UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - UFES
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

CLARIANA MARTINELLI SILVA

# NÚMEROS COMPLEXOS E ALGUMAS APLICAÇÕES AO ENSINO MÉDIO

Vitória, ES - Brasil

13 de Maio de 2019

CLARIANA MARTINELLI SILVA

# NÚMEROS COMPLEXOS E ALGUMAS APLICAÇÕES AO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão acadêmica institucional do PROFMAT-UFES como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho

Vitória, ES - Brasil

13 de Maio de 2019

CLARIANA MARTINELLI SILVA

NÚMEROS COMPLEXOS E ALGUMAS APLICAÇÕES AO ENSINO MÉDIO/ CLARIANA MARTINELLI SILVA. – Vitória, ES - Brasil, 13 de Maio de 2019-

75 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. – , 13 de Maio de 2019.

1. Números complexos. 2. Polígono regular. 3. Lei dos Cossenos. 4. Lei dos Senos. 5. Aplicações de números complexos. I. Rosado Filho, Moacir. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Números complexos e algumas aplicações ao Ensino Médio.

CDU 02:141:005.7

CLARIANA MARTINELLI SILVA

# NÚMEROS COMPLEXOS E ALGUMAS APLICAÇÕES AO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão acadêmica institucional do PROFMAT-UFES como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado. Vitória, ES - Brasil, 06 de maio de 2019:

## Banca Examinadora:

**Prof. Dr. Moacir Rosado Filho**
Orientador

**Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho**
Convidado interno

**Profa. Dra. Maria Clara Schuwartz Ferreira**
Convidado externo

Vitória, ES - Brasil
13 de Maio de 2019

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus Pais, Adson e Aleide, e a minha irmã, Mariana, pelo apoio incondicional de sempre, por estarem próximos mesmo que fisicamente distantes.

Aos professores do Programa PROFMAT, por todo conhecimento transmitido e paciência às perguntas. Em especial, ao meu Orientador.

A todos os amigos próximos e demais familiares por entenderem que estive distante para alcançar um objetivo pessoal. Em especial às amigas Mônica e Adila, que foram essenciais para que eu conseguisse realizar o exame de acesso, à amiga Aline, que conheci no programa e pretendo levar para toda a vida, por todo incentivo, paciência e ajuda para os estudos, e à amiga Maria por todo apoio e inúmeros encontros para que eu conseguisse escrever esta dissertação de forma clara e objetiva.

Ao IFES - Campus Nova Venécia, por conceder meu afastamento para realização do programa de Mestrado.

*"Mesmo quando tudo parece desabar, cabe a mim decidir entre rir ou chorar, ir ou ficar, desistir ou lutar; porque descobri, no caminho incerto da vida, que o mais importante é o decidir."*

*(Cora Coralina)*

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal levar ao professor de Ensino Médio algumas aplicações para o uso dos números complexos que se apresentem diferentes das aplicações dos livros didáticos. Foram inúmeras vezes que ao expor esse conteúdo em sala de aula surgiu a dúvida, por parte do aluno, *"Onde eu vou usar isso?"*. E, normalmente, em números complexos, a resposta é sempre em torno de matérias e/ou disciplinas ofertadas ao ensino superior. Dificilmente têm-se aplicações de números complexos relacionadas ao Ensino Médio. Nesse sentido, este trabalho propõe três aplicações, cada uma delas contendo exemplos que são seguidos por exercícios. A primeira atividade proposta, que usa distância entre dois pontos, visa o entendimento do que é o argumento principal do número complexo, as outras duas atividades apresentam aplicações dos números complexos. Uma tem por objetivo encontrar vértices de um polígono regular dado um único vértice de início e a outra usa operações com esse conjunto de números para demonstrar fórmulas trigonométricas que são vistas no Ensino Médio.

**Palavras-chaves**: Números Complexos. Polígono Regular. Lei dos Cossenos. Lei dos Senos. Aplicações de Números Complexos. Ensino Médio.

# Abstract

This work has as a main subject to bring to the teacher of high school some applications for the use of complex numbers, different from applications in textbooks. For many times, when I started to teach this subject, some students questioned: *"Where am I going to use this?"*, and usually the answer is always around the subjects and/or disciplines offered in higher education. It is hardly seen application of complex numbers related to high school. Therefore, this work has three overtures. Each one with examples followed by exercises. The first proposed activity is about the distance between two points and it aims to understand what the main argument of complex numbers is. The other two activities are about the application of complex numbers. One has as objective to find the vertices of a regular polygon given a single start vertex, and the other one uses operations with the same group of numbers for demonstration of trigonometric formulas seen in high school.

**Key-words**: Complex Numbers. Regular Polygon. Law of Cosines. Law of Sines. Application of Complex Numbers. High School.

# Lista de ilustrações

# Sumário

# INTRODUÇÃO

Ao entrarem em contato com os números complexos, os alunos do Ensino Fundamental precisam resolver equações polinomiais do segundo grau, levando ao surgimento de valores negativos para o discriminante. Nesse nível de ensino, muitos professores cometem o equívoco de dizer que essa raiz não existe ou que o problema em questão não possui solução. Tal afirmação causa, no Ensino Médio, uma confusão a alguns alunos já que os mesmos entram em contato com os números complexos, onde passa a existir a raiz com discriminante negativo. O ideal seria explicar que o problema ainda não possui solução tendo em vista que no Ensino Fundamental a matemática é pautada para os conjuntos dos números naturais, dos números inteiros, dos números racionais e dos números reais, explicando ao aluno que no Ensino Médio haverá um conjunto de números para os quais esse tipo de problema será resolvido sem grandes dificuldades.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) o conjunto dos números complexos é referido como:

> Tradicionalmente, a Matemática do Ensino Médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas. (BRASIL, 2007, p.122).

Por ser citado como parte flexível do currículo, pode-se concluir que fica a critério do professor do Ensino Médio aplicar ou não o conteúdo citado. No entanto, mais a frente no referido documento, há o componente curricular *equações polinomiais* que para ser estudado de forma completa necessita do conhecimento sobre números complexos. Para o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) observa-se que o conteúdo *números complexos* não está presente, pois o exame segue os Parâmetros Curriculares Nacionais, e como é apresentado como parte flexível, entende-se que pode ser trabalhado ou não no Ensino Médio.

Uma vez que o assunto números complexos não possui grandes aplicações dentro do Ensino Médio, ele não é cobrado no Exame Nacional do Ensino Médio e pode ser tratado como parte flexível do currículo, perdendo espaço e, por vezes, visto como desnecessário para os alunos deste nível de ensino.

No entanto, os Paramêtros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - Parte III - dizem que dentre os objetivos do ensino de Matemática estão:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo[...](BRASIL, 2000, p.42)

Sendo assim, para o ensino da matemática é uma perda que este conjunto de números tenha cada vez menos espaço dentro do Ensino Médio, considerando que o mesmo apresenta aplicações em outras Ciências, ocupa um lugar importante historicamente no desenvolvimento da matemática que no decorrer de sua construção possui grandes nomes como Scipione Del Ferro, Tartaglia, Cardano, Gauss e Euler. E ainda possui conexões com outros tópicos da matemática que são estudados nesta etapa de ensino.

Partindo da reflexão de que a maioria das aplicações dos números complexos é direcionada para o nível superior, esta dissertação tem como objetivo trazer as aplicações destes números para o Ensino Médio, tendo como público alvo professores que estão ou não em atuação. Assim, caso o aluno venha a fazer algum curso da área de exatas, aprenderá algumas aplicações ainda na educação básica, contrário, não deixando de ter contato com este conteúdo se optar por não seguir a vida acadêmica.

As aplicações para os conjuntos númericos são propostas em assuntos percebidos como necessários e comuns ao estudante de Ensino Médio, dentre eles os ângulos, os polígonos regulares e as fórmulas trigonométricas. Desta forma, consequentemente, o conhecimento desses conceitos se tornarão mais sólidos, fazendo com que esse conjunto numérico não seja um assunto vago dentro da disciplina de matemática. Essa abordagem se justifica na preocupação de fazer com que a existência deste conteúdo no Ensino Médio se paute em assuntos com os quais o aluno terá contato de maneira constante e não apenas como um tema que foi trabalhado em sala de aula só por estar presente nos livros didáticos.

A organização desta dissertação se dá em 4 capítulos. O primeiro capítulo, trata de um breve apanhado histórico dos números complexos, abordando como foi a construção deste conjunto como forma de inserção aos números complexos. No segundo capítulo é apresentada a formalização dos números complexos, onde se encontra a definição desse conjunto de números, bem como operações e representações em suas diferentes formas. No terceiro capítulo estão as aplicações, contendo exemplos resolvidos e algumas propostas de exercícios para se trabalhar com o aluno. Ao último capítulo é reservada as conclusões do trabalho.

# 1 BREVE HISTÓRIA

Na antiguidade, os problemas de equação quadrática eram resolvidos de maneira diferente pelos gregos e os árabes, estes se utilizavam do método geométrico enquanto aqueles desenvolveram um método algébrico. Entretanto, para os dois métodos, quando as respostas geravam um número negativo ou com raiz quadrada de um número negativo, as soluções não eram aceitas por não poderem ser justificadas geometricamente. Alguns autores ainda fizeram registros sobre raízes quadradas de números negativos, no entanto, a aceitação desses números como legítimos só se deu no século XVI quando surgiu o método de resoluções de equações cúbicas por meio de radicais.

Em 1494, *Frei Luca Pacioli* (1447 - 1517), professor de matemática em diversas universidades da Itália, escreveu o livro *"Summa de aritmética e geometria"* onde afirmava que não podia haver regra geral para solução de problemas do tipo $x^3 + px = q$. Muitos matemáticos acreditaram em tal afirmação, mas *Scipione Del Ferro* (1465 - 1526)(ver figura 1[1]), professor de Matemática da Universidade de Bolonha, conseguiu resolver um problema que envolvia equações cúbicas do tipo $x^3 + px = q$. O matemático não publicou este resultado, apenas contou a dois de seus alunos,*Annibale Della Nave e Antonio Maria Fiore*, que havia uma regra para tal resolução, não os fornecendo dados concretos de sua descoberta.

Figura 1 – Del Ferro

Em 1535, Fiore, munido apenas da fórmula de Ferro, desafiou *Niccoló Tartaglia* (1499 - 1558)(ver figura 2[2]) para uma disputa matemática onde propunha a resolução de trinta problemas, todos envolvendo equações de terceiro grau. Tartaglia também fez sua lista com outros trinta problemas. Oito dias antes do encontro, Tartaglia conseguiu deduzir a fórmula de equação de terceiro grau e assim resolveu os trinta problemas de uma

[1] Disponível em https://www.colegioweb.com.br/biografia-letra-s/scipione-del-ferro.html
[2] Disponível em https://www.somatematica.com.br/biograf/tartaglia.php

vez, ganhando a disputa.

Figura 2 – Tartaglia

Informações sobre a disputa e sobre o conteúdo dos problemas chegaram a Milão, onde vivia *Girolamo Cardano* (1501-1576)(ver figura 3 [3]), que atraiu Tartaglia até sua casa sob a promessa de manter sigilo a respeito da resolução das equações cúbicas. Após a visita de Tartaglia, Cardano conseguiu demonstrar a validez da regra de resolução de equações do tipo $x^3 + px = q$, mas não a publicou devido à promessa feita a Tartaglia. No entanto, mais tarde, em 1542, Cardano foi a Bolonha examinar os manuscritos deixados por Ferro, dentre os quais encontrava-se a resolução de problemas do tipo $x^3 + px = q$. Como o juramento de Cardano era a Tartaglia e não a Ferro, ele decidiu publicar a fórmula resolutiva em sua obra *Ars magna* (1545), a tornando conhecida como **Fórmula de Cardano**[4].

Figura 3 – Cardano

Vinte e cinco anos anos mais tarde, o algebrista italiano *Rafael Bombelli* (1526-1572)(ver figura 4[5]) teve contato com a obra Ars magna e ao aplicar a fórmula de Cardano para resolver a equação $x^3 = 15x + 4$, Bombelli obteve:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{(-121)}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{(-121)}} \qquad ^{6}$$

[3] Disponível em https://www.somatematica.com.br/biograf/cardano.php
[4] Para maiores informações ver apêndice A.
[5] Disponível em https://www.somatematica.com.br/biograf/bombelli.php
[6] Resolução das raízes no apêndice B.

Aparecendo a raiz quadrada de um número negativo que a princípio significava que o problema não possuia solução. No entanto, como Bombelli sabia que $x = 4$ era solução da equação, propos que era possível calcular a "raiz quadrada de -121" afim de se obter a solução $x = 4$. Então, teve a ideia de operar com números da forma $a + b\sqrt{-1}$ ,com $a, b \in \mathbb{R}$ e ainda $b > 0$, da mesma forma que se operava os números reais, mas com a propriedade $(\sqrt{-1})^2 = -1$.

Figura 4 – Bombelli

Assim os números complexos começam a serem aceitos como legítimos. Dentre as obras que contribuíram para esta aceitação, está a publicação do matemático francês *Jean Robert Argand* (1768 - 1822), que em 1806 publicou uma interpretação geométrica dos números complexos.

Apesar disso, os números complexos só foram reconhecidos e definitivamente aceitos na Matemática em 1831, por meio da interpretação geométrica proposta por *Johann Carl Friedrich Gauss* (1777 - 1855)(ver figura 5[7]). Gauss definiu esses números na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$, conhecida como *forma algébrica dos números complexos.*

Figura 5 – Gauss

A definição dos números complexos como pares ordenados foi dada pelo matemático irlândes *William Rowan Hamilton* (1805 - 1865), definindo que um número complexo $a + bi$ pode ser representado na forma $(a, b)$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

[7] Disponível em http://www.fem.unicamp.br/ em313/paginas/person/gauss.htm

A forma trigonométrica dos números complexos teve contribuições do matemático inglês *Roger Cotes* (1682 - 1716), do francês *Abraham DeMoivre* (1667 - 1754) e do alemão *Leonhard Paul Euler* (1707 - 1783) (ver figura 6[8]), sendo este último considerado o homem que dominou os números complexos.

Figura 6 – Euler

[8] Disponível em https://www.somatematica.com.br/biograf/euler.php

# 2 NÚMEROS COMPLEXOS

## 2.1 Definição de números complexos

Chama-se conjunto dos números complexos o conjunto dos pares ordenados, $(x, y)$ com $x, y \in \mathbb{R}$ para os quais valem as seguintes propriedades:

• Igualdade: Dois pares ordenados são iguais se, e somente se, possuem as primeiras coordenadas iguais e as segundas coordenadas iguais a:

$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$

• Adição: a soma de dois pares ordenados é um novo par ordenado onde a primeira coordenada é a soma das duas primeiras coordenadas e a segunda coordenada é a soma das duas segundas coordenadas:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Exemplo: $(2, 3) + (-4, 6) = (2 + (-4), 3 + 6) = (-2, 9)$

• Multiplicação: o produto de dois pares ordenados é um novo par ordenado onde a primeira coordenada é o produto das primeiras coordenadas menos o produto das segundas coordenadas, e a segunda coordenada é a soma dos produtos da primeira coordenada de cada par pela segunda coordenada do outro.

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

Exemplo: $(2, 3) \cdot (4, 5) = (2 \cdot 4 - 3 \cdot 5, 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4) = (8 - 15, 10 + 12) = (-7, 22)$.

O conjunto dos números complexos é indicado por $\mathbb{C}$. Assim, cada elemento $(a, b) \in \mathbb{C}$ é um número complexo e representado pela letra $z$. Ou seja, $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é um número complexo escrito na forma de par ordenado.

$$\boxed{z = (a, b)} \tag{2.1}$$

A primeira coordenada de $z$ é chamada de parte real de $z$ e a segunda coordenada é chamada de parte imaginária de $z$.

O conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) pertencem a $\mathbb{C}$ e correspondem aos pares que têm a segunda coordenada igual a zero. Assim, o par ordenado $z = (a, 0)$ corresponde ao número real $a$. Os pares que têm a segunda coordenada diferente de zero correspondem aos números complexos não reais. Logo, o par ordenado $(0, b)$ corresponde a um número complexo não real.

As definições de adição e multiplicação e suas propriedades para números complexos da forma $z = (a, 0)$ se dão como se esses fossem números reais, por exemplo:
Dados dois números complexos $z = (a, 0)$ e $z_1 = (a_1, 0)$:

- A soma $z + z_1$ é dada por: $(a, 0) + (a_1, 0) = (a + a_1, 0 + 0) = (a + a_1, 0)$.
- O produto $z \cdot z_1$ é dada por: $(a, 0) \cdot (a_1, 0) = (a \cdot a_1, 0 \cdot 0) = (a \cdot a_1, 0)$.

## 2.2 Unidade imaginária

Unidade imaginária é o número $i = (0, 1)$ tal que:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

De fato, $i^2 = i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$. Observe que: $(y, 0) \cdot (0, 1) = (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, y)$ como $(0, 1) = i$ tem-se $(0, y) = (y, 0) \cdot i = y \cdot i$
Assim, todo número da forma $(0, y)$ é igual a $yi$, ou seja, o número complexo $(0, 3)$ é igual a $3i$.

A unidade imaginária é um número complexo não real, podendo calcular as potências do número $i$ da mesma forma que se calculam as potências de qualquer número real:

$$i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ i^6 = -1,...$$

Observa-se que as potências de $i$ começam a se repetir após $i^4$. De modo geral, tem-se:

- $i^{4n} = (i^4)^n = 1$
- $i^{4n+1} = (i^4)^n \cdot i = i$
- $i^{4n+2} = (i^4)^n \cdot i^2 = -1$
- $i^{4n+3} = (i^4)^n \cdot i^3 = -i$

ou seja, $i^{4n+p} = i^p$.

## 2.3 Propriedades operatórias

Os números complexos formam um conjunto onde estão definidas operações de adição e multiplicação. Considerando três números complexos $z_1$, $z_2$ e $z_3$, as seguintes propriedades são válidas:

1. **Comutatividade**
   $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
   e
   $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

2. **Associatividade**
   $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
   e
   $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

3. **Elemento neutro aditivo**

   O número complexo $(0, 0)$ tal que $z + (0, 0) = z$ para todo $z$ complexo.

4. **Elemento neutro multiplicativo**

   O número complexo $(1, 0)$ tal que $z \cdot (1, 0) = z$ para todo $z$ complexo.

5. **Existência do simétrico aditivo**
   Todo número complexo $z = (x, y)$ possui um único simétrico aditivo $-z = (-x, -y)$ tal que $z + (-z) = (0, 0)$.

