

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

André Oakes de Oliveira Gonçalves

**A EQUAÇÃO DE SCHROEDINGER EM UM CENÁRIO DE
COMPRIMENTO MÍNIMO**

VITÓRIA
2019

ANDRÉ OAKES DE OLIVEIRA GONÇALVES

**A EQUAÇÃO DE SCHROEDINGER EM UM CENÁRIO DE COMPRIMENTO
MÍNIMO**

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. José Alexandre Nogueira (Orientador).
Universidade Federal do Espírito Santo

PRIMEIRO
Universidade Federal do Espírito Santo

SEGUNDO.
Universidade Federal do Espírito Santo

TERCEIRO
Universidade Federal do Espírito Santo

VITÓRIA
2019

**A EQUAÇÃO DE SCHROEDINGER EM UM CENÁRIO DE
COMPRIMENTO MÍNIMO**

A. O. O. GONÇALVES

**A EQUAÇÃO DE SCHROEDINGER EM UM CENÁRIO DE
COMPRIMENTO MÍNIMO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Física, na área de concentração de Física Teórica

ORIENTADOR: PROF. DR. JOSÉ ALEXANDRE NOGUEIRA

Vitória

30 de agosto de 2019

© 2019, A. O. O. GONÇALVES.
Todos os direitos reservados.

GONÇALVES, A. O. O.

D1234p A EQUAÇÃO DE SCHROEDINGER EM UM
CENÁRIO DE COMPRIMENTO MÍNIMO / A. O. O.
GONÇALVES. — Vitória, 2019
xii, 60 f. : il. ; 29cm

Tese (doutorado) — Universidade Federal do Espírito
Santo

Orientador: Prof. Dr. José Alexandre Nogueira

1. Equação de Schroedinger. 2. Comprimento Mínimo.
3. Mecânica Quântica. 4. Teoria Quântica de Campos.
I. Título.

CDU 000.0*00.00

[Folha de Aprovação]

Quando a secretaria do Curso fornecer esta folha, ela deve ser digitalizada e armazenada no disco em formato gráfico.

Se você estiver usando o `pdflatex`, armazene o arquivo preferencialmente em formato PNG (o formato JPEG é pior neste caso).

Se você estiver usando o `latex` (não o `pdflatex`), terá que converter o arquivo gráfico para o formato EPS.

Em seguida, acrescente a opção `approval={nome do arquivo}` ao comando `\ppgcufig`.

Se a imagem da folha de aprovação precisar ser ajustada, use:
`approval=[ajuste] [escala] {nome do arquivo}`
onde *ajuste* é uma distância para deslocar a imagem para baixo e *escala* é um fator de escala para a imagem. Por exemplo:
`approval=[-2cm] [0.9] {nome do arquivo}`
desloca a imagem 2cm para cima e a escala em 90%.

Essa tese é dedicada aos meus avós Nilza Oakes e Elydio Pazini (in memorian). Não posso deixar de dedicar também a minha mãe Mírian, tão importante na minha formação. Dedico também a minha doce esposa Jaqueline.

Agradecimentos

Quando terminei a graduação, corri para Cachoeiro para mostrar as fotos da colação de grau a minha família. Minha avó Nilza disse que sentia muito orgulho daquilo tudo e, depois das brincadeiras e risadas sobre a beca que eu estava usando, meu avô Elydio me puxou pelo braço para falar comigo em particular. Ele levantou o dedo e me disse: "sempre soube que você seria doutor um dia!" Eu, muito envergonhado, tentei explicar para ele que ainda havia uma longa caminhada até me tornar doutor. Com o dedo ainda em riste, ele falou: "Não me importa o título no papel, pra mim, você já é doutor!" Apertou minha mão e foi tomar um café. Ele não está aqui, mas depois desse ocorrido eu não poderia deixar de agradecê-lo por tanta confiança e carinho depositados em minha pessoa. Obrigado vô!

O segundo agradecimento, sem dúvida, é à CAPES pelo auxílio financeiro. Sem ele certamente esse trabalho não seria possível!

A seguir, sem ordem de preferência ou importância, devo agradecerimentos especiais:

- à minha mãe Mirian, meus irmãos Caio e Raíssa e demais familiares que sempre depositaram confiança em mim. Cheguei longe por que tinha vocês para me apoiarem!
- aos diversos amigos que fiz nesta trajetória, incluindo diversos colegas de trabalho. Se fosse colocar o nome de todo mundo aqui não teria papel para impressão da tese!
- a amigos especiais que sempre me acompanharam de perto e sempre me ajudaram muito. Estes destaques vão para o Paulo de Oliveira, Rosa Ambrozio, Thiago, Alexandre Afonso, Ramón Giostri e Thiago Gottardi. Valeu galera! Vcs são demais!
- um agradecimento especial à Samia por seu apoio nestes 18 anos de amizade! Sempre com palavras especiais e ouvidos atentos sobre a vida, o universo e tudo mais!
- a todos os integrantes do grupo Vermes Malditos, companheiros de longa caminhada na trajetória acadêmica.
- ao grupo de Comprimento Mínimo, cujos integrantes foram fundamentais para este trabalho! Valeu, Ronald, Michael e Raphael!
- um agradecimento muito especial ao professor José Alexandre Nogueira. Suas contribuições para minha formação profissional e pessoal são de relevância extrema. Muito

obrigado por ter aceitado fazer parte desta etapa de minha vida e por ser um profissional que inspira tanto aos estudantes. Obrigado de coração!

- para finalizar esta lista, faz-se necessário agradecer a uma pessoa que foi responsável por esse trabalho ter acontecido: minha querida esposa Jaqueline! Neste momento ela sabe bastante sobre comprimento mínimo e equação de Schroedinger! Obrigado Jaque! Você é a melhor parte do meu dia!

“And I think to myself: what a wonderful world”
(Robert Thiele / George Douglas / George David Weiss - Versão Louis Armstrong)

Resumo

Com o intuito de quantizar a gravitação, várias propostas preveem a existência de um mínimo comprimento na natureza. Tomando como existente esse mínimo comprimento é possível reescrever a mecânica quântica onde o princípio de Heisenberg é modificado, possibilitando uma incerteza na posição da partícula menor que o comprimento mínimo. Neste trabalho pretendemos investigar a equação de Schroedinger num cenário de comprimento mínimo, bem como uma nova teoria quântica de campos corrigida pela existência desse mínimo comprimento na natureza. Para isso precisaremos reinterpretar as equações de Euler-Lagrange e as teorias clássicas de campos. Por fim, vamos obter uma segunda quantização para a equação de Schroedinger.

Palavras-chave: Comprimento Mínimo, Princípio da Incerteza Generalizado (GUP), Equação de Schroedinger, segunda quantização.

Abstract

In order to quantify a gravitation, several images predicted the existence of a third length in nature. The retrieval mechanism is quantum mechanics where Heisenberg's principle is modified, making it impossible for the uncertainty particle position to be less than the minimum length. This work aims to investigate a Schroedinger equation in a minimum length scenario, while Schroedinger equalization theory in a minimum length scenario in nature. To do this, you need to reinterpret the Euler-Lagrange equations and classical field theories. Finally, let's get a quantization for Shcroedinger's equation.

Keywords: Minimum Length, Generalized Uncertainty Principle (GUP), Schroedinger Equation, Second Quantization.

Sumário

Agradecimentos	vi
Resumo	ix
Abstract	x
1 Introdução	1
2 A Equação de Schroedinger	3
2.1 Formulação da Equação de Schroedinger	3
2.1.1 Introdução	3
2.1.2 A Equação de Schroedinger	4
2.2 Equação da Continuidade	5
2.3 Soluções da Equação de Schroedinger	6
3 Teoria Clássica de Campos	8
3.1 Introdução	8
3.2 O Formalismo de Hamilton	10
3.3 Leis de Conservação na Teoria Clássica de Campos	11
4 Segunda Quantização da Equação de Schroedinger	15
4.1 Introdução	15
4.2 Quantização do Campo de Schroedinger	15
4.3 Regras de quantização para Bósons	16
5 Teorias de Comprimento Mínimo	22
5.1 Introdução	22
5.2 O Princípio da Incerteza Generalizado	23
5.3 Representações no Espaço de Hilbert	24
5.4 A Posição de uma Partícula num Cenário de Comprimento Mínimo	27
5.4.1 Quase Posição	31
6 A Equação de Schroedinger num Cenário de Comprimento Mínimo	33

6.1	Formulação da Equação de Schroedinger	33
6.2	Soluções da Equação de Schroedinger	35
6.2.1	Solução para a Equação Temporal	36
6.2.2	Solução para a Equação em Quase-posição	36
6.3	Equação da Continuidade	38
7	Teoria Clássica de Campos em Segunda Ordem	40
7.1	Introdução	40
7.2	Lagrangiana de Segunda Ordem	40
7.3	O Teorema de Noether com Derivadas de Segunda Ordem	42
7.4	Hamiltoniana	43
8	A Equação de Schroedinger num Cenário de Comprimento Mínimo em uma Teoria de Campos	45
8.1	Introdução	45
8.2	Lagrangiana da Equação de Schroedinger	45
8.3	Equação da Continuidade pelo Teorema de Noether	47
8.4	Hamiltoniana da Equação de Schroedinger num Cenário de Comprimento Mínimo	48
8.4.1	Hamiltoniana a partir do Teorema de Noether	51
9	Segunda Quantização da Equação de Schroedinger num Cenário de Comprimento Mínimo	52
9.1	Introdução	52
9.2	Quantização das Funções de Ondas Planas	52
9.2.1	Relação de comutação $[\hat{a}_n(t), \hat{a}_{n'}^\dagger(t)] = \delta_{n,n'}$	52
9.2.2	Relação de comutação $[\hat{a}_n(t), \hat{a}_{n'}^\dagger(t)] = (1 + \beta p^2) \delta_{n,n'}$	55
10	Conclusão	57
	Referências Bibliográficas	59

Capítulo 1

Introdução

No final do século retrasado iniciou-se uma efervescência em torno da descrição da matéria em sua forma mais elementar com a descoberta dos elétrons e , na sequência, as descobertas dos nêutrons e dos prótons. A partir daí, modelos da estrutura básica da matéria foram propostos, debatidos e evoluídos até a concepção atual.

No entanto, a concepção atual já prevê o conhecimento e a descrição de partículas subatômicas em regimes não relativísticos e em regimes relativísticos. Desde o desprezioso trabalho de Planck sobre radiação de corpo negro, que abriu as portas para novas maneiras de se interpretar a natureza até as comprovações experimentais da existência dos bósons de Higgs, muita física precisou ser repensada e até formulada do zero.

Nesse processo, passamos por Erwin Schroedinger, um notável austríaco que em 1926 publicou seu trabalho mais importante no qual descreve o movimento de partículas através de uma função de onda. Sua famosa equação diferencial engloba as ideias de de Broglie com relação a dualidade onda-partícula, das funções de onda como representantes da dinâmica das partículas.

A equação de Schroedinger é capaz de descrever com bastante precisão sistemas não relativísticos, e teve grande êxito na descrição do átomo de hidrogênio por estar de acordo com resultados experimentais e com a teoria vigente de Bohr. No entanto os resultados de Schroedinger foram além, dando conta de descrever átomos de vários elétrons através da teoria de Hartree-Fock.

Na natureza há a concordância da existência de quatro interações fundamentais. Dessas, três já estão inclusas num único modelo (interação fraca, eletromagnética e nuclear forte) e a outra é a gravitação. No processo de quantização da gravitação, ainda não se conseguiu renormalizá-la de forma adequada, ou seja, a teoria possui divergências que impossibilita a existência de resultados fisicamente aceitáveis.

Com o intuito de resolver esses problemas, várias teorias de gravitação quântica têm sido proposta. É intrigante que praticamente todas elas prevêm a existência de um comprimento mínimo. Em uma abordagem quântica em comprimento mínimo pode ser discutido por uma incerteza mínima na posição da partícula. A introdução de uma incerteza mínima

na posição acarreta uma modificação nas relações de comutação canônica entre os operadores de posição e momento.

A existência de um comprimento mínimo pode ser justificada, também, pela ideia de "perda de resolução" quando alcançamos distâncias cada vez menores por necessitarmos de energias enormes. Assim, não vemos a posição da partícula em si, mas uma pequena região onde ela pode estar, trazendo para zero a possibilidade de a encontrarmos num único ponto.

Historicamente a ideia de comprimento mínimo surgiu com o próprio Heisenberg nos anos de 1930 ao tratar as divergências na teoria quântica de campos na forma de um "cut-off" natural para as integrais divergentes [1]. No entanto, Heisenberg não conseguiu um resultado que fosse suficiente para embasar suas ideias. Já na década de 1940, Snyder propôs uma álgebra na qual as componentes do momento e da posição não comutam, o que implica num espaço-tempo não contínuo, fazendo-se necessário a inserção de um comprimento mínimo [2].

A ideia de comprimento mínimo foi deixada de lado, até que nos anos 1990, com o avanço das teorias de cordas e supersimetrias, novamente torna-se necessário a inserção de um comprimento mínimo na natureza. Em 1994, Majid e Ruegg trouxeram a ideia conhecida como álgebra de k -Poincaré [3]. No mesmo período Kempf, Magano e Mann iniciaram um trabalho de base matemática de subespaços de Hilbert com o comprimento mínimo incluso.

Nosso foco nesse trabalho não é discutir a existência do comprimento mínimo, mas sim discutir algumas alterações que essa teoria promove na teoria quântica de campos.

Para iniciarmos essas discussões, o presente trabalho se divide em três blocos: uma pequena revisão da equação de Schroedinger e da teoria clássica de campos e segunda quantização como se encontra na literatura; uma apresentação da teoria de comprimento mínimo em espaços de Hilbert e aplicação na equação de Shcroedinger; por fim, uma revisão da teoria clássica de campos utilizando derivadas em segunda ordem e a segunda quantização da equação de Shcroedinger num cenário de comprimento mínimo.

Capítulo 2

A Equação de Schroedinger

2.1 Formulação da Equação de Schroedinger

2.1.1 Introdução

O início do século passado foi marcado pela revisão da física de uma maneira geral, com novas interpretações para fenômenos já conhecidos e uma nova maneira de entender o mundo, sobretudo, o microscópico. Até então, as Leis de Newton, o eletromagnetismo de Maxwell e a estatística de Boltzmann já davam conta de uma grande área da física que era observada, com exceção de alguns fenômenos como a questão da catástrofe ultravioleta para altas frequências de radiação e o efeito fotoelétrico [4].

Estudando o problema da catástrofe ultravioleta, Planck, em 1900, propôs a quantização dos níveis de energia de radiação de corpo negro. Essa ideia totalmente inovadora e criativa não foi prontamente aceita pela comunidade científica, mas foi revisitada por Einstein em 1905 para a explicação do efeito fotoelétrico. Einstein propôs que um elétron é expelido da placa ao sofrer colisão de um fóton (uma radiação eletromagnética), dando início a ideia de dualidade onda-partícula. A energia total desse elétron ao ser expelido pela placa fotoelétrica é proporcional à frequência da onda incidente na placa.

Em 1913, Bohr também se apropriou da ideia de quantização ao tentar descrever a física do átomo de hidrogênio, mas ainda utilizando muito da mecânica clássica. No entanto, Bohr ainda tenta encontrar uma função para a posição do elétron em torno do próton que fosse determinística.

Depois de grandes avanços nas observações experimentais, em 1925 a tese de doutorado de Louis de Broglie trazia uma criativa proposta acerca do comportamento de partículas subatômicas. Inspirado pela dualidade onda partícula dos fótons observada no efeito fotoelétrico, de Broglie propôs que não apenas os fótons tivessem essa característica mas sim todas as partículas. Assim, de Broglie propõem que dependendo do experimento utilizado podemos ter partículas com comportamento de ondas, de modo que:

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}, \tag{2.1}$$

onde \vec{k} é o vetor de onda que indica o sentido de propagação da onda e é o inverso do comprimento de onda vezes 2π e \hbar é a constante de Planck dividido por 2π .

