

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

EDDY GIUSEPE CHIRINOS ISIDRO

**MODELOS E OBSERVÁVEIS ALÉM DA HIPÓTESE DE  
HOMOGENEIDADE DA COSMOLOGIA PADRÃO**

VITÓRIA  
2019

EDDY GIUSEPE CHIRINOS ISIDRO

**MODELOS E OBSERVÁVEIS ALÉM DA HIPÓTESE DE  
HOMOGENEIDADE DA COSMOLOGIA PADRÃO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Física, na área de concentração de Física Teórica

ORIENTADOR: PROF. DR. VALERIO MARRA

Vitória

11 de julho de 2019

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

I81m Isidro, Eddy Giusepe Chirinos, 1981-  
Modelos e observáveis além da hipótese de homogeneidade da cosmologia padrão / Eddy Giusepe Chirinos Isidro. - 2019. 192 f. : il.

Orientador: Valerio Marra.  
Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Cosmologia Observacional. 2. Modelos Inomogêneos. 3. Supernovas. 4. Oscilações Acústicas Bariônicas. I. Marra, Valerio. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 53

---



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

## “Modelos e observáveis além da hipótese de homogeneidade da cosmologia padrão”

**Eddy Giuseppe Chirinos Isidro**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovada por:

Prof. Dr. Armando Bartolome Bernui Leo  
(Observ. Nacional/RJ)

Prof. Dr. Valerio Marra  
(Orientador - PPGFis/UFES)

Prof. Dr. Jailson Souza de Alcaniz  
(Observ. Nacional/RJ)-Partic. Remoto

Prof. Dr. Júlio César Fabris  
(PPGFis/UFES)

Prof. Dr. Wiliam Santiago Hipolito Ricaldi  
(CEUNES)

Vitória-ES, 11 de julho de 2019.

*Dedicado a mi padre Ramos Gonzalo Chirinos Bernaqué y a mi madre Dionicia Isidro Dominguez.*

# Agradecimentos

A DEUS, que sempre esteve ao meu lado guiando-me e protegendo-me.

Aos meus pais, Ramos Gonzalo Chirinos Bernaqué e Dionicia Isidro Dominguez, por seu exemplo de trabalho e força nas adversidades e acima de tudo por seu amor incondicional, embora estejam distantes. Os amo com todo meu coração.

À minha irmã gêmea Katty por seu exemplo de superação, perseverança no dia a dia, por sempre encorajar-me nos momentos difíceis e por cuidar de nossa família.

À minha tia María (que está no céu) e a meus primos José e Kary por cuidar de meus pais, pelos seus conselhos e apoio.

Ao Dr. Valerio Marra pela oportunidade de ser o seu orientado e pelos conhecimentos transmitidos na programação.

Ao professor Dr. Winfried Ernst Wilhelm Zimdahl, pela dedicação, compreensão e motivação nos anos que trabalhamos juntos. Uma grande amizade.

À Johana Madroñero e a meu grande amigo e irmão Gustavo Alonso Barrientos pelos grandes momentos compartilhados em Vitória. Obrigado Gustavo.

Aos Srs. José Augusto Pompermayer (por ser como um pai, irmão e amigo em todo momento), sua esposa Simone Dias Pompermayer, a Sinara Abreu Dias pelos grandes momentos compartilhados e que Deus permita compartilhar mais momentos juntos. Obrigado família Pompermayer.

Aos meus amigos do grupo de forró e em especial a meu grande amigo Magreif Martins por motivar-me na dança.

Ao secretario da Pós José Carlos Coutinho pela grande amizade que temos.

Aos meus grandes amigos, colegas da sala de Pós Graduação: Cristopher, Yago, Carlos, Breno, Cássio, Érico, Ricardo, Felipe, Sara, Isaac, Michael, Martín, Ingrid, Olesya, Nathália e em especial a Álefe pelos conselhos e ensinamentos na pesquisa.

Finalmente, agradeço de maneira especial à CAPES, porque sem o apoio e principalmente a concessão da bolsa de estudo, sem dúvida, seria muito mais difícil chegarmos onde chegamos. Muito obrigado.

*“Si no tienes fuerzas para luchar por ti, lucha por quien depende de ti, mas NUNCA desistas.”*

*(. . .)*

# Resumo

Na primeira parte desta tese apresentamos três trabalhos desenvolvidos nos primeiros anos do meu doutorado. O primeiro está baseado em considerar uma pressão viscosa eficaz como resultado do backreaction das inomogeneidades dentro do formalismo de Buchert. Consideramos uma métrica efetiva com raio de curvatura dependente do tempo e realizamos testes observacionais com dados de Supernovas Ia e comparamos com outros modelos (entre eles  $\Lambda$ CDM). No segundo trabalho descrevemos, na base da métrica de Lemaître-Tolman-Bondi (LTB), dois modelos de tempo de big bang inomogêneos e planos. Dependendo do sinal da derivada, respeito de  $r$ , do tempo de big bang inomogêneo teremos uma colina local ou um vazio local. Estes modelos são modelos de brinquedo (teste), os quais serão ajustados com dados de supernovas Ia. Também discutimos medições futuras do redshift-drift como uma ferramenta promissora para discriminar entre configurações inomogêneas e o modelo padrão. No terceiro trabalho novamente consideramos efeitos de backreaction cosmológico no formalismo de Buchert, mas esta vez com base em uma solução explícita da dinâmica de LTB que é linear no parâmetro de curvatura e tem um tempo de big bang inomogêneo. Esta configuração representa um modelo de brinquedo exatamente solucionável mas não descreve adequadamente nosso Universo real. Esta “inconsistência” é verificada ao confrontar nossos resultados com dados de supernovas Ia e com dados de idade diferencial de galáxias antigas para a taxa de Hubble. Em nosso último trabalho descreveremos o cosmos com uma análise independente do modelo. Isto será possível graças ao mapeamento de galáxias que possibilita estudos detalhados sobre a natureza das flutuações na densidade média do Universo e a formação de estruturas em grande escala. Estudaremos as Oscilações Acústicas Bariônicas (BAO), já que é uma escala característica impressa na distribuição de galáxias e na radiação cósmica de fundo, a qual pode ser usada como regua padrão. Para encontrar esta escala característica de BAO radial aperfeiçoamos o método de E. Sánchez et al. 2013. Logo realizamos os testes observacionais com dados da terceira fase de Sloan Digital Sky Survey (SDSS-DR12) da pesquisa Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS) e verificamos nossos resultados com dados simulados de MultiDark-PATCHY DR12.

**Palavras-chave:** Cosmologia Observacional, SNIa, Modelos Inomogêneos (LTB), Estrutura a Grande Escala, BAO, Função de Correlação.

# Abstract

In the first part of this thesis we present three works developed in the first years of my PhD. The first is based on considering an effective viscous pressure as a result of the backreaction of inhomogeneities within Buchert's formalism. We considered an effective metric with a time-dependent radius of curvature and performed observational tests with data from Supernovae Ia and compared with other models (among them  $\Lambda$ CDM). In the second work, we describe, in the context of the Lemaître-Tolman-Bondi metric (LTB), two flat and inhomogeneous big bang time models. Depending on the sign of the derivative, with respect to  $r$ , of the inhomogeneous big bang time we will have a local overdensity or a local underdensity. These models are toy models, which will be fitted to supernova data. We also discuss future measurements of redshift drift as a promising tool for discriminating between inhomogeneous configurations and the standard model. In the third paper we again consider effects of cosmological backreaction within Buchert's formalism, but this time based on an explicit solution of LTB dynamics that is linear in the curvature parameter and has an inhomogeneous big bang time. This configuration represents an exactly solvable toy model but does not adequately describe our real universe. This "inconsistency" is verified by comparing our results with supernova data and with differential age data from old galaxies (cosmic chronometers). In our last work we will describe the cosmos with model-independent analyses. This will be possible thanks to galaxy maps that enable detailed studies on the nature of fluctuations in the density of the Universe and the formation of large scale structures. We will study the Baryon Acoustic Oscillations (BAO) scale, since it is a characteristic scale imprinted on the distribution of galaxies and cosmic background radiation (CMB), which can be used as standard rule. To find the radial BAO scale we use the recipe by E. Sánchez et al. 2013. We then perform the observational tests with data from the third phase of the Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS) from the Sloan Digital Sky Survey (SDSS-DR12) and verified our results with simulated data from MultiDark-PATCHY DR12.

**Keywords:** Observational Cosmology, SNIa, Inhomogeneous Models (LTB), Large-Scale Structure, BAO, Correlation Function.

# Lista de Figuras

2.1	Trajétórias de dois fótons . . . . .	7
2.2	Diagrama apresentado por Hubble (1929). . . . .	10
2.3	Geometria da seção espacial do espaço-tempo. . . . .	14
2.4	A possível evolução da densidade de energia da radiação, matéria e energia escura. . . . .	19
2.5	Coincidência da densidade de energia da matéria e da densidade de energia escura . . . . .	21
2.6	Diagrama de Hubble (740 dados de JLA) . . . . .	31
2.7	Comparação dos dados observacionais de SNIa do JLA completo e JLA binnados . . . . .	32
3.1	Parâmetro de equação de estado efetivo (EoS) do fluido de backreaction . . . . .	51
3.2	Dependência do parâmetro de desaceleração $q_D$ em função do redshift . . . . .	53
3.3	Dependência das abundâncias fracionárias em função do redshift $z_D$ . . . . .	54
3.4	Módulo de distância em função do redshift $z_D$ . . . . .	56
3.5	Região ampliada da Figura 3.4 . . . . .	56
3.6	Módulo de distância em função do redshift para o modelo de $\Lambda$ CDM e sua contraparte backreaction . . . . .	57
3.7	Propagação da luz para os modelos (3.128) (primeiro modelo) e (3.148) (segundo modelo) . . . . .	64
3.8	Perfil de densidade para o modelo (3.128) (primeiro modelo) para $m = 4$ . . . . .	67
3.9	Raios geodésicos para os modelos (3.128) (primeiro modelo) e (3.148) (segundo modelo) . . . . .	68
3.10	Idade do Universo para o modelo (3.128) (primeiro modelo) . . . . .	69
3.11	Hipersuperfície máxima de redshift para o modelo (3.128) (primeiro modelo) . . . . .	70
3.12	Perfil de densidade para o modelo (3.142) (segundo modelo) . . . . .	71
3.13	Idade do Universo para o modelo (3.142) (segundo modelo) . . . . .	72
3.14	Comparação de $\frac{t_{sc}}{t_0}$ e $\frac{t_B(r)}{t_0}$ para o modelo (3.142) . . . . .	73
3.15	Shell crossing no modelo (3.142) (segundo modelo) . . . . .	74
3.16	Regiões de confiança no espaço de dois parâmetros obtidos a partir do espaço de 6 parâmetros para o modelo $t'_B(r) < 0$ . . . . .	77
3.17	Regiões de confiança no espaço de dois parâmetros obtidos a partir do espaço de 6 parâmetros para o modelo $t'_B(r) > 0$ . . . . .	78

3.18	Relação $\mu$ -redshift para o melhor ajuste do modelo $t'_B(r) < 0$ (curva de laranja) e o melhor ajuste do modelo $t'_B(r) > 0$ (curva de verde) . . . . .	79
3.19	Os PDFs de $\sigma_{int}$ para o modelo $t'_B(r) < 0$ (painel esquerdo) e para o modelo $t'_B(r) > 0$ (painel direito) . . . . .	79
3.20	Redshift drift para os modelos de LTB (valores de melhor ajuste) . . . . .	82
3.21	Módulo de distância binnado $\mu_D$ em função do parâmetro redshift $z_D$ . . . . .	95
3.22	O plano $\Omega_{R0}^D - h_D$ com gráficos de contorno ( $1\sigma$ , $2\sigma$ e $3\sigma$ ) . . . . .	96
5.1	Variância cósmica: a medida que a janela se expande (no sentido horário a partir do canto superior esquerdo) . . . . .	127
5.2	Um diagrama de cone (RA: right ascension) ao redor do superaglomerado de Shapley . . . . .	128
5.3	A função de correlação de dois pontos para $z = 0$ (painel da esquerda) e $z = 0.5$ (painel da direita) . . . . .	130
5.4	Espectro de potência $P(k)$ , no espaço real (panel superior) e espectro de potência no espaço de redshift (panel inferior) . . . . .	132
5.5	Comparação do espectro de potência linear $P_{lin}(k)$ e o espectro de potência simulado que contem os efeitos não-lineares $P_r(k)$ . . . . .	133
5.6	Medida da distância usando o efeito Alcock-Paczynski e uma régua padrão, como a escala de BAO . . . . .	135
5.7	Representação dos efeitos causados pela medição no espaço do redshift . . . . .	136
5.8	Este diagrama explica como as estruturas do espaço real (linha superior) aparecem no espaço de redshift (linha inferior) . . . . .	137
5.9	Os pontos vermelhos representam as LRGs pelo BOSS em altos redshift em comparação com as LRG mapeadas anteriormente pelo SDSS . . . . .	139
5.10	A imagem acima mostra a 2PCF, no espaço de redshift, obtida a partir de 46 748 LRG da amostra SDSS-DR3 . . . . .	141
5.11	Pegada (footprint) espectroscópica do nono (DR9), décimo (DR10) e décimo primeiro (DR11) lançamento de dados do BOSS . . . . .	142
5.12	<i>Painel esquerdo</i> : o footprint de BOSS-DR12 das subamostras NGC e SGC . . . . .	143
5.13	Gráfico de pizza das observações do <b>BOSS-DR12</b> e uma simulação de realização do <b>MultiDark-PATCHY</b> . . . . .	144
5.14	Densidade numérica para as amostras <b>LOWZ</b> ( <i>esquerda</i> ) e <b>CMASS</b> ( <i>direita</i> ) de <b>DR12</b> . . . . .	145
5.15	Distribuição do redshift das 720 113 galáxias do <b>NGC</b> (parte superior) e das 273 117 galáxias do <b>SGC</b> (parte inferior) . . . . .	147
5.16	Distribuição dos pesos das galáxias . . . . .	149
5.17	Matriz de correlação relativa à matriz de covariância $\Sigma_{\beta\beta'}$ . . . . .	153
5.18	Distribuição do número efetivo de galáxias por pixel $n_{dd,\alpha}^{eff} \simeq \sqrt{2dd_\alpha}$ . . . . .	154
5.19	Matriz de correlação relativa às simulações de <b>MultiDark-PATCHY</b> (parte superior) e a diferença com relação à matriz de correlação da Figura 5.17 . . . . .	155

5.20	Raiz quadrada da diagonal da matriz de covariância estimada a partir dos dados e da diagonal da matriz de covariância a partir das simulações (mocks) de <b>MultiDark-PATCHY</b> . . . . .	156
5.21	Função de correlação $\xi_\beta$ para o bin $0.3 < z < 0.65$ , junto com o ajuste da equação (5.97) . . . . .	158
5.22	Gráfico triangular relativo à função $\chi^2$ da equação (5.98) . . . . .	159

# Lista de Tabelas

3.1	Condições para não ter Shell crossing . . . . .	39
3.2	Resultados da análise estatística com base nos dados de Union2.1. . . . .	52
3.3	Parâmetros de melhor ajuste para os dois modelos inomogêneos na abordagem de $\chi^2$ para a análise completa de SNIa. . . . .	75
3.4	Parâmetros de melhor ajuste para os dois modelos inomogêneos na abordagem da <i>likelihood</i> para a análise completa de SNIa. . . . .	75
3.5	Parâmetros de melhor ajuste para o modelo $\Lambda$ CDM na abordagem de $\chi^2$ para a análise completa de SNIa. . . . .	76
3.6	Parâmetros de melhor ajuste para o modelo $\Lambda$ CDM na abordagem da <i>likelihood</i> para a análise completa de SNIa. . . . .	76
3.7	AIC e BIC para os dois modelos inomogêneos e o modelo $\Lambda$ CDM. . . . .	80
5.1	Conjuntos de parâmetros cosmológicos usados para a análise combinada da amostra BOSS-DR12 (todas as cosmologias são planas $\Lambda$ CDM). . . . .	143
5.2	Propriedades do bin de redshift adotado na análise. O redshift efetivo $z_{eff}$ é definido na equação (5.68). . . . .	147

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>vi</b>
<b>Resumo</b>	<b>viii</b>
<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2 FUNDAMENTOS DA COSMOLOGIA PADRÃO</b>	<b>5</b>
2.1 Dinâmica do Universo em expansão . . . . .	5
2.1.1 O princípio cosmológico: homogeneidade e isotropia . . . . .	5
2.1.2 Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) . . . . .	6
2.1.3 O desvio para o vermelho (Redshift) . . . . .	7
2.1.4 Lei de Hubble . . . . .	9
2.1.5 Dinâmica de Friedmann . . . . .	10
2.1.6 Parâmetros cosmológicos . . . . .	12
2.2 O conteúdo energético do Universo e o modelo padrão da cosmologia . . . . .	15
2.2.1 Radiação ou matéria relativística . . . . .	16
2.2.2 Matéria não-relativística ou poeira . . . . .	17
2.2.3 Energia escura . . . . .	18
2.2.4 O modelo padrão $\Lambda$ CDM e suas limitações . . . . .	19
2.3 Distâncias cosmológicas e supernovas do tipo Ia . . . . .	22
2.3.1 Distância radial comóvel . . . . .	22
2.3.2 Distância própria . . . . .	23
2.3.3 Distância de diâmetro angular . . . . .	23
2.3.4 Distância de luminosidade . . . . .	24
2.3.5 Supernovas do tipo Ia (SNIa) . . . . .	25
<b>3 SOLUÇÕES INOMOGÊNEAS EXATAS E O FORMALISMO DE BUCHERT</b>	<b>33</b>

3.1	Modelos inomogêneos exatos . . . . .	34
3.1.1	A solução de Lemaître-Tolman-Bondi (LTB) . . . . .	35
3.1.2	Shell crossing . . . . .	38
3.1.3	A propagação da luz e a distância de luminosidade no modelo de LTB . . . . .	39
3.2	O formalismo de Buchert . . . . .	41
3.2.1	As equações de Buchert . . . . .	43
3.3	Testes observacionais aplicados ao modelo de LTB e ao formalismo de Buchert . . . . .	45
3.3.1	PRIMEIRO ARTIGO: “Cosmic bulk viscosity through backreaction” . . . . .	45
3.3.2	SEGUNDO ARTIGO: “Simple inhomogeneous cosmological (toy models)” . . . . .	58
3.3.3	TERCEIRO ARTIGO: “Averaged Lemaître-Tolman-Bondi dynamics” . . . . .	82
<b>4</b>	<b>O PROCESSO DA FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS</b> . . . . .	<b>99</b>
4.1	Perturbações cosmológicas (abordagem Newtoniana) . . . . .	99
4.1.1	Equações hidrodinâmicas (Mecanismo de Jeans - fluido em expansão) . . . . .	99
4.1.2	Perturbando o Universo Einstein - de Sitter . . . . .	102
4.1.3	Perturbando a matéria-escura na época da radiação . . . . .	103
4.1.4	Perturbando os bárions na época da matéria . . . . .	104
4.1.5	A função de crescimento . . . . .	104
4.1.6	A função de transferência . . . . .	105
4.2	Perturbações cosmológicas (abordagem relativística) . . . . .	106
4.2.1	Perturbações da métrica e a escolha do calibre . . . . .	106
4.2.2	Perturbando as equações de campo de Einstein . . . . .	109
<b>5</b>	<b>A ESCALA ACÚSTICA RADIAL (BAO COMO RÉGUA PADRÃO)</b> . . . . .	<b>117</b>
5.1	Oscilações Acústicas Bariônicas (BAO) como régua padrão . . . . .	117
5.2	Estatística de clustering (agrupamento) . . . . .	119
5.2.1	O campo de excesso de densidade . . . . .	119
5.2.2	Função de correlação de n-pontos . . . . .	120
5.2.3	O espectro de potência . . . . .	123
5.3	Estatística da amostra . . . . .	125
5.3.1	Ruído e critério de seleção . . . . .	125
5.3.2	Variância cósmica . . . . .	126
5.3.3	Efeitos sistemáticos . . . . .	127
5.3.4	Efeitos observacionais . . . . .	133
5.4	Noções básicas sobre os levantamentos de galáxias (SDSS) . . . . .	139
5.5	Catálogo de galáxias sintéticas para a amostra de BOSS . . . . .	142
5.5.1	MultiDark-PATCHY mocks . . . . .	143
5.6	Estimando $\Delta z_{\text{BAO}}$ mediante uma parametrização fenomenológica . . . . .	145
5.6.1	Introdução . . . . .	145
5.6.2	Dados . . . . .	146

5.6.3	Método . . . . .	148
5.6.4	Resultados . . . . .	157
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>160</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>163</b>

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

A cosmologia moderna está baseada na teoria da relatividade geral, foi proposta pelo físico alemão Albert Einstein e publicada em 1915. Esta teoria generaliza a relatividade especial (restrita) e a lei da gravitação universal de Newton. [1, 2]. Atualmente a maioria das pesquisas em cosmologia moderna supõem o princípio cosmológico, segundo o qual o nosso Universo é homogêneo e isotrópico sobre escalas suficientemente grandes (aproximadamente 100 Mpc ou mais) [3]. Este princípio cosmológico estabelece que não há lugar e nem direção preferencial na estrutura em grande escala do Universo, ou seja, seu conteúdo material é distribuído de maneira homogênea e isotrópica. Obviamente, este princípio não é válido em pequenas escalas (cosmos inhomogêneo) [4].

Justamente o modelo  $\Lambda$ CDM ( soluções homogêneas de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW ) nas equações de Einstein [5]) está baseado nesse princípio cosmológico, que até agora tem recebido o status de modelo padrão. Este modelo  $\Lambda$ CDM é extremamente bem sucedido na reprodução de uma ampla gama de observações e até agora tem superado numerosos modelos concorrentes, embora permaneçam tensões significativas [6]. Por outro lado, seu status certamente não é totalmente satisfatório, pois depende da existência de um setor escuro, em grande parte desconhecido, que geralmente é dividido em matéria escura e energia escura (ou seja: Universo dominado por esse setor escuro). Então, nosso Universo é composto por uma componente de energia escura que representa aproximadamente o 70% do conteúdo energético do Universo (atribuída à expansão acelerada do Universo com uma grande pressão negativa), por uma componente de matéria escura que representa aproximadamente o 25% do conteúdo energético do Universo e a quantidade restante, aproximadamente 5%, é atribuída à matéria ordinária<sup>1</sup>.

Essa expansão acelerada do Universo, mencionada acima, foi descoberta há vinte anos atrás, medindo distâncias de luminosidade-redshift precisas com Supernovas do tipo Ia (SNIa) [7, 8]. Outras observações de supernovas parecem reforçar essa afirmação ainda

---

<sup>1</sup>É importante aclarar que existe uma componente da radiação, que dominou o Universo em seu estágio primordial mas hoje corresponde a uma fração ínfima da densidade de energia do Universo.

mais [9–11]. A razão para esta aceleração é desconhecida, por isso acostuma-se identificar com o termo de "energia escura" para descrever este fenômeno. Entender a natureza da energia escura é atualmente um dos principais objetivos da física fundamental, e isso conduz a um grande esforço experimental na cosmologia observacional. Enquanto uma constante cosmológica<sup>2</sup> pode ser a explicação mais simples para a expansão acelerada, alternativas como energia escura dinâmica, fluidos exóticos ou gravidade modificada [14] podem ser testadas através de seus efeitos na história de expansão do tempo tardio ou no crescimento de estruturas no Universo. Por outro lado, para explicar as características da radiação cósmica de fundo (**CMB**) e a formação de estruturas em grandes escalas, considera-se perturbações cosmológicas no fundo homogêneo. [3, 15, 16].

Essas estruturas em grande escala (galáxias, aglomerado de galáxias, superaglomerados de galáxias, etc), contém inúmeras informações sobre a evolução do nosso Universo, comportamento da matéria escura e energia escura. Então, as sementes dessas estruturas cósmicas podem ser descritas por uma teoria de evolução linear (ou seja: perturbações da densidade são muito menores que a unidade) e os estágios mais avançados dessas estruturas (ou seja: perturbações da densidade da ordem ou maiores do que a unidade) podem ser estudadas através de simulações computacionais (por exemplo: simulações de  $N$ -corpos.). Por esse motivo, os grandes avanços tecnológicos (levantamentos astronômicos) têm como objetivo principal mapear um grande número de galáxias, as quais são usadas como traçadores cosmológicos da evolução do Universo. Essas estruturas levam uma assinatura característica, denominada Oscilações Acústicas Bariônicas<sup>3</sup> (**BAO**). As BAO produzidas pela competição entre a instabilidade gravitacional e a pressão de radiação no plasma primordial teriam deixado uma assinatura na **CMB** e na distribuição de matéria [18, 19]. É por isso que essa medida da escala das oscilações acústicas bariônicas (**BAO**) no espectro de potência da galáxia como função do redshift é uma medida muito robusta, pois é insensível a incertezas sistemáticas relacionadas às propriedades astrofísicas das galáxias. Além disso, fornece informações sobre a energia escura de duas fontes diferentes: a distância do diâmetro angular, através da medição da escala BAO na distribuição angular das galáxias, e o parâmetro Hubble, através da medição da escala BAO na distribuição radial das galáxias [20].

Apesar do grande sucesso do modelo padrão ( $\Lambda$ CDM) em ajustar uma quantidade impressionante de dados, a natureza física de alguns de seus ingredientes principais permanecem desconhecidos (**matéria escura** e **energia escura**). Embora existam bons argumentos para a existência da matéria escura, não tem sido reportada, até agora, nenhuma detecção direta; a energia escura parece ser ainda mais evasiva. Há portanto motivação para modificar ou alterar o contexto padrão. Por exemplo: modificar a teoria da relatividade geral por uma que tenha uma estrutura mais geral onde as componentes escuras não são componentes

---

<sup>2</sup>Esta constante cosmológica tem um problema; que é dado pela inconsistência entre a previsão teórica para a energia do vácuo e o valor observado para a densidade da energia escura [12, 13].

<sup>3</sup>As BAO podem ser observadas (ou quantificadas) no **espectro de potência da CMB** ou no **espectro da distribuição de galáxias** (com menor amplitude) [17].

da matéria, mas se tornam parte de um setor geométrico das equações de campo generalizadas [21, 22]. Uma outra maneira de tentar entender o setor escuro do modelo  $\Lambda$ CDM em termos geométricos é a abordagem do **backreaction**. Levar em conta o backreaction das médias das inhomogeneidades espaciais na dinâmica cosmológica homogênea em larga escala tem sido considerada uma rota promissora para descrever a evolução do Universo tardio dominado pela matéria. Nos primeiro e terceiro artigos publicados [23, 24] aplicou-se o **formalismo de Buchert**, onde aplicamos médias sobre quantidades escalares em relação às hipersuperfícies espaciais [25].

Existem estudos, na qual podemos duvidar se uma solução homogênea é um ponto de partida adequado para descrever as estruturas inhomogêneas e altamente não-lineares de nosso Universo. Outro ponto discutível é a possibilidade de que a expansão acelerada do Universo não seja causada pela misteriosa energia escura, mas sim pelas inhomogeneidades na distribuição da matéria: “esta premissa faz parte da cosmologia inhomogênea”. Por isso, existem trabalhos nas quais desconsideram o **princípio Copernicano** para construir modelos cosmológicos inhomogêneos que possam suprimir a necessidade da energia escura [26–28]. A solução cosmológica inhomogênea exata, mais simples, das equações de campo de Einstein é a solução esfericamente simétrica de Lemaître-Tolman-Bondi (**LTB**)<sup>4</sup> [29–31]. A ideia básica é que vivemos em uma região de baixa densidade (vazio local) do Universo, e a evolução desta região de baixa densidade é o que nós percebemos como uma expansão acelerada. Uma análise com dados de SNIa iniciada por Idit Zehavi et al. deu os primeiros indícios que poderia de fato existir um vazio centrado perto de nós [32]. Esta métrica LTB pode ser usada para descrever **regiões de baixa densidade** ou **regiões de alta densidade** no Universo [33]. A solução de LTB admite três funções arbitrárias que dependem da coordenada radial<sup>5</sup>. A primeira função  $E(r)$  aparece explicitamente na métrica a qual está relacionada com a curvatura do espaço para cada valor de  $r$  (na abordagem de Newton esta relacionado com a energia total dentro da casca), a segunda função  $M(r)$  está relacionada com a massa gravitacional contida dentro da casca e a terceira é a função do tempo de big bang  $t_B(r)$  a qual aparece como uma função de integração<sup>6</sup> [34–36]. No segundo artigo publicado [37] consideramos dois modelos do tempo de big bang inhomogêneos e planos com base na métrica de **LTB** e realizamos testes com dados de SNIa da amostra Joint Light-curve Analysis (**JLA**).

Atualmente, graças à crescente riqueza de levantamentos de dados astronômicos, começou a ser possível analisar o cosmos com uma análise independente do modelo (não assume um fiducial). Por exemplo: temos o Sloan Digital Sky Survey (**SDSS**) que é um dos maiores

<sup>4</sup>Esta métrica de LTB generaliza a métrica homogênea de FLRW e através de uma escolha adequada das funções arbitrárias que surgiram na solução de LTB podemos recuperar a dinâmica de FLRW.

<sup>5</sup>Destas três funções uma delas pode ser fixada a nossa conveniência por uma escolha adequada de coordenadas.

<sup>6</sup>Isto significa que o Big Bang não é simultâneo, como nos modelos de Friedmann, mas ocorre em tempos diferentes e em distâncias diferentes a partir da origem.

levantamentos de galáxias operando por quase 20 anos e está composta por quatro fases. Futuros levantamentos como Javalambre Physics of the Accelerating Universe Astrophysical Survey (**JPAS**) vão ampliar ainda mais o volume mapeado e aprimorar a estatística e as informações das observações. A ideia básica é extrair informações dos dados sem assumir as propriedades do conteúdo energético do universo, nem, se possível, a estrutura geral do espaço-tempo [38]. No quarto artigo [39] vamos nos concentrar nas oscilações acústicas bariônicas (**BAO**), observaremos o pico acústico na função de correlação<sup>7</sup> utilizando o estimador de **Landy & Szalay** [40]. Para detectar o pico acústico aplicaremos uma receita simples proposta por **E. Sánchez et al.** [20] para medir o BAO radial de maneira independente do modelo. Os testes serão realizados utilizando a amostra SDSS-III (**DR12-BOSS**) e verificados empregando as 500 simulações de MultiDark-PATCHY<sup>8</sup> feito para os dados de BOSS.

Esta tese está estruturada da seguinte maneira: No capítulo 2 apresentamos os fundamentos da cosmologia atual: a teoria da relatividade geral, as equações de Friedmann, o modelo padrão  $\Lambda$ CDM e suas limitações. No capítulo 3 estudamos as soluções inhomogêneas exatas das equações de campo de Einstein, onde especificamente utilizamos a métrica de LTB e a aplicamos aos dados de SNIa de JLA. Também estudamos um fluido viscoso como o resultado de um Backreaction das inhomogeneidades dentro do formalismo de Buchert. No capítulo 4 fizemos uma breve discussão sobre a teoria de perturbações (abordagem Newtoniana e abordagem relativística) que descreve a formação de estruturas e as Oscilações Acústicas Bariônicas (equação de Boltzmann e o fluido fóton-bárion). No capítulo 5 utilizamos BAO como régua padrão para extrair informação dos dados observacionais, apresentamos os métodos estatísticos que quantificam as perturbações, estatística da amostra, estudamos os levantamentos de galáxias através de SDSS (DR-12) junto com os catálogos simulados de MultiDark-PATCHY e logo aplicamos o método de E. Sánchez et al. em uma forma aprimorada para estimar  $\Delta z_{\text{BAO}}$ . E por fim no capítulo 6, mostramos nossas conclusões e damos alguns comentários finais.

---

<sup>7</sup>A função de correlação é uma ferramenta estatística que possibilita o cálculo da probabilidade de encontrar pares de galáxias separadas por uma distância específica.

<sup>8</sup>Os catálogos simulados de **MultiDark-PATCHY** são uma receita PATCHY (PerturbAtion Theory Catalog generator of **H**alo and galax**Y** distributions).

## Capítulo 2

# FUNDAMENTOS DA COSMOLOGIA PADRÃO

### Introdução

A cosmologia<sup>1</sup> padrão (ou também chamada cosmologia moderna) baseia-se nos estudos da teoria da gravidade de Einstein, que é a teoria da Relatividade Geral. Nesta teoria a interação gravitacional é interpretada como um efeito da curvatura do espaço-tempo [5]. Esta curvatura pode ser entendida como uma deformação do espaço-tempo causada pela presença de matéria.

Neste capítulo, apresentamos o princípio, lei e a estrutura matemática da cosmologia moderna baseada na teoria da Relatividade Geral de Einstein. Depois serão introduzidos uma breve descrição do conteúdo energético do Universo e as limitações do modelo cosmológico padrão  $\Lambda$ CDM. Finalmente, discutiremos também a estimativa das diferentes distâncias cosmológicas no formalismo do modelo cosmológico padrão e supernovas do tipo Ia.

## 2.1 Dinâmica do Universo em expansão

### 2.1.1 O princípio cosmológico: homogeneidade e isotropia

A cosmologia moderna é baseada numa importante suposição básica, *o princípio cosmológico*, que é uma versão mais geral do **princípio Copernicano**<sup>2</sup>. A relatividade geral de Einstein conecta a geometria do espaço-tempo com o conteúdo material do universo. Para resolver as equações de campo de Einstein se considera algumas simetrias razoáveis. As simetrias consideradas são a homogeneidade e isotropia, precisamente as que aporta este princípio cosmológico. Por *homogeneidade* entende-se que o Universo é invariante

---

<sup>1</sup>A cosmologia procura descrever o Universo em largas escalas.

<sup>2</sup>Que diz que a Terra não é o centro do Universo, portanto, não estamos vivendo em um lugar especial do mesmo. Ampliando o Universo inteiro significa que deve haver muitos sóis como o nosso e que o Universo deve ser semelhante visto de qualquer ponto.

frente translações espaciais e *isotropia* que é invariante frente rotações<sup>3</sup>. Então, o Universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas, observações da distribuição de galáxias sugerem que essa hipótese seja válida em escalas de 100 Mpc ou mais e em escalas angulares de 10' ou mais [3,4,41].

Além disso, como já foi verificado, a radiação cósmica de fundo (CMB) é altamente isotrópica<sup>4</sup>, até uma parte em 10<sup>5</sup> [42] o que supõe uma confirmação forte do princípio cosmológico<sup>5</sup>. Sabemos também que em pequenas escalas o Universo não é homogêneo nem isotrópico, pois se não for assim, não poderia existir as diferentes estruturas como: galáxias, estrelas, planetas e seres humanos. Mas, é uma excelente aproximação quando se considera grandes escalas. A suposição de que o nosso Universo é homogêneo e isotrópico significa que a sua evolução pode ser representada como uma sequência temporal de hipersuperfícies tipo-espaço tridimensional, cada uma das quais é homogênea e isotrópica. Estas hipersuperfícies são a escolha natural para superfícies de tempo constante [44].

Este princípio é uma condição explicitamente geométrica a ser satisfeita pela métrica do espaço-tempo - mais particularmente pela sua parte do espaço. Nós usamos um método baseado em vetores de Killing. É possível mostrar que, se um espaço (ou espaço-tempo) possui uma simetria particular, as equações de Killing cumprem:

$$g_{\mu\nu,\lambda} \xi^\lambda + g_{\mu\lambda} \xi^\lambda{}_{,\nu} + g_{\lambda\nu} \xi^\lambda{}_{,\mu} = 0, \quad (2.1)$$

onde  $\xi^\lambda$  é o vetor de Killing. O resultado dessa análise é a métrica de **Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker** (FLRW), que seguidamente descreveremos.

### 2.1.2 Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

O *princípio cosmológico* no contexto da Relatividade Geral é interpretado como o espaço-tempo de uma variedade 4-dimensional em que as seções espaciais (hipersuperfícies com tempo constante, por exemplo, o tempo comóvel) tem simetria máxima em uma variedade 3-dimensional, que são completamente determinadas por seu escalar de curvatura.

A métrica<sup>6</sup> mais geral e que cumpre com estas condições pode ser escrita em coordenadas comoveis<sup>7</sup>, como [5]:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (2.2)$$

<sup>3</sup>Então, a *homogeneidade* significa que o Universo é o mesmo para todo observador que olha em todas as direções e a *isotropia* significa que o Universo tem as mesmas propriedades em todas as regiões e em qualquer ponto do mesmo, é dizer, não há direção privilegiada.

<sup>4</sup>Isotropia nas distribuições de temperatura da CMB.

<sup>5</sup>Isso quer dizer que o CMB apresenta flutuações relativas de temperatura da ordem de  $\frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-5}$  [43].

<sup>6</sup>No que segue, usaremos *unidades de Planck* (unidades naturais):  $c = 1$  [16]. Também:  $a(t)$  é adimensional e  $k$  tem dimensão de *comprimento*<sup>-2</sup>.

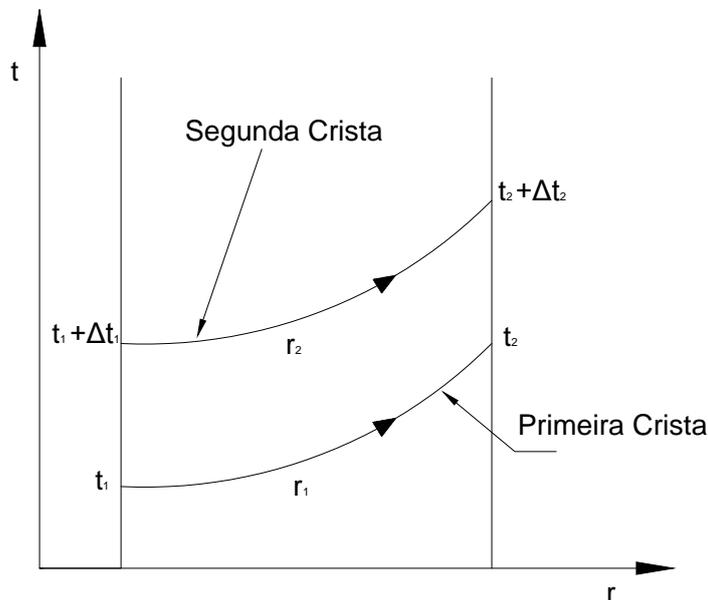
<sup>7</sup>Ou seja, movendo-se com a matéria e portanto são invariantes ao longo de suas linhas de mundo.

Esta expressão (2.2) é a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). A função  $a(t)$  é o fator de escala e sua dependência com  $t$  (tempo cósmico) descreve a expansão do Universo,  $k$  é o índice de curvatura (é constante) o qual descreve a geometria da seção espacial do espaço-tempo,  $k = +1, 0, -1$  para os espaços esférico, Euclideano e hiperbólico respectivamente. Esses valores constantes correspondem a universos fechado, plano e aberto respectivamente.

### 2.1.3 O desvio para o vermelho (Redshift)

Em termos simples o *desvio para o vermelho* corresponde a uma alteração na forma como a frequência das ondas de luz é observada no espectroscópio em função da velocidade relativa entre a fonte emissora e o receptor observador<sup>8</sup>. Uma informação importante sobre o fator de escala  $a(t)$  é obtida através da observação dos deslocamentos nas frequências de luz emitida por objetos muito distantes.

O desvio para o vermelho pode ser obtido teoricamente ao considerar o percurso traçado por um fóton entre a fonte e o observador, num espaço-tempo com a métrica FLRW. Considere agora a luz que nos atinge, em  $r = r_2$ , tendo sido emitida por uma galáxia em  $r = r_1$ , (ver Figura 2.1). Em particular, consideremos cristas sucesivas de luz, emitidas em tempos  $t_1$  e  $t_1 + \Delta t_1$  e recivida em tempos  $t_2$  e  $t_2 + \Delta t_2$ . Já que a luz viaja radialmente:  $ds^2 = 0, d\theta = d\phi = 0$  nós obtemos a partir de (2.2):



**Figura 2.1.** Trajetórias de dois fótons emitidas por uma galáxia em  $r = r_1$ , atinge-nos em  $r = r_2$ .

<sup>8</sup>Os primeiros aspectos observacionais que indicam a evolução do universo foram feitos por **Hubble**, determinando as velocidades por medições cuidadosas dos espectros da luz das galáxias.

$$ds^2 = 0 \implies 0 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} \right]. \quad (2.3)$$

A partir da primeira crista de luz

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (2.4)$$

da segunda crista de luz

$$\int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2 + \Delta t_2} \frac{dt}{a(t)} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.5)$$

da seguinte relação

$$\int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2 + \Delta t_2} = \int_{t_1}^{t_2} + \int_{t_2}^{t_2 + \Delta t_2} - \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_1} \quad (2.6)$$

e substituindo na expressão (2.5) obtemos:

$$\int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_1} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_2}^{t_2 + \Delta t_2} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.7)$$

Como  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_2$  são muito pequenos podemos considerar que  $a(t)$  é constante nesta integração temporal, obtendo:

$$\frac{\Delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\Delta t_2}{a(t_2)} \implies \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{a(t_1)}{a(t_2)}. \quad (2.8)$$

Os comprimentos de onda emitido e observado respectivamente são:

$$\lambda_e = c \Delta t_1, \quad e \quad \lambda_o = c \Delta t_2. \quad (2.9)$$

Finalmente, o parâmetro de deslocamento para o vermelho,  $z$ , geralmente é definido como:

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}. \quad (2.10)$$

Considerando  $a(t_0) = 1$ , para o tempo de hoje, temos:

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{1}{a(t)}. \quad (2.11)$$

### 2.1.4 Lei de Hubble

A ideia de que vivemos num universo em expansão foi uma das mais inesperadas e importantes descobertas da ciência no século XX<sup>9</sup>. Em 1912, o astrônomo americano Vesto Melvin Slipher (1875 – 1969), do Observatório Lowell, descobriu que as linhas espectrais da galáxia Andrômeda<sup>10</sup> (M31) mostravam um enorme deslocamento para o azul, indicando que essa galáxia estava se aproximando do Sol, a uma velocidade de  $300 \frac{km}{s}$ .

Logo em 1925, Slipher mediu os deslocamentos nas linhas espectrais para cerca de 40 galáxias, encontrando que a maioria apresentava um deslocamento espectral para o vermelho (*redshift*), indicando que as galáxias estavam se afastando de nós. O trabalho de Slipher ficou mais claro quando Edwin Hubble conseguiu estimar as distâncias de Andrômeda e outras galáxias, observando o brilho aparente e os períodos de pulsação de **estrelas Cefeidas**<sup>11</sup> nessas galáxias.

Hubble e seu colaborador, Milton Humason, fotografaram os espectros de várias galáxias, usando o telescópio de 2,50 m de Monte Wilson (Califórnia-Estados unidos). Quando compararam as distâncias das galáxias com as suas velocidades de afastamento, determinadas a partir dos desvios para o vermelho de suas linhas espectrais, Hubble e Humason verificaram que as galáxias mais distantes estavam se afastando com velocidades maiores.

Plotando os dados em um gráfico de velocidade em função da distância (Ver Figura 2.2), Hubble [45] encontrou que os pontos se distribuíam ao longo de uma linha reta e em 1929 publicou sua descoberta que indicava que o Universo estava se expandindo. Ele encontrou a seguinte relação linear (para  $z \ll 1$ ):

$$z = \frac{H_0}{c} r, \quad (2.12)$$

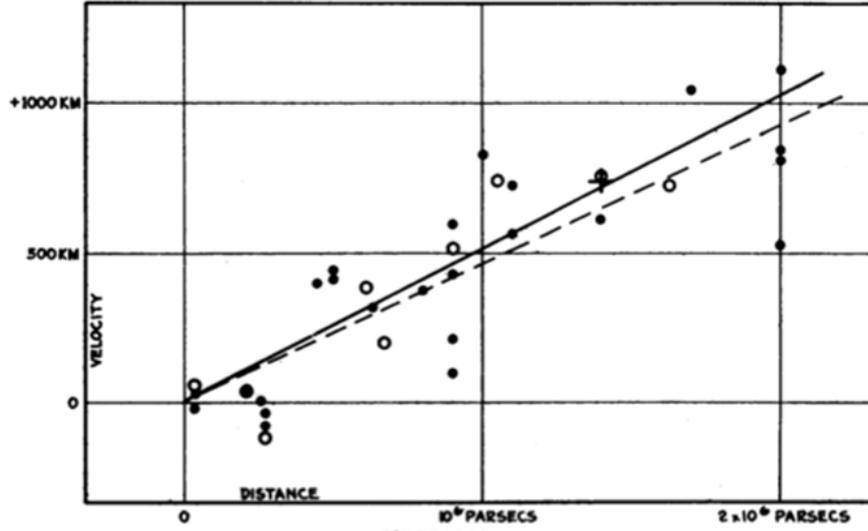
onde:  $H_0$  é a constante de Hubble e  $r$  é a distância.

Hubble interpretou o redshift das galáxias observadas como um efeito Doppler, devido a sua velocidade radial desde a Terra. Como os valores de  $z$  na análise de Hubble foram todos pequenos ( $z < 0,04$ ), foi capaz de usar a relação clássica, não-relativística para o efeito Doppler,  $z = \frac{v}{c}$ , onde  $v$  é a velocidade radial da fonte luminosa (neste caso, uma galáxia). Então interpretando o redshift como um efeito Doppler [4], a lei de Hubble é:  $v = H_0 r$ .

<sup>9</sup> Até então a ideia de Universo era a de um sistema estático.

<sup>10</sup> É um dos poucos que apresenta *desvio para o azul* (*blueshift*).

<sup>11</sup> Cujas luminosidade varia rítmicamente com um período muito regular, onde o período de variação depende muito da metalicidade.



**Figura 2.2.** Diagrama apresentado por Hubble (1929). O eixo horizontal indica a distância das galáxias e o eixo vertical, a velocidade (o correto é  $\frac{km}{s}$  para a unidade de velocidade) [45].

Definimos o **parâmetro de Hubble** em função do fator de escala  $a(t)$ :

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.13)$$

Das observações do WILKINSON MICROWAVE ANISOTROPY PROBE (WMAP) o valor da **constante de Hubble** é:  $H_0 = (70.0 \pm 2.2) \frac{km}{sMpc}$  (índice 0 significa valor atual), parametrizado é  $H_0 = 100h \frac{km}{sMpc}$  com  $h \sim 0.70 \pm 0.02$  [46].

Das observações do PLANCK 2018 RESULTS. VI. COSMOLOGICAL PARAMETERS o valor da **constante de Hubble** é:  $H_0 = (67.4 \pm 0.5) \frac{km}{sMpc}$  [47].

### 2.1.5 Dinâmica de Friedmann

O princípio cosmológico permite que nosso Universo seja descrito como um fluido perfeito, e as identidades de Bianchi garantem que esse fluido seja conservativo<sup>12</sup> ( $T_{;v}^{\mu\nu} = 0$ ). Nas equações de Einstein é possível adicionar o termo  $\Lambda g_{\mu\nu}$  já que a métrica  $g_{\mu\nu}$  é constante com respeito à derivada covariante ( $g_{;\alpha}^{\mu\nu} = 0$ ). A constante cosmológica  $\Lambda$ , foi originalmente introduzida por Einstein em 1917 para conseguir um universo estático, após a descoberta da expansão do Universo em 1929 por Hubble ela foi descartada. A equação de campo de Einstein incluindo a constante cosmológica é:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.14)$$

<sup>12</sup>Conservação da energia. O tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  também satisfaz as identidades de Bianchi  $G_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ .

No lado direito das equações de Einstein, para um fluido perfeito, o tensor de energia-momentum é:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

onde  $\rho$  e  $p$  são a densidade de energia e a pressão do fluido perfeito respectivamente. A natureza da fonte é dada pela relação entre  $\rho$  e  $p$  com a equação de estado  $p = p(\rho)$  que determina cada componente do Universo, supondo que não existem forças externas.

O tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  é:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^\nu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda, \quad (2.16)$$

aqui  $\Gamma_{\beta\theta}^\alpha$  é chamado de conexão afim ou símbolo de Christoffel<sup>13</sup>, é da forma:

$$\Gamma_{\beta\theta}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} \left( \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\theta} + \frac{\partial g_{\theta\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\theta}}{\partial x^\gamma} \right). \quad (2.17)$$

O símbolo de Christoffel,  $\Gamma_{\beta\theta}^\alpha$ , é definido para facilitar a descrição dos deslocamentos paralelos<sup>14</sup>.

Para descrever a dinâmica do Universo substituímos a métrica de FLRW, equação (2.2), e o tensor de energia-momentum, equação (2.15), nas equações de campo de Einstein, equação (2.14), e obtemos as equações independentes:

$$H^2 \equiv \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.18)$$

e

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -8\pi G p - \frac{k}{a^2} + \Lambda, \quad (2.19)$$

onde  $H$  é o **parâmetro de Hubble**.

Das equações (2.18) e (2.19) ou da conservação do tensor energia-momentum,  $T_{;\nu}^{0\nu}$ , podemos obter a **equação de continuidade**:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (2.20)$$

<sup>13</sup>Não são tensores mixtos de tercer ordem, já que não se transformam como tensores.

<sup>14</sup>Ademais, o **princípio da covariância** diz que as leis da física devem ter a forma tensorial e que todos os efeitos da gravitação estão representados pela métrica  $g_{\mu\nu}$  e pela conexão  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  como percebidos no referencial em queda livre.

Também das equações (2.18) e (2.19) obtemos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.21)$$

Nesta equação (2.21) podemos observar que o termo  $\Lambda$  atua como uma "força repulsiva", o que quer dizer que nosso Universo está em uma fase de expansão acelerada<sup>15</sup>.

As equações (2.18) e (2.21) são conhecidas como as **equações de Friedmann**<sup>16</sup>.

### 2.1.6 Parâmetros cosmológicos

É conveniente definir o conjunto de parâmetros observacionais  $\Omega_m$ ,  $\Omega_r$ ,  $\Omega_\Lambda$  e  $\Omega_k$ <sup>17</sup>, os quais seguidamente são descritos.

#### 2.1.6.1 Parâmetro de densidade crítica

Na equação de Friedmann (2.18) nós podemos absorver a constante cosmológica  $\Lambda$ , para isso têm-se a seguinte definição  $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ . A equação será:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (2.22)$$

Então, desta equação pode-se relacionar a curvatura do Universo com seu conteúdo energético:

$$k = \frac{8\pi G}{3}a^2(t)\left(\rho(t) - \frac{3H^2(t)}{8\pi G}\right). \quad (2.23)$$

Desta expressão (2.23), definimos a **densidade crítica**:

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}. \quad (2.24)$$

Para o tempo de hoje  $t = t_0$  a *densidade crítica*<sup>18</sup> é  $\rho_{c_0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$  e a equação (2.23) fica expressada assim:

$$k = \frac{8\pi G}{3}a_0^2(\rho_0 - \rho_{c_0}). \quad (2.25)$$

<sup>15</sup>É necessário um fluido com pressão negativa, ou então uma constante cosmológica ( $\Lambda$ ), diferente de zero.

<sup>16</sup>A constante cosmológica,  $\Lambda$ , foi introduzida por Einstein para garantir um universo estático. Mas com a descoberta da expansão do universo, ele chamou isto como o maior erro da sua vida.

<sup>17</sup>Os índices estão relacionados com a matéria, radiação, constante cosmológica e curvatura respectivamente.

<sup>18</sup>Para hoje  $\rho_{c_0} = 1,8791h^2 \cdot 10^{-29} \frac{g}{cm^3} = 8,0992h^2 \cdot 10^{-47} GeV^4$  [15].

### 2.1.6.2 Parâmetros de densidades

Os parâmetros de densidade ( $\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda, \Omega_k$ ) são definidos como:

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i(t)}{\rho_c(t)}, \quad (2.26)$$

$$\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_m, \quad \Omega_r = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_r, \quad \Omega_\Lambda = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad (2.27)$$

$$\Omega_k(t) = -\frac{k}{a^2 H^2(t)}. \quad (2.28)$$

Com estas definições, podemos obter a partir da equação de Friedmann a seguinte relação:

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \quad (2.29)$$

O significado físico do *parâmetro de densidade* de cada componente representa a sua fração na composição do Universo.

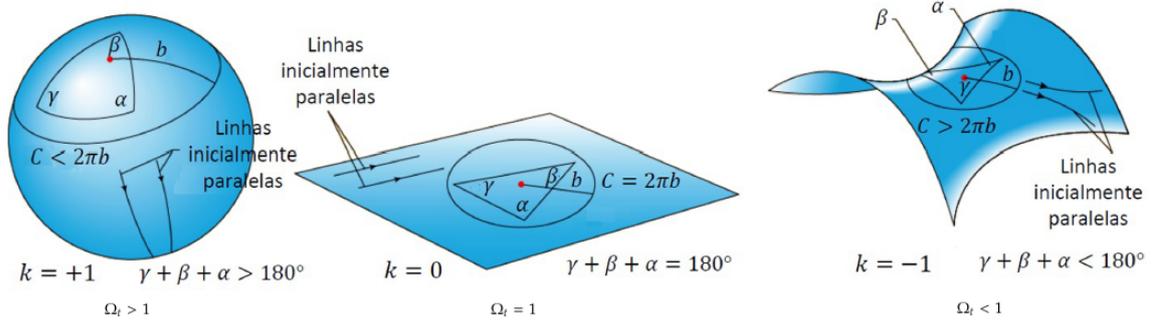
Definindo em um único parâmetro de densidade todo o conteúdo material do Universo,  $\Omega_t = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda$ , é possível relacionar a distribuição da matéria com a curvatura do espaço-tempo. Então, a partir da equação (2.22) obtemos:

$$\frac{k}{a^2 H^2} = \Omega_t - 1 \quad (2.30)$$

Nas equações (2.23) e (2.30) podemos observar que:

- Se  $\rho = \rho_c$  ou  $\Omega_t = 1 \Rightarrow k = 0$  (geometria da seção espacial do espaço-tempo é euclídeana.)
- Se  $\rho > \rho_c$  ou  $\Omega_t > 1 \Rightarrow k > 0$  (geometria da seção espacial do espaço-tempo é esférica.)
- Se  $\rho < \rho_c$  ou  $\Omega_t < 1 \Rightarrow k < 0$  (geometria da seção espacial do espaço-tempo é hiperbólica.)

Sendo assim, podemos observar as geometrias da seção espacial do espaço-tempo:



**Figura 2.3.** Geometria da seção espacial do espaço-tempo [48,49].

### 2.1.6.3 Parâmetro de desaceleração

Um Outro parâmetro importante, que auxilia o entendimento do processo de expansão é o **parâmetro de desaceleração**<sup>19</sup>,  $q(t)$ . Este parâmetro cosmológico é obtido fazendo uma expansão do fator de escala  $a(t)$ , em série de Taylor em torno do tempo presente  $t_0$ , que seguidamente deduzimos [50]:

$$a(t) = a[t_0 - (t_0 - t)] \quad (2.31)$$

$$= a(t_0) - (t_0 - t)\dot{a}(t_0) + \frac{1}{2}(t_0 - t)^2\ddot{a}(t_0) - \dots$$

$$= a(t_0) \left[ 1 - (t_0 - t)\frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} + \frac{1}{2}(t_0 - t)^2\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)} - \dots \right]$$

$$= a(t_0) \left[ 1 - (t_0 - t)H_0 - \frac{1}{2}(t_0 - t)^2 \left( -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} \right) H_0^2 - \dots \right] \quad (2.32)$$

A partir desta expansão definimos o *parâmetro de desaceleração*:

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} \Big|_{t=t_0} \quad (2.33)$$

A constante de Hubble  $H_0$ , dá uma medida da velocidade de expansão do Universo e  $q_0$  dá uma medida de como se está retardando a expansão, os dados de *supernovas do tipo*

<sup>19</sup>Descreve a *mudança* na taxa de expansão.

$Ia$  (SNIa) indicam fortemente que a expansão hoje, é acelerada<sup>20</sup>, o qual já foi corroborado [7].

Em geral temos:

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \quad (2.34)$$

Também da equação (2.10), considerando  $t_e = t$ , podemos encontrar  $z$  (redshift) até segunda ordem em  $t_0 - t$  da seguinte forma:

$$z = (t_0 - t)H_0 + (t_0 - t)^2 \left( \frac{1}{2}q_0 + 1 \right) H_0^2 + \dots \quad (2.35)$$

## 2.2 O conteúdo energético do Universo e o modelo padrão da cosmologia

O modelo padrão<sup>21</sup> está baseado no *Princípio Cosmológico*, a *Teoria da Relatividade Geral* e a *hipótese de que o conteúdo do universo pode ser descrito por um fluido perfeito*. Atualmente, este modelo é bem corroborado pelos dados observacionais. As observações diretas e indiretas constataam a existência de matéria bariônica e radiação (na forma de fótons e neutrinos não massivos).

Considerando que cada componente do Universo não interage entre si, podemos definir o parâmetro da equação de estado<sup>22</sup>,  $\omega_i$ . A dinâmica de cada um dos fluidos é individualizada por esta equação de estado, que relaciona a pressão do fluido  $p$  com a densidade de energia  $\rho$  de cada componente do Universo,  $p = p(\rho)$ :

$$\omega_i = \frac{p_i}{\rho_i} \quad (2.36)$$

Então, a equação (2.20) de conservação do fluido cósmico expressa, em termos da densidade de energia, é:

$$\dot{\rho}_\omega + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_\omega + p_\omega) = 0 \implies \dot{\rho}_\omega + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_\omega(1 + \omega) = 0, \quad (2.37)$$

e resolvendo para  $\omega$  constante, obtemos:

$$\rho_\omega = \rho_{\omega 0} a^{-3(1 + \omega)}, \quad (2.38)$$

com  $\rho_{\omega 0}$  constante.

<sup>20</sup>O parâmetro de desaceleração hoje é  $q_0 < 0$ .

<sup>21</sup>Chamado também modelo  $\Lambda$ CDM.

<sup>22</sup>A de um fluido barotrópico  $p = \omega\rho$ .

A cosmologia padrão destaca três cenários; radiação, matéria não-relativística e energia escura. Cada uma dessas componentes também é descrita por um fluido perfeito. Portanto descrevemos estes cenários.

### 2.2.1 Radiação ou matéria relativística

Embora os fótons não tenham massa eles exercem pressão, e a equação de estado dos fótons ou de qualquer outro gás relativístico, é:

$$p_r = \omega_r \rho_r = \frac{1}{3} \rho_r, \quad (2.39)$$

aqui  $\omega_r = \frac{1}{3}$  é o parâmetro de estado. A evolução temporal de  $\rho_r$  é obtida a partir da equação (2.38):

$$\rho_r = \rho_{r0} a^{-4}. \quad (2.40)$$

Sustituindo esta equação (2.40) em (2.26), obtemos:

$$\Omega_r = \Omega_{r0} a^{-4} = \Omega_{r0} (1 + z)^4. \quad (2.41)$$

Para um Universo dominado só por radiação<sup>23</sup> e com  $k = 0$ , podemos determinar a dependência temporal do factor de escala,  $a(t)$ , a partir da equação de Friedmann:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_r \Rightarrow a \propto t^{\frac{1}{2}}. \quad (2.42)$$

Nesta época dominada apenas pela radiação obtemos  $q_0 = +1$ , e:

$$t_0 = \frac{1}{2H_0}. \quad (2.43)$$

Esta componente de radiação dominou o Universo em tempos remotos, hoje não é predominante já que a contribuição de  $\Omega_{r0} = 2,47h^{-2} \cdot 10^{-5}$  (medida hoje) [15] ao valor do  $\Omega_{total}$ , hoje, é desprezível.

<sup>23</sup>Existe outra componente a considerar na radiação, os **neutrinos** que se comportam como partículas relativísticas devido a sua massa ser pequena. Então, o parâmetro de densidade da radiação é a soma dos fótons e os neutrinos.

### 2.2.2 Matéria não-relativística ou poeira

Dois tipos distintos de componentes não-relativísticas são consideradas: a **matéria bariônica**<sup>24</sup>, a matéria comum ou ordinária que observamos nas galáxias e estrelas e a **matéria escura fria**<sup>25</sup> CDM (Cold Dark Matter), uma espécie sem pressão que ao contrário dos bárions, tem uma interação desprezível com a radiação (daí o prefixo "escuro").

Logo a evolução temporal de  $\rho_m$  (com parâmetro de estado  $\omega_m = 0$ ) a partir da equação (2.38) é:

$$\rho_m = \rho_{m0} a^{-3}. \quad (2.44)$$

Sostituindo esta equação (2.44) em (2.26), obtemos:

$$\Omega_m = \Omega_{m0} a^{-3} = \Omega_{m0} (1 + z)^3, \quad (2.45)$$

onde, no parâmetro  $\Omega_{m0}$  está incluído  $\Omega_{b0}$  dos bárions atuais e  $\Omega_{CDM}$ .

Segundo o PLANCK<sup>26</sup> 2018 RESULTS. VI. COSMOLOGICAL PARAMETERS, o valor da componente do **parâmetro de densidade de matéria** é:  $\Omega_{m0} = (0.315 \pm 0.007)$  [47], do PLANCK 2015  $\Omega_{m0} = (0.308 \pm 0.012)$  [51] e do PLANCK 2013  $\Omega_{m0} = (0.315 \pm 0.017)$  [52].

Para um Universo dominado só por matéria e com  $k = 0$ , podemos determinar a dependência temporal do factor de escala  $a(t)$  a partir da equação de Friedmann:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_m \Rightarrow a \propto t^{\frac{2}{3}}. \quad (2.46)$$

Aqui obtemos  $q_0 = +\frac{1}{2}$  e a idade do Universo para este caso é:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} = 6,52 \cdot 10^9 h^{-1} yr. \quad (2.47)$$

Este Universo também é conhecido como o modelo de *Einstein - de Sitter*. Foi por muitos anos o modelo cosmológico mais popular, atualmente está praticamente descartado já que o valor de (2.47) é muito pequeno comparado com as idades de algumas estrelas.

<sup>24</sup>Interage eletromagneticamente.

<sup>25</sup>Acredita-se que a matéria escura constitui a maior parte da massa de Halos galácticos e aglomerados de galáxias.

<sup>26</sup>Missão PLANCK da Agência Espacial Europeia (ESA, por suas siglas em inglês).

### 2.2.3 Energia escura

Atualmente se sabe que aproximadamente o 70% do conteúdo do Universo é totalmente desconhecido e é mais exótico que a matéria escura. Esta componente exótica é conhecida como **energia escura**.

O modelo padrão  $\Lambda$ CDM, adota a constante cosmológica ( $\Lambda = 1.3610^{-56} \text{cm}^{-2} \approx 0.1 \text{Gpc}^{-2}$  [52, 53]) como energia escura, com parâmetro de estado  $\omega_\Lambda = -1$  é dizer  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ .

Na equação (2.38), obtemos:

$$\rho_\Lambda = \text{cte.} \quad (2.48)$$

Para um Universo dominado apenas pela constante cosmológica  $\Lambda$  e com  $k = 0$ , podemos determinar a dependência temporal do factor de escala  $a(t)$  a partir da equação de Friedmann:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda \quad \Rightarrow \quad a \propto e^{H_\Lambda t}, \quad (2.49)$$

onde  $H_\Lambda = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3}}$ . Aqui o parâmetro de desaceleração é  $q_0 = -1$ , e a idade do Universo neste caso é infinita<sup>27</sup>. As medições do **PLANCK 2018** [47] indicam que o valor do parâmetro de densidade de energia escura, medido hoje, é:

$$\Omega_\Lambda = 0.6889 \pm 0.0056 \quad (2.50)$$

Por outro lado podemos obter o parâmetro de Hubble em função dos parâmetros observacionais:  $\Omega_m$ ,  $\Omega_r$ ,  $\Omega_\Lambda$  e  $\Omega_k$  (*parâmetros de densidade*). Substituindo as equações (2.38), (2.26) e (2.28) na equação de Friedmann (2.22), obtemos:

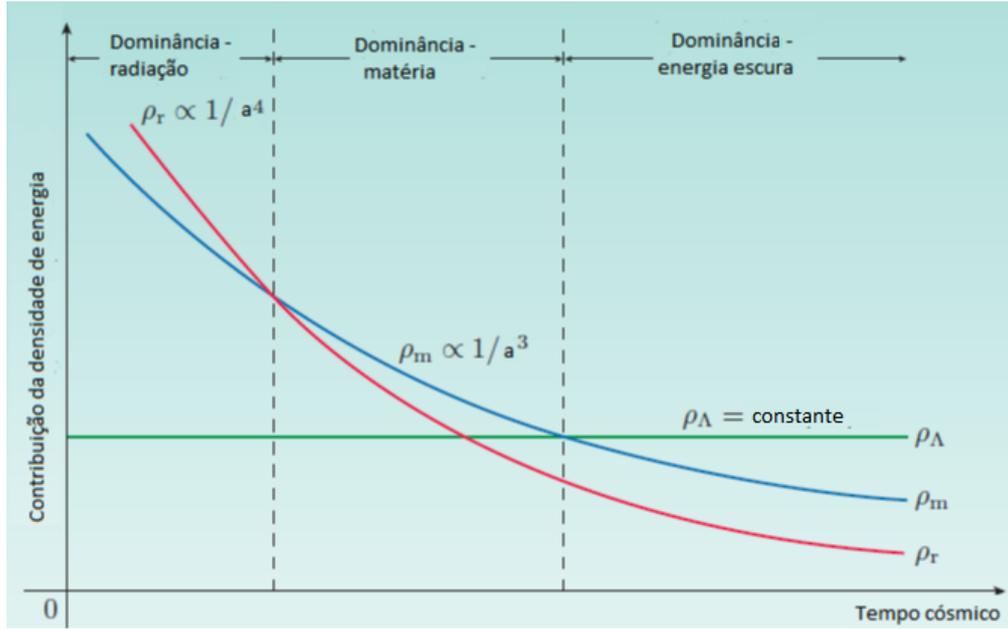
$$H^2(t) = H_0^2 \left[ \sum_i \Omega_{i0} a^{-3(1 + \omega_i)} + \Omega_{k0} a^{-2} \right], \quad (2.51)$$

ou também:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{m0} (1 + z)^3 + \Omega_{r0} (1 + z)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_{k0} (1 + z)^2. \quad (2.52)$$

No seguinte gráfico, Figura 2.4, mostramos a evolução das equações (2.40), (2.44) e (2.48).

<sup>27</sup>Esta solução foi encontrada por *de-Sitter*, daí o nome de **modelo de de-Sitter** [54].



**Figura 2.4.** A possível evolução da densidade de energia da radiação, matéria e energia escura sobre o tempo cósmico em nosso Universo [48].

### 2.2.4 O modelo padrão $\Lambda$ CDM e suas limitações

O espectro de anisotropias da *radiação cósmica de fundo* (CMB-Cosmic Microwave Background), indicam que o Universo é espacialmente plano, ou seja<sup>28</sup>  $\Omega_{k0} = 0.001 \pm 0.002$  [47]. O modelo  $\Lambda$ CDM consegue descrever muito bem as seguintes observações: a expansão acelerada do Universo, a radiação cósmica de fundo e a nucleossíntese primordial<sup>29</sup>.

O modelo  $\Lambda$ CDM considera um Universo com energia escura (a constante cosmológica neste caso) e a matéria escura<sup>30</sup>.

A partir da equação (2.51) e considerando só  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_{m0}$  e o parâmetro de densidade de curvatura ( $\Omega_{k0} \approx 0$ ), obtemos:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[ \Omega_{m0} a^{-3} + \Omega_\Lambda \right], \quad (2.53)$$

cuja solução é:

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{3}} \sinh^{\frac{2}{3}} \left[ \frac{3\sqrt{\Omega_\Lambda}}{2} H_0 t \right] \quad (2.54)$$

<sup>28</sup>Observações que foram estudadas pela sonda da NASA, Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP).

<sup>29</sup>Istos testes podem ser no fundo homogêneo e isotrópico e no nível perturbativo.

<sup>30</sup>Atualmente se considera  $\Omega_\Lambda \approx 0.7$  e  $\Omega_{m0} \approx 0.3$  e satisfaz  $\Omega_{m0} + \Omega_\Lambda = 1$ .

Também a partir da equação (2.52) o parâmetro de Hubble expressada em termos do redshift, é:

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}. \quad (2.55)$$

Apesar do modelo padrão  $\Lambda$ CDM concordar bem com os dados observacionais, ele tem dois problemas: *o problema da constante cosmológica* e *o problema da coincidência cósmica*. Descreveremos estes problemas a seguir.

#### 2.2.4.1 O problema da constante cosmológica

Como diz os estudos, a constante cosmológica é o candidato mais simples para representar à *energia escura*. Esta componente, energia escura, é a responsável da atual expansão acelerada. Mas, a constante cosmológica tem um problema que é fornecida pela inconsistência entre a previsão teórica para a energia do vácuo e o valor observado para a densidade da energia escura [13,56].

**Observacionalmente** sabemos que  $\Lambda$  é da ordem do presente valor do parâmetro de Hubble  $\Lambda \approx H_0^2 = (2.13 h 10^{-42} GeV)^2$ . Este valor corresponde a uma densidade crítica  $\rho_\Lambda$ :

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda m_{Planck}^2}{8\pi} \approx 10^{-47} GeV^4. \quad (2.56)$$

Por outro lado, supondo que a densidade de energia (2.56) vem da energia do vácuo avaliada pela soma das energias de ponto-zero de campos quânticos com massa  $m$  é dada por<sup>31</sup>:

$$\rho_{vac} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \sqrt{k^2 + m^2}. \quad (2.57)$$

Esta integral apresenta uma divergência ultravioleta (altos momentos):  $\rho_{vac} \propto k^4$ . No entanto, esperamos que a teoria quântica de campos seja válida até uma escala de corte  $k_{max}$  ( $\gg m$ ) na qual a integral (2.57) é finita [5,57]:

$$\rho_{vac} \approx \frac{k_{max}^4}{16 \pi^2}, \quad (2.58)$$

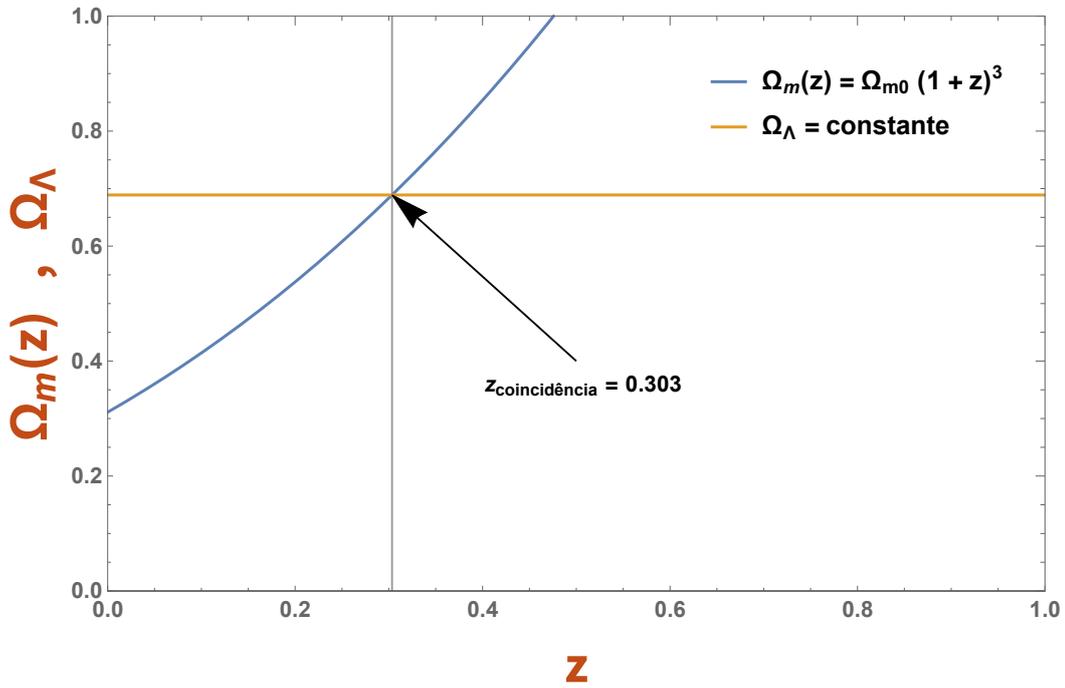
e na escala de Planck<sup>32</sup> [5,57] :

<sup>31</sup>Considerando  $c = 1$  e  $\hbar = 1$ .

<sup>32</sup> $k_{max} = m_{Planck} = 1.22 \cdot 10^{19} GeV$ .

$$\rho_{vac} \approx 10^{74} GeV^4. \quad (2.59)$$

Este valor é  $10^{121}$  ordens de grandeza maior do que o valor observado. De fato não existe nenhuma escala de energia com significado físico que resulte num valor sequer próximo ao valor observado.



**Figura 2.5.** Coincidência da densidade de energia da matéria e da densidade de energia escura (PLANCK 2018:  $\Omega_{m0} = 0.3111 \pm 0.0056$  e  $\Omega_{\Lambda} = 0.6889 \pm 0.0056$ ).

#### 2.2.4.2 O problema da coincidência cósmica

O segundo problema, da constante cosmológica, consiste no fato de que existe uma coincidência aproximada entre a densidade de energia do vácuo e a densidade de energia da matéria no Universo atual. Esta coincidência é na verdade muito estranha, atendendo ao balanço relativo entre estas energias varia rapidamente à medida que o Universo se expande.

Em outras palavras,  $\Omega_{\Lambda}$  é duplamente improvável; porque é muito pequeno em termos absolutos e porque o seu valor coincide (por um fator dois ou três) com  $\Omega_{m0}$ , sem nenhum motivo aparente [58]:

$$\frac{\Omega_{\Lambda}}{\Omega_{m0}} \approx 2.214. \quad (2.60)$$

Por outro lado, podemos calcular o valor do redshift de coincidência<sup>33</sup> em:

$$\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_{m0}} = \frac{\Omega_\Lambda}{1 - \Omega_\Lambda} = (1 + z_c)^3, \quad (2.61)$$

considerando, segundo PLANCK 2018,  $\Omega_\Lambda = 0.6889 \pm 0.0056$  o redshift de coincidência é  $z_c \approx 0.3$  [3] (ver Figura 2.5), próximo ao redshift de hoje, *mas na escala do tempo é muito diferente*.

