UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

LENISE JÚLIA FASSINI DA SILVA

ENSINO DE GEOMETRIA PROJETIVA E PERSPECTIVA: UM OLHAR PELAS FOTOGRAFIAS

VITÓRIA-ES
2018

LENISE JÚLIA FASSINI DA SILVA

ENSINO DE GEOMETRIA PROJETIVA E PERSPECTIVA: UM OLHAR PELAS FOTOGRAFIAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Julia Schaetzle Wrobel

VITÓRIA - ES

2018

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

Silva, Lenise Júlia Fassini da, 1990-

S586e Ensino de geometria projetiva e perspectiva : um olhar pelas fotografias / Lenise Júlia Fassini da Silva. - 2018.

102 f. : il.

Orientadora: Julia Schaetzle Wrobel.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Educação Básica. 2. Fotografias. 3. Geometria Euclidiana. 4. Geometria Projetiva. 5. Perspectiva. I. Wrobel, Julia Schaetzle. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Ensino de Geometria Projetiva e Perspectiva: Um olhar pelas Fotografias

Lenise Júlia Fassini da Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 06 de setembro de 2018 por:

Prof.ª Dr.ª Julia Schaetzle Wrobel
Orientadora – UFES

Prof.ª Dr.ª Rosa Elvira Quispe Ccoyllo
Membro Interno – UFES

Prof.ª Dr.ª Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Membro Externo – IFES

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus, que sempre ouve minhas orações nas mais variadas horas do dia, pedindo força e sabedoria para continuar esta caminhada.

Aos meus pais, José e Odete, que me dão todo o apoio, amor e carinho, incentivando sempre a crescer e lutar pelos meus ideais com honestidade e dignidade, vocês são meus exemplos de vida.

Ao meu esposo Felipe, que é companheiro, amigo e está sempre disposto a me ajudar a levantar voo em prol dos meus sonhos.

Ao meu irmão Lúcio por me distrair nos momentos de angústia, fazendo-me rir com suas brincadeiras e senso de humor.

A minha orientadora Julia, por suas preciosas contribuições e ensinamentos, além de sempre encorajar-me a novos desafios e aprendizados.

Ao professor Dr. Cleber Haubrichs do Instituto Federal do Rio de Janeiro pelas importantes considerações e pelo zelo em que as fez a esta dissertação.

A banca, pelas relevantes contribuições.

Aos professores do PROFMAT que contribuíram muito para a minha formação.

Aos colegas do PROFMAT turma 2016, que tornaram por dois anos meus dias de quinta-feira mais alegres e agitados, em especial aqueles que a vida me fez conhecer mais de perto, com estudos rigorosos aos sábados: Diego, Fábio, Geyson e Thais, obrigada!

A todos que contribuíram diretamente ou indiretamente para que esta importante conquista fosse possível: obrigada!

“Não há uma estrada real para a geometria”

Euclides

RESUMO

Essa pesquisa traz elementos da Geometria Projetiva para uma sala de aula do 3º ano do Ensino Médio, através de fotografias e arte. Para isso, apresentamos um relato histórico do surgimento da Geometria Projetiva, a partir do 5° postulado de Euclides e suas mais variadas tentativas de demonstrá-lo, passando pelas proposições de novos conceitos geométricos, até chegar à formalização desta e de outras geometrias. Também destacamos ponderações em documentos oficiais sobre o ensino de uma nova geometria para os alunos da educação básica da rede estadual do Espírito Santo (ES). Aplicamos a sequência didática em uma escola estadual do ES e analisamos os impactos na aprendizagem dos alunos, concluindo que a discussão na sala de aula e a produção artística própria dos alunos pode ter facilitado a compreensão dos entes matemáticos trabalhados nas aulas.

Palavras-chave: Educação Básica. Fotografias. Geometria Euclidiana. Geometria Projetiva. Perspectiva.

ABSTRACT

This research brings elements of Projective Geometry to a classroom of the 3rd year of High School, through photographs and art. For this, we present a historical report since the 5th postulate of Euclides and its most varied attempts made for anothers mathematicians to show this unsucessfully, passing for criations of new geometric concepts, until come on the actual days with the formalization of these geometries. We also look at official documents about the teaching of a new geometry in the basic education of the state of Espírito Santo (ES). We applied the didactic sequence in an ES state school and analyzed the impacts on the students' learning, concluding that the classroom discussion and the students' own artistic production may have facilitated the understanding of the mathematical topics worked in the classes.

Keywords: Basic Education, Photographies, Euclidian Geometry, Projective Geometry, Perspective.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Esse trabalho traz um estudo sobre a Geometria Projetiva e sua relação com a Geometria Euclidiana, a perspectiva matemática, a fotografia e apresenta uma proposta didática para o ensino básico de matemática, podendo ser praticado na sala de aula tanto para alunos do ensino fundamental quanto do ensino médio.

A proposta didática foi testada em uma escola pública do Espírito Santo, em que os alunos tinham muitas dificuldades matemáticas nos mais diferentes aspectos e não estavam motivados ao estudo da disciplina, por sempre verem a matemática como algo sem conexão com a realidade. Assim, a autora percebeu a necessidade de reconquistar esses estudantes a partir de outras metodologias de ensino que aquela tradicional da sala de aula.

O professor como mediador de conhecimento deve levar os alunos ao pensamento matemático interligado com o contexto real ao qual está inserido o estudante, e para isso ele precisa estar atento ao que a comunidade escolar vivencia.

Em algumas esferas, como na rede pública de ensino do Espírito Santo, a educação matemática tem sido cada vez mais engessada, pois vem seguindo uma linha de construção pautada nos descritores do PAEBES - Programa de Educação Básica do Espírito Santo[1]. Por isso, temas transversais têm tido pouco espaço dentro da sala de aula. Muitas vezes falta tempo de se trabalhar os conteúdos propostos para o trimestre.

Porém, a matemática vai muito além de fórmulas e falsas problematizações, como por exemplo, jogar uma moeda 2018 vezes. A matemática pode ser extraída ou inserida em diversas situações do mundo natural ou cotidiano. O professor como mediador deve mostrar aos seus alunos, de forma lúdica, a matemática presente nos espaços formais e não formais.

Segundo Moreira (2010), o aluno tem melhor facilidade de entender conceitos caso seja estabelecido uma interação cognitiva entre o que há de novo e o que ele já traz consigo em sua bagagem de vivência, chamando isso de aprendizagem significativa. O importante para se estabelecer essa aprendizagem significativa é firmar conexões entre o que o aluno já sabe (seus conhecimentos prévios) e o que se espera ensinar.

A partir da percepção de que muitos dos alunos da autora tinham enormes dificuldades com geometria, e que muitos não tinham nenhuma afinidade com ela, surgiu uma ideia: a de aliar o

[1] http://www.paebes.caedufjf.net/

ensino de geometria a algo que estava tão presente em seus cotidianos: a fotografia. Dessa forma, traríamos para a sala de aula de matemática algo que faz parte do contexto a qual hoje muitos alunos estão inseridos, as fotografias, principalmente por terem a mão um celular com câmera digital. Ao mesmo tempo, estimularíamos a criatividade e a dimensão de espaço através da Geometria Projetiva.

As dificuldades matemáticas dos alunos têm as mais diversas causas, mas acredita-se que o ensino de geometria, no país, ficou deixado de lado depois de algumas mudanças no currículo básico, ocorridas por volta da década de 60 com a introdução do movimento da matemática moderna. Isso resultou em uma dificuldade ainda maior na disciplina para os alunos, o que deixa alguns professores da área preocupados, pois:

> Existem fortes motivos para a inquietação dos professores com o abandono da geometria e sua insistência em melhorar seus conhecimentos com relação a ela. A ausência do ensino da geometria e a ênfase no da álgebra pode estar prejudicando a formação dos alunos por privá-los da possibilidade do desenvolvimento integral dos processos de pensamento necessários à resolução de problemas matemáticos. (PAVANELLO, 1993, p. 16)

A ênfase na álgebra em detrimento da geometria, a lacuna na formação do professor, a falta de base da classe e a inquietação com a falta de tempo no corrido ano letivo, impulsionaram a querer pesquisar uma forma alternativa de ensino desta disciplina.

Embora a Geometria Projetiva não esteja prevista no ensino fundamental e nem na proposta para o ensino médio da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2016; 2017), os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino fundamental deixam espaço aberto para a interdisciplinaridade,

> [...] é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 51)

Assim, podemos ensinar Geometria Projetiva com abordagens comuns ao conteúdo de Arte, como perspectiva, ponto de fuga, nos primeiros quadros renascentistas que usaram da técnica. Relacionando duas disciplinas, é possível que o aluno tenha um interesse maior pelo conteúdo e haja uma maior participação da turma.

Essa pesquisa se propõe a trazer elementos de Geometria Projetiva para uma sala de aula do 3º ano, através de fotografias digitais. Dessa maneira, pretende-se contribuir com aulas de matemática, apresentando um método de ensino de geometria para a educação básica de forma lúdica, trazendo ao alcance dos alunos uma matemática contextualizada e utilizando fotografias digitais, recurso presente nos celulares de quase todos os alunos.

Os objetivos específicos dessa pesquisa visam que os alunos entendam que existe mais de uma geometria, ou seja, que a Geometria Euclidiana não é única, mostrar os conceitos iniciais de Geometria Projetiva e a sua contextualização entre matemática e arte, além de apresentar as impactantes fotografias do famoso fotógrafo Sebastião Salgado e seu contexto matemático. Há também interesse em criar uma aula diferenciada e um ambiente amistoso entre alunos e estudo de matemática.

A estrutura dessa dissertação apresenta um capítulo de estudos da teoria da Geometria Projetiva, começando pela geometria de Euclides e a inquietação da comunidade matemática acerca do famoso 5° postulado. Em seguida, passeamos por outras geometrias a partir da negação desse mesmo postulado, até chegar a incrementos de novos conceitos à própria Geometria Euclidiana, chegando à Geometria Projetiva. No capítulo 6, elaboramos uma proposta didática para ser desenvolvida com alunos do 3º ano do Ensino Médio. Como desfecho do trabalho, apresentamos no capítulo 7 a aplicação da proposta didática na turma em que a autora leciona, com resultados e conclusões discutidas nesse mesmo capítulo e por fim, o capítulo 8 traz as considerações finais.

2. A GEOMETRIA DE EUCLIDES

Segundo Boyer (1996), depois que Alexandre o Grande morreu, Ptolomeu I assumiu o controle da parte egípcia do império e então pode criar em 306 a.C. em Alexandria uma escola que foi destaque em seu tempo, chamada de Museu. Os professores mais renomados da época foram convidados para trabalhar nela, entre eles Euclides (± 300 a.C. - ± 270 a.C.).

O livro de Euclides foi o primeiro a difundir uma apresentação baseada em axiomas, teoremas e demonstração. Assim, teve um grande impacto ao longo da história da matemática, porque a partir de então essa apresentação passou a servir de modelo para outros textos matemáticos e científicos. Embora conhecido por esse livro, Euclides escreveu cerca de doze obras dentro de matemática, óptica, astronomia, música e mecânica, onde apenas cinco delas resistiram ao tempo.

Boyer (1996) também ressalta que Euclides era destaque na Universidade de Alexandria, pois tinha a habilidade de expor e o talento para ensinar, por isso sua obra era adotada como livro-texto, dando maior amplitude ao sucesso de Os Elementos.

Os Elementos organiza toda a matemática elementar construída ao longo de 300 anos, expondo de forma lógica a aritmética e a geometria sintética através de um método dedutivo. Possivelmente, Euclides não apresentou nenhuma descoberta, apenas reuniu estudos já existentes em um único volume, para lecionar na Universidade. Mas não se sabe ao certo o que consiste no livro Os Elementos, já que não se tem nenhum texto original, apenas manuscritos em grego, árabe e latim que chegaram na Europa no século XII (BARBOSA, 2011).

Os Elementos apresenta uma construção do pensamento matemático em axiomas e postulados. Antigamente, os axiomas eram suposições comuns a todas as ciências e postulados eram suposições particulares da ciência em estudo. Atualmente não se faz distinção entre um e outro. “O objetivo de Euclides era que o seu sistema fosse livre de suposições não reconhecidas baseadas na intuição, em conjecturas e na inexatidão” (MLODINOW, 2005, p. 43).

O livro de Euclides foi uma importante obra no mundo ocidental. Apenas a Bíblia tem mais edições que Os Elementos (KATZ, 1998) e antes da imprensa, cópias manuscritas dominavam o ensino de geometria (STRUIK, 1992).

Os seis primeiros livros de Os Elementos retratam exclusivamente a geometria plana elementar. Os três seguintes trazem a teoria dos números – aritmética. O décimo livro trabalha a questão dos incomensuráveis e, por fim, os últimos três livros introduzem a geometria no espaço, totalizando treze livros, ou capítulos (BOYER, 1996). Nele são demonstradas 465 proposições deduzidas de um sistema axiomático numa forma bem didática.

O primeiro dos treze livros de Os Elementos trata dos fundamentos de geometria plana e contém vinte e três definições, cinco postulados e nove noções comuns. São os postulados:

> (1) Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
> (2) Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
> (3) E, como todo centro e distância, descrever um círculo.
> (4) E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
> (5) E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos. (EUCLIDES, 2009, p.98)

A partir disso, Euclides faz 47 proposições, com as devidas demonstrações, usando as definições e os postulados dados. Dessas 47 proposições, nas primeiras 28, segundo Proclo (séc. V), grande comentarista de Os Elementos, Euclides evitou usar o 5° postulado para demonstra-las, mesmo sendo muito mais viável ter usado o postulado. (MORENO; BROMBERG, 1987 apud BRITO, 1995).

O 5° postulado é conhecido como Postulado das Paralelas, e sua escrita não é tão simples quanto a dos outros postulados. “Aparentemente, Euclides não gostava desse postulado, pois evitava usá-lo sempre que possível, até mesmo em teoremas em que seria mais simples usá-lo como apoio” (MONTOITO, 2011, p. 5). Euclides preferia demonstrar por outras vias, levando assim muitos a acreditar que ele tardou tanto a usá-lo por não ter certeza quanto a sua própria natureza (BOYER, 1996). Vários matemáticos não o achavam suficientemente simples para se ter como postulado, pensavam ser possível demonstrá-lo como um teorema (MLODINOW, 2005), tendo ao longo dos anos impulsionado diversas tentativas de provas. Dessa forma este fato histórico na matemática fez com que houvesse uma corrida científica de grande valor para a humanidade: a descoberta de outras geometrias que não são euclidianas.

Há também outros enunciados equivalentes ao Postulado das Paralelas, como por exemplo: a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos (igual a π). John Playfair em 1795 escreveu esse postulado da seguinte forma: “*Para toda reta l e todo ponto P fora de l, pode-se traçar uma única reta paralela a l que passe por P*” (BARKER, 1969, p. 48).

A equivalência do enunciado de Playfair com o 5° postulado de Euclides é demonstrada por Arcari (2008). Vamos apresentar a demonstração dessa equivalência, chamando *P5* o 5° postulado de Euclides e *P5'* o postulado de Playfair.

Demonstração:

P5: Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos.

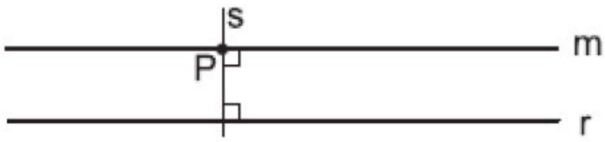
P5': Para toda reta *l* e todo ponto *P* fora de *l*, pode-se traçar uma única reta paralela a *l* que passe por *P*.

I. $P5 \Rightarrow P5'$

Seja *P* um ponto e *r* uma reta tal que $P \notin r$.

Tracemos uma perpendicular *s* a *r* passando por *P* e, então, uma perpendicular *m* a *s*, também passando por *P*.

Figura 1: Equivalência de *P5* e *P5'*.

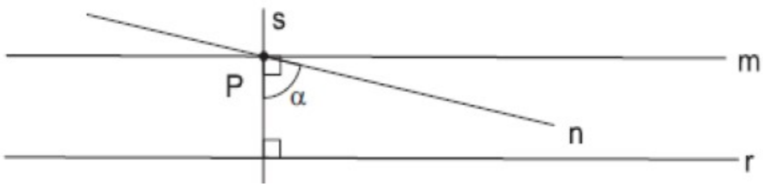


Fonte: ARCARI (2008, p.22).

Pela proposição caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça o ângulo exterior igual ao interior e oposto no mesmo lado, ou os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos, as retas serão paralelas entre si, temos *m* paralela a *r* e isso prova a existência da paralela *m*.

Quanto à unicidade, suponhamos que existe uma reta *n* paralela a *r* passando por *P* e *n* diferente de *m*. Seja α o ângulo formado entre as retas *n* e *s*.

Figura 2: Equivalência de *P5* e *P5'*.



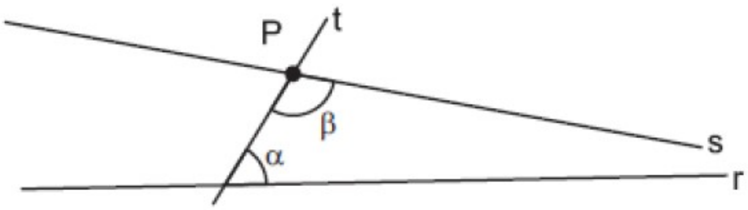
Fonte: ARCARI (2008, p.22).

Logo, $\alpha + 90° \neq 180°$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\alpha + 90° < 180°$. Por P5, temos que *n* e *r* se encontram, o que contradiz a hipótese de *n* ser paralela a *r*. Concluímos, então, que *m* e *n* não podem ser distintas. Portanto, *m* é única.

II. $P5' \Rightarrow P5$

Sejam as retas *r* e *s* cortadas por uma reta *t* de tal modo que os ângulos colaterais internos, α e β, sejam somados menores que dois retos. Seja *P* o ponto de intersecção entre as retas *s* e *t*.

Figura 3: Equivalência de *P5'* e *P5*.

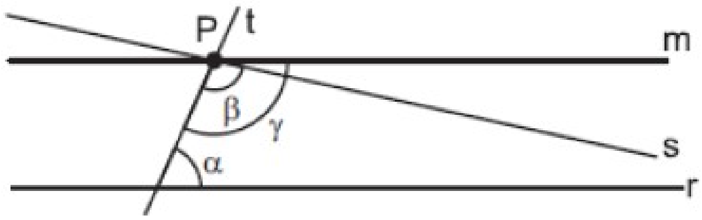


Fonte: ARCARI (2008, p.22).

Devemos mostrar que *r* e *s* se encontram.

Consideremos uma reta *m* passando por *P* tal que os ângulos colaterais internos, α e γ, sejam somados iguais a dois retos, isto é, $\alpha + \gamma = 180°$.

Figura 4: Equivalência de *P5'* e *P5*.



Fonte: ARCARI (2008, p.22).

Pela proposição *P5'*, temos *m* paralela a *r*. Suponhamos que *s* também seja paralela a *r* e seja β o ângulo formado entre as retas *s* e *t*. Por *P5'*, temos a unicidade da paralela, ou seja:

$$m = s \Rightarrow \gamma = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \alpha + \beta .$$

Porém, isso contradiz a hipótese que $\alpha + \beta < 180°$.

Concluímos, então, que *s* não é paralela a *r*.

Portanto, de I e II, $P5 \Leftrightarrow P5'$.

Desde a época de Euclides, o desejo de se demonstrar esse postulado era grande, e foram inúmeras tentativas de vários matemáticos durante os séculos, encarando-o como uma possível proposição. Essa busca permitiu o surgimento de outros campos geométricos que hoje temos conhecimento. Iremos mostrar algumas dessas tentativas de prova no próximo capítulo.

3. ALGUMAS TENTATIVAS HISTÓRICAS DE SE PROVAR O 5° POSTULADO DE EUCLIDES

As inúmeras tentativas de se provar o 5° postulado foram invalidadas, pois se usavam os argumentos equivalentes a ele mesmo. O livro intitulado *Saggio di uma bibliografia Euclidea, Parte IV*, publicado em Bolonha em 1890, traz 24 páginas de títulos de textos publicados entre 1607 e 1890 que tentaram, em vão, demonstrar o 5° postulado (MONTOITO, 2011). Apresentaremos aqui, de forma breve, algumas das principais tentativas da prova.

Por muito tempo, os matemáticos tentaram provar o 5° postulado por redução ao absurdo. Um dos primeiros e mais importantes comentaristas do livro Os Elementos, foi Proclo do século V. Proclo provou o 5° postulado de Euclides dividindo-o em duas partes: primeiro ele mostra que se tem duas retas paralelas, uma terceira reta transversal corta a uma delas, então certamente cortará a outra (HEATH, 1968, p. 207 apud BARBOSA, 2011, p. 36).

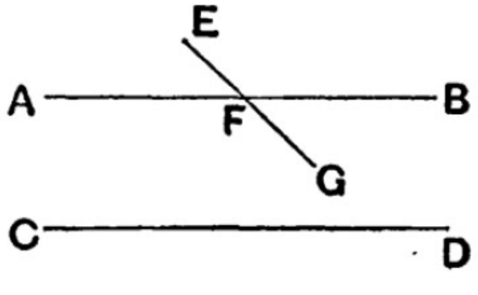
> I. Se uma reta corta uma de duas paralelas, então ela cortará a outra.
>
> II. Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos.

Demonstração:

I. Sejam AB e CD retas paralelas e seja EFG a reta tal que corte AB.

EFG cortará a reta CD também, pois as retas BF e FG, ambas passando pelo ponto F, quando prolongadas indefinidamente têm uma distância maior que qualquer magnitude, inclusive que o intervalo entre as retas paralelas. Como as retas BF e FG se distanciam uma da outra mais que a distância entre as paralelas, então FG cortará CD.

Figura 5: Demonstração de Proclo.



Fonte: HEATH (1968, p. 207).

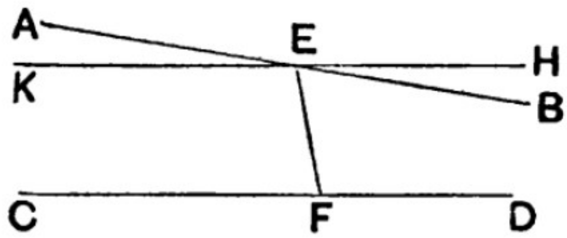
II. Sejam AB e CD duas linhas retas e seja EF a reta que cai sobre elas fazendo os ângulos BEF e DFE, que juntos são menores que dois ângulos retos. Deseja-se provar que as retas AB e CD se encontrarão no lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos.

Como os ângulos BEF e DFE são juntos menores que dois retos, seja o ângulo HEB igual ao que falta para BEF e DFE sejam iguais a dois retos e seja produzida a reta HE passando por K.

Como EF passa por KH e por CD fazendo os ângulos interiores HEF e DFE juntos iguais a dois retos, estas retas HK e CD são paralelas.

Além disto, como AB corta KH, também cortará CD (pelo que mostramos em I). Portanto, AB e CD se encontrarão no lado em que os ângulos formados são menores que dois retos. Concluindo a demonstração.

Figura 6: Demonstração de Proclo.



Fonte: HEATH (1968, p. 208).

