

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**JOSIANNE CATARINA DE SOUSA RODRIGUES DOS SANTOS**

**APROXIMAÇÃO DE CAMPO FRACO E  
ONDAS GRAVITACIONAIS**

Vitória

2019

**JOSIANNE CATARINA DE SOUSA RODRIGUES DOS SANTOS**

**APROXIMAÇÃO DE CAMPO FRACO E  
ONDAS GRAVITACIONAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física, na área de concentração de Física Teórica.

Orientador: Prof. Dsc. Humberto Belich Junior

Vitória

2019

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

S237a Santos, Josianne Catarina de Sousa Rodrigues dos, 1989-  
Aproximação de campo fraco e ondas gravitacionais. /  
Josianne Catarina de Sousa Rodrigues dos Santos. - 2019.  
93 f. : il.

Orientador: Humberto Belich Junior.  
Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Relatividade geral. 2. Ondas gravitacionais. 3. Ondas eletromagnéticas. I. Belich Junior, Humberto. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 53

---



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

---

## "Aproximação de campo fraco e ondas gravitacionais"

**Josianne Catarina de Sousa Rodrigues dos Santos**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada por:

Prof. Dr. José Abdalla Helayël-Neto  
(CBPF/RJ)

Prof. Dr. Humberto Belich Junior  
(Orientador /PPGFis)

Prof. Dr. Fernando José Lira Leal  
(IFES-Cariacica)

Prof. Dr. Gabriel Luchini Martins  
(PPGFis/UFES)

Vitória-ES, 29 de outubro de 2019.

*À minha filha Mirian Christine, que é meu universo e fator determinante da curvatura em torno dos meus objetivos.*

"Todo mundo é um gênio. Mas se você julgar um peixe por sua capacidade de subir em uma árvore, ele vai gastar toda sua vida acreditando que é um estúpido."

(Albert Einstein)

## RESUMO

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) foi proposta por Albert Einstein em 1915. Esta teoria propõe uma generalização do princípio da relatividade do movimento para sistemas que incluam campos gravitacionais e se baseia em três postulados. Para a sua construção, é necessário utilizar ferramentas matemáticas para espaços curvos, não mais se restringindo ao espaço Euclidiano. Uma das formas de alcançar isto é por intermédio da Álgebra Tensorial, contudo, é com a topologia que este estudo se torna mais completo. A partir da construção da TRG, Einstein previu inicialmente a existência das ondas gravitacionais, que foram detectadas em 14 de setembro de 2015, nos EUA, 100 anos após a previsão. Esta radiação gravitacional tem características específicas, mas com algumas semelhanças com as ondas eletromagnéticas. Assim, nessa dissertação apresentaremos a construção desta teoria, motivada pela descoberta em 2015, finalizando com as formas bem peculiares da interação da radiação gravitacional com a matéria e de sua polarização.

Palavras-chave: relatividade geral, ondas gravitacionais, ondas eletromagnéticas.

## **ABSTRACT**

In 1915, the general relativity theory (TRG) was proposed by Albert Einstein. This theory is a generalization of the relativity principle of motion for systems where include gravitational field and is based on a three postulates. For construction of the TRG, is required to use mathematical tools of curved space, no longer restricted to the Euclidean space. A way to do this is through algebra tensor, however, it is in the topology study that this study is most complete. After the construction of TRG, Einstein predicted the existence of gravitational waves, it was finally detected on September 14, 2015, in the USA, one hundred years after the predict. This waves has specific characteristics, but with some similarities with electromagnetic waves. Therefore, this work show the construction of this theory, and the motivation for this was the detected of the gravitational waves in 2015, and this work finishing with the interaction the gravitational waves with the matter and its polarization.

Keywords: general relativity, gravitational waves, electromagnetic waves.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1–	Circunferência com centro na origem do plano cartesiano . . . . .	14
Figura 2–	Representação de um Espaço Curvo 2D imerso no Espaço Euclidiano 3D . . . . .	14
Figura 3–	Representação das Coordenadas Curvilíneas no Plano Tangente ao Es- paço Curvo . . . . .	15
Figura 4–	Vetores unitários e ortogonais aos vetores de base . . . . .	16
Figura 5–	Representação de um vetor definido no plano Euclidiano e de vetores gerais que atuam em Funções do ponto P . . . . .	21
Figura 6–	Mapeamento do semicírculo superior da circunferência . . . . .	25
Figura 7–	Exemplo de subconjunto aberto em relação à métrica . . . . .	26
Figura 8–	Exemplo de curva sobre uma variedade M . . . . .	28
Figura 9–	Funções que levam pontos da variedade no eixo coordenados e vice e versa . . . . .	29
Figura 10–	Exemplificação de diversas curvas sobre uma variedade M que passam pelo ponto de referência . . . . .	30
Figura 11–	Transporte paralelo de um vetor com ângulo e comprimento invariantes.	42
Figura 12–	Transporte paralelo no plano . . . . .	49
Figura 13–	Transporte paralelo no espaço curvo . . . . .	50
Figura 14–	Força gravitacional de Newton entre dois corpos massivos . . . . .	57
Figura 15–	Região do espaço com cargas elétricas . . . . .	58
Figura 16–	Representação de uma conexã afim no transporte paralelo entre dois vetores . . . . .	62
Figura 17–	Separação infinitesimal entre duas partículas Espaço Curvo . . . . .	82
Figura 18–	Desvio geodésico na superfície de diferentes curvaturas . . . . .	83

Figura 19–	Efeito da onda gravitacional em um anel de partículas de teste . . . . .	86
Figura 20–	Orientações relativas do detector e a direção de propagação da onda (Incoming wave) . . . . .	87

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>ÁLGEBRA TENSORIAL</b>	<b>13</b>
2.1	ESPAÇO CURVO	13
2.2	ALGUMAS PROPRIEDADES DAS COMPONENTES DO TENSOR MÉTRICO $g_{ij}$	16
2.3	TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS	18
2.4	VETORES CONTRAVARIANTES E COVARIANTES	19
2.5	VETORES COMO OPERADORES	20
<b>3</b>	<b>TOPOLOGIA</b>	<b>24</b>
3.1	VARIEDADE DIFERENCIÁVEL	24
3.2	GEOMETRIA DIFERENCIAL	27
3.3	CAMPOS TENSORIAIS	36
3.4	FORMAS DIFERENCIAIS	38
<b>3.4.1</b>	<b>Dualidade de Hodge Euclidiana</b>	<b>40</b>
<b>3.4.2</b>	<b>Derivada Exterior</b>	<b>40</b>
<b>4</b>	<b>CONEXÃO E DERIVADA COVARIANTE</b>	<b>42</b>
4.1	DERIVADA COVARIANTE	43
<b>4.1.1</b>	<b>Conexão Riemanniana ou Conexão de Christoffel</b>	<b>46</b>
4.2	CURVATURA	49
<b>4.2.1</b>	<b>Tensor de Riemann</b>	<b>51</b>
<b>5</b>	<b>ESPAÇO-TEMPO CURVO</b>	<b>54</b>

5.1	FORMALISMO DE SEGUNDA ORDEM . . . . .	54
<b>5.1.1</b>	<b>Princípios da Relatividade Geral . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>5.1.2</b>	<b>Equações de Einstein . . . . .</b>	<b>56</b>
5.2	FORMALISMO DE PRIMEIRA ORDEM . . . . .	61
<b>5.2.1</b>	<b>Conexão Afim . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>5.2.2</b>	<b>Torção . . . . .</b>	<b>63</b>
<b>5.2.3</b>	<b>Teoria de Gauge . . . . .</b>	<b>64</b>
<b>5.2.4</b>	<b>Curvatura de um Fibrado . . . . .</b>	<b>66</b>
<b>5.2.5</b>	<b>Estrutura de Cartan . . . . .</b>	<b>66</b>
<b>5.2.6</b>	<b>Tensor de Curvatura . . . . .</b>	<b>68</b>
<b>6</b>	<b>ONDAS GRAVITACIONAIS E SUA ANALOGIA COM ONDAS ELETRO- MAGNÉTICAS . . . . .</b>	<b>69</b>
6.1	LINEARIZAÇÃO DA RELATIVIDADE GERAL . . . . .	69
6.2	ENERGIA E MOMENTO LINEAR DE UMA ONDA GRAVITACIONAL . . . . .	78
6.3	INTERAÇÃO DA RADIAÇÃO GRAVITACIONAL COM A MATÉRIA E A POLARI- ZAÇÃO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS . . . . .	80
<b>6.3.1</b>	<b>Desvio Geodésico . . . . .</b>	<b>82</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>88</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>90</b>

# 1 INTRODUÇÃO

No final do ano de 2015, uma grande descoberta por um grupo de cientistas e colaboradores, por intermédio do Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferometria Laser (LIGO, em inglês) detectaram pela primeira vez uma das previsões de um grande cientista do século XX. Em 12 de fevereiro de 2016, após várias análises, foi publicado na revista *Physical Review Letters* esta grande e extraordinária notícia [1], que revolucionou a física do século XXI, 100 anos após a previsão teórica por Einstein por meio da Teoria da Relatividade Geral. Este foi o estímulo necessário para o estudo e aprofundamento na área de Relatividade Geral.

A previsão teórica das ondas gravitacionais foi realizada por Albert Einstein, um físico alemão com ideias extraordinárias, que revolucionaram e ampliaram a visão do universo. Em 1905, Einstein propôs a teoria da relatividade restrita, no qual as ideias descobertas foram generalizadas para sistemas que incluam campos gravitacionais. Assim, em 1915, uma nova teoria foi proposta: a teoria da relatividade geral (TRG).

A partir desta teoria foi formulada a equação de campo de Einstein e, em 1916, foi prevista a existência de ondas gravitacionais, decorrentes da solução desta equação, onde Einstein mostrou que objetos massivos acelerados distorciam o espaço-tempo causando a irradiação de ondas na forma de radiação gravitacional. Essas oscilações viajam à velocidade da luz através do universo, levando informações sobre suas origens, bem como pistas valiosas sobre a natureza da própria gravidade [1].

Por muito tempo, esta teoria não havia sido comprovada, contudo com o evento conhecido como GW150914, em 14 de setembro de 2015, as ondas gravitacionais foram finalmente detectadas, por intermédio da Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) [1, 2].

Sendo assim, neste trabalho pretendemos mostrar a construção da TRG consruída por duas frentes: a primeira é a baseada no estudo da Álgebra Tensorial, onde o espaço curvo é analisado imerso ao espaço euclidiano de dimensão maior e após sua análise o estudo do espaço puramente curvo. A segunda frente é baseada no estudo de uma variedade diferencial e onde o espaço é puramente curvo e não mais imerso em uma dimensão maior, conhecido na matemática

como topologia.

Além disso, ao final deste trabalho, estudamos a radiação gravitacional (perda de energia via ondas gravitacionais) e a interação das ondas gravitacionais com a matéria, mostrando a necessidade de uma fixação de “gauge” para a eliminação da parte não física da teoria e realizando uma analogia entre as ondas gravitacionais, que são oscilações do espaço-tempo a velocidade da luz, com as ondas eletromagnéticas, que se propagam no espaço-tempo a velocidade da luz, além de ser uma revisão teórica para o estudo da gravitação.

## 2 ÁLGEBRA TENSORIAL

A existência das Ondas Gravitacionais foi prevista por Albert Einstein em sua teoria da Relatividade Geral. Para a construção desta teoria é necessário o estudo sobre o Espaço Curvo, no qual, inicialmente, iremos discutir por intermédio da Álgebra Tensorial, com base em textos sobre Relatividade Geral [3–5]. O estudo da Álgebra Tensorial é uma forma de entendermos melhor sobre um espaço curvo, principalmente, por estarmos mais familiarizados com este estudo nos cursos básicos de graduação e até mesmo na educação básica.

### 2.1 ESPAÇO CURVO

Nesta seção não temos a intenção de fazer um tratamento rigoroso da geometria diferencial, entretanto, tentaremos ser didáticos, sem abandonar os conceitos e cálculos importantes para a compreensão do nosso trabalho.

No curso de Geometria Analítica estudamos, por exemplo, sobre a circunferência. Sabemos que a equação reduzida da circunferência com centro na origem e raio unitário (Figura 1) é dada por

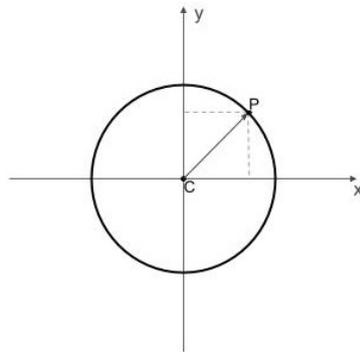
$$x^2 + y^2 = 1, \quad (2.1)$$

ou seja, escrevemos os pontos de um espaço curvo, neste caso, da circunferência, em função dos eixos coordenados  $(x, y)$  no espaço euclidiano em 2 dimensões (2D). Logo, uma forma de estudar um espaço curvo, é utilizando um espaço euclidiano, tal que o espaço em que temos interesse esteja contido nele.

Desta forma, podemos definir um ponto P em uma variedade (generalização da ideia de superfície) por meio de um vetor  $\vec{s}$ , onde P está localizado no espaço tangente (espaço plano) da variedade em questão, conforme figura 2.

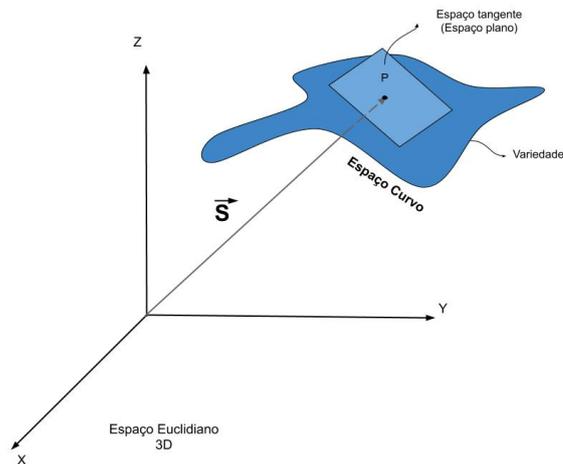
Podemos ainda definir algumas coordenadas curvilíneas  $(q^1, q^2)$ , passando pelo ponto P,

Figura 1 – Circunferência com centro na origem do plano cartesiano



Fonte: Próprio autor.

Figura 2 – Representação de um Espaço Curvo 2D imerso no Espaço Euclidiano 3D



Fonte: Próprio autor.

no plano tangente ao espaço curvo bidimensional, conforme figura 3, de modo que:

$$\vec{s} = \vec{s}(q^1, q^2).$$

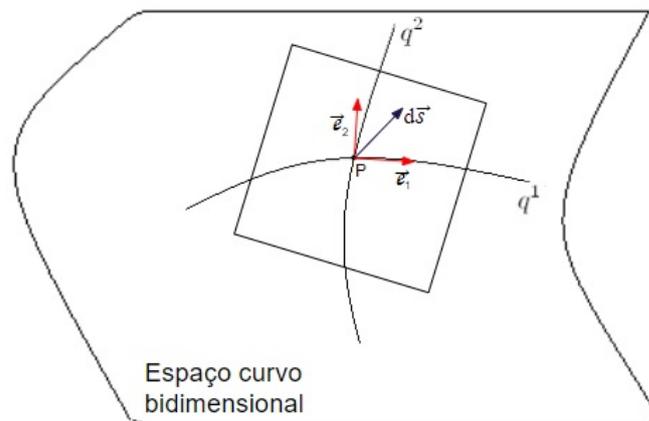
Assim, diferenciando  $\vec{s}$  obtemos:

$$d\vec{s} = \vec{e}_1 dq^1 + \vec{e}_2 dq^2, \quad (2.2)$$

onde definimos

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial \vec{s}}{\partial q^1} \text{ e } \vec{e}_2 = \frac{\partial \vec{s}}{\partial q^2}.$$

Figura 3 – Representação das Coordenadas Curvilíneas no Plano Tangente ao Espaço Curvo



Fonte: Próprio autor.

Portanto, o elemento de linha  $ds^2$  será dado por

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^2 (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) dq^i dq^j.$$

Com isso, definimos então a métrica para um espaço curvo  $g_{ij}$  dada por

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j. \quad (2.3)$$

Logo, usando a convenção de Einstein, onde os índices repetidos implicam em soma, temos que

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j. \quad (2.4)$$

Os vetores  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  são chamados de vetores de base, então

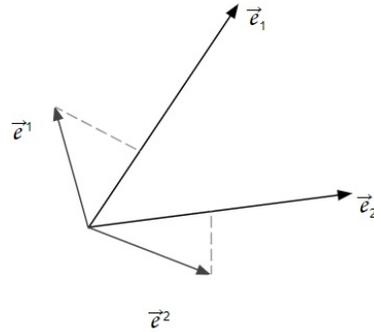
$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \text{base coordenada.}$$

Sendo assim, qualquer vetor nesse plano tangente pode ser escrito como uma combinação linear dessa base, isto é:

$$\vec{V} = v^1 \vec{e}_1 + v^2 \vec{e}_2.$$

Contudo,  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  não são necessariamente ortogonais nem unitários, mas podemos definir vetores, conforme figura 4, tais que

Figura 4 – Vetores unitários e ortogonais aos vetores de base



Fonte: Próprio autor.

$$\begin{cases} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}^1 = 1 & (\text{projeção sobre } \vec{e}_1) \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}^2 = 1 & (\text{projeção sobre } \vec{e}_2) \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}^2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}^1 = 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \delta_i^j, \quad (2.5)$$

onde  $\delta_i^j$  é o símbolo da Delta de Kronecker, definida por:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (2.6)$$

Assim,  $\{\vec{e}^1, \vec{e}^2\}$  são chamados de base dual à base coordenada  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ . Dessa forma, o vetor  $\vec{V}$  pode ser escrito como:

$$\vec{V} = v^i \vec{e}_i = v_i \vec{e}^i, \quad (2.7)$$

onde  $v^i$  é chamado de componente contravariante e  $v_i$  de componente covariante do vetor  $\vec{V}$ .

## 2.2 ALGUMAS PROPRIEDADES DAS COMPONENTES DO TENSOR MÉTRICO $g_{ij}$

A métrica de um espaço curvo ou o tensor métrico  $g_{ij}$ , conforme definida em 2.3, é o que define o espaço, isto é, está ligado à geometria do espaço-tempo e “desempenha o papel de “potenciais” do campo de gravitação” [6].

Existem três propriedades importantes associadas à métrica que serão úteis nos nossos cál-

culos. A primeira diz respeito a propriedade de levantar ou abaixar os índices das componentes do vetor  $\vec{V}$ . Para verificarmos isto, definidos os vetores  $\{\vec{e}^1, \vec{e}^2\}$  dual à base coordenada  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , podemos multiplicar a equação 2.7 por  $\vec{e}_j$ , de modo que

$$v^i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = v_i \vec{e}^i \cdot \vec{e}_j.$$

Substituindo as equações 2.3 e 2.5, temos que:

$$v^j g_{ij} = v_i \delta_j^i. \quad (2.8)$$

Contudo analisando o lado direito da igualdade da equação 2.8, percebemos que o índice  $j$  é um índice livre que pode assumir os valores 1, 2 ou 3 e o índice  $i$  é um somatório, de modo que podemos obter três equações, isto é

$$j = 1 \Rightarrow v_i \delta_1^i = v_1 \delta_1^1 + v_2 \delta_1^2 + v_3 \delta_1^3 = v_1;$$

$$j = 2 \Rightarrow v_i \delta_2^i = v_1 \delta_2^1 + v_2 \delta_2^2 + v_3 \delta_2^3 = v_2;$$

$$j = 3 \Rightarrow v_i \delta_3^i = v_1 \delta_3^1 + v_2 \delta_3^2 + v_3 \delta_3^3 = v_3.$$

Logo, podemos escrever a equação 2.8 como

$$v_j = v^i g_{ij}. \quad (2.9)$$

Por outro lado, multiplicando a equação 2.7 por  $\vec{e}^j$ , de forma similar, obtemos que

$$v^j = v_i g^{ij}. \quad (2.10)$$

Observe então que as equações 2.9 e 2.10 mostram que a métrica tem a propriedade de abaixar e levantar os índices da componente covariante ou contravariante do vetor  $\vec{V}$ , sendo esta uma importante propriedade de  $g_{ij}$ .

A segunda propriedade a ser analisada é a propriedade de simetria da métrica. Para isso, podemos analisar dois tensores  $A_{ij}$  e  $B_{ij}$ , respectivamente, simétrico e antissimétrico nos índices  $i$  e  $j$ , ou seja

$$A_{ij} B_{ij} = A_{ji} (-B_{ji})$$

$$A_{ij} B_{ij} = -A_{ji} B_{ji},$$

como  $i$  e  $j$  são índices livres, temos que

$$\begin{aligned} A_{ij}B_{ij} &= -A_{ij}B_{ij} \\ A_{ij}B_{ij} &= 0 \text{ (identicamente nulo)} \end{aligned}$$

então, analisando a equação 2.4, percebemos que a métrica  $g_{ij}$  deve ser simétrica, pois  $dq^i dq^j$  é simétrico, caso contrário o elemento de linha  $ds^2$  seria nulo. Logo

$$g_{ij} = g_{ji}. \quad (2.11)$$

Por fim, a terceira propriedade da métrica é que as componentes tensoriais contravariantes e covariantes do tensor métrico obedecem a seguinte equação

$$g^{ki}g_{ij} = \delta_j^k. \quad (2.12)$$

Estas três propriedades da métrica serão bastante úteis durante nossos cálculos futuros.

## 2.3 TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS

As coordenadas curvilíneas  $q^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), podem ser transformadas de uma coordenada para outra por meios de transformações, então seja a transformação de coordenadas

$$q^i \rightarrow \bar{q}^i \begin{cases} q^i(\bar{q}) \\ \bar{q}^i(q) \end{cases}$$

e  $\varepsilon_i$  e  $\bar{\varepsilon}_i$  novas bases coordenadas, porém que se transformam de forma similar aos vetores  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$ , ou seja

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{\partial \vec{s}}{\partial \bar{q}^i} \quad \text{e} \quad \varepsilon_k = \frac{\partial \vec{s}}{\partial q^k}.$$

Para transformar da base "sem barra" para a base "barrada", ou seja

$$\varepsilon_i \longmapsto \bar{\varepsilon}_i,$$

temos que

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{\partial \vec{s}}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} = \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \varepsilon_k. \quad (2.13)$$

Analogamente, temos que

$$\varepsilon_i = \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^i} \bar{\varepsilon}_k. \quad (2.14)$$

Logo, é possível mudar de uma coordenada "sem barra" para uma coordenada "barrada" por meio das transformações de coordenadas 2.13 e 2.14.

