Universidade Federal do Espírito Santo - ES

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

O SOFTWARE X-LOGO NO ENSINO E APRENDIZADO DE MATEMÁTICA

CARLOS WILSON PIMENTA FERMIANO

Vitória - ES

2 de julho de 2019

O SOFTWARE X-LOGO NO ENSINO E APRENDIZADO DE MATEMÁTICA

CARLOS WILSON PIMENTA FERMIANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Rede Nacional do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Matemática. **Orientador**: Prof. Dr. Alancar-

deck Pereira Araújo.
Co-orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho.

Vitória - Espírito Santo
Julho de 2019

Ficha catalográfica

Assinaturas

À Deus por todo o seu poder e glória infinita

Agradecimentos

À minha esposa Thainara Fraga Oliveira
pela sua paciência, carinho e compreensão.
À minha mãe por ser exemplo de força,
coragem e persistência.
Àos meus orientadores pela disponibilidade
e orientação.
À Professora Dra Maria Clara Schuwartz
Ferreira por aceitar participar da banca
examinadora.
À todos que acreditaram que este dia
chegaria.
"O presente trabalho foi realizado com apoio
da Coordenação de Aperfeiçoamento de
Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES)
- Código de Financiamento 001"

Resumo

Esta dissertação aborda temas ligados à prática da informática na educação, interpretação e produção de comandos que relacionam a lógica de programação com conteúdos matemáticos. Fizemos uma discussão sobre a importância da informática na educação e os benefícios que podem trazer para as aulas, se usada adequadamente. Abordamos o software X-LOGO, suas potencialidades, limitações e alguns cuidados que devemos tomar ao utilizá-lo nas aulas de Matemática. Fizemos conjecturas de modelos matemáticos no programa e justificamos alguns resultados encontrados. Trabalhamos as primitivas e comandos deste software com procedimentos lógicos que fizemos. Criamos procedimentos lógicos que somam números ímpares; somam números naturais; identificam se um número natural é ou não primo através dos seus divisores; também criamos procedimentos que usam o Método de Heron para aproximar raízes quadradas; que constroem polígonos regulares através da recursividade; que calculam o MDC de dois números utilizando o Algoritmo de Euclides; geram números palíndromos (capícuas) também por algoritmo recursivo; identificam as Desigualdades das Médias num círculo de raio qualquer. Também utilizamos o programa para estudar a Desigualdade Triangular, a partir de conjecturas o mesmo ocorreu com os Círculos Tangentes de Ford. Alguns dos temas nós tratamos com uma atenção especial, trabalhando mais exemplos, fazendo provas das conjecturas utilizando o Princípio da Indução Matemática para justificar.

Palavras-chave: Conjecturas Matemáticas. X-LOGO. Lógica de programação.

Abstract

This dissertation addresses topics related to the practice of computing in education, interpretation and production of commands that relate programming logic to mathematical content. We discussed the importance of computer science in education and the benefits it can bring to the classroom, if used properly. We approach the X-LOGO software, its potentialities, limitations and some precautions that we must take when using it in Mathematics classes. We conjecture mathematical models in the program and justify some results found. We worked on the primitives and commands of this software with logical procedures that we did. We create logical procedures that add odd numbers; add natural numbers; identify whether or not a natural number is prime through its divisors; we also create procedures that use the Heron Method to approximate square roots; which construct regular polygons through recursion; that calculate the MDC of two numbers using the Euclidean Algorithm; generate palindromes (capícuas) also by recursive algorithm; identify the Inequalities of Averages in a circle of any radius. We also used the program to study Triangle Inequality from conjectures, as did the Ford Tangent Circles. Some of the themes we deal with with special attention, working more examples, making proofs of the conjectures using the Principle of Mathematical Induction to justify.
Keywords: Mathematical Conjectures. X-LOGO. Programming logic.

Sumário

Lista de Figuras xiii

Lista de Tabelas xv

INTRODUÇÃO 1

0.1 JUSTIFICATIVA . . . 1
0.2 OBJETIVOS . . . 3
0.2.1 OBJETIVOS GERAIS . . . 3
0.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS . . . 3
0.2.3 USO DE SOFTWARES EDUCACIONAIS E APLICATIVOS . . . 3

1 X-LOGO 7

1.1 COMANDOS E INTERPRETAÇÃO . . . 8
1.1.1 EXEMPLOS DE COMANDOS . . . 9
1.2 PROCEDIMENTOS . . . 12
1.2.1 EDITOR . . . 13
1.2.2 PROCEDIMENTOS LÓGICOS . . . 16
1.3 AVALIAÇÃO DO SOFTWARE . . . 22
1.3.1 FACILIDADE DE APRENDIZAGEM . . . 23
1.3.2 FLEXIBILIDADE E EFICIÊNCIA . . . 23
1.3.3 PREVENSÃO DE ERROS . . . 24
1.3.4 AJUDA E DOCUMENTAÇÃO . . . 24
1.3.5 SATISFAÇÃO . . . 25
1.3.6 ADEQUAÇÃO PEDAGÓGICA . . . 26
1.3.7 UTILIDADE . . . 26
1.3.8 ADEQUAÇÃO TÉCNICA . . . 27

2 TEMAS MATEMÁTICOS 28

2.1 MÉTODO DE HERON PARA APROXIMAÇÃO DE RAIZ QUADRADA 28
2.1.1 O ALGORITMO E SUA DEMONSTRAÇÃO . . . 28

2.1.2 IMPLEMENTAÇÃO NO X-LOGO 29
2.2 POLÍGONOS REGULARES 31
2.2.1 CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO 31
2.2.2 CONSTRUÇÃO DO QUADRADO 32
2.2.3 CONSTRUÇÃO DE UM POLÍGONO REGULAR QUALQUER . . 32
2.3 ALGORITMO DE EUCLIDES 36
2.3.1 O MÁXIMO DIVISOR COMUM 36
2.3.2 PROCEDIMENTO PARA CALCULAR O MDC NO X-LOGO . . 37
2.4 UM POUCO SOBRE NÚMEROS PALÍNDROMOS OU CAPÍCUA . . . 38
2.4.1 ALGORÍTMO PALÍNDROMO 39
2.4.2 PALÍNDROMOS DIVISÍVEIS POR 11 43
2.4.3 OUTRAS FORMAS DE GERAR PALÍNDROMOS 44
2.4.4 CURIOSIDADE CAPÍCUA 45
2.5 DESIGUALDADE TRIANGULAR 46
2.5.1 PROBLEMÁTICA 46
2.5.2 ÂNGULO DE GIRO 49
2.6 DESIGUALDADE DAS MÉDIAS 51
2.6.1 DEFINIÇÕES INICIAIS 51
2.6.2 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO 52
2.6.3 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA 55
2.7 CONSTRUÇÃO NO X-LOGO 60
2.8 CÍRCULOS TANGENTES 61
2.9 LEMA 63
2.10 CÁLCULO DOS PONTOS DE TANGÊNCIA 64
2.11 Conjectura 73

CONSIDERAÇÕES FINAIS **75**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS **77**

Referências Bibliográficas **77**

APÊNDICES **78**

A APÊNDICES **79**
A.1 GENERALIZAÇÃO DAS DESIGUALDADES DAS MÉDIAS 79

B PROVAS DOS PROCEDIMENTOS LÓGICOS POR INDUÇÃO MATEMÁTICA 83

B.1 PROCEDIMENTO QUE SOMA OS N PRIMEIROS NÚMEROS ÍMPARES 83

B.2 PROCEDIMENTO QUE SOMA OS N PRIMEIROS NÚMEROS NATURAIS 83

B.3 PROVA POR INDUÇÃO DO MÉTODO DE HERON 84

B.4 PROVA DA CONJECTURA 86

B.5 LISTAS DE COMANDOS E PRIMITIVAS 91

B.5.1 OPERADORES E SINTAXE 91

B.5.2 PRIMITIVAS 92

Lista de Figuras

1 O papel do computador na exploração inicial e na interpretação dos resultados . 6

1.1 Uso do comando *Leia* 11
1.2 Uso do comando *mensagem* 12
1.3 Procedimento simples para construir um triângulo 13
1.4 Editor de texto 14
1.5 Botões do editor 14
1.6 Resultado do procedimento que constrói um quadrado 16
1.7 Juntando dois procedimentos no editor 17
1.8 Interação com o usuário 17
1.9 Mensagem isolada 19
1.10 Soma de números ímpares 20
1.11 Avaliação do software 23
1.12 Triângulo produzido no X-LOGO- 30% do tamanho original 25
1.13 Imagem exportada do *X-LOGO* para o *LibreOffice Draw*- 30% do tamanho original 26

2.1 Aproximação de Heron para raiz quadrada de 3 com precisão de 8 casas decimais 30
2.2 Número de triângulos que podem ser formados a partir de um vértice . . . 33
2.3 Procedimento de generalização 34
2.4 Resposta do programa ao procedimento 35
2.5 Construção de um polígono de 8 lados utilizando o procedimento feito no editor de texto 35
2.6 Mostre resto 15 6 37
2.7 Mdc (15,6) 38
2.8 figuras/Palindromo 68 40
2.9 Palíndromo gerado pelo 89 42
2.10 Três pontos colineares e três pontos não colineares no plano 47
2.11 Desigualdade triangular 48

2.12 Lei dos cossenos no X-LOGO 49
2.13 Construção de um triângulo dados os seus lados 50
2.14 Diagrama ilustrativo das distâncias percorridas 52
2.15 Média Harmônica 53
2.16 Quadrado e retângulo com mesma área 54
2.17 Desigualdade das médias 56
2.18 Triângulo BCD 57
2.19 Triângulo BHF 58
2.20 Triângulo AFG 59
2.21 Círculos tangentes 61
2.22 Círculos tangentes dois a dois 63
2.23 Três Círculos tangentes entre si e tangentes a reta 64
2.24 Cálculo do raio do círculo tangente no ponto t_3 65
2.25 Círculo tangente no ponto t_4 66
2.26 Círculo tangente no ponto t_5 67
2.27 Círculo tangente no ponto t_6 68
2.28 Círculo tangente no ponto t_7 69
2.29 Círculo tangente no ponto t_8 70
2.30 Círculo tangente no ponto t_9 71
2.31 Círculos e seus pontos de tangência 72

B.1 Raio y e ponto de tangência t 86
B.2 Condição de tangência entre dois círculos 87
B.3 Operadores e Sintaxe 91
B.4 Sistema RGB de cores 92
B.5 Primitivas de movimento - Parte 1 92
B.6 Primitivas de movimento - Parte 2 93
B.7 Primitivas de movimento - Parte 3 94
B.8 Primitivas de movimento - Parte 4 95
B.9 Primitivas de movimento - Parte 5 96
B.10 Primitivas de movimento - Parte 6 97
B.11 Primitivas de texto - Parte 1 97
B.12 Primitivas de texto - Parte 2 98
B.13 Operadores lógicos - Parte 1 98
B.14 Operadores lógicos - Parte 2 99
B.15 Operadores lógicos - Parte 3 100

Lista de Tabelas

1.1 Funções das primitivas utilizadas no procedimento. 18

2.1 Tabela de construção de polígonos regulares 32
2.2 Iterações que geram palíndromos 43
2.3 Termos do desenvolvimento do palíndromo 45
2.4 Pontos de tangência e raios dos círculos 74

INTRODUÇÃO

0.1 JUSTIFICATIVA

Este trabalho é direcionado a professores de Matemática da educação básica, que desejam quebrar a rotina das aulas utilizando o software *X-LOGO*, e buscam uma referência com algumas atividades para desenvolver em sala de aula. Aqui este professor irá encontrar sete temas que envolvem Geometria e Álgebra. Obviamente os temas não poderão ser desenvolvidos em sua totalidade, haja vista que há discussões que excedem o conteúdo do ensino básico, exceto para alunos mais avançados, ou que fazem parte de grupos de treinamento para Olimpíada de Matemática, ou de Iniciação Científica. Contudo a parte prática pode ser trabalhada na íntegra.

Segue como sugestão inicial que o professor faça uma introdução do programa, falar de seus comandos, primitivas, procedimentos e interpretação deles, a fim de que os trabalhos não sejam apenas mecanizados e possam entender em cada passo o que está acontecendo no processo. Entretanto, se o professor dispor de um tempo muito curto para atividades extra-curriculares, sugiro que os comandos e primitivas sejam inseridos de acordo com a sua necessidade e utilização. Com isso ele ganha tempo para as atividades que considera mais relevantes.

Inserimos neste trabalho alguns temas que podem servir para uma eventual iniciação à programação básica na seção, e outros que misturam conteúdos matemáticos com lógica de programação na subseção. Eles podem ser desenvolvidos com alunos dos primeiros anos do Ensino Fundamental II e Ensino Médio.
A seguir apresentaremos os temas que desenvolvemos neste trabalho e o nível do ensino básico em que eles podem ser tratados.

- Os comandos e a interpertação deles no *X-LOGO*, descritos no capítulo 1 podem ser trabalhadas a partir das séries iniciais do Ensino Fundamental I o que pode inclusive auxiliar na percepção geométrica dos discentes.

- Na seção 2.1 *O Método de Heron* para aproximar raízes quadradas, é muito eficiente e simples, podendo ser trabalhado com alunos do sexto ano do ensino fundamental

II. A demonstração do método é exclusivamente para o professor.

- Os polígonos regulares, seção 2.2, podem ser trabalhados com alunos a partir do sexto ano do ensino fundamental.

- O *Algoritmo de Euclides* no capítulo 2.3 pode ser desenvolvido com alunos a partir do sexto ano do ensino fundamental, exceto a demonstração, logo após inserir o conceito de Máximo Divisor Comum. Normalmente nesta série os livros didáticos trazem apenas o método da fatoração ou o método dos divisores comuns. Introduzir o Algoritmo de Euclides com o computador pode se encaixar como atividade complementar. Já a parte da demonstração pode ser trabalhada com alunos de perfil diferenciado.

- A atividade sobre *números palíndromos* na seção 2.4 também podem ser tratada com alunos a partir do sexto ano do ensino fundamental. Aparece neste momento mais uma vez a oportunidade do professor utilizar o editor de texto para escrever os procedimentos. Este é um pouco mais complexo, mas colocamos um passo a passo explicando cada bloco de código para facilitar o entendimento. É importante que este passo a passo também seja feito com os alunos, principalmente se os alunos forem iniciantes no programa.

- A parte que trata da *Desigualdade Triangular* na subseção 2.2.2 pode ser trabalhada com ensino fundamental, exceto a discussão sobre o ângulo de giro, que utiliza a lei dos cossenos, esta aconselhamos que seja feita com alunos de ensino médio.

- Usamos uma abordagem diferente para a desigualdade das médias, seção 2.6, aqui trabalhamos sua interpretação geométrica. Da forma como foi exposta aqui é preferível tratar apenas com alunos do ensino médio.

- *Os Círculos Tangentes* trabalhado no capítulo 2.8 foi dividido em três partes, a saber, a prática, conjectura e a parte teórica. A parte prática e a conjectura pode ser tratada com alunos do Ensino Médio, já a demonstração de que os pontos de tangência são racionais fizemos exclusivamente para o professor, mas isto não impede que estas atividades sejam feitas com alunos mais avançados, desde que tenham maturidade suficiente para entender estes temas.

Vale ressaltar que a maior parte das figuras deste trabalho foram construídas no Geogebra, isto ocorreu porque o *X-LOGO* exporta figuras de baixa resolução, o que dificulta a visualização do leitor. Por esta razão optamos por utilizar o Geogebra para construção da maior parte das figuras para registrar este trabalho. Isto também justifica o fato de que algumas figuras extraídas do *X-LOGO* foram resultados de print da tela do computador, o que também compromete a qualidade da visualização.

Outra consideração importante sobre este trabalho é que durante o texto toda a vez que escrevemos um comando ou primitiva optamos por destacar em itálico para evitar confusões com as demais abordagens do texto.

0.2 OBJETIVOS

0.2.1 OBJETIVOS GERAIS

- Estimular o estudo da matemática promovendo o desenvolvimento da autonomia, raciocínio lógico-matemático, possibilitando ampliação no conhecimento e no desenvolvimento dos alunos das séries finais do ensino fundamental e também do ensino médio.

0.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Fazer conjecturas para solução e generalização de problemas matemáticos.
- Utilizar o software *X-LOGO* como ferramenta para inserir conteúdos matemáticos.
- Trabalhar técnicas e estratégias de resolução de problemas.
- Utilizar a informática como ferramenta para o ensino de matemática na educação básica.
- Introduzir conceitos básicos de programação afim de aguçar o raciocínio lógico dos alunos, bem como tentar despertar interesse sobre o tema.
- Promover o estudo de ferramentas do software *X-LOGO*.
- Estimular a criatividade dos discentes, bem como a iniciativa pessoal.

0.2.3 USO DE SOFTWARES EDUCACIONAIS E APLICATIVOS

Deixamos este subitem para fazer uma reflexão acerca do uso de softwares aplicativos em sala de aula, suas vantagens e desvantagens na utilização, como recurso didático, bem como, a necessidade de ampliar as ferramentas para facilitar o ensino-aprendizagem de Matematica.

A geração atual de discentes é imediatista, o que explica, em parte, a evidente insatisfação com as aulas ditas ”tradicionais”, ou seja, aulas expositivas nas quais são utilizados apenas o quadro e o giz. Eles julgam esse tipo de aula como sendo pouco dinâmica. Na verdade muitos deles ficam horas nas redes sociais, mas não tem paciência de ficar uma hora estudando Matemática. Neste contexto, cabe ao professor alertar seus alunos que a Matemática não se aprende num único dia. O conhecimento deve ser construído gradativamente. Deve-se estudar um pouco a cada dia para fixar o aprendido e também agregar novos conhecimentos ao que já se sabe. Ninguém aprende violão hoje e amanhã começa a tocar numa banda de sucesso. Um dos motivos para o fracasso dos alunos nas avaliações internas e externas é o fato de estudarem, apenas, às vésperas das provas. Eles aprendem o que acham necessário para si, e para eles a matéria da prova só é necessária quando a avaliação se aproxima. Na verdade, nosso objetivo aqui não é discutir o fracasso escolar, mas vale lembrar o que diz Alicia Fernández: “... A aprendizagem acontece em um vínculo, se ela é um processo que ocorre entre subjetividade, nunca uma única pessoa pode ser culpada. A culpa, o considerar-se culpado, em geral, está no nosso imaginário...” (2001, p.321). Quadros et al (2015) em *Causas e consequências do fracasso escolar: no início da escolaridade*, destaca a motivação do alunos como um dos seis determinantes para o fracasso escolar: o contexto econômico e social, o contexto familiar, o contexto educacional, os professores, o fracasso no interior da escola e a motivação do aluno. Assim o aprender por aprender não existe: os alunos precisam saber para que e por que precisam saber determinado assunto. Atualmente os alunos motivam-se apenas com a típica aprendizagem utilitária, isto é, só se aprende se for útil, necessário para entrar no mercado de trabalho, visando ao retorno financeiro.

A internet invade nossos lares com todas as suas cores, seus movimentos e sua velocidade, fazendo o inacessível tornar-se acessível, como navegar pelo corpo humano e visualizar a Terra do espaço sem sair do lugar. É difícil, portanto, prender a atenção do aluno em aulas feitas com conjunto lousa + professor. Então, por que fazemos o mesmo quando se podemos fazer diferente? Uma vez que os alunos gostam tanto de aulas que utilizam a tecnologia, por que não aproveitar essa oportunidade e usá-la a nosso favor? A aula pode entusiasmar os alunos de maneira ao menos parecida com que são excitados pelos jogos e filmes de alta qualidade e com efeitos especiais.

A escola precisa modernizar-se a fim de acompanhar o ritmo da sociedade e não se tornar uma instituição fora de moda, ultrapassada e desinteressante. Embora lentamente, ela está fazendo isso. Saber que o aluno aprende com o que lhe prende a atenção todos sabem. A questão é: estão os professores, as escolas e os sistemas de ensino preparados para tal mudança? Aulas modernizadas pelo uso de recursos tecnológicos têm vida longa e podem ser adaptadas para vários tipos de alunos, para diferentes faixas etárias e diversos níveis de aprendizado. O trabalho acaba tendo um retorno muito mais eficaz. É importante, no entanto, que haja não apenas uma revolução tecnológica nas escolas. É necessária a revolução na capacitação docente, pois a tecnologia é algo ainda a ser desmistificado para a maioria dos professores. Existe uma infinidade de programas disponíveis para atividades interativas e jogos; porém, alguns professores não sabem como utilizá-los.

Utilizar o computador em sala de aula é o menor dos desafios do professor: utilizar o computador de forma a tornar a aula mais envolvente, interativa, criativa e inteligente é que parece realmente preocupante. O simples fato de transferir a tarefa do quadro para o computador não muda uma aula. É fundamental que a metodologia utilizada seja pensada em conjunto com os recursos tecnológicos que a modernidade oferece. O filme, a lousa interativa, o computador, etc., perdem a validade se não se mantiver o objetivo principal: a aprendizagem. De acordo com Giraldo et al: "...evidenciar aos estudantes a necessidade de construir argumentos matemáticos, e evitar que eles atribuam ao computador um estatuto de verdade matemática...". Entendemos com isto que as próprias limitações que os softwares possuem servem como argumento de necessidade de fazer uma justificativa matemática.

O conhecimento tem presença garantida em qualquer projeção que se faça do futuro. Neste contexto, cabe a escola ampliar o conhecimento como espaço de realização humana, de alegria e de contentamento cultural; selecionar e rever criticamente a informação; formular hipóteses; ser criativa e inventiva. Inovar, planejar se a médio ou longos prazos, fazer sua própria reestruturação curricular. O uso de tecnologias na disciplina Matemática torna-se, a cada ano de certa forma obrigatório, porque há uma necessidade cada vez maior de mostrar aos alunos, que a matemática que eles vêem em sala de aula têm aplicações em diversos ramos do conhecimento.

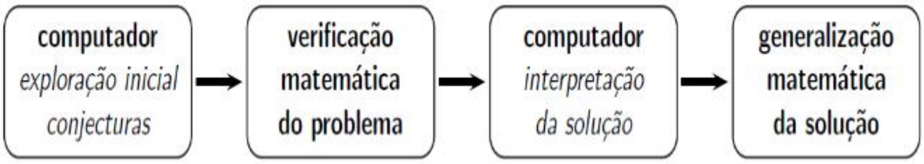
De acordo com Giraldo et al:

> "...É importante destacar que, no encaminhamento proposto acima, não é papel do computador converter-se em um critério para verificar ou confirmar a validade matemática da solução. O papel fundamental do computador é o de motivar conjeturas e indicar caminhos para a solução do problema e para a generalização desta solução, além de enriquecer a compreensão desta solução por meio da articulação entre as representações algébrica e gráfica. A validade ou não da solução devem ser baseadas exclusivamente em critérios de argumentação matemática..."(GIRALDO et al, 2012, p. 44)

Segundo o autor primeiro deve-se partir da exploração de um exemplo particular no ambiente gráfico, o que nos permite chegar a uma conjectura sobre a solução do problema. Em um segundo momento, verifica-se matematicamente a validade desta conjectura. Em seguida, deve-se voltar ao computador para a interpretação gráfica do resultado.

Finalmente, generalizamos o resultado, por meio de argumentos matemáticos. Todos estes passos estão ilustrados a seguir na figura [1].

Figura 1: O papel do computador na exploração inicial e na interpretação dos resultados



O nosso trabalho foi influenciado parcialmente pelo modelo proposto por Giraldo, isto está bem claro no capítulo 2.

[1]FONTE: GIRALDO, Victor; et al. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática.* Coleção PROFMAT. 1° edição. Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática. 2012. p. 44

1 X-LOGO

O software *X-LOGO* é um interpretador LOGO escrito em java que, atualmente, roda em 8 idiomas: alemão, árabe, francês, inglês, espanhol, português, galês e esperanto. Distribuído sob licença GPL, é um software livre e gratuito. Sua licença pode ser encontrada na internet.

Esta linguagem desenvolvida nos anos 70 por Seymour Papert [1]. Ela é excelente para iniciar os estudos de programação, e ensina o básico sobre temas como loops (laços), condicionais, procedimentos, etc. O usuário pode mover uma tartaruga dentro de uma janela, usando comandos simples como *"parafrente"*, *"paratrás"*, *"paradireita"*, ou suas abreviações, respectivamente, *"pf"*, *"pt"* e *"pd"* entre outros comandos. Com cada movimento, a tartaruga deixa ou não um "rastro"atrás de si (desenha uma linha) e desta maneira se criam desenhos. Também é possível lidar com palavras e listas. Ele é um software de Matemática Dinâmica que une diversos campos da Matemática como por exemplo: Geometria, Álgebra e Cálculo Diferencial e Integral. Markus Hohenwarter e uma equipe internacional de programadores auxiliaram no desenvolvimento deste software, para aprender e ensinar matemática nas escolas. Os conceitos matemáticos podem ser solidificados com este programa, por exemplo para construírmos um triângulo, precisamos conhecer os conceitos de ângulo externo, condição de existência de triângulos, sem

[1]Seymour Papert (Pretória, 1 de Março de 1928 – Blue Hill, Maine, 31 de julho de 2016) foi um matemático e proeminente educador estadunidense nascido na África do Sul. Lecionava no Massachusetts Institute of Technology (MIT).Papert estudou na Universidade de Witwatersrand, graduado em 1949 e obteve um PhD em matemática em 1952. Recebeu outro título de PhD, também em matemática, na Cambridge University em 1959, onde foi orientado por Frank Smithies.Ele foi o teórico mais conhecido sobre o uso de computadores na educação, um dos pioneiros da inteligência artificial e criador da linguagem de programação LOGO (em 1967), inicialmente para crianças, quando os computadores eram muitos limitados, não existia a interface gráfica e muito menos a internet. Na educação, Papert cunhou o termo construcionismo como sendo a abordagem do construtivismo que permite ao educando construir o seu próprio conhecimento por intermédio de alguma ferramenta, como o computador, por exemplo.Desta forma, o uso do computador é defendido como auxiliar no processo de construção de conhecimentos, uma poderosa ferramenta educacional, adaptando os princípios do construtivismo cognitivo de Jean Piaget a fim de melhor aproveitar-se o uso de tecnologias.Papert morreu em sua casa em Blue Hill, Maine, em 31 de julho de 2016.

os quais não poderemos formar a figura. Trabalhamos alguns comandos e interpretação deles de forma dinâmica.

1.1 COMANDOS E INTERPRETAÇÃO

Antes de começar a tratar dos comandos e suas interpretações, é importante lembrar que quando eles surgirem no texto destacaremos em itálico. O *X-LOGO* permite que certos eventos sejam disparado por comandos internos, esses comandos são chamados primitivas. Cada primitiva pode ter um certo número de parâmetros os quais são chamados argumentos. Por exemplo, a primitiva *"ld"*, que limpa a tela de desenho, a primitiva *"dt"*, faz com que a tartaruga desapareça, essas primitivas não exigem nenhum tipo de argumento, enquanto que a primitiva *"parafrente"* ou *"pf"* exige um argumento, por exemplo, *pf 30* faz a tartaruga andar 30 passos para frente.

As primitivas *pf* e *pd* tem uma importância especial para o nosso trabalho, pois a primeira traz a ideia de segmento e a segunda de ângulo de giro.

Os argumentos no LOGO são de três tipos:

1. Palavras: São sinalizadas pelo símbolo aspas ("). Um exemplo de primitiva que utiliza uma palavra como argumento é a primitiva mostre. mostre "Oi devolve Oi. Note que se por acaso este símbolo for esquecido o interpretador retornará com uma mensagem de erro. De fato, o comando mostre espera um argumento, sendo assim para o interpretador a palavra (Oi), por exemplo não significará nada, uma vez que não é um número, uma comando, uma lista, ou qualquer outra coisa definida em um procedimento. Ela deve ser acompanhada do símbolo aspas (") para que o programa a interprete como parte de uma procedimento ou lista.

2. Listas: São argumentos definidos entre colchetes. Por exemplo, o comando *repita 4[pf 100 pd 90]* irá repetir 4 vezes o processo de andar 100 passos de tartaruga para frente e virar 90° para a direita, tendo como resultado um quadrado de lado 100 passos de tartaruga. No apêndice deste trabalho estão alguns procedimentos para consulta.

3. Números: eles podem ser qualquer das três variações de argumento, pois algumas primitivas exigem números como argumento, por exemplo: *pd 100*, a tartaruga vira 100° para direita. Eles são tratados em algumas instâncias como um valor numérico por exemplo: *pt 100*, a tartaruga percorrerá 100 unidades de passos de tartaruga para trás e em outros casos são tratados como palavra, por exemplo: *mostre évazio? 12*, o programa julgará se a palavra seguinte é verdadeira ou falso, neste caso escreverá *falso*.

1.1.1 EXEMPLOS DE COMANDOS

Nesta seção listamos alguns exemplos de comandos. É óbvio que nossa intenção aqui não é esgotar todos os comandos, e sim trazer a funcionalidade de alguns que foram utilizados neste trabalho e outros que chamam atenção por suas particularidades.

REPITA

Existem ocasiões em que é necessário efetuar a repetição de um trecho de programa um determinado número de vezes. Neste caso, poderá ser criado um *looping* que efetue o processamento de um determinado trecho, tantas vezes quantas forem necessárias. Os *loopings* também são chamados de laços de repetição ou malhas de repetição. Com o conhecimento adquirido até este momento no software, o leitor com toda certeza iria escrever o mesmo trecho, repetindo-o o número de vezes necessárias. O comando repita é importante porque faz este *looping* e evita que se escreva mais de uma vez uma sequência lógica de procedimentos.

Ele pode ser utilizado direto na caixa de entrada ou em algum procedimento no editor de texto. Abaixo está um exemplo de como construir um quadrado de uma vez só na caixa de entrada. Este comando como o nome mesmo diz, repete o procedimento escrito entre parênteses a quantidade de vezes que foi pré-determinada. Observe que, durante o passo-a-passo da construção (subitem 2.2.2) escreveu-se quatro vezes o comando *pf* e se desejarmos que a tartaruga volte a posição inicial, se escreverá também 4 vezes o comando *pd 90*, caso contrário digitando três vezes este comando será suficiente para se construir o quadrado. Por esta razão escreveu: *repita 4[pf 100 pd 90].* O detalhes para construir o quadrado com um só comando estão apresentados no subitem 2.2.3.

ROTULE

Este comando faz com que seja escrita uma mensagem, símbolos ou palavras na área de transferência. Resolvemos fazer um texto que pisca com a frase BOM FIM DE SEMANA para tanto basta escrever na caixa de entrada:
repita 8000 [mudecl verde rotule [BOM FIM DESEMANA] mudecl vermelho rotule [BOM FIM DESEMANA] mudecl branco rotule[BOM FIM DESEMANA]]
O efeito visual será como se o texto estivesse piscando em cores diferentes, mas na verdade o que o programa faz é pintar o texto alternadamente nas cores vermelho, branco e verde, respectivamente, o programa fará isto 8000 vezes.

Um bom exercício seria utilizar o comando *rotule* para rotular pontos plotados na área de transferência. A utilização deste comando se dá em meio a procedimentos lógicos.