6. **Distributividade**
   $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

7. **Existência do elemento inverso multiplicativo**
   Para todo número complexo $z = (x, y) \neq 0$ existe um único número $z^{-1} = (x', y')$ tal que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$.

Como encontrar o inverso multiplicativo?
Seja $z = (x, y) \neq (0, 0)$ dessa forma tem-se $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ e, consequentemente, $x^2+y^2 \neq 0$, deve-se mostrar que existe um número complexo $z^{-1} = (x', y')$ tal que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$
$(x, y) \cdot (x', y') = (1, 0) \iff (\text{xx}' - yy', xy' + yx') = (1, 0)$.
Da segunda igualdade tem-se: $\begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ xy' + yx' = 0 \end{cases}$
Multiplicando a 1° equação por $x$ e a 2° equação por $y$: $\begin{cases} x^2x' - yy'x = x \\ xy'y + y^2x' = 0 \end{cases}$
Logo, da 2° equação tem-se: $xyy' = -x'y^2$ e substituindo na 1° equação tem-se: $x^2x' +$

$y^2x' = x$ obtendo assim $x' = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ e $y' = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$.
Portanto, o inverso multiplicativo do número complexo $z = (x, y)$ é o número:

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

Exemplo: Dado o número complexo abaixo, encontrar seu inverso multiplicativo.

a) $z_1 = (4/5, 2/5)$
O inverso multiplicativo de $z_1$ é $z_1^{-1} = \left(\frac{4/5}{(4/5)^2+(2/5)^2}, \frac{-2/5}{(4/5)^2+(2/5)^2}\right) = (1, -1/2)$.

b) $z_2 = (-3, 0)$
O inverso multiplicativo de $_2$ é $z_2^{-1} = \left(\frac{-3}{(-3)^2+0^2}, \frac{0}{(-3)^2+0^2}\right) = (-1/3, 0)$.

A existência do elemento inverso multiplicativo, (propriedade 7), permite definir a divisão de dois números complexos como sendo o produto do primeiro número pelo inverso multiplicativo do segundo. Ou seja, dados $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, dois números complexos, a divisão de $z_1$ por $z_2$ é dada por:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = (x_1, y_1) \cdot \left(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2}, -\frac{y_2}{x_2^2+y_2^2}\right) = \left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \frac{-x_1y_2+y_1x_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$$

Exemplo:

a) Dados $z_1 = (2, -3)$ e $z_2 = (3, 2)$ têm-se $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$
$z_2^{-1} = \left(\frac{3}{3^2+2^2}, \frac{-2}{3^2+2^2}\right) = \left(\frac{3}{13}, \frac{-2}{13}\right)$
e assim
$\frac{z_1}{z_2} = (2, -3) \cdot \left(\frac{3}{13}, -\frac{2}{13}\right) = \left(\frac{2.3-(-3)\cdot(-2)}{13}, \frac{2.(-2)+3\cdot(-3)}{13}\right) = \left(\frac{6-6}{13}, \frac{-4-9}{13}\right) = (0, -1)$

## 2.4 Forma algébrica dos números complexos

Frequentemente não é conveniente representar os números complexos como um par ordenado, desta maneira, usa-se a representação na forma algébrica, onde as operações são mais simples e práticas.

Dado o número complexo $z = (x, y)$ pode-se sempre escrever $z = (x, 0) + (0, y)$, como é sabido que $(x, 0) = x$ e $(0, y) = yi$ tem-se então $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + yi$.

$$\boxed{z = x + yi}$$

Essa é a forma algébrica de representação do número complexo $z = (x, y)$.

Como mencionado anteriormente, dado o número complexo $z = (x, y)$ tem-se a primeira coordenada $x$ é chamada de parte real do número complexo, representada por $x = Re(z)$. E a segunda coordenada, $y$, é chamada de parte imaginária do número complexo, representada por $y = Im(z)$.

Exemplos:

a) $(2, 3) = 2 + 3i$ onde $Re(z) = 2$ e $Im(z) = 3$

b) $(-2, 1/3) = -2 + 1/3i$ onde $Re(z) = -2$ e $Im(z) = 1/3$

- Números imaginários puros são todos os números complexos da forma $z = yi$ com $y \neq 0$. Ou seja, números tais que $Re(z) = 0$.
- Números reais são todos os números complexos da forma $z = x$. Ou seja, números tais que $Im(z) = 0$, com $x \in \mathbb{R}$.

Na forma algébrica dos números complexos valem as seguintes relações:

1. $z_1 = z_2$ se, e somente se, $Re(z_1) = Re(z_2)$ e $Im(z_1) = Im(z_2)$.
2. $z \in \mathbb{R}$ se, e somente se, Im(z)=0.

### 2.4.1 Operações na forma algébrica

As operações com números complexos na forma algébrica se dão da mesma forma que os números reais, sempre levando em consideração que $i^2 = -1$.

Dados dois números complexos $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$. Operam-se com eles da seguinte forma:

1. **ADIÇÃO**
   $z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$
   Ou seja, a soma de dois números complexos é o número complexo cuja parte real é a soma das partes reais dos dois números e a parte imaginária é a soma das partes imaginárias dos dois números.

$$Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$$
$$Im(z_1 + z_2) = Im(z_1) + Im(z_2)$$

2. **MULTIPLICAÇÃO**

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 \cdot i) \cdot (x_2 + y_2 \cdot i) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 \cdot i + y_1 \cdot i \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \cdot i \cdot i = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$

Ou seja,

$$Re(z_1 \cdot z_2) = Re(z_1) \cdot Re(z_2) - Im(z_1) \cdot Im(z_2)$$
$$Im(z_1 \cdot z_2) = Re(z_1) \cdot Im(z_2) + Re(z_2) \cdot Im(z_1)$$

Dado um número real $\alpha$ e um número complexo $z = x + yi$, tem-se que $\alpha.z = \alpha(x + yi) = \alpha x + \alpha y \cdot i$ é o produto de um número real por um número complexo, e valem as propriedades:

i. $\alpha \cdot (z_1 + z_2) = \alpha \cdot z_1 + \alpha \cdot z_2$;

ii. $\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \cdot z) = (\alpha_1 \cdot \alpha_2) \cdot z$;

iii. $(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot z = \alpha_1 \cdot z + \alpha_2 \cdot z$ para todos $z$, $z_1$ e $z_2 \in \mathbb{C}$ e $\alpha$, $\alpha_1$ e $\alpha_2 \in \mathbb{R}$

3. **SUBTRAÇÃO**

$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$

Ou seja,

$$Re(z_1 - z_2) = Re(z_1) - Re(z_2)$$
$$Im(z_1 - z_2) = Im(z_1) - Im(z_2)$$

Exemplos:

Dados os números complexos $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = -4 + 5i$, calcule:

a) $z_1 + z_2$

$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (-4 + 5i) = (2 + (-4)) + (3 + 5)i = -2 + 8i$

b) $z_1.z_2$

$z_1.z_2 = (2 + 3i) \cdot (-4 + 5i) = 2 \cdot (-4) + 2 \cdot (5i) + (3i) \cdot (-4) + (3i) \cdot (5i) = -8 + 10i - 12i + 15 \cdot (-1) = -8 - 15 - 2i = -23 - 2i$

c) $z_1 - z_2$

$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (-4 + 5i) = (2 - (-4)) + (3 - 5)i = 6 - 2i$

### 2.4.2 Conjugado de um número complexo

Chama-se conjugado do número complexo $z$ com $z = x + yi$ e $x, y \in \mathbb{R}$, o número complexo:

$$\boxed{\bar{z} = x - yi} \tag{2.2}$$

Exemplos:

a) $z = 2 + 7i$ tem-se $\bar{z} = 2 - 7i$;

b) $z = -3 + 2i$ tem-se $\bar{z} = -3 - 2i$;

c) $z = 5i$ tem-se $\bar{z} = -5i$.

**PROPRIEDADES DO CONJUGADO**

1. **O produto de um número complexo por seu conjugado é a soma do quadrado da parte real com quadrado da parte imaginária**.
   Seja $z = a + bi$ um número complexo, seu conjugado é $\overline{z} = a - bi$.
   Assim: $z \cdot \overline{z} = a^2 - abi + abi - (bi)^2 = a^2 + b^2$.

2. **Se $z$ é um número complexo, então $z = \overline{z}$ se, e somente se, $z$ for um número real**.
   Seja $z = a + bi$ um número complexo, seu conjugado é $\overline{z} = a - bi$.
   Assim, para $z = \overline{z}$ deve-se ter, pela igualdade de dois números complexos, $a = a$ e $b = -b$, e para satisfazer tem-se, se e somente se, $b = 0$ e $z = a$.

3. **O conjugado da soma é a soma dos conjugados**.
   Seja $z = a + bi$ e $z_1 = c + di$ dois números complexos. Seus conjugados são, respetivamente, $\overline{z} = a - bi$ e $\overline{z_1} = c - di$, efetuando a soma tem-se: $\overline{z} + \overline{z_1} = a - bi + c - di = a + c - i(b + d) = \overline{z + z_1}$.

4. **O conjugado do produto é o produto dos conjugados**.
   Sejam $z = a + bi$ e $z_1 = c + di$ dois números complexos. Seus conjugados são, respetivamente, $\overline{z} = a - bi$ e $\overline{z_1} = c - di$. Assim $\overline{z} \cdot \overline{z_1} = ac - adi - bci + bdi^2 = ac - bd - i(ad + bc) = \overline{z \cdot z_1}$.

### 2.4.3 Operação de divisão na forma algébrica

Dados dois números complexos $z_1$ e $z_2$, com $z_2 \neq 0$, tem-se que a divisão de $z_1$ por $z_2$ é encontrar um número complexo $z$ tal que $z = z_1 \cdot z_2^{-1}$. Na prática, pode-se fazer a divisão da seguinte forma:

- Se o número $z_2$ for um número real, a divisão é trivial.
  Exemplos:

  a) $z_1 = 10 + 8i$ e $z_2 = 2$. Tem-se então:

  $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10 + 8i}{2} = \frac{10}{2} + \frac{8}{2}i = 5 + 4i$$

  b) $z_1 = 11 - 4i$ e $z_2 = 3$. Tem-se então:

  $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{11 - 4i}{3} = \frac{11}{3} - \frac{4}{3}i$$

- Se o número $z_2$ for um número complexo, ou seja, com parte imaginária diferente de zero, usa-se o conjugado desse número complexo para que, ao multiplicar numerador e denominador por $z_2$, haja a transformação do denominador em um número real, recaindo na forma trivial. Dado $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, com $y_2 \neq 0$ teêm-se:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} \text{ ou seja, } \frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Exemplos:

a) $z_1 = 4 + 3i$ e $z_2 = -3 + 2i$. Tem-se então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 + 3i}{-3 + 2i} \cdot \frac{-3 - 2i}{-3 - 2i} = \frac{-12 - 8i - 9i - 6i^2}{9 + 6i - 6i - 4i^2} = \frac{-6 - 17i}{13} = -\frac{6}{13} - \frac{17}{13}i$$

b) $z_1 = 4 - 19i$ e $z_2 = 2 - 3i$. Tem-se então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 - 19i}{2 - 3i} = \frac{4 \cdot 2 + (-19) \cdot (-3) + i[2 \cdot (-19) - 4 \cdot (-3)]}{2^2 + (-3)^2} = \frac{65 - 26i}{13} = 5 - 2i$$

### 2.4.4 Módulo de um número complexo

Dado um número complexo $z = x + yi$, o número

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}} \tag{2.3}$$

é chamado de módulo do número complexo $z$, também representado por $\rho$ .

Exemplos:

a) $z = 3 + 2i$ tem-se $|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

b) $z = -4 + i$ tem-se $|z| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

c) $z = 2i$ tem-se $|z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4}$

**PROPRIEDADES DO MÓDULO**

1. **O produto de um número complexo pelo seu conjugado é o quadrado do módulo desse número complexo**.
   Seja $z = a + bi$ um número complexo, tem-se $\overline{z} = a - bi$, e como já mencionado, $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$. Tem-se ainda que o módulo do número complexo $z$ é $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, assim $|z|^2 = a^2 + b^2 = z \cdot \overline{z}$.

2. **O módulo do conjugado de um número complexo é o módulo desse mesmo número complexo**.
   Seja $z = a + bi$ um número complexo, $\overline{z} = a - bi$, tem-se $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

3. **O módulo do produto entre dois números complexos é igual ao produto dos módulos de dois números complexos**.
   Seja $z = a+bi$ e $z_1 = c+di$ dois números complexos, seus módulos são $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $|z_1| = \sqrt{c^2 + d^2}$, realizando a multiplicação tem-se: $z \cdot z_1 = ac - bd + (bc + ad)i$.
   Assim o módulo do produto fica $|z \cdot z_1| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2}$.
   Logo $|z| \cdot |z_1| = \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2} = \sqrt{(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2} = |z \cdot z_1|$.

## 2.5 Representação geométrica dos números complexos

A representação geométrica de um número complexo foi dada por *Caspar Wessel* (1745-1818) em um artigo publicado em 1898. Porém, como visto anteriormente, a ideia só ficou conhecida quando foi publicada por*Argand*. E a representação no plano, como conhecida nos dias atuais, só se deu após a publicação dos trabalhos de *Gauss* na segunda década de XIX. Por esse motivo, o plano cartesiano utilizado para representar os números complexos é chamado de **Plano de Argand-Gauss** ou **Plano complexo**.

Nesse plano tem-se o eixo horizontal representando a parte real dos números complexo, e o eixo vertical representando a parte imaginária dos números complexos. (Vide figura 7).

Então, os números complexos podem ser representados como um par ordenado, (2.1), sendo representados no plano complexo da mesma forma que no plano cartesiano.

Exemplo:
Representar os números $z_1 = 3 + 2i$ , $z_2 = 2i$, $z_3 = -3$ e $z_4 = -1 - 3i$ no plano complexo.

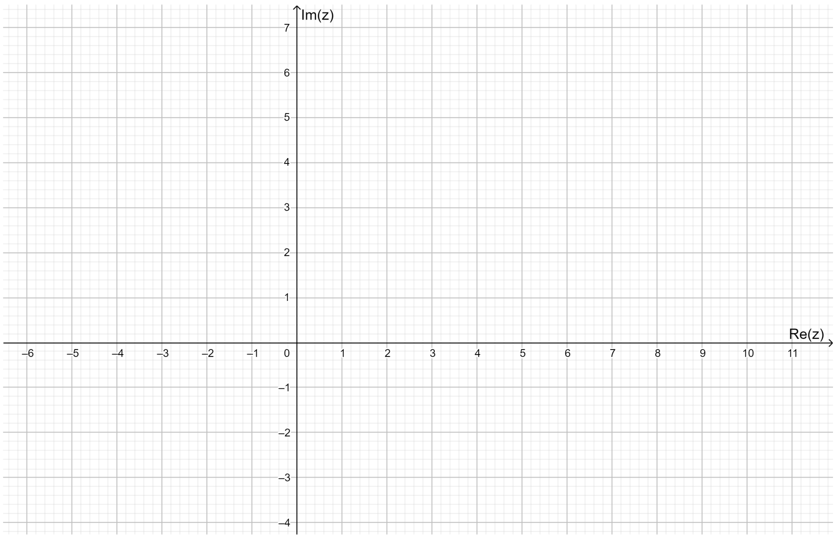


Figura 7 – Representação dos eixos real e imaginário.

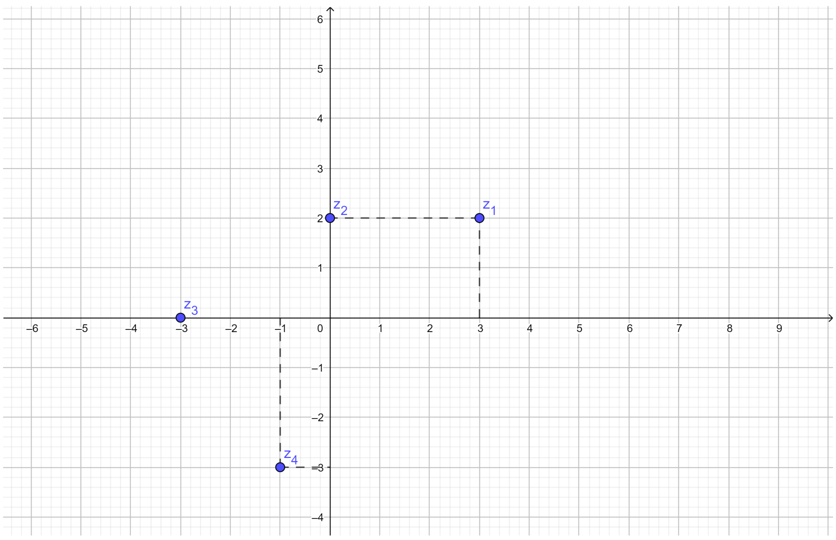


Figura 8 – Representação do número complexo como par ordenado

Os pontos $z_1 = (3, 2)$, $z_2 = (0, 2)$, $z_3 = (-3, 0)$ e $z_4 = (-1, -3)$ são as respectivas representações geométricas dos números complexos dados.

### 2.5.1 Interpretação geométrica do módulo

Considerando o número complexo $z = x + yi$, sua imagem geométrica, o ponto $A(x, y)$ é chamado de afixo do número $z$. A distância entre o ponto $O$, chamado de origem do plano, e o ponto $A$, afixo de $z$, é dada por:

$$OA = \sqrt{(x_z - x_0)^2 + (y_z - y_0)^2}$$

Como o ponto $O$ é a origem do plano, tem-se $O = (0, 0)$ e, assim, a distância entre os pontos $O$ e $A$ é dada por:

$$OA = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Que é igual ao valor do módulo de $z$ uma vez que o módulo de um número complexo é igual a distância de seu afixo até a origem do plano em que está representado.

