UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA PROFMAT

VAGNER BRAGA DE ASSIS

# RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: PROPOSTA DE TRABALHO PARA ALUNOS COM DIFICULDADES EM MATEMÁTICA

VITÓRIA 2019

VAGNER BRAGA DE ASSIS

# RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: PROPOSTA DE TRABALHO PARA ALUNOS COM DIFICULDADES EM MATEMÁTICA

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho

VITÓRIA 2019

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Deus pela possibilidade de, com fé e perseverança, conquistar mais uma vitória em minha vida.

A minha esposa, Fernanda Juliati dos Santos, pelo carinho e amor, e por ter sempre me incentivado, estando ao meu lado nos dias difíceis e não mediu esforços para me ajudar.

A minha mãe, Maria das Graças Braga de Assis, pelo seu exemplo e pelo esforço que fez para que eu e meus irmãos tivéssemos uma boa educação escolar e familiar. Em memória de meu pai, Valdeci Barbosa de Assis, que com seu jeito simples e de sua forma ajudou-me a formar meu caráter. A meus irmãos aos quais tenho muito orgulho.

Quero agradecer aos meus amigos que entenderam minha ausência nesse período e que sempre me incentivaram e deram força.

A meu orientador, Prof. Dr. Moacir Rosado Filho, que com sua sabedoria e conhecimento me ajudou neste trabalho e na minha formação desde a graduação.

A todos os professores que compartilharam seus conhecimentos nesses dois anos, muitos dos quais tive o prazer de rever aqui no mestrado, em especial ao Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho pelo exemplo de profissional e pelo carinho que teve com nossa turma.

A CAPES, pelo apoio financeiro durante o curso.

## RESUMO

Este trabalho é uma proposta de atividades para alunos do primeiro ano do ensino médio, que perderam ao longo da sua vida escolar, interesse pela matemática.

Os vários fatores que levaram esse aluno a ter dificuldades em matemática são diversos que vão desde a “aprovação automática”, que eleva o aluno a série seguinte sem os devidos conhecimentos para o seu bom desenvolvimento, até uma sequência de experiências negativas em avaliações que o desestimula e o afasta do conhecimento matemático.

A proposta é “seduzir” o nosso aluno com problemas desafiadores e possíveis de serem resolvidos, mesmo com pouco conhecimento matemático, e à medida que se encante com a matemática, possa entender que é possível interagir com os números e perceber que todos, de uma forma ou de outra, detemos conhecimentos matemáticos.

Vamos introduzir os conceitos de paridade e o princípio das casas de pombo, que tem uma diversidade de problemas interessantes e que possibilita um bom trabalho com esses alunos.

Também vamos trabalhar com os problemas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) pois nos oferece um rico banco de questões.

Palavra-chave: defasagem matemática, resolução de problemas, paridade, princípio da casa dos pombos, OBMEP.

**ABSTRACT**

The prsent paper is a proposition of activitries to students that have just lost their enthusiasm for mathematics thronghout their shool life.

There are many factors that have made this students not to interact with the subject since authomatic approval, that leads pripils to upper grades without proper knowledge, until a negative sequence of experiences in evaluations that puts him/her ever frither away fron mathematicas.

The ideia is "seducing" our apprentice with challenging problems that cam be solved even with a litte mathematical enlightenment and as he/she engages in the topic, he may realize that interacting with numbers is possible and that one way or another evirgone has math knouledge.

We will  present concepts of paridade and the principle of houses of pigeon howse with a widw range of interesting problemas that allows is a good work with students.

We will also cope with Brazilian Olympiad of Mathematics of the Public Schools (OBMEP) problemas due to the variety of questions it provides.

Key words: mathematical insuffiency, problems resolutions, paridade, pigeonhole principle, OBMEP.

## LISTA DE FIGURAS

**SUMÁRIO**

# Capítulo 1

# Introdução

É comum no cotidiano da sala de aula do ensino médio, perceber o desinteresse de muitos dos alunos pela matemática, apresentando muita dificuldade e defasagem com os conteúdos básicos, gerando um distanciamento com a matemática e os isolando dos conhecimentos propostos. Dessa forma, perguntas como “onde eu vou usar isso na minha vida” são frequentes.

No artigo de conclusão da pós-graduação em Educação Profissional e Tecnológica publicada pelo Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Espírito Santo no livro “Educação Profissional e tecnológica: Práticas e Trajetórias de Pesquisas” (2013), já abordava a relação entre o aprendido em sala e o universo do trabalho por meio do estágio, em um primeiro contato com o mercado de trabalho. A evolução dos alunos que conseguiam enxergar significado no que era dado em sala de aula se mostrava perceptível nas atividades propostas. Porém, os alunos que faziam estágio e não percebiam essa relação, seu desempenho era tinha um desempenho, em geral, inferior em relação aos demais alunos. Na conclusão, relatei que:

> *Pode-se observar que, quando o aluno é direcionado em sua formação, há um maior empenho e dedicação em sua formação e suas relações. Nesse caso, o estágio proporciona-lhe um nível de criticidade e exigência maior em relação aos conteúdos, aos professores, ao estágio e à escola. (ASSIS, 2013, p. 86)*

Percebemos que o aluno com dificuldade em matemática também não percebe a ligação destes conteúdos com a sua vida, e isso o faz perder o interesse em aprender o que não lhe tem significado. Ole Skovsmose faz uma análise neste sentido:

> Os problemas fundamentais que dizem respeito às aplicações matemáticas não são visíveis “dentro” do processo de modelagem. Quer dizer, não é possível desenvolver uma atitude crítica em relação à aplicação da matemática somente melhorando a capacidade de modelagem do estudante... assim, uma prática educacional voltada para democratização das possibilidades de os estudantes criticarem as atividades de construção de modelos não podem ser apenas pragmáticas. (SKOVSMOSE, 2001, p. 41)

Ele continua enfatizando que:

> *Frequentemente é estipulado que a educação matemática tem funções importantes em relação ao desenvolvimento epistemológico geral dos estudantes. Enfatiza-se que estudos matemáticos tendem a melhorar as habilidades dos estudantes na estruturação de resolução de problemas lógicos. Porém, os rituais da educação matemática vão à outra direção. Estudantes aprendem a seguir prescrições explicitamente estabelecidas: “Resolva a equação...”, “Ache a medida de...”, “Calcule o valor de...” etc. Isso não tem muito em comum com os processos reais de investigação ou maneiras criativas de estruturar problemas. Tem mais em comum com instruções e regulamentações com as quais muitas pessoas nos processos de rotina de trabalho se confrontam. (*SKOVSMOSE, 2001, p. *45)*

Isso nos possibilita criticar o modelo de ensino direcionado aos nossos jovens, e apresenta uma das causas do desinteresse de parte dos alunos pela matemática, o processo de aprendizado se preocupa mais em ocupar os alunos com atividades do que lhe propor problemas que realmente os tirem de sua zona de conforto e os façam se interessar pelos problemas que lhe são apresentados. D’Ambrosio nos ajuda a entender a dicotomia existente entre a matemática espontânea e a matemática formal, onde ele chama de matemática aprendida:

> *A matemática "aprendida" elimina a assim chamada matemática "espontânea". Um indivíduo que lida perfeitamente bem com números, operações, formas e noções geométricas, quando enfrenta uma abordagem completamente nova e formal para o mesmo fato e necessidade, cria uma barreira psicológica, que cresce com uma barreira entre os diferentes modos de pensamentos numéricos e geométricos. (D'AMBROSIO, 1996, p. 48)*

Esse fato é percebido em sala de aula quando os alunos têm dificuldade em entender a "função" das letras nos problemas propostos. Temos aqui dois problemas estabelecidos como empecilhos no desenvolvimento dos alunos: atividades pouco instigantes e uma abordagem ruim na passagem do real para o abstrato.

Temos ainda outros agravantes quando pensamos em uma educação matemática que promova uma independência intelectual e criticidade, na visão de D'Ambrosio no livro Educação Matemática: Da Teoria à Prática, ele faz outros apontamentos sobre as dificuldades desse processo:

> *Tem-se falado muito no Brasil em testes nacionais. É uma ilusão napoleônica achar que um currículo obrigatório, que atenda a todo país, terá qualquer efeito no melhoramento da educação. [...] Igualmente causa apreensão saber que muitos jovens não passarão no teste nacional. E pode-se prever que entre estes estão principalmente os jovens brasileiros comuns, filhos de famílias sem sucesso, carentes e mesmo desfeitas. Provavelmente estes constituirão a maioria dos fracassados. A impressão que se tem é de que as autoridades têm uma visão desses jovens como descartáveis no conceito corrente de desenvolvimento… Esse exame é equivalente a propor melhorias à saúde do povo brasileiro mediante a uma compra maciça de termômetros e dando um deles a cada família? Ora, sabemos que o problema está na febre, não na sua medição. Nada positivo será alcançado ao publicar o nome do aluno*

> *que se saiu melhor nos testes, dando destaque a sua cidade, a sua escola. E isso não será evitado. Sem dúvidas esses jovens serão objetos de exploração política. Será como um circo para desviar a atenção sobre o essencial. (D'AMBROSIO,1996, P. 64 -65)*

Assim vemos o mesmo acontecendo em nosso estado com o PAEBES (Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo) que faz um ranking com as escolas, mas não faz os investimentos necessários para melhor o desempenho das escolas que tiveram "notas baixas". Fazendo com que tenhamos escolas boas e ruins dentro de uma mesma rede de ensino sem políticas públicas que as promovam, só verificam as falhas, faltando assim as demais etapas desse processo de avaliação para uma educação de qualidade, e isso tem um reflexo importante na educação matemática, pois escolas de periferia tendem a ter um pior rendimento nessas avaliações sistemáticas contribuindo com uma baixa autoestima de nossos alunos.

São muitos desafios que o professor de matemática encontra em sala de aula, os aspectos acima estão mais ligados a conceitos pedagógicos e soma-se a esses: a falta de valorização dos profissionais da educação básica; grande número de alunos numa mesma sala de aula, chegando, em alguns casos, a ter 45 alunos em salas mal estruturadas e no verão as altas temperaturas; as poucas horas de planejamento que são essenciais a uma educação de qualidade; a falta de uma política educacional que ultrapasse um mandato eletivo; gerando a cada nova eleição uma mudança de modelo educação e de objetivos; a falta de participação da família na escola, conferindo a escola uma função de "educador" para além das atividades curriculares, gerando discussões como, por exemplo, a "escola sem partido".

Diante dessa realidade como responder as perguntas essenciais há educação matemática? Aqui retorno ao começo da minha exposição: ***onde vou usar isso na minha vida?*** Ou ainda, como fazer os alunos, principalmente àqueles que perderam o encanto pela matemática, se sentirem atraídos e motivados pelas aulas de matemática diante da realidade de nossa educação pública e de suas defasagens?

Nosso objetivo é trabalhar resolução de problemas motivadores, contemporâneos, dinâmicos e que atinjam alunos com desinteresse pela matemática, construído ao longo do ensino fundamental e que têm implicações no ensino médio. O foco desse trabalho são os alunos do primeiro ano do ensino médio. A proposta é selecionar problemas com potencial encantamento para o aluno, trabalhando diferentes saberes em uma única atividade, podendo ser implementada de acordo com a conveniência do professor.

Esse trabalho se baseia em experiências obtidas ao longo de minha docência, quando percebi que alunos que estavam às margens do conhecimento matemático e que se mostravam pouco participativos nas atividades do cotidiano, eram sempre motivados quando apresentava problemas interessantes à turma. Isso ficou mais perceptível com a introdução da gincana de matemática em uma escola pública que trabalho, onde preparávamos uma lista com vários problemas-desafios, alguns deles serão trabalhados mais a frente, que servia de treinamento, e para nossa surpresa obtínhamos uma participação expressiva, principalmente dos alunos com mais dificuldades. Dessa forma constatei que trabalhar problemas que desafie nossos alunos sempre geraram bons resultados e uma interação com o objeto de estudo, por isso esse trabalho propõe uma série de problemas com esse propósito.

Neste sentido, trabalharemos os conceitos do princípio das casas de pombo e paridade dos números naturais, além de selecionar questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

# Capítulo 2

# Primeiros Passos na Elaboração das Atividades

É difícil para um aluno com pouco conhecimento matemático ficar muito tempo pensando em um problema, pois ele sente que aquela atividade não tem sentido para ele, porque ele dificilmente conseguirá pensar uma solução, pois esse exercício se encontra distante de seus conhecimentos. Essa situação é semelhante a uma pessoa que começa um jogo e não consegue "passar de fase", ela tenta de tudo e não consegue progredir, seu interesse pelo jogo vai diminuindo até desanimar e não querer mais jogar, o mesmo acontece com a matemática quando se introduz atividade que, para certo grupo de alunos, se mostra muito complexa. Talvez esse seja o primeiro desafio na hora de elaborar uma atividade para um grupo diversificado de alunos, é difícil individualizar essas atividades, pois se tem uma média de 40 alunos por sala. Porém, nosso foco serão os alunos que apresentam dificuldades básicas com a matemática formal. Então como introduzir essas atividades sem que se criem um bloqueio no aluno? Esse é um problema para diversos professores de matemática e aqui trabalharei questões mais simples do ponto de vista matemático, tendo como referência alunos das escolas onde leciono, a fim de na prática, tentar verificar os ganhos com essa proposta.

No prefácio da edição em inglês do livro: *Círculos Matemáticos: A Experiência Russa*, os autores abordam essa preocupação de *"mostrar aos jovens estudantes o prazer da matemática, através de atividades competitivas, em que os estudantes se encontravam até altas horas da noite e viajam juntos durante o final de semana ou durante o verão, construindo uma intimidade e um cooperativismo só obtido, em geral, por times esportivos*."

Dessa forma, para poder aprofundar um pouco nas dificuldades e nos bloqueios desses alunos, introduzirei alguns problemas iniciais e verificar o grau de comprometimento do aluno nesse processo de aprendizagem, verificando os possíveis caminhos a serem percorridos na tentativa de construir um ambiente favorável e estimulante, incluindo esses alunos que sempre se mostraram distantes durante as aulas de matemática.

Para isso, vamos fazer uma primeira testagem com um grupo de alunos do primeiro do ensino médio da Escola Estadual de Ensino Médio e Fundamental Elza Lemos Andreatta que apresentam uma grande defasagem e desinteresse, motivado pelo pouco conhecimento matemático adquirido no ensino fundamental. As atividades serão introduzidas como desafio e serão feitas em conjunto, por todos os alunos da sala, mesmo os que não apresentam dificuldades deverão participar, a fim de evitar constrangimentos na sala. Os resultados serão apresentados a seguir.

## 2.1 Primeiras Atividades.

Vamos ver a primeira experiência usando os primeiros problemas do capítulo Zero do livro Círculos Matemáticos, a fim de fazer apenas uma primeira análise, identificar as potencialidades e dificuldades dos alunos bem como o interesse deles em relação a problemas que fogem um pouco do que normalmente é trabalhado em sala. Para isso passei quatro problemas que apresentam uma resposta sem o uso mais avançado de algum conteúdo específico. Vejamos:

### Problema 2.1

Diversas bactérias estão colocadas em um vidro. Um segundo depois cada bactéria se divide em duas, no próximo segundo todas as bactérias se dividem novamente em duas, e assim por diante. Depois de um minuto, o vidro está cheio. Quando o vidro estava pela metade?

## Resposta

Ao passar essa atividade a resposta da grande maioria dos alunos foi 30 segundos. Perguntei o porquê dessa resposta, a fim de motivar o aluno a pensar mais sobre o problema. Quando você pergunta como ele chegou a essa conclusão você força o estudante a estabelecer uma linha de raciocínio e os demais alunos começam a interagir e um problema que se apresentava individual passa a ser coletivo e os alunos começavam a interagir buscando uma solução através do compartilhamento de suas idéias. Em uma turma especifica, onde percebi certa dificuldade, eu apresentei novamente o problema apontado de forma mais clara o que estava acontecendo, e fiz algumas sugestões do tipo: o que está acontecendo? Quando as bactérias se dividem em duas, o que acontece com o total de bactérias? Se com 30 segundos o vidro estava pela metade, quando ele estará cheio?

Após essas sugestões, eles conseguiram dar a resposta ao problema. Na maioria das turmas sempre havia alunos que conseguiam achar a resposta, quando isso acontecia, eu os silenciavas, e depois de algum tempo, se os demais alunos não conseguiam chegar a uma resposta, eu pedia a esse grupo para explicar como pensaram o problema.

A solução para esse problema é 59 segundos.