Chegamos, então, ao ano de 1926 com o seguinte pano de fundo: temos que a energia de um elétron pode estar associada à sua frequência de oscilação o que nos leva a uma partícula com características de onda. Para unir todas essas ideias Schroedinger percebeu que precisaria de uma equação que desse conta de todas essas características.

Neste capítulo, vamos revisitar a ideia de quantização de grandezas físicas, como posição e momento linear, a formulação da equação de Schroedinger e alguns artifícios matemáticos que nos dará importantes resultados.

2.1.2 A Equação de Schroedinger

Um grande avanço na mecânica quântica do século passado foi a ideia da quantização de grandezas físicas transformando-a em operadores no espaço de Hilbert, juntamente com a imposição de uma relação de comutação entre os operadores de posição e momento. Estes operadores agem num determinado estado, e os autovalores associados a este estado são interpretados como os possíveis valores a serem medidos [5].

Schroedinger já tinha essas informações a mão quando começou a pensar numa forma de descrever o movimento de partículas num regime não relativístico. Assim de uma forma mais simples podemos ter a seguinte quantização na representação de posição:

$$H \rightarrow \hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\vec{p} \rightarrow \hat{p} = -i\hbar \nabla. \quad (2.3)$$

Já sabemos da mecânica clássica que a hamiltoniana de um sistema é a energia total, que na presença de um potencial pode ser escrita como:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}). \quad (2.4)$$

Quantizando essa equação, ou seja, transformando variáveis em operadores, temos:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r}). \quad (2.5)$$

Aplicando num estado $|\Psi\rangle$:

$$\hat{H}|\Psi\rangle = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r}) \right] |\Psi(t)\rangle. \quad (2.6)$$

Na representação de posição, temos:

$$\begin{aligned}\langle \vec{r} | \hat{H} | \Psi \rangle &= \langle \vec{r} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \Psi \rangle + \langle \vec{r} | V(\vec{r}) | \Psi \rangle, \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2m} [-i\hbar]^2 \nabla \cdot \nabla \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}, t).\end{aligned}$$

Rearranjando chegamos a equação de Schroedinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}, t). \quad (2.7)$$

Note que a equação de Schroedinger possui o mesmo formato que uma equação de calor, com derivada segunda espacial e derivada primeira temporal.

2.2 Equação da Continuidade

Vamos considerar a equação de Schroedinger de uma função de onda multiplicada por Ψ^* e o complexo conjugado da equação multiplicada por Ψ .

$$\begin{aligned}i\hbar \Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi &= -\Psi^* \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V(\vec{r}) \Psi \Psi^*, \\ -i\hbar \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* &= -\Psi \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi^* + V(\vec{r}) \Psi \Psi^*.\end{aligned} \quad (2.8)$$

Subtraindo as duas equações, teremos:

$$\begin{aligned}i\hbar \left(\Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi + \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* \right) &= -\frac{\hbar^2}{2m} (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*), \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \cdot (\Psi^* \nabla \Psi - \nabla (\Psi^* \Psi) - \Psi \nabla \Psi^* + \nabla (\Psi^* \Psi)), \\ \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) + \nabla \cdot \left(-\frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \right) &= 0.\end{aligned} \quad (2.9)$$

É fácil ver que a equação acima é uma equação de continuidade, $\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0$, cuja densidade de carga é $\rho = \Psi^* \Psi$ e $\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*)$ é a densidade de corrente. Da interpretação probabilística da mecânica quântica vemos que $\Psi^* \Psi$ é a densidade de probabilidade, enquanto \vec{j} é a densidade de corrente de probabilidade.

A equação 2.9 garante que há, então, uma conservação da probabilidade local. Tal fato nos fornece condições necessárias para encontrarmos a função de onda que descreve a partícula dentro de um alcance definido pelo sistema.

2.3 Soluções da Equação de Schroedinger

A equação de Schroedinger é uma equação com derivadas parciais em relação ao tempo e posição. Para encontrarmos soluções com significado físico vamos utilizar o método de separação de variáveis para obtermos uma equação diferencial com relação a posição e uma com relação ao tempo. Unidimensionalmente, a equação de Schroedinger é dada por:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + V(x) \Psi(x, t). \quad (2.10)$$

Vamos supor uma função $\Psi(x, t) = \psi(x)\varphi(t)$:

$$i\hbar \psi(x) \frac{d}{dt} \varphi(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \varphi(t) \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x) \psi(x) \varphi(t).$$

Dividindo os dois lados da igualdade por $\psi(x)\varphi(t)$, teremos:

$$i\hbar \frac{1}{\varphi(t)} \frac{d}{dt} \varphi(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x).$$

Essa igualdade só se verifica se os dois lados forem iguais a uma constante λ . Assim sendo, vamos resolver primeiramente a equação temporal:

$$\frac{d}{dt} \varphi(t) = -\frac{i\lambda}{\hbar} \varphi(t). \quad (2.11)$$

A solução dessa equação é, claramente, uma exponencial:

$$\varphi(t) = e^{-i\lambda t/\hbar}.$$

Como o argumento da exponencial deve ser adimensional, então é possível verificar que a dimensão da variável λ é exatamente a dimensão de energia. A equação de autovalor da Hamiltoniana possui autovalor a energia da partícula. Assim:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_E(t)\rangle = E |\varphi_E(t)\rangle,$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{-i\lambda t/\hbar} = E e^{-i\lambda t/\hbar},$$

$$\lambda = E.$$

Assim:

$$\varphi(t) = e^{-iEt/\hbar}. \quad (2.12)$$

A equação de Schroedinger independente do tempo fica:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V\psi(x) = E\psi(x). \quad (2.13)$$

Tal equação é de extrema importância por nos permitir estudar os estados estacionários. Como o tempo continua sendo um parâmetro, esse comportamento estacionário é o que vai definir o comportamento da função de onda de acordo com o potencial ao qual a partícula está submetida.

É importante conhecermos as soluções da equação de Schroedinger independente do tempo, para o caso de partícula em potencial nulo. Esse é o caso que pretendemos abordar no cenário de comprimento mínimo, portanto vamos estudá-lo no caso ordinário.

Uma partícula livre é uma partícula que não está sujeita a nenhuma força, ou seja, uma partícula que se move em região livre de potencial. Assim:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = E\psi(x).$$

As soluções para essa equação são combinações lineares de exponenciais complexas dadas por:

$$\psi(x) = Ae^{-ikx} + Be^{ikx},$$

com $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

Utilizando as soluções em cada variável, podemos compor a solução geral com:

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\varphi(t) = Ae^{-i(kx+\omega t)} + Be^{i(kx-\omega t)}, \quad (2.14)$$

com $\hbar\omega = E$.

Capítulo 3

Teoria Clássica de Campos

3.1 Introdução

A teoria quântica de campos trata de partículas subatômicas e por isso faz-se necessária uma abordagem bem diferente da mecânica clássica para as partículas e seu movimento. Parte dessa diferenciação se dá por representarmos nossas partículas como funções de onda no espaço e que ainda precisam respeitar o princípio da incerteza de Heisenberg [6]¹.

Vamos considerar que cada partícula possa ser descrita por uma função $\phi(\vec{x})$ em cada ponto do espaço. Uma forma de descrevermos nosso sistema é através da lagrangiana que irá descrever as condições das partículas. Vamos iniciar supondo que essa lagrangiana é um funcional do campo e de sua derivada temporal:

$$L(t) = L[\phi(x), \dot{\phi}(x)]. \quad (3.1)$$

Como queremos aplicar o princípio de Hamilton, vamos definir a variação de funcional como sendo:

$$\begin{aligned} \delta F[\phi] &= F[\phi + \delta\phi] - F[\phi] \\ &:= \int d^3x \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Vamos aplicar essas ideias na Lagrangiana. Assim, teremos:

$$\delta L[\phi, \dot{\phi}] = \int d^3x \left(\frac{\delta L}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) + \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}(x)} \delta\dot{\phi}(x) \right) \quad (3.3)$$

Os dois lados desta equação possuem um termo adicional com dependência explícita no

¹Vamos utilizar neste capítulo a notação adota nesta referência

tempo que não incluímos. Se integramos a lagrangiana no tempo, temos a ação $W[\phi, \dot{\phi}]$. Integrando sobre um intervalo t_1 a t_2 temos a variação da ação, dada por:

$$\begin{aligned}\delta W &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L[\phi, \dot{\phi}], \\ \delta W &= \int_{t_1}^{t_2} dt d^3x \left(\frac{\delta L}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x) + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} \delta \dot{\phi}(x) \right).\end{aligned}$$

Fazendo uma integração por partes e usando o fato de que $\delta \phi(x, t_1) = \delta \phi(x, t_2) = 0$ chegamos em:

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} dt d^3x \left(\frac{\delta L}{\delta \phi(x)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} \right) \delta \phi. \quad (3.4)$$

O princípio de Hamilton para ação estacionária reza que:

$$\delta W[\phi, \dot{\phi}] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L[\phi, \dot{\phi}] = 0,$$

que nos leva a:

$$\frac{\delta L}{\delta \phi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = 0, \quad (3.5)$$

que é exatamente a equação de Euler-Lagrange generalizada para a teoria de campos.

Podemos trabalhar apenas com a densidade de lagrangiana, mas essa deverá depender do campo ϕ e de suas derivadas temporal e espacial em primeira ordem. Assim sendo, a variação da lagrangiana agora fica:

$$\begin{aligned}\delta L &= \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \delta \nabla \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} \right), \\ \delta L &= \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) \delta \phi.\end{aligned} \quad (3.6)$$

Pelo princípio da mínima ação, teremos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 0, \quad (3.7)$$

que em notação relativística covariante, fica:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0. \quad (3.8)$$

Assim que conhecemos a densidade de lagrangiana de uma teoria física, as equações que descrevem os campos podem ser obtidas através de equações diferenciais parciais em termos de x e t . Vamos trabalhar isso em mais detalhes quando aplicarmos ao campo de Schroedinger. Como estamos supondo que a densidade de lagrangiana não depende de derivadas de ordem superior, os campos irão satisfazer equações diferenciais de, no máximo, segunda ordem.

3.2 O Formalismo de Hamilton

Para aplicarmos o formalismo de Hamilton na teoria de campos, vamos definir o momento canônico conjugado. Assim, teremos:

$$\pi = \frac{\delta L(t)}{\delta \dot{\phi}}. \quad (3.9)$$

Se tomamos o limite para termos a densidade de lagrangiana, teremos:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}. \quad (3.10)$$

Agora iremos introduzir a transformação de Legendre para obtermos:

$$H(t) = \int d^3x \pi \dot{\phi} - L(t). \quad (3.11)$$

Também podemos escrever essa Hamiltoniana através de uma densidade que fica:

$$H(t) = \int d^3x \mathcal{H}(x), \quad (3.12)$$

com

$$\mathcal{H}(x) = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}. \quad (3.13)$$

Vamos tomar uma variação em 3.11. Assim, teremos:

$$\delta H = \int d^3x (\pi \delta \dot{\phi} + \dot{\phi} \delta \pi) - \delta L(t). \quad (3.14)$$

Como

$$\delta L = \int d^3x \left(\frac{\delta L}{\delta \phi} \delta \phi + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} \right) = \int d^3x (\dot{\pi} \delta \phi + \pi \delta \dot{\phi}). \quad (3.15)$$

Substituindo na variação da hamiltoniana:

$$\delta H = \int d^3x (\pi \delta \dot{\phi} + \dot{\phi} \delta \pi - \dot{\pi} \delta \phi + \pi \delta \dot{\phi}) = \int d^3x (\dot{\phi} \delta \pi - \dot{\pi} \delta \phi). \quad (3.16)$$

As equações de movimento são dadas por:

$$\dot{\phi} = \frac{\delta H}{\delta \pi}, \quad \dot{\pi} = -\frac{\delta H}{\delta \phi} \quad (3.17)$$

3.3 Leis de Conservação na Teoria Clássica de Campos

Em toda a física é de extrema relevância o estudo de quantidades que não variam a medida que o tempo progride. A conservação de energia, momentos linear e angular são fundamentais para termos uma descrição válida da natureza. Juntamente com as variáveis citadas temos outras quantidades como carga e isospin que também são conservadas, o que nos leva a um ponto de vista fundamental onde as leis de conservação são consequências naturais das propriedades de simetria de um sistema. Para cada transformação contínua de coordenadas ou de campos onde não muda a física a existência de uma quantidade conservada é observada. As próprias conservações dos momentos e energia se baseiam na invariância da teoria sob uma transformação temporal e espaciais translação e rotação no espaço [7].

O arcabouço matemático que nos trará uma ligação entre as propriedades de simetria e as leis de conservação é conhecido como Teorema de Noether. Amalie Emmy Noether foi uma notável matemática alemã, judia, doutorando-se aos 25 anos na universidade de Erlangen necessitando de autorização para frequentar toda a sua formação por ser mulher. A seguir vamos estudar esse importante teorema e entender suas aplicações.

Vamos considerar o caso de uma ação que não muda se as coordenadas são sujeitas a uma transformação contínua. Uma transformação infinitesimal pode ser do tipo:

$$x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu. \quad (3.18)$$

A correspondente variação no campo será:

$$\phi'(x) = \phi(x) + \delta \phi(x), \quad (3.19)$$

que resulta na variação da densidade de lagrangiana dada por:

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x). \quad (3.20)$$

Aqui temos uma simplificação de notação, pois a densidade de lagrangiana, doravante tratada apenas como lagrangiana, depende do campo e de suas variações, mas não depende explicitamente da posição.

É importante notar que $\delta\phi$ como definido em (3.19) é apenas a variação funcional em ϕ e ϕ' , e é comparado com ϕ no mesmo ponto. Vamos adicionar a definição da variação total em ϕ dada por:

$$\Delta\phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) \quad (3.21)$$

$$\Delta\phi(x) = \underbrace{\phi'(x') - \phi(x')}_{=\delta\phi} + \underbrace{\phi(x') - \phi(x)}_{(\partial_\mu\phi)\delta x^\mu}$$

$$\Delta\phi(x) = \delta\phi(x) + (\partial_\mu\phi)\delta x^\mu. \quad (3.22)$$

Nesta passagem expandimos $\phi'(x')$ e $\phi(x')$ em séries de Taylor e desprezamos os termos de ordem igual ou maior que 2.

Novamente vamos utilizar a variação da ação, que neste caso será dada por:

$$\delta W = \int_{V'} d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int_V d^4x \mathcal{L}(x), \quad (3.23)$$

onde V' é o mesmo volume V , porém escrito no sistema de coordenadas x' . Introduzindo a variação na lagrangiana 3.20, temos:

$$\delta W = \int d^4x' [\mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x)] - \int d^4x \mathcal{L}(x). \quad (3.24)$$

A transformação do volume de integração descrito em 3.23 introduz o determinante de Jacobi, que em primeira ordem é:

$$d^4x' = \left| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right| d^4x = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial\delta x_0}{\partial x_0} & \frac{\partial\delta x_0}{\partial x_1} & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\delta x_1}{\partial x_0} & 1 + \frac{\partial\delta x_1}{\partial x_1} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 + \frac{\partial\delta x_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \left(1 + \frac{\partial\delta x_\mu}{\partial x_\mu} \right) d^4x. \quad (3.25)$$

Todos os demais termos negligenciados são termos mistos da variação $\delta x'^\mu$ de ordens superiores a 1. Voltando à ação:

$$\begin{aligned}\delta W &= \int d^4x (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) \delta \mathcal{L}(x) + \int d^4x (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) \mathcal{L}(x) - \int d^4x \mathcal{L}(x) \\ \delta W &= \int d^4x [\delta \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(x) \partial_\mu \delta x^\mu]\end{aligned}\quad (3.26)$$

O termo $\partial_\mu \delta x^\mu \delta \mathcal{L}(x)$ é desprezado, pois temos o produto de duas variações.

