encontrada nos trabalhos de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) e Roa (2000). Esses primeiros pesquisadores trabalham com o modelo combinatório implícito classificado em seleção, alocação e partição. Roa (2000) acrescenta o composto (problema que envolve mais de um esquema combinatório), ou seja, o enunciado pode envolver seleção e partição, seleção e alocação e assim por diante. De acordo com esses pesquisadores espanhóis, o modelo combinatório implícito leva em consideração os tipos de representações ou de esquemas concretos inerentes aos enunciados dos problemas de combinatória com as ideias de amostra, correspondência, partições de conjuntos ou de decomposição em números, entre outros aspectos.

Segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), os problemas de seleção de uma amostra de um conjunto é o tipo de problema que deu origem às noções combinatórias mais primitivas de escolha de objetos e têm grande importância para os estudos de estatística. Portanto, um problema de seleção envolve a escolha, a preferência, a retirada de objetos ou de elementos de um dado conjunto ou a ordenação dos elementos desse conjunto. Um problema de alocação ou de colocação envolve a ideia de colocar, alocar, inserir, depositar ou distribuir objetos em espaços, em vagas ou em casas (células). Já os problemas de partição envolvem a ideia de subdividir os elementos de um conjunto em subconjuntos. Seguindo a ordem de apresentação que esses pesquisadores espanhóis fazem em seus trabalhos do modelo combinatório implícito, trazemos alguns exemplos retirados da tese de Roa (2000) que foi orientada pela doutora Carmen Batanero Bernabeu e pelo doutor Juan Díaz Godino.

Quadro 4 – Problema de seleção

Seleção	
A seleção refere-se, de forma implícita, à ideia de elementos ordenados ou não, com ou sem substituição.	
Seleção ordenada de objetos distinguíveis e indistinguíveis. $P_4^{2,1,1} = \frac{4!}{2!1!1!}$ (permutação com elementos repetidos)	Em uma caixa há quatro fichas de cores: duas azuis, uma branca e uma vermelha. Toma-se uma ficha ao acaso e anota sua cor. Sem devolver a ficha à caixa, toma-se uma segunda ficha e anota sua cor. Se continuar dessa forma até que se tenha selecionado, uma atrás da outra, as quatro fichas, de quantas formas diferentes se podem selecionar as fichas? Exemplo: Podem-se selecionar na seguinte ordem: branca, azul, vermelha e azul (ROA, 2000, p. 140, tradução nossa)[39].
Seleção de mostras não ordenadas. $C_5^3 = \frac{5!}{2!3!}$ (combinação simples)	Uma professora tem que escolher três estudantes para apagar o quadro. Para isso ela dispõe de cinco voluntários: Elisa, Fernando, Germán, Jorge e Maria. De quantas formas é possível escolher três desses alunos? Exemplo: Elisa, Fernando, Maria (ROA, 2000, p. 140, tradução nossa)[40].
Seleção ordenada com revezamento e repetição. $AR_4^3 = 4^3$ (arranjo com repetição)	Em uma caixa cilíndrica há quatro bolas numeradas com os dígitos 2, 4, 7 e 9. Escolhemos uma bola do cilindro, anotamos seu número e devolvemos à caixa. Escolhe-se uma segunda bola, anotamos seu número e a devolvemos ao bumbo. Finalmente se elege uma terceira bola e se anota seu número. Quantos números de três dígitos podemos obter? Exemplo: Pode-se obter o número 222 (ROA, 2000, p. 147, tradução nossa)[41].

[39] En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin volver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha y se anota su color. Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer la selección de las fichas? Ejemplo: Se pueden seleccionar en el siguiente orden, Blanca, Azul, Roja y Azul (ROA, 2000, p.140).

[40] Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas formas puede elegir tres de estos alumnos?. Ejemplo: Elisa, Fernando, María (ROA, 2000, p.140).

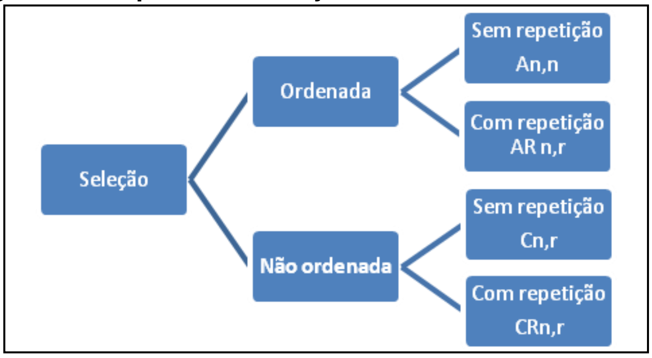
[41] En un bombo hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Elegimos una bola del bombo, anotamos su número y la devolvemos al bombo. Se elige una segunda bola, se anota su número y la devolvemos al bombo. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener?. Ejemplo: Se puede obtener el número 222 (ROA, 2000, p. 147).

Seleção ordenada sem revezamento e sem repetição (A 4,3) $A_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!}$ (arranjo simples)	Deseja-se escolher uma comissão formada por três membros: Presidente, Tesoureiro e Secretário. Para selecioná-los dispomos de quatro candidatos: Artur, Basílio, Carlos e David. Quantas comissões diferentes é possível formar entre os quatro candidatos? Exemplo: Que Artur seja o presidente, Carlos seja o tesoureiro e David seja o secretário (ROA, 2000, p. 148, tradução nossa)[42].

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores com base nos estudos dos pesquisadores espanhóis e na tese de Roa (2000)

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) dizem-nos que, em problemas de seleção nos quais é dado um conjunto de n objetos distintos, dos quais selecionamos r, é necessário verificar as seguintes condições: 1) considerar a ordem dos elementos; 2) distinguir se a amostra é ordenada ou não; 3) analisar se há, ou não, repetição de elementos; 4) verificar se a amostra de elementos que vamos formar é com ou sem revezamento. O esquema a seguir representa cada uma das possíveis respostas das condições mencionadas.

Figura 3 - Esquema de seleção ordenada e não ordenada



Fonte: (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 23)

Um exemplo de seleção ordenada sem repetição ocorre quando temos cinco pessoas disputando um prêmio em que serão classificados o primeiro, segundo e terceiro colocados. Dessas cinco pessoas, apenas três ganharão o prêmio. Outra situação de seleção ordenada sem repetição está presente na formação de senhas com dígitos distintos, por exemplo: a senha 2341 não possui algarismos repetidos. Já uma seleção ordenada com repetição pode ser exemplificada pela formação de uma senha bancária de quatro dígitos, em que temos dez algarismos disponíveis (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) para formar a

42 Se quiere elegir un comité formado por tres miembros: Presidente, Tesorero y Secretario. Para seleccionarlo disponemos de cuatro candidatos: Arturo, Basilio, Carlos y David. ¿Cuántos comitês diferentes se pueden elegir entre los cuatro candidatos?. Ejemplo: Que Arturo sea presidente, Carlos sea tesorero y David sea secretario (ROA, 2000, p. 148).

respectiva senha. Por exemplo, a senha 2234 possui quatro algarismos, com a repetição do algarismo 2. Em ambos os casos da seleção ordenada (com repetição e sem repetição), a ordem dos elementos gera novas possibilidades. Já no caso da seleção não ordenada sem repetição, podemos pensar na formação de duplas com um total de dez alunos. E, por último, na seleção ordenada com repetição, podemos pensar num sorvete com sabores repetidos, tendo, por exemplo, cinco sabores disponíveis para escolher. Nas duas situações envolvendo seleção não ordenada (com repetição e sem repetição), a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Problemas semelhantes envolvendo seleção ordenada e não ordenada também são classificados por pesquisadoras brasileiras. Borba (2010, 2013) e Pessoa e Borba (2009, 2010) classificam os problemas combinatórios em quatro tipos, a saber: produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação. As autoras justificam que tal classificação ocorre porque há relações básicas de combinatória contidas nesses quatro tipos de problemas. Descrevemos essas relações a seguir.

Quadro 5 - Tipos de problemas combinatórios segundo Pessoa e Borba

Produto Cartesiano	
Exemplo de *Situação-problema*	Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?
Invariantes	- Dado dois (*ou mais*) conjuntos distintos (com n e com p elementos), os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto. - A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto.
Permutação simples	
Exemplo de *Situação-problema*	Calcule o número de anagramas da palavra AMOR.
Invariantes	- Todos os **n** elementos do conjunto serão usados; - A ordem dos elementos gera novas possibilidades.
Arranjo simples	
Exemplo de *Situação-problema*	O quadrangular final da Copa do Mundo será disputado pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados?
Invariantes	- Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com **0 < p < n**.

	- A ordem dos elementos gera novas possibilidades.
Combinação simples	
Exemplo de *Situação-problema*	Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?
Invariantes	- Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com **0 < p < n**. - A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Fonte: (PESSOA; BORBA, 2010. p. 3)

Pessoa e Borba (2009, 2010) consideram que os problemas de produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação devem ser trabalhados desde os anos iniciais. De acordo com essas pesquisadoras esses tipos de problemas colaboram para desenvolver estratégias de resolução de questões de combinatória. Para os pesquisadores espanhóis Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), as permutações simples de n elementos (P_n) é um caso particular do arranjo simples ($A_{n,n}$) diferente do que é proposto por Pessoa e Borba (2010). Considerando o diagrama, observamos que a análise de seleção ordenada e não ordenada pode ajudar na escolha das operações combinatórias a serem aplicadas. No quadro a seguir, apresentamos exemplos de problemas de alocação a partir dos estudos dos pesquisadores espanhóis Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) e Roa (2000).

Quadro 6 – Problemas de alocação

Alocação	
Quando se trata de colocar elementos (distinguíveis ou não) de um determinado conjunto em um número de posições ou células (iguais ou distintas).	
Alocação de objetos iguais em células distintas $C_4^3=\frac{4!}{1!3!}$ (combinação simples)	Dispomos de três cartas iguais. Desejamos colocá-las em quatro envelopes de cores diferentes: amarelo, branco, creme e dourado. Se cada envelope só pode conter no máximo uma carta, de quantas formas podemos colocar as três cartas nos quatro envelopes diferentes? Exemplo: Podemos colocar uma carta no envelope amarelo, outra no branco e outra no creme (ROA, 2000, p. 141, tradução nossa)[43].
Alocação de	A garagem de Ángel tem cinco vagas. Como a casa é nova e agora só há

[43] Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: Amarillo, Blanco, Crema y Dorado. Si cada sobre solo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: Podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema (ROA, 2000, p.141).

objetos distintos em casas distintas $A_5^3 = \frac{5!}{2!}$ (arranjo simples)	três carros, Ángel, Beatriz e Carmem podem colocar a cada dia o carro no lugar que preferirem se não estiver ocupado. Este é o esquema da garagem: 1, 2, 3, 4 e 5. De quantas formas podem Ángel, Beatriz e Carmem estacionar seus carros na garagem? Exemplo: Ángel pode estacionar seu carro no estacionamento número 1, Beatriz no número 2 e Carmem no número 4 (ROA, 2000, p. 145, tradução nossa)[44].
Alocar objetos distintos em células distintas (mais de um objeto por célula) $AR_2^4 = 2^4$ (arranjo com repetição)	Quatro crianças (Alicia, Berta, Carlos e Diana) vão passar uma noite na casa de sua avó. Na casa, há dois quartos diferentes (sótão e sala de estar) onde pode colocar as crianças para dormir. De quantas formas diferentes a avó pode colocar as quatro crianças para dormir no dois quartos? (Pode ficar algum quarto vazio). Exemplo: Alicia, Berta e Carlos podem dormir no sótão e Diana na sala de estar (ROA, 2000, p. 146, tradução nossa)[45].
Alocação ordenada completa com repetição de elementos $P_2^{3,1,1} = \frac{5!}{3!1!1!}$ (permutação com repetição)	Dispomos de cinco cartas, cada uma delas tem gravada uma letra: A, B, C, C, C. De quantas formas diferentes se podem colocar na mesa as cinco cartas, uma ao lado da outra, formando uma fileira? Podem ser colocadas da seguinte forma: ACBCC (ROA, 2000, p. 147 – 148, tradução nossa)[46].

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores com base nos estudos dos espanhóis e na tese de Roa (2000)

Ao observarmos o quadro com diferentes tipos de alocações e o quadro com diferentes tipos de seleção, notamos que as operações similares podem aparecer em ambos os tipos de modelo combinatório implícito. Porém, ideias que envolvem seleção e alocação de elementos em problemas com quantidades menores de elementos podem ser exploradas com crianças. Podemos incentivar que as crianças usem outras estratégias de resolução sem

[44] El garage de Ángel tiene cinco plazas. Como la casa es nueva, hasta ahora solo hay tres coches; los de Ángel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada dia el coche en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es el esquema de la cochera: 1 2 3 4 5
¿De cuántas formas pueden Ángel, Beatriz y Carmen aparcar sus coches en la cochera?. Ejemplo: Ángel puede aparcar su coche en el aparcamiento número 1, Beatriz en el número 2 y Carmen en el número 4 (ROA, 2000, p.145).

[45] Cuatro niños (Alicia, Berta, Carlos y Diana) van a pasar la noche a casa de su abuela. Esta tiene dos habitaciones diferentes (salón y buhardilla) donde poder colocar a los niños para dormir. ¿De cuántas formas diferentes puede la abuerla colocar los cuatro niños en las dos habitaciones? (Puede quedar alguna habitación vacía). Ejemplo: Alicia, Berta y Carlos pueden dormir en el salón y Diana en la buhardilla (ROA, 2000, p. 146).

[46] Disponemos de cinco cartas, cada una de ellas tiene grabada una letra: A, B, C, C, C.
¿De cuántas formas diferentes se pueden colocar en la mesa las cinco cartas, una al lado de otra, formando una hilera?. Pueden estar colocadas de la siguiente forma: ACBCC (ROA, 2000, p. 147-148).

a aplicação de fórmulas que elas nem sabem nem é adequado para que elas entendam. Problemas mais simples e que envolvem quantidades menores de elementos podem ser resolvidos por meio de desenhos, materiais manipuláveis, listagem dos elementos, elaborar uma pequena tabela, e *software*, dentre outras estratégias. Assim, entendemos que, ao trabalharmos os problemas de combinatória com os alunos, precisamos fazer perguntas que os estimulem a entender os diferentes tipos de alocações e seleções que estejam envolvidos no texto do problema. Esses diálogos servem para que os alunos focalizem no enunciado e pensem no que está sendo informado e solicitado para fazer. Caso o professor efetue este tipo de diálogo mediador ele estará auxiliando que alunos compreendam o enunciado do problema e pensem na escolha de estratégias (técnicas) mais adequadas à resolução. Segundo os pesquisadores espanhóis, se considerarmos os tipos de distribuição de *r* objetos em *n* casas, será possível formar os agrupamentos de acordo com as seguintes condições:

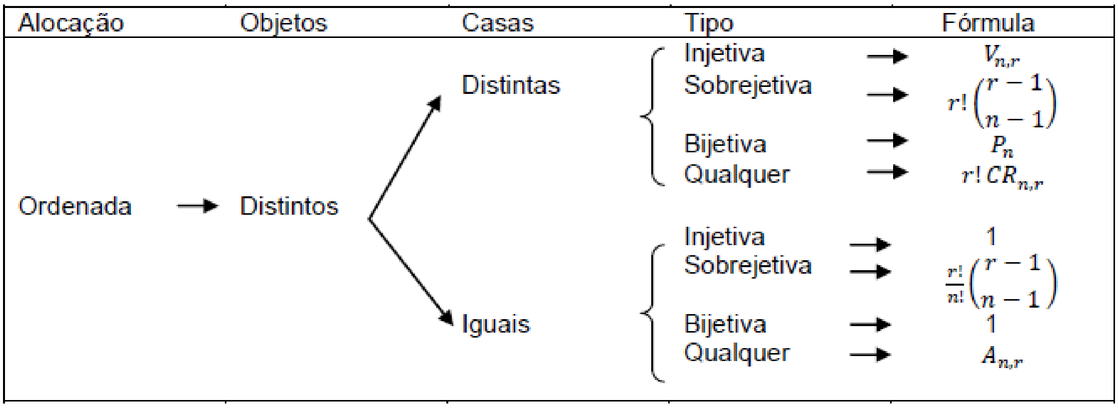
> 1º Colocações injetivas: com no máximo um objeto por casa ($r \leq n$);
> 2º Colocações sobrejetivas: colocações com ao menos um objeto por casa ($r \geq n$)
> 3º Colocações bijetivas: colocações de um único objeto por caixa ($n = r$);
> 4º Colocações quaisquer: pode ser colocado o número que se deseja de objetos em cada casa ou deixar alguma casa vazia. (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p.34, tradução nossa[47]).

Essa relação entre os tipos de seleções e os tipos de colocações chama-nos a atenção para as possíveis relações que o professor pode construir com a aritmética, geometria e álgebra. Por exemplo, podemos associar os tipos de colocações às relações entre conjuntos e o estudo de funções e por representações usando diagramas de flechas associando os elementos de um conjunto aos elementos de outro conjunto. No que concerne às condições estabelecidas entre os tipos de colocações, Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) apresentam 24 modelos de alocações simples que levam em consideração a ordem e a natureza dos objetos, ou seja, se são

[47] 1º Colocaciones inyectivas: con a lo sumo un objeto por caja ($r \leq n$). 2º Colocaciones sobreyectivas: colocaciones con al menos un objeto por caja ($r \geq n$).3º Colocaciones biyectivas: colocaciones de un solo objeto por caja ($n = r$). 4º Colocaciones cualesquiera: Se puede colocar el número que se desee de objetos en cada caja o dejar alguna vacía. (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 34).

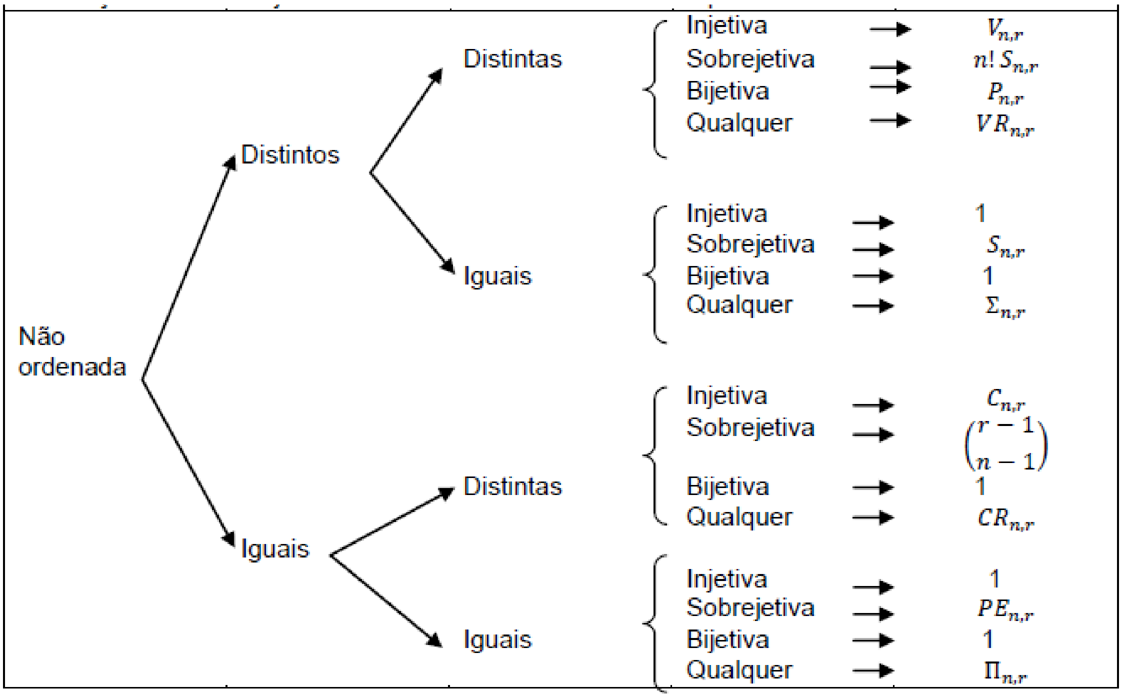
distintos ou não. Esses modelos podem direcionar ao uso de uma fórmula dentre as operações combinatórias quando estas tarefas forem propostas para alunos de ensino médio e que já possam compreender o uso de fórmulas.

Figura 4 - Modelo de alocação ordenada



Fonte: (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 35)

Figura 5 - Modelo de alocação não ordenada



Fonte: (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 35)

Com base no modelo de alocações de objetos em casas, é possível ampliar a discussão sobre a denominação das operações combinatórias necessárias para quantificar os resultados mediante o modelo de seleção (arranjos, permutações e combinações). Devemos lembrar que tais cálculos podem levar a expressões que envolvam fatoriais e números combinatórios, gerando fórmulas e estratégias de contagem combinatória. Vejamos a seguir exemplos de problemas envolvendo o modelo de partição.

Quadro 7 – Modelo de partição

Partição	
Quando se trata de formar uma partição de um conjunto de objetos iguais ou diferentes em um determinado número de subgrupos com certas condições dadas:	
Partição de um conjunto de objetos distintos em partes distintas. $AR_4^3 = 4^3$ (arranjo com repetição)	Uma criança tem quatro carros de cores diferentes (azul, branca, verde e roxa) e decide reparti-los a seus irmãos: Fernando, Luís e Teresa. De quantas formas diferentes pode repartir os carros com seus irmãos? Exemplo: Poderia dar os quatro carros a seu irmão Luís (ROA, 2000, p. 142, tradução nossa)[48].
Partição de um conjunto de objetos diferentes em dois subconjuntos distintos. $P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!}$ (permutação com repetição)	Um grupo de quatro amigos, André, Benito, Clara e Daniel, tem que realizar dois trabalhos diferentes: um de matemática e outro de língua. Para realizá-los, decidem dividir-se em dois grupos de duas crianças cada um. De quantas formas podem dividir-se para realizar os trabalhos? Exemplo: André e Benito podem fazer o trabalho de matemática enquanto Clara e Daniel podem fazer o trabalho de língua (ROA, 2000, p. 143, tradução nossa)[49].
Objetos distintos repartidos em células distintas $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!}$ (combinação simples)	Maria e Carmen têm quatro cartas numeradas de 1 até 4. Decidem reparti-las entre si em duas partes iguais. De quantas formas podem repartir as cartas? Exemplo: Maria pode ficar com as cartas 1 e 2 e Carmen com as cartas 3 e 4 (ROA, 2000, p. 158, tradução nossa)[50].

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores com base nos estudos dos espanhóis e na tese de Roa (2000)

Na tese de Roa (2000), identificamos ainda uma quarta classificação no modelo combinatório implícito que envolve problemas compostos. Nos problemas compostos, os enunciados envolvem mais de um esquema combinatório, podendo selecionar e alocar ou selecionar e particionar os elementos. Ainda encontramos em Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) outras classificações para os problemas combinatórios: existência,

[48] Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (Azul, Blanco, Verde y Rojo) y decide repartírselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede repartir los coches a sus hermanos? Ejemplo: Podría dar los cuatro coches a su hermano Luis (ROA, 2000, p.142).

[49] Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos?. Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua (ROA, 2000, p.143).

[50] María y Carmen tiene cuatro cromos numerados del 1 al 4. Deciden repartírselos entre las dos a partes iguales. ¿De cuántas formas se pueden repartir los cromos? Ejemplo: María puede quedarse com los cromos 1 y 2 y Carmen con los cromos 3 y 4 (ROA, 2000, p. 158)

enumeração, contagem, classificação e otimização. Apresentamos alguns exemplos dados pelos pesquisadores espanhóis ou de outras pessoas. Por exemplo, buscas que fizemos em livros ou de notas de aula de professores disponibilizadas na internet, ou ainda problemas que elaboramos quando não identificamos exemplos no material dos espanhóis ou quando o exemplo não era de simples compreensão.

a) Problemas de *existência* — Tratam da observação de possibilidades, ou não, de obter uma solução diante dos elementos dados e das condições determinadas. Veja o exemplo a seguir:

Quadro 8 – Exemplo de problema de existência

Uma professora sai a cada dia para passear com um grupo de 15 meninas. A formação tem 5 filas de 3 meninas em cada uma: Deseja-se organizar as turmas de modo que, no transcurso de 7 dias, cada aluna se encontre com todas as demais uma única vez[51].

1	2	5	1	3	9	1	4	15	1	6	11
3	14	15	2	8	15	2	9	11	2	7	12
4	6	12	4	11	13	3	10	12	3	8	13
7	8	11	5	12	14	5	7	13	4	9	14
9	10	13	6	7	10	6	8	14	5	10	15

1	8	10	1	7	14	1	12	13
2	13	14	2	4	10	2	3	6
3	4	7	3	5	11	4	5	8
5	6	9	6	13	15	7	9	15
11	12	15	8	9	12	10	11	14

Fonte: (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 24).

b) Problemas de *enumeração* — Consistem em listagem de todos os subconjuntos de elementos que satisfazem as condições postas. Pode-se também escrever um algoritmo para sua construção. Veja o exemplo a seguir.

> Tem-se um quadrado com um número de células par ou ímpar: Havendo completado com números, ou seguindo a ordem natural dos

[51] Una professora saca cada día a pasear a um grupo de 15 ninãs; La forma em 5 filas de 3 ninãs cada uma: se quiere organizar las ternas de um modo tal que em El transcurso de 7 días cada alumna se encontre com todas as demás uma sola vez (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p.24).

> números: 1, 2, 3, 4, etc. Ou qualquer outra progressão aritmética, como 2, 5, 8, 11, 14, etc. Disponha todos estes números em outro quadrado de células semelhante à aquele, de forma que todos os números de cada fileira, seja da esquerda para a direita, seja de cima para baixo, inclusive nas diagonais, tenham a mesma soma (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 25, tradução nossa[52]).

1	2	3	4		16	2	3	13
5	6	7	8		5	11	10	8
9	10	11	12		9	7	6	12
13	14	15	16		4	14	15	1

Para nós, além de exigir a enumeração dos possíveis casos, esse problema exige a alocação de números e a partição do número 34, que é o valor da soma dos números das linhas, colunas e diagonais. Portanto, trata-se de um problema composto envolvendo alocação e partição.

c) Problemas de *contagem* — Consistem em determinar o número de elementos de um conjunto finito que possui uma propriedade ou uma coleção de propriedades.

Exemplo: Quantos números de telefone com oito dígitos podem ser formados com os algarismos de 0 a 9, de modo que nenhum número comece com o símbolo 0?

Para resolvermos esse problema, precisamos saber que os dígitos podem ser 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, porém temos uma restrição que diz que o número não pode começar com zero. Logo, para iniciarmos a composição do número, temos nove possibilidades de escolhas entre os dez dígitos disponíveis. A partir do segundo dígito para compor o número, o zero já pode fazer parte da contagem; então, teremos dez possibilidades para cada um dos dígitos seguintes, o que leva à seguinte multiplicação: $9x10x10x10x10x10x10x10 = 90.000.000 = 9x10^7$, que é o total de números de telefones solicitado do problema.

---

[52] "Teniendo um cuadrado com um número de celdas par o impar: Habiéndolo completado com cifras, o según el orden natural de los números: 1, 2, 3, 4, etc. o cualquier outra progresión aritmética, como 2, 5, 8, 11, 14, etc. Disposer todas estas cifras según outro cuadrado de celdas semejante a aquél, de forma que todas las cifras de cada hilera, bien de izquierda a derecha, bien de arriba a abajo, incluso las diagonales, tengan la misma suma" (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 25).

d) Problemas de *classificação* — Não se pede que sejam enumerados todos os casos, mas solicita-se que os casos sejam classificados segundo os critérios apropriados em um determinado período k, depois de alcançar certo número de passos.

Exemplo: *Uma agência de turismo vende pacotes de viagens para três países da Europa. No primeiro momento de venda, as probabilidades de escolha dos pacotes de viagens são as seguintes: 50% para o destino A, 30% para o destino B e 20% para o destino C. Das pessoas que escolheram A, 10% migraram para B e 20% migraram para C; das pessoas que escolheram B, 40% migraram para A e 10% migraram para C; das pessoas que escolheram C, 10% migraram para A e 10% migraram para B. Com base nesses dados, determine a probabilidade de escolha para o momento 3* (BELCHOR, P. M. Cadeia de Markov. **Youtube**. 7 de ago de 2015[53]).

Momento 1
A → 50%
B → 30%
C → 20%
Momento 2:
A → 50%x70% + 30%x40% + 20%x10% = 49%
B → 30%x50% + 50%x10% + 20%x10% = 22%
C → 20%x80% + 50%x20% + 30%x10% = 29%
Momento 3:
A → 49%x70% + 22%x40% + 29%x10% = 46%
B → 22%x50% + 49%x10% + 29%x10% = 18,8%
C → 29%x80% + 22%x10% + 40%x20% = 35,2%

Esse tipo de problema envolve escolhas ordenadas e recursividade. Portanto exige processos sucessivos de seleção ordenada respeitando parâmetros ou critérios estabelecidos. O resultado mostra que, à medida que se ampliam os momentos, o número de pessoas que visitam o destino C também aumenta. Esse exemplo representa uma cadeia de Markov e recebe

[53] Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=sHlswmtASm8>

esse nome devido ao matemático russo Andrei Andreyevich Markov, que realizou estudos envolvendo sucessões de experimentos aleatórios. Esses estudos são aplicados hoje em processos estocásticos, em estudos de sistemas lineares e na teoria das probabilidades em que se tem uma sucessão de experimentos aleatórios, cujas probabilidades variam de acordo com as regras estabelecidas.

e) Problemas de *otimização* — Busca-se a melhor condição para obter determinadas soluções para um problema. Em algumas ocasiões, é possível considerar o conjunto de soluções que podem ser atribuídas a uma função que pode fornecer o valor máximo ou mínimo.

Um exemplo clássico desse tipo de situação é o problema da Mochila (*Knapsack problem)* a seguir:

> Um excursionista planeja fazer uma viagem acampando. Há 5 itens que ele deseja levar consigo, mas estes, juntos, excedem o limite de 60 quilos que ele supõe ser capaz de carregar. Para ajudar a si próprio no processo de seleção, ele deverá atribuir valores, por ordem crescente de importância a cada um dos itens [...] (SOUZA, 2009, p. 8).

O objetivo é determinar o conjunto de objetos que devem ser colocados na mochila, de forma a maximizar o valor de retorno respeitando a sua capacidade. Usando uma linguagem matemática moderna, esse problema pode ser enunciado da seguinte forma: Suponha que se tenha uma mochila com capacidade total C e na quantidade de itens distintos. Sejam $x_{1,}x_{2,}\, x_{3,} \cdots, x_n,$ os itens disponíveis para serem carregados, cada um com um respectivo peso $p_{1,}\, p_{2,} \cdots, p_n,$ e valor $v_{1,}v_{2,}v_{3,} \cdots, v_{n,}$. Para maximizar o valor da mochila, torna-se necessário verificar a combinação dos itens x_i considerando o valor v_i e os pesos p_i e atendendo à restrição do peso que a mochila suporta. Por exemplo, suponha que sua mochila suporte no máximo 4 kg e você dispõe de quatro itens: x_1, que pesa 2 kg e custa R$ 7,00; x_2, que pesa 3 kg e custa R$ 6,00; x_3, que pesa 1 kg e custa R$ 5,00; e x4, que pesa 2 kg e custa R$ 9,00. Quais são os dois produtos que você deve carregar, de modo que os itens sejam os mais caros possíveis e não ultrapassem a capacidade de peso que a mochila suporta?

Ao construirmos uma tabela, temos as seguintes possibilidades:

Tabela 1 - Solução do problema da mochila[54]

Itens	Valor (R$)	Peso ≤ 4 Kg
x_1+x_2	7 + 6 = 13	2 + 3 = 5
x_1+x_3	7 + 5 = 12	2 + 1 = 3
x_1+x_4	7 + 9 = 16	2 + 2 = 4
x_2+x_3	6 + 5 = 11	3 + 1 = 4
x_2+x_4	6 + 9 = 15	3 + 2 = 5
x_3+x_4	5 + 9 = 14	1 + 2 = 3

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Observemos que, se carregarmos na mochila os itens x_1 e x_4, levaremos os itens mais caros, respeitando a capacidade total de peso que a mochila suporta. Esse tipo de tarefa pode ser explorado por professores com seus alunos no início do ano letivo, para calcularem o peso que podem carregar em suas mochilas considerando as recomendações médicas de um ortopedista que orientam o peso máximo ideal que cada indivíduo suporta. De modo geral, maximizar o valor da mochila significa maximizar a seguinte inequação:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i\, x_i, \text{sujeito a } \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \ \leq C, \text{onde } x_i \in \mathbb{N}.$$

Se os professores trabalharem tarefas simples envolvendo ideias com esses conceitos com seus alunos desde os anos iniciais, contribuirão para que os discentes desenvolvam estratégias de resolução em problemas de padrões, aritmética, geometria e álgebra. Segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996, p. 29), "o rigor matemático da combinatória e seu desenvolvimento formal requer uma grande quantidade de noções de álgebra abstrata". Entre tais noções, de acordo com esses autores, citamos:

- ✓ noções de conjuntos, subconjuntos e operações com conjuntos;
- ✓ partição de um conjunto;
- ✓ produto cartesiano;
- ✓ relação binária;
- ✓ relação de equivalência.
- ✓ conjunto quociente, relação de ordem, grafo associado a uma relação binária;
- ✓ correspondências – aplicações: injetiva, sobrejetiva e bijetiva;

[54] A solução do problema da mochila é a que aparece destacada na cor verde.

- ✓ cardinalidade de um conjunto e equipotência;
- ✓ propriedade comutativa, elemento neutro, inverso, estruturas algébricas elementares, como grupos, anéis, corpos, espaços vetoriais; homomorfismos.

Compreendemos que o raciocínio combinatório precisa ser trabalhado por meio de problemas que envolvam ideias mais simples de agrupamentos para atividades que envolvam ideias mais complexas e necessitem de outras noções matemáticas.

Os trabalhos de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), Roa (2000), Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991), Borba, (2010, 2013) e Pessoa e Borba (2009, 2010) mostram que a combinatória tem ligação com a aritmética, a álgebra, a geometria e outras áreas de conhecimento. Além disso, há necessidade de que o professor tenha vontade de trabalhar integrando conceitos matemáticos e propondo aulas que façam conexões de tarefas de combinatória com outros conteúdos e até mesmo reformulando o currículo escolar. Essa forma de pensar converge com as ideias de Skemp (1976), Santos (1997) e Santos-Wagner (2008), quando orientam os professores a questionar sua forma de ensinar, de modo que o aluno compreenda e não apenas decore fórmulas ou procedimentos, além de chamar a atenção para aulas que motivem os alunos a aprender. Esses aspectos são relevantes, pois refletem na maneira como o professor avalia os seus alunos, e a avaliação é um dos temas que merecem atenção entre pesquisadores da educação matemática. De acordo com Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996), um ponto chave no processo de avaliação do raciocínio combinatório é identificar os tipos de erros dos alunos, tais como:

1) Alterar o tipo de modelo matemático no enunciado do problema, pois há problemas que envolvem a ideia de selecionar, outros com a ideia de alocar e tarefas com a ideia de repartir.
2) Erro de ordem, que consiste em confundir os critérios de combinações e variações, considerando se a ordem dos elementos é irrelevante ou não. Para evitar esse tipo de erro, o professor precisa orientar os alunos a compreender o enunciado e verificar se a ordem de agrupamento dos elementos é relevante ou não.

3) Erro de repetição, que consiste em o aluno repetir enumerações já explicitadas. Isso remete à necessidade de chamar a atenção dos alunos para analisar suas respostas e enumerar de forma sistemática.
4) Confundir o tipo de objetos como idênticos quando eles são distinguíveis ou vice-versa. Desse modo, torna-se necessário que o professor oriente os alunos a compreender os enunciados, analisando se a natureza dos elementos é distinta ou igual ou se envolve a recolocação deles.
5) Enumeração assistemática, quando é solicitado para resolver o problema por enumeração, e o aluno resolve por tentativa e erro, sem um procedimento recursivo que conduz à formação de todas as possibilidades. Esse tipo de resolução exige que o professor auxilie os alunos a desenvolver procedimentos que contribuam para desenvolver sistematizações que ajudem a encontrar todas as possibilidades.
6) Resposta errada intuitiva, quando os alunos dão apenas uma solução numérica sem justificar a resposta. Neste caso, o professor precisa conversar com os alunos para investigar o raciocínio utilizado e analisar se o pensamento tem relação com o enunciado do problema e se tem relação com outras tarefas já realizadas na escola ou de experiências pessoais etc.
7) Não lembrar a fórmula correta de operação combinatória, quando consegue identificar corretamente o tipo de problema a ser resolvido.
8) Não se lembrar do significado dos valores dos parâmetros na fórmula combinatória. Os problemas de combinatória exigem que os alunos observem os parâmetros estabelecidos no enunciado, ou seja, identifiquem as restrições que o enunciado traz.
9) Interpretação e construção errada do diagrama de árvore.
10) Confusão no processo de identificar se as células ou casas em que se quer alocar são distintas ou não.
11) Erro nas partições formadas. Neste caso, o aluno pode errar na quantidade de partes ou subconjuntos que é solicitada no problema ou errar no parâmetro de partição.

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) orientam que professores desenvolvam com os alunos ações pedagógicas que contribuam para a sistematização de ideias que auxiliem nos processos de resolução de problemas combinatórios. Entre as orientações dos pesquisadores espanhóis, citamos: a) ajudar os alunos a desenvolver o raciocínio matemático, a capacidade de resolução, formulação e comunicação de ideias relacionando com outros tópicos de matemática e com outras áreas de conhecimento; b) usar diversos tipos de representações, validar soluções e comunicar a outros alunos; c) conduzir os alunos ao reconhecimento progressivo de seu conhecimento matemático; e d) flexibilização do currículo adaptado à capacidade dos alunos.

É importante que o professor converse e discuta com seus alunos sobre as soluções corretas e as soluções erradas, pois nem sempre os acertos garantem que houve a compreensão dos enunciados ou dos conceitos matemáticos. Do mesmo modo, o erro pode ocorrer por falta de atenção, por erro de interpretação ou pela falta de um recurso matemático que ajude a resolver de forma sistemática. “Na ausência de controle sistemático do sistema conceitual, as intuições podem levar, por meio de extrapolações ilícitas, a erros de interpretação e previsão” (FISCHBEIN, 1975, p. 126, tradução nossa[55]). Os erros cometidos pelos alunos no processo de resolução de problemas matemáticos podem estar relacionados ao uso inadequado de certas aquisições provenientes de esquemas de inteligência construídos com base em suas interações individuais e coletivas ao longo de seu desenvolvimento. Portanto, cabe ao professor estimular seus alunos às intuições corretas, pois se elas não forem evocadas ou se forem sistematicamente suprimidas, poderão ficar atrofiadas sem que necessariamente estejam perdidas.

De acordo com Fischbein (1975, p. 117, tradução nossa[56]), “[…] intuições são parte integrante do comportamento inteligente. Elas são aquisições cognitivas que intervêm diretamente na ação prática ou mental [...]”. O autor classifica as intuições em primárias e secundárias da seguinte forma:

---

[55] In the absence of systematic control from the conceptual system, primary intuitions can lead, by way of illicit extrapolations, to errors of interpretation and prediction (FISCHBEIN, 1975, p. 126).

[56] Intuitions are an integral part of intelligent behaviour. They are cognitive acquisitions which intervene directly in practical or mental action […] (FISCHBEIN, 1975, p. 117).

> *Intuições primárias* são aquisições cognitivas que são derivadas da experiência do indivíduo, sem a necessidade de qualquer instrução sistemática.
> *Intuições secundárias* são aquisições que possuem todas as características de intuições, mas elas são formadas por educação científica, principalmente na escola.
> As intuições também podem ser classificadas como intuições *afirmativas* ou *antecipatórias*. As intuições afirmativas incorporam o conhecimento do mundo externo que aceitamos como evidente. Intuições antecipatórias são construções mentais que antecipam globalmente a solução de um problema antes que as etapas detalhadas da solução tenham sido encontradas (FISCHBEIN, 1975, p. 117, tradução nossa)[57].

Para esse autor, as intuições são componentes cognitivos ou esquemas mentais estruturais responsáveis pela seleção, assimilação e armazenamento de tudo quanto foi descoberto sobre a experiência do indivíduo para aumentar a rapidez, a adaptabilidade e a eficiência de sua ação. Além disso, intuições servem de base para extrapolações, ou seja, permitem saltar para novas descobertas e melhorar a inferência lógica à medida que se vão tornando em hábitos mentais.

Concordamos com os pesquisadores espanhóis e defendemos que no processo de ensino de resolução de problemas que envolvem o raciocínio combinatório seria importante que o professor desenvolvesse cinco ações com seus alunos. Na ação 1, os alunos devem identificar o modelo combinatório implícito no texto do problema, e assim verificar se o problema envolve seleção, alocação, partição ou se é um problema composto, isto é, que envolve mais de uma tarefa. Na ação 2, o sujeito deve identificar os invariantes do problema, ou seja, as restrições estabelecidas, a natureza dos elementos, se são distintos ou não, se há recolocação de objetos, se vai utilizar todos os elementos de um conjunto ou só alguns deles. Já na ação 3, o aluno deve identificar o tipo de problema combinatório no que diz respeito ao que se pede, isto é, se é solicitado ou necessário verificar a existência de uma determinada possibilidade, ou ainda verificar as possíveis soluções, analisar se a tarefa

---

[57] *Primary intuitions* are cognitive acquisitions which are derived from the experience of the individual, without the need for any systematic instruction.
Secondary intuitions are acquisitions which have all the characteristics of intuitions, but they are formed by scientific education, mainly in school.
Intuitions can also be classified as *affirmatory* or as *anticipatory* intuitions. Affirmatory intuitions embody the knowledge of the external world which we accept as evident. *Anticipatory* intuitions are mental constructs which globally anticipate the solution to a problem before the detailed steps of the solution have been found.

exige a classificação ou recorrência de procedimentos, além de, identificar se o problema pede para enumerar as possibilidades, contar as possibilidades ou otimizar mediante a análise das possibilidades. E na ação 4, o sujeito vai verificar se é um problema de contagem simples ou composta, ou seja, se vai ser necessário usar apenas um ou mais de um tipo de operação combinatória. Na quinta ação, além disso, o sujeito tem de pensar que operação matemática ou quais técnicas combinatórias são mais apropriadas, caso ele já tenha estudado esse assunto.

3.2 Resolução de problemas

Desde o princípio, os seres humanos depararam-se com problemas em que, num primeiro momento, não sabiam como resolver. Porém, conforme se dedicavam a entender tais situações, conseguiam desenvolver técnicas cada vez mais eficazes para a solução deles. Não foi e nem tem sido diferente com o raciocínio combinatório. Ao longo dos tempos, os problemas envolvendo conhecimentos básicos, tais como colocar em ordem, seriar, classificar e resolver quadrados mágicos, entre outros, deixaram vários homens curiosos e com vontade de resolvê-los.

Conforme ressalta Biggs (1979), as tarefas que envolviam o raciocínio combinatório requeriam que as pessoas usassem conhecimentos de contagem, fizessem o reconhecimento de possibilidades, formulassem escolhas e pensassem em critérios para resolver determinadas situações. Resolver problemas é uma tarefa presente não apenas em matemática, mas nas nossas interações com as pessoas e com o mundo. Essas vivências podem ser aproveitadas para ensinar os alunos a resolver problemas que envolvam conhecimentos matemáticos. Segundo Vale, Pimentel e Barbosa (2015), a investigação em resolução de problemas de matemática iniciou-se sob a influência de Polya com o seu trabalho ‘‘How to solve it’’, publicado em 1945. Em seu trabalho, Polya já discutia sobre como resolver problemas matemáticos, e, com base em sua obra, outros educadores matemáticos focalizaram estudos sobre

> [...] o modo como os alunos talentosos resolviam problemas (*e.g.* Anderson[58], Boyle & Reiser, 1985), sobre o ensino de estratégias de resolução (heurísticas) e processos metacognitivos (*e.g.* Charles[59]& Silver, 1988; Lester[60], Garofalo & Kroll, 1989; Schoenfeld[61], 1992), e, mais recentemente, sobre a relação com a modelação matemática (*e.g.* English[62] et al., 2008) (VALE; PIMENTEL; BARBOSA, 2015, p. 40).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) da 1.ª à 4.ª série já estabeleciam que, em matemática, os resultados de desempenho dos alunos em geral eram insatisfatórios e davam maior destaque a questões envolvendo procedimentos e resolução de problemas. Esse documento também argumenta, ainda, que "[...] o ensino da matemática ainda é feito sem levar em conta os aspectos que a vinculam com a prática cotidiana, tornando-a desprovida de significado para o aluno" (BRASIL, 1997, p. 24).

O ensino de matemática utilizando situações que envolvem aplicar conhecimentos adquiridos em anos anteriores e ao alcance dos alunos gerou debates sobre o ensino desde a resolução de problemas. Como eixo organizador do ensino e da aprendizagem matemática, de acordo com o documento dos PCN (BRASIL, 1998), a resolução de problemas é importante por servir: 1) como ponto de partida para o ensino e aprendizagem de conceitos e métodos matemáticos; 2) como forma de estruturação matemática por meio da interpretação do enunciado; 3) como uma forma de articular conceitos matemáticos com outros já aprendidos; 4) como um meio de promover o estudo de generalizações e; 5) como uma orientação para a aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

De acordo com Onuchic (1999), não havia concordância quanto à maneira pela qual se obteriam bons resultados com o ensino de matemática

---

58 Anderson, J. R., Boyle, C. B., & Reiser, B. J. Intelligent tutoring systems. *Science*, 228, p. 456–462, 1985.

59 Charles, R. & Silver, E. *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. Reston, VA: NCTM, 1988.

60 Lester, F. K., Garofalo, J. & Kroll, D. L. Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition. Key influences on problem solving behaviour. In D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. New York: Springer-Verlag, 1989, p. 75–88.

61 Schoenfeld, A. Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning:* A project of the National Council of Teachers of Mathematics. New York, NY: Macmillan Publishing Co, 1992, p. 334–370.

62 English, L., Lesh, R. & Fennewald, T. Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. In M. Santos-Trigo & Y. Shimizu (Eds.), *ICME, Topic Study Group 10, Research and development in problem solving in mathematics education*, 2008, p 46–58.

apoiada na resolução de problemas. Não existiam coerência e clareza no rumo desse processo para alcançar o objetivo de ensino. Contudo, tais diferenças de concepções sobre o significado de resolução de problemas permitiram que pesquisadores desenvolvessem trabalhos que atendessem a recomendações da matemática escolar estabelecidas pelo National Council of Teachers of Mathematics (NTCM).

Onuchic e Allevato (2011) dizem que, na década de 1980, educadores matemáticos buscaram, por meio da resolução de problemas, desenvolver o ensino e a aprendizagem dos alunos que favorecessem a compreensão de significados matemáticos. Em 1980, o National Council of Teachers of Mathematics publicou um documento sobre recomendações para o ensino, o qual indicava que a resolução de problemas deveria ser foco da matemática escolar. Iniciou-se, então, a fase da resolução de problemas, que, de acordo com Onuchic e Allevato (2011, p. 78), esteve apoiada no "[...] construtivismo e na teoria sociocultural, que tem Vygotsky como principal teórico [...]". A fase inicial esteve voltada para os processos do pensamento matemático e da aprendizagem por descoberta via resolução de problemas, o que contribuiu para desenvolver recursos didáticos na forma de coleções de exercícios, desenvolvimento de estratégias, atividades e orientações sobre a avaliação do desempenho dos alunos nesse campo de estudo.

Segundo Santos-Wagner (2008) e Onuchic e Allevato (2011), em 1989 Schroeder e Lester apresentaram três modos de abordar a resolução de problemas em sala de aula. O primeiro trata de ensinar sobre resolução de problemas. Aqui o professor ensina as diferentes estratégias para resolver problemas e procura incentivar os alunos a aprenderem essas estratégias de resolução de problemas e a discutirem sobre como resolveram alguns problemas. No segundo modo trata-se de ensinar matemática para resolver problemas. O professor preocupa-se em introduzir e explorar novos conceitos e procedimentos matemáticos que serão trabalhados posteriormente na resolução de problemas. E por fim, ensinar matemática por meio da resolução de problemas, em que problemas são valorizados não apenas como o propósito final de aprendizagem em matemática, mas como um meio de fazer matemática e de evidenciar conceitos matemáticos durante o processo de resolução. Nesse caso, o professor inicia a aula de matemática com um problema que quando resolvido vai servir de base para que o professor sistematize com alunos conceitos matemáticos que foram identificados no processo de resolver este problema. É com base nessas concepções que buscamos desenvolver nosso trabalho, pois, de acordo com Santos (1997), Santos-Wagner (2008), Onuchic (1999) e Onuchic e Allevato (2004, 2011), o ideal é que estas três abordagens didáticas sejam exploradas pelos professores em aulas de matemática.

Diante do exposto, entendemos que são necessárias diversas habilidades para compreender conceitos matemáticos. Portanto, é imprescindível que, ao resolver um problema, o aluno saiba questionar esse problema, identificar seus dados, transformá-los em informações necessárias para a resolução (ou reformulação de novos problemas) e verificar a própria resposta. Isso contribui para uma aprendizagem reflexiva[63], e não apenas reprodutora de procedimentos. Além disso, a resolução de problemas, entre outras funções, contribui para o letramento matemático. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o letramento matemático

> […] assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição) (BRASIL, 2017, p. 264).

A resolução de problemas pode ser uma das metodologias para desenvolver conceitos e procedimentos matemáticos, contribuindo para construir o raciocínio, compreender o uso de representações matemáticas e melhorar a linguagem e a argumentação. Defendemos que, além de compreender os enunciados de um problema, é importante que os alunos saibam articular os conceitos matemáticos aprendidos em anos anteriores com o que se pede no problema com suporte nos contextos significativos e aprendam a formular, resolver e explicar problemas. Sob esse aspecto, segundo a BNCC (BRASIL, 2017),

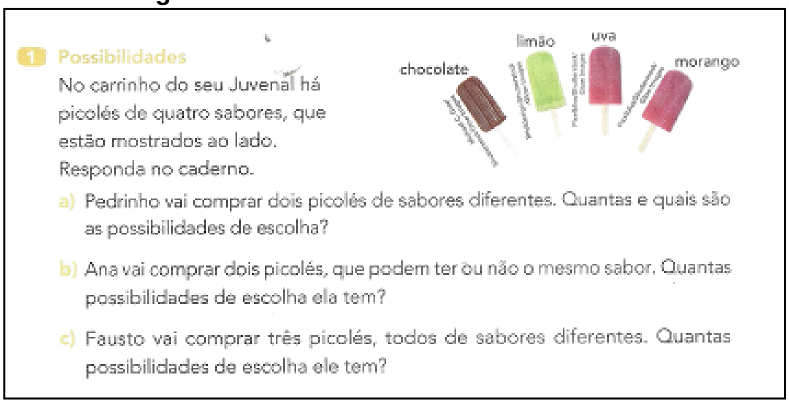
---

[63] Chamamos de aprendizagem reflexiva, aquela em que o indivíduo tem consciência de suas ações no processo de resolução de um problema matemático, reflete sobre sua resposta com o que é solicitado na tarefa, além de conjecturar e sistematizar sobre os invariantes explícitos ou não no enunciado.

> [...] cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática. No entanto, é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos. Para favorecer essa abstração, é importante que os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvido. Por esse motivo, nas diversas habilidades relativas à resolução de problemas, consta também a elaboração de problemas. Assim, pretende-se que os alunos formulem novos problemas, baseando-se na reflexão e no questionamento sobre o que ocorreria se alguma condição fosse modificada ou se algum dado fosse acrescentado ou retirado do problema proposto (BRASIL, 2017, p. 297).

Concordamos que a articulação da matemática com outras áreas de conhecimento e da história da matemática, ou entre diferentes partes da própria matemática, tem importância para a construção de significados pelos alunos. Trazemos aqui um exemplo de problema matemático apresentado por Biggs (1979), que pode ser explorado desde a história da matemática e aparece em livros didáticos contemporâneos. O autor informa-nos que procedimentos de seleção, classificação e ordenação foram encontrados no tratado do médico de Sushruta, cuja data pode ser do século VI a.C. Um dos problemas envolvia a mistura de vários tipos de gostos mediante a combinação de seis qualidades básicas: doce, ácido, salinas, pungente, amargo e adstringente. Problemas desse tipo, envolvendo sabores, até hoje são explorados em livros didáticos e em pesquisas de doutorado e mestrado. Vejamos o exemplo a seguir retirado do livro do autor Dante (2016).

Figura 6 - Tarefa com escolha de sabores


1 Possibilidades
No carrinho do seu Juvenal há picolés de quatro sabores, que estão mostrados ao lado. Responda no caderno.

a) Pedrinho vai comprar dois picolés de sabores diferentes. Quantas e quais são as possibilidades de escolha?
b) Ana vai comprar dois picolés, que podem ter ou não o mesmo sabor. Quantas possibilidades de escolha ela tem?
c) Fausto vai comprar três picolés, todos de sabores diferentes. Quantas possibilidades de escolha ele tem?

Fonte: (DANTE, 2016, p. 247, 4.º ano, Livro do aluno)

Assim, observamos que o raciocínio combinatório está presente na culinária e coleções de livros didáticos como a do autor Dante (2016), que exploram desde os anos iniciais tarefas com combinações de sabores distintos e com sabores repetidos. Esses problemas envolvendo sabores são explorados desde a antiguidade e ainda hoje têm potencial para ser explorados com alunos desde a educação infantil. Portanto, vemos que o raciocínio combinatório é um assunto da matemática que pode ser investigado em diferentes contextos por meio da resolução de problemas, de modo que favoreça uma construção de significados matemáticos pelos alunos. Essa temática de resolução de problemas tem provocado autores desde o século passado. Um pioneiro nessa discussão foi Polya,

> [...] é difícil imaginar um problema absolutamente novo, sem qualquer semelhança ou relação com qualquer outro que já haja sido resolvido; se um tal problema pudesse existir, ele seria insolúvel. De fato, ao resolver um problema, sempre aproveitamos algum problema anteriormente resolvido, usando o seu resultado, ou o seu método, ou a experiência adquirida ao resolvê-lo. Além do que, naturalmente, o problema de que nos aproveitamos deve ser, de alguma maneira, relacionado com o nosso problema atual. Daí a pergunta: conhece um problema correlato? (POLYA, 1995/1945, p. 36).

Essas orientações de Polya foram fundamentais para organizar nossos problemas nas tarefas que apresentamos aos alunos no experimento de ensino, pois buscamos agrupar problemas que envolvessem ideias semelhantes, ou seja, possuíssem a mesma estrutura matemática. Desse modo, consideramos o que nos orientam os trabalhos de Polya (1995/1945), Santos (1997), Santos-Wagner (2008), Onuchic e Allevato (2004, 2011) e Allevato (2014) sobre resolução de problemas e o que trouxemos sobre o tema em documentos como BNCC (BRASIL, 2017) e PCN (BRASIL, 1997, 1998) em nosso trabalho. Por isso utilizamos problemas que permitem conectar a própria matemática com a história da matemática e outras áreas de conhecimento por meio da resolução de problemas. Mas, afinal, o que é um problema?

> Um problema é algo que queremos ou precisamos resolver e que nos apresenta uma dificuldade inicial. Geralmente é uma situação em que a princípio o indivíduo não possui a estratégia para resolvê-lo. Quando o indivíduo já sabe como resolver a situação e já dispõe de estratégias para solucionar a dificuldade, esta deixou de ser um problema. Na vida cotidiana todos nós nos deparamos com uma série de dificuldades que são os nossos problemas a resolver (SANTOS-WAGNER, 2008, p. 50).

De forma semelhante dizemos que “uma tarefa será um problema para um indivíduo somente quando ele: 1) estiver motivado a encontrar uma solução (por desejo ou necessidade); 2) não souber, de imediato, como encontrar uma solução e; 3) tiver que se empenhar em procurar uma solução" (LESTER Jr.; D'AMBROSIO, 1988, p. 2).

Assim, a partir destes autores citados antes quando falam o que é um problema e com apoio nas ideias de Santos (1997), Santos-Wagner (2008), Polya (1995/1945), Allevato (2014), Onuchic e Allevato (2004, 2011) e Zanon (2011), entendemos um problema matemático de fato como: a) uma questão em que não se tem uma solução nem um algoritmo de imediato que seja aplicado para obter a resposta; b) algo que exige ler o enunciado com cuidado, analisar as informações, examinar os próprios conhecimentos matemáticos para ver se é possível chegar a uma estratégia que auxiliará a encontrar uma solução; c) algo que permite reorganizar ideias existentes e o aparecimento de novas; e d) algo que permite que professor e aluno reelaborem e expliquem outros problemas matemáticos.

Com base na compreensão do que é um problema, voltamos nossa atenção para diferentes tipos de problemas fundamentados em nossas releituras de Polya (1995/1945, p. 103-141), Santos (1997, p. 14-17), Santos-Wagner (2008, p. 54-56), e Zanon (2011, p. 89-97), que podem ser classificados como problemas convencionais (problemas rotineiros ou problemas tradicionais) e problemas não convencionais (problemas não rotineiros ou problemas não tradicionais). Com apoio nesses autores, dizemos que os problemas convencionais (problemas rotineiros ou problemas tradicionais) têm as seguintes características:

- ✓ Geralmente aparecem em livros didáticos, consistindo usualmente em identificar as operações e algoritmos mais apropriados.
- ✓ Não são desafiadores, e o plano de pensamento não gera novos conhecimentos.
- ✓ Restringem-se a aplicações diretas de algoritmos.
- ✓ Servem para memorização do conteúdo.
- ✓ Os dados são apresentados no texto de forma clara e do modo em que devem ser utilizados.
- ✓ Possuem solução e resposta única de forma numérica.
- ✓ São compostos de frases curtas e objetivas.
- ✓ Podem envolver um, dois ou mais tipos de cálculos.

No intuito de exemplificarmos problemas desse tipo, elaboramos os quadros a seguir com base nos autores Polya (1995), Santos (1997), Santos-Wagner (2008) e Zanon (2011).

Quadro 9 – Tipos de problemas convencionais

Tipologia	Característica	Exemplo
Exercício de fixação, problema padrão, problema trivial	Trata de situações importantes para o aperfeiçoamento de habilidades no uso de algoritmos e para reforçar o que os alunos aprenderam em anos anteriores.	325 x 58 = ?
Problemas de demonstração	Visa estabelecer a verdade dos teoremas, ou seja, demonstrar ou refutar um teorema enunciado.	Mostrar que o teorema do binômio de Newton $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$ é válido para todo natural n ≥ 1.
Problemas de determinação	Visa encontrar o valor de uma incógnita (x) que satisfaça uma condicionante claramente anunciada.	$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
Problema auxiliar ou problema correlato	É aquele que resolvemos na esperança de que seu tratamento nos auxilie a resolver um outro problema ou o problema original.	Resolver a equação quadrática $y^2 - 13y + 36 = 0$ e fazendo $y = x^2$, nos auxilia a resolver a equação biquadrada $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.
Problemas equivalentes	São problemas cuja resolução importa na resolução do outro.	O exemplo do tipo de problema auxiliar envolvendo equação quadrática e explica esta situação.
Problema – tipo simples ou de simples tradução	Este tipo de problema envolve a tradução direta das palavras para uma expressão matemática simples, como 15 – 10 = ? ou 10 + ? = 15.	Pedro tem 15 carrinhos. João tem 10 carrinhos. Quantos carrinhos Pedro tem a mais, do que João?
Problema tipo – composto, cálculos complexos ou de traduções complexões	A resolução desse tipo de problema requer no mínimo dois passos.	Bolas de plástico para piscina são vendidas em pacotes contendo 5 unidades. Uma caixa contém 24 pacotes. O Sr. João, dono de uma loja, encomendou 1.800 bolas de plástico. Quantas caixas o Sr. João encomendou? Qual foi o total de pacotes comprados?

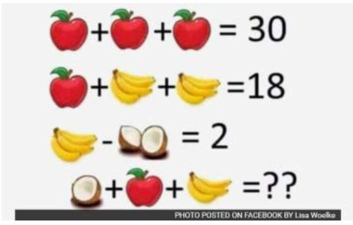
Fonte: Elaborado pelos pesquisadores com base nos autores referenciados.

Conforme Santos (1997), Santos-Wagner (2008) e Zanon (2011), os problemas não convencionais (problemas não rotineiros ou problemas não tradicionais) têm as características a seguir.

- ✓ Exigem o uso de estratégias ou alguma tentativa que não seja a de um algoritmo pronto.

- ✓ Podem apresentar mais de uma solução.
- ✓ Desenvolvem novos conhecimentos quando resolvidos.
- ✓ Exigem uma leitura mais cuidadosa dos enunciados.
- ✓ Favorecem a percepção da matemática como ciência em constante desenvolvimento e como construção humana.
- ✓ Favorecem o desenvolvimento do pensamento na criação de novas opções, caminhos e ideias.

Quadro 10 – Tipos de problemas não convencionais

Tipologia	Característica	Exemplo
Problema heurístico ou de processo	Desenvolve estratégias que envolvem a compreensão, o planejamento, a solução e a avaliação da tentativa de solução. Permite desenvolver a habilidade de decisão sobre quais, como e quando utilizar seus conhecimentos matemáticos.	Um grupo de 11 alunos vai promover um campeonato de tênis. Se cada participante jogar uma vez contra todos os outros alunos, quantos jogos haverá no campeonato?
Problemas de aplicação ou problemas do cotidiano	São problemas que apresentam uma situação real ou que se aproxime da realidade, cuja solução envolve o uso de recursos, técnicas e conceitos e procedimentos matemáticos.	Um engenheiro, para construir uma ponte, aplica conceitos e procedimentos matemáticos.
Problemas de quebra-cabeça, recreativos ou de lógica	Permitem o desenvolvimento da matemática de forma recreativa.	 Fonte:<http://www.ndtv.com/offbeat/this-viral-childrens-puzzle-about-fruit-is-confusing-adults-on-social-media-1279189> Acesso em 16 de janeiro de 2017.
Problemas sem solução	Os dados do problema não ajudam na resolução do problema, ou o enunciado é inadequado ao contexto ou há alguma impossibilidade matemática.	• João tem 5 irmãos. Maria tem 2 filhos. Quanto pesa João? • Monte uma pirâmide de base quadrada com 4 triângulos equiláteros.
Problemas com mais de uma solução	Exigem a análise do resultado conforme as condicionantes. Há diferentes possibilidades de resolução.	Como posso obter R$ 1,00 usando moedas de R$ 0,05; R$ 0,10 e de R$ 0,50?
Problemas com	Nem todas as informações do	Caio é um garoto de 6 anos e gosta muito de brincar com bolinhas de

excesso de dados	enunciado do problema são utilizadas na resolução.	gude. Todos os dias acorda às 8 horas, toma o seu café e corre para a casa de seu amigo Júnior para brincar. Caio levou 2 dúzias de bolinhas coloridas para jogar. No final do jogo, ele havia perdido um quarto de suas bolinhas e Júnior ficou muito contente, pois agora tinha o triplo de bolinhas de Caio. Quantas bolinhas Júnior tinha ao iniciar o jogo? Fonte:http://www.pead.faced.ufrgs.br/sites/publico/eixo4/matematica/espaco_forma/tipos_problemas/tipos_problemas.htm Acesso em 16 de janeiro de 2017.

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores com base nos autores referenciados.

A compreensão dos tipos de problemas pode auxiliar o professor na elaboração de tarefas que ajudem a construir conceitos matemáticos e a desenvolver habilidades específicas de um conteúdo matemático ou na construção de estratégias de resolução. No processo de ensino em que o professor valorize e utilize as três abordagens de resolução de problemas, quando cada uma for conveniente, suas ações pedagógicas mudam. Por exemplo, o professor vai atuar como orientador fazendo perguntas que ajudem os alunos a revisar e construir conhecimentos, ou propor questionamentos que auxiliem os alunos a pensar e focalizar na situação do problema. Isso possibilita que os alunos pensem sobre o que precisam fazer, o que já sabem ou o que querem encontrar para obter melhores resultados, ao elaborarem uma rede de ideias para a resolução do problema.

No ensino pautado na resolução de problemas, é necessário que o professor prepare e/ou escolha problemas apropriados para trabalhar o conteúdo ou o conceito que pretende que o aluno construa. Mesmo não existindo um método único de ensino de matemática por meio da resolução de problemas, apontamos algumas formas de trabalho que buscamos seguir em nossa pesquisa de doutorado a partir de nossa releitura dos trabalhos de alguns pesquisadores. Assim, revisitamos ideias de Lester (1987, p. 40-42), Santos (1997, p. 15-23), Santos-Wagner (2008, p. 62-66), Hoffman e Santos-Wagner (2011, p. 5-11) e Onuchic e Allevato (2011, p. 83-85) e D'Ambrosio (2017, p. 111-128) que tratam da resolução de problemas. E revimos também Brousseau (1976, p. 111-115) que aborda obstáculos e problemas epistemológicos em matemática. Ademais, usamos ideias que trabalhamos em nossos estudos exploratórios. Tais formas de trabalho envolvem:

a) *A seleção*[64] *(escolha) do problema pelo professor* — Ao selecionar um problema, deve-se ter em vista a construção de um novo conceito, princípio ou procedimento para tratar algo ainda não abordado em sala de aula. Se possível, o professor deve selecionar uma quantidade ímpar de problemas que tenham a mesma estrutura, de modo que ele mesmo possa triangular informações, isto é, verificar se houve entendimento pelos alunos e ao mesmo tempo ter evidências disso.
b) *Identificação de conhecimentos prévios* — É importante o professor saber quais conceitos matemáticos são essenciais para desenvolver a resolução do problema. Assim, ele poderá organizar melhor a tarefa e orientar os alunos nos processos de intervenção pedagógica.
c) *Conhecimento de obstáculos* — Verificar existência de possíveis obstáculos de origem:
   - ✓ ontogenética (relacionados a condições de herança genética específica dos alunos, condições físicas ou quando a maturidade ainda não é suficiente para compreender determinados conceitos);
   - ✓ didáticos empregados no processo de ensino (são os casos, por exemplo, de o professor começar direto com um problema mais difícil, ou ele não conversar sobre as várias soluções dos alunos, ou aplicar um problema solto e depois não comentar a solução nem trabalhar com outros problemas parecidos);
   - ✓ epistemológicos (estão ligados à dificuldade de compreensão do problema por parte dos alunos devido à ausência de conceitos necessários para a aprendizagem); ou
   - ✓ psicológicos (estão ligados a questões afetivas ou a conceitos construídos no grupo em que o indivíduo está inserido, provocando a recusa a aprender determinados assuntos ou causando comportamentos não esperados) que podem existir.

---

[64] Alguns dos nomes dados a estas etapas foram retirados principalmente do trabalho de Onuchic e Allevato (2011).

d) *O tempo de execução da tarefa* — Saber o tempo mínimo que deveria ser dedicado à resolução de problemas por seus alunos.

e) *A organização do espaço* escolar — Analisar como os alunos serão agrupados para receber a instrução e desenvolver o trabalho em um ambiente propício e motivador aos alunos.

f) *O conhecimento dos sujeitos* — Pensar na altura dos alunos, no local em que se sentam, nos talentos, particularidades e deficiências dos alunos (quanto à visão, audição, etc.).

g) *A leitura individual* — Deve-se entregar uma cópia do problema a cada aluno e pedir que se faça uma leitura individual atenta. O ideal é apresentar ao aluno um problema por vez. Pedir que destaquem as palavras desconhecidas e consultem o dicionário ou dialoguem com o professor e com a turma sobre o enunciado/texto do problema/tarefa.

h) *A leitura coletiva* — Fazer uma leitura coletiva, ler o problema com os alunos e auxiliá-los na compreensão de palavras desconhecidas e esclarecer dúvidas. Trabalhar em paralelo com o uso do dicionário. Incentivar os alunos a falarem e explicarem com suas palavras o que entenderam de cada pensamento que leram no enunciado do problema.

i) *Uso de diferentes estratégias para auxiliar no entendimento do problema* — Se for necessário, encenar o contexto do problema. Dependendo da idade ou do ano escolar, usar materiais manipulativos. As perguntas feitas pelo professor devem ser relacionadas à compreensão do problema. É necessário estimular os alunos a concentrar-se no que se pergunta e quais dados são necessários ou não para resolvê-lo e se as informações são necessárias ou não, e também se são suficientes.

j) *A compreensão* — Com base no entendimento do problema, solicitar aos alunos que sugiram possíveis estratégias de resolução, sem censurar ou avaliar as ideias nesse momento inicial. Deixar que os alunos busquem a solução para o problema de modo cooperativo e colaborativo. Nesse sentido, é importante ouvir o aluno, acreditando que há alguma lógica no que está sendo proposto e buscar fazer correlações com outras quantidades ou com novas condições estabelecidas.

k) *A observação e pequenas intervenções* — Observar os alunos enquanto resolvem o problema, diagnosticando os pontos fortes e as deficiências na resolução de problemas e fazendo perguntas sobre o trabalho que estão realizando. Trocar ideias e fornecer dicas aos alunos que estão presos ou se tornando muito frustrados. Se necessário, repetir as perguntas de compreensão do problema. Estimulá-los a tentar diferentes estratégias e a resolver problemas secundários no caso de eles surgirem.

l) *As apresentações* — Solicitar que os alunos apresentem na lousa suas resoluções, estejam elas certas, erradas ou desenvolvidas por processos diferenciados.

m) *A discussão das soluções* — Cada aluno apresenta seu ponto de vista e discute sua solução com os demais colegas e com o professor. Analisar com os alunos a solução, relacionando-a com os dados do problema. Verificar o uso de estratégias específicas: tentativa e erro, resolver um problema correlato, usar tabelas, diagrama, desenhos, procura de um modelo matemático, resolução de casos particulares, trabalhar o problema de trás para frente. Além disso, destacar as estratégias que tornam a resolução mais eficiente. Fazer observações sobre as diferentes formas de resolução.

n) *O resultado correto* — Após as discussões e análises sobre as soluções obtidas para o problema, buscar com os alunos o consenso sobre o resultado correto. Estimular que alunos sempre verifiquem se de fato resolveram adequadamente o problema trabalhado.

o) *A apresentação formal* — Em seguida à etapa do resultado, fazer uma apresentação organizada e estruturada formalizando conceitos, princípios e procedimentos construídos durante a resolução do problema.

p) *A verificação de aprendizagem* — Depois de ter trabalhado com uma quantidade ímpar de problemas semelhantes, fazer a triangulação dos dados para verificar se ocorreu alguma aprendizagem desses conceitos matemáticos pelos alunos.

q) A consolidação — Buscando consolidar a aprendizagem de conceitos, pedir aos alunos que elaborem problemas e a eles respondam. Em seguida, solicitar que proponham o problema para um colega resolver e, por fim, o aluno que elaborou o problema vai corrigir com o professor, explicando ao colega como resolvê-lo.

Acreditamos que todas essas dezessete etapas são necessárias para que o professor explore em seus procedimentos de ensino com a finalidade de que os alunos se tornem participantes da construção do próprio conhecimento. Ao aplicá-las em algumas aulas e em nossa pesquisa, nós também temos verificado que essas dezessete etapas podem auxiliar o professor no processo de avaliação das aprendizagens dos alunos.

3.3 Reflexões e aprendizados do pesquisador

Nossos estudos, leituras e pesquisas em combinatória e em resolução de problemas levaram-nos a pensar que, para desenvolver o raciocínio combinatório, é importante realizar algumas ações que ajudem os alunos a compreenderem a estrutura matemática presente nos enunciados. A seguir, mostramos alguns exemplos de problemas e ações a serem tomadas para a resolução de uma tarefa matemática que envolve raciocínio combinatório. Essas ações nos auxiliaram nos processos de escolha, elaboração e proposição de tarefas matemáticas e intervenção durante a pesquisa de campo.

Exemplo: Considere o problema do quadrado mágico 4x4, cuja soma das linhas, colunas e diagonais deve ser igual a 34. Nesse problema, temos de alocar os números nas casas do quadrado mágico, de modo a garantir que a soma seja sempre 34. Trata-se de um problema de partição, pois temos de realizar 4-partições de 34, ou seja, pensar em soma de 4 números que totalizem 34.

Deve-se observar que não estamos perguntando quantas 4-partições de 34 existem ou se, ao preenchermos o quadrado mágico, exibiremos todas as quantidades possíveis de 4-partições de 34. Todavia, queremos enumerar (enunciar) alguns casos que sejam solução para o problema desde os elementos dados. Assim, entendemos que o raciocínio combinatório exige pelo menos que o indivíduo pense em três perguntas-chave para a compreensão e resolução dele: 1) O que preciso saber?; 2) O que preciso fazer?; 3) Como posso fazer? Assim, com base no trabalho dos pesquisadores espanhóis e em nossa compreensão de resolução de problemas, elaboramos um quadro representativo das etapas de perguntas e de algumas ações necessárias para compreender e resolver um problema combinatório.

Quadro 11 – Representação de perguntas para as etapas de compreensão e resolução de problema combinatório

O que preciso Saber?				O que preciso Fazer?		Como Fazer?
Identificação do modelo combinatório Implícito	Informações presentes no enunciado	Interferência da Ordenação	Princípio da Natureza dos objetos e dos casos	Condições de agrupamento	Quanto ao que se pede	Quanto às operações ou técnicas
Seleção Alocação Partição Composto	Parâmetros estabelecidos Restrições	Ordenada: geradora de novas possibilidades Não Ordenada: não geradora de novas possibilidades	Objetos Distintos Objetos Iguais Casos com revezamento Casos sem revezamento	Injetiva Sobrejetiva Bijetiva Qualquer	Existência Enumeração Classificação Otimização Contagem Manipulação Algébrica	Cálculo Aritmético Diagrama de árbol Tabela Representação Gráfica Representação Algébrica Representação Simbólica Uso de Fórmulas

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

O que preciso saber?

Antes de começarem a resolver o problema, os alunos precisam saber o que é um quadrado, quantos lados tem um quadrado, por que é chamado de quadrado mágico, o que são as linhas, as colunas e as diagonais do quadrado mágico. O professor pode ainda trabalhar com os alunos os conceitos de vértices e arestas de um quadrado integrando com a geometria e, dependendo do ano escolar, pode fazer associações com matrizes ou pensar em outras tarefas que estimulem os alunos a construir relações com outros tópicos e conceitos matemáticos já estudados. Esse problema do quadrado mágico pode ser abordado em sala de aula, relacionando com a história da combinatória e valorizando tópicos do passado. O professor pode ainda conversar com os alunos sobre o que sabem do número 34. Por exemplo, verificar se é um número par ou se é o dobro do número 17, além de construir somas ou subtrações cujo resultado seja igual a 34, o que poderá ajudar os alunos a respeitar os parâmetros ou critérios estabelecidos no problema.

Além de questionamentos semelhantes a esses, devemos ajudar os alunos a entender a qual modelo combinatório implícito o problema está relacionado. Por exemplo, podemos fazer questionamentos que estimulem os alunos a identificar se a tarefa envolve a ideia de colocar números nos espaços do quadrado mágico, se devemos pensar em somas com quatro parcelas cujo total dê o resultado 34 ou se é para escolher alguns números que estão no quadrado mágico. O professor precisa conversar com seus alunos sobre o enunciado antes de começar a resolver o problema, fazendo questionamentos que os auxiliem a pensar e verificar que a tarefa envolve decomposição em diferentes parcelas ou partição de um número como chamam os pesquisadores espanhóis. Além disso, devemos fazer pequenas tarefas, de modo que, quando alteramos a posição dos números no quadrado mágico, os alunos percebam se está gerando, ou não, novas possibilidades, o que pode auxiliar os alunos na compreensão dos processos de ordenação (ordenado e não ordenado) de que trata a tarefa, bem como analisar se a natureza dos elementos é distinta ou não.

O que devo fazer?

Para resolver o problema, é importante que o aluno o compreenda e saiba se terá de colocar mais de um número nos espaços do quadrado mágico, se vai colocar apenas um número e quais são esses números. É imprescindível distinguir se o que é solicitado no problema é analisar a existência ou não de uma possibilidade, ou se é para contar, enumerar, classificar ou otimizar. No caso do quadrado mágico, o aluno terá de obedecer ao parâmetro estabelecido com soma igual a 34 e colocar um número em cada um dos espaços do quadrado mágico. Além disso, deverá mostrar que existe tal possibilidade; logo, essa tarefa exige a enumeração de pelo menos uma possibilidade e a avaliação da existência dela, considerando os valores dos números dados no problema.

Como posso fazer?

Neste momento, devemos ater-nos ao processo de escolha de técnicas ou operações combinatórias que nos permitam chegar a uma solução do problema. Pode ser por tentativa e erro, por meio de um desenho ou de uma tabela, ou ainda pela aplicação de uma fórmula matemática. O uso das técnicas e operações depende da compreensão das tarefas, dos seus enunciados e do desenvolvimento do raciocínio combinatório de cada indivíduo e do nível escolar em que estejam.

Com base em nossas discussões em grupos de estudos[65], pela experiência profissional e estudos exploratórios, identificamos que, às vezes, as pessoas que não dominam as estruturas de um problema de combinatória realizam mais tarefas do que o necessário. Por exemplo, em um problema em que se pergunta quantas seriam as possibilidades de formar duplas com dez pessoas de um grupo, em vez de utilizar uma técnica que permitisse simplesmente contar as possibilidades, uma pessoa que não a domina utilizará outros procedimentos para depois contar as possibilidades, ou seja, talvez a pessoa tenha de listar todas as possíveis duplas, para depois contar as possibilidades. Entretanto, vale refletir e argumentar que, embora um indivíduo tenha condições de usar diretamente uma técnica de contagem de possibilidades, ele precisa compreender os conceitos que podem conduzir ao uso dessas técnicas. Uma pessoa a que nunca tenha sido apresentada esta técnica ou que tenha apenas visto superficialmente o uso dela possivelmente necessitará de outros artefatos ou estratégias para responder ao problema ou à tarefa dada.

Ao voltarmos ao problema do quadrado mágico de soma 34, vamos analisar as ações necessárias do raciocínio combinatório para resolver o problema. Identificamos que se trata de inserir números em células do quadrado mágico, de modo que a soma seja 34 nas linhas horizontais, verticais e diagonais. Portanto, trata de um caso de alocação de números nos locais vazios do quadrado. Por outro lado, devemos pensar nas somas de quatro parcelas de números naturais que resultam em 34. Assim, o problema também

---

[65] No mestrado participei do Grupo de Pesquisas em Práticas Pedagógicas de Matemática (GRUPEM) e no doutorado participo do Grupo de Estudo em Educação Matemática do Espírito Santo – [GEEM-ES] com os quais tenho compartilhado resultados de minhas pesquisas em combinatória.

envolve partição de uma quantidade em quatro quantidades que decomponham a quantidade inicial 34. Logo, temos um problema composto.

Se seguirmos com a compreensão do problema quanto à ordenação, identificamos que, por exemplo, a soma 16 + 2 + 3 + 13 = 16 + 3 + 2 + 13 = 16 + 13 + 2 + 3 permite-nos entender que a ordenação não gera novas possibilidades, pois representa o mesmo agrupamento. Agora, comparando a natureza dos elementos, verificamos que o resultado 34 rearrumado, ou pensado como soma de quatro números distintos (ou também pensado na partição de 34 = 16 + 2 + 3 + 13), possui elementos diferentes da partição 5 + 11 + 10 + 8 = 34, mas ambas são partições ou formas distintas de chegar ao número 34. Isso nos mostra que elementos distintos geram possibilidades diferentes. Verificamos também a ausência de repetição de elementos.

Em se tratando das condições de agrupamentos, cada número deve ser alocado em uma única célula do quadrado mágico. Como a quantidade de números corresponde à quantidade de células, temos uma relação biunívoca entre números e células, o que envolve uma alocação bijetiva. Além dessas questões, devemos considerar que a soma é 34. Por fim, agrupar os números obtendo 4-partições de 34, ou seja, encontrar números em que a soma desses seja igual a 34 pede-nos que enumeremos os casos. Ou seja: devemos exibir resultados possíveis de construir o quadrado mágico 4x4.

Essas reflexões que estamos fazendo com base nos autores estudados têm o intuito de dialogar com professores e pesquisadores: se quisermos trabalhar em sala de aula desde os anos iniciais até a universidade, precisamos valorizar que alunos compreendam as tarefas e valorizar as políticas públicas que orientam maior autonomia dos alunos no processo de construção do próprio conhecimento deles. Para isso, é importante que sejam realizadas perguntas por parte dos professores em vários momentos da aula, a fim de que os alunos comecem a prestar atenção nos enunciados e os interpretem corretamente, para que depois, por si mesmos, realizem perguntas que auxiliem na compreensão, para pensar em como resolver o problema e no fim verificar se o resolveram de fato. Essa síntese considera as etapas já citadas por Polya em 1945: (a) ler; (b) dialogar e compreender o problema; (c) planejar e pensar em como resolver; e (d) verificar a solução.

Após a exposição da importância de trabalhar com problemas que produzem significado para os alunos, fazer conexões com a história da matemática e com a própria matemática (relacionando com tópicos de geometria, álgebra e aritmética) e com outras áreas de conhecimento, até mesmo com situações do cotidiano, convidamos o leitor a conhecer um pouco dos problemas antigos que envolvem o raciocínio combinatório. Esses problemas ainda hoje estão presentes em nossa sociedade. Tal apresentação ocorrerá no próximo capítulo.

4 COMBINATÓRIA: HISTÓRIA, PROBLEMAS E CONCEITOS

Este capítulo está organizado em três seções. Na primeira fazemos uma apresentação histórica de problemas envolvendo combinatória; na segunda tratamos de alguns componentes matemáticos que envolvem o raciocínio combinatório; e, na terceira trazemos o desenvolvimento de princípios e operações combinatórias. Trazemos alguns exemplos para apresentar possíveis relações entre problemas antigos de combinatória com versões de problemas contemporâneos e esclarecer o uso de fórmulas e operações comentadas nos capítulos anteriores. Também abordamos alguns conceitos com o intuito de ampliar a nossa compreensão sobre este assunto e para entendermos a relevância da combinatória com outros tópicos da matemática.

No capítulo anterior, falamos sobre questionamentos que podem contribuir para que alunos desenvolvam o raciocínio combinatório em tarefas matemáticas. Acreditamos que a compreensão dessas conexões matemáticas pode colaborar para construir conceitos e procedimentos matemáticos usados na resolução de questões que envolvam o raciocínio combinatório. Muitos problemas e conceitos apresentados neste capítulo vão além dos que podem ser explorados nos anos iniciais, mas julgamos relevante trazê-los para ampliar o nosso conhecimento da combinatória.

4.1 Breve histórico de problemas combinatórios

Desde os primórdios, os seres humanos deparavam-se com problemas de aritmética e geometria em que, num primeiro momento, não sabiam como resolver. Porém, conforme se dedicavam a entender tais situações, conseguiam desenvolver técnicas cada vez mais eficazes para solucionar esses problemas. Assim, ideias aritméticas e geométricas foram sendo desenvolvidas e sistematizadas, o que não foi diferente em relação ao raciocínio combinatório. Ao longo dos tempos, problemas envolvendo conhecimentos básicos, tais como colocar objetos em ordem, seriar, classificar, quantificar, entre outros, deixaram várias pessoas curiosas e com vontade de resolvê-los. Argumentamos que esses problemas produziram fome de saber nos seres humanos. Enfim, queremos professores, futuros professores e alunos com fome de ensinar e aprender combinatória. Aqui concordamos com

Rubem Alves (2002), segundo o qual devemos deixar professores com fome de ensinar e aprender, bem como alunos com fome de aprender, convergindo com Paulo Freire (2002/1996, p. 25), quando afirma que “ensina quem aprende e aprende quem ensina”.

Defendemos, com base em D’Ambrosio[66] (2009/1996), a importância de trabalhar com problemas que produzam significado para os estudantes e façam conexões com a história da matemática e com a própria matemática. Acreditamos que, desse modo, estudantes poderão relacionar tanto aspectos históricos quanto tópicos de geometria, álgebra, aritmética e combinatória com outras áreas de conhecimento e até mesmo com situações do cotidiano. Assim, convidamos o leitor a conhecer alguns problemas históricos que envolveram o raciocínio combinatório e ainda estão presentes na sociedade.

Conhecer a história dos problemas que envolvem o raciocínio combinatório pode contribuir para que o professor oriente cuidadosamente a aprendizagem de conceitos de forma investigativa. Isso deve ser feito para o tema não ser interpretado como um conjunto de fórmulas complicadas e para os estudantes não se pautarem na reprodução mecânica de conteúdos. Entre as histórias acerca de problemas de combinatória, Biggs (1979) relata um caso conhecido como o problema de Josephus (em manuscrito do séc. X). Sua narrativa descreve como o personagem salvou as 30 vítimas do naufrágio de um navio que transportava turcos e cristãos. Ele decidiu organizar as pessoas em um círculo e foi contando voltas, para que pudesse escolher qual pessoa seria lançada ao mar. Provavelmente Josephus utilizou alguma estratégia de contagem que ajudasse na escolha da pessoa que seria salva.

Esse problema do passado tem associação com brincadeiras infantis conhecidas como cantigas de roda. As crianças formam um círculo, repetem uma rima, apontando algum membro do círculo ao término de uma palavra. Quando a cantiga termina, o participante sai da brincadeira e o jogo recomeça até restar um. Segundo Biggs (1979), esse procedimento era conhecido como “mergulho” ou “contagem de saída”. Trazemos como exemplo uma cantiga de roda chamada Adoletá, que conduz a um processo semelhante de contagem

[66] A primeira edição do livro, **Educação matemática**: da teoria à prática, foi publicada em 1996.

de saída. A seguir, mostramos parte de uma das variações da cantiga, que, nos tempos atuais, representam esse tipo de contagem de saída.