Há um argumento na parte I dessa demonstração que não está provado: duas retas distintas que passam por um ponto, quando prolongadas indefinidamente têm uma distância maior que qualquer magnitude. Como não se pode assumir que duas linhas que continuamente se aproximam uma da outra se encontrarão, não se pode assumir que duas linhas que continuamente divergem, terão uma distância maior que qualquer distância atribuída.

Seguindo na história, Silva (2010) nos conta que o mundo árabe adentra o mundo científico no século VII e se sobressaem no estudo matemático. Várias obras importantes foram traduzidas do grego e latim para o árabe a fim de maior dedicação para alunos da Casa da Sabedoria (Bait al-hikma), nome dado a uma universidade árabe.

Dentre os destaques árabes que se dedicaram à prova do 5° postulado, estão os matemáticos Omar al-Khayyam (1048 – 1131) e Nasir ad-Din al-Tusi (1201 – 1274).

Al-Khayyam usou, para provar o 5° postulado, a criação de oito novas proposições para auxiliar na prova. Uma das proposições faz referência a um quadrilátero simétrico que possui dois ângulos retos. Ele conclui que, devido à sua simetria, também há dois outros ângulos retos. Dessa forma, Al-Khayyam também não prova o 5° postulado, pois ele usa uma proposição equivalente a ele, como nos conta Barbosa (2011). Esse quadrilátero foi usado então pelo italiano Giovanni Saccheri no início do século XVIII.

Por 2000 anos, vários matemáticos tentaram provar o 5° postulado, encarando-o como um teorema a partir dos restantes nove axiomas e postulados e isso gerou um imenso alcance e importante desenvolvimento da matemática moderna, como nos traz Eves (2011). Foram muitas demonstrações do Postulado das Paralelas, porém descobria-se posteriormente que cada um tinha como base uma suposição equivalente a ele próprio.

Na próxima seção, veremos como os matemáticos modernos lidaram com isso de forma a criar novas interpretações geométricas, sem implicar no espaço euclidiano.

3.1 As negações do 5° postulado

Depois de muitas tentativas frustradas de demonstrações do 5° postulado, os matemáticos começaram a questionar se a Geometria Euclidiana seria o único modelo de geometria.

Algumas tentativas de prova do 5° postulado foram dramáticas, segundo Barbosa (2011), como a feita pelo padre jesuíta italiano Giovanni Saccheri (1667 – 1773). Saccheri demonstrou diversos resultados básicos da hoje chamada Geometria Hiperbólica, mas não acreditou que poderia existir outros tipos de geometria que não fossem a própria Geometria Euclidiana.

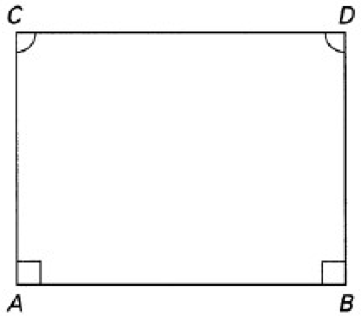
Ele propôs uma prova utilizando a redução ao absurdo: assumiu a negação do Postulado das Paralelas e tentou chegar em uma contradição. Para isto, utilizou a hipótese de Al-Khayyam do quadrilátero simétrico (possui dois ângulos retos, e os outros dois são iguais entre si). Ele concluiu que os ângulos, chamados por ele de ângulos do topo, podem assumir uma das três características (BARBOSA, 2011, p.40):

1 – ambos serem ângulos retos;

2 – ambos serem ângulos obtusos;

3 – ambos serem ângulos agudos;

Figura 7: Quadrilátero de Saccheri.



Fonte: BARBOSA (2011, p. 40).

Saccheri provou que uma das afirmações era falsa e com isso tentava provar que as outras duas também seriam, chegando assim a redução do absurdo e provando de fato o 5° postulado de que as retas são paralelas por possuir ângulo reto.

A hipótese dos ângulos obtusos ele afirmava ser falsa, pois contradiz o segundo postulado de Euclides e, por consequência, o teorema que afirma que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°. E não conseguiu encontrar a contradição dos ângulos agudos, dizendo ser falsa por contrariar a natureza da reta. Assim chegou à conclusão de que os quatro ângulos de um quadrilátero são ângulos de 90°, sendo equivalente ao 5° postulado novamente (BARBOSA, 2011, p.41). Sem perceber, Saccheri chegou a uma negação do 5° postulado.

A Geometria Hiperbólica atual só foi formalizada em 1832 por János Bolyai, que propôs que *"Por um ponto fora de uma reta passa mais de uma reta paralela a ela"*. Nesse contexto, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180°, ou seja, esta geometria nega a unicidade da reta paralela do 5° postulado de Euclides. Bolyai era húngaro, e seu pai era um matemático que tentou provar o postulado das retas paralelas, também sem sucesso.

Mas Bolyai teve uma ideia diferente. Ao invés de tentar provar o Postulado das Paralelas, ele escreveu em 1832 um apêndice de 26 páginas ao livro do pai, *Tentamen*, intitulado *Apêndice contendo a absoluta verdade científica do espaço, independente da veracidade ou falsidade do XI axioma de Euclides*. O XI axioma de Euclides descrito no título refere-se ao Postulado das Paralelas (BARBOSA, 2011).

Bolyai então criou um sistema geométrico baseado no oposto do que Euclides propunha no Postulado das Paralelas e chamou de sistema S. Seu pai, Farkas Bolyai, mandou o trabalho para seu amigo de correspondência Carl Frederick Gauss, que respondeu dizendo que eram exatamente as ideias que permaneceram 35 anos presas em sua mente (GREENBERG, 2001. apud. BARBOSA, 2011).

Um pouco decepcionado por não ser pioneiro, János Bolyai parou com os estudos sobre a nova geometria. Em 1829, o matemático russo Nikolai Lobachevsky publicou algumas ideias semelhantes às suas, levando János Bolyai a retornar aos estudos e concluir seu trabalho, formalizando a Geometria Hiperbólica com uma negação do 5º Postulado (WOLFE, 1945. apud. BARBOSA, 2011).

A Geometria Elíptica, publicada por Georg Bernhard Riemann em 1851, também nega o 5° postulado de Euclides, mas com relação a existência da reta paralela: *"Por um ponto fora de uma reta não passa reta paralela a ela".* Nesta geometria, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é maior que dois ângulos retos.

Segundo Eves (2011), desta forma Riemann (1826 – 1866) descartou a reta infinita, admitindo apenas que a reta é ilimitada, e mostrou, fazendo mais alguns ajustes e pequenos postulados que pode-se desenvolver uma geometria consistente a partir da hipótese do ângulo obtuso, ou seja, os ângulos formados pelas retas perpendiculares são maiores que 90°.

Tanto a Hiperbólica quanto a Elíptica são conhecidas como Geometrias Não Euclidianas Clássicas. Se, no século XIX elas causaram uma grande movimentação e até repulsa na comunidade matemática, hoje são indiscutíveis dentro da realidade. Depois de Bolyai e Riemann, outras geometrias mais recentes têm surgido, como a Geometria Projetiva, a Geometria do Taxista e a Geometria do Fractal (MONTOITO, 2011).

Para Eves (2011), a descoberta de Geometrias Não Euclidianas consistentes internamente, foi a solução final do secular problema do Postulado das Paralelas, criando novos sistemas geométricos.

Após as inúmeras tentativas de demonstrações do 5° postulado de Euclides, todas sem o sucesso esperado, no século XIX e com o surgimento das Geometrias Não Euclidianas, pode-se concluir que o 5° postulado de Euclides de fato é um postulado e não um teorema que pode ser demonstrado.

Mesmo com o surgimento de outras geometrias, a Geometria Euclidiana nunca foi considerada ultrapassada, pelo contrário. Ela vive até hoje, mais de 2300 anos depois, sendo usado por todos no ensino básico de matemática. Nós dizemos que a Geometria Euclidiana é a geometria do mundo físico em que vivemos. Porém, é importante notar que nem sempre é possível aplicar os conceitos de Geometria Euclidiana a algo que para os nossos olhos tem outra resposta óbvia. A Geometria Projetiva vem então para mostrar que o mundo físico é diferente daquele que enxergamos com nossos olhos, pois nosso olhar é limitado e depende da posição em que nos encontramos.

3.2 A não afirmação e não negação do 5° postulado: a Geometria Projetiva

A preocupação de desenhar em um plano aquilo que vemos com os olhos sempre rondou os pintores. No século XV, os antigos artistas não conseguiam imprimir noções de profundidade e realidade em suas pinturas. Esses erros persistiram até o século XVI segundo Stillwell (2010).

Até o século XIII, os pintores retratavam em seus quadros temáticos religiosos, figuras planas, onde não é possível identificar o que está mais a frente e o que está mais ao fundo da tela. Observe na pintura (Figura 8) como a mesa e os objetos postos nela foram representados e, também, a forma como o autor tratou o ambiente ao fundo, sem entrar em detalhes do local.

Figura 8: Santa Ceia de Taula de Saint Miquel, Soriguerola, séc. XIII.

Fonte: https://www.ricardocosta.com/artigo/taula-de-sant-miquel-sec-xiii-do-mestre-de-soriguerola-baixa-cerdanha-catalunha. Acesso em 05 fev 2018.

Após esse período, começou a haver certa preocupação em se fazer pinturas mais fiéis à realidade. Então no início do século XIV, Duccio di Buoninsegna (1255-1319) foi um dos primeiros pintores a desenvolver uma técnica (ainda rudimentar) de perspectiva, ou seja, imprimir noção de profundidade em telas planas, influenciando assim outros artistas, como retrata Schmidt (2015).

Figura 9: Emmaus, Pintura de Duccio di Buoninsegna, 1308 – 1311.

Fonte: https://apilgriminnarnia.com/2016/02/29/emmaus/jesus-and-the-two-disciples-on-the-road-to-emmaus-by-duccio/. Acesso em 13 ago 2017.

Para Almeida (2007), houve uma importante mudança no desenvolvimento dessas técnicas quando Leonardo da Vinci (1452-1519) e Albrecht Dürer (1471-1528) começaram a escrever tratados que relacionavam a arte com a matemática, enfatizando a importância desta última para a pintura. Nesse momento, o período Renascentista, as técnicas de perspectiva haviam atingidos seu auge.

Ao se fazer uma imagem em tela, o pintor tem como ponto central de projeção o seu próprio olho. Desta forma, comprimentos e ângulos reais são necessariamente distorcidos pelo olho humano. Isso depende também da posição em que cada objeto se encontra e como são retratados.

Para Stillwell (2010), a Geometria Projetiva trata da preservação de ponto e linha, as duas únicas coisas imutáveis dentro dessa Geometria. Como ângulos e comprimentos não são preservados em uma projeção, não se tem significado deles dentro dos estudos em Geometria Projetiva, simplificando assim a classificação de curvas. Auffinger e Valentim (2003, p. 2) distinguem a Geometria Projetiva da euclidiana:

> Enquanto a Geometria Euclidiana se preocupa com o mundo em que vivemos, a Geometria Projetiva lida com o mundo que vemos. Na prática, os trilhos de trem não são retas paralelas, mas retas que se encontram no horizonte, no infinito. Essa é uma

> das características marcantes da Geometria Projetiva, duas retas quaisquer sempre se intersectam.

Kill (no prelo) vai além, destacando a presença de pontos e retas no infinito[2].

> O infinito é, portanto, considerado um “lugar” e seus objetos, pertencentes ao infinito, não são tratados com distinção em relação aos outros objetos comuns, pontos ordinários e retas no plano afim, a não ser pela nomenclatura. A presença de uma “geometria do infinito” em alguns manuais analisados indica que havia um espaço próprio de discussão, na qual o infinito era protagonista, no âmbito daquela cultura escolar.

A história da Geometria Projetiva começou no século XVII com Gérard Desargues. Nascido em Lyon, na França em 1591, fez parte de uma família muito rica e respeitada na época. Desargues era arquiteto e engenheiro, como retrata Eves (2011), e em 1639 ele escreveu um tratado importantíssimo abordando secções cônicas.

Este tratado recebeu pouca atenção da comunidade acadêmica da época, talvez porque muitos estavam preocupados com a geometria analítica, a grande atração da mesma era. Além disso, o trabalho de Desargues era extremamente denso, tendo cerca de 70 novos termos introduzidos, o que fez com que, por vários anos, seu trabalho tenha sido esquecido. Uma cópia manuscrita por Philippe de la Hire (1640 – 1718), discípulo de Desargues, foi encontrada por acaso em 1845 pelo geômetra francês Michel Chasles (1793 – 1880), que contribuiu para a divulgação do trabalho de Desargues. Philippe havia estudado o livro que era curto, com escritas a lápis e com considerações importantes sobre distâncias infinitas, mostrando que propriedades são invariantes na projeção. Desde então, Chasles fez a divulgação do trabalho, e é considerado até hoje um clássico do desenvolvimento inicial da Geometria Projetiva, como relata Eves (2011).

A Geometria Projetiva não nega o 5° postulado em nenhum sentido, como é feito nas demais geometrias não-euclidianas, como a hiperbólica e a elíptica.

O 5º postulado de Euclides, em uma de suas versões mais populares, diz que “por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela à reta dada”. É um postulado de existência e unicidade. Como vimos, negando a existência temos: “por um ponto fora de uma reta não passa nenhuma reta paralela à reta dada”. Isso gera uma geometria não euclidiana que se chama elíptica. Negando a unicidade temos: “por um ponto fora de uma reta passa mais de uma reta paralela à reta dada”. Isso gera uma geometria não euclidiana chamada geometria

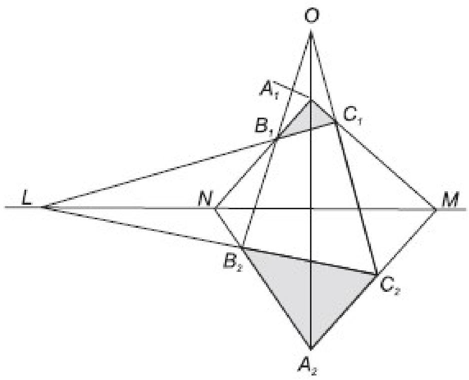
[2] Os chamados pontos ideais.

hiperbólica, na qual pode-sedemonstrar, inclusive, que “por um ponto fora de uma reta passam infinitas retas paralelas à reta dada”.

A Geometria Projetiva não nega o Postulado das Paralelas de Euclides. . O que ela propõe é acrescentar novos elementos à Geometria Euclidiana (HAUBRICHS, 2017).

Um dos teoremas mais famosos da Geometria Projetiva é o teorema de Desargues, que define propriedades projetivas entre dois triângulos. Escrito por volta de 1640 e também chamado de teorema da perspectiva, ele diz: *“Se dois triângulos, coplanares ou não, situam-se de maneira que as retas que unem os pares de vértices correspondentes são concorrentes, então os pontos de interseção dos pares de lados correspondentes são colineares e vice-versa”* (EVES, 2011. pg. 361).

Figura 10: Teorema de Desargues.



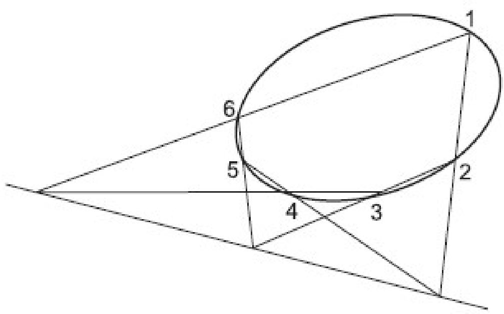
Fonte: EVES, 2011, p. 360.

Acredita-se que Desargues tenha sido motivado a pensar sobre uma geometria que precisasse abordar teorias perspectivas por estar envolvido em uma comunidade de arquitetos e desenhistas. Já matemáticos como Chasles, Poncelet e Cremona, posteriores a Desargues e que deram continuidade nos estudos de Geometria Projetiva, desenvolveram o assunto por encanto a esta geometria incomum (BOYER, 1996).

Pascal foi outro importante matemático que contribuiu para o crescimento da Geometria Projetiva. Da mesma época de Desargues, Blaise Pascal nasceu em 1623, em Auvergne, na França. Desde cedo, ele já sabia importantes definições matemáticas. Aos 16 anos, segundo Eves (2011), escreveu um trabalho sobre cônicas, o qual Descartes duvidou da autoria por se tratar de um adolescente, atribuindo assim o trabalho ao pai de Pascal. Aos 25 anos, ele escreveu novamente um manuscrito sobre seções cônicas, que não foi publicado.

Este tratado era baseado na obra de Desargues, que se perdeu no tempo sendo encontrado anos mais tarde por Descartes e Leibniz. Foram eles que detectaram a presença do teorema do hexagrama místico, um belíssimo teorema da Geometria Projetiva: *"Se um hexágono está inscrito numa cônica, então os pontos de interseção dos três pares de lados opostos são colineares e reciprocamente"* (EVES, 2011. pg. 363).

Figura 11: Teorema do Hexagrama Místico de Pascal.



Fonte: EVES, 2011, p. 364.

Eves (2011) afirma sobre o teorema do hexagrama místico de Pascal que

> Ele provavelmente demonstrou o teorema à maneira de Desargues, primeiro provando que ele é verdadeiro para uma circunferência e depois o estendendo por projeção a qualquer secção cônica. Embora esse teorema seja um dos mais ricos de toda a Geometria Projetiva, provavelmente deveríamos tomar como leviana a história muitas vezes contada de que Pascal deduziu mais de 400 corolários dele. (EVES, 2011, p. 363)

O manuscrito nunca foi publicado e provavelmente também não foi concluído. Pascal ficou por anos afastado da ciência por questões de saúde e religiosas e, em 1662, veio a falecer, aos 39 anos. No mesmo ano em que faleceu Desargues, aos 69 anos e com a saúde também bem debilitada.

Para Courant e Robbins (2000), a primeira vez em que se fez presente um estudo sistemático da Geometria Projetiva foi no final do século XVIII, quando, após a Revolução Francesa, a École Polytechnique de Paris formou muitos oficiais para os serviços militares da República e Jean Victor Poncelet (1788 – 1867), um dos seus diplomados, escreveu um tratado de propriedades de projeção.

Poncelet, segundo Eves (2011), foi aluno de Monge na Escola Politécnica. Ele escreveu seu tratado quando foi prisioneiro da guerra, em Saratoff, no Volga, onde ficou confinado. Assim, sem nada em mãos para estudar, ele planejou o *Traité des Propriétés Projectives des Figures*. Ao ser libertado em 1814, retornou a Metz, cidade onde nascera, e publicou o tratado em 1822.

Com o tratado de Poncelet, a geometria sofreu uma grande transformação sendo um marco na época. Inaugurou o chamado "grande período", como nos traz Eves (2011), quando vários matemáticos ganharam destaque na Geometria Projetiva.

Eves (2011) retrata que Poncelet desenvolveu a Geometria Projetiva baseado em dois princípios: o da dualidade e o da continuidade. Na Geometria Projetiva, quando se usam elementos ideais no infinito, há uma simetria entre pontos e retas. A dualidade pode ser entendida através de exemplos:

> Como exemplo simples, considere as duas proposições seguintes, assim relacionadas: Dois pontos distintos quaisquer determinam uma, e uma só, reta à qual ambos pertencem. Duas retas distintas quaisquer determinam um, e um só, ponto que pertence a ambas. (EVES, 2011, p. 591)

O princípio da dualidade é a relação de simetria que converte a disposição entre pares de teoremas. Estabelecido assim o sistema da dualidade, se uma proposição tem sua demonstração, seu par dual também a tem ((EVES, 2011).

Eves (2011) elucida o princípio da continuidade com outro exemplo:

> Considere o caso de duas circunferências que se seccionam nos pontos reais A e B. Um aluno de geometria elementar pode provar facilmente que o lugar dos pontos P com potências iguais em relação às duas circunferências é a reta AB. Tendo essa propriedade sido estabelecida, então ela deve ser suscetível de demonstração pelo método da geometria analítica. Mas esse método ignora se os pontos A e B de intersecção das duas circunferências são reais ou imaginários. Donde, a cadeia de equações que prova a proposição no caso em que A e B são reais simultaneamente prova a proposição quando A e B são imaginários. Como decorrência, quando as duas circunferências não se seccionam, o lugar dos pontos P com potências iguais com relação às duas circunferências é ainda uma reta (EVES, 2011, p. 592).

Esse método de demonstração imaginária, em que um teorema foi adaptado para uma situação real, foi chamado por Poncelet de princípio da continuidade. Eves (2011) nos mostra que Poncelet encontrou diversas dificuldades de emplacar seu princípio da continuidade, por encontrar resistência entre a comunidade geômetra da época, devida a sua complexidade.

Mas há quem o defendesse e fizesse publicações ilustrando o princípio de Poncelet. Um deles era o geômetra suíço Jacob Steiner, nascido em Utzensdorf em 1796. Steiner detestava o método analítico e se dedicou à geometria sintética, criando um tratado do mais alto padrão sobre isso (EVES, 2011).

Poncelet e Steiner tinham em seus conceitos projetivos muitas ideias baseadas em propriedades métricas e, segundo Eves (2011), a geometria só se libertou completamente dessa base métrica quando o professor de matemática da Universidade de Erlangen, Karl Georg Christian Von Staudt escreveu a *Geometrie der Lage* em 1847.

A Geometria Projetiva ganha ainda mais forma no final do século XIX, quando a popularidade tornou-se tão grande que foi um dos temas mais pesquisado na época, como escrevem Courant e Robbins (2000), devido à grande preocupação pela estética e pela estreita ligação das geometrias não euclidianas com a álgebra.

Um grande matemático italiano, que possuía uma reputação de conferencista, Antonio Luigi Gaudenzio Giuseppe Cremona (1830-1903), revisou textos de Steiner, Poncelet, Chasles e outros, tendo como principal tema presente ao longo de sua carreira a Geometria Projetiva.

Em 1893, final do século XIX, Cremona escreveu um livro intitulado de *Elementos de Geometria Projetiva*, reunindo todas as ideias já estudadas desta geometria. Segundo o próprio Cremona (1893), ele faz uso de projeção central para estabelecer ideias de elementos infinitamente distantes, seguindo os exemplos de Steiner e de Staudt. Cremona nunca se apropriou de nenhuma ideia e em todo seu texto faz as devidas atribuições aos matemáticos responsáveis por cada descoberta. Seu desejo era fazer com que os alunos conhecessem os grandes nomes da geometria.

Ele escolheu o título de seu livro, baseado no livro de Poncelet de 1822, *Traité des propriétés projectives des figuras*, o qual considerou imortal e grande criador dos métodos modernos, como descreve em seu prefácio. Cremona (1893) deu maior ênfase às propriedades descritivas do que às propriedades métricas. Ele inicia o livro com a lei da dualidade pois, segundo o próprio, acredita ser um fato lógico que surge naturalmente da possibilidade de construir o espaço tomando o ponto ou o plano como um elemento.

Cremona (1893) comenta ainda que a sua concepção dos elementos situados a uma distância infinita se deve aos seus estudos sobre as propostas de Desargues. Ele relata que ficou encantado ao saber que Desargues, há dois séculos, já fazia menções sobre retas paralelas com um ponto de encontro no infinito e planos paralelos passando pela mesma linha reta no infinito.