## 2.4 VETORES CONTRAVARIANTES E COVARIANTES

Por meio da equação 2.7, vimos que um vetor  $\vec{V}$  pode ser escrito pelas suas componentes contravariantes e covariantes. Do mesmo modo podemos escrever tal vetor associado as bases coordenadas que definimos, ou seja

$$\vec{V} = v^i \epsilon_i = \bar{v}^i \bar{\epsilon}_i \quad (2.15)$$

mas precisamos descobrir como esses vetores se transformam.

Usando a equação 2.13, que podemos escrever a equação 2.15 como

$$\vec{V} = v^i \epsilon_i = \bar{v}^i \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \epsilon_k.$$

Para  $v^i \epsilon_i$ , fazendo a substituição  $i \rightarrow k$ , temos

$$\vec{V} = v^k \epsilon_k - \bar{v}^i \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \epsilon_k = 0$$

de forma que

$$\left( v^k - \bar{v}^i \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \right) \epsilon_k = 0.$$

Como  $\epsilon_k$  não pode ser nulo por ser arbitrário, concluímos que

$$v^k = \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \bar{v}^i \quad (2.16)$$

De forma similar, utilizando a equação 2.14, podemos escrever a componente "barrada" da equação 2.15 como

$$\bar{v}^k = \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^i} v^i. \quad (2.17)$$

Assim, 2.16 e 2.17 são as leis de transformação de vetores cujos índices estão levantados e são chamados de **Vetores Contravariantes**<sup>1</sup>.

Realizando as mesmas operações para o vetor  $\vec{V}$ , da equação 2.15, porém analisando agora

---

<sup>1</sup>Na verdade são componentes dos vetores contravariantes, pois do ponto de vista da geometria diferencial vetores não tem índices.

as componentes cujos os índices estão abaixados, teremos que

$$v_j = \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^j} \bar{v}_k \quad (2.18)$$

e

$$\bar{v}_j = \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^j} v_k. \quad (2.19)$$

Sendo assim, as leis de transformações 2.18 e 2.19 temos vetores cujos índices estão abaixados e são chamados de **Vetores Covariantes**<sup>2</sup>.

## 2.5 VETORES COMO OPERADORES

Vimos que é possível estudar um espaço curvo utilizando um espaço euclidiano de dimensão maior, tal que o espaço em que temos interesse esteja contido nele. Considerando uma dimensão  $D = 3$ , podemos definir uma base  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$  e uma base dual  $\{\bar{e}^1, \bar{e}^2\}$  que formam qualquer vetor desse espaço. Por outro lado, podemos definir outras bases coordenadas,  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ , no qual, da mesma forma, quaisquer vetores do plano tangente ao nosso espaço curvo podem ser escritos nesta base ou na base "com barra",  $\{\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2\}$ , sendo que podemos transformar uma coordenada na outra conforme a equação 2.19, ou seja

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \varepsilon_k.$$

Então, um vetor  $\vec{V}$  pode ser escrito como

$$\vec{V} = V^i \varepsilon_i = \bar{V}^i \bar{\varepsilon}_i,$$

onde

$$\bar{V}^i = \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^k} V^k.$$

Porém, não queremos mais trabalhar com nosso espaço curvo contido no espaço euclidiano, mas agora, com espaços curvos gerais<sup>3</sup>. Logo, podemos definir novos tipos de vetores,  $e_i$  e  $\bar{e}_i$ , de modo que

$$e_i = \frac{\partial}{\partial q^i}$$

<sup>2</sup>Na verdade são componentes dos vetores covariantes.

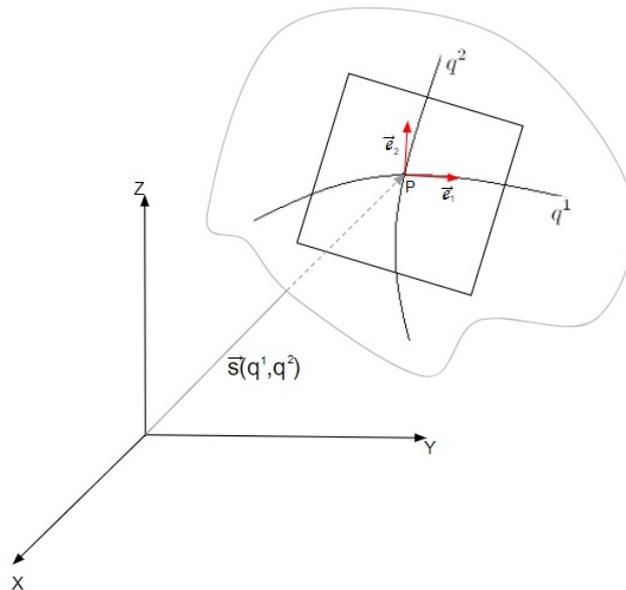
<sup>3</sup>Do ponto de vista da geometria diferencial estamos abrindo mão da imersão. Por exemplo, poderíamos construir a métrica em uma superfície esférica sem definir o conceito de raio. Basta usar a geometria diferencial para medir a curvatura da superfície que a descrição seria equivalente se tivéssemos definido o raio usando a imersão.

e

$$\bar{e}_k = \frac{\partial}{\partial \bar{q}^k}$$

onde tal operador pode atuar sobre funções definidas no ponto P, conforme figura 5, sobre uma variedade diferencial (espaço curvo geral).

Figura 5 – Representação de um vetor definido no plano Euclidiano e de vetores gerais que atuam em Funções do ponto P



Fonte: Próprio autor.

Tais vetores seguem a mesma lei de transformação dos vetores, isto é

$$e_i = \frac{\partial}{\partial q^i} = \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial \bar{q}^k} = \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^i} \bar{e}_k \quad (2.20)$$

e

$$\bar{e}_i = \frac{\partial}{\partial \bar{q}^i} = \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \frac{\partial}{\partial q^k} = \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} e^k. \quad (2.21)$$

Por isso são vetores, pois o que importa é a lei de transformação, que é a mesma Lei das equações 2.16 e 2.17, visto que nesse processo não dependem mais do vetor posição  $\vec{s}$  associado ao espaço euclidiano. Com isso, é possível concluir que estamos trabalhando com espaço puramente curvos (variedades diferenciáveis).

Vamos escolher esses vetores como a nossa base coordenada e utilizar a seguinte notação

$$e_i = \frac{\partial}{\partial q^i} = \partial_i$$

de modo que um vetor nesta base será

$$V = V^i e_i = V^i \partial_i.$$

Para recuperarmos a noção de vetor que conhecemos basta atuar o operador  $V$  sobre uma função coordenada, isto é,

$$V [q^i(\tau)] = V^k \partial_k (q^i) = V^k \delta_k^i = V^i.$$

Da mesma forma quando trabalhamos com o espaço euclidiano, precisamos encontrar quais são os vetores duais aos vetores de base que definimos. Para isso partimos do princípio fundamental, que essas bases são ortonormais, conforme a equação 2.5 e, sabendo que os vetores de base que definimos se transformam conforme a equação 2.21, é possível perceber que um objeto que se transforma desta maneira é a diferencial, dada por

$$\partial \bar{q}^i = \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^k} \partial q^k. \quad (2.22)$$

Com isso, podemos escolher  $\{\partial q^i\}$  como base dual à base  $\{\partial_i\}$ . Assim, o antigo produto escalar é substituído por uma operação de dualidade, pois os vetores pertencem a espaços diferentes

$$\begin{cases} \partial_i \Rightarrow & \text{espaço tangente} \\ \partial q^i \Rightarrow & \text{espaço cotangente.} \end{cases}$$

Note que existem representações vetoriais que são naturalmente covariantes ou contravariantes, um exemplo de uma representação naturalmente contravariante é o vetor deslocamento como a equação 2.22. Por outro lado, uma representação naturalmente covariante é a função escalar (gradiente), em que  $\bar{\phi}(\bar{q}) = \phi(q)$ , onde

$$\frac{\partial \bar{\phi}(\bar{q})}{\partial \bar{q}^i} = \frac{\partial \phi(q)}{\partial \bar{q}^i} = \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \frac{\partial \phi(q)}{\partial q^k}.$$

Logo, é possível observar que o que define um vetor covariante ou contravariante é a lei de transformação, se ele se transformar como o vetor deslocamento será contravariante, mas se a transformação for similar ao gradiente será um vetor covariante [7].

Entretanto, em geometria diferencial é possível definir com rigor um campo tensorial que relaciona objetos definidos no espaço tangente com objetos definidos no espaço cotangente. Este é um campo tensorial métrico  $g$ , que leva covetores em vetores e vice-versa [8]. Além disso, nesta área, será possível entender melhor os espaços tangentes e cotangentes.

Visando, então, um embasamento teórico mais fundamental para a construção deste trabalho faremos uma discussão, no próximo capítulo, de uma área da matemática denominada topologia.

### 3 TOPOLOGIA

A topologia tem como finalidade estudar a estrutura dos objetos sem se preocupar com seu tamanho ou formato, isto é, desconsiderando a curvatura. Estudar esta área é uma forma de aprofundar nos estudos da geometria e, conseqüentemente, no entendimento do espaço curvo. Neste capítulo temos como base os textos sobre Relatividade Geral [5] e sobre Topologia [8] e ao longo dele mostraremos algumas formulações matemáticas e definiremos alguns conceitos importantes para a construção da Teoria da Relatividade Geral.

#### 3.1 VARIEDADE DIFERENCIÁVEL

Para estudar qualquer tipo de curvatura, precisamos inicialmente entender o que é uma variedade, mais especificamente o significado de variedade diferenciável. Uma variedade é um espaço topológico que, se analisarmos localmente, é similar a um espaço euclidiano nas vizinhanças de cada ponto. Uma reta, por exemplo, é um tipo de variedade unidimensional. Mas para realizarmos cálculos, que é o nosso interesse, devemos estudar um tipo específico de variedade: a variedade diferenciável.

Para um melhor entendimento, iremos partir da ideia de que a topologia não considera a curvatura do espaço. Por exemplo, podemos retomar a ideia do círculo do capítulo 2 (figura 1), que pode ser escrito como

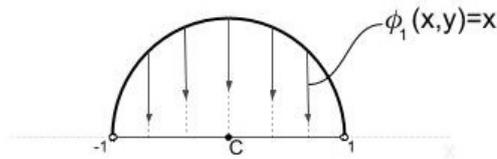
$$x^2 + y^2 = 1,$$

como vimos na equação 2.1.

Contudo, note que qualquer ponto do semicírculo superior pode ser descrito unicamente por uma coordenada do eixo cartesiano  $x$  (figura 6).

Desta forma, projetando sobre o eixo, obtemos um mapeamento contínuo,  $\phi_1(x, y)$ , entre o semicírculo e o intervalo aberto  $(-1, 1)$ . Logo, para a topologia, uma parte deste círculo é o mesmo que um segmento de reta, ou seja, é similar dizer que ambos são topologicamente iguais. Podemos ter outros mapeamentos (mapas) cobrindo todo o círculo, formando assim um

Figura 6 – Mapeamento do semicírculo superior da circunferência



Fonte: Próprio autor.

atlas para o círculo.

Assim, podemos definir que uma topologia sobre um conjunto  $X$  é uma coleção  $\tau$  de subconjuntos de  $X$  tendo as seguintes propriedades:

1. O conjunto  $\emptyset$  e o conjunto  $X$  estão na coleção  $\tau$ ;
2. A união de elementos de qualquer subcoleção de  $\tau$  está em  $\tau$ ;
3. A interseção finita de elementos de qualquer subcoleção de  $\tau$  está em  $\tau$ .

O par ordenado  $(X, \tau)^1$  é chamado espaço topológico e  $\tau$  a topologia deste espaço. Dado um conjunto  $X$  e uma topologia sobre  $X$ , dizemos que todo conjunto aberto [8]  $U_i \in \tau$  é um aberto de  $X$ .

Num espaço topológico  $X$ , definimos  $V \subset X$  de vizinhança de um ponto  $x$ , se  $V$  contém algum conjunto aberto que, por sua vez, contenha  $x$ . Contudo,  $V$  não precisa ser necessariamente um conjunto aberto, caso seja, este é chamado de vizinhança aberta [8]. Por outro lado, um espaço topológico é dito ser um espaço de Hausdorff se para quaisquer pontos distintos e arbitrários  $x, x' \in X$ , sempre exista vizinhanças  $V_x$  e  $V_{x'}$ , de  $x$  e  $x'$ , respectivamente, tais que  $V_x \cap V_{x'} = \emptyset$ . Também foi Hausdorff, em 1914, que estabeleceu a expressão espaço métrico [9] que definiremos a seguir.

Um espaço topológico  $X$  é chamado de espaço métrico quando for munido de uma métrica  $d$  e quando  $\tau_d$  for a coleção de todos os seus conjuntos abertos em relação a  $d$ .

Um subconjunto  $V$  de  $X$ , por exemplo,  $X = \mathbf{R}^n$ , é dito aberto em relação à métrica se tiver a seguinte propriedade: Para todo  $x \in V$  podemos encontrar um número real  $r > 0$  tal que para todo  $x' \in X$ , com a propriedade de que  $d(x, x') < r$  vale que  $x'$  também é um elemento de  $V$ . Então  $\tau_d$  é uma topologia em  $X$ , chamada de topologia induzida pela métrica  $d$ , (figura 7), onde

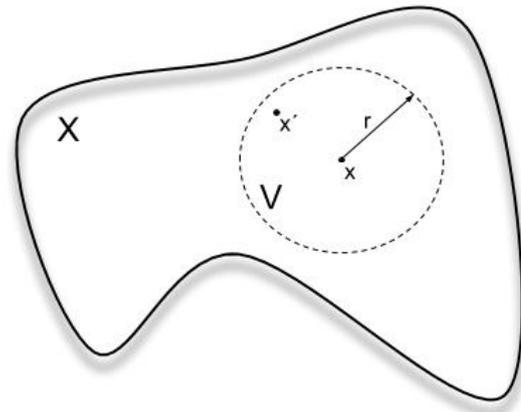
<sup>1</sup>Muitas vezes chamado apenas de  $X$ , pois sempre existirá uma topologia sobre o mesmo.

a métrica é dada por:

$$d = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2}.$$

Com isso, também incorporamos o conceito de distância.

Figura 7 – Exemplo de subconjunto aberto em relação à métrica



Fonte: Próprio autor.

Se temos dois espaços topológicos, tal que uma transformação bijetora, ou seja, cada ponto  $p$  de um conjunto leva em um e somente um ponto  $p'$  de outro conjunto, e a transformação (e sua inversa) é contínua no sentido que pontos vizinhos de  $p$  são levados em pontos vizinhos de  $p'$ , então a transformação é chamada de homeomorfismo e os dois espaços são chamados de topologicamente equivalentes.

Topologia, então, estuda propriedades dos espaços que permanecem invariantes sobre homeomorfismo, isto é, que não mudam quando um espaço topológico é continuamente deformado em outro.

Retomando a ideia do mapeamento, podemos definir um mapa ou carta  $(U, \phi)$  de uma variedade  $M$  como sendo um conjunto aberto de  $M$ , chamado de domínio do mapa, junto com um homeomorfismo  $\phi : U \rightarrow V$ , ou seja, de  $U$  indo no conjunto aberto  $V$  em  $\mathbf{R}^n$ . Os espaços topológicos nos permitem ter mapeamentos contínuos, enquanto as variedades diferenciáveis, ao qual nós estamos interessados estudar, nos permitem ter mapeamentos suaves. Um mapeamento  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  é suave (ou de classe  $C^\infty$ ) se suas derivadas de ordem arbitrária existem e são contínuas.

Por fim, podemos definir que um espaço topológico  $(X, \tau)$  é compacto se toda coleção de

abertos que cobre o espaço admite uma subcoleção finita que ainda cobrirá este espaço. Por exemplo, o círculo  $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$  é compacto, porque é a imagem de qualquer intervalo compacto  $(a, a + 2\pi)$  por homeomorfismo do tipo  $\phi_1(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ . Note também que as figuras geométricas podem ser formadas por um subconjunto fechado de um espaço métrico compacto. Portanto, são compactas.

Definidos esses conceitos, podemos agora explicar uma variedade como sendo um espaço topológico tal que cada ponto tem uma vizinhança homeomórfica a  $\mathbf{R}^n$ . De uma maneira geral, significa que uma variedade de dimensão  $n$  é um espaço que é localmente indistinguível de um espaço euclidiano de dimensão  $n$ .

Mas não estamos interessados em qualquer variedade, e sim numa variedade que seja possível diferenciar, derivar e integrar sobre a mesma, a chamada variedade diferenciável. Uma variedade diferenciável é um espaço topológico  $M$  que satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $M$  é localmente homeomórfico a  $\mathbf{R}^n$ ;
2. Sejam dois mapas  $(U_1, \phi_1)$  e  $(U_2, \phi_2)$ , tal que  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ . Então, um ponto  $p \in U_1 \cap U_2$  pode ser mapeado em  $\mathbf{R}^n$  usando  $\phi_1$  ou  $\phi_2$ .

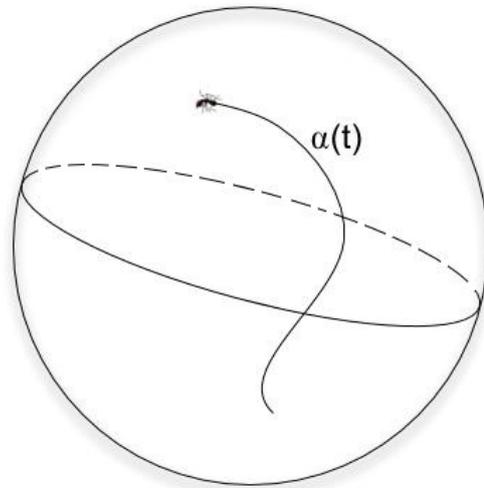
Com isso, não falamos em nenhum momento em imersão, isto é, não precisamos apelar para uma dimensão maior para imergir os objetos que queremos estudar, como fizemos na figura 2, no estudo de Álgebra Tensorial. Contudo, estamos interessados em ir mais além, realizar medidas sobre espaços topológicos, por isso definimos uma variedade diferenciável, para que seja possível realizar medidas sobre a mesma. Estamos falando de geometria diferencial.

## 3.2 GEOMETRIA DIFERENCIAL

Iniciamos nosso estudo da topologia pela compreensão de uma variedade diferenciável, mas muito mais que entender, nosso objetivo é realizar cálculos sobre essa variedade, isto é, fazer geometria. Para isto, precisamos definir alguns objetos geométricos importantes, sendo eles: vetores, covetores e tensores.

Para alcançarmos este objetivo, será muito útil o exemplo a seguir: Seja uma superfície terrestre (variedade  $M$ ) e uma formiga percorrendo uma curva  $\alpha(t)$  sobre esta superfície, conforme imagem 8.

Para mapear esse trajeto podemos utilizar um objeto,  $\alpha(t)$ , que é uma aplicação dos reais na variedade, pois  $\alpha(t)$  é uma curva sobre uma variedade. Contudo, não sabemos calcular, mas

Figura 8 – Exemplo de curva sobre uma variedade  $M$ 

Fonte: Próprio autor.

conhecemos os eixos coordenados. Logo, dado um intervalo em  $\mathbf{R}$ , digamos  $t = [0, 1]$ , essa aplicação mapeia  $0 \leq t \leq 1$  sobre a variedade, isto é,

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow M.$$

Entretanto, como  $\alpha(t)$  são pontos sobre a variedade, é necessário uma função  $f$  sobre  $M$ , que é uma aplicação da variedade nos reais, ou seja

$$f : M \rightarrow \mathbf{R},$$

pois não podemos somar pontos sobre a variedade, mas podemos realizar cálculos nos reais. Podemos ilustrar o que está acontecendo na figura 9.

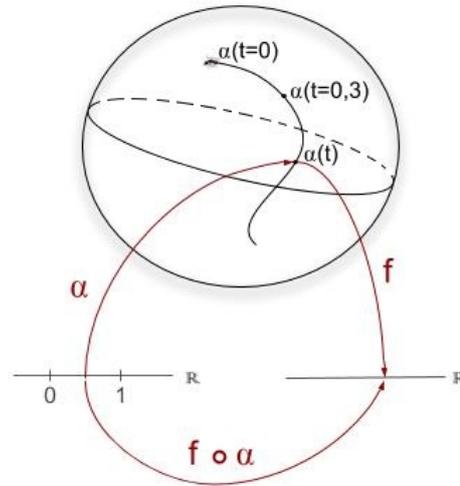
Podemos agora definir um vetor tangente  $X$  a uma curva  $\alpha$  num ponto  $p$  de  $M$ , que será uma aplicação de  $M$  em  $\mathbf{R}$ , dado por

$$X[f] = \left. \frac{df(\alpha(t))}{dt} \right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\alpha(t + \Delta t)) - f(\alpha(t))}{\Delta t}.$$

Podemos ainda mapear em  $\mathbf{R}^n$  as coordenadas do ponto  $\alpha(t)$  e realizar uma mudança de referencial por intermédio da aplicação da identidade  $\phi^{-1} \circ \phi(\alpha(t))$ , onde  $\phi(\alpha(t))$  é um homeomorfismo e produz as coordenadas do ponto  $\alpha(t)$  no espaço  $\mathbf{R}^n$ , isto é,

$$\phi(\alpha(t)) = \phi(p) = (X_{\alpha}^1(t), X_{\alpha}^2(t), \dots, X_{\alpha}^n(t)).$$

Figura 9 – Funções que levam pontos da variedade no eixo coordenados e vice e versa



Fonte: Próprio autor.