LEIA

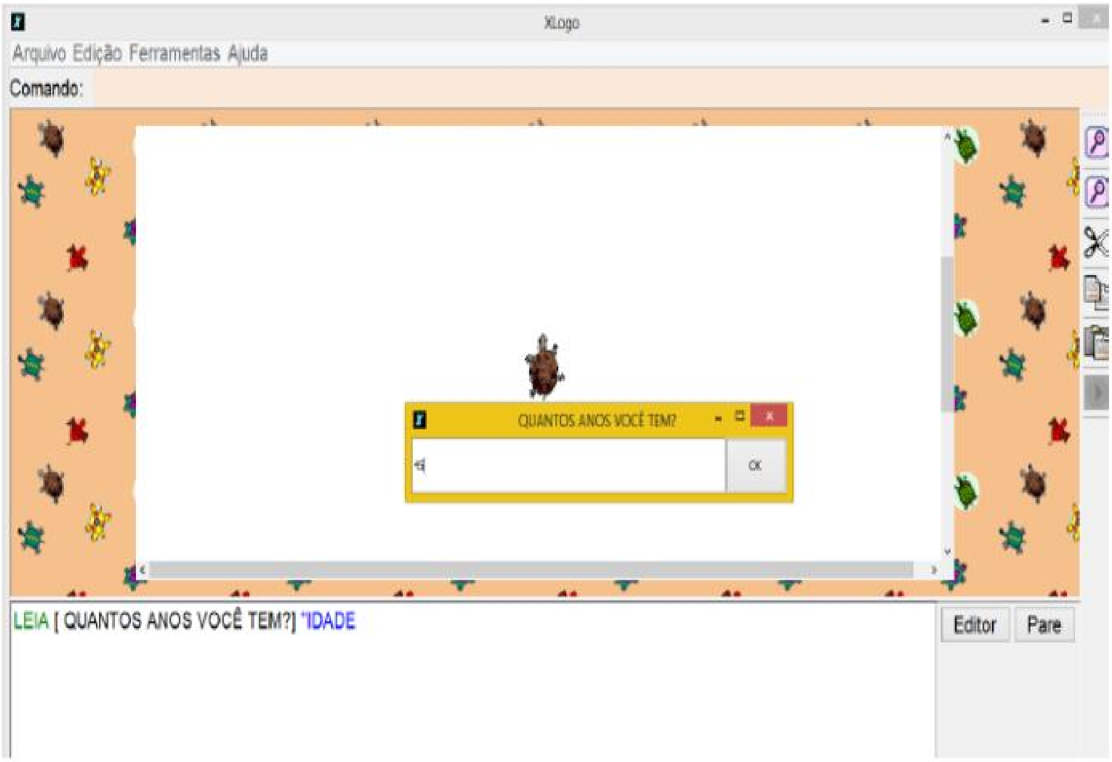
Este comando faz aparecer um retângulo na tela do *X-LOGO*, pedindo uma informação pré-determinada. Exemplo: *LEIA [QUANTOS ANOS VOCÊ TEM?] "IDADE*
.

Depois de fornecida a informação pedida pelo programa, ele apenas lê e armazena a informação na sua memória. Normamente este comando não é utilizado isoladamente sua funcionalidade está na criação de procedimentos lógicos, como os que tratamos na subseção 1.2.

Vale ressaltar que é necessário que seja introduzido no final do procedimento o símbolo (") acompanhado de uma palavra ou letra, senão o procedimento ficará incompleto. Esta palavra não precisa necessáriamente ter relação com o tema do texto a ser lido para que o comando funcione, ela serve apenas para completar o comando, no entanto, para que não fique muito desconexo é importante colocar palavras que tenham relação com a informação que se deseja que o *X-LOGO* processe.

Depois de fornecida a informação pedida pelo programa, ele apenas lê e armazena a informação na sua memória. Normamente este comando não é utilizado isoladamente sua funcionalidade está na criação de procedimentos lógicos, como os que foram tratados em 1.2. A figura 1.1 ilustra o resultado do comando.

Figura 1.1: Uso do comando *Leia*



MENSAGEM

Este comando faz aparecer uma mensagem escrita numa janela na caixa de entrada.

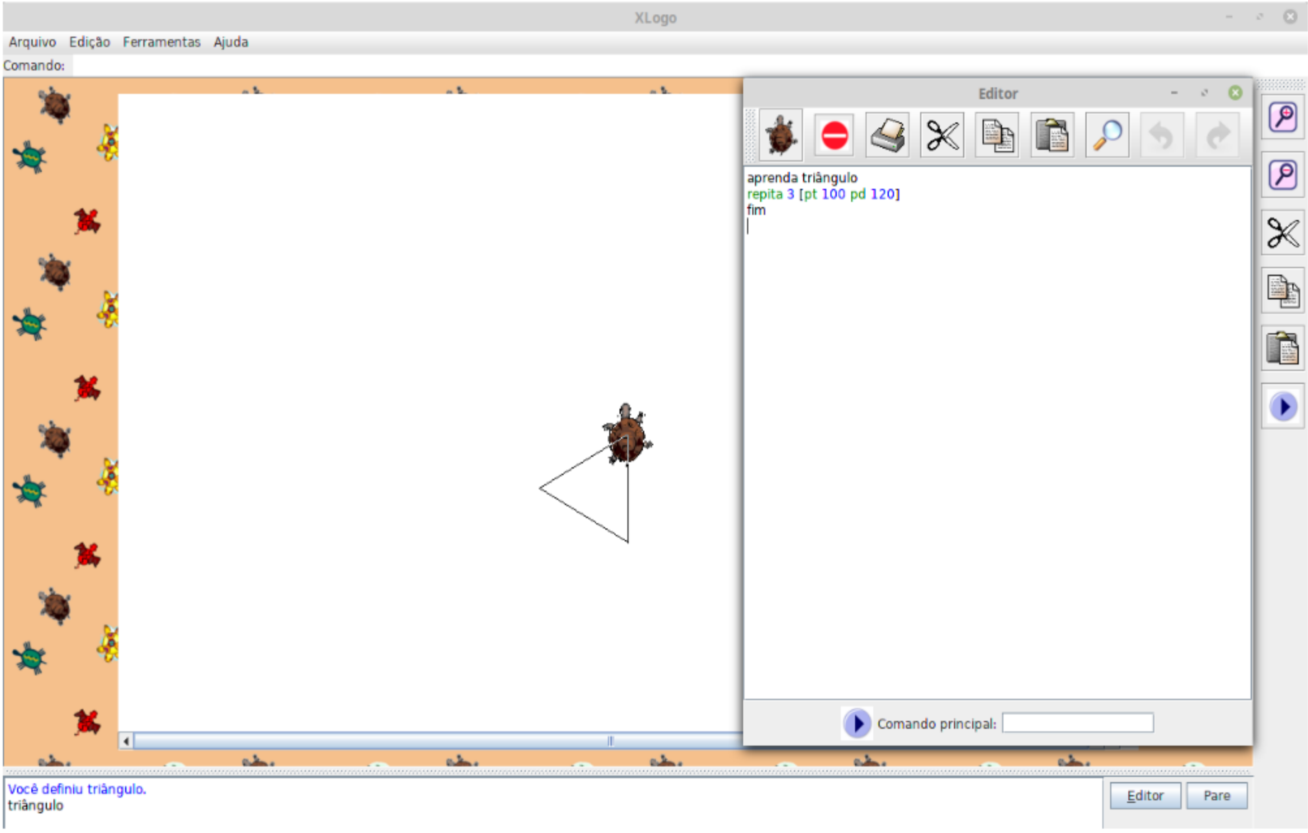
Exemplo: *MENSAGEM [A EDUCAÇÃO É UM DIREITO DE TODOS]*
Vide a figura 1.2.

Figura 1.2: Uso do comando *mensagem*

1.2 PROCEDIMENTOS

Procedimentos são comandos criados pelos usuários que são digitados no *editor de textos* eles se iniciam com a palavra "aprenda"e terminam com a palavra "fim". Na figura 1.3 , situada abaixo, estão o resultado e o procedimento simples que constrói um triângulo. Procedimento: *repita 3[pf 100 pd 120]*

Figura 1.3: Procedimento simples para construir um triângulo



1.2.1 EDITOR

Neste subitem vamos fornecer algumas dicas de como se trabalhar com o *editor de textos*

Há três modos de abrir o editor:

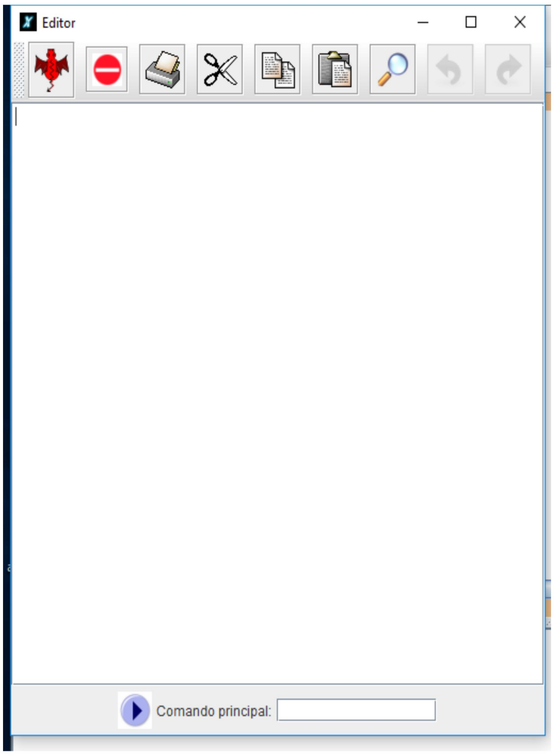
1. escrevendo *ed* na linha de comandos (na parte superior da tela). O editor abre para exibir todos os procedimentos já definidos.

2. pressionando o botão Editor no canto inferior direito da janela do XLogo;

3. utilizando as teclas de atalho Alt+E.

A figura 1.4 abaixo mostra a janela do editor.

Figura 1.4: Editor de texto



Na figura 1.5 [2] os botões que você encontrará no Editor:

Figura 1.5: Botões do editor

ou	Fecha o editor e guarda (salva) o que foi feito. Este é o botão que deve ser pressionado sempre que escrever novos comandos ou fizer alterações nos procedimentos. Se preferir, utilize as teclas de atalho ***ALT+Q***.		Este botão aparece na base do editor com uma caixa de texto para definir um comando principal, ou seja, o comando que será executado ao clicarmos no botão correspondente da janela principal. Este comando principal será salvo junto com o arquivo **.lgo**.
	Sai do editor sem salvar nenhuma das mudanças feitas. Você também pode utilizar as teclas de atalho ***ALT+C***.		Recorta o texto selecionado para o clipboard.
	Imprime o conteúdo do editor.		Cola o texto armazenado no clipboard.
	Copia o texto selecionado para o clipboard.		Localiza e substitui termos no editor.

Vale ressaltar que clicar no botão que habitualmente utilizamos para fechar janelas

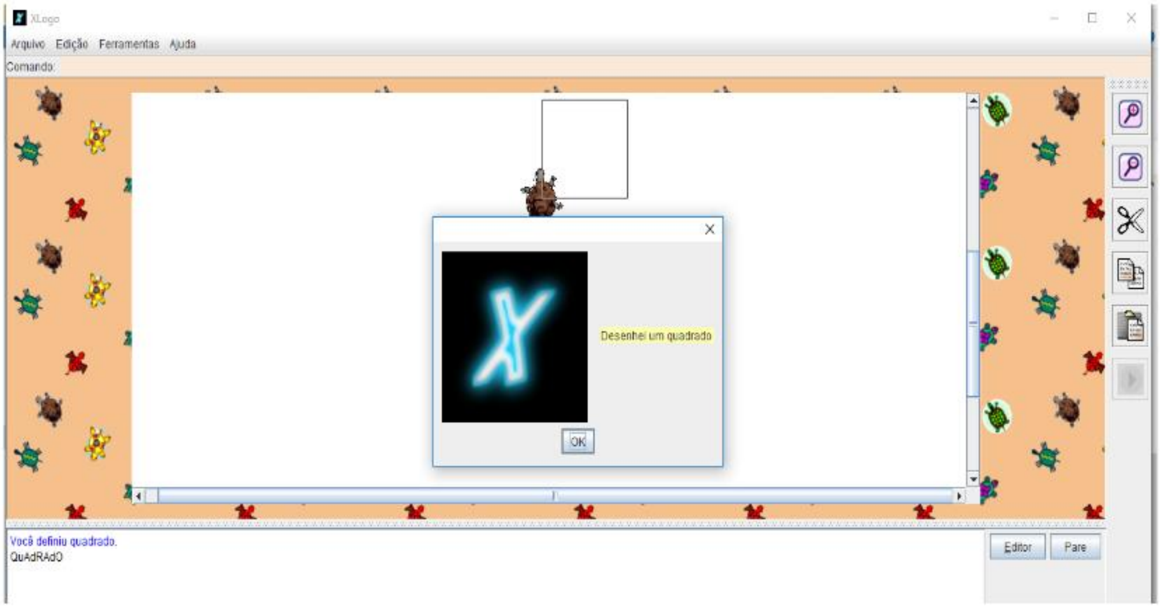
[2]X-LOGO. *Manual do Usuário*. Disponível em:¡http://xlogo.tuxfamily.org/pt/¿. Acesso em 10 jun. 2017

no computador - botão retangular, normalmente vermelho marcado com um X- no canto superior direito da janela de título, não produz efeito algum. Somente os dois primeiros botões acima citados na figura 1.5 permitem sair do editor. Para apagar (eliminar) procedimentos, não adianta utilizar a tecla BACKSPACE ou selecionar tudo e deletar os procedimentos do editor, pois eles só desaparecerão naquele momento. Se o editor for fechado e aberto novamente o texto antes apagado aparecerá outra vez. Caso deseje que o texto seja apagado definitivamente basta utilizar quaisquer das primitivas *elimine*, *eliminetudo* ou *et*. Com relação ao uso de caracteres deve se tomar alguns cuidados. Por exemplo o caractere barra invertida, ou backslash "$\diagup$ "permite colocar espaço entre palavras ou uma nova linha. O comando "$\diagup n$"faz a quebra de linha enquanto "$\diagup$"seguido de um espaço, indica espaço numa palavra.
Exemplo: mostre Geometria $\diagup$ plana
Geometria plana
mostre Geometria $\diagup n$ plana
Geometria
plana
Se desejar escrever o caractere "$\diagup$"será necessário escrevê- duas vezes "$\diagup\diagup$".
mostre $\diagup\diagup$ xlogo. Obtêm-se:
/ xlogo

Da mesma forma os caracteres “ $ () [] #” são reservados para a linguagem Logo. Sendo assim, se necessitar representá-los, será necessário utilizar o caracter "$\diagdown$"antes.
Exemplo:
mostre /(/*xlogo*/)

(/xlogo/)
Vale ressaltar que o *XLOGO* não faz distinção entre maiúsculas e minúsculas para procedimentos e primitivas. Sendo assim, tanto faz escrever QUADRADO ou qUADdRAdO, o interpretador de comandos o "traduzirá"e executará corretamente como na figura 1.6.

Figura 1.6: Resultado do procedimento que constrói um quadrado



Por outro lado, XLOGO faz distinção para listas e palavras: mostre "CaMpEãO → "CaMpEãO (as letras maiúsculas e minúsculas são mantidas como escritas).

1.2.2 PROCEDIMENTOS LÓGICOS

Destacaremos aqui alguns procedimentos lógicos básicos que podem ser compilados no *X-LOGO*.

JUNTANDO DOIS PROCEDIMENTOS

Abrindo o editor digite o seguinte procedimento:

aprenda idade

leia [Qual é a sua idade?] "idade

atr "idade pri :idade

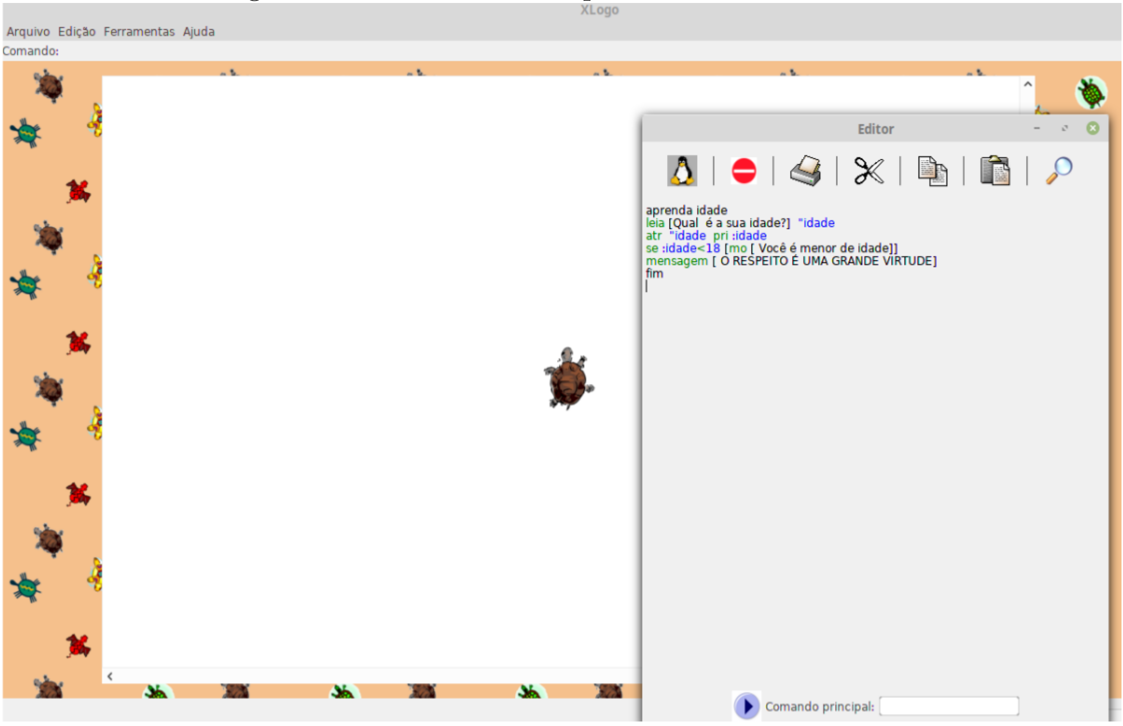
se : *idade* < 18*[mo [você é menor de idade]]*

mensagem [O RESPEITO É UMA GRANDE VIRTUDE]

fim

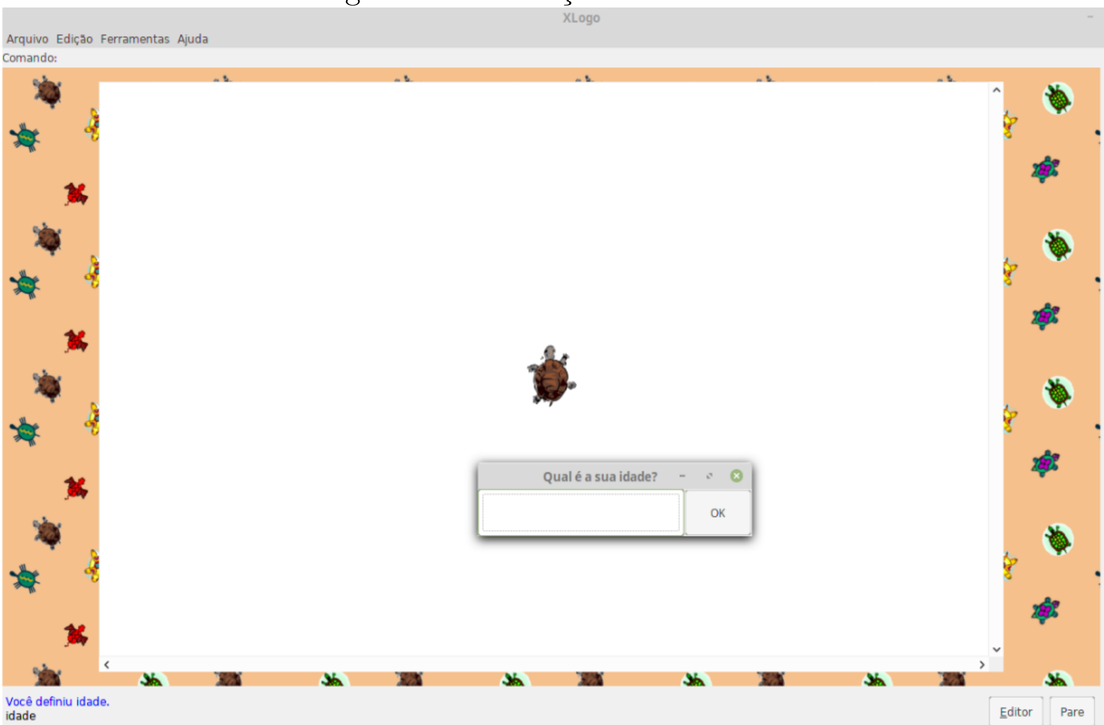
Na figura 1.7 aparece o este procedimento escrito no programa.

Figura 1.7: Juntando dois procedimentos no editor



Após clicar no botão que tem o formato da roupa da tartaruga (No LINUX é possível colocar um pinguim no lugar) o *X-LOGO* imediatamente responde com a mensagem: *"Você definiu idade"*.

Figura 1.8: Interação com o usuário



Se em seguida digitarmos a palavra *"idade"* o programa abrirá uma janela retangular com a seguinte pergunta: *"Qual é a sua idade?"*. Digitando uma idade inferior a 18 anos o programa responderá: *"Você é menor de idade"*, caso digite uma idade superior a 18 anos o programa não terá ação para realizar uma vez que não foi definido nada no procedimento caso isto ocorra.

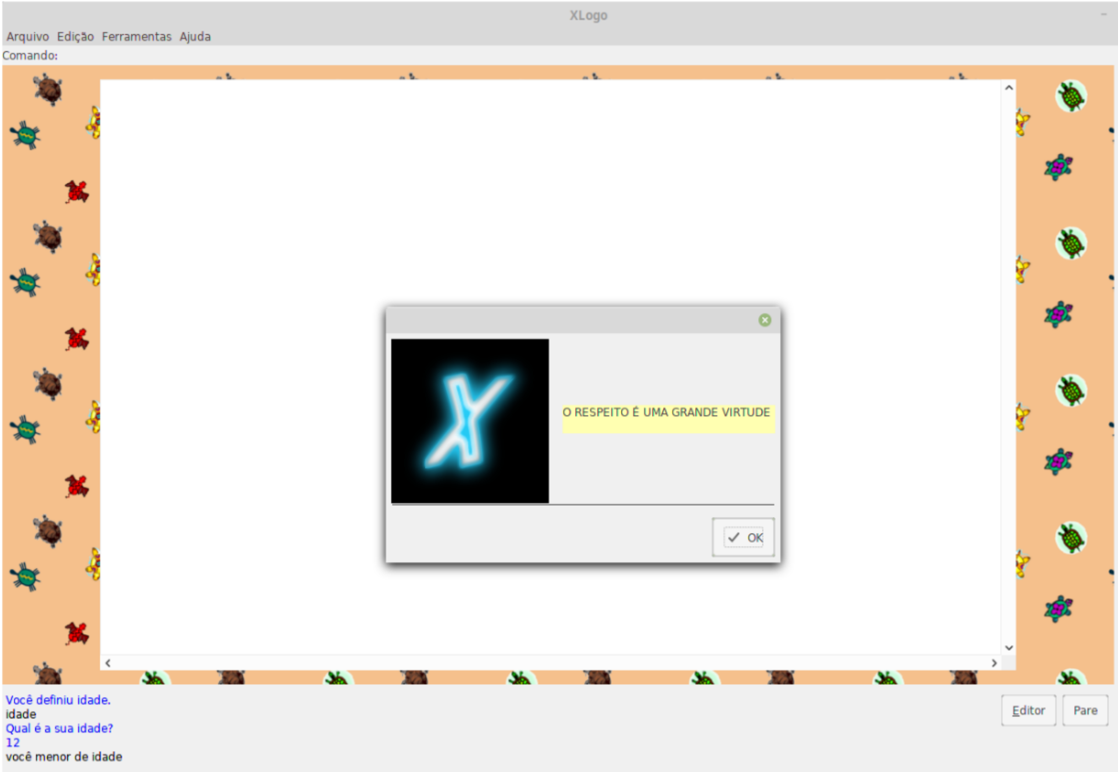
Cada parte do procedimento tem sua importância. A tabela 1.2.2 mostra com mais detalhes as primitivas trabalhadas aqui.

Comando	Abreviação	Interpretação
atribua	atr	atribui valor a uma variável
primeiro	pri	retorna o primeiro elemento de uma lista ou palavra.
mostre	mo	mostra a palavra, resultado da lista, número.

Tabela 1.1: Funções das primitivas utilizadas no procedimento.

Por exemplo, a primitiva *leia* lê e armazena na memória do programa a informação que será digitada na caixa retangular como mostra a figura 1.8. Ela é a primeira primitiva acionada ao digitar-se a palavra *"idade"*. Depois de feita a leitura entra em ação a segunda parte do procedimento. A primitiva *"atr"* é a forma abreviada da primitiva *"atribua"*, ela atribui valor lógico a palavra *"idade"*. Em seguida o procedimento compara a idade digitada com o valor delimitado, no nosso caso 18 anos. Isto ocorre por causa da primitiva *"pri"* que é uma abreviação da primitiva *"primeiro"*. Ela retorna a palavra *"idade"*, que atribuímos valor lógico neste procedimento. Se o procedimento tivesse terminado neste ponto o programa traria como resposta: *"O que devo fazer com 12 anos?"*, por esta razão acrescentamos a linha: *se* : *idade* $<$ 18*[mo [você é menor]]*. Nesta parte a primitiva condicional *"se"* estabelece uma condição caso a idade seja menor que 18 anos. A primitiva *"mo"*, abreviação da primitiva *"mostre"*, mostra como resposta do procedimento a frase: *"Você é menor de idade"*. Completamos o procedimento com o comando *mensagem*. Independente da resposta do procedimento anterior a mensagem: *"O RESPEITO É UMA GRANDE VIRTUDE"* apareceria, haja vista que apesar de estarem sendo usados juntos eles não estão relacionados. Mesmo que tivemos acrescentado mais uma linha para indicar que a idade digitada fosse de uma pessoa maior de idade. Portanto esta última linha poderia ser retirada sem nenhum prejuízo ao procedimento.A figura 1.9 mostra a última parte do procedimento

Figura 1.9: Mensagem isolada



Um bom exercício seria incrementar este procedimento com mais condicionais fazendo com que o programa forneça respostas diferentes para os casos em que sejam digitadas idades maiores que 18 anos, e também no caso em que se digitar exatamente 18 anos. Não fizemos isto aqui porque a ideia é estimular ao aluno tentar sempre melhorar o procedimento realizado estabelecendo novas condições.

PROCEDIMENTO QUE SOMA OS N PRIMEIROS NÚMEROS ÍMPARES

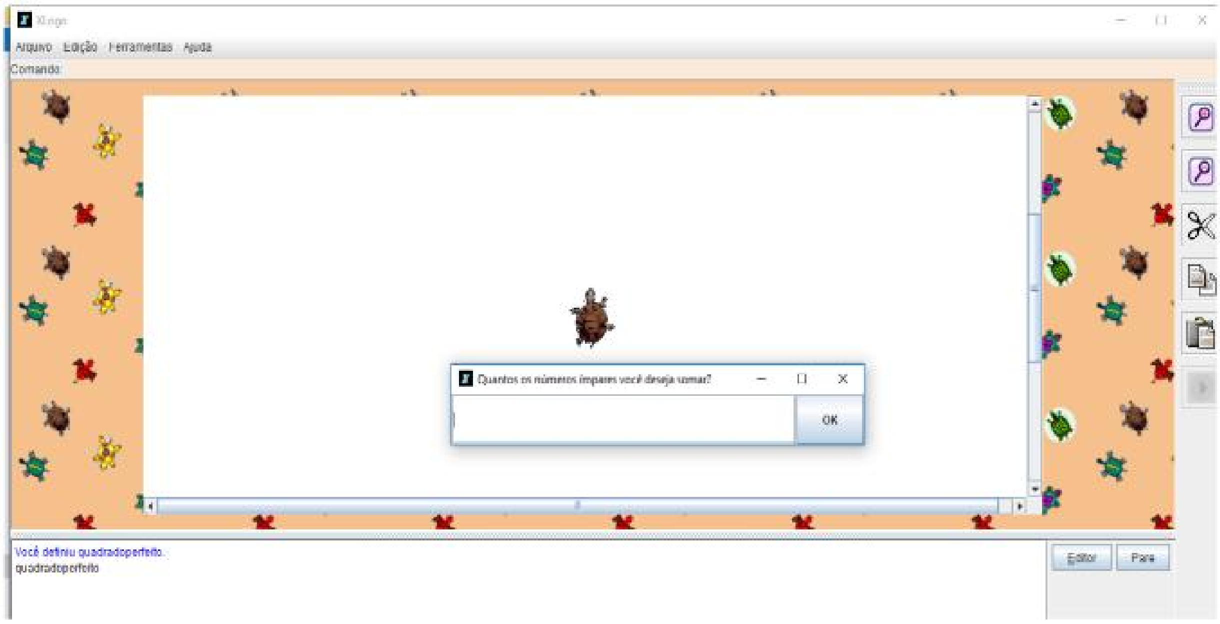
Vamos criar um procedimento que soma os n primeiros números ímpares. Abrindo o *editor de textos* digite os seguintes comandos.

aprenda quadradoperfeito
leia [Quantos números ímpares você deseja somar?] ”n
se $:n > 0$ *[saída :n*:n]*
fim

Apertando o botão que tem o formato da roupa da tartaruga o programa responderá com uma mensagem na caixa de saída: *você definiu quadradoperfeito.* O comando funcionará ao digitar *quadradoperfeito* na caixa de entrada. Fazendo isto irá aparecer na tela uma janela com a mensagem: *Quantos os números ímpares você deseja somar?.*

Depois que o usuário escrever a quantidade e apertar a tecla *ENTER* o programa responderá como mostra a figura 1.10. O procedimento criado fará com que o programa leia o número digitado na caixa de entrada através do comando *leia* e o armazenará em sua na memória, em seguida fará as operações definidas no procedimento. A saída é a resposta que o programa dá ao procedimento criado. Neste caso $:n* :n$, ou seja, elevar ao quadrado o número digitado. A demonstração deste fato está no Apêndice deste trabalho.

Figura 1.10: Soma de números ímpares



A justificativa de que este procedimento sempre resulta num quadrado perfeito é simples e pode ser feita utilizando o princípio da indução matemática.

PROCEDIMENTO QUE SOMA OS N PRIMEIROS NÚMEROS NATURAIS

O procedimento abaixo soma os primeiros n números naturais. Abra o editor e digite:

aprenda somanaturais
leia [Quantos números naturais você deseja somar?] "n
se :n > 0 *[saída :n*(:n+1)/2]*
fim

O procedimento multiplica o número natural digitado por seu sucessor, em seguida divide por dois o resultado. A nível médio o professor poderá aproveitar o momento para comentar sobre a soma dos termos de uma progressão aritmética de razão 1. A justificativa desta expressão pode ser feita pelo princípio da indução matemática e, se encontra nos Apêndices deste trabalho.

PROCEDIMENTO QUE IDENTIFICA SE UM NÚMERO É PRIMO OU SE TEM ALGUM DIVISOR

Nesta subseção aparece um conceito básico de programação que é a ideia do looping. Segundo Manzano e Oliveira (2005), o looping é o processamento de um determinado trecho do programa, tantas vezes quantas forem necessárias. Ele também é chamado de laços ou malhas de repetição.

Colocamos um procedimento bem interessante que identica através do comando *vai* se um número é múltiplo de algum outro, e ainda interage com o usuário mostrando qual é o seu menor divisor, caso seja múltiplo, ou afirmando que ele é primo. Para funcionar basta escrever *vai 15* o programa determina se o número é primo, caso contrário ele responde que é múltiplo, e mostra seu menor fator primo. Este procedimento foi extraído do site *Projeto Logo* [3]. O procedimento abaixo ilustra a situação.

aprenda vai :x
se :x = 1 [mo [Por definição, o número um ("1") não é um número primo] paretudo]
se :x / 2 = inteiro (:x / 2) [mo sn [O número] sn :x [é par] pare] repita :x - 1
se 0 = resto :x (1 + cv) [mo sn [O número] sn :x [é múltiplo de:] [mo 1 + cv paretudo]
se cv ∗ cv >: x mo sn :x [é um número primo!][paretudo]
fim

Neste momento aparece mais uma vez o conceito de *Condicionais*[4] que é muito importante em programação. A ideia matemática básica utilizada aqui é a do Crivo de Eratóstenes, note que o procedimento excluiu o algarismo *1*, caso ele seja digitado o programa imediatamente responde: *1 não é um número primo*, em seguida, o programa vai guardando os restos da divisão do número digitado x por números primos, se em algum momento este resto da divisão for zero o programa responde: *é múltiplo de* y, caso contrário ele continua iterando até quando $y^2 < x$, se isto ocorrer o programa responde: x *é um número primo.*

Estes procedimentos lógicos são de suma importância para aguçar o raciocínio dos alunos. A ideia é que eles pensem matematicamente para resolver os problemas citados, utilizem o programa para verficar que a conjectura matemática funciona, e por último, quando couber ao público alvo, verificar o porquê dela funcionar.