## 2.3 Distâncias cosmológicas e supernovas do tipo Ia

As distâncias entre os objetos em nosso Universo são obtidas através das informações da luz. Então, para utilizar dados astronômicos e restringir modelos cosmológicos será necessário calcular distâncias entre estes objetos [5]. Para determinar a distância<sup>34</sup>, os astrônomos geralmente medem o brilho das velas padrão<sup>35</sup> ou o redshift de galáxias distantes e, em seguida, convertem essas medidas a distâncias com base em alguns modelos específicos de espaço-tempo, como o modelo  $\Lambda$ CDM.

A base experimental para um Universo em expansão acelerada é fornecida pela observação de velas padrão muito distantes. Elas Praticamente se encontram em galáxias espirais e elípticas e são objetos que possuem luminosidade intrínsecas determinadas. O questionamento principal existente na literatura científica é sobre a confiabilidade da determinação desta luminosidade, o qual é discutido pelos pesquisadores A. I. Bogomazov e A. V. Tutukov [59].

### 2.3.1 Distância radial comóvel

A luz (Fótons) emitida no tempo de  $t_e$  de uma galáxia em  $r_g$  e que nos atinge no tempo  $t_0$  em  $r = 0$  ao longo da direção radial (geodésicas nulas)<sup>36</sup>.

A partir da métrica de FLRW (2.2), tendo  $ds^2 = 0$  (para o fóton) e  $d\theta^2 = d\phi^2 = 0$  (movimento radial do fóton), obtemos:

$$\int_0^{r_g} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.62)$$

Por outro lado podemos relacionar o segundo membro da igualdade, assim:

<sup>33</sup>Aqui consideramos no momento que  $\rho_m \approx \rho_\Lambda$ .

<sup>34</sup>Num Universo em expansão, a separação entre objetos é uma quantidade dinâmica e depende da geometria do espaço-tempo.

<sup>35</sup>Atualmente as velas padrão utilizadas são as Supernovas do tipo Ia (SNIa).

<sup>36</sup>Consideramos o observador em  $r = 0$  por simplicidade, os resultados não dependem desta escolha particular, dado que a métrica de FLRW é homogêneo e isotrópico.

$$1 + z = \frac{1}{a(t)} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -\frac{H}{a} \Rightarrow \int_0^z \frac{dz}{H(z)} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.63)$$

Então, desta relação (2.63) podemos expressar (2.62) em termos do redshift  $z$ :

$$\chi(z) \equiv \int_0^{r(z)} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_0^z \frac{c dz}{H(z)}. \quad (2.64)$$

Nesta expressão  $\chi$  é a distância radial comóvel<sup>37</sup>.

### 2.3.2 Distância própria

A distância radial física própria (ou distância própria) é definida como o comprimento espacial da geodésica percorrida por um objeto [5, 16, 60]. *Por exemplo:* a distância própria entre uma galáxia observada com coordenadas comoveis  $r, \theta, \phi$  e a terra ( $r = 0$ ), quando se fixa o fator de escala  $a(t)$  para um tempo  $t$ .

Da métrica de FLRW (2.2) e introduzindo a velocidade da luz, obtemos:

$$ds^2 = 0 \Rightarrow c dt = a(t) \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \quad (2.65)$$

$$d_p(\chi, t) \equiv \int_0^r \sqrt{g_{rr}} dr = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = a(t) \chi, \quad (2.66)$$

onde  $d_p(\chi, t)$  é a distância própria e  $\chi$  é função de  $r$ , assim:

$$\chi = \begin{cases} \text{sen}^{-1} r & \text{para } k = +1 \\ r & \text{para } k = 0 \\ \text{senh}^{-1} r & \text{para } k = -1 \end{cases}$$

Na pratica é impossível estabelecer um experimento para medir a distância de uma galáxia distante, portanto, temos que definir outras distâncias com base nos meios práticos que temos das observações.

### 2.3.3 Distância de diâmetro angular

Se conhecemos o comprimento próprio de algum objeto astronômico, então ele pode ser usado como *régua padrão*. Para um objeto que tem comprimento  $l$ , é perpendicular à

<sup>37</sup>Aqui hemos introduzido a velocidade da luz.

linha de visão e suas extremidades que subtende uma abertura angular  $\Delta\theta$  (sendo esta abertura pequena) podemos definir outro observável importante que é a **distância de diâmetro angular** [16], assim:

$$d_A \equiv \frac{l}{\Delta\theta}. \quad (2.67)$$

Agora, para dois objetos que se encontram em  $r, \theta, \phi$  e  $r, \theta + \Delta\theta, \phi$ <sup>38</sup> a distância própria entre eles em um tempo  $t$  (tempo em que se emitem dois raios de luz até nós) é:  $l = a(t)r\Delta\theta$ . Logo, substituindo está expressão em (2.67), obtemos<sup>39</sup>:

$$d_A \equiv \frac{a(t)r(z)\Delta\theta}{\Delta\theta} = a(t)r = \frac{r(z)}{1+z} = \frac{1}{1+z} \int_0^z \frac{c dz}{H(z)}. \quad (2.68)$$

### 2.3.4 Distância de luminosidade

A distância de luminosidade  $d_L$  é utilizada para a observação de supernovas do tipo Ia com o fim de conectar a luminosidade de uma vela padrão com a taxa de expansão do Universo. Então para calcular a  $d_L$  precisamos conhecer o fluxo  $f$  observado. Num espaço Euclidiano, se  $L_0$  é a luminosidade absoluta observada<sup>40</sup> de uma fonte pontual a uma distância  $r$  do observador, o fluxo que mede o observador é:  $f = \frac{L_0}{4\pi r^2} = \frac{E_0}{4\pi r^2 \Delta t_0}$ , onde  $E_0$  é a energia do fóton que chega ao observador e  $\Delta t_0$  é o intervalo de tempo entre o recebimento de dois fótons.

Para uma fonte cuja luminosidade  $L$  é conhecida, podemos definir a *distância de luminosidade* [16], assim:

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi f}}. \quad (2.69)$$

Uma fonte emite fótons num instante  $t$ , no momento da observação  $t_0$  eles estarão espalhados em uma superfície cuja área própria será (no espaço Euclidiano):  $A_p(t_0) = 4\pi d_p^2(t_0) = 4\pi a_0^2 r^2$ .

Quando o fóton é emitido tem energia  $E_e = \frac{hc}{\lambda_e}$  e fator de escala  $a(t)$ . Também em  $t_0$  temos o fator de escala  $a_0$  (quando chega até o observador), ambas expressões podem ser relacionadas com o redshift, assim:

<sup>38</sup>Já que o espaço é isotrópico sempre podemos escolher nossas coordenadas de modo que quaisquer dois pontos têm a mesma coordenada  $\phi$ .

<sup>39</sup>Para um universo plano temos que  $r = \chi$ .

<sup>40</sup>A luminosidade é definida como a razão da energia transmitida por intervalo de tempo  $L = \frac{E}{\Delta t}$ .

$$\frac{\lambda_0}{a_0} = \frac{\lambda_e}{a(t)} = (1+z)\lambda_e \Rightarrow \lambda_0 = (1+z)\lambda_e, \quad (2.70)$$

e

$$E_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{(1+z)\lambda_e} \Rightarrow E_0 = \frac{E_e}{1+z}. \quad (2.71)$$

Logo o intervalo de tempo entre a emissão de dois fótons e a recepção dos mesmos também será alterada, por causa da expansão acelerada do Universo, obtendo:  $\Delta t_0 = \Delta t_e (1+z)$ .

Sabemos também que o fluxo é dado pela potência detectada, dividida pela área na qual a energia está espalhada. Sabendo isto podemos obter a seguinte expressão:

$$f = \frac{\frac{E_0}{\Delta t_0}}{4\pi a_0^2 r^2} = \frac{\frac{E_e}{\Delta t_e}}{4\pi a_0^2 r^2 (1+z)^2} = \frac{L}{4\pi a_0^2 r^2 (1+z)^2}. \quad (2.72)$$

Finalmente, substituindo (2.72) em (2.69), obtemos a distância de luminosidade:

$$d_L = a_0 r (1+z) = (1+z) \int_0^z \frac{c dz}{H(z)}, \quad (2.73)$$

que relacionada com a distância de diâmetro angular  $d_A$ , se expressa assim:

$$d_L = (1+z)^2 d_A. \quad (2.74)$$

Esta última expressão (2.74) é a relação de ETHERINGTON [61]. Sua validade se estende muito além da métrica de FLRW, isto é válido na verdade, para qualquer métrica Riemanniana enquanto o fluxo seja conservado<sup>41</sup>.

### 2.3.5 Supernovas do tipo Ia (SNIa)

As supernovas do tipo Ia (SNIa)<sup>42</sup> são os objetos mais distâtes e os melhores candidatos a velas padrão, devido ao seu brilho extremamente luminoso e uniforme. Existe na literatura outros objetos distantes que podem ser considerados como velas padrão [62,63].

Estas SNIa são explosões de estrelas anãs brancas, localizadas em sistemas binários, onde a acreção de matéria que se produz desde a estrela companheira faz que anã branca alcance

<sup>41</sup>Mais para frente utilizaremos esta relação em **modelos inomogêneos**, especificamente na métrica de Lemaître-Tolman-Bondi (LTB) [35].

<sup>42</sup>As SNIa são observadas em galáxias (*espirais e elípticas*) com populações estelares jovens e velhas.

o limite superior de massa<sup>43</sup>(conhecido como limite de Chandrasekhar [64]) onde perde a sua estabilidade. Então a estrela começa a colapsar e a compressão facilita a combustão explosiva do carbono que produz uma destruição total da estrela. A radiação emitida é principalmente a partir do decaimento radioativo do Níquel e Cobalto produzido na explosão. O pico de luminosidade deste tipo de supernovas está relacionado com a rapidez de enfraquecimento de seu brilho. Quando se aplica esta correlação, a luminosidade relativa de uma supernova do tipo Ia pode ser determinado dentro de um intervalo do 10% à 20%.

As supernovas foram inicialmente classificadas por volta do ano de 1940 de acordo com a presença ou não de certas linhas de absorção dos elementos químicos em seu espectro [65]:

- se o espectro da supernova não apresenta nenhuma linha de hidrogênio é chamada de tipo I,
- se o espectro da supernova apresenta linha(s) de hidrogênio é chamada de tipo II.

Logo, surgiu uma nova subclassificação de acordo com as características espectrais das supernovas de tipo I, elas foram divididas em três subclasses:

- se o espectro da supernova apresenta linhas de absorção de SILÍCIO isoladamente ionizado (Si II) serão consideradas do tipo Ia,
- se o espectro da supernova não apresenta linhas de absorção do Si II, mas apresenta linhas de absorção de HÉLIO (He I) serão consideradas do tipo Ib,
- e se não apresentam linhas de absorção de SILÍCIO nem de HÉLIO serão consideradas do tipo Ic.

No final dos anos 90, vários grupos de pesquisadores liderados por S. Perlmutter e Adam G. Riess [7, 8] utilizaram as supernovas do tipo Ia (SNIa) como velas padrão. Nesta época foi descoberta a expansão acelerada do Universo, medindo distâncias precisas para supernovas do tipo Ia.

Ao realizar testes de supernovas Ia medimos especificamente o *redshift* e a *magnitude* (é uma escala logarítmica de medida do fluxo de radiação em um receptor). Então, para um objeto luminoso cujo fluxo de radiação emitida  $f$  é conhecido, define-se a **magnitude bolométrica aparente**  $m$ , assim:

$$m = -2,5 \log(f) + C. \quad (2.75)$$

Nesta expressão  $C$  é uma constante que define a escala. A magnitude bolométrica se refere à integração do fluxo em todo o espectro eletromagnético (todos os comprimentos de onda).

---

<sup>43</sup>Aproximadamente  $1,4M_{\odot}$ .

A expressão (2.75) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$m = -2,5 \log \left( \frac{L}{4\pi d_L^2} \right) + C. \quad (2.76)$$

Analogamente, definimos a **magnitude bolométrica absoluta**<sup>44</sup>  $M$ , assim:

$$M = -2,5 \log \left( \frac{L}{4\pi (10pc)^2} \right) + C. \quad (2.77)$$

Seguidamente chamamos à diferença entre as magnitudes  $m$  e  $M$  de **módulo de distância**  $\mu$ , e obtemos:

$$\mu = m - M = 5 \log \left( \frac{d_L}{10pc} \right). \quad (2.78)$$

Em escalas cosmológicas e considerando  $10pc = 10^{-5}Mpc$ , obtemos:

$$\mu = m - M = 5 \log \left( \frac{d_L}{1Mpc} \right) + 25. \quad (2.79)$$

Logo usando  $c = 3.10^5 \frac{km}{s}$  e  $H_0 = 100h \frac{km}{sMpc}$ , expressamos (2.79) como:

$$\mu = 5 \log \left[ \frac{H_0 d_L}{c} \right] - 5 \log(h) + 42,384. \quad (2.80)$$

### 2.3.5.1 A amostra Union2.1

Como sabemos as supernovas do tipo Ia (SNIa) se tornaram um importante observável cosmológico por servirem de indicadores de distância, sendo usadas para determinar a expansão acelerada do Universo. Um dos catálogos de SNIa ainda utilizadas, é a **amostra Union2.1**.

No início do ano 2010 foi publicado um conjunto de dados pelo **Supernova Cosmology Project** (SCP) intitulado *Union2 compilation*<sup>45</sup> [66]. Estes dados, Union2 compilation, são uma atualização do *Union compilation*<sup>46</sup> [67], com 719 supernovas de 17 conjuntos de dados. Destes dados, 557 supernovas foram consideradas. Logo no ano 2011 **Supernova**

<sup>44</sup>Para uma fonte que está a uma distância de luminosidade de 10pc até o observador.

<sup>45</sup>Os dados podem ser encontrados no endereço <http://supernova.lbl.gov/Union/>.

<sup>46</sup>Union compilation reúne dados de 414 supernovas de 13 conjuntos de dados, dos quais 307 supernovas foram consideradas.

**Cosmology Project** apresentou *Union2.1 compilation*<sup>47</sup> [68], a qual é uma atualização de *Union2 compilation*, com 833 supernovas de 19 conjuntos de dados, dos quais 580 foram consideradas e estas mesmas estão conformadas por baixos e altos redshifts.

O catálogo Union2.1 foi construído para a ciência de energia escura e atualiza as amostras Union e Union2 lançadas anteriormente<sup>48</sup>. Em particular, esta amostra Union2.1 contém 14 novas supernovas descobertas pelo Telescópio Espacial Hubble (HST-Cluster Supernova Survey), pesquisa realizada pelo SCP, que passa nos cortes de seleção de Union2. Dez destas supernovas são  $z > 1$ , o que torna a amostra Union2.1 "ideal" para estudar a isotropia até as maiores distâncias possíveis. Este catálogo fornece cinco entradas para cada supernova, especificamente: nome, redshift (*CMB centric*), módulo de distância, erro na estimativa do módulo de distância e a probabilidade de que a supernova foi hospedada por uma galáxia de baixa massa [70].

Os módulos de distâncias das supernovas do catálogo Union2.1 foram obtidos pelo método Spectral Adaptive Lightcurve Template (SALT2-1) que é um ajustador das curvas de luz das supernovas [71]. A amostra Union2.1, assim como outras amostras calibradas com o filtro SALT2-1, produz resultados mais próximos ao cenário padrão [52].

### 2.3.5.2 A amostra Joint Light-curve Analysis (JLA )

Outra amostra de SNIa mais atual na literatura é a amostra **JLA** (Joint Light-curve Analysis) [72]. Esta amostra JLA de 740 SNIa, confirmadas espectroscopicamente, tem curvas de luz de alta qualidade. O JLA está conformado por várias amostras em baixos redshift ( $z < 1$ ), três anos da amostra *SDSS – II* ( $0.05 < z < 0.4$ ) [73], os três anos do *SNLS* ( $0.2 < z < 1$ ) [74] e a amostra do HST ( $z > 1$ ) [75]<sup>49</sup>.

O estimador de distância usado em [72], e na maioria das análises cosmológicas semelhantes, assume que supernovas com cor idêntica, forma e ambiente galáctico, tem em média a mesma luminosidade intrínseca para todos os redshifts. Esta hipótese é quantificado por um modelo linear, obtendo-se um módulo de distância padronizado:  $\mu = 5 \log_{10} \left( \frac{d_L}{10 \text{pc}} \right)$ . Seguindo [72], podemos escrever o **módulo de distância observacional**:

$$\mu_i^{\text{SNIa}} = m_{B,i}^* - (M_B - \alpha X_{1,i} + \beta C_i), \quad (2.81)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $M_B$  são os parâmetros de nuisance na estimativa de distância. Estes parâmetros de nuisance serão ajustados simultaneamente junto com os parâmetros do modelo cosmológico

<sup>47</sup>Com redshift no intervalo de  $0.015 \leq z \leq 1.414$ .

<sup>48</sup>Estes dados de SNIa tem sido utilizados também para testar modelos inomogêneos de Lemaître-Tolman-Bondi (**LTB**) e  $\Lambda$ **LTB** [69].

<sup>49</sup>As siglas são: Sloan Digital Sky Survey (**SDSS-II**), SuperNova Legacy Survey (**SNLS**) e Hubble Space Telescope (**HST**).

teórico. O parâmetro  $X_1$  descreve o tempo de alongamento da curva de luz, o parâmetro  $C$  descreve a cor da supernova com brilho máximo e  $m_B^*$  corresponde à magnitude do pico observado na banda-B, no referencial do observador. Estes parâmetros das curvas de luz ( $m_B^*$ ,  $X_1$ ,  $C$ ) resultam do ajuste do modelo de sequência espectral das SNIa para os dados fotométricos.

Tanto a magnitude absoluta  $M_B$  e o parâmetro  $\beta$  dependem das propriedades da galáxia hospedeira [74] embora o mecanismo não seja totalmente compreendido. Para corrigir esses efeitos se utiliza o procedimento de Conley et al. 2011 (C11) [76], na qual se assume que a magnitude absoluta  $M_B$ , está relacionada com a massa estelar hospedeira ( $M_{estelar}$ ) por uma função degrau simples<sup>50</sup>:

$$M_B = \begin{cases} M_B^1 & \text{se } M_{estelar} < 10^{10} M_\odot \\ M_B^1 + \Delta_M & \text{outros casos.} \end{cases} \quad (2.82)$$

As curvas de luz, das SNIa de JLA, foram ajustadas pelo Spectral Adaptive Light-curve Template-II (**SALT2**). O SALT2 é uma descrição de primeira ordem da sequência temporal espectral das SNIa, multiplicada por uma lei de cores independente do tempo. Na literatura existem vários ajustadores de curvas de luz, os mais utilizados (mais atuais) são: o Multicolor Light-Curve Shapes (**MLCS**) e o **SALT**. O ajustador MLCS foi desenvolvido por A. Riess [77], que só ajusta SNIa das proximidades e o SALT [78] que ajusta SNIa tanto das proximidades como das regiões distâtes<sup>51</sup>.

A amostra JLA (não binados) tem uma matriz de covariância de  $3N_{SN} \times 3N_{SN} = 2220 \times 2220$  para os parâmetros das curvas de luz incluindo incertezas (os erros) estatísticas e sistemáticas.

$$C_\eta = C_{estat} + (C_{cal} + C_{model} + C_{viés} + C_{hosp} + C_{poei})_{reavaliado} + (C_{velpec} + C_{nãola})_{C11}. \quad (2.83)$$

Nesta expressão (2.83), o vetor de parâmetros das curvas de luz  $\eta$ , é definido como:  $\eta = (m_{B,i}^*, X_{1,i}, C_i)$ , onde  $i$  é contabilizada sobre todas as SNIa da amostra. A incerteza estatística  $C_{estat}$  é obtida da propagação de erro do ajuste da curva de luz, conforme é descrito por Guy et al. 2010 [79]. Nesta matriz de covariança se consideraram um total de 7 fontes de incertezas sistemáticas. Reavaliando 5 fontes de incertezas as quais estão associadas com a incerteza da calibração  $C_{cal}$ , com a incerteza do modelo de curva de luz  $C_{model}$ , com a incerteza da correção do viés  $C_{viés}$ , com a incerteza da função degrau da massa estelar hospedeira  $C_{hosp}$  e com a incerteza da densidade da coluna de poeira da Via Láctea  $C_{poei}$ . As duas últimas incertezas sistemáticas; incertezas nas correções da velocidade

<sup>50</sup>Neste análise não se considera a dependência adicional de  $\beta$  porque não tem um impacto significativo na cosmologia.

<sup>51</sup>JLA utiliza a versão mais atualizada SALT2 [71], que acrescenta informação espectroscópica para melhorar a resolução dos comprimentos de onda, dos modelos espectrais.

peculiar  $C_{\text{velpec}}$  e a contaminação no diagrama de Hubble (supernovas que não são do tipo Ia)  $C_{\text{nãoIa}}$  foram obtidas diretamente de C11 [76].

A estimativa da distância na equação (2.81) pode ser reescrito com notação de matriz, formando a matriz  $A$  tal que:

$$\boldsymbol{\mu} = A\boldsymbol{\eta} - \mathbf{M}_B, \quad (2.84)$$

com as componentes do vetor de luminosidade intrínseca  $\mathbf{M}_B$ , dado pela relação (2.82). Então, a **matriz de covariância** do vetor de estimativas do módulo de distância  $\boldsymbol{\mu}$ , é:

$$C_{\text{cov}} = AC_{\eta}A^{\dagger} + \text{diag}\left(\frac{5\sigma_z}{z\log 10}\right)^2 + \text{diag}(\sigma_{\text{lentes}}^2) + \text{diag}(\sigma_{\text{varin}}^2), \quad (2.85)$$

onde os três últimos termos explicam a incerteza no redshift cosmológico devido às velocidades peculiares, a variação da magnitude causada por lentes gravitacionais, e a variação intrínseca na magnitude de supernovas não descrita pelos outros termos. *Observe que  $C_{\text{cov}}$  depende dos parâmetros de nuisance  $\alpha$  e  $\beta$  e eles serão recalculados em cada etapa ao minimizar a função  $\chi^2$  [80] (para maior detalhes ver a seção 5 da referência [72]).*

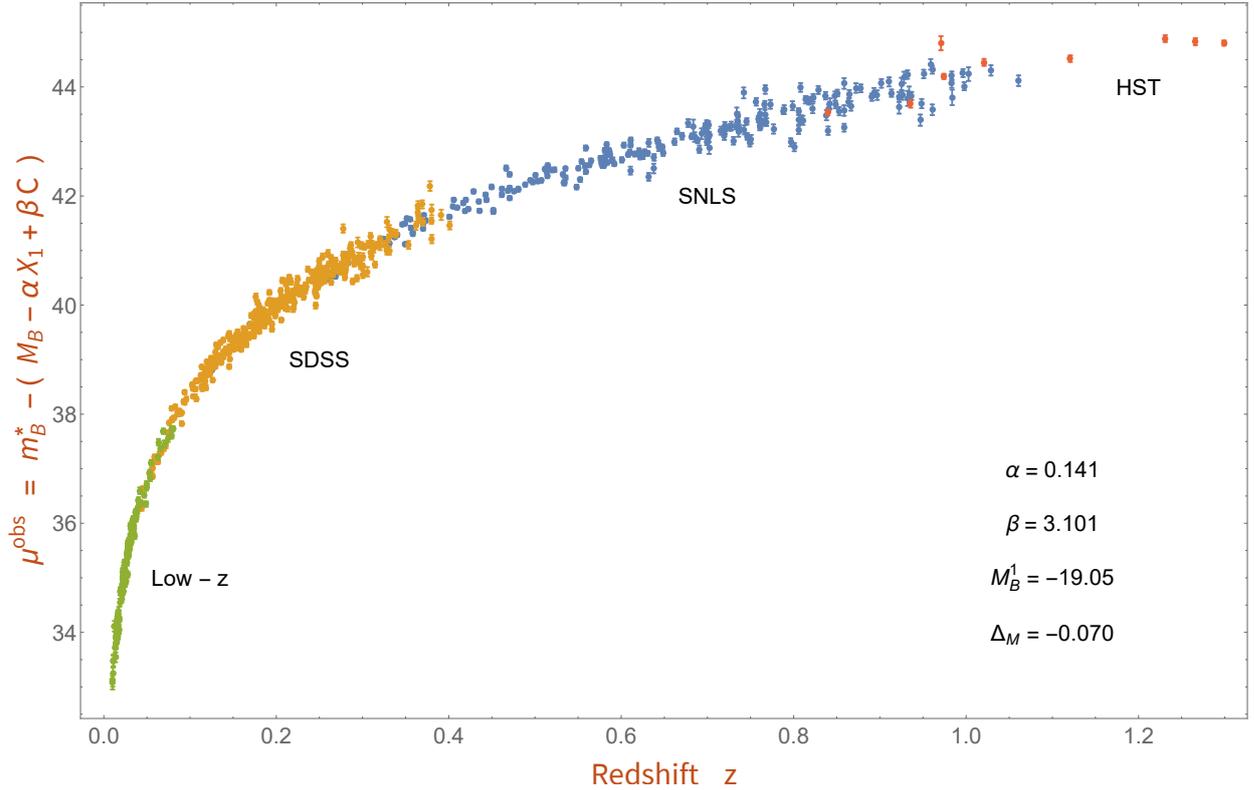
Usando o estimador de distância dado na equação (2.81), podemos ajustar alguma cosmologia às medições de supernovas, *minimizando* a seguinte função:

$$\chi^2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}, M_B) = \left[ \mu_i^{\text{SNIa}}(\boldsymbol{\delta}, M_B) - \mu^{teo}(z_i; \boldsymbol{\theta}) \right]^{\dagger} C_{\text{cov}}^{-1} \left[ \mu_i^{\text{SNIa}}(\boldsymbol{\delta}, M_B) - \mu^{teo}(z_i; \boldsymbol{\theta}) \right], \quad (2.86)$$

sendo  $C_{\text{cov}}$  a matriz de covariância de  $\mu_i^{\text{SNIa}}$ ,

$$\mu^{teo}(z_i; \boldsymbol{\theta}) = 5 \log_{10} \left[ \frac{d_L(z_i; \boldsymbol{\theta})}{10 \text{ pc}} \right], \quad (2.87)$$

onde os parâmetros das supernovas são denotados por  $\boldsymbol{\delta} := (\alpha, \beta)$  e os parâmetros cosmológicos pelo parâmetro  $\boldsymbol{\theta}$  que assume diferentes valores, segundo o modelo cosmológico a ser ajustado. Na Figura 2.6 apresentamos o diagrama de Hubble do catálogo do JLA (740 dados), mantendo fixos os parâmetros de nuisance, do modelo de  $\Lambda$ CDM, em seu valores de melhor ajuste.



**Figura 2.6.** Diagrama de Hubble (740 dados de JLA). Os parâmetros de Nuisance são os valores de melhor ajuste do modelo  $\Lambda$ CDM.

### 2.3.5.3 Dados binnados do JLA

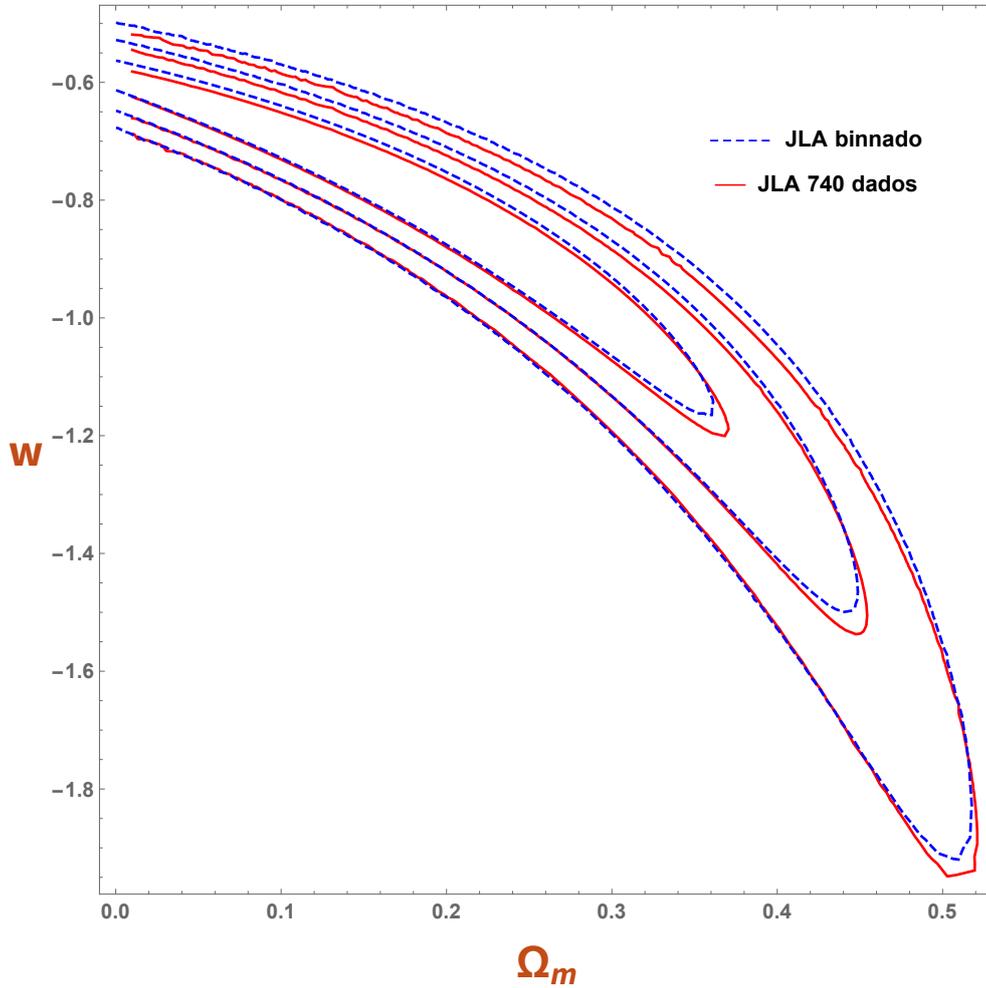
Os dados binnados de JLA é uma forma comprimida (compactada) o qual é mais rápido e fácil para avaliar modelos cosmológicos. Para estudos que investigam uma cosmologia alternativa ou que investigam hipóteses alternativas de padronização de SNIa, devem usar a amostra completa do JLA.

Os modelos cosmológicos que prevêem distâncias de luminosidade isotrópica e que evoluem suavemente com o redshift, podem ser ajustados diretamente com a estimativa de distâncias binnadas. Podemos denotar  $D_L(z; \theta)$  como a distância de luminosidade predita por um modelo que depende de um conjunto de parâmetros cosmológicos  $\theta$ . Então, uma boa aproximação da likelihood total do JLA, é geralmente dada pela seguinte função:

$$\chi^2(\theta, \mathbf{M}) = \mathbf{r}^\dagger \mathbf{C}_b^{-1} \mathbf{r}, \quad (2.88)$$

com  $\mathbf{r} = \mu_b - \mathbf{M} - 5 \log_{10} [D_L(z_b; \theta)]$ ,  $\mu_b$  é o módulo de distância no redshift  $z_b$ ,  $\mathbf{M}$  é um parâmetro livre de normalização e  $\mathbf{C}_b$  é a matriz de covariância de  $\mu_b$ . Devemos ter presente que o parâmetro de normalização  $\mathbf{M}$ , deve ser deixado livre no ajuste e marginalizado ao derivar incertezas. Não fazê-lo seria equivalente a introduzir restrições artificiais no

parâmetro  $H_0$  e resultaria em erros subestimados. Na Figura 2.7 podemos observar a comparação do uso de dados completos do JLA e os dados binnados do JLA, aplicados ao modelo  $\Lambda$ CDM<sup>52</sup>.



**Figura 2.7.** Comparação dos dados observacionais de SNIa do JLA completo e JLA binados, aplicado ao modelo  $\Lambda$ CDM.

<sup>52</sup>Nestes testes utilizamos a constante de Hubble  $H_0 = 70 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}$ , tal como Betoule et al. fez. Mas, é sabido segundo o PLANCK 2018 que o  $H_0 = (67.4 \pm 0.5) \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}$ .

## Capítulo 3

# SOLUÇÕES INOMOGÊNEAS EXATAS E O FORMALISMO DE BUCHERT

Nesta primeira parte do capítulo abordaremos o estudo de métricas que descrevem um Universo inhomogêneo (regiões de baixa densidade<sup>1</sup> e/ou regiões de alta densidade; respeito do valor médio da densidade), dos quais estudaremos com mais detalhe o modelo de Lemaître-Tolman-Bondi (LTB). Como bem é sabido através das observações nosso Universo não é homogêneo<sup>2</sup>, já que vemos vazios, galáxias, aglomerados, superaglomerados, etc. Nos últimos anos o efeito das inhomogeneidades tem sido considerado para construir modelos cosmológicos precisos até as regiões onde as estruturas começam a se formar e sua evolução torna-se não linear (ainda não se consegue superar ao modelo  $\Lambda$ CDM). Então, o uso de soluções exatas às equações de campo de Einstein mostram que uma física bem estabelecida pode explicar alguns dos fenômenos da cosmologia, sem introduzir componentes exóticas<sup>3</sup>.

Na segunda parte deste capítulo estudaremos o formalismo de Buchert. Como sabemos o grande problema da cosmologia padrão é conhecer a natureza física das componentes exóticas (componentes do setor escuro). Apesar de muitos esforços na pesquisa, nenhuma detecção direta de *matéria escura* foi encontrada e ainda menos sabemos sobre a *energia escura*. Por isso que estudaremos o formalismo de Buchert que depende de uma média de quantidades escalares em relação às hipersuperfícies espaciais [25]. Isto é uma maneira conservadora para tentar entender o setor escuro do modelo padrão em termos geométricos (chamada também: abordagem do **backreaction** ou **contrarreação**).

---

<sup>1</sup>Também chamado *vazio local*.

<sup>2</sup>No entanto, geralmente consideramos um Universo homogêneo e isotrópico em grandes escalas o que nos permite usar a métrica de **FLRW**.

<sup>3</sup>Como a matéria escura, energia escura ou similares.

### 3.1 Modelos inomogêneos exatos

As soluções inomogêneas exatas das equações de campo de Einstein têm sido utilizadas para descrever os fenômenos observados na cosmologia, por exemplo: testes com SNIa [81], o mapeamento da distância de luminosidade numa distribuição inomogênea de matéria com a métrica de LTB e utilizando dados de SNIa [82], a relação de distância de luminosidade-redshift das SNIa e observações sobre a radiação cósmica de fundo [83], etc. Dessa forma descrevemos algumas delas.

- **O modelo de Lemaître** [29] (comumente conhecido como Misner - Sharp [84]) não é uma solução explícita, mas é uma métrica determinada por um conjunto de duas equações diferenciais. Ele representa um fluido perfeito esfericamente simétrico, respeito da origem, com gradiente de pressão. Sua solução é obtida por integração numérica.
- **O modelo baseado na solução de Lemaître-Tolman-Bondi (LTB)**<sup>4</sup> [29–31], se início nos anos de 1930 com a pesquisa de George Lemaître [29], quem introduz um mecanismo para explicar a evolução de condensações esféricas de matéria num Universo em expansão a partir de soluções exatas às equações de Einstein. Depois nos anos de 1934 Richard C. Tolman [30] estabelece as diferentes possibilidades que surgem no tratamento das inomogeneidades nos modelos cosmológicos. Finalmente em 1947 H. Bondi [31] aplica as equações da relatividade geral a sistemas esfericamente simétricos (respeito da origem) livres de pressão e realiza um estudo detalhado das equações de movimento sem utilizar aproximações.

Como resultado destas teorias se estabeleceu um campo de pesquisa entorno a este tipo de solução denominado modelo de LTB. Esta métrica de LTB é uma generalização da métrica de FLRW. Este elemento de linha, LTB, é simetricamente esférica e é uma solução de poeira (fluido perfeito com  $p = 0$ ) das equações de campo de Einstein. A densidade de massa e a velocidade das partículas são funções apenas da coordenada radial e da coordenada temporal. O movimento de cada partícula é radial<sup>5</sup> e se move devido à influência da gravidade, além disso não se considera interação eletromagnética. A densidade de massa é finita em todo ponto. *Este modelo é determinado por uma escolha de coordenada e duas funções livres da coordenada radial  $r$  e é caracterizado também pela energia por unidade de massa,  $E(r)$ , das partículas contidas na casca esférica comóvel em um dado  $r$ , a massa gravitacional,  $M(r)$ , contida nessa casca e a função de bang time,  $t_B(r)$ , o que significa que o Big Bang ocorreu em tempos diferentes em diferentes valores de  $r$ .*

- **Os modelos baseados na solução Quasi-Spherical de Szekeres (QSS)** [85, 86], são soluções de poeira (fluido perfeito com  $p = 0$ ) das equações de Einstein sem simetria

<sup>4</sup>Esta métrica pode ser usada para descrever vazios no Universo.

<sup>5</sup>É uma distribuição esférica mas inomogênea na direção radial.

alguma<sup>6</sup>. Eles são definidos por uma escolha de coordenadas e cinco funções livres da coordenada radial. Os modelos de LTB e FLRW são sub-casos deste modelo.

- **O modelo de Stephani esfericamente simétrico**, também têm sido utilizado para fins cosmológicos. É uma solução exata com densidade de energia homogênea e pressão não homogênea.

O modelo LTB têm sido o mais amplamente utilizado na cosmologia já que é um dos mais tratáveis entre os poucos mencionados. No entanto, o modelo Quasi-Spherical Szekeres (QSS), atualmente esta sendo considerado também para abarcar alguns problemas na cosmologia [34, 85–87]. A continuação calculamos as soluções às equações de Einstein com a métrica de LTB, as singularidades e a distância de luminosidade neste modelo de LTB.

### 3.1.1 A solução de Lemaître-Tolman-Bondi (LTB)

A métrica de LTB considera um Universo preenchido de maneira inhomogênea por poeira ( $p = 0$ )<sup>7</sup>. Esta métrica de LTB é uma solução não-estática com simetria esférica, com inhomogeneidades radiais visto da nossa localização (no centro) das equações de campo de Einstein com uma fonte de poeira.

Por outro lado o nível de isotropia da CMB sugere que há uma pequena dependência da direção de observação em grandes escalas. Justifica-se então a considerar métricas esfericamente simétricas porém com inhomogeneidades. Então, escolhendo coordenadas espaciais comoveis ( $\frac{dx^i}{dt} = 0$ ) com a matéria, a origem espacial ( $x^i = 0$ ) como o centro de simetria e a coordenada temporal ( $x^0 = t$ ) para medir o tempo próprio do fluido comóvel, podemos escrever a métrica de Lemaître-Tolman-Bondi [29–31] em coordenadas comóveis-síncrono assim<sup>8</sup>:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R'^2}{1 + 2E(r)} dr^2 - R^2(t, r) [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2], \quad (3.1)$$

onde  $r \in [0, +\infty >$ ,  $\theta \in < 0, \pi >$ ,  $\phi \in [0, 2\pi >$ ,  $R(t, r)$  é a função de raio areal, a linha denota a derivada parcial com respeito à coordenada radial  $r$  e  $E(r)$  é uma função arbitrária<sup>9</sup> a qual determina a curvatura do espaço para cada valor de  $r$ .

Reparamos que na expressão (3.1), a função  $E$  deve obedecer :

$$2E + 1 \geq 0, \quad (3.2)$$

<sup>6</sup>Estes modelos podem ser entendidos como deformações dos modelos com simetria esférica devido as esferas não são mais concêntricas.

<sup>7</sup>Negligenciando a pressão o tensor de energia-momentum é:  $T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$ .

<sup>8</sup>Aqui também consideramos  $c = 1$ .

<sup>9</sup>Chamada também função de curvatura.

já que a assinatura de (3.1) é (+ - - -). A igualdade  $E = -\frac{1}{2}$  pode só ocorrer em localizações especiais (em valores isolados de  $r$ ) chamados *necks* (pescoço)<sup>10</sup> [34]. No elemento de linha (3.1) podemos recuperar a métrica de FLRW fazendo:

$$R(t, r) = r a(t) \quad \text{e} \quad E(r) = -\frac{kr^2}{2}. \quad (3.3)$$

Por outro lado, assim como consideramos o gauge em FLRW:  $a(t_0) = a_0 = 1$ , no modelo de LTB podemos também considerar o seguinte gauge:  $R(t_0, r) \equiv R_0(r) = r$  [89].

A evolução temporal da função do raio areal  $R(t, r)$  é obtido combinando as seguintes componentes do tensor de Einstein:  $G_{tt}$ ,  $G_{rt}$  e  $G_{rr}$  para logo integrar o resultado final e obter a seguinte expressão:

$$\dot{R}^2 = 2E(r) + \frac{2M(r)}{R} + \frac{1}{3}\Lambda R^2, \quad (3.4)$$

onde  $(\dot{\phantom{x}})$  representa a  $\frac{\partial}{\partial t}$ ,  $M(r)$  é outra função arbitrária<sup>11</sup> (calculada de uma integração) e  $\Lambda$  é a constante cosmológica.

A equação diferencial parcial (3.4) conterà uma função arbitrária mais,  $t_B(r)$ . Esta função  $t_B(r)$ , é chamada de função *bang time*, no caso de  $\Lambda = 0$  veremos mais adiante de fato que define a coordenada temporal da singularidade do Big Bang, a qual é em geral dependente da posição. Com um valor arbitrário de  $\Lambda$  o Big Bang não ocorrerá sempre, assim como nos modelos de Friedmann.

Das equações de campo de Einstein (componente  $tt$ ) podemos definir a densidade de massa, assim:

$$\frac{8\pi G}{c^4} \epsilon = \frac{8\pi G}{c^2} \rho = \frac{2M'}{R^2 R'} \quad \implies \quad 8\pi G \rho = \frac{2M'}{R^2 R'}. \quad (3.5)$$

**A densidade de massa<sup>12</sup>  $\rho = \frac{\epsilon}{c^2}$ , torna-se infinito quando  $R = 0$  e  $M' \neq 0$  ou quando  $R' = 0$  e  $M' \neq 0$ .**

- O primeiro caso é a singularidade do Big Bang, a qual ocorre necessariamente quando  $\Lambda = 0$ .
- O segundo caso é a singularidade do shell crossing (*cruzamento de cascas ou cruzamento de camadas*), onde a densidade de massa ( $\rho$ ) vai para o infinito e muda de sinal tornando-se negativo.

<sup>10</sup>O valor de  $E = -\frac{1}{2}$  é admissível com a condição que  $R' = 0$  na mesma localização. Isto é um neck ou buraco de minhoca [88].

<sup>11</sup>Conhecida como massa gravitacional ativa dentro de uma casca esférica de raio  $r$ .

<sup>12</sup>Com  $c = 1$ , temos que  $\epsilon = \rho$ .

Nesses pontos, a distância geodésica radial entre o ponto  $(t_0, r_0, \theta_0, \phi_0)$  e o ponto  $(t_0, r_0 + dr, \theta_0, \phi_0)$ , é igual a  $\sqrt{g_{rr}dr}$ , torna-se zero, a qual significa que as cascas coincidem para diferentes valores da coordenada  $r$ . **Esta singularidade pode ser evitada com uma escolha apropriada das funções  $M(r)$ ,  $E(r)$  e  $t_B(r)$ .**

*Estas singularidades, o shell crossing e o Big Bang coincidem no limite de Friedmann.*

A expressão (3.4) tem a mesma forma que uma das equações de Friedmann, exceto que ela contém funções arbitrárias de  $r$  em lugar de constantes. A solução desta equação diferencial parcial (3.4), pode ser escrita assim:

$$t - t_B(r) = \pm \int \frac{dR}{\sqrt{2E(r) + \frac{2M(r)}{R} - \frac{1}{3}\Lambda R^2}}, \quad (3.6)$$

onde  $t_B(r)$  é uma função arbitrária mais, chamada a função *bang time*. **O sinal + se aplica para regiões em expansão e – para regiões em colapso<sup>13</sup>.**

Quando consideramos  $\Lambda \neq 0$ , as soluções explícitas da equação (3.4) envolvem funções elípticas e quando  $\Lambda = 0$ , as soluções de (3.4) podem ser escritas na forma paramétrica (com  $\eta$  como parâmetro), assim:

- com  $E(r) < 0$ , evolução elíptica:

$$\begin{aligned} R(t, r) &= -\frac{M}{2E} (1 - \cos \eta) \\ \eta - \sin \eta &= \frac{(-2E)^{\frac{3}{2}}}{M} (t - t_B(r)), \end{aligned} \quad (3.7)$$

- com  $E(r) = 0$ , evolução parabólica:

$$R(t, r) = \left[ \frac{9}{2} M(r) \right]^{\frac{1}{3}} (t - t_B(r))^{\frac{2}{3}}, \quad (3.8)$$

- com  $E(r) > 0$ , evolução hiperbólica:

$$\begin{aligned} R(t, r) &= \frac{M}{2E} (\cosh \eta - 1), \\ \sinh \eta - \eta &= \frac{(2E)^{\frac{3}{2}}}{M} (t - t_B(r)). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Rapare que todas as expressões matemáticas apresentadas neste capítulo, até agora, são covariantes frente a transformações de coordenadas da forma  $\tilde{r} = g(r)$ , de tal forma que  $r$

<sup>13</sup>Nos primeiros trabalhos desenvolvidos, na minha pesquisa, consideraremos só modelos em expansão.

pode ser escolhida à vontade. Isto significa que uma das funções  $E(r)$ ,  $M(r)$  ou  $t_B(r)$  pode ser fixado a nossa conveniência por uma escolha adequada de  $g(r)$ .

Para saber o **comportamento na origem**, as condições para ter um centro regular, sugerimos o artigo de Mustapha e Hellaby [90]. Logo, fazemos um resumo do *shell crossing*.

### 3.1.2 Shell crossing

Como mencionamos antes, os modelos de LTB apresentam dois tipos de singularidades, o Big bang e o Shell crossing. No Shell crossing a densidade de massa  $\rho = \frac{\epsilon}{c^2}$ , neste modelo LTB, torna-se infinita quando  $R' = 0$  e  $M' \neq 0$ . Esse efeito ocorre se uma camada interna expande mais rápido que uma camada externa. Se  $R'$  muda de sinal ali, então a densidade de massa na outra parte do Shell crossing torna-se negativa.

Aprofundando o estudo do Shell crossing, para entender esta singularidade, podemos aplicar o formalismo de tetrada do tensor de Riemann:

$$e^0 = dt, \quad e^1 = \left( \frac{R'}{\sqrt{1+2E(r)}} \right) dr, \quad e^2 = R d\theta, \quad e^3 = R \sin\theta d\phi, \quad (3.10)$$

as quais mostramos em seguida:

$$R_{0101} = \frac{2M}{R^3} - \frac{M'}{R^2 R'}, \quad R_{0202} = R_{0303} = -\frac{M}{R^3} = \frac{1}{2} R_{2323}$$

$$R_{1212} = R_{1313} = \frac{M}{R^3} - \frac{M'}{R^2 R'}. \quad (3.11)$$

Logo, o **shell crossing é uma singularidade de curvatura** (as quantidades indicadas acima são escalares e alguns se tornam infinitos quando  $R' = 0$  e  $M' \neq 0$ ). O Shell crossing é considerado menos “perigoso” que o *Big Bang* por duas razões:

- Em objetos astrofísicos reais de alta densidade, gradientes de pressão estão presentes, estes devem de ser capazes de prevenir a ocorrência do *shell crossing*. A solução LTB simplesmente não é suficientemente geral para descrever tal situação, e acredita-se que o shell crossing é um limite a pressão zero, de uma onda acústica - de elevado, mas finita, densidade.
- Um feixe de geodésicas enviados em uma singularidade de *shell crossing* não fica focado em uma superfície ou uma linha, ao contrário do Big Bang. Isto significa que os objetos materiais que batem no shell crossing não seriam esmagados [91]. Por esta razão, o **shell crossing é chamado também de singularidade fraca**.

A singularidade do Shell crossing pode ser evitada se as formas das funções arbitrárias são adequadamente escolhidas. Temos duas maneiras de evita-la:

- definindo as funções de modo que  $R' \neq 0$  em todo o intervalo de aplicabilidade do modelo;
- ou
- definindo as funções de modo que  $R' = 0$  apenas nas localizações  $r = r_w$  onde  $M' = 0$  e  $\lim_{r \rightarrow r_w} \left| \frac{M'}{R'} \right| < \infty$ .

Quando consideramos modelos em expansão temos  $t \geq t_B$  ( $t_B$  é o tempo de Big Bang) e quando estudamos colapso em direção do *Big Crunch* temos  $t \leq t_c$  ( $t_c$  é o tempo de recolapso), para este último caso basta substituir  $(t - t_B)$  por  $(t_c - t)$  e  $t'_B$  por  $(-t'_c)$ . Mostramos na Tabela 3.1 o tratamento mais geral de Hellaby e Lake [88], que são as condições para não ter *shell crossing* em regiões: elípticas, regiões hiperbólicas e regiões parabólicas.

**Tabela 3.1.** Condições para não ter Shell crossing

$E(r) \geq 0$		$E(r) < 0$
	$R' > 0$	
$t'_B \leq 0$ $E' \geq 0$ $M' \geq 0$ Não mais que duas igualdades ao mesmo tempo.		$t'_B \leq 0$ $t'_B \geq \frac{-2\pi M'}{(-2E)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{M'}{M} - \frac{3E'}{2E} \right)$ $M' \geq 0$ Não ambos $M' = 0$ e $E' = 0$ ao mesmo tempo.
	$R' = 0$	
$t'_B = 0$ $E' = 0$ $M' = 0$		$t'_B = 0$ $E' = 0$ $M' = 0$
	$R' < 0$	
$t'_B \geq 0$ $E' \leq 0$ $M' \leq 0$ Não mais que duas igualdades ao mesmo tempo.		$t'_B \geq 0$ $t'_B \leq \frac{-2\pi M'}{(-2E)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{M'}{M} - \frac{3E'}{2E} \right)$ $M' \leq 0$ Não ambos $M' = 0$ e $E' = 0$ ao mesmo tempo.

### 3.1.3 A propagação da luz e a distância de luminosidade no modelo de LTB

Para conectar a dinâmica de LTB com os dados observacionais, especificamente com dados de SNIa, precisamos de uma equação que relacione o redshift e o fluxo de energia da luz com a natureza exata das inhomogeneidades. Para isso, estudaremos e deduziremos as equações da propagação da luz no modelo de LTB.

Como a solução de LTB possui simetria esférica, vamos considerar um observador ubicado no centro de simetria<sup>14</sup> [92]. Por outro lado existem trabalhos com uma dedução das equações,

<sup>14</sup>Ou seja, na origem:  $r = 0$ .

mais geral, para um observador fora do centro de simetria (off-center), as quais podem ser estudadas do artigo de Alnes e Amarzguioui [93]. Assim, para a luz que viaja sempre ao longo de geodésicas nulas,  $ds^2 = 0$ , na direção radial,  $d\theta = d\phi = 0$ , e substituindo estas considerações no elemento de linha (3.1), podemos obter a equação para os raios de luz:

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{R'(t,r)}{\sqrt{1+2E(r)}} \quad \text{ou} \quad \frac{dt}{d\mu} = -\frac{dr}{d\mu} \frac{R'(t,r)}{\sqrt{1+2E(r)}}, \quad (3.12)$$

onde  $\mu$  é um parâmetro de curva<sup>15</sup> e o sinal negativo indica que os raios de luz são radialmente entrantes (nos atingem). Agora, considerando dois raios de luz sucessivos os quais são soluções da equação (3.12) e cujas soluções são dadas por  $t_1 = t(\mu)$  e  $t_2 = t(\mu) + \lambda(\mu)$ , podemos deduzir que:

$$\frac{dt_1}{d\mu} = \frac{dt(\mu)}{d\mu} = -\frac{dr}{d\mu} \frac{R'(t(\mu),r)}{\sqrt{1+2E(r)}}, \quad (3.13)$$

e

$$\frac{dt_2}{d\mu} = \frac{dt(\mu)}{d\mu} + \frac{d\lambda(\mu)}{\mu} = -\frac{dr}{d\mu} \frac{R'(t(\mu),r)}{\sqrt{1+2E(r)}} + \frac{d\lambda(\mu)}{d\mu}. \quad (3.14)$$

A partir da equação (3.12), também encontramos que:

$$\frac{dt_2}{d\mu} = -\frac{dr}{d\mu} \frac{R'(t_2,r)}{\sqrt{1+2E(r)}} = -\frac{dr}{d\mu} \frac{R'(t(\mu)+\lambda(\mu),r)}{\sqrt{1+2E(r)}}. \quad (3.15)$$

Por outro lado, fazendo uma expansão de Taylor entorno de  $\lambda(\mu)$  e considerando apenas termos lineares<sup>16</sup>, obtemos:

$$\frac{dt_2}{d\mu} = -\frac{dr}{d\mu} \frac{R'(t(\mu),r)}{\sqrt{1+2E(r)}} - \frac{dr}{d\mu} \frac{\dot{R}'(t(\mu),r)\lambda(\mu)}{\sqrt{1+2E(r)}}. \quad (3.16)$$

Considerando as equações (3.14) e (3.16) podemos encontrar:

$$\frac{d\lambda(\mu)}{d\mu} = -\frac{dr}{d\mu} \frac{\dot{R}'(t,r)\lambda(\mu)}{\sqrt{1+2E(r)}}. \quad (3.17)$$

Lembrando a definição do *redshift*<sup>17</sup>  $z \equiv \frac{\lambda(0)}{\lambda(\mu)} - 1$ , podemos deduzir:  $\frac{dz}{d\mu} = -\frac{\lambda(0)}{\lambda^2(\mu)} \frac{d\lambda(\mu)}{d\mu}$  e logo substituir estas relações na equação anterior para obter:

<sup>15</sup>Também chamado: parâmetro afim.

<sup>16</sup> $R'(t(\mu)+\lambda(\mu),r) = R'(t(\mu),r) + \dot{R}'(t(\mu),r)[\lambda(\mu)]$ .

<sup>17</sup>Onde  $\lambda(0)$  é o comprimento de onda recebido por nós e  $\lambda(\mu)$  é o comprimento de onda emitida pela galáxia.

$$\frac{dz}{d\mu} = \frac{dr}{d\mu} \frac{(1+z)\dot{R}'(t,r)}{\sqrt{1+2E(r)}}. \quad (3.18)$$

Por último a partir das equações (3.18) e (3.12) obtemos o par de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, que determinam as relações entre as coordenadas e o *redshift* observável, ou seja  $t(z)$  e  $r(z)$ . Assim:

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{R'(t,r)}{(1+z)\dot{R}'(t,r)}, \quad (3.19)$$

e

$$\frac{dr}{dz} = \frac{c\sqrt{1+2E(r)}}{(1+z)\dot{R}'(t,r)}. \quad (3.20)$$

Nesta última expressão reintroduzimos a velocidade da luz  $c \simeq 0.3 \frac{\text{Gpc}}{\text{Gyr}}$  [94], com o propósito de obter a *distância de luminosidade* em Gigaparsec (*Gpc*) devido a que nossa escala de tempo está em Giga-anos (*Gyr*). Estas equações diferenciais (3.19) e (3.20) com condições iniciais de  $t(z=0) = t_0$  e  $r(z=0) = 0$  determinam  $t(z)$  e  $r(z)$ .

Na literatura a distância de luminosidade<sup>18</sup>  $d_L(z)$ , de uma fonte de luz até o observador central é dada por [35]:

$$d_L(z) = (1+z)^2 R(t,r) = (1+z)^2 R(t(z), r(z)). \quad (3.21)$$

Nesta expressão (3.21) podemos identificar a distância diâmetro angular como:  $d_A(z) = R(t(z), r(z))$ . Logo, o correspondente *módulo de distância* a partir da definição (2.78) e considerando  $10pc = 10^{-8}\text{Gpc}$  é:

$$\mu = m - M = 5 \log \left( \frac{d_L}{\text{Gpc}} \right) + 40. \quad (3.22)$$

### 3.2 O formalismo de Buchert

Apesar do grande sucesso do modelo padrão cosmológico ( $\Lambda$ CDM) em ajustar uma quantidade impressionante de dados, a natureza física de alguns de seus ingredientes principais (componentes do setor escuro) permanecem desconhecidos<sup>19</sup>. Há portanto motivação para modificar ou alterar o contexto padrão, por exemplo: modificar a teoria

<sup>18</sup>A  $d_L$  também pode ser obtida a partir do *teorema de reciprocidade* [95].

<sup>19</sup>Não existe detecção direta da matéria escura nem da energia escura.

da relatividade geral por uma que tenha uma estrutura mais geral onde as componentes escuras não são componentes da matéria, mas se tornam parte de um setor geométrico das equações de campo generalizadas [21, 22]. Uma outra maneira de tentar entender o setor escuro do modelo  $\Lambda$ CDM em termos geométricos é a abordagem do **backreaction**. Então, a ideia destes primeiros trabalhos é realizar médias sobre as quantidades relevantes da Relatividade geral.

O problema que surge é como executar as médias necessárias sobre configurações de matéria não homogênea e espaço-tempo. Ou seja, como realizar médias na relatividade geral e em particular na cosmologia se ainda não é uma questão realmente estabelecida. Isto está intimamente relacionado ao "problema do ajuste" ("fitting problem") [96], o qual é uma questão fundamental para a cosmologia teórica e observacional. Embora a apropriada definição de médias em relatividade geral e em particular na cosmologia continue sendo uma questão em aberto, existem abordagens que supostamente captam aspectos importantes do problema. Por exemplo: vários procedimentos de médias foram discutidos na literatura [25, 97–99] e revisões do estado do campo pode ser encontrados nas referências [100–103]. Levar em conta o backreaction das inomogeneidades espaciais na dinâmica cosmológica homogênea em larga escala média tem sido considerada uma rota promissora para descrever a evolução do Universo tardio dominado pela matéria.

Aqui nós utilizamos o **formalismo de Buchert** e aplicamos médias sobre quantidades escalares em relação às hipersuperfícies espaciais [25]. Nas equações de Buchert para o **fator de escala volumétrico**<sup>20</sup> ( $a_D(t)$ ) de um Universo de poeira irrotacional aparecem dois tipos de contribuições adicionais em comparação à dinâmica padrão de FLRW : um termo de *backreaction cinemático* e um termo de *curvatura média*<sup>21</sup>. Veremos mais adiante que estes dois termos estão relacionados entre si por uma condição de consistência. Isto é uma característica específica do formalismo de Buchert, que o backreaction cinemático e a curvatura média possam ser combinadas em **densidade de energia efetiva** e uma **pressão efetiva**. Então, a dinâmica do *fator de escala volumétrico* formalmente coincide com a de um Universo de dois fluidos: uma componente sendo poeira e a outra componente um **fluido de backreaction efetivo**. A diferença é que o fator de escala volumétrico não é o fator de escala dada pela métrica de FLRW, devido a que através da operação de média o fator de escala deve ser dependente da escala.

O fluido de backreaction foi modelado como um campo escalar [104] e como gás de Chaplygin [105]. Na cosmologia padrão um campo escalar é introduzido como uma componente adicional no setor da matéria que supostamente descreve a energia escura, uma componente com uma pressão negativa suficientemente grande para explicar a expansão

<sup>20</sup>Esta quantidade  $a_D(t)$ , é definida através do volume de domínio dependente do tempo ( $V_D(t)$ ):  $a_D \propto V_D^{\frac{1}{3}}$ .

<sup>21</sup>Na ausencia destes termos de backreaction recupera-se a dinâmica de um Universo de **Einstein-de Sitter** (EdS).

acelerada do Universo. No contexto do backreaction, por outro lado, não é uma componente adicional mas é de origem geométrico em um Universo de poeira de outra forma pura. Seja ou não o backreaction o suficientemente "forte" para reproduzir os dados observacionais sem a necessidade da energia escura é ainda um problema muito debatido [106,107].

Surge a pergunta: como relacionar este formalismo de Buchert às observações? ... O procedimento de cálculo de média sobre hipersuperfícies espaciais deixa em aberto a questão de como a luz se propaga<sup>22</sup>. Não existe uma métrica espaço-tempo para o qual a condição usual  $ds^2 = 0$  para a propagação de luz, possa ser aplicada. Estudos da propagação da luz em cosmologia de backreaction foram realizadas, por exemplo, em [108–110]. Então, respondendo a nossa questão anterior: ... para relacionar o formalismo de Buchert com as observações, se assume a existência de uma **métrica de modelo**<sup>23</sup> (template metric) [100,111] na qual o fator de escala volumétrico deve desempenhar o mesmo papel que o fator de escala da métrica de FLRW, embora essa métrica de modelo não precise ser uma solução das equações de campo de Einstein. Além disso, assume-se que a *curvatura média* pode ser descrita por um termo de curvatura na métrica de modelo.

Seguidamente escrevemos as expressões matemáticas, do formalismo de Buchert, mais importantes que nos ajudarão a desenvolver este trabalho.

### 3.2.1 As equações de Buchert

Nós temos claro que escolher um procedimento de média não é trivial, já que as equações de Einstein são equações diferenciais não lineares. Por outro lado, nós estamos interessados apenas em observáveis cosmológicos que são escalares, já que estes são explicitamente covariantes. Então, utilizando o formalismo de Buchert que considera um conteúdo de matéria de poeira irrotacional, obtemos as seguintes equações [25]:

$$\left(\frac{\dot{a}_D}{a_D}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\langle\rho_m\rangle_D = -\frac{\mathcal{R}_D + Q_D}{6}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\ddot{a}_D}{a_D} + \frac{4\pi G}{3}\langle\rho_m\rangle_D = \frac{Q_D}{3}, \quad (3.24)$$

juntamente com a conservação da matéria:

$$\langle\rho_m\rangle_D + 3\frac{\dot{a}_D}{a_D}\langle\rho_m\rangle_D = 0. \quad (3.25)$$

<sup>22</sup>Na verdade, neste formalismo, não existe um método natural para descrever a propagação da luz.

<sup>23</sup>Também chamada, *métrica efetiva*.

Onde em estas equações:  $\rho_m$  denota a densidade de matéria<sup>24</sup> (poeira irrotacional),  $Q_D$  é o backreaction cinemático dado por (sendo  $\Theta$  o escalar de expansão<sup>25</sup>):

$$Q_D = \frac{2}{3} \langle (\Theta - \langle \Theta \rangle_D)^2 \rangle_D - 2 \langle \sigma^2 \rangle_D, \quad (3.26)$$

e  $\mathcal{R}_D$  é a média da 3-curvatura:

$$\mathcal{R}_D = \langle {}^3R \rangle_D, \quad (3.27)$$

obtido a partir do escalar 3-curvatura  ${}^3R$  da hipersuperfície ortogonal temporal a  $t = \text{constante}$ .

As quantidades  $Q_D$  e  $\mathcal{R}_D$  cumprem com a seguinte relação de consistência:

$$\frac{1}{a_D^6} (Q_D a_D^6) + \frac{1}{a_D^2} (\mathcal{R}_D a_D^2) = 0. \quad (3.28)$$

Esta última equação (3.28), no caso mais simples, é satisfeita quando:

$$Q_D \propto a_D^{-6} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_D \propto a_D^{-2}. \quad (3.29)$$

As médias que aparecem nestas equações são médias de volume de grandezas escalares  $S(t, r)$ , sobre um domínio  $D$  de preservação de massa em repouso de volume  $V_D$  nas hipersuperfícies a  $t = \text{constante}$ :

$$\langle S \rangle_D = \frac{1}{V_D} \int_D S(t, r) \sqrt{|g_{ij}|} d^3r \quad \text{com} \quad V_D = \int_D \sqrt{|g_{ij}|} d^3r, \quad (3.30)$$

onde  $|g_{ij}|$  é o determinante da métrica 3-espacial em hipersuperfícies em tempo ortogonal. Até agora, o tamanho e a estrutura do domínio  $D$  não foram especificados, só se assumiu que a evolução da configuração de poeira é não singular, algo que não é necessariamente garantido.

Definimos também o fator de escala volumétrico<sup>26</sup> como:

$$a_D(t) = \left[ \frac{V_D(t)}{V_{D0}} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (3.31)$$

onde  $V_{D0} = V_D(t_0)$  é o volume de referência do domínio em um tempo  $t_0$  que será identificado com o tempo presente. Apesar de uma semelhança formal com as equações básicas de um Universo FLRW deve-se enfatizar que o fator de escala volumétrico  $a_D(t)$ ,

<sup>24</sup>Aqui  $\langle \rho_m \rangle_D$  é a média da densidade de matéria sobre um certo domínio  $D$  de preservação da massa.

<sup>25</sup>Aqui  $\langle \Theta \rangle_D = \frac{\dot{V}_D}{V_D} = 3 \frac{\dot{a}_D}{a_D}$  é a média do escalar de expansão.

<sup>26</sup>Também chamado *fator de escala de volume* ou *fator de escala "efetivo"*.

depende do domínio e não é o fator de escala da métrica de FLRW.

Introduzindo os seguintes parâmetros (características médias adimensionais):

$$\mathcal{H}_D = \frac{\dot{a}_D}{a_D}, \quad \Omega_m^D = \frac{8\pi G}{3\mathcal{H}_D^2} \langle \rho_m \rangle_D, \quad \Omega_Q^D = -\frac{Q_D}{6\mathcal{H}_D^2}, \quad \text{e} \quad \Omega_{\mathcal{R}}^D = -\frac{\mathcal{R}_D}{6\mathcal{H}_D^2} \quad (3.32)$$

na equação tipo Friedmann (3.23), achamos:

$$\Omega_m^D + \Omega_Q^D + \Omega_{\mathcal{R}}^D = 1. \quad (3.33)$$

Na equação acima temos que  $\mathcal{H}_D$  é a taxa de Hubble efetiva e na equação (3.33) podemos observar adicionalmente que à contribuição da matéria  $\Omega_m^D$ , aparecem as quantidades fracionárias  $\Omega_Q^D$  e  $\Omega_{\mathcal{R}}^D$  que quantificam o impacto do backreaction e da curvatura espacial média, respectivamente, na dinâmica cosmológica.

### 3.3 Testes observacionais aplicados ao modelo de LTB e ao formalismo de Buchert

Nesta parte da tese descreveremos três trabalhos desenvolvidos desde uma perspectiva do formalismo de Buchert e no contexto de um Universo inhomogêneo. Estes trabalhos foram publicados nos primeiros anos do meu doutorado [23, 24, 37].

#### 3.3.1 PRIMEIRO ARTIGO: “Cosmic bulk viscosity through backreaction”

Neste primeiro trabalho consideramos uma pressão viscosa como o resultado de um backreaction das inhomogeneidades dentro do formalismo de Buchert. O uso de uma *métrica efetiva* com um raio de curvatura dependente do tempo nos permite calcular a distância de luminosidade do modelo de backreaction. Esta quantidade é diferente de sua contraparte para um Universo “convencional” de fluido viscoso volumétrico espacialmente plano. Ambas expressões são testadas em relação aos dados de SNIa da amostra Union2.1 com resultados poucos diferentes para a relação de *distância-redshift* e em acordo com o modelo  $\Lambda$ CDM. Esperamos que as observações futuras sejam capazes de discriminar entre estes modelos com base em medições indiretas da evolução da curvatura [23].

##### 3.3.1.1 Descrição efetiva de um fluido

- **Relações gerais :**

Nós podemos definir um fluido de backreaction efetivo [112], assim:

$$\rho_{bD} = -\frac{1}{16\pi G} (Q_D + \mathcal{R}_D) \quad \text{e} \quad p_{bD} = -\frac{1}{16\pi G} \left( Q_D - \frac{\mathcal{R}_D}{3} \right). \quad (3.34)$$

Onde o índice  $b$  denota backreaction,  $\rho_{bD}$  é a densidade de energia efetiva e  $p_{bD}$  é a pressão efetiva. Com estas considerações podemos escrever o conjunto de equações tipo Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}_D}{a_D}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}(\langle\rho_m\rangle_D + \rho_{bD}) = 0 \quad (3.35)$$

e

$$\frac{\ddot{a}_D}{a_D} + \frac{4\pi G}{3}(\langle\rho_m\rangle_D + \rho_{bD} + 3p_{bD}) = 0. \quad (3.36)$$

Destas duas últimas equações deduzimos outra equação para o fluido de backreaction:

$$\dot{\rho}_{bD} + 3\frac{\dot{a}_D}{a_D}(\rho_{bD} + p_{bD}) = 0. \quad (3.37)$$

Então, pode-se introduzir uma densidade total de energia  $\rho_D$ , assim:

$\rho_D = \langle\rho_m\rangle_D + \rho_{bD}$ , que junto com a pressão total  $p_D \equiv p_{bD}$  podemos obter uma lei de conservação que é válida:

$$\dot{\rho}_D + 3\frac{\dot{a}_D}{a_D}(\rho_D + p_D) = 0. \quad (3.38)$$

Por outro lado também podemos calcular, a partir da expressão (3.34), o parâmetro da equação de estado efetivo (EoS) do fluido de backreaction:

$$\frac{p_{bD}}{\rho_{bD}} = \frac{Q_D - \frac{\mathcal{R}_D}{3}}{Q_D + \mathcal{R}_D}. \quad (3.39)$$

Similar à cosmologia padrão podemos definir um parâmetro de desaceleração dependente do domínio, assim:

$$q_D \equiv -\frac{\ddot{a}_D a_D}{\dot{a}_D^2}, \quad (3.40)$$

que em termos de  $\Omega_Q^D$  e  $\Omega_{\mathcal{R}}^D$  fica expressada da seguinte maneira:

$$q_D = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\Omega_Q^D \left[ 1 - \frac{1}{3}\frac{\Omega_{\mathcal{R}}^D}{\Omega_Q^D} \right]. \quad (3.41)$$

A abordagem de um fluido efetivo tem sido usado para modelar a dinâmica cosmológica do campo escalar [104] e a descrição unificada do setor escuro com a ajuda de um gás de Chaplygin [105] em termos do backreaction e variáveis de curvatura média.

- **Exemplo de constante cosmológica :**

Neste exemplo simples construímos uma constante cosmológica descrita através de quantidades de fluido efetivo. A dinâmica que imita uma constante cosmológica seria

equivalente a  $p_{bD} = -\rho_{bD}$ . Utilizando esta relação junto com a equação (3.34) achamos a seguinte expressão:

$$p_{bD} = -\rho_{bD} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}_D = -3Q_D. \quad (3.42)$$

Logo, podemos reescrever as expressões explícitas para  $p_{bD}$  e  $\rho_{bD}$ , assim:

$$p_{bD} = -\frac{1}{8\pi G}Q_D \quad \text{e} \quad \rho_{bD} = \frac{1}{8\pi G}Q_D. \quad (3.43)$$

Analisando este exemplo, notamos que um backreaction cinemático constante dependente do domínio  $Q_D$  junto com a curvatura média negativa e constante  $\mathcal{R}_D = -3Q_D$  produz a mesma dinâmica de uma constante cosmológica, dependente do domínio,  $\Omega_\Lambda^D$ :

$$\Omega_\Lambda^D = \frac{1}{3} \frac{Q_D}{\mathcal{H}_{D0}^2} = -\frac{1}{9} \frac{\mathcal{R}_D}{\mathcal{H}_{D0}^2}. \quad (3.44)$$

Observamos também que para um  $Q_D$  positivo corresponde a um  $\Omega_Q^D$  negativo e uma curvatura média negativa  $\mathcal{R}_D$  corresponde um  $\Omega_{\mathcal{R}}^D > 0$  com *raio de curvatura* dado por:

$$\mathcal{R}_{cD}^\Lambda = \frac{c}{a_D} \sqrt{\frac{-6}{\mathcal{R}_D}} = \frac{c}{a_D} \sqrt{\frac{2}{Q_D}}. \quad (3.45)$$

Onde o valor atual do raio de curvatura é da ordem do comprimento de Hubble do domínio em consideração:

$$\mathcal{R}_{cD0}^\Lambda = \frac{c}{\mathcal{H}_{D0}} \sqrt{\frac{2}{3\Omega_\Lambda^D}}. \quad (3.46)$$

Se tomarmos este domínio como sendo do tamanho do Universo observável, este raio de curvatura seria dada na escala de Gigaparsecs. Então, surge a pergunta: *pode-se discriminar entre uma constante cosmológica efetiva como resultado de um backreaction e uma constante cosmológica "verdadeira"?* ... dita resposta será respondida com os testes observacionais posteriormente.

### 3.3.1.2 Fluido viscoso dependente do domínio

Fluidos viscosos volumétricos foram discutidos como candidatos potenciais para uma descrição unificada de matéria escura e energia escura [113–118]. Nosso interesse aqui é reconsiderar tais modelos em um contexto de backreaction. Logo, um fluido viscoso volumétrico no domínio  $D$  é caracterizado por uma equação de estado (EoS) da seguinte forma:

$$p_{vD} = p_D = -\zeta_D \langle \Theta \rangle_D = -3\zeta_D \frac{\dot{a}_D}{a_D}. \quad (3.47)$$

Nós trocamos o índice de backreaction geral  $b$  por um índice  $v$  que significa "viscoso" para indicar que estamos lidando com o caso especial de um *fluido viscoso*. Para simplificar os cálculos vamos supor que  $\zeta_D$  permaneça constante em todo o domínio  $D$ .

Considerando  $\rho'_D \equiv \frac{d\rho_D}{da_D}$ , a expressão anterior (3.47) e (3.35) escrevemos a equação (3.38), como:

$$\rho'_D = -\frac{3}{a_D} \left( \rho_D - 3\zeta_D \frac{\dot{a}_D}{a_D} \right) = -\frac{3}{a_D} \left( \rho_D - 3\zeta_D \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \sqrt{\rho_D} \right). \quad (3.48)$$

Integrando a equação diferencial anterior, obtemos:

$$\rho_D = \left[ A_D + \left( \sqrt{\rho_{D0}} - A_D \right) a_D^{-\frac{3}{2}} \right]^2, \quad (3.49)$$

e também podemos calcular a taxa de Hubble efetiva:

$$\mathcal{H}_D = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \left[ A_D + \left( \sqrt{\rho_{D0}} - A_D \right) a_D^{-\frac{3}{2}} \right], \quad (3.50)$$

onde  $\rho_{D0}$  é o valor atual de  $\rho_D$  e  $A_D \equiv 3\zeta_D \sqrt{\frac{8\pi G}{3}}$ . Nós consideramos o valor atual de  $a_D(t_0) = 1$ .