Figura 7 - Trecho da cantiga de roda Adoletá

Adoletá

Adoletá
Lepeti
Peti
Polá
Lê café com chocolá

Adoletá
Puxa o rabo do tatu
Quando quem saiu foi tu

Fonte: Centro de Tecnologias Alternativas da Zona da Mata. 2009. p. 70[67].

Será que essas brincadeiras infantis e combinações são contempladas em atividades folclóricas? Existem brincadeiras semelhantes nas quais seria necessário ter raciocínio combinatório para resolver a tarefa? Será que as crianças ou quem já brincou de situações como essa em "contagem de saída" pensaram ou imaginaram as possibilidades de ser eliminados com as rimas? Embora nosso foco não seja o de responder a tais perguntas, elas podem servir de motivação para professores e pesquisadores investigarem e buscarem a realização de trabalhos diferenciados por meio de cantigas de roda.

Encontramos problemas que nos possibilitam pensar em situações semelhantes em livros brasileiros. Por exemplo, tarefas que envolvem cirandas e alocações de objetos em torno de um círculo são exploradas em livros, como os de Bachx, Poppe e Tavares (1975) e Morgado, Carvalho, Carvalho, Fernandez (1991). Vejamos alguns desses problemas.

Problema 1. De quantos modos cinco pessoas podem se dispor em torno de uma mesa circular? (BACHX; POPPE; TAVARES, 1975, p. 51).

Problema 2. De quantos modos seis crianças podem brincar de roda? (BACHX; POPPE; TAVARES, 1975, p. 52).

---

[67] Disponível em: http://www.mma.gov.br/estruturas/pda/_arquivos/cartilha_reencantando_a_infncia_com_cantigas_51.pdf

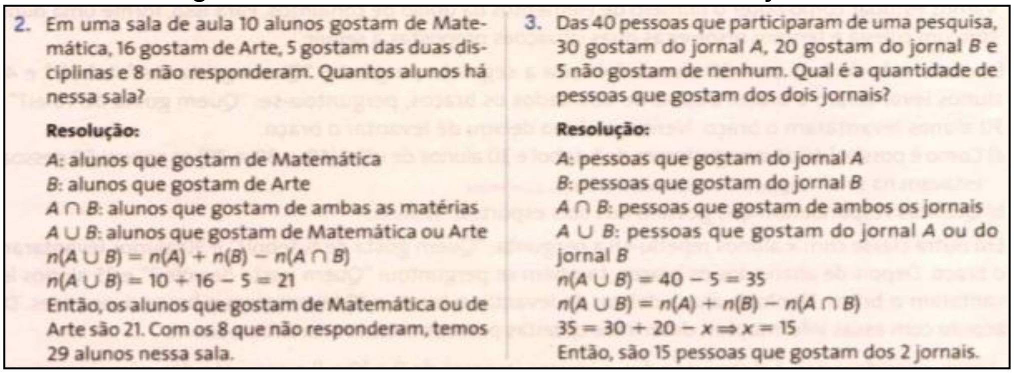
Problema 3. Quantas rodas de ciranda podem ser formadas com n crianças? (MORGADO et al., 1991, p. 42).

Os problemas 1 e 2 podem ser explorados em brincadeiras com as crianças, pedindo que mudem de lugar ao redor de uma mesa ou em uma roda, como aquela da Adoletá, da ciranda. Além disso, pode-se explorar a listagem de possibilidades por meio dos nomes das crianças ou por desenho, para efetuar a contagem de possibilidades (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996). Com base em cantigas que envolvem contagem de saída, o professor pode investigar a quantidade de sílabas nas estrofes e estimular os estudantes a verificar em que condições eles permanecem na roda ou quando serão os próximos a sair. Ademais, o professor pode estimular que seus alunos verifiquem se existe alguma regularidade ou não em relação à quantidade de pessoas e à quantidade de sílabas presentes na estrofe. Por outro lado nos questionamos, e com professores (professoras) de anos iniciais que desconheçam estes livros dos quais tiramos os problemas 1 e 2, será que eles (e elas) saberiam brincar com seus alunos e explorar conceitos matemáticos? Será que eles teriam estes conhecimentos ou que desejariam aprender a explorar estes problemas com seus alunos? Assim, supomos que talvez muitos professores tenham deixado passar a oportunidade de brincar mais com as crianças e explorar as cantigas de roda como ferramenta para o ensino de raciocínio combinatório.

Por outro lado, os professores (e as professoras) que estiverem preparados para trabalhar com estes problemas e estiverem motivados para explorar tais situações com seus alunos e suas turmas, nos fazem pensar em outros cenários. Por exemplo, depois de terem trabalhado com suas turmas os problemas 1 e 2, os professores podem solicitar que seus alunos elaborem outros problemas semelhantes envolvendo outras quantidades de crianças. E devem motivar seus alunos a pensar e registrar suas descobertas e levá-los a identificar alguma regularidade nos problemas. Assim, o professor pode ir questionando com eles o que vai acontecer quando tiverem que formar rodas de ciranda com uma quantidade qualquer *n*, como enunciado no problema 3.

Entre os diversos problemas combinatórios, segundo Biggs (1979), existem dois princípios de contagem simples, subjacentes à aritmética e considerados por historiadores matemáticos como as pedras de fundação do raciocínio combinatório. O primeiro princípio estabelece que, se A e B são conjuntos finitos, então: n($A \cup B$) = n(A) + n(B) – n(A∩B). Em que n(A) representa a quantidade de elementos de A, n(B) representa a quantidade de elementos de B, U denota a operação de união e ∩ representa a operação de intersecção. Esse tipo de problema é muito explorado em estudos de conjuntos e de probabilidades. Vejamos um exemplo a seguir.

Figura 8 - Problema envolvendo a união de conjuntos



2. Em uma sala de aula 10 alunos gostam de Matemática, 16 gostam de Arte, 5 gostam das duas disciplinas e 8 não responderam. Quantos alunos há nessa sala?

Resolução:

A: alunos que gostam de Matemática
B: alunos que gostam de Arte
$A \cap B$: alunos que gostam de ambas as matérias
$A \cup B$: alunos que gostam de Matemática ou Arte
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$n(A \cup B) = 10 + 16 - 5 = 21$
Então, os alunos que gostam de Matemática ou de Arte são 21. Com os 8 que não responderam, temos 29 alunos nessa sala.

3. Das 40 pessoas que participaram de uma pesquisa, 30 gostam do jornal *A*, 20 gostam do jornal *B* e 5 não gostam de nenhum. Qual é a quantidade de pessoas que gostam dos dois jornais?

Resolução:

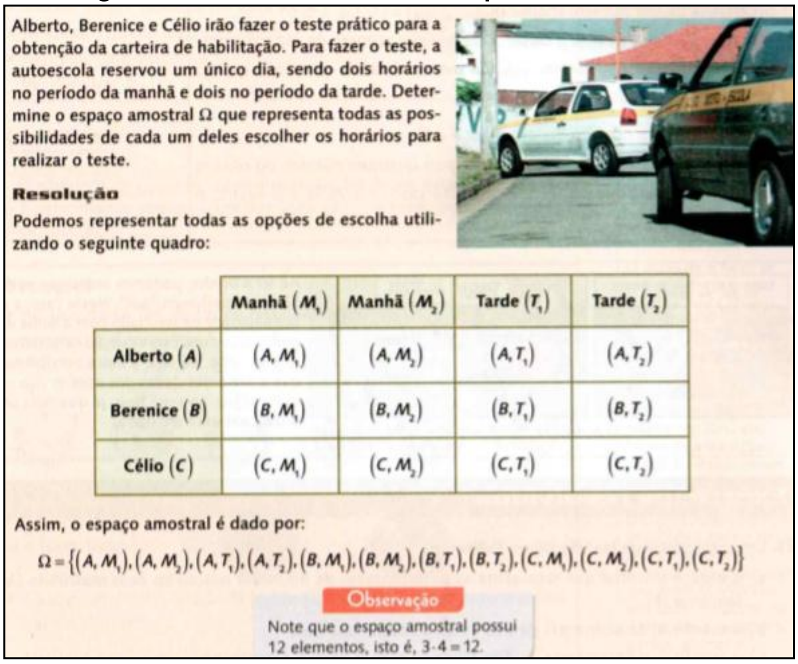
A: pessoas que gostam do jornal *A*
B: pessoas que gostam do jornal *B*
$A \cap B$: pessoas que gostam de ambos os jornais
$A \cup B$: pessoas que gostam do jornal *A* ou do jornal *B*
$n(A \cup B) = 40 - 5 = 35$
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$35 = 30 + 20 - x \Rightarrow x = 15$
Então, são 15 pessoas que gostam dos 2 jornais.

Fonte: (DANTE, 2014, p. 32, 6.º ano, volume 1)

Quando os conjuntos são disjuntos, n(A∩B) = 0. Esse princípio diz-nos que, se queremos contar um conjunto de objetos, podemos dividi-lo em duas partes, contar os elementos separadamente e adicionar os resultados. Para melhor compreensão, observemos o exemplo a seguir: Sejam A = {1, 2, 3} e B = {4, 6}. Os conjuntos são disjuntos, pois não possuem elementos em comum. A U B = {1,2,3} U {4,6} = {1,2,3,4,6}. Daí segue que n(A U B) = 3 + 2 = 5 = n(A) + n(B).

O segundo princípio estabelece que, se A e B são dois conjuntos finitos, então pode-se calcular n(A X B) = n(A).n(B). Hoje este cálculo é conhecido como cardinalidade do produto cartesiano. O símbolo “X” denota o produto cartesiano. Observemos o exemplo a seguir: Ao considerarmos os conjuntos A = {1, 2, 3} e B = {4, 6}, temos que o produto cartesiano AxB = {(1,4), (1,6), (2,4), (2,6), (3,4), (3,6)}. Daí segue que n(A x B) = n(A).n(B) = 3x2 = 6. É comum encontrarmos problemas desse tipo em livros de ensino médio. O problema a seguir exemplifica uma situação em que é explorado esse conceito.

Figura 9 - Problema envolvendo produto cartesiano



Alberto, Berenice e Célio irão fazer o teste prático para a obtenção da carteira de habilitação. Para fazer o teste, a autoescola reservou um único dia, sendo dois horários no período da manhã e dois no período da tarde. Determine o espaço amostral Ω que representa todas as possibilidades de cada um deles escolher os horários para realizar o teste.

Resolução

Podemos representar todas as opções de escolha utilizando o seguinte quadro:

	Manhã (M_1)	Manhã (M_2)	Tarde (T_1)	Tarde (T_2)
Alberto (A)	(A, M_1)	(A, M_2)	(A, T_1)	(A, T_2)
Berenice (B)	(B, M_1)	(B, M_2)	(B, T_1)	(B, T_2)
Célio (C)	(C, M_1)	(C, M_2)	(C, T_1)	(C, T_2)

Assim, o espaço amostral é dado por:

$$\Omega = \{(A, M_1), (A, M_2), (A, T_1), (A, T_2), (B, M_1), (B, M_2), (B, T_1), (B, T_2), (C, M_1), (C, M_2), (C, T_1), (C, T_2)\}$$

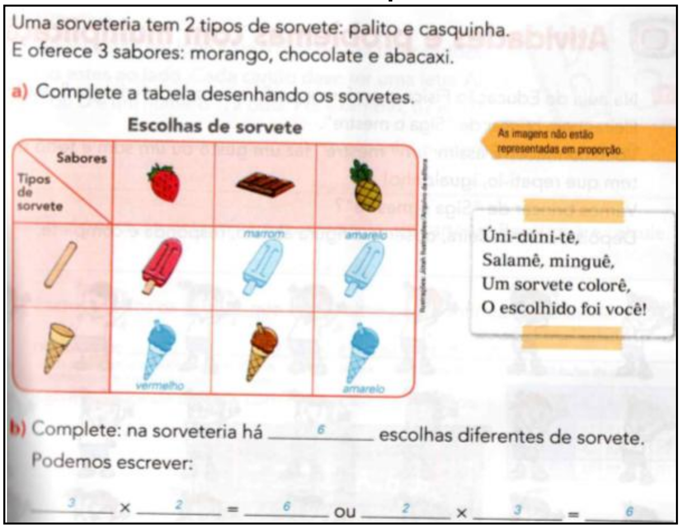
Observação

Note que o espaço amostral possui 12 elementos, isto é, $3 \cdot 4 = 12$.

Fonte: (RIBEIRO, 2011, p. 232, volume 2)

Também verificamos que problemas envolvendo a ideia do produto cartesiano vêm sendo explorados em livros didáticos dos anos iniciais, como no problema do sorvete da figura a seguir.

Figura 10 - Problema envolvendo a ideia de produto cartesiano nos anos iniciais



Uma sorveteria tem 2 tipos de sorvete: palito e casquinha.
E oferece 3 sabores: morango, chocolate e abacaxi.

a) Complete a tabela desenhando os sorvetes.

Escolhas de sorvete

b) Complete: na sorveteria há 6 escolhas diferentes de sorvete.

Podemos escrever:

3 × 2 = 6 ou 2 × 3 = 6

Fonte: (DANTE, 2016, p. 183, 2.º ano, Livro do professor)

Observamos que esses dois princípios do raciocínio combinatório que tratam da união de conjuntos e da cardinalidade do produto cartesiano de conjuntos disjuntos são fundamentais para resolver questões presentes na atualidade. Além de cantigas de roda, problemas envolvendo operações de união e intersecção de conjuntos e explorando sabores, temos os enigmas como problemas que despertaram a curiosidade dos seres humanos. Outro problema combinatório considerado por historiadores matemáticos como um dos problemas introdutórios no estudo da combinatória é o enigma que parece ter sobrevivido em diferentes idades e culturas. Vejamos o seguinte exemplo que Biggs (1979) nos traz.

> Enquanto eu estava indo para St. Ives,
> Eu conheci um homem com sete esposas,
> Cada esposa tinha sete sacos,
> Cada saco tinha sete gatos,
> Cada gato tinha sete gatinhos,
> Gatinhos, gatos, sacos e esposas,
> Quantos estavam indo para St. Ives?
> (BIGGS, 1979, p. 110, tradução nossa)[68].

Biggs (1979) comenta que o enigma foi encontrado em volumes, como o *Oxford Dictionary of Quotations*, e em livros infantis, como o *Ladybird Books*. De acordo com esse autor, nesse enigma talvez a rima fosse uma paródia de um tipo padrão aritmético que era explorado no passado. Esse autor e outros fazem tal especulação em virtude da ocorrência de um problema muito semelhante, escrito também como um enigma ou quebra-cabeças. Esse outro enigma foi encontrado no *Liber Abaci*, escrito por Leonardo de Pisa (Fibonacci) em 1202:

> Sete mulheres idosas estão indo a Roma; cada uma delas possui sete mulas; cada mula carrega sete sacos: cada saco contém sete pães; cada pão tem sete facas: e cada faca tem sete bainhas. Qual é o número total de coisas? (BIGGS, 1970, p. 110, tradução nossa)[69].

Conforme já mencionamos, Biggs (1979) acredita que há uma relação entre o enigma do problema de Fibonacci e o do homem com as sete esposas. Esse historiador diz-nos que as versões do enigma do *Liber Abaci* foram amplamente usadas por vários séculos e é possível que o problema seja cerca de 3000 anos mais velho do que aquele apresentado por Fibonacci. No papiro

---

68 As I was going to St. Ives, I met a man with seven wives, Each wife had seven sacks, Each sack had seven cats, Each cat had seven kits, Kits, cats, sacks and wives, How many were oing to St. Ives? (BIGGS, 1979, p.110).

69 Seven old women are going to Rome; each of them has seven mules; each mule carries seven sacks: each sack contains seven loaves; each loaf has seven knives: and each knife has seven sheaths. What is the total number of things? (BIGGS, 1979, p.110).

de Ahmes (vulgo papiro de Rhind[70]), um dos manuscritos mais antigos, datado de cerca de 1650 a.C., foi encontrado um problema semelhante. O enigma do papiro de Ahmes parece lidar com o somatório de uma série de potências de 7. Embora o papiro só tenha sido divulgado em 1858, o historiador Biggs (1979) conta-nos que a interpretação do problema permaneceu um enigma por alguns anos depois de sua divulgação. Ele relata que Leon Rodet, por volta de 1881, notou a semelhança com o problema de enigma de Fibonacci e sugeriu a seguinte interpretação ao que estava no papiro de Ahmes: Há sete casas, cada uma com sete gatos; cada gato mata sete ratinhos; cada rato teria comido sete cabeças de trigo, cada um dos quais teria produzido sete medidas de grãos.

Casas	$7^1 =$	7
Gatos	$7^2 =$	49
Ratos	$7^3 =$	343
Trigo	$7^4 =$	2401
Medidas	$7^5 =$	16807
Total	=	19607

Historiadores interpretam que a existência desses problemas semelhantes mostra que, desde as primeiras civilizações, existem regras básicas para a contagem e suas aplicações enfatizavam que esses enigmas despertavam a curiosidade das pessoas que procuravam estratégias para resolvê-los. O ser humano "[...] ao longo da sua história o *homo sapiens* tem acumulado meios de sobrevivência e de transcendência, que constituem o acervo de conhecimentos da humanidade" (D'AMBROSIO, 2004, p. 22). Portanto, notamos que o raciocínio combinatório tem seu desenvolvimento em situações de curiosidade, necessidade e sobrevivência.

Os problemas de enigmas com rimas que acabamos de apresentar também podem ser resolvidos com outros procedimentos matemáticos. Vejamos outro modo de calcular o total de elementos nesses enigmas, ou seja,

[70] "O papiro foi elaborado pelo escriba Ahmes por volta do ano 1650 a.C. e comprado pelo antiquário escocês Alexander Henry Rhind, entre os anos de 1856-1857, em uma de suas viagens ao Egito. Esse papiro, com toda a coleção egípcia que pertencera a Rhind, está no acervo do Museu Britânico (Londres)" (STRUIK, 1989, p. 49).

efetuar a contagem a partir do estudo de progressões geométricas. Considerando a sequência de números (7, 49, 343, 2401, 16807), qual é a soma dos termos dessa sequência? Se os estudantes já tiverem estudado progressões geométricas, souberem identificar o primeiro termo, a razão, e souberem calcular a soma de alguns termos, o problema ficará simples para eles. Assim, eles poderão identificar que o primeiro termo é $a_1 = 7$ e a razão aqui também é $q = 7$. Ademais, poderão calcular a soma dos cinco termos dessa progressão que é dada pela fórmula $S = a_1.(q^n - 1)/(q - 1)$, em que $a_1 = 7$ representa o primeiro termo da sequência e $q = 7$ representa a razão. Logo, encontrarão $S = 7x(7^5 - 1)/(7 - 1) = 7x\ (16.807 - 1)/6 = 7x16.806/6 = 117.642/6 = 19.607$, como já demonstrado anteriormente.

Se os estudantes ainda não tiverem estudado progressões geométricas, o professor poderá dialogar com eles e pode provocá-los a procurar identificar regularidades entre os termos encontrados. Ou o professor poderá estimular que os próprios estudantes façam questionamentos aos colegas de classe para verificar se existe alguma relação entre o primeiro e o segundo termo, entre o terceiro e o segundo e assim por diante. Além disso, os alunos sozinhos ou provocados pelo professor poderiam pensar e questionar se existe algum padrão entre os números da sequência ou o que sabem do número 49 a partir do número 7. Poderiam, assim, reescrever os elementos da sequência como potências de base 7, isto é, (7, 7x7, 7x7x7, 7x7x7x7, 7x7x7x7x7) = ($7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5$), de modo que o termo posterior corresponda ao anterior multiplicado por sete. Assim, com esse problema, podemos introduzir noções de conceitos de sequência, de progressões geométricas e séries.

Assim sendo, percebemos que ao estudarmos a história da combinatória, encontramos essas rimas, quer em cantigas de roda, quer em enigmas. Observamos também que essas rimas e enigmas podem ajudar professores de matemática tanto no ensino desse conteúdo quanto em outros tópicos de matemática. Historiadores como Biggs (1979), Wilson e Watkins (2013) interpretam que a existência desses problemas semelhantes nos mostra que, desde as primeiras civilizações, os seres humanos foram desafiados por essas situações. À medida que os resolviam, iam pensando em estratégias diferentes. Assim, surgiram regras básicas para efetuar determinadas contagens e elas deram origem ao estudo de padrões e generalizações em sequências numéricas. Portanto, notamos que o raciocínio combinatório tem seu desenvolvimento em situações de curiosidade, necessidade e sobrevivência, podendo ser integrado à própria matemática no estudo de sequências e progressões, bem como em brincadeiras de cantigas de roda, rimas e enigmas.

Ademais, alguns historiadores como Biggs (1979) comentam o uso de termos matemáticos em problemas com significados diferentes dos que usamos em matemática formal. Por exemplo, no estudo de permutação[71] e combinação[72], encontramos alguns equívocos em significados usuais em línguas maternas e em matemática. Esses dois termos têm adquirido significados precisos em matemática formal, mas tal precisão de significados nem sempre era observada nas obras traduzidas. O uso e significado da palavra permutação no idioma original da tradução era diferente do significado matemático associado a esse termo, e o mesmo aconteceu com o significado de combinação em alguns textos traduzidos do passado.

De acordo com Biggs (1979), tal dificuldade com os significados dos termos ocorreu pelos estudos históricos, uma vez que os tradutores de obras antigas tendiam a utilizar significados vagos e aleatórios, em vez de utilizar significados matemáticos. Assim, conforme esse historiador, uma obra antiga pode lidar com permutações e combinações, com apenas um dos conceitos, com ambos ou com nenhum dos dois no sentido matemático. No entanto, entendemos que as traduções de trabalhos matemáticos para outros idiomas

---

[71] "**1** Ação ou resultado de permutar **2** Ver *permuta* (2) **3** Substituição de uma coisa por outra **4** Modificação na ordem dos elementos que formam um conjunto, com o objetivo de se obter nova combinação [...] **cíclica/circular** *Álg*. Permutação num sistema ordenado, de modo que cada elemento é substituído pelo primeiro, formando-se um ciclo no qual não há primeiro nem último elemento **~ com repetição completa** *Álg*. Permutação de elementos num conjunto no qual há elementos repetidos, de tal forma que os elementos repetidos permutam-se como se diferentes fossem, atingindo-se assim o máximo possível de permutações" (AULETE; GEIGER, 2011, p. 1056).

[72] "**1** Ação ou resultado de combinar-se) **2** Ajuntamento de coisas agrupadas em certa disposição ou em certa ordem **3** A maneira ou critério com que foram agrupadas essas coisas 4 Aquilo que foi combinado, acertado para uma ação, providência, realização de um plano ou objetivo etc. AJUSTE; ACORDO: *Não é necessário planejar de novo, vale nossa combinação*. **5** Associação de elementos ou fatores para determinado efeito, finalidade etc.: *Essa tarefa exige uma combinação de energia e criatividade.* **6** Série de números ou letras que constituem o segredo que permite acionar o mecanismo de abertura de um cofre 7 Plano, projeto [...] 13 *Mat*. Grupos que se obtêm com um número qualquer de objetos tomados dois e dois, três e três, etc, de modo que cada grupo difira de cada um dos outros ao menos em um objeto, e que no mesmo grupo não entre o mesmo objeto mais de uma vez [...]" (AULETE; GEIGER, 2011, p. 357-358).

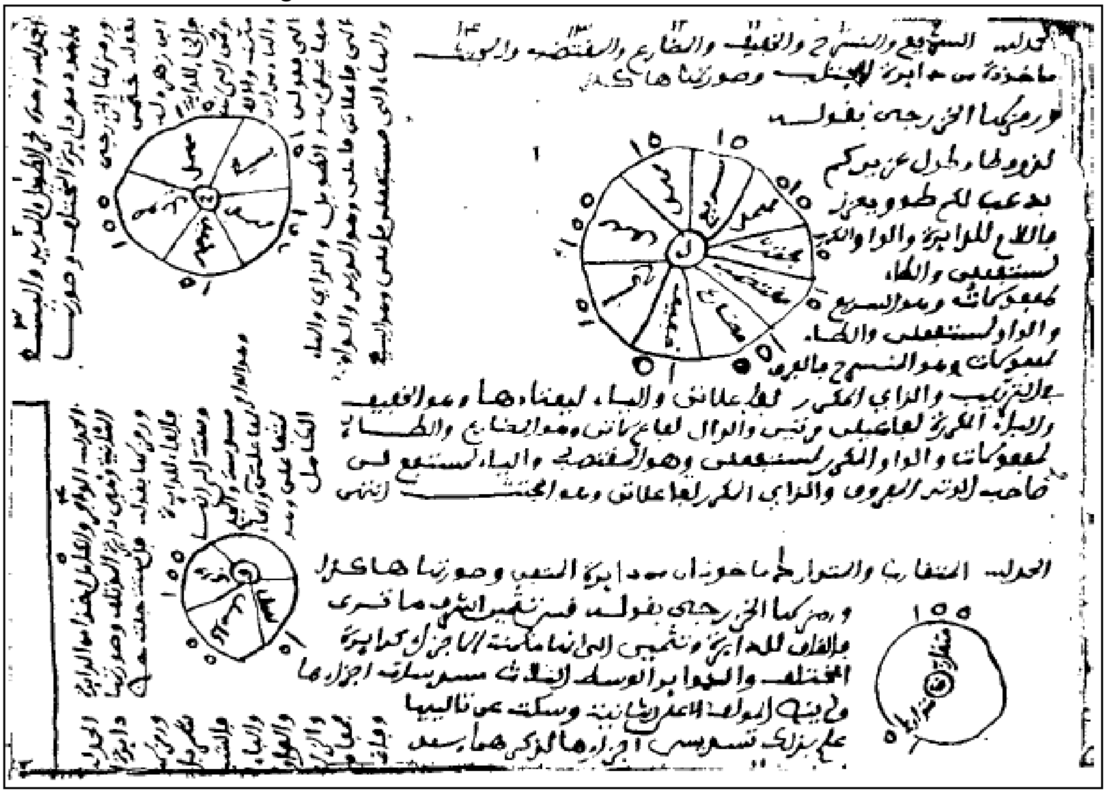
podem colaborar na divulgação de descobertas matemáticas e favorecer outros aprendizados e desafios.

D`Ambrosio (2000) aponta a dinâmica cultural como outro ponto fundamental para o estudo histórico da combinatória. Mas o que é a dinâmica cultural? É o movimento provocado pelos encontros de pessoas de diferentes culturas, qual seja, quando pensamos em povos de várias culturas vivendo em um mesmo território. Esses encontros de culturas proporcionam a ocorrência de um processo de interculturalismo, isto é, permitem a troca de experiências e aprendizados entre os povos. E a educação, especificamente a matemática, é afetada por esse processo (D'AMBROSIO, 2004). Historiadores de matemática e de educação matemática contam que, com as conquistas de partes da Índia pelas forças do Islã no século VII d.C., as realizações dos matemáticos hindus começaram a migrar para o ocidente. Os árabes não apenas se interessaram pelas artes e ciências, mas ainda combinaram a sabedoria oriental dos hindus com o legado dos gregos clássicos, o que permitiu a expansão dos conhecimentos matemáticos da época sobre combinatória (BIGGS, 1979; D'AMBROSIO, 2000; WILSON; WATKINS, 2013).

Segundo Wilson e Watkins (2013), o *status* privilegiado do povo árabe contribuiu para o desenvolvimento de várias "ciências da linguagem". Os lexicógrafos listavam e, às vezes, contavam configurações de letras do alfabeto sob certas restrições, com a finalidade de elaborar glossários. No desenvolvimento do raciocínio combinatório, a contribuição da matemática oriental foi indispensável. Os árabes adquiriram técnicas utilizadas pelos hindus e aplicaram-nas em princípios combinatórios. Biggs (1979) relata que, segundo a obra de Rashed[73], datada de 1974, foram encontrados possíveis arranjos de letras na obra de al-Khalil Ibn-Ahmad.

[73] Rashed, R. Algèbre et linguistique*:* L'analyse combinatoire dans le science Arabe. *Philosophical foundations of science*. Dordrecht: Reidel, 1974, p. 383-399.

Figura 11 - Círculos combinatórios de al-Khalil.

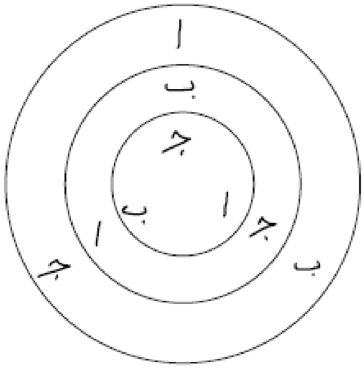


Fonte: (WILSON; WATKINS, 2013, p. 86)

Wilson e Watkins (2013) contam que al-Khalil Ibn Ahmad (d.786) forneceu os números de combinações de dois, três, quatro e cinco das 28 letras do alfabeto árabe. Esses autores dizem também que o gramático Sībawayhi encontrou posteriormente o número de arranjos dessas mesmas letras, levando em conta as incompatibilidades de pronúncia. Os cálculos utilizados por al-Khalil Ibn Ahmad, para determinar a quantidade de sílabas que podiam ser formadas com um determinado número de letras, mostram que ele entendia as formas básicas para encontrar o número de permutações e combinações com letras.

A figura a seguir representa um dos métodos de combinar as letras girando anéis concêntricos (Figura 12), para que diferentes letras se correspondessem. O procedimento é idêntico ao de combinação de letras, encontrado mais tarde na astrologia, sendo utilizado por Al-Bunı (d.1205), Ibn Arabı (d.1240) e Ramon Llull (d.1316).

Figura 12 - Anéis rotativos de Ibn Durayd.

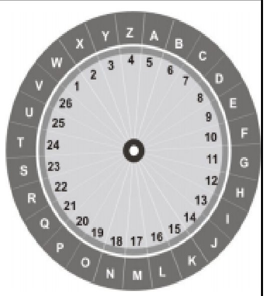


Fonte: (WILSON; WATKINS, 2013, p. 85)

Atualmente essa combinação de letras tem contribuído para os estudos de criptografia, construção de código Morse (sistema de representação binário que utiliza ponto (.) e traço (-) para representar letras, números e sinais de pontuação) e construção de números binários. Uma pessoa que compreende o código Morse ou os estudos de criptografia entende que um ponto (pingo) pode representar uma letra e assim codificar ou decodificar frases ou mensagens e, quando faz isso, está usando o raciocínio combinatório. Na figura 13, apresentamos um problema contemporâneo, semelhante aos problemas antigos, envolvendo a combinação de letras. Esse problema foi retirado de uma prova da Olimpíada Brasileira de Matemática da Escola Pública (OBMEP).

Figura 13 - Problema envolvendo criptografia

(1) Um antigo método para codificar palavras consiste em escolher um número de 1 a 26, chamado *chave* do código, e girar o disco interno do aparelho ilustrado na figura até que essa chave corresponda à letra A. Depois disso, as letras da palavra são substituídas pelos números correspondentes, separados por tracinhos. Por exemplo, na figura ao lado a chave é 5 e a palavra *PAI* é codificada como 20-5-13.



(a) Usando a chave indicada na figura, descubra qual palavra foi codificada como 23-25-7-25-22-13.

(b) Codifique *OBMEP* usando a chave 20.

(c) Chicó codificou uma palavra de 4 letras com a chave 20, mas esqueceu-se de colocar os tracinhos e escreveu 2620138. Ajude o Chicó colocando os tracinhos que ele esqueceu e depois escreva a palavra que ele codificou.

(d) Em uma outra chave, a soma dos números que representam as letras *A*, *B* e *C* é 52. Qual é essa chave?

Fonte: (OBMEP, 8.º e 9.º anos, 2.ª fase, 2007, p. 2)

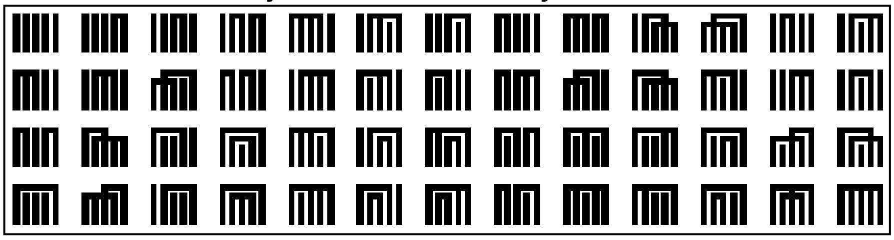
É importante que o professor conheça a história da combinatória e se sinta motivado a integrá-la nas aulas de matemática. No campo do raciocínio combinatório, problemas envolvendo a combinação de letras são explorados em livros didáticos quando queremos ordenar as letras de uma palavra. Tal ordenação é chamada de anagramas por alguns matemáticos, como Morgado et al. (1991).

A partir do século XVII, cálculos envolvendo quantidades de combinações sem repetição começaram a aparecer em variedades de línguas e contextos. De acordo com Biggs (1979), o estudioso judeu rabino Ben Ezra discutiu possíveis conjunções dos planetas, cujas descobertas mostraram certo interesse em permutações e combinações na literatura rabínica. Os pesquisadores Wilson e Watkins (2013) relatam que a astrologia foi uma das disciplinas mais antigas que permitiram a manipulação de estratégias no raciocínio combinatório. Esses autores informam que a necessidade de conhecer diferentes configurações de planetas e usá-las em eventos de previsão levou naturalmente à sua enumeração.

Outro tópico importante da combinatória é a partição. De acordo com Biggs (1979), os primeiros estudos de partições ocorreram no reino dos jogos de azar e jogos de possibilidades, nos quais vários dados são lançados simultaneamente. Os problemas originados nesse contexto exigiam diferentes técnicas matemáticas para sua solução, envolvendo os elementos de partições, combinações e probabilidade. Segundo Wilson e Watkins (2013), Leibniz tenha sido o primeiro a considerar o particionamento de inteiros em somas. Aparentemente ele foi a primeira pessoa a perguntar sobre partições numa carta enviada a Jacob Bernoulli em 1674. Ele observou que existem três partições de 3 (3, 2 + 1 e 1 + 1 + 1), bem como cinco de 4 (4, 3 + 1, 2 + 2, 2 + 1 + 1 e 1 + 1 + 1 + 1).

Wilson e Watkins (2013) contam que, num salão de jogos no Japão, o uso de incenso, chamado genji-ko (Incenso Genji), se tornou popular entre as pessoas de classe alta por volta de 1500 d.C. O anfitrião de uma reunião selecionava secretamente cinco pacotes de incenso, dos quais alguns poderiam ser idênticos. Os pacotes de incenso seriam queimados e os convidados teriam de discernir quais dos aromas eram os mesmos e quais eram diferentes. Assim, os convidados teriam de tentar adivinhar qual das 52 partições de 5 (Figura 14), com n = {1, 2, 3, 4, 5}, foi escolhida pelo seu anfitrião.

Figura 14 - Cinquenta e dois padrões nomeados após um capítulo do famoso conto de Genji do século XI de Lady Murasaki



Fonte: (WILSON; WATKINS, 2013, p. 25)

Euler foi a primeira pessoa a fazer descobertas mais profundas sobre o assunto, conforme contam Wilson e Watkins (2013). Depois, Sylvester foi o outro pesquisador a fazer contribuições importantes, seguido por Fabian Franklin. No século XX, houve grandes contribuições de pesquisas de L. J. Rogers, G. H. Hardy, Percy Machamon, Srinivasa Ramanujan e Hans Rademacher.

Segundo os historiadores matemáticos Wilson e Watkins (2013), Ramanujan (1887 – 1920) fez muitas contribuições para a matemática, cuidadosamente examinadas por Hardy (1877 – 1947), professor da universidade Universidade de Cambridge. Ramanujan descobriu propriedades de divisibilidade de p(n). As três propriedades mais notáveis são as seguintes:

$$p\,(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5},$$
$$p\,(7n + 5) \equiv 0 \pmod{7},$$
$$p\,(11n + 6) \equiv 0 \pmod{11}.$$

De acordo com Biggs (1979), uma r-partição do número inteiro positivo n é um conjunto de r inteiros positivos cuja soma é n. Veja o exemplo em que existem apenas quatro 3-partições positivas e distintas para o número 7, a saber, 5 + 1 + 1; 4 + 2 + 1; 3 + 3 + 1; 3 + 2 + 2. Tais partições do sete ou soma de três parcelas dando o total sete poderiam ser trabalhadas com base no seguinte problema: Tenho sete bolas de gude e quero guardá-las em três potes, de modo que nenhum pote fique vazio. Quantas bolas de gude posso guardar em cada pote?

Problemas desse tipo envolvem a ideia de decomposição de números em parcelas ou partições de um número ou ainda a ideia de decomposição por meio de múltiplos e podem ser empregados em tarefas que exigem critérios de divisibilidade. Há problemas que envolvem a decomposição de um número em parcelas que dá um determinado total e envolvem adição e subtração e outros problemas que envolvem a decomposição de números em seus múltiplos envolvendo os fatos fundamentais da multiplicação. Esses critérios são estudados em álgebra e introduzidos no ensino fundamental como podemos observar no exemplo da figura 15.

Figura 15 - Problema envolvendo divisibilidade

Clotilde quer colocar 255 pirulitos em saquinhos, todos com a mesma quantidade de pirulitos, mas de modo que não sobre nenhum. Que quantidade de pirulitos ela pode colocar em cada saquinho: 8 pirulitos, 12 pirulitos ou 15 pirulitos?
15 pirulitos em cada saquinho.

Fonte: (DANTE, 2016, p.132, v.1, Projeto Teláris, 6º ano)

Outros exemplos também são explorados em livros de matemática para o ensino médio:

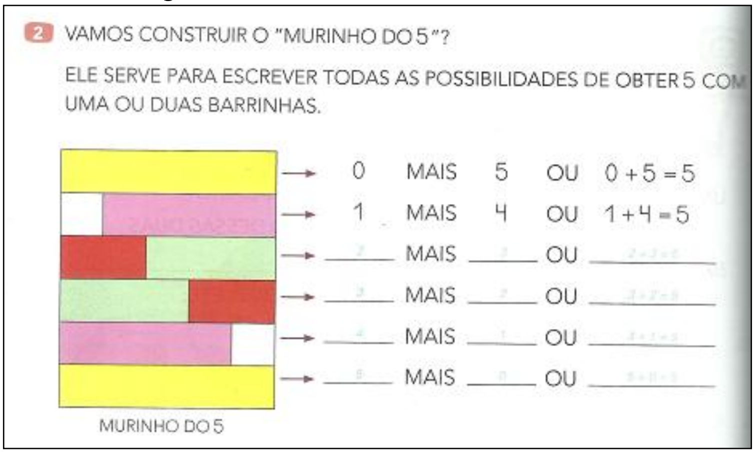
“De quantas maneiras podemos colocar 10 pessoas em três salas, A, B e C, de modo que em A fiquem 4 pessoas, em B fiquem 3 pessoas e em C também 3 pessoas?” (HAZZAN, 1993, p. 50).

“Quantas soluções inteiras não negativas têm as equações:

a) $x + y + z = 6$
b) $x + y + z + t = 10$
c) $x + y + z + t + w = 10$” (HAZZAN, 1993, p. 55).

Também encontramos tarefas que podem explorar ideias iniciais de partição pensando na decomposição aditiva de um número no livro de primeiro ano do ensino fundamental do autor Dante (2016), (Figura 16).

Figura 16 - Problema do murinho do 5



Fonte: (DANTE, 2016, p. 134, 1.º ano, Livro do professor)

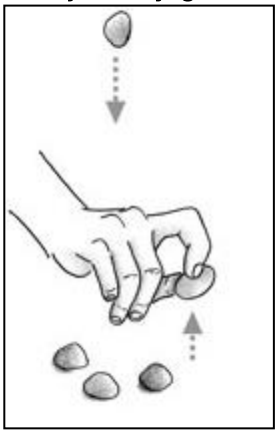
Outras curiosidades sobre a combinatória estão no estudo de possibilidades em jogos. De acordo com Biggs (1979), em escavações arqueológicas foram encontradas hordas de pequenos ossos em que o tipo predominante é o astrágalo (Figura 17), ou osso ilíaco (ou fivela de osso) de determinados animais. Possivelmente esses ossos foram recolhidos, mesmo em tempos pré-históricos, para uso como brinquedos em jogos modernos, como o “cinco pedras”, conhecido também como “As Cinco Maria”.

Figura 17 - Imagem de um osso astrágalo

Fonte: http://www.ancienttouch.com/1081.jpg
Acesso em 24 de julho de 2018

O jogo consiste em lançar uma pedra para o alto e tentar pegar uma outra pedra sem tocar nas demais, de modo que a pedra lançada caia na mesma mão. O procedimento é repetido (Figura 18) até chegar ao total de pedras. Há várias variações desse jogo.

Figura 18 - Ilustração do jogo das cinco pedras



Fonte: https://espacopiks.wordpress.com/2012/01/
Acesso em 24 de julho de 2018

Na Antiguidade, de acordo com Biggs (1979), o astrágalo era usado para determinar movimentos em jogos de tabuleiro. Em tempos posteriores a gregos e romanos, era muito popular a prática de jogos de azar com o resultado de lançar vários astrágalos simultaneamente. O osso lançado poderia cair em uma de suas quatro formas gerando possibilidades diferentes. De acordo com este historiador (BIGSS, 1979), aspectos históricos mostraram que estudiosos da Grécia e da Roma não fizeram nenhuma tentativa para analisar os resultados obtidos no lançamento do astrágalo, reforçando a visão de que eles estavam desinteressados na matemática de combinações. O mesmo princípio do lançamento do astrágalo aplica-se para os lances de dados cúbicos, usados em nossos dias. Segundo Biggs (1979), o astrágalo e os dados também foram utilizados na adivinhação e leitura de sorte, de modo que essa teoria matemática foi vista com bons olhos por adivinhos da Antiguidade.

Não apenas no ensino médio, mas também nos anos iniciais, já encontramos tarefas que exploram o lançamento de dados e de moedas que podem ser aproveitados para introduzir ideias de combinatória relacionadas à probabilidade. O conceito de eventos igualmente susceptíveis com as consequentes leis da probabilidade era desconhecido, segundo Bigss (1979): “A falta de um conceito claro de probabilidade significava que o estudo dos jogos de azar ainda não era uma parte da ciência matemática da época” (BIGGS, 1979, p. 125, tradução nossa[74]).

[74] [...] The lack of a clear concept of probability meant that the study of games of chance was not yet a part of mathematical Science (BIGGS, 1979, p. 125).

Cardano e Galileu escreveram sobre jogos de dados, e o livro sobre jogos de azar de Cardano foi deixado em forma de manuscrito sobre sua morte em 1576 e não foi publicado até 1667. Biggs (1979) relata que Cardano calculou probabilidades de uma forma considerada como primeiro reconhecimento formal do conceito de eventos igualmente prováveis. Seus cálculos puderam ser considerados como uma confirmação da matemática empírica sobre fatos de jogos de dados. Já o manuscrito de Galileu provavelmente foi produzido por volta de 1620. Com o passar do tempo, estudiosos em geral foram ganhando confiança em assuntos envolvendo combinações, partições e probabilidade. Como consequência, a matemática do estudo dos jogos de dados foi estabelecendo uma teoria da probabilidade.

Outro tema de relevância no desenvolvimento da combinatória foi o estudo de quadrados mágicos. O quadrado mágico de ordem n é um arranjo dos números 1, 2, 3,. . . ., n^2 numa matriz quadrada nxn, de modo que cada linha, cada coluna, cada diagonal principal e diagonal secundária tem a mesma soma dada pela fórmula:

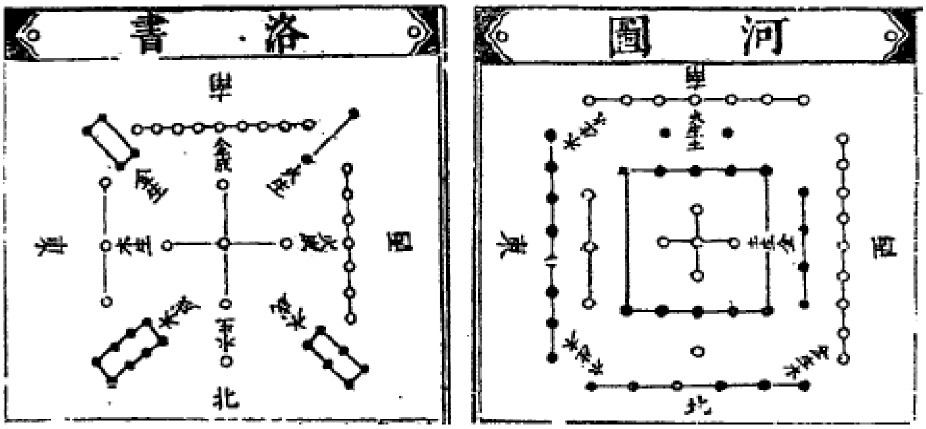
$$S = \frac{1}{2}n\,(n^2 + 1).$$

Observemos o exemplo a seguir, extraído de Bigss (1979, p.118).

$$\begin{matrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{matrix}$$

Nota-se que a matriz apresentada é de ordem 3. Portanto, para n = 3 a soma de cada linha, coluna e diagonal principal é igual a 15. Segundo historiadores, alusões a esse tipo de problema são encontradas na história chinesa, com a primeira referência ao Lo Shu, como um quadrado mágico do século I d.C. e possivelmente alguns séculos antes. No início, quadrados mágicos eram associados a magia e mistério. Por muitos séculos, de acordo com Biggs (1979), os próprios chineses parecem não ter feito nenhuma tentativa para construir quadrados maiores do que o Lo Shu, presumivelmente porque sua existência foi pensada como fenômeno místico em vez de curiosidade humana.

Figura 19 - Os diagramas Lo Shu (à esquerda) e Hetu (à direita)



Fonte: (WILSON; WATKINS, 2013, p. 67)

De acordo com Biggs (1979), não se sabe como e quando a ideia de um quadrado mágico foi transmitida dos chineses para os árabes, mas estes tiveram grande interesse no assunto e fizeram contribuições importantes. Os quadrados mágicos são utilizados hoje na combinatória moderna que trata do estudo de arranjos que satisfazem a certas condições. A seguir, representamos um quadrado mágico latino (Figura 20) em que cada letra ocorre uma vez em cada linha e uma vez em cada coluna.

Figura 20 - Quadrados latinos de ordem 3, 4 e 5

1	2	3
2	3	1
3	1	2

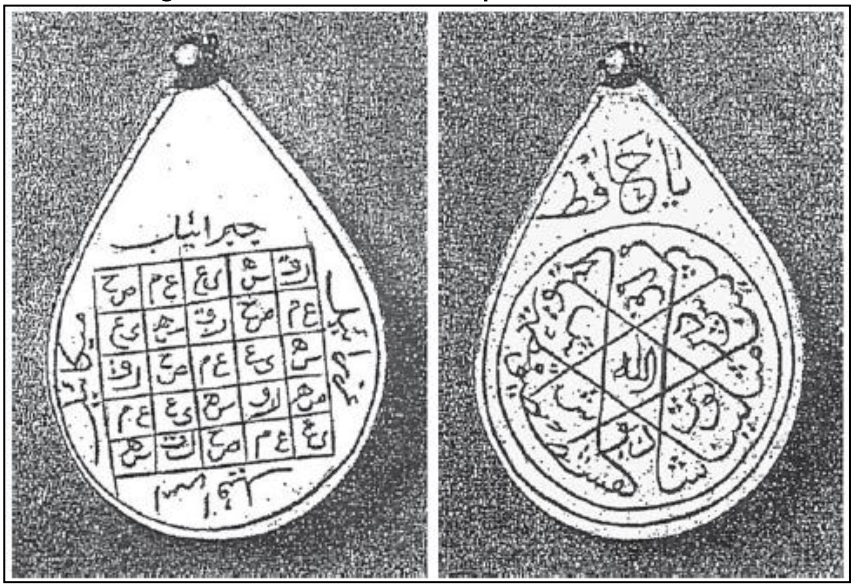
IGNIS			
IGNIS	AER	AQVA	TERRA
AER	IGNIS	TERRA	AQVA
AQVA	TERRA	IGNIS	AER
TERRA	AQVA	AER	IGNIS

فلان	الرحيم	الرحمن	الله	بسم
بسم	فلان	الرحيم	الرحمن	الله
الله	بسم	فلان	الرحيم	الرحمن
الرحمن	الله	بسم	فلان	الرحيم
الرحيم	الرحمن	الله	بسم	فلان

Fonte: (WILSON; WATKINS, 2013, p. 251)

Na figura seguinte, representa-se um amuleto de prata que provavelmente data de cerca do ano 250 (WILSON e WATKINS, 2013, p. 252). Nele é possível ver um quadrado latino desenhado à esquerda. À direita, pode-se ver o nome de sete dormentes que, segundo a lenda, dormiam em uma caverna durante 200 anos.

Figura 21 – Um amuleto de prata de Damasco.



Fonte: (WILSON; WATKINS, 2013, p. 252)

Além dos quadrados mágicos latinos com apenas um elemento alocado em cada quadrícula, existem figuras mágicas que, segundo Wilson e Watkins (2013), eram usadas para expulsar espíritos e oferecer sacrifícios (ou também como forma de obter poderes mágicos). Também existiam quadrados mais complexos de construir, como exemplificado a seguir (Figura 22). Nesse caso, temos pares ortogonais.

Figura 22 - Quadrado mágico com pares ortogonais

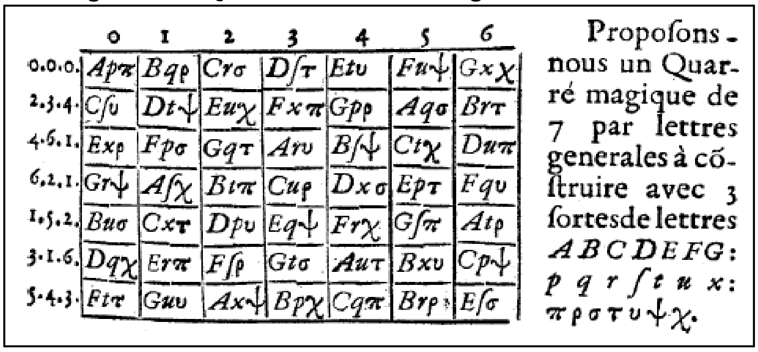
Aα	Bβ	Cγ	Dδ
Bγ	Aδ	Dα	Cβ
Cδ	Dγ	Aβ	Bβ
Dβ	Cα	Bδ	Aγ

Fonte: (Biggs, 1979, p. 123)

Nos quadrados latinos justapostos (Figuras 22 e 23), denotados por letras romanas e gregas, cada um dos dezesseis pares ordenados, Aα, Aβ, Aγ, ... , ocorre apenas uma vez. Segundo Biggs (1979), talvez essa tenha sido a forma mais antiga de apresentação do problema, em que era necessário organizar as 16 cartas da corte em um quadrado, de modo que cada linha e coluna tivessem um Ás, um Rei, uma Rainha e um Valete e simultaneamente um Coração, um Bastão, um Diamante e uma Espada.

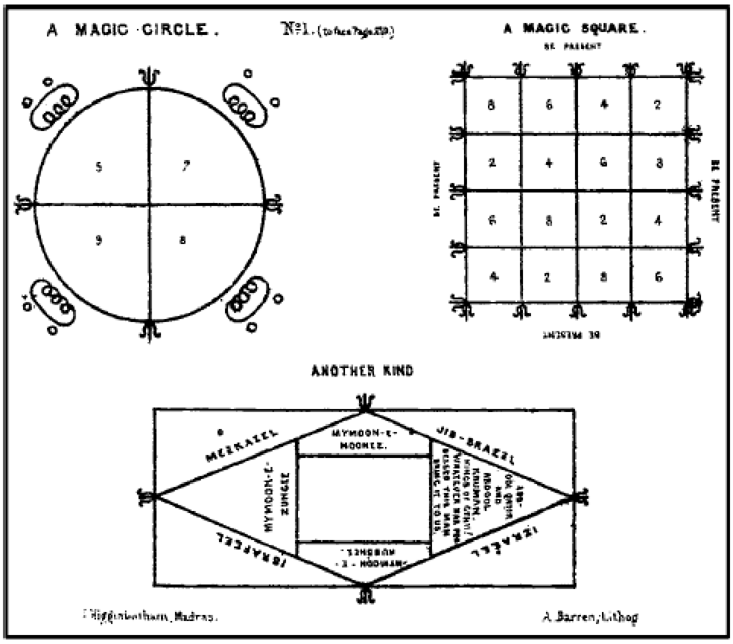
Um problema sobre quadrados mágicos foi trazido à proeminência por Euler em 1779 apresentado à Academia de Ciências em São Petersburgo e publicado em 1782. A pergunta é sobre o arranjo de 36 oficiais em seis fileiras diferentes com seis regimentos distintos (Figura 23). Os oficiais deveriam ser dispostos em um quadrado, de modo que, em cada linha e coluna, tivesse um militar de cada posto e um de cada regimento (BIGGS, 1979).

Figura 23 - Quadrado latino ortogonal de ordem 7.



Fonte: (WILSON; WATKINS, 2013, p. 266)

Figura 24 – Círculos e quadrados mágicos



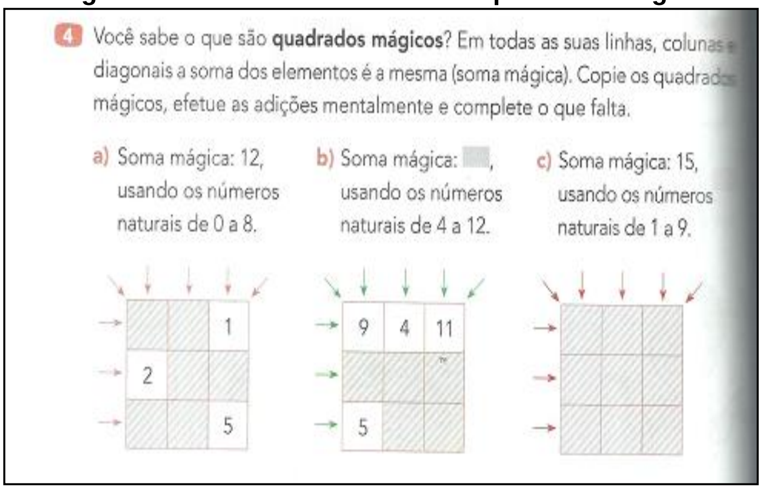
Fonte: (WILSON; WATKINS, 2013, p. 253)

Figura 25 – Um dos sete quadrados latinos de um talismã do livro de al-Búni, associado à quinta-feira e a Júpiter

Fonte: (WILSON; WATKINS, 2013, p. 254)

Hoje vemos muitos desses problemas presentes em atividades de matemática de forma isolada. Parece-nos que assim buscam mais aplicar uma fórmula do que propor um problema desafiador que estimule os alunos a pensar em como resolver. Ou seja, parecem que usam tais tarefas apenas para desenvolver entendimento instrumental como diria Skemp (1976). Nem temos impressão que tais problemas procurem motivar e/ou provocar estudantes a pensar em desenvolver estratégias que auxiliem tanto na compreensão do problema quanto em sua resolução. Neste segundo caso, o problema poderia facilitar que entendimento relacional fosse atingido como comentava Skemp (1976). Vejamos, por exemplo, como esse problema aparece em livro didático (Figura 26).

Figura 26 - Problema envolvendo quadrado mágico



4 Você sabe o que são **quadrados mágicos**? Em todas as suas linhas, colunas e diagonais a soma dos elementos é a mesma (soma mágica). Copie os quadrados mágicos, efetue as adições mentalmente e complete o que falta.

a) Soma mágica: 12, usando os números naturais de 0 a 8.

b) Soma mágica: ▒, usando os números naturais de 4 a 12.

c) Soma mágica: 15, usando os números naturais de 1 a 9.

Fonte: (DANTE, 2016, p. 126, 4.º ano, Livro do aluno)

Com base nesses fatos encontrados na história, percebemos que trabalhar com quadrados mágicos permite desenvolver tarefas que primeiramente exijam do aluno compreender diferentes possibilidades de alocar os elementos nas quadrículas. Posteriormente permitem trabalhar com ideias de partições de números em conjunto com as propriedades de comutatividade e elemento neutro da adição. E, por fim, permitem trabalhar com a resolução de quadrados mágicos. Em todas essas etapas de resolução de um quadrado mágico é importante que professor e alunos troquem ideias entre si e que questionamentos e discussões aconteçam para estimular que os alunos entendam o que estão fazendo para resolver a tarefa e porque algumas partições funcionam. Enfim, o professor e alunos estarão dialogando sobre o que sabem e compreendem de somas e partições de um determinado número.

4.2 Componentes matemáticos que envolvem o raciocínio combinatório

4.2.1 O triângulo aritmético

De acordo com Biggs (1979), o nome triângulo aritmético deve-se ao uso da disposição dos números numa matriz que é construída, tomando cada novo número como a soma dos dois números imediatamente acima dele (ver Figura 27).

