UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
PROFMAT

Otimização em Grafos no Ensino Básico

Rafael Dalvi Carneiro

Vitória – ES
2018

Rafael Dalvi Carneiro

Otimização em Grafos no Ensino Básico

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho

Vitória – ES
2018

Rafael Dalvi Carneiro

Otimização em Grafos no Ensino Básico

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Vitória, de de 2018

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Moacir Rosado Filho

____
Prof.

____
Prof.

Vitória – ES
2018

Em memória a meu avô Walter Dalvi, que tanto me inspirou em vida.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus que tornou possível a existência desse momento. À minha noiva, Carol, que tanto me incentivou a seguir o caminho da docência. Aos meus pais, por terem me dado todo o suporte necessário para fazer o curso. Aos meus familiares, que me ajudaram a tranquilizar nos momentos que eu mais precisava. Aos meus amigos do Profmat que em nossas reuniões sempre foram tão solícitos, seja no empréstimo de material, no compartilhamento de lanches ou no estudo. Ao professor Florêncio que tanto se dedicou ao Profmat e, em particular, à minha turma, com suas aulas extras aos sábados e sua dedicação ao curso. Ao professor Moacir, que me orientou e me ajudou demais nesse trabalho. Aos demais professores do curso. Aos meus sobrinhos que trouxeram momentos de felicidade e esperança mesmo quando tudo parecia mais pesado que eu pudesse carregar. E por último à minha avó Maria que sempre está disponível para nos alegrar.

“Há verdadeiramente duas coisas diferentes: saber e crer que se sabe. A ciência consiste em saber; em crer que se sabe reside a ignorância.”
Hipócrates

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar parte do conteúdo de Grafos de uma maneira mais acessível a alunos e professores do ensino básico. Teoria dos Grafos é um assunto que não é apresentado de formalmente no ensino básico no Brasil, mas que traz uma grande facilidade em resolver alguns problemas relacionados à Matemática Discreta. Além disso, a Teoria dos Grafos é uma das principais bases para programação de computadores. O trabalho inicia apresentando uma noção geral sobre grafos e alguns conceitos correlacionados. Após apresentar o Teorema de Euler, o trabalho discute sobre árvores e a contagem de árvores. Posteriormente, o trabalho traz uma discussão sobre otimização em árvores.

Palavras-chave: Grafos, Teorema de Euler, árvores, contagem de árvores, Otimização em grafos, Árvore ótima.

ABSTRACT

This work aims to present the number of graphs students in a more accessible and lower level of basic education. Theory of Graphs is a subject that is not presented formally in basic education in Brazil, but has a great facility in solving some problems related to Discrete Mathematics. In addition, Graph Theory is one of the main bases for computer programming. The work had an overview about graphs and some correlated concepts. Introduce Euler's Theorem, the paper discusses the trees and a count of trees. Subsequently, the work brings a discussion about tree optimization.

Keywords: *Graphs, Euler's theorem, trees, tree counting, graph optimization, optimal tree.*

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Vivemos ao longo dos últimos anos uma grande transformação mundial no que tange à maneira de trabalhar, de descansar, de interagir, ou seja, de viver. Hoje é possível entrar em contato imediato com pessoas de praticamente qualquer lugar do mundo. Também temos acesso a informações mais precisas e em tempo real. Na contramão de todo esse desenvolvimento tecnológico e, consequentemente, empregatício e social, podemos observar a atuação da escola. Hoje, a escola se mantém com metodologias atrasadas e ineficientes e um currículo inadequado. Dentro do ensino de matemática essa realidade não é diferente. Os alunos saem – na melhor das hipóteses – sabendo lidar com números complexos e funções trigonométricas, mas sequer conhecem a existência da Teoria de Grafos, por exemplo.

Grafos é um conceito na matemática extremamente práticos e ajudam a resolver problemas, por exemplo, de construção de placas de circuitos eletrônicos e encontrar caminhos otimizados.

Ainda que não, eventualmente, possa não se ter um estudo mais aprofundado sobre essa ciência, é comum lidarmos com informações exibidas sob a forma de grafos. Podemos observar isso, por exemplo, na exibição de moléculas quando estudamos Química, na exibição de circuitos elétricos na Física e até mesmo na apresentação de redes sociais e de acusações jurídicas, como mostraremos na Figura 1, na Figura 2, na Figura 3 e na Figura 4, respectivamente.

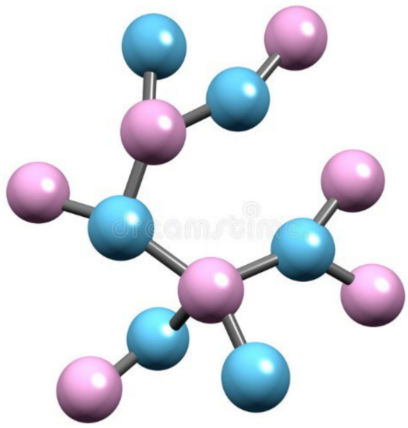


Figura 1**:** Molécula representada como Grafo, *disponível em* https://thumbs.dreamstime.com/b/forma%C3%A7%C3%A3o-da-mol%C3%A9cula-5217666.jpg, *acesso em 11/05/2018.*

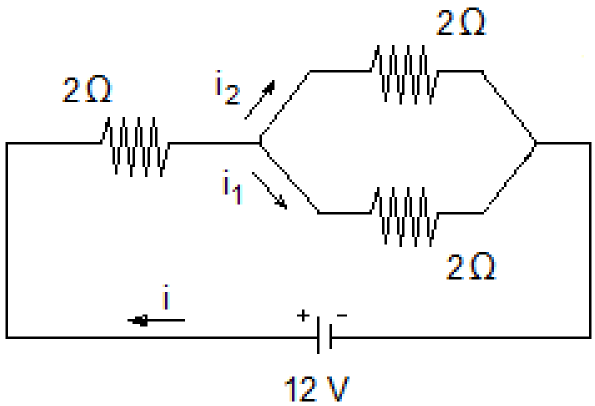


Figura 2**:** Circuito elétrico com representação inspirada em grafos, *disponível em* https://3.bp.blogspot.com/_yhcFVb0usrM/TJJSOe3V8oI/AAAAAAAABxE/hcaOI2S1QNY/s320/resistores.png, *acesso em 11/05/2018.*

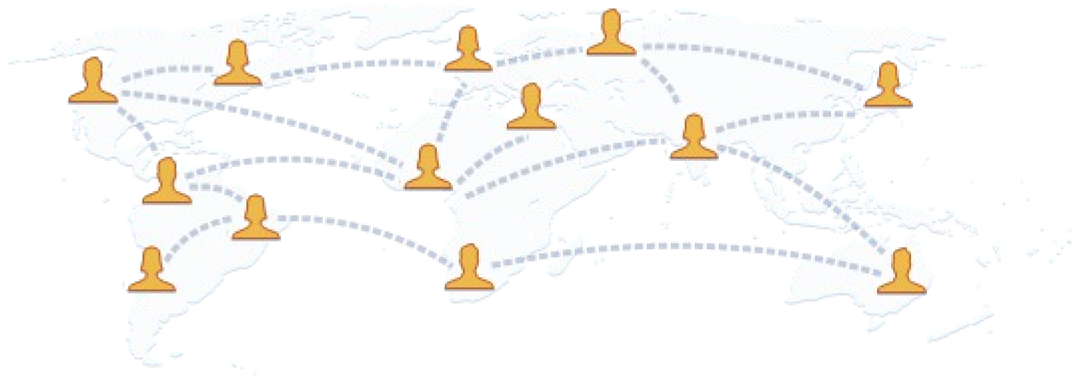


Figura 3**:** Propaganda da rede social Facebook representando conexões entre pessoas como grafo, *disponível em* https://static.xx.fbcdn.net/rsrc.php/v3/yc/r/GwFs3_KxNjS.png, *acesso em 11/05/2018.*

Figura 4**:** Quadro de investigação criminal no seriado *Pretty Little Liars*, *disponível em http://prettylittleliars.com.br/home/wp-content/uploads/2013/06/VAAAI.png, acesso em 16/06/2018.*

Embora não tenhamos a Teoria de Grafos sendo desenvolvida no ensino básico – o máximo que se vê é a aplicação direta da Fórmula de Euler em poliedros – e mesmo no ensino superior pouco se vendo sobre ela, esse conteúdo pode se mostrar extremamente aplicável e prazeroso para alunos principalmente de ensino médio. Trazemos então nesse trabalho alguns conceitos da Teoria de Grafos de maneira mais acessível a esse público a fim de estimular esse estudo no ensino básico.

Teoria dos Grafos não é um assunto inédito nas dissertações do PROFMAT.

Castro (2013) traz uma proposta de sequência didática para o ensino médio. Mauri (2013) aborda o conteúdo de Grafos de forma mais técnica, mas foca em resolução de problemas envolvendo grafos. Essa dissertação, porém, visa apresentar o conteúdo de Grafos de maneira mais acessível tanto a professores de ensino básico – principalmente ensino médio – quanto para turmas avançadas de alunos primordialmente que visem preparação para olimpíadas matemáticas ou outras provas, abordando até o conteúdo de otimização. Para tal trabalho inicia trazendo uma noção mais generalizada sobre Grafos. Após apresentar o Teorema de Euler, o trabalho discute sobre árvores e a contagem de árvores. Posteriormente, o trabalho traz uma discussão sobre otimização em árvores. Ao final de cada capítulo é proposto uma bateria de exercícios acerca do conteúdo abordado.

2. FUNDAMENTOS INICIAIS SOBRE GRAFOS

2.1 Fundamentação intuitiva sobre grafos

2.1.1 Problema 1

Imagine um tabuleiro de xadrez , sendo que nos dois vértices das extremidades superiores estão cavalos brancos e nos vértices das extremidades inferiores estão cavalos pretos, como na Figura 5.

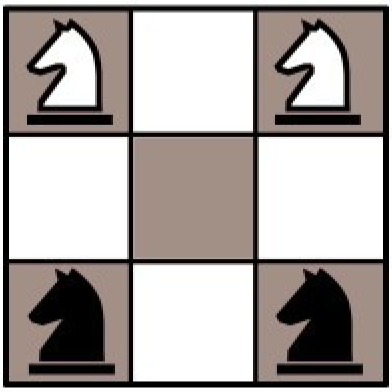


Figura 5: Problema dos 4 cavalos A. D*isponível em http://www.cienciahoje.org.br/uploads/ckeditor-ckfinder-integration/uploads/images/2016/03/1355042568image_mini.jpg. Acesso em 11/05/2018.*

Seria possível, movimentando os cavalos de acordo com as regras usuais do xadrez, o tabuleiro ficar na composição da Figura 6?

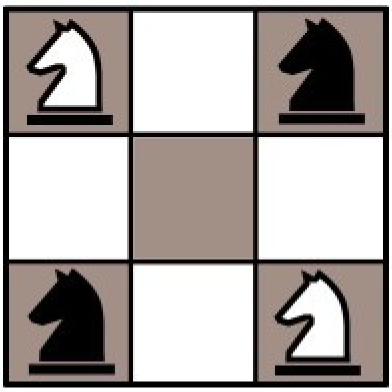


Figura 6: Problema dos 4 cavalos B (adaptada). D*isponível em http://www.cienciahoje.org.br/uploads/ckeditor-ckfinder-*

integration/uploads/images/2016/03/1355042568image_mini.jpg. Acesso em 11/05/2018.

Resolução:

Para solucionar esse exercício vamos, inicialmente, primeiro enumerar todas as casas do tabuleiro, como na Figura 7.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figura 7: Tabuleiro Numerado.

Devido aos possíveis tipos de movimento do cavalo no xadrez, se um cavalo estiver na casa ele só poderá se mover para as casas ou ; se estiver na casa só poderá se mover para as casas ou , e assim sucessivamente. Essa representação formará um caminho da forma da Figura 8.

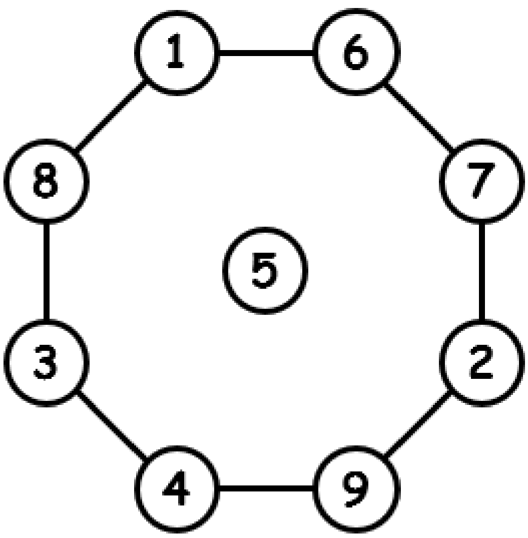


Figura 8: Representação dos possíveis caminhos do cavalo.

Podemos observar, então, que na configuração inicial os cavalos brancos se encontram nas casas 1 e 3, ao passo que os cavalos pretos se encontram nas casas 7 e 9. Para chegarmos ao objetivo proposto os cavalos brancos deveriam ocupar as casas 1 e 7, enquanto os cavalos pretos deveriam ocupar as casas 3 e 9. Para tal, os cavalos precisariam mudar de ordem em relação a cor, o que é impossível, dadas as restrições da Figura 8.

Para resolver o Problema 1 foi utilizado, ainda que de forma indutiva, o conceito de Grafos. Os pontos, ou casas enumeradas nesse caso particular, são chamados *nós* ou *vértices* enquanto cada ligação entre os nós, no caso os caminhos possíveis para os cavalos, são chamados de *arestas*.

2.2 Conectividade

2.2.1. Problema 2

Figurativo é um país com nove cidades de nomes Um, Dois, Três, Quatro, Cinco, Seis, Sete, Oito e Nove. Um determinado viajante percebe que só existe voos diretos entre duas cidades se, e somente se, a soma dos números referentes aos nomes dessas duas cidades resultarem em um número múltiplo de 3. Seria possível viajar nessa cidade exclusivamente de avião saindo da cidade Um e chegando à cidade Nove?

<u>Resolução:</u>

Antes de resolver um exercício utilizando Grafos precisamos identificar os elementos que representarão os vértices e aqueles que representarão as arestas. Nesse caso vamos admitir que os vértices representam as cidades e as arestas representam as rotas possíveis dos aviões.

Dessa forma, o Grafo deste problema fica da forma ilustrada na Figura 9.

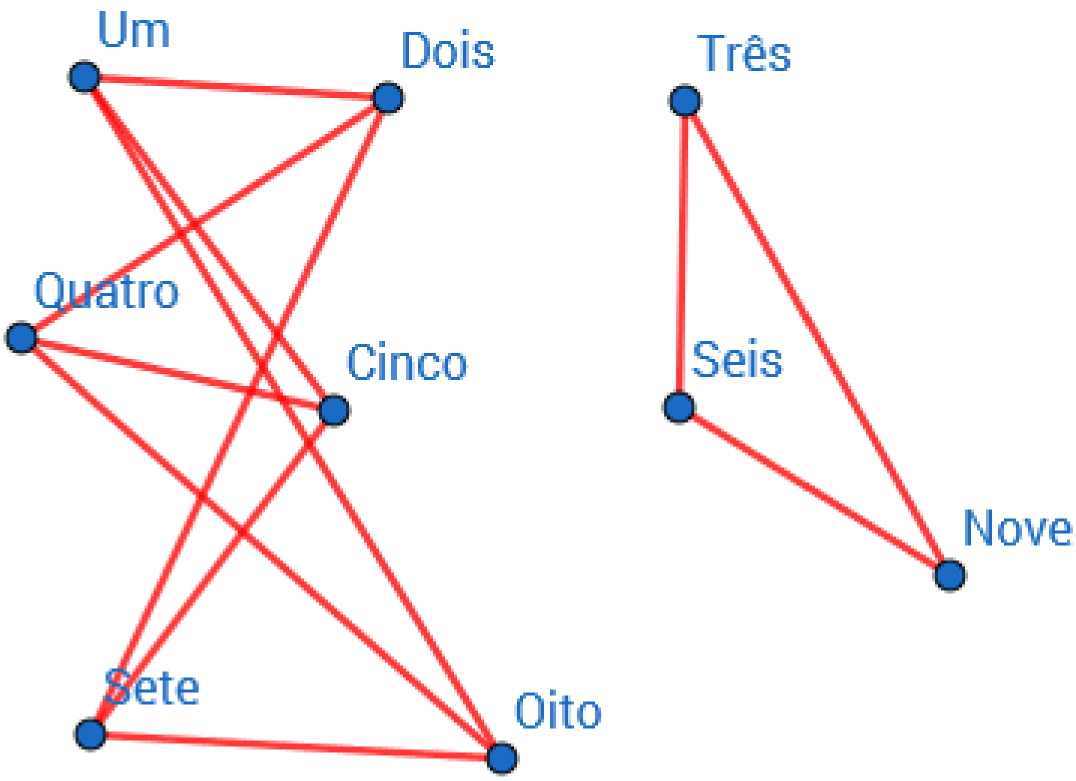


Figura 9: Representação do Problema 2.

Podemos notar que não há qualquer conexão entre a cidade Um e a cidade Nove. Portanto, não existe maneira de sair da cidade Um e ir para a cidade Nove de avião.

Sempre que temos em um grafo a incapacidade de sair de algum vértice e chegar em algum outro vértice por meio de suas arestas (como no caso em questão onde não existe um caminho que saia do vértice Um e chegue ao vértice Nove) chamamos esse grafo de *desconexo*. Entretanto, se podemos conectar cada um de seus vértices a qualquer outro passando por quantas arestas e vértices forem necessários chamamos o grafo de grafo *conexo*.

2.3 Isomorfismo

Embora tenhamos resolvido o Problema 2 analisando o grafo representado na figura 9, tal resolução não é única, pois podemos representar a mesma situação por meio da análise do grafo da figura 10.

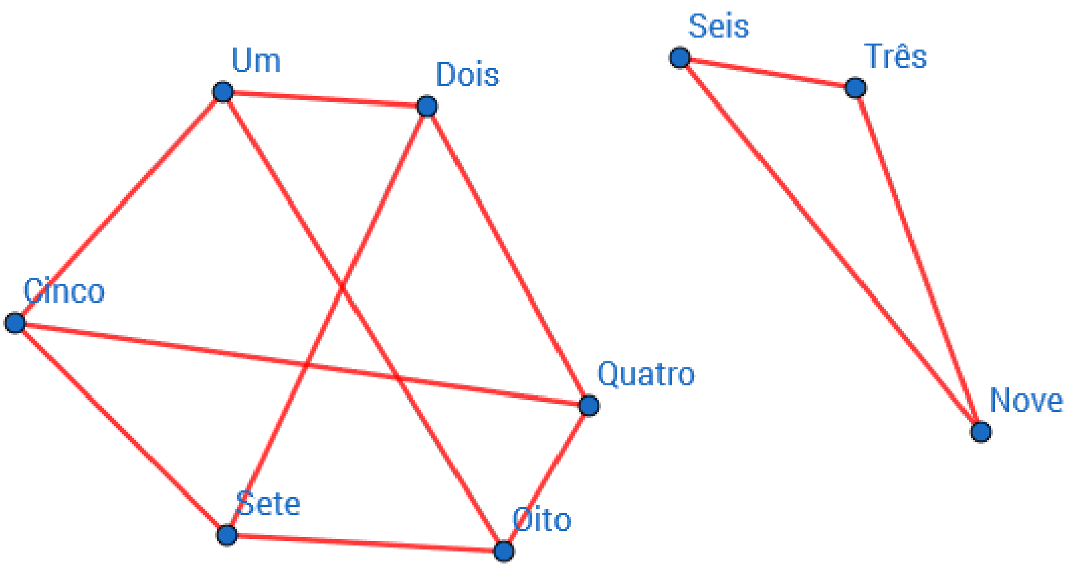


Figura 10: Outra possível representação do Problema 2.

Note que ambos os Grafos têm a mesma disposição e trazem em si as mesmas informações, apesar de serem desenhados de maneira diferente. Quando isso acontece chamamos os Grafos de *isomorfos*.

<u>Grau de vértice</u>

Outro detalhe que podemos observar é que, quando olhamos para a figura 4 o vértice 5 não tem nenhuma aresta conectada a ele, entretanto os demais vértices têm todos duas arestas conectadas a ele. Já quando olhamos para a figura 5 temos que os vértices Três, Seis e Nove possuem duas arestas conectadas a si cada um, ao passo que os demais vértices possuem três arestas cada um conectada a si. O número de arestas a que cada vértice está conectado é chamado de *grau* desse vértice. Dessa forma podemos dizer que os vértices Um, Dois, Quatro, Cinco, Sete e Oito da figura 6 possuem todos eles Grau 3. O vértice 5 da figura 4 possui grau 0 e os demais vértices da figura 4 e da figura 5 possuem, todos, grau 2.

2.3.1 Problema 3

Dado o grafo da Figura 11, representado abaixo, determine o grau de cada vértice.