De acordo com (3.49) a densidade de energia muda de  $\rho_D \propto a_D^{-3}$  em  $a_D \ll 1$  para um  $\rho_D$  aproximadamente constante em  $a_D \gg 1$ . Isto quer dizer que: no passado distante se comporta como matéria e no futuro distante imita uma constante cosmológica. É esta característica que tornou aos fluidos viscosos candidatos a uma descrição unificada de matéria escura e energia escura.

Reescrevemos o parâmetro de desaceleração da seguinte maneira:

$$q_D = -1 - \frac{a_D \mathcal{H}'_D}{\mathcal{H}_D} = \frac{-1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{\rho_{D0}}}{A_D} - 1 \right) a_D^{-\frac{3}{2}}}{1 + \left( \frac{\sqrt{\rho_{D0}}}{A_D} - 1 \right) a_D^{-\frac{3}{2}}}. \quad (3.51)$$

Podemos também reescrever a constante  $A_D$ , convenientemente, em termos do valor atual do parâmetro de desaceleração  $q_{D0}$ :

$$A_D = \frac{1}{3} \sqrt{\rho_{D0}} (1 - 2q_{D0}). \quad (3.52)$$

É fácil observar que para  $\zeta_D = 0$  temos que  $A_D = 0$  também e, conseqüentemente,  $q_{D0} = \frac{1}{2}$  que é o limite correto para um Universo Einstein-de Sitter.

Introduzindo as abreviações:  $Q_1 \equiv 1 + q_{D0}$ ,  $Q_2 \equiv 1 - 2q_{D0}$  e escrevendo novamente a

taxa de Hubble em termos de  $q_{D0}$  torna-se então:

$$\mathcal{H}_D = \frac{1}{3} \mathcal{H}_{D0} \left[ Q_2 + 2 Q_1 a_D^{-\frac{3}{2}} \right]. \quad (3.53)$$

Visto que  $\langle \rho_m \rangle_D = \langle \rho_m \rangle_{D0} a_D^{-3}$ , a densidade de energia que corresponde ao fluido viscoso é a diferença entre a densidade total de energia e a densidade de energia da matéria, assim:

$$\rho_{vD} = \rho_D - \langle \rho_m \rangle_{D0} a_D^{-3} = \frac{1}{9} \rho_{D0} \left[ Q_2 + 2 Q_1 a_D^{-\frac{3}{2}} \right]^2 - \langle \rho_m \rangle_{D0} a_D^{-3} \quad (3.54)$$

e para a pressão deste fluido viscoso temos:

$$p_{vD} = -\frac{1}{9} \rho_{D0} Q_2 \left[ Q_2 + 2 Q_1 a_D^{-\frac{3}{2}} \right]. \quad (3.55)$$

Observando as três últimas equações (3.53), (3.54) e (3.55) reparamos que a dinâmica é completamente determinada pelos parâmetros  $\mathcal{H}_{D0}$ ,  $q_{D0}$  e  $\langle \rho_m \rangle_{D0}$ .

### 3.3.1.3 Fluido viscoso de backreaction ?

Para responder esta pergunta precisamos investigar agora, se o *backreaction* e o *escalar de curvatura média* no domínio  $D$  podem ser modelados em termos de uma *viscosidade volumétrica efetiva*. Então, relacionando a densidade de energia em (3.34) com a expressão (3.54) e a pressão em (3.34) com a expressão (3.55), encontramos as seguintes equações:

$$\rho_{vD} = -\frac{1}{16\pi G} (Q_D + \mathcal{R}_D) = \frac{1}{9} \rho_{D0} \left[ Q_2 + 2 Q_1 a_D^{-\frac{3}{2}} \right]^2 - \langle \rho_m \rangle_{D0} a_D^{-3} \quad (3.56)$$

e

$$p_{vD} = -\frac{1}{16\pi G} \left( Q_D - \frac{\mathcal{R}_D}{3} \right) = -\frac{1}{9} \rho_{D0} Q_2 \left[ Q_2 + 2 Q_1 a_D^{-\frac{3}{2}} \right]. \quad (3.57)$$

Logo, resolvendo este sistema de equações (3.56) e (3.57) para as grandezas do backreaction  $Q_D$  e  $\mathcal{R}_D$ , obtemos respectivamente:

$$Q_D = -4\pi G (\rho_{vD} + 3 p_{vD}) \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_D = -12\pi G (\rho_{vD} - p_{vD}). \quad (3.58)$$

Por outro lado podemos determinar também a pressão efetiva em termos das grandezas do backreaction:

$$\mathcal{R}_D - 3 Q_D = 48\pi G p_{vD}. \quad (3.59)$$

Logo, temos:

$$\rho_D + 3 p_D = \langle \rho_m \rangle_D - \frac{1}{4\pi G} Q_D, \quad (3.60)$$

esta relação (3.60) exige que  $Q_D > 4\pi G \langle \rho_m \rangle_D$  para ter uma expansão acelerada do Universo.

Reescrevendo o valor atual do parâmetro de desaceleração em termos dos valores atuais de  $Q_{D0}$  e  $\mathcal{R}_{D0}$ , obtemos:

$$q_{D0} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{Q_{D0}}{4\pi G \langle \rho_m \rangle_{D0}}}{1 - \frac{\mathcal{R}_{D0} + Q_{D0}}{16\pi G \langle \rho_m \rangle_{D0}}}. \quad (3.61)$$

Nós observamos nesta equação (3.61), que se não existirem os efeitos de backreaction recuperarmos  $q_{D0} = \frac{1}{2}$ . Por outro lado, dado que  $\rho_{vD}$  é positivo implica que  $\mathcal{R}_{D0} + Q_{D0} < 0$ , também devemos ter que  $Q_{D0} > 4\pi G \langle \rho_m \rangle_{D0}$  para ter  $q_{D0} < 0$  (o backreaction deve ser maior que um certo valor limite), ou seja, expansão acelerada hoje.

A partir das expressões  $A_D \equiv 3 \zeta_D \sqrt{\frac{8\pi G}{3}}$  e (3.52) calculamos o valor explícito do *coeficiente de viscosidade volumétrica* em função dos valores atuais do backreaction e da curvatura média:

$$\zeta_D = \frac{1}{9} \frac{\langle \rho_m \rangle_{D0}}{\mathcal{H}_{D0}} \frac{\mathcal{R}_{D0} - 3Q_{D0}}{\mathcal{R}_{D0} + Q_{D0} - 16\pi G \langle \rho_m \rangle_{D0}} = \frac{1}{9} \frac{\langle \rho_m \rangle_{D0}}{\mathcal{H}_{D0}} (1 - 2q_{D0}). \quad (3.62)$$

Para  $\mathcal{R}_{D0} + Q_{D0} < 0$ , como é necessário para uma energia positiva, o denominador fica sempre negativo. Também, para qualquer valor positivo de  $Q_{D0}$  o numerador é negativo<sup>27</sup>. Nestas condições o coeficiente de viscosidade volumétrica é sempre positiva. Observe, no entanto, que a energia de viscosidade volumétrica efetiva é algo artificial e não há razão para que seja sempre positiva. Reparámos também que o coeficiente de viscosidade volumétrica  $\zeta_D$  está relacionada diretamente com o valor atual do parâmetro de desaceleração<sup>28</sup>  $q_{D0}$ .

Para  $a_D \ll 1$  os termos  $a_D^{-3}$  em (3.56) e (3.57) estão dominando sobre a densidade de energia do backreaction:

- para  $\rho_{vD}$  ( $a_D \ll 1$ ), obtemos:

$$\rho_{vD} = \left[ \frac{4}{9} \left( q_{D0} - \frac{1}{2} \right) \left( q_{D0} + \frac{5}{2} \right) \langle \rho \rangle_{D0} + \left( 1 + \frac{4}{9} \left( q_{D0} - \frac{1}{2} \right) \left( q_{D0} + \frac{5}{2} \right) \right) \right] a_D^{-3}. \quad (3.63)$$

Observamos nesta relação (3.63) que o fluido viscoso comporta-se como matéria não-relativista e correspondentemente o parâmetro de equação de estado efetivo (EoS) (3.39), tende a zero para  $a_D \ll 1$ .

- para ( $a_D \gg 1$ ), temos:

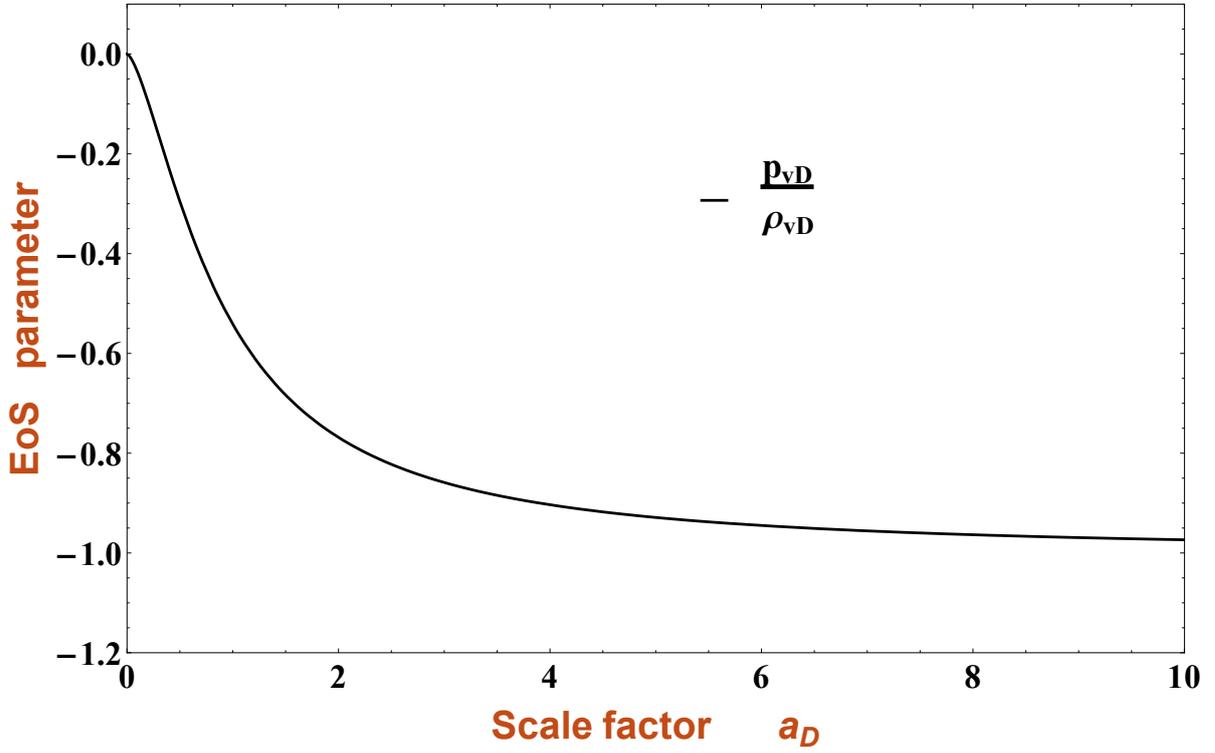
$$p_{vD} = -\rho_{vD} = -\frac{1}{9} \rho_{D0} (1 - 2q_{D0})^2. \quad (3.64)$$

<sup>27</sup>Lembrar que:  $\mathcal{R}_{D0} - 3Q_{D0} = 48\pi G p_{v0}^D$ .

<sup>28</sup>É fácil verificar para  $q_{D0} = \frac{1}{2}$  corresponde um  $\zeta_D = 0$ .

Nesta última equação (3.64) observamos que este fluido viscoso age como uma *constante cosmológica*.

A dependência do fator de escala volumétrico do parâmetro de equação de estado efetivo (EoS) do fluido de backreaction,  $\frac{p_{vD}}{\rho_{vD}}$ , é mostrado na Figura 3.1 para os valores de melhor ajuste dados na Tabela 3.2.



**Figura 3.1.** Parâmetro de equação de estado efetivo (EoS) do fluido de backreaction em termos do fator de escala volumétrico.

Em seguida, escrevemos explicitamente o backreaction cinemático  $Q_D$  e a curvatura espacial média  $\mathcal{R}_D$ , respectivamente, assim:

$$Q_D = \frac{1}{3} \mathcal{H}_{D0}^2 \left[ \left( Q_2 - Q_1 a_D^{-\frac{3}{2}} \right) \left( Q_2 + 2 Q_1 a_D^{-\frac{3}{2}} \right) \right] + \frac{3}{2} \mathcal{H}_{D0}^2 \Omega_{m0}^D a_D^{-3} \quad (3.65)$$

e

$$\mathcal{R}_D = -\mathcal{H}_{D0}^2 \left[ \left( Q_2 + Q_1 a_D^{-\frac{3}{2}} \right) \left( Q_2 + 2 Q_1 a_D^{-\frac{3}{2}} \right) \right] + \frac{9}{2} \mathcal{H}_{D0}^2 \Omega_{m0}^D a_D^{-3}. \quad (3.66)$$

Onde nestas últimas equações temos que:  $\Omega_{m0}^D = \frac{\langle \rho_m \rangle_{D0}}{\rho_{D0}}$

**Tabela 3.2.** Resultados da análise estatística com base nos dados de Union2.1.

SNIa Union2.1			
Fluido de backreaction para $\Omega_{m0}^D = 0.048$	$\chi_v^2$	$q_{D0}$ ( 95% CL )	$h_{D0}$
	0.985	$-0.307^{+0.070}_{-0.073}$	0.693
Fluido viscoso volumétrico convencional	$\chi_v^2$	$q_0$ ( 95% CL )	$h_0$
	0.974	$-0.480^{+0.066}_{-0.059}$	0.697
Constante cosmológica efetiva	$\chi_v^2$	$\Omega_{m0}^D$ ( 95% CL )	$h_{D0}^{\Lambda\text{CDM}}$
	0.971	$0.318^{+0.051}_{-0.041}$	0.699
$\Lambda\text{CDM}$	$\chi_v^2$	$\Omega_{m0}$ ( 95% CL )	$h$
	0.971	$0.279^{+0.038}_{-0.039}$	0.701

As quantidades fracionárias correspondentes são escritas, assim:

$$\Omega_m^D = \frac{9 \Omega_{m0}^D a_D^{-3}}{\left( Q_2 + 2 Q_1 a_D^{-\frac{3}{2}} \right)^2}, \quad \Omega_Q^D = -\frac{1}{2} \frac{Q_2 - Q_1 a_D^{-\frac{3}{2}}}{Q_2 + 2 Q_1 a_D^{-\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4} \Omega_m^D \quad (3.67)$$

e

$$\Omega_{\mathcal{R}}^D = \frac{3}{2} \frac{Q_2 + Q_1 a_D^{-\frac{3}{2}}}{Q_2 + 2 Q_1 a_D^{-\frac{3}{2}}} - \frac{3}{4} \Omega_m^D. \quad (3.68)$$

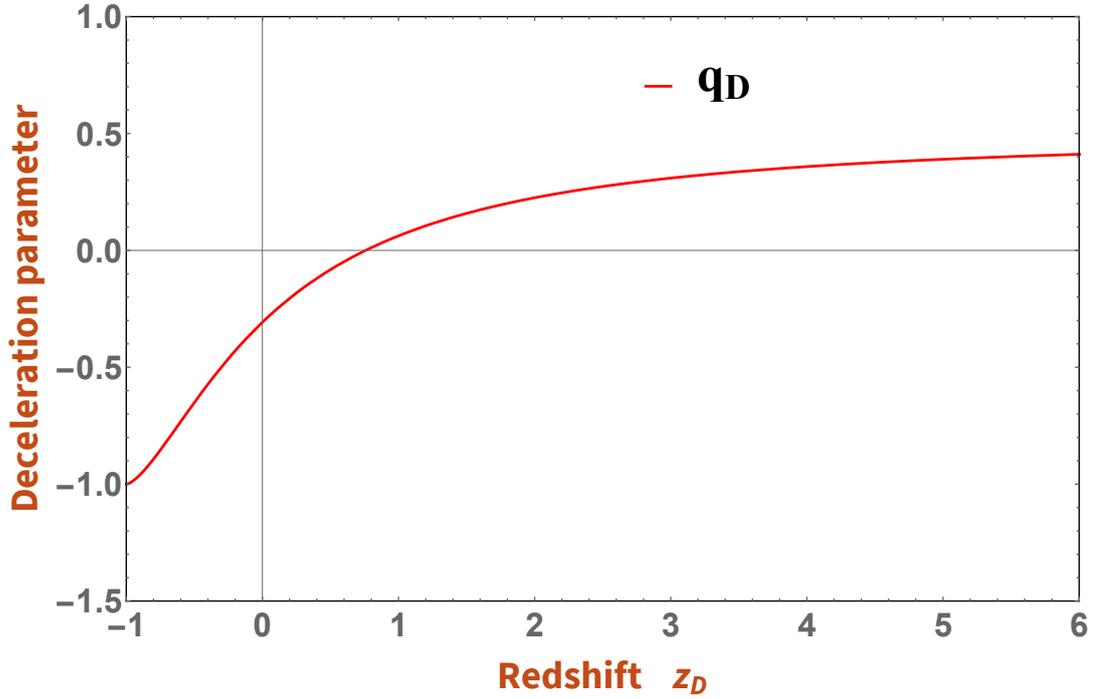
Utilizando estas relações, (3.67) e (3.68), o parâmetro de desaceleração resultante<sup>29</sup> (3.41) é mostrado na Figura 3.2. Por outro lado podemos calcular as grandezas do backreaction para o tempo de hoje,  $\Omega_{Q0}^D$  e  $\Omega_{\mathcal{R}0}^D$  respectivamente, assim:

$$\Omega_{Q0}^D = -\frac{1}{4}(1 - 2q_{D0}) + \frac{1}{4}(1 - \Omega_{m0}^D) \quad \text{e} \quad \Omega_{\mathcal{R}0}^D = \frac{1}{4}(1 - 2q_{D0}) + \frac{3}{4}(1 - \Omega_{m0}^D). \quad (3.69)$$

Podemos observar que em (3.69) recuperamos o **Universo Einstein-de Sitter** para  $q_{D0} = \frac{1}{2}$  com  $\Omega_{m0}^D = 1$ , correspondendo  $\Omega_{Q0}^D = \Omega_{\mathcal{R}0}^D = 0$ . Notamos que, já que  $\Omega_{m0}^D \leq 1$ , a fração do backreaction cinemático  $\Omega_{Q0}^D$  fica negativa para  $q_{D0} \leq 0$ . Isto significa que  $Q_D$  se torna positivo, a qual é uma condição necessária

<sup>29</sup>Note que  $q_D$  depende apenas de  $q_{D0} = -0.307$  e  $\Omega_{m0}^D = 0.048$ .

para termos expansão acelerada do Universo, segundo a expressão (3.60). Ademais, a contribuição  $\Omega_{Q0}^D + \Omega_{R0}^D$  continua positiva.



**Figura 3.2.** Dependência do parâmetro de desaceleração  $q_D$  em função do redshift  $z_D = a_D^{-1} - 1$ .

No limite de alto redshift  $a \ll 1$  as abundâncias fracionárias ficam expressadas, assim:

$$\Omega_m^D = \frac{9}{4} \frac{\Omega_{m0}^D}{(1 + q_{D0})^2}, \quad \Omega_Q^D = \frac{1}{4} (1 - \Omega_m^D) \quad \text{e} \quad \Omega_R^D = \frac{3}{4} (1 - \Omega_m^D). \quad (3.70)$$

Analisando:

- Para  $\Omega_{m0}^D < \frac{4}{9} (1 + q_{D0})^2$  tem-se que  $\Omega_m^D < 1$  e os termos  $\Omega_Q^D$  e  $\Omega_R^D$  são positivos.
- Para um parâmetro de desaceleração atual da ordem de  $q_{D0} \approx -\frac{1}{2}$ , o valor de  $\Omega_m^D$  para  $a_D \ll 1$  é cerca de uma ordem de magnitude maior do que  $\Omega_{m0}^D$ .
- Deve-se ter em mente, entretanto, que o próprio fluido de backreaction se comporta como matéria nesse limite. Esta restrição em  $\Omega_{m0}^D$  é compatível com a circunstância de descrever exclusivamente a **matéria bariônica**.

De imediato, não há uma componente separada de matéria escura aqui, visto que esperamos que o fluido viscoso já leve em conta todo o setor escuro. Mas, na verdade a condição  $\Omega_{m0}^D < \frac{4}{9} (1 + q_{D0})^2$  deixa espaço para uma abundância de matéria um pouco maior que a atribuída aos barions com uma fração da ordem de 0.048.

Na Figura 3.3 o comportamento das abundâncias fracionárias é representada para os valores de melhor ajuste da Tabela 3.2, assumindo que  $\Omega_{m0}^D$  descreve a fração de matéria bariônica com  $\Omega_{m0}^D = 0.048$ .

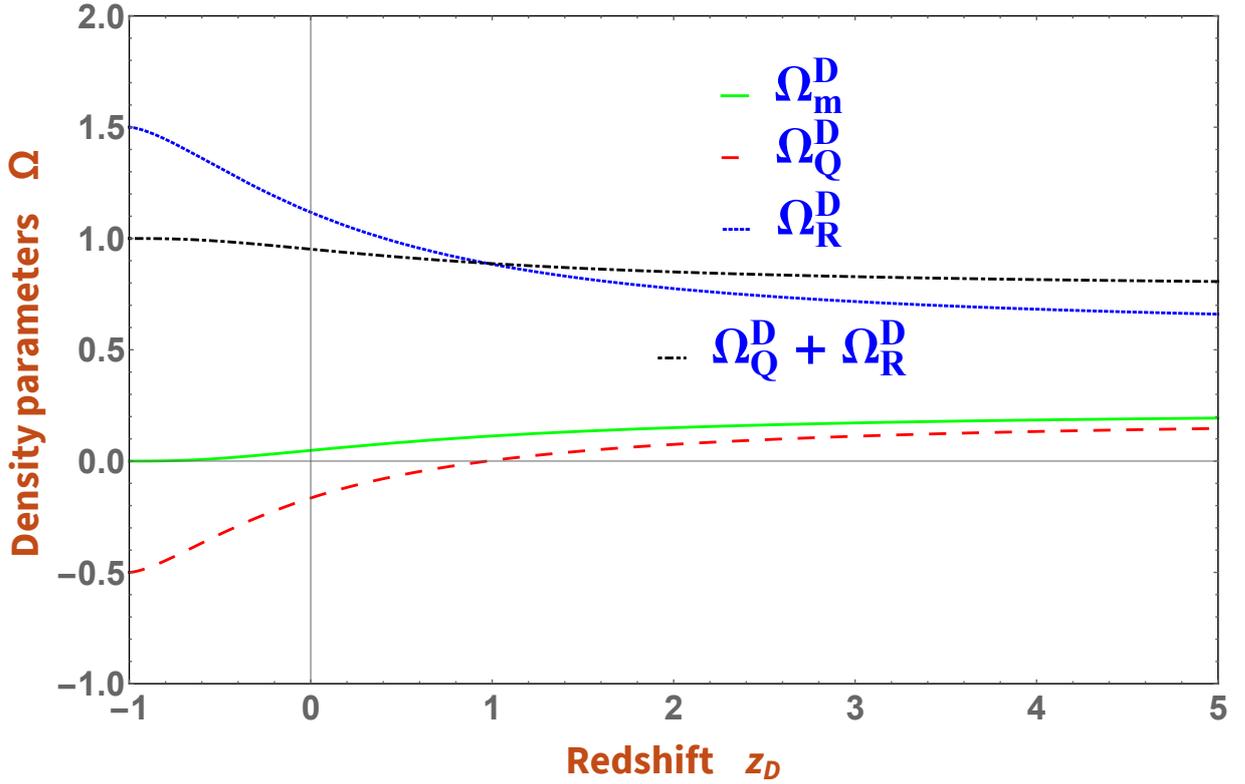


Figura 3.3. Dependência das abundâncias fracionárias em função do redshift  $z_D = a_D^{-1} - 1$ .

### 3.3.1.4 Métrica efetiva e distância de luminosidade

Nesta seção relacionamos as observações com o formalismo de Buchert, desenvolvido até agora. Embora tenhamos enfatizado que a definição do *fator de escala volumétrico*  $a_D$  não está relacionada a uma métrica espaço-tempo, seguiremos aqui a prática dos artigos [111, 119] que supõe a existência de uma **métrica efetiva** na qual  $a_D$  imita um *fator de escala* de uma métrica tipo FLRW que, neste caso, não precisa satisfazer as equações de campo de Einstein. Esta métrica efetiva também precisa levar em conta a curvatura espacial média  $\mathcal{R}_D$  cuja expressão foi encontrada em (3.66) e sua abundância fracionária correspondente é dada pela expressão (3.68). Estas quantidades definem um raio de curvatura dado por:

$$\mathcal{R}_{cD} = \frac{c}{a_D} \sqrt{\frac{-6}{\mathcal{R}_D}} = \frac{c}{a_D \mathcal{H}_D} \frac{1}{\sqrt{\Omega_R^D}}. \quad (3.71)$$

O valor atual de  $\mathcal{R}_{cD}$  é da ordem do raio de Hubble presente, dependente do domínio. Isto sugere uma métrica efetiva com o fator de escala efetivo  $a_D$  [120], assim:

$$ds_{eff}^2 = -c^2 dt^2 + a_D^2 \left[ dr^2 + \mathcal{R}_{cD}^2 \operatorname{senh}^2 \left( \frac{r}{\mathcal{R}_{cD}} \right) (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (3.72)$$

Esta métrica efetiva é uma generalização da métrica de FLRW, esta última pode ser recuperada se fazemos  $\mathcal{R}_{cD}^{-1} = \sqrt{|k|} = \text{constante}$ . É fácil observar que  $\mathcal{R}_{cD}$  é uma grandeza dependente do tempo, tal que cada fatia a  $t = \text{constante}$  é caracterizada por uma curvatura diferente. Comparando a dinâmica do backreaction com a dinâmica baseada numa métrica padrão FLRW *assumimos um*

volume para as médias do tamanho do Universo observável.

Utilizando a métrica efetiva (3.72) a propagação da luz radial é descrita por:

$$ds_{eff}^2 = 0 \quad \implies \quad dr = \frac{c}{a_D^2 \mathcal{H}_D} da_D. \quad (3.73)$$

Substituindo a taxa de Hubble efetiva (3.53) nesta última equação (3.73), encontramos  $r(a_D)$ :

$$\begin{aligned} r(a_D) = & -\frac{6c}{\mathcal{H}_{D0}} \frac{1}{6\sqrt[3]{Q_2} (2Q_1)^{\frac{2}{3}}} \left\{ \ln \left[ \frac{Q_2^{\frac{2}{3}} a_D - \sqrt[3]{Q_2} \sqrt[3]{2Q_1} a_D^{\frac{1}{2}} + (2Q_1)^{\frac{2}{3}}}{Q_2^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{Q_2} \sqrt[3]{2Q_1} + (2Q_1)^{\frac{2}{3}}} \right] \right. \\ & - 2 \ln \left[ \frac{\sqrt[3]{Q_2} a_D^{\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{2Q_1}}{\sqrt[3]{Q_2} + \sqrt[3]{2Q_1}} \right] \\ & \left. + 2\sqrt{3} \left[ \arctan \left( \frac{1 - 2\frac{\sqrt[3]{Q_2}}{\sqrt[3]{2Q_1}} a_D^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} \right) - \arctan \left( \frac{1 - 2\frac{\sqrt[3]{Q_2}}{\sqrt[3]{2Q_1}}}{\sqrt{3}} \right) \right] \right\}. \quad (3.74) \end{aligned}$$

Aqui, calculamos a **distância de luminosidade efetiva**  $d_L^{eff}(z_D)$  em função do redshift efetivo  $z_D = a_D^{-1} - 1$ :

$$d_L^{eff} = (1 + z_D) \mathcal{R}_{cD}(z_D) \operatorname{senh} \left[ \frac{r(z_D)}{\mathcal{R}_{cD}(z_D)} \right] \quad (3.75)$$

e também calculamos o **módulo de distância efetivo**, assim:

$$\mu_D = 5 \log \left[ d_L^{eff}(z_D) \right] + \mu_{D0}, \quad (3.76)$$

com  $\mu_{D0} = 42.384 - 5 \log h_D$ , onde  $h_D$  é definido por  $\mathcal{H}_{D0} = 100 h_D \frac{km}{sMpc}$ .

Assumindo os valores da análise padrão, nós deduzimos que a escala de média é do tamanho do Universo observável. Então, podemos contrastar essas relações com as de um Universo espacialmente plano composto de um **fluido viscoso volumétrico "convencional"** onde este fluido viscoso volumétrico é parte do setor de matéria<sup>30</sup>. Em particular, a taxa de Hubble também tem a estrutura de (3.53). A diferença consiste em que o fator de escala volumétrico  $a_D$  em (3.53) é substituído por um fator de escala da métrica de FLRW, e os sub-índices  $D$  não são mais necessários. Então, temos que a nossa taxa de Hubble é:

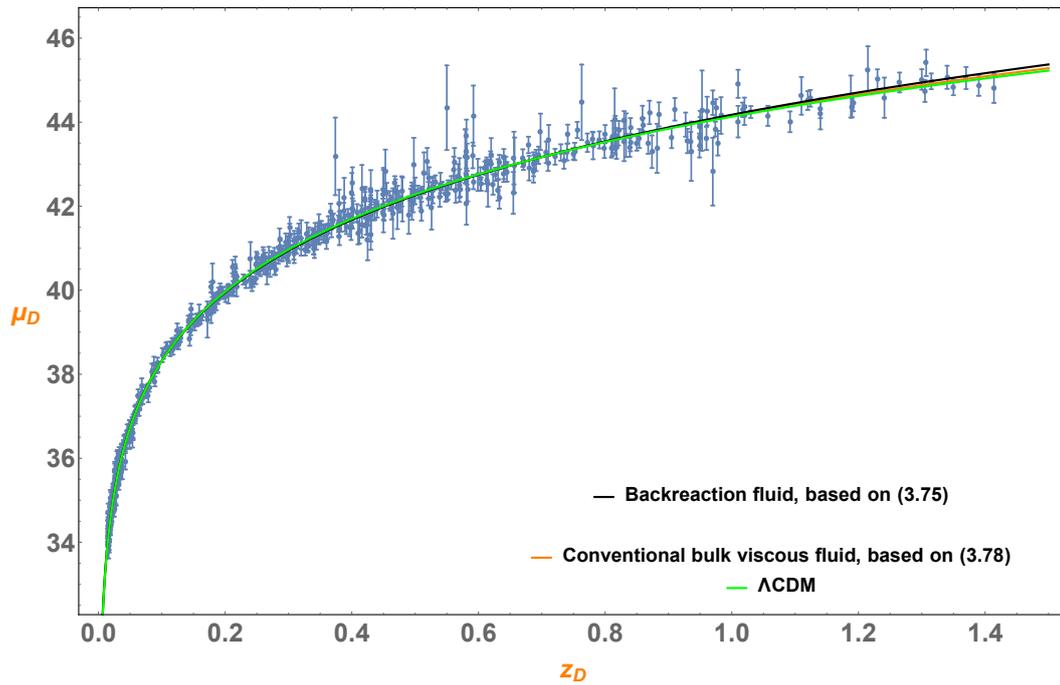
$$H(z) = \frac{1}{3} H_0 \left[ 1 - 2q_0 + 2(1 + q_0)(1 + z)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (3.77)$$

Para este modelo a distância de luminosidade e o módulo de distância são obtidas de maneira padrão, respectivamente, assim:

$$d_L = (1 + z) \int \frac{c dz}{H(z)} \quad \text{e} \quad \mu = 5 \log d_L(z) + \mu_0, \quad (3.78)$$

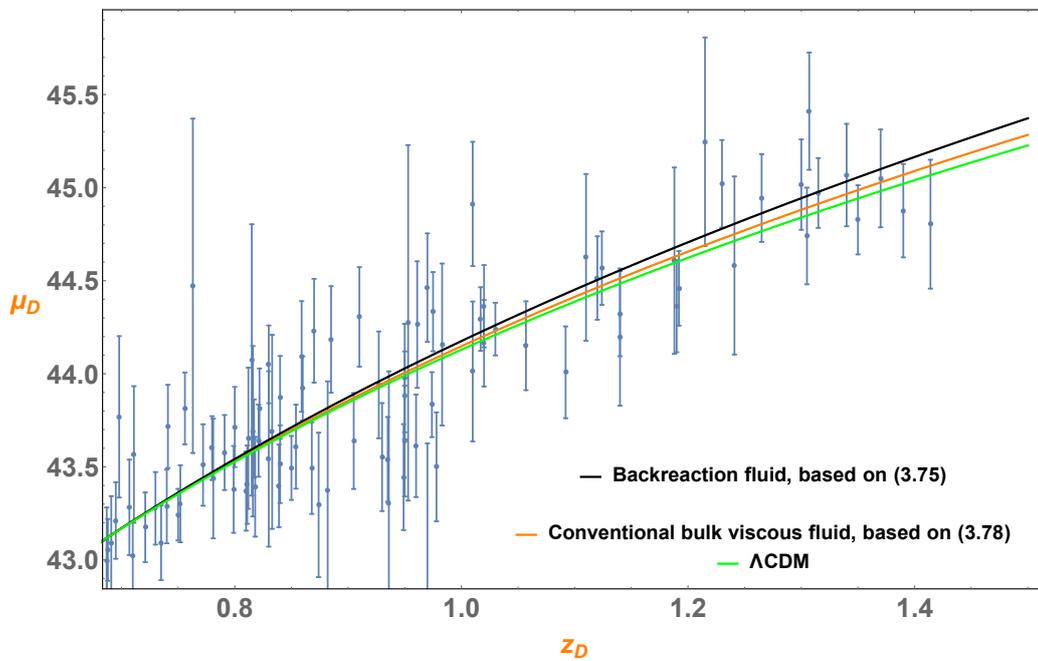
com  $\mu_0 = 42.384 - 5 \log h$ .

<sup>30</sup>Os cálculos formais são muito semelhantes aos realizados na seção 3.3.1.2.



**Figura 3.4.** Módulo de distância em função do redshift  $z_D = a_D^{-1} - 1$ , para análise de SNIa da amostra de Union2.1.

Nós comparamos os resultados para o modelo de um **fluido de backreaction** baseado em (3.75) contra o modelo de um **fluido viscoso volumétrico "convencional"** espacialmente plano baseado em (3.78), cujas comparações são mostradas nas figuras Figura 3.4 e Figura 3.5.



**Figura 3.5.** Região ampliada da Figura 3.4.

Embora existam diferenças nas figuras Figura 3.4 e Figura 3.5, estas aparentemente não são grandes o suficiente para discriminar claramente entre os dois modelos. Nestas figuras também incluímos o modelo  $\Lambda$ CDM para comparação.

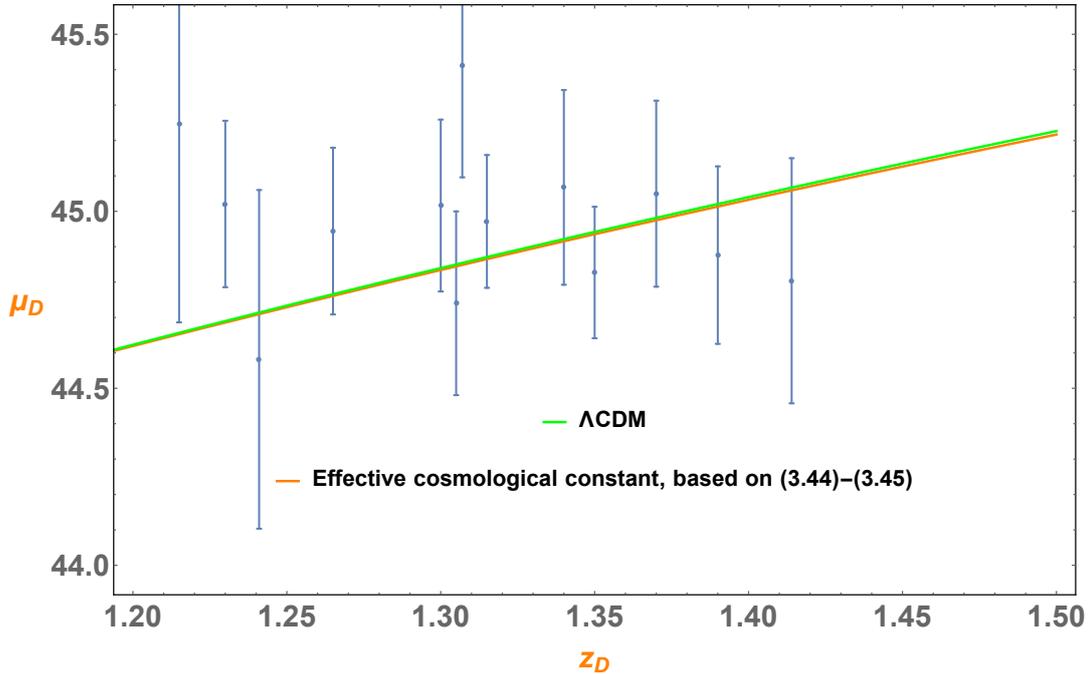
No que se refere à análise dos dados de supernovas, nossa conclusão é que o modelo de backreaction com sua grande contribuição de curvatura produz resultados semelhantes aos do modelo plano correspondente. Isso nos leva também de volta à dinâmica  $\Lambda$ CDM com uma constante cosmológica efetiva induzida por backreaction. A distância de luminosidade pode ser calculada a partir da expressão padrão (3.78) com a taxa de Hubble padrão do Universo  $\Lambda$ CDM, assim:

$$H^{\Lambda\text{CDM}}(z) = H_0^{\Lambda\text{CDM}} \sqrt{\Omega_{m0} (1+z)^3 + \Omega_{\Lambda}}, \quad (3.79)$$

ou no contexto de backreaction via (3.75) com uma função de Hubble dependente do domínio, assim:

$$\mathcal{H}_D^{\Lambda\text{CDM}}(z) = \mathcal{H}_{D0}^{\Lambda\text{CDM}} \sqrt{\Omega_{m0}^D (1+z)^3 + \Omega_{\Lambda}^D}, \quad (3.80)$$

com a constante de backreaction cosmológico (3.44) e o raio de curvatura (3.45). Logo, usando novamente a amostra de Union2.1 de SNIa procuramos os valores de melhor ajuste para cada um desses casos, os quais são mostrados nas duas últimas entradas da Tabela 3.2 e cujo resultado é apresentado na Figura 3.6. O modelo  $\Lambda$ CDM padrão parece se adequar marginalmente melhor aos dados, mas sem ser claramente superior à dinâmica de backreaction.



**Figura 3.6.** Módulo de distância em função do redshift para o modelo de  $\Lambda$ CDM e sua contraparte backreaction.

### 3.3.2 SEGUNDO ARTIGO: “Simple inhomogeneous cosmological (toy) models”

Neste segundo trabalho consideramos dois modelos de big bang inhomogêneos e planos com base na métrica de Lemaître-Tolman-Bondi (LTB). Nosso objetivo é esclarecer, na medida do possível analiticamente, características básicas da dinâmica dos modelos inhomogêneos mais simples e apontar a utilidade potencial de soluções inhomogêneas exatas como generalizações das configurações homogêneas do modelo cosmológico padrão. Logo, discutimos sucessos explicitamente parciais, mas também potenciais desvantagens destes modelos mais simples. Embora primeiramente vistos como modelos de brinquedo, os parâmetros livres relevantes são fixados pelos valores de melhor ajuste usando os dados da amostra Joint Light-curve Analysis (JLA). Com base em uma análise da likelihood encontramos que uma **colina local**<sup>31</sup> com uma extensão de quase 2 Gpc fornece uma melhor descrição das observações do que um **vazio local**<sup>32</sup> para o qual obtivemos uma melhor escala cerca de 30 Mpc. Neste trabalho também discutimos medições futuras do **redshift-drift** como uma ferramenta promissora para discriminar entre configurações inhomogêneas e o modelo padrão  $\Lambda$ CDM [37].

#### 3.3.2.1 Introdução

Comumente, supõe-se que as inhomogeneidades observadas no Universo sejam o resultado de perturbações inicialmente pequenas em um fundo homogêneo que depois cresceu pela instabilidade gravitacional no regime não-linear. A circunstância de que inhomogeneidades são consideradas como perturbações em um fundo homogêneo pode ser vista como uma deficiência conceitual. Não está claro desde o início qual é realmente a escala de homogeneidade, isto é, a distância sobre a qual a suposição de homogeneidade (aproximadamente) é válida. Além disso, pode-se geralmente duvidar se uma solução homogênea é um ponto de partida adequado para descrever estruturas inhomogêneas e altamente não-lineares no Universo.

A solução cosmológica inhomogênea mais simples das equações de campo de Einstein é a solução de LTB esfericamente simétrica para poeira. Esta solução contém a solução homogênea do modelo padrão como um limite bem definido e pode ser usado para estudar os desvios deste último. A solução de LTB foi intensamente investigado a partir do ponto de vista matemático [34]. Recebeu atenção adicional depois de ter sido capaz de imitar, em um Universo de poeira pura, efeitos que no modelo padrão são atribuídos a energia escura<sup>33</sup>. Esta linha de pesquisa começou logo após a interpretação das observações de SNIa pelo SCP [7] e HZT (High-z Supernova Search Team) [8] colaborações como evidência de uma aceleração tardia do fator de escala no modelo padrão [28, 121, 122]. Em parte baseou-se no trabalho de [123]. Trabalhos atuais podem ser estudados nos artigos [33, 124]. A solução de LTB é potencialmente aplicável desde que a contribuição da componente radiação à energia cósmica seja negligenciada.

O objetivo deste artigo, o que é parcialmente motivado por Andrzej Krasiński [125], é considerar partidas simples do limite FLRW, modificando apenas uma dessas funções e estudar em grande parte, analiticamente, a dinâmica resultante. Isso não necessariamente levará a modelos realistas competitivos, embora usemos dados observacionais de supernovas Ia para fixar os parâmetros

<sup>31</sup>Região de alta densidade (overdensity).

<sup>32</sup>Região de baixa densidade (underdensity).

<sup>33</sup>Isso iniciou a esperança de que, no melhor dos casos, modelos inhomogêneos poderiam tornar a energia escura supérflua.

do nosso modelo [72]. Nós consideramos nossos modelos como modelos de testes simples que servem para ilustrar propriedades básicas da solução de LTB. Isto compreende tanto a sua potencial utilidade em generalizar as soluções homogêneas padrões, quanto suas limitações em características indesejadas como o aparecimento de singularidades do *shell crossing*. Na maioria das investigações a configuração típica nos coloca no centro de um grande vazio, uma região subdensa, a partir do qual é inferida uma relação distância-redshift de luminosidade<sup>34</sup> que coincide com aquela do modelo padrão, mas não precisa de uma componente de energia escura [125]. Tem sido enfatizado, no entanto, que uma colina local, uma superdensidade no centro, pode também explicar certos dados observacionais [33, 127].

O desafio é verificar se todas as outras observações que atualmente fazem um apoio do modelo  $\Lambda$ CDM podem ser descritas adequadamente com base em uma dinâmica de LTB. Isto foi questionado por diferentes razões em vários estudos (ver [128, 129]), concluindo que (grandes classes de) modelos de LTB estão descartados. Tais afirmações radicais foram contestadas por Célérier, M.-N e Andrzej Krasiński [33, 130].

Neste artigo foi demonstrado que, em princípio, num Universo inhomogêneo a relação distância-redshift de luminosidade do modelo  $\Lambda$ CDM pode ser reproduzida sem uma constante cosmológica [125]. Foi discutido também várias características de uma configuração inhomogênea da função de tempo de big bang inhomogêneo com curvatura espacial zero. Usamos modelos simples específicos para o perfil da função de tempo de big bang inhomogêneo  $t_B(r)$ , demonstramos explicitamente que  $t'_B(r) > 0$  (a linha denota derivada em relação ao argumento) corresponde a um modelo de vazio (uma subdensidade local), enquanto  $t'_B(r) < 0$  corresponde a um modelo de colina (uma superdensidade local). Nossa análise simplificada é restrita a modelos com um único vazio (ou uma colina). Abordagens alternativas usam um conjunto de vazios, como no modelo do *queijo suíço* (Swiss-cheese) ou no modelo de *almôndegas* (meatball) [124]. As soluções analíticas, embora casos idealizados, podem esclarecer tanto a utilidade potencial de modelos inhomogêneos exatos quanto, ao mesmo tempo, em armadilhas que podem limitar sua aplicabilidade imediata ao Universo real.

Como já foi indicado, os modelos de LTB não são realmente modelos alternativos ao modelo padrão, mas representam generalizações deste último. São as soluções inhomogêneas mais simples, admitindo que a inhomogeneidade é apenas radial. Argumentou-se que a simetria esférica nada mais é do que uma suposição simplificadora e, portanto, a circunstância de que nosso Universo real se desvie de ser esférico simétrico não deve ser usado para descartar prematuramente modelos inhomogêneos [33]. Como uma ferramenta potencial para discriminá-los do modelo padrão medições do *redshift drift* foram sugeridas [33, 131, 132].

### 3.3.2.2 Relações gerais e soluções para modelos de LTB

Escrevemos as relações gerais que foi desenvolvido e utilizado em nosso trabalho.

Começamos lembrando a métrica de LTB [34]:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R'^2}{1 + 2E(r)} dr^2 - R^2(t, r) [d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2], \quad (3.81)$$

<sup>34</sup>Medidas de distância de luminosidade no infravermelho próximo forneceram evidências de uma escala de 300 Mpc de baixa densidade na distribuição de galáxias locais [126].

onde a função  $R = R(t, r)$  é dada por:

$$\dot{R}^2 = 2E(r) + \frac{2M(r)}{R} + \frac{1}{3}\Lambda R^2. \quad (3.82)$$

Esta equação (3.82) tem uma estrutura Newtoniana. Reintroduzindo temporariamente a velocidade da luz  $c$ , a combinação  $c^2 \frac{M(r)}{G}$  pode ser interpretada como a massa gravitacional ativa dentro de uma esfera para  $r = \text{constante}$  e  $c^2 \frac{E(r)}{G}$  como a energia total dentro dessa esfera [34].

Considerando a constante cosmológica igual a zero ( $\Lambda = 0$ ), temos<sup>35</sup>:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{M}{R^3} \quad \text{e} \quad \frac{\ddot{R}'}{R'} = -\frac{M'}{R^2 R'} + \frac{2M}{R^3}. \quad (3.83)$$

A densidade de energia<sup>36</sup>  $\rho$  é dado por:

$$8\pi G \rho = \frac{2M'}{R^2 R'}. \quad (3.84)$$

Combinando as equações (3.83) e (3.84), obtemos:

$$\frac{\ddot{R}'}{R'} = -4\pi G \rho + \frac{2M}{R^3}. \quad (3.85)$$

Logo, se substituirmos aqui o último termo pela primeira relação de (3.83), obtemos a equação de aceleração generalizada:

$$\frac{2}{3} \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{1}{3} \frac{\ddot{R}'}{R'} = -\frac{4\pi G}{3} \rho. \quad (3.86)$$

**Observe, no entanto, que uma expansão acelerada não é necessariamente um ingrediente de modelos inomogêneos.**

Derivando (3.82) respeito de  $r$ , encontramos:

$$\frac{2\dot{R}\dot{R}'}{RR'} = \frac{2E'}{RR'} + \frac{2M'}{R^2 R'} - \frac{2M}{R^3}. \quad (3.87)$$

Podemos encontrar outra relação substituindo (3.82) e (3.84) em (3.87):

$$\frac{\dot{R}^2 - 2E}{R^2} + \frac{2\dot{R}\dot{R}' - 2E'}{RR'} = 8\pi G \rho. \quad (3.88)$$

A partir da equação de **Raychaudhuri** em modelos de LTB, identificamos o escalar de expansão:

$$\Theta = 2\frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{R}'}{R'}, \quad (3.89)$$

e o quadrado do cisalhamento gravitacional  $\sigma$ :

$$\sigma^2 = \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{R}'}{R'} - \frac{\dot{R}}{R} \right)^2, \quad (3.90)$$

<sup>35</sup>Continuamos considerando  $c = 1$ .

<sup>36</sup>Ou também chamada densidade de matéria:  $\rho = \rho_m$ , tal como é utilizado em nosso trabalho [24].

isso é equivalente a:

$$\frac{1}{3}\Theta^2 - \sigma^2 = 4\pi G\rho - \frac{1}{2}{}^3R, \quad (3.91)$$

onde:  ${}^3R = -4\frac{(ER)'}{R^2R'}$  é o escalar de 3-curvatura da métrica de LTB. Definimos a taxa local de Hubble:

$$H(t,r) \equiv \frac{\dot{R}(t,r)}{R(t,r)}, \quad (3.92)$$

e a partir desta definição a equação (3.82) pode ser escrita como:

$$H^2 = \frac{2E}{R^2} + \frac{2M}{R^3} \quad \text{ou} \quad 1 = \frac{2E(r)}{R_0^2(r)H_0^2(r)} + \frac{2M(r)}{R_0^3(r)H_0^2(r)}, \quad (3.93)$$

onde o subíndice 0 denota a quantidade correspondente ao tempo de hoje  $t_0$ . Também, incluindo  $\Lambda$  novamente podemos definir as seguintes quantidades fracionárias:

$$\Omega_M \equiv \frac{2M}{R_0^3H_0^2}, \quad \Omega_R \equiv \frac{2E}{R_0^2H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda \equiv \frac{1}{3}\frac{\Lambda}{H_0^2}. \quad (3.94)$$

Com estas considerações podemos reescrever (3.93) como uma estrutura semelhante à de Friedmann:

$$H^2 = \frac{2E}{R^2} + \frac{2M}{R^3} + \frac{1}{3}\Lambda, \quad 1 = \Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda, \quad (3.95)$$

ou

$$\frac{H^2(t,r)}{H_0^2(r)} = \Omega_M(r)\frac{R_0^3(r)}{R^3(t,r)} + \Omega_R(r)\frac{R_0^2(r)}{R^2(t,r)} + \Omega_\Lambda(r), \quad (3.96)$$

onde o parâmetro de curvatura  $\Omega_R$  se reduz para uma quantidade de curvatura constante  $\Omega_k$  no limite homogêneo. A partir da equação (3.84) também encontramos:

$$\frac{\rho(t,r)}{\rho_0(r)} = \frac{R_0^2(r)R_0'(r)}{R^2(t,r)R'(t,r)}, \quad (3.97)$$

a qual é solução da equação de conservação:

$$\dot{\rho} + \Theta\rho = 0, \quad (3.98)$$

com  $\Theta$  de (3.89). Com as definições de (3.94) e integrando a (3.82) obtemos:

$$t - t_B(r) = \frac{1}{H_0} \int_0^{\frac{R}{R_0}} \frac{dx}{\sqrt{\Omega_R + \Omega_M x^{-1} + \Omega_\Lambda x^2}}, \quad (3.99)$$

onde  $t_B(r)$  é a outra função arbitrária chamada de função de tempo de big bang inhomogêneo. Como vimos na Seção 3.1.3, para conectar a dinâmica de LTB com às observações de SNIa, é preciso estudar as geodésicas nulas  $ds^2 = 0$ . Então, a partir de (3.12) temos:

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{R'(t,r)}{\sqrt{1 + 2E(r)}}. \quad (3.100)$$

A partir da definição do parâmetro de redshift  $z$ :  $\frac{\tau_{obs}}{\tau_{em}} \equiv 1 + z$ , onde  $\tau_{em}$  é o período da onda na emissão e  $\tau_{obs}$  é o período de observação, encontra-se:

$$\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dr} = \frac{\dot{R}'(t(r), r)}{c \sqrt{1+2E(r)}}, \quad (3.101)$$

onde a solução  $t(r)$  da equação (3.100) tem que ser usado. Por outro lado lembramos também, a partir da expressão (3.21), a distância de luminosidade

$$d_L(z) = (1+z)^2 R(t(z), r(z)). \quad (3.102)$$

Essas relações estabelecem a base para ligar soluções específicas para  $R$  aos dados observacionais de SNIa. Dependendo do sinal de  $E$  temos três classes de soluções para a função  $R(t, r)$ , (assumindo  $\Lambda = 0$ ), tal como foi deduzido nas expressões: (3.7), (3.8) e (3.9). Estas soluções (3.7), (3.8) e (3.9) contêm as funções arbitrárias  $M(r)$ ,  $E(r)$  e  $t_B(r)$ . Para uma escolha:  $t_B = \text{constante}$ ,  $2E = -kr^2$  e  $M \sim r^3 \rightarrow R = a(t)r$  recuperamos a métrica homogênea (2.2).

Na seção seguinte nos concentramos na solução (3.8).

### 3.3.2.3 Modelos de tempo de big bang inhomogêneos para $E = 0$

#### • Propagação da luz

Para  $E = 0$  a solução de (3.82) é (3.8). Derivando (3.8) com respeito a  $t$  obtemos:

$$\dot{R}(t, r) = \frac{2}{3} \left[ \frac{9}{2} M(r) \right]^{\frac{1}{3}} \frac{1}{(t - t_B(r))^{\frac{1}{3}}} \implies H(t, r) = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{2}{3} \frac{1}{t - t_B(r)}, \quad (3.103)$$

onde  $H(t, r)$  é a taxa local de Hubble. Derivando (3.8) respeito de  $r$  achamos;

$$R'(t, r) = \frac{1}{3} \left[ \frac{9}{2} M(r) \right]^{\frac{1}{3}} \left[ \frac{M'}{M} - 2 \frac{t'_B(r)}{t - t_B(r)} \right] (t - t_B(r))^{\frac{2}{3}}. \quad (3.104)$$

Com (3.104) em (3.84) e a primeira relação de (3.93) nós chegamos à seguinte expressão:

$$3H^2 = 8\pi G\rho \left[ 1 - \frac{2t'_B(r)}{t - t_B(r)} \frac{M}{M'} \right]. \quad (3.105)$$

Para  $t_B = \text{constante}$  recuperamos a equação usual de Friedmann. A derivada mista de  $R$  é:

$$\dot{R}'(t, r) = \frac{2}{9} \left[ \frac{9}{2} M(r) \right]^{\frac{1}{3}} \left[ \frac{M'}{M} + \frac{t'_B(r)}{t - t_B(r)} \right] \frac{1}{(t - t_B(r))^{\frac{1}{3}}}. \quad (3.106)$$

Isto dá origem a:

$$\frac{\dot{R}'}{R'} = H \frac{\frac{M'}{M} + \frac{t'_B(r)}{t - t_B(r)}}{\frac{M'}{M} - 2 \frac{t'_B(r)}{t - t_B(r)}}, \quad (3.107)$$

com  $H$  de (3.103). A fração que multiplica  $H$  nesta última equação caracteriza a diferença entre  $H = \frac{\dot{R}}{R}$  e  $\frac{\dot{R}'}{R'}$ . No limite homogêneo ambas expressões coincidem, ou seja, o cisalhamento na equação

(3.90) é zero.

Para  $E = 0$  o parâmetro de densidade de matéria se reduz a  $\Omega_M = 1$ . Da relação geral (3.94) que define  $\Omega_M$  temos:

$$2M \equiv H_0^2(r) R_0^3(r). \quad (3.108)$$

Usando a condição do gauge  $R_0 = r$  e substituindo (3.103) em (3.108) achamos:

$$M(r) = \frac{2}{9} \frac{r^3}{(t_0 - t_B(r))^2} \implies R = r \left( \frac{t - t_B(r)}{t_0 - t_B(r)} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.109)$$

Isto significa que em geral,  $M \neq M_0 r^3$  no presente caso. Outra expressão importante em nossos cálculos é:

$$\frac{M'}{M} = \frac{3}{r} + \frac{2t'_B}{t_0 - t_B}. \quad (3.110)$$

O último termo em (3.110) aparece adicionalmente à estrutura normalmente usada de  $M$ . O ponto é que não se pode ter o gauge frequentemente usado  $M = M_0 r^3$  junto com  $R_0 = r$  ao mesmo tempo. Como já temos explicitamente  $R$  e  $R'$  a nossa densidade de energia dada por (3.84), fica expressada assim:

$$8\pi G\rho = \frac{4}{3} \frac{1}{\left[1 - 2 \frac{t'_B}{t - t_B} \frac{M}{M'}\right] (t - t_B)^2}. \quad (3.111)$$

A equação para a propagação da luz (3.100), torna-se:

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{1}{3} \left[ \frac{9}{2} M(r) \right]^{\frac{1}{3}} \left[ \frac{M'}{M} - 2 \frac{t'_B(r)}{t - t_B(r)} \right] (t - t_B(r))^{\frac{2}{3}}. \quad (3.112)$$

Uma solução para esta equação diferencial requer de um modelo específico para  $t_B$ . Uma integração analítica e explícita para obter  $t = t(r)$  só é possível no limite de FLRW. Para  $t_B = t_{B_{EdS}} = \text{constante}$ , onde o subscrito EdS significa o Universo Einstein-de Sitter, então a equação (3.112) se reduz a:

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{(t - t_{B_{EdS}})^{\frac{2}{3}}}{(t_0 - t_{B_{EdS}})^{\frac{2}{3}}} \quad (\text{EdS}), \quad (3.113)$$

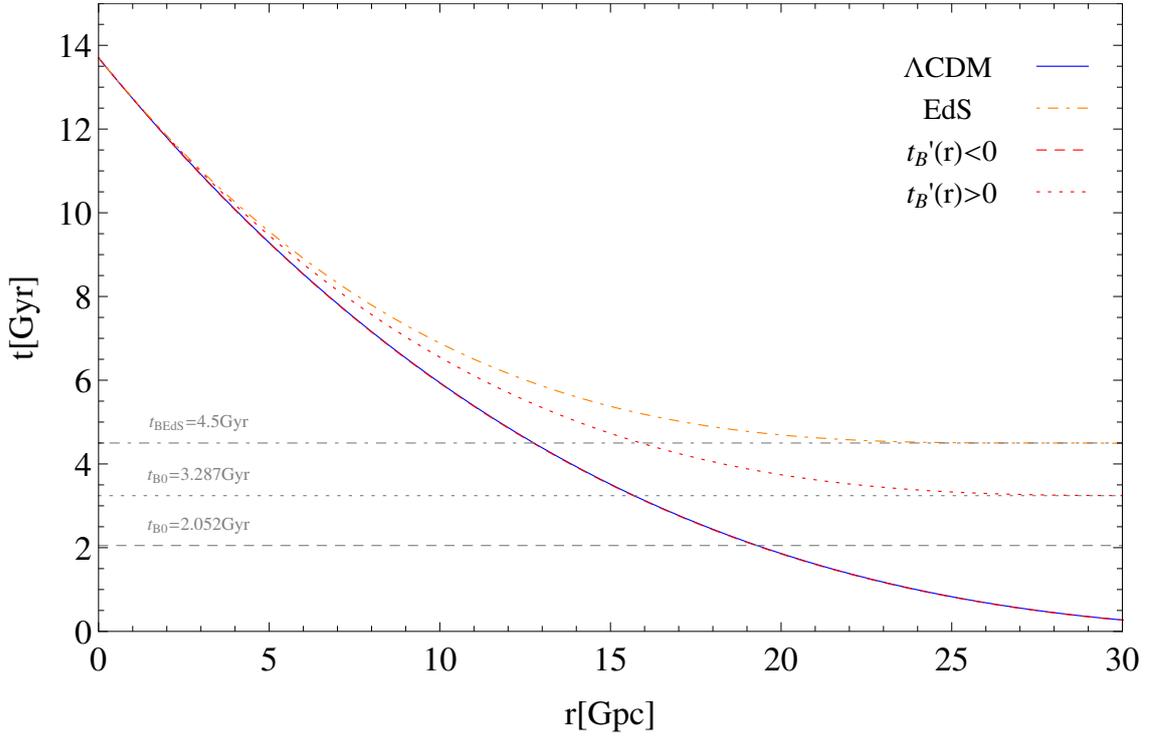
onde usamos  $M_0 = \frac{2}{9} (t_0 - t_{B_{EdS}})^{-2}$  de (3.109). A solução de (3.113) é [125]:

$$t(r) = t_{B_{EdS}} + (t_0 - t_{B_{EdS}}) \left[ 1 - \frac{1}{3} \frac{r}{t_0 - t_{B_{EdS}}} \right] \quad (\text{EdS}). \quad (3.114)$$

Esta solução representa as geodésicas nulas radiais para um Universo Einstein-de Sitter (EdS), ver Figura 3.7 abaixo. A curva correspondente para o modelo  $\Lambda$ CDM é obtida a partir da equação [125]:

$$\frac{dt}{dr} = -\left( \frac{6M_\Lambda}{\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \text{sen} h^{\frac{2}{3}} \left[ \frac{\sqrt{3}\Lambda}{2} (t - t_{B\Lambda}) \right] \quad (\Lambda\text{CDM}), \quad (3.115)$$

onde  $M_\Lambda$  e  $t_{B\Lambda}$  são constantes dentro do modelo  $\Lambda$ CDM. Numericamente, o valor de  $\Lambda$  é da ordem de  $0.1 \text{ Gpc}^{-2} \approx 0.01 \text{ Gyrs}^{-2}$ . A Figura 3.7 usa as soluções numéricas desta equação.



**Figura 3.7.** Propagação da luz para os modelos (3.128) (primeiro modelo) e (3.148) (segundo modelo) em comparação com a propagação da luz dos modelos EdS e  $\Lambda$ CDM. As curvas para o modelo  $\Lambda$ CDM e para o modelo  $t'_B(r) < 0$  são quase indistinguíveis.

Para os modelos de big bang inhomogêneos, temos que aplicar as soluções numéricas da equação (3.112) com expressões explicitamente dadas para  $t_B(r)$ . Uma versão alternativa da equação (3.112) inteiramente em termos de  $t_B(r)$ , é:

$$\frac{dt}{dr} = - \left[ 1 + \frac{\frac{2}{3} r t'_B(r)}{t_0 - t_B(r)} - \frac{\frac{2}{3} r t'_B(r)}{t - t_B(r)} \right] \frac{(t - t_B(r))^{\frac{2}{3}}}{(t_0 - t_B(r))^{\frac{2}{3}}}, \quad (3.116)$$

o que torna as modificações comparadas com o modelo EdS (3.113) mais explícito. A ideia é verificar explicitamente, se há curvas de luz em modelos de tempo de big bang inhomogêneos sem uma constante cosmológica que possa reproduzir a curva de luz do modelo  $\Lambda$ CDM<sup>37</sup>. Enquanto, no entanto, as considerações em [125] são baseadas na exigência de que as geodésicas nulas do passado dos modelos inhomogêneos e  $\Lambda$ CDM coincidem, a partir do qual uma condição em  $t_B(r)$  é obtida, começamos com modelos concretos para  $t_B(r)$  com parâmetros "realistas" e estudar se é possível reproduzir o cone de luz passado do modelo  $\Lambda$ CDM.

#### • Idade inhomogênea do Universo

Uma função de tempo de big bang inhomogênea implica que a idade do Universo é diferente para diferentes valores de  $r$ . Para uma melhor comparação vamos primeiro a estudar os modelos EdS e  $\Lambda$ CDM. A propagação da luz no modelo EdS é governada pela equação (3.113). Aparentemente, a

<sup>37</sup>Isto é semelhante ao trabalho de Andrzej Krasinski [125].

idade do Universo está relacionada com as assíntotas:

$$\frac{dt}{dr} = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_i = t_{B_{EdS}}, \quad (\text{EdS}), \quad (3.117)$$

onde  $t_i$  denota o tempo inicial da evolução deste modelo. Nós normalizamos a escala de tempo de tal forma que a diferença  $t_0 - t_{B_{EdS}}$  é apenas a idade do Universo de EdS enquanto  $t_0$  é a idade para o modelo  $\Lambda$ CDM. Da mesma forma, no modelo de  $\Lambda$ CDM encontramos a partir de (3.115) (identificando  $t_{B\Lambda}$  com o tempo zero) a seguinte equação:

$$\frac{dt}{dr} = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_i = t_{B\Lambda} = 0, \quad (\Lambda\text{CDM}). \quad (3.118)$$

A seguir encontramos assíntotas similares dos zeros da equação (3.116) para duas expressões diferentes de  $t_B(r)$ . Antes de nos voltarmos para os detalhes do modelo, adaptamos a discussão do raio máximo do cone de luz e sua relação com o horizonte aparente de nosso formalismo.

• **Cone de luz passado e horizonte aparente para o modelo de tempo de big bang inhomogêneo**

Consideramos a solução (3.8). No cone de luz temos que utilizar  $t = t(r)$ , que é a solução de (3.112). Derivando (3.8), obtemos:

$$R' = R \left[ \frac{1}{3} \frac{M'}{M} + \frac{2}{3} \frac{R}{t(r) - t_B(r)} \left( \frac{dt}{dr} - t'_B \right) \right]. \quad (3.119)$$

Inserindo (3.112) em (3.119), o resultado é:

$$R' = \frac{R}{3} \left[ \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{R}{t(r) - t_B(r)} \right) \left( \frac{M'}{M} - 2 \frac{t'_B}{t(r) - t_B(r)} \right) \right]. \quad (3.120)$$

Os valores extremos de  $R$  são obtidos fazendo  $R' = 0$ . Exceto para a solução  $R = 0$  para  $r = 0$  e  $t = t_B$  temos:

$$\frac{M'}{M} - 2 \frac{t'_B}{t(r) - t_B(r)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad R' = 0. \quad (3.121)$$

Isto coincide com a condição do *shell crossing* que será estudada e discutida mais para frente. Mas há outra condição que obviamente determina o máximo de  $R$ .

$$R_m = \frac{3}{2} (t(r_m) - t_B(r_m)), \quad (3.122)$$

onde o subscrito  $m$  denota o valor de  $r$  no máximo de  $R$ .

Agora vamos a estudar o **horizonte aparente**  $R = 2M$ . No presente caso, significa:

$$R = 2M \quad \Longrightarrow \quad 2M = \frac{4}{9} \frac{r^3}{(t_0 - t_B(r))^2}. \quad (3.123)$$

Com (3.109) a condição  $R = 2M$  é:

$$t - t_B(r) = \frac{2}{3} \frac{4}{9} \frac{r^3}{(t_0 - t_B(r))^2}, \quad (3.124)$$

através de (3.123) equivalente a:

$$2M = R = \frac{3}{2} (t - t_B(r)). \quad (3.125)$$

A comparação com (3.122) mostra que o horizonte aparente intercepta o cone de luz passado no máximo de  $R$ . Isso generaliza o resultado correspondente para um Universo de EdS com  $t_B = t_{B_{EdS}}$  para o qual, via equação (3.114), o raio do cone de luz é:

$$R = r(t)a(t) = 3(t_0 - t_{B_{EdS}}) \left( \frac{t - t_{B_{EdS}}}{t_0 - t_{B_{EdS}}} \right)^{\frac{2}{3}} \left[ 1 - \left( \frac{t - t_{B_{EdS}}}{t_0 - t_{B_{EdS}}} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \quad (\text{EdS}) \quad (3.126)$$

ou, em termos de  $r$ :

$$R = r a(t(r)) = r \left[ 1 - \frac{1}{3} \frac{r}{t_0 - t_{B_{EdS}}} \right]^2 \quad (\text{EdS}). \quad (3.127)$$

As contrapartes dessas relações para os modelos de tempo de big bang inhomogêneos têm que ser encontrados numericamente.

### 3.3.2.4 Modelos específicos e análise estatística

#### A1 Primeiro modelo com $t'_B < 0$

##### A1.1 Perfil de densidade

Introduzimos o seguinte ansatz:

$$t_B(r) = t_{B0} e^{-\left(\frac{r}{r_c}\right)^m} \quad (3.128)$$

nas relações gerais para a solução inhomogênea do tempo de big bang (3.8). O parâmetro  $r_c$  caracteriza a extensão da inhomogeneidade. O expoente  $m$  será fixado em  $m = 4$  em nossas aplicações, aqui ainda não está especificado. As propriedades relevantes do ansatz são:

$$t_B(0) = t_{B0}, \quad t_B(r \gg r_c), \quad t'_B = -\frac{m}{r_c} \left(\frac{r}{r_c}\right)^{m-1} t_B. \quad (3.129)$$

para valores suficientemente grandes de  $r$  a função de tempo de big bang inhomogêneo aproxima-se do limite homogêneo  $t_B = 0$ . Em (3.112) aparece a combinação  $\frac{2t'_B(r)}{t - t_B(r)} \frac{M}{M'}$ . Com nosso ansatz (3.128) nós encontramos:

$$\frac{2t'_B(r)}{t - t_B(r)} \frac{M}{M'} = -\frac{2m}{3} \left(\frac{r}{r_c}\right)^m \frac{t_B(r)}{t - t_B(r)} \frac{1}{1 - \frac{2m}{3} \left(\frac{r}{r_c}\right)^m \frac{t_B(r)}{t_0 - t_B(r)}}, \quad (3.130)$$

e a densidade de energia (3.111) torna-se:

$$8\pi G\rho = \frac{4}{3} \frac{1}{[1 + N(t,r)](t - t_B)^2}, \quad (3.131)$$

onde:

$$N(t, r) \equiv \frac{2m}{3} \left( \frac{r}{r_c} \right)^m \frac{t_B(r)}{t - t_B(r)} \frac{1}{1 - \frac{2m}{3} \left( \frac{r}{r_c} \right)^m \frac{t_B(r)}{t_0 - t_B(r)}}. \quad (3.132)$$

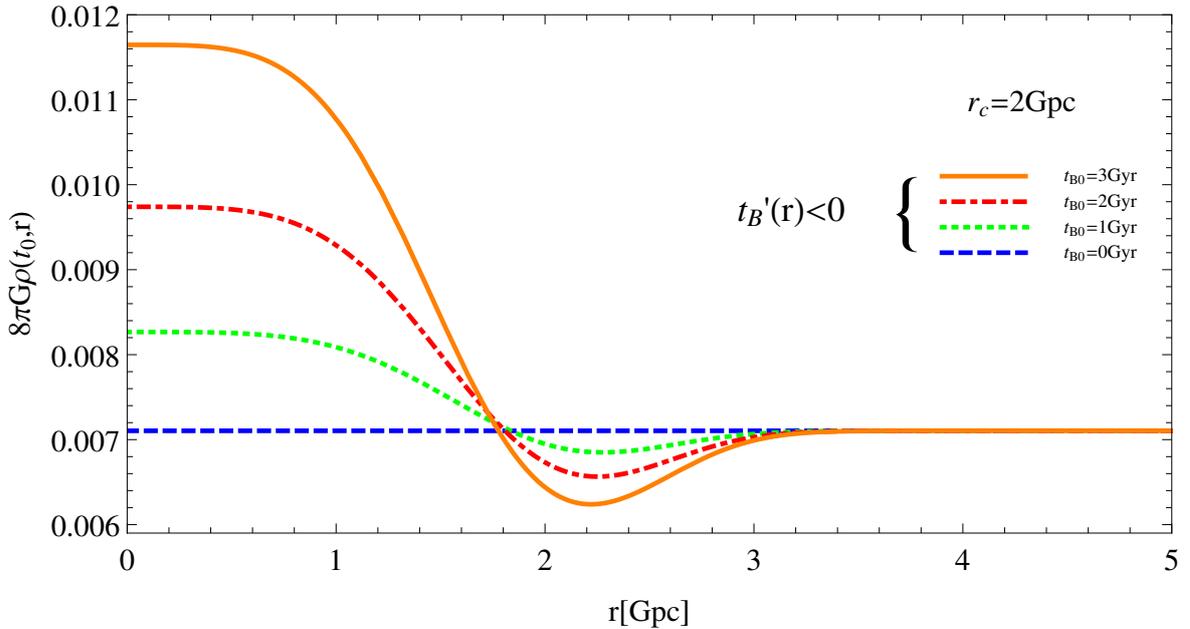
Para obter informações sobre o perfil de densidade próximo à origem, nós derivamos (3.131) o que resulta em:

$$8\pi G\rho' = -\frac{4}{3} \frac{(t - t_B)^2}{[(1 + N)(t - t_B)^2]^2} N \left[ \frac{N'}{N} - 2 \frac{t'_B}{t - t_B} \right]. \quad (3.133)$$

Agora nós consideramos o comportamento de  $\rho'$  na vizinhança da origem. Neste limite temos:

$$\frac{N'}{N} = \frac{1}{r} [1 + O(r)], \quad \left( \frac{N}{r} \right)_{r=0} > 0, \quad N(0) = 0. \quad (3.134)$$

Obviamente,  $\rho'(r \rightarrow 0) < 0$ . A região  $r = 0$  é o centro de uma *região de alta densidade*. O perfil de  $\rho$  para  $m = 4$  é mostrado na Figura 3.8 para vários valores de  $t_{B0}$ .



**Figura 3.8.** Perfil de densidade para o modelo (3.128) (primeiro modelo) para  $m = 4$  e valores diferentes de  $t_{B0}$ .