[3] Fonte:Projeto Logo. Disponível em: ¡http://projetologo.webs.com/dsf/¿. Acesso em: 18 jan 2018.

[4] *Os condicionais* tem por finalidade tomar uma decisão. Eles são de três tipos: simples, compostos e encadeados. No caso dos condicionais simples, aparece apenas uma condição a ser satisfeita, no caso dos condicionais compostos o programa deve tomar uma decisão diferente a cada resposta ao procedimento, enquanto que nos condicionais encadeados novas decisões são tomadas depois das respostas do programa as decisões anteriores

1.3 AVALIAÇÃO DO SOFTWARE

A avaliação do software mereceu atenção especial, pois o software *X-LOGO* está diretamente relacionados ao processo de ensino-aprendizagem dos educandos, sendo assim, a qualidade das atividades elaboradas é fator determinante para o sucesso ou fracasso deste recurso educacional. A forma como ele for trabalhado pode ser fator motivador ou até desmotivador se as atividades elaboradas não forem dosadas corretamente pelo professor. Cabe a este ter sensibilidade suficiente para perceber se os alunos já se encontram exauridos.

De acordo com Silva (2012, p. 29), "é importante verificar de que forma essa máquina pode ser mais bem utilizada no processo educacional , não apenas no seu uso em geral, mas especificamente para o uso das ferramentas elaboradas e destinadas ao ato pedagógico".

A tarefa de avaliar um software educacional é uma etapa fundamental quando se visa alcançar um ensino qualificado. Concordamos com Carvalho (2005) no que tange a defender a descoberta do usuário mediante a informação dada de maneira parcial, a ideia é que ele se sinta motivado a explorar cada vez mais o software e obter informações novas que auxiliem no seu processo de cognição, portanto o software deve se mostrar atraente e desafiador.

Na Figura 1.11 vemos um quadro com algumas perguntas específicas que devem ser respondidas ele foi criado por Fantin [5]

---

[5]FANTIN, Kátia. Metodologia de Avaliação de Software Educacional. Curso de Bacharelado em Sistemas de Informação. Universidade de Caxias do Sul(UCS -CARVI)

Metas específicas	Questões a serem respondidas
Facilidade de aprendizagem	O usuário localiza pontos de interesse com facilidade no programa? O tempo para aprendizagem do programa, pelo usuário, é adequado?
Flexibilidade e eficiência	Após o usuário aprender a usar o programa, ele consegue ser produtivo em suas tarefas? O programa se apresenta flexível, a fim de oferecer uma boa experiência tanto para os usuários leigos, quanto para os mais experientes?
Prevenção de erros	O programa previne que o usuário cometa erros? E quando os comete, o programa dá suporte de como recuperá-los? O programa fornece mensagens de aviso, erro ou alternativas de forma adequada?
Ajuda e documentação	O programa fornece informações documentais e opção de ajuda? Se sim, podem ser facilmente encontradas?
Satisfação	O sistema atende satisfatoriamente as necessidades dos usuários?
Adequação pedagógica	O programa apresenta correspondência com os conteúdos pedagógicos abordados nas disciplinas escolares?
Utilidade	O programa oferece as funções necessárias para a realização das tarefas?
Adequação técnica	O programa apresenta tempo de execução das tarefas adequado? As exigências técnicas do programa são compatíveis com os equipamentos de informática disponíveis?

Figura 1.11: Avaliação do software

Vamos responder todas estas perguntas à luz do *X-LOGO*.

1.3.1 FACILIDADE DE APRENDIZAGEM

O usuário localiza pontos de interesse com facilidade no programa? O tempo para aprendizagem do programa, pelo usuário, é adequado?

O usuário teve dificuldades para se localizar no programa, inicialmente, mas logo que se habituaram não tiveram grandes dificuldades para realizar as tarefas propostas. A maior dificuldade se encontrava nos conceitos matemáticos que surgiam nos problemas e não no manuseio do programa. Quanto ao tempo que separamos para realização das atividades, ele foi considerado satisfatório. O nosso intuito é não deixar que as atividades se tornem exaustivas para que não venham a gerar enfado e desinteresse.

1.3.2 FLEXIBILIDADE E EFICIÊNCIA

Após o usuário aprender a usar o programa, ele consegue ser produtivo em suas tarefas? O programa se apresenta flexível, a fim de oferecer uma boa experiência tanto para os usuários leigos, quanto para os mais experientes?

O software possibilita ao discente aguçar sua criatividade auxiliando na produção de tarefas lógico-matemáticas, além de servir como um bom instrumento para a iniciação à linguagem básica de programação. Ele é bem flexível podendo ser propostas atividades de diversos níveis e conteúdos, o que amplia o leque de atividades com o programa. Atividades podem ser propostas desde as primeiras séries ensino do fundamental I até ao nível superior.

1.3.3 PREVENSÃO DE ERROS

O programa previne que o usuário cometa erros? E quando os comete, o programa dá suporte de como recuperá-los? O programa fornece mensagens de aviso, erro ou alternativas de forma adequada?

O *X-LOGO* não previne os erros cometidos, mas avisa ao usuário quando e onde ele foi cometido. O software aponta a linha onde está o erro comentido no *editor de textos*, mas não o local exato onde foi cometido, isto pode trazer algumas dificuldades para os mais leigos e com poucas experiência no programa. Outra coisa que pode trazer dificuldades é o fato de que qualquer caracter digitado erroneamente no editor fará com que o procedimento não funcione.

Caso o erro seja cometido na caixa de entrada o programa imediatamente interage com o usuário indicando onde está o erro. Na verdade o sofware interage com o usuário em todas as suas ações estando elas certas ou erradas.

1.3.4 AJUDA E DOCUMENTAÇÃO

O programa fornece informações documentais e opção de ajuda? Se sim, podem ser facilmente encontradas?

O programa fornece informações de ajuda na barra de ferramentas. Ela pode ser encontrada facilmente pelo usuário no alto da tela do lado direito. Clicando no botão *Ajuda* aparecerá quatro opções, a saber, *Licença, Traduza a Licença, Traduza o X-LOGO e Sobre...* As funções deste botões serão listadas abaixo:

1. *Licença*: Neste botão encontramos a licença original do programa em inglês.
2. *Traduza a Licença*: Podemos visualizar a tradução da licença para o Português.
3. *Traduza o X-LOGO*: Aqui você pode criar uma nova tradução para algum idioma que não tem tradução disponível, modificar uma tradução já existente, completar uma tradução, ou ainda consultar as traduções disponíveis.

Há também um link que o usuário pode encontrar mais informações numa página de ajuda, ou até mesmo enviar um e-mail para orientações.

1.3.5 SATISFAÇÃO

O sistema atende satisfatoriamente as necessidades dos usuários?

Depende do tipo de recurso que o usuário deseja. Se ele pretender encontrar um programa que auxilie a inserir conceitos matemáticos o *X-LOGO* é este software, se porém além disso quiser imagens para registro ou compartilhamento já não aconselho, porque o programa produz imagens de baixa resolução. Abaixo temos duas figuras 1.12 e a 1.13 ilustram a diferença entre imagens produzidas no *X-LOGO* e no *LibreOffice Draw*. Elas correspondem a 30% dos seus tamanhos originais. Escolhemos esta proporção porque tamanhos maiores ocupam espaços maiores da página no caso do *X-LOGO*. Isto traria para o registro a impressão de erro de formatação da figura. Já no *LibreOffice Draw* a figura aparenta melhor formatação.

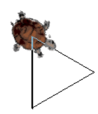


Figura 1.12: Triângulo produzido no X-LOGO- 30% do tamanho original

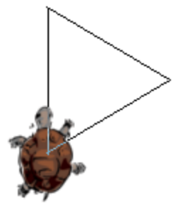


Figura 1.13: Imagem exportada do *X-LOGO* para o *LibreOffice Draw*- 30% do tamanho original

Os gráficos e imagens extraídas do software são de baixa resolução e portanto são pouco atrativas. A figura 1.12 foi exportada direto do programa, este recurso é pouco atrativo, porque não dá para controlar o espaço que aparece entre a figura e a legenda da figura. O interessante são as discussões que surgem com o programa na construção dessas figuras. Apesar disso os alunos ficaram satisfeitos com os recursos que o programa tem a oferecer. Vale ressaltar que os discentes atuais têm perfil imediatista, por esta razão não aconselhamos estender o projeto por um período muito longo para não gerar enfado.

Outro recurso importante do programa é a possibilidade do usuário alterar a roupa da tartaruga de sete maneiras distintas deixando assim a sua interface mais amigável.

1.3.6 ADEQUAÇÃO PEDAGÓGICA

O programa apresenta correspondência com os conteúdos pedagógicos abordados nas disciplinas escolares? O software é utilizado como ferramenta para auxiliar no ensino e aprendizagem de matemática. As atividades foram adequadas de acordo com o grau de conhecimento matemático dos alunos. O software também pode ser utilizado no ensino de *Programação, Robótica, Física, Cálculo, Geometria Analítica*, entre outras disciplinas.

1.3.7 UTILIDADE

O programa oferece as funções necessárias para a realização das tarefas?

O programa possui alguns comandos com funções matemáticas, mas é possível utilizar o *EDITOR* para trabalhar conceitos matemáticos que não possuem primitivas no programa, utilizando um pouco de raciocínio lógico-matemático. Neste ponto também é possível utilizá-lo para inserir conceitos básicos de programação. É possível criar procedimentos que fazem conjugação verbal em verbos regulares e em verbos irregulares também, mas este último é muito mais trabalhoso. Neste caso teríamos uma ótima oportunidade para trabalhar interdisciplinaridade. No site *PROJETO LOGO* é possível encontrar diversos desafios e problemas interessantes para se trabalhar com este software.

1.3.8 ADEQUAÇÃO TÉCNICA

O programa apresenta tempo de execução das tarefas adequado? As exigências técnicas do programa são compatíveis com os equipamentos de informática disponíveis?

Devemos ter em mente que toda vez que resolvermos trabalhar um software diferente dos que estamos habituados a utilizar precisaremos saber se as máquinas de que dispomos tem os requisitos necessários para tal. No nosso caso, fez-se necessária fazer uma atualização na plataforma *JAVA* dos computadores do laboratório de informártica. Quanto aos periféricos não necessitamos de nenhum diferente do que habitualmente se tem em um laboratório de informática. Agora quanto ao tempo de execução das tarefas 50 minutos foi suficiente para a execução das atividades em cada aula. O ideal é propor pelo menos um tarefa em cada aula.

2 TEMAS MATEMÁTICOS

2.1 MÉTODO DE HERON PARA APROXIMAÇÃO DE RAIZ QUADRADA

Nesta seção vamos trabalhar o *Método de Heron*[1] para aproximar raízes quadradas apresentando um algoritmo recusivo simples que converge para a raiz quadrada.

2.1.1 O ALGORITMO E SUA DEMONSTRAÇÃO

O algoritmo funciona da seguinte maneira: assumindo a_0 como uma aproximação inicial da raiz quadrada de um número real$A$, temos:

$$a_1 = \frac{a_0 + \dfrac{A}{a_0}}{2}$$

Uma aproximação melhor será dada pela iteração seguinte:

$$a_2 = \frac{a_1 + \dfrac{A}{a_1}}{2}$$

Prosseguindo desta forma teremos uma aproximação por excesso melhor a cada iteração. Após a escolha de uma aproximação inicial a_0, podemos construir o algoritmo:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + \dfrac{A}{a_{k-1}}}{2}, \forall k \in \mathbb{N}$$

É fácil verificar que $a_n \geq \sqrt{A}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

De fato, pois se $A = a \cdot b$, sendo $a = a_k > 0$ e $0 < b = \dfrac{A}{a_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, daí pela desigualdade das médias:

[1]Herão ou Heron de Alexandria foi um matemático que muito se destacou vivendo, provavelmente, no período de 150 a.C. a 250 d.C., ele contribuiu bastante em seus trabalhos para a Matemática e Física de forma numerosa e variada, sendo considerado um enciclopedista. No seu Livro *A Métrica*, encontra-se o método de Herão de aproximar a raiz quadrada de um número inteiro. Tal método é hoje frequentemente utilizado em algorítmos por computadores e permite aproximações sucessivas.

$$a_{k+1} = \frac{a_k + \dfrac{A}{a_k}}{2} \geq \sqrt{a_k \cdot \frac{A}{a_k}} = \sqrt{A} \tag{2.1}$$

Para cada número natural k, encontraremos um número a_k, aproximação por falta de $\sqrt{A}$. Surge então o seguinte questionamento: Quantas dessas iterações serão necessárias para encontrar a aproximação desejada? A fim de evitar que o programa entre numa rotina de cálculos exaustivos devemos impor um limite de iterações, que será controlado por um erro da aproximação. Por exemplo, se quisermos obter uma aproximação com 6 casas decimais corretas, usamos uma aproximação $\varepsilon = 10^{-6}$ e devemos, a cada iteração, checar se o termo a_k encontrado satisfaz a precisão ε imposta inicialmente. O erro é dado por $E_k = |a_k^2 - A|$. Se E_k for menor que a precisão ε, então tome a_k como raiz aproximada.
Exemplo: Aproximar $\sqrt{6}$ pelo método de Herão com precisão de $\varepsilon = 10^{-5}$. Como $2 < \sqrt{6} < 3$, tomamos como aproximação inicial $a_0 = 2{,}4$. Testamos o erro da aproximação inicial. Como $|2,4^2 - 6| > 1$.
Continuamos as iterações: Fazemos: $k = 1$ teremos:

$$a_1 = \frac{2,4 + \dfrac{6}{2,4}}{2} = 2,45.$$

Como $|2,45^2 - 3| > 10^{-2}$, continuamos as iterando:

Para $k = 2$ teremos:

$$a_2 = \frac{2,45 + \dfrac{6}{2,45}}{2} = 2.44948979592.$$

E como $|2,44948979592^2 - 6| > 10^{-6}$, se continuarmos as iterações no ṕroximo passo teremos:

$$a_3 = \frac{2,44948979592 + \dfrac{6}{2,44948979592}}{2} = 2,44948974278.$$

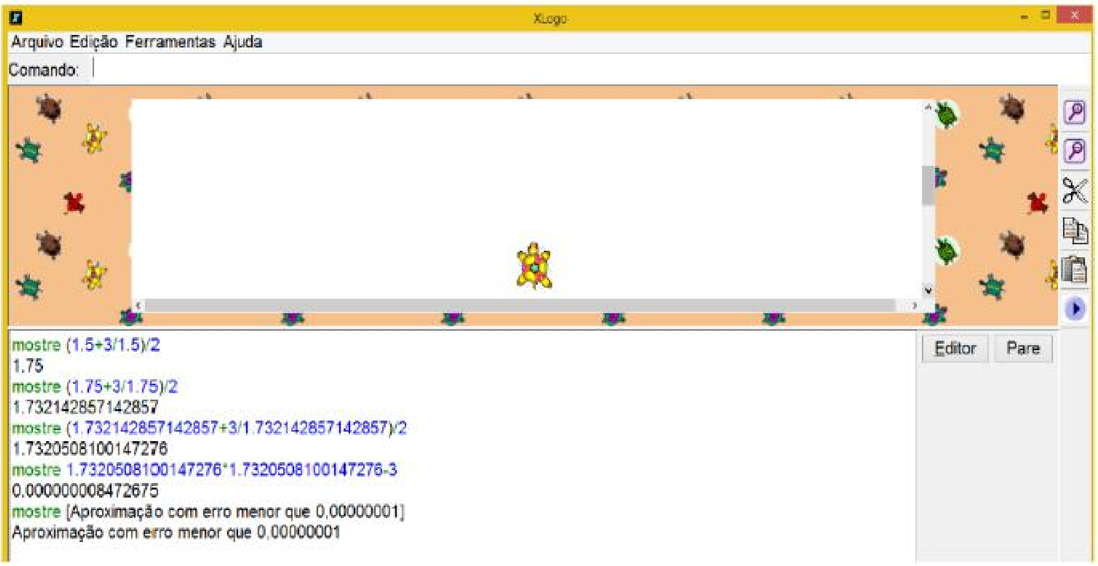
Usando a mesma expressão para o cálculo de ε observaremos que a_3 é uma aproximada de $\sqrt{6}$, com precisão ainda melhor que 10^{-6}.

2.1.2 IMPLEMENTAÇÃO NO X-LOGO

No programa utilizamos o comando *mostre* para realizar esta tarefa. Vale ressaltar que o algoritmo funcionaria se colocasse apenas os números, no entanto o programa daria a seguinte resposta para o usuário:*O que devo fazer com ...?*, indicando que o software não sabe o que fazer com a resposta. Agora ao utilizar o comando *mostre* já estaremos indicando que é para o programa apenas mostrar o resultado da recorrência.

A figura 2.1 ilustra a situação de uma aproximação para $\sqrt{3}$ incluindo o cálculo do erro no *X-LOGO*.

Figura 2.1: Aproximação de Heron para raiz quadrada de 3 com precisão de 8 casas decimais



Podemos observar que ao calcular uma aproximação da raiz quadrada por este método a convergência ocorre muito rápido. Isto faz com que este método seja eficiente quando se deseja uma aproximação com poucas casas decimais. Observe que com duas iterações já conseguimos uma aproximação excelente. Para mais detalhes sobre a prova do *Método de Heron* basta consultar o Apêndice B deste trabalho nele também há uma discussão sobre a velocidade de convergência da recorrência .

Vale ressaltar que esta aula, também poderia ser feita na sala de aula com auxílio de uma boa calculadora científica. Além disso nos dias atuais já existem celulares com boas calculadoras algébricas, que também seriam capazes de nos fornecer excelentes aproximações.

Resolvemos fazer esta atividade no *X-LOGO* para mostrar que os resultados ficam melhor compreendidos neste programa. Isto ocorre pelo tipo de interação que o mesmo faz com o seu usuário. Nele o feedback ocorre imdiatamente, mostrando eventuais erros que porventura tenham ocorrido no processo.

Segue como sugestão de atividade a implementação deste método no editor, talvez neste momento eles já tenham maturidade suficiente com o programa para resolver tal problema. Seria interessante criar uma linha de códigos que vá calculando aproximações até um certo erro pré-determinado, e que faça o programa parar quando encontrar tal erro.

Vamos listar abaixo alguns conteúdos que podem ser trabalhados nesta atividade a nível fundamental.

- decimais.
- frações.
- média aritmética.
- raízes quadradas.
- ideia de recorrência.

2.2 POLÍGONOS REGULARES

Inicialmente construiremos polígonos regulares utilizando apenas primitivas afim de fazer uma conjectura que nos pemitirá todos os polígonos regulares em função do seu número de lados. Além disso esta seção nos permitirá estudar os seguintes conceitos matemáticos:

- segmento.
- ângulos interno e externo.
- soma de ângulos internos e externos de um polígono qualquer.

Vale ressaltar que também aparecem ideias básicas de programação nesta seção. São elas:

- leitura e armazenamento de valores de variáveis aleatórias.
- laços.

2.2.1 CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO

A construção do triângulo equilátero depende do conhecimento de suas propriedades básicas, a saber, três lados iguais e três ângulos iguais. Portanto utilizaremos a primitiva *pf* para movimenta a tartaruga para frente, e a primitiva *pd* para mover a tartaruga para direita. A medida do segmento não é importante, desde que sejam todos iguais. Por esta razão vamos fixar 100 passos de tartaruga como medida. Seguem abaixo os comando que constroem um triângulo equilátero.
pf 100 pd 120

Polígono regular	Número de lados	Ângulo externo em graus	Comando
triângulo equilátero	3	$\frac{360}{3}$	repita 3 [PF 100 PD 120]
quadrado	4	$\frac{360}{4}$	repita 4 [PF 100 PD 90]
pentágono	5	$\frac{360}{5}$	repita 5 [PF 100 PD 72]
hexágono	6	$\frac{360}{6}$	repita 6 [PF 100 PD 60]
eneágono	9	$\frac{360}{9}$	repita 9 [PF 100 PD 40]
decágono	10	$\frac{360}{10}$	repita 10 [PF 100 PD 36]
dodecágono	12	$\frac{360}{12}$	repita 12 [PF 100 PD 30]
icoságono	20	$\frac{360}{20}$	repita 20 [PF 100 PD 18]
n-ágono	n	$\frac{360}{n}$	repita n [PF 100 PD $\frac{360}{n}$]

Tabela 2.1: Tabela de construção de polígonos regulares

pf 100 pd 120
pf 100 pd 120
Observe que como os comandos se repetem três vezes, utilizar o comando repita ajudaria muito na construção, haja vista que, podemos construir o triângulo de modo mais prático com este comando. Observe como ficaria digitando o comando abaixo na caixa de entrada.
repita 3[pf 100 pd 120]

2.2.2 CONSTRUÇÃO DO QUADRADO

Agora a figura que desejamos construir deve ter todos os seus lados e ângulos iguais. Como o objetivo é apenas utilizar primitivas podemos pensar da mesma forma da seção 2.2 atentando para o fato de serem quatro lados iguais. Seguindo a mesma lógica utilizaremos as primitivas *pf* e *pd*:
pf 100 pd 90 pf 100 pd 90 pf 100 pd 90 pf 100 pd 90.

2.2.3 CONSTRUÇÃO DE UM POLÍGONO REGULAR QUALQUER

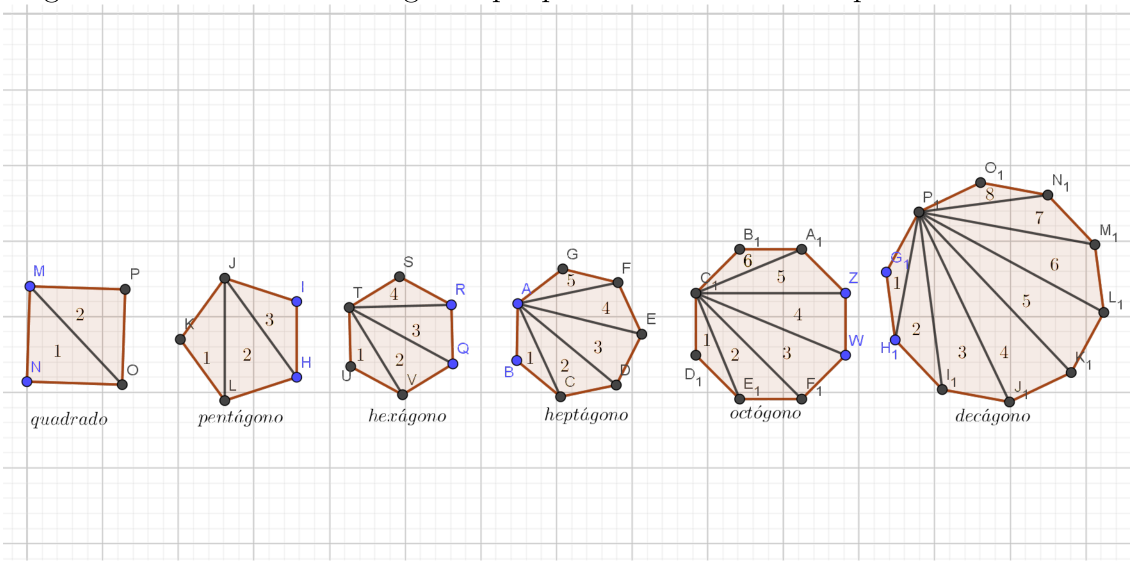
De posse das ideias trabalhadas nas secções 2.2.1 e 2.2.2, observamos que ao dividir o ângulo de 360° pelo número de lados do polígono que desejamos construir obteremos o ângulo que a tartaruga deve girar(ângulo externo) para fazer sua construção. Também observamos que o número de lados do polígono é igual ao número de vezes que as primitivas se repetem no procedimento. A tabela 2.1 ilustra a situação:

A tabela 2.6.4 é uma conjectura que pode ser provada a partir do ângulo interno de um polígono regular. Sabemos que um polígono de n lados, possui n vértices e portanto n ângulos internos todos iguais, já que ele é regular.

Lema 2.2.1. *Um polígono regular de n lados pode ser dividido em $n-2$ triângulos, e cada ângulo interno (a_i) possui medida* $a_i = \dfrac{180 \cdot (n-2)}{n}$

Demonstração. A prova do lema 2.2.1 é simples. Basta observar que de cada vértice partem $n-3$ diagonais (não contam os vértices adjacentes nem o vértice escolhido) como mostra a figura 2.2, portanto este polígono irá formar, a partir deste vértice $n-3+1 = n-2$ triângulos.

Figura 2.2: Número de triângulos que podem ser formados a partir de um vértice



Agora pelo fato da soma dos ângulos internos de cada triângulo ser 180°, teremos que a soma de todos os ângulos internos será $180 \cdot (n-2)$, e como o polígono possui n, isto resulta que cada ângulo interno terá medida igual a $\dfrac{180 \cdot (n-2)}{n}$. □

Agora vamos mostrar que em um polígono regular cada ângulo externo mede : $a_e = \dfrac{360}{n}$

Demonstração. De acordo com o lema 2.2.1 se dividirmos o polígono regular em triângulos, ele formará $n-2$ triângulos, e cada ângulo interno mede $a_i = \dfrac{180 \cdot (n-2)}{n}$.
Como o ângulo interno e seu correspondente ângulo externo são suplementares, temos que:

$a_i + a_e = 180° \leftrightarrow$

$$\frac{180 \cdot (n-2)}{n} + a_e = 180 \leftrightarrow$$

$$\frac{180 \cdot n}{n} - \frac{360}{n} + a_e = 180 \leftrightarrow$$

$$180 - \frac{360}{n} + a_e = 180$$

E portanto $a_e = \dfrac{360}{n}$. $\square$

lados dele. Fizemos tal procedimento no *editor de texto*, segue abaixo a lista de procedimentos.

aprenda polígono

leia[Informe a quantidade de lados do polígono regular que deseja desenhar?] "n

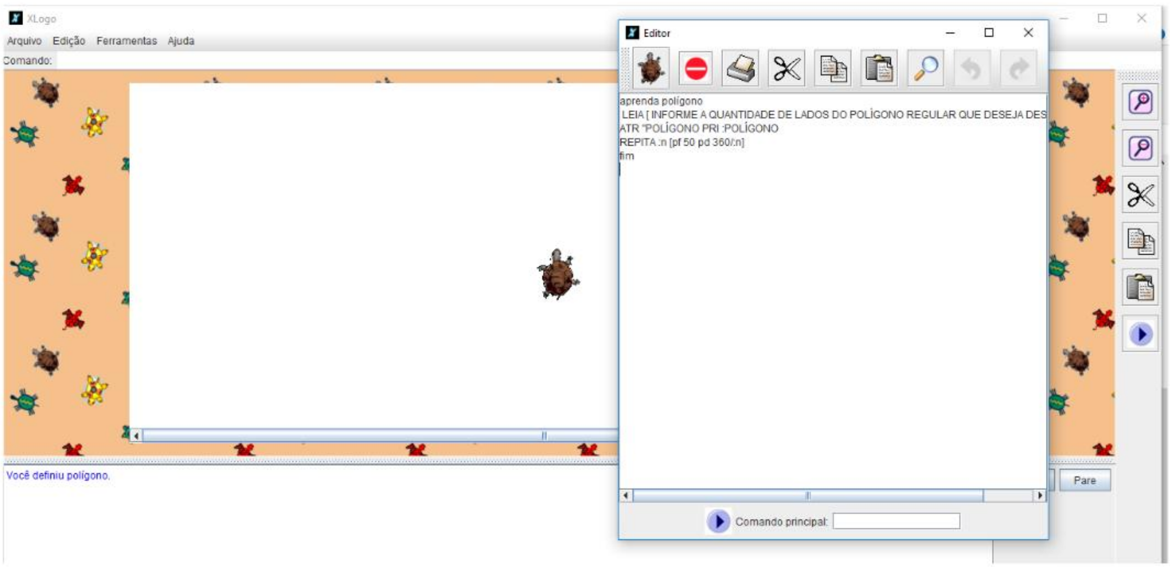
atr "polígono pri :polígono

repita :n [pf 50 pd 360/:n]

fim

Após feito isto deve-se clicar no botão que tem o desenho da tartaruga. O programa responderá com a seguinte mensagem:*você definiu polígono.* A figura 2.3 ilustra a situação.

Figura 2.3: Procedimento de generalização



Para testar o procedimento basta digitar na caixa de entrada a palavra *polígono*. Feito isto programa irá interagir com o usuário, abrindo uma janela com a mensagem: *Informe a quantidade de lados do polígono regular que deseja desenhar?* ao digitar o número de lados o programa imediatamente desenhará o polígono desejado. A figura 2.4 ilustra a situação.

Figura 2.4: Resposta do programa ao procedimento

A figura 2.5 mostra o resultado da construção de um octógono.

Figura 2.5: Construção de um polígono de 8 lados utilizando o procedimento feito no editor de texto

Esta seção é muito importante para melhorar a visão geométrica dos discentes, pois as construções dos polígonos necessitam de um conhecimento teórico prévio da situação problema. Eles precisam saber qual é o ângulo de giro necessário para fazer sua construção. O aprendizado é maior quando os discentes percebem sem o auxílio do professor a relação que existe entre o ângulo de giro e o número de lados do polígono. Também é importante para esta atividade, que os alunos percebam que a medida dos lados dos polígonos tratados nesta seção são irrelevantes pelo fato de se tratarem de figuras regulares. quanto mais autonomia os discentes tiverem mais irão progredir com o software.

2.3 ALGORITMO DE EUCLIDES

2.3.1 O MÁXIMO DIVISOR COMUM

Antes de falar do máximo divisor comum, vamos primeiro definir o que é um divisor de um número inteiro.

Teorema 2.3.1. *Dados dois núneros inteiros a e b, diremos que a divide b, escrevendo $a \mid b$, quando existir um $c \in \mathbb{Z}$, tal que $b = c \cdot a$. Neste caso, também diremos que a é um divisor ou um fator de b ou, ainda, que b é um múltiplo de a, ou que b é divisível por a.*

O conjunto formado pelos divisores comuns de a e b é denotado por $D(a, b)$. Vale ressaltar que sendo o número 1 divisor de qualquer número inteiro, em particular, se forem escolhidos números a e b, certamente 1 será um divisor comum de ambos. Logo, o conjunto $D(a, b)$ é não vazio, pois $1 \in D(a, b)$.

Se $a \neq 0$ e d for um divisor de a e b, então $|d| \leq |a|$. Logo o conjunto $D(a, b)$ é limitado e tem um elemento máximo, ou seja, existe um divisor comum de a e b maior que todos os demais. Analogamente, para $b \neq 0$, o conjunto $D(a, b)$ também tem um elemento máximo. O único caso que $D(a, b)$ não é limitado superiormente é o conjunto $D(0, 0)$, já que zero é múltiplo de qualquer inteiro. Usaremos a notação $(a, b) = mdc(a, b)$ para denotora o máximo divisor comum entre os números a e b.

