

---

Superfícies de ângulo constante: sua  
relação com cristais líquidos e classificação  
em  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^2 \times \mathbb{R}$  e  $I \times_f \mathbb{E}^2$

*Renata Pilon Cevolani*

---



Superfícies de ângulo constante: sua relação com cristais líquidos e  
classificação em  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^2 \times \mathbb{R}$  e  $I \times_f \mathbb{E}^2$

*Renata Pilon Cevolani*

**Orientador:** *Prof. Dr. Apoenã Passos Passamani*

Dissertação apresentada ao PPGMAT-UFES como parte dos  
requisitos para obtenção do título de mestre em Matemática.

**UFES- Universidade Federal do Espírito Santo**

**Novembro/2019**



Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

P643s Pilon Cevolani, Renata, 1993-  
Superfícies de ângulo constante: sua relação com cristais líquidos e classificação em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{I} \times_f \mathbb{E}^2$  / Renata Pilon Cevolani. - 2019.  
100 f. : il.

Orientador: Apenã Passos Passamani.  
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

I. Passos Passamani, Apenã. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

---





UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
Centro de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**“Superfícies de Ângulo Constante: Relação com Cristais Líquidos e sua Classificação em  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^2 \times \mathbb{R}$  e  $IX, E^{2,1}$ ”**

**Renata Pilon Cevolani**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 27/09/2019 por:

Prof. Dr. Apoená Passos Passamani - UFES

Prof. Dr. Matheus Brioschi Herkenhoff Vieira - UFES

Prof. Dr. João Paulo dos Santos - UnB





*A Deus e a todos  
que acreditaram em  
mim.*



---

# Agradecimentos

---

---

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado saúde, coragem e a determinação necessária para terminar este trabalho, sendo meu refúgio nos momentos difíceis;

Ao meu orientador Apoenã Passos Passamani, por toda dedicação, paciência, apoio, compreensão e por ter acreditado em mim;

Aos meus pais, Glorinha e Sebastião, por todo apoio, ajuda e carinho;

Ao meu namorado Rafael, por todos os conselhos, apoio e ajuda;

Aos meus colegas de classe da UFES, por toda ajuda e discussões produtivas sobre matemática;

Ao meu ex-professor Hiury Helmer por ter, ainda no ensino médio, me mostrado a beleza da matemática e por ter me ajudado e acreditado em mim;

A todos os familiares e amigos que me ajudaram, aconselharam e acreditaram em mim, e que não foram lembrados diretamente aqui;

Agradeço, por fim, à CAPES pelo apoio financeiro.



---

# Resumo

---

---

Dizemos que uma superfície é de ângulo constante quando seu campo de vetores normal unitário forma um ângulo constante com um campo de direções pré-fixado do espaço ambiente. Tais superfícies têm despertado grande interesse de pesquisadores da área de geometria diferencial, e a motivação veio principalmente de [4], que cronologicamente é o primeiro trabalho relacionado à este tema. Nele, os autores analisaram o caso de superfícies de ângulo constante no espaço  $\mathbb{R}^3$ , mostrando também sua relação com cristais líquidos. Depois disso, vários autores vêm se dedicando ao estudo dessas superfícies, considerando outros espaços e outros casos particulares.

Nesta dissertação, seguindo o que foi feito em [4], [8] e [10], estudaremos e classificaremos as superfícies de ângulo constante nos espaços  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^2 \times \mathbb{R}$  e no produto warped  $I \times_f \mathbb{E}^2$ , onde  $f$  é uma função qualquer estritamente positiva.



# Abstract

---

---

---

We say that a surface is a constant angle surface when its unit normal vectors field form a constant angle with a prefixed direction field of the space. Such surfaces have aroused great interest by researchers of differential geometry. The motivation came mainly from [4], which is chronologically the first work related to this theme. There, the authors analyzed the case of constant angle surfaces in  $\mathbb{R}^3$ , also showing its relations with liquid crystals. After that, several authors have been dedicated to the study of these surfaces, considering other spaces and other particular cases.

In this work, following what was done in [4], [8] and [10], we studied and classify the constant angle surfaces in the spaces  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  and in the warped product  $I \times_f \mathbb{E}^2$ , where  $f$  is any strictly positive function.





# Índice

---

---

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Superfícies de ângulo constante em <math>\mathbb{R}^3</math> e sua relação com cristais líquidos</b>	<b>5</b>
1.1 Introdução . . . . .	5
1.2 Superfícies de ângulo constante em $\mathbb{R}^3$ e cristais líquidos . . . . .	6
1.3 Caso $m$ campo de orientação constante . . . . .	9
1.4 Caso $m$ campo de orientação harmônico contido em um plano . . . . .	14
1.4.1 Caso $m$ ortogonal à uma direção constante do espaço . . . . .	16
1.4.2 Campo de direções com um par de descontinuidades . . . . .	24
1.5 Aplicações na fase Esmética C . . . . .	26
<b>2 Superfícies de ângulo constante em <math>\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}</math></b>	<b>31</b>
2.1 Introdução . . . . .	31
2.2 Superfícies de ângulo constante em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	32
2.2.1 Caracterização de superfícies de ângulo contante em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	36
2.2.2 Classificação de superfícies de ângulo constante em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	38

<b>3</b>	<b>Superfícies de ângulo constante em um produto warped</b>	<b>51</b>
3.1	Introdução . . . . .	51
3.2	Superfícies de ângulo constante em $I \times_f \mathbb{E}^2$ . . . . .	52
3.3	Classificação de superfícies de ângulo constante no produto warped $I \times_f \mathbb{E}^2$ . . . . .	60
3.4	Superfícies de rotação com ângulo constante . . . . .	73
3.5	Exemplos . . . . .	75
3.5.1	Superfície flat de ângulo constante . . . . .	75
3.5.2	Superfícies mínimas de ângulo constante . . . . .	75
<b>A</b>	<b>Resultados básicos sobre produto warped</b>	<b>77</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>83</b>

---

# Introdução

---

---

Este trabalho tem como principal objetivo apresentar resultados importantes sobre a classificação de superfícies de ângulo constante em  $\mathbb{R}^3$  (Capítulo 1),  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  (Capítulo 2) e no produto warped  $I \times_f \mathbb{E}^2$ , onde  $f$  é uma função qualquer estritamente positiva e  $I$  é um intervalo aberto (Capítulo 3).

O estudo destas superfícies, cujo campo de vetores normal unitário, por definição, forma um ângulo constante com um campo de direções pré-fixado do espaço ambiente, tem despertado grande interesse de pesquisadores da área de geometria diferencial. Cronologicamente, [4] é o primeiro trabalho relacionado à este tema, onde os autores Cermelli e Di Scala analisaram o caso de superfícies de ângulo constante no espaço  $\mathbb{R}^3$ , mostrando sua relação com cristais líquidos, que são substâncias cujo estado da matéria é intermediário entre o estado sólido e o estado líquido (ver [7]). Motivados pelo trabalho de Cermelli e Di Scala, vários autores analisaram superfícies de ângulo constante em outros espaços (veja [9], [14], [6], [18], [15], [19], [17], entre outros), e dentre estes, podemos citar como importante exemplo superfícies de ângulo constante em variedades formadas pelo produto entre uma variedade com curvatura constante e  $\mathbb{R}$  (ou um intervalo real). Nestes casos, a direção pré-fixada surge de forma natural como sendo aquela tangente à componente  $\mathbb{R}$  do produto. Como exemplo disso, temos os casos  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  ([9]),  $\mathbb{S}^3(1) \times \mathbb{R}$  ([6]), os espaços  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  ([8]) e  $I \times_f \mathbb{E}^2$  ([10]), que estudaremos nesta dissertação.

Sobre o presente trabalho, no Capítulo 1, apresentaremos resultados obtidos em [4] sobre superfícies de ângulo constante no espaço  $\mathbb{R}^3$ , obtendo uma importante relação com a equação de Hamilton-Jacobi, o que garante a existência de soluções em vizinhanças de pontos que satisfazem

uma condição técnica a ser especificada. A partir disto, veremos que tais superfícies possuem grande aplicação no campo da física, pois podem ser usadas para descrever interfaces de cristais líquidos quando estes encontram-se em configuração de equilíbrio. Mais precisamente, a relação entre estas superfícies e os cristais líquidos ocorre pois, quando em sua fase nemática, os constituintes destes (moléculas ou átomos, por exemplo) se alinham, naturalmente, de acordo com uma direção dada por um campo de vetores  $\mathbf{m}$ , que é um ponto crítico do funcional energia

$$E(X) = \int_{\Omega} \frac{k}{2} |dX|^2 dv,$$

com  $k > 0$  e  $\Omega$  domínio de  $\mathbb{R}^3$  sobre o qual o campo de vetores  $X$  está definido. A equação de Euler deste funcional é descrita em [12] como

$$\Delta X + |\nabla X|^2 X = 0,$$

cujas soluções são chamadas de *campos harmônicos*. A fronteira que separa os cristais líquidos em suas fases nemática e isotrópica pode ser vista como uma superfície que forma um ângulo constante com  $\mathbf{m}$ . Neste trabalho, seguindo o que foi feito em [4], consideraremos os seguintes casos:

1º)  $\mathbf{m}$  constante: Neste caso, mostraremos que uma superfície de ângulo constante em  $\mathbb{R}^3$  deve possuir curvatura gaussiana nula, sendo, portanto, flat. Depois, assumindo que tal superfície seja, localmente, gráfico de uma função  $g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , a condição de ser uma superfície de ângulo constante se torna equivalente à equação eikonal

$$|\nabla g| = \operatorname{tg} \alpha$$

cujas soluções geram superfícies cônicas.

2º)  $\mathbf{m}$  campo de orientação harmônico contido em um plano: Aqui, consideraremos  $\Omega$  um domínio cilíndrico e assumiremos que o campo  $\mathbf{m}$  possui singularidade ao longo de uma reta vertical. Assumindo  $\mathbf{m}$  ortogonal à uma direção constante do espaço, separaremos o estudo deste caso em dois subcasos:  $\alpha = 0$  e  $\alpha \in (0, \pi/2)$ . No caso  $\alpha = 0$ , as soluções serão cilindros generalizados, dados em função do número de  $\pi$ -rotações  $k$  de  $\mathbf{m}$  ao redor da singularidade. A curva geratriz  $C$ , descrita como conjunto de nível de uma função diferenciável

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$C = \{x \in D; f(x) = c\},$$

será, utilizando coordenadas polares  $(r, \theta)$ , dada da seguinte forma:

- se  $k \leq 1, k \neq 0$ , então  $C$  é dada por

$$r = \frac{c}{\left| \cos \left( \frac{2-k}{2} \theta \right) \right|^{\frac{2}{2-k}}}.$$

- Se  $k = 2$ , então ocorrem dois subcasos:

- Se  $\theta = 0$ , a curva é uma circunferência com  $r = \text{constante}$ ;
- Se  $\theta \neq 0$ , a curva é uma espiral logarítmica com  $r = ce^{\alpha \text{tg} \theta}$ .

- Se  $k \geq 3$ , então a curva  $C$  é dada por

$$r = c \left| \cos \left( \frac{2-k}{2} \theta \right) \right|^{\frac{2}{2-k}}.$$

No Capítulo 2, mostraremos os resultados obtidos no trabalho [8], dos autores Franki Dillen, Johan Fastenakels, Joeri Van der Veken e Luc Vrancken, sobre superfícies de ângulo constante em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , com relação ao campo tangente à componente  $\mathbb{R}$  do produto. Primeiramente, seguindo o que foi feito em [8], consideramos uma superfície  $M$  isometricamente imersa em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , encontramos uma reescrita para as fórmulas de Gauss e de Codazzi e escrevemos o operador de forma de  $M$  com relação à uma base ortonormal específica. Todo este trabalho e os demais visam demonstrar o Teorema 2.6, que classifica completamente as superfícies de ângulo constante no espaço considerado. Tal resultado afirma que estas superfícies podem ser localmente parametrizadas por

$$F(u, v) = (\cos(u \cos \alpha) f(v) + \text{sen}(u \cos \alpha) f(v) \times f'(v), u \text{sen} \alpha),$$

onde  $f : I \rightarrow \mathbb{S}^2$  é uma curva em  $\mathbb{S}^2$  parametrizada por comprimento de arco e  $\alpha \in [0, \pi]$  é o ângulo constante considerado. Especificamente, podemos construir superfícies de ângulo constante em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  à partir de uma curva arbitrária em  $\mathbb{S}^2$ . Um exemplo explícito é dado ao fim do capítulo, no caso em que tal curva é um grande círculo.

Finalmente, no Capítulo 3, apresentaremos os resultados obtidos em [10], dos autores Franki Dillen, Marian Ioan Munteanu, Joeri Van der Veken e Luc Vrancken, sobre superfícies de ângulo constante no produto warped  $I \times_f \mathbb{E}^2$ , com relação ao campo tangente à componente  $I$  do produto. Recordemos que, dadas as variedades diferenciáveis  $B$  e  $F$ , com métricas, respectivamente,  $g_B$  e

$g_F$ , o produto warped de  $B$  e  $F$  com função estritamente positiva definida em um intervalo aberto,  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , é definido como

$$(\overline{M}, \overline{g}) = B \times_f F = (B \times F, g_B + f^2 g_F);$$

ou seja, é a variedade produto  $B \times F$  munida da métrica  $\overline{g} = g_B + f^2 g_F$ .

A linha de raciocínio utilizada neste caso é semelhante à do Capítulo 2, e tem como objetivo principal demonstrar o Teorema 3.7, classificando, assim, as superfícies de ângulo constante em  $I \times_f \mathbb{E}^2$ . Considerando  $i : M \rightarrow I \times_f \mathbb{E}^2$  uma imersão isométrica,  $M \subset I \times_f \mathbb{E}^2$ , tal resultado afirma que a superfície obtida será de ângulo constante  $\alpha \in [0, \pi/2]$  se, e somente se, ocorre um dos três casos abaixo:

1) existem coordenadas locais  $(u, v) \in M$  com relação às quais  $i$  é dada por

$$i(u, v) = \left( u \operatorname{sen} \alpha, \cotg \alpha \left( \int^{u \operatorname{sen} \alpha} \frac{d\tau}{f(\tau)} \right) \cos v - \int^v \gamma(\tau) \operatorname{sen} \tau d\tau, \right. \\ \left. \cotg \alpha \left( \int^{u \operatorname{sen} \alpha} \frac{d\tau}{f(\tau)} \right) \operatorname{sen} v + \int^v \gamma(\tau) \cos \tau d\tau \right),$$

para alguma função suave  $\gamma$ ;

2)  $i(M)$  é um subconjunto aberto do cilindro

$$x - \cotg \alpha \int^t \frac{d\tau}{\tau} = 0;$$

3)  $i(M)$  é um subconjunto aberto da superfície determinada por  $t = t_0$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha = 0$ .

Para facilitar a compreensão do leitor e tornar este texto mais completo, foi elaborado um apêndice contendo alguns resultados básicos gerais sobre produto warped, que serão úteis no decorrer deste trabalho.

