UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – PPGE/CE/UFES

THIARLA XAVIER DAL-CIN ZANON

IMAGENS CONCEITUAIS DE COMBINATÓRIA NO ENSINO SUPERIOR DE MATEMÁTICA

VITÓRIA – ES
2019

Centro de Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação

THIARLA XAVIER DAL-CIN ZANON

IMAGENS CONCEITUAIS DE COMBINATÓRIA NO ENSINO SUPERIOR DE MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação da Universidade Federal do Espírito Santo – PPGE/CE/UFES, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Educação, na área de Educação e Linguagens: Matemática, sob a orientação da professora Doutora Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner.

VITÓRIA – ES

2019

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

Z33i

Zanon, Thiarla Xavier Dal-Cin, 1983-
Imagens conceituais de combinatória no ensino superior de matemática / Thiarla Xavier Dal-Cin Zanon. - 2019.
332 f. : il.

Orientadora: Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner.
Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Educação.

1. Análise combinatória. 2. Imagens conceituais. 3. Licenciandos em matemática. 4. Educação matemática. 5. Ensino superior. I. Santos-Wagner, Vânia Maria Pereira dos. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Educação. III. Título.

CDU: 37

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

THIARLA XAVIER DAL-CIN ZANON

IMAGENS CONCEITUAIS DE COMBINATÓRIA NO ENSINO SUPERIOR DE MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Educação da Universidade Federal do Espirito Santo como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Educação.

Aprovada em 22 de fevereiro de 2019.

COMISSÃO EXAMINADORA

Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner

Professora Doutora Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Universidade Federal do Espírito Santo

Professor Doutor Erineu Foerste
Universidade Federal do Espírito Santo

Geide Rosa Coelho

Professor Doutor Geide Rosa Coelho
Universidade Federal do Espírito Santo

Professor Doutor Alex Jordane de Oliveira
Instituto Federal do Espírito Santo

Professor Doutor Luciano Lessa Lorenzoni
Instituto Federal do Espírito Santo

Professor Doutor Victor Augusto Giraldo
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por guiar meus bons encontros, por minha vida, por minha família, por tudo que sou e tenho. A Ele, graças por mais esta conquista em minha vida!

Esta tese de doutorado tornou-se possível graças ao meu sonho de ser professora de matemática. À medida que eu crescia, meus pais, Amarildo e Júlia, começaram a sonhar junto comigo. Aos três anos de idade, colocaram em minhas pequenas mãozinhas meus primeiros instrumentos de trabalho: um lápis e uma folha de papel. Além disso, meu pai pedreiro e minha mãe costureira, sempre me ensinaram a ver a matemática como a arte das formas e das medidas, mesmo sem ao menos terem concluído o ensino fundamental. Como é bom lembrar desse tempo no qual eu adorava construir casas, móveis e costurar as roupas das minhas bonecas!

Assim, o meu sonho deixou de ser só meu e passou a ser nosso, pois segundo o ditado popular, "um sonho que se sonha só, é só um sonho que se sonha só, mas sonho que se sonha junto é realidade". Portanto, aqui estamos nós... chegando à concretização de um sonho de infância! Além dos meus pais, outras pessoas da minha família passaram a sonhar junto comigo: Sidney, Taísa, Jonathan, Adriana, Dona Terezinha, Antônio, Tia Rosa, Tio Marcos, Ana Victória, Tia Cida, Tio Cirinho, Larissa, Davi e vovó Carmem. Ao Sidney, agradeço pelo amor, respeito, apoio, pela presença constante em minha vida e pela compreensão em meio a tantas ausências. À minha irmã Taísa que, com seu sorriso, alegra meus dias e com sua sabedoria própria tanto tem me ensinado. Com os olhos cheios de lágrimas, agradeço a vocês por tudo que fizeram e fazem por mim!

Além da minha família, a vida me proporcionou bons encontros com pessoas que acreditavam em meu profissionalismo: Aparecida, minha primeira diretora na Escola do Montepio, onde eu residia e iniciei minha jornada profissional como professora de educação infantil e anos iniciais do ensino fundamental. Com ela aprendi na prática o que é ser diretora e gerenciar uma escola. Aos amigos da Secretaria Municipal de Educação de Castelo (SEME) e Superintendência Regional de Educação de Cachoeiro de Itapemirim (SRECAC), pois com vocês aprendi a ver a escola com os olhos do sistema educacional a partir do estudo constante da legislação educacional brasileira. Agradeço pela parceria de todos vocês até os dias de hoje!

Em 26/12/12 cheguei no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo (IFES), Campus Cachoeiro de Itapemirim. Lá encontrei Jorginho, que na época era coordenador do Curso Superior de Licenciatura em Matemática me esperando para assinar

meu termo de exercício. Fui recebida com um “só você branquela para me tirar das férias e vir aqui!”. Abaixei a cabeça e sorri. A você meu parceiro de trabalho e grande amigo, agradeço pelo tempo dedicado a mim e por todas as nossas conquistas junto ao Curso de Licenciatura em Matemática do Campus Cachoeiro de Itapemirim. Depois, durante o caminhar vieram o professor Edson Maciel, atual diretor geral, e os matemáticos Laucinéia, nossa coordenadora de curso, e Giovani Prando, popular Jojo, que atualmente está no Campus Aracruz, com quem trocávamos muitas ideias sobre formação de professores. Muito me orgulha ser parte do IFES e tê-los como companheiros de trabalho!

Além desses, encontrei no IFES pessoas maravilhosas as quais agradeço pela generosidade com que me receberam e pelo carinho e respeito profissional através do qual desenvolvemos nosso trabalho diário. Agradeço especialmente ao IFES pela licença concedida durante os quatro anos de doutorado. Foi a primeira vez na minha vida que eu consegui somente estudar! Junto ao IFES, também conheci Raphael que se tornou um parceiro incansável profissionalmente e pessoalmente. Obrigada pelo apoio, paciência e carinho durante todos esses anos! Seu sorriso largo sempre me faz acreditar que é possível! Ainda no IFES, trabalhei com Fernanda e com os licenciandos de 2016 e 2017. Vocês foram um presente! Quanto carinho e paciência! Obrigada pela disponibilidade de vocês, pelos encontros que tivemos e pelas aprendizagens que construímos. Letícia, Rafael, Carina, Alex, Alice, Felipe, Geane, Isis, Joice e Vini, sentirei saudade!

Em 2015 quando cheguei na UFES, encontrei Simone e José Carlos. Eles estiveram comigo ao longo de toda essa jornada. Com eles, dividi minhas angústias, minhas alegrias, meus desabafos e claro, minhas comidas. Como trabalhamos bem juntos! Faço um agradecimento especial a Simone. Minha amiga, como aprendi com você. É impossível medir e listar tudo. Saiba que você me fez uma pessoa melhor. E não sei como será minha vida sem você daqui para frente... Às vezes nos perguntávamos: Como é que Deus pode ser tão generoso conosco? Aproximar duas pessoas que nunca haviam se encontrado antes e que foram tão importantes uma para a outra durante toda essa caminhada. Nesse período também encontrei Geraldo Broetto que muito contribuiu com minhas leituras, e os amigos do Grupo de Estudo em Educação Matemática do Espírito Santo (GEEM-ES), com os quais estudávamos semanalmente para aprendermos mais e melhorarmos a qualidade de nossas aulas de matemática na educação básica e no ensino superior. Agradeço especialmente a Bernadete e a Sandra, companheiras de longa data!

Na UFES também reencontrei a professora Vânia que seria minha orientadora de doutorado e com a qual eu já havia trabalhado durante o mestrado (2009-2011). Um presente

de Deus na minha vida. Como aprendi com a senhora. Desculpe por não ter sido aquela aluna brilhante! Eu tentei... Lhe agradeço especialmente, que mesmo sem me conhecer, acreditou em mim. Acreditou que seríamos capazes de juntas, construirmos inúmeros conhecimentos. Obrigada por ter me permitido cursar o Mestrado e agora o Doutorado, e por ter me possibilitado conhecer-me como professora. Por ter estado ao meu lado quando me olhei no espelho e percebi que meus conhecimentos matemáticos eram limitados, mas que poderia aprender a cada dia e que juntas poderíamos contribuir para o ensino de matemática.

Agradeço ainda aos professores Alex Jordane, Erineu Foerste, Geide Rosa Coelho, Luciano Lessa Lorenzoni, Rogério Drago e Victor Augusto Giraldo, pelos valiosos comentários. Obrigada por terem contribuído para a condução deste estudo e por serem parte de minha banca. Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE, meu muito obrigado pelos momentos especiais em que compartilhamos conhecimentos. As aulas de vocês já deixaram saudades. Aos amigos e funcionários do PPGE/CE/UFES Ana, Diogo, Quezia e Roberta, obrigada por toda a colaboração e incentivo que me permitiram chegar ao término desse trabalho. Agradeço especialmente a CAPES pelo apoio financeiro concedido durante o desenvolvimento de toda a pesquisa de doutorado.

Por fim, destaco que esta tese é fruto de um incansável esforço intelectual e físico entre idas e vindas em conversas com amigos, colegas de trabalho, alunos da licenciatura, e, sobretudo da convivência familiar. Em alguns momentos, eu não encontrava ninguém pelo caminho, mas compreendia que deveria caminhar sozinha. Em outros, encontrei pessoas com as quais estava envolvida emocionalmente e institucionalmente e com quem compartilhei meus prazeres e angústias. A todas vocês, o meu muito obrigada!

Dedico este trabalho aos professores de matemática que, assim como eu, lutam por um ensino de qualidade.

Tudo a seu tempo

Todas as coisas têm seu tempo, e todas elas passam debaixo do céu segundo o termo que a cada uma foi prescrito. Há tempo de nascer, e tempo de morrer. Há tempo de plantar, e tempo de arrancar o que se plantou. Há tempo de matar, e tempo de sarar. Há tempo de destruir, e tempo de edificar. Há tempo de chorar, e tempo de rir. Há tempo de se afligir, e tempo de saltar de gosto. Há tempo de espalhar pedras, e tempo de as ajuntar. Há tempo de dar abraços, e tempo de se pôr longe deles. Há tempo de aguardar, e tempo de lançar fora. Há tempo de rasgar, e tempo de coser. Há tempo de calar, e tempo de falar. Há tempo de amor, e tempo de ódio. Há tempo de guerra, e tempo de paz. [...] Tudo o que Ele fez é bom em seu tempo...

Eclesiastes, 3

RESUMO

Esta pesquisa qualitativa de doutorado como estudo de caso está inserida no campo da educação matemática e vincula-se ao Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação da Universidade Federal do Espírito Santo – PPGE/CE/UFES. Seus objetivos foram identificar imagens conceituais evocadas por universitários quando resolvem tarefas de combinatória, e investigar como as imagens conceituais de universitários acerca dos agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação se reconstroem quando trabalhamos com tarefas específicas de combinatória. Assim, esta pesquisa traz perspectivas teóricas de Tall e Vinner (1981) sobre a imagem conceitual e a definição do conceito, Hershkowitz (1994), ao tratar de exemplos protótipos e associações com atributos relevantes e irrelevantes, e Skemp (1976) sobre a compreensão instrumental e relacional. Quanto à análise combinatória, recorreu-se aos estudos de Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991), Hazzan (1993), Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), Guzmán (2000) e Paiva (2009). Portanto, com base no objeto de estudo situado na perspectiva da formação inicial, procedeu-se à pesquisa no Curso de Licenciatura em Matemática do IFES – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo campus Cachoeiro de Itapemirim. Dela participaram sete estudantes do sexto período que cursavam a disciplina de Análise Combinatória e Probabilidade em 2017/2. A análise dos dados apontou a fragilidade das imagens conceituais dos licenciandos, mostrando que o conhecimento prévio de combinatória e dos agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação deles não eram todos coerentes. Apresentavam algumas imagens conceituais da definição do conceito, oscilando entre coerentes, fragmentadas, incoerentes e equivocadas em relação ao conceito formal descrito pela literatura matemática. Por isso, do ponto de vista científico, possuem uma imagem conceitual mais intuitiva do que formal. Com a revisão de literatura e os estudos sobre os cursos de licenciatura em matemática do Espírito Santo foi possível ver que, desde a educação básica até o ensino superior, é conferido à combinatória um tratamento breve e superficial. Ademais, a disciplina de Análise Combinatória e Probabilidade ocupa pouco espaço no currículo e uma pequena carga horária do efetivo trabalho é destinada ao conteúdo de combinatória. Nesse contexto, o planejamento colaborativo de pesquisa e aula e/ou aula e pesquisa mostrou-se potente à reconstrução de imagens conceituais pelos licenciandos em matemática. O trabalho integrado e simultâneo envolvendo os agrupamentos simples de combinatória mediante a compreensão da estrutura matemática subjacente ao enunciado a partir de aulas baseadas na resolução de problemas e em práticas discursivas em matemática possibilitaram o enriquecimento das imagens conceituais. Além disso, a pesquisa mostra o potencial do trabalho colaborativo entre professores e pesquisadores.

Palavras-chave: Análise combinatória. Imagens conceituais. Licenciandos em matemática. Educação matemática. Ensino superior.

ABSTRACT

This qualitative doctoral research as case study is inserted in the field of mathematical education and is linked to the Postgraduate Program in Education of the Education Center of the Federal University of Espírito Santo - PPGE/CE/UFES. Their objectives were to identify conceptual images evoked by university students when solving combinatorial tasks, and to investigate how the conceptual images of university students about simple groupings of arrangement, permutation and combination reconstruct when we work with specific combinatorial tasks. In this sense, this research brings theoretical perspectives from Tall and Vinner (1981) abour concept image and concept definition, Hershkowitz (1994), when dealing with prototypes and associations with relevant and irrelevant attributes, and Skemp (1976) about instrumental and relational understanding. For the combinatorial analysis, we used the studies of Morgado, Carvalho, Carvalho and Fernandez (1991), Hazzan (1993), Batanero, Godino and Navarro-Pelayo (1996), Guzmán (2000) and Paiva (2009). Therefore, based on the study object located from the perspective of the initial formation, the research was carried out in the Mathematics Teacher Education Degree Course of the IFES - Federal Institute of Education, Science and Technology of the Espírito Santo, Cachoeiro de Itapemirim campus. In this study participated seven undergraduate students of the sixth period who studied the discipline of Combinatorial Analysis and Probability in 2017/2. The analysis of the data pointed to the fragility of the conceptual images of the undergraduate students, showing that the prior knowledge of combinatorics and the simple groupings of arrangement, permutation and combination of them were not all coherent. They presented some conceptual images of the definition of the concept, oscillating between coherent, fragmented, incoherent and mistaken in relation to the formal concept described by the mathematical literature. Therefore, from the scientific point of view, they have a conceptual image that is more intuitive than formal. With the literature review and the studies about the mathematics teacher education degree courses of Espírito Santo state it was possible to see that, from basic education up to higher education, it is given a brief and superficial treatment to combinatorial. In addition, the discipline of Combinatorial Analysis and Probability occupies little space in the curriculum and a small workload of the actual work is destined to the combinatorial content. In this context, the collaborative planning of research and classroom lessons and/or lecture and research has proved potent in the reconstruction of conceptual images by the undergraduate students in mathematics. The integrated and simultaneous work involving simple combinatorial groupings through the understanding of the mathematical structure underlying the statement from classes based on problem solving and discursive practices in mathematics allowed the enrichment of the conceptual images. In addition, the research shows the potential of collaborative work between teachers and researchers.

Keywords: Combinatorial analysis. Conceptual images. Undergraduate students in mathematics teacher education. Mathematics education. Higher education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1: APRESENTAÇÃO – ORIGENS DA PESQUISA E QUESTÕES DE INVESTIGAÇÃO

Você já se perguntou como números de telefone são formados? E placas de carros? E senhas? E códigos de identificação de produtos (códigos de barras)? Já telefonou para alguém e, sem perceber, digitou equivocadamente algum número e, quando a pessoa atendeu, você disse que era engano? E ainda ficou se questionando: *Mas… qual número digitei errado?* Ou ainda, alguém já te ligou e perguntou por outra pessoa? Já parou para pensar na organização de trajetos de linhas de ônibus, trem, metrô, na elaboração de horários de aula, na organização do número de partidas de um campeonato de futebol? Esses são alguns exemplos em que a análise combinatória aparece como parte da atividade humana e se faz presente diariamente na vida das pessoas. Assim, pensar em combinatória significa compreender números e operações de contagem a eles relacionadas. Em cenários como esses, o foco está na matemática discreta, está em determinar uma contagem.

Com o advento da internet, a matemática discreta foi ganhando corpo e passou a ser um amplo campo de investigação. Isto por que, possui inúmeras aplicações em diferentes áreas do conhecimento, tais como biologia, medicina, engenharia, e, tecnologias em geral. Deste modo, torna-se um conhecimento indispensável ao desenvolvimento de um cidadão crítico e reflexivo que seja capaz de usar a matemática para o bem comum e não ser ludibriado pelos usos que dela são feitos.

Um exemplo atual de como a matemática discreta em seus aspectos combinatórios vem interferindo nos modos de vida em sociedade, se refere ao fato de que, a partir de setembro de 2018, as placas de automóveis passaram a ter o padrão Mercosul. Isso que dizer que, a partir dessa data, todo veículo novo, transferido, ou, caso o proprietário deseje e pague pelo serviço, terá uma nova placa composta por uma estruturação alfanumérica organizada de modo diferente da tradicional. Ou seja, aumenta-se a quantidade de caracteres que são letras e diminui-se aqueles que são números. Desse modo, o código seguirá um padrão: será formado por quatro letras e três números respeitando a sequência LLL NLNN, em que L indica a posição da letra e N representa o número.

Esta ideia difere-se daquela empregada até final de agosto de 2018 quando as placas eram compostas de três letras e quatro números. Observa-se ainda que a quantidade de dígitos das sequências que configuram cada placa de automóvel permanece com sete posições a serem ocupadas. Por exemplo, o proprietário de um automóvel de placa PPS 5455 terá uma nova combinação composta pela sequência PPS 5E55. Neste caso, o veículo permaneceu com a mesma placa, alterando somente a antepenúltima posição. No entanto, ressalta-se que a possibilidade de alteração do código alfanumérico da placa será determinada por cada Departamento de Trânsito (Detran). Desse modo, placas podem apresentar composições totalmente distintas das letras e números que compunham a anterior.

No caso do exemplo acima, a inserção da letra E na antepenúltima posição dá-se em função de que será utilizado o conjunto de letras de A até J nesse período de transição. Isso será feito para que ambos os modelos de placa (tradicional e Mercosul) possam conviver em harmonia até a completa transição com data limite prevista para dezembro de 2023. Assim, a posição que anteriormente era ocupada por um número, passa a ser ocupada por uma letra de acordo com a seguinte correspondência:

Tabela 1 – Relação letra-número em placas nacionais segundo o padrão Mercosul

SEGUNDO NÚMERO DA PLACA ATUAL	LETRA CORRESPONDENTE
0	A
1	B
2	C
3	D
4	E
5	F
6	G
7	H
8	I
9	J

Fonte: Elaborada pelas pesquisadoras a partir de informações disponíveis em www.denatran.gov.br

Este exemplo pode ser problematizado em aulas de combinatória, pois envolve a matemática discreta e suas implicações em uma situação real da vida em sociedade. Há que se observar que as mudanças sugerem que com as novas placas os governos irão arrecadar mais impostos e os veículos poderão transitar livremente por todos os países que integram o Mercosul. Isto implica em pontos positivos e negativos para os sujeitos que têm sua vida influenciada pela matemática, principalmente pela combinatória.

Na escola, a matemática discreta começou a ganhar corpo no início da década de 1990, com a publicação de *Professional Standards for Teaching Mathematics [Professional Standards] [Normas Profissionais para o Ensino de Matemática]*, em 1991, pelo National Council of Teachers of Mathematics [Conselho Nacional de Professores de Matemática]

NCTM. Perto do início dos anos 1990, publicou-se, em 1989, o *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics [Standards] [Currículo e Padrões de Avaliação para a Matemática Escolar]*. Esses dois documentos americanos se apresentaram como mudanças promissoras para o currículo e a forma de ensinar, inferindo sobre uma possível reforma para a matemática escolar na década seguinte. Além disso, influenciaram vários países em seus posicionamentos curriculares desde os anos finais do século XX. Nossos documentos brasileiros dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para anos iniciais, finais, ensino médio e educação de jovens e adultos (BRASIL, 1997, 1998, 2000, 2002, 2007) também foram influenciados por essas publicações americanas.

Além disso, esses documentos americanos (Standards e Professional Standards) apresentavam a matemática discreta como aquela que se refere às "propriedades matemáticas de conjuntos e sistemas numeráveis, e o seu estudo é indispensável no mundo do processamento da informação e na resolução de problemas que envolvam métodos computacionais" (ABRANTES, 1994, p. 17). Logo, faz-se necessária a "investigação de cenários onde as funções são definidas sobre conjuntos de números discretos ou finitos tais como os inteiros positivos" (SOUZA, 2010, p. 47). Nesse contexto, a combinatória constitui, portanto, o maior componente da matemática discreta, pois é considerada como um campo da matemática que analisa estruturas e relações discretas cujo objetivo é a obtenção de métodos de contagem.

Apesar de origem incerta, a análise combinatória tem feito parte da atividade humana. As primeiras civilizações evidenciaram regras básicas de contagem (BIGGS, 1979). Quando analisamos detalhes dessa contagem primitiva, observamos a ideia de conjunto e a relação biunívoca entre os elementos que o compunham. Isso aponta pistas do início da análise combinatória. No entanto, mesmo que não existam provas ou justificações, os primeiros indícios de combinatória datam do século sexto a.C., os quais são percebidos em diferentes situações em que o pensamento combinatório é usado na resolução de problemas. Nessa época, na Índia, acredita-se datar uma situação apresentada no tratado médico de Susruta, no qual se identificava o uso de combinações:

> [...] podem ser feitas 63 combinações de seis gostos diferentes – amargo, azedo, salgado, adstringente, doce e picante – tomando-se um de cada vez, dois de cada vez, três de cada vez ... . Por outras palavras há cinco gostos simples, 15 combinações de dois, 20 combinações de três, e assim sucessivamente (KATZ, 2010, p. 285).

Katz (2010) destaca que outras obras dessa mesma época incluem exemplos de problemas que envolvem cálculos semelhantes e usam números "pequenos", conforme apresentado no tratado médico de Susruta. Para a resolução de problemas desse tipo, uma enumeração simples pode ser o suficiente para encontrar uma possível resposta. Não há indícios de que foram desenvolvidas fórmulas relevantes nesse período, no entanto a obra de Varãhamihira, datada exatamente do século VI, envolve números maiores:

> [...] se uma quantidade de 16 substâncias se varia de quatro formas diferentes, o resultado será 1820. Por outras palavras, visto que Varãhamihira estava a tentar criar perfumes usando quatro ingredientes de um total de 16, calculou que haviam 1820 maneiras diferentes (= C_4^{16}) de escolher os ingredientes (KATZ, 2010, p. 285).

O autor acredita ser improvável que Varãhamihira tenha enumerado as 1.820 combinações. Assim, supõe que ele já conhecia algum método para calcular esse número, embora não haja fórmulas para cálculos combinatórios na literatura indiana do tempo. Por outro lado, Katz (2010) aponta que, na obra de Varãhamihira, parecia haver uma referência “a uma regra para derivar esses números um de cada vez, como o método usual para produzir o triângulo de Pascal” (p. 285). Na Índia, por volta do princípio do século XIII, datam algumas formalizações de combinações e permutações. Depois, no início do século XXII a.C., por volta do ano 2200, aparece o exemplo mais antigo de quadrado mágico (KATZ, 2010; EVES, 2004; BOYER, 1974; 2012) associado à permutação como um caso particular de arranjo.

A combinatória moderna surgiu por volta de 1654 e 1730, sob a égide de matemáticos, tais como Fermat (1601 – 1665), Bessy (1605 – 1675), Pascal (1623 – 1662), Leibniz (1646 – 1716), Bernoulli (1654 – 1705), Stirling (1692 – 1770), entre outros. Nessa época, a combinatória não foi estudada por si só. Em geral, os matemáticos “só o fizeram para resolver problemas relativos a jogos de azar e jogos de cartas, álgebra e cálculos diferenciais” (KNOBLOCH, 2013, p. 163). A Pascal e Fermat também é atribuído o início da teoria das probabilidades, por terem trocado cartas em 1654, discutindo questões teóricas acerca de jogos de azar. Na ocasião, dialogavam sobre o problema dos pontos e problemas particulares envolvendo jogos de dados. Entretanto, a organização dessa teoria é atribuída a matemáticos como Euler (1710-1761), Laplace (1749 – 1827) e Dirichlet (1805 – 1859).

Com esse breve caminhar histórico acerca da combinatória, vimos que, desde os primórdios, ela nasceu como uma possibilidade para resolver problemas aplicados a contextos reais. Deste modo, vem se constituindo como uma das mais importantes teorias matemáticas modernas por ser aplicada às necessidades humanas e a outros campos de conhecimento, como a topologia, a computação, a estatística, a teoria dos grafos e a criptografia. Considerando ainda a vertente histórica e educacional, no Brasil, livros (MORGADO, CARAVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991; HAZZAN, 1993), documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, BRASIL, 1997, 1998, 2000, 2002, 2007) e pesquisas (STURM, 1999), relacionados à combinatória começam a emergir na década de 1990. Tal fato pode ter inferência dos Standards publicados em 1991 nos Estados Unidos, um documento que, desde então, vem influenciando o ensino de matemática mundialmente. Desde essa época, há uma crescente produção brasileira que se foi consolidando a partir dos anos 2000.

Paralelamente a esse movimento, no início da década de 90, eu[1] iniciava meu processo educativo formal nos anos iniciais do ensino fundamental em escola situada em Montepio, zona rural de Castelo-ES. Embora tenha ingressado na educação infantil no final dos anos 80, aos 03 anos de idade ainda, esforço-me para rememorar aprendizagens relacionadas a matemática discreta associadas a contagem. Recordo-me vagamente de tarefas no ensino fundamental em que a professora solicitava uma quantidade de números que poderia ser formada a partir de alguns algarismos dados. O que hoje pode ser traduzido em problemas como “Com os algarismos 3, 4 e 5 quantos números distintos podem ser formados sem que os mesmos sejam repetidos em qualquer uma das posições? Não me recordo de ter estudado elementos da combinatória em outros momentos de minha vida estudantil.

Com o propósito de fazer do magistério minha profissão, cursei o normal, habilitação profissional em magistério, obtendo em 2001 o título de professor de 1.º grau da 1.ª à 4.ª série do ensino fundamental. Em 2005 graduei-me em licenciatura plena em Ciências, Habilitação em Matemática pelo Centro Universitário São Camilo Espírito Santo. Graduei-me ainda em licenciatura plena em Pedagogia, cursada na modalidade à distância, pela Universidade de Uberaba (UNIUBE), em 2010. Especializei-me em Matemática em 2006 (Faculdades Integradas de Jacarepaguá, FIJ), em Educação Infantil em 2007 (Universidade Castelo Branco, UCB), e, em Gestão Escolar Integradora em 2011. Cursos presenciais cursados em polos das universidades com duração de cerca de 12 meses cada. Ao defender uma dissertação em educação matemática, tornei-me mestra em Educação em 2011 pelo Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES).

Em 2003, eu iniciava minha carreira docente como professora de educação infantil e anos iniciais do ensino fundamental no distrito de Montepio, localizado no interior do município de Castelo-ES, onde residia com minha família e na mesma escola em que estudei. Lá ensinava os processos de contagem “sem saber” que eles se relacionavam com a combinatória e quiçá com a matemática discreta. Durante os anos de 2003 a 2010 e de minha

[1] Este capítulo foi escrito primordialmente em primeira pessoa do singular. No entanto, ao falar de mim e de minha orientadora, escrevo na primeira pessoa do plural.

graduação (2002 a 2005), atuei, em caráter de designação temporária (DT), na educação infantil, séries/anos iniciais do ensino fundamental em escolas da zona rural e na Associação de Pais e Amigos dos Excepcionais (APAE), do município.

Nesse período, lecionei também na Educação de Jovens e Adultos (EJA) e no Programa de Erradicação do Trabalho Infantil (PETI). Em 2010, trabalhei na Secretaria Municipal de Educação de Castelo (SEME), no Núcleo de Planejamento Educacional, acompanhando o desenvolvimento das 26 escolas que compunham a rede de ensino municipal. Esse acompanhamento ocorreu por meio da elaboração e vivência das propostas pedagógicas na orientação à formação continuada e na implantação do Projeto Escola de Tempo Integral em duas das dez unidades escolares situadas na zona rural. Também em 2010, atuei como tutora presencial da especialização em Educação do Campo no município de Vargem Alta-ES. O grupo era constituído por dez professores que atuavam diretamente em escolas multisseriadas situadas na zona rural desse município. Muitas vezes, recebiam a denominação de professores polivalentes ou generalistas.

Ainda em 2010, outra experiência fundamental foi o fato de ser aprovada no concurso público estadual realizado pela Secretaria de Estado da Educação (SEDU), na função de pedagoga. Passei a atuar, mais uma vez, em uma escola de ensino fundamental e médio situada no interior do município de Brejetuba-ES, na qual vivenciei momentos muito semelhantes àqueles já mencionados anteriormente no que se refere ao processo de ensino e de aprendizagem da educação básica. Essa experiência de apenas quatro meses em Brejetuba-ES, associados aos oito anos de experiência docente no município de Castelo-ES, levou-me a questionar se os modelos de formação continuada instituídos estavam auxiliando os professores em seus processos formativos. Esse tema constituiu minha pesquisa de mestrado.

A partir de fevereiro de 2011, passei a exercer a função de supervisora escolar na Superintendência Regional de Educação de Cachoeiro de Itapemirim-ES (SRECAC) por meio de concurso interno realizado pela própria SEDU. Fui aprovada em primeiro lugar e assumi a função administrativa de intervenção direta no cotidiano escolar. Minha finalidade era atuar em uma relação de parceria com a equipe gestora das unidades de ensino, prestando orientação técnica e contribuindo para a melhoria contínua da qualidade da aprendizagem dos alunos. Em 2012, além de exercer a função de supervisora escolar, lecionei nos cursos de licenciatura do Centro Universitário São Camilo-ES, auxiliando na formação de professores da educação básica.

Ainda em 2012, fui aprovada no concurso público do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES), para atuar na licenciatura em Matemática, no *campus* Cachoeiro de Itapemirim.

Ao ser aprovada em primeiro lugar, passei, em 26 de dezembro desse mesmo ano, a exercer minhas atividades docentes exclusivamente no IFES. Além de professora da licenciatura regular e da segunda licenciatura em Matemática, coordenei o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), participei de projetos para a criação e angariação de recursos para a implementação do Laboratório Interdisciplinar de Formação de Educadores (LIFE), colaborei nas atividades desenvolvidas pelo Programa de Consolidação das Licenciaturas (Prodocência) e coordenei o Curso Superior de Licenciatura em Matemática e de Segunda Licenciatura em Matemática desde meu ingresso até meu afastamento para o doutorado em março de 2015. Esse movimento mostra um pouco do meu engajamento no processo de formação docente no qual a combinatória aparecia de modo sutil, intuitivo e associada principalmente a adição e a multiplicação, processos fundamentais da contagem.

Como professora de licenciatura em Matemática, percebi, principalmente durante as quatro disciplinas de estágio supervisionado, que os licenciandos evitavam desenvolver aulas de combinatória, pois não compreendiam conceitualmente suas estruturas. Constatamos, ainda na licenciatura em Matemática, que os alunos pareciam ter decorado um tipo/modelo de problema e até a fórmula para resolvê-lo. No entanto, quando um licenciando era solicitado a explicar os motivos de escolha, o que diferenciava um conceito do outro, ou alterávamos o enunciado do problema, a dúvida aparecia: este problema é de arranjo, permutação ou combinação?

A partir de então, começamos a nos interessar pela análise combinatória. Em um breve "passeio" pelas produções brasileiras que tratam do ensino de combinatória para diferentes níveis de escolaridade, percebemos que, durante a formação inicial, pouco ou quase nada se estuda acerca da combinatória. Por isso, professores a consideram como um conteúdo complicado de ser ensinado, pois é um assunto de difícil compreensão pelos alunos. Nossos licenciandos demonstravam que a combinatória era como um "amontoado" de fórmulas e nomenclaturas, muitas vezes, sem sentido. Além disso, havia escassez de material instrucional que auxiliasse o ensino e a aprendizagem de combinatória.

Subjacentemente a esses pensamentos, decorre que, ao lecionar, o professor pode não notar a relação entre os conteúdos matemáticos, assim como eu não percebia no início de minha carreira no magistério. E, portanto, a combinatória pode ser invisibilizada desde a educação infantil, quando iniciamos a aprendizagem formal dos processos de contagem, até o ensino médio, quando ela é descrita e evidenciada em livros didáticos e na matriz curricular como um conteúdo a ser ensinado nessa etapa da educação básica. Vê-se, assim, um abandono desse conteúdo nos processos educativos formais, tanto na educação básica quanto nos cursos de formação inicial/continuada de professores de matemática, pois como professores ensinarão com conhecimento aquilo que não aprenderam? Diante desse cenário, a formação inicial do professor de matemática assume especial importância.

Sabemos que, no Brasil, a combinatória é parte do currículo das escolas de educação básica. Por outro lado, seu ensino não é muito comum em cursos universitários, quer sejam de formação de professores ou de outras áreas do conhecimento. Para confirmarmos tal afirmativa, procedemos a uma análise documental das ementas dos cursos de licenciatura em matemática do Espírito Santo. Optamos pela licenciatura por ser o *lócus* no qual desenvolvo minhas atividades profissionais e fonte primeira de motivação para a realização deste estudo. Nosso objetivo era verificar se a análise combinatória se apresentava, ou não, como disciplina e quais conteúdos eram abordados. Em caso negativo para ementas, analisamos o Projeto Pedagógico do Curso (PPC), para averiguarmos se a combinatória aparecia como um conteúdo de outra disciplina que compunha a matriz curricular dele. Esse movimento possibilitou a reunião de informações sobre a maneira como a combinatória era compreendida e abordada em cada curso.

Para isso, buscamos suporte no site do Ministério da Educação, e-MEC (http://emec.mec.gov.br), de onde provêm as informações que trazemos à discussão. No período de janeiro a abril de 2018, realizamos uma consulta avançada buscando por cursos de graduação. Assim, geramos um relatório de consulta que foi examinado e culminou em uma análise descritiva dos dados obtidos. Nele verificamos a existência de 41 ofertas de cursos de matemática (licenciatura e bacharelado). Desse total, 38 ofertas referem-se à licenciatura em matemática (38/41 equivalente a 92,7%). As demais três ofertas (03/41 ofertas equivalentes a 7,3%) relacionam-se a cursos de bacharelado em matemática. Ao categorizarmos os cursos de licenciatura em matemática do Espírito Santo segundo a Resolução n.º 2, de 1/7/15, temos que do total de 38 ofertas no estado, 33 delas compreendem os cursos regulares de licenciatura em matemática (33/38 ofertas equivalentes a 86,8%). Ainda dentre as 38 ofertas, temos quatro de formação pedagógica para graduados não licenciados (4/38 ofertas equivalentes a 10,6%) e apenas uma oferta de segunda licenciatura (1/38 oferta equivalente a 2,6%) em matemática.

A partir da análise da ementa e do PPC dos diferentes cursos, verificamos que das 38 ofertas de licenciatura em matemática no estado, apenas seis apresentavam algum conteúdo de combinatória em ementas e descreviam, de modo geral, o conteúdo a ser abordado na disciplina. As instituições públicas de modalidade presencial que dispunham da disciplina de Análise Combinatória e/ou da oferta do conteúdo em outras disciplinas foram o Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Espírito Santo (IFES), *campus* Cachoeiro de

Itapemirim e *campus* Vitória, e, a Universidade Federal do Espírito Santo (UFES) em seus diferentes *campi* localizados nas cidades de Alegre, São Mateus e Vitória. Dentre as instituições privadas que ofertavam a disciplina em si e/ou o conteúdo dentro de outra ementa, encontramos aquelas de modalidade presencial (Centro Universitário São Camilo Espírito Santo, e Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Alegre (FAFIA)), e alguns polos de educação a distância (Centro Universitário Claretiano (CEUCLAR) e Universidade do Sul de Santa (UNISUL)).

De modo geral, vimos que a combinatória apareceu como conteúdo das disciplinas eletivas de "Princípios Combinatórios, Fundamentos da Matemática II, Análise Combinatória e Probabilidade Discreta, Tópicos de Matemática Elementar, Probabilidade e Estatística, e, Análise Combinatória e Probabilidade". A oferta variou de curso para curso e a carga horária mostrou-se progressiva em razão da quantidade de conteúdo da disciplina. Nesse contexto, observamos ofertas no 2.º, 3.º, 4.º, 6.º e 8.º períodos com variações de carga horária de 30, 40, 45, 60 e 75 horas. Em termos de conteúdo de combinatória, notamos certa ênfase em arranjos, permutações e combinações. Nos cursos de bacharelado em matemática da UFES, por exemplo, a combinatória também apareceu como um tópico das disciplinas optativas – "Tópicos de Matemática Elementar" e "Matemática Discreta" – com carga horária de 75 e 60 horas, respectivamente.

Com esse levantamento, evidenciamos que pouca atenção tem sido dada ao ensino de combinatória nesses cursos universitários do Espírito Santo. Além disso, nossa experiência tem mostrado que, da carga horária total das disciplinas que trazem tópicos de combinatória, apenas cerca de dez horas é destinada ao seu ensino. Notamos também que a falta de consenso entre período de oferta e carga horária dificulta o aproveitamento de disciplinas em casos de transferências e não há equiparação em termos de ênfase e profundidade de conteúdo para aqueles que almejam ser professores de matemática e, consequentemente, ensinar combinatória.

Esse cenário consolidou ainda mais a relevância e a necessidade da pesquisa que nos propusemos a desenvolver. Portanto, nossas questões e objetivos advêm das seguintes **hipóteses** de trabalho, estudos de literatura e experiência profissional:

- Imagens conceituais de combinatória desenvolvidas antes do ingresso na universidade, incorporam aspectos do que foi estudado na educação básica, quer seja no ensino médio, fundamental ou educação infantil, primeiras fontes de aprendizagem formal sobre o conteúdo. Portanto, imagens de conceitos de combinatória tais como agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação dos universitários podem não constituir todos coerentes, oscilando entre intuitivas e formais. Desse modo, consideramos positiva a presença de aspectos intuitivos na imagem de um conceito, visto que a intuição é fundamental ao desenvolvimento do pensamento matemático. Assim compreendido, há que se considerar que não existe a intenção de se obter uma estrutura cognitiva livre de conflitos, pois, dessa forma, seria uma reprodução fiel da estrutura matemática formal e não da aprendizagem de cada sujeito singular.

- Algumas pesquisas[2] argumentam que desde a educação básica até cursos universitários, é dado ao estudo de conceitos de combinatória um tratamento breve e superficial. Dessa forma, estudantes universitários podem apresentar dificuldades em relação ao conhecimento de combinatória. Por isso, estamos interessadas em investigar a aprendizagem desse conhecimento por universitários de um curso de licenciatura em matemática.

Portanto, definimos o que era preciso saber e elaboramos as **questões**:

1) Quais imagens conceituais universitários evocam quando resolvem tarefas de análise combinatória[3]?

2) Como as imagens conceituais de universitários acerca de agrupamentos simples se reconstroem durante uma disciplina que aborde análise combinatória?

Delas decorrem dois **objetivos**:

- Identificar imagens conceituais evocadas por universitários quando resolvem tarefas de combinatória.
- Investigar como as imagens conceituais de universitários acerca de agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação se reconstroem quando trabalhamos com tarefas específicas de combinatória.

Nessa perspectiva, mapeamos a produção brasileira sobre combinatória desenvolvida desde 1999, data em que temos registro da primeira pesquisa acerca do assunto, até 2017, em virtude da não atualização imediata dos repositórios digitais das universidades e do banco de teses e dissertações da CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. Detalhes acerca desse mapeamento serão apresentados no capítulo 2. Com esse

---

[2] Ver mapeamento apresentado no capítulo 2 desta tese.
[3] Combinatória e análise combinatória estão sendo usadas como palavras sinônimas.

estudo, percebemos que não existiam pesquisas sobre o desenvolvimento de imagens conceituais dos conceitos simples de arranjo, permutação e combinação por universitários (em nosso caso, licenciandos em matemática) em contexto colaborativo, entendido por nós como o ato de

> […] trabalhar em conjunto, compartilhar tarefas e responsabilidades, procurar maneiras de resolver problemas em conjunto e tentar alcançar objetivos comuns juntos. No Brasil, a cooperação ou colaboração ocorre quando as pessoas estão dispostas a trabalhar juntas ou fazer um esforço em direção a um objetivo comum e, ao mesmo tempo, sentem-se à vontade para participar de um empreendimento conjunto. […]. É importante em um esforço colaborativo que todos os membros: a) falem sobre as tarefas que devem compartilhar e realizar juntos; b) compreendam e discutam as ideias utilizadas nas tarefas; e, c) sintam-se confortáveis e responsáveis por seus resultados (SANTOS-WAGNER, 2003, p. 103, tradução nossa[4]).

Além disso, identificamos algumas lacunas de pesquisa quando examinamos as produções. Desse modo, listamos questionamentos que poderiam tornar-se objeto de nossa investigação. Decidir quais se tornariam a coluna vertebral de nossa pesquisa não foi fácil. Assim, efetuamos escolhas relacionadas (1) a nossa prática profissional (envolveu o lugar onde lecionamos disciplinas de resolução de problemas, prática de ensino e estágio supervisionado); (2) à matemática em si (conceitos e conhecimentos que um professor precisa saber para ensinar adequadamente); (3) ao nosso comprometimento com a formação inicial de professores de matemática; (4) à escassez de pesquisas com enfoque no ensino superior, visto que encontramos uma quantidade significativa de estudos voltados aos anos finais do ensino fundamental e ensino médio; e (5) à originalidade do tema.

Logo, esta pesquisa é fruto de meus anseios e preocupações profissionais em relação ao ensino de análise combinatória associado ao desenvolvimento de imagens conceituais e atributos implícitos no modelo combinatório subjacente a cada problema. Tenho a combinatória simples como lastro matemático de minha pesquisa de doutorado em razão de sua presença na vida em sociedade, em tarefas que nos rodeiam cotidianamente; da sua resistência às mudanças curriculares; e pela dificuldade de ensino dos conceitos por professores e de aprendizagem pelos estudantes. Intriga-nos o fato de olharmos para o

---

[4] [...] jointly working, sharing tasks and responsibilities, searching for ways to jointly resolving problems, and trying to achieve common goals together. In Brazil, cooperation or collaboration occurs when people are willing to work together, or make an effort, towards a common goal, and at the same time feel comfortable in participating in such joint venture. It is not so important that the people involved in the task decide the common goal, an external agent could set this up, but the collaborative team must be willing to work together towards achieving the goal. When people are forced to work together, or do not feel good working with each other or do not find a way of understanding each other, the collaboration would be called false or contrived. When people think about a task, plan how to solve it independently, and after doing everything individually they put the results together as little pieces of a puzzle one would also describe this as false collaboration. It is important in a collaborative endeavour that all the members: a) talk about the tasks they should share and perform together; b) understand and discuss the ideas used in the tasks; and c) feel comfortable and responsible for its results.

currículo de matemática e percebermos que desde os anos 70 do século XX a combinatória vem sendo apresentada com a mesma estrutura matemática. Desse modo, parece que ela se manteve resistente às mudanças curriculares. O último aspecto mencionado também foi um argumento muito enfatizado em praticamente todas as pesquisas que envolviam a temática e foram mapeadas por nós (ver capítulo 2). Por isso, o fato de observarmos que a combinatória é um conteúdo cujos conceitos dificilmente são construídos pelos alunos, principalmente de ensino médio, e algo que professores encontram muita dificuldade em ensinar, me intriga e me desafia.

Desse modo, considerarmos nosso objeto de estudo situado na perspectiva de universitários, estudantes do curso superior de licenciatura em matemática do IFES – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, *campus* Cachoeiro de Itapemirim. Esse é o espaço em que desenvolvemos nossas atividades profissionais e sobre o qual recaem nossas expectativas e motivações, para pensarmos o conhecimento matemático de combinatória. Dela participaram sete estudantes que cursavam a disciplina de “Análise Combinatória e Probabilidade” em 2017, no 6.º semestre do curso.

Nesse contexto, nosso estudo insere-se no campo da educação matemática que se está desenvolvendo desde o fim do século XIX e apresenta aspectos particulares envolvendo os campos profissional e científico (KILPATRICK, 1996; 1992). No Brasil, ela ainda é considerada como um campo recém-nascido e, portanto, emergente. Não possui uma metodologia única de investigação nem detém uma configuração teórica clara. Nessa lógica, a educação matemática é definida como uma “práxis que envolve o domínio do conteúdo específico (a matemática) e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos à transmissão/assimilação e/ou à apropriação/construção do saber matemático escolar” (FIORENTINI; LORENZATO, 2007, p. 5).

Segundo Kilpatrick (1996; 1992), a educação matemática é um campo que permeia e se estrutura principalmente com suporte nas ciências sociais; por isso, caracteriza-se como ciência humana na qual estudos são realizados com base em métodos interpretativos e analíticos. Educadores matemáticos estão interessados em desenvolver conhecimentos e práticas pedagógicas que contribuam para uma formação integral, humana e crítica de alunos (crianças, adolescentes, jovens, jovens adultos, adultos) e professores. Desse modo, pesquisadores desta área colocam a matemática a serviço da educação, porque consideram e concebem a matemática como sendo um importante mecanismo de formação intelectual e social, na qual o educador matemático tende a promover “uma educação pela matemática” (FIORENTINI, LORENZATO, 2007, p. 3).

De maneira ampla e não imediata, as investigações em educação matemática possuem objetivos de natureza pragmática ou científica (KILPATRICK, 1996, 1992; FIORENTINI, LORENZATO, 2007; SILVA, SANTOS-WAGNER, 2009). Constata-se essa natureza pragmática em pesquisas que investigam questões oriundas da prática, da reflexão sobre a prática de um professor investigador ou a prática de outros professores. Nesse caso são pesquisas que têm o objetivo de melhorar a qualidade do ensino e da aprendizagem de matemática. Já as investigações de natureza científica se pautam em questões que podem levar a teorizações e se originam de estudos pregressos ou da própria literatura, de lacunas observadas em pesquisas anteriores. Assim, seu objetivo é desenvolver a própria educação matemática como área de investigação e de produção de conhecimento. Dessa maneira, a educação matemática adota múltiplas perspectivas de fazer pesquisa e incorpora abordagens distintas.

Ao se preocupar em estudar as imagens conceituais evocadas pelas interações estabelecidas em sala de aula por/entre estudantes, professora, pesquisadora e tarefas específicas, o estudo que desenvolvemos insere-se no campo da educação matemática para o qual se torna relevante, por isso nossa situação de interesse envolve processos de ensino e aprendizagem em matemática (SILVA, SANTOS-WAGNER, 2009). Ademais, situa-se nos focos temáticos das pesquisas brasileiras e internacionais em educação matemática, definidos desde a década de 90 (KILPATRICK, 1996, 1998; FIORENTINI, LORENZATO, 2007). Interessamo-nos em promover uma educação pela matemática e assim desenvolver conhecimentos e práticas que contribuam para a formação intelectual, social e política dos envolvidos.

A educação matemática desenvolveu-se no decorrer dos últimos dois séculos, quando matemáticos e educadores matemáticos se preocuparam em “como” e “para que” a matemática é ou poderia ser ensinada e aprendida na escola. Assim, a pesquisa em educação matemática emergiu com raízes na *matemática*, com o estudo da Comissão Internacional para o Ensino de Matemática sobre o pensamento matemático, e na *psicologia* com pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de matemática (KILPATRICK, 1996; 1992). Portanto, possuem formas distintas de conceber e ver a matemática, a educação matemática, o matemático, o educador matemático e a produção do conhecimento. Assim, cada uma das raízes tem uma problemática específica da qual decorrem distintos objetivos e questões. Sendo assim, definir o fenômeno de interesse ou tema de pesquisa representa o ponto de partida de uma investigação que emerge da curiosidade e da indagação do investigador sobre uma situação (ROMBERG, 1992; SILVA, SANTOS-WAGNER, 2009).

Para Kilpatrick (1996; 1992), a matemática é ensinada desde que ela existe; portanto, é uma ciência milenar estruturada em bases lógicas e definidas. É um campo de estudos avançados no qual matemáticos desenvolvem pesquisas com a finalidade de produzir conhecimento teórico especializado através de processos hipotético-dedutivos que possibilitam o desenvolvimento da matemática pura e aplicada. Desse modo, é entendida e concebida pelos matemáticos como um fim em si mesma e “tende a promover uma educação para a matemática priorizando conteúdos formais dela e uma prática voltada à formação de novos pesquisadores em matemática” (FIORENTINI; LORENZATO, 2007, p. 3).

Assim, esta tese foi construída na tentativa de encontrarmos possíveis respostas às nossas inquietações, motivo pelo qual a organizamos em seis capítulos. O capítulo 1 destina-se à introdução, em que apresentamos nossas considerações iniciais. Conforme visto acima, nele expomos uma ideia geral do estudo mencionando as razões e os interesses para pesquisarmos a análise combinatória de estudantes universitários em um curso de formação inicial de professores de matemática. Iniciamos com as necessidades desta investigação, ou seja, nossas justificativas; depois, trouxemos hipóteses, questões e objetivos, com os quais mencionamos o objeto matemático e os potenciais sujeitos deste estudo; em seguida, expomos aproximações entre o fenômeno de interesse e o campo de investigação quando tratamos da pesquisa em educação matemática.

No capítulo 2, apresentamos a revisão de literatura que focalizou estudos desenvolvidos em universidades brasileiras acerca de análise combinatória. Tem por base as pesquisas desenvolvidas em programas de pós-graduação em nível de mestrado e doutorado, no período de 1999 a 2017. Além disso, apresentamos alguns achados acerca do lugar da análise combinatória nas licenciaturas em matemática do Espírito Santo. Dedicamos o capítulo 3 ao enquadramento teórico que fundamentou o estudo e sustentou a coleta e a análise de dados. No capítulo 4, apresentamos as escolhas metodológicas relativas à pesquisa, aos instrumentos de produção e coleta de dados e aos sujeitos. O capítulo 5 é dedicado à análise e discussão dos dados que foram analisados à luz do enquadramento teórico-metodológico, sobre os quais expressamos, de maneira reflexiva, nossa interpretação. No capítulo 6, evidenciamos as considerações finais. Nele apresentamos uma síntese das análises anteriores que constituíram possíveis respostas às questões norteadoras deste estudo. Indicamos algumas perspectivas de futuras pesquisas fundamentadas em questionamentos provenientes das análises dos dados que não constituíram objeto deste estudo. Por fim, apresentamos as referências e apêndices.

CAPÍTULO 2: MAPEAMENTO DAS PESQUISAS SOBRE COMBINATÓRIA – UM PANORAMA DA PRODUÇÃO BRASILEIRA DE 1999 A 2017

Em um estudo documental sobre a análise combinatória, mapeamos[5] a produção acadêmica de universidades brasileiras no período de 1999 a 2017. Com o objetivo de conhecermos o que já havia sido produzido no país e publicado em dissertações e teses acerca da temática, realizamos essa primeira atividade metodológica de pesquisa. Com esse estudo das pesquisas, identificamos nelas aspectos ainda não contemplados e vislumbramos algumas lacunas que nos permitiriam avançar na produção de conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem de combinatória.

Os estudos de Romberg (1992), Fiorentini (1994), Kilpatrick (1996), Romanowski e Ens (2006), Fiorentini e Lorenzato (2007), Pagani e Allevato (2014) ofereceram-nos fundamentos teóricos e metodológicos para focalizarmos em teses e dissertações de mestrado acadêmico e profissional oriundas de programas de educação, educação matemática, matemática e psicologia. Reconhecemos que há implicações da combinatória para outras áreas do conhecimento. Assim, podem haver estudos que a relacionem com a biologia, estatística, probabilidade, medicina e informática, por exemplo. No entanto, dado nosso objeto de estudo, centralizamos em pesquisas que associavam combinatória e estudantes universitários de cursos de licenciatura em matemática. Como decorrência, mapeamos também produções que envolviam os diferentes níveis de ensino da educação básica por considerar que, no exercício de sua profissão, esses universitários tendem a se tornarem professores.

Iniciamos nossas buscas pela publicação de Sturm (1999), pois, além de ser a primeira a respeito do assunto, foi desenvolvida no fim dos anos 1990, sob a implementação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, BRASIL, 1997) no sistema de ensino brasileiro. Na ocasião, utilizamos os seguintes descritores: análise combinatória, pensamento combinatório e combinatória. Em virtude da não atualização imediata dos repositórios digitais das universidades e do banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), encerramos as averiguações em 2017. Para a garantia de

---

[5] O mapeamento foi feito por mim, Thiarla Xavier Dal-Cin Zanon, e José Carlos Thompson da Silva, colega de doutorado e pesquisador de combinatória para o ensino fundamental. No entanto, nos momentos de análise das pesquisas encontradas, trabalhávamos nós dois e nossa orientadora a professora Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner.

rigor e densidade, depois de termos definido o objetivo do mapeamento e a fonte de coleta de dados (repositórios digitais), decidimos pelos seguintes critérios:

1. Identificar as instituições de ensino superior. Na relação on-line disponível no Ministério da Educação (MEC), assinalamos aquelas que ofertavam mestrado e doutorado em educação matemática, educação e matemática.
2. Listar endereços eletrônicos. Foram registrados em uma planilha e serviram para acessarmos a biblioteca digital dos programas e verificarmos a existência de pesquisas envolvendo a temática.
3. Criar um arquivo digital. Salvamos as pesquisas em pastas específicas por instituição, estado, região e tipo de produção.
4. Selecionar as pesquisas. Esta etapa aconteceu por meio da análise dos resumos. Identificamos sujeitos (universitários em licenciatura em matemática) e objeto matemático (análise combinatória). No entanto, nem todos os pesquisadores declararam objetivo, questão, tema, aporte teórico-metodológico, sujeito, procedimentos de coleta de dados, tempo de pesquisa e alguns resultados nos resumos. Por isso, foi necessário o próximo procedimento.
5. Estudar cada pesquisa selecionada e organizar uma nova planilha. Nela, registramos dados e informações gerais (autor(a), ano, instituição de origem, orientador(a), número de páginas, título do trabalho, programa) e específicas (foco de estudo, questão, objetivos, modalidade de pesquisa, sujeitos, procedimentos metodológicos, referencial teórico, a relação entre ele e a análise, resultados, perspectivas de pesquisas futuras e contribuições à pesquisa e à prática escolar).
6. Elaborar síntese com reflexões, comentários e lacunas observadas nas pesquisas. Apontamos avanços (ou não) e contribuições à investigação acerca da temática.

Esses critérios nos auxiliaram em vários momentos durante o desenvolvimento da pesquisa que nos propúnhamos a realizar. Dialogávamos e refletíamos constantemente sobre levantamento dos estudos, e, realização de leituras individuais, comentadas e/ou compartilhadas. Além disso, tecíamos escritas colaborativas como foram os textos "Produção acadêmica em educação matemática acerca da análise combinatória de 2000 a 2015" (ZANON, SILVA, SANTOS-WAGNER, 2016) apresentado na Anped Sudeste[6] e "A pesquisa em educação matemática: uma análise de teses de doutorado sobre análise

[6] Anais [do] XII Encontro de Pesquisa em Educação da Região Sudeste. [Comunicações Orais]. Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo, Programa de Pós-Graduação em Educação. Tema: Diálogos entre a Pesquisa e as Políticas de Educação na Atualidade. ISSN: 2175-2087, 2016, p. 3244 – 3260.

combinatória"[7] (ZANON, SANTOS-WAGNER, 2016) publicado na 5ª Semat – Semana da Matemática do IFES. Desde o início, a orientadora e os orientandos formaram uma equipe de pesquisadores. Isto possibilitou que o mapeamento fosse revisto, refinado e aperfeiçoado durante todo o doutorado, no próprio processo de pesquisa.

2.1 Alguns achados de pesquisa: um retrato da produção anual

Apresentamos, no quadro a seguir, um quantitativo da produção anual de pesquisas de mestrado (acadêmico e profissional) e doutorado com foco em combinatória, disponíveis on-line nos sítios das universidades e da CAPES. Um quadro geral, completo e detalhado das produções brasileiras de 1999 a 2017 encontra-se no apêndice 1.

Quadro 1 – Produção anual de pesquisas de mestrado e doutorado com foco em combinatória

	MESTRADO			
ANO	ACADÊMICO	PROFISSIONAL	**DOUTORADO**	**TOTAL**
1999	01	-	-	01
2000	-	-	-	-
2001	01	-	01	02
2002	-	-	-	-
2003	01	-	-	01
2004	-	-	-	-
2005	-	01	-	01
2006	-	01	-	01
2007	-	-	-	-
2008	01	02	-	03
2009	01	04	01	06
2010	04	03	-	07
2011	02	06	-	08
2012	03	04	01	08
2013	01	28	-	29
2014	03	22	-	25
2015	06	20	02	28
2016	04	14	-	18
2017	-	06	-	06
TOTAL	28	111	05	**144**

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras.

[7] Caderno de Resumos da 5ª Semat – Semana da Matemática do IFES, Campus Vitória. Tema: Matemática e Transformações Sociais. 2016, p. 40. Disponível em http://ocs.ifes.edu.br/index.php/semat/5/schedConf/presentations .

No período pesquisado (1999 a 2017), encontramos cerca de 144 produções sobre análise combinatória. Desse total, são cinco teses e 139 dissertações (28 de mestrado acadêmico e 111 de mestrado profissional). Observamos, no quadro 1, que o número de produções começa a crescer desde 2009, quando a CAPES, pela Portaria n.º 17/2009 (atualizada em 28/6/2017 pela Portaria n.º 131), regulamentou os mestrados profissionais. Na ocasião, houve um crescimento nacional desta modalidade nas mais diferentes áreas de ensino em razão dos interesses das instituições públicas em investir nesse modelo de formação.

Anteriormente a essa data, pouco se produziu com foco em combinatória. Além do mais, não identificamos pesquisas sobre o assunto nos anos de 2000, 2002, 2004 e 2007. Isso talvez seja justificado pelo fato de que, nesse período, havia apenas uma recomendação da CAPES (Portaria n.º 47, de 17/10/1995) para a implantação, acompanhamento e avaliação de cursos de mestrado dirigidos à formação profissional, embasada pelo documento Programa de Flexibilização do Modelo de Pós-Graduação Senso Estrito em Nível de Mestrado. Portanto, embora os primeiros mestrados profissionais tenham sido criados no Brasil na década de 90, sua regulamentação oficial aconteceu em 1998, quando a CAPES tornou pública a Portaria n.º 080, que dispunha sobre seu reconhecimento. A partir de então, temos três modelos de pós-graduação stricto sensu no país: (1) mestrado acadêmico: com objetivo acadêmico e de docência; (2) mestrado profissional: com foco na capacitação profissional de professores em exercício que optam por lecionar em âmbito não acadêmico; e (3) doutorado: com um nível de exigência superior ao mestrado e com foco acadêmico e de docência.

Outro dado importante que observamos no Quadro 1 é o aumento significativo do número de estudos de pós-graduação defendidos de 2013 a 2016. Como visto, a maior parte deles é de produções de mestrado profissional, entre as quais se destacam em quantidade as pesquisas desenvolvidas no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Traremos mais detalhes sobre o PROFMAT depois do quadro 2.

Quadro 2 – Total de pesquisas do PROFMAT em relação ao mestrado profissional

ANO	MESTRADO PROFISSIONAL	PROFMAT
2013	28	22
2014	22	19
2015	20	16
2016	14	13
2017	06	06

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras.

Esse número crescente pode ser explicado pelo início do PROFMAT em 2011. Recomendado pela CAPES em novembro de 2010, o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional tem duração de dois anos e estrutura-se em quatro semestres letivos. É o primeiro curso de pós-graduação stricto sensu semipresencial do Brasil e destina-se a professores em exercício na educação básica da rede pública. É coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) com apoio do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Geralmente é ofertado em instituições públicas de ensino superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil/Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES). Por isso, além de estimular a melhoria do ensino de matemática, preocupa-se em aprofundar a formação matemática do professor mediante as necessidades suscitadas no espaço escolar. Ou seja, focalizam em melhorar o conhecimento matemático dos professores que atuam na educação básica.

Com as atividades iniciadas em 2011, os números mostraram que, em 2013, aconteceu o que denominamos *boom* de pesquisas. Isso quer dizer que em 2013 tivemos muitos estudos com foco em análise combinatória (total de 23 estudos) em virtude da data de ingresso dos professores no programa. Verificamos que de 90 produções, 76 se originaram do PROFMAT ofertado por instituições públicas das regiões norte (03 na UFPA[8]), nordeste (03 na UNIVASF, 04 na UFC, 01 na UESC, 01 na UFPB, 01 na UFRN e 01 na UFMA), sudeste (02 no IMPA, 01 na UFF, 01 na UFV, 01 na UFSCar e 01 na Unesp) e centro-oeste (01 UFG e 01 na UFMS).

Outro aspecto importante é o fato de que os estudos relatam a complexidade do trabalho com a combinatória em sala de aula. Assinalam a fragilidade de professores em relação ao seu ensino e dificuldades de alunos quanto à aprendizagem. Por isso, o volume de pesquisas deve-se à preocupação docente com questões teóricas e práticas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de análise combinatória. Desse modo, destaca-se a ampliação da temática nos mestrados profissionais com viés pragmático e foco na prática docente. Nessa lógica, identificamos alguns tipos de produções.

---

[8] UFPA – Universidade Federal do Pará, UNIVASF – Universidade Federal do Vale do São Francisco, UFC – Universidade Federal do Ceará, UESC – Universidade Estadual e Santa Cruz, UFPB – Universidade Federal da Paraíba, UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, UFMA – Universidade Federal do Maranhão, IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, UFF – Universidade Federal Fluminense, UFV – Universidade Federal de Viçosa, UFSCar – Universidade Federal de São Carlos, Unesp – Universidade Estadual Paulista, UFG – Universidade Federal de Goiás e UFMS – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul.

Quadro 3 – Tipos e características das produções

TIPOS	CARACTERÍSTICAS
Práticas	Apresentaram roteiros, planos, sequências, jogos e/ou módulos de ensino com situações-problema de combinatória que foram testados em ambiente real de ensino. Esses trabalhos não realizaram uma abordagem teórica do assunto.
Teóricas e práticas com testagem de sequências ou roteiros de ensino- aprendizagem	Discutiram teórica e formalmente os tópicos de combinatória e propuseram roteiros, planos, sequências, jogos e/ou módulos de ensino compostos de problemas testados em ambiente real de ensino. Em algumas pesquisas, a combinatória, além de ser tratada de maneira teórica e formal, apareceu associada principalmente à teoria dos grafos.
Teóricas e práticas sem testagem de sequências ou roteiros de ensino-aprendizagem	Similarmente à anterior, as produções trouxeram uma discussão teórica e formal de combinatória e seguiram com roteiros, planos, sequências, jogos e/ou módulos de ensino. Entretanto, os problemas propostos não foram experimentados em sala de aula. Em alguns desses estudos, a combinatória apareceu relacionada a outros conteúdos de matemática do sexto ano e a problemas geométricos e aritméticos. Embora os problemas não tenham sido testados, os autores sugerem que professores de matemática os utilizem em aulas de combinatória.
Teóricas	Abordaram conceitos de combinatória de modo formal. Em algumas produções, a combinatória apareceu associada a outro conteúdo matemático a partir da resolução instrumental de problemas.

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras.

Uma característica comum a essas produções é a não presença de uma questão de pesquisa. Geralmente partem de motivações ou objetivos dos pesquisadores. Além disso, vê-se que nem sempre há fundamentação teórica e metodológica para o desenvolvimento do estudo. No entanto, é consenso entre eles que suas propostas podem auxiliar alunos e professores no ensino e na aprendizagem de combinatória na educação básica. A maioria das produções destina-se ao ensino médio. Em segundo lugar, aparecem os estudos dedicados ao ensino fundamental, alguns dos quais se referem aos diferentes níveis e demais interessados, e três pesquisas têm universitários de cursos de licenciatura em matemática como sujeitos.

Acerca dos roteiros e/ou sequências de ensino não testados, há que se investigar a funcionalidade e eficácia deles para que as contribuições ao ensino e à aprendizagem sejam vislumbradas. Nesse contexto, deve-se questionar: Quais contribuições esses estudos trazem à sala de aula e à pesquisa em educação matemática? Respostas a essa e outras indagações precisam ser encontradas em futuras pesquisas sobre a temática. Por outro lado, as produções que propõem roteiros de atividades partem da hipótese de que a combinatória deve ser abordada intuitivamente, com base nas percepções de mundo do aluno e sem o uso abusivo de fórmulas. Acreditam que, assim, estudantes compreenderão, com mais facilidade, os problemas propostos e cometerão menos erros na resolução deles.

As pesquisas de mestrado acadêmico e as teses mostraram-se preocupadas em fornecer suporte teórico e metodológico, pois são consensuais quanto ao espanto causado pela análise combinatória a professores e alunos. Algo que consideramos incoerente, pois a ideia de contagem aparece desde a educação infantil, e, por isso, não deveria causar estranhamento algum. Por outro lado, podemos supor por que essa incoerência ocorre. Se professores não possuem conhecimento matemático profundo de combinatória, e, se apenas decoraram fórmulas e problemas tipo para resolver, eles devem possuir um entendimento instrumental do conteúdo (SKEMP, 1976). Desse modo, parece que eles não entendem os conceitos de modo significativo, não possuem um entendimento relacional de combinatória ou acreditam que aprender de modo instrumental produza resultados mais rápidos (SKEMP, 1976). Assim, professores podem não identificar as relações existentes entre tarefas com ideia de contagem na qual precisam selecionar ou alocar elementos de sequências ou conjuntos.

Se olharmos para as investigações de mestrado acadêmico e teses observamos que, de modo semelhante aos estudos de mestrado profissional, essas investigações destacam que ainda hoje a combinatória é trabalhada de modo tradicional. Ou seja, também comentam que ocorre ênfase em fórmulas para que problemas sejam resolvidos. Assim, nos questionamos se em algum momento do processo formativo há entendimento relacional de combinatória como sugeria Skemp (1976). Em decorrência, vê-se que (i) docentes reproduzem, à sua maneira, o saber herdado dos professores que participaram de seus processos formativos; e (ii) estudantes têm dificuldades de interpretar problemas e distinguir os conceitos combinatórios (arranjo, permutação e combinação) subjacentes a eles.

Essas pesquisas preocuparam-se também em apresentar propostas de ensino de análise combinatória diferentes daquelas tradicionais. Para isso, analisaram coleções de livros didáticos, PCN e Propostas Curriculares Estaduais, principalmente do Estado de São Paulo, a fim de desvelarem como esse material subsidiava o trabalho do professor. Também identificamos estudos que analisaram avaliações externas, provas de vestibular e testes de larga escala, para compreender o tipo de conhecimento combinatório exigido dos estudantes.

Não encontramos estudos com propostas semelhantes para a educação infantil, anos iniciais do ensino fundamental e universitários de cursos de licenciatura em matemática, sejam os especialistas em matemática, sejam aqueles que a ensinam nas primeiras etapas de escolarização. Em nossos estudos, não evidenciamos implicações dessas pesquisas em diretrizes curriculares, em abordagens concretas de avaliação da aprendizagem acerca do tema e em livros didáticos. Destacamos, portanto, que essas temáticas ainda precisam ser investigadas.

Um número reduzido de produções – oito dissertações (COSTA, 2003; SABO, 2010; ROCHA, 2011; ALVES, 2012; ASSIS, 2014; MOREIRA, 2014; CUNHA, 2015; LIMA, 2015) e uma tese (TEIXEIRA, 2012) – preocupou-se com a formação continuada de professores. Elas apontaram algumas implicações relevantes sobre: (i) elaboração de estudos de formação continuada; (ii) currículos de cursos de formação inicial; (iii) políticas de formação continuada como estratégia para minimizar o despreparo dos professores; e (iv) investigação do uso de material de apoio, PCN e Propostas Curriculares por docentes. Um número ainda menor – três dissertações (SILVA, 2014; FONTE, 2009; ROCHA, 2006) – tratou da formação inicial. Tendo em vista nosso foco de interesse, detalhamos essas três pesquisas no decurso deste capítulo.

Embora essas investigações tragam elementos importantes e alternativos ao ensino de combinatória na educação básica, não tratam da aprendizagem dos conceitos simples de arranjo, permutação e combinação por meio do uso de imagens conceituais e exemplos protótipos que envolvem tais conceitos, nosso interesse principal de pesquisa. Por outro lado, corroboram Morgado et al. (1991), quando afirmam que professores de ensino médio consideram a análise combinatória um conteúdo complexo de ensinar. Além disso, os resultados das pesquisas evidenciam fragilidades quanto ao ensino de combinatória, principalmente para universitários em cursos de licenciatura em matemática. Parece-nos, ainda, que as produções nem sempre são conhecidas ou não alcançam, de imediato, professores em exercício, autores de livros didáticos, políticas de formação inicial e continuada[9] e documentos oficiais.

De modo geral, observamos que as pesquisas foram produzidas em instituições públicas e privadas de todo o Brasil, principalmente das regiões nordeste e sudeste. Todas apontaram um possível abandono da combinatória nas diferentes modalidades da educação básica. Assim, o ensino oferecido parece não atender ao previsto na LDB – Lei de Diretrizes e

---

[9] Em busca realizada no Diretório de Grupos de Pesquisa no Brasil do CNPq, encontramos, no endereço eletrônico http://dgp.cnpq.br/dgp/faces/consulta/consulta_parametrizada.jsf, uma relação de 141 grupos voltados à formação de professores de matemática (entendidos por nós como universitários em cursos de licenciatura em matemática) originários de várias universidades e institutos federais de todo o país. No entanto, não ficou evidente a relação das pesquisas produzidas com os grupos das universidades de origem, mesmo naqueles liderados por pesquisadores que foram orientadores de algumas pesquisas mapeadas por nós.

Bases da Educação[10] (1996). Além disso, nossa experiência evidencia que universitários em cursos de licenciatura em matemática não conseguem compreender conceitualmente o modelo combinatório implícito nem assinalar qual deles aparece subjacente a um problema. Sendo assim, usam algum procedimento inadequado de resolução. Diante de tudo o que foi percebido, nossa questão de investigação (res)significa-se e se fortalece ante os resultados dos estudos.

A seguir, focalizamos as produções relacionadas à nossa temática de interesse: universitários em cursos de licenciatura em matemática. Embora não tratem do mesmo objeto de investigação, assemelham-se aos sujeitos pesquisados. Na sequência, apresentamos suas origens e autorias, informamos a instituição em que foram produzidas, o programa ao qual estão vinculadas, respectivos pesquisadores e ano de produção e posteriormente passamos para uma discussão mais aprofundada de cada uma. Centralizamo-nos em título, questão/objetivo, sujeitos, metodologia, conclusão e contribuições à pesquisa e à sala de aula.

2.2 Origens e autorias

A questão – Quais instituições e pesquisadores estão interessados no ensino de combinatória para universitários de cursos de licenciatura em matemática? – motivou-nos a buscar origens e autorias dos estudos relacionadas ao nosso tema. No período pesquisado, encontramos três produções que mencionamos na tabela a seguir:

Tabela 2 – Instituição, programa, pesquisadores e ano de produção

INSTITUIÇÃO	PROGRAMA	PESQUISADORES	ANO
UFRPE[11]	Mestrado Profissional em Ensino das Ciências	Rocha	2006
UNIFRA	Mestrado Profissional em Física e Matemática	Fonte	2009
IFES	Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática	Silva	2014

Fonte: Elaborada pelas pesquisadoras.

Nota-se que essas três pesquisas interessadas no ensino de combinatória para universitários de cursos de licenciatura em matemática advêm de mestrados profissionais

[10] Art. 22. A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhes meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores (LDB, n.º 9394/96).

[11] UFRPE – Universidade Federal Rural de Pernambuco, UNIFRA – Universidade Franciscana e IFES – Instituto Federal do Espírito Santo.

oferecidos por duas instituições públicas (UFRPE e IFES) e uma privada (UNIFRA). Essa pequena produção de 2% do total geral de 141 pesquisas chamou-nos a atenção, pois o enfoque dado ao despreparo profissional mostrava-se consensual entre as pesquisas (profissionais e acadêmicas). Portanto, acreditávamos que haveria mais estudos relacionados ao tema. Embora, segundo a legislação, a graduação não seja o foco dos estudos de mestrado profissional, as produções relacionadas são de autoria de pesquisadores preocupados com o não ensino e/ou com um ensino procedimental de combinatória. Na ocasião, Rocha (2006) e Fonte (2009) lecionavam no ensino superior e Silva (2014) no ensino fundamental e médio, lócus em que perceberam a necessidade de uma formação inicial mais consistente acerca da combinatória para universitários de cursos de licenciatura em matemática, ou seja, futuros professores.

Quando analisamos o Diretório de Grupos de Pesquisa no Brasil do CNPq, chamou-nos a atenção o fato de universidades com lastro em educação matemática, como PUC/SP, Unicamp e Unesp, não apresentarem produções sobre combinatória e formação inicial de professores com foco em universitários de cursos de licenciatura em matemática. Ainda merecem atenção as produções da UFPE, onde o Grupo Geração – Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatório e Probabilístico – desenvolve pesquisas com crianças, adolescentes, jovens e adultos de diferentes níveis e modalidades de ensino. Apesar de não focalizar a formação inicial de professores, tínhamos expectativas de encontrar alguma produção que abordasse a combinatória para universitários de cursos de licenciatura em matemática.

Ao focalizarmos em pesquisas relacionadas à combinatória na formação inicial de universitários em curso de licenciatura em matemática, realizamos uma organização temática como sugerem alguns investigadores (FIORENTINI, LORENZATO, 2007; FIORENTINI, 1994; KILPATRICK, 1998). Desse modo, houve necessidade de identificar o foco principal de investigação de cada uma delas. Assim, a seguir discutimos as produções, apresentando mais detalhes sobre elas.

2.3 A combinatória para estudantes universitários em cursos de licenciatura em matemática

O que dizem as pesquisas acerca do ensino de combinatória para estudantes universitários em cursos de licenciatura em matemática? Esta questão despertou-nos para uma revisão dos estudos anteriormente produzidos no Brasil. Assim, centralizamos aqui nas produções de Rocha (2006), Fonte (2009) e Silva (2014) relacionadas ao nosso objeto de pesquisa. Nelas, o principal foco temático de pesquisa foi o conhecimento de combinatória do licenciando em matemática. Vimos que, além da congruência acerca do objeto matemático (combinatória), os pesquisadores se interessaram pela resolução de problemas enquanto perspectiva metodológica de ensino. Silva (2014), embora tenha focalizado na produção e utilização de jogos, também se valeu da resolução de problemas para propor as tarefas matemáticas que constituíam o jogo em si.

Na tabela 3, apresentamos detalhes gerais (título, questão/objetivo, sujeitos, metodologia, conclusão) sobre as pesquisas desenvolvidas por Rocha (2006), Fonte (2009) e Silva (2014). Depois, sintetizamos as ideias que consideramos mais relevantes em cada uma delas.

Tabela 3 – Foco de investigação das pesquisas sobre combinatória na formação inicial

AUTOR(A)/ANO	TÍTULO[12]	QUESTÃO
Rocha (2006)	Investigando a aprendizagem da resolução de problemas combinatórios em licenciandos em matemática	Pode uma simulação da prática docente por parte de licenciandos de matemática desenvolver nos mesmos a aprendizagem na resolução de problemas combinatórios?
Fonte (2009)	Ensino e aprendizagem dos conceitos de combinatória por meio da metodologia de resolução de problemas	De que forma a metodologia de resolução de problemas contribui para o de ensino e aprendizagem de conceitos de Análise Combinatória?
Silva (2014)	Reflexões sobre conhecimentos evidenciados por licenciandos em matemática por meio da elaboração de um jogo sobre análise combinatória	Será que durante a graduação os licenciandos tiveram formação com produção e utilização de jogos educativos? A produção e aplicação de jogos com licenciandos do IFES de Vitória, inseridos no PIBID, no conteúdo de análise combinatória contribuem para a melhoria da prática pedagógica?

Fonte: Elaborada pelas pesquisadoras a partir de Rocha (2006), Fonte (2009) e Silva (2014).

Rocha (2006), Fonte (2009) e Silva (2014) trouxeram indagações centrais para nortear suas produções. Embora não fosse comum a presença de questão de investigação nas pesquisas desenvolvidas no PROFMAT, essas, oriundas de outros programas de mestrado profissional, mostraram-se interessadas em evidenciá-las. Assim sendo, apresentamos a seguir alguns achados de pesquisa sobre combinatória na formação inicial de professores de

[12] Título e questão foram transcritos na íntegra conforme apareceram na pesquisa original de Rocha (2006), Fonte (2009) e Silva (2014).

matemática. Comentamos individualmente cada produção por ordem cronológica e sintetizamos algumas de suas contribuições à pesquisa que desenvolvemos.

ROCHA (2006): *Investigando a aprendizagem da resolução de problemas combinatórios em licenciandos em matemática*

Rocha (2006) examinou a aprendizagem da resolução de problemas de combinatória simples, na qual não há repetição de elementos, por licenciandos do 4.º período de matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) durante a disciplina de Fundamentos de Matemática. Interessou-se por submetê-los a uma "intervenção seguindo o Ciclo da Experiência de Kelly, que organize a simulação de uma prática docente" (ROCHA, 2006, p. 19). A pesquisa partiu de sua atuação como professor do ensino médio e de curso de formação de professores, nos quais notou que o ensino de combinatória era ministrado de maneira tradicional e, assim, causava insucesso. Portanto, sua fundamentação teórica foi construída com base em dois eixos principais: *análise combinatória* e *teoria dos Construtos Pessoais de Kelly (CPK).*

Fundamentou-se principalmente em Bachx, Poppe e Tavares (1975)[13] por dois motivos: construir um breve histórico e assinalar a relevância da combinatória para o ensino, e, sustentar suas argumentações sobre combinatória simples. Com suporte em Onuchic (1999)[14], falou das direções do ensino de matemática em resolução de problemas e, utilizando especialmente os escritos de Loureiro (1997)[15], argumentou sobre a resolução de problemas combinatórios. A teoria dos Construtos Pessoais de Kelly (CPK) foi apresentada particularmente com base no texto de Moreira (1999)[16]. O americano George A. Kelly nasceu em 1905, graduou-se em Matemática e Física e foi mestre em Sociologia Educacional e doutor em Psicologia. Ele afirmava que o sistema de construção de uma pessoa varia quando ela sucessivamente constrói réplicas de eventos.

> Ou seja, as pessoas ajustam sua compreensão às realidades na medida de variação de suas experiências. Na concepção kellyana, a aprendizagem ocorre segundo um ciclo, que é determinado por cinco momentos: Antecipação, Investimento, Encontro, Confirmação ou Refutação e Revisão Construtiva (ROCHA, 2006, p. 36).

---

[13] BACHX, A. de C.; POPPE, L. M. B.; TAVARES, R. N. O. *Prelúdio à análise combinatória*. São Paulo: Ed. Nacional, 1975.
[14] ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p.199-220.
[15] LOUREIRO, C. Multiplicação, combinatória e desafios. *Revista Educação e Matemática*, Lisboa-Portugal, ano 10, n. 44, 14-20, 1997.
[16] MOREIRA, M. A. *Teorias da aprendizagem*. São Paulo. EPU, 1999.

Na metodologia, Rocha (2006) sustentou a ideia de pesquisa qualitativa, na qual observações da prática pedagógica foram registradas por escrito em uma ficha detalhada na análise de dados do estudo piloto. Essa ficha continha as seguintes informações: conteúdo da aula, tempo, dinâmica do professor em sala, questionamentos de alunos e reações acerca do trabalho do professor e do conteúdo propriamente dito. A pesquisa aconteceu em duas etapas, as quais julgou distintas e complementares. Na etapa 1, realizada em 2005/1, investigou a aprendizagem da resolução de problemas combinatórios por dez licenciandos que participaram de todo o processo de pesquisa. Eles foram submetidos a uma prática de ensino tradicional com o objetivo de "avaliar se de fato tal prática é de alguma forma responsável pelo 'insucesso' dos alunos na resolução de problemas de contagem" (ROCHA, 2006, p. 40). Para isso, desenvolveu um estudo piloto em que observou 12 aulas regulares da disciplina de Fundamentos de Matemática.

Nesse primeiro estudo, o pesquisador aplicou um pré-teste e um pós-teste. Para isso, solicitou ao professor regente dois momentos com os estudantes. O objetivo do pré-teste era verificar o conhecimento prévio deles sobre combinatória. Continha cinco problemas[17] de contagem que, segundo o pesquisador, consideravam experiências anteriores dos licenciandos com o conteúdo, principalmente com o princípio multiplicativo. Ao final do semestre, aplicou um pós-teste com seis problemas[18], os cinco do pré-teste e mais um envolvendo a ideia de anagrama. Verificou, especialmente no pré-teste, que os estudantes tinham dificuldades em definir e/ou exemplificar por escrito noções básicas de combinatória.

Embora o autor tenha argumentado que os índices de acertos aumentaram, se comparados o pré-teste e o pós-teste, ao analisá-los concluiu que: (a) todos os estudantes já haviam tido contato com a análise combinatória, principalmente no ensino médio; (b) problemas de combinatória geralmente são chatos ou fantasiosos; (c) a combinatória é um conteúdo ausente da formação dos licenciandos e precisa, de algum modo, ser incluída; (d) a forma como a combinatória fora tratada no ensino superior, envolvendo situações muito semelhantes àquelas do ensino fundamental e médio, pouco contribuiu para o aprofundamento do conhecimento dos estudantes; (e) haveria necessidade de revisão do assunto, pois é um "conteúdo de ensino de sua vida profissional futura, sendo necessário também como base do

---

[17] Exemplo de problema usado no pré-teste: "Um mágico se apresenta em público vestindo calças e paletó de cores diferentes. Determine o n° mínimo de peças (n° de calças mais n° de paletós) de que ele precisa, para que possa se apresentar em 24 sessões com conjuntos diferentes" (ROCHA, 2006, p. 132).

[18] Exemplo de problema usado no pós-teste: "Quantos anagramas da palavra Olinda têm vogais e consoantes se alternando?" (ROCHA, 2006, p. 133).

importante raciocínio probabilístico, fundamental em matemática" (ROCHA, 2006, p. 62). Por isso, optou por uma intervenção que consistiu na próxima etapa do estudo.

A etapa 2 aconteceu em 2005/2. De caráter mais interventivo, fundamentou-se no Ciclo da Experiência de Kelly. Dela participaram 22 alunos, dos quais sete tiveram os dados analisados em profundidade, uma vez que participaram de todas as fases da intervenção. O pesquisador, agora professor da disciplina, organizou oito momentos de intervenção, cujas atividades desenvolvidas foram a aplicação de avaliação escrita (pré-teste), conferência, aula tradicional para uniformização da linguagem, estudo e discussão de um texto sobre situação didática, categorização de problemas, aula ministrada pelos licenciandos, pós-teste e desafio.

Seu objetivo era que os licenciandos simulassem uma situação de ensino. Assim, deveriam planejar e apresentar uma aula de combinatória como se eles mesmos fossem os professores. Para Rocha (2006), essa seria uma forma de aprendizagem significativa sobre resolução de problemas combinatórios. Inicialmente utilizou uma avaliação escrita com cinco problemas[19] que envolviam o pensamento combinatório, a qual foi aplicada sem conhecimento prévio dos alunos, pois se interessava em apreender o que os licenciandos sabiam sobre o assunto. Diferentemente do pré-teste aplicado no estudo piloto, a linguagem utilizada nos problemas do estudo definitivo não permitia a interpretação dúbia de termos combinatórios.

Posteriormente, em forma de conferência, relatou as próprias experiências com o conteúdo. Além disso, provocou os alunos a falar acerca das experiências deles e da importância da combinatória na formação inicial, visto que não era uma disciplina que compunha a matriz do curso. Na sequência, apresentou a ideia da intervenção, na qual os alunos seriam divididos em Grupo Mestre (GM) e Grupo Aluno (GA) em que o primeiro elaboraria uma atividade de ensino para o segundo. Em seguida, aplicaria como pós-teste as questões da avaliação escrita. No momento de desafio, os grupos GM e GA elaborariam uma avaliação com o intuito de verificar a compreensão que o outro tinha do conteúdo.

Após a segunda etapa, o pesquisador aferiu que (a) o princípio multiplicativo foi a estratégia mais utilizada para resolução dos problemas; (b) a incorporação de metodologias de pesquisa não planejadas (mapas conceituais) auxilia na coleta de dados; (c) os problemas foram classificados em função do atributo ordem; (d) nas sequências didáticas elaboradas pelos licenciandos, a contextualização do saber e a ênfase na demonstração de fórmulas foram

---

[19] Exemplo de problema usado no pré-teste e no pós-teste: "Quantos números naturais com três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?" (ROCHA, 2006, p. 139).

as categorias mais emergentes; (e) a aula desenvolvida pelo grupo GM mostrou-se mais dinâmica; (f) o pós-teste apontou que houve um "aumento de compreensão dos conceitos de combinatória e seu uso na resolução de problemas" (ROCHA, 2006, p. 93).

Em linhas gerais, Rocha (2006) apontou que os licenciandos participantes do estudo apresentaram dificuldades na resolução dos problemas combinatórios e que pouca aprendizagem foi construída durante a prática tradicional. Os resultados mostraram que o ciclo kellyano de antecipação, investimento, encontro, confirmação ou refutação e revisão construtiva permitiu que outras possibilidades de práticas fossem incorporadas. Estimulou também o raciocínio reflexivo, a interação entre os licenciandos e a incorporação significativa da aprendizagem de resolução de problemas combinatórios. Por fim, considerou que um dos aspectos mais importantes de sua pesquisa dizia respeito ao princípio multiplicativo. Apontou que ele "deve ser considerado como uma das bases para fundamentar dentro do ponto de vista pedagógico a classe de problemas de contagem abordada pela Análise Combinatória" (ROCHA, 2006, p. 96).

FONTE (2009): *Ensino e aprendizagem dos conceitos de análise combinatória por meio da metodologia de resolução de problemas*

Fonte (2009) analisou contribuições da metodologia de resolução de problemas ao ensino e à aprendizagem dos conceitos de combinatória para licenciandos em matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUC/RS), *campus* Uruguaiana. O interesse para o estudo decorreu de sua atuação como professora da educação básica e do ensino superior. Por isso, anseios e preocupações de sua vivência, principalmente em relação ao desinteresse para com o ensino de combinatória, impulsionaram-na. Na ocasião, ela via sua pesquisa como uma "contribuição para o estudo de conceitos de Análise Combinatória por meio da metodologia de Resolução de Problemas e da construção do conceito imagem e do conceito definição" (FONTE, 2009, p. 15).

Entre outubro e novembro de 2008/2, desenvolveu uma pesquisa qualitativa com 35 licenciandos que cursavam a disciplina de Probabilidade e Estatística[20] no sexto período do curso, da qual ela era a professora. Essa abordagem metodológica implicou a opção pela observação participante, diário de campo e documentos escritos (atividades) como fonte de coleta de dados. As atividades analisadas foram escolhidas entre problemas[21] trabalhados em

[20] A disciplina "constitui o corpo das disciplinas fixas do curso, sendo oferecida em seis créditos no sexto semestre do curso" (FONTE, 2009, p. 16).
[21] Exemplo de problemas trabalhados na disciplina:

grupo[22] e individualmente pelos estudantes. Para o encaminhamento das atividades em sala, baseou-se em Onuchic (1999) [23] quanto aos passos a serem seguidos pelo professor para o trabalho com a resolução de problemas, visando a uma aprendizagem significativa pelos alunos. Sendo assim, organizou a disciplina conforme detalhado no quadro 4.

Quadro 4 – Organização das unidades da disciplina de Probabilidade e Estatística

UNIDADE	**CONTEÚDO**	**ETAPA**	**HORA-AULA POR ETAPA**	**OBJETIVOS**
1	Princípio fundamental da contagem	1	2	- Compreender os conceitos envolvidos no princípio fundamental da contagem. - Relacionar o princípio fundamental da contagem com diferentes situações.
		2	2	- Compreender os conceitos envolvidos no princípio fundamental da contagem. - Aplicar os conceitos envolvidos no princípio fundamental da contagem. - Generalizar o cálculo nas situações de princípio fundamental da contagem.
2	Permutação simples e arranjo simples	1	2	Permutação simples - Estudar o conceito de permutação simples. - Compreender o conceito de permutação simples. - Relacionar o conceito de permutação simples com diferentes situações.
		2	2	Arranjo simples - Estudar o conceito de arranjo simples. - Compreender o conceito de arranjo simples. - Relacionar o arranjo simples com diferentes situações.
3	Combinação simples	1	2	- Compreender os conceitos envolvidos nos casos de combinação simples. - Empregar o conceito trabalhado em distintas situações-problema.

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras.

Princípio fundamental da contagem: Raul está se vestindo para ir à escola. No armário dele estão 3 calças, nas cores: cáqui, cinza e azul-marinho. Há duas camisas: uma listrada e uma xadrez. E dois pares de sapatos: marrons e pretos. Se Raul pegar uma peça de cada sem olhar, qual a probabilidade dele chegar à escola de calças caqui, camisa listrada e sapatos marrons? (FONTE, 2009, p. 36);
Permutação simples: Quatro times de futebol disputam um campeonato regional, sendo eles: Atlético F.C., Esportivo F.C., Gaudério F.C., Cálculos F.C. Pergunta-se: a) Quais as possíveis classificações neste campeonato do 1º ao 4º colocado? b) Dentre as classificações possíveis, qual a probabilidade de ocorrer à seguinte classificação: CAMPEÃO: Gaudério F.C. e VICE- CAMPEÃO: Esportivo F.C. (FONTE, 2009, p. 75);
Arranjo simples: No mesmo campeonato regional comentado na situação-problema 1, sabe-se que serão atribuídos prêmios apenas para o campeão e vice-campeão. Pergunta-se: a) De quantas formas os prêmios poderão ser distribuídos, havendo 4 times na disputa? b) Qual a probabilidade do Atlético ser o ganhador do primeiro prêmio, dentre todas as possibilidades? (FONTE, 2009, p. 89);
Combinação simples: João e Mário são amigos e apostadores dos jogos das loterias brasileiras. Certo dia, discutiram sobre quem teria maior chance de ganhar o primeiro prêmio da Mega Sena, caso as apostas fossem:

João: dois bilhetes com 6 dezenas. OU Mário: um bilhete com 8 dezenas.

Qual dos amigos apresenta maior chance de ganhar o primeiro prêmio? (FONTE, 2009, p. 119);

[22] Os grupos compunham-se de, no máximo, 05 licenciandos identificados por números de 1 a 35. Foram definidos pelo critério afinidade e nomeados por letras de A até H.

[23] ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p.199-220.

Os principais pressupostos teóricos, também usados para validar e confirmar dados e argumentos, incidiram sobre conceito imagem (ou imagem do conceito ou imagem conceitual) e conceito definição (ou definição do conceito) (TALL, VINNER, 1981)[24] e resolução de problemas (POLYA, 1997) [25]. Com base na literatura, Fonte (2009) assinalou que uma imagem conceitual antecede a construção de um conceito. O indivíduo começa a descrevê-la por meio de palavras e de estruturas matemáticas, a fim de que o conceito seja formalizado após a formação dessa imagem. A resolução de problemas foi apresentada sob duas vertentes: Resolução de problemas x atividades investigativas e problemas x exercícios. Assim, a pesquisadora buscou diferenciar resolução de problemas de atividades investigativas e de exercícios.

Concluiu que (i) a divergência entre elas está “no caminho que cada uma utiliza para atingir seus propósitos” (FONTE, 2009, p. 32); (ii) um problema desperta um conhecimento em potencial e estimula o desenvolvimento pelo aluno de habilidades de raciocínio; (iii) a atividade investigativa tem por objetivo a exploração dos diversos caminhos que estudantes podem percorrem para encontrar a solução do problema; e (iv) o exercício auxilia o “desenvolvimento da habilidade em empregar alguma fórmula ou algoritmo” (p. 33). É importante destacar que, enquanto na resolução de problemas as questões já estão formuladas, nas atividades investigativas, a primeira ação é a formulação das questões a serem estudadas. Assim, este trabalho nos levou de fato a pensar e questionar sobre o papel da resolução e formulação de problemas, e, da investigação nas aulas de matemática.

Na apresentação dos resultados da pesquisa, a autora indicou que os licenciandos possuíam apenas conhecimento teórico sobre a resolução de problemas, o que pareceu ir mudando ao longo da pesquisa. De acordo com Fonte (2009), os primeiros problemas não permitiram que os alunos formalizassem o conceito logo de início, levando à inferência de que o conceito definição estava em processo de formação. À medida que o processo de pesquisa foi avançando, a formulação do conceito foi construindo-se, principalmente mediada pelas situações resolvidas em grupo. Isso levou os licenciandos a abandonar esquematizações, passar a abstrair ideias sobre os conceitos discutidos em sala e a utilizá-las na resolução dos problemas. Segundo a pesquisadora, apresentar uma situação-problema e dela retirar outras

[24] TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, v. 12, p. 151–169, 1981.
[25] POLYA, G. Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Org.). *A resolução de problemas na matemática escolar*. Tradução de Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997, p. 1 – 3.

foi a estratégia adotada para a construção de imagens que proporcionou aos alunos a compreensão do conceito.

A pesquisadora notou que os estudantes buscavam, em fórmulas e esquematizações aprendidas anteriormente, estratégias para solucionar os problemas. Portanto, o conceito imagem deles era constituído de imagens variadas sobre o assunto. Isso foi percebido especialmente quando eles compreenderam que, embora o contexto do problema fosse alterado, a estratégia de resolução continuava ligada ao conceito. Por outro lado, resoluções inadequadas apontaram “mais falta de habilidade em resolver problemas do que compreensão dos assuntos” (FONTE, 2009, p. 117). O processo de buscar conceitos imagem para construir definições conceituais permitiu que o vocabulário dos estudantes ganhasse um tom mais matemático, tornando-se mais claro, espontâneo e autêntico. Isso auxiliou na construção do conceito definição, pois “os alunos desenvolveram a capacidade de descrever um conceito por meio de palavras e estruturas matemáticas, caracterizando, assim, o momento de formalização do conceito” (FONTE, 2009, p. 139).

Nesse contexto, a pesquisadora deu especial destaque ao trabalho em grupo. No início, percebeu que alunos do ensino superior não estavam habituados a trabalhar em grupo, a formular e a defender suas hipóteses e, principalmente, a compartilhá-las com os demais. Portanto, um grande ganho da pesquisa foi que, na unidade 3, além de os estudantes trabalharem em pequenos grupos, eles verificaram as respostas encontradas com os demais grupos. Assim, pode-se inferir que “o compartilhamento passo-a-passo das respostas que iam sendo encontradas, parece que os deixava cada vez mais motivados a prosseguir nas estratégias escolhidas para a busca da resolução da situação” (p. 134). Finalmente, Fonte (2009) assinalou que (i) a estratégia de ensino e aprendizagem por meio da resolução de problemas se mostrou inicialmente “como um processo vagaroso, pela dificuldade dos alunos em se adaptarem aos passos sugeridos pela metodologia” (FONTE, 2009, p. 137); e (ii) o processo de pesquisa, embora se apresente de forma linear, é repleto de idas e vindas ao referencial teórico, objetivos e problema de pesquisa.

SILVA (2014): *Reflexões sobre conhecimentos evidenciados por licenciandos em matemática por meio da elaboração de um jogo sobre análise combinatória*

Silva (2014) investigou conhecimentos pedagógicos e matemáticos de quatro licenciandos em matemática do IFES campus Vitória, ao discutir, elaborar, aplicar e validar um jogo matemático sobre análise combinatória para a educação básica. A opção por estudantes inseridos na Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) ocorreu pelo fato de eles já conhecerem "a realidade educacional e pelas experiências com o conteúdo enquanto aluno" (SILVA, 2014, p. 17). A principal motivação do pesquisador foi incentivar o uso de outras possibilidades metodológicas, tais como os jogos, por futuros professores em conteúdos considerados "complicados", visto que, para muitos, esse é o caso da combinatória.

O pesquisador elegeu Grando (2000)[26] e Shulman (2005)[27] como os principais referenciais teórico-metodológicos para o desenvolvimento do estudo proposto. Assim, focalizou em três frentes: (i) Jogos e matemática, quando salienta a utilização dos momentos do jogo como metodologia para a produção e coleta de dados; (ii) O ensino de análise combinatória, no qual faz uma breve apresentação de pesquisas desenvolvidas com o objetivo de contribuir para o ensino desse conteúdo; e (iii) Formação de professores e estudos sobre análise combinatória, em que, além de fazer um panorama de dissertações acerca da temática, se apoia nos conhecimentos comentados por Shulman (2005).

Em relação aos procedimentos metodológicos, instrumentos e análise de dados, a pesquisa qualitativa de Silva (2014) desenvolveu-se ancorada nos seguintes momentos:

- Abordagem exploratória: levantamento bibliográfico sobre produções na área em que se articulavam análise combinatória, jogos matemáticos e formação inicial de professores de matemática.
- Formação do grupo de pesquisa: com o qual coletou dados por meio de entrevistas individuais e coletivas, conversas, observações diretas e indiretas, questionários, registros escritos e em áudio e resolução de problemas[28]. Para preservar a identidade dos licenciandos, utilizou outros nomes escolhidos por eles.
- Estudos, elaboração e aplicação das oficinas: licenciandos e pesquisador estudaram o conteúdo que serviu de base para a construção do jogo "Combinando na Cidade". Posteriormente foi aplicado em uma oficina realizada na III Semana da Matemática no IFES em 12/11/2013, da qual participaram licenciandos em matemática e professores.
- Utilização do jogo na licenciatura: após as oficinas, o jogo foi aplicado a uma turma de licenciatura em Matemática do IFES em 20/11/2013, que cursava a disciplina de Análise Combinatória. Na ocasião, mediante observações sobre a funcionalidade do

---

[26] GRANDO, R. C. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. 2000. 239 f. Tese (Doutorado), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo.
[27] SHULMAN, L. S. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de lanueva reforma. *Profesorado*: Revista de currículum y formación del profesorado, Granada, España, a. 9, n. 2, p.1-30, 2005b.
[28] Exemplo de problema utilizado com os licenciandos no momento de intervenção: "Quantas comissões são possíveis de formar com 5 jogadores sendo 1 policial, 1 diretor e 3 motoristas?" (SILVA, 2014, p. 73).

jogo, algumas modificações foram feitas para que pudesse ser utilizado na educação básica.

- Testagem na educação básica: posteriormente aos dois momentos de testagem do jogo, ele foi aplicado em uma turma de 3.ª série do ensino médio e em uma turma do 5.º ano do ensino fundamental de duas escolas públicas da Serra-ES em 27 e 29/11/2013.
- Devolutiva ao grupo de pesquisa e fechamento: nesta etapa, os resultados alcançados com a aplicação do jogo foram apresentados aos licenciandos para a reformulação das regras e do tabuleiro, a fim de atender às observações e sugestões recebidas.
- Produção de um guia didático intitulado "Jogo Combinando na Cidade" e destinado ao professor de matemática.

A análise de dados aconteceu em dois momentos: inicialmente, o pesquisador descreveu encontros, participantes, atividades e sugestões de resolução de questões desenvolvidas no decorrer da pesquisa; posteriormente, analisou falas e respostas dos licenciandos a atividades e questionários que versavam sobre conhecimento do jogo, "conhecimento pedagógico geral, pedagógico do conteúdo, de análise combinatória e de contextos educacionais evidenciados pelos participantes […] no decorrer do desenvolvimento do jogo e após a produção e aplicação" (SILVA, 2014, p. 55-56).

Os resultados apontaram, entre outros, ponderações quanto (i) ao ensino de combinatória; (ii) ao jogo e ao trabalho em grupo; e (iii) à formação inicial de professores. No que se refere ao ensino de combinatória, os estudantes informaram não recordar aquele vivenciado durante a educação básica. Em relação ao ensino superior, rememoraram agrupamentos simples de permutação, arranjo, combinação e fatorial de um número natural. Além disso, demonstraram uma visão tradicional do conteúdo e destacaram que o livro didático foi o recurso metodológico predominante no ensino de combinatória na licenciatura.

