UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - UFES
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ALINE FUZARO LOPES MEZADRI

FUNÇÃO CAÓTICA NA LINGUAGEM DE ENSINO MÉDIO

VITÓRIA - ESPÍRITO SANTO
SETEMBRO DE 2019

ALINE FUZARO LOPES MEZADRI

FUNÇÃO CAÓTICA NA LINGUAGEM DE ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFES como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva

VITÓRIA - ESPÍRITO SANTO
SETEMBRO DE 2019

FUNÇÃO CAÓTICA NA LINGUAGEM DE ENSINO MÉDIO

Aline Fuzaro Lopes Mezadri

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFES como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 26 de setembro de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Domingos Sávio Valério da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Prof. Dr. Moacir Rosado Filho
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Profa. Dra. Claudia Alessandra Costa de Araújo Lorenzoni
Instituto Federal do Espírito Santo - IFES

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me sustentar até aqui.

Agradeço a minha mãe, Elizabeth, que sempre foi pai e mãe e nunca mediu esforços para me ajudar; meu porto seguro de sempre e para sempre.

Ao meu marido, Walber, pela paciência, compreensão, companheirismo e amor, dedicados a mim nesses 13 anos juntos. Obrigada por não desistir da gente!

A todos os familiares que, de alguma forma, me ajudaram a concluir esse sonho. Tia Norma, Mayra, André, obrigada por me ajudarem, tomando conta da Liz. Tia Fátima, tio Zezinho e Sylvia, obrigada pela hospedagem, caronas e carinho. Sem vocês, eu jamais teria conseguido.

Aos amigos que fiz nesse jornada, em especial à Clariana, que me acolheu em sua casa diversas vezes, que estudou comigo incansáveis dias e que lutou junto até o final.

Agradeço, também, a todos os meus professores que sempre foram muito solícitos e, dentro do possível, sempre estiveram juntos a mim, me aturando em um monte de dúvidas. Em especial, ao meu orientador, pela paciência dedicada.

Aos meus colegas de profissão e aos meus chefes, que me compreenderam e, muitas vezes, trocaram horários para cobrirem minha ausência.

Por fim, e talvez a grande motivadora disso tudo, minha filha, Liz. Meu bem maior, tudo o que faço é para você! Desculpa toda ausência nesses dois anos.

RESUMO

A presente pesquisa visa propor uma apresentação do que é função caótica numa linguagem acessível aos alunos do ensino médio. A Base Nacional Curricular Comum (BNCC) do Ensino Médio, aprovada em 4 de dezembro de 2018, afirma que, dentre algumas competências que os alunos necessitam desenvolver ao longo da vida escolar, está a de saber manipular conceitos e procedimentos matemáticos, trazendo a matemática para aplicações mais próximas da realidade. Tendo por base que algumas funções são utópicas e que dificilmente encontrar-se-ia na prática, decidiu-se, então, apresentar para professores do ensino médio, um tipo de função que vem sendo cada dia mais utilizada, desde a quantificação de poluentes no ar à em estabilidade de plataformas petrolíferas e até mesmo em estudos de problemas cardíacos, a função caótica.

Palavras-chaves: Ensino Médio. Teoria do Caos. Edward Lorenz. Representações de quantidades. Sistema binário. Função caótica. Relação presa-predador.

ABSTRACT

This research has the purpose to present what is chaotic function in a language accessible to high school students. The National Common Curriculum Base "Base Nacional Curricular Comum" (BNCC) of High School, approved on December 4, 2018, states that, among some skills that students need to develop throughout school life, it is manipulating mathematical concepts and procedures, bringing mathematics for applications closer to reality. Based on the fact that, some functions are utopian and that hardly ever would be found in practice, it was decided to present to high school teachers a type of function that has been increasingly used since the quantification of pollutants in the air, as in stability of oil rigs and even in studies of heart problems, the chaotic function.

Keywords: High School. Chaos Theory. Edward Lorenz. Quantity Representations. Binary System. Chaotic Function. Predator-Prey Relationship.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIAÇÕES E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Curricular Comum

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais incluindo o zero
$\mathbb{N}^*$	Conjunto dos Números Naturais excluindo o zero
$\subset$	Está contido
$\in$	Pertence
$>$	Maior do que
$<$	Menor do que
$\geq$	Maior do que ou igual
$\leq$	Menor do que ou igual

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

De acordo com PESSANHA (1999), em [21], Demócrito (460-370 a.C.) sugeria que tudo o que existia era constituído por infinitos átomos de diversos formatos, movendo-se ao acaso e se chocando. Sensações como frio e calor, ou estados da matéria – sólido, líquido e gasoso – são provenientes das agitações moleculares. Assim, de certo modo, pode-se pensar que tudo está em movimento.

Desde a antiguidade, na época dos *Pré-Socráticos*, vários filósofos perceberam tais movimentos e tentaram explicá-los.

Segundo NICOLA (2005), em [20], Heráclito de Éfeso (cerca de 540-480 a.C.) foi um filósofo que tinha a necessidade de entender a essência do mundo, que diante do problema de se o mundo é estável ou está suscetível a alguma transformação, conclui que tudo flui e nada permanece.

> *Provavelmente, foi ao refletir sobre a própria existência que ele elaborou sua doutrina mais conhecida, que pode ser resumida na fórmula pánta rheî: "tudo flui". De fato,* ***Heráclito permaneceu na história como o filósofo do devir****, mas a crítica contemporânea já demonstrou que essa interpretação é redutiva: sob as aparências mais mutáveis, ele entrevê uma lei, um princípio unitário. Essa lei de interdependência dos contrários, segundo o qual cada par de opostos forma uma indivisível unidade, é o Logos, a razão que governa todas as coisas.*(NICOLA, 2005, em [20], p. 17)

Segundo ABRÃO (2004), em [1], Parmênides (c.540-450 a.C.), de maneira oposta a Heráclito, buscou extinguir tudo que era variável, e Zenão, seu discípulo, movido pelo extremismo, acreditava que o movimento não existia.

> *Uma flecha, para atingir o alvo, ocupa a cada momento da trajetória um espaço igual a si mesma. Ou seja: a cada momento ela está parada. O movimento da flecha seria a soma de momentos em que está imóvel, o que é absurdo. O movimento é assim uma ilusão, ..."* (ABRÃO, 2004, em [1], p. 33)

Conforme PESSANHA (1999), em [21], Aristóteles (384-322 a.C.) buscou um equilíbrio entre as ideias de Heráclito e Parmênides, criando uma correspondência entre o que é e o que pode ser.

> *"...: ser não é apenas o que já existe,* ***em ato****; ser é também o que pode ser, a virtualidades, a potência. Assim, sem contrariar nenhum princípio lógico, poder-se-ia compreender que a substância apresentasse, num dado momento, certas características, e noutra ocasião manifestasse características diferentes: [...]. E essa passagem da potência ao ato é o que constitui, segundo a teoria de Aristóteles, o movimento."* (PESSANHA, 1999, em [21], p. 23)

A partir desses indícios, pode-se concluir que, durante anos, pessoas observaram os movimentos e intentaram prevê-los.

> *Devemos, portanto, considerar o estado presente do universo como o efeito de seu estado anterior e como a causa daquele que seguirá [...] Uma inteligência que, para um instante dado, conhecesse todas as forças das quais está animada a natureza e a situação respectiva dos seres que a compõem, se de outro modo ela fosse suficientemente vasta para submeter esses dados à análise, abraçaria na mesma fórmula os movimentos dos maiores corpos do universo e aqueles do mais leve átomo: nada seria incerto para ela, e o futuro, tal como o passado, estaria presente a seus olhos.* (LAPLACE, 1812; 1814, em [12] e [13], p. vi-vii)

Aristóteles tentou, ainda, estudar o clima e previsioná-lo, segundo SOUZA, em [24].

> *"Era úmida, no princípio, toda a região em volta da terra. Ao ser ressecada pelo sol, a parte em evaporação origina os ventos e as revoluções do sol e da lua; o que sobra é mar. Pensam, portanto, que o mar se torna menor por estar secando e, finalmente, um dia secará de todo."* (SOUZA, 1999, em [24], p. 49)

A ânsia de previsionar o tempo está, até hoje, entranhada na sociedade, na busca incessante por determinar o futuro, baseando-se nas informações atuais.

No entanto, quando se passa a observar o movimento atmosférico, nota-se que ele é mais complexo do que o movimento dos astros, devido à quantidade de variáveis envolvidas no processo.

> *Denominamos clima à série de estados atmosféricos sobre determinado lugar em sua sucessão habitual. Cada um desses estados caracteriza-se pelas suas propriedades dinâmicas e estáticas da coluna atmosférica, composição química, pressão, tensão dos gases, temperatura, grau de saturação, comportamento quanto aos raios solares, poeiras ou matérias orgânicas em suspensão, estado do campo elétrico, velocidade de deslocamento das moléculas, etc.* (SORRE, 2006, em [23], p. 90)

É quase irrealizável operacionar com tantos números e, em algumas situações, com números muitos grandes, ou mesmo irracionais. Para efetuar os cálculos, em vários momentos, é preciso fazer aproximações.

O problema é que tais aproximações, podem, por vezes, gerar resultados bem distantes do esperado.

A presente pesquisa foi dividida em sete capítulos para facilitar o entendimento da construção através de uma linha cronológica e histórica.

O primeiro capítulo traz uma breve introdução sobre a necessidade do homem de previsionar fatos, desde a antiguidade, baseando-se no movimento das coisas.

O segundo capítulo faz um breve resumo sobre a vida de Edward Lorenz, seu fascínio por previsões climáticas e como isso tudo deu origem à descoberta da Teoria do Caos, também conhecida como Efeito Borboleta.

No terceiro capítulo, faz-se um resumo histórico sobre as diversas representações numéricas, mostrando que alguns povos, dependendo da necessidade, já faziam uso de bases de contagens distintas da decimal. O capítulo tem a intenção de mostrar que os dígitos utilizados são apenas símbolos que se conveniaram ao longo do tempo, e que no fundo, o que importa é a quantidade que eles representam.

O quarto capítulo apresenta a formação dos sistemas de numerações em bases arbitrárias, bem como suas operações básicas. Esse capítulo dá base para o quinto capítulo, visto que haverá necessidade de cálculos em base binária.

O quinto capítulo apresenta uma função unidimensional que possui uma sensibilidade ao valor inicial, onde pequenas alterações dos valores iniciais, decorrentes da necessidade de arredondamento, por exemplo, causam resultados bem distintos ao longo do tempo. A função apresenta, também, órbita periódica com qualquer período e uma órbita densa em um dado intervalo, características necessárias para a função ser denominada caótica, e o capítulo visa demonstrar todas as características em base binária.

Finalmente, o sexto capítulo é destinado à aplicação do caos de maneira empírica, através do levantamento de hipóteses, investigação dos fatos e conclusão, com uma proposta de utilização de um software para auxiliar na plotagem dos gráficos.

2 A TEORIA DO CAOS

Edward Norton Lorenz nasceu em 1917, na cidade de West Hartford, Connecticut, Estados Unidos.

De acordo com EMANUEL (2008), em [6], ainda jovem, Lorenz demonstrava um grande fascínio por números, bem como, por mudanças climáticas. Na vida adulta, conseguiu concretizar as duas coisas, graduando-se, inicialmente, em Matemática pela Universidade de Harvard e, aos 23 anos, se pós-graduando no Massachusetts Institute of Technology (MIT), em Meteorologia. Na mesma época, o mundo acompanhava de perto o início da Segunda Guerra Mundial e Lorenz conquistou uma vaga no Corpo Aéreo do Exército dos Estados Unidos. Na ocasião, pôde trabalhar em sua segunda paixão, atuando como meteorologista.

"Depois da guerra, ele estudou meteorologia no MIT, fazendo doutorado em 1948 e depois se juntando à faculdade do departamento de meteorologia de lá." (EMANUEL, 2008, em [6], p. 1025, tradução do autor).[1]

Conforme GLEICK, em seu livro *Caos: a criação de uma nova ciência*, publicado em 1989, o departamento de meteorologia do MIT introduzia uma proposta de previsão estatística do tempo. Juntar números e condições climáticas, estava aí tudo que Lorenz mais desejava. Surge, então, uma vaga no departamento, e Edward torna-se chefe do projeto de pesquisa.

Segundo GLEICK (1989), em [9], em um dia de sol escaldante e um céu sem nuvens, os ventos dispersavam uma terra fininha e o outono não dava oportunidade para o inverno se instalar.

> *Pela janela, Lorenz via o tempo que realmente fazia do lado de fora, a cerração de princípio de manhã arrastando-se pelo campus do Instituto de Tecnologia de Massachusetts, ou as nuvens baixas deslizando sobre os telhados, vindas do Atlântico. Cerração e nuvens nunca surgiam no modelo do seu computador.* (GLEICK, 1989, em [9], p. 9)

De acordo com GLEICK (1989), em [9], Lorenz não estava contente com os resultados obtidos a partir das equações lineares (ou seja, equações da forma $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+...+a_nx_n = b$, onde os elementos $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ são coeficientes das incógnitas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ e o termo b é o termo independente) previamente estabelecidas e, em 1956, aconselhado por um colega de trabalho, decide tentar previsionar o tempo baseando-se em equações não-lineares. Debruçado sobre seus projetos, cria uma modelagem com 14 variáveis, que mais tarde se reduziria a 12, com o intuito de reproduzir os movimentos das correntes de ar.

---

1 "After the war, he studied meteorology at MIT, earning a doctorate in 1948 and then joining the faculty of the meteorology department there.

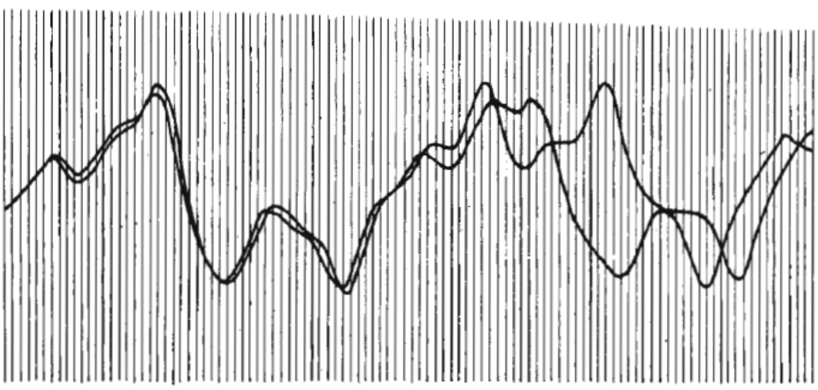
Ainda segundo GLEICK (1989), em [9], devido à quantidade de variáveis, se fez necessária a utilização de um computador. Na época, Lorenz utilizava um Royal McBee LGP-30, um computador primitivo, com baixa capacidade computacional. Mesmo assim, em 1960, conseguiu desenvolver uma simulação de tempo atmosférico que fascinou seus colegas. A todo minuto a máquina imprimia uma sequência numérica. Tais minutos representavam a passagem dos dias e tais sequências mostravam as passagens dos ventos para norte, sul, leste ou oeste.

> *[...] linha por linha, os ventos e as temperaturas dos resultados impressos pelo seu computador pareciam comportar-se de uma maneira terrena reconhecível. Eles correspondiam à sua querida intuição sobre o tempo [...] e disse: "É esse o tipo de regra que um meteorologista pode usar."Mas as repetições nunca eram perfeitamente iguais. Havia um padrão, com alterações. Uma desordem ordenada. (GLEICK, 1989, em [9], p. 13)*

GLEICK (1989), em [9], afirma que, em uma de suas simulações computacionais, em 1961, com o intuito de examinar minuciosamente um dado resultado, Lorenz resolveu refazer alguns cálculos. No propósito de agilizar as coisas, ao invés de refazer a sequência inteira, decidiu começar pelo meio. Na memória do computador estava armazenado o número 0,506127 mas, no entanto, informou as condições iniciais diretamente na impressora, digitando apenas 0,506, e saiu para dar uma volta pelos corredores da universidade, tomar um café e fugir um pouco do barulho constante que a impressão emitia. Quando retornou, constatou algo surpreendente. A pequena alteração, que deveria ter causado uma mudança mínima no resultado, mantendo-o em sua forma geral, foi tão modificada que, em poucos meses, a análise dos dois resultados não teria nenhuma semelhança.

A figura abaixo é resultante das variações das aproximações das casas decimais.

Figura 1: Como os dois padrões de tempo divergiram.



Fonte: GLEICK, 1989, em [9], p. 22

Conforme GLEICK (1989), em [9], Lorenz passa, então, a analisar mais resultados para tentar entender como que duas sequências de tempo, relativamente idênticas, geravam resultados tão divergentes.

> *Sua atenção voltou-se cada vez mais para a matemática de sistemas que nunca encontravam um regime estacionário, sistemas que quase se repetiam, mas nunca exatamente. [...] Lorenz viu que devia haver um elo entre a recusa do tempo em repetir-se e a incapacidade dos meteorologistas de prevê-lo - um elo entre aperiodicidade e imprevisibilidade.* (GLEICK, 1989, em [9], p. 19-20)

Segundo GLEICK (1989), em [9], na tentativa de simplificar suas equações de previsão do tempo, Lorenz as modifica, deixando-as, de certo modo, pouco realistas e bem diferentes da original. A figura abaixo mostra o sistema utilizado por Lorenz, com variáveis x, y e z, e um parâmetro a.

$$\frac{dx}{dt} = \rho(y - x)$$

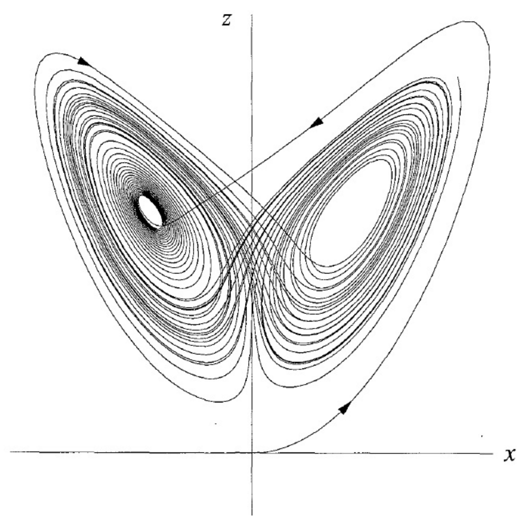
$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

> *"Três equações, com três variáveis, descreviam totalmente o movimento desse sistema. O computador de Lorenz imprimiu os valores instáveis das três variáveis: 0-10-0; 4-12-0; 9-20-0; 16-36-2; [...]. Os três números subiam e desciam enquanto intervalos imaginários de tempo passavam, cinco intervalos, cem intervalos, mil."* (GLEICK, 1989, em [9], p. 26)

A solução de tal sistema de equação, quando projetada no plano xz, gera uma figura semelhante às asas de uma borboleta, conforme figura abaixo. Explica-se, então, o motivo do nome Efeito Borboleta.

Figura 2: Atrator de Lorenz.



Fonte: STROGATZ, 1994, em [25], p. 328

Em 1972, Lorenz expõe um artigo intitulado *Predictability; Does the flap of Butterfly's wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?*[2]. Segundo LORENZ (1972), em [16], o intuito do mesmo era mostrar que pequenos fatores podem aumentar, em curto espaço de tempo, mudando significativamente o resultado. Logo, previsão de tempo para períodos longos continuaria sendo algo inacessível, visto que as observações são falhas e os arredondamentos, inevitáveis.

O que Lorenz descobrira era um modelo matemático sensível ao valor inicial.

Segundo GLEICK (1989), em [9], a intenção da Teoria do Caos é revelar como acontecem os fenômenos não previsíveis, ou seja, aqueles que possuem como característica a incapacidade de calcular resultados futuros porque sofreram pequenas alterações em seus valores iniciais.

Certamente, Lorenz não foi o primeiro a perceber que determinados modelos matemáticos possuem características caóticas.

De acordo com STROGATZ (1994), em [25], Poincaré foi a primeira pessoa a vislumbrar a possibilidade do caos com modelagens que apresentam comportamento aperiódico que dependem das condições iniciais, impossibilitando a previsão a longo prazo.