Observamos, por fim, que para padronizar o uso do tensor curvatura, adotaremos a definição

$$R(U, V) = [\nabla_U, \nabla_V] - \nabla_{[U, V]}$$

onde  $U$  e  $V$  são campos de vetores da variedade considerada. Embora esteja de acordo com a convenção adotada nos artigos [4], [8] e [10], esta expressão é diferente da utilizada em [3], bibliografia que nos serviu de base para os Lemas A.2 e A.3. Desta forma, estes lemas foram alterados, no que diz respeito ao tensor curvatura utilizado, de forma a se seguir tal padronização.

---

# Superfícies de ângulo constante em $\mathbb{R}^3$ e sua relação com cristais líquidos

---

---

## 1.1 Introdução

Neste capítulo, seguindo o que foi feito por Cermelli e Di Scala em [4], analisaremos o caso de superfícies de ângulo constante no espaço  $\mathbb{R}^3$ . Obteremos uma importante relação com a equação de Hamilton-Jacobi, o que nos permitirá classificar tais superfícies. Mostraremos ainda sua aplicação no campo da física, mais precisamente, na configuração de equilíbrio de cristais líquidos. Não nos dedicaremos ao estudo de "disclination cores" na fase nemática, uma vez que para tal os autores utilizam métodos computacionais, o que não é o objetivo principal deste trabalho.

## 1.2 Superfícies de ângulo constante em $\mathbb{R}^3$ e cristais líquidos

De acordo com [7], cristais líquidos são substâncias cujo estado da matéria é intermediário entre o estado sólido e o estado líquido. Para entender melhor este conceito, é importante sabermos a diferença entre um sólido e um líquido. No caso de um sólido, seus componentes (moléculas ou átomos, por exemplo) estão organizados regularmente, ou seja, possuem uma organização posicional. Já os constituintes de um líquido não estão organizados neste sentido. No caso de um cristal líquido, seus constituintes (que são, geralmente, moléculas em forma de bastão ou disco) não possuem (assim como um líquido) uma organização posicional, mas verifica-se outro tipo de organização: a orientacional (para mais precisão, veja [7]).

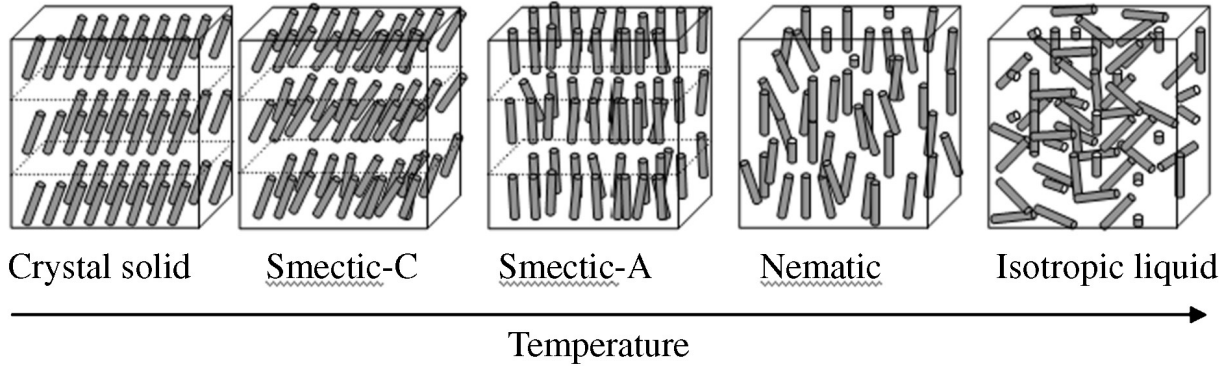
Variações na temperatura podem acarretar em mudanças ou transformações de fase em um cristal líquido. Na fase nemática, os constituintes se organizam da forma mais simples possível, sem especificação alguma. Como mencionado acima, seus centros de massa não possuem uma organização posicional, mas possuem uma organização orientacional. Já na fase esmética C, eles se encontram organizados em camadas (característica geral da fase esmética) e além disso possuem, em geral, inclinação com relação à normal às camadas (para uma melhor compreensão sobre as fases de um cristal líquido, veja [7]). Nos interessa, neste trabalho, as fases *nemática* e *esmética* (mais precisamente, a fase *esmética C*). A diferença entre a organização dos constituintes nos estados sólido, líquido e de um cristal líquido nas fases nemática e esmética estão representadas na figura 1.1.

Nosso objetivo agora é estudar e classificar superfícies de ângulo constante em  $\mathbb{R}^3$ . Definamos então, de forma precisa, uma superfície de ângulo constante:

**Definição 1.1.** *Dizemos que uma superfície orientada é de ângulo constante quando seu campo de vetores normal unitário  $\mathbf{n}$  forma um ângulo constante  $\alpha$  com um campo de vetores  $\mathbf{m}$ , pré-fixado, do espaço ambiente.*

Podemos descrever um cristal líquido em sua fase nemática, contido em um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , no qual está definido um campo de direções  $\bar{\mathbf{m}} : \Omega \rightarrow P^2(\mathbb{R})$ , onde  $P^2(\mathbb{R})$  representa o espaço projetivo,  $P^2(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^2 / \{p, -p\}$ . A este campo de direções podemos associar, localmente, um campo vetorial unitário  $\mathbf{m}$ . A ideia central, neste caso, é mostrar que as superfícies de ângulo





**Figura 1.1:** Diferença entre a organização dos constituintes nos estados sólido, líquido e de um cristal líquido nas fases nemática e esmética. Fonte:[23].

constante com relação ao campo  $\mathbf{m}$  possuem uma importante relação com a equação de Hamilton-Jacobi, o que nos permite classificar tais superfícies. A motivação para este estudo ocorre ao observarmos que no bordo  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ , que representa uma superfície que separa o cristal líquido em sua fase nemática e isotrópica (onde não há padrões de comportamento de moléculas que não estejam suficientemente próximas, feita exceção pela densidade de partículas, ver [4]), a direção na qual as moléculas da fase nemática estão alinhadas, representada acima pelo campo  $\bar{\mathbf{m}}$ , formam um ângulo constante com o campo de vetores normal à  $\partial\Omega$ , de forma que  $\partial\Omega$  pode ser vista como uma superfície de ângulo constante com relação ao campo  $\mathbf{m}$ . Fisicamente, esta mudança de fase ocorrerá quando o cristal líquido, em sua fase nemática ou esmética C, apresentar uma configuração de equilíbrio.

Seja  $S$  uma superfície orientada cujo campo de vetores normal unitário  $\mathbf{n}$  forma um ângulo constante  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi]$ , com  $\mathbf{m}$ . Desta forma, em cada ponto  $p$  de  $S$  vale a relação

$$|\langle \mathbf{n}(p), \mathbf{m}(p) \rangle| = \cos \alpha. \quad (1.1)$$

Podemos considerar que  $S$  é, localmente, conjunto de nível de uma função contínua diferenciável  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , ou seja,

$$S = \{\mathbf{x} \in \Omega; f(\mathbf{x}) = \text{constante}\},$$

e como  $\nabla f$  é ortogonal às curvas de nível de  $f$ , podemos escrever o vetor normal  $\mathbf{n}$  como

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}.$$

Neste caso, a Equação 1.1 é equivalente à equação de Hamilton-Jacobi

$$\langle \nabla f, A_\alpha \nabla f \rangle = 0, \quad (1.2)$$

onde  $A_\alpha = A_\alpha(\mathbf{x})$  satisfaz

$$A_\alpha(\mathbf{x})\mathbf{p} = \cos^2 \alpha \mathbf{p} - \langle \mathbf{m}(\mathbf{x}), \mathbf{p} \rangle \mathbf{m}(\mathbf{x}).$$

Denotando por  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}, A_\alpha(\mathbf{x})\mathbf{p} \rangle$  o Hamiltoniano, então as soluções de 1.2 podem ser obtidas pelo método das características, e serão dadas pelas soluções de

$$\mathbf{x}' = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \mathbf{p}' = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \quad (1.3)$$

O método das características não se aplica ao caso  $\alpha = 0$ , pois neste caso teríamos  $\mathbf{p}' = 0$  quando  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0$ . Este caso gera um sistema que será analisado utilizando o Teorema de Frobenius.

Como mencionado, podemos associar à um cristal líquido em sua fase nemática um campo de direções  $\mathbf{m}$  que relaciona cada um de seus constituintes com sua respectiva orientação. Fisicamente, para que o cristal líquido esteja em sua configuração de equilíbrio, ele deve ser um ponto crítico do funcional energia

$$E(X) = \int_{\Omega} \frac{k}{2} |dX|^2 dv, \quad (1.4)$$

com  $k > 0$ , cuja equação de Euler, descrita em [12] por Eells e Sampson, é

$$\Delta X + |\nabla X|^2 X = 0, \quad (1.5)$$

onde  $\Delta$  e  $\nabla$  denotam, respectivamente, o laplaciano e a derivada covariante do campo. Chamamos de **campos harmônicos** as soluções de 1.5.

O campo  $\mathbf{m}$  não precisa estar definido em todo  $\Omega$ . Especificamente, chamamos de "**straight disclination**"<sup>1</sup>  $l$  uma reta contida em  $\mathbb{R}^3$  tal que o campo  $\mathbf{m}$  não está definido em  $l$ , mas é suave em  $\Omega/\{l\}$ , e de "**hedgehog**"<sup>2</sup>  $x_0$  um ponto tal que o campo  $\mathbf{m}$  não está definido em  $x_0$ , mas é suave em  $\Omega/\{x_0\}$ . A partir destas definições, surge também o conceito de "**strenght**"<sup>3</sup>. Este termo é usado para designar um inteiro  $k$  que caracteriza a straight disclination. Matematicamente,  $k$  é o número de  $\pi$ -rotações do campo  $\mathbf{m} : \gamma \rightarrow P^1(\mathbb{R})$  quando  $\gamma$  é circulada uma vez, onde  $\gamma$  é uma

<sup>1</sup>Em [21] há uma discussão sobre a tradução da palavra *disclination*. Optamos, neste trabalho, por manter esta palavra em sua forma original, assim como feito em [21].

<sup>2</sup>Também optamos por não traduzir esta palavra.

<sup>3</sup>Optamos por não traduzir esta palavra neste trabalho.

curva fechada em  $\Omega/\{l\}$ . Quando há singularidade, assumimos que o campo  $\mathbf{m}$ , em configuração de equilíbrio, satisfaz 1.5 exceto nesta singularidade.

A seguir, abordaremos casos particulares para o campo  $\mathbf{m}$ , e classificaremos as superfícies que formam ângulo constante com  $\mathbf{m}$  em cada um destes casos.

### 1.3 Caso $\mathbf{m}$ campo de orientação constante

Consideremos uma superfície  $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$  de ângulo constante, no caso particular em que  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$  é um campo de direções constante. Desse modo,

$$|\langle \mathbf{n}, \mathbf{m}_0 \rangle| = \cos \alpha, \quad \alpha \in [0, \pi/2]. \quad (1.6)$$

Observe que se  $\alpha > \pi/2$ , recaímos no caso  $\alpha \in [0, \pi/2]$  pois os vetores  $\mathbf{m}$  e  $-\mathbf{m}$  definem a mesma orientação. Quando  $\alpha = 0$ , os campos  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{m}$  são paralelos e a superfície resultante será um aberto de um plano ortogonal ao campo  $\mathbf{m}_0$ . Já no caso  $\alpha = \pi/2$ , os campos são ortogonais entre si e a superfície resultante será um cilindro generalizado com geratriz paralela à  $\mathbf{m}_0$ . Desta forma, a partir de agora, consideraremos apenas o caso  $\alpha \in (0, \pi/2)$ .

Relembramos o seguinte resultado, que nos será útil à seguir (para a demonstração deste lema, veja [11]).

**Lema 1.2.** *Seja  $p$  um ponto de uma superfície  $S$  tal que a curvatura Gaussiana  $K(p) \neq 0$ , e seja  $V$  uma vizinhança conexa de  $p$  onde  $K$  não muda de sinal. Então*

$$K(p) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A}$$

onde  $A$  é a área de uma região  $B \subset V$  contendo  $p$ ,  $A'$  é a área da imagem de  $B$  pela aplicação de Gauss  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ , e o limite é tomado através de uma sequência de regiões  $B_n$  que convergem para  $p$ , no sentido em que toda esfera centrada em  $p$  contém todos  $B_n$ , para  $n$  suficiente grande.

Com este resultado, estamos aptos a demonstrar a seguinte proposição, que caracteriza as superfícies de ângulo constante em  $\mathbb{R}^3$ :

**Proposição 1.3.** *Se  $S$  é uma superfície solução de 1.6, então a curvatura Gaussiana  $K$  de  $S$  é nula.*

*Demonstração.* Seja  $N : S \rightarrow S^2$  a aplicação normal de Gauss de  $S$ . Suponha por absurdo que algum ponto  $a \in S$  satisfaz  $K(a) \neq 0$ . Assim, como  $K$  é um difeomorfismo, existe uma vizinha  $V$  de  $a$  onde  $K$  não muda de sinal. Logo, pelo Lema 1.2, segue que

$$K(a) = \lim_{\text{area}(S) \rightarrow 0} \frac{\text{area}(N(S))}{\text{area}(S)}.$$

Como  $S$  é de ângulo constante, a imagem de  $S$  por  $N$  está contida em um círculo. Logo,  $\text{area}(N(S)) = 0$ , por ser unidimensional, e portanto  $K(a) = 0$ , absurdo. Assim, segue que a curvatura Gaussiana  $K$  de  $S$  é nula.  $\square$

Agora, para encontrarmos uma superfície  $S$  que seja solução de 1.6, escolhamos coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  com base associada  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  tal que  $\mathbf{k} = \mathbf{m}_0$ . Observe que, uma vez que  $S$  é regular, pode ser descrita, localmente, como gráfico de uma função  $g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Assim,

$$S = \{(x, y, z); z = g(x, y)\}.$$

Com isso, temos o seguinte resultado:

**Proposição 1.4.** *A equação 1.6 é equivalente à*

$$|\nabla g| = \text{tg } \alpha. \tag{1.7}$$

*Demonstração.* Como  $S$  é descrita como gráfico de  $g$ , uma parametrização para  $S$  é dada por

$$X(x, y) = (x, y, g(x, y)).$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} X_x \wedge X_y &= \left( -\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right) \\ &= -\nabla g + \mathbf{k} \end{aligned}$$

e o vetor normal unitário  $\mathbf{n}$  é dado por

$$\mathbf{n} = \frac{X_x \wedge X_y}{|X_x \wedge X_y|} = \frac{-\nabla g + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}}.$$

Consequentemente, como  $\mathbf{m}_0 = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$ , temos que

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{n}, \mathbf{m}_0 \rangle| = \cos \alpha &\Leftrightarrow \left| \left\langle \frac{-\nabla g + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}}, \mathbf{k} \right\rangle \right| = \cos \alpha \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}} = \cos \alpha \\ &\Leftrightarrow |\nabla g| = \text{tg } \alpha, \end{aligned}$$

e a equação 1.6 é, como queríamos demonstrar, equivalente à 1.7.  $\square$

A equação  $|\nabla g| = \operatorname{tg} \alpha$  na Proposição 1.4 é chamada de *equação eikonal*. Esta equação foi postulada em 1827 pelo matemático irlandês Willian-Hamilton (1805-1865) e fornece a base para a óptica geométrica, tendo aplicações em radares, lentes de contato, espelhos e outras (veja [20]).