Exemplo 2.3.1. *Agora apresentamos o Algorítmo de Euclides para o cálculo de $mdc(a, b)$.*
$(15, 6) = (15, 9) = (9, 6) = (6, 3) = (3, 3) = (3, 0) \Leftrightarrow mdc(15, 6) = 3.$

Alternativamente escrevemos:

(15,6) = (6, 15 – $2 \cdot 6$) = (6, 3) = (3, 6 – $2 \cdot 3$)=(3, 0) $\Leftrightarrow mdc(15, 6)$= 3

Vamos demonstrar a validade do Algoritmo de Euclides.

Demonstração. Sejam a e b dois números inteiros positivos, podemos supor sem perda de generalidade que $a > b$. Se d um divisor comum de a de b. Então pela divisão euclidiana teremos:

$a = d \cdot k_1$

$b = d \cdot k_2$

Note que $k_1 > k_2$, pois $a > b$.

Então a diferença $a - b$: $a - b = d \cdot k_1 - d \cdot k_2$ daí teremos: $a - b = d \cdot (k_1 - k_2)$, observe que a diferença $k_1 - k_2 > 0$.

Segue-se que d divide $a - b$.

Mostramos que se $d|a$ e $d|b$, então $d|(a - b)$.

Agora mostraremos que se d é um divisor de a e $a - b$, então d divide b.

Daí podemos escrever:

$a = d \cdot j_1$

$a - b = d \cdot j_2$

Note que $j_1 > j_2$, pois $a > a - b$.

Daí a diferença:

$a - (a - b) = b \Rightarrow b = d \cdot (j_1 - j_2)$.

Logo d divide b

Juntando os dois resultados podemos escrever que se a, b e d são números inteiros tais que:

$d|a$ e $d|b$, então $d, |a$ e $d|(a - b)$

Em outras palavras qualquer divisor comum de a e b é também divisor dos números a e de $a - b$, e vice-versa. Daí:

$mdc(a, b) = mdc(a, a - b)$. $\square$

2.3.2 PROCEDIMENTO PARA CALCULAR O MDC NO X-LOGO

Criamos um procedimento que calcula calcula rapidamente o máximo divisor comum de dois números inteiros positivos. Digite na janela de álgebra o comando: resto 15 6 para calcular o $mdc(15, 6)$.

Observe que irá aparecer uma mensagem em vermelho na janela de visualização *"Que devo fazer com 3?"*.Para resolver este problema basta incluir o comando *"mostre resto 15 6"*, e observe que não aparece mais a mensagem como na Figura 2.6

Figura 2.6: Mostre resto 15 6

Fazendo agora o mesmo processo com os números 6 e 3 obteremos zero como resposta. Na Figura 2.7 está o resultado do procedimento.

Figura 2.7: Mdc (15,6)

Como o último resto é o número zero concluímos que $mdc(15, 6) = 3$, resto anterior não nulo. Agora resta a pergunta: Que conceito matemático garante que o resultado deste procedimento é o máximo divisor comum dos números 15 e 6?

A resposta a esta pergunta é: O Algoritmo de Euclides.

Voltando ao procedimento: *mostre resto 15 6*, o resultado que o programa nos fornece é 3. Iterando novamente, ele pegará o quociente da divisão anterior e dividirá pelo último resto obtido, neste caso ficará *mostre resto 6 3*, obtendo zero como resposta.

Portanto o conceito matemático utilizado no *X-LOGO*, que garante que este processo resulta no mdc é o *Algoritmo de Euclides*.

No exemplo escolhido chegamos rapidamente ao $(15, 6)$, mas escolhidos dois números inteiros positivos a e b, este processo poderia ser feito tantas vezes quanto fosse necessário até obter o último resto igual a zero. Procedendo desta maneira o resto anterior ao resto nulo será (a, b).

Esta atividade poderia ser feita sem dificuldade com alunos a partir do sexto ano do ensino fundamental, haja vista que os conceitos envolvidos são elementares e dependem de poucos conceitos matemáticos. Os únicos pré-requisitos para que o aluno possa entender os procedimentos feitos no programa é a divisão euclidiana, multiplicação e subtração.

2.4 UM POUCO SOBRE NÚMEROS PALÍNDROMOS OU CAPÍCUA

Vamos agora criar um procedimento que gera números *palíndromos* ou *capícuas*. Mas o que são estes números? O dicionário Aurélio de Língua Portuguesa apresenta a seguinte definição para *palíndromos*: "Diz-se da frase ou palavra que, ou se leia da esquerda para a direita, ou da direita para a esquerda, tem o mesmo sentido". Observe que este termo é mais aplicado para palavras ou frases, mas também é comum vê-lo se referindo a números. São exemplos de palíndromos: 11, 22, 121, 2332, 1234321.

Também é comum o termo *capícua*, quando se trata de números. O site *"UOL apoio escolar"* trás a seguinte definição: "A palavra Capícua tem origem catalã "cap i cua", "cabeça e cauda". Conhecido também por número palíndromo, é um número (ou conjunto de números) que, lido da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita, é idêntico".

Nosso objetivo nesta atividade é usar o *X-LOGO* para construir números com esta características e discutir seus aspectos e padrões.

2.4.1 ALGORÍTMO PALÍNDROMO

De posse destes conceitos utilizamos o procedimento abaixo no *X-LOGO* para produzir alguns palíndromos.

Basicamente o algoritmo inverte o número digitado na caixa de entrada e soma com o número invertido. O processo é repetido até que aparece um palíndromo. Exemplos:

1. Digitando *palin 32* o programa fará:
   32+23=55

2. Digitando *palin 28* o programa fará:
   28+82 = 110 110+ 011 = 121

3. Digitando *palin 176* o programa fará:
   176 + 671 = 847
   847 + 748 = 1595 1595 +5951 =7546 7546 + 6457 = 14003 14003 + 30041 = 44044
   44044

Observe que alguns números no exemplo geram palíndromos rapidamente enquanto o último necessita de mais iterações para poder gerar um palíndromo.

Abaixo está o procedimento a ser compilado no programa.

aprenda invertep :p
se évazio? :p [saída "]
saída pal ult :p invertep su :p
fim
aprenda palindromo :p
se sãoiguais? :p invertep :p [saída "verd] [saída "falso]
fim

aprenda palin :n

se palindromo :n [mo :n pare]

mostre sn sn sn sn :n "mais invertep :n [é igual a] soma :n invertep :n

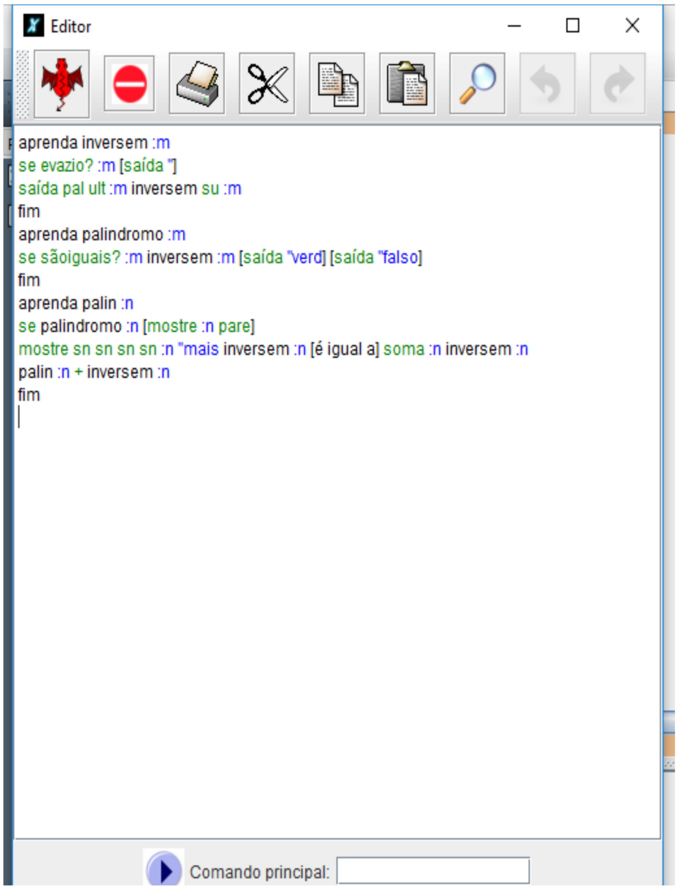
palin :n + invertep :n

fim

Para que possa funcionar corretamente este procedimento deve ser escrito na janela editor de texto como mostra a Figura 1.2.

Após ter inserido o procedimento na janela do editor deve-se clicar na janela do alto mais à esquerda da tela, a que tem o formato da tartaruga. Feito isto escreve-se, por exemplo, palin 68 e o programa irá produzir um palíndromo com este número. Observe a Figura 2.8.

Figura 2.8: figuras/Palindromo 68



Vamos mostrar como funciona o procedimento. Inicialmente devemos ensinar a tartaruga a fazer este novo procedimento para tanto deve-se digitar "aprenda" na janela do editor.

Observe que este procedimento foi dividido em três pedaços, da qual o primeiro é:

aprenda invertep :p

se évazio? :p [saída "]

saída pal ult :p invertep su :p

fim

Esta parte tem a função de apenas inverter o número digitado na janela de comando. Se apenas esta parte for digitada o programa apenas inverterá o número e o programa não saberá o que fazer com o resultado. Mostrando na janela de visualização o número invertido e a seguinte mensagem:"O que devo fazer com 86". Caso o número digitado seja "invertep 68. A segunda parte é responsável por verificar se o número é palíndromo ou não.

aprenda palindromo :p

se sãoiguais? :p invertep :p [saída "verd] [saída "falso]

fim

Daí ao se escrever "palindromo 35" na janela de comando, o programa verifica se 35 é palíndromo e responde na janela de visualização com a seguinte mensagem: "O que devo fazer com falso?". O programa verificou que o número 35 não é palíndromo, mas não sabe o que fazer com o resultado. O programa verifica se o número resultado da inversão é igual ao invertido, se isto ocorrer ele responde: *"Que devo fazer com verd?"*, se isto não for verdadeiro, então ele retornará com a segunda saída [falso]. Observe que o programa não sabe o que fazer com a resposta, pelo retorno que ele dá ao usuário: *"Que devo fazer com falso?"*.

Neste momento aparece a terceira parte do procedimento para completá-lo. *aprenda palin :n*

se palindromo :n [mo :n pare]

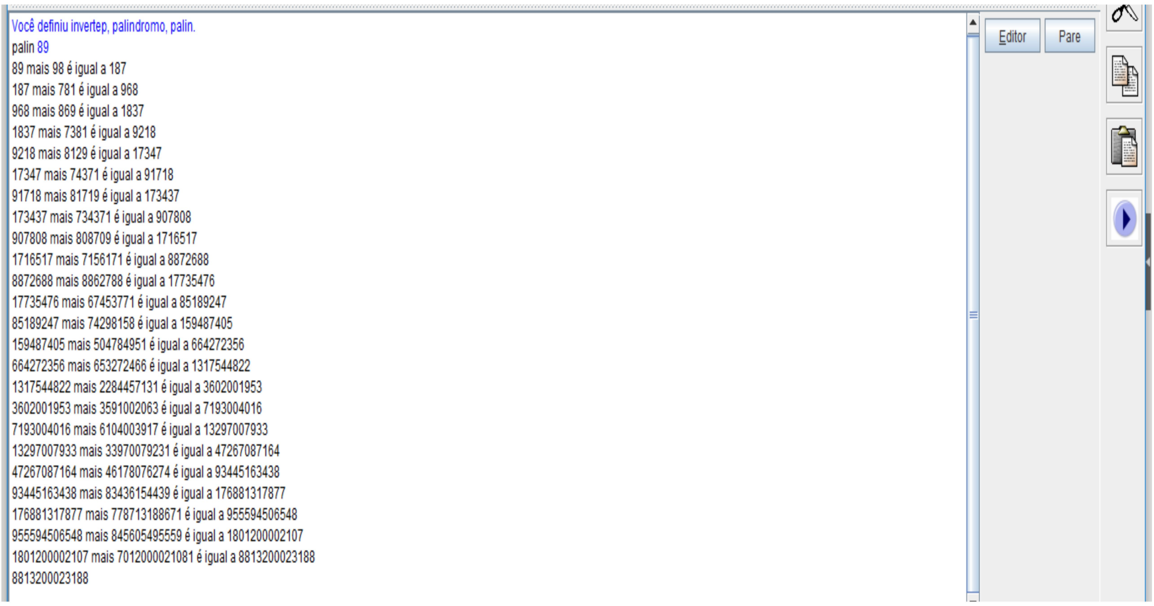
mostre sn sn sn sn :n "mais invertep :n [é igual a] soma :n invertep :n

palin :n + invertep :n

fim

Esta parte relaciona as duas partes anteriores. Se o número digitado for palíndromo o programa para de compilar e mostra o número na janela de visualização, caso isto não ocorra ele inverte o número e soma com o número invertido, daí se o resultado for palíndromo ele para e mostra o número, caso contrário ele repete o mesmo procedimento até encontrar um palíndromo como na Figura 2.9.

Figura 2.9: Palíndromo gerado pelo 89



No caso do 89 são necessárias 24 iterações para se encontrar um palíndromo. A conjectura palíndroma é que, independente do número escolhido, sempre se chega a um palíndromo após um número finito de iterações do procedimento, mas não se pode afirmar, com certeza, que o procedimento sempre resultará num palíndromo. Existem números para os quais não se sabe se geram palíndromos por este procedimento.

Existem números que parecem nunca formar palíndromos, porque o procedimento aplicado a eles parece não ter fim, o menor número inteiro com esta característica é 196. Charles W. Trigg, um matemático da Califórnia, examinou a conjectura em 1967 no seu artigo *Palindromes by Addition* e encontrou 249 inteiros menores de 10.000 que aparentemente não geram palíndromos após 100 passos. O menor deles é o 196. Tais números são chamados de *números de Lychrel*. Um problema que se põe é determinar se o número 196 é um *número de Lychrel*. A busca para resolver este problema é conhecida como o Algoritmo 196 ou o Problema 196, mas normalmente chamado de *196 Palindrome Quest*. Um dos problemas em aberto da Teoria dos Números é encontrar os números de *Lychrel*. Harry J. Saal realizou em 1975, no Centro Científico de Israel, 237.310 passos do número 196 sem encontrar palíndromos

No blog *"196 e outros números de Lychrel"* você encontra vários resultados de estudos feitos sobre estes números misteriosos, entre eles se destacam os trabalhos de Jason Doucette, que chegou a impressionantes 13 milhões de dígitos após sucessivas iterações do número 196 sem obter palíndromo para tanto ele gastou 288,8 dias no árduo processo. O número publicado no site dele está num bloco de notas de tamanho 13 megabytes.

Em fevereiro de 2006 Landingham completou 699 milhões de iterações, alcançando um número de 289 milhões de dígitos sem encontrar um palíndromo, e o cálculo continua (LANDINGHAM, 2006).

A tabela 2.2 mostra alguns números palíndromos e seus respectivos números de iterações necessárias para gerar palíndromo.

Dígitos	Número	Número de iterações
2	89	24
3	187	23
4	1.297	21
5	10.911	55
6	150.296	64
7	9.008.299	96
8	10.308.988	95
9	140.699.390	98
10	1.005.499.526	109
11	10.087.799.570	149
12	100.001.987.765	143
13	1.600.005.969.190	188
14	14.104.229.999.995	182
15	100.120.849.299.260	201
16	1.030.020.097.997.900	197
17	10.442.000.392.399.900	236

Tabela 2.2: Iterações que geram palíndromos

2.4.2 PALÍNDROMOS DIVISÍVEIS POR 11

Existem várias outras particularidades sobre os números palíndromos.

Uma delas é que todo número palíndromo com um número par de dígitos é divisível por 11, ou seja, o resto da sua divisão por 11 é zero.

Exemplos:

872312213278 (número palíndromo com 12 dígitos)

91533644633519 (número palíndromo com 14 dígitos)

Se dividirmos qualquer um desses números por 11, o resto será nulo.

O fato pode se confirmado facilmente no *X-LOGO* digitando o comando: *"mostre resto 91533644633519 11"* e *"mostre resto 872312213278 11"*

Vale lembrar que um número é divisível por 11 quando a soma alternada de seus algarismos for um múltiplo de 11.

Seja $a_1a_2a_3a_4...a_{2n-3}a_{2n-2}a_{2n-1}a_{2n}$, um palíndromo de $2n$ dígitos. Pelo fato do número ser palíndromo, os dígitos equidistantes são iguais. Aplicando o critério de divisão por 11 os dígitos de ordem ímpar serão positivos, enquanto que os dígitos de ordem par serão negativos, como segue abaixo.

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-3} - a_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n}$

Reagrupando os termos equidistantes:

$(a_1 - a_{2n}) + (-a_2 + a_{2n-1}) + (a_3 - a_{2n-2}) + (-a_4 + a_{2n-1}) + ...$

Note que todos as somas entre parênteses são nulas, porque os termos equidistantes são iguais. Segue-se que a soma alternada é divisível por 11, e portanto o número palíndromo com um número par de dígitos é divisível por 11.

2.4.3 OUTRAS FORMAS DE GERAR PALÍNDROMOS

A título de curiosidade podemos listar outras formas de se encontrar palíndromos. Por exemplo, se elevarmos ao quadrado um número de no máximo 9 dígitos todos iguais a 1 teremos o seguinte resultado:

$1 \cdot 1 = 1$

$11 \cdot 11 = 121$

$111 \cdot 111 = 12321$

$1111 \cdot 1111 = 1234321$

$11111 \cdot 11111 = 123454321$

$111111 \cdot 111111 = 12345654321$

$1111111 \cdot 1111111 = 1234567654321$

$11111111 \cdot 11111111= 123456787654321$

$111111111 \cdot 111111111 = 12345678987654321$

Demonstração. O número $x = 10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10^3 + 10^2 + 10 + 1$, $\forall n \in \mathbb{N} | n \leq 9$.

Esta é a escrita na base de um número de n dígitos todos iguais a 1, portanto elevando ao quadrado teremos:

$(10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10^3 + 10^2 + 10 + 1)^2$

$= (10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) \cdot (10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10^3 + 10^2 + 10 + 1)$

$= 1 \cdot 10^{2 \cdot n} + 2 \cdot 10^{2 \cdot n-1} + 3 \cdot 10^{2 \cdot n-2} + ... + (n-1) \cdot 10^{n+2} + n \cdot 10^{n+1} + (n+1) \cdot 10^n + n \cdot 10^{n-1} + ... + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$; $\forall n \in \mathbb{N} | n \leq 9$. $\square$

Note que produto formará um número com uma quantidade par de dígitos. Na tabela 2.3 estão os termos do desenvolvimento do nosso número.

Termo	quantidade de vezes que aparece
$10^{2\cdot n}$	1
$10^{2\cdot n-1}$	2
$10^{2\cdot n-2}$	3
$10^{2\cdot n-3}$	4
$\vdots$	$\vdots$
10^{n+1}	(n)
10^{n}	$(n-1)$
10^{n-1}	$(n-2)$
$\vdots$	$\vdots$
10^{3}	4
10^{2}	3
10^{1}	2
10^{0}	1

Tabela 2.3: Termos do desenvolvimento do palíndromo

De acordo com a tabela 2.3, os termos equidistantes tem mesmo coeficiente, portanto o número obtido é um palíndromo.

Note que se $n > 10$ já não vale a proposição, de fato se tivermos:

$1111111111 \cdot 1111111111 = 1234567900987654321$ que não é palíndromo.

2.4.4 CURIOSIDADE CAPÍCUA

Dia 20 de fevereiro de 2002, quarta-feira, foi uma data histórica. Durante um minuto, houve uma conjunção de números que somente ocorre duas vezes por milênio. Essa conjugação ocorreu exatamente às 20 horas e 02 minutos de 20 de fevereiro do ano 2002, ou seja, 20:02 20/02 2002. É uma simetria que, na matemática, é chamada de capicua. A raridade deve-se ao fato de que os três conjuntos de quatro algarismos são igua is (2002) e simétricos entre si (20:02, 20/02 e 2002). A última ocasião em que isso ocorreu foi às 11h11 de 11 de novembro do ano 1111, formando a data 11h11 11/11/1111. A próxima vez será somente às 21h12 de 21 de dezembro de 2112 (21h12 21/12/2112). Provavelmente não estaremos aqui para presenciar. Depois nunca mais haverá outra capicua. Em 30 de março de 3003 não ocorrerá essa coincidência matemática já que não existe a hora 30. Esta curiosidade sobre os palíndromos foi extraída do site *Tripod* [2]. Quando trabalhamos com números palíndromos no ensino fundamental inserimos a

[2]Fonte: Tripod. Disponível em: ¡http://leandrobrito.br.tripod.com/curiosidades.htm¿. Acesso em 20 jun 2017.

ideia matemática de recorrência, o que será muito importante para o desenvolvimento matemático dos discentes no futuro. Isto também poderá despertar a curiosidade sobre o tema. Talvez os *Números de Lychrel* despertem uma paixão pela Matemática.

Os palíndromos são arte do matemático Ziro Roriz. A "maluquice saudável" como ele mesmo diz consiste em criar palavras e frases que podem ser lidas tanto da esquerda para direita como ao contrário. O escritor talvez seja o maior nome desta antiga prática linguística em língua portuguesa: ele coleciona mais de 4,5 mil palíndromos, entre textos, poemas e frases, como "socorram-me subi no ônibus em Marrocos". Roriz também é autor do maior palíndromo conhecido, com 356 palavras. Até seu nome, Ziro Roriz, permite a leitura reversa.

Parte deles está reunida no livro Palíndromos – Um Desafio Linguístico [3]

2.5 DESIGUALDADE TRIANGULAR

Uma proposta interessante seria pedir para que os alunos tentem construir um triângulo com quaisquer segmentos que desejem. É provável que em algumas situações ocorram fracassos. Resta então analisar o porquê disto ter ocorrido.

2.5.1 PROBLEMÁTICA

Inicialmente vamos fazer uma conjectura para depois justificar os fracassos. Como o objetivo é usar o software X-LOGO para construir os conceitos, iremos trabalhar uma lista de comandos no programa a fim de descrever a situação desejada. O exemplo 2.5.1 será uma boa proposta para discussão.

Exemplo 2.5.1. *É possível construir um triângulo com três segmentos de comprimento 100, 200 e 300 passos de tartaruga?*

Existem vários conceitos envolvidos neste problema. O aluno para resolvê-lo terá que atentar para duas problemáticas.

1. O comprimento do segmento.

2. O ângulo de giro.

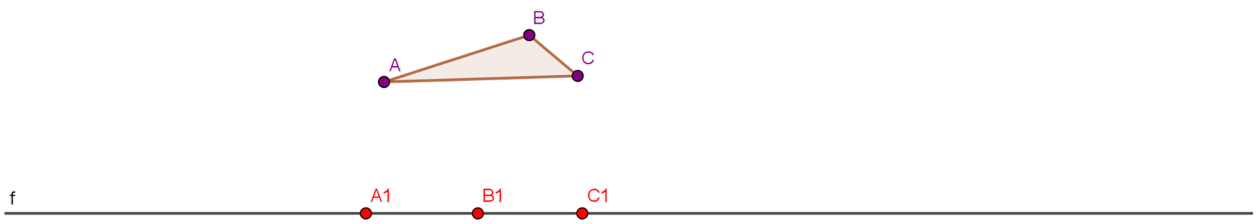
Se ele conseguir encontrar segmentos que satisfaçam as condições do problema, mas não conseguir descobrir os ângulos de giro necessários não será possível resolvê-lo. É

[3] A saudável maluquice do plaíndromos. Gazeta do Povo. Disponível em: https://www.gazetadopovo.com.br/caderno-g/a-saudavel-maluquice-dos-palindromos-ecsh1000rcg3ka2dxiks482mm/ . Acesso em:20 jun 2018

muito provável que o discente necessite de auxílio para esta empreitada, haja vista que dependerá de conceitos que provavelmente desconheça.

Plotando na janela de visualização três pontos A, B e C, por exemplo, vamos discutir as possibilidades de se partir de um ponto e chegar no outro, usando o comando *"rotule"* para plotar os pontos e os comandos *"pf"*(para frente), *"pt"*(para trás), *"pd"*(para a direita) e *"pe"*(para esquerda) para movimentar a tartaruga de acordo com as nossas necessidades na atividade. Observe que existem duas possibilidades: ou os três pontos são colineares ou não são. Vide a figura 2.10.[4]

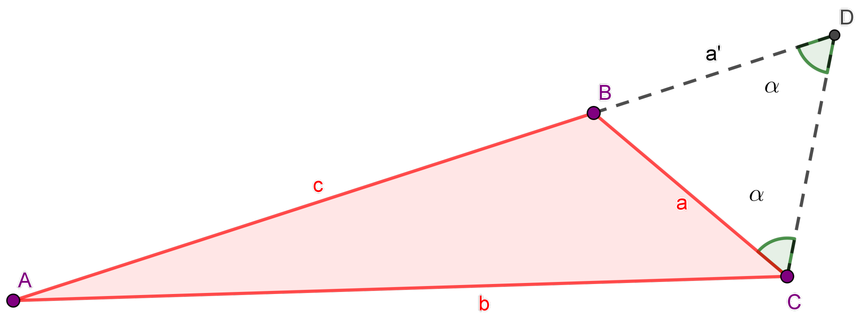
Figura 2.10: Três pontos colineares e três pontos não colineares no plano



Vamos agora apresentar um lema que mais tarde resolverá nosso problema. Se A, B, e C são pontos colineares, com B entre A e C, então $AB + BC = AC$, Supondo agora que os três pontos não sejam colineares, sejam traçados os segmentos AB, BC e AC, tais que $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$ como mostra a figura 2.5.1 . Então vale a desigualdade triangular: $a < b + c$

[4]FONTE: Dados da pesquisa

Figura 2.11: Desigualdade triangular



Demonstração. **Desigualdade triangular.** Seja agora prolongado AB até um ponto D tal que BD seja igual a AC. Assim teremos que $\overline{AD} = a + c$. Observe que o triângulo BCD é isósceles, pois temos $\overline{BC} = \overline{BD} = a$ e $\angle BCD = \angle CDB$. Dai podemos concluir que $\angle ACD > \angle BCD = \angle CDA$. No triângulo ACD, isso significa que $AD > AC$,segue-se que: $a + c > b$. Utilizando o mesmo argumento poderemos mostrar que $a + b > c$ e que $b + c > a$. □

Observe que a menor distância percorrida do ponto A até o ponto C é o segmento AC, segue-se que, qualquer outro percurso acarretará numa maior distância que este segmento, sendo assim, se a figura formada for o triângulo ABC, por exemplo, a soma das distâncias de $AC + BC > AB$. O mesmo ocorreria se tivéssemos tomado como referência os segmentos AC e BC.

A condição necessária e suficiente para se formar um triângulo é que a soma de dois lados quaisquers, tomados aletatoriamente, seja maior do que o terceiro lado. Portanto não é qualquer tripla que formará triângulo. A tripla escolhida deve satisfazer as condições da desigualdade triangular. Isto responde o exemplo 2.5.1, não existe um triângulo com medidas 100, 200 e 300 passos de tartaruga. Esta discussão pode ser feita com alunos a partir do sexto ano do ensino fundamental.

2.5.2 ÂNGULO DE GIRO

De volta ao nosso problema de construir o triângulo, suponha agora que os segmentos escolhidos satisfaçam as condições da seção 2.5.1. Afirmo que ainda não será possível construir o triângulo desejado se não conhecermos os ângulos internos do mesmo.

Exemplo 2.5.2. *Determine todos os ângulos do triângulo formado com os segmentos de comprimento 50, 60 e 70 passos de tartaruga.*

Solução 1. *Conhecemos os comprimento dos lados do triângulo, então vamos aplicar a Lei dos Cossenos para encontrar os ângulos internos.*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \tag{2.2}$$

Sendo a, b *e* c *são os lados do triângulo e* α *é o ângulo entre os lados* b *e* c.

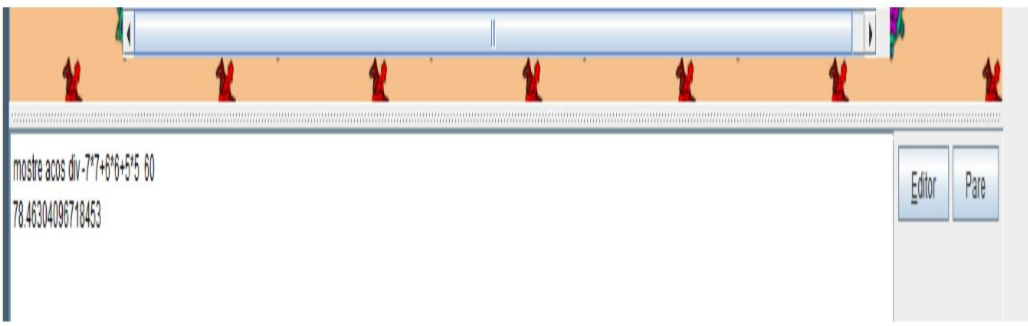
Dai teremos: $7^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \alpha \approx 78,46°$.

Estas contas poderiam ser feitas facilmente no *X-LOGO* utilizando o comando *div*, para efetuar a divisão, e o comando *acos* para calcular o arco cujo cosseno resulta em $\frac{1}{5}$, obviamente preferimos colocar 0,2 para evitar excessos de escrita no programa.

Faremos aqui uma pausa para falar do comando *div*. Ele é usado para dividir dois números para isto, basta que se escreva na caixa de entrada o comando *div 10 2* para que ela faça a divisão do 10 pelo 2, por exemplo. É importante coloca que o *X-LOGO* funciona como uma calculadoa algébrica para fazer contas, mas é sempre bom evitar o uso de parêntesis para que o progama não responda com mensagens de erro tipo esta: *Muitos argumentos entre parêntesis*. Por esta razão quando calculamos o arco cujo cosseno é 0,2 preferimos escrever sua expressão diretamente no programa: acos div -7*7+6*6+5*5 60. O programa entende perfeitamente a prioridade das expressões, ele calculou primeiro a expressão -7*7+6*6+5*5, depois dividiu por 60, e por último calculou o arco solicitado no início do comando.

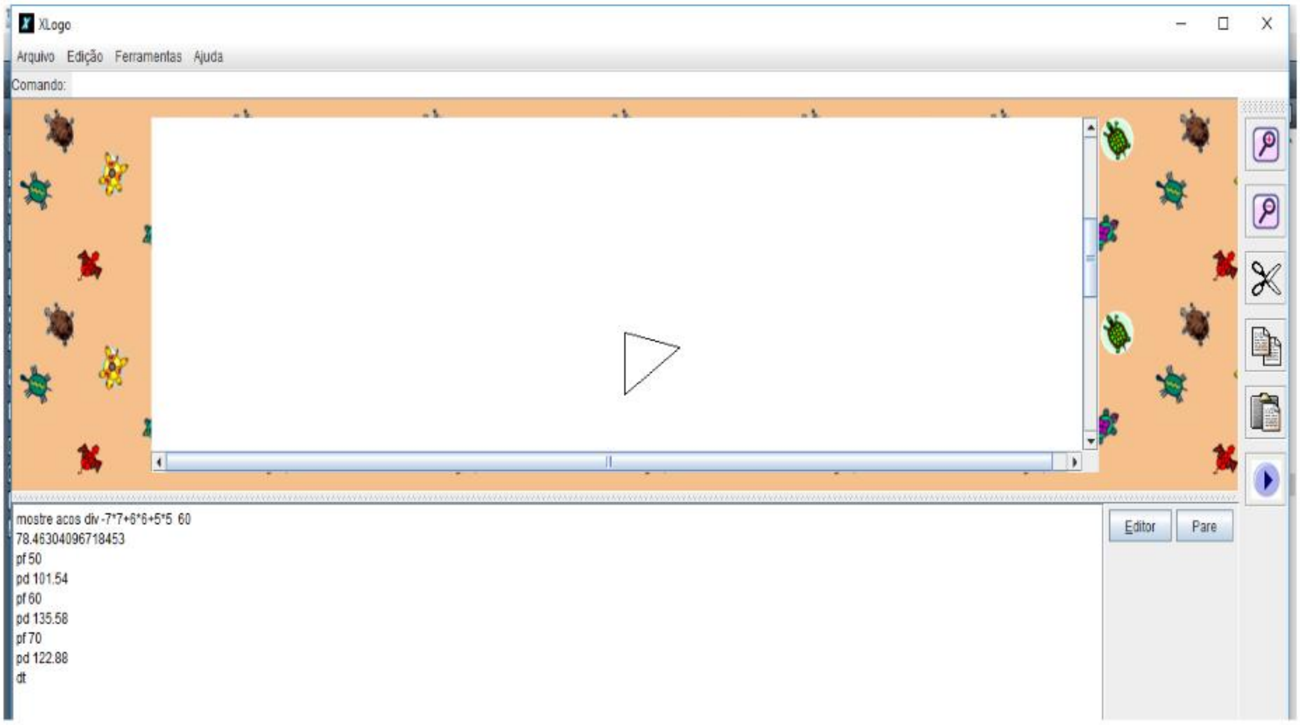
Vide o exemplo na figura 2.12.