Ele conta ainda que essa mesma ideia também foi lançada por Poncelet, tomando como ponto de partida os postulados de Euclides, fazendo com que Poncelet chegasse à conclusão de que os pontos no espaço que estão a uma distância infinita devem ser considerados pertencentes ao mesmo plano.

Em seu prefácio, Cremona (1893) ainda faz menção ao teorema do hexagrama místico de Pascal, usando a palavra célebre para definir o teorema vindo de um adolescente de 16 anos na época (1640). Ele finaliza dizendo que a teoria do polar já citada por Desargues anteriormente e De La Hire, foi aperfeiçoado por Monge em sua geometria e por Poncelet, este último que deu origem a teoria da reciprocidade polar que é equivalente à lei da dualidade.

Seu livro é composto por 24 capítulos, começando por figuras em perspectiva, passando por homologias, anamorfismos, princípio da dualidade, construção das figuras projetivas, dedução dos teoremas de Pascal e Desargues, figuras polares, e terminando em construções e corolários. Ele também traz exercícios para o leitor.

Cremona (1893) fecha o prefácio comentando que seu livro contém toda a progressão matemática da Geometria Projetiva desde os primórdios até 1833, mas que se o leitor deseja adquirir um conhecimento mais detalhado sobre a história da geometria, ele recomenda ler o clássico livro *Aperçu historique* do matemático Chasles.

No final deste século, a Geometria Projetiva ganhou muitos tratamentos postulacionais. Eves (2011) retrata ainda que, com progressivas adições e alterações de postulados, pode-se passar de Geometria Projetiva à Geometria Euclidiana, esbarrando em outras geometrias importantes no trajeto.

4. ELEMENTOS DE GEOMETRIA PROJETIVA

4.1 Perspectiva

A perspectiva é uma forma realista de descrever o espaço no plano, como escreve Stillwell (2010). Os pintores renascentistas, no início, tiveram muita dificuldade em transmitir a ideia de realismo em suas obras. Por isso, a impressão que temos ao olhar quadros do século XV é de que são planos, nivelados, sem uma ideia real de profundidade, desconexo com o contexto real.

Esse desconforto gerou certo tumulto entre os grandes artistas do século, que desejavam que suas obras fossem o mais realista possível. Deu-se o início de tentativas de se trabalhar com a perspectiva, como mostra a Figura 12, um quadro do século XV:

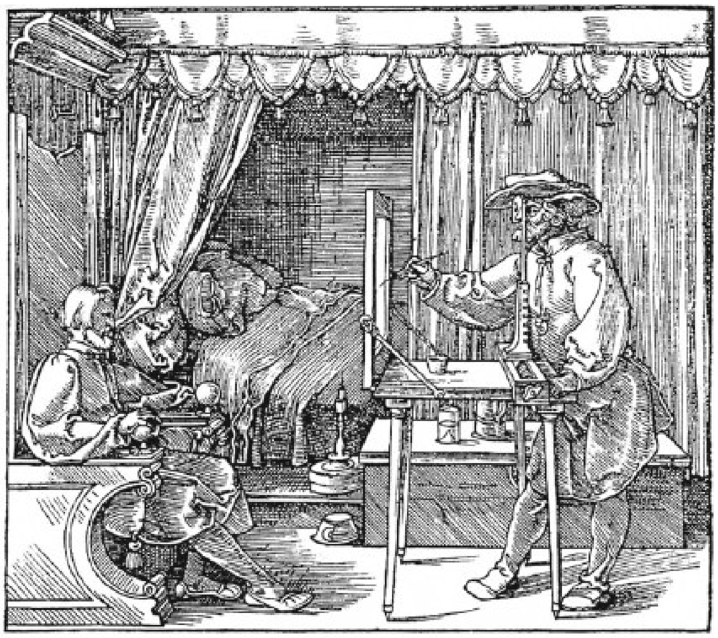
Figura 12: O Nascimento de St. Edmund. Artista desconhecido.

Fonte: Stillwell, 2010, p 128.

Veja que a imagem revela um chão em que os ladrilhos estão todos na vertical, trazendo assim uma ideia muito superficial de profundidade. A cama também não mostra o realismo ideal, juntamente com os demais acessórios do quarto, como o banco em que a mulher senta.

Um pioneiro no método de uma perspectiva correta, como nos conta Stillwell (2010), foi o pintor e arquiteto Brunelleschi, por volta de 1420. Porém só em 1436, Leone Battista Alberti (1404 – 1472) criou um método denominado Véu de Alberti, no qual ele estica um pano transparente na frente de onde será pintada a cena e, vendo a cena pelo pano e com um olho fixo em um ponto, ele pinta o tecido (Figura 13).

Figura 13: Uso da técnica do Véu de Alberti. Albrecht Dürer, 1525.



Fonte: Stillwell, 2010, p.129.

Ao pintar cenas reais presencialmente, esse método poderia ser útil, no entanto para se fazer uma pintura imaginária, não serviria de nada.

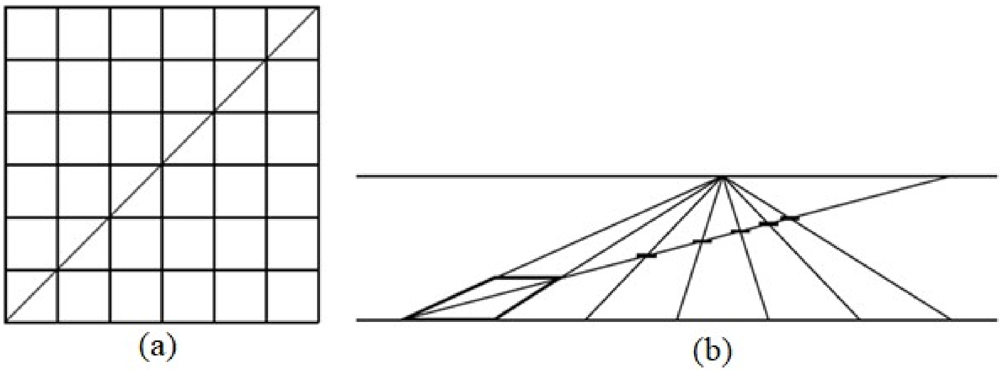
Alberti então pensou em uma forma de se fazer a pintura de um piso de azulejos quadriculado, por exemplo, com a ajuda de linhas na horizontal e paralelas ao horizonte, como nos conta Stillwell (2010), e usou-se de dois princípios básicos renascentistas:

1 – Uma linha reta em perspectiva continua reta.

2 – retas paralelas permanecem paralelas ou convergem para um único ponto.

Assim, resolvendo o problema do chão ladrilhado, um pouco de realismo é alcançado pelas pinturas, dando a noção de profundidade. Observe o método proposto por Alberti na Figura 14:

Figura 14: (a) como o piso ladrilhado era feito. (b) Método proposto por Alberti



Fonte: Stillwell, 2010, p.130.

Na Figura 15, temos a representação de um tabuleiro de xadrez no século XIII, antes das ideias de perspectiva. A impressão que temos é de que o tabuleiro está fixo na parede, sendo perpendicular ao chão, o que não faz nenhum sentido.

Figura 15: Marquês Otto von Brandenburg (1266-1309).

Fonte: https://www.ricardocosta.com/artigo/codex-manesse-tres-iluminuras-do-grande-livro-de-cancoes-manuscritas-de-heidelberg-seculo. Acesso em 05 fev 2018.

Agora observe uma pintura do século XV (Figura 16), onde o pintor Lucas Van Leyden representa uma partida de xadrez. Veja como o tabuleiro está representado em uma perspectiva um pouco primitiva, dando a impressão que está sobre a mesa, com pessoas ao redor, mas de forma não muito realista.

Figura 16: “O jogo de Xadrez”. Lucas van Leyden (1494-1533).

Fonte: http://pt.wahooart.com/@@/8XZPGQ-Lucas-Van-Leyden-O-jogo-de-xadrez. Acesso em 05 fev 2018.

A tela na Figura 17 trata de um pintor em seu ofício. Musscher faz uso de uma perspectiva mais realista: observe os ladrilhos no chão, como seguem menores ao fundo, usando a ideia dos princípios renascentistas de arte, como descritos anteriormente. Este já é uma obra do século XVII e, por isso, apresenta melhor detalhamento da perspectiva. Repare que o quadro sendo pintado, aqueles fixos nas paredes ao fundo e os papeis ao chão também usam de perspectiva, com uma ideia de profundidade, sem distorção da realidade.

Figura 17: Retrato de Um Artista em Seu Estúdio. Michiel van Musscher (1645-1705).

Fonte:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Portrait_of_an_Artist_in_His_Studio_by_Michiel_van_Musscher.jpg.
Acesso em 05 fev 2018.

A perspectiva é uma técnica de desenho ou pintura que inicialmente era uma preocupação exclusiva dos artistas. A Geometria Projetiva requer um conceito mais amplo que isso. A teoria da perspectiva é estudada dentro da matemática, especificamente na geometria descritiva e só foi revelada à comunidade no final do século XVIII (STILLWELL, 2010).

Gaspard Monge (1746-1818) avançou nos estudos dessa geometria, colocando como objeto de estudo a forma das figuras geométricas por meio das suas projeções ortogonais.

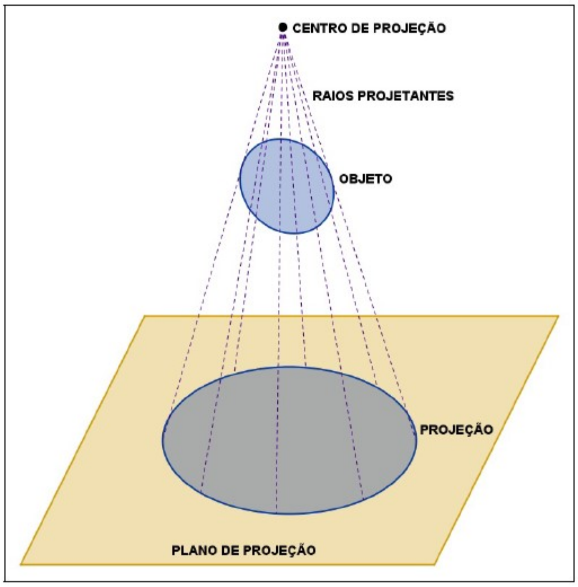
4.2 Plano de Projeção e Perspectivas Cônicas

Ao fixar seus olhos em algum objeto, sua visão será definida por retas imaginárias que se cruzarão com os vértices do contorno do sólido observado. Cada linha dessas é uma projeção e obtém-se um plano projetivo.

Uma projeção cônica é definida como um centro de projeção finito de onde partem as linhas que são tangentes ao objeto (Figura 18).

Projetando um ponto em um plano temos, naturalmente, um ponto. O mesmo acontece quando se projeta uma reta em um plano, a projeção também é uma reta. Conforme Courant e Robbins (2000), "se a reta l em π for projetada no plano π', a interseção com o plano de O e l será a reta l'. Assim a incidência de um ponto e uma reta é invariante sob o grupo projetivo" (COURANT: ROBBINS, 2000, p. 198). A referência aqui é feita a partir de dois planos, não necessariamente paralelos (π e π'), e o ponto O é o centro de projeção dada não contida nos planos de onde saem retas (l e l').

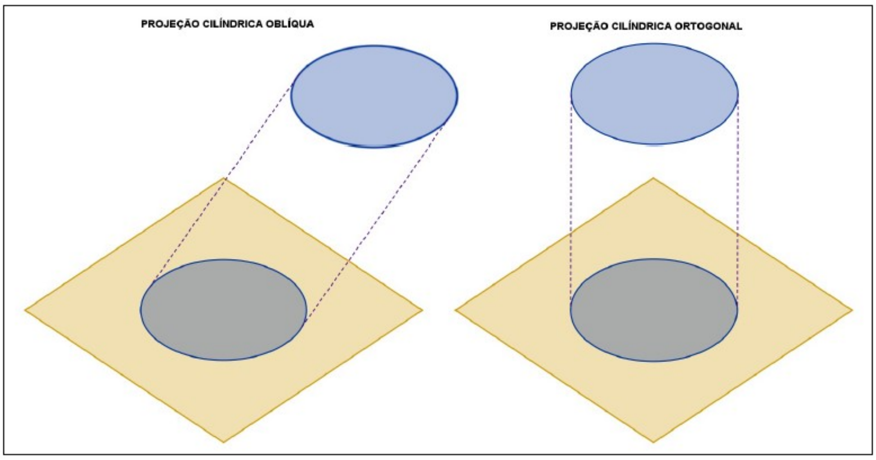
Figura 18: Sistema cônico de projeção.



Fonte: Schmidt, 2015, p. 25.

Nossa visão determina a projeção de forma finita e, portanto, usamos de um sistema de projeção cônico. Já quando temos uma projeção a uma distância infinita, dizemos que a projeção é cilíndrica e, assim, o objeto estará paralelo ao plano de projeção, podendo essa projeção ser oblíqua ou ortogonal (Figura 19).

Figura 19: Sistema cilíndrico de projeção oblíqua e ortogonal.



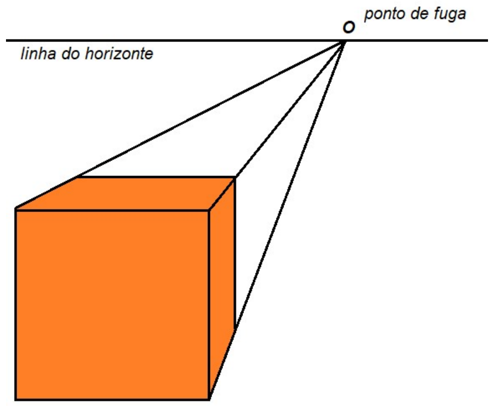
Fonte: Schmidt, 2015, p 25.

Cada projeção possui uma forma de fazer perspectiva. A projeção cônica possui as perspectivas com um centro de projeção, dois centros de projeção e três centros de projeção, muito presente em trabalhos de arquitetos e engenheiros civis. Já a projeção cilíndrica, bem utilizada pelo desenho técnico, possui a projeção ortogonal e oblíqua, esta última também chamada de Cavaleira. A Geometria Projetiva não tem interesse pelas projeções cilíndricas por considerar que são casos particulares das projeções cônicas, por isso não vamos explanar esse conteúdo aqui.

As perspectivas cônicas, usando como referência um ponto de fuga (centro de projeção), também chamada de perspectiva centralizada ou simplesmente de perspectiva, foram uma das motivações de Desargues aos seus estudos pelo desenvolvimento dos trabalhos envolvendo o tema. "É a perspectiva que modela o método da tela de vidro empregado pelos artistas da renascença, e reproduz as imagens tais como as veríamos com apenas um olho aberto" (GONÇALVES, 2013, p. 82). A tela de vidro a qual se refere é a mesma técnica do véu, em que o artista coloca um pano esticado sobre uma moldura e faz sua pintura observando o que será produzido na tela.

Para desenhar um cubo em perspectiva, as retas que passam pelo vértice do objeto devem convergir para um ponto chamado ponto de fuga na linha do horizonte (Figura 20). A linha do horizonte pode estar acima do objeto ou abaixo.

Figura 20: Cubo em Perspectiva Cônica com um ponto de fuga.



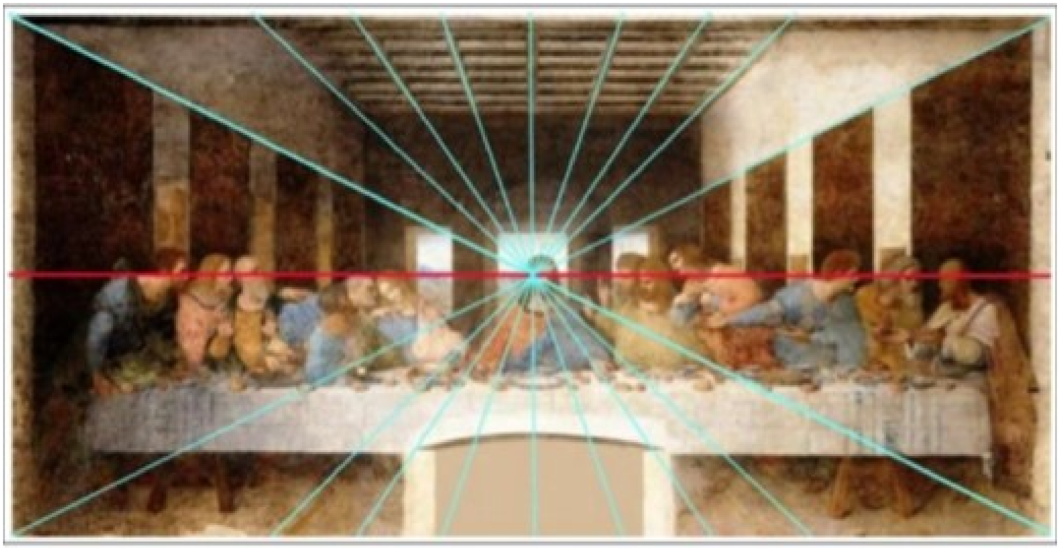
Fonte: Arquivo pessoal.

A perspectiva cônica com um ponto de fuga consagrou grandes pintores com suas obras no renascimento. Um dos artistas que revolucionou o uso dessa técnica foi Leonardo da Vinci. Em *A Última Ceia* é possível ver linhas perspectiva para um ponto de fuga central do quadro (Figuras 21 e 22).

Figura 21: “A Última Ceia” (1498) de Leonardo da Vinci.

Fonte: https://www.todamateria.com.br/a-ultima-ceia-de-leonardo-da-vinci/. Acesso em 13 out 2017.

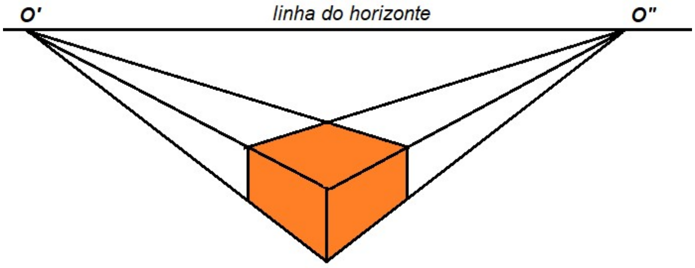
Figura 22: Esquema projetivo do quadro de Da Vinci “A Última Ceia” (1498).



Fonte: Gonçalves, 2013, p. 28.

Os artistas da Renascença não conheciam a perspectiva cônica com dois pontos de fuga, como relata Gonçalves (2013). Essa técnica é comum em edificações de perfil. Ela capta a projeção simultânea dos olhos e pode ser representado com a linha do horizonte acima ou abaixo do objeto (Figura 23):

Figura 23: Cubo projetado em perspectiva cônica com dois pontos de fuga.



Fonte: Arquivo pessoal.

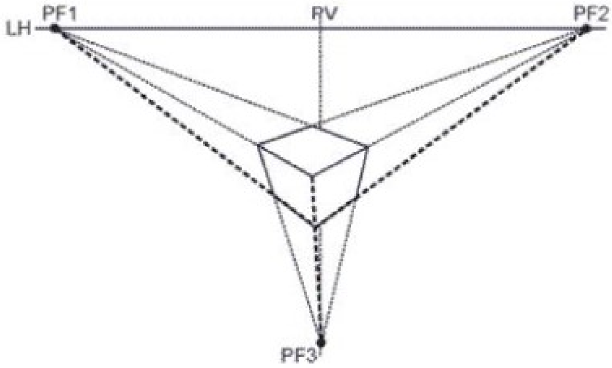
A Figura 24 retrata o Palácio do Planalto em Perspectiva Cônica com dois pontos de fuga:

Figura 24: Palácio do Planalto em perspectiva cônica com dois pontos de fuga e as linhas de projeção.

Fonte: Gonçalves, 2013, p. 84.

Para a perspectiva cônica de três pontos de fuga é necessário um vetor normal à perspectiva de dois pontos de fuga para se determinar o terceiro ponto de fuga (GONÇALVES, 2013) e é usado para dar uma maior noção de altura e profundidade na imagem (Figura 25).

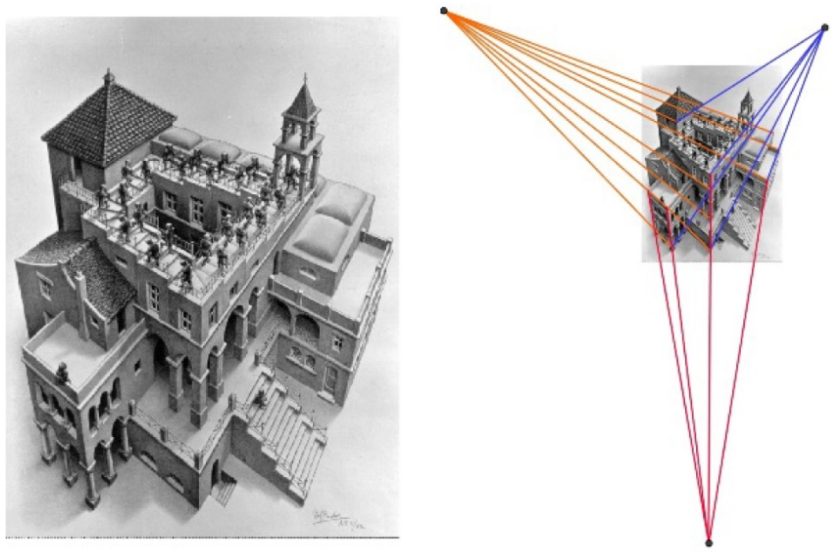
Figura 25: Cubo em perspectiva cônica com três pontos de fuga.



Fonte: http://www.sobrearte.com.br/desenho/perspectiva/tipos_de_perspectiva.php. Acesso em 09 out 2017.

Note que é necessário o observador estar fora do solo para poder perceber essa técnica e, talvez por isso, seja pouco utilizada. A Figura 26 traz uma obra de Escher em que se pode notar o observador acima da construção.

Figura 26: Quadro em perspectiva cônica com três pontos de fuga. Ascending and Descending. M. C. Escher, 1960.



Fonte: Gonçalves, 2013, p 86.

Para se conquistar um desenho perfeito, é preciso que o autor saiba identificar onde está o ponto de fuga, conseguindo assim imprimir o máximo de realismo ao projetar uma imagem tridimensional em um plano bidimensional, mantendo-o fiel aos olhos do observador.

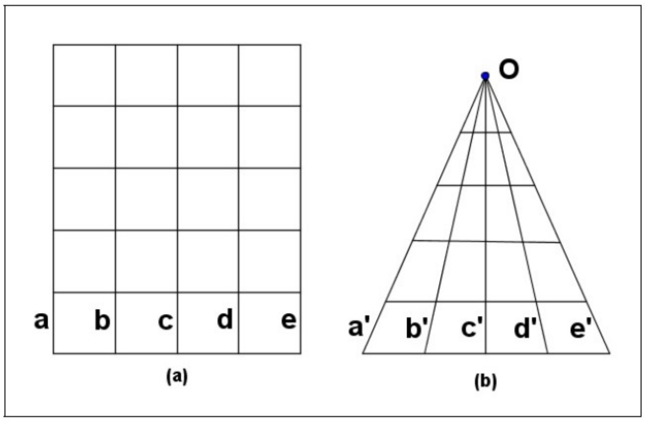
4.3 Pontos no infinito

Como já comentado anteriormente, a Geometria Euclidiana é uma geometria axiomática que se baseia nos cinco postulados de Euclides. O 5º Postulado gerou certa inquietude na comunidade matemática por séculos. Para Courant e Robbins (2000), tal postulado de Euclides gera uma complicada geometria, por se tratar de pontos simples e retas paralelas que não se cortam. Ele conclui que se deve ampliar os conceitos geométricos:

> A geometria simples dos pontos e retas torna-se muito complicada pelo fato de duas retas paralelas não se cortarem em um ponto. Somos portanto levados a fazer uma outra simplificação na estrutura da Geometria ampliando o conceito geométrico para eliminar esta exceção, da mesma forma como ampliamos o conceito de número para eliminar as restrições à subtração e a divisão (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 212).