Seja agora  $C_0 = S \cap \{z = 0\}$ . No que segue, convencionaremos que  $C_0$  é plana, contida no plano  $(x, y)$ . Considere  $\gamma_0(s)$  parametrização de  $C_0$  por comprimento de arco,  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(s)$  e  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(s)$  vetores tangente e normal unitários em  $C_0$  e  $t = t(\mathbf{X}) := \operatorname{dist}(\mathbf{X}, C_0)$  a distância do ponto  $\mathbf{X}$  à  $C_0$ ,  $\mathbf{X} = xi + yj \in D$ . Considere ainda, localmente, a mudança de coordenadas

$$\mathbf{X}(s, t) = \gamma_0(s) + t\boldsymbol{\eta}(s),$$

onde  $(s, t)$  são conhecidas como *coordenadas de Fermi*, e defina

$$\mathbf{g}(s, t) := g(\mathbf{X}(s, t)).$$

Nestas condições, temos o seguinte resultado:

**Proposição 1.5.** *Denotando por  $k$  a curvatura de  $C_0$ , são válidas as seguintes equações:*

$$\langle \nabla g, \boldsymbol{\eta} \rangle = \partial_t \mathbf{g} \tag{1.8}$$

e

$$\langle \nabla g, \boldsymbol{\tau} \rangle = \frac{\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s}}{1 - kt}. \tag{1.9}$$

*Demonstração.* Observe que podemos escrever

$$\gamma_0(s) = (\gamma_{0_1}(s), \gamma_{0_2}(s))$$

e

$$\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta}_1(s), \boldsymbol{\eta}_2(s)).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \gamma_0(s) + t\boldsymbol{\eta}(s) &= (\gamma_{0_1}(s) + t\boldsymbol{\eta}_1(s), \gamma_{0_2}(s) + t\boldsymbol{\eta}_2(s)) \\ &:= (x(s, t), y(s, t)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(s, t) &= g(\mathbf{X}(s, t)) \\ &= g(\gamma_0(s) + t\boldsymbol{\eta}) \\ &= g((x(s, t), y(s, t))), \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\partial_t \mathbf{g} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

e

$$\partial_s \mathbf{g} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}.$$

Assim, como  $\frac{\partial x}{\partial t} = \boldsymbol{\eta}_1(s)$  e  $\frac{\partial y}{\partial t} = \boldsymbol{\eta}_2(s)$ , segue finalmente que

$$\partial_t \mathbf{g} = \langle \nabla g, \boldsymbol{\eta} \rangle.$$

Agora, como  $\gamma_0$  é parametrização por comprimento de arco de  $C_0$ , o vetor tangente  $\boldsymbol{\tau}$  é dado por  $\boldsymbol{\tau} = (\gamma'_{01}, \gamma'_{02})$ . Além disso, pelas equações de Frenet aplicadas em  $C_0$ , temos que

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial s} = k \boldsymbol{\eta}$$

e

$$\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial s} = -k \boldsymbol{\tau},$$

Assim,

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial \gamma_{01}}{\partial s} + t \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_1}{\partial s} = (1 - kt) \frac{\partial X_{01}}{\partial s}$$

e

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial \gamma_{02}}{\partial s} + t \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_2}{\partial s} = (1 - kt) \frac{\partial X_{02}}{\partial s}.$$

Portanto, segue que

$$\begin{aligned} \langle \nabla g, \boldsymbol{\tau} \rangle &= \frac{\frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}}{1 - kt} \\ &= \frac{\frac{\partial g}{\partial s}}{1 - kt}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Nosso objetivo agora é explicitar as soluções de 1.7, ou seja, explicitar as superfícies de ângulo constante em  $\mathbb{R}^3$  no caso particular em que o campo de orientação é contante. Isto será feito no seguinte teorema:

**Teorema 1.6.** *Seja  $S$  uma superfície de ângulo constante  $\alpha$  em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\alpha \in [0, \pi/2]$ , no caso particular em que  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$  é um campo de orientação constante. Então  $S$  é dada por*

$$S = \{(x, y, z); z = g(x, y)\}$$

onde  $g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz

$$g(x, y) = t(x, y) \operatorname{tg} \alpha,$$

com  $t(x, y) := \operatorname{dist}((x, y), C_0)$ , ou seja,  $S$  é uma superfície cônica.

*Demonstração.* Sabemos que, por ser regular,  $S$  pode ser descrita como gráfico de uma função  $g$ . Logo, pela proposição 1.4 temos  $|\nabla g| = \operatorname{tg} \alpha$ . Além disso, uma vez que  $\operatorname{grad} g$  é ortogonal às curvas de níveis de  $g$ , temos que

$$\langle \nabla g, \boldsymbol{\tau} \rangle = 0.$$

Por outro lado, a Proposição 1.5 afirma que

$$\langle \nabla g, \boldsymbol{\tau} \rangle = \frac{\frac{\partial g}{\partial s}}{1 - kt}.$$

Assim, segue que

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial s}}{1 - kt} = 0$$

ou seja,

$$\frac{\partial g}{\partial s} = 0,$$

e segue daí que

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(t).$$

Agora, observe que podemos escrever  $\nabla \mathbf{g} = c_1 \boldsymbol{\tau} + c_2 \boldsymbol{\eta}$ , com  $c_1, c_2$  constantes. Porém, como  $\langle \nabla g, \boldsymbol{\tau} \rangle = 0$ , segue que  $c_1 = 0$  e, assim,  $\nabla \mathbf{g} = c_2 \boldsymbol{\eta}$ . Por fim, como  $|\nabla g| = \operatorname{tg} \alpha$ , podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $\nabla \mathbf{g} = \operatorname{tg} \alpha$ . Logo, como  $\mathbf{g} = \mathbf{g}(t)$ , segue que  $\mathbf{g}'(t) = \operatorname{tg} \alpha$  e assim

$$\mathbf{g}(t) = t \operatorname{tg} \alpha,$$

ou seja,

$$g(x, y) = t(x, y) \operatorname{tg} \alpha,$$

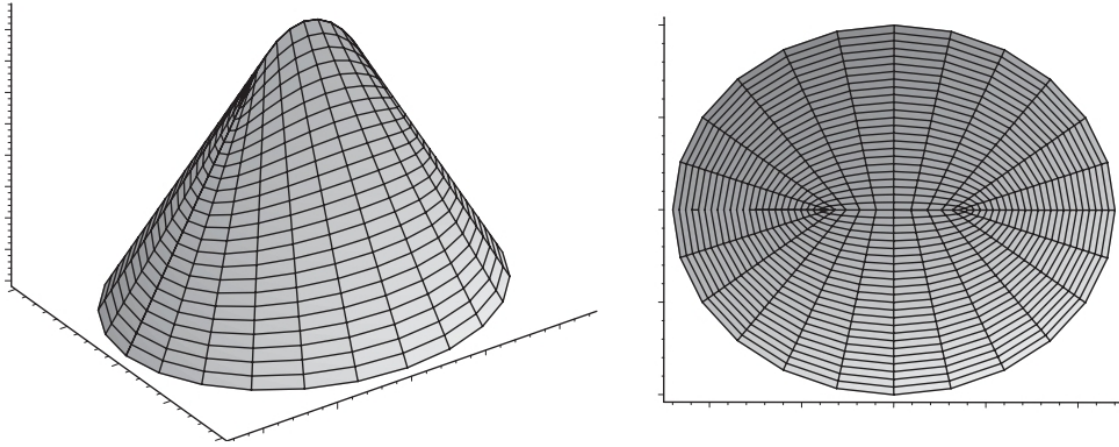
que representa uma superfície cônica gerada por  $C_0$ . □

Representamos na Figura 1.2 uma superfície cônica em  $\mathbb{R}^3$  que forma um ângulo constante com o campo de direções  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$ , no caso particular em que  $C_0$  é uma elipse.

O método das características garante a existência de soluções locais em cada ponto, que serão parametrizadas por

$$\mathbf{x}_0(s) + t\mathbf{v}(s) + (t \operatorname{tg} \alpha)\mathbf{m}_0, \tag{1.10}$$

em termos das coordenadas de Fermi e  $t \in \mathbb{R}$  (para mais detalhes, veja [13] e [22]).



**Figura 1.2:** Superfície cônica de ângulo constante no caso de um campo de direções constante  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$ . Aqui, representamos o caso particular em que a curva geratriz é uma elipse. Fonte:[4]

## 1.4 Caso $\mathbf{m}$ campo de orientação harmônico contido em um plano

Seja  $\Omega = D \times \mathbb{R}$  um domínio cilíndrico, com  $D \subset \mathbb{R}^2$ , e  $\mathbf{m} : \Omega \rightarrow P^2(\mathbb{R})$  um campo de orientação. Suponha que  $\mathbf{m}$  esteja contido no plano com coordenada  $z = 0$ , ou seja,

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(\mathbf{x}), \quad \langle \mathbf{m}, \mathbf{k} \rangle = 0, \quad (1.11)$$

com  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \in D$ ,  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  base ortonormal e  $\mathbf{k}$  ortogonal ao plano contendo  $D$ . Nestas condições, podemos considerar  $\mathbf{m} : D \rightarrow P^1(\mathbb{R})$ , onde  $P^1(\mathbb{R})$  é a reta projetiva. Assim,

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \cos \phi(\mathbf{x})\mathbf{i} + \sin \phi(\mathbf{x})\mathbf{j} \quad (1.12)$$

onde  $\phi$  é uma função diferenciável. Utilizando estes fatos, temos o seguinte lema, que nos será útil a diante:

**Lema 1.7.** *Se o campo  $\mathbf{m}$  é harmônico, então a função  $\phi$  é harmônica.*

*Demonstração.* Como  $\mathbf{m}$  é harmônico, satisfaz a equação 1.5. Desta forma, temos

$$\Delta \mathbf{m} + |\nabla \mathbf{m}|^2 \mathbf{m} = 0. \quad (1.13)$$

Analisaremos cada parcela desta equação separadamente. Observe que

$$\mathbf{m}_x = -\sin \phi(\mathbf{x})\phi_x \mathbf{i} + \cos \phi(\mathbf{x})\phi_x \mathbf{j}$$



e

$$\mathbf{m}_y = -\operatorname{sen} \phi(\mathbf{x})\phi_y \mathbf{i} + \operatorname{cos} \phi(\mathbf{x})\phi_y \mathbf{j}.$$

Logo, temos

$$\mathbf{m}_{xx} = (-\operatorname{cos} \phi(\mathbf{x})\phi_x\phi_x - \operatorname{sen} \phi(\mathbf{x})\phi_{xx})\mathbf{i} + (-\operatorname{sen} \phi(\mathbf{x})\phi_x\phi_x + \operatorname{cos} \phi(\mathbf{x})\phi_{xx})\mathbf{j}$$

e

$$\mathbf{m}_{yy} = (-\operatorname{cos} \phi(\mathbf{x})\phi_y\phi_y - \operatorname{sen} \phi(\mathbf{x})\phi_{yy})\mathbf{i} + (-\operatorname{sen} \phi(\mathbf{x})\phi_y\phi_y + \operatorname{cos} \phi(\mathbf{x})\phi_{yy})\mathbf{j}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{m} &= \mathbf{m}_{xx} + \mathbf{m}_{yy} \\ &= (-\operatorname{cos} \phi(\mathbf{x})(\phi_x^2 + \phi_y^2) - \operatorname{sen} \phi(\mathbf{x})(\phi_{xx} + \phi_{yy}))\mathbf{i} \\ &\quad + (-\operatorname{sen} \phi(\mathbf{x})(\phi_x^2 + \phi_y^2) + \operatorname{cos} \phi(\mathbf{x})(\phi_{xx} + \phi_{yy}))\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{m} &= \mathbf{m}_x + \mathbf{m}_y \\ &= (-\operatorname{sen} \phi(\mathbf{x})(\phi_x + \phi_y))\mathbf{i} + (\operatorname{cos} \phi(\mathbf{x})(\phi_x + \phi_y))\mathbf{j}, \end{aligned}$$

de onde se conclui que

$$\begin{aligned} |\nabla \mathbf{m}|^2 \mathbf{m} &= (\operatorname{sen}^2 \phi(\mathbf{x})(\phi_x + \phi_y)^2 + \operatorname{cos}^2 \phi(\mathbf{x})(\phi_x + \phi_y)^2)(\operatorname{cos} \phi(\mathbf{x})\mathbf{i} + \operatorname{sen} \phi(\mathbf{x})\mathbf{j}) \\ &= (\phi_x + \phi_y)^2 (\operatorname{cos} \phi(\mathbf{x})\mathbf{i} + \operatorname{sen} \phi(\mathbf{x})\mathbf{j}). \end{aligned}$$

Logo, temos

$$\Delta \mathbf{m} + |\nabla \mathbf{m}|^2 \mathbf{m} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2 \operatorname{cos} \phi(\mathbf{x})\phi_x\phi_y - \operatorname{sen} \phi(\mathbf{x})(\phi_{xx} + \phi_{yy}))\mathbf{i} + (2 \operatorname{sen} \phi(\mathbf{x})\phi_x\phi_y + \operatorname{cos} \phi(\mathbf{x})(\phi_{xx} + \phi_{yy}))\mathbf{j} = 0.$$

Multiplicando a primeira coordenada da equação acima por  $\operatorname{cos} \phi(\mathbf{x})$  e a segunda por  $\operatorname{sen} \phi(\mathbf{x})$ , obtemos

$$\begin{cases} \operatorname{cos} \phi(\mathbf{x})(2 \operatorname{cos} \phi(\mathbf{x})\phi_x\phi_y - \operatorname{sen} \phi(\mathbf{x})(\phi_{xx} + \phi_{yy})) = 0 \\ \operatorname{sen} \phi(\mathbf{x})(2 \operatorname{sen} \phi(\mathbf{x})\phi_x\phi_y + \operatorname{cos} \phi(\mathbf{x})(\phi_{xx} + \phi_{yy})) = 0 \end{cases}$$

e somando as duas equações resultantes, segue que

$$\phi_x\phi_y = 0 \tag{1.14}$$

ou seja,  $\phi_x = 0$  ou  $\phi_y = 0$ . Assim, como as funções  $\operatorname{cos}$  e  $\operatorname{sen}$  não se anulam simultaneamente, segue que

$$\Delta \phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \tag{1.15}$$

ou seja,  $\phi$  é harmônica. □

**Observação 1.1.** Observamos que a recíproca do lema acima, no entanto, não é válida. Como exemplo, se  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é dado por  $\phi(x, y) = x + y$ , então  $\phi$  é harmônico, mas não satisfaz 1.14.