Figura 2.12: Lei dos cossenos no X-LOGO



Analogamente poderemos calcular $\beta \approx 57,12°$ e $\theta \approx 44,42°$. Vale ressaltar que para fazer a construção desejada no *X-LOGO*, temos que levar em conta que a tartaruga se movimenta em relação ao ângulo raso, portanto se desejarmos um ângulo interno de 78,46 devemos movimentar a tartaruga na direção *pd* ou *pe* com inclinação de 180-78,46=101,54 graus, ou seja devemos usar o ângulo externo. A figura 2.12 mostra a solução do nosso problema.

Figura 2.13: Construção de um triângulo dados os seus lados



Os comandos escritos no programa estão descritos abaixo:

*mostre acos div -7*7+6*6+5*5 60*
78.46304096718453
pf 50
pd 101.54
pf 60
pd 135.58
pf 70
pd 122.88
dt

Analisando os comandos descritos, vemos que na primeira linha está o cálculo de um dos ângulos internos do triângulo, na segunda o programa já mostra o resultado, na terceira, quinta e sétima linhas usamos os segmentos dados, enquanto que na quarta, sexta e oitava linhas usamos os ângulos externos dos ângulos calculados com a expressão da primeira linha. Na última aparece o comando *dt*, este é facultativo, serve apenas para fazer a tartaruga desaparecer e melhorar a visualização da figura 2.13.

Podemos concluir que esta tarefa se mostrou mais complexa do que parecia no início, pois para executá-la perfeitamente o discente deverá dispor dos conceitos de ângulo externo, desigualdade triangular e lei dos cossenos. Estes conceitos fazem que esta atividade fuja do escopo do sexto ano do ensino fundamental e adentre a primeira série do ensino médio.

2.6 DESIGUALDADE DAS MÉDIAS

Vamos usar o X-LOGO para construir um círculo e nele identificar as desigualdades das médias, em seguida, demostraremos estas desigualdades no plano, mas primeiro vamos definí-las.

2.6.1 DEFINIÇÕES INICIAIS

Definimos como a Média Harmônica entre dois números reais e positivos a e b a expressão:

$$MH = \frac{2a \cdot b}{a + b} \tag{2.3}$$

Também definimos a Média Geométrica entre os números a e b pela equação.

$$MG = \sqrt{a \cdot b} \tag{2.4}$$

Dados dois números reais a e b positivos a Média Aritmética entre estes números é definida pela a razão:

$$MA = \frac{a + b}{2}. \tag{2.5}$$

Por último a Média Quadrática entre os números a e b, reais e positivos, é definida como:

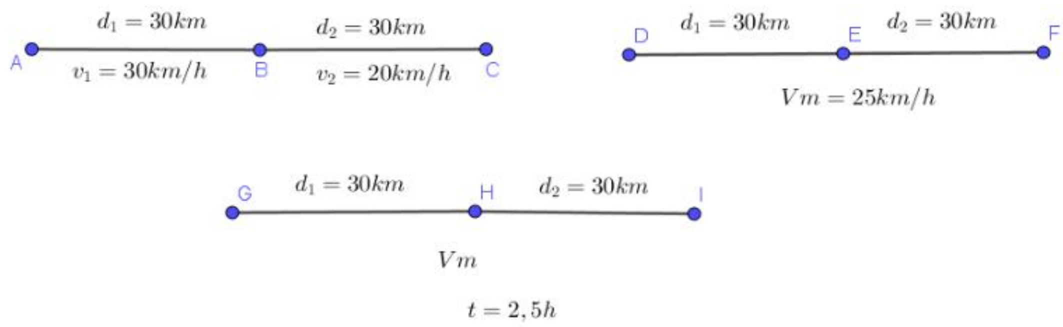
$$MQ = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \tag{2.6}$$

2.6.2 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Vamos fazer alguns exemplos para ilustrar a situação:

Exemplo 2.6.1. *Um veículo percorre* $30km$ *com velocidade de* $30km/h$*, em seguida, ele percorre a mesma distância com velocidade de* $20km/h$*. Qual é a sua velocidade média?*

Figura 2.14: Diagrama ilustrativo das distâncias percorridas



Solução 2. *A figura 2.14 ilustra a situação.*

É fácil verificar que o veículo gastou $1h$ *para percorrer o primeiro trecho e* $1,5h$ *para percorrer o segundo trecho, para mostrar isto basta dividir a distância pela velocidade em cada trecho. Ainda na figura , pode-se notar que não é difícil acreditar que a velocidade média no percurso* $\overline{DF}$ *seja a média das velocidades no percurso* $\overline{AC}$*. No entanto se fosse assim ao se calcular a velocidade média obteríamos* $25km/h$*, e isto, resultaria que o tempo gasto no percurso seria* $2,4h$*. Concluímos que a velocidade média não é a média das velocidades. Temos que calcular a velocidade média de forma que o tempo gasto no percurso seja* $2,5h$*.*

Sendo assim divindo a distância percorrida pela velocidade obteremos:

$$\frac{60km}{V_m} = 2,5h$$

$$\Leftrightarrow V_m = \frac{60km}{2,5h} = 24km/h$$

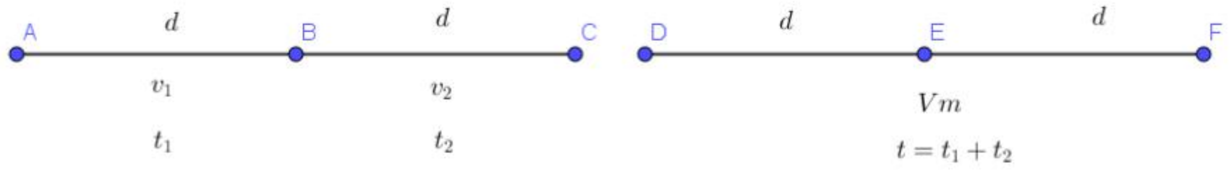
Portanto a velocidade média é $V_m = 24km/h$*.*

De modo geral percorrendo duas distâncias iguais com velocidade diferentes a velocidade média será a média Harmônica das velocidades. A demonstração deste fato será feita a seguir.

Exemplo 2.6.2. *Sejam* d *a distância percorrida nos trechos* $\overline{AB}$ *e* $\overline{BC}$*, com velocidades* v_1 *e* v_2*, e tempos* t_1 *e* t_2*, respectivamente, como mostra figura 2.14. A velocidade será* *aquela que o móvel percorrerá no tempo $t_1 + t_2$, vamos mostrar que a velocidade média é a média harmônica.*

Solução 3. *Pela figura 2.15 observamos que o tempo para percorrer o trecho $\overline{AB}$ é dado por:*

Figura 2.15: Média Harmônica



$$t_1 = \frac{d}{v_1}.$$

Analogamente o tempo para percorrer o trecho $\overline{CB}$ é dado por:

$$t_2 = \frac{d}{v_2}.$$

A velocidade média é aquela que ao se percorrer todo o trecho $\overline{AC}$ o tempo gasto será $t_1 + t_2$.

Daí:

$$\frac{2 \cdot d}{V_m} = t_1 + t_2.$$

$$\frac{2 \cdot d}{V_m} = \frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}$$

$$\frac{2 \cdot d}{V_m} = \frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}$$

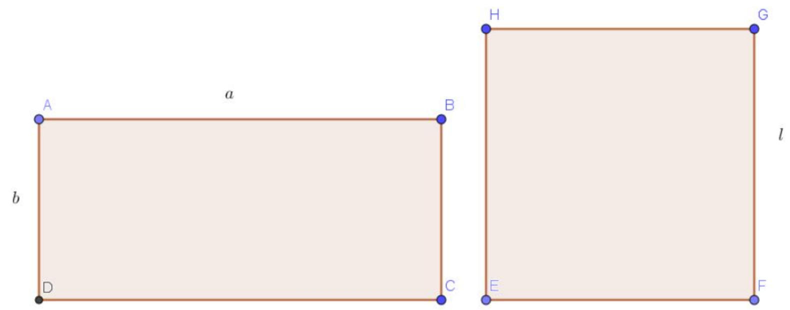
$$\frac{2}{V_m} = \frac{v_1 + v_2}{v_1 \cdot v_2}$$

$$\Leftrightarrow V_m = \frac{2 \cdot v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2}$$

Portanto a Velocidade Média é a Média Harmônica das velocidades neste caso.

Exemplo 2.6.3. *Suponha que desejamos construir um quadrado e um retângulo de tal forma que ambos possuam a mesma área, como mostra figura 2.16, que relação deve haver entre seus lados?*

Figura 2.16: Quadrado e retângulo com mesma área



Solução 4. *Para satisfazer as condições do exercícios é necessário que:*

$a \cdot b = l^2 \Leftrightarrow l = \sqrt{a \cdot b}.$

Concluímos daí que o lado do quadrado deve ser igual a média geométrica dos lados não paralelos do retângulo para que eles possua a mesma área.

Exemplo 2.6.4. *Na tabela 2.6.4 estão as taxas mensais de inflação de um país no* 1° *bimestre de um certo ano. Qual é a taxa média bimestral de inflação?*

Mês	Taxa de inflação
Janeiro	2 %
Fevereiro	1%

Solução 5. *Vamos supor que o preço de um determinado produto no dia primeiro de janeiro do ano em questão seja P , no fim deste mês o preço deste produto sofrerá um aumento de 2 % e seu preço será: $P \cdot 1,02$. Note que o número 1,02 não corresponde a taxa, ele é o fator de correção que dá acréscimos de 1%. No fim de fevereiro este produto sofrerá um novo aumento agora de 1%, e seu preço será reajustado para $P \cdot 1,02 \cdot 1,01$. A taxa média é a aquela que ao ser aplicada nos meses de janeiro e fevereiro resultaria no mesmo resultado. Seja i esta taxa então o fator de correção será $1 + i$, e o valor do produto corrigido com a inflação será $P \cdot (1 + i)^2$. Portanto teremos:*

$$P \cdot (1 + i)^2 = P \cdot 1,02 \cdot 1,01$$

$$\Leftrightarrow P \cdot (1 + i)^2 = P \cdot 1,02 \cdot 1,01$$

$\Leftrightarrow (1+i)^2 = 1,02 \cdot 1,01$

$\Leftrightarrow 1+i = \sqrt{1,02 \cdot 1,01}$

$\Leftrightarrow i = \sqrt{1,02 \cdot 1,01} - 1$

Observe que a média geométrica aparece no cálculo da taxa média. O número $\sqrt{1,02 \cdot 1,01}$ é a média geométrica dos fatores de correção.

Exemplo 2.6.5. *Suponha que no Exemplo 2.5.1 deseja-se apenas calcular a média das velocidades no percurso.*

Solução 6. *Basta calcular a média artimética entre elas.*
$M_v = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$

$M_v = \dfrac{20+30}{2} = \dfrac{50}{2} = 25km/h$

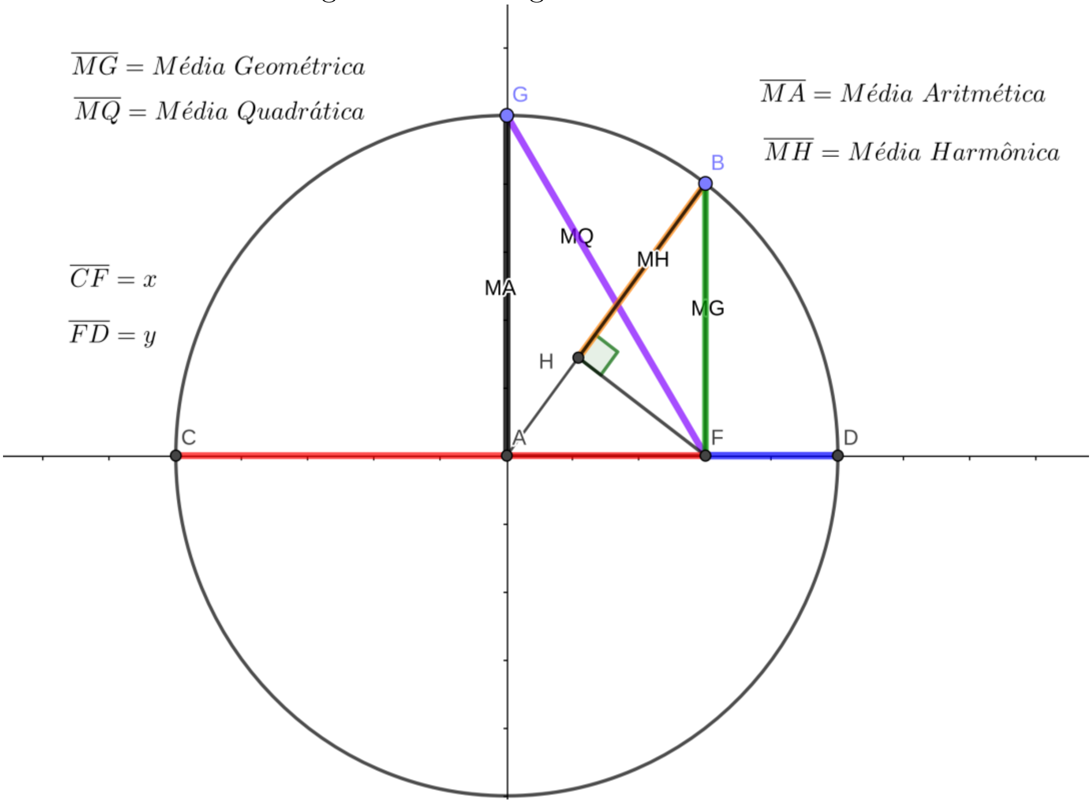
Exemplo 2.6.6. *Calcular a média quadrática entre os números 2 e 18.*

Solução 7. $M_Q = \sqrt{\dfrac{2^2+18^2}{2}} \approx 12,4$

2.6.3 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

A interpretação geométrica está ilustrada na figura 2.17 nela está as desigualdades das médias para os números reais e positivos x e y.

Figura 2.17: Desigualdade das médias



Vamos mostrar que independente da posição do ponto B no círculo sempre vai ocorrer na figura 2.17 as desigualdades:

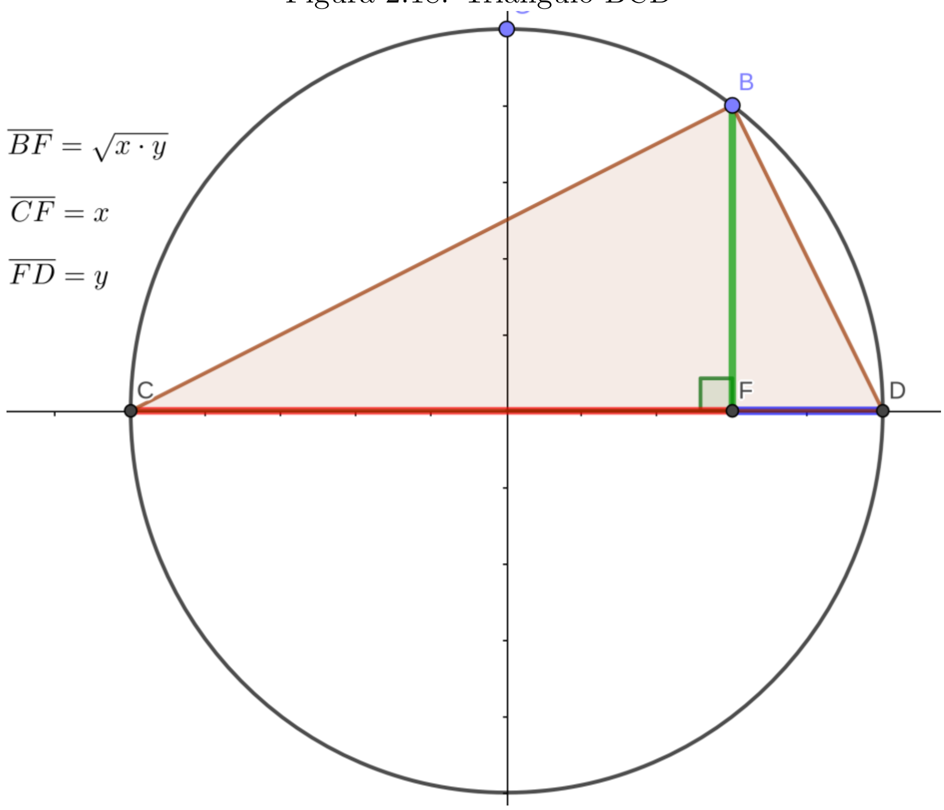
$$\boxed{MH \leq MG \leq MA \leq MQ}$$

De fato, da maneira como foi disposto na figura 2.17 o segmento $\overline{CD} = x + y$, é a medida do diâmetro do círculo. Dai segue-se que:

$$MA = \frac{x+y}{2}$$

Sejam agora traçadas na figura os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{BD}$. Assim o triângulo BCD ficará dividido em dois triângulos semelhantes a saber, BCF e BDF. Vide a figura 2.18.

Figura 2.18: Triângulo BCD



Vamos mostrar que $\overline{BF} = \sqrt{x \cdot y}$. Como o triângulo BCF é semelhante ao triângulo BDF, teremos:

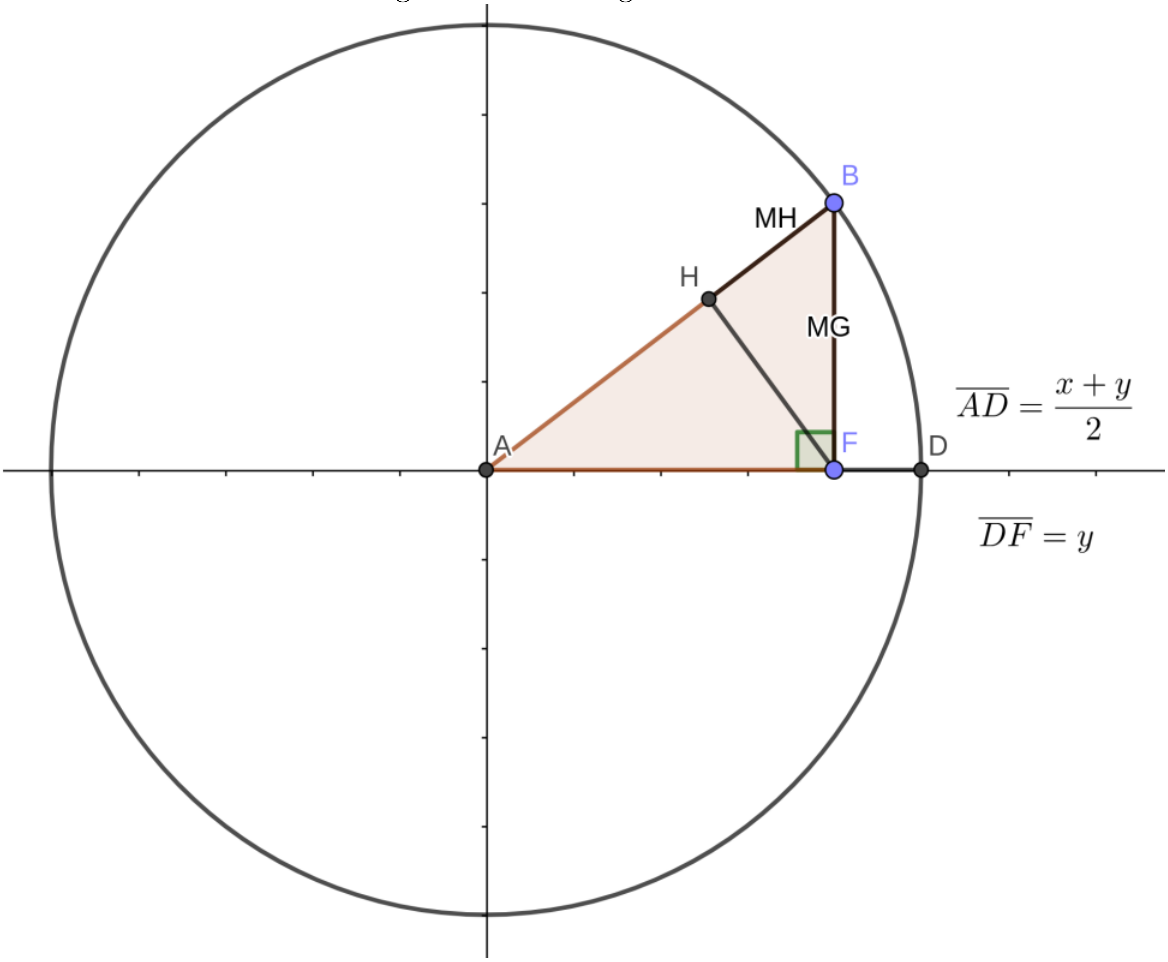
$$\frac{\overline{CF}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{DF}};$$

Pelo fato de $\overline{CF} = x$ e $\overline{DF} = y$, teremos $\overline{BF}^2 = x \cdot y$, e portanto: $\overline{BF} = \sqrt{x \cdot y} =$ MG. Já podemos concluir que: $MG \leq MA$, pois o maior valor que o segmento $\overline{BF}$ pode assumir é a metade de uma corda do círculo, no qual a maior corda possível é o diâmetro, que por construção é igual a $x + y$, portanto:

$MG = \sqrt{x \cdot y} \leq \dfrac{x+y}{2} = MA$

No triângulo BHF, ilustrado na figura 2.19 não é difícil ver que $MH < MG$, pois o triângulo citado é retângulo,basta verificar se este segmento é realmente a média harmônica.

Figura 2.19: Triângulo BHF



Na mesma figura o triângulo ABF, $\overline{AB}$ é a medida do raio do círculo e é também a medida da hipotenusa do mesmo. Note também que os triângulos BFH e ABF são retângulos respectivamente em $\hat{F}$ e $\hat{H}$, portanto vale a relação:
$\overline{AB} \cdot \overline{BH} = \overline{BF}^2$
Daí teremos:
$\frac{x+y}{2} \cdot BH = MG^2$
$\frac{x+y}{2} \cdot BH = x \cdot y$
$BH = \frac{2 \cdot x \cdot y}{x+y}$.
Dividindo o numerador e o denominador por $x \cdot y$, é possível fazer esta operação, pois tanto x quanto y são não nulos. Dai teremos então: $BH = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

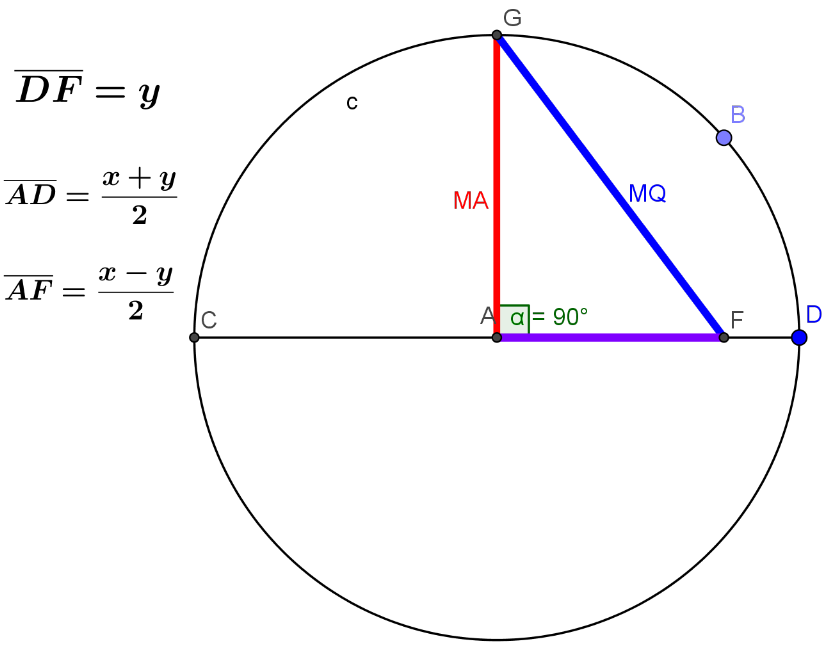
Segue-se que o segmento $\overline{BH}$ é a média harmônica, e portanto, $BH \leq MG$.

Resta apenas mostrar que $MA \leq MQ$, e de fato o é, pois no triângulo retângulo AFG o segmento $\overline{FG}$, que tem medida MQ é hipotenusa, enquanto o segmento $\overline{AG}$, de medida MA, é cateto. Devemos então mostrar que $\overline{FG}$ é realmente a média quadrática.

Mas primeiro temos que calcular a medida do segmento $\overline{AF}$.

Observe que na figura 2.20, o segmento $\overline{AD}$ também é igual ao raio do círculo, e portanto é igual a média aritmética de x e y.

Figura 2.20: Triângulo AFG



Daí temos que:

$\overline{AF} = \overline{AD} - \overline{DF}$

$= \frac{x+y}{2} - y$

$= \frac{x+y-2y}{2}$

$= \frac{x-y}{2}$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AFG teremos:

$\overline{FG}^2 = MA^2 + \overline{AF}^2$

$= (\frac{x+y}{2})^2 + (\frac{x-y}{2})^2$

$= \frac{x^2+2\cdot x\cdot y+y^2}{4} + \frac{x^2-2\cdot x\cdot y+y^2}{4}$

$= \frac{x^2+2\cdot x\cdot y+y^2+x^2-2\cdot x\cdot y+y^2}{4}$

$= \frac{x^2+y^2+x^2+y^2}{4}$

$= 2\cdot(\frac{x^2+y^2}{4})$

$MQ = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$

Então podemos concluir que o segmento $\overline{FG}$ é a média quadrática. A generalização deste fato está no Apêndice B deste trabalho.

Apesar de ser um tema muito citado no ensino médio, trabalhar com médias juntamente com sua interpretação geométrica, amplia a visão do aluno sobre o assunto e enriquece o conteúdo. Se o aluno tiver conhecimento do Teorema de Pitágoras e das propriedades do triângulo retângulo, será muito mais fácil para ele perceber as desigualdades que aparecem. O uso do *X-LOGO* é importante neste processo, porque para fazer a construção o aluno deve ter conhecimento pleno das propriedades da figura que deseja construir. É fato que todas as contas devem ser feitas antes de inserir a linha de códigos no computador, pois sem elas o discente não conseguirá executar o processo com precisão. O Software *Geogebra* poderia ser um recurso para construir figuras com melhor resolução, mas do ponto de vista matemático-geométrico o *X-LOGO* é mais enriquecedor além de ser mais trabalhoso. O professor deve ter muito cuidado ao utilizá-lo senão poderá apenas ficar fazendo figuras o que não é o nosso objetivo. Objetivo deste trabalho é entender porque as figuras construídas têm estas propriedades.

2.7 CONSTRUÇÃO NO X-LOGO

Definimos o círculo cujo raio é a média aritmética dos números x e y dados na figura 2.2 como medida dos segmentos $\overline{CF}$ e $\overline{FD}$, e em seguida façamos a seguinte sequência de comandos para construir a figura .

Exemplo 2.7.1. *Construir um círculo de raio 100 passos de tartaruga, e em seguida identificar as médias.*

Solução 8. *circ 100 pf 100 pt 100 pd 90 pf 100 pt 200 pe 16.94 pf 191.16 pd 90 pf 58.21 pd 106.94 pf 100 pd 90 pf 100 pd 140.3 pf 129.99 pd 129.7 pf 83.07 pd 146.13 pf 100 pd 123.87 pf 55.77 pd 146.13 pf 46.35 pd 90 pf 31.15.*

Devemos relembrar que o comando *circ 100* desenha um círculo de raio 100 passos de tartaruga, enquanto que os comandos *pd, pe, pf e pt*, movimentam a tartaruga para direita, esquerda, frente e para trás, respectivamente e que também seguem a unidade passos de tartaruga.

Vale ressaltar que todos os valores acima estão ligados aos valores iniciais de x e y na figura 2.2, estes por sua vez estão estritamente ligados ao raio do círculo, que no nosso caso é 100 passos de tartaruga. É importante que o professor faça cada comando com os alunos justificando o porquê de estar utilizando-o. Neste momento poderá inclusive tratar de conceitos como semelhança de triângulos, razões trigonométricas, ângulo externo, ângulo inteno, soma dos ângulos internos, Teorema de Pitágoras entre outros.

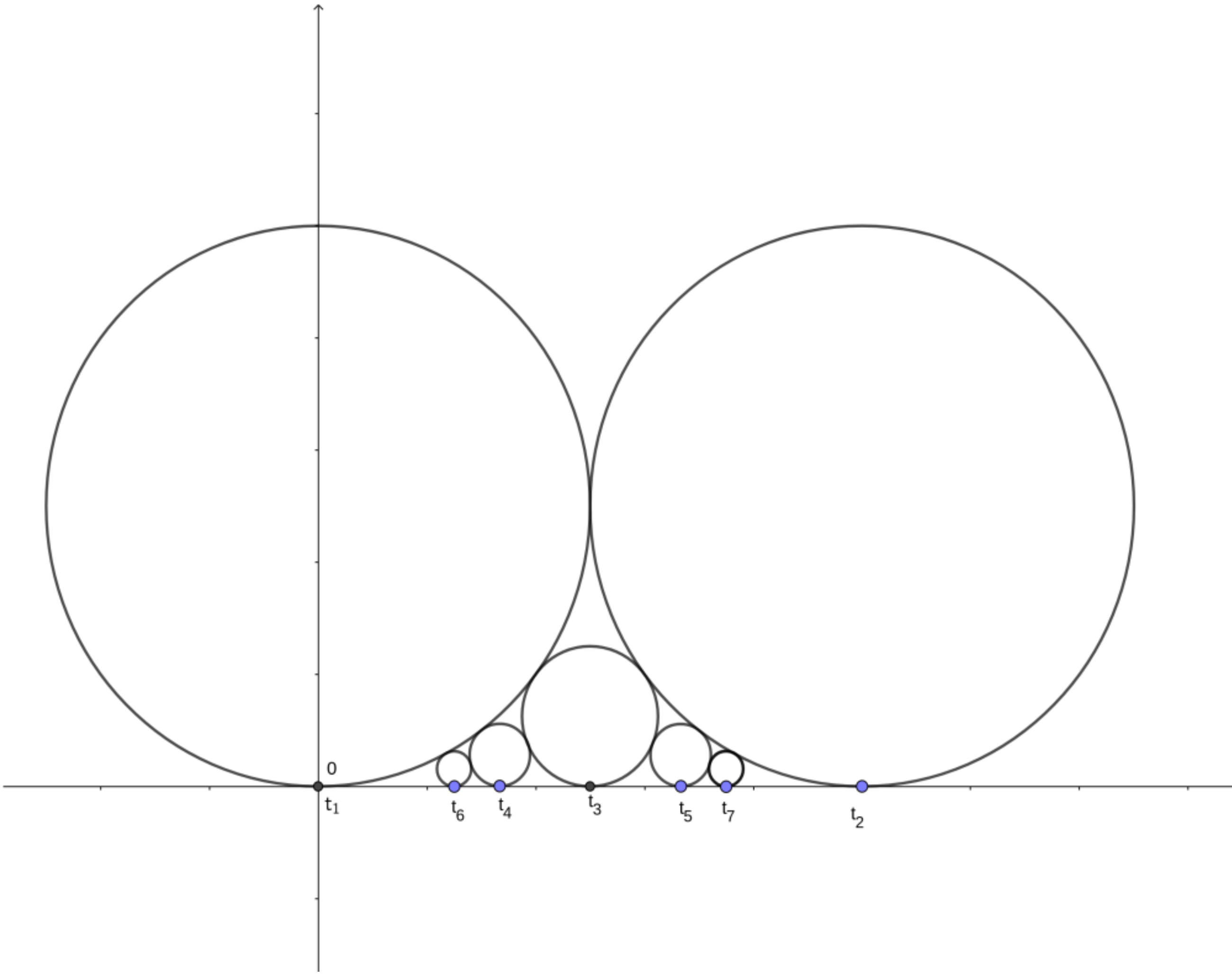
2.8 CÍRCULOS TANGENTES

Vamos digitar a lista de comandos a seguir na janela álgebra, um a um, e observar o que acontece. Para isto bastar clicar na tecla *"ENTER"* após a cada comando digitado.

circ 100 pt 100 pd 90 pf 200 pe 90 pf 100 circ 100 pt 100 pe 90 pf 100 pd 90 pf 25 circ 25 pt 25 pd 90 pf 33.33 pe 90 pf 11.11 circ 11.11 pt 11.11 pe 90 pf 16.66 pd 90 pf 6.25 circ 6.25 pt 6.25 pd 90 pf 100 pe 90 pf 6.25 dt.