Figura 27 – Triângulo aritmético

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    1   6  15  20  15   6   1
  1   7  21  35  35  21   7   1
  .   .   .   .   .   .   .   .   .   .
```

Fonte: (WILSON; WATKINS, 2013, p. 168)

Para Biggs (1979), possivelmente a primeira expressão da fórmula geral em notação moderna que permite obter essa matriz conhecida como triângulo aritmético ocorreu no *Cursus Mathematicus de Herigonus*. Os números apresentados pela fórmula passam a ser elaborados em outro contexto, como coeficientes na expansão binomial, e um dos métodos para o cálculo dos coeficientes da expansão binomial é dado pela fórmula recursiva $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$.

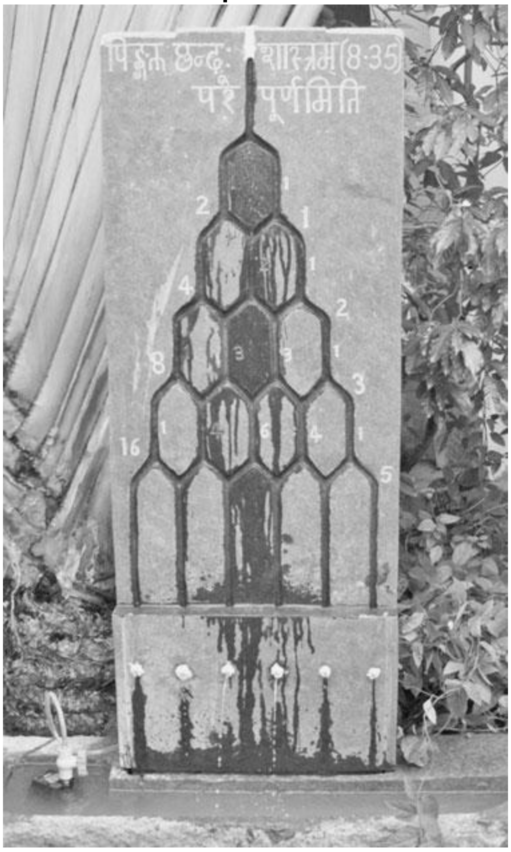
Segundo Biggs (1979), as expansões binomiais para n = 2 e n = 3 são tão antigas, que é impossível traçar suas origens. O último caso citado é explicitado nos escritos de Brahmagupta no século VI. Segundo historiadores matemáticos como Biggs (1979), os hindus interessavam-se em métodos de extração de raízes enésimas e, para pequenos valores de *n*, eles desenvolveram métodos baseados na expansão da diferença $(a + b)^n - a^n$, que, segundo esse autor, eles teriam encontrado os coeficientes binomiais. Desse modo, os números resultantes da combinação $\binom{n}{r}$ foram representados como coeficientes da expansão binomial $(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + b^n$, que corresponde à fórmula $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$ e pode ser provada por cálculo de combinatória direta quando os números são considerados como números de combinação.

Segundo Biggs (1979), o triângulo aritmético era conhecido de Pingala, estudioso Hindu (cerca de 200 a.C.). Pingala discutiu perguntas sobre métrica poética (ou formas de combinar sílabas[75] longas e breves para produzir os ritmos necessários). A partir de três sílabas, é possível obter oito ritmos diferentes: um com todas as sílabas breves, três com uma longa e duas breves, três com duas longas e uma breve e um com todas as três longas (1). Observamos que esse resultado corresponde à soma dos números da quarta linha do triângulo aritmético (1 + 3 + 3 +1), cujo total é igual a oito. É provável que Pingala tenha obtido esse resultado e outros, simplesmente listando os vários casos.

---

[75] A classificação de uma sílaba em longa ou curta está relacionada com a sua entonação, ou seja, o tempo que despendemos para proferir as vogais e sílabas.

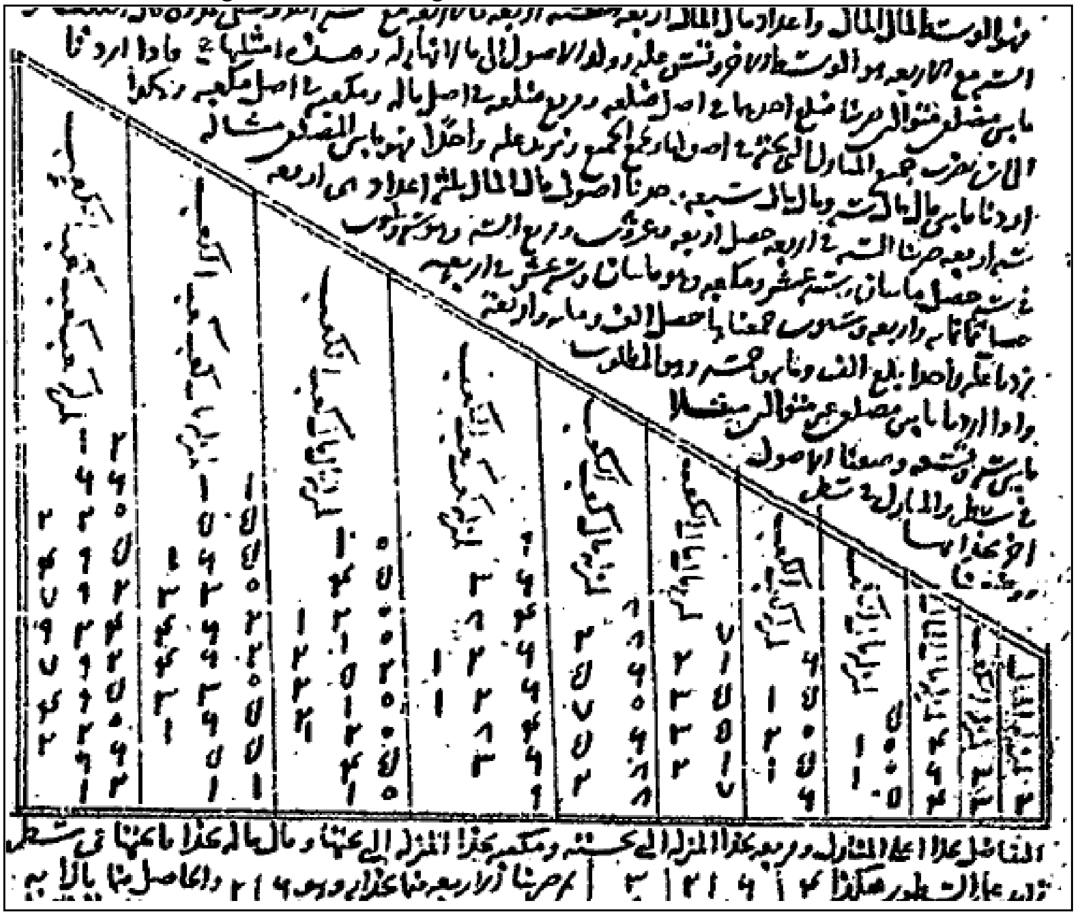
Figura 28 - Uma fonte no Instituto Matemático de Chennai comemora os algoritmos combinatórios do antigo erudito indiano Pingala. Possui números no que agora é chamado de sequência de Fibonacci.



Fonte: (WILSON; WATKINS, 2013, p. 47)

A construção do triângulo aritmético foi explicitada pelo matemático árabe e astrônomo al-Tusi em 1265, no *Handbook of Arithmetic using Board and Dust [Manual de aritmética usando quadro e poeira]*. O autor usou o triângulo (figura 29) como ferramenta para a extração de raízes. Há várias referências posteriores ao triângulo aritmético em textos árabes, principalmente nos escritos de al-Kashi, em torno de 1427.

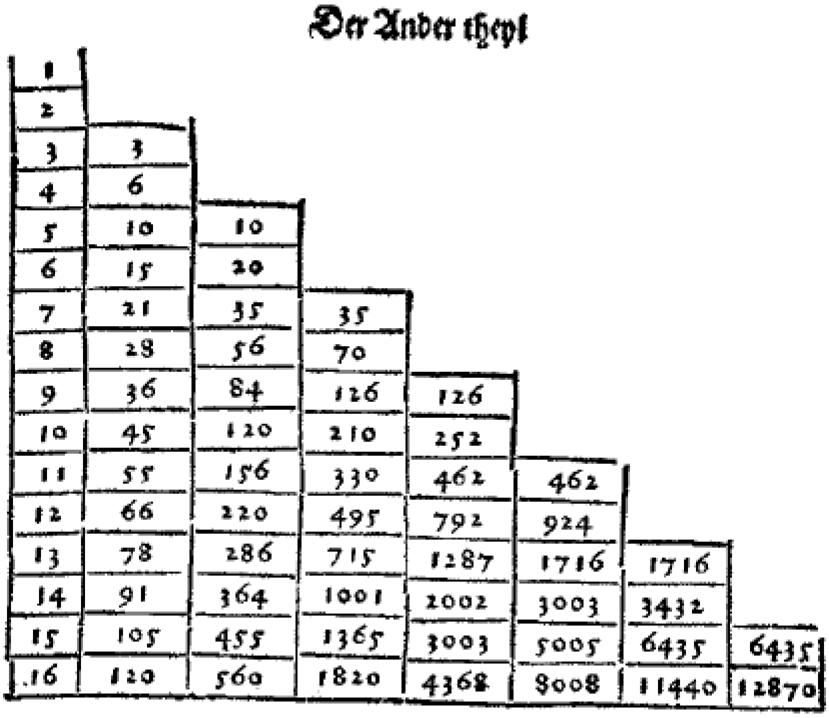
Figura 29 – O triângulo aritmético de Nasir ad-Din at - Tusi.



Fonte: (WILSON; WATKINS, 2013, p. 91)

Ainda de acordo com Biggs (1979), o triângulo aritmético não foi encontrado em obras europeias até o século XVI, quando apareceu na página (Figura 30) de um tratado por Apianus na *Arithmetica Integra* de Stifel, datada de 1544. Os dois livros (especialmente o último) eram conhecidos em toda a Europa Ocidental, o que levou historiadores matemáticos a supor que, a partir desse momento, o triângulo aritmético era conhecido entre os matemáticos europeus. Os números eram usados na extração de raízes, mas o reconhecimento da sua interpretação combinatória talvez não tenha sido explicitado.

Figura 30 – Triângulo de Stifel de números figurados



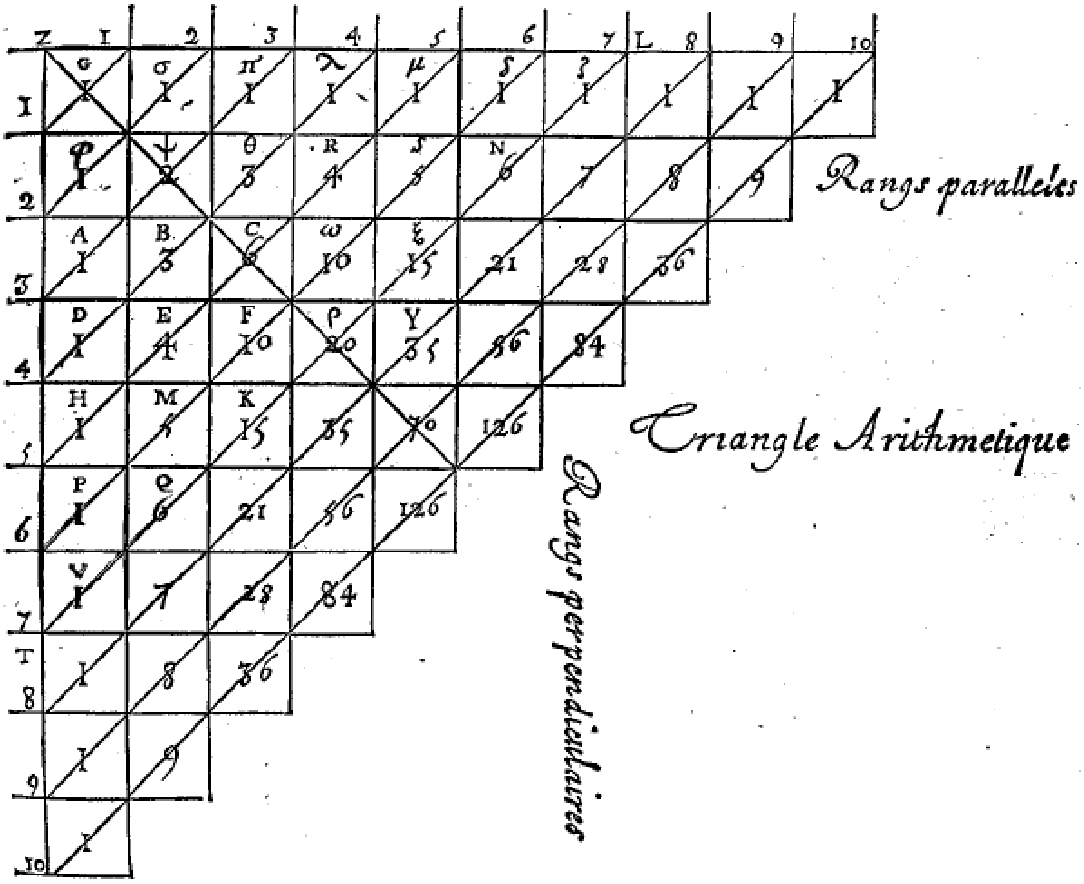
Der Ander theyl

1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870

Fonte: (WILSON; WATKINS, 2013, p. 172)

Em 1654, apareceu o livro de Pascal sobre triângulo aritmético (Figura 31). Por causa disso, esse triângulo, muitas vezes, é conhecido como triângulo de Pascal. Conforme relata Biggs (1979), o mérito de Pascal é que, no livro, ele deixa claro que os números no triângulo aritmético são tão importantes como coeficientes binomiais quanto como números de combinação. Ele os usou em perguntas sobre jogos de azar e, em particular, na solução do famoso “problema dos pontos”, obtido num curso de correspondência com Fermat. Provavelmente o tratado de Pascal contém o primeiro tratamento moderno dos elementos sobre o assunto.

Figura 31 – O triângulo aritmético original de Pascal, como aparece na fachada principal do seu Tratado do Triangulo Aritmético, escrito em 1654 e publicado posteriormente em 1665.

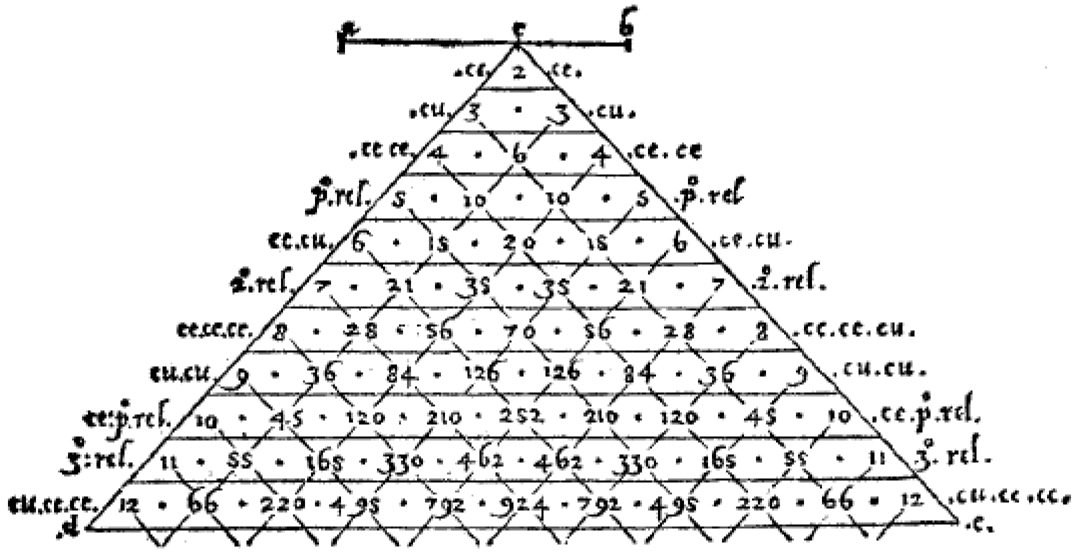


Fonte: (WILSON; WATKINS, 2013, p. 166)

De acordo com Wilson e Watkins (2013), Tartaglia procurou o número de combinações possíveis no lançamento de seis dados e, de acordo com esses historiadores, “enumerações anteriores ocasionais não haviam revelado a estrutura essencial da solução, mas Tartaglia, encontrou a conexão com os números figurados [...]” (WILSON; WATKINS, 2013, p. 171, tradução nossa[76]). Isto aconteceu no primeiro dia da Quaresma em 1523, em Verona, e seu tratado geral foi publicado em 1556.

[76] Occasional earlier enumerations had not revealed the essential structure of the solution, but Tartaglia found the connection with the figurate numbers ‘on the first day of Lent, 1523, in Verona’, as he proudly tells us, ‘having thought about the problem all night’ (WILSON; WATKINS, 2013, p. 171).

Figura 32 – Triângulo aritmético de Tartaglia.



Fonte: (WILSON; WATKINS, 2013, p. 172).

Tartaglia provavelmente obteve o resultado mediante a ordenação das possibilidades, o que facilitou uma enumeração que culminou no resultado da relação com os números figurados. Segundo Wilson e Watkin (2013), além de conhecer claramente a regra da adição e a identidade entre os números figurados e os coeficientes binomiais, Tartaglia propôs a forma mais usual do triângulo aritmético (Figura 32) em seu livro publicado na Itália. O triângulo de Pascal também é conhecido como triângulo de Tartaglia.

Atualmente, problemas relacionados a números figurados e a triângulos aritméticos ainda são explorados em livros didáticos de matemática do ensino médio e em provas nacionais. Como exemplo, temos uma questão do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de 2010.

Figura 33 – Questão do ENEM envolvendo triângulo aritmético

Questão 178

Ronaldo é um garoto que adora brincar com números. Numa dessas brincadeiras, empilhou caixas numeradas de acordo com a sequência conforme mostrada no esquema a seguir.

			1			
		1	2	1		
	1	2	3	2	1	
1	2	3	4	3	2	1
			...			

Ele percebeu que a soma dos números em cada linha tinha uma propriedade e que, por meio dessa propriedade, era possível prever a soma de qualquer linha posterior às já construídas.

A partir dessa propriedade, qual será a soma da 9ª linha da sequência de caixas empilhadas por Ronaldo?

A 9
B 45
C 64
D 81
E 285

Fonte: (Prova do Enem 2010, caderno 5, p. 30, Prova Azul)

Com problemas como esse, é possível explorar padrões e desenvolver estratégias que permitam a contagem sem enumerar todas as possibilidades. De acordo com Biggs (1979), o *Dissertatio de Arte Combinatória,* do jovem Leibniz publicado em 1666, é um tratado de lógica e filosofia e da matemática de problemas combinatórios ligados à música. Esse tratado foi um marco importante para a constituição da combinatória moderna, que passou a ser aceita como disciplina escolar. Desse modo, o raciocínio combinatório ganhou espaço e variadas utilizações científicas que contribuíram para a construção de técnicas de contagem que permitem encontrar o total de possibilidades sem ter que listar todas elas.

4.2.2 Grafos

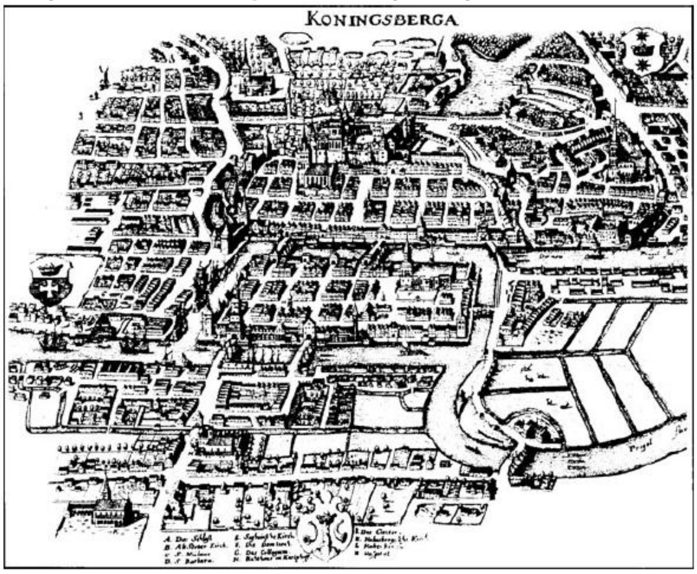
Um grafo pode ser constituído de pares formados por um conjunto V não vazio de vértices (ou nós) com um conjunto A de arestas (ou laço), podendo este ser vazio ou não, de modo que cada aresta existente pode estar associada a um ou dois vértices chamados de extremidades e podemos denotar essa relação por G = (V, A). Entre os problemas de combinatória moderna, temos o número cromático, que é a quantidade mínima de cores necessárias para pintar os vértices de um grafo[77], de modo que os vértices

77 Um grafo é chamado simples se ele não tem laços nem mais de uma aresta ligando dois vértices.

adjacentes não tenham a mesma cor. Segundo historiadores como Wilson e Watkins (2013), o problema tem origem por volta de 1852, quando Francis Guthrie tentava colorir os distritos do mapa da Inglaterra, de modo que dois distritos vizinhos não tivessem a mesma cor. Esse problema foi discutido por vários matemáticos, como De Morgan, Hamilton e Kempe, no século XVIII. Em 1879, Kempe publicou uma demonstração do teorema, mas foi refutada por Heawood em 1890. Durante 124 anos, vários métodos foram utilizados na tentativa de demonstrar esse teorema. Finalmente em 1976, com o uso de computadores, o teorema foi demonstrado por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, com o auxílio de outros matemáticos. Concluíram que eram necessárias, no máximo, quatro cores para pintar um mapa. Tal demonstração ficou conhecida como o Teorema das Quatro Cores.

Ainda de acordo com Wilson e Watkins (2013), outro problema que contribuiu para a origem da teoria dos grafos data do século XVIII e descreve uma situação ocorrida na cidade de Königsberg (Figura 34), na Prússia. A pergunta que se fazia entre os moradores era esta: seria possível uma pessoa realizar um percurso de tal forma que atravessasse cada uma das pontes uma só vez?

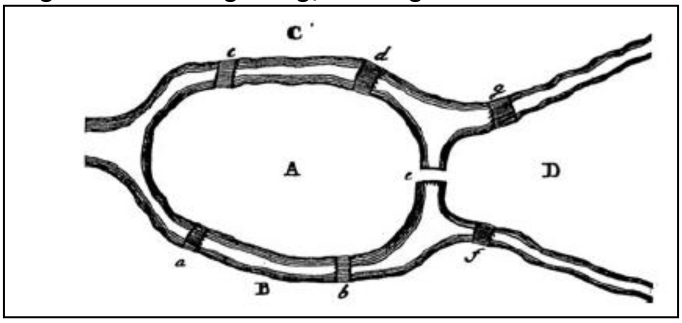
Figura 34 - Um mapa de Königsberg no século XVII.



Fonte: (WILSON; WATKINS, 2013, p. 184)

Wilson e Watkins (2013) contam que, em 1736, Euler comunicou sua solução (Figura 35) a seu amigo Carl Ehler (prefeito de Danzig) e ao matemático italiano Giovanni Marinoni. Para solucionar o problema, Euler buscou uma combinação de possibilidades entre as regiões de terra e as quantidades de pontes existentes. Concluiu que não era possível realizar tal percurso, pois havia momentos em que, ao entrar em uma região, não seria possível retornar sem desobedecer à regra estabelecida. Na figura a seguir, representa-se a ideia de Euler em relacionar as regiões de terra e as pontes com as letras no processo de resolução.

Figura 35 – Königsberg, do artigo de Euler de 1736.

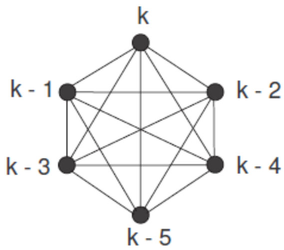


Fonte: (WILSON; WATKINS, 2013, p.184)

Problemas semelhantes a esses podem ser explorados por professores em aula de matemática, para colorir os vértices de polígonos convexos, de modo que os vértices adjacentes não tenham a mesma cor. Assim, o docente, além de trabalhar a combinatória, pode integrar o estudo de geometria ao de grafos. Outra intervenção que sugerimos é o docente solicitar que os alunos desenhem mapas e os pintem, de modo que as regiões vizinhas não tenham a mesma cor. Depois, peça que os estudantes utilizem a menor quantidade de cores possíveis no processo de pintura do mapa atendendo à regra estabelecida de que as regiões vizinhas não tenham a mesma cor. Em seguida, o professor pode discutir com a classe as soluções encontradas, para que, juntos, façam conjecturas e, aos poucos, construam a formalização dos conceitos envolvendo a combinatória necessária para resolver esse tipo de questão.

Vejamos algumas relações entre a combinatória e grafos que podem auxiliar na formalização de técnicas ou de operações no processo de resolução de tarefas envolvendo pintura de mapas. Por exemplo, para pintarmos um grafo completo[78] com *n* vértices, de modo que os vértices adjacentes não tenham a mesma cor, poderemos recorrer ao princípio fundamental da contagem, que leva à fórmula P(k) = k(k-1)(k-2)...(k-n+1), em que *k* é a quantidade mínima de cores a serem utilizadas.

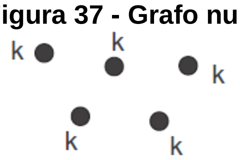
Figura 36 – Exemplo de grafo completo



Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Para colorirmos um grafo nulo, ou seja, um grafo cujo conjunto de arestas é vazio, podemos utilizar, de forma aleatória, as k cores disponíveis para a coloração. Exemplo: considere o grafo nulo da figura 37. Para colorir os vértices, é possível repetir as k cores em cada vértice, já que não há nenhum vértice adjacente. Neste caso, o total de coloração possível é dado por k.k.k.k.k = k^5. Tal situação representa um arranjo com repetição de elementos e pode ser representada pela fórmula A(k,n) = k^n , em que k é o número de cores disponíveis e n o número de vértices.

Figura 37 - Grafo nulo



Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Ao estudarmos a história da análise combinatória por meio dos textos de Biggs (1979) e Wilson e Watkins (2013), aprendemos a pensar sobre a matemática do passado e a matemática atual. Enfim, compreendemos que a construção do conhecimento de combinatória abriu espaços para aprendizagens matemáticas desenvolvidas por diferentes povos e possibilita o

[78] Grafo simples é aquele em que cada vértice é adjacente aos demais e existe no máximo uma aresta fazendo a ligação entre eles.

estudo de intervenções na matemática nos dias atuais. Na seção a seguir, vamos abordar algumas operações relacionadas à combinatória, relacionando objetos ou situações gerais com o intuito de exemplificar e esclarecer tais operações.

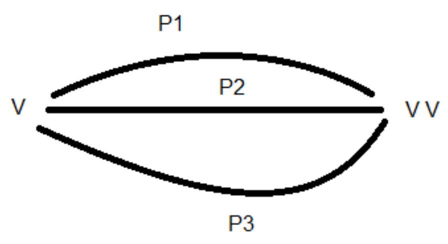
4.3 Desenvolvimento dos princípios e das operações combinatórias

4.3.1 Princípio da multiplicação

Vejamos que, no princípio enunciado, d_1 e d_2 são decisões a serem tomadas. Se d_1 puder ser escolhida de *m* maneiras e se a decisão d_2 puder ser tomada de *n* maneiras, visto que d_1 já foi escolhida, então o total de maneiras de se tomarem d_1 e d_2 é m.n (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991). Vejamos o exemplo a seguir:

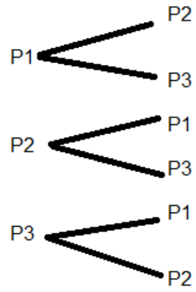
Há três pontes ligando a cidade de Vitória à de Vila Velha. De quantas formas é possível sair da cidade de Vitória para a de Vila Velha passando por uma das pontes e retornar por um caminho diferente? (Adaptado de SILVA; SILVA, 2014).

Vamos chamar de V a cidade de Vitória e de VV a cidade de Vila Velha e de P1, P2 e P3 as pontes que ligam essas cidades. Veja o esquema abaixo representado geometricamente, por meio da tabela e pelo diagrama de árvore.



Podemos fazer as seguintes escolhas para a ida e a volta.

Ida	Volta
P1	P2
P1	P3
P2	P1
P2	P3
P3	P1
P3	P2



Ao observarmos o diagrama, podemos notar que existem três escolhas de pontes para a ida, porém só teremos duas escolhas de pontes para a volta, já que o caminho deve ser diferente. Assim, temos o total de seis possibilidades diferentes de fazer o percurso da cidade de Vitória até a de Vila Velha. Essa resolução permite-nos aplicar o princípio multiplicativo que resulta na operação 3x2 = 6.

4.3.2 Permutação

Segundo Biggs (1979), no Lilavati (escrito pelo matemático Bhaskara em 1150), foi encontrado o símbolo $n!$, que significa que devemos multiplicar um número natural n por seus antecessores até o número um, isto é, $n! = n(n-1).(n-2)\ldots.3.2.1, se\ n \geq 2.$

Quando $n = 0$ ou $n = 1$, temos que $n! = 1$. Observando que $n! = n.(n-1)!$, temos que $2! = 2.1 = 2.$ Sabemos também que $(2-1)! = 1!$, daí temos que $2! = 2.(2-1)! = 2.1! = 2.$ Dividindo por 2 ambos os membros da igualdade $2.1! = 2$, resulta que $1! = 1.$ Como $1! = 1$ e $1! = 1.(1-1)! = 1.0!$, temos que $1! = 1 = 1.0!$ Sabendo que $1.x = x$, para qualquer que seja x real. Daí segue que $1 = 0!$

Hoje esse símbolo $n!$ é usado em cálculos para determinar o total de permutações simples. Um dos exemplos dessa obra é apresentado a seguir:

> Quantas são as variações da forma do deus Shambhu mediante o intercâmbio de seus dez atributos detidos reciprocamente em suas várias mãos, a saber: a corda, o gancho de elefante, a serpente, o tambor, o crânio, o tridente, o leito, o punhal, a seta, e o arco: como

> os de Hari pela troca da maça, o disco, o lótus e a concha? (BIGGS, 1979, p. 117, tradução nossa)[79].

De acordo com alguns historiadores, os balanços das evidências no campo da combinatória apontam a conclusão de que os hindus/árabes foram a fonte desse conhecimento. Os conceitos envolvidos parecem ter integrado às suas culturas, de modo que o desenvolvimento matemático foi gradual e inevitável. Tomemos como exemplo um tipo de permutação em que temos a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1} e a_n; sendo n o número de objetos distintos, denominamos **permutação simples** cada ordenação desses n objetos. O número de modos de ordenar os n objetos distintos é dado por $n! = n(n-1)(n-2).....2.1$. Por exemplo, se desejamos "fazer o encaixe dos quatro pneus num automóvel, assim como o encaixe do pneu reserva (o estepe) no porta-malas do veículo em questão. De quantas formas é possível encaixar os cinco pneus disponíveis?" (SILVA; SILVA, 2014, p. 41).

Como temos cinco pneus, então temos 5! modos de ordená-los, ou seja: $5! = 5.4.3.2.1 = 120$ maneiras de encaixar os cinco pneus. Em um outro tipo de permutação, desta vez com repetição de elementos, temos de ordenar n objetos que não são todos distintos, ou seja, existem elementos iguais, e denominamos esse tipo de agrupamento como **permutação com repetição**. Vejamos o exemplo a seguir: "Quantos são os anagramas da palavra SERRA?" (SILVA; SILVA, 2014, p.71).

Observemos que a palavra SERRA tem a repetição da letra R. Portanto, se permutarmos as duas letras R entre si, não alteraremos o total de possibilidade. Daí a necessidade de dividir o total de permutações pela quantidade de repetições de cada elemento, que é determinado pelo fatorial da quantidade de elementos repetidos. Faremos então $\frac{5!}{2!} = 20$.

De acordo com Wilson e Watkins (2013), o matemático De Moivre estudou o livro "Ensaio sobre a Análise dos Jogos de Azar", de Pierre Remond. A obra incluía um estudo sobre jogos de azar, o triângulo de Pascal e o problema de desarranjo (também chamado de desarrumação ou permutação

[79] How many are the variations of form of the god Sambhu by the exchange of his ten attributes held reciprocally in his several hands: namely the rope, the elephant's hook, the serpent, the tabor, the skull, the trident, the bedstead, the dagger, the arrow, and the bow: as those of Hari by the exchange of the mace, the discus, the lotus and the conch? (BIGGS, 1979, p. 117).

caótica na qual nenhum elemento está fixado em uma mesma posição). Após esse estudo, Moivre resolveu o problema do desarranjo pelo próprio método. O problema consistia na seguinte pergunta: Se um número de objetos em ordem é rearranjado arbitrariamente, qual a probabilidade de o objeto não estar em sua posição original?

Problemas semelhantes ao resolvido por Moivre podem ser explorados em diversos contextos, como em distribuição de senhas. Vejamos:

Uma atendente distribui nove senhas diferentes a nove pacientes e as recolhe ao final da consulta. Um mês depois, os pacientes retornam e novamente a atendente distribui uma senha a cada um. Quantas são as possibilidades de os nove pacientes não pegarem a mesma senha do mês anterior? (SILVA; SILVA, 2014, p. 67).

Sejam os conjuntos:

E o conjunto das permutações dos nove pacientes p_1, p_2, p_3, ... , p_9.

E_1 o conjunto das permutações de E que têm p_1 fixo.

E_2 o conjunto das permutações de E que têm p_2 fixo.

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

E_9 o conjunto das permutações de E que têm p_9 fixo.

Portanto, o número pedido é o número de permutações de E menos o número de permutações da união de E_1, E_2, ..., E_9, ou seja D(9) = $n(E)$ – n($E_1 \cup E_2 \cup E_3 \ldots \cup E_9$) =

$$n(E) - \sum_{i=1}^{9} n(E_i) + \sum_{1 \le i < j}^{9} n(E_i \cap E_j) - \sum_{1 \le i < j < k}^{9} n(E_i \cap E_j \cap E_k) + \ldots + (-1)^9 n(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_9).$$

Temos que:

$n\ (E)$ = 9!

$$n\ (E_1) + n\ (E_2) + \ldots + n\ (E_9) = \frac{9!}{1!(9-1)!}.(9-1)! = \frac{9!}{1!}$$

$$n\ (E_1 \cap E_2) + n(E_2 \cap E_3) + \cdots + n(E_8 \cap E_9) = \frac{9!}{2!(9-2)!}.(9-2)! = \frac{9!}{2!}$$

$$n(E_1 \cap E_2 \cap E_3) + n(E_1 \cap E_2 \cap E_4) + \cdots + n(E_7 \cap E_8 \cap E_9) = \frac{9!}{3!\,(9-3)!}.(9-3)! = \frac{9!}{3!}$$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

$$n(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5 \cap E_6 \cap E_7 \cap E_8 \cap E_9) = \frac{9!}{9!\,(9-9)!}.(9-9)! = 0! = 1.$$

Logo, $D(9) = 9!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!}\right) = 133496$

4.3.3 Combinações

Descobertas históricas, segundo Biggs (1979), revelam que as combinações com repetições tiveram origem em provérbios e crenças sobre presságios a respeito do clima e outras características básicas da vida camponesa. Eles contribuíram para o crescimento do conjunto sistemático de regras para investigação, previsão e explicação de fenômenos em geral. Outra contribuição histórica para os estudos de combinatória é o sistema do I Ching baseado nos símbolos o Yang (-) e o Yin (- -), que tinham grande relevância na questão de ordenação dos hexagramas (Figura 38).

Figura 38 – Lista de Hexagramas

Fonte: (WILSON; WATKINS, 2013, p. 4)

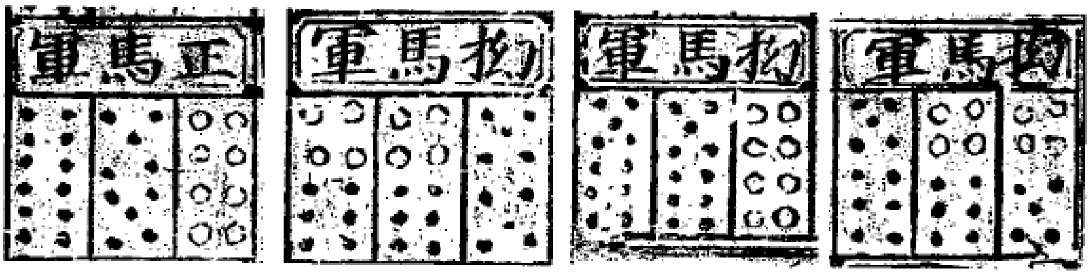
Essa combinação de linhas inteiras (___) e partidas (- -) constitui talvez a mais antiga estrutura simbólica que deu origem ao sistema binário, hoje aplicado na linguagem dos computadores. Outro exemplo da regra para combinações com repetição é associado a um monge do século XVII, cujo problema está relacionado ao número de situações possíveis em um determinado jogo de tabuleiro, aparentemente semelhante ao Go, ilustrado na Figura 39 a seguir.

Figura 39 – Tabuleiro do jogo Go

Fonte: http://www.crediplan.com.br/noticia/pela-1a-vez-computador-vence-profissional-no-jogo-go/

O jogo Go é disputado entre dois jogadores, em que um deles usa as pedras brancas e o outro as pretas. É feito o revezamento entre os jogadores que colocam as pedras no tabuleiro. Cada pedra deve ser colocada em um dos cruzamentos, e o jogador que obtiver a maior quantidade de território vencerá o jogo. Segundo Wilson e Watkins (2013), durante a dinastia Shen Gua (1031-95), um funcionário do Estado explicitou as possíveis configurações no jogo de Go. Ele utilizou um tabuleiro de 19 × 19 linhas, em que cada posição poderia ser vazia, conter uma pedra negra ou conter uma pedra branca. Também foram encontrados textos datados do fim do século XVI que descrevem o jogo de ladrilhos de marfim (Figura 40), conforme contam Wilson e Watkins (2013).

Figura 40 – Um manual do final do século XVI mostrando as possíveis permutações ladrilhos de marfim.



Fonte: (WILSON; WATKINS, 2013, p. 66)

Segundo Biggs (1979), tanto estudiosos gregos quanto seus seguidores foram negligentes em relação aos problemas combinatórios, embora existam passagens que dão indícios de que havia um matemático que conhecia uma regra para encontrar o número de combinações (sem repetição) de n coisas tomadas duas de cada vez. No entanto, tal regra não foi encontrada em escritos matemáticos. Com base nesses registros vemos que o raciocínio combinatório era estimulado por meio de jogos e também nos mostra que esse raciocínio pode ser utilizado como recurso didático para explorar conteúdos de combinatória com os alunos. Atualmente é possível encontrar vários sites de entretenimento com jogos de combinação de sabores como o ilustrado a seguir.

Figura 41 – Jogo de culinária

Fonte: http://www.papajogos.com.br/jogo/strawberry-delicious-boutique.html.
Acesso em 17 de janeiro de 2017.

Além de estar presente em jogos de combinação de sabores, o raciocínio combinatório ganhou lugar nos estudos sobre os ritmos e métricas que podiam ser construídos desde um determinado número de sílabas longas e curtas. Veja a seguir a métrica de um verso de Camões.

Al/ma/mi/nha/gen/til/que/te/par/tiste
Tão/ce/do/des/ta/vi/da/des/con/tente
Re/pou/sa/lá/no/céu/e/ter/na/mente
E/vi/va eu/cá/na/te/rra/sem/pre/triste
(Luís de Camões)

Este verso é composto por 10 sílabas métricas como podemos observar. Notamos que o raciocínio combinatório está presente na construção de rimas poéticas, embora talvez passe despercebido pelos professores e estudantes de matemática. Todavia exigem combinações de sons, ordenações e contagem de sílabas. A partir de certas escolhas de palavras observa-se que será possível formular diferentes rimas poéticas, e isto também é um tipo de raciocínio combinatório.

Embora o raciocínio combinatório envolva listagens de possibilidades, as regras para encontrar totais de agrupamentos em problemas combinatórios (sem listar todos os casos) evoluíram gradualmente ao longo dos séculos. O número de combinações sem repetição (também chamado de combinações simples) de *n* elementos, agrupados em conjuntos com p elementos, pode ser calculado pela fórmula

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p(p-1)\cdots 1}.$$

A divisão pelo fatorial do número p se dá pelo fato de eliminarmos casos repetidos nos agrupamentos. Mais adiante, daremos exemplos de problema de aplicação dessa fórmula em combinação simples. Se multiplicarmos esta fórmula por $(n-p)!$ em ambos os membros da igualdade, obteremos:

$$\binom{n}{p}(n-p)! = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)(n-p)!}{p(p-1)\cdots 1}.$$

Porém $n(n-1)\cdots(n-p+1)(n-p)! = n!$ Logo, a fórmula pode ser reescrita como $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$.

Na terminologia moderna, este é o número de subconjuntos com *r* elementos que podem ser formados a partir de um conjunto com *n* elementos. De acordo com Biggs (1979), acredita-se que a forma de calcular o número de combinações já era conhecida pelos hindus no século VI d.C. As provas para a afirmação provêm da *Brhat Samhita of Varahamihira*, que contém muitos *insights* da cultura hindu, como o cálculo do total de perfumes que poderiam ser feitos, ao tomar quaisquer quatro dos 16 ingredientes dados e misturá-los em várias proporções.

A regra $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2.1.$ estabelece o número de permutações de um conjunto de n objetos e representa o número de correspondências um-para-um do conjunto com ele mesmo. De acordo com Biggs (1979), no Lilavati, escrito pelo matemático indiano Bhaskara por volta de 1150, foram encontradas duas passagens significativas sobre combinações apresentadas a seguir:

> Em um agradável edifício espaçoso e elegante, com oito portas, construído por um arquiteto hábil para o Senhor da terra, diga-me o número de combinações de aberturas tomadas um, dois, três, etc. Diga matemático, quantas são as combinações em uma composição, com ingredientes de seis sabores diferentes, doce, picante, adstringente, leite, sal e amargo, levando-os por um, dois, ou três, etc. (BIGGS, 1979, p. 116, tradução nossa)[80].

Muitas vezes trabalhamos com combinações sem nos darmos conta de que ela está presente em nossas ações, quando montamos uma salada de fruta, misturando duas ou mais frutas para fazer um suco, ou mesmo quando misturamos ingredientes no preparo de uma comida. São fatos que passam despercebidos, mas estão presentes no cotidiano das pessoas. Isso permite aos professores repensar suas propostas de trabalho e as formas de apresentar um conteúdo ou um conceito matemático.

Chamamos de **combinação simples** de classe *p* dos *n* objetos distintos a_1, a_2, a_3, ... , a_{n-1}, a_n cada subconjunto formado com *p* elementos (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991). Exemplo: Com 5 alunos, é possível formar quantas duplas?

Sejam João, José, Pedro, Paulo e Tiago os cinco alunos. Podemos, então, formar as seguintes duplas: (João e José), (João e Pedro), (João e Paulo), (João e Tiago), (José e João), (José e Pedro), (José e Paulo), (José e Tiago), (Pedro e João), (Pedro e José), (Pedro e Paulo), (Pedro e Tiago), (Paulo e João), (Paulo e José), (Paulo e Pedro), (Paulo e Tiago), (Tiago e João), (Tiago e José), (Tiago e Pedro), (Tiago e Paulo).

Notamos que das 20 duplas formadas 10 são repetidas. Esse problema envolve a seleção não ordenada de dois alunos de um total de cinco. A ordem em que os mesmos nomes aparecem não gera novas possibilidades, por exemplo: a dupla João e José é a mesma dupla José e João. O total de maneiras de formamos as duplas com os cinco alunos é 5.4 = 20 pelo princípio

80 In a pleasant spacious and elegant edifice, with eight doors, constructed by a skilful architect for the Lord of the land, tell me the [combinations] of apertures taken one, two, three, etc. Say mathematician, how many are the combinations in one composition, with ingredients of six different tastes, sweet, pungent, astringent, sour, salt and bitter, taking them by ones, twos, or threes, etc. (BIGGS, 1979, p. 116).

multiplicativo. Porém, temos que eliminar os casos em que as duplas se repetem. Para isso, dividimos o resultado pelo fatorial de 2, ou seja, pela permutação das posições que dois elementos escolhidos podem assumir no agrupamento. Assim, obtemos o seguinte resultado $\frac{20}{2.1}$ = 10 duplas, ou ainda usando a fórmula $C_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1} = \frac{120}{6.2} = \frac{120}{12} = 10$.

Dados *n* objetos distintos, chamamos de **combinações completas** o número de modos de escolher *p* objetos distintos ou não entre os objetos dados (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991).

Exemplo: *Na loja há 3 marcas diferentes de camisa. Pedro deseja comprar 4 camisas. Quantas são as possibilidades de escolha?* (SILVA; SILVA, 2014, p. 53).

Sejam A, B e C as marcas das camisas. Podemos ter os seguintes casos:

✓ 4 camisas da mesma marca: 3 casos (AAAA, BBBB, CCCC).

✓ 3 camisas de uma marca e uma de outra marca: 6 casos (AAAB, AAAC, BBBA, BBBC, CCCA, CCCB).

✓ 2 camisas de uma marca e 2 de outra marca: 3 casos (AABB, AACC, BBCC).

✓ 1 camisa de uma marca, 1 camisa de outra marca e duas da mesma marca: 3 casos (ABCC, ACBB, CBAA).

Ao juntarmos o total de casos, temos 15 possibilidades de escolha para a compra. Neste problema, há uma seleção não ordenada com repetição de elementos, o que leva ao caso de uma operação de combinação completa que também pode ser resolvida pela fórmula CR(n,p) = $\frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$, em que n representa o número de objetos distintos e p a ordem do agrupamento ou a quantidade de objetos a serem escolhidos. Logo, CR(3,4) = $\frac{(3+4-1)!}{4!(3-1)!}$ = 15

4.3.4 Princípio da inclusão-exclusão

Denomina-se o princípio da inclusão-exclusão o método de contagem do número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos, disjuntos ou não (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991). Vejamos o exemplo a seguir.

O dono de um restaurante, buscando agradar aos seus clientes, fez uma entrevista sobre a preferência do tipo de música: 90 responderam que preferem música ao vivo, 70 responderam que preferem música eletrônica e 25 responderam que preferem os dois tipos. Quantos clientes foram entrevistados? (SILVA; SILVA, 2014, p. 65-66).

Vamos nomear A o conjunto de pessoas que preferem música ao vivo e nomear B o conjunto de pessoas que preferem música eletrônica. O total de clientes entrevistados é dado pelo número de pessoas do conjunto A com o número de pessoas do conjunto B, menos a intersecção do número de pessoas dos conjuntos A e B. Podemos, assim, efetuar o seguinte cálculo: $\#A$ + $\#B$- # ($A \cap B$) = 90 + 70 – 25 = 135. Onde # representa a cardinalidade do conjunto.

4.3.5 Lemas de Kaplansky

4.3.5.1 Primeiro lema

Dado o conjunto N = {1, 2, ... , n}, o primeiro lema de Kaplansky consiste em contar o número de *p*-subconjuntos de N nos quais não há números consecutivos, cujo total pode ser obtido pela fórmula C_{n-p+1}^{p} (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991).

Exemplo: *Um paciente necessita fazer exame médico três vezes por semana, desde que não seja em dias consecutivos. O hospital realiza o procedimento de segunda a sábado. Quantas são as maneiras de escolher os dias de exame desse paciente?* (SILVA; SILVA, 2014, p. 68).

Nesse problema, temos de escolher três dias de um total de seis, de modo que eles não sejam consecutivos. Podemos ter as seguintes situações:

(segunda, quarta e sexta), (segunda, quarta e sábado), (segunda, quinta e sábado) e (terça, quinta e sábado). Portanto, temos quatro maneiras de escolher os dias de exame desse paciente. Esse cálculo também pode ser obtido pela fórmula C_{n-p+1}^{p}, em que n representa o total de dias em que é realizado o exame e p o número de dias não consecutivos em que devem ser realizado o exame; logo, $C_{6-3+1}^{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$.

4.3.5.2 Segundo lema

O segundo lema consiste na contagem do número de *p*-subconjuntos de N = {1, 2, 3,..., *n*} nos quais não há números consecutivos, considerando *1* e *n* consecutivos (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991). Essa contagem pode ser obtida pela fórmula: $f(n,p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p}^{p}$.

Um paciente necessita fazer exame médico três vezes por semana, desde que não seja em dias consecutivos, durante um trimestre. Considere sábado e domingo como consecutivos. Quantas são as maneiras de escolher os dias de exame desse paciente? (SILVA; SILVA, 2014, p.69).

Para resolvermos esse problema, temos de escolher três dias de um total de sete, mas agora tendo sábado e domingo como consecutivos e os dias em que serão realizados os exames não podem ser consecutivos. Temos as seguintes possibilidades: (domingo, terça, quinta), (domingo, terça, sexta), (domingo, quarta, sexta), (segunda, quarta, sexta), (segunda, quarta, sábado), (segunda, quinta, sábado) e (terça, quinta, sábado). Ao todo são sete possibilidades.

Esse resultado pode ser obtido pelo cálculo direto com uso da fórmula: $f(7,3) = \frac{7}{7-3} C_{7-3}^{3} = \frac{7}{4} x \frac{4!}{3!1!}$ = 7, em que sete indica os dias da semana e três a quantidade de dias em que será realizado o exame.

4.3.6 Princípio das gavetas de Dirichlet

De acordo Wilson e Watkins (2013), em 1801, aos 24 anos de idade, Gauss publicou sua grande obra chamada *Disquisitiones Arithmeticae*. Ao trabalhar nesse livro com números congruentes módulo m (ou seja, trabalhar com a aritmética com os restos da divisão euclidiana por um número fixado), Gauss realizava as primeiras aplicações conhecidas hoje como o princípio do escaninho (ou princípio das gavetas). Esse princípio é também chamado de princípio da caixa de Dirichlet, pois, de acordo com Wilson e Watkins (2013), ele foi usado por Dirichlet em seu trabalho Vorlesungen über Zahlentheorie [Palestra sobre a teoria dos números] sobre a aproximação de números irracionais por racionais. Esse princípio estabelece, por exemplo, que, em qualquer grupo de 13 pessoas, deve haver pelo menos duas pessoas com aniversários no mesmo mês.

De modo geral, o princípio do escaninho (ou princípio das gavetas) diz que, se n objetos forem colocados em no máximo (n – 1) gavetas, então pelo menos uma das gavetas (ou um dos escaninhos) conterá pelo menos dois objetos (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991). Embora a ideia seja aparentemente simples, foi utilizada no século XX pelo lógico F. P. Ramsey e outros matemáticos, para provar a existência de subestruturas em uma estrutura maior. Vejamos alguns exemplos do princípio das gavetas.

(Exemplo 1): *No hospital há 10 quartos. Em um grupo n de pessoas pode-se garantir que duas pessoas ocupem o mesmo quarto. Qual o valor de n que torna esta sentença verdadeira?* (SILVA; SILVA, 2014, p. 69-70).

$$n - 1 = 10$$
$$n = 10 + 1$$
$$n = 11$$

(Exemplo 2): *No restaurante a lotação máxima de pessoas sentadas é de 150. 30 famílias estiveram presentes no mesmo instante. A média de pessoas das famílias foi de 7. Havia lugar para todos se sentarem individualmente?* (SILVA; SILVA, 2014, p.70).

Sejam f_i as famílias presentes ao restaurante, com i = {1, 2, 3, ..., 30}. A média de pessoas por família é dada por $\frac{f1+f2+\ldots+f30}{30}=7$. Dessa igualdade obtemos:

$$f1+f2+\ldots+f30=\sum_{i=1}^{30} fi = 30x7 = 210 > 150.$$

Podemos concluir que o número de pessoas presentes foi maior que o número de assentos do restaurante. Logo, não havia lugar para todos se sentarem individualmente.

4.3.7 Arranjos

Nesta seção, vamos apresentar três tipos de arranjos (arranjos simples, arranjos com repetição e arranjo condicional). Arranjos com os *m* elementos de um determinado conjunto M, tomados *r* a *r* é qualquer *r*-upla, ou seja, qualquer sequência de *r* elementos formada dos elementos de M (HAZZAN, 1993). Nos **arranjos simples**, não ocorre a repetição de qualquer elemento em cada grupo de *r* elementos ordenados. Vejamos um exemplo.

Quantas senhas de cinco algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6? Temos de escolher cinco entre os seis algarismos para formar as senhas. Logo, temos A_6^5 = $\frac{6!}{(6-5)!}$ = 720 maneiras de escolher senhas diferentes sem repetição de algarismos.

No **arranjo com repetição**, todos os elementos podem aparecer repetidos em cada grupo de *r* elementos ordenados.

Exemplo: Criar uma senha de quatro dígitos, escolhidos entre dez números, do zero ao nove, em que é permitido repetir os algarismos, como as senhas 3333 e 8844. Trata-se de um arranjo com repetição. A ordem em que os elementos se encontram gera novas possibilidades, ou seja, o código 1234 é diferente do 4321. Desse modo, o total de senhas é AR(10,4) = 10^4 = 10000.

Quando temos um arranjo, mas que existe uma condição que deve ser satisfeita acerca de alguns elementos, ele é chamado de **arranjo condicional**, e o total de agrupamentos pode ser calculado pela fórmula $Ac = A(m_1, p_1) \times A(m - m_1, p - p_1)$. Para exemplificarmos tal situação, vamos construir todos os arranjos com 4 elementos do conjunto {A, B, C, D, E, F, G}, começando com 2 letras escolhidas no subconjunto {A, B, C}. Aqui temos um total de $m = 7$ letras e $p = 4$ o número de letras a serem escolhidas. O subconjunto escolhido tem $m_1 = 3$ elementos e a taxa de formação para este subconjunto é $p_1 = 2$. Com as letras A, B e C, tomadas 2 a 2, temos 6 grupos que estão representados no conjunto Y = {AB, BA, AC, CA, BC, CB}. Com as letras D, E, F e G tomadas 2 a 2, obtemos 12 grupos que estão representados no conjunto W = {DE, DF, DG, ED, EF, EG, FD, FE, FG, GD, GE, GF}. Usando a regra do produto, temos 72 possibilidades obtidas pela junção de um elemento do conjunto ABC com um elemento do conjunto DEFG. O arranjo CAFG serve de exemplo para a situação. O cálculo com uso da fórmula é dado por $Ac = A(3, 2) \times A(7 - 3, 4 - 2) = A(3, 2) \times A(4, 2) = 6 \times 12 = 72$.

Diante do exposto, vemos que a combinatória é um conteúdo que permite a integração com outros temas matemáticos. Esta integração vai de encontro com as justificativas apresentadas por Kapur (1970, p.114) e por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996, p. 21-24), quando nos dizem que a combinatória pode fazer conexões com outras áreas de conhecimento e conexões internas com a própria matemática. Portanto, este nosso estudo confirma que a combinatória pode ser trabalhada em diversos níveis de ensino, articulando com outros tópicos de matemática em diferentes contextos, desde que o professor faça as adaptações necessárias e trabalhe com problemas de acordo com a maturidade dos alunos. Assim, o professor contribuirá para desenvolver o raciocínio combinatório de seus alunos.

5. METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos os caminhos metodológicos percorridos ao longo do desenvolvimento de nossa pesquisa. Apresentamos o tipo de abordagem adotada, os estudos realizados como desdobramento de nossa pesquisa (mapeamentos, estudos bibliográficos e análise de livros didáticos), os estudos exploratórios e o experimento de ensino, bem como as categorias de análise dos dados produzidos. Optamos, neste trabalho, por uma abordagem qualitativa de pesquisa, pois nosso propósito foi investigar [...] "as características dos indivíduos e cenários que não podem ser facilmente descritos numericamente" [...] (MOREIRA; CALEFFE, 2008, p.73), uma vez que a base de sua elaboração é constituída principalmente pela percepção e compreensão (STAKE, 2008). Para Stake (2008), uma pesquisa qualitativa envolve várias características, entre as quais destacamos:

> **1. O estudo qualitativo é interpretativo.** Fixa-se nos significados das relações humanas a partir de diferentes pontos de vista.
> Os pesquisadores se sentem confortáveis com significados múltiplos.
> Eles respeitam a intuição.
> Os observadores em campo se mantêm receptivos para reconhecer desenvolvimentos inesperados.
> Esse tipo de estudo reconhece que as descobertas e os relatórios são frutos de interações entre o pesquisador e os sujeitos.
> **2. O estudo qualitativo é experiencial.** É empírico e está direcionado ao campo.
> Enfoca as observações feitas pelos participantes e leva mais em consideração o que eles veem do que o que sentem.
> Esforça-se para ser naturalístico, para não interferir nem manipular para obter dados.
> Sua descrição oferece ao leitor do relatório uma experiência indireta (vicária). Está em sintonia com a visão de que a realidade é uma obra humana.
> **3. O estudo qualitativo é situacional.** É direcionado aos objetos e às atividades em contextos únicos.
> Defende que cada local e momento possui características específicas que se opõem à generalização.
> É mais holístico do que elementalista, não analítico de forma redutiva.
> Seu planejamento raramente destaca comparações diretas.
> Seus contextos são descritos em detalhes.
> **4. O estudo qualitativo é personalístico.** É empático e trabalha para compreender as percepções individuais. Busca mais a singularidade do que a semelhança e honra a diversidade (STAKE, 2008, p. 25).

Em nossa pesquisa, levamos em consideração essas características apresentadas. Sob uma perspectiva qualitativa, interpretativa e naturalista, esta pesquisa teve como participantes estudantes de uma turma do quinto ano de uma escola pública de ensino fundamental do município de Vitória, que atende, em geral, alunos de classe média. Buscamos compreender a construção e os fenômenos da pesquisa a partir das interações dos participantes com outros sujeitos, com a professora regente, com suas experiências de vida e sem desconsiderar o contexto da escola, da sala de aula e das particularidades de cada aluno.

A fim de tornar nossa interação com os sujeitos mais próxima do ambiente natural da sala de aula, realizamos observações participantes, em que interagimos com os alunos e com a professora na realização de tarefas escolares de matemática e de outras áreas de conhecimento antes de iniciarmos nosso experimento de ensino. Neste contexto observamos as aulas da professora e a forma como ela trabalhava com seus alunos e como lidava com diferentes situações que apareciam na sala de aula. Estivemos atentos também às conversas das crianças e as atividades que ela realizavam, além de observarmos como era a organização da escola e os espaços escolares, entre outros aspectos.

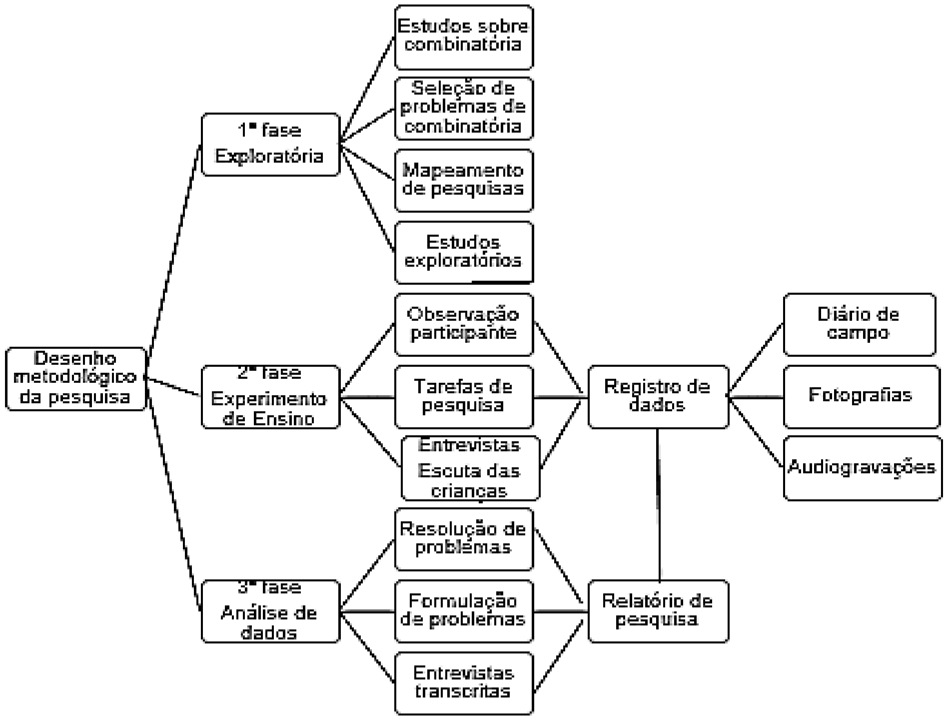
Bernadete, a professora regente da classe, é graduada em Letras-Português e possui mestrado em educação na linha de pesquisa educação e linguagens: matemática. Participa do Grupo de Estudo em Educação Matemática do Espírito Santo (GEEM-ES) por cerca de 16 anos e tem experiência em ministrar cursos de formação de professores. Em suas aulas, integrava a matemática com a história, com a geografia e outras áreas de conhecimento. Estimulava os alunos a participarem das aulas, a pesquisarem, a fazerem perguntas e valorizava o empenho dos alunos na realização das tarefas escolares de casa e em sala de aula. Durante as aulas, debatia os problemas matemáticos com os alunos, estimulava os alunos a escreverem poemas individuais e coletivos, bem como elaborar perguntas sobre os assuntos estudados.

A escola possui quadra poliesportiva coberta, secretaria, setor pedagógico e de coordenação de alunos, refeitório, cozinha, biblioteca, laboratório de informática, banheiros, sala de planejamento e sala de convivência dos professores e um pátio descoberto. A sala de aula da turma participante possui boa iluminação, ventiladores e armário para a professora regente. As carteiras estão em bom estado de conservação e atende ao total de alunos. Possui cartazes nas paredes com informações sobre assuntos estudados e sobre práticas de boa convivência.

A turma escolhida se deu pelo fato de a professora Bernadete fazer parte do Grupo de Estudo em Educação Matemática, coordenado pela professora orientadora desta tese. Ao todo, a classe era composta de 28 alunos, sendo 15 meninas e 13 meninos com idades entre 9 e 10 anos. Desenvolvemos um trabalho investigativo com crianças que poderiam ter comportamentos ou respostas que não estavam previstos em nossos critérios de análise. Além disso, tínhamos a consciência de que a relação entre o pesquisador e os sujeitos seria de vital importância para a produção de dados, de modo que o respeito e a empatia tivessem lugar nessa relação. Temos clareza de que alguns dos resultados evidenciados nesta pesquisa podem não ocorrer em outras pesquisas com alunos de outras escolas, mas que é de grande valia para o campo da Educação Matemática desenvolvida num contexto escolar.

De acordo com Stake (2008), em estudos interpretativos, a investigação depende, em parte, da definição e redefinição dos observadores sobre os significados do que vêem e ouvem. Como as interpretações são feitas por pessoas baseadas em suas experiências, valores e conhecimento que possuem, podem ocorrer falhas e, para reduzi-las, a triangulação de dados é importante. Esse autor ainda orienta que numa pesquisa, é necessário basear-se em obras, tanto do passado quanto do presente. Esse modo de pensar conduziu-nos a buscar a produção acadêmica e científica sobre a temática da análise combinatória nos últimos 19 anos, além de investigações sobre a história da combinatória e análise de livros didáticos. Sendo assim, no que concerne ao objetivo geral e considerando a natureza multimetodológica dos estudos qualitativos, desenhamos um mapa metodológico desta pesquisa, articulando e contemplando procedimentos e instrumentos de produção e análise de dados conforme a figura a seguir.

Figura 42 - Desenho metodológico da pesquisa



Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

O desenho metodológico (Figura 42) representa os caminhos trilhados pelo pesquisador para o desenvolvimento desta pesquisa. Durante nosso percurso realizamos estudos teóricos sobre combinatória, raciocínio combinatório e resolução de problemas, história da combinatória, mapeamento de pesquisas sobre esta temática, análise de problemas envolvendo o raciocínio combinatório em coleção de livros didáticos dos anos iniciais, estudos exploratórios e um experimento de ensino com alunos do quinto ano dos anos iniciais. A seguir detalhamos cada uma destas etapas de pesquisa.

5.1 Fase exploratória

Na fase exploratória desta pesquisa dedicamo-nos ao aprofundamento de estudos teóricos sobre combinatória, ao mapeamento de pesquisas produzidas no Brasil sobre a temática, à elaboração e aplicação de estudos exploratórios em uma turma de quinto ano do ensino fundamental no município da Serra – ES. Nesta seção, portanto, apresentamos como procedemos nesta primeira fase da pesquisa.

5.1.1 Estudos sobre combinatória

Realizamos uma série de estudos teóricos sobre resolução de problemas, raciocínio combinatório e história da combinatória. Nessa fase também nos dedicamos à análise da coleção de livros didáticos utilizada nas escolas dos municípios da Serra, Vitória, Vila Velha e escolas da Secretaria Estadual do Espírito Santo.

a) Resolução de problemas e raciocínio combinatório

Nosso trabalho, portanto, foi desenvolvido sob a perspectiva da resolução de problemas com base em Polya (1995/1945), Lester (1987), Santos (1997), Santos-Wagner (2008), Hoffman e Santos-Wagner (2011) e Onuchic e Allevato (2004, 2011), D'Ambrosio (2017) e de possíveis obstáculos para resolver problemas matemáticos com base em Brosseau (1976). Nossa base teórica em combinatória e raciocínio combinatório consistiu nos estudos de Borba (2010, 2013), Pessoa e Borba (2009, 2010) e nos trabalhos de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) e Roa (2000), Pitombeira de Carvalho, Pinto Carvalho e Fernandez (1991), Bachx, Poppe, Tavares (1975) e Hazzan (1993). Estes autores nos auxiliaram na compreensão de enunciados e de conceitos em problemas envolvendo o raciocínio combinatório bem como na elaboração/adaptação, na proposição e avaliação de problemas matemáticos.

b) História da combinatória

Em relação à história da combinatória, buscamos compreender a relevância do ensino de combinatória com outros tópicos da matemática e realizamos um estudo histórico-bibliográfico fundamentado nos trabalhos de Biggs (1979) e Wilson e Watkins (2013). Apresentamos, no capítulo 4, um breve histórico de problemas antigos que podem ter conexões com situações atuais presentes em brincadeiras, tarefas de livros didáticos, provas, entre outros contextos.

> A pesquisa (histórico-) bibliográfica ou de revisão é a modalidade de estudo que se propõe a realizar análises históricas e/ou revisão de estudos ou processos tendo como material de análise documentos

> escritos e/ou produções culturais garimpados a partir de arquivos e acervos [...] (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 70 – 71).

Realizamos nosso estudo sobre história da combinatória em livros, sites, revistas, aulas disponibilizadas na internet, artigos científicos entre outras fontes bibliográficas. Nesse contexto, analisamos problemas contemporâneos que têm relação com problemas antigos da combinatória. Esse estudo nos auxiliou a entender o desenvolvimento do raciocínio combinatório em diferentes épocas e lugares, bem como a importância do estudo desse assunto para a sociedade atual e para gerações futuras.

c) Análise de livros didáticos

No sentido de entendermos os conteúdos que envolvem raciocínio combinatório e que permeiam as tarefas de livros didáticos, realizamos um estudo documental (GIL, 2005) para analisar uma coleção de livros de Dante (2016) para os anos iniciais do ensino fundamental. Apresentamos uma análise das atividades referentes ao raciocínio combinatório que encontramos em livros do primeiro ao quinto ano da Coleção Ápice, de Dante (2016), utilizada em escolas dos municípios da Serra, Vitória, Vila Velha e escolas da Secretaria Estadual do Espírito Santo. Como nossa pesquisa aconteceu em uma escola pública municipal de Vitória, entendemos que era necessário e oportuno fazer tal investigação diante de nossa questão central de pesquisa: *Que estratégias alunos de quinto ano utilizam, ao resolverem e elaborarem tarefas que envolvem o raciocínio combinatório?* Os objetivos do estudo documental foram os seguintes: 1) identificar tarefas que explorem ideias de combinatória; 2) selecionar tarefas que possuem a mesma estrutura combinatória e têm potencial para investigar o raciocínio combinatório com alunos do quinto ano.

Com base em Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), PCN (1997, 1998), BNCC (2017), traçamos os seguintes critérios das tarefas matemáticas da coleção de livros do autor Dante (2016) que envolvem o raciocínio combinatório:

1) Critérios para a identificação das tarefas que envolvem o raciocínio combinatório:

a) por palavras tais como possibilidades, maneiras presentes no enunciado ou destacada pelo autor;
b) pela estrutura do problema, ou seja, pelo modo de resolução.

2) Critérios de relação das tarefas com eixos temáticos com base nos PCN (BRASIL, 1997; 1998) e BNCC (BRASIL, 2017):
   a) números e operações/álgebra;
   b) espaço e forma/ geometria;
   c) grandezas e medidas;
   d) tratamento da informação/probabilidade e estatística.

3) Critérios de classificação das tarefas quanto ao modelo combinatório (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996):
   a) seleção;
   b) alocação;
   c) partição
   d) regra do produto;
   e) regra da soma.

4) Critério de classificação das tarefas quanto ao tipo de resposta que é solicitada (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELYO, 1996):
   a) enumeração;
   b) contagem;
   c) otimização.

5) Quanto ao tipo de ordenação:
   a) ordenada;
   b) não ordenada.

6) Quanto ao tipo de estratégia de apresentação do problema ou de resolução estimulada pelo autor:
   a) só enunciado;
   b) desenho;
   c) árvore de possibilidades;
   d) tabela;

e) operação matemática.

Mediante esses critérios, a análise dos livros didáticos (DANTE, 2016) nos auxiliou na seleção de tarefas para compor o experimento de ensino desta pesquisa. Também contribuiu para levantar hipóteses sobre estratégias que os alunos poderiam utilizar no processo de resolução de problemas envolvendo o raciocínio combinatório. Isso porque eles já haviam estudado com livros da coleção no terceiro e quarto ano dos anos iniciais do ensino fundamental.

5.1.2 Mapeamento de pesquisas

Durante a primeira fase deste estudo, realizamos também um mapeamento de pesquisas de dissertações de mestrado e teses de doutorado, desenvolvidas nas universidades públicas e privadas e nos institutos federais brasileiros, envolvendo combinatória. Nossas buscas se limitaram ao período de 1999 a 2017. Esse período foi definido por identificarmos que a pesquisa de Sturm (1999) foi a primeira a respeito do assunto ao considerarmos a época posterior à publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997). Esse documento já esclarecia que o raciocínio combinatório pode e deve ser explorado desde as séries iniciais. Para a realização deste mapeamento definimos os seguintes critérios: (1) identificação de questões orientadoras para direcionar as buscas; (2) estabelecimento dos critérios para a seleção das produções; (3) identificação e listagem de instituições de ensino superior; (4) localização dos programas de pós-graduação de mestrado e doutorado; (5) levantamento das produções; (6) leitura inicial das produções e elaboração de planilha de registro de dados e informações; (7) leitura e análise dos textos/estudos, buscando categorias de interpretação; e (8) elaboração de síntese com reflexões, comentários e críticas das pesquisas, buscando evidenciar o desenvolvimento na investigação dessa temática. No capítulo 2 apresentamos e discutimos os resultados deste mapeamento.

5.1.3 Estudos exploratórios

Em 2016, realizamos estudos exploratórios para compreender melhor o campo de pesquisa. Os estudos exploratórios aconteceram em dois momentos em uma escola municipal da Serra, no estado do Espírito Santo. Na primeira ocasião, aplicamos um jogo chamado jogo Senha, para verificar o entendimento dos alunos em processos de ordenação. No segundo momento aplicamos seis tarefas para investigar estratégias intuitivas dos alunos ao resolverem questões matemáticas que envolviam o raciocínio combinatório.

> Dizemos que uma pesquisa é exploratória ou diagnóstica quando o pesquisador, diante de uma problemática ou temática ainda pouco definida e conhecida, resolve realizar um estudo com o intuito de obter informações ou dados mais esclarecedores e consistentes sobre ela. Esse tipo de investigação acontece, com frequência, antes de o pesquisador elaborar propriamente um projeto de pesquisa. Funciona como uma sondagem e visa verificar se uma determinada ideia de investigação é viável ou não. Essa modalidade de pesquisa também é frequentemente utilizada como primeira entrada em campo, tendo em vista o levantamento de hipóteses ou a busca de subsídios que permitam um melhor redirecionamento da pesquisa (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 69-70).

No primeiro momento dos estudos exploratórios, como eu era professor da turma, planejamos uma atividade com os seguintes objetivos de ensino: 1) motivar os alunos para estudar matemática; 2) trabalhar com uma atividade inovadora que envolvesse o raciocínio combinatório de forma lúdica; 3) promover uma interação entre os alunos que vieram de turmas e escolas diferentes; 4) aproximar os alunos do professor; 5) verificar se os alunos tinham algum conhecimento intuitivo de ordenação com elementos distintos envolvendo o raciocínio combinatório, já que ainda não havíamos ensinado esse conteúdo em sala de aula.

Já no segundo momento dos estudos exploratórios, estávamos motivados pelo ensino de combinatória desvelado no mapeamento que realizamos e pelos estudos teóricos sobre o tema. Para isso, selecionamos seis problemas (adaptados de dissertações e teses mapeadas ou de livros didáticos) que envolviam mostras ordenadas com elementos distintos para serem resolvidos pelos 25 alunos da turma do quinto ano. Isso se realizou em 18 de novembro de 2016. Entregamos cada problema em uma ficha e solicitamos que os alunos realizassem a leitura individual e a coletiva. Perguntamos se haviam compreendido o problema e, após a resolução individual de cada um, recolhíamos a ficha com o problema seguido de sua resolução. Nesse momento, nosso objetivo era investigar: 1) a forma como interpretaram o problema (se obedeciam a restrições estabelecidas no problema, se atendiam ao que era solicitado e se alocavam de acordo com a estrutura do problema); 2) as estratégias dos alunos, ao resolverem problemas de ordenação que envolviam o raciocínio combinatório, sem intervenção do professor e sem uma aula formal sobre o conteúdo (se desenhavam, se faziam tabela, se faziam listagem, se usavam representações algébricas ou se faziam cálculos); 3) os tipos de enumerações (sistemática completa, sistemática incompleta, não sistemática completa, não sistemática incompleta).

Destacamos a importância de realizar estudos exploratórios, pois, segundo Triviños (1987), eles possibilitam ao pesquisador ampliar seu conhecimento a respeito de um problema. À medida que adquire maior experiência sobre o assunto investigado, o pesquisador consegue planejar melhor a pesquisa e delimitar o campo de investigação. Além disso, apura o seu manejo da teoria e a utilização de métodos mais adequados:

> [...] o pesquisador planeja um estudo exploratório para encontrar os elementos necessários que lhe permitam, em contato com determinada população, obter os resultados que deseja. Um estudo exploratório, por outro lado, pode servir para levantar possíveis problemas de pesquisa (TRIVIÑOS, 1987, p. 109).

Os estudos exploratórios possibilitam conhecer prováveis obstáculos didáticos e adequar a abordagem do assunto (em nosso caso, perante os alunos), no que se refere à resolução de problemas, consideração de conceitos e/ou procedimentos envolvendo o raciocínio combinatório. Em nosso caso, tais estudos nos auxiliaram na elaboração de tarefas para realizar o experimento de ensino, selecionando problemas que envolvessem o mesmo tipo de raciocínio combinatório, mesma ordem de grandeza em relação aos resultados e mesmo número de elementos em problemas de alocação envolvendo o princípio multiplicativo. Além disso, nos possibilitou refletir sobre processos de intervenção na compreensão, resolução e elaboração de problemas que envolviam o raciocínio combinatório com alunos de quinto ano.

Em suma, os estudos teóricos e exploratórios contribuíram significativamente para elaboração e proposição das tarefas matemáticas do experimento de ensino realizado. Pois, a partir desses estudos, aprofundamos nossa compreensão sobre conceitos de combinatória e sobre estratégias de resolução de problemas em combinatória. Analisamos problemas que envolvem raciocínio combinatório e os classificamos quanto ao modelo combinatório implícito. Procedemos análises do processo de ordenação, da natureza dos elementos e dos tipos de agrupamentos. Verificamos o que os problemas pediam como resposta, bem como as operações e técnicas de resolução necessárias. Desse modo, foi possível selecionar os problemas que comporiam o experimento de ensino, investigar os conhecimentos que os alunos já apresentavam, refletir sobre obstáculos que surgiam e fazer as adaptações dos problemas utilizados nesta pesquisa. Isso porque, os estudos exploratórios, especificamente, permitiram-nos pensar sobre a organização do espaço da sala de aula, o tempo de execução da tarefa, as estratégias de entendimento do problema, as intervenções a serem feitas, os modos de apresentar e discutir as soluções e a necessidade de apresentação formal dessas soluções. Destacamos que também nos foi possível refletir sobre aspectos do processo de aprendizagem e trocar ideias com outros pesquisadores a respeito do que estudamos teoricamente e trabalhamos nos estudos exploratórios.

5.2 Experimento de ensino

Com base nesses aspectos supracitados, realizamos uma investigação do tipo experimento de ensino com base em Steffe e Thompson (2000), em que buscamos compreender a matemática dos estudantes. Para estes autores, as crianças apresentam e constroem uma matemática que é própria delas, e por isso, é importante ouvi-las, para compreender o que elas fazem, como fazem e por que fazem de tal forma, de modo que possamos entender as relações matemáticas que as crianças constroem ao resolverem problemas matemáticos.

Nossas observações nos estudos exploratórios serviram de apoio metodológico para os apontamentos sobre discussão, elaboração e aplicação de experimentos de ensino em combinatória. No experimento de ensino, “[...] a abordagem usada pelos pesquisadores é muito mais sistemática nessas hipóteses que são inicialmente formadas com relação ao processo de aprendizagem, uma estratégia de ensino que envolve intervenção sistemática e estimulação da aprendizagem do aluno [...]” (ROMBERG, 1992, p. 19). Assim, realizamos um experimento de ensino de abordagem naturalista, ou seja, “[...] é aquela modalidade de investigação na qual a coleta de dados é realizada diretamente no local em que o problema ou fenômeno acontece e pode dar-se por amostragem, entrevista, observação participante, pesquisa-ação, aplicação de questionário, teste, entre outros” (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 71).

5.2.1 Tarefas de pesquisa

Em 2018, realizamos o experimento de ensino contendo sete tarefas envolvendo o raciocínio combinatório. Tais tarefas foram realizadas com 28 alunos do turno matutino do quinto ano do ensino fundamental de uma escola pública municipal de Vitória. Consideramos participantes apenas 15 estudantes cujos pais e/ou responsáveis concordaram com a participação e assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE)[81].

Das sete tarefas, três tarefas envolviam fatos fundamentais da adição com a ideia de partição; três envolviam a ideia de alocação e princípio multiplicativo; e uma de elaboração e resolução de problemas pelos alunos, semelhante ao que havíamos trabalhado na pesquisa. Tais tarefas constituíram material interpretativo para a construção e análise dos dados do experimento de ensino.

5.2.2 Observação participante e entrevistas com as crianças

Durante o experimento de ensino, utilizamos a observação participante e entrevistas com as crianças para a coleta de dados. Enquanto pesquisador procurei escutar as crianças durante as aulas, observar como se relacionavam umas com as outras e com a professora. Além disso, pude interagir com elas durante a realização de tarefas propostas pela professora ajudando na compreensão dos assuntos e verificando estratégias que utilizavam para resolvê-las. Conversamos sobre curiosidades que elas tinham sobre assuntos diversos. Também participamos de conversas sobre pesquisas que as crianças faziam em casa e levavam para a sala de aula para compartilhar com a professora e com os demais colegas da classe. Em alguns momentos opinei quando me chamavam para mostrar seus desenhos, suas respostas dos

[81] Os termos de consentimento livre e esclarecido encontram-se nos apêndices.

problemas matemáticos e de outros conteúdos, além de ir ao quadro e discutir com a classe juntamente com a professora sobre tarefas matemática.

Quanto às entrevistas, elaboramos perguntas investigativas semiestruturadas para esclarecer e refinar informações e interpretações dos dados da pesquisa. Para as duas primeiras tarefas de adição realizamos entrevistas com os alunos para saber que ideias intuitivas usaram para solucionar os problemas. A partir da terceira tarefa de adição, por solicitação de alguns pais não realizamos mais as entrevistas individuais, e por isso tivemos que aproveitar os momentos coletivos de pesquisa em sala de aula para ouvir os alunos e realizar as intervenções nos processos de resolução e elaboração de problemas.

Para registrarmos os dados, utilizamos o diário do pesquisador, gravações de áudio e aplicação de fichas com problemas que envolviam o raciocínio combinatório. Em cada etapa de escrita, buscamos evidências que conduzissem à compreensão e à melhor assertiva, considerando as questões de pesquisa.

5.3 Análise de dados

Na terceira fase desta pesquisa, analisamos as respostas das crianças às tarefas de resolução de problemas, assim como as suas propostas para formulação de problemas. Este processo se deu da seguinte forma: a) analisamos as falas dos alunos durante a aplicação das tarefas em sala de aula; b) analisamos as soluções das crianças nas fichas de problemas e na apresentação das soluções. Ao observamos as soluções das crianças nas fichas de resolução de problemas das tarefas 1 e 2, convidamos cerca de dez alunos para uma entrevista individual a fim de compreendermos as respostas dos mesmos diferenciavam das soluções previstas pelo pesquisador.

Nesse processo de discussão dos dados, utilizamos as seguintes categorias de análise: nas tarefas de adição que envolvem a ideia de partição e de multiplicação referentes à ideia de alocação foram estratégias de enumeração (sistemática completa, sistemática incompleta, não sistemática completa e não sistemática incompleta) e estratégias de contagem, além de verificarmos se as soluções eram dadas por desenho, listagem, cálculo, tabela ou alguma outra estratégia. Os detalhes desta fase de pesquisa são apresentados no capítulo sete.

Neste trabalho de análise, buscamos relacionar os dados produzidos aos estudos teóricos realizados. A análise das respostas dos participantes foi qualitativa (baseada em nossa percepção e compreensão sobre o tema) e multidimensional (mediante o cruzamento de informações dadas pelo próprio participante de forma oral e escrita). O procedimento deve-se ao fato de que, quando trabalhamos com problemas de mesma estrutura, os acertos e os erros em diferentes tarefas podem estar relacionados entre si.

Com base em Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), estudamos o desenvolvimento conceitual por meio de inferências das respostas observáveis (tipos de enumerações e de contagem). De acordo com os autores, devemos pontuar a correção das soluções, avaliar as estratégias, os argumentos e os tipos de erros manifestados pelos sujeitos. Com isso, os instrumentos de avaliação demonstram possíveis dificuldades relacionadas ao desenvolvimento do raciocínio combinatório.

6 TAREFAS QUE ENVOLVEM RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO, ENCONTRADAS NA COLEÇÃO DE MATEMÁTICA DO PRIMEIRO AO QUINTO ANO

6.1. Introdução

Neste capítulo, apresentamos uma análise de tarefas matemáticas que têm potencial para trabalhar com o raciocínio combinatório. Essas tarefas foram extraídas da coleção dos livros de matemática dos anos iniciais (do 1.º ao 5.º ano do ensino fundamental) do Projeto Ápis, de Luiz Roberto Dante (2016). Esta análise é um desdobramento de nossa pesquisa, pois entendemos que foi necessário identificar tipos de problemas e estratégias de resolução que podiam influenciar as respostas dos alunos. Além disso, supomos que tais questões poderiam ser trabalhadas com alunos do quinto ano. Partimos desse pressuposto, porque os participantes do estudo definitivo já tinham trabalhado com os livros desta coleção no terceiro e quarto ano e estavam usando o livro no quinto ano. Também supomos que estratégias matemáticas de resolução de problemas já exploradas antes poderiam influenciar nas soluções de tarefas envolvendo raciocínio combinatório no quinto ano.

Inicialmente, pensamos em elaborar critérios para identificar tarefas[82] matemáticas que envolviam o raciocínio combinatório e a relação desses com os eixos matemáticos (números e operações/álgebra; espaço e forma/ geometria; grandezas e medidas; tratamento da informação/probabilidade e estatística) com base em documentos como PCN (BRASIL, 1997) e BNCC (BRASIL, 2017). Em seguida, classificamos os tipos de problemas com suporte no modelo combinatório implícito (seleção, alocação, partição) dos pesquisadores espanhóis (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996), nos princípios fundamentais da combinatória (regra da soma e regra do produto) e em estratégias de resolução exploradas pelo autor Dante (2016). Depois, trouxemos algumas tarefas para exemplificar as relações com as classificações estabelecidas e, por fim, apresentamos nossos comentários e reflexões.

[82] Utilizamos o termo tarefas, em matemática, como sinônimo de atividades, questões, problemas e exercícios matemáticos conforme Santos-Wagner (2008).

Analisamos os livros didáticos, com base em nossa experiência profissional como professores de matemática, e estudos de combinatória realizados pelo pesquisador durante mestrado e doutorado. Por já ter trabalhado[83] por 12 anos no município da Serra, ter usado a coleção do professor Luiz Roberto Dante (2016) e ter identificado que a mesma era utilizada nas escolas municipais da Serra, de Vitória e da Secretaria Estadual de Educação do Espírito Santo nos últimos anos, a consulta recaiu sobre os livros da coleção de 2016.