Agora vamos procurar a variação da lagrangiana. Sabemos que ela é função do campo e de suas derivadas parciais, logo:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \partial_\mu \phi. \quad (3.27)$$

Usando o fato de que $\delta \partial_\mu \phi = \partial_\mu \delta \phi$ e $\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) = \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \delta \phi$, temos:

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi = \\ &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right)\end{aligned}\quad (3.28)$$

Voltando a (3.26), temos:

$$\delta W = \int d^4x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \mathcal{L}(x) \delta x^\mu \right) \right]. \quad (3.29)$$

Agora temos ainda que $\partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu) = \partial_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu + \mathcal{L}(x) \partial_\mu \delta x^\mu$, onde o primeiro termo do lado direito da equação é nulo, pois a lagrangiana não depende explicitamente das coordenadas.

Assim:

$$\delta W = \int d^4x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) \right] = 0. \quad (3.30)$$

O primeiro termo na integral já é igual a zero por se tratar da equação de Euler-Lagrange, o que faz com que tenhamos:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) = 0. \quad (3.31)$$

Usando a equação 3.22

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\Delta \phi - \partial^\nu \phi \delta x_\nu) + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] = 0. \quad (3.32)$$

Podemos interpretar essa quantidade como sendo algo que se conserva, e por isso vamos inserir o conceito de densidade de corrente dado por:

$$f_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \Delta \phi - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}(x) \right) \delta x^\nu. \quad (3.33)$$

Nessa densidade temos a presença das simetrias internas representada pelas variações de campo na mesma posição e das simetrias externas através das variações das coordenadas, seja por translações ou por rotações. Assim, podemos estudar o comportamento do campo quanto a transformações que estejam de acordo com as simetrias supracitadas.

Para investigarmos conservações espaço-temporais, é necessário que definamos o tensor momento energia, que está associado às transformações externas carregadas pelo termo δx^ν . Assim:

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}(x). \quad (3.34)$$

Esse ferramental nos fornece a base para que possamos quantizar nossos campos, em especial para esse trabalho o campo de Schroedinger. Podemos encontrar as equações de movimento e quantidades conservadas, bem como, para a quantização de bósons, estudarmos sistemas de partículas idênticas.

Capítulo 4

Segunda Quantização da Equação de Schroedinger

4.1 Introdução

A segunda quantização de um campo se faz conveniente quando queremos que este represente a dinâmica de partículas que podem ser criadas ou aniquiladas no sistema. A passagem da mecânica clássica para a mecânica quântica se dá quando transformamos variáveis clássicas de posição e momento em operadores que satisfazem uma relação de comutação. A variável de posição deixa de ser um parâmetro para ser um observável, deixando apenas o tempo como parâmetro [8].

De maneira parecida a passagem de campos clássicos para uma teoria quântica de campos se dá quando transformamos o campo clássico Ψ e seu momento conjugado em operadores, respeitando as relações de comutação e anti-comutação para bósons e férmions, respectivamente. A fim de mantermos a invariância relativística da teoria as coordenadas de posição passam a ser parâmetros.

Neste capítulo vamos trabalhar a segunda quantização da equação de Schroedinger e, para isso, precisamos encontrar a lagrangiana do campo de Schroedinger e, a partir daí, calcularmos outras variáveis como o momento conjugado e a densidade de hamiltoniana.

4.2 Quantização do Campo de Schroedinger

Esperamos que a lagrangiana do campo de Schroedinger satisfaça as equações de Euler-Lagrange, dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0,$$

tendo como resultado a própria equação de Schroedinger como conhecemos. Assim, uma lagrangiana que satisfaz essas condições é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}\Psi^* (\partial_t \Psi) - \frac{i\hbar}{2} (\partial_t \Psi^*) \Psi - \frac{\hbar^2}{2m} (\partial_x \Psi^*) (\partial_x \Psi). \quad (4.1)$$

O momento conjugado fica:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} = \frac{i\hbar}{2}\Psi^*. \quad (4.2)$$

Note que o resultado obtido acima mostra que existe apenas dois campos independentes Ψ e Ψ^* . Note também que Ψ^* não é solução da equação de Schroedinger, isto é, a combinação linear $\alpha\Psi + \beta\Psi^*$ não é solução da equação de Schroedinger. A solução mais geral da equação de Schroedinger é a combinação linear das autofunções de energia. Isso implica que na quantização da equação de Schroedinger teremos apenas um tipo de partícula. Isso tudo é devido à presença do número imaginário i , que faz com que a equação complexa conjugada não seja a mesma equação de Schroedinger. Portanto, $\Psi_n^* = a_n e^{iEt/\hbar} \psi(x)$ não é solução de energias negativas.

A densidade de hamiltoniana é dada pela equação:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi \dot{\Psi} + \pi^* \dot{\Psi}^* - \mathcal{L} \\ \mathcal{H} &= \frac{i\hbar}{2}\Psi^* \dot{\Psi} - \frac{i\hbar}{2}\dot{\Psi} \Psi^* - \left(\frac{i\hbar}{2}\dot{\Psi} \Psi^* - \frac{i\hbar}{2}\dot{\Psi}^* \Psi - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_x \Psi^* \partial_x \Psi \right) \\ \mathcal{H} &= \frac{\hbar^2}{2m} \partial_x \Psi^* \partial_x \Psi. \end{aligned} \quad (4.3)$$

A hamiltoniana total é calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \mathcal{H}, \\ H &= \int dx \frac{\hbar^2}{2m} \partial_x \Psi^* \partial_x \Psi = \frac{\hbar^2}{2m} \int dx \left[\partial_x (\Psi^* \partial_x \Psi) - \Psi^* \partial_x^2 \Psi \right]. \end{aligned}$$

Considerando que os campos Ψ e Ψ^* e suas derivadas se anulam na fronteira, temos:

$$H = \int dx \Psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \right) \Psi. \quad (4.4)$$

4.3 Regras de quantização para Bósons

Ao fazermos a segunda quantização da equação de Schroedinger, nos deparamos com uma situação diferente dos demais campos: podemos impor relações de comutação e

anticomutação. Cada um dos casos servirá para descrever tipos diferentes de partículas, a imposição de regra de comutação descreverá bósons enquanto a imposição de regras de anticomutação descreverá campos fermiônicos.

Neste trabalho iremos impor apenas regras de comutação entre os operadores de campo. Para quantizarmos um campo, isto é, torná-lo um operador, iniciamos expandindo o campo clássico em ondas planas

$$\Psi = \sum_n a_n(t) u_n(x), \quad (4.5)$$

onde $u_n(x)$ são soluções normalizadas da equação de Shcroedinger independente do tempo, dadas por

$$u_n(x) = \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{2\pi\hbar}}, \quad (4.6)$$

com

$$k_n(x) = \sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}},$$

onde

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) u_n(x) = E_n u_n(x). \quad (4.7)$$

A partir dessas funções fica fácil verificar que

$$\int dx u_n(x) u_{n'}^*(x) = \delta_{n,n'}, \quad (4.8)$$

$$\sum_n u_n(x) u_n^*(x') = \delta(x - x'). \quad (4.9)$$

A quantização do campo é obtida tornando os coeficientes $a_n(t)$ da expansão 4.5 em operadores,

$$\begin{aligned} a_n(t) &\rightarrow \hat{a}_n(t) \\ a_n^*(t) &\rightarrow \hat{a}_n^\dagger(t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

que satisfazem as relações de comutação a tempos iguais

$$[\hat{a}_n(t), \hat{a}_{n'}^\dagger(t)] = \delta_{n,n'}, \quad (4.11)$$

$$[\hat{a}_n(t), \hat{a}_{n'}(t)] = [\hat{a}_n^\dagger(t), \hat{a}_{n'}^\dagger(t)] = 0. \quad (4.12)$$

Assim:

$$\hat{\Psi} = \sum_n \hat{a}_n(t) u_n(x), \quad (4.13)$$

Das relações de comutação 4.11 temos que:

$$[\hat{\Psi}(x, t), \hat{\Psi}^\dagger(x, t)] = \sum_{n,n'} [\hat{a}_n(t) u_n(x), \hat{a}_n^\dagger(t) u_n^*(x')], \quad (4.14)$$

$$[\hat{\Psi}(x, t), \hat{\Psi}^\dagger(x, t)] = \sum_{n,n'} [\hat{a}_n(t), \hat{a}_n^\dagger(t)] u_n(x) u_n^*(x'), \quad (4.15)$$

$$[\hat{\Psi}(x, t), \hat{\Psi}^\dagger(x, t)] = \sum_n u_n(x) u_n^*(x') = \delta(x - x'). \quad (4.16)$$

Da mesma forma, teremos:

$$[\hat{\Psi}(x, t), \hat{\Psi}(x, t)] = [\hat{\Psi}^\dagger(x, t), \hat{\Psi}^\dagger(x, t)] = 0 \quad (4.17)$$

A dinâmica desses operadores é regida pela equação de movimento de Heisenberg

$$\dot{\hat{\Psi}} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{\Psi}, \hat{H}],$$

$$\dot{\hat{\pi}} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{\pi}, \hat{H}].$$

A segunda equação pode ser vista como sendo o hermitiano conjugado da primeira, uma vez que

$$\hat{\pi} = i\hbar \dot{\hat{\Psi}}^\dagger = -[\hat{\Psi}, \hat{H}]^\dagger = \hat{\Psi}^\dagger \hat{H} - \hat{H} \hat{\Psi}^\dagger = [\hat{\Psi}^\dagger, \hat{H}] = \frac{1}{i\hbar} [\hat{\pi}, \hat{H}],$$

onde o fato do operador Hamiltoniano ser hermitiano foi utilizado.

A dependência temporal dos operadores $\hat{a}_n(t)$ pode ser determinada pela dinâmica do sistema, que pode ser representada da seguinte forma:

$$i\hbar \dot{\hat{a}}_n(t) = [\hat{a}_n(t), \hat{H}] = \sum_{n'} E_n [\hat{a}_n(t), \hat{a}_{n'}^\dagger(t) \hat{a}_{n'}(t)] = E_n \hat{a}_n(t)$$

$$\hat{a}_n(t) = e^{-iE_n t/\hbar} \hat{a}_n(0). \quad (4.18)$$

Vamos considerar a hamiltoniana total descrita em [4.4] que é dada por

$$H = \int dx \Psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \right) \Psi.$$

Usando 4.13:

$$\begin{aligned} H &= \int dx \sum_{n,n'} \hat{a}_n^\dagger u_{n'}^*(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \right) \hat{a}_n u_n(x), \\ H &= \sum_{n,n'} \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \int dx u_{n'}^*(x) u_n(x), \\ H &= \sum_{n,n'} \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \delta_{n,n'}, \\ \hat{H} &= \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n = \sum_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n E_n. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Aqui vemos que a hamiltoniana é dada pela soma das energias de cada partícula num estado n , e podemos interpretar a quantidade $\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n$ como o operador número de partículas em cada nível de energia n .

$$\hat{n}_n = \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n. \quad (4.20)$$

Se somarmos todas as partículas em cada nível teremos o número total de partículas do sistema. Fica fácil definirmos o operador número como

$$\hat{N} = \sum_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \quad (4.21)$$

Como estamos trabalhando com sistemas de várias partículas onde cada grupo de partículas possui energia específica, iremos usar o espaço de Fock, que é um espaço de Hilbert para a segunda quantização. Aqui podemos calcular a ação dos operadores \hat{a}_n e \hat{a}_n^\dagger em cada vetor de estado. Um vetor de estado será representado por $|n_1, n_2, n_3, \dots\rangle$. Assim:

$$\hat{N} |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle = \left(\sum_n \hat{n}_n \right) |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle = \sum_n n_n |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle. \quad (4.22)$$

Vamos considerar a ação do operador \hat{a}_n^\dagger num vetor de estado. Assim

$$\hat{N}(\hat{a}_n^\dagger |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle) = \sum_{n'} \hat{a}_{n'}^\dagger \hat{a}_{n'} \hat{a}_n^\dagger |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle.$$

Usando o fato de que $[\hat{a}_n, \hat{a}_{n'}^\dagger] = \delta_{n,n'}$, temos:

$$\hat{N}(\hat{a}_n^\dagger |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle) = \sum_{n'} \hat{a}_{n'}^\dagger (\delta_{n,n'} + \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'}) |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle,$$

$$\hat{N}(\hat{a}_n^\dagger |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle) = \sum_n (\hat{a}_n^\dagger \delta_{n,n} + \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n) |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle,$$

onde usamos o fato de que $[\hat{a}_{n'}^\dagger, \hat{a}_{n'}^\dagger] = 0$. Assim:

$$\hat{N}(\hat{a}_n^\dagger |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle) = \hat{a}_n^\dagger (1 + \hat{N}) |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle = (1 + n) \hat{a}_n^\dagger |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle.$$

Logo:

$$\hat{N}(\hat{a}_n^\dagger |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle) = (1 + n) \hat{a}_n^\dagger |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle. \quad (4.23)$$

Ou seja, o operador \hat{a}_n^\dagger cria uma partícula a mais no estado n do sistema. Por isso ele é conhecido como o operador de criação. Da mesma forma, o operador \hat{a} é o operador de aniquilação de partículas no sistema.

$$\hat{N}(\hat{a}_n |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle) = \sum_{n'} \hat{a}_{n'}^\dagger \hat{a}_{n'} \hat{a}_n |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle,$$

$$\hat{N}(\hat{a}_n |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle) = \sum_{n'} (\hat{a}_n \hat{a}_{n'}^\dagger - \delta_{n,n'}) \hat{a}_{n'} |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle,$$

onde usamos, primeiramente, o fato de que $[\hat{a}_n, \hat{a}_{n'}] = 0$ e depois que $[\hat{a}_n, \hat{a}_{n'}^\dagger] = \delta_{n,n'}$.

$$\hat{N}(\hat{a}_n |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle) = \sum_{n'} \hat{a}_n \hat{a}_{n'}^\dagger \hat{a}_{n'} |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle - \sum_{n'} \delta_{n,n'} \hat{a}_{n'} |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle,$$

$$\hat{N}(\hat{a}_n |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle) = \hat{a}_n \hat{N} |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle - \hat{a}_n |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle,$$

Logo:

$$\hat{N}(\hat{a}_n |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle) = (n - 1) (\hat{a}_n |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle). \quad (4.24)$$

Então, $(\hat{a}_n |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle)$ é auto estado do operador \hat{N}_n com autovalor $n - 1$.

Como estamos tratando da quantização bosônica, podemos ter mais de uma partícula ocupando o mesmo estado.

Esse ferramental aplicado a um espaço vetorial de várias partículas se torna imprescindível ao estudarmos sistemas com várias partículas. A possibilidade de criar e aniquilar partículas com operadores que também carregam informação de energia e momento do sistema torna possível a descrição desses sistemas.

Capítulo 5

Teorias de Comprimento Mínimo

5.1 Introdução

O Modelo Padrão das partículas elementares é, sem sombra de dúvida, um dos maiores avanços do intelecto humano no tocante à física de altas energias. As evidências experimentais da existência do Bóson de Higgs no LHC em 2012, sacramentou essa teoria que agora está completa, mas tem problemas. Como maior evidência, temos o caso da gravitação que não é incluída no modelo.