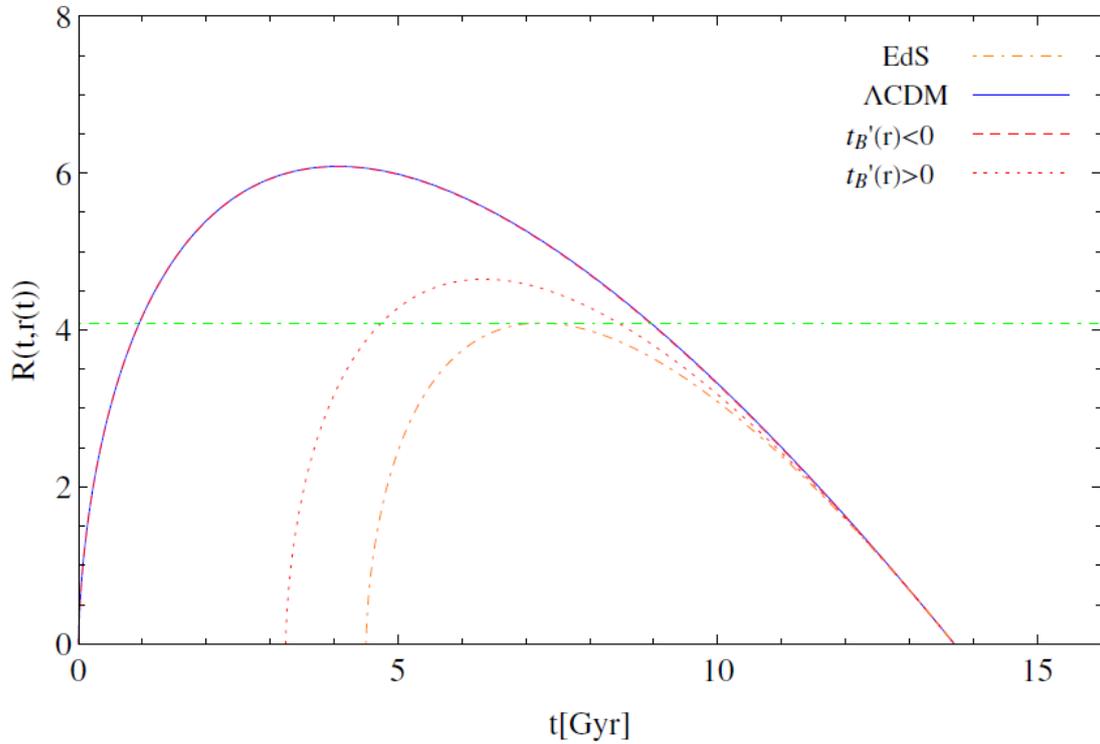
### A1.2 Cone de luz

O seguinte passo é considerar a propagação da luz para este modelo. Equação (3.112) toma a forma de:

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{1}{3} \left[ \frac{9}{2} M(r) \right]^{\frac{1}{3}} \frac{M'}{M} [1 + N] (t - t_B(r))^{\frac{2}{3}}, \quad (3.135)$$

onde  $M$  é dado por (3.109). A partir da solução numérica de (3.135) encontramos o cone de luz passado  $t = t(r)$  e o raio geodésico  $R(t, r(t))$  versus  $t$ , visualizados na Figura 3.7 e na Figura 3.9,

respectivamente. Nestas figuras usamos os valores de melhor ajuste para  $t_{B0}$  que são os resultados de nossa análise estatística.



**Figura 3.9.** Raios geodésicos para os modelos (3.128) (primeiro modelo) e (3.148) (segundo modelo) comparados com os modelos EdS e  $\Lambda$ CDM. As curvas para o modelo  $\Lambda$ CDM e para o modelo  $t'_B(r) < 0$  são quase indistinguíveis.

### A1.3 Idade do Universo

A partir da equação (3.135) encontramos:

$$\frac{dt}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_i(r) = t_B(r) - \frac{2m}{3} \left( \frac{r}{r_c} \right)^m \frac{t_B(r)}{1 - \frac{2m}{3} \left( \frac{r}{r_c} \right)^m \frac{t_B(r)}{t_0 - t_B(r)}}. \quad (3.136)$$

Aqui,  $t_i$  é o tempo inicial dependente de  $r$  da expansão cósmica. Para  $r$  pequeno temos:  $t_i \approx t_{B0}$ , para  $r$  grande o resultado é:  $t_i \approx 0$ . A idade do Universo muda de  $t_0 - t_{B0}$  perto de  $r = 0$  para  $t_0 = 13.7 \text{Gyrs}$  (nosso valor de referência  $\Lambda$ CDM) considerando  $r > r_c$ . Uma representação gráfica da dependência de  $t_i$  em  $r$  é dada na Figura 3.10.

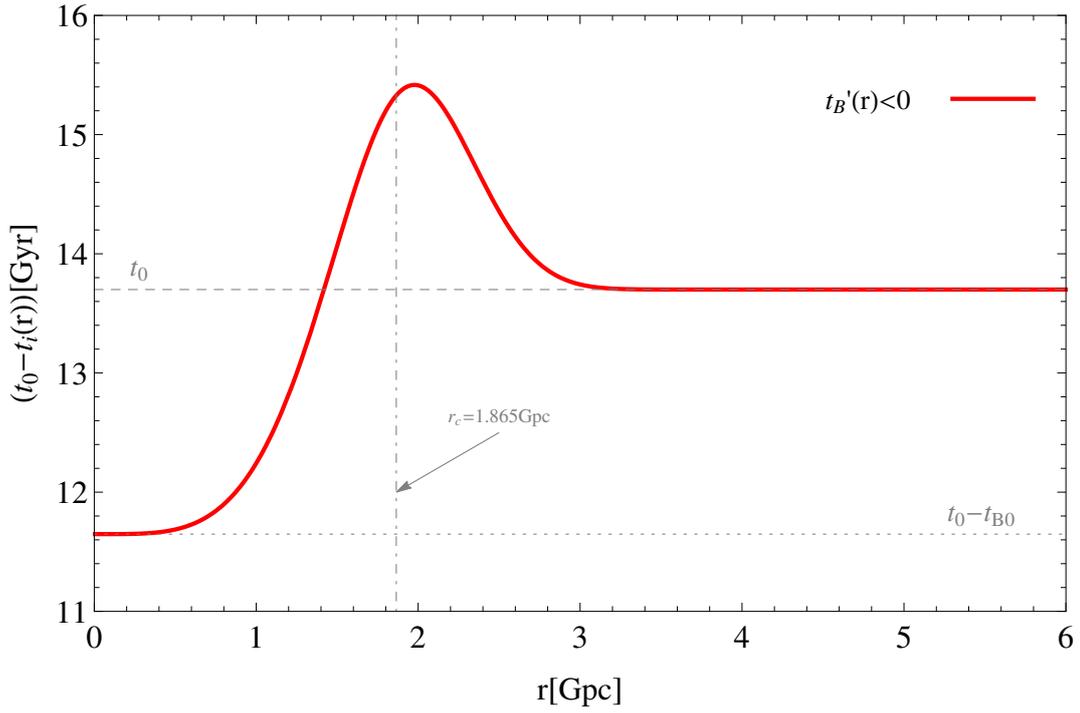


Figura 3.10. Idade do Universo para o modelo (3.128) (primeiro modelo).

#### A1.4 Blueshift

Para uma dependência  $t'_B(r) < 0$  do tempo de big bang inhomogêneo pode aparecer um *blueshift* gravitacional como um fenômeno potencialmente perigoso quanto a uma aplicabilidade ao Universo real. Em alguns trabalhos recentes foi discutido a possível aparição do blueshift cosmológico em modelos do tempo de big bang inhomogêneo [128–130]. No contexto de nossos modelos, isso aparece quando  $\dot{R}'$  muda de  $\dot{R}' > 0$  para  $\dot{R}' < 0$ . Para  $\dot{R}' > 0$  temos  $\frac{dz}{dr} > 0$  e  $z$  aumenta com  $r$ , para  $\dot{R}' < 0$  temos  $\frac{dz}{dr} < 0$ , equivalente a um  $z$  que diminui com  $r$ .

Geralmente, o redshift é determinado por (3.101). No nosso caso  $E = 0$  a dependência do redshift é inteiramente determinada por  $\dot{R}'(t(r), r)$  em (3.106). Para  $t'_B < 0$  não se pode excluir a possibilidade  $\frac{M'}{M} + \frac{t'_B(r)}{t - t_B(r)} < 0$ . Sob essa condição, o redshift  $z$  não aumentaria com  $r$ , ao contrário,  $z$  diminuiria. Isto pode resultar em um *blueshift* de objetos distantes em vez de um redshift. É interessante quantificar as condições sob as quais esse comportamento pode ocorrer. Em geral, utilizando (3.110) temos:

$$\frac{M'}{M} + \frac{t'_B(r)}{t - t_B(r)} = \frac{3}{r} + t'_B(r) \left[ \frac{2}{t_0 - t_B(r)} + \frac{1}{t - t_B(r)} \right]. \quad (3.137)$$

Para que  $\frac{dz}{dr} > 0$  seja válido para  $t'_B < 0$ , é preciso ter:

$$\frac{M'}{M} + \frac{t'_B(r)}{t - t_B(r)} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{r} > |t'_B(r)| \left[ \frac{2}{t_0 - t_B(r)} + \frac{1}{t - t_B(r)} \right]. \quad (3.138)$$

No presente caso (primeiro modelo) isso equivale a:

$$t(r) > t_B(r) \left[ 1 + \frac{1}{\frac{3}{m} \left( \frac{r_c}{r} \right)^m - \frac{2t_B(r)}{t_0 - t_B(r)}} \right]. \quad (3.139)$$

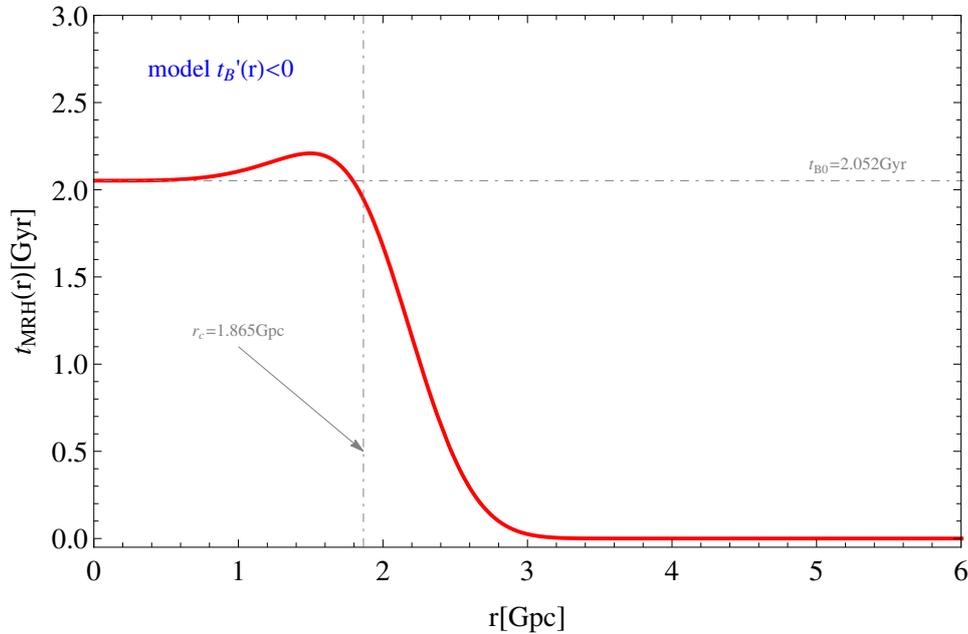
Sob a condição (3.139) temos  $\frac{dz}{dr} > 0$ . Para tempos primordiais  $\frac{dz}{dr} < 0$  e um blueshift resultante não pode ser excluído. Logo, a igualdade:

$$t_{MRH}(r) = t_B(r) \left[ 1 + \frac{1}{\frac{3}{m} \left( \frac{r_c}{r} \right)^m - \frac{2t_B(r)}{t_0 - t_B(r)}} \right], \quad (3.140)$$

corresponde à "hipersuperfície máxima do redshift" (MRH)<sup>38</sup> em [130]. Se  $t_{MRH}(r)$  ocorre mais cedo do que a igualdade *matéria-radiação*, o potencial blueshift está além da aplicabilidade do modelo LTB sem pressão. Em termos de razões de tempo, em relação ao tempo presente  $t_0$ , a condição (3.139) também pode ser escrita como:

$$\frac{t(r)}{t_0} > \frac{t_B(r)}{t_0} \left[ 1 + \frac{1}{\frac{3}{m} \left( \frac{r_c}{r} \right)^m - 2 \frac{t_B(r)}{t_0} \frac{1}{1 - \frac{t_B(r)}{t_0}}} \right]. \quad (3.141)$$

A situação de nosso modelo está representada na Figura 3.11. Uma contribuição de blueshift pode ocorrer em tempos que são da ordem de cerca de 2 Gyrs. Aplicado a nosso Universo real, isso estaria bem na era dominada pela matéria e provavelmente limitar a aplicabilidade direta deste modelo simples.



**Figura 3.11.** Hipersuperfície máxima de redshift para o modelo (3.128) (primeiro modelo). Na área à esquerda da curva vermelha, haverá uma contribuição para o blueshift.

<sup>38</sup>Em inglês: Maximum-Redshift Hypersurface (MRH).

## A2 Segundo modelo com $t'_B > 0$

### A2.1 Perfil de densidade

Como outro exemplo simples, para  $t'_B > 0$ , consideramos o ansatz:

$$t_B(r) = t_{B0} \left( 1 - e^{-\left(\frac{r}{r_c}\right)^m} \right), \quad t'_B(r) = \frac{m}{r_c} \left( \frac{r}{r_c} \right)^{m-1} [t_{B0} - t_B(r)]. \quad (3.142)$$

Aqui:

$$t_B(r=0) = 0, \quad t_B(r \gg r_c) = t_{B0}, \quad (3.143)$$

isto é, o tempo de big bang inhomogêneo aumenta com  $r$  até se aproximar de um valor constante. Para este modelo temos:

$$\frac{2t'_B}{t - t_B(r)} \frac{M}{M'} = \frac{2m}{3} \left( \frac{r}{r_c} \right)^m \frac{t_{B0} - t_B(r)}{t - t_B(r)} \frac{1}{1 + \frac{2m}{3} \left( \frac{r}{r_c} \right)^m \frac{t_{B0} - t_B(r)}{t_0 - t_B(r)}} \equiv U(t, r). \quad (3.144)$$

A densidade de energia, de (3.111), fica assim:

$$8\pi G \rho = \frac{4}{3} \frac{1}{(1 - U)(t - t_B)^2}. \quad (3.145)$$

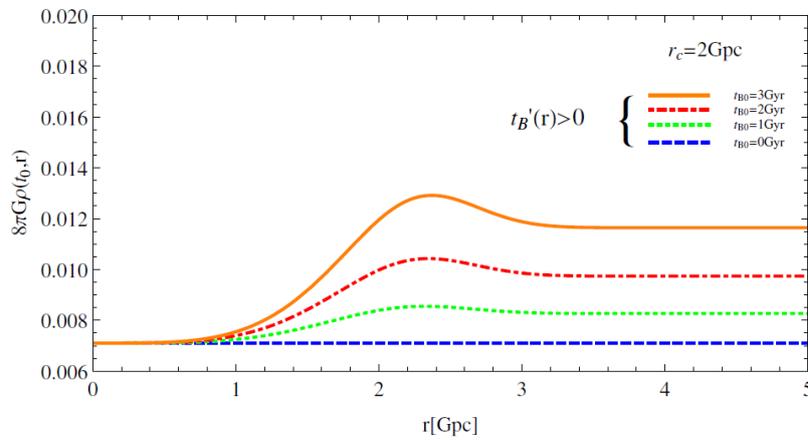
Derivando (3.145), obtemos:

$$8\pi G \rho' = \frac{4}{3} \frac{(t - t_B)^2}{[(1 - U)(t - t_B)^2]^2} U \left[ \frac{U'}{U} - 2 \frac{t'_B}{t - t_B} \right]. \quad (3.146)$$

Analisando de maneira similarmente ao caso anterior, obtemos :

$$\frac{U'}{U} = \frac{1}{r} [1 + O(r)], \quad \left( \frac{U}{r} \right)_{r=0} > 0, \quad U(0) = 0. \quad (3.147)$$

Mas agora  $\rho'(r \rightarrow 0) > 0$ , isto é, a densidade aumenta com  $r$  e  $r = 0$  é o centro de um vazio. Figura 3.12 mostra o perfil de  $\rho$  para  $m = 4$ , considerando vários valores de  $t_{B0}$ .



**Figura 3.12.** Perfil de densidade para o modelo (3.142) (segundo modelo) para  $m = 4$  e valores diferentes de  $t_{B0}$ .

### A2.2 Cone de luz

A equação (3.112) para a propagação da luz torna-se:

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{1}{3} \left[ \frac{9}{2} M(r) \right]^{\frac{1}{3}} \frac{M'}{M} [1 - U] (t - t_B(r))^{\frac{2}{3}}, \quad (3.148)$$

com  $M$  de (3.109). A solução numérica de (3.148) é mostrada na Figura 3.7, enquanto na Figura 3.9 podemos visualizar o raio geodésico correspondente. Obviamente, a estrutura do cone de luz do modelo  $\Lambda$ CDM é melhor reproduzida pelo *modelo de colina* (primeiro modelo) do que pelo *modelo de vazio* (segundo modelo).

### A2.3 Idade do Universo

A partir da equação de propagação de luz, (3.148), encontramos:

$$\frac{dt}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_i(r) = t_B(r) + \frac{2m}{3} \left( \frac{r}{r_c} \right)^m \frac{t_{B0} - t_B(r)}{1 + \frac{2m}{3} \left( \frac{r}{r_c} \right)^m \frac{t_{B0} - t_B(r)}{t_0 - t_B(r)}}, \quad (3.149)$$

onde  $t_i$  novamente denota o tempo inicial dependente de  $r$  da expansão cósmica. A situação aqui é o oposto do caso anterior. Para  $r$  pequeno: o tempo inicial é  $t_i \approx 0$ , para  $r$  grande obtemos  $t_i \approx t_{B0}$ . As assintotas  $\frac{dt}{dr} = 0$  resultam em um tempo inicial  $t_i = 0$  para  $r$  pequeno, correspondendo  $t_0$  a idade do modelo  $\Lambda$ CDM. Para  $r$  grande, a idade do Universo se reduz para  $t_0 - t_{B0}$ . O comportamento de  $t_i$  na dependência de  $r$  é visualizado na Figura 3.13.

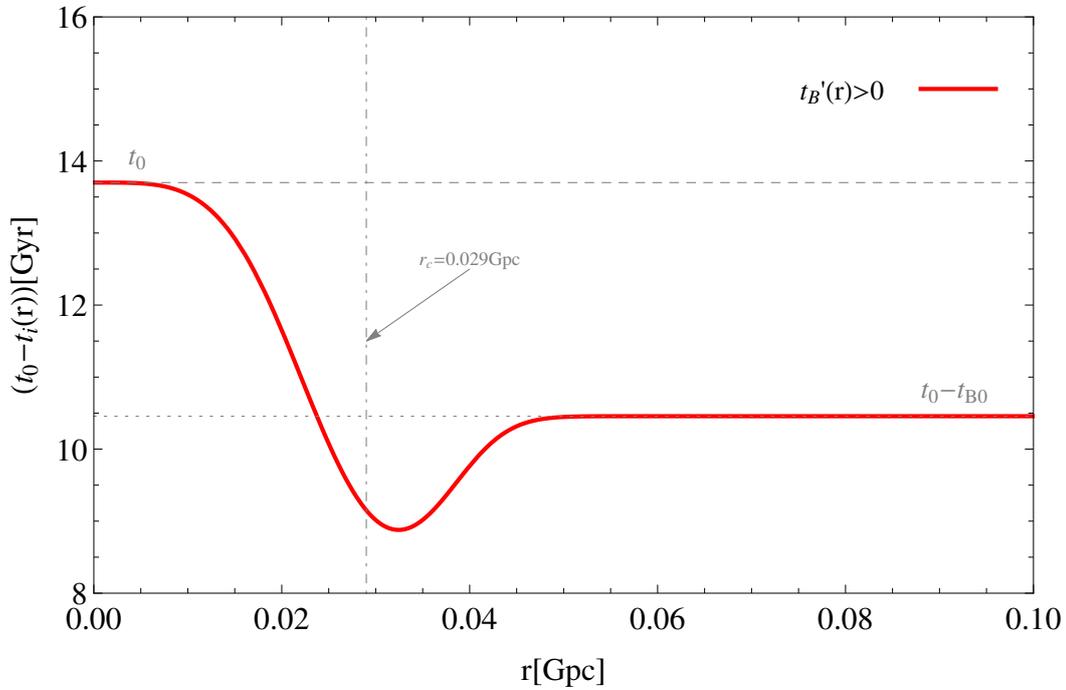


Figura 3.13. Idade do Universo para o modelo (3.142) (segundo modelo).

### A2.4 Shell crossing

Modelos inomogêneos de vazios são propensos a singularidades de *shell crossing*. Tal comportamento ocorre se as cascas internas expandem mais rápido que as cascas com maior  $r$ . A condição para o shell crossing ocorrer é  $R' = 0$ . Sob esta condição, o coeficiente métrico  $g_{rr}$  desaparece. Em nosso caso, ver equação (3.104), isto corresponde à condição já mencionada anteriormente:

$$\frac{M'}{M} - 2 \frac{t'_B(r)}{t - t_B(r)} = 0. \quad (3.150)$$

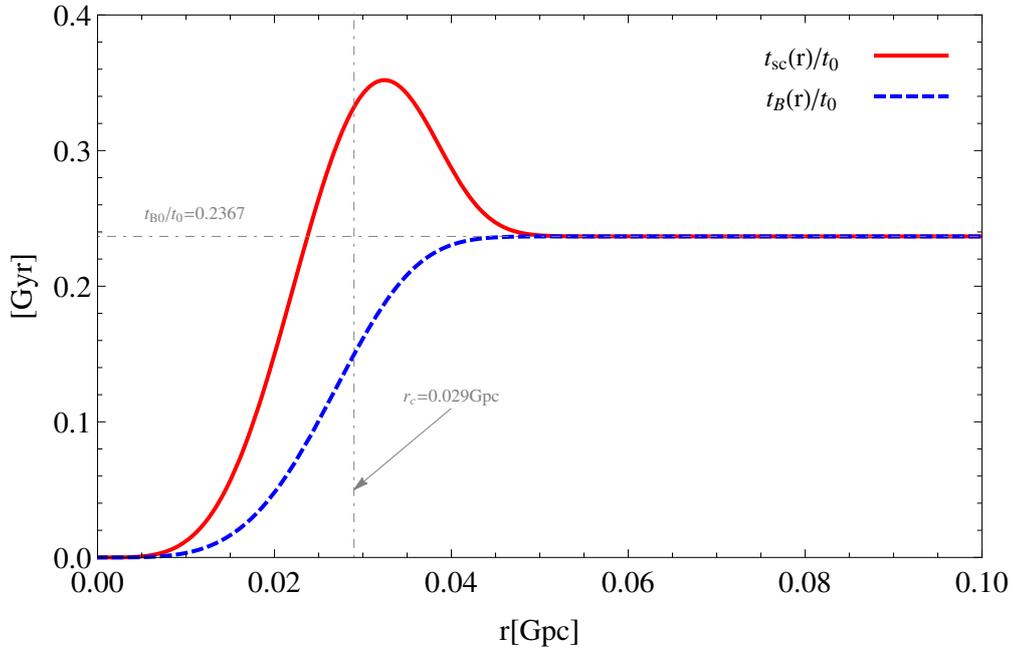
Enquanto  $\frac{M'}{M} > 0$  e  $t'_B(r) < 0$  não haverá *shell crossing*. Mas para modelos de tempo de big bang inomogêneo nós encontramos, usando a expressão (3.110), que o shell crossing ocorre para:

$$\frac{3}{r} - 2t'_B \frac{t_0 - t_{sc}}{(t_0 - t_B)(t_{sc} - t_B)} = 0. \quad (3.151)$$

Aqui,  $t_{sc}$  é o tempo para o qual se espera o começo do shell crossing. Isso requer que  $t'_B > 0$  seja satisfeito. Então, resolvendo para  $t_{sc}$  obtemos:

$$\frac{t_{sc}}{t_0} = \frac{2t'_B(r) + \frac{3}{r}(t_0 - t_B(r))\frac{t_B(r)}{t_0}}{2t'_B(r) + \frac{3}{r}(t_0 - t_B(r))}. \quad (3.152)$$

Nesta expressão obviamente o numerador é menor que o denominador, consistente com  $t_{sc} < t_0$ . Para nosso modelo (3.142) temos que descobrir numericamente, para qual razão  $\frac{t_{sc}}{t_0}$  ocorre o shell crossing na dependência dos parâmetros  $t_{B0}$  e  $r_c$ . O resultado é visualizado na Figura 3.14. A região para o *shell crossing* é a área entre as curvas vermelha (esquerda) e azul (direita). Um exemplo é dado na Figura 3.15.



**Figura 3.14.** Comparação de  $\frac{t_{sc}}{t_0}$  e  $\frac{t_B(r)}{t_0}$  para o modelo (3.142) (segundo modelo). O shell crossing pode ocorrer na região entre as duas curvas.

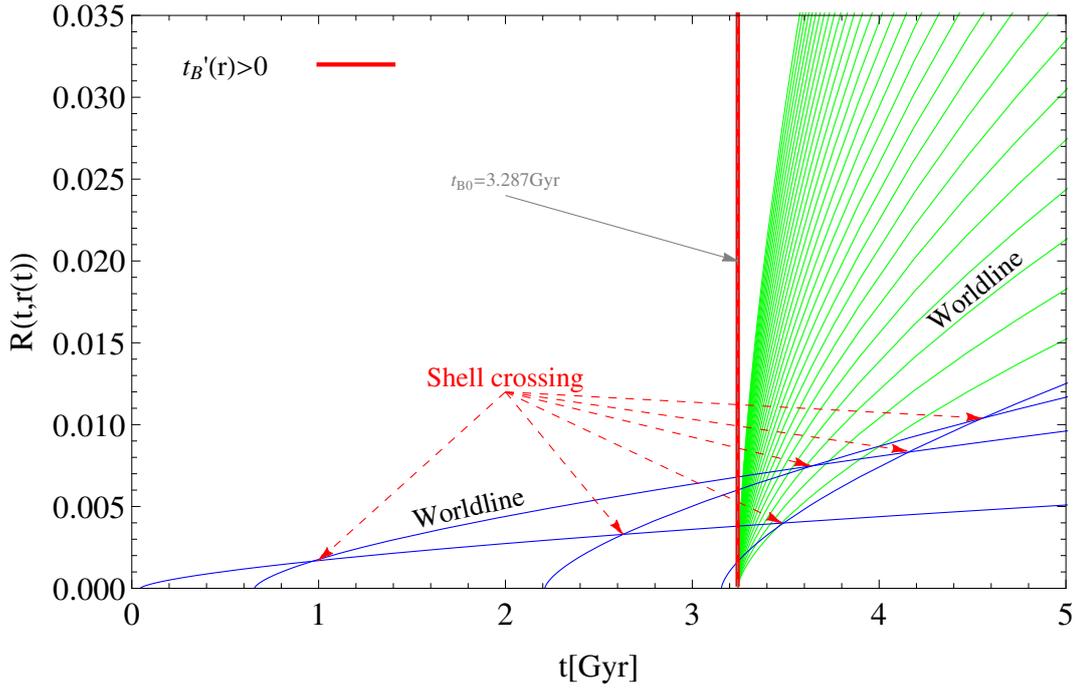


Figura 3.15. Shell crossing no modelo (3.142) (segundo modelo).

### A3 Análise estatística

Para realizar a análise estatística utilizamos dados de SNIa da amostra JLA (ver a seção 2.3.5.2 para mais detalhes). Agora explicamos, como os valores de melhor ajuste já utilizados para  $t_{B0}$  e  $r_c$  foram obtidos. Começamos construindo a função  $\chi^2$ :

$$\chi^2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}, M_B) = \sum_{i=1}^{740} \frac{[\mu_i^{SNIa}(\boldsymbol{\delta}, M_B) - \mu_{teo}^{LTB}(z_i; \boldsymbol{\theta})]^2}{\sigma_i^2 + \sigma_{int}^2}, \quad (3.153)$$

onde os parâmetros das supernovas são denotados por  $\boldsymbol{\delta} := (\alpha, \beta)$  e os parâmetros cosmológicos por  $\boldsymbol{\theta} := (t_{B0}, r_c)$ . O erro propagado da matriz de covariância do ajuste da curva de luz é [133]:

$$\sigma_i^2 = \sigma_{m_b, i}^2 + \alpha^2 \sigma_{X_1, i}^2 + \beta^2 \sigma_{C, i}^2 + 2\alpha \sigma_{m_b^* X_1, i} - 2\beta \sigma_{m_b^* C, i} - 2\alpha\beta \sigma_{X_1 C, i} + \sigma_{\mu z, i}^2, \quad (3.154)$$

onde  $\sigma_{\mu z, i}^2$  representa a contribuição do módulo de distância devido às incertezas do *redshift de velocidades peculiares*:

$$\sigma_{\mu z, i} = \sigma_{z, i} \left( \frac{5}{\log 10} \right) \frac{1 + z_i}{z_i \left( 1 + \frac{z_i}{2} \right)}, \quad (3.155)$$

com  $\sigma_{\mu z, i}^2 = \sigma_{spec, i}^2 + \sigma_{pec, i}^2$ , onde  $\sigma_{spec, i}$  é o erro de medição do redshift e  $\sigma_{pec} = 0.0012$  é a incerteza devido à velocidade peculiar. Finalmente, um termo flutuante  $\sigma_{int}$  é incluído para descrever os erros sistemáticos. Para obter os parâmetros  $\boldsymbol{\delta}$ , seguimos o método descrito em [133]. o valor de  $\sigma_{int}$ , que não é um parâmetro livre, é determinado pelo seguinte procedimento: comece com o valor inicial ( $\sigma_{int} = 0.15$ ) para obter um  $\frac{\chi_{min}^2}{734} = 1$  e repita iterativamente até que a convergência seja alcançada. Alternativamente, também usamos um ajuste de parâmetro baseado na função likelihood

(verossimilhança) [133].

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}, M_B, \sigma_{int}) := \chi^2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}, M_B, \sigma_{int}) + \sum_i^N \ln(\sigma_i^2(\boldsymbol{\delta}) + \sigma_{int}^2), \quad (3.156)$$

onde agora  $\sigma_{int}$  também é considerado como um parâmetro livre.

**Tabela 3.3.** Parâmetros de melhor ajuste para os dois modelos inomogêneos na abordagem de  $\chi^2$  para a análise completa de SNIa.

Modelo	$t_{B0}$	$r_c$	$\alpha$	$\beta$	$M_B^1$	$\Delta_M$	$\chi_{min}^2$	$\sigma_{int}$
$t'_B(r) < 0$	2.052	1.865	0.117	2.525	-19.412	-0.047	717.555	0.058
$t'_B(r) > 0$	3.243	0.029	0.102	2.310	-19.042	-0.089	734.512	0.154

**Tabela 3.4.** Parâmetros de melhor ajuste para os dois modelos inomogêneos na abordagem da *likelihood* para a análise completa de SNIa.

Modelo	$t_{B0}$	$r_c$	$\alpha$	$\beta$	$M_B^1$	$\Delta_M$	$\mathcal{L}_{min}$	$\sigma_{int}$
$t'_B(r) < 0$	2.052	1.902	0.102	2.145	-19.425	-0.032	-1931.02	0.080
$t'_B(r) > 0$	3.287	0.029	0.087	1.948	-19.046	-0.076	-1513.07	0.161

#### A4 Resultados

Na Figura 3.16 e Figura 3.17 mostramos os valores de melhor ajuste para as abordagens  $\chi^2$  e *likelihood*, respectivamente. Nossos resultados para a abordagem  $\chi^2$  estão resumidos na Tabela 3.3, os da abordagem da *likelihood* na Tabela 3.4.

A constante  $t_{B0}$  representa a diferença máxima para a idade inomogênea do Universo em comparação com o caso homogêneo  $t_{B0} = 0$ . O modelo de **colina** descreve uma inomogeneidade de uma extensão da ordem de 2 Gpc. Os valores de melhor ajuste para o modelo de **vazio** são da ordem de 30 Mpc, isto é, são muito menor.

Note que a análise  $\chi^2$  vem com um viés significativo para os parâmetros de nuisance, não, no entanto, para os parâmetros cosmológicos como pode ser visto na Figura 3.16 e Figura 3.17. Para comparação, a Tabela 3.5 e Tabela 3.6 mostram os resultados de uma análise correspondente para o modelo  $\Lambda$ CDM plano com  $H_0 = 71 \frac{km}{sMpc}$ .

Na Figura 3.18, mostramos os dados calibrados separadamente para os modelos  $t'_B(r) < 0$  (barras azuis) e  $t'_B(r) > 0$  (barras vermelhas) e plotamos as curvas de melhor ajuste. Finalmente, na Figura 3.19 apresentamos as *funções de distribuição de probabilidade* (PDFs) do parâmetro  $\sigma_{int}$  comparando com seus valores obtidos iterativamente na abordagem tradicional de  $\chi^2$ . Note que o viés no modelo  $t'_B(r) < 0$  é maior que no modelo  $t'_B(r) > 0$ .

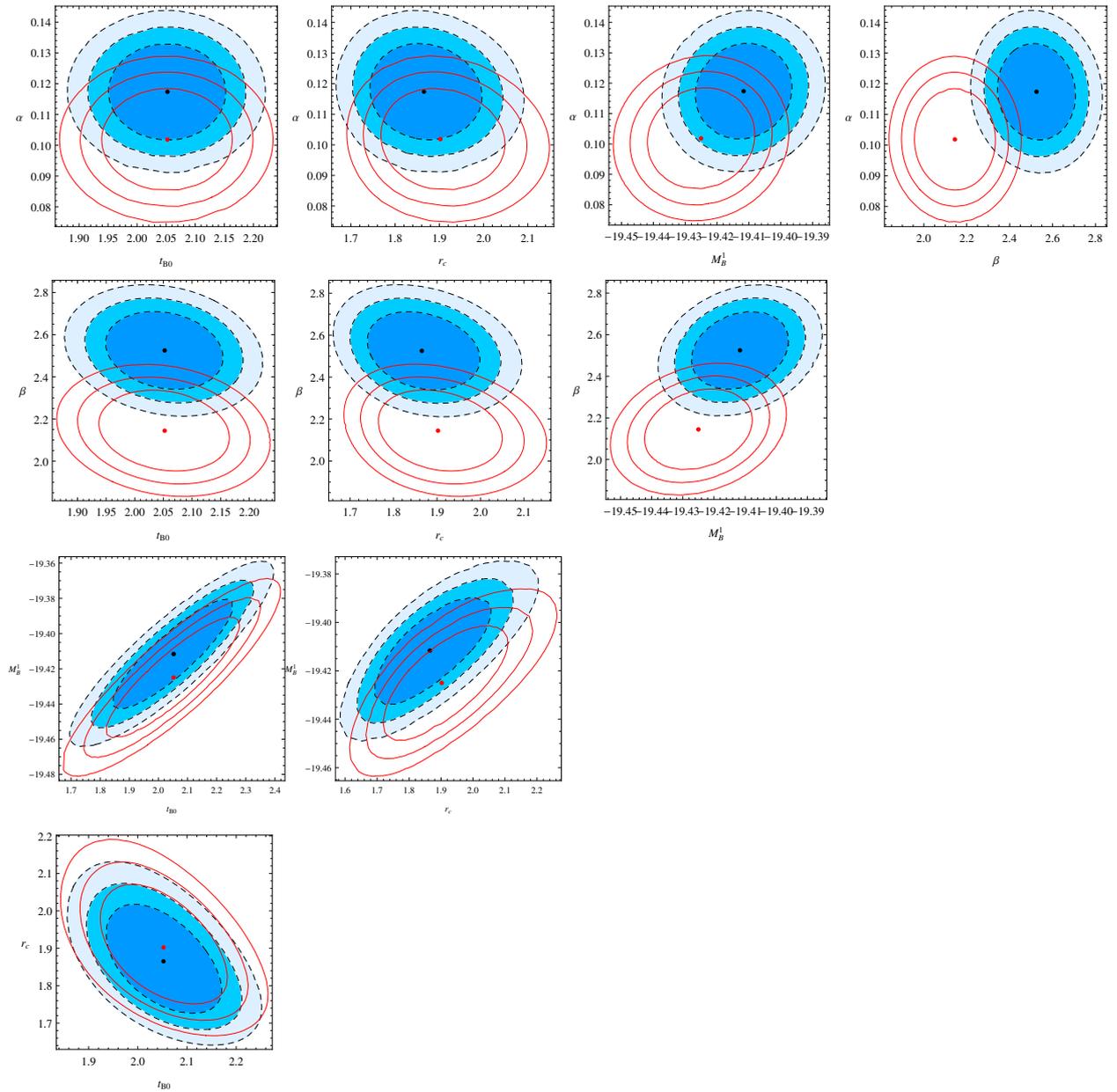
**Tabela 3.5.** Parâmetros de melhor ajuste para o modelo  $\Lambda$ CDM na abordagem de  $\chi^2$  para a análise completa de SNIa.

Modelo	$\Omega_M$	$\alpha$	$\beta$	$M_B^1$	$\Delta_M$	$\chi^2_{min}$	$\sigma_{int}$
$\Lambda$ CDM	0.312	0.123	2.665	-19.0219	-0.043	715.793	0.019

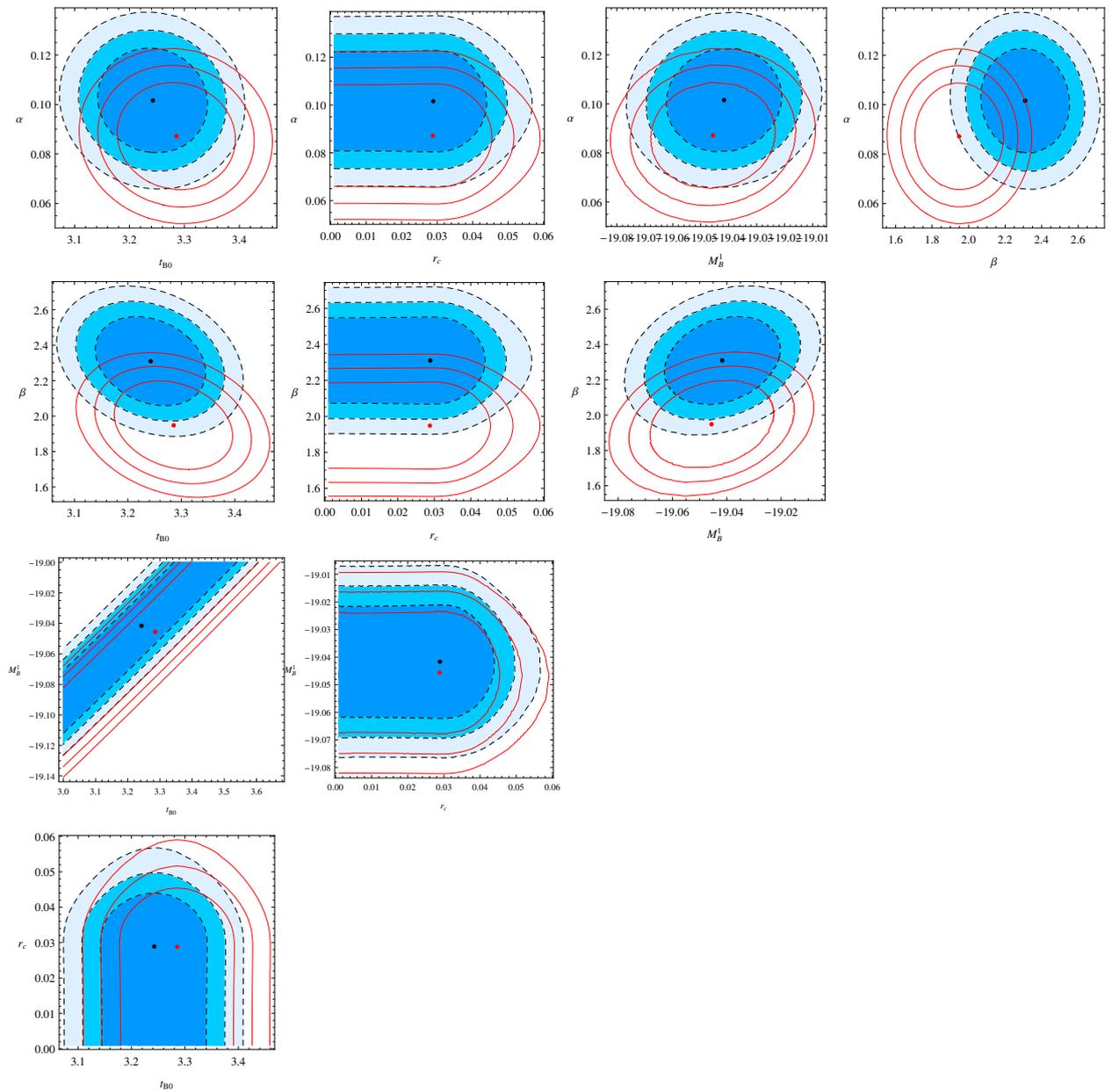
**Tabela 3.6.** Parâmetros de melhor ajuste para o modelo  $\Lambda$ CDM na abordagem da *likelihood* para a análise completa de SNIa.

Modelo	$\Omega_M$	$\alpha$	$\beta$	$M_B^1$	$\Delta_M$	$\mathcal{L}_{min}$	$\sigma_{int}$
$\Lambda$ CDM	0.329	0.107	2.265	-19.032	-0.028	-1995.8	0.064

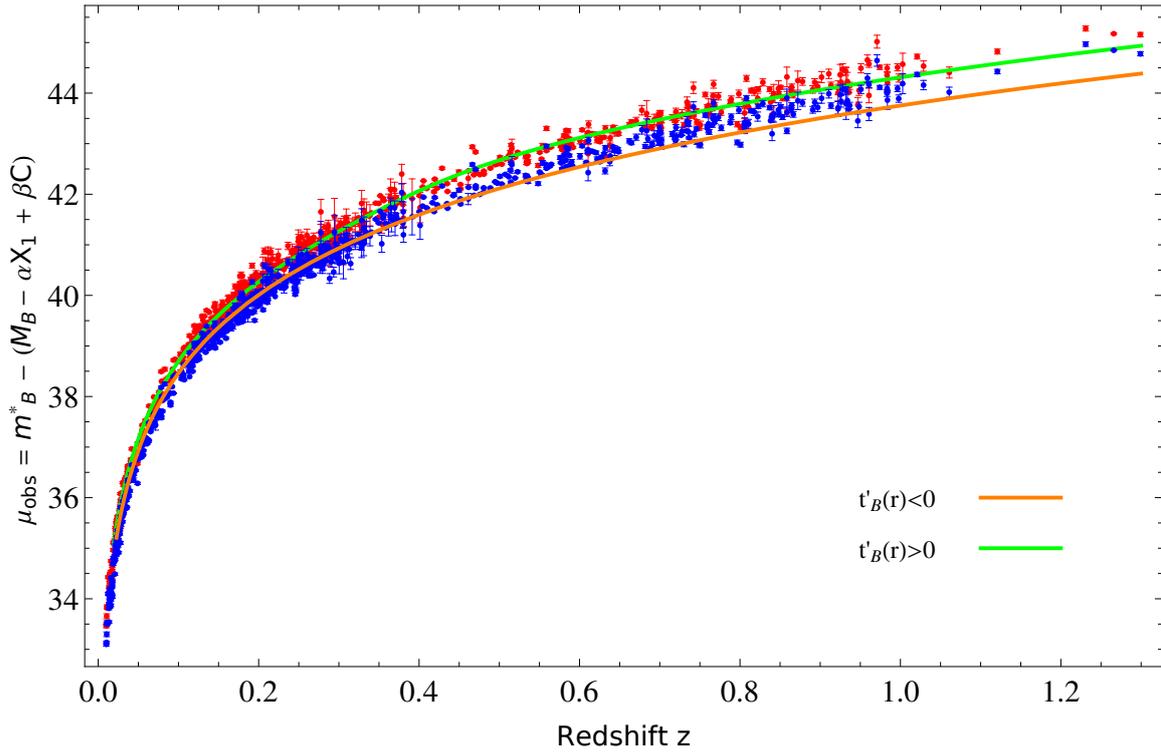
Analisando a partir da abordagem de  $\chi^2$  sozinho, o modelo de vazio parece ser preferido em comparação com o modelo de colina. Uma comparação dos resultados da análise da *likelihood* revela, no entanto, que, no que se diz respeito dos modelos com um tempo de big bang inhomogêneo, os dados de SNIa são melhor reproduzidos pelos modelos de colina (primeiro modelo) do que por modelos de vazios (segundo modelo). Isto está de acordo com os resultados em [33, 127]. Na subseção a seguir, fazemos uma comparação mais **quantitativa** de nossos modelos. *É interessante notar que, para uma análise  $\chi^2$  simples usando os dados de Union2.1 também encontramos uma preferência pelo modelo de colina.*



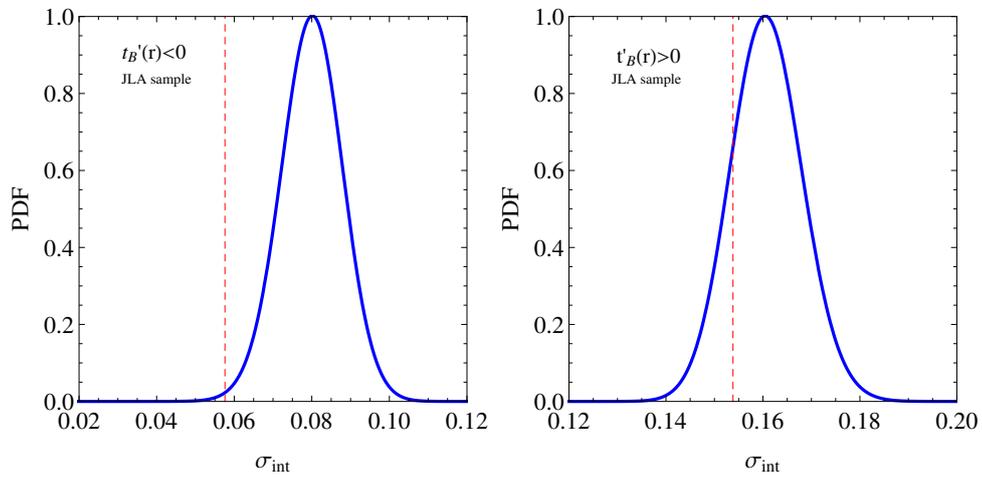
**Figura 3.16.** Regiões de confiança no espaço de dois parâmetros obtidos a partir do espaço de 6 parâmetros para o modelo  $t'_B(r) < 0$  (primeiro modelo) na abordagem de  $\chi^2$  (contorno preenchido) e na abordagem da likelihood, respectivamente.



**Figura 3.17.** Regiões de confiança no espaço de dois parâmetros obtidos a partir do espaço de 6 parâmetros para o modelo  $t'_B(r) > 0$  (segundo modelo) na abordagem de  $\chi^2$  (contorno preenchido) e na abordagem da likelihood, respectivamente.



**Figura 3.18.** Relação  $\mu$ -redshift para o melhor ajuste do modelo  $t'_B(r) < 0$  (curva de laranja) e o melhor ajuste do modelo  $t'_B(r) > 0$  (curva de verde) com os dados observacionais calibrados separadamente para cada modelo.



**Figura 3.19.** Os PDFs de  $\sigma_{int}$  para o modelo  $t'_B(r) < 0$  (painel esquerdo) e para o modelo  $t'_B(r) > 0$  (painel direito). As linhas tracejadas vermelhas representam os valores obtidos iterativamente na abordagem tradicional de  $\chi^2$ .

#### A5 Comparação de modelos

O (corrigido) *Critério de Informação de Akaike*<sup>39</sup> (AIC) [134] propõe comparar diferentes modelos através

<sup>39</sup>Em inglês: Akaike Information Criterion.

de uma quantidade definida como:

$$\text{AIC} = \mathcal{L}_{\min} + N \ln(2\pi) + 2k + \frac{2k(k-1)}{N-k-1}, \quad (3.157)$$

onde  $k$  é o número de parâmetros livres e  $N$  é o número de pontos de dados.

Outra possibilidade é o *Critério de Informação Bayesiana*<sup>40</sup> (BIC) [135] que usa a quantidade:

$$\text{BIC} = \mathcal{L}_{\min} + N \ln(2\pi) + k \ln(N). \quad (3.158)$$

**Um modelo é visto como favorecido pelos dados quando um valor mais baixo de AIC ou BIC é obtido.** Note que a diferença delas vem dos dois últimos termos em AIC e o último termo no BIC. Na Tabela 3.7 mostramos nossos resultados, com base em  $k = 7$  para os dois modelos inhomogêneos e com base em  $k = 6$  para o modelo  $\Lambda$ CDM. O caso  $t'_B(r) < 0$  é o melhor modelo em comparação com o caso de  $t'_B(r) > 0$ . Mas o modelo  $\Lambda$ CDM é claramente superior a ambos modelos de LTB, que têm mais um parâmetro livre.

Para obter o *fator de Bayes*  $B_{ij}$ , podemos usar uma aproximação simples [136] que é dado quando:  $N \rightarrow \infty$ . Então, neste limite pode ser mostrado que:

$$\frac{\text{BIC}[i] - \text{BIC}[j] + 2 \ln B_{ij}}{2 \ln B_{ij}} \rightarrow 0, \quad (3.159)$$

onde  $\text{BIC}[1]$  denota o BIC para o modelo  $\Lambda$ CDM,  $\text{BIC}[2]$  para o modelo com  $t'_B(r) < 0$  e  $\text{BIC}[3]$  para o modelo com  $t'_B(r) > 0$ . Esta relação não fornece o valor preciso de  $B_{ij}$ , porém é mais fácil de manipular e não requer avaliação de distribuições anteriores (*priors*). Seu uso pode ser visto como uma indicação razoável do **critério de evidência** dos modelos. Nós obtemos  $2 \ln(B_{12}) = 71.387$  e  $2 \ln(B_{13}) = 489.337$ , indicando que o modelo  $\Lambda$ CDM é o vencedor claro da competição, com o modelo de vazio mais desfavorecido do que o modelo de colina [136].

**Tabela 3.7.** AIC e BIC para os dois modelos inhomogêneos e o modelo  $\Lambda$ CDM.

Modelo	AIC	BIC
$t'_B(r) < 0$	-556.876	-524.744
$t'_B(r) > 0$	-138.926	-106.794
$\Lambda$ CDM	-623.689	-596.131

<sup>40</sup>Em inglês: Bayesian Information Criterion.

### 3.3.2.5 Redshift drift

Reintroduzindo a velocidade da luz, as equações geodésicas nulas (3.101) e (3.100) para  $E = 0$  se reduzem em:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{(1+z)\dot{R}'(t,r)}{c} \quad \text{e} \quad \frac{dt}{dr} = -\frac{R'(t,r)}{c}, \quad (3.160)$$

respectivamente. As trajetórias de luz observadas por um observador no centro em  $t = t_0$  e  $t = t_0 + \delta t_0$  são:

$$z = z_*(t_0, r) \quad t = t_*(t_0, r), \quad (3.161)$$

e

$$z = z_*(t_0, r) + \delta z(r) \quad t = t_*(t_0, r) + \delta t(r), \quad (3.162)$$

respectivamente. Aqui, por definição:  $t_*(t_0, 0) = t_0$ , assim como  $\delta t(0) = \delta t_0$ ,  $z_*(t_0, 0) = 0$  e  $\delta z(0) = 0$ . Então, usando (3.161) e (3.162) nas equações geodésicas (3.160), obtemos:

$$\frac{d\delta z}{dr} = \frac{\dot{R}'}{c} \delta z + (1+z) \frac{\ddot{R}'}{c} \delta t, \quad (3.163)$$

$$\frac{d\delta t}{dr} = -\frac{\dot{R}'}{c} \delta t. \quad (3.164)$$

Podemos substituir  $r$  por  $z = z_*(t_0, r)$ , usando:

$$\frac{d}{dr} = \frac{dz}{dr} \frac{d}{dz} = \frac{(1+z)\dot{R}'}{c} \frac{d}{dz}, \quad (3.165)$$

então, nós obtemos [131]:

$$\frac{d\delta z}{dz} = \frac{\delta z}{1+z} + \frac{\ddot{R}'}{\dot{R}'} \delta t, \quad (3.166)$$

$$\frac{d\delta t}{dz} = -\frac{\delta t}{1+z}. \quad (3.167)$$

A integração da última equação resulta em  $\delta t = \frac{\delta t_0}{1+z}$  e de (3.166) obtemos:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\delta z}{1+z} \right) = \frac{1}{(1+z)^2} \frac{\ddot{R}'}{\dot{R}'} \delta t_0. \quad (3.168)$$

Para  $\ddot{R}'$  um cálculo direto produz:

$$\ddot{R}' = -\dot{R}' \left[ \frac{t'_B}{(t - t_B)^2} \frac{r}{3 + 2 \frac{r t'_B}{t_0 - t_B}} + \frac{1}{t - t_B} \right], \quad (3.169)$$

e a equação de redshift se torna [131]:

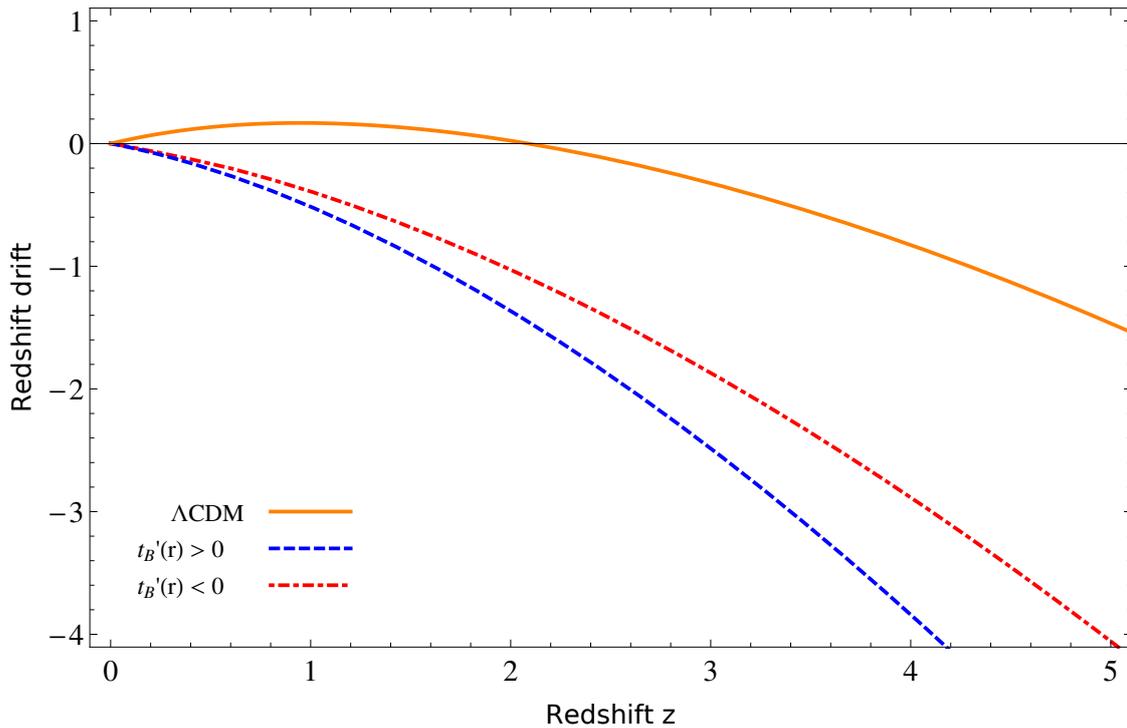
$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\delta z}{1+z} \right) = - \frac{\delta t_0}{(1+z)^2} \left[ \frac{t'_B}{(t-t_B)^2} \frac{r}{3 + 2 \frac{r t'_B}{t_0 - t_B}} + \frac{1}{t-t_B} \right]. \quad (3.170)$$

Na Figura 3.20 comparamos nossos dois modelos de tempo de big bang inhomogêneo com o modelo  $\Lambda$ CDM. Observe que ambos modelos de LTB mostram um *redshift drift* negativo também para valores pequenos de  $z$ . Para o modelo  $\Lambda$ CDM o *redshift drift* é positivo para  $z \lesssim 2$ . Essa ferramenta é vista como uma **ferramenta potencial** para discriminar esses modelos. Perto do centro ( $r = 0$ ) temos consistentemente:

$$\frac{d\delta z}{\delta t_0} \Big|_{t=t_0, r=0} = - \frac{z}{t_0 - t_B(0)}, \quad (3.171)$$

onde o redshift drift não é negativo apenas quando:  $t_0 < t_B(0)$ .

Para modelos de vazios baseados em curvatura e configurações inhomogêneas mais gerais, uma análise minuciosa do redshift drift foi recentemente dado no apêndice de [132].



**Figura 3.20.** Redshift drift para os modelos de LTB (valores de melhor ajuste) em comparação com o modelo  $\Lambda$ CDM ( $\Omega_m = 0.3$  e  $\Omega_\Lambda = 0.7$ ).

### 3.3.3 TERCEIRO ARTIGO: “Averaged Lemaître-Tolman-Bondi dynamics”

Neste terceiro trabalho consideramos efeitos de backreaction cosmológico no formalismo médio de Buchert com base em uma solução explícita da dinâmica de Lemaître-Tolman-Bondi (LTB) que é linear no parâmetro de curvatura de LTB e tem um tempo de big bang inhomogêneo. A taxa

de Hubble volumétrica é encontrada em termos do fator de escala volumétrico que representa uma derivação da solução fenomenológica mais simples das equações de Buchert nas quais as densidades fracionais correspondentes à *curvatura média* e o *backreaction cinemático* são explicitamente determinados pelos parâmetros da solução de LTB subjacente no limite do volume médio. Esta configuração representa um modelo de brinquedo exatamente solucionável mas não descreve adequadamente nosso Universo "real" [24].

### 3.3.3.1 Introdução

O modelo cosmológico padrão é baseado no princípio cosmológico segundo o qual nosso Universo é espacialmente homogêneo e isotrópico em grandes escalas. O valor da escala de homogeneidade correspondente é ainda uma questão de debate, mas assume-se que seja cerca de uma ordem de grandeza menor que o tamanho do Universo observável. Em escalas menores; escalas de aglomerados de galáxias e abaixo desta escala, o cosmos é claramente inhomogêneo. Matematicamente, o princípio cosmológico implica a existência de subespaços com tempo ortogonal e curvatura constante, isto é, é caracterizado por verdadeiras simetrias do espaço-tempo. Uma visão possivelmente mais realista é considerar o Universo apenas estatisticamente homogêneo e isotrópico como resultado de um procedimento médio sobre inhomogeneidades e sem assumir um fundo altamente simétrico fictício. Como realizar médias na relatividade geral e particularmente na cosmologia, ainda não é uma questão realmente estabelecida. No entanto, existem abordagens bem motivadas que se acredita que capturam características essenciais do problema [96, 100–103, 137]. Uma maneira muito geral de lidar com o problema da média depende do formalismo gravítico macroscópico covariante exato de Zalaletdinov [97, 98]. Gravidade macroscópica tem sido aplicada à cosmologia esfericamente simétrica por Coley et al em [138–140]. Aspectos observacionais da dinâmica resultante foram discutidos em [141]. Um resultado dessa média é o aparecimento de um termo adicional de curvatura espacial nas equações dinâmicas. Restringindo-nos a médias sobre quantidades escalares, usaremos aqui a abordagem de Buchert [25] que permitirá um cálculo explícito das médias de interesse no contexto deste artigo.

As estruturas do Universo são caracterizadas por diferentes escalas de comprimento: a escala do sistema solar, a escala das galáxias, a escala dos aglomerados de galáxias e a escala de homogeneidade. Acredita-se que a dinâmica em uma escala maior pode, em princípio, ser obtida por um procedimento de média sobre a dinâmica na escala menor subjacente, caso esta dinâmica seja conhecida. O que gostaríamos de ter é uma conexão explícita entre dois níveis diferentes, caracterizadas por escalas de comprimento  $l_1$  e  $l_2$  com  $l_2 \gg l_1$ , onde em particular, pode ser da ordem da escala de homogeneidade. Assumindo que a evolução cosmológica seja governada pela relatividade geral, surge a questão, em que escala as equações de Einstein serão válidas. O ponto de partida mais seguro pode ser a escala do sistema solar pois, a validade da relatividade geral nessa escala é estabelecida com alta precisão. Geralmente, se consideramos que a relatividade geral é válida em uma escala  $l_1$  então, por causa de sua não-linearidade, certamente não é mais válida em sua forma convencional após um procedimento de cálculo de média que é esperado para explicar a física em uma escala  $l_2 \gg l_1$ . Em particular, isso é verdade se considerarmos a transição para uma descrição espacialmente homogênea em uma escala de uma subjacente não homogênea para  $l \approx l_1$ . As equações de Buchert são uma abordagem para realizar este passo [25]. Partindo de uma distribuição irrotacional de matéria sem pressão, a média espacial da dinâmica não homogênea sobre um certo domínio  $D$  de preservação de massa resulta em um conjunto de equações para o fator de escala volumétrico

dependente do domínio  $a_D(t)$ , do tempo e dos parâmetros do domínio  $D$ . Esta quantidade  $a_D(t)$  é definida através do volume dependente do domínio e do tempo  $V_D(t)$  por  $a_D \propto V_D^{\frac{1}{3}}$ . As equações para  $a_D(t)$  tem a estrutura das equações de Friedmann e aceleração da cosmologia padrão, mas não dependem de um fundo homogêneo e isotrópico e  $a_D(t)$  não é o fator de escala da métrica de FLRW, uma vez que através da operação de média o fator de escala deve ser dependente da escala. No entanto, em comparação com as equações de um Universo de FLRW aparecem termos adicionais como consequência do processo de cálculo da média: um backreaction cinemático e um termo de curvatura média. Esses termos estão relacionados por uma condição de consistência. Na ausência desses termos recupera-se a dinâmica de um Universo de Einstein-de Sitter (EdS).

Em várias aplicações na literatura as equações de Buchert são consideradas em conjunto com um suposto comportamento de lei de potência das grandezas do backreaction em termos do fator de escala de volume  $a_D(t)$  [104, 105, 111, 120, 142]. Nesta base a dinâmica pode ser resolvida em termos de  $a_D(t)$ . O possível surgimento de uma pressão viscosa volumétrica efetiva através do backreaction foi discutida em [23]. Mas como já mencionado, é desejável estabelecer uma conexão direta entre as variáveis médias e a dinâmica inhomogênea subjacente. Assumindo a existência de uma solução exata ao nível da escala característica  $l_1$ , os termos adicionais devido ao backreaction cinemático e curvatura média no nível da escala característica  $l_2 \gg l_1$  são então, em princípio, diretamente calculáveis. Nós exemplificamos essa estratégia aqui com base na solução de LTB para poeira e no caso hiperbólico, usando uma aproximação de pequena curvatura com tempo de big bang inhomogêneo geral. Não especificamos desde o início o tamanho do domínio da média. Espera-se que seja da ordem da escala de homogeneidade. Como resultado obtemos a dependência temporal do fator de escala efetivo e quantificamos a diferença para o caso de poeira pura de um Universo EdS. O fator de escala de volume  $a_D(t)$  é obtido diretamente da expressão para o volume médio que supomos ser uma esfera de raio  $r_D$ . Também a curvatura média e o backreaction cinemático são calculados diretamente e independentemente da solução de LTB mencionada. A equação de Buchert não são, em seguida, quanto ansatzes de lei de potência para a curvatura média e o backreaction cinemático, equações para determinar  $a_D(t)$  mas eles se tornam indentidades ou relações de consistência. A função de curvatura da métrica LTB, tomada no raio da região média, determina diretamente a quantidade média de curvatura nas equações de Buchert. A função de curvatura LTB também determina o desvio do fator de escala volumétrico a partir do fator de escala do caso de poeira pura. Nós demonstramos que o backreaction cinemático é zero em ordem linear na curvatura, a menos que o tempo de big bang seja inhomogêneo. Também em segunda ordem na curvatura, o backreaction desaparece para um tempo de big bang homogêneo. Em nossa configuração linear simples a taxa de Hubble efetiva em termos do fator de escala de volume é encontrado para ser a estrutura da solução fenomenológica mais simples das equações de Buchert na qual os parâmetros são dados pelas quantidades da solução de LTB subjacente na superfície da região da média.

Como relacionar este formalismo às observações?...para isso é necessário um ingrediente adicional. O procedimento de cálculo de média sobre hipersuperfícies espaciais deixa em aberto a questão de como a luz se propaga. Não existe uma métrica espaço-temporal para a qual a condição usual  $ds^2 = 0$  para a propagação da luz poderia ser aplicada. Uma maneira provisória de lidar com esse problema foi assumir a existência de uma métrica efetiva [111, 119] na qual o fator de escala de volume deve desempenhar o mesmo papel que o fator de escala na métrica de FLRW, embora essa métrica efetiva não precise ser uma solução das equações de campo de Einstein. Além disso, assume-se que a curvatura média pode ser descrita por um termo de curvatura na métrica efetiva. Nesta base, várias

técnicas padrão para testes observacionais podem ser adaptadas à dinâmica média. Embora nosso modelo baseado em LTB possa ser simples demais para uma descrição adequada do Universo real, acreditamos que ele é, no entanto, útil como um modelo de brinquedo exatamente solucionável.

### 3.3.3.2 Média dos escalares de LTB

Nosso foco está na média homogênea das soluções inhomogêneas que supostamente resultam em uma dinâmica modificada em comparação com a dinâmica do modelo padrão, este último começando com a suposição de homogeneidade desde o início.

Para combinar a dinâmica de LTB com as equações de Buchert, é necessário considerar os escalares de expansão (3.89) e cisalhamento (3.90) nas expressões gerais (3.26) e (3.27). O elemento de volume de LTB é:

$$d^3r = \frac{R' R^2 \sin \theta}{\sqrt{1 + 2E}} dr d\theta d\phi. \quad (3.172)$$

Assumindo que o volume médio seja uma esfera de raio  $r_D$ , este volume torna-se:

$$V_D = 4\pi \int_0^{r_D} \frac{R' R^2}{\sqrt{1 + 2E}} dr = \frac{4\pi}{3} \int_0^{r_D} \frac{\partial}{\partial r} (R^3) \frac{1}{\sqrt{1 + 2E}}. \quad (3.173)$$

A extensão do volume médio, isto é, o tamanho do raio  $r_D$  permanece ainda não especificado aqui. Os valores médios de qualquer escalar  $S(t, r)$  são calculados de acordo:

$$\langle S \rangle(t) = \frac{4\pi}{V_D} \int_0^{r_D} S(t, r) \frac{R'(t, r) R^2(t, r)}{\sqrt{1 + 2E(r)}} dr. \quad (3.174)$$

A combinação  $\frac{2}{3}\Theta^2 - 2\sigma^2$  que aparece na expressão (3.26) é convenientemente escrita como:

$$\frac{2}{3}\Theta^2 - 2\sigma^2 = 4 \frac{\dot{R}}{R} \frac{\dot{R}'}{R'} + 2 \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{2}{R^2 R'} \frac{\partial}{\partial r} (\dot{R}^2 R). \quad (3.175)$$

O escalar de expansão também pode ser escrito em termos de uma derivada:

$$\Theta = \frac{2\dot{R}}{R} + \frac{\dot{R}'}{R'} = \frac{1}{R^2 R'} \frac{\partial}{\partial r} (R^2 \dot{R}). \quad (3.176)$$

Então, nós podemos escrever:

$$\left\langle \frac{2}{3}\Theta^2 - 2\sigma^2 \right\rangle = \frac{8\pi}{V_D} \int_0^{r_D} \frac{\partial}{\partial r} (\dot{R}^2 R) \frac{1}{\sqrt{1 + 2E(r)}} dr \quad (3.177)$$

e

$$\langle \Theta \rangle = \frac{4\pi}{V_D} \int_0^{r_D} \frac{\partial}{\partial r} (\dot{R} R^2) \frac{1}{\sqrt{1 + 2E(r)}} dr \quad (3.178)$$

para obter a combinação:

$$Q_D = \left\langle \frac{2}{3}\Theta^2 - 2\sigma^2 \right\rangle - \frac{2}{3} \langle \Theta \rangle^2. \quad (3.179)$$

Para a média da curvatura escalar temos:

$$\langle {}^3R \rangle = -\frac{16\pi}{V_D} \int_0^{r_D} \frac{\partial}{\partial r} (ER) \frac{1}{\sqrt{1+2E(r)}} dr. \quad (3.180)$$

As expressões (3.173), (3.177) - (3.180) são pontos de partida convenientes para os cálculos explícitos das médias relevantes. Após da integração parcial, o volume (3.173) torna-se:

$$V_D = \frac{4\pi}{3} \frac{R^3(t, r_D)}{\sqrt{1+2E(r_D)}} \left[ 1 + \frac{\sqrt{1+2E(r_D)}}{R^3(t, r_D)} \int_0^{r_D} R^3(t, r) \frac{E'(r)}{(1+2E(r))^{\frac{3}{2}}} dr \right]. \quad (3.181)$$

As funções  $R$  e  $E$  fora da integral devem ser tomadas em  $r = r_D$ . O fator de escala de volumétrico é então:

$$a_D(t) = \frac{R(t, r_D)}{R_0(r_D)} \left[ \frac{1 + \frac{\sqrt{1+2E}}{R^3} \int_0^{r_D} R^3 \frac{E'}{(1+2E)^{\frac{3}{2}}} dr}{1 + \frac{\sqrt{1+2E}}{R_0^3} \int_0^{r_D} R_0^3 \frac{E'}{(1+2E)^{\frac{3}{2}}} dr} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.182)$$

No limite  $E = 0$ , o fator de escala de volumétrico é dado pela função  $R$  de LTB, tomada em  $r = r_D$ . Para a expansão de volume encontramos:

$$\frac{\dot{a}_D}{a_D} = \frac{\dot{R}(r_D)}{R(r_D)} \frac{1 + \frac{\sqrt{1+2E}}{R R^2} \int_0^{r_D} \dot{R} R^2 \frac{E'}{(1+2E)^{\frac{3}{2}}} dr}{1 + \frac{\sqrt{1+2E}}{R^3} \int_0^{r_D} R^3 \frac{E'}{(1+2E)^{\frac{3}{2}}} dr}. \quad (3.183)$$

Para  $E = 0$  o limite FLRW mais simples é recuperado para  $R = ar$ , resultando em  $a_D = a$  e a expansão do volume coincide com a taxa de Hubble de FLRW,  $\frac{\dot{a}_D}{a_D} = \frac{\dot{a}}{a}$ . Da mesma forma, encontramos a partir de (3.180):

$$\mathcal{R}_D = -\frac{8\pi}{V_D} \frac{2ER}{\sqrt{1+2E}} \left[ 1 + \frac{\sqrt{1+2E}}{2ER} \int_0^{r_D} 2ER \frac{E'}{(1+2E)^{\frac{3}{2}}} dr \right], \quad (3.184)$$

e de (3.179) com (3.177) e (3.178) achamos:

$$\begin{aligned} Q_D &= 6 \frac{\dot{R}^2(r_D)}{R^2(r_D)} \frac{1}{\left[ 1 + \frac{\sqrt{1+2E}}{R^3} \int_0^{r_D} R^3 \frac{E'}{(1+2E)^{\frac{3}{2}}} dr \right]^2} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{\sqrt{1+2E}}{\dot{R}^2 R} \int_0^{r_D} \dot{R}^2 R \frac{E'}{(1+2E)^{\frac{3}{2}}} dr + \frac{\sqrt{1+2E}}{R^3} \int_0^{r_D} R^3 \frac{E'}{(1+2E)^{\frac{3}{2}}} dr \right. \\ &\quad - 2 \frac{\sqrt{1+2E}}{\dot{R} R^2} \int_0^{r_D} \dot{R} R^2 \frac{E'}{(1+2E)^{\frac{3}{2}}} dr \\ &\quad + \frac{1+2E}{\dot{R}^2 R^4} \left[ \int_0^{r_D} \dot{R}^2 R \frac{E'}{(1+2E)^{\frac{3}{2}}} dr \right] \left[ \int_0^{r_D} R^3 \frac{E'}{(1+2E)^{\frac{3}{2}}} dr \right] \\ &\quad \left. - \frac{1+2E}{\dot{R}^2 R^4} \left[ \int_0^{r_D} \dot{R} R^2 \frac{E'}{(1+2E)^{\frac{3}{2}}} dr \right] \right\}. \quad (3.185) \end{aligned}$$

Fórmulas (3.184) e (3.185) são as expressões mais gerais para o backreaction no contexto de LTB. Note que as funções  $R$  e  $E$  fora das integrais devem ser avaliadas em  $r = r_D$ . Pode-se mostrar explicitamente que, ao usar a equação de LTB (3.82) o conjunto de equações de Buchert é satisfeita

de forma idêntica. Com uma solução explícita para  $R(t, r)$  e um modelo para  $E(r)$  todas as médias podem, em princípio, ser calculadas. Obviamente, tanto  $\mathcal{R}_D$  e  $Q_D$  são determinados pelos parâmetros da solução de LTB no limite do volume médio.