Investigamos os problemas matemáticos relacionados ao raciocínio combinatório que apareciam em cada livro com base nas classificações de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996). Verificamos quais tarefas apareciam no livro didático que tinham o potencial para trabalhar com conceitos de combinatória e em quais capítulos. Começamos o levantamento pelo livro do primeiro ano e seguimos adiante até chegar ao volume do 5.º ano. Cada livro foi analisado individualmente e, assim que identificávamos o problema, anotávamos a página e o número da questão, verificando o capítulo em que era apresentado e sua relação com o conteúdo do capítulo e, em seguida, as referidas páginas eram digitalizadas.

Durante esse período de análise dos livros de 2016 à 2018, na qualidade de professor de matemática e pesquisador, nós procuramos[84] identificar se existiam tarefas dos eixos de números e operações, espaço e forma/geometria, grandezas e medidas e tratamento da informação que envolvessem o raciocínio combinatório nas obras da coleção para os anos iniciais. Quando encontrava uma tarefa que envolvia o raciocínio combinatório, anotava-a e verificava como estava o enunciado, que estratégias de resolução eram estimuladas pelo autor e como poderia resolver.

[83] O doutorando atuou como professor dos anos iniciais por cerca de 16 anos, sendo que desse total, ele trabalhou por 12 anos em escolas municipais da Serra. A orientadora trabalhou em turmas dos anos iniciais por cerca de 15 anos em escolas municipais do Rio de Janeiro.

[84] Em alguns momentos antes do exame de qualificação II, realizado em 11 de julho de 2018, trabalharam na análise das tarefas do livro o doutorando com a orientadora, e em outros momentos trabalhamos doutorando e orientadora junto com as colegas de doutorado Thiarla e Simone.

6.2. Uma análise de tarefas matemáticas

Inicialmente identificamos, nos livros do primeiro ao quinto ano, se havia a ocorrência das palavras combinatória, possibilidade, maneiras ou alguma estrutura[85] da tarefa matemática em termos de conceitos de combinatória que permitissem classificá-la como sendo desse conteúdo. Em segundo lugar verificamos se o manual do professor trazia alguma informação ou orientação que auxiliasse na identificação do problema e se continha orientações pedagógicas de ensino para professores sobre esse conteúdo. Encontramos algumas tarefas ora com a palavra **possibilidades (possibilidade)** destacada antes do enunciado, ora com essa palavra direto no enunciado. Outros problemas apresentavam a palavra **maneiras** com a ideia de indicar os jeitos ou as possibilidades. Também houve tarefas que identificamos pela **estrutura do problema**, ou seja, pelas ideias e conceitos matemáticos usados no processo de resolução. O quantitativo de problemas que envolviam ideias combinatórias está representado no quadro a seguir.

Quadro 12 – Termos relacionados à combinatória encontrados na coleção

Termo de identificação	1.º ano	2.º ano	3.º ano	4.º ano	5.º ano	Total
Palavra possibilidades em destaque antes do enunciado	1	1	3	1	1	7
Palavra possibilidades no enunciado	2	3	0	1	2	6
Palavra possibilidades em destaque e no enunciado	0	2	6	6	4	18
Maneiras no enunciado	0	0	1	1	1	3
Estrutura do problema	0	1	1	5	4	11
Total	3	7	11	14	12	47

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Nos cinco livros, nós identificamos o total de 47 tarefas que envolviam o raciocínio combinatório e constatamos que não havia nem um capítulo ou

[85] Chamamos de tarefas com a mesma estrutura àquelas que envolvem as mesmas ideias, os mesmos conceitos matemáticos, os mesmos princípios de ordenação ou de agrupamentos não ordenados, os mesmos critérios ou parâmetros estabelecidos, e os mesmos invariantes combinatórios entre outras características.

seção específica sobre esse tópico. Verificamos que os problemas aparecem inseridos em capítulos que tratam de outros temas da matemática, como adição, multiplicação, geometria. De modo geral, as respostas das tarefas (problemas, exercícios) apresentadas no manual do professor não aprofundavam o assunto para orientar os professores como dialogar e focalizar os conceitos de combinatória com os alunos. O manual do professor também não informava sobre estratégias diferenciadas para a resolução das tarefas, nem destacava de forma explícita como poderia integrar ideias de combinatória com os conteúdos dos eixos no qual o problema estava inserido. Esses fatos nos chamam a atenção, uma vez que os documentos PCN e BNCC trazem orientações para que os conteúdos sejam articulados de forma integrada. Porém, observamos que propor tarefas de combinatória junto com outros eixos sem ter uma clara ideia para professores de como explorar, dialogar e trabalhar as mesmas em sala de aula pouco vai atender aos objetivos destes documentos. Cremos que é necessário trazer de forma detalhada essa integração no manual do professor de cada livro didático.

A partir de nossos estudos do modelo combinatório implícito e dos trabalhos dos espanhóis (BATANERO, GODINO E NAVARRO-PELAYO, 1996), classificamos as tarefas com ideia de combinatória da coleção de Dante (2016) em termos de seleção, alocação, partição, enumeração e contagem. Para tanto buscamos responder a algumas perguntas que nortearam esse trabalho de análise dos livros didáticos: 1) Como o autor organizou as tarefas da coleção?; 2) Quais são os tipos de problemas combinatórios que aparecem nos livros didáticos?; 3) Que estratégias de resolução são exploradas nos enunciados das tarefas matemáticas que envolvem o raciocínio combinatório da coleção de Dante (2016)?

6.2.1 Como o autor organizou as tarefas da coleção?

Dante (2016) articulou os grandes eixos de conteúdo conforme a recomendação do PCN de Matemática (BRASIL, 1997) e os Elementos Conceituais e Metodológicos para a Definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1.º, 2.º e 3.º anos) do Ensino Fundamental (BRASIL, 2012). Observamos que o autor também aborda tarefas que estimulam os alunos a fazerem estimativas, aproximações e cálculo mental, explorando números e operações, geometria, grandezas e medidas. O autor também sugere, em algumas tarefas, que o professor explore materiais manipuláveis (ou manipulativos).

De acordo com Dante (2016), a proposta das atividades é trabalhar o ensino em espiral, retomando ou aprofundando conceitos matemáticos estudados num mesmo volume ou em volumes anteriores. Notamos que algumas tarefas semelhantes aparecem ao longo dos livros do primeiro ao quinto ano, mostrando o cumprimento da proposta do ensino em espiral. Embora não aconteça para todos os casos, conforme identificamos especificamente com os números palíndromos[86], com o teorema das quatro cores e com os quadrados mágicos, o autor explora conceitos matemáticos por meio de situações-problema. Nesse levantamento, verificamos unidades em que os problemas aparecem e classificamos dentro dos eixos[87] temáticos de matemática com base no PCN da primeira à quarta séries (BRASIL, 1997) e da BNCC (BRASIL, 2017).

Quadro 13 – Relação dos problemas com os eixos matemáticos

Quanto à integração de conteúdos					
Ano	**Números e operações/ Álgebra**	**Espaço e forma/geometria**	**Grandezas e medidas**	**Tratamento da informação/ probabilidade e estatística[88]**	**Total**
1.º	2	1	-	-	3
2.º	7	-	-	-	7
3.º	8	-	3	-	11
4.º	11	-	3	-	14
5.º	8	2	2	-	12
Total	36	3	8	-	47

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

[86] Número palíndromo ou capicua é aquele em que a leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita chega em números iguais. Ou seja, pode-se ler o número da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita e vamos obter nesta leitura o mesmo número. Exemplos: 1221, 23432.

[87] Números e operações: é o eixo que estuda os números e as operações que podem ser realizadas com os elementos numéricos. Álgebra: estuda a ideia de variável de um número em um conjunto e padrões definidos que podem ser representados por meio de expressões algébricas. Espaço e forma/Geometria: é o eixo da matemática que estuda a forma, tamanho, a posição e as propriedades das figuras no espaço. Tratamento de Informação/Estatística: é o eixo que estuda a frequência de ocorrência de eventos usando teorias probabilísticas e o estudo de regras matemáticas para entender as características de um determinado grupo a partir da observação dos dados observáveis.

[88] Não inserimos nessa contagem, tarefas matemáticas específicas de probabilidade e estatística.

Constatamos maior quantitativo de tarefas matemáticas envolvendo o raciocínio combinatório no livro do quarto ano, porém, em todos os livros da coleção, as tarefas estão, em sua maioria, relacionadas ao eixo números e operações. Já o livro do quinto ano possui tarefas que estão relacionadas a três eixos matemáticos, enquanto os do primeiro, terceiro e quarto anos apresentam tarefas relacionadas com dois eixos matemáticos e o do segundo ano com apenas um dos eixos. Além disso, notamos a ausência de tarefas relacionadas com o eixo tratamento da informação.

6.2.2 Quais são os tipos de problemas que aparecem nos livros didáticos?

Ao longo da coleção, encontramos problemas que envolvem o raciocínio combinatório usando fatos fundamentais da adição com dominó, régua *cuisenaire* e quadrado mágico. Entre outras tarefas, havia problemas envolvendo o raciocínio combinatório e a multiplicação (fazendo combinação de roupas), combinações com sabores de sorvete e escolha de caminhos. Reparamos, assim, que Dante (2016) aborda tarefas semelhantes às que comentamos no capítulo quatro sobre combinatória e história. Além disso, essa apresentação dos problemas em diferentes contextos está em conformidade com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017): possibilitar aos estudantes o “[...] estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas” (p. 264).

Embora não tenhamos identificado, no livro didático, o que seria o raciocínio combinatório para o autor, vimos que há problemas que exploram possibilidades. Alguns trazem a palavra antes da atividade destacada de vermelho. Outras vezes, a palavra possibilidades aparece direto no enunciado, e algumas atividades exploram maneiras diferentes de organizar ou agrupar os elementos de um conjunto. Juntamos os problemas com características semelhantes com base em nosso referencial teórico e montamos uma ficha com problemas que possuem a mesma estrutura em relação ao raciocínio combinatório. Para organizarmos as fichas, consideramos algumas orientações de Santos-Wagner (2008), quando diz que

> [...] é importante que o professor saiba selecionar situações que sejam ricas do ponto de vista matemático em ter durante o processo de solução os conceitos, propriedades e procedimentos que o professor quer introduzir, explorar e posteriormente sistematizar. Nem sempre os professores possuem de início um arsenal de situações problema que sirvam para despertar a curiosidade e introduzir os mais variados conteúdos matemáticos explorados no currículo escolar (SANTOS-WAGNER, 2008, p. 60).

Nesse sentido, selecionamos as tarefas com potencial para desenvolver o raciocínio combinatório e as classificamos quanto: (1) ao modelo combinatório implícito (seleção, alocação e partição), regra do produto e regra da soma e tipo de amostra (ordenada e não ordenada); (2) ao tipo de reposta solicitada no problema; e (3) ao tipo de estratégia solicitada no problema. Depois que analisamos e resolvemos os problemas, organizamos quadros que mostram o quantitativo de tarefas encontradas em cada livro com base nas classificações e apresentamos a seguir.

Quadro 14 – Classificação dos problemas quanto ao modelo combinatório implícito

Quanto ao modelo combinatório							
Ano	**Seleção**	**Alocação**	**Partição**	**Partição/ alocação**	**Regra do produto**	**Regra da soma e do produto**	**Total**
1.º	-	-	-	3	-	-	3
2.º	-	1	-	1	5	-	7
3.º	3	3	-	1	3	1	11
4.º	6	1	2	1	4	-	14
5.º	4	2	2	1	1	2	12
Total	**13**	**7**	**4**	**7**	**13**	**3**	**47**

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Ao analisarmos o quadro, observamos que os problemas de seleção e de regra do produto são os que mais apareceram na coleção. Um número maior de problemas envolvendo o raciocínio combinatório está inserido no livro do quarto ano. Isso nos instiga, ainda mais, a verificar se alunos de quinto ano, que já usaram livros da coleção no terceiro e quarto ano, aprenderam técnicas ou estratégias de resolução de problemas que envolvem o raciocínio combinatório.

Como já discutimos em capítulos anteriores, a combinatória, entre outras finalidades, estuda métodos de contagem de enumeração e de otimização. Identificamos, com base nos enunciados, o que se pede no problema e os classificamos segundo essas finalidades. Apoiados nessa classificação, elaboramos o quadro a seguir.

Quadro 15 – Classificação quanto ao que se pede como resposta no problema

Ano	Enumeração	Enumeração e contagem	Enumeração, contagem e otimização	Enumeração e otimização	Contagem	Total
1.º	3	0	0	0	0	3
2.º	1	6	0	0	0	7
3.º	6	5	0	0	0	11
4.º	5	6	1	1	1	14
5.º	4	5	0	2	1	12
Total	19	22	1	3	2	47

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores.

Acreditamos que, de acordo com o que se pede num problema, a pergunta pode influenciar no raciocínio dos alunos, exigindo que estes tenham conhecimento de outros conceitos ou procedimentos matemáticos. Tal exigência pode tornar os problemas mais fáceis ou mais difíceis, tanto na interpretação quanto no uso de estratégias adequadas à resolução. Além de atentarmos para o que se pede, necessitamos que se leve em conta os tipos de ordenação que podem existir em problemas de raciocínio combinatório. Diante disso, investigamos quais são os tipos de ordenações em problemas de seleção e partição/alocação presentes na coleção de Dante (2016).

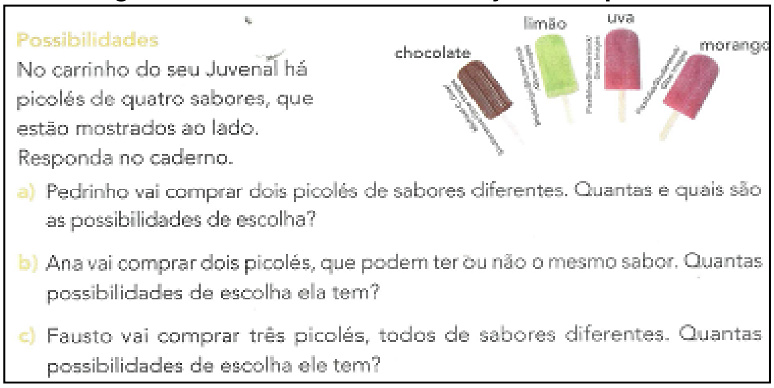
Quadro 16 – Ordenação em problemas de seleção

Quanto ao tipo de seleção					
	Ordenada		**Não ordenada**		**Total**
Ano	**Com revezamento**	**Sem revezamento**	**Com revezamento**	**Sem revezamento**	
1.º	-	-	-	-	-
2.º	-	-	-	-	-
3.º	1	1	1	-	3
4.º	4	-	1	3	8
5.º	-	3	-	-	3
Total	5	4	2	3	14

Fonte: Elaborado pelo pesquisador

Ao analisarmos as tarefas, identificamos que, em um mesmo problema, existem perguntas que levam à seleção não ordenada sem revezamento ou não ordenada com revezamento. Vejamos o problema a seguir:

Figura 43 - Problema de ordenação com picolé


Possibilidades

No carrinho do seu Juvenal há picolés de quatro sabores, que estão mostrados ao lado.

Responda no caderno.

a) Pedrinho vai comprar dois picolés de sabores diferentes. Quantas e quais são as possibilidades de escolha?

b) Ana vai comprar dois picolés, que podem ter ou não o mesmo sabor. Quantas possibilidades de escolha ela tem?

c) Fausto vai comprar três picolés, todos de sabores diferentes. Quantas possibilidades de escolha ele tem?

Fonte: (DANTE, 2016, p. 247, 4.º ano, Livro do aluno)

Observamos que, na pergunta (a), os sabores a serem escolhidos são diferentes e se aponta uma possível amostra não ordenada sem revezamento. Já na pergunta (b), os sabores podem ser repetidos, o que permite explorar problemas com amostras não ordenadas com revezamento. Se o professor não estiver atento a essas questões, pode aplicar o problema sem perceber que a estrutura da questão é outra e a dificuldade de resolução também muda, pois aumenta o número de possibilidades e os alunos podem perder-se na contagem delas, caso não tenham uma estratégia sistemática que os auxilie no cálculo do total de possibilidades para poderem responder quantas encontraram.

Outro critério de classificação dos problemas foi em relação ao tipo de partições e alocações. Segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), os critérios de ordenação e de relação entre a natureza dos elementos são os mesmos para os problemas de alocação e de partição. Tabulamos os dados em um mesmo quadro que apresentamos a seguir.

Quadro 17 – Classificação dos problemas de alocação e partição da coleção de Dante (2016)

Quanto à natureza dos elementos								
	Alocação/partição							
	Ordenada							
	Objeto distinto							
	Casa distinta				Casa igual			
Ano	**Injetiva**	**Sobrejetiva**	**Bijetiva**	**Qualquer**	**Injetiva**	**Sobrejetiva**	**Bijetiva**	**Qual-quer**
1.º	-	-	-	-	-	-	-	-
2.º	-	1	1	-	-	-	-	-
3.º	-	-	3	-	-	-	-	-
4.º	-	-	-	-	-	-	-	-
5.º	1	-	2	-	-	-	-	-
Total	1	1	6	-	-	-	-	-
	Não ordenada							

	Objeto distinto							
	Casa distinta				Casa igual			
Ano	**Injetiva**	**Sobrejetiva**	**Bijetiva**	**Qualquer**	**Injetiva**	**Sobrejetiva**	**Bijetiva**	**Qual-quer**
1.º	-	-	2	-	-	-	-	-
2.º	-	-	-	-	-	-	-	-
3.º	-	-	-	-	-	-	-	-
4.º	-	-	1	-	-	3	-	-
5.º	-	1	-	1	-	-	-	-
Total	-	1	3	1	-	3	-	-
	Objeto igual							
	Casa distinta				**Casa igual**			
Ano	**Injetiva**	**Sobrejetiva**	**Bijetiva**	**Qualquer**	**Injetiva**	**Sobrejetiva**	**Bijetiva**	**Qual-quer**
1.º	-	-	-	1	-	-	-	-
2.º	-	1	-	-	-	-	-	-
3.º	-	-	-	1	-	-	-	-
4.º	1	1	-	-	-	-	-	-
5.º	-	2	-	1	-	-	-	-
Total	1	4	-	3	-	-	-	-

Fonte: Elaborado pelo pesquisador

Ao analisarmos as tarefas, verificamos que a coleção de livros de Dante (2016) apresenta tarefas de partição e alocação com diferentes tipos de agrupamentos (injetivo, sobrejetivo, bijetivo e qualquer)[89], ou seja, existem tarefas que alocam no máximo um objeto por casa, tarefas que alocam ao menos um objeto por casa e tarefas que alocam um único objeto por casa (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996). Há também tarefas em que pode ser alocado o número que se deseja de objetos em cada casa ou deixar alguma casa vazia. Encontramos tarefas que exigem partições em que o elemento neutro da adição faz parte da contagem de possibilidades e tarefas em que o elemento neutro da adição não faz parte da contagem de possibilidades. É importante que o professor compreenda a existência dessas relações, ao trabalhar os problemas com os seus alunos, pois podem influenciar no raciocínio e tornar o problema mais complexo. Além disso, pode alterar o total de possibilidades.

[89] Estes termos foram discutidos no capítulo de fundamentação teórica.

6.2.3 Que estratégias de resolução são exploradas nos enunciados das tarefas matemáticas que envolvem o raciocínio combinatório da coleção de Dante (2016)?

Dante (2016) explora algumas estratégias de resolução nos enunciados dos problemas que envolvem o raciocínio combinatório, entre as quais está o uso de desenhos, lista de possibilidades, tabelas, cálculos, árvore de possibilidades e tarefas que só apresentam o enunciado sem apresentar alguma estratégia específica. No quadro a seguir, permite-se ter um panorama dessas estratégias.

Quadro 18 – Estratégias de resolução exploradas nos enunciados das tarefas matemáticas na coleção de livros de Dante (2016)

Ano	Só enunciado	Enunciado e desenho	Enunciado e operação	Enunciado, desenho, árvore e operação	Enunciado, desenho e operação	Enunciado, desenho e tabela	Enunciado, desenho e árvore	Enunciado, desenho tabela e operação	Enunciado, desenho tabela, operação e árvore	Total
1.º	-	1	-	-	2	-	-	-	-	3
2.º	-	2	-	1	2	-	1	1	-	7
3.º	2	6	-	1		1	-	1	-	11
4.º	4	7	1	-	1	-	-	-	1	14
5.º	1	9	-	-	-	1	1	-	-	12
Total	7	25	1	2	5	2	2	2	1	47

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Ao observarmos os quadros, verificamos que Dante (2016) explora várias estratégias em tarefas que abordam contextos variados. Caso ocorra uma intervenção do professor que comente as estratégias e dialogue sobre elas, os alunos poderão construir ideias que ajudem no processo de resolução. Defendemos ser necessário que o professor tenha um olhar mais apurado para apresentar tarefas que envolvam o mesmo tipo de raciocínio combinatório e utilizem estratégias diferenciadas para trabalhar com conceitos combinatórios e isso nos remete a repensar a formação inicial e continuada de professores. Esse pensamento de selecionar determinados tipos de problemas terá mais sentido se o professor tiver clareza do objetivo pretendido, ao apresentar um determinado problema ao seu aluno.

> […] às vezes apresentamos problemas para despertar a curiosidade e motivação dos alunos para podermos a partir desta situação introduzir e explorar conteúdos matemáticos. Às vezes utilizamos problemas para praticar estratégias de resolução e para chamar a atenção dos alunos de procedimentos matemáticos. E em outros momentos podemos usar a atividade de resolução de problemas como um meio para explorarmos um novo conceito matemático (SANTOS-WAGNER, 2008, p. 50).

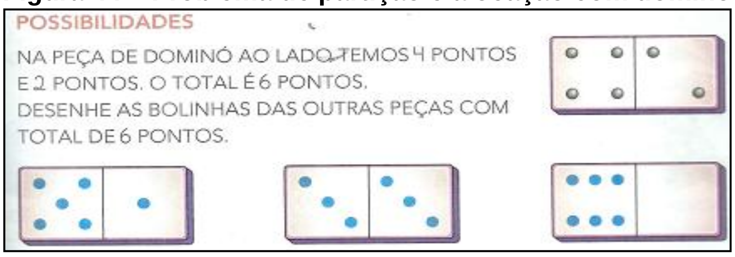
Teremos condições de selecionar melhor as tarefas que desejamos aplicar com os nossos alunos se tivermos conhecimento dos conceitos matemáticos que envolvem os problemas. Assim, contribuiremos para que os alunos consigam relacionar os problemas e desenvolver habilidades que ajudem a resolver diferentes problemas. A seguir apresentamos alguns problemas retirados dos livros da coleção de Dante (2016), para exemplificar alguns tipos de problemas mencionados nos quadros.

6.3 Exemplos de tarefas matemáticas

Vamos apresentar algumas tarefas matemáticas da coleção do autor Dante (2016) que envolvem o raciocínio combinatório e relacioná-las com as classificações dos quadros já apresentados. Trazemos um exemplo de cada livro didático devido à quantidade de tarefas que encontramos e as limitações para este estudo.

6.3.1 No livro do primeiro ano: problema do dominó

Figura 44 – Problema de partição e alocação com dominó



Fonte: (DANTE, 2016, p.111, 1.º ano, Livro do professor)

Este é um problema que envolve a ideia de partição de objetos iguais (pontos do dominó) em subgrupos, cuja soma deve ser igual a 6. Também o classificamos como alocação, pois envolve a colocação de objetos em casas distintas (partes do dominó). Como ainda solicita a listagem por meio de desenho de todas as possibilidades, classifica-se como um problema de enumeração (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996; ROA, 2000).

Além dessas classificações, o problema traz a palavra possibilidades em destaque e exige a noção de conjunto, conhecimento do elemento neutro da adição e a propriedade comutativa, decomposição do número seis em duas parcelas e pode ser resolvido por meio de operações de combinações completas. Os conhecimentos sobre os fatos fundamentais da adição são necessários para resolver tarefas que envolvem esse tipo de raciocínio combinatório.

No problema do dominó, Dante (2016) solicita que sejam desenhadas outras três possibilidades com o total de seis pontos. Comentamos que, no livro do professor, o autor apresenta o total de quatro possibilidades. Pensando na comutatividade, poderíamos desenhar todas as possibilidades que vão além da quantidade das peças de dominó. Encontraríamos 7 soluções: 4 pontos e 2 pontos; 2 pontos e 4 pontos; 1 ponto e 5 pontos; 5 pontos e 1 ponto; 3 pontos e 3 pontos; 6 pontos e 0 ponto; 0 ponto e 6 pontos. Entretanto, os alunos podem argumentar que colocar a peça de dominó 6 e 0 é diferente de colocar 0 e 6 e assim encontraria outras possibilidades que vão além da quantidade de peças existentes no jogo de dominó.

Parece que a tarefa exige que os alunos tenham conhecimentos, tais como: saber o que é uma peça de dominó e ter trabalhado com o objeto, além de saber como são as peças; fazer contagem de elementos de um conjunto; formar subconjuntos a partir de elementos de um conjunto finito não vazio; conhecer os fatos fundamentais (propriedades) da adição; e reconhecer o zero como elemento neutro da adição.

Esse problema do dominó aparece no livro do primeiro ano, na página 111 do capítulo 4 (Figuras geométricas). Identificamos que, no capítulo 1, são trabalhadas atividades de localização, direção e sentido, que constituem conhecimento geométrico básico. No capítulo 2, o autor propõe questões sobre construção e escrita de números, além da representação de quantidades até 10. No capítulo 3, são apresentadas questões de número maior, menor e números ordinais. No capítulo 4 (Figuras geométricas), as atividades que antecedem ao problema em questão envolvem sólidos geométricos, figuras com faces planas e com superfícies curvas, atividades de deslocamento e localização.

Com o problema do dominó, Dante (2016) trabalha o conceito de números abordado em capítulos anteriores e possibilita que o professor integre com geometria, se este explorar tanto as figuras planas que podem representar as faces retangulares do dominó quanto figuras espaciais, se comparar as peças do dominó com paralelepípedos. A tarefa do desenho das peças de dominó (com o total seis) encontra-se na seção “Vamos ver de novo?”, em que o autor retoma conceitos estudados anteriormente. Isso está de acordo com o que já trouxemos e com o que Dante (2016) comenta na coleção: ele quer que o ensino de matemática ocorra em espiral, isto é, trabalhando, várias vezes, os conteúdos em conexão com outros tópicos da matemática. Mas alguns questionamentos surgem para pesquisas futuras: Será que os professores estão usando os livros com essa lógica? Será que os conteúdos matemáticos estão sendo integrados?

De acordo com Borba (2017), esse problema do dominó é de combinação (com repetição e condição), pois combina

> […] os 7 números (0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6), dois a dois, com a condição de que a soma seja 6. Na combinação com repetição de 7 elementos, dois a dois, tem-se essas possibilidades: 0,0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1.6; 2,2; 2,3; 2,4; 2,5; 2.6; 3,3; 3.4; 3,5; 3,6; 4,4; 4,5; 4,6; 5,5; 5,6; 6,6), mas apenas as seguintes possibilidades satisfazem a condição de soma 6: 0,6; 1,5; 2,4; 3,3 (BORBA, 2017, resposta por e-*mail* em 20/08/2017).

Com base em leituras dos trabalhos de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) e Roa (2000), classificamos o problema do dominó como alocação e partição não ordenada de objetos iguais em casas distintas que fazem parte do modelo combinatório implícito. Fizemos isso sem levarmos em consideração a restrição do jogo de dominó que não possui peças repetidas (simétricas). Os modelos combinatórios implícitos consistem em:

> a) Seleção de uma amostra a partir de um conjunto de objetos.
> b) Colocação de objetos em casas (casas, células ou urnas).
> c) Partição em subconjuntos de um conjunto de objetos (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 31, tradução nossa[90]).

Esses pesquisadores espanhóis também classificam os tipos de colocação em:

[90] a) Seleción de uma muestra a partir de um conjunto de objetos. b) Colocación de objetos em casillas (cajas, celdas o urnas). c) Partición em subconjuntos de um conjunto de objetos (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996, p.31).

> 1º Colocações injetivas: com no máximo um objeto por casa ($r \leq n$); 2º Colocações sobrejetivas: colocações com ao menos um objeto por casa ($r \geq n$); 3º Colocações bijetivas: colocações de um único objeto por casa ($n = r$); 4º Colocações quaisquer: pode ser colocado o número que se deseja de objetos em cada casa ou desejar alguma casa vazia (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 35, tradução nossa[91]).

Desse modo, classificamos o problema do dominó como uma colocação qualquer, pois podem ser colocados os números desejados em cada casa (ou deixar alguma casa vazia). Ou seja: no caso do 0 + 6 e do 6 + 0, podemos deixar que uma das partes do dominó fique vazia. Quanto ao que se pede no problema do dominó, trata-se de enumeração, pois solicita listar as soluções possíveis. As tarefas que pedem listar possibilidades são chamadas de problemas de enumeração. Em determinadas ocasiões, podemos interessar-nos em enumerar (ou listar) todas as possibilidades de elementos com certas características, ou então explicitar um algoritmo que represente todos os casos possíveis (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996).

O problema também pode ser classificado como partição em subconjuntos de um conjunto de objetos. Neste caso, o aluno terá de formar subconjuntos com colocações contendo nenhuma, uma ou mais de uma unidade. Segundo Roa (2000), esse raciocínio é denominado

> Partição em subconjuntos de um conjunto de objetos. Quando solicita classificar os elementos de um conjunto inicial em um número dado de subconjuntos incompatíveis, de modo que a classificação seja exaustiva (ROA, 2000, p. 22, tradução nossa[92]).

Já com base em Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991), se olharmos esse problema pensando em todas as soluções não negativas com o total seis, ele envolverá as técnicas de uma combinação completa. Uma

> CR_n^p é o número de modos de selecionar p objetos, *distintos ou não*, entre *n* objetos distintos dados; b) CR_n^pé o número de soluções não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$ em inteiros não negativos.

---

[91] 1º Colocaciones inyectivas: con a lo sumo un objeto por caja ($r \leq n$). 2º Colocaciones sobreyectivas: colocaciones con al menos un objeto por caja ($r \geq n$).3º Colocaciones biyectivas: colocaciones de un solo objeto por caja ($n=r$). 4º Colocaciones cualesquiera: Se puede colocar el número que se desee de objetos en cada caja o dejar alguna vacía. (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 35).

[92] Partición en subconjuntos de un conjunto de objetos. Cuando se pide clasificar los elementos de un conjunto inicial en un número dado de subconjuntos incompatibles, de modo que la clasificación sea exhaustiva (ROA, 2000, p. 22).

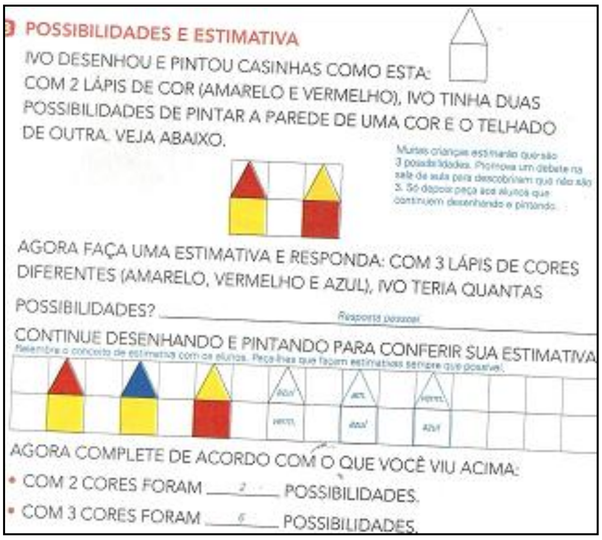
> A quantidade de possibilidades pode ser obtida pela fórmula C_{n+p-1}^{p} (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991, p. 49).

Desse modo, notamos que a tarefa do dominó que aparece no livro do primeiro ano pode auxiliar o processo de aprendizagem dos alunos. Mas para que isso aconteça, o professor deve explorar outras tarefas semelhantes usando o dominó e propondo outros totais que sejam possíveis encontrar. Assim, se esta questão e outras similares forem bem exploradas pelo professor, e se forem comentadas a resolução e acontecerem diálogos sobre as respostas, tudo isso poderá colaborar para o desenvolvimento de conceitos de partição, alocação e ordenação. E assim, possivelmente esses conceitos sejam melhor compreendidos pelos alunos quando estiverem em anos escolares mais avançados, principalmente no ensino médio. Além disso, para ajudar no desenvolvimento de estratégias que auxiliem na resolução, pode-se solicitar aos alunos que escrevam ou desenhem as possibilidades e depois contem quantas são. Ou ainda pode-se solicitar que alunos listem os pares de números que deem o total seis e depois efetuem a contagem das possibilidades que listaram. Assim, estimularemos os alunos a desenvolver o raciocínio combinatório sobre enumeração e contagem e a verificar quando o processo de ordenação dos elementos gera, ou não, novas possibilidades.

6.3.2 No livro do segundo ano: o problema da pintura das casas

O livro do segundo ano possui 319 páginas e também não tem um capítulo específico que trate de combinatória. Os problemas estão inseridos em outros temas da matemática. Identificamos, neste volume, outras operações de combinatória inseridas nos problemas. Vejamos o exemplo a seguir.

Figura 45 – Pintura das casinhas


3 POSSIBILIDADES E ESTIMATIVA

IVO DESENHOU E PINTOU CASINHAS COMO ESTA:
COM 2 LÁPIS DE COR (AMARELO E VERMELHO), IVO TINHA DUAS POSSIBILIDADES DE PINTAR A PAREDE DE UMA COR E O TELHADO DE OUTRA. VEJA ABAIXO.

Muitas crianças estimarão que são 3 possibilidades. Promova um debate na sala de aula para descobrirem que não são 3. Só depois peça aos alunos que continuem desenhando e pintando.

AGORA FAÇA UMA ESTIMATIVA E RESPONDA: COM 3 LÁPIS DE CORES DIFERENTES (AMARELO, VERMELHO E AZUL), IVO TERIA QUANTAS POSSIBILIDADES? Resposta pessoal.

CONTINUE DESENHANDO E PINTANDO PARA CONFERIR SUA ESTIMATIVA.
Relembre o conceito de estimativa com os alunos. Peça-lhes que façam estimativas sempre que possível.

AGORA COMPLETE DE ACORDO COM O QUE VOCÊ VIU ACIMA:
- COM 2 CORES FORAM 2 POSSIBILIDADES.
- COM 3 CORES FORAM 6 POSSIBILIDADES.

Fonte: (DANTE, 2016, p. 24, 2.º ano, Livro do professor)

Esse problema pode ser identificado como alocação ordenada, pois envolve a ideia de que sejam colocadas cores nas partes da casa, de modo que a ordenação das cores gere novas possibilidades. Aparece inserido na unidade de números e solicita listar as possibilidades e contá-las explorando desenhos. Para pintarmos a casinha com duas cores, podemos raciocinar da seguinte forma: para cada parte da casa (telhado e parede), alocamos uma cor distinta, o que nos leva a uma operação de permutação, pois temos uma relação bijetiva entre a quantidade de cores e as partes da casa, além de não ser possível inserir mais de uma cor em cada parte da casa.

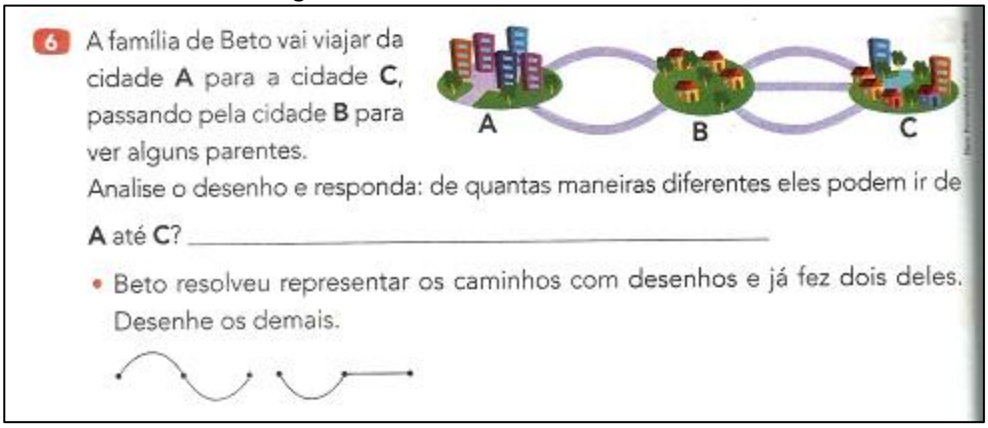
Já para o caso em que temos três cores para pintar duas partes da casa, procedemos da seguinte maneira: em cada parte da casa (telhado e parede) inserimos uma única cor entre as três disponíveis (amarela, vermelha e azul), e sempre ficará sobrando uma. Como o número de cores é maior que a quantidade de partes da casa para pintar, temos uma relação sobrejetiva. Essas estruturas presentes no problema permitem-nos realizar uma operação de arranjos simples. Estes termos e conceitos de injetividade e sobrejetividade são estudados em anos escolares posteriores no ensino médio, daí a importância de desenvolver tarefas matemáticas explorando ideias básicas sobre estes conceitos, desde os anos iniciais, mesmo que os alunos nesta faixa escolar ainda não percebam todos estes detalhes que apresentamos.

Um professor que não conhece tais modelos pode achar que, por se tratar de possibilidades, ambos envolvem o mesmo raciocínio combinatório, mas envolvem formas diferentes de raciocínio. Isso nos mostra a necessidade de intervenção do professor no processo de aprendizagem de resolução de problemas e no processo de formação de professores. Ao escolhermos problemas que envolvam o mesmo tipo de raciocínio e procedimentos matemáticos, poderemos verificar se ocorreu alguma aprendizagem por meio da triangulação dos resultados das atividades desenvolvidas (FIORENTINI, LORENZATO, 2012; SANTOS, 1997). Verificamos que Dante (2016) apresenta situações diferenciadas que exploram o raciocínio combinatório. Embora na coleção encontremos questões que tratam do mesmo tipo de raciocínio combinatório, observamos que não se fazem perguntas intermediárias que possibilitem aos alunos construir ideias sobre os tipos de agrupamentos, ordenações e natureza dos elementos.

6.3.3 No livro do terceiro ano: o problema dos caminhos

O livro do terceiro ano possui 328 páginas. Nota-se que o número de problemas de contagem é maior em relação aos do primeiro e segundo anos. As questões estão relacionadas a vários temas da matemática e não há capítulo específico voltado para a combinatória. Encontramos atividades que, em geral, são modelos prontos para os alunos preencherem ou completarem, incluindo a árvore de possibilidades e tabela em variados contextos e direcionando as estratégias dos alunos para a resolução dos problemas. Vejamos o problema a seguir.

Figura 46 – Problema dos caminhos



6 A família de Beto vai viajar da cidade **A** para a cidade **C**, passando pela cidade **B** para ver alguns parentes.

A B C

Analise o desenho e responda: de quantas maneiras diferentes eles podem ir de **A** até **C**? ______

• Beto resolveu representar os caminhos com desenhos e já fez dois deles. Desenhe os demais.

Fonte: (DANTE, 2016, p. 18, 3.º ano, Livro do aluno)

Nesse problema que aparece na unidade de números, o autor pede que o aluno diga quantas são as possibilidades mediante a observação do desenho e depois represente os possíveis caminhos; portanto, exige a contagem e a enumeração dos caminhos. Aqui, a palavra que identifica o problema como raciocínio combinatório é “maneiras”. A tarefa traz a ideia de produto cartesiano e pode ser resolvida pela operação do princípio multiplicativo. Sentimos ausência de perguntas intermediárias para os alunos verificarem se os caminhos são iguais ou distintos e se a distinção é importante ou não nesse processo de enumeração (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996).

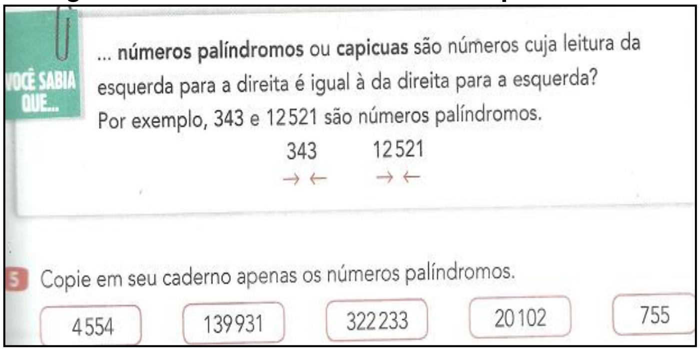
A intervenção do professor no processo, auxiliando a compreensão e a resolução de problemas, é fundamental para desenvolver o raciocínio combinatório. Entendemos que não basta que o livro didático tenha várias atividades envolvendo a formulação de possibilidades. São necessárias atividades correlatas (POLYA, 1995/1945) que explorem a mesma estrutura do problema ou problemas mais fáceis (ou mais difíceis) que favoreçam a compreensão dos conceitos e operações inseridas na questão (SANTOS, 1997; SANTOS-WAGNER, 2008).

Por isso, atividades mais simples podem ser exploradas com alunos nos anos iniciais, tais como a de vestir bonecos: desde uma quantidade menor de roupas (por exemplo, com uma bermuda e uma camisa), passando para duas bermudas e uma camisa, até duas bermudas e duas camisas. O professor dever orientar os alunos na forma de organizar, anotar e observar as possibilidades, a fim de que eles entendam o que são ordenações geradoras e não geradoras de possibilidades.

6.3.4 No livro do quarto ano: problema com números palíndromos

No livro do quarto ano, que possui 288 páginas, aparecem questões relacionadas a outros temas da matemática e, assim como os demais livros da coleção, não há um capítulo específico voltado à combinatória. De modo geral, o livro do quarto ano, quanto aos problemas de raciocínio combinatório, envolve agrupamentos e ordenações com frutas, pessoas e sabores. Estimula o raciocínio combinatório em relação às possibilidades de entrada e saída em um determinado local e trabalha com o quadrado mágico 3x3. Notamos que, em geral, o que se pede é a contagem ou a enumeração das possibilidades. Há diversos tipos de estratégias necessárias para a resolução, incluindo agora o conceito de palíndromos. Vejamos o problema a seguir.

Figura 47 – Problema com números palíndromos

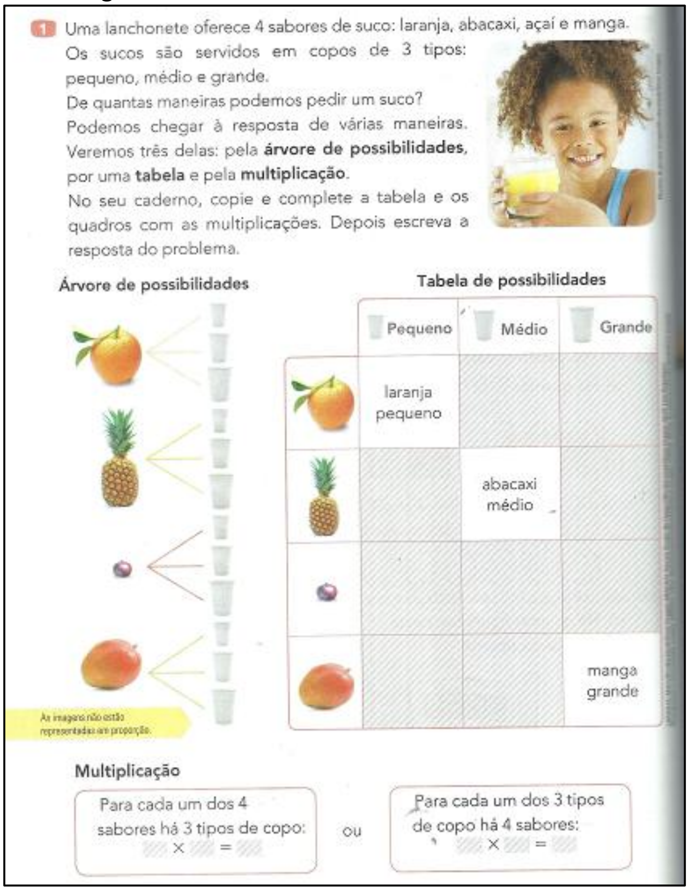


Fonte: (DANTE, 2016, p. 37, 4.º ano, Livro do aluno)

Esse problema está inserido na unidade de sistema de numeração, e o que nos permite identificar o problema como raciocínio combinatório é a própria estrutura, que envolve a ideia de seleção ordenada com repetição de elementos. Exige que o aluno seja capaz de identificar qual das possíveis listagens corresponde ao critério de enumeração estabelecido.

Verificamos que primeiro o autor apresenta uma definição de números palíndromos sem antes trabalhar noções matemáticas, tais como ordenação e repetição de elementos, necessárias à compreensão desse conceito. Trazemos o problema dos sabores de suco (Figura 48), para exemplificar que Dante (2016), em sua coleção já estimula aos alunos dos anos iniciais a utilizarem estratégias de resolução por meio de árvore de possibilidades, por meio de tabela de possibilidades e cálculos.

Figura 48 - Problema dos sabores de suco


1 Uma lanchonete oferece 4 sabores de suco: laranja, abacaxi, açaí e manga.
Os sucos são servidos em copos de 3 tipos: pequeno, médio e grande.
De quantas maneiras podemos pedir um suco?
Podemos chegar à resposta de várias maneiras. Veremos três delas: pela **árvore de possibilidades**, por uma **tabela** e pela **multiplicação**.
No seu caderno, copie e complete a tabela e os quadros com as multiplicações. Depois escreva a resposta do problema.

Árvore de possibilidades

As imagens não estão representadas em proporção.

Tabela de possibilidades

	Pequeno	Médio	Grande
laranja	laranja pequeno		
abacaxi		abacaxi médio	
açaí			
manga			manga grande

Multiplicação

Para cada um dos 4 sabores há 3 tipos de copo: ___ × ___ = ___

ou

Para cada um dos 3 tipos de copo há 4 sabores: ___ × ___ = ___

Fonte: (DANTE, 2016, p. 138, 4.º ano, Livro do aluno)

Estas e outras formas de resolução nos auxiliaram na investigação com os alunos do quinto ano, participantes de nossa pesquisa, sobre as estratégias intuitivas que eles apresentaram ou que poderiam apresentar em suas respostas e que poderiam ser influenciadas pelo uso do livro didático. Observamos a ausência de perguntas intermediárias que estimulem a explicitação do raciocínio dos alunos para explicitar a compreensão de conceitos. Porém, as questões têm potencial para serem adaptadas por meio de resolução de problemas. Verificamos que algumas questões nem sempre possuem conexões com o tópico do capítulo do livro. Notamos também que há necessidade de trabalhar com problemas semelhantes em quantidades ímpares, no intuito de contribuir para a triangulação da aprendizagem (FIORENTINI; LORENZATO, 2012; SANTOS, 1997).

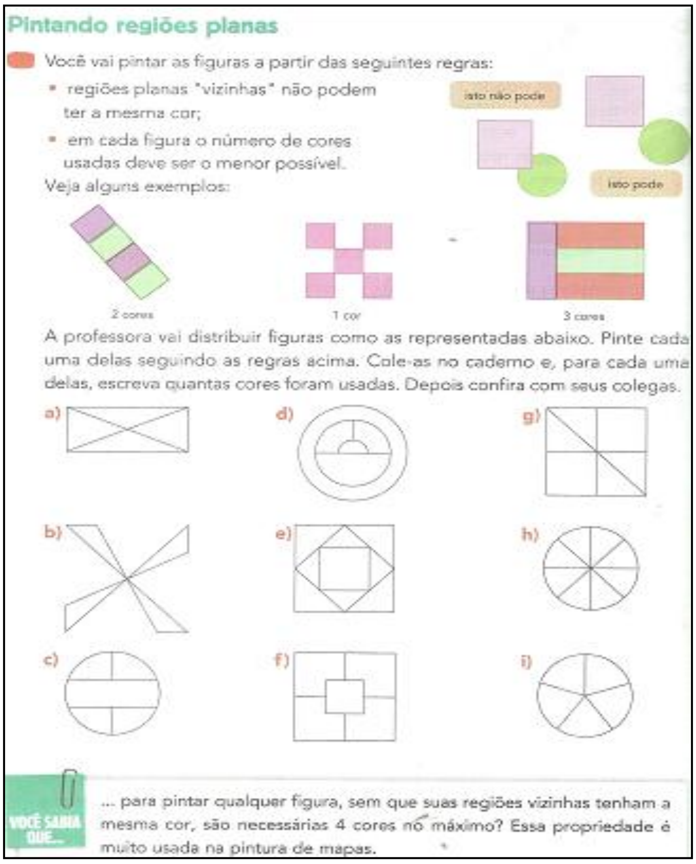
6.3.5 No livro do quinto ano: problemas com número cromático

No livro do quinto ano, que possui 288 páginas, notamos que o autor estimula o uso de diferentes estratégias de resolução de problemas de combinatória, tais como desenho, árvore de possibilidades, ou o uso de tabelas que possibilitam integrar com outros tópicos de matemática. A importância de integrar os conteúdos matemáticos e utilizar diferentes recursos didáticos é uma forma de contribuir para a alfabetização matemática. Quanto mais apresentamos e discutimos com os alunos um mesmo conceito matemático articulado com outros temas, mais possibilitamos uma compreensão do assunto e desenvolvimento de habilidades matemáticas. Quanto melhores alfabetizados matematicamente os alunos forem, melhores condições eles terão para resolver problemas. De acordo com Santos-Wagner (2008), ser alfabetizado matematicamente consiste em:

> . Saber quantificar, medir, operar, coletar, construir, ler, interpretar, questionar os dados e/ou gráficos que existem no mundo.
> . Saber formular conjecturas, testar hipóteses e soluções, argumentar matematicamente. Enfim preparar-se para ser um resolvedor de problemas na vida, preparando-se para enfrentar os desafios e as incertezas do futuro. Na verdade, a escola precisa preparar um cidadão para a vida atual e para as incertezas e mudanças constantes e aceleradas dos tempos futuros (SANTOS-WAGNER, 2008, p. 44).

A coleção de livros de Dante (2016) pode ser um dos recursos utilizados pelo professor para alfabetizar matematicamente seus alunos. Porém é preciso que o docente não apenas tenha acesso ao livro do ano em que leciona, mas o professor também precisa e deve conhecer todos os livros da coleção didática. O docente precisa ter uma visão completa de toda a coleção, pois só assim ele ou ela poderá fazer articulações entre conceitos matemáticos e selecionar problemas com a mesma estrutura que favoreçam aos alunos fazer conjecturas, testar hipóteses e formular generalizações. O professor deve partir das situações mais simples às mais complexas. Entendemos que as condições de trabalho do professor, nem sempre são favoráveis para que haja esta articulação tão desejada. Falta tempo para a formação em serviço e ausência de espaços de diálogos nas escolas entre professores de diferentes anos escolares e níveis de ensino. Defendemos que é necessário repensar o sistema educacional atual para a construção de uma escola possibilitadora de formação professores no ambiente de trabalho e que propicie novas aprendizagens aos docentes. Vejamos, no exemplo a seguir, uma tarefa que possibilita fazer conjecturas, testar hipóteses e formular generalizações.

Figura 49 – Problema de pintura com a ideia de número cromático



Fonte: (DANTE, 2016, p.42, 5.º ano, Livro do aluno)

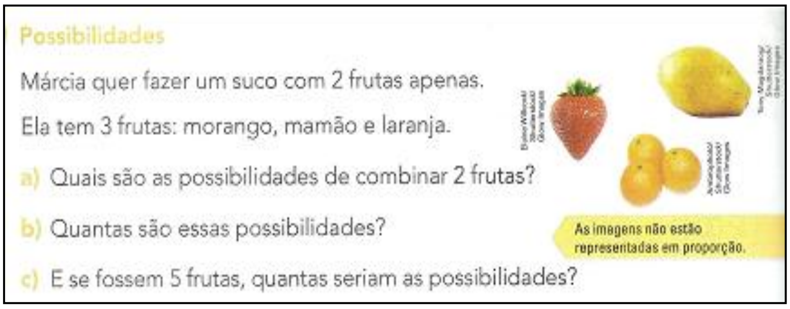
Essa atividade está inserida na unidade de geometria e envolve a alocação ordenada de cores em espaços distintos com repetição de cores, desde que regiões planas vizinhas não tenham a mesma coloração. Além disso, pede-se a menor quantidade de cores possíveis, o que traz ideias iniciais de otimização. Ao trabalharmos com um problema que envolve o raciocínio combinatório, não podemos prender-nos ao simples fato de a amostra ser ou não ordenada. Defendemos, a partir de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), que é necessário pensar também nos tipos de agrupamentos possíveis, na natureza dos objetos a agrupar, na quantidade dos objetos em relação ao conjunto universo e nas restrições, entre outras características presentes no enunciado.

Com esse olhar diferenciado, o professor pode reestruturar a tarefa para fazer questionamentos que contribuam para que os alunos compreendessem o problema e usar a(s) técnica(s) ou a(s) estratégia(s) mais adequada(s). Para isso, o professor precisa conhecer a estrutura do problema e o livro utilizado, além de planejar atentamente as atividades, de maneira a não ficar preso à sequência do livro, para que esse material o auxilie nos processos de ensino, aprendizagem e avaliação (SANTOS, 1997). Estas observações nos levaram a algumas reflexões e aprendizados que comentaremos na seção a seguir.

6.4 Reflexões e comentários do pesquisador

De modo geral, a coleção aborda questões que envolvem diferentes conceitos de contagem e utiliza contextos variados. Comparando com os problemas da combinatória antiga e moderna, vemos que trazem quadrado mágico, combinação, permutação, arranjo, partição, produto cartesiano, palíndromos, número cromático, princípio aditivo e princípio multiplicativo. Há tarefas que aparecem apenas em um dos livros, como números palíndromos. Isso aparece apenas no livro do quarto ano, mas não é abordado em capítulos ou livros anteriores ou posteriores da coleção. Notamos que alguns problemas poderiam ser transferidos para outras unidades ou capítulos, devido ao contexto em que aparecem. Vejamos o exemplo a seguir.

Figura 50 – Problema do suco com frutas



Possibilidades

Márcia quer fazer um suco com 2 frutas apenas.

Ela tem 3 frutas: morango, mamão e laranja.

a) Quais são as possibilidades de combinar 2 frutas?

b) Quantas são essas possibilidades?

c) E se fossem 5 frutas, quantas seriam as possibilidades?

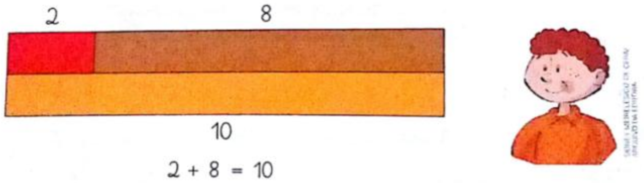
As imagens não estão representadas em proporção.

Fonte: (DANTE, 2016, p. 78, 4.º ano, Livro do aluno)

Esse problema aparece na unidade Medida de Tempo, do livro do quarto ano, que está incluso no eixo Grandezas e Medidas, mas poderia ser explorado melhor em Números e Operações. Com base em reflexões sobre nossa pesquisa, no intuito de auxiliar os alunos no processo de construção do raciocínio combinatório, desenvolvemos perguntas intermediárias e ideias que nos auxiliaram em nossa pesquisa de campo desde a escolha das tarefas até a aplicação das mesmas com os participantes do nosso estudo. Com base nas observações apresentadas, evidenciamos que, para realizar o desenvolvimento do raciocínio combinatório, é preciso:

1. Trabalhar com tarefas que possuem a mesma estrutura, ou seja, tarefas que solicitam o mesmo tipo de resposta em termos de contagem, enumeração, classificação, existência ou otimização. Além disso, verificar se enunciado aborda agrupamentos ordenados ou não ordenados, com revezamento ou sem revezamento, com repetição ou não de elementos. Se os elementos são de mesma natureza (pessoas, objetos, cores etc.) e se são iguais ou distintos. Também verificar se possuem a mesma ordem de grandeza, se pode ser aplicado o mesmo tipo de estratégia de resolução, se possuem os mesmos parâmetros ou critérios semelhantes. Outro ponto importante que destacamos em relação aos problemas com a mesma estrutura, refere-se existência ou não de etapas de escolhas ou de ordenações sucessivas de elementos. Se explicita ou não os invariantes combinatórios. Vejamos no exemplo a seguir, uma tarefa matemática de adição que envolve a ideia de partição, solicita algumas enumerações como resposta e explicita por meio de desenho e cálculo uma das possíveis soluções.

Figura 51 – Problema que envolve o raciocínio combinatório envolvendo adição


Explorar e descobrir

JOÃO DESCOBRIU UMA MANEIRA DE OBTER 10 JUNTANDO DUAS BARRINHAS COLORIDAS. VEJA COMO ELE FEZ E A ADIÇÃO QUE ELE INDICOU.

JUNTE-SE A UM COLEGA, USEM AS BARRINHAS COLORIDAS E DESCUBRAM OUTRAS TRÊS POSSIBILIDADES DE OBTER 10. INDIQUEM AS ADIÇÕES CORRESPONDENTES.

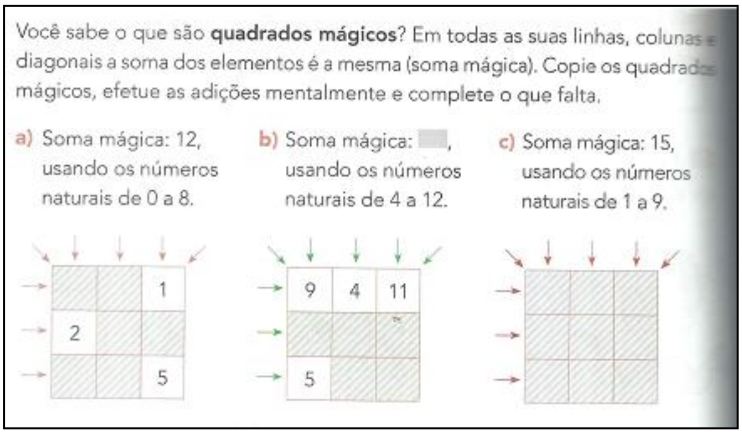
___ + ___ = 10 ___ + ___ = 10 ___ + ___ = 10

Fonte: (DANTE, 2016, p. 134, 1.º ano, Livro do aluno)

2. Explorar tarefas que envolvem o raciocínio combinatório em que os alunos evidenciem que dominam conceitos matemáticos já estudados. Nesse exemplo anterior com o problema das barrinhas exige que os alunos explicitem propriedades comutativas da adição, inclusão, composição e decomposição de números, ou ainda a propriedade do elemento neutro da adição.

3. Desenvolver tarefas que envolvem o raciocínio combinatório e que estimulem os alunos a desenvolverem o pensamento algébrico. No problema das barrinhas e no problema dos quadrados mágicos, podem-se construir processos de intervenção em que os alunos desenvolvam a ideia de variável e incógnita.

Figura 52 – Problemas do quadrado mágico



Fonte: (DANTE, 2016, p. 126, 4.º ano, Livro do aluno)

Quando inserimos números no quadrado mágico e damos o valor da soma mágica, trabalhamos com a ideia de incógnita. Observe o quadrado mágico coma soma 12. Nele já temos os valores 1 e 5 na mesma coluna. Seria como se resolvêssemos a equação $1 + x + 5 = 12$. Neste caso, há um único valor natural de zero a oito. No quadrado mágico com a soma 15, não foi dado nenhum valor nas casas. Estamos procurando valores de 1 a 9, tais que $x + y + z = 15$. Portanto, trabalhar com problemas mais simples que contêm variáveis e incógnitas pode auxiliar na resolução de atividades envolvendo raciocínio combinatório.

4. Ver se a escrita em língua portuguesa está de acordo com o que se pretende alcançar na linguagem matemática. Vejamos o exemplo a seguir: “Gabriela ganhou um porta-jóias com três lugares. Ela possui um anel, um colar e um par de brincos para guardar no seu novo porta-jóias. De quantas maneiras diferentes ela poderá organizar suas jóias?” (AZEVEDO, 2013, p. 58). Esse é exemplo de um problema que pode gerar diferentes interpretações. Sendo assim,

> […] o professor deve se colocar no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que *poderia ter ocorrido ao próprio estudante* (POLYA, 1995/1945, p. 1, grifo do autor).

No problema do porta-jóias, pode-se pensar em agrupar os objetos em um único lugar, agrupar dois objetos em um mesmo local e o terceiro em outro, ou ainda cada um dos objetos em locais diferentes. Considerando todas essas possibilidades, o total de maneiras diferentes de organizar as jóias é 27. Portanto, a lógica da escrita na língua materna tem de ser clara quanto ao que, de fato, se pretende com a aplicação de um problema matemático.

5. Firmar um acordo que estimule os alunos a pensar além de seus gostos, preferências, aspectos culturais e sociais. Quando não consideramos esses aspectos, podemos obter resultados não esperados. O aluno, por exemplo, pode omitir determinadas possibilidades por recusar alguma delas, devido a questões culturais, sociais ou religiosas, entre outras. Considere o seguinte problema: Com as cores verde, azul, amarelo e roxo, de quantos modos diferentes João pode pintar as quatro paredes de seu quarto?

Suponhamos que João não tenha preferência pela cor roxa, e por isso, não analise as possibilidades de pintura das paredes com essa cor, pois as suas preferências influenciam na resposta, ou seja, seus gostos e emoções interferem no raciocínio combinatório necessário para encontrar todas as possibilidades. Daí a necessidade de dialogar e construir intervenções que auxiliem os alunos a desenvolverem um raciocínio combinatório sistemático que vai além de suas preferências e aspectos culturais para solucionar problemas matemáticos.

6. Graduar a dificuldade: ir dos problemas mais simples para os mais complexos, pois isto pode colaborar com a ampliação de ideias intuitivas no processo de resolução. Se compararmos o problema das barrinhas cuja soma dá o total dez, verificamos que ele é mais simples em comparação com o problema dos quadrados mágicos, pois envolve um número menor de parcelas e de restrições, uma vez que nos quadrados mágicos, os critérios estabelecidos precisam atender ao mesmo resultado nas linhas, colunas e das diagonais.

7. Despertar no aluno a necessidade de ler atentamente e identificar o que se pede no problema (enumerar, contar, classificar, otimizar, verificar a existência de uma determinada possibilidade ou o tipo de estratégia solicitada). Na figura 55 temos o exemplo de um problema que solicita a contagem, a identificação da operação matemática e as enumerações possíveis.

Figura 53 – Problema da gincana da escola

2 Na gincana da escola, a equipe azul é formada por Raul, Lucas, Paulo, Maria, Carla e Ana. Quantas duplas com um menino e uma menina podem ser formadas nessa equipe? Indique a operação que permite chegar a essa resposta. Depois, indique as duplas para conferir.

Fonte: (DANTE, 2016, p. 139, 4.º ano, Livro do aluno)

Podemos observar que se não chamarmos a atenção dos alunos para analisar os enunciados dos problemas, os mesmos poderão entender parcialmente o que é solicitado na tarefa. Notamos que este problema é do tipo complexo, pois exige que os alunos tenham várias habilidades já desenvolvidas para resolvê-lo. Eles precisam saber o que é uma dupla e compreender agrupamentos não ordenados. Também precisam saber associar os procedimentos de agrupamento com uma operação matemática adequada e saberem enumerar sistematicamente para garantir que encontrem todas as possibilidades. Além disso, devem prestar atenção na restrição estabelecida, pois os agrupamentos devem ser feitos combinando menino com menina.

8. Usar diferentes representações e estratégias de apresentação do problema e de sua resolução. Sobre esse aspecto, Santos-Wagner (2008) dá as seguintes orientações:

> a) Trabalhar com problemas mais simples; b) usar números mais simples; c) procurar regularidades; d) fazer desenhos, esquemas ou diagramas para entender e resolver a atividade; e) organizar os dados do problema e construir uma tabela com os mesmos; f) trabalhar de trás para frente; g) dar palpites para resolver a situação, etc. Aqui a preocupação do professor é em explorar com os alunos as estratégias gerais e as estratégias de apoio. A outra preocupação do professor é em explorar e trabalhar com as quatro fases de resolução de problemas segundo Polya, que são: leitura e compreensão do problema; planejamento e implementação de ações para resolver o problema; tentativas de resolução segundo os planos identificados; verificação da solução e análise da solução. Ou seja, o professor procura no ensino em matemática sobre resolução de problemas incentivar os alunos a aprenderem: (i) as várias estratégias de resolução de problemas; (ii) as quatro fases de Polya; e (iii)

> discutirem sobre como resolveram os problemas (SANTOS-WAGNER, 2008, p.59).

No problema das barrinhas com soma total igual a dez, ao mesmo tempo em que é apresentada uma das possibilidades com a representação das barrinhas, também é explorado o cálculo aritmético das parcelas. Isso contribui para que os alunos ampliem suas ideias intuitivas secundárias para resolver problemas matemáticos.

9. Que os alunos saibam as operações e propriedades fundamentais da aritmética, da álgebra e da geometria presentes na estrutura de resolução do problema. Se observarmos o problema do quadrado mágico, notamos que é necessário que o aluno domine a operação de adição e saibam identificar e construir regularidades a partir de propriedades da adição e de rotações e translações para construir outros quadrados mágicos com os mesmos valores dos parâmetros estabelecidos (soma mágica).

10. Trabalhar a compreensão dos enunciados do problema. É imprescindível que os alunos compreendam o significado das palavras que compõem os enunciados matemáticos, pois isso pode interferir na resolução do problema criando alguma barreira epistemológica que os impeçam de chegar às soluções esperadas. Por exemplo, no problema do quadrado mágico, se os estudantes não souberem o que são as diagonais do quadrado mágico, eles poderão escrever somas com os totais solicitados nas linhas e nas colunas exceto nas diagonais. Portanto a compreensão dos termos dos enunciados é essencial no processo de resolução de problemas.

11. Consolidar a aprendizagem de conceitos matemáticos, pedindo que os alunos elaborem problemas e a eles respondam. Em seguida, solicitar que algum colega da classe resolva o problema. Por fim, o próprio aluno que elaborou o problema faz a correção, explicando o processo de resolução. Embora esta tarefa de elaborar um problema não seja uma tarefa fácil, ela possibilita que o professor perceba como seus alunos pensam. Ademais, possibilita que o aluno reflita sobre seu próprio conhecimento e permite que o professor faça as intervenções necessárias para a construção dos conceitos combinatórios implícito nos enunciados e discuta estratégias de resolução.

Essas são algumas observações que julgamos necessárias para compreender e resolver problemas que envolvem o raciocínio combinatório. Partindo dos pressupostos teóricos sobre raciocínio combinatório (PESSOA; BORBA, 2009, 2010; BORBA, 2010, 2013; MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991; BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996; ROA, 2000), verificamos a necessidade de elaborar questionamentos que possibilitem chamar a atenção dos alunos para os parâmetros estabelecidos nos problemas, para a natureza dos elementos, e para os princípios de ordenação dentre outros aspectos. Dos pressupostos teóricos de resolução de problemas (ALLEVATO, 2014; D'AMBROSIO, 2017; ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, 2011; POLYA, 1995/1945; SANTOS, 1997; SANTOS-WAGNER, 2008) notamos que é imprescindível realizar questionamentos intermediários que auxiliem na compreensão dos enunciados, na construção de ideias de resolução e sistematização das mesmas no processo de resolução. Estas observações sobre os pressupostos teóricos e nossa experiência de professor pesquisador em consonância com o campo experiencial (ROMBERG, 1992; STEFFE; THOMPSON, 2000), os estudos exploratórios e os estudos com grupo de pesquisa, nos forneceram elementos para trabalhar na tese. Todos esses elementos citados nos auxiliaram a traçar alguns caminhos que percorremos até chegarmos na análise do livro didático, na escolha de tarefas e no desenvolvimento do experimento de ensino.

Figura 54 – Caminhos percorridos pelo pesquisador antes, durante e após a análise da coleção de livros didáticos

1) Estudos sobre conceitos de combinatória;
2) Estudos sobre estratégias de resolução de problemas em combinatória;
3) Busca e análise de tarefas matemáticas que envolvem o raciocínio combinatório;
4) Classificação dos problemas quanto ao Modelo Combinatório Implícito ou Regra da Soma ou do Produto;
5) Análise do processo de ordenação;
6) Análise da natureza dos elementos;
7) Análise dos tipos de agrupamentos;
8) Análise do que se pede no problema;
9) Análise das operações, técnicas ou estratégias de resolução;
10) Seleção de problemas;
11) Conhecimentos prévios;
12) Obstáculos;
13) Conhecimento dos sujeitos;
14) Adaptação do problema;
15) Organização do espaço;
16) Tempo de execução;
17) Estratégia de entendimento;
18) Compreensão do problema;
19) Observações e pequenas intervenções;
20) Apresentação das respostas dos alunos;
21) Discussão das soluções;
22) Conclusão do resultado correto;
23) Apresentação formal;
24) Verificação de aprendizagem;
25) Consolidação

Fonte: Elaborado pelo pesquisador

Estas ideias de trabalho, os caminhos percorridos ao longo de nossa pesquisa e a fundamentação teórica, nos auxiliaram a pensar em questionamentos intermediários para a elaboração de tarefas para aplicar com os participantes da pesquisa e para prever intervenções necessárias. Trazemos na subseção a seguir alguns destes questionamentos usados em nosso planejamento.

6.4.1 Questionamentos intermediários elaborados pelo pesquisador

Apresentamos, no exemplo, tarefa da pintura da casa, que era uma das tarefas que estava presente no livro didático e que foi utilizada em dois momentos da nossa pesquisa, no estudo exploratório e no estudo final. Esta tarefa aplicada em diferentes momentos da pesquisa, associada com nossos estudos da história da combinatória integrada com outros conteúdos, as orientações dos documentos curriculares como PCN (BRASIL, 1997) e BNCC (BRASIL, 2017) e do modelo combinatório implícito foi produtiva e nos provocou a pensar e refletir. Assim, nos possibilitou desenvolver algumas ideias e reflexões de como fazer perguntas intermediárias, ao resolver um problema que envolve o raciocínio combinatório com base nos questionamentos: 1) O que necessito saber?; 2) O que preciso fazer?; 3) Como posso fazer? Estes três questionamentos nos ajudaram a planejar a tarefa e a analisar as respostas dos alunos, pois são questionamentos que foram construídos com o intuito de estimular os alunos a pensarem sobre o enunciado do problema.

Figura 55 – Pintura da casa

Mário vai pintar a casinha usando as cores amarelo, verde e marrom, de modo que o telhado tenha uma cor, a cor da parede outra e a porta outra. Uma das possibilidades está desenhada abaixo. Quantas possibilidades são no total?

Fonte: (DANTE, 2016, p. 221, 3.º ano, Livro do aluno)

1. O que necessito saber?

- ✓ **Perguntas para auxiliar na identificação do modelo combinatório implícito:**

O problema quer que eu coloque objetos na casa?
O problema quer que eu retire objetos da casa?
O problema quer que eu monte a casa?
O problema quer que eu desmonte a casa?
O problema quer que eu ordene a forma de pintar a casa?
O problema quer que eu pinte a casa toda?
O problema quer que eu pinte só uma parte da casa?

- ✓ **Perguntas para identificar se a amostra é ordenada ou não ordenada, isto é, se a ordem dos elementos gera novas possibilidades:**

Quantas cores têm para pintar a casa?
Quantas cores devem ser utilizadas?
A casa pode ser pintada só com duas cores?
Ter a casa com o telhado pintado de marrom, a parede de amarelo e a porta de verde é diferente de pintar a parede de verde, o telhado de marrom e a porta de amarelo?
O problema quer que eu pinte a parede de verde, a porta de preto e o telhado de cinza?

- ✓ **Perguntas para auxiliar na natureza dos objetos e das casas:**

As cores são iguais?
As cores são todas diferentes?
Posso repetir alguma cor?
Depois que eu usei uma cor para pintar o telhado, eu posso escolher quantas cores para pintar a parede?
Eu já pintei o telhado de marrom. Com as cores que restam, como podemos pensar para pintar a parede e a porta?

2) O que preciso fazer?

- **Perguntas para auxiliar a verificar as condições de agrupamento:**

Posso pintar a parede com duas cores ao mesmo tempo?
Posso pintar a porta com duas cores ao mesmo tempo?
Posso pintar a parede com três cores ao mesmo tempo?

- **Perguntas para auxiliar no que se pede:**

O problema quer saber quais são as maneiras de pintar?
O problema quer saber qual é a cor que faz a pintura da casa ficar mais econômica?

O problema quer saber quantas são as maneiras de pintar?

3. Como posso fazer?

Após a discussão com os alunos sobre as estratégias e soluções, vamos desenvolver com os alunos outras estratégias ou técnicas de resolução.

a) Fixar um local para pintar, escolher a cor e variar as demais.
b) Usar uma tabela.
c) Usar o diagrama de Árbol.
d) Usar o princípio multiplicativo.
e) Generalizar para uma padronização.
f) Usar alguma operação combinatória já estudada.

Estas questões intermediárias nos fizeram pensar que depois de desenvolver outras tarefas semelhantes a esta, seria importante trabalhar outros momentos com os alunos em que eles elaborassem perguntas, respondessem e aplicassem com os próprios colegas. Assim, seria possível verificar a aprendizagem dos alunos no desenvolvimento do raciocínio combinatório por meio da resolução de problemas. Outras reflexões decorrentes das ideias de trabalho com questões intermediárias, e que já discutimos, é o tempo para organizar o ambiente escolar e executar a atividade e o processo de orientação na enumeração e contagem das possibilidades a partir dos diálogos construídos durante a aula. Acreditamos que os três questionamentos que citamos antes podem ajudar os professores. Ou seja, vale a pena quando se planeja aulas e tarefas de aula que o professor se questione: 1) O que necessito saber?; 2) O que preciso fazer?; 3 Como posso fazer? Acreditamos que esses questionamentos norteadores de planejamento e intervenção pedagógica sejam úteis. Assim, esses questionamentos podem auxiliar os professores no planejamento de tarefas de aula com os alunos, na análise antecipada de possíveis respostas dos estudantes sobre a compreensão dos enunciados e de conceitos matemáticos, e na reelaboração dos experimentos de ensino.

Seguindo estes procedimentos podemos analisar com os estudantes as características dos problemas, suas formas de resolução, os tipos de relação entre os elementos dos conjuntos (bijetividade, sobrejetividade, injetividade, qualquer) e as operações de resolução. A análise do livro sobre os tipos de problemas e estratégias de resolução estimuladas por Dante (2016), bem como as ideias de trabalho com tarefas que exploram o raciocínio combinatório nos auxiliaram na escolha de tarefas para desenvolvermos com os participantes da pesquisa. Estas tarefas, análise e resultados serão apresentados no próximo capítulo.

7 CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo iniciamos com a fase exploratória da tese, especificamente no que se refere aos estudos exploratórios realizados com uma turma de quinto ano de uma escola pública do município da Serra[93]. Tais estudos foram feitos em duas etapas, uma em 17 de março de 2016 e a outra em 18 de novembro de 2016. Em seguida, apresentamos a discussão e análise dos dados produzidos durante a segunda fase de nossa pesquisa – o experimento de ensino. Esse experimento de ensino foi o estudo definitivo e foi realizado em 2018, com uma turma de quinto ano, da professora Bernadete, de uma escola pública da cidade de Vitória.

7.1. O PROBLEMA DAS SENHAS: a gênese dos estudos exploratórios

Em 2016, atuava como professor regente de uma turma do quinto ano em uma Escola Municipal de Ensino Fundamental (EMEF) da Serra, no turno vespertino. Como era início do ano letivo e tínhamos o interesse em investigar o raciocínio combinatório dos alunos de quinto ano, apresentamos aos alunos o problema das senhas. Um de nossos objetivos era verificar se os alunos tinham algum conhecimento intuitivo de ordenação com elementos distintos envolvendo o raciocínio combinatório, já que ainda não havíamos ensinado esse conteúdo em sala de aula.

A atividade realizada com o jogo Senha foi adaptada da pesquisa de Carvalho[94] (2009) com alunos do oitavo ano do ensino fundamental de um colégio militar de Porto Alegre. Também nos reportamos a Santos (1997), Santos-Wagner (2008) e Polya (1995). Os três últimos autores aqui citados sugerem-nos a trabalhar com problemas, do mais simples para alguns mais complexos. Assim, planejamos a atividade do jogo Senha em três etapas: a primeira foi trabalhada com duas cores distintas; a segunda, com três cores distintas; e a terceira, com quatro cores distintas. Fizemos isso inicialmente por concordar com Polya, quando diz que “utilizamos o problema auxiliar, menos

[93] Em 2016, os estudos exploratórios foram realizados na turma em que eu era o professor.
[94] CARVALHO, C. V. **O uso de jogos na resolução de problemas de contagem**: um estudo de caso em uma turma do 8º ano do colégio militar de Porto Alegre. Porto Alegre: UFRGS, 2009. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Instituto de Matemática e Estatística - Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática, 2009.

difícil, menos ambicioso, particular, como um intermediário na resolução do problema original, mais difícil, mais ambicioso, genérico” (POLYA, 1995, p. 113). Ademais, a tarefa da forma que foi usada por Carvalho (2009) seria complexa demais para alunos do quinto ano.

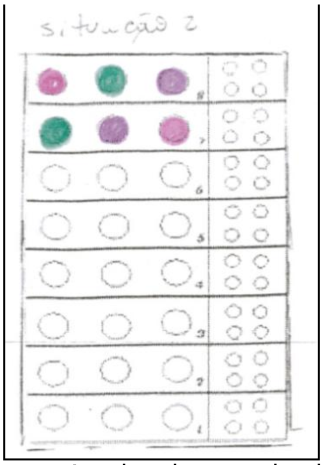
A atividade foi desenvolvida em 17 de março de 2016 com uma turma de quinto ano composta por 25 alunos, de uma escola pública do município da Serra. A realização da atividade aconteceu após uma aula de Artes, com os alunos organizados em duplas, com duração de total de 100 minutos. Entregamos a folha com a atividade e orientamos quanto à sua realização. Informamos que um aluno deveria criar uma senha e o outro colega teria de descobri-la, pintando no tabuleiro a senha que pensava que o desafiador havia criado.

Figura 56 – Tabuleiro do jogo Senha usado na etapa 1

Fonte: Arquivo do pesquisador

Os alunos resolveram a tarefa de construção de senhas com duas cores, com três cores e com quatro cores. Na figura a seguir, apresentamos a solução da aluna Branquinha[95] que encontrou na segunda tentativa a senha de três cores pensada por seu colega.

Figura 57 – Tentativas da aluna Branquinha para descobrir a senha



Fonte: Arquivo do pesquisador

[95] Os nomes dos alunos que aparecem neste trabalho são todos fictícios, para preservar a identidade dos estudantes.

Observamos, pela pintura da senha, que a aluna compreendeu que não poderia fazer a repetição das cores e que a mesma trocou a posição das três cores na segunda tentativa. Isto foi um dos fatos que nos evidenciou a necessidade de explorar sistematicamente com alunos critérios de enumerações (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996; ROA, 2000) em nosso estudo final. Entendemos que ao fazermos perguntas intermediárias, antes e ao longo da fase de resolução de problemas (SANTOS, 1997), poderemos auxiliar os alunos a compreender a situação e, assim, ordenar elementos sem repetição. Assim, cremos que o professor deve dialogar com seus alunos antes de iniciarem uma tarefa matemática em que tenham que resolver um problema e também durante a fase de resolução.