Exemplo:
Representar o número complexo $z = 2 + 3i$ no plano, juntamente com seu módulo.
O número complexo $z$ pode ser representado pelo ponto $A(2, 3)$ e seu módulo é $\rho = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$. Sendo representado desta forma no plano:

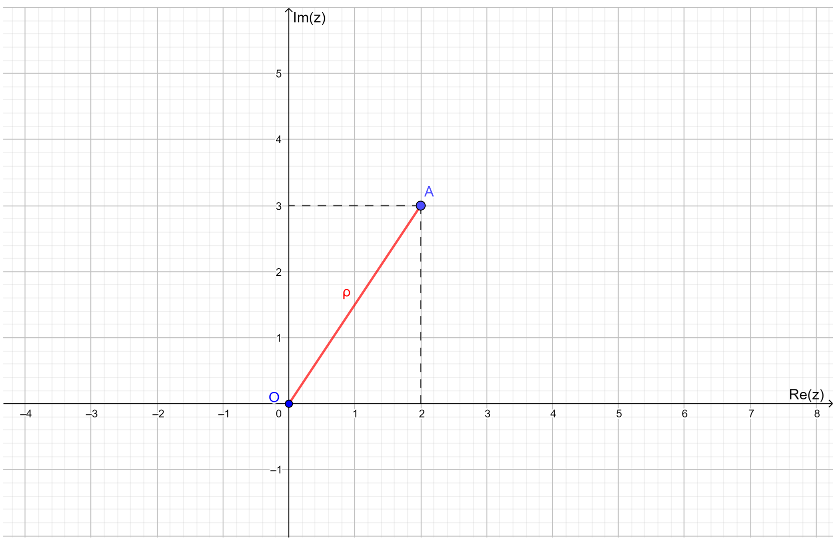


Figura 9 – Representação do número complexo $z = 2 + 3i$

## 2.6 Representação trigonométrica dos números complexos

### 2.6.1 Argumento

Dado um número complexo $z = x + yi$, não nulo, seja $A$ o ponto que o representa geometricamente no plano, a medida do ângulo $\theta$ formado pelo semieixo positivo ($Ox$ ou $Re(z)$) e pelo segmento OA, tomada no sentido anti-horário, é chamada de **argumento principal** do número complexo $z$ e é representada por: $\theta = arg(z)$ (ver figura 10).

Nota-se que $y = 0$ e $x > 0$, o ponto $A$ está sobre o semieixo positivo $Ox$, assim tem-se $\theta = 0$. Portanto, $\theta$ é tal que $0 \leq \theta < 2\pi$. Chama-se $\theta$ de argumento principal de $z$

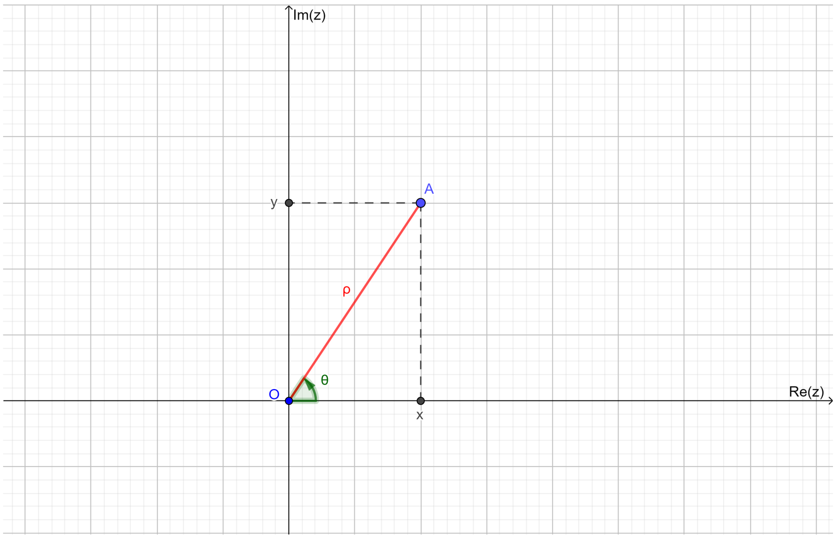


Figura 10 – Representação do argumento de $z$

pelo fato de também serem considerados argumentos de $z$ todos os ângulos côngruos a $\theta$. Ou seja, os arcos de medidas $\theta_k = \theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo:

Qual o valor do argumento de $z = 1 + \sqrt{3}i$?

Calculando $\rho$, tem-se: $\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$.

Seja $A$ o afixo de $z$ e $\theta = arg(z)$. Ou seja $A(1, \sqrt{3})$.

Seja $B$ o ponto $(1, 0)$.

Assim, no triângulo retângulo $OBA$ tem-se: $sen\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Como $\theta$ é um ângulo agudo, tem-se $\theta = \frac{\pi}{3}$. (Ver figura 11).

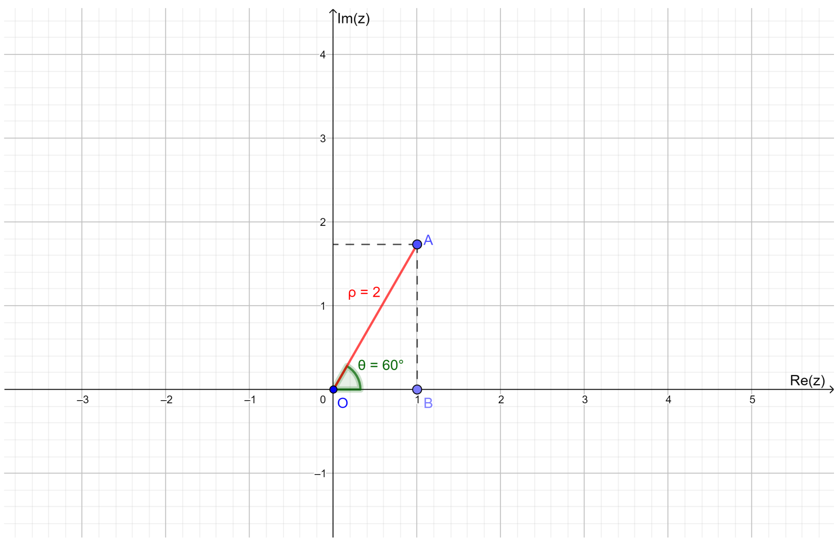


Figura 11 – Representação do número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$ no plano complexo

### 2.6.2 Forma trigonométrica

Com as definições de módulo e de argumento de um número complexo, é possível representá-lo em sua forma trigonométrica, também chamada de **coordenadas polares**.

Seja $z = x + yi$ a forma algébrica de um número complexo não nulo, o argumento $\theta$ de $z$ satisfaz:

$$\begin{cases} sen\theta = \frac{y}{\rho} \Longrightarrow y = \rho sen\theta \\ \cos\theta = \frac{x}{\rho} \Longrightarrow x = \rho cos\theta \end{cases}$$

Substituindo os valores na forma algébrica, $z = x + yi$, tem-se:

$$z = \rho cos\theta + (\rho sen\theta)i$$

Desta maneira, a forma trigonométrica ou polar de um número complexo é:

$$\boxed{\text{z=}\rho(cos\theta + isen\theta)} \tag{2.4}$$

Exemplos:

a) $z = -2$ possui $\rho = 2$ e $\theta = \pi$.
Assim, pode-se escrevê-lo como: $z = 2(cos\pi + isen\pi)$.

b) $z = -3i$ possui $\rho = 3$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$.
Assim, pode-se escrevê-lo como: $z = 3(cos\frac{3\pi}{2} + isen\frac{3\pi}{2})$.

c) $z = 1 + \sqrt{3}i$ possui $\rho = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$.
Assim, pode-se escrevê-lo como: $z = 2(cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3})$.

### 2.6.3 Operações na forma trigonométrica

Certas operações como multiplicação e divisão são simples de efetuar na forma algébrica dos números complexos. No entanto, quando for efetuar potenciação e radiciação, estas operações podem se tornar mais complicadas. Neste caso, a forma trigonométrica é a melhor opção.

Para as operações a seguir, serão considerados dois números complexos (não nulos):

$$z_1 = \rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$$

e

$$z_2 = \rho_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$$

1. MULTIPLICAÇÃO

Calculando o produto $z_1 \cdot z_2$:

$$z_1 \cdot z_2 = [\rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)] \cdot [\rho_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)] =$$
$$= \rho_1 \cdot \rho_2(cos\theta_1 \cdot cos\theta_2 + i \cdot cos\theta_1 \cdot sen\theta_2 + i \cdot sen\theta_1 \cdot cos\theta_2 + i^2 \cdot sen\theta_1 \cdot sen\theta_2) =$$
$$= \rho_1 \cdot \rho_2[(cos\theta_1 \cdot cos\theta_2 - sen\theta_1 \cdot sen\theta_2) + i(cos\theta_1 \cdot sen\theta_2 + cos\theta_2 \cdot sen\theta_1)]$$

Usando as identidades trigonométricas para cosseno da soma e seno da soma de dois arcos, tem-se:

$$\boxed{\mathrm{z}_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)]} \tag{2.5}$$

O número complexo obtido na multiplicação é um número cujo módulo é a multiplicação dos módulos de $z_1$ e $z_2$ e o argumento é a soma dos argumentos de $z_1$ e $z_2$.

2. DIVISÃO

Calculando o quociente $\dfrac{z_1}{z_2}$ :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)}{\rho_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)} = \frac{\rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)}{\rho_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)} \cdot \frac{(cos\theta_2 - isen\theta_2)}{(cos\theta_2 - isen\theta_2)} =$$
$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{cos\theta_1 cos\theta_2 - isen\theta_2 cos\theta_1 + isen\theta_1 cos\theta_2 - i^2 sen\theta_1 sen\theta_2}{(cos\theta_2)^2 - (isen\theta_2)^2} =$$
$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(cos\theta_1 cos\theta_2 + sen\theta_1 sen\theta_2) + i(sen\theta_1 cos\theta_2 - sen\theta_2 cos\theta_1)}{cos^2\theta_2 + sen^2\theta_2}$$

Usando as identidades trigonométricas para cosseno da diferença e seno da diferença de dois arcos, tem-se:

$$\boxed{\tfrac{z_1}{z_2} = \tfrac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [cos(\theta_1 - \theta_2) + i(sen(\theta_1 - \theta_2)]} \tag{2.6}$$

O número complexo obtido na divisão é um número cujo o módulo é o quociente dos módulos de $z_1$ e $z_2$ e o argumento é a diferença entre os argumentos de $z_1$ e $z_2$.

3. POTENCIAÇÃO

A potenciação na forma algébrica é bastante trabalhosa pois para efetuar $z^n$ com $n \in \mathbb{N}$, seria necessário usar o binômio de Newton. Na forma trigonométrica efetuar $z^n$ com $n \in \mathbb{N}$, nada mais é que efetuar um produto de $n$ fatores iguais a $z$.

Assim,

$$z^n = \rho \cdot \rho \cdot ... \cdot \rho \cdot [cos(\theta + \theta + ... + \theta) + isen(\theta + \theta + ... + \theta)]$$

ou seja,

$$\boxed{z^n = \rho^n \cdot [cos(n\theta) + isen(n\theta)]} \tag{2.7}$$

Essa fórmula é também conhecida como $1^a$ **Fórmula de Moivre**.

Exemplos:
Dados

$$z_1 = 6\left[cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

e

$$z_2 = 2\left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

Resolva as operações:

a) $z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot 2[cos(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = 12(cos\pi + isen\pi) = -12$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2} \cdot [cos(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3})] = 3[cos(\frac{\pi}{3}) + isen(\frac{\pi}{3})] = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

c) $(z_1)^3 = 6^3[cos(3 \cdot \frac{2\pi}{3}) + isen(3 \cdot \frac{2\pi}{3})] = 216(cos2\pi + isen2\pi) = 216$

4. RADICIAÇÃO

Da mesma forma que a potenciação, a radiciação de um número complexo se torna bem mais simples de resolver quando o número estiver representado em sua forma trigonométrica.

**Definição:** Seja $z$ um número complexo e $n \in \mathbb{N}$ com $n \neq 0$, raiz $n$-ésima de $z$ é todo número complexo $\omega$ que satisfaz a relação $\omega^n = z$.

Cada raiz assume um nome especial dependendo do valor de $n$. Assim, se $n = 3$ diz-se que a raiz é raiz cúbica de $z$, se $n = 4$ diz-se que a raiz é raiz quarta de $z$, consequentemente, a raiz $n$ é chamada de raiz n-ésima de $z$.
Exemplos:

a) O número 1 possui 4 raízes quartas, $1, -1, i, -i$ pois:

$$1^4 = 1;$$
$$(-1)^4 = 1;$$
$$i^4 = 1$$
$$(-i)^4 = 1.$$

b) O número 16 possui 4 raízes quartas, $-2$, $2$, $-2i$ e $2i$, pois:

$$(-2)^4 = 16;$$
$$2^4 = 16;$$
$$(-2i)^4 = 16i^4 = 16$$
$$(2i)^4 = 16i^4 = 16.$$

- Como determinar as raízes de um número complexo?

Dado um número complexo na forma trigonométrica $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$, seja:

$$\omega = r(cos\alpha + isen\alpha)$$

Uma raiz $n$-ésima de $z$, isto é, $\omega^n = z$.
Todo número complexo não nulo possui $n$ raízes $n$-ésimas complexas. Tem-se:

$$\omega^n = z$$

$$r^n[cos(n\alpha) + isen(n\alpha)] = \rho(cos\theta + isen\theta)$$

Pela igualdade de números complexos:

$$r^n = \rho,\ cos(n\alpha) = cos\theta \text{ e } sen(n\alpha) = sen\theta$$

Conclui-se que:

i. $r^n = \rho \Longrightarrow \boxed{r = \sqrt[n]{\rho}}$

ii. $\begin{cases} cos(n\alpha) = cos\theta \\ sen(n\alpha) = sen\theta \end{cases} \implies \quad n\alpha = \theta + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\alpha_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}}$$

Não esquecendo que $\alpha$ é o argumento de $\omega$, e assim, quando for dado valores para $k$ com $k \in \{0, 1, 2, 3, ..., n-1\}$, serão obtidos os $n$ valores distintos e não côngruos para $\alpha$. Para qualquer outro valor de $k$, o valor resultante de $\alpha$ é côngruo a um dos demais já obtidos.

Por exemplo:

- Para $k = n$ tem-se $\alpha_n = \frac{\theta}{n} + \frac{2n\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$, que é côngruo ao ângulo obtido quando $k = 0$.
- Para $k = n+1$ tem-se $\alpha_{n+1} = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2(n+1)\pi}{n} = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2(n+1)\pi}{n} = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2n\pi}{n} + \dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi}{n} + 2\pi$, que é côngruo ao ângulo obtido para quando $k = 1$.

Com os valores de $r$ e de $\alpha$ já determinados e cada um dos $n$ valores distintos e não côngruos a $\alpha$, pode-se obter $n$ números complexos $\omega = r(cos\alpha + isen\alpha)$. Todos sendo as raízes n-ésimas de $z$. Elas são dadas por:

$$\boxed{\omega_k = \sqrt[n]{\rho}\left[cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]} \tag{2.8}$$

Essa fórmula é conhecida como $2^a$ **Fórmula de Moivre**

Exemplo:
Calcular as raízes quartas de $z = -8 - 8\sqrt{3}i$.
Têm-se $\rho_z = 16$ e $arg(z) = \theta = \frac{4\pi}{3}$.
Seja $\omega = r(cos\alpha + isen\alpha)$ uma raiz quarta de $z$ então:

$$\omega^4 = z$$

Usando a fórmula de Moivre obtém-se:

$$\omega_k = \sqrt[4]{16}\left[cos\left(\frac{\frac{4\pi}{3}}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{\frac{4\pi}{3}}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)\right] \text{ com } k = 0, 1, 2, 3.$$

$$\omega_k = 2\left[cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right)\right] \text{ com } k = 0, 1, 2, 3.$$

Para $k = 0$ tem-se: $\longrightarrow$ $\alpha_0 = \frac{\pi}{3}$

Para $k = 1$ tem-se: $\longrightarrow$ $\alpha_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$

Para $k = 2$ tem-se: $\longrightarrow$ $\alpha_2 = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$

Para $k = 3$ tem-se: $\longrightarrow$ $\alpha_3 = \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2} = \frac{11\pi}{6}$

Portanto, as raízes quartas de $z = -8 - 8\sqrt{3i}$ são:

$$\omega_0 = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\omega_1 = 2\left(cos\frac{5\pi}{6} + isen\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$\omega_2 = 2\left(cos\frac{4\pi}{3} + isen\frac{4\pi}{3}\right) = -1 - \sqrt{3}i$$

$$\omega_3 = 2\left(cos\frac{11\pi}{6} + isen\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$$

.

## 2.7 Interpretações geométricas das operações com números complexos

Para realizar as interpretações será usada a construção de um paralelogramo que exige o conhecimento de três de seus vértices.

**PARALELOGRAMO**

O quadrilátero que tem os lados opostos paralelos é denominado de paralelogramo.

**TEOREMA** (caracterização de paralelogramos). Dado um quadrilátero, são equivalentes:

- É um paralelogramo (os lados opostos são paralelos).
- Os lados opostos são congruentes.
- Os ângulos opostos são congruentes.
- Tem um par de lados opostos paralelos e congruentes.
- Os diagonais cruzam no ponto médio.

Para a construção, será usado o último item do teorema acima.

Exercício: Dado os pontos $A$, $B$ e $D$, construir o paralelogramo $ABCD$ de diagonais $AC$ e $BD$.
Sabe-se que para ser um paralelogramo o polígono deve ser um quadrilátero onde as diagonais devem se cruzar no ponto médio. Sendo assim, escolhe-se o sistema de coordenadas de modo que o ponto $A$ seja a origem do plano. Seja o ponto $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_d, y_d)$. Marca-se o ponto $M = (x_m, y_m)$, de modo que $M$ seja o ponto médio do segmento de extremidades $B$ e $D$ (diagonal menor do paralelogramo). Traça-se a reta, $s$, suporte do segmento de reta $AM$ e, consequentemente, suporte da diagonal $AC$. Medir o segmento $AM$. Com o comprimento do segmento $AM$, marcar o ponto $C$, sobre a reta $s$, de modo que $C$ seja a extremidade do segmento que começa em $M$ e tem comprimento igual a $AM$. Ligar os pontos $A$, $B$, $C$ e $D$. Por construção, a figura obtida é o paralelogramo pedido no exercício (ver figura 12).