Então,

$$X[f] = \left. \frac{df(\alpha(t))}{dt} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{df(\phi^{-1} \circ \phi(\alpha(t)))}{dt} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{dF(X_\alpha^1(t), X_\alpha^2(t), \dots, X_\alpha^n(t))}{dt} \right|_{t=t_0},$$

onde

$$f \circ \phi^{-1} = F, \quad (3.1)$$

que é uma função de  $\mathbf{R}^n$  em  $\mathbf{R}$ .

Podemos utilizar a regra da cadeia, de forma a obter a derivada em termos da coordenada local, isto é

$$X[f] = \left. \frac{df(\alpha(t))}{dt} \right|_{t=t_0} = \sum_{\mu} \left. \frac{\partial X_{\alpha}^{\mu}}{\partial t} \right|_{t=t_0} \left. \frac{\partial F(X_{\alpha}^{\mu})}{\partial X_{\alpha}^{\mu}} \right|_{t=t_0}.$$

Percebemos que  $\left. \frac{\partial X_{\alpha}^{\mu}}{\partial t} \right|_{t=t_0}$  depende da curva  $\alpha$  e são componentes do vetor tangente à curva

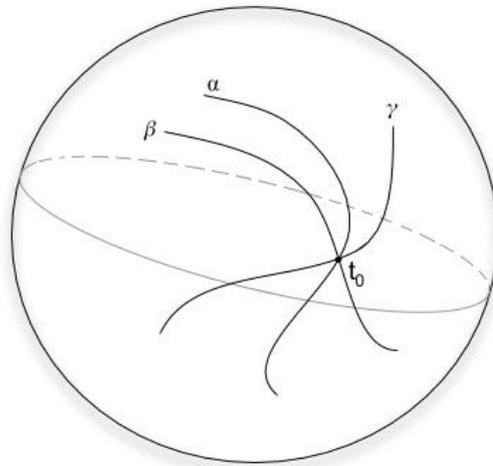
induzida em  $\mathbf{R}^n$  pela curva  $\alpha(t)$ , que definiremos como  $X_{\alpha}^{\mu}$ . Por outro lado,  $\left. \frac{\partial F(X_{\alpha}^{\mu})}{\partial X_{\alpha}^{\mu}} \right|_{t=t_0}$  não depende da curva  $\alpha(t)$ . Assim podemos substituir esta por quaisquer outras curvas, desde que passe pelo ponto  $t = t_0$  (imagem 10).

Com isso obtemos que

$$X[f] = \left. \frac{df(\alpha(t))}{dt} \right|_{t=t_0} = \sum_{\mu} X_{\alpha}^{\mu} \left. \frac{\partial F(X^{\mu})}{\partial X^{\mu}} \right|_{t=t_0},$$

que é interpretado como a derivada direcional de  $F$  ao longo do vetor tangente a  $\alpha$  em  $\phi(p)$ ,

Figura 10 – Exemplificação de diversas curvas sobre uma variedade  $M$  que passam pelo ponto de referência



Fonte: Próprio autor.

visto que  $\frac{\partial F}{\partial X^\mu}$  é o gradiente da função  $F$ .

É claro que existem infinitas curvas passando por  $p$  e, portanto, infinitos vetores tangentes que produzirão a mesma derivada direcional. Esse conjunto de vetores tangentes formam um espaço vetorial chamado de espaço tangente a  $M$  em  $p$  e simbolizado por  $T_pM$ .

Podemos ainda escrever o vetor  $X[f]$  como

$$X[f] = X^\mu \partial_\mu [F],$$

onde estamos usando a convenção de Einstein, e, assim, é possível observar que estamos operando o vetor tangente  $X$  na função  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ , contudo podemos abstrair esta função, já que esta aplicação é válida para qualquer função  $f$ . Com isso concluímos que no espaço tangente a  $M$  em  $p$ ,  $T_pM$ , moram os vetores do tipo

$$X = X^\mu \partial_\mu \equiv X^\mu e_\mu. \quad (3.2)$$

pois

$$e_\mu = \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial X^\mu}. \quad (3.3)$$

Comparando a equação 3.2 com a equação 2.7 identificamos que  $X^\mu$  é a componente do vetor tangente à curva da variedade e  $\partial_\mu$  é uma base para esses vetores. Assim, construímos uma correspondência entre duas linguagens de diferentes áreas da matemática [4]:

vetores  $\longleftrightarrow$  derivadas

Similar ao que fizemos no estudo da álgebra, precisamos de um vetor dual ou cotangente a base  $\{\partial_\mu\}$ . Este vetor cotangente se encontra no espaço dual a  $T_pM$ , também chamado de espaço cotangente a  $M$  em  $p$ , que simbolizamos por  $T_p^*M$ .

Então, seja um espaço vetorial  $T_pM$ , sempre podemos definir funcionais lineares  $w$  que associam a cada vetor um número  $w(X) \in \mathbf{R}$ , isto é, dado um vetor  $v$ , temos:

$$f(v) = \alpha; \quad \alpha \in \mathbf{R}, \quad (3.4)$$

onde  $f$  é o funcional. Além disso, um funcional é linear quando

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2).$$

Podemos, então, definir uma soma e uma multiplicação por escalares reais no espaço dos funcionais lineares  $T_p^*M$ , transformando o mesmo em um espaço vetorial

$$(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)(X) = \lambda_1 w_1(X) + \lambda_2 w_2(X),$$

logo estamos atuando  $w$  sobre os vetores  $X \in T_pM$ , então vemos que os espaços  $T_p^*M$  são funcionais lineares sobre os espaços  $T_pM$ , retornando sempre números reais, conforme a equação 3.4. Esses objetos,  $w$ , são chamados de 1-formas ou um-formas.

Contudo, precisamos construir essas formas diferenciais e entender melhor esses objetos geométricos, que são os covetores ou vetores duais (um-formas).

Quando trabalhamos com espaços puramente curvos, no qual seja possível realizar medições, ou seja, fazer geometria, estamos nos referindo a uma variedade diferencial. Podemos contruir tal estudo por intermédio de um tratamento mais superficial da geometria diferencial, que é o que realizamos no início deste trabalho. Contudo, um tratamento mais rigoroso desta linguagem matemática é quando trabalhamos com topologia.

A partir deste estudo e de alguns conceitos importantes, definimos os vetores tangentes a uma curva da variedade  $M$ , passando por um ponto de  $M$ , e sabemos que esses objetos atuam sobre funções  $h : M \rightarrow \mathbf{R}$ . Por outro lado, sabemos que dado uma função  $h$ , temos um funcional linear, chamado de 1-formas, objetos  $w$  que atuam sobre os vetores  $X \in T_pM$  produzindo um número real, isto é,

$$w_h(X) = X(h).$$

Entretanto, com esses objetos além de serem formas são também infinitesimais, será con-

veniente utilizarmos outra notação:  $w_h \equiv \tilde{d}h$ . Desta forma temos que

$$\tilde{d}h(X) = X(h), \quad (3.5)$$

mas da equação 3.2, sabemos que

$$\tilde{d}h(X) = X(h) = \tilde{d}h(X^\mu e_\mu) = X^\mu \tilde{d}h(e_\mu),$$

mas da equação 3.5, obtemos que

$$\tilde{d}h(X) = X(h) = X^\mu e_\mu(h).$$

Contudo, sabendo a equação 3.3, temos que

$$\tilde{d}h(X) = X(h) = X^\mu \frac{\partial H}{\partial X^\mu}, \quad (3.6)$$

onde  $H = h \circ \phi^{-1}$ , similar a equação 3.1.

Entretanto, o próprio número  $X^\mu$  pode ser utilizado como uma função de  $M$  em  $\mathbf{R}$ , visto que

$$X^\mu(p) \longrightarrow p \xrightarrow{\phi} (x^1, \dots, x^n),$$

então, podemos usar  $x^\mu$  no lugar de  $h$ , de modo que a equação 3.6 poderia ser escrita como

$$\tilde{d}x^\mu(x) = x(x^\mu) = x^\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = x^\nu \delta_\nu^\mu,$$

portanto,

$$\tilde{d}x^\mu(x) = x^\mu. \quad (3.7)$$

Agora que já sabemos como as um-formas atuam sobre os vetores, queremos obter a base para o espaço cotangente  $T_p^*M$ . Para isso, sabemos que para uma um-forma genérica  $w$ , temos que

$$w(x) = x^\mu w(e_\mu), \quad (3.8)$$

então, podemos definir uma nova um-forma, de modo que

$$w' = w_\mu dx^\mu, \quad (3.9)$$

onde

$$w_\mu = w(e_\mu)$$

sabemos que se atuarmos esta um-forma num vetor obtemos:

$$w'(x) = w_\mu dx^\mu(x) = w_\mu x^\mu = x^\mu w(e_\mu). \quad (3.10)$$

Por outro lado, seja a combinação linear

$$w_\mu dx^\mu = 0,$$

atuando sobre os vetores base de  $T_p M$ , vemos que estas são linearmente independentes (L.I.), pois obtemos:

$$w_\mu dx^\mu(e_\nu) = w_\mu e_\nu(x^\mu) = w_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = w_\mu \delta_\nu^\mu = w_\nu = 0.$$

Logo, percebemos que a equação 3.8 é a mesma equação proposta em 3.10, isto é, as aplicações são iguais e que a combinação linear proposta na equação 3.9 são Linearmente Independêntes, então, podemos escrever  $w$  como uma combinação linear de  $dx^\mu$ .

Com isso, percebemos que  $\{dx^\mu\}$  é uma base para o espaço  $T_p^* M$ . Além disso, cada um-forma é caracterizada por um conjunto de  $n$  números, isto é,

$$w \longrightarrow (w_1, w_2, \dots, w_n),$$

e a dimensão de  $T_p^* M$  é igual a dimensão de  $T_p M$ .

Outro fator importante é que vetores são objetos independentes da coordenação, isto é,

$$x = x^\mu e_\mu = \bar{x}^\mu \bar{e}_\mu$$

e suas componentes se transformam pela inversa da matriz jacobiana. Com isso, similar a equação 2.17, no qual também chamamos as componentes do vetor  $X$  de componentes contra-variantes.

Por outro lado, as componentes da um-forma se transformam com a matriz jacobiana, similar a equação 2.19. Logo, chamaremos essas componentes de componentes covariantes do covetor  $w$ . As um-formas também são objetos independentes da coordenatização, portanto é intrínseco à variedade.

Com isso, fica mais claro entender os objetos definidos no espaço tangente e os objetos definidos no espaço cotangente e, assim, é possível compreender o porquê de vetores serem chamados de covariantes e outros de contravariantes.

Para finalizar esta seção, é necessário definirmos um último objeto geométrico, os tensores, que são objetos intrínsecos mais gerais sobre a variedade. Sabemos que vetores e covetores são

funcionais lineares, nesta perspectiva, tensores serão definidos como funcionais multilineares sobre a variedade. Como exemplo inicial, vamos definir um funcional bilinear de um vetor e de uma um-forma dado por:

$$T(w, x) = T(w_\mu dx^\mu, x^\nu e_\nu) = w_\mu x^\nu T(dx^\mu, e_\nu). \quad (3.11)$$

O tensor  $T$  é um objeto independente de coordenatização. Portanto,  $T$  é um objeto com significado intrínseco à variedade. Além disso, definiremos que

$$T^\mu_\nu = T(dx^\mu, e_\nu). \quad (3.12)$$

Para este objeto bilinear ser válido é necessário mostrar que ele é um objeto pertencente ao produto tensorial  $T_p M \otimes T_p^* M$ . Para isto vamos propor como base deste espaço  $T_p M \otimes T_p^* M$ , o produto tensorial  $e_\mu \otimes dx^\nu$ . Como sabemos que  $e_\mu$  é base do espaço  $T_p M$  e  $dx^\nu$  é base do espaço  $T_p^* M$ , temos que definir a atuação do produto tensorial como

$$e_\mu \otimes dx^\nu(w, x) \equiv e_\mu(w) dx^\nu(x), \quad (3.13)$$

sendo

$$e_\mu(w) = w(e_\mu) = w_\mu$$

e

$$dx^\nu(x) = dx^\nu(x^\alpha e_\alpha) = x^\alpha dx^\nu(e_\alpha) = x^\nu, \quad (3.14)$$

então a equação 3.13 será

$$e_\mu \otimes dx^\nu(w, x) = w_\mu x^\nu = \text{número}.$$

Com isso, escrever nosso tensor bilinear  $T$  como combinação linear da base  $e_\mu \otimes dx^\nu$  implica que

$$T(w, x) = (T^\mu_\nu e_\mu \otimes dx^\nu)(w, x),$$

atuando o produto tensorial, conforme equação 3.13, e substituindo as equações 3.2 e 3.9 obtemos

$$T(w, x) = T^\mu_\nu w_\alpha x^\beta e_\mu(dx^\alpha) dx^\nu(e_\beta),$$

mas aplicar a base vetorial na sua base dual, ou vice-versa, resulta no tensor delta de kronecker e é comum usar a seguinte notação

$$e_\mu(dx^\alpha) \equiv \langle e_\mu, dx^\alpha \rangle = \delta_\mu^\alpha$$

e

$$dx^\nu(e_\beta) \equiv \langle dx^\nu, e_\beta \rangle = \delta_\beta^\nu. \quad (3.15)$$

Então, aplicando as propriedades do delta de Kronecker, equação 2.6, retornaremos a definição do funcional bilinear, conforme equação 3.11, ou seja

$$T(w, x) = T^\mu_\nu w_\mu x^\nu = w_\mu x^\nu T(dx^\mu, e_\nu).$$

Com isso, observamos que o tensor bilinear dado por

$$T = T^\mu_\nu e_\mu \otimes dx^\nu, \quad (3.16)$$

é válido e  $T^\mu_\nu$  pode ser definido conforme equação 3.12.

Para um tensor mais geral pertencente ao espaço teremos

$$\underbrace{T_p M \otimes T_p M \otimes \dots \otimes T_p M}_q \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M}_r$$

ou seja, tensores com  $q$  espaços  $T_p M$  e  $r$  espaços  $T_p^* M$  atuando sobre  $q$  um-formas e  $r$  vetores, respectivamente. Assim, é possível escrever um tensor do tipo  $(q, r)$  como

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_q} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_r}.$$

Um tensor especial é o tensor delta de Kronecker, definido na equação 2.5, porém, com um pouco mais de rigor, temos que:

$$T^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu,$$

e o tensor será dado por

$$T = \delta^\mu_\nu e_\mu \otimes dx^\nu = e_\mu \otimes dx^\mu.$$

Se analisarmos como este tensor se transforma e conhecendo as propriedades básicas, dadas pela equação 2.6, obtemos que

$$\bar{T}^\mu_\nu = \bar{\delta}^\mu_\nu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \bar{x}^\nu} \delta^\lambda_\kappa = \delta^\mu_\nu.$$

Portanto,  $\bar{\delta}^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$ , dizemos que este tensor tem as mesmas componentes em qualquer sistema de coordenadas.

Finalizado as definições de vetores, covetores (um-formas) e tensores vamos definir, nas próximas seções, o que são campos tensorial, o que são formas diferenciais e, por fim, estudar

os fibrados, que é a base geométricas das teorias de gravitação do formalismo de primeira ordem da Relatividade Geral.

### 3.3 CAMPOS TENSORIAIS

No estudo da topologia, foi discutido que a cada ponto da variedade  $M$  podemos associar um número  $X_p(f)$ . O conjunto de todos os números obtidos desta forma é chamado de campo vetorial. Podemos então generalizar esta construção para a coleção de todos os tensores do tipo  $(q, r)$  em cada ponto da minha variedade, isto é

$$T_p = T_p(w_1, w_2, \dots, w_q, x_1, x_2, \dots, x_r),$$

que é um campo tensorial.

Estamos interessados num campo tensorial bem específico, o campo do tipo  $(0, 2)$ , chamado de métrica Riemanniana ou simplesmente métrica. Este objeto age sobre vetores tangentes em cada ponto  $p \in M$ , onde  $M$  é uma variedade diferenciável.

Além disso, este campo tensorial satisfaz alguns axiomas (fundamentos básicos), sendo eles:

**Axioma 3.1.**  $g(x, y) = g(y, x)$ ;

**Axioma 3.2.**  $g(x, x) \geq 0$ , sendo igual a zero se, e somente se,  $x = 0$ ;

onde  $g = g_p$ , pois age no ponto  $p \in M$  e  $x, y \in T_p M$ .

Considere um dado sistema de coordenadas, neste sistema a métrica pode ser expandida em termos da base  $dx^\mu \otimes dx^\nu$ , isto é

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu.$$

Atuando a métrica nos vetores tangentes  $x, y$  e sabendo como a base atua, similar ao que foi realizado na equação 3.14, temos que

$$g(x, y) = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu(x, y) = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu.$$

Por outro lado,

$$g(y, x) = g_{\mu\nu} y^\mu x^\nu = g_{\nu\mu} x^\mu y^\nu,$$

pois os índices  $\mu, \nu$  são índices mudos, logo é possível realizar esta operação.

Mas usando o axioma 3.1, temos que

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}. \quad (3.17)$$

Agora, usando o axioma 3.2, obtemos que

$$g(x, x) = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = 0, \quad \text{se } x = 0.$$

que implica

$$\det(g_{\mu\nu}) \neq 0,$$

que torna a métrica inversível.

Em resumo, o campo tensorial  $g$  é um tensor bilinear simétrico, positivo e inversível.

Além disso, a métrica é importante, pois relaciona o espaço tangente com o espaço cotangente, isto é

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu,$$

ou seja, é um isomorfismo entre os espaços  $T_p M$  e  $T_p^* M$ , um mapa que leva vetores em um-formas e vice-versa, discutido no capítulo 2, mas agora pelo ponto de vista da Topologia.

Outro fator importante é que o objeto  $\bar{g}^{\beta\lambda}$  se transforma como as componentes de um tensor duas vezes contravariante, ou seja

$$\bar{g}^{\beta\lambda} = \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\kappa} g^{\alpha\kappa},$$

e a inversa de  $g_{\mu\nu}$  obedece a seguinte propriedade:

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda.$$

Por fim,  $g_{\mu\nu}$  é uma matriz simétrica e seus autovalores são reais. Se a métrica segue os axiomas 3.1 e 3.2, então dizemos que a métrica é riemanniana, todos os autovalores são estritamente positivos e se a variedade suave  $M$  admite esta métrica  $g$ , o par  $(M, g)$  é chamado de variedade riemanniana ou variedade de Riemann. Contudo, há casos em que o axioma 3.2 não é satisfeito, ou seja, se

$$g(x, y) = 0, \quad \forall x \in T_p M \quad \text{e } y = 0,$$

então os autovalores da métrica podem assumir valores negativos. Neste caso, dizemos que a métrica é pseudoriemanniana e o par  $(M, g)$  é chamado de variedade de Lorentz. Esta é a variedade que está presente no estudo da teoria da Relatividade.

Com isso, se  $g$  tem  $i$  autovalores positivos e  $j$  autovalores negativos, o par  $(i, j)$  é chamado

de assinatura métrica. Para  $j = 1$ , a métrica é chamada de métrica de Lorentz. Além disso, a métrica pode ser diagonalizada para uma matriz ortogonal apropriada, com os elementos da diagonal principal sendo  $\pm 1$ . Se a métrica for riemanniana, então é possível obter uma matriz diagonal de  $g$ , resultando na métrica Euclidiana  $\delta = \text{diag}(1, \dots, 1)$ . Por outro lado, se temos uma métrica de Lorentz, ao diagonalizarmos a matriz, obteremos a métrica  $\eta = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ , chamada de métrica de Minkowski [4].

Após a compreensão sobre geometria diferencial e de campos tensoriais, é possível discutir, na próxima seção, sobre as chamadas formas diferenciais.

### 3.4 FORMAS DIFERENCIAIS

Para o estudo da Topologia Algébrica, as chamadas formas diferenciais são de grande importância [10]. Tensores do tipo  $(0, r)$  são formas diferenciais em que suas componentes são totalmente assimétricas, ou seja, são covetores do tipo

$$w = w_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \otimes dx^{\mu_2} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_r}.$$

Podemos analisar um caso particular, tensores  $(0, 2)$ , onde temos que

$$w = w_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu,$$

onde, como são assimétricos, sabemos que

$$w_{\mu\nu} = -w_{\nu\mu},$$

então

$$w = w_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \tag{3.18}$$

$$= -w_{\nu\mu} dx^\mu \otimes dx^\nu \tag{3.19}$$

e

$$w = -w_{\mu\nu} dx^\nu \otimes dx^\mu, \tag{3.20}$$

pois queremos deixar a base  $dx^\nu \otimes dx^\mu$  também antissimétrica.

Com isso, somando as equações 3.18 e 3.20, obtemos

$$2w = w_{\mu\nu} (dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu)$$

$$w = \frac{1}{2} w_{\mu\nu} (dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu). \tag{3.21}$$

Podemos, então, definir uma nova operação, denominada produto exterior e representada pelo símbolo  $\wedge$ , como sendo:

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu. \quad (3.22)$$

O produto exterior é válido tanto para bases, como para vetores e covetores e segue algumas propriedades na tal trataremos a seguir.

Sejam os vetores  $x, y \in T_pM$ , sabemos que

$$x \wedge y = x \otimes y - y \otimes x,$$

além disso, temos as seguintes propriedades:

1.  $x \wedge (y + z) = x \wedge y + x \wedge z$ ,  $z \in T_pM$ ;
2.  $a(x \wedge y) = (ax) \wedge y = x \wedge (ay)$ ,  $a \in \mathbf{R}$ ;
3.  $x \wedge x = 0$ ;
4.  $x \wedge y = -y \wedge x$ ;
5.  $x \wedge y = (x^\mu e_\mu) \otimes (y^\nu e_\nu) - (y^\mu e_\mu) \otimes (x^\nu e_\nu) = (x^\mu y^\nu - x^\nu y^\mu) e_\mu \otimes e_\nu$ .