Nesse sentido, Santos (1997) e Santos-Wagner (2008) orientam que o aluno/a aluna precisa e deve compreender o enunciado do problema como uma das condições necessárias antes de o aluno/a aluna passar para a etapa de resolução. Percebemos depois de trabalhar com o jogo senha que não entregar aos alunos o material com as regras escritas não foi um fator facilitador da compreensão, pois nem todos compreenderam corretamente as regras do jogo. Essas informações permitem-nos notar a importância de interagir com os alunos, para verificar se todos entenderam o que o professor solicitou. Nesse sentido, Santos (1997) orienta-nos que devemos fazer perguntas que envolvam exemplo e contraexemplo da situação problema para confirmar se alunos conseguiram compreender o texto (enunciado) verbal ou escrito da tarefa ou se entenderam os desenhos ou figuras usadas na tarefa.

No Quadro 19, apresentamos os questionamentos feitos à turma. Informamos o quantitativo de alunos que participaram das atividades e entregaram a ficha (atividade do jogo senha) e o indicativo de acertos e erros. Ao todo, 24 alunos participaram da atividade, mas apenas 13 alunos devolveram a ficha.

Quadro 19 – Quantitativo de alunos que entregaram o questionário do jogo senha

N.º de alunos que entregaram a ficha	13
Pergunta 1: ***Na situação 1, quantas senhas é possível formar?***	
N.º de acertos	N.º de erros
12	1

<table>
<tr><td colspan="6">Pergunta 2: Na situação 2, quantas senhas é possível formar?</td></tr>
<tr><td colspan="3">N.º de acertos</td><td colspan="3">N.º de erros</td></tr>
<tr><td colspan="3">5</td><td colspan="3">8</td></tr>
<tr><td colspan="6">Pergunta 3: Na situação 3, quantas senhas é possível formar?</td></tr>
<tr><td colspan="2">N.º de acertos</td><td colspan="2">N.º de erros</td><td colspan="2">N.º de alunos que não responderam</td></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td colspan="2">11</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td colspan="6">Pergunta 4: Será que existe uma forma de calcular a quantidade de senhas para cada situação?</td></tr>
<tr><td colspan="2">N.º de alunos que responderam: Sim</td><td colspan="2">N.º de alunos que responderam: Não</td><td colspan="2">N.º de alunos que não responderam</td></tr>
<tr><td colspan="2">11</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td colspan="6">Pergunta 5: Se você tivesse que escolher três cores de um total de 4 cores, daria para formar quantas senhas?</td></tr>
<tr><td colspan="3">N.º de alunos que não responderam</td><td colspan="3">N.º de erros</td></tr>
<tr><td colspan="3">5</td><td colspan="3">8</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Pelo fato de os alunos terem levado as atividades para casa, 11 deles não devolveram a folha de respostas. Aprendemos que, no processo de produção/coleta de dados, seja por entrevista, aplicação de jogos, seja por resolução de problemas, que vários fatores interferem. Assim, aprendemos que precisamos adequar a tarefa com o tempo de execução e a disponibilidade para sua realização. Ademais, concordamos com Santos (1997) que o professor precisa planejar atentamente suas aulas e pensar antecipadamente em estratégias que seus alunos podem usar e saibam, em acertos e erros que possam ocorrer e no tempo necessário para alunos que resolvem pela primeira vez tal tarefa.

A análise das respostas da atividade do jogo senha com essa turma permitiu refletirmos a respeito das suas dificuldades em resolver problemas e enumerar as possibilidades com duas, três ou quatro cores. Na situação 1 (formação de senha com duas cores), o número de acertos foi maior. Acreditamos que esse quantitativo de acertos esteja relacionado com o fato de ser um problema mais simples (SANTOS, 1997), ou seja, com o número de possibilidades menor em relação às senhas com três e com quatro cores (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996). Com apenas duas possibilidades, é mais fácil enumerar e depois contar as possibilidades.

Na situação 2 (formação de senha com três cores), o número de erros e acertos quase se equiparou. Acreditamos que alguns alunos não conseguiram perceber as relações entre os elementos no processo de ordenação por ainda não terem desenvolvido o raciocínio de enumeração sistemática. Isso dificultou a contagem do total de possibilidades (BORBA, 2010; ROA, 2000; BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996).

Outro fator que pode ter colaborado para o erro dos alunos, ao contarem possibilidades, é que, devido à formação de senha com três cores, o problema é mais complexo em relação ao da situação 1. Agora os alunos precisam realizar procedimentos de ordenação com mais elementos, ampliando o número de possibilidades (SANTOS, 1997; SANTOS-WAGNER, 2008; POLYA, 1995/1945). Na situação 3 (formação de senha com quatro cores), o número de erros sobre o total de possibilidades foi ainda maior. O problema é mais complexo ainda, pois o número de possibilidades aumentou e os alunos parecem ainda não ter critérios de contagem que relacionem a ordenação com a multiplicação (ou talvez não tenham estratégias de enumeração sistemática que possibilitem chegar ao resultado correto).

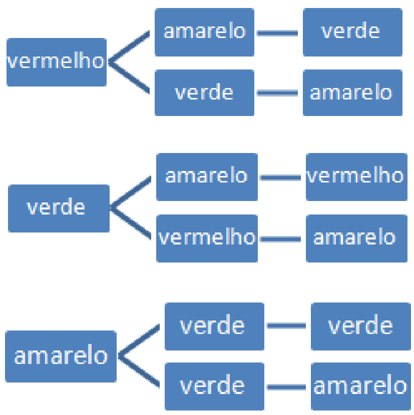
Borba (2010, 2013) e Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) orientam que estratégias de enumeração e contagem podem ser trabalhadas com crianças desde os anos iniciais. Notamos que a tarefa do jogo senha tem potencial para ser explorada por meio da resolução de problemas, trabalhando com situações correlatas e partindo de um caso mais simples para um mais complexo (POLYA, 1995/1945; SANTOS, 1997; SANTOS-WAGNER, 2008).

Em relação ao objetivo proposto para a tarefa - *verificar se os alunos tinham algum conhecimento intuitivo de ordenação de elementos* - foi possível observar alguns pontos. A atividade do jogo senha mostrou que precisamos propor tarefas variadas e usar material didático cuja representação auxilie na compreensão dos problemas. Percebemos a partir do jogo senha a necessidade de estimular os alunos a utilizar estratégias diferenciadas de resolução: uso de desenhos, listagens, árvore de possibilidades e algoritmos, entre outras. Caso o professor auxilie e estimule seus alunos com outras estratégias neste jogo senha e em outras tarefas semelhantes, ele vai poder constatar ou não se seus alunos adquiriram algum conhecimento e se desenvolveram raciocínio intuitivo de enumeração. Notamos que, quando os alunos buscaram encontrar a resposta às perguntas, fizeram relação com a quantidade de cores ou de linhas que havia no material para a execução do jogo. Isso nos possibilita dizer que, de modo geral, os alunos ainda não possuíam raciocínio combinatório com alguma sistematização, e usavam sim sugestões que identificavam no jogo (DEWEY, 1979) baseadas em elementos visíveis (quantidade de linhas do material do jogo, quantidade de cores).

Em geral, os alunos não fizeram associações com as restrições de ordenação dos elementos, a saber: (1) todos os elementos do conjunto serão usados cada um apenas uma vez (para os casos sem repetição); (2) a ordem dos elementos gera novas possibilidades (BORBA, 2013). Ou seja: para o caso da senha com duas cores (vermelha e verde) teríamos como possibilidades as seguintes senhas: (vermelho, verde) e (verde e vermelho). Deveríamos ter feito um retorno dessa atividade na aula seguinte, solicitando que as duplas explicassem como pensaram e realizaram as tarefas.

Constatamos que nem todos os alunos possuíam raciocínio combinatório de enumeração sistemática (ROA, 2000). Se já tivessem o raciocínio formado para enumerar as possibilidades de senhas, eles poderiam ter feito a listagem de uma senha com três cores: (vermelha, verde, amarela), (vermelha, amarela, verde), (amarela, verde, vermelha), (amarela, vermelha, verde), (verde, amarela, vermelha) e (verde, vermelha, amarela). Ademais, teriam descoberto que o total de senhas com três cores seria seis. Outra estratégia para explorar e trabalhar em aula com a turma toda poderia ser a construção de uma árvore de possibilidades, conforme a representada a seguir.

Figura 58 – Árvore de possibilidades para senhas com 3 cores distintas



Fonte: Elaborada pelos pesquisadores

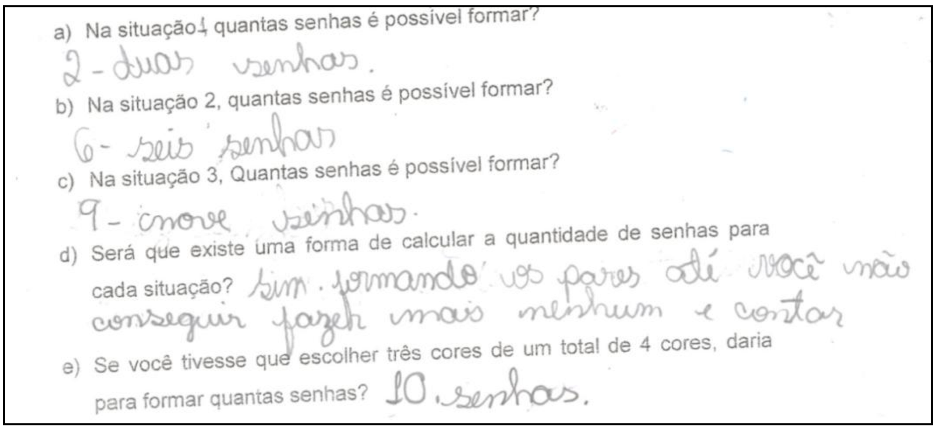
O caso de seleção envolvendo ordenação sem repetição de elementos é um ponto crucial. Se não for bem trabalhado, poderá levar a diferentes interpretações do que se pede. Isso pode ocorrer tanto no que diz respeito a enumerar possibilidades ou dizer quantas são. Em geral os alunos responderam sim no que diz respeito ao fato de calcular a quantidade de senhas, mas não souberam dizer como isso era possível. Em problemas que envolvem o raciocínio combinatório, algumas perguntas são essenciais para que alunos compreendam o processo de construção das operações combinatórias e pensem no que precisam fazer. Por exemplo, fazer perguntas como “Quantas são as possibilidades?” ou “Quais são as possibilidades?” Todavia, é preciso dialogar com os alunos e trabalhar a construção das relações que existem e diferenciam tarefas distintas, como a de enumerar possibilidades e a de contá-las de forma sistematizada (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO, FERNANDEZ, 1991; BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996; BORBA, 2010).

No jogo senha também ficou evidente que tais perguntas são importantes e devemos trabalhá-las com os alunos, fazendo as intervenções necessárias. Santos (1997), Santos-Wagner (2008) e Onuchic e Allevato (2011) orientam como trabalhar e explorar com as etapas de resolução de problemas. Essas autoras, assim como Polya (1995/1945), destacam que é importante ler e compreender o problema, conversar e dialogar acerca do mesmo de várias formas, pensar em formas de como resolver, e verificar no fim se de fato o problema foi resolvido. Todas essas etapas são necessárias para que alunos resolvam problemas com segurança e se sintam motivados para resolver e formular outros problemas. Assim, a partir do jogo senha trabalhado com alunos do 5º ano em 2016, aprendemos que é necessário dialogar sobre o jogo e as regras dadas a fim de que os alunos compreendam conceitos e desenvolvam estratégias de resolução em situações que envolvem o raciocínio combinatório.

Ao avaliarmos a tarefa do jogo senha, verificamos que: a) o tabuleiro do jogo precisa ser modificado e adaptado para contribuir para a aprendizagem do raciocínio combinatório de alunos do quinto ano e o material não deve induzir a resposta dos alunos sobre o total de possibilidades (como nos casos que envolvem ordenação de todos os elementos distintos de um conjunto, chamado de permutação simples); b) é preciso apresentar diferentes situações-problema de forma gradual, conforme o nível de dificuldade das regras, da complexidade dos conceitos envolvidos e do tamanho da amostra de resultados possíveis; c) há necessidade de repensar a organização da atividade e das regras do jogo; d) precisamos rever indagações simples e diretas, tal como fizemos ao pedir "Quantas senhas é possível formar?". Esse questionamento não foi suficiente para os alunos associarem corretamente a quantidade de senhas que encontravam ou registravam ao total de possibilidades.

No caso da enumeração, os alunos, durante o jogo, conseguiram formar senhas alternando as cores conforme as regras estabelecidas. Contudo, ao questionarmos posteriormente quantas senhas eram possíveis formar com determinada quantidade de cores, os alunos tiveram dificuldade em responder corretamente. A seguir, trazemos comentários de algumas soluções dos alunos. Na figura 59, apresentamos as respostas da aluna Juliana Cardoso. Ela respondeu corretamente às questões das letras (a) (com senha de duas cores) e (b) (com senha de três cores); no entanto, errou as respostas das letras (c) (com senha de quatro cores) e (d) (escolhendo três cores de um total de quatro cores). Na letra (d), ela nos dá alguma pista de como pode ter feito para encontrar o total de senhas com duas cores na letra (a) e de três cores na letra (b) mediante a construção de pares ordenados (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991, BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996). A resposta da aluna na letra (d) já mostrou um princípio de desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Figura 59 – Resposta da aluna Juliana Cardoso


a) Na situação 1 quantas senhas é possível formar?
2 - duas senhas.
b) Na situação 2, quantas senhas é possível formar?
6 - seis senhas
c) Na situação 3, Quantas senhas é possível formar?
9 - nove senhas.
d) Será que existe uma forma de calcular a quantidade de senhas para cada situação? Sim. formando os pares até você não conseguir fazer mais nenhum e contar
e) Se você tivesse que escolher três cores de um total de 4 cores, daria para formar quantas senhas? 10 senhas.

Fonte: Arquivo do pesquisador

Sendo assim, parece que a aluna ainda não desenvolveu o raciocínio de enumeração sistemática para problemas mais complexos, em que a amostra de possibilidades é maior que seis. Isso sugeriu que, em nosso estudo de investigação para a finalização desta tese, deveríamos começar com situações cuja a amostra não tivesse um número de possibilidades muito acima de seis. Assim, pensamos que apenas depois de realizarmos os processos de intervenção pedagógica, poderemos ampliar o tamanho da amostra de possibilidades.

Para o experimento de ensino conduzido em 2018, como estudo final desta tese, destacamos que foi necessário escutar os alunos para saber qual procedimento (ou estratégia) eles utilizaram e porque pensaram de determinada maneira. Portanto, defendemos, entre outros aspectos, entender que pensamentos o entrevistado desenvolveu: se foi apenas uma sugestão ou mesmo se foi influenciado por algum problema correlato (POLYA, 1995/1945).

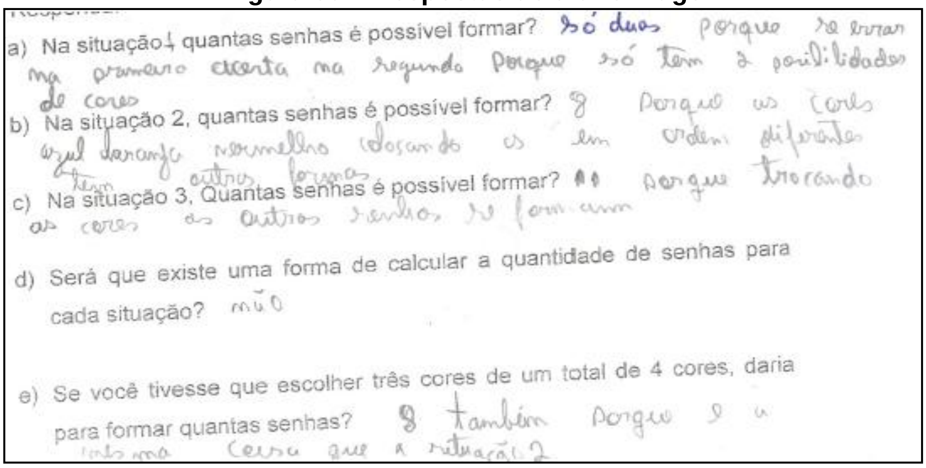
Nas letras (c) e (e), as respostas da aluna Juliana não estão corretas. Julgar apenas pelo resultado não é suficiente para dizer se um aluno entendeu, ou não, a questão. Precisamos investigar qual é o raciocínio do aluno para obter tal resposta. Isso nos permitiu refletir sobre os tipos de perguntas que fazemos em nossas provas e existem nos livros didáticos ou mesmo em nossas explicações durante a aula. Constatamos que muitos questionamentos feitos em aulas, em tarefas para casa e em avaliações não estão apropriados para alunos nessa faixa etária e ano escolar.

Parece que, de forma intuitiva e sem exibir enumeração sistemática, a aluna Juliana Cardoso construiu mentalmente todas as senhas, para depois contar quantas seriam. Tal observação orienta-nos que, ao invés de apenas fazer perguntas, tais como "Quantas são as possibilidades?", precisamos, em primeiro lugar, estimular os alunos a exibir as possibilidades perguntando: "quais são?" Esta última pergunta pode permitir aos alunos dos anos iniciais explicitarem o que dominam sobre o raciocínio combinatório em termos de enumerações, contagens e estratégias de resolução (BORBA, 2010).

Na letra (e), a aluna Juliana Cardoso deveria fazer a escolha de três cores de um total de quatro possibilidades e, em seguida, mudá-las de posição para formar as senhas usando apenas três. Esse tipo de pergunta é mais complexo, pois, além de ter que ordenar as cores, a aluna teria de verificar os casos com repetição e os casos sem repetição de cores. Pareceu-nos que a aluna não tinha experiências com tarefas complexas como esta em que teria que pensar em diferentes casos.

Aprendemos que é necessário reelaborar o problema com perguntas que permitam aos alunos pensar e desenvolver o raciocínio combinatório. Os que nunca trabalharam com esse tipo de questão dificilmente terão condições de resolvê-la sem a intervenção do professor. Apresentamos, a seguir, a resposta do aluno Tiago. Além de responder qual era o total de senhas, o aluno Tiago justificou cada uma das respostas. Analisando as respostas dele para as letras (a), (b), e (c), temos indícios de que sua estratégia para encontrar as senhas foi trocar as cores de posição. Porém, ainda não conseguia relacionar o que tinha feito com uma forma padrão de multiplicação que o auxiliasse para efetuar a contagem da quantidade de senhas.

Figura 60 – Respostas do aluno Tiago


a) Na situação 1 quantas senhas é possível formar? Só duas porque se errar na primeira acerta na segunda porque só tem 2 possibilidades de cores

b) Na situação 2, quantas senhas é possível formar? 8 Porque as cores azul laranja vermelho colocando as em ordem diferentes tem outras formas

c) Na situação 3, Quantas senhas é possível formar? [illegible] porque trocando as cores das outras senhas se formam

d) Será que existe uma forma de calcular a quantidade de senhas para cada situação? não

e) Se você tivesse que escolher três cores de um total de 4 cores, daria para formar quantas senhas? 8 também porque é a mesma coisa que a situação 2

Fonte: Arquivo do pesquisador

Ao compararmos a resposta da letra (b) com a da letra (e), verificamos que Tiago considerou as respostas em que a quantidade de senhas é a mesma, já que, em ambas as perguntas, usariam apenas três cores. Isso reforça nossa crítica às pesquisas que em alguns casos apenas quantificam quantos acertos e erros ocorreram em determinado problema ou tarefa sem analisarem os motivos tanto de acertos quanto de erros e sem analisarem as questões usadas na pesquisa. Ademais também temos críticas ao que é proposto em livros didáticos: apresentam vários problemas envolvendo o raciocínio combinatório com estruturas diferentes sem fazer perguntas intermediárias que auxiliem alunos a compreender o problema e pensar em como resolver.

Identificamos também que, em geral, alguns alunos, ao responderem à quantidade de senhas que era possível formar, procuravam associar a resposta à quantidade de linhas das fichas. Alguns tentavam associar a resposta à quantidade de cores utilizadas. Estas e outras análises levaram-nos a inferir que há necessidade de investigar situações semelhantes com problemas correlatos, conforme Polya (1995/1945) sugeria. Também devemos propor que a turma analise suas respostas nas fichas em uma ou duas aulas posteriores com o professor. É importante desenvolver a habilidade dos alunos em criar problemas semelhantes que envolvem o mesmo tipo de raciocínio combinatório com quantidades menores de elementos e depois com uma quantidade um pouco maior de elementos. Além disso, discutir com eles o que os problemas têm de semelhante, na tentativa de encontrar regularidades ou ver o que tem de diferente entre os problemas, em busca da verificação de aprendizagem de conceitos matemáticos (LESTER, 1987; POLYA 1995/1945; SANTOS, 1997; SANTOS-WAGNER, 2008; ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Aprendemos que é preciso repensar o tempo da atividade, a forma de correção e de comentários com os alunos durante a tarefa realizada e depois dela. Além disso, devemos modificar nossos questionamentos na tarefa, para favorecer o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Todas essas considerações serviram de base para pensarmos, planejarmos e refletirmos sobre o que inserir em nossa ficha de investigação final para o experimento de ensino conduzido em 2018.

7.2. Estudo exploratório II – fichas

Para desenvolvermos esse segundo estudo exploratório, retornamos à turma do quinto ano do ensino fundamental na qual já havíamos trabalhado com o jogo senha. Mas agora voltamos em final de 2016, não mais como professor regente, e sim como professor pesquisador. Isso aconteceu em virtude da aprovação em um concurso de uma instituição de ensino federal e do afastamento da escola municipal da Serra-ES onde iniciamos os estudos exploratórios. Na segunda ocasião, solicitamos à professora regente da turma um momento para aplicar uma atividade que denominamos “Fichas de Problemas Combinatórios”. Nesta fase do estudo, estávamos motivados pelo ensino de combinatório desvelado no mapeamento que realizamos e pelos estudos teóricos sobre o tema já mencionados em capítulos anteriores deste texto.

Entregamos cada problema em uma ficha e solicitamos que os alunos realizassem uma leitura individual e depois fizemos uma leitura coletiva. Perguntamos se haviam compreendido o problema e, após a resolução individual de cada um, recolhíamos a ficha com o problema seguido de sua resolução. Nesse momento, nosso objetivo era verificar como os alunos do quinto ano interpretariam e resolveriam certos problemas de combinatória sem intervenção do professor. Para isso, selecionamos seis problemas que envolviam amostras ordenadas com elementos distintos para serem resolvidos pelos 25 alunos da turma do quinto ano. Isso se realizou em 18 de novembro de 2016. O critério para a escolha dos problemas foi a ordenação e o fato de possuir algum raciocínio semelhante ao problema do jogo Senha. Os problemas foram os seguintes:

1) Mário vai pintar a casinha usando as cores amarela, verde e marrom, de modo que o telhado tenha uma cor, a cor da parede outra e a porta outra. Uma das possibilidades está desenhada abaixo. Quantas possibilidades são no total? (Adaptado de DANTE, 2016, p. 221, Livro do terceiro ano).

2) Quais são as maneiras diferentes que três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco? (VEGA, 2014, p. 61).

3) Organize todos os agrupamentos possíveis com os três elementos disponíveis (Adaptado de HOMA; GROENWALD, 2013, p. 71).

4) Usando três cores diferentes, qual é o maior número de maneiras com que podemos colorir uma bandeira, de forma que as áreas vizinhas tenham cores diferentes? (Adaptado de TEIXEIRA, 2012, p. 450).

5) Gabriela ganhou um porta-joias com três lugares. Ela possui um anel, um colar e uma pulseira para guardar no seu novo porta-joias. De quantas maneiras diferentes ela poderá organizar suas joias? (AZEVEDO, 2013, p. 58).

6) Laura esqueceu sua senha de acesso ao computador. Na tentativa de descobri-la, lembrou-se das seguintes informações: é um número de três algarismos distintos, formado pelo 2, pelo 5 e pelo 7. Identifique o número máximo de tentativas que Laura deverá fazer para encontrar a senha (Adaptado de ALMEIDA, 2010, p. 149).

Os problemas (1), (2), (3) e (6) envolvem alocação bijetiva e ordenada com elementos distintos em casas distintas, envolvem a mesma estrutura matemática, podem ser resolvidos pelo princípio multiplicativo e trazem a ideia de permutação. As perguntas (1) e (2) exploram, de forma explícita, a enumeração, enquanto as demais a exploram de forma implícita. Solicitam as maneiras de organizar os elementos, ou seja, não necessariamente é preciso dizer quais são as diferentes formas de organizar os elementos. Por isso, as questões (1), (4), (5) e (6) exploram a contagem direta das possibilidades.

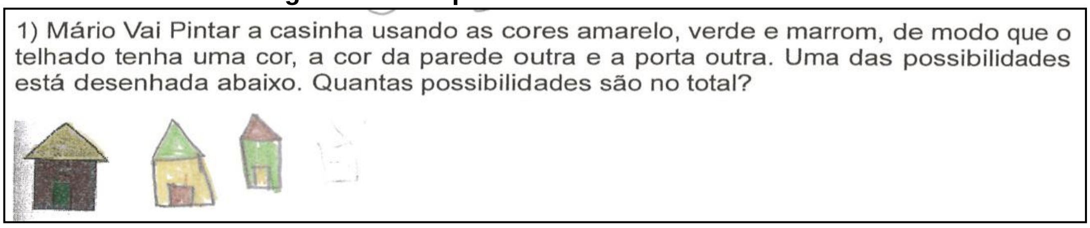
O problema (4) também é uma alocação ordenada com elementos distintos em casas distintas, mas é injetora, ou seja, é possível utilizar uma quantidade de cores menor que a quantidade de áreas (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996). Trata-se de um problema um pouco mais complexo, pois existe a restrição de as áreas vizinhas não poderem ter a mesma cor. Além disso, o aluno teria de perceber a possibilidade de repetir uma das cores já utilizadas, desde que a área a pintar não fosse adjacente.

Já no problema (5), temos algumas possibilidades: (1) se o aluno interpretasse o problema entendendo ser necessário colocar apenas um objeto por lugar, o tipo de alocação ordenada seria bijetiva; (2) porém, se interpretasse como possiblidade de colocar mais de um objeto por lugar e deixar um dos espaços do porta-joias vazio, o tipo de alocação seria um qualquer. A primeira interpretação estaria relacionada à permutação de elementos, enquanto a segunda envolveria a ideia de combinação completa. Também convém mencionar que embora os problemas envolvam ordenação, suas estruturas são diferentes do ponto de vista do raciocínio combinatório. Isso implica que as dificuldades de interpretação e de escolhas de estratégias adequadas também podem variar (POLYA, 1995/1945; SANTOS, 1997). Neste estudo exploratório, investigamos:

(1) a forma como interpretaram o problema (se atendiam às restrições estabelecidas no problema e ao que era solicitado, e também se alocavam de acordo com a estrutura do problema).

Em relação a esses aspectos, temos que no problema da pintura da casa, 18 alunos exibiram, de forma explícita, a quantidade de possibilidades para pintar a casa (escreveram o total de possibilidades). Mesmo que a resposta não estivesse correta, os alunos buscavam atender ao que foi solicitado no problema. Outros apenas exibiram os desenhos de algumas possibilidades, como o da aluna Maria Eduarda, conforme se ilustra na figura a seguir.

Figura 61 - Resposta da aluna Maria Eduarda


1) Mário Vai Pintar a casinha usando as cores amarelo, verde e marrom, de modo que o telhado tenha uma cor, a cor da parede outra e a porta outra. Uma das possibilidades está desenhada abaixo. Quantas possibilidades são no total?

Fonte: Arquivo do pesquisador

(2) as estratégias dos alunos, ao resolverem problemas de ordenação que envolviam o raciocínio combinatório, sem intervenção do professor e sem uma aula formal sobre o conteúdo (se desenhavam, se faziam tabela, se faziam listagem, se usavam representações algébricas ou se faziam cálculos). Quanto às estratégias dos alunos, apresentamos no quadro a seguir o quantitativo de alunos de acordo com o uso de estratégias de resolução. Em seguida apresentamos algumas soluções dos alunos.

Quadro 20 – Estratégias adotadas pelos alunos para resolverem os problemas das fichas

Estratégia	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6[96]
Desenho	5	1	13	11	5	1
Listagem	0	10	0	1	4	6
Quadro	0	2	0	0	0	0
Cálculo	0	1	2	2	7	3
Desenho e cálculo	15	0	6	6	3	0
Listagem e cálculo	0	3	0	0	1	6
Listagem, desenho e cálculo	1	0	0	1	0	0
Palpite/ Explicação	0	2	0	0	1	0
Palpite/explicação e cálculo	0	2	0	0	0	0
Palpite/explicação e desenho	0	1	0	0	0	0
Não exibe	1	0	1	1	1	5

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

(3) os tipos de enumerações (sistemática completa, sistemática incompleta, não sistemática completa, não sistemática incompleta).

No caso das enumerações, observamos que os alunos que contaram sem enumerar, calcularam o total de possibilidades de forma intuitiva e não levaram em conta se era possível construir esse total de possibilidades. Os alunos que apenas enumeraram (exibiram algumas possibilidades) sem sistematização também tiveram dificuldades de encontrar o total de possibilidades. No quadro a seguir apresentamos o quantitativo de alunos de acordo com os tipos de enumerações utilizadas por eles.

Quadro 21 – Tipos de enumerações adotadas pelos alunos

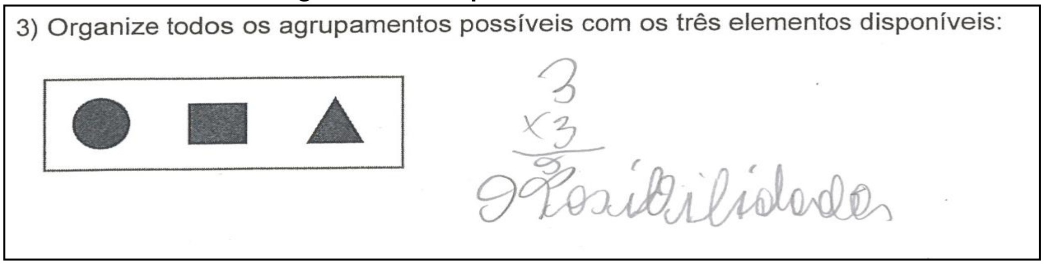
	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6
Sistemática completa	0	1	2	0	0	0
Sistemática incompleta	0	1	1	0	3	0
Não sistemática completa	0	0	1	1	0	5
Não sistemática incompleta	21	17	15	18	10	8
Não usou enumeração	1	3	3	3	9	8

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

96 Um dos alunos não participou da aplicação do problema seis.

Essa relação entre contar e enumerar é imprescindível no trabalho com crianças nessa etapa escolar, para que elas desenvolvam estratégias adequadas e compreendam os conceitos envolvidos no cálculo de possibilidades (BORBA, 2010, BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996). No desenvolvimento do raciocínio combinatório, verificamos a necessidade de os alunos atentarem para o que é solicitado fazer no problema. Vemos a seguir que o aluno Gustavo deveria ter enumerado as possibilidades, mas apenas fez um tipo de contagem.

Figura 62 – Resposta do aluno Gustavo



Fonte: Arquivo do pesquisador

Ao longo da realização das atividades, fomos observando que as respostas de alguns alunos eram baseadas em palpite ou em uma sugestão sem observação mais detalhada. A organização do pensamento nem sempre estava relacionada a conceitos matemáticos já estudados anteriormente para a elaboração do raciocínio. Veja a conversa entre o pesquisador e alguns alunos.

Quadro 22 – Diálogo entre pesquisador e alunos

Pesquisador: Mas quantas casinhas você consegue pintar mudando as cores?

Ana Clara: Muitas.

Pesquisador: Muitas quantas?

Ana Clara: Calma, deixa eu pensar! (*risos*)

No final, Ana Clara dá como resposta 9 possibilidades.

Pesquisador: Quantas você conseguiu encontrar? (*Pergunta a Heitor*)

Heitor: Nove! Porque tem três partes da casa, aí é só multiplicar 3x3 que dá o resultado.

Branquinha: Encontrei nove. Aqui pode ser amarelo, amarelo, amarelo. Aqui pode ser verde, verde e verde. E aqui pode ser marrom, marrom, marrom. Aí deu três cores pra cada (*mostra os desenhos que fez para encontrar os resultados*). Alterando as cores, dá para encontrar nove possibilidades. Por isso 3x3 que dá nove.

Fonte: Arquivo do pesquisador

Observando a fala da aluna Ana Clara, o palpite inicial para o total de possibilidades era “muitos”. Ao ser questionada sobre a quantidade que identificasse esses “muitos”, a aluna teve de reelaborar seu pensamento para encontrar uma lógica que fizesse sentido com os dados do problema. Percebe-se que a aluna Ana Clara, ao ser questionada sobre a sua resposta “muitos”, entrou em uma situação de desconforto do ponto de vista do pensamento. Deixou de fixar as ideias apenas no palpite para começar uma fase de introspecção e buscar uma ideia para direcionar uma solução. Esse desconforto permitiu que a aluna se interessasse em resolver o problema e desenvolver um raciocínio mais razoável para encontrar a solução (POLYA, 1995/1945; NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996; DEWEY, 1979).

Embora não tivessem acertado o total de possibilidades, os alunos Heitor e Branquinha deram apenas palpites sem buscar alguma relação com os dados do problema. Já começaram a estabelecer alguma relação com a ideia de multiplicação aplicada em problemas que envolviam a regra do produto (produto cartesiano). Eles já demonstravam ter uma ideia-guia para chegar à resposta, mas ainda não haviam checado se a ideia de multiplicar 3 x 3 estava coerente com o total de possibilidades. Desenvolver o raciocínio não é só pensar em como fazer, mas é preciso verificar as hipóteses, testá-las e aprender com os sucessos e insucessos (acertos e erros) obtidos no processo de resolução (DEWEY, 1979; POLYA, 1995/1945).

Em síntese, a partir das resoluções e conversas com os alunos, podemos dizer que as estratégias apresentadas para resolver os problemas foram desenho, listagem, quadro, cálculo, desenho e cálculo, listagem e cálculo. Também identificamos alunos que não exibiram nenhuma dessas estratégias, apenas escrevendo o total de possibilidades. Outros não resolveram adequadamente o problema e apresentaram a ideia do que entenderam sobre como deveriam alocar os elementos. Quanto às enumerações, identificamos que usaram enumeração sistemática completa, sistemática incompleta, não sistemática completa e não sistemática incompleta. Também encontramos alunos que não usaram enumerações e apenas escreveram o total de possibilidades que achavam que deveria ser.

Destacamos que a maioria das enumerações eram não sistemáticas e incompletas.

Ao observarmos as respostas dos alunos, verificamos que em geral não realizaram, de forma mais detalhada ou aprofundada, a sugestão de resposta, ou seja, não examinaram os cálculos ou o resultado com o total de enumerações. Uma forma de realizar tal exame seria comparar o total de possibilidades que sugerem ser a resposta com o total de enumerações possíveis de realizar. Isto é essencial no processo de desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Outro detalhe importante é que os alunos não verificaram a hipótese de que a multiplicação a ser feita (3x3) era a correta. Se fosse verificado que as enumerações possíveis não dariam o total nove, isso possibilitaria aos alunos descartar a hipótese de que a multiplicação seria 3x3 e novas conjecturas poderiam ser elaboradas. Desse modo, os alunos poderiam aprender com os erros e acertos, ao resolverem os problemas, e assim desenvolveriam um pensamento reflexivo sobre as ações tomadas no processo de resolução.

De modo geral, os alunos consideraram a restrição de não repetição de objetos e realizaram alocações bijetivas. Subjacentemente às respostas dos alunos, supomos que estava a ideia de agrupamento biunívoco. Esse fato fez-nos repensar nas propostas de ensino de multiplicação com agrupamentos sempre com a mesma quantidade de elementos. Daí a necessidade de trabalharmos um problema com diferentes agrupamentos e com correspondências não biunívocas. E de estarmos conscientes de que alunos de quinto ano têm potencial de explorar tais tarefas, mas que estas envolvem muitos conceitos e ideias matemáticas que alunos de quinto ano ainda nem estudaram e nem foram estimulados a pensar por seus professores deste ano escolar e anos anteriores.

Enfatizamos a necessidade de perguntas bem elaboradas que possibilitem ao professor investigar como o aluno tem pensado para chegar a um determinado resultado (SANTOS-WAGNER, 2008). Chamamos a atenção para o fato de que verificar se está certo ou errado é mais simples do que investigar fatores que têm levado alunos ao erro. Isso, em nossa percepção, seria um aspecto fundamental e nos levaram a pensar nos seguintes questionamentos para o nosso experimento de ensino: Como a pergunta foi elaborada? Como o aluno o compreendeu? Qual o raciocínio combinatório envolvido? Como podem ser resolvidos pela intuição? Como preferências pessoais podem influenciar na resolução? Será que o erro ocorreu no uso de uma estratégia inadequada? De que forma isso pode ser observado?

Quando não dialogamos ou não fazemos perguntas (POLYA, 1995/1945) que favorecem a construção da aprendizagem, estamos apenas reproduzindo a matemática do certo e do errado. Santos (1997) e Santos-Wagner (2008) nos orientam que, quando trabalhamos por meio da resolução de problemas, devemos fazer perguntas que provoquem os alunos não apenas a dar as respostas corretas, mas que os leve a pensar e refletir no que fazem, como fazem e por que resolvem de certa forma um problema. Ademais esses trabalhos citados, o de Polya (1995/1945) e os de Onuchic e Allevato (2011) também nos fazem pensar que devemos fazer perguntas absurdas ou contrárias, para verificar se os alunos entenderam o problema ou se estão prestando atenção na tarefa e no que o professor diz.

Verificamos a necessidade de apresentar contraexemplos de problemas na intenção de garantir que todos os alunos compreendam corretamente as situações. Também existe a necessidade de desenvolver diferentes estratégias com os alunos. No ensino por meio de resolução de problemas, as etapas de apresentação, discussão da resolução e verificação do resultado correto são fundamentais para incentivar os alunos a verificar suas respostas, bem como a refletir se testaram, ou não, todas as possibilidades.

Percebemos que os alunos conseguiram fazer enumerações (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996) intuitivamente, apresentando possibilidades, seja por desenhos, seja por enumeração dos agrupamentos por listagem. Pareceu-nos que a relação entre a multiplicação e a ordenação de possibilidades não é de entendimento imediato para alunos do quinto ano. Isso só vai acontecer quando o professor notar essas variações e se motivar a trabalhar com elas, construindo as relações necessárias. Além disso, pareceu-nos que não houve certa preocupação dos alunos em tentar verificar se as quantidades de possibilidades poderiam ser construídas para conferir a resposta final. Talvez isso não tenha acontecido pelo fato de termos optado por não intervir no seu processo de resolução. Essa atividade permitiu-nos refletir sobre a necessidade de trabalhar a compreensão do problema com os alunos, utilizando recursos variados tais como material manipulativo, pequenas encenações ou ilustrações. Esta última foi a mais evidenciada pelos alunos em suas resoluções.

Do ponto de vista da compreensão de um problema de combinatória, é fundamental fazer perguntas intermediárias sobre os tipos de agrupamentos, a natureza dos objetos, as relações entre eles e os espaços em que se quer alocá-los. É necessário trabalhar de forma cautelosa, construindo o significado das relações entre a quantidade de possibilidades (contagem) e a exibição dessas possibilidades (enumeração), de modo que possamos auxiliar alunos no desenvolvimento de estratégias e/ou operações adequadas para o tipo de situação. Este segundo estudo exploratório contribuiu no direcionamento de intervenções ante a resolução de problemas de raciocínio combinatório envolvendo critérios de enumeração, contagem, escolha de tipos de problemas, construção de relação entre a multiplicação e o número de possibilidades (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996; ROA, 2000).

O jogo senha e as fichas de problemas permitiram-nos verificar, com mais detalhes, as formas de os alunos organizarem seu raciocínio para resolver os problemas. Os resultados, além de terem fortalecido nossa ideia de trabalhar com resolução de problemas, conforme orientam Polya (1995/1945), Santos (1997) e Santos-Wagner (2008), mostraram a necessidade de tomar cuidados em relação aos obstáculos didáticos, psicológicos e ontogenéticos (BROSSEAU, 1976) durante a realização do experimento de ensino que será apresentado na próxima seção.

7.3 Experimento de Ensino

Nesta seção, dedicamo-nos à descrição das atividades realizadas em 2018 com os alunos no experimento de ensino e à análise de dados das estratégias intuitivas dos alunos, ou seja, suas respostas às referidas atividades. Sem necessariamente advirem de uma instrução sistemática como aquelas sistematizadas do ponto de vista dos estudos da combinatória, partimos das tarefas de 15 alunos, das entrevistas e de nossas observações. O tratamento dado aos primeiros resultados visou obter significações que permitissem analisar, categorizar, interpretar e fazer inferências sobre o material. Conforme descrevemos no capítulo 3, nosso trabalho foi desenvolvido sob a perspectiva da resolução de problemas com base em Polya (1995/1945), Lester (1987), Santos (1997), Santos-Wagner (2008), Hoffman e Santos-Wagner (2011) e Onuchic e Allevato (2004, 2011), D'Ambrosio (2017) e de possíveis obstáculos com base em Brosseau (1976). Nossa base teórica em combinatória e raciocínio combinatório consistiu nos estudos de Borba (2010, 2013), Pessoa e Borba (2009, 2010) e nos trabalhos de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) e Roa (2000), Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991), Bachx, Poppe, Tavares (1975) e Hazzan (1993).

Aplicamos três tarefas de adição (com a ideia de partição) e três tarefas de multiplicação (com a ideia de alocação e princípio multiplicativo) a uma turma de 28 alunos do quinto ano de uma escola pública do município de Vitória, no Espírito Santo. Depois solicitamos que os alunos elaborassem e resolvessem uma tarefa de adição e uma de multiplicação semelhante às que havíamos trabalhado. Entretanto, apresentamos dados relativos a apenas 15 alunos com idades de 10 e 11 anos (11 meninas e 4 meninos), cujos pais ou responsáveis obtivemos autorização para utilizar os dados nesta pesquisa. Ressaltamos que os nomes dos sujeitos utilizados neste trabalho são fictícios.

A produção dos dados ocorreu entre março e junho de 2018. Antes de iniciar a pesquisa com os alunos, participei de cinco aulas da professora regente. Nesta etapa inicial desejava observar a turma, a escola e conhecer o trabalho da professora e o perfil da turma. A escolha da escola e da professora ocorreu por sugestão da orientadora, uma vez que a docente faz parte do Grupo de Estudo em Educação Matemática do Espírito Santo (GEEM-ES). Além disso, eu também participei durante os anos de doutorado deste grupo e as outras professoras participantes gostavam de trocar ideias comigo sobre experiências anteriores que tive quando atuei como professor de anos iniciais.

Durante o período em que acompanhamos a professora, pudemos verificar que ela trabalhava a matemática por meio da resolução de problemas. A docente questionava os alunos sobre o que entendiam, discutia as respostas dadas e integrava a disciplina com outras, como Geografia, História, Ciências e Língua Portuguesa. Ela usava mapas em suas aulas, material visual e manipulativo, instigando os alunos a pesquisar temas estudados em sala e também os estimulava a elaborar e resolver problemas matemáticos. A turma era participativa, embora houvesse alguns alunos que se demonstravam desatentos[97] ou inquietos.

Depois de termos conhecido a escola, a professora e a turma com a qual realizamos a pesquisa, solicitamos autorização à docente, à direção da escola e aos pais (ou responsáveis) para realizar os trabalhos. Começamos a nossa pesquisa com problemas de adição e depois desenvolvemos tarefas com problemas de multiplicação. Ambos os casos envolveram o raciocínio combinatório.

7.3.1 Tarefas de matemática com problemas de adição que envolvem o raciocínio combinatório

Após os nossos estudos sobre autores de combinatória, pesquisas na área e estudos exploratórios, verificamos que o tema explorado envolve outros conhecimentos matemáticos necessários à compreensão e resolução das situações propostas. Diante disso, para as três tarefas de adição que envolvem o raciocínio combinatório, tivemos sempre em mente que os conceitos de número, inclusão de número, composição de número, decomposição de números e conservação de número eram necessários à compreensão e resolução das tarefas. Além disso, trabalhamos a operação de adição com diferentes totais e o fracionamento de uma quantidade em duas parcelas (também chamado por autores de combinatória como bipartições de um número), que são as somas de duas parcelas que dão um determinado total. Para ensinar, o professor precisa seguir algumas regras, das quais mencionamos duas: “[...]. A primeira regra de ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda, é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar” (POLYA, 1995/1945, p. 133).

Tínhamos consciência da necessidade de explorar com os alunos as propriedades numéricas da comutatividade, elemento neutro e fechamento da adição e reconhecimento de agrupamentos não ordenados, ou seja, quando a troca entre determinados elementos não gera novas possibilidades. Todos esses conhecimentos eram necessários para auxiliar os alunos a desenvolver

[97] Aqui não estamos falando de desatenção ou inquietação patológica, mas daquela exigida ao aluno, ao realizar as tarefas escolares.

estratégias de enumeração e contagem de possibilidades. Isso porque, durante todo o processo de avaliação, o professor deve desenvolver a “Auto-reflexão sobre seu conhecimento matemático e sobre seu conhecimento pedagógico de matemática [...]” (SANTOS, 1997, p.12). Concordamos com essa autora e cremos que é imprescindível que o professor pesquisador reflita sobre o seu conhecimento matemático e conhecimento pedagógico de matemática e que saiba explorar um conteúdo de diferentes formas. Além disso, o professor deve ter conhecimentos históricos sobre este conteúdo matemático e ter em mente os possíveis obstáculos epistemológicos de sua aquisição. A seguir apresentamos a forma como introduzimos as tarefas e nossa análise geral sobre as soluções de 15 alunos.

7.3.2 Tarefa 1 – Problema do dominó

7.3.2.1 – Jogo do dominó

Essa tarefa foi realizada 26 de março de 2018. Inicialmente conversamos com os alunos para saber se conheciam o jogo dominó e se já haviam, ou não, jogado o mesmo. Tratamos da quantidade de peças e das regras do jogo. Em seguida, solicitamos que os alunos formassem quatro grupos com cinco pessoas e um grupo com seis. Essa foi a primeira atividade em grupo realizada com a turma em 2018. Após a organização dos grupos, distribuímos o jogo de dominó. Em seguida, pedimos que observassem as peças e verificassem quantas faces possuíam cada peça e o que tinha desenhado nas faces.

Perguntamos-lhes com que sólido geométrico cada peça de dominó parecia. Alguns alunos disseram que as peças pareciam com retângulo e outros disseram que pareciam com um paralelepípedo. Aproveitamos o momento e falamos brevemente sobre a forma geométrica da peça de dominó, além da diferença entre um retângulo e um paralelepípedo. Essa conexão da tarefa com outros tópicos da matemática vai ao encontro do que verificamos em nossa investigação sobre a história da combinatória e da análise de livros didáticos: é possível explorar esse conteúdo integrando com a própria matemática e outras áreas de conhecimento. Além disso, Kapur (1970) e Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) dizem que os estudos de combinatória possibilitam a integração com outros tópicos da matemática e com outras áreas de conhecimento.

Acompanhamos as jogadas dos grupos e demos tempo para que os alunos fizessem apenas uma jogada, mas, enquanto jogavam, percebemos a necessidade de sugerir que fizessem mais duas jogadas. Um grupo de cinco alunos não sabia como organizar as peças sobre a mesa e outro teve dificuldade de saber o que fazer quando o jogo estava fechado. Ou seja, eles não sabiam o que fazer quando as duas pontas do jogo têm o mesmo número e não há mais peças com esse número para continuar a jogada.

Grando (2000) orienta que, ao trabalhar um jogo com o propósito de ensino, a etapa da familiarização com o material é necessária. Nesse sentido, observamos que seriam necessários outros momentos de jogo, para discutir regras, estratégias e relações de respeito entre os participantes. Porém, as jogadas foram suficientes para atingir o nosso objetivo inicial, que era a familiarização com as peças do jogo para realizar a tarefa 1. Usamos 15 minutos para realizar o jogo e mais oito minutos para reorganizar a turma.

Figura 63 – Alunos jogando dominó

Fonte: Arquivo do pesquisador

Após o término do jogo, conversamos com os alunos durante cinco minutos sobre alguns contratos didáticos quebrados, como o desrespeito ao colega e não saber perder em um jogo, além do esforço no desempenho das tarefas. Essas atitudes de retomada dos contratos estabelecidos com os alunos fazem parte do processo de avaliação. É um momento em que o professor necessita “Tomar decisões sobre o clima da sala de aula [...]” (SANTOS, 1997, p.12), no sentido de motivar os alunos, estimulá-los a participar, ter interesse e empenho nas atividades propostas pelo professor. Uma estratégia válida no desenvolvimento de tarefas coletivas, conforme orienta Santos (1997), é trabalhar com equipes fixas e móveis, de modo que os alunos construam conhecimentos e atitudes, tais como o auxílio e a cooperação entre e com os demais componentes do grupo.

Assim como nos estudos exploratórios que desenvolvemos, verificamos a necessidade de trabalhar a diversidade dos alunos no que diz respeito aos conteúdos atitudinais no âmbito das relações interpessoais (ZABALA, 1998). Segundo Andrade (2017),

> [...] os trabalhos [...] na temática da Exploração, Resolução, e Proposição de problema apontam evidências de que o trabalho de Exploração, Resolução, Proposição, Codificação e Descodificação de Problemas (ERPCDP) na sala de Aula e na Formação do Professor, não é um trabalho para aventureiros e seu processo como um todo não é uma atividade simples, mas complexa, multicontextual, que compreende múltiplas dimensões e contextos, que depende de vários fatores, como o contexto do aluno real que temos e não o aluno idealizado, sonhado, imaginado; o contexto da matemática; o contexto da escola e da sala de aula que temos como um todo os contextos de nós professores, dentre outros. O que pontua, então, que tal proposta, a todo instante, precisa ser construída e reconstruída, pensada e repensada no movimento dinâmico desses vários contextos, tendo como foco central de ação a sala de aula de matemática, pensada em toda sua multicontextualidade (ANDRADE, 2017, p. 390-391).

As situações ocorridas durante o jogo e as observadas em sala de aula ao longo de nosso acompanhamento da turma mostraram como esses aspectos citados no trecho anterior eram necessárias. Verificamos que para obter êxito nas construções coletivas sobre conhecimentos matemáticos (no nosso caso específico a combinatória), era necessário conhecer os alunos, respeitando suas limitações e construções sociais. Isso nos auxiliou a fazer intervenções pedagógicas que ajudaram a compreender e considerar a multicontextualidade da sala de aula em que realizamos nossa pesquisa.

Ao longo de todo processo de pesquisa, fomos construindo relações de respeito ao pensamento dos alunos e reavaliando nossas ações como professor pesquisador, na forma de abordar o conteúdo e lidar com cada criança em nossa proposição e resolução das tarefas. Nas próximas seções e subseções, apresentamos a tarefa do dominó, a das barrinhas e a dos dados, respectivamente, bem como a análise das soluções dos alunos. No decorrer do texto, apresentamos intervenções que colaboraram para alcançar os objetivos estabelecidos em cada tarefa e o objetivo geral de nossa pesquisa[98].

7.3.2.2 Aplicação do problema do dominó

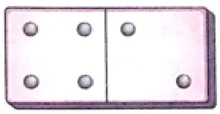
Depois de revermos contratos didáticos com os alunos, iniciamos a aplicação da tarefa 1. Entregamos uma folha para cada aluno resolver individualmente e certificamo-nos de que todos tivessem preenchido o cabeçalho. Utilizamos algumas estratégias de apoio sugeridas por Santos (1997) e Santos-Wagner (2008), solicitando que os alunos fizessem uma leitura silenciosa, grifassem ou circulassem alguma palavra que não conheciam e que nos perguntassem algo se tivessem dúvidas.

Figura 64 – Tarefa do problema do dominó

Data: 26/03/2018

Tarefa 1: Leia com atenção a questão abaixo e responda ao que se pede:

Na peça de dominó abaixo temos 4 pontos e 2 pontos. O total é 6 pontos.



a) Esta é uma peça com o total de 6 pontos. Desenhe todas as outras peças de dominó em que o total de pontos também seja 6.

b) Se juntarmos a peça de dominó que já desenhei com aquelas outras soluções que você desenhou agora, quantas peças de dominó com o total de 6 pontos teremos ao todo?

Objetivo geral: Investigar o raciocínio combinatório intuitivo dos alunos, ao resolverem um problema de adição que envolve o raciocínio combinatório sem uma aula formal de combinatória.

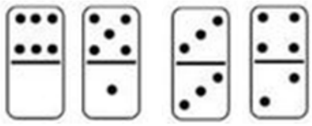
Objetivo específico: Construir com os alunos procedimentos que auxiliem no processo de enumeração sistemática e contagem em problemas de adição que envolve o raciocínio combinatório em modelos de alocação e partição a partir das propriedades comutativa e do elemento neutro da adição.

Fonte: (Adaptado de DANTE, 2016, p.111, 1.º ano, Livro do professor)

[98] Investigar o desenvolvimento do raciocínio combinatório em alunos de quinto ano ao resolverem e elaborarem problemas de adição com a ideia de partição e problemas de multiplicação com a ideia de alocação e do princípio multiplicativo.

Essa é uma tarefa de adição que envolve o raciocínio combinatório com a ideia de partição de dois números naturais cuja soma é seis, conforme já descrevemos detalhadamente no capítulo 6. Nesse problema, esperávamos que os alunos identificassem a existência de quatro peças de dominó com o total seis, de acordo com a ilustração da figura a seguir.

Figura 65 – Imagens de peças de dominó com o total seis



Fonte: https://br.depositphotos.com/64902345/stock-illustration-domino-set.html

Devido à restrição de o jogo de dominó não possuir peças repetidas, os alunos não poderiam desenhar peças com as mesmas configurações, ou seja, desenhar peças simétricas e as considerar como possibilidades distintas. Para que isso não ocorresse, foi necessário brincar com o jogo, conforme já descrevemos anteriormente.

Sob a perspectiva da resolução de problemas, solicitamos que a aluna Manuela fizesse a leitura em voz alta da tarefa 1. Enquanto lia, havia um aluno que estava resolvendo a questão. Pedimos que a turma não resolvesse o problema ainda, pois queríamos discutir a tarefa para favorecer a compreensão do que estava solicitado. De acordo com Polya (1995/1945), a leitura e a compreensão do problema são umas das etapas importantes no processo de resolução de problemas. Além disso, segundo esse autor, "[...] quando um estudante comete erros realmente tolos [...]" no processo de resolução de problema matemático, uma das causas pode ser o fato de que esse aluno "[...] nem mesmo deseja entendê-lo adequadamente e, por isso, não chegou sequer a compreendê-lo [...]" (POLYA, 1995/1945, p. 14). Assim, ao buscar auxiliar os estudantes na compreensão da tarefa, utilizamos algumas estratégias orientadas por Santos (1997), fazendo perguntas para que verificassem se haviam compreendido o problema.

Pesquisador: É para desenhar peças do dominó com 7 pontos?
Turma: Não.
Pesquisador: E com 10 pontos?

Os alunos responderam que era com seis pontos. Ao questionar os alunos com perguntas sobre o total de pontos com o total sete e com total dez tínhamos propósitos pensados antes. Desejávamos, além de investigar se estavam compreendendo o que era solicitado na tarefa, chamar a atenção da turma para a informação dada no texto da tarefa. Assim, nossa ação de intervenção também teve o intuito de chamar a atenção dos sujeitos para que identificassem o valor do parâmetro ou do critério estabelecido no problema. Concordamos com os pesquisadores espanhóis Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), quando argumentam que identificar este parâmetro ou critério consiste em uma das etapas do processo de resolução de problemas combinatórios. Além da questão dos parâmetros, fizemos questionamentos aos alunos para atentarem para as casas (espaços) distintas do dominó e identificarem os objetos a serem desenhados (os pontos).

Pesquisador: Pode desenhar estrelas no dominó?
Turma: Não.
Pesquisador: Posso desenhar nas duas partes do dominó?
Turma: Sim.

Entre as etapas do raciocínio combinatório nos modelos de alocação e partição, segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), os alunos precisam distinguir: a) se os objetos são iguais; b) se as casas onde se vai alocar são distintas ou não; c) se há permissão de mais de um objeto por casa; d) se permite que alguma casa fique vazia. Discutimos sobre o problema e sua compreensão e, depois que ouvimos alguns alunos, pedimos que a aluna Manuela continuasse com a leitura da questão da letra b. Durante a nossa conversa, o aluno Lipinho disse não ter entendido o problema. Solicitamos, então, que ele mesmo fizesse a leitura e sugerimos que outros alunos explicassem o que haviam entendido.

Manuela: Tem que pegar a peça que já está desenhada.
Pérola: Você vai pegar essa peça aqui e, com as outras que desenhou aí, vai contar quantas peças você consegue desenhar com seis pontos e escrever o total.

Depois que ouvimos alguns alunos, pedimos que resolvessem a tarefa. Fomos andando pela sala e verificando como resolviam. À medida que os alunos terminavam, recolhíamos as fichas da tarefa 1, concluída em torno de sete minutos. Pedimos que os alunos aguardassem os outros colegas terminarem. Investigamos as estratégias intuitivas dos alunos ao resolverem o problema do dominó envolvendo o raciocínio combinatório sem a intervenção do professor, ou seja, sem uma aula formal de combinatória. Fizemos isso porque de acordo com Fischbein (1987), a intuição é importante para o processo de desenvolvimento cognitivo. Para Fischbein

> Intuições são parte integrante do comportamento inteligente. Elas são aquisições cognitivas que intervêm diretamente nas ações práticas ou mentais, em virtude de suas características de imediatismo, globalidade, capacidade extrapolativa, estruturalidade e auto-evidência.
> *Intuições primárias* são aquisições cognitivas que são derivadas da experiência do indivíduo, sem a necessidade de qualquer instrução sistemática.
> *Intuições secundárias* são aquisições que possuem todas as características de intuições, mas eles são formados por meio da educação científica, principalmente na escola.
> As intuições também podem ser classificadas como intuições *afirmativas* ou *antecipatórias*. As intuições afirmativas incorporam o conhecimento do mundo externo que aceitamos como evidente. Intuições antecipatórias são construções mentais que antecipam globalmente a solução de um problema antes que as etapas detalhadas da solução tenham sido encontradas (FISCHBEIN, 1987, p. 117, tradução nossa[99]).

Nossa análise sobre o raciocínio combinatório dos alunos ocorreu com base em nossas leituras de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), Roa (2000), Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991) e Bachx, Poppe e Tavares (1975) e em nossa experiência como professor pesquisador. Elaboramos quadros com as categorias de análise sobre enumeração e contagem. No quadro a seguir, temos as estratégias 1, 2, 3, 4 e 7, que foram pensadas pelo pesquisador e apareceram nas respostas dos alunos. Já as estratégias 5, 6 e 8 não apareceram nas respostas dos alunos. No que

---

[99] Intuitions are an integral part of intelligent behaviour. They are cognitive acquisitions which intervene directly in practical or mental action, by virtue oftheir characteristic immediacy, globality, extrapolative capacity, structurality, and self-evidentness.
Primary intuitions are cognitive acquisitions which are derived from the experience of the individual, without the need for any systematic instruction.
Secondary intuitions are acquisitions which have all the characteristics of intuitions, but they are formed by scientific education, mainly in school.
Intuitions can also be classified as *affirmatory* or as *anticipatory* intuitions. Affirmatory intuitions embody the knowledge of the external world which we accept as evident. *Anticipatory* intuitions are mental constructs which globally anticipate the solution to a problem before the detailed steps of the solution have been found.

concerne a cada categoria trazemos alguns exemplos de resoluções dos alunos no intuito de exemplificar os tipos de respostas.

Quadro 23 – Categorização das estratégias de resolução para a enumeração na tarefa do dominó com o total seis

	Estratégias de enumeração	Base teórica	Alunos
1	Desenhar todas as peças de dominó com o total seis.	Estudos exploratórios, Batanero, Godino, Navarro-Pelayo (1996) e Roa (2000).	Manuela
2	Desenhar apenas as peças de dominó que estejam faltando com o total seis.	No problema original, espera-se que o aluno desenhe as peças que estão faltando, pois o autor coloca os desenhos de três peças de dominó para o aluno completar o que falta (Dante, 2016).	Athayde, Cláudia Estela, Felipe, Lipinho Malves, Pérola, Sol
3	Desenhar algumas peças com o total seis esquecendo-se de outras possibilidades.	Está relacionada a alguns tipos de erros que alunos podem cometer em problemas de enumeração, ao resolverem tarefas que envolvem o raciocínio combinatório (NAVARRO; BATANERO; GODINO, 1996; BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996).	Flora Gonçalves Moranguinho
4	Desenhar algumas peças com o total seis e repetir peças com a mesma configuração.	Está relacionada a alguns tipos de erros de repetição e de não exibição de todas as possibilidades que alunos podem cometer, ao resolverem problemas que envolvem o raciocínio combinatório (NAVARRO; BATANERO; GODINO, 1996; BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996).	Mel
5	Escrever todas as possíveis somas de duas parcelas com o total seis: 0 + 6, 6 + 0, 5 + 1, 1 + 5, 2 + 4, 4 + 2 e 3 + 3.	Está relacionada às combinações completas e representa todas as soluções inteiras não negativas de duas parcelas de números naturais com o total seis (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991; BACHX; POPPE; TAVARES, 1975).	Nenhum aluno realizou este tipo de solução.
6	Escrever as somas 5 + 1, 1 + 5, 2 + 4, 4 + 2 e 3 + 3 esquecendo-se das somas.	Está relacionada às combinações completas e representa todas as soluções inteiras positivas de duas parcelas de números naturais com o total seis (MORGADO;	Nenhum aluno realizou este tipo de solução.

		CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991; BACHX; POPPE; TAVARES, 1975).	
7	Desenhar peças de dominó que não estejam de acordo com o critério de partição (ou com o parâmetro) estabelecido com o total seis.	Aqui o aluno desenharia peças de dominó com outros totais, cuja soma é diferente de seis; por exemplo, o aluno desenharia a peça de dominó com três pontos e dois pontos, cujo total é igual a cinco (BATANERO; GODINO; NAVARRO–PELAYO, 1996).	Red Bela
8	Não desenhar nenhuma peça (não enumerar).	Neste caso, o aluno não atende ao tipo de solução que é solicitada no problema (BATANERO; GODINO; NAVARRO–PELAYO, 1996).	Nenhum aluno utilizou este tipo de solução.

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Ao observarmos o quadro, notamos que as soluções dos alunos são visuais e não analíticas, ou seja, baseiam-se na representação por meio de desenhos, e não por meio de soluções numéricas ou algébricas. As soluções por meio de “[...] representações visuais são de particular importância na sala de aula de matemática, ajudando alunos a avançar na sua compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos” (VALE, 2017, p.142). As soluções intuitivas visuais possibilitam fazer intervenções que permitem a construção de estratégias sistematizadas de enumeração, dando significado aos procedimentos adotados, e possibilitam o envolvimento dos alunos no diálogo sobre o problema abordado.

Desse modo, constatamos que as respostas intuitivas dos alunos foram baseadas em desenhos para representar as possibilidades das peças de dominó com o total seis. De acordo com Vale (2017), uma das fontes das nossas intuições são as experiências repetidas de objetos físicos. Nesse sentido, verificamos que a brincadeira com o jogo de dominó contribuiu para o fortalecimento das ideias intuitivas dos alunos, para representar as peças de dominó com o total seis. Além de investigarmos as soluções intuitivas dos alunos sobre a enumeração, investigamos a maneira como esses alunos fizeram a contagem das possibilidades, conforme pode ser visto no quadro a seguir.

Quadro 24– Estratégias de contagem dos alunos no problema do dominó

	Estratégias de contagem	Característica	Alunos
1	Contar todas as peças que desenhou com o total seis.	Esta contagem está relacionada à solução em que o aluno desenha todas as possibilidades previstas na enumeração.	Manuela
2	Contar as peças de dominó que desenhou, incluindo a que estava no problema.	Esta solução está relacionada ao tipo de estratégia em que o aluno já considera a possibilidade dada como uma das soluções, escrevendo outras distintas.	Athayde Bela Estela Gonçalves Pérola
3	Contar somente as peças que desenhou.	Neste caso, o aluno considera como resposta apenas as soluções que representou e descarta a possibilidade dada no problema.	Nenhum aluno realizou este tipo de estratégia de contagem.
4	Contar as peças de dominó que desenhou, incluindo a que estava no problema, e somar os pontos das peças.	Neste caso, o aluno, além de realizar a contagem solicitada no problema, modifica a tarefa, acrescentando a soma do total de pontos das peças.	Malves Moranguinho Sol
5	Contar os pontos das peças que desenhou com os pontos da peça dada no problema.	Neste caso, o aluno não faz a contagem solicitada e realiza outro tipo de contagem, que é a de somar os pontos da peça do problema e das peças desenhadas por ele.	Felipe Flora Lipinho Mel
6	Contar os pontos das peças que desenhou.	Neste caso, o aluno não faz a contagem das possibilidades como solicitado. Realiza outro tipo de contagem, somando os pontos das peças de dominó que desenhou.	Cláudia
7	Dar o total de peças do jogo de dominó.	Neste caso, o aluno não realiza a contagem das possibilidades solicitada. Apenas dá o total de peças do jogo de dominó.	Red
8	Dar um total mediante uma suposição.	Neste caso, o aluno imagina um total sem fazer investigação das possíveis soluções.	Nenhum aluno fez este tipo de contagem.

Fonte: Elaborado pelo pesquisador

Em relação às estratégias dos alunos no processo de contagem, observamos que se basearam em contar peças, contar peças e somar os pontos das peças, somar os pontos das peças ou contar o total de peças do jogo de dominó. Ajudar os alunos a desenvolver habilidades para "[...] descobrir o número de casos possíveis, seja contando-os ou por cálculos simples" (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 83, tradução nossa[100]) é um dos objetivos do ensino de combinatória.

Verificamos que, sem a intervenção do professor, alguns alunos fizeram contagens que não foram solicitadas no problema. Esse fato ajuda-nos a entender que "A leitura do problema se refere não só à compreensão, mas também envolve termos específicos da matemática (relações lógicas) que, muitas vezes não fazem parte da experiência dos alunos" (ITACARAMBI, 2010, p. 14). Nesse sentido, enfatizamos que, ao trabalharem com problemas de enumeração e contagem, os alunos, além de compreenderem o problema, precisam ter clareza das relações lógicas que envolvem os conceitos de enumerar e contar.

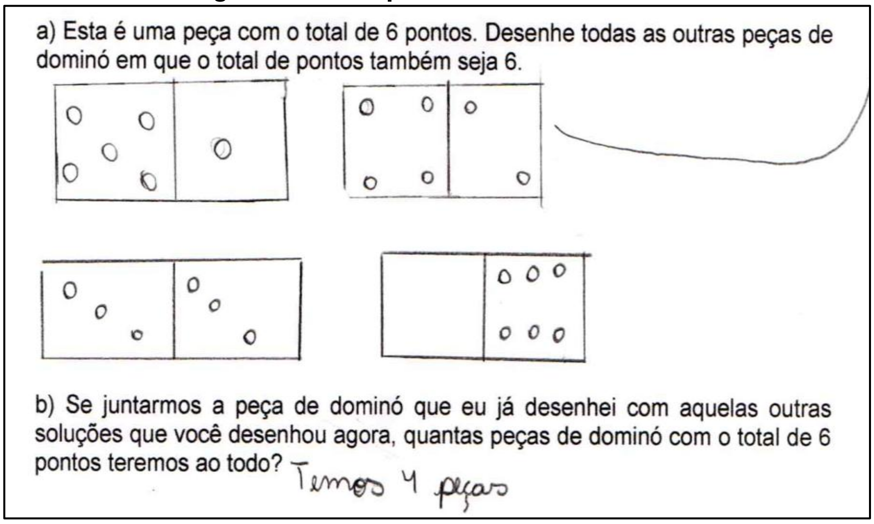
Esses conceitos envolvem outras relações lógicas, ideias de ordenação, análise de existência de possibilidades com base nos elementos agrupados, estabelecimento de parâmetros, análise de repetição ou distinção de elementos. Para que o aluno compreenda esses conceitos, é imprescindível a intervenção do professor auxiliando no desenvolvimento de estratégias adequadas para a resolução do problema ou tarefa e para entenderem o que é solicitado para fazer. Portanto, é necessário que os alunos entendam quando é solicitado para dizer quais são as possibilidades ou quando é solicitado para dizer apenas o total de possibilidades sem dizer quais são.

Ao analisarmos a resposta da aluna Manuela, verificamos que ela desenhou todas as peças de dominó com o total seis e fez a contagem delas. Percebemos que, além de apresentar as peças com o critério estabelecido (soma com o total seis), a aluna realizou a contagem. Uma das etapas do raciocínio combinatório no processo de contagem por meio da enumeração é "[...] identificar e formar configurações combinatórias com as regras

[100] [...] descubrir el número de casos posibles, bien por conteo, bien por cálculos simples (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p.83).

estabelecidas" (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 114, tradução nossa[101]).

Figura 66 – Resposta da aluna Manuela


a) Esta é uma peça com o total de 6 pontos. Desenhe todas as outras peças de dominó em que o total de pontos também seja 6.

b) Se juntarmos a peça de dominó que eu já desenhei com aquelas outras soluções que você desenhou agora, quantas peças de dominó com o total de 6 pontos teremos ao todo? Temos 4 peças

Fonte: Arquivo do pesquisador

Para desenharem as peças com o total seis, os alunos Athayde, Estela, Manuela e Pérola disseram que se lembraram das peças do jogo com esse total e depois contaram as peças desenhadas com a que já estava apresentada no problema. Isso reforça que ter brincado com o jogo de dominó com as crianças ajudou na construção de ideias intuitivas na resolução do problema. Verificamos que esses alunos construíram configurações com a soma de dois números naturais com o total seis e, para isso, leram o problema com atenção para compreender o que era solicitado na atividade. Veja o episódio a seguir.

> **Pesquisador:** No problema, você desenhou quatro peças. Você acha que teria mais possibilidades ou só essas?
> **Manuela:** Eu acho que, pelo o que eu vi, poderia ser só essas.
> **Pesquisador:** Você acha que esta pergunta da letra **(b)** estava clara ou estava difícil de entender?
> **Manuela:** Depende do modo que a gente lesse.
> **Pesquisador**: Por quê?
> **Manuela:** *Se a gente ler muito rápido, sem prestar atenção, muita atenção, a gente não consegue entender, porque a gente não vê que está perguntado quantas peças que a gente poderia fazer, entendeu?* A gente, quando lê sem prestar muita atenção, a gente pensa que está perguntando quantas peças "ao todo". Todas as peças que existem que a gente pode fazer (*grifo nosso*).
> **Pesquisador:** Como você acha que deveria ser feito esta pergunta?

[101] Identificar y formar configuraciones combinatorias com unas condicones determinadas (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p.114).

> **Manuela:** Deixa eu ver. Eu acho que poderia ser bem assim: Se juntarmos as peças de dominó com a que eu ... calma! Se juntarmos as peças de dominó que eu já desenhei com qualquer outra solução que você ... ao invés de ser com a que você desenhou ... com as outras que podem ser feitas.

Pela fala da aluna, notamos que ela já desenvolve algumas estratégias de apoio para compreender o problema (Santos, 1997; Santos-Wagner, 2008), que é ler o problema, reler, ler com atenção, procurando palavras-chave e frases no problema, ou seja, busca descodificar o problema. "Descodificar um problema é procurar o seu significado, é procurar entendê-lo, é decifrar a mensagem que ele expressa e, sobretudo, é também fazer uma análise crítica dessa mensagem [...]" (ANDRADE, 2017, p. 369).

Outro detalhe importante é que esses quatro alunos conseguiram diferenciar a pergunta da letra (a) (que envolvia a enumeração por desenho) da pergunta da letra (b) (que envolvia a contagem). Afirmamos isso, pois enumerar e contar são dois tipos de problemas diferentes quanto ao tipo de solução pedida, segundo os pesquisadores espanhóis:

> *Problemas de enumeração*. Em ocasiões pode nos interessar enumerar uma lista dos elementos que possuem certas propriedades. [...] *Problemas de contagem*. Trata-se de determinar o número de elementos de um conjunto finito que possui uma propriedade ou uma coleção de propriedades (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 25-26, tradução nossa[102]).

Defendemos, com base nesses autores espanhóis e em Santos-Wagner (2008), a necessidade de trabalhar com os alunos o significado matemático das palavras presentes nos enunciados dos problemas. Além disso, ao realizarmos intervenções pedagógicas sobre a compreensão do problema, precisamos chamar a atenção dos alunos para o tipo de resposta que se espera: se é só o cálculo, se são o cálculo e desenho, se é só o desenho, etc. Dessa forma, nós, professores e pesquisadores, precisamos atentar para o tipo de palavras que inserimos nos problemas. Devemos verificar se tal palavra se enquadra com a estrutura do problema formulado, se vai ajudar ou atrapalhar na compreensão e resolução dele. Mas isso, só conseguiremos se ouvirmos os estudantes.