### 3.3.3.3 Soluções para a dinâmica de LTB

#### B1 Solução de pequena curvatura para $E > 0$

Lembramos que as soluções gerais da dinâmica de LTB (3.7), (3.8) e (3.9) dependem do sinal da função  $E$ . Estas soluções são caracterizadas pelas funções livres:  $M(r)$ ,  $E(r)$  e  $t_B(r)$ . De todas estas soluções vamos nos concentrar na solução (3.9). Começamos por perceber que no limite de  $\eta$  pequeno ( $\eta \ll 1$ ) e seguidamente aplicando uma expansão de Taylor para o  $\cosh \eta \approx 1 + \frac{\eta^2}{2}$  e  $\sinh \eta \approx \eta + \frac{\eta^3}{6}$ , recuperamos a solução (3.8) para  $E = 0$ . Agora vamos incluir a próxima ordem nas expansões para as funções  $\cosh$  e  $\sinh$ :

$$\cosh \eta - 1 \approx \frac{\eta^2}{2} \left( 1 + \frac{\eta^2}{12} \right) \quad \text{e} \quad \sinh \eta - \eta \approx \frac{\eta^3}{6} \left( 1 + \frac{\eta^2}{20} \right). \quad (3.186)$$

Através dos seguintes passos:

$$\eta^3 \left( 1 + \frac{\eta^2}{20} \right) \approx 6 \frac{(2E)^{\frac{2}{3}}}{M} (t - t_B), \quad (3.187)$$

e

$$\eta^2 \left( 1 + \frac{\eta^2}{12} \right) \approx 2E \left( 1 + \frac{\eta^2}{20} \right) \left( \frac{6}{M} \right)^{\frac{2}{3}} (t - t_B)^{\frac{2}{3}}, \quad (3.188)$$

obtemos que:

$$R(t, r) = \frac{M}{2E} \frac{\eta^2}{2} \left( 1 + \frac{\eta^2}{12} \right), \quad (3.189)$$

e, até segunda ordem em  $\eta^2$ , equivalente a ordem linear em  $E$ :

$$R(t, r) = \left( \frac{9M(r)}{2} \right)^{\frac{1}{3}} (t - t_B(r))^{\frac{2}{3}} \left[ 1 + \frac{9}{20} (2E) \left( \frac{2}{9M(r)} \right)^{\frac{2}{3}} (t - t_B(r))^{\frac{2}{3}} \right]. \quad (3.190)$$

Esta é a solução para a função  $R(t, r)$  para  $E > 0$ , linearizada em torno da solução  $E = 0$ . Esta solução depende das funções espaciais  $M(r)$ ,  $E(r)$  e do tempo de big bang inhomogêneo  $t_B(r)$ . Uma solução semelhante foi encontrada em [143, 144]. No limite  $E = 0$  a solução (3.8) é recuperada. Uma das três funções  $M(r)$ ,  $E(r)$  ou  $t_B(r)$  pode ser fixada. Aqui fazemos a seguinte escolha:

$$M = \frac{2}{9} \frac{r^3}{(t_0 - t_B(r))^2}. \quad (3.191)$$

Isto garante  $R_0 \equiv R(t_0, r) = r$  para  $E = 0$  e para uma constante  $t_B$  isto se reduz para um gauge  $M \propto r^3$  frequentemente escolhido. Com (3.191) a solução (3.190) é escrita como:

$$R(t, r) = r \frac{(t - t_B(r))^{\frac{2}{3}}}{(t_0 - t_B(r))^{\frac{2}{3}}} \left[ 1 + \kappa(r) \frac{(t - t_B(r))^{\frac{2}{3}}}{(t_0 - t_B(r))^{\frac{2}{3}}} \right], \quad (3.192)$$

com a quantidade de curvatura:

$$\kappa(r) \equiv \frac{9}{20} (2E(r)) \frac{(t_0 - t_B(r))^2}{r^2}. \quad (3.193)$$

É a solução (3.192) com (3.193) sobre a qual as considerações adicionais para este terceiro artigo dependerão.

Linearizando em  $\kappa$  nas derivadas e potências de  $R(t, r)$  como, por exemplo:

$$R^2(t, r) = r^2 \frac{(t - t_B(r))^{\frac{4}{3}}}{(t_0 - t_B(r))^{\frac{4}{3}}} \left[ 1 + 2\kappa(r) \frac{(t - t_B(r))^{\frac{2}{3}}}{(t_0 - t_B(r))^{\frac{2}{3}}} \right], \quad (3.194)$$

verificamos explicitamente que a equação (3.82) é satisfeita para a solução (3.192). Para a taxa local de Hubble, encontramos:

$$H(t, r) \equiv \frac{\dot{R}(t, r)}{R(t, r)} = \frac{2}{3} \frac{1}{t - t_B(r)} \left[ 1 + \kappa(r) \frac{(t - t_B(r))^{\frac{2}{3}}}{(t_0 - t_B(r))^{\frac{2}{3}}} \right]. \quad (3.195)$$

A derivada espacial de  $R$  torna-se:

$$R'(t, r) = \frac{(t - t_B(r))^{\frac{2}{3}}}{(t_0 - t_B(r))^{\frac{2}{3}}} \left\{ 1 - \kappa(r) \frac{(t - t_B(r))^{\frac{2}{3}}}{(t_0 - t_B(r))^{\frac{2}{3}}} \left( 1 - \frac{rE'}{E} + \frac{2}{3} r t'_B \left( \frac{2}{t - t_B} + \frac{1}{t_0 - t_B} \right) \right) - \frac{2}{3} r t'_B \left( \frac{1}{t - t_B} - \frac{1}{t_0 - t_B} \right) \right\}. \quad (3.196)$$

Observe que  $t'_B > 0$  diminui o valor de  $R'(t, r)$ . Dependendo do modelo, isso pode potencialmente levar a uma singularidade de *shell crossing*  $R' = 0$  para a qual a densidade de energia em (3.84) diverge.

### 3.3.3.4 Dinâmica média

A média com base na dinâmica de LTB atraiu considerável interesse [99, 119, 145–148]. Uma análise abrangente foi realizada em [149]. Começamos nossa análise com o caso mais simples de curvatura tendendo a zero.

#### B2 Limite de curvatura zero: $E = 0$

O volume médio  $V_D$  em (3.181) simplifica para:

$$V_D = \frac{4\pi}{3} R^3(r_D) \quad (E = 0). \quad (3.197)$$

Também:

$$\left\langle \frac{2}{3} \Theta^2 - 2\sigma^2 \right\rangle = 6 \frac{\dot{R}^2(r_D)}{R^2(r_D)} \quad (E = 0), \quad (3.198)$$

e

$$\langle \Theta \rangle = 3 \frac{\dot{R}(r_D)}{R(r_D)} \implies \langle \Theta \rangle^2 = 9 \frac{\dot{R}^2(r_D)}{R^2(r_D)} \quad (E = 0). \quad (3.199)$$

Por outro lado:

$$Q_D = \frac{2}{3} (\langle \Theta^2 \rangle - \langle \Theta \rangle^2) - 2\langle \sigma^2 \rangle = 0 \quad (E = 0). \quad (3.200)$$

Observamos que não há backreaction para  $E = 0$  (ver [119, 146]) e a curvatura média (3.184) é identicamente zero.

### B3 Dinâmica média de primeira ordem na curvatura $E$

Agora consideramos as fórmulas (3.173), (3.177)-(3.180) até a ordem linear na função de curvatura  $E$ . Isto requer conhecimento da solução (3.192) para  $R(t, r)$ , a qual é linear na curvatura. Nesta base encontraremos expressões explícitas para o fator de escala volumétrico, a taxa efetiva de Hubble, o backreaction e a curvatura média.

#### B3.1 Fator de escala

Linearizando em  $E$ , a expressão de volume (3.181) torna-se:

$$V_D = \frac{4\pi}{3} R^3(r_D) \left[ 1 - E(r_D) + \frac{1}{R^3(r_D)} \int_0^{r_D} R^3 E'(r) dr \right] + O(E^2). \quad (3.201)$$

Com a solução (3.192) em  $r = r_D$  o fator de escala volumétrico é então:

$$a_D = \frac{(t - t_B(r_D))^{\frac{2}{3}}}{(t_0 - t_B(r_D))^{\frac{2}{3}}} \left\{ 1 + \kappa(r) \left( \frac{(t - t_B(r_D))^{\frac{2}{3}}}{(t_0 - t_B(r_D))^{\frac{2}{3}}} - 1 \right) + \frac{1}{3R^3(r_D)} \int_0^{r_D} R^3 E' dr - \frac{1}{3R_0^3(r_D)} \int_0^{r_D} R_0^3 E' dr \right\}. \quad (3.202)$$

A curvatura LTB modifica a dependência do tempo cósmico do fator de escala em comparação com o caso de poeira pura que é recuperado para  $E = \kappa = 0$ . A importância da modificação depende do valor do parâmetro de curvatura  $\kappa$  na fronteira do domínio. O segundo termo no parênteses no lado direito da equação (3.202) induz um crescimento mais rápido do fator de escala comparado com o Universo de poeira sem backreaction. A dependência adicional  $t^{\frac{2}{3}}$  coincide exatamente com a dependência correspondente encontrada em [150] com base em um tratamento de perturbação.

#### B3.2 Expansão de volume

A taxa efetiva de Hubble  $\mathcal{H} = \frac{1}{3} \frac{\dot{V}_D}{V_D}$  é determinada por:

$$\frac{\dot{V}_D}{V_D} = 3 \frac{\dot{R}(r_D)}{R(r_D)} \left[ 1 + \frac{1}{\dot{R} R^2} \int_0^{r_D} \dot{R} R^2 E' dr - \frac{1}{R^3(r_D)} \int_0^{r_D} R^3 E' dr \right] + O(E^2). \quad (3.203)$$

A partir da solução linear encontramos para o fator na frente do parênteses no lado direito de

(3.203)(ver: (3.195)):

$$\frac{\dot{R}(r_D)}{R(r_D)} = \frac{2}{3} \frac{1}{t - t_B(r_D)} \left[ 1 + \kappa(r_D) \frac{(t - t_B(r_D))^{\frac{2}{3}}}{(t_0 - t_B(r_D))^{\frac{2}{3}}} \right]. \quad (3.204)$$

Desde (ver: (3.202)):

$$\frac{(t - t_B(r_D))^{\frac{2}{3}}}{(t_0 - t_B(r_D))^{\frac{2}{3}}} = a_D [1 + O(E)], \quad (3.205)$$

obtemos, até termos lineares na curvatura:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}_D^2}{\mathcal{H}_{D0}^2} &= a_D^{-3} \left[ 1 + 5\kappa(r_D)(a_D - 1) \right. \\ &+ \frac{2}{\dot{R}(r_D)R^2(r_D)} \int_0^{r_D} \dot{R}R^2 E' dr - \frac{1}{R^3(r_D)} \int_0^{r_D} R^3 E' dr \\ &\left. - \frac{2}{\dot{R}_0(r_D)R_0^2(r_D)} \int_0^{r_D} \dot{R}_0 R_0^2 E' dr + \frac{1}{R_0^3(r_D)} \int_0^{r_D} R_0^3 E' dr \right], \end{aligned} \quad (3.206)$$

onde  $\mathcal{H}_{D0} = \mathcal{H}_D(t_0)$ . O comportamento  $a_D^{-3}$  do caso de poeira é modificado em conformidade. O termo de curvatura é dado em função do fator de escala efetivo.

### B3.3 Backreaction cinemático

Em ordem linear em  $E$ , com:

$$\frac{\dot{R}^2(r_D)}{R^2(r_D)} = \mathcal{H} [1 + O(E)], \quad (3.207)$$

o backreaction cinemático (3.185) se reduz para:

$$Q_D = 6\mathcal{H}_D^2 \left[ \frac{1}{R^3} \int_0^{r_D} R^3 E' dr + \frac{1}{M} \int_0^{r_D} M E' dr - \frac{2}{\dot{R}R^2} \int_0^{r_D} \dot{R}R^2 E' dr \right]. \quad (3.208)$$

O parâmetro de backreaction cinemático  $\Omega_Q^D$  torna-se:

$$\Omega_Q^D = -\frac{Q_D}{6\mathcal{H}_D^2} = \frac{2}{\dot{R}R^2} \int_0^{r_D} \dot{R}R^2 E' dr - \frac{1}{M} \int_0^{r_D} M E' dr - \frac{1}{R^3} \int_0^{r_D} R^3 E' dr. \quad (3.209)$$

Explicitamente:

$$\begin{aligned} \Omega_Q^D &= \frac{(t_0 - t_B(r_D))^2}{r_D^3} \left[ \frac{2}{t - t_B(r_D)} \int_0^{r_D} r^3 \frac{t - t_B(r)}{(t_0 - t_B(r))^2} E' dr \right. \\ &\left. - \frac{1}{(t - t_B(r_D))^2} \int_0^{r_D} r^3 \frac{(t - t_B(r))^2}{(t_0 - t_B(r))^2} E' dr - \int_0^{r_D} \frac{r^3}{(t_0 - t_B(r))^2} E' dr \right]. \end{aligned} \quad (3.210)$$

A partir da estrutura de (3.210) é obvio que não há backreaction cinemático resultante para um tempo de big bang homogêneo, ou seja,  $t_B(r) = \text{constante}$ . Para  $t_B(r)$  constante as integrais em (3.210) se cancelam.

### B3.4 Curvatura média

A curvatura média da ordem linear é:

$$\mathcal{R}_D = -6 \frac{2E(r_D)}{R^2(r_D)} = -6 \frac{2E(r_D)}{r_D^2 a_D^2}. \quad (3.211)$$

Isto corresponde a uma constante de curvatura efetiva  $\mathcal{K}_D$ :

$$|\mathcal{K}_D| = \frac{2E(r_D)}{r_D^2} = \mathcal{R}_{cD}^{-2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}_{cD} = \frac{r_D}{\sqrt{2E}}, \quad (3.212)$$

onde  $\mathcal{R}_{cD}$  é o raio de curvatura efetivo. Isto tem a estrutura de um termo de curvatura usual na equação de Friedmann. Em particular,  $\mathcal{K}_D$  é constante. Mas o termo de curvatura aqui é o resultado de um procedimento de média e é determinado pelos parâmetros da solução de LTB subjacente na fronteira do volume médio. O parâmetro de curvatura correspondente reduz para:

$$\Omega_{\mathcal{R}}^D = \frac{9}{4} (2E(r_D)) \frac{(t_0 - t_B(r_D))^2}{r_D^2} a_D = 5 \kappa(r_D) a_D. \quad (3.213)$$

Isso implica  $\Omega_{\mathcal{R}0}^D = 5 \kappa(r_D)$  para  $\Omega_{\mathcal{R}}^D = \Omega_{\mathcal{R}}^D(t_0)$ , seu valor em  $t_0$ . Para o raio de curvatura temos:

$$\mathcal{R}_{cD} = \frac{c}{\mathcal{H}_{D0} \sqrt{\Omega_{\mathcal{R}0}^D}}, \quad (3.214)$$

isto é, é da ordem do raio de Hubble, domínio que devemos assumir agora como o Universo inteiro observável.

### B3.5 Fração de matéria

O comportamento  $\langle \rho_m \rangle_D \propto a_D^{-3}$  que é uma consequência da equação de conservação (3.25), é consistente com a média de (3.84). Nomeadamente, assim:

$$8 \pi G \langle \rho_m \rangle_D = \frac{6M(r_D)}{R^3(r_D)} \left[ 1 + \frac{1}{M(r_D)} \int_0^{r_D} M(r) E' dr - \frac{1}{R^3(r_D)} \int_0^{r_D} R^3 E' dr \right]. \quad (3.215)$$

A taxa de densidade  $\frac{\langle \rho_m \rangle_D}{\langle \rho_m \rangle_{D0}}$ , em seguida, torna-se corretamente:

$$\frac{\langle \rho_m \rangle_D}{\langle \rho_m \rangle_{D0}} = \frac{R_0^3}{R^3} \left[ 1 - \frac{1}{R^3(r_D)} \int_0^{r_D} R^3 E' dr + \frac{1}{R_0^3(r_D)} \int_0^{r_D} R_0^3 E' dr \right] = a_D^3. \quad (3.216)$$

A expressão para o parâmetro de densidade da matéria é:

$$\Omega_m^D = \frac{2M}{R^3} \frac{R^2}{\dot{R}^2} \left[ 1 + \frac{1}{M} \int_0^{r_D} M E' dr - \frac{2}{\dot{R} R^2} \int_0^{r_D} \dot{R} R^2 E' dr + \frac{1}{R^3(r_D)} \int_0^{r_D} R^3 E' dr \right]. \quad (3.217)$$

Até ordem linear:

$$R^3 \frac{\dot{R}^2}{R^2} = 2M[1 + 5\kappa(r_D)a_D] + \mathcal{O}(E^2), \quad (3.218)$$

é válido e com (3.209) e (3.213) se verifica que (3.33) é consistentemente recuperado nesta ordem.

### B3.6 Consistência

Obviamente,  $(\mathcal{R}_D a_D^2)' = 0$ . Então a relação de consistência (3.28) determina que:  $Q_D = 0$  ou  $Q_D \propto a_D^{-6}$ . Por cálculo direto verifica-se, de fato que:

$$Q_D = Q_{D0} a_D^{-6}, \quad \Omega_Q^D = \Omega_{Q0}^D a_D^{-3}, \quad (3.219)$$

com:

$$\begin{aligned} \Omega_{Q0}^D = & \frac{1}{r_D^3} \left[ 2(t_0 - t_B(r_D)) \int_0^{r_D} \frac{r^3}{t_0 - t_B(r)} E' dr \right. \\ & \left. - \int_0^{r_D} r^3 E' dr - (t_0 - t_B(r_D))^2 \int_0^{r_D} \frac{r^3}{(t_0 - t_B(r))^2} E' dr \right]. \end{aligned} \quad (3.220)$$

Essa combinação desaparece para um tempo de big bang homogêneo. Para ter um backreaction cinemático não nulo, na ordem linear, um tempo de big bang inhomogêneo é necessariamente requerido. Para um tempo de big bang homogêneo o parâmetro de equação de estado efetivo (EoS) (3.39) é sempre:  $\frac{p_{bD}}{\rho_{bD}} = -\frac{1}{3}$ .

### B3.7 Taxa de Hubble e parâmetro de desaceleração

Com os parâmetros (3.213) e (3.219) a taxa de Hubble (3.206) é escrita como:

$$\frac{\mathcal{H}_D^2}{\mathcal{H}_{D0}^2} = a_D^{-3} \left[ \Omega_{m0}^D + \Omega_{R0}^D a_D + \Omega_{Q0}^D a_D^{-3} \right], \quad (3.221)$$

enquanto o parâmetro de desaceleração (3.41) torna-se:

$$q_D = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left[ \Omega_{Q0}^D a_D^{-3} - \frac{1}{3} \Omega_{R0}^D a_D \right]. \quad (3.222)$$

O resultado (3.221) para a taxa de Hubble em termos do fator de escala volumétrico com coeficientes explicitamente conhecidos  $\Omega_{m0}^D$ ,  $\Omega_{R0}^D$  e  $\Omega_{Q0}^D$  é nossa principal conquista até agora. A combinação  $\Omega_{R0}^D a_D + \Omega_{Q0}^D a_D^{-3}$  representa a influência do fluido de backreaction na dinâmica. Do ponto de vista da cosmologia de backreaction, é suposto para ser o equivalente das componentes do setor escuro do modelo padrão cosmológico. Dada a dependência desta contribuição sobre  $a_D$  não é óbvio, no entanto, que esta expectativa possa ser realizada dentro do nosso modelo LTB simples. Enquanto a estrutura de (3.221) corresponde à solução fenomenológica mais simples possível (3.29) para a qual os termos de backreaction cinemático e curvatura média na relação de consistência (3.28) se anulam separadamente, nós derivamos essa estrutura aqui de uma dinâmica inhomogênea exata subjacente que nos forneceu expressões explícitas para  $\Omega_{R0}^D$  e  $\Omega_{Q0}^D$ . Mesmo que isso não leve a uma descrição realista do nosso Universo, acreditamos que seja útil como um modelo de brinquedo exatamente

solucionável e um primeiro passo para configurações mais realistas. Para um tempo de big bang homogêneo, o último termo em (3.221) desaparece já que  $\Omega_{Q0} = 0$  e a única contribuição adicional do procedimento de cálculo de média é devido a uma curvatura constante na qual a constante de curvatura é determinada pela solução de LTB na fronteira da área de média. O fluido de backreaction torna-se uma componente de curvatura pura neste caso. O surgimento de um termo de curvatura espacial como resultado do procedimento de média está de acordo com o resultado correspondente da gravidade macroscópica [138–140]. Para um tempo de big bang inhomogêneo, o backreaction cinemático é geralmente diferente de zero. Mas dado que sua contribuição em relação à parte da matéria que decai com  $a_D^{-3}$  em (3.221), terá um impacto decrescente na dinâmica à medida que  $a_D$  aumenta. Além disso, como se espera que a parte da matéria  $\Omega_m^D$  domine em  $a_D \ll 1$ , temos uma forte restrição no atual parâmetro de backreaction  $\Omega_{Q0}^D$ . A idade desse tipo de Universo tem que ser calculada a partir de:

$$t_0 - t_B(r_D) = \int_0^1 \frac{da_D}{a_D} \frac{1}{\mathcal{H}_{D0} \sqrt{\Omega_{m0}^D a_D^{-3} + \Omega_{R0}^D a_D^2 + \Omega_{Q0}^D a_D^{-6}}}. \quad (3.223)$$

A parte do backreaction aumenta com a diminuição de  $a_D$ , isto é, para o passado, que é obviamente contra o seu papel esperado para a dinâmica cosmológica.

Assumimos aqui uma descrição idealizada do Universo inhomogêneo como uma única configuração esférica simétrica. Um modelo mais realista teria que incluir um conjunto de diferentes regiões com distribuições inhomogêneas geralmente diferentes. Então, as médias obtidas aqui sobre apenas uma solução inhomogênea teria que ser executada em todo um conjunto de inhomogeneidades.

#### B4 Backreaction na segunda ordem

Das expressões gerais (3.184) e (3.185) para a curvatura média e o backreaction cinemático, respectivamente, é óbvio que suas contribuições de ordem mais baixa são pelo menos lineares em  $E$ , para  $E = 0$ , ambos  $\mathcal{R}_D$  e  $Q_D$  desaparecem. Como sabemos também a solução para  $R$  até ordem linear foi feita (veja: (3.192)), por outro lado também é possível calcular  $\mathcal{R}_D$  e  $Q_D$  até segunda ordem. O resultado para a curvatura média é:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D = & -\frac{6}{r_D^2 a_D^2} \left[ 2E \left( 1 - \frac{2}{5} \Omega_{R0}^D - \frac{2}{3 R_0^3(r_D)} \int_0^{r_D} R_0^3 E' dr \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{R(t, r_D)} \int_0^{r_D} 2E(r) R(t, r) E' dr - \frac{2E}{3 R^3(t, r_D)} \int_0^{r_D} R^3(t, r) E' dr \right]. \end{aligned} \quad (3.224)$$

Apenas os termos da segunda linha em (3.224) dependem do tempo. Para verificar a dependência de  $\mathcal{R}_D$  em  $a_D$  é útil calcular  $(a_D^2 \mathcal{R}_D)$ . Nós obtemos:

$$\begin{aligned} (a_D^2 \mathcal{R}_D)' = & -\frac{12 \mathcal{H}_D(t, r_D)}{r_D^2} \left[ E(r_D) \left( \frac{1}{R^3(t, r_D)} \int_0^{r_D} R^3(t, r) E' dr \right) \right. \\ & - \frac{1}{\dot{R}(t, r_D) R^2(t, r_D)} \int_0^{r_D} \dot{R}(t, r) R^2(t, r) E' dr \left. \right) \\ & - \frac{1}{R(t, r_D)} \int_0^{r_D} R(t, r) E E' dr + \frac{1}{\dot{R}(t, r_D)} \int_0^{r_D} \dot{R}(t, r) E E' dr \left. \right]. \end{aligned} \quad (3.225)$$

Esta é uma quantidade pura de segunda ordem. Pode-se usar aqui a expressão de ordem zero para

$R(t, r)$ :

$$R(t, r) = r \frac{(t - t_B(r))^{\frac{2}{3}}}{(t_0 - t_B(r))^{\frac{2}{3}}} + \mathcal{O}(E), \quad (3.226)$$

dentro das integrais e a mesma solução em  $r = r_D$  nos fatores que multiplicam as integrais. Isso revela que, para  $t_B = \text{constante}$  os dois primeiros termos se anulam e os terceiro e quarto termos se cancelam também. Para um tempo de big bang homogêneo a curvatura média se comporta como  $a_D^2$  até na segunda ordem em  $E$ . Desvios de uma curvatura constante requerem um tempo de big bang inhomogêneo. Por um cálculo direto percebe-se de (3.185) que  $Q_D$  realmente desaparece, também, em segunda ordem em  $E$  para um  $t_B$  constante que é consistente com o resultado  $\mathcal{R}_D \propto a_D^{-2}$  para este caso. Para nossa configuração de LTB simples idealizada, um backreaction cinemático não nulo só pode ser realizado para um big bang não-simultâneo. Uma solução que satisfaça a relação (3.28) além do caso mais simples (3.29) tem que ser pelo menos de ordem quadrático no parâmetro de curvatura  $E$  de LTB com um tempo de big bang inhomogêneo.

### 3.3.3.5 Métrica efetiva e distância de luminosidade na abordagem de LTB

Nosso formalismo até agora deixa em aberto o problema da propagação da luz em um contexto de backreaction. O fator de escala volumétrico  $a_D$  não está relacionado a uma métrica de espaço-tempo<sup>41</sup>. Para fazer contato com observações, é útil considerar uma métrica efetiva (3.72) do tipo FLRW com a quantidade  $a_D$  como fator de escala efetivo e (3.212) como curvatura generalizada (ver: [23, 120]).

Sob esta suposição de propagação de luz radial, isto é descrito pela equação (3.73), assim:

$$ds_{eff}^2 = 0 \quad \implies \quad dr = \pm \frac{c}{a_D^2 \mathcal{H}_D} da_D = \mp \frac{c}{\mathcal{H}_D} dz_D, \quad (3.227)$$

com  $1 + z_D = a_D^{-1}$ . Então:

$$r(z_D) = \frac{c}{\mathcal{H}_{D0}} \int_0^{z_D} \frac{dz_D}{\sqrt{\Omega_{m0}^D (1 + z_D)^3 + \Omega_{R0}^D (1 + z_D)^2 + \Omega_{Q0}^D (1 + z_D)^6}}. \quad (3.228)$$

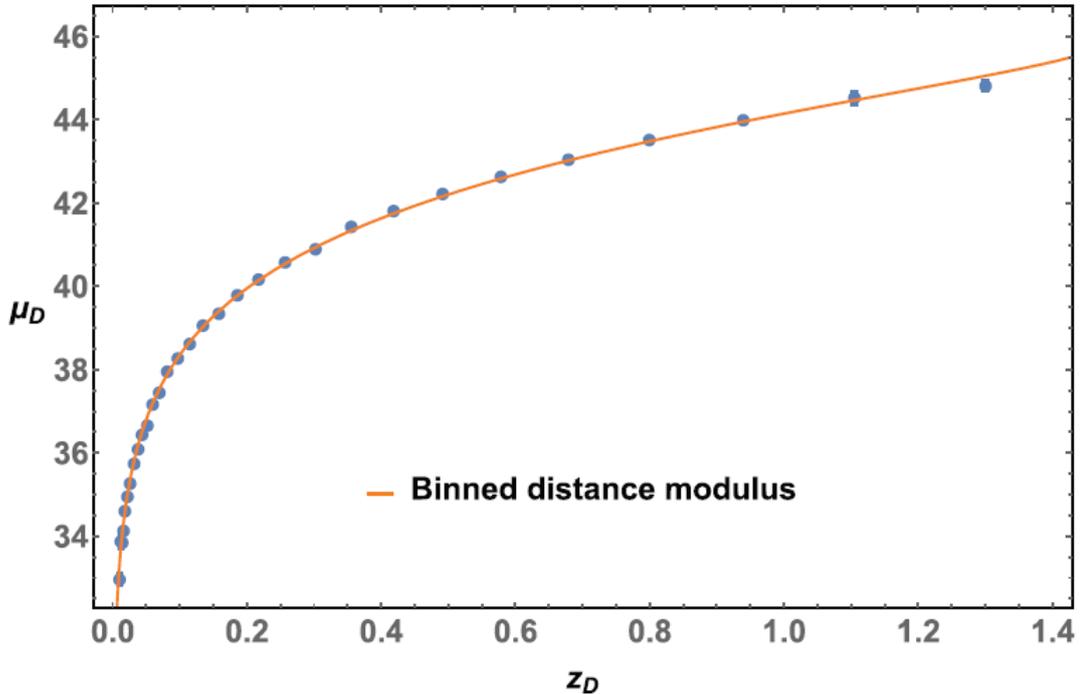
Outra expressão que precisaremos é a distância de luminosidade, calculada via (3.75) com  $\mathcal{R}_{cD}$  de (3.212).

Como já mencionado, a taxa de Hubble (3.221) e consequentemente, a expressão (3.75) com (3.228) não se espera que resultem em um modelo competitivo de nosso Universo real. Mas mesmo se visto principalmente como um modelo de brinquedo, pode ser interessante esclarecer seu status referente a dados observacionais. Começamos por uma análise simplificada que ignora a estrutura detalhada das expressões para  $\Omega_{R0}^D$  e  $\Omega_{Q0}^D$  mas permite um atalho para resultados observacionais. Para estas de acordo com o modelo padrão, fixamos a fração de matéria para ser:  $\Omega_{m0}^D = 0.3$ . Em seguida, consideramos  $\Omega_{R0}^D$  e  $\mathcal{H}_{D0}$  como parâmetros livres nas expressões (3.221) e (3.75) para  $\mathcal{H}_D$  e  $d_L^{eff}(z_D)$ , respectivamente, e confrontamos os resultados com dados de supernovas do tipo Ia, assim como com dados de idade diferencial de galáxias antigas para  $\mathcal{H}(z_D)$ . Adotamos também os valores de

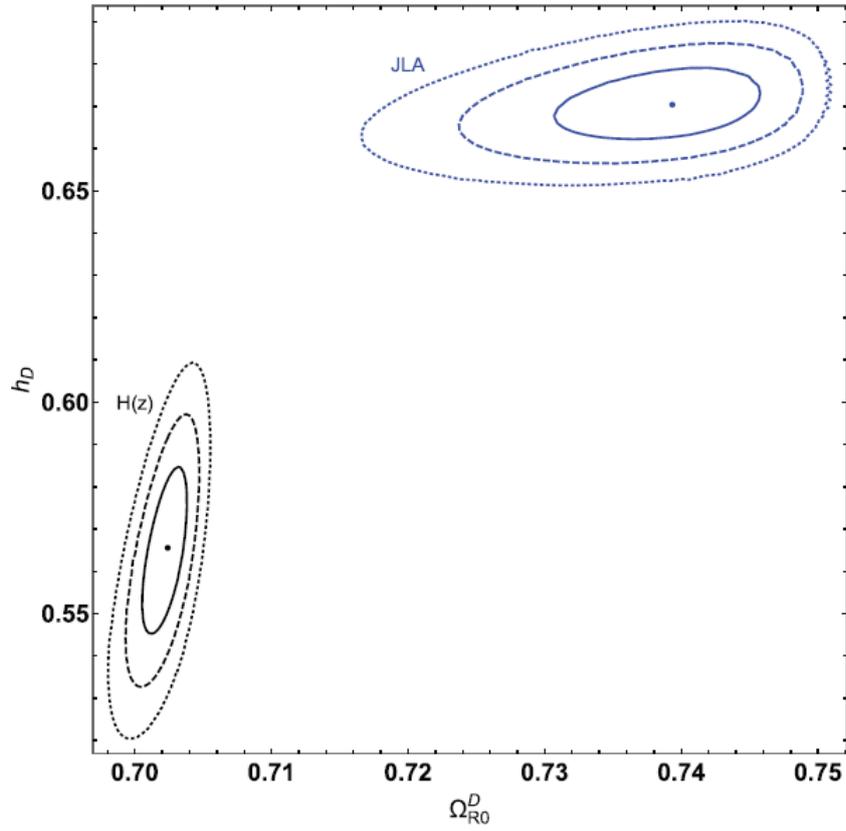
<sup>41</sup>Aqui, um ingrediente adicional é necessário.

análise padrão para o módulo de distância, dado pela relação (3.76). Nossa escolha implica uma escala de média da ordem do tamanho do Universo observável. Ele nos permite realizar uma análise estatística usando os dados da amostra JLA de SNIa [72]. O módulo de distância binnado  $\mu_D$  na dependência do parâmetro de redshift  $z_D$  é mostrado na Figura 3.21.

Como valores de melhor ajuste obtemos  $\Omega_{\mathcal{R}0}^D = 0.74$  e  $h_D = 0.67$ . Usando esses valores em (3.214) encontramos  $\mathcal{R}_{cD} = 5.21$  Gpc para o raio de curvatura do Universo. O valor correspondente para o backreaction cinemático é  $\Omega_{Q0}^D = -0.038$ . Embora isso possa dar algum suporte observacional ao modelo, a situação muda se aplicarmos um teste diferente que confronta a taxa de Hubble (3.221) com os dados de idade diferencial de galáxias antigas que evoluíram passivamente [151–153]. Aqui nós usamos 28 pontos de dados listados em [154]. Esta análise  $\mathcal{H}_D(z_D)$  nos fornece os valores um pouco diferentes  $\Omega_{\mathcal{R}0}^D = 0.702$ ,  $h_D = 0.566$  e  $\Omega_{Q0}^D = -0.002$ . Ainda mais importante: embora os valores atuais do backreaction cinemático fracionário sejam muito pequenos em ambos os casos, ainda são muito grandes para permitir uma fase dominada pela matéria em redshift da ordem do redshift da era da recombinação. Além disso, um backreaction que está aumentando em direção ao passado a uma taxa maior do que a fração de matéria é fisicamente duvidosa de qualquer maneira. Os resultados da análise estatística são visualizados na Figura 3.22. Os contornos de confiança de ambos testes são dramaticamente diferentes o que demonstra explicitamente a falha observacional da nossa configuração de fluido de curvatura. Observe que para obter esses resultados não utilizamos as expressões (3.213) e (3.220) para  $\Omega_{\mathcal{R}0}^D$  e  $\Omega_{Q0}^D$ , respectivamente. Não exigimos expressões explícitas para o parâmetro de curvatura  $E(r)$  e para o tempo de big bang inhomogêneo  $t_B(r)$ . Em seguida iremos propor modelos simples para estas grandezas.



**Figura 3.21.** Módulo de distância binnado  $\mu_D$  em função do parâmetro redshift  $z_D$ , baseado em (3.75).



**Figura 3.22.** O plano  $\Omega_{R0}^D - h_D$  com gráficos de contorno ( $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$ ) para os testes de SNIa e  $\mathcal{H}_D(z_D)$ .

### 3.3.3.6 Modelos simples para $E(r)$ e $t_B(r)$

A dinâmica descrita pela taxa de Hubble (3.221) e pela distância de luminosidade (3.75) que estabelece o contato com as observações cosmológicas, depende dos detalhes da função  $E(r)$  e  $t_B(r)$  para os quais modelos específicos devem ser implementados. A função  $2E(r)$  tem que ter a forma geral [34]:

$$2E = -r^2 (k + F(r)), \quad F(0) = 0. \quad (3.229)$$

Com a escolha:

$$2E = -r^2 (-|k| + F(r)), \quad F = |k| \left( 1 - e^{-\left(\frac{r}{r_E}\right)^n} \right), \quad (3.230)$$

que satisfaz  $F(0) = 0$ . Então, reescrevendo temos:

$$2E = r^2 |k| e^{-\left(\frac{r}{r_E}\right)^n}, \quad E' = \left[ 1 - \frac{n}{2} \left( \frac{r}{r_E} \right)^n \right] r |k| e^{-\left(\frac{r}{r_E}\right)^n}. \quad (3.231)$$

O raio  $r_E$  caracteriza o alcance da curvatura da solução de LTB. A função de curvatura tende a zero no limite  $r \gg r_E$ . De (3.213) temos:

$$\Omega_{\mathcal{R}0}^D = \frac{9}{4} (2E(r_D)) \frac{(t_0 - t_B(r_D))^2}{r_D^2}. \quad (3.232)$$

Da seguinte expressão:

$$\mathcal{H}_{D0}^2 = \frac{4}{9 (t_0 - t_B(r_D))^2} + O(E), \quad (3.233)$$

junto com (3.212) e (3.214) encontramos a correspondência:

$$2E(r_D) = \frac{r_D^2}{\mathcal{R}_{cD}^2}, \quad \frac{1}{\mathcal{R}_{cD}^2} = |k| e^{-\left(\frac{r_D}{r_E}\right)^n}, \quad \Omega_{\mathcal{R}0}^D = \frac{c^2}{\mathcal{H}_{D0}^2 \mathcal{R}_{cD}^2}. \quad (3.234)$$

A combinação  $|k| e^{-\left(\frac{r_D}{r_E}\right)^n}$  no ansatz para  $2E(r_D)$  representa o quadrado do raio de curvatura inversa da dinâmica média. O raio  $r_D$  do volume médio deve ser menor que o raio de curvatura  $\mathcal{R}_{cD}^2$  para garantir  $2E < 1$ , a condição para a aplicabilidade de nossa aproximação de curvatura linear. Se o volume médio é tomado tal que  $r_D \gg r_E$  (e assumindo um valor de referência de  $k = 1 \text{ Gpc}^{-2}$ ), o raio de curvatura da dinâmica média tende a infinito, isto é, a curvatura média é insignificante. Para ter um raio de curvatura média finita  $\mathcal{R}_{cD}$ , equivalente a uma influência perceptível da curvatura na dinâmica média, a extensão  $r_D$  do volume médio deve ser da ordem de  $r_E$ . O valor  $\mathcal{R}_{cD} = 5.21 \text{ Gpc}$  do teste JLA é obtido para  $r_D = 1.79 r_E$ .

Para um cálculo detalhado das grandezas  $\Omega_{\mathcal{R}0}^D$  e  $\Omega_{Q0}^D$  em (3.213) e (3.220), respectivamente, adicionalmente é necessário um modelo explícito para o tempo de big bang inhomogêneo  $t_B(r)$ . Em [37] foi demonstrado que um ansatz:

$$t_B(r) = t_{B0} \left( 1 - e^{-\left(\frac{r}{r_c}\right)^m} \right), \quad (3.235)$$

onde  $r_c$  denota outra escala de inhomogeneidade, dá origem a um modelo simples de vazío. O tempo de big bang inhomogêneo (3.235) aumenta com  $r$  até se aproximar de um valor constante, ou seja:

$$t_B(0) = 0, \quad t_B(r \gg r_c) = t_{B0}. \quad (3.236)$$

Com estas suposições as integrais na expressão (3.220) para o parâmetro de backreaction cinemático atual  $\Omega_{Q0}^D$  podem ser avaliadas explicitamente. Várias combinações dos parâmetros  $t_{B0}$ ,  $r_c$  e  $r_E$  foram verificadas, mas mesmo que uma delas reproduza aproximadamente o mesmo valor da análise  $\mathcal{H}_D(z_D)$ , a significância física deste termo permanece duvidosa.

Nós derivamos a solução fenomenológica mais simples das equações de Buchert a partir de uma dinâmica subjacente de LTB na aproximação da curvatura linear. Essa solução representa um modelo de brinquedo exatamente solucionável de como construir uma dinâmica homogênea média a partir de uma solução inhomogênea exata. As variáveis médias dependem dos parâmetros da solução LTB no limite do volume médio. Para esta configuração simples existe um backreaction cinemático não-nulo apenas para um tempo de big bang inhomogêneo. Isso é verdade tanto em ordens lineares quanto quadráticas na curvatura  $E(r)$  de LTB. Para um tempo de big bang homogêneo, o fluido de backreaction é uma componente de curvatura pura. O aparecimento de um termo de curvatura

induzida pela média também é conhecido a partir da gravidade macroscópica [138–140]. Na primeira ordem em  $E$  obtemos  $\mathcal{R}_D \propto a_D^{-2}$  para a curvatura média, que é semelhante ao caso FLRW. Desvios desse comportamento podem ocorrer na segunda ordem em  $E$ , mas isso requer um tempo de big bang inhomogêneo. Tanto por causa de sua dinâmica interna, o backreaction cinemático está crescendo em direção ao passado, e por causa de suas dificuldades em explicar os dados observacionais atuais, este modelo não fornece uma descrição realista de nosso Universo. É um modelo de brinquedo exatamente solucionável que pode ser o primeiro passo para um melhor entendimento de como uma dinâmica homogênea e isotrópica poderia emergir de uma configuração inhomogênea subjacente. Extensões potenciais deste estudo incluem a investigação de modelos menos simétricos, por exemplo: modelos baseados na métrica de Szekeres [34, 85]. Um quadro mais adequado também terá que considerar o Universo como composto por mais do que apenas uma região inhomogênea. Em geral, o domínio da média será constituída por diferentes e dispersas regiões densas e subdensas que terá de ser descrita por diferentes taxas de expansão locais [155].

## Capítulo 4

# O PROCESSO DA FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS

A cosmologia padrão considera que, em grandes escalas suficientemente grandes, a matéria em nosso Universo está distribuída homoganeamente. Também das observações da CMB pode ser dito que o universo foi muito homogêneo e isotrópico na época da recombinação. Mas na atualidade, as estruturas observadas no universo (galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias) são o resultado da instabilidade gravitacional (propriedade atrativa natural da gravidade<sup>1</sup>). Esta instabilidade amplifica as perturbações originalmente muito pequenas até o regime não linear<sup>2</sup>.

Neste capítulo nós apresentamos as perturbações lineares básicas em cosmologia: apresentaremos as abordagens Newtoniana e relativística da teoria das perturbações cosmológicas e como o perfil de perturbação na era dominada pela *radiação* pode gerar as *Oscilações Acústicas nos Bárions* (BAO).

### 4.1 Perturbações cosmológicas (abordagem Newtoniana)

Nesta seção, estudaremos a teoria de formação de estruturas num contexto da gravitação Newtoniana<sup>3</sup> como limite de aproximação da relatividade geral. Vamos a obter também as principais equações para formação de estruturas, equações do crescimento das flutuações de primeira ordem a partir das *equações hidrodinâmicas*, com exceção do espectro primordial, tudo desde o ponto de vista Newtoniana.

#### 4.1.1 Equações hidrodinâmicas (Mecanismo de Jeans - fluido em expansão)

Estas equações hidrodinâmicas são não lineares e em geral não é fácil de encontrar suas soluções. Para estudar o comportamento das pequenas perturbações ao redor de um fundo *homogêneo e isotrópico*, é adequado linearizar-as. Essas pequenas perturbações estão associadas a

---

<sup>1</sup>A matéria é atraída a regiões de alta densidade (*overdensity*) amplificando as inhomogeneidades já existentes.

<sup>2</sup>Hoje nosso Universo tem um caráter *não linear*.

<sup>3</sup>Válida dentro do horizonte, ou seja, aplicável em escalas que fiquem dentro do raio de Hubble, onde os efeitos de curvatura de espaço-tempo são negligenciáveis.

campos gravitacionais muito fracos tal que a teoria Newtoniana pode ser aplicada.

A dinâmica do fluido de fundo pode ser descrita pelas seguintes equações<sup>4</sup>:

equação de continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (4.1)$$

equação de Euler:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi, \quad (4.2)$$

equação de conservação da entropia (movimento adiabático - desprezando dissipação):

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) S = 0, \quad (4.3)$$

equação de Poisson (determina o potencial gravitacional):

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (4.4)$$

Estas equações hidrodinâmicas, junto com a equação de estado:

$$p = p(\rho, S), \quad (4.5)$$

formam um conjunto completo de 5 equações, que em princípio permitem determinar as funções não conhecidas  $\rho$ ,  $\vec{v}$ ,  $S$ ,  $\Phi$  e  $p$ . Nas equações acima  $\rho(\mathbf{t}, \vec{r})$  é a densidade,  $\mathbf{p}(\mathbf{t}, \vec{r})$  é a pressão,  $\vec{v}(\mathbf{t}, \vec{r})$  é o campo de velocidade,  $\Phi(\mathbf{t}, \vec{r})$  é o potencial gravitacional e  $S(\mathbf{t}, \vec{r})$  é a entropia por unidade de massa.

A quantidade de interesse que vai descrever o crescimento das estruturas no Universo é denominada *contraste de densidade*<sup>5</sup>  $\delta$ , é definida como a razão entre a perturbação de densidade de energia e seu valor no fundo homogêneo e isotrópico.

$$\delta \equiv \frac{\rho(t, r) - \rho_0(t)}{\rho_0(t)} \equiv \frac{\delta \rho}{\rho_0}, \quad (4.6)$$

onde:  $\delta = \delta(t, \vec{r})$  e  $\rho_0 = \rho_0(t)$ .

A teoria de Jeans para a instabilidade gravitacional, *formulada para um Universo estático*, não pode ser aplicada num modelo cosmológico em expansão. Logo, consideramos o mecanismo de Jeans para um Universo homogêneo e isotrópico em expansão, para isso perturbamos as seguintes grandezas:

$$\begin{cases} p = p_0 + \delta p, \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \delta \vec{v}, \\ \Phi = \Phi_0 + \delta \Phi, \\ S = S_0 + \delta S, \end{cases} \quad (4.7)$$

<sup>4</sup>Este conjunto de equações é válido somente para matéria *não-relativística*, onde  $v \ll c$ .

<sup>5</sup>Com esta quantidade,  $\delta$ , obtemos as equações que descrevem a dinâmica de pequenas perturbações ( $\delta \ll 1$ ).

onde  $p_0 = p_0(t)$ ,  $\vec{v}_0 = \vec{v}_0(t, \vec{r})$ ,  $\Phi_0 = \Phi_0(t, \vec{r})$  e  $S_0 = S_0(t)$ , correspondem às soluções de equilíbrio não-perturbada. Sendo  $\delta\vec{v}$  a variação na velocidade, que não inclui o fluxo de Hubble  $\vec{v}_0$ , chamada de velocidade peculiar<sup>6</sup>.

Seguidamente, a expansão de Taylor para  $\frac{1}{\rho_0 + \delta\rho}$ , é:

$$\frac{1}{\rho_0 + \delta\rho} = \frac{1}{\rho_0} - \frac{\delta\rho}{\rho_0^2} + \frac{(\delta\rho)^2}{\rho_0^3} - \frac{(\delta\rho)^3}{\rho_0^4} + \dots \quad (4.8)$$

a perturbação da equação de estado  $p(\rho, S) \Rightarrow p(\rho_0 + \delta\rho, S_0 + \delta S)$ , assim:

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \delta\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \delta S = c_s^2 \delta\rho + \sigma \delta S, \quad (4.9)$$

calculamos a transformação das coordenadas físicas (ou próprias)  $(t, \vec{r})$  para as coordenadas comóveis  $(t, \vec{x})$ , assim:

$$\nabla_r = \frac{1}{a} \nabla_x, \quad (4.10)$$

e

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x - \vec{v}_0 \cdot \nabla_r. \quad (4.11)$$

Logo, substituindo (4.8), (4.9), as transformações (4.10) e (4.11) nas equações (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), obtemos as equações do fluido perturbado:

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right)_x + \frac{1}{a} \nabla_x \cdot \delta\vec{v} = 0, \quad (4.12)$$

$$\left(\frac{\partial \delta\vec{v}}{\partial t}\right)_x + H \delta\vec{v} = -\frac{1}{a \rho_0} \nabla_x (c_s^2 \delta\rho + \sigma \delta S) - \frac{1}{a} \nabla_x \delta\Phi, \quad (4.13)$$

$$\left(\frac{\partial \delta S}{\partial t}\right)_x = 0, \quad (4.14)$$

$$\nabla_x^2 \delta\Phi = 4\pi G a^2 \rho_0 \delta. \quad (4.15)$$

Nestas equações consideramos:

$$\vec{r} = a(t) \vec{x}, \quad (4.16)$$

$$\nabla_r \cdot \vec{v}_0 = 3H, \quad (4.17)$$

$$(\delta\vec{v} \cdot \nabla_r) \vec{v}_0 = H \delta\vec{v}, \quad (4.18)$$

$$\delta\Phi = \frac{2\pi G \delta\rho}{3} |\vec{r}|^2, \quad (4.19)$$

<sup>6</sup>A velocidade radial de um objeto pode ser aproximada por  $v_r = H_0 d + v_{pec}$ , com contribuições do fluxo de Hubble e termos peculiares de velocidade, onde  $H_0$  é a constante de Hubble e  $d$  é a distância até o objeto.

Os termos cruzados são desprezíveis já que as perturbações são muito menores do que a unidade ( $\delta \ll 1$ ,  $\delta p \ll 1$ ,  $\delta\Phi \ll 1$ ,  $\delta v \ll 1$ ).

Combinando as equações (4.12), (4.13), (4.14) e (4.15) obtemos uma equação diferencial de segunda ordem que descreve a evolução linear do *contraste de densidade*.

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\partial \delta}{\partial t} - \frac{c_s^2}{a^2}\nabla^2 \delta - 4\pi G\rho_0\delta = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - \frac{c_s^2}{a^2}\nabla^2 \delta = -2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\partial \delta}{\partial t} + 4\pi G\rho_0\delta, \quad (4.20)$$

Esta equação<sup>7</sup>, (4.20), é uma equação tipo onda com dois termos extras no lado direito, um devido à expansão do Universo e outro devido à gravidade. A solução pode ser escrita como a soma de *ondas planas*:

$$\delta(t, \vec{x}) = \sum_k \delta_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad (4.21)$$

onde  $\vec{k}$  é o vetor de onda comóvel e  $k$  o número de onda comóvel associado. Logo, substituindo a solução (4.21) em (4.20), encontramos:

$$\frac{d^2 \delta_{\vec{k}}}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\delta_{\vec{k}}}{dt} = \left[ 4\pi G\rho_0 - \frac{c_s^2}{a^2}k^2 \right] \delta_{\vec{k}}, \quad (4.22)$$

onde  $c_s$  é a velocidade do som. Esta equação diferencial linear (4.22), determina a evolução do  $k$ -ésimo modo perturbativo, ela apresenta duas soluções independentes, cujo crescimento vai depender do modelo de evolução do Universo. O termo  $2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\partial \delta_{\vec{k}}}{\partial t}$  é devido à expansão do Universo e sempre suprime o crescimento de  $\delta_{\vec{k}}$  e o termo  $\left[ 4\pi G\rho_0 - \frac{c_s^2}{a^2}k^2 \right] \delta_{\vec{k}}$  reflete a discordância entre a força associada à pressão e a força gravitacional<sup>8</sup>.

#### 4.1.2 Perturbando o Universo Einstein - de Sitter

A dinâmica da flutuação depende essencialmente do comprimento de Jeans. Usando o comprimento de onda físico  $\lambda = \frac{2\pi a}{k}$ , podemos calcular o *comprimento de Jeans* igualando os efeitos da pressão e da força gravitacional:

$$\lambda_{Jeans} = \lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}. \quad (4.23)$$

- Se  $\lambda \ll \lambda_J$ , o termo de pressão domina e a flutuação corresponde a uma onda sonora com amplitude que decai com o tempo devido à expansão, então a equação (4.22) admite a solução<sup>9</sup>:

$$\delta_{\vec{k}} \propto \frac{e^{\pm \int \frac{c_s dt}{a(t)}}}{\sqrt{c_s a(t)}}. \quad (4.24)$$

<sup>7</sup>A equação do contraste de densidade é obtida assumindo uma **perturbação adiabática**, ou seja, variação na entropia é nula  $\delta S = 0$ .

<sup>8</sup>Quando  $4\pi G\rho_0\delta_{\vec{k}} \gg \frac{c_s^2}{a^2}k^2\delta_{\vec{k}}$  a gravidade domina.

<sup>9</sup>Esta solução descreve uma oscilação amortecida.

- Se  $\lambda \gg \lambda_J$ , o termo gravitacional domina e o *contraste de densidade* deve evoluir segundo a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 \delta_{\vec{k}}}{dt^2} + 2H \frac{d\delta_{\vec{k}}}{dt} = 4\pi G \rho_0 \delta_{\vec{k}}. \quad (4.25)$$

No caso de um Universo dominado por matéria ou poeira ( $p = 0$ ) de FLRW com seções espaciais planas, *Universo Einstein - de Sitter (EdS)*, em que:

$$\Omega_m = 1, \quad a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad \rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left(\frac{t_0}{t}\right)^2, \quad \text{e} \quad H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t} \Rightarrow H(t = t_0) = H_0 = \frac{2}{3t_0}, \quad (4.26)$$

a equação (4.25) torna-se<sup>10</sup>

$$\frac{d^2 \delta_{\vec{k}}}{dt^2} + \frac{4}{3t} \frac{d\delta_{\vec{k}}}{dt} - \frac{2}{3t^2} \delta_{\vec{k}} = 0. \quad (4.27)$$

Para os modos bem dentro do horizonte, porém ainda maiores que o comprimento de Jeans<sup>11</sup> e admitindo uma solução do tipo  $\delta_{\vec{k}} \propto t^q$ , encontramos:

$$q^2 + \frac{q}{3} - \frac{2}{3} = 0 \quad \text{com soluções} \quad q = \frac{2}{3}; -1. \quad (4.28)$$

Obtemos uma solução que é uma combinação linear de dois modos, um *modo de crescimento* relacionado ao  $\delta_+(t) = t^{\frac{2}{3}}$  e outro *modo de decaimento* relacionado à  $\delta_-(t) = t^{-1}$ , para a evolução do **contraste de densidade no Universo EdS**:

$$\delta(\vec{x}, t) = A(\vec{x})\delta_+(t) + B(\vec{x})\delta_-(t) = A(\vec{x})t^{\frac{2}{3}} + B(\vec{x})t^{-1} = C_1(\vec{x})a + C_2(\vec{x})a^{-\frac{3}{2}}. \quad (4.29)$$

Assim, depois da recombinação, as perturbações na componente não-relativista crescem como  $\delta \propto a \propto t^{\frac{2}{3}}$ , apenas o modo crescente é importante<sup>12</sup>.

### 4.1.3 Perturbando a matéria-escura na época da radiação

No caso da era dominada pela radiação temos:  $a \propto t^{\frac{1}{2}}$  e  $H = \frac{1}{2t}$ . Em escalas muito menores que o raio de Hubble podemos utilizar a teoria Newtoniana para estudar perturbações na matéria não-relativista. A abordagem Newtoniana é ainda aplicável desde que a expansão é determinada pela componente dominante, que é a radiação.

A partir da equação (4.22), considerando radiação, matéria escura e  $c_s = 0$ , obtemos:

$$\frac{d^2 \delta_{dm}}{dt^2} + 2H \frac{d\delta_{dm}}{dt} = 4\pi G \rho_0 (\epsilon_r \delta_r + \epsilon_{dm} \delta_{dm}) \approx 4\pi G \rho_r \delta_r, \quad (4.30)$$

onde:  $\epsilon_i = \frac{\rho_i}{\rho_0}$ ,  $\rho_0 = \sum_i \rho_i$ ,  $\rho_{dm} \ll \rho_r \approx \rho_0$  (já que  $\epsilon_{dm} \ll 1$  e  $\epsilon_r \approx 1$ ). Nesta época dominada pela radiação,  $H = \frac{1}{2t}$ , a distribuição dos fótons em pequenas escalas é suave, ou seja, o campo de radiação é uniforme onde  $\delta\rho_r = 0$ , então a perturbação na densidade total é  $\delta\rho_0 = \delta\rho_{dm}$ .

<sup>10</sup>Outras literaturas expressam a equação assim:  $\frac{\partial^2 \delta_{\vec{k}}}{\partial t^2} + \frac{4}{3t} \frac{\partial \delta_{\vec{k}}}{\partial t} - \frac{2}{3t^2} \left[1 - \left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^2\right] \delta_{\vec{k}} = 0$ .

<sup>11</sup>temos:  $\lambda_J \ll \lambda \ll \lambda_{Hubble}$ .

<sup>12</sup>Falando estritamente, depois da igualdade *matéria-radiação* as perturbações na componente não-relativista crescem proporcionalmente ao fator de escala.

Logo, nossa equação (4.30) se reduz a:

$$\frac{d^2\delta_{dm}}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d\delta_{dm}}{dt} = 0, \quad (4.31)$$

e tem solução:

$$\delta_{dm} = C_1 + C_2 \ln t. \quad (4.32)$$

Na era dominada pela radiação as perturbações em pequenas escalas da componente de *matéria escura* experimentam um crescimento logarítmico, mesmo quando  $\lambda > \lambda_J$ . O congelamento das perturbações na matéria não-relativista antes da equivalência entre radiação e matéria é genérico para modelos com um período de rápida expansão dominado por partículas relativistas, este efeito é conhecido como **efeito Mészáros**<sup>13</sup>.

#### 4.1.4 Perturbando os bárions na época da matéria

Depois do desacoplamento, as perturbações na matéria bariônica começam a crescer impulsionada pelo potencial gravitacional da matéria escura. Considerando um Universo pós-recombinação, dominado pela matéria escura, onde o fator de escala evolui com  $a \propto t^{\frac{2}{3}}$  e  $H = \frac{2}{3t}$ .

Na equação (4.29) observamos que as perturbações da componente da matéria escura crescem como  $\delta_{dm} = C_1 a$ . Para as flutuações da matéria bariônica em escalas maiores que  $\lambda_J$ , considerando  $c_s \approx 0$  para ambas componentes e  $\rho_b \ll \rho_{dm} \approx \rho_0$ , então nossa equação (4.22), com estas condiserações, será:

$$\frac{\partial^2\delta_b}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial\delta_b}{\partial t} = 4\pi G \rho_0 (\epsilon_{dm}\delta_{dm} + \epsilon_b\delta_b) \approx 4\pi G \rho_{dm} \delta_{dm}, \quad (4.33)$$

Considerando na equação anterior,  $4\pi G \rho_{dm} \approx \frac{3}{2}H^2$ ,  $\delta_{dm} = \delta_{dm0} t^{\frac{2}{3}}$  e  $H = \frac{2}{3t}$ , obtemos:

$$\frac{\partial^2\delta_b}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial\delta_b}{\partial t} = \frac{3}{2}H^2 \delta_{dm0} t^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \delta_{dm0} t^{-\frac{4}{3}}. \quad (4.34)$$

Resolvendo esta equação diferencial e apenas considerando o modo crescente da perturbação, obtemos a forma de  $\delta_b$ :

$$\delta_b = \delta_{dm0} t^{\frac{2}{3}} \left[ 1 - \left( \frac{t_0}{t} \right)^{\frac{2}{3}} \right] = \delta_{dm} \left[ 1 - \left( \frac{t_0}{t} \right)^{\frac{2}{3}} \right]. \quad (4.35)$$

- Para o tempo de hoje,  $t = t_0 \Rightarrow \delta_b = 0$ , e
- para  $t \gg t_0 \Rightarrow \delta_b = \delta_{dm}$ .

As flutuações da matéria bariônica rapidamente recuperam o atraso com respeito as perturbações da matéria escura após do desacoplamento<sup>14</sup>.

#### 4.1.5 A função de crescimento

Diferentes índices de crescimento  $\gamma$ , para as perturbações da matéria foram mostrados na literatura, para discriminar entre teorias da relatividade geral e teorias alternativas da gravidade [156–159]. As teorias da gravidade alternativas mais conhecidas são: Dinâmicas Newtonianas

<sup>13</sup>O efeito Mészáros nos diz que as perturbações na matéria escura durante a era da radiação são congeladas mesmo que as perturbações sejam maiores do que o comprimento de onda de Jeans.

<sup>14</sup>Podemos dizer que os bárions caem nos poços de potencial criados pelas espécies sem colisões.

Modificadas (MOND), teorias de *GALILEON*- parte de uma classe de teorias chamadas *Horndeski* e *além-Horndeski* que tentam se livrar da energia escura.

Essas modificações da relatividade geral também introduzem um campo escalar. Existem muitas dessas teorias (a teoria de *Brans-Dicke*, teorias de dilatação, teorias de camaleão, quintessência, etc), e suas previsões variam muito entre os modelos. Contudo, também o impacto das interações sobre o crescimento das perturbações foram investigados [160]. Então, é conveniente introduzir a *função de crescimento*<sup>15</sup>, definida assim:

$$f(a) \equiv \frac{d \ln \delta}{d \ln a}. \quad (4.36)$$

Da equação de continuidade (4.12), podemos obter:

$$\delta = \delta(a) \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \delta \vec{v} = -a \frac{\partial \delta}{\partial t} = -a \delta \frac{\partial \ln \delta}{\partial \ln a} \frac{\dot{a}}{a} = -a \delta f(a) H. \quad (4.37)$$

A função de crescimento tem um papel fundamental na distinção de modelos com diferentes teorias de gravitação. Na literatura existe uma parametrização independente para testar desvios da *função de crescimento* considerando a gravidade de Einstein através do chamado índice de crescimento  $\gamma$ , definido por [159] assim:

$$g(a) \equiv \frac{\delta}{a} = e^{\int_0^a d \ln a [\Omega_m^\gamma(a) - 1]}. \quad (4.38)$$

Os valores de  $\gamma$  serão diferentes para diferentes teorias de gravitação. Por exemplo: o  $\gamma$  para modelos de energia escura que tem como teoria de gravitação a *relatividade geral* o  $\gamma \approx 0.55$  para  $\Lambda$ CDM e para modelos de *braneworld gravity* Dvali-Gabadadze-Porrati (**DGP**) o  $\gamma \approx 0.68$  [159, 161].

#### 4.1.6 A função de transferência

A interação matéria-radiação, podem provocar pequenos desvios na evolução das *perturbações primordiais*. Para isso, estudamos a função de transferência  $T(k)$  a qual contabiliza os desvios na evolução das perturbações primordiais dependendo da escala em que as perturbações atravessam o horizonte.

Para um estudo completo da função de transferência, é necessário levar em conta todas as contribuições de energia e suas interações. Para isso estudaremos, mais para frente, a *equação de Boltzmann relativística* a qual descreve a evolução das perturbações.

A função de transferência dos bárions são afetadas pelas oscilações acústicas devido ao acoplamento fóton-bárions. Podemos expressar o potencial gravitacional em termos da função de transferência, potencial primordial e função de crescimento [162]:

$$\Phi(\vec{k}, a) = \Phi_p(\vec{k}) \cdot \{\text{função de transferência}(k)\} \cdot \{\text{função de crescimento}(a)\}, \quad (4.39)$$

onde  $\Phi_p(\vec{k})$  é o valor primordial do potencial, definido durante a inflação. Sabemos que, a função de transferência descreve a evolução das perturbações ao atravessarem o horizonte e da transição radiação/matéria, enquanto o fator de crescimento descreve o crescimento independente do

<sup>15</sup>Chamada também *taxa de crescimento*.

comprimento de onda nos últimos tempos.

Também podemos observar a função de transferência no *espectro de potência da matéria escura*  $P_{dm}(k, z)$  [163]:

$$P_{dm}(k, z) = f^2(z) T^2(k) P_i(k), \quad (4.40)$$

onde  $P_i(k)$  é o espectro de potência inicial,  $f(z)$  é a função de crescimento e  $T(k)$  a função de transferência.

## 4.2 Perturbações cosmológicas (abordagem relativística)

A abordagem Newtoniana fornece informações muito importantes sobre o comportamento das inhomogeneidades<sup>16</sup> (crescimento das perturbações), mas essa abordagem somente se aplica a escalas que não excedam o *raio de Hubble*. Devido a essa limitação temos que realizar um tratamento mais completo que permita tratar componentes relativísticas e não-relativísticas sobre todas as escalas<sup>17</sup>. O tratamento relativístico leva em conta as equações de Einstein da *Relatividade Geral*, que serão expandidas em torno de um Universo de fundo homogêneo e isotrópico.

Ao considerar desvios de um Universo homogêneo e isotrópico, devemos estabelecer uma escolha do sistema de coordenadas (chamado também escolha do gauge ou escolha do calibre). Esta liberdade na escolha de coordenadas descreve as perturbações. Se consideramos pequenos desvios da métrica de fundo, devemos escolher um sistema de coordenadas tal que a métrica perturbada seja próxima à métrica de fundo.

O problema que surge ao expandir as equações de Einstein até primeira ordem de aproximação, é a dificuldade na distinção entre as perturbações físicas daquelas que surgem devido a escolha do calibre [3]. Para resolver o problema do gauge; precisamos escrever quantidades tais como os elementos da métrica, a densidade de matéria, o campo de velocidade, etc. como *quantidades invariantes do gauge* ou fixando o calibre de maneira que o sistema de coordenadas seja completamente descrito. Qualquer destas escolhas não apresenta vantagem em relação à outra, só devemos dar a correta interpretação física.

A métrica  $\bar{g}_{\mu\nu}$  será tratada no nível perturbativo, onde adicionamos pequenas perturbações  $h_{\mu\nu}$ .

### 4.2.1 Perturbações da métrica e a escolha do calibre

Na teoria de Einstein da relatividade geral a geometria tem um papel dinâmico. Então, para descrever desvios da homogeneidade e isotropia no Universo, essas flutuações também devem estar contidas na própria estrutura geométrica do espaço-tempo [16]. Para isso, a métrica deve ser dividida em um termo que descreve o fundo homogêneo e isotrópico  $\bar{g}_{\mu\nu}$  (métrica de FLRW), e um termo de perturbação  $h_{\mu\nu}$ :

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (4.41)$$

<sup>16</sup>As inhomogeneidades são evidentes em escalas locais, por exemplo: galáxias e aglomerados de galáxias.

<sup>17</sup>Vamos a introduzir a perturbação linear no nível relativístico como complemento e generalização de alguns resultados na abordagem Newtoniana.

O elemento de linha que obtemos da perturbação da métrica  $h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ , é:

$$h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -2\Phi dt^2 + 2a^2(F_{,i} + S_i)dt dx^i + a^2 \left[ -2\Psi\delta_{ij} + 2E_{,ij} + V_{i,j} + V_{,ji} + T_{ij} \right] dx^i dx^j. \quad (4.42)$$

Este elemento de linha (4.42), mantém os dez graus de liberdade de  $h_{\mu\nu}$ : quatro graus de liberdade nos escalares  $\Phi$ ,  $F$ ,  $E$  e  $\Psi$ ; os vetores espaciais  $S_i$  e  $V_i$  representariam seis graus de liberdade, no entanto o vínculo de divergência nula que ambos devem satisfazer eliminam dois graus de liberdade<sup>18</sup>, restando apenas quatro; e por fim, o tensor espacial simétrico  $T_{ij}$  fornece somente mais dois graus de liberdade dos seis possíveis, uma vez que são impostos quatro vínculos devido às condições de traço nulo e divergência nula.

Podemos separar convenientemente os graus de liberdade em perturbações *escalares*, *vetoriais* e *tensoriais*, pois cada um dessas perturbações reproduzirão efeitos distintos:

- **perturbações escalares:** são de extrema importância por estar associadas à formação de estruturas:

$$h_{\mu\nu}^{(e)} = \begin{pmatrix} -2\Phi & a^2 F_{,i} \\ a^2 F_{,i} & 2a^2(-\Psi\delta_{ij} + E_{,ij}) \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

- **perturbações vetoriais:** as perturbações vetoriais<sup>19</sup> são responsáveis por produzir campos magnéticos, e costumam decair rapidamente:

$$h_{\mu\nu}^{(v)} = a^2 \begin{pmatrix} 0 & S_i \\ S_i & V_{i,j} + V_{,ji} \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

- **perturbações tensoriais:** estão relacionadas aos graus de liberdade do próprio campo gravitacional, denominados ondas gravitacionais:

$$h_{\mu\nu}^{(t)} = a^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_{i,j} \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Em nosso elemento de linha (e em nossa métrica) vamos apenas considerar *perturbações escalares*, devido a que elas são induzidas pelas inhomogeneidades nas densidades de energia. Essas perturbações são mais importantes em cosmologia devido a que elas produzem instabilidade gravitacional e podem ser as responsáveis do processo de formação de estruturas<sup>20</sup>. Então, nosso elemento de linha é:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu \\ &= -(1 + 2\Phi)dt^2 + 2a^2 F_{,i} dt dx^i + a^2 \left[ (1 - 2\Psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij} \right] dx^i dx^j, \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde  $h_{\mu\nu} \ll \bar{g}_{\mu\nu}$ , os termos de fundo são:

<sup>18</sup>Os vínculos são:  $S^i_{,i} = 0$  e  $V^i_{,i} = 0$ .

<sup>19</sup>Estão associadas aos movimentos rotacionais do fluido que decaem com o fator de escala  $a$ .

<sup>20</sup>As perturbações vetoriais e tensoriais não vamos a considerar neste trabalho devido a que estamos interessados somente na formação de estruturas.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{g}_{00} = -1 \\ \bar{g}_{0i} = \bar{g}_{i0} = 0 \\ \bar{g}_{ij} = \bar{g}_{ji} = a^2 \delta_{ij} \end{array} \right. \quad (4.47)$$

e os termos perturbados em primeira ordem são:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{00} = -2\Phi \\ h_{0i} = h_{i0} = a^2 F_{,i} \\ h_{ij} = h_{ji} = -2a^2 \Psi \delta_{ij} + 2a^2 E_{,ij} \end{array} \right. \quad (4.48)$$

O *tensor energia-momento* é perturbado sobre as variáveis  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{p}$  e  $\bar{u}_\mu$  em relação aos valores do fluido perfeito no referencial das equações de Friedmann:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu}, \quad (4.49)$$

onde:

- $\rho = \bar{\rho} + \delta\rho$  é a densidade perturbada,
- $p = \bar{p} + \delta p$  é a pressão perturbada,
- $u_\mu = \bar{u}_\mu + \delta u_\mu$  é a quadro-velocidade, e
- $\Pi_{\mu\nu}$  é a tensão anisotrópica do fluido que contabiliza os desvios do fluido ideal tais como a dissipação.

As transformações de nossas grandezas escalares ficam assim:

$$\begin{aligned} \Phi' &= \Phi + \xi_{,0}^0 \\ \Psi' &= \Psi - H \xi^0 \\ E' &= E + a^{-2} \zeta \\ F' &= F - a^{-2} \xi^0 + (a^{-2} \zeta)_{,0}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde  $H$  é o parâmetro de Hubble e as componentes espaciais do vetor infinitesimal  $\xi^\alpha$ , foram escritas como  $\xi^i = a^{-2} \zeta_{,i}$  sendo  $\zeta$  uma função escalar. Notamos que as perturbações escalares da métrica dependem apenas de duas funções  $\xi^0$  e  $\zeta$ . Portanto, podemos eliminar duas das quatro funções  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $F$  e  $E$  aplicando uma combinação linear, para logo construir grandezas que são invariantes de calibre (gauge)<sup>21</sup>. Logo, apresentamos algumas escolhas de *calibre*.

#### 4.2.1.1 O calibre longitudinal ou newtoniano

Este calibre longitudinal é obtida fazendo  $E' = 0$  e  $F' = 0$ . Logo, utilizando estas condições em (4.50), obtemos um sistema coordenado único onde as perturbações se transformam como:

$$\begin{aligned} \Phi^l &= \Phi + 2a^2 H(F + E_{,0}) + a^2 (F + E_{,0})_{,0} \\ \Psi^l &= \Psi - a^2 H(F + E_{,0}) \end{aligned} \quad (4.51)$$

<sup>21</sup>Impor as condições do calibre é equivalente a fixar o sistema coordenado.

Estos termos escalares (4.51), coincidem com os potenciais invariantes de calibre propostos por Bardeen [164].

#### 4.2.1.2 O calibre síncrono

O calibre síncrono corresponde a fazer a escolha  $h'_{\mu 0} = 0$  o que implica que  $\Phi' = 0$  e  $F' = 0$ . Logo, aplicamos estes vínculos às transformações de (4.50), para obter  $\xi^0$  e  $\zeta$  assim:

$$\begin{aligned}\Phi &= -\xi_{,0}^0 \\ (\zeta a^{-2})_{,0} &= \xi^0 a^{-2} - F.\end{aligned}\quad (4.52)$$

Neste caso, a solução deste sistema para  $\xi^0$  e  $\zeta$  não os determina unicamente, o que significa que neste calibre a transformação infinitesimal<sup>22</sup> ainda deve conter termos não físicos. Além disso, no calibre síncrono não é possível definir nenhuma quantidade dinâmica invariante de calibre.

#### 4.2.1.3 O calibre comóvel

O calibre comóvel ou ortogonal é obtido ao escolher  $v' = 0$  e  $F' = 0$  nas equações  $v' = v - \xi^0$  e (4.50) respetivamente. Desta maneira as perturbações se transformam como:

$$\begin{aligned}\Phi^c &= \Phi + v_{,0} \\ \Psi^c &= -vH \\ E_{,0}^c &= E_{,0} - a^{-2}v + F,\end{aligned}\quad (4.53)$$

Notar que, nesse caso os potenciais de Bardeen coincidem com as funções  $\Phi^c$  e  $\Psi^c$  quando  $v = a^2(F + E_{,0})$  o que implica  $E_{,0}^c$ .

*É importante ressaltar que a transformação de calibre não vincula dois observadores no mesmo espaço-tempo, mas sim, dois espaços-tempo diferentes, um de fundo e outro perturbado, visto pelo mesmo observador.*

Nós escolhemos trabalhar com o *calibre newtoniano*, já que neste calibre os observadores detectam o campo de velocidade das partículas caindo nos aglomerados de matéria e, conseqüentemente, podem medir o potencial gravitacional. Logo, podemos escrever o elemento de linha em termos do **tempo conforme**<sup>23</sup>, isso finalmente deixa nosso elemento de linha no calibre newtoniano ou longitudinal ou sem cisalhamento, como [57]:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -(1 + 2\Psi) d\eta^2 + (1 + 2\Phi) \delta_{ij} dx^i dx^j \right]. \quad (4.54)$$

## 4.2.2 Perturbando as equações de campo de Einstein

A fim de derivar as equações de Einstein de primeira ordem, nós decompor o tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  e o tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}$  no fundo (não perturbado:  $\bar{G}_{\mu\nu}$  e  $\bar{T}_{\mu\nu}$ ) e partes perturbadas

<sup>22</sup> $\chi'^\alpha = \chi^\alpha - \xi^\alpha$ .

<sup>23</sup>Tempo conforme:  $dt = ad\eta \Rightarrow \eta = \int a^{-1} dt$ .

( $\delta G_{\mu\nu}$  e  $\delta T_{\mu\nu}$ ):

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \bar{G}_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu} \\ T_{\mu\nu} &= \bar{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

A evolução cosmológica de fundo é obtida resolvendo-se as equações de Einstein de ordem zero (com  $c = 1$ ):

$$\bar{G}_{\mu\nu} = 8\pi G \bar{T}_{\mu\nu}, \quad (4.56)$$

e as equações de Einstein de primeira ordem<sup>24</sup> são dadas por:

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu}. \quad (4.57)$$

Lembramos também que o tensor energia-momento satisfaz a equação de continuidade  $T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$  e a parte perturbada desta equação também satisfaz:

$$\delta T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0. \quad (4.58)$$

Para um fluido geral, o tensor de energia-momento é dado por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} + pg_{\mu\nu} + [q_{\mu}u_{\nu} + q_{\nu}u_{\mu} + \pi_{\mu\nu}], \quad (4.59)$$

onde,  $\rho$  é a densidade de energia,  $p$  é a pressão,  $u_{\mu}$  é a quadrivelocidade,  $q_{\mu}$  é o vetor de fluxo de calor e  $\pi_{\mu\nu}$  é o tensor de cisalhamento viscoso. Os termos entre colchetes na equação (4.59) são importantes apenas para fluidos cuja energia interna é uma fração considerável da densidade total de energia. Nós temos  $q_{\mu} = 0$  e  $\pi_{\mu\nu} = 0$  para fluidos perfeitos. A seguir, nos limitamos a fluidos perfeitos e assumimos também que o fluido perturbado permanece ainda como um fluido perfeito, tal que  $\delta T^i_j = 0$  para ( $i \neq j$ ).