### 1.4.1 Caso $m$ ortogonal à uma direção constante do espaço

Separamos o estudo deste caso em dois subcasos:  $\alpha = 0$  e  $\alpha \in (0, \pi/2)$ .

**Caso  $\alpha = 0$ :** Neste caso, temos

$$|\langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle| = 1. \quad (1.16)$$

Como  $m$  está contido no plano com coordenada  $z = 0$ , temos que

$$\langle \mathbf{m}, \text{rot}(\mathbf{m}) \rangle = \left\langle \mathbf{m}, \left( \frac{\partial \mathbf{m}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{m}_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial \mathbf{m}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{m}_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial \mathbf{m}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{m}_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right\rangle = 0.$$

Assim, as hipóteses do teorema de Frobenius são satisfeitas, o que garante a existência, localmente, de uma única superfície solução  $S$  para 1.16.

Como  $|\langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle| = 1$ , segue que  $|\mathbf{n}| = |\mathbf{m}| = 1$ . Assim, a imagem de  $S$  por  $N$  está contida em um círculo e, pelo mesmo argumento usado na seção 1.3, segue que a curvatura Gaussiana de  $S$  é nula em todos os pontos e  $S$  é, portanto, uma superfície regrada. Observando finalmente que o cilindro  $C \times \mathbb{R}$  com eixo vertical, onde  $C \subset D$  é uma curva em um plano ortogonal a  $\mathbf{k}$ , satisfaz esta condição, segue que esta é a solução  $S$  procurada, isto é,  $S = C \times \mathbb{R}$ . Resta-nos, agora, explicitar esta curva  $C$ .

Observamos que o vetor normal unitário  $\mathbf{n}$  de  $S$  é vetor normal unitário de  $C$ . Logo,  $C$  satisfaz 1.16, que veremos agora como uma equação na curva  $C$ . Assumindo que  $D$  é simplesmente conexo e que  $m$  é harmônico, segue, pelo Lema 1.7, que a função  $\phi$  é harmônica, e denotando por  $w$  sua conjugada harmônica, temos que

$$\begin{cases} \phi_x + w_y = 0 \\ \phi_y - w_x = 0 \end{cases}$$

Defina agora o campo vetorial  $\mathbf{u}$ , não nulo, em  $D$ :

$$\mathbf{u} = e^{-w} \mathbf{m} = e^{-w} (\cos \phi(\mathbf{x}) \mathbf{i} + \sin \phi(\mathbf{x}) \mathbf{j}). \quad (1.17)$$

**Teorema 1.8.** O campo vetorial  $\mathbf{u}$ , definido acima, é conservativo.

*Demonstração.* Observe que a função  $e^{-w}$  é um fator integrante para  $\mathbf{m}$ , e estendendo  $\mathbf{u}$  para um campo vetorial de  $\mathbb{R}^3$  para  $\mathbb{R}^3$ , ou seja,

$$\mathbf{u} = u^1(\mathbf{x})\mathbf{i} + u^2(\mathbf{x})\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \quad \mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 0\mathbf{k},$$

segue que, uma vez que  $w$  é conjugada harmônica de  $\phi$ ,

$$\begin{aligned} u_x^2 - u_y^1 &= -e^{-w}w_x \sin \phi(\mathbf{x}) + e^{-w} \cos \phi(\mathbf{x})\phi_x + e^{-w}w_y \cos \phi(\mathbf{x}) + e^{-w} \sin \phi(\mathbf{x})\phi_y \\ &= -e^{-w}(\sin \phi(\mathbf{x})(w_x - \phi_y) + \cos \phi(\mathbf{x})(\phi_x + w_y)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{u}) &= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + (u_x^2 - u_y^1)\mathbf{k} \\ &= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, como  $\text{rot}(\mathbf{u}) = 0$  e as derivadas de segunda ordem das funções componentes de  $\mathbf{u}$  são contínuas, segue que  $\mathbf{u}$  é um campo vetorial conservativo, como queríamos demonstrar.  $\square$

Consideremos novamente  $\mathbf{m} : D \rightarrow P^1(\mathbb{R})$ . Como  $\mathbf{u}$  é conservativo, existe uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\nabla f = \mathbf{u}, \tag{1.18}$$

e podemos escrever  $C$  como conjunto de nível de  $f$ , ou seja,

$$C = \{\mathbf{x} \in D; f(\mathbf{x}) = c\}, \tag{1.19}$$

com  $\{f(\mathbf{x}) = c\}$  curva integral ortogonal de  $\mathbf{m}$ . Observe ainda que, uma vez que  $\nabla f$  é normal às curvas de nível de  $f$ , obtemos

$$\mathbf{m} = \mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|},$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} \nabla f \times \mathbf{m} &= -f_x \sin \phi(\mathbf{x}) + f_y \cos \phi(\mathbf{x}) \\ &= -e^{-w} \cos \phi(\mathbf{x}) \sin \phi(\mathbf{x}) + e^{-w} \sin \phi(\mathbf{x}) \cos \phi(\mathbf{x}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Desta forma, concluímos que a Equação 1.16 é equivalente à

$$\nabla f \times \mathbf{m} = 0. \tag{1.20}$$

Fazendo a identificação  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  e sendo  $z = x + yi$ , defina

$$m(z) = e^{-i\phi(z)} \quad \text{e} \quad u(z) = e^{-(w(z)+i\phi(z))} \quad (1.21)$$

onde  $w(z) = w(x, y)$  e  $\phi(z) = \phi(x, y)$ . Definida desta forma,  $u'(z)$  existe para todo  $z \in D$ . Logo,  $u$  é holomorfa em  $D$ .

Considere agora uma função holomorfa  $F$  em  $D$ ,

$$F = \bar{f} + ig, \quad (1.22)$$

com  $\bar{f}$  e  $g$  funções reais. Como  $F$  é holomorfa, as derivadas parciais de  $\bar{f}$  e  $g$  com relação à  $x$  e  $y$  satisfazem às equações de Cauchy-Riemann. Assim,

$$\begin{aligned} F' &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + i \frac{\partial g}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} - i \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}. \end{aligned}$$

Afirmamos que  $\bar{f}$  satisfaz 1.16 e 1.20 se, e somente se, existe uma função real  $\lambda(z)$  tal que

$$F'(z) = \lambda(z)u(z).$$

De fato, isso ocorre se, e somente se,  $\bar{f}$  satisfaz  $\nabla \bar{f} = \lambda(z)\mathbf{u}$  para alguma função real  $\lambda(z)$ , o que nos dá

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \mathbf{j} &= \nabla \bar{f} \\ &= \lambda(z)\mathbf{u} \\ &= \lambda(z)e^{-w}(\cos \phi(\mathbf{x})\mathbf{i} + \sin \phi(\mathbf{x})\mathbf{j}). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Por outro lado, usando 1.21, temos que

$$\begin{aligned} u(z) &= e^{-(w(z)+i\phi(z))} \\ &= e^{-w(z)}(\cos \phi(z) - i \sin \phi(z)). \end{aligned}$$

Assim, por 1.23 segue que

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} - i \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \\ &= \lambda(z)e^{-w(z)}(\cos \phi(z) - i \sin \phi(z)) \\ &= \lambda(z)u(z), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. Agora, utilizando o fato de que  $F'$  e  $u$  são holomorfas, chega-se à conclusão de que as derivadas parciais de primeira ordem de  $\lambda$  são nulas. Desta forma,  $\lambda$  é uma constante real, e assim, a menos de uma multiplicação por uma constante real, segue que

$$F'(z) = u(z). \quad (1.24)$$

Assim, a curva  $C$  é conjunto de nível de  $\bar{f}$ , que é a parte real da função  $F$ . Temos então

$$C = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(F(z)) = c\}. \quad (1.25)$$

Suponhamos agora que  $m$  possui uma singularidade ao longo de uma reta  $l$  paralela ao eixo do cilindro  $\Omega$ , ou seja, que  $l$  seja uma "straight disclination". Assumindo que  $l$  intercepta  $D$  em  $\mathbf{x} = 0$ , nós podemos considerar  $m : D/0 \rightarrow P^1(\mathbb{R})$ , que é singular em 0. Desta forma, escrevendo  $m = (\cos \phi(\mathbf{x}), \operatorname{sen} \phi(\mathbf{x})) = (m^1, m^2)$  e recordando que a "strength"  $k$  da singularidade é, matematicamente, o número de  $\pi$ -rotações do campo  $m : \gamma \rightarrow P^1(\mathbb{R})$  quando  $\gamma$  é circulado uma vez, onde  $\gamma$  é uma curva fechada, a "strength"  $k$  da singularidade 0 é, por definição (ver [22]), dada por

$$\frac{k}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} d\phi.$$

Fixando  $k \in \mathbb{Z}$  e sendo  $(r, \theta)$  coordenadas polares centradas em 0, definimos a função harmônica  $\bar{g} : D/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , em função de  $k$  e das soluções  $\phi$  de 1.15, por

$$\bar{g}(r, \theta) = \phi(r, \theta) - \frac{k}{2}\theta.$$

Observe que, definindo  $\bar{g}$  desta forma, sua integral é nula. Além disso, a transformação dada por  $z \mapsto ze^{\frac{2}{k}(w_g + ig)}$ , onde  $w_g$  é a conjugada harmônica de  $g$ , é conforme, uma vez que, sendo composição de funções holomorfas, é holomorfa, e possui derivada que não se anula. Assim, por meio desta transformação, restringiremos  $m$  à forma

$$\mathbf{m} = \cos\left(\frac{k\theta}{2}\right)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left(\frac{k\theta}{2}\right)\mathbf{j}. \quad (1.26)$$

Escrevendo

$$\phi = \frac{k\theta}{2}, \quad (1.27)$$

procuremos agora sua conjugada harmônica  $w$ . Como  $(r, \theta)$  são coordenadas polares centradas em 0, temos  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \operatorname{sen} \theta$ . Assim,  $w = w(x(r, \theta), y(r, \theta))$  e portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial w}{\partial x} (-r \operatorname{sen} \theta) + \frac{\partial w}{\partial y} (r \cos \theta) \\ &= r \left( -\frac{\partial w}{\partial x} \operatorname{sen} \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \theta \right).\end{aligned}$$

Desta forma, temos

$$r \operatorname{sen} \theta \frac{\partial w}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} = r \frac{\partial w}{\partial y},$$

de onde segue que

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \operatorname{sen} \theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{h} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \quad (1.28)$$

Analogamente, temos

$$r \cos \theta \frac{\partial w}{\partial r} - \operatorname{sen} \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} = r \frac{\partial w}{\partial x},$$

de onde se conclui que

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \quad (1.29)$$

Utilizando exatamente o mesmo argumento, chegamos também ao sistema

$$\begin{cases} \frac{k}{2} = -r \operatorname{sen} \theta \frac{\partial \phi}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ 0 = \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial x} + r \operatorname{sen} \theta \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases}$$

de onde concluímos que  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{k \cos \theta}{2r}$  e  $\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{k \operatorname{sen} \theta}{2r}$ .

Agora, como  $w$  é conjugada harmônica de  $\phi$ ,

$$\begin{cases} -\frac{k \operatorname{sen} \theta}{2r} = -\operatorname{sen} \theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{k \cos \theta}{2r} = \cos \theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação do sistema acima por  $\cos \theta$ , a segunda por  $\operatorname{sen} \theta$  e somando as equações resultantes, segue que  $\frac{\partial w}{\partial \theta} = 0$ , ou seja,  $w = w(r)$  só depende da variável  $r$ . Em seguida, utilizando este fato e multiplicando a primeira equação do sistema por  $\operatorname{sen} \theta$ , a segunda por  $\cos \theta$  e somando as equações resultantes, segue que  $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{k}{2r}$ , ou seja,

$$w = \frac{k}{2} \ln |r|. \quad (1.30)$$

Apresentaremos agora o resultado que classifica as superfícies de ângulo constante  $\alpha = 0$  em  $\mathbb{R}^3$ , considerando  $\mathbf{m}$  um campo de orientação harmônico contido no plano  $z = 0$  e ortogonal à uma direção constante do espaço.

**Teorema 1.9.** *As superfícies de ângulo constante  $\alpha = 0$  em  $\mathbb{R}^3$ , no caso em que  $\mathbf{m}$  é um campo de orientação harmônico contido no plano  $z = 0$  e ortogonal à uma direção constante do espaço, são cilindros  $C \times \mathbb{R}$  com eixo vertical, onde  $C \subset D$  é uma curva em um plano ortogonal a  $\mathbf{k}$ , dada em função do número de  $\pi$ -rotações  $k$  de  $\mathbf{m}$  ao redor da singularidade da seguinte forma:*

- se  $k \leq 1$ ,  $k \neq 0$ , então  $C$  é dada por  $r = \frac{c}{\left| \cos\left(\frac{2-k}{2}\theta\right) \right|^{\frac{2}{2-k}}}$ .
- Se  $k = 2$ , então ocorrem dois subcasos:
  - Se  $\theta = 0$ , a curva é uma circunferência com  $r = \text{constante}$ ;
  - Se  $\theta \neq 0$ , a curva é uma espiral logarítmica com  $r = ce^{\alpha \text{tg } \theta}$ .
- Se  $k \geq 3$ , então a curva  $C$  é dada por  $r = c \left| \cos\left(\frac{2-k}{2}\theta\right) \right|^{\frac{2}{2-k}}$ .