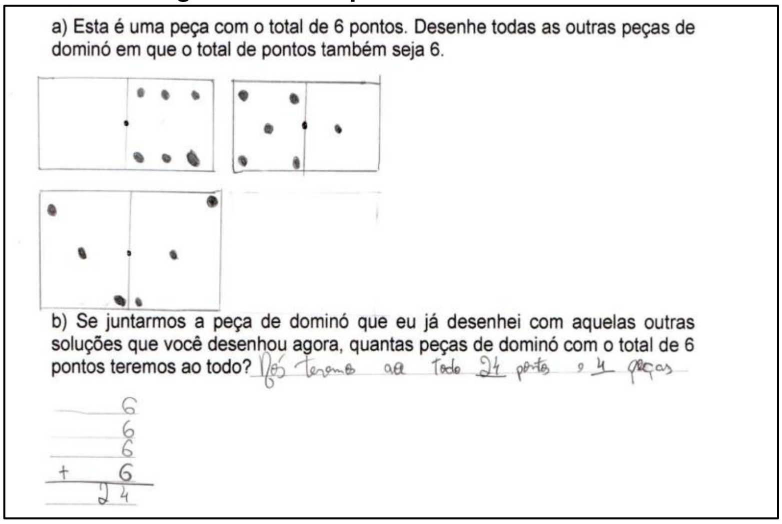
---

[102] *Problemas de enumeración*. En ocasiones puede intersarnos enumerar o hacer uma lista de los elementos que poseen esta(s) propiedad(es). [...] *Problemas de recuento.* Se trata de determinar el número de elementos de conjunto finito que posee una propiedad o una colección de propiedades.

Navarro, Batanero e Godino (1996) chamam a atenção para os verbos que melhor se associam aos problemas do modelo combinatório implícito de partição, tais como “[...] “dividir”, “partir”, “decompor”, “separar”, etc.[...]” (NAVARRO; BATANERO; GODINO, 1996, p. 30, tradução nossa[103]). No problema do dominó, quando pedimos aos alunos que desenhassem as peças com o total seis, poderíamos ter solicitado que repartissem a quantidade seis como uma soma de duas parcelas, pois estamos trabalhando com um problema de adição que envolve a ideia de partição.

A aluna Malves desenhou corretamente as outras três peças de dominó com o total seis. Porém, além de fazer a contagem das quatro peças de dominó com esse total, a aluna somou o total de pontos de cada peça. De modo semelhante, as alunas Moranguinho e Sol também desenharam as outras três peças de dominó com o total seis. Porém, além de dizerem o total de peças, contaram os pontos das peças usando o cálculo de multiplicação.

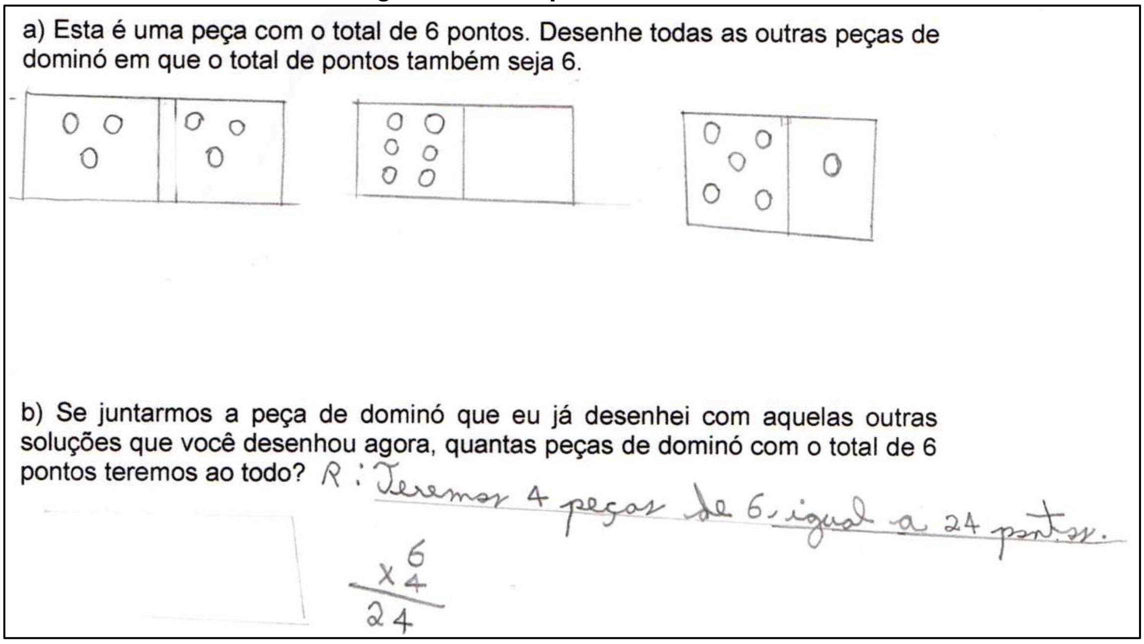
Figura 67 – Resposta da aluna Malves



Fonte: Arquivo do pesquisador

[103] [...]. Otros verbos claves asociados com la partición son: “dividir”, “partir”, “descomponer”, “separar”, etc. (NAVARRO; BATANERO; GODINO, 1996, p.30).

Figura 68 – Resposta da aluna Sol


a) Esta é uma peça com o total de 6 pontos. Desenhe todas as outras peças de dominó em que o total de pontos também seja 6.

b) Se juntarmos a peça de dominó que eu já desenhei com aquelas outras soluções que você desenhou agora, quantas peças de dominó com o total de 6 pontos teremos ao todo? R: Teremos 4 peças de 6, igual a 24 pontos.

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 4 \\ \hline 24 \end{array}$$

Fonte: Arquivo do pesquisador

Ao analisarmos as respostas das alunas Malves, Moranguinho e Sol, verificamos que elas respeitaram os parâmetros (ou critérios) estabelecidos na partição (que era a soma com o total seis) e realizaram a enumeração por meio de desenhos, ou seja, por meio de soluções visuais. Porém, em relação ao processo de contagem, as estudantes realizaram uma tarefa a mais, que foi contar os pontos das peças. “O erro não é apenas uma resposta incorreta, ou algo falso a ser corrigido, envolve antes de tudo um processo de pensamento, uma forma de raciocinar que necessita ser discutida [...]” (ITACARAMBI, 2010, p. 17). Buscamos compreender o que levou essas alunas a ter tais pensamentos de contar os pontos das peças.

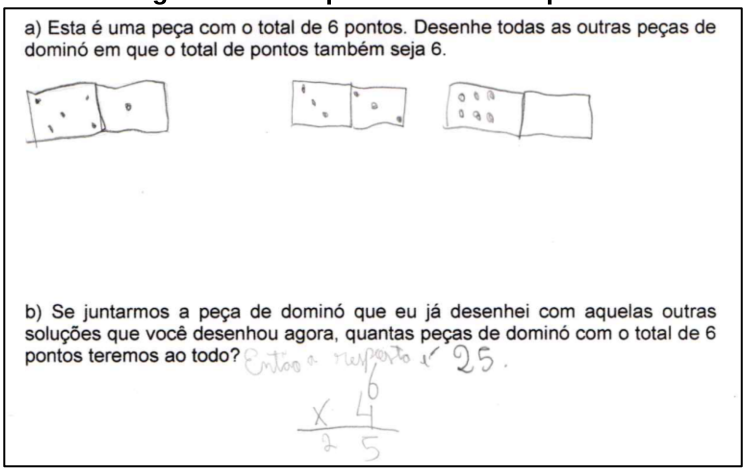
> **Pesquisador:** Por que você multiplicou 6x4 na pergunta da letra (b)?
> **Moranguinho:** Eu fui. Aqui é pra fazer quantos pontos tinha no total. Aí quatro peças de dominó com vinte quatro pontos. Eu quis contar os pontos também.
> **Pesquisador:** Você quis contar as peças e o total de pontos?
> **Moranguinho:** Sim.
> **Moranguinho:** *Quantas peças de dominó temos ao total*? Essa palavra *quantas* aqui confundiu um pouquinho.

Quando olhamos para as respostas dos alunos para além do erro, na tentativa de compreender o pensamento do aluno e o que levou a tal solução, somos conduzidos a fazer questionamentos que permitem reflexões sobre os enunciados dos problemas, e sobre nossa forma de apresentar e discutir a tarefa com os alunos. Essas reflexões possibilitam a ampliação de entendimento do professor pesquisador sobre como os alunos pensaram ao resolver uma tarefa e possibilitam ampliação de saberes para alunos e professor. Dizemos isso porque “[...]. O questionamento na interpretação do texto ajuda, na maioria das vezes, a avaliar as respostas dadas pelos alunos e a verificar que a interpretação do professor não é a única possível” (ITACARAMBI, 2010, p. 14).

Não esperávamos que os alunos contassem os pontos das peças, mas tal solução fez-nos repensar sobre o enunciado e o significado das palavras “quantas”, “quais”, “total”, “todas” e “juntarmos”, usadas em tarefas matemáticas. Por isso, em nosso retorno com os alunos, tivemos o cuidado de explicar que tipo de contagem a tarefa solicitava. Esclarecemos isso no intuito de que os alunos não tivessem o mesmo tipo de interpretação (contar os pontos dos desenhos) em tarefas posteriores, ou seja, que pudessem aprender a interpretar corretamente os enunciados.

O aluno Lipinho, além de desenhar corretamente as outras peças do dominó com o total seis, ou seja, desenhar as peças respeitando o critério (parâmetro) estabelecido na partição, contou os pontos do dominó usando a multiplicação, porém errou o cálculo. Ao mostrar ao aluno a sua resolução, ele identificou que havia errado na hora de fazer o cálculo e disse que faltou atenção. Tal atitude mostra-nos que a ação reflexiva sobre sua resposta permitiu reconhecer o erro cometido no processo de multiplicação.

Figura 69 – Resposta do aluno Lipinho


a) Esta é uma peça com o total de 6 pontos. Desenhe todas as outras peças de dominó em que o total de pontos também seja 6.

b) Se juntarmos a peça de dominó que eu já desenhei com aquelas outras soluções que você desenhou agora, quantas peças de dominó com o total de 6 pontos teremos ao todo? Então a resposta é 25.

6
x 4
25

Fonte: Arquivo do pesquisador

Outros alunos que também contaram os pontos das peças de dominó foram Felipe, Flora, Mel e Cláudia. Ao conversarmos individualmente sobre o entendimento da tarefa foi possível compreender como pensaram. Verificamos que a falta de compreensão do enunciado todo e de determinadas palavras influenciaram no processo de resolução e isso os levou a realizar a soma dos pontos das peças de dominó. Vejamos os episódios a seguir:

> **Cláudia:** *Junte as peças que eu já desenhei com as outras soluções que você já desenhou*. Quantas peças de dominó com o *total* de seis pontos teremos ao todo?
> **Pesquisador:** Era para dizer quantas peças ou era para somar o total de seis pontos?
> **Cláudia:** Era para ver quantas peças.
> **Pesquisador:** Então, você fez certo somando os pontos ou era para dizer quantas peças? O que te fez pensar que era para somar os pontos?
> **Cláudia:** *Porque eu pensei que era para fazer a conta e ver quantos pontos*.

Para os alunos, as palavras “juntarmos”, “quantas” e “total” presentes no enunciado davam a ideia de contar os pontos. Pensaram dessa forma, porque quando eles resolviam problemas de matemática, essas palavras traziam a ideia de somar ou de contar o total. Porém na tarefa eles teriam que contar as peças. Essa relação entre o significado das palavras, as experiências vividas e a reflexão sobre essas relações vão dando novos significados à medida que o professor pesquisador realiza intervenções, ouvindo e fazendo questionamentos aos alunos.

Notamos que, além de o aluno ler o enunciado do problema, intervenções do professor pesquisador são importantes para auxiliar os estudantes no processo de resolução. Entre essas intervenções, é preciso ensinar aos alunos a verificarem o significado das palavras e as ideias que elas trazem no problema matemático. Tudo isso é necessário em aulas, além de ouvir a interpretação deles sobre as tarefas e quando possível reformular o problema com base nas dificuldades (ou nos obstáculos) apresentadas por eles. Uma outra estratégia pedagógica seria ajudá-los a ler e reelaborar seu pensamento. Sobre o docente que escuta o aluno para interpretar a solução dele, D’Ambrosio (2017) afirma que

> [...] esse professor tenta compreender o que o aluno está pensando, faz a ele muitas perguntas para entender qual o seu equívoco, para, então, poder criar situações que o levem a corrigir o seu erro. Esse

> professor também busca guiar o aluno a respostas e a construções matemáticas corretas, já determinadas. Em ambos os casos, a matemática a ser aprendida é a acadêmica formal, que existe e está pronta para ser absorvida pelos alunos. Esses professores sabem essa matemática e a transmitem a eles de uma forma ou de outra. Para ambos, o objetivo é eliminar erros na produção matemática do aluno (D'AMBROSIO, 2017, p. 111-112).

A atitude do professor de ouvir os seus alunos, reformular os problemas ou orientá-los na reestruturação lógica de seu pensamento é produtiva e pode permitir que tarefas matemáticas se tornem cada vez mais claras e objetivas para alunos. Essa atitude também ajuda outros professores, pesquisadores e até mesmo autores de livros didáticos na preparação de questões matemáticas mais adequadas ao nível escolar dos estudantes com os quais se pretende trabalhar.

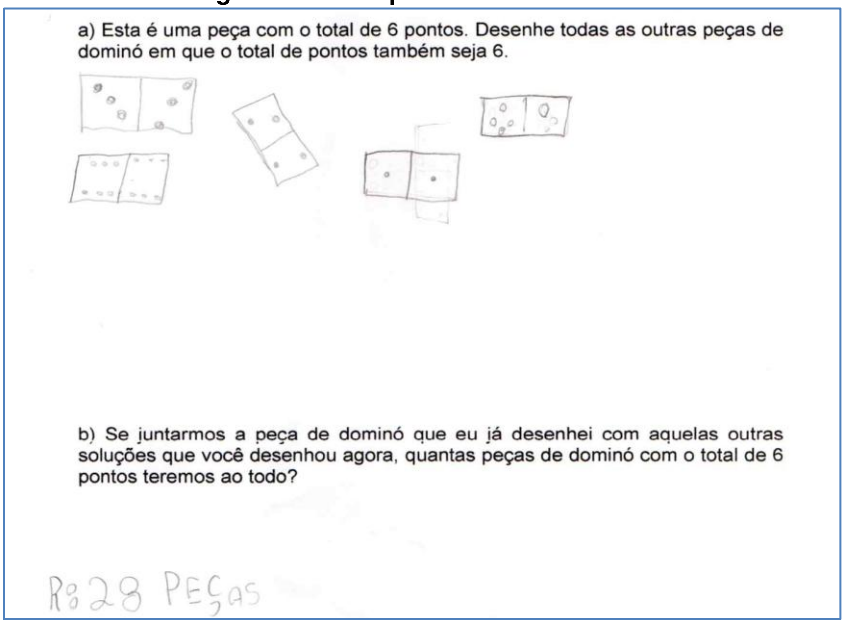
Segundo Navarro, Batanero e Godino (1996), há alguns erros que alunos podem cometer em problemas envolvendo combinatória. Entre esses erros, citamos o fato de que alunos podem esquecer alguns tipos possíveis de partição. Em nossa análise, além de identificarmos esse tipo de erro nas respostas dos alunos, como exemplo temos as alunas Flora e Gonçalves que não desenharam todas as peças e disseram que não se lembraram de algumas soluções possíveis. Também identificamos outro tipo de erro no problema de partição (tarefa do dominó) relacionado à contagem, que foi a soma dos valores das parcelas de cada enumeração. A análise dos dados fez-nos refletir sobre nossa atuação durante e após o processo de investigação com os alunos. De acordo com D'Ambrosio (2017),

> [...] para os professores-pesquisadores as linhas entre a pesquisa e o trabalho docente são nebulosas e é impossível separá-las. Nosso ofício é um constante vaivém – dos dados analisados às decisões tomadas –, para dar continuidade ao trabalho com alunos. Assim que deliberada a movimentação na prática, novos dados emergem e novas análises são necessárias. Essa dinâmica de trabalho constitui o dia a dia do professor-pesquisador. Discutir separadamente a análise de dados e a implicação dessa análise para o trabalho docente seria um tratamento artificial dos dados e não comunicaria ao leitor o constante movimento que resulta no tecer do saber do professor (D'AMBROSIO, 2017, p. 115-116).

Com a escuta aos alunos, em nosso processo de intervenção, foi necessário orientá-los a enumerar partições, pensar nos fatos fundamentais da adição de forma sistemática e depois ensiná-los a contar as enumerações para evitar tal tipo de erro. Dessa forma, o nosso olhar sobre a análise das respostas dos alunos foi reformulando nossa prática de intervenção com os alunos e aproximou-nos cada vez mais da professora regente, no sentido de orientar e planejar tarefas intermediárias que contribuíssem para a construção e consolidação de conceitos matemáticos necessários para a resolução das tarefas. Citamos como exemplo o conceito de elemento neutro da adição. Após nossa análise das soluções dos alunos, demos o retorno à professora regente que, em aulas paralelas à nossa pesquisa, trabalhou esse conceito com os alunos. Esse movimento ocorreu ao longo de todo nosso processo de investigação.

Na figura a seguir, apresentamos a resolução do aluno Red, que desenhou cinco peças de dominó, mas apenas uma delas dá o total seis. Ele disse que desenhou as peças de dominó que vieram à sua memória e deu como resposta 28 peças para a pergunta da letra (b), referindo-se ao total de peças do jogo de dominó. “Num problema matemático perfeitamente formulado, todos os dados e todas as cláusulas da condicionante são essenciais e têm de ser levados em conta [...]” (POLYA, 1995/1945, p. 128). Notamos que Red não atentou para a condicionante ou aos parâmetros estabelecidos – como chamam os pesquisadores espanhóis – na tarefa que era desenhar peças com o total seis.

Figura 70 – Respostas do aluno Red


a) Esta é uma peça com o total de 6 pontos. Desenhe todas as outras peças de dominó em que o total de pontos também seja 6.

b) Se juntarmos a peça de dominó que eu já desenhei com aquelas outras soluções que você desenhou agora, quantas peças de dominó com o total de 6 pontos teremos ao todo?

R: 28 PEÇAS

Fonte: Arquivo do pesquisador

Ao resolver esse problema, Red desenhou as peças de dominó que vieram à sua memória, ou seja, um pensamento guiado pela experiência do jogo. Red atendeu à parte do que foi solicitado no problema, pois desenhou peças de dominó. Contudo, tivemos de chamar sua atenção para o parâmetro estabelecido, que era ter o total seis. A respeito da contagem, o aluno relacionou-a com o total de peças, mas não ao número de possibilidades conforme foi solicitado. De acordo com os autores espanhóis Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), uma das etapas do raciocínio combinatório são a identificação dos valores pertinentes dos parâmetros estabelecidos no problema, a formação efetiva das configurações pedidas e a contagem das mesmas. Red não se ateve a essa etapa, e as configurações formadas foram construídas aleatoriamente, de acordo com suas lembranças das peças de dominó, sem restringir ao total (que era seis). Além disso, a contagem das configurações não estava relacionada às enumerações, e sim ao total de peças do jogo de dominó.

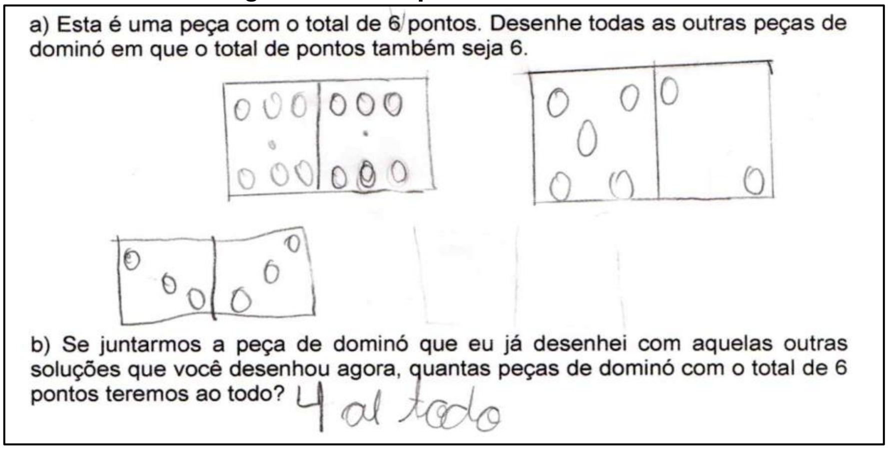
Esse fato mostrou-nos que, em nossas intervenções, precisávamos chamar a atenção dos alunos para vários detalhes durante o processo de resolução de problemas. Era necessário comentar com os alunos sobre os parâmetros estabelecidos, realizar a contagem das enumerações construídas e analisar se suas respostas atendiam ao que foi solicitado. De acordo com D’Ambrosio (2017),

> [...] o docente continua examinando as estruturas, os esquemas e a lógica da matemática do aluno e se interessa por momentos em que o saber deste parece se desestabilizar, pois esse é o momento em que o aluno elabora novos saberes para retomar um estado de equilíbrio com conhecimentos anteriores que se alteram e se tornaram novamente viáveis. O professor está disposto a incorporar a matemática do aluno como elemento do seu próprio saber matemático (D’AMBROSIO, 2017, p. 112-113).

Na figura a seguir, apresentamos a resposta da aluna Bela, que também não atentou para o parâmetro estabelecido e desenhou peças de dominó com os totais doze, sete e seis. Embora a aluna tenha feito a contagem direta das peças que desenhou com a que foi dada no problema, ela só identificou que não havia respeitado o critério estabelecido na hora da nossa intervenção. Quando conversamos com a aluna sobre as peças desenhadas e o total de pontos de cada peça, ela imediatamente verificou que havia errado.

> **Pesquisador:** O que pedia para fazer na atividade do dominó?
> **Bela:** Pedia para fazer os dominós com o total de seis pontos.
> **Pesquisador**: Aqui você desenhou quantos pontos? Por que você desenhou seis de um lado e seis do outro?
> **Bela:** Aé! Era só ter colocado seis aqui e zero aqui.
> **Pesquisador:** E por que nesse outro você colocou cinco aqui e dois aqui?
> **Bela:** Aé! Era para colocar um. Faltou atenção.

Figura 71 – Resposta da aluna Bela


a) Esta é uma peça com o total de 6 pontos. Desenhe todas as outras peças de dominó em que o total de pontos também seja 6.

b) Se juntarmos a peça de dominó que eu já desenhei com aquelas outras soluções que você desenhou agora, quantas peças de dominó com o total de 6 pontos teremos ao todo? 4 al todo

Fonte: Arquivo do pesquisador

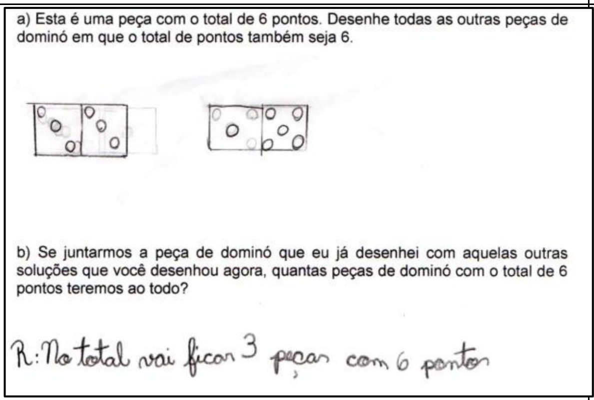
Verificamos que Bela fez a contagem das peças desenhadas, mas não observou o parâmetro estabelecido e o total de pontos igual a seis. Por isso, reafirmamos que a atenção e a confrontação da resposta com os parâmetros estabelecidos são indispensáveis no processo de resolução de problemas matemáticos.

Um aspecto importante do raciocínio combinatório é a "[...] demonstração lógica, mas menos formal, de que o processo a ser seguido garanta que não falte nenhuma das possíveis configurações" (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 65, tradução nossa[104]). Nesse aspecto, as alunas Flora, Gonçalves, Mel e Moranguinho (Figura 72) desenharam peças de dominó com o total seis, mas esqueceram-se de algumas possibilidades, o que nos mostrou a necessidade de ensinar ideias lógicas de sistematização para ajudá-las a encontrar todas as possibilidades.

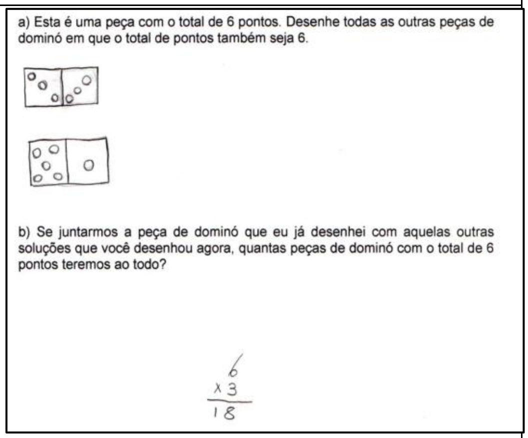
[104] [...] – Demonstración lógica, más o menos formal, de que el proceso seguido garantiza que no falta ninguma de las posibles configuraciones (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 65)

Figura 72 – Respostas de alunas sobre a tarefa do dominó

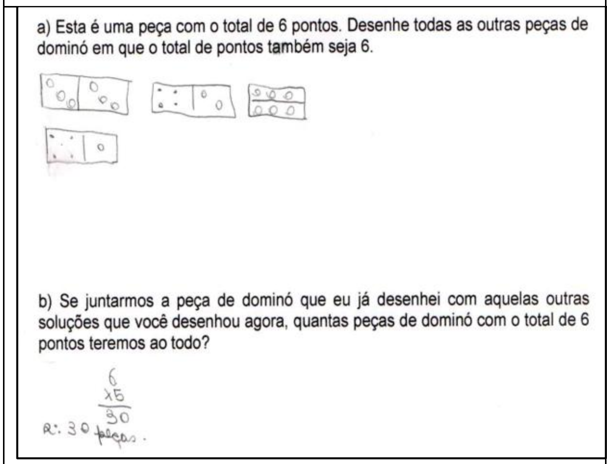
Resposta da aluna Gonçalves



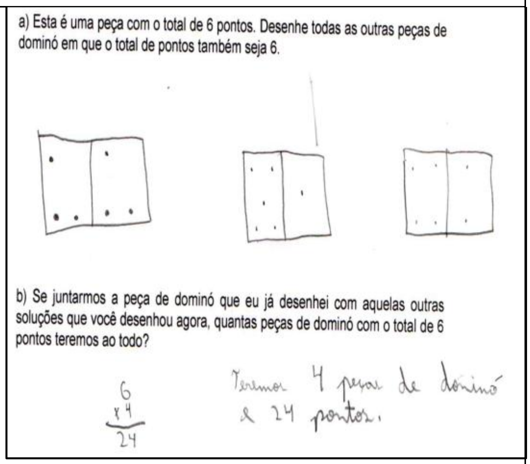
Resposta da aluna Flora



Resposta da aluna Mel



Resposta da aluna Moranguinho



Fonte: Arquivo do pesquisador

Algo que nos chamou a atenção foi o desenho da aluna Mel, que representou a peça de dominó com três pontos em cada um dos quadrantes, e uma peça continha os pontos em diagonal e outra continha os pontos na horizontal. Olhando pelo aspecto do raciocínio combinatório, ela cometeu o erro de repetição de possibilidades, que é um dos tipos cometidos no processo de enumerações, de acordo com Navarro, Batanero e Godino (1996). Embora esse erro de repetição seja esperado em problemas de combinatória, fomos pegos de surpresa sobre o que levou a aluna a construir tal representação. Ao conversarmos sobre as peças desenhadas e o porquê de tal representação, Mel disse que, na hora da atividade, lembrou as peças de dominó que costumava jogar com o avô e por isso fez tal representação. Nesse sentido,

> [...] ao mesmo tempo em que planejamos nossa sala de aula pensando nessa variedade, nessa multicontextualidade, somos ‘atropelados’ e ‘pegos de surpresa’ por ela, mas é essa mesma variedade de fatores que pode (re)dimensionar e nortear todos os nossos pensamentos e ações. Na verdade, por um lado, não há como delimitar/controlar essa multicontextualidade, mas, por outro, ela passa a ser um referencial, um mapa que ajuda a pensarmos e repensarmos cotidianamente o movimento de operacionalização da ERCPCDP na sala de aula (ANDRADE, 2017, p.391).

Quando trabalhamos a compreensão de problemas matemáticos, precisamos ter em mente que não é apenas a ausência de conhecimentos matemáticos que pode influenciar no entendimento de um problema. Há fatores afetivos e epistemológicos, as experiências pessoais, a estrutura do problema e a linguagem (seja materna, seja matemática) presente nos enunciados. Ao trabalharmos problemas de combinatória com alunos de quinto ano, devemos considerar que eles são sujeitos sociais e seus conhecimentos são construídos e reconstruídos respeitando seus saberes culturais elaborados socialmente em suas experiências escolares e extraescolares. Para os alunos de quinto ano compreenderem um problema matemático, é preciso que o trabalho seja desenvolvido com cautela, escutando o aluno e reconstruindo novos significados e reflexões sobre suas respostas. Isso é necessário para que ele não se baseie apenas em palpites fundamentados em experiências e sem um raciocínio lógico estruturado em conceitos matemáticos.

Outro fato interessante em nossa análise foi que Red, Bela, Clara, Flora, Mel e Moranguinho não desenharam a peça com os valores seis e zero e disseram que não se lembraram desse caso particular. Segundo os pesquisadores Navarro, Batanero e Godino (1996), esse é um dos tipos de erros que alunos podem cometer em problemas de combinatória: esquecer possíveis enumerações de partições. “[...] O papel do professor é justamente buscar situações problemáticas que tenham o potencial de adicionar novas perspectivas ao conhecimento do aluno [...]” (D’AMBROSIO, 2017, p. 111). Esse detalhe chamou-nos a atenção para a necessidade de os professores dos anos iniciais trabalharem com tarefas que explorem a propriedade do elemento neutro da adição em combinações de números.

A conversa com os alunos, além de ajudar na interpretação do problema, contribui para que eles relacionem os conhecimentos matemáticos que possuem a esquemas e estratégias de resolução. De acordo com

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), algumas ações devem ser postas em prática pelos estudantes para desenvolver atitudes ante o conhecimento matemático, entre as quais está a tendência de revisar e refletir o próprio pensamento e sua atuação na resolução de problemas.

Acreditamos que a conversa coletiva com os alunos desde a leitura do problema é importante para desenvolver a compreensão das tarefas matemáticas, a compreensão de conceitos e as estratégias de resolução. Para isso, é necessário desenvolver um ambiente propício, onde os alunos tenham liberdade de falar o que pensam sobre o tema abordado, pois assim o professor poderá identificar as dificuldades encontradas no processo de resolução, sejam aquelas presentes nos enunciados, sejam as estabelecidas culturalmente ou mesmo as conceituais. “[...]. Quem ouve apoia quem fala muitas vezes em silêncio, mas com empatia, ajudando-o a elaborar e a criar uma estrutura de saber mais útil e satisfatória” (D’AMBROSIO, 2017, p. 111).

Nesse sentido, o professor precisa auxiliar os alunos a desenvolver alguns procedimentos necessários ao processo de construção do raciocínio combinatório. Assim, espera-se que os erros sejam reduzidos à medida que os estudantes vão realizando tarefas que envolvem esse assunto. Entre os procedimentos necessários para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, citamos:

> - Reconhecer quando é adequado um procedimento.
> - Explicar as razões para os distintos passos de um procedimento.
> - Conduzir até o final um procedimento de forma confiável e eficaz.
> - Verificar o resultado de um procedimento empiricamente ou analiticamente; reconhecer procedimentos corretos e incorretos.
> - Gerar procedimentos novos e ampliar ou modificar os procedimentos conhecidos.
> - Reconhecera natureza e o papel que cumprem os procedimentos dentro da matemática (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 101, tradução nossa[105]).

Nesse ambiente de compreensão coletiva, o erro precisa ser visto não apenas como uma resposta incorreta, mas sobretudo como resultado de um processo de pensamento que precisa ser discutido para desenvolver um

[105] - Reconocer cuándo es adecuado un procedimiento. – Explicar las razones para los distintos pasos de un procedimiento. – Llevar a cabo un procedimiento de forma fiable y eficaz. – Verificar el resultado de un procedimiento empíricamente o analíticamente; reconocer procedimientos correctos e incorrectos. – Generar procedimientos nuevos y ampliar o modificar los ya conocidos. – Reconocer la naturaleza y el papel que cumplen los procedimientos dentro de las matemáticas (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 101).

raciocínio matemático reflexivo. Ou seja, um raciocínio em que os alunos utilizem conhecimentos matemáticos sistematicamente e reflitam sobre suas respostas em relação ao que é solicitado no problema. Para que isso ocorra, é necessário escutarmos mais o que dizem os nossos alunos, como nos diz D'Ambrosio (2017).

> O que se ouve, quando se acredita na produção do aluno, informa a respeito do conhecimento que ele leva para a escola e da sua forma de raciocinar; além de ter enriquecido o modelo da matemática das crianças e dado direção para planejar novas ações. As possibilidades para a continuidade do processo de ensino foram definidas pela reflexão sobre a produção matemática dos alunos. O modelo dinâmico, que se altera a cada nova descoberta, se desenvolve a partir da voz dos alunos e propicia aos professores elementos de investigação. O trabalho do professor-pesquisador pode ser descrito como o trançar de pesquisa e ação com reflexão contínua (D'AMBROSIO, 2017, p. 127).

Por diversas vezes, nós professores queremos que os alunos aprendam os conhecimentos matemáticos socializados pela escola para interagir melhor com o mundo. Porém, esquecemos que, antes de a criança conhecer a matemática ensinada pelo professor (baseada nos livros didáticos), ela já interage com o mundo. Portanto, estamos diante de um sujeito histórico que já resolve problemas e, portanto, aprende com o mundo. Esses conhecimentos anteriores podem ser aperfeiçoados quando o professor escuta as respostas de seus alunos e busca compreender o que os leva a tais pensamentos, fazendo intervenções necessárias para ajudar a desenvolver o raciocínio combinatório.

7.3.2.3 Retorno coletivo sobre a tarefa do dominó

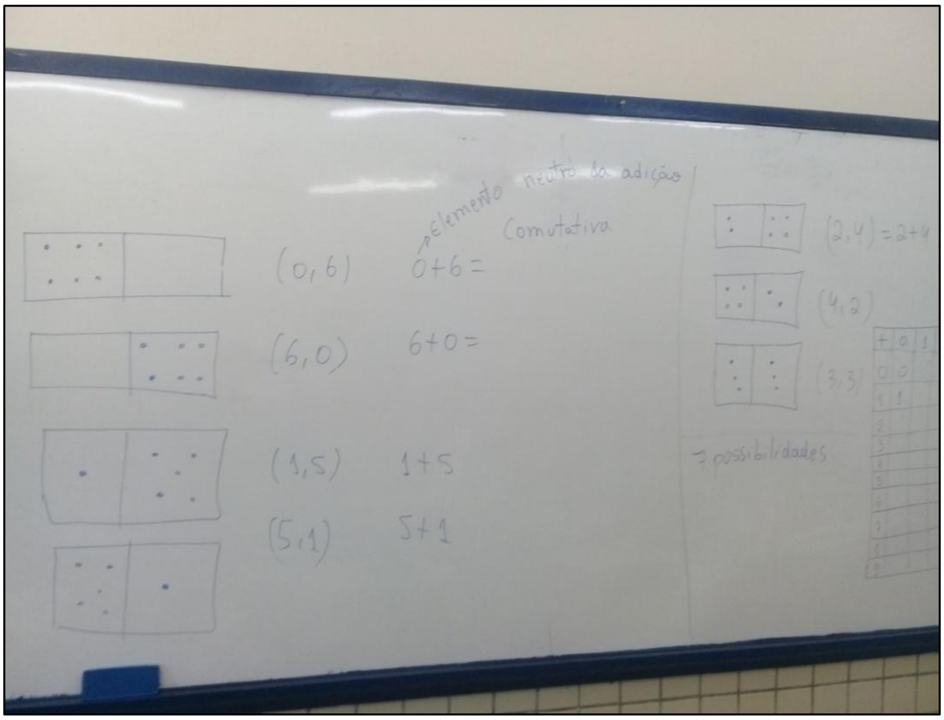
Em 3 de abril de 2018, realizamos o retorno com os alunos sobre a atividade do jogo do dominó. Apresentamos-lhes as respostas intuitivas corretas e incorretas, sobre as quais conversamos com eles, sejam baseadas no conhecimento que tinham do jogo, sejam em suas experiências escolares ou afetivas. Com suporte nessas intuições primárias[106], fomos desenvolvendo intuições secundárias criando sistematizações de enumeração e contagem.

---

[106] Intuições primárias são aquisições cognitivas que derivam diretamente da experiência, sem a necessidade de nenhuma instrução sistemática. As intuições secundárias consistem em

Durante o nosso retorno coletivo, fomos conversando com os alunos e desenhando as peças de dominó com o total seis de forma sistemática, começando com valores extremos (0,6) e (6,0). Em seguida, fizemos (1,5) e (5,1) e assim por diante, até que tivéssemos o par formado pelo termo central (3,3). Paralelamente às soluções visuais (desenhos), construímos também as soluções analíticas representadas pelas somas dos números e pelos pares ordenados. Usamos essa estratégia para ensinar aos alunos a propriedade comutativa da adição e o conceito de elemento neutro, ao fazer 6 + 0 e 0 + 6. Além desses conceitos matemáticos, explicamos aos alunos o que seria uma rotação, ao girarmos a peça de dominó com um ângulo de 180° em torno de seu ponto de simetria, integrando com outros conceitos da geometria.

Figura 73 – Imagem de exemplos de estratégias de resolução e de propriedades da adição discutidas com os alunos



Fonte: Arquivo do pesquisador

aquisições que possuem todas as características das intuições, mas que são formadas pela educação científica, especialmente na escola (FISCHBEIN, 1975, p. 117, tradução nossa). *Primary intuitions* are cognitive acquisitions which are derived from the experience of the individual, without the need for any systematic instruction. *Secondary intuitions* are acquisitions which have all the characteristics of intuitions, but they are formed by scientific education, mainly in school (FISCHBEIN, 1975, p. 117).

Essas estratégias e conceitos foram antecipados com a professora regente que passou a incorporar tais procedimentos de resolução em tarefas matemáticas em suas aulas. Ao questionar os alunos sobre a propriedade que usávamos, ao somarmos zero com seis e depois somar seis com zero e verificarmos que o resultado não se alterava, eles também não souberam responder. Apresentamos com a regente da classe alguns exemplos, até que a aluna Pérola se lembrou do que a professora havia trabalhado numa aula anterior e respondeu que era a propriedade do elemento neutro da adição.

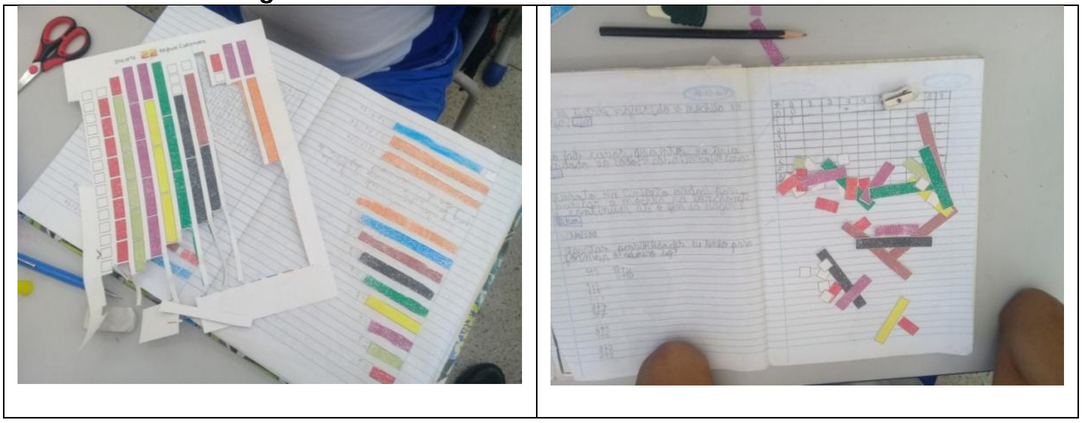
Além de conversarmos com os alunos sobre a propriedade comutativa e do elemento neutro da adição, mostramos o que eram pares ordenados de números e como realizar somas sistemáticas usando uma tabela de valores numéricos. Demos exemplos de pares ordenados, como (0,6), (6,0), (1,5), (5,1), (4,2), (2,4) e (3,3). Fizemos isso porque acreditamos e defendemos, com base em Fischbein (1975) e Vale (2017), que os problemas que utilizam múltiplas estratégias de resolução possibilitam aos alunos desenvolver outras ideias intuitivas apresentando soluções por desenhos ou geométricas, ou por cálculos aritméticos ou algébricos. Isto é, o que fizemos no retorno coletivo auxiliou a todos os alunos porque favorece que cada aluno aprenda um arcabouço de ideias intuitivas para usar ao resolver outros problemas. Desse modo, fomos dialogando e mostrando a importância de formular uma lógica sistemática e usando a propriedade comutativa e o elemento neutro, para encontrar possibilidades de escrever a soma de dois números.

7.3.3 A tarefa das barrinhas

Nesta seção, apresentamos a segunda tarefa de adição com a ideia de partição com o total dez, usando as réguas de Cuisenaire[107]. Antes de aplicar a tarefa das barrinhas, a professora regente trabalhou, em dois dias da semana, com as réguas de Cuisenaire. Ela fez isso para que os alunos conhecessem o material, e além de conhecer que os alunos entendessem o valor correspondente de cada barrinha, as ideias de inclusão de número, a sequência numérica e a adição com uso das barrinhas.

[107] As réguas de Cuisenaire são barras retangulares com cores e comprimentos diferentes. O material utilizado nessa pesquisa faz parte do acervo do pesquisador.

Figura 74 – Aluno trabalhando com as barrinhas



Fonte: Arquivo do pesquisador

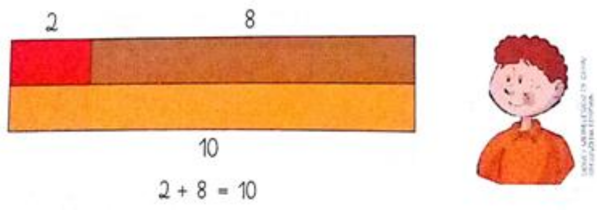
Em 3 de abril de 2018, aplicamos a tarefa das barrinhas com os alunos numa aula de 50 minutos. Distribuímos uma folha com a tarefa a cada aluno e pedimos que preenchessem o cabeçalho. Depois que nos certificamos de que todos já haviam preenchido, realizamos algumas estratégias de apoio (SANTOS, 1997; SANTOS-WAGNER, 2008) para possibilitar que todos entendessem a tarefa proposta na ficha. Ou seja, solicitamos que fizessem uma leitura silenciosa e, em seguida, pedimos à aluna Mel que lesse junto com os colegas a letra (a). Conversamos com os alunos da turma sobre a compreensão do enunciado do problema considerando os parâmetros estabelecidos e estratégias sistemáticas de resolução (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996). Em seguida, solicitamos à aluna Pérola que realizasse a leitura coletiva da pergunta da letra (b) junto com seus colegas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, 2011).

Figura 75 – Tarefa das barrinhas

Data: 03/04/2018

Tarefa 2: Leia com atenção a questão abaixo e responda o que se pede:

João descobriu uma maneira de obter 10 juntando duas barrinhas coloridas, veja como ele fez a adição que ele indicou.



a) Use as barrinhas coloridas e descubra todas as outras maneiras de obter 10. Indique as adições correspondentes.

b) Qual o total de possibilidades de obter 10 juntando as barrinhas?

Objetivo geral: Investigar o raciocínio combinatório dos alunos, ao resolverem um problema de adição que envolve o raciocínio combinatório após a intervenção do pesquisador sobre estratégias de enumeração e contagem.

Objetivo específico: Desenvolver e investigar tipos de enumerações (sistemática, não sistemática, completa ou incompleta) e tipos de contagem (contagem direta, contagem por meio de associações entre os elementos ou contagem por meio de operações) a partir das propriedades comutativa e do elemento neutro da adição e de pares não ordenados.

Fonte: (Adaptado de Dante, 2016, p. 134, 1.º ano, Livro do professor)

Fizemos algumas perguntas aos alunos para saber se deveriam escrever só algumas possibilidades com duas barrinhas com soma dez ou se deveriam escrevê-las todas. Embora no problema não estivesse escrito que era para usar duas barrinhas, procedemos à reflexão na ação[108] (SCHÖN, 1992) e pedimos que encontrassem a soma dez usando uma ou duas barrinhas. Após a leitura e conversa com os alunos sobre a tarefa, pedimos que alguns explicassem o que era para fazer. Vejamos algumas dessas respostas.

> **Manuela:** Tem que pegar e ver quantas possibilidades que você fez que a soma dá dez e escrever quantas possibilidades.
> **Red:** Ah, já sei! O total quando a gente formar 10 aqui, a gente vai ter que juntar o total para dar o valor daqui. É para somar 10, mais 10, mais 10 e contar quanto deu o resultado?
> **Pesquisador:** Não.
> **Red:** É para fazer o quê? Calma aí, deixa eu pensar.

[108] Refletimos sobre o que estávamos fazendo no momento da ação, sem que a tarefa fosse interrompida e ao mesmo tempo interferimos na situação pedagógica em desenvolvimento.

> **Pesquisador:** Você estava virado para trás na hora em que estávamos discutindo o problema.
> **Red**: É para juntar o valor das barrinhas que deu 10.

Solicitamos que o aluno Red fizesse a leitura individual do problema e discutimos novamente com a turma. Em seguida, solicitei que Red explicasse o que entendeu.

> **Red:** É pra... pra... (não soube explicar).

Conversamos com Red sobre a atenção, pois ficou mexendo na garrafa de água e no lápis enquanto discutíamos o problema. Aqui notamos a presença de um obstáculo (BROSSEAU, 1976) relacionado ao comportamento e à atenção necessária para a compreensão do problema.

> **Pesquisador:** Red, nós vamos ter que escrever as possibilidades. O que são possibilidades?
> **Lipinho:** Maneiras.
> **Pesquisador:** Nós vamos escrever os jeitos ou as maneiras de escrever o dez usando uma ou duas barrinhas e depois contar quantas são.

Verificamos que o raciocínio de Red era o de somar os valores das barrinhas, semelhante ao erro que outros alunos haviam cometido na tarefa do dominó. Depois de conversarmos com a turma sobre o entendimento do problema, solicitamos que resolvessem a tarefa. A aluna Manuela e o aluno Lipinho demonstraram ter compreendido que era para construir todas as possibilidades de somas com uma ou com duas barrinhas, respeitando o parâmetro estabelecido e depois contar as possibilidades. Diante disso, Lipinho apresentou outra palavra para explicar possibilidades, chamando de maneiras, o que nos traz evidências de que tanto as ideias lógicas matemáticas estavam sendo desenvolvidas, como a compreensão dos enunciados matemáticos relacionados à enumeração e contagem.

Enquanto os alunos resolviam, caminhamos pela sala para ver as estratégias de resolução. Verificamos que alguns estavam seguindo as orientações dadas sobre fazer os números do menor para o maior, somando os extremos e comutando a soma, enquanto outros fizeram de forma aleatória. Após cinco minutos, quando todos já haviam concluído a tarefa, recolhemos a atividade. No quadro a seguir, apresentamos as categorias de análise das resoluções dos alunos.

Quadro 25 - Categorização das estratégias de resolução para a enumeração das barrinhas com o total dez

	Estratégias de enumeração	**Característica**	**Alunos**		
1	Escrever as somas com duas parcelas com o total dez, repetindo possibilidades com a mesma configuração e esquecendo-se de algumas possibilidades.	Está relacionada a alguns tipos de erros de repetição e de não exibição de todas as possibilidades que alunos podem cometer, ao resolverem problemas que envolvem o raciocínio combinatório (NAVARRO; BATANERO; GODINO, 1996; BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996).	**Não sistemática incompleta**	**Sistemática incompleta**	**Sistemática completa**
				Bela	
2	Desenhar e escrever todas as somas de duas parcelas com o total dez. Aqui o aluno não apenas realiza as somas 0 + 10, 10 + 0, 1 + 9, 9 + 1, 2 + 8, 8 + 2, 3 + 7, 7 + 3, 4 + 6, 6 + 4 e 5 + 5, mas também desenha as barrinhas que representam esses totais.	Esta solução está relacionada às soluções inteiras não negativas de duas parcelas de números naturais com o total dez e com a representação pictórica (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991; BACHX; POPPE; TAVARES, 1975).	**Não sistemática incompleta**	**Sistemática incompleta**	**Sistemática completa**
					Flora Malves Pérola Sol
3	Escrever somas com duas parcelas repetindo possibilidades com a mesma configuração. Aqui o aluno pode escrever a soma 5 + 5 = 10 e reescrevê-la	Está relacionada a alguns tipos de erros de repetição que alunos podem cometerem problemas de enumeração, ao resolverem problemas que envolvem o raciocínio combinatório (NAVARRO; BATANERO; GODINO,	**Não sistemática incompleta**	**Sistemática incompleta**	**Sistemática Completa**
					Lipinho

	contando como uma possibilidade distinta.	1996; BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996).			
4	Desenhar algumas barrinhas com o total dez esquecendo-se de desenhar outras possibilidades.	Está relacionada a alguns tipos de erros de não exibição de todas as possibilidades que alunos podem cometer ao resolverem problemas de enumeração que envolvem o raciocínio combinatório (NAVARRO; BATANERO; GODINO, 1996; BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996).	**Não sistemática incompleta**	**Sistemática incompleta**	**Sistemática completa**
			Moranguinho Red		
5	Escrever todas as possíveis somas de duas parcelas com o total dez: 0 + 10, 10 + 0, 1 + 9, 9 + 1, 2 + 8, 8 + 2, 3 + 7, 7 + 3, 4 + 6, 6 + 4 e 5 + 5.	Está relacionada às combinações completas e representa todas as soluções inteiras não negativas das somas de duas barrinhas com o total dez (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991; BACHX; POPPE; TAVARES, 1975).	**Não sistemática incompleta**	**Sistemática incompleta**	**Sistemática completa**
					Athayde Cláudia Estela Felipe Manuela
6	Escrever as somas 1 + 9, 9 + 1, 2 + 8, 8 + 2, 3 + 7, 7 + 3, 4 + 6, 6 + 4 e 5 + 5 esquecendo-se das somas 0 + 10 e 10 + 0.	Está relacionada às combinações completas e representa todas as soluções inteiras positivas da soma de duas barrinhas com o total dez (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991; BACHX; POPPE; TAVARES, 1975)	**Não sistemática incompleta**	**Sistemática incompleta**	**Sistemática completa**
				Gonçalves	

<table>
<tr><td>7</td><td>Errar no critério (parâmetro) de partição estabelecido com o total dez. Aqui o aluno desenharia barrinhas com outros totais cuja soma é diferente de dez, por exemplo, o aluno desenharia a barrinha com valor três e a barrinha com o valor dois, cujo total da soma é igual a cinco.</td><td>Esta solução está relacionada ao erro de não atentar para os critérios (parâmetros) estabelecidos (BATANERO; GODINO; NAVARRO–PELAYO, 1996).</td><td colspan="3">Nenhum aluno desenvolveu este tipo de solução.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">Construir pares ordenados.</td><td rowspan="2">Os pares ordenados são uma das estratégias de resolução para a organização das possibilidades (BACHX; POPPE; TAVARES, 1975).</td><td>Não sistemática

incompleta</td><td>Sistemática incompleta</td><td>Sistemática completa</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Mel</td></tr>
<tr><td></td><td>Não usar nenhum tipo de enumeração.</td><td>Neste caso, o aluno não atende ao tipo de solução que é solicitada no problema (BATANERO; GODINO; NAVARRO–PELAYO, 1996).</td><td colspan="3">Nenhum aluno utilizou este tipo de solução.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

O quadro com as categorias das respostas de enumerações mostra-nos que as estratégias intuitivas dos alunos foram visuais[109] (desenhos) e analíticas (cálculo ou pares ordenados). Notamos, ainda, que a maior parte dos alunos realizaram enumerações sistemáticas completas, ou seja, usaram algum tipo de raciocínio lógico que possibilitou encontrar todas as enumerações possíveis, seja por meio de desenhos, seja por meio das somas usando a comutatividade. Além disso, verificamos que todos os alunos respeitaram o parâmetro (critério)

[109] Houve alunos que usaram as réguas de Cuisenaire para encontrar possibilidades. Outros pintaram os desenhos com as cores da régua para representar as possibilidades.

estabelecido. No quadro a seguir, apresentamos as categorias de raciocínio dos alunos no processo de contagem.

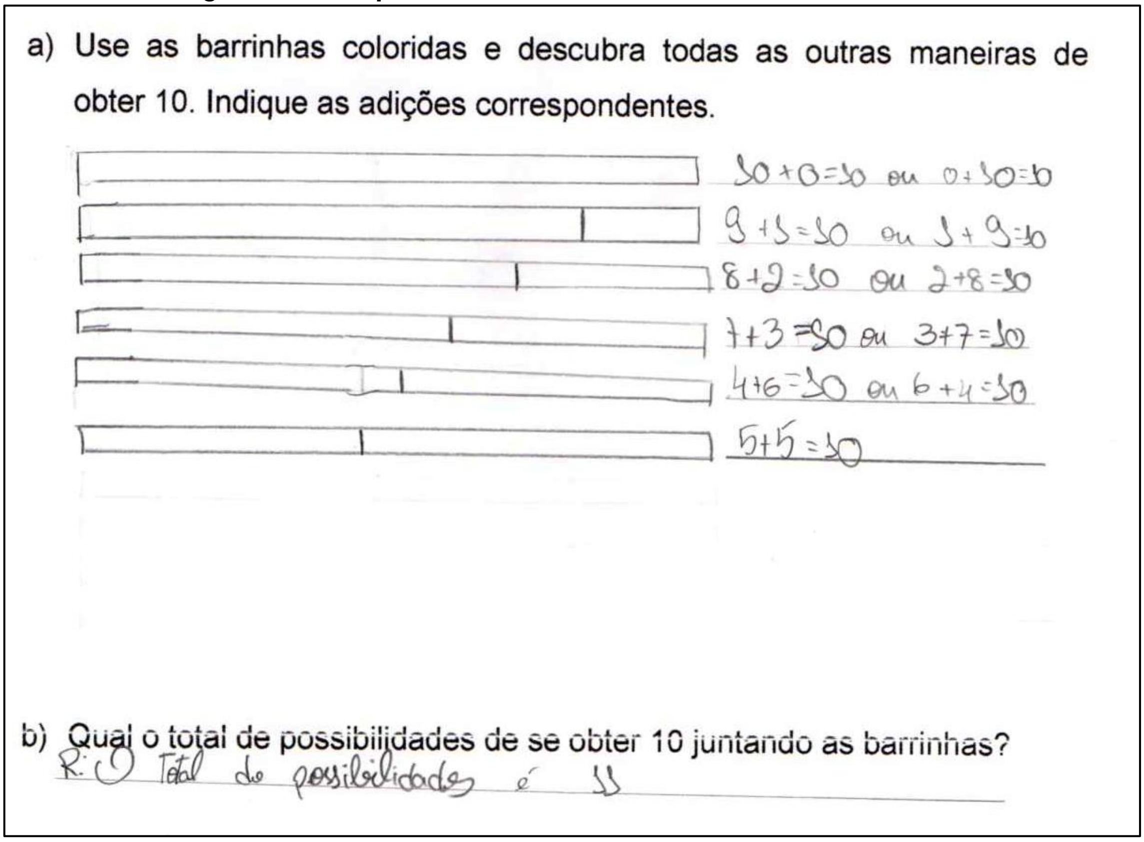
Quadro 26 – Estratégias de contagem dos alunos no problema das barrinhas

	Estratégias de contagem	**Característica**	**Alunos**
1	Contagem das somas realizadas com a que foi dada no problema.	Esta solução está relacionada ao tipo de estratégia em que o aluno já considera a possibilidade dada como uma das soluções escrevendo outras distintas.	Bela Flora Gonçalves Pérola
2	Contagem das possibilidades de somas que escreveu.	Esta contagem está relacionada à solução em que o aluno conta todas as possibilidades que desenhou, podendo ter exibido, ou não, todas as enumerações.	Athayde Cláudia Estela Felipe Gonçalves Lipinho Malves Manuela Mel Moranguinho Sol
3	Contagem da soma do valor de algumas barrinhas que desenhou.	Neste caso, o aluno não faz a contagem solicitada e realiza outro tipo de contagem, que é a soma de pontos.	Red

Fonte: Elaborado pelo pesquisador

Diferentemente do que ocorreu na tarefa do dominó, todos os alunos, exceto Red, fizeram contagem de enumerações. Este, em vez de contar as enumerações, somou valores de algumas barrinhas que havia desenhado. Já as alunas Malves, Flora, Pérola e Sol resolveram a tarefa, desenhando as barrinhas e somando os valores correspondentes. Fizeram os cálculos usando a comutatividade e o elemento neutro da adição, o que nos deu indícios de que suas respostas foram influenciadas por nossa intervenção, quando discutimos estratégias sistemáticas de resolução em problemas de adição com a ideia de partição. Ilustramos esse tipo de solução com a resposta da aluna Malves apresentada a seguir.

Figura 76 – Resposta da aluna Malves na tarefa das barrinhas


a) Use as barrinhas coloridas e descubra todas as outras maneiras de obter 10. Indique as adições correspondentes.

10+0=10 ou 0+10=10

9+1=10 ou 1+9=10

8+2=10 ou 2+8=10

7+3=10 ou 3+7=10

4+6=10 ou 6+4=10

5+5=10

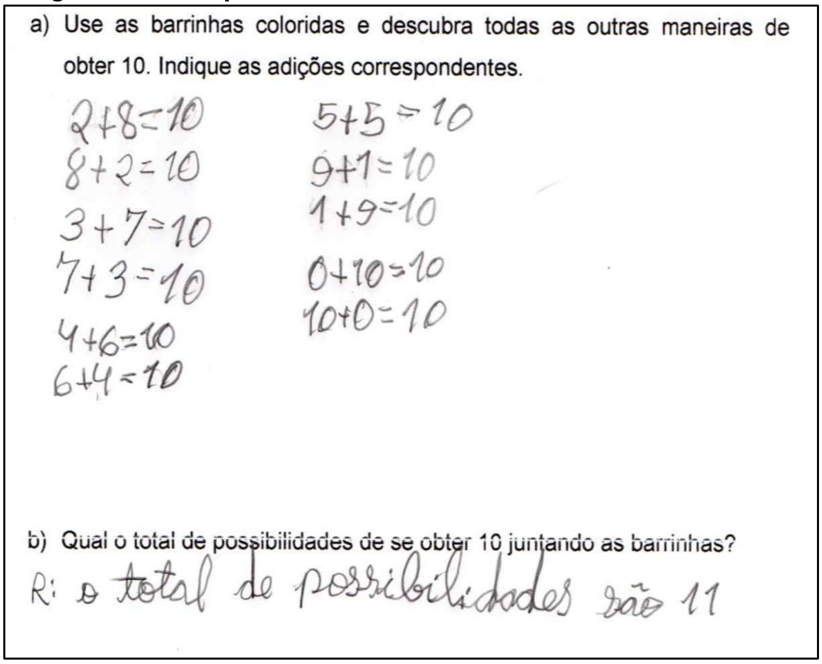
b) Qual o total de possibilidades de se obter 10 juntando as barrinhas?

R: O Total de possibilidades é 11

Fonte: Arquivo do pesquisador

O tipo de solução de Malves, Flora, Pérola e Sol é chamado por autores brasileiros da combinatória, como Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991), Bachx, Poppe e Tavares (1975), de soluções inteiras não negativas. Outra forma de representar algebricamente essa estratégia de resolução é escrevê-la como o conjunto de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 = 10$. Já os alunos Athayde, Cláudia, Estela, Felipe e Manuela, embora não tivessem desenhado as barrinhas, fizeram a enumeração sistemática por meio da propriedade comutativa e do elemento neutro da adição, para encontrar as possibilidades. A estratégia intuitiva destes cinco alunos (Athayde, Cláudia, Estela, Felipe e Manuela) baseia-se na resolução analítica, seguindo ideias orientadas e discutidas por nós em nosso processo de intervenção pedagógica, conforme pode ser visto na resolução da aluna Estela apresentada a seguir.

Figura 77 – Resposta da aluna Estela na tarefa das barrinhas



a) Use as barrinhas coloridas e descubra todas as outras maneiras de obter 10. Indique as adições correspondentes.

2+8=10
8+2=10
3+7=10
7+3=10
4+6=10
6+4=10
5+5=10
9+1=10
1+9=10
0+10=10
10+0=10

b) Qual o total de possibilidades de se obter 10 juntando as barrinhas?

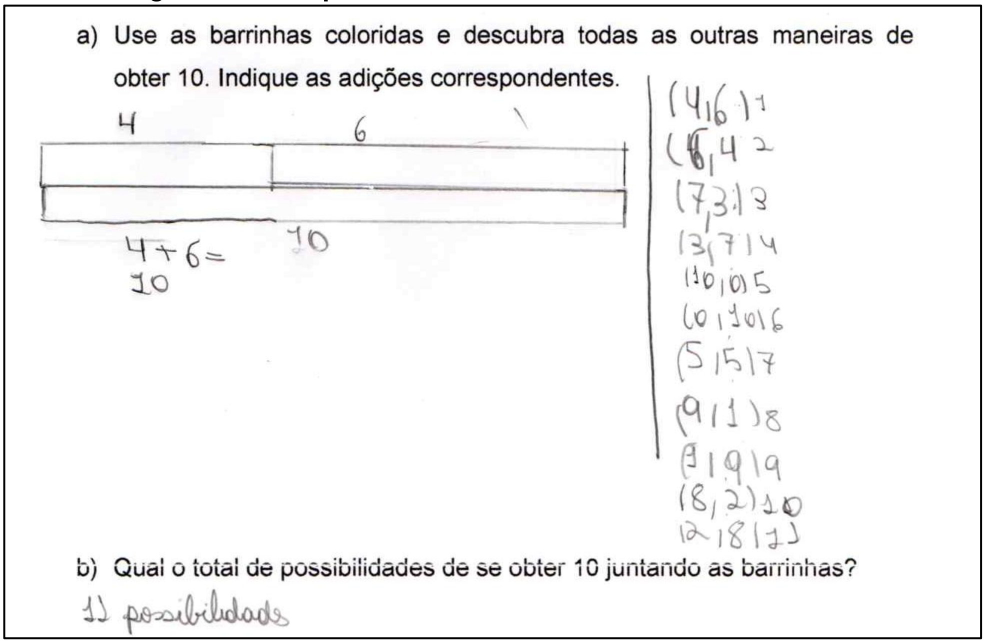
R: o total de possibilidades são 11

Fonte: Arquivo do pesquisador

Estes nove alunos (Malves, Flora, Pérola, Sol, Athayde, Cláudia, Estela, Felipe e Manuela) conseguiram construir as enumerações, respeitando o critério estabelecido (que era a soma com o total dez). Usaram um procedimento sistemático por meio da comutatividade, que contribuiu para a formação de todas as possibilidades. Esses alunos não construíram enumerações com as mesmas configurações, ou seja, eles não repetiram possibilidades e fizeram corretamente a contagem das enumerações como solicitado no problema. Todas essas características presentes na resolução dos alunos fazem parte do desenvolvimento do raciocínio combinatório (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996; ROA, 2000).

A aluna Mel foi a única que resolveu por meio da construção de pares de números. “Quando o aluno busca compreender o problema que lhe é dado e procura representá-lo em um código possível de operacionalização, está fazendo, quase que simultaneamente, um trabalho de descodificação e de codificação [...]” (ANDRADE, 2017, p. 369). Nesse sentido, a aluna Mel apresenta-nos indícios de que estava se apropriando de ideias trabalhadas durante nossas intervenções docentes. Construiu, de forma sistemática, os pares ordenados para enumerar e fazer a contagem, conforme se pode observar na resolução a seguir.

Figura 78 – Resposta da aluna Mel na tarefa das barrinhas

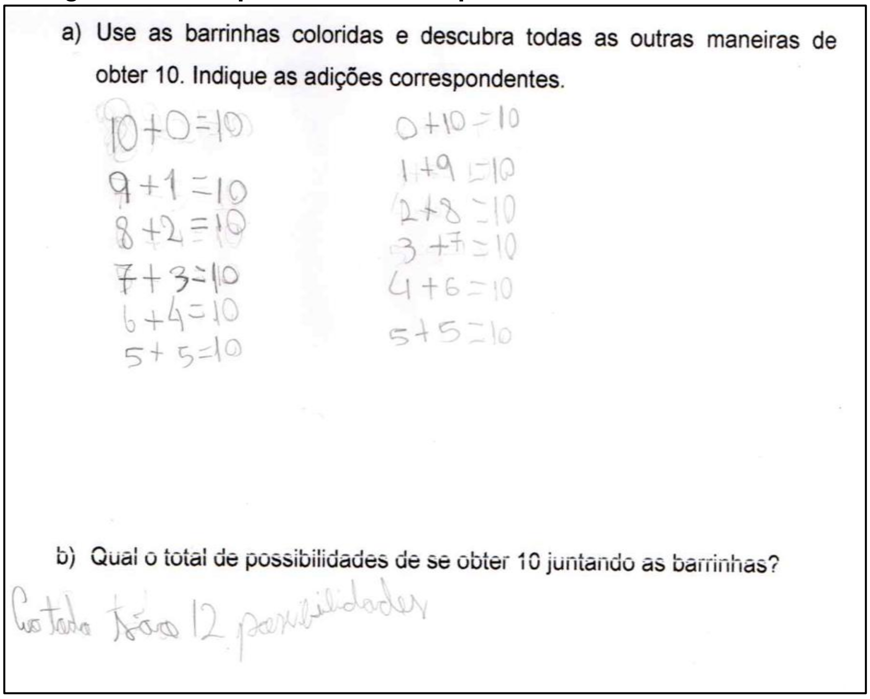


Fonte: Arquivo do pesquisador

Mel começou sua resolução por desenhos, apresentou a soma 4 + 6 = 10 e mudou para outra estratégia de resolução: a construção de pares ordenados. De acordo com Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), uma das características que demonstram a compreensão conceitual e procedimental dos alunos ocorre quando estes passam de um modo de representação para outro e reconhecem quando um determinado procedimento é adequado para a resolução. Notamos, ainda, que Mel respeitou o parâmetro estabelecido e construiu todas as configurações (enumerações) possíveis.

Analisando a resposta de Lipinho, embora o aluno tivesse usado a comutatividade da adição para encontrar as possibilidades com uma ou com duas barrinhas com soma igual a dez, ele repetiu a soma 5 + 5 como possibilidades distintas, o que o levou a encontrar 12 possibilidades como total.

Figura 79 – Resposta do aluno Lipinho na tarefa das barrinhas


a) Use as barrinhas coloridas e descubra todas as outras maneiras de obter 10. Indique as adições correspondentes.

10+0=10
9+1=10
8+2=10
7+3=10
6+4=10
5+5=10

0+10=10
1+9=10
2+8=10
3+7=10
4+6=10
5+5=10

b) Qual o total de possibilidades de se obter 10 juntando as barrinhas?

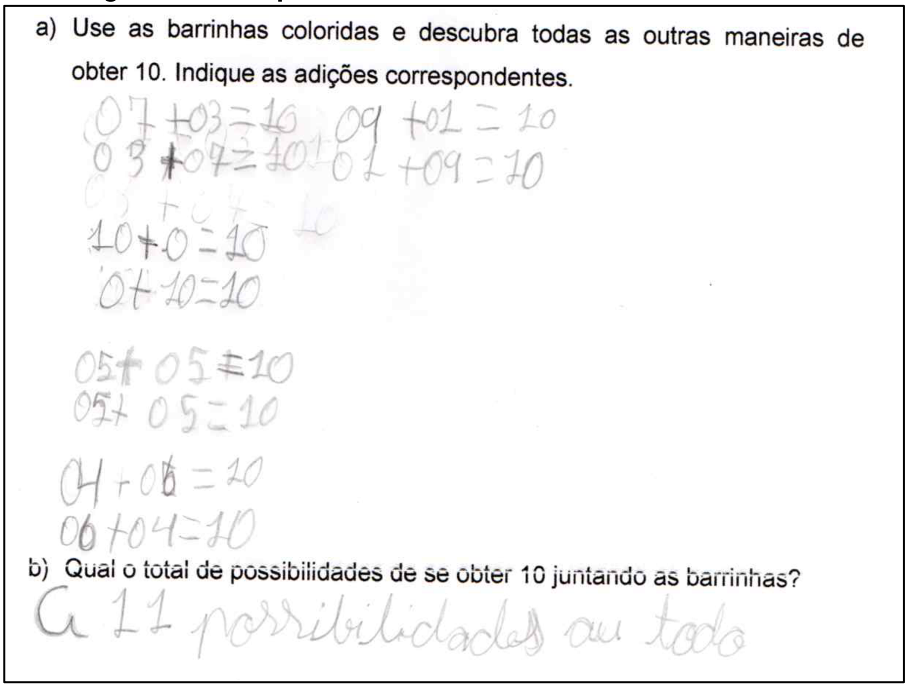
Fonte: Arquivo do pesquisador

No nosso retorno individual com o aluno Lipinho, buscamos auxiliá-lo na compreensão de que a soma 5 + 5 = 10 e a soma simétrica representavam a mesma configuração (pois se trata de uma alocação não ordenada, ou seja, quando a ordem ou a troca de posição dos números não geram possibilidades distintas) (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996).

> **Pesquisador:** Você encontrou 12 possibilidades? Como encontrou as 12 possibilidades?
> **Lipinho:** Aqui tem seis e aqui tem seis.
> **Pesquisador:** Tem alguma que é repetida?
> **Lipinho:** Tem.
> **Pesquisador:** Qual?
> **Lipinho:** Essa aqui mais essa (*aponta para o caso 2 + 8 = 10 e 8 + 2 = 10*).
> **Pesquisador:** Mas estas possibilidades não são diferentes?
> **Lipinho:** É. São.
> **Pesquisador:** Veja esta aqui que você colocou 5 + 5 = 10 e a outra 5 + 5 = 10. Esta é a mesma possibilidade ou são diferentes?
> **Lipinho:** Ah! É mesmo! É a mesma possibilidade.
> **Pesquisador:** Quando você fez as possibilidades depois analisou o que tinha feito?
> **Lipinho:** Eu analisei primeiro, porque eu só mudei de posição. Eu não tinha percebido na hora.

Semelhantemente ao que fez o aluno Lipinho, a aluna Bela repetiu a soma 5 + 5. Os pesquisadores Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996) classificam esse tipo de erro como *erro de ordem,* que consiste em confundir os critérios de combinações e variações e decidir se a ordem é relevante ou não no processo de resolução do problema.

Figura 80 – Resposta da aluna Bela na tarefa das barrinhas


a) Use as barrinhas coloridas e descubra todas as outras maneiras de obter 10. Indique as adições correspondentes.

07 + 03 = 10 09 + 01 = 10
03 + 07 = 10 01 + 09 = 10
10 + 0 = 10
0 + 10 = 10
05 + 05 = 10
05 + 05 = 10
04 + 06 = 10
06 + 04 = 10

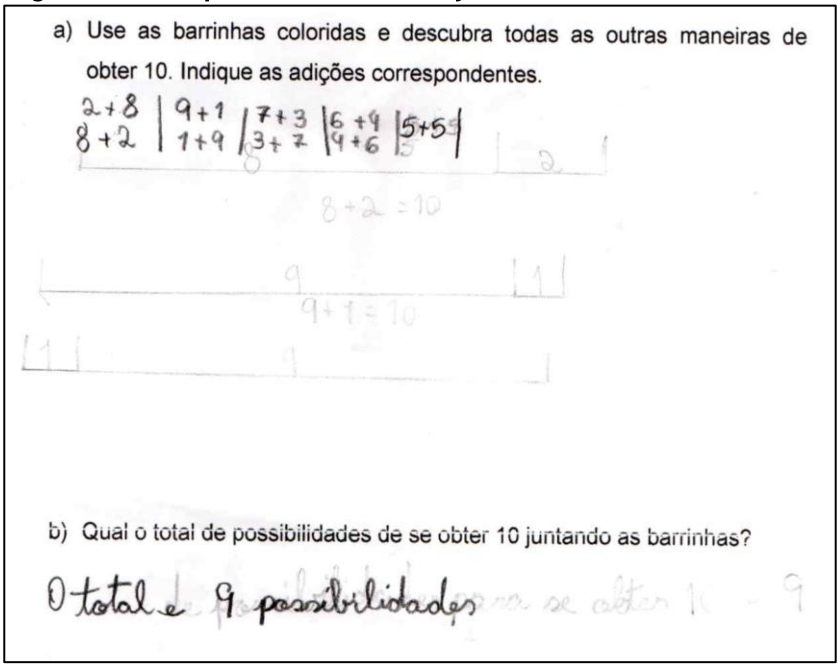
b) Qual o total de possibilidades de se obter 10 juntando as barrinhas?

a 11 possibilidades ao todo

Fonte: Arquivo do pesquisador

Além do *erro de ordem*, Bela não fez as somas 2 + 8 e 8 + 2. Ela não percebeu que faltavam essas somas e a soma 5 + 5 só foi vista como uma possibilidade semelhante após nossa intervenção. De modo semelhante, embora a aluna Gonçalves tivesse usado a comutatividade para encontrar as possibilidades, não realizou as somas 10 + 0 e 0 + 10. Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996) classificam esse tipo de erro como erro de *esquecer alguns tipos possíveis de partição*. Esses pesquisadores espanhóis também chamam esse tipo de solução como soluções sistemáticas incompletas. Tratam-se de soluções em que os alunos usam algum tipo de raciocínio lógico para encontrar as possibilidades, mas não exibem todas as configurações possíveis, conforme solicitado no problema (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996; ROA, 2000).

Figura 81 – Resposta da aluna Gonçalves na tarefa das barrinhas



a) Use as barrinhas coloridas e descubra todas as outras maneiras de obter 10. Indique as adições correspondentes.

2+8 | 9+1 | 7+3 | 6+4 | 5+5
8+2 | 1+9 | 3+7 | 4+6 |

8+2 = 10

9+1 = 10

b) Qual o total de possibilidades de se obter 10 juntando as barrinhas?

O total é 9 possibilidades

Fonte: Arquivo do pesquisador

> **Pesquisador:** Você encontrou quantas possibilidades?
> **Gonçalves:** Nove.
> **Pesquisador:** Você acha que encontrou todas?
> **Gonçalves:** Não.
> **Pesquisador:** Por que você acha que não? Qual que faltou?
> **Gonçalves**: Acho que faltou uma.
> **Pesquisador:** Qual?
> **Gonçalves:** Não lembro certo.
> **Pesquisador:** Você fez um e nove, nove e um, dois e oito, oito e dois, seis e quatro, quatro e seis, cinco e cinco. Que outros números somados dariam resultado dez? (*A aluna fica pensando.*)
> **Pesquisador:** Observe a barrinha completa do dez. Essa barrinha teria que ser somada com qual número para dar 10?
> **Gonçalves:** 10 + 0.
> **Pesquisador:** E qual seria a outra?
> **Gonçalves:** 0 + 10.
> **Pesquisador:** Você não se lembrou dessas na hora?
> **Gonçalves:** Não.
> **Pesquisador:** Por quê?
> **Gonçalves:** Porque eu estava mais concentrada nessas daqui. O zero mais dez foi difícil de lembrar na hora.

À medida em que fomos ouvindo os alunos e verificando suas respostas (tanto escritas quanto orais), fomos replanejando nossas ações, no intuito de criar estratégias que pudessem auxiliá-los a desenvolver procedimentos matemáticos que ajudassem no processo de enumeração e encontrassem todas as partições possíveis, sem esquecer alguma possibilidade. D'Ambrosio (2017) diz que

> [...] as consequências do trabalho do professor-pesquisador que dá voz e razão ao aluno quando analisa sua produção escrita são muitas

> e complexas. Esse professor-pesquisador junta elementos para desenvolver o modelo da matemática de seus alunos, o qual serve para sustentar o trabalho de sala de aula de, pelo menos, três maneiras essenciais. Primeiro, influencia a escolha de situações-problema que serão colocadas para dar prosseguimento ao trabalho. [...]. Segundo, influencia não apenas a ordem em que serão desenvolvidas as discussões das soluções, mas também o foco desses debates. [...]. Terceiro, leva o professor a enriquecer seu próprio repertório de possibilidades para uma situação problema e, às vezes, até a ampliar a sua própria compreensão da riqueza das relações matemáticas possíveis com um problema, modificando, assim, o seu conhecimento matemático (D'AMBROSIO, 2017, p. 127-128).

Nesse sentido, pensamos não só nas tarefas que já havíamos aplicado (tarefa do dominó e das barrinhas), mas também nas tarefas posteriores que seriam aplicadas. Ouvir os alunos ajudou-nos a antecipar possíveis tipos de erros que eles poderiam cometer em seus processos de resolução. Isso possibilitou ampliar nossas estratégias de apoio aos estudantes, seja nos questionamentos feitos a eles, seja nas apresentações de estratégias de resoluções visuais e/ou analíticas. De um modo geral nos auxiliou a pensar nas relações matemáticas possíveis de serem construídas e até mesmo em soluções equivocadas que os alunos poderiam construir durante o processo de resolução.

A aluna Moranguinho desenhou as barrinhas com a soma dez usando adição com a ideia de completar. A ausência de um procedimento lógico sistemático que a ajudasse a encontrar todas as possibilidades fez com que a estudante se esquecesse de alguns resultados.

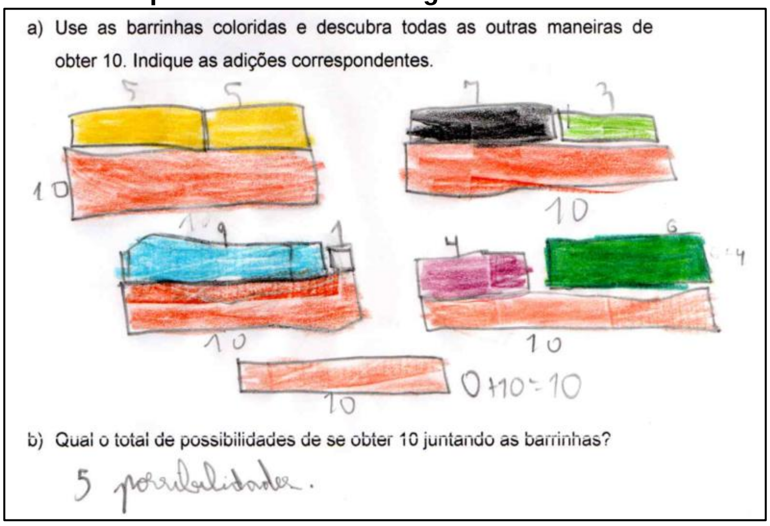
> **Moranguinho:** Aqui nas barrinhas eu usei as barrinhas coloridas, aí eu peguei e fui ver a tabuada das barrinhas. Na tabuada não, a ordem das barrinhas. Aí eu fui somando e fazendo aquela coisa, aquele esquema, fui procurando soma que dá dez.
> **Pesquisador:** Você foi procurando de qualquer jeito ou usando alguma estratégia que pudesse ajudar?
> **Moranguinho:** Eu pensei assim: eu pegaria um número aleatório 7 para chegar a 10. Oito, nove, dez (conta nos dedos). Sete mais três dez. E aqui eu coloquei o total de possibilidades que eu achei.
> **Pesquisador:** Você achou cinco possibilidades?
> **Moranguinho:** Achei.
> **Pesquisador:** Você achou cinco mais cinco, sete mais três.
> **Moranguinho:** Nove mais um, quatro mais seis, zero mais dez.
> **Pesquisador:** E a minha aqui deu dois mais oito.
> **Moranguinho:** Ah, é! Nossa Senhora! (*risos*).
> **Pesquisador:** Então, teria quantas possibilidades?
> **Moranguinho:** Seis.
> **Pesquisador:** Será que teria mais? Como você garante que tem seis possibilidades?
> **Moranguinho:** Acho que teria mais.

> **Pesquisador:** Que outra possibilidade você acha que teria?
> **Moranguinho:** *Se pudesse mudar a ordem, porque a ordem não altera o valor*. Então, poderia ser 6+4 ou 4+6, 3+7 ou 7+3, 9+1, ou 1+9. 5+5 aqui é igual. E aqui 0+10 e poderia ser 10+0, 2+8 e 8+2.

A ideia intuitiva da aluna foi baseada em experiências que possuía de fazer adições verificando quanto falta para dar o total e o diálogo com o pesquisador ajudou que ela pensasse também em outras possibilidades a partir da comutatividade da adição. “Na resolução de um problema a intuição é muito importante, pois constitui o momento que dá um sentido e uma certeza de que o caminho para uma solução está encontrado [...]” (VALE, 2017, p. 140). Nesse sentido, quanto maior for a quantidade de tipos de estratégias de resolução trabalhadas pelos professores com os seus alunos, maior será o repertório intuitivo desses para resolver problemas semelhantes. Por isso, torna-se cada vez mais necessário a interação do professor com o aluno, fazendo perguntas que o façam pensar sobre o problema (SANTOS, 1997).

Durante a nossa intervenção, Moranguinho, além de pensar nas outras possibilidades que não havia escrito, fez uma reflexão sobre a ordem em que os números apareciam na soma e usou estratégia sistemática da comutatividade para citar as outras possíveis possibilidades. Batanero, Gogino e Navarro-Pelayo (1996) consideram que, em problemas de partição, distinguir se a ordem dos elementos é relevante ou não e usar estratégias sistemáticas de enumeração é uma das etapas de desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Figura 82 – Resposta da aluna Moranguinho na tarefa das barrinhas



Fonte: Arquivo do pesquisador

No decorrer de nosso processo de intervenção, de forma empática fomos ouvindo os alunos para compreender seu raciocínio e ajudá-los a desenvolver estratégias intuitivas sistemáticas do raciocínio combinatório. Ao se aproximar para conversar sobre sua resolução, o aluno Red começou dizendo:

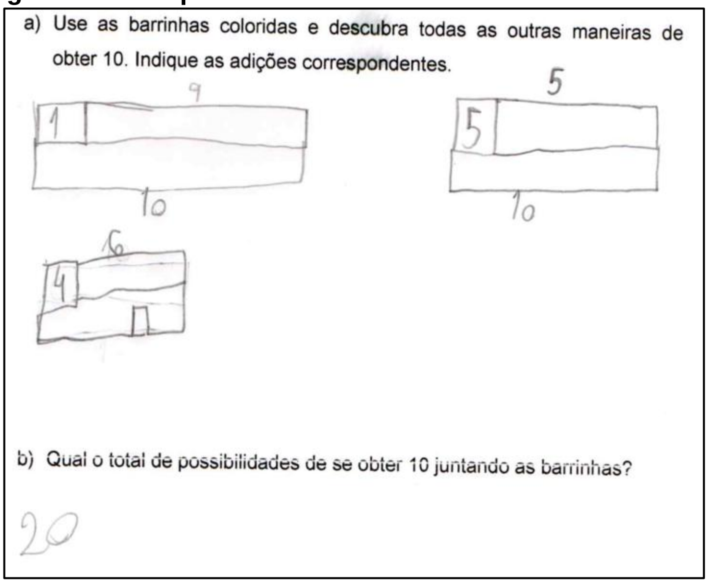
> **Red:** Não está bom.
> **Pesquisador:** Por que não está bom?
> **Red:** Porque eu sempre estou errando.
> **Pesquisador:** Aqui estamos aprendendo juntos. Tá bom?
> **Red:**Tá.
> **Pesquisador:** Aqui você colocou três possibilidades: 1+9, 4+6 e 5+5.
> Pedi que Red sentasse corretamente na carteira, pois estava inquieto.
> **Pesquisador:** Quantas possibilidades existem?
> **Red:** Três
> **Pesquisador:** Por que você colocou vinte? De onde veio esse vinte?
> **Red:** Juntando tudo isso aqui. Juntei esse (9) com esse (5) e com esse (6).
> **Pesquisador:** Você fez nove, mais cinco, mais seis que vai dar vinte? Por que você fez isso?
> **Red:** Porque vai dar o valor de possibilidades que eu fiz juntando as barrinhas.
> **Pesquisador:** Se eu somar nove, mais cinco e mais seis, vai dar 20 possibilidades? O que te fez pensar que era para somar esses valores?
> **Red:** Isso eu não sei. É porque eu estava muito desconcentrado. Aí eu fiquei achando outra coisa.
> **Pesquisador:** Você achou que era para fazer isso?
> **Red:** É porque era pouco tempo para fazer. Aí eu fiz assim.
> **Pesquisador:** Aqui, o que eu queria era que você pensasse na forma de somar duas barrinhas para dar o total dez. Então, você fez um mais nove que dá dez. Se eu inverter a barrinha, vai dar quanto?
> **Red:** Dez.
> **Pesquisador:** Aqui você fez quatro mais seis. Se inverter a barrinha seis mais quatro, vai dar quanto?
> **Red:** Dez.
> **Pesquisador:** Você fez cinco mais cinco dez. Se inverter vai continuar cinco mais cinco; então, não faz diferença, ok?
> **Red:** É.
> **Pesquisador:** Teria outras possibilidades?
> **Red:** Eu queria fazer com zero. Dez mais zero que ia dar dez.
> **Pesquisador:** E por que você não fez?
> **Red:** Eu pensei que não podia.
> **Pesquisador:** Podia, sim. Então, vamos pensar quantas possibilidades temos que encontrar? Zero mais dez é...
> **Red:** Dez.
> **Pesquisador:** Qual a outra possibilidade?

Durante a aplicação das tarefas e os retornos individuais, Red ficava inquieto. Conforme fomos conversando com o aluno, tanto nas tarefas investigativas quanto nas aulas ministradas pela professora regente, ele começou a sentir-se valorizado e querer participar das discussões de forma mais efetiva. A regente de classe sempre ouvia o aluno e dava oportunidades para ele e outros irem ao quadro e apresentarem suas ideias de resolução. Quando o professor ouve a voz do aluno acreditando no valor matemático de sua produção, isso pode gerar algumas consequências.

> [...]. Primeiro, ele se sente membro integrante e valorizado da comunidade da sala de aula. Ele percebe que sua contribuição é levada a sério pelo professor e por seus colegas. Segundo, ele tem orgulho de suas descobertas e de seus *insights*, tornando-se mais preocupado com a forma de se expressar para que todos entendam. Terceiro, ele se torna interessado e participativo. Quarto, seguindo o exemplo do professor que ouve acreditando, ele aprende a ouvir a voz do outro e tenta relacionar a solução do outro à sua forma de pensar, o que, potencialmente, o leva a considerar novas possibilidades e novas construções (D’AMBROSIO, 2017, p. 128).

Mediante nossa intervenção, o aluno Red conseguiu fazer as outras possibilidades de forma oral, usando a comutatividade. Além disso, parece ter compreendido que, quando pedimos que contasse as possibilidades, não estávamos querendo que calculasse o valor das barrinhas, e sim contasse as listagens ou as enumerações construídas.

Figura 83 – Resposta do aluno Red na tarefa das barrinhas



Fonte: Arquivo do pesquisador

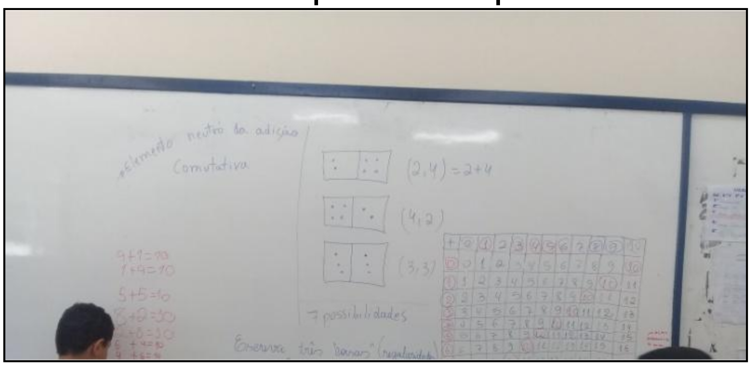
Nesta tarefa, embora Red não tivesse desenhado todas as possibilidades nem realizado a contagem das enumerações, desenhou as barrinhas respeitando o parâmetro estabelecido (com o total dez), o que não havia feito na tarefa de dominó. Isso nos deu evidências de que o aluno já estava se apropriando de alguns procedimentos do raciocínio combinatório.

Sabemos que a tarefa de buscar a compreensão lógica do pensamento da criança não é fácil diante da realidade vivida em algumas escolas. Dois motivos para isso são as condições de planejamento de aulas e o quantitativo de alunos por sala. Sabemos que a sala é heterogênea e isso demanda, cada vez mais, do professor tanto uma escuta individualizada quanto um planejamento individual por aluno, pois “[...] uma criança que não se aceita e não se respeita não tem espaço de reflexão, porque está na contínua negação de si mesma e na busca ansiosa do que não é e nem pode ser” (MATURANA, 2002, p. 31). A escuta individualizada pode ocorrer no coletivo, mas a fala do aluno, as suas expressões, seus comportamentos, entre outros fatores, tornam-se novos objetos de pesquisa e investigação, pois nem sempre a criança fala pela razão. Às vezes, ela fala pela emoção (MATURANA, 2002). Assim sendo, sem a compreensão do aluno como um todo, o professor nem sempre conseguirá ensinar os conceitos matemáticos.

7.3.3.1 Retorno coletivo

Em nosso retorno coletivo, conversarmos com os alunos sobre suas resoluções e discutimos as respostas para chegar à conclusão do total de possibilidades e das diferentes estratégias de resolução. Pedimos que quatro alunos apresentassem suas respostas no quadro, para, juntos, analisarmos os pontos e os contrapontos das resoluções. Ou seja: discutimos sobre repostas completas e incompletas, resoluções sistemáticas e não sistemáticas e ainda sobre as soluções analíticas e visuais.

Figura 84 – Aluno resolvendo no quadro sua resposta da tarefa das barrinhas



Fonte: Arquivo do pesquisador

A análise dos dados da resolução dos alunos deu-nos indícios de que, neste ano escolar, existe a possibilidade de desenvolver a enumeração sistemática nessa faixa escolar. Os alunos são capazes de identificar e formar as configurações combinatórias com as condições estabelecidas no problema, representar as configurações combinatórias por meio de símbolos (ou códigos) e encontrar procedimentos sistemáticos que auxiliem na formação de distintas configurações estabelecidas nos problemas matemáticos que envolvem situações concretas e com número pequeno de objetos, conforme orientam Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996).

7.3.4 Tarefa do lançamento de dados

Em 20 de abril de 2018, aplicamos a terceira tarefa de adição com ideia de combinação de dois números com soma igual a seis. Com o dado em nossas mãos, apresentamos o objeto aos alunos e verificamos o total de faces, o número de pontos em cada face e simulamos algumas jogadas com possíveis resultados obtidos na soma de dois números no lançamento de dados. Como nas tarefas anteriores, realizamos a leitura individual, a coletiva e, em seguida, solicitamos que os alunos resolvessem a tarefa apresentada na figura a seguir.

Figura 85 – Tarefa dos dados

Escola ____
Nome ____
Idade: _________ Turma: _________ Data ______ / ______ / ______

Tarefa 3 – Leia com atenção a questão abaixo e responda ao que se pede:

Joguei dois dados e saíram 4 e 2. Veja o exemplo abaixo.

Esta é uma possibilidade de obter 6 pontos.

a) Quais são as outras possibilidades de obter 6 pontos jogando dois dados?

b) Qual o total de possibilidades de obter 6 pontos usando dois dados?

Objetivo geral: Investigar o raciocínio combinatório dos alunos ao resolverem um problema de adição que envolve o raciocínio combinatório após a intervenção do pesquisador sobre estratégias de enumeração e contagem.

Objetivos específicos: Desenvolver e investigar tipos de enumerações (sistemática, não sistemática, completa ou incompleta) e tipos de contagem (contagem direta, contagem por meio de associações entre os elementos ou contagem por meio de operações) com base nas propriedades comutativa e elemento neutro da adição e de pares ordenados; investigar se os alunos diferenciavam essa situação das anteriores em relação à soma com o elemento neutro, já que no dado não existe face com número zero; investigar se os alunos já distinguiam quando se pede para fazer contagem e quando o pedido é para enumerar.

Fonte: (Adaptado de DANTE, 2016, p. 24, 2.º ano, Livro do professor)

Recolhemos as tarefas à medida que os alunos iam concluindo e prosseguimos já brevemente a fazer uma análise geral das resoluções com base nos teóricos referenciados. Nos quadros a seguir, apresentamos um panorama das estratégias de enumeração e contagem dos alunos, sujeitos de nossa pesquisa.

Quadro 27 – Estratégias de enumeração dos alunos no problema dos dados com o total seis

	Estratégias de enumeração	**Característica**	**Alunos**	
1	Desenhar todas as possibilidades da soma de dois dados com o total seis.	Neste caso, o aluno desenha todas as possibilidades de dois dados com o total seis (estudos exploratórios).	**Sistemática completa**	**Não sistemática completa**
			Estela	Lipinho

2	Desenhar e escrever todas as possibilidades de somas com duas parcelas com o total seis com os valores dos dados. Aqui o aluno não apenas realiza as somas com os totais 1+5, 5 +1, 2+4, 4+2 e 3+3, mas também representa, de forma pictórica, essas possibilidades.	Esta solução está relacionada às soluções inteiras positivas da soma de dois dados com o total seis e com a representação pictórica (BACHAX; POPPE; TAVARES, 1975; MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991).	**Sistemática completa** Malves	**Não sistemática completa** Felipe
3	Considerar a possibilidade dada no problema e desenhar apenas as possibilidades que estavam faltando.	No problema original, espera-se que o aluno desenhe outras possibilidades de soma de dois dados com o total seis (DANTE, 2016).	**Sistemática completa**	**Não sistemática completa** Athayde Mel Sol
4	Desenhar algumas possibilidades com a soma de dois dados com o total seis, esquecendo-se de outras possibilidades.	Está relacionada a alguns tipos de erros que alunos podem cometer em problemas de enumeração, ao resolverem tarefas que envolvem o raciocínio combinatório (NAVARRO; BATANERO; GODINO, 1996; BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996).	**Sistemática incompleta** Flora	**Não sistemática incompleta** Moranguinho Bela Red
5	Desenhar algumas possibilidades da soma de dois dados com o total seis e repetir possibilidades com as mesmas configurações.	Está relacionada a alguns tipos de erros de repetição e de não exibição de todas as possibilidades que alunos podem cometer ao resolverem problemas que envolvem o raciocínio combinatório (NAVARRO; BATANERO; GODINO, 1996; BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996).	**Não sistemática completa**	**Não sistemática incompleta** Manuela
6	Escrever todas as possíveis somas de duas parcelas com o total seis, não atentando para a natureza das faces do dado que não possui o zero. 6+0, 0+6, 5+1, 1+5, 2+4, 4+2 e 3+3.	Está relacionada às combinações completas e representa todas as soluções inteiras não negativas de duas parcelas de números naturais com o total seis. Por outro lado, o aluno não atenta para a natureza dos elementos (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991; BACHX; POPPE; TAVARES, 1975; BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996).	**Sistemática completa** Cláudia	**Sistemática Incompleta**

7	Escrever as somas de duas parcelas com o total seis (5+1, 1+5, 2+4, 4+2 e 3+3) atentando para a não existência da soma com o zero.	Está relacionada às combinações completas e representa todas as soluções inteiras positivas de duas parcelas de números naturais com o total seis (MORGADO; PITOMBEIRA; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991; BACHX; POPPE; TAVARES, 1975).	**Sistemática completa** Pérola	**Não sistemática incompleta**
8	Errar no critério ou no parâmetro de partição estabelecido com o total seis.	Aqui o aluno desenharia dados com outros totais, cuja soma é diferente de seis; por exemplo, o aluno desenharia um dado com três pontos na face observada e desenharia outro dado com dois pontos na face observada, cujo total é igual a cinco (BATANERO; GODINO; NAVARRO–PELAYO, 1996).	**Sistemática completa** Gonçalves	**Sistemática Incompleta**
9	Não desenhar ou listar possibilidades (não enumerar).	Neste caso, o aluno não atende ao tipo de solução que é solicitada no problema (BATANERO; GODINO; NAVARRO–PELAYO, 1996).	Nenhum aluno utilizou esse tipo de solução.	

Fonte: Elaborado pelo pesquisador

De modo geral, as resoluções dos alunos foram por meio de desenhos, e não por cálculo, usando sistematizações completas, incompletas e não sistemáticas (completas ou incompletas). Segundo Vale (2017), nossas intuições surgem de representações mentais que adquirimos ao longo de experiências repetidas, sejam por manipulações de objetos e por descobertas, sejam por meio de estratégias obtidas ao resolver problemas. Além do desenvolvimento de estratégias de enumeração, os alunos desenvolveram estratégias de contagem, conforme apresentamos no quadro a seguir.

Quadro 28 – Estratégia de contagem dos alunos no problema dos dados

	Estratégias de contagem	Respostas pensadas pelo pesquisador com base nas respostas observáveis	Alunos
1	Contar a enumeração das somas ou dos desenhos dos dados que realizou com o total seis.	Neste caso, o aluno conta os desenhos ou as somas que encontrou, podendo ter exibido, ou não, todas as possibilidades.	Cláudia, Estela Felipe, Gonçalves Lipinho, Malves e Manuela

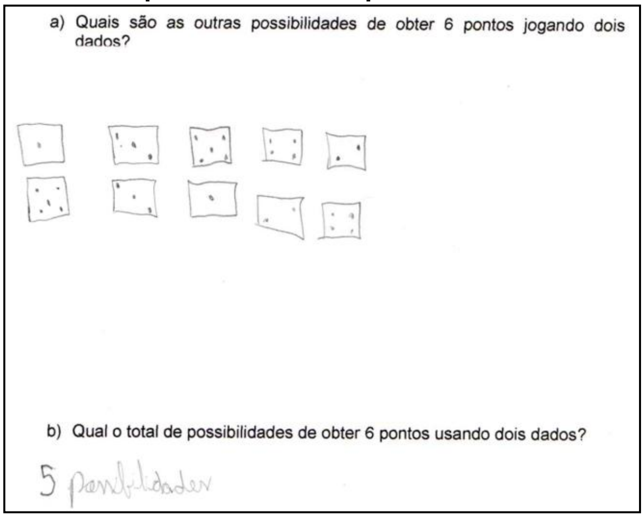
2	Contar os dados que desenhou ou as somas que encontrou, incluindo a que estava no problema.	Esta solução está relacionada ao tipo de estratégia em que o aluno já considera a possibilidade dada como uma das soluções, escrevendo outras distintas e podendo ter exibido todas as soluções ou só algumas.	Flora Moranguinho Athayde Mel Pérola Sol
3	Contar somente as enumerações que desenhou, descartando a solução dada no problema.	Esta solução está relacionada à contagem das possibilidades em que o aluno não conta com a solução que foi dada no problema.	Bela
4	Listar as possibilidades que desenhou.	Neste caso, o aluno não faz a contagem, mas apenas lista as enumerações que realizou.	Red

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Ao analisarmos as tarefas dos alunos, verificamos que todos realizaram algum tipo de contagem relacionada às enumerações. A exceção foi o aluno Red, que, em vez de dizer o total (número) de possibilidades, listou os tipos de possibilidades que encontrou. Trazemos, neste momento, detalhes de algumas resoluções para esclarecer os quadros já apresentados.

O aluno Lipinho desenhou as faces dos dados com soma seis, mas não realizou a operação de adição. Sua resposta foi dada por desenho, e não por cálculo. Ele respeitou o parâmetro estabelecido com o total seis e fez a contagem de todas as possibilidades. Verificamos também que distinguiu a não existência do zero na face do dado, pois, nesse aspecto, o problema difere das tarefas do dominó e das barrinhas. Atentar para os critérios de existência de determinadas possibilidades e respeitar os critérios estabelecidos são fundamentais no processo de desenvolvimento do raciocínio combinatório (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996).

Figura 86 – Resposta do aluno Lipinho na tarefa dos dados