> *Pegue dois recipientes, um com gás sob alguma pressão e outro vazio. Conecte os dois recipientes por meio de um tubo que deixa o gás se deslocar livremente entre eles. Rapidamente, o gás se propagará, até os dois recipientes terem metade da pressão inicial. [...]: as moléculas do gás vão ricochetear ao acaso umas nas outras, como bolhas num bule de água fervendo, de modo que, ao longo do tempo, cada molécula se verá, por um tempo, de volta ao recipiente em que começou. Henri Poincaré demonstrou isso [...].* (MAZUR, 2016, em [19], p. 116-117)

É notável a impossibilidade de determinar todas as posições de todas as moléculas em todos os instantes.

Diversos estudos conseguiram correlacionar a Teoria do Caos com problemas cotidianos, como estabilidades em plataformas petrolíferas, doenças coronarianas, concentração de poluentes no ar, mercado financeiro, crescimento populacional, entre outros, segundo ADDISON (1997, em [2], p. 170-171).

[2] Previsibilidade: o bater de asas de uma borboleta no Brasil desencadearia um tornado no Texas?

3 OS NÚMEROS E SUAS REPRESENTAÇÕES

Seria impossível pensar o mundo atual sem números. Cálculo de medicações, saldo em conta bancária, venda de objetos, velocidade, são alguns exemplos de que as pessoas necessitam diariamente quantificar as coisas.

A proposta deste capítulo é mostrar que as quantidades já foram representadas por vários símbolos ao longo dos anos e que tudo depende de uma convenção.

Segundo EVES (2011, em [7], p.25) *"É razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer mais e menos quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção ..."*.

Ainda segundo EVES (2011), em [7], naquela época não existia a necessidade de especificar quantidades muito grandes. Quando se fez vital contar em maior valor, utilizaram-se pilhas de pedras ou nós em cordas.

> *Para uma contagem de carneiros, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal. Podia-se também contar fazendo-se ranhuras no barro ou numa pedra, produzindo-se entalhes num pedaço de madeira ou fazendo-se nós numa corda.* (EVES, 2011, em [7], p. 26)

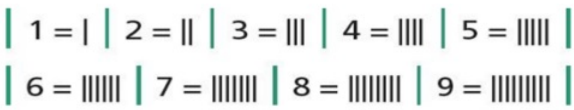
Para LOVO, SOUZA e BARANECK (2016, em [17], p.104), a escrita é um dos alicerces do progresso científico e tecnológico e serve para organizar informações e pensamentos, preservando fatos e conhecimentos.

Conforme LOVO, SOUZA e BARANECK (2016, em [17], p.104), o tempo se encarregou de substituir as antigas maneiras de registrar quantidades por uma escrita simbólica advinda da necessidade de anotar transações comerciais e benefícios obtidos nas guerras.

Quando algumas civilizações começaram a registrar as quantidades que deram origem aos números; passou-se a utilizar o processo de representação pela repetição de traços verticais,..." (LOVO, SOUZA e BARANECK 2016, em [17], p.107).

Assim, a unidade seria representada por um traço vertical, o dois por dois traços verticais, o três por três traços e assim sucessivamente. A figura 3 representa a situação descrita.

Figura 3: Traços verticais para representar quantidade.



Disponível em: https://pt.calameo.com/read/0047553070cd604533825. Acesso em: 10 fev. 2019

De acordo com LOVO, SOUZA e BARANECK (2016, em [17], p.107), conforme as civilizações avançavam, aumentavam-se os valores a serem registrados, e o processo feito através de traços verticais foi tornando-se inviável.

Para LOVO, SOUZA e BARANECK (2016, em [17], p.107-108), registros arqueológicos mostram que cada civilização que formou seu próprio sistema de numeração, criou, também, símbolos e regras que os relacionam.

A seguir, expor-se-á algumas civilizações e suas contribuições para a formação do sistema utilizado nos dias atuais.

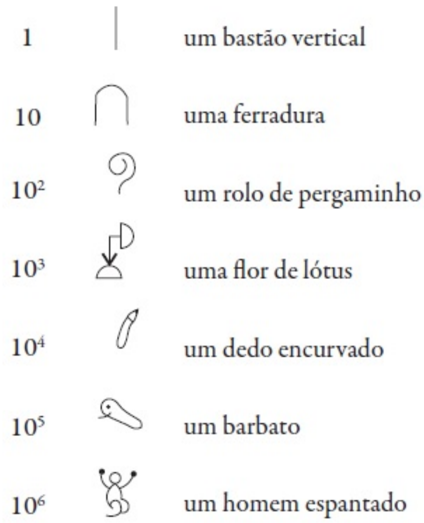
3.1 SISTEMA EGÍPCIO

Segundo BERLINGOFF e GOUVÊA (2012, em [3], p. 65) *"..., a antiga civilização egípcia melhorou o sistema de marcação escolhendo mais alguns símbolos para os números [...]. Os números eram "hieroglíficos", isto é, eram pequenos desenhos de coisas comuns (ou não tão comuns)".*

> *Talvez o mais antigo tipo de sistema de numeração a se desenvolver tenha sido aquele chamado sistema de agrupamentos simples. Nessa modalidade de sistema escolhe-se um número b como base e adotam-se símbolos para* $1, b, b^2, b^3$*, etc.* (EVES, 2011, em [7], p.30)

De acordo com EVES (2011), em [7], os egípcios reproduziam quantidades de agrupamento simples, representando potências de 10, conforme figura abaixo.

Figura 4: Símbolos utilizados pelos egípcios para representar quantidade.

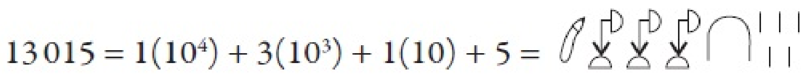


Fonte: EVES, 2011, em [7], p.31

Segundo EVES (2011), em [7], embora a escrita posicional atual seja da esquerda para a direita, para os egípcios era mais habitual escrever da direita para a esquerda e, apesar disso, a escrita era aditiva, visto que o agrupamento símbolos gerava a soma dos valores.

"Assim, qualquer número expressava-se pelo uso desses símbolos aditivamente, repetindo-se cada um deles o número necessário de vezes.", disse EVES (2011, em [7], p. 31).

Figura 5: Representação do número 13015 em símbolos egípcios.



Fonte: EVES, 2011, em [7], p. 31

3.2 SISTEMA MESOPOTÂMICO OU BABILÔNICO

Os registros de números dos babilônicos eram, em alguns aspectos, semelhantes aos dos egípcios. De acordo com EVES (2011), em [7], os babilônios utilizavam apenas dois símbolos (um para representar a quantia 1 e outro para representar a quantia 10) para registrar suas contagens.

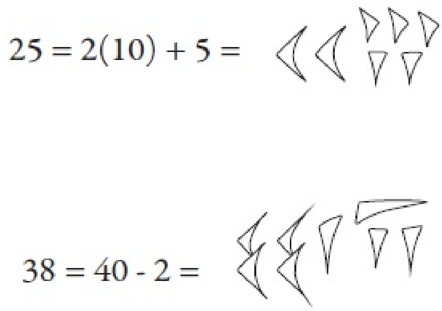
> *As inscrições eram impressas em tábulas de argila úmidas com estilos cujas extremidades podem ter sido triângulos isósceles penetrantes. Inclinando-se ligeiramente o estilo da posição vertical, podia-se pressionar a argila ou com o ângulo do vértice ou com um dos ângulos da base do triângulo, produzindo-se assim duas formas de caracteres assemelhadas a cunhas (cuneiformes).* (EVES, 2011, em [7], p. 31)

Não se sabe, ao certo, o motivo dos babilônicos trabalharem na base 60, mas, segundo DOMINGUES (1991, em [5], p. 4), uma das hipóteses é a de que o número 60 possui vários divisores, possibilitando, assim, as divisões em metades, terças partes, quartas partes, entre outros.

Ainda segundo EVES (2011, em [7], p. 32) *"O símbolo subtrativo e os símbolos para o 1 e o 10 eram, respectivamente:"*

Fonte: EVES, 2011, em [7], p.32

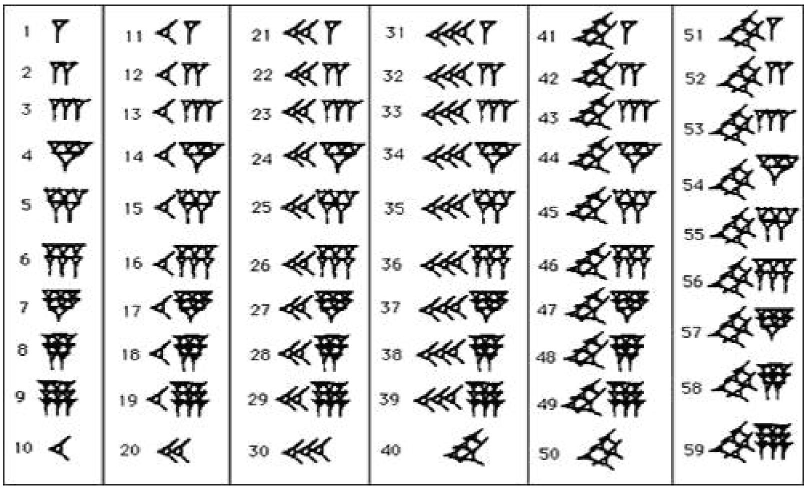
Um exemplo, de acordo com EVES (2011), em [7], do emprego de tais símbolos na representação dos números 25 e 38 se daria da seguinte forma:



Fonte: EVES, 2011, em [7], p.32

A figura abaixo mostra, de forma geral, a simbologia utilizada pelos babilônicos para representar as quantidades de 1 até 60.

Figura 6: Símbolos utilizados pelos babilônicos para representar quantidade.



Disponível em: https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-babilonico.htm. Acesso em: 13 fev. 2019

3.3 SISTEMA ROMANO

De acordo com EVES (2011), em [7], o sistema de numeração utilizado pelos romanos faz uso de 7 letras maiúsculas para representar quantidades, conforme figura abaixo.

Figura 7: Símbolos utilizados pelos romanos para representar quantidade.

Letras	Valores
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

Disponível em: https://brainly.com.br/tarefa/45055. Acesso em: 13 fev. 2019

Conforme EVES (2011), em [7], o sistema romano é não posicional, pois, independente da posição em que se encontra, o símbolo não muda seu valor. Nota-se que as quantias 4 e 6 são representadas de maneiras distintas na escrita de algarismos romanos, IV e VI; no entanto, I significa uma unidade quando V significa cinco unidades, independente da posição que ocupa.

Segundo GONGORRA e SODRÉ (2005, em [10], p. 16), os símbolos romanos obedeciam a três princípios, conforme o quadro a seguir.

Figura 8: Fundamentos do sistema romano.

PRINCÍPIO		EXEMPLOS
1	Todo símbolo numérico que possui valor menor do que o que está à sua esquerda, deve ser somado ao maior.	VI = 5 + 1 = 6 XII = 10 + 1 + 1 = 12 CLIII = 100 + 50 + 3 = 153
2	Todo símbolo numérico que possui valor menor ao que está à sua direita, deve ser subtraído do maior.	IX = 10 - 1 = 9 XL = 50 – 10 = 40 VD = 500 - 5 = 495
3	Todo símbolo numérico com um traço horizontal sobre ele representa milhar e o símbolo numérico que apresenta dois traços sobre ele representa milhão.	$\overline{XII}$ = 12.000 $\overline{\overline{X}}$ = 10.000.000 $\overline{\overline{LII}}$ = 52. 000.000

Disponível em: https://pt.calameo.com/read/0047553070cd604533825. Acesso em: 13 fev. 2019

Atualmente, utiliza-se a escrita romana para numerar capítulos em uma obra, numerar as cenas de uma peça teatral, na nomeação de papas, olimpíadas, congressos, entre outros.

3.4 SISTEMA CHINÊS

Chamado também de híbrido, por possuir as operações de soma e produto, o sistema numérico chinês era representado por escrita ideográfica, ou seja, através de símbolos, os quais são reconhecidos até hoje, tanto pelos chineses, quanto pelos japoneses.

Segundo EVES (2011), em [7], o sistema chinês de numeração é posicional e decimal e está baseado no sistema de agrupamentos multiplicativo de base 10.

"Escritos verticalmente, os símbolos dos dois grupos básicos e o número 5625 são mostrados abaixo." (EVES, 2011, em [7], p. 34)

Figura 9: Sistema chinês de numeração e a representação do número 5625.

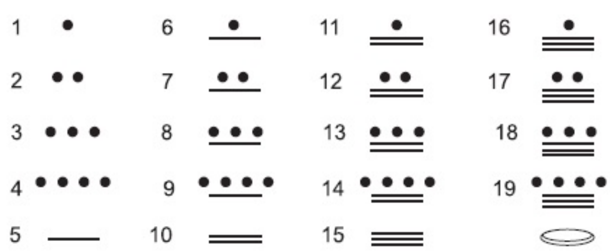
Fonte: EVES, 2011, em [7], p. 34

Apesar de, atualmente, os chineses utilizarem o sistema de numeração indo-arábico, a escrita simbólica também é empregada.

3.5 SISTEMA MAIA

Segundo BERLINGOFF e GOUVÊA (2012), em [3], assim como os outros sistemas já vistos até agora, o sistema maia de numeração era representado por símbolos e, da mesma forma que o sistema babilônico, possuía apenas dois símbolos para representá-lo, um ponto que representava a unidade e um traço que representava a quantia cinco.

Figura 10: Símbolos utilizados pelos maias para representar quantidade.



Fonte: EVES, 2011, em [7], p. 37

De acordo com EVES (2011), em [7], foram nos cálculos maias as primeiras aparições de um símbolo para o zero, com a intenção de enfatizar um valor nulo.

Ainda segundo EVES (2011), em [7], o sistema numérico dos maias era vigesimal, ou seja, na base 20. A argumentação mais plausível para a escolha de tal base é pela reunião dos dedos das mãos e dos pés.

A seguir tem-se um exemplo do número 43487, escrito verticalmente à maneira maia.

Figura 11: Forma que os maias representavam o número 43487

$$43\,487 = 6(18)(20^2) + 0(18)(20) + 14(20) + 7 =$$

Fonte: EVES, 2011, em [7], p. 37

Há resquícios até hoje da influência dos Maias.

> *Óbvios traços deste emprego se discernem no Francês moderno, para oitenta se dizendo "quatre-vingts"(quatro vezes vinte) e o termo "sou"desig-nando a vigésima parte da unidade monetária, isto é, do franco.* (FOMIN, em [8], 1980, p. 10-11)

3.6 SISTEMA INDO-ARÁBICO

De acordo com EVES (2011), em [7], os hindus desenvolveram um sistema de numeração que mesclava as diferentes propriedades dos antigos sistemas. Eles manipulavam dez símbolos, representando os valores de 0 até 9, ou seja, tratava-se de um sistema decimal, e, ainda, um mesmo símbolo poderia registrar quantias distintas, dependendo do local ocupado por ele na escrita, ou seja, era posicional.

Ainda segundo EVES (2011), em [7], os árabes foram responsáveis pela disseminação desse sistema para a Europa Ocidental, motivo pelo qual o sistema recebeu o nome de indo-arábico.

> *Até que os símbolos dos numerais indo-arábicos se estabilizassem, com a invenção da imprensa de tipos móveis, muitas modificações em sua grafia se verificaram. Nossa palavra zero provavelmente provém da forma latinizada zephirum derivada de sifr que é uma tradução para o árabe de sunya, que em hindu significa "vazio" ou "vácuo".* (EVES, 2011, em [7], p. 40-41)

A figura a seguir mostra uma ideia da evolução da escrita no decorrer do tempo.

Figura 12: Evolução dos símbolos indo-arábicos.

Disponível em: https://www.todamateria.com.br/sistema-de-numeracao-decimal/. Acesso em: 14 fev. 2019

4 OS NÚMEROS REAIS EM BASES ARBITRÁRIAS

Sabe-se que, a nível de ensino médio, apesar de se estudar o conjunto dos números complexos, tem-se uma predominância de teorias e atividades acerca dos números reais.

Para uma boa compreensão do que será apresentado no próximo capítulo, faz-se necessária a enunciação e demonstração de alguns teoremas e proposições que envolvem os números reais em bases arbitrárias, ou seja, independente da base que está sendo utilizada.

A proposta deste capítulo é mostrar como os números estão convencionados na escrita de bases arbitrárias.

É interessante observar que o número 7, por exemplo, que se utiliza constantemente, nada mais é do que um símbolo que expressa uma quantidade, e que, essa mesma quantidade, tem vários outros símbolos que o representam. Assim, a quantia sete poderá ser desenhada de várias maneiras, de acordo com a base que foi escolhida para escrevê-la.

Atualmente, o sistema utilizado para a representação dos números naturais é o sistema decimal posicional, mas, como se viu, nem sempre foi assim.

Esse sistema baseia-se em um teorema proveniente de sucessivas aplicações da divisão euclidiana. Antes de demonstrá-lo, é relevante enunciar o Princípio da Boa Ordenação e o Algoritmo Geral da Divisão.

Convém, também, definir $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ o conjunto dos números naturais iniciando no zero, como é apresentado por quase todos os autores de livros do ensino médio e por $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

Princípio da Boa Ordenação: Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui menor elemento.

Teorema 4.1 (Algoritmo Geral da Divisão)**.** *Se a e b são dois números inteiros, com $b > 0$, então existem e são únicos os inteiros q e r que satisfazem às condições: $a = bq + r$ e $0 \leq r < b$.*

A demonstração do Teorema (Algoritmo Geral da Divisão) encontra-se no Apêndice.

Voltando ao sistema de numeração posicional, pode-se afirmar o seguinte teorema:

Teorema 4.2. *Dados os números inteiros a e b, com $a > 0$ e $b > 1$, existem números inteiros $n \geq 0$ e $0 \leq r_0, r_1, ..., r_{n-1}, r_n < b$, com $r_n \neq 0$, univocamente determinados, tais que*

$$a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + ... + r_{n-1} b^{n-1} + r_n b^n.$$

Demonstração. Por hipótese, $a > 0$ e $b > 1$, mas nada se pode afirmar se a é maior, menor ou até mesmo igual a b. Portanto, a demonstração será novamente dividida em 2 partes: $0 < a < b$ ou $a > b$.

Caso 1: se $0 < a < b$

Pela divisão euclidiana, pode-se afirmar que existem q_0 e r_0 inteiros, tais que $a = bq_0 + r_0$, com $0 \leq r_0 < b$. Basta tomar $q_0 = 0$ e $r_0 = a$ e, assim, $a = r_0$.

A unidade da escrita vem do Algoritmo Geral da Divisão.

Caso 2: $a > b$

Novamente, pela divisão euclidiana, existem q_0 e r_0 inteiros, tais que $a = bq_0 + r_0$, com $0 \leq r_0 < b$.

Se $q_0 < b$, tome $q_0 = r_1$. Logo $a = br_1 + r_0$.

Se $q_0 > b$, novamente, pela divisão euclidiana, existem q_1 e r_1 inteiros, tais que $q_0 = bq_1 + r_1$, com $0 \leq r_0, r_1 < b$.

De $a = bq_0 + r_0$ e $q_0 = bq_1 + r_1$, obtém-se:

$$a = b(bq_1 + r_1) + r_0$$
$$a = b^2 q_1 + br_1 + r_0$$

Se $q_1 < b$, tome $q_1 = r_2$. Logo $a = b^2 r_2 + br_1 + r_0$, com $0 \leq r_0, r_1, r_2 < b$.

Se $q_1 > b$, pode-se, mais uma vez, utilizar a divisão euclidiana.

Certamente, esse processo de análise dos $q_{i's}$ será finito, pois $a > q_0 > q_1 > q_2 > ...$ e $q_i \in \mathbb{Z}_+$, para todo i.

Assim, dados números inteiros a e b, com $a > 0$ e $b > 1$, existem números inteiros $n \geq 0$ e $0 \leq r_0, r_1, ..., r_n < b$, com $r_n \neq 0$, univocamente determinados, tais que:

$$a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + ... + r_n b^n.$$

□

A forma representada acima recebe o nome de expansão relativa à base b.