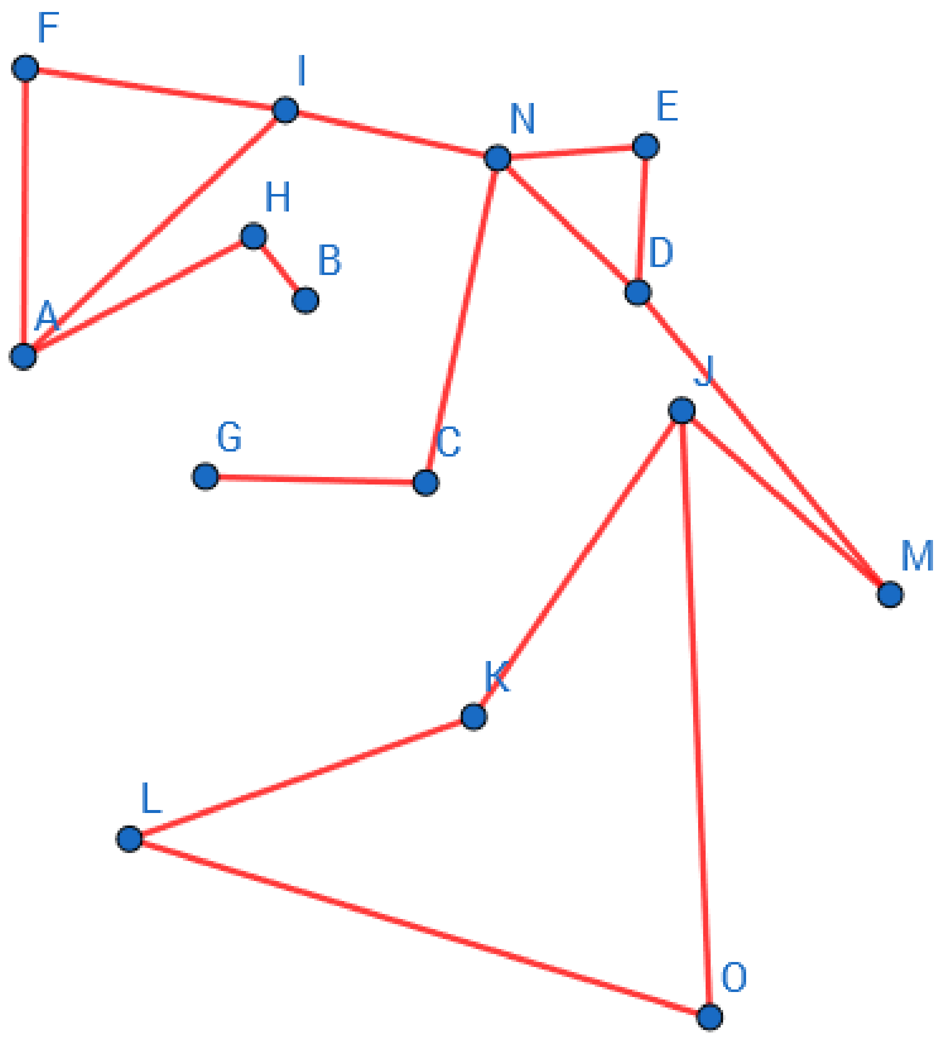


Figura 11**:** Grafo referente ao Problema 3.

Resolução:

Tabela 1: Resolução do Problema 2.3.1.

Vértice	Grau
A	3
B	1
C	2
D	3
E	2
F	2
G	1
H	2
I	3
J	3
K	2
L	2
M	2
N	4
O	2

Repare que o número de arestas nesse grafo é de . Se somarmos os graus de cada vértice o resultado da conta será , justamente o dobro. Isto não ocorre por obra do acaso. De fato, se observarmos cada aresta, ela estará sempre vinculada a dois vértices. Portanto, ao somarmos os graus de cada vértice estaremos contando cada aresta exatamente duas vezes, uma para cada vértice que ela está vinculada. Daí tiramos duas conclusões. A primeira é que se o número de arestas de um determinado grafo for , a soma dos graus de todos os vértices desse grafo será . A segunda, por consequência da primeira, é que, como é um número natural, a soma dos graus de todos os vértices de um grafo é sempre par.

2.3.2 Problema 4

Em determinado país há exatamente cidades. O governo desse país quer fazer exatamente estradas em cada cidade conectando-as a outras cidades dentro do próprio país. Isto é possível?

Resolução:

Isto é impossível. Tratando as cidades como vértices e as estradas como arestas, podemos perceber que em um grafo representativo deste existirão vértices com cada um deles tendo grau . Dessa forma a soma de todos os graus dos vértices seria , o que seria impossível, pois, como já vimos antes, essa soma tem que ter resultado par.

2.4 Definições

Por definição um *grafo* é composto por um conjunto finito de vértices (ou nós) e um conjunto de pares não ordenados, chamados de arestas, formado por elementos de . Costuma-se denotar um grafo como .

2.4.1 Problema 5

Dado o grafo representado na Figura 12, determine e .

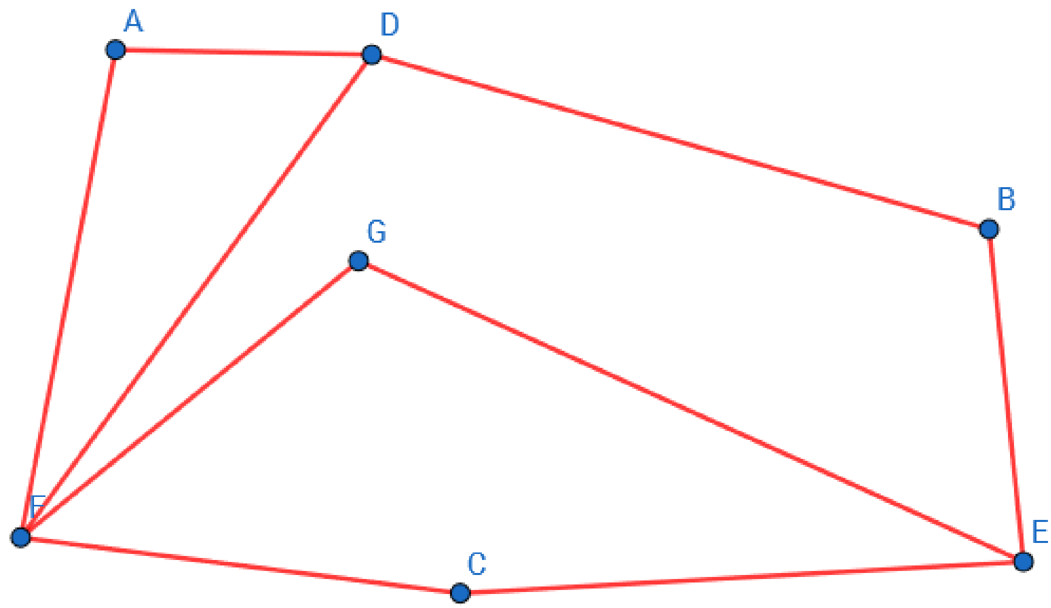


Figura 12: Grafo referente ao problema 5.

<u>Resolução:</u>

Dados dois vértices de , eles são chamados *adjacentes (ou vizinhos)* quando possuem uma aresta em que conecta os dois vértices.

O número de arestas ligadas a um vértice ou a quantidade de vértices adjacentes a é chamado o *grau* de .

2.4.2 Problema 6

Determine o conjunto de vértices adjacentes a cada vértice do grafo representado pela Figura 12. Determine também u grau de cada vértice.

Resolução:

Tabela 2: Resolução do Problema 2.4.2

Vértice	Grau do vértice	Vértices adjacentes
A	2	D e F
B	2	D e E
C	2	E e F
D	3	A, B e F
E	3	B, C e G
F	4	A, C, D e G
G	2	E e F

É imediato verificar que todo grafo possui um número par de vértices de grau ímpar. De fato, caso a quantidade de vértices de grau ímpar fosse ímpar, a soma de seus graus também resultaria em um número ímpar. Quanto aos graus pares dos vértices, independente da sua quantidade, a soma de seus graus seria sempre par. Somando a somatória dos graus dos vértices de grau ímpar com a somatória dos graus pares o resultado seria ímpar, o que não é possível, já que conforme explicado na seção 3 deste capítulo, a soma dos graus de todos os vértices de um grafo é sempre par.

2.4.3 Subgrafos

Dizemos que é *subgrafo* de se e .

Exemplo:

Denotemos o grafo da Figura 13 por e o grafo da figura 14 por. Observe que e , portanto . Observe também que e , portanto . Dessa forma é possível afirmar que é um subgrafo de .

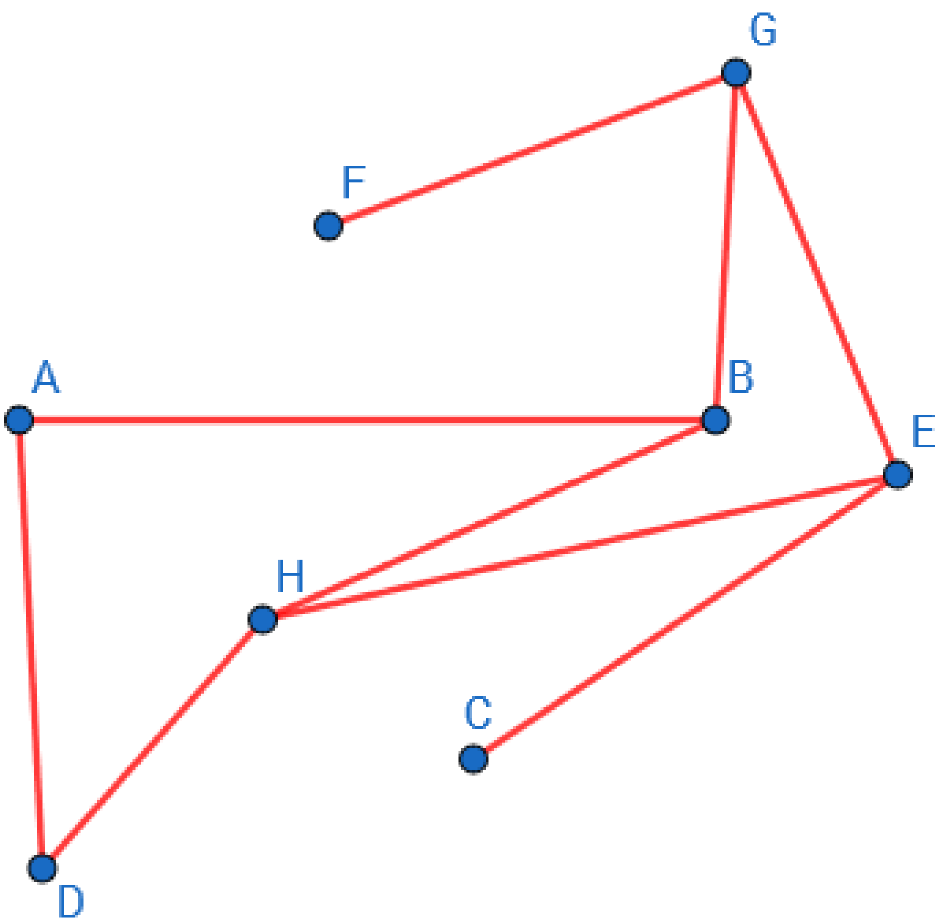


Figura 13**:** Grafo .

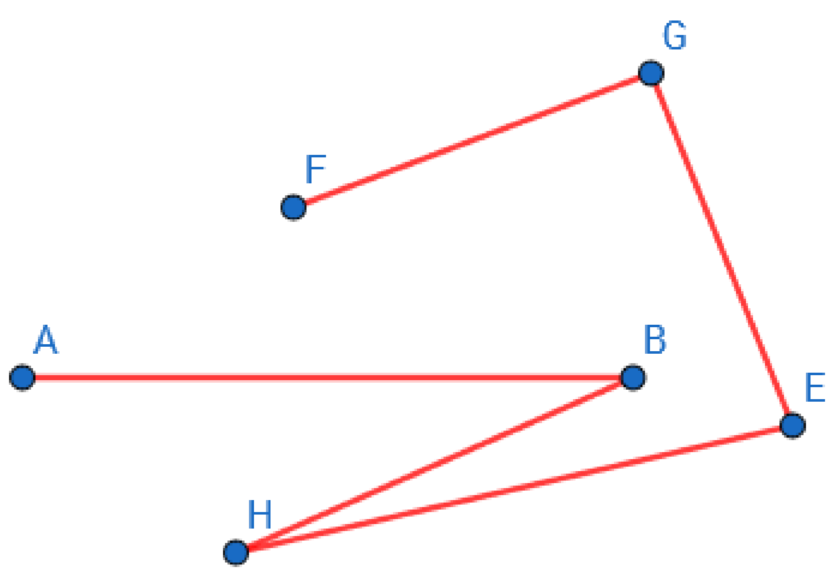


Figura 14**:** Grafo .

Um *ciclo* é um grafo conexo no qual o grau de cada um dos vértices é , conforme o exemplo da Figura 15. Por sua vez, um *caminho* é um grafo que possua exatamente dois vértices de grau e todos os demais vértices de grau , conforme o exemplo da Figura 16.

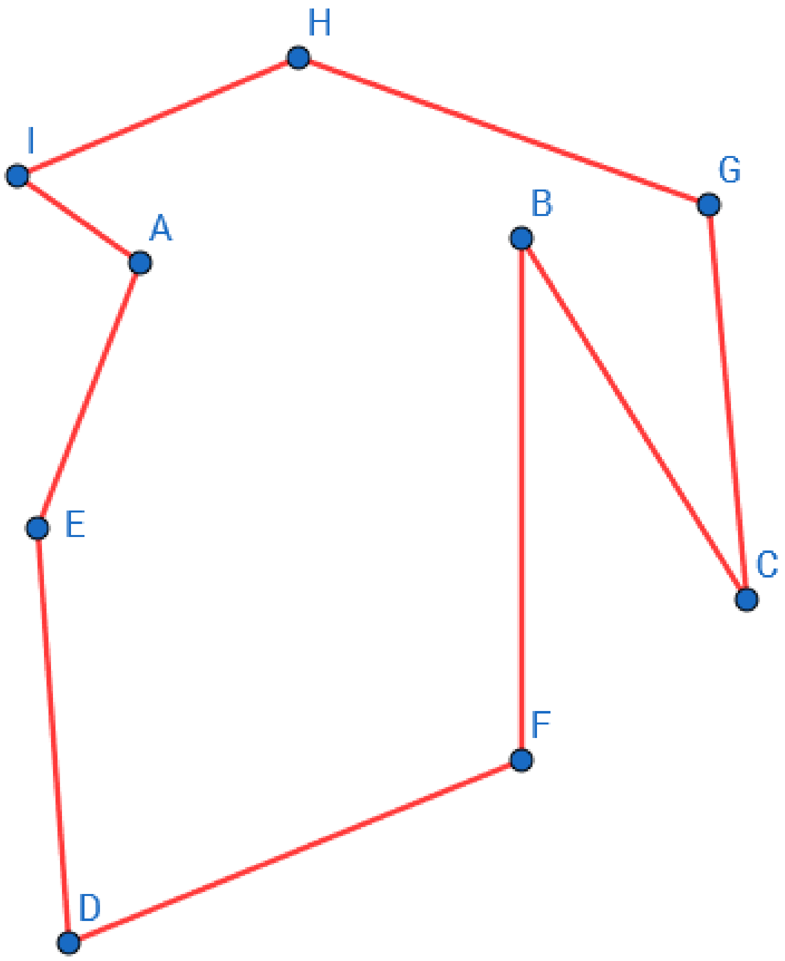


Figura 15: Exemplo de Ciclo.

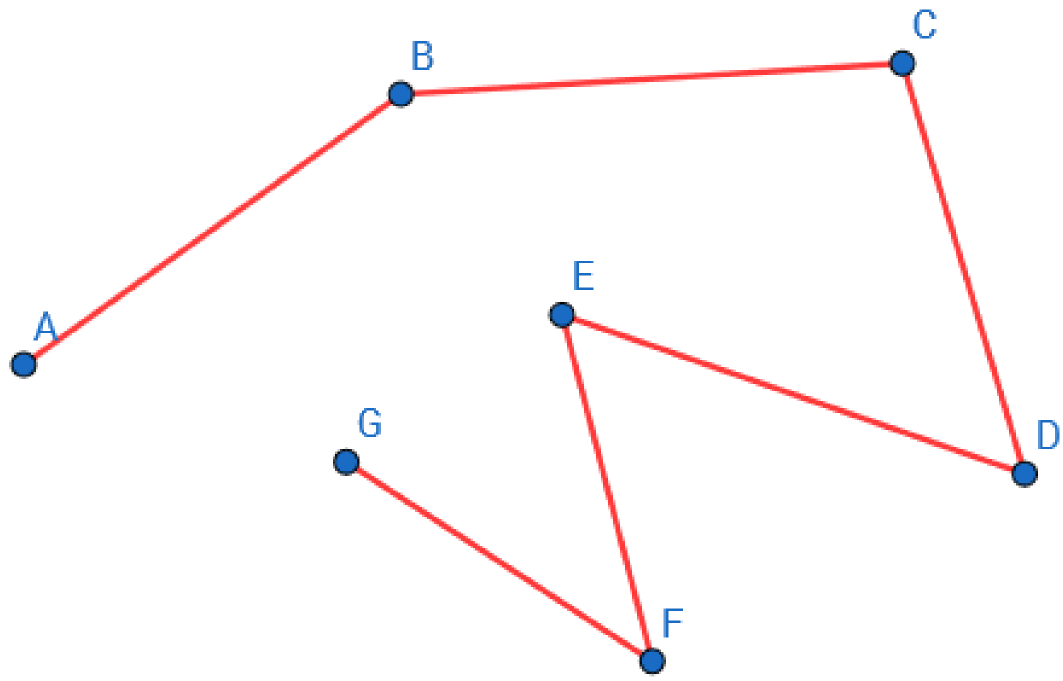


Figura 16: Exemplo de Caminho.

2.4.4 Problema 7

No grafo da Figura 17 encontre um subgrafo que seja um ciclo e outro subgrafo que seja um caminho.

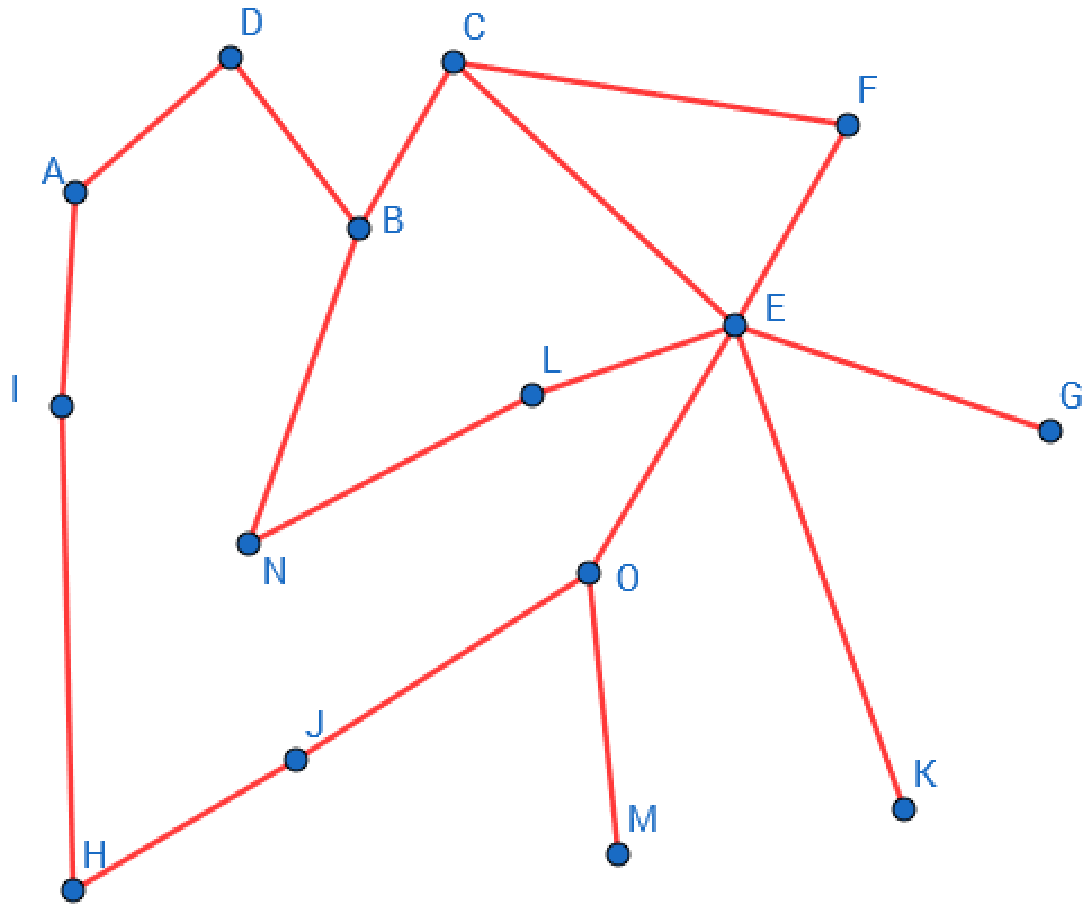


Figura 17**:** Grafo G do Problema 7.