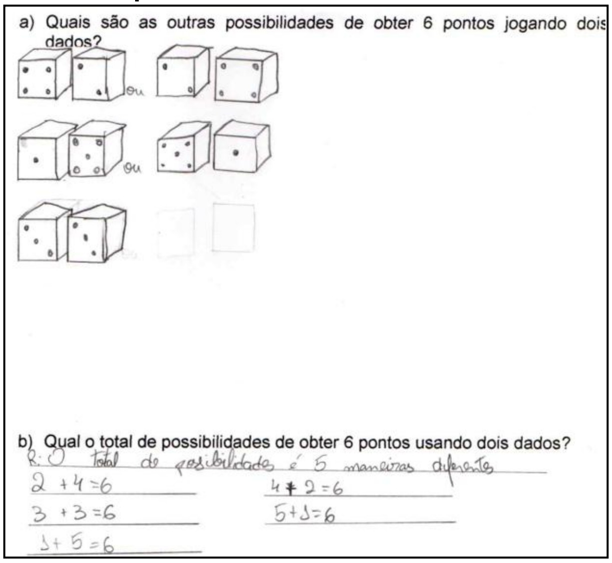


Fonte: Arquivo do pesquisador

Além de apresentar a solução por desenho com o total seis, a aluna Malves realizou a operação de adição dando a resposta por cálculo. Sobre o conhecimento procedimental, Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) orientam que os alunos precisam evidenciar o resultado de um procedimento tanto empírica quanto analiticamente. Seguindo nossas orientações ao longo das intervenções[110], a aluna usou a propriedade comutativa da adição e atentou para o parâmetro estabelecido na questão. Foi possível notar que ela não somou um número com zero na tarefa, denotando que o conhecimento intuitivo sobre as faces do dado contribuiu para a análise da existência ou não de possibilidades.

110 Com base na tarefa dos dados, a intervenção docente foi sempre coletiva no momento de realização das tarefas, pois, a pedido de alguns pais à professora regente, não foi possível realizar mais as entrevistas individuais.

Figura 87 – Resposta da aluna Malves na tarefa dos dados

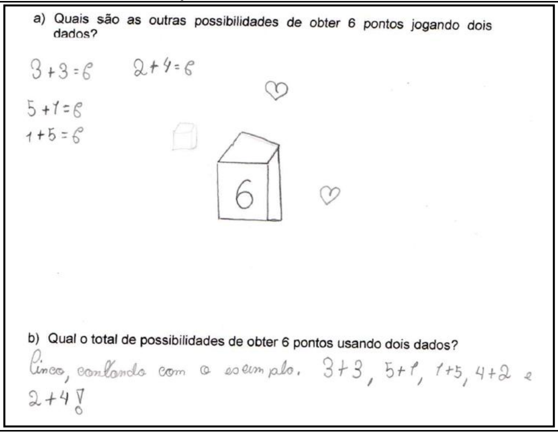
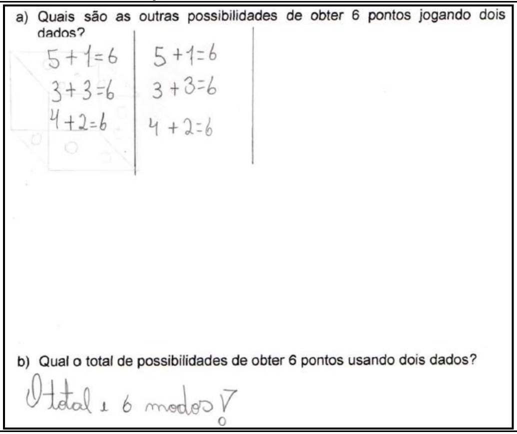
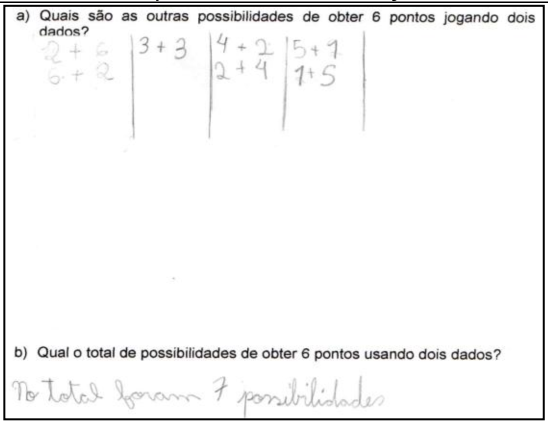
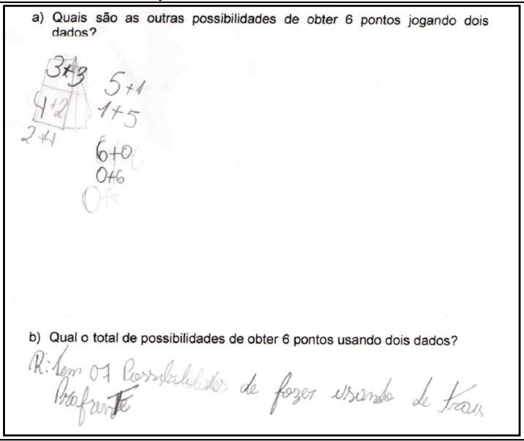


Fonte: Arquivo do pesquisador

A aluna Pérola escreveu corretamente as possíveis adições obtidas no lançamento de dois dados com soma igual a seis, ou seja, resolvendo de forma analítica (cálculo), e não por desenho, e contando corretamente o total de possibilidades. Já a aluna Manuela, que também utilizou uma estratégia analítica, repetiu as somas que já havia realizado sem comutar os números. Além disso, repetiu a soma 3 + 3, ou seja, reescreveu somas com as mesmas configurações. Isso demonstrou para nós a necessidade de rediscutir com a turma a análise de ordem dos elementos numa partição, conforme orientam Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996).

Mediante nossa análise, nosso trabalho, no retorno coletivo, foi redirecionado tanto para os critérios de observação de ordem dos elementos quanto para os critérios estabelecidos no problema e para as condições de existência de certas possibilidades. Gonçalves realizou as somas 2 + 6 e 6 + 2. Porém, não atentou para verificar que o resultado era diferente do parâmetro estabelecido, que era total igual a seis. A aluna Cláudia realizou a soma com o zero, fazendo 0 + 6 e 6 + 0, esquecendo-se de que no dado não havia essa possibilidade.

Figura 88 – Respostas das alunas Pérola, Manuela, Clara e Cláudia na tarefa dos dados

Resposta da aluna Pérola	Resposta da aluna Manuela
	
Resposta da aluna Gonçalves	**Resposta da aluna Cláudia**
	

Pérola:
a) Quais são as outras possibilidades de obter 6 pontos jogando dois dados?
3+3=6 2+4=6
5+1=6
1+5=6
6
b) Qual o total de possibilidades de obter 6 pontos usando dois dados?
Cinco, contando com o exemplo. 3+3, 5+1, 1+5, 4+2 e 2+4

Manuela:
a) Quais são as outras possibilidades de obter 6 pontos jogando dois dados?
5+1=6 5+1=6
3+3=6 3+3=6
4+2=6 4+2=6
b) Qual o total de possibilidades de obter 6 pontos usando dois dados?
O total é 6 modos

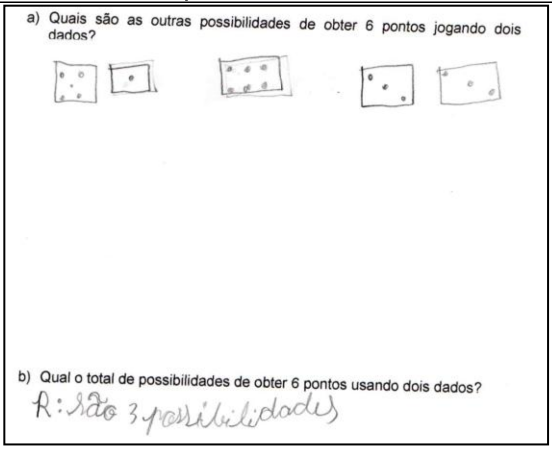
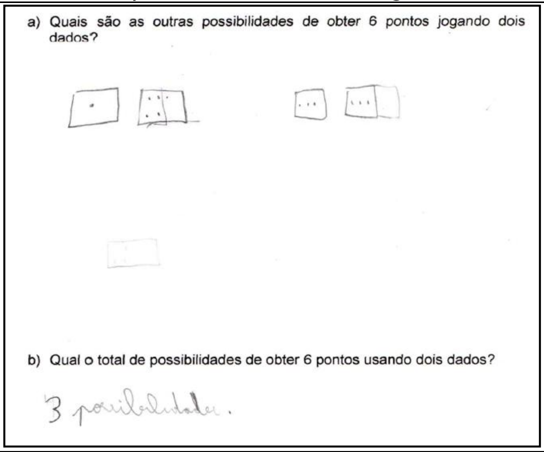
Gonçalves:
a) Quais são as outras possibilidades de obter 6 pontos jogando dois dados?
3+3 | 4+2 | 5+1
2+4 | 1+5
b) Qual o total de possibilidades de obter 6 pontos usando dois dados?
No total foram 7 possibilidades

Cláudia:
a) Quais são as outras possibilidades de obter 6 pontos jogando dois dados?
3+3 5+1
4+2 1+5
2+4
6+0
0+6
b) Qual o total de possibilidades de obter 6 pontos usando dois dados?
R: tem 07 possibilidades de fazer usando de trás pra frente

Fonte: Arquivo do pesquisador

Diante das respostas, em nossas conversas coletivas, fomos questionando os alunos no intuito de auxiliá-los no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Atentamos para os parâmetros estabelecidos, os critérios de ordem, o uso de estratégias sistemáticas, a não repetição de possibilidades já enunciadas, para comparar respostas feitas por desenhos com aquelas utilizando cálculo, quadro, ou outro tipo de estratégia, além de observar as condições de existência de uma determinada possibilidade outros procedimentos. Orientamos também os alunos a refletirem sobre a estrutura do material (dominó, barrinhas, dados) explorado na tarefa e não confundir com materiais de outro problema. Nesse sentido, chamamos a atenção para refletirem sobre o que há de semelhante ou diferente na estrutura do material e a operação matemática que pode ser realizada em situações sobre um material e não pode ser realizada em outro. A aluna Bela, por exemplo, desenhou duas possibilidades (5 + 1 e 3 + 3) e também desenhou uma face do dado com seis pontos, porque, durante a resolução, lembrou-se da atividade do dominó com a soma 6 + 0.

Figura 89 – Respostas dos alunos Bela e Moranguinho na tarefa dos dados

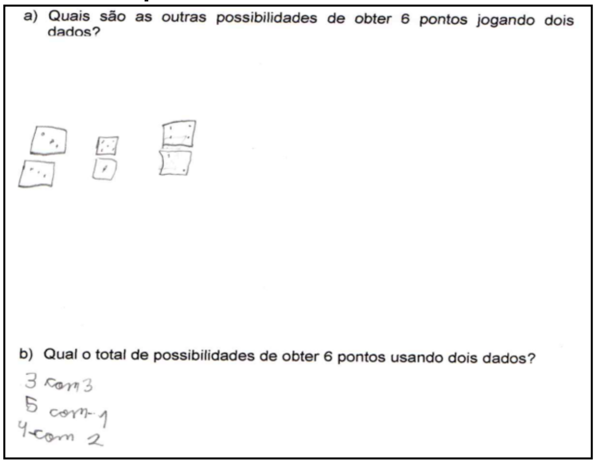
Resposta da aluna Bela	Resposta da aluna Moranguinho
	

Fonte: Arquivo do pesquisador

A aluna Moranguinho conseguiu desenhar outras duas possibilidades de obter a soma seis com o lançamento de dois dados. Ela utilizou a mesma estratégia que havia usado nas tarefas anteriores: pensar em um número e ver quanto faltava para completar o total seis. Ou seja, ela usou a adição com a ideia de completar, porém não encontrou todas as possibilidades. Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) chamam a atenção para o uso de estratégias adequadas que permitem encontrar todas as possibilidades de modo que não se esqueçam de nenhum caso possível.

Além de auxiliar na enumeração das possibilidades, o uso de estratégias sistemáticas contribui para calcular esse total solicitado, quando o aluno já consegue distinguir quando deve enumerar, contar ou enumerar e contar. Sob esse aspecto, Red não desenhou todas as peças com o total seis, mas, nas enumerações que realizou, demonstrou respeito ao parâmetro estabelecido, fato que não ocorrera na execução da tarefa do dominó. Ele enunciou as possibilidades que encontrou, em vez de contar, mas sua resposta tem relação com a enumeração e não fez cálculos com os valores dos dados como havia feito na tarefa das barrinhas.

Figura 90 – Resposta do aluno Red na tarefa dos dados



Fonte: arquivo do pesquisador

Verificamos que, em geral, os alunos tiveram dificuldades de encontrar todas as possibilidades quando não utilizaram as somas comutativas no processo de resolução. Mesmo assim, é necessário que reflitam sobre as respostas e os critérios de ordenação e existência, observando a natureza dos elementos dos conjuntos com os quais trabalham. Além disso, ao trabalhar com problemas correlatos (ou com a mesma estrutura), é necessário ensinar os alunos a verificar semelhanças e diferenças entre as tarefas, além de analisar se há restrições ou não a considerar. Esse é o caso da tarefa do dominó e das barrinhas: podia-se usar o zero na soma, o que não era possível no problema do lançamento dos dados.

Para que os alunos aprendam a verificar as semelhanças, diferenças ou restrições em problemas envolvendo o raciocínio combinatório, Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) orientam que alguns procedimentos podem ser adotados por professores: ensinar os discentes a realizar enumerações usando material manipulativo e buscar um procedimento sistemático de enumeração. Além disso, os alunos devem aprender a classificar os objetos por uma propriedade comum, representar simbolicamente as configurações combinatórias estabelecidas e calcular o número de configurações mediante o processo de enumeração.

7.3.5 Tarefas de matemática com problemas de multiplicação que envolvem o raciocínio combinatório.

Nesta seção, apresentamos a análise das três tarefas que envolvem o princípio multiplicativo em situações do modelo combinatório implícito com a ideia de alocação (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996). Apresentamos os problemas com os objetivos e, depois, um quadro geral do raciocínio dos alunos na resolução de cada uma das tarefas, categorizadas com base em nosso referencial teórico. Em seguida, vamos explicitar soluções de alguns alunos, para exemplificar os tipos de respostas por tarefa.

Figura 91 Tarefa 1 – Problema de pintura da casinha com a ideia de alocação

Nome: ___________________________________ Data: ______/______/______

Problema 1. Mário vai pintar a casinha usando as cores amarela, verde e marrom, de modo que o telhado tenha uma cor, a cor da parede outra e a porta outra. Uma das possibilidades está desenhada abaixo.

Quais as possibilidades de pintar a casinha usando três cores diferentes sem repetir?

Quantas são as possibilidades?

Objetivo geral: Investigar o raciocínio combinatório dos alunos ao resolverem um problema de multiplicação (princípio multiplicativo) com a ideia de alocação, sem a intervenção do pesquisador sobre estratégias de enumeração e contagem.

Objetivo específico: Investigar estratégias de enumerações (sistemática, não sistemática, completa ou incompleta) e tipos de contagens (contagem direta, contagem por meio de associações entre os elementos ou contagem por meio de operações), realizadas pelos alunos, além da atenção aos parâmetros de não repetição de elementos ou de possibilidades e de ordenação.

Fonte: (Adaptado de DANTE, 2016, p. 221, 3.º ano, Livro do professor)

Figura 92 – Problema da organização das pessoas numa fila

Nome: ____

Nome fictício ____

Idade: ________ Turma _______ Data ____/_____/______

Tarefa 2 – Leia com atenção as questões abaixo e responda ao que se pede:

- Quais as diferentes maneiras que três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila?
- Quantas são as diferentes maneiras que três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila?

Objetivo geral: Investigar o raciocínio combinatório dos alunos ao resolverem um problema de multiplicação (princípio multiplicativo) com a ideia de alocação, após a intervenção do pesquisador sobre estratégias de enumeração e contagem.

Objetivos específicos: Desenvolver e investigar estratégias de enumerações (sistemática, não sistemática, completa ou incompleta) e tipos de contagens (contagem direta, contagem por meio de associações entre os elementos ou contagem por meio de operações) realizadas pelos alunos, além da atenção ao parâmetro de não repetição de elementos ou de possibilidades e de ordenação.

Fonte: (Adaptado de VEGA, 2014)

Figura 93 – Problema sobre a organização das figuras geométricas

Nome: ____

Tarefa 3 – Leia com atenção as questões abaixo e responda o que se pede:

- ✓ Organize todos os diferentes agrupamentos possíveis com os três elementos disponíveis.

- ✓ Qual a quantidade de agrupamentos possíveis?

Objetivo geral: Desenvolver o raciocínio combinatório dos alunos ao resolverem um problema de multiplicação (princípio multiplicativo) com a ideia de alocação, após a intervenção do pesquisador sobre estratégias de enumeração e contagem.

Objetivos específicos: Desenvolver e investigar estratégias de enumerações (sistemática, não sistemática, completa ou incompleta) e tipos de contagens (contagem direta, contagem por meio de associações entre os elementos ou contagem por meio de operações) realizadas pelos alunos, além da atenção ao parâmetro de não repetição de elementos ou de possibilidades e de ordenação.

Fonte: (Adaptado de HOMA; GROENWALD, 2013)

Nos quadros a seguir, apresentamos as categorias das estratégias dos alunos no processo de resolução (por desenho, cálculo, quadro, árvore de possibilidades, entre outras). Verificamos também se as soluções envolviam raciocínio sistemático, ou seja, se usavam algum tipo de raciocínio que auxiliasse no processo de enumeração, para encontrar todas as possibilidades, ou se era um raciocínio não sistemático (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996; ROA, 2000). Por último, analisamos se os alunos realizaram contagem das enumerações ou se fizeram outros tipos de contagem que não foi solicitada nos problemas.

Quadro 29 – Estratégias adotadas pelos alunos para resolver os problemas de multiplicação (princípio multiplicativo) em tarefas com a ideia de alocação

	Estratégia	Problema 1	Problema 2	Problema 3
1	**Desenho**	Athayde, Bela, Cláudia, Estela, Felipe, Gonçalves, Lipinho, Malves, Manuela, Mel, Moranguinho, Red e Sol		Cláudia Estela Felipe Flora Gonçalves Lipinho Mel Moranguinho Pérola Red Sol
2	**Listagem**	Flora Pérola	Cláudia, Estela Felipe, Flora Gonçalves, Lipinho, Mel Pérola, Red e Sol	
3	**Quadro**		Malves	Malves
4	**Listagem, desenho, cálculo e árvore**		Moranguinho	
5	**Esquema de setas**		Athayde	Athayde

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Notamos que, nas tarefas 1 e 3, a estratégia utilizada por um número maior de alunos foi o desenho, enquanto, na tarefa 2, foi a listagem. Isso se deve à estrutura do problema, ou seja, as questões sugerem, de certo modo, um tipo de estratégia para resolver (neste caso, o desenho e a listagem). Vale (2017) defende que as soluções por meio de figuras, desenhos, diagramas e gráficos são importantes no processo de compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos dos alunos, pois "[...] permitem dar sentido ao conteúdo matemático envolvido nos problemas e envolver-se no discurso matemático [...]" (VALE, 2017, p. 142). Essa autora chama a atenção para o modo como os problemas são colocados, muitas vezes estimulando apenas as soluções numéricas, algébricas ou verbais.

Nesse sentido, escolhemos tarefas que possibilitassem explorar diferentes estratégias, pois acreditamos, com base em Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), que o trabalho com alunos explorando variados repertórios de estratégias contribui para que eles desenvolvam habilidades de expressar suas ideias matemáticas de diferentes formas (escrita, oral, pictórica, numérica ou algébrica). Nos quadros a seguir, apresentamos as estratégias de resolução dos alunos nas três tarefas de multiplicação (princípio multiplicativo) com a ideia de alocação.

Quadro 30 Tipos de enumerações adotadas pelos alunos nos problemas de multiplicação com ideia de alocação

	Descrição	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Estratégia usada
1	Neste tipo de solução, o aluno desenha ou escreve as possíveis enumerações usando um raciocínio lógico que auxilie na exibição de todas as possibilidades.	Flora, Malves, Sol	Athayde Cláudia Estela Felipe Flora Lipinho Malves Moranguinho Pérola Sol	Athayde Estela Felipe Flora Lipinho Malves Moranguinho Pérola Sol	**Sistemática completa**
2	Neste caso, o aluno desenha ou escreve as enumerações usando um raciocínio lógico que auxilie na resposta, mas não exibe todas as possibilidades.			Cláudia Gonçalves	**Sistemática incompleta**
3	Neste tipo de solução, o aluno constrói as enumerações sem seguir uma regra sistemática. Escreve todas as possibilidades, mas repete as enumerações.		Gonçalves		**Não sistemática completa com repetição de possibilidades**
4	Neste tipo de solução, aluno desenha ou escreve enumerações sem seguir um raciocínio lógico que auxilie a encontrar todas as possibilidades. Além disso, não exibe todas as possíveis	Athayde Bela Cláudia Estela Felipe Gonçalves Lipinho	Red Mel	Red Mel	**Não sistemática incompleta**

	enumerações.	Manuela Mel Moranguinho Pérola Red			
5	Neste caso, o aluno apenas cita um valor sobre o possível resultado sem exibir as possibilidades de enumeração.				**Não usou enumeração**

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

No problema (1), as enumerações dos alunos, em sua maioria, foram não sistemáticas e incompletas: ou seja, os alunos não usaram um raciocínio lógico que ajudasse a encontrar todas as possibilidades sem esquecer alguns casos possíveis. Entretanto, esse quadro muda de situação com nossa intervenção, o que pode ser visto nas tarefas (2) e (3). O número de alunos que resolveram de forma sistemática e completa predominou, ou seja, a maioria utilizou um raciocínio lógico sistemático, o que contribuiu para que encontrassem todas as possibilidades sem esquecer alguns casos possíveis. Ou seja, vamos percebendo no caminhar deste experimento de ensino em que seis tarefas foram trabalhadas com os alunos que alguns foram incorporando estratégias que apresentamos e discutimos em nossos momentos de intervenção docente.

Quadro 31 – Estratégia de contagem dos alunos nos problemas de multiplicação com ideia de alocação

Tipo de contagem	Descrição	Problema 1	Problema 2	Problema 3
Contagem dos desenhos ou das listagens que realizou.	Neste caso, os alunos contam as enumerações que desenharam sejam elas completas ou incompletas.	Cláudia Felipe Flora Gonçalves Lipinho Malves Manuela Mel Pérola Red	Cláudia Estela Felipe Flora Lipinho Malves Mel Pérola Red Sol	Cláudia Estela Felipe Flora Gonçalves Lipinho Malves Mel Pérola Red Sol
Contagem dos desenhos que fez com a possibilidade enunciada no problema.	Neste caso, o aluno já considera a situação dada no problema como uma das possibilidades e conta com as outras que fez.	Estela Athayde Bela Moranguinho Sol		Moranguinho
Contagem por meio de esquema.	Neste caso, o aluno conta as possibilidades por		Athayde	Athayde

	meio de esquema representado por setas.			
Contagem por meio de desenhos, listagens e cálculo.	Neste caso, a aluna usa diferentes estratégias de contagem		Moranguinho	
Não fez contagem.	Aqui o aluno não respondeu à pergunta.		Gonçalves	

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Verificamos que nenhum aluno deu uma resposta numérica sem justificativa, isto é, um palpite sem uma investigação das possibilidades como havia ocorrido nos estudos exploratórios, pois as contagens apresentadas nas soluções estão relacionadas às enumerações realizadas por eles, sejam estas enumerações completas ou incompletas. Embora a suposição sem investigação ou palpite sem uma análise das possibilidades seja um erro possível de ser cometido por alunos em problemas de combinatória, conforme afirmam os pesquisadores espanhóis (NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996), e esse tipo de erro tenha ocorrido em nossos estudos exploratórios, não identificamos nenhum nessa etapa de nossa pesquisa. Acreditamos que isto se deva ao cuidado que tivemos em dialogar com os alunos sobre a compreensão dos enunciados, sobre a atenção ao tipo de solução que era solicitado no problema e sobre a reflexão entre a resposta dada e o que foi solicitado.

Ao longo de nossas intervenções que realizamos com os alunos, chamamos a atenção dos mesmos para o tipo de resposta que era solicitado (se enumerar ou dizer quais eram as possibilidades ou se contar ou dizer o total de possibilidades). Entendemos que fazer questionamentos intermediários que levem os alunos a refletirem sobre os tipos de respostas que foram solicitadas no problema é necessário e deve ser feito por professores e professores pesquisadores. Em nosso caso deste experimento de ensino era importante questionar com os alunos se era para enumerar ou contar possibilidades. Mas de fato professores devem questionar com os alunos de suas turmas se é para enumerar, contar, otimizar, classificar ou verificar a existência de possibilidades em tarefas de combinatória. Porque essas questões são importantes no entendimento de tarefas que envolvem o raciocínio combinatório e vão orientar os pensamentos dos alunos quando tentarem resolver as mesmas.

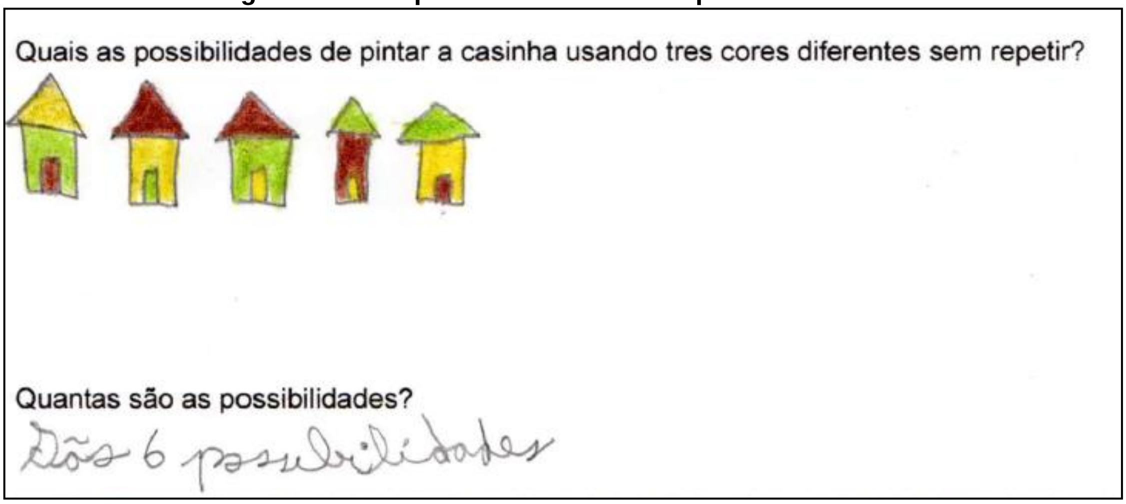
7.3.5.1 Tarefa da pintura da casinha

Essa atividade foi desenvolvida em uma aula de 50 minutos, no dia 20 de abril de 2018, em que entregamos a ficha a cada aluno e deixamos que resolvessem sem fazer intervenções. O intuito foi investigar as estratégias intuitivas no processo de resolução. Visto que já apresentamos o quadro com os tipos de respostas dos alunos, trazemos aqui discussões sobre algumas das respostas de seis alunos. A opção por categorizá-las ocorreu pelo fato de eles terem participado das três tarefas e pela diferença no tipo de estratégia adotada na resolução.

Enumeração sistemática completa e contagem

A aluna Sol representou a pintura das casas por meio de desenho. Ela enumerou sistematicamente, fixou a cor do telhado e alternou a cor da parede e da porta para encontrar as possibilidades. Fez a contagem total, considerando a solução que já estava presente no enunciado, dando como resposta as seis possibilidades.

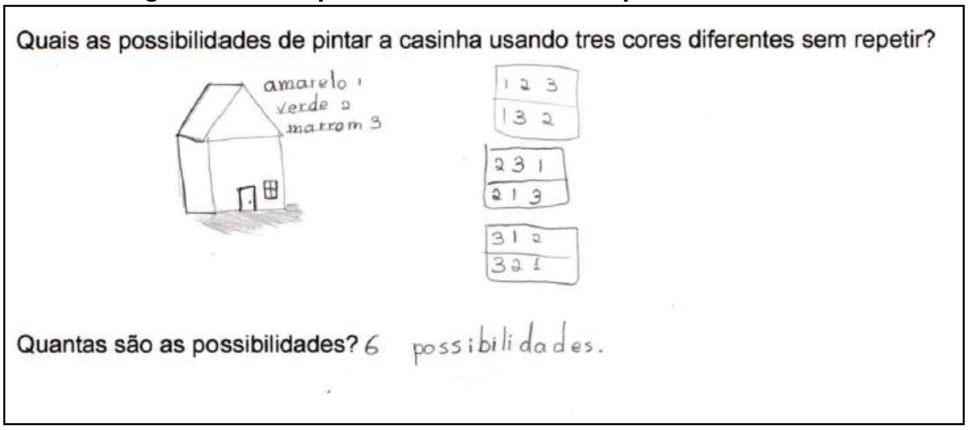
Figura 94 – Resposta da aluna Sol na pintura das casas



Fonte: Arquivo do pesquisador

Já a aluna Flora, embora não tivesse pintado as casas para encontrar as possibilidades, usou um sistema de códigos com os algarismos 1, 2 e 3 para representar as cores amarela, verde e marrom. Nessa representação, ela fixou o primeiro algarismo e foi alternando os demais, também de forma sistemática, até encontrar as seis possibilidades.

Figura 95 – Resposta da aluna Flora na pintura das casas



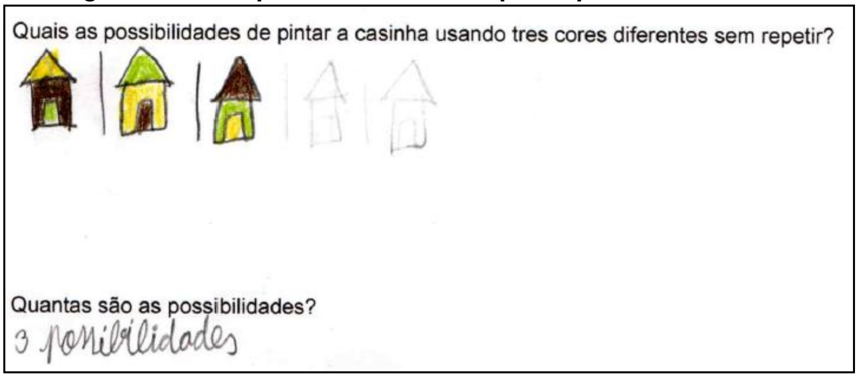
Fonte: Arquivo do pesquisador

Embora as estratégias de resolução de Flora e de Sol tenham usado representações diferentes (desenho e numérica), elas se assemelham nas ideias de ordenação sistemática, pois, ao fixar uma das variáveis e alternar as demais em espaços (ou em posições distintas), estão realizando alocações ordenadas, uma vez que a ordem em que a cor ou o algarismo aparecem gera novas possibilidades (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996; PESSOA; BORBA, 2009, 2010). Essas ideias intuitivas estão relacionadas a uma operação combinatória chamada por autores de combinatória de permutação simples (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991; BACHX; POPPE; TAVARES, 1975).

Enumeração não sistemática incompleta e contagem

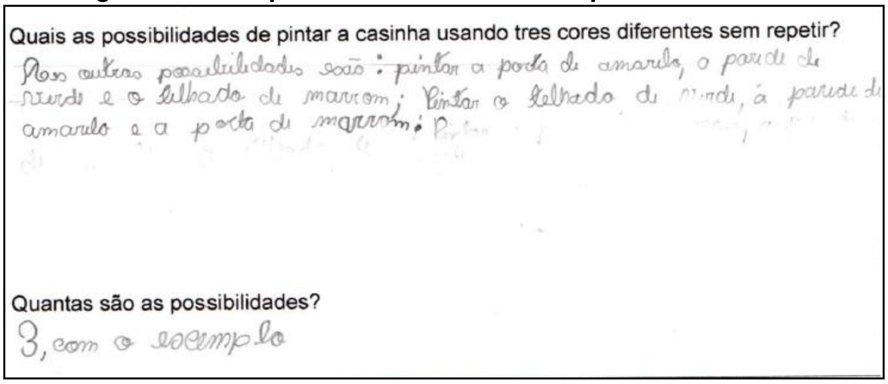
O aluno Felipe encontrou três possibilidades usando desenhos, enquanto a aluna Pérola fez uma listagem por escrito das possibilidades. Embora as ideias intuitivas desses alunos tivessem representações diferentes (desenho e verbal), ambos resolveram de forma não sistemática. Ou seja, percebemos que Felipe e Pérola não sistematizaram o que fizeram (fixando uma cor em uma parte da casa para alterar as demais), mas usaram raciocínio semelhante: trocar simultaneamente a cor das partes da casa. Isso dificultou na hora de encontrar todas as respostas possíveis e, consequentemente, a contagem correta das possibilidades.

Figura 96 – Resposta do aluno Felipe na pintura das casas



Fonte: Arquivo do pesquisador

Figura 97 – Resposta da aluna Pérola na pintura das casas


Quais as possibilidades de pintar a casinha usando tres cores diferentes sem repetir?

As outras possibilidades são: pintar a porta de amarelo, a parede de verde e o telhado de marrom; Pintar o telhado de verde, a parede de amarelo e a porta de marrom;

Quantas são as possibilidades?

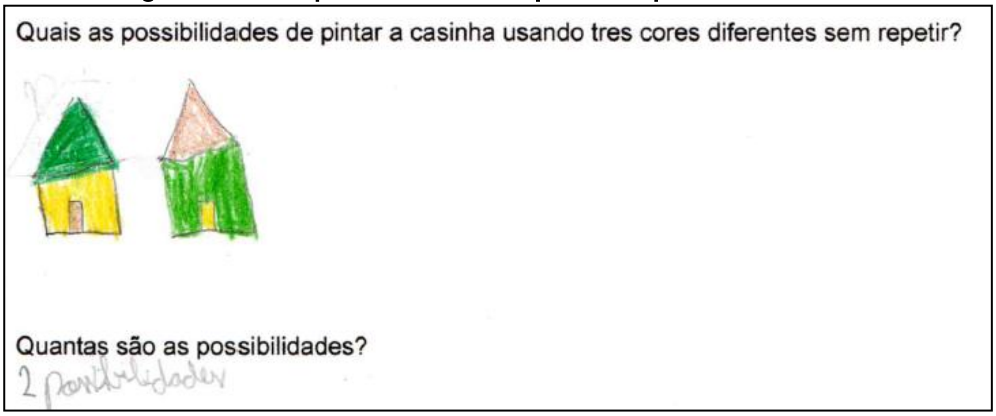
3, com o exemplo

Fonte: Arquivo do pesquisador

Mesmo que tenham resolvido de forma não sistemática e incompleta, notamos que esses alunos respeitaram o critério (parâmetro) estabelecido no problema: a não repetição de cores. Eles evidenciaram habilidades de raciocínio sobre dois conceitos importantes em problemas que envolvem o raciocínio combinatório: atentar para os critérios de ordenação e os de repetição de elementos, defendidos pelos pesquisadores espanhóis, entretanto, ainda não chegaram a uma resposta correta.

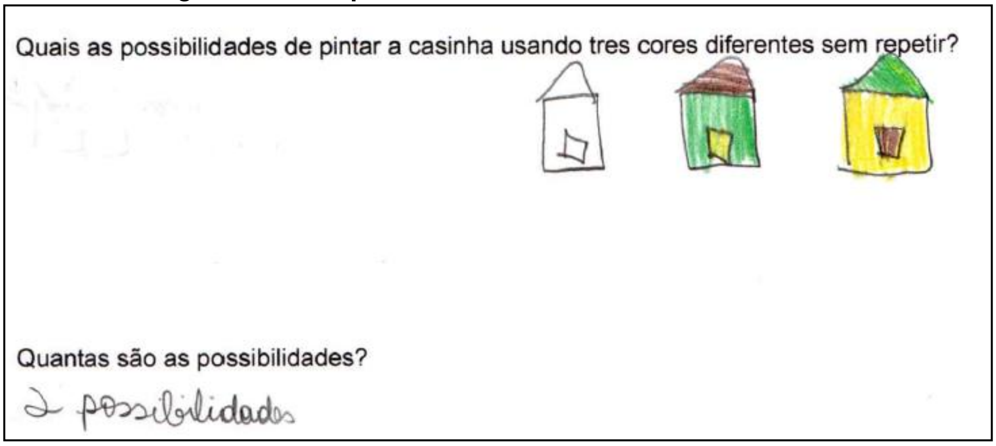
Respostas como a dos alunos Lipinho e Mel chamaram a nossa atenção para que enfatizássemos a contagem de possibilidades durante nossas intervenções docentes nas outras tarefas envolvendo ideias multiplicativas. Embora esses alunos tivessem desenhado outras duas possibilidades diferentes daquela que estava apresentada no problema, eles só consideraram como resposta de contagem as soluções encontradas por eles e não verificaram se haviam outras possibilidades. Isso reforça a necessidade de diálogo do professor com os alunos para instruí-los a buscar o esgotamento de todas as possibilidades como orientam Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996).

Figura 98 – Resposta do aluno Lipinho na pintura das casas



Fonte: Arquivo do pesquisador

Figura 99 – Resposta da aluna Mel na tarefa das casas



Fonte: Arquivo do pesquisador

As respostas desses alunos foram orientando nossa intervenção para discutir com eles sobre o processo de enumeração e verificação da resposta correta em relação à contagem (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996). Chamamos a atenção dos alunos no que diz respeito ao total de possibilidades, contando com a que já havia sido anunciada no problema e em comparação com outras respostas de outros alunos que haviam desenhado outras possibilidades. É muito importante que o professor e o professor pesquisador observem as respostas corretas, incompletas ou erradas para conversar com todos os alunos, pois isto auxilia na compreensão dos conceitos e no desenvolvimento de novas estratégias intuitivas.

7.3.5.2 Retorno coletivo

Em nosso retorno coletivo com os alunos em 12 de junho de 2018, apresentamos no quadro da sala de aula diferentes tipos de respostas dos alunos com soluções completas e incompletas, sistemáticas e não sistemáticas. Discutimos e conversamos com a turma a respeito de diferentes estratégias de resolução dos alunos apresentadas na tarefa. Conversamos com os alunos sobre ideias sistemáticas presentes em resoluções como as de Sol (Figura 94) e de Flora (Figura 95). Além disso, fomos conversando com os alunos sobre outras estratégias de resolução sistemáticas, tais como a fixação de um dos elementos representados pela letra inicial das cores, por desenhos, quadro e com a ideia de árvore de possibilidades, além de relacionar com o cálculo de multiplicação.

Desenvolvemos algumas reflexões com os alunos sobre suas respostas, ao fazermos a contagem das possibilidades, entre as quais citamos: a) verificar se todas as respostas deles satisfaziam as condições estabelecidas de ordenação e repetição de elementos; b) verificar se deveríamos contar só as possibilidades desenhadas por eles ou se contaria também a possibilidade enunciada no problema; c) analisar se estaria faltando alguma outra possibilidade de solução; d) analisar se a contagem corresponde ao total de enumerações; e d) por último verificar se não haveria enumeração repetida. Estas reflexões nos auxiliaram na proposição e intervenção das tarefas posteriores durante nosso experimento de ensino com os alunos.

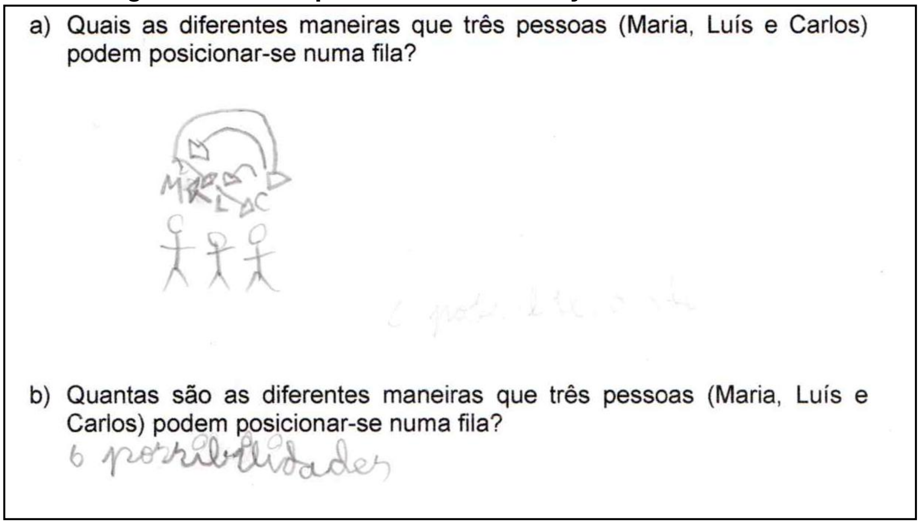
7.3.5.3 Tarefa da organização de pessoas numa fila

Esta tarefa foi realizada no mesmo dia 12 de junho de 2018, depois do recreio que aconteceu após o retorno coletivo da tarefa da pintura das casinhas. A tarefa corresponde ao segundo problema de multiplicação (princípio multiplicativo) com a ideia de alocação. Porém já foi dado após a intervenção do pesquisador no retorno coletivo. Adotamos a metodologia empregada nas tarefas de adição durante o nosso processo de aplicação e intervenção, solicitando que eles fizessem a leitura individual. Depois realizamos a leitura coletiva, além de discutir com os alunos sobre os termos que apareciam no problema, sobre o que eles achavam que estava sendo solicitado na tarefa. Fizemos alguns contraexemplos para verificarem se estavam prestando atenção e compreendendo a tarefa. Ouvíamos os alunos sobre o que entenderam e que ideias de resolução eles podiam nos apresentar para auxiliar na compreensão do problema. Apresentaremos as respostas de oito alunos pela participação efetiva nesta tarefa e pela diferença no tipo de estratégia de enumeração ou contagem.

Enumeração sistemática completa e contagem

O aluno Athayde resolveu o problema por meio de um esquema, identificando as pessoas com as letras iniciais de seus nomes e relacionando suas posições na fila por um sistema de setas.

Figura 100 – Resposta do aluno Athayde na tarefa da fila

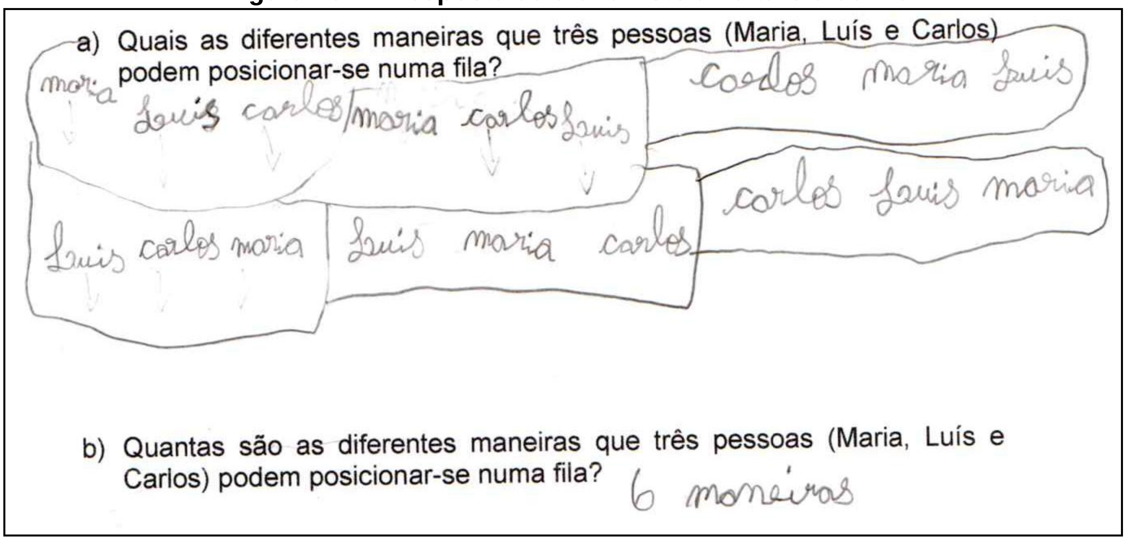


Fonte: Arquivo do pesquisador

Ficamos impressionados com esse aluno de dez anos, por já fazer uso deste tipo de estratégia que está relacionada com as ideias intuitivas de grafos sem ter estudado sobre esse assunto. Essa estratégia usada por Athayde está relacionada ao campo das ideias intuitivas da teoria dos grafos e com as ideias intuitivas de correspondências. De acordo com o nosso entendimento com base nos pesquisadores espanhóis estas ideias podem auxiliar no processo de resolução de vários problemas combinatórios, conforme já discutimos em nosso capítulo de história da combinatória. Nesse sentido, concordamos com Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) sobre a importância de desenvolver tarefas que explorem o raciocínio combinatório desde cedo com as crianças.

Ao longo de nossas investigações, verificamos que estratégias intuitivas dos alunos de ordenar (Pérola, Figura 97), estabelecer parâmetros de ordenação (Malves, Figura 103; Athayde, Figura 100), fixar variáveis (Estela, Figura 101), sistematizar (Flora, Figura 95) e contagem (Moranguinho, Figura 102) nos ensinam muito enquanto professores. Nós, professores, podemos preparar outras aulas a partir das estratégias dos alunos. Podemos a partir das estratégias deles, solicitar que expliquem para outros colegas como pensaram para desenvolver tal estratégia. Verificamos também que podemos explorar diferentes estratégias de enumeração e contagem com os alunos dos anos iniciais, sem ter que recorrer a estratégias numéricas ou algébricas complexas. Um exemplo é a resposta da aluna Estela, na qual identificamos uma listagem sistemática dos nomes das pessoas. Ela fixou um dos nomes e alternou os demais.

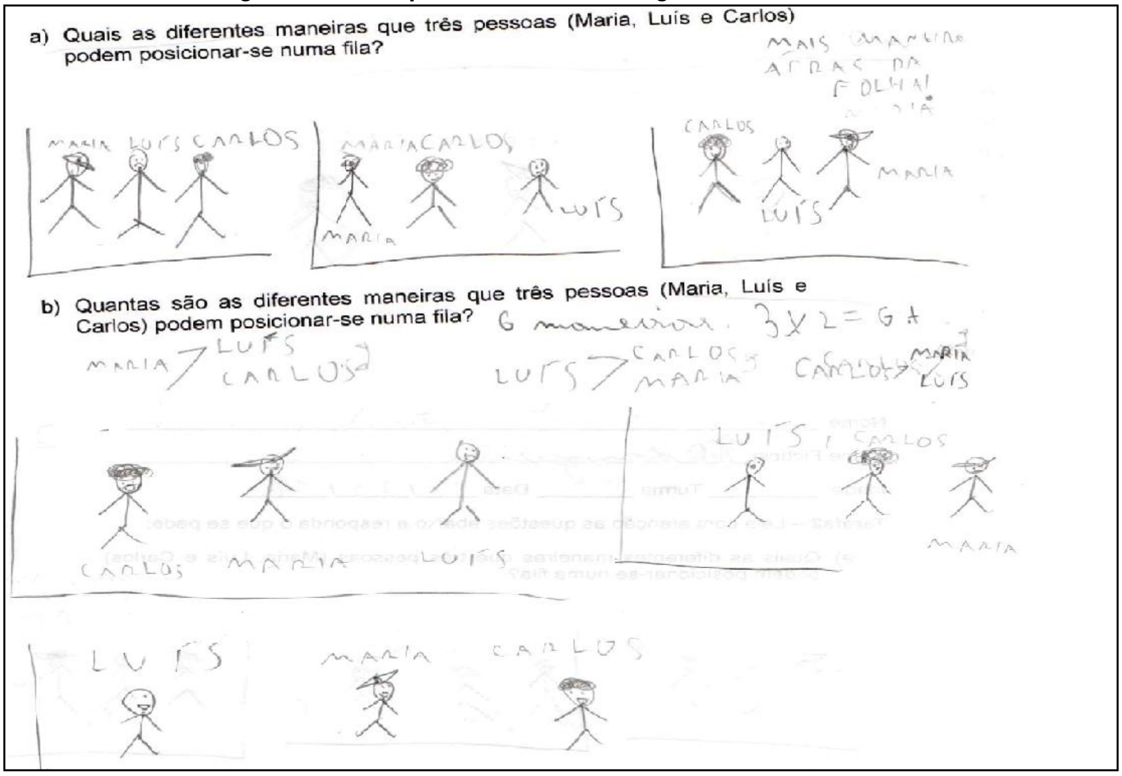
Figura 101 – Resposta da aluna Estela na tarefa da fila



Fonte: Arquivo do pesquisador

Durante nossa análise, verificamos que a aluna Moranguinho representou as pessoas da fila por meio de desenhos, nomeando-as de forma sistemática, além de usar a ideia inicial da árvore de possibilidades e a operação de multiplicação, fazendo 3 x 2 = 6. Essas ideias foram discutidas com os alunos em nosso retorno sobre a tarefa da pintura da casinha e notamos que aos poucos foram sendo incorporadas nas suas resoluções. Quando realizamos o retorno da pintura da casinha, construímos com os alunos a relação entre a escolha de uma parte da casinha para pintar com as cores disponíveis. Fomos, então, desenhando, listando e construindo a árvore de possibilidades, para formalizar com a operação de multiplicação. Percebemos que a aluna Moranguinho queria incorporar algumas dessas estratégias comentadas com os alunos.

Figura 102 – Resposta da aluna Moranguinho na tarefa da fila



Fonte: Arquivo do pesquisador

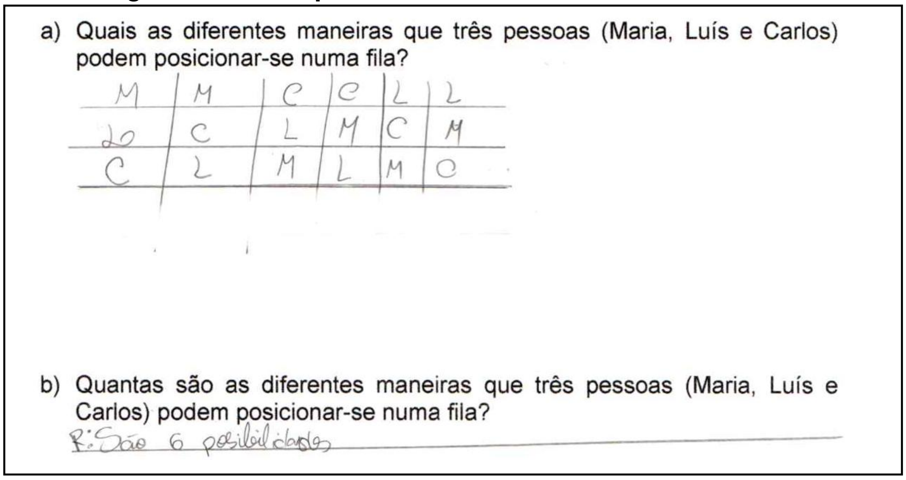
Se olharmos a solução da aluna Estela (Figura 101) e da aluna Moranginho (Figura 102), observamos algumas semelhanças e diferenças. A Moranguinho semelhante a aluna Estela, procura uma maneira sistemática de encontrar a sua resposta e a primeira tentativa dela foi por desenhos nomeando sistematicamente. Além disso, ela tentou já usar a ideia de árvore de possibilidades, que havíamos comentado com eles nesse dia cerca de quarenta minutos atrás, e por último ela também usou a operação de multiplicação.

Segundo Andrade (2017), quando um professor faz um desenho ou cria outras estratégias de representação e discute com os alunos sobre a utilidade dessas estratégias, ele está concomitantemente provocando ou estimulando outras ideias para seus alunos. Por exemplo, podemos acreditar que ele está estimulando outras formas de representação e análise de enunciado de problemas ou tarefas. Ou seja, o professor está concomitantemente criando e sugerindo que os alunos usem outras formas de representação do problema e ajudando-os a analisar o enunciado das tarefas e tudo isso pode ajudar os estudantes a chegar “[...] a uma compreensão mais ampla do problema e podem sugerir diversos caminhos de resolução e indicar novas explorações e novos problemas” (ANDRADE, 2017, p. 370).

Além das modificações produzidas pelo professor no processo de leitura, representação e crítica sobre o enunciado de um problema, é importante que os discentes conheçam e discutam estratégias elaboradas pelos próprios colegas como fizemos em nossa pesquisa com intervenções e dando o retorno aos alunos. Percebemos que isso contribui para o crescimento do repertório de estratégias intuitivas para resolver problemas matemáticos como observamos na solução da aluna Moranguinho e de outros alunos nessa tarefa e em outras. Sendo assim, precisamos valorizar as soluções dos alunos e compartilhá-las em sala de aula com diálogos e questionamentos para toda a turma.

Ainda sobre as diferentes estratégias, citamos as resoluções de Malves (Figura 103) e Flora (Figura 104), que listaram as possibilidades abreviando o nome das pessoas por letras. A primeira aluna utilizou a disposição dos nomes em uma tabela e a segunda representou as pessoas na fila associando aos algarismos 1, 2 e 3. A aluna Flora está usando nesse problema a mesma estratégia que ela usou no problema da pintura da casa e que ela já havia verificado que funcionava. Esta aluna nos mostrou que é importante que o aluno se sinta valorizado e respeitado pela estratégia que ele desenvolveu. Pois ao mesmo tempo em que querem mostrar que aprenderam outras estratégias de colegas ou comentadas pelo professor, também querem sentir-se felizes e confiantes com suas próprias estratégias.

Figura 103 – Resposta da aluna Malves na tarefa da fila


a) Quais as diferentes maneiras que três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila?

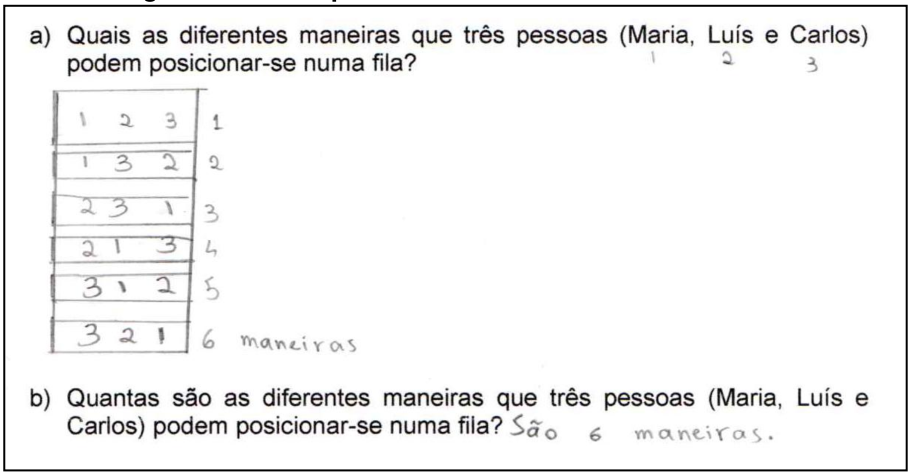
M	M	C	C	L	L
L	C	L	M	C	M
C	L	M	L	M	C

b) Quantas são as diferentes maneiras que três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila?

R: São 6 possibilidades

Fonte: Arquivo do pesquisador

Figura 104 – Resposta da aluna Flora na tarefa da fila


a) Quais as diferentes maneiras que três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila?
1 2 3

1	2	3	1
1	3	2	2
2	3	1	3
2	1	3	4
3	1	2	5
3	2	1	6 maneiras

b) Quantas são as diferentes maneiras que três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila? São 6 maneiras.

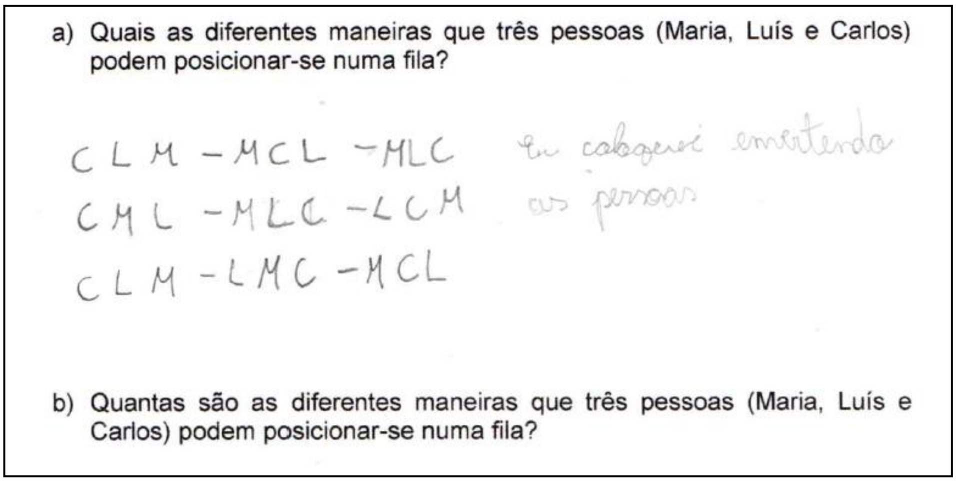
Fonte: Arquivo do pesquisador

Embora ambas alunas, Malves e Flora, tenham resolvido de forma diferente do ponto de vista da representação usada (quadro e numérico), as resoluções envolvem o mesmo raciocínio combinatório. Em ambos os casos, foi necessário para cada uma das alunas que fixassem uma das variáveis e respeitassem o parâmetro da não repetição de elementos. Além disso, elas trabalharam com o modelo combinatório implícito que identificaram nesses problemas em que era necessário alocar as letras nos espaços da tabela, como no caso da resolução da Malves, ou alocar os algarismos nas posições como no caso da resolução da aluna Flora. Portanto, para um mesmo problema, vemos tipos variados de soluções e “[...] quando um aluno codifica ou descodifica um problema dado ele também passa a ter uma melhor compreensão do mesmo” (ANDRADE, 2017, p. 370). As soluções dessas alunas estão mostrando como o retorno coletivo da tarefa da pintura das casas foi importante para elas.

Enumeração não sistemática completa com repetição de possibilidades e contagem

Verificamos que a aluna Gonçalves tentou criar uma listagem com as letras iniciais dos nomes das pessoas, entretanto ela se equivocou e cometeu um erro de repetição de possibilidades, pois foi invertendo as letras dos nomes das pessoas sem prestar atenção se já havia escrito ou não certas enumerações. Notamos que Gonçalves foi escrevendo no quadro as letras iniciais das pessoas, assim como havia resolvido no papel, porém invertendo-as simultaneamente e sem sistematização. Ela só percebeu que havia cometido esse erro quando confrontamos sua resposta com a solução de outros colegas. Ou seja: só identificou que havia reescrito uma das possibilidades, quando realizamos a apresentação de diferentes estratégias de resolução, a discussão dos resultados e verificamos se a resposta estava correta, que são algumas das etapas de resolução de problemas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Figura 105 – Resposta da aluna Gonçalves sobre as figuras geométricas



a) Quais as diferentes maneiras que três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila?

CLM – MCL – MLC eu cabagei envertendo
CML – MLC – LCM as pessoas
CLM – LMC – MCL

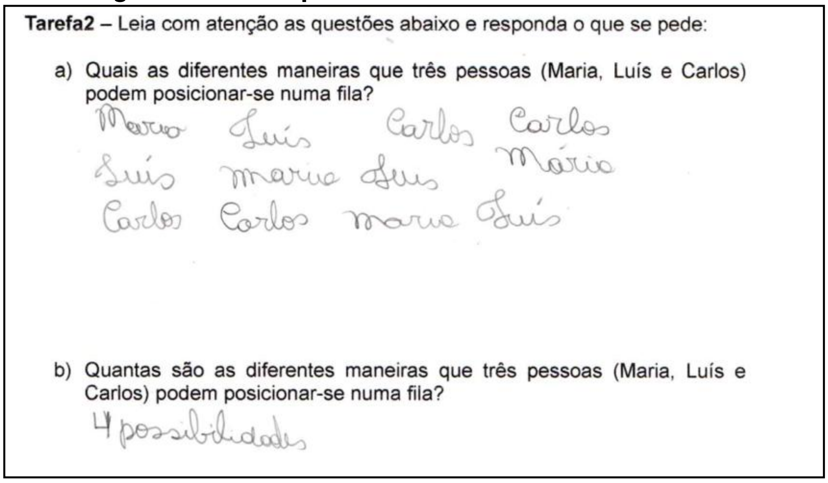
b) Quantas são as diferentes maneiras que três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila?

Fonte: Arquivo do pesquisador

Enumeração não sistemática incompleta

Os alunos Mel (Figura 106) e Red (Figura 107) realizaram algumas listagens para encontrar a resposta do problema. Os dois alunos parecem ter entendido que era necessário trocar as pessoas de lugar na fila e que as ordenações geravam novas possibilidades. No entanto não enumeraram sistematicamente e não exibiram todos os possíveis resultados. Eles não fixaram um dos nomes conforme havíamos orientado em nossa intervenção para alternar os demais, mas foram mudando a ordem de forma aleatória. Isso pode ter dificultado na enumeração de todas as possibilidades, como podemos ver nas figuras a seguir.

Figura 106 – Resposta da aluna Mel na tarefa da fila


Tarefa2 – Leia com atenção as questões abaixo e responda o que se pede:

a) Quais as diferentes maneiras que três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila?

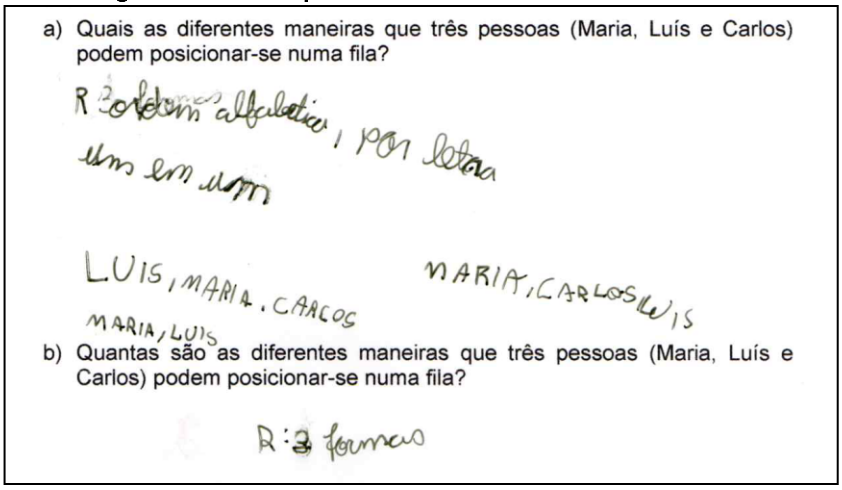
Maria Luís Carlos Carlos
Luís maria Luis Mária
Carlos Carlos maria Luís

b) Quantas são as diferentes maneiras que três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila?

4 possibilidades

Fonte: Arquivo do pesquisador

Figura 107 – Resposta do aluno Red na tarefa da fila


a) Quais as diferentes maneiras que três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila?

R: ordem alfabética, por letra um em um

LUIS, MARIA, CARLOS MARIA, CARLOS, LUIS
MARIA, LUIS

b) Quantas são as diferentes maneiras que três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila?

R: 3 formas

Fonte: Arquivo do pesquisador

Evidenciamos que Red apresentou três possibilidades de solução fazendo a troca simultânea dos nomes por meio de listagem sem sistematização. Ele sugere organizar as pessoas na fila pela ordem alfabética, mas não listou esta possibilidade: Carlos, Maria e Luís. Talvez esta sugestão de Red de organizar as pessoas por ordem alfabética esteja relacionada com sua experiência escolar com a chamada e com listagem dos alunos exibida em sala de aula pela professora regente. As soluções desses dois alunos reforçam a necessidade de conversar com os alunos e discutir estratégias de resolução escutando suas respostas. Aprendemos tanto com os acertos quanto com os erros. Isso permitiu que reavaliássemos nossa forma de abordar o assunto, discutindo com cautela as estratégias intuitivas dos alunos. Também permitiu conduzir a reflexão dos alunos sobre seus pensamentos, no sentido de verificar se utilizavam uma estratégia que os ajudasse, ou não, na solução da tarefa.

7.3.5.4 Retorno coletivo

Depois que aplicamos essa tarefa de organização das pessoas na fila nesse dia 12 de junho[111], ainda realizamos um retorno com os alunos. Recolhemos as tarefas deles e pedimos que alguns fossem ao quadro para apresentarem suas respostas que já tínhamos visto enquanto andávamos pela sala. Discutimos sobre as estratégias e soluções dos alunos chamando a atenção dos mesmos para refletirem se haviam encontrado todas as respostas, se haviam respostas repetidas ou se faltava algum caso que não havia sido enumerado. Essa etapa de retorno da tarefa da fila, no mesmo dia em que já tínhamos dado o retorno da tarefa da pintura das casinhas, ajudou os alunos a refletirem novamente sobre suas respostas. Esse segundo tipo de retorno de uma tarefa que eles haviam acabado de resolver foi muito válido para a turma toda, pois tiveram que pensar e refletir sobre respostas que tinham dado há poucos minutos. Isso permitiu que eles mesmos tivessem consciência, quando fazíamos alguma pergunta sobre a solução, se haviam cometido algum tipo de erro.

De modo geral, a turma conseguiu atentar para o parâmetro da ordenação, ou seja, parece que eles compreenderam que, ao trocar a posição das pessoas na fila, era possível construir novas possibilidades de

---

[111] No dia 12 de junho a professora regente esteve em planejamento nas duas primeiras aulas. Na terceira aula, iniciada às 8h40min, participei da aula da professora sobre tarefas de outras disciplinas. O retorno coletivo sobre a tarefa da pintura das casinhas ocorreu entre 9h e 9h30min. Em seguida os alunos participaram do recreio. Às 10h retomamos com a tarefa das pessoas na fila, seguido do retorno coletivo e da aplicação da tarefa das figuras geométricas. Por volta de 11h10 encerramos a coleta e/ou produção de dados e permaneci na sala com a turma até as 11h30min acompanhando a orientação da professora com os alunos sobre tarefas escolares.

enumerações de modo semelhante ao que aconteceu com a ideia de ordenação ao trocar as cores na pintura das casas. Provavelmente alguns alunos começaram a relacionar em suas mentes comentários que fizemos no retorno sobre a ordenação das cores na pintura das casas com a tarefa da organização das pessoas na fila. Em comparação com a tarefa da pintura da casinha, verificamos que um maior número de alunos se apropriou dessas estratégias sistemáticas. Isso nos deu indícios de que os alunos estavam atentos à aula e compreendendo a necessidade de sistematização dos elementos que apareciam no enunciado da tarefa para encontrar todas as soluções.

7.3.5.5 Tarefa das figuras geométricas

Esta tarefa também foi desenvolvida nesse mesmo dia 12 de junho de 2018, depois que fizemos a intervenção coletiva com os alunos sobre a tarefa das pessoas na fila. Foi o terceiro problema de multiplicação (princípio multiplicativo) com a ideia de alocação. Discutimos com os alunos o enunciado[112] do problema e fizemos questionamentos para auxiliar na compreensão do problema. Temos consciência de que, como esta terceira tarefa foi aplicada após termos dado dois retornos sobre problemas com a mesma estrutura, as respostas dos alunos já poderiam estar sendo influenciadas pelas nossas intervenções. Apresentamos as respostas de seis alunos pela participação deles nas tarefas e pela diferença no tipo de estratégia de enumeração ou contagem que usaram.

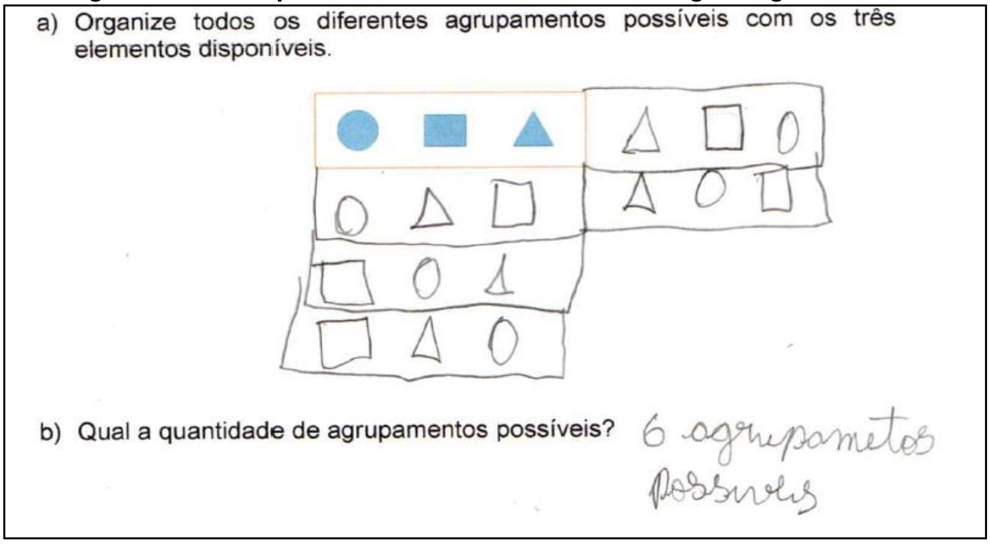
Enumeração sistemática completa e contagem

Nesta tarefa, identificamos dez alunos (Flora, Malves, Athayde, Lipinho, Felipe, Estela, Moranguinho, Pérola e Sol) que encontraram corretamente as seis possibilidades de organizar as figuras geométricas. Eles resolveram de forma semelhante, sistematizando de modo a encontrar corretamente o total de possibilidades. Como exemplo, segue a resposta de Estela, que fixou uma das

[112] Além de dialogar com os alunos sobre o problema, conversamos sobre as figuras geométricas presentes no enunciado. Também falamos sobre a nomenclatura e características das figuras geométricas, pois além da integração dos tópicos matemáticos, acreditamos que isto pode contribuir para que os alunos percebam que estão trabalhando com agrupamentos de ordenação de elementos distintos.

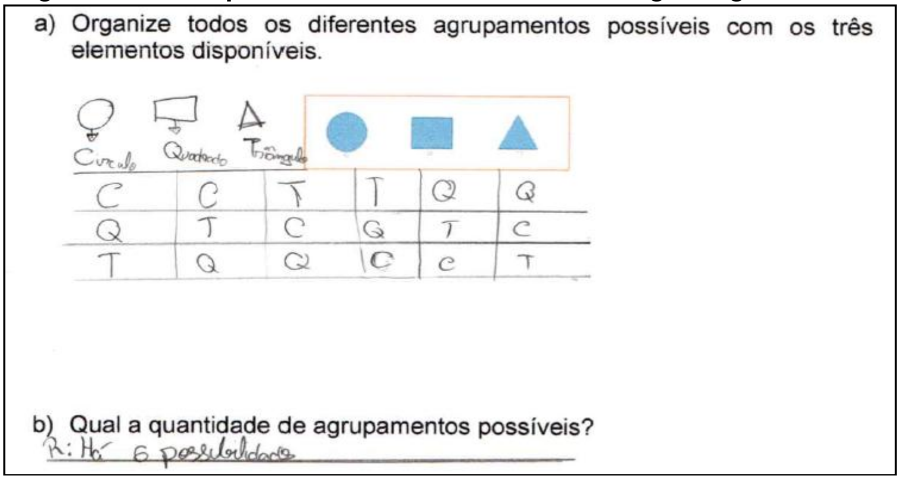
figuras e alternou as demais, para encontrar todas as possibilidades. A resposta da aluna Malves mostra que ela sistematizou as possibilidades por meio de um quadro e o aluno Athayde sistematizou por meio de um esquema com desenho das figuras, relacionando-as por meio de setas. Podemos observar as soluções nas figuras a seguir.

Figura 108 – Resposta da aluna Estela sobre as figuras geométricas



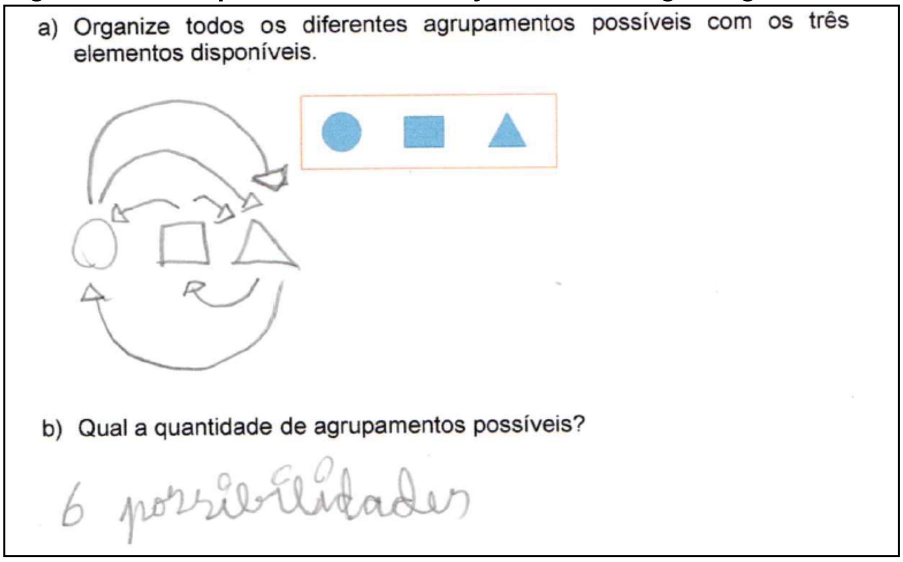
Fonte: Arquivo do pesquisador

Figura 109 – Resposta da aluna Malves sobre as figuras geométricas



Fonte: Arquivo do pesquisador

Figura 110 – Resposta do aluno Athayde sobre as figuras geométricas



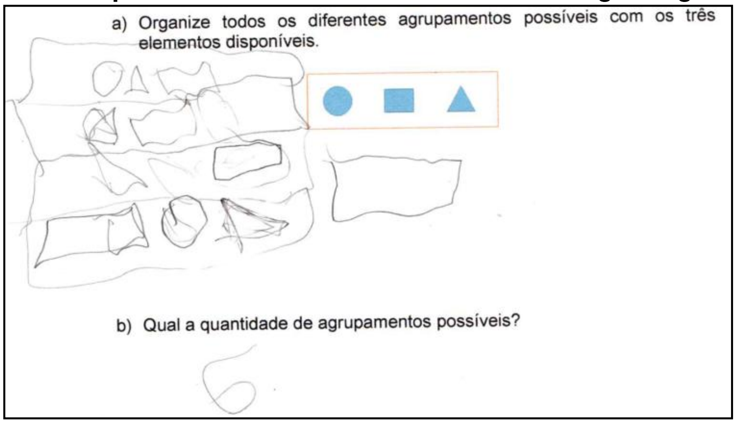
Fonte: Arquivo do pesquisador

Na resposta da aluna Estela, ficam evidentes as soluções desenhadas por figuras geométricas. Já a solução de Malves exige a compreensão da codificação entre as letras e as figuras geométricas. Na resposta de Athayde, não fica explícito que o total de possibilidades é seis e só foi evidenciado quando o aluno foi ao quadro explicar sua estratégia de resolução para a turma. O modelo por ele adotado exige um pensamento mais abstrato para o cálculo do total de possibilidades.

Enumeração sistemática incompleta e contagem

A aluna Cláudia, embora não tivesse desenhado uma das possibilidades, fez a contagem correta (Figura 111), pois percebeu que havia mais uma solução começando com o quadrado. Ela foi fixando uma das figuras geométricas e permutou as demais. Mesmo com o braço direito engessado, ela esforçou-se para fazer a tarefa, de forma sistemática, com a mão esquerda, observando a regularidade e contando corretamente o total de possibilidades.

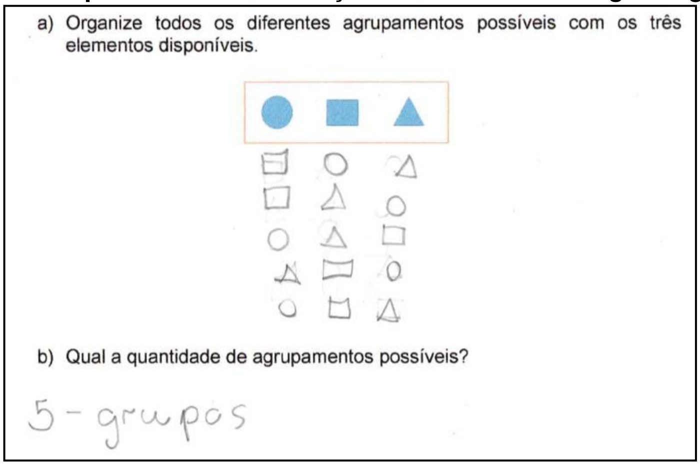
Figura 111 – Resposta da aluna Cláudia na tarefa das figuras geométricas



Fonte: Arquivo do pesquisador

A aluna Gonçalves começou resolvendo de forma sistemática (Figura 112), fixando uma das figuras e alternando as demais, ou seja, ela estava com o raciocino correto, porém, a aluna repetiu a possibilidade que já estava presente no enunciado do problema e deixou de desenhar a outra possibilidade começando com o triângulo e contou somente as enumerações que havia desenhado.

Figura 112 – Resposta da aluna Gonçalves na tarefa das figuras geométrica

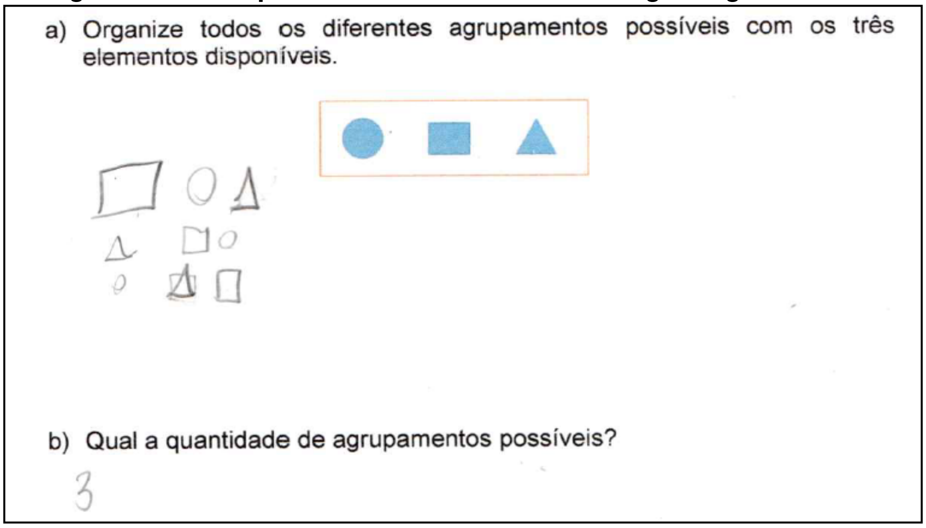


Fonte: Arquivo do pesquisador

Enumeração não sistemática incompleta e contagem

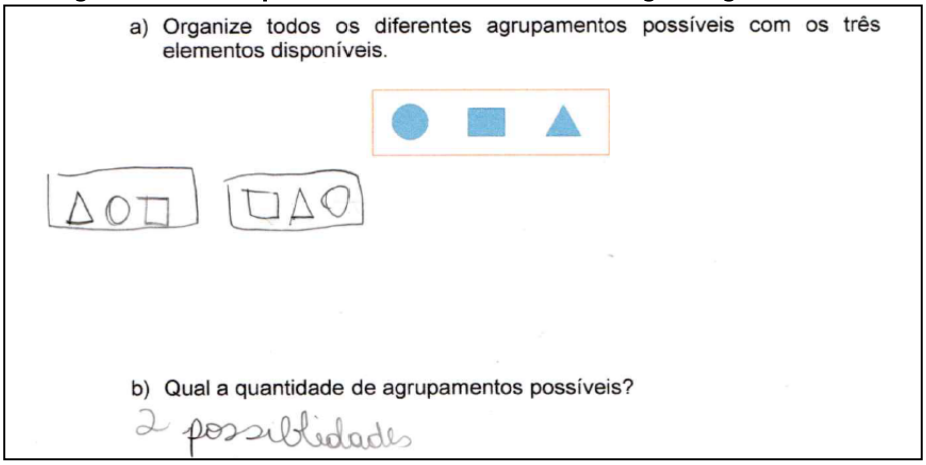
A aluna Mel alternou simultaneamente as três figuras geométricas e desenhou duas possibilidades diferentes da apresentada no problema. Semelhantemente à aluna Mel, o aluno Red alternou simultaneamente a posição das figuras geométricas e desenhou duas possibilidades diferentes da apresentada no enunciado.

Figura 113 – Resposta do aluno Red sobre as figuras geométricas



Fonte: Arquivo do pesquisador

Figura 114 – Resposta da aluna Mel sobre as figuras geométricas



Fonte: Arquivo do pesquisador

Assim como na tarefa da organização das pessoas na fila, Mel e Red utilizaram a mesma estratégia de enumeração não sistemática e incompleta. A aluna Mel contou como resposta as possibilidades que desenhou. O aluno Red, mesmo representando enumerações diferentes daquela que estava no enunciado do problema, não a considerou como uma possível solução. As respostas destes alunos nos fazem refletir sobre a necessidade da multiplicidade de experiências envolvendo o raciocínio combinatório com a finalidade de estimular o desenvolvimento de estratégias sistemáticas de resolução para encontrarem todas as possibilidades (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996).

7.3.5.6 Elaboração e resolução de problemas

Esta tarefa de elaboração[113] de problemas foi realizada em 29 de junho de 2018, ou seja, três meses depois de termos iniciado o nosso experimento de ensino com a tarefa do jogo de dominó. Antes de iniciarmos essa nova etapa demos o retorno da tarefa das figuras geométricas. Apresentamos no quadro algumas estratégias e soluções dos alunos e conversamos sobre as mesmas por cerca de quinze minutos. Em seguida recordamos e conversamos sobre todas as tarefas de pesquisa realizadas do dia 26 de março até o dia 12 de junho. Recordamos oralmente as tarefas do dominó, das barrinhas, dos dados, da pintura da casinha, da organização de pessoas na fila e da organização de figuras geométricas. Desenhamos no quadro algumas estratégias que eles haviam feito de forma correta e incorreta nas tarefas de pesquisa. Nesta etapa da pesquisa, os alunos já haviam estudado outros conteúdos matemáticos como sistema de numeração, operações matemáticas de adição, subtração, multiplicação e divisão, e estavam sendo influenciado pelas nossas estratégias de resolução de problemas e pelas estratégias da professora e de outros colegas desde março quando iniciamos o experimento de ensino.

Passados cerca de 30 minutos de retorno e de conversa com os alunos sobre os problemas matemáticos de nossa pesquisa, entregamos uma folha com a tarefa de elaboração de problemas a cada aluno. Fizemos a leitura individual e coletiva, além de discutirmos algumas ideias para elaboração dos problemas. Por exemplo, conversamos com os alunos sobre um problema que poderia ser elaborado com sete pessoas para distribuir em dois elevadores, ou distribuir sete carrinhos entre duas caixas, ou escrever o total sete como sendo a soma de duas parcelas. Também discutimos sobre ideias de ordenação, como por exemplo, organizar pessoas em uma competição de corrida (em primeiro, segundo e terceiro lugares) ou pintar as faixas de uma bandeira. Optamos por dar algumas ideias de elaboração de tarefas, pois sabemos que isto não é trivial para os alunos. A tarefa que entregamos tinha o seguinte enunciado:

[113] A professora Bernadete, que também faz parte do grupo de pesquisa (GEEM-ES), já estimulava desde o início do ano letivo, os alunos a elaborarem problemas de diferentes conteúdos, a pesquisar em livro ou internet outros problemas novos o que contribuiu para a realização dessa tarefa em junho.

a) Elabore e resolva um problema semelhante ao problema do dominó, ou ao problema das barrinhas, ou ao problema dos dados, com o total da soma igual a sete. Explique como você pensou para resolver.
b) Elabore e resolva um problema semelhante ao da pintura da casa, ou ao problema da organização das pessoas na fila, ou ao da organização das figuras geométricas.

Esperávamos que os alunos pudessem elaborar e resolver uma tarefa com o mesmo modelo combinatório implícito de partição na tarefa da letra (a) e com o modelo combinatório implícito de alocação na tarefa da letra (b). Além disso, esperávamos que respeitassem o parâmetro estabelecido (com o total sete) na letra (a) e os parâmetros de ordenação e de não repetição de elementos na tarefa da letra (b) e que explorassem a enumeração e a contagem no enunciado. Nesta etapa de pesquisa investigamos as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver as questões elaboradas por eles. Veja as categorizações apresentadas nos quadros a seguir (Quadro 32 e 33) dos dados de treze dos quinze alunos que conforme já mencionamos os seus responsáveis deram consentimento para participarem da pesquisa.

Quadro 32 - Categorização das tarefas elaboradas pelos alunos em relação ao problema de adição com a ideia de partição

<table>
<tr><th colspan="15">Quanto ao uso do modelo combinatório implícito de partição</th></tr>
<tr><th colspan="5">Atendeu ao modelo de partição com enunciado</th><th colspan="5">Atendeu ao modelo de partição, mas não elaborou enunciado do problema</th><th colspan="5">Iniciou a elaboração, mas não conseguiu concluir a escrita do problema</th></tr>
<tr><td colspan="5">Cláudia, Estela, Flora, Lipinho, Malves, Manuela, Mel, Moranguinho, Pérola e Sol</td><td colspan="5">Gonçalves
Red</td><td colspan="5">Athayde</td></tr>
<tr><th colspan="15">Estabelecimento de parâmetros com o total sete</th></tr>
<tr><th colspan="5">Respeitou o parâmetro estabelecido com total sete</th><th colspan="5">Não respeitou o parâmetro estabelecido</th><th colspan="5">Não foi possível identificar</th></tr>
<tr><td colspan="5">Cláudia, Estela, Flora, Gonçalves, Lipinho, Malves Manuela, Mel, Moranguinho, Pérola e Sol</td><td colspan="5">Red</td><td colspan="5">Athayde</td></tr>
<tr><th colspan="15">Quanto ao tipo de solução solicitada no enunciado</th></tr>
<tr><th colspan="3">Enumeração de possibilidades</th><th colspan="3">Contagem de possibilidades</th><th colspan="3">Enumeração e contagem de possibilidades</th><th colspan="3">Outro tipo de contagem</th><th colspan="3">Não solicitou (ausência de enunciado)</th></tr>
<tr><td colspan="3">Estela, Manuela, Mel e</td><td colspan="3">Flora, Malves e</td><td colspan="3"></td><td colspan="3">Lipinho</td><td colspan="3">Athayde,</td></tr>
</table>

Moranguinho	Sol			Gonçalves e Red
Quanto ao tipo de estratégia de resolução				
Visual (desenho, diagramas, gráficos)	**Explorou solução verbal (oral, escrita)**	**Explorou solução analítica (numérica, algébrica)**	**Não explicitou (ficou em aberto)**	**Não elaborou enunciado**
Moranguinho Mel		Estela, Flora, Manuela e Pérola	Lipinnho, Malves e Sol	Athayde Gonçalves Red
Tipo de operação, cálculo ou técnica combinatória com base na estrutura do problema				
Combinação completa explorando soluções inteiras não negativas	Estela, Flora, Malves, Manuela, Mel e Sol			
Combinação completa explorando soluções inteiras positivas	Cláudia e Pérola			
Princípio aditivo	Moranguinho e Lipinho			
Não elaborou enunciado de problema	Athayde, Gonçalves e Red			

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Fizemos várias leituras e releituras dos problemas elaborados pelos alunos, dos estudos teóricos de raciocínio combinatório e depois procuramos identificar se as tarefas estavam relacionadas com o modelo combinatório implícito que trabalhamos no experimento de ensino, se sugeriam ou não algum tipo de estratégia de resolução no enunciado. Se os problemas atendiam ao parâmetro com total sete na questão aditiva e se era ordenado na questão multiplicativa. Estas análises nos possibilitaram construir estes quadros.

Quadro 33 - Categorização das tarefas elaboradas pelos alunos em relação ao problema de multiplicação com a ideia de alocação

Quanto ao uso modelo combinatório implícito de alocação			
Atendeu ao modelo de alocação com enunciado	**O problema não envolveu o modelo combinatório implícito**	**Não elaborou problema, apenas desenhou possibilidades respeitando o modelo de alocação**	
Athayde, Cláudia, Estela Flora, Lipinho, Malves Manuela, Mel, Moranguinho Pérola e Sol	Red	Gonçalves	
Estabelecimento de parâmetros de ordenação e repetição de elementos			
Ordenado sem repetição de elementos	**Ordenado com repetição de elementos**	**Não elaborou problema**	**O problema não se aplicou ao modelo combinatório implícito**
Estela, Flora, Lipinho, Malves Manuela, Mel, Moranguinho Pérola e Sol	Cláudia e Athayde	Gonçalves	Red
Quanto ao tipo de solução solicitada no enunciado			

Enumeração de possibilidades	Contagem de possibilidades	Enumeração e contagem de possibilidades	Outro tipo de problema	Não solicitou (ausência de enunciado)
Cláudia, Estela, Mel e Moranguinho	Athayde, Flora Malves, Manuela e Pérola	Sol Lipinho	Red	Gonçalves

Quanto ao tipo de estratégia de presente no enunciado				
Visual (desenho, diagramas, gráficos)	**Explorou solução verbal (oral, escrita)**	**Explorou solução analítica (numérica, algébrica)**	**Não explicitou**	**Não elaborou enunciado**
Athayde, Cláudia, Flora, Manuela e Sol	Estela, Lipinho Malves, Moranguinho e Pérola	Mel	Red	Gonçalves

Tipo de operação, cálculo ou técnica combinatória com base na estrutura do problema		
Permutação simples	Estela, Flora, Lipinho Malves, Mel, Moranguinho, Pérola e Sol	
Combinações completas ou combinação com repetição	Cláudia Athayde	
Permutação caótica	Manuela	Gonçalves – não elaborou o problema, mas pintou a bandeira do Brasil com esta estrutura
Nenhuma categoria de operação combinatória	Red	

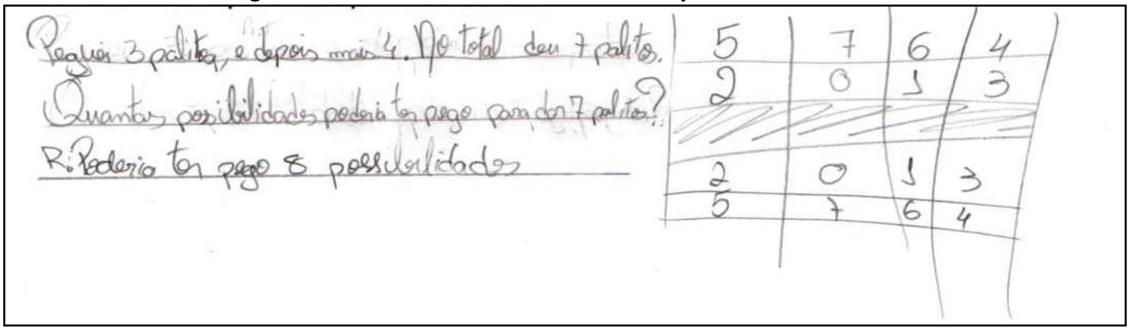
Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Notamos que de um modo geral os alunos conseguiram elaborar problemas envolvendo o raciocínio combinatório, embora alguns alunos tenham tido dificuldade para escrever enunciados. Verificamos também que os problemas elaborados pelos alunos têm potencial para construir diálogos sobre outros tipos de ideias combinatórias envolvendo diferentes parâmetros, seja de ordenação, de partição entre outros. A seguir apresentamos os problemas e a análise sobre os mesmos exemplificando as categorias que colocamos nos quadros de acordo com o que estudamos da teoria de combinatória dos espanhóis, das orientações dos documentos do PCN e da BNCC e com o que aprendemos de resolução de problemas.

7.3.5.6.1 Problemas elaborados por Malves

Malves elaborou o problema da seguinte forma*: Peguei 3 palitos e depois mais 4. No total deu 7 palitos. Quantas possibilidades poderia ter pegado para dar 7 palitos?*

Figura 115 – Problemas elaborados pela aluna Malves



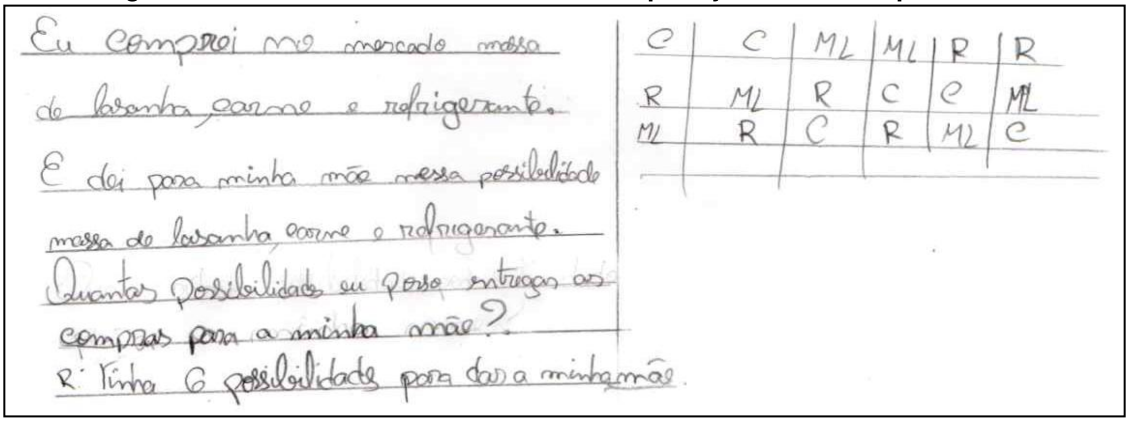
Fonte: Arquivo do pesquisador

Em relação ao modelo combinatório implícito, o problema elaborado por Malves atendeu ao modelo de partição, respeitou o parâmetro com o total sete e explorou no enunciado a contagem de possibilidades. A aluna usou a propriedade comutativa e a propriedade do elemento neutro da adição para encontrar as possibilidades, colocando os valores num quadro. Notamos que o problema elaborado pela aluna está de acordo com o modelo combinatório implícito de partição e atendeu ao parâmetro estabelecido com o total sete. Além disso, o enunciado explorou a contagem de possibilidades e deixou em aberto o tipo de estratégia que poderia ser utilizada, seja por desenho, seja por solução numérica, algébrica ou verbal.

A estratégia de resolução de Malves, usando o quadro, foi semelhante ao modo como ela resolveu os problemas em que organizou as pessoas na fila e organizou as figuras geométricas (tarefas 2 e 3 dos problemas de multiplicação com ideia de alocação). Essa mesma estratégia foi utilizada no problema elaborado com a ideia de multiplicação. A aluna deu indício de que se apropriou desse tipo de estratégia e iniciou o desenvolvimento de pensamento sistemático, fixando uma das variáveis do problema e alternando as demais variáveis.

A mesma aluna elaborou o seguinte problema de multiplicação com a ideia de alocação: *Eu comprei no mercado massa de lasanha, carne e refrigerante. E dei para minha mãe nessa possibilidade: massa de lasanha, carne e refrigerante. Quantas possibilidades eu posso entregar as compras para a minha mãe?*

Figura 116 – Problema com a ideia de multiplicação elaborado por Malves



Eu comprei no mercado massa de lasanha, carne e refrigerante. E dei para minha mãe nessa possibilidade massa de lasanha carne e refrigerante. Quantas possibilidades eu posso entregar as compras para a minha mãe?

R: Tinha 6 possibilidade para dar a minha mãe.

C	C	ML	ML	R	R
R	ML	R	C	C	ML
ML	R	C	R	ML	C

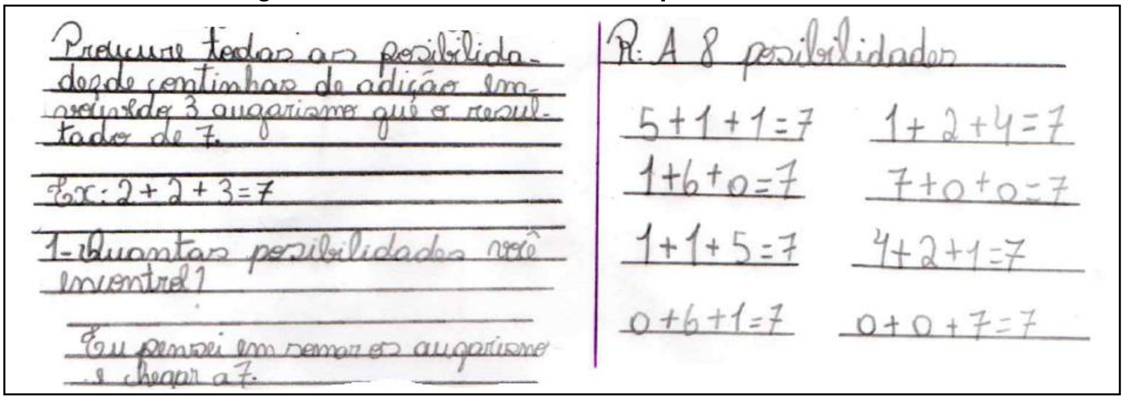
Fonte: Arquivo do pesquisador

Malves atendeu ao modelo combinatório implícito de alocação, respeitando os parâmetros de ordenação e não repetição de elementos. Além disso, explorou a contagem no enunciado do problema. Em ambos os problemas, a aluna enumerou as possibilidades usando a ideia de quadro e, por meio da enumeração, fez a contagem total. Embora Dante (2016) estimule, em algumas tarefas da coleção Ápice, a construção da relação entre o princípio multiplicativo e a árvore de possibilidades, notamos que desenhos, listagens sistemáticas e quadros podem ser mais bem explorados por professores sem apressar os alunos do quinto ano a usar mecanicamente a operação de multiplicação no processo de contagem sem compreender esse procedimento na contagem de possibilidades.

7.3.5.6.2 Problemas elaborados por Manuela

O problema de adição elaborado pela aluna Manuela foi este: *Procure todas as possibilidades de continhas de adição envolvendo 3 algarismos que o resultado dê 7.*

Figura 117 – Problema elaborado pela aluna Manuela



Procure todas as posibilidades continhas de adição envolvendo 3 algarismos que o resultado de 7.

Ex: 2+2+3=7

1- Quantas posibilidades você encontrou?

Eu pensei em somar os algarismos e chegar a 7.

R: A 8 posibilidades

5+1+1=7 1+2+4=7

1+6+0=7 7+0+0=7

1+1+5=7 4+2+1=7

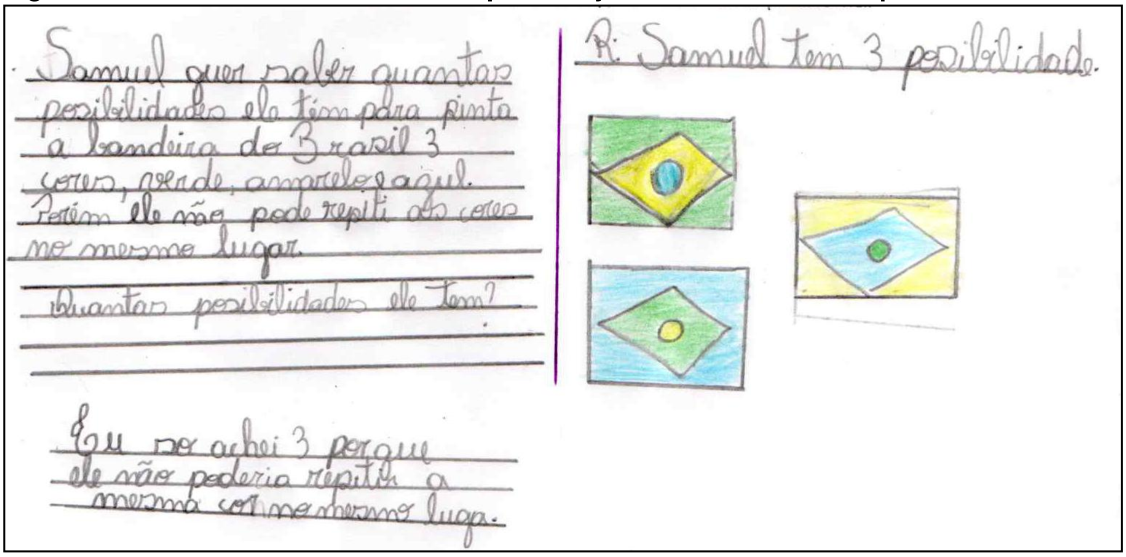
0+6+1=7 0+0+7=7

Fonte: Arquivo do pesquisador

A aluna Manuela elaborou um problema mais complexo do que o explorado nas tarefas do dominó, das barrinhas e dos dados, pois envolve tripartições do número sete, com o total de possibilidades igual a 36. Em outras palavras, consiste em encontrar as soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 7$. Como o número de soluções é maior que dez, exige uma sistematização mais aprimorada dos alunos no processo de resolução. Embora a aluna tenha encontrado apenas oito do total de soluções possíveis e não tenha contado com a solução presente no enunciado, já demonstra indícios de um raciocínio combinatório que atenta para os parâmetros estabelecidos e o modelo combinatório implícito.

Notamos que o problema de Manuela está de acordo com o modelo de partição e com o parâmetro cujo total é sete. Além disso, explorou a enumeração de possibilidades no enunciado e solicitou uma estratégia por meio de cálculos de adições. Na letra (b), a aluna elaborou um problema que usa a ordenação de elementos distintos e sua colocação em espaços distintos. O problema elaborado pela aluna foi este: *Samuel quer saber quantas possibilidades ele tem para pintar a bandeira do Brasil com três cores: verde, amarelo e azul. Porém, ele não pode repetir as cores no mesmo lugar. Quantas possibilidades ele tem?*

Figura 118 – Problema com a ideia de permutação caótica elaborado pela aluna Manuela



Fonte: Arquivo do pesquisador

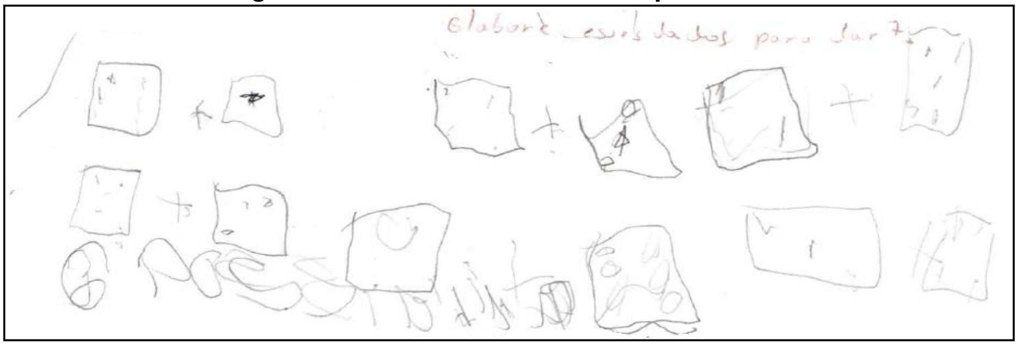
Embora pareça um problema de fácil resolução, classifica-se como uma situação cuja resolução envolve o conceito da operação de permutação caótica, pois os elementos não podem ficar em seu local de origem nas novas alocações realizadas. Quanto ao modelo combinatório implícito, o problema classifica-se dentro da alocação, mas difere nas técnicas ou operações combinatórias, uma vez que a resposta não pode ser obtida com a aplicação direta do princípio multiplicativo. Outra semelhança com a tarefa que propusemos para os alunos está relacionada ao critério de ordenação e de não repetição de elementos, visto que a ordem em que os elementos são alocados gera novas possibilidades e restringe a possibilidade de repetir cores. Em ambos os problemas, Manuela realizou a contagem usando o processo de enumerar as possibilidades.

7.3.5.6.3 Problemas elaborados por Cláudia

No dia da realização da tarefa de elaboração de problemas, a aluna Cláudia estava com o braço direito engessado e tentou fazer a tarefa com a mão esquerda. Os problemas elaborados pela aluna foram os seguintes:

✓ *Elabore esses dados para dar 7.*

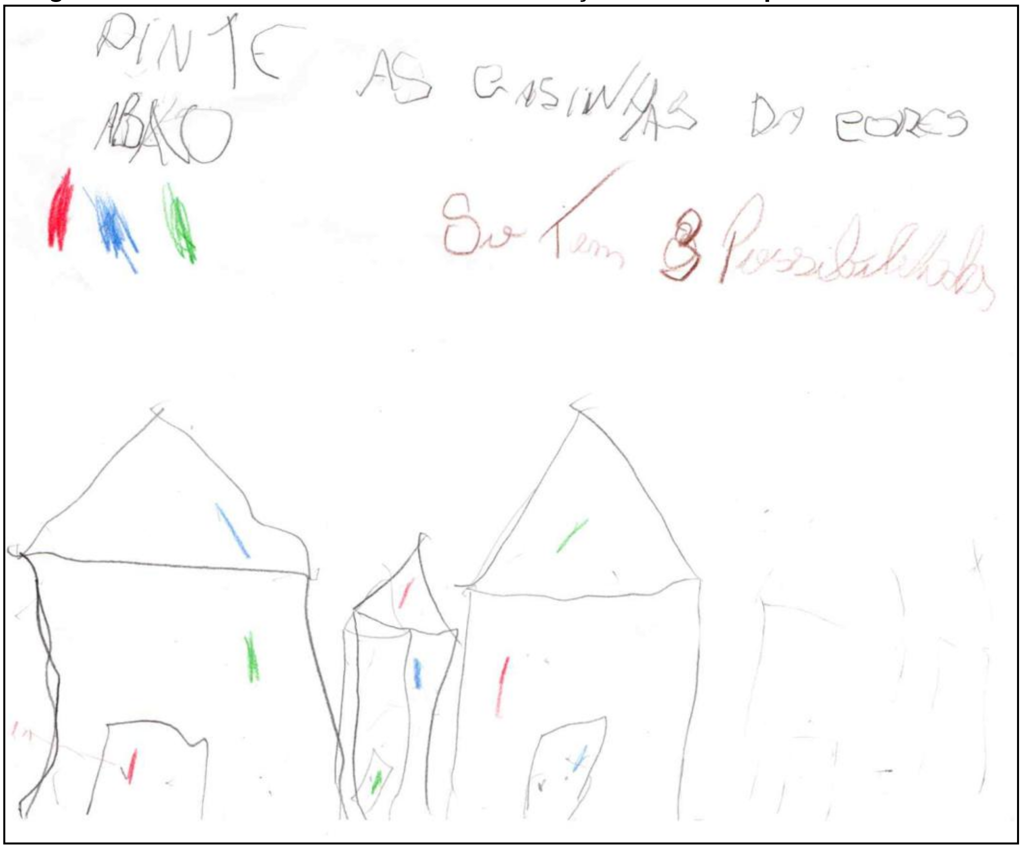
Figura 119 – Problema elaborado pela aluna Cláudia



Fonte: Arquivo do pesquisador

✓ *Pinte as casinhas com as cores abaixo (vermelho, azul e verde).*

Figura 120 – Problema com a ideia de alocação elaborado pela aluna Cláudia



Fonte: Arquivo do pesquisador

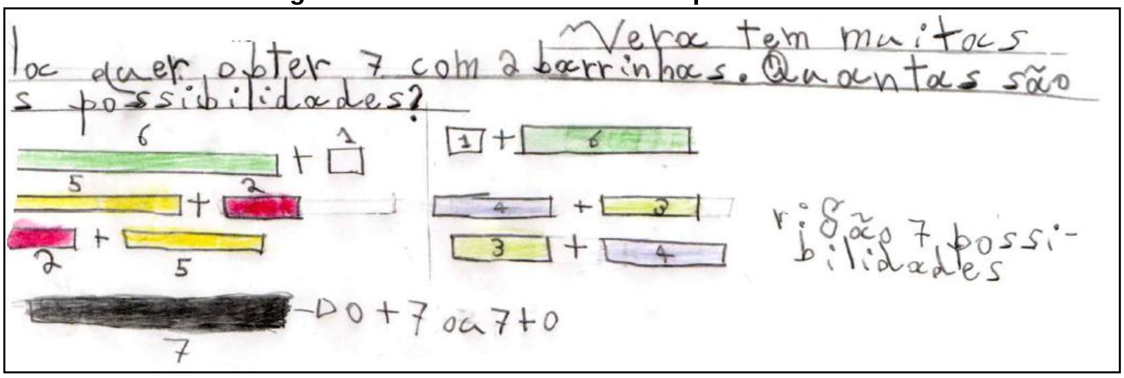
No problema (a), Cláudia elaborou uma tarefa semelhante à dos dados para o problema da soma com a ideia de partição. Ela atendeu ao modelo combinatório implícito, respeitou o parâmetro com o total sete e solicitou a enumeração de possibilidades. No segundo problema, também atentou para o modelo combinatório implícito de alocação. Porém, o enunciado não restringiu o critério de repetição de elementos. A falta de sistematização e a troca simultânea das cores nos espaços da casa dificultaram que Cláudia encontrasse todas as soluções possíveis, mas um dos fatores que levaram a isso pode ter sido a situação de incômodo em que a aluna se encontrava com o braço engessado. Portanto, pela estrutura do enunciado, esse problema da casinha elaborado por Cláudia pode ser classificado dentro das operações de combinação com repetição ou combinações completas.

Cláudia encontrou três maneiras de pintar a casinha com as cores azul, verde e vermelha, mas percebemos, durante a aplicação da tarefa, que ela estava de certa forma indisposta a realizar a tarefa, por não poder escrever com a mão direita, com a qual realizava as tarefas de escrita cotidianamente. Talvez isso explique o fato de a aluna não ter conseguido escrever um enunciado claro e o fato de não realizar um tipo de sistematização ao resolver o problema.

7.3.5.6.4 Problemas elaborados pela aluna Sol

A aluna Sol elaborou um problema semelhante ao das barrinhas com o total sete e desenhou as possibilidades de forma sistemática, usando a comutatividade da adição para encontrar as possibilidades. Embora tivesse escrito oito somas com o total sete, a aluna considerou apenas as soluções desenhadas por ela. O enunciado do problema foi o seguinte: *Vera tem muitas barrinhas. Ela quer obter 7 com 2 barrinhas. Quantas são as possibilidades?*

Figura 121 – Problema elaborado pela aluna Sol



Fonte: Arquivo do pesquisador

De acordo com o que se pede no problema, a aluna escreveu um enunciado que tem relação com o modelo combinatório implícito de partição, semelhante ao que havíamos trabalhado nas tarefas com a ideia de adição. Estabeleceu o parâmetro com o total sete e solicitou a contagem das possibilidades, que foi realizada com base nas enumerações (desenho e numérica). Em relação ao tipo de operação, ele envolve a ideia de combinações completas explorando soluções inteiras não negativas, isto é, quando o zero faz parte do conjunto de elementos de contagem.

O segundo problema elaborado por Sol, usando figuras geométricas como o pentágono, o hexágono e o losango, foi semelhante à tarefa das figuras geométricas que havíamos trabalhado com eles: *Letícia quer saber se pode ter 6 possibilidades com essas 3 formas? Será que dá certo?*

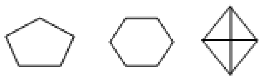
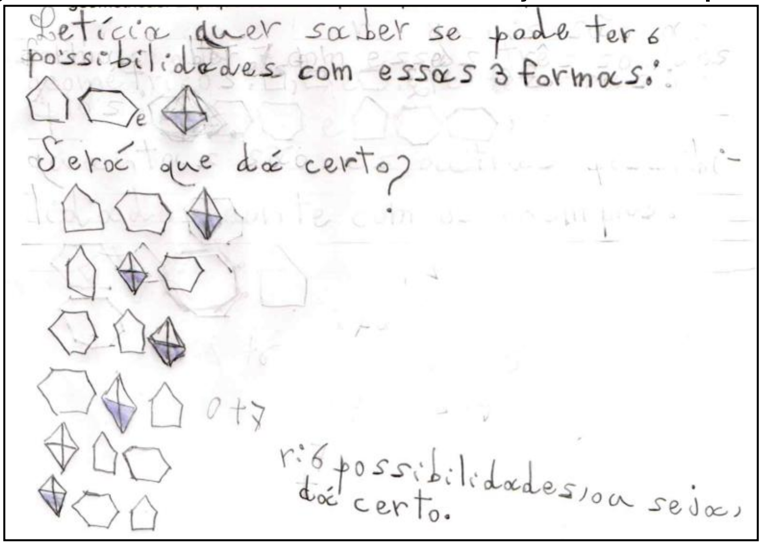


Figura 122 – Problema com a ideia de alocação elaborado por Sol



Fonte: Arquivo do pesquisador

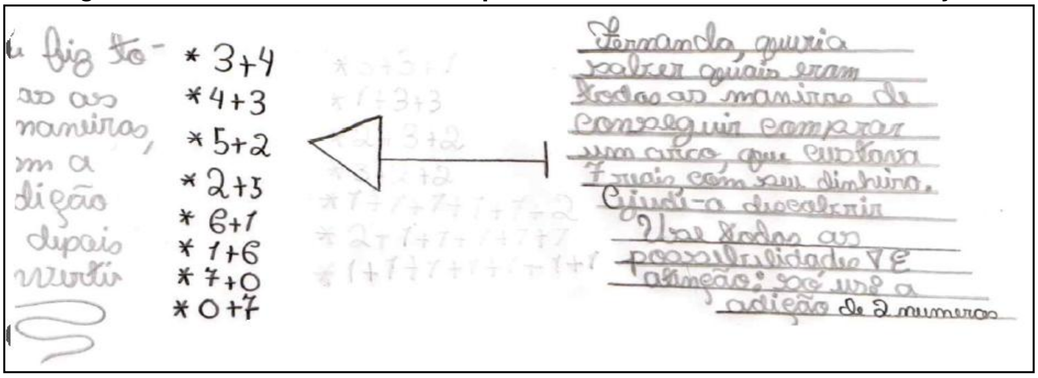
Ao analisarmos o enunciado do problema, verificamos que atende ao modelo de alocação e já anuncia o possível total de possibilidades, solicitando que seja verificado esse total construindo as enumerações. Sol desenhou as sequências com as figuras geométricas fixando uma delas e alterando as demais. Esse tipo de solução está de acordo com a ideia de permutação simples trabalhada nas tarefas de multiplicação que propusemos e fez a contagem enumerando de forma sistemática, fixando uma das figuras geométricas e alternando as demais.

7.3.5.6.5 Problema elaborado pela aluna Pérola

Os problemas elaborados pela aluna Pérola foram os seguintes:

- *Fernanda, queria saber quais eram todas as maneiras de conseguir comprar um arco que custava 7 reais com seu dinheiro. Ajude-a descobrir. Use todas as possibilidades! E atenção: só use a adição de 2 números.*

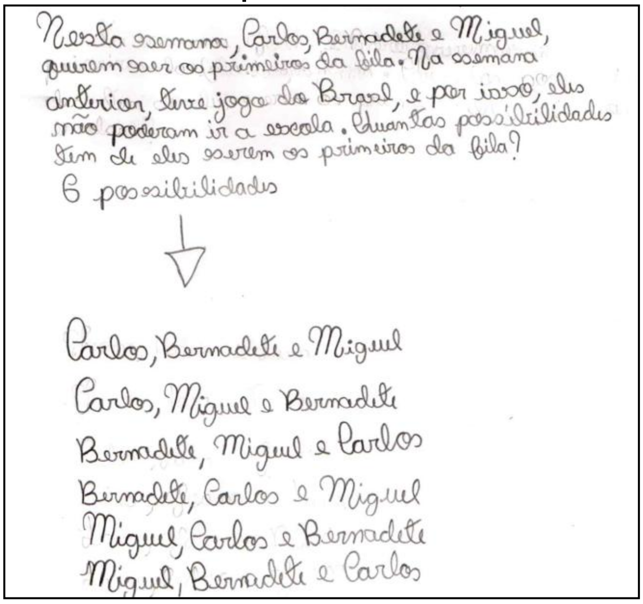
Figura 123 – Problema elaborado pela aluna Pérola com a ideia de adição



Fonte: Arquivo do pesquisador

- *Nesta semana, Carlos, Bernadete e Miguel, querem ser os primeiros da fila. Na semana anterior, teve jogo do Brasil, e por isso, eles não puderam ir à escola. Quantas possibilidades têm de eles serem os primeiros da fila?*

Figura 124 – Problema elaborado pela aluna Perola com a ideia de multiplicação



Fonte: Arquivo do pesquisador

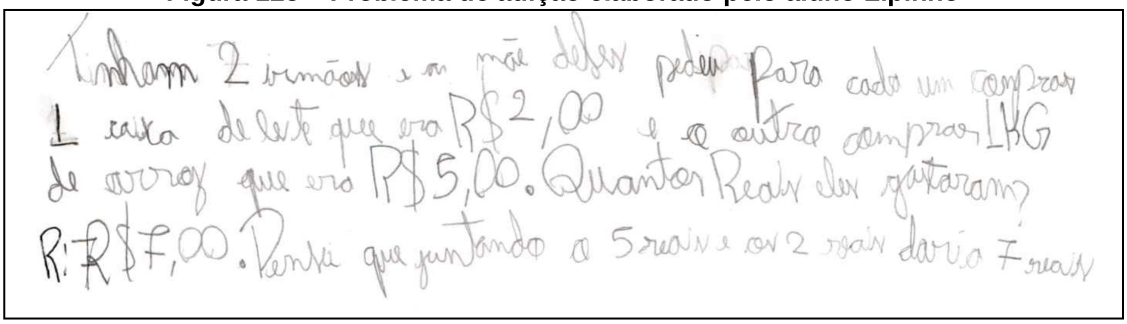
O primeiro problema envolveu a adição com a ideia de partição solicitando a enumeração por meio de cálculos. Consistiu em encontrar as soluções não negativas para a soma de dois números naturais com o total sete. Quando a aluna havia escrito o problema e apresentado a nós, questionamos se poderia fazer adições com várias parcelas que desse o total sete. Pérola disse que tinha que ser com duas parcelas. Chamamos a atenção dela sobre o enunciado que não dava essa informação, nisso a aluna acrescentou que era para usar adição só com dois números. O outro problema elaborado por Pérola envolveu o modelo combinatório de alocação, atendeu aos critérios de ordenação e solicitou a contagem. A aluna fixou um dos nomes e construiu as permutações para encontrar todas as enumerações possíveis.

7.3.5.6.6 Problemas elaborados pelo aluno Lipinho

O aluno Lipinho elaborou o primeiro problema envolvendo o princípio aditivo integrando-o com o sistema monetário, mas o enunciado não explorou outras possibilidades de enumerações com o total sete com a soma de duas parcelas, pois os valores destas já estavam estabelecidos. Veja o problema a seguir.

- ✓ *Tinham dois irmãos e a mãe deles pediu para cada um comprar uma caixa de leite que era R$ 2,00 e outro comprar 1kg de arroz que era R$ 5,00. Quantos reais eles gastaram?*

Figura 125 – Problema de adição elaborado pelo aluno Lipinho

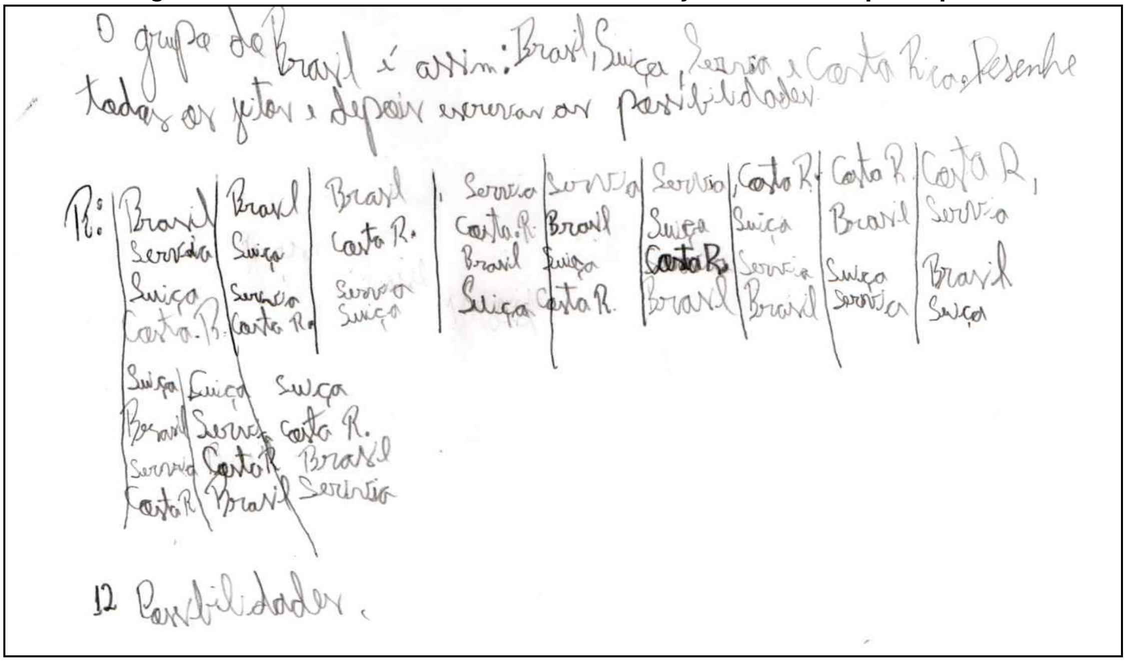

Tinham 2 irmãos e a mãe deles pedeu para cada um comprar 1 caixa de leite que era R$ 2,00 e o outro comprar 1KG de arroz que era R$ 5,00. Quantos Reais eles gastaram?
R: R$ 7,00. Pensei que juntando os 5 reais e os 2 reais daria 7 reais

Fonte: Arquivo do pesquisador

O segundo problema elaborado por Lipinho foi mais complexo do que os que foram trabalhados com a turma, pois envolveu um número maior de ordenações e, de acordo com o enunciado, atendeu ao modelo de alocação e respeitou os critérios de ordenação e não repetição de elementos.

- ✓ *O grupo do Brasil é assim: Brasil, Suíça, Sérvia e Costa Rica. Desenhe todos os jeitos e depois escreva as possibilidades.*

Figura 126 – Problema com a ideia de alocação elaborado por Lipinho



Fonte: Arquivo do pesquisador

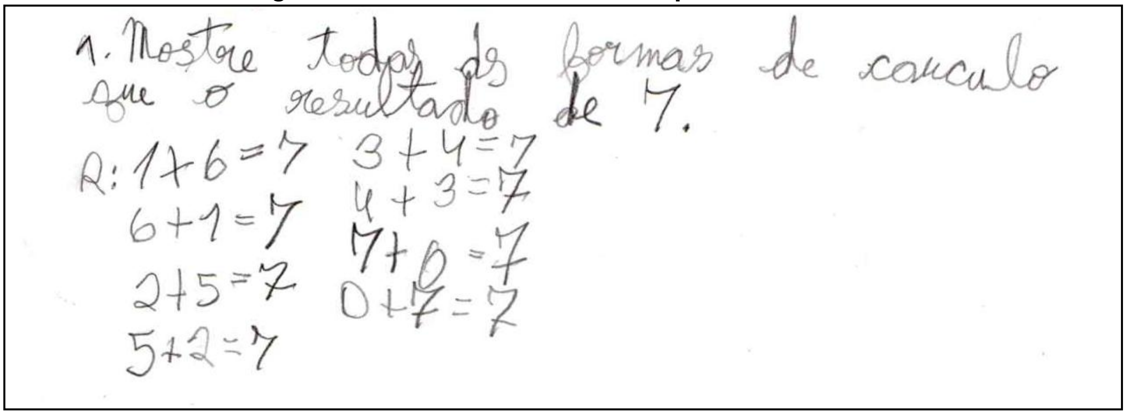
Para solucionar o problema, o aluno Lipinho usou ideias sistemáticas fixando um dos países e permutando os demais. Porém, este problema exigiu maior domínio das estratégias de sistematização devido ao número de permutações necessárias para encontrar todas as soluções.

7.3.5.6.7 Problemas elaborados pela aluna Estela

A aluna Estela elaborou um problema com as possibilidades de obter somas não negativas usando dois números naturais. Semelhante ao problema das barrinhas, a tarefa envolveu o modelo de partição e enumeração explorando a solução por meio de cálculos.

- ✓ *Mostre todas as formas de cálculo que o resultado dê 7.*

Figura 127 – Problema elaborado pela aluna Estela

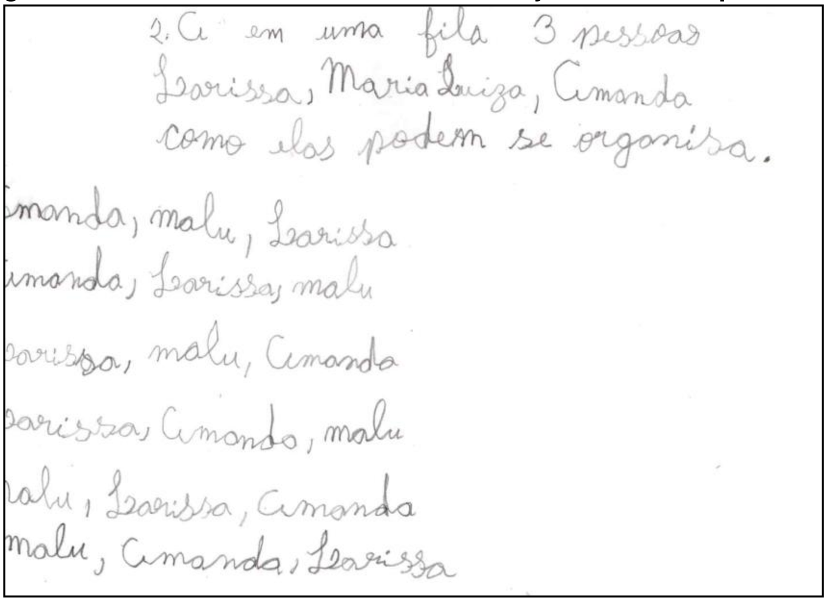

1. Mostre todas as formas de carculo que o resultado de 7.
R: 1+6=7 3+4=7
6+1=7 4+3=7
2+5=7 7+0=7
5+2=7 0+7=7

Fonte: Arquivo do pesquisador

Para resolver o problema, Estela usou a comutatividade da adição como estratégia sistemática, para obter as todas as possibilidades de respostas. Embora tenha usado apenas somas com duas parcelas, o enunciado não está claro em relação a isso. Já o segundo problema elaborado foi semelhante ao da organização das pessoas numa fila.