A gravitação é uma interação da natureza que ao quantizarmos temos problemas em processos de renormalização o que acaba fazendo dela uma teoria com resultados que não são físicos. Existem algumas tentativas de contornar esse problema atualizando o Modelo Padrão como se fosse um Além do Modelo Padrão (Beyond-Standard-Model), em que formas diferentes de se incorporar a gravitação são propostas. A maioria dessas propostas concordam com a existência de um comprimento mínimo, ou seja, a existência de um limite de escala de comprimento onde a ideia de distância perde o sentido [9].

A escala de comprimento mínimo nasce do fato de que distâncias menores do que a escala de Planck são proibidas. Se a energia de uma corda alcança a massa de Planck, podemos ter excitações da corda que causam uma extensão diferente de zero. Assim, a incerteza na medida da posição não pode nunca ser menor do que a escala de Planck, que é da ordem de $10^{-35} m$ [10].

Naturalmente, temos então que um modo eficaz de se inserir um mínimo comprimento em teorias quânticas é alterar o princípio da incerteza de Heisenberg (em inglês HUP - Heisenberg uncertainty principle) [11, 12], o que nos leva a um princípio da incerteza generalizado (em inglês GUP - generalized uncertainty principle). Vamos utilizar a proposta mais usual na literatura, que é a proposta de Kempf, onde em uma dimensão temos a seguinte generalização [13]:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \left[1 + \beta (\Delta p)^2 + \beta \langle \hat{p} \rangle \right], \quad (5.1)$$

onde β é um parâmetro associado à existência do comprimento mínimo.

Neste capítulo vamos explorar as implicações do GUP, as modificações necessárias na representação de momento e posição no espaço de Hilbert [14] e por fim como a informação da posição será dada nessa nova abordagem.

5.2 O Princípio da Incerteza Generalizado

Já vimos que podemos escrever o GUP como:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \left[1 + \beta (\Delta p)^2 + \beta \langle \hat{p} \rangle \right].$$

No HUP temos que se Δx for diminuindo então Δp vai ficando cada vez maior e vice-versa, mas isso não acontece com (5.1). A medida que Δx diminui Δp aumenta mas o termo $\beta (\Delta p)^2$ eventualmente cresce mais rápido do que o lado esquerdo de (5.1). Assim, Δx não pode ser arbitrariamente pequeno, e sim tem um valor mínimo.

Vamos considerar a melhor situação de (5.1), ou seja, a situação onde há a igualdade na equação. Assim:

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \left[1 + \beta (\Delta p)^2 + \beta \langle \hat{p} \rangle \right],$$

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2} \left[\frac{1}{\Delta p} + \beta \Delta p + \frac{\beta \langle \hat{p} \rangle}{\Delta p} \right].$$

Nos interessa o comportamento de Δp com relação a Δx , pois queremos achar um mínimo valor para ele. Essa relação nos fornece a seguinte curva:

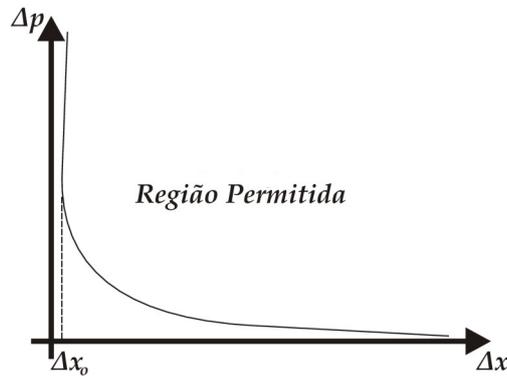


Figura 5.1. GUP implicando numa incerteza mínima $\Delta x_0 \neq 0$.

Pra encontrarmos o mínimo valor para Δx vamos derivar a última equação e igualá-la a zero.

$$\frac{d}{d(\Delta p)} \Delta x = \frac{\hbar}{2} \left[-\frac{1}{\Delta p^2} + \beta - \frac{\beta \langle \hat{p} \rangle}{\Delta p^2} \right] = 0,$$

$$\beta \Delta p^2 = 1 + \beta \langle \hat{p} \rangle,$$

$$\Delta p = \sqrt{\frac{1 + \beta \langle \hat{p} \rangle}{\beta}}.$$

Agora vamos substituir na função esse ponto de derivada nula:

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2} \left[\sqrt{\frac{\beta}{1 + \beta \langle \hat{p} \rangle}} + \beta \sqrt{\frac{1 + \beta \langle \hat{p} \rangle}{\beta}} + \beta \langle \hat{p} \rangle \sqrt{\frac{\beta}{1 + \beta \langle \hat{p} \rangle}} \right],$$

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2} \left[(1 + \beta \langle \hat{p} \rangle) \sqrt{\frac{\beta}{1 + \beta \langle \hat{p} \rangle}} + \beta \sqrt{\frac{1 + \beta \langle \hat{p} \rangle}{\beta}} \right],$$

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2} \left[\sqrt{\beta (1 + \beta \langle \hat{p} \rangle)} + \sqrt{\beta (1 + \beta \langle \hat{p} \rangle)} \right],$$

$$\Delta x_0 = \hbar \sqrt{\beta (1 + \beta \langle \hat{p} \rangle)}.$$

O menor valor de Δx é alcançado quando o valor médio do operador \hat{p} é nulo. Assim, essa mínima incerteza na posição fica:

$$\Delta x_{min} = \hbar \sqrt{\beta}. \quad (5.2)$$

Essa mínima incerteza, que esperávamos existente, nos permite uma nova interpretação da mecânica quântica em termos de β . Podemos pensar nessa interpretação como uma correção num cenário de comprimento mínimo onde a todo momento devemos recuperar a teoria original quando $\beta \rightarrow 0$, o que de fato acontece com nosso comprimento mínimo, pois no HUP temos a previsão de uma incerteza nula na posição.

5.3 Representações no Espaço de Hilbert

Devemos estudar agora como essa correção pode ser avaliada no espaço de Hilbert. Essa análise é fundamental pois vamos estudar como se comportam as representações dos operadores de posição e momento, seus autovalores e a própria estrutura desse subespaço vetorial.

Para que haja uma modificação no HUP é necessário que a relação de comutação entre os operadores de posição e momento seja modificada também. Sabendo que queremos chegar em (5.1), portanto uma consistente modificação na relação de comutação fica:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar (1 + \beta \hat{p}^2). \quad (5.3)$$

Como a utilização da representação no espaço de posição não é permitida, por não se representar de estados físicos, precisaremos reconstruir a ideia de posição (que chamaremos quase posição), vamos trabalhar com a representação de momento. Assim, usando o fato de que $\psi(p) := \langle p|\psi\rangle$. Vamos fazer agir os operadores de posição e momento na função de onda:

$$\langle p|\hat{p}|\psi\rangle = p\psi(p), \quad (5.4)$$

$$\langle p|\hat{x}|\psi\rangle = i\hbar(1 + \beta p^2)\partial_p\psi(p). \quad (5.5)$$

Os operadores de posição e momento são simétricos, o que faz com que

$$(\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle = \langle\psi|(\hat{p}|\psi\rangle) \text{ e } (\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = \langle\psi|(\hat{x}|\psi\rangle),$$

com produto interno definido da seguinte forma:

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p)\phi(p), \quad (5.6)$$

e relação de completeza dada por:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} |p\rangle\langle p|, \quad (5.7)$$

e, finalmente, a relação de ortonormalização fica:

$$\langle p|p'\rangle = (1 + \beta p^2)\delta(p - p'). \quad (5.8)$$

De posse desses argumentos temos o comportamento dos vetores nesse subespaço do espaço de Hilbert. Vamos na sequência aplicar o operador de posição numa função de onda para termos as autofunções explícitas em termos do momento da partícula.

5.3.0.1 Análise Funcional do Operador de Posição

Vamos considerar o operador de posição agindo num vetor arbitrário $|p\rangle$ na representação de momento. Esse é um problema de autovalor e autovetor na forma:

$$\langle p|\hat{x}|\psi\rangle = i\hbar(1 + \beta p^2)\partial_p\psi_\lambda(p) = \lambda\psi_\lambda(p).$$

Separando as variáveis para integração, temos:

$$\frac{d\psi_\lambda}{\psi_\lambda} = \frac{\lambda}{i\hbar} \frac{dp}{1 + \beta p^2}$$

$$\ln \psi_\lambda = \frac{\lambda}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} + c.$$

Vamos resolver essa integral com uma substituição trigonométrica dada por $p = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan \theta$, pois teremos $dp = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sec^2 \theta d\theta$. Logo:

$$\ln \psi_\lambda = \frac{\lambda}{i\hbar \sqrt{\beta}} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\underbrace{1 + \tan^2 \theta}_{=\sec^2 \theta}} + c,$$

$$\ln \psi_\lambda = \frac{\lambda}{i\hbar \sqrt{\beta}} \int d\theta + c,$$

$$\ln \psi_\lambda = \frac{\lambda \theta}{i\hbar \sqrt{\beta}} + c,$$

$$\psi_\lambda = C e^{-i\lambda \theta / (\hbar \sqrt{\beta})}.$$

Como fizemos a transformação $p = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan \theta$, então temos que $\theta = \arctan(\sqrt{\beta} p)$.

Assim:

$$\psi_\lambda = C e^{-i\lambda \arctan(\sqrt{\beta} p) / (\hbar \sqrt{\beta})}.$$

Vamos calcular agora a constante C. Utilizando a condição de normalização, temos:

$$|C|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} = 1.$$

Fazendo novamente uma substituição trigonométrica com $p = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan \theta$, temos que $\theta \rightarrow -\pi/2$ quando $p \rightarrow -\infty$ e $\theta \rightarrow \pi/2$ quando $p \rightarrow \infty$. Logo:

$$1 = \frac{|C|^2}{\sqrt{\beta}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\underbrace{1 + \tan^2 \theta'}_{=\sec^2 \theta}},$$

$$1 = \frac{|C|^2}{\sqrt{\beta}} \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta}_{\pi},$$

$$1 = \frac{|C|^2 \pi}{\sqrt{\beta}},$$

$$|C| = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}}.$$

Nossa função fica:

$$\psi_\lambda(p) = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} e^{-i\lambda \arctan(\sqrt{\beta}p)/(\hbar\sqrt{\beta})}. \quad (5.9)$$

De posse desse ferramental vamos calcular formalmente o produto de dois vetores do subespaço associados a essa função de onda. Assim:

$$\langle \psi'_{\lambda'} | \psi_\lambda \rangle = \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \exp \left[\frac{-i(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) \right].$$

Vamos fazer uma substituição do tipo $u = \arctan(\sqrt{\beta}p)$, pois teremos $du = \frac{dp}{1 + \beta p^2}$ que é exatamente a primeira parte do argumento da integral. Ainda teremos $u \rightarrow -\pi/2$ quando $p \rightarrow -\infty$ e $u \rightarrow \pi/2$ quando $p \rightarrow \infty$. Logo:

$$\begin{aligned} \langle \psi'_{\lambda'} | \psi_\lambda \rangle &= \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} du \exp \left[\frac{-i(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} u \right], \\ \langle \psi'_{\lambda'} | \psi_\lambda \rangle &= i \frac{\sqrt{\beta\hbar}\sqrt{\beta}}{\pi(\lambda - \lambda')} \exp \left[\frac{-i(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} u \right] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}, \\ \langle \psi'_{\lambda'} | \psi_\lambda \rangle &= i \frac{\beta\hbar}{\pi(\lambda - \lambda')} \left[\cos \left(\frac{(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} u \right) - i \sin \left(\frac{(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} u \right) \right] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}, \\ \langle \psi'_{\lambda'} | \psi_\lambda \rangle &= \frac{2\beta\hbar}{\pi(\lambda - \lambda')} \sin \left(\frac{(\lambda - \lambda')}{2\hbar\sqrt{\beta}} \pi \right). \end{aligned}$$

Aqui pode-se perceber que os estados não são mutuamente ortogonais. É impossível, fisicamente, extrair informações sobre a posição da partícula nestas condições. Precisamos, então, recobrar a informação física possível, sobretudo na posição da partícula como veremos no capítulo a seguir.

5.4 A Posição de uma Partícula num Cenário de Comprimento Mínimo

Na mecânica quântica todas as informações da posição estão na matriz do operador posição. Como já vimos, no entanto, os autoestados obtidos não são físicos, o que nos leva a crer que a diagonalização da matriz de posição não nos dará os possíveis valores de posição. Assim, precisamos acessar uma forma de termos alguma informação da posição da partícula, o que será possível através dos estados de máxima localização permitida.

5.4.0.1 Estados de Máxima Localização

Vamos explicitar os cálculos de estados $|\psi^{ml}\rangle$ de máxima localização em torno da posição x . Esses estados tem as seguintes propriedades:

$$\langle \psi^{ml} | \hat{x} | \psi^{ml} \rangle = x$$

e

$$(\Delta x)_{|\psi^{ml}\rangle} = \Delta x_0.$$

É importante notar que Δx_0 é uma incerteza mínima mas que ainda depende de $\langle \hat{p} \rangle$. Vamos partir da obtenção da relação de incerteza de Heisenberg encontrar uma nova função de onda $\psi(p)$.

Vamos partir de:

$$\left| \left(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle + \frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2(\Delta p)^2} (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \right) |\psi\rangle \right| \geq 0.$$

Nos interessamos pela região permitida apenas, assim vamos estudar o comportamento na borda dela, ou seja:

$$\left(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle + \frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2(\Delta p)^2} (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \right) |\psi\rangle = 0.$$

No espaço de momentos, teremos:

$$\left(i\hbar(1 + \beta p^2) \partial_p - \langle \hat{x} \rangle + i\hbar \frac{1 + \beta(\Delta p)^2 + \beta \langle \hat{p} \rangle^2}{2(\Delta p)^2} (p - \langle \hat{p} \rangle) \right) \psi(p) = 0.$$

A fim de facilitarmos a notação vamos renomear algumas variáveis para no fim retornarmos às variáveis originais. Assim: $\lambda = \frac{1 + \beta(\Delta p)^2 + \beta \langle \hat{p} \rangle^2}{2(\Delta p)^2}$, o que faria nossa equação ser:

$$(i\hbar(1 + \beta p^2) \partial_p - \langle \hat{x} \rangle + i\hbar\lambda(p - \langle \hat{p} \rangle)) \psi(p) = 0.$$

Reorganizando onde tem variável em p e onde é constante com relação a essa variável temos:

$$i\hbar(1 + \beta p^2) \partial_p \psi(p) = (\langle \hat{x} \rangle + i\hbar\lambda \langle \hat{p} \rangle - i\hbar\lambda p) \psi(p),$$

$$\frac{d\psi(p)}{\psi(p)} = \left(\frac{\langle \hat{x} \rangle + i\hbar\lambda \langle \hat{p} \rangle}{i\hbar(1 + \beta p^2)} - \frac{\lambda p}{1 + \beta p^2} \right) dp.$$

Temos então:

$$\ln(\psi(p)) = (\langle \hat{x} \rangle + i\hbar\lambda \langle \hat{p} \rangle) \int \frac{dp}{i\hbar(1 + \beta p^2)} - \lambda \int \frac{p dp}{1 + \beta p^2} + b,$$

a primeira integral já foi resolvida nesse trabalho e a segunda pode ser resolvida com uma substituição simples do tipo $u = 1 + \beta p^2$ com $du = 2\beta p dp$. Logo:

$$\ln(\psi(p)) = -i \frac{\langle \hat{x} \rangle + i\hbar\lambda \langle \hat{p} \rangle}{\sqrt{\beta}\hbar} \arctan(\sqrt{\beta}p) - \frac{\lambda}{2\beta} \ln(1 + \beta p^2) + b,$$

utilizando propriedade de logaritmo, temos $\frac{\lambda}{2\beta} \ln(1 + \beta p^2) = \ln(1 + \beta p^2)^{\frac{\lambda}{2\beta}}$.