O pesquisador ressaltou, ainda, que o planejamento e o trabalho em grupo permitiram adaptações e inovações na elaboração das atividades e proporcionaram aprendizagens para licenciandos e pesquisadores. Além disso, as discussões coletivas enriqueceram a construção e adequação do material pedagógico. Em relação ao jogo, Silva (2014) informou que ele pode contribuir para o ensino e aprendizagem de combinatória, pois permitiu que os licenciandos usassem conhecimentos extracurriculares, tais como vivências de trânsito, do contexto escolar e de suas experiências sociais e acadêmicas, para contextualizar situações abordadas nele.

Ademais, o estudo em grupo sobre o jogo contribuiu para a formação didática e pedagógica dos licenciandos, ampliando os horizontes metodológicos para além do livro didático. Ele percebeu que os estudantes avançaram em conhecimentos pedagógicos em relação a "estratégias de elaboração de jogos para o conteúdo de Combinatória e ampliaram os conhecimentos sobre diferentes casos de Combinatória que podem ser explorados em diversos contextos educacionais" (SILVA, 2014, p. 108). No entanto, ressaltou que os estudantes estavam em processo de construção de conhecimento.

Percebemos que os estudantes em formação inicial que estão envolvidos desde o ingresso no curso com atividades reais de docência, tais como o Pibid, apresentaram mais conhecimentos sobre a realidade escolar e a relação professor – aluno – conteúdo. Isso favoreceu o desenvolvimento de um olhar mais apurado em relação aos conhecimentos pedagógicos. Por fim, Silva (2014) destacou que é preciso repensar o ensino de combinatória tanto na educação básica quanto na formação inicial, pois as licenciaturas atuais continuam reforçando esse ensino com o uso abusivo de fórmulas, sem a preocupação com a compreensão dos conceitos.

2.4 Algumas contribuições dessas pesquisas

Dos estudos dessas pesquisas, assinalamos especialmente quatro pontos que incidiram sobre a forma de pensarmos a nossa investigação de doutorado: (a) a maneira como a combinatória é tratada para universitários em cursos de licenciatura em matemática; (b) as implicações do trabalho em grupo em sala de aula do ensino superior; (c) a importância da aquisição do conhecimento matemático do conteúdo de combinatória pelos universitários que tendem a se tornarem professores e possivelmente hão de atuar em atividades de ensino e em elaboração de material instrucional; e (d) a importância de uma sistematização e análise aprofundada dos trabalhos que compõem uma revisão de literatura.

Ademais, observamos três aspectos que merecem destaque e que comentamos a seguir. O primeiro informa-nos que, se a combinatória for tratada em cursos universitários de licenciatura em matemática como uma extensão ou de modo muito semelhante ao ensino médio, pouco contribuirá no aprofundamento do conhecimento dos estudantes; percebemos, ainda, que os estudantes rememoravam "nomes", mas não possuíam lembranças, conhecimentos acerca de seus significados. O segundo destaca que há dificuldade em implementar o trabalho em grupo em cursos superiores, pois os estudantes não estão habituados a resolver problemas de modo coletivo e colaborativo em que os membros e os grupos se ajudam mutuamente; além disso, o ato de expressar publicamente e dialogar sobre as ideias matemáticas produtivas causa certo estranhamento. Finalmente, o terceiro aspecto ressalta que o conhecimento do professor a respeito do objeto matemático que ensina deve ser organizado e essencialmente relacionado, o que lhe permitirá realizar intervenções eficazes e pontuais, orientações necessárias e observar que tanto a sua compreensão quanto a do seu aluno só aumentam à medida que relacionam as ideias matemáticas a uma variedade de situações e contextos.

Portanto, para que o professor tenha conhecimento de conteúdo de combinatória é preciso que ele tenha tanto um entendimento instrumental quanto um entendimento relacional dos conceitos envolvidos (SKEMP, 1976). Quando o professor souber resolver problemas e tarefas usando fórmulas, conseguir explicar por que resolveu assim, demonstrar como está pensando e indicar que outros conceitos matemáticos estão relacionados na tarefa é que ele demonstrará que possui conhecimento matemático de combinatória. Assim, poderemos dizer que tem um conhecimento significativo desse conteúdo matemático.

Tais considerações motivaram-nos a pesquisar o ensino formal de combinatória e desencadearam algumas reflexões: Como deve ser o ensino de combinatória para universitários matriculados em cursos de formação inicial de professores de matemática? Quais caminhos teóricos e metodológicos professores formadores podem seguir no ensino de combinatória? Como planejar aulas que auxiliem futuros professores de matemática no ensino desse conteúdo? Nossos estudos mostraram que a combinatória começa a ser trabalhada na educação infantil, quando ensinamos números, contagem e os processos mentais básicos para aprendizagem de matemática (correspondência, comparação, classificação, sequenciação, seriação, inclusão, conservação). Além disso, ajudaram-nos a constatar que o lugar ocupado, ou não, pela combinatória em uma matriz curricular deve ser problematizado, pois impactos são percebidos em sala de aula de cursos universitários de formação inicial de professores de matemática e, consequentemente, têm seus reflexos na educação básica.

Notamos, ainda, que a combinatória já estava presente em livros didáticos do ensino fundamental desde a década de 1930. Em Rocha (2006), vimos que, nos livros do professor Jacomo Stávale publicados pela Companhia Editora Nacional durante as décadas de 1930, 1940 e 1950, apareciam problemas sobre permutações, arranjos e combinações simples. Um exemplo é o livro “Exercícios de Matemática: Quinto ano”, de 1939, no qual os problemas eram diretos, mais objetivos e tinham características de problema tipo, quando rememoravam um problema já conhecido, resolvido anteriormente, e envolviam a mesma ideia combinatória; ou de aplicação, no qual o aluno haveria de aplicar uma fórmula para resolvê-lo. Portanto, ainda são semelhantes a alguns encontrados em livros didáticos atuais[29]. Isso talvez justifique o fato de Rocha (2006) ter mencionado que, para alguns alunos, os problemas de combinatória são chatos e fantasiosos. Embora haja um esforço para a implementação de problemas reais que envolvam, de alguma forma, a atividade humana, os estudantes ainda têm certo "embaraço" em identificar os tipos de problema de combinatória, e, portanto, estudantes têm dificuldades em compreendê-los e resolvê-los. Ademais, os estudos analisados auxiliaram-nos a organizar os instrumentos de produção e coleta de dados da investigação de doutorado.

Há de se ressaltar também que, embora produzidas em períodos distintos (2006, 2009, 2014), as pesquisas não se correlacionam. Isto também foi percebido por nós quando analisamos os demais estudos. Com isso, queremos dizer que eles não se referenciam, e, portanto, não conseguimos saber como os estudos pregressos têm sido incorporados àqueles em desenvolvimento. Por outro lado, observamos que os textos de autoria de Lourdes de la Rosa Onuchic têm influenciado e respaldado as produções brasileiras no que concerne à metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação em matemática mediante a resolução de problemas. São textos que, embora não tratem especificamente de resolução de problemas combinatórios, respaldam a discussão central acerca da resolução de problemas em si. Aqui falamos não somente em relação às três pesquisas que analisamos em maior profundidade, mas em nome da grande maioria delas. Cada uma, a seu modo, buscou fundamentos nos estudos dessa renomada pesquisadora e professora brasileira.

Outro aspecto importante é a predominância, para além dos três estudos analisados, de pesquisas qualitativas. Pareceu-nos que há uma tendência à produção de estudos que buscam compreender um fenômeno específico que emerge principalmente do contexto em que o pesquisador exerce suas atividades profissionais. Uma questão que ainda deve ser investigada por outras pesquisas é o impacto desses estudos na escola pública, visto que são essencialmente produções de mestrados profissionais que têm nela o destino principal. Ainda não temos uma resposta contundente. No entanto, arriscamo-nos, do lugar que ocupamos em cursos de formação inicial de professores de matemática e dos estudos realizados, a dizer que

---

[29] Exemplos de problemas de combinatória encontrados no livro "Exercícios de Matemática: Quinto ano", para o ano de 1939, do professor Jacomo Stávale:
1. Quantas permutações podemos efetuar com as 10 letras da palavra Pernambuco, de modo que as quatro vogais fiquem sempre na mesma ordem, a saber: e, a, u, o?
2. De quantos modos diferentes 8 navios podem entrar em um porto, um depois do outro?
3. Um Congresso Legislativo é constituído por 12 deputados governistas e 7 oposicionistas. De quantos modos se pode organizar uma comissão com 3 governistas e 2 oposicionistas? (STÁVALE, 1939, p. 12-14 apud ROCHA, 2006, p. 23).

essas pesquisas nos auxiliaram a pensar em conhecimentos que sejam imprescindíveis à formação inicial e ao exercício da docência, para que haja coerência entre teorias e práticas a serem exercidas.

Ademais, ressaltamos que elas deixaram rastros que nos levaram a fortalecer nossa preocupação com a formação inicial de professores de matemática e nos permitiram vislumbrar uma pesquisa que trate a combinatória na perspectiva de quem posteriormente deve ensiná-la de modo diferente daquele aprendido e tenha nas discussões matemáticas de classe inteira o cerne da aprendizagem dos conceitos combinatórios. Por outro lado, estamos cientes de que ainda há necessidade de ampliarmos este mapeamento de pesquisas estendendo-o para outras áreas de conhecimento. Isto sugere que outros cursos universitários em que a combinatória aparece como conteúdo curricular sejam olhados e questionados a partir do ensino oferecido. Tal movimento é importante e necessário em pesquisas futuras para não invisibilizarmos a combinatória e problematizarmos a condição atual de um conteúdo essencial à atividade humana.

CAPÍTULO 3: ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Apresentamos, neste capítulo, as principais teorias que sustentam esta pesquisa, as quais se relacionam à construção do conhecimento matemático que perpassa o processo formal de ensino e de aprendizagem de combinatória, desde sua configuração mais elementar até o nível requerido no ensino superior. Nesse lócus, o ensino superior, quando se pensa na construção de conhecimento matemático, espera-se algo mais elaborado e complexo. Ou seja, em nível superior exige-se um pensamento matemático avançado, mais elaborado, em que abstrações e definições conceituais podem tornar-se "parte do jogo" e requerer certo nível de complexidade, uma vez que "conceitos podem ser definidos com precisão para fornecer uma base firme para a teoria matemática" (TALL, VINNER, 1981, p. 151, tradução nossa[30]).

Desse modo, temos o objetivo de evidenciar aqui (1) aspectos teóricos acerca da análise combinatória, com ênfase nos agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação. Apoiamo-nos principalmente nos estudos de Morgado et al. (1991), Hazzan (1993), Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) e Guzmán (2000) para dissertar sobre eles. Assim, tratamos de definições formais que consideramos como aquelas consensualmente aceitas e difundidas pela comunidade matemática em diferentes contextos (teórico, cultural, social, histórico, econômico, político, entre outros); e (2) a construção de conceitos matemáticos com especial enfoque sobre as noções de imagem conceitual e definição do conceito[31] ante a abordagem dada essencialmente por Tall e Vinner (1981). Revelar imagens conceituais dos alunos é muito importante para o ensino, pois "[...] poderia dar-nos melhor compreensão de nossos alunos (sabendo o que os levou a agir como agiam), mas também sugerir algumas melhorias em nosso ensino que formou tais imagens conceituais erradas" (VINNER; HERSHKOWITZ, 1980, p. 180, tradução nossa[32]).

Essas noções (imagem conceitual e definição do conceito) envolvem atributos relacionados a um conceito e refletem, com muita frequência, formas de entendimento em matemática, pois, conforme afirma Vinner (1991; 2002), "entender […] significa ter uma

---

[30] [...] in which concepts can be defined accurately to provide a firm foundation for the mathematical theory.

[31] Originalmente os termos são descritos em inglês como "concept image" e "concept definition". Para eles, é possível encontrar diferentes traduções em língua portuguesa. No entanto, optamos em designá-los por *imagem conceitual* e *definição do conceito*. Em alguns momentos específicos, podem aparecer também os termos *conceito imagem*, *conceito definição e definição conceitual* como variações que consideramos relevantes. Embora a tradução aqui utilizada tenha sido nossa, coaduna-se com aquelas apresentadas por Giraldo (2004), Broetto (2016) e Nery Júnior (2018).

[32] [...] might give us better understanding of our students (knowing what caused them to act as they acted) but also it might suggest some improvements to our teaching which formed such wrong concept images.

imagem conceitual” (2002, p. 69, tradução nossa[33]). Assim, procura-se dialogar também com Hershkowitz (1994) a respeito de *atributos* e *exemplos protótipos*, e Skemp (1976), quando discorre sobre *entendimento relacional e instrumental* no ensino e na aprendizagem de matemática. Embora, nas últimas duas décadas, alguns pesquisadores[34] tenham se dedicado ao estudo da complexa problemática da construção dos conceitos em matemática, valemo-nos dos textos originais de Tall, Vinner, Hershkowitz e Skemp. Isso ocorre pelo fato de, em matemática, serem considerados textos clássicos e fundamentais para a compreensão dessas bases teóricas.

Assim sendo, o item 3.2 deste capítulo organiza-se em três eixos. No primeiro, intitulado “*Imagem Conceitual* e *Definição do Conceito*: um olhar na perspectiva de Shlomo Vinner e David Tall”, discorremos sobre a distinção entre as formas de apreensão dos conceitos no cotidiano e em contextos formais de aprendizagem. Evidenciamos uma possível trajetória dos conceitos intuitivos aos formais, visto que assumem significados específicos no contexto em que são pensados.

Além disso, apresentamos nosso entendimento de imagens e definições conceituais e de atributos, exemplos protótipos e compreensão, termos relacionados e importantes à compreensão de imagens. Desse modo, no segundo eixo, Atributos e exemplos protótipos na visão de Hershkowitz, argumentamos o papel de atributos e protótipos no ensino e na aprendizagem de combinatória, visto que a escrita original é dedicada à geometria. Por fim, no terceiro eixo, Compreensão em Matemática: a abordagem dada por Skemp, tratamos da compreensão ou entendimento (instrumental e relacional) e de suas implicações no ensino e aprendizagem de matemática.

3.1 Análise combinatória: aspectos teóricos

Uma das primeiras atividades matemáticas que uma criança aprende é a contagem. Ela enumera elementos de um dado conjunto ou situação para precisar a quantidade de seus componentes. Além disso, à medida que vão crescendo, as crianças aprendem as operações aritméticas por meio da aplicação delas na resolução de problemas de contagem (MORGADO et al., 1991). Ao concebê-la desse modo, entendemos que o ensino de combinatória tem início

---

[33] To understand […] means to have a concept image.

[34] Broetto (2016) e Nery Júnior (2018) investigaram, respectivamente, o desenvolvimento de imagens conceituais de números irracionais para ingressantes na licenciatura em matemática e imagens conceituais e conflitos cognitivos na aprendizagem de sistemas lineares por estudantes do ensino médio.

na educação infantil com as ideias de seriação, quando, por exemplo, solicitamos a uma criança que ordene uma sequência seguindo um critério.

Ao definir o critério forma, o professor pode espalhar inúmeras formas geométricas planas coloridas sobre uma mesa, selecionar uma delas e orientar que as crianças encontrem a mesma forma independente da cor. Outra possibilidade seria: considerando o critério forma e cor, construir sequências ordenadas da mesma forma e da mesma cor, e, assim, sucessivamente até se esgotarem todas as possibilidades. Isso envolve, além da definição do critério, a tomada de decisão sobre as escolhas para que ele seja definido. Antes de ir direto para cada tarefa o professor deve dialogar com as crianças (POLYA, 1973) acerca do enunciado proposto e dos elementos que o constitui enquanto texto matemático. Questões como: Alguém conhece esta forma? Qual seu nome? Onde você já viu formas semelhantes a esta? Qual é sua cor? Existem formas semelhantes com cores distintas? dentre outras podem e devem ser feitas por educadores infantis e professores dos anos iniciais. Perguntas semelhantes a estas, e outras que se fizerem necessárias em sala de aula, podem auxiliar que as crianças compreendam o enunciado verbal que foi falado para crianças na educação infantil. Quando as crianças conversam acerca da tarefa e compreendem o que devem fazer, elas se sentem motivadas e isto vai auxiliar o educador na condução da resolução do problema proposto.

No ensino fundamental, assim como na educação infantil, a combinatória aparece diluída nos conteúdos estudados nessa etapa da educação básica. Por exemplo, nos anos iniciais do ensino fundamental, quando trabalhamos com os diferentes significados da operação de multiplicação, as ideias combinatórias aparecem, por exemplo, em problemas como *"Tendo duas saias – uma preta (P) e uma branca (B) – e três blusas – uma rosa (R), uma azul (A) e uma cinza (C) –, de quantas maneiras diferentes posso me vestir?"* (BRASIL, PCN, 1997, p. 73). Nos anos finais do ensino fundamental, as ideias de combinatória aparecem, por exemplo, subjacentes ao estudo dos números naturais[35] no 6º ano, pares ordenados (quando designa um ponto no plano na representação da resolução de um problema envolvendo a ideia de produto cartesiano) e das possibilidades no 7.º ano e do princípio multiplicativo no 8º ano.

---

[35] Pedro está escolhendo um sorvete de uma bola com um tipo de cobertura. Coco, abacaxi, flocos e creme são os sabores de sorvete disponíveis na sorveteria. Além desses, a sorveteria dispõe de três tipos de cobertura. São elas: caramelo, chocolate e morango. De quantas maneiras diferentes Pedro pode montar seu sorvete? (Adaptado de GIOVANNI JÚNIOR, J. R. CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática*. 6º ano. Ed. renovada. São Paulo: FTD, 2009, p. 53.).

Diferentemente dos anos iniciais e finais em que a combinatória aparece associada a outros tópicos de matemática, no ensino médio ela desponta formalmente como um conteúdo a ser ensinado na 2.ª série, sob as denominações de arranjo, permutação e combinação. Pesquisadores que analisaram coleções completas de livros didáticos de ensino médio, como Silva (2016), UFPE; Pinheiro (2016), UESC; Lima (2016), UFAL; Gonçalves Filho (2016), UENF; Fonseca (2015), UFS; Dambros (2015), UFMS; Pinheiro (2015), PUC/SP; Dutra (2014), UESC; Costa (2013), UFLA; Sena (2013), PUC/MG; Fusel (2013), UFSCar; Alves (2012), UFRJ; Lima (2011), PUC/MG; Mendonça (2011), PUC/SP; Souza (2010), UNESP; Braga (2009), ULBRA; Vargas (2009), PUC/MG, concluíram, assim como nós, que a temática se restringe a essa série ou ano escolar do ensino médio e que problemas são contemplados apenas em capítulos específicos que tratam da combinatória.

Nossa experiência em diferentes níveis de ensino mostra que a combinatória passa praticamente despercebida pelas práticas de professores de educação infantil e ensino fundamental e aparecem no ensino médio como algo novo e repleto de fórmulas. Parece-nos que os estudantes não veem e nem percebem que algum conceito de combinatória está subjacente às tarefas matemáticas que envolvem contagem e situações nas quais existem critérios para selecionar ou alocar elementos ou objetos. E assim, esses conceitos também passam sem serem compreendidos, percebidos pelos estudantes.

Por isso, consideramo-la um assunto importante para o desenvolvimento do próprio conhecimento matemático, à medida que antecede o ensino de outros tópicos, como a probabilidade. Acerca disso, Piaget e Inhelder (1951) apontam que pessoas que não desenvolvem capacidades combinatórias usam as ideias de probabilidade apenas em casos de experimentos aleatórios muito elementares. Esses autores relacionam o conceito de acaso com a ideia de permutação, o desenvolvimento do conceito de combinação com a correta estimativa de probabilidades e o uso do diagrama de árvore em probabilidade com a existência de uma relação entre o espaço amostral de um experimento composto e as operações combinatórias, pois o inventário de todos os eventos possíveis no referido espaço amostral requer um processo de construção combinatória.

Além disso, o pensamento combinatório é fundamental para a vida em sociedade. Ele aparece em escolhas baseadas em critérios e tomadas de decisões pelos sujeitos, cujas consequências influenciam na forma como o mundo social, político e cultural é percebido. Assim, a capacidade combinatória é um componente fundamental do pensamento formal, visto que o raciocínio hipotético-dedutivo opera com as possibilidades que o sujeito descobre e avalia por meio de operações combinatórias. Desse modo, infere nas relações que as pessoas estabelecem umas com as outras no contexto em que vivem.

Com base nos estudos de Kapur datados de 1970, Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996) justificam o ensino de combinatória na escola. Esses pesquisadores apontam que, embora Kapur tenha listado alguns motivos que assinalam a importância do ensino de combinatória ainda na década de 1970, eles são válidos até os dias de hoje. Assim, a combinatória como um componente essencial da matemática discreta tem um papel importante na matemática escolar, uma vez que

> • Como não depende do cálculo, permite levantar problemas apropriados para diferentes níveis, problemas que ainda não foram resolvidos podem ser discutidos com os alunos; então, eles descobrem a necessidade de criar novas matemáticas.
> • Pode ser usado para treinar os alunos em enumeração, conjectura, generalização, otimização e pensamento sistemático;
> • Pode ajudar a desenvolver muitos conceitos, como os de aplicação, relações de ordem e equivalência, função, amostra, conjunto, subconjunto, produto cartesiano, etc.;
> • Muitas aplicações podem ser apresentadas em diferentes campos, tais como: Química, Biologia, Física, Comunicação, Probabilidade, Teoria dos números, Gráficos, etc. [Portanto, a] [...] combinatória não é simplesmente uma ferramenta de cálculo para Probabilidade (NAVARRO-PELAYO, BATANERO, GODINO, 1996, p. 26-27, tradução nossa[36]).

De modo semelhante no que se refere à combinatória como componente da matemática discreta e em termos conceituais, o livro clássico “Análise Combinatória e Probabilidade”, de Morgado et al. (1991), que, em 2016, chegou a sua 10.ª edição, aponta que a combinatória é a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas. Anteriormente a essa publicação, seguindo o mesmo raciocínio conceitual, Bachx, Poppe e Tavares (1975) assinalam que a análise combinatória ou combinatória são expressões de mesmo sentido que se referem a um ramo da matemática que nos permite resolver problemas em que é basicamente necessário “escolher e arrumar” os objetos de um conjunto dado. Enfatizando um pouco mais as bases combinatórias a partir das operações entre conjuntos, Hazzan (1993) ressalta que a combinatória “visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos *agrupamentos formados sob*

---

[36] - Puesto que no depende del Cálulo, permite plantear problemas apropiados para diferentes niveles; pueden discutirse con los alumnos problemas aún no resueltos, de modo que descubran la necesidad de crear nuevas matematicas.
- Puede emplearse para entrenar a los alumnos en la enumeración, la realización de conjeturas, la generalización, la optimización y el pensamiento sistemático.
- Sirve para desarrollar muchos conceptos, como los de aplicación, relaciones de orden y equivalencia, función, muestra, conjunto, subconjunto, producto cartesiano, etcétera.
- Es útil pan muchas aplicaciones en campos como: química, biologia, física, comunicación, probabilidad, teoria de números, grafos, etcétera.
La combinatoria no es simplemente un medio de cálculo para la probabilidad.

certas condições" (p. 1). A literatura internacional também se aproxima dessa lógica conceitual brasileira, ao destacar:

> A combinatória, ou análise combinatória como historicamente se conhece, estuda – segundo descreve Ribnikov (1988) – os conjuntos discretos e as configurações que podem ser obtidas de seus elementos mediante certas transformações que originam mudanças na estrutura ou na composição deles. A estrutura desses conjuntos pode ser muito complexa dependendo das relações existentes entre seus elementos. A primeira tarefa da análise combinatória consiste em estudar tais estruturas discretas e expressar suas propriedades, empregando métodos matemáticos (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 17-18, tradução nossa[37]).

Mais recentemente e com base nos estudos da psicologia cognitiva, Borba (2010) ressalta que a análise combinatória

> [...] é conhecida como a *arte de contar*, pois nas situações combinatórias são enumeradas maneiras possíveis de combinar dados objetos. Dessa forma, a Combinatória se constitui num ramo da Matemática que estuda técnicas de contagem - direta e implícita - de agrupamentos possíveis, a partir de elementos dados, que satisfaçam a determinadas condições (BORBA, 2010, p. 1).

Assim sendo, nesta tese de doutorado entendemos a análise combinatória como parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas (MORGADO et al., 1991) e envolve frequentemente problemas que, sob certas condições, buscam demonstrar a existência e contar ou classificar sequências e/ou subconjuntos formados de um conjunto finito dado. Por isso, estuda os conjuntos discretos e as configurações que podem obter-se de seus elementos mediante certas transformações que originam mudanças na estrutura ou na composição dos mesmos (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996). Logo, em contexto de matemática discreta que envolve conjuntos finitos, tais como os inteiros positivos, a combinatória mostra-se imprescindível à obtenção de métodos de contagem, envolve agrupamentos ou operações, tais como arranjos, permutações e combinações, e é alicerçada no PFC – Princípio Fundamental da Contagem. Além disso, abrange

> […] princípios de contagem (o princípio da inclusão/exclusão e o princípio da casa dos pombos [ou Princípio das gavetas de Dirichlet[38]]); algumas ideias básicas e úteis

---

[37] La Combinatoria, o Análisis Combinatorio como históricamente se le conoce, estudia – según describe Ribnikov (1988) – los conjuntos discretos y las configuraciones que pueden obtenerse a partir de sus elementos mediante ciertas transformaciones que originan cambios em la estructura o la composición de los mismos. La estructura de estos conjuntos puede ser muy compleja dependendo de las relaciones existentes entre sus elementos. La primera tarea del análisis combinatorio consiste em estudiar tales estructuras discretas y expresar sus propriedades, empleando métodos matemáticos.

[38] Acredita-se que o primeiro relato deste princípio foi feito por Dirichlet em 1834. Tinha o nome de Schubfachprinzip ("princípio das gavetas"). Pode ser apresentado por meio de diversas afirmações, tais como:
i) Se n pombos devem ser postos em k casas, $n > k$, então pelo menos uma casa irá conter mais de um pombo;
ii) Se, em n casas, são postos $n + 1$ pombos, então haverá uma casa com pelo menos dois pombos;
iii) Se o número de elementos de um conjunto finito A é maior do que o número de elementos de um outro conjunto B, então uma função de A em B não pode ser injetiva.
Essas afirmações parecem-nos simples à primeira vista. No entanto, são úteis para resolver problemas que de imediato não pareçam ter uma solução. Por ser um argumento usado em provas de teoremas, não oferece uma

> da teoria dos conjuntos (uniões e interseções); o estudo de estruturas discretas (redes de comunicação, grafos e estruturas de árvore); relações de recorrência (tais como a relação de Fibonacci, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$); e a análise de algoritmos (SOUZA, 2010, p. 49).

Quanto aos tipos de problemas estudados em combinatória, dedicamo-nos aos descritos por Morgado et al. (1991) e Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), visto que suas obras se constituem em clássicos nacionais e internacionais para essa área de ensino. Para Morgado et al (1991), os dois tipos de problemas que ocorrem frequentemente em análise combinatória incidem sobre subconjuntos de elementos de um conjunto finito em determinadas condições dadas, seja para *(i) demonstrar a existência*, visto em situações, tais como "Quantas soluções tem a equação $x + y + z = 20$, com $x, y, z \geq 0$" (adaptado de MORGADO et al., 1991, p. 51), seja para *(ii) contar ou classificar*.

Com base nos estudos de Morgado et al. (1991), consideramos que essa segunda condição pode ser vista em três perspectivas distintas: *problemas que contam e não classificam*, como o problema de combinação: "De quantos modos podemos escolher 6 pessoas, incluindo pelo menos duas mulheres, em um grupo de 7 homens e 4 mulheres?" (MORGADO et al., 1991, p. 33); *problemas que contam e classificam simultaneamente*, como visto nesta situação elaborada por nós: "Em um grupo de 5 médicos, Marcos, Paulo, André, Felipe e Fernando, vamos escolher o presidente, o vice-presidente e o tesoureiro do hospital. De quantas maneiras as escolhas podem ser realizadas de forma que Fernando seja escolhido?"; e *problemas que classificam, mas não contam*: "Permutando os algarismos do número 1238, qual a posição do número 2381?" Também elaborado por nós com a finalidade de evidenciar as distintas situações de contagem e classificação.

Na literatura internacional, vimos que Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) também descrevem, classificam e categorizam os principais tipos de problemas combinatórios. Assim como seus contemporâneos, diferenciam problemas de existência, contagem e classificação. Além desses, apresentam os problemas combinatórios de enumeração e otimização. Na tabela 4 apresentamos os tipos de problemas definidos por

---

fórmula ou equação em que seja possível substituir variáveis para chegar a um resultado desejado. Assim, depende da interpretação dada ao problema para que seja aplicado. Deve-se identificar, em cada problema, quem está na posição de pombos e quem está na posição de gaiolas/casas. A seguir, apresentamos um exemplo de aplicação desse princípio extraído de Costa (2013, p. 20): 1) Quantas pessoas, no mínimo, devem morar numa casa com 7 quartos para garantirmos que pelo menos 2 dormem num mesmo quarto? É fácil observar que, se a casa tiver até 7 moradores, é possível termos no máximo uma pessoa por quarto. Já se a casa tiver 8 ou mais moradores, teremos o número de moradores (pombos) maior que o número de quartos (casas), o que garante, pelo PCP, que pelo menos duas pessoas durmam no mesmo quarto.

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), suas características e um exemplo de cada tipo de problema combinatório.

Tabela 4 – Categorização dos problemas combinatórios

Tipos de problemas	***Característica***	***Exemplo***
Existência	Nele se pretende provar a existência ou não de um determinado tipo de estrutura discreta. São problemas que, à primeira vista, podem parecer triviais, mas alguns dos problemas combinatórios mais complexos podem ser incluídos nesta categoria.	Uma professora sai a cada dia para passear com um grupo de 15 meninas. A forma tem 5 filas de 3 meninas cada uma. Deseja-se organizar a turma de modo que, no transcurso de 7 dias, cada aluna se encontre com todas as demais uma única vez (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 24, tradução nossa[39]).
Contagem	Trata de determinar o número de elementos de um conjunto finito que possui uma propriedade ou uma coleção de propriedades.	Quantos números de telefone com quatro dígitos podem ser formados com os algarismos de 0 a 9? (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 126, tradução nossa[40]).
Classificação	Consiste na classificação por meio de critérios apropriados. Desse modo, os problemas se traduzem na busca e no conteúdo do número de subconjuntos que definem a classificação. Portanto, a contagem é renunciada para a realização de uma classificação. Geralmente os resultados são encontrados a partir de uma sucessão de experimentos aleatórios, cujas possibilidades variam em função das regras estabelecidas.	Uma loja tem 10 tipos diferentes de cartões de Natal. Você quer enviar um cartão para cada um dos seus 3 amigos. De quantas maneiras diferentes você consegue fazer? (Adaptado de BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 201, tradução nossa[41]).
Enumeração	Refere-se à listagem de todos os subconjuntos de elementos com base em critérios definidos. Assim, pode ser pensado e escrito um algoritmo para sua construção.	Tem-se um quadrado com um número de células pares ou ímpares: havendo completado com números ou seguindo a ordem natural dos números: 1, 2, 3, 4, etc. ou qualquer outra progressão aritmética, como 2, 5, 8, 11, 14, etc. disponha todos esses números em outro quadrado de células semelhante àquele, de modo que todos os números de cada fileira, seja da esquerda para a direita, seja de cima para baixo, inclusive nas diagonais, tenham a mesma soma (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 25, tradução nossa[42]).

[39] [...] una professora saca cada día a pasear a un grupo de 15 niñas; las formas en 5 filas de 3 niñas cada una; se quiere organizar las ternas de un modo tal que en el transcurso de 7 días cada alumna se encuentre con todas las demás uma sola vez.

[40] Cuántos números de teléfono de cuatro cifras se puedem formar com los dígitos del 0 al 9?

[41] Una tienda tiene 10 clases diferentes de tarjetas de navidad. Quieres enviar una tarjeta a cada uno de tus 3 amigos. De cuántas formas diferentes puedes hacerlo?

[42] Teniendo un cuadrado con un número de celdas par o impar: Habiéndolo completado com cifras, o según el orden natural de los números: 1, 2, 3, 4, etc. o cualquier otra progresión aritmética, como 2, 5, 8, 11, 14, etc. Disponer todas estas cifras según outro cuadrado de celdas semejante a aquél, de forma que todas las cifras de cada hilera bien de izquierda a derecha, bien de arriba hacia abajo, incluso las dos diagonales, tengan la misma suma.

<table>
<tr>
<td>Otimização</td>
<td>Consiste na busca da melhor solução possível para que a condição estabelecida no problema seja alcançada. Às vezes, o número de soluções é muito amplo. Assim, o conjunto de possibilidades de respostas advém da resolução de uma função, na qual se atribuem os valores de acordo com os dados do problema. Desse modo, considera-se como solução ótima aquela que perpassa as noções de máximo e mínimo. Isso quer dizer que, nesse tipo de problema, se procura determinar os valores extremos que uma função pode assumir em um dado intervalo.</td>
<td>Um excursionista planeja fazer uma viagem e acampar. Há 5 itens que ele deseja levar consigo, mas esses, juntos, excedem o limite de 60 quilos que ele supõe ser capaz de carregar. Para ajudar a si próprio no processo de seleção, ele atribui valores, por ordem crescente de importância, a cada um dos itens, conforme a tabela a seguir:
<table>
<tr><td>Item</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Peso (kg)</td><td>52</td><td>23</td><td>35</td><td>15</td><td>7</td></tr>
<tr><td>Valor</td><td>100</td><td>60</td><td>70</td><td>15</td><td>8</td></tr>
</table>
Supondo a existência de uma unidade de cada item, faça um modelo [...] que maximize o valor total, sem exceder as restrições de peso (Adaptado de SOUZA, 2009, p. 8 – 9).</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras.

Portanto, consideramos que geralmente os problemas de matemática discreta lidam com *enumeração/contagem*, quando contam certas estruturas discretas e investigam quantas respostas podem existir para problemas com soluções conhecidas; *existência*, quando examinam a existência de certas estruturas discretas e buscam reconhecer se um dado problema tem uma solução ou não; *classificação*, quando propõem a construção de certas estruturas discretas; e *otimização*, quando focalizam a descoberta de melhor solução para um problema particular e encontram a estrutura discreta máxima, mínima ou ótima sob certas condições.

Segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), essa categorização apresentada na tabela acima incide sobre o *tipo de solução* requerida pelo problema. No entanto, os problemas combinatórios ainda podem ser categorizados em função do *número de operações* combinatórias envolvidas – simples ou compostas; *modelo combinatório implícito* no enunciado – seleção, colocação ou alocação, partição, ordenação ou composição (sendo este último apresentado na pesquisa de Guzmán (2000) em complementação aos estudos pregressos dos autores acima mencionados); *tipo de objeto* – pessoas, números, letras, flores; e *tamanho e variação dos parâmetros* – pequenos/grandes, variáveis/não variáveis.

Nossos estudos sobre o assunto e nossa experiência profissional no ensino, aprendizagem e avaliação dele permitem-nos dizer que a compreensão do modelo combinatório implícito no enunciado conduz todo o processo de resolução de problemas combinatórios. A compreensão do enunciado se configura no cerne, na pedra fundamental, na base da resolução de problemas, comentada desde a obra clássica de Polya em 1945 até trabalhos atuais de alguns dos pesquisadores engajados nesta temática (SCHROEDER, LESTER, 1989; ONUCHIC, 1999; ONUCHIC, ALLEVATO, 2004; POLYA, 1973,

SANTOS, 1997, 1994; SANTOS-WAGNER, 2008; ZANON, 2011; ZANON, ZOGAIB, SANTOS-WAGNER, 2018). Para se resolver um problema o passo inicial é compreender o que é tratado na situação, ou seja, é preciso que se compreenda o texto ou enunciado falado ou escrito do problema. Para nós, quando um indivíduo lê e compreende o enunciado (o texto) de um problema de combinatória, ele passa a analisar o modelo combinatório implícito neste enunciado. E essa compreensão indica o tipo de problema quanto à solução desejada, ao número e ao tipo de operação e/ou agrupamento envolvido (arranjo, permutação, combinação), à identificação do tipo de objeto e ao tamanho e variação dos parâmetros. Por isso, apresentamos e comentamos, a seguir, aspectos do modelo combinatório implícito.

Conforme detalhado por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), e, Guzmán (2000), o modelo combinatório implícito (MCI) é uma variável que foi descrita em nível teórico por Dubois em 1984[43]. Tal modelo permite a identificação direta de um método de contagem para a resolução de problemas combinatórios por meio da identificação de esquemas de representação implícitos nos enunciados:

> Esses modelos podem ser considerados como tipos de representações ou esquemas concretos inerentes às declarações de problemas combinatórios. A distinção entre esses modelos é relevante do ponto de vista matemático, já que o tipo de objetos e representações que intervêm em cada modelo é diferente (amostragem, correspondências, partições de conjuntos, etc.). Isso influenciará necessariamente os procedimentos de resolução e as dificuldades dos grupos [de alunos] ante os diferentes tipos de problemas e técnicas de resolução (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 31, tradução nossa[44]).

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) destacam, ainda, que o modelo combinatório implícito só preexiste após a identificação da categoria em que o problema pode ser adequadamente classificado (ver tabela 4). Respaldados nos escritos de 1984 de Dubois, Batanero et al. (1996) mencionam que os tipos de MCI são *seleção, colocação ou alocação e partição*. A **seleção** de uma amostra mediante um conjunto de objetos diz respeito à escolha de uma amostra genérica de tamanho *r* tomada dos *n* objetos de um conjunto inicial. Ocorre quando os elementos que compõem o conjunto de origem precisam ser numerados ou contados com base em um determinado critério. Desse modo, formam outras e novas configurações, pois os problemas de seleção apresentam em sua estrutura a ideia de elementos ordenados ou não ordenados, com ou sem repetição. Para isso, requer distinguir se todos os

---

[43] DUBOIS, J. G. Une systématique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 15, p. 37-57, 1984.

[44] Estos modelos podemos considerarlos como tipos de representaciones o esquemas concretos inherentes en los enunciados de los problemas combinatorios. La distinción entre estos modelos es relevante desde el punto de vista matemático, ya que el tipo de objetos y representaciones que intervienen en cada modelo es distinto muestro, correspondencias, particiones de conjuntos, etc.) Esto necesariamente influirá en los procedimentos de resolución y en las dificultades de los alunos ante las distintas clases de problemas y técnicas de resolución.

elementos são diferentes ou se alguns são iguais; se a repetição dos elementos é considerada ou não e se a ordem dos elementos intervém, ou não, na configuração dos subconjuntos ou sequências.

Segundo Guzmán (2000), ao se cruzarem ordem e repetição, "obtêm-se quatro tipos disjuntos de subesquemas, os quais dão lugar a quatro modelos combinatórios" (p. 22): seleção ordenada sem repetição (arranjo simples), seleção ordenada com repetição (arranjo com repetição), seleção não ordenada sem repetição (combinação simples) e seleção não ordenada com repetição (combinação com repetição).

A **colocação** ou **alocação** de objetos em caixas, células ou urnas acontece no momento em que se deseja colocar ou alocar elementos distintos ou não de certo conjunto em um número de posições ou células iguais ou distintas. Assim, pede-se que se enumerem ou contem as diferentes relações entre dois conjuntos (elementos e posições) de objetos, cujos interesses são as várias disposições de tais objetos nas caixas ou as várias aplicações que são estabelecidas entre os dois conjuntos.

Algebricamente pode ser entendido quando se quer colocar *r* objetos dentro de *n* caixas, células ou urnas, ou então estabelecer uma aplicação de um conjunto de *r* objetos em outro conjunto de *n* objetos. Além disso, deve-se considerar que: a ordem dos objetos dentro das caixas deve, ou não, ser levada em conta; as caixas e os objetos são iguais ou diferentes; não faz sentido ordenar os objetos quando eles são os mesmos. Então, ao concebermos os tipos de distribuição de *r* objetos em *n* casas, é possível formar agrupamentos distintos adicionando as seguintes condições:

> 1º Colocações injetivas: com no máximo um objeto por caixa ($r \leq n$).
> 2º Colocações sobrejetivas: colocações com ao menos um objeto por caixa ($r \geq n$).
> 3º Colocações bijetivas: colocações de um único objeto por caixa ($n = r$).
> 4º Colocações quaisquer: pode ser colocado o número que se deseja de objetos em cada caixa ou desejar alguma caixa vazia (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 34, tradução nossa[45]).

Portanto, existem 24 modelos de colocações simples, conforme resumido na tabela 5.

---

[45] 1º Colocaciones inyectivas: con a lo sumo un objeto por caja ($r \leq n$).
2º Colocaciones sobreyectivas: colocaciones con al menos un objeto por caja ($r \geq n$).
3º Colocaciones biyectivas: colocaciones de un sólo objeto por caja ($n = r$).
4º Colocaciones cualesquiera: se puede colocar el número que se desea de objetos en cada caja o dejar alguna caja vacía.

Tabela 5 – Modelos de colocações simples

OBJETOS	CASAS	TIPO	FÓRMULA[46]
		COLOCAÇÕES ORDENADAS	
		Injetiva	$A_{n,p}$
	Distintas	Sobrejetiva	-
		Bijetiva	P_n
Distintos		Qualquer	-
		Injetiva	-
	Iguais	Sobrejetiva	-
		Bijetiva	-
		Qualquer	$A_{n,p}$
		COLOCAÇÕES NÃO ORDENADAS	
		Injetiva	$A_{n,p}$
	Distintas	Sobrejetiva	-
		Bijetiva	-
Distintos		Qualquer	-
		Injetiva	-
	Iguais	Sobrejetiva	-
		Bijetiva	-
		Qualquer	-
		Injetiva	$C_{n,p}$
	Distintas	Sobrejetiva	-
		Bijetiva	-
Iguais		Qualquer	-
		Injetiva	-
	Iguais	Sobrejetiva	-
		Bijetiva	-
		Qualquer	-

Fonte: Adaptado de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo, 1996, p. 35.

A **partição** de um conjunto de elementos em subconjuntos refere-se à ideia de particionar em subconjuntos um conjunto de objetos. É requerida quando se deseja classificar exaustivamente os elementos de um conjunto inicial em um determinado número de subconjuntos. Desse modo, trata de formar uma partição de um conjunto de objetos iguais ou diferentes em um determinado número de subgrupos com certas condições dadas. Genericamente, tem-se, então, uma partição de um conjunto de *r* elementos em *n* subconjuntos. Assim sendo, a decomposição de um número natural em somas é concebida como um caso particular de partição (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996).

[46] Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) apresentam as 24 fórmulas correspondentes a cada tipo de agrupamento indicado na tabela. No entanto, optamos por apresentar somente aquelas que se relacionam aos agrupamentos simples de arranjo ($A_{n,p}$), permutação (P_n) e combinação ($C_{n,p}$), pois, nesta tese, tratamos especificamente deles.

De acordo com Guzmán (2000), essa partição pode ser vista como uma nova interpretação do anterior (colocação) quando se deseja colocar objetos em *n* caixas. Assinala que, "se nos esquecermos das caixas e olharmos para os subconjuntos de objetos que eles contêm, obteremos os subconjuntos em que um conjunto poderá ser decomposto e haver subconjuntos vazios (se alguma caixa não contiver nenhum elemento)" (GUZMÁN, 2000, p. 24, tradução nossa[47]). Desse modo, cada posicionamento define uma e apenas uma partição de objetos em subconjuntos. Portanto, as 24 classes de partições em subconjuntos correspondem às 24 classes de *colocações* descritas na tabela 4. Assim sendo, a equivalência entre colocações e partições em subconjuntos será mostrada na tabela 5 logo a seguir.

Tabela 6 – Equivalência entre o modelo de colocação e partição

COLOCAÇÕES de objetos	***PARTIÇÕES***
Ordenadas	Subconjuntos ordenados
Não ordenadas	Subconjuntos não ordenados
De objetos distintos	De objetos distintos
De objetos indiscerníveis	De objetos indiscerníveis
Em caixas diferentes	Partições ordenadas
Em caixas indiscerníveis	Partições não ordenadas
Injetivas	Em subconjuntos vazios ou com uma única unidade, elementar
Sobrejetivas	Em subconjuntos não vazios
Bijetivas	Em subconjuntos com uma única unidade (elementar)
Qualquer	Subconjuntos com mais de uma unidade e com subconjuntos vazios

Fonte: Adaptado de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo, 1996, p. 41.

É importante salientar que uma partição nem sempre será traduzível para uma seleção, pelas mesmas razões que descrevemos quando dissertamos sobre posicionamento. Sobre isso Guzmám (2000) informa que

> [...] dois dos três esquemas combinatórios básicos (posicionamento e partição) são traduzíveis entre si e dão origem não apenas a operações combinatórias básicas, mas a uma gama mais ampla de modelos combinatórios que não são estudados no ensino elementar de análise combinatória. O esquema de seleção é sempre traduzível para um dos outros dois esquemas, embora não de forma bidirecional. As operações combinatórias básicas podem ser definidas univocamente a partir do esquema de seleção (p. 24, tradução nossa[48]).

---

[47] Si olvidamos las cajas y nos fijamos en los subconjuntos de objetos que contienen, obtenemos los subconjuntos en que se puede descomponer un conjunto, pudiendo haber subconjuntos vacíos (caso de que alguna caja no contuviese ningún elemento).

[48] [...] dos de los tres esquemas combinatorios básicos (colocación y partición) son traducibles entre sí, y dan lugar no sólo a las operaciones combinatorias básicas sino a una gama más amplia de modelos combinatorios que no se estudian en la enseñanza elemental de la combinatoria. El esquema de selección es siempre traducible

Desse modo, nos modelos de posicionamento (colocação) e partição, é necessário distinguir se os objetos são iguais ou diferentes; as células (ou subconjuntos) são distinguíveis ou não; a ordem de colocação dos objetos dentro das células ou subconjuntos é considerada; mais de um objeto é permitido por célula/subconjunto; e células/subconjuntos vazios são permitidos. Guzmán (2000), além de mencionar os três tipos de MCI (seleção, colocação e partição) comentados anteriormente, apresenta os *problemas compostos* como um quarto tipo de modelo combinatório implícito. Problemas desse tipo requerem duas operações combinatórias em sua composição. Portanto, envolvem dois modelos combinatórios distintos cuja identificação é fundamental à resolução deles. Assim, as soluções parciais precisam ser combinadas entre si para que a resposta final seja encontrada. De acordo com Guzmán (2000), os problemas combinatórios compostos são complexos. Desse modo, faz-se

> [...] necessário definir uma ou mais das variáveis para obter um método contábil coerente e, em seguida, generalizar, a fim de obter uma solução válida para qualquer valor da variável que foi previamente fixado. Isso implica acrescentar mais um às restrições impostas pelo problema e é um passo não convencional para os estudantes que estão acostumados a usar apenas as hipóteses dadas nas declarações. Considere a seguinte declaração: Quantas permutações podemos fazer dos dígitos 1, 2, 3, 4 e 5 para que os números pares ocupem sempre lugares consecutivos? (GUZMÁN, 2000, p. 16, tradução nossa[49]).

Assim sendo, o pesquisador aponta que "definições de operações combinatórias são geralmente apresentadas no nível do modelo de seleção. Os problemas combinatórios de partição são raramente apresentados em livros didáticos" (GUZMÁN, 2000, p. 18, tradução nossa[50]). Credita-se a esse fato a dificuldade de estudantes em traduzir uma partição ou colocação em uma seleção. Diante de tudo quanto foi exposto, o *MCI será considerado em nossa tese como esquemas interpretativos subjacentes aos enunciados de problemas que envolvem a combinatória simples. Por isso, devem ser reconhecidos pelo resolvedor, a fim de que uma possível solução para o problema proposto seja encontrada*.

Os tipos de objetos e representações que intervêm em cada modelo combinatório implícito são distintos. Isso influencia diretamente nos procedimentos de resolução e nas dificuldades dos alunos diante das classes distintas de problemas e técnicas de resolução. À

---

a uno de los otros dos esquemas, aunque no de forma biunívoca. Las operaciones combinatorias básicas pueden definirse unívocamente a partir del esquema de selección.

[49] [...] es necesario fijar una o más de las variables para obtener un método contable coherente y luego generalizar, a fin de obtener una solución válida para cualquier valor de la variable que se fijó previamente. Esto implica añadir una más a las restricciones impuestas por el problema y es un paso no convencional para los alumnos, que están acostumbrados a usar tan solo las hipótesis dadas en los enunciados. Consideremos el siguiente enunciado: ¿Cuántas permutaciones podemos formar de los dígitos 1, 2, 3, 4, y 5 de modo que las cifras pares ocupen siempre lugares consecutivos?

[50] [...] definiciones de las operaciones combinatorias se presentan generalmente a nivel de modelo de selección. Los problemas combinatorios de partición son escasamente presentado en los libros de texto.

vista disso, as literaturas internacionais (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996; GUZMÁN, 2000) e nacionais (MORGADO et al., 1991; HAZZAN, 1993) assinalam que um instrumento poderoso, especialmente para a resolução de problemas de seleção, são os conceitos de arranjos, permutações e combinações, com e sem repetição. Assim sendo, passamos a comentar o objeto matemático focalizado em nossa pesquisa: os agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação que não envolvem a repetição de elementos.

3.1.1 Análise combinatória simples

Nesta pesquisa, nomeamos combinatória simples como sendo o estudo de arranjos, permutações e combinações em que não acontecem repetições de elementos. A partir dos termos combinatórios básicos que envolvem as noções de conjuntos, sequências e uplas, sejam *n*-uplas, sejam *r*-uplas, e de seus alicerces no Princípio Fundamental da Contagem (PFC) que abrange o princípio multiplicativo e o aditivo, desenvolvem-se cálculos relativos aos agrupamentos simples de arranjos, permutações ou combinações. A estrutura básica central descende da noção de fatorial de um número *n*. É representado por n! e indica o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a *n* (BACHX, POPPE, TAVARES, 1975; HAZZAN, 1993).

Inspiradas na literatura matemática (BACHX, POPPE, TAVARES, 1975; MORGADO et al., 1991; HAZZAN, 1993; IEZZI et al., 2001; PAIVA, 2009) concebemos o Princípio Fundamental da Contagem – [PFC] como sendo o princípio básico que constitui a principal ferramenta para resolver problemas de contagem. Para nós, ele pode ser assim enunciado: Suponhamos que uma ação ou experimento seja constituído de duas etapas sucessivas. Se há *n* modos de se tomar uma decisão D_1, e, tomada a decisão D_1, há *m* modos de se tomar a decisão D_2, então o número de resultados distintos de se tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2, e, efetuar a ação completa, é dado por $n \times m$. Esse princípio pode ser utilizado para ações ou experimentos constituídos de mais de duas etapas.

Quando optamos pela combinatória simples, valorizamos o fato de ela estar na base das operações combinatórias e servir de parâmetro para os cálculos com elementos repetidos. Desse modo, privilegiar o estudo de arranjos, permutações e combinações em um curso de análise combinatória, inicial ou não, pode possibilitar que estudantes e professores percebam que, "entre os vários tipos de 'números para contagem' da Análise Combinatória, eles são certamente os mais simples e de uso mais amplo. Além disso, eles permitem resolver uma grande quantidade de problemas" (MORGADO et al., 1991, p. 2).

Além do mais, considera-se sua aplicabilidade a outros campos da matemática, tais como a probabilidade finita, um importante campo de aplicação da combinatória. Por outro lado, Morgado et al. (1991) consideram que, se a aprendizagem desses conceitos simples ou com elementos repetidos se fizer de modo mecânico e em "situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas" (p. 2). Portanto, o destaque às combinações, arranjos e permutações justifica-se por serem os mais simples tipos de "números para contagem" e de uso mais amplo, além de resolverem uma grande quantidade de problemas dessa área.

Arranjo, permutação e combinação simples

Dicionários[51] de modo geral trazem algumas definições para os verbos arranjar, permutar e combinar. *Arranjar* é definido como ordenar e arrumar; *permutar* como colocar as coisas de diversos modos, trocar uma coisa por outra reciprocamente, mudar a posição; e *combinar* como juntar, misturar, aliar, unir, dispor. Ocasionalmente a semântica, o significado e o sentido desses termos não geram tanta confusão. Assim, em concepção e em terminologia, arranjar, permutar e combinar parecem coadunar-se ao natural, a seus significados na língua materna e ao proposto pela matemática. No entanto, o que gera confusão em contextos matemáticos é a relação entre o nome do termo (arranjo, permutação e combinação) e a ideia conceitual a ele associada.

Em relação aos nomes dos vocábulos (arranjo, permutação e combinação), Barbosa (1975) afirma que eles foram empregados apenas por tradição, "pois nada mais são do que um conjunto, isto é, um subconjunto dado" (p. 69). De modo semelhante, Biggs (1979) assinala que arranjo, permutação e combinação são nomes pelos quais os agrupamentos que estudam regras e subconjuntos de um dado conjunto de objetos são comumente conhecidos.

Arranjo

Conceitualmente um *arranjo* se caracteriza como "todo agrupamento ordenado de p objetos distintos selecionados dos m objetos dados" (BACHX, POPPE, TAVARES, 1975, p. 229). Então, para tratarmos do conceito de arranjo simples, suponhamos que m indique a quantidade de elementos de um conjunto e p a quantidade de elementos que cada subconjunto

---

[51] www.dicio.com.br ; https://michaelis.uol.com.br ; www.dicionarioinformal.com.br

de *m* pode assumir respeitando alguma condição indicada no enunciado do problema dado. Assim, o enunciado orientará quanto ao número de elementos que cada subconjunto poderá ter. Isso acontece por meio da identificação, pelo resolvedor, do MCI – Modelo Combinatório Implícito (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996) na situação dada. Portanto, não está explícito no enunciado, mas subjacente às ideias nele anunciadas. Por isso, é importante que estudantes e professores dialoguem acerca do enunciado de cada tarefa ou problema proposto em combinatória. Isto para que se garanta um entendimento de todos os detalhes fornecidos no texto (enunciado) do problema e do que esteja implícito nele antes de iniciarem o processo de resolução. Apenas após todos terem compreendido o que é solicitado e terem identificado o MCI é que estudantes devem pensar em resolver o problema proposto.

Não é muito comum encontrar um enunciado de problema de combinatória designado pela expressão "Resolva este arranjo simples", pois geralmente se trata da resolução de problemas em diversos contextos matemáticos ou não. Em matemática, um exemplo de problema de arranjo simples poderia ser: *Como as letras A, B, C e D podem ser organizadas duas a duas de modo que letras iguais não sejam repetidas em uma mesma sequência e que a posição ocupada por elas nas sequências não seja a mesma?* O problema requer a organização de letras com base nas seguintes condições: (i) a mesma letra não pode ser repetida em uma mesma sequência; (ii) letras já usadas em sequências anteriores podem formar outros e novos subconjuntos distintos, desde que ocupem posições diferentes da anterior: por exemplo, (A, B) é diferente de (B, A).

No caso do problema dado, observe que o conjunto de letras é formado por quatro elementos (A, B, C e D). Então, m = 4; em termos de conjunto, teríamos m = {A, B, C, D}. Para agrupá-las duas a duas, de modo que letras iguais não sejam repetidas e a posição ocupada por elas no agrupamento seja diferente, o primeiro acontecimento é escolher uma letra entre as quatro disponíveis. Depois de ter sido efetuada essa escolha, o segundo acontecimento será a escolha de outra letra diferente da primeira, para compor a sequência solicitada. Em combinatória, isso é chamado de condição e incide sobre a resolução do problema. Assim teríamos um total de 12 agrupamentos distintos: (A, B), (A, C), (A, D), (B, A), (B, C), (B, D), (C, A), (C, B), (C, D), (D, A), (D, B), (D, C). Para resolvê-los, fixamos a primeira letra e alternamos a segunda.

Embora não definidos por Morgado et al. (1991), os arranjos são abordados por outros autores, como, por exemplo, Hazzan (1993), que assim os define: "Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Chamamos de arranjo dos m elementos tomados r

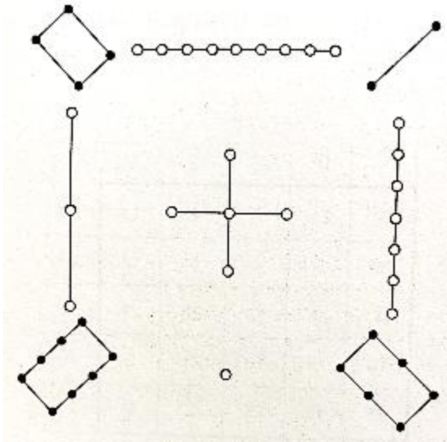
a r $(1 \leq r \leq m)$ a qualquer r-upla (sequência de r elementos) formada com elementos de M *todos distintos"* (p. 16). Matematicamente poderíamos pensar da seguinte forma: Dado um conjunto com *p* objetos distintos dele, podem-se formar agrupamentos ordenados de *n* objetos distintos selecionados dos *p* objetos do conjunto dado. Neste caso, *p* representa o número total de elementos do conjunto e *n* indica a quantidade de objetos que devem ser considerados nos agrupamentos, formando-se assim sequências ordenadas de *n* elementos de *p*.

A quantidade de elementos das sequências pode variar até uma quantidade *p* de elementos do conjunto *n* dado. Desse modo, tem-se que os agrupamentos ordenados possuem quantidades *p* de elementos maiores que zero, pois se p for igual a zero, a sequência será vazia, e menores ou iguais a *p*, lembrando que se forem iguais, isto é, se p for igual a n nós teremos um caso particular, que é a permutação. Assim, pode ser representado matematicamente por $0 < p \leq n$. Este será o entendimento de arranjo simples considerado nesta tese. Além disso, compreendemos aqui que o conceito de arranjo é visto com base nos seguintes atributos (características):

- é um agrupamento identificado pela análise combinatória;
- diferencia-se dos outros em função da ordem e da natureza dos elementos que compõem as sequências desejadas;
- é indicado por $A_{n,\,p}$;
- lê-se arranjo simples de *n* elementos tomados *p* a *p*;
- *n* indica o número de elementos distintos do conjunto;
- *p* representa o número de elementos distintos das sequências formadas;
- *p* pertence aos naturais não nulos, ou seja, diferentes de zero;
- *p* pode ser menor ou igual a *n*;
- é calculado pela fórmula $A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$;
- algebricamente essas características de um arranjo simples podem ser assim representadas: $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, p \in \mathbb{N}^*, p \leq n$.

Na história da combinatória, os arranjos apareceram, pela primeira vez na matemática chinesa, como um diagrama numérico conhecido como *lo-shu* (EVES, 2004; WILSON, WATKINS, 2013), considerado o exemplo mais antigo de quadrado mágico. Vejamos:

Figura 1 – *Lo-shu*



Fonte: EVES, 2004, p. 269.

Acredita-se que o primeiro a vê-lo foi o imperador Yu, por volta de 2200 a.C., decorando a carapaça de uma tartaruga divina que lhe apareceu às margens do rio Amarelo, segundo rio mais longo da China e o sexto maior rio do mundo. Assim, desde o início, quadrados mágicos eram associados a magia e mistério. O *lo-shu* é, portanto, um arranjo quadrado de numerais expressos por "nós" em cordas. Os nós pretos indicam números pares; e os brancos, os números ímpares. Biggs (1979) assinala que um quadrado mágico de ordem *n* é um arranjo dos números $1, 2, 3, \ldots, n^2$ em uma matriz quadrada $n \times n$, de modo que cada linha, coluna e diagonal principal tenham a mesma soma, isto é, $S = \frac{1}{2} n (n^2 + 1)$.

Permutação

Na maioria dos livros de matemática que tratam da análise combinatória, a **permutação** simples é vista como um caso particular de arranjo simples. Desse modo, é compreendida como "todo arranjo em que n = p" (HAZZAN, 1993, p. 18). Isso quer dizer que o número de elementos *n* do conjunto dado é usado em sua totalidade *p*. Portanto, uma permutação de "n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses n objetos" (BACHX et al., 1975, p. 36) em que $n = p$. Considere 183, 138, 318, 381, 813 e 831 a quantidade de números distintos que podemos formar com os algarismos 1, 3 e 8. Ao observá-los, percebemos que os números constituídos se diferenciam apenas pela ordem dos algarismos (elementos) que os compõem, e não pela natureza, visto que apresentam os mesmos elementos (1, 3 e 8) em sua composição. Assim, ao formarmos números com os três algarismos dados, constituímos os arranjos simples desses três algarismos tomados três a três.

Para resolvê-lo, o estudante deveria (i) rememorar o significado da palavra permutar; (ii) reconhecer que o atributo ordem gera novas e outras possibilidades; e (iii) relembrar que todos os elementos serão tomados no processo de resolução, pois *n* é igual a *p*. Esses pontos evidenciam um atributo importante de uma permutação simples: o número de elementos do conjunto dado é igual ao número de posições a serem ocupadas. Isso quer dizer que os elementos são tomados *n* a *n*. Como a literatura (PAIVA, 2009; HAZZAN, 1993) define permutação simples como um caso particular de arranjos simples, temos, então, que *n* é igual a *p*. Isso quer dizer que, dos *n* elementos dados, toma-se uma quantidade *n*. Ou seja, todos os elementos do conjunto dado são utilizados no processo de resolução do problema.

Portanto, os estudantes poderiam argumentar a mudança de posição e de ordem dos elementos. Informar que o processo de resolução indica outra forma de organização decorrente de um novo critério, que, em nosso caso, é a formação de números distintos com os algarismos 1, 3 e 8. Destaca-se, portanto, que a quantidade de maneiras para a organização dos algarismos aumenta à medida que mais elementos são incluídos no conjunto inicial. Assim sendo, é possível evidenciar que, em uma permutação, os elementos dos subconjuntos formados se diferenciam apenas pela ordem. Esse é o principal atributo (HERSHKOWITZ, 1994) que caracteriza um problema desse tipo e está subjacente ao modelo combinatório implícito (BATANERO et al., 1996) empregado no enunciado do problema e essencial para o planejamento e execução do processo de resolução.

Diante do exposto, o conceito de permutação simples pode ser compreendido como:

- sendo $p \leq n$, a permutação é um caso particular de arranjo simples; portanto, diferencia-se pela ordem dos elementos;
- lê-se permutação simples de *n* elementos tomados *n* a *n*;
- os *n* elementos da sequência são tomados *n* a *n*;
- *n* indica o número de elementos distintos;
- é calculada pela fórmula $P_n = n!$, sintetizada algebricamente em Morgado et al. (1996) pela operação $P_n = n(n-1) \ldots 1 = n!$, construída a partir da fórmula de arranjo simples, pois $P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$; assim, $P_n = n!$.

Em Katz (2010), encontramos que as permutações eram conhecidas na Índia por volta do século IX. Algumas formalizações acerca delas também têm origem indiana e datam do princípio do século XIII. A Bhãskara, matemático indiano, é atribuído o cálculo de número de permutações em um conjunto de ordem *n* como *n!*. Da época, advém o seguinte problema:

> Quantas são as variações de formas do deus Sambhu pela troca dos seus dez atributos sustentados variavelmente pelas suas diversas mãos: nomeadamente a corda, o dente do elefante, a serpente, o tambor, o crânio, o tridente, a arrumação da cama, o punhal, a seta e o arco? (KATZ, 2010, p. 286).

No Islã, ibn Mun'im tratou das permutações mais a fundo. Na ocasião, seu objetivo era determinar o número de palavras possíveis que poderiam ser escritas com as letras do alfabeto árabe. Seus estudos levaram-no a concluir que o número de permutações é encontrado multiplicando-se um por dois, três, quatro, cinco e assim sucessivamente, até o número total de letras da palavra, independentemente do seu tamanho. Vejamos:

> O problema é: desejamos conseguir um processo canônico para determinar o número de permutações de letras de uma palavra da qual o número de letras é conhecido, e que não repita qualquer letra. Se a palavra tem duas letras, é claro que haverá duas permutações, visto que a primeira letra poderá ser a segunda e a segunda a primeira. Se aumentamos de uma letra e consideramos uma palavra de três letras, é claro que, em cada uma das permutações de duas letras de uma palavra de duas letras, a terceira letra pode estar antes das duas letras, entre as duas letras, ou na posição final. As letras de uma palavra de três letras, portanto, têm seis permutações. Se a palavra se aumenta com uma outra letra para fazer uma palavra de quatro letras, a quarta letra estará em cada uma das seis permutações [em uma de quatro posições]. A palavra de quatro letras terá, assim, vinte e quatro permutações (KATZ, 2010, p. 330).

Na Europa medieval, também houve interesse pela permutação, principalmente pela comunidade judaica. Segundo Katz (2010), a fonte judaica mais antiga sobre o assunto parece ser a obra mística *Sefer Yetsirah* (Livro da Criação). De autor desconhecido, foi escrita algum tempo antes do oitavo século e talvez date do século segundo. Nela, o autor calcula vários modos de arranjar as 22 letras do alfabeto hebraico. Ao fazer isso, ele pareceu ter compreendido que o número de arranjos possíveis de n letras era $n!$ (KATZ, 2010).

Combinação

A **combinação** simples diferencia-se de arranjos e permutações em razão da natureza dos elementos, pois mudanças na ordem deles não alteram o agrupamento. Hazzan (1993) assinala que uma combinação simples de n elementos, tomados p a p, são os "subconjuntos de N constituídos de p elementos" (p. 33). Portanto, ao entender que uma combinação é um conjunto, desconsidera a importância da ordem dos elementos em sequência (casos de arranjos e permutações). Desse modo, "uma combinação desses n elementos p a p é uma *escolha*, não ordenada, de p dos n objetos dados" (BACHX et al., 1975).

Imagine que, *de quatro candidatos, A, B, C e D, devem ser escolhidos três para ocupar três vagas de vendedor no departamento de vendas de uma empresa de plano de saúde. Como todos os candidatos são igualmente capazes, o chefe do departamento pessoal decidiu que a escolha será feita por meio de um sorteio. Quantas escolhas diferentes podem* *ser feitas?* Essa situação hipotética indica um cálculo do número de combinações simples de n elementos distintos (quatro candidatos) tomados p a p (três de cada vez, visto que só existem três vagas a serem ocupadas). Portanto, n e p são um subconjunto próprio dos naturais em que n indica a quantidade total de elementos do conjunto inicial e p representa um número natural menor ou igual a n ($p \leq n$), que informa a quantidade de elementos que serão utilizados para formar as escolhas possíveis mediante o sorteio.

Como o cargo ocupado pelos profissionais escolhidos será o mesmo, a ordem com que cada candidato for sorteado não importará para a escolha dos três vendedores. O que está em jogo aqui é quais dos quatro candidatos serão sorteados, visto que só há três vagas. Isso mostra que as vagas podem ser ocupadas por pessoas diferentes, ou seja, objetos de natureza distinta. Suponha que os candidatos A, B e C ou, B, C e A tenham conseguido a vaga. Nesta suposição, temos os mesmos candidatos (A, B, C); portanto, ambas são iguais. Desse modo, a quantidade de escolhas distintas que podem ser feitas é indicada pelo número de subconjuntos de três elementos do conjunto I = {A, B, C, D}, a saber: {A, B, C}, {A, B, D}, {A, C, D} e {B, C, D}.

Esses subconjuntos são as combinações simples dos quatro elementos de I tomados três a três. Logo, de modo genérico, pode-se concluir que uma combinação simples de certa quantidade de elementos do conjunto inicial é qualquer subconjunto dele formado por certa quantidade de elementos. Desse modo, quaisquer das duas combinações simples se diferenciam apenas pela natureza dos elementos, e não pela ordem com que são alocados nos subconjuntos formados. Por exemplo:

- {A, B, C} $\neq$ {A, B, D}, pois os elementos que compõem esses subconjuntos são distintos;
- {B, C, D} = {C, D, B}, pois são subconjuntos compostos pelos mesmos elementos e a ordem com que eles foram alocados não alterou a configuração inicial. Assim, vê-se que a ordem não interfere no resultado final, mas a natureza dos elementos do conjunto dado gera novas e outras possibilidades de escolhas.

  Por fim, destacamos que o conceito de combinação simples é identificado quando:

  - a ordem dos elementos não é considerada, pois não altera o conjunto formado;
  - os subconjuntos formados se diferenciam pela natureza dos elementos;
  - encontramos $C_{n,p}$ ou C_n^p; lê-se combinação simples de n elementos tomados p a p;
  - n indica a quantidade de elementos do conjunto;

- *p* representa um número natural menor que ou igual a *n* que sinaliza quais elementos vão compor os subconjuntos formados;
- é calculada por $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, 0 \leq p \leq n$ (MORGADO et al., 1991, p. 31).

As combinações, assim como as permutações, eram conhecidas na Índia por volta do século IX. No breve panorama da história da combinatória posto no capítulo introdutório desta tese, informamos que umas das primeiras aparições das ideias de combinação foi no tratado médico de Susruta, quando se desejava combinar gostos diferentes. Posteriormente e ainda na Índia, Varãhamihira, ao escolher ingredientes para criar perfumes, parecia conhecer o método para calcular combinações, pois, segundo Katz (2010), não é provável que ele tenha calculado todas as 1820 combinações possíveis. Nessa época, não há evidências da existência de fórmulas, mas há forte referência às ideias de combinação.

Mais tarde, no século IX, Mahãvira apresentou um algoritmo explícito para calcular o número de combinações entre "coisas" dadas:

> [...] começando com uma e aumentando de uma, deixe-se que o número delas alcance o número dado de coisas escrevendo-os na ordem regular e na ordem inversa (respectivamente) numa fila horizontal superior e numa fila horizontal inferior. Se o produto de um, dois, três ou mais dos números da fila superior, considerados da direita para a esquerda é dividido pelo produto correspondente de um, dois, três ou mais dos números da fila inferior, também tomados da direita para a esquerda, é obtida, como resultado, a grandeza pretendida em cada caso de combinações (KATZ, 2010, p. 285).

Embora Mahãvira não tenha dado prova do seu algoritmo, ele pode ser traduzido na fórmula moderna $C_r^n = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}$ que foi aplicada por ele mesmo em um problema que envolvia a combinação de gostos e em outro relacionado à combinação de joias em um colar. Bhãskara observou, ao repetir a regra de Mahãvira, que esta seria uma regra geral aplicável em diferentes áreas, como na poesia, para encontrar variações métricas. Nesse contexto, apresenta a seguinte situação problemática: "Num edifício espaçoso e elegante, com oito portas, construído por um hábil arquiteto como palácio para o senhor da terra, diz-me qual a combinação das portas tomadas uma a uma, duas a duas, três a três, etc" (KATZ, 2010, p. 286). Na resolução apresentada pelo próprio Bhãskara, embora não tenha incluído a possibilidade de todas estarem fechadas, encontrou 225 possibilidades de formas em que as portas poderiam ser abertas: oito formas de serem abertas uma a uma e 28 para os casos de duas a duas e assim por diante.

Em Katz (2010) vimos que no Islã, Ahmad al-Bb'dari ibn-Mun'im discutiu o cálculo de combinações de *r* objetos de um conjunto de *n*, procurando este número em termos de combinações de $r - 1$ objetos. Ele examinou basicamente a questão do número possível de palavras que poderiam ser obtidas tomando 2, 3, 4 ou 5 letras do alfabeto árabe de 28 letras. Na época, não houve formalização de procedimentos de cálculo. Somente depois, já no século XIII, na Pérsia, houve evidências da abordagem de fórmulas combinatórias básicas por Kamãl al-Dim al-Fãrisi (m. 1320) relacionadas à fatoração de inteiros. Além disso, desenvolveu os resultados das combinações recorrendo a somas e tratou da combinatória em termos abstratos. Um estudo mais detalhado das combinações foi realizado por Abraham bem Meir ibn Ezra (1090 – 1167) na Europa medieval. Em um texto astrológico, ele discutiu o número de conjunções possíveis de sete planetas, incluindo o Sol e a Lua.

Para finalizar, Katz (2010) destacou que no início do século XIV, Levi ben Gerson deu demonstrações rigorosas e cuidadosas de fórmulas combinatórias, sendo os teoremas combinatórios um dos aspectos mais importantes de sua obra. Ele enunciou o princípio moderno da indução matemática e o usa mais explicitamente do que seus predecessores islâmicos.

Algumas sínteses

Em livros didáticos do ensino médio e superior, geralmente encontramos que um critério diferenciador entre arranjo e combinação[52] é obtenção de agrupamentos iguais ou diferentes em relação ao original. Em Paiva (2009), autor do livro didático de ensino médio intitulado “Matemática – Paiva[53]”, encontramos o seguinte:

> Ao [se] deparar com um problema que envolva agrupamentos de qualquer tipo de elemento, devemos antes de tudo nos certificar se os agrupamentos em questão são arranjos ou combinações. Para isso, formamos um dos agrupamentos sugeridos pelo problema, com pelo menos dois elementos distintos, e mudamos a ordem de elementos distintos do agrupamento formado.
> - Se, com essa mudança, obtivermos um agrupamento **diferente** do original, então esses agrupamentos são **arranjos**.
> - Se, com essa mudança, obtivermos um agrupamento **igual** ao original, então esses agrupamentos são **combinações** (PAIVA, 2009, p. 180).

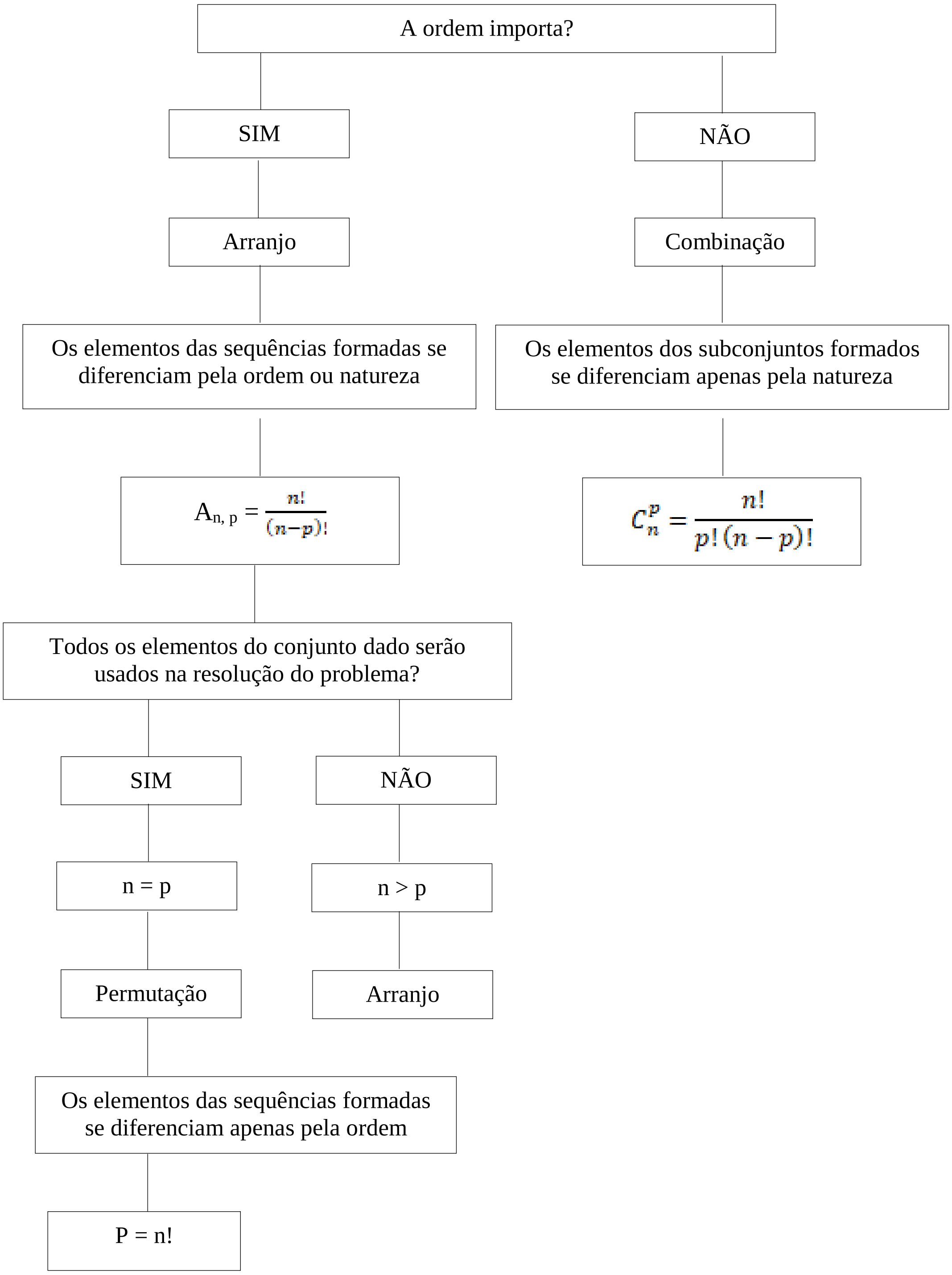
Por outro lado, Hazzan (1993) aponta que “a própria natureza do problema a ser resolvido nos dirá se os agrupamentos a serem formados dependem ou não da ordem em que figuram os elementos” (p. 33). Assim, podemos pensar em um esquema visual no qual sintetizamos as ideias conceituais quando procurarmos entender os agrupamentos simples. Uma possibilidade de esquema está apresentada na figura 2.

---

[52] Nesta tese, entendemos a permutação como um caso particular de arranjo em que $n = p$.

[53] Livro didático de matemática do ensino médio utilizado anteriormente pelos licenciandos, sujeitos desta pesquisa, quando eram alunos desse nível de ensino em 2014.

Figura 2 – Ideias conceituais dos agrupamentos simples de combinatória



Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras.

Além disso, nossos estudos mostraram que todos os procedimentos de cálculo são construídos a partir da fórmula de arranjos simples. Portanto, as combinações simples também podem ser consideradas como um caso particular de arranjo simples. Embora isso não seja muito comum, devemos observar que os agrupamentos formados em um arranjo simples são diferenciados pela ordem e natureza. Assim, a combinação simples pode ser pensada como um arranjo simples diferenciado apenas pela natureza dos elementos. Desse modo, presumimos que tais agrupamentos estão relacionados e que é possível, por meio de um deles, tratar e explorar os demais e trabalhar a combinatória como um todo coerente e integrado. Outro ponto que consideramos é que o pensamento algébrico empregado na generalização de fórmulas combinatórias não se apresenta de modo trivial, mas exige conhecimento da estrutura e dos atributos que caracterizam cada um dos agrupamentos.

Algo que merece ser mencionado é um comportamento contraditório que observamos em professores e pesquisadores: embora exista o desejo de que estudantes compreendam os modos pelos quais as estruturas conceituais de determinado objeto matemático sejam construídas, e, assim, evitar o uso desmedido de fórmulas, quando as tarefas aparecem, há uma tendência em utilizar diretamente um procedimento já conhecido. Esta contradição revela dois pontos que julgamos importantes pelas reflexões que proporcionam. O primeiro emerge no âmbito verbal. Há algum tempo parece ter se tornado clichê a expressão "é só aplicar a fórmula" diante de algumas atividades propostas em sala de aula. O segundo ponto aparece no âmbito conceitual: tendo compreendido a estrutura conceitual, o uso da fórmula aparece como uma generalização do objeto matemático em si e pode ser empregada em situações distintas.

Desse modo, torna-se um exercício reflexivo e de percepção do professor observar em quais contextos existe a necessidade de se recorrer ao uso de fórmulas já cristalizadas. Também é um exercício, procurar outras estratégias, outros caminhos para motivar os estudantes a pensarem de modo mais relacional colocando em evidência todo o arcabouço de conhecimento matemático já construído por eles. Outro ponto é estimular e provocar estudantes que pensem em estratégias diferenciadas para resolver uma situação proposta em sala de aula e deixar de focalizar e valorizar apenas um caminho para resolvê-lo com o uso de fórmulas.

Assim sendo, o desenvolvimento formal e o rigor matemático da combinatória requerem uma grande quantidade de noções de álgebra abstrata, entre as quais estão: conjunto, subconjunto e operações entre subconjuntos de um conjunto dado; conjunto das partes de um conjunto; partição de um conjunto; produto cartesiano de conjuntos; relação binária, propriedades, relação de equivalência, conjunto quociente, relação de ordem, ordem total e parcial; grafo associado a uma relação binária; correspondências, aplicações e seus tipos: injetiva, sobrejetiva e bijetiva; original e imagem de uma aplicação; cardinalidade de um conjunto e equipotência; operação binária, propriedades: comutativa, elemento neutro, inverso; estruturas algébricas elementares, tais como grupos, anéis, corpos, espaços vetoriais e homomorfismos (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996).

No entanto, esses mesmos pesquisadores destacam que o ensino de combinatória pode ser feito "sem necessidade de recorrer ao uso explícito dessas ferramentas conceituais" (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 30, tradução nossa[54]). Para eles, interessa recordar que o uso dos fundamentos da álgebra de conjuntos permite que as três regras básicas da análise combinatória elementar (regra da soma, do produto e do quociente) sejam formuladas. Logo, estudantes e professores que não o entenderem em sua totalidade poderão apresentar certo desajuste em relação à compreensão do texto matemático, e a aprendizagem tornar-se mais instrumental.

3.2 Imagem conceitual, definição do conceito, atributos, protótipos e compreensão em matemática

Aqui, conforme informamos anteriormente, focalizamos especialmente as noções de *imagem conceitual* e *definição do conceito* mediante a abordagem dada por Tall e Vinner (1981). Além disso, dialogamos com Hershkowitz (1994) a respeito de *atributos* e *exemplos protótipos* e com Skemp (1976) sobre *entendimento relacional e instrumental* no ensino e na aprendizagem de matemática. Desse modo, apresentamos um panorama conceitual dessas bases teóricas que se tornaram o cerne de nossa pesquisa de doutorado.

3.2.1 Imagem conceitual e definição do conceito: um olhar na perspectiva de Tall e Vinner

Calvin e seu amigo imaginário Haroldo estão sempre envolvidos em grandes aventuras. Observe a cena ilustrada a seguir na figura 3.

Figura 3 – Calvin e Haroldo

Fonte: WATTERSON, 2011, p. 85.

---

[54] [...] sin necesidad de recurrir al uso explícito de estas herramientas conceptuales [...].

Pelo que nos parece, Calvin aprenderia a andar de bicicleta. Da observação da cena, supõe-se que, em uma tentativa de se proteger contra possíveis quedas, decidiu vestir algumas peças de roupa simultaneamente: calças, camisetas, blusas e agasalhos. Note que ele vestiu primeiro uma calça; depois, três camisetas, mais duas blusas e dois agasalhos; por último, vestiu mais uma calça. Nesse contexto, Calvin aparenta ter utilizado, mesmo que de maneira intrínseca, a ideia de se proteger como um critério para vestir muitas peças de roupa na ordem em que foram mencionadas. Assim como Calvin, cotidianamente as pessoas se vestem de maneira distinta ou semelhante em razão de suas atividades pessoais e profissionais.

Hipoteticamente pense em uma mulher que trabalha no setor administrativo de um banco. Ao compor seu traje para um dia de trabalho, geralmente seleciona uma calça ou saia e procura combinar uma delas com determinada blusa/camisa, sapato e acessório (brinco, colar, pulseira, anéis e bolsa). Para isso, costuma estabelecer alguns critérios, por exemplo: ao escolher uma calça preta, pode pensar em combiná-la com uma blusa branca, um sapato preto e um colar também preto. De modo não consciente, ela pode perguntar-se: que blusa combina com esta calça preta? E qual sapato? E quais acessórios? E a resposta a esses questionamentos será determinante para compor seu traje de trabalho para aquele dia. Nessa situação hipotética, a mulher escolheu primeiro a calça preta; depois, a blusa branca; e, na sequência, sapatos e acessórios. Em ambas as situações foram estabelecidas regras de escolha, nas quais o critério ordem foi determinante: Calvin escolheu vestir primeiro esta ou aquela calça, e a mulher escolheu primeiro uma calça preta para depois efetuar as demais escolhas decorrentes.

Nessas e em outras situações cotidianas, a ideia de combinar peças de roupa além de comum foi aprendida desde a infância. Às vezes, é algo tão natural, que o fazemos de modo inconsciente. Diferentemente de Calvin, não usamos todas as calças, camisetas, blusas e agasalhos de uma só vez, mas nos valemos do conceito de combinar peças de roupa aprendido informalmente mediante as relações que estabelecemos com os outros e à medida que crescemos e nos conscientizamos dos modos de vestir. Entre as atividades rotineiras, utilizamos noções matemáticas por meio de representações mentais que diferem de pessoa para pessoa. Assim, vamos criando modelos espontâneos, preexistentes à atividade matemática e aprendemos a reconhecer a ação de combinar, por exemplo, pela experiência e por seu uso em contextos apropriados (TALL; VINNER, 1981). Neste caso, uma definição formal do conceito de combinar é praticamente dispensável.

Por outro lado, em contextos formais de aprendizagem, é possível propor a um grupo de estudantes algumas problematizações sistematizadas sobre a cena retratada na figura 3: (i) Quantas peças de roupa de cada tipo Calvin possuía? (ii) Se você estivesse na situação de

Calvin e dispusesse das mesmas roupas, como comporia seu traje? Qual(is) critério(s) utilizou(aria)? (iii) Registre todos os possíveis trajes que Calvin poderia compor utilizando uma calça, uma blusa, uma camiseta e um agasalho de cada vez. Valendo-nos dos critérios ordem e natureza, elaboramos as questões acima com o propósito de mobilizar o pensamento matemático subjacente à situação problemática. A resolução de iii, por exemplo, muito semelhante às situações hipotéticas que tratamos anteriormente, envolve o princípio fundamental da contagem, base do pensamento combinatório e seria possível trabalhar com estudantes de diferentes níveis de ensino, tendo por base metodologias diversificadas.

Em classes de ensino fundamental, seria viável utilizar peças de roupa de material manipulável acompanhadas de questões que motivem os estudantes a pensar sobre elas; estratégias variadas de resolução, tais como tentativa e erro, emprego do princípio multiplicativo, da multiplicação como combinatória, de representações por esquemas, a partir das quais características desse tipo de problema poderiam ser assinaladas.

Para níveis de ensino mais elevados, é possível pensar nos mesmos procedimentos anteriores e, em casos de necessidade, pensar em um produto de quatro arranjos simples sem repetição. Desse modo, o estudante poderia utilizar diferentes representações matemáticas para apresentar uma resposta. Vale notar que, embora a ideia de combinar pareça estar empregada e se coadunar em ambas as situações (cotidiana e não cotidiana), para responder a esses questionamentos, o estudante deveria mobilizar aprendizagens formais de combinatória e reconhecer que a conotação matemática dada à ideia de combinar não seria a mesma empregada nas situações anteriores. Assim, requer uma tomada de consciência, como indício de aprendizagem, para o uso das imagens conceituais em contextos pertinentes.

Se, para a primeira situação, o conceito era dispensável, agora ele se tornou indispensável à resolução da situação proposta. Há necessidade de recorrer a uma definição do que seria o modelo combinatório implícito ao problema e das formas de operar com ele. Além disso, haveria de se pensar nas possíveis estratégias a ser utilizadas para encontrar os trajes e nos atributos e características que possuem problemas desse tipo. Nota-se que, se, em situações cotidianas, usamos os conceitos de maneira espontânea e assistemática, em contextos formais, "científicos, ao contrário, as definições exercem um papel importante, impondo hábitos de raciocínio" (BROETTO, 2016, p. 186), sendo necessária a utilização de uma linguagem matemática apropriada.

Em virtude dos diferentes usos que fazemos dos conceitos em ambientes formais e informais, na escola podem emergir dificuldades de transição do pensamento elementar para o pensamento matemático mais elaborado, avançado, aceito pela comunidade científica e constituído por meio de demonstrações e provas. Desse modo, se faz necessário a ampliação do repertório conceitual não de uma perspectiva de mudança paradigmática radical, mas de modo processual e contínuo. Vinner (1983) e Tall (1988) destacam que, no ensino fundamental, os conceitos são tratados de maneira mais espontânea, informal e ostensiva e geralmente partem de situações associadas ao cotidiano dos indivíduos. Ao contrário, no ensino médio, observa-se certa ênfase em definições que, em nível superior, passam a ser usadas em um sentido mais técnico. E, dessa maneira, começam a fazer parte do jogo (VINNER, HERSHKOWITZ, 1980), conforme anunciamos no início deste capítulo.

Nessa lógica, Vinner (2002) aponta que, em contextos técnicos, definições são úteis para que equívocos e erros sejam evitados, pois, na linguagem cotidiana, muitas palavras não têm definição, embora, de alguma forma, sejam significadas em dicionários. Por exemplo, "pense em 'carro', 'mesa', 'verde', 'legal', etc., e [...] [percebe-se] imediatamente que, ao entender, por exemplo, a frase 'meu belo carro verde está estacionado em frente à minha casa', você não precisa de definições" (VINNER, 2002, p. 67, tradução nossa[55]). No entanto, para compreender a sentença "entre todos os retângulos com o mesmo perímetro, o quadrado é aquele que tem a área máxima" (VINNER, 2002, p. 67-68, tradução nossa[56]), há necessidade de consultar as definições matemáticas envolvidas na sentença. Isso quer dizer que, em contextos técnicos de ensino formal de matemática, as definições precisam ser consultadas, contudo muitas pessoas tendem a ignorá-las.

Vinner (2002; 2011) considera que há uma relação entre o conceito e o seu nome. Enquanto o conceito é considerado como abstrato, existente apenas na mente de alguém, seu nome é uma entidade linguística e, como tal, precisa ser compreendido. Por isso, quando um nome conceitual é visto ou ouvido, a memória é estimulada e algo dela é evocado "geralmente, não é a definição do conceito, mesmo no caso dele possuir uma" (VINNER, 2002, p. 68, tradução nossa[57]), e sim uma imagem conceitual dele. Tal fato o leva a afirmar que há uma relação conflituosa entre a estrutura matemática concebida pelos matemáticos e os processos cognitivos pelos quais os conceitos são adquiridos.

Tall (2002) corrobora tal afirmativa e assinala que existe uma distinção entre a matemática como atividade mental e como sistema formal; portanto, há diferenças entre conceitos matemáticos definidos formalmente e processos cognitivos mobilizados pelos

[55] Think of "car", "table", "house", "green", "nice", etc., and you realize immediately that when understanding, for instance, the sentence "my nice green car is parked in front of my house" you do not consult definitions.
[56] [...] among all rectangles with the same perimeter the square is the one which has the maximal area.
[57] Usually, it is not the concept definition, even in the case the concept does have a definition.

indivíduos durante a concepção deles. Nesse contexto, Vinner (2002) questiona: “Então, o que as pessoas consultam quando lidam com termos técnicos em situações técnicas?” (p. 68, tradução nossa[58]). Na busca de respostas a esses questionamentos, ele apresenta sua visão de apreensão dos conceitos matemáticos com base nas noções de *imagem conceitual* e *definição conceitual*, pois acredita que as pessoas consultam principalmente as imagens conceituais de um conceito.

Em 1975, Vinner, ao publicar “The naive platonic approach as a teaching strategy in arithmetics”, propôs, pela primeira vez, a análise de imagens mentais no domínio do pensamento matemático, quando estudou a aprendizagem de números com crianças e estudantes do ensino médio. Esse texto preocupou-se em explicitar o que venha a ser uma imagem mental que, posteriormente nas publicações de 1980 e 1981, foi identificada como uma das componentes das imagens conceituais. Além disso, clarificou que um conceito pode ser entendido com um substantivo a respeito de quem se fala. Para ele, a imagem mental envolve uma pessoa, um substantivo (o conceito de quem se fala) ou frases nominais: “Denote o substantivo [conceito] por C e a pessoa por P. Então, a imagem mental de P de C é definida como o conjunto de todas as figuras que já foram associadas a C na mente de P” (VINNER, 1975, p. 339, tradução nossa[59]).

Ele destacou, ainda, que, embora haja controvérsias quanto ao papel das imagens conceituais na teoria do pensamento, desde o fim da década de 1970 e início dos anos 1980, com a alteração de seu significado, ela começou a desempenhar novamente um importante papel no ensino e na aprendizagem de matemática. Por isso, desde então, considerou ser “possível examinar imagens mentais no domínio do pensamento matemático” (VINNER, 1975, p. 339, tradução nossa[60]). De lá para cá, os termos foram aprofundados, ampliados e definidos com maior precisão. Na tabela 7, mostramos a evolução deles ao longo do tempo.

---

[58] So, what do people consult when dealing with technical terms in technical situations?
[59] Denote the noun by C and the person by P. Then P's mental image of C will be defined as the set of all pictures that have ever been associated with C in P's mind, namely the set of all pictures of objects denoted by C in P's mind.
[60] [...] it is quite possible now to examine mental imagery also in the domain of mathematical thinking.

Tabela 7 – A evolução dos termos ao longo do fim da década de 1970 e início de 1980

ANO	TERMOS	PRECURSORES
1975	- Imagem mental - Conceito	Vinner
1980	- Imagem mental - Imagem conceitual - Definição do conceito - Imagem conceitual evocada	Vinner e Hershkowitz
1981	- Imagem mental - Imagem conceitual - Definição do conceito - Imagem conceitual evocada - Imagem da definição do conceito - Fator cognitivo de conflito - Fator de conflito potencial	Vinner e Tall
1983	- Imagem mental - Imagem conceitual - Definição do conceito - Imagem conceitual evocada - Imagem da definição do conceito - Fator cognitivo de conflito - Fator de conflito potencial - Imagem temporária do conceito	Vinner

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras.

A partir de então, pesquisadores têm-se interessado em empreender estudos relacionados aos processos de aprendizagem. Os termos imagem conceitual e definição do conceito vêm resistindo ao tempo, aos movimentos de ensino e às mudanças curriculares. Por isso, em nossa pesquisa, usamos a concepção original evidenciada por Tall e Vinner (1981), uma vez que “Concept image and concept definition in mathematics with particular refrence to limits and continuity”, publicada em 1981, se tornou o texto mais referenciado em pesquisas que tratam da temática. Assim sendo, passamos a dissertar sobre imagem conceitual e definição do conceito.

Imagem conceitual e definição do conceito

Os termos *concept image e concept definition*, traduzidos por nós como imagem conceitual e definição do conceito, foram introduzidos por Vinner e Hershkowtiz na década de 1980. No texto "Concept imagens and common cognitive paths in the developmente of same simple geometrical concept", publicado nos Anais da 4.ª Conferência Internacional para a Psicologia da Educação Matemática (PME) realizada na Califórnia, em agosto de 1980, ficou destacado que a

- *imagem conceitual* é definida como a associação entre a imagem mental e o conjunto de propriedades associadas a determinado conceito; e
- *definição do conceito* é entendida como "uma definição verbal que explica com precisão o conceito de uma maneira não circular[61]" (VINNER; HERSHKOWITZ, 1980, p. 177, tradução nossa[62]).

Além disso, afirmaram:

> (1) a fim de lidar com conceitos, é preciso uma imagem conceitual e não uma definição do conceito. (2) as definições do conceito (caso o conceito tenha sido introduzido por meio de uma definição) permanecerão inativas ou até mesmo serão esquecidas. Pensando, quase sempre a imagem conceitual será evocada (VINNER; HERSHKOWITZ, 1980, p. 177, tradução nossa[63]).

Isso mostra que, para eles, as imagens sobressaem às definições. Dizem que, embora no ensino superior, os alunos precisem de definições (suposição de alguns [professores] de que elas ajudam na formação de imagens conceituais e na realização de algumas tarefas), não há como forçar alguém a usar uma definição nem para formar uma imagem nem para operar com ela em uma tarefa. Vinner e Hershkowitz (1980) assinalaram, ainda, que algumas definições são complicadas demais para serem abordadas, por isso elas se tornam inúteis.

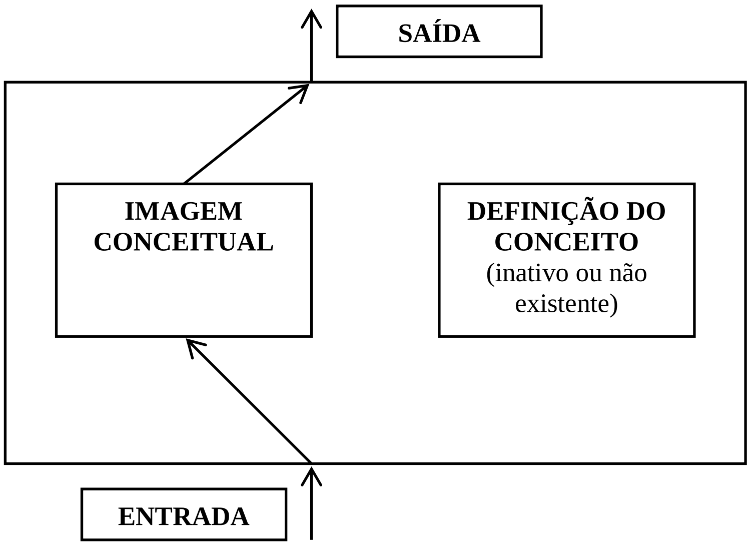
> Por outro lado, existem algumas definições que fazem sentido, mas no momento em que alguns exemplos específicos são dados pelo professor ou pelo livro eles formam uma imagem conceitual, e por causa de (1) e (2) [...] as definições podem ficar inativas ou serem esquecidas" (VINNER; HERSHKOWITZ, 1980, p. 178-179, tradução nossa[64]).

Assim, destacam que um modelo explicativo para o processo de formação de conceitos que mais se aproxima da prática poderia ser assim representado pela figura 4:

---

[61] A expressão "maneira não circular" se refere a uma explicação direta, sem rodeios e redundâncias.
[62] [...] a verbal definition that accurately explains the concept in a non circular way.
[63] [...] (1) in order to handle concepts one needs a concept image and a not a concept definition. (2) Concept definitions (in case the concept was introduced by means of a definition) will remain inactive or even will be forgotten. In thinking, almost always the concept image will be evoked.
[64] On the other hand, there are some definitions that do make sense but the moment some specific examples are given by the teacher or by the book, they form the concept image and because of (1) and (2) [...] the definitions might become inactive or even be forgotten.

Figura 4 – Modelo explicativo da formação de conceitos



Fonte: Adaptada de Vinner e Hershkowitz (1980, p. 179).

Vinner e Hershkowitz (1980) e Vinner (1975; 1983) destacaram que, mesmo definições que fazem sentido, podem tornar-se inativas mediante os processos de ensino empregados por professores. À vista disto, ressaltam que, na estrutura cognitiva de alguém, existem duas células[65] diferentes: uma para imagem conceitual e a outra para a definição do conceito. Embora possam ser formadas separadamente, "uma célula ou até mesmo ambas podem ser nulas" (VINNER, 1983, p. 294, tradução nossa[66]) ou interagir entre si. O termo "entrada" corresponde à tarefa que desencadeou o processo e "saída" designa uma resposta, um comportamento intelectual da pessoa ante o conceito envolvido na tarefa. O movimento indicado na figura 4 foi exemplificado por Vinner (1983) da seguinte forma:

> Uma criança pode ter uma imagem conceitual para a noção de sistema de coordenadas como resultado de ter visto muitos gráficos em várias situações. De acordo com essa imagem conceitual, os dois eixos de um sistema de coordenadas são perpendiculares entre si. Mais tarde, o professor de matemática da criança pode definir um sistema de coordenadas como quaisquer duas linhas retas que se cruzam. Como resultado disso, três cenários podem ocorrer: (I) A imagem conceitual será alterada para incluir também sistemas de coordenadas cujos eixos não formam um ângulo reto. (II) A célula da imagem conceitual permanecerá como está. A célula de definição conterá a definição do professor por algum tempo, mas esta definição será esquecida ou distorcida depois de um tempo e, quando a criança for solicitada a definir um sistema de coordenadas, ela falará sobre os eixos formando um ângulo reto. (III) Ambas as células permanecerão como estão. No momento em que a criança é convidada a definir um sistema de coordenadas, ela repetirá a definição de seu professor, mas, em todas as outras situações, ela considerará um sistema de coordenadas como tendo dois eixos perpendiculares. Um processo semelhante pode

[65] O termo não é usado em seu sentido biológico, mas com a conotação de local, de área circundada, delimitada.
[66] One cell or even both of them might be void.

> ocorrer quando um conceito é introduzido pela primeira vez por meio de uma definição. Aqui a célula de imagem conceitual está vazia no começo. Depois de vários exemplos e explicações, ela é gradualmente preenchida. No entanto, não reflete necessariamente todos os aspectos da definição do conceito. Cenários semelhantes a (I) e (III) acima podem ocorrer também nesse estágio (VINNER, 1983, p. 294, tradução nossa[67]).

Tal como sugere o modelo explicativo da formação de conceitos (Figura 4), discorremos, daqui em diante, sobre os termos *imagem conceitual* e *definição do conceito*.