*Demonstração.* Substituindo 1.27 e 1.30 em 1.21, temos que

$$\begin{aligned}
 u(z) &= e^{(-w(z)+i\phi(z))} \\
 &= e^{(-\frac{k}{2} \ln |r| + i\frac{k\theta}{2})} \\
 &= e^{-\frac{k}{2} \ln |r|} \cos\left(\frac{k\theta}{2}\right) - i \text{sen}\left(\frac{k\theta}{2}\right) \\
 &= (e^{\ln r})^{-\frac{k}{2}} \cos\left(\frac{k\theta}{2}\right) - i \text{sen}\left(\frac{k\theta}{2}\right) \\
 &= r^{-\frac{k}{2}} \cos\left(\frac{k\theta}{2}\right) - i \text{sen}\left(\frac{k\theta}{2}\right) \\
 &= z^{-\frac{k}{2}}
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$u(z) = z^{-\frac{k}{2}}. \tag{1.31}$$

Logo, como  $F'(z) = u(z)$ , segue que

$$F'(z) = z^{-\frac{k}{2}}$$

e derivando  $F$  com relação à  $z$ , temos

$$F(z) = \begin{cases} \frac{2}{2-k} z^{(2-k)/2}, & k \neq 2 \\ \ln(z), & k = 2. \end{cases}$$

Finalmente, por 1.25, a curva  $C$  é dada por  $C = \{z \in \mathbb{C}; f(z) = c\}$ , onde  $f(z)$  é, a menos de uma multiplicação por constante, igual à  $\bar{f}$ :

$$f(z) = \begin{cases} \operatorname{Re}(z^{(2-k)/2}) = \frac{1}{2}(z^{(2-k)/2} + \bar{z}^{-(2-k)/2}), & k \neq 2 \\ \ln |z|, & k = 2. \end{cases}$$

Para não precisarmos analisar o sinal de  $c$ , podemos simplesmente considerar a curva  $C'$  definida por  $|f(z)| = c > 0$ , que em coordenadas polares será dada em função de  $k$  como descrito abaixo:

- se  $k \leq 1$ ,  $k \neq 0$ , então temos

$$\begin{aligned} |z^{(2-k)/2} + \bar{z}^{-(2-k)/2}| = c &\Leftrightarrow \left| r^{\frac{2-k}{2}} \left( \cos\left(\frac{2-k}{2}\theta\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2-k}{2}\theta\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + r^{\frac{2-k}{2}} \left( \cos\left(\frac{2-k}{2}\theta\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2-k}{2}\theta\right) \right) \right| = c \\ &\Leftrightarrow r^{\frac{2-k}{2}} \left| \cos\left(\frac{2-k}{2}\theta\right) \right| = c \\ &\Leftrightarrow r = \frac{c}{\left| \cos\left(\frac{2-k}{2}\theta\right) \right|^{2/(2-k)}}. \end{aligned}$$

Logo, a curva  $C$ , representada por

$$r = \frac{c}{\left| \cos\left(\frac{2-k}{2}\theta\right) \right|^{\frac{2}{2-k}}} \quad (1.32)$$

não é limitada, não possui o defeito  $z = 0$  e possui  $2 - k$  componentes conexas com  $2 - k$  direções assintóticas.

- Se  $k = 2$ , então  $m = \cos \theta i + \operatorname{sen} \theta j$ . Logo,  $m$  é radial e correm, ainda, dois subcasos:

- Se  $\theta = 0$ , a curva é uma circunferência com  $r = \text{constante}$ ;
- Se  $\theta \neq 0$ , a curva é uma espiral logarítmica com  $r = ce^{\alpha \operatorname{tg} \theta}$ .

- Se  $k \geq 3$ , então temos

$$\begin{aligned} |z^{(2-k)/2} + \bar{z}^{-(2-k)/2}| = c &\Leftrightarrow \left| \frac{\cos\left(\frac{k-2}{2}\theta\right)}{r^{\frac{k-2}{2}}} \right| = c \\ &\Leftrightarrow r = c \left| \cos\left(\frac{2-k}{2}\theta\right) \right|^{2/(2-k)}. \end{aligned}$$



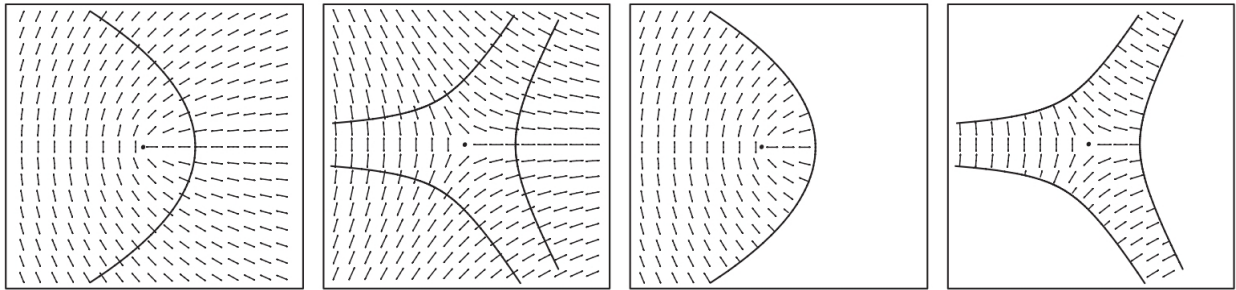
e a curva  $C$ , dada então por

$$r = c \left| \cos \left( \frac{2-k}{2} \theta \right) \right|^{\frac{2}{2-k}}, \quad (1.33)$$

é limitada, possui o defeito  $z = 0$  e tem a forma de um trevo com  $2 - k$  folhas.

□

Representamos na Figura 1.3 seções de uma superfície cilíndrica de ângulo constante no caso  $\alpha = 0$ , para alguns valores de  $k$ .



**Figura 1.3:** Da esquerda para a direita: (1) seção de uma superfície cilíndrica de ângulo constante no caso  $\alpha = 0$ , com  $k = 1$ ; (2) com  $k = -1$ ; (3) seção de um domínio cilíndrico cujo limite é uma superfície de ângulo constante com  $k = 1$  e (4) com  $k = -1$ . Fonte:[4].

**Caso  $\alpha \in (0, \pi/2)$ :** De maneira semelhante, o caso anterior pode ser estendido para  $\alpha$  arbitrário,  $\alpha \in (0, \pi/2)$ . Neste caso, temos

$$|\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \cos \alpha, \quad \alpha \in (0, \pi/2). \quad (1.34)$$

As superfícies  $S$  soluções de 1.34 são cilindros,  $S = C \times \mathbb{R}$ , com  $C \subset D$  curva plana que também satisfaz 1.34. Além disso, afirmamos que  $|\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \cos \alpha$  é equivalente à  $|\langle \bar{\mathbf{m}}, \mathbf{n} \rangle| = 1$ , onde

$$\bar{\mathbf{m}} = \cos(\varphi \pm \alpha) \mathbf{i} + \sin(\varphi \pm \alpha) \mathbf{j}.$$

De fato, observe primeiramente que

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{m}} &= \cos(\varphi \pm \alpha) \mathbf{i} + \sin(\varphi \pm \alpha) \mathbf{j} \\ &= (\cos \varphi \cos \alpha \mp \sin \varphi \sin \alpha) \mathbf{i} + (\sin \varphi \cos \alpha \pm \sin \alpha \cos \varphi) \mathbf{j}, \end{aligned}$$

e  $|\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \cos \alpha$  nos dá que

$$\mathbf{n} = (\cos \alpha \cos \varphi \mp \sin \alpha \sin \varphi) \mathbf{i} + (\cos \alpha \sin \varphi \pm \sin \alpha \cos \varphi) \mathbf{j},$$

daí, segue que  $|\langle \bar{\mathbf{m}}, \mathbf{n} \rangle| = 1$ , como queríamos demonstrar. Portanto, recaímos no caso  $\alpha = 0$ , onde agora

$$u(z) = e^{-(w(z)+i(\varphi(z)\pm\alpha))}. \quad (1.35)$$

Supomos, novamente, que  $\mathbf{m}$  possui singularidade ao longo de uma reta vertical  $l$  paralela ao eixo do cilindro e que o campo de direções  $\mathbf{m}$  possa ser escrito como em 1.26. Neste caso, 1.31 tem a forma

$$u(z) = e^{\pm i\alpha} z^{-(k/2)} \quad (1.36)$$

e portanto

$$\begin{cases} F(z) = \frac{2}{2-k} e^{\pm i\alpha} z^{(2-k)/2}, & k \neq 2 \\ e^{\pm i\alpha} \ln z, & k = 2. \end{cases}$$

Logo, as curvas  $C$  procuradas são dadas por

- Se  $k \neq 2$ ,  $C$  é uma rotação de ângulo  $2/(2-k)\alpha$  das curvas 1.32 e 1.33.
- Se  $k = 2$ ,  $C$  são espirais logarítmicas dadas por

$$\varrho = ce^{\pm\theta \tan \alpha}. \quad (1.37)$$

## 1.4.2 Campo de direções com um par de descontinuidades

O argumento da seção anterior pode ser estendido para  $N$  descontinuidades paralelas com strength  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , e intersectando o plano horizontal em  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $z_i \in \mathbb{C}$ . Neste caso, o ângulo nemático em equilíbrio é dado por

$$\phi = \phi_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i \theta_i, \quad (1.38)$$

onde  $\phi_0$  é um ângulo constante e  $\theta_i(\mathbf{x}) = \arctg \frac{y-y_i}{x-x_i}$ , centrado em  $z_i$ . Utilizando o mesmo argumento da seção anterior, podemos escrever

$$u(z) = e^{-i\phi_0} \prod_{i=1}^N (z - z_i)^{-(k_i/2)}. \quad (1.39)$$

Para exemplificar, consideremos o caso em que o campo de direções possua duas descontinuidades paralelas, de "strength"  $k_1 = k_2 = 1$  em  $z_1 = 0$  e  $z_2 = -ai$ ,  $a > 0$ . Assumindo  $\phi_0 = 0$ , 1.38

nos dá

$$\phi = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\bar{\theta}, \quad (1.40)$$

com  $\bar{\theta}(\mathbf{x}) = \arctg \frac{y}{x+a}$ , e de 1.39 segue que

$$u(z) = z^{-(1/2)}(z+a)^{-(1/2)}. \quad (1.41)$$

Observe que, considerando

$$F(z) = \ln \left( z + \frac{a}{2} + \sqrt{z(z+a)} \right)$$

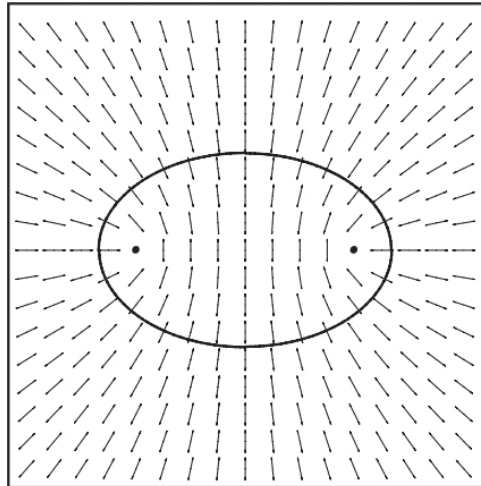
segue, por um simples cálculo, que

$$F'(z) = z^{-1/2}(z+a)^{-1/2} = u.$$

Logo,  $F$  é uma primitiva para  $u$  e as curvas ortogonais do campo de direções, com ângulo dado por 1.38, que são dadas por  $Re(F(z)) = c$ , são

$$\left| z + \frac{a}{2} + \sqrt{z(z+a)} \right| = c, \quad (1.42)$$

onde  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$ . A forma explícita desta curva em coordenadas polares segue de um cálculo direto. A Figura 1.4 mostra uma seção de uma superfície cilíndrica com um par de disclinations com  $k = 1$ , quando  $a = 2$ .



**Figura 1.4:** Seção de uma superfície cilíndrica com um par de disclinations com  $k = 1$ , quando  $a = 2$ . Fonte:[4].

## 1.5 Aplicações na fase Esmética C

Para descrever as configurações de equilíbrio nesta fase precisamos, além do campo de orientação  $\mathbf{m}$ , de uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  cujas superfícies de níveis caracterizem as camadas. Como anteriormente, considerando  $\alpha$  o ângulo constante entre  $\mathbf{m}$  e o vetor  $\mathbf{n} = \nabla f / |\nabla f|$ , normal à camada, temos

$$|\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \cos \alpha, \quad \alpha \in (0, \pi/2). \quad (1.43)$$

A energia de um cristal líquido em sua fase esmética C pode ser escrita como a soma de termos de energia nemática, que através de uma aproximação é dada pelo funcional 1.4, e onde cada um destes termos é dado por (veja [7] e [2])

$$\int_{\Omega} (A|\nabla f - q\mathbf{m}|^2 + B|\langle \mathbf{m}, \nabla f \rangle - q|^2) dv, \quad (1.44)$$

onde  $A, B$  e  $q$  são constantes positivas. Todo nosso estudo está restrito ao caso em que o campo de direções  $\mathbf{m}$  é dado previamente, e além disso, a função  $f$  minimiza 1.44, satisfazendo, evidentemente, a Equação 1.43.

Definamos agora a função  $\mathbf{P}$  tal que

$$\mathbf{P}(\nabla f) = \nabla f - \langle \mathbf{m}, \nabla f \rangle \mathbf{m}. \quad (1.45)$$

Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}(\nabla f), \mathbf{P}(\nabla f) \rangle &= |\nabla f|^2 - 2\langle \mathbf{m}, \nabla f \rangle^2 + \langle \mathbf{m}, \nabla f \rangle^2 \langle \mathbf{m}, \mathbf{m} \rangle \\ &= |\nabla f|^2 - \langle \mathbf{m}, \nabla f \rangle^2, \end{aligned}$$

e como  $\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \cos \alpha$ , com  $\mathbf{n} = \nabla f / |\nabla f|$ , segue que

$$\langle \mathbf{m}, \nabla f \rangle = \cos \alpha |\nabla f|,$$

ou seja,

$$|\nabla f|^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \langle \mathbf{m}, \nabla f \rangle^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}(\nabla f)|^2 &= |\nabla f|^2 - \langle \mathbf{m}, \nabla f \rangle^2 \\ &= \operatorname{tg}^2 \alpha \langle \mathbf{m}, \nabla f \rangle^2. \end{aligned}$$

Utilizando os fatos anteriores, podemos facilmente reescrever o integrando de 1.44 como

$$\begin{aligned}
A|\nabla f - q\mathbf{m}|^2 + B|\langle \mathbf{m}, \nabla f \rangle - q|^2 &= A|\nabla f|^2 - 2A\langle \nabla f, q\mathbf{m} \rangle + Aq^2 + B(\langle \mathbf{m}, \nabla f \rangle - q)^2 \\
&= A|\mathbf{P}(\nabla f)|^2 + A\langle \mathbf{m}, \nabla f \rangle^2 - 2Aq\langle \mathbf{m}, \nabla f \rangle \\
&\quad + Aq^2 + Bq^2 + B\langle \mathbf{m}, \nabla f \rangle^2 - 2Bq\langle \mathbf{m}, \nabla f \rangle \\
&= (A + B + A \operatorname{tg}^2 \alpha)\langle \mathbf{m}, \nabla f \rangle^2 - 2q(A + B)\langle \mathbf{m}, \nabla f \rangle \\
&\quad + q^2(A + B),
\end{aligned}$$

e a minimização com relação à  $x = \langle \mathbf{m}, \nabla f \rangle$  nos leva ao sistema

$$\begin{cases} |\mathbf{P}(\nabla f)| = \gamma \operatorname{tg} \alpha \\ \langle \mathbf{m}, \nabla f \rangle = \gamma \end{cases} \quad (1.46)$$

com

$$\gamma = \frac{(A + B)q}{(A + B) + A \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Para uma grande classe de campos de orientação, o sistema acima não possui solução. Veremos dois casos específicos para  $\mathbf{m}$  em que existe solução:  $\mathbf{m}$  constante e  $\mathbf{m}$  possuindo uma "straight disclination" com "strenght"2.

No caso de um cristal líquido nemático, a questão principal era determinar a superfície  $S$ , sendo  $f$  apenas uma função auxiliar da qual  $S$  era conjunto de nível. No presente caso,  $f$  caracteriza as camadas do cristal líquido, sendo uma incógnita que deverá ser encontrada através do sistema 1.46 e condições de contorno convenientes. A segunda equação deste sistema impõe forte restrição para a existência de solução da primeira, a de Hamilton-Jacobi.