De acordo com HEFEZ (2016), em [11], se $b \leq 10$, utilizam-se os símbolos $0, 1, ..., b-1$ para os $r_0, r_1, ..., r_n$. Caso $b > 10$, costuma-se usar os símbolos de 0 a 9, acrescentando novos símbolos para $10, 11, ..., b-1$.

Por exemplo, o número $2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$ está escrito em expansão de base 10.

Já o número $1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ encontra-se em expansão de base 2.

Geralmente, o número é escrito em ondem decrescente de expoentes, ou seja,

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + ... + r_1 b + r_0,$$

ou ainda, representado, de forma abreviada, como

$$(r_n r_{n-1} ... r_1 r_0)_b.$$

Assim, a forma abreviada do número $2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$ é $(2653)_{10}$, enquanto que a forma abreviada do número $1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (110)_2$.

O sistema decimal é relacionado à expansão decimal, isto é, quando se assume $b = 10$. Logo, qualquer quantia a pode ser representada na base decimal na forma:

$$a = r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + ... + r_1 10 + r_0, \text{ com } 0 \leq r_0, r_1, ..., r_n < 10.$$

Como $r_0, r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z}$, é fácil perceber que existem 10 possibilidades de valores distintos para r_i, com $i = \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Assim, o número $(3679)_{10}$ pode ser representado como:

$$(3679)_{10} = 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 9,$$

onde $r_3 = 3$, $r_2 = 6$, $r_1 = 7$ e $r_0 = 9$.

De maneira análoga, caso $b = 2$, a expansão recebe o nome de binária e fica representada na forma:

$$a = r_n 2^n + r_{n-1} 2^{n-1} + ... + r_1 2 + r_0, \text{ com } 0 \leq r_0, r_1, ..., r_n < 2.$$

Novamente, como $r_0, r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z}$ eles poderão assumir apenas dois valores, o 0 ou o 1.

Portanto, o número $(1000)_2$, representado em sua forma expandida, apresenta-se:

$$(1000)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0$$

onde $r_3 = 1$, $r_2 = 0$, $r_1 = 0$ e $r_0 = 0$.

E como seria a expansão de um número real qualquer?

(LIMA et. al, 2005, em [14], p. 69) *"...uma expressão decimal é um símbolo da forma*

$$\alpha = a_0, a_1a_2a_3...a_n...,$$

onde a_0 é um número inteiro e a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... são dígitos, isto é, números inteiros tais que $0 \leq a_n \leq 9$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se um dígito a_n, chamado o n-ésimo dígito da expressão decimal α. O número natural a_0 chama-se a parte inteira de α."

Pode-se, também, escrever α como uma soma de frações.

$$\alpha = a_0 + \tfrac{a_1}{10} + \tfrac{a_2}{10^2} + \tfrac{a_3}{10^3} + ... + \tfrac{a_n}{10^n} + ...$$

Por exemplo, se $\alpha = (12, 375164)_{10}$, então $a_0 = 12$ e representa a parte inteira, $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 5$, $a_4 = 1$, $a_5 = 6$ $a_6 = 4$ e $a_7 = a_8 = a_9 = ... = a_n = 0$.

No caso do $\alpha = (12, 375164)_{10}$, tem-se:

$$\alpha = 12 + \tfrac{3}{10} + \tfrac{7}{10^2} + \tfrac{5}{10^3} + \tfrac{1}{10^4} + \tfrac{6}{10^5} + \tfrac{4}{10^6}$$

Ou, ainda, escrever α como uma soma de potências de base 10 e expoentes negativos.

$$\alpha = a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + a_3 \cdot 10^{-3} + ... + a_n \cdot 10^{-n} + ...$$

Ainda com relação ao exemplo, tem-se:

$$\alpha = 12 + 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} + 1 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-5} + 4 \cdot 10^{-6}$$

Caso a escolha da representação fosse a base 2, a escrita dos números mostra-se de maneira bastante semelhante.

Por exemplo, o número $(1, 01011)_2$ é uma soma de potências e pode ser expresso como:

$$(1, 01011)_2 = 1 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5}$$

Colocando 2^{-5} em evidência, pode-se escrever:

$$(1, 01011)_2 = 2^{-5}(1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0),$$

ou ainda,

$$(1, 01011)_2 = \tfrac{1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0}{2^5},$$

Segundo HEFEZ (2016, em [11], p. 64) *"A representação binária tem peculiaridades interessantes"*. Uma delas é o Corolário a seguir.

Corolário 4.3. *Todo número natural escreve-se de modo único como soma de potências distintas de 2.*

De fato, basta dividir um número a, arbitrário, por 2, obtendo-se assim, um quociente q_0 e um resto r_0. Em seguida, divide-se o quociente q_0 por 2, conseguindo, então, um quociente q_1 e um resto q_1. Repete-se o processo até encontrar um quociente $q_n = 1$.

Por exemplo, para escrever $a = (76)_{10}$ na forma de soma de potências de 2, basta fatorar o número de tal forma que um dos fatores seja 2.

Assim,

$$(76)_{10} = 38 \cdot 2 + 0$$

então, $q_0 = 38$ e $r_0 = 0$.

Dividindo, agora, $q_0 = 38$ por 2, obtém-se:

$$38 = 19 \cdot 2 + 0$$

sendo $q_1 = 19$ e $r_1 = 0$.

Repetindo o processo até encontrar $q_n = 1$, têm-se:

$$19 = 9 \cdot 2 + 1,$$
$$9 = 4 \cdot 2 + 1,$$
$$4 = 2 \cdot 2 + 0,$$
$$2 = 1 \cdot 2 + 0.$$

Agrupando, assim, as informações adquiridas, têm-se:

$$(76)_{10} = 38 \cdot 2 + 0 \Rightarrow$$
$$(76)_{10} = (19 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 0 \Rightarrow$$
$$(76)_{10} = 19 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 \Rightarrow$$
$$(76)_{10} = (9 \cdot 2 + 1) \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 \Rightarrow$$
$$(76)_{10} = 9 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 \Rightarrow$$
$$(76)_{10} = (4 \cdot 2 + 1) \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 \Rightarrow$$
$$(76)_{10} = 4 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 \Rightarrow$$

$$(76)_{10} = (2 \cdot 2 + 0) \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 \Rightarrow$$

$$(76)_{10} = 2 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 \Rightarrow$$

$$(76)_{10} = (1 \cdot 2 + 0) \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 \Rightarrow$$

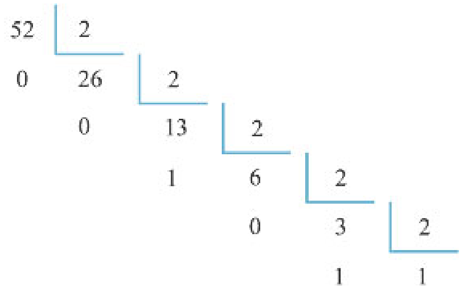
$$(76)_{10} = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0.$$

Dessa forma, $(76)_{10} = (1001100)_2$.

Nota-se que a representação de $(76)_{10}$ na base binária teve os restos, $r_0 = 0$, $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_3 = 1$, $r_4 = 0$ e $r_5 = 0$ escritos em ordem inversa, começando pelo $q_n = 1$, que no caso teve $n = 5$.

Pode-se, então, simplificar tal desenvolvimento utilizando as sucessivas divisões por 2, como na figura abaixo.

Figura 13: Mudança do sistema de numeração.



Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/60/5.htm. Acesso em: 02 jun. 2019

Os restos das divisões sucessivas são, 0, 0, 1, 0, 1, e o último quociente foi q_4=1, que, escritos em ordem inversa seria 1, 1, 0, 1, 0, 0.

Desta forma, o número $(52)_{10}$ é representado por $(110100)_2$.

Como seria, por exemplo, a transformação para a base 8 do número $(4312)_5$?

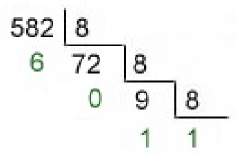
Transforma-se, primeiro, o número $(4312)_5$ para a base decimal.

Assim,

$$(4312)_5 = 4 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 500 + 75 + 5 + 2 = 582$$

Como próxima etapa, transforma-se $(582)_{10}$ para a base 8.

Figura 14: Mudança para base 8.



Disponível em: http://www.matematicamuitofacil.com/naodecimais.html. Acesso em: 08 set. 2019

Lendo o número de trás para frente, e considerando, apenas o último quociente e os demais restos, tem-se a solução:

$$(582)_{10} = (1106)_8 \text{ e, portanto, } (4312)_5 = (1106)_8.$$

Como já é sabido, um número escrito na base 2 nada mais é do que uma soma de potências na base 2, acompanhada de seus respectivos coeficientes, r_0, r_1, r_2, ..., r_n, todos podendo assumir o valor 0 ou 1.

Pensando sobre tal representação, como ficaria o número $(\frac{1}{64})_{10}$ na base 2?

Note que:

$$\frac{1}{64} = \frac{1}{2^6},$$

ou ainda,

$$\frac{1}{64} = 1 \cdot 2^{-6}.$$

Pode-se, então, escrever como soma de potências de base 2.

$$\frac{1}{64} = 0 + 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 0 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6}.$$

Portanto, $(\frac{1}{64})_{10} = (0,000001)_2$.

E o número $(0,10110)_2$ equivale a quanto na base 10?

$$(0,10110)_2 = 0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 0 \cdot 2^{-5} \Rightarrow$$

$$(0,10110)_2 = 0 + \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{0}{2^5} \Rightarrow$$

$$(0,10110)_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \Rightarrow$$

$$(0,10110)_2 = (\frac{11}{16})_{10}.$$

Percebe-se que uma fração em $[0,1)$ na base 10 cujo denominador é uma potência de 2 gerou uma representação binária com uma quantidade finita de casas após a vírgula e vice-versa. Isso não é coincidência.

Proposição 4.1. *Um número racional de [0,1) possui representação finita na base 2 se, e somente se, é da forma $\frac{p}{q}$, sendo que p e q são primos entre si e q é uma potência de 2.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $\frac{p}{q}$ uma fração de [0,1) na forma irredutível com representação decimal na base 2 finita. Então, ela pode ser escrita, como:

$$r_n 2^{-n} + r_{n-1} 2^{-n+1} + ... + r_2 2^{-2} + r_1 2^{-1} + r_0 2^0,$$

onde $r_n \neq 0$ e $r_0 = 0$, pois $\frac{p}{q}$ está em $[0,1)$

Colocando 2^{-n} em evidência, a representação pode ser reescrita

$$2^{-n}(r_n + r_{n-1}2^1 + ... + r_2 2^{n-2} + r_1 2^{n-1})=$$
$$\tfrac{r_n + r_{n-1}2^1 + ... + r_2 2^{n-2} + r_1 2^{n-1}}{2^n}.$$

Assim, como $r_n \neq 0$, não existe divisor comum entre $(r_n + r_{n-1}2^1 + ... + r_2 2^{n-2} + r_1 2^{n-1} + r_0 2^n)$ e (2^n).

Como 2^n contém apenas fator 2 em sua decomposição, então o denominador é uma potência de 2.

($\Leftarrow$) Seja $q = 2^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e p um número inteiro. Logo, p pode ser representado na base binária, como:

$$p = r_m 2^m + r_{m-1} 2^{m-1} + ... + r_1 2 + r_0,$$

com $m \in \mathbb{N}$ e $m < n$, pois $\frac{p}{q} < 1$, visto que está restrito a valores no intervalo $[0,1)$.

Então,

$$\tfrac{p}{q} = \tfrac{r_m 2^m + r_{m-1} 2^{m-1} + ... + r_1 2 + r_0}{2^n},$$

ou ainda:

$$\tfrac{p}{q} = r_m 2^{m-n} + r_{m-1} 2^{m-1-n} + ... + r_1 2^{1-n} + r_0 2^{-n}$$

Como $m < n$, então $m - n < 0$. Assim, $\frac{p}{q}$ tem representação finita.

$\square$

Por exemplo, analisando-se o número $(x = 0,1010101010...)_2$.

Tem-se que x pode ser escrito como uma soma de potências de 2 da seguinte forma:

$$x = (0,1010101010...)_2 \Rightarrow$$
$$x = 0+1\cdot 2^{-1}+0\cdot 2^{-2}+1\cdot 2^{-3}+0\cdot 2^{-4}+1\cdot 2^{-5}+0\cdot 2^{-6}+1\cdot 2^{-7}+0\cdot 2^{-8}+1\cdot 2^{-9}+0\cdot 2^{-10}+...$$

Como qualquer número multiplicado por zero dá sempre zero e a soma com zero não altera o resultado, pode-se reescrever x, como:

$$x = 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-3} + 1\cdot 2^{-5} + 1\cdot 2^{-7} + 1\cdot 2^{-9} + ...$$

Ou ainda, escrevendo x na forma fracionária, tem-se:

$$x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{2^5} + \tfrac{1}{2^7} + \tfrac{1}{2^9} + ...$$

Nota-se, dessa escrita fracionária, que x é o resultado de uma soma de infinitos termos que compõem uma progressão geométrica (sequência numérica onde a razão entre cada termo, a partir do segundo, com seu antecessor, é sempre constante, à qual chama-se razão e denota-se por q), cujo primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e a razão é $q = \frac{1}{2^2}$.

Assim sendo, utilizando-se da fórmula da soma de infinitos termos de uma progressão geométrica, tem-se:

$$S_\infty = \tfrac{a_1}{1-q},$$

onde a_1 é o valor do primeiro termo da sequência e q é a razão.

Então,

$$S_\infty = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^2}} =$$
$$S_\infty = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} =$$
$$S_\infty = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4-1}{4}} =$$
$$S_\infty = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} =$$
$$S_\infty = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} =$$
$$S_\infty = \frac{2}{3}.$$

Percebe-se, com o exemplo, que o número racional $x \in [0,1)$, em sua representação fracionária, possui um denominador que não é uma potência de 2.

Observe, agora, a fração $(\frac{1}{7})_{10}$, cujo denominador não é uma potência de 2.

$$(\tfrac{1}{7})_{10} = \tfrac{1}{8-1} \Rightarrow$$
$$(\tfrac{1}{7})_{10} = \tfrac{1}{2^3-1} \Rightarrow$$

Colocando 2^3 em evidência no denominador, tem-se:

$$(\tfrac{1}{7})_{10} = \tfrac{1}{2^3(1-\frac{1}{2^3})} \Rightarrow$$
$$(\tfrac{1}{7})_{10} = \tfrac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2^3}}$$

Nota-se que $(\frac{1}{7})_{10}$ equivale a uma soma infinita de uma P.G. cujo primeiro termo e a razão valem $\frac{1}{2^3}$.

Portanto,

$$(\tfrac{1}{7})_{10} = \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{2^6} + \tfrac{1}{2^9} + \tfrac{1}{2^{12}} + ... \Rightarrow$$
$$(\tfrac{1}{7})_{10} = (0,001001001...)_2.$$

Exemplo: Encontre a representação de $(\frac{11}{28})_{10}$ na base 2.

Solução:

Percebe-se, a princípio, que

$$(\tfrac{11}{28})_{10} = (\tfrac{7+4}{28})_{10}.$$

Desse fato, pode-se escrever

$$(\tfrac{11}{28})_{10} = (\tfrac{1}{4})_{10} + (\tfrac{1}{7})_{10}.$$

Será analisada, a partir daí, as frações $(\frac{1}{4})_{10}$ e $(\frac{1}{7})_{10}$ separadamente.

A fração $(\frac{1}{4})_{10} = (\frac{1}{2^2})_{10}$, ou seja, $(\frac{1}{4})_{10} = 2^{-2}$.

Logo, conclui-se que

$$(\tfrac{1}{4})_{10} = (0,01)_2$$

.

Analisando-se, agora, a fração $(\frac{1}{7})_{10}$, do exemplo anterior, tem-se que é equivalente a

$$(\tfrac{1}{7})_{10} = (0,001001001...)_2.$$

Como $(\frac{11}{28})_{10} = (\frac{1}{4})_{10} + (\frac{1}{7})_{10}$, então

$$(\tfrac{11}{28})_{10} = (0,01)_2 + (0,001001001...)_2.$$

Portanto,

$$(\tfrac{11}{28})_{10} = (0,011001001...)_2.$$

Verifica-se, pelo exemplo, que uma fração em $[0,1)$ cujo denominador não é uma potência de 2, tem sua representação binária com infinitas casas após a vírgula, e as mesmas mantêm uma periodicidade.

Isso também não é coincidência, ocorre sempre, conforme a proposição abaixo.

Proposição 4.2. *Um número racional de [0,1) possui representação infinita e periódica na base 2 se, e somente se, é da forma* $\frac{p}{q}$*, sendo que* p *e* q *são primos entre si e* q *não é uma potência de 2.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $x \in [0,1)$ na base 2 cuja representação seja infinita e periódica.

Assim, x pode ser representado por $x = (0, a_0a_1a_2...a_ka_{k+1}a_{k+2}...)_2$, onde $a_{i's}$ valem 0 ou 1 e, ainda, $a_k = a_0$, $a_{k+1} = a_1$, $a_{k+2} = a_2$, e assim sucessivamente, até $a_{2k} = a_k$.

Multiplicando-se x por 2^k, tem-se:

$$2^k \cdot x = a_0a_1a_2..., a_{k-1}a_ka_{k+1}a_{k+2}...$$

Nota-se que, tanto o $2^k \cdot x$ quanto o x possuem a mesma representação após a vírgula. Logo, subtraindo-se x de $2^k \cdot x$, toda parte após a vírgula será zerada e tem-se:

$$2^k \cdot x - x = a_0a_1a_2...a_{k-1}$$

$$x(2^k - 1) = a_0a_1a_2...a_{k-1}$$

$$x = \tfrac{a_0a_1a_2...a_{k-1}}{2^k-1}$$

Portanto, x quando representado na forma de fração não tem seu denominador como uma potência de 2, pois, caso $(2^k - 1)$ fosse uma potência de 2, seria verdade que 2 divide $(2^k - 1)$. Como 2 divide (2^k), concluir-se-ia que 2 divide 1, o que é um absurdo.

Logo, $2^k - 1$ não é uma potência de 2.

($\Leftarrow$) Seja x um número racional de [0,1) que pode ser escrito na forma de fração reduzida $\frac{p}{q}$, onde q não é uma potência de 2.

Supondo-se, então $p = p_0 p_1 ... p_k$ e $q = q_0 q_1 ... q_m$ na base 2.

Utilizando a divisão euclidiana, sabemos que os possíveis restos da divisão de p por q são limitados e variam de 0 até $(q_0 q_1 ... q_m) - 1$.

Assim, pode-se afirmar que, certamente os valores dos restos começarão a se repetir, infinitamente, de forma periódica. □

Proposição 4.3. *Um número de [0,1) é irracional se, e somente se, possui representação infinita e não periódica na base 2.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja x um número irracional tal que $x \in [0, 1)$.

Se esse número x tivesse uma representação finita na base 2, então x seria um número racional da forma $\frac{p}{q}$, onde q é uma potência de 2, conforme proposição 4.1. Tem-se, assim, um absurdo, pois, por hipótese, x é irracional.

Se x tivesse uma representação infinita e periódica na base 2, então x seria um número racional da forma $\frac{p}{q}$, onde q não é uma potência de 2, conforme proposição 4.2. Tem-se, novamente, um absurdo, pois, por hipótese, x é irracional.

Portanto, conclui-se que, se x é um número irracional com $x \in [0, 1)$, então sua representação é infinita e não periódica na base 2.

($\Leftarrow$) Seja x um número com representação infinita e não periódica e, supondo-se, por absurdo, que ele possa ser escrito na forma $\frac{p}{q}$.

Têm-se duas possibilidades para q. Ou ele pode ser escrito como uma potência de 2, ou não.

Caso q seja uma potência de 2, $\frac{p}{q}$ terá uma representação finita. Absurdo, pois por hipótese, x tem representação infinita e não periódica.

Caso q não seja uma potência de 2, $\frac{p}{q}$ terá uma representação infinita e periódica. Absurdo novamente, pois x tem representação infinita e não periódica.

Portanto, x não pode assumir a forma fracionária e, consequentemente, é um número irracional.