Resolução:

Um dos possíveis subgrafos de que é um ciclo é o Grafo abaixo na Figura 18

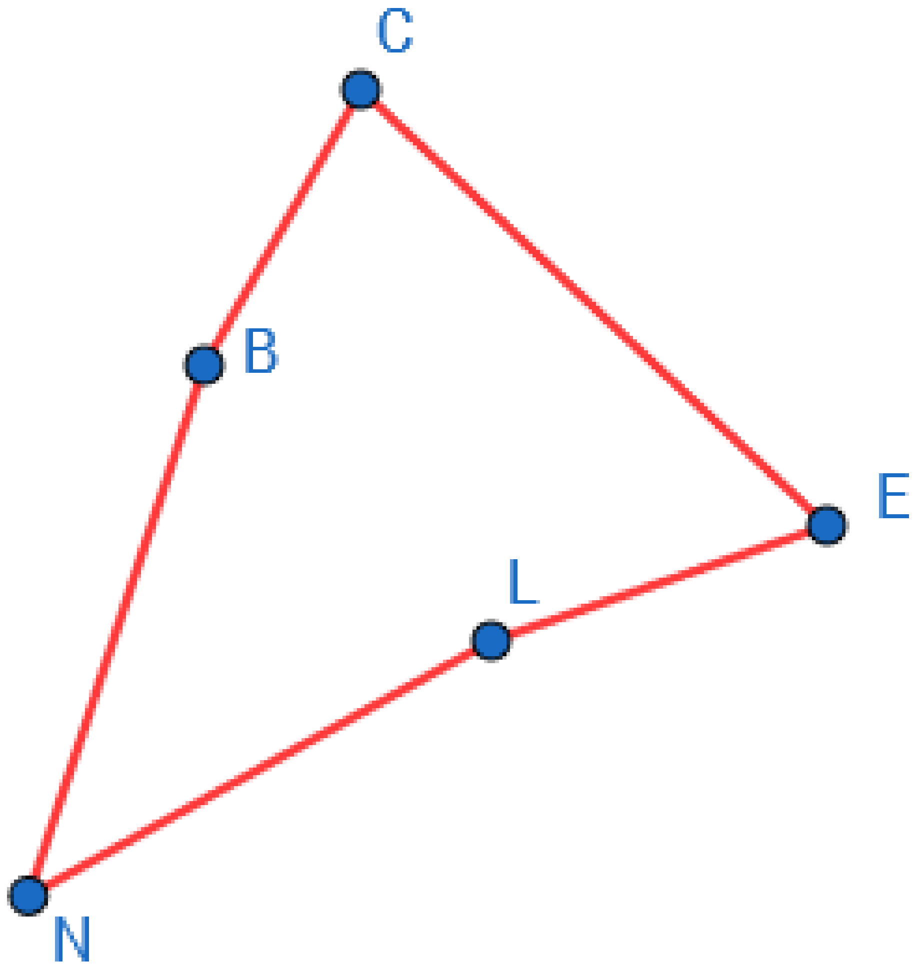


Figura 18: Possível Ciclo de do Problema 7.

Um possível subgrafo de que é um caminho é o grafo abaixo na figura 19:

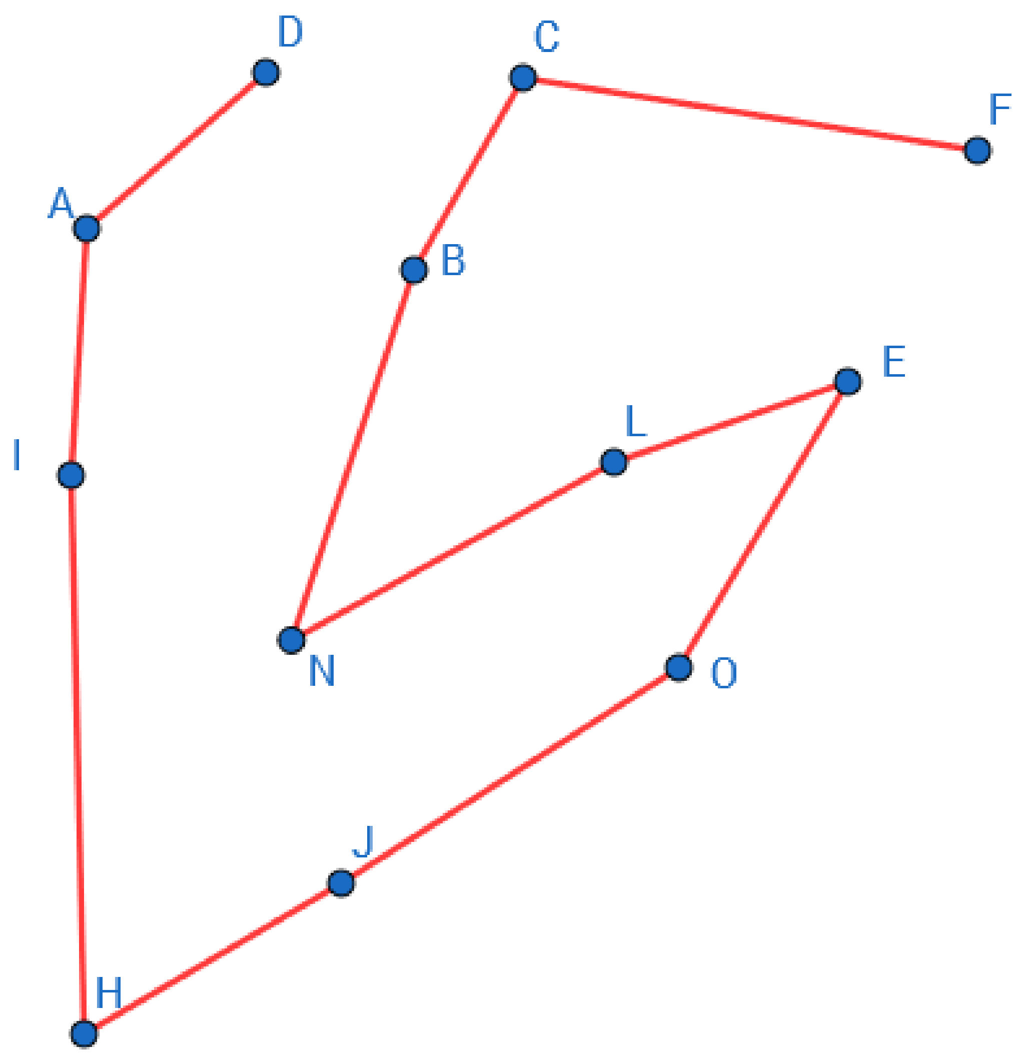


Figura 19: Possível Caminho do Grafo **.**

Repare que a Figura 18 não é o único ciclo que existe no grafo , e nem a Figura 19 é o único caminho em . Essas foram apenas possíveis respostas.

2.4.5 Lema

Se todo vértice de um grafo tem grau maior que ou igual a , então esse grafo possui um ciclo.

<u>Prova:</u>

Iniciemos um passeio sobre um vértice qualquer do grafo e continuaremos sempre que for possível. Esse passeio naturalmente só poderá ser finalizado quando chegarmos a um vértice no qual só reste uma opção de entrada, e, portanto, nenhuma saída. Porém, para que isso aconteça esse nosso passeio tem que já ter passado por esse vértice anteriormente, caso contrário esse vértice deveria ter grau , o que contradiz nossa hipótese. Isso quer dizer que esse passeio passou por ao menos duas vezes. Dessa forma, podemos garantir que está ligado a si mesmo, ou seja, existe um ciclo que passa por . Portanto, existe um ciclo em .

Outro importante tipo de grafo é a árvore. É chamado de *árvore* todo grafo conexo que não possui ciclos, como nos exemplos das Figuras 20, 21, 22 e 23.

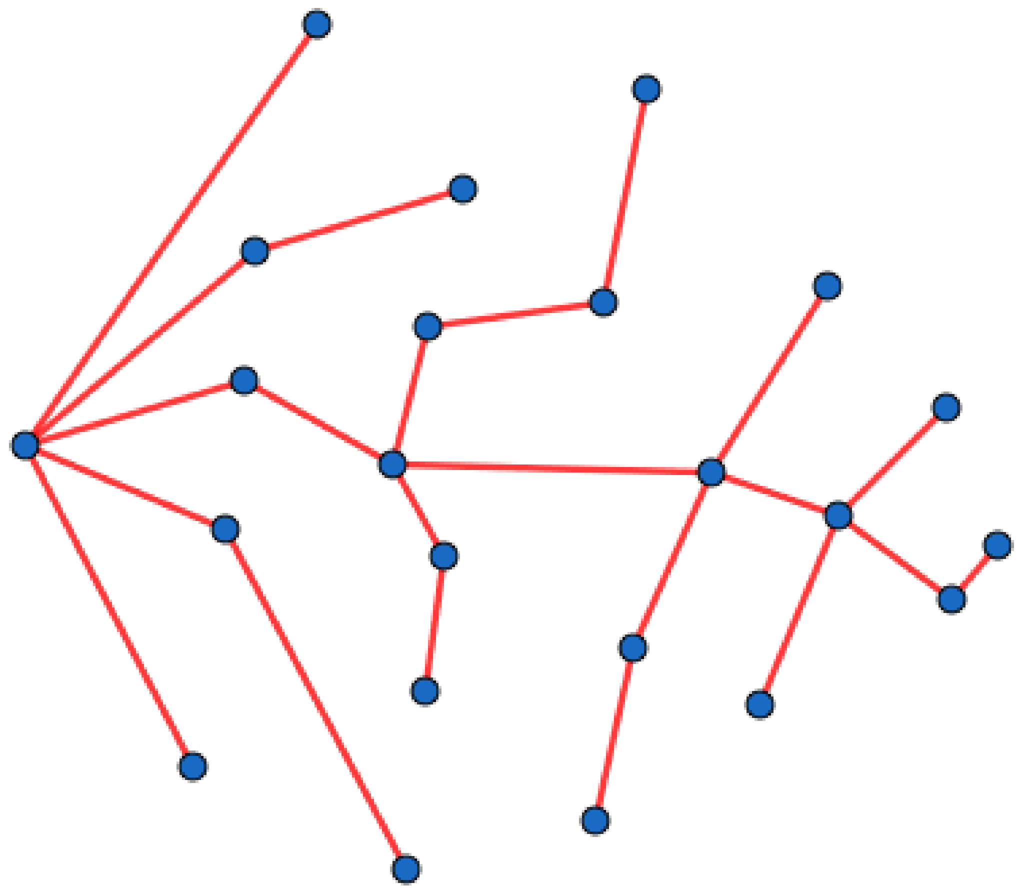


Figura 20**:** Exemplo 1 de Árvore.

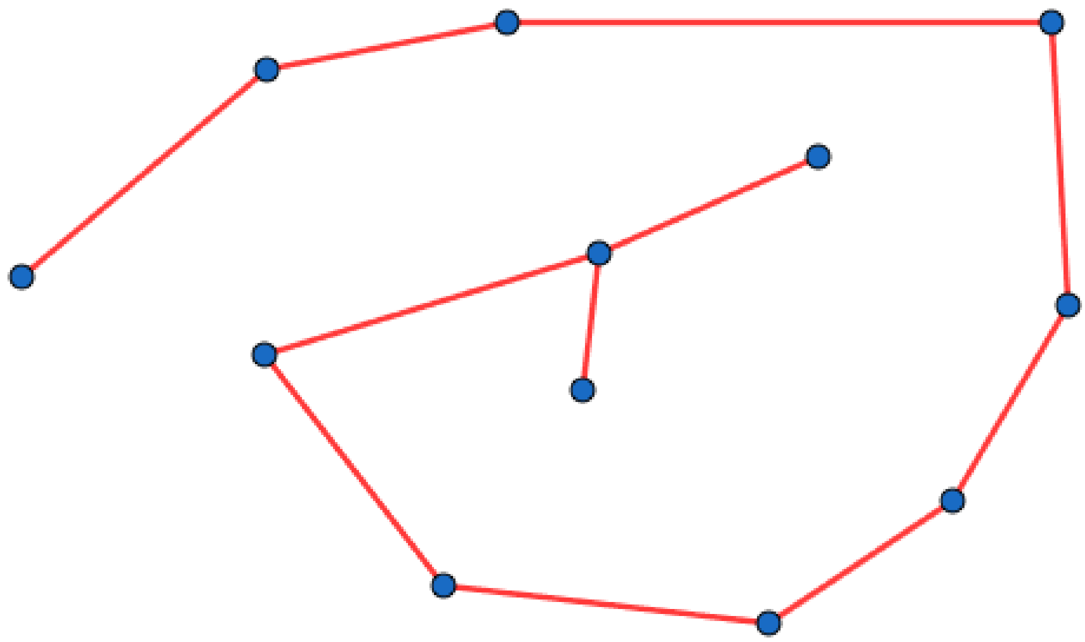


Figura 21: Exemplo 2 de Árvore.

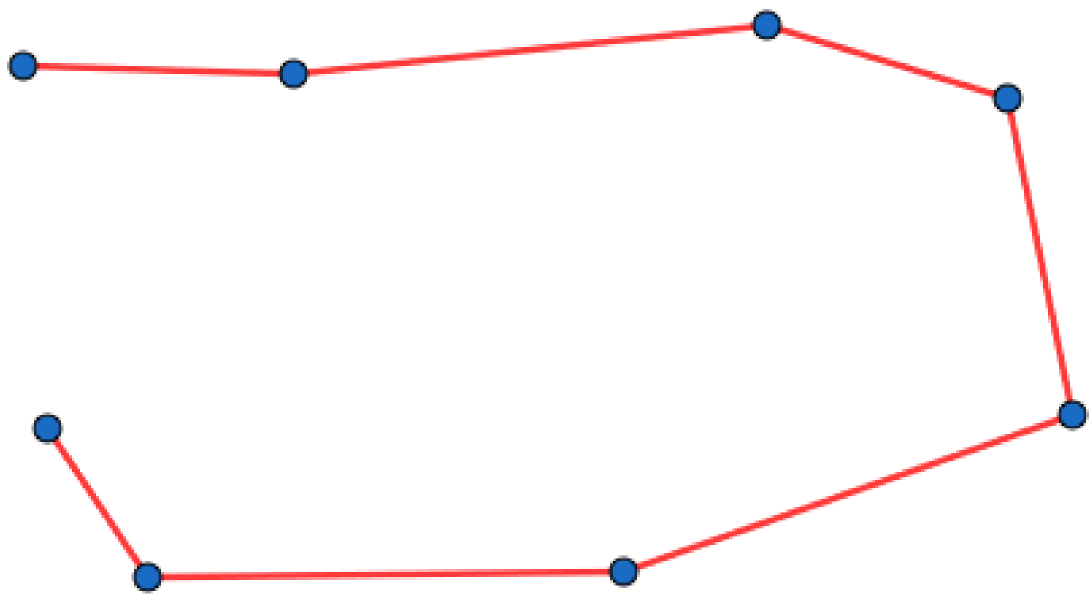


Figura 22: Exemplo 3 de Árvore.

Figura 23**:** Exemplo 4 de Árvore.

2.5 Problemas propostos

Problema 8. (OBM) Em um certo país há cidades e o governo pretende construir estradas (todas de mão dupla), sendo que cada estrada liga exatamente duas das cidades do país. Qual o menor valor de para que, independente de como as estradas sejam construídas, seja possível viajar entre quaisquer duas cidades (passando, possivelmente, por cidades intermediárias)?

Problema 9. Considere um grupo de pessoas. É possível que cada uma delas conheça exatamente:

a) pessoas?

b) pessoas?

Problema 10. Um tabuleiro com forma de uma cruz é obtido de um tabuleiro retirando-se as quatro quinas. Um cavalo pode se mover neste tabuleiro de modo a passar por todos os quadrados exatamente uma vez e terminar no quadrado de onde saiu?

Problema 11. Um determinado reinado possui cidades e saem quatro estradas de cada uma delas. Quantas estradas existem ao todo nesse reinado?

Problema 12. João voltado da Disneylândia, disse que viu um lago encantado com ilhas, cada uma delas tendo , ou pontes chegando a elas. É verdade que pelo menos uma dessas pontes tem que levar à terra firme?

Problema 13. Mostre que o número de pessoas que viveram na Terra e que apertaram mãos de outras pessoas um número ímpar de vezes em suas vidas é par.

Problema 14. Em um grafo conexo, o grau de quatro de seus vértices é igual a , e o grau de todos os outros vértices é igual a . Prove que não existe uma aresta que possa ser tirada de modo que esse grafo se divida em duas componentes conexas.

3. A Fórmula De Euler

3.1 Fórmula de Euler

A fórmula de Euler é uma relação entre a quantidade de vértices, a quantidade de arestas e a quantidade de regiões em um Grafo planar. Quando um grafo é planar ele divide o plano em *regiões* que são delimitadas por suas arestas.

Teorema de Euler: Em um grafo planar conexo é válida a relação , onde é o número de vértices do grafo, é o número de regiões e o número de arestas.

Prova do Teorema de Euler:

Iniciemos com um grafo com um único vértice e, consequentemente, uma única região. Nesse grafo temos:

Naturalmente nessas condições a relação de Euler é válida, tendo em vista que .

Adicionando vértices:

Sempre que adicionarmos um vértice a um grafo, para que ele permaneça conexo, deveremos adicionar também uma aresta ligando este vértice ao grafo conexo já existente. Dessa forma se adicionarmos uma quantidade de vértices precisaremos adicionar também uma quantidade de arestas para manter a conectividade do grafo. Voltando-se para a nossa situação inicial em que tínhamos apenas um vértice, uma região e nenhuma aresta teremos:

Nesta situação teremos:

, e a relação de Euler é válida.

Isso mostra que sempre que se adicionar vértices ao grafo com uma única região, um vértice e nenhuma aresta, e mantendo esse grafo conexo, permaneceremos com a fórmula de Euler válida. Repare que nessa situação não alteramos o número de regiões do grafo, permanecendo com uma única região e, consequentemente, sem ciclos. Note que estamos lidando com um grafo conexo sem ciclos, portanto, uma árvore. Isso mostra que em toda árvore é válida a Fórmula de Euler.

Adicionando regiões:

Para adicionar regiões a um grafo basta criar ciclos em uma árvore. Para adicionar ciclos em uma árvore basta adicionar arestas conectando dois vértices já existentes. Por se tratar de uma árvore, entre esses dois vértices já existia um caminho que os ligava e, ao se adicionar a nova aresta, se adicionou um novo caminho ligando esses vértices. Assim sendo, para se adicionar uma quantidade de regiões será necessário também adicionar uma quantidade de arestas. Partindo da situação anterior, onde havia vértices, arestas e 1 região (), ao se adicionar à quantidade de regiões e, consequentemente, a mesma quantidade ao número de arestas teremos:

Verificando a relação de Euler nessa situação teremos:

Logo, simplificando:

Dessa forma, sempre que se adicionar uma região a uma árvore criando um grafo conexo com ciclos a fórmula de Euller se manterá válida. Como já foi demonstrado que para toda árvore é válida a fórmula de Euller, é possível se observar agora que a fórmula de Euler é válida para todo grafo conexo.

Adicionando arestas:

Para se adicionar arestas existem duas possibilidades: ou se adiciona um novo vértice, que é a primeira situação já provada no texto e mantendo-se válida a fórmula de Euler ou se conecta por meio de uma aresta dois vértices já existentes, criando uma região que é a segunda situação demonstrada no texto.

Portanto, como:

(I) Todo grafo (em particular todo grafo conexo) possui um subgrafo com um único vértice, uma única região e nenhuma aresta, ou seja, é possível se construir qualquer grafo (em particular conexo) a partir de um grafo com um vértice, uma região e nenhuma aresta.

(II) Nesse grafo com um único vértice, uma única região e nenhuma aresta é válida a fórmula de Euler.

(III) Ao se adicionar uma aresta, um vértice ou uma região a um grafo conexo a fórmula de Euler permanece válida.

Tem-se que se o grafo é conexo, então é válida a fórmula de Euler.

Tome um grafo qualquer com partes conexas, onde cada uma dessas partes conexas é um subgrafo de . Enumeremos esses subgrafos por . Naturalmente, qualquer grafo , com é conexo.

Tome agora como o número de vértices do grafo , como o número de arestas de e como o número de regiões de .

É fácil perceber que o número de vértices do grafo é dado por: , assim como o número de arestas de que é dado por . Porém, quando se observa as regiões observamos que a região externa de (região externa à qualquer ciclo de) é a mesma região externa de , a mesma região externa de e a mesma região externa de todos os outros subgrafos. Dessa forma, se somarmos as regiões de cada um dos subgrafos estaremos contando a região externa vezes. Portanto o número de regiões de é dado por .

Note que podemos reescrever a relação de Euler como: .

Somando o número de vértices e o número de regiões do grafo e subtraindo seu número arestas temos:

Mas temos que, como são conexos e, portanto, satisfazem a fórmula de Euler.

Logo:

Portanto,

Dessa forma só valerá a fórmula de Euler se , ou seja, se o grafo tiver uma única parte conexa, ou seja, se ele for o próprio grafo conexo.

Assim provamos que um grafo é conexo se, e somente se, é válida nele a fórmula de Euler.

3.1.2. Problema 1

Quantas arestas possui um grafo conexo com exatamente vértices e exatamente regiões?

<u>Resolução:</u>

Nessa situação temos e . Aplicando a fórmula de Euler:

Um conhecido desafio matemático é o desafio das três casas, que consiste no problema a seguir.

3.1.3. Problema 2

Suponha que haja três casas em um plano e cada uma precise ser ligada às empresas de gás, água e eletricidade. O uso de uma terceira dimensão ou o envio de qualquer uma das conexões através de outra empresa ou casa não é permitido. Existe alguma maneira de fazer todas as nove ligações sem que qualquer par de linhas se cruze?

Figura 24**:** Representação da situação do Problema das 3 Casas.

Este problema instiga os alunos de ensino fundamental mais interessados a se desprenderem horas, as vezes dias tentando encontrar alguma disposição dessas ligações para que seja permitido tal ligação. Porém, ao professor responder ser impossível tal disposição na maioria das vezes não é dada maiores explicações, frustrando-se assim esses alunos mais interessados. Esse problema pode ser resolvido observando-se a fórmula de Euler.

Resolução:

Para tal é possível se delimitar as casas como vértices e as ligações como arestas.

Assim sendo temos:

A cada par de empresas ligadas às três casas obtemos um adicional de duas regiões (é importante lembrar nesse momento que originalmente já havia uma região). Como são possíveis três pares de empresas (água e luz, água e gás e luz e gás), serão adicionadas seis regiões à nossa figura original com uma única região, totalizando assim regiões.

Entretanto, como já foi provado, a fórmula de Euler é válida em qualquer grafo plano. Assim, para que essa figura seja possível, é necessário que também seja válida a fórmula de Euler.

Verificando essa condição:

Mas

Dessa forma observamos que a fórmula de Euler não é válida nessa situação, logo ela não se trata de um grafo planar e, portanto, não é possível representa-la em um plano. É importante salientar que o grafo que representa essa situação existe, como mostrado na figura 24. Ele apenas não é planar, ou seja, não tem como construir todas as arestas sem que algumas delas se intersectem.