Com base nessas propriedades, é possível generalizar os tensores do tipo  $(0, r)$ , ou seja, uma  $r$ -forma, obtendo a seguinte expressão:

$$w = \frac{1}{r!} w_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (3.23)$$

Podemos ainda estudar as formas diferenciais levando em conta a dimensão do espaço. Quando combinamos  $p$  elementos, ou seja, uma  $p$ -forma, em  $D$  dimensões, temos que o número de combinações possíveis para tensores completamente antissimétricos é dado por:

$$\binom{D}{p} = \frac{D!}{p!(D-p)!}.$$

Contudo, para  $(D-p)$  elementos em  $D$  dimensão obtemos:

$$\binom{D}{D-p} = \frac{D!}{(D-p)![D-(D-p)]!} = \frac{D!}{p!(D-p)!},$$

ou seja, uma  $p$ -forma e uma  $(D-p)$ -forma tem o mesmo número de elementos independentes. Uma vez que temos isto, será conveniente definir um mapeamento entre uma  $p$ -forma e uma

$(D - p)$ -forma. Este mapeamento é chamado de Dualidade de Hodge Euclidiana, que será discutido na subseção seguinte.

### 3.4.1 Dualidade de Hodge Euclidiana

Vamos definir o que chamaremos de dualidade num espaço euclidiano como um mapeamento de uma  $p$ -forma em uma  $(D - p)$ -forma, onde  $D$  é a dimensão da variedade. Esta dualidade é chamada de Dualidade de Hodge Euclidiana ou operação  $*$  de Hodge.

Com base na equação 3.23, é possível generalizar uma  $(D - p)$ -forma como:

$$*w = \frac{1}{p!(D-p)!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{D-p}}^{\nu_1 \dots \nu_p} w_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{D-p}}.$$

O produto exterior de uma  $q$ -forma por uma  $p$ -forma produz uma  $(q + p)$ -forma, isto é

$$w_{(q)} \wedge \alpha_{(p)} = S_{(q+p)}.$$

Outro fator importante é que o produto exterior é uma generalização do produto vetorial e escalar que conhecemos. Não vamos priorizar aqui as demonstrações para essas relações, para não fugirmos do nosso objetivo que é o estudo da TRG. Contudo, é possível encontrar na literatura essas relações:

$$\begin{aligned} *(u \wedge v) &= \vec{u} \times \vec{v}; \\ *(u \wedge v \wedge w) &= \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}); \\ *[*(u \wedge v)] &= \vec{u} \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

Com isso, ampliamos ainda mais nosso conhecimento sobre as  $p$ -formas com o estudo do mapa dual de Hodge. Para finalizar, será discutido na próxima subseção sobre a derivada de uma  $p$ -forma, a chamada derivada exterior.

### 3.4.2 Derivada Exterior

A derivada exterior de  $r$ -forma é, por definição, uma  $(r + 1)$ -forma. Logo, seja uma  $r$ -forma dada por:

$$w = \frac{1}{r!} w_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r},$$

a derivada exterior será uma  $(r + 1)$ -forma, dada por:

$$dw \equiv \frac{1}{r!} \left( \frac{\partial w_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}}{\partial x^\nu} \right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (3.24)$$

Note que

$$d(dw) = \frac{1}{r!} \left( \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\nu} w_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} \right) dx^\lambda \wedge dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \equiv 0,$$

pois os termos entre parênteses do lado direito da igualdade são simétrico nos índices  $\lambda$  e  $\nu$  e as bases são antissimétricas nesses índices, logo, a segunda derivada exterior de  $w$  é identicamente nula.

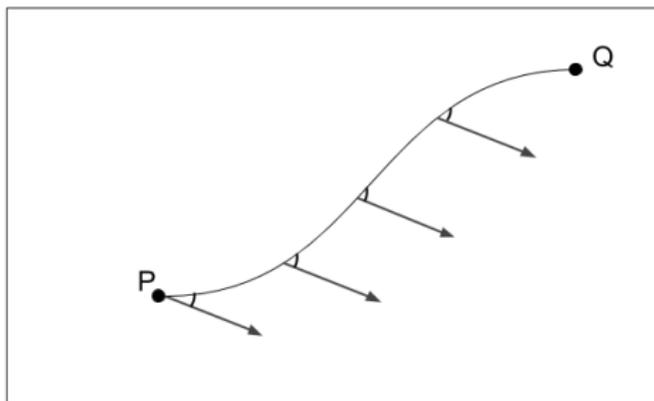
Finalizado o estudo da Topologia Algébrica, no próximo capítulo será discutido sobre um importante tópico para o estudo dos espaços curvos ou de uma variedade diferenciável: o transporte paralelo de um vetor. Além disso, será possível verificar a necessidade da construção de uma nova derivada, chamada de derivada covariante.

## 4 CONEXÃO E DERIVADA COVARIANTE

A diferencial da componente de um vetor,  $dV^i$ , é definida pela diferença entre os vetores  $V^i(x)$  e  $V^i(x + dx)$ , ou seja, vetores entre dois pontos diferentes da variedade diferenciável,  $x$  e  $x + dx$ , que estão infinitamente próximos. Cada ponto pertence a um plano tangente diferente e não podemos comparar vetores em espaços tangentes distintos. Assim, precisamos trazer o vetor  $V^i(x + dx)$  para o espaço de  $x$  usando uma conexão ou transporte paralelo.

Ao mover um vetor de um ponto  $P$  para um ponto  $Q$ , o ponto de aplicação deste vetor move-se ao longo de uma geodésica, e o próprio vetor se desloca continuamente de tal forma que seu ângulo com a geodésica e o seu comprimento permanecem constantes. Este é o que chamamos de transporte paralelo e pode ser representado pela figura 11.

Figura 11 – Transporte paralelo de um vetor com ângulo e comprimento invariantes.



Fonte: Próprio autor.

Contudo, a componente de um vetor definido de forma similar à equação 2.16, é dado por

$$V^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \bar{V}^j,$$

e sua diferencial será

$$dV^i = d \left( \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \bar{V}^j \right),$$

que aplicando a regra do produto nesta equação resulta em

$$dV^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} d\bar{V}^j + \bar{V}^j \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} d\bar{x}^k. \quad (4.1)$$

Note que o primeiro termo da equação 4.1 é uma transformação conhecida, contudo o segundo termo é totalmente desconhecido, pois envolve derivadas segundas. Com isso, a propriedade vetorial foi perdida, isto é, não é a lei de transformação tensorial.

Logo, precisamos generalizar o conceito de diferencial e, conseqüentemente, o de derivada. Para isso, é necessário descobrir como construir uma nova derivada que preserve o caráter vetorial na transformação de coordenadas. Esta nova derivada é chamada de Derivada Covariante.

## 4.1 DERIVADA COVARIANTE

Para a discussão da Derivada covariante teremos como base os textos sobre Relatividade Geral [3–5, 11].

É possível generalizar a diferencial de modo a ser definida como

$$\nabla = d + w, \quad (4.2)$$

onde a conexão  $w$  é nula em um ponto, desde que não esteja atuando nos vetores de base. Além disso, esta diferencial atua nas componentes dos vetores de forma a obter que

$$\nabla_k V^\lambda = D_k V^\lambda dx^k, \quad (4.3)$$

onde  $D_k$  é conhecido como derivada covariante e  $dx^k$  é a base do espaço  $T_p^*M$ .

Além disso, a diferencial  $\nabla$  satisfaz algumas propriedades [12], duas delas são importantes para as discussões que seguem, sendo elas:

1. Linearidade: é linear a aplicação da diferencial  $\nabla$  sobre tensores e números reais, isto é

$$\nabla(\alpha V + \beta W) = \alpha \nabla V + \beta \nabla W, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

2. Regra de Leibniz: a aplicação da diferencial  $\nabla$  no produto tensorial satisfaz a regra do produto de Leibniz, isto é

$$\begin{aligned} \nabla(V \otimes W) &= (\nabla V) \otimes W + V \otimes (\nabla W) \\ &\equiv \nabla \langle V, W \rangle = \langle \nabla V, W \rangle + \langle V, \nabla W \rangle; \end{aligned} \quad (4.4)$$

Entretanto, ainda é necessário determinar a derivada covariante  $D_k$ . Para isto, considerando um campo vetorial constante dado por

$$V = V^i e_i, \quad (4.5)$$

temos que

$$\nabla V = \nabla (V^i e_i) = \nabla (V^i) e_i + V^i \nabla (e_i). \quad (4.6)$$

Porém, como  $V$  não é um vetor de base, então temos que em um ponto  $p$

$$\nabla (V^i) = dV^i,$$

pois foi utilizado a definição generalizada da diferencial, equação 4.2. Logo, substituindo na equação 4.6, temos que

$$\nabla V = dV^i e_i + V^i \nabla (e_i).$$

É possível ainda representar a diferencial  $\nabla$  em uma direção não especificada, mas que pode ser descrita pela base um-forma  $dx^k$  [4], ou seja

$$\nabla V = \nabla_{\kappa} V = (\partial_{\kappa} (V^i) e_i + V^i \nabla_{\kappa} (e_i)) dx^{\kappa}. \quad (4.7)$$

Seguindo a literatura, vamos adotar a notação da derivada parcial como  $\partial_{\kappa} V^i = V^i_{,\kappa}$ . Com isso, a equação 4.7 pode ser reescrita como

$$\nabla V = \nabla_{\kappa} V = (V^i_{,\kappa} e_i + V^i \nabla_{\kappa} (e_i)) dx^{\kappa}. \quad (4.8)$$

Conforme [4], a aplicação da diferencial  $\nabla$  no vetor de base  $e_i$  pode ser expresso como

$$(\nabla_{\kappa} e_i) dx^{\kappa} = \left( \Gamma_{\kappa i}^l e_l \right) dx^{\kappa}, \quad (4.9)$$

onde o coeficiente  $\Gamma_{\kappa i}^l$  é conhecido como Símbolo de Christoffel e será discutido em detalhes posteriormente.

Assim, substituindo a equação 4.9 na equação 4.8, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_{\kappa} V &= D_{\kappa} V^i dx^{\kappa} = \left( V^i_{,\kappa} e_i + V^i \Gamma_{\kappa i}^l e_l \right) dx^{\kappa} \\ &= \left( V^i_{,\kappa} e_i + V^l \Gamma_{\kappa l}^i e_i \right) dx^{\kappa} \\ &= \left( V^i_{,\kappa} + V^l \Gamma_{\kappa l}^i \right) e_i \otimes dx^{\kappa}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde na segunda linha realizamos a substituição dos índices mudos  $i \rightarrow l$  e na última linha o

produto vetorial  $\otimes$  entre a base vetorial e um-forma foi inserido para correção, apesar deste símbolo geralmente ser omitido. Note ainda que  $e_i \otimes dx^k$  é a base deste espaço.

Comparando as equações 4.10 e 4.3, é possível perceber que a derivada covariante da componente contravariante do vetor  $V$  na base  $e_\mu \otimes dx^\nu$  é

$$D_\kappa V^\lambda \equiv V^\lambda{}_{;\kappa} = V^\lambda{}_{,\kappa} + V^l \Gamma_{\kappa l}^\lambda, \quad (4.11)$$

onde convenientemente abreviamos a derivada covariante como  $V^\mu{}_{;k} \equiv D_k V^\mu$ .

Para encontrar a derivada covariante da componente covariante do vetor  $V$ , podemos escrever

$$V = V_i dx^i.$$

De maneira similar ao que foi realizado anteriormente para a componente contravariante do vetor  $V$ , temos que

$$\nabla_\kappa V \equiv D_\kappa V_i = (V_{i,\kappa} dx^i + V_i \nabla_\kappa (dx^i)) dx^\kappa. \quad (4.12)$$

Por outro lado, da equação 3.15, temos que

$$dx^i \otimes e_l = \langle dx^i, e_l \rangle = \delta_l^i, \quad (4.13)$$

então, aplicando a diferencial  $\nabla$ , obtemos

$$\nabla \langle dx^i, e_l \rangle = \nabla (\delta_l^i) \equiv 0. \quad (4.14)$$

Porém, assumindo a Regra de Leibniz, equação 4.4, temos que

$$\nabla \langle dx^i, e_l \rangle = \langle \nabla dx^i, e_l \rangle + \langle dx^i, \nabla e_l \rangle. \quad (4.15)$$

Comparando as equações 4.14 e 4.15, obtemos que

$$\langle \nabla dx^i, e_l \rangle = -\langle dx^i, \nabla e_l \rangle. \quad (4.16)$$

Com base na equação 4.9 temos que

$$\nabla_\kappa e_l = \Gamma_{\kappa l}^\lambda e_\lambda,$$

substituindo na equação 4.16 obtemos

$$\begin{aligned}\langle \nabla dx^i, e_l \rangle &= -\langle dx^i, \Gamma_{\kappa l}^\lambda e_\lambda \rangle \\ &= -\Gamma_{\kappa l}^i,\end{aligned}\tag{4.17}$$

onde na última linha foi utilizado a definição 4.13 para o produto tensorial entre as bases.

Logo, se a derivada da base cotangente for dada por

$$\nabla dx^m = C_{\kappa n}^m dx^\kappa,\tag{4.18}$$

então

$$\begin{aligned}\langle \nabla dx^m, e_l \rangle &= C_{\kappa n}^m \langle dx^\kappa, e_l \rangle \\ &= C_{ln}^m.\end{aligned}\tag{4.19}$$

Comparando as equações 4.17 e 4.19 temos que

$$C_{ln}^m = -\Gamma_{\kappa l}^i,$$

então a equação 4.18 será

$$\nabla dx^i = -\Gamma_{\kappa l}^i dx^\kappa.\tag{4.20}$$

Substituindo na equação 4.12 obtemos a derivada covariante da componente covariante do vetor  $V$  que será

$$D_k V_\lambda = \frac{\partial V_\lambda}{\partial x^k} - \Gamma_{kl}^m V_m.\tag{4.21}$$

Com isso, para um tensor com componentes covariantes e contravariantes, a derivada covariante será dada por

$$D_k T^{ij}{}_l = \frac{\partial T^{ij}{}_l}{\partial x^k} + \Gamma_{km}^i T^{mj}{}_l + \Gamma_{km}^j T^{im}{}_l - \Gamma_{kl}^m T^{ij}{}_m,\tag{4.22}$$

que é a generalização desta derivada.

### 4.1.1 Conexão Riemanniana ou Conexão de Christoffel

Existem objetos que não são tensores, pois eles não se transformam como os tensores. Um exemplo é o símbolo de Christoffel expresso na equação 4.9. Este tipo de objeto é uma conexão que faz com que a derivada se comporte como um tensor e não se altere quando for realizado alguma mudança de coordenadas.

Por exemplo, a derivada covariante de um escalar é dado por:

$$D_k(A^i B_i) = \frac{\partial (A^i B_i)}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^i A^l B_i - \Gamma_{ki}^l A^i B_l,$$

sendo  $i, k, l$  índices mudos, podemos substituir na última expressão  $i \rightarrow l$  e assim obter

$$D_k(A^i B_i) = \frac{\partial (A^i B_i)}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^i A^l B_i - \Gamma_{kl}^i A^l B_i = \frac{\partial (A^i B_i)}{\partial x^k}.$$

Logo, a derivada covariante coincide com a derivada parcial de um escalar, isto é

$$D_\kappa \phi = \phi_{;\kappa} = \partial_\kappa \phi = \phi_{,\kappa},$$

quando  $\phi$  for um campo escalar.

Por outro lado, seguindo [4], dado uma um-forma do tipo  $A = A_\mu dx^\mu$  ou tensor do tipo  $(0, 1)$  e um vetor  $V = V^\nu e_\nu$  ou tensor do tipo  $(1, 0)$ . Na seção 3.3 foi discutido que a métrica  $g$  relaciona vetores e um-formas, ou seja

$$A_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu.$$

A derivada covariante dessa equação será então

$$A_{\mu ; \rho} = g_{\mu\nu} V^\nu_{; \rho}. \quad (4.23)$$

Contudo, pela regra de Leibnitz, dada pela equação 4.4, temos que a derivada covariante de  $A_\mu$  também pode ser escrita como

$$A_{\mu ; \rho} = D_\rho [g_{\mu\nu} V^\nu_{; \rho}] \quad (4.24)$$

$$= g_{\mu\nu ; \rho} V^\nu + g_{\mu\nu} V^\nu_{; \rho}. \quad (4.25)$$

Como  $V^\nu$  é um vetor arbitrário, para que 4.23 e 4.24 sejam válidos, então

$$g_{\mu\nu ; \rho} = 0,$$

ou seja

$$D_\rho (g_{\mu\nu}) = 0. \quad (4.26)$$

Esta é a condição de compatibilidade da métrica [4] e é o que define a geometria riemanniana, base da relatividade geral. Com isso, podemos determinar a conexão riemanniana ou de Christoffel, pois sabendo a definição generalizada da derivada covariante, dada pela equação

4.22, obtemos que

$$D_k(g_{\beta\lambda}) = g_{\beta\lambda,k} - \Gamma_{k\beta}^l g_{l\lambda} - \Gamma_{k\lambda}^l g_{\beta l} = 0. \quad (4.27)$$

Podemos reescrever a equação anterior realizando permutações cíclicas com os índices mudos, de modo a obter as equações

$$D_\lambda(g_{k\beta}) = g_{k\beta,\lambda} - \Gamma_{\lambda k}^l g_{l\beta} - \Gamma_{\lambda\beta}^l g_{kl} = 0 \quad (4.28)$$

e

$$D_\beta(g_{\lambda k}) = g_{\lambda k,\beta} - \Gamma_{\beta\lambda}^l g_{lk} - \Gamma_{\beta k}^l g_{\lambda l} = 0. \quad (4.29)$$

Com base nestas três equações é possível encontrar uma expressão para a conexão  $\Gamma_{\beta\lambda}^l$ , denominada conexão riemanniana ou de Christoffel, em termos do tensor métrico e de suas derivadas, considerando a torção nula, ou seja,  $\Gamma_{\beta\lambda}^l = \Gamma_{\lambda\beta}^l$ . Isto pode ser obtido subtraindo as equações 4.28 e 4.29, de modo que

$$g_{\beta\lambda,k} - \Gamma_{k\beta}^l g_{l\lambda} - g_{k\beta,\lambda} + \Gamma_{\lambda\beta}^l g_{kl} = 0.$$

Somando este resultado com a equação 4.27 e usando novamente o fato da torção ser nula, obtemos que

$$2\Gamma_{\beta k}^l g_{\lambda l} = g_{\beta\lambda,k} + g_{\lambda k,\beta} - g_{k\beta,\lambda},$$

multiplicando esta equação por  $g^{m\lambda}$ , temos que

$$g^{m\lambda} g_{\lambda l} \left( 2\Gamma_{\beta k}^l \right) = g^{m\lambda} (g_{\beta\lambda,k} + g_{\lambda k,\beta} - g_{k\beta,\lambda}).$$

Por fim, utilizando a propriedade da métrica, definida pela equação 2.12, e a propriedade da delta de Kronecker, definida pela equação 2.6, obtemos que

$$\Gamma_{\beta k}^m = \frac{1}{2} g^{m\lambda} (g_{\beta\lambda,k} + g_{\lambda k,\beta} - g_{k\beta,\lambda}), \quad (4.30)$$

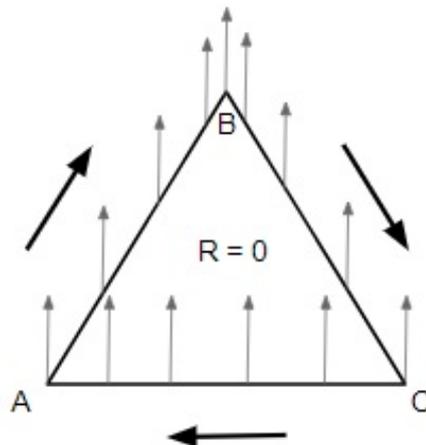
que é chamado de Conexão riemanniana ou de Christoffel. É esta conexão que é usada para descrever a relatividade, pois o campo gravitacional não pode estar ligado a um tensor, já que um tensor quando é nulo em um sistema de coordenadas, como em um ponto, ele será nulo em todos os outros sistemas de coordenadas, o que não ocorre com a conexão, como veremos posteriormente.

## 4.2 CURVATURA

Inicialmente no estudo da álgebra tensorial vimos que é possível estudar o espaço curvo utilizando um espaço euclidiano de dimensão maior, tal que o espaço em que temos interesse esteja contido nele. Posteriormente vimos que é possível trabalhar com espaços curvos gerais, definindo vetores mais gerais que seguem a mesma lei de transformação dos vetores, com isso trabalhamos com o espaço puramente curvo, chamado de curvatura intrínseca [13]. Tais espaços podem ser estudados também por intermédio da topologia, que foi visto no capítulo 3, e assim concluímos o estudo dos espaços curvos.

A partir disso, é possível analisar o transporte paralelo de vetores, onde foi visto no início desse capítulo que esse deslocamento deve ser de tal forma que o ângulo com a geodésica e o comprimento do vetor devem permanecer invariantes, logo o transporte paralelo depende da curvatura do espaço. Assim, para um espaço plano, onde geodésicas são retas, um vetor se move conforme a figura 12, então é possível perceber claramente que o vetor não se altera quando parte do ponto A, passa pelos pontos B e C e retorna ao ponto A.

Figura 12 – Transporte paralelo no plano



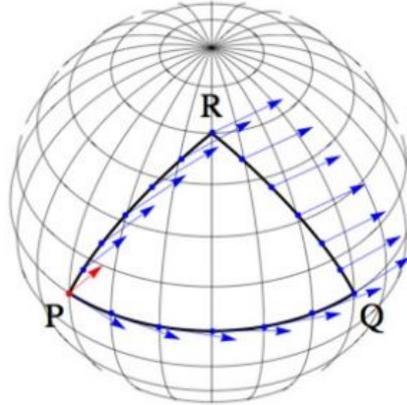
Fonte: Próprio autor.

Contudo, ao se mover em um espaço curvo, conforme a figura 13, o vetor é alterado ao longo de sua trajetória quando retorna ao seu ponto inicial P.

É possível calcular a curvatura por intermédio de uma integração fechada ou pela não comutatividade das derivadas covariantes, isto é

$$D_{\mu}D_{\nu}A^{\lambda} \neq D_{\nu}D_{\mu}A^{\lambda}.$$

Figura 13 – Transporte paralelo no espaço curvo



Fonte: Brand, J F e Broeck, C.