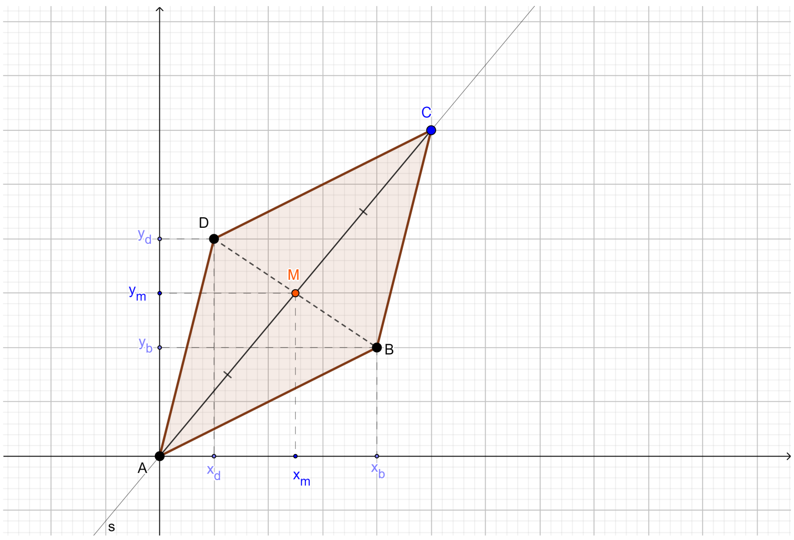


Figura 12 – Paralelogramo construído a partir de três vértices

As interpretações geométricas da soma e subtração serão realizadas utilizando a forma algébrica dos números complexos, enquanto as demais operações serão realizadas utilizando a forma trigonométrica dos números complexos, visando simplificar as representações e operações.

1. ADIÇÃO

   A interpretação geométrica da soma de dois números complexos $z+z_1$, onde $z = a+bi$ e $z_1 = c+di$ com afixos $A$ e $B$, respectivamente, nada mais é do que o ponto $D$ no plano complexo, tal que $O$, $B$, $D$ e $A$ são vértices de um paralelogramo ($OBDA$) e

$O$ é a origem do plano.

Exemplo:
Dados $z = 2 + 3i$ e $z_1 = 4 + 2i$, com afixos $A = (2, 3)$ e $B = (4, 2)$, tem-se como resultado da soma de $z + z_1$ o número complexo $z_2 = 6 + 5i$ que é representado geometricamente pelo afixo $D$. Realiza-se a soma, marcando o ponto $D$ tal que $OBDA$ seja um paralelogramo, como representado na figura 13.

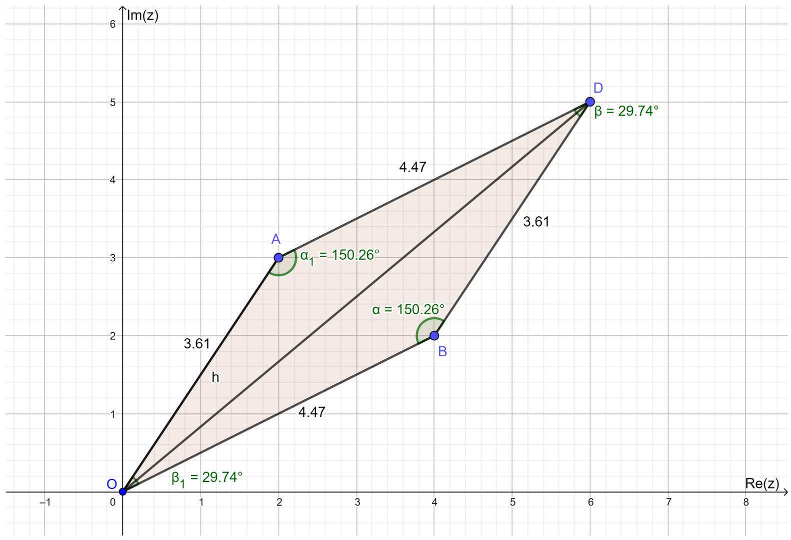


Figura 13 – Interpretação geométrica da adição $z + z_1$

2. SUBTRAÇÃO

A interpretação geométrica da diferença de dois números complexos $z - z_1$, onde $z = a + bi$ e $z_1 = c + di$ com afixos $A$ e $B$, respectivamente, nada mais é que o ponto $D$ no plano complexo, tal que $O$, $A$, $D$ e $C$ são vértices de um paralelogramo ($OADC$) com $O$ sendo a origem do plano e $C$ sendo a representação de $-B$, pois $z - z_1 = z + (-z_1)$.

Exemplo:
Dados $z = 4 + 6i$ e $z_1 = 5 + i$, com afixos $A = (4, 6)$ e $B = (5, 1)$, tem-se como resultado da subtração $z - z_1$ o número complexo $z_2 = -1 + 5i$ que é representado geometricamente pelo afixo $D$. Realiza-se a subtração marcando o ponto $C$ tal que $C = -B$ ($C = (-5, -1)$) e, após, marcando o ponto $D$ de forma que $OADC$ seja um paralelogramo, como representado na figura 14.

3. MULTIPLICAÇÃO

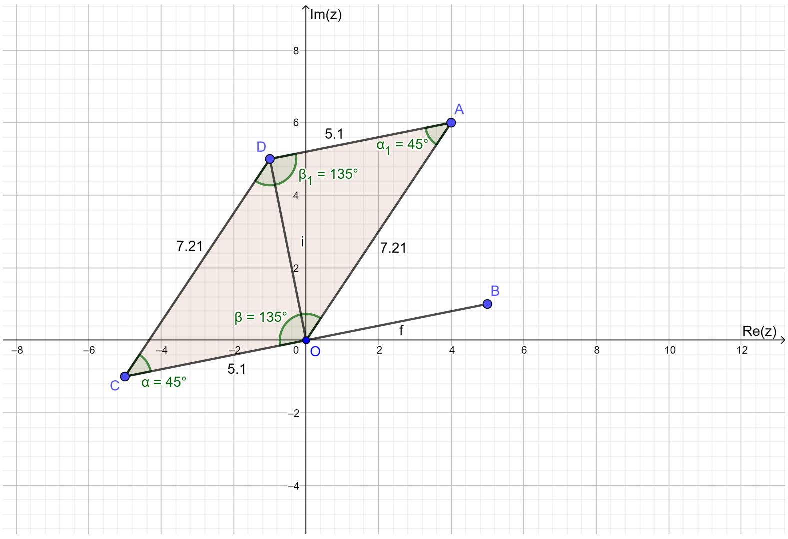


Figura 14 – Interpretação geométrica da diferença $z - z_1$

A interpretação geométrica do produto de dois números complexos, $z \cdot z_1$ com $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$ e $z_1 = \rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$, nada mais é que o resultado do produto de seus respectivos módulos, $\rho \cdot \rho_1$, e a rotação de $OP$ em $\theta_1$, onde o ponto $O$ é a origem do plano e o ponto $P$ é o afixo do número complexo $z$, sempre no sentido trigonométrico (ou seja, o sentido anti-horário).

Exemplo:
Dados $z = 3\sqrt{2}(cos45° + isen45°)$ e $z_1 = \sqrt{2}(cos315° + isen315°)$.
Realizando a multiplicação obtém-se $z \cdot z_1 = (3\sqrt{2})(\sqrt{2})[cos(45° + 315°) + isen(45° + 315°)] = 6(cos360° + isen360°) = 6$.

Para interpretar geometricamente é preciso o número complexo em sua forma algébrica. Ao transformar os números dados tem-se: $z = 3 + 3i$ e $z_1 = 1 - i$, sendo $A$ o afixo do número complexo $z$ e $B$ o afixo do número complexo $z_1$. A partir da interpretação geométrica, percebe-se que o produto desses dois números é a multiplicação de seus respectivos módulos e a rotação de $z$ em 315° $(\theta_1)$. Gerando, assim, o número complexo $z_2 = z \cdot z_1 = 6$, de argumento igual a 360° e afixo $C$, como representado na figura 15.

4. DIVISÃO

A interpretação geométrica da divisão de dois números complexos, $\dfrac{z}{z_1}$ com $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$ e $z_1 = \rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$, nada mais é do que o resultado do quociente de seus respectivos módulos, $\dfrac{\rho}{\rho_1}$, e a rotação de $OP$ em $-\theta_1$, onde o ponto $O$ é a origem do plano e o ponto $P$ é o afixo do número complexo $z$, sempre no sentido

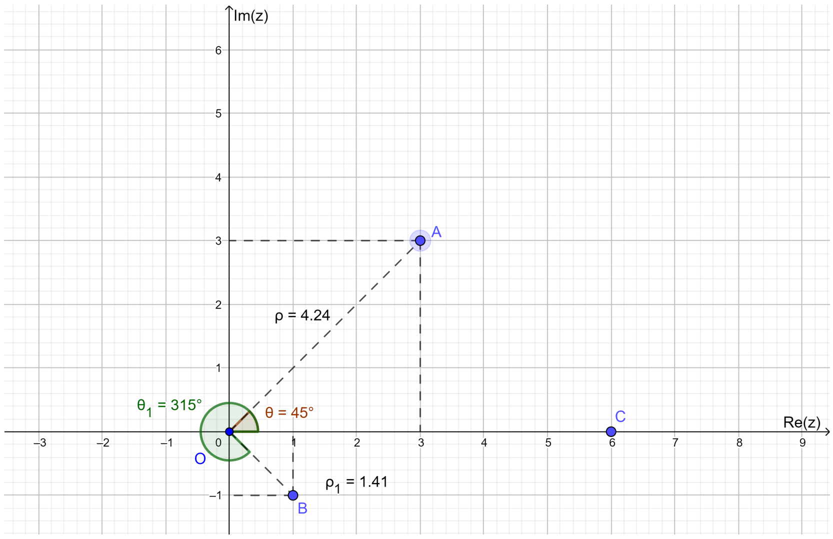


Figura 15 – Interpretação geométrica da multiplicação

trigonométrico (ou seja, o sentido anti-horário).

Exemplo:
Dados $z = 3\sqrt{2}(cos45° + isen45°)$ e $z_1 = \sqrt{2}(cos315° + isen315°)$.
Realizando a divisão obtém-se $\frac{z}{z_1} = \frac{3\sqrt{2}(cos45° + isen45°)}{\sqrt{2}(cos315° + isen315°)} = 3[cos(45° - 315°) + isen(45° - 315°)] = 3[cos(-270°) + isen(-270°)] = 3(cos90° + isen90°) = 3i$.

Para interpretar geometricamente é preciso o número complexo em sua forma algébrica. Ao transformar os números dados, tem-se: $z = 3 + 3i$ e $z_1 = 1 - i$, seja $A$ o afixo do número complexo $z$ e $B$ o afixo do número complexo $z_1$. Fazendo a interpretação geométrica, é possível perceber que a divisão desses dois números é a divisão de seus respectivos módulos e a rotação de $z$ em $-315°$ $(\theta_1)$. Gerando, assim, o número complexo $z_2 = \frac{z}{z_1} = 3i$, de argumento igual a $90°$ e afixo $C$, como representado na figura 16.

5. POTENCIAÇÃO

A interpretação geométrica da potenciação de um número complexo, $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$ elevado $n$, nada mais é que o resultado de elevar seu módulo à potência $n$ $(\rho^n)$ e a rotação de $OP$ em $(n-1)\theta$, onde o ponto $O$ é a origem do plano e o ponto $P$ é o afixo do número complexo $z$, sempre no sentido trigonométrico (ou seja, o sentido anti-horário).

Exemplo:
Dados $z = \sqrt{2}(cos315° + isen315°)$ e $n = 2$.

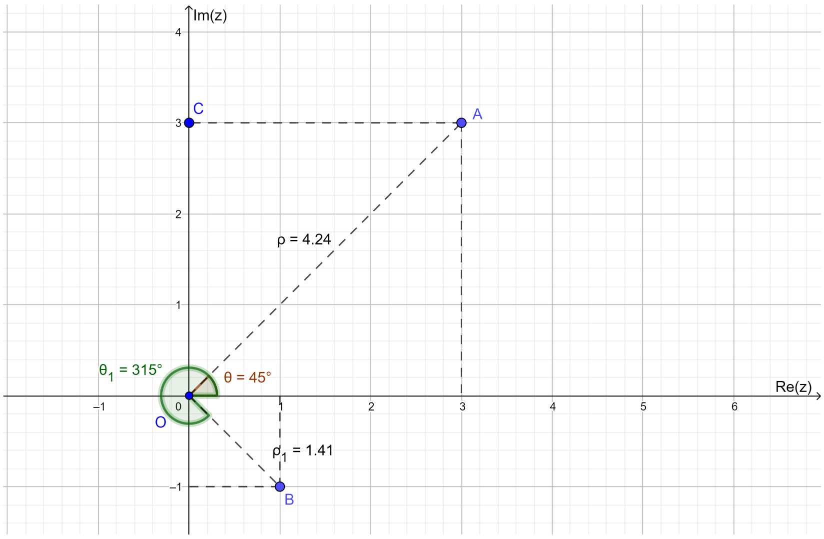


Figura 16 – Interpretação geométrica da divisão

Realizando a potenciação obtém-se $z^2 = (\sqrt{2})^2[cos(2 \cdot 315°) + isen(2 \cdot 315°)] = 2(cos630° + isen630°) = 2(cos180° + isen180°)$.

Para interpretar geometricamente é preciso o número complexo em sua forma algébrica. Ao transformar os números dados, tem-se: $z = 1 - i$, seja $A$ o afixo do número complexo $z$, fazendo a interpretação geométrica, tem-se que a potenciação de $z$ para $n = 2$ é elevar o módulo à potência igual a 2 e a rotação de $z$ em $315° = (n-1)\theta$. Gerando, assim, o número complexo $z_1 = -2i$, de argumento igual a 270° e afixo $B$, como representado na figura 17.

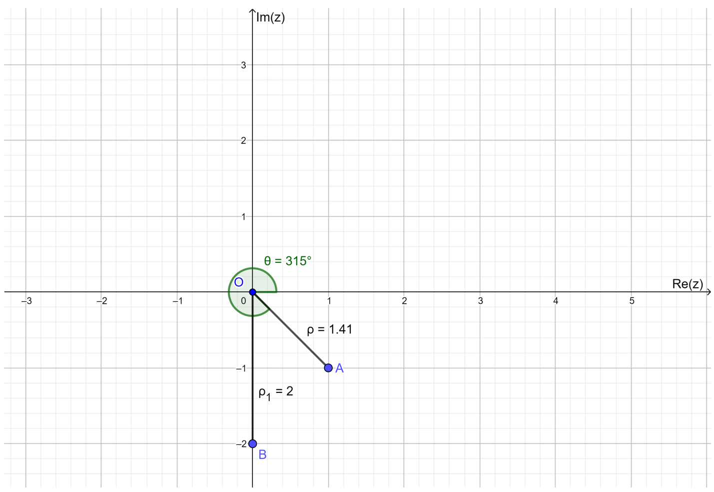


Figura 17 – Interpretação geométrica da potenciação

6. RADICIAÇÃO

Os afixos das raízes $n$-ésimas, $\omega_k$ com $k \in \mathbb{Z}$, do número complexo $z$ são representados pelos pontos $P_k$.

Geometricamente, os pontos $P_k$ são pontos que pertencem a uma circunferência de raio igual ao valor do módulo $(\rho)$ e centro em $(0,0)$. E, para o caso geral, os pontos $P_k$ dividem a circunferência em $k$ partes iguais, formando um polígono regular de $n$ lados inscrito na circunferência.

Do exemplo da página 33, as raízes quartas de $z = -8 - 8\sqrt{3}i$ são:

- $\omega_0$ possui afixo $P_0(1, \sqrt{3})$
- $\omega_1$ possui afixo $P_1(-\sqrt{3}, 1)$
- $\omega_2$ possui afixo $P_2(-1, -\sqrt{3})$
- $\omega_3$ possui afixo $P_3(\sqrt{3}, -1)$

Observa-se ainda que $\omega_0$, $\omega_1$, $\omega_2$ e $\omega_3$ possuem módulos iguais:
$\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

Ou seja, $P_0$, $P_1$, $P_2$ e $P_3$ são pontos que pertencem a circunferência de raio 2 e centro na origem $(0,0)$.

Nesse caso, os pontos dividem o circunferência em quatro partes congruentes ($P_0$, $P_1$, $P_2$ e $P_3$ são vértices de um quadrado) e $2\pi \div 4 = \frac{\pi}{2}$. Mostrando que os argumentos de $\omega_0$, $\omega_1$, $\omega_2$ e $\omega_3$ estão em progressão aritmética de razão igual a $\frac{\pi}{2}$ e primeiro termo igual a $\frac{\pi}{3}$, isto é, $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3} + 3 \cdot \frac{\pi}{2})$, como representado na figura 18.

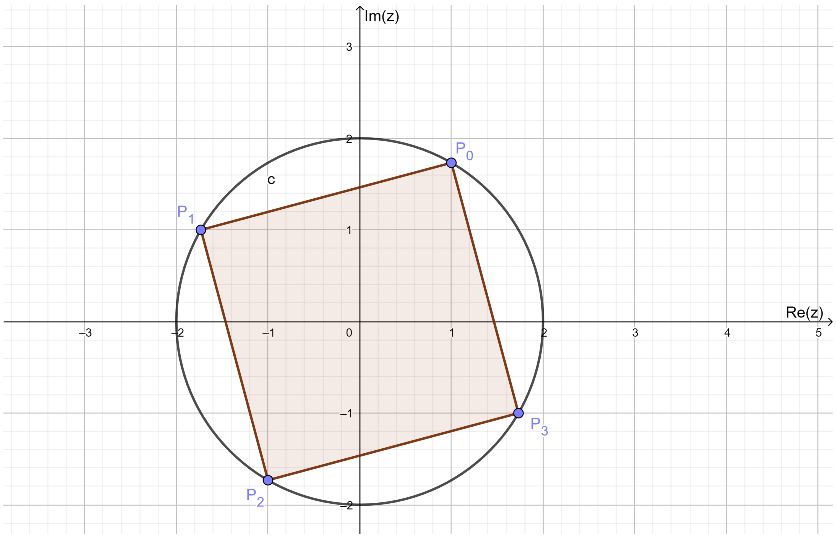


Figura 18 – Interpretação geométrica das raízes quartas de $z = -8 - 8\sqrt{3}i$

# 3 APLICAÇÕES

Nste capítulo é trabalhado o objetivo principal desta pesquisa, propondo algumas aplicações dos números complexos ao Ensino Médio ao usar a trigonometria e geometria plana. Todos os exercícios propostos possuem solução ao fim da seção.

## 3.1 Atividades propostas

### 3.1.1 Atividade 1

Após o estudo dos números complexos, os alunos realizam a transformação de um número complexo da forma algébrica para a forma trigonométrica sem grandes dificuldades, encontrando o argumento e o módulo desse número ao aplicar as fórmulas dadas para tal feito, confiando assim no resultado encontrado, sem entender o que ele significa. Essa atividade surge da ideia de que o aluno faça a transformação e depois verifique que os resultados encontrados são, realmente, representações diferentes para o mesmo número complexo.