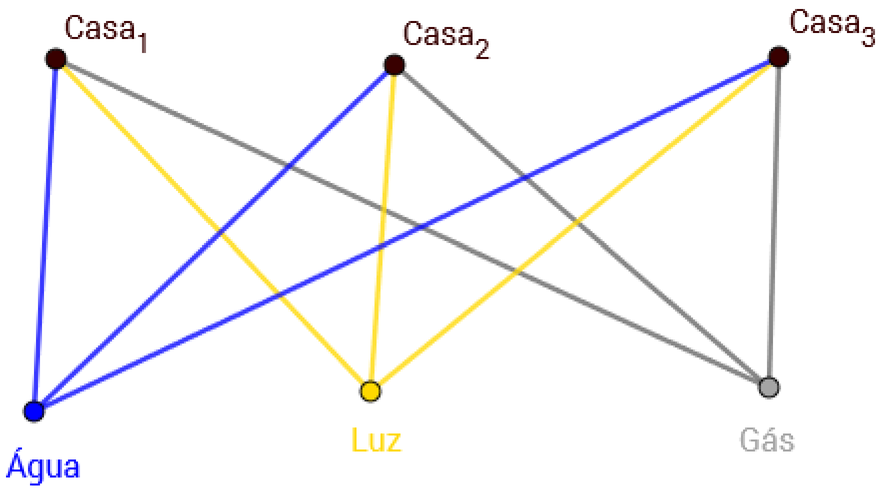


Figura 25**:** Grafo não planar do problema das 3 casas.

3.2 Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

Se um grafo pode ser percorrido sem se levantar o lápis do papel, percorrendo-se cada aresta exatamente uma vez, ele é chamado *Grafo Euleriano*. Esse tipo de grafo foi estudado pela primeira vez por Leonhard Euler, em 1936, ao tentar resolver o famoso problema das pontes de Königsberg, cidade mostrada na Figura 25.

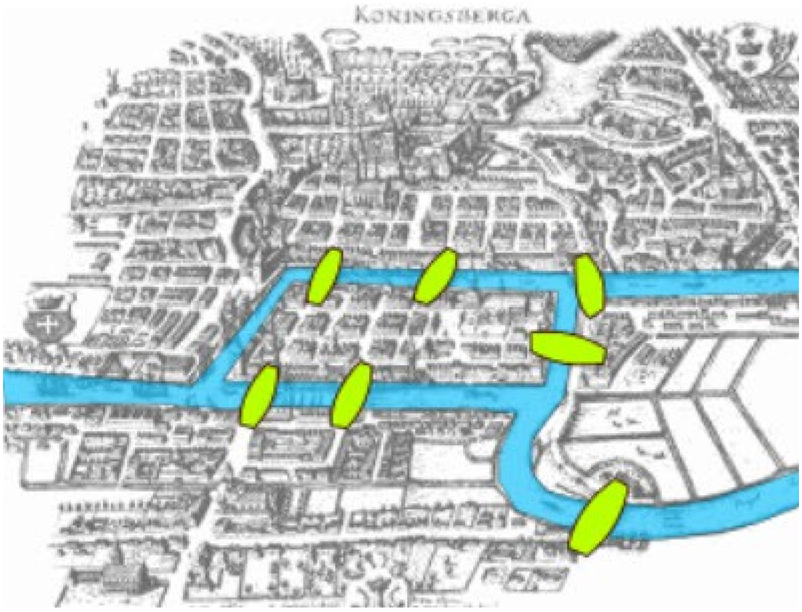


Figura 26**:** Cidade de Königsberg. D*isponível em https://www.mathsisfun.com/activity/images/bridges1.jpg.Acesso em 08/08/2018.*

No século 13, um enigma mobilizou uma pequena cidade localizada ao norte da Europa. Tratava-se do desafio das sete pontes de Königsberg, atual Kaliningrado. Seis delas interligavam duas ilhas às margens do Rio Pregel e uma que fazia a ligação entre as duas ilhas. O problema consistia na seguinte questão: como seria possível fazer um passeio a pé pela cidade de forma a se passar uma única vez por cada uma das sete pontes e retornar ao ponto de partida? Da resposta ao enigma surgiu a Teoria dos Grafos, criada em 1736 por Leonhard Euler.

3.2.1. Problema 3

A figura 25 mostra um mapa da cidade de Königsberg. A cidade é cortada por um rio que tem duas ilhas. Existem sete pontes ligando as diversas partes da cidade. É possível passear pela cidade passeando por cada ponte exatamente uma vez?

Resolução:

A Figura 25 pode ser mais facilmente representada pelo grafo da Figura 26 abaixo:

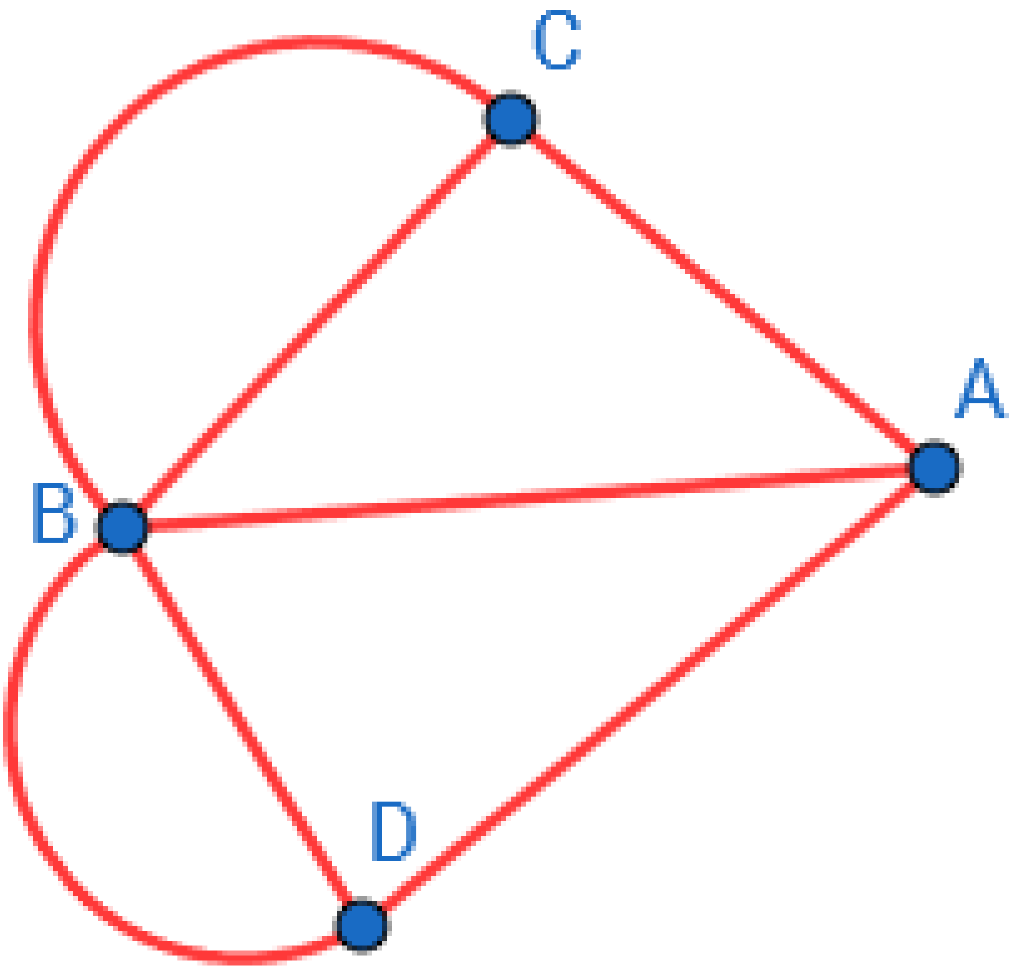


Figura 27: Representação do Problema das Pontes de Königsberg.

Nesse grafo, os vértices , , e representam as regiões de terra firme da cidade e as arestas representam as pontes. Como queremos passar por todas as arestas exatamente uma vez, se você começar esse passeio em um vértice distinto de , você terá pontes para . Necessariamente então será para entrar, para sair e por fim para entrar novamente. Portanto, se não iniciarmos o passeio em , necessariamente teremos que terminar em . Essa mesma linha de raciocínio é válida para todos os vértices de grau ímpar. Como todos os vértices desse grafo tem grau ímpar ímpares, temos que, caso eles não sejam o ponto de partida do passeio, eles deverão ser o ponto de chegada. Absurdo, pois não é possível que haja mais de um ponto de saída ou mais um ponto de chegada.

Como consequência do problema 3 percebemos que todos os grafos eulerianos tem que necessariamente possuir um máximo de dois vértices com grau ímpar.

3.2.2. Teorema

a) Se um grafo conexo tem mais de dois vértices com grau ímpar, então esse grafo não possui um passeio euleriano.

b) Se um grafo conexo tem exatamente dois vértices com grau ímpar, então esse grafo possui um passeio euleriano, e qualquer passeio euleriano nesse grafo começa em um de seus vértices de grau ímpar e termina no outro vértice de grau ímpar.

c) Se um grafo conexo não possui nenhum vértice de grau ímpar então esse grafo possui um passeio euleriano. Além disso, todo passeio euleriano nesse grafo é fechado, ou seja, termina no mesmo vértice em que começou.

<u>Demonstração:</u>

a) De fato, se um vértice de tem grau ímpar, então qualquer passeio euleriano deve começar ou terminar nesse vértice, afinal, se um passeio iniciar por uma aresta, ele terá que sair por outra, mantendo sempre o grau par do vértice sempre que o passeio o visitar. Como se tem o objetivo de passar por todas as arestas, em algum momento será necessário ou sair do vértice mais vezes que entrou, tornando assim esse vértice ponto de partida do passeio, ou entrar mais vezes que saiu, tornando esse vértice o ponto de chegada do passeio euleriano. Portanto não é possível que esse grafo tenha uma quantidade de vértices de grau ímpar superior a dois, afinal só podem ser admitidos um ponto de partida e um ponto de chegada em um passeio euleriano.

Para facilitar a prova, inicialmente demonstraremos o item c e posteriormente demonstraremos o item b.

c) Considere um passeio euleriano fechado em . Como já foi destacado no item a dessa prova, para cada vez que o passeio entrar em um vértice "intermediário" – ou seja, que não seja inicial ou final – ele terá que, para cada vez que entrar nesse vértice, sair desse vértice. Isso mostra que todos os vértices intermediários terão grau par. Como se trata de um passeio fechado, o ponto de partida é o mesmo de chegada. Assim sendo, o passeio terá que sair desse vértice a mesma quantidade de vezes que entrar. Logo o grau dele deverá ser par. Assim sendo o grau de todos os vértices de é par.

Como já foi visto no Lema na seção 2.4.5, se todos os vértices tiverem graus maiores ou iguais a , então, como nenhum dos vértices de tem grau (caso contrário seria desconexo) podemos garantir que existe em um ciclo . Naturalmente, se possui todas as arestas de , a prova está completa. Agora, caso contrário, removemos todas as arestas de (e também todos os vértices de grau que surgirem) formando assim um novo grafo possivelmente desconexo. Como é conexo, temos que existe ao menos um vértice que seja comum a e . Como o grau de cada vértice de é par e, ao retirarmos um ciclo, em cada vértice que mechemos em seu grau diminuímos seu grau em dois, podemos garantir que o Lema 2.4.5 poderá ser aplicado em cada parte conexa do grafo . Repetindo esse processo até esgotarmos as arestas do grafo original , chegaremos a um conjunto de ciclos que juntos possuem todas as arestas de , que possuem vértices em comum a pelo menos um outro ciclo, mas que não possuem arestas em comum. Assim sendo, poderemos iniciar esse caminho em qualquer vértice de qualquer ciclo e, sempre que for possível, iniciaremos um novo ciclo antes de terminar o já iniciado. Isto é possível pois todo ciclo possui pelo menos um vértice em comum com os demais ciclos. Logo o grafo é conexo. Repetindo esse processo, em algum momento não será mais possível iniciar mais nenhum ciclo, então começaremos a fechar cada um deles, abrindo e fechando cada um dos ciclos formados no início. Ao final desse passeio chegaremos ao nosso ponto inicial, fechando assim o primeiro ciclo aberto. Teremos então um passeio que passa por todas as arestas exatamente uma vez.

b) Tome e os dois vértices de grau ímpar desse grafo . Construa agora uma aresta que conecte a , criando assim o grafo . Naturalmente os graus de todos os vértices de é par, uma vez que se adicionou aos dois únicos vértices de grau ímpar. Dessa forma podemos garantir que existe sobre um passeio euleriano fechado , dessa forma podemos iniciar esse passeio que passa por todas as arestas uma única vez em e terminar também em . Retiramos então a aresta que criamos, voltando assim ao grafo . Podemos observar que, sendo , está inteiramente dentro de e também é um passeio que passa por todas as arestas de uma única vez, iniciando em e terminando em .

□

Um questionamento semelhante ao das pontes de Köingsberg foi proposto por William R. Hamilton, em 1856. O Passeio Hamiltoniano é um ciclo que contém todos os nós de um grafo.

Exemplo: na Figura 27 temos um grafo e na Figura 28 temos um ciclo hamiltoniano nesse grafo.

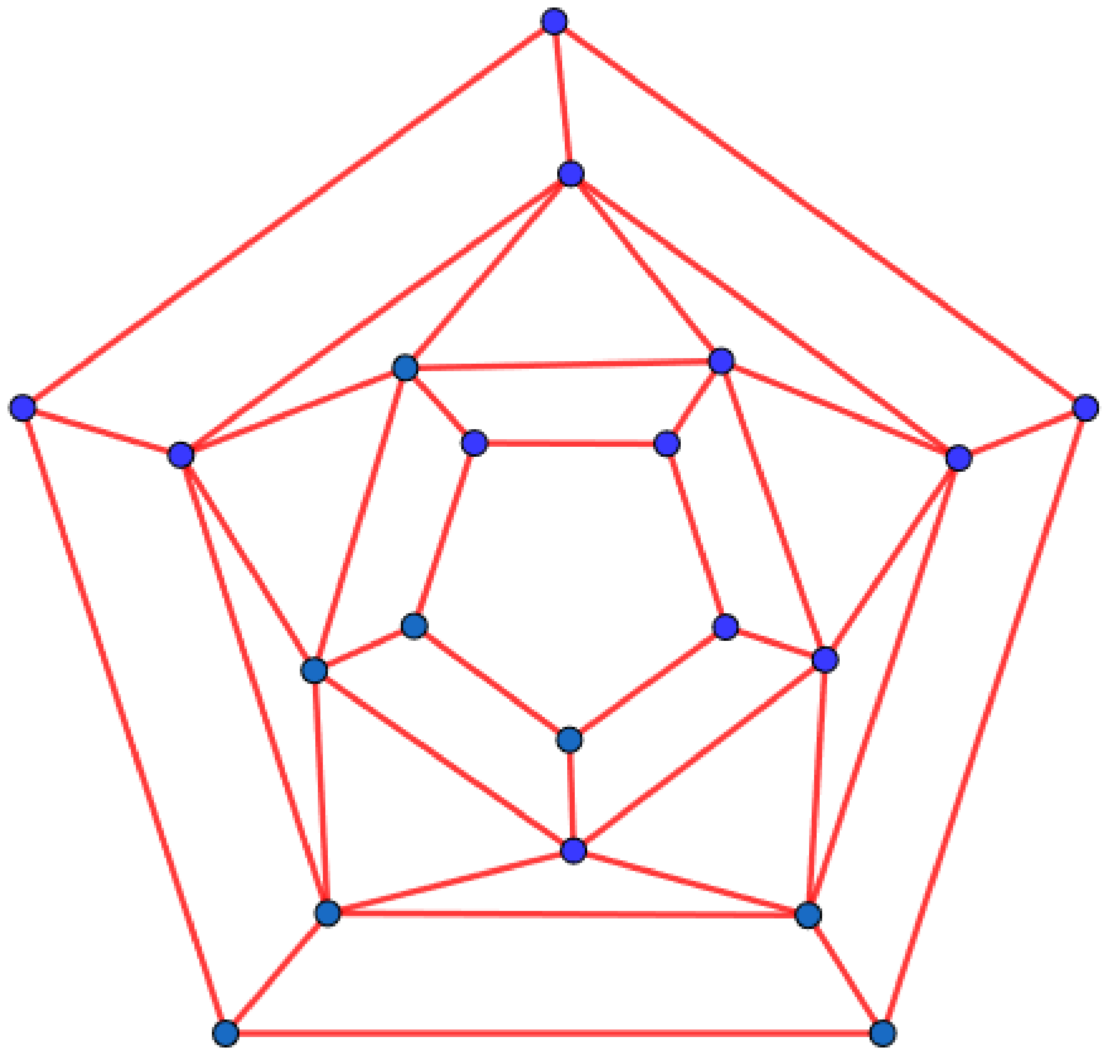


Figura 28: Grafo com Passeio Hamiltaniano possível.

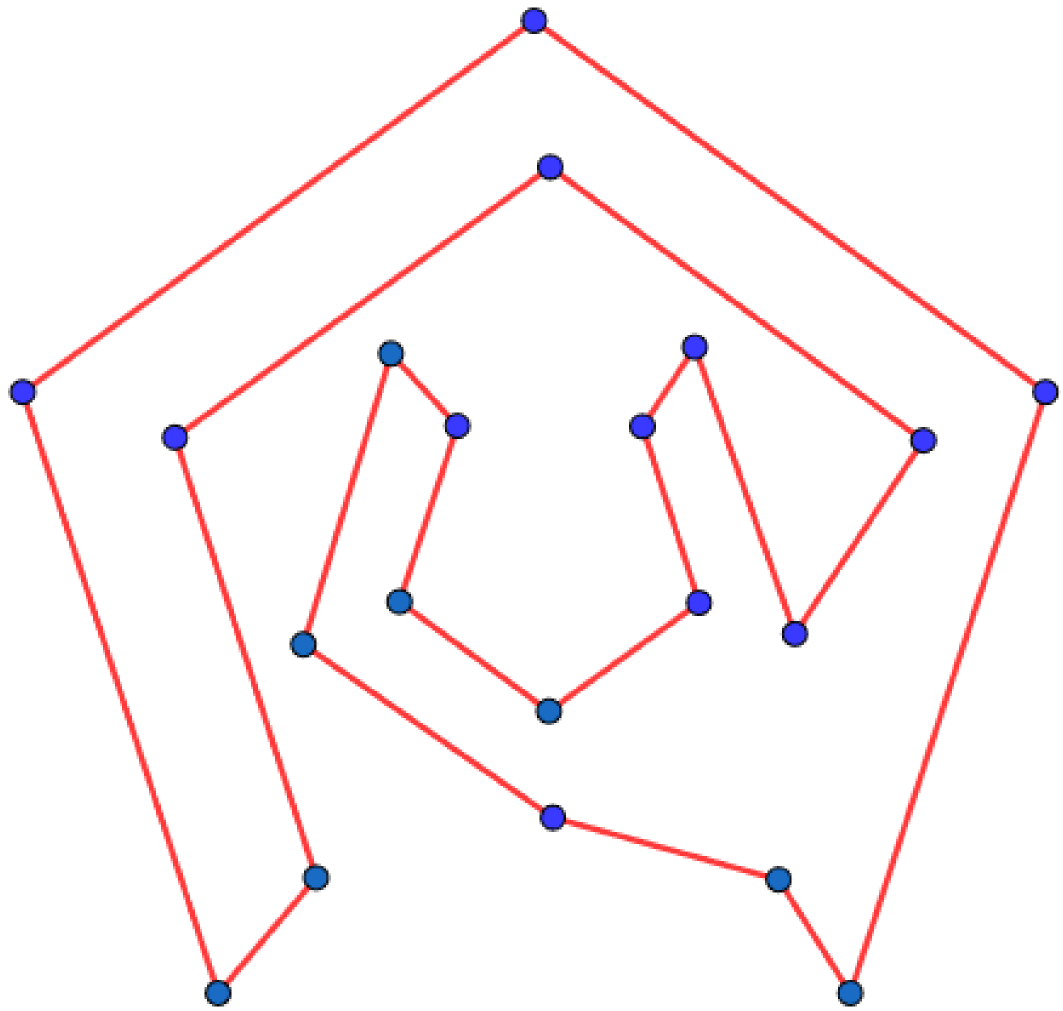


Figura 29: Possível Passeio Hamiltoniano no grafo da Figura 27.

3.3 Problemas Propostos

Problema 4. Existem lagos na Terra dos lagos. Eles estão ligados por canais de modo que é impossível nadar de qualquer um dos lagos para qualquer outro. Quantas ilhas existem na Terra dos Lagos?

Problema 5. Vinte pontos estão marcados dentro de um quadrado. Eles estão conectados entre si por segmentos que não se intersectam e estão conectados com os vértices do quadrado de tal modo que o quadrado fica dividido em triângulos. Quantos triângulos temos?

Problema 6. Durante uma conferência, cada um de matemáticos presentes cochilaram exatamente duas vezes. Para cada par destes matemáticos, houve um momento em que ambos estavam cochilando simultaneamente. Prove que, em algum momento, três estavam cochilando ao mesmo tempo.

Problema 7. Todos os vértices de um grafo têm grau . Prove que o grafo possui um ciclo.

Problema 8. Um cubo deve ser montado com pedaços de arame; cada pedaço de arame pode ser dobrado em torno de um vértice. No mínimo quantos pedaços de arame são necessários para montar o cubo?

4. ÁRVORES

4.1 Estudo sobre árvores

Um grafo é chamado árvore quando é conexo e não contém um ciclo como subgrafo.

Observação: as duas propriedades que definem um grafo como árvore atuam em sentidos opostos. A conectividade significa que ele não pode ter arestas "de menos" enquanto a exclusão de ciclos significa que ele não pode ter arestas "demais". Decorre da definição um teorema que caracteriza uma árvore como um grafo "minimamente conexo", ou seja, o grafo conexo com menos arestas possível, e "maximamente livre de ciclos", ou seja, o grafo sem ciclos com mais arestas possível.