Imagem conceitual

O termo imagem conceitual surgiu em Vinner e Hershkowitz (1980) e foi definido melhor em Tall e Vinner (1981). Em matemática, o conceito é considerado como abstrato, existente apenas na mente de alguém (VINNER, 1983; 2002; 2011). A cada conceito "é dado um símbolo ou nome que lhe permite ser comunicado e ajuda na sua manipulação mental" (TALL; VINNER, 1981, p. 151, tradução nossa[68]). Geralmente são definidos com precisão, a fim de propiciar uma base firme à teoria matemática (TALL; VINNER, 1981). Assim, "adquirir um conceito significa formar uma imagem conceitual para ele. Saber de cor uma definição de conceito não garante a compreensão do conceito" (VINNER, 2002, p. 69, tradução nossa[69]).

Ao longo de sua produção teórica, Vinner foi refinando seu entendimento de conceito. Em 2011[70], assinalou que sua preocupação se concentrava na relação entre o conceito e o nome (linguístico) que o designava. Desse modo, Vinner (2011) quis demonstrar que, em explicações, o exemplo tem o papel fundamental. Na ocasião, destacou o papel dos exemplos na formação de conceitos quando afirmou que,

---

[67] A child might have a concept image for the notion of coordinate system as a result of seeing many graphs in various situations. According to this concept image the two axes of a coordinate system are perpendicular to each other. Later on the child's Math 'teacher might define a coordinate system as any two intersecting straight lines. As a result of this, three scenarios might occur: (I) The concept image will be changed to include also coordinate systems the axes of which do not form a right angle. (II) The concept image cell will remain as it is. The definition cell will contain the teacher's definition for a while but this definition will be forgotten or distorted after a while and when the child is asked to define a coordinate system he will talk about axes forming a right angle. (Ill) Both cells will remain as they are. The moment the child is asked to define a coordinate system he will repeat his teacher's definition, but in all other situations he will think of a coordinate system as having two perpendicular axes. A similar process might occur when a concept is first introduced by means of a definition. Here the concept image cell is empty in the beginning. After several examples and explanations it is gradually filled. However, it does not necessarily reflect all the aspects of the concept definition. Similar scenarios to (I)-(III) above might occur at this stage too.

[68] [...] is given a symbol or name which enables it to be communicated and aids in its mental manipulation.

[69] [...] to acquire a concept means to form a concept image for it. To know by heart a concept definition does not guarantee understanding of the concept.

[70] VINNER, S. The role of examples in the learning of mathematics and in everyday thought processes. *ZDM*, v. 43, n. 2, p. 247 – 256, 2011.

> [...] para formar o conceito em nossa mente, devemos construir uma classe de objetos (concretos ou abstratos) ou uma classe de ocorrências do conceito ao qual o nome do conceito deve ser aplicado. Suponha também que esta classe deva ser formada em nossa mente por meio dos exemplos" (VINNER, 2011 p. 248, tradução nossa[71]).

Por isso, Tall e Vinner (1981) destacam que o significado do conceito é envolvido por uma estrutura cognitiva total, constituída de imagem mental, propriedades e processos associados. E, durante o processo mental de manipular e recordar um conceito, tais elementos são colocados "em jogo, conscientemente ou inconscientemente afetando o significado e o uso" (TALL; VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa[72]). Dessa maneira, designam *imagem conceitual* como

> [...] a estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais e propriedades e processos associados. É construída ao longo dos anos mediante experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece (TALL, VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa[73]).

Portanto, envolve um conjunto de

(a) *Imagens mentais*: englobam todas as imagens já associadas ao conceito na mente da pessoa. Podem ser pictóricas, simbólicas ou de outra forma (VINNER, 1975; TALL; VINNER, 1981), tais como procedimentais ou relacionais. Por isso, o termo imagens mentais é usado em seu sentido mais amplo e "[...] inclui qualquer representação visual do conceito (até mesmo símbolos)" (VINNER, 1983, p. 293, tradução nossa[74]).

(b) *Propriedades*: consideramos que sejam todos os atributos que caracterizam determinado conceito, sejam conscientes, sejam inconscientes (TALL; VINNER, 1981).

(c) *Processos associados*: designamos como uma possível articulação entre imagens e propriedades que podem ser externalizadas mediante uma representação. Acredita-se que, ao indagar uma pessoa, dela é exigida uma resposta que geralmente é dada pela articulação simultânea de imagens e propriedades. Desse modo, evoca-se uma imagem que busca responder às coisas (questões, tarefas, entre outros).

---

[71] [...] to form the concept in our mind, we are supposed to construct a class of objects (concrete or abstract) or a class of occurrences of the concept to which the concept name is supposed to be applied. Assume also that this class is supposed to be formed in our mind by means of the examples.
[72] [...] are brought into play, consciously and unconsciously affecting the meaning and usage.
[73] [...] the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures.
[74] [...] includes any visual representation of the concept (even symbols).

Em aritmética, por exemplo, a imagem conceitual poderia ser assim exemplificada:

> [...] o conceito de subtração é geralmente encontrado pela primeira vez como um processo envolvendo números inteiros positivos. Nesta fase as crianças podem observar que a subtração de um número [pelo outro] sempre reduz a resposta. Para essa criança, tal observação é parte de sua imagem conceitual e pode causar problemas mais tarde, caso a subtração de números negativos seja encontrada (TALL, VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa[75]).

Outro exemplo de imagem conceitual cotidiana seria aquele contemplado na figura 1, apresentada no início desta seção. Observando-a, poderíamos perguntar-nos: Por que Calvin usou tantas roupas de uma só vez, ao ir aprender andar de bicicleta? É bem provável que tenha suposto que, ao aprender a andar de bicicleta, poderia acontecer-lhe algum acidente, uma queda, por exemplo. Assim, estando com muitas roupas, se isso acontecesse, não se machucaria. Calvin pareceu ter criado uma imagem que associava andar de bicicleta à possibilidade de cair e de não se machucar por estar com muitas roupas. Assim, deu-nos a impressão de ter evocado imagens pessoais que justificam o uso de muitas peças de roupa de uma só vez.

Os exemplos mostraram que a imagem conceitual depende de uma pessoa e de um conceito do qual a pessoa fala. Portanto, sobre ele cada pessoa pode gerar uma imagem conceitual distinta. Além disso, as imagens conceituais podem variar de cultura para cultura (VINNER, 2011); por isso e também pelas modificações pelas quais as imagens conceituais passam à medida que o indivíduo aprende e amplia seu conhecimento, elas podem não ser "globalmente coerente[s] e pode[m] ter aspectos que são bastante diferentes da definição formal do conceito" (TALL, VINNER, 1981, p. 151, tradução nossa[76]). Isso acontece pelo fato de, ao receber um estímulo, que pode ser uma tarefa, a pessoa mobilizar diferentes partes da imagem conceitual. Além disso, não há como garantir que, em outro momento ou contexto, um estímulo igual despertará a mesma imagem conceitual evidenciada anteriormente (TALL, VINNER, 1981; VINNER, 1983), pois "[...] experiências anteriores podem dar sentido aos significados dos fenômenos quando estão inseridos em novos contextos" (TALL, 1988, p. 37, tradução nossa[77]). Vê-se, então, que as imagens conceituais não são estruturas rígidas e, portanto, podem:

---

[75] [...] the concept of subtraction is usually first met as a process involving positive whole numbers. At this stage children may observe that subtraction of a number always reduces the answer. For such a child this observationis part of his concept image and may cause problems later on should subtraction of negative numbers be encountered.

[76] [...] globally coherent and may have aspects which are quite different from ttre formal concept definition.

[77] [...] previous experiences may colour the meanings of phenomena when they are met in new contexts.

- não ser um todo coerente em todos os momentos. Na perspectiva de Tall e Vinner (1981), imagens conceituais coerentes são aquelas que mais se aproximam do conhecimento matemático formal. Do contrário, referem-se a imagens conceituais incoerentes;
- ser ativadas por diferentes estímulos;
- apresentar aspectos diferentes da definição formal do conceito; por isso, pode conter fatores que estão em conflito com tal definição "[...] e podem nem ser conscientemente observados pelo indivíduo, mas causar confusão em lidar com a teoria formal" (TALL; VINNER, 1981, p. 153, tradução nossa[78]);
- ser "completa, parcial ou incorreta; uma imagem conceitual parcial não possui todos os aspectos incluídos na definição do conceito; uma imagem conceitual incorreta inclui itens que não pertencem à definição do conceito" (HERSHKOWITZ, 1994, p. 62).

Nesse contexto, Tall (1988) destaca que,

> quando os alunos conhecerem um conceito antigo em um novo contexto, é a imagem do conceito, com todos os pressupostos implícitos abstraídos de contextos anteriores, que responde à tarefa. Se a imagem é construída sobre experiências que entram em conflito com a definição formal, isso pode levar a respostas que estão em desacordo com a teoria formal (p. 39, tradução nossa[79]).

Isso porque, segundo Tall e Vinner (1981), quando um estímulo é recebido por uma pessoa, excita algumas vias sensoriais e inibe outras. "Dessa forma, diferentes estímulos podem ativar diferentes partes da imagem conceitual [...]" (p. 152, tradução nossa[80]). Tal afirmativa quer dizer que, quando vemos ou ouvimos o nome de um conceito, nossa memória é estimulada e algo sobre ele e o conceito é mobilizado e evocado, tornando-se presente pelo exercício da memória. Ao aprofundar seus estudos em 2011, Vinner ampliou a noção de imagem conceitual. Afirmou que, quando vemos ou ouvimos uma noção, "várias associações [verbais, visuais, vocais e/ou emocionais] são evocadas em nossa mente" (p. 250, tradução nossa[81]). No entanto, caso o estudante tenha decorado ou memorizado uma definição de um conceito e não tenha associado nenhum significado ao seu nome, a célula da imagem

---

[78] [...] and may not even be consciously noted by the individual but they can cause confusion in dealing with the formal theory.
[79] When students meet an old concept in a new context, it is the concept image, with all the implicit assumptions abstracted from earlier contexts, that responds to the task. If the image is built on experiences that conflict with the formal definition, this can lead to responses which are at variance with the formal theory.
[80] In this way different stimuli can activate different parts of the concept image [...].
[81] [...] various associations are evoked in our mind.

conceitual será considerada vazia. Mostra, portanto, que, embora conceitos sejam precisamente definidos, as realidades psicológicas das pessoas são diferentes: "[...] uma estrutura cognitiva complexa existe na mente de cada indivíduo, produzindo uma variedade de imagens mentais pessoais quando o conceito é evocado" (TALL, VINNER, 1981, p. 151, tradução nossa[82]).

Essa parte da imagem conceitual ativada no momento do recebimento do estímulo recebe o nome de *imagem conceitual evocada* (evoked concept image). Designa uma parcela da imagem conceitual que é ativada em um momento particular (TALL; VINNER, 1981); por isso, "não é necessariamente tudo o que um indivíduo conhece sobre certa noção" (VINNER, 2002, p. 68, tradução nossa[83]). Vinner (1983) observa que as imagens conceituais ou definições de conceitos não podem ser determinadas pela observação única de um comportamento específico. Mas se deve falar da "parte da célula que foi ativada ao trabalhar em uma determinada tarefa" (p. 297, tradução nossa[84]). Desse modo, lida-se com uma imagem conceitual evocada em um momento específico; logo, designa-a como imagem temporária de um conceito, visto que ela pode ser refutada a qualquer momento.

Por exemplo, dada uma tarefa em que se pede a alguém que desenhe um quadrilátero, de modo que, ao traçar uma reta, seja possível dividi-lo em quatro triângulos, é exequível que, ao resolvê-lo, se pense apenas em quadriláteros simples em que os lados não se interceptem. Ao pensar somente nesse tipo de quadrilátero, falha-se na busca por uma resposta à tarefa. Isso acontece porque sua imagem conceitual temporária não inclui quadriláteros que apresentam formas mais complexas. Outros, apesar de conhecer o conceito, podem simplesmente não conseguir evocá-los. Vinner (1983) procura mostrar que a imagem evocada é temporária, pelo fato de que, com a aprendizagem, a pessoa pode construí-la de modo mais coerente e assim incluir quadriláteros não simples. Embora comente tal termo, em nossa tese, lidamos somente com a imagem conceitual evocada quando trabalhamos com uma tarefa específica, pois, além de ser um ponto de concordância entre Tall e Vinner em suas distintas publicações que analisam imagens de estudantes, consideramo-lo apropriado para o contexto de nossa pesquisa.

Além disso, Tall e Vinner (1981) mostram que, na mente de uma pessoa, é possível coexistirem imagens conceituais aparentemente conflitantes que podem ser evocadas

---

[82] [...] a complex cognitive structure exists in the mind of every individual, yielding a variety of personal mental images when a concept is evoked.
[83] [...] is not necessarily all that a certain individual knows about a certain notion.
[84] [...] part of the cell that was activated when working on a given task.

simultaneamente. Quando isso acontece, causam uma sensação de desconforto na pessoa que as evocou, pois ela “sente algo errado em algum lugar”. Sendo assim, ocorre o que denominam fator cognitivo de conflito. É percebido quando temos a sensação de que estamos fazendo/pensando algo errado, mas não sabemos bem o que é. E a tomada de consciência, como indício de aprendizagem, sobre esse fator cognitivo de conflito poderá acontecer mais tarde, quando a razão para o conflito for conscientemente compreendida. Portanto quando se resolve conscientemente este conflito cognitivo, ele pode provocar mudanças nas imagens conceituais. Por outro lado, caso as imagens conceituais conflitantes se mantenham no subconsciente, elas podem ser caracterizadas como um fator de conflito potencial. A respeito disso, Tall e Vinner (1981) afirmam:

> Um tipo mais grave de fator de conflito potencial é um em que a imagem conceitual está em desacordo não com outra parte da imagem conceitual, mas com a própria definição formal do conceito. Tais fatores podem dificultar seriamente a aprendizagem de uma teoria formal [...] (p. 154, tradução nossa[85]).

Tall (2002) informa que mesmo matemáticos maduros não estão imunes a conflitos internos, mas eles conseguem articulá-los e organizá-los de modo dedutivo. Para eles, é muito fácil categorizar o conhecimento de uma forma logicamente estruturada (TALL, 2002). Assim, o matemático ensina considerando a lógica formal do conteúdo. No entanto, um aluno que não tenha a experiência e a compreensão de professor (ou matemático), terá dificuldade de compreender essa lógica formal.

O professor pode entender isso como falta de conhecimento do aluno, porém isso pode não ser real, já que o professor o concluiu pela falta de conhecimento do aluno baseado em seu conhecimento que deve pertencer à comunidade de matemáticos e não toma como referência as necessidades reais dos alunos nem os entendimentos e o que pode estar na mente do aluno. Portanto, Tall (2002) menciona que para os alunos é essencial uma abordagem do conhecimento matemático que se aprofunda à medida que os alunos crescem: “[...] uma abordagem cognitiva que leve em conta o desenvolvimento de sua estrutura de conhecimento e processos de pensamento” (p. 7, tradução nossa[86]).

---

[85] A more serious type of potential conflict factor is one in the concept image which is at variance not with another part of the concept image but with the formal concept definition itself. Such factors can seriously impede the learning of a formal theory [...].

[86] [...] a cognitive approach that takes account of the development of their knowledge structure and thinking processes.

Definição do conceito

Assim como o anterior (imagem conceitual), o termo *definição do conceito* foi cunhado por Vinner e Hershkowitz na década de 1980. Na ocasião, afirmaram que a definição do conceito se referia a uma significação verbal que explicaria o conceito com precisão. Ela foi melhor descrita e explicada em Tall e Vinner (1981), quando destacaram que a definição do conceito é

> [...] uma forma de palavras usadas para especificar o conceito. Pode ser aprendido por um indivíduo de uma forma rotineira ou mais significativamente aprendido e relacionado, em maior ou menor grau, ao conceito como um todo. Pode também ser uma reconstrução pessoal pelo aluno de uma definição. É então a forma de palavras que o aluno usa para sua própria explicação da imagem conceitual (evocada). Se a definição do conceito é dada a ele ou construída por ele mesmo, ela pode variar de vez em quando. Desta forma, uma definição do conceito pessoal pode diferir de uma definição de conceito formal, sendo esta última uma definição de conceito que é aceita pela comunidade matemática em geral (p. 152, tradução nossa[87]).

Desse modo, apreendemos que a definição do conceito se refere à descrição do conceito matemático formal por meio de palavras. Isso quer dizer que seria a forma verbalizada da imagem conceitual evocada. Assim entendida, vê-se que, ante a definição do conceito, cada indivíduo gera uma imagem conceitual da definição, pois pode ser uma reconstrução pessoal do estudante sobre uma definição matemática oficial.

Portanto, uma definição de conceito é considerada por Tal e Vinner (1981) como a verbalização da compreensão, neste caso, do aluno sobre o conceito. Então, à medida que novas aprendizagens ocorrem e outros conhecimentos são incorporados ao repertório individual de cada um, ambas podem variar. E, quanto mais próxima da definição formal, mais chances elas têm de ser reconhecidas como parte da teoria formal. Da citação acima, apreendemos também que a definição do conceito pode ser dada ao sujeito mediante uma descrição da definição formal ou construída por ele por meio de experiências pessoais. Além disso, a imagem da definição do conceito pode ser construída pela união de ambas (descrição formal e experiências pessoais) baseada nas imagens conceituais evocadas.

Enquanto a imagem conceitual se relaciona à matemática como atividade humana, conforme comentamos acima, a definição de um conceito se relaciona à matemática como sistema formal. Assim sendo, ambas são criadas por matemáticos e sutilmente incorporadas às

---

[87] [...] a form of words used to specify that concept. It may be learnt by an individual in a rote fashion or more meaningfully learnt and related to a greater or lesser degree to the concept as a whole. It may also be a personal reconstruction by the student of a definition. It is then the form of words that the student uses for his own explanation of his (evoked) concept image.Whether the concept definition is given to him or constructed by himself, he may vary it from time to time. In this way a personal concept definition can differ from a formal concept definition, the latter being a concept definition which is accepted by the mathematical community at large.

práticas docentes, pois, na combinatória e em outros tópicos da matemática, existem definições formais para estruturas específicas. Desse modo, uma definição do conceito é considerada diferente da imagem conceitual, pois tende a se aproximar da matemática formal em termos estruturais estabelecidos. Neste caso, Tal e Vinner (1981) assinalam que decorrem consequências para a estruturação de livros didáticos e planejamento de aulas por professores, a saber:

1. Conceitos são adquiridos principalmente por meio de suas definições.
2. Os alunos usarão definições para resolver problemas e provar teoremas quando necessário, do ponto de vista matemático.
3. As definições devem ser mínimas, pois não devem conter partes que possam ser deduzidas matematicamente de outras partes das definições.
4. É desejável que as definições sejam elegantes.
5. Definições são arbitrárias, porque são construções humanas de autores de livros com a finalidade de nomear termos.

Embora esses cinco pressupostos não reflitam necessariamente todos os aspectos das definições, eles são frequentes em práticas de ensino e aprendizagem de matemática no ensino superior. Portanto, ao recorrerem a essa discussão, Tall e Vinner (1981) apreciam, de maneira crítica, o formalismo instituído e assinalam que a imagem conceitual e a definição do conceito têm um papel importante para o desenvolvimento de novas perspectivas de conceber o ensino e a aprendizagem de matemática.

Debruçamo-nos sobre esses aspectos pelo fato de esperarmos que, no ensino superior, o estudante passe a operar com definições formais como parte do conhecimento adquirido. Tê-las bem compreendidas e construídas auxilia na manipulação e transposição de conteúdos conceituais para os diferentes níveis de ensino. Em nossa prática no ensino superior, quando perguntamos, por exemplo, a um licenciando o que é um arranjo, esperamos dele uma definição e uma explicação mais próxima daquela formal. Mesmo que seja de uma reconstrução pessoal, desejamos que o estudante consiga mostrar seu entendimento do conceito e identificar se ele possuiu mais características matemáticas precisas do que intuitivas. Portanto o concebemos como processos imbricados. De acordo com Vinner (1983):

> Essas definições são ensinadas para nós ou são feitas por nós quando somos solicitados a explicar os conceitos a alguém. As definições feitas por nós são resultado da nossa experiência com o conceito. Eles são uma descrição da nossa imagem conceitual. As definições que nos são ensinadas, por outro lado, são parte de um sistema geral (no caso de conceitos científicos ou matemáticos), um sistema com o qual não estamos necessariamente familiarizados. Às vezes, definições nos

> são apresentadas antes de termos qualquer imagem conceitual. Esperamos que o aprendizado adicional preencha essa lacuna (p. 294, tradução nossa[88]).

Por outro lado, Vinner (2002) destaca que a aprendizagem da definição pela definição pode criar um problema sério na aprendizagem da matemática. Isso ocorre em razão de, às vezes, representar "o conflito entre a estrutura da matemática tal como é concebida pelos matemáticos profissionais, e os processos cognitivos de aquisição de conceitos" (p. 65, tradução nossa[89]), pois os processos de pensamento envolvem conceitos e conjecturas sobre os conceitos; assim sendo, devem conter argumentos que estabelecem a validade das conjecturas sobre os conceitos (VINNER, 2011), uma vez que levam a formar algumas generalizações. De acordo com Vinner (2011), "em nossa mente existe uma tendência a generalizar" (p. 252, tradução nossa[90]). Esta, por sua vez, pode ser mais intuitiva, imediata e espontânea. Além disso, generalizações dependem de impressões globais e não analíticas. Por isso, devemos ter cuidado com elas, pois podem falhar e produzir imagens equivocadas das definições conceituais.

Por fim, Vinner (1991; 2002) ressalta acreditar que

> [...] conceitos matemáticos, se sua natureza permitir, devem ser adquiridos no modo de vida cotidiana da formação dos conceitos, e não no modo puramente técnico. Deve-se começar com vários exemplos e não exemplos [contraexemplos], por meio dos quais a imagem conceitual será formada" (VINNER, 2002, p. 80, tradução nossa[91]).

A alternativa é proporcionar experiências mais ricas aos estudantes, em que exemplos e contraexemplos sejam apresentados, problematizados e discutidos para que eles entendam e forneçam argumentos quando identificam que os exemplos satisfazem uma definição matemática formal e quando eles seriam contraexemplos. Com várias experiências envolvendo um conceito matemático os estudantes podem ser capazes de formar um conceito que tenha coerência. Enquanto professor de ensino superior temos que aceitar que esta tarefa docente de proporcionar situações que auxiliem que imagens conceituais e definições de conceito sejam adequadas é complexa. O professor precisa pensar cuidadosamente em

---

[88] These definitions are either taught to us or they are made up by us when we are asked to explain the concepts to somebody. The definitions made up by us are a result of our experience with the concept. They are a description of our concept image. The definitions which we are taught, on the other hand, are part of a general system (in the case of scientific or mathematical concepts), a system with which we are not necessarily familiar. Sometimes definitions are introduced to us before we have any concept image. We expect further learning to fill this gap.

[89] [...] the conflict between the structure of mathematics, as conceived by professional mathematicians, and the cognitive processes of concept acquisition.

[90] [...] in our mind exists a tendency to generalize.

[91] [...] mathematical concepts, if their nature allows it, should be acquired in the everyday life mode of concept formation and not in the technical mode. One should start with various examples and non-examples by means of which the concept image will be formed.

exemplos e contraexemplos que sejam discutidos e problematizados para que o estudante chegue a um entendimento adequado de um conceito. Isso não é simples, nem tão fácil como parece. Pois "envolve um equilíbrio entre a variedade de exemplos e contraexemplos necessários para obter uma imagem coerente e a complexidade que pode aumentar a demanda cognitiva para níveis inaceitáveis" (TALL, 1988, p. 4, tradução nossa[92]).

Tall e Vinner: a singularidade

Após a publicação conjunta de Tall e Vinner (1981), em foram detalhados aspectos da imagem conceitual e da definição do conceito pela primeira vez, cada um passou a adotar uma concepção distinta para a definição do conceito. Tall (1988) enfatizou a definição do conceito como um componente da imagem conceitual. Ou seja, como uma parte do conceito. Por outro lado, Vinner (1983) passou a vê-la como dissociada da imagem. Isso porque, para ele, a imagem é algo não verbal evocado em nossa memória, quando ouvimos determinado termo conceitual. Embora possa ser traduzido em formas verbais, surge em um estágio posterior e se mostra como "estruturas excludentes" (GIRALDO, 2004, p. 9):

Tabela 8 – Visões de Tall e Vinner: relação entre imagem e definição do conceito

Visão de Tall	***Visão de Vinner***
	

Fonte: Elaborada pelas pesquisadoras.

De acordo com Giraldo (2004), "[...] tal distinção é meramente formal, não acarretando em quaisquer diferenças relevantes para a teoria em si" (2004, p. 9). Diante do exposto, consideramos, em nossa tese, as proposições de Tall. Entendemos que definições fazem parte das imagens conceituais de estudantes, pois suas principais características são evocadas quando um nome conceitual é visto ou ouvido.

---

[92] [...] involves a balance between the variety of examples and nonexamples necessary to gain a coherent image and the complexity which may increase the cognitive demand to unacceptable levels.

A nosso ver, a imagem conceitual possui atributos que a aproximam do conceito. Isto pelo fato de as realidades psicológicas que a constituem serem diferentes daquelas em que conceitos formais são estruturados. Assim, divergem de um indivíduo para outro, pois cada um elabora a sua estrutura cognitiva associada ao conceito, "produzindo uma variedade de imagens mentais pessoais quando o conceito é evocado" (TALL, VINNER, 1981, p. 151, tradução nossa[93]). Desse modo, as imagens conceituais de um assunto matemático, por exemplo, são construções atravessadas por uma série de fatores para além de uma estrutura cognitiva na mente do indivíduo. Diante disso, "[...] todos os atributos mentais associados a um conceito, sejam eles conscientes ou inconscientes, devem ser incluídos na imagem conceitual" (TALL, VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa[94]). Assim, passamos a dissertar, de agora em diante, sobre os *atributos, protótipos e compreensão*.

3.2.2 Atributos e protótipos na visão de Hershkowitz

O texto *Aspectos psicológicos da aprendizagem*, de Hershkowitz (1994), trata, entre outros, dos aspectos cognitivos dos processos de aprendizagem de conceitos. Assim, vimos nesse texto que as concepções originais servem à geometria, um instrumento importante para a análise dos dados obtidos em nossa pesquisa. Isso porque se relaciona diretamente às ideias desenhadas por Tall e Vinner (1981) quanto à necessidade de uma análise dos conceitos e sua estrutura matemática. Um ponto importante assinalado por Hershkowitz (1994) refere-se à existência de um conjunto de atributos que caracterizam certo conceito. Ela diz que boa parte das estruturas dos conceitos matemáticos básicos pode ser considerada como uma conjunção de atributos relevantes; neste caso, conjunção compreendida como associações de ideias relevantes que caracterizam determinado conceito matemático. Assim, podemos pensar que construímos conceitos básicos quando associamos ideias relevantes relacionadas a eles.

De modo semelhante a Broetto (2016), precisamos fazer alguns ajustes para contemplar algumas situações particulares de nossa pesquisa. Isto aconteceu principalmente quando Hershkowitz (1994) classificou os atributos em relevantes e irrelevantes. Para ela, há inter-relações matemáticas entre os elementos de um conceito, as quais envolvem, entre outros, a definição conceitual e os atributos relevantes (críticos) e irrelevantes (não críticos) associados a tal definição. Atributos relevantes ou críticos foram entendidos por ela como

---

[93] [...] yielding a variety of personal mental images when a concept is evoked.
[94] [...] all mental attributes associated with a concept, whether they be conscious or unconscious, should be included in the concept image [...].

aqueles que devem ser satisfeitos, para termos um exemplo positivo de conceito; já os irrelevantes, não críticos, são aqueles que apenas alguns exemplos positivos possuem. Desse modo, são considerados como exemplos negativos ou contraexemplos, quando eles "[...] possuem alguns, mas não todos os atributos relevantes" (HERSHKOWITZ, 1994, p. 16). Portanto, o termo é empregado em oposição ao que seria um exemplo positivo. Com base nas ideias originais de Hershkowitz (1994), Broetto (2016) decidiu

> [...] reservar o termo atributos irrelevantes para os atributos que não têm nenhuma relação com o conceito, isto é, que não são características de nenhum exemplo positivo do conceito. Os atributos relevantes ficariam divididos em dois subgrupos: os atributos críticos, aqueles que todos os exemplos positivos de uma categoria devem ter, e os atributos não críticos, aqueles que apenas alguns dos exemplos possuem (p. 195 – 196).

Em nossa pesquisa, tais ideias ainda precisaram ser ajustadas em função do tipo de objeto matemático tratado, pois os agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação possuem condições necessárias e suficientemente específicas que determinam sua existência. Desse modo, consideramos aqui *atributos relevantes* como o conjunto de características que devem ser reconhecidas em um enunciado, a fim de que o modelo combinatório implícito – MCI ao problema seja identificado, e *atributos irrelevantes* como o conjunto de características que não são relevantes para a combinatória em si, mas são úteis à matemática e se apresentam associadas a outros conceitos.

Feita essa adequação, citamos como exemplo os principais atributos relevantes associados aos agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação (ver tabela 9). Para estruturarmos a listagem apresentada a seguir na tabela 9, consideramos a definição dada ao conceito pela literatura matemática, conforme apresentamos na seção 1 deste capítulo.

Tabela 9 – Atributos relevantes dos agrupamentos simples de combinatória

AGRUPAMENTOS	ATRIBUTOS RELEVANTES
Arranjo	✓ A ordem e a natureza dos elementos que compõem as sequências desejadas são relevantes; ✓ É conhecido por $A_{n,\ p}$, em que *n* indica o número de elementos distintos do conjunto e *p* representa o número de elementos distintos das sequências/subconjunto formados, pertence aos naturais não nulos e pode ser menor que *n*; ✓ É calculado pela fórmula $A_{n,\ p} = \frac{n!}{(n-p)!}$
Permutação	✓ É vista como um caso particular de arranjo simples; portanto, diferencia-se pela ordem dos elementos; ✓ É dada por P_n, em que os *n* elementos distintos da sequência são tomados *n* a *n*; ✓ É calculada pela fórmula $P_n = n!$

Combinação	✓ A ordem dos elementos não é considerada, pois não altera o conjunto formado; portanto, os subconjuntos se diferenciam pela natureza dos elementos; ✓ Geralmente é dada por $C_{n,p}$ ou C_n^p em que n indica a quantidade de elementos do conjunto e p representa um número natural menor ou igual a n que sinaliza quais elementos vão compor os subconjuntos formados; ✓ É calculada pela fórmula $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, 0 \leq p \leq n.$

Fonte: Elaborada pelas pesquisadoras.

Além dos atributos, Hershkowitz (1994) discute o que seriam os exemplos protótipos. Isto porque, para ela, atributos e protótipos ajudam a descrever o desenvolvimento das imagens conceituais na mente das pessoas. Ademais, assinala que "[...] cada conceito possui um (ou mais) *exemplo protótipo* que são forjados inicialmente, e, portanto, existem na imagem conceitual da maioria dos sujeitos" (p. 17). Para a pesquisadora, eles são exemplos dados aos alunos desde os primeiros momentos de aula. Também aparecem como exemplos em livros didáticos. Ou seja, professores apresentam estes exemplos protótipos de quadriláteros, de triângulos e em nosso caso, de problemas tipo ou problemas modelos que podem ser encaixados como arranjos ou de outro agrupamento de combinatória. Mencionam também desde a apresentação desses protótipos que devem usar determinada fórmula para resolver os problemas. Isso faz com que os estudantes interiorizem e memorizem estes exemplos protótipos de arranjos, permutação, combinação, etc. Assim, por meio deles, dos exemplos protótipos, os estudantes constroem imagens conceituais relacionadas ao conceito.

Desse modo, entendemos que *exemplos protótipos* "são os subconjuntos de exemplos que possuem "a maior listagem" de atributos – todos os atributos críticos do conceito e mais ainda aqueles atributos (não críticos) específicos" (HERSHKOWITZ, 1994, p. 17). Em combinatória, por exemplo, um caso de arranjo simples que envolve uma situação hipotética do tipo "De um jogo de baralho de 52 cartas, 3 cartas são retiradas sucessivamente e sem reposição. Quantas sequências de cartas é possível obter?" (HAZZAN, 1993, p. 17), pode ser considerado como um exemplo protótipo, ao apresentar uma boa listagem de atributos críticos, a saber:

a) serão retiradas apenas 3 cartas; dessa forma, o baralho todo não será usado;
b) o resultado será uma tripla ordenada de cartas que podem ser identificadas, por exemplo, por x, y, z, em que x é a primeira carta extraída do baralho, y a segunda e z a terceira; essas cartas são todas distintas, visto que a retirada é feita sem reposição (depois de ter sido retirada, a carta não retorna ao baralho);
c) as cartas diferenciam-se pela natureza; isso quer dizer que são todas distintas;

d) o resultado será o número de sequências formadas por 3 cartas quaisquer do baralho, ou seja, um subconjunto que foi constituído sob certa condição, a partir do total de cartas;
e) o fato de serem retiradas apenas 3 cartas quaisquer e sem reposição indica um modelo combinatório implícito que poderá ser utilizado na resolução; neste caso, a noção de arranjo é simples.

Como atributos não críticos podemos destacar:

1) as 52 cartas indicam o número total de elementos do conjunto baralho; isto quer dizer que implicitamente ao enunciado aparece a noção de conjunto;
2) é um agrupamento identificado pela análise combinatória;
3) a quantidade de cartas mostra que os elementos pertencem ao conjunto dos números naturais não nulos.

Portanto, Vinner e Hershkowitz (1980) assinalam que "muitas vezes descobrimos que nossos alunos não conhecem os conceitos [...] e têm imagens erradas dos conceitos. Essas imagens podem ser resultado de um conjunto específico de exemplos dados aos alunos" (p. 179, tradução nossa[95]), muitas vezes vistos por eles durante a educação básica. Desse modo, Hershkowitz (1994) afirma que exemplos protótipos "[...] geralmente são o subconjunto de exemplos que possui 'a maior listagem' de atributos – todos os atributos críticos do conceito e mais ainda aqueles atributos (não-críticos) específicos que possuem fortes características visuais".

Mas, então, o que é um protótipo? De acordo com o dicionário[96], protótipo é o termo usado para se referir ao que foi criado pela primeira vez, servindo de modelo ou molde para futuras produções. No sentindo figurado, protótipo pode ainda significar a exemplificação perfeita do estereótipo de determinado tipo de coisa ou de pessoa. Por outro lado, a finalidade de um protótipo é que os seus idealizadores percebam eventuais falhas e melhorem o modelo a ser apresentado. Por isso, não usamos aqui protótipo como associado àquilo que seria um exemplo ou um símbolo de perfeição, mas, sim, como um exemplo do primeiro conhecimento demonstrado por um estudante, ao rememorar as ideias conceituais dos agrupamentos simples envolvidos no ensino e na aprendizagem de combinatória. Portanto, são exemplos dotados de

---

[95] Very often we discover that our students do not know the [...] concepts and they have wrong concepts images. These images might be a result of the specific set of examples given to the students.
[96] www.dicio.com.br ; https://michaelis.uol.com.br ; www.dicionarioinformal.com.br

atributos que provavelmente tenham sido vistos pelos licenciandos, por isso fazem parte de uma primeira imagem conceitual evocada por eles.

Assim sendo, Hershkowitz (1994) aponta que o protótipo é a base para julgamentos prototípicos. Afirma que, “para cada conceito, os indivíduos usam o exemplo protótipo como modelo em seu julgamento de outras instâncias” (p. 17). Em vista disso, os julgamentos são classificados em duas categorias: visuais e analíticas. A primeira (visual) é fundamentada pelo aspecto visual e funciona como um sistema de referência no qual o protótipo serve para (i) julgamento visual aplicado a outras situações e (ii) julgamento baseado em atributos próprios do protótipo, com os quais o sujeito “tenta impor [...] a outros exemplos deste conceito” (p. 18); a segunda (analítica) está baseada nos atributos próprios do conceito. Desse modo, para julgar e categorizar os exemplos, baseiam-se nos atributos relevantes declarados nas definições matemáticas formais relacionadas aos conceitos.

Por assim compreendê-los, Hershkowitz (1994) assinala que existe alguma evidência de que a construção da imagem conceitual seja uma mistura de processos visuais e analíticos. Isso é percebido quando os sujeitos mudam o comportamento quando passam de um conceito para outro. Em relação à aprendizagem dos conceitos básicos de geometria, Hershkowitz (1994) sugere que os alunos desenvolvam habilidades analíticas, baseiem seus julgamentos nos atributos relevantes das definições e se conscientizem das incompletudes e de suas concepções errôneas sobre o conceito. Corroboramos esses argumentos destacados por Hershkowitz (1994) e buscamos adaptá-los às ideias conceituais de combinatória. Ao fazê-lo, notamos que a compreensão de estruturas e atributos específicos de cada conceito dos agrupamentos simples de combinatória seria fundamental ao desenvolvimento de habilidades analíticas. Visto dessa forma, discorremos a seguir sobre nossa visão de compreensão em matemática.

3.2.3 Compreensão em matemática: a abordagem dada por Skemp

Um dos primeiros pontos que Skemp destaca em *Relational understanding and instrumental understanding*, publicado primeiramente em 1976, é o significado que a palavra assume em diferentes contextos. Com base nessa ideia de *faux amis*, apreendemos que os mesmos termos utilizados em diferentes contextos podem gerar imagens conceituais distintas. Portanto, se uma pessoa não estiver ciente de que a palavra que ela está usando é um *faux amis* [falsos amigos], poderá cometer “erros inconvenientes” (SKEMP, 1976, p. 1, tradução nossa[97]). Assim, destaca que dois deles podem ser identificados no contexto da matemática: um é a *compreensão* e o outro é a própria palavra *matemática*. Desse modo, Skemp (1976) faz uma distinção entre dois tipos de compreensão em matemática: a instrumental e a relacional.

A *compreensão instrumental* é concebida por Skemp (1976) como "regras sem razões". É conhecer uma regra e ser capaz de usá-la e manipulá-la. Desse modo, mostra-se útil quando se deseja resolver uma tarefa matemática rapidamente. No entanto, não há preocupação se o *modus operandi* se encaixa em outras tarefas semelhantes, pois, em geral, decora-se qual método funciona para cada situação. Para muitos alunos e seus professores, a posse de tal regra e a capacidade de usá-la eram o que eles entendiam por "compreensão". Mostra-se, portanto, como uma compreensão limitada em que o estudante depende de uma orientação externa para informá-lo dos procedimentos que deve usar para resolver a tarefa. Para Skemp (1976), a ideia de pegar emprestado na subtração, multiplicar a primeira pelo inverso da segunda na divisão de frações e passar para o outro lado trocando o sinal em uma equação são exemplos comuns de compreensão instrumental desses conceitos matemáticos.

O autor chama-nos a atenção para o fato de que, se professores ensinam matemática instrumental, é porque eles têm certas vantagens com esse tipo de ensino. Desse modo, apresenta três razões situacionais para ensinar matemática de forma instrumental:

1. É mais fácil compreender as regras do que as razões estruturais que as constituem e por que elas funcionam ou não.
2. Resultados positivos são instantâneos, pois aprendida a regra ou algoritmo, o aluno pode usá-lo para fazer muitos problemas no mesmo formato e obter respostas corretas. Isso desencadeia um sentimento de sucesso e autoconfiança.
3. Envolve menos conhecimento, ao permitir que respostas corretas sejam obtidas de forma rápida e confiável. Uma vez que o estudante seja capaz de seguir uma regra ou algoritmo, ele poderá resolver problemas em que aplica tal regra e sempre obterá respostas corretas.

A compreensão relacional, ao contrário, significa ter uma regra matemática, saber usá-la e entender por que ela funciona. Nesse caso, o estudante e/ou professor consegue relacionar o que entendeu e o que compreendeu com outros conceitos matemáticos. Ademais, também são capazes de chegar na regra, na fórmula, por que entenderam como ela funciona e como surgiu. Portanto, uma compreensão relacional de conceitos é útil quando se deseja explorar

[97] [...] inconvenient mistakes.

ideias “mais adiante” no processo de ensino e de aprendizagem. Assim, a compreensão relacional mostra-se como um entendimento geral, mais global. Um professor pode, portanto, mostrar ao aluno como se caminha, e o estudante caminhar sozinho e sem medo. Desse modo, Skemp (1976) aponta quatro vantagens gerais para a compreensão relacional:

1. É mais adaptável a novas tarefas. Isso quer dizer que é facilmente ajustada quando uma nova tarefa é introduzida, pois as relações e os porquês foram compreendidos.
2. É facilmente lembrada. Skemp (1976) assinala que, mesmo havendo um aparente parodoxo, à medida que há mais o que ser aprendido, ela é facilmente lembrada, pois o resultado é duradouro e há menos reaprendizagens a serem feitas.
3. A aprendizagem relacional transforma-se na própria meta, pois possui um fim em si mesma. Neste caso, Skemp (1976) informa que recompensas e punições externas se tornam reduzidas.
4. Conhecimento relacional cresce naturalmente, pois é de natureza orgânica. A respeito disso, Skemp (1976) evidencia que, se as pessoas obtêm satisfação com o conhecimento relacional, elas, além de tentarem compreender novos assuntos relacionalmente, vão procurar novos materiais e explorar novas áreas.

Com base nas definições dadas, vimos em Skemp (1976) que compreensão relacional inclui compreensão instrumental, pois, para além de simplesmente conhecer e aplicar a regras, preocupa-se, ao mesmo tempo, em ser capaz de saber por que uma regra funciona e como conectá-la com outra regra e outros conceitos matemáticos. Para ele, essa discussão importa a professores e estudantes, visto que existem dois tipos de correspondências matemáticas que podem ocorrer:

> 1. Alunos cujo objetivo é compreender instrumentalmente o ensinado por um professor que quer que eles compreendam relacionalmente.
> 2. O outro caminho [alunos cujo objetivo é compreender relacionalmente o ensinado por um professor que quer que eles compreendam instrumentalmente] (SKEMP, 1976, p. 4, tradução nossa[98]).

O primeiro, embora seja frustrante para o professor, causará menos problemas aos alunos em curto prazo, pois tudo o que eles querem é um tipo de regra para obter uma possível resposta. Assim que esse conhecimento é alcançado, os alunos parecem “travar” e ignorar o resto. Se o professor fizer uma pergunta que não se encaixe perfeitamente na regra, é claro que ela vai estar equivocada. Dificilmente os alunos vão interessar-se em saber todo o

[98] 1. Pupils whose goal is to understand instrumentally, taught by a teacher who wants them to understand relationally. 2. The other way about.

trabalho cuidadoso de preparação desenvolvido pelo professor e não se importarão com suas explicações cuidadosas. Um desajuste menos óbvio é o que pode ocorrer entre professor e texto. Ou seja, um professor cuja concepção de compreensão é instrumental, o qual, por uma razão ou outra, usa um livro didático ou um texto que visa à compreensão relacional pelo aluno. Neste caso, haverá um desajuste entre o estilo de ensino e as formas de apreensão do conhecimento.

De modo geral, Skemp (1976) aponta que ambas as abordagens têm suas vantagens e podem ser úteis dependendo dos objetivos aos quais se presta. Portanto, no exercício da docência, o professor deve utilizar-se tanto da abordagem instrumental quanto da relacional. Destaca que a aprendizagem relacional é mais duradoura, pois estabelece uma rede de conhecimentos. No entanto, para um estudante que aprendeu instrumentalmente durante toda a sua vida escolar, é muito complexo despir-se desse modelo e incorporar outro entendimento relacional instantaneamente. Isso requer tempo e esforço. Por outro lado, não é trivial o professor reconhecer seu formato de aula e o tipo de tarefa avaliativa, pois exige uma tomada de consciência acerca de seus procedimentos de ensino e de avaliação. Além disso, demanda também a tomada de consciência de suas concepções a respeito de matemática, ensino de matemática, aprendizagem de matemática e avaliação de matemática (ERNEST, 1988; GÓMEZ CHACÓN, 2003; SANTOS, 1994, 1997; THOMPSON, 1997). Queremos dizer que é muito comum vermos professor ensinar de modo instrumental e “cobrar” atividades inovadoras em provas. Há, portanto, um desajuste, contradições no ensino, nas listas de exercícios e nas avaliações: aula relacional e tarefa instrumental e vice-versa.

CAPÍTULO 4: ESCOLHAS METODOLÓGICAS

> *É o olhar de curiosidade e indagação do investigador acompanhado de sistematicidade, planejamento, avaliação contínua ao longo do processo de pesquisa [...] que permitem que o processo seja árduo, intenso e muito interessante (SILVA; SANTOS-WAGNER, 2009, p. 61).*

O fragmento com o qual iniciamos este capítulo mostra que ser pesquisador exige sistematização e metodologia adequada (planejamento e avaliação contínua) para que o processo de pesquisa seja desenvolvido, de modo que o fenômeno de interesse seja analisado e compreendido. Assim, ao nos debruçarmos sobre questões que envolvem o ensino e a aprendizagem de combinatória simples por futuros professores de matemática, passamos a analisar nosso fenômeno de interesse com sistematicidade e rigor. Isso porque o olhar do pesquisador para a pesquisa não é o mesmo olhar do professor para a pesquisa e para a aula.

Como professores, “olhamos” para tais processos com intuição e experiência prática. Isto mostra uma construção dialética do objeto de estudo. Por outro lado, como pesquisadores, organizamos metodicamente formas de vê-los e compreendê-los. Desse modo, desenvolvemos uma pesquisa qualitativa em educação matemática, que se caracteriza “como uma práxis que envolve o domínio do conteúdo específico (a matemática) e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos à transmissão/assimilação e/ou à apropriação/construção do saber matemático escolar” (FIORENTINI, LORENZATO, 2007, p. 5).

Em vista disso, apresentamos neste capítulo nossas escolhas metodológicas para produzir, coletar e interpretar dados e informações deste estudo. Comentamos inicialmente a abordagem qualitativa como escolha metodológica e apresentamos os sujeitos desta investigação. Mostramos as características desse tipo de estudo e os pressupostos que tornam nossa pesquisa qualitativa. Na organização metodológica da fase exploratória, falamos sobre o estudo preliminar desenvolvido em 2016/2. Na sequência, dissertamos sobre a organização metodológica do estudo definitivo na qual definimos, apresentamos e comentamos os dois blocos de tarefas específicas. Além disso, mencionamos planejamento, decisões metodológicas, categorias de análise e nossa opção por analisar os dados de forma geral e de um número específico de licenciandos para respondermos, respectivamente, às questões 1) Quais imagens conceituais universitários evocam quando resolvem tarefas de análise combinatória?, e, 2) Como as imagens conceituais de universitários acerca de agrupamentos simples se reconstroem durante uma disciplina que aborde análise combinatória?

4.1 Abordagem qualitativa: uma escolha metodológica

Se pensarmos em práticas educativas podemos dizer que as pesquisas de natureza qualitativa surgem de uma curiosidade despertada no pesquisador diante de algum problema por ele vivenciado em sua prática educacional. Assim, seu estudo torna-se um instrumento enriquecedor de seu trabalho docente, pois o ato de pesquisar se constitui em uma “ocasião privilegiada, reunindo o pensamento e a ação de uma pessoa, ou de um grupo, no esforço de elaborar o conhecimento de aspectos da realidade que deverão servir para a composição de soluções propostas aos seus problemas” (LÜDKE, ANDRÉ, 1986, p. 02). Entretanto, sabemos que uma abordagem qualitativa serve para compreender e investigar outros ambientes da realidade além dos educativos.

Em meio às diferentes formas de “olharmos” para a pesquisa e para a sala de aula, questionamo-nos: *O que seria “olhar” para uma pesquisa qualitativa em educação matemática?* Kilpatrick (1998) ajuda-nos a pensar acerca dessa indagação. Destaca que pesquisa é uma investigação metódica, ao buscar responder a questões específicas; ao ser orientada por métodos e conceitos de outras disciplinas das ciências humanas (psicologia, antropologia, entre outras); e ao possibilitar que o processo de investigação seja checado e verificado. Para ele,

> A investigação metódica não precisa ser ‘científica', no sentido de se basear em pressupostos que foram verificados empiricamente, mas como toda boa ciência deve ser aprendida, pública e aberta à crítica e refutação. Pesquisa em educação matemática é pergunta de forma metódica para o de ensino e aprendizagem da matemática (p. 2, tradução nossa[99]).

Nessa lógica, ao compreendermos como se desenvolvem os conceitos de agrupamentos simples de combinação, permutação e arranjo de estudantes universitários em cursos de licenciatura em matemática, formulamos questões metódicas que envolvem o ensino e a aprendizagem de combinatória no ensino superior. Assim, caracterizam uma pesquisa em educação matemática cujas questões se voltam para esse campo, e não à matemática propriamente dita. Em vista disso, desenvolvemos, de maneira disciplinada, um estudo deliberado em que indagamos as “múltiplas relações e determinações entre ensino, aprendizagem e conhecimento matemático em um contexto sociocultural específico” (FIORENTINI; LORENZATO, 2007, p. 9). Desse modo, constituem um todo dialético.

---

[99] La indagación metódica no necesita ser “científica” en el sentido de estar basada en hipótesis que hayan sido verificadas empíricamente, pero como todo buen trabajo científico, debe ser erudito, público y abierto a la crítica y posible refutación. La investigación en educación matemática es entonces la indagación metódica acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Por isso, entendemos nossa pesquisa como uma atividade de compreensão e percepção humana e social sobre uma situação particular que reflete alguns valores, preferências, princípios e inquietações pessoais. Isso porque trazemos questionamentos pessoais, desenvolvidos com base em nosso contexto profissional, cujo melhor entendimento de sua complexidade contribuirá para o ensino e a aprendizagem da combinatória simples na formação inicial de professores de matemática. Desse modo, optamos por uma abordagem qualitativa respaldada nos seguintes pressupostos (FLICK, 2009; SILVA, SANTOS-WAGNER, 2009; STAKE, 2011; FIORENTINI, LORENZATO, 2007):

- ✓ Nossas percepções e compreensões acerca do objeto de pesquisa e dos modos como ele se desenvolve em contextos específicos. Desse modo, estudamos *um caso específico* que pretendeu retratar a realidade de forma profunda e mais completa possível. Portanto, a análise dos dados enfatiza tanto a descrição cuidadosa do caso quanto a sua interpretação situacional, personalística e experiencial.
- ✓ A fonte direta de dados foi o ambiente natural dos sujeitos. Assim, segundo o processo de coleta e produção de dados (FIORENTINI; LORENZATO, 2007), este estudo insere-se na *modalidade de pesquisa naturalística ou de campo*. Romberg (1992) afirma que geralmente coletamos mais informações do que precisamos. Parte delas pode ser relevante, irrelevante e incompreensível. Por isso, assinala que o pesquisador precisa selecionar as mais importantes e ter critérios para executar esta seleção de dados e informações que caracterizem o estudo e permitam responder com sistematicidade e criticidade aos questionamentos.
- ✓ Permite que pesquisadores usem métodos diversificados de produção e coleta de dados. Por isso, procedimentos, instrumentos e tarefas de pesquisas geralmente são planejadas pelo próprio pesquisador ou adaptadas de outras investigações, considerando onde (local), com quem (sujeitos), quando (tempo), por que e para que a pesquisa será desenvolvida. Desse modo, os dados foram produzidos pela observação participante, entrevistas estruturadas e não estruturadas, questões expositivas, questionários, documentos (caderno de plano da professora, dos alunos e avaliações), resolução e formulação de problemas e retornos para análise e validação de informações. Foram registrados por meio de fotografias, fotocópias ou xerox, gravações em áudio, diário de campo da pesquisadora, respostas dos sujeitos às entrevistas, questionários e tarefas.

- ✓ A análise e a síntese associadas ao referencial teórico-metodológico aconteceram pela triangulação das evidências obtidas pela combinação de, no mínimo, três instrumentos dentre aqueles citados no item anterior. Visto que os dados coletados e produzidos (informações recebidas) foram filtrados, analisados e categorizados pelas nossas próprias "lentes" (princípios/objetivos) de pesquisadoras, dos quais realizamos várias interpretações à busca de dar sentido ao que foi observado e resguardar eticamente os envolvidos.

Desse modo, incorporamos às questões de pesquisa algumas reflexões emergentes de nossa própria experiência docente, da prática de outros professores e de estudos e pesquisas anteriores sobre o tema. Assim, de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2007), nossos objetivos mostram-se de natureza (i) *pragmática*, ao buscarmos melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem de combinatória no ensino superior; e (ii) *científica*, à medida que pretendemos avançar o conhecimento, ampliando a discussão para esse nível de ensino. Por outro lado, não desconsideramos o fato de que a ciência também possa ser pragmática, quando busca uma melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem. Exibem a forma como vemos e compreendemos o ensino e a aprendizagem de combinatória na formação inicial.

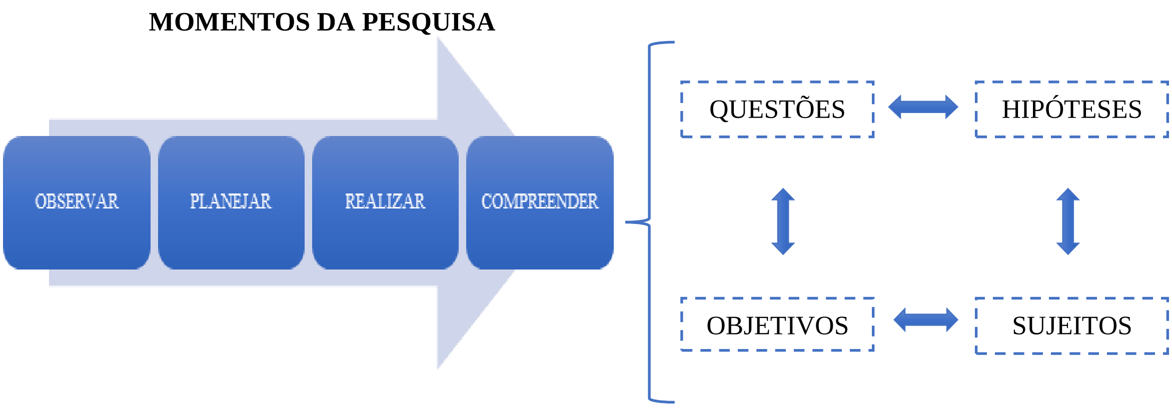
Portanto, revelam particularidades do nosso estudo e evidenciam critérios indispensáveis à produção do conhecimento científico de pesquisa em educação matemática (KILPATRICK, 1996), a saber: *relevância* – utilidade e qualidade; *validade* – interpretação e uso das conclusões; *objetividade* – esforço para esclarecer os próprios interesses; *originalidade* – apresentar algo novo em relação aos estudos já desenvolvidos; *rigor* – interesse cuidadoso por refinar métodos de pesquisa; *precisão* – de significados, e não de medida; *prognóstico* – busca por regularidades; *reprodutibilidade* – compromisso em relatar a pesquisa conforme foi conduzida; e *relacionamento* – tratar a matemática como problemática, e não como dada, pronta e acabada em si mesma. Esses critérios são importantes à medida que nos permitem repensar, questionar e refletir sobre o que estamos fazendo quando desenvolvemos uma pesquisa.

Por isso, Kilpatrick (1996) convida-nos ainda a refletir sobre as possíveis relações que se estabelecem entre o científico e o profissional. Afirma que o lado científico não avançará se não houver sido aplicado à prática profissional. Assim como o desenvolvimento profissional só avançará se houver investigação científica, pois ela é quem oferece o conhecimento especializado. A educação matemática como campo profissional possui conhecimento especializado, caráter corporativo, autodeterminação e autonomia com vistas à aplicação do conhecimento.

Como campo científico, a educação matemática estrutura-se por meio de uma comunidade que apresenta um corpo de conhecimentos teóricos codificados em livros-textos, possui questões não resolvidas e aponta métodos de pesquisa. Tudo isso ocorre com um conjunto de soluções de problemas paradigmáticos e normas específicas de carreira e processos de socialização institucionalizados para selecionar e formar interessados de acordo com os paradigmas aceitos pela comunidade científica. Como campo empírico, consideramos também que a interculturalidade e os conhecimentos tradicionais ajudam-nos a problematizar as bases epistemológicas do projeto de desenvolvimento e progresso hegemônicos e legitimados pela ciência. Isto porque há mais matemáticas do que aquelas já cristalizadas cientificamente. Queremos dizer que cada cultura, a seu modo, se apropria e utiliza a matemática como meio de sobrevivência aos modos de ser e estar na vida em sociedade. Desse modo, se mostra como um campo não hegemônico e não legitimado pela ciência.

Assim sendo, descrevemos na figura 5 a dinâmica dos momentos de desenvolvimento de nossa pesquisa qualitativa e sua relação com questões, objetivos, sujeitos e hipóteses.

Figura 5 – Momentos da pesquisa e sua relação com questões, objetivos, sujeitos e hipóteses



Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras a partir de Romberg (1992).

Por ser um dispositivo heurístico, ou seja, um esboço que estabelece e esclarece relações entre os momentos da pesquisa e as questões, objetivos, hipóteses e sujeitos, esse modelo foi o ponto de partida e de orientação, para que situássemos nosso fenômeno de interesse. Ilustra relações implícitas entre questões, objetivos, hipóteses e sujeitos, que operaram na situação real. Nosso modelo foi estruturado em quatro momentos relacionados:

observar, pensar, realizar e compreender. *Observar* o ambiente natural do estudo auxiliou-nos a caracterizar o contexto de pesquisa, os sujeitos, a validar e/ou refutar resultados e indicações de pesquisas pregressas e a estruturar o nosso objeto de investigação.

No *pensar* definimos, elaboramos e testamos instrumentos de produção e coleta de dados. Isso aconteceu no estudo preliminar realizado no segundo semestre de 2016. *Realizar* refere-se ao desenvolvimento do estudo definitivo em que os instrumentos foram aplicados e as pesquisadoras organizaram, sistematizaram, analisaram e interpretaram os dados. Além disso, aconteceu a validação ou refutação da análise e interpretação dos dados pelos sujeitos.

Por fim, em *compreender*, tecemos possíveis respostas aos questionamentos iniciais. Apresentamos os momentos da pesquisa e sua relação com questões e objetivos de modo contínuo (momentos da pesquisa) e cíclico (relações entre questões, objetivos, hipóteses e sujeitos), pois consideramos que, embora independentes em termos de ideias estruturais, eles aconteceram de modo integrado e relacionado durante todo o desenvolvimento da pesquisa.

4.2 Organização metodológica da fase exploratória

Com o propósito de nos aproximarmos do campo de pesquisa e de nosso objeto de estudo (análise combinatória), optamos por um estudo exploratório como etapa inicial de nossa pesquisa (FIORENTINI, LORENZATO, 2007). Na ocasião, nosso objetivo principal era delinear e delimitar nossos interesses de investigação para o desenvolvimento da pesquisa definitiva e obter uma visão mais global da situação. Por isso, preocupamo-nos em saber como aconteciam as aulas de combinatória na licenciatura em Matemática; conhecer o processo de ensino, aprendizagem e avaliação de combinatória em um ambiente real; entender como ocorriam as interações entre alunos, professora, tarefa e conhecimento; conhecer como alunos e professores resolviam problemas; saber como a professora planejava aulas sobre o assunto; e aprofundar nossos próprios conhecimentos de combinatória. Essa discussão ajuda a entender o processo de reconstrução das imagens conceituais na disciplina, focaliza na mediação e na imersão no campo.

Como procedimentos metodológicos para essa etapa de estudo exploratório qualitativo, optamos por uma observação participante como estratégia mais ampla de produção e coleta de dados. Ela envolveu a observação direta associada a outros métodos, tais como questionários com questões abertas e fechadas, diário de campo, listas de exercícios, entrevistas, análise das respostas dos sujeitos por eles mesmos e transcrição dos áudios dos retornos aos participantes. Isso permitiu que nos envolvêssemos na situação estudada e nos sentíssemos membros daquele grupo. Definimos também que nossa postura como pesquisadoras seria a de observadoras reveladas, visto que informamos aos envolvidos os motivos de estarmos ali e quais seriam nossas posturas em sala de aula.

A partir daí, organizamos uma pesquisa qualitativa e desenvolvemos um estudo exploratório preliminar. Buscamos compreender uma dada situação e explorar "características dos indivíduos e cenários que não podem ser facilmente descritos numericamente" (MOREIRA; CALEFFE, 2008, p. 73). Para darmos conta de atender a tais características, organizamo-nos metodologicamente a partir da literatura estudada (STAKE, 2011; MOREIRA; CALEFFE, 2008; FIORENTINI; LORENZATO, 2007; LÜDKE; ANDRÉ, 1986). Assim, constatamos que as etapas de desenvolvimento desse estudo apontariam alguns caminhos para a análise e interpretação dos dados, ou seja, reflexões, ponderações e constatações mediante a relação entre os dados e o referencial teórico-metodológico.

Concretamente a abordagem, o tipo e a classificação da pesquisa foram pensadas *à priori*, antes de nossa entrada no campo. A observação participante como estratégia central de produção e coleta de dados foi pensada após o primeiro dia de aula. Alguns instrumentos, tais como questionário com questões abertas e fechadas, diário de campo, listas de exercícios e entrevistas, também haviam sido pensados previamente. A análise das respostas dos sujeitos por eles mesmos e a transcrição dos áudios dos retornos aos participantes ocorreu como estratégia de retorno e só foram pensadas e planejadas posteriormente à nossa entrada no campo de pesquisa.

Nesse contexto, a pesquisadora registrava suas observações informando dia, local, duração e presentes à aula. Na sequência, anotava informações mais descritivas, pontuavam e listavam reflexões mais analíticas e metodológicas. Isso constituiu uma ficha/arquivo de registro de observação. Ao nos comportarmos como observadoras reveladas, após o primeiro dia, chegávamos à sala, cumprimentávamos os presentes e sentávamo-nos à frente, ao lado ou ao fundo da sala. Não tínhamos lugar definido nem pretendíamos causar distrações em alunos e professora. Conosco ia uma agenda em que registrávamos observações, conteúdo de aulas e algumas resoluções de exercícios. Em outros momentos, isso era feito na própria lista de atividade. Às vezes, não anotávamos muitas coisas, pois nos envolvíamos com a aula em si.

Ao considerarmos que o pesquisador deve estar à disposição dos sujeitos, fizemos uma enquete com os 23 envolvidos, para definirmos dias e horários mais adequados para o retorno dos dados coletados aos estudantes. Em seguida, reservamos espaço físico e organizamos o material que seria usado nesses momentos. Por ocasião de nossa entrada no campo de pesquisa, não havíamos pensado em um aporte teórico-metodológico fechado que pudesse dar conta de nossas intenções. No entanto, tendo em vista a questão central que rondava nossa mente naquela ocasião, o referencial teórico foi tomando forma e corpo, à medida que nos deparamos com a produção de dados. Desse modo, tornando-se mais evidente que nossa base teórica principal, seriam os escritos de Tall e Vinner (1981). Mas, mesmo assim, não deixamos de estar atentas para desvelar o que emergiria do campo de pesquisa, para melhor delinearmos um referencial que nos permitisse analisar os dados adequadamente.

Com base nessas considerações, apresentamos no início do capítulo 5 nossas observações e impressões sobre o estudo preliminar realizado por meio da análise dos dados. Analisamos os dados elucidando e relacionando o referencial teórico que nos auxiliou a compreendê-los e interpretá-los. Além disso, escrevemos o cenário do estudo exploratório, seus participantes (alunos e professora), os espaços e as aulas/atividades desenvolvidas em 2016/2 na disciplina de Análise Combinatória e Probabilidade de um curso de formação inicial de professores de matemática. Por fim, trazemos reflexões pessoais, na condição de pesquisadoras, observadoras reveladas, a respeito do que foi aprendido sobre questões e relações suscitadas, procedimentos e estratégias de pesquisa, dilemas éticos e algumas mudanças de perspectiva para o estudo definitivo.

4.3 Organização metodológica do estudo definitivo

Com o desenvolvimento do estudo exploratório como atividade inicial de pesquisa, lançamo-nos à pesquisa qualitativa definitiva. Procuramos obter, compreender e interpretar o significado das interações e percepções que se estabeleceram entre os envolvidos no processo de pesquisa. Isso quer dizer que buscamos captar o subjetivo dos participantes. Eles foram escolhidos em função do objeto de estudo, cujos dados nos permitiram validar hipóteses e responder às questões que emergiram de uma inquietação advinda de nosso cotidiano. Portanto, dedicamo-nos, daqui em diante, à apresentação dos sujeitos, à descrição da nossa concepção de tarefas específicas, informamos quais tarefas foram selecionadas, falamos sobre procedimentos de pesquisa empregados no desenvolvimento de cada uma delas e explicamos as categorias de análise pensadas por nós com base nos dados obtidos.

4.3.1 Sujeitos e campo de pesquisa

Os sujeitos participantes de nosso estudo definitivo foram sete licenciandos[100] em matemática do IFES – Instituto Federal do Espírito Santo *campus* Cachoeiro de Itapemirim, os quais autorizaram o uso de seus dados mediante assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE (Apêndice 2). Para fins éticos, além do TCLE, buscamos preservar a identidade e a integridade dos sujeitos, ao identificá-los em nossa pesquisa, por um nome próprio fictício escolhido por eles mesmos a começar da primeira letra do nome de registro.

Nossa opção por esse perfil de sujeito ocorreu em virtude da oferta da disciplina e do fato de que, nessa fase do curso, os licenciandos já haviam vivenciado inúmeras situações de aprendizagem de conteúdos matemáticos, pedagógicos matemáticos, pedagógicos e de identificação com a docência. Na ocasião, eles iniciariam a disciplina de Análise Combinatória e Probabilidade oferecida no sexto período, do curso de licenciatura em Matemática em 2017/2, às sextas-feiras de 20h20min até 22h00min. Os licenciandos já haviam cursado também o estágio supervisionado curricular I que visa à aproximação do estudante à sua identidade profissional docente e aos espaços nos quais ela se realiza.

Encontravam-se, portanto, em atividades de estágio supervisionado curricular II, realizado em escolas públicas de educação básica que ofertam os anos finais do ensino fundamental. Nesse lugar, futuro ambiente profissional, os licenciandos desenvolvem atividades docentes sob a supervisão e orientação de um professor de educação matemática do curso de licenciatura e de um professor de matemática da escola de educação básica. Desse modo, acreditávamos que eles já haviam estabelecido relações entre alguns conteúdos aprendidos na formação inicial e os modos de ensiná-lo a estudantes dos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio.

Alex, Alice, Felipe, Geane, Isis, Joice e Vini eram jovens que gostavam de matemática e cultivavam a expectativa de se tornarem professores da educação básica assim que concluíssem a licenciatura. Ingressaram no curso em 2015 pela afinidade que possuíam com a matemática. No decorrer do mesmo, o desejo pela docência foi se fortalecendo e se equiparando ao gosto pela matemática propriamente dita. Os licenciandos, além do estágio supervisionado curricular, desenvolviam atividades de estágio não obrigatório em escolas municipais de anos finais do ensino fundamental (Alex); estavam envolvidos com o Programa

---

[100] Sete era o total de estudantes matriculados na disciplina. Queremos dizer, então, que todos os licenciandos participaram da pesquisa e nos forneceram seus dados e informações.

Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) em escolas de ensino médio da rede estadual de ensino do Espírito Santo (Felipe, Geane, Isis e Joice); e, exerciam outras atividades profissionais diferentes das anteriores e não relacionadas ao espaço escolar (Alice e Vini).

Os licenciandos se constituem os sujeitos acerca dos quais falamos. No entanto, destaco alguns aspectos acerca da professora Letícia, pois se relacionam, direta ou indiretamente, à sua participação no processo de pesquisa. Com ela, planejamos e desenvolvemos de modo colaborativo (PETER-KOOP, SANTOS-WAGNER, BREEN, BEGG, 2003) as aulas de análise combinatória na licenciatura em matemática em 2016/2 e 2017/2.

Letícia[101], a professora formadora, graduou-se em licenciatura em matemática em uma instituição particular de Cachoeiro de Itapemirim em 2009. Especializou-se em Metodologia do Ensino da matemática em 2010 e em PROEJA em 2011. Concluiu o Mestrado Profissional em Ensino de Ciência e Matemática em 2016. Sendo estes últimos oferecidos pelo IFES. Iniciou na docência em 2007 lecionando no ensino fundamental e médio regular e EJA em escolas convencionais e em presídio. Em 2016, época do estudo exploratório, lecionava no ensino superior a cerca de 08 meses. Isto aconteceu via sua entrada no IFES como professora substituta e estava sendo sua primeira experiência como docente de ensino superior e como professora formadora.

Na ocasião, Letícia se compreendia como professora em formação. Destacou que a

> […] cada dia vou me construindo […] né! Eu sou uma professora que tem vontade de dar aula em que os alunos tenham o pensamento crítico. De dar aula de matemática em que os alunos apliquem a matemática na vida. […] Minha vontade é trazer para eles a minha prática que eu tenho de educação básica. Que muitas vezes quando eu tô na sala de aula, eu falo para eles, né, na sala de aula é assim, assim e assim. Às vezes eu falo algumas coisas que deveriam ser, mas não são [risos] que não dá, infelizmente [risos]. Mas incentivando que ele faça, de repente eu não faça, mas incentivando para que eles façam. (Por Letícia, em 27/04/2017)

As informações de Letícia acerca dela mesma se relacionam à noção de autoconsciência ou tomada de consciência ao estar pensando sobre o que sabe e o que concebe como ser professora (SANTOS, 1994; 1996), cujo objeto de crença é o que a constitui professora. E isto, é um ponto forte para o seu desenvolvimento profissional. Além disso, vimos no fragmento acima que Letícia se via em função de sua prática: ora projetando uma prática que gostaria de desenvolver, ora em relação a prática que desenvolve. E, enquanto prática envolve processos cognitivos e metacognitivos (SANTOS, 1994; 1997)

---

[101] Nome fictício escolhido pela professora formadora para ser apresentada neste estudo.

manifestados em suas atitudes e concepções sejam elas de planejamento ou de desenvolvimento de aulas (THOMPSON, 1997; 1992).

Quanto ao campo de pesquisa, este foi a licenciatura em Matemática do IFES *campus* Cachoeiro de Itapemirim. O curso noturno, iniciado em 2010/1, é organizado em oito períodos, com oferta de 40 vagas anuais no primeiro semestre de cada ano letivo. O ingresso é via SISU – Sistema de Seleção Unificada e, em 2019, ofertará sua 10.ª turma de licenciatura em Matemática. Foi criado com respaldo na Lei n.º 11.892, de 29/12/2008, que institui a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica. Além disso, essa lei criou os Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia, com o objetivo de ofertar cursos de licenciatura destinados à formação inicial de professores da educação básica, sobretudo nas áreas de ciências e matemática, para além de ministrar educação profissional técnica de nível médio.

A licenciatura em Matemática foi, portanto, o segundo[102] curso de formação de professores ofertado pelo *campus* Cachoeiro de Itapemirim. Por ser uma instituição historicamente identificada com a educação profissional, teve o desafio de formar professores de matemática para a escola básica em uma área estratégica de desenvolvimento social, econômico e cultural da região sul capixaba.

A história do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo (IFES) inicia-se em 1910, com a criação de Escola de Aprendizes Artífices (EAA). Na época, centralizava-se em Vitória, capital do Estado, e oferecia cursos profissionalizantes para a população considerada desprivilegiada. Em 1942, com o crescimento industrial do país, as EAA tornaram-se Escolas Técnicas. A do Espírito Santo, situada em Vitória, recebeu o nome de ETV. Em 1965, veio a tornar-se Escola Técnica Federal do Espírito Santo (ETEFES) e, em 1999, passou a se chamar Centro Federal de Educação Tecnológica do Espírito Santo (CEFETES). Foi com o CEFETES, em 2005, que surgiu a Unidade de Ensino Descentralizada (UNED) de Cachoeiro de Itapemirim, conhecida popularmente como UNED Cachoeiro. Inicialmente ofertava cursos técnicos em Eletromecânica e Rochas Ornamentais.

Em 29 de dezembro de 2008, com a promulgação da Lei n.º 11.892, implantaram-se 38 Institutos Federais, entre os quais o Instituto Federal do Espírito Santo, mediante a

[102] Em 2009/2, o IFES *campus* Cachoeiro de Itapemirim ofertou seu primeiro curso de licenciatura. Em parceria com o Sistema Universidade Aberta do Brasil – UAB, ofertou a licenciatura em Informática, na modalidade EaD – Ensino a Distância. O curso iniciou suas atividades com 450 alunos matriculados em nove polos de Educação a Distância, situados nos municípios de Alegre, Cachoeiro de Itapemirim, Colatina, Linhares, Nova Venécia, Santa Teresa, São Mateus, Venda Nova e Vila Velha. Em 2011/1, com a segunda entrada, foram incluídos novos polos – Aracruz, Bom Jesus do Norte, Castelo, Domingos Martins, Itapemirim, Iúna, Linhares, Mantenópolis e Santa Teresa – e os anteriores ofertam também a segunda turma de licenciatura em Informática.

integração do Centro Federal de Educação Tecnológica do Espírito Santo (CEFETES) às Escolas Agrotécnicas Federais de Alegre, Colatina e Santa Teresa. Ao se tornarem uma só instituição, instalou-se uma reitoria em Vitória, capital do estado do Espírito Santo. A partir de então, a Unidade de Ensino Descentralizada (UNED) de Cachoeiro de Itapemirim passou a ser reconhecida nacionalmente como IFES *campus* Cachoeiro de Itapemirim e encontra-se localizado na Rodovia 482 – Cachoeiro Alegre, km 5, na Fazenda Morro Grande, Distrito Industrial do Município de Cachoeiro de Itapemirim.

4.4 Procedimentos de produção e registro de dados

Neste item, apresentamos nossa concepção de tarefas específicas, informamos a definição dada a elas e as tarefas que foram selecionadas. Em seguida, falamos sobre procedimentos de produção e coleta de dados (observação, entrevistas e documentos) e explicamos, de modo sintético, as categorias de análise pensadas por nós com base nos dados obtidos. Isso porque optamos por detalhá-las na introdução do capítulo de análise de dados.

4.4.1 As tarefas específicas: definição e seleção

Definimos tarefas específicas como o conjunto de atividades[103] por nós elaboradas, para desvelar imagens conceituais dos licenciandos. Possuem um conceito matemático específico subjacente e, por isso, impulsionam a emissão de uma resposta em que o conceito é evidenciado por meio de definições, atributos, representações (verbais, visuais e/ou pictóricas) como parte da imagem conceitual do estudante. Portanto, assim como Vinner (1991; 2002), acreditamos que, em tarefas específicas, lidamos com a imagem conceitual evocada naquele momento e, consequentemente, uma imagem temporária.

Dessa maneira, em nossas análises, referimo-nos às imagens que foram ativadas quando os licenciandos trabalharam exclusivamente nesse tipo de tarefa. Selecionamos aquelas que consideramos essenciais, para observarmos as imagens iniciais dos estudantes e a movimentação dessas primeiras imagens ao longo da disciplina. Na tabela 9 e 10, mostramos a relação entre questões, tarefas específicas e categorias de análise.

A primeira questão de pesquisa “Quais imagens conceituais universitários evocam quando resolvem tarefas de análise combinatória?” nos serviu de base para organizarmos a

---

[103] Com base em Santos-Wagner (2008), estamos usando tarefa e atividade como palavras de mesmo sentido.

tabela 10. Nela, apresentamos o objetivo “Identificar imagens conceituais evocadas por universitários quando resolvem tarefas de combinatória” relacionado a esta questão de investigação. Apresentamos também as tarefas específicas que buscavam apreender o entendimento dos estudantes sobre o conceito de combinatória e acerca dos agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação. Além disso, as tarefas específicas procuravam verificar como os estudantes resolviam um problema simples de contagem, identificavam o conceito matemático subjacente a ele e criavam exemplos semelhantes.

Ainda na tabela 10, trazemos uma síntese dos atributos vinculados a cada tarefa, dos protótipos e dos tipos de imagem que poderiam emergir das respostas dos estudantes. Por fim, apresentamos as categorias de análise que foram se configurando ao longo do processo de pesquisa durante o trabalho com as tarefas específicas. Por conter um apanhado geral da metodologia empregada pelas pesquisadoras durante a busca de possíveis respostas ao primeiro questionamento de pesquisa, a tabela 9 se estende por duas páginas consecutivas.

Tabela 10 – Questão 1, objetivo, tarefas específicas, atributos, protótipos, imagem evocada e categorias de análise

Questão 1: Quais imagens conceituais universitários evocam quando resolvem tarefas de análise combinatória?					
Objetivo	**Tarefas**	**Atributos[104]**	**Protótipos**	**Tipo de imagem evocada**	**Categoria de análise[105]**
Identificar imagens conceituais evocadas por universitários quando resolvem as primeiras tarefas de combinatória.	T1) O que você entende por análise combinatória?	Características sem quais o conceito não pode ser identificado tal, como por exemplo: - campo da matemática; - analisa estruturas e relações discretas; - é alicerçada no princípio fundamental da contagem – PFC; - envolve agrupamentos, tais como arranjos, permutações e combinações que podem ser simples ou com elementos repetidos.	São exemplos de problemas que conceitualmente possuem o maior número de atributos capaz de identificar o conceito. Portanto, os estudantes podem formular problemas, por iniciativa própria, envolvendo a ideia conceitual de algum agrupamento, seja para definir o conceito, ou para exemplificar sua aprendizagem e/ou gosto pela disciplina durante o ensino médio ou outro período da educação básica.	Imagens conceituais construídas anteriormente ao ingresso no curso superior. Ou seja, uma imagem inicial com algum fundamento matemático relacionado aos agrupamentos simples de combinatória escritos de modo empírico a partir das experiências pregressas durante a educação básica.	- Imagem conceitual da definição do conceito - Imagem do ensino e de aprendizagem - Imagem de outro conceito matemático
	T2) Como você definiria arranjo, combinação e permutação?	Características sem as quais o conceito não pode ser reconhecido matematicamente: - *Arranjo simples*: agrupamento ordenado formado por elementos distintos de uma sequência dada; diferenciam-se pela ordem e/ou natureza dos elementos; - *Permutação simples*: caso particular de arranjo em que todos os elementos distintos do conjunto dado são considerados na formação de novas e			

[104] Posteriormente, quando explicamos as categorias de análise, listamos, com base na literatura estudada, todos os atributos que consideramos relevantes e imprescindíveis à caracterização do conceito.

[105] Serão detalhadas no capítulo 5 quando analisamos os dados referentes à questão 1.

		outras sequências; - *Combinação simples*: agrupamentos não ordenados, pois a ordem dos elementos não altera os subconjuntos formados; os elementos se diferenciam pela natureza e não pela ordem.
	T3) O que você acha que aprendeu de análise combinatória no ensino médio? Justifique sua resposta.	Ao justificar suas respostas, os estudantes podem utilizar os atributos assinalados em T1 e T2 e reforçar a estrutura conceitual evocada. Além disso, podem evidenciar também gostos, preferências e comportamentos relacionados às suas experiências anteriores com a combinatória. Em T3 espera-se o uso de algum protótipo que justifique ou indique a aprendizagem acerca do conceito.
	T4) Você gostou de estudar análise combinatória no ensino médio? Por quê?	
	T5) Resolução de um problema.	Ao resolver, identificar o conceito matemático e elaborar outro problema com características semelhantes ao resolvido, espera-se que o estudante apresente os atributos assinalados em T1 e T2, e as aprendizagens destacadas em T3 e T4. Além disso, podem surgir protótipos associados a aprendizagem deles (T3 e T4). Estes podem ou não estar relacionados ao conceito subjacente. Caso não estejam, observaremos as ideias conceituais equivocadas em relação as estruturas combinatórias.
	T6) Identificação do conceito subjacente a ele.	
	T7) Formulação de exemplos.	

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras.

A tabela 11 foi pensada para termos uma configuração geral do panorama metodológico empregado na busca de respostas à segunda questão de pesquisa "Como as imagens conceituais de universitários acerca de agrupamentos simples se reconstroem durante uma disciplina que aborde análise combinatória?". De modo semelhante ao que fizemos na tabela 10, apresentamos também na tabela 11, o objetivo "Investigar como as imagens conceituais de universitários acerca dos agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação se reconstroem quando trabalhamos com tarefas específicas de combinatória" relacionado à segunda questão de investigação.

Além dele, listamos as tarefas específicas que buscavam externalizar quais possíveis imagens conceituais relacionadas à definição ou não poderiam ser evocadas pelos estudantes durante a resolução de tarefas desse formato. Acreditamos que assim teríamos um cenário geral de como as imagens foram se movimentando e se reconstruindo durante o desenvolvimento da pesquisa. Ademais, trazemos ainda na tabela 11 uma síntese dos atributos relacionados às tarefas, dos protótipos e dos tipos de imagem que poderiam ser evocadas pelos estudantes em suas respostas.

Finalmente, evidenciamos a categoria de análise que envolveu o processo de movimentação das imagens e os cenários nos quais o processo de reconstrução aconteceu. Tais categorias não foram nos dada *à priori*, mas se configuraram ao longo da pesquisa no trabalho com as tarefas específicas. Por reunir a metodologia geral utilizada pelas pesquisadoras na busca de possíveis respostas ao segundo questionamento de investigação, a tabela 11 se alonga pelas próximas três páginas.

Tabela 11 – Questão 2, objetivo, tarefas específicas, atributos, protótipos, imagem evocada e categorias de análise

Questão 2: Como as imagens conceituais de universitários acerca de agrupamentos simples se reconstroem durante uma disciplina que aborde análise combinatória?					
Objetivo	**Tarefas**	**Atributos[106]**	**Protótipos**	**Tipo de imagem evocada**	**Categoria de análise[107]**
Investigar como as imagens conceituais de universitários acerca de agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação se reconstroem quando trabalhamos com tarefas específicas de combinatória.	18/8/17 1) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6? 2) Seja o conjunto {1, 2, 3, 4}, determine quantos subconjuntos de 3 elementos existem, utilizando os elementos desse conjunto.	1) Arranjo: seleção ordenada; 2) Combinação: seleção não ordenada.	---	Imagens conceituais construídas anteriormente ao ingresso no curso superior associadas às imagens construídas na licenciatura em matemática. Ou seja, imagens em reconstrução. Um processo inacabado e em movimento constante à medida que novas aprendizagens vão sendo incorporadas pelo estudante.	- Quanto ao processo de movimentação das imagens: *reconstrução por inclusão/exclusão positiva/negativa de algum atributo em complementação ou em substituição à imagem conceitual anterior;* - Quanto aos cenários nos quais o processo de reconstrução ocorreu: *imagem conceitual persistente, inapropriada sem melhoria, inadequada com melhoria, fragmentada e flexível.*
	25/8/17 - Quatro amigos irão disputar uma competição de corrida. Serão premiados o 1.º, 2.º e o 3.º lugar. a) De quantas maneiras distintas poderá ocorrer essa classificação? b) Quantos grupos distintos poderão ocorrer na formação do pódio (independentemente da classificação)? c) O que diferencia a situação a da b?	a) PFC ou arranjo simples; b) alocação ordenada de objetos distintos (alunos) em casas distintas (posição no pódio), cuja relação injetiva corresponde a um para um (um lugar para cada pessoa); não é possível trabalhar na lógica do pódio sem classificação ordenada. c) Sem problematizações em aula, ambas as			

[106] Posteriormente, quando explicamos as categorias de análise e comentamos individualmente cada tarefa, listamos, com base na literatura estudada, todos os atributos que consideramos relevantes e imprescindíveis à caracterização do conceito envolvido em cada uma delas.
[107] Serão detalhadas no capítulo 5 quando analisamos os dados referentes à questão 2.

	questões podem ser consideradas iguais em termos de resposta esperada.
22/9/17 - Classifique os agrupamentos sugeridos a seguir como arranjo ou combinação (PAIVA, 2009, p. 167): a) Escolher seis dos sessenta números para uma aposta na Mega-Sena. b) As possíveis classificações dos quatro primeiros colocados no Campeonato Brasileiro de Futebol. c) Eleger uma comissão de dois alunos para representantes de sala, em que ambos terão o mesmo cargo. d) Formar um número de telefone com oito números distintos. e) Eleger uma comissão de dois alunos em que um será o porta-voz da classe e o outro será o secretário. f) Escolher três vértices de um cubo para formarmos triângulos.	Características sem quais o conceito não pode ser reconhecido matematicamente: - *Arranjo simples*: agrupamento ordenado formado por elementos distintos de uma sequência dada; diferenciam-se pela ordem e/ou natureza dos elementos; - *Permutação simples*: caso particular de arranjo em que todos os elementos distintos do conjunto dado são considerados na formação de novas e outras sequências; - *Combinação simples*: agrupamentos não ordenados, pois a ordem dos elementos não altera os subconjuntos formados; os elementos
20/10/17 - Classifique as sentenças a seguir como arranjo, permutação ou combinação. Justifique sua classificação[108]. a) Produzir uma mistura com duas cores primárias distintas, escolhidas entre o vermelho, azul e amarelo. b) A disputa de uma eleição por três candidatos em que há o 1.º, 2.º e 3.º	

[108] Esta questão é composta por agrupamentos simples e com elementos repetidos. No entanto, nesta tese, consideramos apenas os agrupamentos simples.

	colocados. c) Escolher, entre os jogadores A, B, C, D e E, três para receber medalha do 1.º, 2.º ou 3.º melhor jogador. d) Identificar o número de anagramas que uma pessoa consegue formar com a palavra BANANA. e) Formar números naturais de cinco algarismos distintos ou não escolhidos entre os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. f) Escolher maneiras de saborear duas bolas de sorvete entre sete sabores disponíveis na sorveteria.	se diferenciam pela natureza e não pela ordem. Ao trabalhar estas tarefas acompanharemos a reconstrução das imagens iniciais identificadas em T1, T2, T3, T4, T5, T6 e T7 da tabela quando detalhamos a questão 1.		
	g) Usando suas palavras, conceitue arranjo, permutação e combinação.		Ao conceituar os agrupamentos de modo empírico envolvendo algum fundamento matemático, os protótipos podem aparecer, por iniciativa própria, envolvendo a ideia conceitual dos agrupamentos, seja para definir o conceito, ou para exemplificar sua aprendizagem e/ou gosto pela disciplina durante o ensino médio, outro período da educação básica, incluindo ou excluindo as aprendizagens construídas na licenciatura em matemática.	

Fonte: Elaborada pelas pesquisadoras.

4.4.2 Observação, entrevistas e documentos

Quando optamos pela pesquisa qualitativa, decidimos utilizar várias técnicas de produção e coleta de dados e várias estratégias para registrá-los e analisá-los. A diversidade de instrumentos originou-se do problema a ser pesquisado e dos cenários encontrados. Por isso, para este tipo de pesquisa, não há uma padronização de instrumentos. Por outro lado, a literatura recomenda alguns métodos para produção e coleta de dados qualitativos. Entre aqueles que se mostraram mais eficazes em nosso contexto de pesquisa, utilizamos observação participante, entrevistas e documentos. A seguir, comentamos nosso entendimento e o uso feito de cada um deles.

Observação participante — Entendida nesta pesquisa como aquela “[...] em que o pesquisador faz anotações de campo sobre o comportamento e as atividades dos indivíduos no local de pesquisa” (CRESWELL, 2010, p. 214). Implicou, portanto, decisões sobre quando, onde e o que deveria ser observado, ou seja, as interações entre pessoas, entre elas e o conhecimento e as “ações que estão ocorrendo, humanas ou mecânicas; e as circunstâncias físicas, incluindo sinais visuais e sonoros” (YIN, 2016, p. 129).

Desse modo, conforme dito anteriormente, quando descrevemos o estudo exploratório, a observação participante foi utilizada como estratégia mais ampla de produção e coleta de dados. Organizamos um roteiro de observação que nos permitiu ter experiência com o participante e com o campo de pesquisa. Além disso, envolveu a observação direta associada principalmente a métodos, tais como questionário, diário de campo e listas de exercícios. Assim nos comportamos como observadoras reveladas, o que permitiu que nos envolvêssemos na situação estudada e nos sentíssemos membros daquele grupo. Os dados coletados da observação foram organizados e classificados e, desse modo, serviram para que descobríssemos “padrões de eventos que apareceram naquele mundo” (MOREIRA, CALEFFE, 2008, p. 201).

Entrevistas — Também conhecidas por Moreira e Caleffe (2008) como “uma conversa com um propósito”, aconteceram face a face, de modo interpessoal, um a um, e por telefone ou *e-mail*, quando não conseguíamos observar diretamente os sujeitos. Optamos por entrevistas (a) estruturadas, semelhantes a um questionário com perguntas fixas e pontuais cujas respostas seriam objetivas, e (b) semiestruturadas, que, embora não possuíssem um modelo com perguntas fixas, se estruturavam com suporte nos temas de interesse. Levávamos questões pensadas inicialmente e incorporávamos outras que surgiam ao longo das entrevistas. A diferença desta para a anterior ocorreu no tipo de negociação feita pelos envolvidos, que, neste caso, consistiu em uma conversa com propósito determinado.

As questões abertas formuladas por nós tinham por objetivo a manifestação individual de cada licenciando sem que houvesse incentivos externos, pois se destinavam a "suscitar concepções e opiniões dos participantes" (CRESWELL, 2010, p. 214). Ao priorizarmos esse tipo de questão, optamos por organizar os dados com base neles mesmos, e não em um modelo previamente pensado, pois consideramos a existência de respostas variadas.

As entrevistas do retorno envolveram questões estruturadas e mostraram ser um bom exemplo de triangulação de dados. Criamos um roteiro específico de entrevista individual para cada licenciando, tendo por base a pré-análise dos dados obtidos nas tarefas de aula e de pesquisa. Nosso objetivo era esclarecer informações e validar nossas interpretações. Assim a consideramos como entrevista narrativa em que o estudante foi convidado a apresentar um relato mais longo e coerente em forma de uma narrativa. Dois aspectos importantes aconteceram em nossa pesquisa: a narrativa principal do entrevistado foi desencadeada por uma pergunta geradora feita pelas pesquisadoras; e o estágio da sondagem narrativa, no qual detalhamos fragmentos narrativos que não haviam sido exaustivamente esmiuçados antes (FLICK, 2013). Eles, porém, permitiram-nos acessar experiências subjetivas dos entrevistados.

Para que as entrevistas acontecessem de modo coerente, elaboramos um "guia ou protocolo de entrevistas", que designou o "conjunto de perguntas que orientam o pesquisador durante a entrevista, principalmente nas entrevistas estruturadas e semi-estruturadas" (MOREIRA, CALEFFE, 2008, p. 169). Além de conter as perguntas sequenciadas, preparamos e registramos uma breve introdução e um encerramento do momento de entrevista. Começamos explicando os motivos e objetivos de estarmos ali, apresentamos os próprios dados deles, para que analisassem e rememorassem perguntas e respostas. Depois, fizemos a entrevista concretamente. Por fim, encerramos agradecendo a disponibilidade dos licenciandos e colocando-nos à disposição para possíveis esclarecimentos.

Documentos — Nesta tese, consideramos que documentos são "quaisquer materiais escritos que possam ser usados como fonte de informação [...]" (LÜDKE, ANDRÉ, 1986, p. 38). Portanto, mediante consentimento de alunos e professora regente, valemo-nos dos documentos privados de posse dos sujeitos. Queremos dizer que analisamos, entre outros, o caderno de plano da professora, os cadernos de registro de aula dos alunos, as respostas deles em tarefas específicas, o que inclui atividade de aula e avaliação, e as transcrições de aula e de entrevistas individuais.

Com a análise desses documentos, consideramos que tivemos algumas vantagens: acesso, em momentos variados, à “linguagem” e às “palavras” dos participantes, uma vez que persistem ao longo do tempo e, por isso, podem ser consultados quantas vezes forem necessárias, o que deu “mais estabilidade aos resultados obtidos” (LÜDKE, ANDRÉ, 1986, p. 38); constituíram uma fonte de informação rica, estável, pertinente e valiosa, pois representaram dados criteriosos cujos participantes se dedicaram a registrá-los; e são evidências escritas, resultantes de um processo institucional de atividades da disciplina e, portanto, não existem interferências nossa nem da pesquisa em si. Por tudo isso, consideramos que são fontes de evidências que fundamentam nossas afirmações e declarações e/ou servem de base para validar ideias teóricas concebidas previamente.

O material obtido com esses métodos de produção e coleta de dados qualitativos foram registrados por meio de fotografias, fotocópias ou xerox, gravações em áudio, diário de campo da pesquisadora, respostas dos sujeitos às entrevistas, questionários e tarefas. Desse movimento decorreu a análise de dados, que consistiu em um processo “[...] permanente envolvendo reflexão contínua sobre os dados, formulando questões analíticas e escrevendo anotações durante todo o estudo” (CRESWELL, 2010, p. 217). Isso quer dizer que a análise de dados qualitativos foi conduzida concomitantemente à produção e coleta de dados, à realização de interpretações e à redação do relatório final de pesquisa.

CAPÍTULO 5: ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Neste capítulo comentamos sobre o estudo preliminar desenvolvido em 2016/2. A seguir, dissertamos sobre as primeiras imagens conceituais dos licenciandos e das reconstruções apresentadas por eles ao longo da disciplina. Examinamos dados, sistematizamos resultados e apresentamos algumas contribuições à prática e à pesquisa sobre o entendimento de futuros professores de matemática acerca da combinatória. Antes, porém, descrevemos detalhadamente, nesta primeira seção, as tarefas e as categorias que utilizamos para a análise dos dados obtidos com as atividades dos blocos 1 e 2, relacionadas à primeira questão: "Quais imagens conceituais universitários evocam quando resolvem tarefas de análise combinatória?" Em seguida, na seção 2, tratamos das tarefas específicas do bloco 3, analisadas na tentativa de respondermos à segunda questão de pesquisa: "Como as imagens conceituais de universitários acerca de agrupamentos simples se reconstroem durante uma disciplina que aborde análise combinatória?"

5.1 Um breve panorama do estudo preliminar

O estudo preliminar foi desenvolvido em 2016/2 com Letícia, a mesma professora regente do estudo definitivo, e com 23 estudantes (12 da turma A e 11 da turma B) que cursavam a disciplina de Análise Combinatória e Probabilidade no sexto período da licenciatura em matemática do IFES *campus* Cachoeiro de Itapemirim (ZANON, 2017). Considerando que seriam ministradas 24 a 39 aulas, respectivamente, em cada turma, acompanhamos 14 aulas na turma A, nos dias 25/7, 1.º/8, 8/8, 15/8, 22/8, 29/8 e 5/9/16. Na turma B, observamos 15 aulas nos dias 11/8, 18/8, 25/8, 1.º/9 e 8/9/16.

Esse total de aulas foi o destinado à análise combinatória, incluindo a avaliação realizada no último dia de aula de cada turma. Semanalmente eram destinadas duas aulas de 50 minutos para a disciplina. No entanto, em dois momentos, ocorreram trocas de aulas entre os professores e Letícia ministrou quatro aulas de 50 minutos. Por isso, centralizamos nossas observações nas aulas em que foram lecionados Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e agrupamentos simples (arranjo, permutação e combinação) de combinatória. A sala de professores, o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) e o Laboratório Interdisciplinar de Formação de Educadores (LIFE) constituíram espaços de planejamento de aulas e atividades e interações entre os envolvidos.

Na turma A as aulas aconteciam na segunda-feira de 20h20min até 22h. Já na turma B, eram ministradas às quintas-feiras de 16h00min até 18h30min. A esta altura, o leitor pode estar se perguntando os motivos de se ter duas turmas de uma mesma disciplina em um mesmo semestre cuja oferta acontecia em dias e horários diferentes. A tuma A compunha-se dos estudantes matriculados na oferta regular da disciplina que acontece à noite no horário de funcionamento do curso de licenciatura. O tipo de oferta destinado a turma B se referiu a flexibilidade curricular com o objetivo de (re)oferta de disciplinas da matriz em horários/turnos/períodos/dias distintos do regular. É destinado aos alunos que por algum motivo estão impossibilitados de cursarem a disciplina regularmente. No entanto, o perfil dos licenciandos de ambas as turmas muito se assemelhava. A maioria deles exercia alguma atividade remunerada durante o dia e estudavam à noite, uma realidade bastante presente nos cursos de formação inicial de professores. Muitos adequavam suas atividades laborais com a participação em programas de incentivo à docência como o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (Pibid) e o Bolsa SEDU. Todos realizavam ou já haviam realizado o estágio supervisionado curricular obrigatório. Além disso, uma aluna já ensinava matemática na educação básica de uma escola particular, isto porque ela já possuía formação em Contabilidade concluída anteriormente ao seu ingresso no curso de licenciatura em matemática.

Nossas observações e impressões sobre este estudo preliminar nos fizeram pensar, refletir sobre e questionar acerca do que acontece nesta disciplina de Análise Combinatória e Probabilidade em um curso de licenciatura em matemática. Também nos levou a refletir sobre alguns desajustes entre formas de ensino e de aprendizagem, conforme assinalado por Skemp (1976). Pareceu estar em jogo a forma como a disciplina foi organizada pela professora e sua maneira de conceber o ensino, a aprendizagem e o tipo de avaliação, ou seja, o seu comportamento. Isso confirmou que professores “desenvolvem padrões de comportamento característicos de sua prática pedagógica” (THOMPSON, 1997, p. 12). Nesse caso, a forma como Letícia ensinava (definição-exemplo-exercícios semelhantes), como os alunos aprendiam (reprodução da fórmula em lista de exercícios) e o tipo de avaliação (tarefas semelhantes àquelas empregadas em sala de aula) não proporcionaram uma compreensão relacional (SKEMP, 1976) dos tópicos estudados. Ao contrário, valorizavam o entendimento instrumental.

Se retornarmos às aulas de Letícia ministradas em 2016/2 durante a etapa de observação participante, notaremos que havia: um conteúdo a ser ensinado; uma conceituação com base na literatura adotada para a disciplina; um exemplo no qual era demonstrado como a fórmula deveria ser utilizada; e uma lista de exercícios que deveriam ser resolvidos pelos alunos. Na ocasião, Letícia argumentou que "Eu apresentava, logo apresentava o que os autores diziam[109], né, para não falar o que eu disse, mas o quê que era, e trazia exemplos de problemas, alguns exemplinhos para poder, né, eles saberem, eles verem como é que aplicava" (15/8/16).

Para exemplificar seu modo de trabalho, trazemos detalhes da aula de 15/8/16. Neste dia, a professora entregou uma folha contendo a definição de arranjo e as fórmulas usadas para arranjo simples e com repetição. Além disso, propôs uma relação de 06 problemas logo abaixo da parte conceitual, envolvendo arranjos e PFC - Princípio Fundamental da Contagem para que os alunos sistematizassem os conceitos tratados na aula.

Figura 6 - Conceito e fórmula de arranjo simples e com repetição

Atividades: Arranjos e Princípio Fundamental da Contagem

Arranjos são agrupamentos formados com p elementos de um conjunto de n elementos, de forma que os p elementos sejam distintos entre si pela ordem ou pela espécie. Os arranjos podem ser simples ou com repetição.

Arranjo simples: Não ocorre a repetição de qualquer elemento em cada grupo de p elementos.

Fórmula: $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$

Arranjo com repetição: Todos os elementos podem aparecer repetidos em cada grupo de p elementos.

Fórmula: $A_{n,p} = n^p$

Fonte: Material de aula disponibilizado pela professora Letícia em 15/8/16.

Esta forma de apresentação do conceito e fórmula de arranjo apresentada por Letícia encontrava-se disponível em um site[110] da internet, uma das fontes de pesquisa e de estudo da professora. Portanto, reafirmava seu argumento anterior de que "logo apresentava o que os autores diziam". A lista de exercícios relacionadas ao tópico matemático foi organizada com alguns problemas apresentados por Hazzan (1993) e com outros apresentados por Morgado et. al (1991). Escolhemos aleatoriamente um problema da lista trabalhada neste dia para retratar um dos momentos em que as opções de ensino da professora foram observadas. Tal problema

[109] Grifo nosso para destacar fragmentos da fala da professora que validam seu modo de trabalho em sala de aula.
[110] http://www.uel.br/projetos/matessencial/medio/combinat/combinat.htm

encontra-se na página 21, número 48 do livro “Fundamentos de Matemática Elementar 5: combinatória e probabilidade” escrito por Hazzan (1993).

Figura 7 - Problema proposto por Letícia em 15/8/16

2) .Uma linha ferroviária tem 16 estações. Quantos tipos de bilhetes devem ser impressos, se cada tipo deve assinalar a estação de partida e de chegada, respectivamente?

Fonte: Lista de atividades cedida pela professora Letícia.