Seja  $\mathbf{m}$  um campo de direções e considere um sistema de coordenadas  $(s, \xi) \in \mathbb{R}^3$ , onde  $s$  é o comprimento de arco ao longo das curvas integrais de  $\mathbf{m}$ , medido à partir da interseção da respectiva curva integral e  $S_0$ , e  $\xi$  um sistema de coordenadas em uma superfície  $S_0$  transversal à  $\mathbf{m}$ . Em outras palavras,  $s = s(\mathbf{x})$  e  $\xi = \xi(\mathbf{x})$  são tais que  $\xi(\mathbf{x})$  é o ponto de interseção da curva integral de  $\mathbf{m}$  que passa por  $\mathbf{x}$  com  $S_0$ , e  $s$  é o comprimento de arco desta curva de  $\xi$  até  $\mathbf{x}$ .

Seja  $f(x, y) = \widehat{f}(\xi(x, y), s(x, y))$ . Assim, segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{f}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{f}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y}.$$

Temos, por (1.44)<sub>2</sub>, que

$$\cos \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial f}{\partial y} = \gamma$$

logo, segue que

$$\cos \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \cos \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{f}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \sin \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \sin \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{f}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} = \gamma,$$

de onde segue

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi} \left( \cos \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sin \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \hat{f}}{\partial s} \left( \cos \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial s}{\partial x} + \sin \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial s}{\partial y} \right) = \gamma.$$

Como  $s$  é o comprimento de arco ao longo das curvas integrais de  $\mathbf{m}$ , temos que  $\langle \mathbf{m}, \nabla s \rangle = 1$ .

Além disso, como  $\langle \mathbf{m}, \nabla \xi \rangle = 0$ , segue finalmente que

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial s} = \gamma.$$

Logo, existe uma função  $g = g(\xi)$  tal que

$$\hat{f}(\xi, s) = \gamma(s + g(\xi)). \quad (1.47)$$

Com isso, temos a seguinte proposição:

**Proposição 1.10.** *A equação (1.46)<sub>1</sub> pode ser reescrita como*

$$|\nabla_{\xi} g|^2 + 2\nabla s \nabla_{\xi} g + |\nabla s|^2 - 1 = \text{tg}^2 \alpha. \quad (1.48)$$

*Demonstração.* A demonstração é direta, utilizando a Equação 1.45 e substituindo a Equação 1.47 em (1.46)<sub>1</sub>:

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}(\nabla f)| &= \gamma \text{tg} \alpha \\ \Leftrightarrow |\nabla f - \langle \mathbf{m}, \nabla f \rangle \mathbf{m}| &= \gamma \text{tg} \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{|\nabla(\gamma(s + g(\xi)))|^2}{\langle \mathbf{m}, \nabla f \rangle^2} - 1 &= \text{tg}^2 \alpha \\ \Leftrightarrow |\nabla s + \nabla g(\xi)|^2 - 1 &= \text{tg}^2 \alpha \\ \Leftrightarrow |\nabla s + \nabla_{\xi} g|^2 - 1 &= \text{tg}^2 \alpha \\ \Leftrightarrow |\nabla_{\xi} g|^2 + 2\nabla s \nabla_{\xi} g + |\nabla s|^2 - 1 &= \text{tg}^2 \alpha. \end{aligned}$$

□

Separaremos nosso estudo em dois casos especiais da equação 1.48:  $\mathbf{m}$  constante e  $\mathbf{m}$  possuindo uma "straight disclination"  $l$  com "strenght"  $k = 2$ .

Primeiro, considere  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$  um campo de orientação constante em um domínio cilíndrico  $D \times \mathbb{R}$  com coordenadas  $(x, y, z)$ , sendo  $z$  ao longo do eixo principal do cilindro. Por 1.47 segue que

$$f(x, y, z) = \gamma(z - g(x, y)), \quad (1.49)$$

e a equação 1.48 se reduz à Equação Eikonal

$$|\nabla g| = \text{tg } \alpha, \quad \alpha \in (0, 2\pi).$$

Logo, pelo mesmo argumento usado na Seção 1.3, supondo que  $g(x, y) = 0$  em  $\partial D'$ , segue que a solução de 1.48 é dada por

$$g(x, y) = t(x, y) \text{tg } \alpha,$$

onde  $t$  é a função que mede a distância à  $\partial D$ . Assim, temos

$$f(x, y, z) = \gamma(z - t(x, y) \text{tg } \alpha). \quad (1.50)$$

Como  $t$  geralmente é uma função multivalorada podemos, por exemplo, exigir que  $g$  satisfaça 1.48, para  $f$  estar de fato bem definida.

Como um segundo exemplo, seja  $\mathbf{m}$  um campo de orientação com "straight disclination"  $l$  com "strength"  $k = 2$ . Especificamente, seja  $\mathbf{m} = \mathbf{e}_r$ , com  $(r, \theta, z)$  coordenadas cilíndricas,  $z$  ao longo de  $l$ , onde  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$  forma uma base ortonormal canônica com relação à este sistema de coordenadas. Logo, temos  $\xi = (\theta, z)$  e  $s = r$ , de forma que

$$\nabla_\xi g = (\partial_z g) \mathbf{e}_z + (1/r)(\partial_\theta g) \mathbf{e}_\theta, \quad (1.51)$$

e a equação 1.48, neste caso, é dada por

$$(\partial_z g)^2 + \frac{1}{r^2} (\partial_\theta g)^2 = \text{tg}^2 \alpha. \quad (1.52)$$

Agora, como  $g$  não depende de  $r$ , obtemos de 1.51 que  $\partial_\theta g = 0$  e, por 1.47, segue que

$$\hat{f} = \gamma s + z \gamma \text{tg } \alpha + \text{constante}. \quad (1.53)$$

Considere agora como último exemplo o caso em que o campo de orientação  $\mathbf{m}$  possui um "hedgehog", sendo  $\mathbf{m} = \mathbf{e}_R$ , com  $(R, \theta, \psi) \in \mathbb{R}^3$  coordenadas esféricas, onde  $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\psi\}$  forma

uma base ortonormal canônica com relação à este sistema de coordenadas . Neste caso,  $\xi = (\theta, \psi)$  e  $s = R$ , de forma que

$$\nabla_{\xi} g = \frac{1}{R}(\partial_{\theta} g)\mathbf{e}_{\theta} + \frac{1}{R \sin \theta}(\partial_{\psi} g)\mathbf{e}_{\psi}, \quad (1.54)$$

e a equação 1.48 neste caso é dada por

$$\frac{1}{R^2}(\partial_{\theta} g)^2 + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta}(\partial_{\psi} g)^2 = \tan^2 \alpha. \quad (1.55)$$

Como  $g$  não depende de  $R$ , a equação acima não possui solução para  $\alpha \neq 0$ , não existindo superfícies de ângulo constante neste caso.



# Superfícies de ângulo constante em

$$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$$

---

---

## 2.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos os resultados obtidos em [8] sobre a classificação de superfícies de ângulo constante em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . O resultado principal será o Teorema 2.6, mostrando que, a menos de isometrias do espaço ambiente, as superfícies que formam um ângulo constante com relação ao campo  $\partial_t$ , tangente à componente  $\mathbb{R}$  do espaço ambiente, são dadas localmente por

$$F(u, v) = (\cos(u \cos \alpha) f(v) + \operatorname{sen}(u \cos \alpha) f(v) \times f'(v), u \operatorname{sen} \alpha),$$

onde  $f : I \rightarrow \mathbb{S}^2$  é uma curva em  $\mathbb{S}^2$  parametrizada por comprimento de arco e  $\alpha \in [0, \pi]$  é o ângulo constante considerado.

Dois casos triviais ocorrem: quando  $\alpha = 0$ , o que corresponde à superfície  $\mathbb{S}^2 \times \{0\}$ , e quando  $\alpha = \pi/2$ , correspondente à superfície  $F(u, v) = (f(v), u)$ . Ao final do capítulo, apresentaremos

um exemplo explícito não-trivial de superfície de ângulo constante em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ : uma rotação de uma hélice cujo vetor tangente forma um ângulo constante com o campo  $\partial_t$ .

## 2.2 Superfícies de ângulo constante em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

Seja  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  o produto cartesiano entre a esfera euclidiana  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}$ . Munimos  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  com a métrica produto  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e com a correspondente conexão de Levi-Civita  $\bar{\nabla}$ , e consideramos o campo de vetores  $\partial_t$ , na direção da componente  $\mathbb{R}$ .

Seja  $\bar{R}$  o tensor curvatura de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Como observado no Apêndice A, a variedade Riemanniana  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  pode ser considerada um produto warped com função constante igual à 1 (para mais detalhes, veja o Apêndice e o Capítulo 3). Logo, utilizando o Teorema A.3, que caracteriza o tensor curvatura em um produto warped, temos que  $\bar{R}$  se reduz à curvatura de  $\mathbb{S}^2$ . Como esta, por sua vez, é constante, obtemos que  $\bar{R}$  satisfaz

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle X_t, W_t \rangle \langle Y_t, Z_t \rangle - \langle X_t, Z_t \rangle \langle Y_t, W_t \rangle, \quad (2.1)$$

com  $X, Y, Z, W \in T(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})$  e

$$X_t = X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t, \quad Y_t = Y - \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t, \quad Z_t = Z - \langle Z, \partial_t \rangle \partial_t, \quad W_t = W - \langle W, \partial_t \rangle \partial_t \quad (2.2)$$

projeções dos vetores  $X, Y, Z$  e  $W$ , respectivamente, no espaço tangente de  $\mathbb{S}^2$ .

Consideremos agora uma superfície  $M$ , isometricamente imersa em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Uma vez que nosso estudo será feito localmente, podemos considerar  $M$  orientável. Seja, então,  $\xi$  um campo de vetores unitário normal à  $M$ . Observe que podemos decompor  $\partial_t$  como soma de sua componente normal e sua componente tangente. Em outras palavras,

$$\partial_t = T + \cos \alpha \xi, \quad (2.3)$$

sendo  $T$  a projeção de  $\partial_t$  no fibrado tangente de  $M$  e  $\alpha$  ângulo entre  $\partial_t$  e  $\xi$ , satisfazendo

$$\cos \alpha = \langle \partial_t, \xi \rangle. \quad (2.4)$$

Denotaremos por  $R, \nabla, \nabla^\perp, h$  e  $A$ , respectivamente, o tensor curvatura, a conexão de Levi-Civita, a conexão normal, a segunda forma fundamental e o operador de forma de  $M$ . Com estas notações,

recordemos que são válidas as fórmulas de Gauss e Weingarten

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (\text{Gauss})$$

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A(X) + \nabla_X^\perp \xi, \quad (\text{Weingarten})$$

além disso, vamos considerar a seguinte notação para a derivada covariante da segunda forma fundamental:

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y, Z, \xi) = X \langle h(Y, Z), \xi \rangle - \langle h(\nabla_X Y, Z), \xi \rangle - \langle h(Y, \nabla_X Z), \xi \rangle - \langle h(Y, Z), \nabla_X^\perp \xi \rangle, \quad (2.5)$$

onde  $X, Y, Z \in TM$ . Desta forma, veremos no teorema abaixo uma reescrita para as equações de Gauss e de Codazzi, o que nos será útil adiante.

**Teorema 2.1.** *Seguindo a notação estabelecida, a equação de Gauss*

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle - \langle h(Y, W), h(X, Z) \rangle + \langle h(X, W), h(Y, Z) \rangle \quad (2.6)$$

e a de Codazzi

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, \xi \rangle = (\bar{\nabla}_X h)(Y, Z, \xi) - (\bar{\nabla}_Y h)(X, Z, \xi) \quad (2.7)$$

podem ser reescritas, respectivamente, como

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= \langle AY, Z \rangle \langle AX, W \rangle - \langle AX, Z \rangle \langle AY, W \rangle + \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle \\ &\quad - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle + \langle Y, T \rangle \langle W, T \rangle \langle X, Z \rangle + \langle X, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle Y, W \rangle \\ &\quad - \langle X, T \rangle \langle W, T \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle X, W \rangle \end{aligned} \quad (2.8)$$

e

$$\nabla_X A(Y) - \nabla_Y A(X) - A[X, Y] = \cos \alpha (\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y). \quad (2.9)$$

*Demonstração.* A equação de Gauss 2.6 nos dá

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle - \langle h(Y, W), h(X, Z) \rangle + \langle h(X, W), h(Y, Z) \rangle \\ &= \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle - \langle A(Y), W \rangle \langle A(X), Z \rangle + \langle A(X), W \rangle \langle A(Y), Z \rangle. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Analisaremos  $\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle$  separadamente. Substituindo 2.2 em 2.1, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle X_t, W_t \rangle \langle Y_t, Z_t \rangle - \langle X_t, Z_t \rangle \langle Y_t, W_t \rangle \\ &= \langle X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t, W - \langle W, \partial_t \rangle \partial_t \rangle \langle Y - \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t, Z - \langle Z, \partial_t \rangle \partial_t \rangle \\ &\quad - \langle X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t, Z - \langle Z, \partial_t \rangle \partial_t \rangle \langle Y - \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t, W - \langle W, \partial_t \rangle \partial_t \rangle \\ &= [\langle X, W \rangle - \langle X, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle] [\langle Y, Z \rangle - \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle] \\ &\quad - [\langle X, Z \rangle - \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle] [\langle Y, W \rangle - \langle Y, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle] \end{aligned}$$

e usando 2.3 temos

$$\begin{aligned}\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= [\langle X, W \rangle - \langle X, T + \cos \alpha \xi \rangle \langle W, T + \cos \alpha \xi \rangle] \cdot \\ &\quad [\langle Y, Z \rangle - \langle Y, T + \cos \alpha \xi \rangle \langle Z, T + \cos \alpha \xi \rangle] \\ &\quad - [\langle X, Z \rangle - \langle X, T + \cos \alpha \xi \rangle \langle Z, T + \cos \alpha \xi \rangle] \cdot \\ &\quad [\langle Y, W \rangle - \langle Y, T + \cos \alpha \xi \rangle \langle W, T + \cos \alpha \xi \rangle].\end{aligned}$$

Logo, lembrando que  $\xi$  é ortogonal à  $X, Y, Z$ , segue finalmente que

$$\begin{aligned}\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle + \langle Y, T \rangle \langle W, T \rangle \langle X, Z \rangle \\ &\quad + \langle X, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle Y, W \rangle - \langle X, T \rangle \langle W, T \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle X, W \rangle.\end{aligned}$$