Contudo, no espaço plano a comutatividade das derivadas parciais é válida, ou seja

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\nu} \right) = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\mu} \right),$$

ou ainda, usando uma notação mais simplificada, podemos escrever que

$$\partial_\mu \partial_\nu A^\lambda = \partial_\nu \partial_\mu A^\lambda.$$

Porém, no espaço curvo isto só se verifica a comutatividade para escalares, que são objetos que não sofrem alterações. Ou seja, seja um escalar  $\phi = V_\lambda V^\lambda$ , temos que a derivada covariante

$$D_\mu D_\nu \phi = D_\nu D_\mu \phi.$$

Podemos verificar isso, pois sabemos a equação 4.22 que é generalização da derivada covariante, de modo que

$$\begin{aligned} D_\mu (V_\lambda V^\lambda) &= \partial_\mu (V_\lambda V^\lambda) - \Gamma_{\mu\lambda}^k V_k V^\lambda + \Gamma_{\mu k}^\lambda V_\lambda V^k \\ D_\mu (V_\lambda V^\lambda) &= \partial_\mu (V_\lambda V^\lambda). \end{aligned}$$

Com isso, abreviando novamente tanto a derivada covariante quanto a derivada parcial, temos que, para um escalar

$$D_\mu \phi = \phi_{;\mu} = \phi_{,\mu},$$

ou seja, a derivada covariante coincide com a derivada parcial usual.

Entretanto, no espaço curvo, a topologia não é determinada pelas equações de Einstein,

mas podemos definir um tensor de curvatura ligado a conexão de Christoffel que definirá a magnitude da curvatura [13], de forma geral, chamado de tensor de Riemann.

### 4.2.1 Tensor de Riemann

O tensor de curvatura ou tensor de Riemann é definido pelo fato da derivada covariante não ser comutativa, pois sabemos que a derivada covariante de um tensor arbitrário  $A^\lambda$  nos índices  $\nu, \mu$  resulta em

$$\begin{aligned} A^\lambda_{;\nu;\mu} &= \left( A^\lambda_{;\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu k} A^k \right)_{;\mu} \\ &= A^\lambda_{;\nu,\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu k} A^\lambda_{;\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A^\lambda_{;k} + \left( \Gamma^\lambda_{\nu k} \right)_{;\mu} A^k + \Gamma^\lambda_{\nu k} \left( A^k \right)_{;\mu}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

mas o quarto termo dessa equação pode ser escrito como

$$\left( \Gamma^\lambda_{\nu k} \right)_{;\mu} A^k = \left( \Gamma^\lambda_{\nu k} \right)_{,\mu} A^k + \Gamma^\lambda_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu k} A^k - \Gamma^\beta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\beta k} A^k - \Gamma^\beta_{\mu k} \Gamma^\lambda_{\nu\beta} A^k.$$

Logo, substituindo na equação 4.31 obtemos que

$$\begin{aligned} A^\lambda_{;\nu;\mu} &= A^\lambda_{;\nu,\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu k} A^\lambda_{;\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A^\lambda_{;k} + \left( \Gamma^\lambda_{\nu k} \right)_{;\mu} A^k + \Gamma^\lambda_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu k} A^k - \Gamma^\beta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\beta k} A^k - \Gamma^\beta_{\mu k} \Gamma^\lambda_{\nu\beta} A^k + \Gamma^\lambda_{\nu k} \left( A^k_{;\mu} + \Gamma^k_{\mu\beta} A^\beta \right) \\ &= A^\lambda_{;\nu,\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu k} A^\lambda_{;\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A^\lambda_{;k} + \left( \Gamma^\lambda_{\nu k} \right)_{,\mu} A^k + \Gamma^\lambda_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu k} A^k - \Gamma^\beta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\beta k} A^k - \Gamma^\beta_{\mu k} \Gamma^\lambda_{\nu\beta} A^k + \Gamma^\lambda_{\nu k} A^k_{;\mu} + \Gamma^\lambda_{\nu k} \Gamma^k_{\mu\beta} A^\beta. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Por outro lado, a derivada covariante de um tensor arbitrário  $A^\lambda$  nos índices  $\mu, \nu$  é dada por

$$A^\lambda_{;\mu;\nu} = \left( A^\lambda_{;\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu k} A^k \right)_{;\nu} = \left( A^\lambda_{;\mu} \right)_{;\nu} + \left( \Gamma^\lambda_{\mu k} A^k \right)_{;\nu}.$$

De forma análoga a que fizemos anteriormente, encontramos que

$$A^\lambda_{;\mu;\nu} = A^\lambda_{;\mu,\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu k} A^\lambda_{;\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} A^\lambda_{;k} + \left( \Gamma^\lambda_{\mu k} \right)_{;\nu} A^k + \Gamma^\lambda_{\nu\beta} \Gamma^\beta_{\mu k} A^k - \Gamma^\beta_{\nu\mu} \Gamma^\lambda_{\beta k} A^k - \Gamma^\beta_{\nu k} \Gamma^\lambda_{\mu\beta} A^k + \Gamma^\lambda_{\mu k} A^\lambda_{;\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu k} \Gamma^k_{\nu\beta} A^\beta. \quad (4.33)$$

Verificamos a não comutatividade da derivada covariante subtraindo a equação 4.32 com a equação 4.33, sabendo que a conexão  $\Gamma$  é simétrico, isto é, a torção é nula, obtemos que

$$\begin{aligned} A^\lambda_{;\nu;\mu} - A^\lambda_{;\mu;\nu} &= A^\lambda_{;\nu,\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu k} A^\lambda_{;\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A^\lambda_{;k} + \left( \Gamma^\lambda_{\nu k} \right)_{;\mu} A^k + \Gamma^\lambda_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu k} A^k - \Gamma^\beta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\beta k} A^k - \Gamma^\beta_{\mu k} \Gamma^\lambda_{\nu\beta} A^k + \Gamma^\lambda_{\nu k} A^k_{;\mu} + \Gamma^\lambda_{\nu k} \Gamma^k_{\mu\beta} A^\beta + \\ &\quad - A^\lambda_{;\mu,\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu k} A^\lambda_{;\mu} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} A^\lambda_{;k} - \left( \Gamma^\lambda_{\mu k} \right)_{;\nu} A^k - \Gamma^\lambda_{\nu\beta} \Gamma^\beta_{\mu k} A^k + \Gamma^\beta_{\nu\mu} \Gamma^\lambda_{\beta k} A^k + \Gamma^\beta_{\nu k} \Gamma^\lambda_{\mu\beta} A^k - \Gamma^\lambda_{\mu k} A^\lambda_{;\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu k} \Gamma^k_{\nu\beta} A^\beta. \end{aligned}$$

Cancelando os termos similares, temos que

$$\begin{aligned} A^{\lambda}_{;\nu;\mu} - A^{\lambda}_{;\mu;\nu} &= \left( \Gamma^{\lambda}_{\nu k} \right)_{,\mu} A^k - \left( \Gamma^{\lambda}_{\mu k} \right)_{,\nu} A^k + \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{\nu k} A^k - \Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} \Gamma^{\beta}_{\mu k} A^k \\ &= \left[ \left( \Gamma^{\lambda}_{k\nu} \right)_{,\mu} - \left( \Gamma^{\lambda}_{k\mu} \right)_{,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{k\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} \Gamma^{\beta}_{k\mu} \right] A^k \\ &= R^{\lambda}_{k\mu\nu} A^k, \end{aligned}$$

onde definimos

$$R^{\lambda}_{k\mu\nu} = \left( \Gamma^{\lambda}_{k\nu} \right)_{,\mu} - \left( \Gamma^{\lambda}_{k\mu} \right)_{,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{k\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} \Gamma^{\beta}_{k\mu}, \quad (4.34)$$

que é chamado de tensor de Riemann.

### Propriedades do tensor de Riemann

Algumas propriedades do tensor de Riemann são muito importantes, dentre elas temos:

1. Identidades do tensor de Riemann: o tensor não se altera por permutações cíclicas, e troca de sinal com permutações não-cíclicas, isto é,

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\kappa\lambda} &= R_{\kappa\lambda\mu\nu} \\ R_{\mu\nu\kappa\lambda} &= -R_{\nu\mu\kappa\lambda} = -R_{\mu\nu\lambda\kappa} = R_{\nu\mu\lambda\kappa}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

2. Tensor de Ricci: resulta da contração do tensor de Riemann e é simétrico em seus índices, ou seja

$$R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (4.36)$$

Sendo as componentes da matriz do tensor de Ricci simétricas, ou seja,  $a_{ij} = a_{ji}$ , então o número de variáveis independentes  $N$  será dado pela equação

$$N = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Assim, como o tensor é uma matriz com  $n = 4$ , isto é, uma matriz com 4 colunas e 4 linhas, então

$$N = \frac{4(4+1)}{2} = 10,$$

isto é, existem 10 componentes linearmente independentes no espaço-tempo.

3. Escalar de Ricci ou Escalar de curvatura: é a contração do tensor de Ricci com a métrica, isto é

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R, \quad (4.37)$$

sendo  $R$  o escalar de Ricci. Logo, sendo um escalar é o mesmo em todos os sistemas de coordenadas.

#### 4. Identidade de Bianchi

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\rho;\kappa} + R^{\lambda}_{\mu\kappa\nu;\rho} + R^{\lambda}_{\mu\rho\kappa;\nu} = 0. \quad (4.38)$$

Essas quatro propriedades serão base para a construção da TRG e, conseqüentemente, da equação de campo de Einstein que discutiremos no próximo capítulo.

## 5 ESPAÇO-TEMPO CURVO

Após o estudo geral do espaço curvo e da matemática necessária para desenvolver e entender sobre as superfícies curvas podemos iniciar o estudo da Relatividade Geral, pois foi por intermédio desta teoria que se previu inicialmente a existência das ondas gravitacionais. Para isso, iniciamos o estudo do formalismo métrico, chamado de formalismo de segunda ordem. Em seguida abordaremos a formulação de Yang-Mills da gravitação no formalismo de primeira ordem (Teoria de Einstein-Cartan), onde neste caso, diferente do formalismo de segunda ordem, a torção é não nula. Para a discussão dessas ideias temos como base os textos sobre relatividade geral ([4], [13], [5]), sobre eletromagnetismo ([14], [15], [16]) e sobre a teoria de Einstein-Cartan ([17], [18], [19], [20], [5]), a fim de construir e aprofundar na teoria da Relatividade Geral.

### 5.1 FORMALISMO DE SEGUNDA ORDEM

#### 5.1.1 Princípios da Relatividade Geral

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) foi proposta por Albert Einstein em 1915. Esta nova teoria, inicialmente, leva em consideração as ideias descobertas na Relatividade restrita, proposta em 1905, e propõe uma generalização do princípio da relatividade do movimento para sistemas que incluam campos gravitacionais.

As bases da teoria da Relatividade Geral são os postulados a seguir:

1. O princípio da invariância geral de coordenadas

As leis da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais, ou seja, não existe qualquer referencial inercial preferencial, ao qual satisfaz também a mecânica de Galileu e Newton. Além disso, o grupo de invariância da nova teoria é o grupo de transformações gerais de coordenadas.

2. O princípio da equivalência

Ponto básico da teoria geral da relatividade, esse princípio pode ser mostrado de duas formas, ao qual iremos mostrar a seguir.

Forma fraca: Para uma partícula livre de forças não gravitacionais existe uma única geodésica quando sujeita ao campo gravitacional, dada por:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0.$$

A consequência imediata deste princípio é a associação do campo gravitacional a uma quantidade geométrica, a conexão. Este princípio é a expressão matemática em termos de geometria diferencial da igualdade entre massa gravitacional e massa inercial. No entanto, este princípio é limitado, pois ele nada afirma da interação de outros campos com o campo gravitacional.

Forma forte: Em um referencial de Lorentz local valem as leis da relatividade restrita, então, em um ponto da variedade temos que

$$D_\mu A^\lambda = \partial_\mu A^\lambda + \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda A^\kappa,$$

mas, no ponto sabemos que  $D_\mu A^\lambda = \partial_\mu A^\lambda$ , logo

$$\Gamma_{\mu\kappa}^\lambda = 0.$$

Por outro lado, a métrica no ponto se reduz a métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ , isto é

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} = \text{constante}, \quad (5.1)$$

onde

$$\{\eta_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Derivando a métrica, dada pela equação 5.1, obtemos que

$$\partial_\kappa g_{\mu\nu}(x) = 0,$$

mas em um ponto a derivada covariante coincide com a derivada parcial usual, logo a derivada covariante também será nula, isto é

$$D_\kappa g_{\mu\nu}(x) \equiv g_{\mu\nu;\kappa} = 0. \quad (5.3)$$

É possível perceber que esta equação é similar a equação 4.26, que é a definição da geometria riemanniana (formalismo de segunda ordem) ou condição de compatibilidade da métrica. Sendo assim, percebemos que a geometria da relatividade geral deve ser riemanniana.

É importante notar que apesar da conexão ser nula em um ponto, o tensor de Riemman não se anula, pois as derivadas da conexão não se anulam, a não ser que o espaço seja plano. Outro ponto importante é que esta teoria inicialmente é trabalhada com torção nula, posteriormente construiremos a teoria da relatividade com torção não nula, chamada de teoria de Einstein-Cartan.

### 3. Princípio da Correspondência

Este princípio estabelece que a relatividade geral deve conter a gravitação de Newton no regime de campo fraco e baixas velocidades, visto que nesse regime a teoria de Newton é válida e foi comprovado experimentalmente.

## 5.1.2 Equações de Einstein

Para a construção da equação de campo da teoria da Relatividade Geral de Einstein partimos do princípio da correspondência, onde no limite de baixas velocidades e campos fracos a gravitação de Newton deve estar contida nesta teoria, logo temos que a força gravitacional Newtoniana é dada por [21]

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{|\vec{d}|^2} \hat{d}.$$

Analisando a figura 14, sabemos que o vetor deslocamento ( $\vec{d}$ ) da partícula de massa  $M$  à partícula de massa  $m$  será:

$$\vec{d} = \vec{r} - \vec{r}'.$$

Com isso, sabemos que o módulo e o versor desse vetor deslocamento são, respectivamente

$$|\vec{d}|^2 = |\vec{r} - \vec{r}'|^2$$

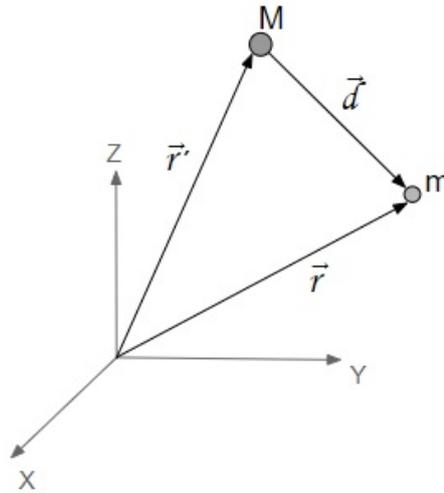
e

$$\hat{d} = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}.$$

Logo, podemos reescrever a força gravitacional newtoniana como

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (5.4)$$

Figura 14 – Força gravitacional de Newton entre dois corpos massivos



Fonte: Próprio autor.

Por outro lado, a densidade de massa de um corpo é dado por

$$\rho = \frac{dM}{dV} \Rightarrow M = \int \rho dV. \quad (5.5)$$

Contudo, sabemos que

$$-\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \nabla \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right). \quad (5.6)$$

Logo, substituindo as equações 5.4 e 5.6 na equação 5.4, obtemos que

$$\vec{F} = Gm \int \left[ \rho(\vec{r}') \nabla \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dV' = m \nabla \phi,$$

onde

$$\phi = G \int \left( \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'$$

é chamado de potencial gravitacional newtoniano e está contido na métrica, mais especificamente na componente  $g_{00}$  em que mostraremos posteriormente.

A partir disso, aplicando o divergente no potencial, obtemos

$$\nabla \phi = G \int \rho(\vec{r}') \nabla \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' = -G \int \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV',$$

então o laplaciano do potencial será

$$\nabla^2 \phi = -G \int \rho(\vec{r}') \nabla \left\{ \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} dV',$$

mas usando a propriedade de filtragem da delta, onde

$$\nabla \left\{ \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}'),$$

obtemos que

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad (5.7)$$

que é a equação de Poisson.

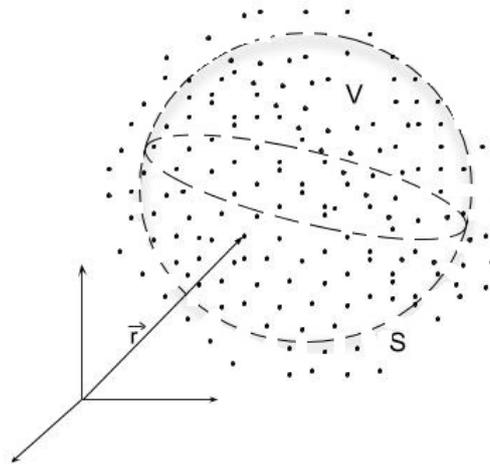
É importante ressaltar que a densidade de massa de um corpo está contida no tensor energia-momento da equação de Einstein, mais especificamente na componente  $T_{00}$ .

Precisamos então de uma equação que contenha uma relação entre energia-matéria, que satisfaça os critérios anteriores e que exprima uma lei de conservação.

Para isso, analisando o interior do volume  $V$  de uma região do espaço com cargas elétricas e limitada por uma superfície fechada  $S$ , conforme imagem 15, do eletromagnetismo temos que a corrente elétrica é dada por

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (5.8)$$

Figura 15 – Região do espaço com cargas elétricas



Fonte: Próprio autor.

Para uma certa quantidade de carga ( $dq$ ), temos que

$$dq = \rho dV,$$

onde  $\rho$  é a densidade volumétrica de carga.

Analisando novamente a figura 15 e com base na equação 5.8, se tomamos como referência

que  $dq$  é a carga que diminuiu do interior da região de volume  $V$ , então a corrente elétrica poderá ser expressa como

$$I = -\frac{d}{dt} \int \rho dV. \quad (5.9)$$

Por outro lado, a corrente elétrica também pode ser calculada como

$$I = \oint \vec{J} \cdot \hat{n} da = \int \nabla \cdot \vec{J} dV, \quad (5.10)$$

onde  $J$  é o vetor densidade de corrente e a corrente é positiva, pois consideramos que as cargas no interior da superfície  $S$  está diminuindo. Além disso, aplicamos o teorema do divergente onde

$$\int (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \oint \vec{F} \cdot \hat{n} da.$$

A partir das equações 5.9 e 5.10 temos que

$$-\int \nabla \cdot \vec{J} dV = \int \frac{d\rho}{dt} dV \Rightarrow \int \left( \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{J} \right) = 0.$$

Assim, obtemos a equação da continuidade dada por

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{J} = 0. \quad (5.11)$$

Podemos ainda escrever esta equação como

$$\partial_\mu J^\mu = 0,$$

onde  $J^\mu = (c\rho, \vec{J})$  com  $\mu = 0, 1, 2, 3$ .

Isto é possível, pois sendo  $x^\mu = (ct, x, y, z)$  e considerando  $i = 1, 2, 3$ , temos que

$$\partial_0 J^0 + \partial_i J^i = \frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} + \left[ \frac{\partial J^x}{\partial x} + \frac{\partial J^y}{\partial y} + \frac{\partial J^z}{\partial z} \right] = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0,$$

ou seja, retornamos a equação 5.11.

Sendo uma equação da continuidade, esta equação expressa um princípio de conservação que, neste caso, é de conservação da carga elétrica. Com base nisto, Einstein também propôs uma lei de conservação, de modo que

$$D_\mu (\text{geometria})^{\mu\nu} = D_\mu (\text{matéria-energia})^{\mu\nu} = 0,$$

expressando a conservação local de energia e momento [13].

A matéria-energia está contida no tensor energia-momento  $T^{\mu\nu}$  e podemos associar a geo-

metria ao tensor  $G^{\mu\nu}$ , logo podemos escrever a proposta de Einstein como

$$D_\mu G^{\mu\nu} = D_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (5.12)$$

Para encontrar uma expressão para o tensor  $G^{\mu\nu}$  devemos considerar que o objeto geométrico que contém derivadas segundas de  $g_{\mu\nu}$  e que está associado a geometria é o tensor de Riemann. Com isso, usando a identidade de Bianchi, dada pela equação 4.38 e aplicando a métrica  $g^{\rho\kappa}$ , encontramos que

$$g^{\rho\kappa} (R_{\rho\mu\kappa\lambda;\nu} + R_{\rho\mu\nu\kappa;\lambda} + R_{\rho\mu\lambda\nu;\kappa}) = 0,$$

mas aplicando a propriedade 2.10 da métrica de levantar os índices, obtemos que

$$R^{\kappa}_{\mu\kappa\lambda;\nu} + R^{\kappa}_{\mu\nu\kappa;\lambda} + R^{\kappa}_{\mu\lambda\nu;\kappa} = 0.$$

Utilizando a identidade 4.35 no segundo termo da equação e a identidade 4.36 do tensor de Riemann, ou seja, invertendo seus índices e realizando a contração do tensor, obtemos que

$$R_{\mu\lambda;\nu} - R_{\mu\nu;\lambda} + R^{\kappa}_{\mu\lambda\nu;\kappa} = 0.$$

Podemos ainda, aplicar a métrica  $g^{\mu\lambda}$  na expressão anterior e identificar no primeiro termo, após a aplicação da métrica, que se trata do escalar de Ricci, conforme propriedade 4.37, de modo que

$$\begin{aligned} R_{;\nu} - g^{\mu\lambda} R_{\mu\nu;\lambda} + g^{\mu\lambda} R^{\kappa}_{\mu\lambda\nu;\kappa} &= 0 \\ R_{;\nu} - R^{\lambda}_{\nu;\lambda} - R^{\kappa}_{\nu;\kappa} &= 0, \end{aligned}$$

onde neste último passo utilizamos novamente a propriedade da métrica de levantar índices, realizamos a inversão dos índices  $\nu, \lambda$  do tensor de Riemann e o fato da contração deste tensor gerar o tensor de Ricci.