Então, o tensor de energia-momento linearizado torna-se:

$$\delta T^{\mu}_{\nu} = (\delta\rho + \delta p)u^{\mu}u_{\nu} + (\rho + p)(\delta u^{\mu}u_{\nu} + u^{\mu}\delta u_{\nu}) + \delta p\delta^{\mu}_{\nu}. \quad (4.60)$$

No tensor de energia-momento perturbado, precisamos perturbar a quadrivelocidade  $u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds}$ . Negligenciando as perturbações acima da primeira ordem, obtemos:

$$\begin{aligned} u^{\mu} &= \left[ \frac{1}{a}(1 - \Psi), \frac{v^i}{a} \right], \\ u_{\mu} &= g_{\mu\nu}u^{\nu} = [-a(1 + \Psi), av_i], \\ u_{\mu}u^{\mu} &= -1, \end{aligned} \quad (4.61)$$

onde  $v^i = \frac{dx^i}{d\eta} = a \frac{dx^i}{dt}$  é a **velocidade peculiar da matéria** com respeito à expansão geral.

Definimos os termos de contraste de densidade e velocidade da seguinte maneira:

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}}, \quad \text{e} \quad \theta \equiv \nabla_i v^i. \quad (4.62)$$

<sup>24</sup>Segundo o teorema da decomposição as perturbações evoluem até primeira ordem devido a simetria rotacional do Universo FLRW.

onde  $\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} \equiv \frac{\rho(x) - \rho_0}{\rho_0}$  é o contraste de densidade ( $\rho(x)$  é o campo de densidade e  $\rho_0$  é a média espacial) e  $\theta$  é a divergência de velocidade.

As componentes do tensor energia-momento perturbado são:

$$\begin{aligned}\delta T_0^0 &= -\delta\rho \\ \delta T_0^i &= -\delta T_i^0 = (1 + w)\bar{\rho}v^i \\ \delta T_1^1 &= \delta T_2^2 = \delta T_3^3 = c_s^2\delta\rho.\end{aligned}\quad (4.63)$$

As equações perturbadas de Einstein (equações linearizadas) são:

$$\begin{aligned}3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Psi - \Phi') + \nabla^2\Phi &= -4\pi G a^2\delta\rho \\ \nabla^2(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) &= 4\pi G a^2(1 + w)\bar{\rho}\theta \\ \Phi'' + 2\mathcal{H}\Phi' - \mathcal{H}\Psi' - (\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')\Psi &= -4\pi G a^2 c_s^2\delta\rho,\end{aligned}\quad (4.64)$$

onde a linha indica a derivada com respeito ao tempo conforme  $\eta$  e  $\mathcal{H} = aH$ . Estas equações (4.64) são calculadas a partir das componentes  $(00)$ ,  $(0i)$  e  $(ii)$ . Também a partir da expressão  $\delta T_j^j = 0$  se deduz  $\Psi = -\Phi$ .

Usando a equação de conservação não perturbada:

$$\bar{\rho}' + 3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{p}) = 0, \quad (4.65)$$

junto com as relações  $w = \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}$  e  $c_s^2 = \frac{\delta p}{\delta\rho}$ , encontramos a equação de continuidade perturbada<sup>25</sup>

$$\delta' + 3\mathcal{H}(c_s^2 - w)\delta = -(1 + w)(\theta + 3\Phi'). \quad (4.66)$$

A partir da equação  $\nabla_\mu\delta T_i^\mu = 0$  e definindo a seguinte quantidade perturbada  $\delta q \equiv a(\bar{\rho} + \bar{p})$  (onde  $v$  é o campo de velocidade relacionado à  $v^i$  através de  $v^i \equiv \nabla^i v$ ), deduzimos:

$$\delta q' + 3\mathcal{H}\delta q = -a\delta p - (\bar{\rho} + \bar{p})a\Psi. \quad (4.67)$$

Reescrevendo esta equação (4.67) em termos de  $\theta = \nabla_i v^i$ , obtemos<sup>26</sup>:

$$\theta' + \left[ \mathcal{H}(1 - 3w) + \frac{w'}{1 + w} \right] \theta = -\nabla^2 \left( \frac{c_s^2}{1 + w} \delta + \Psi \right). \quad (4.68)$$

As grandezas perturbadas no espaço de Fourier, é:

$$\Phi = \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \Phi_k d^3k \quad \Psi = \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \Psi_k d^3k \quad (4.69)$$

$$\delta = \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \delta_k d^3k \quad \theta = \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \theta_k d^3k. \quad (4.70)$$

O índice  $k$  representa um modo de Fourier para cada número de onda  $k$ . Note-se que  $k$  é uma

<sup>25</sup>Para a matéria não-relativística com  $w = 0$  e  $c_s^2 = 0$ , esta equação reduz para:  $\delta' = -\theta - 3\Phi'$ .

<sup>26</sup>Para matéria não-relativística esta equação reduz para:  $\theta' + \mathcal{H}\theta = -\nabla^2\Psi - \nabla^2(c_s^2\delta)$ .

quantidade comóvel que permanece fixa.

Outra equação importante deduzida a partir das equações de perturbação e a relação  $\Psi = -\Phi$ , no espaço de Fourier, e a equação de Poisson relativista:

$$k^2 \Phi_k = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \left[ \delta_k + \frac{3\mathcal{H}}{k^2} (1 + w) \theta_k \right] \quad (4.71)$$

A partir das equações (4.64) obtemos uma equação diferencial apenas para  $\Phi$ , assim:

$$\Phi'' + 3\mathcal{H} (1 + c_s^2) \Phi' + (c_s^2 k^2 + 3\mathcal{H}^2 c_s^2 + 2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) \Phi = 0. \quad (4.72)$$

Para comprimentos de ondas menores do que o raio de Hubble<sup>27</sup> ( $\frac{H}{k} \ll 1$ ), a equação de Poisson no calibre de Newtoniano, para os modos de Fourier  $k$ , retorna à dinâmica Newtoniana<sup>28</sup>.

#### 4.2.2.1 Equação de Boltzmann e o fluido fóton-bárion

A evolução das perturbações de densidade resulta de uma interação entre campos de densidade de diferentes espécies (bárions, matéria escura, fótons e neutrinos) e a métrica espaço-temporal. A interação entre espécies e a métrica é governada pelas equações de Einstein e pela equação de Boltzmann. A equação de Boltzmann descreve a evolução das distribuições de partículas no espaço de fase (posição e momento).

Antes de escrever a equação de Boltzmann, escrevemos o tensor de energia-momento (para uma partícula de massa  $m$ ), assim [57]:

$$T^{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \int \frac{p^\mu p^\nu}{p^0} f(\vec{x}, \vec{p}, t) \sqrt{-g} dp^3, \quad (4.73)$$

onde  $g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m^2$ ,  $g = \det(g_{\mu\nu})$ ,  $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$  é a distribuição de partículas,  $p^\mu = (p^0, \vec{p})$  é o momento da partícula,  $p^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda_s}$ , onde  $\lambda_s$  é o parâmetro que caracteriza o caminho da partícula. Observamos que o termo que contribui para o cisalhamento  $T_j^i$  é proporcional a:

$$\frac{p^i p_j}{(p^0)^2} = \frac{dx^i dx^j}{dt^2} = v^i v_j. \quad (4.74)$$

Por outro lado para poder descrever com precisão a evolução das perturbações nos fótons e nos bárions acoplados, devemos utilizar a equação de Boltzmann<sup>29</sup> [15]:

$$C[f] = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial P} \frac{dP}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i} \frac{d\hat{p}^i}{dt}, \quad (4.75)$$

onde  $C[f]$  é um funcional que define os termos de colisão, criação e aniquilação (este termo leva em conta possíveis interações com outras espécies),  $P$  é a magnitude espacial do momento e  $\hat{p}^i \equiv \frac{p^i}{|p|}$  é a direção do vetor unitário tal que  $\delta_{ij} \hat{p}^i \hat{p}^j = 1$ . O termo da direita na equação (4.75) é uma derivada

<sup>27</sup>Raio comóvel de Hubble:  $D_H = \frac{1}{H}$ .

<sup>28</sup> $k^2 \Phi_k = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta_k$ .

<sup>29</sup>A equação de transporte de Boltzmann descreve propriedades como condutividade elétrica, térmica e viscosidade.

total da distribuição em relação ao tempo, que faz aparecer termos levando em consideração a expansão do Universo e as perturbações métricas. Para fótons: o termo de colisão na equação (4.75) precisa levar em conta o processo de espalhamento Compton com os prótons e elétrons (bárions). Como a matéria escura interage muito fracamente com outras partículas o termo de colisão é definido como zero.

Vamos considerar a equação de Boltzmann (4.75) para os fótons. Começamos calculando a magnitude espacial (no calibre Newtoniano), assim:

$$P^2 \equiv g_{ij} p^i p^j = a^2 (1 + 2\Phi) (\delta_{ij} \hat{p}^i \hat{p}^j) p^2 = a^2 (1 + 2\Phi) p^2 \quad (4.76)$$

A partir desta última equação encontramos  $|p| = a^{-1} (1 - \Phi) P$  em primeira ordem e, consequentemente,  $p^i = a^{-1} (1 - \Phi) P \hat{p}^i$ .

Já que os fótons satisfazem a relação  $g^{\mu\nu} p^\mu p^\nu = 0$ , podemos calcular até primeira ordem a seguinte expressão:

$$-(1 + 2\Psi)(p^0)^2 + P^2 = 0 \quad \implies \quad p^0 = P(1 - \Psi). \quad (4.77)$$

Utilizando  $\frac{dp^0}{d\lambda} = -\Gamma_{\mu\nu}^0 p^\mu p^\nu$ , calculamos também:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{p^i}{p^0} = \frac{1 - \Phi + \Psi}{a} \hat{p}^i \quad (4.78)$$

e

$$\frac{dP}{dt} = -P \left( H + \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \right). \quad (4.79)$$

Lembramos de que, no fundo não-perturbado, os fótons com temperatura  $T$  obedecem à função de distribuição de Bose-Einstein (negligenciando o potencial químico  $\mu$ ):

$$\bar{f}(t, p) = \frac{1}{e^{\frac{p}{T}} - 1}. \quad (4.80)$$

Note que neste fundo, a temperatura  $T$  depende do tempo  $t$  apenas:  $T \propto \frac{1}{a(t)}$ . No Universo perturbado podemos definir a perturbação da temperatura:

$$\Theta(t, \vec{x}, \hat{p}^i) \equiv \frac{\delta T}{T}. \quad (4.81)$$

Considerando a perturbação na temperatura  $\Theta$ , a função de distribuição é dada por:

$$f(t, P, \vec{x}, \hat{p}) = \frac{1}{e^{\frac{P}{T(1 + \Theta(t, \vec{x}, \hat{p}))}} - 1}. \quad (4.82)$$

Se  $\Theta \ll 1$  podemos expandir sobre o valor de fundo da distribuição até primeira ordem:

$$f = \bar{f} + T \frac{\partial \bar{f}}{\partial T} = \bar{f} - P \frac{\partial \bar{f}}{\partial P}. \quad (4.83)$$

O termo de colisão  $C[f]$  para os fótons, determinado principalmente pelo processo de espalhamento

Compton, ( $e^- + \gamma \leftrightarrow e^- + \gamma$ ), é descrito por:

$$C[f] = -P \frac{\partial \bar{f}}{\partial P} n_e \sigma_T [\Theta_0 - \Theta(\hat{p}) + \hat{p} \cdot \vec{v}_e], \quad (4.84)$$

onde  $n_e$  é a densidade de elétrons,  $\sigma_T$  é a seção de choque do espalhamento Thomson,  $\vec{v}_e$  é a velocidade dos elétrons<sup>30</sup> (comumente em cosmologia se denota como  $\vec{v}_b$ , como velocidade dos bárions) e  $\Theta_0$  é o termo de monopolo dada pela expansão em *multipolos*:

$$\Theta_l \equiv \frac{1}{(-i)^l} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_l(\mu) \Theta(\mu), \quad (4.85)$$

onde  $\mu = \hat{k} \cdot \hat{p}$  e  $\mathcal{P}$  é o *polinômio de Legendre*.

Expandindo  $\Theta$  no espaço de Fourier<sup>31</sup>, obtemos a equação de Boltzmann expressa assim:

$$\Theta' + ik\mu\Theta + \Phi' + ik\mu\Psi = -\tau'_{op} [\Theta_0 - \Theta(\hat{p}) + \mu v_e], \quad (4.86)$$

onde a linha indica derivada com respeito ao tempo conforme  $\eta$  e introduzimos a profundidade ótica  $\tau_{op}$  definida como<sup>32</sup>:

$$\tau_{op} \equiv \int_{\eta}^{\eta_0} n_e \sigma_T a d\tilde{\eta}. \quad (4.87)$$

Aqui  $\eta_0$  é o tempo conforme hoje.

Devemos lembrar que: os fótons desacoplam dos bárions no limite de  $\tau_{op} \rightarrow 0$  e estão fortemente acoplados quando  $\tau_{op} \rightarrow \infty$ . Esta profundidade ótica é pequena quando a densidade de elétrons é pequena também.

Considerando a equação de Boltzmann para os elétrons  $f_e$  em termos do primeiro e segundo momentos, ou seja, do número de densidade  $n_e$  e a velocidade  $v_e$ , obtemos:

$$n_e = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_e \quad (4.88)$$

e

$$v_e^i = \frac{1}{n_e} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{P \hat{p}^i}{E} f_e \quad (4.89)$$

respectivamente. Nesta expressão (4.89) introduzimos a energia:  $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ . O forte acoplamento entre elétrons-fótons (**espalhamento Compton**) e entre elétrons-prótons (**espalhamento de Coulomb**), mostra que a flutuação na densidade de elétrons  $\frac{\delta \rho_e}{\rho_e}$  é igual à flutuação na densidade de prótons  $\frac{\delta \rho_p}{\rho_p}$  que, por sua vez, é igual à flutuação na densidade da matéria bariônica  $\frac{\delta \rho_b}{\rho_b}$ . De maneira similar podemos analisar e encontrar que:  $\vec{v}_e = \vec{v}_p = \vec{v}_b$ . Então, desta maneira podemos considerar

<sup>30</sup>Na ausência de  $\vec{v}_e$ , um acoplamento forte (para  $n_e \sigma_T$  grande) significa que  $\Theta \approx \Theta_0$ , isto é, que a perturbação é totalmente descrita pelo seu termo monopolo.

<sup>31</sup>Temos:  $\Theta(\vec{r}) = \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \Theta_k d^3k$ .

<sup>32</sup>Estamos considerando o fato de que o fluido é irrotacional:  $v_e^i = \frac{v_e k^i}{k}$ .

que a nossa equação de Boltzmann leva em conta estes dois espalhamentos (Compton e Coulomb):

$$\frac{df_e}{dt} = (C[f])_{e\gamma} + (C[f])_{ep}. \quad (4.90)$$

Logo, multiplicamos esta equação (4.90) pelo elemento de volume  $\frac{d^3p}{(2\pi)^3}$  para seguidamente integrar e obter:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{df_e}{dt} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (C[f])_{e\gamma} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (C[f])_{ep}. \quad (4.91)$$

Reescrevendo esta expressão (4.91), temos:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial(n_e v_b^i)}{\partial x^i} + 3 \left[ H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] n_e = \langle (C[f])_{e\gamma} \rangle + \langle (C[f])_{ep} \rangle. \quad (4.92)$$

Nesta última equação consideramos  $\langle (C[f])_{ep} \rangle = 0$  (pela conservação do momento). Utilizando a equação para matéria não-relativística:  $\delta' = -\theta - 3\Phi'$  para  $w = 0$  e  $c_s^2 = 0$ , equação de Boltzmann para prótons:  $\frac{df_p}{dt} = \langle (C[f])_{ep} \rangle$  e considerando  $m_{\text{próton}} \gg m_{\text{elétron}}$  deduzimos as equações para o **acoplamento fóton-báron**<sup>33</sup>

$$\Theta' = -\Phi' - ik\mu(\Psi + \Theta) - \tau'_{op} [\Theta_0 - \Theta(\hat{p}) + \mu v_b] \quad (4.93)$$

$$\delta'_b = -ikv_b - 3\Phi' \quad (4.94)$$

$$v'_b = -\mathcal{H}v_b - ik\Psi + \frac{\tau'}{R_s} (3i\Theta_1 + v_b), \quad (4.95)$$

onde:

$$R_s \equiv \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}. \quad (4.96)$$

Agora podemos derivar uma equação para o termo monopolo  $\Theta_0$  que será útil mais para frente. Multiplicando  $\mathcal{P}_0(\mu)$  e  $\mathcal{P}_1(\mu)$  na equação (4.93) e integrando em termos de  $\mu$  no intervalo  $[-1, 1]$ , obtemos:

$$\Theta'_0 + k\Theta_1 = -\Phi' \quad (4.97)$$

$$\Theta'_1 - \frac{k}{3}(\Theta_0 + \Psi) = \tau'_{op} \left( \Theta_1 - \frac{i}{3}v_b \right). \quad (4.98)$$

Considerando o cálculo previo de  $v_b \simeq -3i\Theta_1$  (em primeira ordem), podemos reescrever a equação (4.95) assim:

$$v_b \simeq -3i\Theta_1 - 3i \frac{R_s}{\tau'_{op}} \left( \Theta'_1 + \mathcal{H}\Theta_1 - \frac{k\Psi}{3} \right). \quad (4.99)$$

<sup>33</sup>Estas equações estão expressadas no espaço de Fourier.

Logo, utilizando a equação (4.97) e substituindo a equação (4.99) em (4.93) deduzimos:

$$\Theta_0'' + \frac{R_s}{1 + R_s} \mathcal{H} \Theta_0' + k^2 c_s^2 \Theta_0 = -\frac{k^2}{3} \Psi - \frac{R_s}{1 + R_s} \mathcal{H} \Phi' - \Phi'', \quad (4.100)$$

onde:

$$c_s^2 \equiv \frac{\delta p_\gamma}{\delta \rho_\gamma + \delta \rho_b} = \frac{1}{3(1 + R_s)}, \quad (4.101)$$

é a velocidade de som efetiva ao quadrado do plasma de fóton-bárion acoplado. Nesta última igualdade, equação (4.101), consideramos as seguintes relações:

$$\delta p_\gamma = \frac{\delta \rho_\gamma}{3} \quad (4.102)$$

e

$$\rho_b \propto a^{-3} \propto T^3 \quad \text{e} \quad \rho_\gamma \propto a^{-4} \propto T^4 \quad \implies \quad \frac{\delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} = \frac{4}{3} \frac{\delta \rho_b}{\rho_b}. \quad (4.103)$$

Na ausência de bárions, a velocidade do som se reduz à de um fluido relativista:  $c_s = \frac{c}{\sqrt{3}}$ , onde recuperamos a velocidade da luz  $c$ . Quando os bárions estão presentes, a velocidade do som diminui porque o fluido se torna mais pesado.

A equação (4.100) é muito conveniente porque mostra como a anisotropia da temperatura média da direção  $\Theta_0$  responde à gravidade, ou seja, para  $\Psi$  e  $\Phi$ . A solução dessa equação para confrontar as anisotropias de temperatura previstas com as observações da CMB pode ser estudada com mais detalhe em [57].

## Capítulo 5

# A ESCALA ACÚSTICA RADIAL (BAO COMO RÉGUA PADRÃO)

### 5.1 Oscilações Acústicas Bariônicas (BAO) como régua padrão

Como foi estudado na seção anterior as **Oscilações Acústicas Bariônicas** (BAO), surgem devido aos efeitos competitivos da pressão de radiação e da gravidade no início do Universo. Estas oscilações acústicas bariônicas se propagam no plasma primordial fóton-bárion e deixam uma impressão no sinal de agrupamento de galáxias, que só pode ser resolvido com grandes amostras de galáxias. As duas primeiras detecções do pico acústico BAO foram publicadas em 2005 por [17, 184]. Daniel J. Eisenstein et al. detectou o pico acústico na função de correlação de dois pontos<sup>1</sup>, a partir de uma amostra de *Galáxias Vermelhas Luminosas* (LRG) [17]. Agora, estudamos como estas oscilações acústicas bariônicas imprimem uma escala característica na distribuição de estruturas em grande escala e como esta escala pode ser usada como *régua padrão*.

No capítulo anterior vimos que a mistura das equações de Boltzmann e Einstein na teoria da perturbação resulta em uma equação diferencial para flutuações de temperatura no fluido fóton-bárion antes da recombinação<sup>2</sup>. A principal contribuição destas flutuações na temperatura da CMB são as perturbações escalares. Por outro lado também sabemos que as perturbações vetoriais decaem conforme o Universo expande e as perturbações tensoriais, que se comportam como ondas gravitacionais, são suprimidas em relação às perturbações escalares. Então, dita equação das anisotropias da CMB,  $\Theta_0$ , é:

$$\Theta_0'' + \frac{R_s}{1 + R_s} \mathcal{H} \Theta_0' + k^2 c_s^2 \Theta_0 = -\frac{k^2}{3} \Psi - \frac{R_s}{1 + R_s} \mathcal{H} \Phi' - \Phi'', \quad (5.1)$$

onde  $c_s$  é dado pela equação (4.101) e a partir da equação (4.103) definimos  $R_s$ , assim:

$$R_s \equiv \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma} = \frac{3\Omega_{b0}}{4\Omega_{\gamma0}} \frac{1}{(1+z)}. \quad (5.2)$$

<sup>1</sup>Estas oscilações acústicas bariônicas podem ser observadas no espectro de potência da Radiação cósmica de fundo (CMB) e, com menor amplitude, no espectro da distribuição de galáxias.

<sup>2</sup>Esta equação caracteriza a evolução das anisotropias da CMB.

Levar em conta que em todo nosso processo do cálculo da teoria de perturbações, consideramos apenas uma *perturbação adiabática* ( $\delta S = 0$ )<sup>3</sup>. Sabendo isto os fótons e os bárions que estão acoplados evoluirão como um fluido único, descrito em termos da sua densidade e velocidade.

Como as observações indicam, a CMB não é perfeitamente isotrópica. Há de fato pequenas flutuações de temperatura [43],  $\Theta_0 \approx \frac{\delta T}{T}$ :

$$\frac{\delta T}{T} \equiv \frac{T(\theta, \phi) - \bar{T}}{\bar{T}}, \quad (5.3)$$

onde  $\theta$  e  $\phi$  são as coordenadas angulares no céu. Podemos expandir as flutuações de temperatura na superfície celestial como uma soma de harmônicos esféricos:

$$\frac{\delta T}{T} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (5.4)$$

onde:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \mathcal{P}_l^m(\cos\theta) e^{i\phi}. \quad (5.5)$$

sendo  $\mathcal{P}_l^m$  o polinômio de Legendre do multipolo  $l$ , e  $-l \leq m \leq l$ .

Por outro lado podemos relacionar  $\Theta_0$  com a flutuação na densidade dos bárions,  $\delta_b$ , e com a flutuação na densidade dos fótons,  $\delta_\gamma$ , assim:

$$\delta_b = \frac{\delta\rho_b}{\rho_b} = 3 \frac{\delta T}{T} \approx 3\Theta_0 \quad \text{e} \quad \delta_\gamma = \frac{\delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma} = 4 \frac{\delta T}{T} \approx 4\Theta_0. \quad (5.6)$$

Agora substituindo a flutuação na densidade dos bárions  $\delta_b = 3\Theta_0$  na equação (4.100), obtemos:

$$\delta_b'' + \frac{R_s}{1+R_s} \mathcal{H} \delta_b' + k^2 c_s^2 \delta_b = -k^2 \Psi - 3 \frac{R_s}{1+R_s} \mathcal{H} \Phi' - 3\Phi''. \quad (5.7)$$

Essa equação (5.7) é semelhante à de um **oscilador harmônico amortecido forçado**. O amortecimento vem da expansão do Universo, e a força vem dos potenciais gravitacionais,  $\Phi$  e  $\Psi$ , que impulsionam o crescimento das perturbações. Fazendo uma troca de variável:  $\Sigma_{gb} \equiv \delta_b + 3\Phi$ , para dar a forma de um oscilador harmônico amortecido, temos:

$$\Sigma_{gb}'' + \frac{R_s}{1+R_s} \mathcal{H} \Sigma_{gb}' + k^2 c_s^2 \Sigma_{gb} = F(k, t), \quad (5.8)$$

onde o termo de força é:

$$F(k, t) \equiv -k^2 \left[ \Psi - \frac{R_s}{1+R_s} \Phi \right]. \quad (5.9)$$

Na equação (5.8), temos:

- $\frac{R_s}{1+R_s} \mathcal{H} \Sigma_{gb}' \implies$  corresponde a um amortecimento provocado pela expansão do

<sup>3</sup>Isso quer dizer que a variação da entropia  $\delta S$ , contida em  $\frac{\partial p}{\partial S}$ , não contribui para a velocidade do som.

Universo,

- $k^2 c_s^2 \Sigma_{gb} \implies$  corresponde a uma força restauradora devido à pressão dos fótons.

Desprezando o termo de força  $F(k, t) = 0$ , podemos observar que a equação (5.8) se comporta como um *oscilador harmônico amortecido*. Considerando  $R_s \ll 1$  na equação (5.8) e aplicando o método padrão das funções de Green, encontramos a seguinte solução [57]:

$$\Sigma_{gb} = \Sigma_{gb}^{homog} + k^2 \int_0^\eta (\Phi - \Psi) \frac{f_1(\tilde{\eta}) f_2(\eta) - f_1(\eta) f_2(\tilde{\eta})}{f_1(\tilde{\eta}) f_2'(\tilde{\eta}) - f_1'(\tilde{\eta}) f_2(\eta)} d\tilde{\eta}, \quad (5.10)$$

onde  $\Sigma_{gb}^{homog}$  é a solução homogênea escrita como a combinação linear das funções:

$$f_1 = \text{sen}[k \int c_s d\eta] \quad \text{e} \quad f_2 = \text{cos}[k \int c_s d\eta]. \quad (5.11)$$

## 5.2 Estatística de clustering (agrupamento)

Os modelos de energia escura ou outros modelos (como nesta tese) que são estudados atualmente na literatura estão ligados às observações através de uma ferramenta muito útil, a *estatística*. Esta estatística é frequentemente dividida em *estatística descritiva*, isto é, como condensar os dados de uma maneira compacta e útil, e *estatística de estimação* (ou inferencial, indutivo), isto é, como derivar informação sobre os parâmetros do modelo. Começamos aqui com as estatísticas necessárias para a teoria da perturbação cosmológica, estatísticas essencialmente descritivas (como a função de correlação, o espectro de potência, etc).

Apresentamos as ferramentas estatísticas necessárias para a compreensão da natureza, amplitude e distribuição das flutuações.

### 5.2.1 O campo de excesso de densidade

Qualquer pesquisa (levantamento) de galáxias observará uma "janela" particular do Universo, consistindo de uma máscara<sup>4</sup> angular da área observada, e uma distribuição radial de galáxias. Para corrigir uma função de seleção de galáxias que varia espacialmente, traduzimos a densidade observada da galáxia  $\rho(\vec{x})$  para um excesso de densidade adicional:

$$\delta(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x}) - \bar{\rho}(\vec{x})}{\bar{\rho}(\vec{x})}, \quad (5.12)$$

onde  $\bar{\rho}(\vec{x})$  é a densidade média esperada (fundo). Em tempos primordiais, ou em grandes escalas,  $\bar{\rho}(\vec{x})$  tem uma distribuição que é próxima da gaussiana<sup>5</sup>, flutuações adiabáticas, e assim a distribuição estatística é completamente descrita pela função de dois pontos deste campo.

<sup>4</sup>A distribuição das áreas do céu onde é observada (observamos galáxias) e a que profundidade é atingida em cada ponto, é chamada de **máscara**.

<sup>5</sup>O *teorema de limite central* nos diz que as flutuações irão formar um campo Gaussiano multivariado [166].

### 5.2.2 Função de correlação de n-pontos

A função de correlação de  $n$ -pontos,  $\xi^{(n)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ , é definida assim [167]:

$$1 + \xi^{(n)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = \left\langle \prod_{i=1}^n [1 + \delta(\vec{x}_i)] \right\rangle. \quad (5.13)$$

Cada função de  $n$ -pontos tem contribuições de ordens mais baixas e um termo reduzido que corresponde a:

$$\xi_{red}^{(n)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = \left\langle \prod_{i=1}^n \delta(\vec{x}_i) \right\rangle. \quad (5.14)$$

A partir desta expressão (5.14), damos a relação para a função de 3-pontos (para:  $n = 3$ ) como um exemplo:

$$\xi^{(3)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \xi(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + \xi(\vec{x}_1 - \vec{x}_3) + \xi(\vec{x}_2 - \vec{x}_3) + \xi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3), \quad (5.15)$$

onde  $\xi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \equiv \xi_{red}^{(3)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \langle \delta(\vec{x}_1) \delta(\vec{x}_2) \delta(\vec{x}_3) \rangle$  é a função de correlação de 3-pontos reduzida. Esta *função de correlação de 3-pontos reduzida* representa qualquer excesso de correlação em relação ao descrito pelas contribuições de 2-pontos que já conhecemos.

Por outro lado, podemos calcular a probabilidade de encontrar uma  $n$ -tupla de galáxias no volume  $n$  especificado. Isto é uma extensão direta da estatística de 2-pontos para um número maior de pontos ( $n$ -pontos). Então, temos:

$$dP = \bar{\rho}^n [1 + \xi^{(n)}] dV_1 dV_2 \dots dV_n. \quad (5.16)$$

Tal como acontece com a função de 2-pontos (*como veremos na seguinte subsecção*), a probabilidade é proporcional ao produto do campo de densidade nos  $n$ -pontos.

#### 5.2.2.1 Função de correlação de 2-pontos (2PCF)

As observações indicam que as galáxias não estão aleatoriamente distribuídas. Elas se encontram em grupos, aglomerados ou superaglomerados. Isto significa que existe uma alta probabilidade de encontrar galáxias na vizinhança de outra galáxia do que em outro local arbitrário. Essa aglomeração pode ser inferida através da chamada **função de correlação**. Para estimar a função de correlação de dois pontos de uma distribuição de objetos (galáxias em nosso caso), temos que comparar a contagem de pares do nosso catálogo de dados (catálogo real) com uma distribuição aleatória (catálogo randômico), que deve reproduzir a função de seleção angular e radial do catálogo de dados.

Para definir a 2PCF, utilizamos a transformada de Fourier e sua inversa da grandeza  $\delta(\vec{x})$ , assim:

$$\delta(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\delta}(\vec{k}) e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} d^3k \quad \text{e} \quad \hat{\delta}(\vec{k}) = \int \delta(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3x. \quad (5.17)$$

Como apenas podemos observar um Universo (o nosso mesmo), as estatísticas de dois pontos são tomadas como médias espaciais, denotadas por  $\langle \rangle$ , sobre produtos do contraste de densidade.

Outra grandeza que está diretamente relacionado com a 2PCF é *O espectro de potência*. O espectro de potência é definido como a covariância das flutuações de densidade de Fourier, assim:

$$\langle \hat{\delta}(\vec{k}) \hat{\delta}(\vec{k}')^* \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\vec{k} - \vec{k}') P(\vec{k}). \quad (5.18)$$

onde  $\delta_D(\vec{k})$  é a função delta de Dirac em  $3D$  e  $\hat{\delta}(\vec{k})^*$  denota o conjugado complexo do campo de densidade de Fourier.

Com as aclarações anteriores podemos agora definir a função de correlação de 2-pontos:

$$\xi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \equiv \langle \delta(\vec{x}_1) \delta(\vec{x}_2) \rangle, \quad (5.19)$$

a qual representa a transformada de Fourier do espectro de potência,  $P(k)$ , (onde  $j_0$  é a função de Bessel):

$$\xi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int P(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k \quad \Rightarrow \quad \xi(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int P(k) j_0(kx) k^2 dk. \quad (5.20)$$

De acordo com o princípio cosmológico, o campo de densidade é considerado estatisticamente homogêneo e isotrópico em grandes escalas, de modo que o espectro de potência depende apenas do módulo do número de onda  $k = |\vec{k}|$  e a função de correlação apenas do módulo de  $x = |\vec{x}|$ . Isto é equivalente a ter, a partir da expressão (5.19),  $\xi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \xi(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \xi(|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|)$ .

Sabemos que a função de correlação de dois pontos é uma medida de como as fontes em cluster são comparadas a uma distribuição de Poisson aleatória (randômica) [168]. A função de correlação de dois pontos  $\xi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  é definida pela probabilidade conjunta (excesso de probabilidade) de encontrar um objeto em ambos elementos de volume  $dV_1$  e  $dV_2$  com uma separação de  $\vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$  [169].

Agora procedemos a calcular esse excesso de probabilidade, para isso fazemos as seguintes considerações:

- se temos  $n$  pontos num dado volume  $V$ , a densidade média de pontos é dada por  $\bar{\rho} = \frac{n}{V}$ ,
- $V \Rightarrow dV$ , então  $dP = \bar{\rho} dV$  é a probabilidade de encontrar um ponto no elemento de volume  $dV$ ,
- a probabilidade de encontrar um ponto no elemento de volume  $dV_1$  localizado em  $\vec{x}_1$  e, ao mesmo tempo, encontrar outro ponto no elemento de volume  $dV_2$  localizado em  $\vec{x}_2$  vai depender de como os pontos estão distribuídos na amostra,

logo, se os pontos estão aleatoriamente distribuídos<sup>6</sup> a probabilidade  $dP_{12}$  conjunta é dada pelo produto das probabilidades individuais, assim:

$$dP_{12} = (\bar{\rho} dV_1)(\bar{\rho} dV_2). \quad (5.21)$$

No caso de ter uma aglomeração ou segregação<sup>7</sup> dos pontos, introduzimos a função de correlação

<sup>6</sup>Isso quer dizer que não existe nenhum lugar preferencial em relação ao outro.

<sup>7</sup>Ato ou efeito de segregar(-se), afastamento, separação, etc.

$\xi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ , tal que<sup>8</sup>:

$$dP_{12} = \bar{\rho}^2 \left[ 1 + \xi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \right] dV_1 dV_2 \quad \Longrightarrow \quad dP_{12} = \bar{\rho}^2 \left[ 1 + \xi(x) \right] dV_1 dV_2 \quad (5.22)$$

a partir desta última expressão, temos:

- se  $\xi(x) = 0$ , os pontos (galáxias) estão descorrelacionados (distribuídos aleatoriamente). Então, o número de pares, a probabilidade, é apenas o número esperado de galáxias em  $dV_1$  vezes o número esperado em  $dV_2$ .
- se  $\xi(x) > 0$ , temos uma forte aglomeração de pontos (galáxias).
- se  $\xi(x) < 0$ , temos pontos (galáxias) mais espaçados.

### 5.2.2.2 Estimadores da 2PCF

Como sabemos a 2PCF pode ser definida em termos do contraste de densidade:  $\xi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \equiv \langle \delta(\vec{x}_1) \delta(\vec{x}_2) \rangle$ , tal que a 2PCF teria que ser calculada a partir da flutuação na densidade<sup>9</sup> dentro de uma casca esférica  $dx$  extremamente fina. Por outro lado, não sempre teremos esferas completas de raio  $x$  para todas as posições dentro do volume da amostra, por isso devemos levar em conta os efeitos de borda. É importante medir a 2PCF das galáxias no Universo porque dá acesso à distribuição subjacente da *matéria escura*, que está relacionada aos parâmetros cosmológicos e à física do Universo primordial.

Então, devido a essas dificuldades de medir a 2PCF a partir das flutuações, devemos recorrer à contagem de pares de galáxias. Justamente, uma estimativa da função de correlação para os atuais levantamentos de galáxias se faz uso do estimador de **Landy & Szalay**<sup>10</sup>, que deve atingir uma variância mínima. Isso só é verdade, no entanto, para uma função de correlação que desaparece [171].

Estimadores da função de correlação de dois pontos  $\xi(s)$  (sendo agora  $s$  a separação comóvel) foram estudados por vários autores [40, 172–175]. Em seguidamente escrevemos esses estimadores:

$$\xi_{PH}(s) = \frac{DD(s)}{RR(s)} - 1 \quad [\text{Peebles \& Hauser (1974)}] \quad (5.23)$$

$$\xi_{Hew}(s) = \frac{DD(s) - DR(s)}{RR(s)} \quad [\text{Hewett (1982)}] \quad (5.24)$$

$$\xi_{DP}(s) = \frac{DD(s)}{DR(s)} - 1 \quad [\text{Davis \& Peebles (1983)}] \quad (5.25)$$

$$\xi_H(s) = \frac{DD(s)RR(s)}{DR^2(s)} - 1 \quad [\text{Hamilton (1993)}] \quad (5.26)$$

<sup>8</sup>Levamos em conta que:  $x = |\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$ . Ademais  $P_{12}$  não é estritamente a probabilidade verdadeira, pois não está ainda normalizada.

<sup>9</sup>Na prática, existe uma dificuldade de estimar a densidade por causa das condições de contorno e dos critérios de seleção.

<sup>10</sup>Este estimador é quase imparcial e sua variância é quase Poisson, este estimador de  $\xi_{LS}$  é preferido em relação a vários outros estimadores [170].

$$\xi_{LS}(s) = \frac{DD(s) - 2DR(s) + RR(s)}{RR(s)} \quad [\text{Landy \& Szalay (1993)}] \quad (5.27)$$

Geralmente, as contagens de pares nos dados (reais) são comparadas com as contagens de pares em amostras aleatórias (randômicas) que seguem a geometria da pesquisa. Na literatura se considera um catálogo de  $n_d$  objetos na amostra de dados e  $n_r$  na amostra aleatória e, em seguida, se calcula três conjuntos de números de pares ( $DD$ ,  $RR$  e  $DR$ ) como uma função binada da separação comóvel  $s$ :

- dentro da amostra de dados,  $dd(s)$  é o número de pares de galáxia-galáxia dentro de um bin com centro em  $s$  e pode ser normalizado pelo número total de pares (número de pares distintos) como:

$$DD(s) = \frac{dd(s)}{\frac{n_d(n_d - 1)}{2}}, \quad (5.28)$$

- dentro da amostra aleatória,  $rr(s)$  é o número de pares de aleatório-aleatório normalizado como:

$$RR(s) = \frac{rr(s)}{\frac{n_r(n_r - 1)}{2}}, \quad (5.29)$$

- entre ambas amostras (correlação cruzada),  $dr(s)$  é o número de pares galáxia-aleatório normalizado como:

$$DR(s) = \frac{dr(s)}{n_r n_d}. \quad (5.30)$$

Alguns pesquisadores compararam o comportamento dos diferentes estimadores da função de correlação de dois pontos, principalmente no regime de pequena escala e usando amostras menores, por exemplo temos: Em Pons-Bordería et al. [176], foram analisados seis estimadores, incluindo os estimadores (5.26) e (5.27), e os autores não encontraram nenhum vencedor entre esses estimadores. Em Kerscher [170,177], nove estimadores foram considerados, e os estimadores que apresentaram as melhores propriedades foram os estimadores de  $\xi_{LS}$  e  $\xi_H$ . Também Labatie et al. demonstrou que o estimador de  $\xi_{PH}$  é fortemente afetado pelo ruído em grandes escalas [178].

### 5.2.3 O espectro de potência

Na teoria de perturbações se realiza um tratamento estatístico a dita perturbações para poder discretizar nosso Universo, ou seja, o dividimos em volumes (células) independentes, onde a densidade de massa do Universo possua características estatísticas idênticas em cada volume. No entanto, a medida que estas células evoluem a interação gravitacional mútua existente, não permite que estes volumes evoluam de maneira independente. Por isso, fazer o análise (estudo) no espaço das posições não é conveniente a fim de manter a independência de cada célula. Devido a está necessidade se considera outra abordagem para as perturbações da densidade, esta abordagem consiste em identificar cada perturbação como uma superposição de ondas planas. Então, é necessário utilizar o espaço de Fourier (ou espaço recíproco), tal que cada onda plana estará associada a um número de onda  $k$  que evolui independentemente enquanto ainda permanece no regime linear.

Portanto, as propriedades estatísticas de uma distribuição de galáxias e aglomerados de galáxias podem ser melhor estudadas através da definição do *espectro de potência*. Podemos desta forma,

escrever o contraste de densidade como:

$$\delta(x) = \sum_k \delta_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \sum_k \delta_k^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (5.31)$$

Onde  $\delta_k$  são os coeficientes de Fourier. Estes coeficientes são quantidades complexas e podem ser calculados assim:

$$\delta_k = \frac{1}{V_j} \int_{V_j} \delta(x) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} dx. \quad (5.32)$$

Nesta equação (5.32)  $V_j$  é o volume de cada célula representada no espaço de Fourier<sup>11</sup>. Também temos que:  $\delta_{\vec{k}}^* = \delta_{-\vec{k}}$ . No caso que  $k = \vec{k} = 0$ , a conservação da massa dentro do volume  $V_j$  implica que  $\delta_k = 0$ .

Como estamos interessados nas propriedades estatísticas de  $\delta(x)$ , temos que por definição seu valor médio é zero,  $\langle \delta(x) \rangle = 0$ . A variância não é zero e sua definição se escreve assim:

$$\sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle = \sum_k \langle \delta_k \rangle^2 = \frac{1}{V_j} \sum_k \delta_k^2. \quad (5.33)$$

Se tomarmos o limite quando:  $V_j \rightarrow \infty$ , a variância pode ser escrita assim<sup>12</sup>:

$$\sigma^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta_k^2 d^3k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \delta_k^2 4\pi k^2 dk = \int_0^\infty \Delta_k^2 d(\ln k) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) k^2 dk, \quad (5.34)$$

e

$$\Delta_k^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} P(k). \quad (5.35)$$

Nestas duas últimas expressões identificamos  $P(k)$  como o espectro de potência da perturbação (ou espectro de potência da função de densidade ou simplesmente espectro de potência) e  $\Delta_k^2$  é a contribuição para a variância de cada intervalo logarítmico de  $k$ . A função de  $P(k)$  nos permite comparar teoria e observação, já que os modos perturbados evoluem dentro do regime linear e a forma da função  $P(k)$  não muda neste período.

Segundo o teorema Wiener-Khinchin, quando  $V_j \rightarrow \infty$ , a função de correlação é [179, 180]:

$$\xi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int P(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k, \quad (5.36)$$

esta expressão e a transformada de Fourier do espectro de potência e a transformada inversa fornece:

$$P(k) = \int \xi(x) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3x. \quad (5.37)$$

<sup>11</sup>Isto nos possibilita calcular todos os  $\delta_k$ , para logo conhecer completamente  $\delta(x)$ .

<sup>12</sup>Levar em conta que estamos assumindo um campo de densidade estatisticamente homogêneo é isotrópico, e a dependência vai ser somente do módulo,  $k = |\vec{k}|$ .

### 5.3 Estatística da amostra

O mapeamento de galáxias (Galáxias Vermelhas Luminosas (**LRG**), aglomerados de galáxias, galáxias de linha de emissão ou quasares [181–183], que são usados como traçadores cosmológicos da evolução do Universo), a partir da qual a informação é obtida para estudar as oscilações acústicas bariônicas<sup>13</sup>, é feita através de observações no céu obtendo posições angulares e redshifts de milhares ou milhões de galáxias<sup>14</sup> com resolução finita na medida de redshift. Estas observações são feitas por longos períodos que podem durar anos. A pesquisa do mapeamento dependerá em grande medida das condições atmosféricas do local de observação, da qualidade e disponibilidade do telescópio, da calibração dos dados, etc.

Por outro lado devemos lidar com dois fenômenos, associados à limitação no mapeamento:

- ao fato da amostra ser obtida segundo alguns critérios de seleção, onde só podemos mapear estruturas a partir de um *fluxo limite*,
- conhecer o erro associado à distribuição espacial (variância cósmica)<sup>15</sup>, dito de outra maneira: será possível que o tamanho de nossa amostra atinga escalas de comprimento suficiente para descrever a amplitude e a fase dos modos das perturbações na densidade.

Logo, descrevemos estes efeitos observacionais.

#### 5.3.1 Ruído e critério de seleção

Os mapas que observamos através de um telescópio não contém necessariamente todas as galáxias na amostra, se consideramos somente aquelas cujo brilho é superior a um determinado fluxo limite. Os grandes levantamentos mapeam apenas uma pequena região do campo de densidade do nosso Universo, por isso devemos levar em conta que a amostra que estamos analisando corresponde a uma representação incompleta do campo de densidade. Então, define-se a função de seleção  $W(\vec{x})$  que descreve o número médio de objetos em função da distância radial levando em conta o critério de seleção (fluxo limite estabelecido). A função de seleção<sup>16</sup> é interpretada como a probabilidade de encontrar uma galáxia na posição  $|\vec{x}|$  ou também pode ser interpretada como o número de galáxias por unidade de volume na posição  $|\vec{x}|$ .

Considerando que temos  $N$  pontos num dado volume  $V$  onde esses  $N$  pontos estão na posição  $\vec{x}_i$ , esses pontos foram selecionados utilizando a função de seleção  $W(\vec{x})$ . A função de seleção mais comum tem as seguintes características:

- $W(\vec{x})$  assume um valor constante dentro da amostra,
- $W(\vec{x})$  assume um valor nulo (zero) fora da amostra.

Esta função de seleção é normalizada assim:

$$\int W(\vec{x})dV = 1 \quad \implies \quad W(\vec{x}) = \frac{1}{V} \quad (\text{DENTRO DA AMOSTRA}) \quad (5.38)$$

<sup>13</sup>Análises da 2PCF produziram detecções robustas da assinatura BAO em diferentes conjuntos de dados, fornecendo medidas precisas da relação de distância-redshift, principalmente usando **LRG** [17, 184, 185], mas também com aglomerados de galáxias [186, 187].

<sup>14</sup>Muitas vezes obtidas com técnicas fotométricas.

<sup>15</sup>Não há acesso a mais do que uma única realização do Universo e, experimentalmente, você não pode obter a variância estatística diretamente.

<sup>16</sup>Também chamada: função janela.

Com estas considerações podemos agora escrever o contraste de densidade dentro da amostra, assim:

$$\delta_{amostra}(\vec{x}) = \delta(\vec{x}) V W(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} V W(\vec{x}) = \frac{V}{N} \sum_i w_i \delta_D(\vec{x} - \vec{x}_i) - V W(\vec{x}), \quad (5.39)$$

onde  $\rho = \sum \delta_D(\vec{x} - \vec{x}_i)$ ,  $w_i = V W(\vec{x}_i)$  e  $\bar{\rho} = \frac{N}{V}$ .

Logo, podemos escrever o contraste de densidade no espaço de Fourier assim:

$$\delta_k = \frac{V}{N} \int \left( \sum_i w_i \delta_D(\vec{x} - \vec{x}_i) - V W(\vec{x}) \right) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} dV = \frac{1}{N} \sum_i w_i e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} - W_k, \quad (5.40)$$

onde:

$$W_k = \int W(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} dV = \frac{4\pi}{V} \int_0^R \frac{\text{sen}(kr)}{kr} r^2 dr = \frac{3(\text{sen}(kR) - kR \cos(kR))}{(kR)^3} \quad (5.41)$$

é a função de seleção no espaço de Fourier em termos do vetor de onda e  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ .

Por outro lado podemos definir uma quantidade,  $\langle \Delta^2(\vec{k}) \rangle$ , que está relacionada com o espectro de potência "verdadeiro",  $P(\vec{k})$ , e seu respectivo ruído,  $P_n$ , devido à amostra.

$$\langle \Delta^2(\vec{k}) \rangle \equiv V \langle \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}}^* \rangle = P(\vec{k}) + P_n, \quad (5.42)$$

onde:

$$P(\vec{k}) = \frac{V}{N^2} \sum_{i \neq j} \langle w_i w_j \rangle e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}_i - \vec{x}_j)} = V W_k^2, \quad (5.43)$$

e

$$P_n = \frac{V}{N^2} \sum_i w_i^2 = \frac{V}{N} \quad \text{para} \quad w_i = 1 \quad (\text{DENTRO DA AMOSTRA}). \quad (5.44)$$

Uma observação importante é: para  $n \equiv \frac{N}{V} \rightarrow \infty$ , o termo de ruído se torna desprezível<sup>17</sup>.

O estimador do espectro de potência é:

$$\hat{P}(\vec{k}) = \Delta^2(\vec{k}) - P_n, \quad (5.45)$$

nesta última expressão (5.45) o espectro de potência "verdadeiro" é  $P(\vec{k}) \equiv \langle \hat{P}(\vec{k}) \rangle$  e  $P_n$  é a contribuição do ruído que deve ser retirado, já que a distribuição das galáxias não apresenta uma densidade numérica alta.

### 5.3.2 Variância cósmica

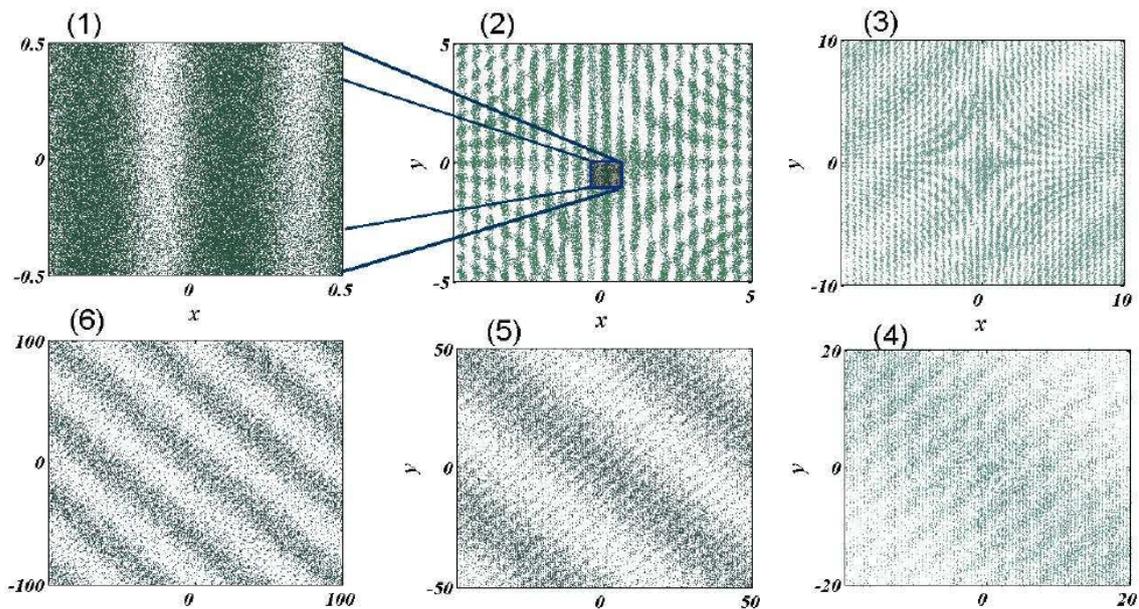
Para saber qual erro está sendo feito nos estimadores estatísticos, devemos levar em consideração a área de observação e o número de pontos (galáxias). Quanto maiores forem, mais precisas

<sup>17</sup>Quanto maior a densidade de pontos menor será o ruído.

serão as nossas estimativas<sup>18</sup>.

A *variância cósmica* é o erro que surge quando não conseguimos ver o quadro geral: não podemos estimar o aglomerado (agrupamento) em escalas maiores do que o tamanho da nossa pesquisa. Isto é ilustrado esquematicamente na Figura 5.1, onde os pontos são distribuídos de acordo com um padrão que consiste em modos de Fourier com uma variedade de comprimentos de onda e direções. O tamanho da pesquisa aumenta no sentido horário, a partir do canto superior esquerdo, permitindo que os modos de grande comprimento de onda se tornem visíveis. Para reconstruir esses padrões de grande escala, é necessário aumentar o volume da pesquisa. Na cosmologia, é impossível continuar aumentando o tamanho da pesquisa indefinidamente, pois estamos limitados ao universo observável e, portanto, os valores do espectro de potência nas maiores escalas são fundamentalmente limitados por essa variância cósmica [188].

Como foi mencionado acima, o espectro de potência vai apresentar duas fontes de erro: a *variância cósmica*<sup>19</sup> e o *ruído*<sup>20</sup>. Então, para diminuir a variância cósmica, devemos ampliar o volume mapeado pelos grandes levantamentos.



**Figura 5.1.** Variância cósmica: a medida que a janela se expande (no sentido horário a partir do canto superior esquerdo), os modos de grande escala na distribuição de pontos tornam-se visíveis, devido à redução na variância cósmica. O número total de pontos é o mesmo em cada painel [188].

### 5.3.3 Efeitos sistemáticos

Apresentamos alguns efeitos sistemáticos.

<sup>18</sup>Isso quer dizer que teremos menos incerteza na função de correlação ou no espectro de potência.

<sup>19</sup>Está associada à informação cosmológica perdida em grandes escalas devido ao número finito dos modos observados.

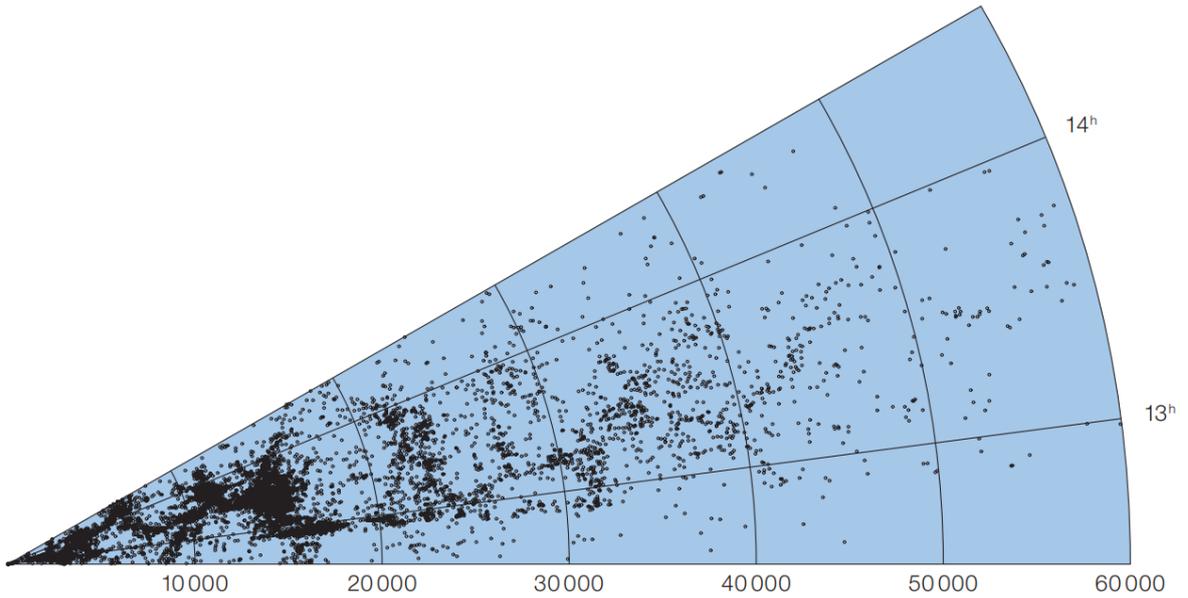
<sup>20</sup>Está relacionado à natureza discreta das galáxias.

### 5.3.3.1 Velocidade peculiar

É sabido que a distorção na posição das galáxias no espaço do redshift é afetado pelo movimento peculiar<sup>21</sup>. Estes efeitos se manifestam na *função de correlação* e no *espectro de potência* através de um termo adicional<sup>22</sup>, que está relacionado à taxa de crescimento das estruturas<sup>23</sup>.

A velocidade peculiar:

- *em pequenas escalas*, é aproximadamente aleatória. Esta característica de movimento aleatório influi como um erro na determinação da posição da galáxia, mas este erro pode ser considerado como um erro experimental. Também, este movimento aleatório dentro dos aglomerados de galáxias provocam os chamados *dedos de Deus*<sup>24</sup> (ver Figura 5.2).
- *em escalas maiores*, as galáxias são direcionadas para regiões com maior concentração, ou seja, o campo de velocidade está associado ao campo gravitacional. Nesse caso, o erro na medida da posição da galáxia provocado pela velocidade peculiar é um erro sistemático [189].



**Figura 5.2.** Um diagrama de cone (RA: right ascension) ao redor do superaglomerado de Shapley, de Dominique Proust et al. [190]. Dedos de Deus (FoG: Fingers-of-God) estão presentes nitidamente na seção mais densa da distribuição de galáxias, como formas alongadas que apontam para a origem.

A posição da galáxia medida no espaço de redshift é:

$$\vec{S}(\vec{r}) = \vec{r} \left( 1 - \frac{v_r(r)}{r} \right), \quad (5.46)$$

onde  $\vec{S}$  é a posição de uma galáxia no espaço de redshift,  $\vec{r}$  é a verdadeira posição da galáxia no espaço real ( $r = |\vec{r}|$ ) com o observador na origem, e  $v_r(r)$  é a componente da velocidade peculiar na

<sup>21</sup>Este movimento peculiar é devido ao fluxo de matéria durante a formação de estruturas.

<sup>22</sup>Este termo é conhecido como: **Distorção do Espaço de Redshift (RSD)**.

<sup>23</sup>Fator de escala:  $a$ , função de crescimento:  $D(a)$  e taxa de crescimento linear:  $f \equiv \frac{d \ln[D(a)]}{d \ln[a]}$ .

<sup>24</sup>Dedos de Deus são pequenas distorsões na direção da linha de visada.

direção radial.

Nas análises de Estrutura a grande escala (LSS: Large-scale structure), as distâncias aos objetos astronômicos são inferidas a partir de seus redshifts observados,  $z_{obs}$ . Além do redshift cosmológico  $1 + z_c = \frac{1}{a}$ , há uma componente adicional devido às velocidades peculiares das galáxias ao longo da linha de visada (LoS: Line-of-Sight). Esta componente adicional é:  $z_{pec} = \vec{v}_r \cdot \hat{r}$ , onde  $\vec{v}_r$  é a velocidade peculiar comóvel e  $\hat{r}$  é a direção na linha de visada. Então, considerando anisotropias dependentes da linha de visada nas estatísticas de aglomerados de galáxias, o  $z_{obs}$  fica assim:  $1 + z_{obs} = (1 + z)(1 + z_{pec})$ . A velocidade peculiar tem dois componentes principais, as quais são:

- em grandes escalas; a queda em poços potenciais cuja predição em ordem linear foi descrita pela primeira vez por Kaiser [189]
- em pequenas escalas; distorções devido ao movimento orbital em estruturas virializadas [191].

Na teoria linear podemos modelar este primeiro efeito devido à velocidade peculiar. Dadas as perturbações iniciais do contraste de densidade Gaussiano  $\delta(\vec{k})$ , é possível ter o crescimento do contraste de densidade mediante a seguinte expressão:

$$\delta(\vec{k}, a) = D(a)\delta(\vec{k}), \quad (5.47)$$

onde  $D(a)$  é a *função de crescimento* tal como é definido em [15]. Além disso, a divergência do campo de velocidade é dada por:

$$\nabla \cdot \vec{v}_r(\vec{k}, a) = -a H(a) f(a) D(a) \delta(\vec{k}), \quad (5.48)$$

sendo  $f \equiv \frac{d \ln[D(a)]}{d \ln[a]}$ , a taxa de crescimento linear.

Podemos encontrar o bias (viés) linear,  $b$ , da amostra de galáxias. Este bias está relacionado com a taxa de crescimento linear,  $f$ , e o fator de Kaiser  $S$ , [189]. Então em ordem linear, o fator de Kaiser de uma amostra de galáxias é dado pela razão da função de correlação no espaço de redshift  $\xi_{zs}$  e a função de correlação no espaço real  $\xi_{rs}$ , assim [189]:

$$S \equiv \frac{\xi_{zs}}{\xi_{rs}} = 1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2 \quad \text{onde} \quad \beta \equiv \frac{f}{b}. \quad (5.49)$$

A velocidade peculiar em escalas menores foi modelada com modelos fenomenológicos simples, onde a dispersão de velocidade da estrutura virializada tem uma distribuição Gaussiana ou uma distribuição Lorentziana [192, 193]. Mais para frente observaremos como as velocidades peculiares causam uma distorção do espaço do redshift.

### 5.3.3.2 Efeitos não-lineares na teoria de BAO

Se sabe que as amplitudes das flutuações em grande escala evoluem de forma independente e podem ser descritas pela teoria linear<sup>25</sup>, ou seja, escalas nas quais o contraste de densidade satisfaz  $\delta \ll 1$ . Nas escalas em que o contraste de densidade são próximos da unidade, as flutuações começam a se acoplar e passam a evoluir de forma não-linear levando em conta efeitos do colapso gravitacional, viés (bias) e velocidade peculiar. O colapso gravitacional não-linear, o enviesamento de

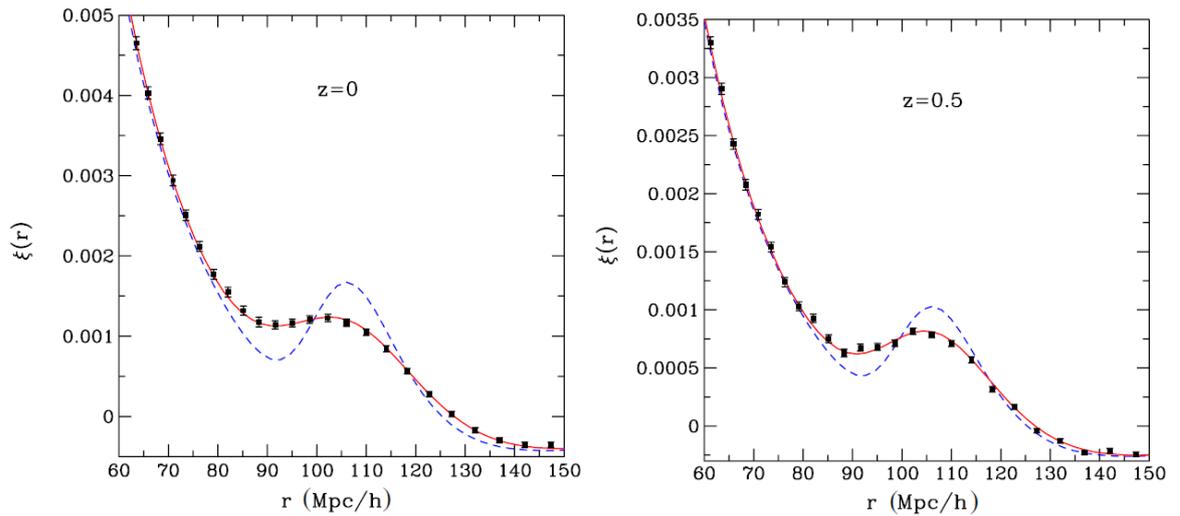
<sup>25</sup>Também a análise de aglomerados de galáxias é mais "simples" de ser estudado em escalas dentro do regime linear.

aglomerados de galáxias e as distorções do espaço de redshift modificam a medida de aglomerados de galáxias<sup>26</sup>. Estes efeitos também degradam a precisão na medição da escala acústica.

Na literatura existe diferentes enfoques teóricos para descrever a evolução não-linear da característica de BAO. Mostramos duas abordagens estudadas na cosmologia:

- *a teoria de perturbação em segunda ordem*: com a possibilidade de combinar seus resultados analíticos com simulações numéricas, a fim de calcular o deslocamento médio de traçadores em pares dentro da aproximação de Zel'dovich [196, 197],
- *a teoria da perturbação renormalizada* [198]: descreve o crescimento não-linear das estruturas decompondo-as em uma propagação linear mais interações, e somando todas as possibilidades.

Estas duas abordagens estão em concordância e mostram que estes efeitos não-lineares causam tanto um alargamento como uma mudança do pico de BAO para escalas menores, na função de correlação ou equivalentemente no espectro de potência. Os autores Crocce e R. Scoccimarro mostraram que empregando a teoria de perturbação renormalizada, o pico do BAO é suavizado e deslocado em escalas menores, em relação à previsão da teoria linear, e isto está em excelente concordância com as medidas de simulações numéricas [198]. A seguinte Figura 5.3 compara as previsões da teoria linear e da teoria de perturbação renormalizada.



**Figura 5.3.** A função de correlação de dois pontos para  $z = 0$  (painel da esquerda) e  $z = 0.5$  (painel da direita). A linha tracejada (azul) corresponde à função linear de dois pontos, a linha sólida (vermelha) é a previsão da *teoria de perturbação renormalizada* e barras de erro (símbolos pretos) são as medições em simulações numéricas (corresponde a 50 realizações compreendendo um volume total de aproximadamente  $105 \left(\frac{\text{Gpc}}{h}\right)^3$  [198].

Os pesquisadores Orban e D. H. Weinberg interpretaram a largura do pico BAO final na função de correlação,  $\sigma_{BAO}$ , como a soma entre a quadrática da largura inicial,  $\sigma_{IC}$ , devido ao "Silk damping", e o deslocamento relativo médio-quadrático entre pares,  $\Sigma_{pares}$  [199]:

$$\sigma_{BAO} = \sigma_{IC}^2 + \Sigma_{pares}^2 \quad (5.50)$$

<sup>26</sup>O crescimento de estruturas, as velocidades peculiares e o viés comportam-se diferentemente de como a teoria linear prediz [194, 195].

onde:

$$\Sigma_{\text{pares}}^2 = r_{12}^2 \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{2\pi^2} P(k) f_{\parallel}(k r_{12}), \quad (5.51)$$

sendo  $r_{12}$  a separação,  $P(k)$  o espectro de potência e  $f_{\parallel}$  dado por:

$$f_{\parallel}(x) = \frac{2}{x^2} \left( \frac{1}{3} - \frac{\text{sen } x}{x} - \frac{2 \cos x}{x^2} + \frac{2 \text{sen } x}{x^3} \right). \quad (5.52)$$

No limite quando  $r_{12} \rightarrow \infty$ , a equação (5.51) torna-se:

$$\Sigma_L^2 = \frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty P_L(q) dq, \quad (5.53)$$

que é a raiz quadrada média de deslocamento de partículas na teoria de perturbações, incluindo a contribuição de movimentos em massa, que desloca coerentemente todas as partículas em grandes escalas<sup>27</sup>.

Por outro lado, os autores Hee-Jong Seo et al. mostraram que a evolução não-linear atenua as oscilações harmônicas no espectro de potência por um fator exponencial, assim:

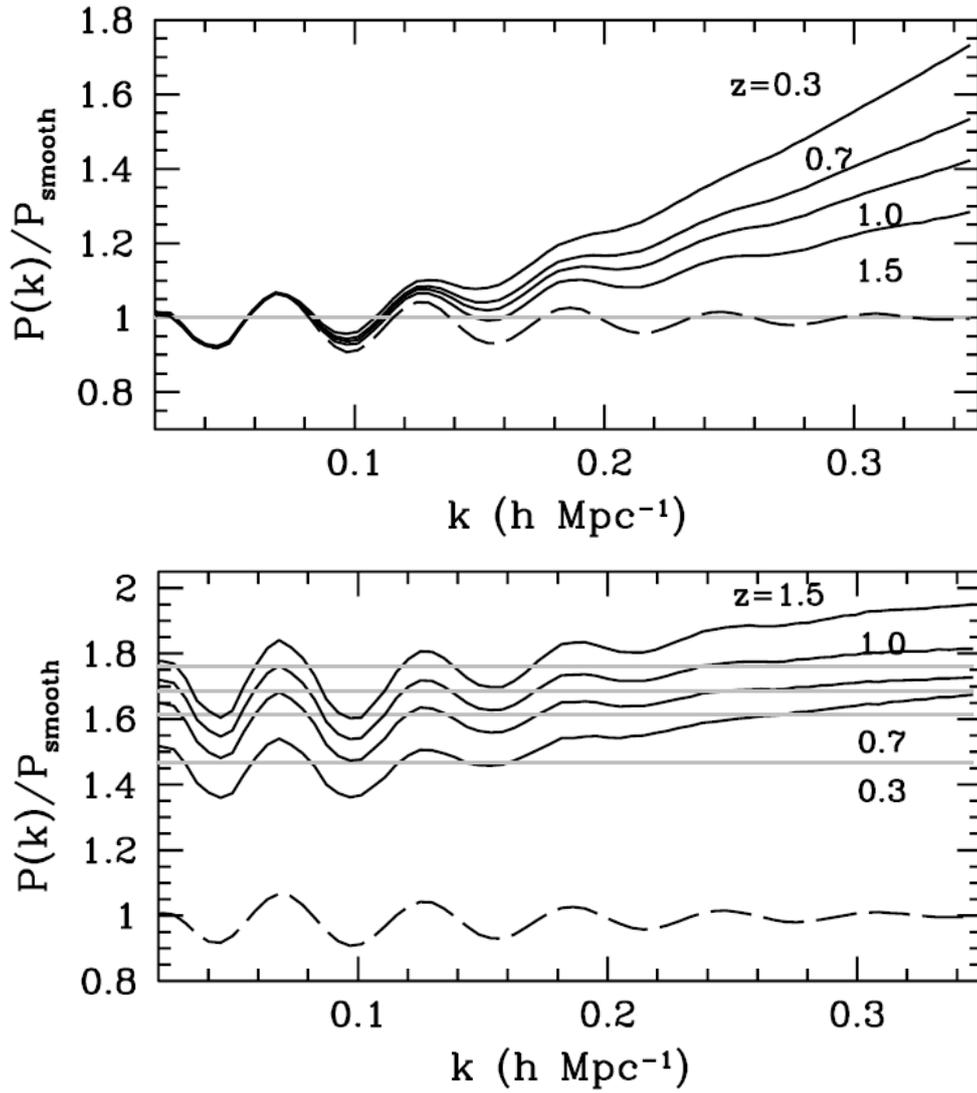
$$P_{NL}(k) = P_L(k) e^{-k^2 \Sigma_{\text{pares}}^2}. \quad (5.54)$$

Na seguinte Figura 5.4, se mostra uma comparação entre o espectro de potência previsto pela teoria linear ( $P_L$ ) e o espectro de potência não linear ( $P_{NL}$ ) calculado através de simulações de N-corpos [194].

No trabalho dos pesquisadores R. E. Angulo et al. mostraram também a diferença entre o espectro de potência linear  $P_{lin}(k)$  e o espectro de potência simulado que contem os efeitos não-lineares  $P_r(k)$  (ver Figura 5.5). Neste trabalho se observa que a evolução dos modos de Fourier acoplados aumenta para maiores valores de  $k$  e também se observa que quando a razão  $\frac{P_r(k)}{P_{lin}(k)}$  sofre um desvio da unidade os modos iniciam o acoplamento e passam a uma escala não-linear. Essa transição entre os modos e o regime linear ocorre aproximadamente no mesmo comprimento de onda  $k \approx 0.1 \frac{h}{Mpc}$  para diferentes redshift [195].

---

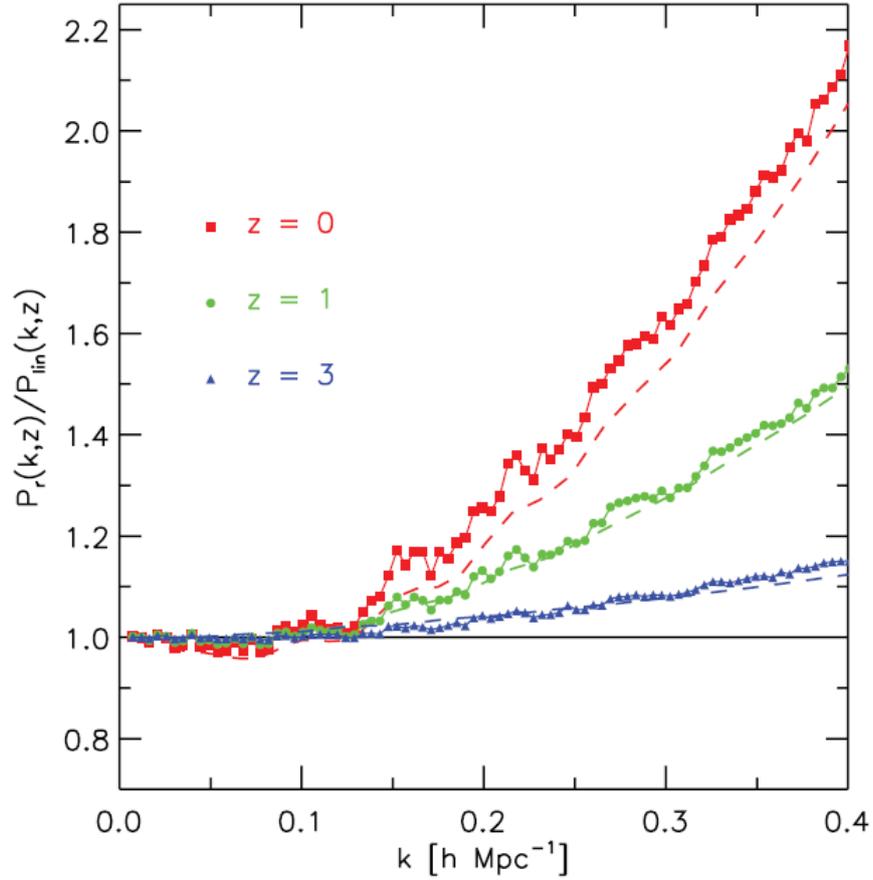
<sup>27</sup>Em outras palavras, a raiz do deslocamento quadrático médio,  $\Sigma_{\text{pares}}$  é assintótico ao deslocamento de Zel'dovich.



**Figura 5.4.** Espectro de potência  $P(k)$ , no espaço real (panel superior) e espectro de potência no espaço de redshift (panel inferior), obtidas de simulações numéricas (não lineares—linhas pretas sólidas) de N-corpos para  $z = 0.3, 0.7, 1.0$  e  $1.5$ , enquanto as linhas tracejadas são os espectros de potência lineares. As linhas cinzas representam as amplitudes em grande escala esperadas na teoria linear. No espaço de redshift, os espectros de potência são deslocados para maior clareza [194].