$$\psi(p) = B(1 + \beta p^2)^{-\frac{\lambda}{2\beta}} \exp \left[-i \frac{\langle \hat{x} \rangle + i\hbar\lambda \langle \hat{p} \rangle}{\sqrt{\beta}\hbar} \arctan(\sqrt{\beta}p) \right].$$

Voltando para as variáveis originais, temos:

$$\psi(p) = B(1 + \beta p^2)^{-\frac{1 + \beta(\Delta p)^2 + \beta \langle \hat{p} \rangle^2}{4(\Delta p)^2 \beta}} \exp \left[\left(\frac{\langle \hat{x} \rangle}{i\hbar\sqrt{\beta}} + \frac{1 + \beta(\Delta p)^2 + \beta \langle \hat{p} \rangle^2}{2\sqrt{\beta}(\Delta p)^2} \langle \hat{p} \rangle \right) \arctan(\sqrt{\beta}p) \right]. \quad (5.10)$$

A máxima localização de estados é possível apenas se $\langle \hat{p} \rangle = 0$ e nesse limite podemos tomar $\Delta p = 1/\sqrt{\beta}$ para que possamos acessar aqueles pontos onde a incerteza na posição é a absolutamente mínima. Assim:

$$\psi^{ml}(p) = B(1 + \beta p^2)^{-1/2} \exp \left[\frac{\langle \hat{x} \rangle}{i\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) \right]. \quad (5.11)$$

Utilizando a normalização da função, podemos calcular a constante B :

$$1 = |B|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^2}.$$

Fazendo novamente uma substituição trigonométrica do tipo $\tan \theta = \sqrt{\beta}p$, temos:

$$1 = \frac{|B|^2}{\sqrt{\beta}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec^4 \theta},$$

$$1 = \frac{|B|^2}{\sqrt{\beta}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta,$$

$$1 = \frac{|B|^2}{\sqrt{\beta}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) \theta d\theta,$$

$$1 = \frac{|B|^2 \pi}{\sqrt{\beta} 2}.$$

Assim:

$$B = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}}.$$

Nossa função fica:

$$\psi^{ml}(p) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} (1 + \beta p^2)^{-1/2} \exp\left[\frac{x}{i\hbar \sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta} p)\right]. \quad (5.12)$$

Essa é a função de onda plana generalizada no espaço de momentos que descreve a máxima localização de estados. Para testarmos nossa função vamos calcular a energia no espaço de momentos:

$$\langle \psi^{ml} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi^{ml} \rangle = \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^2} \frac{p^2}{2m}.$$

Fazendo novamente uma substituição trigonométrica, temos:

$$\langle \psi^{ml} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi^{ml} \rangle = \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sec^2 \theta \tan^2 \theta d\theta}{2m\beta \sqrt{\beta} \sec^4 \theta},$$

$$\langle \psi^{ml} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi^{ml} \rangle = \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sec^2 \theta \tan^2 \theta d\theta}{2m\beta \sqrt{\beta} \sec^4 \theta} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{m\beta},$$

$$\langle \psi^{ml} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi^{ml} \rangle = \frac{1}{m\beta\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\theta d\theta}{2} = \frac{1}{m\beta\pi} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\langle \psi^{ml} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi^{ml} \rangle = \frac{1}{2m\beta}. \quad (5.13)$$

Aqui podemos ver que estamos falando de estados que são verdadeiramente físicos por conseguirmos calcular uma energia finita, como deve ser na natureza. Apesar disso, os estados não são necessariamente ortogonais. Isso se dá por conta da própria estrutura do subespaço e da ideia de não conseguirmos uma medida exata de posição. Veremos a seguir como podemos trabalhar com essa quantidade de problemas e ainda assim encontrarmos alguma informação sobre posição de partícula.

5.4.1 Quase Posição

É muito bem estabelecida a ideia de que podemos expandir um vetor numa base de posição, encontrando inclusive uma função de onda dependente da posição. Como não temos uma base que nos leve a estados fisicamente aceitáveis, precisamos de uma nova maneira de entendermos a posição num cenário de comprimento mínimo.

Já vimos que nosso estado de máxima localização é um estado onde a incerteza na posição é a absolutamente mínima, ou seja, trabalhar com estados de máxima localização já é a melhor medida possível. Dessa forma, quando projetamos um vetor de onda num estado de máxima localização, estamos obtendo a máxima probabilidade de encontrarmos a partícula em torno de uma posição x . Chamaremos essa projeção de função de onda de quase posição $\phi(x)$, onde:

$$\phi(x) := \langle \psi^{ml} | \phi \rangle. \quad (5.14)$$

No limite $\beta \rightarrow 0$ a função de onda ordinária é recobrada e teremos $\phi(x) = \langle x | \phi \rangle$.

Fazendo uma transformada de Fourier generalizada, temos a passagem da função de onda na representação de momento para a função de onda de quase posição:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^{3/2}} \exp\left[\frac{ix \arctan(\sqrt{\beta}p)}{\hbar \sqrt{\beta}}\right] \tilde{\psi}(p). \quad (5.15)$$

A transformação inversa é dada por:

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{8\pi \sqrt{\beta} \hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx (1 + \beta p^2)^{1/2} \exp\left[-\frac{ix \arctan(\sqrt{\beta}p)}{\hbar \sqrt{\beta}}\right] \psi(x), \quad (5.16)$$

da qual já podemos imaginar uma forma de criar operadores na representação de quase posição que vão agir sobre os estados. Esses operadores podem ser descritos da seguinte forma:

$$\langle x | \hat{p} | \psi \rangle = \frac{\tan(-i\hbar \sqrt{\beta} \partial_x)}{\sqrt{\beta}} \psi(x), \quad (5.17)$$

$$\langle x | \hat{x} | \psi \rangle = \left(x + \beta \frac{\tan(-i\hbar \sqrt{\beta} \partial_x)}{\sqrt{\beta}} \right) \psi(x). \quad (5.18)$$

De posse desse ferramental podemos nos preocupar em descrever a equação de Schrodinger num cenário de comprimento mínimo. Vamos utilizar os conceitos de quase posição para restabelecermos a teoria e os impactos nessa nova interpretação. Também vamos avan-

çar para a ideia de segunda quantização para entendermos como se comporta a teoria de comprimento mínimo diante de uma teoria quântica de campos, que já está bem estabelecida mas mesmo assim nos permitirá pequenas correções de ordem β .

Capítulo 6

A Equação de Schroedinger num Cenário de Comprimento Mínimo

6.1 Formulação da Equação de Schroedinger

A equação de Schroedinger ordinária é uma equação com segunda derivada na posição e primeira derivada no tempo, do tipo da equação de calor. Esse formato se dá por conta do tipo de quantização do momento linear e da energia, quando aplicados à energia total de uma partícula livre.

Quando trabalhamos num cenário de comprimento, a dependência do momento linear com o vetor de onda e da energia com a frequência também é alterada. Essas alterações irão fornecer uma diferente equação diferencial para a equação de Schroedinger [15]. Na mecânica quântica ordinária, temos que os operadores de translação espacial e temporal são dados por:

$$\hat{k} \rightarrow -i\partial_x, \quad (6.1)$$

$$\hat{\omega} \rightarrow i\partial_t. \quad (6.2)$$

Uma vez que a equação de Schroedinger é não relativística, as coordenadas espaciais não estão no mesmo pé de igualdade que a temporal. Então, como uma sugestão de modificação entre as grandezas físicas que caracterizam as partículas, \vec{p} e E e as que caracterizam um campo \vec{k} e ω e que introduz um comprimento mínimo na teoria. Para o caso 1-dim, temos:

$$\hat{p} = \hbar\hat{k} + \frac{\beta\hbar^3\hat{k}^3}{3}, \quad (6.3)$$

$$\hat{E} = \hbar\hat{\omega}. \quad (6.4)$$

A energia total de uma partícula livre é dada por:

$$\hat{E} | \Psi(t) \rangle = \frac{\hat{p}^2}{2m} | \Psi(t) \rangle. \quad (6.5)$$

Usando as relações (6.3) e (6.4), temos:

$$\hbar\hat{\omega} | \Psi(t) \rangle = \left[\frac{\hbar^2\hat{k}^2}{2m} + \frac{\beta\hbar^4\hat{k}^4}{3m} \right] | \Psi(t) \rangle, \quad (6.6)$$

onde termos de ordem β^2 foram desprezados. Utilizando agora as quantizações (6.1) e (6.2), temos:

$$i\hbar\partial_t\Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi(x, t) + \frac{\beta\hbar^4}{3m}\partial_x^4\Psi(x, t). \quad (6.7)$$

Essa é a Equação de Schroedinger para um cenário de comprimento mínimo e note que se fazemos o fator β tender a zero a teoria ordinária é recobrada. É interessante estudarmos algumas propriedades dessa equação, como as soluções de quasi-posição e temporal, uma lagrangiana que produza essa equação diferencial e a equação da continuidade.

É importante, também, entendermos que estamos modificando a relação de de Broglie entre o momento e o vetor de onda. Isso implica numa modificação da relação entre a energia e o vetor de onda, que será de grande importância em nossa discussão. Sabemos que sem a correção β , essa relação é dada por:

$$k_o = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

Esperamos, então, que o nosso vetor de onda seja algo do tipo:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} + \beta A.$$

Já escrevemos a energia cinética de uma partícula para a equação de Shroedinger, chegando em 6.6. Logo:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\beta\hbar^4 k^4}{3m} = E,$$

com $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} + \beta A$, temos:

$$\cancel{\frac{2mE}{\hbar^2}} + \beta A + \frac{2\beta\hbar^2}{3} \left(\frac{2mE}{\hbar^2} + \beta A \right)^2 = \cancel{\frac{2mE}{\hbar^2}},$$

$$A + \frac{2\hbar^2}{3} \left(\frac{4m^2 E^2}{\hbar^4} + \frac{2\beta A m E}{\hbar^2} \right) = 0,$$

$$A \left(1 + \frac{8\beta m E}{3} \right) = -\frac{8m^2 E^2}{3\hbar^2},$$

$$A = -\frac{8m^2 E^2}{3\hbar^2} \left(1 + \frac{8\beta m E}{3} \right)^{-1}.$$

Fazendo uma expansão em séries, temos:

$$A = -\frac{8m^2 E^2}{3\hbar^2} \left(1 - \frac{8\beta m E}{3} \right).$$

O vetor de onda fica:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{8\beta m^2 E^2}{3\hbar^2} \left(1 - \frac{8\beta m E}{3} \right),$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{8\beta m^2 E^2}{3\hbar^2} = \frac{2mE}{\hbar^2} \left(1 - \frac{4\beta m E}{3} \right),$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \left(1 - \frac{4\beta m E}{3} \right)^{1/2}.$$

Expandindo em séries:

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \left(1 - \frac{2\beta m E}{3} \right). \quad (6.8)$$

Este resultado será de grande importância, pois esperamos que esse seja o argumento da exponencial que é solução da equação de Schroedinger modificada. Para essa demonstração desprezamos todos os termos de ordem igual ou superior a β^2 , mesmo dentro da raiz quadrada pois a solução da equação de Schroedinger possuirá termos de ordem k^2 e k^4 . Além disso, usamos a expansão em séries do tipo $(1 + X)^n = 1 + nX + \frac{n(n-1)X^2}{2!} + \dots$ para expressões de ordem β .

6.2 Soluções da Equação de Schroedinger

Primeiramente vamos aplicar a técnica de separação de variáveis para termos equações diferenciais com variáveis de quase-posição e tempo. Seja $\Psi(x, t) = \psi(x)\varphi(t)$, assim ao dividirmos todos os termos de (6.7), teremos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{\beta \hbar^4}{3m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^4}{dx^4} \psi(x) = i\hbar \frac{1}{\varphi(t)} \frac{d}{dt} \varphi(t). \quad (6.9)$$

O lado esquerdo desta equação não depende de t e o lado direito não depende de x , portanto essa igualdade só é satisfeita se os termos forem iguais a uma constante. Como já sabemos

da teoria ordinária, essa constante é a energia associada ao estado $|\Psi\rangle$. Logo, temos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{\beta \hbar^4}{3m} \frac{d^4}{dx^4} \psi(x) = E\psi(x), \quad (6.10)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \varphi(t) = E\varphi(t). \quad (6.11)$$

Vamos encontrar soluções que satisfaçam essas equações diferenciais e interpretá-las do ponto de vista físico.

6.2.1 Solução para a Equação Temporal

A equação diferencial dependente do tempo foi descrita anteriormente e é dada por:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \varphi(t) = E\varphi(t).$$

Essa equação diferencial possui uma simples solução dada por:

$$\varphi(t) = e^{-iEt/\hbar}. \quad (6.12)$$

6.2.2 Solução para a Equação em Quase-posição

A equação diferencial para a função de onda na representação de quase-posição:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{\beta \hbar^4}{3m} \frac{d^4}{dx^4} \psi(x) = E\psi(x).$$

Fazendo $\psi(x) = e^{\mu x}$, temos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \mu^2 + \frac{\beta \hbar^4}{3m} \mu^4 = E. \quad (6.13)$$

Fazendo uma redução no grau da equação com $b = \mu^2$ e rearranjando os coeficientes, temos:

$$\frac{2\beta \hbar^2}{3} \lambda^2 - \lambda - \frac{2mE}{\hbar^2} = 0. \quad (6.14)$$

Logo:

$$\lambda = \frac{3}{4\beta \hbar^2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{16}{3} \beta m E} \right] \approx \frac{3}{4\beta \hbar^2} \left[1 \pm \left(1 + \frac{8}{3} \beta m E + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2} \right) \frac{16 \times 16}{9} \beta^2 m^2 E^2 \right) \right]. \quad (6.15)$$

Note que o termo β^2 não foi desprezado por conta do denominador a frente do colchetes. Finalmente:

$$\lambda \approx \frac{3}{4\beta\hbar^2} \left[1 \pm \left(1 + \frac{8}{3}\beta mE - \frac{32}{9}\beta^2 m^2 E^2 \right) \right]. \quad (6.16)$$

Resolvendo para λ , teremos as soluções:

$$\lambda_+ = \frac{3}{2\beta\hbar^2} \left[1 + \frac{4}{3}\beta mE - \frac{16}{9}\beta^2 m^2 E^2 \right]. \quad (6.17)$$

$$\lambda_- = \frac{3}{4\beta\hbar^2} \left[-\frac{8}{3}\beta mE + \frac{32}{9}\beta^2 m^2 E^2 \right] = -\frac{2mE}{\hbar} \left(1 - \frac{4}{3}\beta mE \right). \quad (6.18)$$

Queremos o parâmetro $\mu = \sqrt{\mu}$, então:

$$\mu_+ = \pm \sqrt{\frac{3}{2\beta\hbar^2}} \sqrt{1 + \frac{4}{3}\beta mE - \frac{32}{9}\beta^2 m^2 E^2} \approx \pm \sqrt{\frac{3}{2\beta\hbar^2}} \left(1 + \frac{2}{3}\beta mE - \frac{16}{9}\beta^2 m^2 E^2 \right) \quad (6.19)$$

$$\mu_- = \pm \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar}} \sqrt{\left(1 - \frac{4}{3}\beta mE \right)} \approx \pm \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar}} \left(1 - \frac{2}{3}\beta mE \right) \quad (6.20)$$

Assim, as soluções de nossa equação diferencial ficam dadas por:

$$\psi(x) = Ae^{\mu_+ x} + Be^{-\mu_+ x} + Ce^{\mu_- x} + De^{-\mu_- x}. \quad (6.21)$$

É interessante notar alguns aspectos dessa solução. Ela apresenta uma parte que é oscilatória e que está em acordo com a teoria ordinária, além do fato de que se tomamos o limite $\beta \rightarrow 0$ recobramos os resultados conhecidos da literatura [16]. As exponenciais reais são a novidade dessa solução, pois não existem na teoria ordinária [17–20]. É possível perceber facilmente que elas se anulam nas extremidades $x \rightarrow \pm\infty$, mas que se tornam muito grandes quando $\beta \rightarrow 0$.