O Postulado das Paralelas trata de retas que jamais se interceptariam, mesmo que prolongadas infinitamente. Mas quando tratamos de projeção as retas paralelas se encontram num ponto, o ponto de fuga (Figura 27).

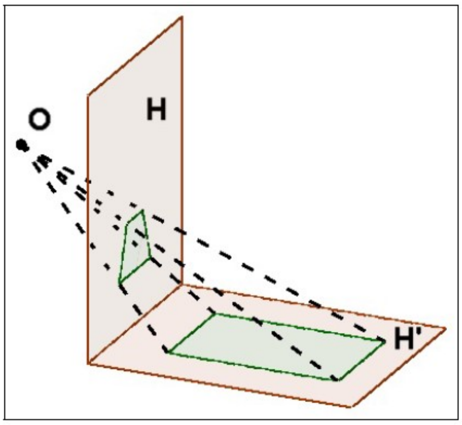
Figura 27: (a) segmentos de retas paralelas representada na Geometria Euclidiana. (b) Representação de (a) no plano projetivo.



Fonte: Schmidt, 2015, p.32.

Observe um exemplo da projeção do um trapézio no plano projetivo (Figura 28). Ângulos e distâncias não são preservados, fazendo com que no plano projetivo haja um retângulo.

Figura 28: Projeção de um trapézio em um plano projetivo H’



Fonte: Schimidt, 2015, p.32.

Seguindo a linha de pensamento de Courant e Robbins (2000), imagine duas retas que se interceptam em um ponto. Gire lentamente uma das retas de forma que fiquem paralelas. Então o ponto de encontro dessas retas, ingenuamente falando, irá se afastar cada vez mais, fazendo com que se interceptem no infinito. Chamaremos esse encontro de *ponto no infinito* ou *ponto ideal*. Sobre os pontos ideais, ele afirma:

> O aspecto essencial consiste então em atribuir a esta vaga afirmação um significado preciso, de modo que pontos no infinito ou, como são algumas vezes chamados, pontos ideais, possam ser tratados exatamente como se fossem pontos quaisquer no plano ou no espaço. Em outras palavras, queremos que todas as regras relacionadas ao comportamento de pontos, retas, planos, etc., prevaleçam, mesmo quando estes elementos geométricos forem ideais. Para alcançar este objetivo, podemos proceder de modo intuitivo ou formal, [...]. (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 211).

Nesse sentido, o autor afirma ser possível entender que todas as normas relacionadas aos pontos ideais devem ser as mesmas que qualquer ponto no plano ou no espaço, o que acaba sendo um auxílio para o entendimento dos conceitos, uma vez que o *infinito* habita o imaginário de algumas pessoas[3].

4.4 Axiomas da Geometria Projetiva

A Geometria Projetiva está estruturada em oito axiomas, enunciados por Auffinger apud Valentim (2003, p.10) da seguinte forma:

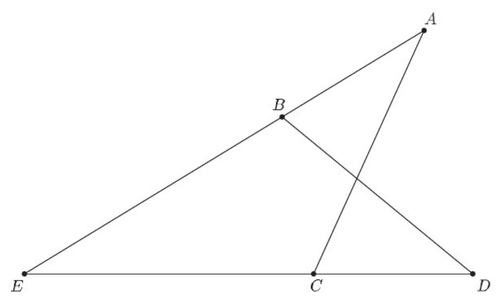
Axioma 1. Existem uma reta e um ponto que não são incidentes.

Axioma 2. Toda reta é incidente com pelo menos três pontos distintos.

Axioma 3. Dois pontos distintos são incidentes com exatamente uma reta.

Axioma 4. Se A, B, C e D são quatro pontos distintos dois a dois, tais que AB intersecta CD, então AC intersecta BD (Figura 29).

Figura 29: Axioma 4.



Fonte: Auffinger apud Valentim, 2003, p.11.

Axioma 5. Se ABC é um plano, existe ao menos um ponto fora do plano ABC.

Axioma 6. Quaisquer dois planos distintos têm ao menos dois pontos em comum.

Axioma 7. Os três pontos diagonais de um quadrângulo completo nunca são colineares.

[3] Uma boa discussão sobre o *infinito* pode ser encontrada em Kill (no prelo).

Axioma 8. Se uma projetividade deixa invariante cada um de três pontos distintos de uma reta, ela deixa invariante todos os pontos da reta.

Com os axiomas definidos, é possível estabelecer um dos principais resultados da Geometria Projetiva[4], que mostraremos a seguir.

4.5 O Teorema de Desargues

Como já falamos anteriormente, Desargues foi um importante contribuinte para o desenvolvimento da Geometria Projetiva, mesmo que na época não tivesse noção das consequências dos seus estudos. Sua difícil escrita tornou seu material pouco atrativo e por isso foi perdido por vários séculos, até que algum matemático se interessasse pelo tema.

Desargues inovou quando passou a usar pontos no infinito (pontos ideais), criando o plano projetivo. Além disso, sua obra concentrava-se no estudo dos invariantes projetivos, ou seja, as propriedades que não eram alteradas entre as diferentes projeções de um mesmo ente geométrico (SCHMIDT, 2015).

Para Demonstrar o Teorema de Desargues, seguiremos a proposta de Auffinger e Valentim (2003, p.14-15).

Proposição: Duas retas coplanares distintas se intersectam em um e somente um ponto.

Demonstração: Sejam r e s duas retas coplanares.

Afirmação 1: Existe no máximo um ponto em comum entre r e s. De fato, se existir pelo menos dois pontos em comum entre r e s, então pelo axioma 3, existirá uma única reta L, incidente a esses dois pontos. Logo $r = L = s$. Absurdo com a hipótese de r e s ser retas distintas.

Afirmação 2: Existe ao menos um ponto em comum em r e s. De fato, seja E um ponto no plano de r e s, mas não incidente a alguma delas. Sejam $AC = r$ e $BD = s$. Como o plano ACE é determinado pelo feixe de retas sobre E que intersectam r, então considerando A e C pontos distintos em r, temos que as retas distintas que passam por A e C em r, cruzam E e

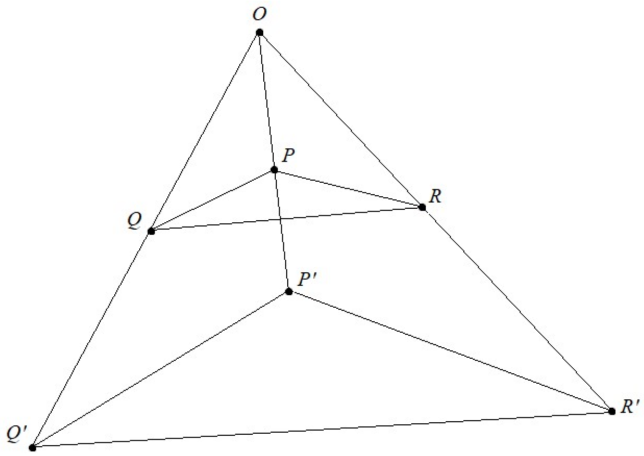
[4] O leitor pode acompanhar maiores detalhes das consequências dos axiomas em Auffinger e Valentim (2003).

cortam *s* em *B* e *D*, respectivamente. Como *AB* intercepta *CD* no ponto *E*, logo por axioma 4, *AC* intersecta *BD*, isto é, existe um ponto de interseção entre *r* e *s*.

Teorema de Desargues: Se dois triângulos são perspectivos por um ponto, então eles são perspectivos por uma reta.

Demonstração: Considere os triângulos *PQR* e *P'Q'R'* com ponto *O* como centro de projeção. Será mostrado que se *PP'*, *QQ'*, *RR'* passam pelo ponto *O* então os pontos incidentes $A = QR \cdot Q'R'$, $B = RP \cdot R'P'$ e $C = PQ \cdot P'Q'$ são colineares.

Figura 30: Teorema de Desargues.



Fonte: Arquivo pessoal.

Repare que o teorema é trivial para o caso dos triângulos estarem em planos distintos. Neste caso, os pontos A, B e C estão nos planos $\alpha = PQR$ e $\beta = P'Q'R'$, portanto estão sobre a reta $\alpha \cap \beta$.

Caso os triângulos estejam em um mesmo plano, tomamos dois pontos S e S' em uma reta qualquer incidente a O.

Assim, como P, P', S e S' estão sobre o plano OPS, segue que PS e $P'S'$ se intersectam em um ponto P_1. Similarmente determinamos os pontos $Q_1 = QS \cap Q'S'$, $S_1 = PS \cap P'S'$, $R_1 = RS \cap R'S'$. Quando aplicamos a parte trivial do teorema para os triângulos QRS, $Q'R'S'$, que estão em planos distintos, temos que os pontos $R_1 = RS \cap R'S'$, $Q_1 = QS \cap Q'S'$ e $A = QR \cap Q'R'$ são colineares. Portanto A pertence a Q_1R_1, analogamente, temos B em P_1R_1 e C em P_1Q_1.

Logo os três pontos A, B, C estão sobre a reta $PQR = P_1R_1Q_1$. □

Vale também a **recíproca**, ou seja, se dois triângulos são perspectivos por uma reta, então eles são perspectivos por um ponto. Para sua demonstração basta aplicar o teorema de Desargues nos triângulos *PP'Q* e *QQ'A*.

5. A GEOMETRIA PROJETIVA NO ENSINO BÁSICO

Tendo em vista que o campo de estudo dessa dissertação de mestrado é a educação básica do estado do Espírito Santo, iremos analisar como a geometria é tratada no currículo de referências de conteúdos de matemática local.

O currículo de matemática do estado do Espírito Santo é definido por área de conhecimentos matemáticos, como geometria, álgebra, números e operações e tratamento da informação. Nele constam os conteúdos norteadores para o professor trabalhar em sala de aula com maior linearidade e seguindo uma sequência didática de conteúdos a serem construídos na formação do aluno.

No Quadro 1, observamos a listagem de conteúdos do Ensino Fundamental – Séries Finais da área de Geometria, Grandezas e Medidas, do currículo Base Estadual (SEDU, 2009).

Quadro 1: conteúdos das séries finais do Ensino Fundamental no estado do Espírito Santo

5ª Série / 6° ano	6ª Série / 7° ano	7ª Série / 8° ano	8ª Série / 9° ano
• Visualização e análise de sólidos e polígonos. • Medidas de comprimento mais utilizadas. • Retas paralelas, perpendiculares e concorrentes. • Perímetro de figuras planas. • O sistema métrico decimal: a história das medidas e transformações de unidades, aplicações. • As unidades não padronizadas de medidas. • As unidades padronizadas de medida de	• Conceito de espaço e tempo do ponto de vista natural. • Orientação espacial: direção, sentido, eixo cartesiano. • Simetria de reflexão, translação e rotação. • Medindo ângulos. • Dividindo o grau e a hora. • Perímetro. • Área de figuras planas. • Medidas de capacidade e massa (aplicação para resolução de problemas): áreas e volumes. • Soma dos ângulos internos de um polígono.	• Proporcionalidade: semelhança, homotetia, escala, teorema de Tales. • Cálculo de perímetro, área e volume. • Circunferências: cálculo de comprimento. • Área do círculo. • Construções geométricas utilizando régua e compasso e geometria dinâmica. • Elementos do triângulo (mediatriz, bissetriz, mediana e altura). • Pontos notáveis do triângulo (circuncentro, incentro, baricentro e ortocentro). • A construção de triângulos.	• Cálculo de áreas, propondo problemas do cotidiano. • Figuras espaciais: poliedros. • Teorema de Pitágoras (aplicação para resolução de problemas). • Aplicação do cálculo de volume para resolução de problemas. • Polígonos inscritos e circunscritos. • Geometria e artes. • Geometria das profissões. • Noções de trigonometria. • Aplicações da

comprimento (metro, centímetro e quilômetro). • As unidades de massa (quilograma e grama). • As unidades de volume (litro e mililitro). • Unidades de tempo (hora, minuto, segundo, ano, década, século).		• Congruência de triângulos. • Construções geométricas polígonos, diagonais de polígono.	Trigonometria (por exemplo, distâncias inacessíveis).

Fonte: SEDU, 2009a, vol.2, p. 91 – 99.

O currículo segue com conteúdos da Geometria Euclidiana, sendo possível notar a preocupação com as formas e espaço. Observe que na 6ª série, o atual 7° ano, consta "Conceito de espaço e tempo do ponto de vista natural" que sugere o tratamento de perspectivas, mas talvez não fique claro ao professor a objetividade disso e de como se deve trabalhar o ponto de vista natural.

Os conteúdos listados podem sugerir uma falta de aplicabilidade ao cotidiano do aluno. São construções abstratas como estudo de figuras planas e poliedros, sem uma conexão com a realidade, embora os Parâmetros Curriculares Nacionais sugiram a contextualização da matemática: "No ensino de Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações; outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos" (BRASIL. 1997, p. 19). Fica assim a critério do professor fazer as devidas relações e considerações dos conteúdos em sua sala de aula.

Para o Ensino Médio, o Currículo Base Estadual (SEDU- ES, 2009b) na área de geometria faz uma revisão parcial do ensino fundamental e acrescenta novos conteúdos. Observe que a quantidade de temas é menor que no fundamental, também por se tratar de conteúdos que exigem maior tempo de aula, e sua ênfase passa a ser trigonometria e geometria espacial, que é vista tanto no 2° quanto no 3° ano.

Quadro 2: Conteúdos do ensino Médio no estado do Espírito Santo

1° ano do Ensino Médio	2° ano do Ensino Médio	3° ano do Ensino Médio
• Visualização e análise de figuras	• Retomando o Teorema de	• A geometria espacial:

geométricas. • Os polígonos, suas características e semelhanças: demonstrações simples. • Construções geométricas. • Congruência, semelhança e homotetia. • Resolução de problemas envolvendo os conceitos de perímetro, área e volume. • Medidas de comprimento, área, volume, massa, tempo, etc. • Simetria: translação, rotação e reflexão. • Os eixos cartesianos: a representação de pontos por meio de coordenadas. • Introdução à geometria analítica: pontos, distâncias entre pontos, ponto médio, a reta como lugar geométrico.	Pitágoras; • Trigonometria no triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente. • Trigonometria em triângulo qualquer: medidas de distâncias inacessíveis. • Geometria: a visualização e análise das formas poliédricas. • A resolução de problemas envolvendo conceitos geométricos de figuras planas e espaciais e o teorema de Pitágoras. • Grandezas e medidas: cálculo de perímetro, área, volume (figuras planas e poliedros). • Volume dos principais sólidos geométricos. • Construções geométricas utilizando a geometria dinâmica. • A geometria dos fractais.	representação dos sólidos e cálculo de medidas. • Teorema de Euler: relacionando faces, vértices e arestas dos poliedros. • Retomando o estudo dos volumes. • Volume de troncos. • Trigonometria em triângulo retângulo. • Trigonometria em triângulo qualquer: medidas de distâncias inacessíveis. • Trigonometria na circunferência: seno, cosseno e tangente.

Fonte: Sedu-ES, 2009b, vol. 2, p. 105 – 201.

As orientações curriculares sugerem o ensino da geometria fractal no 2° ano do ensino médio, uma geometria não-euclidiana, algo que é uma novidade no documento e no ensino, já que não é pautado em Euclides. A interdisciplinaridade é um potente aliado para o ensino de matemática, para que ela não fique desconexa e tediosa ao aluno. Sobre isso os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEMs) deixam claro que:

> Na perspectiva escolar, a interdisciplinaridade não tem a pretensão de criar novas disciplinas ou saberes, mas de utilizar os conhecimentos de várias disciplinas para resolver um problema concreto ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista. Em suma, a interdisciplinaridade tem uma função instrumental. Trata-se de recorrer a um saber diretamente útil e utilizável para responder às questões e aos problemas sociais contemporâneos (BRASIL, 2000, p. 21).

Ainda que não esteja destacada explicitamente nas orientações curriculares, a Geometria Projetiva viria nessa necessidade de se contextualizar os conteúdos de matemática com outras disciplinas escolares, como Arte, uma vez que se pode fazer uso de perspectiva em obras de arte e pinturas famosas, além de se fazer uso do desenho técnico, presente no Currículo Base Estadual no 8° e 9° ano do Ensino Fundamental na parte de Arte: “Linguagens artísticas e processos de criação (pintura, desenho, escultura, gravura, instalações artísticas, fotografias, vídeos, cerâmica e outras)" (SEDU- ES, 2009a, vol. 1, p. 91).

Além disso, também se faz presente o uso de matemática em Arte dentro da construção de objetos e formas, como citado nas orientações para o Ensino Médio: "Criar e construir formas plásticas e visuais em espaços diversos (bidimensional e tridimensional)" (SEDU-ES, 2009b, vol. 1, p. 91).

Essa interface entre Arte e Matemática, tanto no Ensino Fundamental quanto no Médio, é de suma importância para que esses conceitos de perspectiva e projeções tenham significado para os alunos,. Trata-se de boa oportunidade de trabalhar com os estudantes uma geometria não usual, que eles possam "ver com seus próprios olhos", além de estimular a crítica quanto à geometria de Euclides e talvez deixá-los inquietos quanto ao 5° postulado, resgatando questões históricas da matemática.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais também citam a importância de se ensinar matemática usando recursos como a própria história da matemática, relacionando sua aplicação e suas consequências positivas ao aluno:

> Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter da história da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas (BRASIL, 1997, p. 33).

Dessa forma, o professor pode despertar a curiosidade matemática sobre outros tempos históricos, sobre a Matemática e ainda outras disciplinas como a Arte, e assim dar sentido ao conteúdo.

6. PROPOSTA DIDÁTICA

Neste capítulo, iremos propor uma sequencia didática que pode ser aplicada para estudantes do ensino médio, com estimativa de 4 aulas de 55 minutos cada.

1ª aula (tempo estimado 55 min)

Introduzir o conteúdo da aula usando o vídeo: *Fórmula 1 na visão do piloto*[5]. O vídeo é produzido a partir de uma câmera fixada no capacete de um piloto de corrida e, dessa forma, mostra como ele vê seu trajeto. Pode-se observar, por exemplo, ponto de fuga na estrada.

Formar um círculo com as carteiras. A mudança da organização da classe indicará uma mudança também na dinâmica da aula. Dispor papel A4 branco e lápis de cor sobre as carteiras e pedir aos alunos que imaginem ser o piloto de Fórmula 1 e ilustrar uma visão que eles têm do trajeto.

Essa atividade tem como objetivo avaliar os conhecimentos prévios dos alunos em desenho com perspectiva e ponto de fuga e, por isso, é importante não instruí-los sobre essas questões. Os alunos devem ter liberdade e autonomia nas suas produções.

Possivelmente, haverá alunos que desenharão com maestria e haverá alunos que não usarão técnicas de desenho projetivo. É possível também que o vídeo influencie no resultado final dos trabalhos. Precisamos estar atentos a isso.

Recolher os trabalhos. Para a próxima aula, escolher desenhos que não apresentam a noção de perspectiva e a percepção de profundidade e aqueles que possuem algum ponto de domínio do exigido. Esses desenhos serão apresentados e discutidos na 2ª aula, como veremos a seguir.

2ª aula (tempo estimado 55 min):

Nessa aula haverá 3 momentos distintos: no 1° momento verifica-se conhecimentos prévios dos alunos. O 2° momento é dedicado a formalizar a Geometria Euclidiana e a sua relação com a Projetiva. O 3° momento usa a fotografia como recurso para formalizar a Geometria Projetiva.

1° momento:

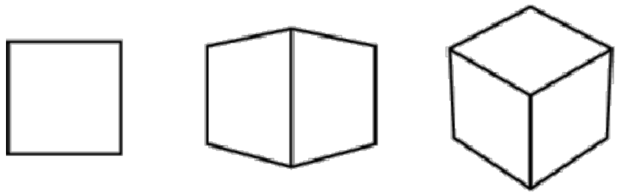
[5] disponível em https://www.youtube.com/watch?v=fp0d90eyVI0

Começar a aula com um questionário impresso em papel, a fim de verificar o conhecimento prévio dos alunos:

1- Você acha que existem outras geometrias diferentes da que você conhece? Se sim, quais?
2- Você consegue afirmar, olhando para uma foto, quando um objeto é tridimensional e quando é bidimensional? Como?
3- Como você pode garantir que um objeto é tridimensional?
4- No caso do vídeo visto na aula anterior, o que o piloto vê ao realizar seu trajeto?

Recolher os questionários preenchidos e (re)construir com eles as respostas das perguntas. Informar que existe sim outras geometrias e comentar sobre a geometria de Euclides. Mostrar aos estudantes quando se pode afirmar se o objeto é bidimensional ou se é tridimensional. Por exemplo, usar o cubo e mostrar diferentes vistas para que tirem suas conclusões.

Figura 31: Vistas de um cubo.



Fonte: Arquivo pessoal.

Retornar ao vídeo do piloto, refletir com os alunos sobre o olhar do piloto, a forma como ele visualiza a pista. Ele vê a pista toda? Ou só uma parte da pista? Como é essa parte da pista que ele vê? O que aparece nessa imagem?

Começar então uma explicação breve sobre a Geometria Euclidiana.

A geometria básica trabalhada na escola durante o ensino fundamental e médio é a Euclidiana. O que sabemos hoje é que Euclides não criou exatamente a Geometria Euclidiana, mas compilou resultados da época, dando-lhes a forma que conhecemos hoje (EUCLIDES, 2009). De origem Síria e nascido antes de Cristo (aproximadamente 330 a.C.), Euclides frequentava a academia de Platão, na cidade de Atenas – Grécia. A Geometria Euclidiana é a geometria física e natural do mundo, ela não é enganada pela visão e segue a razão. Euclides escreveu o livro "Os Elementos" em treze volumes, com as definições, axiomas, postulados e teoremas.

Os axiomas são (EUCLIDES, 2009):

Axioma I: Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.

Axioma II: Também prolongar uma reta limitada, continuamente sobre uma reta.

Axioma III: E, como todo centro e distância, descrever um círculo.

Axioma IV: E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

Axioma V: E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos.

Equivalências ao 5° axioma:

- (John Playfair) Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.
- Quaisquer duas retas paralelas possuem uma perpendicular em comum.

O 5° postulado da Geometria Euclidiana por muitos anos foi alvo de tentativas de prova por vários matemáticos, porém essa demonstração jamais foi alcançada.

2° momento:

Entregar um novo questionário aos alunos:

1- O que você acha que é a Geometria Projetiva?

2 - Qual é a relação entre a Geometria Projetiva com a Geometria Euclidiana?

3 - Onde você acha que pode usar a Geometria Projetiva?