## Problema 2.2

Um saco contém 2 kg de pregos. Você pode pesar 750 g usando só uma balança de dois pratos?

## Resposta

O problema assim apresentado aos alunos apresentou uma grande dificuldade de interpretação, percebendo isso eu reformulei o problema para algo mais pratico, os colocando no problema: Vamos supor que você seja dono de um material de construção, e os pregos vem em sacos de 2 kg, e uma pessoa quer comprar apenas 750 gramas desses pregos. É possível vender os 750 g de pregos usando apenas uma balança de dois pratos.

Hoje o uso da balança de dois pratos se mostra obsoleta, ele logos falam das balanças eletrônicas, pois é o comum em seu cotidiano. Um problema que se encontrado é que eles tentam de alguma forma burlar o problema trazendo novos elementos para um problema limitado, eles têm dificuldade de diferenciar essas situações. Nessa atividade específica era dar limites para resolver.

Quando entenderam que só poderiam usar a balança de dois pratos, eles conseguiram desenvolver o raciocínio necessário para resolver o desafio.

Uma solução para esse problema é: separe os 2 quilos de pregos nos dois pratos até que fique equilibrado, e terá duas porções de um quilo. Agora com a porção de um quilo, divida igualmente nos dois pratos da balança até obter a igualdade, dessa forma se terá duas porções de 500 gramas. Reserve uma porção de 500 gramas e a outra porção faça novamente uma divisão na balança até obter o equilíbrio, gerando duas porções de 250 gramas. Com a porção de 500 gramas que foi reservada mais uma porção de 250 gramas que foi obtido por ultimo temos as 750 gramas que desejávamos.

## Problema 2.3

Uma lagarta, saindo do solo, sobe um mastro com 75 cm de altura. Cada dia que ela sobe 5 cm e cada noite ela escorrega 4 cm. Quando ela vai chegar pela primeira vez no topo do mastro?

## Resposta

Nessa atividade novamente uma boa parte dos estudantes, no impulso, responderam que seriam 75 dias. Eu pedi para explicarem o pensamento deles, a partir desse questionamento, em conjunto, foram encontrando um caminho para ver que a lagarta chegaria ao topo do mastro antes dos 75 dias.

Uma resposta é: ao final do dia 70, a lagarta esta há 70 cm acima do solo, no dia 71 ela sobe 5 cm e alcança, pela primeira vez os 75 cm, alcançando o topo do mastro.

## Problema 2.4

Retire 10 dígitos do número 1234512345123451234512345 de modo que o número remanescente seja maior possível.

**Resposta**

Esse problema trouxe uma interação interessante, pois os alunos acharam diferentes respostas, e sugeri que todos que acharam uma resposta que escrevessem no quadro, como uma forma de desafio, e no final, comparamos os resultados e pude trabalhar a ordem dos números com mesma quantidade de dígitos.

A resposta é: 553451234512345

## 2.2 Primeiros Resultados.

Nesse primeiro contato com problemas que tem a intenção de fazê-los participar com mais interesse das atividades propostas, percebi uma grande participação dos alunos, quando passei os problemas como desafios, onde se mostraram ativos na busca por uma solução.

Quando perceberam que poderiam resolver esse desafio, ou quando perceberam que mesmo não conseguindo eles entenderam de forma clara a resposta e os pensamentos por trás do problema eles pediram mais.

Foi interessante notar que os alunos que tinham mais facilidades para achar as respostas acabaram interagindo com os colegas que estavam do lado, criando um espaço colaborativo, próprio de quem estuda matemática.

Nesse momento, foi importante notar a forma como cada aluno pensava na solução do problema, os diferentes caminhos tomados, que demonstrava o grau de aprofundamento dos conhecimentos adquiridos. No Problema quatro, eles tiveram a oportunidade de confrontar seus resultados, não tinha aqui uma questão pejorativa do errado, e sim o pensamento por trás daquela resposta que eles começavam a argumentar, percebendo aonde acertou e aonde não acertou, formando um senso crítico, e não apenas reproduzindo respostas.

Os poucos alunos que se mostraram indiferentes no primeiro problema sugerido, quando perceberam a participação dos demais colegas e que muitos conseguiram interagir de forma ativa, também resolveram participar da aula. O interessante é que eles encaravam os problemas como seu, fazendo que, num espírito de coletividade, se uniram para dar uma resposta à questão proposta.

Nesse primeiro contato, percebi que esses problemas potencializaram a participação dos alunos, criando um ambiente agradável e estimulante. Eles não precisaram “copiar e gravar” apenas se colocavam de frente de uma atividade que eles poderiam obter sucesso, diferente das atividades rotineiras e metódicas.

Mas sei que sem um aprofundamento teórico estaríamos limitando as possibilidades de resolver outros tipos de problemas. Mesmo que consiga resolver problemas, por exemplo, de análise combinatória ou geometria, de forma subjetiva, ele encontrará dificuldades para problemas mais avançados.

Estimular a resolução de problemas vai oportunizar a introdução de novos conceitos, ou apenas, em conjunto com o aluno, formalizá-lo. É importante perceber que certos tipos de problemas podem ser padronizados e é importante discuti-los com os alunos, sem perder o entusiasmo dos primeiros exercícios.

Nas atividades que vamos trabalhar mais a frente, temos problemas que são pouco trabalhados em sala de aula e que são interessantes, como paridade e o princípio da casas de pombo, além dos diversos problemas das Olimpíadas de Matemática.

Introduzirei as bases teóricas em cada capítulo e trabalhar exercícios.

# Capítulo 3

# Paridade

## 3.1 Definições e Conceitos

### Definição 3.1

Denominamos números pares aos inteiros $0, 2, 4, \ldots, -2, -4, -6, \ldots$, ou seja a todos os inteiros da forma $2k$, onde $k$ é algum inteiro. Semelhantemente, denominamos números ímpares aos inteiros $1, 3, 5, \ldots, -1, -3, -5, \ldots$., ou seja todos os inteiros da forma $2k + 1$, onde $k$ é algum número inteiro.

### Teorema 3.2

Cada número inteiro é par ou é ímpar. Consequentemente, o conjunto dos números inteiros fica particionado em dois subconjuntos: o dos números pares e o dos números ímpares.

*Demonstração do Teorema 3.2*

*Dado um número inteiro $n$, dividindo por 2, temos: $n = 2k + r$ , para algum inteiro $k$ e onde o resto $r \in \{0,1\}$. Logo, ou $r = 0$ e ficamos com $n = 2k$ (um par), ou $r = 1$ e ficamos com $n = 2k + 1$ (um ímpar).*

*Podemos dizer que os números inteiros pares são os inteiros divisíveis por 2. (Observe que a definição nos diz que todo par é divisível por 2, mas a recíproca precisa do teorema anterior.)*

*Portanto, temos que dados dois conjuntos: $I$, o conjunto dos números naturais ímpares e $P$ o conjunto dos números naturais pares, temos que $\mathbb{Z}$ = $P \cup I$ e $P \cap I$ = $\emptyset$, segue daí que {$P, I$} é uma partição de $\mathbb{Z}$, isso quer dizer que, dado um número $a \in \mathbb{Z}$ temos que $a$ é um número par ou $a$ é um número ímpar, não podendo ser os dois ao mesmo tempo.*

## Definição 3.3

Dizemos que dois inteiros têm a mesma paridade quando, e só quando, ou ambos forem pares, ou ambos forem ímpares e que tem paridade distinta quando um for par e outro ímpar.

## Teorema 3.4

Dado um número inteiro $n$, representado-o (escrevendo-o) no sistema posicional decimal:

• $n$ é par quando, e só quando, sua expansão decimal terminar em $0, 2, 4, 6, ou\ 8$;

• $n$ é ímpar quando, e só quando, sua expansão decimal terminar em $1, 3, 5, 7\ ou\ 9$.

*Demonstração:*

*Seja $a$ um número natural, então sua representação decimal é da forma:*

$a = a_o. + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 \ldots a_n \times 10^n$, *onde* $a_{0,}\ a_1, a_2, \ldots, a_n\ \in \{0,1,2, \ldots 9\}$, *manipulando temos:*

$$a = a_o + 10(a_1 + a_2 \times 10^1 + a_3 \times 10^2 \ldots a_n \times 10^{n-1})$$

*Como* $10(a_1 + a_2 \times 10^1 + a_3 \times 10^2 \ldots a_n \times 10^{n-1})$ = $2.5(a_1 + a_2 \times 10^1 + a_3 \times 10^2 \ldots a_n \times 10^{n-1})$ *é par, pela propriedade da paridade da soma, temos que:*

*Como $a_o$ representa o digito da unidade do número $a$, então se $a_o$ for par temos que $a$ é par, se $a_o$ for ímpar temos que $a$ é ímpar.*

A seguir vamos verificar algumas preposições que decorre dos teoremas e das definições.

## Preposição 3.5 (Paridade da soma)

***(a)*** *A soma de dois números inteiros de mesma paridade é par.*

*Demonstração:*

$i$. *Suponha que $a$ e $b$ são números inteiros pares, queremos mostrar que $a+b$ é par. Podemos escrever $a = 2k$ e $b = 2j$, com $k, j \in \mathbb{Z}$. Logo:*

$a + b = 2k + 2j = 2(k + j)$. *Então $a + b$ é par.*

$ii$. *Suponha que $a$ e $b$ são números inteiros ímpares, queremos mostrar que $a + b$ é par. Podemos escrever $a = 2k + 1$ e $b = 2j + 1$, com $k, j \in \mathbb{Z}$. Logo:*

$a + b = 2k + 1 + 2j + 1 = 2(k + j) + 2 = 2(k + j + 1)$. *Então $a + b$ é par.*

***(b)*** *A soma de dois números inteiros de paridade distintas é ímpar.*

*Demonstração:*

*Suponha que $a$ é números natural pares e $b$ um número natural ímpar, queremos mostrar que $a + b$ é ímpar. Podemos escrever $a = 2k$ e $b = 2j + 1$, com $k, j \in \mathbb{N}$. Logo:*

$a + b = 2k + 2j + 1 = 2(k + j) + 1$. *Então $a + b$ é ímpar.*

Podemos fazer uma extensão da preposição 3.5.

## Preposição 3.5.1

A soma de qualquer quantidade de inteiros pares é um inteiro par.

*Demonstração:*

*Sejam* $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ *números inteiros pares, onde* $n$ *é um número natural, queremos mostrar que:*

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = P, \text{ com } P \text{ um número par.}$$

*temos, pela preposição 3.5a, que* $a_1 + a_2 = P_1$*, onde* $P_1$ *é um número inteiro par, logo:*

$$\underbrace{a_1 + a_2} + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = P_1 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

*Novamente temos que* $P_1 + a_3 = P_2$*, onde* $P_2$ *é um número inteiro par, logo:*

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = P_2 + a_4 + \cdots + a_n$$

*Repetindo esse processo* $n - 2$ *vezes temos:*

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = P_{n-2} + a_n = P$$

*Onde* $P_{n-2}$ *e* $P$ *são um números pares.*

## Preposição 3.5.2

*A soma de uma quantidade par de inteiros todos ímpares é um inteiro par.*

*Demonstração:*

*Sejam* $a_1, a_2, a_{3,} a_4, \dots, a_{n-1}, a_n$ *números inteiros ímpares, onde* $n$ *é um número natural par. Então:*

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n+1} + a_n = \underbrace{(a_1 + a_2)} + \underbrace{(a_3 + a_4)} + \cdots + \underbrace{a_{n+1} + a_n}$$

*Que resulta, na soma dois a dois, em par (preposição 3.5b), logo:*

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n+1} + a_n = P_1 + P_2 + \cdots + P_i$$

*onde* $P_i$ *são números pares, com* $i \in \{1, 2, 3, \dots, \frac{i}{2}\}$*.*

*Agora temos uma soma de números pares, e como vimos na preposição 5.3.1, a soma de números inteiros pares é par, então* $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ *é par.*

## Preposição 3.5.3

A soma de uma quantidade ímpar de inteiros todos ímpares é um inteiro ímpar.

*Sejam* $a_1, a_2, a_{3,} a_4, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ *números inteiros ímpares e* $n$ *um número natural ímpar. Então:*

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n =$$

$$\underbrace{a_1 + a_2} + \underbrace{a_3 + a_4} + \cdots + \underbrace{a_{n-2} + a_{n-1}} + a_n$$

*onde os termos destacados, resulta, na soma dois a dois, em par (preposição 3.5b), logo:*

$$a_{2i-1} + a_{2i} = P_i$$

*Onde* $i \in \{1, 2, 3, \dots, \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\}$*, onde* $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ *é a parte inteira de* $n/2$*.*

*Pela preposição 5.3.1, temos que* $\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(P_i) = P$*, onde* $P$ *é um número par, logo:*

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = \sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(P_i) + a_n = P + a_n = I$$

*Onde* $I$ *é um número inteiro ímpar.*

## Preposição 3.6 (Paridade do produto)

*O produto de dois números inteiros só será ímpar se os dois números forem ímpares.*

*Demonstração:*

*Suponha que* $a$ *e* $b$ *são números naturais ímpares, queremos mostrar que* $a \times b$ *é ímpar. Podemos escrever* $a = 2k + 1$ *e* $b = 2i + 1$*, com* $k, i \in \mathbb{Z}$*. Logo:*

$a + b = (2k + 1).(2i + 1) = 4ki + 2k + 2i + 1 = 2(2ki + k + i) + 1$*. Então* $a \times b$ *é ímpar.*

# 3.2. Problemas

Segue abaixo alguns exercícios tirados de diversas fontes.

## Problema 3.1 (Clube OBMEP)

Encontre 5 números ímpares cuja soma é 100.

## Solução

Vamos supor que existam 5 números ímpares: $I_1, I_2, I_3, I_4$ e $I_5$ onde:

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 100.$$

Mas a soma de dois números ímpares resulta num número par, logo:

$i_1 + i_2 = p_1$, onde $p_1$ é um número par.

$i_3 + i_4 = p_2$, onde $p_2$ é um número par.

Observe que a soma de dois números pares resulta em um número par, logo:

$p_1 + p_2 = p_3$, onde $p_3$ é um número par.

Dessa forma a nossa soma inicial será:

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = p_3 + i_5 = 100$$

Temos que $p_3 + i_5$ é par, o que é um absurdo pela propriedade da paridade da soma, então não existem 5 números ímpares cuja soma é 100.

## Problema 3.2 (Clube OBMEP)

Em um quartel existem 100 soldados e, todas as noites, três desses soldados são escolhidos para trabalhar de sentinela. É possível que, após certo tempo, um dos soldados tenha trabalhado com cada um dos outros exatamente uma vez?

## Solução

Não é possível.

Fixemos um dos soldados: soldado S. Em cada noite em que trabalha, esse soldado terá a companhia de dois companheiros; como $99 = 2 \times 49 + 1$, os demais 99 soldados do quartel poderão formar 49 grupos de dois soldados, e sobrara 1. Assim, em 49 noites, o soldado S poderá ficar de sentinela com dois companheiros sempre diferentes, mas, na noite número 50, o único soldado que sobrou vai ter que se juntar a outro que já fez sentinela com o soldado S.

De uma outra forma, para cada noite em que trabalhe, o soldado S deverá ter a companhia de dois soldados diferentes. Assim, será necessário agruparmos os demais soldados de 22 em 22 para definirmos as escalas do soldado S, ou seja, necessitaremos de um número par de soldados. Mas, além do soldado S, há um número ímpar de soldados no quartel: 99. Portanto, não podemos formar pares de soldados diferentes para trabalhar com o soldado S.

## Problema 3.3 (Clube OBMEP)

Pedro comprou um caderno com 96 folhas, com páginas numeradas de 1 a 192, em ordem crescente. Vitor arrancou aleatoriamente 25 folhas do caderno e somou todos os 50 números escritos nestas folhas. É possível que essa soma seja 1990?

## Solução

Não.

Observamos que em cada página teremos 1 número par e um número ímpar. Usando uma extensão da propriedade 5, temos que a soma dos 25 números pares será um número par e a soma dos 25 números ímpares será ímpar, logo teremos a soma de dois números de paridade oposto que resulta num número ímpar, dessa forma é impossível a soma resultar em 1990.

## Problema 3.4 (Círculos Matemáticos - Fomin, página 6)

Kátia e seus amigos estão em um círculo. Os dois vizinhos de uma das crianças são do mesmo sexo. Se o círculo contém cinco meninos, quantas meninas estão neste círculo.

## Solução

Observando o círculo abaixo, verificamos que serão necessários 5 meninas.