É importante, ainda, notar que as exponenciais oscilatórias tem como argumento o termo $\mu_- = \pm \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar}} \left(1 - \frac{2}{3}\beta mE \right)$ que é exatamente o valor de k em 6.8. Uma análise rápida da solução 6.21 mostra que a solução $e^{\mu_+ x}$ diverge quando $x \rightarrow \infty$, o que implica que devemos fazer $A = 0$. Já a solução $e^{-\mu_+ x}$ somente é apreciável para valores muito pequenos de x , portanto tendo uma contribuição desprezível para a propagação da partícula, exceto para valores muito pequenos de x . Assim:

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad (6.22)$$

o que corresponde a considerarmos somente as soluções oscilatórias.

6.3 Equação da Continuidade

Um dos grandes sucessos da equação de Schroedinger é a existência de uma densidade de probabilidade positiva definida. Num primeiro momento não esperamos que correções na ordem de β quebre esse resultado. Portanto vamos encontrar a equação da continuidade para a equação de Schroedinger num cenário de comprimento mínimo.

Vamos observar isso agora! Consideremos as equações de Schroedinger para os campos Ψ e Ψ^* :

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} \Psi + \frac{\beta}{3m} \hbar^4 \partial_x^4 \Psi &= i\hbar \partial_t \Psi \\ -\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} \Psi^* + \frac{\beta}{3m} \hbar^4 \partial_x^4 \Psi^* &= -i\hbar \partial_t \Psi^* \end{aligned}$$

Multiplicando as equações pelos campos complexos conjugados e subtraindo as duas equações, temos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (\Psi^* \partial_x^2 \Psi - \Psi \partial_x^2 \Psi^*) + \frac{\beta}{3m} \hbar^4 (\Psi^* \partial_x^4 \Psi - \Psi \partial_x^4 \Psi^*) = i\hbar (\Psi^* \partial_t \Psi + \Psi \partial_t \Psi^*) \quad (6.23)$$

Queremos uma divergência dos dois lados da igualdade. Assim sendo vamos trabalhar com os quatro termos separadamente.

- $\Psi^* \partial_x^2 \Psi - \Psi \partial_x^2 \Psi^*$:

$$\Psi^* \partial_x^2 \Psi - \Psi \partial_x^2 \Psi^* = \partial_x (\Psi^* \partial_x \Psi) - \partial_x \Psi^* \partial_x \Psi - \partial_x (\Psi \partial_x \Psi^*) - \partial_x \Psi \partial_x \Psi^*$$

$$\Psi^* \partial_x^2 \Psi - \Psi \partial_x^2 \Psi^* = \partial_x (\Psi^* \partial_x \Psi - \Psi \partial_x \Psi^*);$$

- $\Psi^* \partial_x^4 \Psi - \Psi \partial_x^4 \Psi^*$:

$$\Psi^* \partial_x^4 \Psi - \Psi \partial_x^4 \Psi^* = \partial_x (\Psi^* \partial_x^3 \Psi) - \partial_x \Psi^* \partial_x^3 \Psi - \partial_x (\Psi \partial_x^3 \Psi^*) + \partial_x \Psi \partial_x^3 \Psi^*,$$

$$\Psi^* \partial_x^4 \Psi - \Psi \partial_x^4 \Psi^* = \partial_x (\Psi^* \partial_x^3 \Psi) - \partial_x (\Psi^* \partial_x^2 \Psi) + \partial_x^2 \Psi^* \partial_x^2 \Psi - \partial_x (\Psi \partial_x^3 \Psi^*) + \partial_x (\Psi \partial_x^2 \Psi^*) - \partial_x^2 \Psi \partial_x^2 \Psi^*,$$

$$\Psi^* \partial_x^4 \Psi - \Psi \partial_x^4 \Psi^* = \partial_x (\Psi^* \partial_x^3 \Psi - \Psi^* \partial_x^2 \Psi - \Psi \partial_x^3 \Psi^* + \Psi \partial_x^2 \Psi^*);$$

- $\Psi^* \partial_t \Psi + \Psi \partial_t \Psi^*$:

$$\Psi^* \partial_t \Psi + \Psi \partial_t \Psi^* = \partial_t (\Psi^* \Psi);$$

Substituindo os resultados em cada termo de 6.23, temos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x(\Psi^*\partial_x\Psi - \Psi\partial_x\Psi^*) + \frac{\beta}{3m}\hbar^4\partial_x(\Psi^*\partial_x^3\Psi - \Psi^*\partial_x^2\Psi - \Psi\partial_x^3\Psi^* + \Psi\partial_x^2\Psi^*) = i\hbar\partial_t(\Psi^*\Psi). \quad (6.24)$$

Rearranjando:

$$\partial_x \left[\frac{i\hbar}{2m}(\Psi^*\partial_x\Psi - \Psi\partial_x\Psi^*) - i\frac{\beta}{3m}\hbar^3\partial_x(\Psi^*\partial_x^3\Psi - \Psi^*\partial_x^2\Psi - \Psi\partial_x^3\Psi^* + \Psi\partial_x^2\Psi^*) \right] = \partial_t(\Psi^*\Psi) \quad (6.25)$$

e aqui já podemos retirar a corrente de probabilidade e a densidade de probabilidade:

$$J(x, t) = \frac{i\hbar^2}{2m}(\Psi^*\partial_x\Psi - \Psi\partial_x\Psi^*) - i\frac{\beta}{3m}\hbar^4\partial_x(\Psi^*\partial_x^3\Psi - \Psi^*\partial_x^2\Psi - \Psi\partial_x^3\Psi^* + \Psi\partial_x^2\Psi^*), \quad (6.26)$$

$$\rho(x, t) = \Psi^*\Psi. \quad (6.27)$$

$$\partial_x \left[\frac{i\hbar}{2m}(\Psi^*\partial_x\Psi - \Psi\partial_x\Psi^*) - i\frac{\beta}{3m}\hbar^3\partial_x(\Psi^*\partial_x^3\Psi - \partial_x\Psi^*\partial_x^2\Psi - \Psi\partial_x^3\Psi^* + \partial_x\Psi\partial_x^2\Psi^*) \right] = \partial_t(\Psi^*\Psi), \quad (6.28)$$

e aqui já podemos retirar a corrente de probabilidade e a densidade de probabilidade:

$$J(x, t) = -\frac{i\hbar^2}{2m}(\Psi^*\partial_x\Psi - \Psi\partial_x\Psi^*) + ni\frac{\beta}{3m}\hbar^4\partial_x(\Psi^*\partial_x^3\Psi - \partial_x\Psi^*\partial_x^2\Psi - \Psi\partial_x^3\Psi^* + \partial_x\Psi\partial_x^2\Psi^*), \quad (6.29)$$

$$\rho(x, t) = \Psi^*\Psi. \quad (6.30)$$

Esses resultados devem ser consistentes também via o Teorema de Noether, portanto precisamos encontrar uma forma de utilizá-lo para darmos consistência ao que já fizemos. No entanto o Teorema de Noether precisa ser adaptado por termos uma equação com derivadas de ordem mais alta o que impossibilita sua aplicação na forma usual.

Capítulo 7

Teoria Clássica de Campos em Segunda Ordem

7.1 Introdução

Ao estudarmos a teoria clássica de campos nos ocupamos de estudar a variação da ação de uma densidade de Lagrangiana. Para isso, propomos uma densidade de lagrangiana que depende apenas dos campos e de suas derivadas em primeira ordem no espaço e no tempo. Essa proposta se faz eficiente pelo fato de termos uma energia que depende do quadrado do momento que, quando transformado em operador, se torna uma derivada em segunda ordem na posição.

Ao estudarmos a equação de Schroedinger num cenário de comprimento mínimo, observamos que a correção em β adiciona termos de derivada em quarta ordem, o que torna inviável a utilização da construção de uma densidade de lagrangiana proposta para teorias que dependem apenas de derivadas em segunda ordem na posição. É necessário, então, revermos a teoria para a utilização de uma densidade de lagrangiana que dependa de termos de derivadas mais altas.

Com base nestas informações, no presente capítulo iremos investigar a variação da ação de uma densidade de lagrangiana que dependa dos campos e suas derivadas no espaço e no tempo de primeira e segunda ordem [21,22]. Na sequência vamos investigar o teorema de Noether nesta nova perspectiva e como podemos encontrar a densidade de hamiltoniana para os casos citados.

7.2 Lagrangiana de Segunda Ordem

Já vimos que a equação de Schroedinger no cenário de comprimento mínimo é uma equação diferencial de quarta ordem. Isso torna inviável a aplicação das equações de Euler-Lagrange no formato usual e nos obriga a buscar uma alternativa para encontrarmos a lagrangiana do sistema [23]. Para isso vamos, primeiramente, repensar a equação de Euler-

Lagrange para incluirmos termos de segunda ordem.

Vamos considerar uma densidade de lagrangiana que dependa de derivadas de segunda ordem. Assim

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_\mu^2 \phi). \quad (7.1)$$

O princípio de mínima ação reza que pequenas variações da ação deve ser nula, o que faz que tenhamos:

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \int d^3x \, dt \, \delta \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_\mu^2 \phi) = 0. \quad (7.2)$$

Variando a lagrangiana:

$$\delta \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_\mu^2 \phi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \partial_\mu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \delta \partial_\mu^2 \phi. \quad (7.3)$$

Trabalhando os termos utilizando integração por partes, temos:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_\mu^2 \phi) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \\ &\quad \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \partial_\mu \delta \phi \right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \right) \partial_\mu \delta \phi, \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_\mu^2 \phi) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \\ &\quad \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \partial_\mu \delta \phi \right) - \partial_\mu \left[\left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \right) \delta \phi \right] + \left(\partial_\mu^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \right) \delta \phi. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Voltando à variação da ação, temos:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int d^3x \int_{t_1}^{t_2} dt \, \delta \phi \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} + \partial_\mu^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \right\} + \\ &\quad \int d^3x \int_{t_1}^{t_2} dt \, \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \delta \partial_\mu \phi - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \right) \delta \phi \right\} = 0. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Fixando as condições de fronteira com $\phi(t_1) = \phi(t_2) = 0$ e $\dot{\phi}(t_1) = \dot{\phi}(t_2) = 0$, ficamos com:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} + \partial_\mu^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} = 0. \quad (7.7)$$

Essa é a equação de Euler-Lagrange corrigida para termos com derivada de segunda ordem.

7.3 O Teorema de Noether com Derivadas de Segunda Ordem

A modificação da equação de Euler-Lagrange provoca uma nova dependência da lagrangiana com termos de derivadas de segunda ordem. Desta forma, o teorema de Noether ordinário precisa ser revisto para se adequar a essa nova realidade. Para isso vamos refazer este teorema incluindo uma dependência na lagrangiana para termos de segunda ordem de derivada.

Vamos substituir a variação da densidade de lagrangiana 7.5 na variação da ação dada pela equação 3.26:

$$\delta W = \int d^4x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} + \partial_\mu^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \right) \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \right) \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) \right].$$

O primeiro termo entre parênteses se anula devida à equação de Euler-Lagrange 7.7. Assim,

$$\delta W = \int d\sigma_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \partial_\mu \delta \phi - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \right) \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right]. \quad (7.8)$$

Usando (3.22), onde $\Delta \phi(x) = \delta \phi(x) + (\partial_\mu \phi) \delta \phi$, teremos:

$$\delta W = \int d\sigma_\mu \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \right) \right) \Delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \partial_\mu \Delta \phi + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) + \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \right) (\partial_\nu \phi) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \partial_\mu (\partial_\nu \phi) + \delta_{\mu\nu} \mathcal{L} \right) \delta x^\nu \right].$$

Daqui podemos retirar a corrente conservada descrita por:

$$f^\mu = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \right) \right) \Delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \partial_\mu (\Delta \phi) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \partial_\mu (\partial_\nu \phi) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \right) (\partial_\nu \phi) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) \delta x^\nu,$$

e o tensor momento energia como:

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \partial_\mu (\partial^\nu \phi) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \right) \partial^\nu \phi - \delta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (7.9)$$

De posse dessas equações podemos encontrar as quantidades conservadas.

7.4 Hamiltoniana

É de extrema importância a apresentação da hamiltoniana de um sistema físico que descreva um campo. Vamos considerar uma hamiltoniana que dependa dos campos, suas derivadas primeira e segunda e de dois momentos conjugados independentes, por conta da dependência das derivadas de segunda ordem. Para fazermos essa construção, vamos considerar o Teorema de Ostrogradsky [24], que é uma reconstrução da teoria hamiltoniana da mecânica para lagrangianas de ordens superiores. No nosso caso, evidentemente, vamos fazer essa construção para derivadas de segunda ordem. A equação de Euler-Lagrange modificada 7.7:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} + \partial_\mu^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} = 0.$$

A equação de movimento que satisfaz lagrangianas como essa pode ter até quatro soluções independentes, sendo necessário quatro condições para termos uma solução completa (condições iniciais ou condições de fronteira). Por conta disso, devemos ter quatro campos independentes para fazerem papel das coordenadas canônicas. Esses campos podem ser:

$$\Phi_1 \equiv \phi \quad , \quad \pi_1 \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{\phi}}, \quad (7.10)$$

$$\Phi_2 \equiv \phi^* \quad , \quad \pi_2 \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{\phi}}. \quad (7.11)$$

A Hamiltoniana de Ostrogradsky é obtida através de uma transformação generalizada da Legendre, que podemos definir como:

$$\mathcal{H}(\Phi_1, \Phi_2, \pi_1, \pi_2) \equiv \sum_{i=1}^2 \pi_i \frac{d^i}{dt^i} \Phi_i - \mathcal{L}, \quad (7.12)$$

com equações de movimento:

$$\Phi_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_i}, \quad (7.13)$$

$$\dot{\pi}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_i}. \quad (7.14)$$

Construímos uma densidade de hamiltoniana que, quando não há dependência temporal na densidade de lagrangiana, é exatamente uma quantidade conservada do teorema de Noether, ou seja, a energia total do sistema.

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_\mu^2 \phi, \pi_1, \pi_2). \quad (7.15)$$

No caso ordinário obtemos a Hamiltoniana de um sistema através de uma transformação de Legendre. Para nos atender iremos modificar esta transformação incluindo o novo momento conjugado da seguinte forma:

$$\mathcal{H} = \pi_1 \partial_t \phi + \pi_2 \partial_t^2 \phi + \pi_1^* \partial_t \phi^* + \pi_2^* \partial_t^2 \phi^* - \mathcal{L}. \quad (7.16)$$

Para encontrarmos os momentos conjugados vamos recorrer ao Teorema de Ostrogradsky que dá conta de teorias com lagrangianas de ordens superiores. Aqui os momentos conjugados são dados por:

$$\pi_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t^2 \phi)}, \quad (7.17)$$

e

$$\pi_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t^2 \phi)}. \quad (7.18)$$

Além disso também podemos encontrar a Hamiltoniana a partir do tensor momento-energia, uma vez que a componente Θ_{tt} do tensor é exatamente a energia total do sistema.

Capítulo 8

A Equação de Schroedinger num Cenário de Comprimento Mínimo em uma Teoria de Campos

8.1 Introdução

Já vimos qual a preocupação em se quantizar campos e todo o processo necessário para esse fim. Vimos também o comportamento da equação de Schroedinger diante de uma teoria quântica de campos e como ela pode ser usada para uma teoria com bósons. Agora nos interessa revisitar todas essas ideias num cenário de comprimento mínimo.