Substituindo os índices  $\kappa \rightarrow \lambda$ , que são índices mudos, no terceiro termo da expressão anterior obtemos que

$$R_{;\nu} - 2R^{\lambda}_{\nu;\lambda} = 0.$$

Como esta igualdade é nula, podemos multiplicar em ambos os lados por  $\frac{g^{\mu\nu}}{2}$  e realizando algumas manipulações com a métrica temos que

$$g^{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} R_{;\nu} - R^{\lambda}_{\nu;\lambda} \right) = R^{\lambda\mu}_{;\lambda} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R_{;\nu} = 0.$$

Substituindo agora  $v \rightarrow \lambda$  no segundo termo e sabendo que  $V^\mu_{;k} \equiv D_k V^\mu$ , temos que

$$\left( R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} R \right)_{;\lambda} = D_\lambda \left( R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} R \right) = 0.$$

Com isso, definimos que

$$G^{\lambda\mu} \equiv R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} R, \quad (5.13)$$

que é conhecido como tensor de Einstein.

Sabemos a proposta inicial de Einstein de expressar uma lei de conservação, conforme a equação 5.12, e conhecendo o tensor de Einstein podemos escrever então que

$$\left( R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} R \right)_{;\lambda} = T^{\lambda\mu}_{;\lambda}.$$

Por fim, fazendo uma pequena manipulação dos índices utilizando a métrica, obtemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k T_{\mu\nu}, \quad (5.14)$$

que é a equação da Relatividade Geral, onde  $k$  é uma constante de acoplamento necessária devido ao princípio de correspondência da teoria.

Com isso, utilizando este princípio, onde para campos fracos e baixas velocidades chegamos a equação de Poisson, conforme equação 5.7, temos que a constante de acoplamento será

$$k = \frac{8\pi G}{c^2},$$

que substituindo na equação 5.14, obtemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}, \quad (5.15)$$

que é a equação de campo da Relatividade Geral de Einstein.

Além disso, Albert Einstein também estimou que o universo não estaria nem expandindo nem se contraindo [13], para isto, é interessante notar que é possível fazer uma pequena alteração no escalar de Ricci,  $R$ , que pode ser reescrito como  $R + \Lambda$ , onde  $\Lambda$  é chamada de constante cosmológica, sem nenhuma alteração na teoria e assim permitir esse universo estático.

## 5.2 FORMALISMO DE PRIMEIRA ORDEM

Iniciamos nosso estudo da TRG partindo da ideia de que podemos estudar espaços curvos imersos em espaços euclidianos de dimensão maior. Em seguida estudamos espaços curvos

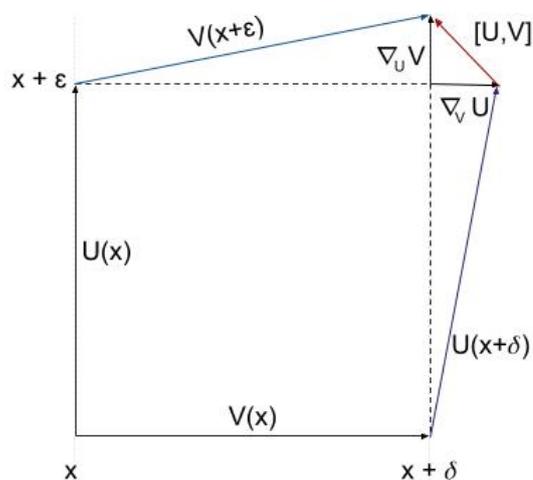
gerais, isto é, espaços curvos que não estão mais contidos no espaço Euclidiano, partindo das ideias adotadas para espaços imersos. Com o estudo da topologia, vimos que é possível desconsiderar a imersão e estudar superfícies puramente curvas, como se tudo que existisse fosse somente a superfície esférica, para isso usamos variedades diferenciáveis e construímos toda a teoria das formas diferenciais e de como fazer geometria destas variedades.

Na formulação proposta por Einstein em 1915, percebemos pela equação 5.3, que a geometria da relatividade geral deve ser riemanniana. Contudo, nesse caso, o espaço-tempo possui torção nula. Porém, em 1922, Élie-Joseph Cartan forneceu algumas noções sobre o espaço-tempo possuir uma torção não nula, reconhecendo o caráter tensorial da torção e desenvolvendo um formalismo geométrico diferencial. Um fato interessante é que Cartan ainda associou a torção do espaço-tempo ao momento angular intrínseco da matéria anos antes da descoberta do spin do elétron [20]. É a partir dessas ideias que foi desenvolvido o formalismo de primeira ordem da Relatividade Geral (Teoria de Einstein-Cartan), onde uma teoria de gauge para a gravitação surge naturalmente.

### 5.2.1 Conexão Afim

Uma conexão afim é uma regra pelo qual alguma noção de paralelismo global pode ser definida. Não há nenhuma noção de paralelismo global natural, o que podemos fazer é transportar um vetor ao longo de uma curva, numa variedade  $M$ . Podemos representar a conexão afim pela figura 16.

Figura 16 – Representação de uma conexão afim no transporte paralelo entre dois vetores



Fonte: Próprio autor.

A conexão afim é dita ser simétrica ou livre de torção quando

$$[U, V] = \nabla_U V - \nabla_V U = 0, \quad (5.16)$$

percebemos então que o que conecta esses espaços tangentes próximos é a conexão afim.

Assim, uma linha dita reta é gerada por um transporte paralelo de um vetor ao longo dele mesmo (geodésica).

## 5.2.2 Torção

Vimos na seção 4.2 que o transporte entre dois pontos de uma variedade  $M$ , isto é, de uma superfície curva, depende da curvatura. No estudo da derivada exterior, vimos que para uma função escalar  $f(x)$  temos que

$$\nabla_{\kappa} f(x) = \partial_{\kappa} f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^{\kappa}}. \quad (5.17)$$

De forma similar, temos que

$$\nabla_{\mu} f(x) = \partial_{\mu} f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^{\mu}}. \quad (5.18)$$

Por outro lado, a partir da equação 4.21, obtemos que

$$\nabla_{\kappa} \frac{\partial f(x)}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda} \frac{\partial f(x)}{\partial x^{\lambda}} \quad (5.19)$$

e

$$\nabla_{\mu} \frac{\partial f(x)}{\partial x^{\kappa}} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^{\mu} \partial x^{\kappa}} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} \frac{\partial f(x)}{\partial x^{\lambda}}. \quad (5.20)$$

Então, com base nas equações 5.16, 5.17 e 5.18, temos que

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\kappa}]f(x) = \nabla_{\kappa} \nabla_{\mu} f(x) - \nabla_{\mu} \nabla_{\kappa} f(x) = \nabla_{\kappa} \frac{\partial f(x)}{\partial x^{\mu}} - \nabla_{\mu} \frac{\partial f(x)}{\partial x^{\kappa}}.$$

Mas substituindo as equações 5.19 e 5.20, obtemos

$$\begin{aligned} [\nabla_{\mu}, \nabla_{\kappa}]f(x) &= \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda} \frac{\partial f(x)}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^{\mu} \partial x^{\kappa}} + \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} \frac{\partial f(x)}{\partial x^{\lambda}} \\ &= \left[ \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} - \Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda} \right] \frac{\partial f(x)}{\partial x^{\lambda}}. \end{aligned}$$

Com isso, podemos definir as componentes do tensor torção como

$$T_{\mu\kappa}^{\lambda} \equiv \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} - \Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda}. \quad (5.21)$$

Quando  $\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} = \Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda}$ , temos que a torção é nula. Contudo, se  $\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} \neq \Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda}$ , ou ainda, de uma forma geral,  $(\nabla_U V - \nabla_V U - [U, V]) \neq 0$  então a torção é dita não nula.

### 5.2.3 Teoria de Gauge

A simetria de calibre fixa a forma pela qual os campos de matéria se acoplam as partículas nas quais interagem. “O primeiro indício de uma simetria de calibre aparece oculto dentro das equações de Maxwell do eletromagnetismo” [22].

Nas teorias de gauge, por exemplo, a derivada covariante é

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + A_{\mu}.$$

Podemos escrever a derivada covariante em termos de 1-formas, onde

$$D = d + A = dx^{\mu}(\partial_{\mu} + A_{\mu}).$$

Nesta roupagem o próprio operador  $D$  sofre uma transformação homogênea sob o grupo de calibre, ou seja

$$D_{\mu} \rightarrow D'_{\mu} = U(x)D_{\mu}.$$

Com isso, se tivermos uma 0-forma, onde esta é um campo de representação do grupo de gauge  $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = U(x)\phi(x)$ , a derivada irá atuar sobre sobre  $\phi(x)$  da seguinte forma:

$$D\phi = d\phi + A \wedge \phi = d\phi + A\phi.$$

Podemos aplicar novamente a derivada covariante e assim obter que

$$\begin{aligned} DD\phi &= D^2\phi = d(d\phi + A\phi) + A \wedge (d\phi + A\phi) \\ &= d^2\phi + d(A\phi) + A \wedge d\phi + A \wedge A\phi \\ &= d(A\phi) + A \wedge d\phi + A \wedge A\phi, \end{aligned}$$

pois  $d^2\phi = 0$ .

Por outro lado, a derivada de uma 1-forma com uma 0-forma resulta em

$$d(A\phi) = (dA)\phi - Ad\phi,$$

então

$$\begin{aligned} DD\phi &= (dA)\phi - Ad\phi + A \wedge d\phi + A \wedge A\phi \\ &= (dA + A \wedge A)\phi. \end{aligned}$$

Podemos então definir [23]

$$F \equiv dA + A \wedge A. \quad (5.22)$$

Em teoria de gauge não abelianas  $F$  é a intensidade de campo (Field Strength, em ingles). Em teorias de gauge abeliana  $A \wedge A = 0$ . A derivada do campo  $\phi(x)$  defini univocamente o acoplamento entre  $\phi(x)$  e o potencial de gauge.

Numa variedade curva, além da derivada covariante  $D$ , existe uma outra operação análoga que também é chamada de derivada covariante em geometria diferencial, esta operação é definida como

$$\nabla = d + \Gamma,$$

ou ainda

$$\nabla = dx^\mu(\partial_\mu + \Gamma_\mu).$$

As propriedades de transformação da derivada  $D$  sob difeomorfismo são tais que o operador diferencial  $\nabla$  se transforma de forma homogênea e é covariante sob o grupo de difeomorfismo. Deste ponto de vista,  $\Gamma$  se comporta como uma conexão. No entanto, isto não é suficiente para tornar a gravitação uma teoria de gauge. O problema é que esse grupo atua nas coordenadas da variedade de acordo com

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x) = x^\mu + \xi^\mu(x),$$

deslocando os argumentos dos campos (tensores) sobre o qual atua. Por outro lado, uma transformação de gauge no sentido dos fibrados tangentes, onde esses fibrados são a união dos espaços tangentes à variedade  $M$  em  $p$  e representados por  $TM$  [24], atua sobre as funções e não sobre os argumentos, isto é, gera um movimento ao longo do fibrado num ponto fixo sobre a variedade base. Por esta razão,  $\Gamma$  não é uma conexão no sentido dos fibrados tangentes.

As simetrias externas ou do espaço-tempo descrevem os movimentos de uma partícula no espaço-tempo. As simetrias internas determinam o estado de uma partícula (como o spin, a carga, etc). Logo, para construirmos uma teoria geométrica para as teorias de gauge, devemos

considerar uma teoria que acople numa mesma estrutura as simetrias internas às simetrias externas. Uma geometria fibrada faz exatamente isso, ela acopla, diferencialmente, em cada ponto do espaço total as simetrias do espaço-tempo às simetrias do grupo de gauge. Podemos assim definir

$$DV = (d + w \wedge)V,$$

com isso a derivada covariante  $D$  é a generalização da derivada exterior  $d$ .

### 5.2.4 Curvatura de um Fibrado

Como a conexão,  $w$ , é quem determina as disposições relativas de fibra vizinhas, temos que sua derivada covariante resulta, automaticamente, a curvatura  $\Omega$ , logo

$$\Omega \equiv Dw = dw + w \wedge w,$$

ou ainda, em componentes

$$\Omega_b^a = dw_b^a + w_c^a \wedge w_b^c,$$

onde  $w_b^a = -w_a^b$  e  $w_a^a = 0$ .

De forma similar, em teoria de gauge

$$F = DA = dA + A \wedge A.$$

Vemos assim que o campo de gauge (curvatura) é obtido naturalmente, através da derivada covariante do potencial de gauge, a conexão. Assim, este potencial tem uma importância fundamental e seu caráter físico foi comprovado experimentalmente por Aharonov-Bohm, conhecido como efeito Aharonov-Bohm.

### 5.2.5 Estrutura de Cartan

Vimos que, em teoria de gauge não abeliana, a intensidade de campo é dada pela equação 5.22, isto é

$$F = dA + A \wedge A,$$

derivando  $F$ , obtemos que

$$\begin{aligned} dF &= d^2A + d(A \wedge A) \\ &= dA \wedge A - A \wedge dA \\ &= dA \wedge A + dA \wedge A, \end{aligned} \tag{5.23}$$

pois  $d^2A = 0$ .

Por outro lado, aplicando o pontencial dos dois lados da equação 5.22, obtemos:

$$\begin{aligned} A \wedge F &= A \wedge (dA + A \wedge A) \\ &= A \wedge dA + A \wedge A \wedge A. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Similarmente, temos que

$$F \wedge A = dA \wedge A + A \wedge A \wedge A. \quad (5.25)$$

Então, podemos calcular a expressão  $(dF + A \wedge F - F \wedge A)$ , substituindo as equações 5.23, 5.24 e 5.25, de modo a obter:

$$\begin{aligned} dF + A \wedge F - F \wedge A &= (dA \wedge A + dA \wedge A) + (A \wedge dA + A \wedge A \wedge A) - (dA \wedge A + A \wedge A \wedge A) \\ &= dA \wedge A + dA \wedge A - dA \wedge A + A \wedge A \wedge A - dA \wedge A - A \wedge A \wedge A, \end{aligned}$$

portanto,

$$dF + A \wedge F - F \wedge A = 0. \quad (5.26)$$

A equação 5.26 é denominada equação de estrutura de Cartan. No fibrado tangente temos que:

$$d\Omega + w \wedge \Omega - \Omega \wedge w = 0.$$

onde  $\Omega$  é a curvatura e  $w$  a conexão (1-forma) que também devem obedecer a mesma equação de estrutura de Cartan.

Pelo fato da forma de gauge do potencial ser sempre do tipo  $A = A_\mu dx^\mu$ , podemos ter uma 1-forma contendo simetria interna, tal que

$$A_\mu = A_\mu^a G_a, \quad (5.27)$$

onde  $G_a$  são matrizes do grupo de simetria de gauge, portanto do grupo de Lie. O grupo de Lie é um tipo de variedade diferenciável e que devem obedecer a seguinte operação

$$[G_a, G_b] = if_{abc} G_c,$$

onde  $f_{abc}$  são as constantes de estrutura.

Partindo então da equação 5.22, temos que

$$\begin{aligned}
F &= d(A_\mu dx^\mu) + (A_\mu dx^\mu \wedge A_\nu dx^\nu) \\
&= \partial_\nu A_\mu dx^\nu dx^\mu + A_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) dx^\nu dx^\mu + \frac{1}{2} (A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= \frac{1}{2} \{ (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + [A_\mu, A_\nu] \} dx^\mu \wedge dx^\nu.
\end{aligned}$$

Contudo, sabendo a equação 5.27, temos que:

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a G_a dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (5.28)$$

onde

$$F_{\mu\nu}^a G_a = \partial_\mu A_\nu^a G_a - \partial_\nu A_\mu^a G_a + [A_\mu^b G_b, A_\nu^c G_c].$$

Com isso, temos a estrutura da equação de Cartan, 5.26, e a intensidade do campo de gauge explicitado na expressão 5.28. Estas duas expressões serão a base para a construção do formalismo de primeira ordem da Relatividade Geral (Teoria de Einstein-Cartan).

## 5.2.6 Tensor de Curvatura

Vimos na seção 4.2.1 que podemos definir um tensor de curvatura, o tensor de Riemann, que está associado ao símbolo de Christoffel. Contudo, esta construção baseou-se no fato da torção ser nula.

Após o estudo da estrutura de Cartan, podemos então definir a torção 2-forma e a curvatura 2-formas [4] [22], respectivamente, como:

$$\begin{aligned}
T^a &\equiv \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^a dx^\mu \wedge dx^\nu, \\
R^\alpha_\beta &\equiv \frac{1}{2} R^\alpha_{\beta\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu.
\end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
T^a &= dw_b^a + w_c^a \wedge dx^b \\
R^\alpha_\beta &= dw_\beta^\alpha + w_c^\alpha \wedge w_\beta^c,
\end{aligned}$$

onde a 1-forma, dado por  $w_\beta^\alpha \equiv \Omega_\gamma^\alpha dx^\gamma$ , é uma conexão que obedece a mesma equação de estrutura de Cartan.

## 6 ONDAS GRAVITACIONAIS E SUA ANALOGIA COM ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

### 6.1 LINEARIZAÇÃO DA RELATIVIDADE GERAL

Vimos que um dos princípios da Relatividade Geral de Einstein é o princípio da correspondência que diz que a teoria da Relatividade Geral (TRG) deve se reduzir a gravitação de Newton no regime de campos fracos e baixas velocidades, visto que este regime é comprovado experimentalmente. Essa aproximação de campo fraco é válida quando consideramos que a fonte está muito distante. Vamos considerar no estudo das Ondas Gravitacionais que a torção é nula, conforme a TRG proposta por Einstein em 1915. Contudo, vimos que a torção não precisa ser necessariamente nula.

A priori, considerando a teoria de 1915, podemos analisar uma região onde o espaço-tempo é uma leve perturbação do espaço plano, e, assim, a métrica pode ser escrita como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad (6.1)$$

onde  $h_{\mu\nu}$  é uma pequena perturbação na métrica plana  $\eta_{\mu\nu}$ , com  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . Além disso, vamos preservar apenas os termos de primeira ordem de  $h_{\mu\nu}$ , já que este é muito pequeno, logo

$$O(h^2) \rightarrow 0. \quad (6.2)$$

Sendo assim, precisamos inicialmente encontrar qual será a métrica que iremos utilizar. Para isso conhecendo a propriedade 2.12 da métrica, onde a contração dos tensores contravariantes e covariantes da métrica resulta na delta de Kronecker, ou seja

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\kappa} = \delta_{\mu}^{\kappa},$$

temos que o inverso do tensor  $g_{\mu\nu}$ , definido na equação 6.1, será similar a esta exceto por um parâmetro adimensional  $\alpha$  da leve perturbação do espaço plano, de modo que

$$(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(\eta^{\nu\kappa} + \alpha h^{\nu\kappa}) = \delta_{\mu}^{\kappa}.$$

Com isso, temos que

$$(\alpha + 1)h_\mu^k = 0 \rightarrow \alpha = -1,$$

onde o último passo é válido, pois  $h_\mu^k$  não pode ser nulo. Além disso, estamos considerando que a perturbação de ordem superior é nula.

Logo, nossa métrica será

$$\begin{cases} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \\ g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}(x) \end{cases} \quad (6.3)$$

A partir disso, podemos encontrar o tensor e o escalar de Ricci, necessários na equação da Relatividade Geral, 5.15.

Sabemos da equação 4.30 que a conexão de Christoffel é dada por

$$\Gamma_{\beta k}^m = \frac{1}{2}g^{m\lambda}(g_{\beta\lambda,k} + g_{\lambda k,\beta} - g_{k\beta,\lambda}),$$

utilizando a métrica definida na equação 6.1 e realizando as devidas manipulações matemáticas obtemos que

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}(h_{\mu,\nu}^\lambda + h_{\nu,\mu}^\lambda - h_{\nu\mu}^{\lambda}). \quad (6.4)$$

Por outro lado, utilizando a equação 4.34 do tensor de Riemann, temos que

$$\begin{aligned} R_{k\mu\nu}^\lambda &= (\Gamma_{k\nu}^\lambda)_{,\mu} - (\Gamma_{k\mu}^\lambda)_{,\nu} + \Gamma_{\mu\beta}^\lambda \Gamma_{k\nu}^\beta - \Gamma_{\nu\beta}^\lambda \Gamma_{k\mu}^\beta \\ &= (\Gamma_{k\nu}^\lambda)_{,\mu} - (\Gamma_{k\mu}^\lambda)_{,\nu}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde consideramos a aproximação 6.2, isto é, a multiplicação entre duas conexões de Christoffel geraria termos de ordem superior para a perturbação  $h_{\mu\nu}$  que serão nulas.