**Objetivo:** Comprovar o que são o módulo e argumento de um número complexo.

**Material necessário:** Papel milimetrado, régua, transferidor, calculadora científica.

**Pré-requisitos:** Plano cartesiano, relações trigonométricas fundamentais, círculo trigonométrico, representação do número complexo nas suas diferentes formas (par ordenado, algébrica e trigonométrica), transformação de números complexos da forma algébrica para forma trigonométrica.

**Tempo necessário:** duas aulas de 50 minutos cada.

- Primeira aula: leitura da atividade com os alunos, explicando os passos e solucionando possíveis dúvidas. Após a leitura dos passos, convidar os alunos a realizarem os dois exemplos resolvidos na atividade.
- Segunda aula: realização dos exercícios propostos.

EXERCÍCIO:

*Dado o número complexo $z = a + bi$, comprove o que é o módulo e o argumento do mesmo.*

A atividade será realizada em 7 passos, detalhados abaixo.

**Passo 1:** Transformar o número complexo dado para sua forma trigonométrica.
Para esse passo o aluno começará encontrando o valor do módulo do número complexo dado ($\rho$), o valor do argumento do número complexo ($\theta$) e os escreverá na sua forma trigonométrica (equação 2.4). Para essa parte segue-se o que foi explicado na seção 2.6.2.

$$z = \rho(cos\theta + isen\theta)$$

**Passo 2:** Esboçar o plano complexo no papel milimetrado, representando os eixos real ($Re(z)$) e imaginário ($Im(z)$).
Para esse passo por mais que o papel milimetrado possua as linhas, é esperado que o aluno use a régua para traçar os eixos.

**Passo 3:** Esboçar o número complexo dado no plano.
Para esse passo o aluno usará seus conhecimentos quanto forma par ordenado (equação 2.1) do número complexo, pois o mesmo estará em sua forma algébrica. Marcando no plano primeiro a primeira coordenada do par ordenado, que representa a parte real do número complexo ($Re(z)$) e, depois, marcando a segunda coordenada do par ordenado, que representa a parte imaginária do número complexo ($Im(z)$).
Espera-se que o aluno faça as marcações de uma escala escolhida pelo próprio, para que os pontos sejam dimensionados corretamente no papel.

**Passo 4:** Marcar o afixo do número complexo encontrado.
Para esse passo é importante que o professor tenha explicado, previamente, que os afixos são pontos do plano e, portanto, são representados por letras maiúsculas. É interessante que o professor já estipule qual letra irá ser usada para tal representação, neste caso a letra $A$ foi a escolhida.

**Passo 5:** Traçar o módulo ($\rho$) do número complexo.
Para esse passo o aluno usará régua para ligar os pontos de origem do plano complexo ($O$) e o afixo do número complexo marcado no Passo 4 ($A$), traçando assim o módulo do número complexo $z$.
Peça para o aluno medir, usando a régua, e anotar o valor encontrado neste passo.

**Passo 6:** Verificar o argumento encontrado na representação.

Para esse passo o aluno usará o transferidor, para medir o ângulo entre o eixo real ($Re(z)$) e o segmento $OA$ ($\rho$).
Poderão surgir dúvidas quanto ao uso do transferidor tendo em vista que o mesmo segue o sentido horário de marcação e o ângulo marcado é no sentido anti-horário. Cabe ao professor explicar que basta subtrair o valor encontrado de 180°, encontrando assim o valor do argumento $\theta$. Peça para que o aluno anote esse valor encontrado.

**Passo 7:** Observar os valores encontrados.
Neste passo, peça ao aluno para comparar os valores, de $\rho$ e de $\theta$, encontrados no passo 1, com os valores de $\rho$ e de $\theta$ encontrados nos passos 5 e 6, respectivamente. O aluno deverá reparar que os valores são iguais nos dois passos, 1 e 5 e 1 e 6, comprovando que a forma trigonométrica do número complexo é realmente uma representação diferente para o mesmo número.
Caso haja divergências nos valores encontrados, observar se foram cumpridos todos os passos de forma correta, pois, certamente, algo nos passos acima foi feito de forma errada.

**Exemplo 1:**

Dado o número complexo $z = 3 + 3i$, verifique o módulo e o argumento usando os passos acima.

**Passo 1:** Transformação do número complexo $z$ para sua forma trigonométrica.
$\rho = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4,24.$
$cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$
$sen\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$
Verificando na tabela trigonométrica temos $\theta = 45°$.
Assim, tem-se $z$ escrito em sua forma trigonométrica $z = 3\sqrt{2}\left(cos45° + isen45°\right)$.

**Passo 2:** Esboçar o plano complexo.

**Passo 3:** Esboçar o número complexo dado.
Para este exemplo: $z = 3 + 3i$, deve-se esboçar o par ordenado $(3, 3)$. (Vide figura 20).

**Passo 4:** Marcar o afixo do número complexo.

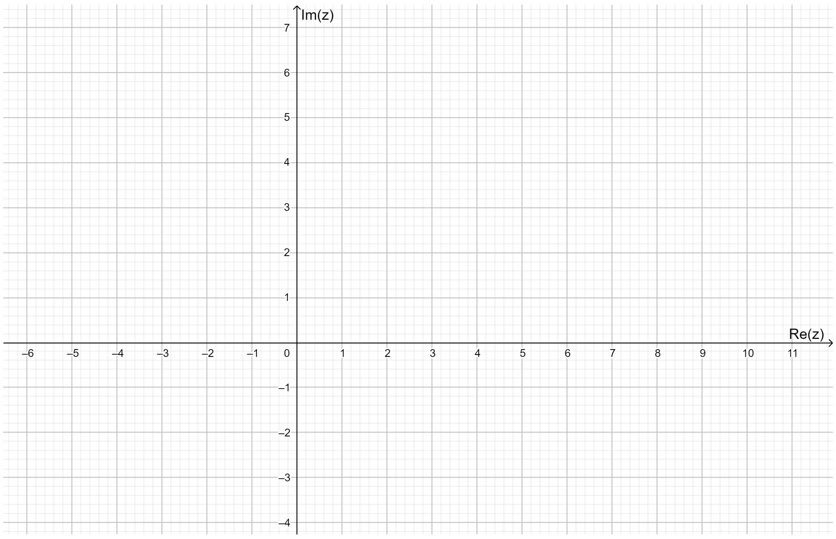


Figura 19 – Representação do Plano Complexo

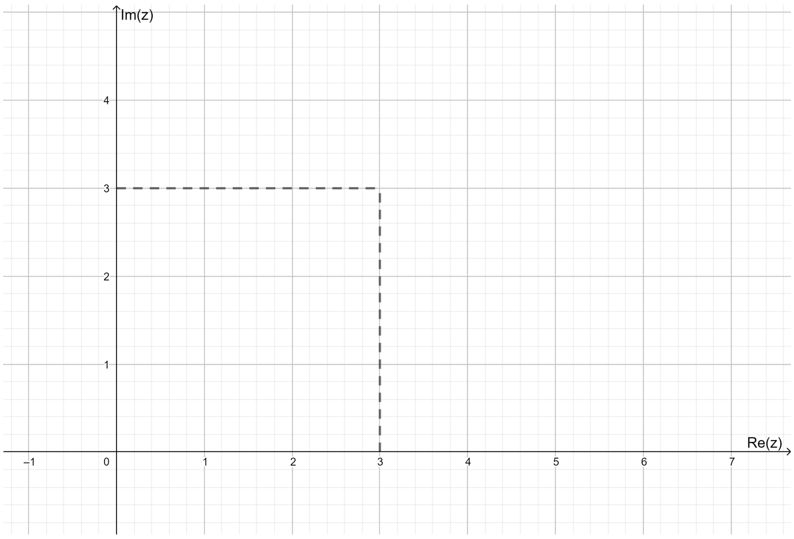


Figura 20 – Representação de $z = 3 + 3i$

Como orientado, a letra A será usada para representá-lo. (Vide figura 21).

**Passo 5:** Traçar o módulo.
O módulo traçado será do número complexo $z$, que é o segmento de reta que liga o ponto $O$ (origem do plano complexo) ao ponto $A$. Ele será medido com o auxílio da régua. (Vide figura 22).

**Passo 6:** Verificar o argumento do número complexo.
Marcar o ângulo entre o eixo real e o módulo do número complexo e medir o mesmo com o auxílio do transferidor. (Vide figura 23).

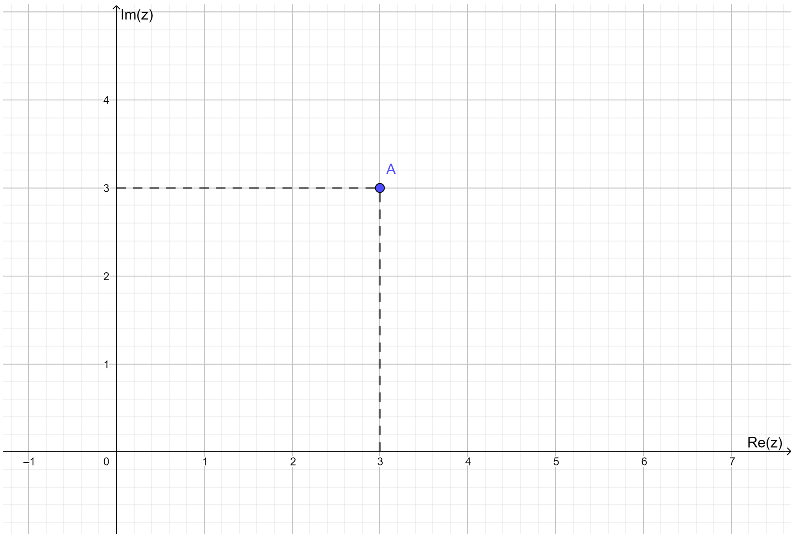


Figura 21 – Afixo do número $z = 3 + 3i$

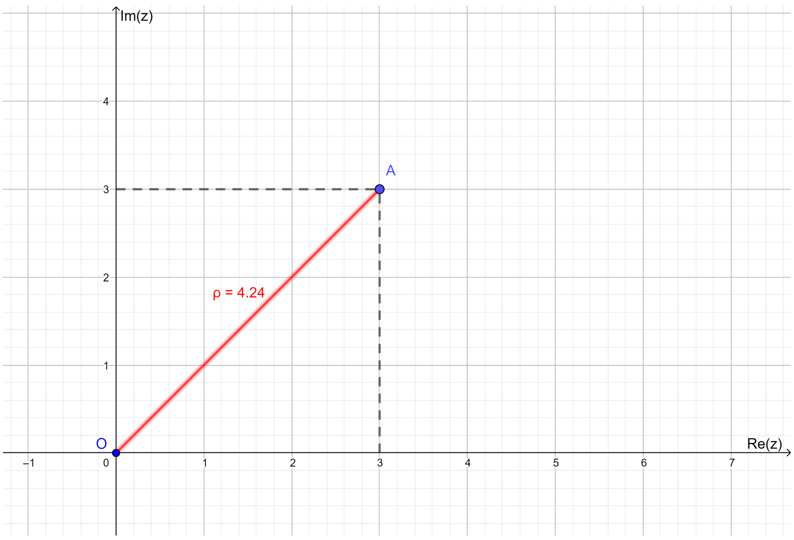


Figura 22 – Módulo de $z = 3 + 3i$

**Passo 7:** Observar os valores.
Observando os valores encontrados no passo 1:

- Tem-se $\rho \approx 4,24$ e no passo 5, ao medir a distância entre o ponto $O$ e $A$, encontra-se o mesmo valor.
- Tem-se $\theta = 45°$, e ao medir o ângulo no passo 6 ($\theta = 45°$) verifica-se que é o mesmo.

Verifica-se dessa maneira que os valores encontrados para $z$ em sua forma trigonométrica conferem com os valores encontrados na parte geométrica, confirmando a veracidade das informações encontradas.

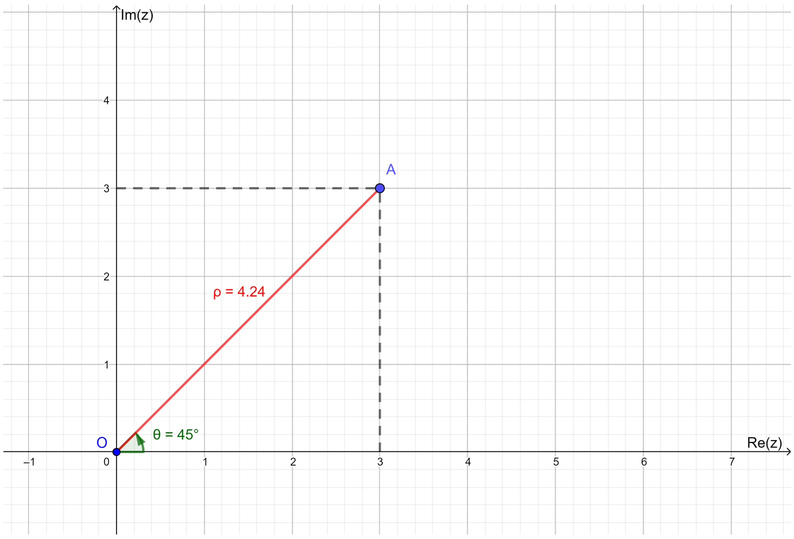


Figura 23 – Verificando o argumento de $z = 3 + 3i$

Para o aluno, confirmar o que é feito na parte algébrica (teoria) com a parte geométrica (visual) é de extrema valia, pois, ele dificilmente consegue visualizar o que está fazendo apenas pela parte algébrica tornando seu conhecimento mais sólido.

**Exemplo 2:**

Dado o número complexo $z_1 = -1 + 2i$, verifique o módulo e o argumento usando os passos acima.

**Passo 1:** Transformar o número complexo $z_1$ para sua forma trigonométrica.
$\rho = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} =\approx 2,24.$
$cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \approx -0,447$
$sen\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,894$
Nesse caso, o ângulo não pertence ao primeiro quadrante, pois o valor do cosseno é negativo e o valor do seno é positivo, pertencendo ao segundo quadrante. Para encontrar o argumento é preciso usar os conhecimentos sobre círculo trigonométrico, onde $cos(180° - \theta) = -cos\theta$, chegando em $\theta = 117°$.
Assim tem-se $z_1$ escrito em sua forma trigonométrica é: $z_1 = \sqrt{5}\,(cos117° + isen117°)$.

**Passo 2:** Esboçar o plano complexo.

**Passo 3:** Esboçar o número complexo dado.
Nesse exemplo tem-se: $z_1 = -1 + 2i$, logo, é preciso esboçar o par ordenado $(-1, 2)$. (Vide figura 24).

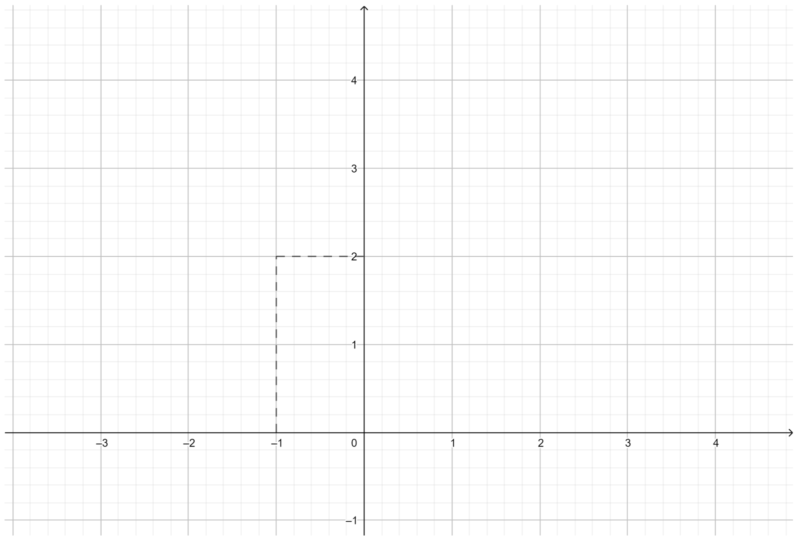


Figura 24 – Representação de $z_1$

**Passo 4:** Marcar o afixo do número complexo.
Como orientado, a letra A será usada para representá-lo. (Vide figura 25).

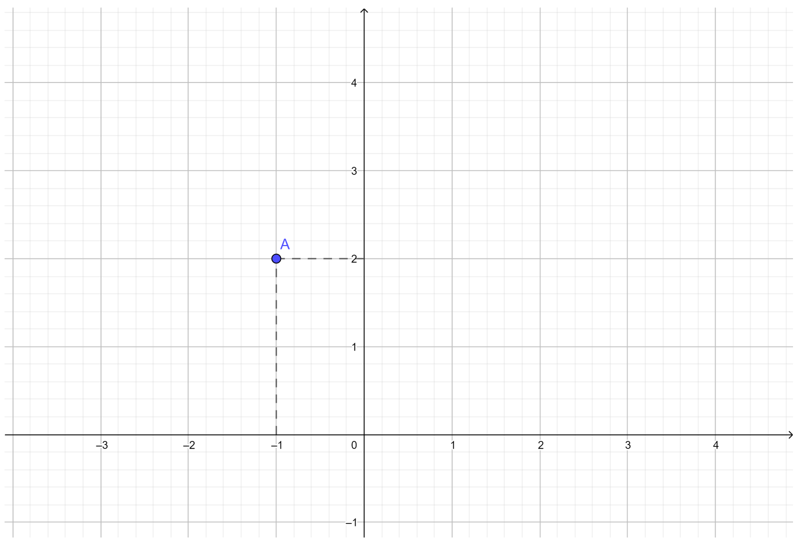


Figura 25 – Marcando o afixo de $z_1$

**Passo 5:** Traçar o módulo.
Traçar o módulo do número complexo $z$, que é o segmento de reta que liga o ponto $O$ (origem do plano complexo) ao ponto $A$. E o medir com o auxílio da régua. (Vide figura 26).