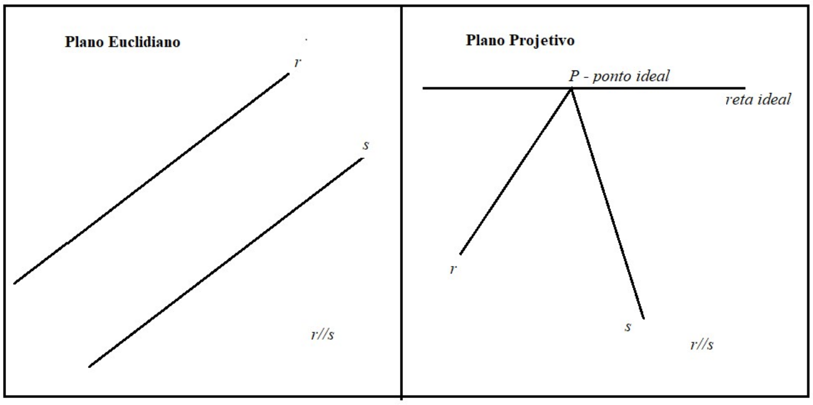
Após recolher as folhas dos alunos, introduzir conceitos da Geometria Projetiva. Usar uma abordagem histórica e verificar se algum aluno tem algum conhecimento prévio no assunto.

Uma projeção é a representação gráfica de elementos tridimensionais no plano bidimensional. A Geometria Projetiva trata de objetos que são preservados por uma projeção, como pontos e linhas. Ângulos e comprimentos não têm significado nessa geometria (STILLWELL, 2010).

A Geometria Projetiva acrescenta novos objetos à Geometria Euclidiana, os pontos no infinito. Imagine retas paralelas na Geometria Euclidiana. Sabemos que elas nunca se encontram. Agora, visualize essas retas com seus olhos. Você será capaz de perceber o final dessas retas, pois seu cérebro converte essa imagem, de forma que essas linhas irão se encontrar em um determinado ponto. Chamamos esse encontro de retas de ponto de fuga ou pontos ideais.

Compare na figura abaixo um par de paralelas no plano euclidiano e o plano projetivo:

Figura 32: Retas paralelas no Plano Euclidiano e no Plano Projetivo.



Fonte: Arquivo Pessoal.

Em suma, a Geometria Projetiva é o campo da matemática que estuda as relações que se estabelecem entre o objeto real e sua imagem projetada e, sendo assim, podemos dizer que é a geometria do que somos capazes de ver.

"Enquanto na Geometria Euclidiana pode haver retas que não se interceptam, na Geometria Projetiva isto nunca ocorre. Imagine uma estrada de ferro retilínea, os trilhos nunca se cruzam. Mas quando olhamos para eles, os trilhos de trem são retas paralelas, mas retas que se encontram no horizonte, no infinito. Essa é uma das características da Geometria Projetiva, duas retas quaisquer sempre se interceptam" (AUFFINGER; VALENTIM, 2003, p. 2).

A história da Geometria Projetiva começa na Itália do século XV, junto com o Renascimento. Naquela época, as pinturas eram, na sua maioria, planas e chapadas, sem representação do mundo real. Os temas tratados eram religiosos e simbólicos. Os artistas passaram a necessitar de técnicas e conceitos novos para que a sua obra se tornasse uma boa representação da realidade, logo introduziram os conceitos de ponto de fuga e perspectiva.

A Geometria Euclidiana com suas noções de semelhança e de equivalência de figuras mediante as congruências, não era capaz de atender às novas necessidades. Foi então surgindo, de modo intuitivo, a noção de perspectiva nos trabalhos dos pintores.

Nesse momento, algumas pinturas feitas antes e depois do movimento de Geometria Projetiva devem ser projetadas em data show ou outro recurso visual para conhecimento dos alunos. Trazemos algumas sugestões:

Figura 33: Madonna and Child on a Curved Throne. [1260-1280].

Fonte: https://www.nga.gov/collection/art-object-page.35.html. Acesso em: 14 set. 2017.

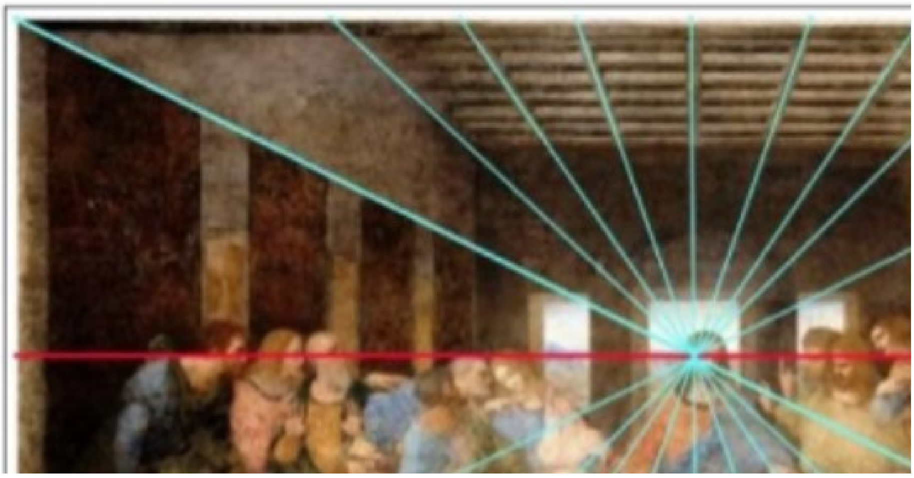
Figura 34: Duccio di Buoninsegna. Emmaus. [1308 – 1311].

Fonte: Disponível em: <https://www.wga.hu/html_m/d/duccio/maesta/verso_2/verso26.html>. Acesso em: 14 set. 2017.

Figura 35: Leonardo da Vinci. A Última Ceia. 1498.

Fonte: https://www.wga.hu/support/viewer_m/z.html. Acesso em: 14 set. 2017.

Figura 36: Esquema projetivo em A Última Ceia**.** 1498.



Fonte: http://unilahistoria.blogspot.com.br/2013/05/a-perspectiva-na-pintura-renascentista.html. Acesso em: 14 set. 2017.

No auge da Renascença, Leonardo da Vinci (1452 – 1519) e Albrecht Durer (1471 – 1528) escreveram tratados sobre perspectiva em que apresentavam a teoria matemática da perspectiva e colocavam a sua importância para a pintura.

Após estas considerações, a primeira e a segunda pergunta devem ser finalizadas. Fechar o diálogo explanando a terceira pergunta, concluir que a Geometria Projetiva é usada por pintores em seus quadros, além de ser importante para a projeção de algum objeto em um plano bidimensional. Também é possível notar a presença dela em fotografias e imagens de vídeo.

3° momento:

Em uma folha de papel, apresentar novas perguntas. Estas deverão ser entregues e discutidas uma a uma:

1 - Você acha que nesses quadros a noção de profundidade está bem colocada? O que falta neles?

Recolher o papel e fazer a devolutiva. Informar que o primeiro quadro o desenho parece planificado sem profundidade. No segundo quadro, o artista tenta, de modo primitivo, colocar uma perspectiva no caminho para a porta. Há certa profundidade em relação ao tamanho das janelas. E no último quadro, mostrar as linhas de fuga na pintura de Da Vinci, todas indo em direção a Jesus, onde encontra-se o ponto de fuga.

Em seguida, analisar os desenhos feitos na aula anterior, previamente selecionados e escaneados pelo professor. Para que os alunos possam visualizá-los, recomenda-se que sejam projetados no quadro. Sugere-se a escolha de 4 desenhos para a atividade não ficar cansativa.

2 - Nos desenhos apresentados a seguir feitos na aula anterior, o que faltou? O que você percebe neles?

Finalizar as considerações dos desenhos realizados pelos alunos, utilizar das ideias de profundidade e perspectiva. Apresentar o fotógrafo Sebastião Salgado e mostrar duas lâminas suas que usam perspectiva e ponto de fuga para fazer os mesmos questionamentos da pergunta 2. Caso não seja possível, sugerimos a reprodução em imagens digitais. Apresentamos abaixo um resumo sobre o fotógrafo:

Sebastião Salgado é um fotógrafo mundialmente famoso nascido em Aimorés em 8 de fevereiro de 1944. Suas fotos são marcantes por registrar lugares pouco explorados pelos seres humanos e registrar emoções, todos em fotos preto e

branco. Recebeu inúmeros prêmio de fotografia no mundo todo.[6] A seguir algumas fotos que podem ser usadas na oficina[7].

Foto 1: SALGADO, Sebastião. **Êxodos.** Companhia de Letras, 2000.

Fonte: Acervo do LEAMA – UFES.

Foto 2: SALGADO, Sebastião. **Êxodos.** Companhia de Letras, 2000.

Fonte: Acervo do LEAMA – UFES.

[6] VASQUEZ, Pedro (Ed.). **Biografia de Sebastião Salgado.** 2017. Disponível em: <http://www.funarte.gov.br/brasilmemoriadasartes/acervo/infoto/biografia-de-sebastiao-salgado/ >. Acesso em: 13 set. 2017.

[7] As Lâminas fotográficas de Sebastião Salgado usadas nessa dissertação são do Acervo do Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática (LEAMA), vinculado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, campus Vitória.

Foto 3: SALGADO, Sebastião. **Êxodos.** Companhia de Letras, 2000.

Fonte: Acervo do LEAMA – UFES.

Foto 4: SALGADO, Sebastião. **Genesis.** Tashen, 2013.

Fonte: Acervo do LEAMA – UFES.

Foto 5: SALGADO, Sebastião. **Genesis.** Tashen, 2013.

Fonte: Acervo do LEAMA – UFES.

Foto 6: SALGADO, Sebastião. **Genesis.** Tashen, 2013.

Fonte: Acervo do LEAMA – UFES.

Questionar sobre as fotos, por escrito, para posteriormente recolher.

3 - Quais elementos matemáticos você percebe nas fotos de Sebastião Salgado?

4 - Por que eu tenho objetos maiores na frente e por que os objetos do fundo são menores?

5 - No caso de vermos uma foto com retas que formam as estradas e se encontram, por que essas estradas se encontram? Mas retas paralelas nunca se encontram, por que na foto elas se encontram?

Explicar os conceitos matemáticos presentes nas fotos de Sebastião Salgado: perspectiva, ponto de fuga, linha do horizonte, sobreposição e mudança de plano, como apresentados no Capítulo 4 dessa dissertação. É importante observar que os objetos são maiores na frente e menores atrás, o que nos dá a noção de profundidade.

<u>3ª aula: Tempo estimado 55 min.</u>

Esta aula se dedica a explicar elementos de perspectiva e técnicas de fotografia para que os alunos possam, para a próxima aula, trazer uma foto com algum desses elementos. Dessa forma poderemos avaliar se os conteúdos foram bem compreendidos ou não. Apresentar em slides na sala de aula os conceitos principais, mostrando os exemplos sugeridos ou o que mais achar pertinente.

Elementos da Perspectiva

A perspectiva é uma técnica de desenho que se utiliza de elementos da Geometria Projetiva, pois, nossos olhos veem imagens projetadas planas e frontalmente. Em um desenho, é preciso usar essas ferramentas para que se tenha uma projeção fiel no desenho, como noção de profundidade e proporções adequadas. Em fotografias, as câmeras capturam todos esses elementos.

Figura 37: Perspectiva

Fonte: Antonio Juvenil. **Estudos de Desenho:** Perspectiva. Disponível em: <http://www.sobrearte.com.br/desenho/perspectiva/elementos_da_perspectiva.php>. Acesso em: 11 out. 2017.

Foto 7: Uma fotografia com perspectiva.

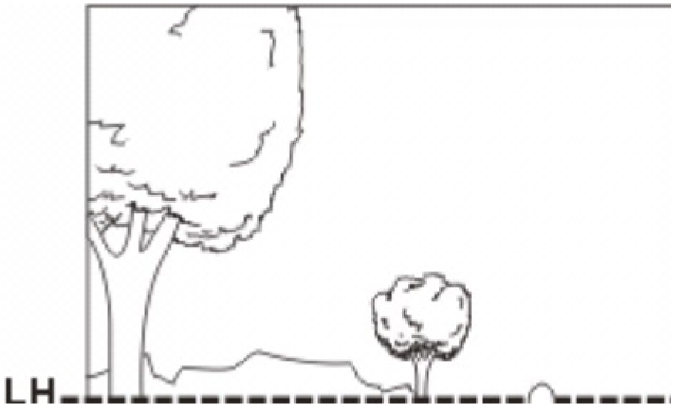
Fonte: Imagem extraída da internet. Disponível em: http://wvs.topleftpixel.com. Acesso em 07 ago. 2016.

Linha do Horizonte – É o elemento da construção em perspectiva que representa o nível dos olhos do observador.

Figura 38: Linha do horizonte vista lateral.

Fonte: Juvenil. Disponível em sobrearte.com.

Figura 39: Linha do horizonte vista de frente.

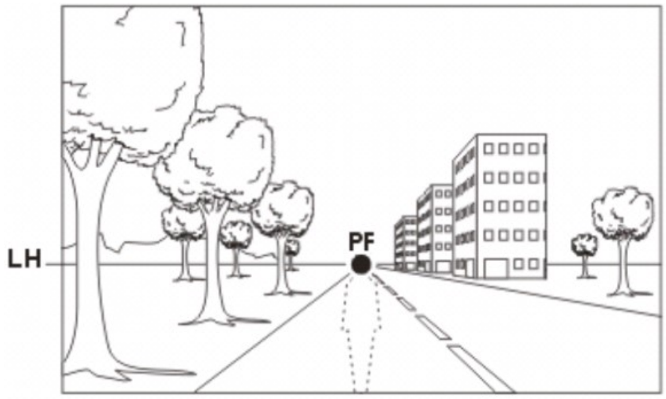


Fonte: Juvenil. Disponível em sobrearte.com.

Ponto de vista – O ponto de vista é o cruzamento de uma linha vertical perpendicular à linha do horizonte. Pode estar centralizado ou não.

Ponto de fuga e linhas de fuga – É o ponto localizado na linha do horizonte, para onde todas as linhas paralelas convergem, quando vistas em perspectiva. Pode haver mais de um ponto de fuga.

Figura 40: Ponto de fuga e linha do horizonte vista de frontal.



Fonte: Juvenil. Disponível em sobrearte.com.

Figura 41: Ponto de fuga com linhas de fuga.

Fonte: Juvenil. Disponível em sobrearte.com.

Sobreposição – É o ato de sobrepor imagens dando a sensação de distância.

Mudança de plano – É a forma de dispor objetos de modo que o objeto da frente esteja maior que o do fundo, dando noção de profundidade.

Foto 8: Foto de Sebastião Salgado evidenciando a mudança de plano.

Fonte: Acervo do LEAMA – UFES.

Ilusão de ótica de distância – A ilusão de ótica brinca com a visão humana. Dentro da Geometria Projetiva, pode-se enganar os olhos humanos brincando com as distâncias dos objetos e suas proporções. Pode-se colocar por exemplo o sol dentro de uma taça em uma foto, apenas posicionando a câmara para a fotografia.

Foto 9: Foto de uma taça em que o sol está do mesmo tamanho que a borda.

Fonte: Gonçalves, 2013, p. 39.

Foto 10: Pintura na rua de uma faixa de pedrestre aparentando estar flutuante.

Fonte: Imagens extraída da internet. Disponível em http://www.mtnoticias.net/primavera-do-leste-departamento-de-transito-primavera-inova-com-4-faixas-de-pedestre-em-3d/. Acesso em 18 out. 2017.

Perspectivas Cônicas – 1) Com um ponto de fuga; 2) com dois pontos de fuga; 3) com três pontos de fuga.

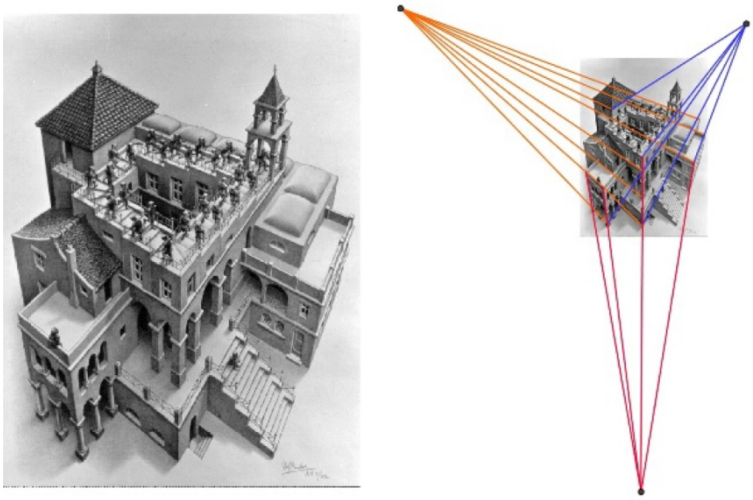
Figura 42: Pintura Escola de Athenas, com linhas evidenciando o único ponto de fuga.

Fonte: Gonçalves, 2013, p.83.

Figura 43: Foto do Palácio do Planalto com linhas evidenciando a perspectiva com dois pontos de fuga

Fonte: Gonçalves, 2013, p.84.

Figura 44: Pintura de Escher com três pontos de fuga. Em destaque na segunda imagem as linhas de fuga.



Fonte: Gonçalves, 2013, p.86.

Como tarefa de casa, os alunos deverão tirar uma foto capturando um dos elementos estudados em sala de aula (ponto de fuga, linha do horizonte, pontos de vista, mudança de plano, sobreposição, ilusão de ótica e/ou um dos três tipos de perspectivas cônicas). O tema é livre: pode ser uma paisagem, um objeto, uma pessoa da sala, um conjunto de pessoas da sala, animais, vegetais, etc. A imagem deve ser entregue ao professor na aula seguinte, usando um *pen drive,* ou enviada via *email* antes da aula seguinte, para que o professor consiga organizá-las para apresentar no último encontro. Junto à foto, o aluno deve elaborar uma legenda com sua descrição matemática.

Esse trabalho feito pelo estudante servirá de avaliação final da oficina e verificação da aprendizagem quando comparado ao primeiro trabalho realizado por ele, o desenho.

4° aula (duração estimada de 55 min):

Escolher algumas das fotos que mais lhe chame a atenção para projetar para a turma, fazendo um fechamento do que foi estudado.

Acomodar os alunos na sala de forma descontraída. Diante de cada foto, primeiramente apresentada sem legenda, questione a turma sobre os elementos matemáticos presentes. Em seguida, mostre a legenda enviada. Compare a legenda com o que foi discutido. Verifique a necessidade de acrescentar informações junto ao grupo e pontue o que foi observado corretamente (ou não) pelo autor da foto.

Para finalizar a oficina e avaliar a compreensão dos estudantes, aplique um questionário abordando os principais temas da aula.

1- Você sabia que existia mais de um tipo de geometria?
2- Você sabia o que era a Geometria Projetiva?
3- Você viu alguma relação de Geometria Projetiva com fotografia? Qual?
4- Você viu alguma relação de Geometria Projetiva com desenhos (arte)? Qual?
5- Você sabia que matemática e arte podiam estar tão ligados?
6- Usar fotografias facilitou a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos?
7- O que você achou desta oficina?

A avaliação dos alunos se dará pela participação dos mesmos em cada etapa e suas contribuições em sala, seus trabalhos propostos e análise processual dos seus questionários respondidos.

7. ONDE E COMO TUDO ACONTECEU

Esta oficina foi realizada na Escola Estadual de Ensino Médio Aristóbulo Barbosa Leão, localizada no município de Serra, em duas turmas de terceiro ano, onde a professora regente é a autora dessa dissertação. As aulas tiveram uma participação média de 45 alunos (juntando as duas salas), foram realizadas no final do terceiro trimestre de 2017 e registradas em áudio e vídeo para posterior análise. A coleta de dados foi autorizada em um termo de consentimento livre e esclarecido, permitindo a divulgação das produções dos alunos e do nome da escola (Anexos I, II e III). Optamos por não divulgar os nomes dos alunos uma vez que o importante, no contexto da dissertação, é tão somente suas produções.

1ª aula:

Iniciei a aula comentando a importância dos alunos participarem da oficina, contribuindo para o aprendizado de novos conteúdos e para estudos acadêmicos de ensino de geometria em matemática para o ensino médio. Os alunos estavam bem curiosos para o que estava por vir. A presença dos alunos na oficina era opcional. Eles poderiam escolher entre entregar um trabalho valendo 8 pontos e participar da oficina composta de 4 aulas, valendo os mesmos 8 pontos. Todos os alunos preferiram participar da oficina.

Foto 11: Alunos em sala.

Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

O início da aula deu-se pela apresentação do vídeo *Fórmula 1 na visão do piloto* (Foto 11). Utilizamos o interativo, um aparelho multifuncional financiado pelo governo federal, que tem um projetor e computador acoplados. O vídeo tem 3 min 47 s e mostra, em todo o tempo, a visão que o piloto tem da pista de corrida ao fazer seu trajeto. Os alunos assistiram com muita atenção ao vídeo. Um dos alunos, com seu celular, gravou o vídeo, talvez por medo de que lhe fosse apresentado algum questionário fazendo perguntas sobre o mesmo.

Com lápis de cor e folhas em branco disponíveis, foi solicitado aos alunos que reproduzissem, em um desenho, a visão do piloto do vídeo. Enquanto produziam o desenho, registrei alguns comentários dos alunos a respeito do comando. O aluno 1 perguntou se era para fazer olhando o piloto por cima. Observei que o aluno não tinha entendido o que era para ser feito e expliquei novamente que era para desenhar o que aluno veria se ele fosse o próprio piloto. Outro aluno perguntou ainda: *"que tipo de carro estou dirigindo?"*, questionando se poderia ser a visão de um outro motorista de qualquer outro carro. Pedi para que fosse o piloto de fórmula 1 apresentado no vídeo. O aluno 2, observando o desenho de um terceiro aluno, disse com tom de ironia: *"quando você dirige você vê a própria cabeça?"*. Tratava-se novamente do não entendimento do comando pelo aluno desenhista e percebido pelo colega. Esse desenho será exibido no debate dos resultados (Foto 21).

Vários alunos, antes de iniciar o processo de desenho, questionaram entre o grupo, *"o que vou fazer?"*, *"Como vou fazer?"*, *"Eu não sei desenhar!"*. Demonstrando um receio de fazer a atividade errada. Ainda assim, todos eles encararam o desafio.