4.1.1. Teorema

(a) Um grafo é uma árvore se, e somente se, ele é conexo, mas a remoção de qualquer de suas arestas resulta em um grafo desconexo.

(b) Um grafo é uma árvore se, e somente se, ele não contém ciclo, mas a adição de qualquer aresta nova cria um ciclo.

Demonstração:

(a) Suponha que ao remover uma aresta de , o grafo resultante seja conexo. Então contém um caminho conectando e . Assim, o caminho e a aresta formam um ciclo em , o que é absurdo, já que é uma árvore. Portanto, a remoção de qualquer aresta de resulta em um grafo desconexo.

Seja um grafo conexo tal que a remoção de qualquer de suas arestas resulta em um grafo desconexo. Basta então mostrar que não contém ciclo.

Suponha que contenha um ciclo . Então, ao remover qualquer aresta de obtemos um grafo conexo, o que contraria a hipótese. Portanto não contém ciclos e temos que é uma árvore, o que completa a demonstração.

(b) Seja uma árvore. Por definição, não contém ciclo. Basta então mostrar que a adição de qualquer nova aresta cria um ciclo.

Suponha que a adição de uma nova aresta não crie um ciclo. Então, não há em um caminho com extremidades e . Assim, não é conexo, o que é absurdo, já que é uma árvore. Portanto, a adição que qualquer nova aresta cria um ciclo.

Seja um grafo que não contenha ciclo em que a adição de qualquer aresta nova cria um ciclo. Vamos mostrar que é conexo.

Suponha que seja desconexo. Então existe um par de vértices e tais que não há um caminho que os conecta. Assim, adicionando a aresta a não temos um ciclo, contrariando a hipótese sobre . Portanto é conexo e temos que é uma árvore.

4.1.2. Problema 1

Determine a quantidade de arestas em uma árvore com vértices.

<u>Resolução:</u>

Utilizando a relação de Euler,

Como , obtemos . Daí . Como se trata de uma árvore sempre temos . Segue que .

O problema anterior é um caso particular de uma situação mais geral: em toda árvore o número de arestas é igual ao número de vértices menos . Com efeito,

, ou

4.2 Método do crescimento de árvores

É possível construir uma árvore a partir de um único vértice e, posteriormente, ir adicionando vértices e ligando esses vértices novos ao grafo já existente. Esse método é chamado de *Método de crescimento de árvores*. Para melhor discorrer sobre esse método é importante o seguinte teorema.

4.2.1 Teorema

Toda árvore com pelo menos dois nós tem pelo menos dois nós de grau ímpar.

Demonstração:

Fixe arbitrariamente um vértice de uma árvore . Iniciemos um passeio partindo desse vértice e indo por uma das arestas e chegando nesse vértice e continuemos esse caminho passando sempre por arestas que ainda não fizeram parte do passeio. Isso será possível até se chegar em um vértice de grau . Como a quantidade de vértices de uma árvore é finita, chegará um momento em que esse passeio não terá mais arestas para percorrer. Portanto existe ao menos um vértice de grau um. Tomemos agora o vértice fixado e iniciemos outro passeio por outra aresta que chega em . Se não houver outra aresta significa que o próprio vértice tem grau 1, logo essa árvore tem dois vértices de grau um. Caso esse vértice tenha uma outra aresta que não tenha feito parte do primeiro passeio, repetimos o processo e encontramos outro vértice de grau um.

4.2.2 Desenvolvimento do método de crescimento de árvores

O método de crescimento de árvores pode ser resumido no seguinte algoritmo:

1º - Construa um Grafo com apenas um vértice

2º - Adicione um vértice e ligue esse vértice a um dos vértices do grafo.

3º - Repita o processo quantas vezes for necessário para construir a árvore desejada.

4.2.3 Teorema

Todo grafo construído com o método de crescimento de árvores é uma árvore e toda árvore pode ser obtida pelo método de crescimento de árvores.

Demonstração:

Note que o grafo original (com um único vértice) é conexo e não possui ciclos. Tome agora um grafo qualquer que seja uma árvore. Adicionando um vértice a e ligando-o a qualquer outro vértice de criamos um novo grafo . Primeiro podemos garantir que é conexo, uma vez que existe um caminho de até e existe caminho de qualquer outro vértice a (uma vez que é conexo). Podemos observar também que possui grau e, portanto, não existem ciclos passando por . Além disso, , por ser uma árvore, não possui ciclos, podemos garantir também que também não possui ciclos. Como estamos lidando com um grafo conexo que não possui ciclos, segue que esse grafo é uma árvore.

Agora vamos provar que qualquer árvore pode ser construída por meio do método de crescimento de árvores. Para tal se inicia fazendo o caminho inverso. Tome uma árvore qualquer. Como provado no teorema 3.1.1, toda árvore com pelo menos dois vértices possui pelo menos dois (em particular pelo menos um) vértices de grau ímpar. Escolha um desses vértices e subtraia esse vértice e a aresta que o conecta ao restante do grafo. Fazendo isso teremos um novo gravo . É fácil perceber que esse novo grafo é uma árvore uma vez que não possui ciclos (afinal não possui nenhum ciclo).Além disso, também é conexo, uma vez que, como o vértice retirado possuía grau , nenhum caminho que conectava quaisquer dois outros vértices foi alterado. É possível repetir esse processo até o momento que só restar um único vértice. Note que esse método utilizado é rigorosamente o contrário do método de crescimento de árvores. Portanto para construir a árvore pelo método do crescimento de árvores basta remontá-la realizando rigorosamente o caminho contrário ao método utilizado para destruir a árvore.

4.3 Contagem de Árvores

Para entendermos a dificuldade de otimização em árvores é fundamental primeiro entendermos quantas árvores existem sobre vértices, afinal, caso essa quantidade de árvores seja relativamente pequena bastaria comparar todas elas e destacar a melhor.

Porém, antes de obter a quantidade de árvores sobre vértices é preciso balizar algumas discussões. Por exemplo: os grafos e apresentados nas figuras 29 e 30 respectivamente são iguais?

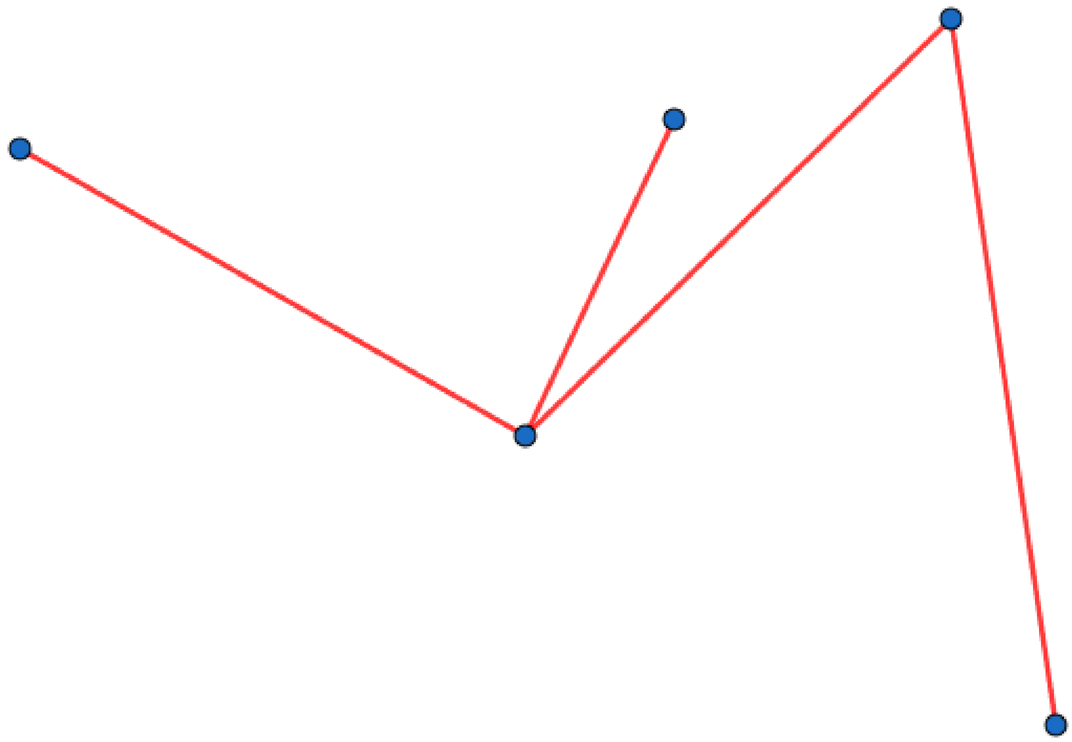


Figura 30**:** Grafo **.**

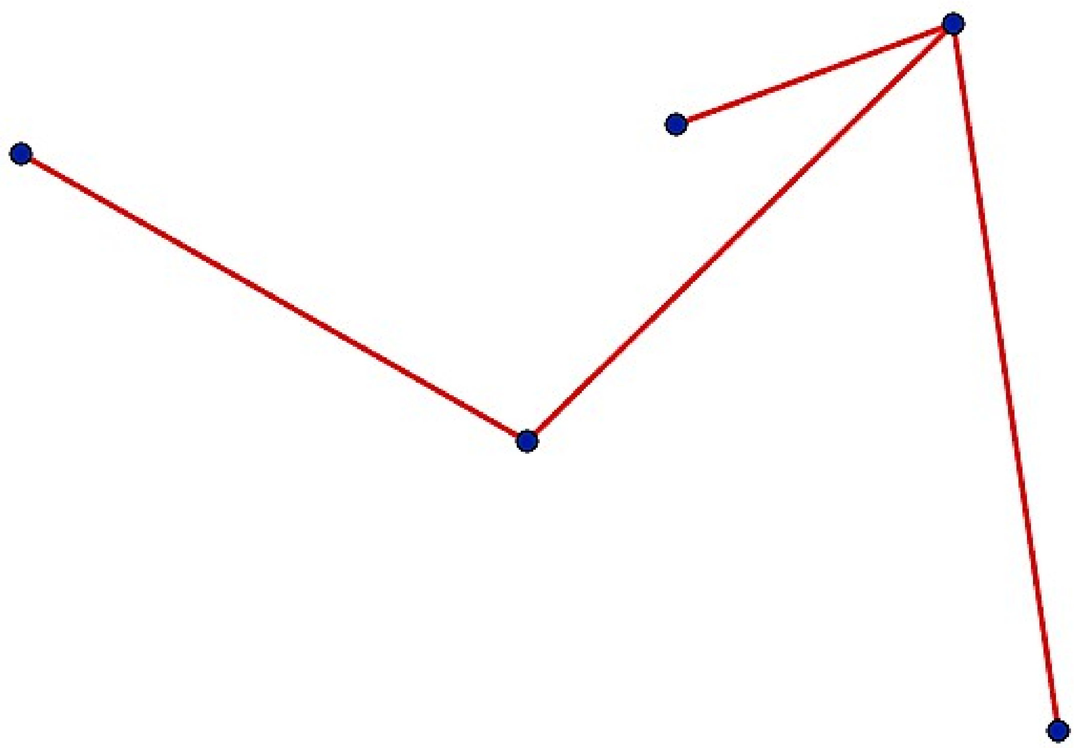


Figura 31**:** Grafo .

Não é difícil observar que existe entre e um isomorfismo. Portanto é plausível aceitar que ambas as árvores são, na verdade, iguais. Entretanto se considerarmos cada vértice como uma cidade, essas duas árvores e se mostrariam diferentes, como mostram as figuras 31 e 32.

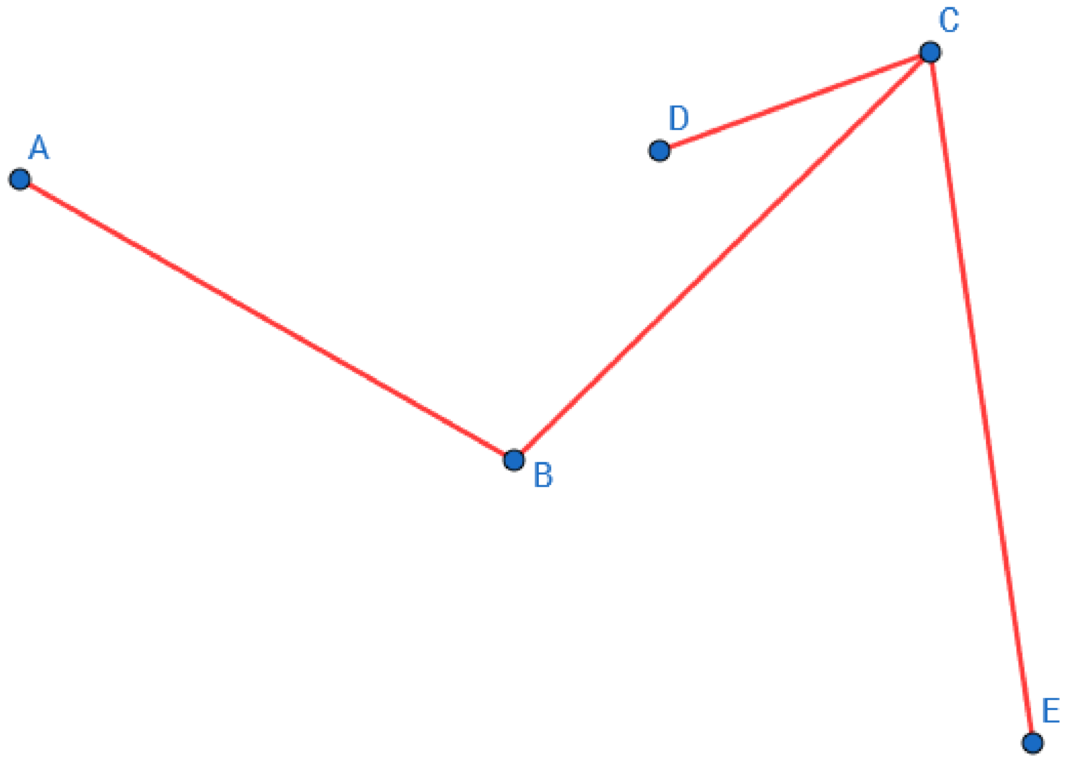


Figura 32: Grafo .

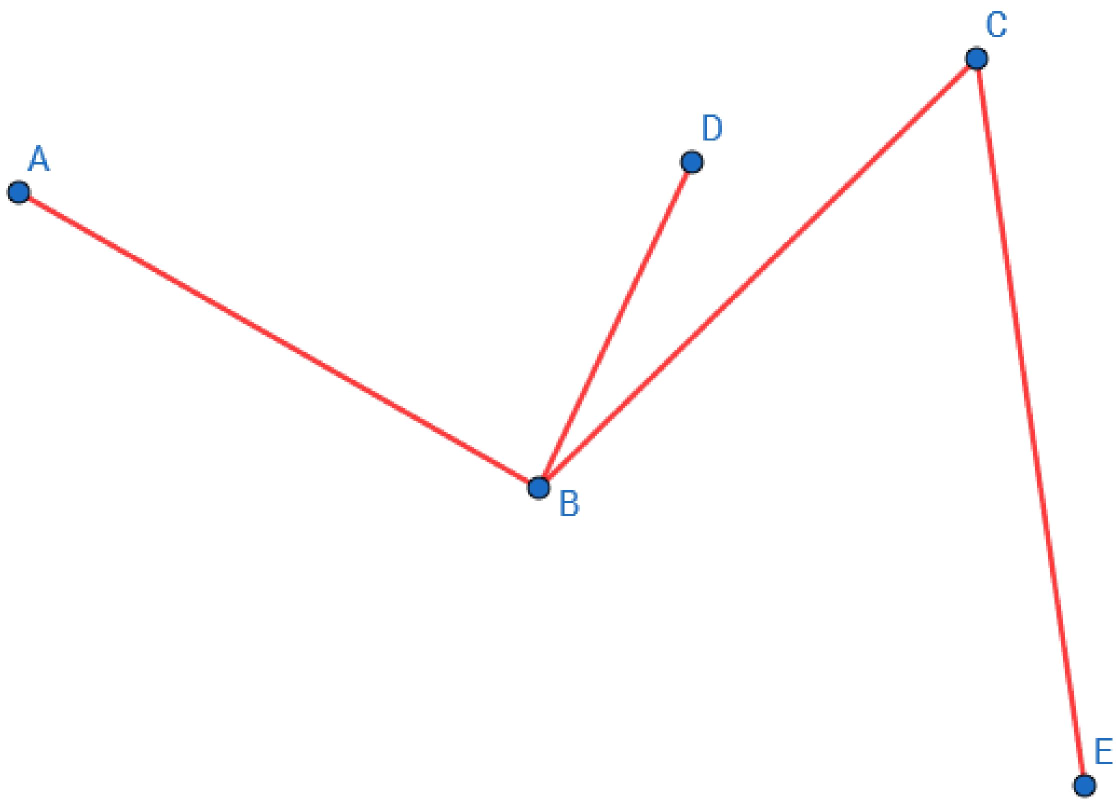


Figura 33: Grafo .

Agora é possível observar que os dois grafos são diferentes. No primeiro temos , já no segundo temos , portanto a aresta presente em não se encontra presente em e a aresta presente em não está presente em . Nesse caso esses dois grafos são diferentes.

Dessa forma devemos separar os dois tipos de árvores para conseguirmos contar da forma mais adequada. Chamaremos então as árvores nas situações das figuras 29 e 30, quando elas são consideradas iguais, ou seja, quando árvores isomorfas são consideradas iguais, de árvores *não rotuladas*. Árvores não rotuladas são aquelas que não se rotula – não se dá nome – aos vértices.

Já nas situações das figuras 31 e 32, ou seja, quando discriminamos e damos nome aos vértices – rotulamos os vértices – chamamos essas árvores de *árvores rotuladas*.

4.3.1 Problema 3

Construa todas as árvores não rotuladas sobre , , e vértices.

Resolução:

Seguem as respostas nas figuras 33, 34, 35 e 36.

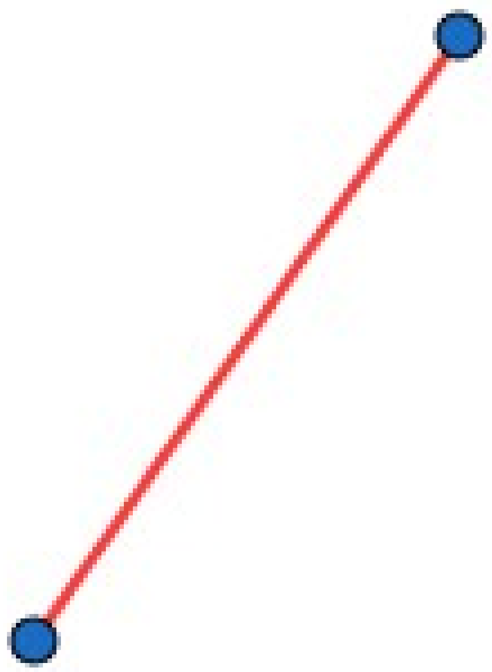


Figura 34: Árvores não-rotuladas sobre vértices.

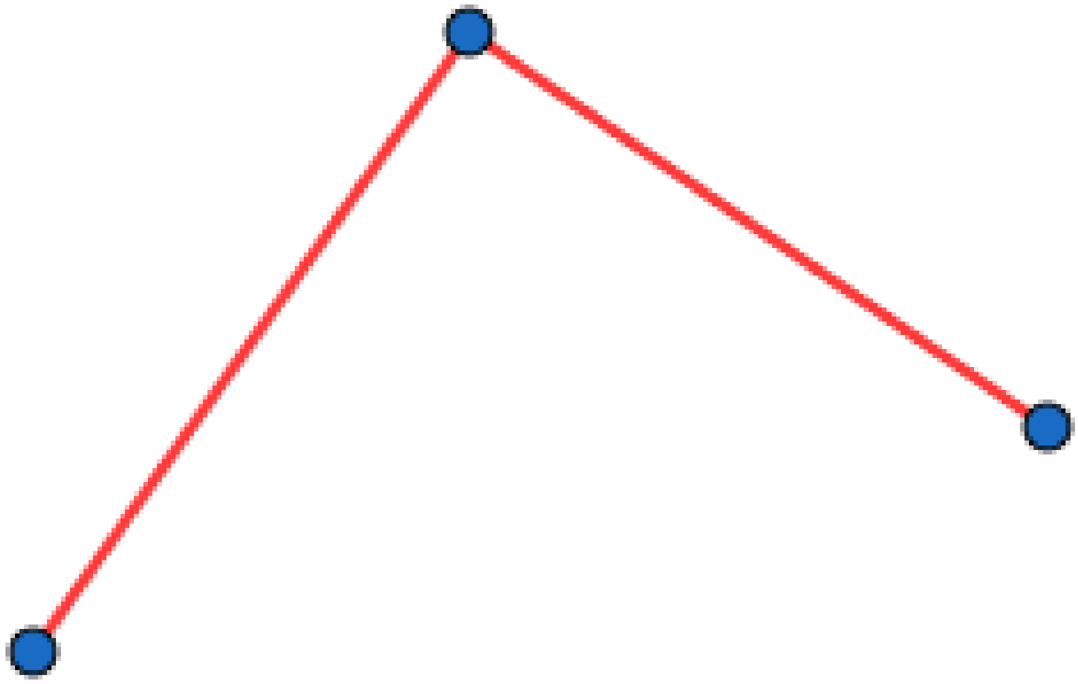


Figura 35**:** Árvores não-rotuladas sobre vértices.