O resultado está na figura 2.21.

Figura 2.21: Círculos tangentes



A ideia central é que o aluno perceba por si só que a figura 2.21 aparenta mostrar círculos tangentes a reta e tangentes e entre si dois a dois. Ele ao implementar os comandos acima perceberá visualmente que a tangência entre os círculos e a reta parece ser verdadeira. Surge então os seguintes questionamentos:

- *Os círculos são realmente tangentes?*

- *Será que se aumentarmos o zoom no software os círculos, tomados dois a dois, realmente tocarão a reta em um único ponto?*
- *Será que a cada par de círculos sempre existirá um terceiro que seja tangente aos dois primeiros e a reta?*
- *Será que existe alguma relação entre a distância dos pontos de tangência e suas coordenadas no plano?*

Para fixar as ideias vamos colocar a origem do sistema de coordenadas no t_1. Vale ressaltar que também é possível construir esta figura digitando todos os comando de uma só vez e finalizar apertando a tecla *"ENTER"*, contudo a tartaruga irá construir a figura toda de uma só vez. Procedendo desta maneira o aluno não conseguirá perceber o que cada comando faz no programa. Mesmo que seja mais trabalhoso o processo de digitar comando por comando é mais rico do ponto de vista matemático.

O rótulo dos pontos é opcional nesta construção e pode ser feito utilizando o comando *rotule*. Obviamente o manipulador do programa também terá que rotular o ponto, pois os comandos acima apenas desenham os círculos e a reta sem rotulá-los. É importante também que a pessoa que está utilizando o programa mude o tamanho da fonte neste momento para melhorar a visualização, mas isto vai depender do tamanho dos raios dos círculos construídos. O processo de mudar a tamanho da fonte se faz com o comando: *mudefonte 18*, se desejar que o símbolo apareça no tamanho 18.

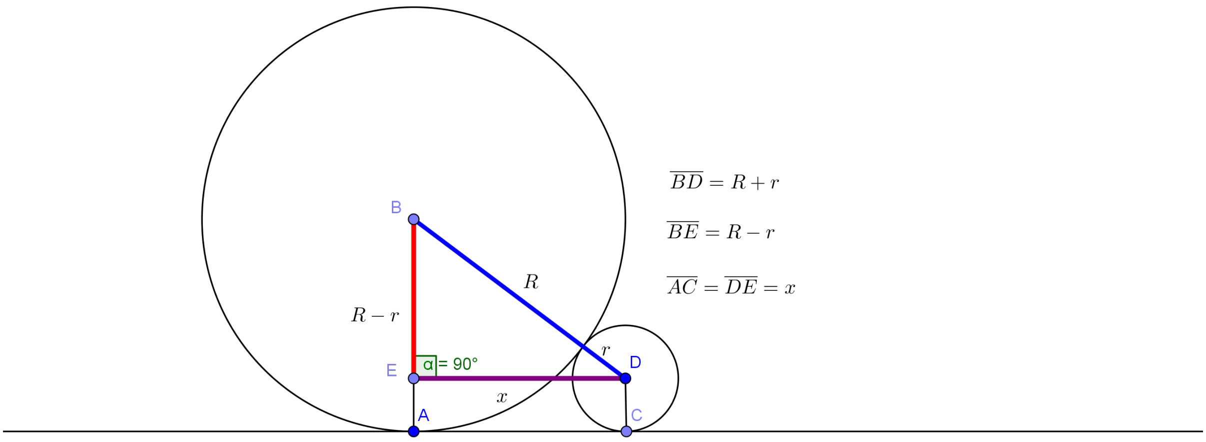
A afirmação é que os pontos de tangência: t_1, t_2, $\ldots$, t_7, são sempre números racionais. Mas será que isto vai sempre ocorrer para quaisquers que sejam os raios dos círculos iniciais? No exemplo feito no *X-LOGO* os raios dos círculos maiores têm comprimento igual a cem passos de tartaruga. Este valor não foi escolhido aleatoriamente, pelo contrário, foi escolhido a fim de dar mais visibilidade a figura. Isto ocorre porque a unidade passos de tartaruga é muito pequena. E se começassemos com raio 0,5 fazendo os círculos tangentes a reta $y = 0$? Será que conseguiríamos construir a mesma figura? Existe alguma relação entre os pontos de tangência e os raios dos círculos? Todas estas perguntas serão respondidas posteriormente.
Antes de começar precisamos de esclarecer que o termo *ponto de tangência*, significa que a reta que passa por este ponto tocando o círculo uma única vez perpendicularmente a qualquer reta que passa pelo seu diâmetro do círculo. Necessitaremos também de um lema que iremos utilizar várias vezes durante a nossa conjectura e posteriormente na prova dela.

2.9 LEMA

Lema 2.9.1. *A distância entre os pontos de tangência de dois círculos de raios R e r, respectivamente, tangentes entre si e tangentes a uma reta é $x = 2 \cdot \sqrt{R \cdot r}$.*

Se observarmos na figura 2.21 a cada dois círculos tangentes entre si, eles também serão tangentes a reta r.
Observe a figura 2.22, ela irá auxiliar na prova do lema. Nela estão as medidas dos segmentos $\overline{DE}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$

Figura 2.22: Círculos tangentes dois a dois



De fato, note que o segmento $\overline{DE}$ é paralelo ao segmento $\overline{AC}$, este último é perpendicular aos círculos nos pontos A e C, pois estes são pontos de tangência dos círculos, portanto o quadrilátero $ACDE$ é um retângulo, segue-se que o triângulo BED é retângulo em E, e pelo *Teorema de Pitágoras* podemos escrever:
$\overline{BD}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{DE}^2$, daí teremos:
$(R + r)^2 = (R - r)^2 + x^2$
$\leftrightarrow R^2 + 2 \cdot R \cdot r + r^2 = R^2 - 2 \cdot R \cdot r + r^2 + x^2$
$\leftrightarrow 4 \cdot R \cdot r = x$
$\leftrightarrow x = \sqrt{4 \cdot R \cdot r}$

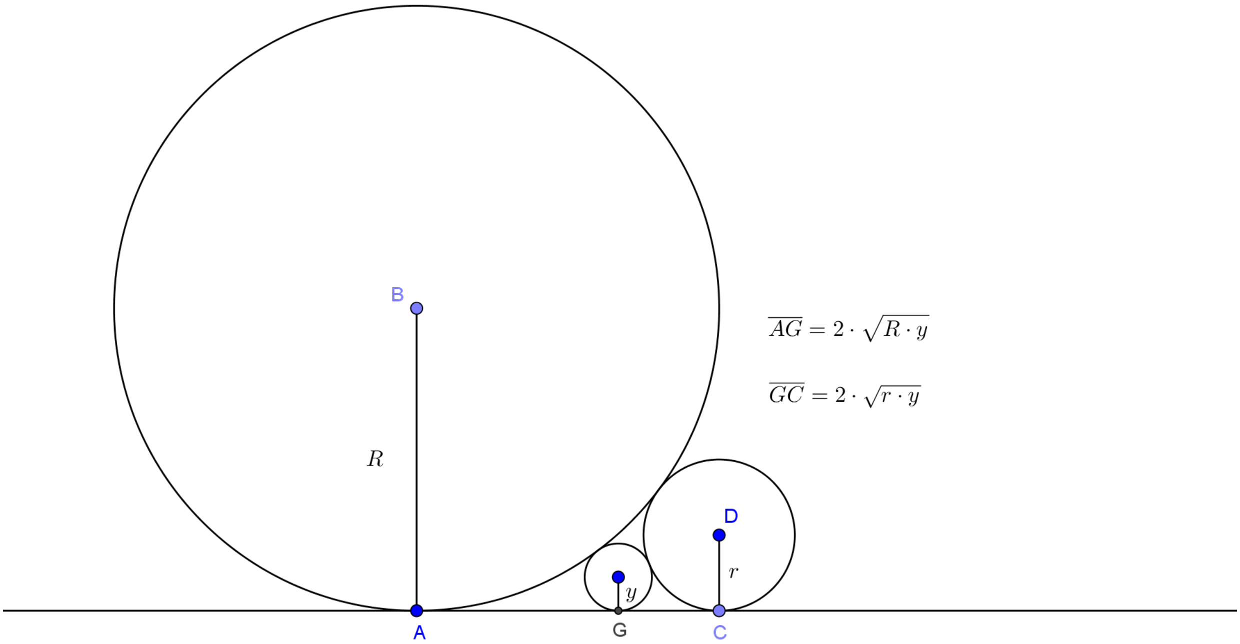
$$x = 2 \cdot \sqrt{R \cdot r} \tag{2.7}$$

Este lema é de fácil demonstração além disto ele será muito útil para as construções que se seguem.

2.10 CÁLCULO DOS PONTOS DE TANGÊNCIA

Na figura 2.23 inserimos um novo círculo tangente aos dois círculos anteriores e tangente a uma reta, este novo círculo está posicionado entre os dois círculos anteriores. Surge uma pergunta: quanto mede o raio deste novo círculo? Vamos utilizar o lema que provamos para calcular o raio deste círculo. De acordo com ele os segmentos $\overline{AG}$ e $\overline{GC}$ medem respectivamente $2 \cdot \sqrt{R \cdot y}$ e $2 \cdot \sqrt{r \cdot y}$. Por outro lado o segmento $\overline{AC}$ mede $2 \cdot \sqrt{R \cdot r}$

Figura 2.23: Três Círculos tangentes entre si e tangentes a reta



De acordo com a figura 2.23:

$\overline{AG} + \overline{GC} = \overline{AC}$, portanto;

$2 \cdot \sqrt{R \cdot y} + 2 \cdot \sqrt{r \cdot y} = 2 \cdot \sqrt{R \cdot r}$, dividindo ambos os membros por $2 \cdot \sqrt{R \cdot r \cdot y}$ teremos:

$$\frac{2 \cdot \sqrt{R \cdot y}}{2 \cdot \sqrt{R \cdot r \cdot y}} + \frac{2 \cdot \sqrt{r \cdot y}}{2 \cdot \sqrt{R \cdot r \cdot y}} = \frac{2 \cdot \sqrt{R \cdot r}}{2 \cdot \sqrt{R \cdot r \cdot y}} \leftrightarrow$$

$$\frac{2 \cdot \sqrt{R} \cdot \sqrt{y}}{2 \cdot \sqrt{R} \cdot \sqrt{r} \cdot \sqrt{y}} + \frac{2 \cdot \sqrt{r} \cdot \sqrt{y}}{2 \cdot \sqrt{R} \cdot \sqrt{r} \cdot \sqrt{y}} = \frac{2 \cdot \sqrt{R} \cdot \sqrt{r}}{2 \cdot \sqrt{R} \cdot \sqrt{r} \cdot \sqrt{y}} \leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{y}} \tag{2.8}$$

Agora dispomos de ferramentas suficientes para calcular todos os raios dos círculos que forem inseridos tangentes a reta e tangentes aos círculos anteriores, através da equação

2.7, bem como seus pontos de tangência por 2.8. Vamos investigar mais este problema inserindo mais círculos, calculando seus raios e pontos de tangência.

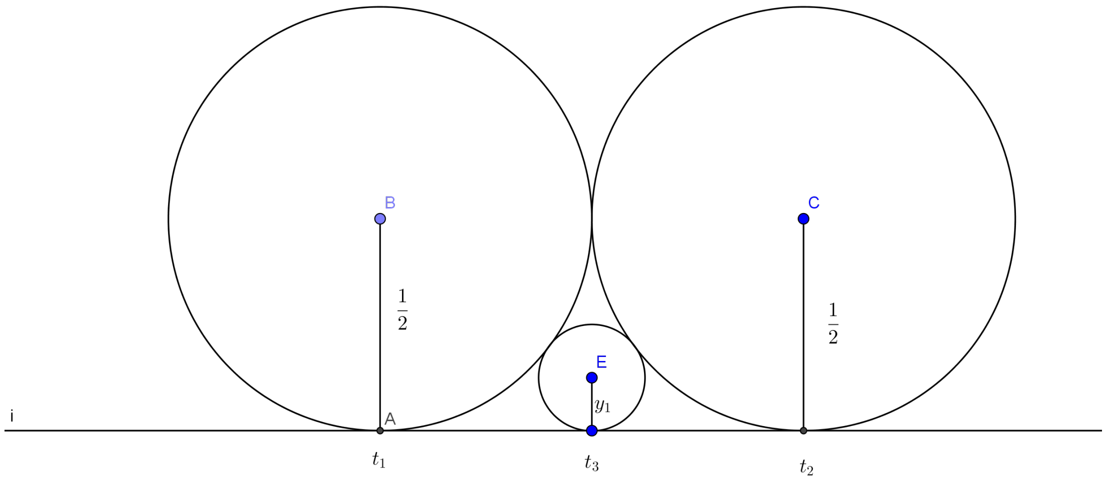
Chamando de y_1 o raio do primeiro círculo colocado entre dois círculos tangentes de raio $\frac{1}{2}$, por exemplo, podemos calcular sua medida usando a expressão anterior.

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{y_1}} \leftrightarrow$$

$$2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{y_1}} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{y_1}} = 2 \cdot \sqrt{2} \leftrightarrow \sqrt{y_1} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \leftrightarrow y_1 = \frac{1}{(2 \cdot \sqrt{2})^2} \leftrightarrow y_1 = \frac{1}{8}$$

A figura 2.24 ilustra situação.

Figura 2.24: Cálculo do raio do círculo tangente no ponto t₃



Agora vamos calcular o ponto de tangência t_3, pelo lema ele é o dobro da raiz quadrada do produto dos raios dos círculos tangentes a reta:

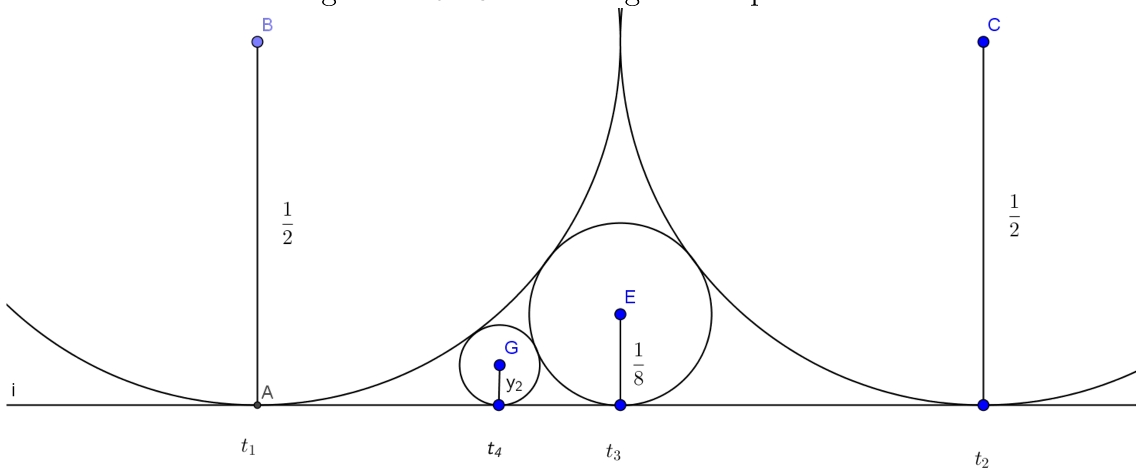
$$t_3 = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}} \leftrightarrow 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{16}} \leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Portanto o círculo de raio $y_1 = \frac{1}{8}$, possui ponto de tangência $t_3 = \frac{1}{2}$

Continuando o processo calcularemos o raio y_2 e o ponto de tangência t_4 do círculo inserido entre este e o círculo tangente no ponto $t_1 = 0$.

A figura 2.25 ilustra a situação.

Figura 2.25: Círculo tangente no ponto t_4



Pela equação 2.8 o raio do círculo é:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{8}}}=\frac{1}{\sqrt{y_2}}\leftrightarrow$$

$$\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{y_2}}\leftrightarrow$$

$$\sqrt{y_2}=\frac{1}{3\cdot\sqrt{2}}\leftrightarrow$$

$$y_2=\frac{1}{18}$$

Vamos calcular o ponto de tangência t_4 para tanto utilizaremos mais uma vez a equação 2.1:

$$t_4=2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{18}}\leftrightarrow$$

$$2\cdot\sqrt{\frac{1}{36}}\leftrightarrow$$

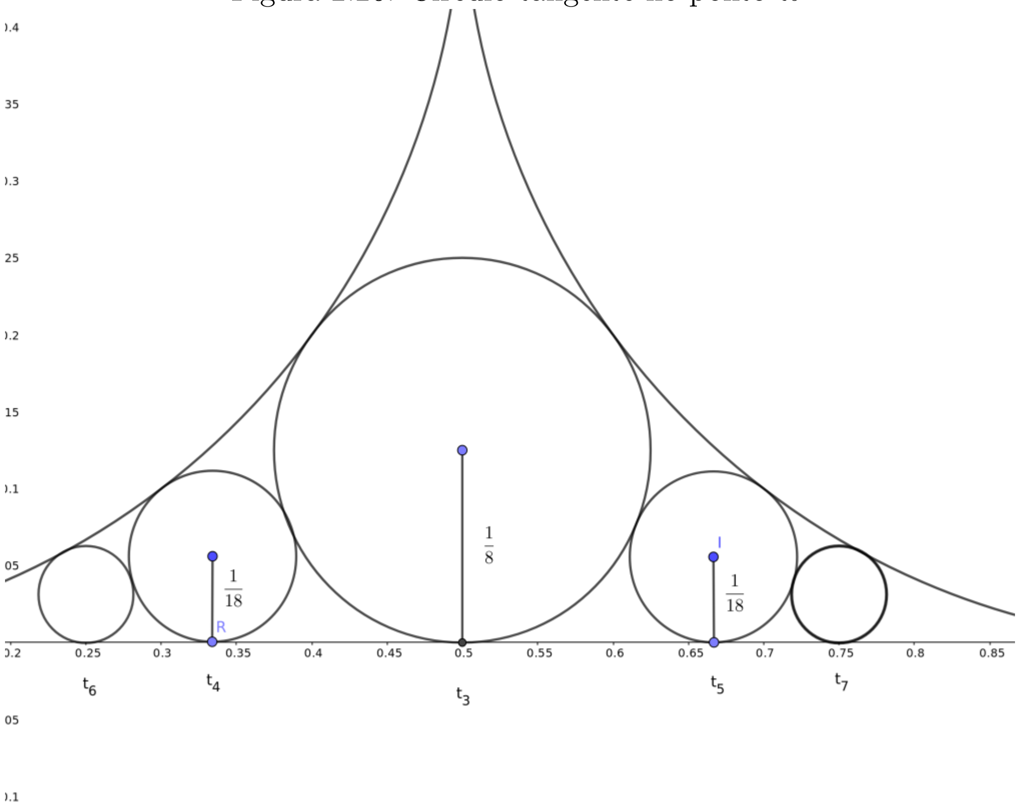
$$t_4=2\cdot\frac{1}{6}\leftrightarrow t_4=\frac{1}{3}$$

O círculo de raio $y_2=\frac{1}{18}$ é tangente no ponto $t_4=\frac{1}{3}$.

Observe que até o presente momento a única coisa que utilizamos de geometria é o lema, que é consequência imediata do Teorema de Pitágoras. Vale ressaltar que esta construção é elementar, mas está longe de ser fácil. A verdade é que muita gente confunde Matemática Elementar com Matemática fácil. É bem verdade que estes dois termos não são sinônimos, sendo assim, se equivoca quem pensa desta maneira. Dizemos que a Ma-

temática é Elementar quando dispomos de poucos recursos para fazer as construções ou demonstrações, isto a torna mais acessível aos leitores.
O processo iniciado aqui é realmente trabalhoso, mas temos que continuar inserindo círculos e calculando os seus pontos de tangência. Quanto mais exemplos fizermos melhor será a aceitação da nossa posterior conjectura. No final seremos premiados com um magnífico e inesperado resultado. Continuando, então, a figura 2.26 ilustra a inserção do círculo tangente no ponto t_5.

Figura 2.26: Círculo tangente no ponto t_5



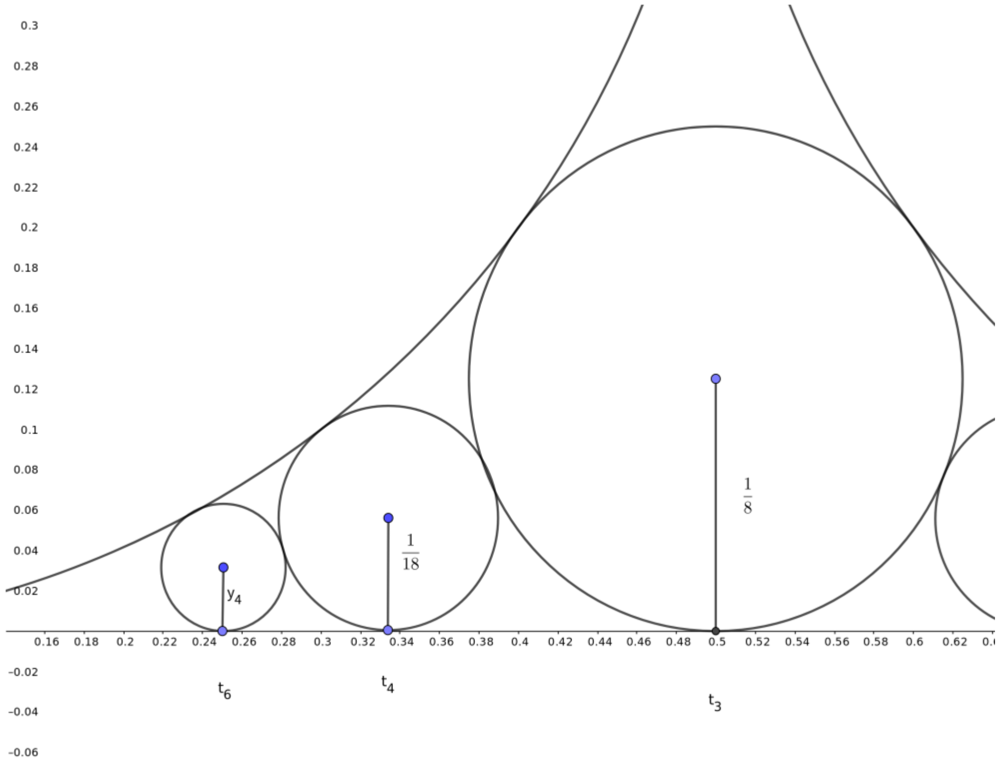
Vamos calcular agora o seu raio y_3.
Observe que pela figura 2.26 que esta construção é simétrica anterior, portanto, o raio do círculo tangente no ponto t_5 é igual ao raio do círculo tangente no ponto t_4, segue-se que $y_3 = \dfrac{1}{18}$.

Quanto ao seu ponto de tangência observe que a distância do ponto t_4 até o ponto t_1 é igual a distância do ponto t_2 até o ponto t_5, por simetria. Daí temos:

$$t_5 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Continuando o processo vamos inserir mais um círculo tangente e vamos calcular seu raio. Vide a figura 2.27.

Figura 2.27: Círculo tangente no ponto t_6



Pela equação 2.7: $\dfrac{1}{\sqrt{y_4}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{2}}} + \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{18}}} \leftrightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{y_4}} = \sqrt{2} + \sqrt{18} \leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{y_4}} = \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2} \leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{y_4}} = 4 \cdot \sqrt{2} \leftrightarrow$$

$$y_4 = \frac{1}{(4 \cdot \sqrt{2})^2} \Leftrightarrow$$

$$y_4 = \frac{1}{32}$$

Vamos calcular o ponto de tangência t_6 utilizando o lema.

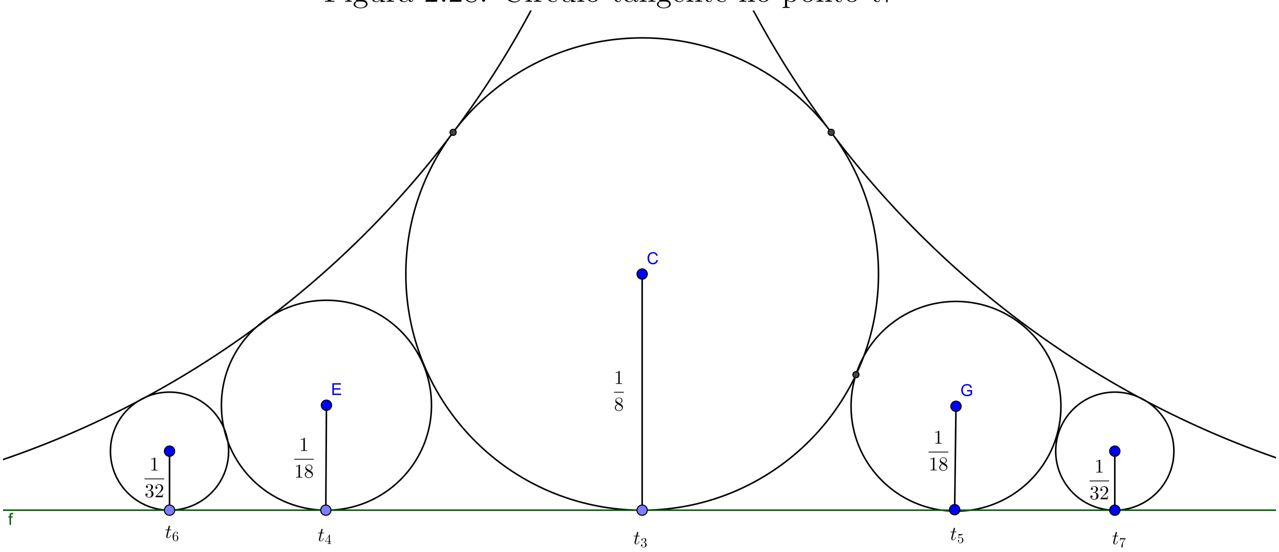
$$t_6 = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 16}}$$

$$t_6 = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 4}$$

$t_6 = \dfrac{1}{4}$

Mais uma vez calcularemos a abscissa de um novo ponto de tangência que chamaremos de t_7, por simetria seu raio possui medida $\dfrac{1}{32}$. Vide a figura 2.28.

Figura 2.28: Círculo tangente no ponto t₇



Calculemos agora a abscissa t_7 para tanto vamos utlizar o lema.

$t_7 = t_5 + 2 \cdot \sqrt{\dfrac{1}{18} \cdot \dfrac{1}{32}} \leftrightarrow$

$= t_5 + 2 \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 16}} \leftrightarrow$

$= t_5 + 2 \cdot \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \leftrightarrow$

$= t_5 + 2 \cdot \dfrac{1}{24} \leftrightarrow$

$= \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{12} \leftrightarrow$

$= \dfrac{2 \cdot 12 + 3 \cdot 1}{3 \cdot 12} \leftrightarrow$

$= \dfrac{27}{36} \leftrightarrow$

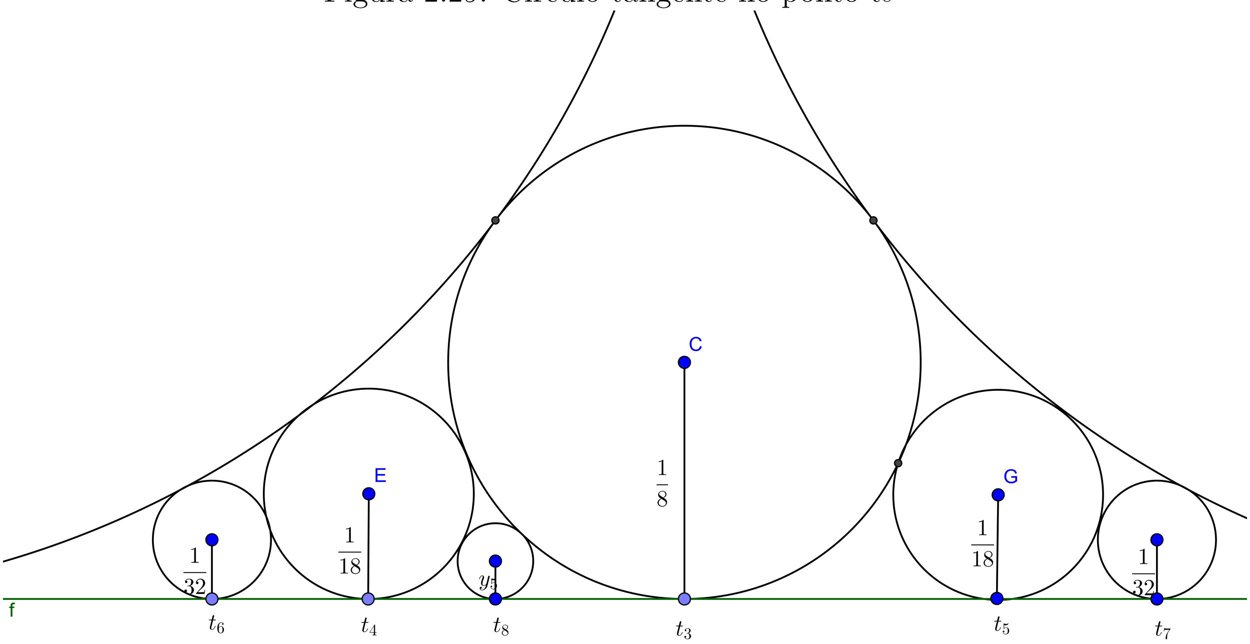
$t_7 = \dfrac{3}{4}$

O ponto t_7 também poderia ser encontrado calculando $|t_2 - t_6|$, pela simetria da

figura.
$t_7 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
Vamos calcular apenas mais dois pontos de tangência e os respectivos raios dos círculos tangentes nele.

Fazendo uso da figura 2.29 [5], da equação 2.7 e do lema podemos calcular o raio y_5 e o ponto de tangência t_8.