□

No caso do sistema decimal, ou seja, para base 10, usando argumentos análogos aos usados nas demonstrações das proposições 4.1, 4.2 e 4.3, seguem as seguintes proposições.

Proposição 4.4. *Um número racional de [0,1) possui representação finita na base decimal se, e somente se, é da forma* $\frac{p}{q}$*, sendo que* p *e* q *são primos entre si e os únicos possíveis fatores primos de* q *são 2 e 5.*

Proposição 4.5. *Um número racional de [0,1) possui representação infinita e periódica na base decimal se, e somente se, é da forma* $\frac{p}{q}$*, sendo que* p *e* q *são primos entre si e* q *possui fatores primos diferentes de 2 e 5.*

Proposição 4.6. *Um número de [0,1) é irracional se, e somente se, possui representação infinita e não periódica na base decimal.*

5 UMA FUNÇÃO CAÓTICA

Não é curioso pensar que, em pleno século XXI, com tantos recursos tecnológicos disponíveis, ainda não se consegue prever, com certa antecedência, catástrofes naturais como tsunamis e terremotos?

Estudiosos justificam a não previsibilidade devido a esses fenômenos serem caóticos.

A proposta deste capítulo é apresentar uma função unidimensional e mostrar que ela é caótica para número no intervalo $[0, 1)$ escritos em base 2.

Mas, o que de fato é uma função caótica?

Já foi visto, que nas décadas de 60 e 70, Lorenz executou várias simulações computacionais sobre o clima, utilizando modelagens matemáticas com equações simplificadas. O que ele observou foi uma dinâmica bastante complexa que demonstrava sensibilidade às condições iniciais. A dinâmica de tal comportamento se assemelha à da função $f(x) = 2x - [2x]$, com $x \in \mathbb{R}$, onde $[2x]$ refere-se à parte inteira do número $2x$, quando observada para números positivos, escritos na base 2, menores do que 1.

Em outras palavras, falar que uma função é caótica, ou que possui uma dinâmica caótica, é dizer que tal função possui infinitas órbitas periódicas com qualquer período, possui sensibilidade às condições iniciais e possui uma órbita densa em um intervalo dado. Detalharemos isso nas seções seguintes.

5.1 ÓRBITA PERIÓDICA COM QUALQUER PERÍODO

A dinâmica de uma função, também chamada de passagem do tempo, é a iteração dessa função nos diversos instantes observados, ou seja, é a composição dela com ela mesma, de maneira repetida.

Assim, no instante inicial, tem-se um dado valor $x_0 \in \mathbb{X}$. O cálculo de $f(x_0)$ representa onde x_0 estará no instante 1.

De forma análoga, $f(f(x_0))$ representa o local de x_0 no instante 2, $f(f(f(x_0)))$ será o local de x_0 no instante 3 e, assim, sucessivamente.

Nota-se que a escrita $f(f(...(f(x_0))...))$ não é conveniente em caso de tempos grandes e, portanto, faz-se necessária a notação:

$$f(f(x_0)) = f^2(x_0),\ f(f(f(x_0))) = f^3(x_0), \text{ e } f(f^{n-1}(x_0)) = f^n(x_0), \text{ para } n \geq 1.$$

A análise da evolução do ponto x_0 do tempo gera o conjunto de valores x_0, $f(x_0)$, $f^2(x_0)$, $f^3(x_0), ...$, que recebe o nome de órbita do ponto x_0 pela função f e denota-se por $O(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), ..., f^n(x_0), ...\}$.

A repetição sistemática de valores dentro do conjunto de valores da órbita é chamada ciclo e a quantidade de pontos pertencentes a um ciclo é chamada período.

Exemplo 1.: Considere a função $f : N^* \to N^*$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{se } x \text{ não é múltiplo de 3} \\ \frac{x}{3}, & \text{se } x \text{ é múltiplo de 3} \end{cases}$$

Assim, se tomar $x_0 = 1$, têm-se:

$f(x_0) = f(1) = 3,$

$f^2(x_0) = f(f(x_0)) = f(3) = 1,$

$f^3(x_0) = f(f(f(x_0))) = f(1) = 3,$

$\vdots$

Assim, o conjunto $\{1, 3, 1, 3, ...\}$ é a órbita do ponto 1 pela função $f(x)$ citada acima. Tal órbita tem ciclo de período 2.

Exemplo 2.: Considere a função $f : N^* \to N^*$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \text{x+2, se } x \text{ é primo ou se } x = 1 \\ \text{menor fator primo na decomposição de } x, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim, se tomar $x_0 = 1$, têm-se:

$f(x_0) = f(1) = 3,$

$f^2(x_0) = f(f(x_0)) = f(3) = 5,$

$f^3(x_0) = f(f(f(x_0))) = f(5) = 7,$

$f^4(x_0) = f(f(f(f(x_0)))) = f(7) = 9,$

$f^5(x_0) = f(f(f(f(f(x_0))))) = f(9) = 3,$

$\vdots$

Assim, o conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9, 3, ...\}$ é a órbita do ponto 1 pela função $f(x)$ citada acima. Tal órbita tem período 4.

E se a função observada fosse $f(x) = 2x - [2x]$, com $x \in [0, 1)$ na base 2? O que aconteceria com sua órbita, caso o x fosse um número com representação finita após a vírgula?

Por exemplo, $x_0 = (0, 1101)_2$.

Então,

$$f(x_0) = f(0, 1101) = 2 \cdot (0, 1101) - [2 \cdot (0, 1101)] \Rightarrow$$
$$f(0, 1101) = 1, 101 - 1 \Rightarrow$$
$$f(0, 1101) = 0, 101$$

$$f^2(x_0) = f(0, 101) = 2 \cdot (0, 101) - [2 \cdot (0, 101)] \Rightarrow$$
$$f(0, 101) = 1, 01 - 1 \Rightarrow$$
$$f(0, 101) = 0, 01$$

$$f^3(x_0) = f(0, 01) = 2 \cdot (0, 01) - [2 \cdot (0, 01)] \Rightarrow$$
$$f(0, 01) = 0, 1 - 0 \Rightarrow$$
$$f(0, 01) = 0, 1$$

$$f^4(x_0) = f(0, 1) = 2 \cdot (0, 1) - [2 \cdot (0, 1)] \Rightarrow$$
$$f(0, 1) = 1 - 1 \Rightarrow$$
$$f(0, 1) = 0$$

$$f^5(x_0) = f(0) = 2 \cdot (0) - [2 \cdot (0)] \Rightarrow$$
$$f(0) = 0 - 0 \Rightarrow$$
$$f(0) = 0$$

$$\vdots$$

Assim, a órbita do ponto $x_0 = (0, 1101)_2$ pela função $f(x) = 2x - [2x]$ é:

$$O(x_0) = \{0, 1101; 0, 101; 0, 01; 0, 1; 0; 0; ...\}$$

Seja $x_0 \in [0, 1)$ um número na base 2 com representação finita. Logo, $x_0 = 0, a_0a_1...a_k$, onde cada a_i, com $i \in \{0, 1, ..., k\}$ pode assumir o valor 0 ou 1. Nota-se que o número x_0 poderia também ser representado por:

$$x_0 = 0, a_0 a_1 ... a_k 000...$$

ou, ainda,

$$x_0 = a_0 2^{-1} + a_1 2^{-2} + ... + a_k 2^{-k} + 0 \cdot 2^{-k-1} + 0 \cdot 2^{-k-2} + ...$$

Aplicando x_0 em $f(x) = 2x - [2x]$, obtém-se:

$$f(x_0) = 2x_0 - [2x_0]$$

Mas,

$$2x_0 = 2 \cdot (0, a_0 a_1 ... a_k 000...) \Rightarrow$$
$$2x_0 = 2 \cdot (a_0 2^{-1} + a_1 2^{-2} + ... + a_k 2^{-k-1} + 0 \cdot 2^{-k-2} + 0 \cdot 2^{-k-3} + ...) \Rightarrow$$
$$2x_0 = (a_0 + a_1 2^{-1} + a_1 2^{-2} + ... + a_k 2^{-k} + 0 \cdot 2^{-k-1} + 0 \cdot 2^{-k-2} + ...) \Rightarrow$$
$$2x_0 = a_0, a_1 ... a_k 000...$$

Ao se calcular $2x_0 - [2x_0]$, obtém-se:

$$f(x_0) = 0, a_1 a_2 ... a_k 000...,$$

pois $[2x_0] = a_0$.

Calculando $f^2(x_0)$, têm-se:

$$f^2(x_0) = 2 \cdot (0, a_1 a_2 ... a_k 000...) - [2 \cdot (0, a_1 a_2 ... a_k 000...)] \Rightarrow$$
$$f^2(x_0) = 2 \cdot (a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + ... + a_k 2^{-k} + 0 \cdot 2^{-k-1} + 0 \cdot 2^{-k-2} + ...) - [2 \cdot (0, a_1 a_2 ... a_k 000...)] \Rightarrow$$
$$f^2(x_0) = (a_1 + a_2 2^{-1} + a_3 2^{-2} + ... + a_k 2^{-k+1} + 0 \cdot 2^{-k} + 0 \cdot 2^{-k-1} + ...) - [2 \cdot (0, a_1 a_2 ... a_k 000...)] \Rightarrow$$
$$f^2(x_0) = (a_1, a_2 a_3 ... a_k 000...) - a_1 \Rightarrow$$
$$f^2(x_0) = 0, a_2 a_3 ... a_k 000...$$

Nota-se que, em base 2, ao multiplicarmos um número por 2, a vírgula se desloca uma casa para direita e, consequentemente, o primeiro número após a vírgula do valor inicial passa a ser a parte inteira do mesmo.

Repetindo o processo, pode-se afirmar que existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$f^k(x_0) = 0, a_k000...$$
$$f^{k+1}(x_0) = 0, 000...$$
$$f^{k+2}(x_0) = 0, 000...$$
$$\vdots$$

O conjunto dos resultados dessas infinitas iterações gera a órbita do ponto x_0 pela função $f(x) = 2x - [2x]$.

Assim, é possível concluir que, caso o número na base 2 tenha representação finita, sua órbita converge para zero, ou seja, encaminha-se para zero.

Agora, o que aconteceria com a órbita de um número em $[0, 1)$ na base 2, pela função $f(x) = 2x - [2x]$, caso sua representação fosse infinita e periódica?

Por exemplo, $x_0 = (0, 101010...)_2$.

Têm-se, através de substituição, que:

$$f(x_0) = f(0, 101010...) = 2 \cdot (0, 101010...) - [2 \cdot (0, 101010...)] \Rightarrow$$
$$f(0, 101010...) = 1, 01010... - 1 \Rightarrow$$
$$f(0, 101010...) = 0, 01010...$$

$$f^2(x_0) = f(0, 01010...) = 2 \cdot (0, 01010...) - [2 \cdot (0, 01010...)] \Rightarrow$$
$$f(0, 01010...) = 0, 101010... - 0 \Rightarrow$$
$$f(0, 01010...) = 0, 1010...$$

$$f^3(x_0) = f(0, 101010...) = 2 \cdot (0, 101010...) - [2 \cdot (0, 101010...)] \Rightarrow$$
$$f(0, 101010...) = 1, 01010... - 1 \Rightarrow$$
$$f(0, 101010...) = 0, 01010...$$

$$f^4(x_0) = f(0, 01010...) = 2 \cdot (0, 01010...) - [2 \cdot (0, 01010...)] \Rightarrow$$
$$f(0, 01010...) = 0, 101010... - 0 \Rightarrow$$
$$f(0, 01010...) = 0, 1010...$$
$$\vdots$$

Portanto, a órbita do ponto $x_0 = (0, 101010...)_2$ pela função $f(x) = 2x - [2x]$ é dada por,

$$O(x_0) = \{0,101010...;0,010101...;0,101010...;0,010101...;...\}$$

É percebido pelo exemplo que, para o número x_0 que possui uma periodicidade de 2 algarismos, sua órbita possui um ciclo de período 2.

Isso acontecerá sempre. Um número com uma parte periódica de k algarismos gerará uma órbita com ciclos de k períodos.

Supondo-se que x_0 seja um número na base 2, cuja representação seja infinita e periódica e que sua periodicidade acontece após a k-ésima casa depois da vírgula e tenha período de tamanho n.

Assim, x_0 pode ser representado como:

$$x_0 = 0, a_0a_1a_2...a_ka_{k+1}a_{k+2}...a_{k+n}a_{k+n+1}a_{k+n+2}...a_{k+n+n}\cdots$$

Onde cada a_i com $i \in \{0, 1, 2, ..., k+n+n, ...\}$ pode assumir valores 0 ou 1.

Ao se aplicar x_0 à função $f(x) = 2x - [2x]$ inúmeras vezes a fim de criar sua órbita, se percebe que a órbita

$$O(x_0) = o_0, o_1, o_2, ..., o_k, o_{k+1}, o_{k+2}, ..., o_{k+n}, ...$$

é tal que:

$$\begin{gathered}
o_0 = 0, a_0a_1a_2...a_ka_{k+1}a_{k+2}...a_{k+n}a_{k+n+1}a_{k+n+2}...a_{k+n+n}\cdots \\
o_1 = 0, a_1a_2...a_ka_{k+1}a_{k+2}...a_{k+n}a_{k+n+1}a_{k+n+2}...a_{k+n+n}\cdots \\
\vdots \\
o_k = 0, a_ka_{k+1}a_{k+2}...a_{k+n}a_{k+n+1}a_{k+n+2}...a_{k+n+n}\cdots \\
o_{k+1} = 0, a_{k+1}a_{k+2}...a_{k+n}a_{k+n+1}a_{k+n+2}...a_{k+n+n}\cdots \\
\vdots \\
o_{k+n} = 0, a_{k+n}a_{k+n+1}a_{k+n+2}...a_{k+n+n}\cdots \\
o_{k+n+1} = 0, a_{k+n+1}a_{k+n+2}...a_{k+n+n}\cdots \\
\vdots
\end{gathered}$$

E como, por hipótese, x_0 é periódico e sua periodicidade acontece após a k-ésima casa depois da vírgula e tem período de tamanho n, $a_{k+p} = a_{k+p+n}$ para todo $p \in [1, n]$.

Portanto, pode-se concluir que x_0 possui uma órbita com ciclo de período n e, consequentemente, um número com representação periódica e infinita na base 2 gera órbitas que possuem ciclos.

Para fechamento da análise das possíveis representações de um número positivo menor do que 1, faz-se necessário pensar no que aconteceria com a órbita desse número caso sua representação fosse infinita e não periódica.

Por exemplo, o que acontece com a órbita do número $x_0 = (0,101101110...)_2$ pela função $f(x) = 2x - [2x]$?

$$f(x_0) = f(0,101101110...) = 2 \cdot (0,101101110...) - [2 \cdot (0,101101110...)] \Rightarrow$$
$$f(0,101101110...) = 1,01101110... - 1 \Rightarrow$$
$$f(0,101101110...) = 0,01101110...$$

$$f^2(x_0) = f(0,01101110...) = 2 \cdot (0,01101110...) - [2 \cdot (0,01101110...)] \Rightarrow$$
$$f(0,01101110...) = 0,1101110... - 0 \Rightarrow$$
$$f(0,01101110...) = 0,1101110...$$

$$f^3(x_0) = f(0,1101110...) = 2 \cdot (0,1101110...) - [2 \cdot (0,1101110...)] \Rightarrow$$
$$f(0,1101110...) = 1,101110... - 1 \Rightarrow$$
$$f(0,1101110...) = 0,101110...$$

$$f^4(x_0) = f(0,101110...) = 2 \cdot (0,101110...) - [2 \cdot (0,101110...)] \Rightarrow$$
$$f(0,101110...) = 1,01110... - 1 \Rightarrow$$
$$f(0,101110...) = 0,01110...$$
$$\vdots$$

Dessa forma, a órbita de $x_0 = (0,101101110...)_2$ pela função $f(x) = 2x - [2x]$ é dada por:

$$O(x_0) = \{0,101101110...; 0,01101110...; 0,1101110...; 0,101110...; 0,01110...; ...\}.$$

Seja, agora, $x_0 \in [0,1)$, arbitrário, com representação infinita e não periódica na base 2.

Supondo-se, por absurdo, que a órbita de x_0 por $f(x) = 2x - [2x]$ convirja para zero.

Assim sendo, sua órbita $O(x_0) = \{o_0, o_1, o_2, ..., o_k, 0, 0, 0\}$, onde:

$$o_0 = 0, a_0a_1a_2...a_ka_{k+1}...$$

$$o_1 = 0, a_1a_2...a_ka_{k+1}...$$

$$\vdots$$

$$o_k = 0, a_ka_{k+1}a_{k+2}...$$

$$o_{k+1} = 0, a_{k+1}a_{k+2}...$$

Entretanto, $a_{k+p} = 0$, para todo $p \in [1, \infty)$.

Consequentemente, x_0 pode ser escrito na forma $x_0 = 0, a_0a_1a_2...a_k000$, ou ainda, $x_0 = 0, a_0a_1a_2...a_k$.

Conclui-se, daí, que x_0 tem representação finita, o que contradiria a hipótese. Logo, a órbita de x_0 por f não pode convergir para zero.

Supondo-se, então, novamente por absurdo, que ela possua um ciclo de período n.

Logo, pode-se escrever sua órbita como:

$$O(x_0) = \{o_0, o_1, o_2, ..., o_k, o_{k+1}, o_{k+2}, ..., o_{k+n}, o_{k+n+1}, o_{k+n+2}, ..., o_{k+2n}, o_{k+2n+1}, ...\}$$

onde $o_{k+p} = o_{k+p+n}$ para todo $p \in [1, n]$.

Dessa forma,

$$o_0 = 0, a_0a_1a_2...a_ka_{k+1}a_{k+2}...a_{k+n}a_{k+n+1}a_{k+n+2}...a_{k+2n}...$$

$$o_1 = 0, a_1a_2...a_ka_{k+1}a_{k+2}...a_{k+n}a_{k+n+1}a_{k+n+2}...a_{k+2n}...$$

$$\vdots$$

$$o_k = 0, a_ka_{k+1}a_{k+2}...a_{k+n}a_{k+n+1}a_{k+n+2}...a_{k+2n}...$$

$$o_{k+1} = 0, a_{k+1}a_{k+2}...a_{k+n}a_{k+n+1}a_{k+n+2}...a_{k+2n}...$$

$$\vdots$$

$$o_{k+n} = 0, a_{k+n}a_{k+n+1}a_{k+n+2}...a_{k+2n}...$$

$$o_{k+n+1} = 0, a_{k+n+1}a_{k+n+2}...a_{k+2n}...$$

$$\vdots$$

Tem-se, então, $a_{k+p} = a_{k+p+n}$ para todo $p \in [1, n]$ e, por conseguinte, x_0 pode ser representado na forma:

$$x_0 = 0, a_0a_1a_2...a_ka_{k+1}a_{k+2}...a_{k+n}a_{k+n+1}a_{k+n+2}...a_{k+2n}...,$$

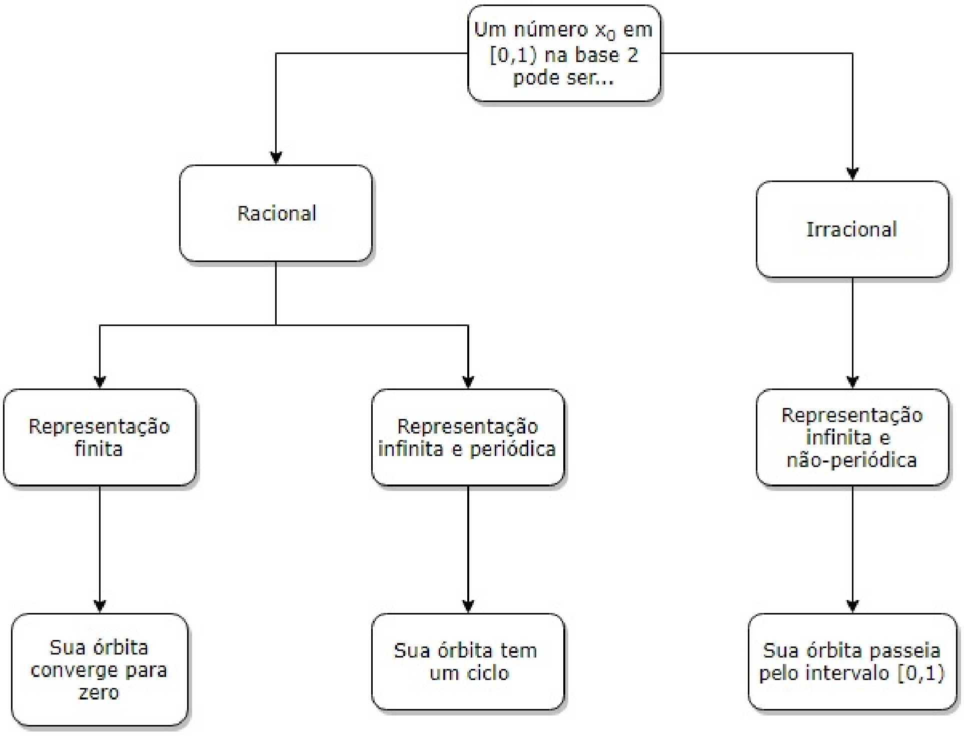
onde cada a_i com $i \in [1, \infty)$ pode assumir o valor 0 ou 1.