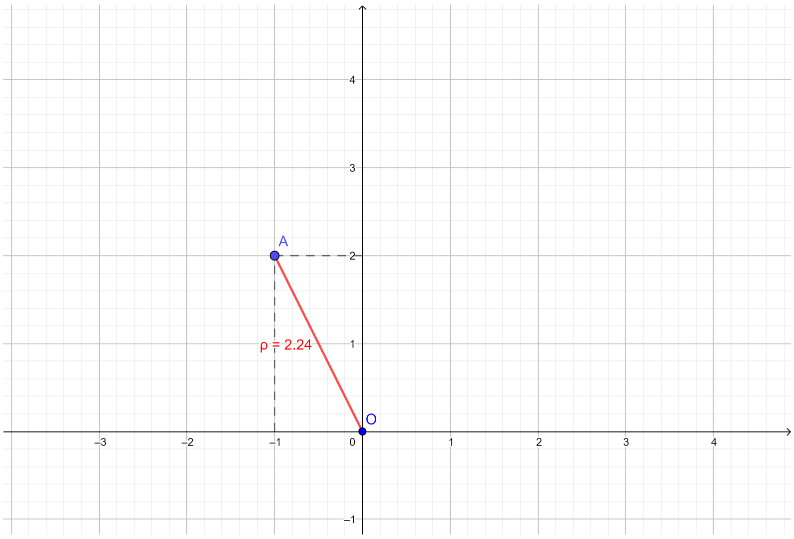


Figura 26 – Traçando o módulo de $z_1$

**Passo 6:** Verificar o argumento do número complexo.
Marcar o ângulo entre o eixo real e o módulo do número complexo e medir o mesmo com o auxílio do transferidor. (Vide figura 27).

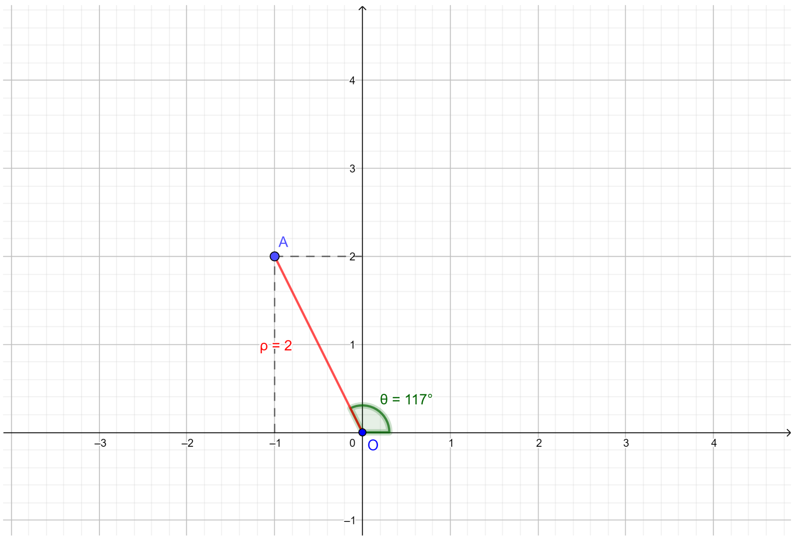


Figura 27 – Verificando o argumento de $z_1$

**Passo 7:** Observar os valores.
Observando os valores encontrados no passo 1:

- Tem-se $\rho \approx 2,24$ e no passo 5, ao medir a distância entre o ponto $O$ e o ponto $A$, encontra-se o mesmo valor.

- Tem-se $\theta = 117°$, e ao medir o ângulo no passo 6 $(\theta = 117°)$ verifica-se que é o mesmo valor.

Ao aferir que os valores encontrados para $z_1$ em sua forma trigonométrica conferem com os valores encontrados na parte geométrica, confirma-se a veracidade das informações encontradas.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Verificar que são válidas as fórmulas de multiplicação, divisão e potenciação de números complexos, em sua forma trigonométrica, definidas no texto. Dados as informações abaixo, realize a multiplicação e divisão para os itens a) e b) e potenciação para o item c).

    a) $z = 3 + 3i$ e $z_1 = -1 + 2i$

    b) $z = -1 - 3i$ e $z_1 = 2 - 5i$

    c) Dado $n = 9$ e $z = 1 - i$

### 3.1.2 Atividade 2

Normalmente, os alunos utilizam os conhecimentos acerca de geometria plana e posições no plano para descobrir os vértices de um polígono regular. O intuito desta atividade é oferecer outra forma de resolução de atividades desse tipo, usando, para isso, números complexos.
Os vértices serão encontrados sempre seguindo o sentido trigonométrico (sentido anti-horário).

Para esta atividade será usada a interpretação geométrica da multiplicação de dois números complexos.

**Objetivo:** Encontrar todos os vértices de um polígono regular inscrito em uma circunferência, dado um vértice inicial.

**Material necessário:** Papel milimetrado, régua (para o caso de desenhá-lo), calculadora científica.

**Pré-requisitos:** Polígonos regulares, polígonos inscritos em circunferência, plano cartesiano, relações trigonométricas fundamentais, círculo trigonométrico, representação do número complexo nas suas diferentes formas (par ordenado, algébrica e trigonométrica), transformação de números complexos da forma algébrica para forma trigonométrica.

**Tempo necessário:** duas aulas de 50 minutos cada.

- Primeira aula: leitura da atividade com os alunos, explicando os passos e solucionando possíveis dúvidas. Resolução dos exemplos propostos.
- Segunda aula: realização dos exercícios propostos.

EXERCÍCIO:

Dado o vértice $A(a, b)$, determinar as coordenadas dos outros vértices de um polígono regular de $n$ lados inscrito numa circunferência com centro na origem.
Sabe-se que como o polígono é regular, ele pode ser inscrito em uma circunferência e os seus vértices a dividem em $n$ partes iguais, cada parte definindo um ângulo central $\alpha$. Para encontrar o valor de $\alpha$ basta dividir a circunferência em $n$ partes $(360° \div n)$. Nesse exercício é preciso considerar que o centro do polígono é a origem do plano $(0, 0)$.

**Passo 1:** Representar o vértice dado como número complexo (forma algébrica).
$A(a, b)$ será representado como $z = a + bi$.

**Passo 2:** Representar o número complexo no plano complexo.

**Passo 3:** Transformar o número $z$, do passo 1, para sua forma trigonométrica.
$z = \rho(cos\theta + isen\theta)$

**Passo 4:** Observar quantos vértices o polígono possui (em quantas partes a circunferência será dividida) e, só então, calcular o valor do ângulo central ($\alpha$).

**Passo 5:** Calcular as coordenadas dos outros vértices fazendo a rotação do vértice $A$ em um ângulo $\alpha$.
O polígono está inscrito em uma circunferência, como $A$ pertence à circunferência de centro na origem do plano $(0, 0)$, tem-se $\rho$ como seu raio. Ou seja, para encontrar o próximo vértice, deve-se multiplicar o número complexo encontrado no passo 3 por um número complexo com $\rho = 1$ e argumento $\theta_1 = \frac{360°}{n}$. (Usa-se $\rho = 1$, pois o raio da circunferência não se altera, o que se altera é argumento do número complexo).

Repete-se esse passo $(n - 1)$ vezes, para encontrar os outros vértices (já que um vértice foi dado no problema). Pode começar sempre do vértice anterior ou a partir do vértice dado, mas, sempre observando que o valor do argumento, neste caso, terá que ser multiplicado pelo número do vértice que pretende encontrar. Por exemplo: se fizer um triângulo $ABC$, pode começar pelo vértice $A$ e encontrar o vértice $B$, e do vértice $B$ encontrar o vértice $C$, sempre usando como multiplicador um número com argumento igual a $\frac{360°}{3}$. Também pode encontrar o vértice $B$ e, do vértice $A$ encontrar o vértice $C$. No entanto, o argumento do número que será multiplicado $A$ para encontrar o vértice $C$ terá que ser multiplicado por 2, já que é o segundo vértice a ser encontrado.

**Passo 6:** Para determinar os vértices, basta transformar os números complexos encontrados no passo 5 para sua forma algébrica e, em seguida, para sua forma de par ordenado.

**Passo 7:** Desenhar o polígono no plano.
Esse passo pode ocorrer ou não, dependendo do que o professor quiser ou do que o exercício pedir.

**Exemplo 1:**

Considere um triângulo equilátero $ABC$, inscrito numa circunferência centrada na origem, dado um de seus vértices, $A = (\sqrt{3}, 1)$, determine as coordenados dos vértices $B$ e $C$.

**Passo 1:** Representar o vértice dado, $A = (\sqrt{3}, 1)$, como um número complexo. Assim, $A$ pode ser representado por $z = \sqrt{3} + i$.

**Passo 2:** Representar o número complexo no plano. (Figura 28)

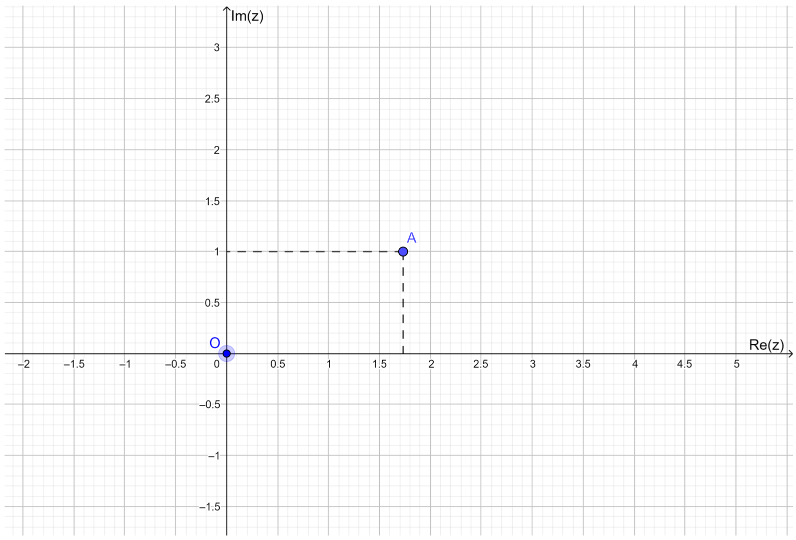


Figura 28 – Atividade 2 - Exerc. 1 - Passo 2

**Passo 3:** Transformar o número para sua forma trigonométrica.

$$\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$sen\theta = \frac{1}{2} \text{ e } cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ assim, } \theta = 30°$$

Logo, o número complexo escrito na forma trigonométrica é: $z = 2(cos30° + isen30°)$.

**Passo 4:** Observar quantos vértices o polígono possui e calcular $\alpha$.

Como se trata de um triângulo, há 3 vértices, tendo cada ângulo central $\alpha = \dfrac{360°}{3} = 120°$.

**Passo 5:** Calcular as coordenadas dos outros vértices.

Sendo $\alpha = 120°$, para encontrar o vértice $B$, tem-se que multiplicar o número complexo encontrado no passo 3, $z = 2(cos30° + isen30°)$, por um número complexo de módulo igual a 1 e argumento igual a 120° ($z_r = (cos120° + isen120°)$. Fazendo a

multiplicação tem-se:
$B = z \cdot z_r = 2 \cdot 1[cos(30° + 120°) + isen(30° + 120°)] = 2(cos150° + isen150°)$.

Para encontrar o vértice $C$, basta multiplicar $B$ pelo mesmo número, $z_r$:
$C = [2(cos150° + isen150°)] \cdot [(cos120° + isen120°)] = 2[cos(150° + 120°) + isen(150° + 120°)] = 2(cos270° + isen270°)$.

Outro modo: encontrar $C$ a partir do vértice $A$. Como o vértice $C$ é o segundo a ser encontrado, basta multiplicar o número complexo do passo 3 pelo número complexo $z_{r2} = [cos(120° \cdot 2) + isen(120° \cdot 2)]$, que é o número complexo com argumento multiplicado por 2, ficando: $z \cdot z_{r2} = [2(cos30° + isen30°)] \cdot [cos240° + isen240°] = 2(cos270° + isen270°)$.

**Passo 6:** Determinar os vértices.

Transformar para forma algébrica os números complexos encontrados no passo 5
$B = 2(cos150° + isen150°) = -\sqrt{3} + i$
$C = 2(cos270° + isen270°) = -2i$.

Assim tem-se os vértices procurados $B = (-\sqrt{3}, 1)$ e $C = (0, -2)$.

**Passo 7:** Desenhar o polígono no plano.

Para esse passo, basta representar os vértices no plano e ligá-los.

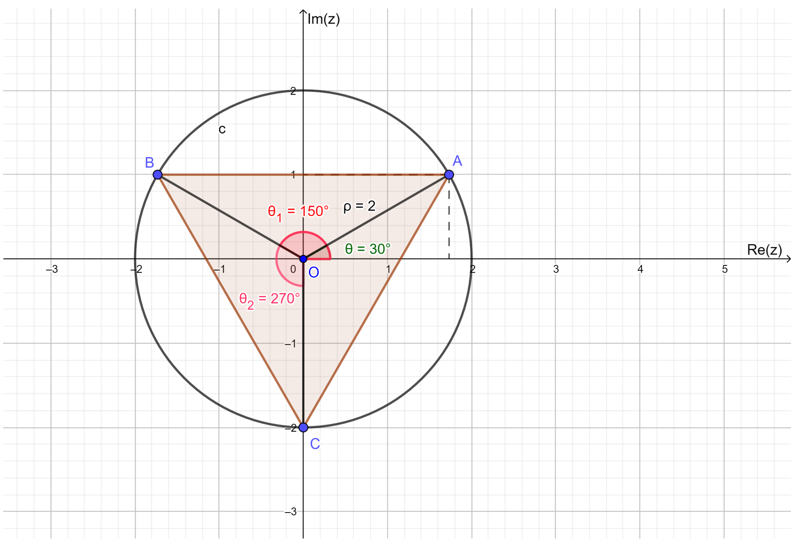


Figura 29 – Atividade 2 - Exerc. 1 - Passo 7

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Um quadrado $ABCD$ está inscrito numa circunferência de centro na origem do plano complexo. O vértice $A$ é a imagem do complexo $3+4i$. Determine os outros vértices do quadrado.

2. Dado um vértice $A = (1, 0)$ determine os outros vértices de um hexágono regular com centro na origem do plano.

3. (ITA) (Quando centro do polígono está transladado) Considere o quadrado $ABCD$, de diagonal $AC$ definida pelos pontos $(1, 1)$ e $(3, 4)$. Determine as coordenadas dos demais vértices do quadrado.

### 3.1.3 Atividade 3

É frequente justificar fórmulas trigonométricas usando trigonometria, o que torna as operações, por vezes, complexas, ou implica a necessidade de lembrar outras fórmulas trigonométricas não comuns. Essa atividade vem trazer uma nova forma de justificar algumas identidades trigonométricas, dessa vez, usando números complexos.

Diferente das outras duas apresentadas aqui, essa atividade não terá um passo a passo a ser seguido. Tem-se o primeiro exemplo como forma de introduzir a ideia e os exercícios propostos seguirão na mesma forma, sendo possível ao aluno resolvê-los.

**Objetivo:** Justificar as fórmulas trigonométricas realizando operações e manipulações com números complexos.

**Material necessário:** Papel e lápis.

**Pré-requisitos:** Representação do número complexo na forma trigonométrica, operações com números complexos na forma trigonométrica. Círculo trigonométrico, fórmulas trigonométricas.

**Tempo necessário:** uma aula de 50 minutos.

EXERCÍCIO:

Justificar a fórmula de adição de arcos utilizando números complexos.

Fórmula de adição de arcos: Se $x$ e $y$ são reais quaisquer, então:

$$cos(x+y) = cosxcosy - senxseny$$
e
$$sen(x+y) = senxcosy + senycosx$$

Demonstração: Dado dois ângulos $\theta_1$ e $\theta_2$, com $0 \leq \theta_1, \theta_2 < 2\pi$ pode-se escrever dois números complexos: $z_1 = cos\theta_1 + isen\theta_1$ e $z_2 = cos\theta_2 + isen\theta_2$.
Realizando a multiplicação desses dois números complexos, encontra-se:

- Pela interpretação geométrica da multiplicação (rotação do número complexo $z_1$ em um ângulo $\theta_2$):

$z_1 \cdot z_2 = cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)$ (I)

- Pela multiplicação algébrica:
  $z_1 \cdot z_2 = (cos\theta_1)(cos\theta_2) + (cos\theta_1)(isen\theta_2) + (isen\theta_1)(cos\theta_2) + (isen\theta_1)(isen\theta_2) = cos\theta_1 cos\theta_2 - sen\theta_1 sen\theta_2 + i(sen\theta_1 cos\theta_2 + sen\theta_2 cos\theta_1)$ (II)

Como as duas fórmulas são representações que dão o produto de dois números complexos, tem-se que (I) e (II) devem ser iguais. E pela igualdade de números complexos tem-se:

- $cos(\theta_1 + \theta_2) = cos\theta_1 cos\theta_2 - sen\theta_1 sen\theta_2$
- $sen(\theta_1 + \theta_2) = sen\theta_1 cos\theta_2 + sen\theta_2 cos\theta_1$

Caso $\theta_1$ e $\theta_2$ sejam ângulos fora da restrição apresentada, o uso das reduções ao primeiro quadrante deve ser feito, recaindo a ângulos dentro da restrição apresentada. Demonstrando a fórmula do seno e cosseno da soma de arcos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Justificar a fórmula $cos(2\theta)$ e $sen(2\theta)$ sem usar as fórmulas do arco da soma, demonstradas anteriormente.
2. Justificar, usando números complexos, a fórmula da Lei dos Cossenos: Em um triângulo $ABC$ qualquer, onde $a$, $b$ e $c$ são os lados opostos aos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente, tem-se $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\hat{A}$.
3. Justificar, usando números complexos, a fórmula da Lei dos Senos: Em um triângulo $ABC$ qualquer, onde $a$, $b$ e $c$ são os lados opostos aos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente, tem-se: $\dfrac{a}{sen\hat{A}} = \dfrac{b}{sen\hat{B}} = \dfrac{c}{sen\hat{C}}$.