Figura 2.29: Círculo tangente no ponto t_8



Da equação 2.7 teremos:

$$\frac{1}{\sqrt{y_5}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{18}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{8}}} \leftrightarrow$$
$$\frac{1}{\sqrt{y_5}} = 3 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{2} \leftrightarrow$$
$$\frac{1}{\sqrt{y_5}} = 5 \cdot \sqrt{2} \leftrightarrow$$
$$\sqrt{y_5} = \frac{1}{5 \cdot \sqrt{2}} \leftrightarrow$$
$$y_5 = \frac{1}{(5 \cdot \sqrt{2})^2} \leftrightarrow$$
$$y_5 = \frac{1}{50}$$

Vamos agora calcular o ponto de tangência t_8. Pelo lema:

$$t_8 = t_4 + 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{50}} \leftrightarrow$$

[5]FONTE: Dados da pesquisa

$$= t_4 + 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 25}} \leftrightarrow$$

$$= t_4 + 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} \leftrightarrow$$

$$= t_4 + 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} \leftrightarrow$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \leftrightarrow$$

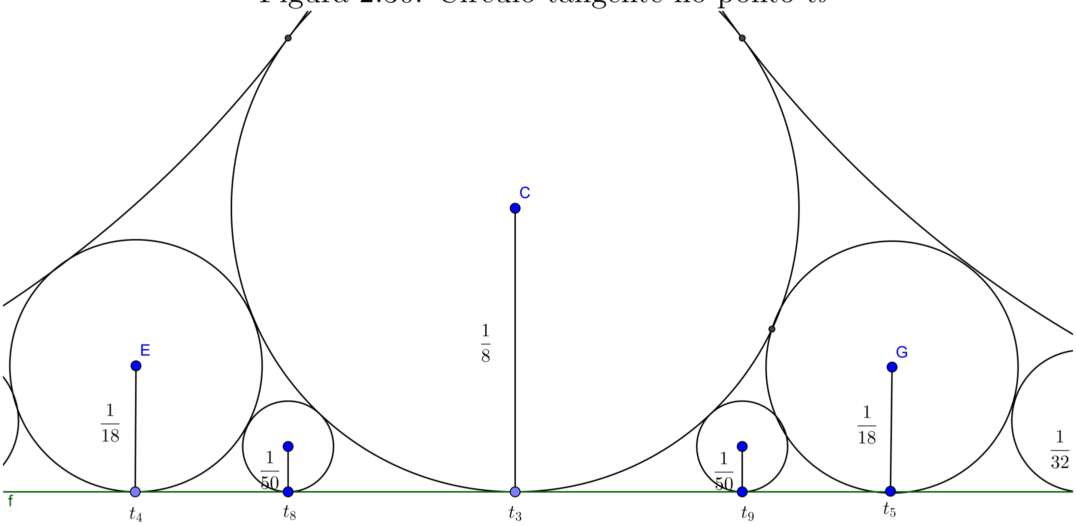
$$= \frac{1 \cdot 15 + 3 \cdot 1}{3 \cdot 15} \leftrightarrow$$

$$= \frac{18}{45}$$

$$t_8 = \frac{2}{5}$$

Por simetria o círculo tangente no ponto t_9 possui raio igual $y_6 = \frac{1}{50}$. Vide na figura 2.30.

Figura 2.30: Círculo tangente no ponto t₉



Resta calcular o ponto de tangência t_9, que pode ser encontrado somando de $t_3 = \frac{1}{2}$ à distância $|t_3 - t_9|$. Mais uma vez faremos uso do lema:

$$t_9 = t_3 + |t_3 - t_9| \leftrightarrow$$

$$= \frac{1}{2} + 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{50}} \leftrightarrow$$

$$= \frac{1}{2} + 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 25} \leftrightarrow$$

$$= \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 5} \leftrightarrow$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \leftrightarrow$$

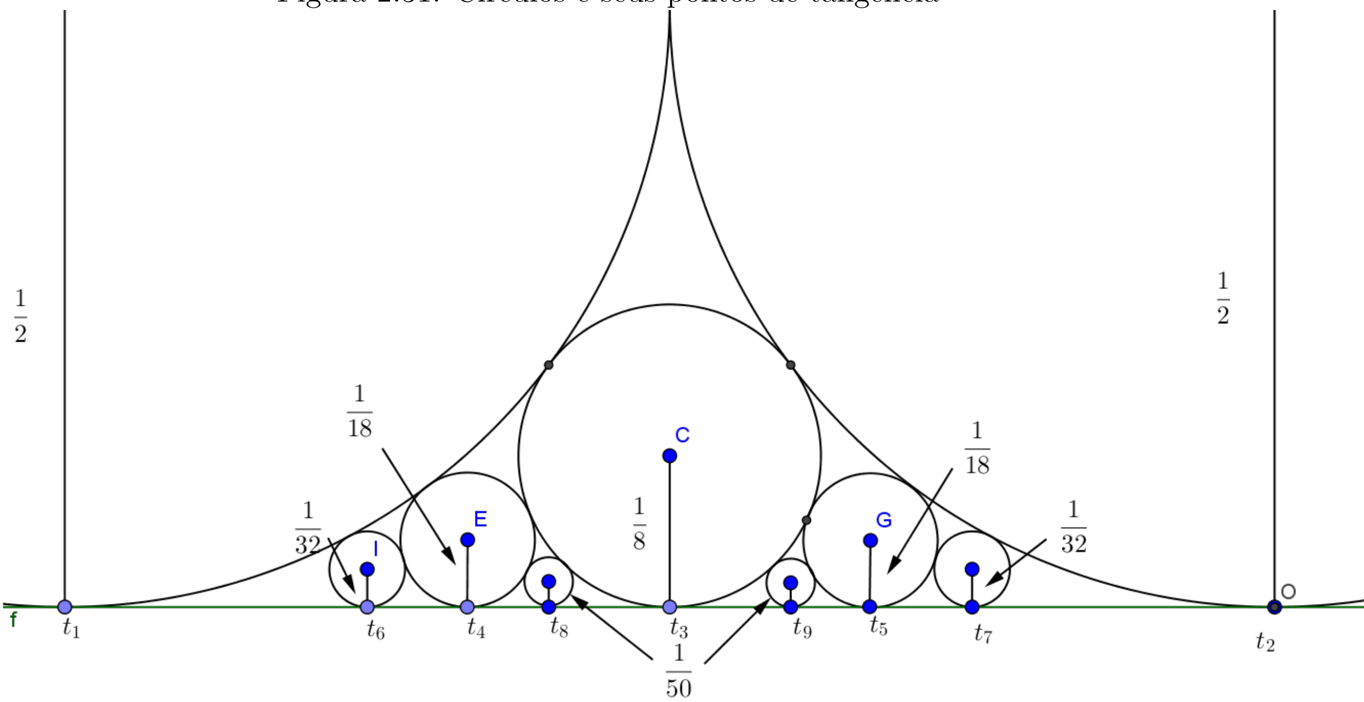
$$= \frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 1}{2 \cdot 10} \leftrightarrow$$

$$= \frac{12}{20} \leftrightarrow$$

$$t_9 = \frac{3}{5}$$

Na figura 2.31 está um resumo de todos os nossos passos até o presente momento.

Figura 2.31: Círculos e seus pontos de tangência



Após este trabalho árduo de calcular os pontos de tangência e raios do círculos, veremos se existe alguma relação entre eles. Para tanto vamos analisar os valores obtidos.

- O ponto t_1 é tangente no ponto 0 e possui raio $\frac{1}{2}$.
- O ponto t_2 é tangente no ponto 1, e possui raio $\frac{1}{2}$.
- O ponto t_3 é tangente no ponto $\frac{1}{2}$, e possui raio $\frac{1}{8}$.

- O ponto t_4 é tangente no ponto $\dfrac{1}{3}$ e possui raio $\dfrac{1}{18}$
- O ponto t_5 é tangente no ponto $\dfrac{2}{3}$ e possui raio $\dfrac{1}{18}$.
- O ponto t_6 é tangente no ponto $\dfrac{1}{4}$ e possui raio $\dfrac{1}{32}$.
- O ponto t_7 é tangente no ponto $\dfrac{3}{4}$ e possui raio $\dfrac{1}{32}$.
- O ponto t_8 é tangente no ponto $\dfrac{2}{5}$ e possui raio $\dfrac{1}{50}$.
- O ponto t_9 é tangente no ponto $\dfrac{3}{5}$ e possui raio $\dfrac{1}{50}$.

2.11 Conjectura

Já podemos observar alguns resultados. Por exemplo, quando dois círculos são tangentes? Ao calcular a módulo da diferença entre dois pontos de tangência temos um resultado um tanto curiosos.
$|t_1 - t_3| = |t_2 - t_3| = \frac{1}{2}$

$|t_3 - t_8| = |t_3 - t_9| = |\frac{1}{2} - \frac{2}{5}| = \frac{1}{10}$

$|t_3 - t_4| = |t_3 - t_5| = |\frac{1}{2} - \frac{1}{3}| = \frac{1}{6}$

$|t_3 - t_8| = |t_3 - t_9| = |\frac{1}{2} - \frac{2}{5}| = \frac{1}{10}$

$|t_4 - t_8| = |t_5 - t_9| = |\frac{1}{3} - \frac{2}{5}| = \frac{1}{15}$

$|t_1 - t_6| = |t_2 - t_7| = |1 - \frac{3}{4}| = \frac{1}{4}$

$|t_4 - t_6| = |t_5 - t_7| = |\frac{1}{3} - \frac{1}{4}| = \frac{1}{12}$.

Isto nos leva a conjecturar que o numerador da diferença entre os pontos de tangência de círculos vizinhos é sempre 1.
A tabela 2.4 trás de forma mais simplificada a relação que conjecturamos que há entre os pontos de tangência e os raios dos círculos.

Ponto de tangência	Abscissa	Cálculo do raio	Raio
t_1	$\frac{0}{1} = 0$	$\frac{1}{2 \cdot 1}$	$\frac{1}{2}$
t_2	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{2 \cdot 1}$	$\frac{1}{2}$
t_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2 \cdot 2^2}$	$\frac{1}{8}$
t_4	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2 \cdot 3^2}$	$\frac{1}{18}$
t_5	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2 \cdot 3^2}$	$\frac{1}{18}$
t_6	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2 \cdot 4^2}$	$\frac{1}{32}$
t_7	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2 \cdot 4^2}$	$\frac{1}{32}$
t_8	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2 \cdot 5^2}$	$\frac{1}{50}$
t_9	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2 \cdot 5^2}$	$\frac{1}{50}$

Tabela 2.4: Pontos de tangência e raios dos círculos

A prova deste fato com mais detalhes está no apêndice B. Este problema é muito rico e também trabalhoso. A pessoa que o enfrenta deve estar disposto a gastar um tempo para perceber os padrões matemáticos que aparecem. É importante fazê-lo passo a passo para que o aluno perceba todos os seus detalhes. É um bom problema para se trabalhar com alunos que participam de treinamento de Olimpíada de Matemática pelo fato de tratar de diversos assuntos, neste caso a demonstração poderá ser feita na integra, haja vista que este público é diferenciado. Também é um bom problema para se tratar com alunos da terceira série do ensino médio, mas neste caso deve-se omitir a demonstração e deixá-la como exercício para aqueles que são mais avançados e curiosos.

CONCLUSÕES

Qual é o professor de Matemática da educação básica, que em algum dia da sua árdua docência nunca ouviu as seguintes frases dos alunos?: *"Professor porque você veio?" ; "Você poderia ter faltado"; " Nossa! Matemática de novo?"; " Professor não é você não é a sua matéria que é muito chata"*. Realmente é desmotivante ouvir frases deste tipo. Mas apesar de ter um conteúdo puramente desmotivador, elas serviram como motivação para tentar outras alternativas.

Só para constar eu já havia trabalhado com o programa em duas escolas das redes municipais de Cariacica ("EMEF Renascer") e de Vila Velha ("EMEF Saturnino Rangel Mauro"), em 2012 e 2014, respectivamente. Usei o trabalho como avaliação dos dois últimos trimestres nos dois casos, cheguei até escrever um projeto no fim de 2014, mas pelo fato de não ter feito avaliação do projeto com os discentes, resolvemos não falar dele neste trabalho.

Ele serviu para quebrar a rotina das aulas e acabou gerando uma certa ansiedade por parte dos alunos na espera pela aula na informática. Acredito que isto ocorreu, pelo fato das aulas acontecerem no laboratório de informática. Fica o registro que em alguns momentos me sentia um professor de Educação Física, nas sextas-feiras, acredito que isto acontecia porque era lá nosso único momento da semana que aula de matemática era desejada por maior parte dos discentes. Alguns até pediam para os pais não marcarem consultas médicas nos dias que tinha aula com *X-LOGO*.

Apesar de não ter feito avaliação do projeto com os alunos alguns resultados ficaram bem visíveis, por exemplo, eles ficaram mais participativos, percebi que melhora no rendimento dos alunos. Também pude notar que eles ficaram mais motivados com as aulas de matemática.

Outro fato importante é que as aulas ministradas com uso de software tem que ser bem dinâmicas para não caírem no enfado. Pude observar que os adolescentes se cansam muito rapidamente e desistem da atividade se esta tornar-se cansativa ou muito difícil. Por esta razão trabalhar os *Círculos tangentes de Ford* foi um grande desafio, pois as tentativas exaustivas fazem parte da conjectura.

TRABALHOS FUTUROS

Separamos esta seção para discutir alguns temas que poderiam poderiam ser explorados futuramente:

- *Círculos tangentes de Ford*: Este tema é muito rico, é fato que a conjectura feita aqui, vale para qualquer raio racional no intervalo $[0, 1]$, que se adote nos círculos iniciais. Resta saber se o fato é também verdadeiro para os demais números racionais positivos.

Do ponto de vista espacial percebe-se que se utilizarmos pontos de tangência das esferas obteremos o mesmo comportamento, neste caso a tripla (x, y, z) será sempre também composta por números racionais? Aparentemente não é difícil acreditar que os pontos de tangência sejam números complexos. Resta saber se obteremos todos os números complexos, ou se eles também ficaram limitados a um intervo.

- *Geometria Espacial*: Este tema não foi explorado no trabalho, mas é possível utilizá-lo para construções em perspectiva, trabalhar o conceito de volume e até mesmo conceitos do ponto de vista vetorial.

Referências Bibliográficas

[1] Carvalho, A. A. A. (2014). Como olhar criticamente o software educativo multimédia. *Cadernos SACAUSEF – Sistema de Avaliação, Certificação e Apoio à Utilização de Software para a Educação e a Formação - Utilização e Avaliação de Software Educativo, Ministério da Educação,*, 1:69–89, 85–86.

[2] da Silva, A. C. B. (2012). *Softwares Educativos: critérios de avaliação a partir dos discursos da interface, da esfera comunicativa e do objeto de ensino*. PhD thesis, UFPE - PE.

[3] da Silva, L. M. O. (2005). *Uma aplicação de árvores de decisão, redes neurais e KNN para a identificação de modelos ARMA não-sazonais e sazonais*. PhD thesis, PUC-Rio.

[4] de Holanda Ferrreira, A. B. (2009). *Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa,*. Fundação Dorina Nowill para Cegos, 3 rev. e atual edition.

[5] Doucette, J. (1999). 196 palindrome quest.

[6] et all, E. W. (2012). *Dez matemáticos, cem problemas*. Editora Gradiva, 1 edition.

[7] Fernandez, A. (2001). *A mulher escondida na professora: uma leitura psicopedagógica do ser mulher, da corporeidade e da aprendizagem*. Artmed, Porto Alegre.

[8] Ford, L. (2014). Fractions. *Mathematical Association of America. American Mathematical Monthly*, 45:568–601. Disponível em: $< http://www.jstor.org/stable/2302799 >$. Acesso em: 06 jul. 2017.

[9] Gama, J., Medas, P., Rodrigues, P., and LIACC, F. (2004). Concept drift in decision-tree learning for data streams. In *Proceedings of the Fourth European Symposium on Intelligent Technologies and their implementation on Smart Adaptive Systems, Aachen, Germany, Verlag Mainz*, pages 218–225.

[10] Hefez, A. (2006). *Elementos da Aritmética*. Coleção Textos Universitários, SBM.

[11] José Augusto Navarro Garcia Manzano, J. F. d. O. (2005). *Algoritmos Lógica para Desenvolvimento de Programação de Computadores*. Editora Érica Ltda.

[12] Landingham, W. (2006). 196 and other lychrel numbers.

[13] Lima, E. L. (2008). *Curso de Análise*, volume 12. Associação Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Projeto Euclides -IMPA), 6 edition.

[14] Quadros, M. X. (2015). Causas e consequências do fracasso escolar: no início da escolaridade. *Web artigos.* Disponível em: $< https : //www.webartigos.com/artigos/causas-e-consequencias-do-fracasso-escolar-no-inicio-da-escolaridade/137351 >$. Acesso em: 23 fev. 2018.

[15] Soares, A. R. (2011). *ProjetoLogo - Manual do usuário do Software educacional X-LOGO.* Disponível em: $< https : //projetologo.webs.com/xlogo.html >$. Acesso em: 25 jun. 2018.

[16] Trigg, C. (1967). *Palindromes by Addition.* Mathematics Magazine.

[17] Victor Giraldo, e. a. (2012). *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática.* Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática, 1 edition.

[18] X-LOGO (2011). *Manual do Usuário.* Disponível em: $< http : //xlogo.tuxfamily.org/pt/ >$. Acesso em: 10 jun. 2017.

A APÊNDICES

A.1 GENERALIZAÇÃO DAS DESIGUALDADES DAS MÉDIAS

Queremos mostrar que vale $MH \leq MG \leq MA \leq MQ$ para qualquer quantidade n de valores para tanto vamos provar um Lema.

Lema A.1.1. *Dados n números reais positivos, $n \in \mathbb{N}$, a saber, x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_{n-1}, x_n, tais que:*

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot x_n = 1$*, então:*

$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n \geq n$

Demonstração. Princípio da Indução Matemática Para $n = 1$, é trivial, pois teremos $x_1 = 1$ (expressão do produto), e portanto $x_1 \geq 1$ (expressão da soma).

Para $n = 2$, com x_1, $x_2 \in \mathbb{R}_+$, obviamente x_1, x_2 são não nulos. Já mostramos no círculo que vale a desigualdade:

$\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}$, e como $x_1 \cdot x_2 = 1$, segue-se que:

$\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{1} \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 2$

Suponha agora que a afirmação seja verdadeira para um certo número $k \in \mathbb{N}$.

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_{k-1} \cdot x_k = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{k-1} + x_k \geq k$.

Observe que não pode ocorrer todos os $x_i \geq 1$, $i = 1, 2, 3, \ldots, k$; $k \in \mathbb{N}$, pois teríamos: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_{k-1} \cdot x_k \geq 1$. Também não pode ocorrer que todos os termos $x_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3, \ldots, k$; $k \in \mathbb{N}$, pois o produto: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_{k-1} \cdot x_k \leq 1$.

Então $\exists k \in \mathbb{N} | x_k > 1$ e $\exists\ k \in \mathbb{N} | x_{k+1} < 1$, daí $x_k - 1 > 0$; $1 - x_{k+1} > 0$. Se tivermos mais de um número x_k, $k \in \mathbb{N}$ com esta propriedade substituiremos pelo produto dos números x_k. Daí teremos:

$(x_k - 1) \cdot (1 - x_{k+1})$

$= x_k - x_k \cdot x_{k+1} - 1 + x_{k+1} > 0$, somando $k + 1$ em ambos os membros;

$= x_k - x_k \cdot x_{k+1} - 1 + x_{k+1} + k + 1 > k + 1$

$$= x_k - x_k \cdot x_{k+1} x_{k+1} + k + > k + 1 \tag{A.1}$$

Usaremos este fato mais tarde em nossa demonstração.

Considere agora a sequência de $k+1$ números reais não nulos e positivos:

x_1, x_2, x_3,..., x_k, $x_{k+1} \in \mathbb{R}_+$, se agruparmos $x_k \cdot x_{k+1}$ no produto:

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{k-1} \cdot (x_k \cdot x_{k+1})$, teremos um produto de k números reais, positvos e não nulos. Pela hipótese de indução:

$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{k-1} + x_k \cdot x_{k+1} \geq k$. Somando os termos x_k e x_{k+1} e $x_k \cdot x_{k+1}$ subtraindo, em ambos os membros teremos:

$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{k-1} + x_k \cdot x_{k+1} - x_k \cdot x_{k+1} + x_k + x_{k+1} \geq k + x_k + x_{k+1} - x_k \cdot x_{k+1}$

Por A.1:

$= x_k - x_k \cdot x_{k+1} x_{k+1} + k + > k + 1$. Então:

$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{k-1} + x_k \cdot x_{k+1} - x_k \cdot x_{k+1} + x_k + x_{k+1} \geq k + 1$

Concluímos que:

Se x_1, x_2, x_3,...,x_k, $x_{k+1} \in \mathbb{R}_+$, tais que: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{k-1} \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq k + 1$. Isto prova o nosso lema.

Agora vamos mostrar que: $MG \leq MA$

De fato, pois de $MG = \sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot x_n}$, temos:

$MG^n = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot x_n$, divindo por MG^n;

$$1 = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot x_n}{MG^n}$$

$$1 = \frac{x_1}{MG} \cdot \frac{x_2}{MG} \cdot \frac{x_3}{MG} \cdot \ldots \cdot \frac{x_{n-1}}{MG} \cdot \frac{x_n}{MG}.$$

Agora temos o produto de n números reais positivos resultando em 1, segue-se que:

$$\frac{x_1}{MG} + \frac{x_2}{MG} + \frac{x_3}{MG} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{MG} + \frac{x_n}{MG} \geq n$$

Multiplicando por MG em ambos os membros teremos:

$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n \geq MG \cdot n$. Agora dividindo por n

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n} \geq MG$$

$MA \geq MG$

Mostraremos agora que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)}{n}.$$

Pela desigualdade das médias aritmética e geométrica temos:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)}{n} \geq \sqrt{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)} \Rightarrow \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)} \leq \sqrt{\prod_{i=1}^{n}(x_i)}$$

Segue-se que $MH \leq MG$

Resta mostrar que:

$MA \leq MQ$

Vamos usar o princípio da indução matemática para provar que $MA \leq MQ$.

Já fizemos no círculo para $n = 2$, portanto:

$MQ = \sqrt{\frac{{x_1}^2+{x_2}^2}{2}}$

Suponha agora que afirmação seja verdadeira para um certo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, dados k valores x_1, x_2, x_3,...,$x_k \in \mathbb{R}_+$, teremos:

$MQ = \sqrt{\dfrac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \ldots + {x_{k-1}}^2 + {x_k}^2}{k}}$

Agora considere:

$\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{k-1} + x_k}{k+1} + \frac{x_{k+1}}{k+1}$

Seja $y_k = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{k-1} + x_k}{k+1}$

Então temos dois números reais positivos, portanto vale:

$$\left(\frac{y_k + \frac{x_{k+1}}{k+1}}{2}\right)^2 \leq \frac{{y_k}^2 + \left(\dfrac{x_{k+1}}{k+1}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{k-1} + x_k}{k+1}\right)^2 + \left(\dfrac{x_{k+1}}{k+1}\right)^2}{2}$$

$$\leq \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{k-1} + x_k}{k+1}\right)^2 + \left(\frac{x_{k+1}}{k+1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{k-1} + x_k}{k \cdot \frac{k+1}{k}}\right)^2 + \left(\frac{x_{k+1}}{k+1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{k+1}{k}}\right)^2 \cdot \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{k-1} + x_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{x_{k+1}}{k+1}\right)^2$$

Pela hipótese de indução:

$$\leq \left(\frac{1}{\frac{k+1}{k}}\right)^2 \cdot \left(\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \ldots + {x_{k-1}}^2 + {x_k}^2}{k}\right) + \left(\frac{x_{k+1}}{k+1}\right)^2$$

$$\leq \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \cdot \left(\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \ldots + {x_{k-1}}^2 + {x_k}^2}{k}\right) + \left(\frac{x_{k+1}}{k+1}\right)^2$$

$$\leq \left(\frac{k}{k+1}\right) \cdot \left(\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \ldots + {x_{k-1}}^2 + {x_k}^2}{k}\right) + \left(\frac{x_{k+1}}{k+1}\right)^2$$

$$\leq \left(\frac{1}{k+1}\right) \cdot \left(\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \ldots + {x_{k-1}}^2 + {x_k}^2}{1}\right) + \left(\frac{x_{k+1}}{k+1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \ldots + {x_{k-1}}^2 + {x_k}^2}{k+1}\right) + \left(\frac{x_{k+1}}{k+1}\right)^2$$

$$\leq \left(\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \ldots + {x_{k-1}}^2 + {x_k}^2}{k+1}\right) + \left(\frac{{x_{k+1}}^2}{k+1}\right)$$

$$= \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \ldots + {x_{k-1}}^2 + {x_k}^2 + {x_{k+1}}^2}{k+1}$$

Concluímos que dados k valores x_1, x_2, x_3,..., $x_k \in \mathbb{R}_+$, $\forall k \in \mathbb{N}$, teremos:

$$MQ = \sqrt{\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \ldots + {x_{k-1}}^2 + {x_k}^2}{k}} \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n} = MA.$$

Finalmente,

$$\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)} \leq \sqrt{\prod_{i=1}^{n}(x_i)} \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i)}{n} \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{(x_i)^2}{n}}\right); \forall \in \mathbb{N}.$$

$\square$

B PROVAS DOS PROCEDIMENTOS LÓGICOS POR INDUÇÃO MATEMÁTICA

Separamos as provas dos procedimentos em seções organizar melhor o trabalho.

B.1 PROCEDIMENTO QUE SOMA OS N PRIMEIROS NÚMEROS ÍMPARES

Demonstração. A afirmação é que a soma de n números ímpares é igual a n^2, isto é, $1+3+5+7+\ldots+2\cdot n-5+2\cdot n-3+2\cdot n-1=n^2$.

Vemos que para $n=1$ a afirmação é verdadeira, pois $1^2=1$, para $n=2$ também, pois $1+3=4=2^2$. Vamos admitir que a afirmação seja verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, segue-se que: $1+3+5+7+\ldots+2\cdot n-5+2\cdot n-3+2\cdot n-1=n^2$. Somando $2\cdot n+1$ em ambos os membros teremos:
$1+3+5+7+\ldots+2\cdot n-5+2\cdot n-3+2\cdot n-1+2\cdot n+1=n^2+2\cdot n+1=(n+1)^2$. □

B.2 PROCEDIMENTO QUE SOMA OS N PRIMEIROS NÚMEROS NATURAIS

Demonstração. Vamos mostrar que:

$$1+2+3+4+\ldots+n-3+n-2+n-1+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Para $n=1$ temos que: $1=\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}$;
Se $n=2$ a igualdade também é satisfeita, pois $1+2=\dfrac{2\cdot(2+1)}{2}$

Suponhamos que a afirmação: https://pt.overleaf.com/project/5c47895c9104dd239b5499eb1+ $2+3+4+\ldots+n-3+n-2+n-1+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$, seja verdadeira um certo $n\in\mathbb{N}$.

Daí temos que:
$1+2+3+4+\ldots+n-3+n-2+n-1+n+n+1=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}+n+1$

$=\dfrac{n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)}{2}=\dfrac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$

Portanto a afirmação é verdadeira $\forall\in\mathbb{N}$

□

B.3 PROVA POR INDUÇÃO DO MÉTODO DE HERON

Demonstração. Queremos aproximações sucessivas para a raiz quadrada. Dado $a\in\mathbb{R}$ é uma sequência de números reais positivos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por:
$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(x_n+\dfrac{n}{x_n}\right)$. Afirmamos que:

$$\lim x_n=\sqrt{a} \tag{B.1}$$

Observação B.3.1. *A sequência x_n é limitada inferiormente.*

$$\forall n\geq 1, x_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\left(x_n+\frac{n}{x_n}\right)\geq\sqrt{a} \tag{B.2}$$

Este fato resulta da desigualdade das médias vide . De fato o limite da equação B.1 é verdadeiro, note que ao desenvolver a equação B.2 teremos:
$x_n^2+a\geq 2\cdot\sqrt{a}\cdot x_n$
$\Leftrightarrow x_n^2-2\cdot\sqrt{a}\cdot x_n+a\geq 0$
$\Leftrightarrow (x_n-\sqrt{a})^2\geq 0$. *Segue-se que:* $|x_n-\sqrt{a}|\geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. *Observe que* $\forall n\geq 2$ *os termos desta sequência são maiores ou iguais a* $\sqrt{a}$.

Observação B.3.2. *A sequência x_n é decrescente a partir de $n=2$.*

De fato $n\geq 2$, temos também $x_n\geq\sqrt{a}\Rightarrow\dfrac{a}{x_n}\leq\dfrac{a}{\sqrt{a}}$

$\Rightarrow x_n\geq\sqrt{a}$

Daí $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)\leq\dfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{a}+\dfrac{a}{\sqrt{a}}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{a})=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{a}\leq x_n$.

Assim para $n\geq 2$ a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente e limitada inferiormente por $\sqrt{a}\Rightarrow$ $L=\lim x_n$, *então* $L\geq\sqrt{a}$

Observação B.3.3. *Se $x_1 = \sqrt{a}$ todos os termos da sequência também serão. De fato pois:*

Vamos usar o princípio da indução matemática para mostrar este resultado.
Para $n = 1$ teremos:

$$x_{1+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_1 + \frac{a}{x_1} \right)$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}} \right) = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{a}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}$$

Para $n = 2$ teremos:

$$x_{2+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_2 + \frac{a}{x_2} \right), \text{ como } x_2 = \sqrt{a} \text{ teremos:}$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}} \right) = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{a}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}$$

Suponha que a afirmação seja verdadeira para um certo $n \in \mathbb{N}$. Então:

$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$*; Pela hipótese de indução $x_n = \sqrt{a}$. Daí*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}} \right) \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{a}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Portanto se $x_1 = \sqrt{a}$, então $x_n = \sqrt{a}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Além disso como $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \Rightarrow L = \lim x_{n+1}$.

$$L = \lim x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(L + \frac{a}{L} \right) \Leftrightarrow 2 \cdot L^2 = L^2 + a \Rightarrow L^2 = a \Rightarrow L = \sqrt{a}$$ □

Observação B.3.4. *Velocidade de convergência*

Vamos calcular o erro (ε) na próxima aproximação.