A seguir, trazemos a solução apresentada pela professora Letícia e pelas estudantes Clara, Esther e Luna, algumas licenciandas em matemática que participaram do estudo inicial desenvolvido em 2016/2. Na ocasião, tanto as estudantes quanto a professora já haviam se apropriado do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), nos autorizado a utilizar seus dados e informações e haviam escolhido nomes fictícios para serem identificadas na pesquisa. Assim, os nomes aqui utilizados são pseudônimos que buscam resguardar a identidade dos sujeitos. Apresentamos a resolução dessas alunas pelo fato de elas terem nos cedido todo o material que produziram durante a disciplina: caderno, listas de exercícios resolvidos e lista de exercícios que resolveram para além daqueles apresentados em sala de aula pela professora.

Figura 8 - Resolução apresentada por Letícia

$$2 - A_{16,2} = \frac{16!}{(16-2)!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot \cancel{14!}}{\cancel{14!}} = 240 \text{ tipos}$$

Fonte: Caderno de plano de aula da professora Letícia em 15/8/16.

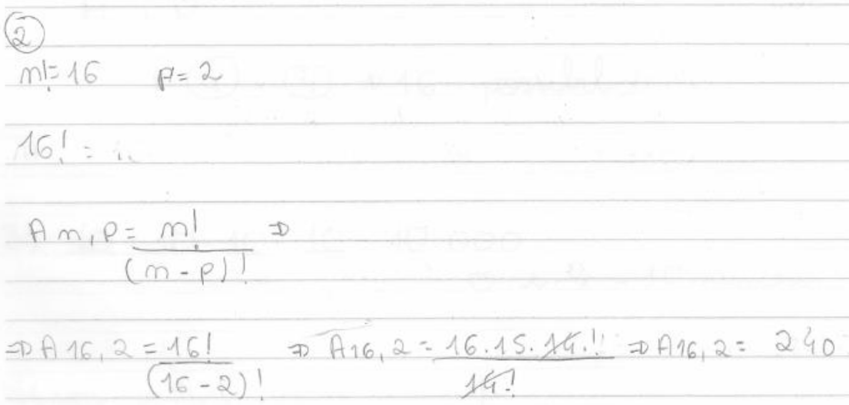
Figura 9 - Resolução apresentada por Clara

2)

$$A_{16,2} = \frac{16!}{(16-2)!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot \cancel{14!}}{\cancel{14!}} = 240$$

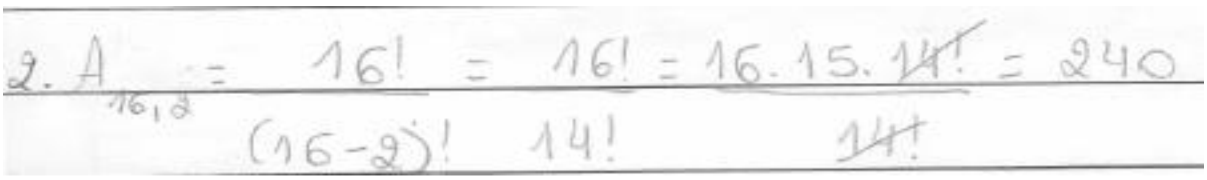
Fonte: Caderno de Clara em 15/8/16.

Figura 10 - Resolução apresentada por Esther



Fonte: Caderno de Esther em 15/8/16.

Figura 11 - Resolução apresentada por Luna



Fonte: Caderno de Luna em 15/8/16.

Queremos chamar atenção para o fato de que o procedimento de resolução empregado por cada resolvedor foi o mesmo: aplicação da fórmula de arranjos simples. Apesar de observarmos que Clara tenha iniciado outro processo de resolução no qual fez uma representação pictórica do que poderiam ser as estações, pareceu optar pelo uso de fórmula. Assim sendo, de acordo com os argumentos dos alunos, isso promoveu a fixação de procedimentos de resolução de problemas, especialmente da fórmula, algo que era muito valorizado por Letícia tanto em sua aprendizagem quanto em sua forma de ensino e de avaliação. Percebemos que esse comportamento de Letícia poderia impactar a forma como esses licenciandos pensariam o ensino de análise combinatória no exercício da docência.

Observamos certo consenso entre as ideias de Letícia e dos licenciandos quanto ao desenvolvimento do hábito de terem que estudar para poder ensinar posteriormente. Isso nos remete às crenças apresentadas por Letícia e pelos estudantes sobre formas de aprendizagem em matemática. Para nós, essa crença complementaria os estudos de Gómez Chacón (2003), pelo fato de não se relacionar à motivação, e sim aos métodos por meio dos quais se aprende e se organiza o ensino. Os argumentos dos licenciandos deram-nos indícios de que haviam pontos positivos e negativos em relação aos métodos utilizados por Letícia. Além disso, sabiam relacionar e informar quais deles gostariam de incorporar ao seu futuro repertório de ensino.

O desenvolvimento do estudo preliminar foi fundamental para o planejamento da pesquisa definitiva. Durante as aulas, observamos que ensinar consistia na apresentação do conteúdo no quadro. Na sequência, a professora apresentava exemplos de como usar uma fórmula em um problema tipo. Posteriormente, aplicava-se uma lista de problemas semelhantes para sistematização do procedimento matemático acerca do assunto abordado. Nessa lógica, aprender consistia na resolução dos problemas pelos alunos via uso adequado da fórmula. Geralmente a lista era resolvida individualmente, em duplas ou trios. Não havia um contrato didático acerca disso. Quando necessário, alunos interagiam entre si com questões do tipo “Como você fez?”; “Qual resultado achou?”. Como a lista era de aplicação do procedimento em questão, não se ouvia questão do tipo “Esse problema é de quê?”, mas, “Como se resolve esse problema?”. Notou-se que mesmo os problemas sendo do mesmo tipo de aplicação de procedimento, alguns alunos não conseguiam ter iniciativa para começar o processo de resolução (POLYA, 1973). Parecia que a leitura do problema não esclarecia os modos de manipular a fórmula para “caber” no problema ou como manipular/operar com os dados do problema para caber na fórmula. Ou seja, mesmo tendo fórmula e problema, alguns alunos não conseguiam ver/perceber como é que aquela fórmula poderia ser usada para resolução do problema proposto.

Em outros momentos, alunos interagiam com os colegas e solicitavam ajuda para resolver o problema. Só depois, caso o colega não conseguisse esclarecer, é que se dirigiam à professora. E sua maioria, os alunos mais solicitados exerciam atividades no Pibid e possuíam boas notas nas disciplinas como um todo. Em outros momentos, percebeu-se que os alunos se agrupavam, mas as atividades eram feitas individualmente, silenciosamente, quase sem diálogo entre eles. Neste caso, geralmente, quando ocorriam diálogos eram acerca de outros temas que não envolviam o assunto matemático em questão. Ou, depois de resolverem, trocavam ideias para verificar se as respostas encontradas eram idênticas. Às vezes, solicitavam que a professora informasse o resultado dos problemas antecipadamente. Esta prática era rotineira, passou a fazer parte da cultura da sala. No entanto, os alunos desafiavam a si próprios a encontrar aquele resultado esperado. E quando solicitada, a professora dirigia-se até à mesa dos alunos e interagia com eles.

Na correção dos exercícios eram priorizados aqueles em que os alunos haviam demonstrado alguma dúvida ou dificuldade para resolver. Geralmente questionava-se “Em quais vocês tiveram dúvidas?”. Especialmente neste caso, após a resolução do problema pela professora, perguntava-se se algum aluno havia feito diferente. Mas, normalmente, os alunos preferiam não se posicionar e diziam “Fizemos assim mesmo!”. Ou explicavam oralmente sem evidenciar seus registros no quadro, por exemplo, ou dialogar com os outros (professora e alunos) acerca deles. Pareceu-nos que o processo de pensamento do aluno e sua forma de registro externalizada oralmente se perdiam na sala. E, alunos que não haviam compreendido, tinham resolvido de modo equivocado ou que não haviam feito a tarefa ficavam desorientados durante as aulas. Caso não manifestassem dúvidas, as respostas corretas eram ditadas pela professora para que os alunos conferissem as suas. Normalmente, não se explorava ou dialogava acerca de outras estratégias de resolução ou modos de compreensão dos problemas.

Pareceu-nos ainda que o enfoque dado à resolução de problemas era aquele em que se espera uma única forma/estilo de resposta. Neste caso, notou-se que geralmente se usava o princípio fundamental da contagem (PFC) ou uma fórmula de permutação, combinação ou arranjo. Em sua maioria, problemas já eram elaborados com vista ao uso de uma fórmula e não para o desenvolvimento do pensamento combinatório em si. Não evidenciamos preocupação nem com o processo de entendimento da situação envolvida no texto/enunciado da tarefa/problema e nem com o procedimento de resolução em si. Mas sim com o resultado encontrado. Em alguns momentos quando erros eram evidenciados, perguntava-se “Como é que você fez?”. Nesse momento parecia que o aluno buscava rememorar e verbalizar seu pensamento como um processo inconsciente.

Pareceu-nos que este cenário de aula era fortalecido em função da reduzida carga horária da disciplina. Na turma A, a aula acontecia à noite, após o recreio. Os alunos se atrasavam para entrada na sala e justificavam argumentando acerca do pouco tempo destinado ao recreio, do tamanho da fila da cantina ou culpando o(a) professor(a) da aula anterior que havia finalizado a aula mais tarde. Os alunos dessa turma acabavam saindo uns 10 ou 5 min antes do término da aula para se deslocarem até o ponto de ônibus tendo em vista a localização do campus. Os atrasos para entrada na sala também aconteciam na turma B. Estes eram justificados pelo atrasado na saída do trabalho e o deslocamento até o campus. Fortalecia-se também pela pouca experiência da professora em relação ao conteúdo e o perfil de alunos. Além disso, ela estava cercada pelas limitações oriundas de uma gestação.

Em relação ao planejamento de aulas, observou-se que eram preparadas na instituição ou em casa. Muitas vezes observei a professora Letícia estudando muito, pois além de ser iniciante no ensino superior, não possuía muita experiência com o conteúdo. Nossos contatos foram bem reduzidos em função da não similaridade de horários. Geralmente conversávamos por e-mail ou por mensagem de telefone. Às vezes, em sala de aula, ela me olhava e dizia “Se eu estiver errada, você me fala!". Seguindo a lógica das aulas, das atividades e do planejamento, a avaliação consistia na resolução de problemas pelos alunos. Consistia em uma lista de problemas de aplicação de fórmulas semelhantes aos trabalhados em sala. Deveria ser resolvida individualmente pelos alunos que eram orientados a deixar os cálculos na folha de avaliação para além de apresentar somente resultados. Marcava-se um dia específico para a avaliação, aplicava-se a mesma, recolhiam-se as avaliações dos licenciandos, e após correção era devolvida aos estudantes. Se os alunos apresentassem dúvidas quanto a correção, dialogavam com a professora. Caso contrário, o conteúdo matemático era dado como encerrado e passava-se para a unidade seguinte.

Por tudo isso que vivenciamos e observamos no estudo exploratório, é que propusemos uma pesquisa na qual pesquisadoras e professora formadora pudessem planejar aulas de modo colaborativo. Estávamos convencidas de que este caminho nos permitiria incentivar a participação dos estudantes, pois todo o desenrolar da aula seria vivido por nós antecipadamente. Para tanto, nos respaldamos metodologicamente na resolução de problemas combinatórios, em discussões matemáticas orientadas de modo produtivo, e, na elaboração de tarefas, questionários e entrevistas que pudessem auxiliar os estudantes a mobilizarem suas imagens mentais, propriedades e processos associados e necessários à aprendizagem de alguns conceitos tratados em combinatória. Ademais, análises das respostas dos estudantes a tarefas dadas em aulas e a alguns questionamentos que fizemos nas duas turmas em 2016/2 sobre o que entendiam de combinatória nos auxiliaram a pensar em como rever e/ou adaptar questionamentos e tarefas para a investigação definitiva.

Portanto, a partir de agora, passamos a comentar sobre o estudo definitivo cujas aulas da disciplina de Análise Combinatória e Probabilidade foram planejadas e desenvolvidas junto a professora Letícia. Em muitos momentos a orientadora trocava ideias com a pesquisadora antes dos planejamentos, diretamente após uma aula e em momentos de replanejamentos. Também aconteceram trocas de e-mails entre nós e conversas via Skype sobre os planejamentos do estudo definitivo. Aqui nesta parte do texto, iniciamos pelas primeiras imagens conceituais dos licenciandos e finalizamos com as reconstruções apresentadas por eles ao longo da disciplina desenvolvida no segundo semestre letivo de 2017.

5.2 As primeiras imagens conceituais de combinatória de futuros professores de matemática

"Quais imagens conceituais universitários evocam quando resolvem tarefas de análise combinatória?" – Esta questão motivou-nos a investigar imagens conceituais iniciais de combinatória de estudantes universitários de licenciatura em matemática. Tínhamos interesse em identificar imagens conceituais construídas anteriormente ao ingresso deles no ensino superior, para tentar refiná-las durante a formação inicial. O nosso exame cuidadoso das imagens conceituais evocadas pelos estudantes e a tomada de consciência deles sobre elas proporcionam melhor entendimento do conceito pelos futuros professores de matemática. Em vista disso, consideramos que estamos fazendo um exercício de aproximação do pensamento dos estudantes, ou seja, de suas imagens. Dessa forma, é exequível tecer um panorama razoável da compreensão deles sobre combinatória. Assim sendo, descrevemos detalhadamente, a seguir, as tarefas e as categorias que utilizamos para a análise dos dados obtidos com as atividades dos blocos 1 e 2, relacionadas a esta primeira questão.

5.2.1 Categorias de análise

As categorias de análise foram se configurando ao longo do processo de pesquisa durante o trabalho com as tarefas específicas. Desse processo, vimos emergir três categorias principais: (1) Imagem conceitual da definição do conceito de combinatória; (2) Imagem do ensino e da aprendizagem de combinatória; e (3) Imagem conceitual de outro conceito matemático. A imagem indicada em 1 "Imagem conceitual da definição do conceito de combinatória" reafirma os estudos desenvolvidos por Tall e Vinner, especialmente aquele datado de 1981, considerado uma referência quando se investiga imagens conceituais e definição de conceito.

A imagem que trazemos em 2 "Imagem do ensino e da aprendizagem de combinatória", busca ressignificar a teoria apresentada por Tall e Vinner (1981), pois amplia o olhar sobre o fenômeno. Quando olhamos outro conteúdo matemático, diferente de função, tangente e limite de uma sequência focalizados inicialmente por Tall e Vinner (1981), fundamentadas na base teórica definida por eles, novas e outras perspectivas foram vislumbradas. Com isso queremos dizer que quando focalizamos em análise combinatória, não nos limitamos a olhar apenas o conceito matemático puramente. Dedicamo-nos a "ver" também imagens dos sujeitos em relação ao próprio processo de ensino e de aprendizagem desses conceitos. Tratamos do papel que as lembranças dos participantes acerca de suas próprias vivências como alunos da educação básica, poderiam ter na construção da imagem de um conceito.

No trabalho inicial dos pesquisadores Tall e Vinner lá na década de 80, eles se dedicaram a olhar a aprendizagem de uma maneira quase que estritamente racional, cognitivista, como se ela não fosse influenciada pelos fatores afetivos. Há que se considerar, porém, que nesses últimos 40 anos, muitas mudanças aconteceram quando pensamos no ensino e na aprendizagem de matemática. Então, é natural que a perspectiva teórica cunhada por eles mereça ser ressignificada. Além disso, nos dados de nossa pesquisa de doutorado, a afetividade emergiu de uma maneira quase que inevitável, impossível de ser isolada e desconsiderada enquanto categoria de análise. Os afetos estavam ali[111], o tempo todo por trás do processo de ensino e de aprendizagem de combinatória dos estudantes universitários que participaram do estudo.

Considerar então os afetos se constituiu em um momento valioso. Nos permitiria retomar os estudos iniciados no mestrado (ZANON, 2011) acerca da temática. Na ocasião, pesquisamos pensamentos e sentimentos de professoras que ensinavam matemática no segundo ano do ensino fundamental em escolas municipais do interior de Castelo/ES. Para isso, desenvolvemos uma formação continuada sobre números, operações, resolução de problemas dentre outros tópicos de matemática a partir do desejo de aprender daquele grupo específico. Portanto, foi uma formação pensada e desenvolvida junto com as professoras de modo a possibilitar a valorização de cada uma e a externalização de seus pensamentos e sentimentos acerca da matemática, seu ensino e modos de avaliação.

A categoria que trazemos em 3 “Imagem conceitual de outro conceito matemático” também amplia um pouco os modos de conceber a base teórica de Tall e Vinner (1981). Tal categoria se refere a imagens de outros conceitos matemáticos que podem emergir por meio de uma tarefa que desencadeou o processo, em nosso caso, as tarefas específicas. Queremos dizer que na década de 80, Tall e Vinner pareceram interessados em investigar imagens pontuais, específicas de um determinado conceito. Eles aparentaram não considerar que uma tarefa de entrada poderia evocar imagens de outros conceitos que não fossem necessariamente aquele da tarefa, mas que poderia ser necessário ao processo de resolução ou até mesmo um

---

[111] Embora Broetto (2016) tenha assinalado para o papel dos afetos, ele não os considerou em suas análises. Focalizou, assim, somente no desenvolvimento cognitivo dos estudantes em situação de aprendizagem de números irracionais.

conceito equivocado. Após esse preâmbulo, passamos a discorrer acerca de cada categoria individualmente.

1. *Imagem conceitual da definição do conceito*

Nesta categoria, a definição matemática formal de combinatória e dos agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação foi considerada como referência para a apreciação do entendimento dos licenciandos. Com base na literatura matemática relacionada à análise combinatória (HAZZAN, 1993; BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996; PAIVA, 2009; MORGADO et al., 1991), imaginávamos encontrar algumas considerações do tipo:

- é um campo da matemática que analisa estruturas e relações discretas;
- dedica-se à obtenção de métodos de contagem;
- estuda "os conjuntos discretos e as configurações que podem obter-se a partir de seus elementos mediante certas transformações que originam mudanças na estrutura ou na composição dos mesmos" (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1991, p. 17-18);
- é alicerçada no princípio fundamental da contagem – PFC;
- envolve agrupamentos, tais como arranjos, permutações e combinações, que podem ser simples ou com elementos repetidos. A seguir, caracterizamos os agrupamentos simples, pois nos interessamos somente por eles.
    - *Arranjos simples* são agrupamentos ordenados formados por elementos distintos de uma sequência dada, portanto são diferentes do agrupamento original. "Dados os *n* elementos distintos do conjunto $I = \{a_1, a_2, a_3, \ldots a_n\}$, chama-se arranjo simples de *p* elementos de *I* toda sequência formada por *p* elementos distintos de *I* com $p \in IN^*$ e $p \leq n$" (PAIVA, 2009, p. 168). Então, diferenciam-se pela ordem e/ou natureza dos elementos; são indicados por $A_{n,p}$; lê-se arranjo simples de *n* elementos tomados *p* a *p*; *n* indica o número total de elementos distintos do conjunto; *p* representa o número de elementos distintos da sequência formada; *p* pertence aos naturais não nulos, ou seja, sem o zero; *p* pode ser menor e igual a *n*; é dado pela fórmula $A_{n,p} = n! / (n - p)!$.
    - *Permutação simples* são agrupamentos ordenados em que se considera p = n. Isso quer dizer todos os elementos distintos do conjunto dado são considerados na formação de novas e outras sequências. Por isso, considera-se um tipo

particular de arranjo (HAZZAN, 1993; PAIVA, 2009). "Dados os *n* elementos distintos do conjunto $I = \{a_1, a_2, a_3, ... a_n\}$, chama-se permutação simples dos *n* elementos de *I* todo arranjo simples desses *n* elementos tomados *n* a *n*" (PAIVA, 2009, p. 171). Assim, *n* indica o número de elementos distintos do conjunto; diferenciam-se pela ordem dos elementos; lê-se permutação simples de *n* elementos tomados *n* a *n*; é indicada pela fórmula $P_n = n!$.

- *Combinações simples* são agrupamentos não ordenados. Isso significa que a ordem dos elementos não altera os subconjuntos formados. Portanto, uma combinação simples é todo subconjunto formado com certa quantidade de elementos que se diferenciam por sua natureza. "Dados os *n* elementos distintos do conjunto $I = \{a_1, a_2, a_3, ... a_n\}$, chama-se combinação simples de *p* elementos de *I* todo subconjunto de *I* formado por *p* elementos com $\{n, p\} \subset$ ***IN*** e $p \leq n$" (PAIVA, 2009, p. 178). Em combinações, é possível aplicar a fórmula $C_{n,\,p} = n! / p!\,(n - p)!$ em que *n* indica a quantidade de elementos do conjunto e *p* representa um número natural menor ou igual a *n*, que sinaliza quais elementos vão compor os subconjuntos formados.

Trazemos as definições, tais como propostas por Paiva (2009), pois consideramos que ele traduz, de maneira adequada, a linguagem matemática. Paiva (2009) e Hazzan (1993) chamam-nos a atenção para o fato de que arranjos e permutações são formados por *sequências* e nelas a ordem dos elementos importa. Ao passo que combinações são formadas por *conjuntos,* nos quais a ordem com que os elementos são dispostos não importa, e sim a natureza dos elementos que o compõem. "A própria natureza do problema a ser resolvido nos dirá se os agrupamentos a serem formados dependem ou não da ordem em que figuram os elementos" (HAZZAN, 1993, p. 33). Para nós, todas essas considerações refletem imagens conceituais da combinatória em si, de sua utilidade e/ou objetivo, de algum agrupamento/operação[112] e da noção de conjuntos ou sequências, entre outros, possíveis de identificar nas respostas dos estudantes, quando analisamos e interpretamos as respostas deles.

---

[112] Em combinatória, ambos os termos são usados para designar arranjo, permutação e combinação. Varia em razão das opções dos matemáticos e de autores de livros didáticos. Nesta tese, optamos por usar agrupamento.

2. *Imagem do ensino e da aprendizagem de combinatória*

Esta categoria diz respeito ao ensino e à aprendizagem em análise combinatória como conteúdo curricular. Por isso, incluímos aqui o sujeito que aprende e/ou ensina, o conceito matemático do qual se fala e as metodologias que auxiliam em sua apreensão, pois a imagem de um conceito depende das pessoas, das tarefas e das relações estabelecidas entre elas (TALL; VINNER, 1981). Desse modo, agrupamos aqui imagens dos licenciandos que não estão relacionadas diretamente ao conceito de combinatória ou de algum agrupamento. Evidenciamos essas imagens, pois elas apontam indícios de como ocorreram o ensino e aprendizagem dos licenciandos durante a educação básica, e inferem diretamente na construção de imagens conceituais coerentes e/ou incoerentes sobre determinado conceito matemático.

Acerca disso, Kavousian (2008) assinala que "ter uma imagem conceitual coerente pode ajudar os alunos a alcançar uma compreensão mais completa do conceito, que é o que permanecerá com eles" (p. 49, tradução nossa[113]). Além disso, fornece pistas de metodologias de ensino que auxiliaram no desenvolvimento de tais imagens (VINNER, 1983). Portanto, conhecê-las permite que professores acessem imagens conceituais distintas, vejam como o conceito se desenvolve em diferentes perspectivas e pensem em formas diversificadas de ensino, aprendizagem e avaliação em combinatória.

Após uma análise cuidadosa dos dados, buscamos imagens em que o licenciando (1) valoriza e trata a combinatória como conteúdo ensinado/aprendido no ensino médio; (2) enfatiza uma aprendizagem mais instrumental baseada em fórmulas e procedimentos úteis à resolução de exercícios; (3) menciona algum exemplo protótipo de problema que considera relevante para significar sua aprendizagem, pois, de alguma forma, retratam o conceito e ajudam na compreensão do mesmo; (4) aprecia sua sensação, ao estudar combinatória no ensino médio e, assim, demonstra alguma atitude em relação à própria aprendizagem; (5) utiliza adjetivos positivos ou negativos que remetem à ideia de julgamento de valor, para caracterizar o ensino recebido; (6) relaciona o gosto pela combinatória ao fato de apreciarem a matemática; informa não recordar ou não ter estudado combinatória anteriormente, entretanto emite alguma aprendizagem sobre ela; e (7) demonstra algum envolvimento em situações práticas de ensino que exigiram dele uma postura de futuro professor quanto ao conhecimento

[113] Having a coherent concept image can help students achieve a more complete understanding of the concept, which is what will remain with them.

e às metodologias de ensino que possuía (ou não) para ensinar combinatória na educação básica.

3. *Imagem conceitual de outro conceito matemático*

Incluímos e comentamos nessa categoria as respostas dos licenciandos, as quais estabeleceram relações diretas com outro conceito matemático, especialmente com a probabilidade. Por isso, nesse momento, consideramos essas imagens como incoerentes ou equivocadas. Embora a probabilidade use técnicas ou ferramentas combinatórias, as estruturas matemáticas da probabilidade e da combinatória não se coadunam entre si.

5.2.2 As tarefas específicas: uma organização em blocos

Para respondermos à primeira questão – Quais imagens conceituais universitários evocam quando resolvem tarefas de análise combinatória? –, organizamos as tarefas específicas em dois blocos. O primeiro continha quatro questões que consistiam em apreender o entendimento dos licenciandos acerca do conceito de análise combinatória. O segundo compunha-se de outras três tarefas. Seu objetivo era verificar como os estudantes resolviam um problema simples de enumeração (contagem)[114], identificavam o conceito matemático e criavam exemplos semelhantes. Isso ocorreu para observarmos se havia alguma relação entre a definição dada ao conceito (bloco 1) e os modos de resolver e elaborar um problema (bloco 2). Essas tarefas foram aplicadas em 11/8/2017, no primeiro dia de aula da disciplina de Análise Combinatória e Probabilidade[115], antes que a professora iniciasse formalmente o conteúdo. Portanto, serviram-nos de avaliação diagnóstica e orientaram o planejamento das aulas da disciplina durante o semestre.

Para nós, problemas simples são aqueles cujos enunciados são diretos, deixando evidentes os dados para a sua resolução. Esta pode ser encontrada sem muito esforço intelectual, porque envolve geralmente apenas um tipo de cálculo, usando operações elementares. No caso de problemas simples de combinatória, emprega-se na resolução operações de adição e/ou multiplicação, bases para os princípios aditivo e multiplicativo, nos

---

[114] Com base em Morgado et al. (2016, p. 15), usamos contar e enumerar como palavras sinônimas.
[115] A disciplina de “Análise combinatória e probabilidade”, até a presente data, tem carga de 30 horas, é ministrada no 6.º período do curso de licenciatura em Matemática do IFES, *campus* Cachoeiro de Itapemirim, localizado no sul do Espírito Santo. Focalizamos apenas nos agrupamentos combinatórios simples (arranjo, combinação e permutação), estudados na disciplina, e optamos por não explorar a relação existente entre combinatória e probabilidade.

quais ela se fundamenta. Entendemos os problemas mais difíceis ou complexos como aqueles que possuem enunciados mais elaborados e necessitam geralmente de uma segunda ou terceira leitura para a identificação dos dados relevantes ou não. Exigem reflexão e análise para a sua resolução, levando a busca de estratégias por mais de uma operação. Envolvem raciocínios mais complexos e costumam ser desafiadores.

5.2.2.1 O primeiro bloco de tarefas: um olhar sobre a combinatória

Este bloco foi pensado para identificarmos imagens conceituais evocadas por universitários quando resolvem tarefas de combinatória (objetivo 1). Por isso, compõe-se das seguintes questões:

T1) O que você entende por análise combinatória?

T2) Como você definiria arranjo, combinação e permutação?

T3) O que você acha que aprendeu de análise combinatória no ensino médio? Justifique sua resposta.

T4) Você gostou de estudar análise combinatória no ensino médio? Por quê?

A primeira e a segunda questão foram elaboradas com suporte nas orientações de Vinner (1991; 2002) quando afirma que "um método natural para aprender sobre a definição do conceito de alguém é por uma questão direta [...]" (VINNER, 2002, p. 73, tradução nossa[116]), ou seja, perguntar expressamente sobre ela. Optamos por redigi-la dessa forma, pois, no estudo exploratório realizado em 2016/2, indagamos "O que é combinatória? e um estudante questionou-nos: Você quer que eu responda o que eu sei ou o que eu decorei do livro didático?". Esse questionamento foi muito importante para nós e permitiu-nos refletir sobre a relação questão-resposta e o nosso papel de pesquisador ante as questões que geram múltiplos sentidos e podem conduzir a respostas inadequadas.

Quando analisamos documentos curriculares (PCN, BNCC, CBC[117]) e livros didáticos, disponibilizados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), vemos que a combinatória, provida de seus atributos matemáticos formais, características que a definem e sem as quais ela não existira como tal, é ensinada na 2.ª série do ensino médio. Portanto, compomos as questões – O que você entende por análise combinatória? e Como você

---

[116] A natural method to learn about somebody's concept definition is by a direct question […].
[117] Currículo Básico Comum das Escolas Estaduais do Espírito Santo.

definiria arranjo, combinação e permutação? – certos de que o conceito de combinatória já havia sido ensinado/aprendido anteriormente pelos estudantes. Esperávamos que apresentassem uma resposta escrita, dotada de algum fundamento matemático que explicasse o conceito com precisão.

Por outro lado, nosso interesse centrava-se em saber sobre as imagens conceituais evocadas e se as definições faziam parte delas. Então, elaboramos as demais questões para incentivá-los a pensar na própria definição dada à combinatória e aos agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação. Para nós, esta seria mais uma possibilidade de os estudantes evidenciarem alguma interpretação pessoal sobre o conceito em si, pois imagens conceituais poderiam ser externalizadas de maneira não verbal e implícita (VINNER, 1991; 2002).

Nessa perspectiva, com a questão 3 – "O que você acha que aprendeu de análise combinatória no ensino médio? Justifique sua resposta" –, esperávamos que indiretamente as respostas reforçassem aspectos ressaltados na anterior, quando registrassem seu entendimento sobre a combinatória. Já na questão 4 – "Você gostou de estudar análise combinatória no ensino médio? Por quê?" –, o estudante foi solicitado a emitir uma resposta do tipo "sim" ou "não" e a justificar o motivo de sua escolha. Com essas perguntas, aguardávamos que os estudantes evidenciassem, mais detalhadamente, suas imagens conceituais ou reforçassem algumas já evocadas. Por outro lado, nos possibilitariam notar se outras imagens conceituais seriam evocadas, pois elas poderiam ser temporárias e, se provocadas sob circunstâncias diferentes, não se teria garantia de que as mesmas imagens seriam evocadas novamente.

Acreditamos, assim como Broetto (2016), que essas questões "possa[m] ter estimulado uma reconstrução pessoal do licenciando no momento em que [...] [foram requeridas]" (p. 272), pois os estudantes poderiam não ter pensado nelas anteriormente. Isto aconteceu, por exemplo, quando dialogamos com a licencianda Joice sobre os possíveis trajetos que ela poderia fazer para se locomover de sua casa até o instituto federal onde cursava a licenciatura em matemática. Percebemos que, até aquele momento, nem Joice nem os demais licenciandos haviam pensado que a escolha de determinados trajetos em razão de tempo, distância, horário de ônibus, entre outras condições, requeria um pensamento combinatório acerca da tomada de decisão. Desse modo, a análise que empreendemos focalizou em *imagens conceituais que foram evocadas por meio de tarefas específicas*. Nessa lógica, as respostas dos licenciandos constituem cenários para identificarmos *imagens conceituais iniciais evocadas temporariamente*.

5.2.2.2 O segundo bloco de tarefas: Resolução de problema, identificação de conceito e geração de exemplo

Este bloco foi projetado para revelar a imagem conceitual dos licenciandos sobre estruturas combinatórias simples que envolvem as operações aritméticas elementares de adição e multiplicação associadas aos processos de enumeração (contagem). Interessamo-nos em observar alguma relação entre a definição dada ao conceito no primeiro bloco de tarefas e os modos de resolver e elaborar um problema com ideias semelhantes. Assim, acreditamos ser possível notar imagens conceituais evocadas e examinar como os estudantes colocaram tais imagens no esquema geral das estruturas combinatórias conhecidas por eles durante a educação básica. Nessa perspectiva, apresentamos, a seguir, o planejamento do bloco de tarefas e comentamos as atividades e as respectivas categorias de análise.

O planejamento

Anteriormente ao início das aulas de “Análise Combinatória e Probabilidade”, pesquisadora e professora formadora planejaram as tarefas que seriam desenvolvidas em 11/8/2017, primeiro dia de aula. Pensamos em tarefas que seriam importantes à disciplina e ao desenvolvimento da pesquisa (ver quadro 7 apresentado mais adiante), pois optamos por uma prática colaborativa dentro do ambiente de pesquisa.

Conforme assinalamos no capítulo 1, estávamos dispostas a trabalharmos juntas e a nos esforçarmos em direção a um objetivo comum, que, neste caso, se constituía na aprendizagem dos licenciandos. Sentíamo-nos à vontade para participarmos de um empreendimento conjunto: planejar, compreender e discutir as ideias combinatórias implícitas nas tarefas, e, nos considerávamos confortáveis e responsáveis pelos resultados dos estudantes (SANTOS-WAGNER, 2003). Isto implicou em tomar decisões relativas às tarefas, categorias de análise e metodologia de ensino e aprendizagem conforme mencionamos no quadro 5, pois o conteúdo já estava definido na ementa do curso.

Quadro 5 – Tarefas, categorias de análise e metodologia

<table>
<tr><th>Tarefas</th><th>Categorias de análise de dados[118]</th></tr>
<tr><td>T5) Resolução de um problema</td><td rowspan="3">1. Imagem conceitual da definição do conceito
2. Imagem do ensino e de aprendizagem de combinatória
3. Imagem conceitual de outro conceito matemático</td></tr>
<tr><td>T6) Identificação do conceito subjacente a ele</td></tr>
<tr><td>T7) Formulação de exemplos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Metodologia: Discussão de tarefas matemáticas envolvendo a turma inteira (STEIN, ENGLE, SMITH, HUGHES, 2008) com enfoque no enunciado do problema, nas estratégias de resolução dos estudantes e nos problemas formulados por eles.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras.

As categorias de análise [imagem conceitual da definição do conceito, imagem do ensino e da aprendizagem de combinatória e imagem conceitual de outro conceito matemático] mencionadas no quadro 5 foram discutidas detalhadamente quando apresentamos anteriormente o primeiro bloco de tarefas. No entanto, para análise de T5 que consistia na resolução de um problema, tomamos algumas estratégias que antecipamos como parâmetro. Elas são apresentadas e comentadas um pouco mais adiante. Em T6, observamos a identificação do modelo combinatório implícito pelos estudantes e, em T7, apreendemos complexidade, modelo combinatório implícito e estratégias de resolução. Ainda em relação à terceira tarefa, formulação de exemplos, evidenciamos que, por se tratar de fonte de pesquisa, reflexão e aprendizagem, consideramos aqui os exemplos gerados pelos licenciandos quando foram solicitados a elaborar um problema com a mesma ideia daquele resolvido.

Foram criados exemplos individualmente pelos próprios estudantes sem nenhuma interferência da professora ou das pesquisadoras. Esperávamos que elaborassem um problema mais simples ou mais difícil em relação ao inicial, que envolvesse o mesmo modelo combinatório implícito de enumerar e listar deslocamentos, trajetos, caminhos. Também esperávamos que o problema formulado por cada estudante pudesse ser resolvido por estratégias semelhantes àquelas antecipadas pelas pesquisadoras e utilizadas pelos licenciandos durante a resolução do problema original.

Vimos, nos exemplos gerados pelos licenciandos, uma possibilidade de ajudá-los a pensar e a olhar sobre o conceito de uma maneira diferente. Queremos dizer que, ao formular um problema semelhante, o estudante tem a possibilidade de (i) articular sua compreensão acerca do conceito e (ii) evidenciar imagens conceituais sobre ele, o modelo combinatório

[118] Mesmas categorias usadas no bloco 1.

implícito e outras estruturas matemáticas que porventura tenham sido percebidas. Desse modo, cogitamos que essa tarefa seria mais uma possibilidade de provocar reflexões e aprendizagens sobre o conceito.

Reconhecemos que formular exemplos não é uma prática muito comum em aulas de matemática, pois geralmente são apresentados pelos professores ou pelo livro didático, para auxiliar alunos a compreender e operar com diferentes objetos matemáticos. Kavousian (2008) destaca que, em razão disso, se cria uma dependência dos estudantes a fontes externas de exemplos. Aponta que ela é problemática, pois comumente um professor escolhe exemplos com determinadas finalidades que nem sempre são as mesmas consideradas pelos alunos. Assim, vê nos exemplos gerados pelos estudantes uma possibilidade de eles compreenderem "o propósito dos exemplos de maneira mais profunda e construtiva, exigindo também mais envolvimento [deles], para ajudar sua aprendizagem" (KAVOUSIAN, 2008, p. 52, tradução nossa[119]).

O interesse pela metodologia de discussão das tarefas matemáticas envolvendo a turma inteira justifica-se pelo fato de nos permitir desenvolver atividades baseadas em questionamentos e centradas nos alunos. Elas ajudam a promover discussões que se baseiam no pensamento deles e também promovem ideias matemáticas importantes (STEIN et al., 2008). A importância do trabalho coletivo envolvendo classes inteiras tem sido muito discutida desde a década de 1990. A partir dos anos 2000, alguns pesquisadores, como Sherin (2002), Stein et al. (2008), Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) e, Ponte e Quaresma (2016), têm se dedicado a essa discussão em matemática. De modo geral, os estudos empreendidos por eles informam que discussões matemáticas:

- são baseadas no pensamento dos alunos, a fim de suscitar ideias matemáticas importantes com vistas à aprendizagem de conteúdos curriculares. Assim, permitem que alunos construam e avaliem as próprias ideias matemáticas e as de outros;
- instigam, por meio de questionamentos do professor, a participação oral dos alunos em discussões de tarefas e a verbalização de suas respostas, para que os professores possam usá-las de modo eficaz, para orientar a turma no sentido de uma compreensão mais profunda e significativa da matemática;
- focalizam ações do professor para conduzir práticas discursivas em matemática envolvendo turmas inteiras em diferentes níveis de ensino; por isso, devem ser

[119] [...] the purpose of examples in a deeper and more constructive way, also to require more involvement and engagement from the students, to assist their learning.

> orientadas por modelos pedagógicos que têm o potencial de tornar o ensino administrável pelo professor e descentralizado de aspectos de improvisação "[...] em favor de um enfoque nos aspectos das discussões matemáticas que podem ser planejadas com antecedência" (STEIN et al, 2008, p. 321, tradução nossa[120]).

Os estudos apontam, ainda, que a organização e a condução das discussões coletivas são importantes à aprendizagem dos alunos e ao desenvolvimento profissional do professor. Sendo assim, a literatura sugere algumas práticas (ver quadro 6) que professores podem utilizar para provocarem os alunos a participar oralmente das discussões das tarefas e a verbalizar suas respostas. Assim, os professores podem usá-las de maneira mais eficaz, para orientar a turma no sentido de uma compreensão mais profunda e significativa da matemática (STEIN et al., 2008). Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013), ao se referirem ao desenvolvimento profissional decorrente dessa prática, assinalam que ela "se desdobra em algumas ações realizadas segundo um certo plano de ação" (p. 55) e envolve dimensões matemáticas (conhecimento do conteúdo) e didáticas (conhecimento de ensino daquele conteúdo).

Portanto, ao desenvolvermos uma aula baseada na resolução de problemas com enfoque em discussões matemáticas produtivas, interessamo-nos pelos estudos de Stein et al. (2008) e Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2003). Stein et al. (2008) admitem cinco práticas, antecipando, monitorando, selecionando, sequenciando e conectando as respostas dos alunos, que visam tornar o ensino administrável para professores, evitar o caráter de improvisação e tornar público o pensamento dos estudantes. Ponte et al. (2013) destacam ações pontuais do professor na condução de discussões matemáticas. Nesse caso, propõem quatro tipos de ações – convidar, apoiar/guiar, desafiar e informar/sugerir – relacionadas aos tópicos e processos matemáticos e à gestão da aprendizagem. Tanto os pesquisadores que atuaram junto com Stein em 2008 quanto os pesquisadores portugueses pensam em ações concretas de professores em aulas de matemática que objetivam envolver os estudantes em pensar, questionar e discutir conceitos matemáticos e refletir sobre o que fazem ao resolver tarefas matemáticas.

No entanto, observa-se um diferencial entre eles. Quando Stein et al. (2008), além de evidenciarem práticas que podem ser aprendidas por professores para a condução de aulas coletivas baseadas em questionamentos, sinalizam para (i) a preparação prévia da discussão,

---

[120] [...] in favor of a focus on those aspects of mathematical discussions that can be planned for in advance.

(ii) fases de organização de uma tarefa desse tipo e (iii) a importância de uma tarefa matemática que movimenta o pensamento do estudante. Aqui vimos uma relação direta com Tall e Vinner (1981), quando assinalam a importância de uma tarefa que impulsiona a evocação de imagens conceituais. Ademais, Stein et al. (2008) buscam dizer-nos que, por trás das cinco práticas, está um planejamento consciente e atento do professor que envolve a seleção da tarefa, as antecipações de múltiplas e prováveis respostas, as contribuições aos alunos, os objetivos bem definidos e a tomada de decisões “[...] sobre como estruturar as apresentações dos alunos para promover sua agenda matemática para a aula” (STEIN et al., 2008, p. 321, tradução nossa[121]). Por outro lado, esses pesquisadores nos chamam atenção para o fato de que essas cinco práticas podem ocorrer se estiverem apoiadas na compreensão dos professores sobre o pensamento e as práticas matemáticas atuais dos alunos em suas salas de aula. Assim, é essencial um planejamento cuidadoso antes das aulas, discussões coletivas e que os professores observem, escutem os estudantes e procurem conhecer e compreender seus alunos. Por todos esses motivos é que, para o desenvolvimento deste segundo bloco de tarefas, fundamentamo-nos metodologicamente em Stein et al. (2008).

Conforme assinalamos acima, esses pesquisadores destacam que uma tarefa orientada pela discussão matemática em toda a classe geralmente acontece em três fases e denota cinco práticas de professores para conduzi-las. Apresentamos no quadro 6 as fases e as práticas a elas correspondentes. Por apresentar uma correspondência construída por nós a partir da literatura (STEIN et al., 2008) e das aulas que desenvolvemos na licenciatura, o quadro se amplia para as três próximas páginas consecutivas.

[121] [...] about how to structure students’ presentations to further their mathematical agenda for the lesson.

Quadro 6 – Relação entre fases e práticas

FASES	CARACTERÍSTICAS	PRÁTICAS	CARACTERÍSTICAS
Apresentação de um problema matemático	O problema é apresentado pelo professor. Ele, o problema, deve (a) incorporar importantes ideias matemáticas e (b) apresentar várias possibilidades de resolução. O papel do professor nesta fase é apresentar o problema, as ferramentas disponíveis para o trabalho com ele e a natureza das respostas que os alunos deverão produzir.	Antecipar	- Espera-se dos professores um esforço para "visualizar ativamente como os alunos podem abordar matematicamente as tarefas instrucionais em que serão solicitados a trabalhar" (STEIN et al., p. 322, tradução nossa[122]); - "[...] antecipar respostas dos estudantes envolve desenvolver expectativas consideradas sobre como os alunos podem interpretar matematicamente um problema, o conjunto de estratégias – corretas e incorretas – que podem ser usadas para enfrentá-lo e como essas estratégias e interpretações podem estar relacionadas aos conceitos matemáticos, representações, procedimentos e práticas que o professor gostaria que seus alunos ou alunas aprendessem" (STEIN et al., 2008, p. 322-323, tradução nossa[123]); - "[...] exige que os professores, no mínimo, realmente façam as tarefas matemáticas que planejam pedir a seus alunos. No entanto, em vez de encontrarem uma única estratégia para resolver um problema, os professores precisam criar e trabalhar com tantas estratégias de solução diferentes quantas eles puderem [pensar e elaborar]" (STEIN et al., 2008, p. 323, tradução nossa[124]). - Podem antecipar também as maneiras pelas quais o enunciado pode ser interpretado ou mal interpretado e em quais momentos os alunos poderão ficar confusos ao longo da resolução.
Exploração	Os estudantes trabalham no problema, discutem em pares ou pequenos grupos, são encorajados a resolvê-lo de "forma que faça sentido para que eles estejam preparados para explicar sua abordagem aos outros da turma" (STEIN et al., 2008, p. 316, tradução nossa[125]).	Monitorar	- "[...] envolve prestar muita atenção ao pensamento matemático no qual os alunos se envolvem enquanto trabalham em um problema [...]" (STEIN et al., 2008, p. 326, tradução nossa[126]); - Acontece enquanto os alunos trabalham na tarefa e o professor circula pela sala; - Tem o objetivo de "identificar o potencial de aprendizagem matemática de estratégias particulares ou representações usadas pelos alunos, aprimorando, assim as respostas [deles] que seriam importantes para compartilhar com a turma como um todo durante a fase de discussão" (STEIN et al., 2008, p. 326, tradução nossa[127]); - É essencial que o professor atente às ideias matemáticas que estão em jogo durante o trabalho. Isso quer dizer que ele deve "participar ativamente [...] do que os alunos estão dizendo e fazendo, avaliar a

---

[122] [...] an effort to actively envision how students might mathematically approach the instructional tasks(s) that they will be asked to work on […].
[123] Anticipating students' responses involves developing considered expectations about how students might mathematically interpret a problem, the array of strategies—both correct and incorrect—they might use to tackle it, and how those strategies and interpretations might relate to the mathematical concepts, representations, procedures, and practices that the teacher would like his or her students to learn […].
[124] [...] requires that teachers, at a minimum, actually do the mathematical tasks that they are planning to ask their students to do. However, rather than finding a single strategy to solve a problem, teachers need to devise and work through as many different solution strategies as they can.
[125] [...] in whatever way makes sense to them and be prepared to explain their approach to others in the class.
[126] [...] involves paying close attention to the mathematical thinking in which students engage as they work on a problem […].

			validade matemática das ideias [deles] e entender o pensamento matemático dos alunos mesmo quando algo está errado (STEIN et al., 2008, p. 326, tradução nossa[128]); - O professor sentir-se-á mais bem preparado para monitorar o que os alunos estão fazendo, quando antecipar possíveis estratégias de resolução. No entanto, ainda assim, pode ser um momento desafiador pelo fato de os alunos apresentarem talvez estratégias não antecipadas e, portanto, que não lhe sejam familiares; - Ao ouvir conversas entre os estudantes, o professor pode avaliar o pensamento matemático deles e fazer perguntas que ajudem na compreensão deles acerca dos principais conceitos relacionados ao objetivo da tarefa.
		Selecionar	- Após o monitoramento das respostas, o professor pode selecionar alguns alunos para compartilhar seu trabalho com os demais. Devem ser selecionados aqueles estudantes cujas respostas podem ajudar na construção do pensamento matemático ou fornecer pistas de conhecimentos matemáticos; - A seleção intencional de estudantes "torna mais provável que ideias matemáticas importantes sejam discutidas pela turma" (STEIN et al., 2008, p. 328, tradução nossa[129]), para evitar que a turma focalize em ideias superficiais ou simples, e também evitar que os alunos se dispersem e/ou fiquem à mercê de dialogar sobre quaisquer estratégias que sejam apresentadas; - Professores também podem garantir que conceitos equivocados sejam comentados publicamente, entendidos e corrigidos para que os estudantes compreendam por que e como o raciocínio não funciona; - Caso necessário, o próprio professor pode introduzir uma estratégia que considera importante e que nenhum aluno tenha usado. Pode ser uma estratégia de aluno de outra turma ou pode ser uma estratégia do professor. Outra forma de o professor ampliar o repertório de estratégias é "oferecer apoio instrucional, durante a fase de exploração aos alunos que parecem estar prestes a implementar uma abordagem única e importante para resolver o problema, mas que precisam de ajuda para serem realmente capazes de conseguir isso e efetivamente compartilharem com seus colegas" (STEIN et al., 2008, p. 328, tradução nossa[130]).

[127] [...] to identify the mathematical learning potential of particular strategies or representations used by the students, thereby honing in on which student responses would be important to share with the class as a whole during the discussion phase […].
[128] […] actively attend […] what students are saying and doing, assess the mathematical validity of students' ideas, and make sense of students' mathematical thinking even when something is amiss […].
[129] [...] makes it more likely that important mathematical ideas will be discussed by the class.
[130] [...] is to offer instructional support during the explore phase to students who appear to be on the verge of implementing a unique and important approach to solving the problem, but who need some help to be able to actually achieve that and effectively share it with their classmates.

Discussão com a turma inteira	Nesta fase, acontecem a discussão e a síntese das várias abordagens feitas pelos alunos para resolver o problema.	Sequenciar	- Após a seleção dos alunos, o professor decide sobre a sequência das apresentações deles. “Ao fazer escolhas intencionais sobre a ordem em que o trabalho dos alunos é compartilhado, os professores podem maximizar as chances de que suas metas matemáticas para a discussão sejam alcançadas” (STEIN et al., 2008, p. 329, tradução nossa[131]); - “Assim, em vez de ficarem à mercê de quando os alunos contribuem com uma ideia para uma discussão, os professores podem selecionar os alunos para apresentar em uma sequência específica e tornar a discussão mais coerente e previsível matematicamente” (STEIN et al., 2008, p. 330, tradução nossa[132]).
		Conectar	- Objetiva “ajudar os alunos a estabelecer conexões entre as ideias matemáticas que são refletidas nas estratégias e representações que eles usam” (STEIN et al., 2008, p. 330, tradução nossa[133]); - Professores podem: a) “[...] ajudar os alunos a fazer julgamentos sobre as consequências de diferentes abordagens para a variedade de problemas que podem ser resolvidos, a precisão e a eficiência em resolvê-los e os tipos de padrões matemáticos que podem ser mais facilmente discernidos” (STEIN et al., 2008, p. 330, tradução nossa[134]); b) auxiliá-los a ver como a mesma ideia pode ser incorporada em mais de uma estratégia que, à primeira vista, parecia bastante diferente; c) aludir, entre duas apresentações, a algumas maneiras pelas quais as estratégias e as ideias matemáticas dos dois alunos podem ser semelhantes ou diferentes umas das outras nos tipos de representações, operações e conceitos usados; d) pedir que os alunos identifiquem o que é semelhante/diferente em duas ou mais representações. “Todas essas formas de ajudar os alunos a conectar suas respostas matemáticas umas com as outras podem ajudar a tornar as discussões mais coerentes. Ao mesmo tempo, fazer isso pode levar os alunos a refletir sobre as ideias de outros alunos enquanto avaliam e revisam as suas próprias” (STEIN et al., 2008, p. 331, tradução nossa[135]); - Os professores podem fazer perguntas que exijam flexibilidade do conhecimento e planejar e propor tarefas adicionais mais elaboradas.

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras.

---

[131] By making purposeful choices about the order in which students’ work is shared, teachers can maximize the chances that their mathematical goals for the discussion will be achieved.

[132] Thus, rather than being at the mercy of when students happen to contribute an idea to a discussion, teachers can select students to present in a particular sequence to make a discussion more mathematically coherent and predictable.

[133] [...] help students draw connections between the mathematical ideas that are reflected in the strategies and representations that they use […].

[134] [...] help students make judgments about the consequences of different approaches for the range of problems that can be solved, one’s likely accuracy and efficiency in solving them, and the kinds of mathematical patterns that can be most easily discerned.

[135] All of these ways of helping students to connect their mathematical responses with each other can help make discussions more coherent. At the same time, doing this can prompt students to reflect on other students’ ideas while evaluating and revising their own […].

Vimos, no quadro anterior, que as práticas decorrem sequencialmente em momentos distintos relacionados ao planejamento (antecipar) e à discussão propriamente dita em sala de aula (monitorar, selecionar, sequenciar e conectar). A primeira prática “antecipar” consiste no planejamento e organização da discussão que acontecerá com base nas práticas posteriores. Aqui, o trabalho centra-se essencialmente no professor, que deve (i) buscar examinar o problema de forma neutra, para identificar possíveis interpretações corretas e equivocadas acerca do enunciado; (ii) resolver o problema proposto para elencar prováveis respostas às tarefas, trabalhando com o maior número de estratégias diferentes de solução, evitando que elas sejam vistas como mais maneiras de resolver melhor o problema dado (STEIN et al., 2008). Além disso, em face das estratégias antecipadas, o professor pode prever dificuldades e pensar antecipadamente em diversas formas para enfrentá-las e ultrapassá-las se possível. Por outro lado, o professor também precisa estar preparado para imprevistos e ideias dos alunos que ele não tenha pensado antecipadamente.

Durante a primeira fase, o problema matemático é apresentado pelo professor aos estudantes que são orientados a trabalhar nele. Desse modo, o professor encontra subsídios para conduzir os alunos, observando como exploram a tarefa, como interpretam o enunciado, as estratégias que usam, os conceitos que mobilizam, as dificuldades e erros que emergem. Ademais, o professor identifica ideias matemáticas importantes que merecem ser selecionadas e analisadas com a turma toda. Da mesma forma, pensa na sequência em que os alunos devem apresentá-las para posteriormente conectá-las e construir imagens do conceito mais adequadas à matemática.

Retomando a primeira fase no que diz respeito ao ato de incorporar ideias matemáticas importantes ao problema e apresentar possibilidades de resolução para o mesmo, os estudos de Polya (1973), Santos (1997), Santos-Wagner (2008), Van de Walle (2009) e Zanon (2011) foram imprescindíveis à nossa prática de antecipar. Ao incorporarmos ideias matemáticas importantes ao problema, apoiamo-nos em Van de Walle (2009), quando disserta sobre o planejamento de atividades baseadas em resolução de problemas. Ele propõe nove passos para que os professores pensem sobre a escolha das tarefas e como serão apresentadas aos alunos. Os quatro primeiros passos, “comece com a matemática, tenha em mente seus alunos, escolha uma tarefa e antecipe o que vai acontecer,” compõem o conjunto de decisões de conteúdo e tarefas. Os demais quatro passos, “articule as responsabilidades, planeje as atividades da fase "antes", "durante" e "depois""[136], compreendem as decisões pedagógicas. O último passo, escrever o plano, diz respeito à formalização escrita do plano de aula. Por isso, Van de Walle (2009) a denomina plano completo, ao entender que, nesse momento, o professor já tomou decisões críticas sobre os demais oito passos anteriores e sobre quem e como quer avaliar.

No planejamento da prática de antecipar, consideramos os quatro primeiros passos propostos por Van de Walle (2009) em virtude das relações estabelecidas com as ideias de Stein et al. (2008). Pensando na matemática e nos licenciandos, construímos o quadro 7, no qual apresentamos um panorama de nossas decisões de conteúdo e tarefa, como também visibilizamos indagações e expectativas empregadas na escolha da tarefa, pois o conteúdo já estava prescrito na ementa da disciplina.

Tais decisões exigiram que mobilizássemos conhecimentos de combinatória e refletíssemos acerca do que sabíamos sobre ensinar combinatória para futuros professores de matemática durante todo o estudo definitivo. Ou seja, pensamos e refletimos sobre nossos conhecimentos e sobre o que sabíamos para ensinar quando planejamos tarefas, implementamos e discutimos com estudantes em aulas, lemos o que foi transcrito e escutamos o que foi gravado. Os vários diálogos entre pesquisadora e orientadora, e entre pesquisadora e professora da disciplina durante as aulas e os diálogos posteriores nas etapas de análise de dados e escrita deste relato final da pesquisa estiveram sempre norteados por estes pensamentos e reflexões. O quadro 7 denominado "Panorama de decisões acerca de conteúdo e tarefa" será apresentado na página seguinte para fornecer uma visão geral do todo, das expectativas e questionamentos considerados durante o planejamento.

[136] Para Van de Walle (2009), ensinar pela resolução de problemas pressupõe um formato de aula em três fases: antes, durante e depois. A fase *antes* consiste na preparação do aluno para o trabalho com a tarefa; já a fase *durante* é o momento em que os alunos trabalham na tarefa; e, por fim, na fase *depois*, os alunos compartilham e debatem as soluções encontradas e o professor sintetiza as principais ideias.

Quadro 7 – Panorama de decisões acerca de conteúdo e tarefa

INDAGAÇÕES	EXPECTATIVAS
i) Quais eram nossas intenções com os licenciandos?	- Saber o que pensavam sobre combinatória e como resolviam problemas simples que envolvem um só tipo de cálculo sustentado por operações aritméticas elementares de adição e/ou multiplicação, base para os princípios aditivos e multiplicativos nos quais a combinatória se fundamenta. - Conhecer licenciandos em termos de conhecimentos combinatórios: o que sabem ou não; o que falam que sabem; que argumentos demonstram; e que experiência relatam que já tiveram com ela.
ii) Que problema ajuda a evocar imagens conceituais de combinatória anteriores à licenciatura?	- Selecionar um problema de pensamento combinatório aditivo e/ou multiplicativo para que o licenciando consiga resolvê-lo, se sinta estimulado, não desista ou pense que a tarefa é difícil, que a disciplina será complicada e que ele não conseguirá cursá-la.
iii) Quais questões nós poderíamos incorporar ao problema para que imagens conceituais de combinatória possam ser evocadas?	- Elaborar questões complementares que ajudem a suscitar imagens conceituais dos estudantes, tais como: • O que vocês pensam que deve ser feito para representar a situação dada? • Suponha que a família de Beto quer ir e voltar pelo mesmo caminho. De quantos modos diferentes eles podem ir e voltar pelo mesmo caminho? Quais são esses caminhos? • Agora suponha que eles querem ir por um caminho e voltar por outro. Quantos e quais caminhos ele pode percorrer? • Qual o conceito envolvido nesse problema? Por quê? • Elabore outro problema com a mesma ideia do problema dado. • Avaliação da aula: O que você poderia dizer sobre a aula de hoje?
iv) Quais estratégias poderiam ser usadas para resolver o problema? Que imagens conceituais elas evidenciam?	- Resolver o problema, antecipar e comentar possíveis estratégias que possam ser usadas pelos alunos durante a resolução. - Conhecer estratégias usadas pelos estudantes, quais conhecimentos matemáticos evidenciam e quais imagens conceituais evocam enquanto trabalham na tarefa.
v) Como identificam o conceito subjacente ao problema?	- Conhecer conceitos matemáticos identificados pelos licenciandos no problema dado. - Identificar atributos mencionados, conceitos relacionados a eles e argumentos usados para justifica-los.
vi) Que imagens conceituais de combinatória podem ser evocadas quando os estudantes elaboram um problema com o mesmo conceito empregado naquele que foi resolvido?	- Identificar imagens conceituais evocadas quando trabalham em uma tarefa de formulação de problemas. - Observar se imagens evocadas anteriormente são reforçadas. - Verificar se o conceito matemático subjacente ao problema foi identificado e utilizado na elaboração deste novo problema. - Identificar se problemas elaborados se relacionam aos protótipos mencionados durante o primeiro bloco de tarefas.

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras.

5.2.3 Análise dos dados obtidos com as tarefas do bloco 1

Discutimos a seguir os resultados obtidos quando os licenciandos trabalharam no primeiro bloco de tarefas específicas. Ele compunha-se de quatro questões [O que você entende por análise combinatória? Como você definiria arranjo, combinação e permutação? O que você acha que aprendeu de análise combinatória no ensino médio? Justifique sua resposta. Você gostou de estudar análise combinatória no ensino médio? Por quê?], cujas respostas podem ser observadas no quadro 8 apresentado mais adiante como uma síntese geral das imagens iniciais dos sete licenciandos. Com base nas categorias apresentadas anteriormente [imagem conceitual da definição do conceito; imagem do ensino e da aprendizagem de combinatória; imagem conceitual de outro conceito matemático], analisamos e comentamos as imagens evocadas individualmente pelos estudantes. Elas foram organizadas com os elementos que nos permitiam compreender cada uma delas.

5.2.3.1 Imagem conceitual da definição do conceito[137]

Possíveis imagens conceituais da definição do conceito de combinatória e dos agrupamentos arranjo, permutação e combinação foram percebidas especialmente nas respostas dos licenciandos às questões 1 e 2. Por isso, sublinhamos nas respostas dos estudantes os trechos que nos auxiliaram a identificar detalhes das imagens conceituais deles. Um argumento comum subentendido das respostas foi a ênfase dada à ideia de combinar como uma ação necessária à busca de resultados aos problemas propostos. Percebemos que havia, nas respostas de Alex, Alice, Felipe, Geane, Isis, Joice e Vini à primeira questão, uma referência à combinatória como parte da matemática, uma disciplina, um conteúdo do ensino médio e/ou um estudo relacionado à ideia de combinar.

No retorno em 2018, Joice, por exemplo, destacou que se lembrava claramente do conteúdo prescrito na grade curricular do ensino médio com o nome “Análise Combinatória”. Na mesma ocasião, Geane afirmou que, quando respondeu à questão 1, ela não sabia o significado de combinatória e, por isso, disse: *“Eu estudei o conteúdo no Ensino Médio, durante a 2.ª série/2013, lembro que tinha os termos ‘permutação’ e ‘combinação’ não me recordo dos seus significados”*. Ressaltou que atualmente tem uma definição não formal e que ela construiu a própria definição no desenrolar das aulas em 2017.

---

[137] Informamos que trazemos interpretações das tarefas respondidas em 2017 e depois das entrevistas realizadas sobre essas mesmas tarefas em 2018.

Nas respostas dos licenciandos Alex, Alice, Felipe, Isis e Vini à questão 1, encontramos os argumentos “fazer o máximo de combinações possíveis, conhecer possibilidades de combinações, combinar objetos e situações e analisar as possibilidades em determinadas situações”. Para nós, esses argumentos parecem estar relacionados a alguma utilidade ou objetivo da combinatória. Alex e Vini parecem ainda ter evocado imagens conceituais da definição, ao rememorarem a noção de conjunto vista nos argumentos “combinações de elementos de quaisquer conjuntos de objetos e combinações entre dois conjuntos distintos”. No retorno realizado em 2018, Alex, por exemplo, informou que sua resposta à questão 1 não mudaria muito, conforme se observa no relato a seguir:

> ***Alex:*** *Quando a gente resolve um problema de análise combinatória, em geral a gente quer conhecer as combinações. Talvez não as combinações, né, de repente, quantas combinações pelo menos, né, não necessariamente quais. Aqui eu acho que eu não deixei muito claro isso, né* [referindo-se à resposta dada em 2017]. *A questão de quantidade. Eu penso que seria basicamente isso. Continuo entendendo dessa forma.*
> ***Pesquisadora:*** *Só combinação?*
> ***Alex:*** *É... quando eu penso em combinação eu tô falando aqui não em combinação no sentido de combinação mesmo, lógico que tem arranjo e permutação. Mas eu tô agregando todo mundo aí no barco. Entendeu? No estudo da análise combinatória eu estou pensando em combinação, mas levando em conta a combinação mesmo, os arranjos tão aí, permutações e outros tipos de combinações, vamos dizer assim, mas não... necessariamente só a combinação (Em 11/10/2018).*

Ao observarmos as considerações de Alex durante o retorno em 2018, notamos que a expressão “quantas combinações” indica a noção de contagem dos subconjuntos formados, e não necessariamente a listagem de quais seriam esses subconjuntos. Por outro lado, o estudante mostra que o termo combinação é empregado no sentido de unir partes de um conjunto ou de uma sequência segundo algum critério, e assim decidir sobre o modelo combinatório que está por trás, seja um arranjo, permutação ou combinação. Por fim, quando afirmou “outros tipos de combinações” ele forneceu pistas de que sabia da existência de mais de um tipo de combinação. Além disso, parece que ele nomeou os possíveis tipos de agrupamentos (arranjo, permutação e combinação) de combinação. Isso pode ser uma questão importante porque ele usa um termo específico para designar um conceito mais geral e amplo.

Geane, em sua resposta à questão 1, citou que em combinatória existe permutação e combinação que foram designadas por ela como termos, de cujos significados ressaltou não se recordar. Joice informou também que arranjo, combinação e permutação são conteúdos de combinatória. Ademais, elas não mencionaram que eram agrupamentos ou operações conforme sugere a literatura matemática. Elas os consideraram como um tema, assunto ou conteúdo estudado na disciplina.

Ao responder à questão 3 [O que você acha que aprendeu de análise combinatória no ensino médio?] e justificar sua resposta, Geane pareceu ter evocado uma imagem conceitual relacionada à utilidade/objetivo da combinatória. No quadro 8, veremos que a licencianda relatou ter aprendido a calcular possibilidades totais de posicionamentos de termos. Assim, a combinatória pareceu mostrar-se útil para atingir esse determinado fim. Geane explicou melhor essa ideia quando retornamos com os dados. Na ocasião, assim assinalou:

> *Então, na época que eu estudei [no ensino médio] eu entendia que alguém <u>queria saber quantas possibilidades poderia ocorrer com aquela regra</u>, né, com aquela determinação que o problema deu. Por isso, que <u>eu falei calcular o valor total</u>, o valor de <u>quantas possibilidades possíveis que eu consigo ordenar aqueles termos</u> (Em 18/10/2018).*

Quando ela respondeu que *"queria saber quantas possibilidades poderia ocorrer com aquela regra"*, pareceu mostrar que ela mesma sabia que a combinatória se relacionava às operações de contagem designadas por *quantas*. Demonstrou saber também que, para resolver problemas de contagem, há que se considerar a regra, a determinação que o problema deu. Isso mostra que Geane compreendia que problemas de combinatória trazem algumas condições cuja identificação ajuda a contar o número de total de possibilidades, apontando, assim, o modelo combinatório implícito no problema.

Outro ponto que nos chamou a atenção no fragmento de Geane foi "*consigo ordenar aqueles termos*". O argumento dela parece remeter à característica ordem relacionada à identificação do tipo de modelo combinatório subjacente ao problema. Refere-se a arranjos ou permutações em que a ordem com que os elementos são alocados em uma sequência, geram novas e outras possibilidades. Geane nos informou que não estava tratando da ordem das possibilidades e sim da quantidade de possibilidades que ela poderia obter a partir de uma determinada regra (condição) estabelecida no enunciado do problema. Assim entendido, Geane parece reafirmar a imagem conceitual da definição do conceito relacionada a algum agrupamento, conforme mencionada por ela anteriormente na questão 1.

Ao responder às questões 3 e 4, Alice evocou novamente algumas imagens evidenciadas quando respondeu à questão 1. Por isso, consideramos que ela reafirmou imagens conceituais da definição do conceito da combinatória em si e de seu objetivo/utilidade. A primeira, indicada pelo termo "disciplina", aparece em ambas as respostas. Isso quer dizer que a licencianda parece ter uma imagem conceitual forte de que a combinatória é uma disciplina. Na sequência, mencionou, mais uma vez, que a combinatória ajuda a "fazer combinações". Assim, parece reforçar a utilidade da disciplina já evocada em sua resposta à questão 1. Suas respostas mostram que questões distintas podem evocar imagens próximas, quiçá iguais às anteriores e, assim, denotar quão forte são as imagens conceituais construídas ao longo da educação básica. Além dessas imagens reafirmadas, a estudante evocou que a combinatória se associa à noção de conjuntos, ao afirmar que aprendeu, em combinatória no ensino médio, a “pegar, por exemplo, um conjunto de algo”.

Sobre a imagem conceitual da definição do conceito de combinatória, aferimos que as relações estabelecidas pelos licenciandos advêm principalmente de suas memórias anteriores ao curso de licenciatura. Há uma forte sinalização da presença desse conteúdo principalmente na 2.ª série do ensino médio. Ao denotar a combinatória como parte da matemática, Felipe evoca uma definição coerente com a literatura matemática (PAIVA, 2009; MORGADO et al., 1991) mencionada em nossas categorias de análise. Além disso, algumas respostas indicam para um dos objetivos da combinatória que se refere à sua utilidade para a obtenção de métodos de contagem (HAZZAN, 1993; PAIVA, 2009; MORGADO et al., 1991).

Embora os licenciandos não o tenham mencionado declaradamente, a ideia de utilidade esteve subjacente em suas respostas à questão 1. Isso apontou uma visão utilitária da combinatória que se mostra arraigada às suas concepções de matemática. Ernest (1988) destaca que concepções são filosofias pessoais implícitas que exercem forte influência nos modelos de ensino e de aprendizagem de matemática empregados por professores. Enfatiza que a matemática pode ser compreendida com base em três filosofias distintas: instrumentalista, platonista e resolução de problemas. Nelas, a matemática é vista, respectivamente, como (1) um conjunto de fatos, regras e procedimentos independentes e utilitários; (2) pronta e acabada; o conhecimento é de natureza prescritiva, determinada e não sujeito a controvérsias; (3) um campo dinâmico em constante expansão. Por isso, nessa terceira visão dinâmica, a matemática é pensada como um processo de investigação, de vir a conhecer, de ser construído e questionado, não como um conhecimento pronto e acabado (ZANON, 2011). Cada uma dessas filosofias de matemática implica em um (i) tipo de papel exercido pelo professor no planejamento e no desenvolvimento das aulas e na correção de tarefas e avaliações; (ii) resultado pretendido com o processo de ensino e de aprendizagem; no (iii) uso de material instrucional; e (iv) conduz o aluno a um comportamento ante a aprendizagem (ERNEST, 1988; SANTOS, 1997; ZANON, 2011).

Um argumento comum subentendido das respostas dos estudantes foi a ênfase dada à ideia de combinar como ação necessária à busca de resultados aos problemas propostos. Vê-se que eles apelaram para o atributo (HERSHKOWITZ, 1994) “fazer combinações” de/entre elementos de certos conjuntos. Embora relevante e coerente, esse atributo sozinho se mostra insuficiente para definir análise combinatória em sua totalidade e conforme sugere a literatura matemática. Limitar a combinatória a uma identificação de combinações impede que estudantes desenvolvam uma visão mais ampla do conteúdo.

Sobre os agrupamentos (arranjo, permutação e combinação) mencionados por Geane e Joice, destacamos que há certa divergência entre a literatura brasileira relacionada à combinatória. Para Hazzan (1993) e Paiva (2009), por exemplo, a combinatória compreende arranjos, permutações e combinações; no entanto, respeitadas as peculiaridades de cada agrupamento, concebem a permutação como um caso particular de arranjo. Para outros, como Morgado et al. (1991), a combinatória abrange combinações e permutações, e o arranjo nem sequer é mencionado. Diante desse cenário, concebemos que o professor precisa definir bem a literatura adotada por ele, compreender as ideias dos autores, principalmente dos matemáticos, conhecer que existem inconsistências conceituais e saber explicar essas diferenças aos seus alunos.

Cinco estudantes, Alex, Alice, Felipe, Isis e Vini, ao responderem às questões 1, 3 e 4, não se posicionaram em relação aos agrupamentos. Isso nos mostrou que o fato de elaborarmos uma questão específica para tratar deles centralizou as respostas desses estudantes. Portanto, não podemos afirmar que, na ocasião, tais imagens foram praticamente inexistentes. Por outro lado, ainda nos questionamos sobre os motivos pelos quais não evocaram tais agrupamentos. Ernest (1988) ajuda-nos a pensar nessa questão e informa que, para além do conhecimento de conteúdo (SHULMAN, 1986; 1987), o que está em xeque são as crenças e concepções acerca de matemática (THOMPSON, 1997) e em nosso caso, as crenças e concepções sobre combinatória. Exemplifica destacando que dois professores podem ter o mesmo conhecimento: um pode ensinar matemática para resolver problemas; e, o outro pode desenvolver uma abordagem mais didática. Assim, evidenciamos que, embora, durante o processo de ensino e aprendizagem, licenciandos recebam os mesmos tipos de conhecimentos, eles internalizam e relacionam os conhecimentos adquiridos e construídos em suas mentes de formas distintas. Assim, as aprendizagens e os usos que fazem desses conhecimentos são influenciados consciente e/ou inconscientemente por suas crenças e concepções e implicarão em um tipo de abordagem de ensino (GÓMEZ-CHACÓN, 2003; SANTOS, 1997, THOMPSON, 1997). Portanto, analogamente, cada um rememora ou evoca alguma imagem pessoal que faça sentido para ele no momento da leitura da questão e da emissão de uma resposta para ela.

Nesse caminhar, vimos que há uma relação entre o conceito (abstrato) e o seu nome (entidade linguística). Percebemos que, quando o nome conceitual foi visto pelos estudantes, a memória deles foi estimulada. Diante disso, evocaram uma imagem conceitual do conceito, e não a definição em si (VINNER, 2002; 2011). Notamos, ainda, que Tall e Vinner (1981) tinham, de fato, razão quando assinalaram a importância de propor outras questões em contextos diversificados. Por outro lado, vimos também que diferentes questões podem suscitar respostas distintas e semelhantes, tal como fez Alice.

Em relação à questão 2 – Como você definiria arranjo, combinação e permutação? –, procuramos identificar nas respostas dos estudantes algumas das características assinaladas na categoria 1 [imagem conceitual da definição do conceito]. Na literatura matemática, vimos que um dos atributos centrais que diferenciam os agrupamentos se relaciona à ideia de ordem e/ou natureza dos elementos que compõem as sequências e os subconjuntos formados. Assim, decidimos inicialmente localizar nas respostas dos licenciandos alguma imagem relacionada à ideia de agrupamento ordenado (arranjo e permutação) e não ordenado (combinação) (ver tabela 12). Ademais, comentamos posteriormente as imagens que observamos para além do atributo ordem.

Tabela 12 - Sobre arranjo

Alice:	*Penso ser um conjunto de "algo".*
Alex:	*Uma combinação de objetos em que <u>a ordem em que eles aparecem é relevante</u>.*
Felipe:	*Organização das possibilidades de combinação.*
Geane:	*[138]
Isis:	*É como se fosse uma árvore com várias ramificações; são as diversas opções de se combinar as variáveis.*
Joice:	*No arranjo [...] é quando se quer saber as possibilidades de algo acontecer, porém <u>não possui vagas para todos elementos</u>. [...] <u>a posição dos elementos, ordem</u>, [...] <u>é considerada</u>.*
Vini:	*Organizar elementos segundo um critério ou mais.*

Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2017.

Conforme assinalamos na tabela 12, Alex e Joice rememoraram imagens relacionadas à ideia de arranjo como um agrupamento ordenado. Os argumentos utilizados por eles mostram uma imagem coerente acerca da definição do conceito de arranjo simples. Quando Joice afirmou que "*não possui vagas para todos elementos"*, ela parece saber que, em um arranjo, apenas alguns elementos da sequência dada são considerados na resolução de um problema que envolve esse conceito. A resposta de Vini apresentada na tabela 12 faz referência às ideias de organizar e critério. Ao destacar que, em um arranjo, os elementos são organizados segundo alguns critérios, parece indicar que problemas de combinatória possuem

[138] Decidimos analisar e comentar as respostas de Geane posteriormente, pois ela não aferiu uma definição para cada um dos conceitos em questão.

certas condições que o caracterizam. Além disso, o termo organizar denota uma ordenação que é feita segundo alguns critérios. Desse modo, parece compreender que a ordem dos elementos é considerada nesse tipo de agrupamento.

Em relação à ideia de combinação presente nas respostas de Alex, Felipe e Isis, ela não se refere à combinação em si, mas remete à ideia de um tipo de agrupamento combinatório, conforme explicado anteriormente por Alex. Mais uma vez, este licenciando pareceu nomear os possíveis tipos de agrupamentos (arranjo, permutação e combinação). Neste caso, o arranjo foi nomeado como sendo uma combinação. Assim, reafirma sua imagem anterior ao usar um termo específico para designar um conceito mais geral e mais amplo.

Ao afirmar que arranjo é "*um conjunto de "algo"*, Alice fez uma associação à noção de conjunto, cuja ideia é explicada na resposta à questão 3. Ela informou que o conjunto de algo podem ser letras que compõem uma palavra ou roupas que são combinadas para que trajes sejam formados. Na tabela 10, observamos, ainda, que Isis apresentou uma estratégia de resolução de problemas de combinatória – *"É como se fosse uma árvore com várias ramificações [...]"* – para informar o que sabia de arranjo.

Embora, na literatura matemática, o arranjo possua uma definição, conforme assinalado anteriormente, quando apresentamos as categorias, os licenciandos não se valeram dela para explicar seu entendimento do conceito. Observamos, apenas nas respostas de Alex e Joice, uma referência a um atributo matemático formal que diz respeito à ordem em que os elementos aparecem em uma sequência. Isso nos mostra, mais uma vez, que, quando o nome conceitual foi visto pelos estudantes, a memória deles foi estimulada a emitir uma resposta (VINNER, 2002; 2011). Portanto, evocaram imagens cujas palavras se associam ao conceito, mas não o definem com precisão.

Os demais licenciandos forneceram uma ideia do que não seria um arranjo, com argumentos inconsistentes em relação à matemática. Segundo Tall e Vinner (1981), isso pode acontecer porque, quando um estímulo é recebido por uma pessoa, excita algumas vias sensoriais e inibe outras. "Dessa forma, diferentes estímulos podem ativar diferentes partes da imagem conceitual" (TALL, VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa[139]). Tal afirmativa quer dizer que, quando vemos ou ouvimos o nome de um conceito, nossa memória é estimulada e algo dele é mobilizado e evocado, tornando-se presente pelo exercício da memória. Mostra, portanto, que, embora conceitos sejam precisamente definidos, as realidades psicológicas das pessoas são diferentes. Além disso, "[...] uma estrutura cognitiva complexa existe na mente de

[139] In this way different stimuli can activate different parts of the concept image [...].

cada indivíduo, produzindo uma variedade de imagens mentais pessoais quando o conceito é evocado" (TALL; VINNER, 1981, p. 151, tradução nossa[140]).

Tabela 13 - Sobre permutação

Alice:	*Seria quantas vezes o conjunto (arranjo) se repete ou não. Essa palavra já ouvi falar, mas não me lembro ao certo o que seja.*
Alex:	*Trocar de posições entre elementos dispostos numa ordem.*
Felipe:	*Trocar a ordem e os elementos das combinações.*
Geane:	*
Isis:	*É o número de posições possíveis diante de algumas restrições; onde se multiplica todos os valores no final.*
Joice:	*Quantas maneiras uma 'palavra' pode ser escrita trocando as ordens das 'letras' e, considerando as repetições dessas 'letras'. Ou seja, tem vagas para todos os elementos.*
Vini:	*Troca de posições. De elementos, números, peças etc.*

Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2017.

As respostas "trocar de posição" e "trocar a ordem das letras" emitidas, respectivamente, por Alex, Vini e Joice, na tabela 13, mostram que eles compreenderam a permutação como um agrupamento ordenado em que a troca de posição, ordem, dos elementos dispostos em uma sequência gera novas e outras sequências. Portanto, diferenciam-se especialmente pela ordem. Nessa lógica, os argumentos mencionados por esses licenciandos apontam uma imagem coerente acerca da definição do conceito de permutação simples. Anteriormente, quando definiu arranjo, Joice afirmou que "*não possui vagas para todos elementos"*. No entanto, agora, ela afirmou que "*tem vagas para todos os elementos"*. Ela parece saber que, em uma permutação, todos os elementos da sequência dada são considerados na resolução de um problema que envolve o conceito.

Ao analisarmos a definição dada por Felipe – "*Trocar a ordem e os elementos das combinações"* – na tabela 13, observamos certa coerência com a ideia de permutação na expressão "trocar a ordem". No entanto, em uma permutação, não se alteram a ordem e os elementos, conforme foi assinalado pelo estudante. Troca-se, portanto, a ordem de todos os elementos que compõem a sequência. A parte final da resposta dá a impressão de que ele queria trocar também os elementos. E isso só foi clareado quando conversamos com ele durante o retorno em 2018.

---

[140] [...] and a complex cognitive structure exists in the mind of every individual, yielding a variety of personal mental images when a concept is evoked.

Alice, ao definir uma permutação, fez associação ao arranjo como se fosse um conjunto (ver tabela 13). Mesmo que tenha sido de maneira incipiente, ela forneceu pistas de que há uma relação entre os conceitos, pois, conforme comentado anteriormente, a permutação é vista como um caso particular de arranjo. Além disso, ela mesma reconheceu saber da existência do nome do termo, mas não rememorou seu significado. Os argumentos de Isis trazem a ideia de PFC – Princípio Fundamental de Contagem. Embora ela não tenha mencionado diretamente uma relação entre ele e a permutação, o PFC está na base da combinatória, principalmente da operação de permutação, visto que P = n!, ou seja, a ideia de fatorial como produto entre números naturais. Portanto, tais argumentos nos remetem à quantidade de posições possíveis de ser obtidas por meio da multiplicação de todas as quantidades envolvidas.

Mais uma vez, vimos que diferentes estímulos ativaram diferentes partes da imagem conceitual (TALL; VINNER, 1981) de cada estudante. Percebemos, ainda, que, embora haja uma definição formal para permutação, os licenciandos não se valeram dela para explicar seu entendimento do conceito. Assim como em arranjo, Alex, Joice e Vini focalizaram a ideia de agrupamento ordenado envolvendo a troca de posição dos elementos em uma sequência. Isso nos mostra novamente que o nome conceitual estimula a memória a emitir uma resposta (VINNER, 2002; 2011). Portanto, embora não tenham definido o conceito com precisão, evocaram imagens cujos termos rememoram o conceito.

Há que se observar, ainda, que Joice explicou o conceito por meio de um exemplo hipotético "*Quantas maneiras uma 'palavra' pode ser escrita trocando as ordens das 'letras' e considerando as repetições dessas 'letras'*. Vinner (2011) destaca o papel dos exemplos na formação de conceitos e afirma que, "[...] para formar[mos] o conceito em nossa mente, devemos construir uma classe de objetos (concretos ou abstratos) ou uma classe de ocorrências do conceito ao qual o nome do conceito deve ser aplicado" (p. 248, tradução nossa[141]). Assim, adquirem um papel fundamental em explicações, conforme aquela demonstrada por Joice.

---

[141] [...] to form the concept in our mind, we are supposed to construct a class of objects (concrete or abstract) or a class of occurrences of the concept to which the concept name is supposed to be applied.

Tabela 14 - Sobre combinação

Alice:	*Seria esse conjunto de 'algo' que pode ser 'agrupado' de forma que a combinação dos elementos desse conjunto (arranjo) possa se repetir ou não a fim de achar uma 'probabilidade'.*
Alex:	*<u>A ordem dos elementos é irrelevante</u>.*
Felipe:	*Agrupar elementos e objetos.*
Geane:	*
Isis:	*Posso tentar definir com um exemplo, onde em um cinema tem X poltronas e N pessoas. A combinação seria as diversas posições possíveis dessas pessoas sentarem; (homens com homens, mulher e homem, etc...)*
Joice:	*[...] na combinação é quando se quer saber as possibilidades de algo acontecer, porém não possui vagas para todos elementos. <u>Na combinação a posição dos elementos, ordem, não é considerada</u>.*
Vini:	*Combinar dois ou mais elementos segundo um ou mais critérios.*

Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2017.

Conforme definido pela literatura matemática, combinações são agrupamentos não ordenados. Portanto, pela própria definição, em um conjunto desse tipo a ordem não altera os subconjuntos formados. Desse modo, eles se diferenciam pela natureza dos elementos que os compõem. Essa ideia de agrupamento não ordenado foi concebida por Alex e Joice. As respostas deles mencionadas na tabela 14 mostram que a ordem dos elementos é irrelevante ou não é considerada. Embora a definição de Alice tenha sido confusa, ela retomou a ideia de arranjo, considerando-o novamente como um conjunto do qual provêm os diferentes agrupamentos. Assim, pareceu indicá-lo como um agrupamento mais amplo. Quanto às associações feitas à probabilidade (ver tabela 14), argumentou, no retorno realizado em 2018, acreditar que, embora sejam disciplinas distintas, "elas sempre andam juntas, uma vai complementar a outra".

Felipe e Vini se valeram, respectivamente, dos termos agrupar e combinar, para definir combinação (ver tabela 14). Eles parecem estar relacionados à ideia de unir, juntar elementos. Além disso, Vini destacou que o ato de combinar é feito por meio de critérios. Assim, parece aproximar-se das ideias formais. Isis, ao definir combinação, destacou um exemplo – "*Posso tentar definir com um exemplo, onde em um cinema tem X poltronas e N pessoas. A combinação seria as diversas posições possíveis dessas pessoas sentarem; (homens com homens, mulher e homem, etc.)"* – para explicar seu entendimento do conceito. Mesmo não sendo coerente em termos estruturais, vimos, em Vinner (2011), que exemplos são parte das imagens conceituais e, portanto, auxiliam na formação de conceitos.

Ao ser solicitada a definir arranjo, permutação e combinação, Geane respondeu:

> *Não sei a diferença, sei que havia <u>situações que a posição importava</u> ou <u>que não podia repetir</u>. Eu <u>entendi muito isso no ensino médio</u>, <u>fiz vários exercícios do livro</u>*

> *<u>com exemplos de placas de carro</u>, <u>cartas de baralhos</u>, mas foi pouco significativo e já no trimestre seguinte eu 'descartei' este conhecimento (Em 11/8/2017).*

Geane, assim como os outros licenciandos, não definiu os conceitos com precisão. No entanto, ela retomou de sua memória alguns atributos relacionados a eles. Salientou que a posição dos elementos importava, referindo-se à ideia de ordenação. Além disso, mencionou que elementos não podiam repetir. Isso mostrou que Geane parecia saber que existiam agrupamentos simples, sem elementos repetidos e completos, cujos elementos podem ser repetidos mediante condições estabelecidas no enunciado do problema. Além disso, Geane afirmou ter entendido os atributos ordem e repetição, quando estudou no ensino médio. Tais argumentos se relacionam àqueles apresentados por ela em sua resposta à questão 1 [O que você entende por análise combinatória?], quando destacou ter estudado combinatória no ensino médio e rememorou os termos permutação e combinação aprendidos na ocasião.

Geane recordou também exercícios feitos durante o ensino médio que envolviam placas de carro e cartas de baralhos advindos do livro didático. Tais tarefas são tipicamente usadas quando se trabalha combinatória na educação básica e até mesmo no ensino superior. Assim como Joice e Isis, os exemplos trazidos por Geane explicaram e externalizaram suas memórias dos conceitos. O trecho final da resposta de Geane "*foi pouco significativo e já no trimestre seguinte eu 'descartei' este conhecimento"* deixou-nos inquietas. Assim, no retorno realizado em 2018, solicitamos que ela nos explicasse o que pretendia dizer com tais argumentos. Geane esclareceu que não entendia muito bem o que era estudado e ressaltou

> *Não tem quando você estuda algo, que você consegue fazer, mas não tem significado nenhum naquilo. Eu não conseguia relacionar aquilo com nenhuma outra coisa da matemática no momento, naquele momento, e... foi uma matéria de um mês, que depois que... passou um mês da matéria eu esqueci totalmente. Só lembrei quando eu precisei fazer o pré-vestibular, porque aí eu tive que voltar e estudar um pouco, mas aí foi bem básico mesmo, e depois disso, nunca mais se tocou naquele assunto. Não é como a geometria que vai sendo um estudo progressivo, né, foi só naquele momento ali e acabou!*

Com esse trecho, Geane, além de explicar seus argumentos, relatou a fragilidade do ensino de análise combinatória, algo já destacado em inúmeras pesquisas acerca do assunto. Ainda no retorno realizado em 2018, como Geane não havia caracterizado os conceitos anteriormente, estabelecemos o seguinte diálogo:

> ***Pesquisadora:*** *[...] a licenciatura te ajudou nisso...* [fala interrompida por Geane que tomou a palavra].
> ***Geane:*** *É... depois que eu fiz a matéria, eu consegui, assim, diferenciar todas essas definições de combinação, permutação, [...]. Então, antes da matéria, eu não tinha... não fazia a menor ideia, assim de... Eu tinha estudado sim, mas não foi algo que eu consegui assimilar.*
> ***Pesquisadora:*** *Entendi. E se você tivesse que... que falar, por exemplo, para mim brevemente o que quê é uma permutação, uma combinação, um arranjo, você conseguiria falar?*

> ***Geane:*** *Eu fiz o mapa mental, assim... são duas perguntas: se importa a ordem dos objetos e se utiliza ou não todos os elementos. Aí [...] permutação e arranjo [...] importa a ordem. A diferença dos dois é que um utiliza todos os objetos do conjunto e o outro não. Combinação e princípio de contagem, se eu não me engano, acho que não importa a ordem.*

Observamos, no fragmento assinalado, que Geane conseguiu emitir com segurança suas aprendizagens dos conceitos nesta disciplina do curso de licenciatura. Ela conseguiu nomear e explicar o significado de cada um deles. Mostrou também que refinou o atributo ordem, suprimiu a ideia de repetição e argumentou o número de elementos considerados em cada agrupamento.

Uma breve síntese

Ao longo da análise da categoria 1, vimos que as imagens conceituais não são estruturas rígidas e, portanto, podem (TALL; VINNER, 1981; TALL, 1988):

- não ser um todo coerente em todos os momentos;
- ser ativadas por diferentes estímulos;
- apresentar aspectos diferentes da definição formal do conceito e, por isso, conter fatores que estão em conflito com tal definição. Por isso, "[...] podem nem mesmo ser conscientemente observados pelo indivíduo, mas eles podem causar confusão em lidar com a teoria formal" (TALL; VINNER, 1981, p. 153, tradução nossa[142]).

Percebemos, ainda, que, apesar de, no ensino superior, os alunos precisarem de definições, pela crença de que elas ajudam na formação de imagens conceituais e na realização de algumas tarefas, não há como forçar alguém a usar uma definição nem para formar uma imagem nem para operar com ela em uma tarefa. Vinner e Hershkowitz (1980) assinalam que algumas definições são complicadas demais para serem abordadas. Por isso, elas se tornam inúteis. "Por outro lado, existem definições que fazem sentido, mas, no momento em que alguns exemplos específicos são dados pelo professor ou pelo livro [...], as definições podem ficar inativas ou ser esquecidas" (p. 178-179, tradução nossa[143]).

Por fim, salientamos que, em matemática, o conceito é considerado como abstrato, existente apenas na mente de alguém (VINNER,1983; 2002; 2011). A ele "é dado um símbolo

---

[142] [...] and may not even be consciously noted by the individual but they can cause confusion in dealing with the formal theory.

[143] On the other hand, there are some definitions that do make sense but the moment some specific examples are given by the teacher or by the book, they form the concept image [...] the definitions might become inactive or even be forgotten.

ou nome que lhe permite ser comunicado e ajuda na sua manipulação mental" (TALL; VINNER, 1981, p. 151, tradução nossa[144]). Geralmente são definidos com precisão, a fim de propiciar uma base firme à teoria matemática (TALL; VINNER, 1981). Assim, "adquirir um conceito significa formar uma imagem conceitual para ele. Saber de cor uma definição de conceito não garante a compreensão do conceito" (VINNER, 2002, p. 69, tradução nossa[145]).

5.2.3.2 Imagem do ensino e da aprendizagem de combinatória

Aqui focalizamos em imagens evocadas pelos licenciandos que pareceram relacionadas ao ensino e à aprendizagem de combinatória na educação básica. Desse modo, buscamos imagens que refletem conteúdo, aprendizagem e ensino. Ao responderem à questão 1, Geane, Joice e Vini apontaram que suas lembranças de combinatória decorrem de experiências anteriores no ensino médio. Destacaram que a combinatória aparece nesse nível de ensino. E, por isso, entendemos que evocaram uma imagem associada a um conteúdo curricular. Assim, consideramo-la como uma imagem sobre o ensino, na qual os licenciandos se posicionaram como aprendizes de combinatória.

É verdade que formalmente a combinatória é estudada na 2.ª série do ensino médio. Em documentos curriculares e em livros didáticos, há uma evidência muito grande de que, nesse nível de ensino, a combinatória aparece como um conteúdo novo e habitualmente ensinado de maneira instrumental, pois fórmulas são priorizadas. No entanto, a combinatória tende a ser ensinada desde o início da escolarização de modo superficial e sem dialogar ou questionar os conceitos envolvidos e as estratégias que se usam para resolver as tarefas. Isso é visto em orientações curriculares desde a educação infantil, quando sugerem tarefas associadas à noção de seriação, em livros didáticos destinados para crianças de anos iniciais do ensino fundamental, e, em tarefas que envolvem a multiplicação relacionada à ideia de combinatória. No entanto, mesmo que documentos e orientações curriculares sugiram que ideias de combinatória sejam exploradas e trabalhadas com crianças, nada garante que professores e educadores infantis tenham conhecimento de combinatória, conhecimento pedagógico de combinatória e conhecimento curricular que relacione combinatória e outros conhecimentos matemáticos (SHULMAN, 1987).

---

[144] [...] is given a symbol or name which enables it to be communicated and aids in its mental manipulation.
[145] [...] to acquire a concept means to form a concept image for it. To know by heart a concept definition does not guarantee understanding of the concept.

Ao responder à questão 4, Alex apreciou sua sensação ao se instruir em combinatória no ensino médio. Afirmou não ter gostado de estudá-la. Ao justificar sua resposta, destacou que seu "não gosto" estava associado ao fato de não conseguir interpretar problemas. No retorno em 2018, Alex reafirmou ao recordar a época: *"tinha muita dificuldade e eu acho que é uma dificuldade, talvez, geral, de interpretar para saber o que usar [...] isso me angustiava muito"*. Nesse momento, ele evidenciou uma atitude em relação à própria aprendizagem de combinatória. Dessa forma, parece ter evocado uma imagem do ensino como aprendiz de combinatória. A interpretação de enunciados de problemas de combinatória é complexa e está diretamente associada à compreensão de atributos (HERSHKOWITZ, 1994) que compõem os agrupamentos e do modelo combinatório implícito (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996) em cada problema. A dificuldade assinalada por Alex é igualmente evidenciada em pesquisas sobre o tema, e, talvez, justifique o fato desses estudos evidenciarem que muitos professores optam por ensinar combinatória de modo mais superficial e instrumental (SKEMP, 1976).

Assim como Alex, ao responder à questão 4, Geane foi incisiva, ao afirmar que não gostou de estudar combinatória no ensino médio. Evocou uma imagem do ensino como aprendiz de combinatória respaldada em sua ausência de recordação de alguma aprendizagem sobre o conteúdo estudado. Em seu argumento, Geane descreveu um ciclo prejudicial à sua aprendizagem: "não gostei de estudar – não lembro da matéria – se não lembro é porque não aprendi". De que Geane precisava para aprender combinatória? Será que, quando ela for lecionar, vai estudar e desenvolver aulas desse conteúdo ou vai optar por não o ensinar? Essas e outras questões merecem reflexões e considerações pelos professores formadores, pois implicam a aprendizagem pelo licenciando e, consequentemente, o ensino do conteúdo no exercício da docência. Em 2018, quando retornamos com os dados, Geane leu a questão e a resposta dada por ela e reafirmou:

> *Gostar eu não gostei mesmo não. Porque como eu falei é... na época as coisas não ficavam muito claras e então a gente acaba criando estratégias para resolver algum problema para não ficar reprovado, né, nas coisas (se referindo a conteúdo). E eu entendia a diferença [...] eu sabia até fazer as contas, os problemas lá, que eu acho que na época eram bem simples também, mas entender mesmo eu não entendia.*

Notamos, então, que Geane, assim como Alex, ao afirmar que "*as coisas não ficavam muito claras e então a gente acaba criando estratégias para resolver algum problema" pareceu* buscar compreender os conceitos, o modelo combinatório implícito, criar estratégias de como resolver cada tipo de problema. Embora buscasse tal compreensão na ocasião, a preocupação de Geane, assim como de outros estudantes, estava em decorar modelos e procedimentos de resolução para que ela não ficasse reprovada.

Alice, Felipe e Vini, diferentemente de Alex e Geane, informaram que gostaram de estudar combinatória no ensino médio. Essa evocação parece associada a uma satisfação, apreciação pessoal deles, ao se instruírem em combinatória nesse nível. As justificativas mencionadas por Alice e Vini remetem-nos a uma possível aprendizagem instrumental (SKEMP, 1976) de combinatória baseada no uso de fórmulas e procedimentos úteis à resolução de problemas. Ela apontou que estudar combinatória no ensino médio a fez descobrir a existência de fórmulas que ajudassem em cálculos de problemas desse tipo. Vini mostrou que sua aprendizagem de combinatória esteve mais relacionada à resolução de exercícios e à praticidade de descobrir as várias combinações. Essa ideia de praticidade também remete à utilização de fórmulas durante a resolução de tarefas, pois é o caminho mais rápido para chegar a uma possível resposta. Ele pareceu considerar esse fato muito interessante, e isso lhe causava certa euforia. Essa foi a primeira vez que o uso de fórmula foi mencionado como útil para a resolução de um problema combinatório.

No retorno dos dados em 2018, Vini, por exemplo, ao encerrar um diálogo com a pesquisadora, explicou:

> ***Pesquisadora:*** *[...] Aí quando eu te perguntei [...] o que você achava que aprendeu de combinatória no ensino médio [...] você me disse que estava mais ligado a exercícios. Teve mais alguma coisa que você lembra ou o que é que você quis dizer, assim, em relação a exercícios? Era para resolver? Fórmulas para resolver?*
> ***Vini:*** *[...] que eu me lembro lá, era mais voltado assim para exercício que a gente fazia assim na sala. A professora chegava ah... vamos fazer... no caso essas situações que eu descrevi mesmo (no exemplo dado ao responder à questão 3). É ... quantas possibilidades de cem... que não tem muitos exercícios desse jeito. Mas nesse sentido mesmo.*
> ***Pesquisadora:*** *Mas aí vocês eram estimulados a trabalhar como? Era lista e aí vocês faziam vários exercícios com a mesma ideia?*
> ***Vini:*** *Era repetindo mesmo nos exercícios para tentar memorizar e aprender. É porque assim, eu vou falar a verdade para você. Essa é a matéria que eu ainda tenho muita dificuldade. É a matéria que eu mais tenho dificuldade. Até assim, no ensino médio, eu tinha uma certa dificuldade em sistemas. Só que aí depois que eu entendi o esquema do sistema, essa daqui passou a ser o bicho de sete cabeças para mim. No entanto que foi até complicado passar aqui. [...] Esses exercícios aqui* (apontando os problemas que usou para exemplificar sua aprendizagem) *é assim, o mais comum da gente encontrar, né, na sala, e... era o que a gente mais fazia era esse tipo de exercício. Não tinha nada assim ... é... diferente das aulas tradicionais. Era mesmo fazer exercício repetindo, mesma ideia né de um exercício para outro. Por isso que lá, na época eu não tive tanta dificuldade, porque quando a coisa é muito assim, segue um mesmo caminho, fica fácil da pessoa, né, entender o que ele tem que fazer no próximo* (risos), *mas não significa que eu tenha entendido 100% a matéria. Aí nesse sentido que eu coloquei aqui no caso dessas resoluções desses exercícios mesmo.*

Tais fragmentos chamaram-nos a atenção pelo fato de que aprender uma fórmula e repetir procedimentos idênticos pode facilitar cálculos e trazer resultados rapidamente

(SKEMP, 1976). No entanto, aprender a compreender a estrutura de um problema de combinatória e a pensar em estratégias de resolução para além delas favorece a construção de imagens conceituais mais próximas dos conceitos matemáticos formais. Como visto, os argumentos dos licenciandos se associam diretamente às ideias de Skemp (1976) acerca do entendimento instrumental, que é muito útil quando se deseja resolver uma tarefa específica rapidamente com base no uso de determinadas regras. Neste caso, o entendimento refere-se à posse dessas regras e à capacidade de usá-las (SKEMP, 1976).

Além disso, destaca que: i) a matemática instrumental é mais fácil de aprender, pelo fato de fornecer respostas certas mais rapidamente e facilmente; ii) assim, "[...] as recompensas são mais imediatas e mais aparentes" (SKEMP, 1976, p. 8, tradução nossa[146]); e iii) envolve menos conhecimento matemático, tendo em vista que enfatiza o uso da regra/fórmula, por isso, muitas vezes, pode-se "[...] obter a resposta certa [de maneira] mais rápida e confiável [...]" (SKEMP, 1976, p. 8, tradução nossa[147]). Se pensados desse modo, os argumentos de Alice e Vini são muito coerentes, e a essência da combinatória perde lugar para a aplicação de regras. Assim, acaba passando despercebida durante a escolarização e à própria atividade humana.

Se, para Alice e Vini, uma aprendizagem instrumental fazia sentido, Joice não a via dessa maneira. Na resposta dada à questão 3, mencionou não se recordar de ter aprendido combinatória de forma significativa no ensino médio. Quando, em 2018, conversamos sobre sua resposta, informou-nos: "[o ensino médio] foi o lugar que eu lembro de ter estudado análise combinatória". Além disso, destacou que tal estudo não foi significativo: *"não foi um conteúdo que eu assimilei, foi um conteúdo que eu decorei para aquele momento e, depois do ensino médio, quando eu voltei para o PIBID eu tive que aprender análise combinatória para eu poder ensinar para os alunos porque eu já não me recordava mais"*.