Logo, x_0 tem representação infinita e periódica, o que gera um absurdo, visto que, por hipótese, x_0 é infinito e não periódico. Dessa forma, a órbita de x_0 pela função $f(x) = 2x - [2x]$ não possui ciclo de período k.

Por conseguinte, se x_0 tem representação infinita e não periódica, sua órbita não se acumula em nenhum ponto e nem tem um ciclo, passeia no intervalo $[0, 1)$.

Juntando toda informação analisada acerca de x_0 e suas possíveis órbitas pela função $f(x) = 2x - [2x]$, pode-se sintetizá-las no esquema a seguir.

Figura 15: Relação entre números entre 0 e 1, escritos na base dois, e sua órbita



Fonte: Elaborada pelo autor

Desse modo, na função $f(x) = 2x - [2x]$ para todo $x \in [0, 1)$ têm-se órbitas periódicas com qualquer período.

5.2 SENSIBILIDADE ÀS CONDIÇÕES INICIAIS

Analisando a órbita do ponto $x_0 = 0,0010100$, se percebe que:

$$O(x_0) = 0,0010100; 0,010100; 0,10100; 0,0100; 0,100; 0,00; ...$$

e, portanto, converge para 0.

Analisando, agora a órbita do ponto $y_0 = 0,0010101110101011101...$, se percebe que:

$$O(y_0) = \{0,0010101110101011101...; 0,010101110101011101...; 0,10101110101011101...;$$
$$0,0101110101011101...; 0,101110101011101...; 0,01110101011101...; ...\}$$

Observando o valor de x_0 e y_0, é fácil notar que eles possuem a mesma representação até a sexta casa após a vírgula, ou seja, a diferença entre y_0 e x_0 é menor do que 2^{-6}. Desta forma, pode-se afirmar que x_0 e y_0 são números relativamente próximos.

No entanto, isso não impede que suas órbitas, a partir de um dado momento, se afastem. Sem grande rigor, podemos dizer que isso é sensibilidade às condições iniciais.

De maneira formal uma função f possui sensibilidade às condições iniciais se existe $\beta > 0$ tal que para qualquer x e qualquer $\epsilon > 0$, existe y tal que $|y - x| < \frac{1}{2^n} < \epsilon$ e existe k tal que $|f^k(y) - f^k(x)| \geq \beta$.

Aplicando tal definição à função $f(x) = 2x - [2x]$, e escolhendo, arbitrariamente $\beta = \frac{1}{9}$ e $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$.

Nota-se, ainda, que para qualquer $x = (0, a_0a_1a_2a_3...a_{n-1}a_na_{n+1}...)_2$, existe sempre um $y = (0, a_0a_1a_2a_3...a_{n-1}b_na_{n+1}...)_2$, com $a_n \neq b_n$ (se $a_n = 1$, então $b_n = 0$ e vice-versa), tal que todas as demais casas após a vírgula são iguais.

Dessa forma, calculando os elementos pertencentes à órbita de x pela função $f(x) = 2x - [2x]$, obtêm-se:

$$f(x) = a_0, a_1a_2a_3...a_{n-1}a_na_{n+1}... - a_0 \Rightarrow$$
$$f(x) = 0, a_1a_2a_3...a_{n-1}a_na_{n+1}...$$
$$f^2(x) = a_1, a_2a_3...a_{n-1}a_na_{n+1}... - a_1 \Rightarrow$$
$$f^2(x) = 0, a_2a_3...a_{n-1}a_na_{n+1}...$$
$$\vdots$$
$$f^{n-1}(x) = a_{n-2}, a_{n-1}a_na_{n+1}... - a_{n-2} \Rightarrow$$
$$f^{n-1}(x) = 0, a_{n-1}a_na_{n+1}...$$
$$f^n(x) = a_{n-1}, a_na_{n+1}... - a_{n-1} \Rightarrow$$
$$f^n(x) = 0, a_na_{n+1}...$$

De maneira análoga, os elementos pertencentes à órbita de y pela função $f(x) = 2x-[2x]$ são dadas por:

$$f(y) = a_0, a_1a_2a_3...a_{n-1}b_na_{n+1}... - a_0 \Rightarrow$$

$$f(y) = 0, a_1a_2a_3...a_{n-1}b_na_{n+1}...$$

$$f^2(y) = a_1, a_2a_3...a_{n-1}b_na_{n+1}... - a_1 \Rightarrow$$

$$f^2(y) = 0, a_2a_3...a_{n-1}b_na_{n+1}...$$

$$\vdots$$

$$f^{n-1}(y) = a_{n-2}, a_{n-1}b_na_{n+1}... - a_{n-2} \Rightarrow$$

$$f^{n-1}(y) = 0, a_{n-1}b_na_{n+1}...$$

$$f^n(y) = a_{n-1}, b_na_{n+1}... - a_{n-1} \Rightarrow$$

$$f^n(y) = 0, b_na_{n+1}...$$

Logo, como $a_n \neq b_n$, tem-se que $|b_n - a_n|$ será sempre igual à unidade.

$$|f(y) - f(x)| = |0, a_1a_2a_3...a_{n-1}a_na_{n+1}... - 0, a_1a_2a_3...a_{n-1}b_na_{n+1}...| \Rightarrow$$

$$|f(y) - f(x)| = |b_n - a_n| \Rightarrow$$

$$|f(y) - f(x)| = 1 \cdot \tfrac{1}{2^n}$$

$$|f^2(y) - f^2(x)| = |0, a_2a_3...a_{n-1}a_na_{n+1}... - 0, a_2a_3...a_{n-1}b_na_{n+1}...| \Rightarrow$$

$$|f^2(y) - f^2(x)| = |b_n - a_n| \Rightarrow$$

$$|f^2(y) - f^2(x)| = 1 \cdot \tfrac{1}{2^{n-1}}$$

$$\vdots$$

$$|f^{n-1}(y) - f^{n-1}(x)| = |0, a_{n-1}a_na_{n+1}... - 0, a_{n-1}b_na_{n+1}...| \Rightarrow$$

$$|f^{n-1}(y) - f^{n-1}(x)| = |b_n - a_n| \Rightarrow$$

$$|f^{n-1}(y) - f^{n-1}(x)| = 1 \cdot \tfrac{1}{2^2}$$

$$|f^n(y) - f^n(x)| = |0, a_na_{n+1}... - 0, b_na_{n+1}...| \Rightarrow$$

$$|f^n(y) - f^n(x)| = |b_n - a_n| \Rightarrow$$

$$|f^n(y) - f^n(x)| = 1 \cdot \tfrac{1}{2}$$

Sendo $k = n$, então $|f^n(y) - f^n(x)| = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{9}$.

Assim, a função $f(x) = 2x - [2x]$ possui sensibilidade às condições iniciais.

5.3 ÓRBITA DENSA NO INTERVALO [0,1)

Por definição, um ponto x_0 possui uma órbita densa no intervalo $[0, 1)$ se dados quaisquer $y \in [0, 1)$ e uma distância ϵ, existe $x_n \in O(x_0)$ tal que $|y - x_n| < \epsilon$.

Em outras palavras, uma órbita de um ponto x_0 é chamada de densa no intervalo $[0, 1)$ quando, para qualquer ponto y pertencente ao intervalo se conseguir pelo menos um ponto da órbita de x_0 tão próximo a y quanto se queira.

Mostrar-se-á que existe pelo menos um ponto $x_0 \in [0, 1)$ cuja órbita em relação à função $f(x) = 2x - [2x]$ é densa em $[0, 1)$. Para tanto, x_0 será construído da seguinte forma:

x_0 será iniciado por 0 e depois vírgula. Em seguida, acrescenta-se 0 e 1. De agora em diante, serão formados blocos, de tamanhos diversos, com todas as combinações possíveis utilizando os números 0 e 1.

Combinação com 2 dígitos: 00, 01, 10, 11.

Combinação com 3 dígitos: 000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111.

E assim, sucessivamente.

Isso garantirá que x_0 tem representação infinita e não periódica.

$$x_0 = 0, \underbrace{0\ 1}_{\text{1 dígito}}\ \underbrace{00\ 01\ 10\ 11}_{\text{2 dígitos}}\underbrace{000\ 001\ 010\ 100\ 011\ 101\ 110\ 111}_{\text{3 dígitos}}\ \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{4 dígitos}}\ \ldots$$

Agora, tomamdo-se, arbitrariamente, $y = 0, b_0b_1b_2...$ e uma distância $\epsilon > 0$.

Como o conjunto dos naturais é ilimitado, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n > \frac{1}{\epsilon}$ ou $\frac{1}{2^n} < \epsilon$.

Precisa-se mostrar que existe $x_n \in O(x_0)$ tal que $|y - x_n| < \frac{1}{2^n}$, pois como $\frac{1}{2^n} < \epsilon$, por transitividade, terá $|y - x_0| < \epsilon$.

Para que $|y - x_0| < \frac{1}{2^n}$, basta que y possua as n primeiras casas após a vírgula iguais a x_0, e isso é conseguido iterando a função f à quantidade de vezes suficientes para chegar às n primeiras casas de y. E tal feito será sempre conseguido, pois, na formação de x_0, escreveu-se todas as possibilidades de combinações entre 0's e 1's.

Por exemplo, seja uma distância $\frac{1}{2^4}$.

Escolhe-se, de maneira arbitrária, um y entre 0 e 1, escrito na base 2. Toma-se $y = 0, 101101010100$.

Procura-se, agora, um ponto x_n da órbita de x_0 de modo que a distância entre x_n e y seja menor do que $\frac{1}{2^4}$.

Garante-se a existência de tal x_n, pois x_0 foi construído através de todas as combinações entre 0's e 1's.

Para a distância $\frac{1}{2^4}$ precisa-se, apenas, que as 4 primeiras casas após a vírgula, tanto de x_n quanto de y sejam iguais.

Para o x_0 construído anteriormente, $x_n = 0,0100011011$. Assim a distância entre x_n e y é menor do que $\frac{1}{2^4}$.

De maneira análoga, é possível mostrar que, para qualquer y e uma distância $\frac{1}{2^n}$, acha-se um x_n na órbita de x_0 de maneira que a distância entre x_n e y seja menor do que $\frac{1}{2^n}$.

Logo, conclui-se que existe uma órbita densa no intervalo $[0, 1)$.

Assim, a função $f(x) = 2x - [2x]$, com $x \in [0, 1)$ é caótica, pois mostrou-se que satisfaz as seguintes condições:

- possui órbita periódica com qualquer período;
- possui sensibilidade às condições iniciais;
- possui órbita densa no intervalo $[0, 1)$.

6 AS CARACTERÍSTICAS DO CAOS NA PRÁTICA

Acredita-se que um dos maiores desafios da educação seja conseguir correlacionar teoria e prática. Ainda mais quando se trata de conteúdos um tanto quanto abstratos.

A proposta de apresentar o Caos para alunos do ensino médio não seria diferente.

Apenas demonstrar, com rigor matemático, as características que uma função possui para ser classificada como caótica, seria, sem dúvida, desestimulante, principalmente para aqueles que possuem alguma dificuldade matemática.

Logo, a proposta deste capítulo é levar para sala de aula as características do Caos, de maneira visual, facilitando assim seu entendimento.

MAY(1976), em [18], publicou um artigo intitulado *"Simple mathematical models with very complicated dynamics"*[1] e, ao final do mesmo, faz um apelo para que algumas equações caóticas sejam introduzidas em cursos de matemática elementar, para que a intuição dos alunos possa ser enriquecida e que eles notem como simples equações não lineares podem se tornar "selvagens".

No presente trabalho explorar-se-á um modelo dinâmico de populações, ou seja, como essa população evolui ao longo do tempo, com o intuito de mostrar que o Caos pode aparecer em exemplos do cotidiano.

O tempo será trabalhado em quantidades discretas. Pode-se, para tanto, analisar a evolução ao longo das gerações e, consequentemente, cada tempo será considerado uma geração.

Realizar um trabalho interdisciplinar, juntamente com o professor de biologia, tendo como enfoque o conteúdo Relações Ecológicas, mais especificadamente, Predatismo (relação presa-predador) é uma opção.

Segundo LOPES (2002), em [15], os seres vivos que habitam uma mesma área mantêm interações tanto intraespecíficas (entre indivíduos de uma mesma espécie) quanto interespecíficas (entre indivíduos de espécies diferentes). Dentre as relações interespecíficas, pode-se destacar o predatismo, relação em que um indivíduo mata outro (de outra espécie) para se alimentar.

De acordo com RIBEIRO (2005), em [22], alguns modelos matemáticos têm o papel de tornar compreensível fatos da natureza. E a relação do tipo predador-presa é um exemplo da aplicação da teoria do caos à ecologia.

---

[1] Modelos matemáticos simples com dinâmica muito complicada

> *Em nosso trabalho, utilizamos o modelo presa-predador dependendo da taxa de natalidade da presa e com perturbações simultâneas na taxa de crescimento da presa e decaimento do predador* (RIBEIRO, 2005, em [22])

Neste estudo, propõe-se trabalhar a relação entre lebres e linces. Sabe-se que os linces alimentam-se predominantemente de lebres e o aumento do número de lebres causa, como consequência, o aumento do número de linces, tendo em vista que existe mais comida.

Posteriormente, com o aumento de linces, a tendência é que se tenha uma redução na quantidade de lebres devido à predação. Menos lebres, menos comida para os linces. Se há uma baixa na quantidade de alimento, a quantidade de linces tende a cair.

Quando a população de linces diminui, há menos predadores e, por conseguinte, a população de lebres tende a aumentar, recomeçando o ciclo.

Suponha, inicialmente, uma população x_0 de linces. Uma pergunta bastante pertinente é: qual será a quantidade de linces (chamada de x_1) na geração seguinte, ou seja, em sua 1ª geração de dependentes?

É fácil notar que, embora x_1 não seja, necessariamente igual a x_0, seu valor depende de x_0, embora não exclusivamente.

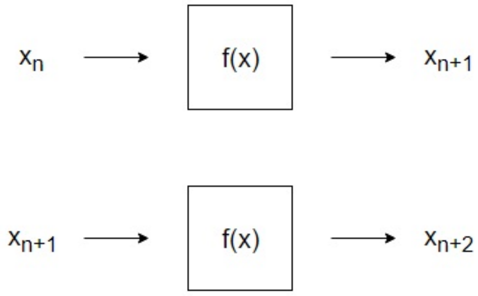
Além do valor de x_0, x_1 será influenciado por fatores como clima, natalidade, disponibilidade de alimentos, mortalidade, entre outros.

Portanto, deve-se encontrar uma relação f que leve todos esses aspectos em consideração e, ao se "entrar"com o valor x_0 na tal relação, ela seja capaz de devolver o valor x_1, sendo esse, a população de linces da geração seguinte.

De maneira análoga, fornecendo x_1, a relação f dará como resposta x_2 sendo a população da 2ª geração de descendentes de linces e, assim, sucessivamente, até um valor x_n que representa a quantidade da população da n-ésima geração de linces.

A relação f é um modelo de evolução da população por intermédio de um método chamado *Feedback*, onde cada novo valor torna-se o próximo valor de partida para os cálculos seguintes.

Figura 16: Método *Feedback*



Fonte: Elaborado pelo autor

Propõe-se, então, aos alunos, realizar uma breve investigação sobre que tipo de função melhor exprime a quantidade de linces, geração a geração, tendo em vista, todos os fatores externos que incidem sobre esse valor.

Começando a análise pelas funções lineares, do tipo $f(x) = ax$, têm-se duas possibilidades: se $a < 1$ ou se $a > 1$. Não convém, aqui, pensar em valores negativos pelo fato de se tratarem de quantidade populacional.

Supondo-se, inicialmente, $x_0 = 1000$ e $a = 0,1$.

Assim, substituindo os valores de a e x_0 nas função $f(x) = ax$, tem-se:

$$x_1 = f(x_0) = 0,1 \cdot 1000 = 100.$$

Logo, para uma população inicial de 1000 linces, têm-se, na 1ª geração de dependentes, apenas 100 linces restantes.

Calcular x_2 seria calcular a quantidade de descendentes da 2ª geração, proveniente do resultado obtido em x_1, ou seja, $x_2 = f(x_1)$. Portanto:

$$x_2 = 0,1 \cdot 100 = 10.$$

Então, a 2ª geração de dependentes das 1000 linces iniciais se resumem a apenas 10 linces.

É fácil perceber que, de forma sucessiva, a quantidade populacional de linces tenderia a tornar-se estacionária, visto que a quantidade de descendentes nas sucessivas gerações tende a zero, para qualquer valor de $a < 1$.

Agora, o que aconteceria aos linces se, ao invés de $a < 1$, tivesse $a > 1$?

Supondo-se, por exemplo, $a = 1,01$.

Ainda considerando $x_0 = 1000$ e substituindo x_0 e a na função $f(x) = ax$, tem-se:

$$x_1 = f(x_0) = 1,01 \cdot 1000 = 1010.$$

De forma análoga à anterior, $x_2 = f(x_1)$ e, portanto:

$$x_2 = f(x_1) = 1,01 \cdot 1010 = 1020,1.$$

Seguindo o mesmo raciocínio, $x_3 = f(x_2)$. Assim:

$$x_3 = f(x_2) = 1,01 \cdot 1020,1 = 1030,301.$$

Dessa forma, a 1ª geração teria 1010 linces, a 2ª geração teria em torno de 1020 linces, a 3ª geração, 1030, e assim sucessivamente.

É, também, fácil notar que a população de linces tenderia ao infinito, caso seguisse tal função.

A relação f de dependentes de linces deve ser uma relação que descreva o que acontece na realidade. Por experiência, é razoável afirmar que nenhuma das duas coisas acontecem, não se têm nem um crescimento infinito, nem um decrescimento tendendo à extinção.

Desta forma, conclui-se que a função $f(x) = ax$ não é a melhor opção para descrever a quantidade de linces existentes ao longo dos tempos.

Mediante ao exposto, deve-se continuar a busca pelo modelo que melhor demonstra a dinâmica de populações de linces, aquela que mais se aproxima da realidade, a mais realista.

A população de linces oscila mediante às limitações das fontes de comida, o que, de forma direta, limita o crescimento da espécie. Tal comportamento populacional foi estudado por Robert May, em 1976, que o chamou de modelo logístico de crescimento populacional. Na ocasião, ele descreve tal modelo na forma $X_{t+1} = aX_t(1 - X_t)$.

"..., nas aplicações práticas, a equação tem a desvantagem de exigir que X permaneça no intervalo $0 < X < 1$*; se* X *exceder a unidade, as iterações subsequentes divergirão para* $-\infty$ *(o que significa que a população se torna extinta)."*(MAY, 1976, p.460. Tradução do autor)[2]

Ainda de acordo com MAY (1976), em [18], a equação possui um comportamento dinâmico não trivial somente se $a < 4$.

Das funções ensinadas no ensino médio, a quadrática vem logo após às do 1º grau. Assim sendo, é intuitivo que os alunos pensem, como próxima hipótese, tais funções.