Substituindo esta expressão para  $\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle$  em 2.10, temos

$$\begin{aligned}\langle R(X, Y)Z, W \rangle &= \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle - \langle A(Y), W \rangle \langle A(X), Z \rangle + \langle A(X), W \rangle \langle A(Y), Z \rangle \\ &= \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle + \langle Y, T \rangle \langle W, T \rangle \langle X, Z \rangle \\ &\quad + \langle X, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle Y, W \rangle - \langle X, T \rangle \langle W, T \rangle \langle Y, Z \rangle \\ &\quad - \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle X, W \rangle - \langle A(Y), W \rangle \langle A(X), Z \rangle + \langle A(X), W \rangle \langle A(Y), Z \rangle,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

No caso da equação de Codazzi, como a codimensão da imersão é 1, segue que  $\nabla_X^\perp \xi = 0$ . Daí

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_X h)(Y, Z, \xi) &= X \langle h(Y, Z), \xi \rangle - \langle h(\nabla_X Y, Z), \xi \rangle - \langle h(Y, \nabla_X Z), \xi \rangle - \langle h(Y, Z), \nabla_X^\perp \xi \rangle \\ &= X \langle A(Y), Z \rangle - \langle A(\nabla_X Y), Z \rangle - \langle A(Y), \nabla_X Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X(A(Y)), Z \rangle - \langle A(\nabla_X(Y)), Z \rangle\end{aligned}$$

e do mesmo modo

$$(\bar{\nabla}_Y h)(X, Z, \xi) = \langle \nabla_Y(A(X)), Z \rangle - \langle A(\nabla_Y(X)), Z \rangle.$$

Logo, de 2.7 resulta que

$$\begin{aligned}\langle \bar{R}(X, Y)Z, \xi \rangle &= \langle \nabla_X(A(Y)), Z \rangle - \langle A(\nabla_X(Y)), Z \rangle - \langle \nabla_Y(A(X)), Z \rangle + \langle A(\nabla_Y(X)), Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X(A(Y)) - \nabla_Y(A(X)) - A[X, Y], Z \rangle.\end{aligned}$$

(2.11)

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X, Y)Z, \xi \rangle &= \langle X_t, \xi_t \rangle \langle Y_t, Z_t \rangle - \langle X_t, Z_t \rangle \langle Y_t, \xi_t \rangle \\
&= \langle X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t, \xi - \langle \xi, \partial_t \rangle \partial_t \rangle \langle Y - \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t, Z - \langle Z, \partial_t \rangle \partial_t \rangle \\
&\quad - \langle X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t, Z - \langle Z, \partial_t \rangle \partial_t \rangle \langle Y - \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t, \xi - \langle \xi, \partial_t \rangle \partial_t \rangle \\
&= [-\langle X, \partial_t \rangle \langle \xi, \partial_t \rangle] [\langle Y, Z \rangle - \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle] \\
&\quad - [\langle X, Z \rangle - \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle] [-\langle Y, \partial_t \rangle \langle \xi, \partial_t \rangle],
\end{aligned}$$

e, usando 2.3, temos que

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X, Y)Z, \xi \rangle &= -\langle X, T \rangle \cos \alpha [\langle Y, Z \rangle - \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle] + \langle Y, T \rangle \cos \alpha [\langle X, Z \rangle - \langle X, T \rangle \langle Z, T \rangle] \\
&= \langle (\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y) \cos \alpha, Z \rangle.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Logo, igualando as expressões 2.11 e 2.12, segue finalmente que

$$\nabla_X A(Y) - \nabla_Y A(X) - A[X, Y] = \cos \alpha (\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y).$$

como queríamos demonstrar. □

O seguinte resultado também nos será útil adiante:

**Proposição 2.2.** *Para todo vetor  $X \in TM$ , temos que*

$$\nabla_X T = \cos \alpha A(X); \tag{2.13}$$

$$X(\cos \alpha) = -\langle A(X), T \rangle. \tag{2.14}$$

*Demonstração.* Como  $\partial_t = T + \cos \alpha \xi$ , temos que

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X T &= \bar{\nabla}_X (\partial_t - \cos \alpha \xi) \\
&= \bar{\nabla}_X \partial_t - \bar{\nabla}_X \cos \alpha \xi \\
&= \bar{\nabla}_X \partial_t - \cos \alpha \bar{\nabla}_X \xi - X(\cos \alpha) \xi \\
&= \bar{\nabla}_X \partial_t - \cos \alpha (-A(X) + \bar{\nabla}_X^\perp \xi) - X(\cos \alpha) \xi \\
&= \bar{\nabla}_X \partial_t + \cos \alpha A(X) - X(\cos \alpha) \xi.
\end{aligned}$$

Observe ainda que, como  $\partial_t$  é constante, temos  $\bar{\nabla}_X \partial_t = 0$ . Logo,

$$\bar{\nabla}_X T = \cos \alpha A(X) - X(\cos \alpha) \xi$$

e pela fórmula de Gauss segue finalmente que

$$\nabla_X T = \cos \alpha A(X).$$

Para a segunda equação, observe primeiramente que

$$\nabla_X^\perp T = \nabla_X^\perp \partial_t - \cos \alpha \nabla_X^\perp \xi - X(\cos \alpha) \xi = -X(\cos \alpha) \xi.$$

Derivando ambos os lados de  $\langle T, \xi \rangle = 0$  com relação à  $X$ , obtemos

$$\langle \bar{\nabla}_X T, \xi \rangle + \langle T, \bar{\nabla}_X \xi \rangle = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_X T, \xi \rangle = -X(\cos \alpha) &\Rightarrow \langle T, \bar{\nabla}_X \xi \rangle = X(\cos \alpha) \\ &\Rightarrow -\langle T, A(X) \rangle = X(\cos \alpha), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

As equações 2.6, 2.7, 2.13 e 2.14 são chamadas *equações de compatibilidade* de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ .

## 2.2.1 Caracterização de superfícies de ângulo contante em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

Buscaremos agora caracterizar as superfícies de ângulo constante em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Desta forma, de agora em diante, assumiremos que  $\alpha$  é constante. Assim, temos  $X(\cos \alpha) = 0$  e, de 2.14, segue que

$$0 = \langle A(X), T \rangle = \langle A(T), X \rangle, \quad \forall X \in T_p M. \quad (2.15)$$

Logo, temos a seguinte proposição:

**Proposição 2.3.** *Se  $\alpha$  for um ângulo constante, então  $T$  será uma direção principal de  $A$  com curvatura principal 0.*

Considere  $\alpha \in [0, \pi]$ . No caso  $\alpha = 0$ , o campo  $\partial_t$  é sempre normal à superfície, e portanto ela estará contida em  $\mathbb{S}^2 \times \{t_0\}$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ . O caso  $\alpha = \pi$  é, a menos de orientação, equivalente ao caso  $\alpha = 0$ . Para  $\alpha = \pi/2$ ,  $\partial_t$  é sempre tangente, o que corresponde ao produto riemanniano entre uma curva em  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{R}$ . Suponha, então,  $\alpha \notin \{0, \pi/2\}$  e considere uma base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$ , com  $e_1 = T/|T|$ , onde

$$|T| = |\partial_t - \cos \alpha \xi| = \sin \alpha,$$

e  $e_2$  unitário ortogonal à  $e_1$  tomado de forma que  $\{e_1, e_2\}$  seja uma base compatível com a orientação de  $M$ . Nestas condições, temos o seguinte resultado:

**Proposição 2.4.** *Seja  $M \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  uma superfície de ângulo constante  $\alpha$ . Então, o operador de forma  $A$  com respeito à base  $\{e_1, e_2\}$  é dado por*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

para alguma função  $\lambda \in C^\infty(M)$ . Além disso, a conexão de Levi-Civita  $\nabla$  de  $M$  satisfaz

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= 0, & \nabla_{e_2} e_1 &= \lambda \cot \alpha e_2, \\ \nabla_{e_1} e_2 &= 0, & \nabla_{e_2} e_2 &= -\cot \alpha \lambda e_1. \end{aligned} \quad (2.17)$$

*Demonstração.* Pela Proposição 2.3, temos que  $A(e_1) = 0$ . Observando ainda que

$$\langle e_1, A(e_2) \rangle = \langle A(e_1), e_2 \rangle = 0$$

e definindo  $\lambda$  como

$$\lambda = \langle e_2, A(e_2) \rangle,$$

segue que

$$A(e_2) = 0 e_1 + \lambda e_2.$$

Logo, o operador de forma  $A$  pode ser escrito como em 2.16.

Agora, utilizando 2.16 e 2.13, segue que a conexão de Levi-Civita  $\nabla$  de  $M$  satisfaz

$$\nabla_{e_2} e_1 = \nabla_{e_2} \left( \frac{T}{|T|} \right) = \left( \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) A(e_2) = \lambda \cot \alpha e_2 \quad (2.18)$$

e

$$\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_1} \left( \frac{T}{|T|} \right) = \left( \frac{\cos \alpha}{|T|} \right) A(e_1) = 0. \quad (2.19)$$

Além disso, derivando  $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$  e  $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$  com relação à  $e_2$ , temos

$$\langle e_1, \nabla_{e_2} e_2 \rangle = -\langle \nabla_{e_2} e_1, e_2 \rangle = -\cot \alpha \lambda$$

e

$$\langle e_2, \nabla_{e_2} e_2 \rangle = 0,$$

de onde segue que

$$\nabla_{e_2} e_2 = -\cotg \alpha \lambda e_1. \quad (2.20)$$

De forma análoga, derivando  $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$  e  $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$  com relação à  $e_1$ , segue que

$$\langle e_1, \nabla_{e_1} e_2 \rangle = -\langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle = 0$$

e

$$\langle e_2, \nabla_{e_1} e_2 \rangle = 0,$$

e portanto segue que

$$\nabla_{e_1} e_2 = 0, \quad (2.21)$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

A fim de obtermos uma expressão para a curvatura Gaussiana  $K$  de  $M$ , reescrevemos a equação de Gauss 2.8 utilizando  $\{e_1, e_2\}$ :

$$\begin{aligned} K &= \langle R(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle \\ &= \langle A(e_2), e_2 \rangle \langle A(e_1), e_1 \rangle - \langle A(e_1), e_2 \rangle \langle A(e_2), e_1 \rangle + \langle e_1, e_1 \rangle \langle e_2, e_2 \rangle \\ &\quad - \langle e_1, e_2 \rangle \langle e_2, e_1 \rangle + \langle e_2, T \rangle \langle e_1, T \rangle \langle e_1, e_2 \rangle + \langle e_1, T \rangle \langle e_2, T \rangle \langle e_2, e_1 \rangle \\ &\quad - \langle e_1, T \rangle \langle e_1, T \rangle \langle e_2, e_2 \rangle - \langle e_2, T \rangle \langle e_2, T \rangle \langle e_1, e_1 \rangle. \end{aligned}$$

Da proposição anterior, segue que

$$\begin{aligned} K &= 1 - \langle e_1, T \rangle \langle e_1, T \rangle \langle e_2, e_2 \rangle \\ &= 1 - \sen^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

Resumimos estes fatos no teorema abaixo:

**Teorema 2.5.** *Seja  $M$  uma superfície de ângulo constante  $\alpha$  em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Então  $M$  tem curvatura Gaussiana  $K = \cos^2 \alpha$  e  $T$  é uma direção principal de  $M$ .*

## 2.2.2 Classificação de superfícies de ângulo constante em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

Apresentamos, nesta seção, o resultado que classifica localmente as superfícies de ângulo constante em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Para isto, consideramos  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  como uma hiper superfície contida em  $\mathbb{E}^4$  e  $\partial_t = (0, 0, 0, 1)$ .



Temos, desta forma, o seguinte resultado:

**Teorema 2.6.** *Seja  $M$  uma superfície isometricamente imersa em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Então  $M$  é de ângulo constante se, e somente se, a imersão*

$$F: M \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto F(u, v)$$

é, a menos de isometrias de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , localmente dada por

$$F(u, v) = (\cos(u \cos \alpha) f(v) + \sin(u \cos \alpha) f(v) \times f'(v), u \sin \alpha), \quad (2.22)$$

onde  $f: I \rightarrow \mathbb{S}^2$  é uma curva em  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  parametrizada por comprimento de arco e  $\alpha \in [0, \pi]$  é o ângulo constante.

*Demonstração.* Primeiramente, mostraremos que 2.22 define, de fato, uma superfície de ângulo constante. Para isto, observe que

$$F_u = (\cos \alpha (-\sin(u \cos \alpha) f(v) + \cos(u \cos \alpha) f(v) \times f'(v)), \sin \alpha)$$

e

$$F_v = (\cos(u \cos \alpha) f'(v) + \sin(u \cos \alpha) f(v) \times f''(v), 0)$$

$$= ((\cos(u \cos \alpha) + \sin(u \cos \alpha) \tau(v)) f'(v), 0),$$

para alguma função  $\tau$  em  $M$ , onde  $f \times f'' = \tau f'$ . Aqui, usamos o fato de  $f$  estar parametrizada por comprimento de arco, para garantir que  $f, f'$  e  $f''$  formam uma base de  $\mathbb{R}^3$  em cada ponto de  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ .

Além disso, como o vetor normal  $\bar{\xi}$  de  $\mathbb{S}^2$  é igual ao vetor posição de  $\mathbb{S}^2$ , temos

$$\bar{\xi} = (\cos(u \cos \alpha) f(v) + \sin(u \cos \alpha) f(v) \times f'(v), 0).$$

Logo, segue que o vetor normal de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  em  $\mathbb{E}^4$ , que deve ser normal à  $T\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^4$  e também à  $\partial_t = (0, 0, 0, 1)$ , é igual à  $\bar{\xi}$ . Já o vetor normal unitário  $\xi$  de  $M$  em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  é dado por

$$\xi = (-\sin \alpha (-\sin(u \cos \alpha) f(v) + \cos(u \cos \alpha) f(v) \times f'(v)), \cos \alpha),$$

de onde segue que

$$\langle \xi, \partial_t \rangle = \cos \alpha, \quad (2.23)$$

que é constante, como queríamos demonstrar.

Reciprocamente, suponha que  $M \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  seja uma superfície de ângulo constante  $\alpha$ . Mostremos que  $M$  pode ser parametrizada como em 2.22.

Se  $\alpha = 0$ , sabemos que  $M = \mathbb{S}^2 \times \{t_0\}$ , e temos ainda que, neste caso,

$$F(u, v) = (\cos uf(v) + \operatorname{sen} uf(v) \times f'(v), 0) \subset \mathbb{S}^2 \times \{0\},$$

que é uma parametrização para  $M$ , a menos de uma translação em  $\mathbb{S}^2$ .

Se  $\alpha = \pi/2$ , então  $\partial_t$  é tangente à  $M$  e a superfície é obtida pelo produto de uma curva de  $\mathbb{S}^2$  com  $\mathbb{R}$ , e

$$F(u, v) = (f(v), u) \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$$

é uma parametrização para  $M$ .