Assim, Joice aparentou uma imagem do processo de ensino na qual se posicionou como aprendiz de combinatória. Parece evidenciar que o conteúdo lhe tenha sido ensinado de maneira superficial e instrumental (SKEMP, 1976) enquanto desejava uma aprendizagem relacional (SKEMP, 1976). Joice via uma dissonância entre o tipo de ensino recebido (instrumental) e a forma de entendimento (relacional) requerida por ela. Para Skemp (1976), esse desajuste é causa de conflito de aprendizagem, uma vez que o aluno tem o objetivo de entender relacionalmente [sabendo o que fazer e o porquê], enquanto o professor quer que

---

[146] [...] the rewards are more immediate, and more apparent.
[147] [...] get the right answer more quickly and reliably [...].

eles entendam instrumentalmente [apliquem "regras sem razão"]. Portanto, é considerado prejudicial em virtude de propósitos de ensino pensados pelo professor se distinguirem dos objetivos de aprendizagem requeridos pelos estudantes (SKEMP, 1976).

As justificativas de Felipe e Vini à questão 4 denotam que eles gostaram de estudar combinatória no ensino médio por este ser um conteúdo de matemática. Forneceram pistas de que apreciavam muito mais a matemática de modo geral do que a combinatória em si. Dessa maneira, parecem indicar a matemática como uma disciplina ampla em que o conteúdo de combinatória está incluído. Tem por base a experiência deles no ensino médio, quando a combinatória foi tratada como um conteúdo de matemática. Acerca disso, no retorno realizado em 2018, a pesquisadora e o licenciando Vini encerraram com o seguinte diálogo:

> ***Pesquisadora:*** *[...] você associou o seu gostar de combinatória ao gostar de matemática. É isso mesmo? Ou você... assim... você gosta mais da matemática do que da combinatória?*
> ***Vini:*** *Huuummm... então... Se fosse para classificar, assim, dentro da matemática as matérias que eu mais me identificasse, eu acho que essa* (referindo-se a combinatória) *seria uma das últimas, até mesmo de trigonometria.*
> ***Pesquisadora:*** *Essa seria uma das últimas...*
> ***Vini:*** *Por causa mesmo dessa questão de interpretação. Quando tem muitas possibilidades de interpretação dentro de um mesmo problema, é isso que dificulta pra mim entender. Entendeu? Tem problemas que está muito delimitadinho, tipo assim, você lê e você já vê qual que é o direcionamento da coisa e sabe o que você vai usar. Agora tem uns que sei lá... parece que vai linearmente assim... aí você chega lá no final e você não sabe: tá... mais aqui... tem que usar o que aqui?*
> *[...]*
> ***Pesquisadora****: [...] É... aqui* (apontando a resposta dele à questão 4)*... você me disse que gostou de estudar combinatória no ensino médio.*
> ***Vini:*** *Sim... Mas, porque lá foi dessa forma, né... lá como a gente usava mais dentro desses exercícios, era uma coisa... como é que eu posso explicar... né... não é uma rotina, mas existe um certo padrão: então assim, eu entendia como que era formulado, a ideia dos exercícios, o que é que ele estava pedindo e o que é que eu usava em cada situação e lá eu conseguia aplicar. Só que, se por exemplo, se eu pegasse um problema muito diferente do que eu estava aplicando naquele momento, que demandasse uma interpretação e essa interpretação não fosse igual, assim, como estou falando, específica, eu ia acabar ficando embolado.*

Essa forma de ver e entender a matemática e a combinatória pode interferir na maneira como esses futuros professores pensam e acreditam que ela pode e deve ser ensinada. Desse modo, é possível ver que esses licenciandos estão trazendo à tona parte de suas crenças e concepções sobre matemática e seu ensino. Além disso, Vini, assim como Alex, mostrou a dificuldade de interpretar enunciados de problemas de combinatória. Implicitamente pareceu ressaltar que houve uma diferença entre o ensino recebido na educação básica e aquele oferecido na licenciatura. Isso aparentou ter-lhe causado certa dificuldade, visto que havíamos planejado aulas que não repetissem os procedimentos de ensino da educação básica. Ao mencionar *"lá eu conseguia aplicar"*, Vini pareceu retomar a ideia da matemática instrumental: aplicar uma fórmula [talvez] é mais fácil!

Vimos que foi difícil para Vini ter que se comportar como estudante na licenciatura em uma posição de aprendiz diferente daquela do ensino médio, pois é comum que eles esperem que as aulas sigam um mesmo padrão. Ou seja, se o ensino sempre foi instrumental, o aluno fica esperando esse tipo de aula, que ele fosse sempre do mesmo jeito. Daí, quando muda a forma de ensino, as dúvidas aparecem. Por outro lado, mostrou que não desenvolvemos o ensino de modo similar, pois tem sido um grande desafio das pesquisas mostrar que, no ensino superior, outros elementos devem ser incorporados para além daqueles do ensino médio. Ademais, planejamos tarefas e discussões do estudo definitivo em 2017 de forma a incorporar as ideias de Stein et al. (2008), Van de Walle (2009) e Skemp (1976) para de fato provocar os estudantes a iniciarem um processo de aprendizagem de conceitos de combinatória que favorecesse também o entendimento relacional. Assim, já estávamos cientes de que nossas ações docentes na licenciatura seriam diferentes das ações dos professores de ensino médio.

Ao responder às questões 2 e 3, Alice disse não se recordar do que estudou na disciplina. No entanto, em sua resposta à questão 2, emitiu certa aprendizagem de combinatória, ao se esforçar para elaborar problemas que a exemplificassem. Por isso, categorizamos suas respostas como uma imagem do processo de ensino no qual ela se mostra como aprendiz de combinatória. Felipe, semelhantemente a Alice, pareceu fazer questão de esquecer o que estudou de combinatória anteriormente. Isso talvez tenha acontecido pelo fato de o conteúdo ter-lhe causado certa angústia que nem mesmo ele queria lembrar. Isso foi confirmado no retorno dos dados em 2018. Na ocasião, relatou que permanecia com a mesma resposta *"[...] não me lembro deste conteúdo no ensino médio"* e não conseguiria dizer que havia aprendido combinatória no ensino médio. Afirmou ser esse *"um problema que vem se arrastando até os dias de hoje [...] é um dos monstros que eu ainda tenho que aprender a lidar, na matemática, como professor"*.

Por outro lado, os argumentos de Felipe podem denotar uma imagem de si mesmo como aprendiz de análise combinatória. Tal imagem foi percebida quando informou, durante o retorno, que se recordava vagamente do conteúdo. Ressaltou: *"[...] eu não sei se isso foi visto no terceiro ano de uma forma bem rápida, ou não, mas... é uma coisa que eu me lembro vagamente. Não é uma coisa que posso dizer assim: ah, eu estudei concretamente!"*. No entanto, assim como Alice, Felipe demonstrou, em 2018, certa aprendizagem de combinatória que fora construída anteriormente à licenciatura. Destacou lembrar-se *"de algumas noções do* *conteúdo. Fórmulas eu não lembrava [...] em combinatória quando você vai ensinar pra um aluno do ensino médio você usa muito questão de dados, combinações entre cartas. Eu lembrava que já havia feito isso, agora onde e quando, não"*. No caso desses dois alunos, a imagem parece ter sido evocada como uma justificativa para dificuldades ou equívocos construídos com base em modelos de ensino e aprendizagem.

Alice e Vini também se empenharam para exemplificar o que aprenderam de combinatória no ensino médio. Ambos, ao responderem à questão 2 [O que você acha que aprendeu de análise combinatória no ensino médio?], mencionaram exemplos de problemas que consideraram relevantes para justificar sua aprendizagem. Alice estruturou sua justificativa com base em dois problemas, um dos quais envolvendo a ideia de anagramas, problema típico de permutação se referia à troca de letras de uma palavra: "*aprendi a pegar [...] um conjunto de algo, (letras de uma palavra – AMOR) e descobrir a probabilidade de combinações de escrever essa palavra sem repetir as letras, mudando suas posições"*. Outro exemplo mencionado por Alice envolvia a ideia de combinação de peças de roupas para que trajes distintos fossem obtidos: "*[...] a probabilidade de combinar algo (3 bermudas e 3 blusas) a fim de obter o máximo de conjuntos possíveis sem repetir [...]"*. Vini exemplificou sua aprendizagem da seguinte maneira: "[...] *quantos números podem ser formados com os algarismos de 0 a 9, sabendo que esse número deve ter 3 dígitos? e De quantas formas uma pessoa podia combinar as roupas do seu guarda-roupas, etc.?"*

O problema 1 de Alice, embora tratado por ela como uma combinação, é um típico exemplo de permutação ou de arranjo em que *p* é igual a *n*. Ou seja, todos os termos do conjunto dado são usados na resolução. É um problema tipo de anagrama presente em práticas de professores de ensino médio e também em livros didáticos deste e de outros níveis de ensino. Quando retornamos com os dados de Alice em 2018 para ela mesma analisar e esclarecer suas respostas, a própria estudante reafirmou as ideias envolvidas nos problemas trazidos por ela. Disse que, na época, em que cursou o ensino médio, esses eram *"problemas mais simples e corriqueiros de a gente estudar [...]"*. Além disso, Alice pareceu ter construído uma situação problemática evidenciando a noção de conjunto subjacente ao pensamento combinatório e a relação deste com a probabilidade. Ademais, determina certas condições que devem ser consideradas e satisfeitas pelo resolvedor. Assim, referencia um modelo combinatório implícito (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996), embora ela mesma pareça desconhecê-lo. Deste modo, ao responder às três questões que compunham o primeiro bloco de tarefas específicas, Alice se mostrou coerente, cujos argumentos denotaram as relações estabelecidas.

O problema 1 de Vini envolveu a noção de arranjo com repetição. Constatamos com isso quando o estudante delimitou que apenas três algarismos do conjunto dado seriam utilizados na resolução pela ausência da informação de que algarismos já usados não poderiam ser repetidos. Os casos em que os algarismos não se repetem são considerados arranjos simples, e exemplos desses problemas são encontrados em livros didáticos desde os anos iniciais do ensino fundamental. Em ambos os casos, há necessidade de reconhecimento do modelo combinatório implícito do problema (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996) e dos atributos que caracterizam cada tipo de agrupamento (HERSHKOWITZ, 1994). Vê-se, assim, que o estudante possuía uma ideia de agrupamento ordenado e, portanto, uma coerência com a definição dada por ele anteriormente, quando definiu arranjo.

O problema 2 de Alice – “*a probabilidade de combinar algo (3 bermudas e 3 blusas) a fim de obter o máximo de conjuntos possíveis sem repetir”* – envolve o princípio multiplicativo como modelo combinatório implícito ao requerer o cálculo do produto entre o número de bermudas e de blusas, ou seja, 3 x 3. Além disso, apresenta uma condição “*obter o máximo de conjuntos possíveis sem repetir”*. De modo semelhante, em termos de modelo combinatório implícito (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996), Vini trouxe o seguinte problema: “*De quantas formas uma pessoa podia combinar as roupas do seu guarda-roupas”*. No entanto, diferentemente de Alice, ele não determinou sob quais condições as roupas deveriam ser combinadas. Essa ausência de informação no enunciado dificulta a resolução, pois o problema apresenta-se aberto a inúmeras suposições. Alice mencionou probabilidade de combinar quando talvez estivesse pensando nas possibilidades que a pessoa tinha para combinar bermudas e blusas. Isso mostra certo equívoco quanto ao significado das palavras possibilidade e probabilidade. Portanto, parece evocar uma imagem conceitual equivocada quanto aos termos envolvidos em problemas de combinatória.

Mesmo Alice se referindo à probabilidade no sentido de possibilidade, os problemas de ambos os licenciandos envolveram o pensamento combinatório. Podem ser considerados protótipos (HERSHKOWITZ, 1994) por incluírem muitos atributos que caracterizam o conceito subjacente. Traduzem a imagem mental deles e as associações (GIRALDO, CARVALHO, TALL, 2002) acerca de problemas tipo, ao serem estimulados a descrever suas aprendizagens de combinatória no ensino médio. Reforçamos que são problemas que aparecem em livros didáticos de anos iniciais, quando se trabalha a multiplicação associada à ideia de combinatória. Além disso, um problema semelhante[148] é encontrado no PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) de anos iniciais. Entendemos problemas tipo como sendo aqueles comumente encontrados em livros didáticos ou usados por professores em aulas de matemática, para exemplificar determinado conceito. Poderá ser considerado um protótipo se possuir o maior número de características, atributos relacionados ao conceito.

Apesar de terem sido em contextos diferentes daqueles usados por Kavousian (2008), consideramos que os exemplos apresentados por Alice e Vini ampliam as colocações dessa autora, pois foram *exemplos protótipos ativos gerados pelos licenciandos*. Isso quer dizer que (i) são construídos por iniciativa própria dos estudantes sem nenhuma solicitação ou inferência nossa; (ii) incluem uma boa listagem de atributos relevantes característicos de problemas de combinatória; e (iii) auxiliam na demonstração da aprendizagem pregressa deles; além disso, ajudam a explicar a compreensão deles sobre o conceito (VINNER, 2011) e suas aprendizagens.

Isis, ao responder às questões 2 e 3, não reforçou a imagem evocada na questão 1, quando respondeu que combinatória *"é um estudo das possibilidades de combinações [...]"*. No entanto, afirmou não ter estudado combinatória no ensino médio. A licencianda pareceu não se recordar de ter estudado o conteúdo anteriormente. Mas o fato de ter emitido uma resposta à questão 1 mostrou que ela possuía algum conhecimento do assunto. Assim, percebemos que há certa contradição entre as imagens evocadas por Isis. Portanto, não poderíamos afirmar que o fato de Isis ter assinalado que não estudou o conteúdo no ensino médio estaria associado à ausência do trato do assunto, mostrando que, de fato, professores optam por não ensiná-lo. Curiosos das contradições de Isis, em 2018 retornamos com os dados dessa licencianda para que ela analisasse nossa observação.

Na ocasião, Isis esclareceu que não se dava muito bem com fórmulas e seu uso foi muito estimulado no ensino médio. Assim, resolvia os problemas *"pela fórmula porque era o jeito que eu aprendi [...] me foi dado tipo um esqueminha né, sobre é... dependendo da situação, tinha que fazer o princípio fundamental e eu não conseguia associar diretamente a particularidade de cada situação em si"*. Sendo assim, Isis parece ter aparentado uma imagem acerca do ensino no qual ela se posicionou como aprendiz de combinatória. Por outro

[148] Tendo duas saias – uma preta (P) e uma branca (B) – e três blusas – uma rosa (R), uma azul (A) e uma cinza (C) –, de quantas maneiras diferentes posso me vestir? (BRASIL, PCN, 1997, p. 111).

lado, as respostas de Isis podem mostrar uma posição de fuga, na qual, ao afirmar que não estudou, ela exime sua responsabilidade em responder às questões.

Alex, ao responder à questão 2, não evocou novamente as imagens de combinatória identificadas nas respostas dele à questão 1 [O que você entende por combinatória?]. No entanto, evocou uma imagem do ensino, ao avaliá-lo como fraco. Utilizando-se de um adjetivo negativo (fraco), ele emitiu um julgamento de valor para caracterizar o ensino recebido. Embora o licenciando não tenha respondido ao questionamento 2 em si, seu julgamento parece fundamentado em uma lembrança não evidenciada. Por outro lado, fornece indícios de que o ensino de combinatória na educação básica não aconteceu em sua completude. Associamos a isso a ideia de abandono do ensino de combinatória, pois as pesquisas sobre o tema apontam que professores optam por não ensiná-la [no ensino médio] e, quando o fazem, empregam um modelo instrumental (SKEMP, 1976), priorizando o uso de fórmulas.

Em sua resposta à questão 3, Joice referiu-se à importância dada à combinatória no ensino médio. A licencianda emitiu um julgamento de valor sobre os conteúdos e as decisões tomadas sobre o ensino. Embora as imagens evocadas por ela anteriormente não tenham sido reforçadas, sinalizou uma mudança de postura de si mesma em relação à abordagem dada aos conteúdos no ensino médio. Joice já não evidenciou somente uma atitude de aluna, mas de uma futura professora. Parece reconhecer a necessidade da aprendizagem de determinados conhecimentos matemáticos (SHULMAN, 1986; 1987)[149] por licenciandos, para que possam ensiná-los posteriormente.

---

[149] "Shulman (1987; 1986) propõe sete categorias para o conhecimento do professor: *1. Conhecimento do conteúdo de matéria específica* – refere-se ao conhecimento de conteúdo específico da disciplina que o professor leciona; *2. Conhecimento pedagógico de conteúdo* – este conhecimento nasce na interseção entre conteúdo e pedagogia, com a finalidade de auxiliar o professor a organizar, representar e adaptar um assunto a ser estudado, com o intuito de deixá-lo compreensível aos outros. Isso ocorre quando o professor interpreta o assunto e encontra diferentes maneiras para representá-lo e torná-lo acessível aos alunos. Assim sendo, está relacionado ao conhecimento de estratégias de ensino que o professor usa em sala, para ministrar aulas dos conteúdos selecionados, para auxiliar no processo de aprendizagem dos alunos; *3. Conhecimento do currículo* – refere-se ao conhecimento do professor para selecionar e organizar os conteúdos matemáticos para o ensino em um determinado nível, assim como os meios de que dispõe para realizar essa ação; *4. Conhecimento pedagógico em geral* – são os princípios, técnicas e estratégias de gestão de sala de aula e organização de classe, úteis ao processo de ensino e aprendizagem. Esse conhecimento transcende o domínio de uma área específica, uma vez que envolve toda a gestão do conhecimento em sala de aula; *5. Conhecimento dos estudantes e suas características* – envolve o conhecimento de como os alunos aprendem, do contexto onde estão inseridos e dos conhecimentos prévios que dispõem e trazem para as situações de aprendizagem*; 6. Conhecimento do contexto educacional* – está relacionado ao contexto, ao ambiente, à região e às características culturais da comunidade onde estão inseridos os estudantes e as instituições de ensino. Assim sendo, este é um conhecimento mais amplo, pois envolve toda a dinâmica educacional; *7. Conhecimento das metas, objetivos, valores educacionais e de seus fundamentos filosóficos e históricos* – este conhecimento se relaciona à compreensão da escola na história, a fim de elucidar metas, objetivos e valores que instrumentalizam a prática docente. Relaciona-se também aos

Felipe, além das imagens evocadas anteriormente acerca da combinatória e de si mesmo como aprendiz desse conteúdo, evidenciou uma imagem associada ao seu envolvimento em situações práticas de ensino, ao responder à questão 2. Pareceu evocar uma imagem do ensino na qual ele se posicionou como futuro professor de combinatória. Essa imagem foi assinalada pela ideia *"[...] Análise Combinatória vem sendo um dos motivos que procuro não me envolver no PIBID, justamente por não lembrar do seu conceito"*. Esse é um licenciando propenso a criar um círculo vicioso negativo em que professores optam por não tratar a combinatória em sala de aula. Ou ele pode esconder-se atrás do próprio argumento e evitar ensiná-la. Por outro lado, ao afirmar que *"Este é um dos temas que muitos professores não gostam de ensinar"*, Felipe retratou uma realidade evidenciada em pesquisas sobre combinatória: professores não gostam de ensiná-la e esquivam-se dessa prática.

Joice, assim como Felipe, também fez menção a uma imagem associada ao seu envolvimento em situações práticas de ensino desenvolvidas no PIBID. Dessa forma, mostrou quão importante é a inserção dos licenciandos no ambiente de trabalho desde o início da graduação. Enquanto Felipe optou por se esquivar do conteúdo, Joice decidiu aprendê-lo para ensinar. Assim, ela nos mostrou outro lado do círculo vicioso, um lado positivo em que afirmou: "tive que aprender para poder auxiliar os alunos". Isso é um diferencial entre professores e futuros professores. Ernest (1988) diz que podemos oferecer o mesmo conhecimento aos estudantes, mas a forma como eles o compreendem e utilizam pode ser muito diferente e diversificada. Analogamente Felipe e Joice fizeram diferentes usos de seus "desconhecimentos" sobre o assunto e mostraram atitudes distintas em relação ao ensino-aprendizagem de combinatória. A fuga, embora pareça um caminho mais fácil, limita conhecimento e prática de professores.

De modo geral, observamos nesse caminhar que as imagens conceituais de um assunto matemático, como a combinatória, são construções atravessadas por uma série de fatores para além de uma estrutura cognitiva na mente do indivíduo. Notamos atravessamentos das heranças culturais, afetivas e de conhecimentos adquiridos anteriormente na educação básica. Em especial, observamos que em Isis diferentes questões estimularam partes distintas da estrutura cognitiva (TALL; VINNER, 1981). Portanto, para além das conclusões assinaladas por Tall e Vinner (1981), suas respostas apontaram imagens contraditórias. Isso mostrou que as realidades psicológicas não divergem apenas de um indivíduo para outro, conforme

---

fundamentos filosóficos e históricos que sustentam as bases epistemológicas da pedagogia, o posicionamento da escola no presente e visam ao planejamento de ações futuras (ZANON, 2011, p. 101 – 102).

mencionado por Tall e Vinner (1981), mas divergem também no próprio indivíduo, visto que ele pode produzir uma variedade de imagens mentais pessoais, quando o nome do conceito é evocado ou quando ele é solicitado a explicar e exemplificar determinado conceito.

5.2.3.3 Imagem conceitual de outro conceito matemático

Esta imagem foi percebida nas respostas de Alice e Joice. Ao responder às três questões propostas, Alice descreveu objetivos associados à probabilidade e evidenciou *"achar/descobrir a probabilidade de algo"* e *"descrever a probabilidade de combinações"*. Joice, ao responder à questão 1, informou que combinatória *"busca encontrar uma quantidade de maneira que certo evento pode acontecer"*. Ambas as imagens denotam a ocorrência de algum evento e a preocupação em quantificar, contar, esses acontecimentos em determinado evento. Acreditamos que Alice usou probabilidade como sinônimo de possibilidade, o que demonstra equívocos conceituais quanto ao emprego de termos adequados para se referir a uma situação essencialmente de combinatória. Essa imagem foi sendo reforçada por ela desde suas respostas à primeira questão. Embora reconheçamos que a probabilidade se utiliza das ideias combinatórias, o pensamento matemático envolvido em cada uma delas não se coaduna entre si. Portanto, em virtude das associações imediatas estabelecidas com a probabilidade, e não com a combinatória em si, consideramos essa imagem inicial equivocada.

Por outro lado, essa relação que a licencianda estabeleceu entre os campos matemáticos [combinatório e probabilístico] são importantes. Aponta uma coerência no próprio conhecimento matemático, algo que nem sempre é percebido por estudantes em início de formação. No retorno acontecido em 2018, Alice destacou: *"[...] acredito que elas andam juntas, uma vai completar a outra quando a gente quer, por exemplo, resolver um problema, né. E usar isso daí pra fazer algo na vida, talvez, porque também usa, né. Não é só dentro da sala de aula"*. Esse também foi o caso de Joice. A licencianda nos explicou: *"[...] a probabilidade estuda a possibilidade de alguma coisa acontecer, certo? Seja dado por fração, número decimal ou porcentagem. A análise combinatória estuda de quantas maneiras isso pode acontecer. Então, estuda a probabilidade de uma coisa acontecer, e, o outro, as possibilidades. Então, tem um pouco de relação entre as duas"*.

Elas mostraram, em seus argumentos, que esses conhecimentos não são isolados, mas que se relacionam entre si. O fato é que, ao ressaltar a probabilidade, invisibilizam a combinatória, por não identificarem as peculiaridades de cada uma. Isso é feito involuntariamente e baseado em uma imagem equivocada de que combinatória e probabilidade são conceitos acoplados. Além disso, é preciso observar que a disciplina oferecida na licenciatura e cursada pelos sete estudantes denomina-se “Análise Combinatória e Probabilidade”. No entanto, os campos são bem delimitados e não há uma expectativa de integração visível entre eles. Caso essas relações não sejam tratadas na formação inicial, ao atuarem como professores, os licenciandos tenderão a compartilhar esse tipo de pensamento com seus alunos. Por isso, se for feito imediatamente de uma aula para outra, conhecer como os estudantes pensam a disciplina, auxilia o professor no planejamento de ações mais reais e coerentes com um ensino destinado a futuros professores de matemática.

Então, *quem são os licenciandos em termos de imagens conceituais iniciais*?

Em linhas gerais, observarmos que todos os sete licenciandos, de uma forma ou outra, tiveram contato com a análise combinatória anteriormente na 2.ª série do ensino médio. Certos disso, nossas análises permitiram-nos sintetizar no quadro 8 as imagens conceituais iniciais dos licenciandos evocadas durante o primeiro bloco de tarefas. Por ser um quadro bem detalhado no qual encontramos na íntegra as respostas dos licenciados às questões, ele se estende para as próximas quatro páginas consecutivas.

Quadro 8 – Síntese geral das imagens iniciais dos sete licenciandos

Aluno(a)	**QUESTÕES**				**Imagens conceituais iniciais evidenciadas com base nas respostas às questões 1, 2, 3 e 4**
	1) O que você entende por análise combinatória?	**2) Como você definiria arranjo, combinação e permutação?**	**3) O que você acha que aprendeu de análise combinatória no ensino médio? Justifique sua resposta.**	**4) Você gostou de estudar análise combinatória no ensino médio? Por quê?**	
Alex	*Entendo como sendo um estudo com objetivo de conhecer possibilidades de combinações de elementos de quaisquer conjuntos de objetos*[150].	*Arranjo – uma combinação de objetos em que a ordem em que eles aparecem é relevante.* *Combinação - a ordem dos elementos é irrelevante.* *Permutação – trocar de posições entre elementos dispostos numa ordem.*	*Com base no que recordo, avalio como fraco.*	*Lembro-me que não, por não entender os problemas, a interpretação para cada situação.*	- *Imagem conceitual da definição do conceito* que evocou a utilidade/objetivo da combinatória e a noção de conjuntos. - *Imagem do ensino* relacionada à *aprendizagem* quando aprecia sua sensação ao estudar combinatória no ensino médio; demonstra uma atitude em relação à sua própria aprendizagem apresentando certo comportamento frente a ela; e à medida que utiliza um adjetivo negativo que remete a ideia de julgamento de valor para caracterizar o ensino recebido anteriormente.
Alice	*Acredito que análise combinatória seja uma disciplina que nos permita fazer combinações de tal forma que possamos achar o máximo possível dessas combinações sejam elas do que for para achar a probabilidade de algo.*	*Arranjo – penso ser um conjunto de "algo".* *Combinação – seria esse conjunto de "algo" que pode ser "agrupado" de forma que a combinação dos elementos desse conjunto (arranjo) possa se repetir ou não a fim de achar uma "probabilidade".* *Permutação – seria*	*Não me recordo o que estudei na disciplina, mas acredito que aprendi a pegar, por exemplo, um conjunto de algo, (letras de uma palavra – AMOR) e descobrir a probabilidade de combinações de escrever essa palavra sem repetir as letras, mudando suas posições. Ou, por exemplo, a probabilidade de combinar algo (3*	*Apesar de não me recordar muito bem, gostei sim, pois me fez permitir saber que existe uma fórmula (conteúdo) que ajuda a fazer combinações e achar/descobrir probabilidades de algo.*	- *Imagem conceitual da definição do conceito* que evocou a definição em si, a utilidade/objetivo da combinatória e a noção de conjuntos. - *Imagem do ensino* na qual enfatiza uma *aprendizagem* instrumental baseada no uso de fórmulas e procedimentos úteis à resolução de exercícios; menciona um exemplo protótipo de problema que considera relevante para significar sua aprendizagem de combinatória no ensino médio; e ao informar não se recordar de ter estudado o conteúdo anteriormente, mas emitiu

[150] Os trechos sublinhados são aqueles que consideramos relevantes para esta pesquisa.

		<u>quantas vezes o conjunto (arranjo) se repete ou não</u>. Essa palavra <u>já ouvi falar, mas não me lembro ao certo o que seja</u>.	*<u>bermudas e 3 blusas)</u> a fim de <u>obter o máximo de conjuntos</u>[151] <u>possíveis sem repetir</u>, etc...*		alguma aprendizagem sobre ele. - *Imagem conceitual de outro conceito matemático* evocada quando estabeleceu relações diretas com a probabilidade e não com a combinatória em si.
Felipe	*Penso que análise combinatória seja a <u>parte da matemática que consiste em combinar objetos e situações</u> a fim de <u>analisar as possíveis combinações que podem ser geradas</u>.*	*Arranjo – <u>organização das possibilidades de combinação</u>.* *Combinação – <u>agrupar elementos e objetos</u>.* *Permutação – <u>trocar a ordem e os elementos das combinações</u>.*	*Pra ser sincero <u>não me lembro deste conteúdo no ensino médio</u>. <u>Não estou dizendo que não estudei, apenas que não me lembro</u>. Análise Combinatória vem sendo um dos motivos que <u>procuro não me envolver no PIBID, justamente por não lembrar do seu conceito. Este é um dos temas que muitos professores não gostam de ministrar</u>.*	*Levando em consideração de que <u>sempre gostei de estudar matemática acredito que tenha gostado sim</u>, mas <u>não consigo traçar uma resposta concreta</u>.*	- *Imagem conceitual da definição do conceito* que evocou a definição em si e a utilidade/objetivo da combinatória. - *Imagem do ensino* relacionada à *aprendizagem* ao apreciar sua sensação ao estudar combinatória no ensino médio; ao relacionar o gosto pela combinatória ao fato de apreciar a matemática; e, ao informar não se recordar de ter estudado combinatória anteriormente, mas emitiu alguma aprendizagem sobre ela. E, imagem como futuro professor na qual demonstrou certo envolvimento em situações práticas de ensino.
Geane	*Eu <u>estudei isso no ensino médio</u>, durante a <u>2ª série</u>/2013. Lembro que <u>tinha os termos "permutação" e "combinação"</u>, mas <u>não me recordo dos significados</u>.*	*Não sei a diferença, sei que <u>havia situações que a posição importava ou que não podia repetir</u>. Eu entendi muito isso no ensino médio, <u>fiz vários exercícios do livro com exemplos de placas de carro, cartas de baralhos, mas foi pouco significativo e já no trimestre seguinte eu "descartei" este conhecimento</u>.*	*Aprendi a <u>calcular as "possibilidades" de posicionamento de termos, no caso calcular o valor total</u>.*	*Provavelmente <u>eu não gostei, porque eu não me lembro da matéria, e se eu não me lembro é porque eu não aprendi</u>.*	- *Imagem conceitual da definição do conceito* quando evocou algum agrupamento/operação e a utilidade/objetivo da combinatória. - *Imagem do ensino* relacionada a um conteúdo prescrito no currículo do ensino médio; a *aprendizagem* ao apreciar sua sensação ao estudar análise combinatória no ensino médio, e, ao demonstrar uma atitude em relação à sua própria aprendizagem apresentando certo comportamento frente a ela.

[151] Conjunto usado como sinônimo de trajes.

Isis	É um estudo das possibilidades de combinações entre algumas variáveis.	Arranjo: é como se fosse uma árvore com várias ramificações; são as diversas opções de se combinar as variáveis. Combinação: posso tentar definir com um exemplo, onde em um cinema tem X poltronas e N pessoas. A combinação seria as diversas posições possíveis dessas pessoas sentarem; (homens com homens, mulher e homem, etc.) Permutação – é o número de posições possíveis diante de algumas restrições; onde se multiplica todos os valores no final.	Não estudei.	Como eu não estudei no EM, não posso expor nenhuma opinião a respeito.	- Imagem conceitual da definição do conceito quando evocou a definição em si e a utilidade/objetivo da combinatória. - Imagem relacionada à aprendizagem ao informar não ter estudado o conteúdo, mas emitir algum conhecimento sobre combinatória; e ao ensino ao evocar que não a estudou no ensino médio.
Joice	É um conteúdo de ensino médio onde busca encontrar uma quantidade de maneira que certo evento pode acontecer. Dentro de análise combinatória possui o conteúdo de arranjo, combinação e permutação.	Permutação: quantas maneiras uma “palavra” pode ser escrita trocando as ordens das “letras” e, considerando as repetições dessas “letras”. Ou seja, tem vagas para todos os elementos. No arranjo e na combinação é quando se quer saber as possibilidades de algo acontecer, porém não possui vagas para todos elementos. Na combinação	No meu ensino médio não me recordo de ter aprendido de forma significativa. Porém, no PIBID tive que aprender para poder auxiliar os alunos.	Pelo PIBID eu vejo que é uma disciplina importante. Porém, no meu ensino médio não me recordo de ter sido enfatizada com essa importância.	- Imagem conceitual da definição do conceito quando evocou a definição em si e algum agrupamento estudado em combinatória. - Imagem do ensino em que a combinatória é vista como um conteúdo curricular do ensino médio; quando utiliza um adjetivo negativo que remete a ideia de julgamento de valor para caracterizar o tipo de ensino recebido anteriormente; e ao se comportar como futura professora demonstrando envolvimento em situações práticas de ensino. E, imagem da aprendizagem ao demonstrar uma atitude em relação à sua própria aprendizagem de combinatória

		a posição dos elementos, ordem, não é considerada. Já no arranjo é considerada.			apresentando certo comportamento frente a ela.
Vini	*Análise combinatória pelo que me lembro de Ensino Médio é a análise das possibilidades em determinadas situações. As combinações entre dois conjuntos distintos por exemplo.*	*# Arranjo: organizar elementos segundo um critério ou mais.* *# Combinação: combinar dois ou mais elementos segundo um ou mais critérios.* *# Permutação: troca de posições. De elementos, números, peças etc.*	*O que me lembro de análise combinatória está mais ligado aos exercícios. Que eram, por exemplo, quantos números podem ser formados com os algarismos de 0 a 9, sabendo que esse número deve ter 3 dígitos? De quantas formas uma pessoa podia combinar as roupas do seu guarda-roupa, etc.*	*Sim. Bom, primeiramente porque sempre gostei de matemática e segundo porque achei interessante de como era prático descobrir as várias combinações em algumas situações.*	- *Imagem conceitual da definição do conceito* que evocou a utilidade/objetivo da combinatória e a noção de conjuntos. - *Imagem do ensino* relacionada a combinatória enquanto conteúdo de ensino médio; a uma *aprendizagem* instrumental baseada no uso de fórmulas e procedimentos úteis à resolução de exercícios; quando menciona um exemplo protótipo de problema que considera relevante para significar sua aprendizagem pregressa de combinatória; ao apreciar sua sensação em estudar combinatória no ensino médio; e, ao relacionar o gosto pela combinatória ao fato de apreciar a matemática.

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras, 2018.

Parece-nos que as imagens conceituais iniciais desses licenciandos foram marcadas por suas memórias cognitivas e afetivas em relação à aprendizagem de combinatória. Assim, conforme afirmam Tall e Vinner (1981), Tall (1988; 2002) e Vinner (1991; 2002), os licenciandos mostraram que, de fato, as imagens conceituais são reconstruções pessoais advindas das experiências que eles tiveram anteriormente com o conteúdo. Por tudo isso, dizemos que a imagem conceitual inicial deles não é vazia, embora ainda nos pareça principiante. No entanto, elas têm potencial para serem ampliadas, melhoradas e dotadas de atributos relevantes. Nomeamos incipiente pelo fato de ainda estarem em construção e se mostrarem fragmentadas em relação à literatura matemática específica.

Diante de tudo quanto foi exposto, acreditamos confirmar uma de nossas hipóteses mencionadas no capítulo 1: Imagens conceituais de combinatória desenvolvidas antes do ingresso na universidade, incorporam aspectos do que foi estudado na educação básica, quer seja no ensino médio, fundamental ou educação infantil, primeiras fontes de aprendizagem formal sobre o conteúdo. Portanto, imagens de conceitos de combinatória tais como agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação dos universitários podem não constituir todos coerentes, oscilando entre intuitivas e formais. Desse modo, consideramos positiva a presença de aspectos intuitivos na imagem de um conceito, visto que a intuição é fundamental ao desenvolvimento do pensamento matemático. Assim compreendido, há que se considerar que não existe a intenção de se obter uma estrutura cognitiva livre de conflitos, pois, dessa forma, seria uma reprodução fiel da estrutura matemática formal e não da aprendizagem de cada sujeito singular.

5.2.4 Análise dos dados obtidos com as tarefas do bloco 2

A seguir, comentamos imagens evocadas pelos licenciandos quando trabalharam no segundo bloco de tarefas específicas. Este compunha-se da resolução de um problema envolvendo trajetos, identificação do conceito, modelo combinatório implícito a ele e formulação de exemplo semelhante ao problema resolvido. As categorias *imagem conceitual da definição do conceito*, *imagem do ensino e da aprendizagem* e *imagem conceitual de outro conceito matemático*, comentadas no início deste capítulo, serviram de base para analisarmos os argumentos dos licenciandos e evidenciarmos as primeiras imagens conceituais deles.

As tarefas individuais dos estudantes foram discutidas com a turma inteira com base nas ideias de Stein et al. (2008). Nesse diálogo, focalizamos no enunciado do problema, as estratégias de resolução dos estudantes e os problemas (exemplos) formulados por eles. Em seguida, tecemos alguns apontamentos teóricos sobre o tipo de atividade, sintetizamos dados e apresentamos resultados.

5.2.4.1 Resolução de problemas

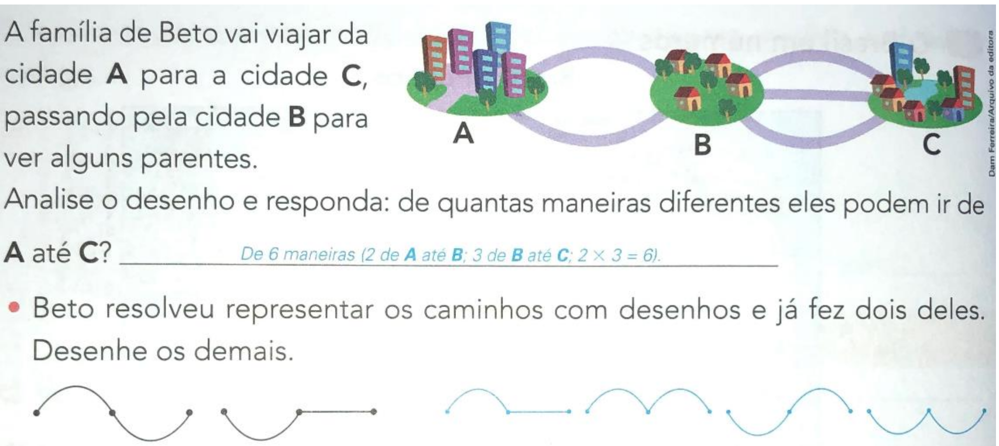
> *O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta (POLYA, 1973, prefácio à primeira tiragem, p. v).*

Instintivamente todos nós temos uma noção do que seja resolver problemas, pois "a maior parte de nosso pensamento consciente é sobre [eles]" (POLYA, 1997, p. 2). Por outro lado, a resolução de problemas em matemática começou a ser evidenciada desde a década de 1940. Com base nos estudos de Polya, quando da publicação original em 1945 de *How to solve it: a new aspect of mathematical method*, a resolução de problemas em matemática começou a ganhar espaço e passou a ser vista como uma possibilidade metodológica tanto para o ensino, aprendizagem e avaliação quanto para o desenvolvimento de pesquisas nessa área. Por isso, concordamos com ele quando afirmou que, por mais modesto que um problema de matemática seja, ele mobiliza o pensamento do resolvedor, de forma que conhecimentos prévios possam ser articulados e evocados.

A esse respeito, Zanon (2011) destaca que atividades de resolução de problemas "devem proporcionar a vivência de situações, a compreensão de ideias matemáticas e os diferentes tipos de problemas para que os alunos possam compreender as situações e os conceitos matemáticos" (p. 87). Para essa autora, tais atividades são benéficas a professores, quando possibilitam reflexões sobre os próprios conhecimentos matemáticos e outros, e a estudantes, uma vez que viabiliza a articulação de conhecimentos (matemáticos e de formas de resolver problemas) prévios e o desenvolvimento do pensamento reflexivo.

Santos-Wagner (2008) define um problema como "algo que queremos ou precisamos resolver e que nos apresenta uma dificuldade inicial. Geralmente é uma situação em que a princípio o indivíduo não possuiu a estratégia para resolvê-lo" (p. 50). Dessa forma, resolver um problema é "encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente, por meios adequados" (POLYA, 1997, p. 1 - 2). Ante tais perspectivas teóricas, selecionamos o seguinte problema para ser resolvido pelos licenciandos:

Figura 12 – O problema dos trajetos[152]


A família de Beto vai viajar da cidade **A** para a cidade **C**, passando pela cidade **B** para ver alguns parentes.

Analise o desenho e responda: de quantas maneiras diferentes eles podem ir de **A** até **C**? *De 6 maneiras (2 de* ***A*** *até* ***B****; 3 de* ***B*** *até* ***C****; 2 × 3 = 6).*

- Beto resolveu representar os caminhos com desenhos e já fez dois deles. Desenhe os demais.

Fonte: DANTE, 2014, V. 3, p. 18.

Esse problema envolve um só tipo de cálculo sustentado por operações aritméticas elementares de adição e/ou multiplicação, base para os princípios aditivo e multiplicativo, nos quais a combinatória se fundamenta. Isso quer dizer que ele pode ser resolvido por uma adição ou multiplicação, via regra do produto, não simultânea. Além disso, remete ao famoso problema histórico das Pontes de Königsberg, que era mais complexo, relacionado ao surgimento da combinatória moderna. Foi resolvido por Euler por volta de 1736, cuja solução errônea originou a teoria dos grafos[153]. Assim, a análise do enunciado, a resolução do problema, as questões propostas por nós e as discussões matemáticas em sala de aula envolvendo a turma inteira ajudaram-nos a conhecer os licenciandos em termos de conhecimentos combinatórios e de imagens conceituais iniciais.

Subjacente ao problema selecionado, há um modelo combinatório implícito (BATANERO et al., 1996) de enumeração (MORGADO et al., 1991) que orientará procedimentos de resolução a serem adotados pelos estudantes. Nesse problema de enumeração subjacente, pode-se pensar que, “se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é xy” (MORGADO et al.,

[152] Encontra-se em DANTE, L. R. *Ápis*: alfabetização matemática. Volume 3 (3.º ano do ensino fundamental). 2. ed. São Paulo: Ática, 2014.

[153] Ela trata da combinatória moderna, ao buscar soluções para resolução de problemas da vida cotidiana. Um Grafo G(V, E) é uma estrutura matemática constituída pelos conjuntos: V, finito e não vazio de n vértices, e, E, de m arestas, que são pares não ordenados de elementos de V. Graficamente é representado por uma figura com *nós* ou *vértices*, unidos por um traço denominado *aresta* configurando uma relação imaginária (PEREIRA, CÂMARA, 2008). Disponível em http://www.pucrs.br/ciencias/viali/graduacao/po_2/literatura/grafos/artigos/Famat_artigo_04.pdf . Acesso em: 20 jan. 2019.

1991, p. 16). Assim, para indicar a quantidade de caminhos diferentes que a família de Beto poderia percorrer, deve-se tomar as decisões d_1, escolha do caminho da cidade A à B, e d_2, escolha do caminho da cidade B à C. Como d_1 pode ser tomada de duas maneiras e, depois disso, d_2 pode ser tomada de três maneiras, o número de maneiras de formar caminhos (de tomar as decisões d_1 e d_2) é 2 x 3 = 6 ou 3 + 3 = 6.

No livro didático do qual o problema foi retirado, vimos que a resposta dada pelo autor à questão "De quantas maneiras diferentes eles podem ir de A até C?" parecia denotar uma expectativa de resolução fundamentada na multiplicação. Observamos o produto do número de caminhos de A até B (dois) pelo número de caminhos de B até C (três), ou seja, 2 x 3 = 6 possibilidades distintas. No entanto, não há referência ao pensamento combinatório em si, e sim na operação aritmética de multiplicação. Para nós, ela está associada "à ideia [conceitual] de combinatória" (PCN, BRASIL, 1997, p. 111), pois, para que a quantidade total de diferentes trajetos fosse conhecida, dois conjuntos (A até B e B até C) de natureza distinta (neste caso, trajetos diferentes) foram colocados em relação.

Quando analisamos o enunciado do problema proposto, percebemos que ele envolvia a apresentação da situação problemática, um questionamento que deveria ser respondido e uma tarefa de representação de caminhos. Compunha-se de informações verbais (escritas) e visuais, em que os deslocamentos feitos pela família de Beto já estavam assinalados. Por isso, para responder à questão proposta, o autor orientava que o desenho fosse analisado. Esse enfoque pode ter acontecido em razão dos dados contidos na ilustração dos possíveis caminhos, pois o enunciado sem ela tornaria o problema sem solução. Assim, a ilustração auxiliava na compreensão, complementava o enunciado verbal e permitia que o resolvedor pensasse em alguma estratégia de solução. Ademais, este problema foi formulado e pensado para ser trabalhado e resolvido por crianças de terceiro ano escolar. Talvez tenha sido por esse motivo que o autor colocou um desenho para auxiliar os alunos a pensarem nos trajetos, olhar e contá-los.

Por outro lado, se o estudante não tivesse compreendido o modelo combinatório implícito de enumeração subjacente ao problema e não tivesse vislumbrado a relação entre o enunciado e a ilustração, ele poderia juntar os dois caminhos de A até B com os outros três caminhos de B até C e, pela adição (2 + 3), obter cinco possibilidades como resposta. Provavelmente, o autor Dante também tenha pensado nesse caso de erro e de que um professor de anos iniciais poderia dialogar e questionar seus alunos acerca dele. Neste caso, a ilustração pela ilustração não auxilia na compreensão nem na resolução do problema. Ambos os processos, retratam ações[154] de contar e indicar numericamente quantos são os caminhos para que, em seguida, sejam representados por meio de desenhos. Nessa perspectiva, denotam alguma estratégia de resolução associada a tais ações que representam atributos relevantes (HERSHKOWITZ, 1994), característicos de problemas combinatórios. Por tudo isso, a estrutura apresentada pelo problema selecionado mostrou-se em conformidade com nossas expectativas realçadas no quadro 7. Isso pode ser visto quando informamos nossas intenções com os licenciandos (item i) e selecionamos um problema que ajudaria a evocar imagens conceituais de combinatória anteriores à licenciatura (ver item ii). Desse modo, impulsionou-nos a utilizá-lo como tarefa inicial para os licenciandos.

Adaptando o problema

No item *iii* do quadro 7, evidenciamos a necessidade de incluir indagações complementares (POLYA, 1973) ao problema dado, com a finalidade de auxiliar os estudantes a evocar imagens conceituais. A primeira delas – (1) *O que vocês pensam que deve ser feito para representar a situação dada?* – envolvia a interpretação do enunciado. Nas demais questões, usamos as palavras-chave "quantos e/ou quais" para indicar que havia um modelo combinatório implícito (BATANERO et al., 1996) a elas que denotava, por parte do resolvedor, uma ação de contar, listar e/ou contar e listar simultaneamente os caminhos solicitados. Assim, orientavam quanto a uma expectativa de resolução, de resposta e também estimulavam que estudantes usassem alguma estratégia para contar os trajetos encontrados.

"Quantos" associa-se à ideia de indicar numericamente uma quantidade, por isso a estratégia de resolução implica uma ação de contagem. Essa ideia apareceu na questão – *Analise o desenho e responda: de quantas maneiras diferentes eles podem ir de A até C?* – dada pelo autor do livro didático. "Quais" relaciona-se à noção de representação. Neste caso, a estratégia de resolução sugere uma ilustração em que todas as possibilidades de caminhos deveriam ser mostradas. Essa ideia despontou em outra questão – *Beto resolveu representar os caminhos com desenhos e já fez dois deles. Desenhe os demais* – também proposta pelo livro didático. "Quantos e quais", empregados simultaneamente, revelam que a estratégia de resolução deve envolver conjuntamente as duas ideias anteriormente comentadas. Elas são vistas nas questões que elaboramos: *Suponha que a família de Beto quer ir e voltar pelo mesmo caminho. De quantos modos diferentes eles podem ir e voltar pelo mesmo caminho?*

[154] Aqui entendemos ações como um ato de pensamento que leva o resolvedor a agir e evidenciar uma estratégia de resolução para o problema dado.

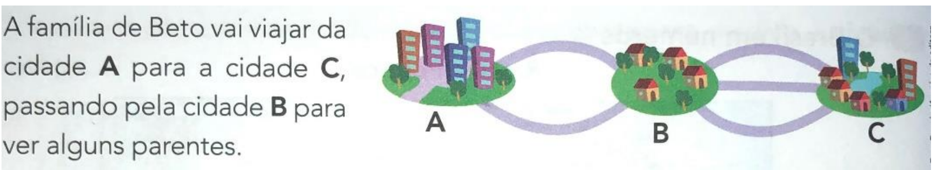
Quais são esses caminhos? Agora suponha que eles querem ir por um caminho e voltar por outro. Quantos e quais caminhos ele pode percorrer?

Com base em Santos (1997), Santos-Wagner (2008) e em Zanon (2011), salientamos que a segunda questão envolvia somente caminhos de ida; a quarta solicitava que ida e volta fossem feitas por um mesmo caminho; e a quinta pontuava que o caminho de ida deveria ser diferente do caminho de volta. Assim, o pensamento combinatório se movimentaria de uma situação mais simples (só ir), passando por uma situação intermediária (ir e voltar pelo mesmo caminho) e chegaria a uma situação mais complexa (ir por um caminho e voltar por outro diferente). Entendemos que essas indagações poderiam (a) suscitar imagens conceituais; (b) permitir que os estudantes observassem que o número de possibilidades de deslocamentos aumenta em virtude das condições determinadas no problema; (c) possibilitar que os estudantes apresentassem diferentes estratégias de resolução; e (d) auxiliar que percebessem similaridades e diferenças entre elas.

Um panorama da metodologia utilizada em sala de aula

Inicialmente separamos o enunciado (verbal e visual) das questões. Assim, cada parte do problema ficou em um filete de papel e foi entregue individualmente aos estudantes. Somente após a resolução da questão do filete anterior, o próximo era entregue aos licenciandos. Distribuímos a cada licenciando a parte do problema que continha o enunciado verbal e visual, conforme se ilustra na figura 13.

Figura 13 – Enunciado verbal e visual entregue aos licenciandos



Fonte: DANTE, 2014, V. 3, p. 18.

Solicitamos que os estudantes lessem silenciosamente e analisassem individualmente a situação dada. Na sequência, lançamos a pergunta disparadora – *O que vocês pensam que deve ser feito para representar a situação dada?* – que serviu de *input* para que as imagens conceituais fossem evocadas. Ela foi um "convite" à participação dos estudantes na introdução da discussão matemática em sala de aula. Em seguida, os estudantes trabalharam individualmente na resolução do problema. Nesta etapa, pesquisadoras e professora estavam respaldadas pelas práticas de monitorar e selecionar (STEIN et al., 2008). Por fim, a resolução de cada tarefa foi compartilhada por meio de uma discussão matemática em sala de aula, envolvendo a turma inteira. Nela pesquisadoras e professora sequenciaram as argumentações orais dos estudantes e estabeleceram conexões matemáticas entre as respostas dos diferentes alunos e entre as respostas e as ideias principais (STEIN et al., 2008). Salientamos que o movimento da aula e a interação com os alunos se consolidaram com base nos diálogos construídos em meio à discussão coletiva. Assim, ajustes e outros questionamentos poderiam emergir dos desdobramentos.

Algumas estratégias de resolução antecipadas como parâmetro para análise

Para apresentar possibilidades de resolução para o problema selecionado (ver figura 12), consideramos o enunciado como um todo (parte verbal e visual), a literatura (POLYA, 1973; SANTOS, 1997; SANTOS-WAGNER, 2008; ZANON, 2011) e nossas experiências profissionais. Antecipá-las e comentá-las de antemão auxiliou-nos a pensar em possíveis equívocos e em imagens conceituais que poderiam ser evocadas pelos estudantes. Por esses e outros motivos, mostram quão importante é que professores "realmente façam as tarefas matemáticas que planejam pedir a seus alunos" (STEIN et al., 2008, p. 323, tradução nossa[155]). Desta forma, resolvemos o problema e listamos possíveis estratégias. Elas são fruto de nossas antecipações e serão tomadas como categorias de análise para os modos de resolver apresentados pelos estudantes.

Estratégia 1) Analisar a ilustração do problema, contar mentalmente as possibilidades e verbalizar ou escrever o número seis como resposta. Envolve visualização e cálculo mental.

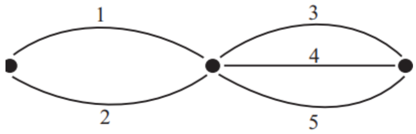
Estratégia 2) Analisar a ilustração do problema, enumerar os caminhos nele mesmo e depois contá-los um a um.

Estratégia 3) Pensando pelo princípio aditivo da contagem e usando a mesma lógica de enumerar os caminhos, o estudante poderia considerar que seriam três o número de possibilidades do primeiro conjunto iniciado em 1, trajeto superior da ilustração. Ademais, seriam três o número de possibilidades do segundo conjunto iniciado em 2, trajeto inferior. Uma representação poderia ser a seguinte:

---

[155] [...] actually do the mathematical tasks that they are planning to ask their students to do.

Figura 14 – Representação da estratégia 3



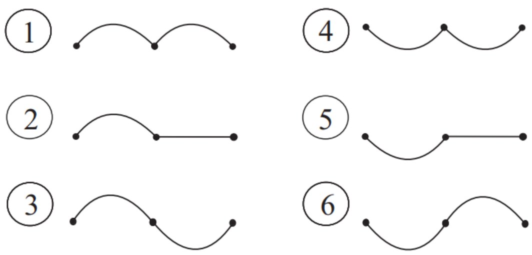
Fonte: Elaborada pelas pesquisadoras.

Considerando os caminhos (A - B e B - C) como conjuntos disjuntos, a interseção deles é vazia. Neste caso, a união do número de elementos dos conjuntos é dada por n(A U B) = n(A) + n(B), em que n(A U B) representa a união do número de elementos (trajetos) que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B; n(A) indica o número de elementos (trajetos) do conjunto A. Desse modo, o conjunto A seria composto pelos trajetos 1,3; 1,4; 1,5. Ou seja, A = {1,3; 1,4; 1,5}. E, n(B) designa o número de elementos (trajetos) do conjunto B, a saber, 2,3; 2,4; 2,5. Então, B = {2;3; 2,4; 2,5}. Assim, pelo princípio aditivo, teríamos: n(A) + n(B) = 3 + 3 = 6 possibilidades.

Estratégia 4) Ainda pelo princípio aditivo da contagem, usando a mesma lógica de enumerar os caminhos, o licenciando poderia apenas observar a imagem e considerar que seriam duas possibilidades de deslocamento de A até B e três possibilidades de B até C. Nessa lógica, efetuaria uma operação de adição considerando que a primeira parcela seria 2 e a segunda 3. Assim, teria: 2 + 3 = 5. Embora seja uma estratégia equivocada de resolução, ela poderia ser obtida da visualização imediata dos trajetos ilustrados no desenho que acompanha o enunciado escrito. Aqui o estudante olhou para os dados e emitiu uma resposta. Parece-nos que quem desenvolve cálculos semelhantes a este, apenas adiciona os trajetos sem pensar nos caminhos que tem para seguir. Também fica sem entender o enunciado e sem compreender o desenho que ilustra os trajetos entre as cidades.

Estratégia 5) Analisar a ilustração e desenhar os caminhos. Durante o processo de desenhar, o estudante poderia ir enumerando os caminhos e, ao final, obter seis como resposta.

Figura 15 – Representação da estratégia 5



Fonte: Elaborada pelas pesquisadoras.

Estratégia 6) Analisar a ilustração, identificar o número de possibilidades do primeiro deslocamento (duas possibilidades) e multiplicar pelo número de possibilidades do segundo (três possibilidades). Aqui usaria a multiplicação associada à ideia de combinatória (BRASIL, 1997), pois, para cada possibilidade de A, teríamos três em B, ou seja, 2 x 3. Então, organizando os trajetos para que todas as possibilidades fossem obtidas, o estudante também encontraria seis.

Estratégia 7) Nomear os caminhos com símbolos (letras, números, desenhos, entre outros) resguardando as cidades A, B e C. Por exemplo, se nomearmos os trajetos usando outras letras do alfabeto, tais como E, F, G, H, I, uma possibilidade de resolução seria:

Figura 16 – Representação da estratégia 7

A	E	B	G	C
A	E	B	H	C
A	E	B	I	C
A	F	B	G	C
A	F	B	H	C
A	F	B	I	C

Fonte: Elaborada pelas pesquisadoras.

Nela, vê-se que o estudante poderia indicar os caminhos por meio de uma quina ordenada e depois contá-los. Esta estratégia pode também estar relacionada à ideia de produto cartesiano. Suponha que:

AB seja o conjunto dos caminhos de A até B, e

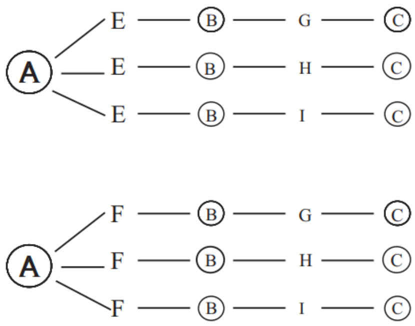
BC seja o conjunto dos caminhos de B até C:

AB = {E, F} e *BC* = {G, H, I}

Cada modo de efetuar a viagem de A até C pode ser considerado como um par de caminhos em que o primeiro elemento pertence a AB e o segundo pertence à BC. Logo, o número de pares ordenados (ou os modos de viajar de A até C) é dado por {E, G}, {E, H}, {E, I}, {F, G}, {F, H}, {F, I}, ou seja, 6 possibilidades.

Estratégia 8) Utilizar o diagrama da árvore. Nomear os caminhos, fixar a saída na cidade A, considerar como pontos determinados as cidades B e C e alternar os caminhos intermediários (E, F, G, H, I) até esgotar todas as possibilidades. Na sequência, o aluno deve contá-los e informar quantos são.

Figura 17 – Representação da estratégia 8



Fonte: Elaborada pelas pesquisadoras.

No retorno dos dados aos licenciandos em 2018, para validação e/ou refutação deles, solicitamos que os estudantes resolvessem novamente o problema dos trajetos, utilizando uma estratégia diferente da anterior. Joice apresentou uma solução não *antecipada* por nós. Na ocasião, ela resolveu o problema pelo produto de dois arranjos simples. Usou a fórmula para encontrar a solução, visto que o problema solicitava a quantidade de caminhos e não haveria necessidade de indicar quais eram. Desse modo, incluímos aqui tal estratégia por considerá-la como uma possibilidade distinta de compreender e resolver o problema.

Estratégia 9) Aplicar a fórmula de arranjo simples. Formalmente poderíamos pensar que problemas de arranjo simples envolvem a seguinte ideia conceitual: Dada uma quantidade *n* de elementos distintos de um conjunto A = {a_1, a_2, a_3 ... a_n}, chama-se arranjo simples de *p* elementos de A toda sequência formada por *p* elementos distintos de A com $p \in N^*$ e $p \leq n$, em que *n* indica o número total de elementos do conjunto A e *p* a quantidade de elementos utilizados nas sequências formadas (ZANON, ZOGAIB, SANTOS-WAGNER, 2018). Um arranjo simples é dado pela fórmula $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$, a qual se lê: arranjo simples de *n* elementos tomados *p* a *p*. Desse modo, a resolução poderia ser a seguinte: $A_{n,\,p} \,.\, A_{n,\,p} = A_{2,\,1} \,.\, A_{3,\,1}$ = n! / (n – p)! . n! / (n – p)! = 2! / (2 – 1)! . 3! / (3 – 1)! = 2. 1 / 1 . 3. 2. 1 / 2. 1 = 2 . 3 = 6.

Essas diferentes estratégias decorrem da compreensão dos alicerces da análise combinatória (HAZZAN, 1993; PAIVA, 2009; MORGADO et al., 1991), da identificação do modelo combinatório implícito (BATANERO et al., 1996), da compreensão do enunciado (POLYA, 1973) e da experiência anterior com resolução de problemas (SANTOS, 1997; SANTOS-WAGNER, 2008; ZANON, 2011). Não é um processo trivial, pois leva tempo e ocorre pela aprendizagem de diferentes procedimentos de resolução de problemas de combinatória.

Esse problema também apareceu na pesquisa de Gerdenits (2014) e foi aplicado em 2014 a turmas do 6.º ao 9.º ano do ensino fundamental, para detectar dificuldades e defasagens dos alunos no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Além disso, a pesquisadora queria identificar os conceitos não aprendidos e/ou não internalizados pelos estudantes. Pensou em problemas que se relacionassem aos conteúdos já estudados em sala de aula e apresentassem estrutura similar aos exercícios considerados comuns em livros didáticos. Gerdenits (2014) destacou que este é um problema simples que desenvolve a base do raciocínio combinatório e poderia ser resolvido por enumeração de todas as possibilidades ou por meio do princípio multiplicativo. Relativamente aos 112 alunos que o resolveram, verificou que:

- 10,7% acertaram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução, como o desenho dos caminhos;
- 39,3% acertaram o problema sem apresentar estratégias de resolução;
- 26,8% erraram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução, por exemplo, contaram os traçados apresentados no desenho e indicaram 5 como resposta;
- 17,8% erraram o problema sem apresentar estratégias de resolução;
- 5,4% deixaram o problema em branco.

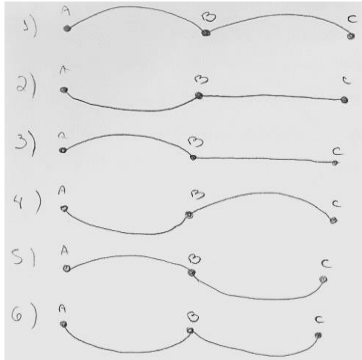
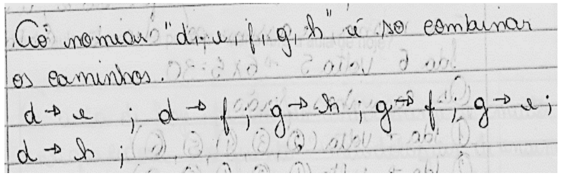
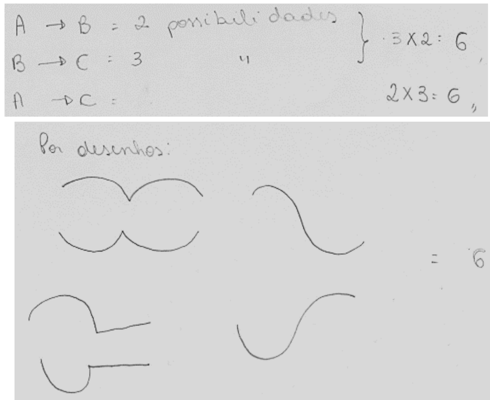
Apresentamos e comentamos, a seguir, as resoluções dos sete licenciandos. Elas foram evidenciadas antes do início da disciplina e posteriormente a ela.

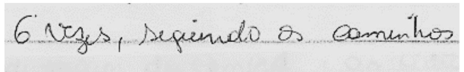
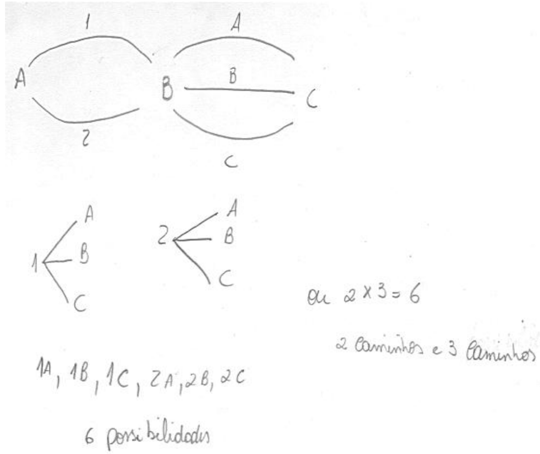
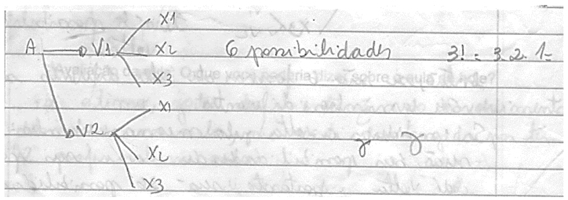
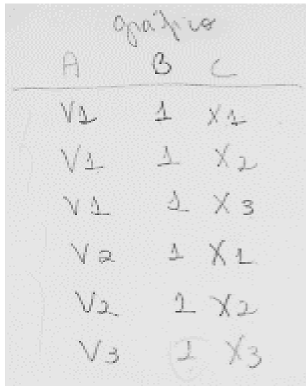
A resolução do problema pelos licenciandos

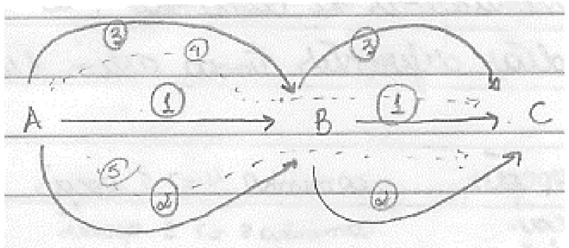
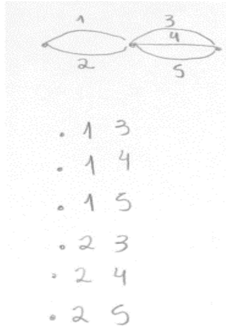
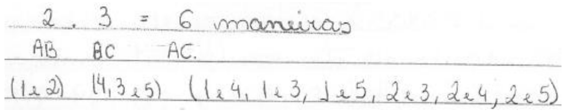
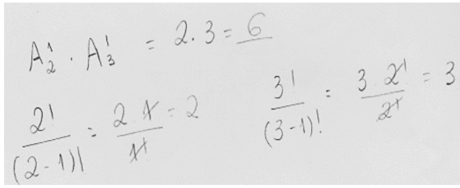
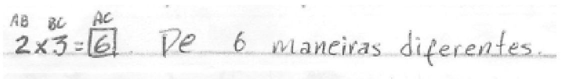
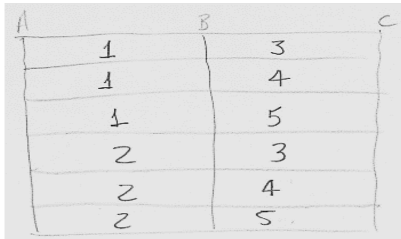
Com a resolução do problema pelos estudantes, nosso interesse era identificar estratégias, conhecimentos combinatórios e imagens conceituais evocadas durante este tipo de tarefa. Para propor uma possível resposta, os estudantes deveriam interpretar o enunciado e indicar o número, a quantidade de trajetos distintos que a família de Beto poderia fazer para ir da cidade A à C, passando pela B. Portanto, comentamos, a seguir, as estratégias de solução dos estudantes para essa condição inicial proposta pelo autor do livro didático.

No quadro 9, indicamos estratégias que emergiram do processo de resolução, a saber: (1) *estratégias verbalizadas*, pronunciadas quando o problema foi discutido oralmente; (2) *estratégias escritas*, registradas na folha de atividades; e (3) *estratégia escrita* incorporada pelos licenciandos quando retornamos com os dados em 2018 e solicitamos que eles resolvessem o problema de outro modo.

Quadro 9 – Estratégias de resolução dos licenciandos

Aluno(a)	**Estratégia verbalizada (11/8/17)**	**Estratégia escrita (11/8/17)**	**Estratégia escrita do retorno (11/9/18)**
Alex	*Uma maneira alternativa de representar a situação <u>seria indicar a quantidade de caminhos possíveis em cada trecho da viagem</u>: <u>2 caminhos (da cidade A até B) e 3 caminhos (de B a C)</u>. De fazer 2 possibilidades de percurso entre A e B e 3 entre A e C.*	Figura 18 – Estratégia escrita de Alex em 11/8/17  Fonte: Arquivo das pesquisadoras.	Figura 19 – Estratégia escrita de Alex em 11/9/18  Fonte: Arquivo das pesquisadoras.
Alice	*Acredito que <u>cada caminho pode ser</u> chamado/<u>nomeado</u> de algo, <u>por exemplo, "d, e, f, g, h"</u> e que <u>podemos analisar, contar ou combinar esses caminhos</u> a fim de <u>descobrir quantos caminhos poderão ser tomados</u> para chegar ao destino.*	Figura 20 – Estratégia escrita de Alice em 11/8/17  	Figura 21 – Estratégia escrita de Alice em 11/9/18  Fonte: Arquivo das pesquisadoras.

Felipe	*<u>Atribuindo referências (nomes, números, características) a cada caminho</u> de cada cidade para encontrar as possibilidades de caminhos percorridos.*	Figura 22 – Estratégia escrita de Felipe em 11/8/17  Fonte: Arquivo das pesquisadoras.	Figura 23 – Estratégia escrita de Felipe em 11/9/18  Fonte: Arquivo das pesquisadoras.
Geane	*- A situação já está representada pelo desenho, mas para facilitar o cálculo será necessário <u>nomear as "vias" do trajeto feito</u> pela família de Beto. - <u>Diagrama</u>. Registrar também só que <u>em forma de gráfico e desenho</u>.*	Figura 24 – Estratégia escrita de Geane em 11/8/17  Fonte: Arquivo das pesquisadoras.	Figura 25 – Estratégia escrita de Geane em 11/9/18  Fonte: Arquivo das pesquisadoras.

Isis	*Desenvolver as diversas possibilidades que a família pode fazer para chegar em C. <u>Traçar setas indicando os caminhos</u>.*	Figura 26 – Estratégia escrita de Isis em 11/8/17  Fonte: Arquivo das pesquisadoras.	Figura 27 – Estratégia escrita de Isis em 11/9/18  Fonte: Arquivo das pesquisadoras.
Joice	*- <u>Identificar as possibilidades</u> e, assim, ter uma visão <u>de quantos caminhos</u> podem ser feitos. - <u>Registrar as possibilidades</u> de caminho.*	Figura 28 – Estratégia escrita de Joice em 11/8/17  Fonte: Arquivo das pesquisadoras.	Figura 29 – Estratégia escrita de Joice em 11/9/18  Fonte: Arquivo das pesquisadoras.
Vini	*É possível <u>representar</u> através da análise do desenho dado, <u>montando uma tabela</u>. Para isso, seria necessário a <u>nomeação ou numeração das ruas</u>. Assim, identificamos as possibilidades <u>podendo</u>, inclusive, <u>levar em consideração alguns critérios como, por exemplo, o caminho que levaria menos tempo</u>.*	Figura 30 – Estratégia escrita de Vini em 11/8/17  Fonte: Arquivo das pesquisadoras.	Figura 31 – Estratégia escrita de Vini em 11/9/18  Fonte: Arquivo das pesquisadoras.

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras, 2018.

Embora o problema tenha sido trabalhado em três momentos distintos (estratégia verbalizada e escrita em 11/8/17 e estratégia escrita no retorno em 11/9/2018), observamos, no quadro anterior, que o processo de resolução envolveu os seguintes procedimentos:

1) *Leitura e compreensão do enunciado a partir do que os estudantes já sabiam*. Isso quer dizer que se valeram de conhecimentos prévios de como resolver tanto um problema de modo geral quanto um problema de combinatória. Assim, a maioria dos estudantes identificou dados relevantes do problema e buscou operar com eles, sem evidenciar que haviam identificado um modelo combinatório implícito. Outros estudantes, porém, perceberam que a combinatória era a base matemática implícita ao problema e operaram com o princípio aditivo e/ou multiplicativo.
2) *Percepção da primeira condição apresentada no problema*: identificar e enumerar as possibilidades de deslocar de A para B.
3) *Reconhecimento da segunda condição subjacente ao problema:* definir e indicar quais caminhos poderiam ser tomados pela família de Beto para se deslocar de B para C.
4) *Quantificação e listagem do número total de caminhos de A até C.*

Para nós, cada frase do enunciado associada à ilustração que compunha o problema provocava o estudante a evidenciar alguma imagem relacionada ao conceito. Isso porque, conforme mencionado acima em 1, 2, 3 e 4, cada um desses procedimentos exigia que os estudantes demonstrassem algum conhecimento conceitual de combinatória, que, mesmo não sendo imediatamente identificado por eles, estava implícito no problema. Além disso, o problema proposto é um exemplo de uma situação rotineira da vida das pessoas que envolve a combinatória e possui intercessões com aritmética (no que diz respeito às operações de contagem) e relações visuais com a geometria (observadas nos desenhos dos trajetos). Como os estudantes já estavam no sexto período da licenciatura, esperávamos que compreendessem o enunciado verbal e visual (texto + figura), as duas condições subjacentes (contar e listar) e dessem evidências de que haviam percebido uma relação entre o conhecimento de combinatória e os outros. E, assim, resolvessem, registrassem e explicassem os argumentos mencionados por eles.

Para a análise das resoluções dos licenciandos e a identificação do conceito matemático principal subjacente ao problema, análise combinatória, tomamos como base as resoluções que antecipamos e as categorias (imagem conceitual da definição do conceito, do ensino e da aprendizagem e de outro conceito matemático) comentadas anteriormente. Assim, vimos que a primeira solução de Alex, Joice e Vini e a segunda solução de Alice se assemelhavam à estratégia 6 previamente antecipada por nós. Observamos que o modo de resolver dos licenciandos partiu da análise da ilustração que acompanhava o enunciado. Posteriormente identificaram o número de possibilidades para o primeiro deslocamento (A até B) e multiplicaram pelo número de possibilidades do segundo (B até C), obtendo 6.

Em nossa descrição da estratégia 6, mencionamos que ela seria uma forma de tratar a multiplicação associada à ideia conceitual de combinatória conforme sugere o PCN (BRASIL, 1997). No entanto, quando esses mesmos licenciandos destacaram, no primeiro dia de aula (11/8/17), o pensamento matemático subjacente ao problema, apenas Alex informou que seria um problema de pensamento combinatório e talvez algébrico. Assinalou que a ideia da multiplicação que estava "por trás" do problema era aquela associada à combinatória. Quanto ao pensamento algébrico, associou variáveis a "qualquer coisa" (letra/número) que representasse os caminhos. Embora o conceito de variável tenha sido empregado de maneira equivocada, o estudante utilizou-se das ideias conceituais para identificar os possíveis caminhos. Notamos que ele resolveu, registrou e argumentou sua resolução. No retorno em 2018, quando solicitamos que ele nos explicasse o significado do número 6 de sua resposta (ver quadro 9), Alex reafirmou que havia pensado nas possibilidades de caminhos: *"eu multipliquei porque se trata de combinatória né, problema de combinatória [...] multiplicação, é uma das ideias [...]"*.

Outro ponto assinalado por Alex advém de sua experiência como professor de reforço escolar e de aulas particulares. Ele destacou: *"[...] a grande dificuldade é a do menino bater o olho e descobrir que é um problema de combinatória [...] não consegue enxergar os problemas de combinatória como sendo de combinatória"*. Ressaltou, ainda, que geralmente os estudantes "enxergam" o problema como uma soma de valores, não o interpretam como se fosse de combinatória e não relacionam que o princípio aditivo e/ou multiplicativo está em sua base. Alex ainda relatou que o incentivo para que seus alunos pensassem sobre o problema e em como resolvê-lo foi o ato de instigá-los com questões desafiadoras.

Diferentemente de Alex, Joice e Vini destacaram que o conceito subjacente ao problema se referia ao "pensamento lógico". O último complementou informando que, para além desse conceito, o problema envolvia análise, combinação e interpretação. Justificou sua resposta assinalando que pensou nesses pontos, *"porque em todos os passos foram necessários a utilização destes elementos"*. Ele não os relacionou à combinatória em si, mas a procedimentos de resolução de problemas. No retorno em 2018, Vini explicou que o problema era de combinatória, mas que acreditou ser essa resposta muito óbvia. Assim disse: *"[...] você* *perguntando, deveria ser outra coisa, né! À primeira vista é combinatório, as possibilidades dele tomar caminhos".*

De modo geral, Vini e Joice analisaram o desenho, identificaram o número de possibilidades do primeiro deslocamento e multiplicaram pelo número de possibilidades do segundo. Para cada possibilidade de A, associaram outras três em B e obtiveram 6 como resposta. Joice detalhou um pouco mais sua estratégia de resolução: primeiro, ela identificou os caminhos com os números 1, 2, 3, 4, e 5; depois, usando duplas ordenadas {1, 4}, {1, 3}, {1, 5}, {2, 3}, {2, 4} e {2, 5}, listou e mostrou todos os trajetos possíveis de A até C, o que foi semelhante ao que antecipamos na estratégia 7 comentada anteriormente. Em 2018, quando solicitamos que ela explicasse essa resolução, informou-nos que se lembrava da situação-problema e, para resolvê-la, deveríamos entendê-la como

> *[...] <u>dividida em dois momentos</u>, que seria... <u>porque eu tenho que ir da cidade A para cidade C, passando por B</u>. Então, <u>para mim, para passar por B primeiro eu tenho que ir de A até C, então, quantas possibilidades eu posso ir tanto pelo caminho A, digamos assim, caminho 1 e caminho 2, e de B até C vai ser a mesma coisa. Então, eu tenho três caminhos</u>. Aí eu pensei da seguinte forma: <u>Se eu escolher o caminho 1 eu vou ter três caminhos para prosseguir. Se eu escolher o caminho 2, eu vou ter mais 3 caminhos para prosseguir</u>. Então, <u>o total, escolhendo um ou outro, eu vou ter seis caminhos</u> (Em 11/9/18).*

Ainda durante o retorno, Joice resolveu o problema pelo produto de dois arranjos simples e também encontrou 6 possibilidades de caminhos (ver figura 29). Essa estratégia utilizada por ela não foi previamente antecipada por nós. Mesmo entendendo que o uso de fórmulas de combinatória seria recomendado para problemas mais complexos e com muitos dados em que seria trabalhoso listar e identificar todas as possibilidades, incluímos, após uma análise cuidadosa, esta solução como uma possível estratégia que poderia emergir se replicarmos este problema em outra turma de ensino superior.

Vini apresentou sua segunda solução em 11/9/18, organizada em uma tabela, conforme havia mencionado na estratégia verbalizada em 11/8/17. Observando a resolução dele, notamos que mencionou as cidades A, B e C, organizou os possíveis trajetos em duplas ordenadas indicadas por 1,3; 1,4; 1,5; 2,3; 2,4; 2,5 e apresentou-os. Portanto, consideramos uma solução semelhante àquela que antecipamos na estratégia 7. Assim, percebemos que, em ambas as soluções, os dois licenciandos forneceram-nos indícios de que organizaram, enumeraram, listaram o número total de possibilidades e compreenderam o modelo combinatório implícito ao problema.

A segunda resolução de Alice, apresentada em 11/9/18, durante o retorno, também se assemelhou à estratégia 6 descrita por nós. A licencianda destacou que havia duas possibilidades de trajetos de A para B e outras três de B para C. Pela multiplicação (3 x 2; 2 x 3), concluiu que o número total de trajetos seria 6. Nesta ocasião, Alice explicou seu pensamento, esclareceu a forma como pensou a solução e apresentou sua compreensão acerca do enunciado:

> *Bom, [...] seria <u>organizar primeiro em partes</u>. De <u>A pra B eu tenho duas possibilidades</u> pra chegar, de A até B. E de <u>B até C eu tenho três possibilidades</u> pra chegar. Eu <u>não consigo chegar de A até C sem passar até B primeiro</u>, então por isso eu tenho que fazer elas assim: primeiro de A até B, depois de B até C. Então, <u>como aqui eu tenho duas possibilidades e aqui e tenho três, é só eu multiplicar elas que eu vou ter as seis possibilidades de estar chegando de A até C</u> [...] (Em 11/9/18).*

Já a primeira solução de Alice se associou à estratégia 7 antecipada por nós. Nela destacamos que os caminhos poderiam ser indicados por algum símbolo ou letra e depois representados. Alice nomeou os caminhos e apresentou-os em duplas ordenadas (d – e; d – f; g – h; g – f; g – e; d – h). Embora não tenha mencionado as cidades A, B e C, ela as considerou, ao organizar os trajetos. A segunda solução de Alex e a terceira de Alice se aproximaram de nossa estratégia 5. Nela os estudantes analisaram a ilustração e desenharam os caminhos. Alex indicou as cidades por pontos e letras maiúsculas (A, B e C) e Alice desenhou-os sem indicá-los. Vimos que, durante o processo de desenhar, os dois licenciandos pareceram enumerar mentalmente os caminhos para obter 6 como resposta.

Na solução verbalizada e escrita por Felipe no primeiro dia de aula, em 11/8/17, notamos que ele resolveu o problema de forma semelhante à estratégia 1 proposta por nós. Na ocasião, ele analisou a situação, contou os caminhos mentalmente e registrou o número 6 como resposta. Ao mencionar o conceito matemático implícito ao problema, Felipe afirmou ser algébrico e geométrico, explicando: *"Algébrico, se necessita calcular os trajetos; [e] Geométrico, precisa apontar os caminhos"*.

Quando explicou o pensamento algébrico, apresentou uma justificativa associada à aritmética remetendo à ideia de cálculo. Neste caso, pareceu contraditório em relação aos diferentes campos da matemática. Além disso, associou a representação dos trajetos evidenciada na figura como parte da geometria, pois, segundo Felipe, elas indicavam direção e sentido. Embora os trajetos mostrassem o número de caminhos, corroboramos que a ilustração dava a impressão de figuras geométricas denotadas pelos traçados dos trajetos. Portanto, suas características e as possíveis relações entre combinatória e geometria poderiam ser exploradas.

Algo que ainda nos chamou a atenção foi a contradição de Felipe em relação à álgebra e à aritmética. No retorno em 2018, vimos que o licenciando, já finalizando a licenciatura, ainda não possuía clareza dos campos da matemática. Vejamos o diálogo estabelecido entre a pesquisadora e o estudante:

> ***Pesquisadora:*** *Você não está confundindo a álgebra com a aritmética não? Por que esses cálculos aqui eles são algébricos? Quando você soma, quando você multiplica, você tem o quê? Isso é o quê?*
> ***Felipe:*** *Então, eu não sei dizer muito a diferença de uma coisa pra outra. Eu sempre achei que fosse tudo algébrico [...] até pensei que aritmético fosse um termo usado a muito tempo atrás, que caiu e entrou álgebra no lugar. A gente sempre ouviu [...] sempre falava-se aritmética, só que com o tempo a gente não ouve mais falar achei que tinha caído em desuso, achei que álgebra tinha entrado pra substituir.*
> ***Pesquisadora:*** *Ah! [...] Eu vou te explicar isso aqui... A diferença da álgebra pra aritmética, tá bem? [...] (Em 11/9/18).*

Com esse fragmento, mostramos que, como professores do ensino superior, às vezes, priorizamos conteúdos mais genéricos e abstratos durante o curso de licenciatura. Assim, esquecemo-nos de que conteúdos a serem ensinados na educação básica precisam ser incorporados, trabalhados e relacionados à matemática superior tratada durante a formação inicial. Sabemos que a formação inicial não dará conta de todas as questões relativas à atividade profissional. Além disso, reconhecemos que esta não era a única aprendizagem equivocada de Felipe. No entanto, orientá-lo, antes que concluísse a licenciatura, o auxiliaria a se tornar um professor com conhecimentos matemáticos mais coerentes.

No retorno em 2018, ao resolver o problema utilizando outra estratégia, Felipe nomeou o primeiro trajeto com números e o segundo com letras do alfabeto. Pareceu representar, por meio de uma enumeração confirmada oralmente por ele, sua estratégia verbalizada em 11/8/17. Isso aconteceu de modo natural e sem interferência da professora e das pesquisadoras. Analisando a resolução do estudante, pensando pelo princípio aditivo e usando a mesma lógica de enumerar caminhos, Felipe pareceu considerar que seriam três o número de possibilidades de cada trajeto. Então, pela adição, teria uma união entre o número de possibilidades de A até B + B até C, resultando em 6. Isso seria semelhante à estratégia 3 descrita por nós. Felipe ainda resolveu o problema de outros modos distintos: diagrama da árvore, listagem de duplas ordenadas e pelo produto (2 x 3) já mencionado na solução 1. Ainda em 2018, durante o retorno dos dados, Felipe assim explicou a solução 1 dada em 2017:

> *[...] coloquei aqui até seis vezes, seria pelo fato de que de A até B, se você pegar um dos caminhos, se você enumerasse esse primeiro caminho aqui de 1, você teria 3 possibilidades. Se você pegasse o outro caminho, que seria o 2, de A até B, você teria mais 3 possibilidades. Daí eu juntei as duas possibilidades do caminho 1 e 2, de A até B, dando o resultado de 6"(Em 11/9/18).*

Na explicação de Felipe, observamos que ele apresentou uma linguagem matemática coerente para esclarecer a solução dada ao problema. Além disso, utilizou um vocabulário relacionado à combinatória, como o emprego do termo enumerar, entre outros. Vimos que Felipe, ao “juntar as duas possibilidades de caminhos”, confirmou ter utilizado o princípio aditivo para encontrar sua resposta. Além disso, quando perguntamos se ele havia somado, esclareceu que, tanto pela adição quanto pela multiplicação, o resultado seria o mesmo. Isso quer dizer que Felipe passou a ver as operações que estão na base da combinatória de modo relacionado. Destacou que esse comportamento é reflexo das aulas de combinatória, desenvolvidas na licenciatura em 2017.

Isis, ao resolver, em 11/8/17, o problema pela primeira vez, analisou o desenho dado, no qual enumerou os caminhos e depois os contou. Observamos que ela criou um trajeto inexistente (ver figura 26). A estudante traçou uma seta em linha reta de A para B, outra de B para C e a indicou pelo número 1 em sua resposta. Dessa forma, contou cinco possibilidades de caminhos, incluindo esse que ela mesma havia criado e indicado. Além disso, ela desconsiderou as duas possibilidades formadas pelas metades de uma circunferência (representações em forma de S “deitado” e S “invertido”). Por isso, sua solução assemelhou-se àquela que descrevemos na estratégia 4.

Também em 11/8/17, Isis ressaltou que o pensamento matemático subjacente ao problema era o combinatório, porque “relaciona vários caminhos, e dentre esses caminhos, podemos listar as possibilidades que existem entre eles”. Mesmo se equivocando na resolução, Isis identificou o domínio matemático e argumentou-o de modo coerente. No retorno em 2018, posteriormente à disciplina, Isis destacou: *“para ir da cidade A até a cidade B, há dois caminhos. E pra ir de B até C, há três caminhos. Então, pelo princípio fundamental da contagem, né, eu nem fiz, isso vai resultar em seis caminhos”*. Ela resolveu o problema corretamente, utilizou o PFC e encontrou o resultado. A segunda solução apresentada por Isis foi semelhante à resolução 1 de Joice, que, portanto, possuem ideias muito semelhantes àquelas que informamos na estratégia 8 antecipada por nós. Assim como Joice, Isis usou os números 1, 2, 3, 4, e 5 para identificar os caminhos e os indicou por duplas ordenadas (1, 3; 1, 4; 1, 5; 2, 3; 2, 4; 2, 5), o que a levou a encontrar seis possibilidades.

Nas soluções um (11/8/17) e dois (11/9/18) de Geane e na terceira de Felipe (11/9/18), vimos que utilizaram o diagrama da árvore para resolver o problema dado. Conforme apresentamos na estratégia 8, eles nomearam os caminhos, fixaram a saída da cidade A e alternaram os trajetos intermediários até esgotar todas as possibilidades. Embora, durante o retorno em 2018, Geane tenha organizado os trajetos em uma tabela, a ideia combinatória evidenciada pela estudante é similar àquela utilizada na árvore de possibilidades. Quando, em 11/8/17, resolveu o problema pela primeira vez, Geane destacou que o pensamento matemático implícito a ele se relacionava à combinatória. Portanto, no retorno, a pesquisadora a indagou:

> ***Pesquisadora:*** *[...] Tinha alguma coisa aqui que te lembrava isso? [...]*
> ***Geane:*** *Então, <u>pelo enunciado em 'quantas maneiras diferentes eles podem ir' eu já entendi que</u>... ele... <u>o problema queria possibilidades</u> de... da combinação realmente dos caminhos, então, <u>por isso que eu coloquei análise combinatória</u>. E talvez porque <u>eu já tinha feito alguma coisa parecida com isso na época que eu estudei também</u>, aí eu coloquei análise combinatória (Em 11/9/18).*

Com esse fragmento, chamamos a atenção para o enunciado de um problema de combinatória, pois o modelo combinatório implícito no enunciado orientará o processo de resolução. A licencianda destacou que, ao encontrar o termo "quantas maneiras diferentes", o enunciado a fez perceber que o resultado deveria ser encontrado por meio de uma contagem indicada pelo argumento "o problema queria possibilidades". Outro ponto destacado pela estudante é que ela rememorou a resolução de um problema anterior, que serviu de base para pensar de que modo ela poderia iniciar a resolução do problema.

Diante do que encontramos nas respostas dos estudantes, sintetizamos e apresentamos, a seguir na tabela 15, a resolução que se refere às soluções 1 e 2 apresentadas, respectivamente, em 11/8/17 e 11/9/18, a estratégia antecipada e as imagens que percebemos emergir das estratégias apresentadas pelos licenciandos. Buscamos entrelaçar tais imagens àquelas evidenciadas no quadro 8. Destacamos que, embora apresentemos as estratégias dos estudantes evidenciadas em momentos distintos da pesquisa, para fins de análise de imagens iniciais, consideramos as estratégias verbalizadas e escritas em 11/8/18, primeiro dia de aula da disciplina.

Tabela 15 – Síntese das imagens evidenciadas nas estratégias dos estudantes

Licenciando	Resolução	Estratégia antecipada	Imagens evidenciadas nas respostas dos estudantes
Alex	1 2	6 5	- *Imagem conceitual da definição,* ao identificar o conceito, utilizar a multiplicação associada à ideia de combinatória e argumentar, de modo coerente, suas escolhas. - *Imagem do ensino e da aprendizagem* relacionada aos modos de resolver um problema de combinatória. Percebemos tais imagens quando Alex analisou a ilustração, identificou o número de possibilidades para o primeiro deslocamento e multiplicou pelo segundo. Utilizou a multiplicação associada à ideia conceitual de combinatória e identificou o conceito matemático implícito ao problema. Dessa maneira, assim como evidenciado no quadro 8, Alex demonstrou uma atitude em relação à sua aprendizagem de combinatória construída anteriormente à licenciatura.
Alice	1 2 3	7 6 5	- *Imagem do ensino e da aprendizagem* relacionada aos modos de resolver um problema de combinatória. No quadro 8, vimos que, embora Alice não recordasse o conteúdo, ela havia emitido certa aprendizagem de combinatória. Isso foi confirmado quando Alice resolveu o problema pela primeira vez. Na ocasião, vimos que a estudante nomeou os trajetos com letras do alfabeto e os apresentou em duplas ordenadas. De modo comedido, Alice reforçou a utilidade da combinatória, ao utilizar seu conhecimento pregresso para resolver um problema.
Felipe	1 2 3	1 3 7 e 8	- *Imagem do ensino e da aprendizagem* relacionada aos modos de resolver um problema de combinatória. Felipe, semelhantemente a Alice, destacou, no quadro 8, que não recordara o conteúdo. No entanto, vimos que ele havia emitido certa aprendizagem de combinatória. Isso foi confirmado quando resolveu o problema em 11/8/17. Na ocasião, Felipe informou-nos que analisou os caminhos apresentados na ilustração, os contou mentalmente e registrou o número 6 como resposta. Supomos, então, que Felipe, de modo comedido, tenha reforçado a utilidade da combinatória, ao apresentar modos de resolver o problema baseado em seu conhecimento anterior do assunto.
Geane	1 2	8 8	- *Imagem conceitual da definição,* ao identificar o conceito e ao operar com a noção de fatorial de um número natural, para obter a resposta do problema e confirmar o número de trajetos obtidos com a resolução por meio do diagrama da árvore. Além disso, Geane argumentou, de modo coerente, suas decisões. - *Imagem do ensino e da aprendizagem* relacionada aos modos de resolver um problema de combinatória. Geane pareceu ter analisado o enunciado (verbal e visual, ilustração), nomeado os caminhos, fixado a saída em A e alternado os trajetos intermediários, a fim de obter todas as possibilidades possíveis. Manifestou conhecimento da definição do conceito, ao reconhecê-lo implicitamente ao problema, saber operar com ele e utilizar a noção de fatorial. Embora Geane tenha apreciado negativamente sua aprendizagem no ensino médio (ver quadro 8), ela demonstrou certo conhecimento sobre o conteúdo.

Isis	1 2	4 7	- *Imagem conceitual da definição,* ao identificar o modelo combinatório como aquele que estava implícito ao problema. - *Imagem do ensino e da aprendizagem* relacionada aos modos de resolver um problema de combinatória. Apesar de Isis ter clareza de que se tratava de um problema de combinatória (ver quadro 8), a resposta dada por ela em 11/8/17 mostrou-se equivocada. Isso foi percebido quando ela mesma criou mais um trajeto e o incluiu em sua resolução. Além disso, o modo como Isis apresentou sua solução impossibilitou-a de “ver” todos os trajetos. Portanto, assim como Alice e Felipe, ela reforçou, de modo comedido, a utilidade da combinatória, ao apresentar modos de resolver o problema baseado em seu conhecimento anterior do assunto.
Joice	1 2	6 e 7 9	- *Imagem conceitual da definição,* ao utilizar a multiplicação associada à ideia de combinatória, apresentar o resultado em duplas ordenadas e argumentar, de modo coerente, seus procedimentos. - *Imagem do ensino e da aprendizagem* relacionada aos modos de resolver um problema de combinatória. Joice pareceu ter analisado a ilustração, identificado o número de possibilidades para o primeiro deslocamento e multiplicado pelo segundo. Utilizou a multiplicação associada à ideia conceitual de combinatória mesmo não tendo identificado o conceito implícito ao problema. Desse modo, assim como evidenciado no quadro 8, Joice demonstrou uma atitude em relação à própria aprendizagem de combinatória construída anteriormente à licenciatura.
Vini	1 2	6 7	- *Imagem conceitual da definição*, ao utilizar a multiplicação associada à ideia de combinatória e ao argumentar, de modo coerente, suas escolhas. - *Imagem do ensino e da aprendizagem* relacionada aos modos de resolver um problema de combinatória. Percebemos tais imagens quando Vini analisou a ilustração, identificou o número de possibilidades para o primeiro deslocamento e multiplicou pelo segundo. Utilizou a multiplicação associada à ideia conceitual de combinatória mesmo não tendo identificado o conceito implícito ao problema. Assim como evidenciado no quadro 8, demonstrou ter aprendido anteriormente à licenciatura procedimentos úteis à resolução de problemas de combinatória.

Fonte: Elaborada pelas pesquisadoras, 2018.

A imagem mais evidente foi aquela relacionada ao ensino e à aprendizagem de combinatória associada aos modos de resolver um problema. Vimos que, subjacentemente a ela, os licenciandos emitiram uma imagem do conceitual, e não da definição conceitual em si. Isso quer dizer que os procedimentos de resolução apresentados por eles rememoraram o conceito (VINNER, 2002; 2011), neste caso, o modelo combinatório implícito (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996); apontam aspectos diferentes da definição formal do conceito (TALL; VINNER, 1981) e, por isso, apresentam-se como construções individuais e próprias de cada estudante. Tais observações confirmam que "adquirir um conceito significa formar uma imagem conceitual para ele" (VINNER, 2002, p. 69, tradução nossa[156]).

Percebemos que a imagem conceitual mais evidenciada no processo de resolução se referiu à multiplicação (2 x 3) associada à combinatória, em vista dos procedimentos mencionados (identificar o número de possibilidades para o primeiro deslocamento e multiplicar pelo segundo). Esse também foi o tipo de solução que mais se assemelhou à estratégia proposta pelo autor do livro didático para este problema do 3.º ano do ensino fundamental (DANTE, 2015, V. 3). No manual do professor, Dante (2015) mencionou que a família de Beto poderia ir de A até C de seis maneiras distintas: "2 de A até B; 3 de B até C; 2 x 3 = 6". Ou seja, embora nem Dante (2015) nem todos os licenciandos tenham comentado a combinatória, houve o emprego do princípio multiplicativo em ambos os casos. Esse movimento vai ao encontro de nossas considerações anteriores, quando destacamos que o problema envolvia o pensamento combinatório e poderia ser resolvido pelo produto das possibilidades de A até B e de B até C. Além disso, considerando que a multiplicação também pode ser resolvida pela soma de parcelas repetidas, esperávamos que os licenciandos identificassem inicialmente a combinatória como pensamento primordial subjacente ao problema dado e houvesse menções à multiplicação e/ou à adição, associadas ou não à combinatória.

Pelas resoluções dos licenciandos, vimos que consideraram a ordem dos trajetos, ao resolverem o problema. Observamos que principalmente Alex, Felipe, Geane, Joice e Vini identificaram que havia duas condições a serem satisfeitas, compreendidas isoladamente e operadas de maneira integrada, para que o problema fosse resolvido. Isso parece ter acontecido devido à presença do termo *distinto* no enunciado, um atributo (HERSHKOWITZ, 1994) que fornece pistas e direciona o processo de resolução. Dessa forma, salientamos que atributos e identificação do modelo combinatório implícito (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996) são essenciais para que o enunciado de um problema de combinatória não se apresente como um mistério a ser desvelado e seja bem compreendido.

No retorno em 2018, Vini explicou que o problema era de combinatória, mas que acreditou ser essa resposta muito óbvia. Isso nos chamou a atenção e nos permitiu refletir especialmente sobre dois aspectos: Quais fatores levam um licenciando a desacreditar em seu conhecimento? Por que os estudantes estão acostumados com questões cujas respostas são sempre mais complexas do que aquelas percebidas à primeira vista?

[156] [...] to acquire a concept means to form a concept image for it.

Sobre a estratégia 1 de Isis, ressaltamos que, apesar de ter sido equivocada, ela foi obtida pela visualização imediata dos trajetos. Portanto, há de se considerar que ilustrações em enunciados de problemas nem sempre auxiliam na resolução. Tal equívoco indica que professores devem dialogar com os estudantes sobre a compreensão do enunciado por eles, analisar os resultados encontrados e refletir sobre eles. Mostra, ainda, que devemos investigar as causas dos equívocos antes mesmo de considerar a questão como errada.

Outro aspecto observado foi o fato de evocarem experiências com a resolução de problemas (POLYA, 1973; SANTOS, 1997; ZANON, 2011) combinatórios ou não. Em relação às estratégias, percebemos que os licenciandos conheciam algumas formas úteis à resolução de problemas de contagem. Isto foi confirmado quando usaram o princípio aditivo, multiplicativo, as duplas ordenadas e o diagrama da árvore. O princípio multiplicativo apareceu em maior escala e o diagrama da árvore em menor. Isso pode ter forte influência do livro didático, visto que nele se estimula o uso do PFC na resolução de problemas de combinatória em detrimento ao uso de fórmulas e de outras possibilidades de resolução. Além disso, os licenciandos demonstraram que é possível resolver problemas de combinatória movimentando, de maneira consciente, todo o arcabouço de conhecimento matemático, combinatório ou não, já sistematizado anteriormente.

Para Polya (1973), essa atenção que deve ser dada à correlação com problemas anteriores e/ou correlatos auxilia tanto professores como alunos na busca por situações e aprendizagens anteriores e talvez mais simples. Além disso, fornecem pistas e possibilidades de resolver novos e outros problemas. Essa ideia também permeia a sua discussão das quatro fases para a resolução de problemas (compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano e fazer um retrospecto da resolução). Tais fases foram pensadas e organizadas pelo autor, para que o processo de resolução de problemas ocorresse por meio de indagações e sugestões, antecipando possíveis dificuldades e/ou instigando questionamentos pelos alunos. Entretanto, é importante ressaltar que a evocação pelo aluno de ecos e lembranças de problemas semelhantes e resolvidos anteriormente pode trazer à memória uma maneira mecânica e decorada de resolvê-los.

Sendo assim, o aluno pode realizar um *modus operandi* baseado em uma reprodução de procedimentos e/ou de aplicação de fórmulas que podem não corresponder a uma compreensão do problema. Por isso, há necessidade, conforme já mencionamos, de um diálogo entre professor e aluno diante do enunciado proposto por meio de questionamentos, o que enriquece o processo de resolução do problema (POLYA, 1973). Isso pode movimentar o pensamento em direção ao uso de diferenciadas estratégias para resolver o mesmo problema, encontrar lacunas no próprio enunciado, propor a reelaboração ou nova formulação da questão e a compreensão do assunto matemático envolvido na situação-problema.