[2] ..., in practical applications equation has the disadvantage that it requires X to remain on the interval $0 < X < 1$; if X ever exceeds unity, subsequent iterations diverge towards $-\infty$ (which means the population becomes extinct).

Como já proposto por MAY (1976), em [18], o modelo logístico nos dá uma função que pode ser representada da forma $f(x) = a \cdot (1 - x) \cdot x$, onde $x \in (0, 1)$ e $x = 1$ represente a população máxima, ou ainda, 100%.

Como a quantidade de descendentes depende sempre do valor anterior obtido, a função é composta por ela mesma repetidas vezes (método *feedback*). O conjunto formado por todas as iterações de uma dada função é chamado mapa da função. Portanto, o conjunto de iterações da função logística é chamado de mapa logístico.

Começa-se, então, a investigação acerca de possíveis valores para a.

A princípio, será admitido que $x_0 = 0,01$.

Então, calculando as iterações da função $f(x) = a \cdot (1 - x) \cdot x$ para $a = 0,1$, têm-se:

$$f(x_0) = f(0,01) = 0,1 \cdot (1 - 0,01) \cdot 0,01 \Rightarrow$$

$$f(x_0) = 0,00099$$

$$f(f(x_0)) = f(0,00099) = 0,1 \cdot (1 - 0,00099) \cdot 0,00099 \Rightarrow$$

$$f^2(x_0) = 0,000098901$$

$$f(f(f(x_0))) = f(0,000098901) = 0,1 \cdot (1 - 000098901) \cdot 000098901 \Rightarrow$$

$$f^3(x_0) = 0,000009889$$

$$\vdots$$

A partir da análise dos resultados obtidos, pode-se concluir que, em poucas gerações, a quantidade de linces está tendendo à extinção.

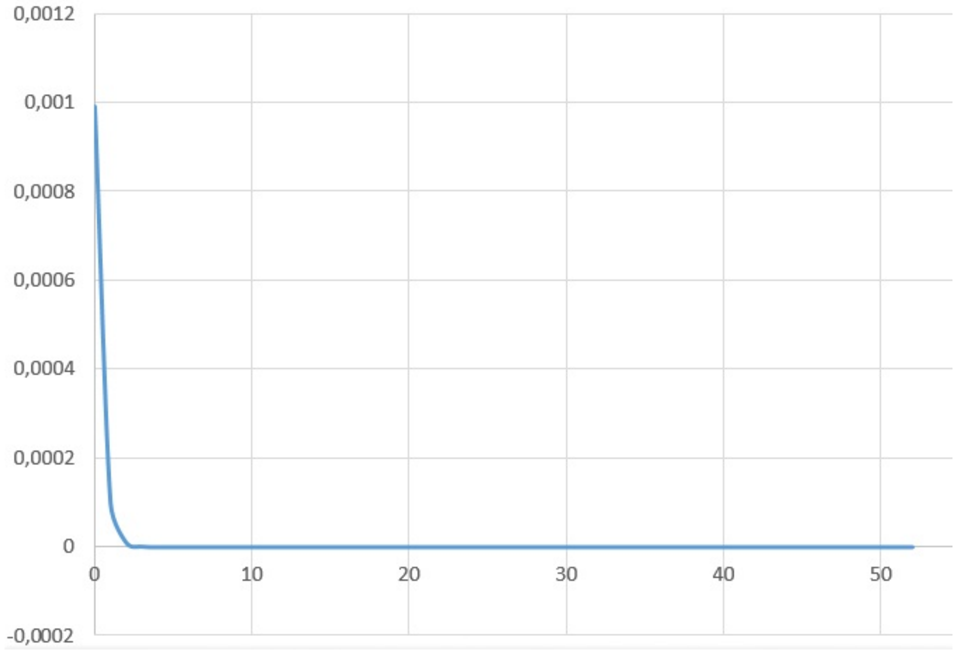
Diante do trabalho de levantamento de hipóteses e investigação, será útil a utilização de um programa que plote os gráficos dos tais mapas logísticos conforme o parâmetro a seja variado.

Escolheu-se, para tanto, o Excel, onde os gráficos apresentarão pares ordenados (x, y) que representam a geração dos linces (primeira geração, segunda geração,...) e a quantidade de descendentes que os linces terão naquela geração, respectivamente. Ou seja, x representa o número de gerações e y representa o número de descendentes.

A ideia é que, após a criação do arquivo, os alunos modifiquem os valores do parâmetro a e analisem os resultados, fazendo inferências com o contexto da população de linces.

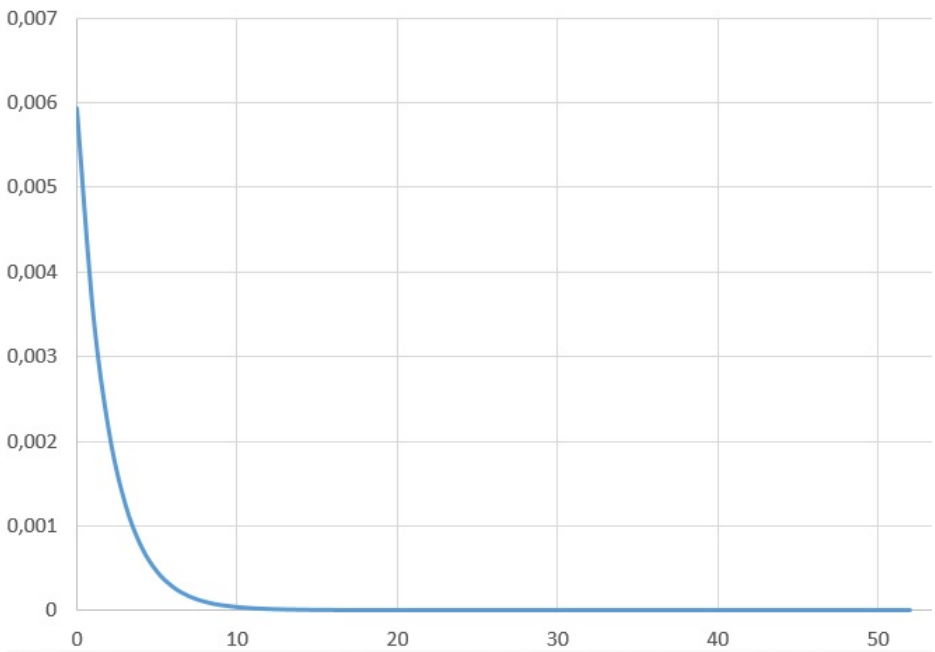
A seguir, encontram-se gráficos para valores de $a = 0,1$, $a = 0,6$ e $a = 0,9$. Em todos os casos admite-se $x_0 = 0,01$.

Figura 17: $f(x) = 0,1 \cdot (1 - x) \cdot x$.



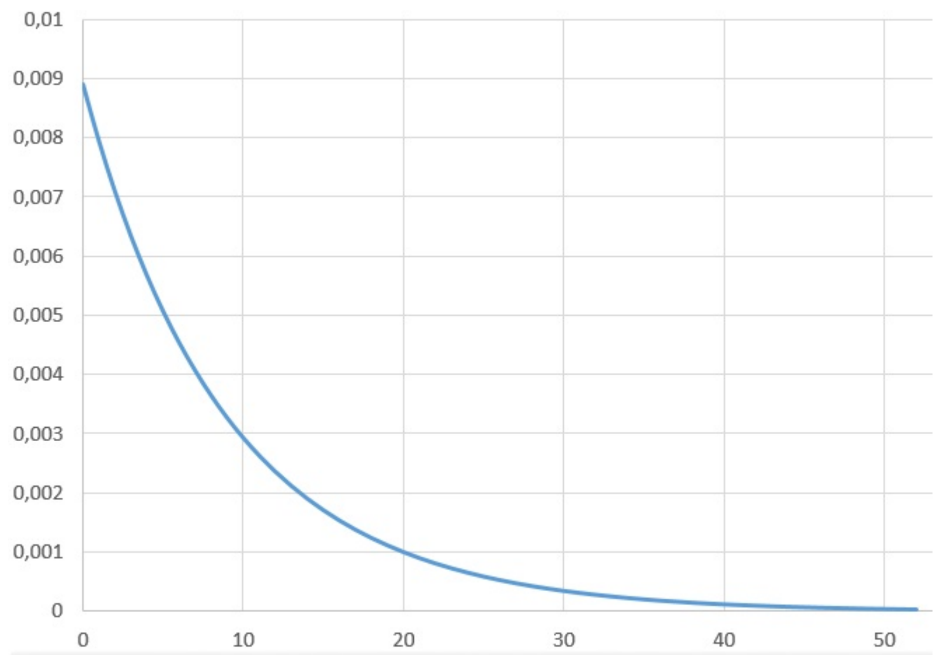
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 18: $f(x) = 0,6 \cdot (1 - x) \cdot x$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

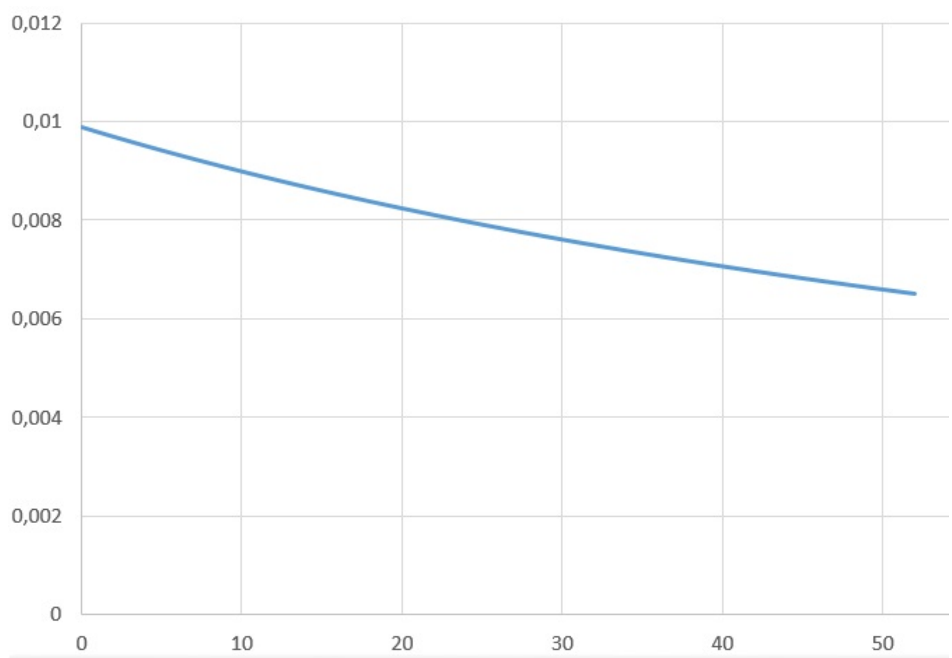
Figura 19: $f(x) = 0,9 \cdot (1 - x) \cdot x$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota-se que, para $0 < a < 1$ a população de linces será extinta. A diferença está na quantidade de gerações necessárias para que isso ocorra. Quanto mais próximo de zero for o valor de a, mais rápido a extinção acontecerá e, quanto mais próximo da unidade, tal fato levará um pouco mais de tempo, mas acontecerá. Então, o que acontecerá com os linces caso $a = 1$?

Figura 20: $f(x) = 1 \cdot (1 - x) \cdot x$.

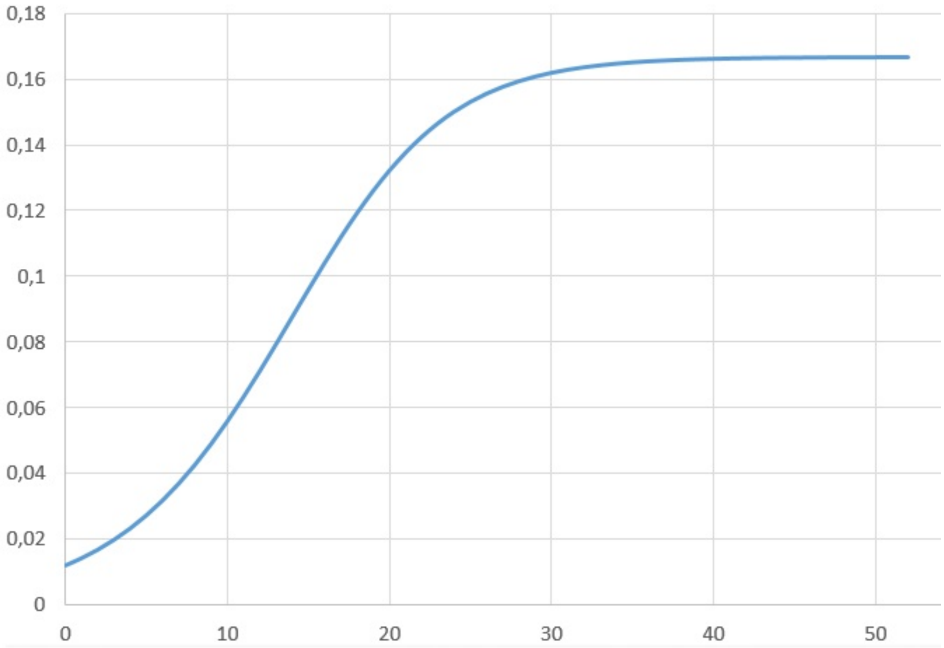


Fonte: Elaborada pelo autor.

Como é percebido no gráfico acima, serão necessárias mais gerações, mas os linces se tornarão extintos do mesmo jeito.

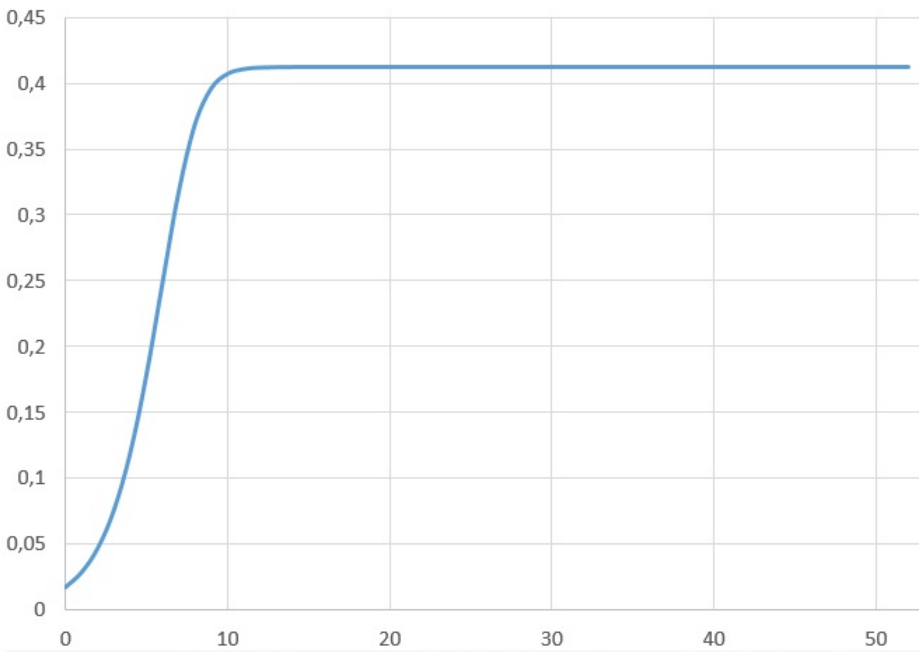
E o que acontecerá com os linces, caso o parâmetro a varie entre 1 e 3?

Figura 21: $f(x) = 1,2 \cdot (1 - x) \cdot x$.



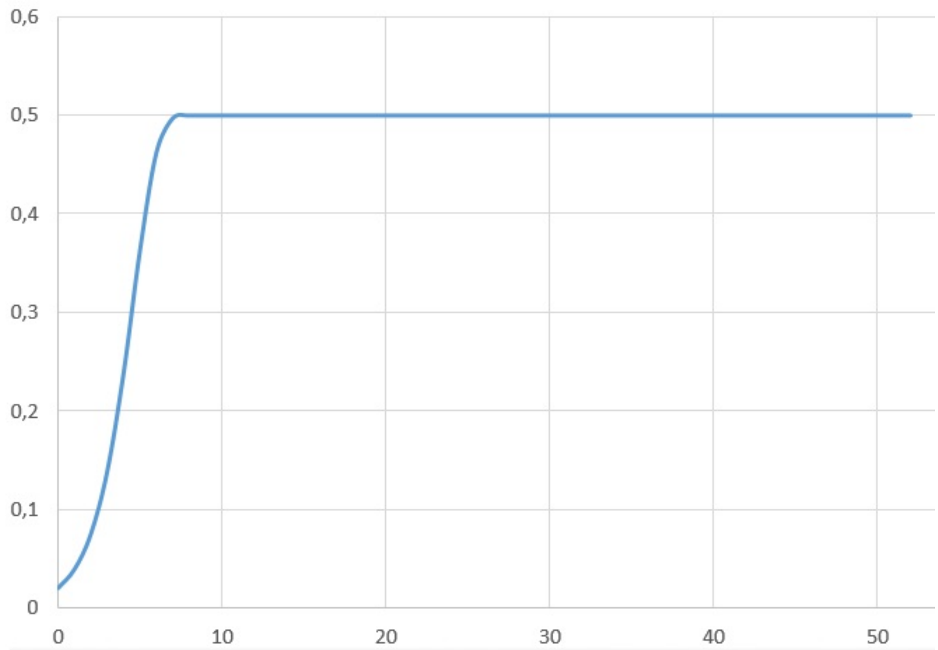
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 22: $f(x) = 1,7 \cdot (1 - x) \cdot x$.



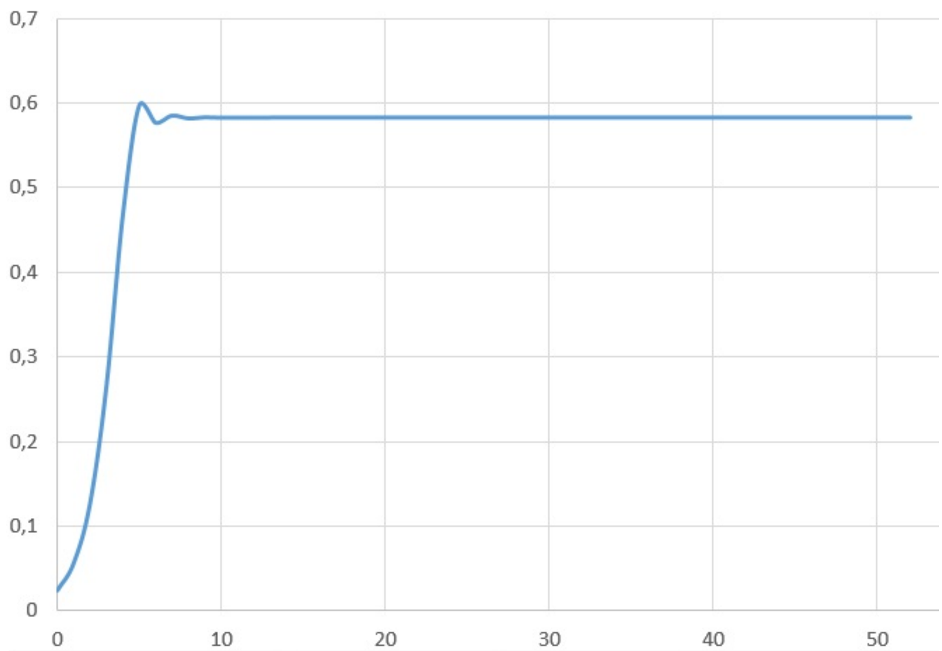
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 23: $f(x) = 2 \cdot (1 - x) \cdot x$.