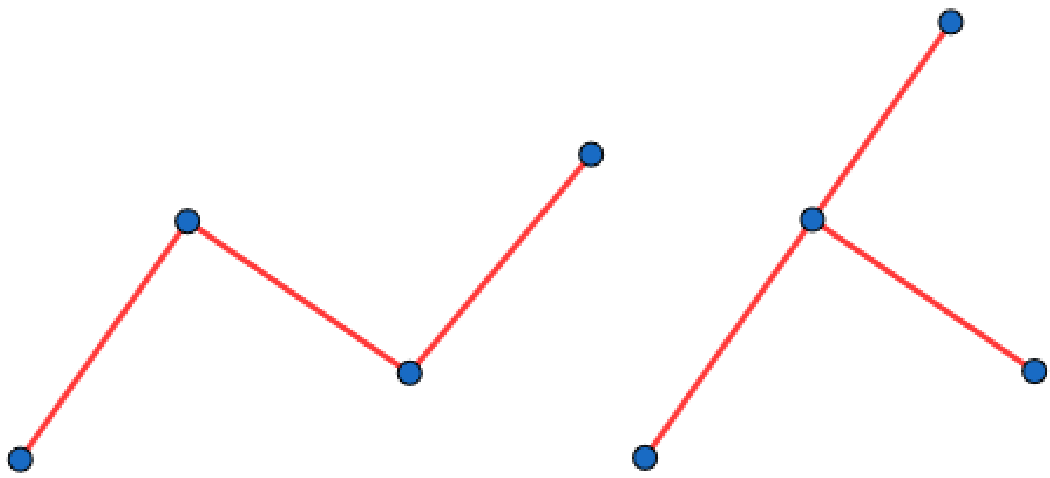


Figura 36**:** Árvores não-rotuladas sobre vértices.

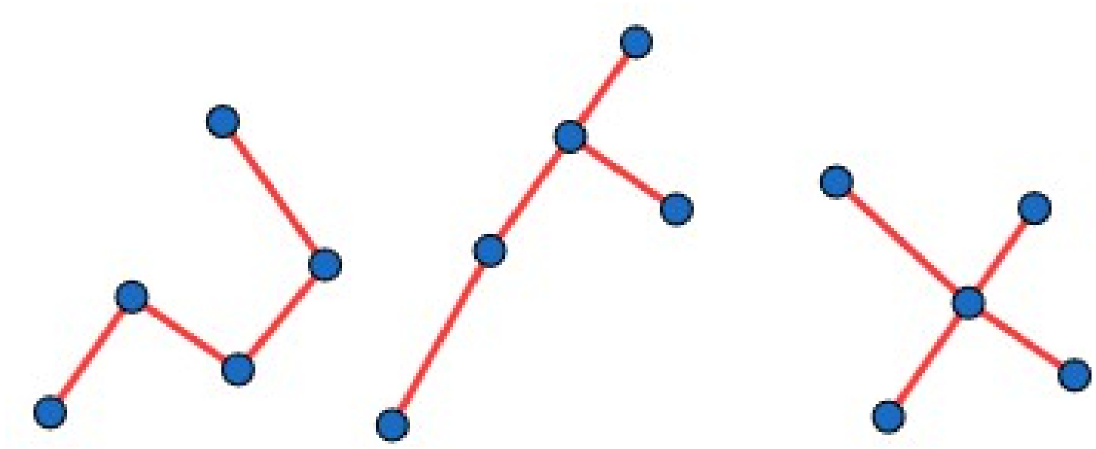


Figura 37**:** Árvores não-rotuladas sobre vértices.

Note que existe apenas uma árvore

4.3.2 Teorema de Cayley

Seja um número inteiro maior que . O número de árvores rotuladas sobre n vértices, com é .

A prova desse teorema foge ao escopo dessa dissertação, porém esse resultado será extremamente importante para o desenvolvimento do próximo capítulo.

4.3.3 Problema 4

Encontre o número de árvores rotuladas de vértices.

<u>Resolução:</u>

Pelo teorema de Cayley podemos saber que o número de árvores rotuladas sobre vértices – chamemos de – é dado por:

4.4 Exercícios Propostos

Problema 5. Prove que, em qualquer árvore que possui pelo menos uma aresta, existe um vértice que é extremidade de exatamente uma aresta (chamamos esse vértice de folha).

Problema 6. Um país tem cidades. Cada uma delas está ligada a cada uma das outras por uma única estrada. Qual o número máximo de estradas que podem ser fechadas de modo que uma pessoa ainda possa sair de qualquer cidade e chegar a qualquer outra, ainda que passe por cidades intermediárias?

Problema 7. Encontre todas as árvores não rotuladas sobre vértices

Problema 8. Calcule o número de árvores rotuladas sobre vértices.

Problema 9. Calcule o número de árvores rotuladas sobre vértices.

5. OTIMIZAÇÃO

Chamamos de *ótimo* toda árvore ou todo ciclo onde a soma dos custos de suas arestas seja o menor possível dentre todas as árvores ou ciclos sobre os mesmos vértices.

5.1 Otimização em árvores

Em um determinado estado existem cidades. Devido a constantes problemas de acidentes e estradas esburacadas, o governo desse estado decidiu refazer toda malha rodoviária desse estado. Naturalmente todas as cidades devem estar conectadas por essa nova malha rodoviária, ou seja, considerando as estradas como arestas e as cidades como os vértices podemos considerar esse grafo conexo. Ao mesmo tempo o ideal é gastar o mínimo possível, dessa forma, quanto menos estradas construirmos, ou seja, quanto menos arestas tivermos, mais barato será essa malha rodoviária.

Como já sabemos, o grafo conexo sobre n vértices que possui o menor número de arestas é uma árvore, que vai possuir arestas. Fica claro então que, para que possamos encontrar a maneira de gastar o mínimo possível para conectar essas cidades é encontrar uma árvore que custe o mínimo possível.

Porém, ainda que se tenha reduzido o problema para encontrar a menor árvore possível essa pode não parecer em um primeiro momento uma tarefa fácil. Se esse estado tiver, por exemplo, cidades, pelo Teorema de Cayley, o número possível de árvores será , ou seja, cem milhões de árvores possíveis. Conseguindo analisar uma árvore construída por minuto, esse estado gastaria mais de anos para conseguir escolher a melhor forma de construir essa malha rodoviária. E isso lidando com um estado com cidades. A critério de comparação, o estado brasileiro que possui o menor número de municípios é o estado de Roraima, com municípios. Em Roraima o número de árvores a se analisar seria de . Se o governo de Roraima gastasse um segundo para analisar cada árvore, ele precisaria de mais de de anos para decidir qual malha rodoviária construir. Agora, se cada um dos mais de habitantes ajudasse nessa conferência seriam necessários quase anos. Naturalmente, analisar cada árvore se torna absolutamente inviável.

Como não é possível em tempo viável fazer a análise de todas as árvores em tempo hábil, o governante decide que quer inaugurar o máximo de obras possível. Dessa forma assim que ele tiver dinheiro para construir a estrada mais barata ele manda construir. Depois ele constrói a segunda mais barata e assim sucessivamente sempre tomando cuidado para evitar ciclos. Citaremos um exemplo de um país com um estado chamado hipotético que possui cinco cidades, as cidades , , , e , como mostra a Figura 37. Certamente para saber qual é a “melhor” estrada a se construir temos que saber o custo de se construir as estradas que liguem duas cidades. Esse trabalho, porém, é destinado aos engenheiros. O trabalho do matemático é apenas dizer qual estrada construir. Tome então os custos das estradas que conectam duas cidades discriminados na tabela abaixo. Considere que a estrada conecta a cidade A à cidade , a estrada conecta a estrada à estrada , e assim sucessivamente.

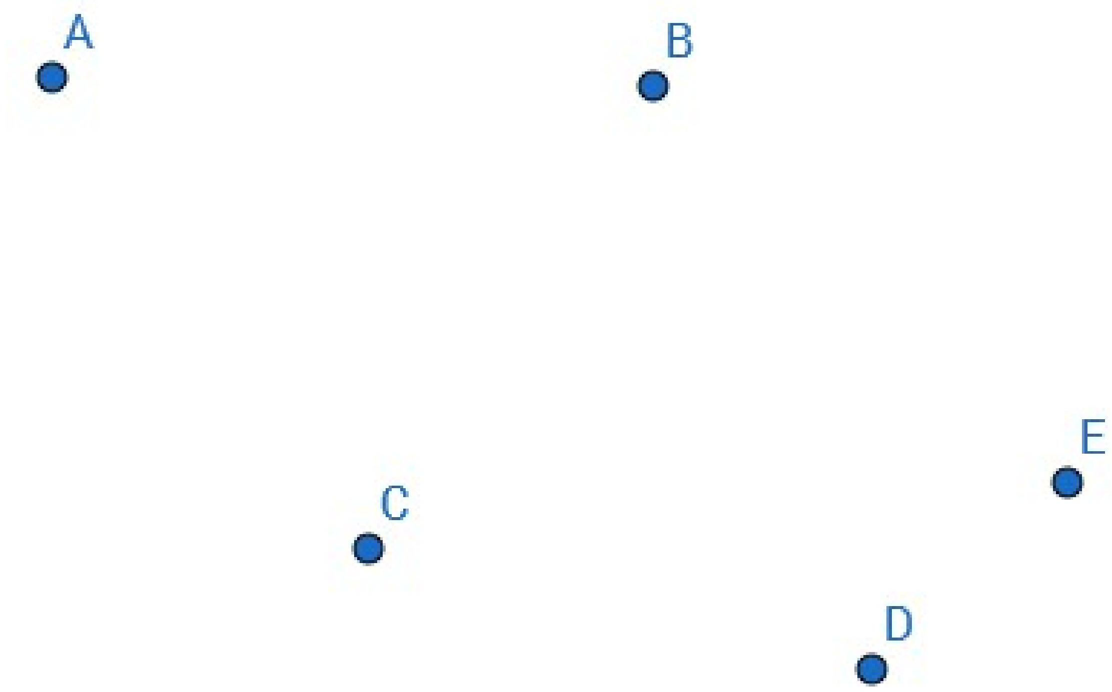


Figura 38: Estado Hipotético.

Tabela 3: Custo das estradas no Estado Hipotético.

Estrada	Custo
AB	34
AC	65
AD	76

AE	39
BC	19
BD	23
BE	25
CD	47
CE	97
DE	12

Quando o governo inicia a construção das estradas a situação se mostra até bem “tranquila”. Ele constrói as três estradas mais baratas, que são as estradas , e , como mostra a Figura 38. Mas se mantivéssemos essa sequência de sempre construir a estrada mais barata construiríamos em seguida a estrada , como mostra a Figura 39. Essa construção, porém, impede que se faça a melhor árvore, afinal com a estrada é construído um ciclo. Dessa forma descartamos a construção dessa estrada e partimos para construir a estrada seguinte na ordem da mais barata para a mais cara, resultando no grafo da Figura 40.

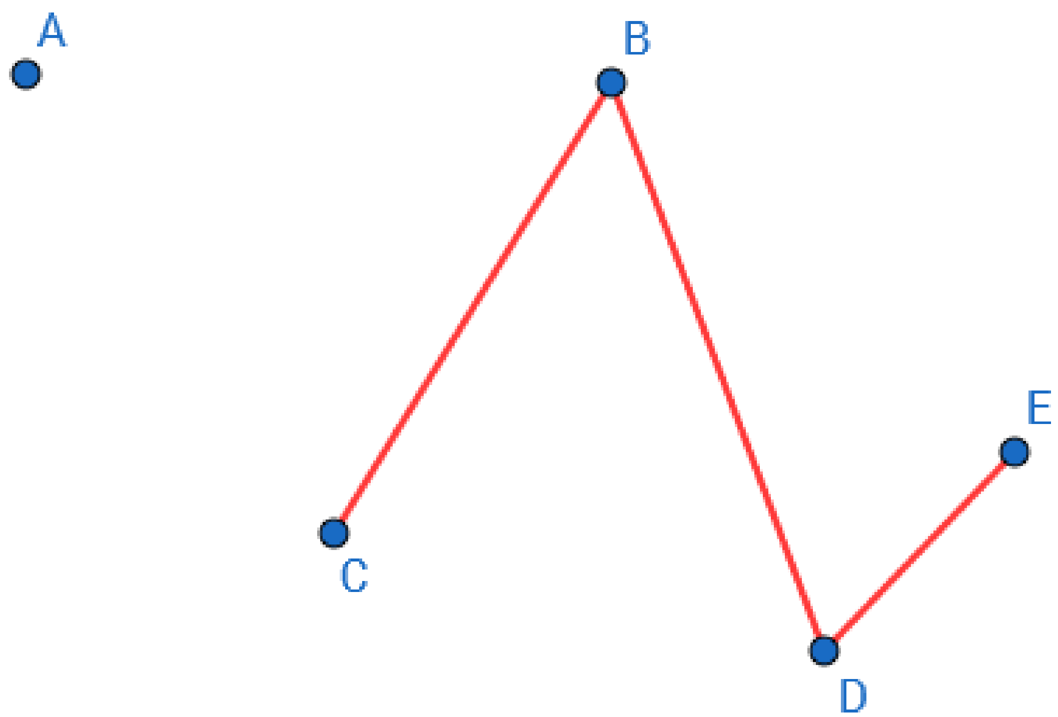


Figura 39: Estado Hipotético depois da construção das três primeiras estradas.

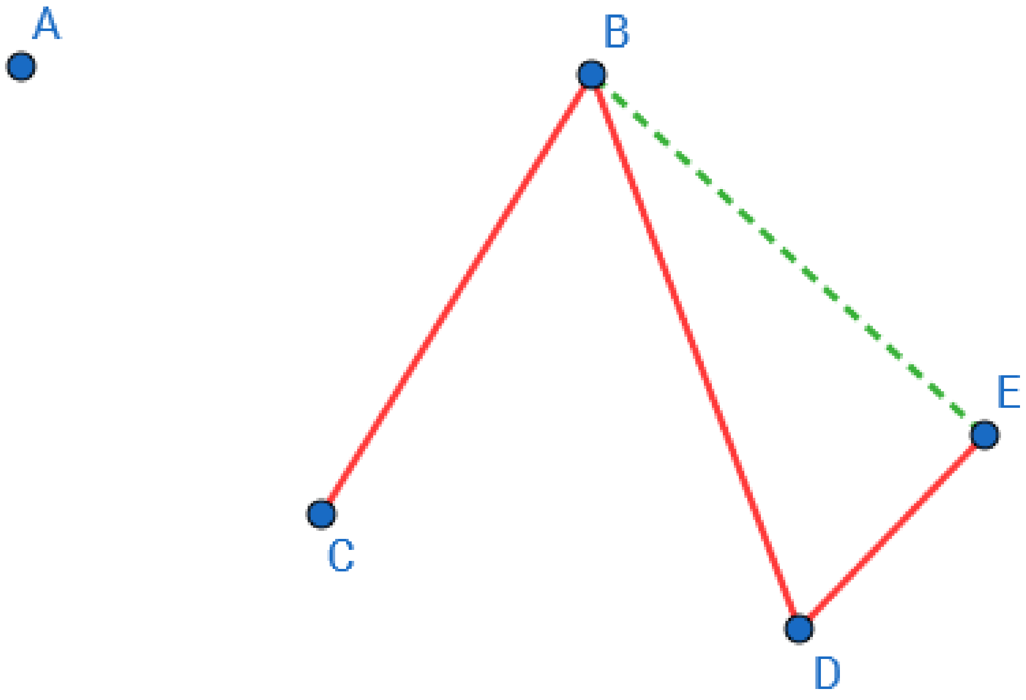


Figura 40: Como ficaria a malha rodoviária no estado Hipotético se construísse a quarta estrada mais barata.

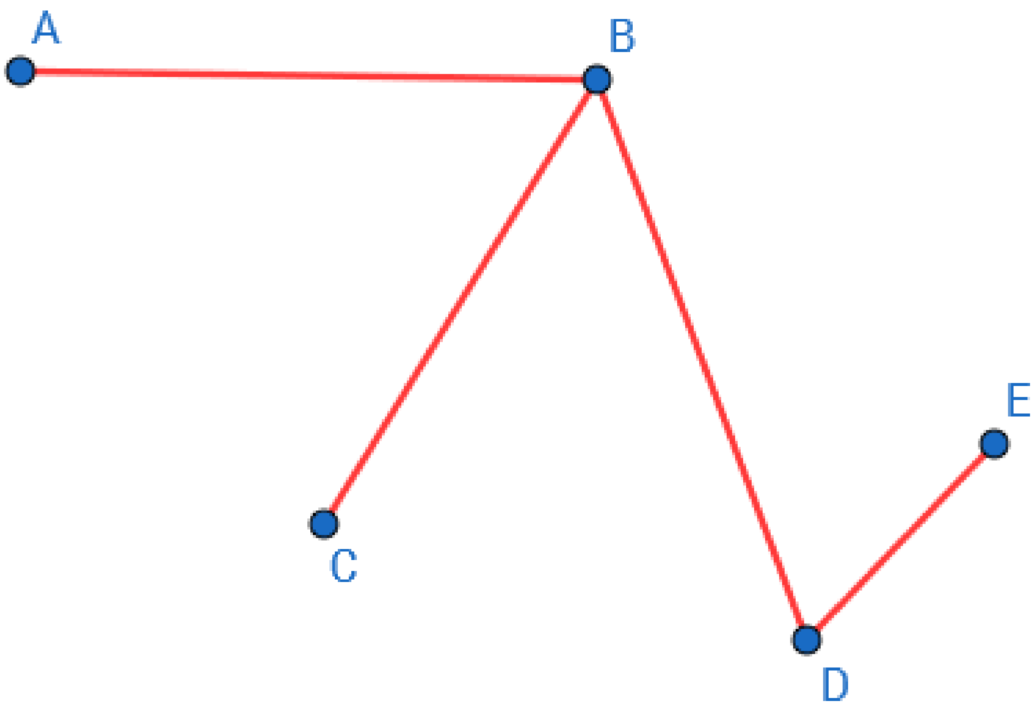


Figura 41: Como realmente fica a malha rodoviária do Estado Hipotético.

Agora, será que esse método realmente seria a melhor maneira de construir essa malha rodoviária? Embora pareça sem um critério matemático fundamentado, iremos provar a seguir que esse de fato esse método, conhecido como Algoritmo de Kruskal ou Algoritmo Guloso é o que constrói a árvore mais barata possível.

5.1.1 Teorema do Algoritmo de Kruskal ou Algoritmo Guloso

A árvore obtida pelo Algoritmo de Kruskal (ou Algoritmo Guloso) é a árvore ótima.

<u>Demonstração:</u>

Tome o grafo que se diz mais barato sobre os n vértices que não tenha sido construído a partir do Algoritmo Guloso. Agora iniciamos o método de construção da árvore ótima pelo Algoritmo Guloso, criando o grafo . Imagine agora como a primeira aresta construída pelo Algoritmo Guloso que não faça parte de , ou seja, é a aresta mais barata que pertence a mas não pertence a . Coloque então no grafo . Naturalmente, como é uma árvore, o acréscimo da aresta vai formar um ciclo. Podemos também garantir que esse ciclo não está completamente contido em , afinal é uma árvore. Dessa forma garantimos que existe uma aresta v que pertença a mas não pertença a . É fácil perceber também que o custo de é maior ou na melhor das hipóteses igual ao de , uma vez que não foi escolhida na hora da confecção de . Dessa forma, subtraindo a aresta e deixando a aresta estamos criando assim o grafo . Como trocamos em uma aresta por outra de valor menor ou igual, podemos garantir que o custo de é menor ou igual ao custo do grafo . Repetindo esse processo quantas vezes for necessária chegaremos à conclusão que o grafo seguinte sempre terá um valor menor ou igual ao grafo anterior. Claramente após o último estágio de troca de arestas o grafo que iremos encontrar é justamente o grafo . Portanto podemos garantir que o grafo tem custo menor ou igual a qualquer que seja o grafo . Portanto é a árvore ótima (talvez não a única, mas de fato é uma das).

Embora o Algoritmo de Kruskal se mostre um método bem atrativo tanto por sua facilidade na compreensão quanto por sua eficiência, ele não pode ser utilizado para a construção do ciclo ótimo. Para exemplificar esse fato vamos tentar encontrar o ciclo ótimo considerando os vértices mostrados na figura 41 e considerando que o custo de uma aresta corresponde ao seu tamanho. Teremos então na Figura 42 o ciclo obtido pelo Algoritmo Guloso. Já na figura 43 teremos o ciclo ótimo.

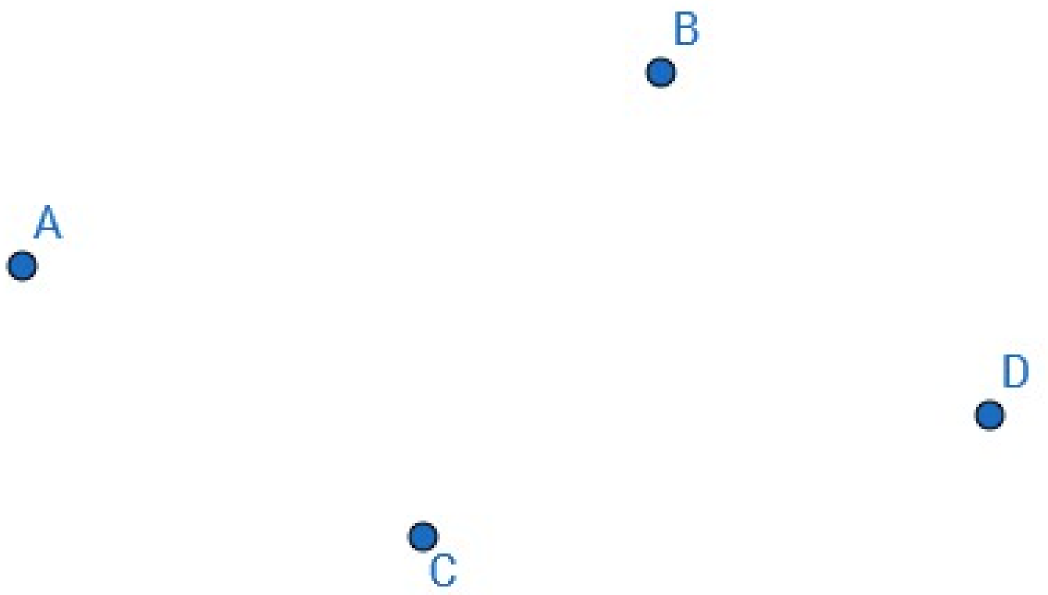


Figura 42: Vértices para se obter um ciclo ótimo.