Ao considerarmos que, diante de um enunciado proposto, há necessidade de um diálogo entre professor e aluno, tendo por objetivo compreender o problema (POLYA, 1973), trazemos a seguir um episódio de discussão em sala de aula envolvendo a turma inteira (STEIN et al., 2008), para complementarmos as estratégias de resolução apresentadas pelos estudantes. Refere-se à introdução da aula inicial de combinatória por meio da tarefa de resolução de problemas – *fase de apresentação e exploração do problema matemático e discussão com a turma toda*. Três segmentos formam esse *episódio 1*, em que discussões coletivas foram importantes para tornar público o pensamento matemático dos licenciandos:

- *Segmento 1* — Discussão surgida quando a pesquisadora iniciou um diálogo com os estudantes com base em uma questão disparadora relacionada à análise do enunciado do problema.

- *Segmento 2 e 3* — Fazem parte da fase de *exploração* do problema e de *discussão de toda a turma*. Foram incitadas pelas práticas de *monitorar* as respostas dos alunos, *selecionar* e *sequenciar* aquelas que seriam compartilhadas para posteriormente serem *conectadas* e *validadas*. Além disso, surgiram em decorrência do primeiro segmento. O *segmento 2* retrata a discussão que emergiu quando propusemos que os estudantes compartilhassem suas concepções individuais sobre a constituição do enunciado de um problema quanto à ideia deles de que problema tem de ter uma pergunta e uma resposta a ela. Já o *segmento 3* encerra uma discussão provocada pela pesquisadora com base no segmento anterior. Mostra questões elaboradas pelos licenciandos para complementar o problema, a fim de que pudesse ser resolvido. Em todos os casos, a análise focaliza os momentos de discussão coletiva e as inferências individuais feitas pelos estudantes a partir destes.

A escolha por tais episódios deve-se sobretudo a alguns aspectos: (i) evidenciam uma discussão relacionada à compreensão de um enunciado de problema, apontando formas de provocar os estudantes a pensar sobre o texto matemático e a relação entre escrita e ilustração; (ii) se complementam, quando validam formas de pensar e argumentar a constituição de um problema matemático; e (iii) abrem possibilidades para iniciarmos o *segmento 3*, quando solicitamos aos estudantes que elaborassem uma questão para que o problema fosse resolvido.

Os três segmentos fornecem pistas da *imagem conceitual da definição do conceito* de combinatória que os licenciandos apresentaram, ao iniciarem a disciplina, e que as pesquisadoras conseguiram identificar e/ou observar naquela ocasião. Assim, a análise é feita por segmento mediante as provocações da pesquisadora e/ou da professora.

Episódio 1 – Introdução de uma aula inicial de análise combinatória por meio de uma tarefa de resolução de problemas

A primeira situação retrata uma discussão coletiva que, incitada pela pesquisadora, convidou os licenciandos a se envolverem na resolução do problema – *fase de apresentação*. Antes dos segmentos que apresentamos, os estudantes haviam recebido da professora a parte do problema (ver figura 7) a ser trabalhado na aula e a pesquisadora tinha solicitado que ele fosse analisado individualmente pelos licenciandos – *fase de exploração*.

Segmento 1 — Discussão coletiva da análise do enunciado pelos licenciandos – *fase de discussão, prática de monitoramento*. Com essa prática, problematizamos a atividade. Pretendíamos que explicitassem sua compreensão sobre o enunciado para observarmos as ideias matemáticas colocadas em jogo durante a análise individual. Indagamos *"Esse enunciado está claro para vocês?*", convidando os licenciandos a se envolverem na discussão:

> ***Alex:*** *Acho que está um pouco vago.*
> ***Pesquisadora:*** *O que você acha que está vago, Alex?*
> ***Alex:*** *Tipo assim, não está deixando claro o objetivo. Representar, já está representado né* (apontando o desenho dos trajetos) *[...]. Então, para mim não apareceu um objetivo muito claro de representar em que sentido ou para quê. Porque você não está falando 'representar para calcular as possibilidades', 'representar para achar o menor percurso', então não tá falando o objetivo.*
> ***Pesquisadora:*** *Tem mais alguma coisa? O que mais vocês perceberam?*
> ***Felipe:*** *Parece que está incompleto, né?*
> ***Professora:*** *Mas, se está incompleto, o que poderia ser feito então?*
> ***Alex:*** *Para mim falta objetivo!*
> ***Felipe:*** *A pergunta em si. O problema em si. Porque aparentemente só tem a contextualização: que ele vai sair, passar pela cidade, para chegar na cidade tal que é a cidade deles.*
> ***Vini:*** *Ele dá a condição* (referindo-se ao ato de ter que ir de uma cidade para outra passando por uma cidade intermediária), *mas não dá o objetivo.*
> ***Alex:*** *É. O que vocês acham que deve ser feito para representar a situação dada a fim de saber quantas possibilidades? Eu colocaria algo assim para completar o problema.*

Nesse segmento, identificamos que os estudantes que se envolveram na discussão apontaram a ausência de informações no enunciado dado. Assinalaram que ele, embora apresentasse uma contextualização e uma condição, estava vago e incompleto. Faltava objetivo e questão, ou seja, a pergunta e o problema em si. Mencionaram a necessidade de um objetivo, pergunta ou comando para indicar o que deveria ser feito. Os alunos estavam focalizando detalhes do que eles internalizaram e acreditaram tratar-se de um problema tipo.

Alex pareceu incomodado com o fato de propormos uma situação sem a informação do que deveriam fazer para resolver o problema, pois isso dificultava a interpretação dele. Desse modo, manteve-se coerente com a resposta dada por ele à questão 3 do bloco 1, quando informou que não gostou de estudar análise combinatória no ensino médio, por não conseguir interpretar o enunciado. Então, sugeriu algumas informações que considerou úteis à resolução: *"representar em que sentido* (referindo-se à direção dos trajetos na ilustração) *ou para quê"* (diz respeito à cidade de destino)*; "representar para calcular as possibilidades"; "representar para achar o menor percurso"*. Por fim, disse que, para complementar o enunciado, incluiria uma questão do tipo: *"O que vocês acham que deve ser feito para representar a situação dada a fim de saber quantas possibilidades?"* Ao sugerir abordagens para o problema, evidenciou *imagens conceituais da definição do conceito* associadas a determinadas condições, tais como calcular o número de possibilidades de trajetos e encontrar um trajeto mais rápido.

De modo geral, os argumentos dos licenciandos parecem mostrar quão habituados estão a trabalhar em problemas que apresentam uma pergunta que deve ser respondida. Não pensaram, por exemplo, na possibilidade de ser um problema sem solução (SANTOS, 1997; ZANON, 2011). Ao notar isso, lançamos a questão – "*E vocês acham que todo problema tem que ter uma pergunta?"* – para desafiá-los e envolvê-los na discussão.

Segmento 2 — Discussão coletiva sobre a necessidade de um problema ter uma pergunta que deve ser respondida.

> ***Alex:*** *<u>Sim</u>!*
> ***Felipe:*** *Acredito que <u>sim</u>.*
> ***Vini:*** *<u>Sim</u>, uma pergunta.*
> ***Geane:*** *Tem que ter <u>um ponto de interrogação</u>.*
> ***Professora:*** *E, quando vocês resolvem uma questão de cálculo, tem uma pergunta?*
> ***Felipe:*** *<u>Nem sempre</u>.*
> ***Joice:*** *<u>Nem sempre tem uma pergunta</u>.*
> ***Felipe:*** *<u>Mas já está embutido ali</u>.*
> ***Professora:*** *<u>Mas é um problema</u>?*
> ***Geane:*** *<u>Tem o comando para a gente fazer alguma coisa</u>.*

Mais uma vez os estudantes *validaram* a necessidade de um problema apresentar uma questão que deve ser respondida com a resolução. Por outro lado, quando a professora indagou se, em uma questão de cálculo, havia pergunta, ressaltaram que, embora não houvesse, havia uma orientação do que eles deviam fazer. Tal ideia mostra o tipo de estrutura de problema de matemática que vem sendo priorizado desde a educação básica: aquele que apresenta um enunciado acompanhado de uma questão. Essa associação, apesar de não consciente, só emergiu quando os estudantes foram desafiados a pensar em alguma alternativa capaz de representar a situação dada. Esse segmento mostra que o professor é essencial na interação e na relação do estudante com o conhecimento matemático, quando se deseja mobilizar imagens conceituais em tarefas de resolução de problemas.

No intuito de conectar as respostas dos estudantes e sintetizar as ideias elencadas, *fase de discussão, prática de conectar e sintetizar*, a pesquisadora perguntou: *"O que vocês pensam que deve ser feito para representar a situação dada?"* Ante a pergunta, ela convidou os alunos a se envolverem na discussão e a levantar suposições sobre alguma questão que poderia ser incorporada ao enunciado do problema.

Segmento 3 — Discussão coletiva a respeito das possibilidades de questionamentos sugeridas. Tal discussão, ainda que pensada previamente, reafirmou-se com base nas suposições dos estudantes de que todo problema requer uma indagação. Nosso objetivo era que os estudantes suscitassem questões relacionadas à enumeração, contagem e/ou listagem de caminhos, pois, assim, evocariam imagens conceituais da definição do conceito. Desse modo, a pesquisadora orientou que acrescentassem um questionamento à situação – *discussão de toda a turma, prática de selecionar e sequenciar* as respostas dos alunos a serem verbalizadas:

> ***Alex:*** *O que vocês acham que deve ser feito para representar a situação para sabermos <u>quantas possibilidades</u> de percurso terá entre a cidade A e a cidade C?*
> ***Alice:*** *De <u>quais modos</u> Beto pode descobrir <u>quantos caminhos</u> - ou a <u>probabilidade de caminhos</u> - que poderia percorrer para chegar à cidade C, passando pela B, e <u>entre essas possibilidade, qual o menor caminho</u>?*
> ***Felipe:*** *Aponte <u>quais os possíveis trajetos</u> que a família de Beto poderá trilhar para chegar à cidade dos seus parentes.*
> ***Geane:*** *<u>Quantos caminhos distintos</u> a família de Beto pode fazer para chegar à cidade C?*
> ***Isis:*** *<u>Quantas possibilidades</u> a família pode fazer? Qual seria o <u>melhor percurso baseado na distância percorrida</u>?*
> ***Joice:*** *De <u>quantas maneiras</u> Beto pode chegar à casa de seus parentes?*
> ***Vini:*** *<u>Quantos caminhos diferentes</u> podem ser percorridos? <u>Qual o caminho de menor tempo</u>?*

Esse fragmento mostra que, tal como sugerido pela pesquisadora, os licenciandos verbalizaram questões em que os termos "quantos/quantas" e "quais" foram mencionados. Evidenciaram que, subjacentemente a elas, havia um modelo combinatório implícito (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996) associado à enumeração, contagem e/ou listagem de caminhos. Seis licenciandos ressaltaram o termo "quantos/quantas" indicando para a necessidade de contar os caminhos e mostrar um resultado numérico final. Essa ideia de contagem está no cerne do conceito de análise combinatória e deve ser mobilizada quando trabalhamos com problemas desse tipo.

Outro ponto observado foi que a noção de contagem se apresentou associada ao surgimento de outras e novas possibilidades de trajetos. Ao questionar “quais os possíveis trajetos”, Felipe não despertou para a necessidade de contar quantos eram os trajetos, mas de informar quais seriam eles. Assim, sugeriu outra estratégia de resolução: os trajetos devem ser representados, e não necessariamente contados. Giraldo e colegas (2002) apontam que as representações, assim como pensadas por Felipe, também devem ser consideradas quando se deseja identificar imagens conceituais. Nesse contexto, *conectamos* as ideias combinatórias refletidas nas questões propostas por eles, ajudando-os a ver que o mesmo modelo combinatório foi incorporado em mais de uma questão que, à primeira vista, parecia diferente.

Há de se considerar também que Alice, Isis e Vini pensaram em questões que envolviam a relação tempo x trajeto escolhido. Isso se assemelhou ao diálogo inicial entre a pesquisadora e Joice. Nele a licencianda destacou que pode fazer trajetos diferentes, ao se deslocar de sua casa até o IFES. Isso acontece, por exemplo, quando ela perde o ônibus que vai direto e tem de tomar outros dois ônibus até o centro da cidade e depois mais um até a escola. No primeiro caso, ela gasta cerca de 60 minutos; já no segundo, 90 minutos. Tais questões permitiram que os estudantes refletissem sobre as implicações da combinatória na vida das pessoas, pois corriqueiramente nos deslocamos por trajetos de menor tempo. Além disso, é um tipo de situação-problema muito comum quando se estuda física no ensino médio.

Não podemos deixar de ressaltar a questão proposta por Alice. Ela não se afastou da associação da combinatória com a probabilidade quando inclui, em sua escrita, “probabilidade de caminhos que poderia percorrer”. Neste caso, depois de ter encontrado quantos são esses caminhos, o resolvedor deveria indicar qual a chance de cada caminho ocorrer, ou seja, qual probabilidade de cada evento (caminho) acontecer. Mostra que a licencianda tinha uma forte crença de que existe alguma relação entre combinatória e probabilidade. No entanto, na maioria das vezes em que usou a palavra probabilidade, fê-lo no sentido de possibilidade. Isso foi explicado por ela nos momentos de retorno e validação dos dados. Alice evidenciou que há necessidade de (1) nomear e combinar caminhos para descobrir quantos são e (2) contar ou combinar esses caminhos para descobrir quais poderiam ser tomados. Observe que ela se equivocou quando fez as associações *nomear* e *combinar* para quantificar e *contar* e *combinar* para informar quais poderiam ser os caminhos. O pensamento combinatório implica nomear para saber quais e contar para saber quantos.

Quando questionada sobre isso, fez associações à disciplina Tópicos Especiais em Matemática, quando estudou sobre a Teoria dos Grafos. Associou o problema resolvido àquele denominado “Sete pontes de Königsberg”. Essa busca por uma situação semelhante é considerada por Santos (1997) e Zanon (2011) como uma estratégia de resolução. As pesquisadoras informam que, quando estamos em situação de resolução de problemas, rememoramos processos empregados anteriormente, para subsidiar nossas ações. Nesse contexto, ressaltamos que o entendimento conceitual dos termos em matemática deve ser compreendido e utilizado em contexto adequado. Ao se tornar dúbio, induz ao entendimento equivocado de enunciados de problemas. Assim, causa erros de interpretação e de identificação do pensamento matemático, que, no caso da combinatória, se refere ao modelo combinatório implícito (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996) e gera resoluções inadequadas.

Como visto, as questões foram acrescentadas a fim de indicar uma ação a ser feita e o problema ser resolvido. Então, retornando à pergunta motivadora da discussão – *“O que vocês acham que deve ser feito para representar a situação dada?”* –, entendemos que, para ser representada e se tornar um problema, a situação deveria apresentar uma questão ou um objetivo. Ou seja, um **que fazer** indicado explicitamente no enunciado. Esse modelo de problema constitui uma situação prototípica (HERSHKOWITZ, 1994) arraigada na crença de um formato de problema (THOMPSON, 1997) e ainda continua sendo um dos modelos mais usados na educação básica.

Esse movimento de discussão com toda a turma permitiu-nos verificar que a estratégia escrita na resolução do problema pelos licenciandos foi uma representação daquela verbalizada (ver quadro 9); portanto, elas se complementaram. Na primeira, identificamos como o licenciando pensou e quais aspectos considerou para resolver o problema; na segunda, vimos o pensamento representado em termos matemáticos. Consideramos que, ao tratarmos o problema como gerador de conhecimento matemático (SCHROEDER, LESTER, 1989; SANTOS, 1997; ONUCHIC, ALLEVATO, 2011), priorizamos o desenvolvimento do pensamento combinatório. Isso nos fez perceber as imagens mencionadas na tabela 15. Logo, consideramos que essas condições comuns foram as primeiras imagens evocadas pelos estudantes, as quais, conforme comentamos anteriormente, se apresentaram oscilando entre coerentes, incoerentes, incipientes, contraditórias e, até mesmo, equivocadas.

Quanto às nossas expectativas de compreensão do enunciado verbal e visual (figura 13), à identificação das duas condições subjacentes de contar e listar e às evidências de que haviam percebido uma relação entre o conhecimento de combinatória e outros para resolver, registrar e explicar os argumentos mencionados por eles, confirmamos que a *leitura e a compreensão do enunciado a partir do que os estudantes já sabiam foi primordial nesse processo inicial*. Ficamos surpresos quando tiveram erros ou equívocos. Por isso, concordamos com Polya (1973), quando argumenta que, antes de tudo, o enunciado verbal de um problema de matemática precisa ser bem compreendido. Assim, sugere que professores planejem questionamentos sobre o enunciado para serem feitos aos alunos e levá-los a pensar em estratégias de resolução e em se tornarem de fato um resolvedor de problemas. Segundo Polya (1973), alunos passam a ser resolvedores de problemas quando conseguem fazer sozinhos questionamentos a si mesmo que os ajude futuramente a entender outros problemas, a pensar e planejar o que precisam fazer, a usar estratégias, a colocar o seu plano em ação, a verificar se de fato resolveu o problema inicial e a formular outros problemas similares. Para nós, tais considerações de Polya aplicam-se especialmente a problemas prontos que professores selecionam e utilizam em aulas, pois, quando um autor de livro didático formula e propõe problemas, ele desconhece seus destinatários. Então, os problemas só adquirem sentido quando alunos e professores dialogam sobre os seus enunciados.

Por outro lado, quando um professor elabora um problema de combinatória para seus alunos, deve considerar os gêneros próprios da matemática e quem são os destinatários. Neste caso, entendemos por gêneros uma associação entre a língua materna, a linguagem matemática (signos, símbolos e modelo combinatório implícito) e os atributos (termos, características) peculiares à combinatória e aos agrupamentos que dela fazem parte. Precisamos considerar todos esses aspectos ao elaborar (ou formular, ou propor) um problema de combinatória a fim de tornar o problema possível de ser reconhecido, entendido e classificado como tal. Os destinatários são os alunos, suas características, os contextos em que se inserem, o nível de conhecimento matemático que possuem e a experiência com a resolução de problemas. Posteriormente no trabalho com o problema em sala de aula, busca-se a produção de sentidos pelos alunos em sua relação com um problema matemático (POLYA, 1973). Nesse movimento, insere-se a máxima de Polya no que concerne à compreensão do enunciado verbal de um problema de matemática. Com essas considerações, queremos destacar que são processos complexos e não triviais e, por tudo isso, foram propostos por nós aos estudantes.

5.2.4.2 Formulação de exemplos

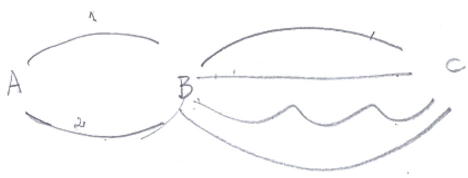
Desenvolvemos esta tarefa de *formulação de exemplos* em 11/8/2017 por considerá-la como fonte de pesquisa, reflexão e aprendizagem. Vimos, nos exemplos gerados pelos licenciandos, uma possibilidade de ajudá-los a pensar e a olhar para o conceito de uma maneira diferente das anteriores. Queremos dizer que, ao formularmos um problema semelhante, o estudante teria a possibilidade de articular sua compreensão do conceito; evidenciar imagens sobre ele; indicar o modelo combinatório implícito e outras estruturas matemáticas que porventura eles tivessem percebido para além daquelas mencionadas. Dessa maneira, cogitamos que essa tarefa seria uma possibilidade de provocar reflexões e aprendizagens sobre a combinatória.

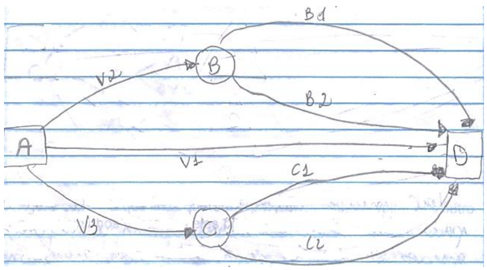
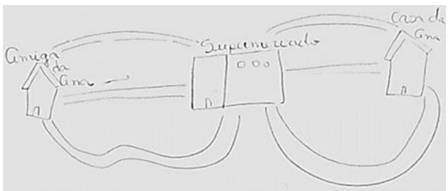
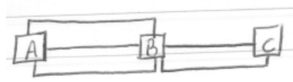
Desse modo, analisamos, a seguir, os exemplos gerados pelos licenciandos quando elaboraram um problema que deveria conter a mesma ideia conceitual daquele problema do trajeto que havia sido resolvido. Portanto, foram exemplos criados individualmente pelos próprios estudantes sem nenhuma interferência da professora ou das pesquisadoras. Esperávamos que elaborassem, em relação ao inicial, um problema *mais simples* ou *mais complexo* que envolvesse *o mesmo modelo combinatório implícito* (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996) *de enumerar e listar* deslocamentos, trajetos, caminhos fosse resolvido por *estratégias semelhantes* àquelas antecipadas pelas pesquisadoras e/ou apresentadas pelos licenciandos durante a resolução do problema original.

Na ocasião, tínhamos interesse em identificar imagens conceituais evocadas enquanto formulavam o problema; observar se imagens evocadas nas tarefas anteriores seriam reforçadas; verificar se o conceito matemático subjacente ao problema original foi identificado e utilizado na formulação do exemplo; e descobrir se os problemas elaborados se relacionavam aos protótipos que foram mencionados pelos estudantes, quando responderam às quatro tarefas que compunham o primeiro bloco. Por isso, nos exemplos gerados pelos estudantes, buscamos imagens conceituais relativas à definição e ideias de ensino e de aprendizagem. Isso quer dizer que vamos analisá-los seguindo as mesmas categorias das tarefas anteriores. No quadro 10, trazemos os problemas elaborados pelos estudantes. Ele é composto dos problemas elaborados individualmente pelos licenciandos em 11/8/2017, primeiro dia de aula da disciplina, e também dos novos problemas que eles elaboraram em 11/9/2018, quando retornamos com os dados para a análise, validação ou refutação deles pelos estudantes.

Nesse diálogo em 2018, questionamos cada estudante, para que nos explicassem os problemas formulados inicialmente em 2017. Depois de várias conversas, alguns licenciandos constataram que tinham formulado problemas em 2017 com estrutura matemática distinta do problema dos trajetos. Alguns conseguiram, então, em 2018, elaborar um problema que tinha estrutura semelhante à do problema do trajeto em 2017. Além disso, pesquisadoras e estudantes ficaram motivados para identificar, em cada problema formulado em 2017, a riqueza matemática de cada um. Portanto, para fins de imagens iniciais, consideramos, em nossas análises, somente o problema 1, a partir do qual tecemos comentários individuais sobre o exemplo que cada licenciando redigiu. Em seguida, analisamos e comentamos de modo geral, os problemas elaborados posteriormente à disciplina em 11/9/2018.

Quadro 10 – Problemas formulados pelos licenciandos

Licenciando	**Problema 1 (11/8/17)**	**Problema 2 (11/9/18)**
Alex	20 times participam de um campeonato em dois turnos. Quantas partidas serão disputadas ao todo?	Num hotel existe uma sala de espera onde existem 3 portas. Ao passar por qualquer dessas, encontra-se outra sala com 4 portas, até chegar a uma terceira sala. De quantas maneiras alguém pode sair da primeira sala e chegar a terceira sala?
Alice	Marcela quer escrever a palavra AMOR de forma que cada letra tenha uma posição diferente, sem repetir as palavras. Dê quantas maneiras ela pode reescrever a palavra? (formando novas palavras).	Ana deseja ir ao supermercado, mas no caminho de sua casa até o supermercado, existe uma banca de jornais e revistas. Ana não consegue chegar ao supermercado sem passar em frente a banca. Analise o desenho e responda: De quantas maneiras diferentes Ana consegue chegar ao supermercado saindo de sua casa? Figura 32 – Problema 2 de Alice em 11/9/18  Fonte: Arquivo das pesquisadoras.
Felipe	Paulo foi à feira com R$ 30,00 para comprar bananas, pêssegos e maçãs. Ao chegar na feira viu que o quilo do pêssego custava R$ 4,00, o das maçãs R$ 2,50 e o das bananas R$ 2,10. Levando em consideração os preços das frutas, identifique quais as possibilidades de levar cada fruta.	Uma escola pretende levar seus alunos do último ano do ensino médio para uma aula preparatória para o ENEM numa cidade vizinha a sua. Para chegar até lá existem duas formas possíveis de trajeto, uma passando pela cidade A com 2 vias distintas que podem ser percorridas e outra passando pela cidade B, com 4 vias distintas, que podem ser percorridas. Analisando estes trajetos, aponte as formas de se chegar à cidade vizinha. Figura 33 – Problema 2 de Felipe em 11/9/18  Fonte: Arquivo das pesquisadoras.

Geane	Você precisa definir um nome de usuário para sua nova rede social. Porém, é definido que os 9 dígitos serão letras e os 2 últimos dígitos serão números. Quantos usuários terão nesta rede social, sabendo que não é permitido mais de um usuário para cada nome?	Uma agência de turismo tem um pacote de viagem com destino de A até D, como na figura abaixo. No percurso, é necessária uma parada. De quantas maneiras distintas é possível fazer este trajeto? Figura 34 – Problema 2 de Geane em 11/9/18  Fonte: Arquivo das pesquisadoras.
Isis	Pedro está de férias, e pretende viajar seguindo o seguinte  percurso: Liste todas as rotas possíveis que Pedro poderá fazer, partindo de A e chegando a C.	Para ir embora do IFES Campus Cachoeiro, os alunos devem se deslocar da sala de aula até a saída. Para isso, podem utilizar a escadaria central ou a lateral. Após sair do Campus, alguns precisam atravessar a passarela, enquanto outros permanecem do mesmo lado da rua. De quantos modos o caminho para ir embora pode ser feito?
Joice	Uma sorveteria trabalha com 6 sabores de sorvetes, 8 caldas e 5 complementos. O sorvete de duas bolas custa R$ 2,00 e o de 3 bolas custa R$ 3,00. Isabela, ao entrar na sorveteria, teria quantas possibilidades de montar seu sorvete sabendo que ela só tem R$ 2,50 no bolso?	Em uma cidade há um supermercado. A mãe de Ana pediu que ao voltar da casa de sua amiga comprasse leite e levasse para casa. Dado o mapa dessa cidade, quantos caminhos tem para Ana voltar para casa passando no supermercado? Figura 35 – Problema 2 de Joice em 11/9/18  Fonte: Arquivo das pesquisadoras.
Vini	Agora suponha que eles querem ir por um caminho e voltar por outro. Quantos e quais caminhos diferentes eles podem percorrer de forma distinta? Ou seja, sem repetir um caminho já percorrido.	Pedro mora na cidade A e vai viajar com sua esposa para a cidade C, em uma visita aos seus pais. Com base no mapa, responda: Figura 36 – Problema 2 de Vini em 11/9/18  Fonte: Arquivo das pesquisadoras. a) Há quantas possibilidades de ir por um caminho e voltar por outro? Para cada caminho tomado para ida, existe apenas um diferente para volta? b) De quantas formas Pedro pode ir e voltar pelo mesmo caminho?

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras, 2018.

Para evidenciarmos nossas impressões sobre os problemas elaborados pelos estudantes, comentamos alguns fragmentos da discussão dessa tarefa matemática que envolveu a turma inteira (STEIN et al., 2008). O enfoque ocorreu na estrutura matemática do problema formulado pelos estudantes. Isso quer dizer que priorizamos o modelo combinatório implícito e a linguagem matemática empregada. O episódio a seguir retrata e exemplifica uma discussão motivada pela pesquisadora, quando convidou os licenciandos a comentar o problema formulado por eles mesmos – *fase de exploração e discussão com a turma inteira, prática de sequenciar e conectar*.

Episódio 1: Discussão coletiva sobre a formulação de exemplo

Este episódio é composto de três segmentos que entrelaçam momentos de discussão com a turma inteira (11/8/17) e momentos de trabalhos individuais entre a pesquisadora e cada licenciando no retorno (11/9/18). Pretendíamos que os estudantes explicitassem o conceito matemático subjacente ao problema elaborado por eles e sua relação com o problema resolvido anteriormente. O primeiro segmento se refere à discussão coletiva na qual evidenciamos as ideias de três licenciandos a respeito do problema elaborado. Comentamos simultaneamente as colocações de Vini, quando apresentou ideias combinatórias adaptadas em relação ao problema dado; de Joice, ao associar combinatória a aritmética; e de Alice, quando apresentou o mesmo problema de permutação utilizado para expressar sua aprendizagem pregressa, ao responder à questão 4 do primeiro bloco de tarefas específicas.

No segundo segmento, focalizamos a resolução dada por Alex e por Felipe ao exemplo formulado. Trazemos também o problema proposto por Geane. Discutimos, no terceiro segmento, os problemas formulados por Isis, pois seguiram exatamente o modelo combinatório do problema dos trajetos resolvido, que serviu de base para a formulação desses exemplos.

Segmento 1 — Discussão coletiva da análise do enunciado pelos licenciandos em 11/8/2017 – fase de discussão, prática de conectar.

Na ocasião, perguntamos – *“[...]. Última questão [...] formular um problema envolvendo a mesma ideia [...] o que vocês pensaram?”* – e convidamos os licenciandos a se envolverem na discussão. Para ilustrarmos, trazemos os argumentos de Vini, Joice e Alice, escolhidos pelas pesquisadoras em razão das práticas *de selecionar, sequenciar e conectar* os diálogos que se estabeleceram.

> ***Vini:*** *Eu* *usei a mesma ideia que você tinha comentado ali* (referindo-se à questão "Agora suponha que eles querem ir por um caminho e voltar por outro. Quantos e quais caminhos eles podem percorrer? "), *que como não tinha distinção do problema eu só fiz essa distinção, no caso seria dele ir e voltar, ir por um caminho e voltar por um caminho diferente, porém distinto que não se repetisse.*
> ***Pesquisadora:*** *Então, como você elaborou esse enunciado?*
> *[...]*
> ***Vini:*** *A mesma coisa, só coloquei isso. Agora suponha que eles querem ir por um caminho e voltar por outro, quantos e quais caminhos eles podem percorrer de forma distinta? Ou seja, sem repetir um caminho já percorrido.*
> *[...]*
> ***Joice:*** *Eu elaborei outro problema totalmente diferente. Eu coloquei com o mesmo pensamento de análise combinatória: Uma sorveteria trabalha com 6 sabores de sorvetes, 8 caldas e 5 complementos, o sorvete de 2 bolas custa R$2,00 e o de 3 bolas R$3,00. Isabela ao entrar na sorveteria teria quantas possibilidades de montar o seu sorvete sabendo que ela só possui R$ 2,50 no bolso? Ali* (referindo-se ao problema resolvido)*, o caminho não podia se repetir, mas nesse aqui por exemplo ela pode colocar 2 bolas do mesmo sabor, uma bola de um sabor e outra diferente, então teria uma possibilidade muito maior.*
> *[...]*
> ***Alice:*** *Eu também pensei que essa mesma ideia seria de análise combinatória, até peguei um exemplo de uma palavra que as meninas estavam conversando comigo uma vez sobre a disciplina. Eu elaborei assim: Marcela quer escrever a palavra AMOR de forma que cada letra tenha uma posição diferente sem repetir as palavras, de quantas maneiras ela pode escrever a palavra formando novas palavras?*

Observamos que Vini se apropriou das ideias de uma das questões complementares que incluímos no problema original [Agora, suponha que eles querem ir por um caminho e voltar por outro. Quantos e quais caminhos eles podem percorrer?], reproduzindo-a de modo semelhante. Ele mesmo afirmou que utilizou nossas ideias para compor seu problema e acrescentou os termos "diferentes", "forma distinta" e "sem repetir um caminho já percorrido". Portanto, argumentou que "foi mais uma adaptação do que a elaboração de um novo problema com a mesma característica". Nesse movimento, percebemos que Vini evocou uma imagem do conceito relacionada à definição, pois incluiu um atributo que considerou relevante para a resolução dele.

Quando retornamos em 2018 com o problema elaborado por ele, para que analisasse e nos explicasse seus argumentos, Vini destacou que na ocasião teve muita dificuldade de interpretar o problema original e escrever outro envolvendo o mesmo conceito matemático e a ideia de deslocamento. Assinalou que incluir novos termos "[...] foi a única forma que eu [havia] consegui [conseguido] pensar!". Diante disso, a pesquisadora solicitou ao licenciando que rememorasse as aulas de resolução de problemas do primeiro período da licenciatura, pois nelas sugere-se, entre outros, o trabalho com a elaboração de problemas. Portanto, a pesquisadora acreditava que os licenciandos já haviam tido experiência anteriores com esse tipo de tarefa. Vini, porém, disse que tem o hábito de resolvê-los e não de elaborá-los, embora essa não tenha sido a primeira vez que foi solicitado a redigir um problema durante a licenciatura. Embora a prática de redigir problemas não seja comum, ela ajuda na aprendizagem, pois mobiliza o pensamento matemático em relação à estrutura e aos modos de resolução. Quanto aos dados de Vini, observamos ainda que ele emitiu uma imagem associada ao de ensino e aprendizagem e à resolução de problemas, deixando pistas de que esse tipo de tarefa deve ser tratado com mais profundidade no curso de formação inicial.

Ao compartilhar seu problema oralmente, Joice exclamou surpresa que havia construído uma situação *"totalmente diferente" da original*. Mesmo sendo de pensamento combinatório e associando princípio aditivo e multiplicativo, Joice precisaria especificar algumas condições que não foram estabelecidas no enunciado. Para que o problema elaborado por ela pudesse ser resolvido, haveria de compreender, por exemplo: qual o tipo de sorvete que Izabella poderia comprar com o dinheiro que possuía; se Izabella poderia escolher um sorvete com duas bolas iguais sem calda e com complementos, ou com duas bolas iguais com calda e sem complementos; ou um sorvete com duas bolas iguais sem calda e sem complemento; ou um sorvete com duas bolas diferentes sem calda e com complementos, ou com duas bolas diferentes com calda e sem complementos; ou ainda um sorvete com duas bolas diferentes sem calda e sem complemento; pois não havia restrição quanto ao fato de os sabores serem repetidos nem quanto ao uso dos complementos e caldas. Outro ponto observado pela própria estudante: *"Ali* (referindo-se ao problema resolvido)*, o caminho não podia se repetir, mas nesse aqui por exemplo ela pode colocar 2 bolas do mesmo sabor, uma bola de um sabor e outra diferente, então teria uma possibilidade muito maior".* Isso a fez observar que o problema elaborado por ela era mais complexo do que o proposto por nós. Além disso, não envolvia o mesmo modelo combinatório.

No retorno em 2018, solicitamos que Joice resolvesse o problema que ela havia elaborado antes, em 2017. Em voz alta, a licenciada verbalizou:

> *Se eu tenho R$ 2,50, então o dinheiro só dá para comprar duas bolas que custa 2,00, que, no caso, eu tenho 2 bolas. Se eu tenho 6 sabores, eu utilizei o primeiro sabor e me restam 5 sabores, <u>e todos os sorvetes vão ter calda e complemento</u>. Então, eu tenho 8 possibilidades de calda e 5 possibilidades de complemento. Então, multiplicando eu formo 1200 sorvetes diferentes.*

Observamos que, ao resolver o problema, Joice incluiu uma condição "todos os sorvetes vão ter calda e complemento". A pesquisadora, então, solicitou que a licencianda indicasse tal informação no exemplo elaborado em 11/8/17. Ela, porém, informou-nos que não havia nenhuma especificação no problema formulado que o tornasse resolvível e menos amplo. Nessa ocasião, Joice percebeu algumas fragilidades no problema elaborado. Ressaltou que, embora gostasse de aplicar fórmulas, esses detalhes dos problemas de combinatória relacionados à estruturação e à interpretação, as fórmulas não resolvem. Concebemos que Joice evocou imagens conceituais relacionadas às estratégias de resolução baseada no atributo *condição* subjacente ao problema dado que indica o modelo combinatório implícito. Além disso, ressaltou a ideia de estruturação e interpretação relacionada à escrita e compreensão do enunciado, uma imagem do conceito relativa à definição de ideias de ensino e de aprendizagem.

Após um intenso diálogo no qual a pesquisadora atuou como professora, Joice percebeu que, de modo intuitivo, havia elaborado um problema com estrutura combinatória, mas que não sabia como encontrar uma resolução, pois poderia seguir por vários caminhos. A pesquisadora, no papel de professora, explicou à licencianda que o problema formulado por ela envolvia a otimização. Esta diz respeito à busca da melhor solução possível para um problema mediante a construção de uma função envolvendo os dados.

Alice relatou que, ao elaborar o problema, considerou a combinatória de modo geral e rememorou o mesmo exemplo dado, ao responder: “O que você acha que aprendeu de análise combinatória no ensino médio? Justifique sua resposta”: *Marcela quer escrever a palavra AMOR de forma que cada letra tenha uma posição diferente, sem repetir as palavras. De quantas maneiras ela pode reescrever a palavra? (formando novas palavras)*. Esse problema de permutação parece ter forte significado no sistema de crenças de Alice e mostra como problemas desse tipo estão arraigados em suas lembranças. A licencianda explicou-nos que esse problema é muito forte em sua memória e sempre se lembra dele, pois era algo que conseguia resolver com facilidade.

Por outro lado, vimos, no problema elaborado por Alice, a imposição do critério “sem repetir as palavras”, que se refere a um atributo de permutação. Ou seja, uma imagem relacionada ao conceito, refletida em um problema trabalhado durante o processo de ensino e de aprendizagem. A estudante informou-nos, ainda, que havia uma similaridade entre o problema elaborado por ela e o que solicitamos que fosse resolvido. Tal analogia estaria em “indicar a quantidade”, o que se refere à contagem de possibilidades, e seria uma outra imagem relacionada ao conceito evocada pela licencianda. Nos diálogos estabelecidos com a pesquisadora, Alice informou que, apesar de o problema elaborado por ela não ter envolvido deslocamentos de pessoas em trajetos, sugeria o deslocamento de letras, para que novas palavras fossem formuladas.

Para que a licencianda compreendesse que se tratava de objetos de natureza distinta e contagens diferentes, agimos como professores e resolvemos esclarecer tal equívoco.

Pegamos os dois problemas resolvidos pela estudante e as respectivas respostas e fomos indagando-a sobre os elementos que compunham cada uma das sequências (de caminhos e de letras). Dessa forma, Alice assinalou que a diferença entre ambos os problemas estava principalmente no fato de que, nos trajetos, usaria apenas dois deles cada vez entre todos os disponíveis. Enquanto no problema formulado por ela, todas as letras seriam utilizadas simultaneamente e não se "escolhia" uma ou outra. Queremos dizer que as diferenças entre os problemas estavam no modelo combinatório subjacente ao conceito empregado em cada tarefa.

Em termos conceituais, tínhamos um problema de princípio multiplicativo, implícito no princípio fundamental da contagem. A ideia de arranjo só surgiu mais tarde com a proposição da Joice. Assim, poderia ser resolvido pela multiplicação (2 x 3) e um problema que ela elaborou, idêntico ao que usou para destacar sua aprendizagem de combinatória no ensino médio, que envolvia uma permutação simples e indicava que qualquer uma das quatro letras poderia ocupar a primeira posição. Feita essa escolha, a segunda posição seria ocupada pelo número total de letras (4) subtraído daquela que já havia sido utilizada na posição anterior (4 – 1 = 3) ... e assim por diante; então, teria 4 x 3 x 2 x 1 = 24. Em 2017, a licencianda havia concluído a disciplina com êxito.

No entanto, no retorno em 2018, tivemos a impressão de que Alice apresentava algumas dúvidas em relação ao conteúdo, mesmo ela tendo nos informado que isso era em virtude de, no momento, estar se dedicando à aprendizagem de outros conteúdos. E fica o questionamento: Por que será que parecia que ela tinha compreendido o conteúdo? As evidências de que Alice havia compreendido o conteúdo apareceram nas listas de exercícios resolvidas por ela e nas avaliações que realizou durante o estudo. E ainda temos que refletir e nos questionar sobre quais tarefas e perguntas apareceram em listas e em avaliações. Precisamos aceitar que nem sempre quem acerta exercícios, problemas e tarefas em aulas, em listas e em avaliações adquiriu ou construiu entendimentos relacional e instrumental como comentava Skemp (1976). Em muitos casos, como ficamos sem dialogar individualmente com cada aluno em diferentes momentos para provocar e saber como pensam, nós, professores aprovamos alunos que ainda não aprenderam e nem entenderam os conceitos matemáticos estudados nas disciplinas.

Segmento 2 — Diálogos individuais entre pesquisadora e licenciandos acerca do problema elaborado – fase de discussão, prática de conectar.

Como dito anteriormente, aqui focalizamos a resolução dada por Alex e Felipe ao exemplo formulado. Em seguida, comentamos o problema proposto por Geane. Quando retornamos com os dados de Alex em 2018, solicitamos que ele analisasse o problema que havia formulado e tentasse resolvê-lo. Ao ler o problema, Alex retrucou:

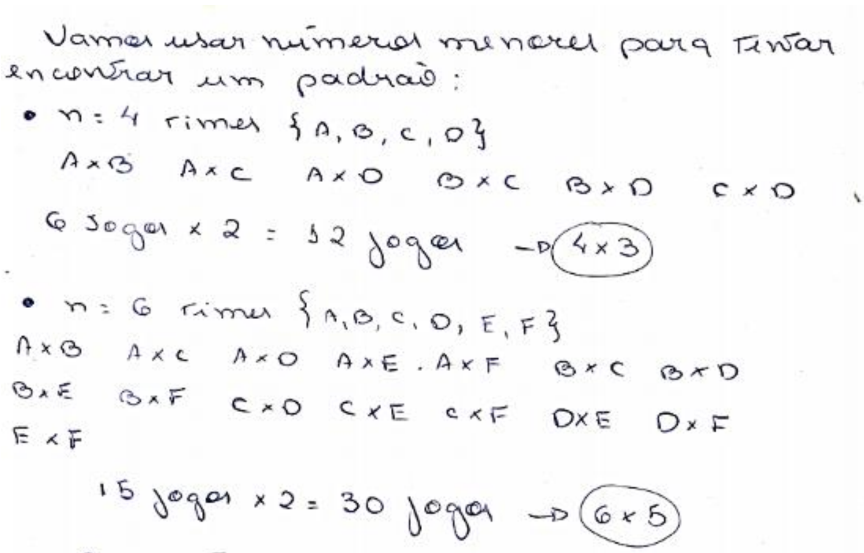
> ***Alex:*** *Nossa, que problema mal feito que eu fiz gente!*
> ***Pesquisadora:*** *Por quê?*
> ***Alex:*** *Está faltando informações demais aqui! Eu não falei que todos jogam contra todos... não tô falando, misericórdia!*
> ***Pesquisadora:*** *Mas ele envolve esse pensamento?* (Apontando para o problema dos caminhos.)
> ***Alex:*** *Não... vai mais além [...] tem o pensamento de combinatória, mas não é tão simples quanto esse* (referindo-se ao problema dos caminhos)*, né, eu poderia ter sido mais simplório ao fazer algo mais próximo...*
> ***Pesquisadora:*** *E o objeto aqui é o mesmo?* (Referindo-se a caminhos e times.)
> ***Alex:*** *Não, lógico que não! São objetos diferentes, está faltando informações aqui no meu problema, né... talvez na hora que eu construí ele, eu pensei que os dois turnos já deixaria claro, né, que é todos contra todos. Mas para o leitor talvez não fique tão claro (risos). Eu mesmo já bati o olho aqui e já fiquei com dúvida. Enfim... tipo assim, tem relação? Tem a ver com o conteúdo como um todo, mas não é tão próximo assim desse problema* (referindo-se àquele dos caminhos) (risos), *vai mais além um pouco, daria bastante trabalho, muito mais trabalho resolver esse aqui* (apontando para aquele que ele havia elaborado), *sem dúvida. Não é uma multiplicaçãozinha boba que vai que resolver isso aqui não.*
> ***Pesquisadora:*** *Então... mas por que você chamou esse daqui de multiplicaçãozinha boba?* (Apontando para a resposta de Alex ao problema dos caminhos.)
> ***Alex:*** *É, boba pra gente né! A gente coloca... uma coisa que eu estou aprendendo muito aqui... é óbvio, né, aqui na faculdade... é óbvio pra você! Tem que ter cuidado com isso realmente! Na hora que a gente vai pra prática, tem que ter muito cuidado com isso.*

Segundo o próprio licenciando, seu problema estava "mal feito" em razão da ausência de informações, tais como: "*não falei que todos jogam contra todos*". Julgou que seu problema era mais elaborado que o proposto, em se tratando da complexidade matemática evidente em cada um. Alex ainda destacou que, embora o problema fosse de combinatória, não usava o mesmo objeto (deslocamento de pessoas em trajetos), o enunciado gerava dúvidas quanto à forma de resolvê-lo e encontrar uma resolução seria mais complicado e trabalhoso. Assinalou que isso aconteceria em virtude de não envolver uma "multiplicaçãozinha boba". Na ocasião, relembramos ao estudante que o problema proposto por nós era mais simples e havia sido retirado de um livro de matemática do terceiro ano do ensino fundamental. Esclarecemos que fizemos isso para chamar a atenção deles para as ideias combinatórias mais simples tratadas desde os anos iniciais e motivá-los a se envolverem na tarefa e na disciplina, pois nossa experiência profissional tem mostrado que começar o semestre com aulas muito teóricas e com problemas muito complexos acaba desestimulando principalmente os estudantes de cursos noturnos.

Diante disso, destacamos que a resposta de Alex – *"[...] boba pra gente [...] é óbvio pra você [...] Na hora que a gente vai pra prática, tem que ter muito cuidado com isso"* – trouxe à tona uma imagem não relacionada ao conceito em questão, mas à sua postura profissional, e remeteu a uma aprendizagem adquirida na licenciatura. Isso mostra que diferentes questões mobilizaram distintas partes da memória e refletiram outras imagens conceituais (TALL; VINNER, 1981). Além disso, remeteu-nos às palavras de Polya (1973), quando destacou que o que é considerado um problema para uns pode não ser para outros. Quer dizer que cada um possui determinados conhecimentos e experiências pregressas que o fazem lidar com situações de maneiras diferentes. Portanto, analogamente, o que é óbvio para uns, pode não ser para outros.

Ainda durante o retorno em 2018, solicitamos que Alex resolvesse o problema que havia formulado. Vimos que seu problema precisava de esclarecimentos: *Como um campeonato de futebol é organizado? Qual o significado de turnos? Todos os times jogam entre si? Quantos times jogam em cada turno?* A priori, o problema foi considerado como sem uma solução possível. No entanto, após inúmeras tentativas, o licenciando apresentou-nos a seguinte resolução:

Figura 37 – Resolução de Alex ao problema elaborado



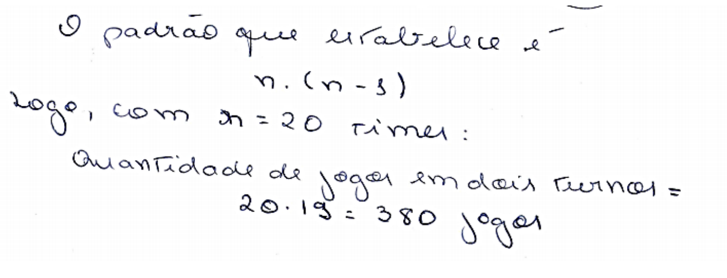
Fonte: Arquivo das pesquisadoras.

Essa solução é fruto de muita intervenção das pesquisadoras e de trabalho árduo do estudante. Como o número de times era muito grande e não tínhamos uma "estratégia de resolução pronta” que desse conta de encontrar uma resposta, sugerimos, com base em Santos (1997) e em Zanon (2011), que o licenciando começasse com uma quantidade menor de times que pudesse ser ampliada gradativamente. Outro ponto destacado é que a quantidade de times teria de ser par, para que todos jogassem contra todos em cada rodada e nenhum time ficasse de fora. Depois, assinalamos que a quantidade de jogos deveria ser dobrada, pois o campeonato, de acordo com o enunciado do problema, seria jogado em dois turnos.

Como mostrado na resolução (ver figura 37), Alex começou com quatro times e designou-os pelas letras A, B, C e D. Organizando-os de modo que todos os times jogassem entre si, encontrou que seriam 6 o número total de jogos. Como o campeonato seria disputado em dois turnos, o estudante multiplicou o resultado por dois e obteve um total de 12 partidas. Em seguida, pensamos em outros números que pudessem ser multiplicados, cujo resultado também fosse 12. E encontramos 4 x 3. Na ocasião, Alex percebeu que 4 seria o mesmo número de times e que 3 seria essa quantidade (4) diminuída de um (4 – 3). Então, resolvemos testar com os times A, B, C, D, E, F. Vimos que seriam 15 o total de partidas com 6 times. Seguindo os mesmos procedimentos adotados acima, multiplicamos 15 por 2. O resultado dessa multiplicação foi decomposto em outros fatos fundamentais, cujo produto também fosse 30 (6 x 5 e 10 x 3).

No entanto, havíamos percebido, no cálculo anterior de quatro times, que o produto adequado seria aquele indicado pelo número total de times (6) multiplicado por essa quantidade subtraída de 1, ou seja, 5, então 6 x 5. De modo semelhante, vimos que, com oito times, teríamos 54 partidas, ou seja, o produto entre o número total de times (8) e esse número diminuído de um (7); então, 8 x 7. Desse modo, foi possível pensar em um padrão matemático a partir dos casos simples e estabelecer a seguinte generalização para uma quantidade *n* qualquer de times:

Figura 38 – Generalização de Alex para uma quantidade *n* qualquer de times


O padrão que estabelece é
n.(n-1)
Logo, com n = 20 times:
Quantidade de jogos em dois turnos =
20.19 = 380 jogos

Fonte: Arquivo das pesquisadoras.

Na figura acima nós vemos que n(n – 1) indica o padrão estabelecido para o cálculo do número de partidas para qualquer quantidade par de times que disputarem um campeonato em dois turnos. Neste caso, *n* indica a quantidade total de times e *n – 1* representa essa quantidade subtraída de um. Desse modo, o produto entre *n* e *n – 1* fornece o número total de partidas de jogos a serem disputadas no campeonato em questão. Essa seria uma tradução algébrica de todo o processo aritmético explicitado. Nesse processo, vimos emergir imagens de outros conceitos matemáticos, tais como as relações algébricas e aritméticas, e imagens relacionadas às estratégias de resolução de problemas que mobilizaram todo o conhecimento pregresso do estudante.

Nesse contexto, onde estariam, então, as ideias combinatórias? Com base nesse questionamento, nosso foco mudou. Alex e a pesquisadora começaram a pensar nos atributos combinatórios que estariam implícitos ao problema elaborado por ele, a saber:

- como são times, *a ordem com que as partidas são organizadas e disputadas não interfere no resultado final* do torneio;
- os *times são distintos e se diferenciam pela natureza dos elementos* (pessoas) que o compõem, e não pela posição que ocupam;
- o *resultado deve ser multiplicado por 2,* pois o campeonato acontece em dois turnos;
- *n* representa a quantidade *total de times*;
- *p* indica o número de *times que jogam cada partida*.

Tais características levaram-nos à ideia de combinação simples de *n* elementos distintos (20 times) tomados *p* a *p* (2 a 2) em que $p \leq n$. Portanto, o problema poderia ser resolvido também da seguinte forma:

Figura 39 – Outra estratégia de resolução proposta por Alex

Alternativamente, podemos usar a combinação:

$$2 \cdot \underbrace{\binom{20}{2}}_{\text{combinação de 20 de 2 em 2.}} = 2 \cdot \frac{20!}{2!\,18!} = 20 \cdot 19 = 380$$

↳ 2 turnos

Fonte: Arquivo das pesquisadoras.

Nesta resolução apresentada por Alex, vimos que é possível aplicar a fórmula de combinação simples $C_{n,\ p}$ = n! / p! (n – p)!, em que *n* indica a quantidade de elementos do conjunto e *p* representa um número natural menor ou igual a *n,* que sinaliza quais elementos vão compor os subconjuntos formados. Neste caso, queremos mostrar que, com a fórmula, foi bem mais rápido encontrar a resposta. No entanto, antes de chegar a ela, o licenciando colocou em jogo uma construção matemática relacional (SKEMP, 1976) e, de fato, demonstrou conhecimento do assunto. *Quais imagens foram então evidenciadas?* Imagem do conceito relacionada à definição matemática quanto à listagem dos atributos que permitiram identificar que o modelo implícito era o de combinação simples e imagens relacionadas ao ensino e à aprendizagem de combinatória no que se refere aos processos e estratégias matemáticas empregadas na resolução do problema.

Seguindo a mesma lógica adotada para a análise do material de Alex, dedicamo-nos, de agora em diante, à análise do problema formulado por Felipe e da resolução proposta por ele para o problema elaborado. Em 11/8/17, o estudante formulou o seguinte exemplo:

> *Paulo foi à feira com R$ 30,00 para comprar bananas, pêssegos e maçãs. Ao chegar na feira viu que o quilo do pêssego custava R$ 4,00, o das maçãs R$ 2,50 e o das bananas R$ 2,10. Levando em consideração os preços das frutas, identifique quais as possibilidades de levar cada fruta.*

Em 2018, quando retornamos com os dados, solicitamos que o licenciando analisasse o problema elaborado por ele e comentasse suas impressões sobre ele. Ao ler silenciosamente o problema, Felipe verbalizou: *"talvez eu esteja errado, mas eu acho que... o problema que eu fiz ele não tá totalmente dentro do intuito desse problema que você passou inicialmente pra gente [...]".* Explicou que o problema dado tratava de deslocamentos por caminhos e o elaborado envolvia a compra de frutas em uma feira. Em sua explicação, Felipe denotou uma primeira imagem sobre o conceito, quando identificou que o modelo combinatório de cada problema era distinto. Queremos dizer que, apesar de não relacionado à definição conceitual, a imagem denota uma aprendizagem de Felipe sobre a estrutura de problemas que envolvem o pensamento combinatório.

Em seguida, solicitamos que Felipe analisasse o enunciado do problema elaborado e destacasse as condições que deveriam ser satisfeitas, para que ele fosse resolvido. Após um tempo em silêncio, sugerimos que o estudante fizesse a leitura do problema em voz alta. Ao terminá-la, Felipe assinalou: *"[...] naquele período se me desse esse problema para resolver eu pensaria... jamais imaginaria que fosse combinação [...]"*. E informou que seu silêncio durante a leitura se devia ao fato de ter ficado pensando em sua escrita, no enunciado elaborado. Assim sendo, entre outros questionamentos, indagamos: Todas as frutas devem ser compradas simultaneamente? Eu poderia comprar apenas um tipo de fruta? Eu poderia levar dois tipos de frutas e o outro não? Nesse momento, Felipe despertou para a ausência de “condições” no enunciado do problema elaborado. O que remete a uma imagem relacionada ao conceito no que se refere à inserção de atributos que caracterizam cada agrupamento combinatório.

Ao resolver o problema, Felipe ressaltou: *“agora analisando percebo que não está bem elaborado”*. Isso valida suas considerações anteriores. Concluiu que, para resolver o problema, precisaria construir algumas expressões numéricas que envolvessem as operações matemáticas básicas de adição, subtração e multiplicação. Portanto, a primeira possibilidade de compra das frutas apresentada por Felipe foi a seguinte:

Figura 40 – Primeira possibilidade de compra das frutas apresentada por Felipe

Pêssegos – 7 Kg e sobrariam R$ 2,00 sem possibilidade de uso.
maçãs – 12 Kg
bananas - 14Kg e sobrariam R$ 0,60 sem possibilidade de uso.

Fonte: Arquivo das pesquisadoras.

Depois de ter assinalado os modos pelos quais poderia comprar as frutas, Felipe explicou:

Figura 41 – Explicação de Felipe à primeira possibilidade de compra das frutas

O que tentei expressar: identifique as possibilidades de Paulo levar todas as 3 frutas juntas, tendo uma das frutas a capacidade maior de compra e as outras a menor possível e aponte as sobras caso exista.

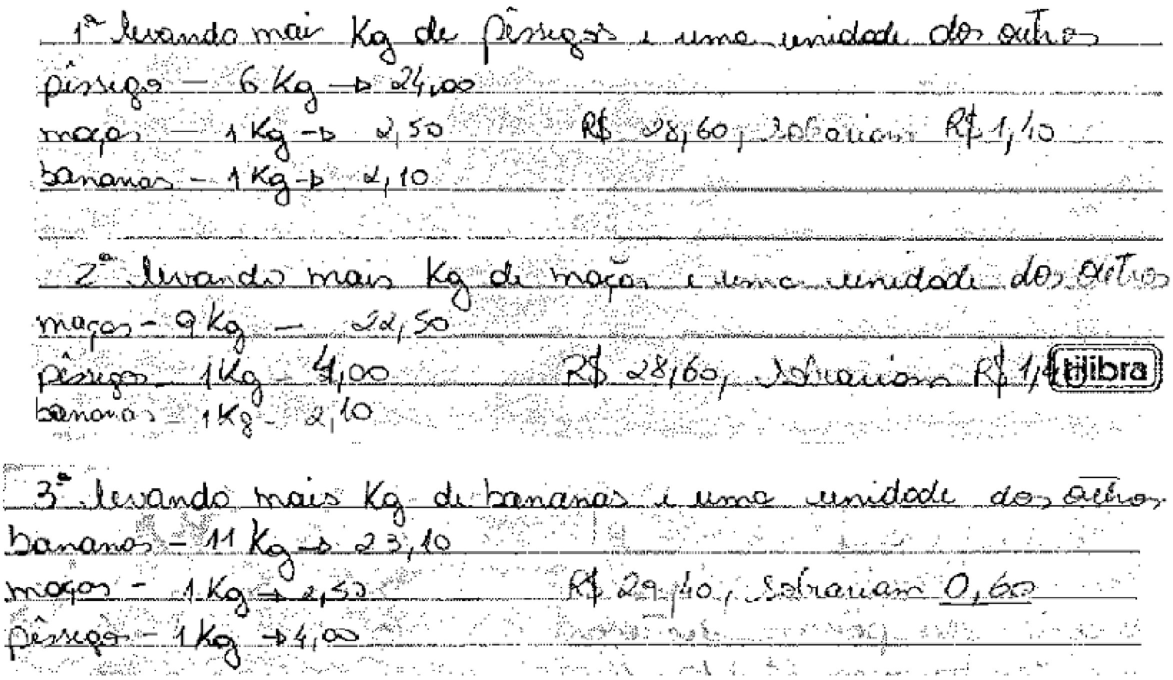
Fonte: Arquivo das pesquisadoras.

Observamos, nos registros de Felipe, que ele buscou uma resolução mediante o que o problema pedia. Ele pensou que a quantidade máxima de cada fruta que poderia levar deveria ser inferior ou igual a trinta, pois este era o total em dinheiro que possuía. Portanto, a ideia básica do problema envolve o princípio aditivo via uma partição não ordenada. Isso quer dizer que Felipe teria de combinar preços e quantidades. Essas são ideias implícitas em problemas combinatórios de otimização. Assim como fez com Joice, a pesquisadora explicou a Felipe que ele possuía um conjunto de elementos (frutas) e algumas regras (relação preço x quilo das frutas) que poderiam ser usadas nas compras que efetuaria.

Ao usar essas regras, Felipe teria algumas maneiras diferentes de escolher as frutas e criar outros subconjuntos. Como a cada elemento estava associado um custo, os subconjuntos formados também têm um custo, que, neste caso, é dado pela soma dos custos da compra de cada fruta. No caso da resolução de Felipe, vimos que, depois do procedimento anterior, ele subtraiu os valores da quantia total e verificou quanto sobraria de troco, se fosse comprado apenas um tipo de cada fruta. Desse modo, como problema de otimização, o foco está em encontrar, entre todas as possibilidades, aquela que expressa a melhor relação custo x benefício. Na sequência, estimulamos Felipe a pensar no modelo combinatório que estaria implícito ao problema formulado. Com nossa ajuda, ele identificou que seria uma combinação simples, mas que, para resolver o problema, teria de fazer a soma de cada possibilidade de fruta em separado e depois somar: Por exemplo, se, entre as três frutas, Felipe decidisse levar apenas uma delas, teria: $C_{3,1}$; se resolvesse levar duas: $C_{3,2}$; e, se levasse as três, teria uma $C_{3,3}$.

Posteriormente Felipe apresentou, por meio das operações aritméticas básicas, outras três maneiras pelas quais as frutas poderiam ser compradas. Vejamos:

Figura 42 – Outras possibilidades de compra das frutas apresentadas por Felipe


1ª levando mai Kg de pêssegos e uma unidade dos outros
pêssego — 6 Kg → 24,00
maças — 1 Kg → 2,50 R$ 28,60, sobrariam R$ 1,40
bananas — 1 Kg → 2,10

2ª levando mais Kg de maças e uma unidade dos outros
maças - 9 Kg — 22,50
pêssegos - 1Kg - 4,00 R$ 28,60, sobrariam R$ 1,4
bananas - 1Kg - 2,10

3ª levando mais Kg de bananas e uma unidade dos outros
bananas - 11 Kg → 23,10
maças - 1 Kg → 2,50 R$ 29,40, sobrariam 0,60
pêssegos - 1 Kg → 4,00

Fonte: Arquivo das pesquisadoras.

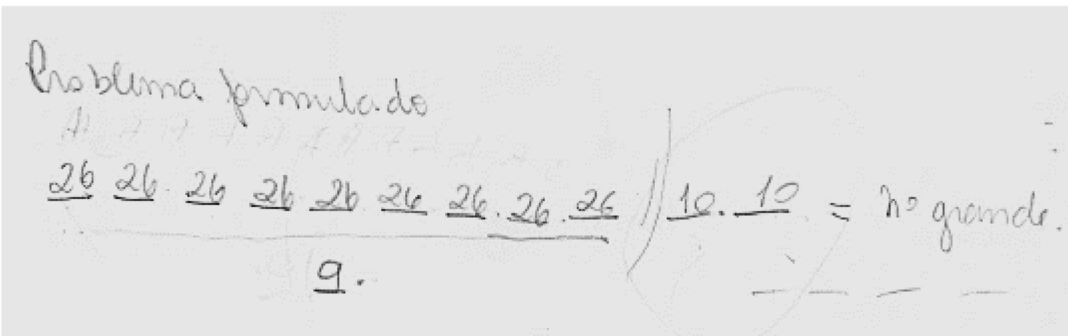
Na resolução acima, Felipe mostrou que decidiu fazer três compras diferentes de frutas. Em cada uma, ele estabeleceu uma quantidade mínima de dois tipos de frutas (1kg) e uma quantidade máxima do outro tipo e viu quanto gastaria e subtraiu do valor total. Portanto, levando-se em conta o estabelecido pelas restrições, Felipe poderia ter: $C_{3,1} + C_{3,2} + C_{3,3}$, que seria igual a 30 subtraído do resultado da adição das três combinações. Por fim, no retorno em 11/9/2018, Felipe retrucou:

> *[...] naquele período se me desse esse problema pra resolver eu pensaria... jamais imaginaria que fosse combinação, porque eu não conseguia entender muita coisa e as informações que eu tinha é: que combinação é você... não importa a ordem, você pode fazer a ordem... a ordem que for.*

Este último argumento de Felipe mostra que reconhecer o modelo combinatório implícito a um problema, mesmo que formulado por nós mesmos, não é tão simples, principalmente quando não se tem experiência com elaboração de problemas. Ademais, Felipe mostrou quão forte é o atributo ordem para a identificação dos agrupamentos simples de combinatória. E, por assim ser, às vezes, parece limitar as formas de ver e compreender problemas cujo modelo combinatório não é facilmente identificável.

O problema elaborado por Geane em 11/8/17: "Você precisa definir um nome de usuário para sua nova rede social. Porém, é definido que os 9 dígitos serão letras e os 2 últimos dígitos serão números. Quantos usuários terão nesta rede social, sabendo que não é permitido mais de um usuário para cada nome?" Segundo ela mesma, no retorno em 11/9/18, o problema poderia ser resolvido da seguinte maneira:

Figura 43 – Resolução de Geane para o problema elaborado em 11/8/17



Fonte: Arquivo das pesquisadoras.

Quando ela nos apresentou tal solução em 11/9/18, pedimos que nos explicasse como tinha pensado. Assim, construímos o seguinte diálogo:

> ***Geane:*** *Só que é um número enorme, né, que vai ter. Eu colocaria 9 casas aqui para colocar as letras, como se fosse na entrada, ... e duas últimas serão números.*

> **Pesquisadora:** *Mas essas letras... eu poderia usar maiúsculas e minúsculas, ou só maiúscula, ou minúscula ... você acha que é importante definir isso?*
> **Geane:** *É. seria bom definir, né, mas... eu acho que se eu não defini, é porque talvez isso não importasse, né, talvez!*
> **Pesquisadora:** *Como é que você resolve ele então do jeito que você pensou?*
> **Geane:** *Perguntaria: São quantas letras? São 26! Eu colocaria 26 em todos os espaços aqui para letra, porque não disse se podia repetir ou não, multiplicando todos, né, e aqui* (apontando os dois últimos espaços) *eu colocaria os números, dez, né, que seriam dez algarismos [...] aí multiplicaria isso tudo aqui e daria alguma coisa aqui, um número bem grande aqui!*
> **Pesquisadora:** *Tá. Mas e se eu fosse um usuário e eu colocasse a primeira letra, aqui, um T maiúsculo e você um t minúsculo. Seria a mesma senha? O mesmo usuário? E se eu resolvesse repetir todas as letras e algarismos?*
> **Geane:** *Talvez não né! E aqui também teria que dividir* (apontando as 11 "casas" que compunham o usuário) *porque, por mais que a ordem importa, ... se colocasse todos os dígitos iguais nas letras, aí eu teria 9 pessoas que poderiam ter esses mesmos dígitos iguais, aí eu acho que teria que dividir por 9 fatorial, né! Eu acho que tem que dividir por 9, só que tem outras letras, né, dentro das 26, 25. Nossa, vai dar um trabalho! Talvez separando ficaria melhor.*
> **Pesquisadora:** *E você acha que, se você definisse, essas letras aqui falando... maiúscula ou minúscula, só um tipo de letra, você acha que facilitaria?*
> **Geane:** *Sim! Eu preciso definir as condições, pois do jeito que eu fiz não vai ter como resolver não. Fica um cálculo muito grande e confuso. Então, aquela ideia de que se eu não defini, é porque talvez isso não importasse, não é verdade, pois importa sim.*
> **Pesquisadora:** *Se você colocasse essas informações de que repetindo ou não repetindo, também facilitaria?*
> **Geane:** *Talvez, né. Talvez sim. Porque se é um problema não é o exercício, né. Então o aluno, ele tem que, a pessoa que está resolvendo, ela tem que pensar nessas coisas também. Igual, a questão da maiúscula e minúscula, talvez seria importante, mas, a questão das letras serem iguais, ele também teria que pensar nisso. Assim como se fosse outro problema, que tivesse uma situação bem menor, e ele teria que pensar que poderia ocorrer de letras iguais, aí tá falando que não pode ser com o mesmo nome, então, é um nome para cada usuário, distinto né...*
> **Pesquisadora:** *Então, aí não poderia ter as mesmas letras, né?*
> **Geane:** *É!*
> **Pesquisadora:** *[...] se você trabalhasse com esse problema em sala de aula, você reformularia alguma coisa, esclareceria alguns detalhes?*
> **Geane:** *Talvez eu tiraria um pouco dos dígitos e colocaria, restringiria as letras para minúscula ou só maiúsculas.*
> **Pesquisadora:** *Que aí você trabalha com uma quantidade menor, né, que dá até para você fazer intuitivamente, como você aprendeu, né?!*
> **Geane:** *Uhum! Caso o aluno não tenha entendido formalmente, como eu não aprendi lá no ensino médio, ele conseguiria fazer pela árvore ou pelo gráfico aqui.*

No diálogo estabelecido entre Geane e a pesquisadora, é possível observar que uma das primeiras ações da licencianda foi identificar as condições subjacentes ao enunciado: o nome do usuário seria composto por 11 símbolos, 9 seriam letras e 2 seriam algarismos; o problema informa que os dois últimos seriam números, o que, consequentemente, a levou a deduzir que os primeiros nove dígitos seriam letras e a afirmar: "*9 casas aqui para colocar as letras, como se fosse na entrada, ... e duas últimas serão números*". Embora ela tenha indicado o posicionamento das letras e dos algarismos nas senhas, mas ela não esclareceu quanto à repetição. Em razão da ausência de condições estabelecidas no enunciado, a resolução apresentava-se aberta e muito ampla. Outra informação importante encontrada no enunciado foi a indicação de que não é permitido mais de um usuário por nome. Ou seja, eles têm de ser diferentes. Por fim, há de se observar também que o problema solicita que seja informada a quantidade de usuários. Desse modo, não há necessidade de listá-los para saber quais seriam esses usuários.

Ao iniciar o processo de resolução, Geane considerou as condições e reconheceu que o problema poderia ser resolvido pelo produto de letras e de números. Além disso, identificou que importava a ordem com que os elementos letras e números apareceriam na sequência. Acerca disso, Geane explicou-nos que o problema elaborado por ela, embora de pensamento combinatório, era bastante complexo e implicitamente aparecia o produto entre dois arranjos com repetição (o arranjo das letras multiplicado pelo arranjo dos números), pois não seriam usadas todas as letras do alfabeto nem todos os algarismos de 0 a 9. Informou-nos também que o resultado seria expresso por uma quantidade muito grande e pareceu concordar conosco quanto ao fato de estabelecer uma condição para o tipo de letra, ou seja, definir entre maiúsculas ou minúsculas. O que não se mostrou consensual com o fato de as letras/números serem repetidos ou não, pois, segundo ela, o enunciado informava que os usuários deveriam ser distintos e, por assim serem, não poderiam ser iguais.

Embora no diálogo apresentado só apareçam algumas questões feitas a Geane, fizemos outras indagações que foram importantes para que a licencianda apresentasse seus argumentos de modo estruturado. São elas: Podemos usar somente letras minúsculas? Podemos usar somente letras maiúsculas? Podemos usar simultaneamente letras minúsculas e maiúsculas? Como não há restrição, as letras podem ser repetidas em cada um dos nove dígitos? Quanto aos números, temos dez possibilidades (0 até 9). Como não há restrição, eles podem ser repetidos em cada um dos dígitos?

Outro ponto do diálogo com Geane que mereceu atenção foi "*se é um problema não é o exercício*". Essa afirmação de Geane pareceu mostrar que ela havia compreendido que o exercício e o problema possuem concepções distintas. Ela explicou-nos que um exercício é visto como algo mais simples de ações repetidas e o problema exige mais interpretação e cuidado para ser resolvido. Por fim, quando questionada sobre as possibilidades de trabalhar com o problema elaborado por ela em uma sala de aula, afirmou que diminuiria a quantidade de símbolos e restringiria o tipo de letra. Além disso, antecipou que o problema poderia ser resolvido de modo intuitivo sem usar necessariamente uma fórmula. Esses últimos argumentos de Geane foram muito enfatizados por nós em sala de aula, visto que se tornou para eles uma potente estratégia de resolução de problemas que envolve grandes quantidades.

Segmento 3 — Diálogos individuais entre a pesquisadora e a licencianda Isis sobre o problema elaborado – fase de discussão, prática de conectar.

Discutimos, neste terceiro segmento, o problema formulado por Isis, pois seguiu exatamente o modelo combinatório implícito no problema dos trajetos resolvido por ela, o qual serviu de base para a formulação desses exemplos. Na aula regular em 11/8/17, quando solicitamos a formulação de um problema semelhante ao resolvido, Isis apresentou uma situação mais simples em relação àquela proposta por nós. Na ocasião, ela redigiu a seguinte situação:

> *Pedro está de férias, e pretende viajar seguindo o seguinte percurso:*
>
> $A \rightarrow B \rightarrow C$
>
> *Liste todas as rotas possíveis que Pedro poderá fazer, partindo de A e chegando a C.*

Isis explicou-nos que pensou em um trajeto diferente daqueles indicados no problema original e seria algo bem simples, fácil de resolver pela visualização e poderia ser discutido com crianças pequenas.

Uma breve síntese

Nesses momentos de discussão individual, privilegiamos a síntese das várias abordagens feitas pelos alunos, ao elaborarem o problema. Baseadas em Polya (1973/1945), incitamos questionamentos mediante os quais instigamos a participação oral dos alunos em discussões sobre a tarefa e a verbalização de suas construções. Isso nos ajudou a usá-las de modo eficaz, para orientá-los no sentido de uma compreensão mais profunda e significativa da matemática. Os segmentos mostraram que, ao analisarem suas respostas, os próprios licenciandos identificaram o tipo de problema elaborado e sua relação com o original.

A estrutura matemática do problema elaborado constituiu nosso principal desafio, visto que se diferenciava ou se assemelhava quanto à *complexidade* do problema, *modelo combinatório implícito de combinação (Alex), combinação do tipo otimização (Felipe e Joice), permutação (Alice), arranjo com repetição (Geane), princípio multiplicativo (Vini), princípio aditivo (Isis)* e *estratégias de resolução*. Ao propormos uma tarefa para ser resolvida individualmente começando por solicitar que os estudantes elaborassem um problema semelhante ao resolvido, eles seguiram os próprios caminhos. Isso aconteceu porque eles entenderam que a semelhança entre o problema dado e o elaborado envolvia apenas a ideia de combinatória. Desse modo, com exceção de Isis, evidenciaram outros problemas mais complexos que, a nosso ver, são produtos de suas lembranças dos estudos anteriores de combinatória. Além disso, forneceram-nos indicações sobre conexões que haviam estabelecido com ela anteriormente. Isso quer dizer que os licenciandos possuíam imagens conceituais da estrutura de um problema em termos de matemática subjacente e do que se pedia da situação problemática.

Os problemas formulados pelos licenciandos se mostraram então como um exemplo protótipo (HERSHKOWITZ, 1994) representante do conceito e do modelo combinatório implícito identificado ou não por eles no problema original dos deslocamentos. Consideramos que o exemplo protótipo foi usado como um sistema de referência e o julgamento foi aplicado a outras instâncias; neste caso, os problemas formulados. De modo geral, os problemas constituíram-se por meio do atributo ordem e natureza e, nesse aspecto, aproximaram-se da ideia conceitual matemática, embora, em alguns momentos, se mostrassem incompletas. Vimos que o problema formulado por Alice era muito próximo, quiçá idêntico ao protótipo que foi mencionado por ela, quando respondeu às quatro tarefas que compunham o primeiro bloco.

Reconhecemos que formular exemplos não é uma prática muito comum em aulas de matemática, pois geralmente eles são apresentados pelos professores ou pelo livro didático, para auxiliar alunos a compreender e operar com diferentes objetos matemáticos. Kavousian (2008) destaca que, em razão disso, cria-se uma dependência dos estudantes a fontes externas de exemplos. Aponta que essa dependência é problemática, uma vez que professores escolhem exemplos com determinadas finalidades que nem sempre são as mesmas consideradas pelos alunos. E isso pode gerar desajustes de aprendizagem matemática, conforme assinalado por Skemp (1976). Por isso, Kavousian (2008) vê, nos exemplos gerados pelos estudantes, uma possibilidade de eles compreenderem "o propósito dos exemplos de maneira mais profunda e construtiva, exigindo também mais envolvimento e empenho dos estudantes, para apoiar a aprendizagem deles" (KAVOUSIAN, 2008, p. 52, tradução nossa[157]).

Vimos que fragilidades estavam nos enunciados dos problemas elaborados, o que, consequentemente, dificultava a compreensão do modelo combinatório e da estruturação das ideias matemáticas contidas neles. O retorno dos dados em 2018 foi fundamental para que

[157] [...] the purpose of examples in a deeper and more constructive way, also to require more involvement and engagement from the students, to assist their learning.

discutíssemos individualmente problemas e soluções apresentadas pelos licenciandos. As discussões foram baseadas no pensamento deles, pois assim suscitaram ideias matemáticas importantes com vistas à aprendizagem do conteúdo curricular em questão.

Diante disso, foi possível identificar imagens conceituais evocadas (TALL; VINNER, 1981) enquanto formulavam o problema. Elas estavam associadas às experiências individuais pregressas de cada estudante com o conteúdo, do conhecimento que possuíam do mesmo e da relação afetiva (positiva ou negativa) desenvolvida sobre a aprendizagem de análise combinatória. Isso valida nossas categorias de análise *imagem conceitual da definição do conceito* e *imagem do ensino e da aprendizagem de combinatória*, o que as tornam mais consistentes. Assim, é possível afirmar que o tipo de exemplo protótipo e a imagem do licenciando sobre o conceito se diferenciaram de um estudante para outro.

Observamos que imagens evocadas nas seis tarefas anteriores foram reforçadas. Verificamos, ainda, que, embora a ideia combinatória subjacente ao problema resolvido tenha sido identificada, o modelo combinatório implícito e a estrutura matemática utilizada na formulação do exemplo só foram vistas por Isis, que elaborou uma situação bem simples, e Vini, que adaptou uma questão da tarefa original. Por fim, vimos quão importante é criar uma cultura de resolução e formulação de problemas em aulas de matemática em diferentes situações (início, meio e fim de conteúdo) e assuntos, focalizando o conceito e sua estrutura matemática formal.

5.3 Reconstrução das imagens iniciais de licenciandos sobre os agrupamentos simples de combinatória

Desde a década de 1980, as pesquisas que tratam de nossa temática de estudo investigam e acompanham “o desenvolvimento da Imagem Conceitual na mente individual” (HERSHKOWITZ, 1994, p. 15). Isso nos motivou a analisar, nesta seção, o desenvolvimento individual de três dos sete licenciandos. Na seção 1, respondemos à primeira questão da pesquisa: “Quais imagens conceituais universitários evocam quando resolvem tarefas de análise combinatória?” Para isso, analisamos as respostas de todos os licenciandos às sete tarefas específicas desenvolvidas em 11/8/17, primeiro dia de aula da disciplina. Também incorporamos relações e comentários sobre elas, quando os estudantes validaram os dados posteriormente às aulas e no retorno em 2018. As quatro primeiras tarefas de 11/8/17 compunham-se de questões abertas relacionadas à definição de combinatória e dos agrupamentos simples (arranjo, combinação e permutação). As outras três tarefas envolviam a resolução de um problema simples de contagem, a identificação do conceito matemático subjacente a ele e a formulação de um exemplo semelhante contendo a ideia conceitual de combinatória e com a mesma estrutura matemática de deslocamentos em trajetos.

Esse cenário serviu de base para investigarmos casos específicos em que ocorreram reconstruções conceituais dos licenciandos a respeito dos agrupamentos simples de combinatória, portanto nos permitiu responder à segunda questão de investigação: “Como as imagens conceituais de universitários acerca de agrupamentos simples se reconstroem durante uma disciplina que aborde análise combinatória?”. Para isso, analisamos, em profundidade, os dados de Alex, Geane e Vini, escolhidos em razão de terem oferecido mais evidências para análise de suas imagens, da presença deles em todas as atividades de aula e pesquisa, e pelas experiências individuais de cada um com a matemática.

Alex sempre gostou de matemática e suas memórias em relação à disciplina são muito positivas. Geane vivenciou uma experiência negativa com a matemática no 9.º ano do ensino fundamental, o que, segundo ela mesma, a impulsionou a ser autodidata em matemática. Vini, embora gostasse de matemática, relatou, nos momentos de retorno, ter certo medo de combinatória, mesmo depois de ter concluído a disciplina na licenciatura. Esses três estudantes com diferentes perfis e histórias de vida motivaram-nos a tecer um caminhar deles durante a disciplina de Análise Combinatória e Probabilidade cursada no 6.º período da licenciatura em Matemática do IFES *campus* Cachoeiro de Itapemirim.

Anteriormente à análise dos dados de Alex, Geane e Vini, apresentamos, descrevemos e comentamos as categorias e as tarefas selecionadas para o estudo individual das possíveis reconstruções conceituais dos licenciandos. Posteriormente, quando tratamos dos dados isolados, apresentamos um caminhar de cada estudante até a licenciatura em Matemática, resgatamos imagens iniciais assinaladas na seção 1 e apresentamos os movimentos de reconstrução que foram observados por nós pesquisadoras. Por fim, apresentamos uma síntese de nossas observações.

5.3.1 Categorias de análise

A pesquisa de Giraldo (2004)[158] sustentou a elaboração de nossas categorias de análise para que examinássemos os dados individuais de cada licenciando. O pesquisador verificou

---

[158] Giraldo (2004), em sua tese *Descrições e conflitos computacionais: o caso da derivada*, realizou entrevistas estruturadas, baseadas em tarefas, e semiestruturadas, orientadas por perguntas e respostas, para analisar a evolução do discurso dos sujeitos em relação ao conceito de derivada.

aspectos da imagem do conceito de derivada de seis estudantes com base na análise das falas deles em entrevistas. Averiguou aquelas imagens que permaneceram estáveis e aquelas que mudaram ao longo do processo. Na ocasião, identificou os seguintes tipos de efeitos nas imagens de conceito dos estudantes:

- *Reformulação:* um aspecto da imagem de conceito é reelaborado, de forma que algumas de suas características são preservadas e outras mudam.
- *Reconstrução:* um aspecto da imagem de conceito é substituído por um novo, que é incompatível com o primeiro.
- *Inclusão:* passa a fazer parte do discurso um aspecto até então ausente e sem relação direta aparente com aspectos presentes antes. É claro que o fato de um aspecto estar ausente do discurso não significa que este não faça parte da imagem de conceito. Assim, quando um participante passa a mencionar uma ideia até então ausente, podemos apenas supor, mas não garantir, que esta haja sido incluída em sua imagem de conceito a partir daquele momento. Tal suposição pode ser fortalecida pela frequência com que a ideia é citada.
- *Exclusão:* deixa de fazer parte do discurso um aspecto até então presente, sem que se identifique relação direta (por exemplo, por meio de reformulação ou reconstrução) com novos aspectos. Da mesma forma que no caso do efeito de inclusão, a exclusão de um aspecto do discurso do indivíduo não é garantia da exclusão da imagem de conceito, o que requer estudos mais cuidadosos (GIRALDO, 2004, p. 121-122).

Apoiados nas categorias propostas por Giraldo (2004) e nos dados obtidos em nossa pesquisa, percebemos que a inclusão e a exclusão perpassavam os processos de reformulação e reconstrução. Vimos que tais processos (inclusão/exclusão) poderiam ser positivos ou negativos e acontecer por meio de alguma complementação ou substituição, visto que, em alguns momentos, incluir/excluir significou complementar/substituir. Queremos dizer que notamos uma *inclusão positiva* quando o licenciando evocou e inseriu em sua fala (nas discussões matemáticas) ou escrita (resolução das tarefas) algum atributo, até então ausente e diretamente relacionado ao conceito. Tal ação aconteceu pela inserção direta de um atributo coerente em complementação ou em substituição à ideia anterior.

Por outro lado, constatamos a existência de uma *inclusão negativa* quando um atributo, até então ausente e sem relação direta com o conceito, emergiu na imagem verbal ou escrita do estudante. Assim como a anterior, tal ação aconteceu pela inserção direta de um atributo incoerente em complementação ou em substituição ao anterior. Nossa compreensão de atributos coaduna-se com a concepção dada por Hershkowitz (1994), quando assinala que boa parte das estruturas dos conceitos matemáticos básicos pode ser considerada como uma conjunção, uma associação, de atributos relevantes que o caracterizam. Isso quer dizer que um conceito possui características relevantes que lhe são próprias e peculiares, sem as quais ele não existiria como tal. Desse modo, podemos pensar que construímos conceitos básicos quando associamos ideias relevantes relacionadas aos conceitos (HERSHKOWITZ, 1994).

Definida a questão da inclusão/exclusão e entendida nossa concepção de atributos, passamos, então, a analisar, em profundidade, os casos de reformulação e reconstrução. Embora não sejam de mesma raiz etimológica, ambas (reformulação e reconstrução) possuem o mesmo significado quanto à ideia de "dar uma nova formulação". Isso quer dizer que, neste caso, são vistas como palavras sinônimas. Essa ideia de "dar uma nova formulação" também foi concebida por nós pesquisadoras como aquela que estaria subjacente às movimentações das imagens dos estudantes.

Esperávamos que, ao incorporarem aprendizagens, os licenciandos apresentassem novas formulações verbais e/ou escritas. Esse movimento de aprendizagem consistiu no ato de "voltar a analisar a imagem anterior" e aconteceu nos momentos de discussão coletiva envolvendo a turma inteira, nos retornos dos dados individuais, nas resoluções escritas das tarefas e nos registros individuais dos estudantes nos próprios cadernos. Desse modo, o ato de revisitá-las estimulou a reformulação de imagens como uma ação intrínseca do sujeito para que houvesse posteriormente uma verbalização ou registro de uma imagem reconstruída. Assim, cada estudante evocou uma imagem reconstruída por uma complementação ou substituição positiva ou negativa que aconteceu simultaneamente ao processo. Portanto, concebemos a reformulação como uma etapa subjetiva, anterior à reconstrução, ativada pelo diálogo individual e coletivo entre os envolvidos mediante as tarefas específicas propostas.

Embora descrito de modo linear, o processo é cíclico, pois consideramos que, em situação de ensino e aprendizagem, os envolvidos reconstroem imagens conceituais de maneira relacional (SKEMP, 1976). Portanto, procuramos identificar, nas falas dos estudantes, nas discussões de sala de aula, atividades escritas, avaliações e retornos dos dados, aspectos das imagens dos conceitos simples de arranjo, permutação e combinação que permaneceram estáveis ou foram alterados ao longo das aulas de combinatória.

Diante do exposto, a categoria de análise de nossa pesquisa no que se refere ao processo de movimentação das imagens será a *reconstrução* por *inclusão/exclusão positiva/negativa* de *algum atributo* em *complementação* ou em *substituição* à imagem conceitual anterior. Ao desenhá-la, cogitamos também que poderia haver uma parte da imagem do conceito que permaneceria fixa, enquanto outra poderia variar em razão de uma alguma complementação ou substituição por inclusão/exclusão positiva/negativa de algum atributo evocado. Por exemplo, considere uma situação hipotética em que um estudante diz: "uma combinação simples é um agrupamento no qual ordem e natureza dos elementos devem ser observadas".

Na afirmativa do estudante, vê-se que ele possuía alguma imagem do conceito "combinação", ao caracterizá-lo como um agrupamento. Portanto, essa primeira parte da imagem evocada mostra-se coerente quanto à definição formal de combinação pela existência de um atributo compatível (agrupamento). Após inúmeros procedimentos de ensino, o professor solicita ao estudante que a defina novamente e, caso sua aprendizagem dos agrupamentos simples já tenha sido ampliada, ele tem a possibilidade de reformular suas ideias iniciais, complementá-las ou substituí-las e, assim, apresentar uma reconstrução de suas imagens conceituais iniciais.

Nesse caso hipotético, consideramos que o estudante aprendeu que uma combinação simples é um agrupamento no qual importa a natureza dos elementos que constitui os subconjuntos formados, e não a ordem em que eles são posicionados nesses subconjuntos. Desse modo, o estudante manteve uma parte de sua imagem fixa (combinação simples é um agrupamento) e a complementou de modo positivo (no qual importa a natureza dos elementos que constitui os subconjuntos formados, e não a ordem em que eles são posicionados nesses subconjuntos). Então, ao defini-la como "[...] um agrupamento no qual importa a natureza dos elementos que constitui os subconjuntos formados, e não a ordem em que eles são posicionados nesses subconjuntos", notamos que houve uma reconstrução da imagem conceitual pelo estudante que foi perpassada pela complementação por inclusão positiva.

Com a categoria descrita acima, consideramos que os licenciandos apresentaram alguma reconstrução conceitual de combinatória. Esse contexto mostra-se semelhante ao descrito por Vinner (1991), quando detalhou três cenários que poderiam ocorrer como resultado de um confronto entre uma definição conceitual e uma imagem do conceito construída anteriormente pelo estudante sobre o objeto de definição conceitual, conforme comentamos anteriormente no capítulo de referencial teórico.

Como resultado desse movimento, Vinner (1991; 2002) assinalou que três cenários poderiam ocorrer:

> (I) A imagem conceitual pode ser alterada para incluir também os sistemas de coordenadas cujos eixos não formam um ângulo reto (Esta é a reconstrução satisfatória ou acomodação).
> (II) A imagem conceitual pode permanecer como está. A célula de definição vai conter a definição do professor por algum tempo, mas essa definição será esquecida ou distorcida após um curto período de tempo [...]. (Neste caso, a definição formal não foi assimilada.)
> (III) Ambas as células permanecerão como estão. No momento em que o aluno é solicitado a definir um sistema de coordenadas, ele repetirá a definição de seu professor ou de sua professora, mas, em todas as outras situações, ele ou ela irá

> pensar em um sistema de coordenadas como uma configuração de dois eixos perpendiculares (VINNER, 2002, p. 70, tradução nossa[159]).

Kavousian (2008) considerou os três cenários descritos por Vinner (1991) como um "bom começo para pensar em possíveis mudanças na imagem conceitual" (p. 59, tradução nossa[160]). No entanto, a pesquisadora acredita que eles deveriam ter mais poder descritivo e, portanto, ser modificados, a fim de que se tornassem mais específicos. Desse modo, assim os descreveu em sua tese:

> *1. Imagem conceitual persistente:* A imagem conceitual permanece como está e o aluno continua fazendo o que estava fazendo antes da tarefa. Nenhum evento de aprendizagem ocorreu.
> *2. Imagem conceitual inapropriada sem melhoria:* A imagem conceitual mudou ou uma nova imagem conceitual foi formada, mas ainda não é uma imagem conceitual apropriada. O processo de aprendizagem levou o aluno a uma má compreensão.
> *3. Imagem de conceito inadequada com melhoria:* A imagem conceitual mudou ou uma nova imagem conceitual foi formada. Ainda não é uma imagem conceitual adequada, mas é uma melhoria em relação à imagem conceitual anterior. O processo de aprendizagem começou.
> *4. Imagem conceitual fragmentada:* A imagem conceitual pode permanecer como está e o aluno cria uma célula separada para armazenar a nova maneira de ver o conceito sem nenhuma conexão com a imagem conceitual anterior. O processo de aprendizagem começou.
> *5. Imagem de conceito flexível:* A imagem do conceito pode ser alterada para incluir ou acomodar esta nova maneira de ver o conceito. Uma imagem conceitual apropriada é formada e as conexões apropriadas são feitas. Um evento de aprendizado ocorreu (KAVOUSIAN, 2008, p. 59-60, tradução nossa[161]).

Na lógica pensada por Kavousian (2008), o primeiro cenário indica que não houve evento significativo de aprendizagem. No segundo cenário, o estudante substituiu uma imagem conceitual imprópria por outra imagem do mesmo tipo. O terceiro cenário foi marcado por uma substituição ou alteração de uma imagem conceitual inadequada por outra

---

[159] (I) The concept image may be changed to include also coordinate systems whose axes do not form a right angle. (This is satisfactory reconstruction or accommodation.) (II) The concept image may remain as it is. The definition cell will contain the teacher's definition for a while but this definition will be forgotten or distorted after a short time, and when the student will be asked to define a coordinate system he or she will talk about axes forming a right angle. (In this case the formal definition has not been assimilated.) (III) Both cells will remain as they are. The moment the student is asked to define a coordinate system he will repeat his or her teacher's definition, but in all other situations he or she will think of coordinate system as a configuration of two perpendicular axes.

[160] [...] good start for thinking about possible changes to the concept image [...]

[161] 1. Persistent concept image: The concept image remains as it is, and the student carries on doing what he or she was doing before the task. No learning event occurred. 2. Inappropriate concept image without improvement: The concept image has changed, or a new concept image has been formed, but it is still not an appropriate concept image. The process of learning led the student to a misunderstanding. 3. Inadequate concept image with improvement: The concept image has changed, or a new concept image has been formed. It is not yet an adequate concept image, but it is an improvement from the previous concept image. The process of learning has started. 4. Fragmented concept image: The concept image may remain as it is, and the student creates a separate cell to store the new way of seeing the concept without any connection to the previous concept image. The process of learning has started. 5. Flexible concept image: The concept image may be changed to include or accommodate this new way of seeing the concept. An appropriate concept image is formed and the appropriate connections are made. A learning event has occurred.

também inadequada. No entanto, a nova imagem conceitual foi aprimorada em comparação com a anterior. No quarto cenário, considerou-se que, embora o aluno tenha adicionado a definição do conceito à sua imagem conceitual, isso não afetou aquela já existente. Ou seja, o estudante não conectou a definição ao conceito. No quinto e último cenário, considerou-se que o estudante compreendeu as ideias conceituais e, assim, mudou a imagem do conceito com sucesso (KAVOUSIAN, 2008).

Desse modo, *reafirmamos que* <u>*a categoria de análise de nossa pesquisa no que se refere ao processo de movimentação das imagens será a reconstrução por inclusão/exclusão positiva/negativa de algum atributo em complementação ou em substituição à imagem conceitual anterior*</u>*. E, pode acontecer* <u>*em cenários nos quais o processo de reconstrução indica a existência de imagem conceitual persistente, inapropriada sem melhoria, inadequada com melhoria, fragmentada e flexível*</u>[162].

Em vista disso e da natureza não observável de modo direto das imagens conceituais de combinatória dos estudantes, as tarefas específicas resolvidas por eles constituíram fontes seguras de dados. Elas permitiram inferências das pesquisadoras ante as respostas observáveis, emitidas pelos licenciandos aos problemas propostos. Desse modo, entre as atividades desenvolvidas na disciplina de Análise Combinatória e Probabilidade ao longo do segundo semestre de 2017, selecionamos cinco que serviram de base para apontarmos possíveis reconstruções dos três estudantes. Na tabela 16 apresentada logo adiante, apresentamos as tarefas, posteriormente comentamos a estrutura combinatória de cada uma delas, abordamos algumas respostas esperadas pela professora e apresentamos alguns procedimentos de ensino e aprendizagem adotados na ocasião em que desenvolvemos tarefas de pesquisa e de aula de modo integrado.

[162] Usamos o itálico e o sublinhado para destacar os aspectos essenciais da categoria de análise que se refere ao processo de movimentação das imagens conceituais dos licenciandos.

5.3.2 Tarefas específicas selecionadas para a análise individual de reconstruções pelos estudantes

Tabela 16 – Tarefas selecionadas para a análise individual de reconstruções pelos estudantes

Aula	Tempo	Data	Tarefa
2	100min	18/08/17	1. Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6? 2. Seja o conjunto {1, 2, 3, 4}, determine quantos subconjuntos de 3 elementos existem, utilizando os elementos desse conjunto.
4	100min	25/08/17	1. Quatro amigos vão disputar uma competição de corrida. Serão premiados o 1.º, 2.º e 3.º lugares. a) De quantas maneiras distintas poderá ocorrer essa classificação? b) Quantos grupos distintos poderão ocorrer na formação do pódio? (Independentemente da classificação) c) O que diferencia a situação a da b?
7	100min	22/09/17	7. Classifique os agrupamentos sugeridos a seguir como arranjo ou combinação (PAIVA, 2009, p. 167): a) Escolher seis dos sessenta números para uma aposta na Mega-Sena. b) As possíveis classificações dos quatro primeiros colocados no Campeonato Brasileiro de Futebol. c) Eleger uma comissão de dois alunos para representantes de sala, em que ambos terão o mesmo cargo. d) Formar um número de telefone com oito números distintos. e) Eleger uma comissão de dois alunos em que um será o porta-voz da classe e o outro será o secretário. f) Escolher três vértices de um cubo para formarmos triângulos.
9	100min	20/10/17	1. Classifique as sentenças a seguir como arranjo, permutação ou combinação. Justifique sua classificação. a) Produzir uma mistura com duas cores primárias distintas, escolhidas entre o vermelho, azul e amarelo. b) A disputa de uma eleição por três candidatos em que há o 1.º, 2.º e 3.º colocados. c) Escolher, entre os jogadores A, B, C, D e E, três para receber a medalha do 1.º, 2.º ou 3.º melhor jogador. d) Identificar o número de anagramas que uma pessoa consegue formar com a palavra BANANA. e) Formar números naturais de cinco algarismos distintos ou não escolhidos entre os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. f) Escolher maneiras de saborear duas bolas de sorvete entre sete sabores disponíveis na sorveteria. g) Usando suas palavras, conceitue arranjo, permutação e combinação.

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras.

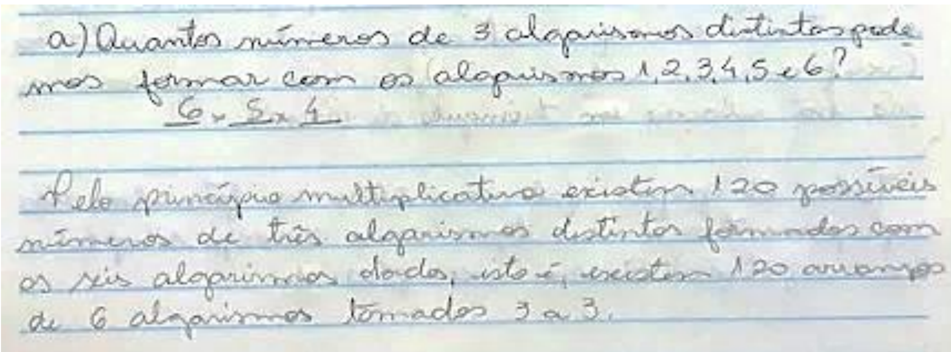
Para fins didáticos, reiteramos que as atividades desenvolvidas na aula 1, em 11/8/17, foram tradadas na seção 1, quando analisamos imagens iniciais evocadas pelos licenciandos, ao resolverem as primeiras atividades da disciplina de Análise Combinatória e Probabilidade. Portanto, tal fato justifica a não indicação na tabela anterior dessa primeira aula. Por outro lado, a tabela mostra que escolhemos quatro das nove aulas dedicadas à combinatória. As aulas escolhidas possuíam um espaço de tempo considerável, para observarmos a movimentação das imagens iniciais. Queríamos identificar e analisar possíveis reconstruções das imagens dos estudantes ao longo da disciplina, e não em cada aula específica. Nas aulas escolhidas, desenvolvemos, entre outras atividades, as cinco tarefas mencionadas que foram selecionadas em razão do seu potencial, para averiguarmos o movimento dos três agrupamentos simples (arranjo, permutação e combinação) pelos licenciandos de modo simultâneo e integrado. No geral, cada estudante respondeu às tarefas individualmente que, depois compartilhou suas respostas com os demais estudantes em discussões matemáticas, envolvendo a turma inteira. Assim sendo, passamos a detalhar as tarefas específicas indicadas na tabela 14.

Como dito anteriormente, comentamos, de agora em diante, a estrutura combinatória de cada uma delas, abordamos algumas respostas esperadas pela professora e, caso necessário, comentamos também alguns procedimentos de ensino e aprendizagem adotados pela professora e pelas pesquisadoras de modo compartilhado. A aula 2 aconteceu em 18/8/17, na segunda semana letiva do semestre 2017/2. Nela foram trabalhados dois problemas planejados pela professora regente ante as informações obtidas pelas pesquisadoras na aula 1 (11/8/17). Embora não se relacionassem diretamente ao problema dos trajetos abordado na aula 1 quanto ao tipo de objeto (trajetos, caminhos), foram situações mencionadas pelos estudantes como aquelas mais estudadas no ensino médio. Desse modo, para nós, eles se configuravam como problemas tipo com estrutura combinatória decorada em razão de se tornarem comuns durante o ensino médio. Assim sendo, interessamo-nos em saber quais imagens conceituais relacionadas à definição ou não poderiam ser evocadas pelos estudantes quando resolvessem tarefas desse formato. Isto porque o modelo combinatório implícito se diferenciava em relação ao problema da primeira aula.

Queremos dizer que o problema 1 – *"Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?"* – da segunda aula envolvia a seleção ordenada, isto é, um arranjo dos seis algarismos da sequência (1, 2, 3, 4, 5, 6) tomados três a três. O problema 2 – *"Seja o conjunto {1, 2, 3, 4}, determine quantos subconjuntos de 3 elementos existem, utilizando os elementos desse conjunto"* –, embora envolvesse o mesmo tipo de objeto (algarismos), compreendia uma seleção não ordenada. Ou seja, uma combinação entre os elementos de natureza distinta que compunham o conjunto dado. Portanto, os três problemas (aula 1 e 2) envolviam o mesmo modelo combinatório de seleção implícito no enunciado e a solução compreendia uma contagem. Salientamos, ainda, que o problema dos trajetos (aula 1) solicitava uma enumeração anteriormente à contagem.

A professora escreveu os dois problemas no quadro e solicitou aos licenciandos que os resolvessem individualmente. Orientou que discorressem sobre as estratégias de resolução e informassem as características (atributos) dos problemas, nas quais se basearam para pensar nas soluções. Seguindo as orientações de Stein et al. (2008), sugerimos à professora que resolvesse os problemas propostos. Ao proceder desse modo, a estratégia de resolução pensada pela professora serviu de referência para a análise e discussão coletiva das soluções apresentadas pelos licenciandos. Assim, a professora esperava que o primeiro problema – *"Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?"* – fosse resolvido de modo semelhante ao pensado por ela:

Figura 44 – Resolução proposta pela professora, problema 1, aula 2, 18/8/17



a) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1,2,3,4,5 e 6?