- ✓ *Há em uma fila três pessoas: Larissa, Maria Luiza e Amanda. Como elas poderiam se organizar?*

Figura 128 – Problema com a ideia de alocação elaborado por Estela


2. A em uma fila 3 pessoas
Larissa, Maria Luiza, Amanda
como elas podem se organisa.
Amanda, malu, Larissa
Amanda, Larissa, malu
Larissa, malu, Amanda
Larissa, Amanda, malu
malu, Larissa, Amanda
malu, Amanda, Larissa

Fonte: Arquivo do pesquisador

O problema envolveu o modelo de alocação e atendeu ao critério de ordenação e de não repetição de elementos. Pelo enunciado, foi solicitada a enumeração das possibilidades, e não a contagem, assim como no problema que elaborou com a ideia de partição. Estela resolveu de forma sistemática, fixando um dos nomes em uma das posições e foi alternando os demais.

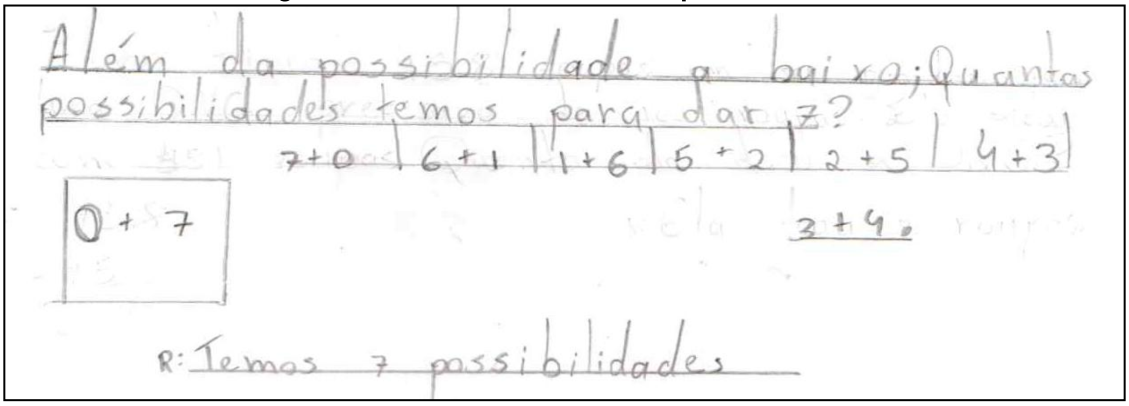
7.3.5.6.8 Problemas elaborados pela aluna Flora

O primeiro problema elaborado pela aluna Flora foi semelhante ao da tarefa das barrinhas de acordo com o modelo de partição e atendeu ao parâmetro estabelecido com o total sete e solicitou a contagem do total de possibilidades.

- ✓ *Além da possibilidade abaixo, quantas possibilidades temos para dar 7?*

0+ 7

Figura 129 – Problema elaborado pela aluna Flora



Fonte: Arquivo do pesquisador

Para calcular as possibilidades, a aluna realizou adições comutando os valores das parcelas, encontrando as somas não negativas com o total sete e usando dois números naturais. O segundo problema elaborado por Flora foi semelhante ao da organização das pessoas na fila, porém mais complexo, pois o número de possibilidades foi maior.

- ✓ *Meu filho convidou três amigos para casa. Eles vão brincar na mesa. Quais são as possibilidades deles sentarem à mesa? (A mesa só tem 4 cadeiras).*

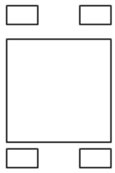
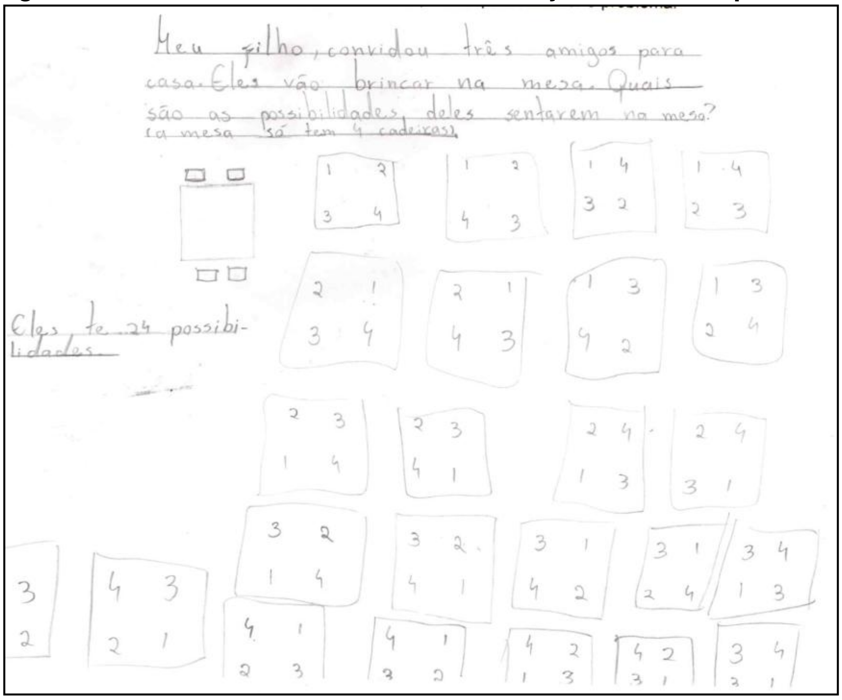


Figura 130 – Problema com a ideia de alocação elaborado por Flora



Fonte: Arquivo do pesquisador

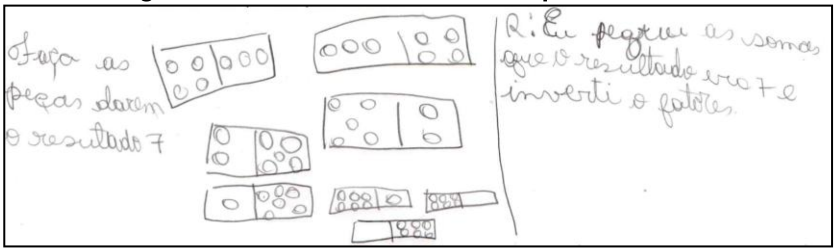
O enunciado envolveu a ideia de alocação de pessoas nas cadeiras, portanto atendeu ao modelo implícito de alocação e respeitou o parâmetro de ordenação e de não repetição de elementos. Para resolver a questão, a aluna usou a sistematização fixando as pessoas e uma cadeira e permutando as demais pessoas nas outras cadeiras, representando por meio de algarismos, semelhantemente à estratégia realizada na tarefa das pessoas na fila.

7.3.5.6.9 Problemas elaborados pela aluna Mel

Os problemas elaborados pela aluna Mel foram os seguintes:

a) *Faça as peças darem o resultado 7.*

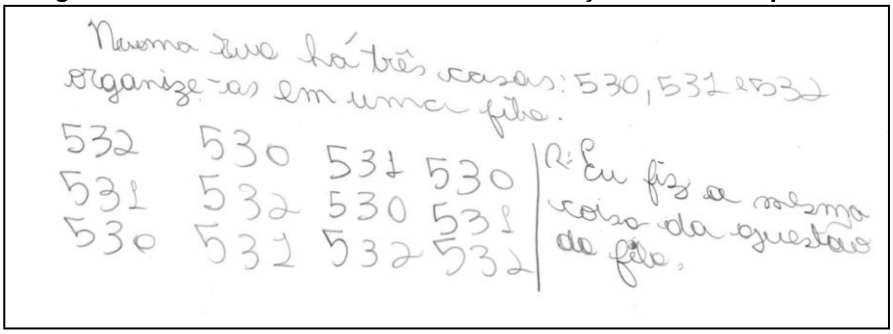
Figura 131 – Problema elaborado pela aluna Mel



Fonte: Arquivo do pesquisador

b) Numa rua há três casas: 530, 531 e 532. Organize-as em uma fila.

Figura 132 – Problema com a ideia de alocação elaborado por Mel



Fonte: Arquivo do pesquisador

O primeiro problema foi semelhante ao do dominó. Envolveu o modelo de partição, porém, nem todos os desenhos respeitam o parâmetro com o total sete, pois a aluna desenhou os casos (0+6) e (6+0) contando como possibilidades. Solicitou que fossem representadas (enumeradas) as peças com o total estabelecido. Para solucionar a questão, ela usou a comutatividade. O problema da letra (b) foi semelhante à tarefa das pessoas na fila, seguindo o modelo de alocação e atendendo ao parâmetro de ordenação sem repetição de elementos, e solicitou a enumeração das possibilidades. Durante o processo de resolução, Mel listou as possibilidades de forma não sistemática e só encontrou 4 possibilidades.

7.3.5.6.10 Problemas elaborados pela aluna Moranguinho

Embora o primeiro problema fosse de partição, a aluna Moranguinho elaborou um problema de adição (princípio aditivo) com a ideia de completar, porém solicitou a escolha de elementos que atendam ao parâmetro estabelecido, e a possibilidade foi única devido aos valores prefixados. Além disso, ela elaborou uma tarefa que integrou com sistema monetário.

a) *Laura tem R$ 2,00, mas ela precisa de R$ 7, 00. Selecione a quantia que dará R$ 7,00.*

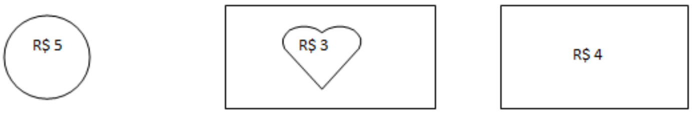
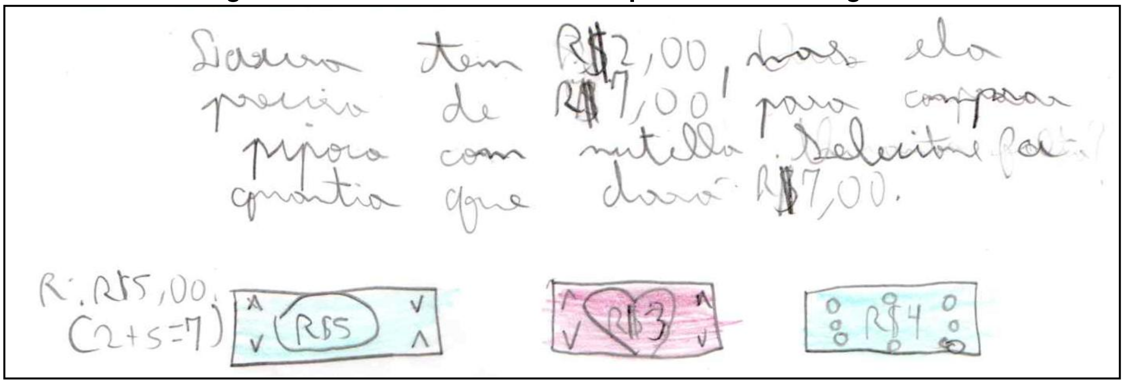


Figura 133 – Problema elaborado pela aluna Moranguinho

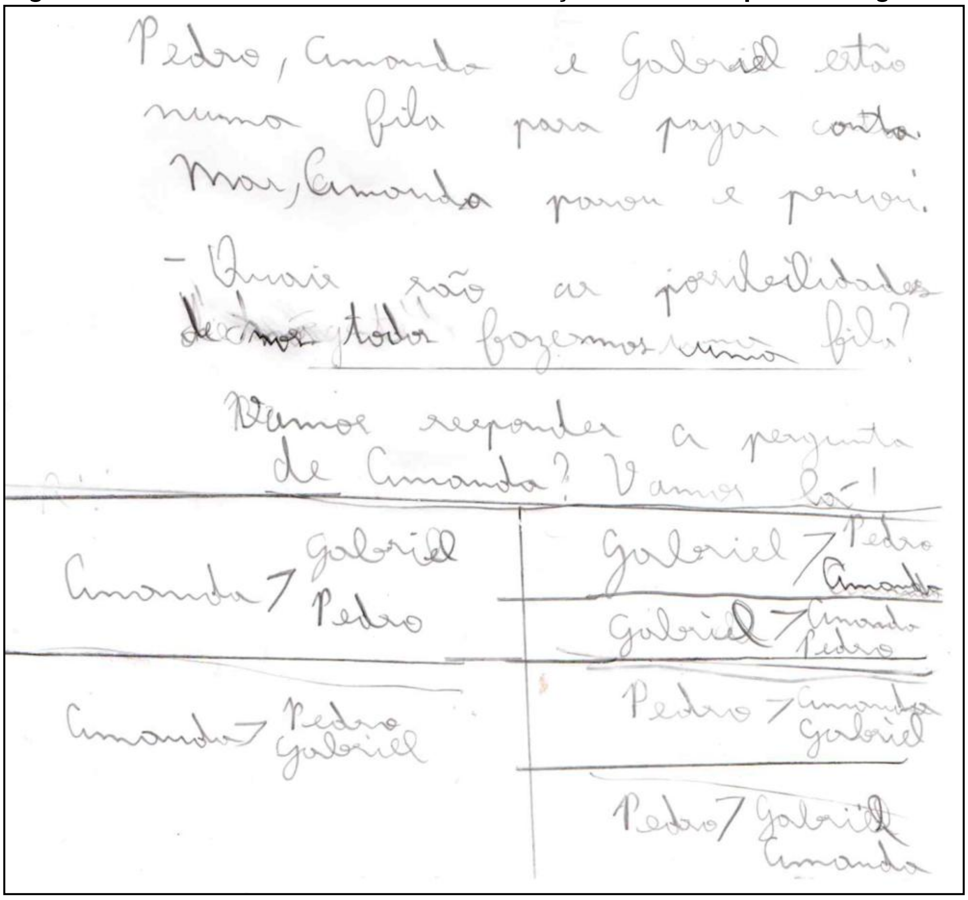


Fonte: Arquivo do pesquisador

Na letra (b), a aluna elaborou um problema semelhante à tarefa de organizar as pessoas na fila, atendendo ao modelo de alocação e respeitando os parâmetros de ordem e não repetição de elementos solicitando a enumeração das possibilidades.

b) *Pedro, Amanda e Gabriel estão numa fila para pagar conta. Mas, Amanda parou e pensou: – Quais são as possibilidades de nós todos fazermos uma fila? Vamos responder a pergunta de Amanda? Vamos lá!*

Figura 134 – Problema com a ideia de alocação elaborado por Moranguinho



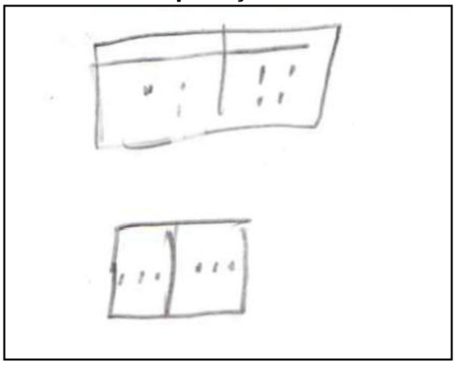
Fonte: Arquivo do pesquisador

Moranguinho resolveu de forma sistemática usando a ideia de diagrama da árvore de possibilidades, fixando um dos nomes e associando com os outros dois nomes. Essa estratégia já havia sido utilizada pela aluna na realização da tarefa da fila.

7.3.5.6.11 Problemas elaborados pelo aluno Red

O aluno Red não conseguiu elaborar o problema de adição com a ideia de partição com o total sete. Isso mostra que Red precisaria de mais tempo e de outras tarefas para compreender a necessidade de atentar para os parâmetros ou critérios estabelecidos. Na letra (b), elaborou uma pergunta sobre a convocação dos jogadores da seleção brasileira, mas que não exigia raciocínio combinatório.

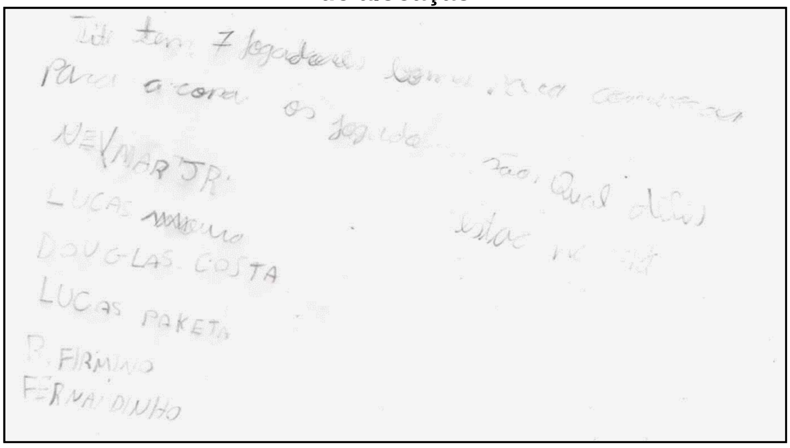
Figura 135 – Desenho feito por Red para a elaboração de problemas com a ideia de partição



Fonte: Arquivo do pesquisador

- ✓ *Tite tem 7 jogadores bons para convocar para a copa. Os jogadores são: Neymar Jr., Lucas, Douglas Costa, Lucas Paquetá, R. Firmino e Fernandino. Qual deles estão na copa?*

Figura 136 – Questão feita por Red para a tarefa de elaboração de problema com a ideia de alocação



Fonte: Arquivo do pesquisador

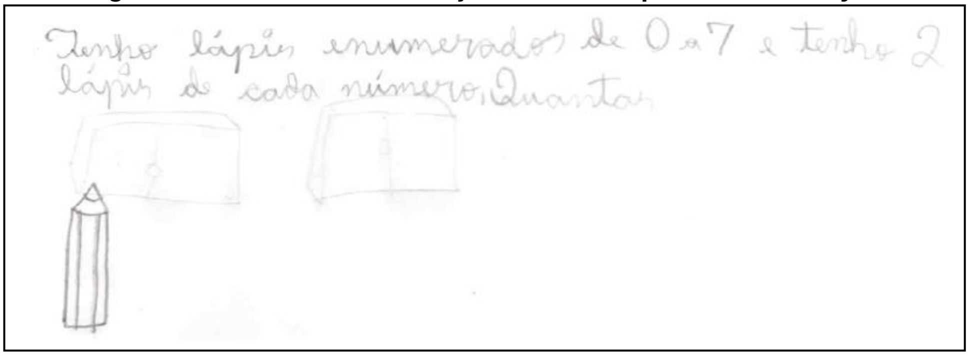
Embora a elaboração de problemas seja uma das habilidades a serem desenvolvidas no trabalho por meio de resolução de problemas, contudo, não é uma tarefa fácil como podemos observar nas respostas do aluno Red (Figuras 135 e 136) nesta etapa de elaboração de problemas matemáticos. Mas, este processo nos permite pensar e repensar as idas e vindas necessárias desse processo dinâmico de compreender, resolver, elaborar e propor problemas quando se tem compreensão da complexidade e da finalidade do processo de ensino, aprendizagem e avaliação em matemática.

7.4.5.6.12 Problemas elaborados pelo aluno Athayde

O aluno Athayde não conseguiu formular um problema para a letra (a) que solicitava uma questão que envolvesse a ideia de partição. Tentou criar um problema envolvendo lápis numerados, mas não conseguiu concluir a ideia. Para esse aluno, seria necessário mais tempo e trabalhar com outros tipos de problemas semelhantes que pudessem auxiliá-lo na formulação de questão com esse modelo combinatório.

a) *Tenho lápis enumerados de 0 a 7 e tenho lápis de cada número. Quantas...*

Figura 137 – Problema de adição elaborado pelo aluno Athayde

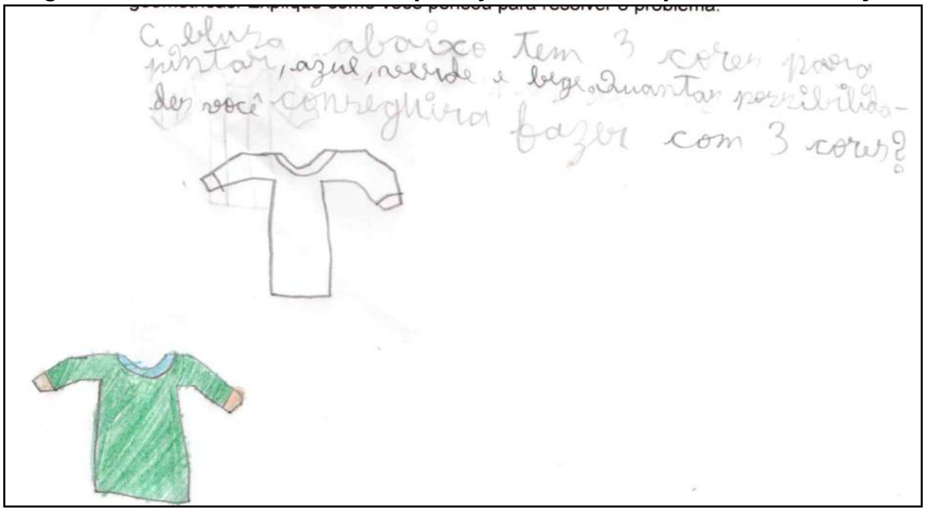


Fonte: arquivo do pesquisador

Na letra (b), o aluno elaborou um problema semelhante ao da pintura das camisas, mas não o resolveu. O enunciado atendeu ao modelo de alocação e solicitou a contagem, porém não restringiu o critério de possibilidade de repetição de cores. Veja o problema.

b) A blusa abaixo tem 3 cores para pintar: azul, verde e bege. Quantas possibilidades você conseguirá fazer com 3 cores?

Figura 138 – Problema de multiplicação elaborado pelo aluno Athayde



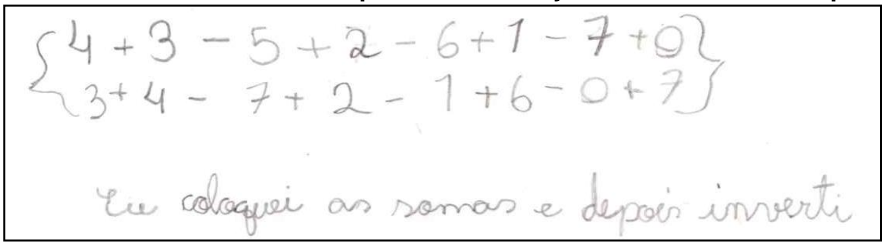
Fonte: Arquivo do pesquisador

Embora o aluno Athayde tenha conseguido resolver os problemas propostos em outros momentos desta pesquisa, ele teve dificuldade em elaborar problemas. Isso nos remete ao pensamento de que o trabalho de elaboração de problemas envolve outras habilidades como a linguística, o domínio dos conceitos e invariantes de um determinado conteúdo matemático. Ademais, elaborar um problema envolve uma construção da aplicação da matemática em diferentes contextos, sobretudo em relação às crianças, e uma construção de conexões da matemática escolar com a matemática vivida.

7.3.5.6.13 Problemas elaborados pela aluna Gonçalves

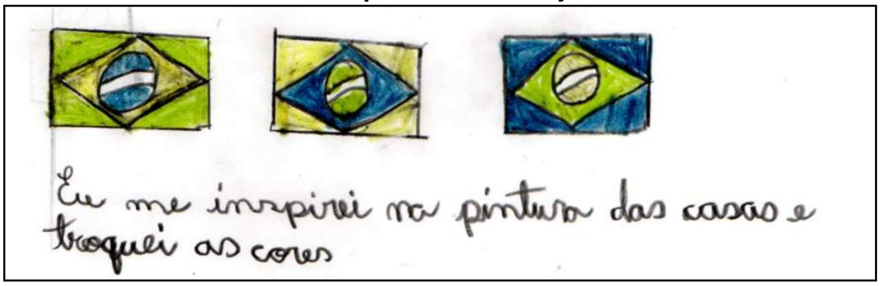
A aluna Gonçalves não elaborou o problema para a letra (a) nem para a letra (b). Apenas escreveu somas não negativas com dois números naturais, cujo total foi sete, e pintou a bandeira do Brasil trocando as cores de lugar. Isso nos mostrou a necessidade de respeitar as limitações e o tempo que cada aluno precisaria para resolver e formular problemas. Além disso, nos mostrou que compreender tanto as ideias de estratégias de resolução de tarefas do modelo combinatório implícito quanto de compreensão e identificação do modelo para posteriormente formular e reformular problemas são tarefas complexas para alguns alunos. Redigir enunciados de problemas mesmo para alunos que trabalham com uma professora que trabalha com isso ainda é algo complexo para esta aluna e outros desta turma de quinto ano.

Figura 139 – Somas elaboradas pela aluna Gonçalves com a ideia de partição



Fonte: Arquivo do pesquisador

Figura 140 – Desenhos elaborado pela aluna Gonçalves com a ideia de alocação



Fonte: Arquivo do pesquisador

Por outro lado o que ela registrou nos mostra o que ela compreendeu das tarefas realizadas no experimento de ensino desde o início de 2018. Verificamos que, embora a aluna Gonçalves não tivesse elaborado enunciados de problemas, as somas atenderam ao modelo de partição e ao parâmetro estabelecido com o total sete, exceto a soma (7+2) escrita pela aluna, o que reforça a necessidade de ensinar os alunos a verificar se as suas soluções atenderam ao que estava sendo solicitado. Observamos também que a pintura das bandeiras envolveu o modelo combinatório implícito de alocação e respeitou o critério de ordenação e não repetição de elementos. Isso poderia ter relação com as operações de permutações caóticas, desde que não repetisse a cor em seu lugar de origem. Porém, pela ausência de enunciado podemos imaginar e supor relações com outras operações combinatórias.

As análises dos problemas elaborados pelos alunos nos permitiram compreender que eles têm potencial para elaborar e aprender diferentes estratégias de resolução de problemas envolvendo o raciocínio combinatório. Aprendemos também que seria importante ter outro momento do experimento do ensino com a turma, onde aplicássemos os problemas que as crianças elaboraram para que tentassem resolver e comentar sobre o que entenderam dos mesmos e as diferentes formas de resolver.

7.4 Reflexões e aprendizados do pesquisador

Ao concentrarmos a nossa atenção nessa última tarefa da pesquisa e refletirmos sobre o que encontramos nos problemas formulados pelos alunos notamos alguns detalhes importantes. Acreditamos que seriam necessários outros momentos de elaboração de problemas semelhantes aos que havíamos trabalhado na pesquisa. Dizemos isso porque elaborar ou formular problemas com ideias de combinatória exigia que os alunos se envolvessem em pelo menos quatro etapas: a) elaborar o enunciado de um problema; b) resolver o problema elaborado; c) usar estratégias adequadas de resolução e; d) analisar se o problema e a solução tinham a mesma estrutura dos problemas trabalhados na pesquisa, isto é, analisar se eram semelhantes às tarefas que aplicamos na turma. Trabalhar partição junto com a ideia aditiva e alocação junto com a ideia multiplicativa foram novidades para os alunos, e isto, nos mostrou que outras tarefas precisariam ser desenvolvidas para que os alunos pudessem consolidar os conceitos combinatórios relacionados às ideias de partição e de alocação semelhantes aos problemas trabalhados na pesquisa.

Percebemos que situações como a copa mundial de futebol que aconteceu na Rússia de 14 de junho a 15 de julho, jogos escolares de 2018 e situações cotidianas estavam influenciando os alunos nos processos de elaboração e resolução das tarefas. Isto nos permite refletir sobre os cuidados necessários que professores precisam ter quando ensinam matemática para as crianças, adolescentes, jovens e até mesmo para os adultos. Cuidados em termos do que acontece na sala de aula e fora dela, seja no bairro, na cidade, no país ou em outra parte do mundo. Precisamos ter esse cuidado ao que está acontecendo em termos sociais, esportivos, emocionais, políticos ou culturais, pois em alguns casos nossos alunos podem estar mais atraídos pelos processos que ocorrem além dos muros da escola. Essas interferências externas podem interferir positivamente ou negativamente em qualquer aula de matemática. Podem interferir ainda mais quando se tratar de elaboração e resolução de problemas. No caso de nossa pesquisa, identificamos alunos como Lipinho, Red, Gonçalves e Malves que estavam tão interessados na copa do mundo que esse interesse esportivo acabou influenciando nas tarefas de elaboração e resolução de problemas desses quatro alunos.

Outro ponto importante a ser destacado é sobre o cuidado que devemos ter ao trabalhar com as crianças, para que os alunos não fiquem presos aos modelos de tarefas dadas pelo professor e queiram construir tarefas tão semelhantes a ponto de não desenvolverem a criatividade. Daí a necessidade de que o professor: a) dialogue com seus alunos sobre o que significa elaborar uma tarefa matemática; b) oriente os alunos para que consigam elaborar e resolver uma tarefa matemática coerente com o que foi solicitado e; c) converse com os alunos sobre o que é semelhante ou diferente nas tarefas ao analisarem os critérios de ordenação, os parâmetros estabelecidos, as regularidades, a natureza dos elementos, e o tipo de resposta solicitada entre outras características. Assim, num primeiro momento os alunos podem elaborar problemas parecidos e em outros momentos, pensarem em outras possibilidades depois deste processo.

Nos problemas de combinatória, uma das estratégias mais comum de resolução é fazer uma enumeração, ou seja, fazer uma listagem de possibilidades. No entanto, é importante que o professor oriente os estudantes a fazerem enumerações sistemáticas, mas que também saibam elaborar outras tarefas que exigem enumerações. Como o professor pode orientar seus alunos a fazerem isso? Ensinando os alunos a fixar uma das variáveis e alterar as demais, registrar o que fizeram e assim eles poderão aprender a enumerar sistematicamente. Depois pode solicitar que os alunos elaborem outras tarefas combinatórias em que seja necessário enumerar para encontrar a resposta. Também é imprescindível que o processo comece com problemas mais simples, envolvendo uma quantidade menor de casos para analisar (SANTOS, 1997). Este procedimento pode ser depois ampliado para tarefas que exijam que os alunos elaborem problemas que solicitem enumeração e contagem.

À medida que os discentes adquirirem estratégias de enumeração e contagem, eles poderão trabalhar com problemas um pouco mais complexos, ou seja, problemas em que o número de possibilidades é maior. A partir das estratégias propostas pelos alunos, o professor poderá explorar em sala de aula, diferentes ideias para realizar enumeração com desenhos, diagrama da árvore, tabelas ou quadros. Também poderá aos poucos, chamar a atenção dos alunos focalizando nas estratégias de resolução de modo que eles verifiquem que existe uma relação entre as enumerações feitas e o total de enumerações e a relação das enumerações com cálculos matemáticos.

8 CONSIDERAÇÕES, APONTAMENTOS E REFLEXÔES FINAIS

Iniciamos[114] nossas considerações finais respondendo às perguntas de pesquisa. Em relação à pergunta central: *Que estratégias alunos do quinto ano utilizam para resolver e elaborar tarefas que envolvem o raciocínio combinatório?* Verificamos que desenho e listagem foram as estratégias mais utilizadas pelos alunos e notamos que estratégias tais como o uso de árvore de possibilidades, os cálculos, os pares ordenados e a elaboração de uma tabela, entre outras, podem ser ensinadas a alunos do quinto ano. Porém, constatamos em nossa investigação que essas estratégias não são aprendidas rapidamente pelos alunos e exigem mais tempo para que eles compreendam esses procedimentos e deles se apropriem.

A sistematização da enumeração é algo que precisa ser trabalhado com os alunos de forma gradual, ou seja, mediante tarefas das mais simples para as mais complexas. Observamos também que as resoluções intuitivas dos alunos sem intervenção do pesquisador podem mostrar-nos que seria necessário desenvolver conceitos e procedimentos matemáticos com os alunos. Além disso, nossos procedimentos de análise de dados colaboraram para que pensássemos nas palavras que estavam presentes nos enunciados dos problemas, para as quais os alunos atribuíam outros significados.

Outro ponto a ser destacado é que, às vezes, os alunos compreendiam parte do problema e usavam estratégias adequadas de resolução, mas não atentavam para os parâmetros estabelecidos no enunciado. Portanto, não basta apenas ensinar estratégias ao aluno ou levá-lo a aprender estratégias para usá-las de forma automática. É preciso que o aluno analise os elementos do conjunto com os quais está trabalhando, pense e reflita sobre o que pode ou não fazer na tarefa. Ou seja, que o aluno reflita sobre quais possibilidades são ou não possíveis de construir com os elementos dados no enunciado de uma tarefa (seja um problema, seja um exercício; seja um desafio, seja um jogo). Mas isso, às vezes, só será possível com a intervenção pedagógica de um professor que dialoga e provoca os alunos a pensar. Assim, o professor poderá ajuda-los a conhecer e se familiarizarem com o material com o qual estão

[114] Neste capítulo, utilizamos a primeira pessoa do plural quando se trata de conclusões e reflexões com a orientadora e a primeira pessoa do singular, quando se reporta exclusivamente ao doutorando.

trabalhando e com os conceitos matemáticos que podem ajudar a desenvolver uma tarefa matemática.

Notamos também que a contagem das enumerações foi a estratégia mais utilizada pelos alunos. Isso evidencia que fazer contagem por meio de cálculos exige maior dedicação e tempo à construção das relações existentes nesse processo de enumerar sistematicamente e identificar o cálculo adequado à resolução do problema. Sem a construção dessa relação, os alunos podem cometer o erro apenas de dar alguma sugestão ou palpite para a possível resposta, sem ter a certeza de que tal procedimento ou cálculo matemático, de fato, garanta que todos os casos estejam sendo contemplados.

Vale ressaltar que as estratégias utilizadas pelos alunos nas sete tarefas propostas na pesquisa foram elaboradas por eles próprios, enquanto tentavam resolvê-las, ou foram aprendidas pelos alunos ao interagirem com a professora regente e com o professor pesquisador durante a pesquisa. Ou ainda foram aprendidas pelos alunos por meio das explicações dos colegas da turma ao fazermos as intervenções e apresentações das soluções. Podemos dizer que, de modo geral, os alunos tiveram a possibilidade de ampliar suas ideias intuitivas para resolver tarefas envolvendo o raciocínio combinatório, embora compreendamos que precisaríamos ter outros momentos com a turma para consolidá-las. E isso é uma das limitações da pesquisa, pois tivemos que respeitar as programações da escola, da professora regente de classe com os processos de cumprimento do conteúdo escolar e avaliativos. Assim, nem sempre foi possível fazer os retornos de imediato. Outra limitação da pesquisa foi a não realização de algumas entrevistas individuais como pretendíamos, pois alguns pais (e/ou responsáveis pelos alunos) solicitaram que falássemos com os alunos em pequenos grupos.

Embora algumas de nossas tarefas explicitassem alguns dos invariantes combinatórios, notamos que eles, por si sós, não foram suficientes para garantir que os alunos construíssem ideias sistematizadas e encontrassem todas as possibilidades. Desse modo, foi necessária a intervenção do pesquisador para ajudar os alunos a observar esses invariantes nas tarefas do dominó, das barrinhas, dos dados, da pintura da casinha, da organização das pessoas na fila e da organização das figuras geométricas.

Notamos também que as experiências escolares dos alunos que já haviam trabalhado com os livros da coleção Ápis do autor Dante (2016) não garantiram que usassem estratégias de sistemática, ou de outras representações, como árvore de possibilidades e cálculos matemáticos adequados. Isso nos faz questionar: será que os alunos trabalharam com as tarefas que deveriam usar essas estratégias? Será que os professores dialogaram e trocaram ideias com os alunos sobre as diferentes formas de resolver algumas tarefas dos livros do 1.º, 2.º, 3.º e 4.º anos da coleção? Diante do que aconteceu com os alunos da nossa pesquisa em 2018, questionamos sobre a influência de experiências escolares que podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Porque a influência de experiências escolares vai aparecer de forma positiva, se eles tiverem tido experiência com a combinatória de modo consciente sobre os conceitos e as estratégias. Acreditamos que essa melhoria só vai ocorrer se os professores dos anos iniciais dialogarem e conversarem sobre as tarefas e derem ênfase à compreensão dos problemas e aos tipos de estratégias que podem ser exploradas com os alunos.

Ressaltamos que o material manipulativo da tarefa das barrinhas de *cuisenaire* pode ser um instrumento que auxilie os alunos na visualização das possibilidades. Porém, para que os alunos construam ideias sistemáticas, é preciso que o professor dialogue com os alunos sobre a representação mental do uso do material, associando com operações matemáticas e com regularidades. Nesse sentido, o uso de outras representações simbólicas pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, mas reforçamos a necessidade de intervenção do professor no processo de sistematização das ideias combinatórias.

Quando os alunos trabalharam com agrupamentos de mais de três elementos aumentou a complexidade de entendimento e nem todos compreenderam o que tinham que fazer. Observamos isso no problema das senhas do estudo exploratório em 2016. Notamos algo semelhante em 2018, quando alunos elaboraram tarefas com mais de dois elementos nos problemas com a ideia de partição e com mais de três elementos em problemas com a ideia de alocação. A dificuldade para encontrar todas as possibilidades foi maior, pois aumentou o número de possibilidades. Isso evidencia que o número de elementos nos agrupamentos pode influenciar na compreensão do problema.

Acreditamos que nossa investigação de doutorado aponta possibilidades e desafios para outras pesquisas focalizando combinatória nos anos iniciais. Notamos que o raciocínio combinatório não se desenvolve de imediato, mas ao longo de todo o período de escolarização e, para isso, depende da intervenção dos professores, podendo começar desde os anos iniciais. Assim, entendemos que, quanto mais instruídos forem os professores dos anos iniciais em relação ao trabalho com combinatória, melhor será a sua contribuição para desenvolver esse tipo de raciocínio com alunos do quinto ano do ensino fundamental. Ou seja, o professor poderá dialogar com os alunos sobre os parâmetros estabelecidos, os critérios de ordem, o uso de estratégias sistemáticas, a não repetição de possibilidades já enunciadas e comparar respostas feitas por diferentes tipos de estratégias. Além disso, observar as condições de existência de uma determinada possibilidade e contar as possibilidades que correspondem ao que foi solicitado no problema.

Embora a maioria dos alunos tenha conseguido realizar enumerações sistemáticas, esse processo não aconteceu de forma imediata com todos os alunos na investigação e houve necessidade de intervenções do professor pesquisador. Logo, em uma turma regular do quinto ano, professores devem planejar suas intervenções pedagógicas para as aulas para propiciar que seus alunos compreendam os enunciados das tarefas, identifiquem os critérios estabelecidos nos textos e aprendam a fazer enumerações sistemáticas. Também é importante que dialoguem com seus alunos sobre o que significa elaborar uma tarefa matemática e resolver uma tarefa matemática de modo coerente com o que foi solicitado. Ademais, é necessário que professores dialoguem com seus alunos para que eles compreendam o que é semelhante ou diferente nas tarefas ao analisarem os critérios de ordenação, os parâmetros estabelecidos, as regularidades, a natureza dos elementos, e o tipo de resposta solicitada entre outras características.

Também foi possível constatar nas tarefas da pintura da casinha, da organização das pessoas na fila e da organização das figuras geométricas, que a relação entre a multiplicação e a ordenação de possibilidades, bem como a ordenação com a árvore de possibilidades, não é de entendimento imediato para alunos do quinto ano. É necessário que o aluno leia o problema, entenda o que o problema está solicitando, pense como vai organizar os elementos e enumerar as possibilidades, que casos devem ser eliminados da contagem e perceber que associações com as operações matemáticas podem ser estabelecidas. Portanto, isso exige que o professor se motive para construir com os alunos em cada problema as relações existentes entre a multiplicação e a ordenação das possibilidades necessárias que podem existir nesse processo de contagem.

Sobre a primeira pergunta secundária – *Que relações podem ser construídas da combinatória com outros tópicos de matemática e qual a relevância do estudo desse assunto para a aprendizagem matemática com base na história?* –, verificamos que a combinatória pode ser explorada em diferentes situações e integrada com outros tópicos de matemática. Por isso, o professor, ao trabalhar com o raciocínio combinatório, pode explorar conceitos geométricos, aritméticos e algébricos que contribuam para que os alunos conheçam os elementos com os quais estão trabalhando e usem estratégias mais adequadas para o processo de resolução. Por exemplo, nas tarefas dos dados e da pintura da casinha, exploramos propriedades geométricas dos elementos que compunham a figura, para chamar a atenção dos alunos sobre a natureza dos elementos com os quais estavam trabalhando. Também realizamos cálculos aritméticos, por exemplo, ao trabalharmos com a tarefa do dominó, das barrinhas de *cuisenaire* e dos dados.

Quando o professor iniciar o trabalho escolar com problemas históricos de combinatória, ele poderá explorar questões desafiadoras e incentivar os discentes a elaborar as próprias estratégias de resolução de problemas e integrar com outros tópicos da matemática, porque acreditamos que, assim, o trabalho do professor contribuirá para que outras ideias intuitivas sejam desenvolvidas pelos alunos no processo de resolução. Além disso, a história mostrou-nos que foi a busca por diferentes estratégias que ajudou matemáticos a identificar padrões e regularidades matemáticas que contribuíram para as formalizações que hoje conhecemos. Esse fato remete-nos à necessidade de o professor estimular os alunos a identificar regularidades existentes nos problemas que envolvem o raciocínio combinatório, para posteriormente discutir as formalizações.

Vemos também na história que a interação entre diferentes povos, a interlocução entre matemáticos e a busca pela compreensão de problemas antigos levaram a novas descobertas e até mesmo a novos instrumentos de resolução mais eficazes. Diante disso, pensamos e discutimos ao longo de nossa tese sobre tipos de questionamentos que podem levar professores e alunos a evidenciar os próprios conhecimentos, refletir sobre eles e dialogar com outros professores sobre tarefas matemáticas. Essa nossa visão vai ao encontro das ideias de Borba (2013), quando diz que o trabalho colaborativo entre professores de diferentes níveis é fundamental para o desenvolvimento amplo do raciocínio combinatório.

Acreditamos que nosso estudo de doutorado tem muito para contribuir com professores de diferentes níveis de ensino, para que tenham um olhar mais abrangente e integrador da combinatória com outros tópicos matemáticos. Algumas das relações que temos evidenciado da combinatória com outros tópicos da matemática e com outras áreas de conhecimento, e conversado com colegas pesquisadores e de matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, divulgamos em eventos, como o XI Encontro Capixaba de Educação Matemática (SILVA; SANTOS-WAGNER, 2018). Percebemos que professores e pesquisadores se sentiram motivados a estudar implicações pedagógicas da etnomatemática relacionadas a este conteúdo.

Sobre a nossa segunda pergunta secundária: *Que tarefas matemáticas podem ser exploradas na coleção Ápis do autor Dante (2016) e têm o potencial para trabalhar e desenvolver o raciocínio combinatório?* Verificamos que há várias tarefas nos livros da coleção que podem ser exploradas pelos professores em suas aulas. Porém essas tarefas exigem que o docente faça intervenções pedagógicas que auxiliem os alunos para compreendê-las e para que aprendam e desenvolvam estratégias. Verificamos que algumas estratégias, como árvore de possibilidades e cálculos estimulados pelo autor em livros didáticos anteriores ao quinto ano, não apareceram nas respostas dos alunos nas tarefas de nossa pesquisa. E nos questionamos: será que os professores dos anos anteriores trabalharam com essas tarefas? Será que ocorreram diálogos nas turmas a respeito de como resolver essas tarefas? Ou será que as tarefas propostas por Dante (2016) que envolviam estas estratégias nem foram trabalhadas em aulas? Esses questionamentos e outros merecem ser investigados em escolas que usam os livros dos anos iniciais de Dante (2016).

Um fator limitante da nossa pesquisa foi que não tivemos oportunidade de conversar com o autor da coleção Ápis sobre os seguintes temas: a) quais critérios utilizou para a escolha das tarefas que envolvem o raciocínio combinatório?; b) que retorno os professores que usam os livros em suas turmas têm dado sobre os problemas dessa coleção de livros?; c) que problemas foram testados com alunos e professores antes de comporem a coleção de livros didáticos? Também deveríamos ter conversado com a professora regente da turma em que aplicamos a pesquisa e com outros professores da escola sobre o modo como utilizam o livro didático: (i) será que analisam a coleção?; (ii) será que leem o manual do professor?; (iii) será que conversam com professores de anos anteriores e posteriores sobre as tarefas matemáticas?; (iv) como selecionam tarefas para trabalhar com seus alunos? Essas podem ser outras questões de pesquisa para investigarmos posteriormente.

Notamos que, embora as tarefas apareçam relacionadas com os eixos matemáticos, verificamos a necessidade de questionamentos que, de fato, façam a integração dos conteúdos. Porque não basta simplesmente inseri-las em um grupo de tarefas sem correlacionar conceitos que estejam implícitos no processo de resolução. Além disso, é preciso orientar os professores sobre as intervenções pedagógicas que podem ser realizadas. Esses procedimentos de intervenção exigem que o professor reflita sobre os próprios conhecimentos matemáticos, pedagógico-matemáticos e curriculares acerca de matemática e combinatória em particular e sobre os conhecimentos que ainda não possui. Ou seja, é necessário que o professor deseje desenvolver sua metacognição[115] sobre matemática. Nesse sentido, professores e alunos precisam desenvolver a metacognição identificando o que já sabem, o que conhecem, além de identificar os conhecimentos que precisam adquirir. Nossa pesquisa também

[115] [...] no caso dos professores há necessidade de que estes desenvolvam e adquiram este tipo de conhecimento metacognitivo que envolve o conhecer e identificar o que já se sabe e se conhece, gerenciar e monitorar este conhecimento, assim como identificar os conhecimentos que ainda se precisa adquirir em termos de conhecimentos profissionais. No caso dos alunos há necessidade também de que estes desenvolvam e adquiram conhecimento metacognitivo, pois muitos poucos indivíduos já possuem e/ou desenvolvem este conhecimento que envolve tanta análise, reflexão e apreciação dos próprios conhecimentos (SANTOS-WAGNER, 2008, p. 65).

faz-nos pensar em desafios como formadores de professores: Como nós formadores de professores podemos motivar que outros colegas queiram saber o que tem de matemática nos anos escolares que vem antes e depois da turma que lecionam? Como, trabalhando num curso de doutorado ou mestrado, ou na orientação de um trabalho de conclusão de curso, podemos provocar essa motivação?

Usualmente espera-se que, no quinto ano, os alunos já tenham as operações aritméticas de adição e multiplicação consolidadas em relação a alunos dos anos anteriores, o que potencializaria desenvolver os estudos deste tema. Por outro lado, o início da escolarização é um período em que o professor passa um tempo maior com os alunos, diferentemente dos anos posteriores. Neles o docente em geral trabalha com aulas de 50 minutos, podendo dificultar o trabalho com conceitos e conteúdos matemáticos em rede (fazer conexões e retomada dos tópicos, conceitos e conteúdos). Com isso seria mais propenso a um ensino linear, buscando atender apenas aos conteúdos da série em que momentaneamente trabalha. Essa integração dos conceitos matemáticos vai ao encontro das ideias de Santos-Wagner (2008), quando nos diz que o ideal seria que livros didáticos e professores trabalhassem os assuntos explorando diversas situações, para que os alunos aprendessem e construíssem diferentes estratégias para resolver os problemas e aplicar os conceitos matemáticos aprendidos.

Ao iniciar o ano letivo, o professor deve procurar conhecer os alunos e construir laços afetivos que auxiliem na interação entre professor e aluno e entre os próprios alunos. Normas sociais e contrato didático claro entre professor e alunos evidenciam quanto esses aspectos são fundamentais para desenvolver um ambiente escolar que respeite e valorize normas emocionais e sociais que propiciam que atividades individuais e coletivas ocorram na rotina escolar. Devemos considerar que as escolas e as próprias salas de aula são ambientes em que as interações sociais ocorrem, as quais podem ser complexas, tendo em vista as características pessoais de cada indivíduo.

Nesse sentido, a integração entre o pesquisador e os sujeitos permite melhor conhecimento dos fatores que podem influenciar nas respostas dos pesquisados. Quando conhecemos o sujeito e os processos culturais em que ele está inserido, podemos compreender mais apuradamente a realidade desse sujeito. Ademais, os elementos culturais fazem parte do processo de interação entre professor e aluno, e assim se fazem presentes no processo de ensino, no processo de aprendizagem e no processo de avaliação, ou seja, em todos os processos educativos.

A matemática vivida pelos alunos nem sempre é explorada em aulas, e geralmente o que se tem na escola é aquela matemática abstrata sem fazer conexões com o cotidiano das crianças. Dependendo do modo em que esse ensino de matemática é apresentado, ele pode provocar a recusa pelo ensino da disciplina, afetando a aprendizagem e causando dificuldades no desenvolvimento escolar. E entre outros aspectos, é importante ressaltar o ritmo de trabalho e o tempo dedicado à aplicação das tarefas e o trabalho em equipe, que pode permitir a adaptação às diferentes capacidades dos alunos, além de favorecer o desenvolvimento do diálogo, a autonomia, a corresponsabilidade e a ajuda mútua. Em nossa pesquisa notamos que o respeito e a valorização das estratégias desenvolvidas pelos próprios alunos contribuíram para que eles se sentissem seguros e utilizassem as estratégias corretas em outras tarefas da pesquisa.

Outras reflexões que deixo nesta tese partem de minhas aprendizagens com esta pesquisa. Como professor, pude pensar em minha postura com os alunos de forma mais empática no processo de escuta e avaliação de tarefas matemáticas. Comecei a investigar as causas do erro, não apenas do meu ponto de vista, mas também do ponto de vista do aluno, desde a compreensão do enunciado de uma questão e das situações afetivas que influenciam em suas respostas. Também pude aprender a necessidade de retomada dos acordos estabelecidos em sala de aula, quando fosse preciso, além de retomar conceitos matemáticos necessários para a resolução de uma tarefa, ao verificar que os alunos não tinham se apropriado de tais conceitos.

Aprendi a escutar os alunos acreditando que sempre tenho algo a aprender com eles para melhorar a minha prática e ampliar meu conhecimento matemático. Mesmo que as ideias do aluno não sejam coerentes com o que se pede no problema, elas servem para minha própria reflexão. Assim, posso refletir se aquilo que estou propondo, de forma oral ou escrita em uma tarefa, está induzindo o aluno a resolver outra tarefa ou se está levando o aluno a algum erro. Com base nesse processo reflexivo, posso rever a maneira como exponho uma tarefa ou ainda reorientar e planejar diferentes aulas, de modo que outros alunos não cometam os mesmos equívocos.

Como pesquisador, pude aprender os processos de seleção, elaboração e proposição de tarefas que possuem a mesma estrutura matemática. Essas etapas exigem de nós paciência, aplicação e, muitas vezes, reescrita do problema, de modo que se torne cada vez mais claro o que se pretende alcançar e investigar. Além disso, o diálogo com pesquisadores da área provoca-nos, ajuda a confrontar ideias sobre o objeto de pesquisa e traz maior enriquecimento às nossas análises de dados. Às vezes, não percebemos detalhes ricos de informações que outros pesquisadores conseguem enxergar e chamar a nossa atenção para eles.

Também aprendi como pesquisador a coletar e organizar dados que são relevantes para a pesquisa e analisá-los de modo mais eficaz. Outro detalhe importante nesse processo de aprendizagem como pesquisador é saber limitar a pesquisa. Quais conceitos quero abordar? Quais perguntas devo fazer? O que quero pesquisar? Qual teórico? Aonde quero chegar? A pesquisa vai tomando formato à medida que as “coisas” vão ficando claras para nós, ou seja, quando nos apropriamos dos conceitos, das teorias, dos métodos e técnicas de investigação. Além disso, um breve distanciamento ajuda-nos a enxergar erros que estamos cometendo ou certeza dos caminhos que devemos seguir.

Pude aprender a ser um pouco mais cauteloso ao longo de minhas conversas com os sujeitos, de modo que minhas intervenções não induzissem ao que eu esperava como resposta, mas de modo que pudesse ouvir e entender o que os outros interlocutores tinham a me dizer. As transcrições das gravações dos áudios devem ser feitas de imediato, enquanto guardamos na memória cenários que ocorreram no campo de pesquisa, pois uma fala pode estar relacionada a eventos presenciados, próximos ao momento de investigação, e esses detalhes ajudam-nos a interpretar melhor os dados. Além disso, é importante saber escolher novas estratégias de coleta de dados, quando os acordos são mudados entre o pesquisador e os sujeitos, mas sempre respeitando a ética da pesquisa e dando o retorno aos sujeitos sobre nossas percepções.

Por fim, temos aprendido muito com esta pesquisa, tanto do ponto de vista teórico do raciocínio combinatório quanto do ponto de vista da prática do professor pesquisador. Defendemos, nesta tese, que o raciocínio combinatório precisa ser trabalhado de forma integrada com outros tópicos ou conceitos matemáticos, auxiliando os alunos a utilizar estratégias que eles mesmos tenham desenvolvido ou tenham aprendido com outros colegas e professores. Porque essas estratégias intuitivas, aprendidas sozinhos ou com os outros podem auxiliar os alunos a encontrarem todas as soluções nos procedimentos de enumerações e podem ajudar a fazer a contagem delas.

Enfim chegamos na reta final desta tese e aprendemos muito com os alunos de quinto ano do ensino fundamental. Alguns desses alunos mostraram que eram capazes de reconhecer as relações entre as tarefas que envolvem a mesma estrutura do ponto de vista do raciocínio combinatório e de elaborar e resolver outras semelhantes. Assim, acreditamos que conseguimos alcançar o nosso objetivo para esta pesquisa e seguiremos adiante com outros trabalhos, pois a combinatória não para por aqui, aliás “combinatória é vida”.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. Trabalhar através da resolução de problemas: possibilidades em dois diferentes. **Vidya**, Santa Maria, v. 34, n. 1, p. 209-232, 2014.

ALMEIDA, A. L. **Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática**: um estudo de caso com o 2.º ano do ensino médio. 2010. 166 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, 2010.

ALVES, A. C. **Uma introdução ao pensamento combinatório no 9.º ano do ensino fundamental**. 2010. 160 f. Dissertação-Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2010.

ALVES, R. A arte de produzir fome. **Folha de São Paulo***.* São Paulo, 29 out. 2002. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/folha/sinapse/ult1063u146.shtml. Acesso em: 10 mar. 2017.

ANDRADE, S. Um caminhar crítico reflexivo sobre resolução, exploração e proposição de problemas matemáticos no cotidiano da sala de aula. In: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (Org.). **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 355-395.

AULETE, C.; GEIGER, P. (Org.). **Novíssimo Aulete dicionário contemporâneo da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Lexikon, 2011.

AZEVEDO, J. **Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades**: é melhor no papel ou no computador? 2013. 127 f. Dissertação-Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2013.

BACHX, A. C.; POPPE, L. M. B.; TAVARES, R. N. O. **Prelúdio a análise combinatória**. 7. ed. São Paulo: Nacional, 1975.

BATANERO, C., GODINO, J., NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento combinatorio**. Madrid: Editorial Síntese, S.A., 1996.

BELCHOR, P. M. Cadeia de Markov. **Youtube**. 7 de ago de 2015. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=sHlswmtASm8. Acesso em: 10 jan. 2018

BÍBLIA. II Coríntios. Português. **Bíblia Sagrada**. Tradução de João Ferreira de Almeida. Barueri, São Paulo: Sociedade Bíblica do Brasil, 2008. p.1520-1534.

BIGGS, N. L. The roots of combinatorics. **Revista Historia Mathematica**. v. 6, p. 109-136, 1979.

BORBA, R. O raciocínio combinatório na educação básica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - ENEM, 10., 2010, Salvador, BA, 2010. **Anais...**, Salvador, BA, 2010. p. 1-16.

BORBA, R. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - ENEM, 11., Curitiba, PR, 2013. **Anais...**, Curitiba, PR, 2013. P. 1-16

BORBA, R. E. S. R. **Classificação de problema combinatório**. [mensagem pessoal]. Mensagem recebida por: <resrborba@gmail.com> em 21 ago. 2017.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G**. Informática e educação matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação e Secretaria de Educação Fundamental. 1997. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação e Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/ SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2007. Matemática: Ensino Fundamental. Anos iniciais. Brasília. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/Avalmat/pnld2007_mat.pdf. Acesso em: 09 nov. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação e Secretaria de Educação Básica. 2012. **Os Elementos Conceituais e Metodológicos para Definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1.º, 2.º e 3.º anos) do Ensino Fundamental**. Brasília: MEC, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: www.basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 18 fev. 2018.

BROUSSEAU, G. Lês obstacles épistemologiques et lês problèmes em mathématiques. Meeting of the CIEAEM, lonvain da neuve, reproduced in les obstacles épistemologiques et les problems en mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble: La PenséeSauvage-Éditions, v. 4, n. 2, p. 164-198, 1976.

CARVALHO, G. Q. **O uso de jogos na resolução de problemas de contagem**: um estudo de caso em uma turma do 8.º ano do Colégio Militar de Porto Alegre. 2009. 194 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

CTA/ZM – Centro de Tecnologias Alternativas Zona da Mata. **Reencantando a infância com cantigas, brincadeiras e diversão**. Projeto Construindo o Futuro da Agricultura Familiar. Viçosa, 2009. Disponível em: http://www.mma.gov.br/estruturas/pda/_arquivos/cartilha_reencantando_a_infancia_com_cantigas_51.pdf. Acesso em: 15 de jan. 2018.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2014. v. 1.

DANTE, L. R. **Ápis**: alfabetização matemática. 2. ed. São Paulo: Ática, 2016. v. 1.

DANTE, L. R. **Ápis**: alfabetização matemática. 2. ed. São Paulo: Ática, 2016. v. 2.

DANTE, L. R. **Ápis**: alfabetização matemática. 2. ed. São Paulo: Ática, 2016. v. 3.

DANTE, L. R. **Ápis**: matemática. 2. ed. São Paulo: Ática, 2016. v. 1.

DANTE, L. R. **Ápis**: matemática. 2. ed. São Paulo: Ática, 2016. v. 2.

DANTE, L. R. **Teláris**: matemática. 2. ed. São Paulo: Ática, 2016. v. 1.

D'AMBROSIO, U. A matemática nos descobrimentos. In: ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., Ilhéus, BA, 2000. **Anais...** Ilhéus, BA, 2000. p. 1-11.

D'AMBROSIO, U. Um enfoque transdisciplinar à educação e à história da matemática. In: BICUDO, M. V.; BORBA, M. **Educação matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 13-29.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. 17. ed. Campinas, SP: Papirus, 2009. (A primeira edição foi publicada em 1996).

D'AMBROSIO, B. S. O professor-pesquisador diante da produção escrita dos alunos. In: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (Org.). **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 109-129.

DEWEY, J. **Como pensamos**: como se relaciona o pensamento reflexivo com o processo educativo: uma reexposição. Tradução de Haydée Camargo Campos. 4. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1979. v. 2 (Coleção Atualidades Pedagógicas).

ENEM 2010 – Exame Nacional do Ensino Médio. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: 10 mar. 2018.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas, São Paulo: Autores Associados, 2012.

FISCHBEIN, E. **The Intuitive sources of probabilistic thinking in children**. Dordrecht: D. Reidel,1975.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 21. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2002. (A primeira edição foi publicada em 1996).

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. São Paulo: Atlas, 2005.

GIOVANNI, J. R; BONJORNO, J. R; GIOVANNI JR. **Matemática fundamental:** 2.º Grau – Volume Único. São Paulo: FTD, 1994.

GOOS, M. Technology and mathematics teaching and learning: What counts? **Teacher**, n. 215, p. 22-25. 2010.

GRANDO, R. C. A. **O conhecimento matemático e o uso dos jogos na sala de aula**. 2000. 239 f. Tese (Doutorado em educação) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP, 2000.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar 5**: combinatória, probabilidade. 6. ed. São Paulo: Atual, 1993.

HOFFMAN, B.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. A exploração da escrita, leitura e oralidade em matemática. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., Recife, PE, 2011. **Anais...** Recife, PE, 2011. p. 1-12.

HOMA, A. I. R.; GROENWALD, C. L. O. Análise combinatória no ensino médio. **Educação Matemática em Revista**, Rio Grande do Sul, n. 14. v. 1, p. 65-74, 2013.

ITACARAMBI, R. R. **Resolução de problemas**: construção de uma metodologia: (ensino fundamental I). São Paulo: Livraria da Física, 2010.

KAPUR, J. N. Combinatorial analysis and school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 3, p. 111-127, 1970.

KILPATRICK, J. Fincando Estacas: uma tentativa de demarcar a educação matemática como campo profissional e científico. **Zetetiké**, v. 4, n. 5, p. 99-120, Jan./jun.1996. Disponível em: https://disciplinas.stoa.usp.br/pluginfile.php/50805/mod_resource/content/1/TEXTO%20B-Kilpatrick,%20J.pdf. Acesso em: 8 jul. 2016.

LESTER, F. Teaching mathematical problem solving. **Nämmaren**, p. 32-43, 1987.

LESTER JR, F. K.; D’AMBROSIO, B. S. Tipos de problemas para a instrução matemática no primeiro grau. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Universidade do Estado de São Paulo, Rio Claro, v.3, n. 4, p. 33-40,1988.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 2003.

MACHADO, A. S. **Matemática, temas e metas**: sistemas lineares e análise combinatória. São Paulo: Atual, 1986.

MATURANA, H. **Emoções e linguagem na educação e na política**. Tradução de José Fernando Campos Fortes. 3.ª reimpressão. Belo Horizonte: UFMG, 2002.

MELO, L. M. S. **O efeito da explicitação dos princípios invariantes na resolução de problemas de combinação por crianças**. 2012. 184 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia) – Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2012.

MOREIRA, H; CALEFFE, L. G. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador**. 2. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P. de; CARVALHO; P. C. P., FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

NAVARRO-PELAYO, V; BATANERO, C; GODINO, J. Razonamiento combinatorio em alumnos de secundaria. **Educação Matematica**, v. 8, n. 1, p. 26-39, 1996. Disponível em:http://www.ugr.es/~batanero/pages/Combinatoria.html. Acesso em: 29 mar. 2018.

OLÍMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS – OBMEP. **Provas e soluções**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. Disponível em:http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n2-2007.pdf. Acesso em: 10 ago. 2018.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 199-218. (Seminários e Debates).

ONUCHIC, L.R; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. **Educação matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.

ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PAGANI, E. M. L; ALLEVATO, N. S. G. Ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral: um mapeamento de algumas teses e dissertações produzidas no Brasil. **Vidya**, Santa Maria, v. 34, n. 2, p. 61-74, 2014. Disponível em: http://periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/view/42/166. Acesso em: 07 dez. 2015.

PAVANELLO, R. M.; NOGUEIRA, C. M. I. Avaliação em matemática: algumas considerações. **Estudos em Avaliação Educacional**, Rio de Janeiro, v. 17, n. 33, p. 29-42, jan./abr. 2006.

PEDROSA FILHO, C. **Uma experiência de introdução do raciocínio Combinatório com alunos do primeiro ciclo do ensino Fundamental (7-8 anos)**. 2008. 231 f. (Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. Utilização da noção de obstáculo na didática da matemática. **CEMA – Caderno de Educação Matemática**, São Paulo, v. 2, p.78-104, 1995.

PESSOA, C. A. S. **Quem dança com quem**: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2.º ano do ensino fundamental ao 3.º ano do ensino médio. 2009. 267 f. Tese. (Doutorado em Educação) Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2009.

PESSOA, C.; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1.ª a 4.ª série. **Zetetiké**: Revista de Educação Matemática, Campinas, SP, v. 17, n. 31, p. 105-150, dez. 2009.

PESSOA, C.; BORBA, R. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **Em Teia**: **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v.1, n.1, 2010. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2182/1753. Acesso em: 10 ago. 2017.

PINHEIRO, C. A. M. **O ensino de análise combinatória a partir de situações-problema.** 2008. 164 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Estado do Pará, Belém, 2008.

PIRES, C. M. C. **Educação matemática**: conversas com professores dos anos iniciais. São Paulo: Zé-Zapt Editora, 2012.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. (A obra foi publicada originalmente em 1945.)

RIBEIRO, J. **Matemática**: ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2011.

ROA, R. **Razonamiento combinatório em estudiantes com preparación matemática avanzada**. 2000. 196 f. Tese (Doutorado em Ciencias Matemáticas) - Universidad de Granada, 2000.

ROMANOWSKI, P. J; ENS, T. R. As pesquisas denominadas do tipo “estado da arte” em educação. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 6, n.19, p.37-50, set./dez. 2006.

ROMBERG, T. A. Perspectives on scholarship and research methods. In: GROUWS, D. A. **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992. p. 49-64.

SABO, R. D. **Saberes docentes**: a análise combinatória no ensino médio. 2010. 210 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo, 2010.

SANTOS, V. M. P. dos. **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática**: métodos alternativos. Rio de Janeiro: Projeto Fundão. Instituto de Matemática/UFRJ, 1997.

SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. Resolução de problemas em matemática: uma abordagem no processo educativo. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 53, p. 43-74, jul./dez. 2008.

SCHÖN, D. A. Formar professores como profissionais reflexivos. In: NÓVOA, A. (Coord.). **Os professores e sua formação**. Lisboa: Dom Quixote, 1992. p. 77-91.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, JR, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p. 31 - 42.

SILVA, J. C. T. **Reflexões sobre conhecimentos evidenciados por licenciandos em matemática por meio da elaboração de um jogo sobre análise combinatória**. Vitória, 2014. 132 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.

SILVA, J. C. T.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. Combinatória e suas conexões: entre letras, frases e números. In: ENCONTRO CAPIXABA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., Cariacica, ES, 2018. Educação matemática no ensino superior e na formação de professores. **Anais...** Cariacica, IFES, 2018. p. 1-12.

SILVA, J. C. T.; SILVA, S. A. F. **Combinando na cidade**. Vitória: IFES, 2014. v. 1.

SILVA, J. C. T.; ZANON, T. X. D.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. Conhecimento de professores em combinatória. In: SEMANA DE MATEMÁTICA, 6., Vitória, 2017. **Anais ...** Vitória, IFES, 2017. p. 24 - 26.

SILVA, J. F. G. **O efeito da explicitação da correspondência um-para-muitos na resolução de problemas de produto cartesiano por crianças**. 2010. 131 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia) – Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Stanford University, v. 15. n. 2, p. 4 – 14, 1986.

SKEMP, R. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics Teaching**, n. 77, p. 20–26, 1976.

SOUZA, M. J. F. **Otimização combinatória**: notas de aula. Universidade Federal de Ouro Preto. 2009. Disponível em: http://www.decom.ufop.br/marcone/Disciplinas/OtimizacaoCombinatoria/OtimizacaoCombinatoria.pdf. Acesso em: 17 mar. 2018.

STAKE, R. E. **Pesquisa qualitativa**: estudando como as coisas funcionam. Porto Alegre: Penso, 2008.

STEFFE, L.; THOMPSON, P. Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In: LESH, R.; KELLY, A. E. (Eds.). **Research design in mathematics and science education***.* Hillsdale, NJ: Erlbaum, 2000. p. 267-307.

STRUIK, D.J. **História concisa das matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1986.

STURM, W. **As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa**. 1999. 132f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1999.

TEIXEIRA, P. J. M. **Um estudo sobre conhecimentos necessários ao professor de matemática para a exploração de problemas de contagem no ensino fundamental**. 2012. 458 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirantes/Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2012.

TRIVIÑOS, A. **Introdução à pesquisa em ciências sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.

VALE, I. Resolução de problema um tema em contínua discussão: vantagens das resoluções visuais. In: ONUCHIC, L. R; LEAL JUNIOR, L. C; PIRONEL, M. (Orgs). **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 109-129

VALE, I.; PIMENTEL, T; BARBOSA, A. Ensinar matemática com resolução de problemas. **Quadrante**: Revista de Investigação em Educação Matemática. v. 24, n. 2, p. 39-60, 2015.

VAZQUEZ, C. M. R. **O ensino de análise combinatória por meio de atividades orientadoras em uma escola estadual do interior paulista**. 2011. 90 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas e Tecnologia) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2011.

VEGA, D. A. **Qual mais fácil resolver com 2, 3 ou 4 etapas de escolha**: **produto cartesiano, arranjo, combinação ou permutação?** 2014. 115 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, n. 1, p. 75-90, 1986.

VERGNAUD, G. **El niño, las matemáticas y larealidad**: problemas de laenseñanza de lasmatemáticas enlaescuela primaria. Mexico: Trillas, 1991.

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceptuais. In: BRUM, J. (Org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996. p. 155-191.

WILSON, R.; WATKINS, J. J. **Combinatorics**: ancient and modern. Oxford: Oxford University Press, 2013.

ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artes Médicas Sul Ltda., 1998.

ZANON, T. X. D. **Formação continuada de professores que ensinam matemática**: o que pensam e sentem sobre ensino, aprendizagem e avaliação. 2011. 300 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória. 2011.

ZANON, T. X. D.; SILVA, J. C. T.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. Produção acadêmica em educação matemática acerca da análise combinatória de 2000 a 2015. In: ENCONTRO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUDESTE, 12., Vitória, 2016. **Anais ...** Vitória, UFES, 2017. p. 3244-3260.

ZANON, T. X. D.; ZOGAIB, S. D.; SANTOS-WAGNER ; SILVA, J. C. T. Achados em pesquisas de mestrados profissionais acerca da análise combinatória: quais temas? Quais avanços?. In: SEMINÁRIO NACIONAL DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA, 7., Cachoeiro de Itapemirim, ES, 2016. Matemática e currículo: perspectivas e desafios atuais na formação de professores. **Anais ...** Cachoeiro de Itapemirim, IFES, 2016. v. 1. p. 15-29.

APÊNDICE

Apêndice A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
DESTINADO AOS PAIS E/OU RESPONSÁVEIS

Caro Responsável/Representante Legal:

Gostaríamos de obter o seu consentimento para o menor ________________________ ____ participar como voluntário da pesquisa intitulada *Conceitos de análise combinatória: um estudo com alunos do 5º ano do ensino fundamental,* do Doutorado em Educação do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES).

O objetivo deste estudo é investigar a contribuição da resolução de problemas para o desenvolvimento do raciocínio combinatório de alunos do 5º ano do ensino fundamental ao elaborar e explicar para outros alunos a partir do que já estudaram.

A forma de participação no processo da pesquisa consistirá em: entrevistas gravadas em áudio ou em vídeo com os voluntários; observações e registros fotográficos das atividades realizadas na escola, realização de atividades propostas pelo pesquisador. O nome do estudante não será utilizado em qualquer fase da pesquisa, o que garantirá o anonimato e a divulgação dos resultados será feita de forma a não identificar os voluntários. Não será cobrado nada, não haverá gastos e não estão previstos ressarcimentos ou indenizações.

São esperados os seguintes benefícios da participação na pesquisa: a) o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos no estudo na (re)elaboração de problemas de combinatória; b) a construção de conceitos de combinatória pelos alunos ao explicar problemas deste assunto para outros estudantes; e c) avanço nas pesquisas sobre o ensino de combinatória.

Destacamos que você poderá retirar esse consentimento a qualquer momento que assim o desejar, sem que isso lhe traga qualquer sanção. Em caso de dúvida sobre a adequação dos procedimentos que estamos usando, você pode procurar o Comitê de Ética em Pesquisa (COEP) da Universidade Federal do Espírito Santo na Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação do Campus Universitário de Goiabeiras na Avenida Fernando Ferrari, s/n, Vitória - ES, 29060-970. Você também pode entrar em contato com o Comitê de Ética pelo telefone (27) 4009-7840 ou pelo endereço eletrônico: cep.goiabeiras@gmail.com. O Comitê de Ética em Pesquisa (COEP) é formado por um grupo de pessoas com conhecimentos científicos e tem por missão realizar a revisão ética inicial e continuada das pesquisas, visando garantir a segurança e proteger seus direitos das pessoas envolvidas nos estudos.

Os dados originados a partir das atividades desenvolvidas com os alunos serão arquivados e armazenados pelo pesquisador responsável por esse projeto de pesquisa. Os conhecimentos resultantes deste estudo serão apresentados ao Programa de Pós-Graduação em Educação da UFES, em forma de tese de doutorado, e também divulgados em revistas e jornais especializadas, em eventos científicos, especialmente nos campos da educação matemática e da educação. Abaixo estão os dados relativos a este projeto e o campo para a sua assinatura, caso concorde em participar como voluntário dessa pesquisa.

Título do projeto: *Conceitos de análise combinatória: um estudo com alunos do 5º ano do ensino fundamental*
Pesquisadora responsável: Jose Carlos Thompson da Silva
Orientadora do PPGE/UFES: Profª Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Instituição: UFES – Centro de Educação/ Programa de Pós-Graduação em Educação
Telefone para contato: (27) 4009-2547 / (27) 99639-0558
Endereço: Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras **|** Vitória - ES - CEP 29075-910 Universidade Federal do Espírito Santo
Objetivo do estudo: investigar a contribuição da resolução de problemas para o avanço do raciocínio combinatório de alunos do 5º ano do ensino fundamental ao elaborar e explicar para outros alunos a partir do que já estudaram.

Eu, ____, (nome do responsável ou representante legal) portador do RG nº______________________, confirmo que **Jose Carlos Thompson da Silva** explicou-me os objetivos desta pesquisa, bem como a forma de participação do menor ____ (nome do sujeito da pesquisa menor de idade). Eu li e compreendi este Termo de Consentimento Livre e Esclarecido [TCLE], portanto, eu concordo em dar meu consentimento para o menor participar como voluntário desta pesquisa.

Local e data: ___ de _______________ de _________

____

(Assinatura do responsável ou representante legal)

Eu, **Jose Carlos Thompson da Silva,** pesquisador responsável por este estudo, orientado pela Profª Drª Vania Maria Pereira dos Santos-Wagner, do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo, obtive de forma apropriada e voluntária o Termo de

Consentimento Livre e Esclarecido do sujeito da pesquisa ou de seu responsável e/ou representante legal para a participação nesta pesquisa.

(Assinatura do pesquisador responsável)

Apêndice B – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para a Professora da Turma

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
PARA A PROFESSORA DA TURMA DE 5º ANO

Cara Professora:

Gostaríamos de obter o seu consentimento para participar como voluntário da pesquisa intitulada *Conceitos de análise combinatória: um estudo com alunos do 5º ano do ensino fundamental,* do Doutorado em Educação do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES).

O objetivo deste estudo é investigar a contribuição da resolução de problemas para o desenvolvimento do raciocínio combinatório de alunos do 5º ano do ensino fundamental ao elaborar e explicar para outros alunos a partir do que já estudaram.

A forma de participação no processo da pesquisa consistirá em: entrevistas gravadas em áudio ou em vídeo com os voluntários; observações e registros fotográficos das atividades realizadas na escola, realização de atividades propostas pelo pesquisador. O nome do estudante não será utilizado em qualquer fase da pesquisa, o que garantirá o anonimato e a divulgação dos resultados será feita de forma a não identificar os voluntários. Não será cobrado nada, não haverá gastos e não estão previstos ressarcimentos ou indenizações.

São esperados os seguintes benefícios da participação na pesquisa: a) o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos no estudo na (re)elaboração de problemas de combinatória; b) a construção de conceitos de combinatória pelos alunos ao explicar problemas deste assunto para outros estudantes; e c) avanço nas pesquisas sobre o ensino de combinatória.

Destacamos que você poderá retirar esse consentimento a qualquer momento que assim o desejar, sem que isso lhe traga qualquer sanção. Em caso de dúvida sobre a adequação dos procedimentos que estamos usando, você pode procurar o Comitê de Ética em Pesquisa (COEP) da Universidade Federal do Espírito Santo na Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação do Campus Universitário de Goiabeiras na avenida Fernando Ferrari, s/n, Vitória - ES, 29060-970. Você também pode entrar em contato com o Comitê de Ética pelo telefone (27) 4009-7840 ou pelo endereço eletrônico: cep.goiabeiras@gmail.com. O Comitê de Ética em Pesquisa (COEP) é formado por um grupo de pessoas com conhecimentos científicos e tem por missão realizar a revisão ética inicial e continuada das pesquisas, visando garantir a segurança e proteger seus direitos das pessoas envolvidas nos estudos.

Os dados originados a partir das atividades desenvolvidas com os alunos serão arquivados e armazenados pelo pesquisador responsável por esse projeto de pesquisa. Os conhecimentos resultantes deste estudo serão apresentados ao Programa de Pós-Graduação em Educação da UFES, em forma de tese de doutorado, e também divulgados em revistas e jornais especializadas, em eventos científicos, especialmente nos campos da educação matemática e da educação. Abaixo estão os dados relativos a este projeto e o campo para a sua assinatura, caso concorde em participar como voluntário dessa pesquisa.

Título do projeto: *Conceitos de análise combinatória: um estudo com alunos do 5º ano do ensino fundamental*
Pesquisadora responsável: Jose Carlos Thompson da Silva
Orientadora do PPGE/UFES: Profª Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Instituição: UFES – Centro de Educação/ Programa de Pós-Graduação em Educação
Telefone para contato: (27) 4009-2547 / (27) 99639-0558
Endereço: Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras | Vitória - ES - CEP 29075-910 Universidade Federal do Espírito Santo
Objetivo do estudo: investigar a contribuição da resolução de problemas para o avanço do raciocínio combinatório de alunos do 5º ano do ensino fundamental ao elaborar e explicar para outros alunos a partir do que já estudaram.

Eu, ____, (nome do professor participante) portador do RG nº_____________________, confirmo que **Jose Carlos Thompson da Silva** explicou-me os objetivos desta pesquisa, bem como a forma de minha participação. Eu li e compreendi este Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, portanto, eu concordo em dar meu consentimento e participar como voluntário desta pesquisa.

Local e data: ___ de _______________ de _________

____

(Assinatura do responsável ou representante legal)

Eu, **Jose Carlos Thompson da Silva,** pesquisador responsável por este estudo, orientado pela Profª Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner, do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo, obtive de forma apropriada e voluntária o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido do(a) Professor(a) ____ para a participação nesta pesquisa.

____

(Assinatura do pesquisador responsável)

Apêndice C – Carta de apresentação da pesquisa/pesquisador à escola.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - UFES
CENTRO DE EDUCAÇÃO – CE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – PPGE
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO

Vitória/ES, de de .

A: (nome do(a) diretor(a) da escola)
Assunto: Carta de apresentação de pesquisa de doutorado em educação

Prezado(a) Diretor(a),

Eu, **Jose Carlos Thompson da Silva,** RG nº1.770.756 SSP/ES, CPF nº 093675187-81,sou aluno matriculado no curso de doutorado em educação do Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), e orientando da Profª Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner. Venho através desta, apresentar a minha intenção de realizar a pesquisa **Conceitos de análise combinatória: um estudo com alunos do 5º ano do ensino fundamental,** em uma turma de 5º ano desta instituição.

Essa pesquisa tem como objetivo investigar a contribuição da resolução de problemas para o desenvolvimento do raciocínio combinatório de alunos do 5º ano do ensino fundamental ao elaborar e explicar para outros alunos a partir do que já estudaram. O estudo se dará por meio de observações com entrevistas, audiogravações e videogravações de atividades de combinatória desenvolvidas com os alunos para análise das informações. O período do estudo definitivo será previamente informado à Vossa Senhoria.

Em qualquer etapa do estudo, a escola terá acesso ao pesquisador para esclarecimento de eventuais dúvidas. É garantida aos sujeitos de pesquisa e/ou seus responsáveis a liberdade da retirada de consentimento e o abandono do estudo a qualquer momento. As informações obtidas serão analisadas não sendo divulgada a identificação de nenhum participante. Fica assegurado, também, o direito da escola e dos participantes se manterem atualizados sobre os resultados parciais da pesquisa, assim que os dados forem analisados pelo pesquisador.

Agradecemos imensamente a Vossa Senhoria e a essa instituição, pela contribuição com o avanço do conhecimento científico a respeito da educação matemática nos anos iniciais.

Atenciosamente

____

Jose Carlos Thompson da Silva
Pesquisador responsável
me_thompson_@hotmail.com
(27) 996390558