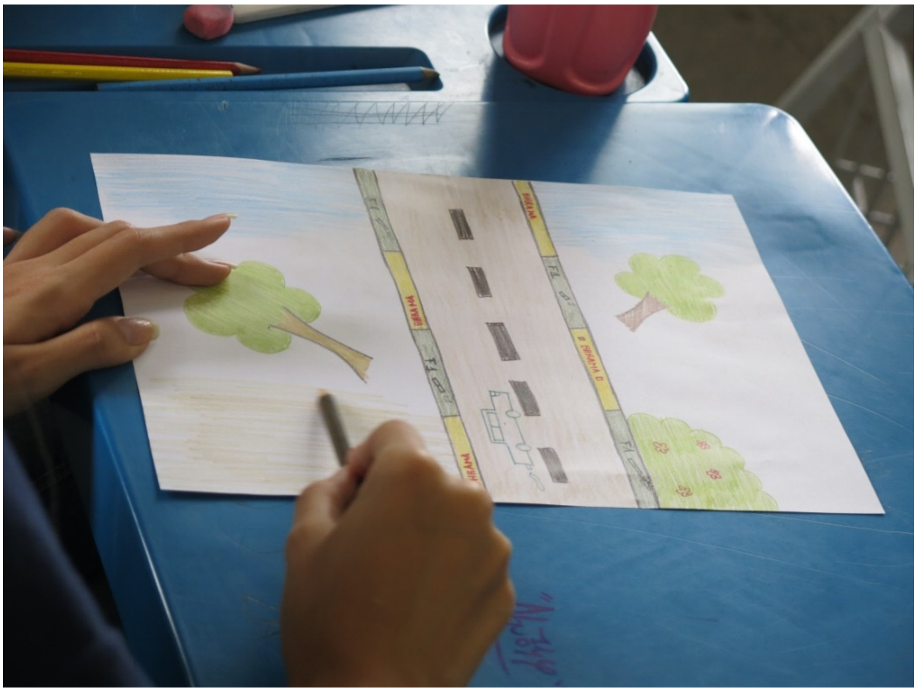
Finalizado seu desenho, um quarto aluno levantou a folha, colocando-a no plano vertical em sua frente, para verificar se de fato o que ele via era o que o piloto via. Mas o que ele viu não é o que o piloto vê, uma vez que o desenho apresenta uma vista de cima, incompatível com o movimento que fez com a folha. As retas paralelas desenhadas na lateral da pista (Foto 12) corroboram com essa análise.

Foto 12: Desenho do aluno.

Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

A Foto 13 apresenta o desenho de uma outra aluna. Ela teve muito cuidado e capricho para concluir a atividade, porém não reproduziu a visão espacial da cena. As árvores não seguem o trajeto, dando um aspecto de que estão caídas no chão. Ela não reproduziu uma imagem realista do cenário nem tampouco se imaginou dirigindo o carro.

Foto 13: Aluna concluindo o desenho.



Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

O aluno 5 avisou um colega: *"O carro de fórmula 1 não tem banco de carona"* (Foto 14). De fato o aluno que fez a crítica entendeu o comando e percebeu que o desenho é da visão do piloto de frente, mas não retratou um carro de Fórmula 1.

Foto 14: Desenho que foi criticado pelo aluno 5.

Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

Uma aluna me perguntou: *"Professora, preciso desenhar o que tem em volta da pista ou só a pista?"* e respondi que era para ela se imaginar dirigindo e que ela teria liberdade para imaginar o que veria. Alguns alunos fizeram apenas a pista vista de fora (Foto 15).

Foto 15: Alunos que só imaginaram a vista da pista.

Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

A maioria dos alunos não levou a aula inteira para concluir a atividade. Antes da aula acabar, muitos já haviam me entregado o desenho, com a folha virada para baixo, envergonhados talvez pelo desenho que fizeram. Repeti que não era preciso ficar envergonhado, uma vez que não iria avaliá-los pelos desenhos, apenas iríamos fazer uma análise destes. Pude perceber que alguns alunos estavam bem empenhados em reproduzir um desenho bem feito, enquanto outros estavam fazendo apenas por dever/obrigação dos pontos, já que mal pintaram e não foram nada caprichosos (Foto 16).

Foto 16: Desenhos dos alunos.

Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

O vídeo pode ou não ter influenciado os alunos na construção do desenho. Veremos na análise dos desenhos na segunda aula.

2ª aula:

No início da aula, entreguei aos alunos um mini questionário, descrito no plano de aula da seção 6:

1- Você acha que existem outras geometrias diferentes da que você conhece? Quais?
2- Você consegue afirmar quando um objeto é tridimensional e quando é bidimensional? Como?
3- Como você pode garantir que um objeto esteja na tridimensionalidade?
4- No caso do vídeo visto na aula anterior, como é a visão do piloto ao realizar seu trajeto?

Obtive algumas respostas em voz alta do tipo:

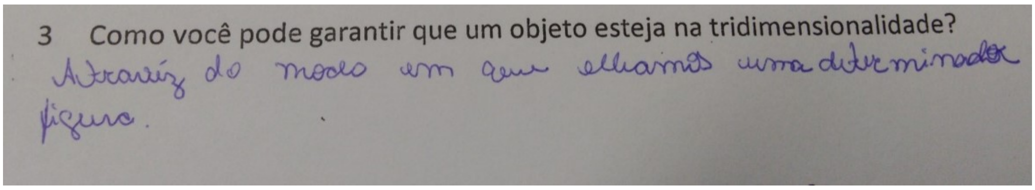
"Vou colocar resposta não, só para não precisar justificar." Mostrando falta de interesse e comprometimento. *"Precisa justificar mesmo?"* ou *"Sei que existe, mas não sei explicar"*.

Trinta alunos disseram que acham que existem outras geometrias e citaram geometria analítica, espacial e euclidiana. Observamos que eles não compreenderam a pergunta, ou não se apropriaram de conceitos, pois a geometria espacial é a própria Geometria Euclidiana e está inserida no contexto escolar. Outros relataram que já ouviram falar sobre isso na televisão, na escola e nos jornais, mas não sabiam dizer o nome de outras geometrias.

Sobre a segunda pergunta, treze alunos disseram não conseguir afirmar quando um objeto é bidimensional e quando é tridimensional. Os que colocaram que sabiam diferenciar usaram como justificativa que a tridimensionalidade *"sai da tela",* se referindo talvez ao cinema 3D, em que, com o uso de óculos apropriados, os objetos dos filmes parecem ter maior profundidade, dando esse efeito relatado pelo aluno.

Na terceira pergunta, doze alunos disseram não saber como garantir quando um objeto está na tridimensionalidade, os que falaram que conseguem garantir, relataram que *"quando se vê largura, altura e profundidade"* outro aluno apenas respondeu *"quando se tem profundidade no objeto"* e outro ainda concluiu: *"depende do ângulo em que se está olhando"* (Figura 45), este último chama a atenção, pois antes mesmo de iniciar a discussão já percebeu que às vezes não se pode garantir, ao olhar um objeto, que ele é tridimensional.

Figura 45: Aluno escreveu: "Através do modo em que olhamos uma determinada figura".

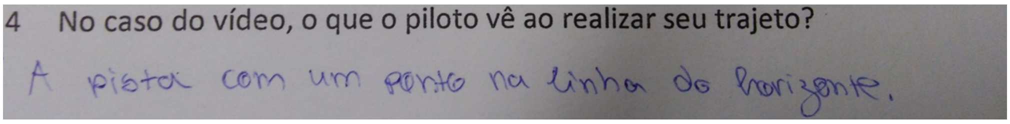


Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

Este aluno também faz uma observação importante, que tudo depende de como olhamos a figura, ou seja, ele se refere à vista do objeto, e isso interfere na sua conclusão de se o objeto é bidimensional ou tridimensional. É importante ressaltar que o objeto não deixa de ser tridimensional nem bidimensional conforme a vista que temos, mas nossos olhos que são limitados e distorcem a imagem de acordo com a posição em que estamos.

Para a quarta pergunta, sobre o que o piloto vê ao dirigir seu carro, as respostas foram as mais variadas: *"O piloto vê a pista, o volante, a frente do carro"*, *"o horizonte"*, *"a pista de um jeito diferente"*, *"volante, mão e rodas dianteiras"*.

Figura 46: Aluno diz: “A pista com um ponto na linha do horizonte”.


4 No caso do vídeo, o que o piloto vê ao realizar seu trajeto?

A pista com um ponto na linha do horizonte.

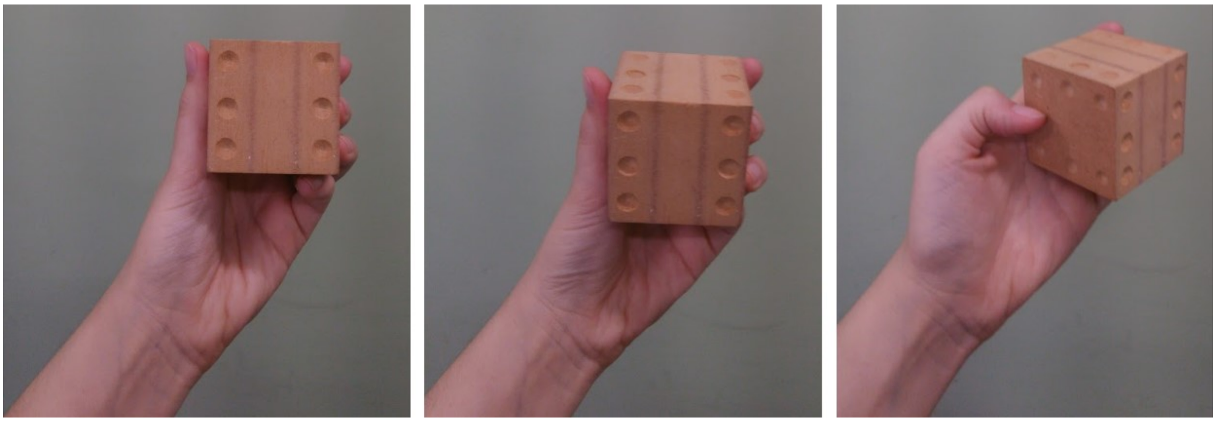
Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

A resposta da Figura 46 chama atenção, pois o aluno aparentemente já tem uma percepção de Geometria Projetiva, pois cita a linha do horizonte e um ponto, que chamamos de ponto de fuga.

Depois desse momento em que os alunos responderam às perguntas, nós debatemos em conjunto as respostas. Esse tempo era importante para desconstruir algumas ideias equivocadas. Sobre a primeira pergunta, debatido em grupo, a primeira resposta que obtive foi: Existem sim outras geometrias, a analítica. Expliquei que temos sim outras geometrias e que a geometria analítica, que também é chamada de cartesiana, é uma geometria que envolve os elementos da Geometria Euclidiana, onde estudamos planos e espaço aliados à álgebra.

Para a segunda e a terceira perguntas, alguns alunos responderam que para diferenciar um objeto bidimensional com um tridimensional é preciso ter profundidade. Aí, com um cubo na mão questionei as vistas que temos dele, aproximei o cubo para um aluno falar se o que ele vê é 2D ou 3D, o aluno disse que não via a profundidade, então ele não podia afirmar que era um cubo, motivei a turma a mesma pergunta e todos concordaram.

Foto 17: Diferentes vistas do cubo apresentados aos alunos na mão.



Fonte: Arquivo Pessoal.

Quando apoiei o cubo deixando a aresta visível indicado pela Foto 18, alguns alunos afirmaram terem visto uma pirâmide, talvez por acharem confundirem aresta com vértice, ou por confundir pirâmide com prismas. Expliquei que podemos já imaginar que o objeto tem uma profundidade e que por isso ele é um objeto que não é plano.

Foto 18: Cubo apoiado mostrando a aresta.

Fonte: Arquivo pessoal.

Quando deixei o cubo com uma vista frontal da aresta (Foto 18), todos concordaram que viram um cubo e que poderiam afirmar isso, uma vez que foi possível ver as três dimensões perfeitamente. Concluí com eles que para que se tenha certeza que um objeto é tridimensional é preciso que você veja a altura, a largura e a profundidade.

Foto 19: Vista das três faces do cubo

Fonte: Arquivo Pessoal

Para a quarta pergunta, sobre o que o piloto vê enquanto dirige o carro, questionei se o piloto vê a pista toda, o grupo disse que não, um aluno disse que o piloto vê um ponto. Provoquei perguntando o porquê desse ponto. Os alunos não souberam responder, então continuei dizendo que o nosso olho não alcança o final da pista, ou seja, que a nossa visão é limitada, e que por isso, vemos apenas trechos e no caso do piloto, a pista encontra um ponto de fuga, em que as laterais se encontram em um ponto.

Na sequência, apresentei slides do conteúdo abordado para uma melhor explanação do tema. No primeiro slide foram apresentadas imagens de um mesmo vaso, porém com diferentes pontos de vista ou observação para assim, destacar a questão das diferentes vistas de um objeto.

Foto 20: Diferentes vistas de um objeto.

Fonte: Arquivo pessoal da autora, 2017.

Um aluno questionou: *"Professora, se você imprimir essa foto ela vai continuar sendo 2D?"* Expliquei a ele que o objeto tridimensional está sendo representado em um plano e por isso seria bidimensional. Ele insistiu: *"Dá pra projetar um objeto 2D em um plano 3D?"*, Expliquei a ele o cenário do famoso jogo de *vídeo-game Mario World*, em que o cenário é todo bidimensional e que se ele fosse colocado em tridimensionalidade, bastava fazer os canos do jogo em cilindros e os quadrados em que o personagem pega itens, fosse feito em forma de cubos.

Na sequência, conversei com a turma sobre a Geometria Euclidiana, sobre Euclides e seus postulados. Destaquei que a Geometria Euclidiana é aquela que estudamos na escola, a geometria a qual o mundo matemático é baseado em geral.

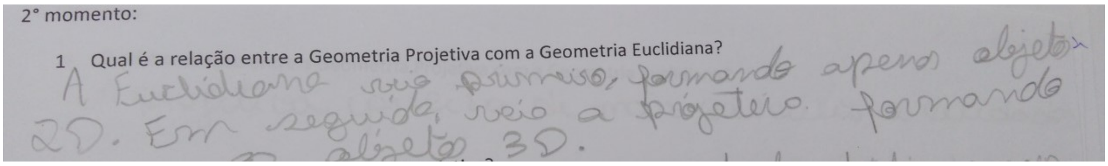
Nesse momento os alunos responderam um segundo questionário:

1- O que você acha que é a Geometria Projetiva?
2- Onde você acha que pode usar a Geometria Projetiva?

3- Qual é a relação entre a Geometria Projetiva com a Geometria Euclidiana?

Para a relação entre Geometria Projetiva e Euclidiana, 23 alunos disseram que não sabiam, um aluno escreveu *"a Geometria Projetiva tem a ver com a euclidiana"*, outro foi ainda mais fundo *"com a Geometria Euclidiana explica-se a projetiva",* outras respostas como*: "a Geometria Euclidiana é a básica, a outra eu não sei", "a Geometria Projetiva projeta imagens",* e ainda um aluno colocou a seguinte resposta que chamou a atenção:

Figura 47: Aluno escreveu: "A Euclidiana veio primeiro, formando apenas objetos 2D. Em seguida veio a projetiva formando os objetos 3D".



Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

Como antes foram debatidas questões de bidimensionalidade e tridimensionalidade, o aluno concluiu erroneamente que cada uma das geometrias era encarregada de estudar uma dimensão. Muitas respostas sem qualquer embasamento foram escritas, mostrando claramente que os alunos não sabiam relacionar as duas, ou sequer sabiam o que eram.

Sobre "O que você acha que é a Geometria Projetiva?" a maioria das respostas que obtive foi *"não sei"* ou *"que projeta"*. Respostas como *"usada em projetos", "uma forma de projeção de estruturas"* ou ainda *"usada em prédios"* demonstram o total desconhecimento pela matéria, ou que apenas possuem um leve palpite do que seja, induzidos pela semântica da palavra.

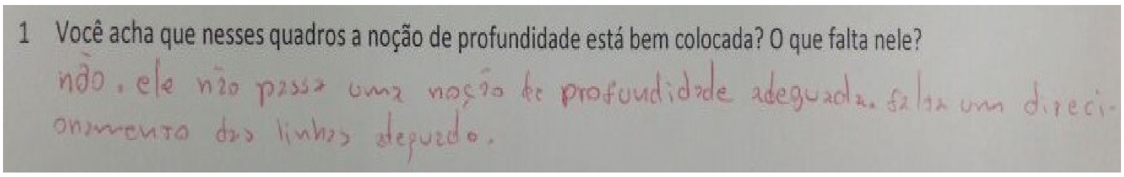
Na pergunta direcionada à utilização da Geometria Projetiva, muitas respostas do tipo "*em projetos em geral, construção e elaboração*", "*construção de casas*" e dezessete alunos responderam "*não sei*". "*Em fotos, livros e engenharia*", "*medidas, linhas, largura, comprimento, pontos e retas*", "*data-show/projetores*" também se fizeram presentes, indicando que alguns alunos têm minimamente a noção do que seja.

Recolhidas as respostas, fizemos o debate em grupo. Sobre a primeira e a segunda perguntas, o grupo de alunos ficou em silêncio e apenas um aluno disse que a Geometria Projetiva é uma geometria que é ligada a projeções. Eu o questionei sobre o que é uma projeção, ao que ele imediatamente respondeu que o cinema é uma projeção, concluindo: "*tem uma imagem na lente que reflete na tela*". Perguntei então: "*posso dizer que a Geometria Projetiva é* *simplesmente aquilo que a gente vê?*", esse mesmo aluno disse: "*Pode*!" Então concluí com a turma que a Geometria Projetiva é a geometria com a qual os nossos olhos veem o mundo físico, esse por sua vez é explicado pela geometria de Euclides.

Assim, partimos para a terceira pergunta, onde eles acham que se usa a Geometria Projetiva, apresentando o exemplo anterior do colega que disse sobre o cinema. Também mostrei imagens nos slides com pinturas em que usam e não usam a Geometria Projetiva, como planejado e apresentado na seção 6. O primeiro quadro apresentado foi *Madonna and Child on a Curved Throne*. Pedi que os alunos anotassem suas percepções sobre ele, pois poderiam ser úteis no último questionário. Assim fiz com os outros quadros *Emmaus,* Duccio di Buoninsegna e *A Última Ceia*. Em seguida os alunos receberam o questionário abaixo para ser respondido uma a uma de acordo com a sequência da aula:

1- Você acha que nesses quadros a noção de profundidade está bem colocada? O que falta no primeiro quadro?
2- Nos desenhos apresentados a seguir feitos na aula anterior, o que faltou? O que você percebe neles?
3- Quais elementos matemáticos você percebe nas fotos de Sebastião Salgado?
4- Por que eu tenho objetos maiores na frente e por que os objetos do fundo são menores?
5- Por que as estradas se encontram? Mas retas paralelas nunca se encontram, por que na foto elas se encontram?

Figura 48: Aluno escreveu: "Não. Ele não passa uma noção de profundidade adequada. Falta um direcionamento das linhas adequado".



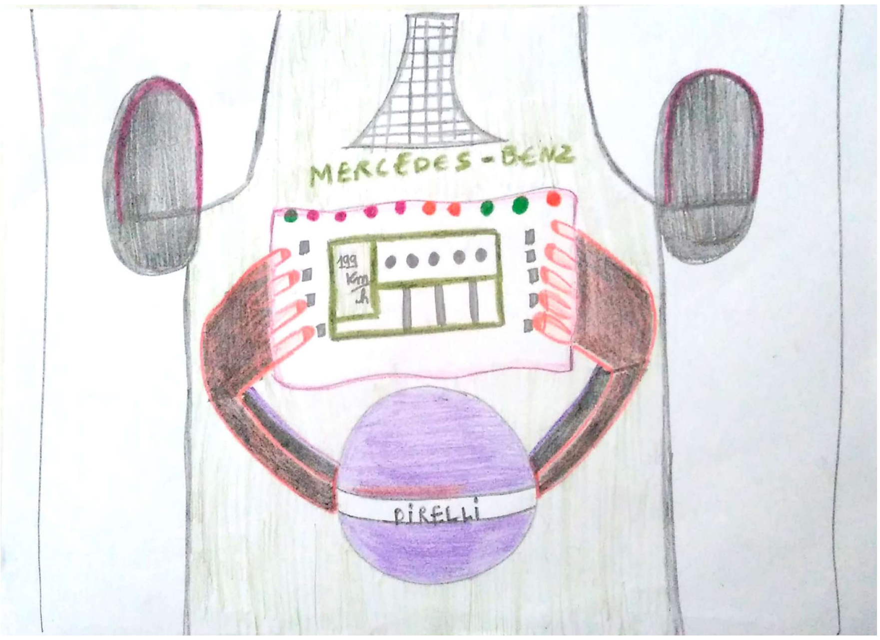
Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

Conversamos sobre as possíveis respostas dos alunos à primeira pergunta, um aluno disse que no primeiro quadro a personagem estava em volta do Coliseu Romano e disse estar chapado. Respondi que era a forma de como os artistas planificavam os objetos tridimensionais, e essa técnica não era muito realista, deixando assim as pinturas com cara de *chapadas* como ele mesmo falou. No segundo quadro, temos que os anos se passaram um pouco e já se pode perceber uma tentativa de profundidade, principalmente com a ideia da porta. Na pintura de

Da Vinci, os alunos participaram ativamente, falando que havia um ponto central a qual as portas convergiam. Quando eu questionei quem era a resposta foi unanime*: "em cima da cabeça de Cristo!"*. Um dos alunos explicou que percebeu isso pois Jesus está no meio e as portas e paredes seguem uma linha que vai em direção a sua cabeça, ainda chamou de ponto de fuga. Achei ótimo e finalizei mostrando a outra pintura com as linhas de projeção para o ponto de fuga.

Para a segunda pergunta, projeteios desenhos feitos pelos alunos no dia anterior no interativo, para que debatêssemos o que foi produzido. Lembrei a turma o comando "*Desenhe a visão do piloto no momento em que ele está dirigindo*". Destaco a seguir algumas produções.

Foto 21: Primeiro desenho a ser apresentado aos alunos.



Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

Pedi para que escrevesse sobre o que falta no desenho (Foto 21), o que foi um acerto e o que foi um erro. Um aluno afirmou: *"não está de acordo com o que foi pedido, não dá para visualizar a pista."* Outro foi categórico *"Não foi pedido visão de cima."*, tive outras respostas semelhantes: *"Não é possível dirigir e ver-se de cima para baixo"*.

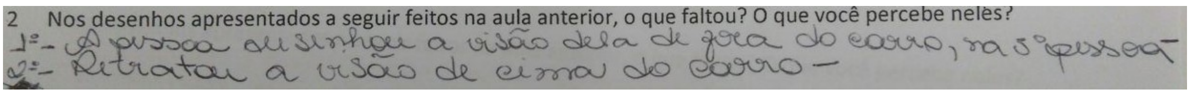
Foto 22: Desenho feito por um dos alunos.

Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

Nesse segundo desenho, os alunos observaram que a pessoa estava assistindo a corrida em vez de se imaginar dirigindo. Intervi dizendo que se estivéssemos olhando lateralmente para a pista, no mesmo nível dela, só observaríamos uma linha, e não duas. As respostas dos alunos foram: *"retratou a visão dela fora do carro"*, *"faltou ponto de fuga"*, *"o desenho está em terceira pessoa", "faltou interpretação do que foi pedido."*.

Ainda sobre a Foto 22 um aluno respondeu *"a pessoa desenhou a visão dela de fora do carro, na 3° pessoa"* e sobre a Foto 21 ele escreveu: *"Retratou a visão de cima do carro"* (Figura 49).

Figura 49: Resposta de um aluno para os desenhos das fotos 21 e 22.