$\underline{6} \times \underline{5} \times \underline{4}$

Pelo princípio multiplicativo existem 120 possíveis números de três algarismos distintos formados com os seis algarismos dados, isto é, existem 120 arranjos de 6 algarismos tomados 3 a 3.

Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2017.

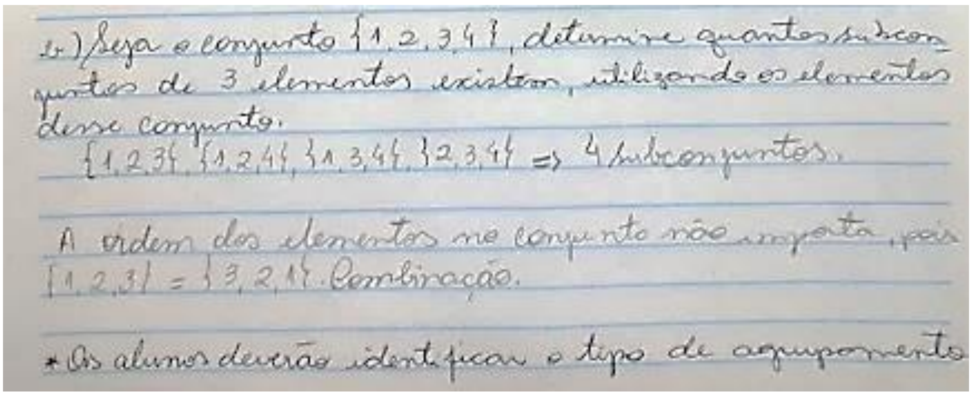
Em sua resolução, a professora utilizou o princípio multiplicativo para encontrar uma resposta para o problema. Na sequência, ela explicou a existência de 120 números compostos de três algarismos distintos formados dos seis algarismos dados. Ao final de sua explicação, ela mencionou outra forma de resolver o problema por meio do cálculo de um arranjo simples dos seis algarismos tomados três a três. No primeiro caso, teríamos 6 x 5 x 4 = 120. Com os traços, a professora indicou que o número seria formado de três algarismos posicionados de modos distintos. Ao colocar 6, 5 e 4 em cima dos traços, ela mostrou a quantidade de algarismos distintos que poderiam ocupar a primeira, segunda ou terceira posição para a formação dos números.

Desse modo, para a primeira posição, teríamos seis possibilidades que poderiam ser representadas por uma quantidade genérica *n* que seria equivalente ao número total de possibilidades de ocupação da primeira posição por algarismos distintos. Para a segunda posição, teríamos cinco possibilidades de algarismos distintos, pois um deles já havia ocupado a primeira posição. Algebricamente isso corresponde a $n - 1$, em que *n* indica a quantidade total de algarismos e $- 1$ representa o algarismo que ocupou a primeira posição. Para a terceira, teríamos quatro possibilidades de algarismos distintos, visto que dois deles já estariam colocados na primeira e na segunda posição. Assim, tem-se algebricamente isso representado por $n - 2$, em que *n* indica a quantidade total de algarismos e $- 2$ representa os algarismos que já ocuparam a primeira e a segunda posição, respectivamente.

Para o segundo caso, a professora optou pelo cálculo de um arranjo simples, pois não havia repetição de elementos de seis algarismos tomados três a três. Portanto, teria $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$, em que *n* indica a quantidade total de algarismos disponíveis e *p* representa a quantidade de algarismos que seriam utilizados na composição dos números. Então, $A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$. Em ambos os casos, verificar-se-ia a existência de 120 possíveis números de três algarismos distintos formados com os seis algarismos dados.

O segundo problema – *"Seja o conjunto {1, 2, 3, 4}, determine quantos subconjuntos de 3 elementos existem, utilizando os elementos desse conjunto"* – envolve a noção de conjunto e subconjuntos que nos remete à ideia de agrupamento não ordenado. Desse modo, quanto ao modelo combinatório implícito ao enunciando, caracteriza-se como um problema de combinação, pois envolve uma seleção não ordenada dos algarismos para a composição dos subconjuntos. A professora regente apresentou a seguinte resolução para o problema:

Figura 45 – Resolução proposta pela professora, problema 2, aula 2, 18/8/17


2) Seja o conjunto {1, 2, 3, 4}, determine quantos subcon-
juntos de 3 elementos existem, utilizando os elementos
desse conjunto.
{1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4} => 4 subconjuntos.
A ordem dos elementos no conjunto não importa, pois
{1,2,3} = {3,2,1}. Combinação.
* Os alunos deverão identificar o tipo de agrupamento

Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2017.

Inicialmente, chamou-nos a atenção para a solução da professora a anotação feita ao final da resolução: “Os alunos deverão identificar o tipo de agrupamento”. Ela explicou-nos que o licenciando deveria identificar o modelo combinatório implícito ao problema. Esclareceu que a ausência do termo “distinto” no enunciado indicava que o problema não era igual ao anterior. Analisando o enunciado e a resposta dada, percebemos (professora e pesquisadora) também que, à primeira vista, esse problema parecia semelhante ao primeiro e poderia provocar erros nos estudantes, se não conseguissem identificar as peculiaridades de cada um.

No entanto, além da ausência do termo distinto, o resolvedor deveria compreender que, quando trabalhamos com conjuntos, tratamos especificamente de problemas de combinação. Neles, não importa a ordem com que os elementos são apresentados nos subconjuntos, uma vez que não gera outras possibilidades. Desse modo, leva-se em consideração a natureza dos elementos, pois, conforme mostrado pela professora, {1, 2, 3} = {3, 2, 1}. Isso quer dizer que os subconjuntos se diferenciam em razão do tipo de elementos que os compõem (algarismos distintos), visto que diferentes elementos (algarismos) formam distintos subconjuntos: {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4} e {2, 3, 4}. Tais argumentos justificam e explicam a solução apresentada pela professora.

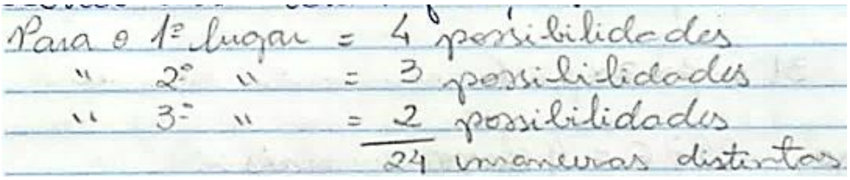
Outro ponto a ser observado é que, dada a solicitação do problema *“determine quantos subconjuntos”*, a professora listou quais eram os subconjuntos possíveis para depois contá-los e indicar o número 4 como resposta. Julgamos importante salientar que, quando o estudante compreende o modelo combinatório implícito, identifica o modo de resolução e certifica-se de que a fórmula foi compreendida e vale à pena ser utilizada. Em casos como esse do problema 2, ela pode ajudar a encontrar a resposta de modo rápido e sem a necessidade de listar todas as possibilidades. Em contexto distinto, é praticamente impossível indicar a quantidade sem listá-las antecipadamente. Diante do exposto, entendemos que os problemas 1 e 2 da segunda aula seriam fontes ricas de imagens conceituais dos agrupamentos simples de combinatória.

A aula 4 aconteceu em 25/8/17. Nela trabalhamos o seguinte problema: “*Quatro amigos vão disputar uma competição de corrida. Serão premiados o 1.º, 2.º e 3.º lugares. (a) De quantas maneiras distintas poderá ocorrer essa classificação?; (b) Quantos grupos distintos poderá ocorrer na formação do pódio (independentemente da classificação?; O que diferencia a situação a da b?”* Ele foi selecionado pela professora e analisado e discutido por nós (pesquisadoras e professora) em momentos de planejamento que antecederam a aula 4. Na ocasião, já havíamos criado o hábito de resolver as tarefas a serem propostas aos alunos

(STEIN et al., 2008), para prever dúvidas e possíveis questionamentos (POLYA, 1973/1945; STEIN et al., 2008). Na ocasião, Letícia, a professora regente, informou-nos que havia pensado nas seguintes possibilidades de respostas:

Para a questão “a” – *De quantas maneiras distintas poderá ocorrer essa classificação?* –, a professora apresentou a seguinte ideia:

Figura 46 – Resolução proposta pela professora, problema 1, questão “a”, aula 4, 25/8/17

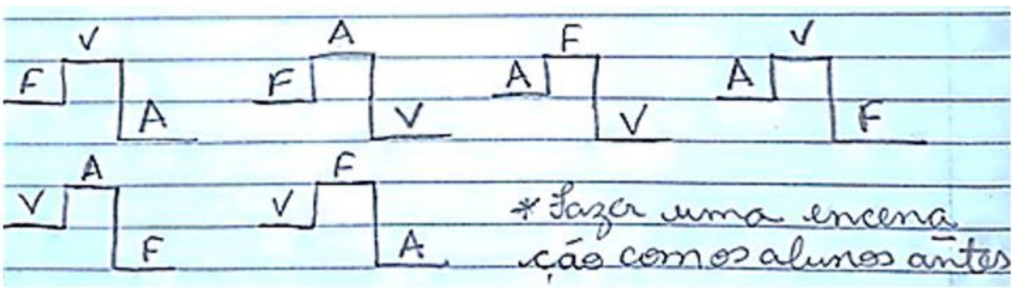


Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2017.

Explicou que o primeiro lugar poderia ser ocupado por qualquer um dos competidores. Com isso, ela quis dizer que teria quatro possibilidades. Com um competidor já posicionado, restariam três possibilidades para o segundo lugar e, consequentemente, duas possibilidades para o terceiro. Pelo princípio multiplicativo, teria 4 x 3 x 2 = 24 maneiras distintas de ocupar o pódio. Já, ao resolver a questão “b” – *Quantos grupos distintos poderá ocorrer na formação do pódio independente da classificação?* –, a professora criou uma situação hipotética envolvendo os alunos:

> *Suponhamos que sejam os amigos Felipe (F), Vini (V), Alice (A) e Isis (I). O pódio poderá ser formado, por exemplo, por F, V e A das seguintes maneiras:*

Figura 47 – Resolução proposta pela professora, problema 1, questão “b”, aula 4, 25/8/17



Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2017.

A professora desenhou o pódio diferenciando pessoas e posições que cada uma delas ocupa. Sugeriu que os agrupamentos formados eram casos de arranjos simples, cuja mudança na ordem da posição ocupada pelos amigos poderia ser dada por 3! = 3 x 2 x 1 = 6. Concluiu que 24: 6 = 4 grupos distintos. No entanto, essa resposta esperada pela professora estava equivocada, pois não considerou a distinção das posições que cada um ocupou no pódio. Além disso, não se pensou no quarto amigo que ficou fora desse pódio, mas estaria em outros. E, assim, teria um número maior de possibilidades de organização do pódio. Ou seja, amigos diferentes ocupariam lugares distintos e um dos amigos ficaria de fora, pois não teria como ser posicionado no pódio. Essa situação ia se alternando até que todas as possibilidades de posicionamento fossem esgotadas. Portanto, tínhamos, então, um problema de alocação ordenada de objetos distintos (alunos) em casas distintas (posição no pódio), cuja relação era injetiva correspondendo a um para um (um lugar para cada pessoa).

Ao propor a alternativa "c" – *O que diferencia a situação "a" da "b"*? –, Letícia disse esperar que os licenciandos percebessem a questão da natureza e da ordem dos elementos nas sequências formadas. Após a ampla discussão com a professora em seu planejamento de aula, sugerimos a inserção da questão – *"Agora, os corredores serão organizados em equipes. Quantas equipes com três deles é possível formar?"* – em contraponto à questão b, pois um pódio requer classificação ordenada e não é possível trabalhar na lógica de pódio sem classificação. Ela concordou e corroborou nossa ideia de chamar a atenção para o enunciado do problema, as palavras que foram usadas e a maneira como o professor e/ou o futuro professor elabora questões. Então, decidimos deixar os estudantes resolverem individualmente as três questões anteriores, pois já haviam sido passadas para eles, e, depois, incluir mais essa no decorrer da correção do problema durante a aula.

Nossa intenção era estimular os licenciandos no momento da discussão coletiva envolvendo a turma inteira, para que compreendessem de qual objeto o problema tratava (pódio) e que o objeto por si só já possuía um modelo combinatório implícito de ordenação. Decidimos incluir outros questionamentos para que os licenciandos percebessem que os agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação podem ser trabalhados de modo integrado e com suporte em um mesmo problema, desde que o enunciado e as questões direcionassem esse movimento. Desse modo, julgamos relevante indagar[163] os licenciandos

---

[163] Há uma série de questões que fizemos para estimular que imagens conceituais fossem evocadas. Entre as usadas em sala e para além daquelas mencionadas no corpo desse texto, sugerimos: *Quantas pessoas vão disputar a corrida? (identificar o número de elementos do conjunto); Todos serão classificados? (identificar que nem todos os elementos serão selecionados, mas será feita a escolha de alguns elementos conforme a regra estabelecida); Quantos podem assumir o 1.º lugar? (identificar a relação do número de elementos por pessoas em cada lugar do pódio, relação injetiva, diferentes posições ocupadas por pessoas diferentes, um para um); Quantos podem assumir o 2.º lugar?; Quantos podem assumir o 3.º lugar?; Que características você percebe entre o número de amigos e o número de classificados? (a quantidade de classificados é menor que a quantidade de elementos do conjunto); Quando você troca de posição das pessoas no pódio, altera as possibilidades? (identificar que o agrupamento é ordenado); E se o pódio tivesse 4 lugares? (ideia de*

sobre estas questões: *"A ideia de organizar pódio é a mesma de organizar equipes? O que tem de diferente/semelhante nelas? O pensamento envolvido nessa questão é o mesmo da letra a?"* Isso porque pódio requer uma sequência ordenada, e equipe não, o que os ajudaria a identificar situações em que ordem e natureza precisam ser reconhecidas, para que o processo de resolução seja coerente.

Na ocasião, ainda não havíamos falado de fórmula, pois estávamos trabalhando com os agrupamentos simples. Considerávamos que o aluno não precisaria ter o conceito materializado em fórmula, mas suscitar, no diálogo entre professor e estudantes, as características do conceito, seus atributos principais ante a verbalização da imagem evocada e verbalizada. No dia da aula 4, uma das pesquisadoras assumiu a regência de classe, pois possuía mais experiência com tarefas de resolução de problemas.

Os problemas trabalhados nas aulas 7 e 9 envolviam estrutura semelhante à daquele desenvolvido na aula 4 no que se refere à integração dos agrupamentos simples de combinatória em uma mesma tarefa.

Quadro 11 – Problemas trabalhados nas aulas 7 e 9

Problema da aula 7	**Problema da aula 9 (avaliação)**
7. Classifique os agrupamentos sugeridos a seguir como arranjo ou combinação (PAIVA, 2009, p. 167): a) Escolher seis dos sessenta números para uma aposta na Mega-Sena. b) As possíveis classificações dos quatro primeiros colocados no Campeonato Brasileiro de Futebol. c) Eleger uma comissão de dois alunos para representantes de sala, em que ambos terão o mesmo cargo. d) Formar um número de telefone com oito números distintos. e) Eleger uma comissão de dois alunos em que um será o porta-voz da classe e o outro será o secretário. f) Escolher três vértices de um cubo para formarmos triângulos.	1. Classifique as sentenças a seguir como arranjo, permutação ou combinação. Justifique sua classificação. a) Produzir uma mistura com duas cores primárias distintas, escolhidas entre o vermelho, azul e amarelo. b) A disputa de uma eleição por três candidatos em que há 1.º, 2.º e 3.º colocados. c) Escolher, entre os jogadores A, B, C, D e E, três para receber a medalha de 1.º, 2.º ou 3.º melhor jogador. d) Identificar o número de anagramas que uma pessoa consegue formar com a palavra BANANA. e) Formar números naturais de cinco algarismos distintos ou não escolhidos entre os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. f) Escolher maneiras de saborear duas bolas de sorvete entre sete sabores disponíveis na sorveteria. g) Usando suas palavras, conceitue arranjo, permutação e combinação.

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras.

permutação: a sequência é formada pela mesma quantidade de elementos do conjunto dado. Todos os elementos de natureza distinta (amigos diferentes) ocupam cada uma das posições distintas do pódio (diferente do problema original, agora tem um lugar no pódio para cada um dos amigos)).

O problema 7 trabalhado na sétima aula foi retirado de Paiva (2009), pois o consideramos potente para que imagens conceituais fossem evocadas e colocadas em conflito simultaneamente. Ele envolvia os agrupamentos simples de arranjo e combinação. Embora não solicitado pelo autor da questão, pedimos aos alunos que justificassem suas respostas, para vermos quais imagens conceituais eram evocadas por eles. De modo semelhante, elaboramos a questão 1 da avaliação aplicada na aula 9. Optamos pela inclusão de uma tarefa parecida, pois, além de sermos coerentes com as atividades desenvolvidas em sala de aula, ela nos permitiria ver o movimento de reconstrução (ou não) de imagens conceituais praticamente um mês após o início das aulas, já ao final do número de aulas dedicadas para a combinatória.

A questão 1 da aula 9 solicitava, ainda, que os licenciandos conceituassem arranjo, permutação e combinação. Foi formulada para confrontarmos as explicações deles à questão *"Como você definiria arranjo, combinação e permutação?"*, que compunha o primeiro bloco de tarefas específicas e à qual responderam os estudantes no início da disciplina, em 11/8/17. Portanto, serviria para analisarmos e compararmos a imagem inicial e final dos licenciandos e a contribuição da disciplina para alguma aprendizagem. O objetivo era trabalhar com todos os agrupamentos estudados, a fim de identificarmos se os alunos os compreendiam em cada tipo de problema e sabiam resolver e justificar sua escolha.

Assim sendo, comentamos a tarefa 1 da aula 9, visto que foi elaborada por nós e possuía finalidades específicas conforme assinalamos anteriormente. Quando elaboramos a questão, consideramos os agrupamentos simples e com elementos repetidos, porque todos foram estudados na disciplina. Ademais, procuramos usar problemas com estrutura semelhante à dos anteriores. As afirmativas assinaladas em "b" (A disputa de uma eleição por três candidatos em que há o 1.º, 2.º e 3.º colocados.) e "c" (Escolher, entre os jogadores A, B, C, D e E, três para receber medalha do 1.º, 2.º ou 3.º melhor jogador.) foram sequenciadas para que os alunos percebessem que eram diferentes em relação ao modelo combinatório implícito e indicassem atributos relevantes de cada agrupamento nas justificativas tecidas por eles.

Essas questões poderiam provocar equívocos, pois os alunos que não houvessem compreendido adequadamente a estrutura conceitual, ou não tivessem lido e interpretado as afirmativas com cuidado, poderiam entender que elas envolviam o mesmo modelo combinatório implícito. Tecemos tal afirmativa porque testamos essa questão antecipadamente e verificamos que um dos resolvedores "bateu o olho" em "b" e, sem ao menos ler a sentença com cuidado, afirmou, de imediato, que se tratava de um arranjo. Logo em seguida, quando questionamos *"O que te levou a pensar em um arranjo?"*, ele releu a questão e destacou que não havia considerado que todos os candidatos estariam classificados. Ou seja, todos os elementos do conjunto dado seriam necessários à sua resolução.

Quando observamos as sentenças com cuidado, percebemos que elas não deixam de representar problemas típicos de combinatória, como é o caso da formação de anagramas. Incluímos esse tipo de tarefa em virtude de serem comuns em livros didáticos e em material instrucional de uso contínuo por professores e alunos. Acreditamos que, se os licenciandos compreendessem os conceitos subjacentes, eles teriam a possibilidade de ensiná-los de modo mais adequado e coerente. Em linhas gerais, as respostas esperadas seriam, respectivamente, combinação simples, permutação simples, arranjo simples, permutação com repetição, arranjo com repetição e combinação com repetição. No entanto, nesta tese, consideramos apenas os casos de combinatória simples.

Em se tratando de justificativas pessoais dos estudantes, esperávamos encontrar imagens conceituais que evidenciassem especialmente atributos relacionados à definição. Por fim, ressaltamos que, como a maioria das atividades foi desenvolvida individualmente e a discussão sobre os resultados tratada de modo coletivo, seguimos a mesma lógica na avaliação. Ou seja, aplicamos uma avaliação individual com discussão coletiva dos resultados no momento da devolutiva aos estudantes, posteriormente à correção feita pela professora.

Após esse panorama, passamos a analisar os casos individuais. Para isso, destinamos uma seção para cada um dos três licenciandos. As seções individuais estão organizadas em três subseções: na primeira, apresentamos um caminhar do estudante até a licenciatura em Matemática; esse caminhar foi escrito pelo próprio aluno e apontou entrelaçamentos entre sua história de vida e seu desenvolvimento profissional; em seguida, retomamos da seção 5.1 uma síntese das imagens iniciais de cada licenciando, pois elas serão a base de análise das possíveis reconstruções discutidas mais adiante.

5.3.3 Alex

Alex por Alex... seu caminhar até a licenciatura em matemática

Meu nome é Alex. Tenho 27 anos, sou branco, de baixa estatura (1,55 m) e peso em torno de 50 kg. Atualmente, moro com meus pais (mãe e padrasto) e um irmão mais novo, na cidade de Itapemirim/ES. O interesse profissional pela docência em matemática surgiu tardiamente, após o Ensino Médio. Durante o ensino fundamental minha matéria favorita era geografia, da qual sonhava em ser professor um dia. Ao ingressar no ensino médio, em outra escola, percebi que minha base de conhecimentos matemáticos era frágil e aquém da dos meus colegas. Isso me levou a encarar a matemática com mais seriedade, procurando a partir de então estudar com mais intensidade, principalmente em casa, por meio da leitura de livros didáticos.

Até esse momento a matemática era apenas mais uma disciplina escolar, que estudava o suficiente para ser aprovado, não apresentando nenhum encanto especial.

Tendo concluído o ensino médio em 2008, ingressei no curso técnico em eletromecânica no IFES campus Cachoeiro de Itapemirim, cidade vizinha, em 2009. Para chegar ao IFES, a prefeitura de Itapemirim, já desde essa época, fornecia transporte escolar gratuito. No terceiro ano do ensino médio criei um desejo grande de um dia estudar em um dos dois grandes institutos militares brasileiros: o ITA, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, e IME, Instituto Militar de Engenharia. Essa motivação me fez entrar no referido curso técnico, tendo assim os primeiros contatos com a área de ciência e tecnologia. Ainda tendo em vista esse propósito, por meio do ENEM, conquistei uma bolsa de estudos via ProUni para o curso de Engenharia Elétrica na então Univix – Faculdade Brasileira, em Vitória/ES, em 2010. Com isso, interrompi o curso técnico e me mudei para Vitória. Lá morei em uma república de estudantes entre o início de 2010 e o início de 2014. O objetivo, então, era encarar esse curso de Engenharia como um preparatório para um difícil processo seletivo do ITA e do IME, e não como futuro profissional.

Este período foi crucial para meu posterior ingresso na Licenciatura em Matemática. Nos dois primeiros anos do curso de engenharia elétrica obtive excelentes resultados, principalmente nas disciplinas de matemática e de física. Especialmente, o Cálculo foi fundamental para o surgimento de um novo e belo olhar sobre a matemática. Desse momento em diante descobri um interesse ainda maior pela matemática e áreas afins. Porém, a partir do terceiro ano de engenharia elétrica, meu desempenho começou a cair. Esse período foi marcado pelo momento em que fui aprovado em concurso público e comecei a trabalhar como auxiliar administrativo, exercendo a função de atendente em uma Unidade de Saúde em um bairro carente da cidade de Serra/ES, em 30h semanais. Trabalhava no turno vespertino. Esse período também foi marcado pelo fim das disciplinas de matemática e predomínio das disciplinas técnicas no curso de engenharia. Neste cenário, devido às reprovações, acabei perdendo a bolsa de estudos. Na impossibilidade de pagar, decidi abandonar o curso e então retornar para casa dos meus pais em Itapemirim.

Uma série de fatores talvez justifique a mudança de rumos no desempenho no curso de engenharia. O primeiro deles pode ter sido a perda de motivação de um dia ingressar no ITA ou IME, por não haver preparo adequado para tal. O segundo pode ter sido a perda da motivação pelo próprio curso de engenharia, não me vendo como parte dessa área de atuação. O terceiro foi ter começado a trabalhar, o que limitou um pouco o tempo livre e se tornou desgastante apesar das 30 horas semanais apenas. E por fim, permeando tudo isso, o novo interesse pela matemática, muito mais uma constatação que uma causa da saída da engenharia. Ou seja, diante de tudo isso, percebi que talvez meu real interesse e aptidão estivesse na área da matemática, especialmente na docência.

De volta à Itapemirim, retomei o curso técnico em eletromecânica, concluindo os dois semestres restantes em 2014. A partir de 2015, por meio do ENEM e do SISU, ingressei na licenciatura em matemática também no IFES campus Cachoeiro. A opção pela instituição se deve a já conhecê-la por conta do curso técnico, e por ser uma instituição federal, pública e gratuita. Além de presumir que a qualidade seria melhor que em uma instituição particular, por ter 4 anos de curso contra 3 em outra instituição. Apesar de não ter solicitado aproveitamento de disciplinas já cursadas na engenharia, a experiência lá adquirida foi importante, pois já havia tido contato com alguns dos conteúdos da primeira metade da licenciatura. Porém, na licenciatura, sob outro ponto de vista e com outros objetivos, o estudo tomou outros contornos. Hoje efetivamente entendo que esta é minha área profissional, na qual me sinto à vontade e tenho prazer em trabalhar. Quanto ao período da engenharia, não o julgo como tempo perdido, uma vez

> *que toda e qualquer experiência lá adquirida não haveria sido adquirida se lá eu não estivesse. Para o futuro, almejo continuar estudando, seguindo para um mestrado, doutorado e o que mais houver para aprender dentro da Educação Matemática. Sou grato aos meus colegas e professores do curso de licenciatura, sem os quais jamais teria conseguido concluir.*

Síntese das imagens iniciais de Alex sobre os agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação: uma retomada da seção 5.2

As afirmações de Alex ao longo dos instrumentos aplicados foram agrupadas de acordo com o que consideramos ser resultado de suas imagens iniciais dos agrupamentos simples de combinatória. Na tabela abaixo, sintetizamos as imagens rememoradas por Alex, quando solicitamos que conceituasse os agrupamentos no primeiro dia de aula (11/8/17) da disciplina de Análise Combinatória e Probabilidade.

Tabela 17 – Imagens iniciais de Alex sobre os agrupamentos simples de combinatória

AGRUPAMENTOS	***IMAGENS INICIAIS***
Arranjo	*Uma combinação de objetos em que <u>a ordem em que eles aparecem é relevante</u>.*
Permutação	*<u>Trocar de posições entre elementos dispostos numa ordem</u>.*
Combinação	*<u>A ordem dos elementos é irrelevante</u>.*

Fonte: Elaborada pelas pesquisadoras, 2017.

Ao analisarmos as imagens iniciais de Alex, vimos que:

- ✓ evocou imagens relacionadas à ideia de arranjo como um agrupamento ordenado e os argumentos utilizados por ele mostram uma imagem coerente com a definição do conceito de arranjo simples;
- ✓ o termo combinação presente em sua resposta não se referia à combinação em si, mas à ideia de um tipo de agrupamento combinatório;
- ✓ em sua resposta, há uma referência a um atributo matemático formal de arranjo que diz respeito à ordem em que os elementos aparecem em uma sequência;
- ✓ a resposta “trocar de posição” mostra que ele compreendeu a permutação como um agrupamento ordenado no qual a troca de posição dos elementos dispostos em uma sequência se refere à ordem em que eles aparecem para gerar novas e outras

possibilidades de sequências; nessa lógica, seu argumento apontou uma imagem coerente com a definição do conceito de permutação simples;

- ✓ para falar de permutação, Alex, assim como fez em arranjo, focalizou a ideia de agrupamento ordenado envolvendo a troca de posição dos elementos em uma sequência;
- ✓ ao tratar da combinação, evocou uma imagem de agrupamento não ordenado, quando destacou que a "a ordem dos elementos é irrelevante"; desse modo, pareceu considerar que a ordem dos elementos não alterava os subconjuntos formados e, portanto, sua imagem inicial se mostrava coerente com a literatura matemática.

Desse modo, as imagens iniciais de Alex indicaram que, quando o nome conceitual foi visto por ele, sua memória foi estimulada a emitir uma resposta (VINNER, 2002; 2011). Portanto, evocou imagens cujas palavras se associavam ao conceito, mas não o definiam com precisão. Por outro lado, Alex evidenciou o atributo (HERSHKOWITZ, 1994) "agrupamentos ordenados" e "não ordenados", que são características relevantes a ser consideradas para a identificação do modelo combinatório implícito subjacente aos problemas de combinatória.

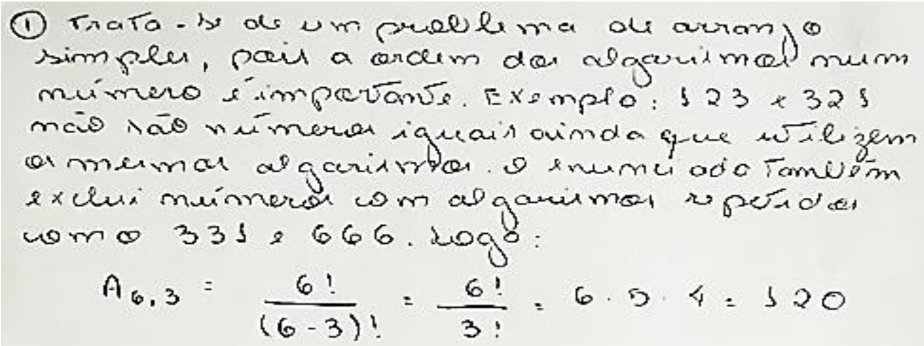
Reconstrução das imagens iniciais de Alex sobre os agrupamentos simples de combinatória

Para analisarmos as tarefas de Alex trabalhadas ao longo da disciplina e identificarmos se houve alguma reconstrução das imagens iniciais, vamos apoiar-nos nas seguintes categorias:

- ➢ categoria de análise quanto ao processo de movimentação das imagens: *reconstrução por inclusão/exclusão positiva/negativa de algum atributo em complementação ou em substituição à imagem conceitual anterior*;
- ➢ categoria de análise quanto aos cenários nos quais o processo de reconstrução ocorreu*: imagem conceitual persistente, inapropriada sem melhoria, inadequada com melhoria, fragmentada e flexível*.

Ao responder ao problema 1 – *"Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?"* da segunda aula em 12/8/17 –, Alex apresentou-nos a solução descrita na figura 48.

Figura 48 – Resolução de Alex – problema 1, aula 1, 12/8/17



① Trata-se de um problema de arranjo simples, pois a ordem dos algarismos num número é importante. Exemplo: 123 e 321 não são números iguais ainda que utilizem os mesmos algarismos. O enunciado também exclui números com algarismos repetidos como 331 e 666. Logo:

$$A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

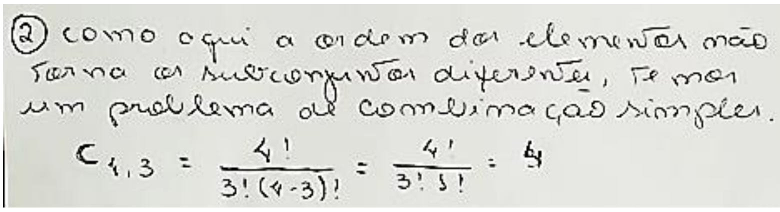
Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2017.

Alex nomeou o agrupamento indicado pelo modelo combinatório implícito subjacente ao problema (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996). Isso mostra que ele já estava fazendo algumas conexões com as ideias combinatórias quanto ao tipo de problema proposto. Reafirmou das respostas anteriores o atributo (HERSHKOWITZ, 1994) ordem, ao assinalar que “a ordem dos algarismos num número é importante”. A referência à ordem evidencia que essa parte do conceito tem se mantido fixa nas imagens de Alex. Desenhamos essa possibilidade quando explicamos as categorias de análise para esta seção 5.2.

Além disso, ele exemplificou com os algarismos 1, 2 e 3 porque o problema dado seria um arranjo simples. Justificou seu entendimento com o argumento “não são números iguais ainda que utilizem os mesmos algarismos” para reforçar sua ideia. Assim, chamou a atenção para que se compreendesse o enunciado do problema dado, ao dizer que “o enunciado também exclui números com algarismos repetidos”. Desse modo, ele resolveu o problema aplicando a fórmula de arranjo simples. Consideramos, com base nos argumentos, que Alex fez todo o processo mostrando uma compreensão relacional (SKEMP, 1976) do agrupamento em questão.

Para o problema 2, “Seja o conjunto {1, 2, 3, 4}, determine quantos subconjuntos de 3 elementos existem, utilizando os elementos desse conjunto”, Alex sugeriu a seguinte resolução:

Figura 49 – Resolução de Alex – problema 2, aula 12/8/17



② Como aqui a ordem dos elementos não torna os subconjuntos diferentes, temos um problema de combinação simples.

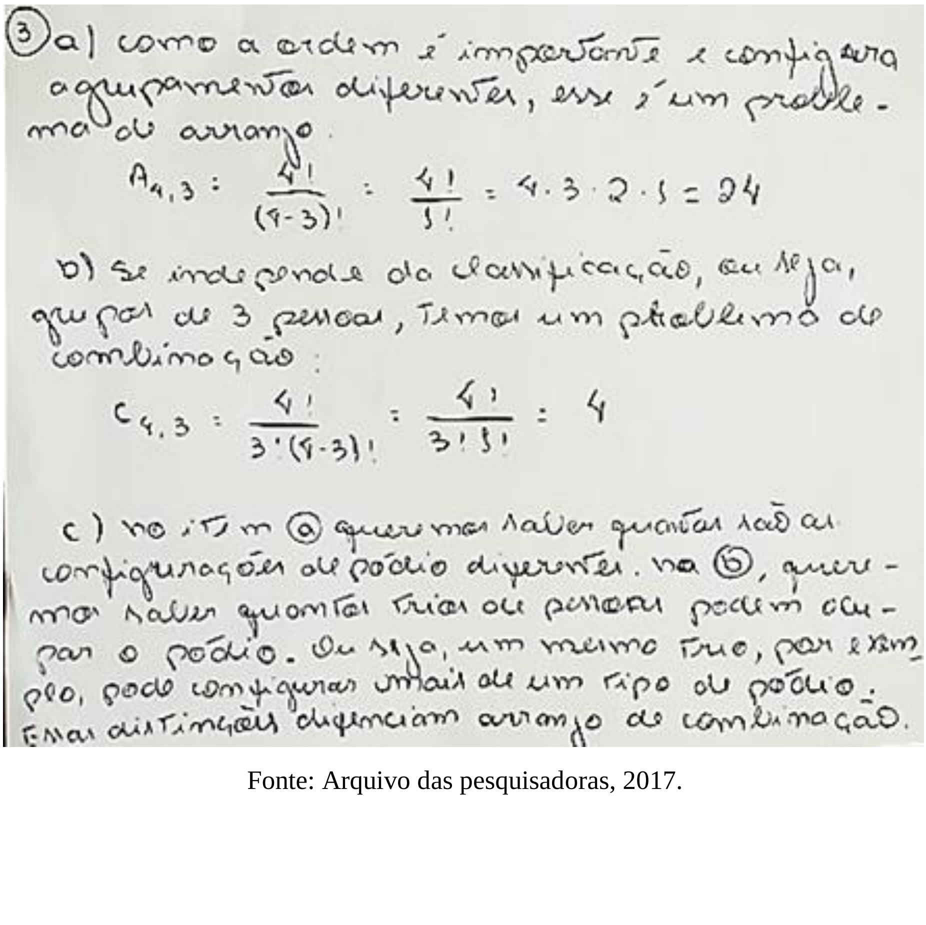
$$C_{4,3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$$

Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2017.

Na solução acima, Alex usou a mesma lógica do problema anterior e enfatizou o atributo ordem de modo distinto, ao afirmar “aqui a ordem não forma os subconjuntos diferentes”. Esse modo de compreender o problema aponta que Alex evocou, mais uma vez, a questão da ordem como preponderante, para definir e identificar o modelo combinatório subjacente ao problema. Além disso, Alex lançou mão da ideia de conjuntos, ao evocar a formação de subconjuntos. Conforme explicamos anteriormente, casos de combinação incidem sobre conjuntos, visto que a ordem é irrelevante para determinar os subconjuntos. Já em arranjos e permutações, focaliza-se em sequências, nas quais a ordem é preponderante (HAZZAN, 1993). Assim como na resolução do problema 1, Alex manteve o atributo ordem e incluiu a noção de conjunto em seus argumentos, o que se mostra coerente com a literatura matemática e reforça as ideias de Hershkowitz (1994), segundo a qual, apreendemos conceitos, quando vamos agrupando atributos relevantes a eles.

Durante o processo de resolução do problema 1, proposto na aula 4 em 25/8/17 – “Quatro amigos vão disputar uma competição de corrida. Serão premiados o 1.º, 2.º e 3.º lugares (a) De quantas maneiras distintas poderá ocorrer essa classificação? (b) Quantos grupos distintos poderá ocorrer na formação do pódio? (independentemente da classificação) (c) o que diferencia a situação a da b?” –, Alex assim se posicionou:

Figura 50 – Resolução de Alex – problema 1, aula 4, 25/8/17



Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2017.

À primeira vista, a resolução de Alex pareceu correta e muito próxima daquela proposta pela professora Letícia. Ao responder à alternativa “a”, evocou novamente o atributo ordem e a ideia de que ele configura agrupamentos distintos. Desse modo, identificou que o modelo combinatório implícito se referia a um arranjo simples. Ao responder à questão “b”, Alex se valeu da informação contida nos parênteses e iniciou seu argumento destacando que, se era independente da classificação, o modelo combinatório implícito indicaria uma combinação. No entanto, o estudante não havia percebido a ideia de grupos distintos contida no enunciado de “b” e não considerou que um pódio requer uma classificação segundo sua própria natureza. Ao responder à alternativa “c”, Alex também não associou que a configuração do pódio seria a mesma coisa que representar por diferentes trios de amigos. No entanto, no fim de seu argumento, ele destacou essa percepção de mesma ideia.

Todos os argumentos de Alex levam a crer que ambas as questões “a” e “b” envolviam o mesmo modelo combinatório. Portanto, solicitava o mesmo tipo de cálculo mediante uma linguagem diferente evidenciada nas distintas questões apresentadas. Diante da resposta desse e de outros estudantes, promovemos uma discussão matemática coletiva em sala de aula, para fins de entendimento do enunciado do problema dado. Interessava-nos saber o modo pelo qual o problema havia sido resolvido e compreendido pelo estudante. Então, na discussão coletiva que sucedeu ao processo de resolução, uma das pesquisadoras indagou:

> ***Pesquisadora:*** *Conhecem um pódio?*
> *[...]*
> ***Alex:*** *Geralmente tem três lugares. Um mais alto, indicando a posição do primeiro colocado, um intermediário, que seria o lugar do segundo e outro mais baixo para o terceiro colocado.*
> (Para compreensão adequada da alternativa “b”, a pesquisadora pergunta:)
> ***Pesquisadora:*** *Existe uma forma de organizar pódio sem ser classificando pessoas?*
> *[...]*
> ***Alex:*** *Não. Pessoas diferentes, devem ocupar lugares distintos. Acho que seria isso!*
> *[...]*
> ***Pesquisadora:*** *Que características você percebe entre o número de amigos e o número de classificados?*
> ***Alex:*** *O número de amigos é maior que a quantidade de lugares do pódio.*
> *[...]*
> ***Alex:*** *É. Tem que entender o sentido de quantas... quais...*
> *[...]*
> ***Pesquisadora:*** *E se fossem equipes?*
> *[...]*
> ***Alex:*** *Geralmente, não temos um critério de organização de equipe!*
> ***Pesquisadora:*** *[...] é o mesmo pensamento da letra “a”?*
> ***Alex:*** *Nesse caso não. O problema que você passou envolve arranjo. Com essa discussão vi que é a mesma ideia na “a” e na “b”. Esse de equipe que você perguntou agora é combinação. Não requer classificação como o pódio.*
> *[...]*
> ***Alex:*** *Conseguimos trabalhar todas as ideias dos agrupamentos simples em um único problema mudando apenas o tipo de questão. Perfeito! Ainda não tinha pensado assim.*

Durante a discussão, Alex percebeu que as questões continham o mesmo modelo combinatório. Quanto à configuração de um pódio, vimos que ele nos explicou de modo similar ao desenhado previamente pela professora, conforme mostramos anteriormente. Afirmou que cada posição tem uma “altura” em que deve ser posicionado cada corredor. Ao ser questionado pela pesquisadora sobre a existência de alguma possibilidade de organização de pódio sem classificação, Alex respondeu: “pessoas diferentes, devem ocupar lugares distintos”.

Desse modo, pareceu reconhecer que havia uma relação injetiva de um para um em que diferentes posições são ocupadas por pessoas distintas. Além disso, Alex mostrou ter identificado que a quantidade de classificados seria menor que a quantidade de elementos do conjunto de amigos. Concluiu afirmando que o sentido de quantas e quais deve ser compreendido e de que é possível, a partir de um mesmo problema, trabalhar os agrupamentos simples de modo integrado e relacionado.

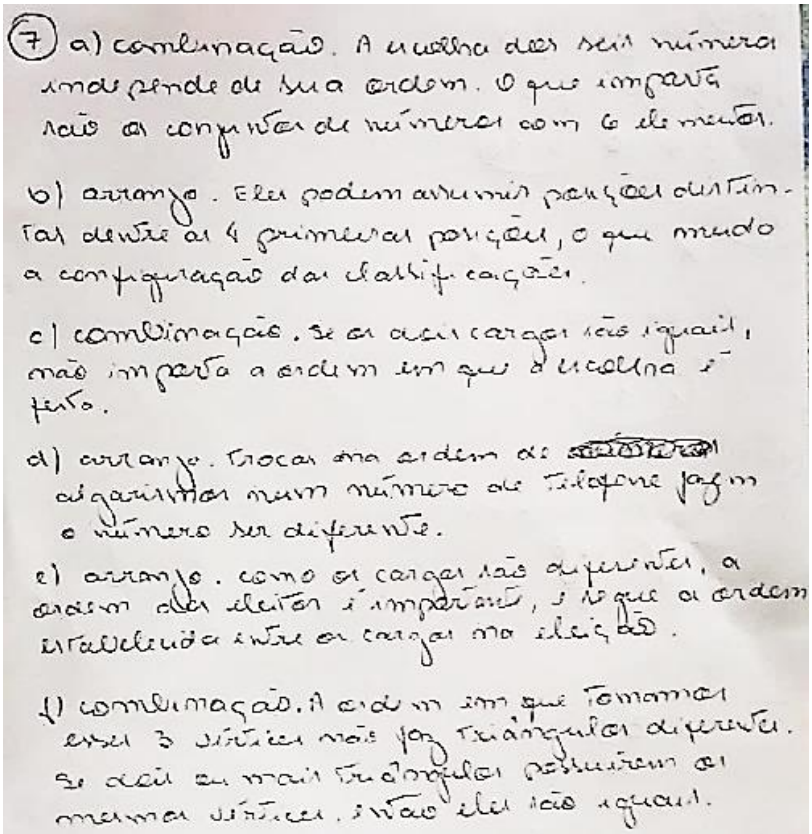
Queremos evidenciar que, se a discussão matemática em sala de aula envolvendo a turma inteira não tivesse acontecido, os equívocos conceituais provocados pela não compreensão do enunciado do problema persistiria. Caso não tivéssemos provocado os estudantes com alguns questionamentos nessa discussão eles não teriam entrado em conflito cognitivo acerca do que haviam entendido do enunciado e da imagem conceitual que estavam evocando (TALL; VINNER, 1981) e assim essas imagens equivocadas poderiam se tornar imagens persistentes. Vimos, assim, que aconteceu um processo de reconstrução por meio de uma compreensão positiva do modelo combinatório implícito no problema.

Na aula 7 em 22/9/17, entre os problemas trabalhados, solicitamos que os estudantes identificassem as sentenças e explicassem os motivos de tê-las classificado em arranjo ou combinação. As afirmativas eram as seguintes:

a) Escolher seis dos sessenta números para uma aposta na Mega-Sena.
b) As possíveis classificações dos quatro primeiros colocados no Campeonato Brasileiro de Futebol.
c) Eleger uma comissão de dois alunos para representantes de sala, em que ambos terão o mesmo cargo.
d) Formar um número de telefone com oito números distintos.
e) Eleger uma comissão de dois alunos em que um será o porta-voz da classe e o outro será o secretário.
f) Escolher três vértices de um cubo para formarmos triângulos.

Na ocasião, Alex respondeu conforme detalhado na figura 51. Vejamos:

Figura 51 – Resolução de Alex – problema 7, aula 7, 22/9/17


7 a) combinação. A escolha dos seis números independe da sua ordem. O que importa são os conjuntos de números com 6 elementos.

b) arranjo. Eles podem assumir posições distintas dentre as 4 primeiras posições, o que muda a configuração das classificações.

c) combinação. Se os dois cargos são iguais, não importa a ordem em que a escolha é feita.

d) arranjo. Trocar na ordem os algarismos num número de telefone fazem o número ser diferente.

e) arranjo. Como os cargos são diferentes, a ordem dos eleitos é importante, já que a ordem estabelecida entre os cargos na eleição.

f) combinação. A ordem em que tomamos esses 3 vértices não faz triângulos diferentes. Se dois ou mais triângulos possuírem os mesmos vértices, então eles são iguais.

Os argumentos usados para justificar a identificação de combinação e arranjo incidiram especialmente sobre a imagem do atributo ordem. Em todas as afirmativas, a ideia de agrupamento ordenado e não ordenado estava subjacente. Ao identificar que as sentenças b, d, e indicavam a existência de um arranjo simples, a imagem forte e persistente foi aquela que associava posições distintas ocupadas por elementos (times, números e pessoas) também distintos. Assim, pareceu-nos que Alex havia compreendido que esse tipo de problema envolvia os atributos ordem e natureza que se referiam, respectivamente, à posição ocupada pelos diferentes elementos e às características específicas de cada um deles.

Quando Alex identificou as afirmativas que envolviam o modelo combinatório implícito de combinação (a, c, f), ressaltou que a ordem não interferia nos subconjuntos formados. Procurou mostrar que, em situações em que não há distinção entre as posições ocupadas por números da Mega-Sena, representantes de turma e vértices de triângulo, a ordem não importa, e sim a natureza de cada objeto. Ainda, ao justificar a afirmativa "f" como combinação, utilizou argumentos de combinatória e recorreu a uma definição geométrica "se dois ou mais triângulos possuírem os mesmos vértices, então eles são iguais", para confirmar sua ideia.

Mais uma vez, vimos a persistência de uma imagem fixa nos argumentos de Alex. Ele pareceu ter construído sua base combinatória nesse principal atributo. Por outro lado, constatamos um esforço de Alex em se posicionar ante as afirmativas e ainda se apropriar de uma definição geométrica para dar conta de uma afirmação combinatória. Isso pareceu evidenciar que Alex já estava estabelecendo relações entre os campos da matemática e não somente em relação à combinatória.

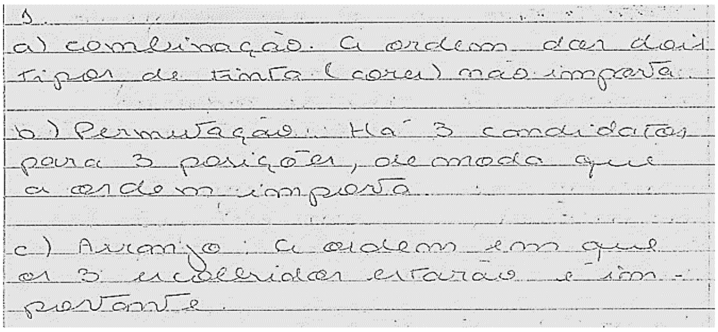
A questão 1 da avaliação resolvida por Alex na aula 9 em 20/10/17 envolvia as mesmas ideias conceituais da questão 7, da aula 7. No entanto, como ela requeria ideias conceituais de agrupamentos simples e com elementos repetidos, comentamos as alternativas “a”, “b” e “c” que tratavam dos agrupamentos sem elementos repetidos. Em seguida, comentamos as respostas de Alex à alternativa “g”. Ela solicitava que ele conceituasse os agrupamentos simples (arranjo, permutação e combinação) com as próprias palavras.

As afirmativas apresentadas em “a”, “b” e “c” eram as seguintes:

a) Produzir uma mistura com duas cores primárias distintas, escolhidas entre o vermelho, azul e amarelo.
b) A disputa de uma eleição por três candidatos em que há o 1.º, 2.º e 3.º colocados.
c) Escolher, entre os jogadores A, B, C, D e E, três para receber medalha do 1.º, 2.º e 3.º colocados.

Alex assim explicou sua opção por um tipo ou outro de agrupamento:

Figura 52 – Resolução de Alex – problema 1, aula 9, 20/10/17


1
a) combinação. a ordem dos dois tipos de tinta (cores) não importa.
b) Permutação. Há 3 candidatos para 3 posições, de modo que a ordem importa.
c) Arranjo: a ordem em que os 3 escolhidos estarão é importante

Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2017.

Mais uma vez, Alex reforçou o atributo ordem, ao indicar que o modelo combinatório implícito estava relacionado a um agrupamento ordenado ou não ordenado. Essa pareceu ser uma imagem conceitual que se associou, respectivamente, a arranjo, permutação e combinação e se manteve estável durante todo o processo. Por outro lado, quando analisamos as definições conceituais de Alex apresentadas anterior e posteriormente à disciplina, elas parecem ter sido reconstruídas por inclusão positiva de algum atributo em complementação à imagem inicial. Vejamos:

Tabela 18 – Imagens iniciais e finais de Alex sobre a combinatória simples

AGRUPAMENTOS	*IMAGENS INICIAIS (11/08/17)*	*IMAGENS FINAIS (20/10/17)*
Arranjo	*Uma combinação de objetos em que a ordem em que eles aparecem é relevante.*	*Disposição de elementos de modo que a ordem em que são postos é importante e diferencia uma opção da outra. Não há necessidade de usar todos os elementos do conjunto.*
Permutação	*Trocar de posições entre elementos dispostos numa ordem.*	*Dado um conjunto de elementos, usa-se todos os elementos e a ordem é importante.*
Combinação	*A ordem dos elementos é irrelevante.*	*Num conjunto de elementos, a ordem em que são tomados não importa e não precisa usar todos.*

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras, 2017.

Em relação ao arranjo, Alex deixou de vê-lo como um agrupamento que continha “uma combinação de objetos” e passou a compreendê-lo como aquele que envolvia a “disposição de elementos”. Isso mostrou implicitamente a ideia de sequência envolvendo elementos de um determinado conjunto. Outra característica incorporada por Alex se referiu à não necessidade de uso de todos os elementos do conjunto dado. O licenciando explicou-nos que seu argumento evidenciava que, entre todos os elementos de um conjunto dado, apenas alguns seriam tomados para o processo de resolução. Neste caso de arranjo, o atributo que designava a importância da ordenação dos elementos permaneceu fixo e foi conservado em ambas as definições pessoais de Alex.

Quanto à permutação, consideramos que a primeira imagem conceitual destacada na tabela anterior estava mais clara. Ao conversarmos com o estudante sobre suas respostas, informou-nos que deveria ter juntado as duas definições dadas por ele e escrito algo do tipo: “Envolve a troca ordenada das posições dos elementos dispostos em uma sequência”, a qual, a nosso ver, seria uma imagem conceitual mais coerente em comparação à definição matemática formal. Em relação ao atributo ordem, ele foi ressaltado por Alex nas imagens finais e no retorno dos dados, quando nos explicou a forma como estava compreendendo a permutação. Ao tratar da combinação, Alex manteve fixa a ideia de ordem, destacando que, nesse tipo de agrupamento, o atributo em questão é irrelevante. Além disso, incluiu a ideia de que não se usavam todos os elementos do conjunto inicial no processo de resolução de um problema que envolve esse modelo combinatório implícito de combinação.

De modo geral, vimos que algumas imagens permaneceram estáveis enquanto outras foram sendo modificadas ao longo do processo que não foi totalmente crescente em termos de incorporação de atributos relevantes que caracterizam cada conceito de combinatória simples. De fato, confirmamos que as imagens conceituais evocadas por Alex foram reconstruções pessoais (TALL; VINNER, 1981) subsidiadas principalmente pelo atributo ordem e pelo uso ou não de todos os elementos do conjunto dado. O atributo natureza não foi considerado nas definições de Alex. Portanto, podemos assim concluir:

Em termos processuais:

- da aula 1 (11/8/17), quando Alex definiu, pela primeira vez, os conceitos de combinatória simples, para a aula 4 (25/8/17), houve uma reconstrução por inclusão positiva de algum atributo em complementação à imagem inicial; o atributo ordem manteve-se fixo;
- da aula 4 para a 9, as imagens conceituais reconstruídas pareceram estáveis e o atributo ordem continuou mantido em evidência;
- da aula 1 para a 9, houve uma reconstrução por inclusão positiva de algum atributo relacionado à definição do conceito em complementação à imagem inicial.

Em termos de cenários nos quais o processo de reconstrução ocorreu:

- Imagem de conceito flexível que foi alterada para incluir ou acomodar novas maneiras de ver o conceito e, embora apropriada, ela não explica o conceito com precisão, mas mostra que ocorreu algum evento de aprendizagem.

5.3.4 Geane

Geane por Geane... seu caminhar até a licenciatura em matemática

Sou uma jovem de 21 anos criada em um bairro de baixa renda de Cachoeiro de Itapemirim/ES. Tenho cabelo crespo, sou negra e estatura média. Além disso, sou bem magrinha. No meu tempo livre gosto de assistir séries de ficção científica ou utopias e também, gosto muito de ficar sem fazer nada (risos). Gosto de ouvir hip hop ou rap. Minha experiência com a matemática sempre foi amistosa. Até o 8° ano do ensino fundamental, nunca tive dificuldades com essa disciplina. Porém, ao chegar no 9 ° ano, zerei uma prova de matemática cujo o conteúdo era equação do 2° grau. Isso nunca tinha me acontecido em nenhuma matéria. Fiquei bem assustada. Na época, o professor me propôs uma prova substitutiva. Então, tive

> *a iniciativa de estudar o conteúdo sozinha, pois não havia ninguém em meu meio social com escolaridade suficiente para me auxiliar.*
>
> *Eu tinha apenas um livro didático como material de estudo. Eu lembro que li o capítulo umas 5 vezes, e, a cada leitura eu ia entendendo uma pequena parte do conteúdo. No final das leituras eu ia fazendo os exercícios que eu conseguia, e, caso eu não conseguisse, voltava a leitura de novo. Diante disso, aprendi a ser autodidata em matemática. Daí em diante continuei tendo sucesso em matemática. No ensino médio tive algumas dificuldades na matéria, mas como eu tinha um método de primeiro aprender a operar a conta e depois se desse entender o algoritmo, eu não tive problemas no ensino médio com notas baixas ou zerar as provas. Saí do ensino médio com a intenção de ser professora de história, pois eu gostava muito dessa matéria.*
>
> *Com o resultado do ENEM vi que dava pra cursar odontologia ou matemática pelo SISU, pois concorri pela modalidade de cotas raciais independente da renda familiar. Mas, como eu não tinha nenhuma intenção em cursar odontologia. Então, troquei e coloquei como primeira opção o curso de matemática. Fui selecionada e comuniquei a minha mãe. Mas eu ainda esperava pela chamada do PROUNI para o curso de história. Porém, minha mãe me orientou a me matricular e tentar fazer o curso de matemática no IFES, pois seria uma área que tinha mais vagas no mercado, e consequentemente seria mais fácil de arrumar um emprego logo ao me formar (espero que ela esteja certa). Além disso, era a única instituição pública de ensino superior da minha cidade e eu não tinha interesse em sai dela. Confesso que tinha medo do curso, pois alguns cursos de matemática tinham em suas grades a disciplina de física. Mas ao ingressar, fui informada que não havia essa disciplina e aí fiquei mais estimulada a continuar o curso.*
>
> *Até o segundo semestre não sabia ao certo se era essa disciplina que eu queria lecionar. Porém no terceiro período eu tive a oportunidade de participar do PIBID e lá na escola tive a oportunidade de reconhecer que eu ajudaria mais os alunos se eu fosse professora de matemática. Percebi que os alunos possuíam mais dificuldades, medos e rejeição dessa matéria (algo que eu nunca tive), por isso tive um confronto da imagem da disciplina: ora positiva, segundo meu ponto de vista; ora negativa, pelo ponto de vista de alguns alunos. Aprendi que não posso obrigar as pessoas a gostarem de matemática, pois cada pessoa tem uma experiência distinta com essa matéria e isso deve ser respeitado. Porém, como professora, devo buscar um jeito melhor de ensinar aos alunos para que não seja um momento de sofrimento.*

Síntese das imagens iniciais de Geane sobre os agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação: uma retomada da seção 5.2

As considerações de Geane ao longo dos instrumentos de aula e pesquisa foram agrupadas de acordo com o que consideramos ser resultado de suas imagens iniciais dos agrupamentos simples de combinatória. As imagens iniciais de Geane não foram apresentadas em uma tabela, conforme fizemos com Alex, pois, em 11/8/17, ela não apresentou uma definição pontual para cada um dos agrupamentos simples de combinatória, mas relatou, de modo genérico, assim:

> *Não sei a diferença, sei que havia <u>situações que a posição importava</u> ou <u>que não podia repetir</u>. Eu <u>entendi muito isso no ensino médio</u>, <u>fiz vários exercícios do livro com exemplos de placas de carro</u>, <u>cartas de baralhos</u>, mas foi pouco significativo e já no trimestre seguinte eu 'descartei' este conhecimento (Em 11/8/2017).*

Então, as imagens iniciais de Geane sobre os agrupamentos simples podem ser assim sintetizadas:

- retomou de sua memória os atributos ordem e elementos repetidos sob certas condições, relacionados aos agrupamentos simples e completos de combinatória;
- afirmou que sua aprendizagem é decorrente do ensino médio e se recordou de exercícios feitos nessa etapa que envolviam placas de carro e cartas de baralhos;
- conceitos que, para ela mesma, eram pouco significativos e para os quais, durante a ensino médio, não estabeleceu relações dentro da própria matemática;
- conceitos de aprendizagem momentânea, "descartável", pois não são como outros conteúdos para os quais se tem um estudo progressivo e processual.

As imagens iniciais evocadas por Geane relacionavam-se à definição do conceito, ao destacar atributos (HERSHKOWITZ, 1994) relacionados aos agrupamentos. Além disso, associavam-se ao ensino e à aprendizagem de combinatória no ensino médio, quando a estudante rememorou exemplos típicos de problemas usados por professores para ensinar os agrupamentos. O primeiro também está associado ao modelo combinatório implícito subjacente aos problemas combinatórios. Desse modo, mostrou-nos que, quando o nome conceitual é visto ou ouvido, mobiliza diferentes áreas do pensamento e estimula a emissão de uma resposta (VINNER, 2002; 2011). Assim como Alex, Geane evocou imagens cujas palavras se associavam ao conceito, mas não o definiam com precisão.

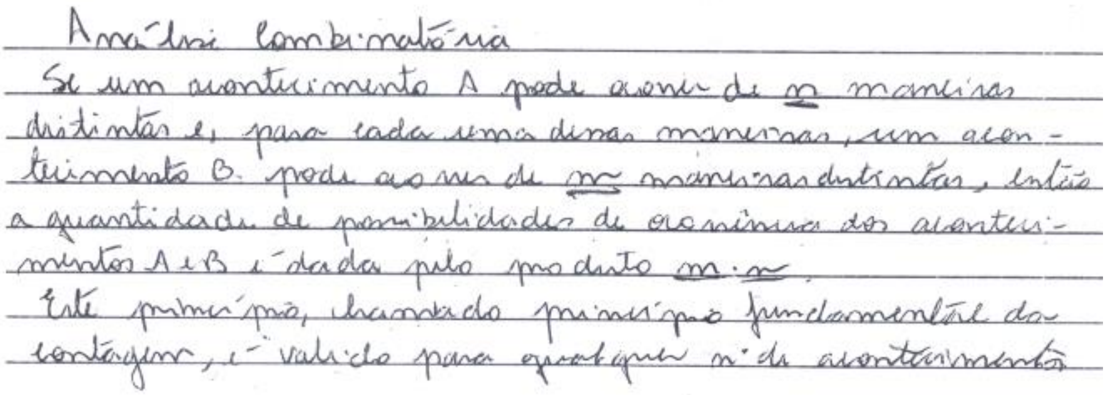
Reconstrução das imagens iniciais de Geane sobre os agrupamentos simples de combinatória

Para analisarmos as tarefas de Geane trabalhadas ao longo da disciplina e identificarmos se houve alguma reconstrução das imagens iniciais, vamos apoiar-nos nas categorias anteriormente mencionadas:

- categoria de análise quanto ao processo de movimentação das imagens: *reconstrução por inclusão/exclusão positiva/negativa de algum atributo em complementação ou em substituição à imagem conceitual anterior*;
- categoria de análise quanto aos cenários nos quais o processo de reconstrução ocorreu*: imagem conceitual persistente*, *inapropriada sem melhoria*, *inadequada com melhoria*, *fragmentada e flexível*.

Um fato que chamou nossa atenção foi que, após a primeira aula (11/8/17), encontramos o seguinte registro no caderno de Geane:

Figura 53 – Definição de combinatória encontrada no caderno de Geane



Análise Combinatória
Se um acontecimento A pode ocorrer de m maneiras
distintas e, para cada uma dessas maneiras, um acon-
tecimento B pode ocorrer de n maneiras distintas, então
a quantidade de possibilidades de ocorrência dos acontecimentos A e B é dada pelo produto m·n.
Este princípio, chamado princípio fundamental da
contagem, é válido para qualquer nº de acontecimentos

Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2017.

Esse registro escrito, mesmo não relacionado à ideia conceitual de combinatória, mostra que a estudante ficou “mexida” e foi em busca de alguma compreensão. Neste caso, a definição apresentada se refere ao princípio multiplicativo, considerado um dos alicerces da combinatória (PAIVA, 2009) e uma ferramenta básica para resolver problemas de contagem (MORGADO et al., 2016). No retorno, Geane explicou-nos que procurou uma definição na internet. Informou que se surpreendeu quando lhe perguntamos sobre como definiria combinatória. Ela não conseguiu emitir uma resposta concreta, visto que descreveu palavras, memórias que marcaram sua trajetória escolar de combinatória.

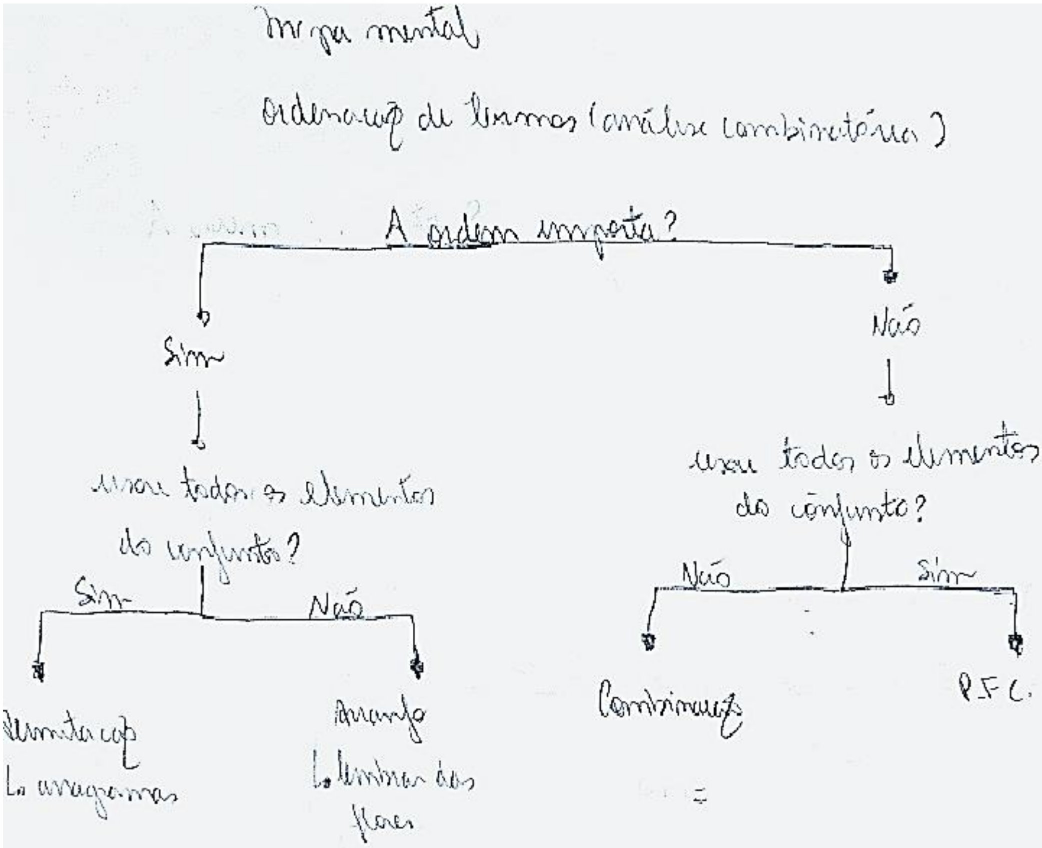
No retorno dos dados, Geane ainda nos informou que, após a disciplina cursada na licenciatura, ela conseguiria definir combinatória de maneira informal. Ela quis dizer-nos que conseguiria verbalizar e escrever uma reconstrução pessoal do conceito baseada em suas próprias aprendizagens. Então, para ela, análise combinatória “seria como se fosse um estudo que analisa as possibilidades de posições que um objeto pode assumir em um determinado grupo, que ele está inserido” (18/10/18). Portanto, os grupos “seriam o conjunto que ele está inserido. Por exemplo, o conjunto de... blusas em guarda-roupa. Aí eu teria várias formas de posicionar eles [blusas] de acordo com vários critérios, entendeu? De acordo com vários critérios... aí eu teria como resposta, talvez, uma quantificação dessas formas, das possibilidades que eu tenho de ordenar objetos”. Vemos que a licencianda apresentou uma reconstrução por exclusão positiva de algum atributo: ela pareceu excluir o que tinha de conceito inicial de combinatória e substituir por algo novo. Sua imagem clareou um pouco mais. No entanto, não está completamente coerente com a definição matemática formal.

Ainda no retorno e quanto aos agrupamentos mencionados, Geane disse-nos que seria capaz de diferenciar, por exemplo, uma combinação de uma permutação e acrescentou: "[antes da licenciatura] *não fazia a menor ideia [...] Eu tinha estudado sim, mas não foi algo que eu consegui assimilar"*. Ao ser solicitada a falar sobre permutação, combinação e arranjo, Geane disse que, no decorrer da disciplina, havia construído um mapa mental e relatou:

> *Eu fiz o mapa mental, assim... são duas perguntas: se importa a ordem dos objetos e se utiliza ou não todos os elementos. Aí [...] permutação e arranjo [...] importa a ordem. A diferença dos dois é que um utiliza todos os objetos do conjunto e o outro não. Combinação [...] não importa a ordem (Em 11/9/18).*

E construiu o seguinte "mapa mental":

Figura 54 – Mapa mental de Geane



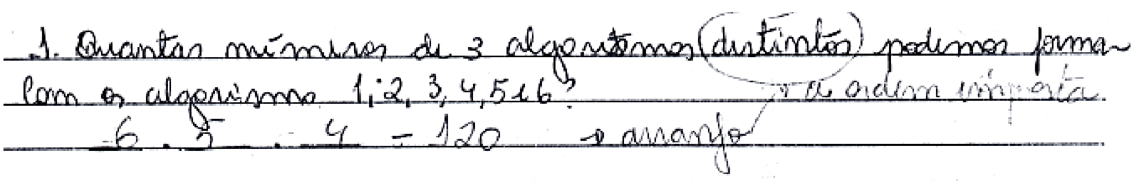
Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2018.

Assim como na verbalização de seu entendimento, por meio desse mapa mental, Geane fundamentou-se nos atributos ordem e quantidade de elementos utilizados em cada agrupamento. Mostrou que esses seriam os modelos combinatórios implícitos no enunciado de um problema que ela considerava relevante identificar para sua resolução. Observamos, ainda, que Geane, ao informar os casos de permutação e arranjo, trouxe dois tipos de problemas associados a tais conceitos: em permutação, associou problemas de anagrama; em arranjo, o problema das flores. Quando perguntada sobre isso, Geane informou que esses problemas seriam suas associações referentes aos conceitos, pois marcaram sua passagem pelas aulas da licenciatura. Ou seja, Geane pareceu ter construído outros protótipos diferentes daqueles do ensino médio que envolviam placas de carro e cartas de baralho. Consideramos que tais associações são positivas à medida que contêm atributos importantes para que a licencianda rememore o modelo combinatório implícito e sirva de base para julgamentos prototípicos (HERSHKOWITZ, 1994).

Com seu mapa mental, Geane esforçou-se para mostrar a relação entre conceitos e atributos. Pareceu relacionar os pedacinhos de suas memórias sobre os conhecimentos que tratamos nas aulas de Análise Combinatória e Probabilidade, no curso de licenciatura. Observamos, no fragmento assinalado, que Geane conseguiu emitir com segurança suas aprendizagens dos conceitos e nomear e explicar o significado de cada um deles. Mostrou também que refinou o atributo ordem, suprimiu a ideia de repetição e argumentou o número de elementos considerados em cada agrupamento.

Ao responder ao problema 1 – *“Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?”* – da segunda aula (18/8/17), Geane registrou, em seu caderno, a seguinte solução:

Figura 55 – Resolução de Geane – problema 1, aula 2, 18/8/17


1. Quantos números de 3 algarismos distintos podemos forma-
com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6? → a ordem importa.
6 . 5 . 4 = 120 → arranjo

Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2017.

Geane circulou, no enunciado do problema, a palavra “distintos” como atributo indicador do modelo combinatório implícito. E, embora reconhecesse que era um arranjo no qual a ordem dos elementos importava, optou por resolvê-lo pelo princípio multiplicativo. Em sua estratégia, destacou que, para a primeira posição, haveria seis possibilidades de algarismo; para a segunda, cinco; e, para a terceira, quatro.

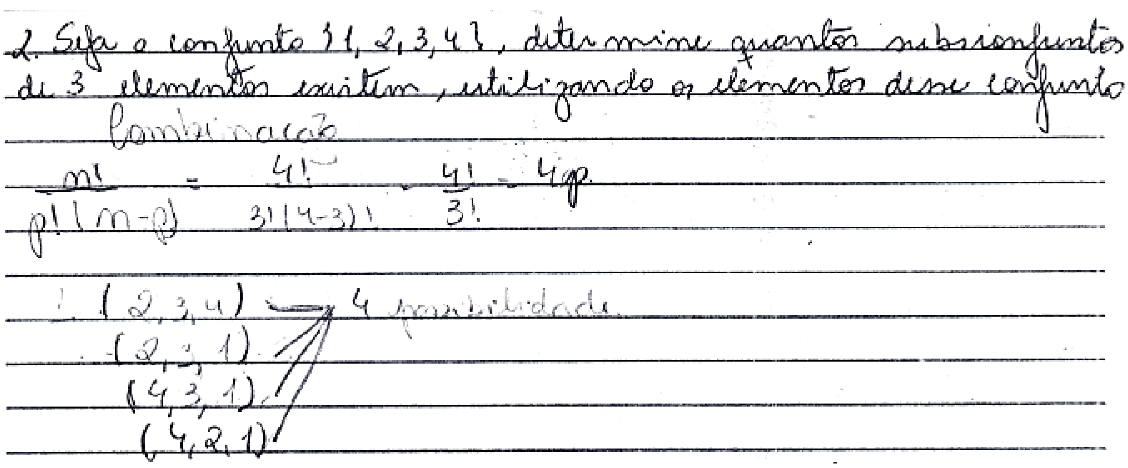
No retorno, perguntamos a Geane os motivos que a levaram a escrever o número sob um traço. Ela explicou-nos que, durante o ensino médio, embora a combinatória tivesse sido tratada de maneira intuitiva, sua professora *"usava tipo aquelas casinhas, com as barrinhas assim"* e, com a mão paralela à mesa, gesticulou para indicar um traço. Portanto, usou essas "casinhas" para indicar a posição ocupada pelos algarismos no processo de composição dos números. Isso mostrou que Geane, de fato, compreendia que se tratava de um arranjo simples, cuja ordem ocupada pelos algarismos distintos gerava novas e outras possibilidades.

A estudante destacou, ainda, que teve muita dificuldade para entender o conteúdo de combinatória no ensino médio. Assim, decorou que *"tem esse tipo de coisa [problema]... deve-se usar isso aqui [determinado procedimento]"*. Nos dois argumentos, Geane deu pistas de que nossas hipóteses estavam corretas quando mencionamos que os estudantes decoram problemas tipo e a aprendizagem é mais intuitiva do que formal. Ela exemplificou da seguinte forma:

> *Olha, é um exemplo, por exemplo, quando o conjunto da combinação não repetia, eu lembrava que ela* (a professora) *ia tirando os termos. Aí então eu tinha que, é... a cada casinha eu ia retirando um termo do conjunto, aí ia diminuindo, formando fatorial, só que nem sempre, só quando era permutação, né, quando era arranjo não formava. Aí se tivesse caso de repetir, termo repetido, aí dividia e tal. Naquela época eu entendia aquela operação desse jeito, não como uma coisa muito formal. Eu não sabia a diferença, mas eu sabia que quando o problema exigia certa... certa situação eu sabia usar aquele jeito que ela* (a professora) *passava pra gente. A fórmula, que eu fui conhecer mais, foi aqui na faculdade mesmo, que eu precisei de usar porque tinha cálculos que envolviam números muito grandes (Em 11/9/18).*

Para o segundo problema da aula 4, Geane apresentou a seguinte estratégia de solução:

Figura 56 – Resolução de Geane – problema 2, aula 2, 18/8/17



2. Seja o conjunto {1, 2, 3, 4}, determine quantos subconjuntos de 3 elementos existem, utilizando os elementos desse conjunto

Combinação

$$\frac{n!}{p!(n-p)} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!} = 4p$$

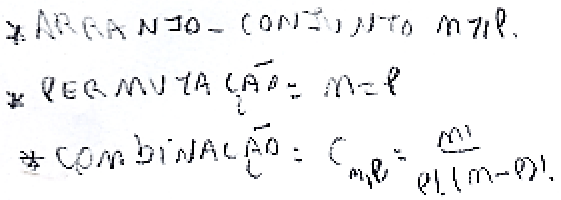
(2, 3, 4) → 4 possibilidade
(2, 3, 1)
(4, 3, 1)
(4, 2, 1)

Fonte: Arquivo das pesquisadoras.

Observamos que ela aplicou direto a fórmula de combinação e depois listou as possibilidades para verificar o resultado encontrado por meio da fórmula. Quando questionada sobre o uso da fórmula, Geane explicou que, como seu grupo havia pesquisado as características da combinação em uma das primeiras aulas, ela resolveu usar a fórmula que havia encontrado para testar sua funcionalidade, mas a aprendizagem via listagem "falou mais forte" e ela sentiu a necessidade de listar os agrupamentos formados pela combinação dos algarismos 1, 2, 3 e 4. Geane explicou, ainda, que compreendia a estruturação algébrica da fórmula e n indicava o número total de elementos do conjunto e p o número de elementos considerados na resolução do problema por meio da pergunta apresentada no enunciado. Desse modo, Geane pareceu ter uma compreensão estrutural mais relacional (SKEMP, 1976).

Esses argumentos de Geane justificam-se porque, na passagem da aula 2 (18/8/17) para a aula 4 (25/8/17), tínhamos encontrado, em seu caderno, outros três registros, anotações independentes feitas pela própria estudante.

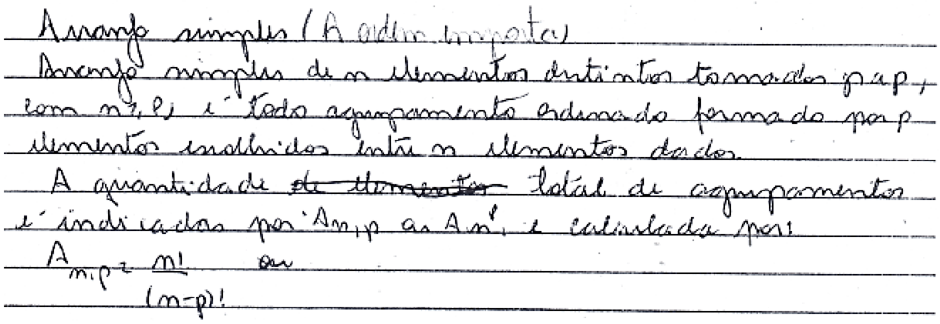
Figura 57 – Anotações de Geane a respeito dos agrupamentos simples


* ARRANJO – CONJUNTO $n \geq p$.
* PERMUTAÇÃO: $n = p$
* COMBINAÇÃO: $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2017.

Esse primeiro registro indica a relação entre os membros de um conjunto. Geane mostrou os casos de arranjo e de permutação mediante a relação entre os elementos de um dado conjunto que devem ser evidenciados em uma sequência. Quanto à combinação, Geane descreveu a fórmula e informou que se tratava de uma divisão. O segundo registro encontrado no caderno de Geane na aula 2 (18/8/17) foi o seguinte:

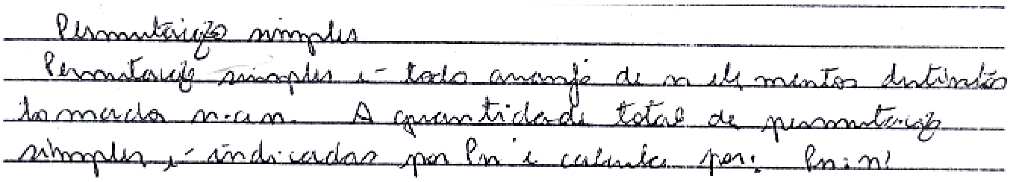
Figura 58 – Conceito de arranjo registrado por Geane em seu caderno


Arranjo simples (A ordem importa)
Arranjo simples de n elementos distintos tomados p a p, com $n \geq p$, é todo agrupamento ordenado formado por p elementos escolhidos entre os n elementos dados.
A quantidade ~~de elementos~~ total de agrupamentos é indicada por $A_{n,p}$ ou A_n^p, e calculada por:
$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ ou

Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2017.

Geane explicou-nos que "copiou a definição da internet" porque queria compreender um pouco mais as características de um arranjo. Assinalou que seria uma forma de lembrete, pois ela já conseguia compreender as ideias principais desse agrupamento. Para ela, o atributo mais relevante referia-se à questão de a ordem importar e de estabelecer a relação entre os elementos do conjunto dado e dos subconjuntos formados. Desconsiderou a ideia de natureza envolvida em agrupamentos combinatórios e registrou também a fórmula de arranjo com repetição, a qual não será detalhada nesta tese. O terceiro e último registro da licencianda tratava da definição de permutação simples. Vejamos:

Figura 59 – Conceito de permutação registrado por Geane em seu caderno

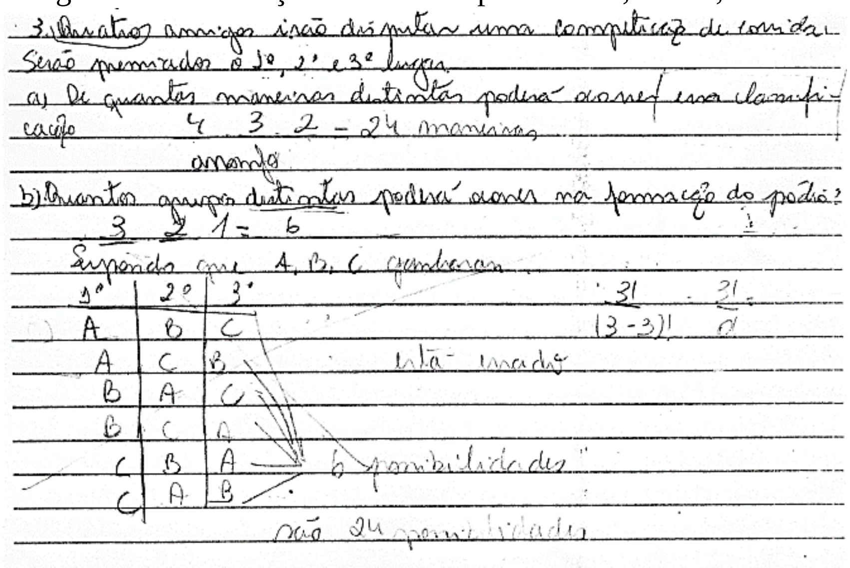

Permutação simples
Permutação simples é todo arranjo de n elementos distintos tomados n a n. A quantidade total de permutação simples é indicada por Pn e calculada por: Pn = n!

Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2017.

Ao seguir as mesmas ideias do registro anterior, Geane destacou que trouxe a definição de permutação para reforçar seu entendimento do conceito como um caso particular de arranjo em que o número total de elementos do conjunto dado é utilizado no processo de resolução; portanto, $n = p$.

Quando resolveu o problema 1 da aula 4 – “Quatro amigos vão disputar uma competição de corrida. Serão premiados o 1.º, 2.º e 3.º lugares. (a) De quantas maneiras distintas poderá ocorrer essa classificação?; (b) Quantos grupos distintos poderá ocorrer na formação do pódio? (independentemente da classificação); (c) o que diferencia a situação a da b?” - em 25/8/17, Geane assim se posicionou:

Figura 60 – Resolução de Geane – problema 1, aula 4, 25/8/17


3. Quatro amigos irão disputar uma competição de corrida. Serão premiados o 1º, 2º e 3º lugar.
a) De quantas maneiras distintas poderá ocorrer essa classificação
4 3 2 = 24 maneiras
arranjo
b) Quantos grupos distintos poderá ocorrer na formação do pódio?
3 2 1 = 6
Supondo que A, B, C ganharam

1º	2º	3º
A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	B	A
C	A	B

3! / (3-3)! = 3! / 0!
está errado
6 possibilidades
não 24 possibilidades

Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2017.

Ao analisarmos os registros de Geane, vimos que ela assinalou alguns termos que considerou relevantes para a solução do problema. Ela grifou as palavras “quatro” e “distintas”. Segundo a licencianda, a primeira se referia à quantidade de elementos (quatro amigos) e a segunda dizia respeito à forma de organização do grupo. Outro registro de Geane que nos chamou a atenção foi a expressão “está errado”, escrita no centro da resolução. Ela explicou-nos que se referia à operação $\frac{3!}{(3-3)!}$, com a qual encontraria seis como resposta e, a priori, não havia percebido que seria possível multiplicá-lo por quatro em razão da quantidade de elementos do grupo, e, assim, obter a resposta total.

A discussão matemática envolvendo a turma inteira – prática de conectar – (Stein et al., 2008) ajudou Geane a compreender que o modelo cominatório implícito em ambas as questões, “a” e “b” do problema, era o mesmo. Na ocasião, ela explicou-nos que entendia que maneiras e grupos, termos mencionados nas questões, significavam “coisas” diferentes, “mas acho que a conta deveria ser a mesma. Mas se a conta é a mesma, [a pergunta] pode ser igual também, né?”. Ela explicou, ainda, que “conta” era sinônimo de operação combinatória. A estudante não havia compreendido inicialmente que grupo seria uma maneira, jeito, forma de organizar segundo algum critério e, no caso desse problema, só poderiam ser três dos quatro amigos em razão do número de lugares do pódio e das posições que seriam premiadas.

Mais à frente na aula, ainda durante a discussão oral, Geane disse que focalizou os termos “quantos/quantas” presentes no enunciado das questões, pois eles indicavam que uma contagem deveria ser feita, a qual foi exemplificada em uma tabela de classificação escrita no lado esquerdo da resposta, conforme figura 54. De acordo com Geane, ela fez isso para verificar se o resultado encontrado com a operação matemática estava coerente. Desse modo, concluiu:

> ***Pesquisadora:*** *Quando você pensa num pódio, [...] <u>como é a organização de um pódio</u>?*
> ***Geane:*** *<u>Primeiro, segundo e terceiro</u>.*
> ***Pesquisadora:*** *Existe uma maneira de organizar um pódio sem classificar as pessoas? [...] Então, quando o problema lhe perguntou “quantas maneiras”, você disse que pensou em tudo isso. <u>E quando perguntou sobre grupos</u>?*
> ***Geane:*** *<u>A mesma coisa! Então seria uma forma diferente de perguntar a mesma coisa!</u>*

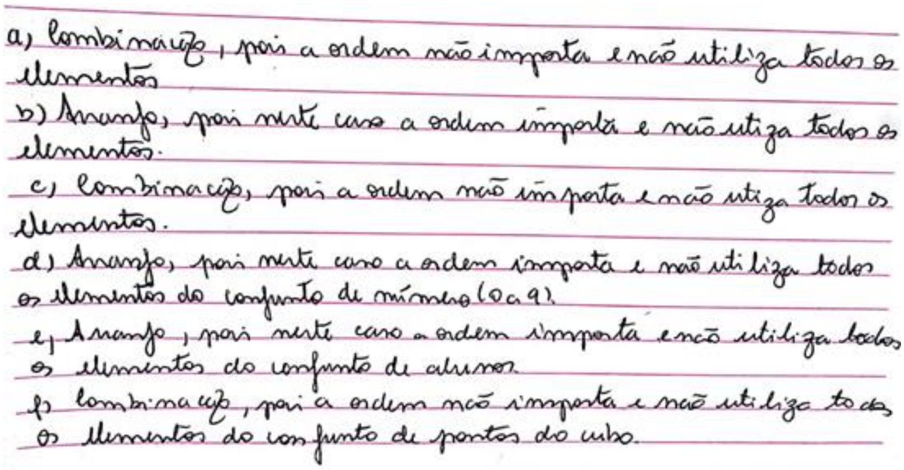
Assim, para ambos os casos, Geane percebeu que, embora as respostas fossem iguais, as questões se diferenciavam entre si pela redação dada a cada uma delas. Além disso, destacou que, mesmo o pódio sendo ocupado por um grupo, ele seria classificado de alguma forma, pois pessoas distintas ocupariam diferentes posições do pódio.

Para a resolução do problema 7 da sétima aula (22/9/17) havia estas afirmativas:

> a) *Escolher seis dos sessenta números para uma aposta na Mega-Sena.*
> b) *As possíveis classificações dos quatro primeiros colocados no Campeonato Brasileiro de Futebol.*
> c) *Eleger uma comissão de dois alunos para representantes de sala, em que ambos terão o mesmo cargo.*
> d) *Formar um número de telefone com oito números distintos.*
> e) *Eleger uma comissão de dois alunos em que um será o porta-voz da classe e o outro será o secretario.*
> f) *Escolher três vértices de um cubo para formarmos triângulos.*

Posto isso, solicitamos que os estudantes classificassem os agrupamentos e justificassem suas respostas. Na ocasião, Geane disse:

Figura 61 – Resolução de Geane – problema 7, aula 7, 22/9/17


a) Combinação, pois a ordem não importa e não utiliza todos os elementos
b) Arranjo, pois neste caso a ordem importa e não utiza todos os elementos.
c) Combinação, pois a ordem não importa e não utiza todos os elementos.
d) Arranjo, pois neste caso a ordem importa e não utiliza todos os elementos do conjunto de números (0 a 9).
e) Arranjo, pois neste caso a ordem importa e não utiliza todos os elementos do conjunto de alunos
f) Combinação, pois a ordem não importa e não utiliza todos os elementos do conjunto de pontos do cubo.

Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2017.

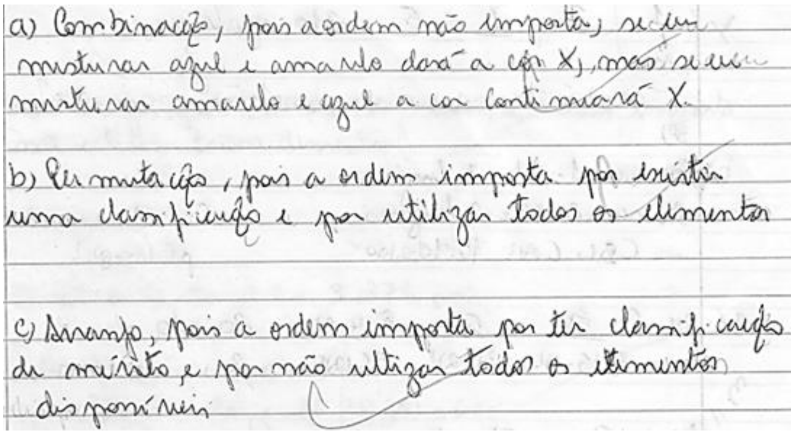
Para justificar a classificação das sentenças em arranjo e combinação, Geane usou os mesmos argumentos aplicados em contextos distintos. Quando justificou a opção por combinação, os atributos "ordem não importa" e "não utiliza todos os elementos do conjunto" foram evidenciados com mais precisão. O mesmo aconteceu quando ela optou por um arranjo e se respaldou em atributos como "a ordem importa" e "não utiliza todos os elementos do conjunto". Assim como vimos em Alex, há uma forte persistência e reconhecimento por parte de Geane do atributo ordem e utilização ou não de todos os elementos do conjunto inicial como diferenciador e identificador do modelo combinatório implícito. Por outro lado, Geane nada evocou acerca do atributo natureza relacionado ao tipo de elemento que compunha cada subconjunto formado.

Como dito anteriormente em Alex, a questão 1 da avaliação, resolvida na aula 9 em 20/10/17, solicitava ideias conceituais semelhantes àquelas envolvidas na questão 7 da sétima aula. Na questão 1 da aula 9, comentamos as alternativas "a", "b" e "c", pois elas tratavam dos agrupamentos simples de combinatória, foco de nossa pesquisa. As afirmativas eram as seguintes:

> a) Produzir uma mistura com duas cores primárias distintas, escolhidas entre o vermelho, azul e amarelo.
> b) A disputa de uma eleição por três candidatos em que há 1.º, 2.º e 3.º colocados.
> c) Escolher, entre os jogadores A, B, C, D e E, três para receber medalha do 1.º, 2.º e 3.º colocados.

Geane assim explicou sua opção por um tipo ou outro de agrupamento:

Figura 62 – Resolução de Geane – problema 1, aula 9, 20/10/17



a) Combinação, pois a ordem não importa, se eu misturar azul e amarelo dará a cor X, mas se eu misturar amarelo e azul a cor continuará X.

b) Permutação, pois a ordem importa por existir uma classificação e por utilizar todos os elementos

c) Arranjo, pois a ordem importa por ter classificação de mérito, e por não utilizar todos os elementos disponíveis

Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2017.

Ao classificar os agrupamentos em combinação, permutação e arranjo, Geane valeu-se dos mesmos critérios utilizados quando resolveu a tarefa 7 da aula 7. Focalizou especialmente no atributo ordem. Ressaltou, ainda, que uma combinação é um agrupamento não ordenado, pois, independentemente da ordem com que os elementos são organizados, o produto final será o mesmo. Ao identificar permutação e arranjo, justificou, com base na ideia de agrupamento ordenado, que ambos incluíam uma classificação. Diferenciou uma permutação de um arranjo pela quantidade de elementos envolvidos na operação, ou seja, na permutação, usam-se todos os elementos do conjunto dado, enquanto no arranjo se utilizam apenas alguns selecionados de acordo com os critérios dos problemas.

Em seguida, comentamos as soluções de Geane para a alternativa "g", que solicitava: "Usando suas palavras, conceitue arranjo, permutação e combinação". Organizamos as respostas da licencianda a essa questão na tabela abaixo e estabelecemos um paralelo com as ideias conceituais iniciais de Geane apresentadas no início da disciplina em 11/8/17.

Tabela 19 – Imagens iniciais e finais de Geane sobre a combinatória simples

AGRUPAMENTOS	*IMAGENS INICIAIS (11/08/17)*	*IMAGENS FINAIS (20/10/17)*
Arranjo	*Não sei a diferença, sei que havia situações que a posição importava ou que não podia repetir. Eu entendi muito isso no ensino médio, fiz vários exercícios do livro com exemplos de placas de carro, cartas de baralhos, mas foi pouco significativo e já no trimestre seguinte eu "descartei" este conhecimento*	*É uma "combinação" de elementos cuja ordem é importante e difere-se das demais combinações. Ex: placas de automóveis, sistema de numeração, etc.*
Permutação		*É um arranjo onde utilizamos todos os elementos da amostra. Ex: anagramas de palavras.*
Combinação		*É a forma de "agrupar" elementos sem critério de ordem. Ex: combinação de roupas, composição de uma sala de frutas usando x frutas de y disponíveis.*

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras, 2017.

Em termos de imagens iniciais e finais, Geane pareceu ter avançado quando conseguiu escrever cada agrupamento individualmente. Além disso, a ideia de agrupamento ordenado e não ordenado permaneceu fixa. Ela explicou que o termo combinação escrito na ideia conceitual de arranjo se referia à organização de elementos e não tinha relação com o conceito de combinação propriamente dito. Geane também disse que uma permutação "é um arranjo onde utilizamos todos os elementos da amostra". Essa ideia de permutação como caso especial de arranjo vem sendo reforçada por Geane desde o início da disciplina, quando ela fez registros pessoais em seu caderno e indicou que $n = p$. Em relação à combinação, a licencianda destacou que seria um agrupamento não ordenado.

Essas respostas de Geane em 20/10/17 mostraram que, de alguma forma, ela conseguia diferenciar cada agrupamento segundo um atributo relevante usado para caracterizá-lo. Esta pareceu ter sido uma grande aprendizagem de Geane, visto que, no início da disciplina, ela rememorava atributos, mas não fazia relação deles com os agrupamentos via identificação do modelo combinatório implícito e o nome dado ao conceito.

É importante salientar, ainda, que Geane se valeu de exemplos para reforçar suas ideias conceituais. Este comportamento também foi mantido desde o início da disciplina. Os exemplos usados por Geane em ambos os casos servem para explicar seu entendimento sobre o conceito. Mesmo não sendo coerente, em termos estruturais com a literatura matemática, sabemos que exemplos são parte das imagens conceituais e, portanto, auxiliam na formação de conceitos (VINNER, 2011).

Além disso, os exemplos gerados pelos estudantes são vistos como uma possibilidade de eles mesmos compreenderem as ideias conceituais, visto que as mobilizam para organizar a estrutura matemática do enunciado. O uso de exemplos por Geane pareceu deixá-la mais segura do conhecimento que possuía. Ela baseou-se neles desde as primeiras atividades da disciplina em 11/8/17 e os rememorou no retorno em 2018, quase um ano após a produção e coleta de dados, quando construiu seu mapa mental. Outro ponto observado é que Geane demonstrou ter incorporado seu autodidatismo à sua aprendizagem, pois, com a experiência negativa com a matemática no ensino fundamental, ela aprendeu a buscar conhecimento sozinha, sem esperar que a professora solicitasse. Por fim, consideramos que o mapa mental de Geane estruturado no retorno em 2018 sintetiza melhor suas aprendizagens ao longo da disciplina. Suas ideias pareceram mais organizadas e coordenadas em relação aos conceitos formais de combinatória e sua composição por meio de atributos relevantes.

Embora os processos de aprendizagem de cada licenciando tenham sido peculiares e originais, vimos, nos dados de Geane, semelhanças com os de Alex. Algumas imagens da licencianda permaneceram estáveis, enquanto outras foram se modificando ao longo da disciplina. Vimos, ainda, que as imagens não foram totalmente crescentes em termos de incorporação de atributos relevantes que caracterizam cada conceito de combinatória simples. Diante disso, confirmamos que as imagens conceituais evocadas por Geane, assim como as de Alex, foram reconstruções pessoais (TALL; VINNER, 1981) subsidiadas principalmente pelo atributo ordem e pelo uso ou não de todos os elementos do conjunto dado. Além disso, o atributo natureza não foi evocado em suas definições. Portanto, podemos assim concluir:

Em termos processuais:

- da aula 1 (11/8/17), quando Geane definiu, pela primeira vez, os conceitos de combinatória simples para a aula 2 (18/8/17), houve uma reconstrução por inclusão positiva de algum atributo em complementação à imagem inicial. O atributo ordem manteve-se fixo e a identificação de termos no enunciado dos problemas foi preponderante para a resolução deles;
- da aula 2 para a aula 4, as imagens conceituais foram sendo reconstruídas à medida que Geane buscou, pelos próprios meios, definições para clarear suas ideias conceituais e as comparou com suas estratégias intuitivas de resolução;

- da aula 7 para a aula 9, as imagens reconstruídas pareceram estáveis e os atributos ordem e número de elemento utilizado em cada subconjunto formado continuaram mantidos em evidência;
- da aula 1 para a 9, houve uma reconstrução por inclusão positiva de algum atributo relacionado à definição do conceito em complementação à imagem inicial.

Em termos de cenários nos quais o processo de reconstrução ocorreu:

- Imagem de conceito flexível que foi alterada para incluir ou acomodar novas maneiras de ver o conceito e, apesar de apropriada, ela não explica o conceito com precisão, mas mostra que ocorreu algum evento de aprendizagem.

5.3.5 Vini

> ***Vini por Vini... seu caminhar até a licenciatura em matemática***
>
> *Tenho 25 anos, 1m77cm de altura, peso 85kg, pele branca, cabelo escuro e meus olhos são uma mistura de castanho com verde. Gosto de sair, jogar e estudar. Gosto também de estar com minha família e minha noiva. Fui criado em um bairro de classe média baixa de Cachoeiro de Itapemirim. Decidi começar a faculdade no final de 2014. A princípio, eu queria fazer engenharia civil. Porém, quando eu estudava no ensino médio, eu também tinha vontade de fazer matemática. Meu interesse pela matemática era porque como eu possuía um bom desempenho na matéria, eu ajudava os amigos a entenderem algumas coisas. Eu gostava disso. Ficava muito feliz quando eles aprendiam. Terminei o ensino médio em 2010. Na época, eu fazia o técnico em informática, que acabei em 2012. Só voltei a estudar quando entrei na licenciatura em matemática pela nota do ENEM via SISU em início de 2015. A oportunidade de fazer uma faculdade de graça, foi um dos motivos de ter escolhido o IFES para cursar a licenciatura.*

Síntese das imagens iniciais de Vini sobre os agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação: uma retomada da seção 5.2

As afirmações de Vini ao longo dos instrumentos aplicados foram agrupadas de acordo com o que consideramos ser resultado de suas imagens iniciais dos agrupamentos simples de combinatória. Na tabela a seguir, sintetizamos as imagens rememoradas por ele quando solicitamos que conceituasse os agrupamentos simples no primeiro dia de aula (11/8/17) da disciplina de Análise Combinatória e Probabilidade.

Tabela 20 – Imagens iniciais de Vini sobre os agrupamentos simples de combinatória

AGRUPAMENTOS	***IMAGENS INICIAIS***
Arranjo	*Organizar elementos segundo um critério ou mais.*
Permutação	*Troca de posições. De elementos, números, peças etc.*
Combinação	*Combinar dois ou mais elementos segundo um ou mais critérios.*

Fonte: Elaborada pelas pesquisadoras, 2017.

Ao analisarmos os dados de Vini, notamos que:

- ✓ evocou imagens relacionadas aos termos "organizar" e "critério";
- ✓ indicou que problemas de combinatória possuem certas condições que o caracterizam;
- ✓ apoiou-se principalmente na ordenação, ou não, feita segundo alguns critérios;
- ✓ respondeu que "trocar de posição" parece mostrar que ele compreendeu a permutação como um agrupamento ordenado no qual a troca de posição na ordem dos elementos dispostos em uma sequência gera novas e outras sequências.

Esse movimento de Vini mostrou-nos que o nome conceitual estimulou sua memória a emitir uma resposta (VINNER, 2002; 2011). Portanto, embora não tenha definido o conceito com precisão, evocou imagens cujos termos se associavam aos conceitos.