Para $n \geq 2$ teremos $x_n \geq \sqrt{a} \Rightarrow \varepsilon_1 = |x_n - \sqrt{a}| \geq 0$, segue-se que:

$$\varepsilon_2 = |x_{n+1} - \sqrt{a}| = x_{n+1} - \sqrt{a} = x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) - \sqrt{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot x_n + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{x_n} - \sqrt{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_n)^2 - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot x_n + a}{2 \cdot x_n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2 \cdot x_n} \leq \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2 \cdot \sqrt{a}}, \forall n \geq 2$$

Do fato de que $\lim x_n = \sqrt{a}$, podemos concluir que ε_1 e ε_2 tendem a zero. Note que nossa velocidade de convergência é de ordem quadrática, pois o erro ε_1 é menor do que o seguinte ε_2, e este é igual o quadrado do erro anterior multiplicado por uma constante, a saber, $\left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{a}} \right)$. Sendo assim, se algum termo da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiver um erro com *n casas de precisão o erro seguinte terá $2 \cdot n$ casas de precisão, isto mostra que a nossa sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge muito rapidamente a figura ??? ilustra bem esta situação.*

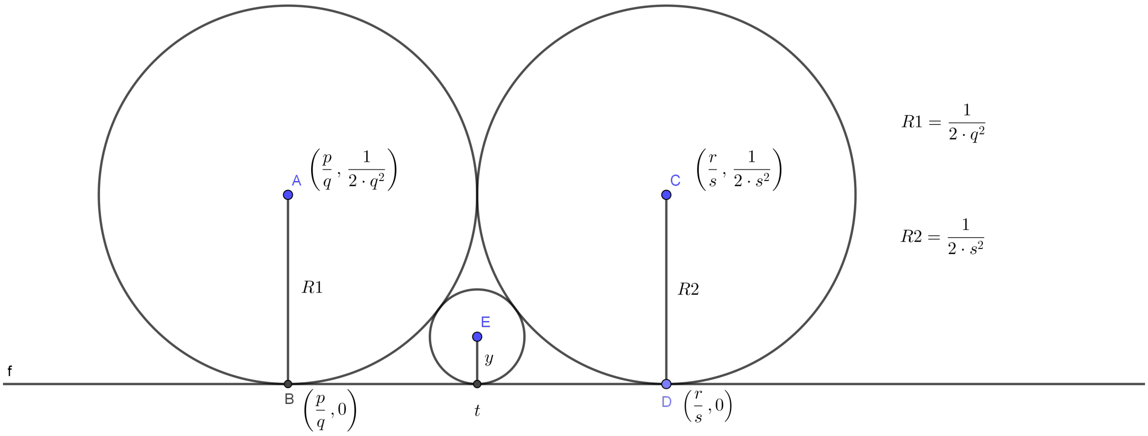
B.4 PROVA DA CONJECTURA

Assumindo como verdadeiras as informações abaixo:

1. Os raios dos círculos tangentes a reta nos pontos da forma $\frac{p}{q}$, possuem medida $\frac{1}{2\cdot q^2}$.
2. Os círculos tangentes nos ponto $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$; $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$, são tangentes entre si se, e somente se, $q \cdot r - p \cdot s = 1 \Leftrightarrow \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{1}{q\cdot s}$, obviamente p e q, são primos entre si, assim como r e s também são.
3. O conjunto dos pontos de tangência é o conjunto $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$

Demonstração. **Prova da afirmação** (1). Suponha por indução, que num certo momento temos círculos tangentes no ponto $\frac{p}{q}$ e raio $\frac{1}{2\cdot q^2}$ e no ponto $\frac{r}{s}$ com raio $\frac{1}{2\cdot s^2}$, e queremos calcular o raio y do círculo tangente aos dois e tangente a reta como mostra a figura 2.22. Além disso vamos mostrar que o ponto de tangência t é $\frac{p+r}{q+s}$, um número racional no intervalo $[0, 1]$, e que seu raio é $\frac{1}{2\cdot(q+s)^2}$.

Figura B.1: Raio y e ponto de tangência t



Utilizando a equação 2.7 teremos:

$$\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2\cdot q^2}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2\cdot s^2}}}$$
$$= q \cdot \sqrt{2} + s \cdot \sqrt{2}$$
$$= (q + s) \cdot \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{(q + s) \cdot \sqrt{2}}$$

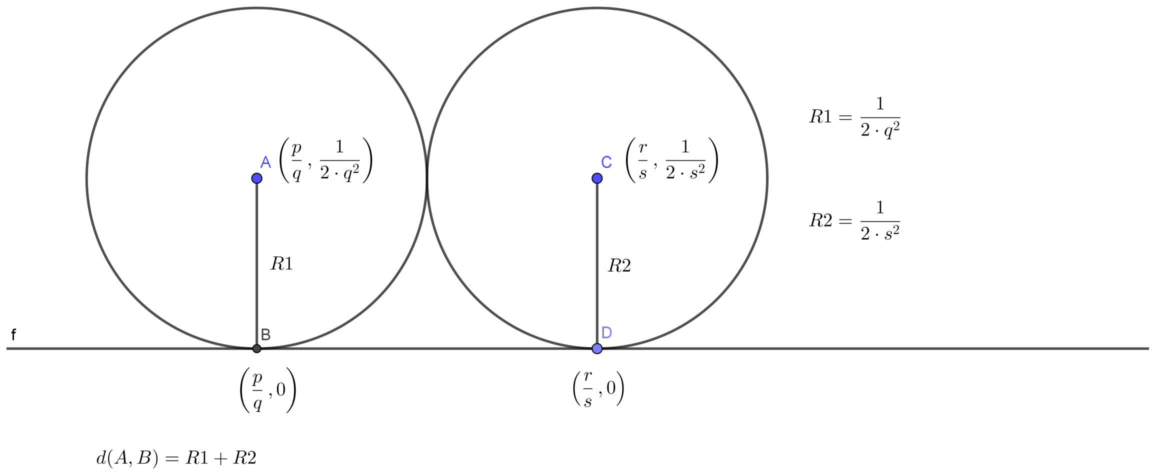
$$y = \frac{1}{2 \cdot (q+s)^2} \tag{B.3}$$

Concluímos que o raio do círculo tangente aos círculos de raio $\frac{1}{2 \cdot q^2}$ e $\frac{1}{2 \cdot s^2}$ é $y = \frac{1}{2 \cdot (q+s)^2}$.

$\square$

Demonstração. **Prova da afirmação** (2). Dados dois círculos de pontos de tangência $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$, podemos supor sem perda de generalidade que $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$, se seus raios medirem $\frac{1}{2 \cdot q^2}$ e $\frac{1}{2 \cdot s^2}$, respectivamente, então uma condição necessária para que os círculos sejam tangentes é que a distância entre os centros dos círculos seja igual a soma dos raios dos mesmos como mostra a figura 2.21.

Figura B.2: Condição de tangência entre dois círculos



Segue-se que:

$$\sqrt{\left(\frac{r}{s} - \frac{p}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot q^2} - \frac{1}{2 \cdot s^2}\right)^2} = \frac{1}{2 \cdot q^2} + \frac{1}{2 \cdot s^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\left(\frac{r}{s} - \frac{p}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot q^2} - \frac{1}{2 \cdot s^2}\right)^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2 \cdot q^2} + \frac{1}{2 \cdot s^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{r}{s} - \frac{p}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot q^2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot q^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot s^2}\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot s^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2 \cdot q^2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot q^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot s^2}\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot s^2}\right)^2$$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{q \cdot r - p \cdot s}{q \cdot s}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{q \cdot s}\right)^2$; Multiplicando ambos os membros por $(q \cdot s)^2$, obteremos:

$$\left[\left(\frac{q \cdot r - p \cdot s}{q \cdot s}\right)^2\right] \cdot (q \cdot s)^2 = \left[\left(\frac{1}{q \cdot s}\right)^2\right] \cdot (q \cdot s)^2$$

$\Leftrightarrow (q \cdot r - p \cdot s)^2 = 1$

$\Leftrightarrow q \cdot r - p \cdot s = 1$ $\square$

Agora vamos utilizar a equação 2.7 para encontrar o ponto de tangência t.

$t - \dfrac{p}{q} = 2 \cdot \sqrt{\left(\dfrac{1}{2 \cdot q^2}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2 \cdot (q+s)^2}\right)}$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{p}{q} + \dfrac{1}{q \cdot (q+s)}$

$= \dfrac{p \cdot (q+s) + 1}{q \cdot (q+s)}$

$= \dfrac{p \cdot q + p \cdot s + 1}{q \cdot (q+s)}$; como $q \cdot r - p \cdot s = 1$, teremos:

$= \dfrac{p \cdot q + p \cdot s + q \cdot r - p \cdot s}{q \cdot (q+s)}$

$= \dfrac{p \cdot q + q \cdot r}{q \cdot (q+s)}$

$$t = \frac{p+r}{q+s} \tag{B.4}$$

E como $p < q$ e $r < s$, temos que $p + r < q + s$, e portanto, o ponto de tangência t é um número racional no intervalo $[0, 1]$.

Além disso ocorre a desigualdade:

$\dfrac{p}{q} < \dfrac{p+r}{q+s} < \dfrac{r}{s}$

De fato, pois:

$$\frac{r}{s} - \frac{p+r}{q+s} = \frac{r \cdot (q+s) - s(\cdot(p+r)}{s \cdot (q+s)} = \frac{q \cdot r + r \cdot s - p \cdot s - r \cdot s}{s \cdot (q+s)};$$

Como $q \cdot r - p \cdot s = 1$, teremos:

$\dfrac{1}{s \cdot (q+s)} > 0$, portanto temos: $\dfrac{r}{s} > \dfrac{p+r}{q+s}$.

Da mesma forma teremos: $\dfrac{p+r}{q+s} > \dfrac{p}{q}$, pois:

$\dfrac{p+r}{q+s} - \dfrac{p}{q}$

$= \dfrac{q \cdot (p+r) - p \cdot (q+s)}{q \cdot (q+s)}$

$= \dfrac{p \cdot q + q \cdot r - p \cdot q - p \cdot s}{q \cdot (q+s)}$

$= \dfrac{1}{q \cdot (q+s)} > 0.$

Mostramos que, para os novos círculos criados, a diferença dos pontos de tangência de círculos vizinhos é uma fração de denominador 1. Também mostramos que o ponto de tangência do novo círculo criado é um número racional. Resta mostrar que todos os racionais no intervalo $[0,1]$ serão criados em algum momento por este procedimento, ou seja, que todos os racionais $\frac{p}{q}$, $0 < p < q$, e $mdc(p,q) = 1$, são pontos de tangência. Vamos mostrar isso usando o Segundo Princípio da Indução Matemática.

Demonstração. **Prova da afirmação** (3). Para $q = 2$, temos a fração $\dfrac{1}{2}$, que já foi criada.

Lembrando que dados dois círculos tangentes entre si, e tangentes a reta nos pontos $\frac{p_1}{q_1}$ e $\frac{p_2}{q_2}$, com p_1, p_2, q_1 e $q_2 \in \mathbb{N}^*$, satisfazendo a equação $p_2 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_2 = 1$. O novo círculo criado tangente aos dois anteriores e tangente a reta, terá ponto de tangência na reta igual a $\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2} = \frac{p}{q}$.

Desta maneira $p = p_1 + p_2 \Rightarrow p_2 = p - p_1$ e $q = q_1 + q_2 \Rightarrow q_2 = q - q_1$. Daí teremos:

$(p - p_1) \cdot q_1 - p_1 \cdot (q - q_1) = 1 \Leftrightarrow p \cdot q_1 - p_1 \cdot q_1 - p_1 \cdot q + p_1 \cdot q_1 = 1$
$\Leftrightarrow p \cdot q_1 - p_1 \cdot q = 1$.
Seja $\frac{p}{q}$, uma fração com $0 < p < q$, e $mdc(p,q) = 1$. Como $mdc(p,q) = 1$, o Teorema de Bezout garante que existem x e y, números inteiros, tais $p \cdot x - q \cdot y = 1$, como $0 < p < q$ a fração $\dfrac{p}{q} \in [0,1]$. Se $X = x_0 + k \cdot q$ e $Y = y_0 + k \cdot p$, $k \in \mathbb{Z}$, são soluções da Equação Diofantina $p \cdot X - q \cdot Y = 1$, se $\frac{p'}{q'}$, com $0 < p' < q'$ e $mdc(p', q') = 1$, se $q' < q$ são criados como solução da equação, então vamos mostrar que as frações $\frac{p}{q}$ também são criadas como solução da Equação Diofantina. A Equação Diofantina tem solução geral: $p \cdot (x + k \cdot q) + q \cdot (-y - k \cdot p) = 1, \forall\, k \in \mathbb{Z}$.

Desta forma escolhemos um $k \in \mathbb{Z}$, de forma que $q > x_0 = x + k \cdot q \geq 0$ e seu correspondente $y_0 = -y - k \cdot p$, teremos $p \cdot x_0 - q \cdot y_0 = 1$. Note que x_0 deve ser diferente de zero, caso contrário teríamos $-q \cdot y_0 = 1$, o que é um absurdo, pois 1 não é múltiplo de q, como $0 < x_0 < q$, então $q \cdot y_0 = p \cdot x_0 - 1 < p \cdot q$ e, portanto, $q \cdot y_0 \in [0, p \cdot q]$. Segue-se que $q \cdot y_0 < p \cdot q$, logo, $y_0 < p$, ou seja, $y_0 \in [0, p]$.
Nossos primeiros candidatos a racionais são os pontos de tangência $\dfrac{y_0}{x_0}$ e $\dfrac{p - y_0}{q - x_0}$. Observe que eles pertencem ao intervalo $[0,1]$.
De fato:

De $p \cdot x_0 - q \cdot y_0 = 1$, temos $y_0 = \dfrac{p \cdot x_0 - 1}{q} < \dfrac{p \cdot x_0}{q} < x_0$, pois $p < q$.
Agora como $x_0 < q$, multiplicando ambos os membros por $q - p > 0$ teremos:

$$x_0 \cdot (q-p) < q \cdot (q-p)$$
$$\Leftrightarrow x_0 \cdot (q-p) + 1 \leq q \cdot (q-p)$$

$$\Leftrightarrow q \cdot x_0 - p \cdot x_0 + 1 \leq q^2 - p \cdot q$$

$$\Leftrightarrow p \cdot q - p \cdot x_0 + 1 \leq q^2 - q \cdot x_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{p \cdot q - p \cdot x_0 + 1}{q} \leq q - x_0$$

$$\Leftrightarrow p + \frac{p \cdot x_0 - 1}{q} \leq q - x_0$$

$$\Leftrightarrow p - y_0 \leq q - x_0.$$

Portanto os pontos de tangência pertecem ao intervalo $[0,1]$. Por hipótese de indução, todas as frações no intervalo $[0,1]$ com denominador menor do que q, foram criados como pontos de tangência, e portanto, $\frac{y_0}{x_0}$ e $\frac{p-y_0}{q-x_0}$, foram criados como pontos de tangência.

Agora vamos mostrar que os círculos tangentes à reta nos pontos $\frac{y_0}{x_0}$ e $\frac{p-y_0}{q-x_0}$ são tangentes entre si. Basta para isto calcular a diferença entre os pontos de tangência.

$$\frac{p-y_0}{q-x_0} - \frac{y_0}{x_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(p-y_0) \cdot x_0 - y_0 \cdot (q-x_0)}{x_0 \cdot (q-x_0)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p \cdot x_0 - x_0 \cdot y_0 + x_0 \cdot y_0 - q \cdot y_0}{x_0 \cdot (q-x_0)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p \cdot x_0 - q \cdot y_0}{x_0 \cdot (q-x_0)}; \text{ E como } p \cdot x_0 - q \cdot y_0 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_0 \cdot (q-x_0)}$$

Isto mostra que os círculos tangentes a reta nestes pontos são tangentes entre si, pois a diferença entre os pontos de tangência resultou numa fração de denominador 1.

Finalmente, de acordo com a equação, o círculo entre os dois anteriores é tangente a eles e seu ponto de tangência na reta é:

$$\frac{y_0 + p - y_0}{x_0 + q - x_0} = \frac{p}{q}$$

Isto mostra que todos os racionais são criados em algum momento.

□

B.5 LISTAS DE COMANDOS E PRIMITIVAS

B.5.1 OPERADORES E SINTAXE

Há dois modos de escrever alguns comandos. Por exemplo, para somar 4 e 7, há duas maneiras: utilizando a primitiva soma, que exige dois argumentos, a saber, *soma 4 7*, ou você pode utilizar o operador "+". Exemplo: 4+7 (pressione *"ENTER"*). Ambos têm o mesmo efeito. A figura B.3 a seguir mostra a equivalência entre alguns operadores e primitivas:

<table>
<tr><th>Soma
+</th><th>Diferença
-</th><th>Produto
*</th><th>Quociente
/</th><th>Ou
|</th><th>E
&</th><th>São iguais?
=</th></tr>
<tr><td>soma
4 7
4 + 7</td><td>diferença
4 7
4 + 7</td><td>produto
4 7
4 + 7</td><td>quociente
4 7
4 / 7</td><td>3 = 4 ou
(7 <= 49/7)
3=4 |
(7 <= 49/7)</td><td>3 = 4 ou
(7= 49/7)
3=4 &
(7 = 49/7)</td><td>3 + 4 =
7 - 1</td></tr>
</table>

Figura B.3: Operadores e Sintaxe

As cores são definidas no software com a ajuda de três dígitos entre 0 e 255. Este é o sistema de código RGB (red,green, blue). Cada dígito corresponde respectivamente a uma intensidade de vermelho (red), de verde (green) e de azul (blue) para a cor considerada. Uma vez que este sistema não é intuitivo, o *X-LOGO* proporciona 17 cores predefinidas acessíveis por um número ou um nome.

Os comandos abaixo produzem o mesmo efeito.

mudecf verde

mudecf 2

mudecf [0 255 0]

Número	Primitiva	[R G B]	Cor	Número	Primitiva	[R G B]	Cor
0	preto	[0 0 0]		9	cinzaclaro	[192 192 192]	
1	vermelho	[255 0 0]		10	vermelhoescuro	[128 0 0]	
2	verde	[0 255 0]		11	verdeescuro	[0 128 0]	
3	amarelo	[255 255 0]		12	azulescuro	[0 0 128]	
4	azul	[0 0 255]		13	laranja	[255 200 0]	
5	magenta	[255 0 255]		14	rosa	[255 175 175]	
6	ciano	[0 255 255]		15	violeta	[128 0 255]	
7	branco	[255 255 255]		16	marrom	[153 102 0]	
8	cinza	[128 128 128]					

Figura B.4: Sistema RGB de cores

B.5.2 PRIMITIVAS

Na figura B.4 encontraremos as primitivas responsáveis pelo movimento da tartaruga.

Primitivas	Argumento	Uso
paradireita, pd	n: ângulo	Gira a tat **n** graus para a direita em relação à direção que ela está apontando.
paraesquerda, pe	n: ângulo	Gira a tat **n** graus para a esquerda em relação à direção que ela está apontando.
parafrente, pf	n: número de passos	Move a tat para frente **n** passos na direção que ela está apontando.
paratrás, pt	n: número de passos	Move a tat para trás **n** passos na direção que ela está apontando.

Figura B.5: Primitivas de movimento - Parte 1

arco	a b c	arco **a b c** desenha um arco de círculo de **a** passos ao redor da tat entre os ângulos **b** e **c** dela (a tat é o centro do círculo). Exemplo: arc 200 20 80.
carregueimagem, carimg	a: lista	Carrega uma imagem na tela do XLogo. A posição da tat será o canto superior esquerdo da imagem. São aceitas apenas imagens **.png** e **.jpg**. O caminho não pode conter espaços e ser absoluto (não relativo), ou seja, tem que ser completo desde o topo da árvore. Por exemplo: carimg [C:\\diretório_das_minhas_imagens\turtle.jpg].
centro	nenhum	Coloca a tat na posição inicial, isto é, na origem (coordenadas [0 0]) e com direção **0** grau (aponta para cima na tela).
círculo, circ	R: raio	Desenha um círculo de raio **R** (a tat é o centro do círculo).
mudedireção, mudedç	n: orientação	Orienta a tartaruga para a direção especificada. **0** (zero) corresponde à tat apontada para cima na tela. A orientação da tartaruga corresponde aos valores lidos em um transferidor.
mudepos	[x y]: lista com 2 números	Move a tat para as coordenadas especificadas pelos dois números na lista (**x** especifica o eixo **x**, e **y** o eixo **y**).
mudex	x: eixo x	Move a tat horizontalmente para o ponto **x** no eixo **x**.
mudexy	x y: abscissa x seguida pela ordenada y	Idêntica à **mudepos [x y]** (a diferença é que os valores não estão em uma lista, ou seja, não estão entre colchetes).
mudey	y: eixo y	Move a tat verticalmente para o ponto **y** no eixo **y**.
ponto	a: lista	Coloca um ponto nas coordenadas indicadas.
rotule	a: palavra ou lista	Desenha uma palavra ou lista a partir da posição da tat na mesma orientação (mudedireção). Por exemplo: **rotule [Que beleza!]** escreverá a sentença "Que beleza!" onde quer que a tat esteja.
tamanhorotule, tr	a: palavra ou lista	Retorna o comprimento (em passos de tartaruga) necessário para escrever a palavra ou a lista desejada na área de desenho utilizando a fonte selecionada.

Figura B.6: Primitivas de movimento - Parte 2

Primitivas	Argumentos	Uso
animado	verd ou falso	Passa ao modo animado. A tat não desenha mais na área gráfica, apenas na memória. Para transferir o desenho para a tela, utilize a primitiva veranimado. Muito útil para criar animações ou efetuar um desenho mais rapidamente.
cercar	nenhum	A tat é confinada à área de desenho. Aparecerá uma mensagem de erro se a tat for movida para além do campo de desenho e informará o número máximo de passos que a tat ainda pode dar até o limite de sua área.
comlimite	nenhum	A tat não pode ultrapassar o campo de visão na tela; ela reaparece no lado oposto.
cordofundo, cf	a: lista	Informa a cor de fundo (da tela). A cor é indicada por uma lista [R G B] em que **R** é "vermelho", **G** é "verde" e **B** é "azul".
cordolápis, cl	a: lista	Informa a cor do lápis em uso. A cor é indicada por uma lista [R G B] em que **R** é "vermelho", **G** é "verde" e **B** é "azul".
cordoponto, cdp	a: lista	Informa a cor do pixel no ponto **a**. A cor é indicada por uma lista [R G B] em que **R** é "vermelho", **G** é "verde" e **B** é "azul".
direção, dç	nenhum	Informa a direção da tat (confira mudedireção).
direçãopara, dçpara	a: lista	A lista deve conter dois números (coordenadas). Informa o valor a ser utilizado por mudedireção para que a tat aponte para as coordenadas indicadas nessa lista.
distância, dist	a: lista	A lista deve conter dois números representando as coordenadas. Informa o número de passos entre a posição atual e a indicada pelas coordenadas na lista.
eixo	n: inteiro	Traça dois eixos com espaçamento **n** (passos de tartaruga). Contrário de semeixo.
eixox	n: inteiro	Traça eixo horizontal com espaçamento **n** (passos de tartaruga). Exemplo: eixox 30.
eixoy	n: inteiro	Traça eixo vertical com espaçamento **n** (passos de tartaruga).
eixo?	nenhum	
eixox?	nenhum	Informa verd (o eixo está em exibição) ou falso.

Figura B.7: Primitivas de movimento - Parte 3

escondetat, dt	nenhum	Torna a tat invisível na tela.
fonte	nenhum	Devolve o tamanho da fonte a usar pela primitiva rotule.
grade	a b	Exibe uma grade na área de desenho com quadrículas de largura **a** e altura **b**. Para removê-la, utilize semgrade. Exemplo: grade 10 10.
grade?	nenhum	Devolve verd (a grade está em exibição) ou falso (a grade não está em exibição).
invertelápis, il	nenhum	A tat utiliza lápis no modo inverso, isto é, risca onde não tiver nada e apaga se já tiver.
lápispinta, lp	nenhum	A tat utiliza lápis para riscar com sua cor clássica (preta).
limpedesenho, ld	nenhum	Limpa todos os desenhos na tela e restaura a tat (coloca-a no centro).
lt, limpetexto	nenhum	Limpa (apaga) tudo que estiver escrito na linha de comando e no histórico.
mensagem, msg	a: lista	Exibe uma caixa de diálogo com a mensagem escrita na lista. O programa é interrompido até que o usuário clique no botão **OK**.
mostretat, at	nenhum	Torna a tat visível na tela.
mudecordoeixo		Muda a cor do eixo segundo a convenção de cores abaixo (mudecordofundo): mudecordoeixo [125 64 23] eixo 30.
mudecordofundo, mudecf	a: número inteiro ou lista [verm verde azul]	0: preto; 1: vermelho; 2: verde; 3: amarelo; 4: azul; 5: magenta; 6: ciano; 7: branco. Para valores acima de 7, a escala de cores se repete.
mudecordagrade, mudecdg		Muda a cor da grade (veja acima, em mudecordofundo, para a convenção de cores). Exemplo: grade 30 30 mudecordagrade [125 64 23].
mudecordolápis, mudecl		Muda a cor do lápis (mesma convenção de mudecordofundo).
mudeespessuradolápis, mudeel	n: número	Define a espessura do lápis em *pixels*. O valor padrão é 1. A ponta do lápis é um quadrado (pode ser alterado para circular no menu **Ferramentas**, **Preferências**).
mudefonte, mudef	n: número	Ao utilizar a primitiva **rotule** para escrever na área de desenho, é possível modificar o tamanho da fonte com mudefonte. O tamanho padrão da fonte é 12.

Figura B.8: Primitivas de movimento - Parte 4

mudenomefonte, mudenf	n: número	Escolha um número de fonte a usar pela primitiva rotule. A equivalência entre número e tipo de fonte está no menu **Ferramentas / Preferências / Guia Fonte**.
mudepontadolápis, mudepl	0 ou 1	Altera a ponta do lápis. 0 (quadrada) e 1 (redonda).
mudequalidadedaimagem, mudeqi	0 ou 1 ou 2	Altera a qualidade do desenho. 0 (normal), 1 (alta) e 2 (baixa).
muderoupa	n: número	Escolha sua tat preferida na segunda guia do menu **Ferramentas / Preferências**.... ou ainda, utilize a primitiva muderoupa com números entre 0 e 6 (0 é um triângulo).
mudeseparação	a: número	Determina a proporção entre a janela de desenho e a janela de histórico de comandos. O número **a** é um valor entre 0 e 1. Se valer 1, a janela de desenho ocupará toda a área. Se valer 0, a janela de histórico é que ocupará toda a área.
mudetamanhodajanela, mudetamjan	lista	Altera as dimensões da área de desenho. Exemplo: mudetamanhodajanela [650 850].
nomefonte	nenhum	Devolve uma lista com dois elementos. O primeiro é o número que corresponde à fonte em uso; o último é uma lista contendo nome da fonte.
pareanimado	nenhum	Interrompe o modo animado (veja esta primitiva) e volta ao modo clássico. A tat volta a desenhar na área gráfica, apenas na memória. A animação também pode ser interrompida clicando na figura de câmera que aparece à esquerda da janela de comandos já escritos.
pontadolápis, pl	nenhum	Exibe a forma da ponta do lápis. 0 (quadrada) e 1 (redonda).
pos	nenhum	Informa a posição da tat. Por exemplo: pos devolve [10 -100].
qualidadedaimagem, qi	nenhum	Devolve a qualidade do desenho. 0 (normal), 1 (alta) e 2 (baixa).
roupa	nenhum	Informa o número que representa a roupa da tat.
semeixo	nenhum	Elimina o(s) eixo(s) da área de desenho criado(s) por **eixo**, **eixox** ou **eixoy**. Exemplo: eixo 30.
semgrade	nenhum	Elimina a grade da área de desenho. Experimente grade 10 10.
semlimite	nenhum	A tat pode ultrapassar o campo de visão da tela.

Figura B.9: Primitivas de movimento - Parte 5

separação	a: número	Devolve a proporção entre as janelas de desenho e de histórico de comandos.
tamanhodajanela, tamjan	nenhum	Devolve uma lista informando as dimensões da área de desenho.
tamanhojanela, tj	nenhum	Devolve uma lista formada pelas coordenadas do canto superior esquerdo da área de desenho e do canto direito inferior.
useborracha, ub	nenhum	A tat apagará o que ela encontrar ao passar por cima.
uselápis, ul	nenhum	A tat riscará a tela ao se mover.
usenada, un	nenhum	A tat não riscará a tela ao se mover.
veranimado	nenhum	No modo animado, a imagem será atualizada na área gráfica.
zoom	a	Amplia (ou reduz) a área de desenho de acordo com o fator **a** escolhido. Exemplo: zoom 2.5

Figura B.10: Primitivas de movimento - Parte 6

PRIMITIVAS DE TEXTO

Agora trataremos de alguns comandos que escrevem na área de texto com as primitivas *mostre* ou *escreva*. Na Figura B.11 a seguir listamos essas primitivas que permitem ajustar as propriedades do texto. Tais primitivas controlam a cor e o tamanho na área de histórico. Outro detalhe importante é que elas estão disponíveis somente para as primitivas *mostre* ou *escreva*.

cdt, cordotexto	nenhum	Devolve a cor da fonte no histórico de comandos.
escreva, esc	palavra, lista ou número	Idêntica à primitiva mostre, porém sem retorno de linha. Exemplo: esc "almo escreva "fada. Compare com mo "almo mo "fada.
estilo	nenhum	Devolve uma lista composta pelos diferentes estilos em uso pela primitiva mostre.
ftexto, fontetexto	nenhum	Devolve o tamanho da fonte.
lt, limpetexto	nenhum	Limpa o histórico de comandos.
mostre, mo	palavra, lista ou número	Idêntica à primitiva escrita, porém com retorno de linha. Exemplo: esc "almo escreva "fada. Compare com mo "almo mo "fada.
mudect, mudecordo-	a: número ou lista	Define a cor da fonte no histórico de

Figura B.11: Primitivas de texto - Parte 1

mudeestilo	lista ou palavra	Muda o estilo em uso pela primitiva mostre. Os diferentes estilos possíveis são: nenhum, negrito, itálico, riscado, subescrito, sobrescrito ou sublinhado.
mudeft, mudefontetexto	a: número	Define o tamanho da fonte no histórico de comandos.
mudenft, mudenomefontetexto	n: número	Seleciona o número da fonte **n** ao escrever no histórico de comandos. A equivalência de número e fonte encontra-se no menu Ferramentas / Preferências / Guia Fonte.
nft, nomefontetexto	nenhum	Devolve uma lista com dois elementos. O primeiro é o número que corresponde à fonte utilizada no histórico de comandos. O último elemento é uma lista contendo o nome da fonte.

Figura B.12: Primitivas de texto - Parte 2

Primitivas	**Argumentos**	**Uso**	**Exemplos**
ou	predicado1 predicado2	Retorna verd se uma das entradas for verdadeira. Caso contrário, retorna falso. Todas as entradas (predicados) precisam retornar verd ou falso.	mo ou 2 > 3 2 < 3
e	predicado1 predicado2	Retorna verd se os parâmetros de entrada forem verdadeiros. Caso contrário, retorna a palavra falso. Todas as entradas (predicados) precisam retornar verd ou falso.	mostre (e [a]=[a] [a]=[b])

Figura B.13: Operadores lógicos - Parte 1

não	predicado	Retorna verd se os parâmetros de entrada forem falsos. Caso contrário, retorna a palavra **verd**. A entrada (predicado) precisa retornar **verd** ou **falso**.	mostre não 2 > 3

Figura B.14: Operadores lógicos - Parte 2

Primitivas	Modelo	Uso	Exemplos
absoluto abs	absoluto a	Devolver o valor absoluto de **a**.	abs -23
arredonde	arredonde a	Devolve o inteiro de **a**.	arredonde 23.4
diferença	diferença a b	Devolve a diferença dos números **a** e **b**.	diferença 23 43
exp	exp a	Devolve o valor do número natural (2.7182...) elevado ao expoente **a**.	exp 2
ln	ln a	Devolve o logaritmo natural de **a**.	ln 100
log10	log10 a	Devolve o logaritmo de **a** na base 10.	log10 100
menos	menos a	Troca o sinal de **a**.	menos 23
pi	nenhum	Devolve o valor 3.141592653589793.	mo pi
potência	potência a b	Devolve a elevado à potência **b**.	potência 2 3
produto	produto a b	Devolve o produto dos números **a** e **b**.	produto 23 43
quociente	quociente a b	Devolve o quociente dos números **a** e **b**.	quociente 23 43
raizq	raizq a	Devolve a raiz quadrada de **a**.	raizq 9
resto	resto a b	Devolve o resto de **a** e **b**.	resto 2 3
soma	soma a b	Devolve a soma dos números **a** e **b**.	soma 23 43
sorteie	sorteie n	Sorteia um inteiro positivo menor que **n**.	sorteie 23
acos, arc-cosseno	acos a	Devolve o ângulo cujo cosseno é **a**.	acos 0.8
asen, arc-seno	asen a	Devolve o ângulo (em graus) cujo seno é **a**.	asen 0.5
atan, arc-tangente	atan a	Devolve o ângulo cuja tangente é **a**.	atan 0.8
cos, cosseno	cos a	Devolve o cosseno de **a**.	cos 45
sen, seno	sen a	Devolve o seno de **a** (**a** em graus).	sen 45
tan, tangente	tan a	Devolve a tangente de **a**.	tan 45

Figura B.15: Operadores lógicos - Parte 3