## 3.2 Soluções dos exercícios propostos

**Atividade 1**

1. a) Transformando para forma trigonométrica: $z = 3\sqrt{2}(cos45° + isen45°)$ e $z_1 = \sqrt{5}(cos117° + isen117°)$. E assim, tem-se:

- $z \cdot z_1 = -9 + 3i$ (forma algébrica)
  $z \cdot z_1 = (3\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5})[cos(45° + 117°) + isen(45° + 117°)] = 3\sqrt{10}(cos162° + isen162°)$

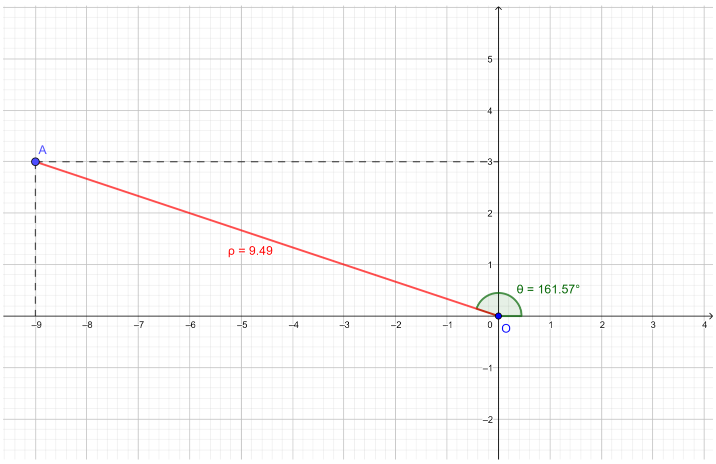


Figura 30 – Ex. 1 - a) multiplicação

- $\dfrac{z}{z_1} = \dfrac{3-9i}{5}$(forma algébrica)
  $\dfrac{z}{z_1} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}[cos(45° - 117°) + isen(45° - 117°)] = \dfrac{3\sqrt{10}}{5}[cos(-72°) + isen(-72°)] = \dfrac{3\sqrt{10}}{5}(cos288° + isen288°)$.

b) Transformando para forma trigonométrica: $z = \sqrt{10}(cos252° + isen252°)$ e $z_1 = \sqrt{29}(cos292° + isen292°)$. E assim, tem-se:

- $z \cdot z_1 = -17 - i$ (forma algébrica)
  $z \cdot z_1 = (\sqrt{29})(\cdot\sqrt{10})[cos(252° + 292°) + isen(252° + 292°)] = \sqrt{290}(cos544° + isen544°) = \sqrt{290}(cos184° + isen184°)$.
- $\dfrac{z}{z_1} = \dfrac{13-11i}{29}$ (forma algébrica)
  $\dfrac{z}{z_1} = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{29}}\right)[cos(252° - 292°) + isen(252° - 292°)] = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{29}}\right)[cos(-40°) + isen(-40°)] = \left(\dfrac{\sqrt{290}}{29}\right)(cos320° + isen320°)$

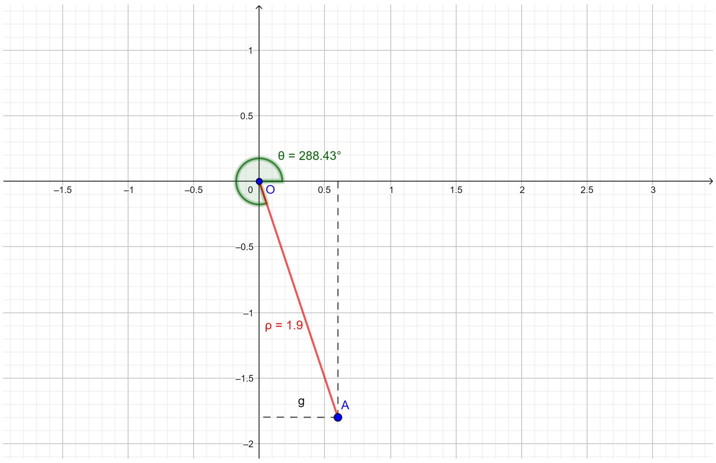


Figura 31 – Ex. 1 - a) divisão

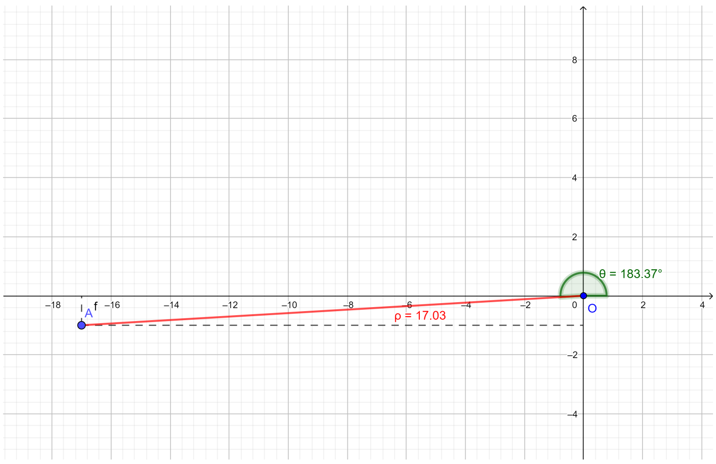


Figura 32 – Ex.1 - b) multiplicação

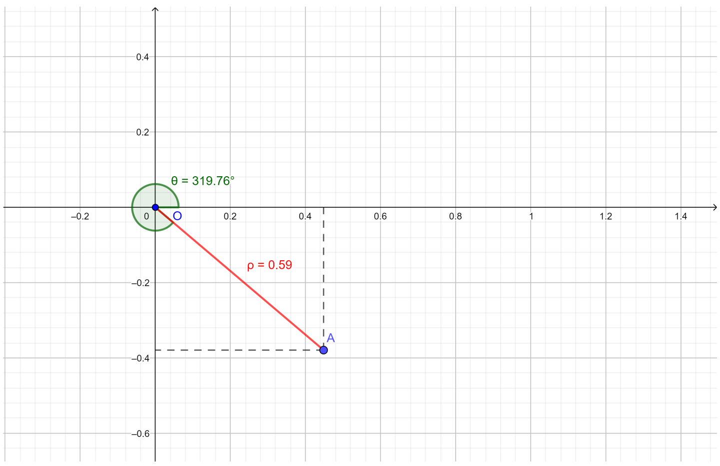


Figura 33 – Ex.1 - b) divisão

c) Transformando para forma trigonométrica: $z = (\sqrt{2})(cos315° + isen315°)$

- $z^9 = 16 - 16i$ (forma algébrica)
  $z^9 = (\sqrt{2})^9[cos(9 \cdot 315°) + isen(9 \cdot 315°)] = 16\sqrt{2}(cos2835° + isen2835°) =$

$16\sqrt{2}(cos315° + isen315°)$


Figura 34 – Ex.1 - c)

**Atividade 2**

1. Dado $z = 3 + 4i$, temos o vértice $A = (3, 4)$.
   Transformando para forma trigonométrica, tem-se: $z = 5(cos53° + isen53°)$. Como é um quadrado, sabe-se que a circunferência em que ele está inscrito será dividida em 4 partes iguais, onde cada ângulo central será $\alpha = \frac{360°}{4} = 90°$. Logo deve-se multiplicar o primeiro vértice pelo número complexo $z_r = (cos90° + isen90°)$ para obter o segundo vértice. Seguido pela multiplicação do vértice anterior pelo número $z_r$ até que se tenha todos os vértices do quadrado.
   Assim tem-se:
   $B = z \cdot z_r = 5(cos53° + isen53°) \cdot (cos90° + isen90°) = 5[cos(53° + 90°) + isen(53° + 90°)] = 5(cos143° + isen143°) = -4 + 3i$.
   $C = [5(cos143° + isen143°)] \cdot [(cos90° + isen90°)] = 5[cos(143° + 90°) + isen(143° + 90°)] = 5(cos233° + isen233°) = -3 + -4i$.
   $D = [5(cos233° + isen233°)] \cdot [(cos90° + isen90°)] = 5[cos(233° + 90°) + isen(233° + 90°)] = 5(cos323° + isen323°) = 4 - 3i$.
   Tendo todos os vértices: $A = (3, 4)$ (dado) e $B = (-4, 3)$, $C = (-3, -4)$ e $D = (4, -3)$ (obtidos pela rotação do vértice A).

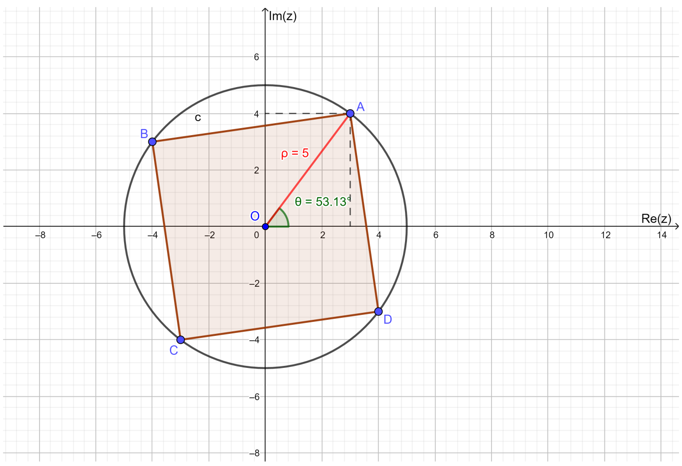


Figura 35 – Exerc. 1

2. Dado o vértice $A = (1, 0)$, transformando-o para a forma algébrica dos números complexos tem-se: $z = 1$ e transformando-o para forma trigonométrica dos números complexos tem-se: $z = (cos0° + isen0°)$.

   Como é um hexágono, a circunferência em que ele está inscrito será dividida em 6 partes iguais. Cada parte com ângulo central correspondente a $\alpha = \frac{360°}{6} = 60°$, logo multiplica-se o primeiro vértice (dado) pelo número complexo $z_r = (cos60° + isen60°)$.

Cada vértice encontrado será multiplicado por $z_r$ até que se tenha encontrado todos os vértices.

Tendo assim:
$B = z \cdot z_r = (cos0° + isen0°) \cdot (cos60° + isen60°) = (cos60° + isen60°) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
$C = (cos60° + isen60°) \cdot (cos60° + isen60°) = (cos120° + isen120°) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
$D = (cos120° + isen120°) \cdot (cos60° + isen60°) = (cos180° + isen180°) = -1$.
$E = (cos180° + isen180°) \cdot (cos60° + isen60°) = (cos240° + isen240°) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
$F = (cos240° + isen240°) \cdot (cos60° + isen60°) = (cos300° + isen300°) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Logo, tem-se os outros vértices: $B = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $C = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $D = (-1, 0)$, $E = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ e $F = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

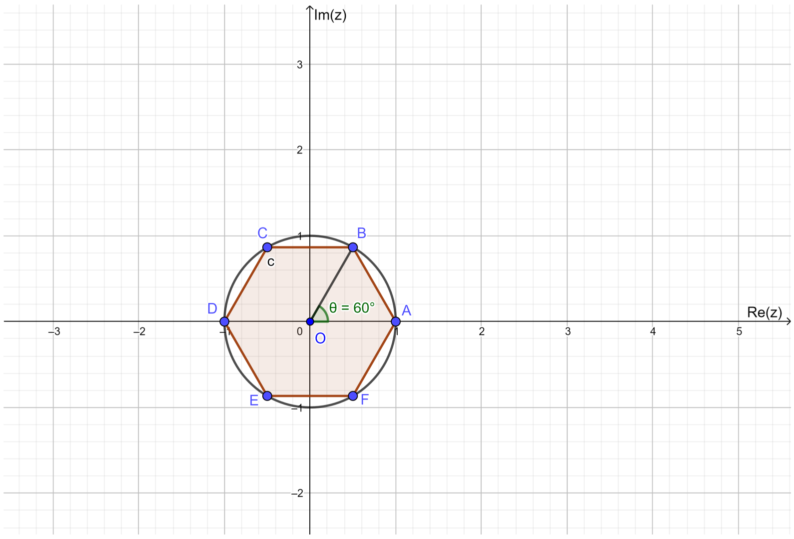


Figura 36 – Exerc. 2

3. Esse caso tem dois passos a mais:

   - primeiro, é preciso descobrir quais as coordenadas do centro do quadrado para que se saiba o quanto ele está transladado;
   - segundo, as operações serão realizadas como se estivessem centrados na origem, assim será preciso transladá-las ao final.

Sabe-se que o polígono é um quadrado e também as coordenadas de dois vértices opostos, para descobrir o centro basta calcular as coordenadas do ponto médio do segmento que liga esses dois vértices (diagonal do quadrado).

Assim, seja $O$ o centro do polígono, tem-se: $O = (\frac{1+3}{2}, \frac{1+4}{2}) = (2, \frac{5}{2})$, ou seja, o centro da circunferência em que o quadrado está inscrito está transladado em 2 unidades para a direita e $\frac{5}{2}$ unidades para cima. (Vide figura 37).

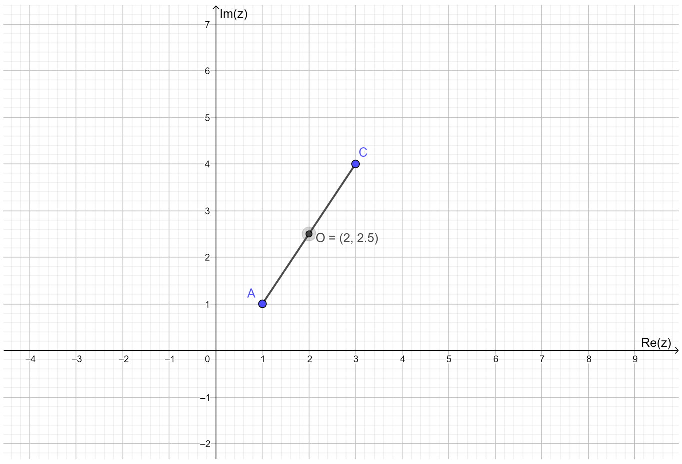


Figura 37 – Exercício 3 - centro do quadrado

Os pontos dados, $A$ e $D$, no novo sistema de coordenadas (com o centro na origem) ficam assim: $A_1 = (1-2, 1-\frac{5}{2}) = (-1, -\frac{3}{2})$ e $C_1 = (3-2, 4-\frac{5}{2}) = (1, \frac{3}{2})$. Desta etapa em diante será realizado o passo a passo dado.

Transformando $C_1$ para coordenadas complexas tem-se, $C_1 = 1 + \frac{3}{2}i$ e para forma trigonométrica tem-se, $\rho = \frac{\sqrt{13}}{2}$, e $\theta \approx 56°$ logo $C_1 = \frac{\sqrt{13}}{2}(cos 56° + i sen 56°)$. (Vide figura 38).

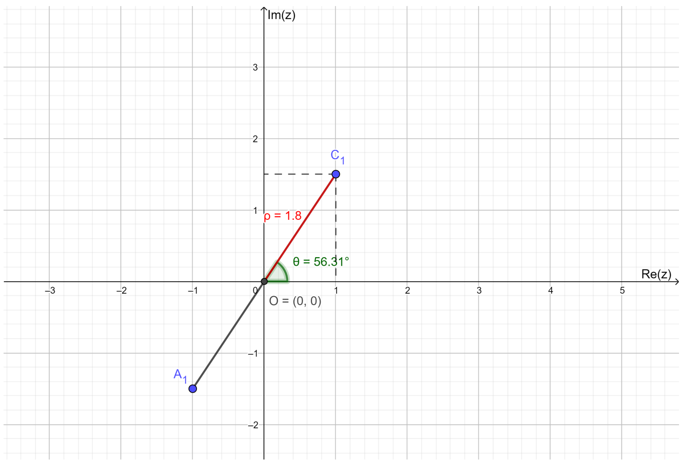


Figura 38 – Exercício 3 - forma trigonométrica

Como é um quadrado, a circunferência será dividida em 4 partes iguais em que $\alpha = 90°$, ou seja, cada vértice é a rotação do anterior em $90°$. Logo, deve-se multiplicar o vértice dado pelo número complexo $z_r = (cos90° + isen90°)$.

Obtendo o vértice $D_1$: $D_1 = \frac{\sqrt{13}}{2}[(cos56°+isen56°)][(cos90°+isen90°)] = \frac{\sqrt{13}}{2}[cos(56°+90°) + isen(56° + 90°)] = \frac{\sqrt{13}}{2}(cos146° + isen146°)$ daí tem-se $D_1 = -\frac{3}{2} + i$. $D_1 = (-\frac{3}{2}, 1)$.

Para encontrar o vértice $B_1$ basta multiplicar o vértice $C_1$ pelo número $z_c$ (que é o número $z_r$ para a terceira rotação) ou então multiplicar o vértice $A_1$ pelo número $z_r$. Como o $z_c$ será a terceira rotação do vértice $C_1$, tem-se $z_c = [cos(90°·3)+isen(90°·3) = cos270° + isen270°$, assim $B_1 = \frac{\sqrt{13}}{2}[(cos56° + isen56°][\ \cos270° + isen270°] = \frac{\sqrt{13}}{2}[cos(56° + 270°) + isen(56° + 270°)] = \frac{\sqrt{13}}{2}(cos326° + isen326°)$ tem-se $B_1 = \frac{3}{2} - i$. $B_1 = (\frac{3}{2}, -1)$. (Vide figura 39).

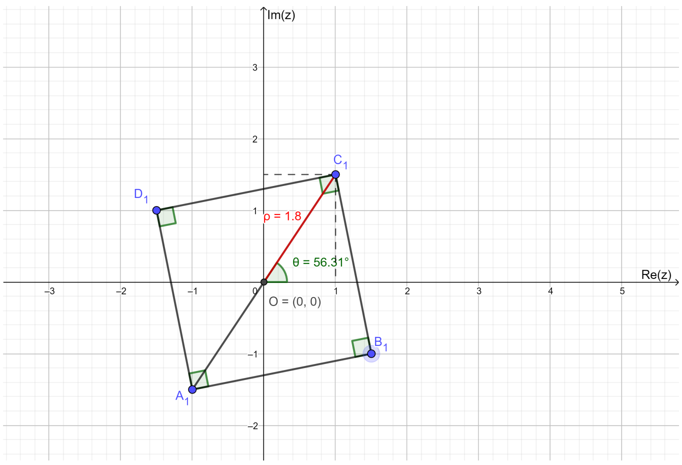


Figura 39 – Exercício 3 - quadrado de apoio

Como o centro está transladado, deve-se realizar a volta das coordenadas (somando 2 unidades à primeira coordenada e somando $\frac{5}{2}$ unidades à segunda coordenada). Como $D_1 = (-\frac{3}{2}, 1)$ e $B_1 = (\frac{3}{2}, -1)$, tem-se $D = (-\frac{3}{2} + 2, 1 + \frac{5}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$ e $B = (\frac{3}{2} + 2, -1 + \frac{5}{2}) = (\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$. (Vide figura 40).