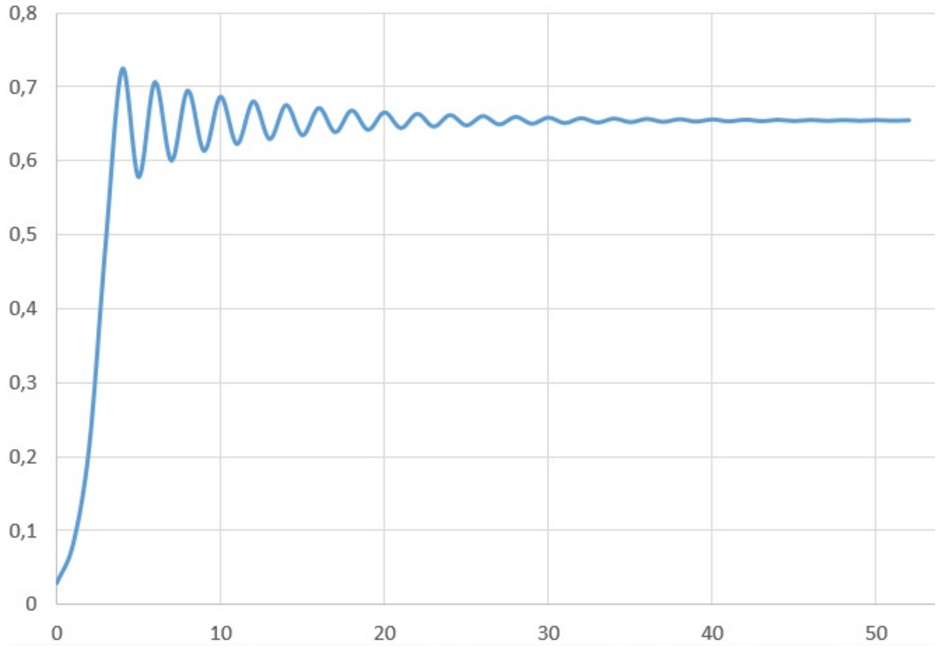
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 24: $f(x) = 2,4 \cdot (1 - x) \cdot x$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 25: $f(x) = 2,9 \cdot (1 - x) \cdot x$.

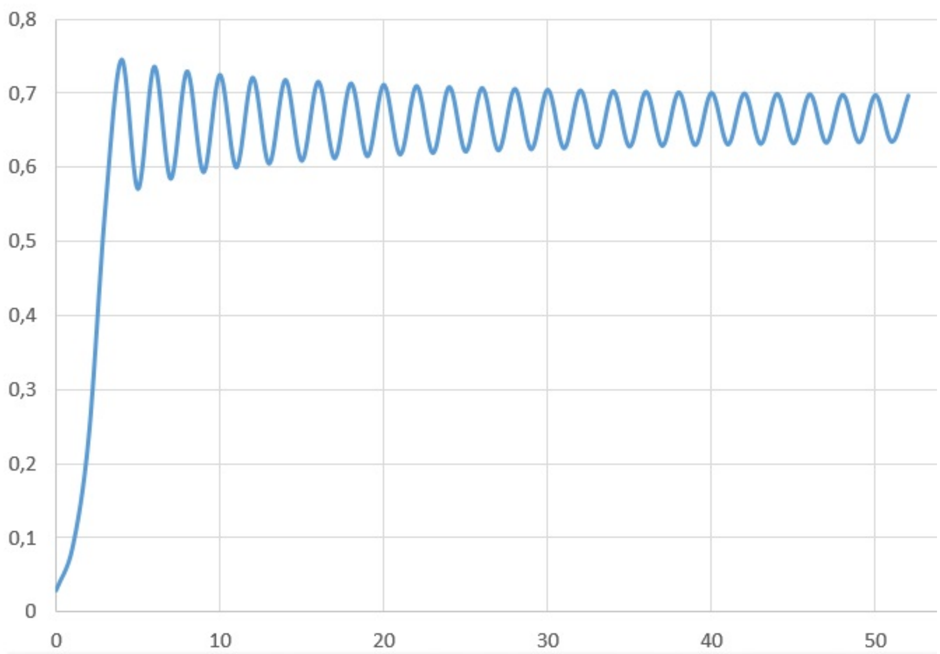


Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota-se que, para $1 < a < 3$, a população de linces crescerá até atingir um estado estável, diferente de zero.

O que acontece com os linces se $a = 3$?

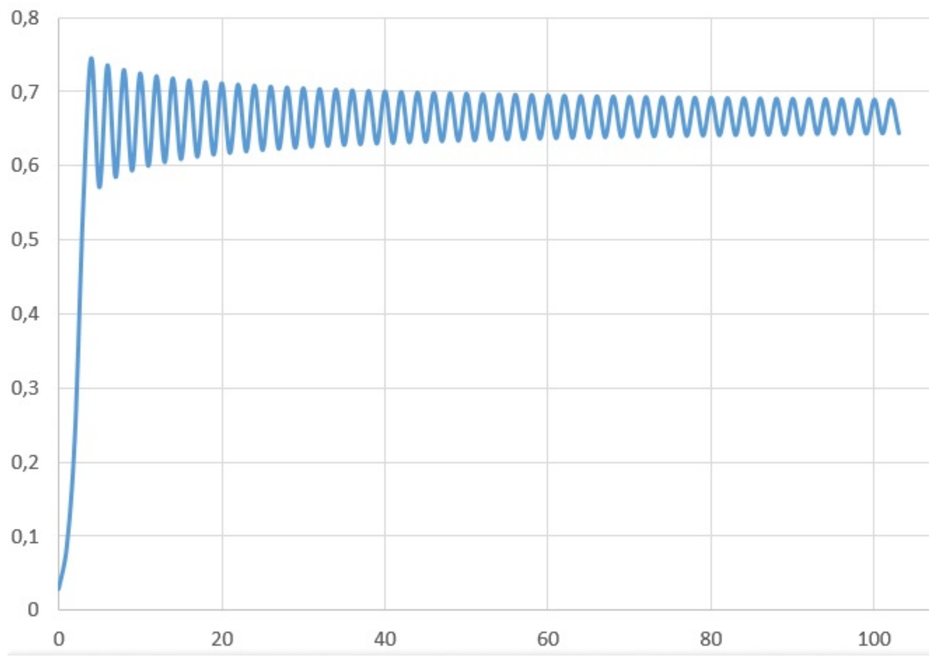
Figura 26: $f(x) = 3 \cdot (1 - x) \cdot x$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota-se, agora, que a quantidade de descendentes parece estacionar em uma oscilação de valores. A representação abaixo mostra, com mais iterações, tal afirmação.

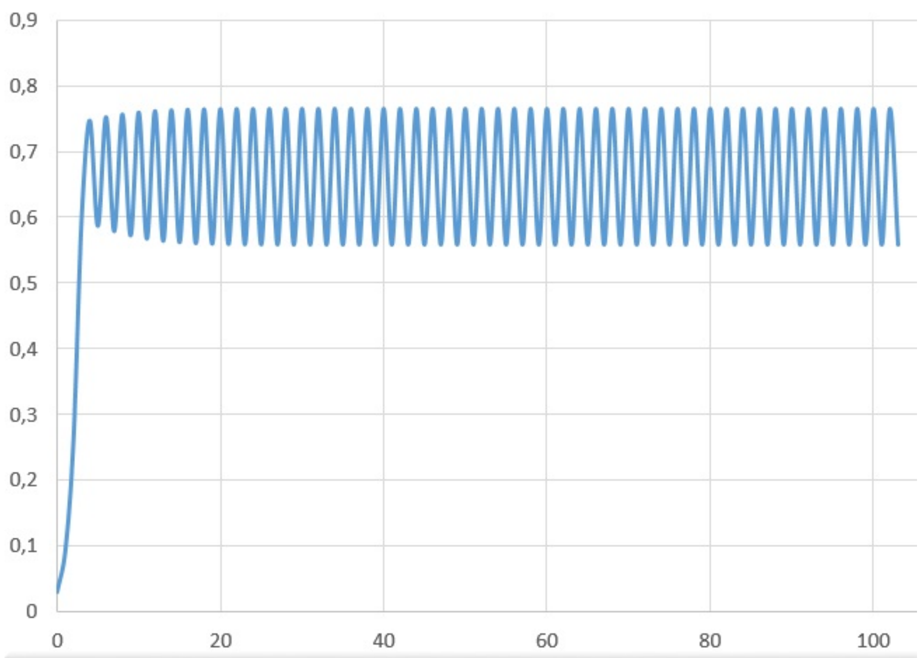
Figura 27: $f(x) = 3 \cdot (1 - x) \cdot x$. - com mais iterações



Fonte: Elaborada pelo autor.

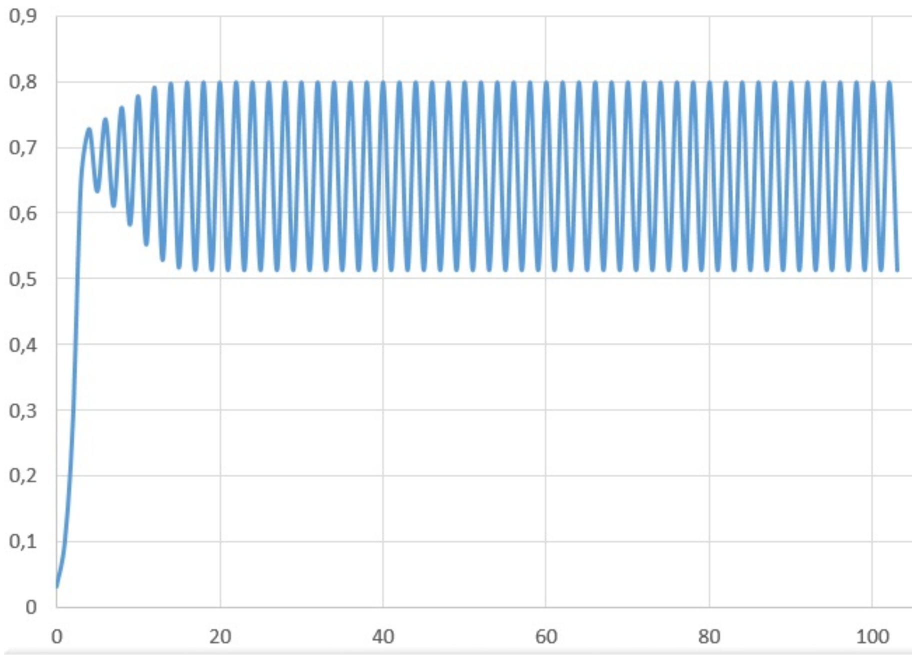
Então, o que acontece com os linces caso a varie entre 3 e 3,5?

Figura 28: $f(x) = 3,1 \cdot (1 - x) \cdot x$.



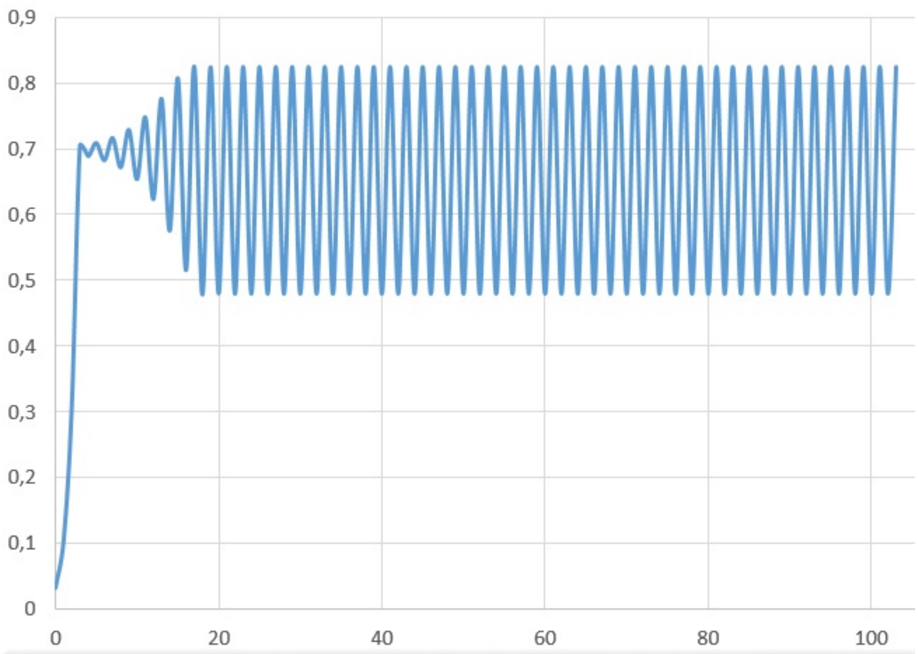
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 29: $f(x) = 3,2 \cdot (1 - x) \cdot x$.



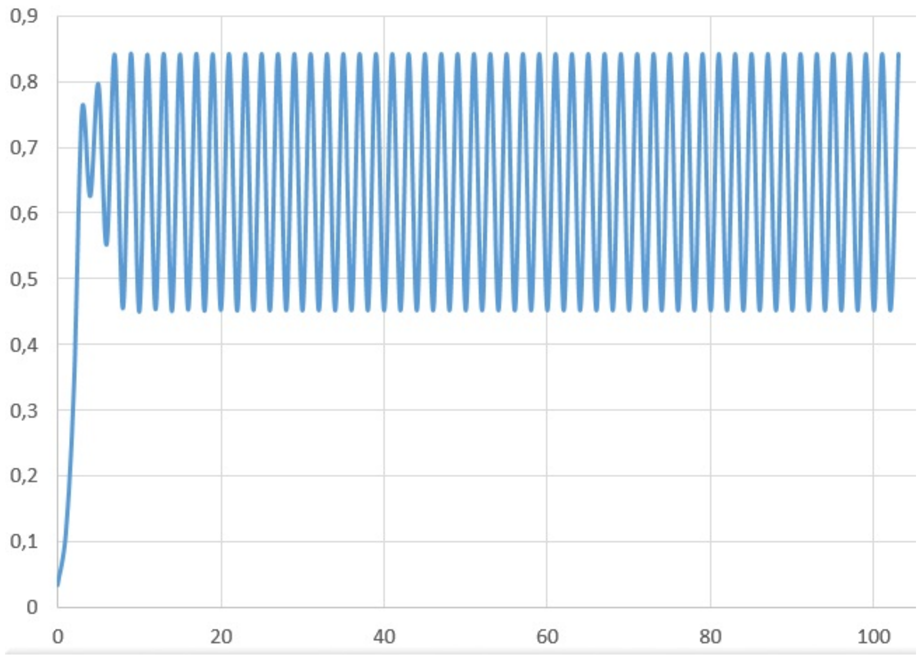
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 30: $f(x) = 3,3 \cdot (1 - x) \cdot x$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 31: $f(x) = 3,4 \cdot (1 - x) \cdot x$.

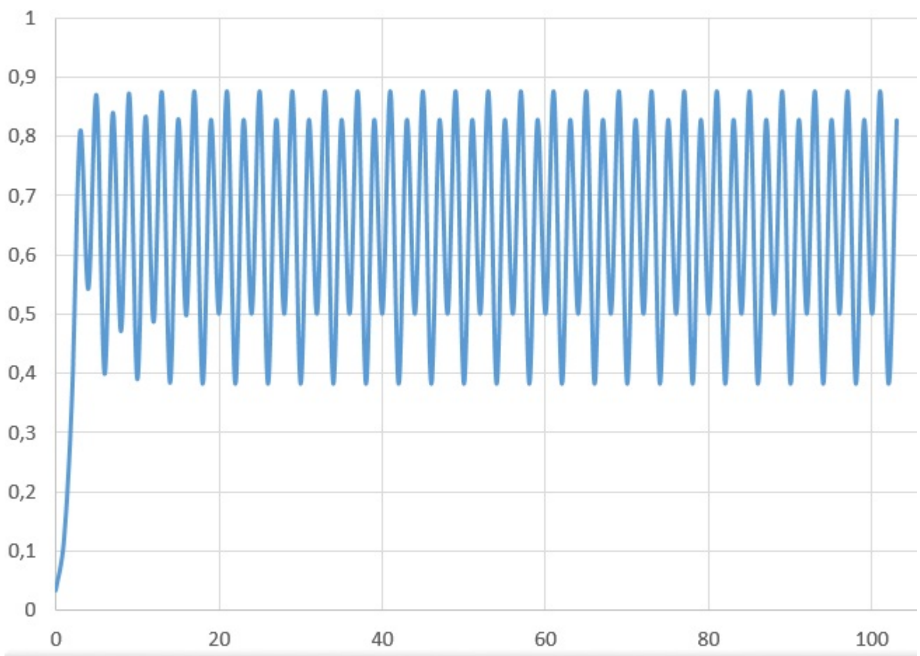


Fonte: Elaborada pelo autor.

Conclui-se, que a população se acumula novamente, mas agora oscila em relação ao seu antigo estado estável. Percebe-se, também, que os ciclos de oscilação têm período 2.

E se $a = 3,5$?

Figura 32: $f(x) = 3,5 \cdot (1 - x) \cdot x$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para $a = 3,5$, nota-se que a oscilação permanece, só que dessa vez, em um período de 4 gerações, ou seja, o dobro da anterior, conforme figura.

"... outras duplicações de períodos para ciclos de período 8, 16, 32,..., ocorrem quando a aumenta." (STROGATZ, 1994, em [25], p. 355. Tradução do autor)[3]

Ainda de acordo com STROGATZ (1994), em [25], antes que a assuma o valor de $3,6$ o sistema consegue passar por todos os períodos e, segundo experimentos computacionais, os períodos se relacionam com o valor de a, conforme a figura abaixo.

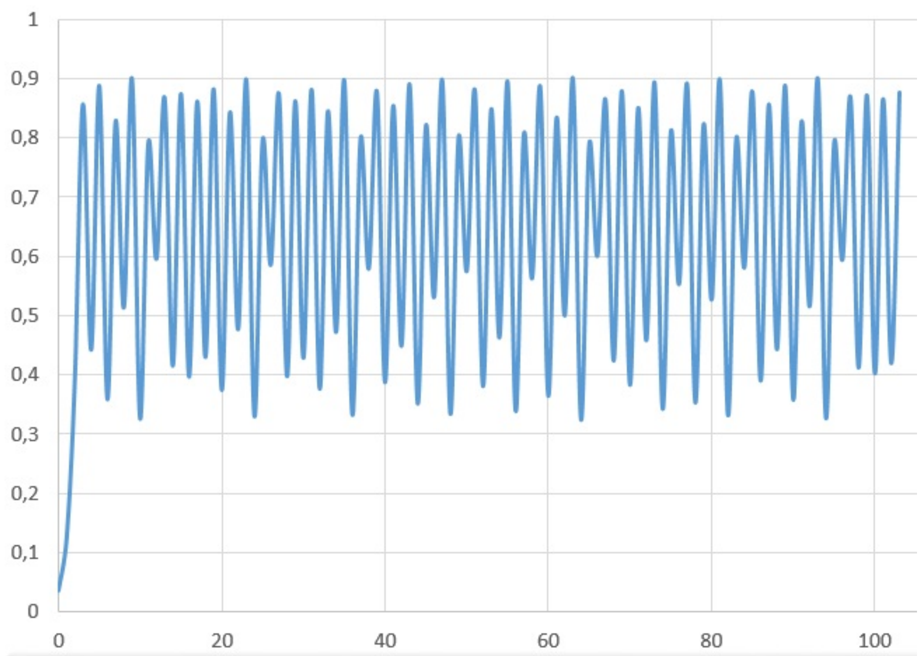
Figura 33: Relação entre o parâmetro a e a quantidade de ciclos do período.

a	Ciclos do período
3	2
3,449 ...	4
3,54409 ...	8
3,5644 ...	16
3,568759...	32
⋮	⋮
3,569946 ...	∞

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para $3,5 < a < 4$ existem valores para os quais as órbitas se comportam de maneira caótica e outros que as órbitas se mantêm estáveis em torno de um período, conforme figuras.