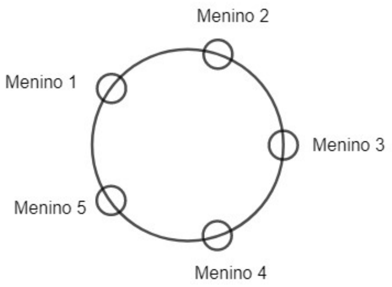


Figura 3.4.1: Círculo com meninos.

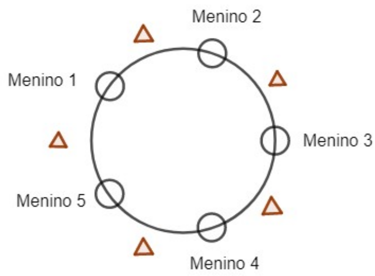


Figura 3.4.2: Círculo com meninos e meninas.

Posicionando todos os 5 meninos no circulo, para que os vizinhos sejam do mesmo sexo serão necessários inserir 5 meninas entre os meninos para satisfaz as condições do problema.

## Problema 3.5 (Círculos Matemáticos - Fomin, página 7)

Um tabuleiro quadrado $5x5$ pode ser coberto por dominós $1 \times 2$?

## Solução

Não.

Observe que no tabuleiro $5 \times 5$ tem-se 25 quadrados $1 \times 1$, e a peça do dominó tem dois quadrados $1 \times 1$. Temos que $25 = 12 \times 2 + 1$, assim temos que com

12 peças de dominó preencheremos 24 quadrados $1x1$, sobrando 1 quadrado $1x1$ que não pode ser preenchido com 1 peça de dominó.

## Problema 3.6 (Círculos Matemáticos - Fomin, página 8)

É possível trocar uma nota de 25 rublos em dez notas com valores 1, 3 ou 5 rublos?

## Solução

Não é possível.

Usando uma extensão da propriedade $5a$ temos que a soma de 10 números ímpares resultará em um número par, dessa forma não é possível a soma ser 25.

## Problema 3.7 (Círculos Matemáticos - Fomin, página 9)

De 101 moedas, 50 são falsas e diferem das autênticas em peso por 1 grama. Pedro tem uma balança que mostra a diferença em peso entre objetos colocados em cada prato. Ele escolhe uma moeda e quer descobrir se ela é falsa realizando apenas uma pesagem. Ele pode fazer isto?

## Solução

Sim.

Ao escolher uma moeda restarão 100, se a moeda e verdadeira as outras serão 50 falsas e 50 falas, mas se a moeda for falsa teremos 49 falsas e 51 verdadeiras. Vamos supor, sem perda de generalidade, que as moedas verdadeiras tenham peso igual a um número par e as moedas falsas tenham peso igual a um número ímpar e dividir essas 100 moedas em dois grupos de 50 moedas e verificar o que está acontecendo com a diferença em cada caso:

i- A moeda escolhida é verdadeira.

Neste caso teremos 50 moedas falsas que estará dividido em dois grupos novamente podem acontecer duas situações:

A primeira é que em um dos grupos de 50 moedas tenhamos uma quantidade par de moedas falsas, logo usando a paridade, no outro grupo também terão uma quantidade par de moedas falsas, usando uma extensão da propriedade 5a, temos que a soma dos pesos das moedas falsas em ambos os grupos resultara em números pares, então a soma dos pesos em ambos os grupos é um número par, teremos que a diferença entre pares é um par, logo a balança tem que mostrar um número par.

A segunda é que em um dos grupos de 50 moedas tenhamos uma quantidade ímpar de moedas falsas, logo usando a paridade, no outro grupo também terão uma quantidade ímpar de moedas falsas, usando a extensão da propriedade 5a, temos que a soma dos pesos das moedas falsas em ambos os grupos resultara em números pares, então a soma dos pesos em ambos os grupos é número par, teremos que a diferença entre pares é um par, logo a balança tem que mostra um número par.

Neste caso, se a moeda escolhida é verdadeira a balança retornará um valor par.

ii- A moeda escolhida é falsa

Neste caso em um grupo teremos uma quantidade par de moedas falsas e no outro uma quantidade ímpar. No grupo em que se tem uma quantidade par de moedas falas, vimos no caos i, que a soma do peso desse grupo será um número par, entretanto no grupo em que se tem uma quantidade ímpar de moedas falsas, pela extensão da propriedade 5ª, temos que a somas das moedas falsas resultara em um número ímpar e sua soma com as moedas verdadeiras, que tem peso par, resultará em um número ímpar, logo a balança tem que mostrar um número par.

Neste caso, se a moeda escolhida é verdadeira a balança retornará um valor ímpar.

Se mudarmos as condições iniciais em que as moedas verdadeiras têm peso ímpar e as moedas falsas têm peso par, teremos uma demonstração semelhante.

Uma observação que podemos fazer com relação a esse problema é que podemos iniciar uma atividade com nossos alunos, com um número menor de moedas para facilitar o entendimento dos alunos.

### Problema 3.8 (Clube OBMEP)

Pedro comprou um caderno com 96 folhas, com páginas numeradas de 1 a 192, em ordem crescente. Vitor arrancou aleatoriamente 25 folhas do caderno e somou todos os 50 números escritos nestas folhas. É possível que essa soma seja 1990?

### Solução

Não.

Observe que a soma dos números em cada folha é ímpar, pois a numeração é sequencial e resultará na soma de um ímpar com um par. Como temos uma soma de 25 números ímpares e usando a paridade dos números ímpares, temos que a soma será um número ímpar, sendo impossível a soma ter como resultado o número 1990.

### Problema 3.9 (Clube OBMEP)

De quantas maneiras poderemos escrever 103 como a soma de dois números naturais primos?

## Solução

A soma de dois números naturais resultará em um número ímpar quando um deles for par e o outro ímpar.

Como só existe o número 2 que é par e primo, temos que para soma dar 103, temos que é resultado da soma 2 + 101. Temos agora que verificar se o número 101 é primo, o que é verdade.

Assim temos somente uma maneira de escrever o número 103 como soma de dois números primos.

## Problema 3.10 (Círculos Matemáticos - Fomin, página 5)

Onze engrenagens estão colocadas em um plano, arrumadas em cadeia como ilustrado na figura abaixo. Todas as engrenagens podem rodar simultaneamente?

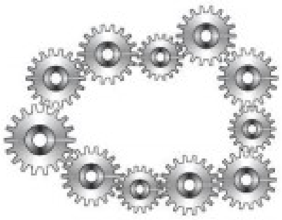

Figura 3.10: Engrenagens.

## Solução

Observe que para que todas as engrenagens possam rodar é necessário que duas engrenagens vizinhas girem em sentido contrário, uma em sentido horário e outra em sentido anti-horário.

Como nossa engrenagem está em cadeia, temos que, elas só girarão simultaneamente quando estiverem em quantidade par. Em nosso caso isso não será possível, pois temos uma quantidade ímpar de engrenagem.

# Capítulo 4

# Princípio das Casas de Pombo

## 4.1 Conceitos

A definição do princípio e bem simples e veremos a seguir:

### Teorema 4.1 (Princípio das Casas de Pombo – PCP)

Se tivermos $\mathrm{n}+1$ pombos ou mais para serem colocados em $\mathrm{n}$ casas, então pelo menos uma casa deverá conter dois ou mais pombos.

*Demonstração:*

*Suponha, por absurdo, que não existam casas com dois ou mais pombos, então não teríamos mais de $n$ pombos ao todo, o que é uma contradição já que por hipótese temos $n+1$ pombos.*

Podemos pensar, em termos de funções, que se o número de elementos de um conjunto finito $A$ é maior do que o número de elementos de outro conjunto $B$, então uma função de $A$ em $B$ não pode ser injetiva.

### Teorema 4.2. (A Generalização do Princípio de Dirichlet)

Se $n$ objetos são colocados em $k$ caixas, então há pelo menos uma caixa com $\lceil n/k \rceil$ objetos.

*Demonstração.*

*Faremos uma demonstração por absurdo.*

*Suponha que nenhuma das caixas tenha mais que* $\lceil n/k \rceil - 1$ *objetos. Então, o número total de objetos é no máximo*

$$k(\lceil n/k \rceil - 1) < k((n/k + 1) - 1) = n$$

*em que a inequação* $\lceil n/k \rceil < (n/k) + 1$ *foi usada. Isto é um absurdo, pois há um total de* $n$ *objetos. Portanto, existe ao menos uma caixa com* $\lceil n/k \rceil$ *objetos.*

## Lema 4.3

Seja dado um natural $\mathrm{n}$. Se dois números inteiros deixam restos iguais na divisão por $\mathrm{n}$, então a diferença deles é um múltiplo de $\mathrm{n}$.

*Demonstração*

*Sejam* $a$ *e* $b$ *dois números inteiros que deixam resto* $r$ *na divisão por* $n$*, ou seja,* $a = q_1 n + r$ *e* $b = q_2 n + r$*. Então,*

$$a - b = (q_1 n + r) - (q_2 n + r) = q_1 n - q_2 n = (q1 - q2)n$$

*que é um múltiplo de* $n$*.*

## Teorema 4.4

Sejam $n$ e $k$ números naturais dados. Se $nk + 1$ pombos são colocados em n casas de pombos, então pelo menos uma das casas deverá conter pelo menos $k + 1$ pombos.

*Demonstração.*

*Por contradição, suponhamos que cada uma das n casas contivesse no máximo k pombos. Então, teríamos máximo* $nk$ *pombos, o que não é o caso.*

Apesar de uma teoria simples, esse princípio nos ajuda a resolver uma série de questões. É importante notar que para usar o princípio a identificação das “casas” e dos “pombos” é essencial, além de determinar a relação entre elas.

## 4.2. Problemas

A teoria do princípio é simples até mesmo para alunos com pouco conhecimento matemático, desta forma essa teoria se encaixa perfeitamente na nossa proposta de trabalho. Vejamos agora alguns exercícios sobre esse princípio.

### Problema 4.1 (Clube OBMEP)

Dados arbitrariamente doze números inteiros, mostre que é sempre possível escolhermos dois deles, de modo que sua diferença seja divisível por 11.

### Solução

Considere os números sendo os pombos e os restos na divisão por 11, que são $\{0, 1, \ldots, 10\}$, como sendo as casas dos pombos. Como existem mais números (pombos) do que restos casas de pombos), concluímos que sempre existir ao pelo menos dois números que deixarão restos iguais na divisão por 11. Portanto, pelo lema anterior, a diferença entre esses dois números é um múltiplo de 11.

### Problema 4.2 (Círculos Matemáticos - Fomin, página 35)

Um saco contém bolas de duas cores: branca e preta. Qual o menor número de bolas que precisam ser retiradas do saco, de modo que possamos garantir que duas das bolas retiradas sejam da mesma cor?

## Solução

Se retirarmos 2 bolas teremos três resultados possíveis: 2 Brancas, 1 Branco e 1 Preta e 2 Pretas. Assim não podemos garantir que as bolas retiradas sejam da mesma cor.

Se retirarmos 3 bolas teremos resultados possíveis: 3 Brancas, 2 Brancas e 1 Preta, 1 Branca e 2 Pretas e 3 Pretas. Em qualquer uma das situações teremos pelo menos duas bolas da mesma cor.

Ou seja, temos duas caixas, que podem ser definidas como a cor das bolas, e os pombos, que serão a quantidades de bolas retiradas. Dessa forma serão necessários 3 pombos (bolas) para preencher as 2 caixas (cor das bolas)

Logo, o número mínimo de bolas a serem retiras para garantir 2 bolas da mesma cor é 3.

## Problema 4.3 (Clube OBMEP)

Qual o número mínimo de pessoas que devemos reunir para que tenhamos certeza de que duas entre elas fazem aniversário no mesmo mês?

## Solução

Vamos considerar as casas como sendo os meses do ano e os pombos os aniversariantes. Usando o princípio da casa dos pombos, como o número de casas é 12 o número de pombos será 13. Logo o número mínimo de pessoas será 13.

## Problema 4.4 (Círculos Matemáticos, página 38)

Mostre que, num grupo de 5 pessoas em grupo de cinco pessoas, duas delas têm o mesmo número de amigos no grupo?

## Solução

Existem cinco números possíveis de amigos para qualquer grupo de 5 pessoas: 0, 1, 2, 3 e 4. Então parece que cada um poderia ter um número diferente de amigos, entretanto, se alguém tem quatro amigos, nenhuma pessoa pode ter zero amigos. Logo duas pessoas têm que ter o mesmo número de amigos.

## Problema 4.5 (Clube OBMEP)

São escolhidos cinco pontos, ao acaso, sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que, pelo menos, um dos segmentos determinados por dois desses pontos tem comprimento, no máximo, igual a $\sqrt{2}$ .

## Solução

Inicialmente, vamos dividir o quadrado em quatro quadrados de lado 1:

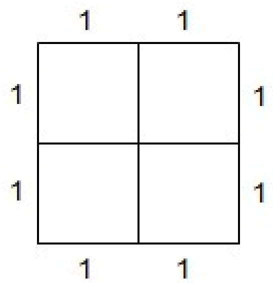


Figura 4.5.1: Quadrado de lado 2.

Pelo **Princípio das Casas de Pombos**, a superfície de um dos quadrados contém, pelo menos, dois dos cinco pontos dados.

Observe que, para cada quadrado, a distância máxima entre dois pontos sobre a sua superfície é igual ao comprimento de sua diagonal, que mede $2\sqrt{2}$, veja:

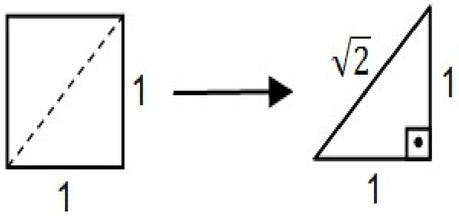


Figura 4.5.2: Seção do quadrado em triângulos

assim, os dois pontos que estão sobre a superfície de um mesmo quadrado estão a uma distância de no máximo $2\sqrt{2}$ .

Dessa forma, dados cinco pontos, como pelo menos dois estarão em uma mesma “casa”, eles determinam um segmento de comprimento, no máximo, igual a $2\sqrt{2}$ .

## Problema 4.6 (http://www.unoeste.br)

Todos os pontos de um plano são pintados de azul ou vermelho. Provemos que é possível encontrar dois pontos da mesma cor que distam exatamente 10 cm.

## Solução

Por definição, num plano existem infinitos pontos que estão contidos nele e estes, supostamente podem ser divididos em azul e vermelho. Imaginemos neste plano um triângulo equilátero de lado igual a 10 cm, conforme a figura seguinte:

Como são duas cores (casas) e três pontos (pombos). Pelo princípio da casa dos pombos teremos dois pontos da mesma cor.


Figura 4.6: Triângulo equilátero de lado 10.

## Problema 4.7 (Coleção do Professor e Matemática, Volume 2, SBM)

Dados 8 números inteiros mostre que existem dois deles cuja diferença é divisível por 7.

## Solução

Considere os 8 números como sendo os pombos e as casas como sendo os 7 possíveis restos da divisão por 7 $(0, 1, 2, 3, 4, 5$ e $6)$. Como $8 = 7 + 1$ números, o PCP nos diz que existem dois números dentre os 8 dados que têm o mesmo resto quando divididos por 7. Finalmente observamos que se dois números deixam o mesmo resto na divisão por 7 então a diferença entre eles é divisível por 7.

## Problema 4.8 (Iniciação a Matemática: um curso com problemas e soluções)

Num colégio com 16 salas são distribuídos canetas nas cores preta, azul e vermelha para realizar uma prova de concurso. Se cada sala recebe canetas da mesma cor então prove que existe pelo menos 6 salas que recebem canetas da mesma cor.

## Solução

Fazendo a divisão com resto de 16 por 3 temos $16 = 3 \times 5 + 1$. Considerando as 16 salas como sendo os pombos e as três cores como sendo as casas. Logo, podemos “colocar” cada sala em uma das três cores. Assim, o PCP nos garante uma casa com pelo menos 6 pombos, ou seja, existem no mínimo 6 salas que receberam a mesma cor.

## Problema 4.9 (Iniciação a Matemática: um curso com problemas e soluções)

São escolhidos 6 números quaisquer pertencentes ao conjunto $A = \{1,2,3,\ldots,10\}$. Prove que existem dois desses seis números cuja soma é ímpar.

## Solução

Vimos anteriormente que, para uma soma de dois números naturais ser ímpar os números tem que ter paridades diferentes, ou seja, um deve ser par e um ser ímpar.