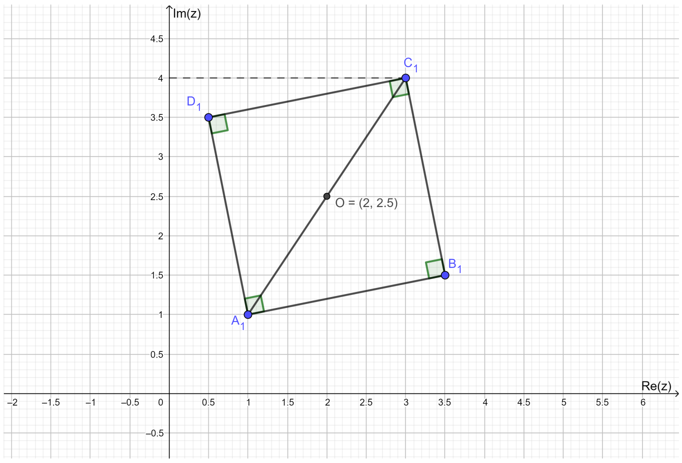


Figura 40 – Exercício 3 - quadrado pedido

**Atividade 3**

1. Seja $z = cos\theta + isen\theta$ pela 1° fórmula de Moivre, tem-se $z^2 = cos(2\theta) + isen(2\theta)$ (I) e ainda $z^2 = (cos\theta + isen\theta)^2 = cos^2\theta + 2icos\theta sen\theta + i^2 sen^2\theta = cos^2\theta - sen^2\theta + i(2cos\theta sen\theta)$ (II).
   De (I) e de (II) tem-se:
   $cos(2\theta) = cos^2\theta - sen^2\theta$ e $sen(2\theta) = 2cos\theta sen\theta$.

2. Escolhe-se o sistema de coordenadas de modo que $A$ fique posicionado na origem do sistema e $B$ esteja sobre o eixo horizontal, então, tem-se $A = (0,0)$, $B = z_1 = \rho_1(cos0° + isen0°)$ e $C = z_2 = \rho_2(cos\hat{A} + isen\hat{A})$. Tem-se, ainda, $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$.
   $|z_1 - z_2| = a$, ou seja, $(|z_1 - z_2|)^2 = a^2$ (I).
   Das operações com módulo de número complexo tem-se: $(|z_1 - z_2|)^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} - (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) = (\rho_1)^2 + (\rho_2)^2 - \rho_1\rho_2(cos\hat{A} - isen\hat{A}) + \rho_1\rho_2(cos\hat{A} + isen\hat{A}) = (\rho_1)^2 + (\rho_2)^2 - 2\rho_1\rho_2 cos\hat{A}$.
   Como sabe-se que $\rho$ é o comprimento do segmento, tem-se $\rho_1 = c$ e $\rho_2 = b$ assim: $(|z_1 - z_2|)^2 = c^2 + b^2 - 2cbcos\hat{A}$ (II).
   De (I) e de (II) tem-se:
   $a^2 = c^2 + b^2 - 2cbcos\hat{A}$ organizando, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\hat{A}$.

3. Para esse exercício o aluno usará a interpretação geométrica da subtração de dois números complexos.

   Da mesma forma do exercício anterior, escolhe-se o sistema de coordenadas de modo que o vértice $A$ fique posicionado na origem do plano e o vértice $B$ esteja sobre o eixo horizontal. Tem-se, então, $A = (0,0)$, $B = c(cos0° + isen0°)$ e $C = b(cos\hat{A} + isen\hat{A})$. Usando a interpretação geométrica para a subtração de dois números complexos, realiza-se a subtração de $C - B$: marca-se o ponto $E$ de forma que $E = -B$ e marca-se o ponto $D$ de forma que $ACDE$ seja um paralelogramo, assim, $D = C - B$, como representado na figura 41.

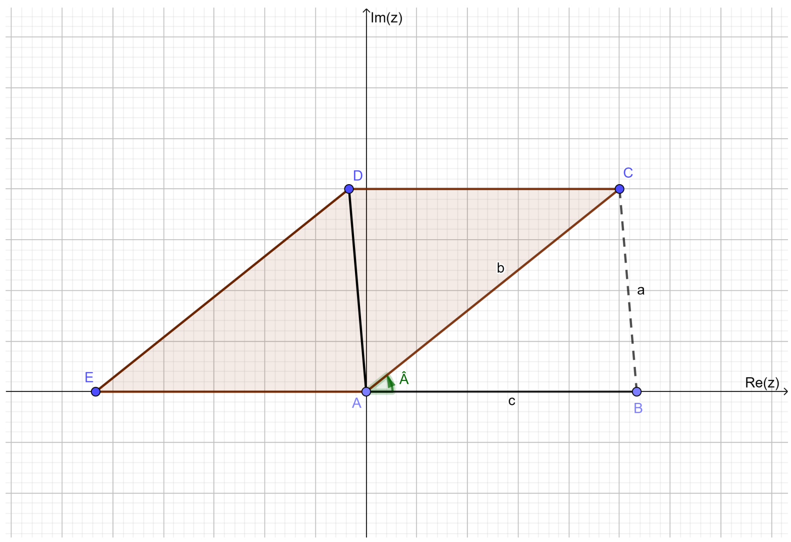


Figura 41 – Interpretação geométrica para subtração de $C - B$

Tem-se, então, $AC = b$ e $AE = c$ (por construção), logo $DC = c$ (lados opostos do paralelogramo possuem mesma medida) e como $AE//DC$, chamando $B\hat{A}C = \hat{A}$ tem-se $A\hat{C}D = \hat{A}$ (ângulos alternos internos), logo, $\triangle ACD \equiv \triangle CAB$ (pelo caso de congruência Lado, Ângulo, Lado) e $AD = a$. Como $AD = a$ e $BC = a$ tem-se:
$AD = BC$
$D - A = C - B$, seja $B\hat{A}D = \beta_1$ então
$a(cos\beta_1 + isen\beta_1) - 0 = b(cos\hat{A} + isen\hat{A}) - c(cos0° + isen0°)$
$a(cos\beta_1 + isen\beta_1) = b(cos\hat{A} + isen\hat{A}) - c$
$acos\beta_1 + iasen\beta_1 = bcos\hat{A} - c + ibsen\hat{A}$ e pela igualdade de números complexos tem-se: $acos\beta_1 = bcos\hat{A} - c$ e $asen\beta_1 = bsen\hat{A}$.
Mas $\beta_1 = \hat{A} + C\hat{A}D = \hat{A} + A\hat{C}B = \beta$ onde $\beta$ é um ângulo externo, relativo ao lado $AB$ do triângulo $ABC$. Observe que, $\beta$ e $\hat{B}$ são ângulos suplementares, ou seja, $sen\beta = sen(180° - \hat{B}) = sen180° \cdot cos\beta - sen\beta \cdot cos180° = -sen\hat{B}(-1) = sen\hat{B}$
então $asen\hat{B} = bsen\hat{A}$
$\dfrac{b}{sen\hat{B}} = \dfrac{a}{sen\hat{A}}$ como pretendido.

Para o restante da igualdade, o caso é análogo.

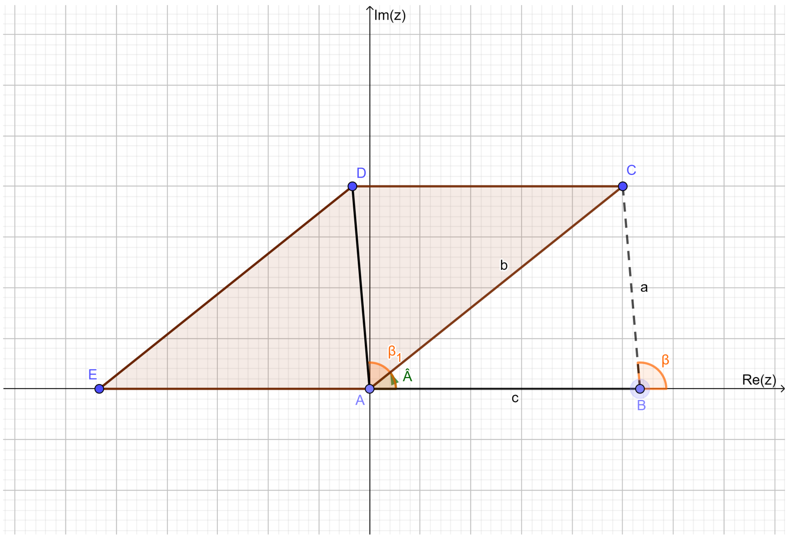


Figura 42 – Desenho para demonstração para lei dos senos

# 4 CONCLUSÃO

Levando-se em conta as atividades propostas que foram apresentadas no terceiro capítulo e o apanhado histórico feito no primeiro capítulo, espera-se que este trabalho leve contribuições ao ensino dos números complexos para o Ensino Médio.

Com o Capítulo 1 (BREVE HISTÓRIA) espera-se ter auxiliado na desconstrução da ideia de que os números complexos surgiram para resolução de equações polinomiais de segundo grau com discriminante negativo, ao apresentar a história por trás desse conjunto de números. Espera-se também exaltar os matemáticos que fizeram parte de todo esse processo, alguns, inclusive, conhecidos por outras contribuições para a ciência.

Com o Capítulo 2 (NÚMEROS COMPLEXOS) deseja-se trazer uma forma clara e simples acerca da definição de números complexos, suas propriedades, suas diferentes formas e representações para que se tenha ofertado ao leitor condições de resolver operações com esse conjunto de número em todas as suas formas, bem como representá-lo geometricamente.

Com o Capítulo 3 (APLICAÇÕES) que elucida sobre o objetivo principal desta dissertação, espera-se ofertar ao professor de Ensino Médio, ou de qualquer outro nível de ensino, aplicações para os números complexos que fujam das comuns, oferecidas nos livros didáticos uma vez que para esse conjunto de números as aplicações, normalmente, estão fora do alcance deste nível de ensino. Situação que torna difícil seu compreendimento total pelos alunos. A ideia é que o aluno tenha aplicações contendo esse conjunto de números para não ser um assunto que foi ensinado apenas porque está presente na ementa ou porque está no livro didático.

Por fim, ao professor em atuação no Ensino Médio fica a sugestão de aplicação das atividades propostas aos alunos quando a eles for levado esse tema. Acredita-se que elas trarão resultados significativos na aprendizagem dos discentes, já que eles terão aplicações simples relacionadas às matérias já vistas no decorrer de sua vida acadêmica.

# Referências

ANDREESCU, Titu; ANDRICA, Dorin.*Complex numbers from A to–Z.*Estados Unidos da América: Birkhauser, 2005. Nenhuma citação no texto.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio - Parte III.* Brasília (DF), 2000. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>, acessado em 20 de maio de 2019. Nenhuma citação no texto.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília (DF), 2007. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>, acessado em 20 de maio de 2019. Nenhuma citação no texto.

CAMATA, José Gleydson. *Análise das raízes complexas de uma equação quadrática e estudo de números complexos no Ensino Médio* . 2015. Dissertação (PROFMAT) - Universidade Federal do Espírito Santo, Espírito Santo. Nenhuma citação no texto.

CARMO, Manfredo Perdigão do. *Trigonometria e números complexos.* Coleção Fundamentos da matemática elementar. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985 Nenhuma citação no texto.

IEZZI, Gelson. et al. Matemática: 3° série, 2° grau. 8. Ed.rev. São Paulo: Atual, 1990 Nenhuma citação no texto.

IEZZI, Gelson. et al. *Matemática: volume único.* 4. Ed. São Paulo: Atual, 2007 Nenhuma citação no texto.

LIMA, Elon Lages. A equação do terceiro grau. *Revista Matemática universitária*, n. 5, p.9-23, 1987. Nenhuma citação no texto.

NETO, Aref Antar. et al. *Números complexos, polinômios, equações algébricas: 2 grau.* São Paulo: Moderna, 1982. Nenhuma citação no texto.

NEVES, Robson Coelho. *Aplicações de Números Complexos em Geometria.* 2014. Dissertação (PROFMAT) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro. Nenhuma citação no texto.

ROSA, Mário Servelli. *Números complexos - "Uma Abordagem Histórica Para Aquisição do Conceito".* 1998. Dissertação (Mestrado em educação matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. Nenhuma citação no texto.

TROTTA, Fernando; IMENES, Luiz Márcio Pereira; JAKUBOVIC, José. *Matemática aplicada: 3,* 2° *grau*. São Paulo: Moderna, 1980. Nenhuma citação no texto.

VIEIRA, Lúcia Helena da Silva. *Epistemologia dos números complexos*.1999. Monografia (Centro de Ciências Físicas e Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. Nenhuma citação no texto.

# APÊNDICE A – Fórmula de Cardano

Qualquer equação do terceiro grau pode ser reduzida a uma equação do tipo:

$$x^3 + px + q = 0 \tag{A.1}$$

Logo, para encontrar uma fórmula geral para a solução de equações do terceiro grau, basta encontrar uma solução dessa equação.

Pode-se dividir $x$ em duas partes. Seja $x = A + B$, Assim:

$$(A+B)^3 + (A+B)p + q = 0$$

Como $x = A + B$ tem-se que:

$$x^3 = (A+B)^3$$

$$x^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$$

$$x^3 = A^3 + B^3 + ABx$$

$$x^3 - 3ABx - (A^3 + B^3) = 0 \tag{A.2}$$

Como A.1 e A.2 são representações diferentes da mesma equação, tem-se:

$$px = -3ABx$$

$$AB = -\frac{p}{3}$$

$$A^3B^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

e

$$q = -(A^3 + B^3)$$

$$-q = A^3 + B^3$$

Assim, a soma $A^3 + B^3$ e o produto $A^3B^3$ são conhecidos. Isso significa que $A^3$ e $B^3$ são raízes da equação quadrática: $x^2 + qx - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$ e ao aplicar a fórmula resolutiva de equações do segundo grau, tem-se:

$$x = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4(\frac{-p}{3})^3}}{2}$$

$$x = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2 + 4(\frac{p}{3})^3}{4}}$$

$$x = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$x = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Logo:

$$A^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{e} \quad B^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Como $x = A + B$, a solução para A.1 é:

$$\boxed{x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}} \tag{A.3}$$

A equação (A.3) é conhecida como **Fórmula de Cardano**.

# APÊNDICE B – Raízes de $x^3 - 15x - 4 = 0$

Aplicando a fórmula de Cardano para $p = -15$ e $q = -4$ encontra-se:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

ou seja,

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$$

Seja $z = 2 + 11i$ e $z_1 = 2 - 11i$, é necessário encontrar as raízes cúbicas de $z$ e de $z_1$. Resolvendo tem-se $z_1$ como o conjugado de $z$: $\rho_z = \rho_{z_1} = \sqrt{2^2 + 11^2} = \sqrt{125}$, sendo $\theta$ o argumento de $z$ e $\theta_1$ o argumento de $z_1$: $\theta_1 = -\theta$. E $sen\theta = \frac{11}{\sqrt{125}}$ e $cos\theta = \frac{2}{\sqrt{125}}$ logo $\theta \approx 80°$. Assim, $z$ e $z_1$ em suas formas trigonométricas são:

$$z = \sqrt{125}(cos80° + isen80°)$$

e

$$z_1 = \sqrt{125}(cos\theta_1 + isen\theta_1) = \sqrt{125}[cos(-\theta) + isen(-\theta)] = \sqrt{125}(cos80° - isen80°)$$

e pela $2^a$ fórmula de Moivre:

Seja $z = \omega^3$ tem-se $\omega_k = \sqrt[3]{\sqrt{125}}\left[cos\left(\frac{80° + 360°k}{3}\right) + isen\left(\frac{80° + 360°k}{3}\right)\right]$.
Seja $z_1 = \gamma^3$ tem-se $\gamma_k = \sqrt[3]{\sqrt{125}}\left[cos\left(\frac{80° + 360°k}{3}\right) - isen\left(\frac{80° + 360°k}{3}\right)\right]$.

Ao fazer os cálculos para as raízes, encontra-se:

$$\omega_0 = \sqrt{5}\left[cos\left(\frac{80°}{3}\right) + isen\left(\frac{80°}{3}\right)\right]$$

$$\omega_1 = \sqrt{5}\left[cos\left(\frac{80°}{3} + 120°\right) + isen\left(\frac{80°}{3} + 120°\right)\right]$$

$$\omega_2 = \sqrt{5}\left[cos\left(\frac{80°}{3} + 240°\right) + isen\left(\frac{80°}{3} + 240°\right)\right]$$

e

$$\gamma_0 = \sqrt{5}\left[cos\left(\frac{80°}{3}\right) - isen\left(\frac{80°}{3}\right)\right]$$

$$\gamma_1 = \sqrt{5}\left[cos\left(\frac{80°}{3} + 120°\right) - isen\left(\frac{80°}{3} + 120°\right)\right]$$

$$\gamma_2 = \sqrt{5}\left[cos\left(\frac{80°}{3} + 240°\right) - isen\left(\frac{80°}{3} + 240°\right)\right]$$

Dessa forma, as raízes de $\omega$ e de $\gamma$ fornece 9 valores diferentes como solução de $x$. A solução da equação dada está contida nesse conjunto, mas nem todos os valores encontrados são solução para a equação. Isso se dá porque a forma de resolução pela fórmula de Cardano permite encontrar os valores de $A^3$ e de $B^3$, não de $A$ e de $B$, sendo assim, deve-se verificar quais valores de $A$ e $B$ que formam a solução.

**Teorema**: *Se um número complexo $z = a + bi$ com $b \neq 0$ é raiz de uma equação com coeficientes reais, então, seu conjugado $\bar{z} = a - bi$ também é raiz dessa equação.*

De acordo com o teorema acima, tem-se que as soluções possíveis para a equação dada são as que se apresentam na forma de um número complexo e seu conjugado.

Sendo assim, tem-se como soluções possíveis:

$$x_1 = \omega_0 + \gamma_0 = \sqrt{5}\left[2cos\left(\frac{80^\circ}{3}\right)\right] = 4$$

$$\begin{aligned} x_2 = \omega_1 + \gamma_1 &= \sqrt{5}\left[2cos\left(\tfrac{80^\circ}{3} + 120^\circ\right)\right] \\ &= \sqrt{5}\left[cos\left(\frac{80^\circ}{3}\right)cos120^\circ - sen\left(\frac{80^\circ}{3}\right)sen120^\circ\right] \\ &= \sqrt{5}\left[-cos\left(\frac{80^\circ}{3}\right) - \sqrt{3}sen\left(\frac{80^\circ}{3}\right)\right] = -2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 = \omega_2 + \gamma_2 &= \sqrt{5}\left[2cos\left(\tfrac{80^\circ}{3} + 240^\circ\right)\right] \\ &= \sqrt{5}\left[cos\left(\frac{80^\circ}{3}\right)cos240^\circ - sen\left(\frac{80^\circ}{3}\right)sen240^\circ\right] \\ &= \sqrt{5}\left[-cos\left(\frac{80^\circ}{3}\right) + \sqrt{3}sen\left(\frac{80^\circ}{3}\right)\right] = -2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

As outras 6 combinações possíveis entre $\omega$ e $\gamma$ não representam soluções da equação pois não se apresentam como um número complexo e seu conjugado.