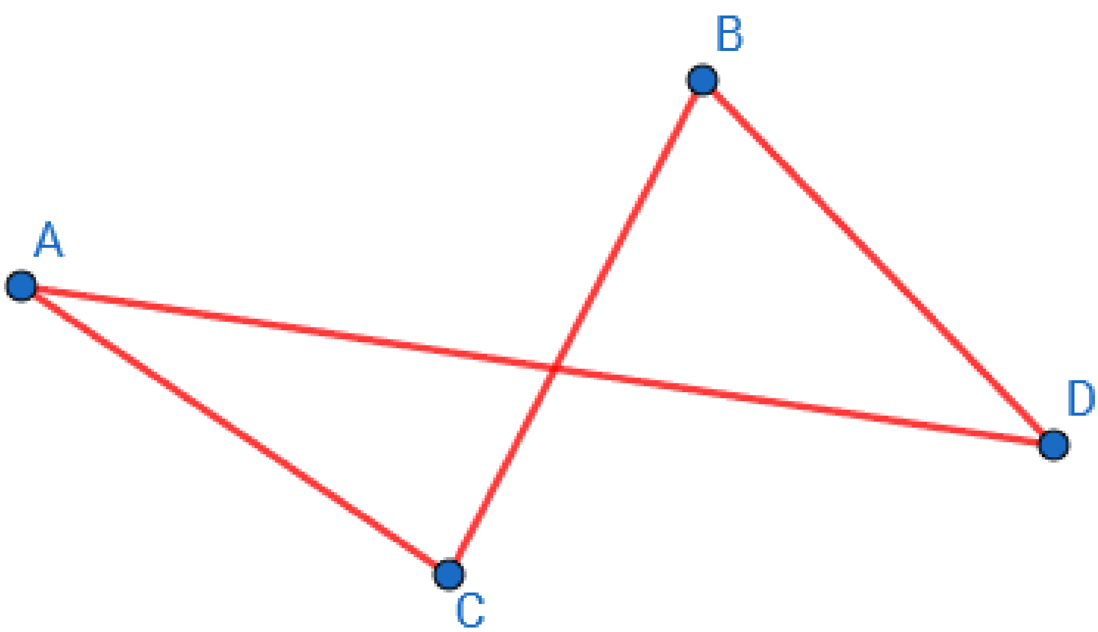


Figura 43: Ciclo obtido pelo Algoritmo Guloso.

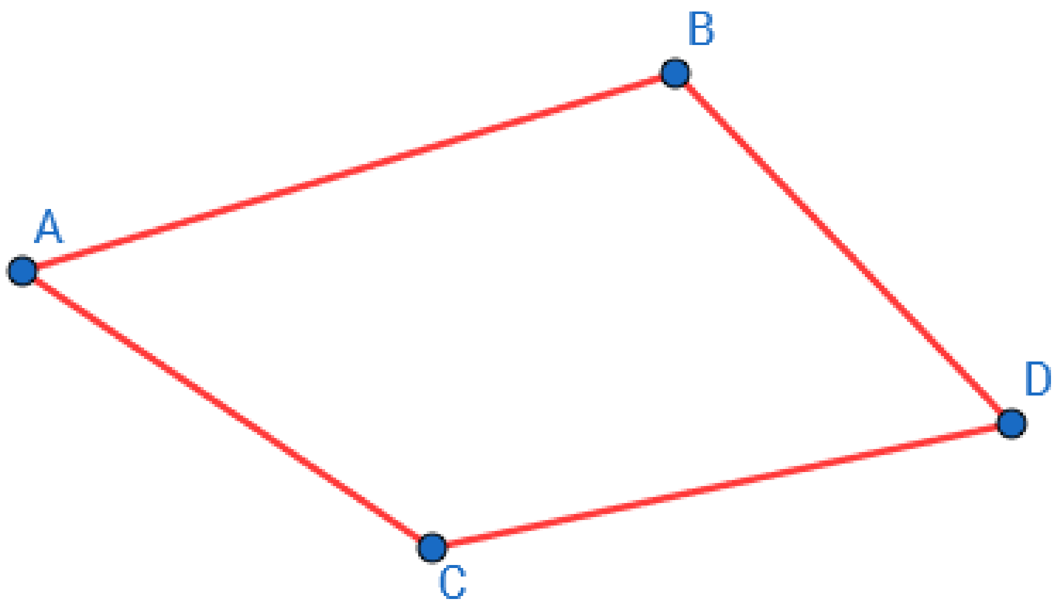


Figura 44: Ciclo Ótimo.

Ainda que não seja válido para ciclos, o Algoritmo Guloso ainda é bem útil para a construção da melhor árvore. Mas seria esse o único método para se obter a árvore ótima?

Imagine agora que esse estado Hipotético tenha passado por uma séria crise financeira, e com isso elegeu um governo com a promessa de contenção de gastos. Ainda que haja essa crise foi verificada a urgente necessidade de se refazer a malha rodoviária do estado. Como o governante não sabia que o Algoritmo de Kruskal dava a árvore mais barata, ele decidiu evitar de fazer as estradas caras. Dessa forma ele enumeraria as estradas da mais cara para a mais barata e iria excluir a possibilidade de construção das mais caras o quanto fosse possível. Na situação do estado Hipotético ele excluiria as estradas , , , e , nessa ordem. Porém a estrada mais cara seguinte seria a . Mas se ele impedir construção da estrada a cidade ficaria desconexa das demais cidades, portanto a estrada seria construída. Ele segue essa lógica até construir a malha rodoviária do estado.

5.1.2 Problema 1

Prove que esse governo que tem por objetivo conter gastos também construirá a malha rodoviária ótima.

Resolução:

A prova dessa afirmação se assemelha muito à prova do Algoritmo de Kruskal.

Tome o grafo que se diz mais barato sobre os vértices que não tenha sido construído a partir do método proposto. Agora iniciamos o método de construção da árvore ótima pelo método proposto, criando o grafo . Imagine agora como a primeira aresta construída por este método que não faça parte de , ou seja, é a aresta mais barata que pertence a mas não pertence a . Coloque então no grafo . Naturalmente, como é uma árvore, o acréscimo da aresta vai formar um ciclo. Podemos também garantir que esse ciclo não está completamente contido em , afinal é uma árvore. Dessa forma garantimos que existe uma aresta que pertença a mas não pertença a . É fácil perceber também que o custo de é maior ou na melhor das hipóteses igual ao de , uma vez que foi excluída na hora da confecção de . Dessa forma, subtraindo a aresta e deixando a aresta estamos criando assim o grafo . Como trocamos em uma aresta por outra de valor menor ou igual, podemos garantir que o custo de é menor ou igual ao custo do grafo . Repetindo esse processo quantas vezes for necessária chegaremos à conclusão que o grafo seguinte sempre terá um valor menor ou igual ao grafo anterior. Claramente após o último estágio de troca de arestas o grafo que iremos encontrar é justamente o grafo . Portanto podemos garantir que o grafo tem custo menor ou igual a qualquer que seja o grafo . Portanto é a árvore ótima (talvez não a única, mas de fato é uma das).

Voltando à discussão de se encontrar o ciclo mais barato possível sobre vértices, um importante problema nessa parte de otimização que este capítulo discute é o Problema do Caixeiro Viajante.

Basicamente esse problema consiste em um vendedor ambulante que quer viajar por cada uma das cidades onde atua e posteriormente voltar para casa. Ao mesmo tempo, quanto menos esse vendedor andar melhor vai ser para seus lucros. Portanto esse problema consiste em achar o caminho ótimo entre as n cidades e posteriormente voltar para casa, ou seja, encontrar o ciclo ótimo nesse estado, considerando as cidades como os vértices do grafo.

5.2 Problema do Caixeiro Viajante

Se observarmos a situação, o problema do caixeiro viajante está intimamente ligado aos ciclos hamiltonianos. Fica claro também que, se um grafo com arestas possui algum ciclo hamiltoniano, então o passeio mais curto passa por vértices. Entretanto caso no grafo não haja um ciclo hamiltaniano o número de arestas que o passeio mais curto vai precisar passar é de arestas. Existem alguns algoritmos que possam resolver esse problema, entretanto nenhum deles é tão elegante, simples e eficiente quanto o algoritmo guloso é para a construção da árvore ótima, portanto eles fogem do escopo desse projeto.

Traremos então um algoritmo que seja mais simples de acompanhar e que, embora não nos dê o ciclo ótimo, nos traz um ciclo “não tão ruim”, mas esse algoritmo só será válido em grafos que respeitem a desigualdade triangular, ou seja, se é a aresta que liga o vértices e , se é a aresta que liga os vértices e e a aresta que liga os vértices e , . Como já vimos anteriormente, o Algoritmo Guloso não é suficiente para a construção de um ciclo ótimo, porém ele pode nos ajudar a obter esse ciclo “não tão ruim”. Tome um grafo onde é válida a desigualdade triangular. Naturalmente esse grafo vai possuir uma árvore ótima. Vamos chamar de o custo dessa árvore. Uma possível solução seria passear por toda a árvore afim de visitar todos os vértices possíveis, conforme mostra a Figura 44.

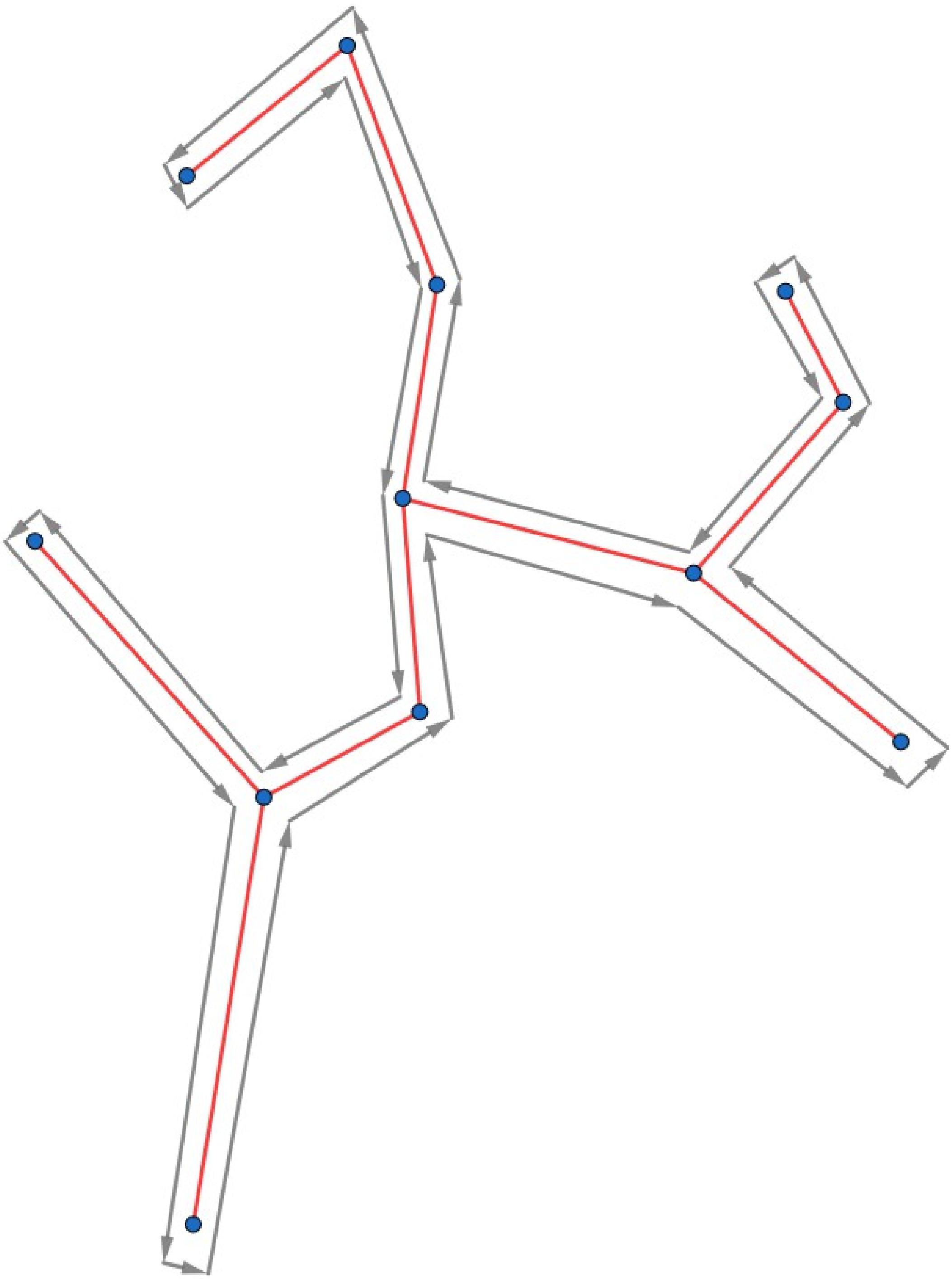


Figura 45**:** Uma árvore ótima.

Claramente esse passeio mostrado na Figura 44 visita todas as cidades passando por cada estrada mais de uma vez, além de visitar algumas cidades mais de uma vez também. Porém embora isso pareça um problema, na verdade auxilia a encontrar um ciclo ainda mais barato, uma vez que atalhos podem ser construídos nessa volta, como por exemplo o atalho mostrado na Figura 45.

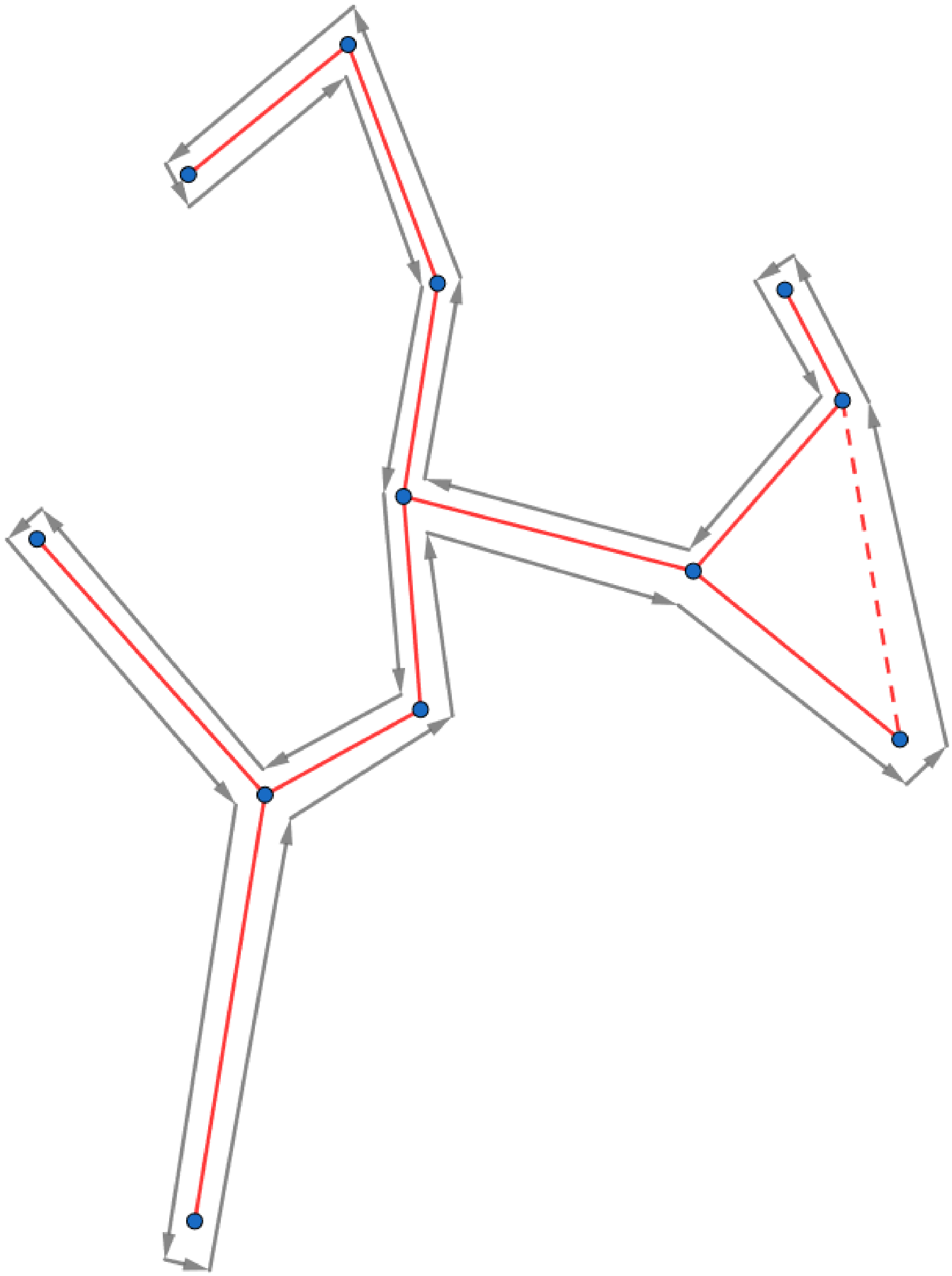


Figura 46: Primeiro passo do Algoritmo de Atalho de Árvore.

Podemos repetir esse processo ainda algumas vezes afim de encurtar ainda mais a nossa volta. O resultado dessa repetição é possível ser visto na Figura 46.

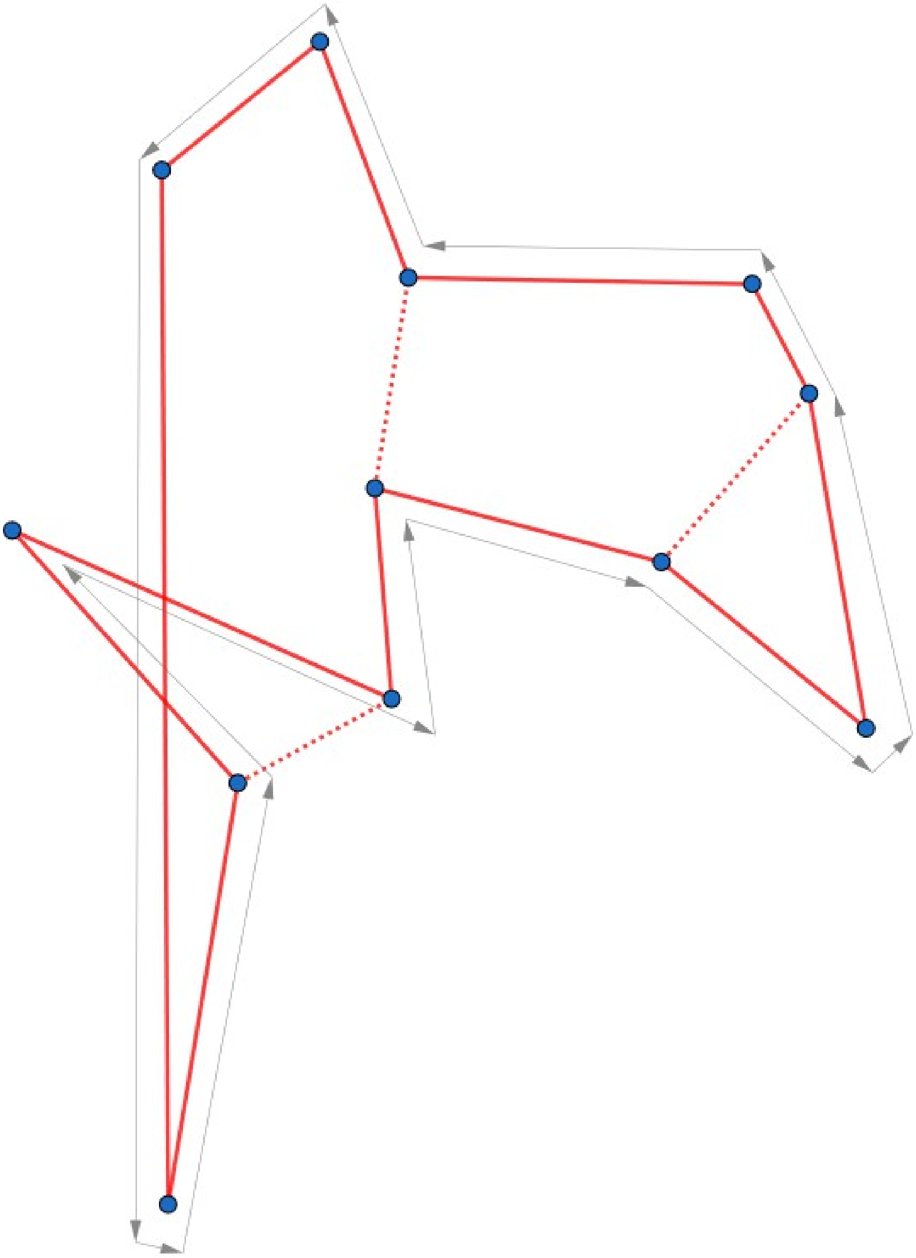


Figura 47: Resultado do Algoritmo de Atalho de Árvore.

5.2.1 Teorema

Se os custos em um Problema do Caixeiro Viajante satisfazem a desigualdade triangular, então o Algoritmo de Atalho de Árvore encontra uma volta que custa menos de duas vezes a volta ótima.