Observe que desse grupo de 10 números 5 são pares e 5 são ímpares, então qualquer grupo de 6 números escolhidos teremos sempre pelo menos 1 número par e um número ímpar, logo existem dois números cuja soma é um número ímpar.

## Problema 4.10 (Banco de Questões OBMEP - 2014)

Mirtes trabalha num setor com mais sete colegas, sendo, portanto oito ao todo. No dia 1º de janeiro, Mirtes comenta que neste ano dois dos funcionários do setor farão aniversário no mesmo dia da semana, pois há sete dias em uma semana e oito colegas.

a) Usando esta idéia de Mirtes, descubra qual é o número mínimo de funcionários que o setor precisaria ter para garantir que duas pessoas tenham o mesmo signo.

b) Qual o número mínimo de funcionários que o setor precisaria ter para garantir que, pelo menos, quatro deles fizessem aniversário no mesmo dia da semana neste ano?

## Solução

a) São doze signos. Logo, para garantir que duas têm o mesmo signo, bastam treze pessoas!

b) São sete os dias da semana. Logo, para garantir que, pelo menos, quatro fazem aniversário no mesmo dia da semana neste ano, vamos precisar de $3 \times 7 + 1 = 22$ pessoas!

# Capítulo 5

# Questões das Olimpíadas Brasileiras Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)

A OBMEP, em suas provas ou em seu banco de questões, é uma fonte importante de material para estudo, pois traz problemas interessantes para ser trabalhado em sala de aula com nossos alunos.

Na apresentação do banco de questões 2019 os autores descrevem que:

> *O Banco pretende despertar o prazer pela Matemática, estimular o aluno interessado com perguntas instigantes e proporcionar um treinamento para as provas da OBMEP.*
>
> *Os problemas deste ano, ..., estão ordenados em grau crescente de dificuldade e exigem mais imaginação do que uma boa educação em Matemática.*

Assim, é importante apresentar aqui alguns problemas que estão disponibilizadas no site da OBMEP (www.obmep.org.br), pois além de estimular nossos alunos, divulga as olimpíadas e cria um ambiente favorável na construção de uma cultura de aprendizado matemático.

Vamos dividir esse capitulo em duas partes, uma dela com exercícios do banco de questões e a outra com exercícios das provas.

# 5.1. Exercícios do Banco de Questões.

Todo ano a OBMEP disponibiliza um material chamado banco de questões para preparação para a prova da olimpíada. Esse material é muito rico em relação a quantidade e qualidade dos problemas sendo uma fonte importante para nossa proposta. Vejamos alguns problemas.

## Problema 5.1 (O número de quadrados)

Determine o número de quadrados na figura abaixo.

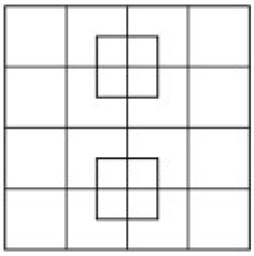

Figura 5.1: Seção de quadrados.

## Solução

Vamos ordenar a contagem dos quadrados de acordo com as dimensões de seus lados.

Existe exatamente um quadrado $4 \times 4$.

Existem $2^2 = 4$ quadrados $3 \times 3$.

Existem $3^2 = 9$ quadrados $2 \times 2$.

Existem $42 + 2 = 18$ quadrados $1 \times 1$, dos quais dois formam ainda $4$ quadrados cada.

Portanto, ao todo temos $1 + 4 + 9 + 18 + 8 = 40$ quadrados.

# Problema 5.2 (A média aritmética)

A média aritmética de uma lista de números é a soma deles dividida pela quantidade de elementos da lista. Por exemplo, a média aritmética da lista 3, 3, 4, 5 e 10 é

$$\frac{3+3+4+5+10}{5}=5$$

A média aritmética de 5 inteiros positivos distintos é igual a 11. Qual é o maior valor possível de um número dessa lista?

## Solução

Como a média dos 5 inteiros é 11, a soma deles é $5 \times 11 = 55$. Como todos são inteiros positivos distintos, a soma de quatro deles é pelo menos $1+2+3+4=10$. Portanto, o quinto elemento é no máximo $55-10=45$. Assim, o maior valor possível de um número dessa lista é 45 e um exemplo em que isso acontece é com a lista 1, 2, 3, 4, 45.

# Problema 5.3 (Qual a área da figura?)

a) Na figura a seguir, cada segmento mede 3 cm. Qual a área da figura?

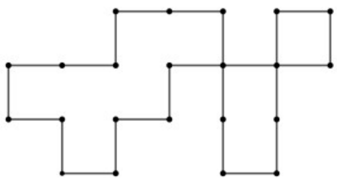

Figura 5.3.1: Área de uma reunião de quadrados.

b) Na figura abaixo, cada quadradinho do reticulado tem área de 1 cm$^2$. Determine a área do polígono sombreado.

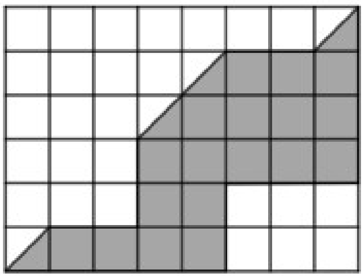

Figura 5.3.2: Áreas de uma reunião de quadrados e triângulos.

## Solução

a) Podemos deslocar partes da figura, sem alterar a área do conjunto, e formar um quadrado de lado$3 \times 3 = 9$ cm. No desenho a seguir, figuras iguais estão indicadas com a mesma letra e possuem áreas iguais. Portanto, a área da figura é $9 \times 9 = 81$ cm$^2$.

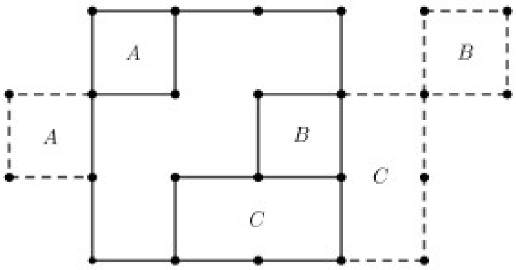


Figura 5.3.3: Reestruturação da figura 5.3.1.

b) Como no item anterior, podemos decompor a figura original em pedaços e deslocá-los. No desenho a seguir, figuras iguais estão indicadas com a mesma letra e possuem áreas iguais. A figura resultante é um retângulo $5 \times 4$ e sua área é 20 cm$^2$.

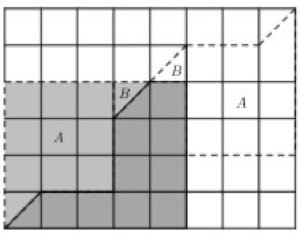


Figura 5.3.4: Reestruturação da figura 5.3.2.

## Problema 5.4 (A calculadora maluca)

A calculadora maluca possui, além dos botões com os 10 algarismos, quatro superbotões:

| ☼ | ☺ | ♫ | ⋈ |
|---|---|---|---|

Quando a tecla ☼é apertada, o número do visor é multiplicado por 2; a tecla □, soma todos os algarismos do visor; a tecla ♫ divide o número do visor por 4 e mostra o resto desta divisão; e a tecla ⋈ soma 3 ao número do visor.

a) Com o número 1.234 no visor, Pedro apertou, na sequência, as teclas ☼, □, ♫, ⋈. Que número apareceu?

b) Pedro digitou o número 12.345 e as quatro teclas especiais uma única vez cada, aparecendo no visor o zero ao final. Determine uma possível sequência de teclas especiais.

## Solução

a) Temos:

1.234 → ☼ → 2.468 → ☺ → 20 → ♫ → 0 → ⋈ → 3.

b) Uma sequência possível:

12.345 → ☼ → 24.690 → ☺ → 21 → ⋈ → 24 → ♫ → 0.

Uma outra sequência é:

12.345 → □ → 15 → ⋈ → 18 → ☼ → 36 → ♫ → 0

## Problema 5.5 (Porcentagem da área)

Na figura a seguir, todos os quadradinhos do tabuleiro são iguais. Qual a porcentagem que a região pintada cobre do quadrado maior?

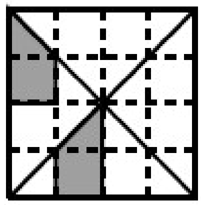

Figura 5.5: Quadrados divididos em quadrados menores.

## Solução

A figura total possui 16 quadradinhos e a região pintada corresponde a área de 3 deles. Portanto, a porcentagem de área pintada é:

$$3/16 = 0{,}1875$$
$$0{,}1875 \times 100 = 18{,}75\%$$

# Problema 5.6 (Quadrado mágico)

Em um quadrado mágico, a soma dos números em cada linha, coluna e diagonal é a mesma. No quadrado mágico abaixo, quanto vale *a* + b + c?

| | | |
|---|---|---|
| 16 | 2 | $a$ |
| $c$ | 10 | $d$ |
| $b$ | $e$ | 4 |

Figura 5.6: Quadrado mágico.

## Solução

A soma comum as colunas, linhas e diagonais é $16 + 10 + 4 = 30$. Analisando as somas das linhas e colunas, temos:

De $2 + 10 + e = 30$, segue que $e = 18$.

De $b + e + 4 = 30$, segue que $b = 8$.

De $16 + c + b = 30$, segue que $c = 6$.

De $16 + 2 + a = 30$, segue que $a = 12$.

Portanto, $a + b + c = 26$.

## Problema 5.7 (Os números da Mônica)

Com os algarismos 1, 3 e 5, Mônica forma números de três algarismos que são maiores que 150. Quantos números Mônica podem formar?

## Solução

Existem três possibilidades para o primeiro dígito do número formado por Mônica.

a) O algarismo das centenas é o 1. Para que o número seja maior que 150, o algarismo das dezenas deve ser 5. Restam apenas três opções para o dígito das unidades, a saber: 1, 3 ou 5. Nesse caso, ela pode formar apenas 3 números.

b) O algarismo das centenas é o 3. Para quaisquer escolhas das dezenas e unidades o número formado será maior que 150. Como existem três opções para as dezenas e três para as unidades, o total de números nesse caso é $3 \times 3 = 9$.

c) O algarismo das centenas é o 5. Assim, como no caso anterior, para quaisquer escolhas das dezenas e unidades o número formado será maior que 150. Temos 9 números nesse caso.

Portanto, o total de números de três algarismos que Mônica pode formar é $3 + 9 + 9 = 21$.

## Problema 5.8 (Cubos e cola)

a) Um cubo $3 \times 3 \times 3$ foi construído com 27 cubos menores $1 \times 1 \times 1$. Para cada par de faces em contato de dois cubos e usado uma gota de cola. Quantas gotas de cola foram usadas ao todo?

b) Um cubo $10 \times 10 \times 10$ foi construído com 1000 cubos menores $1 \times 1 \times 1$. Para cada par de faces em contato de dois cubos e usado uma gota de cola. Quantas gotas de cola foram usadas ao todo?

## Solução

a) Pela figura abaixo, para formar uma face $1 \times 3 \times 3$, são necessárias 12 gotas de cola, correspondendo as 12 faces de contato entre os 9 cubos.

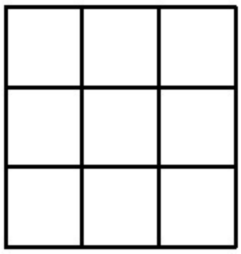

Figura 5.8.1: Quadrado de lado 3.

Para colocar uma face na outra, são necessárias 9 gotas de cola, correspondendo uma gota para cada quadradinho. Assim, para colar os três blocos $1 \times 3 \times 3$ são necessárias 18 gotas. Portanto, o total de gotas foi $3 \times 12 + 2 \times 9 = 54$.

b) Novamente começaremos a contagem considerando um bloco 1×10×10.

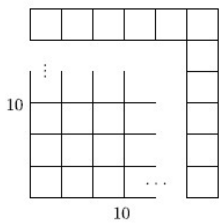


Figura 5.8.2: Bloco 1×10×10.

Existem 9 linhas e 9 colunas entre os quadrados de um tabuleiro $10 \times 10$ e esses segmentos determinam $9 \times 10 + 9 \times 10 = 180$ segmentos que são lados de quadradinhos $1 \times 1$. Assim, para colar os quadradinhos de um bloco, são necessárias 180 gotas. Para colar dois blocos entre si, são necessárias 100 gotas. Daí, para colocar 10 blocos $1 \times 10 \times 10$ entre si serão necessárias $100 \cdot 9 = 900$ gotas. Portanto, o total de gotas usadas foi $10 \cdot 180 + 900 = 2700$.

## Problema 5.9 (Círculos nas três circunferências)

Na figura abaixo, três circunferências de mesmo raio se intersectam em seis pontos. Em cada um destes pontos, existe um círculo menor, todos de mesmo raio. Coloque os números 1, 2, 3, 4, 5, 6 nos círculos pequenos, de modo que os números escritos em cada uma das circunferências maiores seja 14.

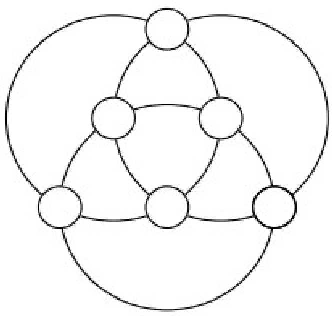

Figura 5.9.1: Interseção de 3 circunferências I.

## Solução

A soma de todos os números dados é $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Como a soma dos quatro números escritos em cada circunferência maior é 14, a soma dos outros dois números é $21 - 14 = 7$. Os possíveis pares de números com tal soma são: $(3,4)$, $(2,5)$ e $(1,6)$. Fixando um desses pares de soma 7, como exemplificado na figura a seguir com o par$(1,6)$ e considerando um dos círculos grandes que passam por eles, podemos concluir que os outros dois números, indicados por $A$ e $B$ neste mesmo círculo, devem somar $14 - 7 = 7$.

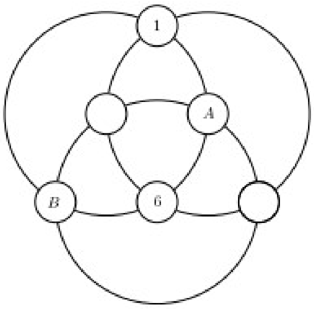


Figura 5.9.2: Interseção de 3 circunferências II.

Portanto, basta escolhermos um dos pares restantes para as posições $A$ e $B$ e, finalmente, o par que sobrou para outras duas posições. A figura a seguir indica dois possíveis preenchimentos:

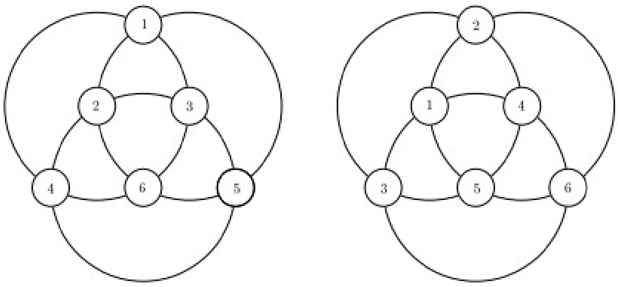


Figura 5.9.3: As duas soluções possíveis.

## Problema 5.10 (Filhos de Paulo)

A idade de cada um dos três filhos de Paulo é um número inteiro. A soma destes três inteiros é igual a 12 e seu produto é 30. Qual a idade de cada um dos seus três filhos?

## Solução

Sejam $a, b$ e $c$ as idades dos três filhos de Paulo. Então:

$$a + b + c = 12$$

$$abc = 30.$$

O conjunto dos divisores de 30 é $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Como se tratam de inteiros positivos e a soma deles é 12, segue que $a, b, c \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10\}$. Como o produto é 30, necessariamente um deles deve ser múltiplo de 5. Se um deles é 10, para que o produto seja 30, os outros só podem ser 1 e 3. Isto não satisfaz a condição da soma das idades. Portanto, uma das idades é 5. Logo, o produto das outras duas é $30/5 = 6$. As únicas possibilidades são 2 e 3 ou 1 e 6. A primeira não é possível em virtude da condição da soma das idades. Assim, as três idades são 1, 5 e 6.

## Problema 5.11 (Cubo com túnel)

No cubo $5 \times 5 \times 5$ das figuras abaixo, cubinhos foram retirados de modo que, para qualquer uma das faces, uma peça indicada pelo formato dos quadradinhos pintados de preto consiga atravessar o cubo e sair na face oposta. Determine quantos cubinhos foram retirados em cada item.

a)

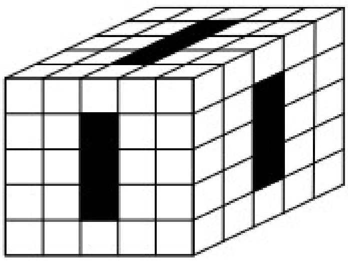

Figura 5.11.1: Cubo com túnel I.

b)

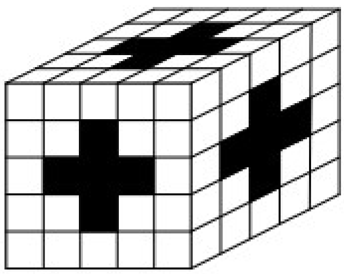

Figura 5.11.2: Cubo com túnel II.