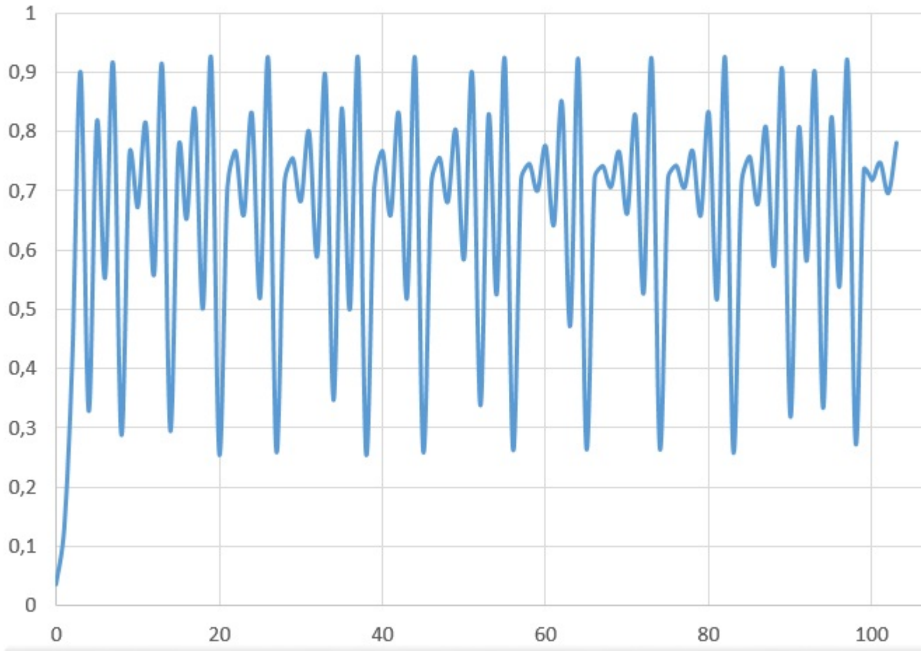
Figura 34: $f(x) = 3,6 \cdot (1 - x) \cdot x$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

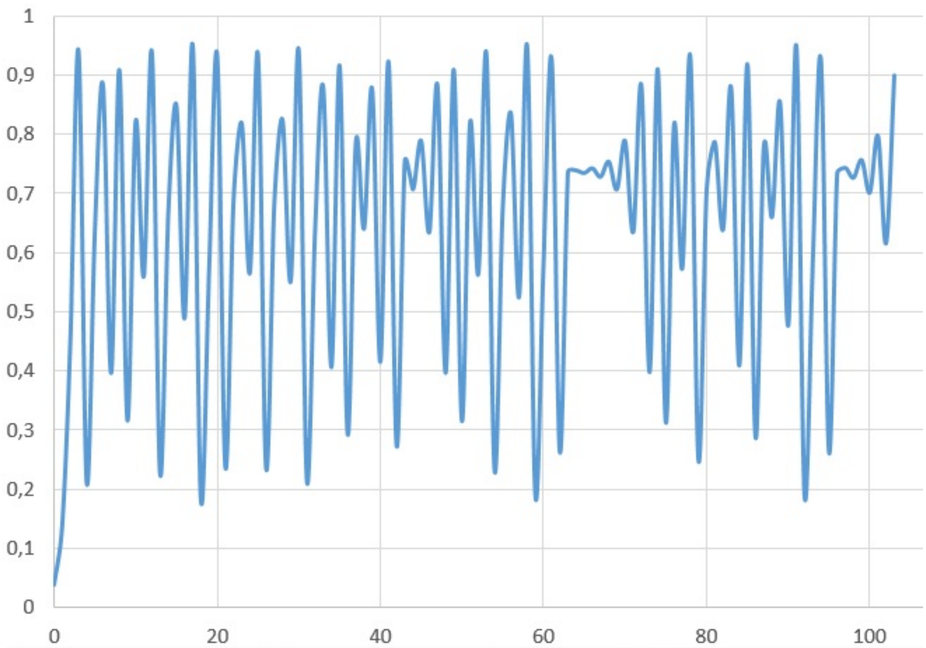
3 Further ***period-doublings*** to cycles of period 8, 16, 32, ..., occur as a increases.

Figura 35: $f(x) = 3,7 \cdot (1 - x) \cdot x$.



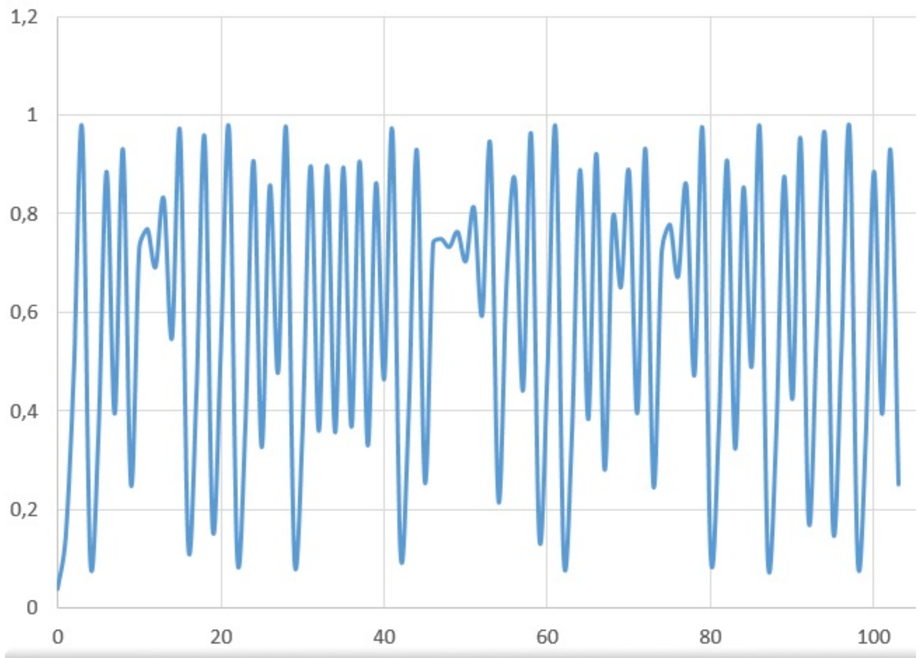
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 36: $f(x) = 3,8 \cdot (1 - x) \cdot x$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 37: $f(x) = 3,9 \cdot (1 - x) \cdot x$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, pode-se afirmar, segundo STROGATZ (1994), em [25], que o Caos aparece na dinâmica de população para alguns valores do parâmetro a, e que, para esses valores, a órbita do sistema caminha, de maneira intermitente, todos os valores do intervalo $[0, 1]$.

Falta, agora, investigar se a função $f(x) = a \cdot (1 - x) \cdot x$ possui a característica mais relevante do Caos, a sensibilidade às condições iniciais.

Ainda no Excel, utiliza-se a função $f(x) = a \cdot (1 - x) \cdot x$, determinando um valor arbitrário para a.

Supondo-se $a = 4$. Calcula-se, então, as iterações como nos exemplos anteriores, para dois valores de x bem próximos, por exemplo $0,24235$ e $0,24236$.

Figura 38: Iterações para $x_0 = 0,24235$.

0	0,73446591
1	0,780102948
2	0,686169354
3	0,861363887
4	0,477664565
5	0,998004513
6	0,007966019
7	0,031610246
8	0,122444153
9	0,42980633
10	0,980291395
11	0,077280705
12	0,285233592
13	0,81550156
14	0,601835064
15	0,958518479
16	0,159043217
17	0,534993888
18	0,995101711
19	0,019497182
20	0,076468169

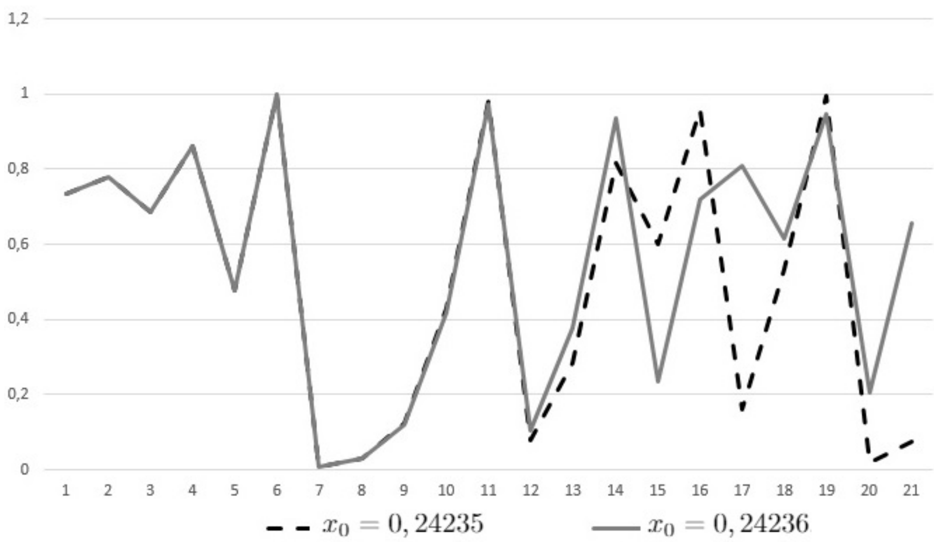
Figura 39: Iterações para $x_0 = 0,24236$.

0	0,734486522
1	0,780064285
2	0,686255986
3	0,861234831
4	0,478037587
5	0,99807061
6	0,007702671
7	0,030573361
8	0,118554522
9	0,41799739
10	0,973102288
11	0,104696902
12	0,374941842
13	0,937441829
14	0,234578585
15	0,71820589
16	0,809544758
17	0,616728172
18	0,945498136
19	0,206125644
20	0,654551452

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota-se que a diferença entre os dois valores de x é menor do que 10^{-4}, e que no início, geraram órbitas que parecem andar lado a lado, mas que, com poucas iterações mostram-se completamente distintas, ora perto uma da outra, ora distante uma da outra.

Figura 40: Comparação da evolução gráfica para $x_0 = 0,24235$ e $x_0 = 0,24236$.

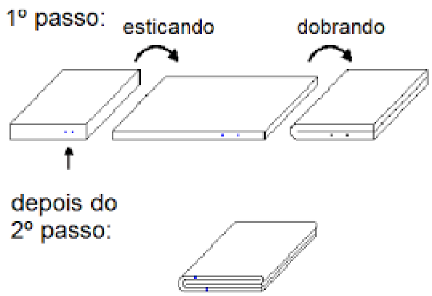


Fonte: Elaborada pelo autor.

Tal comportamento recebe o nome de sensibilidade às condições iniciais e uma boa analogia é a de uma massa integral de pão.

Tomadas duas sementes, relativamente próximas, após alguns amassos do padeiro elas tendem a se afastar. Instantes depois, quando o padeiro dobra a massa para continuar sua sova, elas retornam para perto uma da outra, conforme ilustração a seguir.

Figura 41: Dinâmica do padeiro.



Disponível em: https://www.puc-rio.br/ensinopesq/ccpg/pibic/relatorio_resumo2009/relatorio/fis/simone.pdf. Acesso em: 13 mai. 2019

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa teve por objetivo apresentar aos professores de matemática do ensino médio, como podem introduzir a ideia de função caótica para seus alunos.

Mesmo não sendo uma função comum, é atingível, pois a relação presa-predador é de conhecimento deles.

É inquestionável que toda matemática proposta na grade curricular é de fundamental importância em diversas áreas. No entanto, é também incontestável que a mesma grade se torna insuficiente para a resolução de problemas ditos caóticos, apresentados em tantas outras, como: engenharia, medicina, crescimento populacional, economia, entre outros.

Para tanto, apresentou-se, de forma simplista, sem deixar de lado o rigor matemático, algumas sugestões de atividades visando o entendimento e introdução desse tema aos alunos.

A interdisciplinaridade, bem como a utilização de softwares, mostraram-se indispensáveis para introduzir o conceito de função caótica, uma vez que, para melhor entendimento, foi necessária a construção de gráficos e tabelas.

Conclui-se que a contextualização da teoria do caos no ensino da matemática, torna-se bastante interessante, viabilizando um conhecimento mais expressivo e corroborando com o desenvolvimento do raciocínio de forma aplicada.

REFERÊNCIAS

[1] ABRÃO, B. S. *História da Filosofia. Col. Os Pensadores*. Nova Cultura, São Paulo, 2004.

[2] ADDISON, P. S. *Fractals and chaos: an illustrated course*. IOP Bookmaker Macros, London, 1997.

[3] BERLINGOFF, W. P., GOUVÊA, F. Q. *A Matemática Através dos Tempos*. Blucher, São Paulo, 2012.

[4] CARVALHO, S. P., KAMPHORST, S. O. *Caos na base 2*. Revista do Professor de Matemática, volume 36, SBM, Rio de Janeiro, 1998.

[5] DOMINGUES, H. H. *Fundamentos de Aritmética*. Atual Editora, São Paulo, 1991.

[6] EMANUEL, K. *Retrospective: Edward N. Lorenz (1917–2008)*. Science 320, 5879 (2008), 1025.

[7] EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 5^aed., Editora da Unicamp, Campinas, 2011.

[8] FOMIN, S. *Sistemas de Numeração*. Editorial Mir, Moscou, 1984.

[9] GLEICK, J. *Caos - A Criação de uma Nova Ciência*. Elsevier, Rio de Janeiro, 1989.

[10] GONGORRA, M., SODRÉ, M. *Ensino Fundamental: A origem dos números*. ENCEEJA-MEC/INEP, Brasília, 2005.

[11] HEFEZ, A. *Aritmética - Coleção Profmat*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.

[12] LAPLACE, P. S. *Théorie analytique des probabilités*. Paris, 1812.

[13] ______________.*Essai philosophique sur les probabilités. Parue comme introduction à la 2 ème éd. de la Théorie analytique...* Paris, 1814.

[14] LIMA, E. L., et al. *A Matemática do Ensino Médio*. SBM, Rio de Janeiro, 2005.

[15] LOPES, S. *Bio: volume único*. Saraiva, São Paulo, 2002.

[16] LORENZ, E. N. *Predictability; does the flap of butterflys wings in brazil set off a tornado in texas?* American Association for the Advancement of Science, 139th Meeting (1972).

[17] LOVO, L. F., SOUZA, L. S., BARANECK, E. F. Z. *A Evolução dos Números através das Civilizações*. Revista Eletrônica FACIMEDIT, São Paulo, 2016.

[18] MAY, R. M. *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. Nature 261, 26 (1976), 459–467.

[19] MAZUR, J. *Acaso: Como a matemática explica as coincidências da vida*. Casa da Palavra, Rio de Janeiro, 2016.

[20] NICOLA, U. *Antologia ilustrada de Filosofia Das origens a idade moderna*. Editoria Globo, São Paulo, 2005.

[21] PESSANHA, J. A. M. *Aristóteles. Col. Os Pensadores*. Nova Cultura, São Paulo, 1999.

[22] RIBEIRO, L. S. *Estudo do modelo predador-presa para interações tróficas entre espécies*. Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, São Paulo, 2005.

[23] SORRE, M. *Object and method of climatology*. Revista do Departamento de Geografia, n.18, p.89-94. Traduzido pelo Prof. Dr. José Bueno Conti. Departamento de Geografia/FFLCH/USP, São Paulo, 2006.

[24] SOUZA, J. C. *Pré-Socráticos. Col. Os Pensadores*. Nova Cultura, São Paulo, 1999.

[25] STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Perseus Books, United States of America, 1994.

A APÊNDICE

A.1 ALGORITMO GERAL DA DIVISÃO

Teorema A.1. *Se a e b são dois números inteiros, com $b > 0$, então existem e são únicos os inteiros q e r que satisfazem às condições: $a = bq + r$ e $0 \leq r < b$.*

Demonstração. Têm-se duas coisas a serem provadas. A primeira é a existência de tais números inteiros q e r, e a segunda é a unicidade desses valores.

Existência:

Seja S um conjunto cujos elementos são maiores do que ou iguais a zero e tal que $S = \{a - bq; q \in \mathbb{Z}\}$.

Deve-se mostrar que tal conjunto existe e é diferente do conjunto vazio. Caso isso ocorra, está provada a existência de q e r inteiros, tais que $a = bq + r$, visto que se pode dizer que $r = a - bq$. No contexto, $q \in \mathbb{Z}$ por hipótese e $r \in \mathbb{Z}$, pois a e b também pertencem ao conjunto dos números inteiros e, tal conjunto é fechado em relação à adição e multiplicação.

Sabe-se que $b > 0$ e, portanto, far-se-á necessário análise em relação aos possíveis valores de a. Para tal, vamos repartir em 3 casos: $a > 0$, $a = 0$ e $a < 0$.

Caso 1: $a > 0$

Se $a > 0$, então, basta tomar $q = 0$. Substituindo q por 0, obtêm-se:

$$a - bq =$$

$$a - b \cdot 0 =$$

$$a - 0 =$$

$$a.$$

Como $a > 0$, então $a - bq > 0$ e, portanto, $a - bq \geq 0$. Logo, o conjunto S existe e é diferente do conjunto vazio.

Caso 2: $a = 0$

Se $a = 0$, então basta tomar novamente $q = 0$. Substituindo q por 0, obtém-se:

$$a - bq =$$

$$a - b \cdot 0 =$$

$$a - 0 =$$

$$a.$$

Como $a = 0$, então $a - bq = 0$ e, portanto, $a - bq \geq 0$. Logo, conjunto S existe e é diferente do conjunto vazio.

Caso 3: $a < 0$

Se $a < 0$, então basta tomar $q = a$. Substituindo q por a, obtém-se:

$$a - bq =$$

$$a - b \cdot a =$$

$$a(1 - b).$$

Nota-se que $b \in \mathbb{Z}$ e $b > 0$, então $b \geq 1$.

Caso $b = 1$,

$$a(1 - b) = a(1 - 1) = a \cdot 0 = 0$$

e, consequentemente $a - bq \geq 0$.

Caso $b > 1$, $(1 - b) < 0$ e como a também é negativo, o produto $a(1 - b)$ será positivo e, consequentemente, $a - bq \geq 0$.

Novamente, o conjunto S existiria e seria diferente do conjunto vazio.

Assim, conclui-se que $S \neq \emptyset$.

Como S é não vazio, sabe-se que, pelo Princípio da Boa Ordenação, S possui um elemento mínimo. Seja $a - bq$ tal elemento.

Suponha, agora, por absurdo, que $a - bq \geq b$.

Assim:

$$a - bq \geq b \Rightarrow$$

$$a - bq - b \geq 0 \Rightarrow$$

$$a - b(1 + q) \geq 0$$

Assim, $a - b(1 + q) \in S$.

No entanto $1 + q > q$.

Então, multiplicando $(-b)$ a ambos os membros da desigualdade, tem-se:

$$-b(1 + q) < -bq$$

Adicionando a em ambos os membros da desigualdade, tem-se:

$$a - b(1 + q) < a - bq$$

Absurdo!

Pois, por hipótese, $a - bq$ é o menor elemento de S.

Logo, $a - bq \geq 0$ e $a - bq < b$.

Tomando $r = a - bq$, então $0 \leq r < b$.

Unicidade:

Seja $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}$, tal que $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$ e $a = bq' + r'$, com $0 \leq r' < b$.

Sem perda de generalidade, suponha, por absurdo, que $r > r'$.

Assim, como $a = bq + r$ e $a = bq' + r'$ e como $r > r'$, pode-se concluir que $bq < bq'$. Pelo fato de $b > 0$, pode-se dividir por b ambos os membros da desigualdade e tem-se $q < q'$.

Consequentemente,

$$\boxed{0 < q' - q}^{*}.$$

Como $r < b$ e $r' < b$, conlcui-se que $r - r' < b$.

Isolando r e r' da equação $a = bq + r$ e $a = bq' + r'$ tem-se:

$$r = a - bq \text{ e } r' = a - bq'.$$

Substituindo r e r' na desigualdade $r - r' < b$, obtêm-se:

$$(a - bq) - (a - bq') < b \Rightarrow$$

$$a - bq - a + bq' < b \Rightarrow$$

$$bq' - bq < b \Rightarrow$$

Colocando b em evidência, tem-se:

$$b(q' - q) < b$$

Como $b > 0$, dividindo por b ambos os membros da desigualdade, tem-se:

$$\boxed{q' - q < 1}^{**}.$$

De * e **, consegue a relação $0 < q' - q < 1$. Como q e q' são números inteiros, $q' - q$ é, também, um número inteiro. Mas como não existe inteiro entre 0 e 1, conclui-se que r não pode ser maior do que r'.

Portanto, $r = r'$.

Consequentemente, $q = q'$.

Conclui-se então, que para quaisquer a e b inteiros, com $b > 0$, existem e são únicos os inteiros q e r que satisfazem às condições: $a = bq + r$ e $0 \leq r < b$, onde q chama-se o quociente e r o resto não negativo na divisão de a por b. $\square$