A distorção do espaço de redshift (RSD), e em particular o efeito Kaiser, provoca um alargamento (ampliação) extra do pico de BAO, desfocando as medidas do aglomerado ao longo da linha de visada e criando anisotropias no aglomerado. O viés (bias) também pode alterar as amplitudes da função de correlação e do espectro de potência, com efeitos menores em suas formas. A evolução não linear pode alterar os pesos relativos das regiões superdensa e subdensa, alterando a escala do pico BAO<sup>28</sup> [200].

<sup>28</sup>Simulações numéricas prevêem um deslocamento de BAO de 0.1% a 0.8%, em  $z = 1$ , dependendo do viés (bias) [200].



**Figura 5.5.** Comparação do espectro de potência linear  $P_{lin}(k)$  e o espectro de potência simulado que contém os efeitos não-lineares  $P_r(k)$ , para diferentes épocas de nosso Universo. As linhas tracejadas correspondem ao ansatz proposto por Hamilton et al. [195,201].

### 5.3.4 Efeitos observacionais

#### 5.3.4.1 O efeito Alcock-Paczynski (AP)

As distorções geométricas podem ser modeladas e assim corrigidas. Além disso, podemos usar essas distorções geométricas para inferir restrições em parâmetros cosmológicos. Isso pode ser feito usando o chamado **teste de Alcock-Paczynski** (teste de AP) [202]. Eles assumiram um objeto esférico de diâmetro fixo (porém desconhecido) em um redshift conhecido  $z$ . Então, como as formas dos objetos observados são diferentes da esperada, devido às distorções geométricas, os parâmetros cosmológicos que induzem as distorções podem ser "ajustados" para restaurar a geometria correta.

Vejamos um exemplo: consideramos o modelo  $\Lambda$ CDM plano, desprezando a contribuição da densidade de radiação,  $\Omega_{r0} \approx 0$  e impondo o parâmetro de estado  $w_\Lambda = -1$ , obtemos que a equação (2.52) se reduz a:

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m0}(1+z)^3 + (1-\Omega_{m0})}. \quad (5.55)$$

Podemos notar que as distorções geométricas<sup>29</sup> dependem do redshift da observação. Um valor

<sup>29</sup>Em geral, o efeito das distorções geométricas aumenta para valores altos do redshifts.

incorreto do parâmetro  $\Omega_{m0}$  introduzirá distorções geométricas. Esse efeito pode ser descrito pelo seguinte parâmetro:

$$F_{AP}(z) \equiv \frac{\left(\frac{r_{\parallel}}{r_{\perp}}\right)_{fid}}{\left(\frac{r_{\parallel}}{r_{\perp}}\right)_{test}} = \frac{\left[d_A(z)H(z)\right]_{fid}}{\left[d_A(z)H(z)\right]_{test}}, \quad (5.56)$$

onde os índices *fid* e *test* se referem aos modelos fiducial e teste cosmológicos assumidos, respectivamente. Nesta expressão também temos que a distância diâmetro angular,  $d_A$ , e dada pela equação (2.68) e as componentes radiais  $r_{\parallel}$  e transversais  $r_{\perp}$ , da distância comóvel entre dois objetos, são dadas por (reintroduzimos a velocidade da luz,  $c$ ):

$$r_{\parallel} = \frac{c}{H(z)} \Delta z \quad \text{e} \quad r_{\perp} = (1 + z) d_A(z) \Delta \theta, \quad (5.57)$$

respectivamente. A partir da expressão (5.56), temos as seguintes consequências:

- Se  $F_{AP} = 1$ , o modelo cosmológico de teste coincide com o fiducial, isso quer dizer que não há distorções geométricas,
- Se  $F_{AP} > 1$ , a distorção radial é maior que a transversal (alongamento da linha de visada),
- Se  $F_{AP} < 1$ , a maior distorção está na componente transversal (encolhimento da linha de visada).

### O teste de Alcock-Paczynski na escala BAO

Já sabemos que o teste de Alcock-Paczynski é uma sonda do aglomerado da Estrutura em Larga Escala (LSS: Large-Scale Structure) dos parâmetros do modelo cosmológico. Por outro lado podemos calcular o tamanho do objeto no céu (objeto esférico assumido acima), com diâmetro  $\delta l$  em um dado redshift (ver Figura 5.6), assim:

$$\delta \phi = \frac{\delta l}{d_A(z)}. \quad (5.58)$$

A partir do diferencial da distância própria<sup>30</sup> e  $\delta l$  encontramos a seguinte relação:

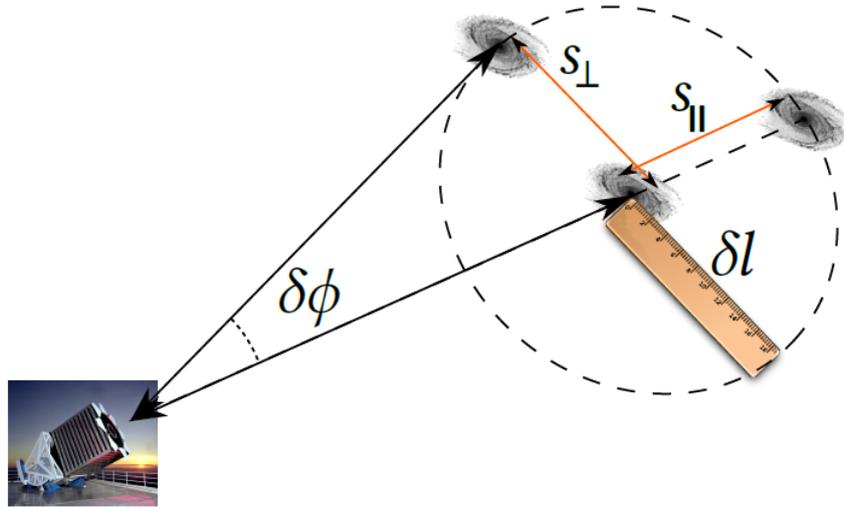
$$\delta d_p = a \delta \phi = \frac{1}{1+z} \frac{c \delta z}{H(z)} = \delta l \quad \implies \quad c \delta z = (1+z) H(z) \delta l. \quad (5.59)$$

Logo, combinando as equações (5.58) e (5.59) determinamos o parâmetro de Alcock-Paczynski,  $F_{AP}(z)$ , dado por:

$$F_{AP}(z) \equiv \frac{\delta z}{\delta \phi} = \frac{(1+z) d_A H(z)}{c}. \quad (5.60)$$

Esta expressão (5.60) é inteiramente deduzida a partir de observações (sempre e quando o  $\delta z$  e  $\delta \phi$  possam ser medidos com precisão).

<sup>30</sup>Temos:  $\delta d_p = a \delta \chi$ , (onde:  $a$  é o fator de escala e  $\chi$  é a distância comóvel).



**Figura 5.6.** Medida da distância usando o efeito Alcock-Paczynski e uma régua padrão, como a escala de BAO. Aqui, galáxias que são fisicamente separadas pela escala BAO,  $\delta l$ , são observadas com uma separação angular  $S_{\perp} = \delta\phi d_A(z)$  e uma separação radial  $S_{\parallel} = \frac{c\delta z}{(1+z)H(z)}$ . Se conhecemos  $\delta l$  então,  $d_A(z)$  e  $H(z)$  podem ser calculados a partir de:  $S_{\perp} = S_{\parallel} = \delta l$ . (Figura extraída do autor: Jan Niklas Grieb)

Sabemos que a escala acústica de BAO é uma escala física mensurável e o pico de BAO na função de correlação ou as oscilações no espectro de potência da CMB, podem ser usado como **régua padrão**<sup>31</sup> para medições geométricas (distâncias) [203]. Então, usando uma medida de aglomerado anisotrópico, a combinação de uma régua padrão e o teste de AP fornece um controle preciso sobre o parâmetro de Hubble e a distância do diâmetro angular (ver Figura 5.6):

$$H(z) = \frac{c\delta z}{1+z} \frac{1}{\delta l} \quad d_A(z) = \frac{\delta l}{\delta\phi}. \quad (5.61)$$

Se as anisotropias no sinal do aglomerado forem negligenciadas, apenas uma medição de distância média angular pode ser executada. Neste caso, a combinação de parâmetros:

$$D_V(z) = \left[ (1+z)^2 d_A^2(z) \frac{cz}{H(z)} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (5.62)$$

é medido em relação à escala do horizonte do som, de modo que os resultados são geralmente expressos como a combinação  $\frac{D_V(z)}{r_s(z_d)}$ .

#### 5.3.4.2 Distorção do espaço de redshift (RSD)

Este efeito observacional resulta do fato de que nossas estimativas de distâncias utilizando o *desvio para o vermelho* (redshift) é diferente da distância radial verdadeira devido às velocidades peculiares das galáxias na *linha de visada* (em inglês: Line-of-Sight). Esses redshift são causados tanto pela expansão de Hubble quanto por qualquer movimento adicional dentro de um referencial comóvel, chamado de velocidade peculiar. Assim, a posição da galáxia medida no espaço de redshift

<sup>31</sup>Uma régua padrão é um objeto cujo tamanho físico é conhecido ou pode ser previsto a partir de outras observações cosmológicas.

é dada por [179]:

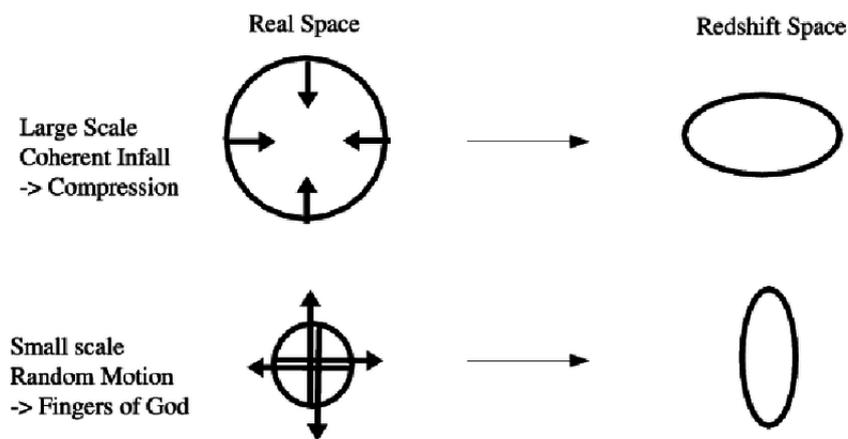
$$\vec{S}(\vec{r}) = \vec{r} - v_r(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad (5.63)$$

onde  $\vec{S}$  é a posição de uma galáxia no espaço de redshift,  $\vec{r}$  é a verdadeira posição da galáxia no espaço real com o observador na origem, e  $v_r(r)$  é a componente radial da velocidade peculiar.

Por outro lado podemos analisar o Redshift. Sabemos que o redshift cosmológico,  $z_c$ , é causado pelo fluxo de Hubble. Entretanto, também as velocidades peculiares dos "traçadores cósmicos" (consideramos os levantamentos de galáxias), precisamente a componente radial de tais velocidades, podem adicionar um termo extra no redshift. Em geral, temos que o *redshift observado*,  $z_{obs}$ , pode ser escrito da seguinte forma:

$$z_{obs} = z_c + \frac{v_r}{c} (1 + z_c) + \frac{\sigma_z}{c}, \quad (5.64)$$

onde o redshift cosmológico,  $z_c$ , é devido à expansão do Universo,  $v_r$  é a componente da linha de visada (componente radial) da velocidade peculiar do objeto (ou galáxia) observado e  $\sigma_z$  é o erro na medida do redshift.



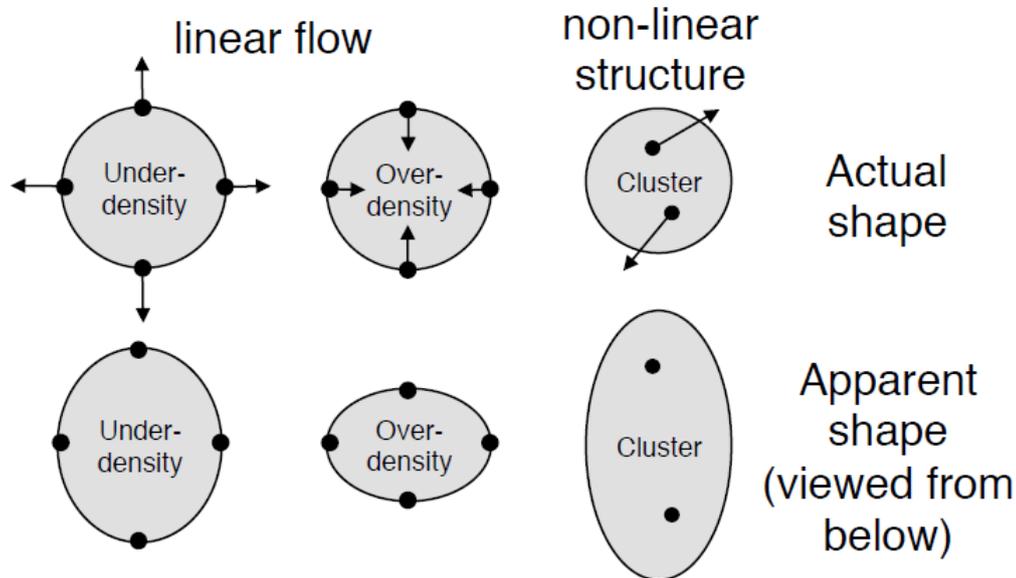
**Figura 5.7.** Representação dos efeitos causados pela medição no espaço do redshift. O regime não-linear produz uma compressão da distribuição (o **efeito Kaiser**), enquanto em pequenas escalas (regime linear) ocorre um alongamento na linha de visada (**Finger of God**).

Em ambas análises, acima, observamos que: as distorções no campo que resultam dos deslocamentos dependentes da velocidade são chamadas de **Distorções do Espaço de Redshift (RSD)**. Podemos distinguir entre dois tipos diferentes de (RSD):

- os chamados **Dedos de Deus (Fingers-of-God) (FoG)** são os efeitos de velocidades peculiares nas pequenas escalas ( $\leq 5 \text{ Mpc}$ ). Nessas escalas, velocidades aleatórias dentro dos aglomerados e grupos de galáxias<sup>32</sup> produzem um alongamento radial da distribuição da galáxia, apontando para o observador, (ver Figura 5.2, Figura 5.7 e Figura 5.8) e

<sup>32</sup>Esses movimentos aleatórios das galáxias atuam como uma incerteza extra na medição do redshift.

- o **efeito Kaiser** é o resultado das velocidades peculiares em grandes escalas, que representam a queda coerente de galáxias nos poços de potenciais dos aglomerados [189] (ver Figura 5.7 e Figura 5.8).



**Figura 5.8.** Este diagrama explica como as estruturas do espaço real (linha superior) aparecem no espaço de redshift (linha inferior) [179].

A Figura 5.8 é interpretado, assim:

- se considere uma galáxia próxima à borda de uma forte superdensidade (*Over-density*): essa galáxia tenderá a cair para a superdensidade, longe de nós, aumentando seu redshift e movendo sua posição aparente para mais perto do centro da superdensidade,
- se considera uma galáxia distante à borda de uma superdensidade parecerá mais próxima e, portanto, veremos que os aglomerados aparecerão "esmagados" ao longo da linha de visada no espaço de redshift,
- de maneira similar, regiões pouco densas parecem "esticadas" ao longo da linha de visada.

### 5.3.4.3 Bias (viés) e as Galáxias Vermelhas Luminosas (LRG) como traçadores

As galáxias<sup>33</sup> representam apenas uma pequena quantidade da matéria total do Universo. Há estudos sobre galáxias que se formam dentro (no centro) de halos de matéria escura, estes halos são estruturas localizadas nos picos da densidade da matéria escura. Estes estudos indicam também que as galáxias não necessariamente se formam no centro do halo, elas estão dispersas na região central do halo e seguem a subestrutura do mesmo halo<sup>34</sup>. Uma abordagem simples para derivar o aglomerado de halos e galáxias pressupõe um bias (viés) linear e uma técnica conhecida como a divisão do pico de fundo (*the peak background split*) [204]. Outra abordagem para saber como as galáxias povoam halos de diferentes massas pode ser modelado pela receita de distribuição de ocupação de halo

<sup>33</sup>As galáxias são traçadores enviesados da densidade da matéria.

<sup>34</sup>Como os halos estão localizados em picos de densidade, podem ser considerados traçadores enviesados do campo de densidade.

(HOD) [205]. Independentemente dos detalhes da modelagem do bias, uma abordagem usual é expandir as flutuações de densidade de galáxias  $\delta_g(\vec{x})$  como uma série de Taylor da densidade de matéria local  $\delta_m(\vec{x})$ , assim:

$$\delta_g(\vec{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n!} \delta_m^n(\vec{x}), \quad (5.65)$$

onde os coeficientes de expansão  $b_n$  são chamados de parâmetros de bias (viés). No regime linear o bias utilizado é dado por  $b_1$  (ou simplesmente  $b$ ) e no regime não-linear mais parâmetros de viés devem ser considerados.

Agora vamos a relacionar a distribuição espacial das galáxias com a distribuição real da matéria. Essa relação depende do tipo de galáxia, ou seja, diferentes galáxias traçam a distribuição da matéria de maneira diferente também. Por outro lado, sabe-se que na maioria dos aglomerados de galáxias, as galáxias mais massivas e mais antigas são encontradas na área central do aglomerado (tal como se explicou acima). Portanto, essas galáxias se acumularão mais em certas regiões do que outras galáxias de diferentes tipos. A expressão matemática que relaciona as galáxias com a matéria é dada por seus respectivos espectros de potências, assim:

$$P_g(k, z) = b^2(z) P_m(k, z), \quad (5.66)$$

onde  $P_g(k, z)$  é o espectro de potência das galáxias,  $P_m(k, z)$  é o espectro de potência da matéria e  $b(z)$  é o parâmetro de bias. Nesta última expressão (5.66), consideramos que  $b(k, z) = b(z)$  porque as medidas limitam a variação com  $k$ , especialmente em grandes escalas [206]. Este parâmetro  $b$  reflete nossa ignorância acerca dos processos físicos envolvidos na formação de estruturas, não somente em relação à aglomeração através da atração gravitacional, como também, a formação estelar e a dinâmica do gás.

O parâmetro de bias pode também ser definida como a razão entre a estatística das flutuações na distribuição de galáxias  $\sigma_{8g}$  e a estatística das flutuações na densidade de matéria  $\sigma_{8m}$ , assim:

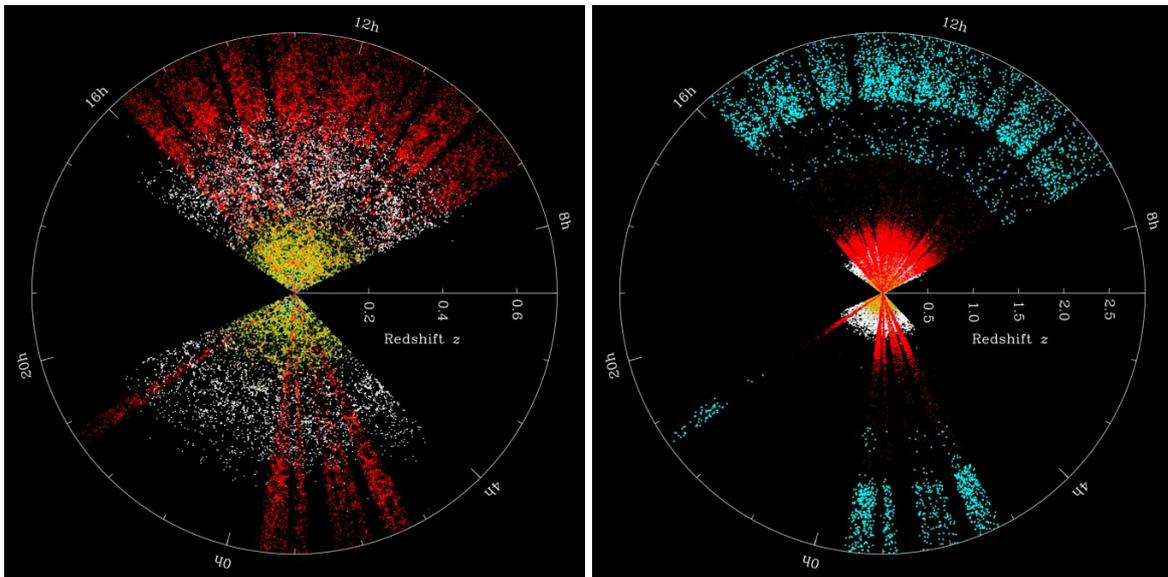
$$b^2 \equiv \frac{\sigma_{8g}}{\sigma_{8m}}. \quad (5.67)$$

Esta expressão (5.67) e  $\delta_g = b \delta_m$ , são válidas apenas no regime linear.

Ao contrário da evolução da matéria escura, a formação de galáxias requer uma análise detalhada da formação de estrelas, resfriamento de gases e acreção de matéria em buracos negros. Durante as últimas décadas, os estudos de formação de aglomerados estabeleceram observacionalmente a dependência da matéria contida neles com a luminosidade, morfologia, cor e tipo espectral das galáxias que as povoam [207, 208].

Se tivermos uma amostra de galáxias o mais homogêneas possíveis (**são chamadas de traçadores**), poderíamos encontrar a distribuição real da matéria. Esses traçadores devem ter as seguintes características: que sua distribuição espacial seja homogênea, que seja bem conhecido como reconstruir seu redshift (no caso fotométrico) e que eles sejam brilhantes. Na prática, os traçadores mais utilizados são as **Galáxias Vermelhas Luminosas** (LRG). As Galáxias vermelhas luminosas tendem a povoar as áreas mais densas dos aglomerados, são antigas, elípticas e vermelhas (*com o espectral que indica*

uma antiga população de estrelas)<sup>35</sup>. Na seguinte Figura 5.9 mostramos as LRG mapeadas pelo BOSS (Baryon Oscillation Spectroscopic Survey)<sup>36</sup>.



**Figura 5.9.** Os pontos vermelhos representam as LRGs mapeadas pelo BOSS em altos redshift em comparação com as LRGs mapeadas anteriormente pelo SDSS<sup>37</sup> representada pelos pontos brancos. As galáxias normais estão indicadas pelos pontos amarelos e os quasares estão indicados pelos pontos azuis. (Figura extraída da tese da pesquisadora: Gabriela Coutinho de Carvalho)

## 5.4 Noções básicas sobre os levantamentos de galáxias (SDSS)

O Sloan Digital Sky Survey (SDSS) é uma das pesquisas mais ambiciosas, influentes na história da Astronomia e de maior sucesso até hoje. Começou no ano 2000 e ainda está operando em sua quarta fase. Os projetos de SDSS são<sup>38</sup>: **APOGEE** (the Apache Point Observatory Galactic Evolution Experiment), **eBOSS** (The Extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey), **MaNGA** (Mapping Nearby Galaxies at APO), **BOSS** (The Baryon Oscillation Spectroscopic Survey), **MARVELS** (The Multi-object APO Radial Velocity Exoplanet Large-area Survey), **SEGUE** (Sloan Extension for Galactic Understanding and Exploration). Em seguidamente, mostramos as fases do projeto de SDSS<sup>39</sup>:

- SDSS - IV : pesquisa atual (2014 - 2020)
  - \* APOGEE - 2                      \* eBOSS                      \* MaNGA
- SDSS - III : pesquisa anterior (2008 - 2014)
  - \* APOGEE                      \* BOSS                      \* MARVELS                      \* SEGUE - 2
- SDSS - I/II : pesquisa anterior (2000 - 2008)
  - \* LEGACY                      \* SUPERNOVA                      \* SEGUE - 1

<sup>35</sup>As LRG brilham fracamente no ultravioleta.

<sup>36</sup>Este projeto, BOSS, tem como objetivo principal detectar o pico acústico das Oscilações Acústicas Bariônicas (BAO).

<sup>38</sup>Neste projeto se utilizou o Observatório Apache Point (APO: Apache Point Observatory) ubicado em México.

<sup>39</sup>[sdss.org](http://sdss.org)

Nas duas primeiras fases da pesquisa SDSS-I/II obtiveram imagens profundas e multicoloridas cobrindo mais de um quarto do céu. Durante estes oito anos de operação mediram mais de 930 000 galáxias e 120 000 quasares, permitindo a construção do maior mapa tridimensional da estrutura do Universo. A divulgação final desta fase foi o Data Release (DR7), que contém medidas fotométricas de aproximadamente  $357 \times 10^6$  objetos em uma área coberta de  $8\,400 \text{ deg}^2$ . O projeto tem um enorme impacto científico, com mais de 5000 publicações relacionadas aos dados do SDSS.

Um dos resultados mais impressionantes é a primeira detecção<sup>40</sup> das oscilações acústicas dos bárions no aglomerado de 46 748 galáxias vermelhas luminosas em um redshift médio de 0.35 com dados de DR3. Esta detecção foi na 2PCF a partir de uma amostra espectroscópica de LRG, em um volume de pesquisa de  $0.72 \frac{\text{Gpc}^3}{h^3}$ , sobre  $3\,816 \text{ deg}^2$  num intervalo de redshift de  $0.16 < z < 0.47$  [17].

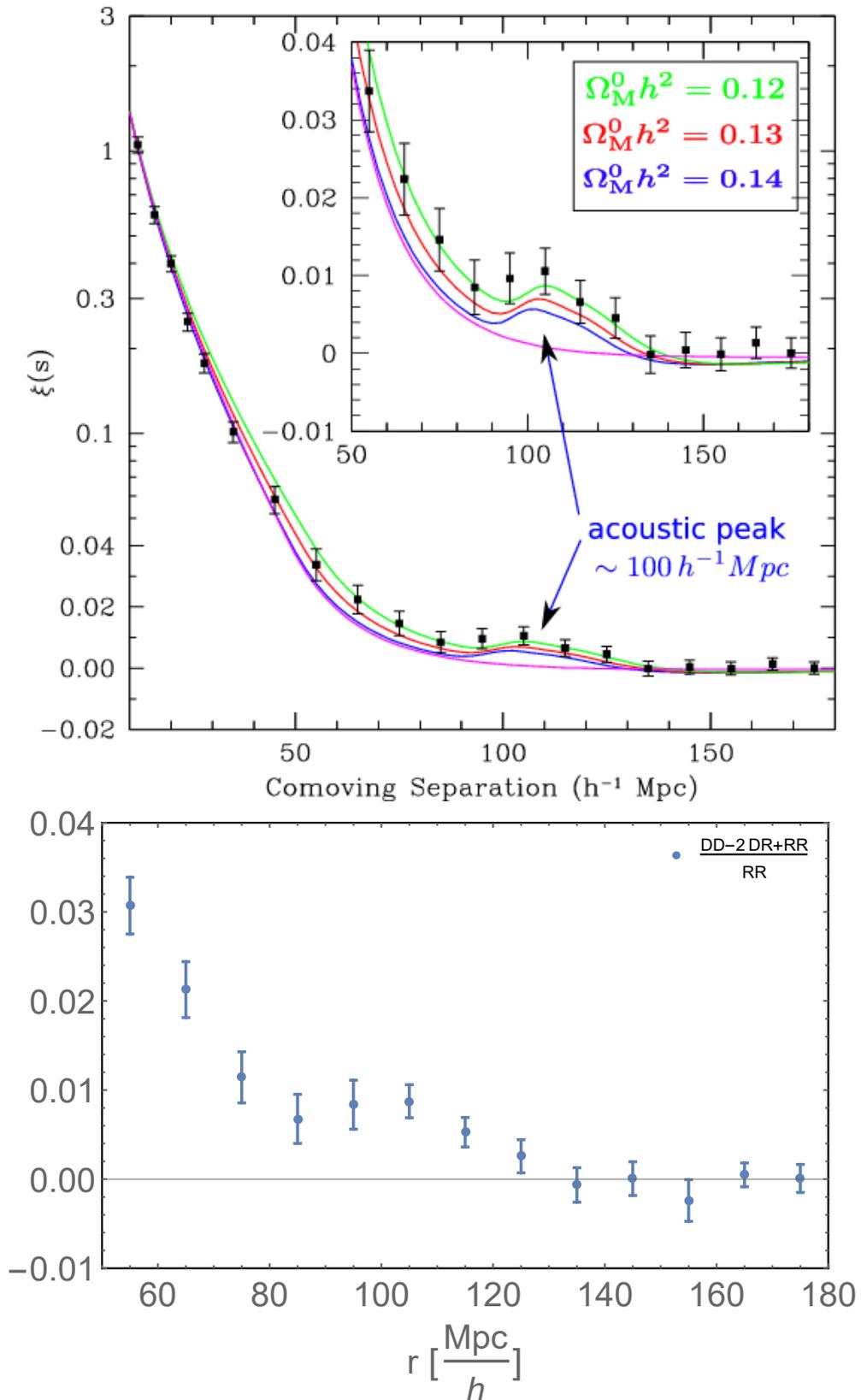
O outro projeto pioneiro que também conseguiu obter o espectro de potência com assinatura das oscilações acústicas bariônicas e a fração de bárions  $\frac{\Omega_b}{\Omega_m} = 0.185 \pm 0.046$ , foi *2-degree Field Galaxy Redshift Survey* (2dFGRS). Este projeto 2dFGRS foi um levantamento espectroscópico anglo-australiano que mapeou 221 414 galáxias, cobrindo uma área aproximadamente de  $1\,800 \text{ deg}^2$  no intervalo de redshift de  $0 < z < 0.3$ . (Na Figura 5.10 podemos observar primeira detecção do pico acústico)

A terceira fase do SDSS (SDSS-III) começou no outono de 2008 e envolveu um programa de quatro novas pesquisas (mencionados acima). Esta terceira fase teve como objetivo três temas principais: *energia escura e parâmetros cosmológicos, a história e a estrutura da Via Láctea e a população de gigantes planetas em torno de outras estrelas*. Esta terceira fase publicou em janeiro de 2011 DR8, em agosto de 2012 publicou DR9 e em julho de 2013 publicou DR10 e DR11 e o DR12 que é a versão final de dados de SDSS-III, contem todas as observações do SDSS até julho de 2014. Na Figura 5.11 mostramos alguns footprint de Data Release e observamos também como essa cobertura no céu pode aumentar a sensibilidade da amostra em relação à distância do BAO.

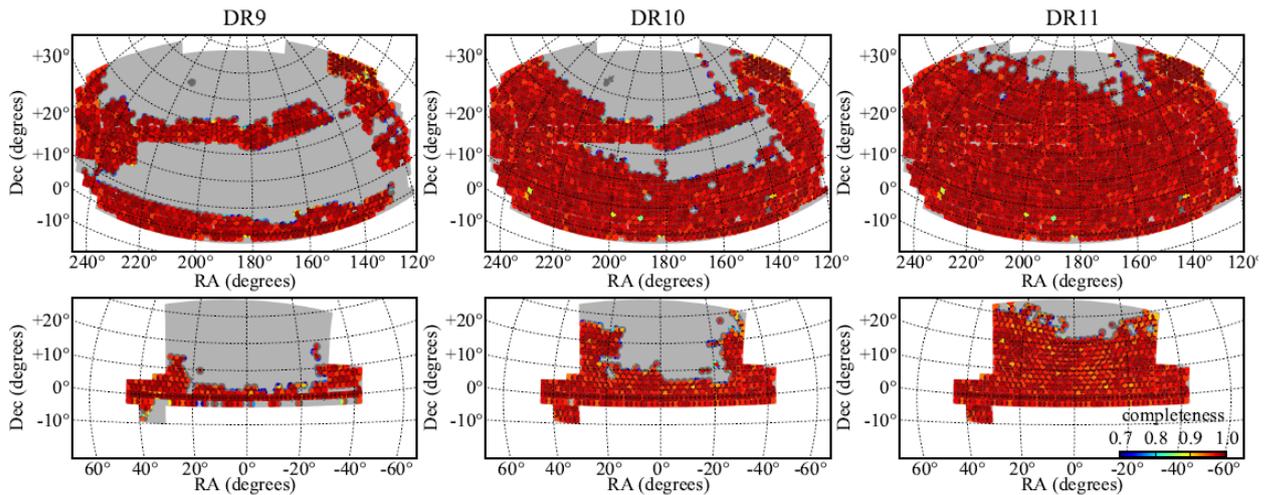
O DR9 foi a primeira liberação de espectros de galáxias do BOSS e as duas amostras de galáxia para a análise LSS. A amostra **LOWZ**,  $0.14 \leq z \leq 0.43$ , amplia a amostra de LRG do SDSS-II para diminuir as luminosidades, a fim de obter uma maior densidade numérica espacial [209]. A amostra **CMASS**, é uma amostra quase completa de galáxias mais massivas, acima do limite de magnitude da pesquisa, com o objetivo de uma amostra de alto redshift com uma massa estelar quase constante<sup>41</sup> [211]. As galáxias das amostras **LOWZ** e **CMASS** são traçadores altamente enviesados da aglomeração de matéria com um viés de galáxia linear de aproximadamente 2 ( $b \approx 2$ ), o que é ideal para análise de aglomerado, pois o espectro de potência pode ser medido com uma alta relação sinal-ruído.

<sup>40</sup>Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies [17].

<sup>41</sup>As galáxias do **CMASS** são principalmente vermelhas com uma proeminente ruptura de  $4\,000 \text{ \AA}$ , mas existe uma pequena fração de galáxias azuis. Esta amostra CMASS-DR9 contém 264 283 galáxias massivas e cobre  $3\,275$  graus quadrados do céu com um redshift efetivo  $z = 0.57$  num intervalo de redshift de  $0.43 < z < 0.7$  [210].



**Figura 5.10.** A imagem acima mostra a 2PCF, no espaço de redshift, obtida a partir de 46 748 LRG da amostra SDSS-DR3. A curva de cor magenta mostra um modelo CDM puro,  $\Omega_{m0} h^2 = 0.105$ , que não possui o pico acústico. As curvas verde, vermelha e azul representam modelos com uma densidade fracionária de bárions de  $\Omega_{b0} h^2 = 0.024$  e uma densidade de CDM de  $\Omega_{m0} h^2 = 0.12, 0.13$  e  $0.14$  respectivamente. Em  $100 \frac{\text{Mpc}}{h}$  corresponde ao pico acústico. A imagem abaixo corresponde a nosso teste obtido, com os mesmos dados de LRG, assumindo o fiducial  $\Lambda$ CDM [17].



**Figura 5.11.** Pegada (footprint) espectroscópica do nono (DR9), décimo (DR10) e décimo primeiro (DR11) lançamento de dados do BOSS. Os painéis superiores mostram a cobertura da capa galáctica norte (NGC) e os painéis inferiores mostram a cobertura da capa galáctica sul (SGC). A cobertura do céu aumentou de  $3275\text{deg}^2$  no (DR9) para  $6161\text{deg}^2$  no (DR10), e depois para  $8377\text{deg}^2$  em DR11 [209, 212]. (Crédito da imagem: Colaboração do BOSS)

**DR12 é o lançamento final da fase SDSS-III**<sup>42</sup>. As observações espectroscópicas para a BOSS terminaram em julho de 2014 e a cobertura final da pesquisa cobriu 10 400 graus quadrados no céu com uma completude média do setor de 0.98 (ver Figura 5.12). Estas amostras contêm no total 1.5 milhões de galáxias massivas, correspondendo a um aumento na área efetiva de 10% em relação a DR11. Na seguinte seção detalharemos mais acerca da amostra DR12 (LOWZ e CMASS).

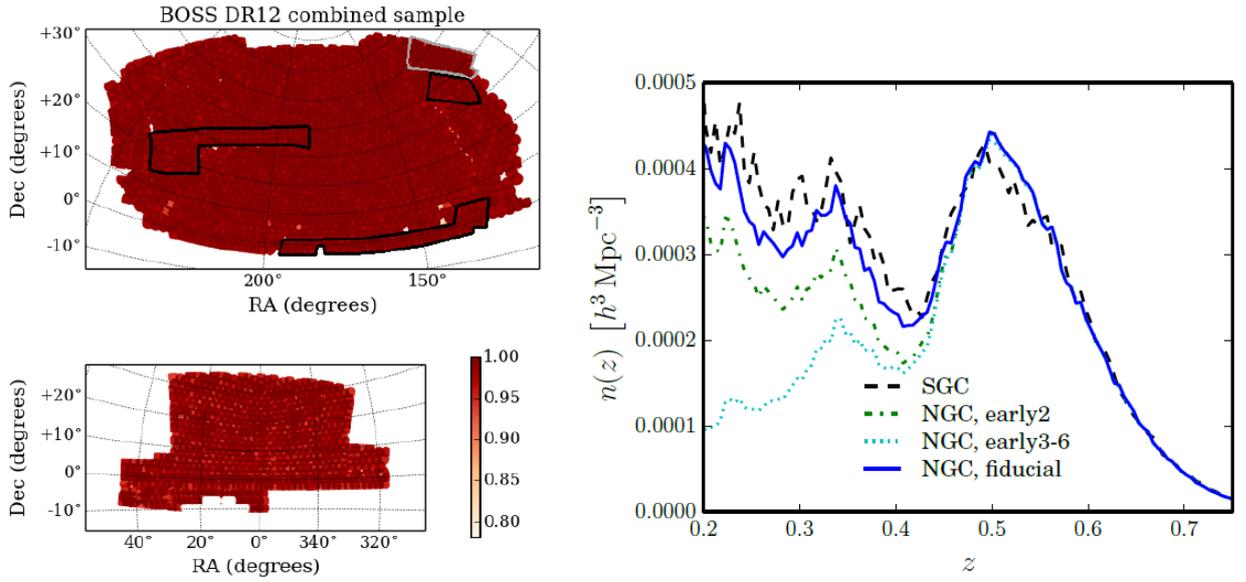
## 5.5 Catálogo de galáxias sintéticas para a amostra de BOSS

Catálogos sintéticos que imitam as propriedades dos aglomerados da amostra BOSS da *estrutura em grande escala* (LSS) servem como base para inferir a matriz de covariância para os ajustes das medições do aglomerado na amostra combinada DR12. Para cumprir essas propriedades, esses catálogos incorporam a geometria completa da pesquisa (ou seja, *eles compartilham a mesma função de seleção angular e radial*) e os sistemáticos observacionais mais importante como máscaras de veto (the veto masks) e colisões de fibras (para mais detalhes ver o artigo de Reid et al. [213]).

Uma estimativa precisa da matriz de covariância requer um grande número de catálogos simulados (mocks), de modo que a geração em massa de centenas a milhares de realizações é crucial. Dentro da colaboração de BOSS, dois conjuntos de catálogos simulados (mocks) que imitam a amostra combinada de DR12 foram construídos por equipes separadas usando diferentes ferramentas, permitindo testes adicionais para efeitos sistemáticos sobre as restrições finais provenientes da matriz de covariância. Ambos conjuntos de mocks-DR12 apresentam um grande número de realizações para superar o ruído da amostra na estimativa da matriz de precisão<sup>43</sup>.

<sup>42</sup>Os cortes de cores de seleção, as especificações das amostras e as propriedades estruturais das galáxias nas amostras DR12 finais são descritas em Reid et al. [213].

<sup>43</sup>Esses esforços refletem a crescente necessidade de geração de catálogos simulados confiáveis e precisos desde a criação de *PThalos mocks* para DR9 [214], do que basear a amostra em resultados de simulação de N-corpos. Este método é rápido porque é baseado em um campo de matéria gerado usando a teoria de



**Figura 5.12.** *Painel esquerdo:* o footprint de BOSS-DR12 das subamostras NGC e SGC com círculos indicando os diferentes pontos do telescópio. A completude do sector é indicado pela cor do círculo. As regiões "early" no hemisfério norte são indicadas por uma borda cinza ("early2") e preta ("early3-6"). *Painel direito:* A função de seleção (radial) dos diferentes fragmentos (patches) da amostra combinada do BOSS.

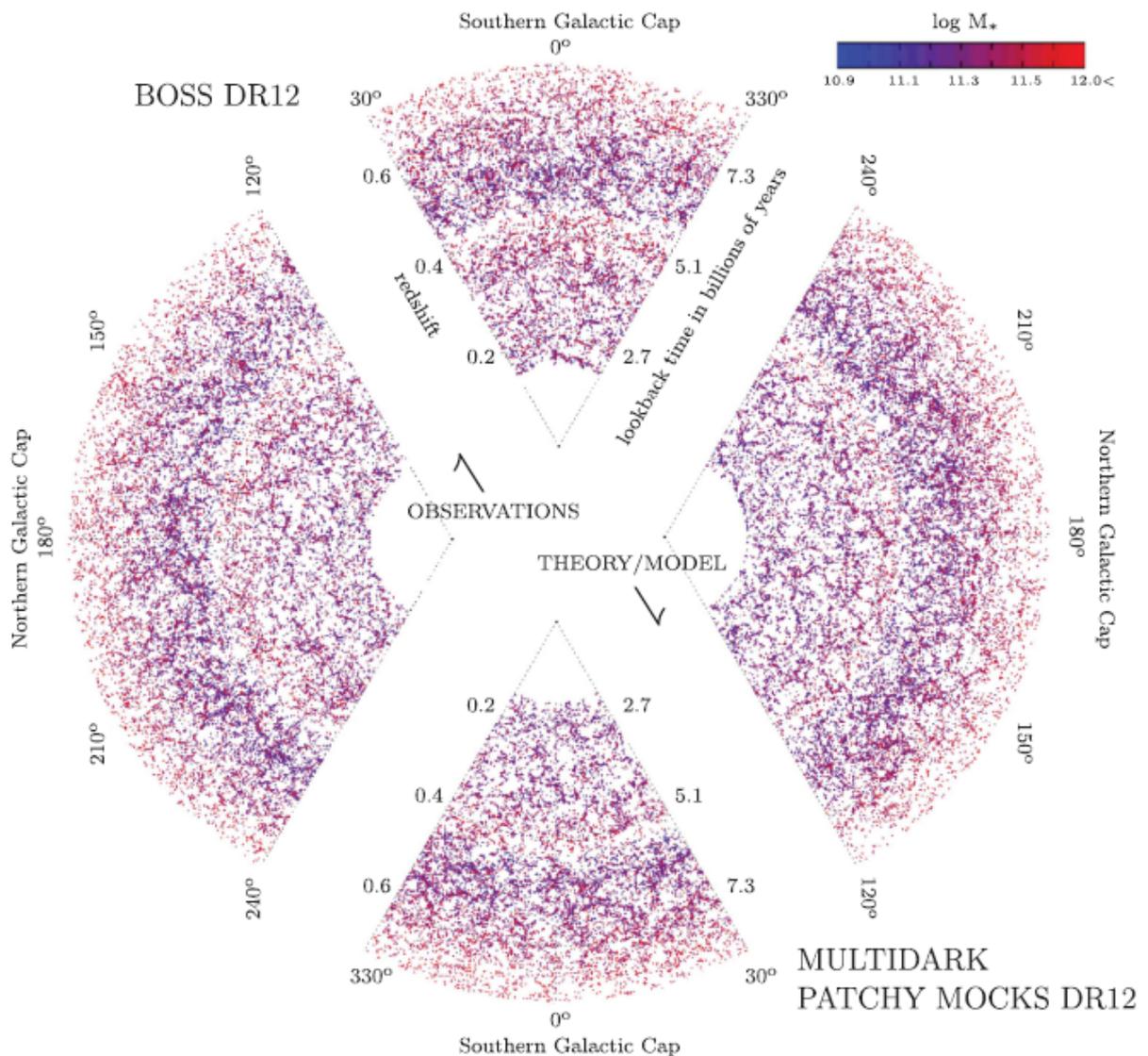
### 5.5.1 MultiDark-PATCHY mocks

O conjunto de simulações **MultiDark-PATCHY** são baseados na receita **PATCHY** (Perturbation Theory Catalog generator of Halo and galaxy distributions) para gerar catálogos de halos simulados (mocks) [215,216]. Na Figura 5.13 e Figura 5.14 se compara os dados observacionais do BOSS-DR12 e uma simulação realizada por MultiDark-PATCHY [216].

**Tabela 5.1.** Conjuntos de parâmetros cosmológicos usados para a análise combinada da amostra BOSS-DR12 (todas as cosmologias são planas  $\Lambda$ CDM).

Nome	$\Omega_{m0}$	$h$	$\Omega_{b0} h^2$	$\sigma_8$	$n_s$
<i>FIDUCIAL</i>	0.31	0.676	0.022	0.8	0.97
<i>QPM</i>	0.29	0.7	0.02247	0.8	0.97
<i>PATCHY</i>	0.307115	0.6777	0.02214	0.8288	0.96
<i>MINERVA</i>	0.285	0.695	0.02104	0.828	0.9632

perturbação Lagrangiana de segunda ordem (2LPT), mas ainda nos permite incluir as correções não-Gaussianas mais importantes relevantes para as matrizes de covariância descritas pelo trispectrum [214].



**Figura 5.13.** Gráfico de pizza das observações do **BOSS-DR12** (região superior esquerda) e uma simulação de realização do **MultiDark-PATCHY** (região inferior direita). Podemos ver claramente a partir deste gráfico, que tanto os dados quanto os mocks seguem os mesmos critérios de seleção incluindo a máscara de pesquisa (o código de cor representa a massa estelar) e não há diferenças visuais óbvias além da variância cósmica [216].

Basicamente podemos descrever estas simulações em duas etapas, assim:

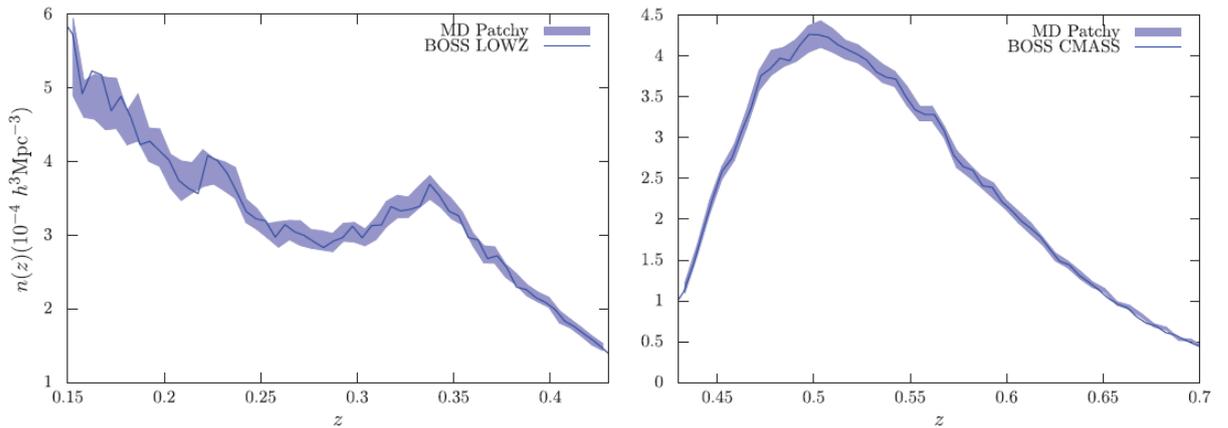
- na primeira etapa: o formalismo da Teoria da Perturbação Lagrangiana Aumentada (**ALPT**) é usado para gerar um campo de velocidade e densidade de Matéria Escura (MD), dividindo o campo de deslocamento Lagrangiano em uma componente de grande escala, que é derivado pela 2LPT, e uma componente de pequena escala que é modelada por uma aproximação de colapso esférico.

As condições iniciais são geradas com parâmetros cosmológicos que são compatíveis com as simulações de **Big-MultiDark N-body** [217] (Na Tabela 5.1 podemos observar as condições iniciais para "PATCHY" e para outros catálogos mocks).

- na segunda etapa: é preencher os halos com galáxias pela abundância de halo correspondente entre a amostra combinada de BOSS-DR12 e as simulações usando HADRON [218]. Este código **HADRON** (Halo mAss Distribution ReconstructiON) é uma técnica que nos permite atribuir massas de halo a uma distribuição de halos no espaço tridimensional. Isso pode ser aplicado à rápida produção de catálogos de galáxias simuladas (mock), atribuindo massas de halo e reproduzindo com precisão o viés para diferentes cortes de massa [218].

O aglomerado dos catálogos de PATCHY reproduzem as estatísticas de dois e três pontos (2PCF e 3PCF) de BOSS-DR12 [219].

Na Tabela 5.1, QPM (Quick-Particle-Mesh) é um catálogo simulado baseado em uma técnica conhecida como malha de partículas rápidas [220]. Melhor dito, este método usa um código de malha de partículas de baixa resolução para gerar o campo de densidade de matéria escura em grande escala a partir das condições iniciais que foram criadas usando os parâmetros cosmológicos dados como QPM na Tabela 5.1. Os catálogos de galáxias do MINERVA são gerados em um redshift de  $z = 0.57$ , a média do redshift da amostra de CMASS-BOSS, usando a técnica de Distribuição de Ocupação do Halo (HOD) [221].



**Figura 5.14.** Densidade numérica para as amostras **LOWZ** (esquerda) e **CMASS** (direita) de **DR12**. As observações são dadas pelas linhas sólidas azuis. Os contornos sombreados representam as regiões a  $1\sigma$  de acordo com **MultiDark-PATCHY mocks**.

## 5.6 Estimando $\Delta z_{\text{BAO}}$ mediante uma parametrização fenomenológica

### 5.6.1 Introdução

Graças à crescente riqueza de dados astronômicos, começou a ser possível analisar o cosmos com uma análise independente do modelo [39]. A ideia básica é extrair informações dos dados sem assumir as propriedades do conteúdo energético do universo, nem, se possível, a estrutura geral do espaço-tempo [38]. Embora as análises independentes do modelo possam ser menos restritivas que as análises padrão, elas têm a vantagem de poderem ser usadas para verificar hipóteses básicas, como homogeneidade e isotropia, e para analisar modelos exóticos para os quais os resultados padrão não

podem ser usados. De fato, está se tornando cada vez mais difícil analisar modelos alternativos, já que o modelo padrão da cosmologia está cada vez mais no centro desses dados, cada vez mais complexos.

Exemplos de medições independentes da cosmologia são calibrações independentes do modelo Supernova Ia (SNIa) [222], determinações da taxa de expansão via **redshift drif** [223] ou a evolução diferencial da idade do cronômetro cósmico [224] e suas reconstruções independentes do modelo [225] (e suas referências nele). Uma "régua padrão de baixo redshift" independente do modelo (que, dentro do modelo padrão, coincide com o horizonte de som no arrasto da radiação) foi obtida por Licia Verde et al., [226], restrições da CMB independentes do modelo foram obtidas por Marc Vonlanthen et al. [227], e "sirenes padrão- detecções de ondas gravitacionais com contrapartes eletromagnéticas-podem fornecer determinações independentes da cosmologia da relação de distância luminosidade-redshift [228].

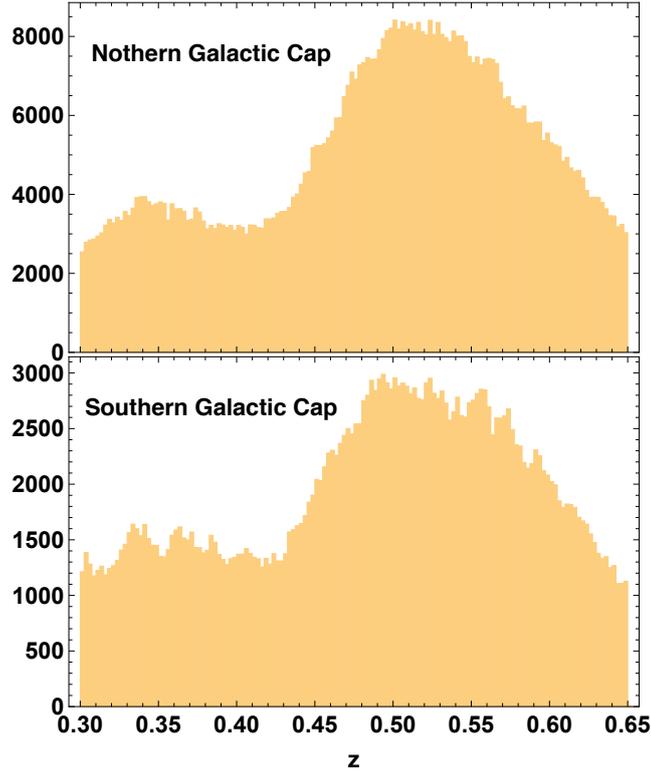
Aqui, vamos nos concentrar nas restrições das Oscilações Acústicas Bariônicas (BAO). A análise padrão [229] fornece medições de BAO que são "pseudo independente do modelo", pois eles podem ser facilmente escalados para experimentarem cosmologias usando a distorção de **Alcock-Paczynski**. Para que este método seja válido, a cosmologia de teste deve ser "suficientemente próxima" do modelo fiducial. *Por exemplo*, o modelo de função de correlação de 2 pontos e a técnica de reconstrução podem não ser válidos para, por exemplo, modelos de energia escura não padrão. Para superar essas limitações, Stefano Anselmi et al. [230] introduziu o "ponto linear", uma régua padrão BAO independente do modelo que pode ser usada também para cosmologias diferentes de  $\Lambda$ CDM [231]. Aqui, desejamos usar um método completamente independente do modelo, cujos resultados poderiam ser usados para restringir até mesmo os modelos mais exóticos, como métricas inomogêneas. *Como veremos, o preço terá uma significância e precisão muito baixa em relação à análise padrão e de ponto linear.*

Restrições de BAO angular independente do modelo foram discutidas, *por exemplo*, E. Sánchez et al. [232] no contexto de um levantamento de redshift fotométrico tipo DES, e também usando catálogos de galáxias [233, 234] e quasares [235] de BOSS do Sloan Digital Sky Survey (SDSS). **E. Sánchez et al. [20] propôs uma receita simples para medir o BAO radial de maneira independente do modelo.** Foi aplicado a uma grande simulação de N-corpos tipo Euclides e mostrou-se capaz de obter corretamente a escala BAO relativa à cosmologia da simulação. Aqui, estendemos a metodologia introduzida por E. Sánchez et al. [20], a fim de aplicá-lo aos dados do lançamento final DR12 da pesquisa BOSS [39, 236].

### 5.6.2 Dados

O SDSS observou mais de um quarto do céu usando o telescópio Sloan de 2.5m do Observatório Apache Point (APO) ubicado em Novo México. Usamos o DR12 da pesquisa BOSS, que é o lançamento final de dados e contém todas as observações do SDSS até julho de 2014 [213, 237]. O DR12 apresenta a amostra **LOWZ** de galáxias vermelhas luminosas ( $z \lesssim 0.4$ ) e a amostra **CMASS** de galáxias massivas ( $0.4 \lesssim z \lesssim 0.7$ ), em ambas capas do norte galáctico e sul galáctico (**NGC** e **SGC**), com uma pegada (fooprint) total de cerca de 10 400 graus quadrados.

A Figura 5.15 mostra as distribuições do redshift de 720 113 galáxias no **NGC** e de 273 117 galáxias no **SGC** no intervalo de redshift de  $0.3 \leq z \leq 0.65$ .



**Figura 5.15.** Distribuição do redshift das 720 113 galáxias do NGC (parte superior) e das 273 117 galáxias do SGC (parte inferior) do catálogo CMASSLOWZTOT do DR12 da pesquisa BOSS da terceira fase de SDSS-III que foram utilizados para esta análise ( $0.3 \leq z \leq 0.65$ ). Veja a Tabela 5.2 para detalhes numéricos.

Em relação ao catálogo aleatório (random), usamos as versão random0; o NGC e o SGC têm 37 115 850 e 13 647 368 pontos aleatórios ( $0.3 \leq z \leq 0.65$ ), respectivamente, e são produzidos de maneira independente da cosmologia. Os catálogos aleatórios são cerca de 50 vezes maiores que os catálogos reais correspondentes. Isto significa que o ruído introduzido pelos catálogos aleatórios será insignificante em comparação com o devido aos catálogos de galáxias. **A fim de maximizar a significância estatística do sinal BAO, consideraremos apenas um bin com  $0.3 \leq z \leq 0.65$ ,** veja a Tabela 5.2 para detalhes. A largura do bin é semelhante àquela adotada em E. Sánchez et al. [20].

**Tabela 5.2.** Propriedades do bin de redshift adotado na análise. O redshift efetivo  $z_{eff}$  é definido na equação (5.68).

Subamostras	$z_{eff}$	$[z_{min}, z_{max}]$	$\delta z$	$\delta \phi$	$\delta \theta$	Galáxias	Píxeis com 50 ou mais galáxias	$\overline{\text{Galáxias/pixel}}$
NGC	0.507	[0.30, 0.65]	0.007	$1.25^\circ$	$1.25^\circ$	720 113	5 829	124
SGC						273 117	1 875	146
Total						993 230	7 704	129

Em geral, o redshift efetivo é definido como o redshift médio ponderado das galáxias:

$$z_{eff} = \frac{\sum_i d_i z_i}{\sum_i d_i}, \quad (5.68)$$

onde  $i$  rotula a  $i$ -ésima galáxia com peso  $d_i$ . A equação (5.68), acima, dá um resultado de 0.494. No entanto, como estamos estudando **BAO**, vamos adotar o seguinte estimador mais especializado [183], definido assim:

$$z_{eff} = \frac{\sum_{i<j} d_i d_j \frac{(z_i + z_j)}{2}}{\sum_{i<j} d_i d_j} \simeq 0.507, \quad (5.69)$$

onde a soma é sobre os pares de galáxias  $\{i, j\}$  separados por  $\Delta z_{BAO} \pm \delta z$  e onde  $\delta z$  é o sub-bin de redshift que será discutido na seguinte seção. A vantagem dessa definição é que ela considera a média ponderada do redshift dos pares de galáxias que contribuem para o sinal de BAO e, portanto, espera-se caracterizar melhor seu redshift efetivo, especialmente para o bin de redshift grande que estamos considerando. Como  $\Delta z_{BAO}$  não é conhecido de antemão, calculamos o  $z_{eff}$  da equação (5.69) depois de ter estimado  $\Delta z_{BAO}$ .

### 5.6.3 Método

Nós agora estendemos a metodologia introduzida em E. Sánchez et al. [20], a fim de aplicá-lo a dados observacionais. Além disso, nós introduzimos um novo método para calcular a matriz de covariância diretamente a partir dos dados e compará-la com sucesso à matriz de covariância obtida a partir da simulação (mocks) BOSS.

#### 5.6.3.1 Píxeis angulares

Seguindo E. Sánchez et al. [20], dividimos o bin de redshift em píxeis angulares que deveriam ser pequenos o suficiente para considerar as galáxias tão colineares quanto possível e grandes o suficiente para reter galáxias suficientes para que o cálculo da função de correlação não seja dominado pelo ruído. Um pixel angular grande induz uma mudança na inclinação da função de correlação em pequenas escalas, um efeito de suavização produzido pela inclusão de pares de galáxias que não são exatamente colineares. No entanto, a escala na qual esse efeito aparece (fixada pelo tamanho do pixel) está muito longe da escala BAO, que portanto permanece inalterada.

E. Sánchez et al. [20] verificou que é possível usar com segurança píxeis angulares de até 1 grau quadrado. Nós escolhemos um pixel angular ligeiramente maior de  $(1.25)^2$  graus quadrados, pois nosso catálogo não é tão denso quanto o catálogo de N-corpos usado por E. Sánchez et al.<sup>44</sup> [20]. A função de correlação é então calculada dentro desses bins angulares quadrados compridos e finos<sup>45</sup>. Em outras palavras, estamos calculando uma função de correlação de  $1 - d$  (radial)<sup>46</sup>.

#### 5.6.3.2 Contando galáxias com pesos

Vamos agora discutir como obter a função de correlação dentro do bin angular  $\alpha$ . Consideramos então o caso de  $n_d$  (dados) de  $D_i$  galáxias com pesos  $d_i$  e  $n_r$  (aleatórios) de  $R_j$  galáxias com pesos  $r_j$ . Nosso objetivo é encontrar em qual separação de redshift  $\Delta z$  encontraremos a característica de BAO. Consequentemente, precisamos calcular a função de correlação usando bins de redshift no espaço de

<sup>44</sup>Este catálogo simulado foi fornecido pela equipe de projeto **Mare Nostrum at ICE (MICE)**. Ademais, este catálogo simulado contém o efeito das distorções do espaço redshift, fundamentais para o estudo da escala radial BAO.

<sup>45</sup>Esses bins parecem muito com o "espaguete alla **chitarra**".

<sup>46</sup>Função de correlação radial em uma dimensão.

separação do redshift. Nós usaremos  $N$  sub-bins de redshift de  $\delta z = 0.007$ , rotulado de acordo com  $\Delta z_\beta$ . Este valor foi escolhido para ter uma resolução suficiente para ver a protuberância de BAO e, ao mesmo tempo, ter galáxias suficientes em cada bin para não aumentar o ruído. Como usaremos o estimador ótimo de **Landy & Szalay** [40], dada pela expressão (5.27), temos que calcular as contagens galáxia-galáxia (DD), aleatório-aleatório (RR) e galáxia-aleatório (DR).

### 5.6.3.3 Pesos das galáxias

Como explicado em Beth Reid et al. [213], as galáxias são ponderadas de acordo com:

$$w_i = w_{sys,i} (w_{noz,i} + w_{cp,i} - 1), \quad (5.70)$$

onde  $w_{sys} = w_{star} w_{seeing}$  é o peso sistemático total,  $w_{noz}$  é o peso de falha do redshift e  $w_{cp}$  é o peso do par próximo. Normalmente, multiplica-se os pesos acima pelos pesos de **FKP**<sup>47</sup>, uma vez que se destinam a pesar de forma ideal (ótima) as galáxias da pesquisa [239]. No entanto, como os pesos **FKP** assumem uma cosmologia e otimizam o cálculo da função de correlação de  $3-d$  (nós estamos calculando a função de correlação em  $1-d$ ), realizaremos a análise sem esses pesos. Consequentemente, usaremos:

$$d_i = w_i \quad e \quad r_j = 1. \quad (5.71)$$

A Figura 5.16 mostra a distribuição dos pesos das galáxias a qual é uma superposição de duas distribuições. O catálogo **LOWZ** apresenta uma distribuição discreta de pesos para os valores de  $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ , marcados na Figura 5.16 com linhas de cor verde. Os valores inteiros são geralmente devido às ponderações de colisão de fibras. O catálogo **CMASS** tem uma distribuição suave, com picos  $\{1; 1,5; 2; 3; 4; 5\}$ . Além dos pesos de colisão de fibras, também foram utilizados pesos específicos para este catálogo de maior- $z$  (veja: Beth Reid et al. [213] e Ashley J. Ross et al. [240] para mais detalhes).

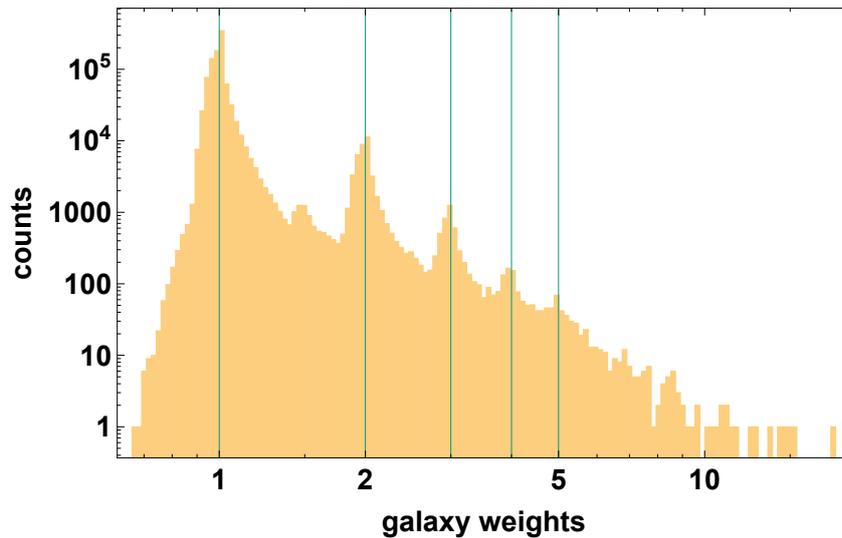


Figura 5.16. Distribuição dos pesos das galáxias.

<sup>47</sup> $w_{\text{FKP}}(\vec{r}) = \frac{1}{1 + n(\vec{r})P(k)}$ ,  $n(\vec{r})$  é a densidade numérica média das galáxias e  $P(k)$  é o espectro de potência em um comprimento de onda de interesse, são simples de aplicar e reduzem o ruído e a variância do espectro de potência medido quando a completude da amostra da galáxia é significativamente não uniforme [238].

### 5.6.3.4 Contagens DD ou RR

A contagem **DD** procede da seguinte maneira; o caso **RR** é análogo. Você senta na  $i$ -ésima galáxia e conta as  $n_d - 1$  galáxias que caem em vários sub-bins de redshift. As contagens são dadas pelo vetor  $N$ -dimensional  $\tilde{v}_i$ :

$$\tilde{v}_i = d_i \left\{ \dots, \sum_{k \in \beta} d_k, \dots \right\}_i, \quad (5.72)$$

onde as  $k$  galáxias de dados são aquelas que pertencem a esse sub-bin  $\beta$ . Claramente, a soma das componentes desse vetor é:

$$\tilde{V}_i \equiv \sum_{\beta=1}^N \tilde{v}_{i,\beta} = d_i \sum_{k \neq i} d_k. \quad (5.73)$$

Para estimar o **DD**, é necessário empilhar as contribuições de todos os pares; ou seja, é preciso somar os vetores  $\tilde{v}_i$  e depois normalizar o resultado, assim:

$$\begin{aligned} DD_\alpha &= \frac{\sum_i \tilde{v}_i}{\sum_l \tilde{V}_l} = \frac{\sum_i \tilde{v}_i}{\sum_l d_l \sum_{k \neq l} d_k} \\ &= \frac{\sum_i \tilde{v}_i}{(\sum_l d_l)^2 - \sum_l d_l^2}, \end{aligned} \quad (5.74)$$

onde  $\alpha$  marca o bin angular específico que estamos considerando. Observe que:

$$\sum_{\beta=1}^N DD_{\alpha\beta} = 1. \quad (5.75)$$

No caso de pesos unitários tem-se:

$$DD_\alpha = \frac{1}{n_d(n_d - 1)} \sum_{i=1}^{n_d} \tilde{v}_i, \quad (5.76)$$

onde  $\tilde{v}_i$  torna-se um vetor de contagens inteiras.

Se fazemos, de forma mais eficiente, contagens de pares apenas uma vez (ou seja, não ambos  $d_1 d_3$  e  $d_3 d_1$ ), então as contagens são dadas pelo vetor  $\hat{v}_i$ :

$$\hat{v}_i = d_i \left\{ \dots, \sum_{k \in \beta, k > i} d_k, \dots \right\}_i. \quad (5.77)$$

Consequentemente:

$$\begin{aligned} DD_\alpha &= \frac{\sum_i \hat{v}_i}{\sum_l \hat{V}_l} = \frac{\sum_i \hat{v}_i}{\sum_l d_l \sum_{k > l} d_k} \\ &= \frac{\sum_l \hat{v}_l}{\left[ (\sum_l d_l)^2 - \sum_l d_l^2 \right] / 2}, \end{aligned} \quad (5.78)$$

que no caso de pesos unitários torna-se:

$$DD_\alpha = \frac{1}{\frac{n_d(n_d-1)}{2}} \sum_{i=1}^{n_d} \hat{v}_i. \quad (5.79)$$

A última equação representa a normalização padrão. A equação (5.78) fornece as mesmas contagens que a equação (5.74).

Para uso posterior, definimos o peso total do pixel angular  $\alpha$  como:

$$dd_\alpha = \frac{(\sum_l d_l)^2 - \sum_l d_l^2}{2}, \quad (5.80)$$

que generaliza o número total de pares diferentes no pixel angular  $\alpha$ :

$$n_{dd,\alpha} = \frac{n_d(n_d-1)}{2}. \quad (5.81)$$

### 5.6.3.5 Contagens DR

A contagem de **DR** prossegue da seguinte maneira; o caso **RD** dá exatamente o mesmo resultado<sup>48</sup>. O índice  $i$  etiqueta aos dados de galáxias enquanto o índice  $j$  etiqueta às galáxias aleatórias. Senta-se na  $i$ -ésima galáxia e contamos as  $n_r$  galáxias que caem dentro dos diferentes sub-bins de redshift. As contagens são dadas pelo vetor  $N$ -dimensional  $\tilde{u}_i$ :

$$\tilde{u}_i = d_i \left\{ \dots, \sum_{k \in \beta} r_k, \dots \right\}_i, \quad (5.82)$$

onde as  $k$  galáxias aleatórias são aquelas que pertencem ao sub-bin  $\beta$ . A soma das componentes de  $\tilde{u}_i$  é:

$$\tilde{U}_i \equiv \sum_{\beta=1}^N \tilde{u}_{i,\beta} = d_i \sum_k r_k \equiv d_i r_{tot}, \quad (5.83)$$

onde definimos o peso total  $r_{tot}$ . Para estimar o **DR**, é preciso empilhar as contribuições de todos os pares; ou seja, é preciso somar os vetores  $\tilde{u}_i$  e depois normalizar o resultado, assim:

$$DR_\alpha = \frac{\sum_i \tilde{u}_i}{\sum_l \tilde{U}_l} = \frac{\sum_i \tilde{u}_i}{\sum_l d_l r_{tot}} = \frac{\sum_i \tilde{u}_i}{d_{tot} r_{tot}}. \quad (5.84)$$

Observe que:

$$\sum_{\beta=1}^N DR_{\alpha\beta} = 1. \quad (5.85)$$

<sup>48</sup>O cálculo de **RD** é numericamente mais lento porque há mais galáxias aleatórias do que as reais, de modo que é preciso se sentar em mais galáxias. A contagem é realizada de forma vetorial. Esse comportamento pode depender da maneira como o cálculo foi implementado.

No caso de pesos unitários tem-se:

$$DR_\alpha = \frac{1}{n_d n_r} \sum_i \tilde{u}_i, \quad (5.86)$$

onde  $\tilde{u}_i$  torna-se um vetor de contagens inteiras. Esta última equação (5.86) representa a normalização padrão.

Para uso posterior, definimos o peso total do pixel angular  $\alpha$  como:

$$dr_\alpha = \sum_i d_i \sum_j r_j = d_{tot} r_{tot}, \quad (5.87)$$

que generaliza o número total de pares diferentes no pixel angular  $\alpha$ :

$$n_{dr,\alpha} = n_d n_r. \quad (5.88)$$

### 5.6.3.6 Função de correlação e matriz de covariância

Depois de realizar o procedimento acima, obtemos as seguintes quantidades:

$$\begin{array}{lll} DD_{\alpha\beta} & dd_\alpha & n_{dd,\alpha}, \\ RR_{\alpha\beta} & rr_\alpha & n_{rr,\alpha}, \\ DR_{\alpha\beta} & dr_\alpha & n_{dr,\alpha}, \end{array} \quad (5.89)$$

onde  $\alpha$  etiqueta os píxeis angulares no NGC ou SGC e  $\beta$  etiqueta os sub-bins de redshift.

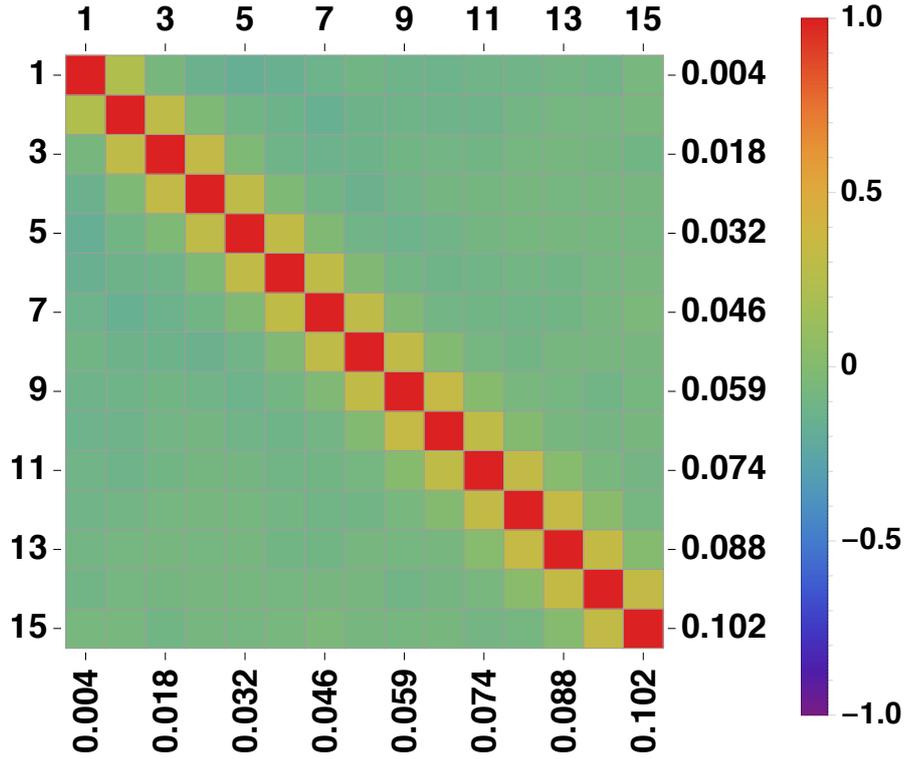
Nós calculamos a função de correlação diretamente em cada pixel  $\alpha$ , depois calculamos a média do vetor e sua matriz de covariância de  $N \times N$ :

$$\xi_{\alpha\beta} \equiv \frac{DD_{\alpha\beta} - 2DR_{\alpha\beta} + RR_{\alpha\beta}}{RR_{\alpha\beta}}, \quad (5.90)$$

$$\xi_\beta = \langle \xi_{\alpha\beta} \rangle_\alpha, \quad (5.91)$$

$$\Sigma_{\beta\beta'} = \frac{\text{cov}(\xi_{\alpha\beta})}{n_{eff}}. \quad (5.92)$$

Onde usamos para  $\xi_{\alpha\beta}$  o estimador ótimo de **Landy & Szalay** [40]. Como não estamos misturando píxeis antes do cálculo da função de correlação, nós juntamos os píxeis do NGC e do SGC. A matriz de correlação é mostrada na Figura 5.17, enquanto a função de correlação média e a diagonal da matriz de covariância são mostradas na Figura 5.21.