## Solução

a) Vamos “desmontar” os quatro blocos $2 \times 2 \times 5$ de quadrados brancos nas pontas do cubo maior e, em seguida, as peças brancas que sobraram: 4 delas do tamanho $1 \times 1 \times 1$ e 4 do tamanho $1 \times 1 \times 2$. Isto nos produz a contagem: $125 - (4 \cdot 20) - (4 \cdot 2) - (4 \cdot 1) = 33$.

b) Vamos “desmontar” os oito blocos $2 \times 2 \times 2$ de quadrados brancos nas pontas do cubo maior e, em seguida, as 12 peças brancas $1 \times 1 \times 1$ entre as cruzes pretas das faces. Isso produz a contagem: $125 - 8 \times 8 - 12 = 49$.

## Problema 5.12 (Somando pecinhas)

Considere a seguinte sequência de pecinhas, em que a pecinha de número 1 é um quadradinho.

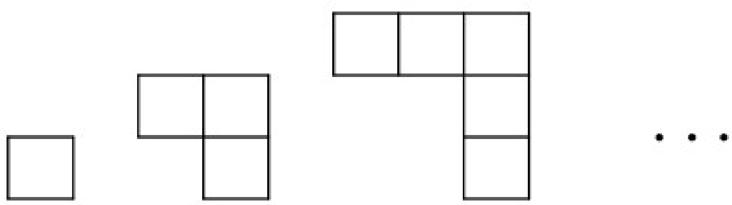

Figura 5.12: Soma de pedacinhos.

a) Quantos quadradinhos formam a pecinha de número 50?

b) Quantos quadradinhos existem na união das pecinhas de número 1 a 50?

c) Observando o resultado do item b, calcule $2 + 4 + 6 + \ldots + 96 + 98 + 100$.

d) Calcule $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100$.

## Solução

a) Veja que a cada incremento de uma unidade no número da pecinha, aumenta-se o número de quadradinhos em 2 unidades. Logo, a pecinha 50 terá $1 + 2 \times 49 = 99$ quadradinhos.

b) Veja que as pecinhas podem ser justapostas para formar um quadrado maior dividido em quadradinhos. O que determina o lado desse quadrado é o número da maior pecinha utilizada. Deste modo, as 50 pecinhas têm no total $50 \cdot 50 = 2500$ quadradinhos.

c) Veja que o item anterior nos fornece a equação:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 95 + 97 + 99 = 2500.$$

Se adicionarmos 1 a cada uma das 50 parcelas da soma anterior, teremos a soma desejada:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 95 + 97 + 99 = 2500$$

$$(1 + 1) + (3 + 1) + (5 + 1) + \ldots + (95 + 1) + (97 + 1) + (99 + 1) = 2500 + 50$$

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 96 + 98 + 100 = 2550.$$

d) Levando em conta os resultados obtidos nos itens anteriores, basta adicionar a soma dos números ímpares e a soma dos pares. Concluímos assim que:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100 = 2500 + 2550 = 5050.$$

## Problema 5.13 (Colocando números para obter a mesma soma)

Considere os seis círculos sobre os lados de um triângulo como na figura a seguir:

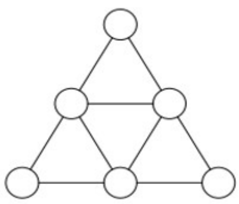

Figura 5.13.1: Triângulo inscrito em triângulo.

a) Mostre uma maneira de colocar cada um dos números de 1 a 6 em cada um dos círculos de modo que a soma dos três números em cada lado do triângulo maior seja igual a 12.

b) Mostre que não é possível colocar os números de 1 a 6 em cada um dos círculos de modo que a soma dos três números em cada lado do triângulo maior seja igual a 13.

## Solução

a) Uma possível solução é:

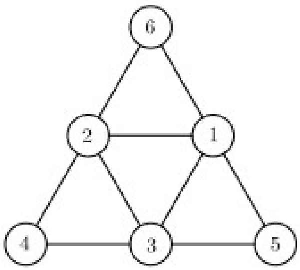


Figura 5.13.2: Solução do problema 5.13.

b) Observe que o número 6 participa no máximo de dois lados do triângulo maior. Considere um lado em que ele não aparece. A soma máxima dos números nos círculos deste lado é:

$$3 + 4 + 5 = 12 < 13.$$

## Problema 5.14 (Escrevendo números em círculos)

Na figura abaixo, temos uma circunferência cortada por 4 segmentos. Escreva os números de 1 até 9 nos círculos de modo que a soma dos números escritos em cada segmento seja sempre a mesma.

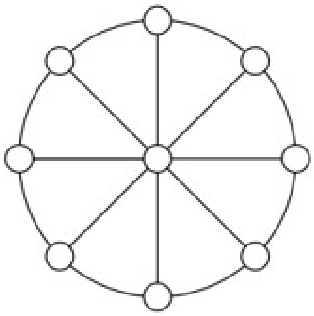

Figura 5.14.1: Circunferência cortada em 4 segmentos.

## Solução

Observe que as somas dos números em círculos diametralmente opostos devem ser iguais, pois todos os segmentos compartilham o círculo central. Desconsiderando-se o centro, a soma dos oito números escritos na circunferência deve ser divisível por 4, pois eles podem ser distribuídos em 4 pares de mesma soma. A soma total é: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$.

Escolhendo-se o 5 como número central, os outros números podem ser distribuídos nos seguintes pares de soma 10: $(1{,}9)$, $(2{,}8)$, $(3{,}7)$ e $(4{,}6)$. Uma possível distribuição seria:

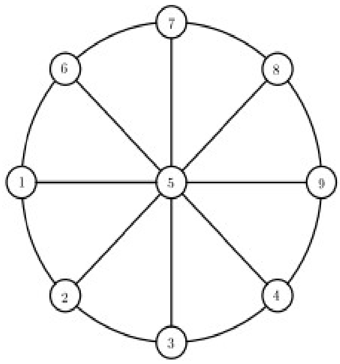


Figura 5.14.2: Solução do problema 5.14.

## Problema 5.15 (Números bacanas)

Um número natural é bacana quando cada um de seus algarismos é maior que qualquer um dos outros algarismos que estão à sua esquerda. Por exemplo, 3479 é bacana, enquanto que 2231 não é. Quantos números bacanas existem entre 3000 e 8000?

## Solução

Um número nesse intervalo deve possuir como primeiro dígito um dos seguintes números: 3, 4, 5 e 6. Não pode existir um número bacana começado em 7 porque não existem três algarismos distintos maiores que 7.

Podemos assim dividir nossa busca pelos números bacanas:

1. Números começados em 3:

$3456, 3457, 3458, 3459, 3467, 3468, 3469, 3478, 3479,$
$3489, 3567, 3568, 3569, 3578, 3579, 3589, 3678, 3679, 3689$ e $3789$

2. Números começados em 4:

$4567, 4568, 4569, 4578, 4579, 4589, 4678, 4679, 4689$ e $4789;$

3. Números começados em 5: $5678, 5679, 5689$ e $5789;$

4. Números começados em 6: $6789.$

Portanto, existem $20 + 10 + 4 + 1 = 35$ números bacanas

## Problema 5.16 (Estacionamento complicado)

Num certo estacionamento, os automóveis foram estacionados conforme mostra a figura (de maneira bastante apertada!). O motorista do carro número 1 pede educadamente para que os outros motoristas se movam para que ele possa sair do estacionamento. Um carro se move por vez e, devido ao estreito espaço para manobrar, cada carro se move apenas para frente ou para trás.

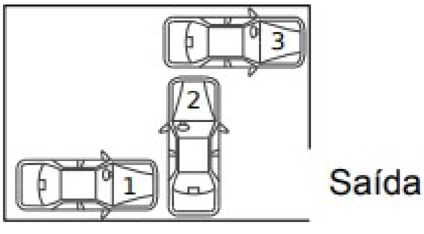


Figura 5.16.1: 3 carros estacionados.

Logo, para que o carro 1 possa sair, os carros foram movimentados na seguinte ordem: 3-2-1, como se vê na sequência de desenhos abaixo:

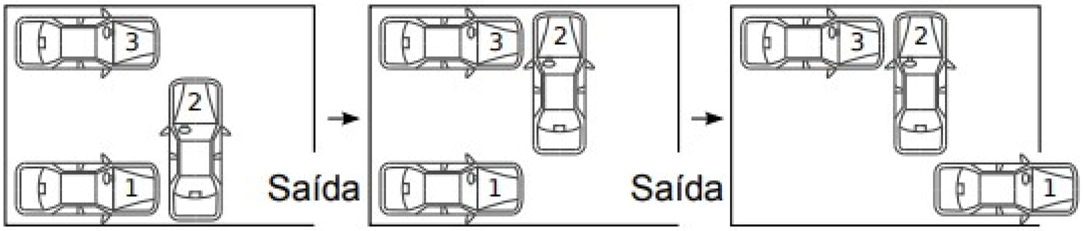


Figura 5.16.2: Saindo com o carro 1 da garagem.

a) Dada a situação de carros estacionados abaixo, descreva uma sequência de seis movimentos de carros de tal forma que o carro 1 possa sair do estacionamento

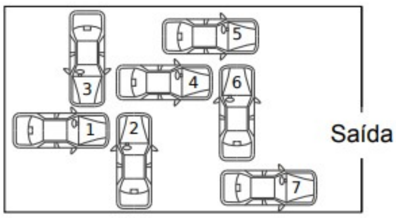


Figura 5.16.3: Sete carros estacionados.

b) Descreva uma sequência de movimentos para que o carro 1 possa sair do estacionamento, dada a situação abaixo de carros estacionados.

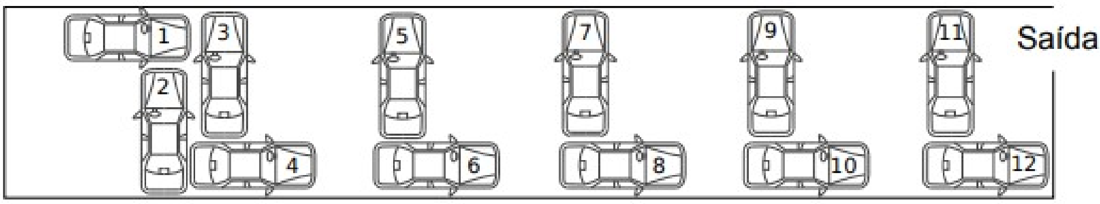


Figura 5.16.4: Doze carros estacionados.

## Solução

a) Uma sequência possível de movimentos que permite que o carro 1 saia do estacionamento é a seguinte: 7 →, 6 ↓, 4 →, 5 →, 6 ↑, 2 ↑. A figura abaixo ilustra essa sequência de movimentos. (Ver Figura 5.16.5)

b) Este caso tem mais movimentos! Mas não é tão diferente. Uma solução seria: 1 ←, 2 ↑, 4 ←, 2 ↓ 3 ↓, 6 ←, 5 ↓, 8 ← 7 ↓, 10 ←, 9 ↓, 12 ←, 11 ↓.

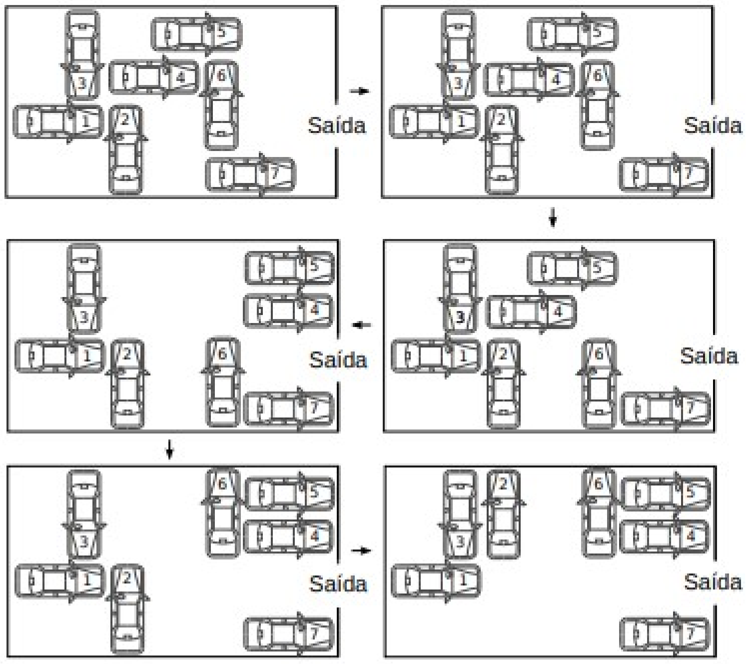


Figura 5.16.5: Solução do problema 5.16a.

## Problema 5.17 (Gata que salta)

Uma gata anda sempre em saltos de comprimento 1 m. Inicialmente, esta gata está no ponto $A$ da figura abaixo, que está a uma distância de 2 m do ponto $O$. Em seguida, ela salta para o ponto$B$, distante 1 m do ponto A e tal que o segmento $AB$é perpendicular ao segmento $OA$. Em seguida, a gata salta do ponto B para o ponto $C$, distante 1 m do ponto$B$e tal que$BC$é perpendicular ao segmento $OB$, e assim por diante.

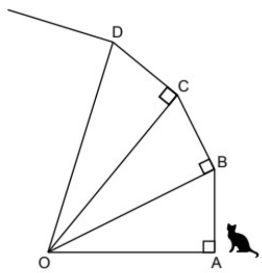


Figura 5.17.1: Pulo da gata.

a) Qual o comprimento do segmento $OB$?

b) Qual o comprimento do segmento $OC$?

c) Após 2014 saltos, a que distância do ponto $O$ estará à gata? Após quantos saltos ela estará a exatos 45 m do ponto $O$?

## Solução

Nessa solução todas as distâncias são dadas em metros.

a) Observe a figura abaixo:

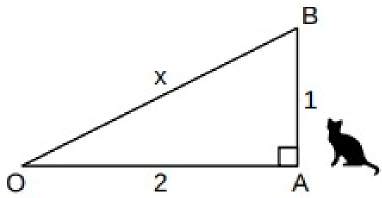


Figura 5.17.2: Primeiro pulo da gata.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que: $x^2 = 2^2 + 1^2$. Logo, temos que $x = \sqrt{5}$, sendo este o comprimento do segmento $OB$.

b) Observe a figura abaixo:

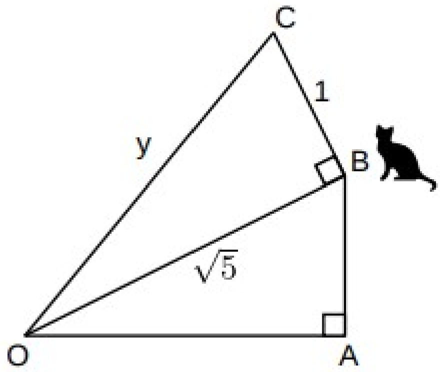


Figura 5.17.3: Segundo pulo da gata.

Novamente, pelo Teorema de Pitágoras, temos que $y^2 = \sqrt{5^2} + 1^2$,de onde concluímos que $y = \sqrt{6}$. Logo, o comprimento do segmento $BC$ é igual á $\sqrt{6}$.

c) Repetindo o processo anterior, sempre usando Pitágoras, obtemos $\sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}$ e assim por diante. Observe:

| | Distância |
|---|---|
| 1º salto | $\sqrt{5}$ |
| 2º salto | $\sqrt{6}$ |
| 3º salto | $\sqrt{7}$ |
| . . . . . . | |
| 2014º salto | salto x |

Daí, deduzimos que $x = \sqrt{2018}$. Deste modo, após 2014 saltos, a gata estará a uma distância $\sqrt{2018}$ m do ponto O.

Para descobrir após quantos saltos a gata estará a exatos 45 m do ponto $O$, basta achar um número tal que a raiz quadrada desse número seja igual a 45. Ou seja, este número deve ser igual a $45^2 = 2025$. Olhando na tabela anterior, podemos deduzir que a gata estará a uma distância $\sqrt{2025}$ m do ponto O após 2021 saltos.