Demonstração

O custo do passeio ao redor de toda a árvore ótima é exatamente duas vezes o custo total dessa árvore . Como é válida a desigualdade triangular podemos garantir que, quando fazemos atalhos encurtamos nosso passeio. Portanto garantimos que o custo do ciclo obtido pelo Algoritmo de Atalho de Árvore não é maior que duas vezes mais caro que a árvore ótima. Mas sabemos também que o custo da volta ótima é, necessariamente, maior que o custo da árvore ótima, afinal tirando-se uma aresta do ciclo ótimo você reduz o custo dessa aresta e também obtém uma árvore, ne necessariamente não custa menos que a árvore ótima (na melhor das hipóteses ela pode ter o mesmo custo da árvore ótima, ou seja, ser a árvore ótima). Portanto temos:

Logo garantimos que o custo do ciclo obtido pelo Algoritmo de Atalho de Árvore tem custo menor que o dobro da volta ótima.

5.3 Problemas Propostos

Problema 2: Imagine um estado onde governos que defendem que as estradas devam ser construídas logo e governos que defendem a contenção de gastos vencem eleições de maneira imprevisível, ou seja, a qualquer momento na construção da malha rodoviária pode ser utilizado o Algoritmo Guloso ou o método de eliminação das arestas mais caras. Prove que ainda assim o custo da construção dessa malha rodoviária será o mínimo possível.

Problema 3: Se a sede do governo é a cidade , então muito provavelmente a primeira estrada a ser construída será a linha mais barata a partir de (para alguma cidade , digamos), daí a estrada mais barata que conecte a cidade ou a cidade à uma outra, e assim sucessivamente. Mostre que ainda assim a malha rodoviária construída será a mais barata possível.

Problema 4: Formule como o governo que evita as estradas mais caras construiria um ciclo através de todas as cidades. Mostre por meio de um exemplo que esse governo nem sempre obtêm a solução mais barata.

Problema 5: A volta mostrada na Figura 46 é a mais curta possível?

Problema 6: Prove que se todos os custos são proporcionais às distâncias, então a volta mais curta não pode intersectar a si própria.

Problema 7: Prove que se o custo de todas das arestas é diferente, então existe apenas uma árvore mais barata.

Problema 8: Descreva como você pode encontrar a árvore geradora mais barata para a qual seja mínimo:

a) O produto dos custos das arestas.

b) O máximo dos custos das arestas.

Problema 9: Encontre a volta mais curta através dos pontos de uma grade quadrada de ordem:

a)

b)

c)

d)

Problema 10: Mostre por meio de um exemplo que se não é assumida a desigualdade triangular, então a volta encontrada pelo Algoritmo de Atalho de Árvore pode ser mais longa que 1000 vezes a volta ótima.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Teoria dos Grafos é um tema pouco trabalhado na educação como um todo, mas pode ser utilizado como um bom gatilho para que os estudantes passem a sentir prazer no estudo de matemática. Este trabalho apresenta um estudo prático que pode ser utilizada para o desenvolvimento de desafios em sala e estimulando a competitividade sadia e o trabalho em equipe por parte dos alunos.

Sabemos que a implementação desse conteúdo no ensino básico se mostra complicada por dois principais pontos: o enrijecido currículo básico que traz uma quantidade enorme de conteúdo para ser trabalhado em um período curto e o próprio desconhecimento por parte dos professores do assunto de grafos. Porém, essa dissertação procura mostrar que o conteúdo base para grafos envolve conceitos já ensinados no ensino fundamental e, portanto, rápidos cursos complementares – que podem ser assegurados aos professores por meio da formação continuada – podem servir de momentos para a especialização acerca desse conteúdo, possibilitando assim o acesso aos professores ao tema. Dentro de pouco tempo, então, poderemos introduzir grafos no ensino básico.

Assim, essa dissertação apresenta uma proposta, tanto para os construtores do currículo básico quanto para os autores de livros didáticos, de iniciar um processo de inclusão desse conteúdo, ainda que como curiosidade, para que assim o estudante esteja mais interessado no aprendizado de matemática e mais preparado para resolver problemas práticos do cotidiano.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acusação representada por grafos, disponível em https://ogimg.infoglobo.com.br/in/20110516-2da-989/FT1086A/420/xlula-info.jpg.pagespeed.ic.LFY6XYYESv.jpg, acessado em 11/05/2018.

BRASIL/MEC. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC; SEMTEC, 2002.

Cidade de Köingsberg, disponível em https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5d/Konigsberg_bridges.png, acessado em 11/05/2018.

Circuito elétrico com representação inspirada em grafos, disponível em https://3.bp.blogspot.com/_yhcFVb0usrM/TJJSOe3V8oI/AAAAAAAABxE/hcaOI2S1QNY/s320/resistores.png, acessado em 11/05/2018.

ESPÍRITO SANTO/SEDU. Currículo Básico Escola Estadual: Área de Ciências da Natureza, Matemática. Vitória: SEDU, 2009.

FOMIN, Dimitri & GENKIN, Sergei & ITENBERG, Ilia. Mathematical Circles (Russian Experience). American Mathematical Society. Mathematical World, Volume 7, 1996.

L. Lovász, J. PeliKán e K. Vesztergombi: Matemática Discreta. 2013.

Molécula representada como Grafo, disponível em https://thumbs.dreamstime.com/b/forma%C3%A7%C3%A3o-da-mol%C3%A9cula-5217666.jpg, acessado em 11/05/2018.

Pesquisa Operacional II - Teoria dos Grafo. http://www.pucrs.br/ciencias/viali/graduacao/po_2/material/laminas/grafos/TF_01.pdf, acessado em 11/05/2018.

Problema dos 4 cavalos A, disponível em http://www.cienciahoje.org.br/uploads/ckeditor-ckfinder-integration/uploads/images/2016/03/1355042568image_mini.jpg, acessado em 11/05/2018.

Problema dos 4 cavalos B (adaptada), disponível em http://www.cienciahoje.org.br/uploads/ckeditor-ckfinder-integration/uploads/images/2016/03/1355042568image_mini.jpg, acessado em 11/05/2018.

Propaganda de rede social representando conexões entre pessoas como grafo, disponível em https://static.xx.fbcdn.net/rsrc.php/v3/yc/r/GwFs3_KxNjS.png, acessado em 11/05/2018.

8. ANEXO – RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Capítulo 2

Problema 8

Claramente isso se trata de uma árvore. Como temos cidades, ou seja, vértices, serão necessárias estradas, ou seja, arestas.

Problema 9

Considere cada pessoa um vértice e, se duas pessoas se conhecem entre seus vértices são formadas arestas.

a) Não, pois para satisfazer essa condição deveríamos ter arestas, o que é impossível uma vez que a quantidade de arestas é um número natural.

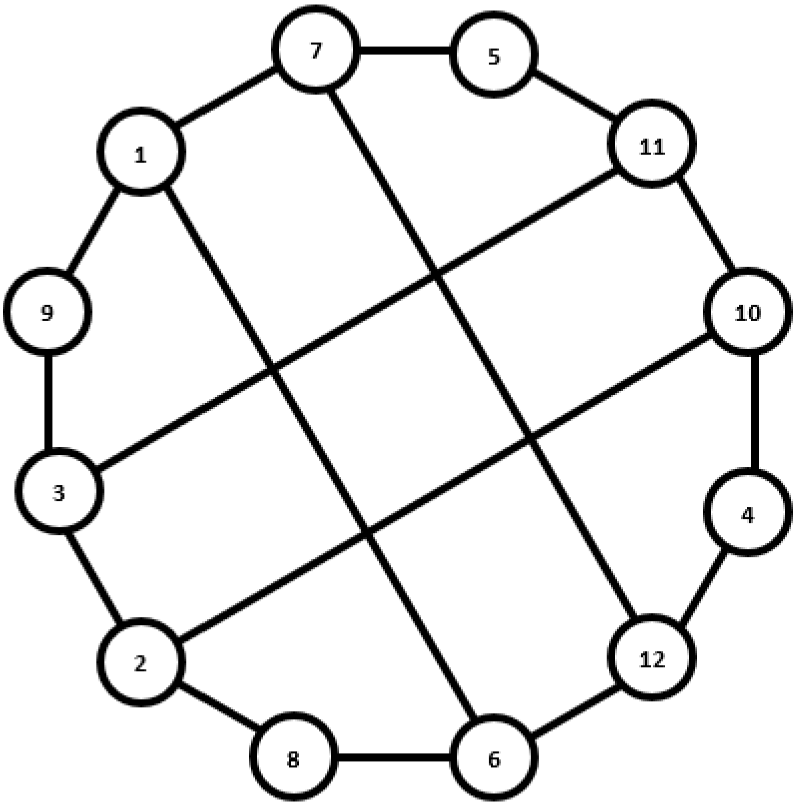
b) Sim, basta haver um total de arestas.

Problema 10

Se enumerarmos o tabuleiro ficaremos com a distribuição abaixo:

	1	2	
3	4	5	6
7	8	9	10
	11	12	

Facilmente percebemos que podemos representar os possíveis passeios do cavalo com o grafo abaixo:



Portanto é sim possível um caminho que passe por todas as casas uma vez e volte para a casa de onde saiu.

Problema 11

200 estradas.

Problema 12

Certamente pelo menos uma das pontes está ligando alguma das ilhas à terra firme, afinal o número de vértices de grau ímpar em um grafo é sempre par.

Problema 13

Sendo cada pessoa um vértice e cada aperto de mão uma aresta que liga duas pessoas, uma pessoa que tenha apertado mãos uma quantidade ímpar de vezes é o mesmo que um vértice de grau ímpar, portanto, como a quantidade de vértices ímpares tem que ser par, a quantidade de pessoas que apertaram mãos uma quantidade ímpar de vezes é par.

Problema 14

Se fosse possível retirar essa aresta duas opções surgiriam: ou ela estaria ligada a dois vértices com grau igual e, consequentemente, cada uma das componentes conexas teria um número ímpar de vértices de grau ímpar, o que é impossível. Caso contrário só uma das componentes teria um vértice de grau dois, o que impediria as duas componentes de serem isomórficas.

Capítulo 3

Problema 4

Nessa situação podemos considerar os lagos como vértices, os canais como arestas e as ilhas como regiões. Assim: e . Pela fórmula de Euler . Daí tiramos que o número de regiões é 5. Mas temos que uma das regiões é o continente, logo o número de ilhas é quatro.

Problema 5

Neste caso podemos considerar como vértices do grafo os vértices do quadrado mais os pontos adicionados, os seguimentos de reta serão nossas arestas e, por fim, cada triangulo mais a região externa ao quadrado serão nossas regiões. Podemos observar aqui que cada aresta limita exatamente duas regiões, logo, se somarmos a quantidade de arestas de cada região teremos exatamente o dobro da quantidade de arestas do grafo. Como temos todas as regiões com três arestas a exceção da região externa que possui quatro, podemos afirmar que . Já sabemos também que o número total de vértices . Assim sendo, utilizando a fórmula de Euler:

Resolvendo essa conta temos . Nesse ponto é importante lembrar que uma das regiões é a região externa, logo teremos 42 triângulos.

Problema 6

Para facilitar o argumento, imaginemos um cochilo como algo instantâneo (o que, na prática, não corresponde à verdade). Consideremos o grafo cujos vértices são os 10 cochilos e tal que dois vértices estão conectados por uma aresta se os cochilos correspondentes são simultâneos.

Como são 10 vértices e 10 arestas, este grafo não pode ser uma árvore, logo deve ter um ciclo. Um ciclo tem pelo menos três vértices, os quais não podem ter dois cochilos (vértices) de um mesmo matemático, pois cochilos diferentes de um mesmo matemático não são simultâneos. Logo, este ciclo representa um momento em que pelo menos três matemáticos estavam cochilando simultaneamente.

Problema 7

Se o grau de cada vértice é 3, temos que a quantidade de arestas é dada por:

Aplicando a fórmula de Euler:

Como é um número natural, temos que a quantidade de regiões no grafo é superior a 2. Dessa forma garantimos que há ao menos um ciclo no grafo.

Problema 8

Se observarmos, considerando o cubo como um grafo percebemos que nesse grafo existem 8 vértices de grau ímpar. Dessa forma, como um vértice de grau ímpar deve ser início ou final de um passeio euleriano, precisaríamos de ao menos 4 passeios para passear por todos os vértices. Dessa forma seriam necessários 4 pedaços de arame.

Capítulo 4

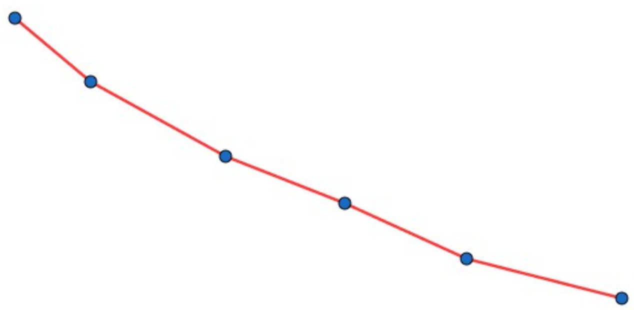
Problema 5

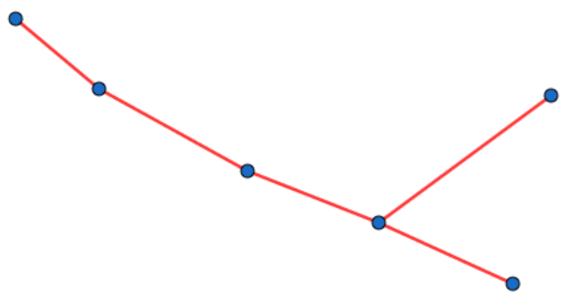
Comece um caminho a partir de um vértice arbitrário, seguindo por qualquer aresta. Se essa aresta que escolhemos primeiro chegar em um vértice de grau um teremos aí nossa folha. Caso contrário continua-se o caminho. Podemos observar que não poderemos visitar vértices já visitados (caso isso fosse possível isso mostraria que esse grafo possui um ciclo, portanto não seria uma árvore). Como o grafo possui uma quantidade finita de vértices – digamos n vértices – naturalmente chegará um momento que ele não poderá mais visitar nenhum vértice, logo esse último vértice visitado será uma folha.

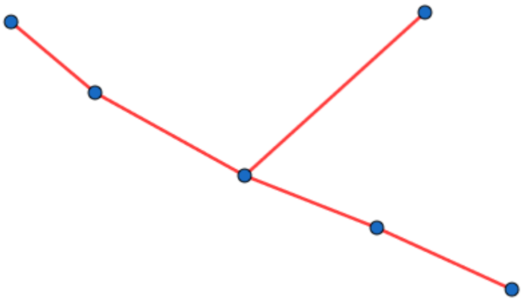
Problema 6

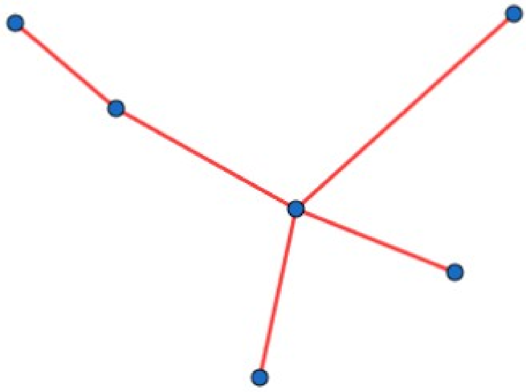
É fácil ver que estamos lidando com um grafo completo de 30 vértices. Portando o número total de arestas é arestas, ou, no caso, 435 estradas. Também é fácil ver que, ao tirarmos o máximo de estradas possível o que restará será uma árvore, ou seja, sobrarão arestas, ou estradas. Como haviam 435 estradas e sobraram 29 estradas, foram retiradas estradas.

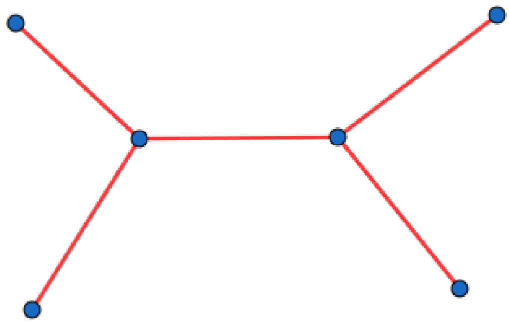
Problema 7

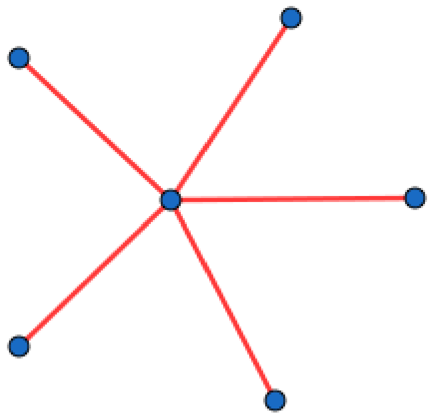












Problema 8

Pelo Teorema de Cayley

Problema 9

Pelo Teorema de Cayley

Capítulo 5

Problema 2

Se observarmos os dois governos constroem exatamente as mesmas rodovias, apenas em uma ordem diferente. O governo que utiliza o algoritmo guloso constrói da mais barata para a mais cara, já o que constrói pelo método de exclusão das arestas mais caras constrói da aresta mais cara para a mais barata. Portanto, construir a aresta mais barata não modifica a ordem das arestas ótimas mais caras, assim como construir as arestas mais caras não modifica a ordem das arestas mais baratas. Portanto ambos os métodos chegarão ao mesmo resultado.

Problema 3

Quando se constrói primeiro uma aresta que está passando por um determinado vértice você só está mudando a ordem de construção, afinal, pelo algoritmo guloso, você sempre tem que construir a aresta mais barata, a não ser que ela forme algum ciclo. Como se estará criando a primeira aresta ali certamente essa primeira aresta não formará um ciclo.

Problema 4

O governo que evita as arestas mais caras vai iniciar excluindo as arestas mais caras até que reste sobre um vértice apenas duas arestas a serem construídas. Ele então constrói a mais cara das duas e posteriormente a mais barata. Então ele começa a analisar apenas as arestas que passam por esses dois vértices e vai eliminando as mais caras até que seja possível construir alguma aresta sem formar ciclos. Então ele mantém essa construção sempre construindo uma nova aresta nas pontas (ou seja, nos vértices que estão com grau um). Quando não for mais possível construir duas arestas sem produzir ciclos ele conecta os dois vértices de grau um que tem.

Tome os vértices , , e . Seja o custo , e . Pelo método da exclusão das arestas mais caras o ciclo construído seria enquanto o ciclo mais barato dessa situação é .

Problema 5

Não pois ela intersecta a si própria

Problema 6

Substituindo duas arestas que se intersectam por duas arestas ligando dois-a-dois os mesmos 4 vértices de modo diferente, o passeio formado é menor devido a desigualdade triangular.

Problema 7

Suponha existir duas árvores mais baratas diferentes G e G' sobre o mesmo conjunto de vértices onde todas as arestas tem custos diferentes. Seja a árvore G obtida pelo algoritmo guloso. Tome agora a aresta u como a aresta mais barata que pertence a G mas não pertence a G'. Construa u em G'. Certamente, nesse ponto, G' passará a ter um ciclo. Sobre esse ciclo existirá alguma aresta v mais cara que u (caso contrário ela teria sido construída pelo algoritmo guloso). Retirando-se agora a aresta v da nova árvore G'' obtido naturalmente será mais barato que a árvore G', pois u é mais barato que v. Assim sendo G' não é a árvore mais barata, logo chegamos a um absurdo.

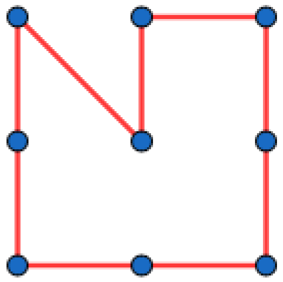
Problema 8

a) Quanto menor for o valor das arestas menor será o produto dos valores. Assim sendo a melhor maneira de se construir a árvore cujo produto dos valores das arestas seja mínimo é construindo a árvore através do algoritmo guloso.

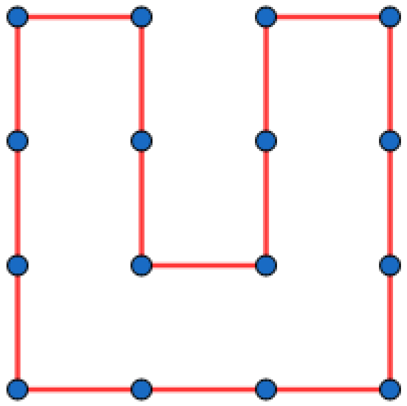
b) Pelo algoritmo da eliminação das arestas mais caras obtemos a aresta menos cara possível que deve ser construída.

Problema 9

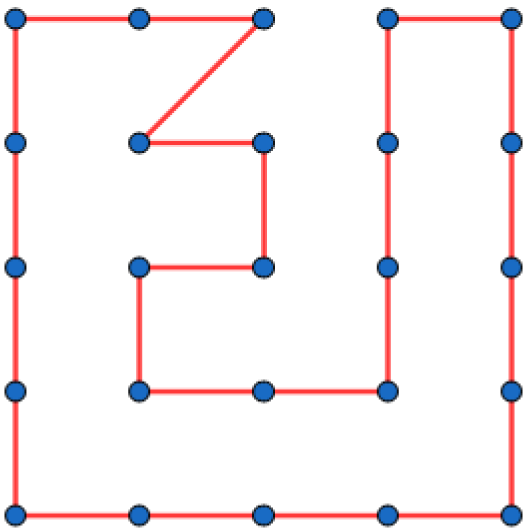
a)



b)



c)



d) Para tal basta passear pelas bordas, reduzindo assim o número de vértices de maneira organizada.

Problema 10

Para isso é só imaginar que a aresta construída no atalho custe 1000 vezes a soma de todas as demais arestas que podem ser construídas.