Desta forma, com base na equação 6.4 e encontrando as suas devidas derivadas, obtemos que o tensor de Riemann, equação 6.5, poderá ser escrito com dependência apenas da pequena perturbação do espaço plano, ou seja

$$R_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} \left\{ \partial_\gamma \partial_\nu h_\mu^\lambda + \partial_\gamma \partial_\mu h_\nu^\lambda - \partial_\gamma \partial^\lambda h_{\nu\mu} - \partial_\nu \partial_\gamma h_\mu^\lambda - \partial_\nu \partial_\mu h_\gamma^\lambda + \partial_\nu \partial^\lambda h_{\gamma\mu} \right\}, \quad (6.6)$$

de forma que o tensor de Ricci, conforme equação 4.36, será

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_\lambda \partial_\mu h_\nu^\lambda - \partial_\lambda \partial^\lambda h_{\nu\mu} - \partial_\nu \partial_\mu h_\lambda^\lambda + \partial_\nu \partial^\lambda h_{\lambda\mu} \right\}. \quad (6.7)$$

Mas conhecendo a matriz da métrica de Minkowski, dada por 5.2, podemos escrever

$$\partial_\lambda \partial^\lambda = \partial_\lambda \eta^{\lambda\nu} \partial_\nu = \eta^{00} \partial_0 \partial_0 + \eta^{11} \partial_1 \partial_1 + \eta^{22} \partial_2 \partial_2 + \eta^{33} \partial_3 \partial_3,$$

e sendo

$$\{\partial_\mu\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\},$$

onde

$$x^\mu = (x^0, x^i) = (ct, x, y, z), \quad i = 1, 2, 3.$$

Então a operação  $\partial_\lambda \partial^\lambda$  será o próprio d'Alambertiano, isto é

$$\partial_\lambda \partial^\lambda = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \square, \quad (6.8)$$

onde

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

e o operador d'Alambertiano é definido como

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2.$$

Com isso, utilizando a equação 6.8 na equação 6.7, obtemos

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_\lambda \partial_\mu h^\lambda_\nu - \square h_{\nu\mu} - \partial_\nu \partial_\mu h^\lambda_\lambda + \partial_\nu \partial^\lambda h_{\lambda\mu} \right\}.$$

Por outro lado, temos que  $h^\lambda_\lambda$  é a soma dos elementos da diagonal principal da matriz de  $h_{\mu\nu}$ , no qual definimos

$$h = h^\lambda_\lambda,$$

de modo que o tensor de Ricci será

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_\lambda \partial_\mu h^\lambda_\nu - \square h_{\nu\mu} - \partial_\nu \partial_\mu h + \partial_\nu \partial^\lambda h_{\lambda\mu} \right\}.$$

A partir do tensor de Ricci para aproximação de campo fraco é possível encontrar o escalar de Ricci, dada pela equação 4.37, de modo que

$$R = g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \left\{ \partial_\lambda \partial_\mu h^\lambda_\nu - \square h_{\nu\mu} - \partial_\nu \partial_\mu h + \partial_\nu \partial^\lambda h_{\lambda\mu} \right\}.$$

Aplicando a métrica, conforme a definição 6.3, e realizando as devidas manipulações matemáticas obtemos que

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{2} \left\{ \partial_\lambda \partial_\gamma h^{\gamma\lambda} - \square h - \partial^\gamma \partial_\gamma h + \partial^\gamma \partial^\lambda h_{\gamma\lambda} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \partial_\lambda \partial_\gamma h^{\gamma\lambda} - 2\square h + \partial^\gamma \partial^\lambda h_{\gamma\lambda} \right\},
\end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}
\partial^\gamma \partial^\lambda h_{\gamma\lambda} &= \eta^{\gamma\sigma} \partial_\sigma \eta^{\lambda\alpha} \partial_\alpha h_{\gamma\lambda} \\
&= \partial_\lambda \partial_\gamma h^{\gamma\lambda},
\end{aligned}$$

então

$$R = \frac{1}{2} \left\{ 2\partial_\lambda \partial_\gamma h^{\gamma\lambda} - 2\square h \right\} = \partial_\lambda \partial_\gamma h^{\gamma\lambda} - \square h.$$

Com isso, podemos descobrir o tensor de Einstein, pois utilizando a equação 5.13 obtemos

$$\begin{aligned}
G_{\gamma\mu} &= \frac{1}{2} \left\{ \partial_\lambda \partial_\gamma h_\mu^\lambda - \square h_{\gamma\mu} - \partial_\mu \partial_\gamma h + \partial_\mu \partial^\lambda h_{\gamma\lambda} \right\} - \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \left( \partial_\kappa \partial_\beta h^{\kappa\beta} - \square h \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \partial_\lambda \partial_\gamma h_\mu^\lambda - \square h_{\gamma\mu} - \partial_\mu \partial_\gamma h + \partial_\mu \partial^\lambda h_{\gamma\lambda} \right\} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial_\kappa \partial_\beta h^{\kappa\beta} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square h.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Por conveniência vamos definir um tensor de traço reverso

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu}, \tag{6.10}$$

com isso, temos

$$\bar{h} = \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = h - \frac{1}{2} \delta_\mu^\mu h$$

Contudo, se analisarmos a delta de Kronecker, temos que

$$\delta_\mu^\mu = \delta_0^0 + \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 4,$$

logo, podemos escrever o tensor de traço reverso como

$$\bar{h} = h - 2h \rightarrow \bar{h} = -h.$$

Com isso observamos que o tensor  $h_{\mu\nu}$  pode ser reescrito como

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu}. \tag{6.11}$$

Logo, substituindo este tensor na equação 6.9 e realizando as devidas manipulações mate-

máticas, obtemos que

$$\begin{aligned} G_{\gamma\mu} &= \frac{1}{2} \left\{ \partial^\lambda \partial_\gamma \bar{h}_{\lambda\mu} + \partial^\lambda \partial_\mu \bar{h}_{\lambda\gamma} - \square \bar{h}_{\gamma\mu} - \eta_{\gamma\mu} \partial^\lambda \partial^\beta \bar{h}_{\lambda\beta} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -\square \bar{h}_{\gamma\mu} + \partial_\gamma \left( \partial^\lambda \bar{h}_{\lambda\mu} \right) + \partial_\mu \left( \partial^\lambda \bar{h}_{\lambda\gamma} \right) - \eta_{\gamma\mu} \partial^\beta \left( \partial^\lambda \bar{h}_{\lambda\beta} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Realizando uma análise dos graus de liberdade da equação da Relatividade Geral, sabemos que o número de componentes independentes será  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Como o tensor  $T_{\mu\nu}$  é uma matriz  $4 \times 4$ , ou seja,  $n = 4$ , então temos que a equação de Einstein tem 10 componentes independentes.

Entretanto, sendo  $h_{\mu\nu}$  uma representação do grupo de Lorentz, este grupo tem helicidade  $2^1$ , pois eles são representados como

$$SO(1,3) \sim SU(2) \oplus SU(2).$$

Fazendo uma analogia com as ondas eletromagnéticas, temos que a representação vetorial do campo de Maxwell é dado por

$$\left( \frac{1}{2}, 0 \right) \otimes \left( 0, \frac{1}{2} \right) = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Da mesma forma, a representação para o campo gravitacional, do “gráviton”, é dado por

$$\left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \otimes \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = [(0,0) \oplus (1,1)]_S + [(0,1) \oplus (1,0)]_A.$$

Assim, percebemos que o campo gravitacional não carrega apenas o spin 2, sendo  $h_{\mu\nu}$  um tensor simétrico, a sua representação máxima deve ser spin 2, na verdade helicidade 2, pois não tem massa. Contudo ele carrega também spin 0 e spin 1 que deverá ser eliminado. Essa eliminação desses graus de liberdade é feita pelo mecanismo de gauge, ou seja, temos certa liberdade de calibre sobre o tensor  $h_{\mu\nu}$  sem afetar a equação de campo de Einstein e assim eliminar a parte não física (espúria) da teoria.

Com este objetivo, podemos usar o gauge de Lorentz dado por

$$\partial^\lambda \bar{h}_{\lambda\mu} = 0,$$

de modo que o tensor de Einstein, dado pela equação 6.12, que depende apenas de  $h_{\mu\nu}$ , pode ser reescrito como

$$G_{\gamma\mu} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\gamma\mu}.$$

<sup>1</sup>Pois se esta partícula, Gráviton, existir, a equação mostra que ela não tem massa.

Com isso, a equação de campo 5.15 da Relatividade Geral de Einstein será

$$\square \bar{h}_{\gamma\mu} = -\frac{16\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}. \quad (6.13)$$

Assim foi possível eliminar 4 graus de liberdade, mas ainda faltam quatro graus de liberdade a serem eliminados, esses oito componentes são a parte espúria (não física) da teoria.

Sendo assim, é por meio do gauge transverso sem traço ou TT gauge (em inglês, transverse traceless gauge) que tal objetivo pode ser alcançado. Este gauge recebe esse nome pelo fato da perturbação da métrica ser com traço nulo e perpendicular ao vetor de campo [25], o que implica que não há restrições entre  $h_{ij}^{TT}$  e  $\bar{h}_{ij}^{TT}$ .

Somente neste gauge as ondas gravitacionais viajam a velocidade da luz em qualquer referencial, isto é, todos os observadores verificam que a radiação gravitacional viajando à velocidade da luz, que é uma exigência da relatividade geral, com isso a física é a mesma para todos os observadores. Mais ainda, somente as componentes espaciais de  $h_{\mu\nu}$  satisfazem a equação de onda, isto é

$$\square h_{ij}^{TT} = -\frac{16\pi G}{c^2} T_{ij}^{TT}, \quad (6.14)$$

com  $i, j = 1, 2, 3$  e onde, considerando a onda gravitacional se propagando na direção  $+z$  [26, 27], temos que

$$h_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx}^{TT} & h_{xy}^{TT} & 0 \\ 0 & h_{yx}^{TT} & h_{yy}^{TT} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Assim, com esse mecanismo de gauge é possível a eliminação dos graus de liberdade [28], como é feito também nas ondas eletromagnéticas com o uso de projetores  $\theta_{\mu\nu}$  e  $\omega_{\mu\nu}$ , chegando a equação  $\square A^\mu = J^\mu$ .

Este tensor transverso sem traço tem algumas propriedades, sendo elas:

1.  $h_{xy}^{TT} = h_{yx}^{TT}$ ;
2.  $h_{xx}^{TT} + h_{yy}^{TT} = 0$ ;
3.  $h_{ij}^{GW} = \bar{h}_{ij}^{TT}$ .

A parte transversa,  $\bar{h}_{ij}^T$ , deste tensor é obtida quando projetamos perpendicularmente este na direção de propagação  $n_i = \frac{x^i}{r}$  e subtraímos o traço. Para isto é útil utilizarmos o projetor  $P_{ij}$ , já que estamos em  $D = 0 + 3$ , isto é, considerando apenas dimensão espacial. Matematicamente

temos então que o tensor transverso será [26]:

$$\bar{h}_{ij}^T = \bar{h}_{kl} P_{ik} P_{jl},$$

onde

$$P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j.$$

Removendo então o traço temos que

$$h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl} \bar{h}_{kl}, \quad (6.16)$$

onde

$$\Lambda_{ij,kl} = P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl}.$$

Substituindo na equação 6.13 e utilizando o método da função de Green para resolver esta equação diferencial não homogênea, obtemos como solução

$$\begin{aligned} h_{ij}^{TT} &= -\frac{1}{4\pi} \left( -\frac{16\pi G}{c^2} \right) \Lambda_{ij,kl} \int_V \frac{T_{ij}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 x' \\ &= \frac{4G}{c^2} \Lambda_{ij,kl} \int_V \frac{T_{ij}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 x', \end{aligned}$$

onde

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}.$$

Vamos supor que a fonte (dois objetos muito massivos) tenham velocidades de rotação  $v \lll c$ . Além disso, vamos considerar que o observador está muito distante da fonte, de modo que  $|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq |\vec{r}| = r$ , com isso

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \simeq t - \frac{r}{c}$$

e

$$h_{ij}^{TT} = \frac{4G}{c^2 r} \Lambda_{ij,kl} \int_V T_{ij} \left( \vec{r}', t - \frac{r}{c} \right) dV' \quad (6.17)$$

A equação do tensor energia momento (localmente), ou seja

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0,$$

representa uma equação da continuidade, similar ao eletromagnetismo, visto anteriormente pela equação 5.11, pois podemos observar que existe uma conservação envolvida, onde para  $\mathbf{v} = 0$ , temos

$$\partial_0 T^{00} + \partial_i T^{i0} = 0 \quad (6.18)$$

e para  $v = i$  obtemos que

$$\partial_0 T^{0i} + \partial_j T^{ji} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.19)$$

Todas essas duas equações significam uma conservação, onde a equação 6.18 representa então a conservação da energia e a equação 6.19 representa a conservação do momento linear.

A partir destas equações, podemos fazer algumas manipulações, de modo que

$$\begin{cases} \partial_0^2 T^{00} + \partial_0 \partial_i T^{i0} = 0 \\ \partial_i \partial_0 T^{0i} + \partial_i \partial_j T^{ji} = 0 \end{cases},$$

mas o tensor energia-momento é simétrico, logo subtraindo as duas equações, obtemos

$$\begin{aligned} \partial_0^2 T^{00} - \partial_i \partial_j T^{ji} &= 0 \\ \partial_0^2 T^{00} (x^i x^j) &= \partial_k \partial_l T^{kl} (x^i x^j). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Como  $x$  e  $t$  são coordenadas independentes, temos que

$$\partial_0^2 (T^{00} x^i x^j) = \partial_k \partial_l T^{kl} x^i x^j,$$

onde a equação do lado direito pode ser reescrita de modo que

$$\partial_k \partial_l T^{kl} x^i x^j = \partial_k \left[ \left( \partial_l T^{kl} \right) x^i x^j + T^{kl} (\partial_l x^i x^j) \right]. \quad (6.21)$$

Contudo, podemos escreve

$$\partial_l x^i x^j = (\partial_l x^i) x^j + x^i (\partial_l x^j) = \delta_l^i x^j + x^i \delta_l^j,$$

logo, substituindo na equação 6.21, obtemos que

$$\begin{aligned} \partial_k \partial_l T^{kl} x^i x^j &= \partial_k \left[ \left( \partial_l T^{kl} \right) x^i x^j + T^{ki} x^j + T^{kj} x^i \right] \\ &= \left( \partial_k \partial_l T^{kl} \right) x^i x^j + \left( \partial_l T^{kl} \right) (\partial_k x^i x^j) + \partial_k \left( T^{ki} x^j \right) + \partial_k \left( T^{kj} x^i \right). \end{aligned}$$

Substituindo na equação 6.20 obtemos

$$\partial_k \partial_l T^{kl} x^i x^j = \partial_0^2 T^{00} (x^i x^j) + 2 \left( \partial_k T^{ik} \right) x^j + 2 \left( \partial_k T^{jk} \right) x^i + 2 T^{ij}. \quad (6.22)$$

Analisando o termo  $(\partial_k T^{ik}) x^j$  é possível perceber que

$$\left( \partial_k T^{ik} x^j \right) = \left( \partial_k T^{ik} \right) x^j + T^{ik} \delta_k^j = \left( \partial_k T^{ik} \right) x^j + T^{ij},$$

logo

$$\left(\partial_k T^{ik}\right) x^j = \left(\partial_k T^{ik} x^j\right) - T^{ij}.$$

Retomando a equação 6.22, temos que

$$\begin{aligned} \partial_k \partial_l T^{kl} x^i x^j &= \partial_0^2 T^{00} (x^i x^j) + 2 \left[ \left(\partial_k T^{ik} x^j\right) - T^{ij} \right] + 2 \left[ \left(\partial_k T^{jk} x^i\right) - T^{ji} \right] + 2T^{ij} \\ &= \partial_0^2 T^{00} (x^i x^j) + 2 \left(\partial_k T^{ik} x^j\right) - 2T^{ij} + 2 \left(\partial_k T^{jk} x^i\right) - 2T^{ji} + 2T^{ij} \\ &= \partial_0^2 T^{00} (x^i x^j) + 2 \left(\partial_k T^{ik} x^j\right) + 2 \left(\partial_k T^{jk} x^i\right) - 2T^{ji}. \end{aligned}$$

Com isso, o tensor energia-momento será

$$T^{ij} = \frac{1}{2} \partial_0^2 T^{00} (x^i x^j) + \left(\partial_k T^{ik} x^j\right) + \left(\partial_k T^{jk} x^i\right) - \frac{1}{2} \partial_k \partial_l T^{kl} x^i x^j. \quad (6.23)$$

Então, podemos encontrar o gauge transverso sem traço, substituindo a equação 6.23 na equação 6.17 e sabendo que  $T^{ij} = T_{ij}$ , isto é, a notação covariante é perdida quando nos restringimos ao espaço 3D euclidiano, de modo que

$$h_{ij}^{TT} = \frac{4G}{c^2 r} \Lambda_{ij,kl} \int_V dV' \left\{ \frac{1}{2} \partial_0^2 T^{00} (x^k, x^l) + \left(\partial_m T^{km} x^l\right) + \left(\partial_m T^{lm} x^k\right) - \frac{1}{2} \partial_m \partial_n T^{mn} x^k x^l \right\}.$$

Contudo, todos os divergentes são termos de superfícies, ou seja

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} da,$$

onde  $\vec{F} = 0$  em  $S$ , logo o gauge TT será dado por

$$\begin{aligned} h_{ij}^{TT} &= \frac{4G}{c^2 r} \Lambda_{ij,kl} \int_V dV' \left\{ \frac{1}{2} \partial_0^2 T^{00} (x^k x^l) \right\} \\ &= \frac{2G}{c^2 r} \Lambda_{ij,kl} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V T^{00} x^k x^l dV'. \end{aligned} \quad (6.24)$$

O tensor  $T^{\mu\nu}$  para um fluido perfeito é dado por [29]

$$T^{\mu\nu} = \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - P \eta^{\mu\nu},$$

onde  $u^\mu$  é a quadrivelocidade, dada por

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

Entretanto, nossa fonte não é um fluido, mas sim um sistema binário girando a baixa velo-

cidade ( $v \ll c$ ), logo não faz sentido falar de pressão ( $P$ ), portanto

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu. \quad (6.25)$$

Todavia, sendo  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ , temos que

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d(ct)}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau}, \quad (6.26)$$

por outro lado, o tempo próprio é dado por  $d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , para  $v \ll c$ , temos que

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma = 1.$$

Substituindo na equação 6.26, obtemos que

$$u^0 = c\gamma = c,$$

então, da equação 6.25, obtemos

$$T^{00} = \rho u^0 u^0 = \rho(c)(c) = \rho c^2.$$

Por fim, substituindo na equação 6.24, concluímos que

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{r} \Lambda_{ij,kl} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V \rho x^k x^l d^3x',$$

onde a densidade  $\rho = \rho(x', t - \frac{r}{c})$ . Assim, obtemos o gauge transverso sem traço ou TT gauge, em que está implícito a velocidade da onda  $c$ , ou seja, às ondas gravitacionais se propagam à velocidade da luz.

## 6.2 ENERGIA E MOMENTO LINEAR DE UMA ONDA GRAVITACIONAL

De acordo com a Relatividade Geral o campo gravitacional não pode ser considerado como uma campo no espaço-tempo, mas sim uma propriedade geométrica do espaço-tempo. O tensor energia-momento  $T^{\mu\nu} \propto R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ , compreende matéria e radiação, mas não o campo gravitacional.

Um tensor energia-momento do campo gravitacional não está definido e não pode ser definido. Isto está de acordo com o princípio da equivalência na forma forte, isto é, em um ponto

podemos fazer  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$ , excluindo os efeitos gravitacionais. Mas se um tensor do campo gravitacional existir ele será nulo em um ponto e, conseqüentemente, nulo em qualquer sistemas de coordenadas (propriedade Tensorial).

Entretanto, uma propriedade não tensorial pode ser definida em relação à métrica de fundo (background). Chamaremos esse pseudotensor de  $\tau_{\mu\nu}$ . Esse objeto pode ser nulo em um ponto, mas não em todos.

Vamos considerar  $O(h^2) \neq 0$  e fazer uma média  $\langle \tau_{\mu\nu} \rangle$  em uma região finita do espaço-tempo, mas extensa o suficiente para incluir diversos comprimentos de onda e pequena comparada a curvatura do background.

Usaremos só a aproximação em 2ª ordem em  $h$ , pois, até aqui, usando a identidade de Bianchi, dada pela equação 4.38, pode-se mostrar que  $D_\mu \tau^{\mu\nu} = 0$ , isto é, que existe uma lei de conservação para o "tensor" energia-momento do campo gravitacional (ondas gravitacionais).

A partir disso, segundo [30], a equação de Einstein pode ser reescrita como

$$G_{\mu\nu}^{(h^2)} = k (T_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu})$$

e

$$\tau_{\mu\nu} = -\frac{1}{\kappa} \left[ G_{\mu\nu}^{(h^2)} - G_{\mu\nu}^{(h)} \right].$$

Segundo a literatura, isto é feito, pois os efeitos gravitacionais não são observados localmente, é necessário uma certa região.

O cálculo da energia da onda gravitacional é feito a partir da média do pseudotensor  $\tau_{\mu\nu}$  dado por

$$\langle \tau_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{32\pi} \langle h_{\alpha\beta,\mu}^{TT} h^{TT\alpha\beta}_{,\nu} \rangle,$$

com isso, é retirado os efeitos de background.

Assim, segundo a literatura, o fluxo de energia na direção radial é dado por

$$\tau^{0r} = \frac{d^2E}{dt dA}.$$

Integrando este fluxo, obtemos que [30]

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{5} \langle \ddot{I}_{ij} \ddot{I}_{ij} \rangle,$$

onde

$$I_{ij} = Q_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} Q_{kk}$$

e

$$Q_{ij} = \int T^{00} x^i x^j d^3x,$$

são, respectivamente, o momento quadrupolar de massa e de energia. Além disso, o fluxo de energia depende da terceira derivada temporal, então a distribuição de massa devem sofrer deformações para emitir radiação.

Assim, a radiação gravitacional é de origem quadrupolar, diferente da radiação eletromagnética onde o campo elétrico e magnético são, respectivamente, dados por

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[ \rho(\vec{r}', t_r) \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', t_r)}{c} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c^2 |\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV \quad (6.27)$$

e

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{c |\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] dV. \quad (6.28)$$

Ou seja, podemos observar que nas equações 6.27 e 6.28 de Jefimenko, para os campos eletromagnéticos dependentes do tempo [14], independem da ordem multipolar, ou seja, uma carga que sofre variação no tempo vai emitir ondas eletromagnéticas.

### 6.3 INTERAÇÃO DA RADIAÇÃO GRAVITACIONAL COM A MATÉRIA E A POLARIZAÇÃO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS

Precisamos analisar agora qual é a influência da fonte para construir a onda gravitacional, para isso vimos da matriz 6.15 que

$$h_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx}^{TT} & h_{xy}^{TT} & 0 \\ 0 & h_{yx}^{TT} & h_{yy}^{TT} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou seja, esta é a forma que a onda foi construída para viajar no vácuo, a solução transiente, isto é, a solução via método de Green, que revela as características da fonte e que define a simetria de h.

Temos então que, segundo as propriedades do tensor transversal sem traço

$$h_{xy}^{TT} = h_{yx}^{TT} \quad (6.29)$$

e o traço é nulo, isto é

$$h_{xx}^{TT} + h_{yy}^{TT} = 0 \Rightarrow h_{yy}^{TT} = -h_{xx}^{TT}. \quad (6.30)$$

Na aproximação que estamos usando, podemos supor a solução de onda plana, propagando-se no eixo  $+z$ , ou seja

$$h_{xx}^{TT} = A_{xx} \cos(kz - \omega t) \quad (6.31)$$

$$h_{xy}^{TT} = A_{xy} \cos(kz - \omega t), \quad (6.32)$$

que são soluções estacionárias, ou seja, soluções para a onda gravitacional no vácuo, onde  $\square h_{ij}^{TT} = 0$ .