Reconstrução das imagens iniciais de Vini acerca dos agrupamentos simples de combinatória

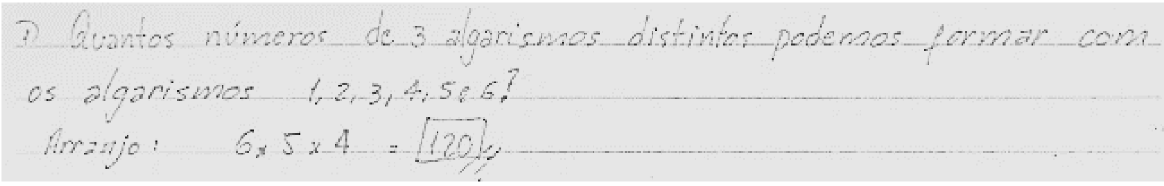
Para analisarmos as tarefas de Vini trabalhadas ao longo da disciplina de Análise Combinatória e Probabilidade e identificarmos se houve alguma reconstrução das imagens iniciais, vamos apoiar-nos nas categorias já mencionadas anteriormente, a saber:

- ➢ categoria de análise quanto ao processo de movimentação das imagens: *reconstrução por inclusão/exclusão positiva/negativa de algum atributo em complementação ou em substituição à imagem conceitual anterior*;

- categoria de análise quanto aos cenários nos quais o processo de reconstrução ocorreu*: imagem conceitual persistente, inapropriada sem melhoria, inadequada com melhoria, fragmentada e flexível*.

Na aula 2 em 18/8/17, solicitamos que o estudante resolvesse dois problemas. O primeiro foi assim resolvido:

Figura 63 – Resolução de Vini – problema 1, aula 2, 18/8/17


1) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?
Arranjo: $6 \times 5 \times 4 = \boxed{120}$

Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2017.

Posteriormente, durante o retorno, Vini explicou-nos que entendeu esse problema como o modelo combinatório implícito de arranjo em razão da presença do termo "distinto" no enunciado. Destacou que, nesse caso, a ordem dos algarismos importa, pois "o número 123 não será considerado igual à 231, 312, 213, 132 ou 321". Eles são considerados distintos e não importa que contenham os mesmos algarismos em posições diferentes. Para ele, o que vale é a posição que cada algarismo ocupa e não pode ser apresentado em uma mesma sequência composta pelos mesmos dígitos. Vini detalhou um pouco mais seu processo de resolução:

> *Considerei 6 para a primeira posição, 5 para segunda posição, uma vez que os algarismos dos números tinham que ser distintos, assim se um dos números ficou na posição 1, ele não repetiria na posição 2. Por isso também, considerei o 4 para terceira posição, pois dois números já estariam nas posições anteriores (primeira e segunda). Complementando: 6 porque na posição 1 eu tenho a possibilidade de pôr qualquer número do conjunto aparentado que contém seis elementos (1, 2, 3, 4, 5, 6), depois 5 porque um dos números já estaria na posição 1, depois 4 porque dois números já estariam escolhidos, isso garante que o número formado tenha 3 algarismos distintos.*

O licenciando mostrou-se coerente com a informação dada por ele mesmo no primeiro dia de aula (11/8/17), quando disse que arranjo é "organizar elementos segundo um critério ou mais". Então, no problema 1, o termo preponderante e o critério que direcionou o processo de resolução foram a leitura que ele fez da palavra "distinto" presente no enunciado.

Para o segundo problema da aula 2 (18/8/17), Vini apresentou a solução indicada na figura 64.

Figura 64 – Resolução de Vini – problema 2, aula 2, 18/8/17

2) Seja o conjunto {1,2,3,4}, determine quantos subconjuntos de 3 elementos existem, utilizando os elementos desse conjunto.

Combinação: $\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \Rightarrow \frac{4!}{3!} \Rightarrow \frac{4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = \boxed{4}$

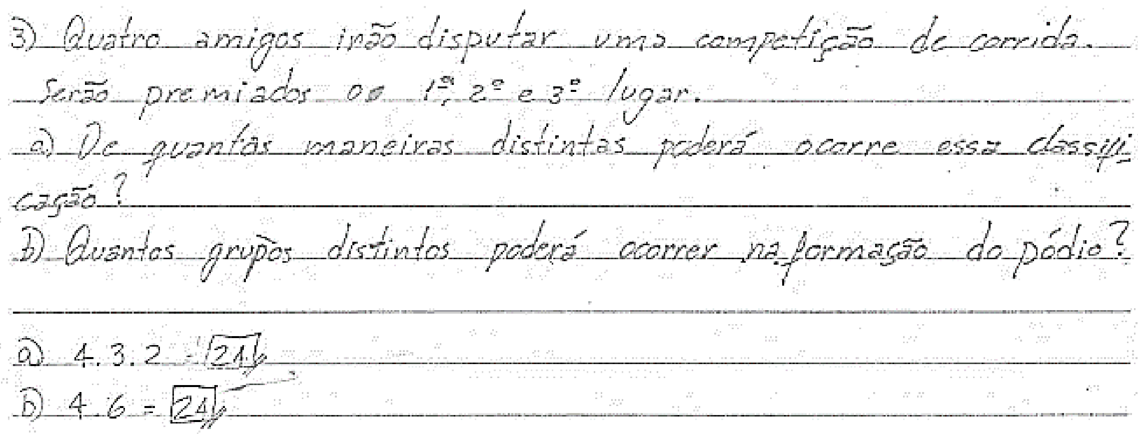
Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2017.

Vini explicou que utilizou a combinação em sua resolução, pois o enunciado solicitava que "era para dizer quantos subconjuntos de 3 elementos existiam utilizando os elementos do conjunto principal apresentado (1, 2, 3, 4)". Exemplificou informando: "nessa situação a ordem dos elementos não fazia diferença, sendo assim, ao tomar um conjunto com os algarismos 123, ele não seria considerado diferente do conjunto 321, por exemplo. Nesse caso, o que importa é que os números são formados pelos mesmos algarismos, portanto, ambos formam um subconjunto que contém os elementos (1, 2, 3). Isso porque quando dizemos que dois conjuntos A e B são iguais, significa que ambos possuem os mesmos elementos e, não importa se a ordem deles é diferente ou não, por exemplo, A= {2, 3, 1} e B = {3, 1, 2}, mesmo assim A = B".

Observamos que Vini se apropriou das ideias conceituais de combinatória e conseguiu relacioná-las com a teoria de conjuntos, visto que ele se valeu de um argumento dela para justificar seu comportamento. Além disso, seu argumento mostra que ele utilizou uma estrutura conceitual adequada. Isso mostra que Vini procurou relação com aprendizagens pregressas ao ensino de combinatória, estabeleceu conexões com a própria matemática e mobilizou o conhecimento matemático geral que possuía e poderia ajudar na compreensão e resolução do problema.

Na aula 4 em 25/8/17, os licenciandos trabalharam, entre outras, na resolução de um problema que envolvia a organização de um pódio. Vini apresentou a resolução informada na figura 65 para essa tarefa específica.

Figura 65 – Resolução de Vini – problema 1, aula 4, 25/8/17


3) Quatro amigos irão disputar uma competição de corrida. Serão premiados os 1º, 2º e 3º lugar.
a) De quantas maneiras distintas poderá ocorre essa classificação?
b) Quantos grupos distintos poderá ocorrer na formação do pódio?
a) $4.3.2 = \boxed{24}$
b) $4.6 = \boxed{24}$

Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2017.

Ao solicitarmos no retorno em 2018 que esclarecesse os cálculos apresentados em "a" e "b", Vini informou que utilizou arranjo em razão da palavra "distintas" presente no enunciado. Segundo ele, a ideia combinatória subjacente envolvia uma classificação. Ou seja,

> *[...] mesmo que o pódio fosse formado pelos mesmos ganhadores, por exemplo, Maria em primeiro, João em segundo e Pedro em terceiro, ou Pedro em primeiro, João em segundo e Maria em terceiro, as situações seriam diferentes. Isto é, seriam dois pódios diferentes já que a ordem é importante. Em um caso Maria é a primeira e no outro Pedro é primeiro.*

O licenciando posicionou-se de modo semelhante ao apresentado na resolução do problema 1 da segunda aula. Para ele, ambas envolviam o mesmo modelo combinatório no qual importava a posição que cada pessoa ocupava. Desse modo, não haveria repetição da mesma sequência de pessoas e de suas posições. Portanto, todos os pódios formados são considerados distintos. Em "b", Vini informou que também utilizou a ideia conceitual de arranjo, pois,

> *[...] embora a questão pedisse os grupos que poderiam ocorrer no pódio, pedia grupos **distintos**, assim, por conta disso, considerei que um grupo mesmo formado pelas mesmas pessoas (Maria, João e Pedro), seria distinto quanto a classificação de cada indivíduo. Isto é, o pódio onde Maria é primeira, João segundo e Pedro terceiro seria diferente do pódio em que João é primeiro, Pedro segundo e Maria terceira, (mesmo que o grupo de pessoas seja igual).*

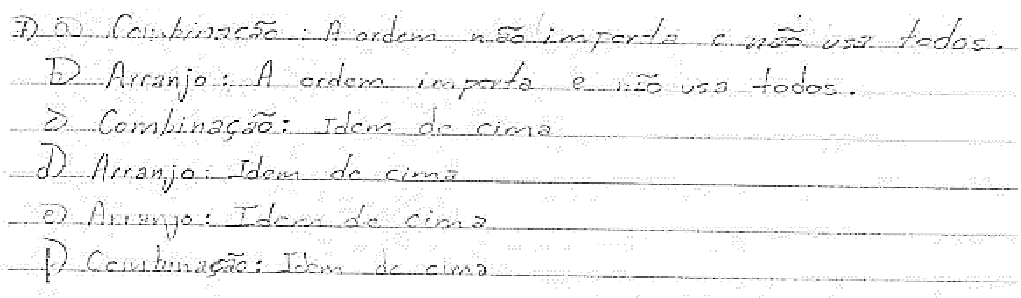
Para o licenciando, não havia possibilidade de organizar um pódio sem classificação. Isso lhe chamou atenção para o tipo de objeto envolvido na situação problema. E, mais uma vez, o atributo distinto foi reforçado como identificador do modelo combinatório subjacente ao problema. Tal atributo veio mantendo-se fixo desde as primeiras atividades resolvidas por Vini.

Na aula 7, solicitamos que os licenciandos resolvessem uma lista de problemas que envolvia todos os agrupamentos simultaneamente. A sétima questão era composta por afirmativas que deveriam ser identificadas e classificadas em combinação ou arranjo, a saber:

> *Escolher seis dos sessenta números para uma aposta na Mega-Sena.*
> *As possíveis classificações dos quatro primeiros colocados no Campeonato Brasileiro de Futebol.*
> *Eleger uma comissão de dois alunos para representantes de sala, em que ambos terão o mesmo cargo.*
> *Formar um número de telefone com oito números distintos.*
> *Eleger uma comissão de dois alunos em que um será o porta-voz da classe e o outro será o secretário.*
> *Escolher três vértices de um cubo para formarmos triângulos.*

Vini apresentou a seguinte solução:

Figura 66 – Resolução de Vini – problema 7, aula 7, 22/9/17


7) a) Combinação: A ordem não importa e não usa todos.
b) Arranjo: A ordem importa e não usa todos.
c) Combinação: Idem de cima
d) Arranjo: Idem de cima
e) Arranjo: Idem de cima
f) Combinação: Idem de cima

Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2017.

O licenciando assinalou as sentenças que indicavam combinação ou arranjo. Justificou o agrupamento subjacente a cada uma, de modo a reforçar o atributo ordem e a quantidade de elementos usados neles. As demais afirmativas, apesar de identificadas pelo nome do agrupamento, foram justificadas com a indicação “Idem de cima”. Mesmo compreendendo que tal expressão informava que a justificativa para um agrupamento ou outro era a mesma, independentemente do contexto apresentado em cada afirmativa, optamos por conversar sobre elas com o estudante.

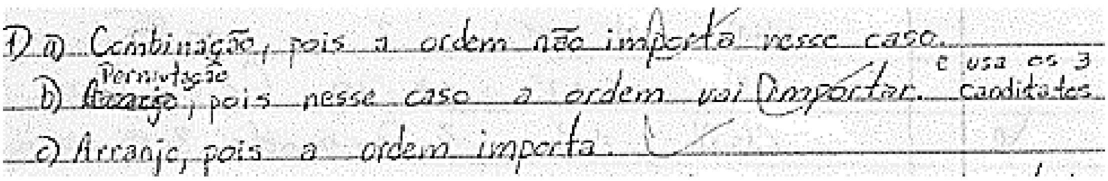
Assim sendo, em 2018, durante o retorno de dados, Vini assim esclareceu:

> *a)* ***Combinação****, pois não precisamos utilizar todo o conjunto apresentado de (60 números), e a ordem dos seis números que escolhermos não fará diferença, já que na situação apresentada não há distinção quanto à ordem dos números, o que importa para a aposta é que os números sorteados sejam os mesmos que foram escolhidos.*
> *b)* ***Arranjo****, porque como a situação trata de uma classificação então a ordem é importante. Nesse caso, mesmo o grupo de classificados sendo igual (time A, B e C) existe distinção quanto à ordem de classificação de cada um (A, C, B), (B, C, A), por exemplo.*
> *c)* ***Combinação****, porque nesse caso, como ambos os alunos escolhidos terão mesmo cargo a ordem não é importante, e o que queremos é apenas selecionar uma dupla de alunos para representantes.*

> *d)* ***Arranjo****, porque nesse caso a posição de cada elemento é importante, e é solicitado a formação de um número de telefone com 8 números distintos, assim, mesmo que em dois conjuntos parecidos, apenas dois dígitos do número de telefone estivessem trocados, estes seriam distintos, como por exemplo: 12345678 e 21345678.*
> *e)* ***Arranjo****, apesar de ser similar a questão "c", quanto a seleção de uma dupla de alunos. Nessa situação de agora há uma diferença entre quem será escolhido primeiro, pois as funções são diferentes: porta-voz da classe e o secretário. Assim a ordem de escolha é importante, pois são cargos diferentes.*
> *f)* ***Combinação****, porque nesse caso temos um total de 8 vértices que serão escolhidos de 3 em 3. Sua ordem não importa, pois o que queremos é construir triângulos a partir dos vértices escolhidos.*

Ao detalhar um pouco mais a sua forma de compreensão e descrevê-la, Vini reforçou a ideia de ordem de modo relacional. Ele explicou e exemplificou como a estrutura conceitual do agrupamento indicado aparecia em cada sentença. Esse movimento de Vini foi importante, visto que ele apresentava certo receio em relação à disciplina. A questão 1, resolvida na avaliação aplicada individualmente aos estudantes na aula 9 em 20/10/17, envolvia as mesmas ideias conceituais da questão 7 da aula 7. Como dissemos anteriormente, focalizamos as afirmativas contidas em "a", "b" e "c", já que tratavam da combinatória simples. Posteriormente, comentamos as respostas do licenciando à sentença escrita em "g", para analisarmos o movimento das imagens de Vini. Na ocasião, o licenciando assim resolveu a questão 1 de 20/10/17:

Figura 67 – Resolução de Vini – problema 1, aula 9, 20/10/17

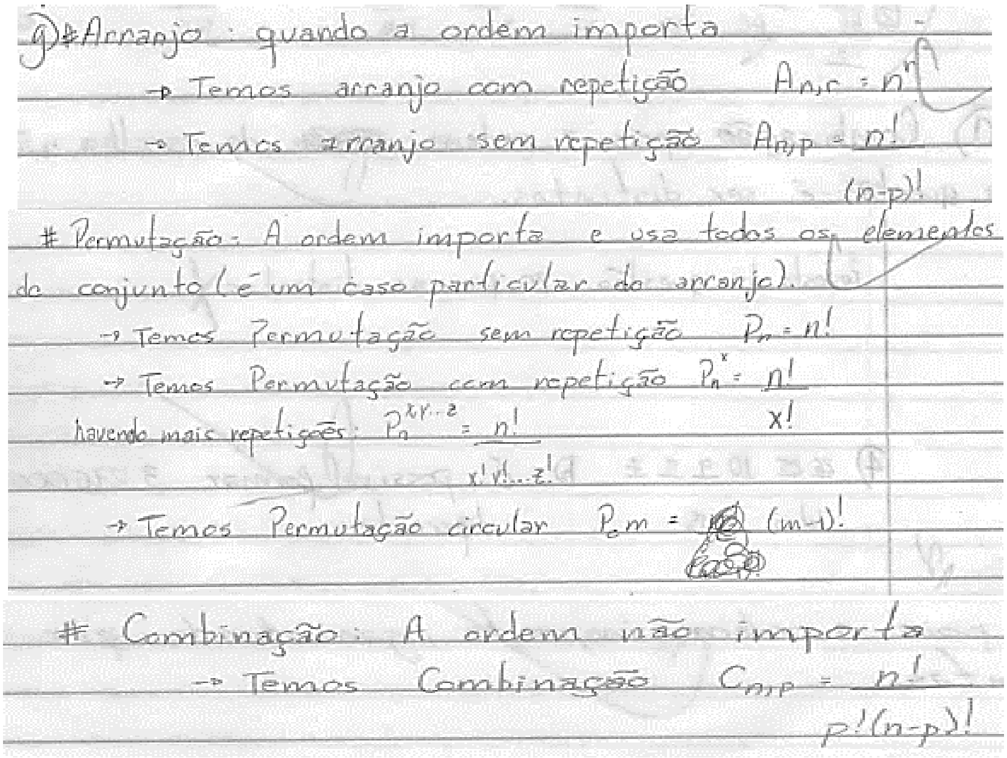

1) a) Combinação, pois a ordem não importa nesse caso.
b) ~~Arranjo~~ Permutação, pois nesse caso a ordem vai importar. e usa os 3 candidatos
c) Arranjo, pois a ordem importa.

Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2017.

As respostas de Vini às afirmativas indicadas acima mantiveram fixo o atributo ordem e a quantidade de elementos utilizados em relação ao conjunto dado inicialmente. Além disso, chamou-nos a atenção o fato de Vini ter respondido que a letra "b" indicava um arranjo, ter tentado apagar a resposta e escrito permutação na parte de cima. Na ocasião, ele destacou que a afirmativa indicava que seria um arranjo em que $p = n$. Com isso, quis dizer que o número total de elementos do conjunto seria utilizado no processo de resolução. No entanto, lembrou que condição $n = p$ se refere a um caso especial de arranjo que recebe o nome de permutação e havia sido por esse motivo que tinha riscado o nome arranjo.

Em relação à solicitação contida em “g” – “Usando suas palavras, conceitue arranjo, permutação e combinação” –, Vini emitiu a seguinte resposta:

Figura 68 – Resolução de Vini – problema 1, letra “g”, aula 9, 20/10/17



g) # Arranjo: quando a ordem importa

→ Temos arranjo com repetição $A_{n,r} = n^r$

→ Temos arranjo sem repetição $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$

Permutação: A ordem importa e usa todos os elementos do conjunto (é um caso particular do arranjo).

→ Temos Permutação sem repetição $P_n = n!$

→ Temos Permutação com repetição $P_n^x = \frac{n!}{x!}$

havendo mais repetições: $P_n^{x,y..z} = \frac{n!}{x!y!...z!}$

→ Temos Permutação circular $P_c m = (m-1)!$

Combinação: A ordem não importa

→ Temos Combinação $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2017.

Ao responder a essa questão, Vini tentou evidenciar tudo o que havia aprendido sobre cada um dos agrupamentos. Optamos por trazer a resposta dele na íntegra, pois foi o único estudante que assinalou todos os casos em que poderiam ocorrer arranjo, permutação e combinação. Essa construção de Vini mostra-se amparada principalmente pelo atributo ordem, indicando os agrupamentos ordenados e não ordenados. Quanto à permutação, Vini a concebe como um caso particular de arranjo, reforçando o atributo ordem e evidenciado quando nos explicou sua resposta à letra “b” dessa mesma questão 1 da aula 9.

Organizamos as respostas do licenciando a essa questão na tabela 21 e estabelecemos um paralelo entre ideias conceituais iniciais e finais de Vini.

Tabela 21 – Imagens iniciais e finais de Vini sobre a combinatória simples

AGRUPAMENTOS	*IMAGENS INICIAIS (11/08/17)*	*IMAGENS FINAIS (20/10/17)*
Arranjo	*Organizar elementos seguindo um critério ou mais.*	*Quando a ordem importa.*
Permutação	*Troca de posições. De elementos, números, peças etc*	*A ordem importa e usam todos os elementos do conjunto. É um caso particular de arranjo.*
Combinação	*Combinar dois ou mais elementos segundo um ou mais critérios.*	*A ordem não importa.*

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras, 2017.

Em relação ao arranjo, Vini esclareceu, no retorno em 2018, que, ao redigir "quando a ordem importa", se referiu ao critério assinalado em sua imagem inicial em 11/8/17. Assim, consideramos que Vini apresentou uma reconstrução positiva em que esclareceu e incluiu o critério "ordem importa" como o essencial para a existência desse tipo de agrupamento. Entendemos esse critério como um atributo relevante e necessário à identificação do modelo combinatório implícito em um problema. No que concerne à permutação, consideramos que Vini passou de uma noção mais intuitiva "troca de posições" para uma imagem associada ao atributo ordem, o que, de certa forma, se aproximava mais da matemática formal. Quanto à combinação, Vini, mais uma vez, manteve fixo o atributo ordem. No entanto, de modo diferente de um arranjo e de uma permutação, aqui informou que a ordem não era relevante, por isso registrou que a ordem não importava.

Assim como percebemos nos dados de Alex e Geane, observamos em Vini que algumas imagens, tais como ordem e quantidade de elementos usadas em cada agrupamento, foram praticamente mantidas em todas as respostas dele. Notamos que, ao longo do processo, Vini apresentou imagens conceituais mais coerentes e relacionadas às ideias matemáticas. No entanto, ao estabelecer um comparativo, constatamos que as imagens evocadas se complementavam, pois não foi totalmente crescente em termos de incorporação de atributos relevantes que caracterizam cada conceito de combinatória simples. Mais uma vez, confirmamos que as imagens conceituais evocadas por Vini, Alex e Geane foram reconstruções pessoais (TALL; VINNER, 1981) subsidiadas principalmente pelo atributo ordem e pelo uso ou não de todos os elementos do conjunto dado inicialmente. O atributo natureza não foi claramente considerado nas definições dos estudantes.

Em termos processuais:

- da aula 1 (11/8/17), quando Vini definiu pela primeira vez os conceitos de combinatória simples, para a aula 2 (12/8/17), houve uma reconstrução por inclusão positiva de algum atributo em complementação à imagem inicial e o atributo ordem manteve-se fixo;
- da aula 2 para a 4 e desta para a aula 7, as imagens conceituais reconstruídas pareceram refinadas em virtude das explicações dadas pelo estudante aos problemas resolvidos;
- da aula 7 para a 9, os atributos ordem e quantidade de elementos do conjunto inicial mantiveram-se estáveis e o atributo ordem continuou em evidência;
- da aula 1 para a 9, houve uma reconstrução por inclusão positiva de algum atributo relacionado à definição do conceito em complementação à imagem inicial.

Em termos de cenários nos quais o processo de reconstrução ocorreu:

- Imagem de conceito flexível que foi alterada para incluir ou acomodar novas maneiras de ver o conceito e, apesar de apropriada, ela não explica o conceito com precisão, mas mostra que ocorreu algum evento de aprendizagem.

Breve síntese

Nossa escrita sobre os dados individuais dos estudantes teve por base principalmente os textos de Tall e Vinner (1981), Hershkowitz (1994) e Skemp (1976), os quais foram estudados anteriormente no capítulo de referencial teórico. Nos dados individuais, vimos que, embora em matemática os conceitos sejam definidos com precisão, quando em situação de ensino, são evocadas imagens do conceito, e não da definição em si. As imagens aparecem associadas ao nome dado ao símbolo (TALL; VINNER, 1981) na condição de entidade linguística; a atributos relevantes que caracterizam o conceito (HERSHKOVITZ, 1994); a exemplos protótipos que servem de julgamento e parâmetro para o desenvolvimento de outras tarefas (HERSHKOVITZ, 1994); e as formas como eles aparecem podem ser mais relacionais ou mais instrumentais (SKEMP, 1976), variando de acordo com as experiências de aprendizagem de cada estudante.

Geralmente aspectos da definição foram evidenciados como atributos relevantes que justificaram a existência de determinado modelo combinatório implícito ao problema. Por outro lado, vimos principalmente em Alex que uma definição geométrica sobre triângulos serviu para justificar um caso de combinação que apareceu na aula 7, problema 7, afirmativa "f": "Escolher três vértices de um cubo para formarmos triângulos". Além disso, a definição foi entendida como parâmetro para fins de identificação de imagens coerentes ou incoerentes, pois matematicamente ela fornece uma base sólida e aceita.

Ao longo de toda a análise, vimos que as imagens conceituais da definição do conceito não foram estruturas tão rígidas, mas continham partes fixas que se mantiveram de maneira persistente, como o atributo ordem. Quando, em situação de conflito, elas puderam ser mobilizadas e reconstruídas por inclusão ou exclusão positiva ou negativa. Assim, vimos uma constante de reconstrução por inclusão positiva, que, de fato, foi desenvolvida por meio de experiências de ensino e reconstruída à medida que os estudantes encontravam novos estímulos e se aperfeiçoavam (TALL; VINNER, 1981). Desse modo, as imagens conceituais não foram um todo coerente em todos os momentos. Além disso, foram ativadas por diferentes estímulos (TALL; VINNER, 1981; TALL, 1988) e apresentavam aspectos diferentes da definição formal do conceito. Por isso, continham fatores que poderiam entrar em conflito com tal definição "[...] e podem nem mesmo ser conscientemente observados pelo indivíduo, mas eles podem causar confusão em lidar com a teoria formal" (TALL; VINNER, 1981, p. 153, tradução nossa[164]).

Concebemos que, no ensino superior, as definições são importantes à apreensão de imagens conceituais e à realização de tarefas específicas. Contudo, realmente não há como forçar alguém a usar uma definição nem para formar uma imagem, nem para operar com ela em uma tarefa. Isso varia principalmente devido à experiência do sujeito com a resolução de problemas e com o conhecimento matemático em si, pois cada licenciando já trazia alguma informação do ensino médio. Alguns estudantes conseguiram movimentar suas estruturas mentais com muita facilidade, à medida que reconheciam os conflitos existentes. Nesse cenário, o professor apresentou-se como um motivador e instigador (provocador), orientando e ajudando o estudante em seu processo de aprendizagem que é único e específico. Por isso, embora os resultados finais de Alex, Geane e Vini se assemelhassem, os processos pelos quais se deram foram peculiares e distintos. Desse modo, mostraram-se mais potentes em termos processuais do que se comparados às respostas finais. Não concebemos que definições sejam esquecidas, mas precisam ser integradas com mais naturalidade ao processo de ensino e de aprendizagem e construídas de maneira relacional integrada com a própria matemática.

[164] [...] and may not even be consciously noted by the individual but they can cause confusion in dealing with the formal theory.

Por fim, percebemos que quando os estudantes receberam as tarefas específicas, elas funcionaram como um estímulo para eles pensarem, questionarem e resolverem. Assim, nós notamos que esses estímulos provocados pelas tarefas excitaram algumas vias sensoriais e inibiram outras. “Dessa forma, diferentes estímulos podem ativar diferentes partes da imagem conceitual” (TALL, VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa[165]). Tal afirmativa quer dizer que, quando vemos ou ouvimos o nome de um conceito, nossa memória é estimulada e algo acerca dele é mobilizado e evocado, tornando-se presente pelo exercício da memória. Mostra, portanto, que, embora conceitos sejam precisamente definidos, as realidades psicológicas das pessoas são diferentes. Além disso, “[...] uma estrutura cognitiva complexa existe na mente de cada indivíduo, produzindo uma variedade de imagens mentais pessoais quando o conceito é evocado” (TALL; VINNER, 1981, p. 151, tradução nossa[166]).

[165] In this way different stimuli can activate different parts of the concept image [...].
[166] [...] and a complex cognitive structure exists in the mind of every individual, yielding a variety of personal mental images when a concept is evoked.

CAPÍTULO 6: CONSIDERAÇÕES, APONTAMENTOS E REFLEXÕES FINAIS

Desenvolvemos esta pesquisa com o propósito de respondermos às indagações:

> *1) Quais imagens conceituais universitários evocam quando resolvem tarefas de análise combinatória?*
>
> *2) Como as imagens conceituais de universitários acerca de agrupamentos simples se reconstroem durante uma disciplina que aborde análise combinatória?*

Por isso, nossos objetivos foram identificar imagens conceituais evocadas por universitários quando resolvessem tarefas de combinatória, e investigar como as imagens conceituais de universitários acerca de agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação se reconstroem quando trabalhamos com tarefas específicas de combinatória. Assim sendo, apresentamos, no capítulo 1, nossos interesses para realizar esta pesquisa, aos quais associamos hipóteses, questões e objetivos de investigação. Além disso, descrevemos, no capítulo 2, o mapeamento de pesquisas relacionadas à análise combinatória, pois queríamos conhecer o que havia produzido sobre o tema desde o fim dos anos 1990 até o início da produção e coleta de dados de nossa pesquisa em 2017. No capítulo 3, tratamos dos aportes teóricos que sustentaram nosso estudo, a partir dos quais aprofundamos nosso conhecimento sobre análise combinatória, imagem conceitual e definição do conceito.

A forma como planejamos e desenvolvemos esta pesquisa também contribuiu para alcançarmos nossos objetivos. Por isso, discutimos, no capítulo 4, a metodologia usada para coletar, produzir e interpretar dados e informações. Com base no quadro teórico e metodológico, realizamos, no capítulo 5, a análise e interpretação de dados e informações que sistematizamos durante o processo de pesquisa. Neste capítulo, sintetizamos as respostas encontradas para nossas indagações centrais, sobre as quais tecemos algumas considerações que julgamos imprescindíveis. Posteriormente, trazemos alguns apontamentos e reflexões finais.

6.1 Questões de pesquisa e possíveis respostas

Ao respondermos às nossas questões, entendemos a compreensão de outra pessoa sobre um conceito matemático, o que não é simples e nem fácil. Reconhecemos que é difícil acessar a imagem conceitual de alguém em sua totalidade. No entanto, identificamos imagens suscitadas, quando estudantes foram estimulados durante a realização de tarefas específicas.

Assim, a escolha de tarefas apropriadas e as interações entre o sujeito que compreende e o objeto de compreensão foram potentes para examinarmos imagens conceituais. Desse modo, apresentamos algumas considerações sobre a primeira questão de pesquisa e posteriormente tratamos das respostas à segunda questão:

> ***Questão 1:*** *Quais imagens conceituais universitários evocam quando resolvem tarefas de análise combinatória?*

Os dados obtidos nesta pesquisa apontaram que os estudantes evocaram imagens conceituais (i) da definição do conceito relacionada principalmente à ideia de agrupamento ordenado e não ordenado, um atributo relevante que incide diretamente sobre a identificação do modelo combinatório implícito ao problema, na utilização de exemplos protótipos para validar as ideias conceituais das quais falavam e nas estratégias utilizadas na solução dos problemas; (ii) de outros conceitos matemáticos, e o que ficou mais evidenciado foi a probabilidade associada à ideia de possibilidade, que, embora possua relações com a combinatória, foi evocado em contextos inapropriados; por outro lado, alguns estudantes evocaram também imagens conceituais de outros conteúdos matemáticos, para justificar a existência de algum modelo combinatório implícito nas tarefas específicas, e isso foi visto especialmente em Alex na aula 7, problema 7, afirmativa "g"; na ocasião, o estudante evidenciou uma definição sobre formação de triângulos, para justificar sua opção por uma combinação; (iii) do processo de ensino e de aprendizagem de combinatória construída anteriormente à licenciatura apreendida das memórias dos estudantes sobre as experiências do ensino médio.

As respostas dos licenciandos aos blocos 1 e 2 de tarefas específicas apontaram que imagens conceituais de combinatória anteriores ao ingresso na licenciatura decorreram do ensino médio, visto como primeira fonte formal de aprendizagem do conteúdo. Notamos que o conhecimento prévio de combinatória como parte da matemática discreta e dos agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação dos estudantes não era um todo coerente. Apresentava algumas imagens conceituais da definição do conceito oscilando entre coerentes, fragmentadas, incoerentes e equivocadas em relação ao conceito formal descrito pela literatura matemática. Por isso, os licenciandos possuíam uma imagem conceitual mais intuitiva. Desse modo, confirmamos nossa primeira hipótese de pesquisa.

De modo geral, os estudantes evocaram uma imagem da definição do conceito de combinatória segundo a opinião deles. Para nós, elas se apresentaram oscilando entre:

coerentes: quando, por exemplo, citaram agrupamentos que nela são estudados, a caracterizam como um componente curricular de ensino médio e apresentaram relações com a teoria de conjuntos;

confusas: quando fizeram associações relacionadas somente à ideia de combinar; e

incoerentes: quando evocaram a imagem conceitual de outro conceito matemático; neste caso, a probabilidade relacionada à possibilidade.

A respeito disso, Tall e Vinner (1981) destacaram que, embora na matemática os conceitos sejam definidos com precisão, as realidades psicológicas de cada um são diferentes e isso implica a produção de imagens mentais pessoais, quando um conceito é evocado. Portanto, justifica o fato de terem apresentado imagens distintas. Outro ponto que merece destaque é que essa literatura de base de nossa pesquisa aponta que questões distintas podem suscitar imagens distintas. No entanto, algumas respostas dos estudantes a diferentes indagações nossas apontaram que questões distintas também evocam imagens próximas, quiçá iguais às anteriores e, assim, denotam quão fortes e arraigadas são as imagens conceituais e as associações construídas ao longo da escolarização.

Por outro lado, as imagens conceituais iniciais identificadas demonstram que estudantes desconhecem alguns termos, como é o caso de agrupamentos, matemática discreta e métodos de contagem. Esses e outros vocábulos estão na base do pensamento combinatório e podem não ter aparecido durante aulas da educação básica. Por exemplo, o termo agrupamento é descrito, desde a década de 1970, na literatura matemática, em produções como a de Bachx, Poppe e Tavares (1975), e, Barbosa (1975). Além disso, é um termo muito empregado por Paiva (2009) e, como este foi o autor do livro didático utilizado pelos licenciandos no ensino médio, esperávamos que eles o destacassem em suas respostas, mas isto não aconteceu. Uma imagem evidenciada pelos licenciandos que se mostrou coerente com a definição dada à combinatória por Morgado et al. (2016) é a designada como "parte da matemática".

O fato de os estudantes terem evocado a noção de conjuntos é bastante peculiar, pois ela se encontra na base das relações combinatórias desde os tempos mais remotos. Isso é evidenciado por livros didáticos das décadas de 1970, 1980, 1990 e atualmente. Paiva (2009) e outros autores, como Bachx, Poppe e Tavares (1975), Barbosa (1975), Morgado et al. (1991) e Hazzan (1993), ressaltam que resultados da teoria de conjuntos são importantes à análise combinatória, pois um deles "é o cálculo do número de elementos da união de dois conjuntos finitos" (PAIVA, 2009, p. 159).

A noção de conjuntos apareceu em maior escala no livro escrito por Barbosa (1975).

Ao discorrer sobre análise combinatória, esse autor sempre toma por base fragmentos da teoria de conjuntos como potencializadores para o ensino desse conteúdo. Talvez isso tenha ocorrido em função do Movimento da Matemática Moderna ocorrido nas décadas de 1960–1970. Na ocasião, enfatizou-se fortemente o ensino de matemática mediante a teoria de conjuntos. Tal fato influenciou tanto autores de livros didáticos, conforme pode ser o caso de Barbosa (1975), quanto políticas educacionais da época. Ressaltamos que atualmente, apesar de não tanto realçada, a noção de conjuntos ainda aparece atrelada ao ensino de análise combinatória. Consideramos esse fato relevante em virtude de estruturas conceituais de combinatória se reportarem à noção de contagem de elementos de conjuntos finitos. Dessa maneira, entendemos que a compreensão adequada da teoria de conjuntos auxilia os alunos na aprendizagem de combinatória e no desenvolvimento de imagens conceituais mais coerentes.

As respostas dadas pelos licenciados, quando questionados sobre a compreensão deles de análise combinatória, não se relacionaram à obtenção de métodos de contagem. Além disso, eles não mencionaram o Princípio Fundamental da Contagem em suas manifestações aditivas e multiplicativas como um dos alicerces da combinatória. Se comparadas à literatura matemática e ao que comentamos a respeito delas, notamos imagens conceituais fragmentadas.

O uso de exemplos remete ao fato de que, durante a escolarização, vamos criando protótipos (HERSHKOWITZ, 1994) e construindo imagens de tipos de problemas combinatórios que se cristalizam e, em algum momento, são manifestados, como visto especialmente em Alice e Vini. Assim, também criamos imagens do que seriam bons exemplos de problemas, ou seja, os melhores protótipos para representar a situação dada. Vê-se que, mesmo demonstrando equívocos conceituais quanto à classificação, Alice e Vini conseguiram elucidar certa noção da estrutura de um problema de pensamento combinatório. Assim como Vinner (1983), descobrimos que, muitas vezes, nossos alunos não conhecem os conceitos e têm imagens conceituais erradas. Essas imagens podem ser resultado de um conjunto específico de exemplos dado aos estudantes durante o processo de escolarização fomal. Por outro lado, o autor destaca que exemplos fazem parte do processo de apreensão de imagens conceituais.

> ***Questão 2:*** *Como as imagens conceituais de universitários acerca dos agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação se reconstroem durante uma disciplina que aborde análise combinatória?*

A reconstrução das imagens ocorreu (i) via planejamento de aula, no qual as tarefas específicas serviram tanto à disciplina quanto à pesquisa. Por isso, pesquisadoras e professora regente trabalharam em colaboração durante os semestres letivos de 2016/2, 2017/1 e 2017/2, quando realmente aconteceu a produção e coleta de dados final; (ii) pela resolução de problemas combinatórios envolvendo os agrupamentos simples de modo integrado e relacionado; (iii) pelas discussões matemáticas envolvendo a turma inteira, orientadas e dirigidas tanto pelas pesquisadoras quanto pela professora; (iv) pelo enfoque dado à compreensão do enunciado de problemas com vistas à identificação do *tipo de solução* requerida – existência, contagem, classificação, enumeração e otimização; *número de operações* combinatórias envolvidas – simples ou compostas; *modelo combinatório implícito* no enunciado – seleção, colocação, partição, ordenação ou composição; *tipo de objeto* – pessoas, números, letras, flores; entre outro; e *tamanho e variação dos parâmetros* – pequenos/grandes, variáveis/não variáveis.

Os resultados desta pesquisa, nossos estudos sobre o assunto e experiências profissionais acerca do ensino, aprendizagem e avaliação dele permitem-nos aferir que a compreensão do modelo combinatório implícito no enunciado conduz todo o processo de resolução de problemas combinatórios. Para nós, essa compreensão indica o tipo de problema quanto à solução desejada, ao número e ao tipo de operação e/ou agrupamento (arranjo, permutação, combinação) envolvido, à identificação do tipo de objeto e ao tamanho e variação dos parâmetros, cujo detalhamento foi feito no capítulo de referencial teórico.

De modo geral, percebemos que as imagens dos licenciandos são carregadas de incompletudes e forneceram pistas de como eles compreendiam a combinatória e da relação que estabeleceram com ela anteriormente. Os atributos mencionados pelos estudantes não são de boa qualidade para proporcionar uma visão geral da combinatória. Basearam seus julgamentos naqueles que consideraram relevantes, principalmente na característica “ordem”, embora se mostrasse insuficiente para designá-la. Pareceu-nos, assim, que o entendimento dos licenciandos ainda se encontrava em desenvolvimento, em construção. Por isso, apresentava-se de modo incipiente para quem almejava ser um futuro professor de matemática que provavelmente ensinará combinatória, de modo que dificilmente eles ensinarão algo do qual não possuem um conhecimento adequado de conteúdo (SHULMAN, 1986; 1987). Isso é preocupante, e, caso os estudantes não ampliem o entendimento deles e demonstrem imagens mais coerentes, podem abandonar o ensino de combinatória até mesmo em nível médio. Em nossa pesquisa, como esse fato foi identificado antes do início da disciplina, ele serviu de potencializador para pensarmos o ensino de combinatória na formação inicial de professores de matemática. Além disso, foi um incentivo para que os licenciandos se interessassem em construir uma imagem conceitual mais coerente com o assunto em questão.

Ademais, ao solicitarmos que os licenciandos escrevessem suas compreensões pessoais sobre combinatória, notamos que associações e representações relacionadas ao livro didático estavam implícitas nas respostas, isso pelo fato de o livro didático ter sido o objeto formal de aprendizagem dos estudantes sobre combinatória. A abordagem dada por ele no ensino médio pareceu estimular os estudantes a construírem imagens conceituais do objeto matemático. E consideramos que práticas de professores de matemática acerca dos conteúdos propostos nos livros também influenciaram essa construção. Portanto, reconhecemos que tal abordagem auxilia na compreensão de comportamentos de professores em exercício e de futuros professores quanto aos tópicos de análise combinatória. Dizemos isso pelo fato de, ainda hoje, o livro didático ocupar papel de destaque no ensino e na aprendizagem de estudantes em diferentes níveis de ensino. Além de ser um suporte à aprendizagem de estudantes, ele sustenta a prática de sala de aula de muitos professores.

Um dos tópicos ressaltados por Paiva (2009), autor do livro didático utilizado pelos licenciandos anteriormente, nas poucas[167] páginas dedicadas a combinatória, denomina-se "O que é análise combinatória". Nele, Paiva (2009) não definiu combinatória, mas informou que seu objetivo era estabelecer/obter "métodos de contagem que atinjam resultados mais rapidamente" (p. 155). Assim, mostrou-se coerente com a ausência de uma definição pelos estudantes que explicasse o conceito de maneira objetiva. O livro pelo livro, sem a problematização do professor e sem o registro pelo aluno, não estimula a construção de imagens conceituais coerentes. No entanto, como visto no capítulo 1, a combinatória é um assunto pouco estudado, e alguns cursos de formação inicial de professores não contemplam a disciplina. Isso ocasiona outro problema: como o professor vai estimular o desenvolvimento de imagens conceituais se ele mesmo, às vezes, não tem clareza de como isso deve ser feito?

Além disso, Paiva (2009) pareceu apresentar uma visão utilitarista de combinatória, considerando-a como útil para estabelecer métodos de contagem que auxiliem na obtenção de resultados mais rápidos. Essa visão foi evocada pelos licenciandos em suas respostas. Reconhecemos que as relações algébricas estabelecidas por Paiva (2009), quando da construção das fórmulas, são mais complexas e exigem maior abstração dos estudantes e cuidado no desenvolvimento do conteúdo pelo professor. Nesse ponto, vê-se que estudantes podem optar por decorar a fórmula em si. Assim, sua aprendizagem será mais instrumental, e

[167] Ao organizar o livro em 15 capítulos distribuídos em 312 páginas, Paiva (2009) dedicou apenas 32 páginas (9,93% do total) à combinatória.

dificilmente saberão explicar os motivos pelos quais usam tal fórmula e de que maneira ela funciona em cada situação.

Em suma, as imagens evocadas pelos licenciandos denotam suas reconstruções pessoais. Os argumentos utilizados por eles, mesmo em alguns momentos, não sendo aqueles reconhecidos matematicamente, relacionaram-se com a combinatória. Então, destacamos que as imagens apresentadas pelos licenciandos foram desenvolvidas com suporte em uma reconstrução pessoal das aprendizagens deles. Elas se mostraram carregadas das concepções e entendimentos pessoais. Por isso, vemos emergir das respostas uma possível reformulação por inclusão positiva de elementos matemáticos formais, ou não, que subsidiam o desenvolvimento de imagens conceituais. Portanto, mostraram-se oscilando entre o coerente e o incoerente (TALL, VINNER, 1981).

Na combinatória, assim como em outros conteúdos da matemática, existem definições formais para conceitos específicos. Com as respostas às tarefas, identificamos que os licenciandos não utilizaram definições precisas, ao descreverem o entendimento deles sobre combinatória em contexto de ensino formal. Portanto, ao considerarmos imagens conceituais como a "estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais e propriedades e processos associados" (TALL, VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa[168]), não podemos conceber que as respostas evocadas pelos licenciandos são definições conceituais precisas, pois elas não explicam cuidadosamente o conceito, mas, conforme visto, continham partes da definição.

Diante disso, questionamo-nos: *Como seria possível uma reconstrução pessoal do conceito de combinatória que apresente o maior número de atributos relevantes?* Para que isso aconteça, o professor formador tem um papel fundamental: ele precisa ter (1) uma compreensão relacional do conteúdo além de ter também uma compreensão instrumental (SKEMP, 1976), (2) conhecer as visões de matemática (ERNEST, 1988) e suas implicações para o ensino, e, (3) conhecimento de conteúdo específico, de metodologias de ensino relacionadas a ele, do currículo e dos alunos (SHULMAN, 1986; 1987). Essa conjuntura permitirá que o estudante desenvolva processos de pensamento capazes de caracterizar a combinatória de modo mais coerente.

Se pretendemos que futuros professores sejam bem instruídos, uma das primeiras tarefas de um formador é evidenciar o que eles já sabem a respeito do assunto e como o

---

[168] [...] the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes.

entendem. Embora a discussão sobre conhecimentos prévios e avaliações diagnósticas já tenha se tornado enfadonha e mal utilizada no contexto de sala de aula, evidenciamos que ela foi potente em nosso estudo, quando ocorreu a utilização das tarefas específicas. Por isso, valorizamos esse tipo de tarefa quando: (1) é desenvolvida de modo consciente pelo professor formador; (2) potencializa a compreensão do arcabouço de pensamentos dos estudantes; (3) nos permite perceber as imagens conceituais evocadas por estudantes quando trabalham em uma tarefa específica; e (4) impulsiona o planejamento de aulas associando matemática, conhecimento dos estudantes, metodologias de ensino, aprendizagem e avaliação. Alertamos que não adianta fazer um diagnóstico para evidenciar o que o estudante não sabe, e sim aquilo que ele sabe, o que é potente.

Assim sendo, confirmamos nossa segunda hipótese, na qual assinalamos que algumas pesquisas argumentam que desde a educação básica até cursos universitários, é dado ao estudo de conceitos de combinatória um tratamento breve e superficial. Dessa forma, estudantes universitários podem apresentar dificuldades em relação ao conhecimento de combinatória. Por isso, nos interessamos em investigar a aprendizagem desse conhecimento por universitários de um curso de licenciatura em matemática. Nesse contexto, o planejamento integrado de pesquisa e aula e/ou aula e pesquisa foi potente à reconstrução de imagens conceituais apropriadas.

Portanto, cabe aqui, neste momento em que concluímos as respostas às questões que nortearam nossa pesquisa e após quase quatro anos de estudo intenso, destacar o que consideramos como a principal tese que este estudo defende à luz das análises dos dados obtidos: ***O trabalho integrado e simultâneo envolvendo os agrupamentos simples de combinatória mediante a compreensão da estrutura matemática subjacente ao enunciado a partir de aulas baseadas na resolução de problemas e em práticas discursivas em matemática possibilitam o enriquecimento das imagens conceituais e a preparação do licenciando para lecionar o conteúdo de modo mais adequado na educação básica.*** Respondidas as questões de pesquisa, trazemos a seguir em considerações finais alguns apontamentos e reflexões quanto aos impactos da pesquisa na produção do conhecimento teórico e em nossa vida profissional e deixamos algumas propostas para pesquisas futuras.

6.2 Considerações finais: apontamentos teóricos, impactos em nossa vida profissional, limites do estudo e pesquisas futuras

Apontamentos teóricos

Em primeiro lugar, consideramos que a pesquisa que desenvolvemos ressignifica as bases teóricas de Tall e Vinner (1981) ao entender o papel dos afetos na construção de imagens conceituais e trazer à tona para a comunidade científica as imagens referentes ao ensino e a aprendizagem. Além disso, nossa pesquisa evidencia e entende que imagens de outros conceitos matemáticos podem emergir quando se trabalha com tarefas específicas que buscam evocar imagens conceituais. Alguns dados do estudo preliminar forneceram pistas de que outro aspecto teórico emerge de nossa pesquisa de doutorado: o surgimento de crenças sobre formas de aprendizagem em matemática. Elas foram evidenciadas quando realizamos o estudo preliminar. Para nós, essa crença complementaria os estudos de Gómez Chacón (2003), pelo fato de não se relacionarem à motivação, e sim aos métodos por meio dos quais se aprende e se organiza o ensino de determinado tópico matemático. No entanto, os dados que evidenciam o surgimento da crença mencionada, ainda precisam ser analisados em profundidade e divulgados em publicações futuras.

Impactos em nossa vida profissional

A pesquisa que desenvolvemos foi de grande impacto para nossa vida profissional, pois aprofundamos nosso conhecimento sobre combinatória. Isso nos fez movimentar nossas próprias imagens conceituais da definição e sobre os métodos e processos de ensino utilizados em cursos de nível superior, especialmente na licenciatura. Assim, possibilitou-nos reconstruir as próprias imagens sobre bases matemáticas mais sólidas.

Mostrou-nos que, como professores do ensino superior, às vezes, priorizamos conteúdos mais genéricos e abstratos durante o curso de licenciatura. É comum esquecermos que conteúdos a serem ensinados na educação básica precisam ser incorporados, trabalhados e relacionados à matemática superior tratada durante a formação inicial. Além disso, aprendemos a analisar livros didáticos de ensino médio, buscando indicar como pode ser o trabalho do professor para desenvolver imagens conceituais por intermédio desse recurso institucional e instrucional. Este será divulgado em trabalhos posteriores.

Incorporamos o conceito de tarefas específicas cunhado por nós especialmente para o desenvolvimento desta pesquisa e de discussões matemáticas orientadas envolvendo a turma inteira. Esse movimento fez-nos “ver”, em profundidade, o papel da resolução de problemas no ensino e na aprendizagem de combinatória, visto que é necessária uma mudança de postura ante os modos de concebê-la na formação inicial de professores. É preciso trabalhar com a compreensão dos enunciados e tê-los como fundamento da aprendizagem matemática.

O trato com as ideias relacionadas à estrutura matemática subjacente, modelo combinatório implícito, atributos e protótipos, além das possibilidades de resolução e formulação associadas a um "que fazer", precisa ser ampliado para uma compreensão relacional mais profunda. Esta deve envolver a compreensão do objeto matemático e sua relação com finalidades de ensino, elementos discursivos de composição textual, cenários incorporados, antecipações de estratégias de resolução, previsão de possíveis equívocos, testagens com outros professores e alunos, reformulações e trabalho com o problema em si na sala de aula.

Consideramos que o lugar da análise combinatória no currículo da formação inicial deve ser pensado em termos de período em que a disciplina é oferecida, carga horária destinada, dias e horários de aula. Além disso, sugerimos que não seja tratada simultaneamente à probabilidade. Nossa pesquisa mostrou que isso gera conflitos conceituais nos estudantes. A cada uma deve ser garantida sua peculiaridade, e o professor saberá o momento de motivar as relações conceituais entre os próprios campos da matemática.

Acerca do uso de fórmulas tão requerido na aprendizagem instrumental, ressaltamos que ela deve ser aprendida e utilizada em diferentes momentos, principalmente quando os números envolvidos nos cálculos designam grandes quantidades. Salientamos a importância de o estudante compreender e saber decidir em quais casos a regra é necessária, aqueles em que podem usar outras possibilidades/estratégias de resolução e que, acima de tudo, compreenda a estrutura matemática subjacente a ela. Grande parte dos estudos desenvolvidos até o momento sobre a análise combinatória aponta que o uso descontrolado e inconsequente de fórmulas tem ocasionado um ensino mecânico e instrumental.

O modo como procedemos o desenvolvimento metodológico desta pesquisa e as boas relações construídas entre pesquisadoras e professora regente foram de grande valor formativo, principalmente para nossa formação continuada em serviço. Aproveitamos os momentos de planejamento para estudar matemática, resolver problemas, e para pensar (i) em erros e acertos, (ii) enunciados mais simples e complexos, (iii) no licenciando que estava na sala cursando a disciplina e (iv) nos alunos que porventura encontrariam na educação básica durante o próprio estágio supervisionado.

Também, juntas, aproveitamos esses momentos de trabalho para "puxarmos nossas próprias orelhas". Lembro-me de uma tarde em que Letícia e eu estudávamos resolução de problemas no Laboratório Interdisciplinar de Formação de Professores no IFES *campus* Cachoeiro de Itapemirim. Eu havia levado um *e-mail* impresso redigido pela professora Vânia para mostrar a Letícia, visto que nele havia considerações relevantes à prática de resolução de problemas em sala de aula. Na ocasião, Letícia se apropriou do *e-mail* e o leu e releu várias vezes. Por fim, exclamou e ficou repetindo para si mesma: trabalhar menos tarefas com mais profundidade! Essa atitude de Letícia muito me marcou, visto que ela possuía o hábito de elaborar listas enormes de exercícios e pouco explorá-los em termos processuais, conceituais e relacionais, além de focalizar resultados por meio de fórmulas ou procedimentos prontos.

Em 4/10/17, Letícia e eu estudávamos no LIFE. De repente, começamos a falar sobre a pesquisa que eu estava desenvolvendo sob a orientação da professora Vânia. Então, informalmente, perguntei a ela:

> ***Pesquisadora:*** *Se você tivesse que fazer uma avaliação sua enquanto professora, do meu comportamento de pesquisadora, do tipo de aula que você deu no semestre passado (2016/2) e nesse semestre (2017/2), o que você poderia me dizer?*
> *[...]*
> ***Letícia:*** *Esse ano, 2017, eu me dediquei mais a estudar. Parei para verificar os problemas, estudar os problemas e para ver qual o aluno poderia alcançar o objetivo dele mesmo construir o conceito envolvido no problema em relação ao conceito dos agrupamentos simples de combinatória. Ano passado eu já peguei pronto do livro. Eu não fiz aquela construção [...]. Eu fiz assim: [...] dei combinação primeiro, depois dei arranjo e permutação, mas tudo assim separadinho. E, nesse não! Algumas questões foram misturadas né. Os alunos que tinham que identificar a diferença de um para o outro, e nisso, eu parei para estudar, separar, poder anotar e resolver o problema. Além disso, verifiquei o que eu gostaria que o aluno fizesse, as várias demonstrações deles escreverem também, de querer que eles colocassem o pensamento matemático no papel. No meu caderno eu fiz as construções também, de fazer os desenhos e outras formas de resolver o problema, de não querer apenas a fórmula. Abri um espaço para os alunos irem ao quadro, coisa que foi bem raro no semestre anterior. Não foi como esse ano, esse ano a maioria dos problemas, os alunos foram no quadro para resolver.*
> *[...]*
> ***Pesquisadora:*** *Em relação ao diálogo e a interação que você teve com os licenciandos, você acha que foi diferente?*
> ***Letícia:*** *Tá diferente. Ano passado, poucas vezes, ou, eu nem sei se eu cheguei a ir na mesa deles ou de alguém sentar na minha mesa para poder me pedir ajuda, para eu poder tentar explicar, como aconteceu na última aula com Felipe. E dessa vez não! Eu pude tá indo na mesa, tá perguntando, tá questionando, tá propondo outro problema para eles resolverem.*
> *[...]*
> ***Pesquisadora:*** *O que a motivou a planejar comigo e com a professora Vânia?*
> ***Letícia:*** *[...] como você veio pedir aí é claro que eu vou ajudar, então me motiva porque você precisava e eu não via nenhum empecilho pra isso e eu achei muito bom porque igual lá no primeiro semestre você ficou só observando, mas nesse semestre você me ajudou a planejar, a elaborar as aulas, a não ficar na zona de conforto, não que eu goste da zona de conforto, mas ajudou, contribuiu muito né, a Vânia também nas conversas que você tinha com ela, nas ideias que ela colocava.*
> ***Pesquisadora:*** *É... você acha que o seu conhecimento de combinatória, o seu modo de planejar as aulas e de resolver as atividades é o mesmo?*
> ***Letícia:*** *Não, ele é diferente. Porque ano passado era baseado em colocar os dados na fórmula e achar as respostas. Esse ano não. Foi dado o problema e os alunos tinham que verificar primeiro qual o conceito que eles iam aplicar. Depois foi proposto pra eles resolverem de outras maneiras. [...] é... se ele esquecer da*

> *fórmula ele tem outros meios pra poder resolver, para o próprio aluno não ficar se prendendo a fórmula e quando ele chegar numa sala de aula ele não querer que o aluno dele se apegue a fórmula também.*
> ***Pesquisadora:*** *Entendi, e você acha que... você aprendeu um pouco mais sobre os conceitos de combinação, permutação e arranjo e sobre resolução de problemas?*
> ***Letícia:*** *Eu aprendi a também não ficar me apegando na fórmula. E também a prestar atenção na hora de resolver para observar o que o problema está pedindo. Então, serviu para mim também. Acrescentou muito ao meu conhecimento quando demonstrou outras maneiras de resoluções.*

Os argumentos acima mostram que a pesquisa de doutorado conseguiu provocar Letícia. Ela pareceu sair de sua “zona de conforto” e se dedicar a estudar um pouco mais tanto para compreender as ideias conceituais dos agrupamentos de combinatória quanto para selecionar problemas que pudessem auxiliar o licenciando a construir o conceito envolvido em cada tarefa. Letícia apontou ainda para a importância do planejamento em colaboração e para a mudança de sua relação com os estudantes, percebida, principalmente, em suas estratégias de ensino empregadas em sala de aula. Letícia narrou aspectos de seu crescimento profissional e os modos de se comportar em sala de aula de matemática quando se pensa, planeja e desenvolve aulas de análise combinatória. Desse modo, vimos que suas impressões acerca dos impactos da pesquisa em seus métodos e procedimentos de ensino foi além de nossas expectativas. Isto porque, na ocasião, Letícia não se constituía em nosso foco de investigação.

Limites do estudo e pesquisas futuras

O fazer pesquisa qualitativa

Quanto ao fazer pesquisa qualitativa com futuros professores, buscando compreender imagens conceituais, nossa opção por pesquisar a imagem associada aos três grupamentos simples de combinatória talvez não tenha sido a mais sadia. Foi maravilhoso, pois conseguimos vislumbrar a inter-relação entre eles. Por outro lado, gerou um volume muito grande de dados, e decidir quais seriam os melhores para a tese implicou colocar outros provisoriamente em *stand by*. Desse modo, sugerimos que outros pesquisadores pensem em ser menos “gulosos” e talvez desenvolvam retornos coletivos, uma vez que trabalhamos individualmente com cada licenciando posteriormente às aulas, nas quais priorizávamos as discussões matemáticas envolvendo a turma inteira.

Assinalamos que, mesmo não sendo a primeira pesquisa qualitativa desenvolvida por nós, pensar em toda a construção metodológica foi complexo. Envolveu disciplina quanto ao planejamento, implementação, coleta de dados, retorno, pensar nos participantes, em suas particularidades e no tipo de interação. Acabamos demorando mais que o esperado para transcrever na íntegra todos os dados dos licenciandos e todas as aulas de combinatória, pois optamos por gravar praticamente tudo. Isso porque percebemos, no estudo preliminar, que, quando solicitávamos aos licenciandos que escrevessem seu pensamento sobre a resolução de uma tarefa, por exemplo, eles não se mostravam motivados. Pareciam mais resistentes ao fato de escrever sobre o que era pedido. Por outro lado, quando informávamos que gravaríamos as respostas deles às questões, as interações fluíam com mais leveza e qualidade de detalhes. Esta decisão criou uma demanda maior de trabalho para transcrever tudo, ler e reler em vários momentos os dados que foram transcritos.

O mapeamento

Quanto ao mapeamento vimos que não há um lastro de relacionamento entre as pesquisas. São estudos individuais e isolados. Mesmo aqueles produzidos em uma mesma universidade, não apresentam uma relação entre si. Reconhecemos que há necessidade de ampliarmos o mapeamento iniciado por nós estendendo-o a outros cursos universitários. Ainda no mapeamento, quando analisamos algumas pesquisas em profundidade, nos chamou atenção o estudo de Fonte (2009). Há que se considerar que o objetivo da pesquisadora se mostrava mais amplo e complexo do que o objetivo da resolução de problemas em que se espera que o estudante atinja o resultado utilizando um caminho entre os possíveis para resolver o problema. Nas atividades investigativas espera-se que o estudante formule as questões a investigar, planeje como investigar e resolva. Portanto, nesse tipo de atividade podemos observar outros aspectos de pensamento dos estudantes e notar em quais ocorrem dificuldades e o que de fato entendem de uma questão que formularam para investigar.

Outras possibilidades teóricas

É necessário estabelecer um diálogo teórico entre as ideias assinaladas nesta pesquisa de doutorado e os referenciais específicos de formação de professores. Esta tornar-se-á uma possível agenda de trabalho futuro, visto que os resultados ensejam que os dados podem ser analisados pelo prisma teórico dos autores que falam sobre saberes profissionais docentes e tentar a partir disso, estabelecer uma articulação teórica entre imagem do conceito e formação de professores. E isto pode ser feito, exatamente, a partir das imagens sobre ensino e aprendizagem. Então, o caminho está indicado, mas ele não está percorrido ainda. Além disso, nossa pesquisa sinaliza para o aprofundamento do trabalho colaborativo entre pesquisador e sujeitos de pesquisa, o papel da colaboração na construção do conhecimento do professor formador e dos professores que ensinam matemática e outras disciplinas em cursos universitários de formação inicial de professores e em outros cursos de graduação.

Ademais, desejamos continuar o desenvolvimento desta pesquisa em outras turmas e em outras instituições, envolvendo um número maior de estudantes, a fim de verificarmos as similaridades e divergências entre os dados encontrados neste momento. Ressaltamos, ainda, que a sensibilidade de auscultar (LORENZATO, 2010) o estudante foi primordial para que todos os envolvidos aprendessem o máximo possível de matemática durante todo o desenvolvimento da pesquisa. De acordo com o autor,

> [...] é preciso auscultá-los; mais do responder a eles, é preciso falar com eles; mais do que corrigir as tarefas, sentir quem as fez e como elas foram feitas; mais do que aceitar o silêncio de alguns alunos, captar seus significados. Enfim, auscultar significa analisar e interpretar os diferentes tipos de manifestações dos alunos. O objetivo é saber quem são, como estão, o que querem e o que eles podem (LORENZATO, 2010, p. 6).

Esses aprendizados serão levados para nossa prática de professoras e de pesquisadoras, pois agora eles fazem parte de nós. E acreditamos que, por assim serem, eles permitirão que olhemos com mais sutileza o conhecimento combinatório e de matemática geral, mobilizado em curso de formação inicial de professores de matemática.

Consideramos, assim como Broetto (2016), que as maiores limitações de nossa pesquisa estão relacionadas às bases teóricas, metodológicas, sujeitos, tempo e espaço, pois as conclusões que apresentamos se respaldam em uma única turma composta por sete licenciandos. Além disso, nossas sínteses "estão relacionadas diretamente ao referencial teórico adotado, [à turma pesquisada], ao momento da coleta dos dados e à nossa leitura dos mesmos" (BROETTO, 2016, p. 339). Se fossem outros teóricos, turmas, momentos ou autores (pesquisadora e orientadora), provavelmente os resultados não seriam idênticos. Por outro lado, "[…] assim como em qualquer pesquisa de natureza qualitativa, essas limitações também são sua principal força criadora, pois permitem que novas perspectivas surjam e sirvam de sustentação ou inspiração para novos estudos ou novas práticas" (BROETTO, 2016, p. 339).

Entendemos que um trabalho de pesquisa não se encerra com a apresentação de determinados resultados, como é o caso daqueles que apresentamos neste estudo. Novas possibilidades surgem à medida que a pesquisa vai se desenrolando e reflexões pessoais são implementadas. Desse modo, na perspectiva de anteciparmos o desenvolvimento de estudos posteriores, elencamos eventuais problemáticas decorrentes de nossa pesquisa qualitativa.

Os dados mostraram que, além de fatores cognitivos (imagens do conceito), como o estado afetivo[169] do estudante pode influenciar significativamente na aprendizagem de combinatória. Haveria necessidade de ao menos três caminhos para pesquisas futuras. Primeiro pensar em um estudo aprofundado sobre o papel da elaboração de problemas na apreensão de imagens conceituais, para averiguar possíveis contribuições de estudos relacionados a crenças, visões e comportamentos de licenciandos que possam ser percebidos de modo subjacente em suas tarefas, ou possam apresentar-se de forma emergente a partir dos indícios fornecidos por eles, aferindo seus impactos para o desenvolvimento de imagens conceituais. Em segundo lugar pensar em investigar ideias semelhantes em momentos de formação continuada envolvendo professores da educação básica e professores formadores. O terceiro caminho seria desenvolver pesquisas investigando como a análise combinatória é tratada na educação infantil, pois não há nada produzido sobre o assunto envolvendo esse nível de ensino.

Por fim, encerramos com os ditos de Kavousian (2008): “ter uma imagem conceitual coerente pode ajudar os alunos a alcançar uma compreensão mais completa do conceito, que é o que permanecerá com eles” (p. 49, tradução nossa[170]). Além disso, fornecem pistas de metodologias de ensino que auxiliam no desenvolvimento de tais imagens (VINNER, 1983). Portanto, conhecê-las, permite que professores acessem imagens conceituais distintas, vejam como o conceito se desenvolve em diferentes perspectivas e pensem em formas diversificadas de ensino, aprendizagem e avaliação em combinatória.

[169] Nesta tese, o estado afetivo é entendido na perspectiva de Gómez Chacón (2003). Para ela, afetos (crenças, concepções, atitudes e emoções) incidem sobre a predisposição de alguém para aprender e/ou ensinar matemática.
[170] Having a coherent concept image can help students achieve a more complete understanding of the concept, which is what will remain with them.

REFERÊNCIAS

ABMES, Associação Brasileira de Mantenedoras de Ensino Superior. *Portaria Nº 47, de 17/10/1995*, p. 1-2. Disponível em https://abmes.org.br/arquivos/legislacoes/Portaria-Capes-47-1995-10-17.pdf . Acesso em: 07 jan. 2017.

ABRANTES, P. Contagens, grafos e matrizes nos nossos programas? Talvez um dia... *Revista Educação e Matemática*, n. 30, 2º trimestre, 1994, Portugal.

ALVES, R. de C. *O ensino de análise combinatória na educação básica e a formação de professores*. 2012. 176f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

ASSIS, A. M. R. B. de. *Conhecimentos de combinatória e seu ensino em um processo de formação continuada:* reflexões e prática de uma professora. 2014. 169f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

BACHX, A. de C.; POPPE, L. M. B.; TAVARES, R. N. O. *Prelúdio à análise combinatória*. São Paulo: Ed. Nacional, 1975.

BARBOSA, R. M. Combinatória e grafos. Vol. 1, Livraria Nobel, 1975.

BATANERO, C.; GODINO, J.; NAVARRO-PELAYO, V. *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Editorial Síntese, S.A., 1996.

BIGGS, N. L. The roots of combinatorics. *Revista Historia Mathematica*. Vol. 6, p. 109 – 136, 1979.

BORBA, R. E. de S. O raciocínio combinatório na educação básica. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, Palestra. 2010. *Anais*... Salvador: SBEM, 2010, p. 1 a 16. Disponível em: file:///C:/Users/sidza/Desktop/Palestra15%20-%20Rute%20Borba%20ENEM%202010.pdf. Acesso em: 07 jan. 2017.

BOYER, C. B. *História da matemática*. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

________. *História da matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1974.

BRAGA, K. A. *O processo ensino-aprendizagem da análise combinatória*: uma visão dos professores de matemática de Floriano/PI. 2009. 73f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

________. *Lei Nº 11.892*, de 29/12/2008. Institui a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, cria os Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia, e dá outras providências. Disponível em https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-

2010/2008/lei/l11892.htm . Acesso em: 07 jul. 2016.

________. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação*, Nº 9394/96. Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm . Acesso em: 07 jul. 2016.

________. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais (PCN +)*. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ministério da Educação, 2007.

________. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Proposta curricular para a educação de jovens e adultos*: segundo segmento do ensino fundamental: 5ª a 8ª série, 2002.

________. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio)*. Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ministério da Educação, 2000.

________. *Parâmetros curriculares nacionais*: matemática. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

________. *Parâmetros curriculares nacionais*: matemática. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BROETTO, G. *O ensino de números irracionais para alunos ingressantes na licenciatura em matemática*. 2016. 422f. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

COSTA, E. R. S. *Uma proposta de ensino de análise combinatória para alunos do ensino médio*. 2013. 107f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal de Lavras, Lavras.

COSTA, C. A. da. *As concepções dos professores de matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no ensino fundamental*. 2003. 163f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

CRESWELL, J. W. *Projeto de pesquisa*: métodos qualitativos, quantitativos e misto. Tradução de Magda Lopes. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

CUNHA, M. de J. G. da. *Elaboração de problemas combinatórios por professores de matemática do ensino médio*. 2015. 138f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica), Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

DAMBROS, L. R. *Software interativo para o ensino de análise combinatória*. 2015. 87f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

DANTE, L. R. *Ápis*: alfabetização matemática. Vol. 3. 2. ed. São Paulo: Ática, 2014.

DIÁRIO OFICIAL DA UNIÃO, *Portaria Normativa Nº 131*, de 28/06/2017. Dispõe sobre o mestrado e o doutorado profissionais, p. 17. Disponível em https://capes.gov.br/images/stories/download/legislacao/30062017-portaria-131-2017.pdf . Acesso em: 20 jan. 2018.

________. *Portaria Normativa Nº. 17*, de 28/12/2009. Dispõe sobre o mestrado profissional no âmbito da Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior CAPES, p. 20-21.

________. *Portaria Nº 080*, de 16/12/1998. Dispõe sobre o reconhecimento dos mestrados profissionais e dá outras providências. Portaria publicada no Diário Oficial de 11/01/99, Seção I, p. 14. Disponível em https://www.capes.gov.br/images/stories/download/avaliacao/avaliacao-n/1892015-Portaria-CAPES-080-1998.pdf . Acesso em: 20 jan. 2018.

DUTRA, E. N. *Análise combinatória*: uma proposta para o seu ensino na educação básica com ênfase no princípio da contagem. 2014. 78f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus.

ERNEST, P. The impact of beliefs on the teaching of mathematics, In: C. Keitel, P. Damerow, A. Bishop, P. Gerdes (Ed.), *Mathematics, education and society*. Paris: United Nations Educational Scientific, 1988, p. 99-101.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FIORENTINI, D. *Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática*: o caso da produção científica em cursos de pós-graduação. 1994. 425f. Tese (Doutorado em Educação: Metodologia de Ensino), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática*: percursos teóricos e metodológicos. 2. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2007.

FLICK, U. *Introdução à metodologia de pesquisa*: um guia para iniciantes. Tradução Magda Lopes. Porto Alegre: Penso, 2013.

________. *Desenho da pesquisa qualitativa*. Porto Alegre: Bookman, 2009.

FONSECA, A. J. dos S. *O ensino de análise combinatória*: um estudo dos registros de representações semióticas por meio de sequência didática. 2015, 80f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão.

FONTE, A. P. G. da. *Ensino e aprendizagem dos conceitos de combinatória por meio da metodologia de resolução de problemas*. 2009. 144f. Dissertação de Mestrado (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática), Centro Universitário Franciscano, Santa Maria.

FUSEL, A. T. *O ensino e a aprendizagem da análise combinatória dentro do contexto de telefonia*. 2013. 133f. Dissertação (PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.

GERDENITS, G. A. M. *Raciocínio combinatório*: uma proposta para professores de matemática do ensino fundamental - anos finais. 2014. 170f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Centro de Ciências Exatas e Tecnológica, Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba.

GIRALDO, V. A. *Descrições e conflitos computacionais*: o caso da derivada. 2004. 230 f. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia de Sistemas e Computação), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

GIRALDO, V.; CARVALHO, L. M.; TALL, D. *Conflitos teórico-computacionais e a formação da imagem conceitual de derivada*. Disponível em https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003b-giraldo-carv-rj.pdf . Acesso em: 20 abr. 2018.

GÓMEZ CHACÓN, I. M. *Matemática emocional*: os afetos na aprendizagem matemática. Tradução de Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2003.

GONÇALVES FILHO, H. S. *O jogo senha como recurso didático para o ensino dos métodos de contagem*. 2016. 74f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes.

GUZMÁN, R. R. *Raciocínio combinatório em estudantes com preparo matemático avançado*. Tese (Doutorado em Ciências Matemáticas). 2000. 196f. Departamento de Didática da Matemática da Universidade de Granada, Espanha.

HAZZAN, S. *Fundamentos de matemática elementar 5*: combinatória, probabilidade. 6. ed. São Paulo: Atual, 1993.

HERSHKOWITZ, R. Aspectos psicológicos da aprendizagem da geometria. *Boletim GEPEM*, v. 32, 1994.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PERIGO, R.; ALMEIDA, N. *Matemática*: ciência e aplicações. Vol. 2, Editora Atual, 2001.

KATZ, V. J. *História da matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian, Serviço de Educação e Bolsas, Lisboa, 2010. (Tradução do original inglês intitulado *A history of mathematics*: an introduction, 2nd Edition by Victor Katz, publicado por Pearson Education, Inc. Publishing as Addison Wesley Higher Education, 1998.).

KAVOUSIAN, S. *Enquiries into undergraduate students' understanding of combinatorial structures*. 2008. 177f. Thesis (Doctor of Philosophy) – The Faculty of Education, Simon Fraser University, Burnaby, Canadá. Disponível em http://summit.sfu.ca/item/9308. Acesso em 25 set. 2018.

KILPATRICK, J. Investigación en educación matemática: su historia y alguns temas de actualidad. In: KILPATRICK, J.; RICO, L.; GÓMEZ, P. (Eds.). *Educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica & una empresa docente, 1998, p. 3 – 35.

________. Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a educação matemática como campo profissional e científico. *Zetetiké*, Campinas: SP, v. 4, n. 5, p. 99-120, jan./jun. 1996.

________. A history of research in mathematics education. In: GROWS, D. A. (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*: a project of the Nacional Council of Teachers of Mathematics. New York: Macmillan Publishing Company, 1992, p. 3 - 38.

KNOBLOCH, E. The origins of modern combinatorics. In: WILSON, R; WATKINS, J. J. (Eds.). *Combinatorics*: ancient and modern. Oxford: Oxford University Press, 2013, p. 147-166.

LIMA, M. de A. *Uma nova proposta didática para o ensino de análise combinatória*. 2016. 108f. Dissertação (PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió.

LIMA, A. P. B. de. *Princípio fundamental da contagem:* conhecimentos de professores de matemática sobre seu uso na resolução de situações combinatórias. 2015. 139f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica), Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

LIMA, T. R. C. de. *Ensinando e aprendendo análise combinatória através da leitura e resolução de problemas e da construção de enunciados*. 2011. 149f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte.

LORENZATO, S. *Para aprender matemática*. SP: Autores Associados, 2010.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em educação*: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MEDONÇA, L. *Trajetória hipotética de aprendizagem*: análise combinatória. 2011. 241f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MOREIRA, F. M. B. *Os conhecimentos acerca dos conceitos de análise combinatória de professores que ensinam matemática*: um estudo diagnóstico. 2014. 158f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus.

MOREIRA, H.; CALEFFE, L. G. *Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador*. 2. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P. de; CARVALHO; P. C. P., FERNANDEZ, P. *Análise combinatória e probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

NAVARRO-PELAYO, V.; BATANERO, C.; GODINO, J. D. Raciocínio combinatório em alunos secundários. *Educação Matemática*, v. 8, n. 1, p. 26 – 39, abr.1996.

NERY JÚNIOR, R. da C. *Imagens conceituais e conflitos cognitivos no estudo de sistemas lineares*. 2018. 61f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede – PROFMAT), Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista.

ONUCHIC, L. de la R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em educação matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p. 199-218.

ONUCHIC, L. de La R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*. Rio Claro, UNESP, v. 25, n. 41, p. 71 - 98, dez. 2011.

________. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (Org.). *Educação matemática*: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004, p. 213-231.

PAGANI, E. M. L.; ALLEVATO, N. S. G. Ensino e aprendizagem, de cálculo diferencial e integral: um mapeamento de algumas teses e dissertações produzidas no Brasil. *Vidya*, Santa Maria, v. 34, n. 2, p. 61-74, jul./dez. 2014.

PAIVA, M. *Matemática – Paiva.* Volume 2. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.

PIAGET, J.; INHELDER, B. *A gênese da ideia do acaso em crianças*. Paris: Imprensa universitária da França, 1951.

PINHEIRO, T. S. *Desempenho e estratégias desenvolvidas por estudantes do 2 º ano do ensino médio ao resolver problemas combinatórios*. 2016. 193f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus.

PINHEIRO, C. A. de M. *Análise combinatória: organizações matemáticas e didáticas nos livros escolares brasileiros no período entre 1895-2009*. 2015. 145f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

POLYA, G. Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Org.). *A resolução de problemas na matemática escolar*. Tradução de Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997, p. 1 – 3.

________. *How to solve it:* A new aspect of mathematical method. 2ª. ed. New Jersey: Princeton University Press, 1973. (A obra foi publicada originalmente em 1945.)

PONTE, J. P. da; QUARESMA, M. Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics*, 93, p. 51- 72, 2016.

PONTE, J. P. da; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, v. XXII, n. 2, p. 55 – 81, 2013.

ROCHA, C. A. *Formação docente e o ensino de problemas combinatórios:* diversos olhares, diferentes conhecimentos. 2011. 192f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica), Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

ROCHA, J. de A. *Investigando a aprendizagem da resolução de problemas combinatórios em licenciandos em matemática*. 2006. 146f. Dissertação de Mestrado (Mestrado Profissional em Ensino das Ciências) - Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

ROMANOWSKI, J. P.; ENS, R. T. As pesquisas denominadas do tipo “estado da arte” em educação. *Revista Diálogo Educacional*, Curitiba, v. 6. N. 19, p. 37-50, set./dez. 2006.

ROMBERG, T. A. Perspectives on scholarship and research methods. In: GROUWS, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. National Council of Teachers of Mathematics & Macmillan. New York: Macmillan, 1992, p. 49-64.

SABO, R. D. *Saberes docentes*: a análise combinatória no ensino médio. 2010. 210f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SANTOS, V. M. P. *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática*: métodos alternativos. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1997.

________. Consciência metacognitiva de futuros professores primários numa disciplina de matemática e um exame de seu conhecimento, concepções consciência metacognitiva sobre frações. *Série Documental Eventos*, n. 4, 2ª Parte, INEP, Brasília, n. 4, 2ª parte, p. 1-20, 1994.

SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. Resolução de problemas em matemática: uma abordagem no processo educativo. *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, no 53, p. 43-74, jul./dez. 2008.

SANTOS-WAGNER, V. The role of collaboration for developing teacher-researchers. In: PETER-KOOP, A.; SANTOS-WAGNER, V.; BREEN, C.; BEGG, A. (Eds.). *Collaboration in teacher education*: examples from the context of mathematics education. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Boston, London. 2003, p. 99 -112.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, JR, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: Trafton, P. R.; Shulte, A. P. (Eds.). *New directions for elementary school mathematics*. Reston: NCTM, 1989. p. 31 - 42.

SENA, C. O. de R. *A exploração das propriedades do triângulo de pascal no ensino de análise combinatória com atividades investigativas*. 2013. 126f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte.

SHERIN, M. G. A balancing act: developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, p. 205 - 233, 2002.

SHULMAN, L. S. *Knowledge and teaching*: foundations of the new reform. Harward Educational Review, v. 57, p. 1 – 22, 1987. Disponível em: http://ci.unlv.edu/files/Week3_Shulman_Knowledge_Teaching.pdf. Acesso em 09 nov. 2009.

________. *Those who understand*: knowledge growth in teaching. Stanford University, Educational Researcher, v. 15. n. 2, p. 4 – 14, 1986.

SILVA, P. E. L. da. *Problemas combinatórios condicionais*: um olhar para o livro didático do ensino médio. 2016. 146f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

SILVA, J. C. T. da. *Reflexões sobre conhecimentos evidenciados por licenciandos em matemática por meio da elaboração de um jogo sobre análise combinatória*. 2014. 130f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória

SILVA, C. M. S. da; SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. Considerações para os iniciantes em pesquisas em educação matemática e educação do campo. In: SILVA, C. M. S. da; SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos; MARCILINO, O. T.; FOERSTE, E. *Metodologia da pesquisa em educação do campo*: povos, territórios, movimentos sociais, sustentabilidade. Vitória, ES: UFES, Programa de Pós-Graduação em Educação, 2009, p. 53-64.

SKEMP, R. Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, n. 77, p. 20–26, 1976.

SOUZA, A. C. P. de. *Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas*. 2010. 344f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

SOUZA, M. J. F. *Otimização combinatória*. Departamento de Computação Instituto de Ciências Exatas e Biológicas Universidade Federal de Ouro Preto, 2009. Disponível em file:///C:/Users/sidza/Desktop/OtimizacaoCombinatoria%20-%20Souza%20.pdf. Acesso em: 07 jan. 2017.

STAKE, R.E. *Pesquisa qualitativa:* estudando como as coisas funcionam. Porto Alegre: Penso, 2011.

STEIN, M. K.; ENGLE, R. A.; SMITH, M. S.; HUGHES, E. K. Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell, *Mathematical Thinking and Learning*, 10:4, p. 313 - 340, 2008.

STURM, W. *As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa*. 1999. 132f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, v. 12, p. 151–169, 1981.

TALL, D. *Concept image and concept definition*. 2003. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/concept-image.html . Acesso em: 17 set. 2015.

________. Concept image and concept definition. *Senior Secondary Mathematics Education*, n. 1983, p. 37 – 41, 1988.

________. The psychology of the advanced mathematical thinking. In: TALL, David (Org.). *Advanced mathematical thinking*. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 3–21.

TEIXEIRA, P. J. M. *Um estudo sobre conhecimentos necessários ao professor de matemática para a exploração de problemas de contagem no ensino fundamental*. 2012. 458f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirantes/Anhanguera de São Paulo, São Paulo.

THOMPSON, A. G. A relação entre concepções de matemática e de ensino de matemática de professores na prática pedagógica. Tradução de Gilberto F. A. de M., Tadeu O. G., Revisão: Maria Aparecida C. R. T. Moraes, Antônio Miguel. *Zetetiké*, CEMPEM – FE/UNICAMP. v.5, nº 8, p. 58-78, jul./dez. 1984/1997. (A obra foi publicada originalmente em 1984.).

VAN DE WALLE, J. A. *Matemática no ensino fundamental*: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009, p. 82 - 92.

VARGAS, A. F. *O ensino-aprendizagem de análise combinatória através da resolução de problemas com atividades investigativas*. 2009. 110f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte.

VINNER, S.; HERSHKOWITZ, R. Concept imagens and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology oh Mathematics Education*. August, 1980, p. 176 – 184.

VINNER, S. The role of examples in the learning of mathematics and in everyday thought processes. *ZDM*, v. 43, n. 2, p. 247 – 256, 2011.

________. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, D. (Org.). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 65–81.

________. Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 14, n. 3, p. 293-305, 1983.

________. The naive platonic approach as a teaching strategy in arithmetics. *Educational Studies in Mathematics*, 6, p. 339 – 350, 1975.

WATTERSON, B. *Criaturas bizarras de outro planeta!:* as aventuras de Calvin & Haroldo. Tradução de Adriana Schwartz. 2. ed. São Paulo: Conrad Editora do Brasil, 2011, p. 85.

WILSON, R; WATKINS, J. J. (Eds.). *Combinatorics*: ancient and modern. Oxford: Oxford University Press, 2013.

YIN, R. K. *Pesquisa qualitativa do início ao fim*. Tradução de Daniel Bueno. Porto Alegre: Penso, 2016.

ZANON, T. X. D.; ZOGAIB, S. D.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. A compreensão de enunciados de problemas de combinatória: uma conversa entre Polya e Bakhtin. In: XI Encontro Capixaba de Educação Matemática, XI., 2018, Vitória. *Anais*... Vitória, 2018, p. 1 – 12. Disponível em: < http://ocs.ifes.edu.br/index.php/ECEM/2018/paper/view/4929/1203 >. Acesso em: 27 out. 2018.

ZANON, T. X. D. *O ensino de análise combinatória para futuros professores de matemática.* Projeto de Tese de Doutorado (Doutorado em Educação), 2017, 96f. Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

________. *Formação continuada de professores que ensinam matemática*: o que pensam e sentem sobre ensino, aprendizagem e avaliação. 2011. 300f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

APÊNDICES

Apêndice 1: Quadro 12 – Quadro geral das produções brasileiras de 1999 a 2017 sobre combinatória

Quadro 12 – Quadro geral das produções brasileiras de 1999 a 2017 sobre combinatória

ANO	**MESTRADO**								**DOUTORADO**				**TOTAL**
	ACADÊMICO				**PROFISSIONAL**								
	Qt[171]	Autor	Universidade	Curso	Qt	Autor	Universidade	Curso	Qt	Autor	Universidade	Curso	
1999	01	Sturm	Unicamp	Educação	-	-	-	-	-	-	-	-	01
2000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2001	01	Esteves	PUC/SP	Educação Matemática	-	-	-	-	01	Nehring	UFSC	Educação	02
2002	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2003	01	Costa	PUC/SP	Educação Matemática	-	-	-	-	-	-	-	-	01
2004	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2005	-	-	-	-	01	Boga Neto	UFPA	Educação em Ciências e Matemática	-	-	-	-	01
2006	-	-	-	-	01	Rocha	UFRPE	Ensino das Ciências	-	-	-	-	01

[171] Qt: Quantidade.

2007	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2008	01	Pinheiro	UFPA	Educação	02	Assis Pedrosa Filho	Unicamp PUC/SP	Matemática Ensino de matemática	-	-	-	-	03
2009	01	Eisenmann	USP	Ciência da Computação	04	Fonte Carvalho Vargas Braga	UNIFRA UFRGS PUC/MG ULBRA	Física e Matemática Ensino de Ciências e Matemática Ensino de Ciências e Matemática Ensino de Ciências e Matemática	01	Pessoa	UFPE	Educação	06
2010	04	Souza Lima	Unesp UFPE	Educação Matemática Educação Matemática e Tecnológica	03	Almeida Alves	UFOP PUC/MG	Educação Matemática Ensino de Ciências e Matemática	-	-	-	-	07

		Domingues Sabo	Unicamp PUC/SP	Matemática Educação Matemática		Evangelista Sobrinho	UNICSUL	Ensino de Ciências e Matemática					
2011	02	Campos Lima	PUC/SP UFPB	Educação Matemática Educação	06	Lima Vasquez Mendonça Santos	PUC/MG UFSCar PUC/SP UNICSUL	Ensino de Ciências e Matemática Ensino de Ciências Exatas Ensino de Matemática Ensino de Ciências e Matemática Ensino de Ciências e Matemática Ensino de Ciências e	-	-	-	-	08

						Carvalho Maia	CEFET/RJ CEFET/RJ	Matemática					
2012	03	Duro Melo Barreto	UFRGS UFPE UFPE	Educação Psicologia Cognitiva Educação Matemática e Tecnológica	04	Fonseca Yahata Silva Alves	UFRGS UFRJ UFSCar UFRJ	Ensino de Matemática Ensino de Matemática Ensino de Ciências Exatas Ensino de Matemática	01	Teixeira	UNIBAN/ ANHANGUERA	Educação Matemática	08
2013	01	Azevedo	UFPE	Educação Matemática e Tecnológica	28	Sena Silva	PUC/MG UFPB	Ensino de Ciências e Matemática Ensino de Ciências e Educação Matemática	-	-	-	-	29

						Chilela Costa Farias Floret Aquino Ferreira Silva Silva Alvim Ribeiro	UFRGS UFLA UFPA UNIGRA NRIO UNIVASF UNIVASF UNIVASF UFC UFG UESC	Ensino de Matemática Matemática Matemática Ensino de Ciências na Educação Básica PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT					

						Zanoni Bezerra Costa Amorim Fusel Caldato Silva Mozér Américo Santos Bezerra Britto Maranhão Garcia Silva Silva	UFMS UFPB IMPA IMPA UFSCar Unesp UFC UFF UFPA UFV UFRN UFPA UFPA UFMA UFC UFC	PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT					
2014	03	Assis Vega	UFPE UFPE	Educação Matemática e Tecnológica Educação Matemática e	22	Mendes Córes Miotto Dutra Freitas Sampaio	UNB UNB UTFPR UESC IMPA IMPA	PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT	-	-	-	-	25

		Oliveira	PUC/SP	Tecnológica Educação Matemática		Junior Soares Gonçalves Paula Teixeira Mastropaulo Neto Pinto Moraes Júnior Nogueira Neto Santos Júnior Paiva Rimsa Fernandes Molitor Gerdenits	IMPA IMPA UERJ UFBA Unicamp PUC/RJ UFC UFGD UFG UFSJ UFSJ UFABC UFABC UFSCar	PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT Ensino de Ciências Exatas Ensino de					

						Silva Brumano	IFES UFJF	Ciências e Matemática Educação Matemática					
2015	06	Cunha Lima Silva	UFPE UFPE UFPE	Educação Matemática e Tecnológica Educação Matemática e Tecnológica Educação Matemática e Tecnológica Matemática Educação	20	Oliveira Magalhães Proposta Pinto Silva Alves Maciel Dambros Machado Trovão Costa Magalhães Júnior Jacinto Souza	UFJS UNIFAP UNIFAP UFC UFC UFC UFMS UFMS UFS USP UNB UECE UFRJ UESC	PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT	02	Santos Pinheiro	USF PUC/SP	Doutorado em Educação Doutorado em Educação Matemática	28

		Oliveira Coutinho Silva	UENF UFBA USP	Ciência da Computação		Machado Oliveira Fonseca Coelho Trevizan Oliveira	UERJ UENF UFC UFOP USP UFS	PROFMAT PROFMAT Ensino de Ciências e Matemática Educação Matemática Ensino de Matemática Matemática						
2016	04	Lima Gonçalves Filho	UFPE UENF	Educação Matemática e Tecnológica Matemática Ciências	14	Santos Júnior Lima Lima Paz Pessoa Lemos Hodecker	UFAL UFAL UFAL UESC UFAM UFT FURB	PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT	-	-	-	-	-	18

		Bassan Pinheiro	UFSCar UESC	Exatas Educação Matemática		Pereira Marchetti Menezes Silva Fernandes Braga Schmidt	UFS Unesp UFC UNIR UFERSA UFV UFSM	PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT Educação Matemática e Ensino de Física					
2017	-	-	-	-	06	Souza Pereira Braga Mello Garcia Cerizza	UESC UESC UEM IMPA Unicamp USP	PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT PROFMAT	-	-	-	-	06
TOTAL	**28**	**-**	**-**	**-**	**111**	**-**	**-**	**-**	**05**	**-**	**-**	**-**	**144**

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras.

Apêndice 2: Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO DESTINADO AOS LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA DO INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - IFES, CAMPUS CACHOEIRO DE ITAPEMIRIM

Você está sendo convidado(a) para participar, como voluntário(a), de uma pesquisa em educação matemática que tem por objetivo investigar o desenvolvimento do conceito de combinação, permutação e arranjo na formação inicial de professores de matemática mediado pela metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de resolução de problemas. Este estudo será desenvolvido por Thiarla Xavier Dal-Cin Zanon sob a orientação da Professora Doutora Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner, no Doutorado em Educação do Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação da Universidade Federal do Espírito Santo – PPGE/CE/UFES.

A busca por esta investigação justifica-se pela preocupação com a formação inicial no que diz respeito às imagens conceituais que licenciandos constroem e aos entrelaçamentos que estabelecem ao relacionarem a matemática aprendida da licenciatura com a matemática a ser ensinada na educação básica. Acredita-se que trabalhar este entrelaçamento na formação inicial de professores é necessário e poderá ser resgatado por meio da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas. Pois, nossa experiência mostra que futuros professores não conseguem compreender conceitualmente se o problema é de combinação, permutação ou arranjo e assim, não usam o procedimento matemático adequado para encontrar uma possível solução que atenda ao problema em questão.

Se você concordar em participar como sujeito desta pesquisa, posso lhe garantir que: (i) em nossas análises preservaremos sua identidade e resguardaremos sua privacidade; (ii) ao divulgarmos os resultados do estudo adotaremos procedimentos que impeçam que você seja identificado(a); e (iii) compartilharemos com você, durante a pesquisa, em momentos de redação do trabalho, as interpretações que realizamos de seus dados. Só usaremos aquelas informações que você validar e aprovar.

Os benefícios de sua participação como sujeito desta pesquisa serão diretos. Na medida em que compreendemos que futuros professores ao partilharem suas imagens conceituais e seus conhecimentos acerca dos conceitos de combinação, permutação e arranjo mediado pela metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas, produzem espaços formativos propícios ao desenvolvimento profissional dos envolvidos. Por outro lado, não negamos o fato de que alguns possam ter mais dificuldade do que outros (por timidez, por medo de se expor, dentre outros), o que pode gerar desconforto nos sujeitos ao longo do processo de produção e coleta de dados.

Destacamos que você poderá retirar esse consentimento a qualquer momento que assim o desejar, sem que isso lhe traga qualquer sanção. Em caso de dúvida sobre a adequação dos procedimentos que estamos usando, você pode procurar o Comitê de Ética em Pesquisa (COEP) da Universidade Federal do Espírito Santo na Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação do Campus Universitário de Goiabeiras situada à Avenida Fernando Ferrari, s/n, Vitória/ES, CEP: 29060-970. Você também pode entrar em contato com o Comitê de Ética pelo telefone (27) 4009-7840/ (27) 3145-9820 ou pelo endereço eletrônico: cep.goiabeiras@gmail.com. O Comitê de Ética em Pesquisa (COEP) é formado por um grupo de pessoas com conhecimentos científicos e tem por missão realizar a revisão ética inicial e continuada das pesquisas, visando garantir a segurança e proteger os direitos das pessoas envolvidas nos estudos.

Os dados brutos originados dos participantes, a partir dos instrumentos, serão arquivados e armazenados pelo pesquisador responsável por esse projeto de pesquisa. Os conhecimentos resultantes deste estudo serão divulgados em revistas especializadas, em congressos e simpósios da área, em trabalhos de conclusão de curso, em pesquisas de iniciação científica, em dissertações de mestrado e em teses de doutorado. Abaixo estão os dados relativos a este projeto e o campo para a sua assinatura, caso concorde em participar como voluntário dessa pesquisa.

Título do projeto: O que sabe quem ensina? Um estudo sobre conhecimento conceitual em combinatória de futuros professores de professores de matemática

Pesquisador responsável: Thiarla Xavier Dal-Cin Zanon (Doutoranda)

Instituição: Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Doutorado em Educação

Telefone para contato: (28) 99972 7565 / (28) 99882 4243

Endereço: Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, Vitória/ES, CEP: 29075-910 Universidade

Federal do Espírito Santo – UFES.

Objetivo do estudo: Este estudo busca identificar imagens conceituais evocadas por estudantes, quando resolvem as primeiras tarefas de combinatória; e, investigar como as imagens conceituais dos agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação se reconstroem, quando trabalhamos com tarefas específicas.

____

Assinatura do Pesquisador Responsável
Thiarla Xavier Dal-Cin Zanon
e-mail: prof.thiarla@hotmail.com
Telefone: (28) 99972 7565 / (28) 99882 4243
Instituto Federal do Espírito Santo, Campus Cachoeiro de Itapemirim
Rodovia BR 482, Cachoeiro x Alegre, Km 6,5, Morro Grande,
Cachoeiro de Itapemirim/ES, CEP: 29311-970, Caixa Postal: 727

De uso do participante da pesquisa:

Eu, ____, (nome do licenciando por extenso) portador do RG nº______________________, CPF nº______________________, confirmo que **Thiarla Xavier Dal-Cin Zanon** explicou-me os objetivos desta pesquisa, bem como a minha forma de participação na mesma. Li e compreendi este Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE, portanto, concordo em participar como voluntário.

______________________________ (local e data): ___ de ________________ de ______.

Assinatura: ____

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO DESTINADO AO DIRETOR(A) DO INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - IFES, CAMPUS CACHOEIRO DE ITAPEMIRIM

O Campus está sendo convidado para participar, como voluntário, de uma pesquisa em educação matemática que tem por objetivo investigar o desenvolvimento do conceito de combinação, permutação e arranjo na formação inicial de professores de matemática mediado pela metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de resolução de problemas. Este estudo será desenvolvido por Thiarla Xavier Dal-Cin Zanon sob a orientação da Professora Doutora Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner, no Doutorado em Educação do Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação da Universidade Federal do Espírito Santo – PPGE/CE/UFES.

A busca por esta investigação justifica-se pela preocupação com a formação inicial no que diz respeito às imagens conceituais que licenciandos constroem e aos entrelaçamentos que estabelecem ao relacionarem a matemática aprendida da licenciatura com a matemática a ser ensinada na educação básica. Acredita-se que trabalhar este entrelaçamento na formação inicial de professores é necessário e poderá ser resgatado por meio da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas. Pois, nossa experiência mostra que futuros professores não conseguem compreender conceitualmente se o problema é de combinação, permutação ou arranjo e assim, não usam o procedimento matemático adequado para encontrar uma possível solução que atenda ao problema em questão.

Se o Campus concordar em autorizar o desenvolvimento desta pesquisa no Curso de Licenciatura em Matemática, posso lhe garantir que: (i) em nossas análises e divulgação dos resultados, preservaremos a identidade e resguardaremos a privacidade dos envolvidos; e (ii) compartilharemos com os interessados, durante a pesquisa, em momentos de redação do trabalho, as interpretações que realizamos dos dados. Só usaremos aquelas informações que os sujeitos validarem e aprovarem.

Os benefícios da participação do Campus nesta pesquisa serão diretos. Na medida em que compreendemos que futuros professores ao partilharem suas imagens conceituais e seus conhecimentos acerca dos conceitos de combinação, permutação e arranjo mediado pela metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas, produzem espaços formativos propícios ao desenvolvimento profissional dos envolvidos. Por outro lado, não negamos o fato de que alguns possam ter mais dificuldade do que outros (por timidez, por medo de se expor, dentre outros), o que pode gerar desconforto nos sujeitos ao longo do processo de produção e coleta de dados.

Destacamos que o Campus poderá retirar esse consentimento a qualquer momento que assim o desejar, sem que isso lhe traga qualquer sanção. Em caso de dúvida sobre a adequação dos procedimentos que estamos usando, você pode procurar o Comitê de Ética em Pesquisa (COEP) da Universidade Federal do Espírito Santo na Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação do Campus Universitário de Goiabeiras situada à Avenida Fernando Ferrari, s/n, Vitória/ES, CEP: 29060-970. Você também pode entrar em contato com o Comitê de Ética pelo telefone (27) 4009-7840/ (27) 3145-9820 ou pelo endereço eletrônico: cep.goiabeiras@gmail.com. O Comitê de Ética em Pesquisa (COEP) é formado por um grupo de pessoas com conhecimentos científicos e tem por missão realizar a revisão ética inicial e continuada das pesquisas, visando garantir a segurança e proteger os direitos das pessoas envolvidas nos estudos.

Os dados brutos originados dos participantes, a partir dos instrumentos, serão arquivados e armazenados pelo pesquisador responsável por esse projeto de pesquisa. Os conhecimentos resultantes deste estudo serão divulgados em revistas especializadas, em congressos e simpósios da área, em trabalhos de conclusão de curso, em pesquisas de iniciação científica, em dissertações de mestrado e em teses de doutorado. Abaixo estão os dados relativos a este projeto e o campo para a sua assinatura, caso concorde em participar como voluntário dessa pesquisa.

Título do projeto: O que sabe quem ensina? Um estudo sobre conhecimento conceitual em combinatória de futuros professores de professores de matemática

Pesquisador responsável: Thiarla Xavier Dal-Cin Zanon (Doutoranda)

Instituição: Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Doutorado em Educação

Telefone para contato: (28) 99972 7565 / (28) 99882 4243

Endereço: Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, Vitória/ES, CEP: 29075-910 Universidade Federal do Espírito Santo – UFES.

Objetivo do estudo: Este estudo busca identificar imagens conceituais evocadas por estudantes, quando resolvem as primeiras tarefas de combinatória; e, investigar como as imagens conceituais dos agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação se reconstroem, quando trabalhamos com tarefas específicas.

____

Assinatura do Pesquisador Responsável

Thiarla Xavier Dal-Cin Zanon
e-mail: prof.thiarla@hotmail.com
Telefone: (28) 99972 7565 / (28) 99882 4243
Instituto Federal do Espírito Santo, Campus Cachoeiro de Itapemirim
Rodovia BR 482, Cachoeiro x Alegre, Km 6,5, Morro Grande,
Cachoeiro de Itapemirim/ES, CEP: 29311-970, Caixa Postal: 727

De uso do participante da pesquisa (Diretor do Campus):

Eu, ____, (nome do diretor do Campus por extenso) portador do RG nº______________________, CPF nº______________________, confirmo que **Thiarla Xavier Dal-Cin Zanon** explicou-me os objetivos desta pesquisa, bem como a forma de participação do campus na mesma. Li e compreendi este Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE, portanto, concordo que o campus participe como voluntário.

______________________________ (local e data): ___ de ________________ de ______.

Assinatura: ____