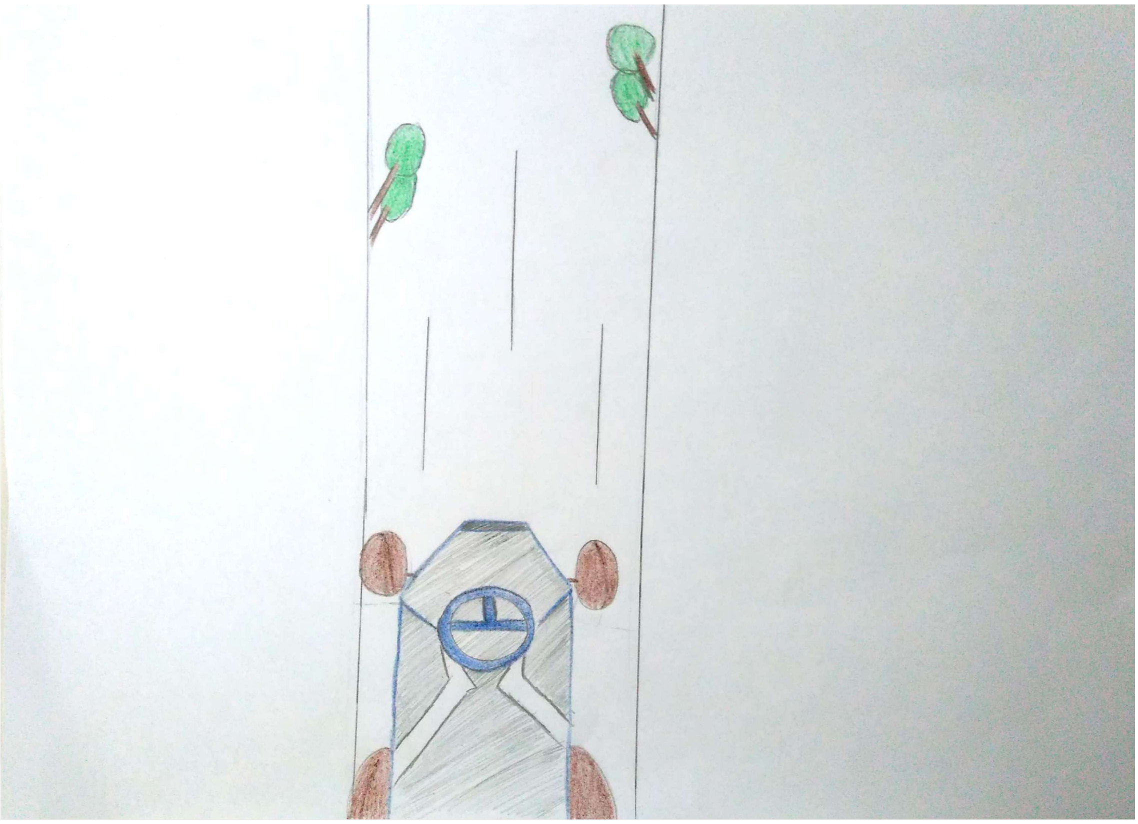


2 Nos desenhos apresentados a seguir feitos na aula anterior, o que faltou? O que você percebe neles?
1º- A pessoa desenhou a visão dela de fora do carro, na 3º pessoa-
2º- Retratou a visão de cima do carro -

Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

O próximo desenho retrata apenas os braços do piloto segurando o volante, a pista lateral de maneira paralela, árvores caindo sobre a pista e as quatro rodas do veículo.

Foto 23: Desenho de um aluno.

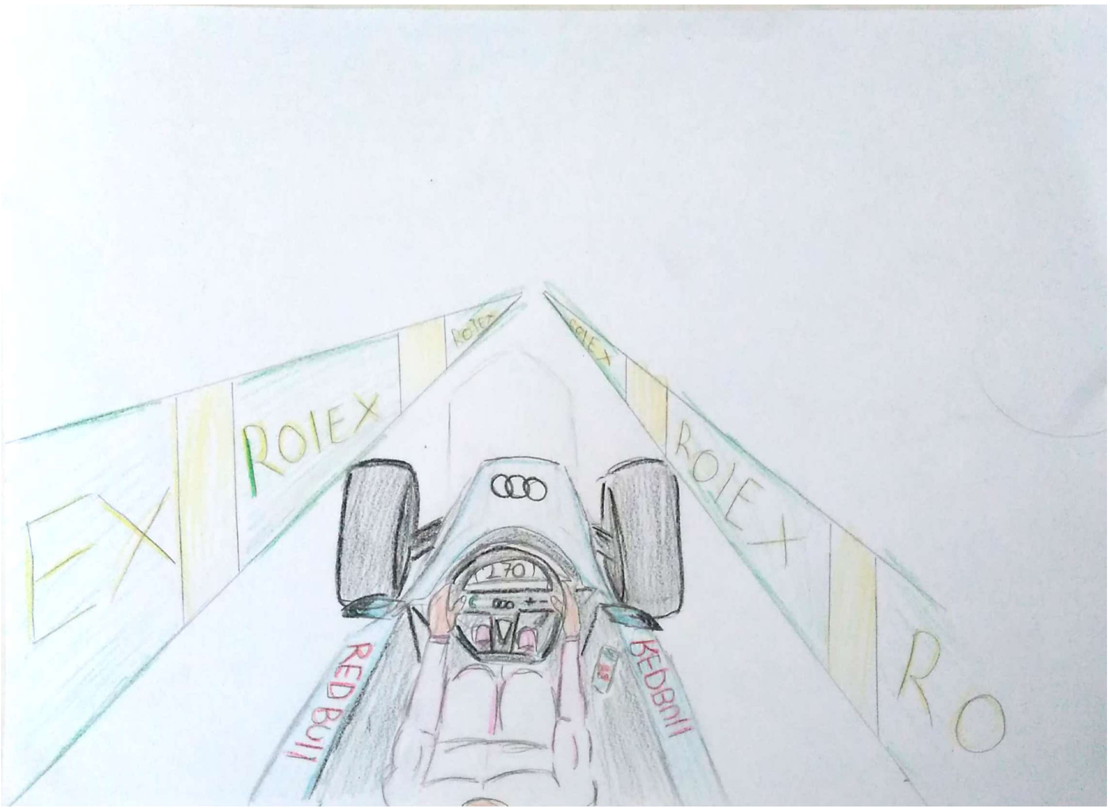


Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

Na Foto 23 os alunos perceberam que não havia um ponto de fuga na estrada e principalmente questionaram as árvores "deitadas" na pista. Perguntaram também sobre o corpo do piloto, falaram sobre a falta de proporção nas árvores. Comentários do tipo: *"retratou a visão de cima do carro"*, *"não tem como ver a roda pela posição do piloto a pista não se vê assim nem as árvores"*, *"não é a perspectiva do motorista"*.

O último desenho apresentado (Foto 24) foi escolhido por ter a melhor representação da visão do piloto. Perguntei aos alunos o que têm no desenho, as respostas foram: *"muito bom o desenho!"*, *"essa pessoa é um artista!"*, *"melhor desenho!"*, não respondendo a pergunta proposta. Insisti perguntando o que se tem de muito bom no desenho e um aluno respondeu que a propaganda na lateral da pista está diminuindo.

Foto 24: Desenho de maior destaque de um aluno.



Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

Mostrei a eles a riqueza do desenho, apontando a noção de perspectiva da pista, da propaganda escrita, e do próprio carro. Vários alunos responderam que o desenho está com uma proporcionalidade boa, e que está o mais perto do que foi pedido.

Após apresentar os desenhos dos alunos, trouxe para a aula lâminas com fotografias de Sebastião Salgado[8]. Quando se faz um desenho, deve-se ter todo um cuidado de perspectiva e ponto de fuga. Quando se tira uma foto, a lente da câmera é como se fosse seu próprio olho. Por isso, a foto já imprime todas as percepções de profundidade, perspectiva, proporção e sobreposição necessárias para dar o realismo à imagem, dependendo da posição do fotógrafo.

As duas fotos apresentadas foram: 1 – a foto de uma estação de metrô, que foi apresentada em uma exposição chamada Êxodo e, 2 – a foto de um projeto chamado Outras Américas, que registra os povos indígenas da América Latina. Contei um pouco a história do fotógrafo e, vendo a foto, um aluno, que já o conhecia exclamou: *“Nossa, esse cara é muito bom, as fotos dele são demais!”*.

[8] As lâminas utilizadas fazem parte do acervo do Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática (LEAMA) da Universidade Federal do Espírito Santo, vinculado ao curso de licenciatura em Matemática, campus Vitória.

Foto 25: Fotografia de Sebastião Salgado – Exposição Êxodo.

Fonte: Acervo do LEAMA- UFES.

Foto 26: Fotografia Sebastião Salgado – Exposição Êxodo.

Fonte: Acervo do LEAMA- UFES.

Perguntei o que aos alunos percebem de elementos matemáticos (terceira pergunta do questionário) nas fotos. Deixei que escrevessem a resposta em silêncio, e depois fizemos os debates.

As respostas dos alunos foram as mais variadas possíveis. Viram retângulos, prismas, linhas projetadas e linhas projetivas como elementos matemáticos. Viram ponto de fuga e perspectiva, perceberam profundidade, retas geométricas, proporcionalidade. As percepções sobre as fotos foram bem variadas, incluindo respostas do tipo: *"tem muitas pessoas na foto"* e *"as fotos causam impacto"*.

Passamos então para a quarta pergunta do questionário: por que tenho objetos maiores na frente e menores atrás? Alguns alunos responderam que é por causa da distância. Uma aluna ainda foi bem enfática: *"Os da frente estão maiores pois estão mais próximos de quem o observa."* Concluímos que é essa diferença entre tamanhos que nos dá a percepção de profundidade da foto.

Sobre a última pergunta, por que as linhas que delimitam as estradas da foto se encontram, a resposta que obtive deles foi *"Pois existe um ponto de fuga"*, *"elas não se encontram, você que enxerga assim"*, *"por causa da perspectiva, temos a sensação de que ela se encontra pois seguem infinitamente sem se tocarem."* Isso mostra o entendimento desses alunos sobre o que temos debatido em sala de aulas. No entanto, alguns responderam não saber. Talvez por falta de interesse na aula, ou por falta de entendimento dos procedimentos até aqui adotados. A minha postura foi de esclarecer o porquê do encontro das duas retas para todos os alunos, para que não sobrassem dúvidas.

Assim finalizamos o 2° dia de oficina, formalizando em grupo as respostas.

3ª aula:

Para o começo da 3ª aula da oficina a turma foi acomodada em suas carteiras, nas filas onde habitualmente se sentam. Feito isso, com a ajuda do interativo, prossegui com a aula utilizando slides com os conteúdos básicos de Geometria Projetiva.

Então os alunos ouviram a aula que durou cerca de 40 minutos e foi exposto a eles sobre elementos de perspectiva: linha do horizonte, ponto de fuga e linhas de fuga. Todos com fotos e exemplos para ilustrar, formalizando assim os conceitos debatidos na aula anterior. Na sequência falamos de sobreposição e mudança de plano para mostrar a eles toda a ideia de profundidade e distância.

Aproveitei e comentei sobre ilusão de ótica, já que falamos de distância e profundidade. Esse tipo de desenho ou fotografia, que engana os olhos, é uma oportunidade para deixar claro que a posição dos objetos influencia sobre o seu tamanho nas fotos. Usei algumas imagens que estão no planejamento com essa abordagem para que os alunos entendessem bem a ideia.

Por último foi abordado perspectivas cônicas com 1 ponto de fuga, com 2 pontos de fuga e com 3 pontos de fuga, todos com exemplo já ilustrados na seção 6, em fotografia para ajudar na compreensão dos estudantes.

Como uma das avaliações das atividades, pedi que os alunos registrassem uma foto com um ou mais elementos apresentados em sala de aula. Tinham o prazo de 4 dias para enviar por correio eletrônico. Quem não tivesse acesso à internet poderia me entregar em um *pendrive* ou por *bluetooth*. Junto com a foto, deveriam escrever uma descrição-legenda com o elemento matemático utilizado. Todo o material seria apresentado e debatido com a classe.

4ª aula:

Iniciei a aula perguntando se todos tinham entendido a tarefa, uma vez que nem todos enviaram as fotos. Um aluno disse que tinha entendido o que era para fazer, mas não sabia como fazer. Outro aluno disse de forma bem simples: *"na foto tinha que ter perspectiva, ponto de fuga, o que foi dito na aula passada"*.

Passamos à explicação e debate sobre as produções dos alunos. A Foto 27 retrata, aparentemente, que o aluno não entendeu o comando dado.

Foto 27: tentativa de registro de elementos matemáticos em fotografia.

Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

O aluno explicou em sala de aula que a cabeça dele era o centro da foto e que por isso todas as linhas de fuga iria para esse centro. Provavelmente essa conclusão fazia alusão ao quadro de Da Vinci na aula passada, A Santa Ceia (Figura 22), em que a cabeça de Cristo é o centro e todas as linhas de fuga estão direcionadas para ele. Mas nessa foto vemos que não há linhas de fuga e nem ponto de fuga. O aluno tinha conhecimento do quadro apresentado, mas não apreendeu os conceitos e objetos nele destacados.

Alguns alunos mostraram ter entendido os conceitos e apresentaram fotos bem interessantes (Fotos 28 a 31).

Foto 28: Linhas e ponto de fuga registrados em foto de aluno.

Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

O aluno descreveu os seguintes elementos como legenda da Foto 28: *"ponto de fuga, linhas de fuga e linha do horizonte"* demonstrando conhecimento sobre o tema. Durante a exposição da foto, os alunos visualizaram bem os conceitos propostos por esse aluno, o que enriqueceu a discussão em sala de aula.

A Foto 29 também apresenta o bom uso dos elementos matemáticos:

Foto 29: Dois pontos de fuga em uma fotografia.

Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

A Foto 29 trazia a legenda: *"Prédio visto com dois pontos de fuga"*. Questionei quais seriam esses dois pontos de fuga e a resposta do aluno foi que por ter tirado a foto em um ângulo especial, ele conseguiu registrar duas "frentes" do prédio, ou seja, tirou a foto de frente a uma aresta, ele captou a perspectiva cônica com dois pontos de fuga, visto na aula anterior.

Foto 30: Uso de ilusão de ótica em fotografia.

Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

Na Foto 30 o aluno quis demonstrar o conceito de ilusão de ótica que comentamos. Essa foto foi tirada no Convento da Penha, ponto turístico do nosso estado – Espírito Santo, o que mostra o carinho, valor e cuidado do aluno na produção de sua atividade. A distância dos prédios foi utilizada como um degrau em sua foto. Na sua legenda estava escrito: *"ilusão de ótica"* e demonstrou bem o que foi proposto em sala.

Foto 31: Linhas e pontos de fuga em uma rua da Serra - ES.

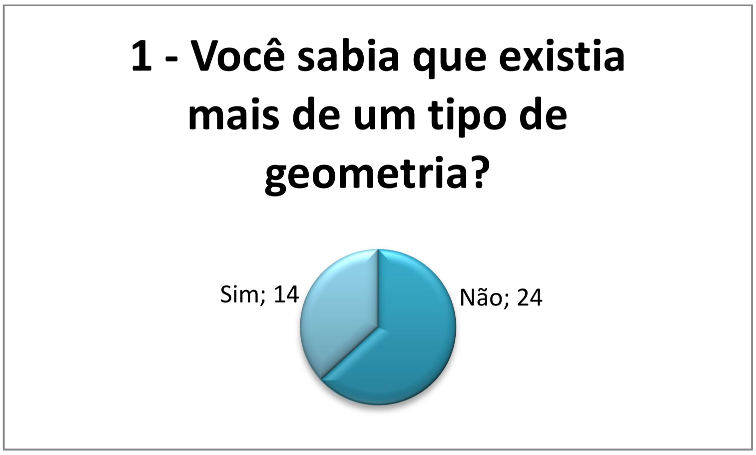
Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

A Foto 31 também reproduz bem a atividade proposta. O aluno conseguiu mostrar proporção entre os carros, linhas de fuga mas propôs apenas um elemento em sua legenda: *"Eu usei como elemento matemático, ponto de fuga"*. Quando avaliamos as fotos, todos puderam ver a riqueza de conceitos matemáticos envolvidos nela.

Depois de analisar as fotos enviadas pelos alunos, verificar as legendas e fazer comentários a respeito dos conceitos matemáticos envolvidos, para a avaliação final da atividade foi entregue um último questionário.

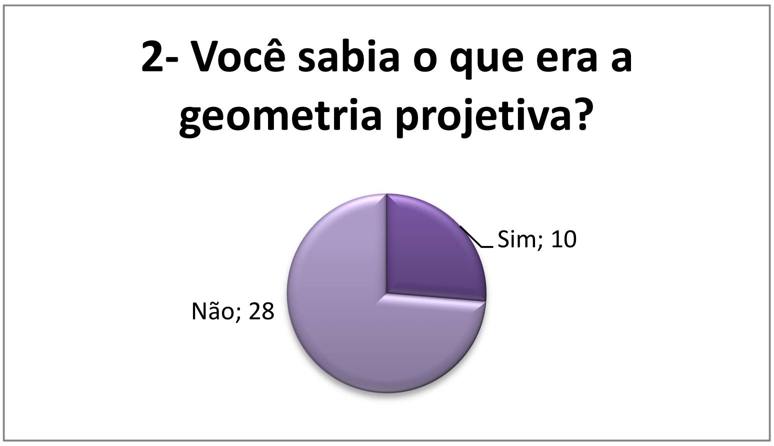
Os gráficos abaixo estão relacionados com o questionário entregue aos alunos. Apresentaremos a análise desses dados, levando em conta todo o desenvolvimento das aulas da oficina.

Gráfico 1: Pergunta número 1 do questionário



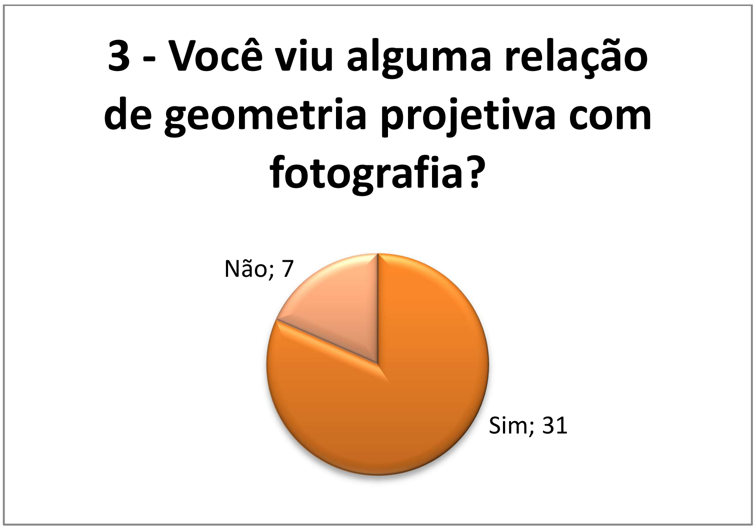
A maioria dos alunos não sabia da existência de outra geometria que não a euclidiana, como mostra o Gráfico 1. Além disso, apenas 10 alunos mencionaram saber o que era a Geometria Projetiva (Gráfico 2), como era por nós esperado quando pensamos nessa atividade.

Gráfico 2: Pergunta número 2 do questionário



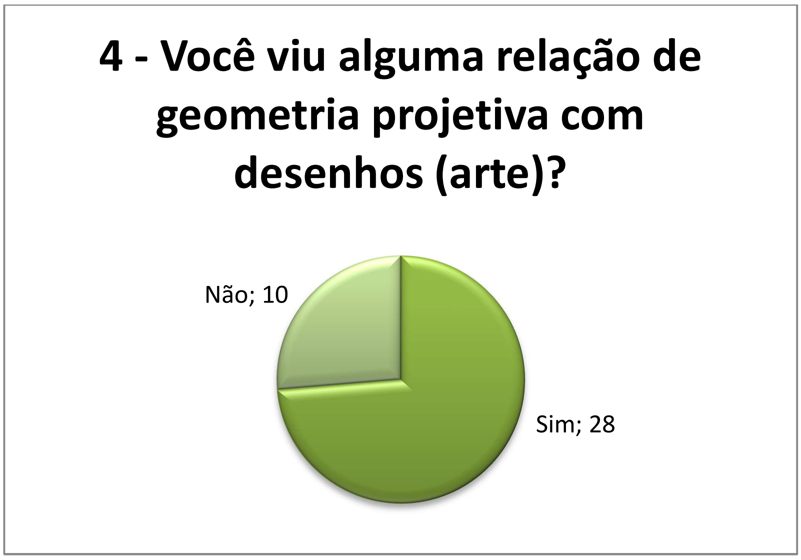
Os alunos que responderam o questionário, em sua maioria, viram relação entre a Geometria Projetiva com a fotografia, como mostra o Gráfico 3. Os sete alunos que responderam não à pesquisa podem não ter visto relação por não ter entendido os procedimentos da aula como um todo, ou não ter participado de um dos processos da oficina.

Gráfico 3: Pergunta número 3 do questionário.



Também em relação ao gráfico 3, as respostas que obtive sobre o que viram de relação entre Geometria Projetiva e fotografia foram perspectiva, ponto de fuga e linha do horizonte. A maioria dos alunos fixaram apenas essa parte do conteúdo talvez por se dar maior ênfase, pois o conceito de sobreposição não foi comentado em nenhum momento.

Gráfico 4: Pergunta de número 4 no questionário

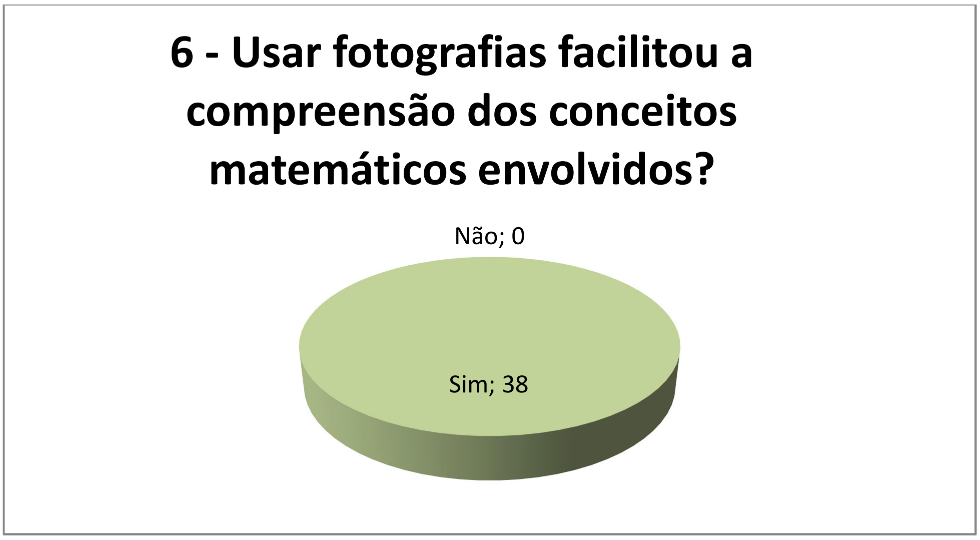


O gráfico acima mostra que 28 alunos relacionaram arte com Geometria Projetiva. Quando questionados sobre o que seria a relação, as respostas foram as mesmas da pergunta 3: perspectiva, ponto de fuga e linha do horizonte, porém, ainda são citados elementos geométricos presentes nos desenhos, como polígonos, exemplificados com quadrados (em janelas de quadros vistos), triângulos e etc.