## Problema 5.18 (O último algarismo)

Chamamos de “último algarismo de um número” como o algarismo mais à direita. Por exemplo, o último algarismo de 2014 é o algarismo 4.

a) Qual o último algarismo de $11^{11}$?

b) Qual o último algarismo de $9^9$? E qual o último algarismo de $9219^{9219}$?

c) Qual o último algarismo de $2014^{2014}$?

## Solução

Observe que:

$$11^{11} = \underbrace{11 \times 11 \times 11 \times 11 \times \cdots \times 11}_{11 \text{ vezes}}.$$

Cada vez que multiplicamos dois números que têm o algarismo 1 como algarismo mais à direita, obtemos novamente um número que tem o algarismo 1 como algarismo mais à direita. Por exemplo, $11 \times 11 = 121$. Logo, repetindo o processo, vamos descobrir que $11^{11}$ tem o algarismo 1 como algarismo mais à direita.

b) Observe que:

$$9^9 = \underbrace{9 \times 9 \times \cdots \times 9}_{9 \text{ vezes}}.$$

Neste caso, quando fazemos a primeira multiplicação, obtemos $9 \times 9 = 81$, que termina em 1. Quando fazemos a próxima multiplicação, obtemos $81 \times 9 = 729$, que termina em 9. Fazendo a próxima multiplicação, obtemos um número que termina em 1 novamente. Depois outro número, agora terminando em 9. Logo, temos um padrão! Como começamos de 9 e fazemos oito multiplicações, vamos obter no final um número que termina em 9.

Para o número $9219^{9219}$, fazemos a mesma análise de antes. Como começamos com um número que termina com 9, e fazemos 9218 multiplicações, concluímos que no final será obtido um número que termina em 9.

c) Neste caso, observemos novamente o padrão gerado. Notemos que $4 \times 4 = 16$. Multiplicando o último algarismo (que no caso é 6) por 4, obtemos $6 \times 4 = 24$. Sendo assim, o último algarismo volta a ser 4. Ou seja, obtemos um padrão no qual o último algarismo alterna entre 4 e 6. Como

$$2014^{2014} = \underbrace{2014 \times 2014 \times \cdots \times 2014}_{2014 \text{ vezes}},$$

Começamos com um 2014 e fazemos 2013 multiplicações. Deste modo, o algarismo mais à direita do resultado será o algarismo 6.

## Problema 5.19 (Triângulo dentro de triângulo)

Dona Bete desenha um triângulo de lados 3, 4 e 5, como mostra a figura abaixo:

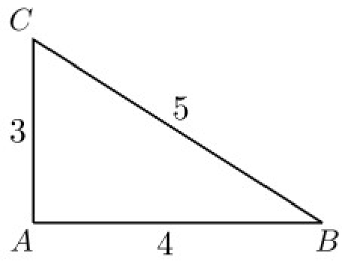


Figura 5.19.1: Triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5.

Em seguida, Dona Bete marca os pontos médios de cada lado e desenha um novo triângulo como mostra a figura abaixo.

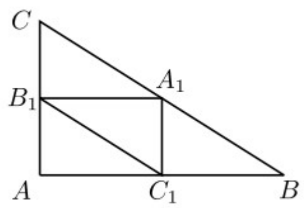


Figura 5.19.2: Triângulo médio.

a) Calcule a área do triângulo $A_1B_1C_{1.}$

b) Seu Maurício nota um interessante padrão e repete o processo, como mostra a figura, sempre marcando e ligando os pontos médios de cada novo triângulo.

Calcule a área do triângulo$A_{2014}$, $B_{2014}$e $C_{2014}$.

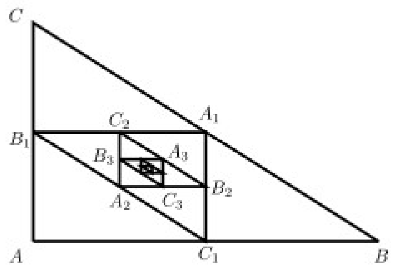


Figura 5.19.3: Construção de uma sequência de triângulos médios.

## Solução

a) Os pontos $A_1$, $B_1$ e $C_1$ são pontos médios dos lados $BC$, $AC$ e $AB$, respectivamente, veja a figura abaixo.

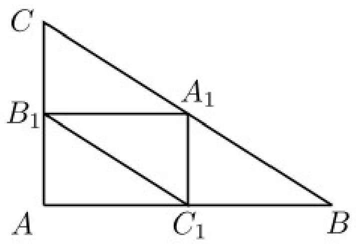


Figura 5.19.3: Solução do problema 5.19a.

O triângulo grande $ABC$ é retângulo, tendo altura 3 e base 4. Logo, sua área é $(3 \times 4)/2 = 6$. Os quatro triângulos $CB_1A_1, A_1C_1B_1$, $B_1AC_1$ e $C_1A_1B_1$ são todos congruentes, tendo, portanto, mesma área, que deve ser $1/4$ da área total. Portanto, a área do triângulo $A_1B_1C_1$ é igual a $6/4 = 3/2$.

b) Pelo item anterior, cada vez que desenhamos um triângulo ligando os pontos médios do anterior, este novo triângulo central tem área igual á $1/4$ do anterior.

Daí, Área do triângulo $A_1B_1C_1 = 1/4 \times 6 = 3/2$.

Repetindo o processo, Área do triângulo $A_2B_2C_2 = 1/4 \times 3/2$.

Novamente, Área do triângulo $A_3B_3C_3 = 1/4 \times 1/4 \times 3/2 = (1/4)^2 \times 3/2$.

Repetindo o processo mais uma vez, Área do triângulo $A_4B_4C_4 = 1/4 \times 1/4 \times 1/4 \times 3/2 = (1/4)^3 \times 3/2$, e assim por diante.

Logo, a área do triângulo $A_{2014}B_{2014}C_{2014}$ será igual a $(1/4)^{2013} \cdot 3/2$.

## Problema 5.20 (Os doze números de Pedro)

Pedro tem um tabuleiro $6 \times 2$, contendo as duas casas mais à direita, pintadas em cinza, como ilustrado abaixo:

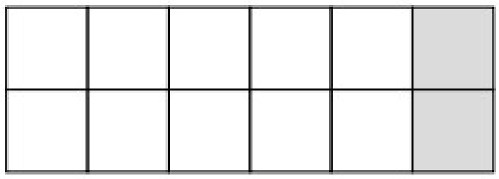

Figura 5.20.1: Tabuleiro $6 \times 2$

Ele deve preencher todas as casas do seu tabuleiro com os números de 1 a 12 de modo que:

• em cada linha, os 6 números, lidos da esquerda para a direita, estejam em ordem crescente; e

• em cada coluna, o número de cima seja menor que o número de baixo.

a) Mostre que a maior soma que Pedro pode conseguir nas casas pintadas é 23. Mostre também como ele pode atingir essa soma.

b) Mostre que a menor soma que Pedro pode conseguir nas casas pintadas é 18. Mostre também como ele pode atingir essa soma.

## Solução

Sejam $A$ e $B$ os números colocados nas casas pintadas como indicado na seguinte figura:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $A$ |
| | | | | | $B$ |

Figura 5.20.2: Tabuleiro $6 \times 2$ inseridos os números A e B.

Observe que, pelas regras, $B$ deve ser maior que todos os outros números da sua mesma linha e também maior que $A$. Mas sendo $A$ maior que todos os outros números da sua linha, concluímos que $B$ deve ser maior que todos os outros números do tabuleiro. Portanto $B = 12$.

a) O maior valor que A pode tomar é 11. A maior soma é, então, $A + B = 11 + 12 = 23$. A figura seguinte mostra um modo de atingir essa soma:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |

Figura 5.20.3: Solução do problema 5.20a.

Observação: Essa é, de fato, a única maneira na qual a soma é igual a 23.

b) Como $A$ deve ser maior que os outros 5 números da sua linha, o mínimo valor que $A$pode tomar é 6. Então, o menor valor que pode tomar a soma é $A + B = 6 + 12 = 18$. A figura seguinte mostra um modo de atingir essa soma:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Figura 5.20.4: Solução do problema 5.20b.

## 5.2. Exercícios de Provas.

Vamos ver nesta seção alguns problemas interessantes aplicados nas provas OBMEP de 2010 até 2018, sempre observando que selecionaremos questões para alunos com defasagem em matemática.

Vale aqui ressaltar que no site da OBMEP encontra-se um riquíssimo material com questões dos mais diferentes níveis de aprendizagem, sendo para o professor de ensino básico uma fonte de consulta quase que obrigatória.

Este estudo é dirigido a alunos com dificuldades em matemática, mas para os professores que quiserem aprofundar os estudos com seus alunos, o site oferece questões mais complexas. Uma experiência de sucesso nas escolas que leciono é passar desafios, com problemas das olimpíadas, num quadro em destaque aonde os alunos tenham acesso, e é fácil perceber o interesse dos alunos, e quando resolvem a questão, colocamos a resposta com o nome do aluno que a resolveu. Essa ação cria um ambiente favorável e desafiador para nossos alunos.

Vejamos alguns problemas:

### Problema 5.21

Em um dado a soma dos números de duas faces opostas é sempre 7. Dois dados iguais foram colados como na figura. Qual é a soma dos números que estão nas faces coladas?

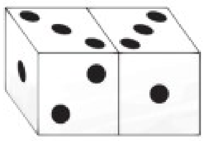

Figura 5.21: Soma das faces coladas.

### Solução

A face colada do dado da esquerda é oposta à face com 1, logo essa face tem o número 6. Na face colada do dado da direita não aparecem nem o 1 nem o 3, e logo não aparecem também nem o 6 nem o 4. Restam para essa face os números 2 e 5. Observando a posição dos três pontos nas faces superiores dos cubos e lembrando que os cubos são idênticos, vemos que o cubo da direita tem o 2 em sua face direita (oculta), logo sua face colada tem o número 5. Segue que a soma das faces coladas é $6 + 5 = 11$.

## Problema 5.22

Cada quadradinho na figura deve ser preenchido com um sinal de adição ($+$) ou de multiplicação ($\times$). Qual é o maior valor possível da expressão obtida depois de preenchidos todos os quadradinhos?

$$2 \;\square\; 3 \;\square\; 0 \;\square\; 8 \;\square\; 9 \;\square\; 1$$

## Solução

Como ao multiplicar qualquer número por 0 o resultado é 0, não contribuindo assim para maximizar o resultado da expressão, devemos colocar sinais de adição dos dois lados do 0:

$$2 \;\square\; 3 \;\boxed{+}\; 0 \;\boxed{+}\; 8 \;\square\; 9 \;\square\; 1$$

Entre multiplicar por 1 e somar 1, o maior resultado é obtido no segundo caso, logo devemos também colocar um sinal de adição antes do 1:

$$2 \;\square\; 3 \;\boxed{+}\; 0 \;\boxed{+}\; 8 \;\square\; 9 \;\boxed{+}\; 1$$

Finalmente, $2 \text{ x } 3$ é maior que $2 + 3$ e $8 \text{ x } 9$ é maior que $8 + 9$, de modo que a expressão que fornece o maior valor é

$$2 \;\boxed{\times}\; 3 \;\boxed{+}\; 0 \;\boxed{+}\; 8 \;\boxed{\times}\; 9 \;\boxed{+}\; 1$$

cujo valor é $2 \times 3 + 0 + 8 \text{ x } 9 + 1 = 79$.

## Problema 5.23

Na figura as circunferências de centros $A$ e $B$ são tangentes aos lados do retângulo e têm diâmetros iguais a 4 cm. A distância entre os pontos $R$ e $S$ é 1 cm. Qual é o perímetro do retângulo?

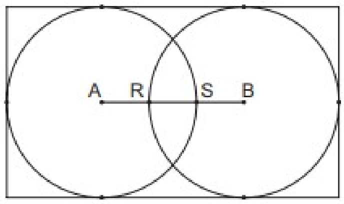


Figura 5.23: Circunferências tangentes ao retângulo.

## Solução

Observando a figura abaixo, temos que os segmentos $AP,\ AS,\ BR$ e $BQ$ são raios dos círculos, logo todos têm comprimento 2. Além disso, temos $BS = BR - RS = 1$, donde $PQ = PA + AS + SB + BQ = 2 + 2 + 1 + 2 = 7$ e vemos que os lados maiores do retângulo têm comprimento 7. Por outro lado, o comprimento dos lados menores do retângulo é igual ao comprimento de $MN,$ que é um diâmetro do círculo, ou seja, tem comprimento 4. Logo o perímetro do retângulo $(7 + 7 + 4 + 4)$ é $22$ cm.

### Problema 5.24

Para qual valor de $x$ a igualdade $3 - \frac{6}{4-\frac{8}{1+x}} = 0$ é verdadeira?

### Solução

Vamos reescrever $3 - \frac{6}{4-\frac{8}{1+x}} = 0$ como $3 = \frac{6}{4-\frac{8}{1+x}}$, vemos então que devemos ter $4 - \frac{8}{1+x} = 2$.

Reescrevendo essa última expressão $2 = \frac{8}{1+x}$ como segue que devemos ter $1 + x = 4$, ou seja, $x = 3$.

## Problema 5.25

Um quadrado de papel de 20 cm de lado, com a frente branca e o verso cinza, foi dobrado ao longo das linhas pontilhadas, como na figura. Qual é a área da parte branca que ficou visível?

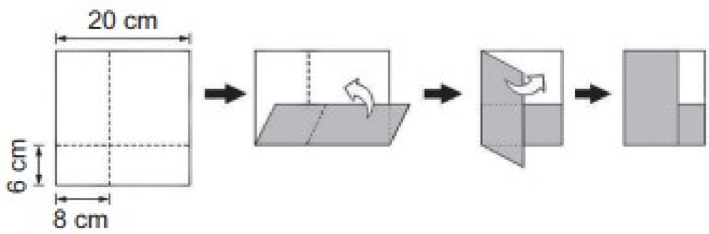


Figura 5.25.1: Dobradura do quadrado de lado 20 cm.

## Solução

A figura mostra os comprimentos de alguns segmentos ao longo da sequência de dobras. Ao final, vemos que a região branca é um retângulo de lados de comprimento 4 cm e 8 cm; sua área é então $4 \times 8 = 32$ cm$^2$.

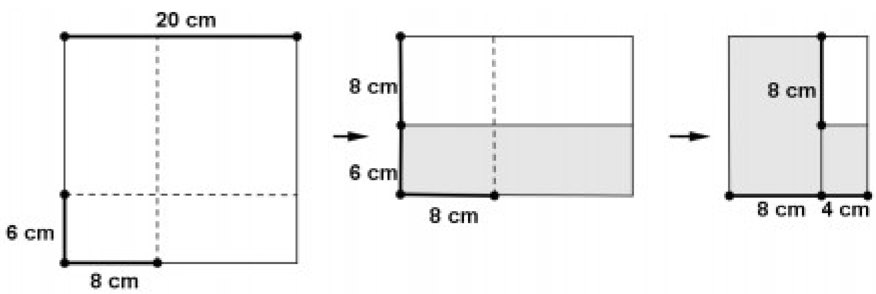


Figura 5.25.2: Solução do problema 5.25.

## Problema 5.26

Um queijo foi partido em quatro pedaços de mesmo peso. Três desses pedaços pesam o mesmo que um pedaço mais um peso de 0,8 kg. Qual era o peso do queijo inteiro?


Figura 5.26: Balança de dois pratos.

## Solução

Seja $q$ o peso do queijo, temos que:

$3\,q/4 = q/4 + 0{,}8,$ multiplicando a equação por 4 temos:

$$3q = q + 3{,}2$$

$$3q - q = 3{,}2$$

$$2q = 3{,}2$$

$$q = 1{,}6$$

Logo, o queijo tem peso 1,6 kg.

## Problema 5.27

Na tabela abaixo, a soma dos números da primeira linha é igual à soma dos números da segunda linha. Qual é o valor de $x$?

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ªlinha | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 2018 |
| 2ªlinha | 31 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 | X |

## Solução

Com exceção da última coluna, subtraindo os números da segunda linha dos números da primeira, por coluna, obtemos os números cuja soma é $4 + 3 + 2 + 1 + 0 - 1 = 9$. Isto significa que, com exceção da última coluna, os números da primeira linha, quando somados, excedem os da segunda em 9. Portanto, o número na casa marcada com x deve exceder 2018 em 9, de modo a igualar as somas nas linhas. Logo, esse número é $2018 + 9 = 2027$.

## Problema 5.28

A área da figura destacada mais escura é 28 cm$^2$, e seus vértices dividem os lados do quadrado em três partes iguais. Qual é a área do quadrado?