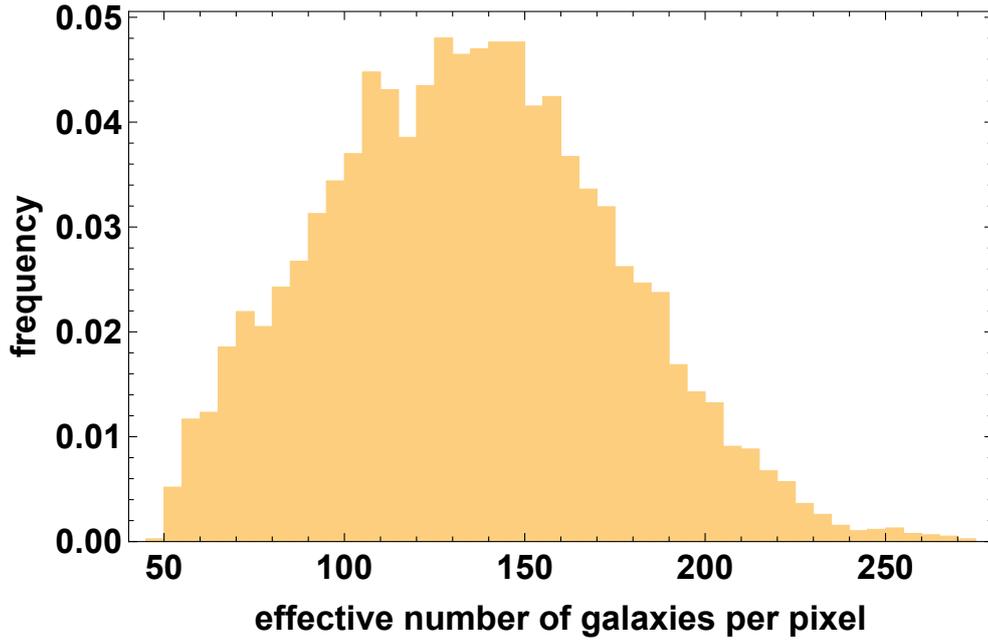


**Figura 5.17.** Matriz de correlação relativa à matriz de covariância  $\Sigma_{\beta\beta'}$  da equação (5.92). Veja a Tabela 5.2 para as especificações do bin.

Como os píxeis angulares apresentam uma ampla gama de número de galáxias, nem todos têm o mesmo poder de restrição estatística: veja a Figura 5.18 onde o número efetivo de galáxias por pixel  $n_{dd,\alpha}^{eff} \simeq \sqrt{2dd_\alpha}$  é mostrado. Portanto, a fim de obter erros pequenos e maior significância, parece apropriado ponderar o cálculo da média  $\xi_\beta$  e da covariância  $\Sigma_{\beta\beta'}$  de acordo com o número de galáxias presentes no pixel angular. Como pesos do pixel angular, adotamos os pesos  $rr_\alpha$ . A razão é que o catálogo aleatório segue de perto o catálogo de dados por construção e, ao mesmo tempo, os pesos  $rr_\alpha$  não são correlacionados com as medidas, de modo que este esquema de pesagem não deve causar viés (bias) ou aumento da variância. Deixamos como futuros trabalhos o estudo de um esquema ótimo de ponderação semelhante ao proposto por Hume A. Feldman et al. [239], a fim de equilibrar a variância da amostra e o ruído.

A matriz de covariância da equação (5.92) é relativa à média do vetor  $\xi_\beta$ . É por isso que é dividido pelo número efetivo de píxeis  $n_{eff}$ :

$$n_{eff} = \frac{(\sum_\alpha rr_\alpha)^2}{\sum_\alpha rr_\alpha^2} \simeq 6671. \quad (5.93)$$



**Figura 5.18.** Distribuição do número efetivo de galáxias por pixel  $n_{dd,\alpha}^{eff} \simeq \sqrt{2dd_\alpha}$ , veja as equações (5.80) e (5.81).

### 5.6.3.7 Simulações MultiDark-PATCHY e matriz de covariância

A determinação da matriz de covariância (5.92) diretamente dos dados é realizada sob a aproximação de que  $\xi_{\alpha\beta}$  e  $\xi_{\alpha'\beta}$  são independentes para  $\alpha \neq \alpha'$ . No entanto, possíveis correlações podem afetar essa estimativa, possivelmente produzindo erros menores e aumentando artificialmente a significância. Neste caso específico, uma vez que a escala **BAO** corresponde a  $\sim 5$  graus em  $z \sim 0.5$  (ver, por exemplo: Rodrigo von Marttens et al. [241], Figura 3.), espera-se que 1.25 graus de píxeis sejam correlacionados pela variância da amostra.

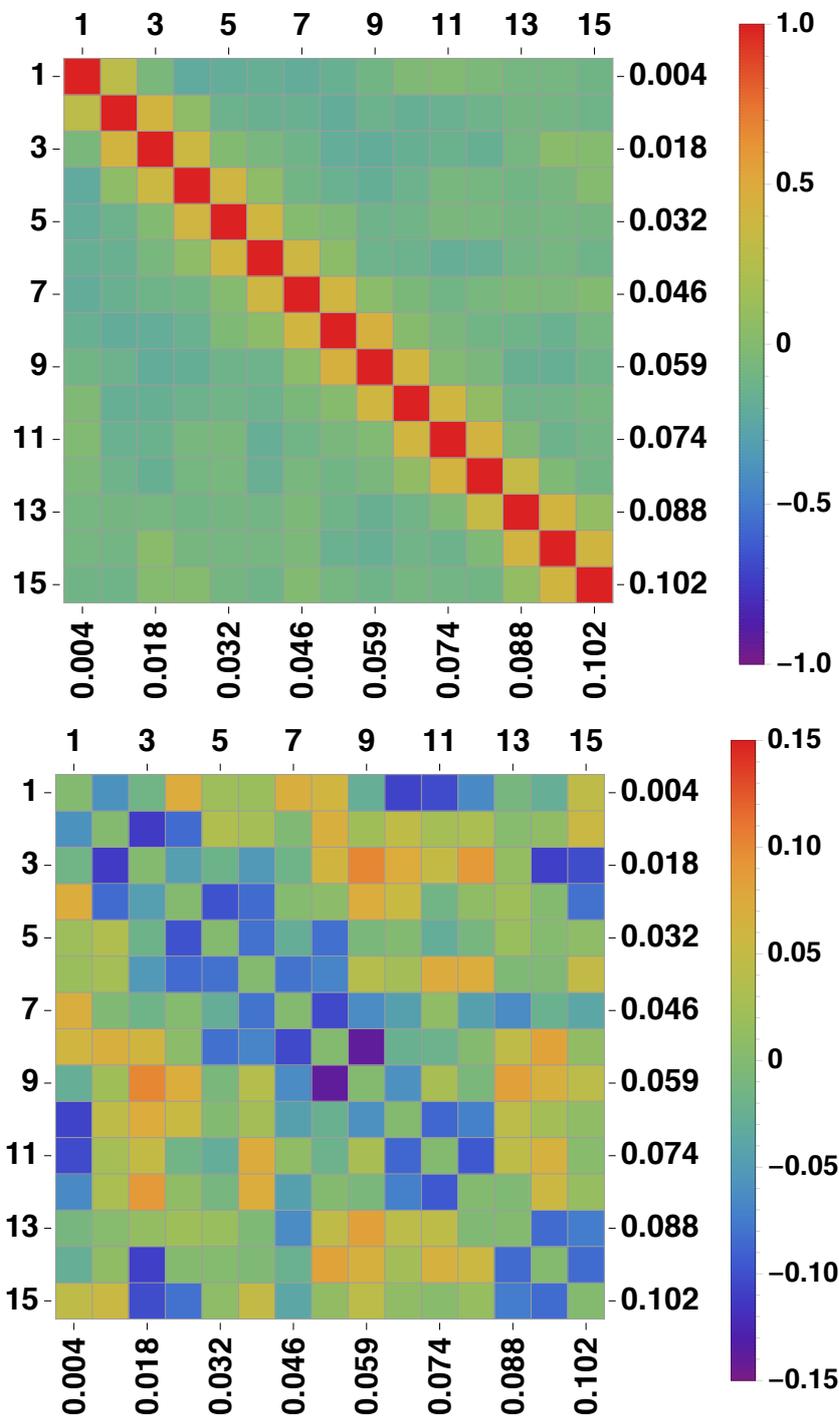
A fim de verificar esta importante questão calculamos a correlação  $\xi_\beta$  da equação (5.91) para as 500 simulações de **MultiDark-PATCHY** feitos para os dados de **BOSS**. Especificamente, usamos as 500 primeiras simulações dos conjuntos Patchy-Mocks-DR12NGC-COMPSAM\_V6C e Patchy-Mocks-DR12SGC-COMPSAM\_V6C, e também o catálogo aleatório (random) correspondente 50 vezes maior<sup>49</sup>.

Em seguida, calculamos a matriz de covariância simulada (mock)  $\Sigma_{\beta\beta'}^{mocks}$ , que é mostrada por meio da matriz de correlação na Figura 5.19 e por meio de sua diagonal na Figura 5.20. O painel inferior mostra a diferença entre a matriz de correlação dos dados e a obtida das simulações de **BOSS**. A concordância em geral é bom, mesmo que se perceba que a correlação entre sub-bins de redshift próximos é um pouco subestimado quando é calculado a partir dos dados. Na Figura 5.20 comparamos os erros: a matriz de covariância simulada apresenta erros apenas de 9% maior, um boa concordância.

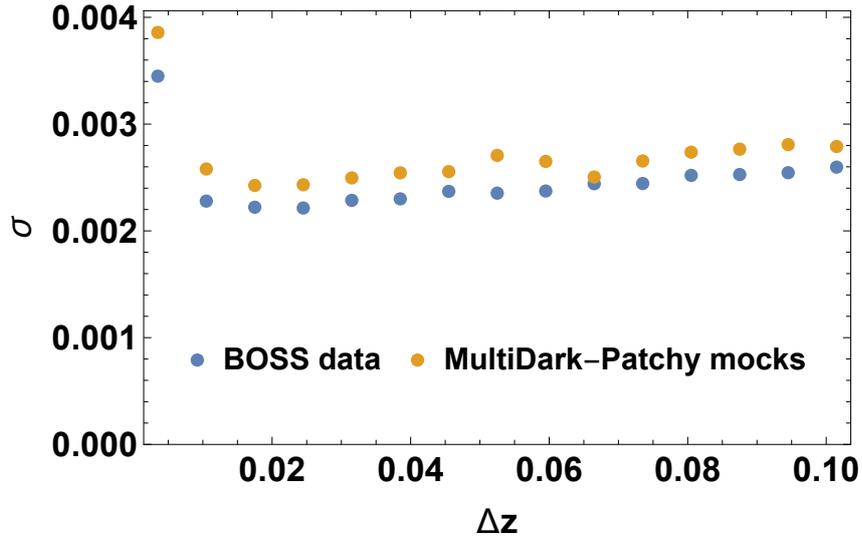
Concluimos que, para o caso especial da cosmologia fiducial  $\Lambda$ CDM, a matriz de covariância estimada a partir dos dados com o novo procedimento da Subseção 5.6.3.6 é confiável. Portanto, na análise

<sup>49</sup>Para mais detalhes sobre estas simulações (mocks) veja os trabalhos de Francisco-Shu Kitaura et al. e Sergio A. Rodríguez-Torres et al. [216, 219].

principal, usaremos a matriz de covariância (5.92) estimada diretamente a partir dos dados, a fim de manter a nossa análise independente do modelo. Adotaremos a matriz de covariância simulada na Subseção 5.6.4.1.



**Figura 5.19.** Matriz de correlação relativa às simulações de **MultiDark-PATCHY** (parte superior) e a diferença com relação à matriz de correlação da Figura 5.17 que foi estimada diretamente a partir dos dados (parte inferior).



**Figura 5.20.** Raiz quadrada da diagonal da matriz de covariância estimada a partir dos dados e da diagonal da matriz de covariância a partir das simulações (mocks) de **MultiDark-PATCHY**.

### 5.6.3.8 Posição do pico de BAO

Dentro do modelo **FLRW** homogêneo e isotrópico, a "protuberância" de **BAO** no espaço de redshift é dada por [242]:

$$\Delta z_{\text{BAO}}^{\text{theo}} = \frac{r_d H(z)}{c}, \quad (5.94)$$

onde  $r_d$  é o horizonte do som comóvel na linha de visada na época de arraste,  $H$  é a taxa de Hubble e  $c$  é a velocidade da luz. Usando a cosmologia fiducial de Shadab Alam et al. [237] ( $\Omega_{m0} = 0.31$ ,  $h = 0.676$  e  $\Omega_{b0} h^2 = 0.022$ ) obtém-se a previsão teórica ( $r_d = 147.78$  Mpc):

$$\Delta z_{\text{BAO}}^{\text{fid}}(z = 0.507) \simeq 0.04410. \quad (5.95)$$

No entanto, como estamos considerando um bin de redshift grande ( $0.3 \leq z \leq 0.65$ ), pode-se obter uma previsão mais precisa, adotando um método semelhante ao usado na equação (5.69):

$$\Delta z_{\text{BAO}}^{\text{fid}} = \frac{\sum_{i < j} d_i d_j \Delta z_{\text{BAO}}^{\text{theo}} \left( \frac{z_i + z_j}{2} \right)}{\sum_{i < j} d_i d_j} \simeq 0.04414, \quad (5.96)$$

onde a soma é sobre os pares de galáxias  $\{i, j\}$  separados por  $\Delta z_{\text{BAO}} \pm \delta z$ . Como  $\Delta z_{\text{BAO}}$  não é conhecido de antemão, calculamos o  $\Delta z_{\text{BAO}}^{\text{fid}}$  de (5.96) depois de ter estimado  $\Delta z_{\text{BAO}}$ .

Como esperamos detectar a característica de BAO em  $\Delta z_{\text{BAO}} \approx 0.05$ , vamos restringir a análise a um intervalo de  $0.01 \lesssim \Delta z \lesssim 0.1$  a fim de reduzir o impacto de regiões mal amostradas da função de correlação.

### 5.6.4 Resultados

Para determinar  $\Delta z_{\text{BAO}}$ , usaremos a **parametrização fenomenológica** proposta por E. Sánchez et al. [20]:

$$\xi_{\parallel}(\Delta z) = A + B e^{-C\Delta z} - D e^{-E\Delta z} + F e^{-\frac{(\Delta z - \Delta z_{\text{BAO}})^2}{2\sigma^2}}, \quad (5.97)$$

que provou ser flexível o suficiente para produzir uma estimativa imparcial de  $\Delta z_{\text{BAO}}$ .

Nós definimos a seguinte função  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = \left[ \xi_{\parallel}(\Delta z_{\beta}) - \xi_{\beta} \right] \Sigma_{\beta\beta'}^{-1} \left[ \xi_{\parallel}(\Delta z_{\beta'}) - \xi_{\beta'} \right], \quad (5.98)$$

onde índices repetidos são somados e  $\xi_{\beta}$  é dado pela equação (5.91) e mostrado na Figura 5.21. O modelo de melhor ajuste é mostrado com uma linha vermelha na Figura 5.21. O parâmetro  $\Delta z_{\text{BAO}}$  descreve a posição da característica de **BAO** no espaço do redshift, enquanto a interpretação cosmológica dos outros parâmetros é limitada, uma vez que a equação (5.97) é uma descrição empírica válida somente na vizinhança do pico de **BAO**.

A fim de determinar o erro estatístico em  $\Delta z_{\text{BAO}}$ , realizamos uma análise **MCMC** usando emcee [243] no espaço de parâmetros 8-dimensional gerado por  $\left\{ A, B, C, D, E, F, \sigma, \Delta z_{\text{BAO}} \right\}$ . Adotamos "**flat priors**" em todos os parâmetros e restringimos  $F > 0$ , pois espera-se que o sinal **BAO** seja um pico. Também restringimos a **largura do pico** assim:  $0.004 < \sigma < 0.014$ , porque um pico apertado não pode ser restringido devido à resolução limitada, fornecida pelos sub-bins de redshift e um pico amplo excederia a largura dos dados. Além disso, restringimos a posição do pico para estar dentro da faixa de dados,  $0.02 < \Delta z_{\text{BAO}} < 0.075$ . O resultado dessa análise é mostrado na Figura 5.22. Curiosamente, podemos observar pouca correlação entre  $\Delta z_{\text{BAO}}$  e os outros parâmetros. A análise anterior fornece a seguinte estimativa de **BAO** independente do modelo:

$$\Delta z_{\text{BAO}}(z_{\text{eff}} = 0.507) = 0.0456_{-0.0038}^{+0.0045} \simeq 0.0456 \pm 0.0042, \quad (5.99)$$

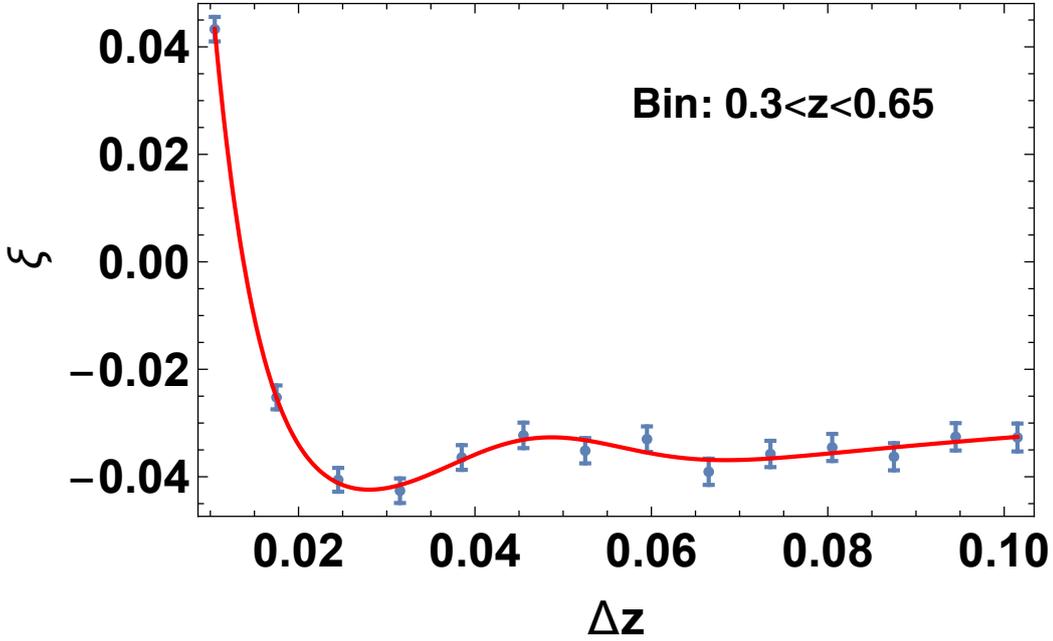
que concorda com o valor relativo à cosmologia fiducial de [237] dada na equação (5.96). E. Sánchez et al. [20] estimou um erro sistemático total de 0.33%, que é muito menor que o erro estatístico de 9% na equação (5.99) e pode ser desprezado.

Para avaliar a significância da detecção do pico de **BAO**, comparamos o  $\chi_{\text{min}}^2$  em relação à equação (5.98) com o  $\chi_{\text{min}}^2$  em relação ao modelo **nãoBAO**, isto é, a equação (5.98) com  $F = 0$ . A comparação desses dois valores fornece uma medida do nosso nível de confiança de que a característica **BAO** existe nos dados. Esta análise dá:

$$\chi_{\text{min}}^2(\text{nãoBAO}) - \chi_{\text{min}}^2(\text{BAO}) = 12.4 - 7.9 = 4.5. \quad (5.100)$$

Como se espera que  $\chi_{\text{min}}^2(\text{nãoBAO})$  seja 3 pontos mais alto devido ao aumento de d.o.f., a significância da detecção é pequena. Alternativamente, o modelo **nãoBAO** é rejeitado com um valor-p de apenas 0.2. Os erros estatísticos são significativamente altos e a significância é baixa em comparação com a análise que usa a função de correlação tridimensional ( $3 - d$ ) porque as correlações cruzadas entre

píxeis não podem ser usadas: esse é o preço de abandonar as premissas completamente básicas para realizar uma análise totalmente independente do modelo. Espera-se que futuros catálogos produzam resultados de significância mais altos.



**Figura 5.21.** Função de correlação  $\xi_\beta$  para o bin  $0.3 < z < 0.65$ , junto com o ajuste da equação (5.97). As barras de erro são os elementos da diagonal da matriz de covariância; no entanto, os pontos estão correlacionados como pode observar-se na Figura 5.17.

#### 5.6.4.1 Análises de dados simulados (mocks)

Aqui, para testar a robustez do método, repetimos a análise usando a matriz de covariância simulada estimada na Subseção 5.6.3.7. Os resultado são:

$$\Delta z_{\text{BAO}} = 0.0442 \pm 0.0044 \quad (5.101)$$

$$\chi_{\min}^2(\text{nãoBAO}) - \chi_{\min}^2(\text{BAO}) = 13.7 - 9.4 = 4.3, \quad (5.102)$$

em boa concordância com o principal resultado que utiliza a matriz de covariância obtida diretamente dos dados.

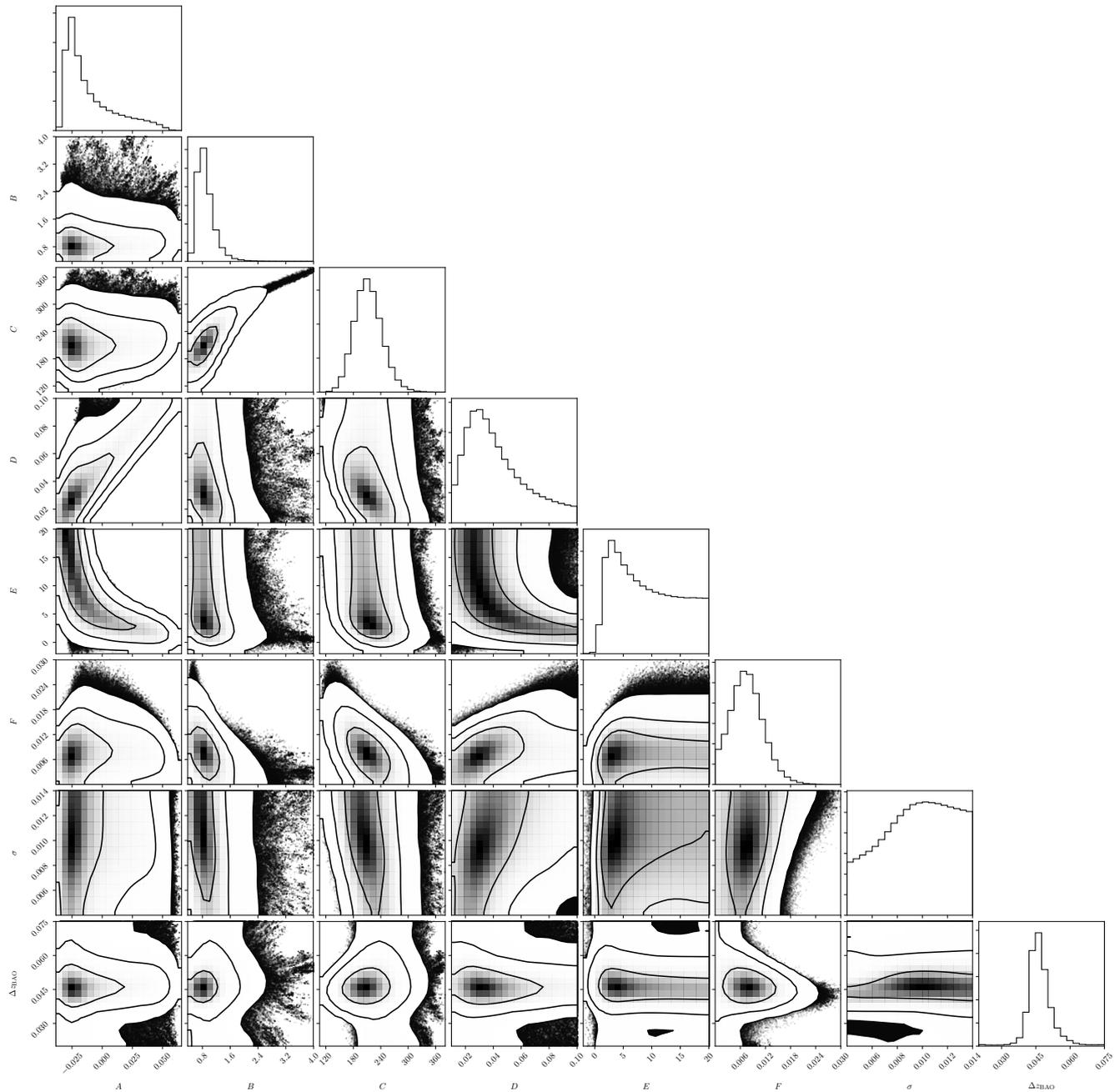
Finalmente, realizamos a análise usando a função de correlação média das simulações e a matriz de covariância simulada relativa à média, definida como  $\frac{\Sigma_{\beta\beta'}^{\text{mocks}}}{500}$ . O resultado é:

$$\Delta z_{\text{BAO}} = 0.04437 \pm 0.00024 \quad (5.103)$$

$$\chi_{\min}^2(\text{nãoBAO}) - \chi_{\min}^2(\text{BAO}) = 562 - 7 = 555. \quad (5.104)$$

O que mostra que a **parametrização fenomenológica** da equação (5.97) é um bom modelo. A posição do pico de BAO é menor que  $1\sigma$  do valor relativo à cosmologia fiducial dada pela equação (5.96). Esse pequeno viés (bias) é irrelevante para nossa análise, pois equivale a um deslocamento de  $0.06\sigma$

na equação (5.99). Esse viés (bias) é possivelmente devido à estratégia de "binning" e ao esquema de ponderação usado.



**Figura 5.22.** Gráfico triangular relativo à função  $\chi^2$  da equação (5.98). Os contornos contêm  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  da probabilidade total.

## Capítulo 6

# CONCLUSÕES

### Em nosso primeiro trabalho:

Nós investigamos a possibilidade de que a dinâmica de um **fluido viscoso volumétrico cosmológico** seja o resultado de um backreaction devido à média das inhomogeneidades em um Universo de poeira pura. Nós também quantificamos o **backreaction dinâmico** e a **curvatura média** através do período de dominação da matéria da evolução cosmológica. Com ajuda de uma **métrica efetiva com curvatura espacial dependente do tempo** testamos este modelo com as observações de SNIa da amostra Union2.1. Nós não encontramos grandes diferenças comparadas aos resultados de uma análise padrão para uma **cosmologia viscosa volumétrica plana**. **Ao nosso conhecimento, este tipo de interpretação dos dados comparando um mesmo modelo descrito de forma padrão e sob o ponto de vista do backreaction não foi feito até o momento.** Um comentário semelhante também é válido para um **modelo de constante cosmológica efetiva** na qual a **dinâmica de uma constante cosmológica é imitada por uma combinação de backreaction cinemático e curvatura média**. Deste ponto de vista, a análise de backreaction aparentemente é compatível com respeito à interpretação dos dados de SNIa. Outros testes aplicados a estes modelos podem ser objeto de pesquisas futuras. **A diferença crucial entre os modelos de backreaction e o modelo padrão FLRW é a existência da evolução temporal da curvatura, em contraste com o modelo FLRW na qual a curvatura é constante (na maioria dos casos, nula).** Em [244] uma quantidade útil foi introduzida a qual é identicamente zero para todas as configurações de FLRW, mas não para os modelos gerais. Para uma classe de modelos cuja curvatura evolui no tempo foi discutida em [111]. Desta forma, de acordo com os autores em [111], resultados futuros do projeto **Euclid**<sup>1</sup> deverão ser capazes de distinguir entre modelos de curvatura com evolução e modelos de curvatura constante.

### Em nosso segundo trabalho:

Destacamos as características básicas da dinâmica de modelos simples (brinquedo) inhomogêneos que se baseiam na solução de LTB esféricamente simétrica das equações de Einstein para poeira. Esses modelos representam as generalizações mais simples do modelo padrão cosmológico. **Apenas inhomogeneidades radiais são levadas em conta.** Modelos não homogêneos têm sido vistos como candidatos potenciais para descrever a relação de distância de luminosidade-redshift observada para SNIa sem uma componente de energia escura. Como uma característica específica, os modelos

---

<sup>1</sup>[sci.esa.int](http://sci.esa.int)

baseados em LTB admitem um tempo de big bang inomogêneo, ou seja, a singularidade inicial depende da coordenada radial (*é claro que, estritamente falando, esses modelos não podem ser estendidos até a singularidade*).

Para a **solução parabólica**, verificamos até que ponto modelos de tempo de big bang inomogêneo podem reproduzir o **cone de luz passado** e a **relação distância luminosidade-redshift do modelo  $\Lambda$ CDM**. Nós usamos perfis simples para a função de tempo de big bang inomogêneo tal que para valores suficientemente grandes de  $r$  o limite homogêneo é abordado. **Uma derivada positiva** da função de tempo de big bang inomogêneo em relação a  $r$  dá origem a um **vazio local** e uma **derivada negativa** corresponde a uma **colina local**. Também **comparamos os cones de luz** dos modelos EdS e  $\Lambda$ CDM para os dois modelos simples inomogêneos, baseados na **solução parabólica**. Destes modelos, apenas o modelo EdS admite uma solução analítica. Enquanto na maioria das configurações de LTB **o observador está localizado no centro de um vazio**, confirmamos que, **no que se refere à relação de distância de luminosidade-redshift, uma localização, no centro, em uma colina fornece melhores resultados**. Nós usamos a **amostra JLA** para fixar nossos parâmetros do modelo. De acordo com nossa análise da likelihood (verossimilhança), o modelo de colina tem uma extensão de alguns Gpcs e nosso modelo de vazio não é maior do que cerca de 30 Mpcs.

Até os modelos inomogêneos mais simples enfrentam problemas como o **shell crossing** ou **regiões de blueshift cosmológico** que limitam sua aplicabilidade imediata ao Universo real. Nós **demonstramos e visualizamos explicitamente a ocorrência do shell crossing no modelo de vazio de tempo de big bang inomogêneo**. O modelo de colina correspondente é livre do shell crossing mas pode sofrer um efeito de blueshift assim que a taxa de expansão longitudinal se tornar negativa. Recuperamos que o horizonte aparente do modelo de tempo de big bang inomogêneo intersecta o cone de luz passado no máximo do raio areal. **Também confirmamos, que o sinal do redshift drift para nossos modelos inomogêneos é diferente do sinal correspondente do modelo  $\Lambda$ CDM para redshift até  $z \approx 2$** .

As configurações investigadas aqui foram introduzidas como modelos de brinquedo, mas eles admitiram relacionar os parâmetros do modelo a observações reais e quantificar as diferenças para o modelo padrão  $\Lambda$ CDM. **Nosso foco foi em dados de supernovas e no redshift drift como um critério para discriminar entre modelos homogêneos e inomogêneos** (mais testes são necessários aqui). Além disso, usamos apenas uma característica muito simples da rica estrutura dos modelos de LTB. **Esperamos que a inclusão de efeitos de curvatura na análise nos forneça informações adicionais sobre o status de soluções inomogêneas exatas e sua utilidade para modelos cosmológicos melhorados e mais realistas**.

**Em nosso terceiro trabalho:**

Nós derivamos a **solução fenomenológica mais simples das equações de Buchert a partir de uma dinâmica subjacente de LTB na aproximação da curvatura linear**. Essa solução representa um modelo de “brinquedo” exatamente solucionável de como construir uma **dinâmica homogênea média** a partir de uma solução inomogênea exata. As variáveis médias dependem dos parâmetros da solução LTB no limite do volume médio. **Para esta configuração simples existe um backreaction cinemático não-nulo apenas para um tempo de big bang inomogêneo**. Isso é verdade tanto em ordens lineares quanto quadráticas na curvatura  $E(r)$  de LTB. Para um tempo de big bang

homogêneo, o fluido de backreaction é uma componente de curvatura pura. O aparecimento de um termo de curvatura induzida pela média também é conhecido a partir da gravidade macroscópica [138–140]. Na primeira ordem em  $E$  obtemos  $\mathcal{R}_D \propto a_D^{-2}$  para a curvatura média, que é semelhante ao caso FLRW. Desvios desse comportamento podem ocorrer na segunda ordem em  $E$ , mas isso requer um tempo de big bang inhomogêneo. Tanto por causa de sua dinâmica interna, o backreaction cinemático está crescendo em direção ao passado, e por causa de suas dificuldades em explicar os dados observacionais atuais, **este modelo não fornece uma descrição realista de nosso Universo**. É um modelo de brinquedo exatamente solucionável que pode ser o primeiro passo para um melhor entendimento de como uma dinâmica homogênea e isotrópica poderia emergir de uma configuração inhomogênea subjacente. Extensões potenciais deste estudo incluem a investigação de modelos menos simétricos, por exemplo: **modelos baseados na métrica de Szekeres** [34, 85]. Um quadro mais adequado também terá que considerar o Universo como composto por mais do que apenas uma região inhomogênea. Em geral, o domínio da média será constituída por diferentes e dispersas regiões densas e subdensas que terá de ser descrita por diferentes taxas de expansão locais [155].

**Em nosso quarto e último trabalho podemos concluir que:**

Usando quase um milhão de galáxias a partir da liberação final de dados da pesquisa **BOSS** (SDSS-III DR12), **obtivemos, embora com baixa significância, uma determinação independente do modelo da característica radial BAO** [39], veja a equação (5.99). Este resultado apresenta um erro de 9% e pode ser usado para restringir a expansão de fundo de modelos exóticos para os quais as suposições adotadas na análise padrão de Shadab Alam et al. [229] não pode ser satisfeito. Este é o caso, **por exemplo**: dos modelos inhomogêneos que são usados para testar a homogeneidade sem assumi-la, tal como fez Wessel Valkenburg et al. [26].

Também introduzimos um novo método para calcular a matriz de covariância diretamente a partir dos dados, e a validamos em relação à matriz de covariância obtida a partir das simulações do BOSS. Consequentemente, seguindo o método apresentado neste trabalho, é possível obter restrições de **BAO totalmente independentes do modelo** [39].

Futuros catálogos de galáxias de **J-PAS** [245], **DESI** ([desi.lbl.gov](http://desi.lbl.gov), [246]) e **Euclid** [14] nos permitirão obter determinações **independentes do modelo de alta significância do pico de BAO em vários valores de redshift**. Usando o formalismo aqui apresentado, será fácil obter a posição característica de BAO em diferentes regiões angulares, de modo que a isotropia do Universo possa ser diretamente testada. Concluimos enfatizando que é imperativo testar o paradigma padrão de uma forma independente do modelo (sim assumir um fiducial), a fim de testar suas bases, maximizar a extração de informações dos dados e procurar pistas sobre a energia escura e a matéria escura mal compreendidas.

# Referências Bibliográficas

- [1] Penrose, R. El camino a la realidad. *Randon House Mondadori, Barcelona* (2006).
- [2] Greene, B. *El universo elegante* (Planeta, 2002).
- [3] Mukhanov, V. *Physical foundations of cosmology* (Cambridge University Press, 2005).
- [4] Ryden, B. Introduction to cosmology. *The Ohio State University* (2006).
- [5] Weinberg, S. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity (1972).
- [6] Buchert, T., Coley, A. A., Kleinert, H., Roukema, B. F. & Wiltshire, D. L. Observational challenges for the standard flrw model. *International Journal of Modern Physics D* **25**, 1630007 (2016).
- [7] Riess, A. G. *et al.* Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal* **116**, 1009 (1998).
- [8] Perlmutter, S. *et al.* Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal* **517**, 565 (1999).
- [9] Tonry, J. L. *et al.* Cosmological results from high- $z$  supernovae. *The Astrophysical Journal* **594**, 1 (2003).
- [10] Knop, R. A. *et al.* New constraints on  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$ , and  $w$  from an independent set of 11 high-redshift supernovae observed with the Hubble Space Telescope. *The Astrophysical Journal* **598**, 102 (2003).
- [11] Riess, A. G. *et al.* Type Ia supernova discoveries at  $z > 1$  from the Hubble Space Telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution. *The Astrophysical Journal* **607**, 665 (2004).
- [12] Nobbenhuis, S. The cosmological constant problem, an inspiration for new physics. *arXiv preprint gr-qc/0609011* (2006).
- [13] Weinberg, S. The cosmological constant problem. *Reviews of Modern Physics* **61**, 1 (1989).
- [14] Amendola, L. *et al.* Cosmology and fundamental physics with the euclid satellite. *Living reviews in relativity* **21**, 2 (2018).
- [15] Dodelson, S. *Modern cosmology* (Academic press, 2003).
- [16] Weinberg, S. *Cosmology* (Oxford Univ. Press, 2008).

- [17] Eisenstein, D. J. *et al.* Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies. *The Astrophysical Journal* **633**, 560 (2005).
- [18] Bond, J. & Efstathiou, G. Cosmic background radiation anisotropies in universes dominated by nonbaryonic dark matter (1984).
- [19] Holtzman, J. A. Microwave background anisotropies and large-scale structure in universes with cold dark matter, baryons, radiation, and massive and massless neutrinos. *The Astrophysical Journal Supplement Series* **71**, 1–24 (1989).
- [20] Sánchez, E., Alonso, D., Sánchez, F., García-Bellido, J. & Sevilla, I. Precise measurement of the radial baryon acoustic oscillation scales in galaxy redshift surveys. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **434**, 2008–2019 (2013).
- [21] Copeland, E. J., Sami, M. & Tsujikawa, S. Dynamics of dark energy. *International Journal of Modern Physics D* **15**, 1753–1935 (2006).
- [22] Joyce, A., Jain, B., Khoury, J. & Trodden, M. Beyond the cosmological standard model. *Physics Reports* **568**, 1–98 (2015).
- [23] Barbosa, R. M., Isidro, E. G. C., Zimdahl, W. & Piattella, O. F. Cosmic bulk viscosity through backreaction. *General Relativity and Gravitation* **48**, 51 (2016).
- [24] Isidro, E. G. C., Barbosa, R. M., Piattella, O. F. & Zimdahl, W. Averaged lemaître–tolman–bondi dynamics. *Classical and Quantum Gravity* **34**, 035001 (2016).
- [25] Buchert, T. On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: dust cosmologies. *General Relativity and Gravitation* **32**, 105–125 (2000).
- [26] Valkenburg, W., Marra, V. & Clarkson, C. Testing the copernican principle by constraining spatial homogeneity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters* **438**, L6–L10 (2013).
- [27] Redlich, M., Bolejko, K., Meyer, S., Lewis, G. F. & Bartelmann, M. Probing spatial homogeneity with ltb models: a detailed discussion. *Astronomy & Astrophysics* **570**, A63 (2014).
- [28] Celerier, M.-N. Do we really see a cosmological constant in the supernovae data? *arXiv preprint astro-ph/9907206* (1999).
- [29] Lemaître, G. L'univers en expansion. *Annales de la Societe Scientifique de Bruxelles* **53**, 51 (1933).
- [30] Tolman, R. C. Effect of inhomogeneity on cosmological models. *Proceedings of the national academy of sciences of the United States of America* **20**, 169 (1934).
- [31] Bondi, H. Spherically symmetrical models in general relativity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **107**, 410–425 (1947).
- [32] Zehavi, I., Riess, A. G., Kirshner, R. P. & Dekel, A. A local Hubble bubble from type Ia supernovae? *The Astrophysical Journal* **503**, 483 (1998).
- [33] Célérier, M.-N. Some clarifications about Lemaître–Tolman models of the Universe used to deal with the dark energy problem. *Astronomy & Astrophysics* **543**, A71 (2012).
- [34] Plebanski, J. & Krasinski, A. *An introduction to general relativity and cosmology* (Cambridge University Press, 2006).

- [35] Bolejko, K. *Structures in the Universe by exact methods: formation, evolution, interactions* (Cambridge University Press, 2010).
- [36] Redlich, M., Bolejko, K., Meyer, S., Lewis, G. F. & Bartelmann, M. Probing spatial homogeneity with LTB models: a detailed discussion. *Astronomy & Astrophysics* **570**, A63 (2014).
- [37] Isidro, E. G. C., Vargas, C. Z. & Zimdahl, W. Simple inhomogeneous cosmological (toy) models. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2016**, 003 (2016).
- [38] Stebbins, A. Measuring spacetime geometry over the ages. *International Journal of Modern Physics D* **21**, 1242017 (2012).
- [39] Marra, V. & Isidro, E. G. C. A first model-independent radial bAO constraint from the final BOSS sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (2019).
- [40] Landy, S. D. & Szalay, A. S. Bias and variance of angular correlation functions. *The Astrophysical Journal* **412**, 64–71 (1993).
- [41] Gonçalves, R., Carvalho, G., Bengaly, C., Carvalho, J. & Alcaniz, J. Measuring the scale of cosmic homogeneity with sdss-iv dr14 quasars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **481**, 5270–5274 (2018).
- [42] Mather, J. C. *et al.* Measurement of the Cosmic Microwave Background spectrum by the COBE FIRAS instrument. *The Astrophysical Journal* **420**, 439–444 (1994).
- [43] Schneider, P. *Extragalactic astronomy and cosmology: an introduction* (Springer, 2014).
- [44] d’Inverno, R. A. & Harvey, A. Introducing Einstein’s relativity. *Physics Today* **46**, 59–60 (2008).
- [45] Hubble, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **15**, 168–173 (1929).
- [46] Bennett, C. *et al.* Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: final maps and results. *The Astrophysical Journal Supplement Series* **208**, 20 (2013).
- [47] Aghanim, N. *et al.* Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *arXiv preprint arXiv:1807.06209* (2018).
- [48] Lambourne, R. J. *Relativity, gravitation and cosmology* (Cambridge University Press, 2010).
- [49] Neto, S. *et al.* Estimating cosmological parameters from observational data. *Revista Brasileira de Ensino de Física* **40** (2018).
- [50] Islam, J. N. *An introduction to mathematical cosmology* (Cambridge University Press, 2002).
- [51] Ade, P. A. *et al.* Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics* **594**, A13 (2016).
- [52] Collaboration, P. *et al.* Planck 2013 results. XVI. cosmological parameters.(2013). *arXiv preprint arXiv:1303.5076* .
- [53] Célérier, M.-N. Is the apparent acceleration of the universe expansion driven by a dark energy-like component or by inhomogeneities? *arXiv preprint astro-ph/0612222* (2006).
- [54] De Sitter, W. On the relativity of inertia. remarks concerning einstein’s latest hypothesis. *Proc. Kon. Ned. Acad. Wet* **19**, 1217–1225 (1917).

- [55] Spergel, D. *et al.* Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: Implications for cosmology. *arXiv preprint astro-ph/0603449* (2006).
- [56] Martin, J. Everything you always wanted to know about the cosmological constant problem (but were afraid to ask). *Comptes Rendus Physique* **13**, 566–665 (2012).
- [57] Amendola, L. & Tsujikawa, S. *Dark energy: theory and observations* (Cambridge University Press, 2010).
- [58] Dunkley, J. *et al.* Five-year wilkinson Microwave Anisotropy Probe observations: likelihoods and parameters from the WMAP data. *The Astrophysical Journal Supplement Series* **180**, 306 (2009).
- [59] Bogomazov, A. & Tutukov, A. Supernovae type Ia: non-standard candles of the Universe. *arXiv preprint arXiv:1104.0747* (2011).
- [60] Garcia-Bellido, J. Cosmology and astrophysics. *arXiv preprint astro-ph/0502139* (2005).
- [61] Etherington, I. Lx. on the definition of distance in general relativity. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **15**, 761–773 (1933).
- [62] Tully, R. B. & Fisher, J. R. A new method of determining distances to galaxies. *Astronomy and Astrophysics* **54**, 661–673 (1977).
- [63] Layden, A. C., Hanson, R. B., Hawley, S. L., Klemola, A. R. & Hanley, C. J. The absolute magnitude and kinematics of rr lyrae stars via statistical parallax. *arXiv preprint astro-ph/9608108* (1996).
- [64] Chandrasekhar, S. The maximum mass of ideal white dwarfs. *The Astrophysical Journal* **74**, 81 (1931).
- [65] Stevenson, D. S. *Extreme Explosions* (Springer, 2014).
- [66] Amanullah, R. *et al.* Spectra and Hubble space telescope light curves of six type Ia supernovae at  $0.511 < z < 1.12$  and the union2 compilation. *The Astrophysical Journal* **716**, 712 (2010).
- [67] Kowalski, M. *et al.* Improved cosmological constraints from new, old, and combined supernova data sets. *The Astrophysical Journal* **686**, 749 (2008).
- [68] Suzuki, N. *et al.* The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey. V. improving the dark-energy constraints above  $z > 1$  and building an early-type-hosted supernova sample. *The Astrophysical Journal* **746**, 85 (2012).
- [69] Marra, V. & Pääkkönen, M. Observational constraints on the ALTB model. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2010**, 021 (2010).
- [70] Javanmardi, B., Porciani, C., Kroupa, P. & Pflamm-Altenburg, J. Probing the isotropy of cosmic acceleration traced by type ia supernovae. *The Astrophysical Journal* **810**, 47 (2015).
- [71] Guy, J. *et al.* SALT2: using distant supernovae to improve the use of type Ia supernovae as distance indicators. *Astronomy & Astrophysics* **466**, 11–21 (2007).
- [72] Betoule, M. *et al.* Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples. *Astronomy and Astrophysics* **568**, A22 (2014).

- [73] Sako, M. *et al.* The data release of the sloan digital sky survey-ii supernova survey. *arXiv preprint arXiv:1401.3317* (2014).
- [74] Sullivan, M. *et al.* SNLS3: Constraints on Dark Energy Combining the Supernova Legacy Survey Three-year Data with Other Probes. *The Astrophysical Journal* **737**, 102 (2011).
- [75] Suzuki, N. *et al.* The hubble space telescope cluster supernova survey. v. improving the dark-energy constraints above  $z > 1$  and building an early-type-hosted supernova sample. *The Astrophysical Journal* **746**, 85 (2012).
- [76] Conley, A. *et al.* Supernova constraints and systematic uncertainties from the first three years of the supernova legacy survey. *The Astrophysical Journal Supplement Series* **192**, 1 (2010).
- [77] Riess, A. G., Press, W. H. & Kirshner, R. P. A precise distance indicator: Type ia supernova multicolor light-curve shapes. *The Astrophysical Journal* **473**, 88 (1996).
- [78] Guy, J., Astier, P., Nobili, S., Regnault, N. & Pain, R. SALT: a spectral adaptive light curve template for type Ia supernovae. *Astronomy & Astrophysics* **443**, 781–791 (2005).
- [79] Guy, J. *et al.* The supernova legacy survey 3-year sample: Type ia supernovae photometric distances and cosmological constraints. *Astronomy & Astrophysics* **523**, A7 (2010).
- [80] Chang, Z., Lin, H.-N., Sang, Y. & Wang, S. A tomographic test of cosmological principle using the jla compilation of type ia supernovae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **478**, 3633–3639 (2018).
- [81] Garfinkle, D. Inhomogeneous spacetimes as a dark energy model. *Classical and Quantum Gravity* **23**, 4811 (2006).
- [82] Chung, D. J. & Romano, A. E. Mapping luminosity-redshift relationship to Lemaitre-Tolman-Bondi cosmology. *Physical Review D* **74**, 103507 (2006).
- [83] Alnes, H., Amarzguioui, M. & Grøn, Ø. Inhomogeneous alternative to dark energy? *Physical Review D* **73**, 083519 (2006).
- [84] Misner, C. W. & Sharp, D. H. Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse. *Physical Review* **136**, B571 (1964).
- [85] Szekeres, P. A class of inhomogeneous cosmological models. *Communications in Mathematical Physics* **41**, 55–64 (1975).
- [86] Szekeres, P. Quasispherical gravitational collapse. *Physical Review D* **12**, 2941 (1975).
- [87] Bolejko, K. Volume averaging in the quasispherical Szekeres model. *General Relativity and Gravitation* **41**, 1585–1593 (2009).
- [88] Hellaby, C. & Lake, K. Shell crossings and the Tolman model. *The Astrophysical Journal* **290**, 381–387 (1985).
- [89] Enqvist, K. Lemaitre–Tolman–Bondi model and accelerating expansion. *General Relativity and Gravitation* **40**, 451–466 (2008).
- [90] Mustapha, N. & Hellaby, C. Clumps into voids. *General Relativity and Gravitation* **33**, 455–477 (2001).

- [91] Joshi, P. S. Global aspects in gravitation and cosmology. *Int. Ser. Monogr. Phys., Vol. 87*, **87** (1993).
- [92] Enqvist, K. & Mattsson, T. The effect of inhomogeneous expansion on the supernova observations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2007**, 019 (2007).
- [93] Alnes, H. & Amarzguioui, M. CMB anisotropies seen by an off-center observer in a spherically symmetric inhomogeneous universe. *Physical Review D* **74**, 103520 (2006).
- [94] Grande, J. & Perivolaropoulos, L. Generalized Lemaître-Tolman-Bondi model with inhomogeneous isotropic dark energy: Observational constraints. *Physical Review D* **84**, 023514 (2011).
- [95] Ellis, G. General Relativity and Cosmology, Proceedings of the XLVII Enrico Fermi Summer School. *Academic, New York* (1971).
- [96] Ellis, G. F. & Stoeger, W. The 'fitting problem' in cosmology. *Classical and Quantum Gravity* **4**, 1697 (1987).
- [97] Zalaletdinov, R. M. Averaging out the einstein equations. *General Relativity and Gravitation* **24**, 1015–1031 (1992).
- [98] Zalaletdinov, R. M. Towards a theory of macroscopic gravity. *General relativity and gravitation* **25**, 673–695 (1993).
- [99] Sussman, R. A. On spatial volume averaging in lemaître-tolman-bondi dust models. part i: back reaction, spacial curvature and binding energy. *arXiv preprint arXiv:0807.1145* (2008).
- [100] Ellis, G. F. Inhomogeneity effects in cosmology. *Classical and Quantum Gravity* **28**, 164001 (2011).
- [101] Wiltshire, D. L. What is dust?—physical foundations of the averaging problem in cosmology. *Classical and Quantum Gravity* **28**, 164006 (2011).
- [102] Buchert, T. Toward physical cosmology: focus on inhomogeneous geometry and its non-perturbative effects. *Classical and Quantum Gravity* **28**, 164007 (2011).
- [103] Kolb, E. W. Backreaction of inhomogeneities can mimic dark energy. *Classical and Quantum Gravity* **28**, 164009 (2011).
- [104] Buchert, T., Larena, J. & Alimi, J.-M. Correspondence between kinematical backreaction and scalar field cosmologies—the 'morphon field'. *Classical and Quantum Gravity* **23**, 6379 (2006).
- [105] Roy, X. & Buchert, T. Chaplygin gas and effective description of inhomogeneous universe models in general relativity. *Classical and Quantum Gravity* **27**, 175013 (2010).
- [106] Green, S. R. & Wald, R. M. How well is our universe described by an flrw model? *Classical and Quantum Gravity* **31**, 234003 (2014).
- [107] Buchert, T. *et al.* Is there proof that backreaction of inhomogeneities is irrelevant in cosmology? *Classical and quantum gravity* **32**, 215021 (2015).
- [108] Räsänen, S. Light propagation in statistically homogeneous and isotropic dust universes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2009**, 011 (2009).
- [109] Räsänen, S. Light propagation in statistically homogeneous and isotropic universes with general matter content. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2010**, 018 (2010).

- [110] Bagheri, S. & Schwarz, D. J. Light propagation in the averaged universe. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2014**, 073 (2014).
- [111] Larena, J., Alimi, J.-M., Buchert, T., Kunz, M. & Corasaniti, P.-S. Testing backreaction effects with observations. *Physical Review D* **79**, 083011 (2009).
- [112] Buchert, T. Dark energy from structure: a status report. *General Relativity and Gravitation* **40**, 467–527 (2008).
- [113] Fabris, J. C., Goncalves, S. & de Sa Ribeiro, R. Bulk viscosity driving the acceleration of the universe. *General Relativity and Gravitation* **38**, 495–506 (2006).
- [114] Colistete Jr, R., Fabris, J., Tossa, J. & Zimdahl, W. Bulk viscous cosmology. *Physical Review D* **76**, 103516 (2007).
- [115] Avelino, A. & Nucamendi, U. Can a matter-dominated model with constant bulk viscosity drive the accelerated expansion of the universe? *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2009**, 006 (2009).
- [116] Hipolito-Ricaldi, W., Velten, H. & Zimdahl, W. Non-adiabatic dark fluid cosmology. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2009**, 016 (2009).
- [117] Hipólito-Ricaldi, W., Velten, H. & Zimdahl, W. Viscous dark fluid universe. *Physical Review D* **82**, 063507 (2010).
- [118] Piattella, O. F., Fabris, J. C. & Zimdahl, W. Bulk viscous cosmology with causal transport theory. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2011**, 029 (2011).
- [119] Paranjape, A. & Singh, T. The possibility of cosmic acceleration via spatial averaging in lemaître–tolman–bondi models. *Classical and Quantum Gravity* **23**, 6955 (2006).
- [120] Roukema, B. F., Ostrowski, J. J. & Buchert, T. Virialisation-induced curvature as a physical explanation for dark energy. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2013**, 043 (2013).
- [121] Tomita, K. Distances and lensing in cosmological void models. *The Astrophysical Journal* **529**, 38 (2000).
- [122] Iguchi, H., Nakamura, T. & Nakao, K.-i. Is dark energy the only solution to the apparent acceleration of the present universe? *Progress of theoretical physics* **108**, 809–818 (2002).
- [123] Mustapha, N., Hellaby, C. & Ellis, G. Large-scale inhomogeneity versus source evolution: can we distinguish them observationally? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **292**, 817–830 (1997).
- [124] Marra, V. & Notari, A. Observational constraints on inhomogeneous cosmological models without dark energy. *Classical and Quantum Gravity* **28**, 164004 (2011).
- [125] Krasiński, A. Accelerating expansion or inhomogeneity? a comparison of the  $\Lambda$ CDM and Lemaître-Tolman models. *Physical Review D* **89**, 023520 (2014).
- [126] Keenan, R. C., Barger, A. J. & Cowie, L. L. Evidence for a 300 megaparsec scale under-density in the local galaxy distribution. *The Astrophysical Journal* **775**, 62 (2013).
- [127] Célérier, M.-N., Bolejko, K. & Krasiński, A. A (giant) void is not mandatory to explain away dark energy with a Lemaître-Tolman model. *Astronomy & Astrophysics* **518**, A21 (2010).

- [128] Zibin, J. P. Can decaying modes save void models for acceleration? *Physical Review D* **84**, 123508 (2011).
- [129] Bull, P., Clifton, T. & Ferreira, P. G. Kinematic sunyaev-zel'dovich effect as a test of general radial inhomogeneity in lemaître-tolman-bondi cosmology. *Physical Review D* **85**, 024002 (2012).
- [130] Krasinski, A. Blueshifts in the lemaître-tolman models. *Physical Review D* **90**, 103525 (2014).
- [131] Yoo, C.-M., Kai, T. & Nakao, K.-i. Redshift drift in lemaître-tolman-bondi void universes. *Physical Review D* **83**, 043527 (2011).
- [132] Koksang, S. & Hannestad, S. Redshift drift in an inhomogeneous universe: averaging and the backreaction conjecture. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2016**, 009 (2016).
- [133] Borissova, J. *et al.* Obscured clusters-iv. the most massive stars in [dbs2003] 179. *Astronomy & Astrophysics* **546**, A110 (2012).
- [134] Akaike, H. A new look at the statistical model identification. In *Selected Papers of Hirotugu Akaike*, 215–222 (Springer, 1974).
- [135] Schwarz, G. *et al.* Estimating the dimension of a model. *The annals of statistics* **6**, 461–464 (1978).
- [136] Kass, R. E. & Raftery, A. E. Bayes factors. *Journal of the american statistical association* **90**, 773–795 (1995).
- [137] Räsänen, S. Backreaction: directions of progress. *Classical and Quantum Gravity* **28**, 164008 (2011).
- [138] Coley, A. A., Pelavas, N. & Zalaletdinov, R. Cosmological solutions in macroscopic gravity. *Physical review letters* **95**, 151102 (2005).
- [139] Coley, A. A. & Pelavas, N. Averaging spherically symmetric spacetimes in general relativity. *Physical Review D* **74**, 087301 (2006).
- [140] Coley, A. A. & Pelavas, N. Averaging in spherically symmetric cosmology. *Physical Review D* **75**, 043506 (2007).
- [141] Clarkson, C., Clifton, T., Coley, A. & Sung, R. Observational constraints on the averaged universe. *Physical Review D* **85**, 043506 (2012).
- [142] Chiesa, M., Maino, D. & Majerotto, E. Observational tests of backreaction with recent data. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2014**, 049 (2014).
- [143] Biswas, T., Mansouri, R. & Notari, A. Non-linear structure formation and 'apparent' acceleration: an investigation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2007**, 017 (2007).
- [144] Biswas, T. & Notari, A. 'swiss-cheese' inhomogeneous cosmology and the dark energy problem. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2008**, 021 (2008).
- [145] Räsänen, S. Backreaction in the lemaître–tolman–bondi model. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2004**, 010 (2004).
- [146] Mattsson, M. & Mattsson, T. On the role of shear in cosmological averaging. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2010**, 021 (2010).

- [147] Sussman, R. A. Weighed scalar averaging in ltb dust models: part i. statistical fluctuations and gravitational entropy. *Classical and Quantum Gravity* **30**, 065015 (2013).
- [148] Sussman, R. A. Weighed scalar averaging in ltb dust models: part ii. a formalism of exact perturbations. *Classical and Quantum Gravity* **30**, 065016 (2013).
- [149] Sussman, R. A. Back-reaction and effective acceleration in generic ltb dust models. *Classical and Quantum Gravity* **28**, 235002 (2011).
- [150] Li, N. & Schwarz, D. J. Onset of cosmological backreaction. *Physical Review D* **76**, 083011 (2007).
- [151] Jimenez, R. & Loeb, A. Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages. *The Astrophysical Journal* **573**, 37 (2002).
- [152] Jimenez, R., Verde, L., Treu, T. & Stern, D. Constraints on the equation of state of dark energy and the hubble constant from stellar ages and the cosmic microwave background. *The Astrophysical Journal* **593**, 622 (2003).
- [153] Stern, D., Jimenez, R., Verde, L., Kamionkowski, M. & Stanford, S. A. Cosmic chronometers: constraining the equation of state of dark energy. i:  $H(z)$  measurements. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2010**, 008 (2010).
- [154] Farooq, O. & Ratra, B. Hubble parameter measurement constraints on the cosmological deceleration-acceleration transition redshift. *The Astrophysical Journal Letters* **766**, L7 (2013).
- [155] Buchert, T. & Räsänen, S. Backreaction in late-time cosmology. *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **62**, 57–79 (2012).
- [156] Kiakotou, A., Elgarøy, Ø. & Lahav, O. Neutrino mass, dark energy, and the linear growth factor. *Physical Review D* **77**, 063005 (2008).
- [157] Polarski, D. & Gannouji, R. On the growth of linear perturbations. *Physics Letters B* **660**, 439–443 (2008).
- [158] Gong, Y., Ishak, M., Wang, A. *et al.* Growth factor parametrization in curved space. *Physical Review D* **80**, 023002 (2009).
- [159] Linder, E. V. Cosmic growth history and expansion history. *Physical Review D* **72**, 043529 (2005).
- [160] Zimdahl, W., Borges, H., Carneiro, S., Fabris, J. & Hipolito-Ricaldi, W. Non-adiabatic perturbations in decaying vacuum cosmology. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2011**, 028 (2011).
- [161] Linder, E. V. & Cahn, R. N. Parameterized beyond-einstein growth. *Astroparticle Physics* **28**, 481–488 (2007).
- [162] Dodelson, S. *Modern cosmology* (Elsevier, 2003).
- [163] Ruiz-Lapuente, P. *Dark energy: observational and theoretical approaches* (Cambridge University Press, 2010).
- [164] Bardeen, J. M. Gauge-invariant cosmological perturbations. *Physical Review D* **22**, 1882 (1980).
- [165] Eisenstein, D. J. *et al.* Spectroscopic target selection for the sloan digital sky survey: The luminous red galaxy sample. *The Astronomical Journal* **122**, 2267 (2001).

- [166] Bardeen, J. M., Szalay, A., Kaiser, N. & Bond, J. The statistics of peaks of gaussian random fields. *Astrophys. J.* **304**, 15–61 (1985).
- [167] Peacock, J. A. *Cosmological physics* (Cambridge university press, 1999).
- [168] Peebles, P. J. E. *The large-scale structure of the universe* (Princeton university press, 1980).
- [169] Loan, A., Wall, J. & Lahav, O. The correlation function of radio sources. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **286**, 994–1002 (1997).
- [170] Kerscher, M., Szapudi, I. & Szalay, A. S. A comparison of estimators for the two-point correlation function. *The Astrophysical Journal Letters* **535**, L13 (2000).
- [171] Vargas-Magaña, M. *et al.* An optimized correlation function estimator for galaxy surveys. *Astronomy & Astrophysics* **554**, A131 (2013).
- [172] Peebles, P. J. E. & Hauser, M. G. Statistical analysis of catalogs of extragalactic objects. iii. the shane-wirtanen and zwicky catalogs. *The Astrophysical Journal Supplement Series* **28**, 19 (1974).
- [173] Hewett, P. C. The estimation of galaxy angular correlation functions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **201**, 867–883 (1982).
- [174] Davis, M. & Peebles, P. A survey of galaxy redshifts. v-the two-point position and velocity correlations. *The Astrophysical Journal* **267**, 465–482 (1983).
- [175] Hamilton, A. Toward better ways to measure the galaxy correlation function. *The Astrophysical Journal* **417**, 19 (1993).
- [176] Pons-Bordería, M.-J., Martínez, V. J., Stoyan, D., Stoyan, H. & Saar, E. Comparing estimators of the galaxy correlation function. *The Astrophysical Journal* **523**, 480 (1999).
- [177] Kerscher, M. The geometry of second-order statistics-biases in common estimators. *arXiv preprint astro-ph/9811300* (1998).
- [178] Labatie, A., Starck, J.-L., Lachièze-Rey, M. & Arnalte-Mur, P. Uncertainty in 2-point correlation function estimators and baryon acoustic oscillation detection in galaxy surveys. *Statistical Methodology* **9**, 85–100 (2012).
- [179] Percival, W. J. Large scale structure observations. Tech. Rep. (2013).
- [180] Coles, P. *Cosmology: A very short introduction* (OUP Oxford, 2001).
- [181] York, D. G. *et al.* The sloan digital sky survey: Technical summary. *The Astronomical Journal* **120**, 1579 (2000).
- [182] Blake, C. *et al.* The wigglez dark energy survey: mapping the distance–redshift relation with baryon acoustic oscillations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **418**, 1707–1724 (2011).
- [183] Beutler, F. *et al.* The 6df galaxy survey: baryon acoustic oscillations and the local hubble constant. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **416**, 3017–3032 (2011).
- [184] Cole, S. *et al.* The 2df galaxy redshift survey: power-spectrum analysis of the final data set and cosmological implications. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **362**, 505–534 (2005).

- [185] Wang, Y. *et al.* The clustering of galaxies in the completed sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: tomographic bao analysis of dr12 combined sample in configuration space. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **469**, 3762–3774 (2017).
- [186] Hong, T., Han, J., Wen, Z., Sun, L. & Zhan, H. The correlation function of galaxy clusters and detection of baryon acoustic oscillations. *The Astrophysical Journal* **749**, 81 (2012).
- [187] Veropalumbo, A., Marulli, F., Moscardini, L., Moresco, M. & Cimatti, A. An improved measurement of baryon acoustic oscillations from the correlation function of galaxy clusters at  $z \approx 0.3$ . *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **442**, 3275–3283 (2014).
- [188] Bassett, B. & Hlozek, R. Baryon acoustic oscillations. *Dark energy: observational and theoretical approaches* 246 (2010).
- [189] Kaiser, N. Clustering in real space and in redshift space. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **227**, 1–21 (1987).
- [190] Proust, D. *et al.* The shapley supercluster: the largest matter concentration in the local universe. *The Messenger* **124**, 30 (2006).
- [191] Jackson, J. A critique of rees's theory of primordial gravitational radiation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **156**, 1P–5P (1972).
- [192] Willick, J. A. & Batra, P. A determination of the hubble constant from cepheid distances and a model of the local peculiar velocity field. *The Astrophysical Journal* **548**, 564 (2001).
- [193] Jennings, E., Baugh, C. M. & Pascoli, S. Modelling redshift space distortions in hierarchical cosmologies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **410**, 2081–2094 (2011).
- [194] Seo, H.-J., Siegel, E. R., Eisenstein, D. J. & White, M. Nonlinear structure formation and the acoustic scale. *The Astrophysical Journal* **686**, 13 (2008).
- [195] Angulo, R., Baugh, C., Frenk, C. & Lacey, C. G. The detectability of baryonic acoustic oscillations in future galaxy surveys. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **383**, 755–776 (2007).
- [196] Padmanabhan, N. & White, M. Calibrating the baryon oscillation ruler for matter and halos. *Physical Review D* **80**, 063508 (2009).
- [197] Eisenstein, D. J., Seo, H.-J. & White, M. On the robustness of the acoustic scale in the low-redshift clustering of matter. *The Astrophysical Journal* **664**, 660 (2007).
- [198] Crocce, M. & Scoccimarro, R. Nonlinear evolution of baryon acoustic oscillations. *Physical Review D* **77**, 023533 (2008).
- [199] Orban, C. & Weinberg, D. H. Self-similar bumps and wiggles: Isolating the evolution of the bao peak with power-law initial conditions. *Physical Review D* **84**, 063501 (2011).
- [200] Mehta, K. T. *et al.* Galaxy bias and its effects on the baryon acoustic oscillation measurements. *The Astrophysical Journal* **734**, 94 (2011).
- [201] Smith, R. E. *et al.* Stable clustering, the halo model and non-linear cosmological power spectra. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **341**, 1311–1332 (2003).
- [202] Alcock, C. & Paczyński, B. An evolution free test for non-zero cosmological constant. *Nature* **281**, 358 (1979).

- [203] Blake, C. & Glazebrook, K. Probing dark energy using baryonic oscillations in the galaxy power spectrum as a cosmological ruler. *The Astrophysical Journal* **594**, 665 (2003).
- [204] Sheth, R. K. & Tormen, G. Large-scale bias and the peak background split. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **308**, 119–126 (1999).
- [205] Peacock, J. & Smith, R. Halo occupation numbers and galaxy bias. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **318**, 1144–1156 (2000).
- [206] Cresswell, J. G. & Percival, W. J. Scale-dependent galaxy bias in the sloan digital sky survey as a function of luminosity and colour. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **392**, 682–690 (2008).
- [207] Norberg, P. *et al.* The 2df galaxy redshift survey: the dependence of galaxy clustering on luminosity and spectral type. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **332**, 827–838 (2002).
- [208] Zehavi, I. *et al.* The luminosity and color dependence of the galaxy correlation function. *The Astrophysical Journal* **630**, 1 (2005).
- [209] Ahn, C. P. *et al.* The ninth data release of the sloan digital sky survey: first spectroscopic data from the sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey. *The Astrophysical Journal Supplement Series* **203**, 21 (2012).
- [210] Anderson, L. *et al.* The clustering of galaxies in the sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: baryon acoustic oscillations in the data release 9 spectroscopic galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **427**, 3435–3467 (2012).
- [211] Maraston, C. *et al.* Stellar masses of sdss-iii/boss galaxies at  $z \approx 0.5$  and constraints to galaxy formation models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **435**, 2764–2792 (2013).
- [212] Ahn, C. P. *et al.* The tenth data release of the sloan digital sky survey: first spectroscopic data from the sdss-iii apache point observatory galactic evolution experiment. *The Astrophysical Journal Supplement Series* **211**, 17 (2014).
- [213] Reid, B. *et al.* Sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey data release 12: galaxy target selection and large-scale structure catalogues. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **455**, 1553–1573 (2015).
- [214] Manera, M. *et al.* The clustering of galaxies in the sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: a large sample of mock galaxy catalogues. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **428**, 1036–1054 (2012).
- [215] Kitaura, F.-S., Yepes, G. & Prada, F. Modelling baryon acoustic oscillations with perturbation theory and stochastic halo biasing. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters* **439**, L21–L25 (2013).
- [216] Kitaura, F.-S. *et al.* The clustering of galaxies in the sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: mock galaxy catalogues for the boss final data release. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **456**, 4156–4173 (2016).
- [217] Klypin, A., Yepes, G., Gottlöber, S., Prada, F. & Hess, S. Multidark simulations: the story of dark matter halo concentrations and density profiles. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **457**, 4340–4359 (2016).

- [218] Zhao, C. *et al.* Halo mass distribution reconstruction across the cosmic web. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **451**, 4266–4276 (2015).
- [219] Rodríguez-Torres, S. A. *et al.* The clustering of galaxies in the sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: modelling the clustering and halo occupation distribution of boss cmass galaxies in the final data release. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **460**, 1173–1187 (2016).
- [220] White, M., Tinker, J. L. & McBride, C. K. Mock galaxy catalogues using the quick particle mesh method. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **437**, 2594–2606 (2013).
- [221] Zheng, Z., Coil, A. L. & Zehavi, I. Galaxy evolution from halo occupation distribution modeling of deep2 and sdss galaxy clustering. *The Astrophysical Journal* **667**, 760 (2007).
- [222] Hauret, C., Magain, P. & Biernaux, J. A cosmology-independent calibration of type ia supernovae data. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **479**, 3996–4003 (2018).
- [223] Martins, C., Martinelli, M., Calabrese, E. & Ramos, M. Real-time cosmography with redshift derivatives. *Physical Review D* **94**, 043001 (2016).
- [224] Moresco, M. *et al.* Setting the stage for cosmic chronometers i. minimizing frosting with an optimized selection of cosmic chronometers. *arXiv preprint arXiv:1804.05864* (2018).
- [225] Marra, V. & Sapone, D. Null tests of the standard model using the linear model formalism. *Physical Review D* **97**, 083510 (2018).
- [226] Verde, L., Bernal, J. L., Heavens, A. F. & Jimenez, R. The length of the low-redshift standard ruler. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **467**, 731–736 (2017).
- [227] Vonlanthen, M., Räsänen, S. & Durrer, R. Model-independent cosmological constraints from the cmb. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2010**, 023 (2010).
- [228] Abbott, B. P. *et al.* Gw170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Physical Review Letters* **119**, 161101 (2017).
- [229] Alam, S. *et al.* The clustering of galaxies in the completed sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: cosmological analysis of the dr12 galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **470**, 2617–2652 (2017).
- [230] Anselmi, S., Starkman, G. D. & Sheth, R. K. Beating non-linearities: improving the baryon acoustic oscillations with the linear point. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **455**, 2474–2483 (2015).
- [231] Anselmi, S., Starkman, G. D., Corasaniti, P.-S., Sheth, R. K. & Zehavi, I. Galaxy correlation functions provide a more robust cosmological standard ruler. *Physical review letters* **121**, 021302 (2018).
- [232] Sánchez, E. *et al.* Tracing the sound horizon scale with photometric redshift surveys. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **411**, 277–288 (2011).
- [233] Alcaniz, J. S., Carvalho, G. C., Bernui, A., Carvalho, J. C. & Benetti, M. Measuring baryon acoustic oscillations with angular two-point correlation function. In *Gravity and the Quantum*, 11–19 (Springer, 2017).

- [234] Carvalho, G., Bernui, A., Benetti, M., Carvalho, J. & Alcaniz, J. Measuring the transverse baryonic acoustic scale from the sdss dr11 galaxies. *arXiv preprint arXiv:1709.00271* (2017).
- [235] de Carvalho, E., Bernui, A., Carvalho, G., Novaes, C. & Xavier, H. Angular baryon acoustic oscillation measure at  $z=2.225$  from the sdss quasar survey. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2018**, 064 (2018).
- [236] Eisenstein, D. J. *et al.* Sdss-iii: Massive spectroscopic surveys of the distant universe, the milky way, and extra-solar planetary systems. *The Astronomical Journal* **142**, 72 (2011).
- [237] Alam, S. *et al.* The eleventh and twelfth data releases of the sloan digital sky survey: final data from sdss-iii. *The Astrophysical Journal Supplement Series* **219**, 12 (2015).
- [238] Pearson, D. W., Samushia, L. & Gagrani, P. Optimal weights for measuring redshift space distortions in multitracer galaxy catalogues. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **463**, 2708–2715 (2016).
- [239] Feldman, H. A., Kaiser, N. & Peacock, J. A. Power spectrum analysis of three-dimensional redshift surveys. *arXiv preprint astro-ph/9304022* (1993).
- [240] Ross, A. J. *et al.* The clustering of galaxies in the completed sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: Observational systematics and baryon acoustic oscillations in the correlation function. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **464**, 1168–1191 (2016).
- [241] von Marttens, R., Marra, V., Casarini, L., Gonzalez, J. & Alcaniz, J. Null test for interactions in the dark sector. *Physical Review D* **99**, 043521 (2019).
- [242] Hogg, D. W. Distance measures in cosmology. *arXiv preprint astro-ph/9905116* (1999).
- [243] Foreman-Mackey, D., Hogg, D. W., Lang, D. & Goodman, J. emcee: the mcmc hammer. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* **125**, 306 (2013).
- [244] Clarkson, C., Bassett, B. & Lu, T. H.-C. A general test of the copernican principle. *Physical Review Letters* **101**, 011301 (2008).
- [245] Benitez, N. *et al.* J-pas: the javalambre-physics of the accelerated universe astrophysical survey. *arXiv preprint arXiv:1403.5237* (2014).
- [246] Martini, P. *et al.* Overview of the dark energy spectroscopic instrument. In *Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy VII*, vol. 10702, 107021F (International Society for Optics and Photonics, 2018).