Gráfico 5: Pergunta número 5 do questionário.

A pergunta de número 5 foi feita no intuito de analisar se os alunos já pensaram alguma vez que a matemática poderia estar relacionada com outras disciplinas e que não é um conhecimento puro e sem relação com o contexto da vida real. A maioria disse estar ciente da relação dos dois, porém eu acredito que esse número devia ser menor e que os quadros artísticos influenciaram na resposta. Quando foi apresentado durante a oficina o quadro de Da Vinci e de Buoninsegna, muitos ali estavam surpresos com as revelações feitas durante a aula. Além disso, ao se comentar com os alunos que desenhistas, arquitetos e engenheiros civis usam em seus desenhos e plantas muita matemática, alguns ficaram entristecidos de saber que há tanta matemática nesses cursos, pois pretendiam fazer, mas na intenção de que não tivesse matemática na grade curricular.

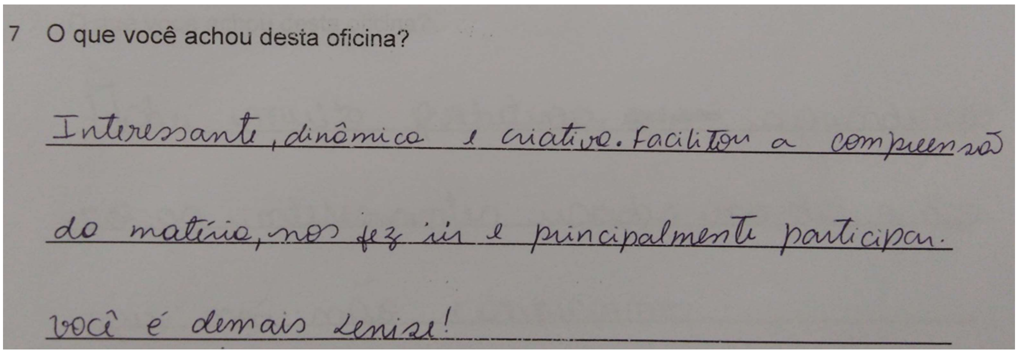
Gráfico 6: Pergunta de número 6 do questionário.



Para a resposta da pergunta 6, os alunos na sua totalidade responderam ter sido importante o uso de fotografias para entender os conceitos matemáticos envolvidos na oficina. Quando questionados sobre, alguns alunos responderam que acharam mais interessante por se tratar de imagens e principalmente, que fotografias de causam impacto, como as de Sebastião Salgado.

Por fim, na última pergunta que não era fechada, os alunos puderam deixar escrito o que acharam da oficina, feita em quatro aulas. Algumas respostas foram pouco elaboradas, como "*Legal", "Divertido", "Dinâmica interessante, acrescentou muito", "Aprendi muitas coisas de geometria que não sabia"*. Outras merecem destaque, como a Figura 50:

Figura 50: Aluna escreve o que achou da oficina. "Interessante, dinâmica e criativa. Facilitou a compreensão da matéria, nos fez rir e principalmente participar. Você é demais Lenise!"

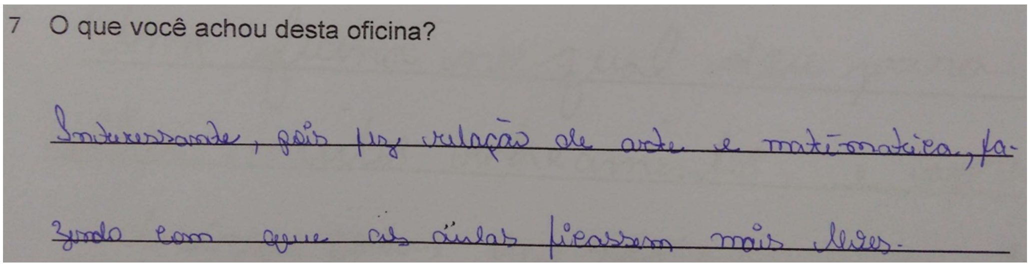

7 O que você achou desta oficina?

Interessante, dinâmica e criativa. Facilitou a compreensão da matéria, nos fez rir e principalmente participar. você é demais Lenise!

Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

A aluna classificou a aula como dinâmica e criativa. Ressaltou aspectos como participação dos alunos em sala de aula, como sendo um diferencial, e da facilidade em compreender a matéria e o quanto divertida ela achou.

Figura 51: Aluno escreve o que achou da oficina. "Interessante, pois fez relação de arte e matemática, fazendo com que as aulas ficassem mais leves."

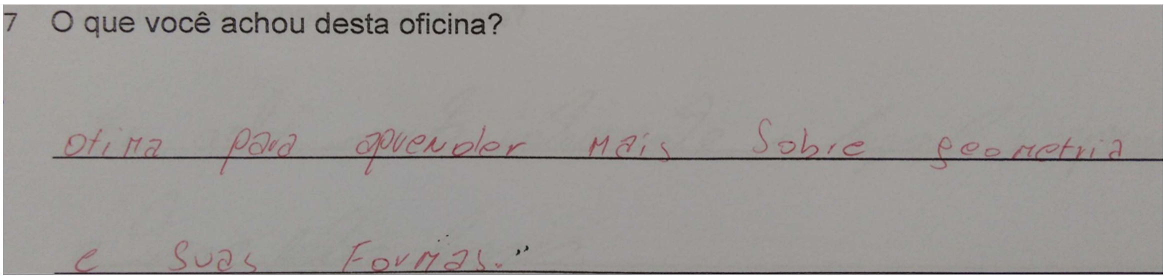

7 O que você achou desta oficina?

Interessante, pois fez relação de arte e matemática, fazendo com que as aulas ficassem mais leves.

Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

Na figura 51 o aluno destacou a arte e a matemática e ainda classificou a oficina como leve, ou seja, conseguimos ultrapassar a barreira do quadro-giz, que a matemática tem de mais tradicional, pesada, difícil e técnica. Ambos os alunos deixaram como destaque essa observação.

Figura 52: Aluno escreve o que achou da oficina. “Ótima para aprender mais sobre geometria e suas formas.”



Fonte: Arquivo pessoal, 2017.

O aluno acima (Figura 52) relatou a importância para se aprender mais geometria e suas mais variadas formas, tentando expressar sua opinião sobre a oficina.

É importante analisarmos que, a partir da amostra de dados, houve uma significativa evolução dos alunos quanto à aprendizagem uma vez que, ao começar a oficina, muitos deles relataram a falta de conhecimento de Geometria Projetiva e suas perspectivas, e até mesmo da própria Geometria Euclidiana, quando questionados sobre a diferença entre um objeto bidimensional (geometria plana) e um objeto tridimensional, onde poucos conseguiram expressar com palavras como viam os dois objetos.

Além disso, a turma ficou entusiasmada com a nova dinâmica de conteúdo, uma vez que lhes foi apresentado uma matemática conexa e sem formulações memorizadas.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo dessa dissertação foram apresentados fatos históricos relacionados à Geometria Euclidiana e do surgimento da Geometria Projetiva como resultado da introdução de novos conceitos a essa Geometria Clássica. Por exemplo, pontos no infinito são elementos que a Geometria Euclidiana não aborda, mas sim a Projetiva.

Foi observado o surgimento das mais variadas geometrias a partir de questionamentos, por muitos séculos, do 5° postulado de Euclides. Pela observação dos aspectos analisados concluiu-se que a Geometria Projetiva é a geometria que também se originou da inquietação desse famoso postulado, porém ele não o nega e também não o afirma, concluindo assim que esta geometria se faz pelo acréscimo de definições sobre um elemento que a Geometria Euclidiana não aborda, o infinito.

Além disso, buscamos relacionar as duas geometrias com o ensino básico de matemática, ressaltando aspectos importantes de aprendizagem para os alunos e de aplicação em seu cotidiano.

Levando em conta o que foi observado durante o primeiro semestre do ano letivo de 2017 pela pesquisadora, percebeu-se que era necessária uma intervenção nas metodologias de ensino, sobretudo em geometria, pois os alunos do 3° do ensino médio demonstraram total repulsa pelo conteúdo e desinteresse pelo conteúdo consequentemente.

A apresentação de uma nova forma de ensino de geometria fez-se necessária pois os alunos se sentiam pouco seguros em relação a ela e desmotivados como um todo pela matemática. Além disso, o objetivo e desejo de contribuir para os demais profissionais da área e comunidade acadêmica acredito ser alcançado.

Fizemos uma análise da aplicação dessa proposta didática, descrevendo perguntas e respostas dos alunos e como interagiram durante as aulas, comentando cada passo da oficina. Mostramos assim que os alunos, em sua maioria, desconheciam a Geometria Projetiva e também não entendiam o que seria ao certo a Geometria Euclidiana e o que há nela de importante.

Em suma, a aplicação da oficina foi um pouco cansativa, por se tratar de um conteúdo extenso e pouco conhecido pelos alunos, mas pudemos ir além de uma matemática técnica e descontextualizada, fazendo uma transversalidade com arte e cultura. Os alunos puderam interagir de diversas formas, com manifestações artísticas próprias, por meio de seus desenhos, por debates em sala acerca das obras apresentadas e manifestando seu entendimento tirando fotos como forma de conclusão da oficina.

Pelas respostas obtidas no questionário final, somos levados a acreditar que as aulas foram aparentemente divertidas para os alunos e enriquecedora para a pesquisadora. É esperado que se possa contribuir também para a comunidade acadêmica em geral, com a proposta didática como forma de se criar novas aulas de geometria, ultrapassando as barreiras do famoso quadro-giz que normalmente é usado por nós professores da área.

Esperamos também com esse trabalho, estimular novos estudos na área, para que possamos ter um acervo cada vez maior de conteúdos matemáticos aplicáveis que possam ser usados em sala de aula. É preciso que novos estudos sobre metodologias matemáticas estejam sempre presentes, pois estamos em um mundo em constante desenvolvimento, aonde as tecnologias e informações chegam cada vez mais rápido a nossos alunos.

9. REFERÊNCIAS

ALMEIDA, F. R. T. de. *Notas para as aulas de Geometria Projetiva e desenho*. São Paulo (USP), 2007. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/rui/form3.pdf>. Acesso em: 10 out. 2017.

ARCARI, I. *Um Texto da Geometria Hiperbólica*. 2008. 127 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

AUFFINGER, A. C. T. C.; VALENTIM, F. J. S. *Introdução à Geometria Projetiva*. 2003. Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, setembro de 2003. Disponível em: <http://virtual.lncc.br/~rodrigo/cursos/CG/01_Apostilas/outros/geometria_projetiva_ufes.pdf>. Acesso em: 7 jan. 18.

BARBOSA, L. N. S. C. *Uma reconstrução histórico filosófica do surgimento das geometrias não-euclidianas*.68 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Londrina, 2011. Disponível em < http://www.uel.br/pos/mecem/arquivos/resumo_abstract/2011/dissertacoes/dissertacao_linlya.pdf> Acesso em 27 mar. 2018.

BARKER, S. F. *Filosofia da matemática*. Rio de Janeiro: Zahar, 1969. 141 p.

BARROS, A. A.; ANDRADE, P. F. *Introdução à Geometria Projetiva*. Coleção textos universitários. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DESPORTO. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/CEF, 1998.

______. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA. Base Nacional Comum Curricular, 2016. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 01 fev. 2018.

______. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA. Texto Preliminar da BNCC para o Ensino Médio, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 25 set. 2017.

BOYER, C. B. *História da Matemática.* Tradução de Elza Gomide. 2° edição. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRITO, A. J. *Geometrias Não-Euclidianas*: um estudo histórico-pedagógico. 1995. 187 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

CHABERT, J-L. *Proving the Fifth Postulate: True or False? In*: History of Mathematics, Histories of Problems. Paris: Ellipses, 1997.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é Matemática?* Editora Ciência Moderna Ltda, Rio de Janeiro, 2000.

COXETER, H. S. M. *Projective geometry*. New York: Springer-Verlag, 1987.

CREMONA, L. *Elements of projective geometry.* Oxford: Claredon Press, 1885.

ESPÍRITO SANTO (Estado). Secretaria da Educação Guia de implementação / Secretaria da Educação. – Vitória: SEDU, 2009. 72 p. (Currículo Básico Escola Estadual). Ensino Fundamental. Vol. 2. Disponível em <http://sedu.es.gov.br/Media/sedu/pdf%20e%20Arquivos/Curr%C3%ADculo/SEDU_Curriculo_Basico_Escola_Estadual_(FINAL).pdf> Acesso em 13 jun. 2018.

ESPÍRITO SANTO (Estado). Secretaria da Educação Guia de implementação / Secretaria da Educação. – Vitória: SEDU, 2009. 72 p. (Currículo Básico Escola Estadual). Ensino Médio. Vol. 2. Disponível em <http://sedu.es.gov.br/Media/sedu/pdf%20e%20Arquivos/Curr%C3%ADculo/SEDU_Curriculo_Basico_Escola_Estadual_(FINAL).pdf> Acesso em 13 jun. 2018.

EUCLIDES. *Os Elementos.* Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

GONÇALVES, T. da S. *Uma Introdução à Geometria Projetiva para o Ensino Fundamental.*149 p. Dissertação (Mestrado)—Universidade Federal do Rio Grande, 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/851>. Acesso em: 20 mai. 2018.

GREENBERG, M. J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*: development and history. 3 ed. New York: Freeman, 2001.

HAUBRICHS, C. Notas de aula. 2017.

HEATH, T. L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*: translated from the text of Heiberg with introduction and commentary. Cambridge: University Press, 1968.

JUVENIL, A. *Estudos de Desenho:* Elementos de Perspectiva. Disponível em: <http://www.sobrearte.com.br/desenho/perspectiva/elementos_da_perspectiva.php> Acesso em: 11 out. 2017.

KILL, T. G. *Particularidades da constituição das noções de infinito na história e na educação matemática*. Curitiba: Appris, no prelo.

MLODINOW, L. *A janela de Euclides*. São Paulo: Geração Editorial, 2005

MONTOITO, R. *Por Que Tardaram a Aparecer as Geometrias Não-Euclidianas?* Sociedade Brasileira de História da Matemática. Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática, 2011, Aracaju o Seminário, USP, SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 9., 2011, Aracaju. Anais do IX seminário nacional de história da matemática. [são Paulo]: Anais SBHMat, 2011. 100 p.

MOREIRA, M. A. *Aprendizagem significativa crítica.* UFRGS. 2010. 24 p.

PAVANELLO, R. M. *O abandono do ensino de geometria no Brasil*: causas e consequências. Zetetiké, Campinas, v. 1, n. 1, p.7-17, jan. 1993.

SCHMIDT, E. *O ensino de Geometria Projetiva na educação básica*: *uma proposta para apreensão do conhecimento do mundo tridimensional*. 94 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica do Paraná, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=77538> Acesso em 2 mai. 2018.

SILVA, M. D. *O Declínio da Cultura Grega e o Desenvolvimento da Matemática até a Idade Média*: em Busca de uma Compreensão Sociológica. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 2010, Salvador. Ilhéus: Via Litterarum, 2010. 1 CD.

SKOVSMOSE, O. *Educação Matemática Crítica*: a questão da democracia – Editora Papirus: São Paulo, 4a edição, 2001.

STILLWELL, J. *Mathematics and its history*. New York: Springer, 2010.

WOLFE, H. E. Introduction to Non-Euclidean Geometry. New York: The Dryden Press, 1945.

Vídeo exibido em aula: "FÓRMULA 1 NA VISÃO DO PILOTO", disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=fp0d90eyVI0> Acesso em: 20 nov. 2017

ANEXO I: AUTORIZAÇÃO DE PAIS OU RESPONSÁVEIS

AUTORIZAÇÃO

Senhores pais ou responsáveis:

A professora de matemática Lenise Júlia Fassini da Silva está desenvolvendo uma pesquisa de mestrado no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, intitulada inicialmente de "Ensino de Geometria Projetiva e Perspectiva – Um olhar pelas Fotografias" sob orientação da Profa. Dra. Julia Schaetzle Wrobel. Como parte da pesquisa, os alunos desenvolverão atividades em horário de aula e, eventualmente, extraclasse, com o objetivo de produzir fotografias para o estudo de geometrias que será exibido na escola, como objeto de ensino e aprendizagem e em outros ambientes que a pesquisadora julgar pertinente. Estas fotografias também serão disponibilizadas na Internet em um canal desenvolvido para a pesquisa. As atividades acontecerão durante os meses de novembro e dezembro de 2017, na EEEM Aristóbulo Barbosa Leão. Buscando fundamentar e validar a pesquisa realizada, será necessário o registro através de fotos e vídeos das atividades desenvolvidas pelos alunos, bem como posterior entrevista com os mesmos. Para isso, solicitamos a autorização dos pais ou responsáveis para a utilização das fotos e vídeos dos alunos, bem como do material produzido por eles, com fins pedagógicos e de pesquisa, e para a divulgação na Internet dos materiais produzidos durante a pesquisa.

Eu, ____, CPF ______________________ responsável pelo aluno(a)____ autorizo a exibição de fotos e vídeos do mesmo, bem como do material produzido por ele durante as atividades, para fins pedagógicos e de pesquisa, referente às atividades desenvolvidas na pesquisa "Ensino de Geometria Projetiva e Perspectiva – Um olhar pelas Fotografias" bem como a divulgação na Internet das fotografias por ele produzidas. Declaro estar ciente de que a participação do(a) aluno(a) supracitado(a) não representa riscos para ele(a), pelo contrário, a experiência pretende contribuir para sua formação educacional. Além disso, ele também não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira.

________________, _______ de outubro de 2017.

Assinatura ____

ANEXO II: TERMO DE COMPROMISSO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, ____, CPF__________________, ocupante do cargo de direção da Escola Estadual de Ensino Médio Aristóbulo Barbosa Leão, autorizo a gravação em áudio, vídeo e imagens das aulas que serão ministradas no mês de novembro e dezembro de 2017, pela Professora Lenise Júlia Fassini da Silva, efetiva nesta Escola, com participação de uma professora da Universidade Federal do Espírito Santo.

Declaro estar ciente que esses dados serão usados na investigação desenvolvida pela Professora Lenise Júlia Fassini da Silva, orientada pela pesquisadora Professora Doutora Julia Schaetzle Wrobel como parte da dissertação de mestrado intitulada “Ensino de Geometria Projetiva e Perspectiva – Um olhar pelas Fotografias”, desenvolvida no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Espírito Santo.

Autorizo a utilização das informações coletadas em gravações de áudio, vídeo e imagens feitas para fins acadêmico-científicos na Escola Estadual de Ensino Médio Aristóbulo Barbosa Leão.

Estou ciente de que em qualquer etapa do estudo terei acesso à pesquisadora responsável - Profa. Dra. Julia Schaetzle Wrobel pelo endereço eletrônico juliasw@gmail.com. Além disso, não terei nenhum custo nem receberei nenhuma vantagem financeira. Caso necessário, a qualquer momento poderei revogar este termo de consentimento livre e esclarecido se comprovada atitudes que causem prejuízo à instituição ou que comprometam o sigilo de dados dos participantes desta pesquisa.

Assim, tendo sido informado dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada, tendo esclarecido minhas dúvidas, autorizo a utilização e a divulgação dos dados com a finalidade exposta.

Serra, ____ de outubro de 2017.

____

Prof. Marcelo Alves de Castro

Diretor EscolarSecretaria Estadual de Educação do Espírito Santo

ANEXO III – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO ASSINADO PELO DIRETOR DE ESCOLA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

PROFMAT

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, Marcelo Alves de Castro, CPF [redacted], ocupante do cargo de direção da Escola Estadual de Ensino Médio Aristóbulo Barbosa Leão, autorizo a gravação em áudio, vídeo e imagens das aulas que serão ministradas no mês de novembro e dezembro de 2017, pela Professora Lenise Júlia Fassini da Silva, efetiva nesta Escola, com participação de uma professora da Universidade Federal do Espírito Santo.

Declaro estar ciente que esses dados serão usados na investigação desenvolvida pela Professora Lenise Júlia Fassini da Silva, orientada pela pesquisadora Professora Doutora Julia Schaetzle Wrobel como parte da dissertação de mestrado intitulada "Ensino de Geometria Projetiva e Perspectiva – Um olhar pelas Fotografias", desenvolvida no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Espírito Santo.

Autorizo a utilização das informações coletadas em gravações de áudio, vídeo e imagens feitas para fins acadêmico-científicos na Escola Estadual de Ensino Médio Aristóbulo Barbosa Leão.

Estou ciente de que em qualquer etapa do estudo terei acesso à pesquisadora responsável - Profa. Dra. Julia Schaetzle Wrobel pelo endereço eletrônico juliasw@gmail.com. Além disso, não terei nenhum custo nem receberei nenhuma vantagem financeira. Caso necessário, a qualquer momento poderei revogar este termo de consentimento livre e esclarecido se comprovada atitudes que causem prejuízo à instituição ou que comprometam o sigilo de dados dos participantes desta pesquisa.

Assim, tendo sido informado dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada, tendo esclarecido minhas dúvidas, autorizo a utilização e a divulgação dos dados com a finalidade exposta.

Serra, 20 de outubro de 2017.

Marcelo Alves de Castro
Diretor Escolar
Aut. Nº 777-S
Nº Funcional 504765

Prof. Marcelo Alves de Castro
Diretor Escolar
Secretaria Estadual de Educação do Espírito Santo

Campus Universitário Alaor de Queiroz Araújo
Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, Vitória – ES | CEP: 29075-910

ANEXO IV: PERGUNTAS FEITAS NA OFICINA

1° momento:

1 Você acha que existem outras geometrias diferentes com a que você conhece? Quais?

2 Você consegue afirmar quando um objeto é tridimensional e quando é bidimensional? Como?

3 Como você pode garantir que um objeto esteja na tridimensionalidade?

4 No caso do vídeo, o que o piloto vê ao realizar seu trajeto?

2° momento:

5 Qual é a relação entre a Geometria Projetiva com a Geometria Euclidiana?

6 O que você acha que é a Geometria Projetiva?

7 Onde você acha que pode usar a Geometria Projetiva?

3° momento:

8 Você acha que nesses quadros a noção de profundidade está bem colocada? O que falta nele?

9 Nos desenhos apresentados a seguir feitos na aula anterior, o que faltou? O que você percebe neles?

10 Quais elementos matemáticos você percebe nas fotos de Sebastião Salgado?

11 Por que eu tenho objetos maiores na frente e por que os objetos do fundo são menores?

12 Por que as estradas se encontram? Mas retas paralelas nunca se encontram, por que na foto elas se encontram?

ANEXO V: QUESTIONÁRIO DE CONCLUSÃO DA OFICINA

1- Você sabia que existia mais de um tipo de geometria?
Sim ( ) Não ( )

2- Você sabia o que era a Geometria Projetiva?
Sim ( ) Não ( )

3- Você viu alguma relação de Geometria Projetiva com fotografia? Qual?
Sim ( ) Não ( )

Qual? ____

4- Você viu alguma relação de Geometria Projetiva com desenhos (arte)? Qual?
Sim ( ) Não ( )

Qual? ____

5- Você sabia que matemática e arte podiam estar tão ligados?
Sim ( ) Não ( )

6- Usar fotografias facilitou a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos?
Sim ( ) Não ( )

7- O que você achou desta oficina?

____

____