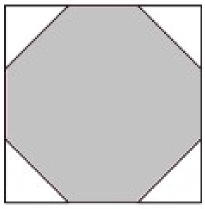

Figura 5.28.1: Parte da área de um quadrado.

## Solução

Como os vértices da figura destacada (um octógono) dividem os lados do quadrado em três partes iguais, podemos ligá-los de forma a obter um quadriculado que divide o quadrado em nove quadradinhos iguais. A figura cuja área conhecemos é formada por cinco desses quadradinhos e quatro triângulos, os quais são, cada um deles, metade de um quadradinho. Reunindo esses quatro triângulos dois a dois, como na figura, teremos mais dois quadradinhos; portanto, o octógono, cuja área é 28 cm$^2$, é equivalente a $5 + 2 = 7$ quadradinhos. A área de cada um dos quadradinhos é, portanto, igual a $28 \div 7 = 4$ cm$^2$. Como o quadrado equivale a nove quadradinhos, sua área é $9\ x\ 4 = 36$ cm$^2$.

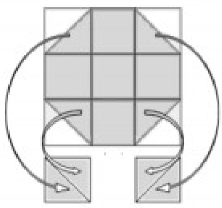

Figura 5.28.2: Solução do problema 5.28.

## Problema 5.28

Na figura, quantos quadradinhos brancos ainda devem ser pintados de preto para que o número total de quadradinhos pretos passe a ser o dobro do número de quadradinhos brancos?

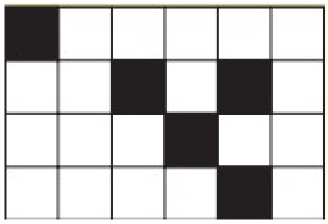

Figura 5.28: Tabela 4x6.

## Solução

A figura apresentada tem um total de 24 quadradinhos. Para que o número de quadradinhos pretos seja o dobro do número de quadradinhos brancos, os quadradinhos pretos devem representar $2/3$ do total, que correspondem a 16 quadradinhos, e os brancos $1/3$ do total, que correspondem a 8 quadradinhos. Como na figura original há 5 quadradinhos pretos, é preciso pintar de preto $16 - 5 = 11$ quadradinhos.

## Problema 5.29

Na rede de distribuição de água representada abaixo, a água passa pelos canos como indicado pelas setas e se distribui igualmente em cada ramificação. Em uma hora passaram 200 mil litros de água pela saída X. Quantos litros de água passaram pela saída Y nessa mesma hora?

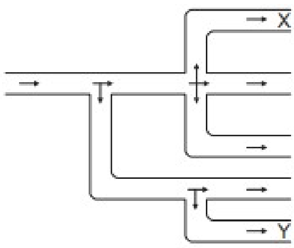


Figura 5.29: Rede de distribuição de água.

## Solução

Como indicado na figura ao lado, vamos chamar de$A$o cano que se ramifica em três saídas, sendo uma delas a saída $X,$ e de $B$ o cano que se ramifica em duas saídas, sendo uma delas a saída$Y.$ Como a água que passa pelos canos distribuísse igualmente em cada ramificação, pelo cano $A$ passa, por hora, 3 vezes a quantidade de água que passa pela saída $X,$ enquanto pelo cano $B$ passa, por hora, 2 vezes a quantidade de água que passa pela saída $Y.$ Como os canos $A$ e $B$ são as únicas saídas de uma mesma ramificação, a quantidade de água que passa por eles em uma hora é a mesma. Assim, 3 vezes a quantidade de água que passa por hora pela saída $X$ é igual a 2 vezes a quantidade de água por hora que passa pela saída $Y$. Mas, a quantidade de água que passa por$X$ é 200 mil litros; logo, a quantidade de água que passa pela saída $Y$ por hora é a metade de 600 mil litros, ou seja, 300 mil litros.

## Problema 5.30

Em uma festa havia somente 3 mulheres, e 99% dos convidados eram homens. Quantos homens devem deixar a festa para que a porcentagem de homens passe a ser igual a 98% do total de participantes?

## Solução

Como apenas $1\% = 1/100$ do total das pessoas da festa é do sexo feminino, podemos concluir que existem $3 \times 100 = 300$ pessoas ao todo. Após a saída dos homens, queremos que as 3 mulheres correspondam a $2\% = 1/50$ do total de pessoas da festa, ou seja, queremos passar a ter $3 \times 50 = 150$ pessoas. Portanto, devem sair $300 - 150 = 150$ homens.

### Problema 5.31

José gosta de inventar operações matemáticas entre dois números naturais. Ele inventou uma operação em que o resultado é a soma dos números seguida de tantos zeros quanto for o resultado dessa soma. Por exemplo, $2 \ddagger 3 = 500000$e $7 \ddagger 0 = 70000000$.

Quantos zeros há no resultado da multiplicação abaixo?

$$(1 \ddagger 0).(1 \ddagger 1).(1 \ddagger 2).(1 \ddagger 3).(1 \ddagger 4)$$

### Solução

O resultado da operação é:

$$10 \times 200 \times 3000 \times 40000 \times 500000 = 1200000000000000000.$$

Observe que $1 \text{ x } 2 \text{ x } 3 \text{ x } 4 \text{ x } 5 = 120$, adicionando os zeros, que são 15, logo, no resultado há 16 zeros.

### Problema 5.32

Os anéis da figura estão entrelaçados. Qual é o menor número de anéis que devem ser cortados para que todos fiquem soltos?

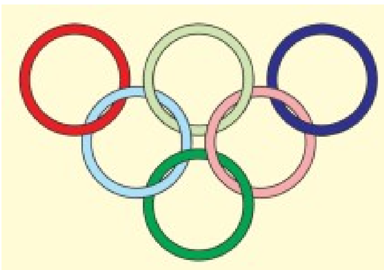

Figura 5.32: Anéis entrelaçados.

### Solução

Observando como os anéis estão entrelaçados, vemos que não é possível soltar todos os seis anéis cortando apenas um deles. De fato, cortando só o vermelho, só ele se solta; o mesmo acontece se cortarmos só o verde-claro, só o azul-escuro ou só o verde-escuro. Cortando o azul-claro, soltam-se ele e o vermelho, e, cortando o rosa, soltam-se ele e o azul-escuro. Como há quatro anéis que estão soltos entre si (vermelho, verde-claro, azul-escuro e verde-escuro), cortando os outros dois (azul-claro e rosa), todos os seis anéis vão ficar soltos. Assim, o número mínimo de anéis que devem ser cortados para que todos fiquem soltos é dois.

## Problema 5.33

A soma dos números das faces opostas de um dado é sempre 7. O dado da figura é girado sucessivamente sobre o caminho indicado até parar na última posição, destacada em cinza. Nessa posição, qual é o número que está na face superior do dado?

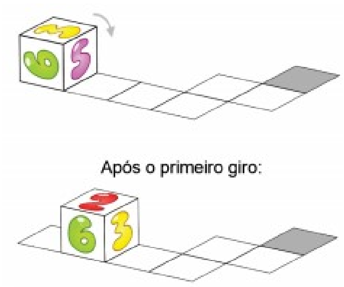


Figura 5.33.1: Dado e percurso.

## Solução

O enunciado da questão mostra o dado em suas duas primeiras posições.

Continuando os sucessivos giros, observamos que as faces do dado se comportam da seguinte maneira:

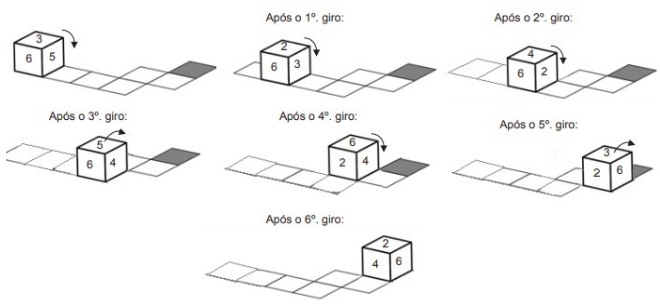


Figura 5.33.2: Solução do problema 5.33.

Assim, o número que aparece no topo do dado quando este estiver sobre a casa cinza é 2.

## Problema 5.34

Luciana marcou os números de 1 a 9 em uma circunferência, como na figura. A partir do número 1, ela começou a pular de 4 em 4. No primeiro pulo ela foi do 1 ao 5, no segundo, do 5 ao 9, no terceiro, do 9 ao 4 e assim por diante. Depois de pular 1000 vezes, em que número ela parou?

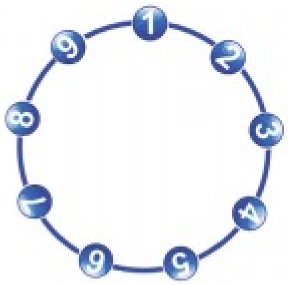


Figura 5.34: Circunferência numerada de 1 a 9.

## Solução

Depois de 9 pulos, Luciana retornará à posição marcada com o número 1, conforme indicado na sequência seguinte:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 1$$

Como $999 = 111 \times 9$, concluímos que depois de 999 pulos Luciana estará na posição marcada com o número 1; consequentemente, depois de pular 1000 vezes, ela estará na posição seguinte, a qual está marcada com o número 5

## Problema 5.35

Quantos são os números naturais $n$tais que $\frac{5n-12}{n-8}$ é também um número natural?

## Solução

Podemos reescrever a expressão somando e subtraindo 40 no denominador, como abaixo:

$$\frac{5n-12}{n-8}=\frac{5n-40+40-12}{n-8}=\frac{5n-40}{n-8}+\frac{28}{n-8}=\frac{5(n-8)}{n-8}+\frac{28}{n-8}=5+\frac{28}{n-8}$$

Logo, os números inteiros $n$tais que $\frac{5n-12}{n-8}$ é um número natural são aqueles tais que $\frac{28}{n-8}$ é um número inteiro igual ou maior do que – 5. Para $\frac{28}{n-8}$ ser um número inteiro $n-8$ deve dividir 28 e segue que?

$(n\text{–}8)=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 7,\ \pm 14$ ou $\pm 28$

E, dentre esses números, para $\frac{28}{n-8}$ ser um número inteiro igual ou maior que – 5, segue que $(n-8)=+1,+2,+4,\pm 7,\pm 14$ ou $\pm 28$. Logo, os possíveis inteiros $n$ são:

$n=+9,\ +10,\ +12\,,+15,\ +1,\ +22,\ -6,\ +36$ ou – $20$

Desses, sete são números naturais.

## Problema 5.36

No refeitório da escola de Quixajuba, na hora do almoço, 130 alunos comeram carne e 150 comeram macarrão, sendo que $\frac{1}{6}$ dos alunos comeram carne e também macarrão. Além disso, 70 alunos não comeram carne nem macarrão. Quantos alunos comeram carne, mas não comeram macarrão?

## Solução

Se considerarmos a soma dos números:

130 alunos que comem carne

150 alunos que comem massa

70 alunos que não comem carne nem massa,

teremos um total de 350 pessoas.

Nesta soma contamos duas vezes os alunos que comeram carne e macarrão, ou seja, ela é igual ao número total T de alunos, acrescentado de $(\frac{1}{6})$T, que é o número de estudantes que comeram carne e macarrão, fornecido pelo enunciado. Teremos então $350 = T + \frac{(1)}{6}T = \frac{(7)}{6}T$. Logo $T = 300$ e $\frac{1}{6}T = 50$. Assim, comeram apenas carne $130 - 50 = 80$ alunos.

## Problema 5.37

Numa corrida de 2000 metros, André, Bento e Carlos correram com velocidades constantes. André chegou em primeiro lugar, 200 metros à frente de Bento e 290 metros à frente de Carlos. Quando Bento cruzou a linha de chegada, quantos metros ele estava à frente de Carlos?

## Solução


Figura 5.37: Posição dos corredores após o primeiro completar o percurso.

Após Bento ter corrido 1800 metros, ele ficou 90 metros à frente de Carlos. Portanto, quando Bento correr mais $\frac{1800}{9} = 200$ metros, ele aumentará a distância para Carlos em mais $\frac{90}{9} = 10$ metros. Logo, ao cruzar a linha de chegada, Bento estará há $90 + 10 = 100$ metros à frente de Carlos.

## Problema 5.38

A peça 1 foi montada juntando-se duas peças, sem sobreposição.

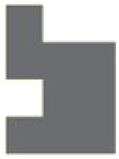

Figura 5.38.1: Peça 1.

Uma das peças utilizadas foi a da Figura 2.

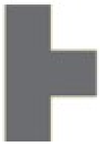

Figura 5.38.2: Peça 2.

Qual foi a outra peça utilizada?


## Solução

Vamos simular a montagem da Figura 1, colocando a peça da Figura 2 sobre ela.

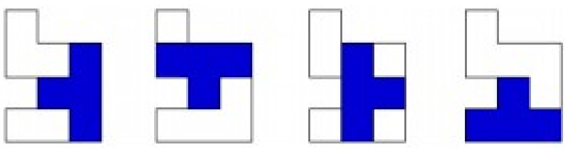

Figura 5.38.3: Solução do problema 5.38.

Observe que, dentre as quatro posições possíveis para colocar a peça da Figura 2 sobre a Figura 1, mostradas na figura ao lado, apenas a última está de acordo com o enunciado. De fato, usando qualquer uma das outras três posições, a parte descoberta da Figura 1 ficará separada em duas ou mais regiões, sendo necessário, pelo menos, mais duas peças para cobri-la. Nesse caso, vemos que a peça complementar utilizada para formar a Figura 1 é a peça da alternativa A.

## Problema 5.39

Os pontos destacados nos quadrados abaixo são pontos médios dos lados.

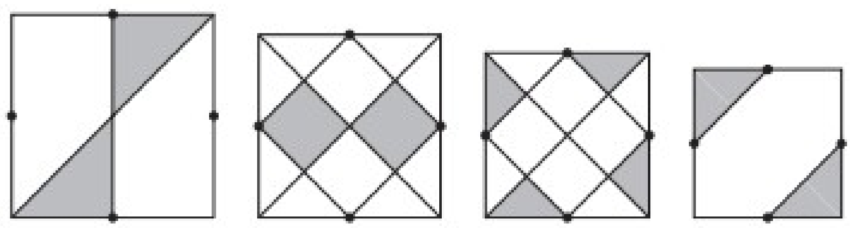

Figura 5.39.1: Região colorida de quatro quadrados.

Quantos desses quadrados têm área sombreada igual a $\frac{1}{4}$ de sua área?

## Solução

Em todas as quatro figuras, a área sombreada é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado correspondente. Uma maneira simples de confirmar isto é contar, em cada caso, o número de triângulos sombreados que são formados nas decomposições abaixo (8 triângulos sombreados para um total de 32 triângulos, isto é $\frac{8}{32}$ ou $\frac{1}{4}$:

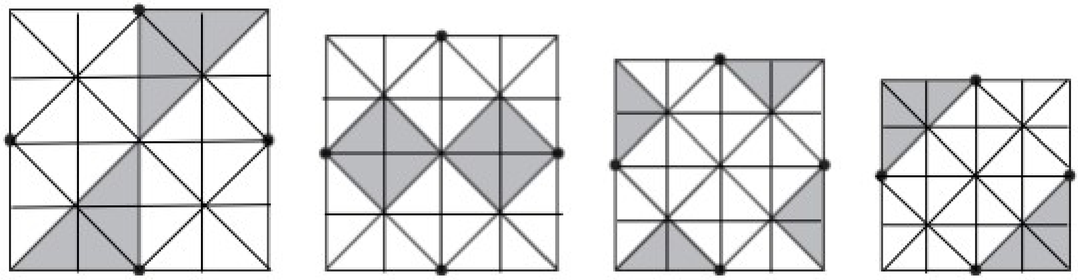

Figura 5.39.2: Secções das regiões quadradas em regiões triangulares dos quadrados menores.

## Problema 5.40

Cinco dados foram lançados e a soma dos pontos obtidos nas faces de cima foi 19. Em cada um desses dados, a soma dos pontos da face de cima com os pontos da face debaixo é sempre 7. Qual foi a soma dos pontos obtidos nas faces debaixo?

Figura 5.40: Dado.

## Solução

Ao lançarmos os cinco dados, a soma de todos os pontos obtidos nas faces do topo com suas faces opostas é $7 \times 5 = 35$, devido às características do dado descritas no enunciado (faces opostas somam 7). Logo, a soma dos pontos obtidos nas faces de baixo é $35 - 19 = 16$.

## Problema 5.41

Quais dos polígonos desenhados no quadriculado têm o mesmo perímetro?