Na passagem de uma onda gravitacional, para analisarmos o que acontece com uma partícula livre, precisamos analisar a partir de sua geodésica. Assim, seja a geodésica de uma partícula livre dada por

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\kappa\lambda}^\mu \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0,$$

onde  $\tau$  é o tempo próprio medido pelo observador ao longo da geodésica.

Vamos supor que a partícula está em repouso na origem, isto é,  $x^\mu = (ct, 0, 0, 0)$ . Com isso, a quadrivelocidade para uma partícula em repouso é dada por

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{d(ct)}{dt} = c \equiv c\delta_0^\mu, \quad (6.33)$$

então

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\kappa\lambda}^\mu c^2 \delta_0^\kappa \delta_0^\lambda &= 0 \\ \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu c^2 &= 0 \\ \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} &= -\Gamma_{00}^\mu c^2. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Contudo, sabemos que a conexão de Christoffel pode ser escrita em termos da perturbação  $h$ , equação 6.4, de modo que a componente  $\Gamma_{00}^\mu$  será

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} \left( h_{0,0}^\mu + h_{0,0}^\mu - h_{00}{}^{,\mu} \right),$$

mas

$$h_{00} = h_{\mu 0} = 0,$$

segue-se que a equação 6.34, da quadriaceleração, será nula, ou seja

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0.$$

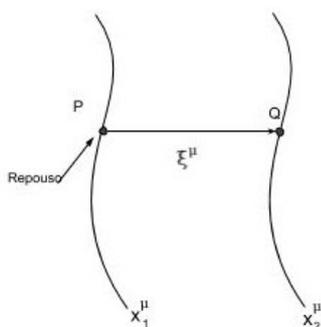
Isto significa que uma partícula livre em repouso permanecerá em repouso com a passagem da onda gravitacional. Entretanto, estar em repouso no sistema de coordenadas significa que as coordenadas não mudam. Logo, o sistema de coordenadas se ajusta à passagem da onda. Então, a maneira adequada de tratar esse problema é através do desvio geodésico, ao qual trataremos a seguir.

### 6.3.1 Desvio Geodésico

Vamos analisar, então, duas partículas testes muito próximas, quando comparada à curvatura, que são conectadas pelo vetor  $\xi^\mu$ , de modo que, conforme figura 17, temos

$$x_2^\mu(\tau) = x_1^\mu(\tau) + \xi^\mu(\tau).$$

Figura 17 – Separação infinitesimal entre duas partículas Espaço Curvo



Fonte: Próprio autor.

O desvio geodésico é definido como [31]

$$\frac{D\xi^\mu}{D\tau} = u^\beta \xi^\mu{}_{,\beta},$$

de modo que, usando a equação 4.11, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{D\xi^\mu}{D\tau} &= u^\beta \left( \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\beta\kappa}^\mu \xi^\kappa \right) \\ &= \frac{dx^\beta}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\beta\kappa}^\mu \xi^\kappa \right). \end{aligned}$$

Com isso temos que

$$\frac{D\xi^\mu}{D\tau} = \frac{\partial\xi^\mu}{\partial\tau} + \Gamma_{\beta\kappa}^\mu \xi^\kappa u^\beta. \quad (6.35)$$

Segue-se então que

$$\begin{aligned} \frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} &= \frac{D}{D\tau} \left( \frac{D\xi^\mu}{D\tau} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial\tau} \left( \frac{D\xi^\mu}{D\tau} \right) + \Gamma_{\gamma\alpha}^\mu \frac{D\xi^\gamma}{D\tau} u^\alpha. \end{aligned}$$

Assim, substituindo 6.35, obtemos a expressão compacta que

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} = R^\mu_{\alpha\beta\gamma} u^\alpha u^\beta \xi^\gamma, \quad (6.36)$$

onde  $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$  é o tensor de Riemann, definido pela equação 4.34.

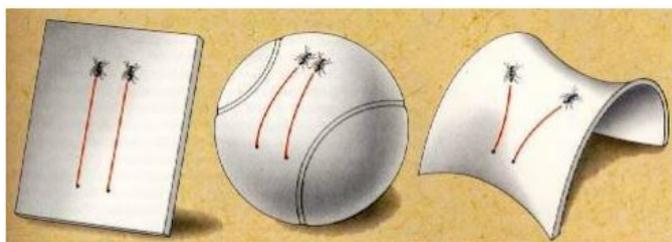
É possível ainda encontrar com frequência na literatura [31][32] a equação 6.36 escrita como

$$\nabla_{\vec{v}} \nabla_{\vec{v}} \xi^\mu = R^\mu_{\alpha\beta\gamma} u^\alpha u^\beta \xi^\gamma.$$

Isto demonstra os efeitos de uma força sobre as geodésicas, devido à passagem de uma onda gravitacional, tal força é denominada força de maré [29].

Se o espaço-tempo é plano, então  $R_{\mu\nu\kappa\lambda} = 0$ , mas se o espaço-tempo se curva com a passagem da onda, então a separação entre as geodésicas muda, conforme a figura 18.

Figura 18 – Desvio geodésico na superfície de diferentes curvaturas



Fonte: [31]

Então, sejam as partículas testes, conforme figura 17, onde

$$x^\beta = (ct, 0, 0, 0) \quad \text{e} \quad \xi^\beta = (0, L, 0, 0), \quad (6.37)$$

considerando como parâmetro para as geodésicas somente o tempo, temos que

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial t^2} = R^\alpha_{\mu\nu\beta} u^\mu u^\nu \xi^\beta.$$

Mas substituindo a quadrivelocidade dada pela equação 6.33, obtemos que

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial t^2} = R^\alpha_{\mu\nu\beta} (c\delta_0^\mu) (c\delta_0^\nu) \xi^\beta.$$

Retomando as partículas testes dadas por 6.37 e usando a propriedade de filtragem da delta, obtemos

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial t^2} = c^2 L R^\alpha_{00x}.$$

Analisando para

$$\begin{cases} \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi^x}{\partial t^2} = c^2 L R^x_{00x} \\ \alpha = 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi^y}{\partial t^2} = c^2 L R^y_{00x}. \end{cases}$$

Mas do tensor de Riemann, equação 6.6 e da matriz 6.15 do tensor transversal sem traço, segue-se que

$$R^x_{00x} = \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 h^x_x = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h^x_x}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h^x_{xx}}{\partial t^2}$$

e

$$R^y_{00x} = \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 h^y_x = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h^y_x}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h^y_{xy}}{\partial t^2}.$$

Substituindo, respectivamente, para  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 2$ , obtemos que

$$\begin{cases} \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi^x}{\partial t^2} = \frac{1}{2} c^2 L \frac{\partial^2 h^x_{xx}}{\partial t^2} \\ \alpha = 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi^y}{\partial t^2} = \frac{1}{2} c^2 L \frac{\partial^2 h^y_{xy}}{\partial t^2} \end{cases}$$

Para um anel de partículas testes, temos que

$$\xi^\beta = (0, x, y, 0) \rightarrow \begin{cases} x = L \cos(\theta) \\ y = L \sin(\theta) \\ z = 0, \end{cases}$$

então, para a onda viajando na direção  $+z$  teremos que

$$\frac{\partial^2 \xi^x}{\partial t^2} = c^2 L \cos(\theta) R^x_{00x} + c^2 L \sin(\theta) R^x_{00y}$$

e

$$\frac{\partial^2 \xi^y}{\partial t^2} = c^2 L \cos(\theta) R^y_{00x} + c^2 L \sin(\theta) R^y_{00y}.$$

Podemos novamente encontrar o tensor de Riemann por intermédio do tensor do traço transverso e de suas propriedades, equações 6.29 e 6.30, de modo que

$$\frac{\partial^2 \xi^x}{\partial t^2} = \frac{1}{2} c^2 L \cos(\theta) \frac{\partial^2 h_{xx}^{TT}}{\partial t^2} + \frac{1}{2} c^2 L \sin(\theta) \frac{\partial^2 h_{xy}^{TT}}{\partial t^2} \quad (6.38)$$

e

$$\frac{\partial^2 \xi^y}{\partial t^2} = \frac{1}{2} c^2 L \cos(\theta) \frac{\partial^2 h_{xy}^{TT}}{\partial t^2} - \frac{1}{2} c^2 L \sin(\theta) \frac{\partial^2 h_{xx}^{TT}}{\partial t^2}. \quad (6.39)$$

Porém, conhecendo as soluções de onda plana, equações 6.31 e 6.32, com  $z = 0$ , é possível identificar a solução das equações 6.38 e 6.39 como

$$\xi^x = L \cos(\theta) + \frac{1}{2} L A_{xx} \cos(\theta) \cos(\omega t) + \frac{1}{2} L A_{xy} \sin(\theta) \cos(\omega t)$$

e

$$\xi^y = L \sin(\theta) + \frac{1}{2} L A_{xy} \cos(\theta) \cos(\omega t) - \frac{1}{2} L A_{xx} \sin(\theta) \cos(\omega t).$$

Então, suponha uma onda gravitacional viajando na direção  $+z$  e que  $\theta$  esteja varrendo o intervalo  $[0, 2\pi]$ , em um anel de partículas testes, isto é, no plano  $xy$ , então a figura 19 mostra os efeitos da passagem da onda gravitacional. Onde é possível analisar dois casos da passagem da onda, ou seja, dois estados de polarização independentes da onda gravitacional.

O primeiro estado é quando a perturbação da métrica tem  $A_{xx} = A_{xx}^{TT} \neq 0$  e  $A_{xy} = A_{xy}^{TT} = 0$ . Neste caso a solução de  $\xi^x$  e  $\xi^y$  se reduz a

$$\xi^x = L \cos(\theta) \left( 1 + \frac{1}{2} A_{xx} \cos(\omega t) \right) = x \left( 1 + \frac{1}{2} A_{xx} \cos(\omega t) \right)$$

e

$$\xi^y = L \sin(\theta) \left( 1 - \frac{1}{2} A_{xx} \cos(\omega t) \right) = y \left( 1 - \frac{1}{2} A_{xx} \cos(\omega t) \right).$$

Os efeitos desta solução está representado na parte superior da figura 19, este modo de polarização é chamado de polarização “mais” [33, 34] (em inglês, plus polarization) ou polarização  $+$ .

O segundo estado de polarização é quando a perturbação da métrica tem  $A_{xy} = A_{xy}^{TT} \neq 0$  e  $A_{xx} = A_{xx}^{TT} = 0$ . Neste caso a solução de  $\xi^x$  e  $\xi^y$  se reduz a

$$\xi^x = L \cos(\theta) + \frac{1}{2} L A_{xy} \sin(\theta) \cos(\omega t)$$

e

$$\xi^y = L \sin(\theta) + \frac{1}{2} L A_{xy} \cos(\theta) \cos(\omega t).$$

Podemos redefinir novos eixos  $x'$  e  $y'$  que corresponderão a uma rotação de  $-\frac{\pi}{4}$  nos eixos  $x$  e  $y$ , de modo que as soluções serão então

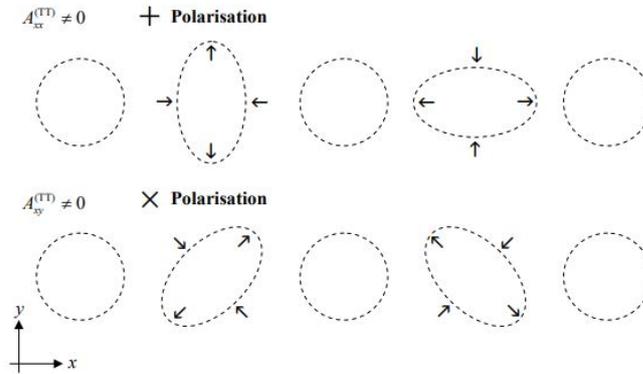
$$\xi^{x'} = L \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} L A_{xy} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \cos(\omega t)$$

e

$$\xi^{y'} = L \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} L A_{xy} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \cos(\omega t).$$

Os efeitos desta solução está representado na parte inferior da figura 19, este modo de polarização é chamado de polarização “xis” [33, 34] (em inglês, cross polarization) ou polarização  $\times$ .

Figura 19 – Efeito da onda gravitacional em um anel de partículas de teste



Fonte: Martin H.

Lembrando que existe superposição linear na aproximação que estamos usando, então podemos afirmar que a forma da polarização resultante é uma combinação linear das duas polarizações.

Mas, é claro que, em geral, as ondas não estão alinhadas com o detector. Então o detector “enxerga” as amplitudes da onda, segundo [31], como

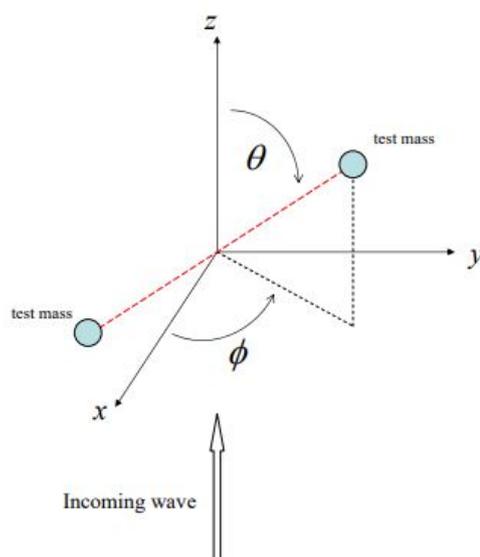
$$h_+ = h \sin^2(\theta) \cos(2\phi) \quad \text{e} \quad \bar{h}_\times = h \sin^2(\theta) \sin(2\phi) \quad (6.40)$$

Conforme figura 20, para uma onda gravitacional viajando na direção  $+z$ , o detector estará alinhado conforme os ângulos polares esféricos  $\theta$  e  $\phi$ .

Além disso, a partir destas análises é possível também calcular as dimensões típicas da amplitude da onda gravitacional, que segundo [31], é da ordem de  $10^{-21} m$ .

Note que a onda eletromagnética também tem dois estados de polarização, chamados de

Figura 20 – Orientações relativas do detector e a direção de propagação da onda (Incoming wave)



Fonte: Martin H.

polarização Linear e polarização elíptica [15], contudo na onda gravitacional os estados de polarização  $+$  e  $\times$  são invariantes perante uma rotação de  $180^\circ$ , já na radiação eletromagnética há uma invariância sob uma rotação de  $360^\circ$  [33] e como vimos o efeito da polarização tensorial das ondas gravitacionais são mais complexas do que a polarização linear das ondas eletromagnéticas [6].

As ondas gravitacionais foram finalmente detectadas em 14 de setembro de 2015, nos EUA, em dois interferômetros distintos (um localizado em Hanford e o segundo em Livingston), denominados LIGO (do inglês Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory), evento chamado de GW150914 [1, 2], comprovando experimentalmente a teoria feita por Albert Einstein em 1915.

## 7 CONCLUSÃO

Podemos concluir com o presente trabalho que é possível trabalhar com diversas ferramentas matemáticas por intermédio do cálculo tensorial para o estudo de espaço curvo gerais, que são válidos em qualquer referencial e para a construção da teoria de relatividade geral (TRG) proposta por Albert Einstein. Contudo, é por intermédio da topologia que a base matemática se torna mais sólida e concisa. Além disso, vimos a importância de definir o tensor métrico  $g_{ij}$ , que está ligado a geometria do espaço tempo. Percebemos também que dependendo da lei de transformação podemos definir um vetor e que quando trabalhamos com espaços curvos perdemos a transformação tensorial, com isso devemos construir uma nova derivada que preserve o caráter vetorial na transformação de coordenadas, isto é, a derivada covariante, e para que não ocorra alteração com uma mudança de coordenadas. Por outro lado, o transporte paralelo de um vetor depende também da curvatura e, quando este é realizado, não podemos alterar as características do vetor ao longo de sua trajetória pelo espaço. Com isso, foi construída toda a matemática necessária para alcançar nosso objetivo de ter a base para a construção da relatividade geral.

A partir dos postulados da TRG chegamos na equação de campo da relatividade geral de Einstein, realizamos a linearização da teoria e vimos que foi necessário eliminar na teoria uma parte não física, espúria, e que para isto é preciso levar em conta que temos uma liberdade de calibre e utilizar um "gauge", de modo que não se altere a lei da física e assim resolver a equação de campo fraco. Este "gauge" é chamado de "gauge de Lorentz" (na literatura pode ter outros nomes também), além de utilizarmos o tensor de traço transverso. Com isso, diminuimos os graus de liberdade do sistema, realizando ainda uma analogia com as ondas eletromagnéticas.

A TRG proposta por Einstein relaciona a curvatura com a distribuição de matéria em uma região do espaço-tempo, ampliando a teoria de Newton e quebrando alguns paradigmas, como o de que a massa de um corpo que exerce uma força sobre um outro corpo, mas sim que um corpo massivo deforma o espaço-tempo e que é esta deformação que causa a força de atração gravitacional entre corpos. Uma das consequências da TRG é a existência das ondas gravitacionais, ao qual essa dissertação discute, além de mostrar algumas de suas características. Por fim, vimos que a radiação gravitacional é invariante perante uma rotação de  $180^\circ$ , já na radia-

---

ção eletromagnética há uma invariância sob uma rotação de  $360^\circ$  e que o efeito da polarização tensorial das ondas gravitacionais são mais complexas que as ondas eletromagnéticas.

Sendo assim, este trabalho é uma revisão útil e bastante benéfica para o estudo da gravitação, pois estabelece uma base conceitual concisa e técnica sobre esta área, principalmente com uma grande motivação que foi a primeira detecção em 14 de setembro de 2015, nos EUA, no LIGO, entre outras detecções que ocorreram posteriormente.

## REFERÊNCIAS

- 1 B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, F. Abernathy, M. R. and Acernese, and et. al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102, Feb 2016.
- 2 Jose Maria F Bassalo and M Cattani. Deteccao de ondas gravitacionais. *Caderno Brasileiro de Ensino de Fisica*, 33(3):879–895, dez 2016.
- 3 C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. 1973.
- 4 Lewis Ryder. *Introduction to General Relativity*. 1 edition, 2009.
- 5 Fernando Leal. *Notas de aula de Relatividade Geral*.
- 6 Mauro Cattani. Gravitational waves i: Basic emission equations. *ArXiv e-prints*, January 2010.
- 7 Joao Barcelos Neto. *Matematica para Fisicos com aplicações: Vetores, Tensores e Spinors*, volume 1. LF, 1 edition, 2009.
- 8 Mikio Nakahara. *Geometry, Topology, and Physics*. Graduate student series in physics. A. Hilger, 1990.
- 9 João Carlos Alves Barata. *Notas de aula sobre Espaços Métricos*.
- 10 João Carlos Alves Barata. *Notas de aula sobre Formas Diferenciais*.
- 11 Bo-Yu Hou and Bo-Yuan Hou. *Differential geometry for physicists*, volume 6. World Scientific Publishing Company, 1997.
- 12 T. J. Willmore. The definition of lie derivative. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 12(1):27–29, 1960.
- 13 Fridolin Weber. *Introdução a relatividade geral e a física de estrelas compactas*. 2015.
- 14 Kleber Daum Machado. *Teoria do Eletromagnetismo*, volume 3. 2006.
- 15 J. R. Reitz, F. J. MILFORD, and R. W. CHRISTY. *Fundamentos da teoria eletromagnética*. 3 edition, 1982.
- 16 João Barcelos Neto. *Teoria eletromagnética*. 1 edition, 2015.
- 17 Albert Einstein and Ernst Gabor Straus. A generalization of the relativistic theory of gravitation, ii. *Annals of Mathematics*, pages 731–741, 1946.
- 18 Andrzej Trautman. The einstein-cartan theory of gravitation. *Ondes et Radiations Gravitationnelles (Coll. Intern. du CNRS, Paris 18-22 juin 1973)*, pages 161–70, 1974.

- 19 Cleber Abrahão de Souza et al. Teoria de einstein-cartan com campos de dirac, ação de holst e fluido de spin. 2016.
- 20 Friedrich W. Hehl, Paul von der Heyde, G. David Kerlick, and James M. Nester. General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. *Rev. Mod. Phys.*, 48:393–416, Jul 1976.
- 21 David Halliday and Jearl Resnick. *Fundamentos da Física: gravitação, ondas e termodinâmica*, volume 2. 8 edition, 2009.
- 22 Alfredo A. Vargas-Paredes. *Campos de Yang Mills e a Teoria de Einstein-Cartan: da Gravitação Quântica à Supercondutividade*. PhD thesis, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas-CBPF, 2012.
- 23 Alberto Vazquez Saa. *Gravitação de Einstein-Cartan Revisada*. PhD thesis, Universidade de São Paulo - Instituto de Física, 1993.
- 24 Roberta Meschese Xavier. Conexões afins e a teoria de cartan-einstein. Master's thesis, Universidade Federal do Espírito Santo PPGMAT/UFES, 2016.
- 25 Sean M Carroll. Lecture notes on general relativity. *arXiv preprint gr-qc/9712019*, 1997.
- 26 Eanna E. Flanagan and Scott A. Hughes. The basics of gravitational wave theory. *New Journal of Physics*, 7(1):204, 2005.
- 27 Rodrigo Panosso Macedo. *A emissão de ondas gravitacionais por fontes compactas: o regime não linear*. PhD thesis, Universidade de São Paulo (USP), 2011.
- 28 C. Fronsdal. On the theory of higher spin fields. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 9(2):416–443, Sep 1958.
- 29 Vitorio de Lorenci. *Programa Mínimo de Cosmologia*, chapter 1, pages 5–75. 2010.
- 30 Claus Lammerzahl and Volker Perlick. *Gravitational waves*. 2014.
- 31 Martin Hendry. An introduction to general relativity, gravitational waves and detection principles. *Second VESF School on Gravitational Waves*, 2007.
- 32 Bernard Schutz. *A First Course in General Relativity*. 2 edition, 2009.
- 33 C A Costa. Modelagem matemática do comportamento mecânico do detector de ondas gravitacionais mario schenberg. Master's thesis, INPE, 2002.
- 34 J F J Van Den Brand and C Van Den Broeck. *General relativity and gravitational waves*.