Neste capítulo vamos refazer todos os passos da teoria quântica de campos, especificamente do campo de Schroedinger, inserindo o comprimento mínimo. Esse formalismo se faz necessário para uma construção de uma teoria de campos num cenário de comprimento mínimo que não se limite apenas a modificar a quantização dos campos, mas sim a preocupação com todos os outros aspectos da teoria, como as quantidades conservadas.

Na seção a seguir vamos trabalhar a lagrangiana da equação de Schroedinger num cenário de comprimento mínimo; a seguir vamos demonstrar a equação da continuidade para o cenário de comprimento mínimo e por fim vamos calcular a hamiltoniana a partir do campo Ψ e do seu momento conjugado π e pelo teorema de Noether para teorias de segunda ordem.

8.2 Lagrangiana da Equação de Schroedinger

Na TQC ordinária sabemos que todos os nossos estudos começam com a Lagrangiana do campo. A partir dela encontramos a hamiltoniana (total e a densidade), discutimos as quantidades conservadas através do teorema de Noether e analisamos a dinâmica da equação diferencial que descreve nosso campo.

As equações de Euler-Lagrange agora estão modificadas por estarmos tratando de

uma equação diferencial de ordem superior a 2. Assim, precisamos de uma Lagrangiana que quando aplicada em (7.7) tenhamos a nossa equação diferencial (6.7)

$$\left[-\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} + \frac{\beta}{3m} \hbar^4 \partial_x^4 \right] \Psi(x, t) = i\hbar \partial_t \Psi(x, t)$$

e a equação para o campo conjugado Ψ^* :

$$\left[-\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} + \frac{\beta}{3m} \hbar^4 \partial_x^4 \right] \Psi^*(x, t) = -i\hbar \partial_t \Psi^*(x, t).$$

Uma Lagrangiana que produz essas equações pode ser descrita como a seguir:

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x \Psi^* \partial_x \Psi - \frac{\beta}{3m} \hbar^4 \partial_x^2 \Psi^* \partial_x^2 \Psi + \frac{i\hbar}{2} (\partial_t \Psi) \Psi^* - \frac{i\hbar}{2} (\partial_t \Psi^*) \Psi. \quad (8.1)$$

Vamos verificar que essa lagrangiana produz a equação de Schroedinger modificada. A equação (7.7) é:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} + \partial_\mu^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \Psi)} = 0.$$

Para o campo complexo temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*} &= \frac{i\hbar}{2} (\partial_t \Psi), & \partial_x^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x^2 \Psi^*)} &= \frac{\beta}{3m} \hbar^4 \partial_x^4 \Psi, \\ \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \Psi^*)} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x \Psi, & \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \Psi^*)} &= \frac{i\hbar}{2} \Psi, \\ \partial_t^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t^2 \Psi^*)} &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando na equação de Euler-Lagrange de segunda ordem, temos:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} + \frac{\beta}{3m} \hbar^4 \partial_x^4 \right] \Psi(x, t) = i\hbar \partial_t \Psi(x, t)$$

Para o campo Ψ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} &= \frac{i\hbar}{2} (\partial_t \Psi^*), & \partial_x^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x^2 \Psi)} &= \frac{\beta}{3m} \hbar^4 \partial_x^4 \Psi^*, \\ \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \Psi)} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x \Psi^*, & \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \Psi)} &= \frac{i\hbar}{2} \Psi^*, \end{aligned}$$

$$\partial_t^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t^2 \Psi^*)} = 0.$$

Aplicando na equação de Euler-Lagrange de segunda ordem, temos:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} + \frac{\beta}{3m} \hbar^4 \partial_x^4 \right] \Psi^*(x, t) = -i\hbar \partial_t \Psi^*(x, t).$$

8.3 Equação da Continuidade pelo Teorema de Noether

Para tratarmos deste tema vamos considerar apenas as transformações internas ($\delta x^\nu = 0$) de um campo na equação (7.3). Assim, ficamos com

$$f^\mu = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \left(\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \right) \right) \Delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \phi)} \partial_\mu \Delta \phi.$$

Como o campo Ψ e seu complexo Ψ^* são independentes, então precisaremos dos dois campos nesta equação. Para isso vamos propor uma transformação do tipo $\Psi \rightarrow e^{-i\theta} \Psi$. Assim, teremos:

$$f^\mu = -i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} \Psi - \left(\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \Psi)} \right) \Psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi^*)} \Psi^* + \left(\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \Psi^*)} \right) \Psi^* \right) - i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \Psi)} \partial_\mu \Psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu^2 \Psi^*)} \partial_\mu \Psi^* \right).$$

Para $\rho = f_t$ só ficarão os termos de derivada em primeira ordem. Assim:

$$\rho = -i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \Psi)} \Psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \Psi^*)} \Psi^* \right). \quad (8.2)$$

Usando a lagrangiana 8.1:

$$\rho = \frac{i\hbar}{2} (\partial_t \Psi) \Psi^* + \frac{i\hbar}{2} (\partial_t \Psi^*) \Psi.$$

Logo:

$$\rho = f^t = \Psi^* \Psi \quad (8.3)$$

Note que este resultado está em acordo com o da equação (6.30).

A densidade de corrente $f^x = J$ fica:

$$f_x = -i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \Psi)} \Psi - \left(\partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x^2 \Psi)} \right) \Psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \Psi^*)} \Psi^* + \left(\partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x^2 \Psi^*)} \right) \Psi^* \right) - i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x^2 \Psi)} \partial_x \Psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x^2 \Psi^*)} \partial_x \Psi^* \right).$$

Novamente usando a lagrangiana 8.1:

$$f_x = -i \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x \Psi^* \Psi + \left(\partial_x \frac{\beta}{3m} \hbar^4 \partial_x^2 \Psi^* \right) \Psi + \frac{\hbar^2}{2m} \partial_x \Psi \Psi^* - \left(\partial_x \frac{\beta}{3m} \hbar^4 \partial_x^2 \Psi \right) \Psi^* \right) - i \left(-\frac{\beta}{3m} \hbar^4 \partial_x^2 \Psi^* \partial_x \Psi + \frac{\beta}{3m} \hbar^4 \partial_x^2 \Psi \partial_x \Psi^* \right),$$

$$J = f_x = -\frac{i\hbar^2}{2m} (\Psi^* \partial_x \Psi - \Psi \partial_x \Psi^*) - \frac{i\beta\hbar^4}{3m} (\partial_x \Psi^* \partial_x^2 \Psi - \partial_x \Psi \partial_x^2 \Psi^* - \Psi^* \partial_x^3 \Psi + \Psi \partial_x^3 \Psi^*). \quad (8.4)$$

Pela equação da continuidade sabemos que $\partial_t \rho + \partial_x J = 0$, temos:

$$\partial_t (\Psi^* \Psi) + \partial_x \left(-\frac{i\hbar^2}{2m} (\Psi^* \partial_x \Psi - \Psi \partial_x \Psi^*) - \frac{i\beta\hbar^4}{3m} (\partial_x \Psi^* \partial_x^2 \Psi - \partial_x \Psi \partial_x^2 \Psi^* - \Psi^* \partial_x^3 \Psi + \Psi \partial_x^3 \Psi^*) \right) = 0. \quad (8.5)$$

Essa equação está em acordo com a equação (6.30), derivada apenas da equação de Schroedinger num cenário de comprimento mínimo.

8.4 Hamiltoniana da Equação de Schroedinger num Cenário de Comprimento Mínimo

Já vimos que a densidade de hamiltoniana da equação de Schroedinger num cenário de comprimento mínimo é dada pela equação 7.12, que é:

$$\mathcal{H}(\Phi_1, \Phi_2, \pi_1, \pi_2) \equiv \sum_{i=1}^2 \pi_i \frac{d^i}{dt^i} \Phi_i - \mathcal{L}.$$

Precisamos de dois campos independentes para construirmos nossa hamiltoniana. Para isso, utilizemos as relações 7.10 e 7.11:

$$\Phi_1 = \Psi \quad , \quad \pi_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}}, \quad (8.6)$$

$$\Phi_2 = \Psi^* \quad , \quad \pi_2 = 0. \quad (8.7)$$

Aqui utilizamos o fato de que a equação de Schroedinger num cenário de comprimento mínimo não possui termos com derivadas temporais de ordem superiores. Utilizando a hamiltoniana 7.12, temos:

$$\mathcal{H} = \pi_1\Phi_1 + \pi_2\Phi_2 + \pi_1^*\Phi_1^* + \pi_2^*\Phi_2^* - \mathcal{L} \quad (8.8)$$

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} \dot{\Psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*} \dot{\Psi}^* - \mathcal{L}. \quad (8.9)$$

Utilizando a lagrangiana 8.1, temos:

$$\mathcal{H} = \frac{i\hbar}{2} \Psi^* \dot{\Psi} - \frac{i\hbar}{2} \dot{\Psi}^* \Psi - \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x \Psi^* \partial_x \Psi - \frac{\beta}{3m} \hbar^4 \partial_x^2 \Psi^* \partial_x^2 \Psi + \frac{i\hbar}{2} (\partial_t \Psi) \Psi^* - \frac{i\hbar}{2} (\partial_t \Psi^*) \Psi \right). \quad (8.10)$$

Assim:

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \partial_x \Psi^* \partial_x \Psi + \frac{\beta}{3m} \hbar^4 \partial_x^2 \Psi^* \partial_x^2 \Psi. \quad (8.11)$$

Temos interesse também em discutirmos a hamiltoniana total do sistema. Para isso, devemos integrar a densidade de hamiltoniana através de:

$$H = \int dx (1 + \beta p^2) \mathcal{H}. \quad (8.12)$$

Para calcularmos essa quantidade vamos, primeiramente, de acordo com a equação 6.22, expandir nossas funções de onda em ondas planas, dadas por:

$$\Psi(x, t) = \sum a_n(t) u_n(x), \quad (8.13)$$

$$\Psi^*(x, t) = \sum a_{n'}^*(t) u_{n'}^*(x). \quad (8.14)$$

É importante notar que utilizamos apenas a parte oscilatória da solução geral dada em 6.21. As soluções com exponenciais reais são desprezadas, pois o argumento da exponencial depende do inverso de β , o que faz com que essas soluções sejam apreciáveis para pequenos valores da posição x .

As funções $u(x)$ são soluções da equação de Schroedinger num cenário de comprimento mínimo, dada por [25]:

$$u_n(x) = \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{2\pi\hbar(1 + \beta p^2)}}, \quad (8.15)$$

$$k_n = \sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}} \left(1 + \frac{2}{3}\beta m E_n\right).$$

Assim:

$$\begin{aligned} \partial_x \Psi(x, t) &= ik_n \sum a_n(t) u_n(x), & \partial_x^2 \Psi(x, t) &= -k_n^2 \sum a_n(t) u_n(x), \\ \partial_x \Psi^*(x, t) &= -ik_{n'} \sum a_{n'}^*(t) u_{n'}^*(x), & \partial_x^2 \Psi^*(x, t) &= -k_{n'}^2 \sum a_{n'}^*(t) u_{n'}^*(x), \end{aligned}$$

Substituindo na densidade de hamiltoniana, temos:

$$\begin{aligned} H &= \int dx (1 + \beta p^2) \left[\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x \Psi^* \partial_x \Psi + \frac{\beta}{3m} \hbar^4 \partial_x^2 \Psi^* \partial_x^2 \Psi \right], \\ H &= \int dx (1 + \beta p^2) \left[\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{n, n'} k_n k_{n'} a_{n'}^*(t) a_n(t) u_{n'}^*(x) u_n(x) + \frac{\beta}{3m} \hbar^4 \sum_{n, n'} k_n^2 k_{n'}^2 a_{n'}^*(t) a_n(t) u_{n'}^*(x) u_n(x) \right], \\ H &= \sum_{n, n'} \left(\frac{\hbar^2}{2m} k_n k_{n'} + \frac{\beta}{3m} \hbar^4 k_n^2 k_{n'}^2 \right) a_{n'}^*(t) a_n(t) \int dx (1 + \beta p^2) u_{n'}^*(x) u_n(x). \end{aligned}$$

No caso ordinário temos:

$$\int dx u_{n'}^*(x) u_n(x) = \delta_{n, n'}.$$

Utilizando as mesmas ideias, chegamos em:

$$\int dx (1 + \beta p^2) u_{n'}^*(x) u_n(x) = \delta_{n, n'}.$$

Dessa forma, nossa hamiltoniana fica dada por:

$$H = \sum_n \left(\frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 + \frac{\beta}{3m} \hbar^4 k_n^4 \right) a_n^*(t) a_n(t). \quad (8.16)$$

Em termos de níveis de energia, podemos escrever:

$$\mathcal{E}_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 + \frac{\beta}{3m} \hbar^4 k_n^4 = \hbar \omega_n. \quad (8.17)$$

Substituindo (8.17) em (8.16), temos:

$$H = \sum_n \hbar \omega_n a_n^*(t) a_n(t). \quad (8.18)$$

8.4.1 Hamiltoniana a partir do Teorema de Noether

Para encontrarmos a hamiltoniana da equação de Schroedinger a partir do teorema de Noether modificado basta utilizarmos o tensor momento energia e calcularmos a componente Θ_{tt} . Assim, como o tensor momento energia é dado pela equação 7.9:

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu^2 \phi)} \partial_\mu(\partial^\nu \phi) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu^2 \phi)} \right) \partial^\nu \phi - \delta^{\mu\nu} \mathcal{L},$$

a componente desejada fica:

$$\begin{aligned} \Theta^{tt} = & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \Psi)} \partial^t \Psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t^2 \Psi)} \partial^t(\partial_t \Psi) - \left(\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t^2 \Psi)} \right) (\partial^t \Psi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \Psi^*)} \partial^t \Psi^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t^2 \Psi^*)} \partial^t(\partial_t \Psi^*) - \\ & - \left(\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t^2 \Psi^*)} \right) (\partial^t \Psi^*) - \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Usando a lagrangiana 8.1 nesta equação, também chegamos a

$$\begin{aligned} \Theta_{tt} = & \frac{i\hbar}{2} \Psi^* \partial_t \Psi - \frac{i\hbar}{2} \Psi \partial_t \Psi^* - \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x \Psi^* \partial_x \Psi - \frac{\beta}{3m} \hbar^4 \partial_x^2 \Psi^* \partial_x^2 \Psi + \frac{i\hbar}{2} (\partial_t \Psi) \Psi^* - \frac{i\hbar}{2} (\partial_t \Psi^*) \Psi \right], \\ \mathcal{H} = & \frac{\hbar^2}{2m} \partial_x \Psi^* \partial_x \Psi + \frac{\beta \hbar^4}{3m} \partial_x^2 \Psi^* \partial_x^2 \Psi. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Como esperávamos a mesma hamiltoniana foi obtida, mostrando a consistência do método que utilizamos. Podemos concluir que os métodos que utilizamos com a reformulação das equações de Euler-Lagrange e o teorema de Noether se fizeram eficazes em discutir o campo de Schroedinger num cenário de comprimento mínimo. Todas as equações que obtivemos foram corrigidas em fator de β de modo que quando $\beta \rightarrow 0$ a teoria ordinária é recobrada.

Capítulo 9

Segunda Quantização da Equação de Schroedinger num Cenário de Comprimento Mínimo

9.1 Introdução

A segunda quantização da equação de Schroedinger pode ser feita com a transformação dos coeficientes a_n da expansão 8.13 em operadores. Ao fazermos isso precisamos impor uma relação de comutação entre \hat{a}_n e \hat{a}_n^\dagger . Feito isso, podemos mostrar que esses coeficientes funcionam como operadores de criação e aniquilação de partículas num nível de energia n .

No caso do cenário de comprimento mínimo, vamos abordar duas formas de impor a relação de comutação entre os operadores \hat{a}_n e \hat{a}_n^\dagger : uma forma idêntica ao caso ordinário e outra onde temos a presença do termo $1 + \beta p^2$.