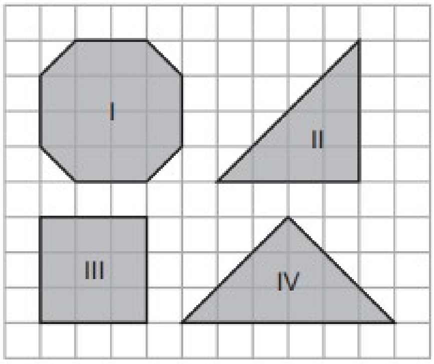


Figura 5.41: Quatro polígonos.

## Solução

Os perímetros das figuras podem ser observados diretamente.

A figura I possui perímetro formado por 8 lados do quadradinho básico que constitui o quadriculado, mais 4 diagonais destes mesmos quadradinhos. O mesmo ocorre com a figura II.

A figura III tem perímetro igual a 12 lados do quadradinho básico do quadriculado e a figura IV tem perímetro igual a 6 lados do quadradinho básico acrescido de 6 diagonais desses quadradinhos. Deste modo, como a diagonal de um quadradinho mede mais do que o lado do mesmo quadradinho, somente as figuras I e II têm o mesmo perímetro.

## Problema 5.42

Observe as engrenagens na figura. Quantas voltas a engrenagem com 12 dentes deve dar para que a engrenagem com 9 dentes dê 200 voltas?

Figura 5.42: Três engrenagens.

## Solução

A engrenagem do meio é apenas uma transmissora do movimento, servindo para que as engrenagens externas girem solidárias e na mesma direção. Cada dente girado da engrenagem com 12 dentes provoca o movimento de exatamente um dente da engrenagem do meio. Ela realiza a conexão entre as engrenagens externas. Se a engrenagem com 9 dentes deu 200 voltas, foram girados $9x200 = 1800$ dentes. Para que a engrenagem com 12 dentes tenha girado o mesmo número de dentes foram necessárias $1800 \div 12 = 150$ voltas.

## Problema 5.43

Em uma caixa havia seis bolas, sendo três vermelhas, duas brancas e uma preta. Renato retirou quatro bolas da caixa. Qual afirmação a respeito das bolas retiradas é correta?

A) Pelo menos uma bola é preta.

B) Pelo menos uma bola é branca.

C) Pelo menos uma bola é vermelha.

D) No máximo duas bolas são vermelhas.

E) No máximo uma bola é branca.

## Solução

Renato retirou quatro bolas da caixa; como há duas bolas brancas e uma preta, uma das bolas retiradas deve, obrigatoriamente, ser vermelha. As alternativas são falsas:

A) não é verdadeira, pois Renato poderia ter retirado, por exemplo, três bolas vermelhas e uma branca;

B) é também falsa, pois Renato poderia ter retirado três bolas vermelhas e uma preta;

D) é falsa, porque Renato poderia ter retirado as três vermelhas e uma branca e, finalmente,

E) não é verdadeira, pois Renato poderia ter retirado as duas brancas e duas vermelhas.

## Problema 5.44

Nas balanças há sacos de areia de mesmo peso e tijolos idênticos. Quanto deve marcar a última balança?


Figura 5.44: Balança digital.

## Solução

A diferença entre o que há na primeira balança e o que há a balança do meio é exatamente o que há na última balança; logo, na última balança deve aparecer a marcação $64 - 41 = 23$ kg.

## Problema 5.45

Na malha hexagonal, a casa central recebeu o número 0 e as casas vizinhas a ela receberam o número 1. Em seguida, as casas vizinhas às de número 1 receberam o número 2 e assim sucessivamente, como na figura. Quantas casas receberam o número 6?

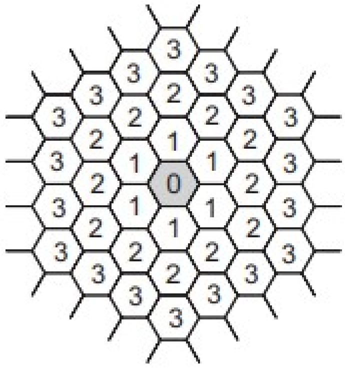


Figura 5.45.1: Malha hexagonal.

## Solução

Observemos os segmentos que unem os centros dos hexágonos de cada etapa, mostrados na figura ao lado. Percebemos que cada um desses segmentos, na etapa 1, une dois centros, na etapa 2, três centros, na etapa 3, quatro centros e assim sucessivamente, aumentando 1 centro por segmento, por etapa. Como em cada etapa os segmentos que unem os centros formam um hexágono, temos o acréscimo de 6 pequenos hexágonos por etapa. Logo, 6 hexágonos recebem o número 1, $6 + 6 = 12$ recebem o número 2, $(6 + 6 + 6) = 3 \times 6 = 18$ recebem o número 3 e, continuando o processo, concluímos que $6 \times 6 = 36$ hexágonos recebem o número 6.

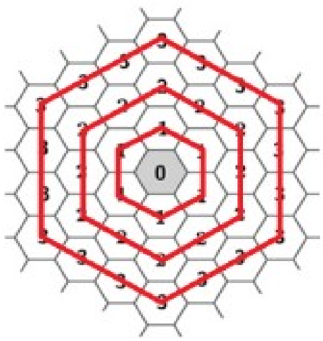

Figura 5.45.2: Solução do problema 4.45.

## Problema 5.46

A figura abaixo é formada por dois quadrados de lado 6 cm e dois triângulos. Se M é o ponto médio de AB, qual é a área total da figura?

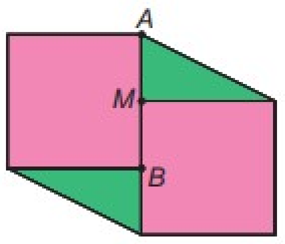


Figura 5.46.1: Quadrados e triângulos

## Solução

Como os quadrados estão dispostos de forma que os pontos A, M e B estão alinhados, e como M é o ponto médio de AB, segue que os dois triângulos da figura são triângulos retângulos, com catetos medindo 6 e 3 centímetros. Assim, a área de cada quadrado é $6 \times 6 = 36$ cm$^2$ e a área de cada triângulo é $6 \times 3 = 9$ cm$^2$.

A área total da figura é $36 + 36 + 9 + 9 = 90$ cm$^2$. Pode-se também deslocar um dos triângulos para se obter outro método de resolução.

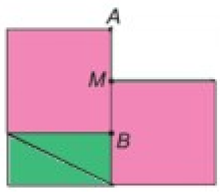


Figura 5.46.2: Junção dos triângulos.

Basta observar que a área dos triângulos unidos é igual à metade da área do quadrado, logo a área total da figura é $36 + 36 + 18 = 90$ cm$^2$

## Problema 5.47

O trapézio $ABCD$ foi dobrado ao longo do segmento $CE$, paralelo ao lado $AD$, como na figura. Os triângulos $EFG$ e $BFH$ são equiláteros, ambos com lados de 4 cm de comprimento. Qual é o perímetro do trapézio?

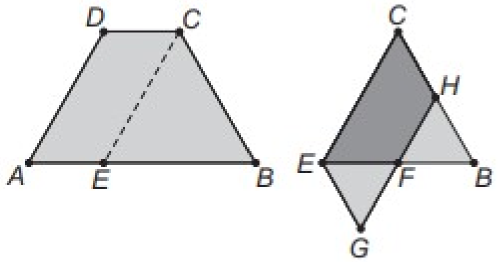


Figura 5.47: Trapézios

## Solução

Primeiro observamos que $AD = EC,$ por serem lados opostos do paralelogramo $AECD$. Após a dobradura o segmento $AD$ ocupou a posição representada pelo segmento $GH,$ logo os segmentos $EC$ e $HG$ são paralelos e tais que

$$EC = AD = GH = GF + FH = 4 + 4 = 8 \text{ cm.}$$

Também valem as igualdades $DC = AE = EG = 4$ cm. Além disso, usando que os triângulos $EFG$ e $BFH$ são equiláteros, temos as seguintes relações:

$C\hat{E}B = H\hat{F}B = 60^o$(correspondentes)

$$E\hat{B}C = F\hat{B}H = 60^o$$

$$E\hat{C}B = 180 - C\hat{E}B - E\hat{B}C = 60^o$$

Assim, o triângulo $EBC$ é equilátero de lado $EB = EF + FB = 8$ cm. O perímetro do trapézio é $ABCD$ é, portanto, $AE + EB + BC + DC + AD = 4 + 8 + 8 + 4 + 8 = 32$ cm.

## Problema 5.48

Em um palácio estavam presentes apenas o rei e alguns de seus súditos. Cada um dos presentes acenou para cada um dos demais uma única vez, com exceção do rei, que não acenou para ninguém. Houve um total de 1296 acenos. Quantos súditos estavam presentes no palácio?

## Solução

Cada um dos $n$ súditos presentes acenou $n$ vezes (para o rei e para os demais $n-1$ súditos). Logo, houve um total de $n^2$ acenos.

Portanto, deve-se ter $n^2 = 1296$, ou seja, $n = 36$. Havia, assim, 36 súditos no palácio.

## Problema 5.49

Para assar um frango são necessários 15 minutos para aquecer o forno e mais 12 minutos para assar cada meio quilo de frango. Paula comprou um frango de 2,5 kg. A que horas ela deve ligar o forno para que o frango fique pronto às 20 horas?

## Solução

Como $2{,}5 = 5 \times 0{,}5$, o tempo que o frango deve ficar no forno é $5 \times 12 = 60$ minutos. Logo, Paula deve colocar o frango no forno às 19 h, mas 15 minutos antes deve acender o forno. Assim, Paula deve acender o forno às 18 horas e 45 minutos.

## Problema 5.50

Daniel e mais quatro amigos, todos nascidos em estados diferentes, reuniram-se em torno de uma mesa redonda. O paranaense sentou-se tendo como vizinhos o goiano e o mineiro. Edson sentou-se tendo como vizinho Carlos e o sergipano. O goiano sentou-se tendo como vizinhos Edson e Adão. Bruno sentou-se tendo como vizinhos o tocantinense e o mineiro. Quem é o mineiro?

## Solução

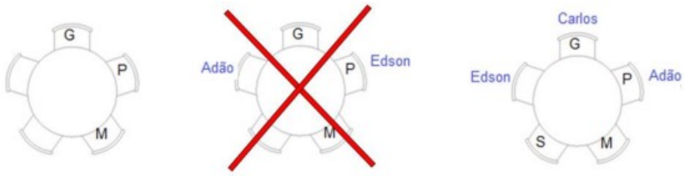


Figura 5.50.1: Mesa redonda e posicionamento dos amigos.

Eliminamos o caso em que Edson é paranaense com a informação de que "Edson sentou-se tendo como vizinhos Carlos e o sergipano", pois se Edson fosse paranaense ele estaria entre o goiano e o mineiro. Portanto, Adão é o paranaense. Como Edson sentou-se entre Carlos e o sergipano, concluímos que Carlos é goiano e o lugar entre Edson e o mineiro é do sergipano. A última informação do enunciado diz que Bruno sentou-se entre o tocantinense e o mineiro. Logo, Edson é tocantinense e Bruno é sergipano. Portanto, Daniel é mineiro.


Figura 5.50.2: Solução do problema 5.20.

# Capítulo 6

# Conclusão

Este trabalho selecionou questões que podem auxiliar professores no cotidiano da escola, a fim de ajudá-los a trabalhar com alunos que apresentam dificuldades para aprender matemática. Foram introduzidos dois conceitos: paridade e princípio das casas de pombo. Que, em geral, não estão nos currículos das escolas, mas nos dá a oportunidade de desenvolver um pensamento matemático interessante.

Para atrair o interesse dos alunos, foquei em problemas simples e de acesso fácil a alunos com pouco conhecimento matemático, para isso, busquei diferentes fontes para selecionar os problemas utilizados neste trabalho. Vale ressaltar que o banco de questões e as provas da OBMEP nos oferecem uma variedade interessante de problemas, e devido a sua relevância para matemática em nosso país, dediquei um capítulo a essas questões e concentrei a maioria dos problemas deste trabalho. Não posso deixar de reforçar a importância das questões da OBMEP para as atividades cotidianas do professor de matemática, sendo essa uma boa fonte de pesquisa que serve não somente para treinar para as olimpíadas, mas também nos possibilita ter uma visão diferente da matemática.

É sabido que, nós professores, enfrentamos diferentes dificuldades em sala de aula, e a profissão se torna cada dia mais difícil, apenas ser um bom profissional não garante um bom trabalho com os alunos. Enfrentamos problemas de estrutura física, desvalorização da profissão; entre outros ligados a profissão, aliados a isso a falta de participação da família na educação de seus filhos, principalmente em áreas periféricas e a falta de interesse dos alunos, surgem como um desafio para escola e para nós professores.

A cada novo ano de trabalho somos provocados a desenvolver nossas habilidades e trabalhar para que o conhecimento matemática não resida apenas em seletos grupos. Cabe a nós professores, difundir e ajudar a acabar com o estigma de que a matemática é algo impossível. Talvez seja esse o maior desafio a ser enfrentado, pois ensinar matemática a alunos que não tem dificuldades se torna “um pouco” mais fácil do que trabalhar com alunos que praticamente já desistiram de aprender matemática.

Neste sentido, a seleção de problemas da OBMEP, bem como a introdução da teoria de paridade e o principio das casas de pombo, acima trabalhados, nos fornece um ambiente leve para as aulas de matemática, inserido os alunos que normalmente são excluídos das aulas pela falta de aprofundamento, sendo um bom recurso para professores que buscam atividades para esse fim.

# Bibliografia

[1] D'AMBROSIO, Ubiratan. Educação matemática: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

[2] Educação Profissional e Tecnológica: práticas e trajetórias de pesquisa/ organizado por Ilalzina Maria da Conceição Medeiros, Mirian Albani, Maria Isolina de Castro Soares, Alexandre Jacob, Monica Costa Arrevalbeni, Eliana Maria da Silva Madeira Lourenço. In: ASSIS, Vagner Braga. Programas de Estágio: Primeiro contato com o mercado de trabalho dos alunos do ensino médio e da educação profissional em dias escolas da Grande Vitória.1 ed., - Colatina: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, 2013. Cap.3, p.69-88.

[3] FIORENTINI, D. e LORENZATO, S. Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2009.

[4] FOMIN, D. et al. Círculos Matemáticos. Tradução de Valéria de Magalhães Iório. IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

[5] IMPA/OBMEP. Banco de Questões 2010 a 2019. Rio de Janeiro, IMPA, 2019 Disponível em www.obmep.org.br.

[6] LIMA, Elon L. & PINTO, Paulo C. & WAGNER, Eduardo & MORGADO, Augusto C. A Matemática do Ensino Médio, vol 1. Sociedade Brasileira de Matemática. Coleção do Professor de Matemática, 2004.

[7] LIMA, Elon L. & PINTO, Paulo C. & WAGNER, Eduardo & MORGADO, Augusto C. A Matemática do Ensino Médio, vol 2. Sociedade Brasileira de Matemática. Coleção do Professor de Matemática, 2004.

[8] LIMA, Elon L. & PINTO, Paulo C. & WAGNER, Eduardo & MORGADO, Augusto C. A Matemática do Ensino Médio, vol 3. Sociedade Brasileira de Matemática. Coleção do Professor de Matemática, 2004.

[9] LIMA, Elon L. & PINTO, Paulo C. & WAGNER, Eduardo & MORGADO, Augusto C. A Matemática do Ensino Médio, vol 4. Sociedade Brasileira de Matemática. Coleção do Professor de Matemática, 2004.

[10] OBM: Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em: http://www.obm.org.br.

[11] OLIVEIRA, K. I. M. ; FERNÁNDEZ, A.C. .Iniciação a Matemática: um curso com problemas e soluções. SBM, Rio de Janeiro, 2010.

[12] SKOVSMOSE, O. Educação Matemática Crítica: a questão da democracia. Campinas, Papirus, 2001, 160 p, Coleção Perspectivas em Educação Matemática - SBEM.

[13] <http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-estudos-principio-das-casas-dos-pombos/> acessado em 10 de janeiro de 2019.

[14] <http://clubes.obmep.org.br/blog/numeros-especiais-pares-e-impares/numeros-especiais-pares-e-impares-problemas-envolvendo-paridade/> acessado em 10 de janeiro de 2019.

[15]<http://www.unoeste.br/site/enepe/2014/suplementos/area/Exactarum/Matem%C3%A1tica/O%20PRINCIPIO%20DAS%20GAVETAS%20DE%20DIRICHLET.pdf> acessado em 15 de janeiro de 2019