9.2 Quantização das Funções de Ondas Planas

9.2.1 Relação de comutação $[\hat{a}_n(t), \hat{a}_{n'}^\dagger(t)] = \delta_{n,n'}$

Para quantizarmos um campo basta quantizar os coeficientes da expansão em ondas planas da função de onda que é solução da equação do campo e impor uma relação de comutação entre eles. Assim:

$$\begin{array}{ll} \Psi \rightarrow \widehat{\Psi} & \Psi^* \rightarrow \widehat{\Psi}^\dagger \\ a_n(t) \rightarrow \hat{a}_n(t) & a_n^*(t) \rightarrow \hat{a}_n^\dagger(t) \end{array}$$

E assim:

$$\widehat{\Psi}(x, t) = \sum_n \hat{a}_n u_n(x), \quad (9.1)$$

$$\widehat{\Psi}^\dagger(x, t) = \sum_n \hat{a}_n^\dagger u_n^*(x). \quad (9.2)$$

Precisamos impor uma relação de comutação entre os operadores $\hat{a}_n(t)$ e $\hat{a}_n^\dagger(t)$. Por conveniência vamos impor a relação a seguir:

$$[\hat{a}_n(t), \hat{a}_{n'}^\dagger(t)] = \delta_{n,n'}. \quad (9.3)$$

É importante ressaltar que alguns autores iniciam a análise de mecânica quântica num cenário de comprimento mínimo alterando apenas a relação de comutação entre os operadores. Como veremos a seguir, uma escolha diferente da que fizemos tem por consequência um operador número de partícula fracionado o que não faz sentido uma vez que o número de partícula deve ser inteiro.

Reescrevendo a hamiltoniana total, agora como operador de energia, temos:

$$H = \sum_n \mathcal{E}_n \hat{a}_n^\dagger(t) \hat{a}_n(t). \quad (9.4)$$

Note que a hamiltoniana total é dada pela soma de todas as energias das n partículas e que, portanto, a relação $\hat{a}_n^\dagger(t) \hat{a}_n(t)$ pode ser interpretada como um operador que está associado ao n -ésima partícula do sistema. Assim, vamos definir o operador número como sendo:

$$\hat{n}_n = \hat{a}_n^\dagger(t) \hat{a}_n(t), \quad (9.5)$$

de tal modo que o operador de número total de partículas fica:

$$\hat{N} = \sum_n \hat{n}_n = \sum_n \hat{a}_n^\dagger(t) \hat{a}_n(t). \quad (9.6)$$

Por conta da nossa escolha para a comutação, os operadores de criação e aniquilação terão o mesmo comportamento do caso ordinário no que diz respeito ao operador número, criação, aniquilação de partículas e como eles agem num estado.

A dinâmica dos operadores de campo é determinada pela equação de Heisenberg

$$[\hat{\Psi}, \hat{H}] = i\hbar \dot{\hat{\Psi}},$$

com

$$\hat{H} = \int dx \hat{\Psi}^\dagger(x, t) \left[\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + \frac{\beta \hbar^4}{3m} \partial_x^4}_{=D_x} \right] \hat{\Psi}(x, t).$$

$$i\hbar \dot{\hat{\Psi}} = \int dx \left[\hat{\Psi}(x', t), \hat{\Psi}^\dagger(x, t) (D_x) \hat{\Psi}(x, t) \right],$$

$$i\hbar \dot{\hat{\Psi}} = \int dx \left\{ \left[\hat{\Psi}(x', t), \hat{\Psi}^\dagger(x, t) \right] (D_x) \hat{\Psi}(x, t) + \hat{\Psi}^\dagger(x, t) (D_x) \left[\hat{\Psi}(x', t), \hat{\Psi}^\dagger(x, t) \right] \right\}$$

$$i\hbar \dot{\hat{\Psi}} = D_x \hat{\Psi}(x, t),$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + \frac{\beta \hbar^4}{3m} \partial_x^4 \right) \hat{\Psi}(x, t) = i\hbar \partial_t \hat{\Psi}(x, t).$$

A equação acima mostra que o operador de campo $\hat{\Psi}(x, t)$ satisfaz também a equação de Schroedinger modificada.

A evolução temporal de $\hat{a}_n(t)$ pode ser determinada de:

$$[\hat{a}_n, \hat{H}] = i\hbar \hat{a}_n,$$

$$i\hbar \dot{\hat{a}}_n = \sum_{n, n'} E_{n'} [\hat{a}_n, \hat{a}_{n'}^\dagger \hat{a}_{n'}]$$

$$i\hbar \dot{\hat{a}}_n = \sum_{n, n'} E_{n'} \left([\hat{a}_n, \hat{a}_{n'}^\dagger] \hat{a}_{n'} + \hat{a}_{n'}^\dagger [\hat{a}_n, \hat{a}_{n'}] \right)$$

$$i\hbar \dot{\hat{a}}_n = E_{n'} \hat{a}_n(t),$$

$$\hat{a}_n(t) = A e^{-iE_n t/\hbar},$$

com A sendo uma constante. Em $t = 0$, temos que $\hat{a}_n(0) = \hat{a}_n$. Logo:

$$\hat{a}_n(t) = \hat{a}_n e^{-iE_n t/\hbar}.$$

Vamos agora calcular a componente Θ^{tx} do tensor momento-energia, isto é, o "momento linear" total do campo. Da equação 7.9, temos:

$$\Theta^{tx} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \Psi)} \partial_x \Psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \Psi^*)} \partial_x \Psi^*,$$

$$\Theta^{tx} = -\frac{i\hbar}{2}\Psi^*\partial_x\Psi + \frac{i\hbar}{2}\Psi\partial_x\Psi^*.$$

O momento linear total é:

$$P_x = \int (1 + \beta p^2) dx \Theta^{tx}. \quad (9.7)$$

Logo:

$$P_x = -\frac{i\hbar}{2} \int (1 + \beta p^2) dx (\Psi^*\partial_x\Psi - \Psi\partial_x\Psi^*),$$

$$P_x = -\frac{i\hbar}{2} \int (1 + \beta p^2) dx \sum_{n,n'} [a_{n'}^*(t)u_{n'}^*(x)(ik_n)a_n(t)u_n(x) - a_{n'}(t)u_{n'}(x)(-ik_n')a_n^*(t)u_n^*(x)],$$

$$P_x = \sum_{n,n'} \frac{\hbar K_n}{2} a_{n'}^*(t)a_n(t) \int (1 + \beta p^2) dx u_{n'}^*(x)u_n(x) + \sum_{n,n'} \frac{\hbar K_{n'}}{2} a_{n'}(t)a_n^*(t) \int (1 + \beta p^2) dx u_n^*(x)u_{n'}(x),$$

$$P_x = \sum_{n,n'} \frac{\hbar k_n}{2} (a_n^*(t)a_n(t) + a_n a_n^*(t))$$

$$\hat{P}_x = \sum_n \frac{\hbar k_n}{2} (\hat{a}_n^\dagger(t)\hat{a}_n(t) + \hat{a}_n \hat{a}_n^\dagger(t))$$

$$\hat{P}_x = \sum_n \frac{\hbar k_n}{2} (\hat{a}_n^\dagger(t)\hat{a}_n(t) + 1 + \hat{a}_n \hat{a}_n^\dagger(t))$$

$$\hat{P}_x = \sum_n \hbar k_n \left(\hat{n}_n + \frac{1}{2} \right). \quad (9.8)$$

Note que \hat{P}_x , o momento linear do campo, não é a soma dos momentos lineares das partículas p_n , e sim dos k_n . Isso acontece porque Θ^{tx} é a quantidade conservada e são os k_n os geradores das translações espaciais e não os momentos p_n .

9.2.2 Relação de comutação $[\hat{a}_n(t), \hat{a}_{n'}^\dagger(t)] = (1 + \beta p^2) \delta_{n,n'}$

Alguns autores consideram a regra de comutação entre os operadores $\hat{a}_n(t)$ e $\hat{a}_{n'}^\dagger(t)$ como [26]:

$$[\hat{a}_n, \hat{a}_{n'}^\dagger] = (1 + \beta \hat{p}^2) \delta_{n,n'}. \quad (9.9)$$

Utilizando a demonstração para 4.23, neste caso, teremos:

$$\hat{N}(\hat{a}_n^\dagger |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle) = \sum_{n,n'} \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'} \hat{a}_n^\dagger |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle,$$

$$\hat{N}(\hat{a}_n^\dagger |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle) = \sum_{n,n'} \hat{a}_{n'}^\dagger \left((1 + \beta p^2) \delta_{n,n'} + \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'} \right) |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle,$$

$$\hat{N}(\hat{a}_n^\dagger |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle) = \sum_{n,n'} \left(\hat{a}_{n'}^\dagger (1 + \beta p^2) \delta_{n,n'} + \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'} \hat{a}_{n'} \right) |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle,$$

onde utilizamos o fato de que $[\hat{a}_n^\dagger, \hat{a}_{n'}^\dagger] = 0$. Assim:

$$\hat{N}(\hat{a}_n^\dagger |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle) = \hat{a}_n^\dagger \left((1 + \beta p^2) + N \right) |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle.$$

Com esta escolha para relação de comutação entre os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger , podemos verificar que o auto estado associado ao operador de criação não cria uma partícula no estado n . Por conta disso, tal escolha se revela insuficiente para representar um sistema físico. Por fim, no geral, podemos mostrar que é possível uma segunda quantização da equação de Shcroedinger num cenário de comprimento mínimo. Todos os resultados que encontramos recobram a teoria original quando fazemos $\beta \rightarrow 0$. Isso significa que ao incorporarmos o comprimento mínimo na teoria acabamos por fazer uma correção na teoria ordinária que é marcada por esse fator β .

Capítulo 10

Conclusão

Neste trabalho pudemos propor a introdução de uma Teoria Quântica de Campos corrigida para o cenário de comprimento mínimo. Com isso, pudemos quantizar a equação de Schroedinger no referido cenário obtendo resultados corrigidos com a presença do comprimento mínimo.

Para estudarmos a equação de Shcroedinger num cenário de comprimento mínimo, foi necessário revisar a teoria clássica de campos. Com isso, utilizamos a equação de Euler-Lagrange em segunda ordem, reescrevemos o teorema de Noether para este caso e encontramos o tensor momento-energia. Todos este ferramental está de acordo com a literatura disponível.

Os resultados obtidos são bastante satisfatórios por vários motivos. Entre eles podemos destacar o fato que a todo momento pudemos recobrar a teoria original simplesmente fazendo o termo que marca o comprimento mínimo (β) tender a zero. Construimos a equação de Schroedinger em cenário de comprimento mínimo e uma lagrangiana que produz essa equação. Encontramos a equação da continuidade pelo modo usual e via Teorema de Noether corrigido, obtendo os mesmos resultados para a corrente de densidade de probabilidade e para a densidade de probabilidade.

Também estudamos neste trabalho um importante ferramental para teorias de ordens superiores, que nos dará condições de partirmos para os campos relativísticos, como a equação de Klein-Gordon, por exemplo. Outro aspecto relevante desse trabalho se dá pelo fato de, mesmo trabalhando com a equação de Euler-Lagrange em segunda ordem e invocarmos o teorema de Ostrogradsky, não tivemos problemas com instabilidade. Esse resultado se deu por conta da dependência temporal da equação de Shcroedinger num cenário de comprimento mínimo ter sido de primeira ordem.

Também pudemos discutir a escolha para a imposição da regra de comutação entre operadores de criação e aniquilação, o que nos permitiu encontrar um operador número que cria e aniquila um número inteiro de partículas, diferente da sugestão de outros autores onde a escolha da regra de comutação produz criação e aniquilação de número de partículas fracionado [26].

Como trabalhos futuros, pretendemos rediscutir outros campos, mas propondo modificações idênticas nos operadores de translação espacial e temporal. Esta escolha nos levará a discutir em detalhes campos relativísticos em cenário de comprimento mínimo, permitindo que possamos propor correções para termos de ordem β em diferentes cenários da teoria quântica de campos.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Ozawa, "Heisenberg's original derivation of the uncertainty principle and its universally valid reformulations," *Current science*, vol. 109, 2015.
- [2] H. Snyder, "Quantized space-time," *Physical Review*, vol. 71, pp. 38–41, 1946.
- [3] S. Majid and H. Ruegg, "Bicrossproduct structure of k - Poincaré group and non-commutative geometry," *Physics Letters B*, vol. 334, pp. 348–354, 1994.
- [4] R. Eisberg, R.; Resnick, *Física Quântica*. Elsevier, 1974, vol. 1.
- [5] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe, "Quantum mechanics, volume 1," pp. 898. ISBN 0-471-16433-X. Wiley-VCH, June 1986., vol. 1, 1986.
- [6] J. Greiner, W.; Reinhardt, *Field Quantization*. Springer, 1996, vol. 1.
- [7] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2001, vol. 2.
- [8] F. Gross, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*. Wiley-VCH Verlag GmbH Co. KGaA, 2004, vol. 2.
- [9] K. Nozari and T. Azizi, "Some aspects of gravitational quantum mechanics," *General Relativity and Gravitation*, vol. 38, no. 5, pp. 735–742, 2006.
- [10] S. Hossenfelder, "Minimal length scale scenarios for quantum gravity," *Living Rev. Relativity*, vol. 16, no. 2, p. 90, 2013.
- [11] P. Pedram, "New approach to nonperturbative quantum mechanics with minimal length uncertainty," *Physical Review D*, vol. 85, 2011.
- [12] —, "A class of gup solutions in deformed quantum mechanics," 2011.
- [13] A. Kempf, G. Mangano, and R. B. Mann, "Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation," *Phys. Rev.*, vol. D52, pp. 1108–1118, 1995.
- [14] A. Etemadi and K. Nozari, "A note on Hilbert space representation of quantum mechanics with minimal length," 2014.
- [15] S. Hossenfelder, M. Bleicher, S. Hofmann, J. Ruppert, S. Scherer, and H. Stöcker, "Signatures in Planck regime," *Physical Letters D*, vol. 85, p. 575, 2003.

- [16] M. Gusson, A. Gonçalves, R. Francisco, R. Furtado, J. Fabris, and N. A., "Dirac δ -function potential in quasiposition representation of a minimal-length scenario," *The European Physical Journal C*, vol. 78, 2017.
- [17] S. Das and E. Vagenas, "Phenomenological implications of the generalized uncertainty principle," *Canadian Journal of Physics*, vol. 87, 2009.
- [18] G. Blado, V. Meyers, and C. Owens, "Quantum wells and the generalized uncertainty principle," *European Journal of Physics*, vol. 35, 2013.
- [19] M. Samar and V. Tkachuk, "Exactly solvable problems in the momentum space with a minimum uncertainty in position," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 57, 2015.
- [20] P. Pedram, "On the boundary conditions in deformed quantum mechanics with minimal length uncertainty," *Advances in High Energy Physics*, vol. 2013, 2013.
- [21] M. S.rashid and S. Khalil, "Hamiltonian description of higher order lagrangians," *International Journal of Modern Physics A*, vol. 11, 2012.
- [22] F. Urries and J. Julve, "Ostrogradski formalism for higher-derivative scalar field theories," *Journal of Physics A General Physics*, vol. 31, 1998.
- [23] R. P. Woodard, "Ostrogradsky's theorem on Hamiltonian instability," *Scholarpedia*, vol. 10, no. 8, p. 32243, 2015, revision 186559.
- [24] R. Woodard, "The theorem of ostrogradsky," 2015.
- [25] H. Shababi, P. Pedram, and W. Chung, "On the quantum mechanical solutions with minimal length uncertainty," *International Journal of Modern Physics A*, vol. 31, 2016.
- [26] T. Matsuo and Y. Shibusa, "Quantization of fields based on generalized uncertainty principle," *Modern Physics Letters A*, vol. 21, 2005.