Suponha então  $\alpha \notin \{0, \pi/2\}$  e seja  $\{e_1 = T/|T|, e_2\}$  base ortonormal do espaço tangente, onde  $|T| = \operatorname{sen} \alpha$ . Uma vez que sempre é possível obtermos parametrizações locais ortogonais, considere coordenadas  $(u, v)$  em  $M$  tais que  $\partial_u = \gamma e_1$  e  $\partial_v = \beta e_2$ , onde  $\gamma = \gamma(u, v)$  e  $\beta = \beta(u, v)$  (Ver [11], teorema página 182). Como  $(u, v)$  é um sistema de coordenadas, temos  $[\partial_u, \partial_v] = 0$ . Além disso, usando 2.18, 2.21 obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= [\partial_u, \partial_v] \\ &= [\gamma e_1, \beta e_2] \\ &= \gamma \beta [e_1, e_2] + \gamma e_1(\beta) e_2 - \beta e_2(\gamma) e_1 \\ &= -\gamma \beta \lambda \cotg \alpha e_2 + \gamma e_1(\beta) e_2 - \beta e_2(\gamma) e_1 \\ &= (-\gamma \beta \lambda \cotg \alpha + \gamma e_1(\beta)) e_2 - \beta e_2(\gamma) e_1 \end{aligned}$$

ou seja,

$$-\gamma \beta \lambda \cotg \alpha + \gamma e_1(\beta) = 0 \quad \text{e} \quad -\beta e_2(\gamma) = 0,$$

de onde se conclui que

$$\beta_u = \gamma \beta \lambda \cotg \alpha \quad \text{e} \quad \gamma_v = 0. \quad (2.24)$$

Desta forma,  $\gamma$  é constante com relação à  $v$  e, portanto, só depende de  $u$ . Desta forma, a menos de uma parametrização, podemos tomar  $\partial_u = e_1$ , ou seja, podemos assumir  $\gamma = 1$ . Logo,

$$\langle \partial_u, \partial_u \rangle = |\gamma|^2 = 1;$$

$$\langle \partial_v, \partial_v \rangle = |\beta|^2 = \beta^2;$$

$$\langle \partial_u, \partial_v \rangle = 0,$$

e a métrica  $ds^2$  é dada por

$$ds^2 = du^2 + \beta^2(u, v)dv^2. \quad (2.25)$$

Usando os fatos anteriores, temos também que

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\partial_u} \partial_v &= \nabla_{e_1} \beta e_2 \\ &= \beta \nabla_{e_1} e_2 + e_1(\beta) e_2 \\ &= e_1 \beta e_2 \\ &= \lambda \cot \alpha \partial_v; \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} \nabla_{\partial_v} \partial_v &= \nabla_{\beta e_2} \beta e_2 \\ &= \beta \nabla_{e_2} \beta e_2 + \beta e_2(\beta) e_2 \\ &= -\beta \lambda \cot \alpha e_1 + \beta e_2(\beta) e_2 \\ &= -\beta \beta_u \partial_u + \frac{\beta_v}{\beta} \partial_v \end{aligned} \right| \nabla_{\partial_u} \partial_u = \nabla_{e_1} e_1 = 0. \quad (2.26)$$

Pela equação de Codazzi 2.9, obtemos

$$\lambda_u = -\cos \alpha \sin \alpha - \lambda^2 \cot \alpha,$$

e integrando com relação à  $u$  segue que

$$\lambda(u, v) = -\sin \alpha \operatorname{tg}(u \cos \alpha + C(v)), \quad (2.27)$$

onde  $C$  é uma função em  $M$ . Usando este fato e a expressão 2.24, segue também que

$$\beta(u, v) = D(v) \cos(u \cos \alpha + C(v)), \quad (2.28)$$

onde  $D$  é também uma função em  $M$ .

Sabemos que  $M$  possui codimensão 2 quando imersa em  $\mathbb{E}^4$ . Seja  $D$  a conexão do espaço euclidiano e  $\bar{\nabla}^\perp$  a conexão normal. Temos então os vetores unitários normais à  $M$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cos \alpha)$ , que é tangente à  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , e  $\bar{\xi} = (F_1, F_2, F_3, 0)$ , que é normal à  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Denotemos os operadores de forma, respectivamente, por  $A$  e  $\bar{A}$ . Seja  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4) \in T_p M$  qualquer. Observe que podemos escrever

$$\bar{\xi} = F_1 \partial_x + F_2 \partial_y + F_3 \partial_z + 0 \partial_w$$

e

$$X = X_1 \partial_x + X_2 \partial_y + X_3 \partial_z + X_4 \partial_w.$$

Uma vez que

$$D_X F = (X_1, X_2, X_3, X_4),$$

obtemos

$$X(F_1) = X_1, \quad X(F_2) = X_2, \quad X(F_3) = X_3 \quad \text{e} \quad X(F_4) = X_4.$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} D_X \bar{\xi} &= D_X(F_1 \partial_x + F_2 \partial_y + F_3 \partial_z + 0 \partial_w) \\ &= X_1 \partial_x + X_2 \partial_y + X_3 \partial_z + 0 \partial_w \\ &= (X_1, X_2, X_3, 0) \end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X^\perp \bar{\xi} &= \langle D_X \bar{\xi}, \bar{\xi} \rangle \bar{\xi} + \langle D_X \bar{\xi}, \xi \rangle \xi \\ &= \langle D_X \bar{\xi}, \xi \rangle \xi, \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X^\perp \bar{\xi} &= \langle D_X \bar{\xi}, \xi \rangle \xi \\ &= \langle (X_1, X_2, X_3, 0), \xi \rangle \xi. \end{aligned}$$

Observe que também podemos escrever  $X = (X_1, X_2, X_3, 0) + (0, 0, 0, X_4)$ . Assim, como  $X$  e  $\xi$  são ortogonais, temos

$$0 = \langle X, \xi \rangle = \langle (X_1, X_2, X_3, 0), \xi \rangle + \langle (0, 0, 0, X_4), \xi \rangle = \langle D_X \bar{\xi}, \xi \rangle + X_4 \cos \alpha,$$

e como

$$\begin{aligned} X_4 &= \langle X, \partial_t \rangle \\ &= \langle X, T \rangle + \cos \alpha \langle X, \xi \rangle \\ &= \langle X, T \rangle, \end{aligned}$$

segue finalmente que

$$\bar{\nabla}_X^\perp \bar{\xi} = -\cos \alpha \langle X, T \rangle \xi. \quad (2.29)$$

Além disso, como  $\bar{\nabla}_X^\perp \xi = \langle D_X \xi, \bar{\xi} \rangle \bar{\xi} = -\langle \xi, D_X \bar{\xi} \rangle \bar{\xi}$ , segue também que

$$\bar{\nabla}_X^\perp \xi = \cos \alpha \langle X, T \rangle \bar{\xi}. \quad (2.30)$$

Pela fórmula de Weingarten, temos que

$$\bar{A}(\partial_u) = \bar{\nabla}_{\partial_u}^\perp \bar{\xi} - D_{\partial_u} \bar{\xi} = \bar{\nabla}_{\partial_u}^\perp \bar{\xi} - ((F_1)_u, (F_2)_u, (F_3)_u, 0),$$

e por 2.29 temos que

$$\bar{\nabla}_{\partial_u}^\perp \bar{\xi} = -\cos \alpha \langle \partial_u, T \rangle \xi = -\cos \alpha \sin \alpha (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cos \alpha),$$

e assim

$$\bar{A}(\partial_u) = -((F_1)_u, (F_2)_u, (F_3)_u, 0) - \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cos \alpha). \quad (2.31)$$

Do mesmo modo,

$$\bar{A}(\partial_v) = \bar{\nabla}_{\partial_v}^\perp \bar{\xi} - D_{\partial_v} \bar{\xi} = \bar{\nabla}_{\partial_v}^\perp \bar{\xi} - ((F_1)_v, (F_2)_v, (F_3)_v, 0),$$

e

$$\bar{\nabla}_{\partial_v}^\perp \bar{\xi} = -\cos \alpha \langle \partial_v, T \rangle \xi = 0,$$

e portanto

$$\bar{A}(\partial_v) = -((F_1)_v, (F_2)_v, (F_3)_v, 0). \quad (2.32)$$

Como  $\partial_u = e_1 = T/|T|$  e  $\partial_v = \beta e_2$ , com  $e_1$  perpendicular à  $e_2$ , segue que

$$(F_4)_u = \langle F_u, \partial_t \rangle = \operatorname{sen} \alpha; \quad (2.33)$$

$$(F_4)_v = \langle F_v, \partial_t \rangle = 0, \quad (2.34)$$

de onde podemos admitir que

$$F_4 = u \operatorname{sen} \alpha, \quad (2.35)$$

uma vez que translações na direção de  $(0, 0, 0, 1)$  são isometrias de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ .

Observe agora que, usando 2.31 e 2.33, a quarta componente de  $\bar{A}(\partial_u)$ , que denotaremos por  $\bar{A}(\partial_u)_4$ , é dada por

$$\bar{A}(\partial_u)_4 = -\cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha = -\cos^2 \alpha (F_4)_u.$$

Como 2.32 e 2.34 nos dão que  $\bar{A}(\partial_v) = -\partial_v$  e a matriz de  $\bar{A}$  é simétrica, concluímos que

$$\bar{A}(\partial_v) = 0 \partial_u - \partial_v \quad \text{e} \quad \bar{A}(\partial_u) = -\cos^2 \alpha \partial_u + 0 \partial_v. \quad (2.36)$$

Segue daí que a matriz do operador de forma  $\bar{A}$  é dada por

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -\cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Como  $\bar{A}(\partial_u) = -\cos^2 \alpha \partial_u = -\cos^2 \alpha F_u$  segue, analisando as demais coordenadas de 2.31, que

$$\xi_i = -\frac{(F_i)_u (-\cos^2 \alpha + 1)}{\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha (F_i)_u, \quad (2.38)$$

$i = 1, 2, 3$ .

Utilizando a fórmula de Gauss e recordando que  $\nabla_{e_1} e_1 = 0$ , temos que

$$F_{uu} = D_{F_u} F_u = D_{e_1} e_1 = \nabla_{e_1} e_1 + h(e_1, e_1) = h(e_1, e_1),$$

onde

$$\begin{aligned} h(e_1, e_1) &= \langle D_{e_1} e_1, \xi \rangle \xi + \langle D_{e_1} e_1, \bar{\xi} \rangle \bar{\xi} \\ &= \langle e_1, A(e_1) \rangle \xi + \langle e_1, \bar{A}(e_1) \rangle \bar{\xi} \\ &= -\cos^2 \alpha \bar{\xi} \\ &= -\cos^2 \alpha (F_1, F_2, F_3, 0). \end{aligned}$$

Logo,

$$(F_j)_{uu} = \cos^2 \alpha F_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.39)$$

Além disso, como 2.16 e 2.37 implicam que  $h(\partial u, \partial v) = 0$ , temos

$$\begin{aligned} F_{uv} &= D_{F_u} F_v \\ &= \nabla_{\partial_u} \partial_v \\ &= \lambda \cot \alpha \partial_v \\ &= \lambda \cot \alpha (F)_v, \end{aligned}$$

e daí,

$$(F_j)_{uv} = \lambda \cot \alpha (F_j)_v, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.40)$$

Por fim,

$$\begin{aligned} F_{vv} &= D_{F_v} F_v \\ &= D_{\beta e_2} \beta e_2 \\ &= \nabla_{\beta e_2} \beta e_2 + h(\beta e_2, \beta e_2) \\ &= \nabla_{\beta e_2} \beta e_2 + \beta^2 h(e_2, e_2) \\ &= \nabla_{\partial_v} \partial_v + \beta^2 h(e_2, e_2) \\ &= -\beta \beta_u \partial_u + \frac{\beta_v}{\beta} \partial_v + \beta^2 h(e_2, e_2), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
h(e_2, e_2) &= \langle D_{e_2} e_2, \xi \rangle \xi + \langle D_{e_2} e_2, \bar{\xi} \rangle \bar{\xi} \\
&= \langle e_2, A(e_2) \rangle \xi + \langle e_2, \bar{A}(e_2) \rangle \bar{\xi} \\
&= \lambda \xi - \bar{\xi} \\
&= -\lambda \operatorname{tg} \alpha F_u - F.
\end{aligned}$$

Logo,

$$(F_j)_{vv} = -\beta \beta_u (F_j)_u + \frac{\beta_v}{\beta} (F_j)_v - \lambda \beta^2 \operatorname{tg} \alpha (F_j)_u - \beta^2 F_j, \quad (2.41)$$

para  $j = 1, 2, 3$ .

Substituindo a expressão para  $\lambda$  em 2.40, segue que

$$(F_j)_{vu} = -\cos \alpha \operatorname{tg}(u \cos \alpha + C(v)) (F_j)_v,$$

e resolvendo esta EDO, temos

$$(F_j)_v = \cos(u \cos \alpha + C(v)) H_j(v), \quad (2.42)$$

sendo  $H_j$  funções em  $M$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Portanto, integrando ambos os lados de 2.42, obtemos

$$(F_j) = \int_{v_0}^v \cos(u \cos \alpha + C(y)) H_j(y) dy + I_j(u), \quad (2.43)$$

sendo  $I_j$  funções em  $M$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Usando 2.39 e comparando com 2.43, temos que a função  $I_j$  é dada por

$$I_j(u) = K_j \cos(u \cos \alpha) + L_j \operatorname{sen}(u \cos \alpha), \quad (2.44)$$

com  $K_j, L_j$  constantes. Logo, a imersão  $F$  é dada por

$$\begin{aligned}
F &= \left( (K_1 + \int_{v_0}^v \cos(C(y)) H_1(y) dy) \cos(u \cos \alpha) \right. \\
&\quad \left. + (L_1 - \int_{v_0}^v \operatorname{sen}(C(y)) H_1(y) dy) \operatorname{sen}(u \cos \alpha), \dots, u \operatorname{sen} \alpha \right).
\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\begin{array}{l|l}
\langle F_u, F_u \rangle = \langle \partial_u, \partial_u \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle = 1; & \langle F_u, \bar{\xi} \rangle = 0; \\
\langle F_v, F_v \rangle = \langle \beta \partial_v, \beta \partial_v \rangle = \beta^2 \langle e_2, e_2 \rangle = \beta^2; & \langle F_v, \bar{\xi} \rangle = 0; \\
\langle F_u, F_v \rangle = \langle \partial_u, \beta \partial_v \rangle = \beta \langle e_1, e_2 \rangle = 0; & \langle \xi, \xi \rangle = 1; \\
\langle F_u, \xi \rangle = 0; & \langle \bar{\xi}, \bar{\xi} \rangle = 1; \\
\langle F_v, \xi \rangle = 0; & \langle \xi, \bar{\xi} \rangle = 1.
\end{array} \quad (2.45)$$

Definamos, agora,

$$\begin{aligned} f_j(v) &= K_j + \int_{v_0}^v \cos(C(y))H_j(y)dy, \\ g_j(v) &= L_j - \int_{v_0}^v \text{sen}(C(y))H_j(y)dy. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Desta forma, a imersão  $F$  pode ser escrita como

$$F = (f_1 \cos(u \cos \alpha) + g_1 \text{sen}(u \cos \alpha), \dots, u \text{sen} \alpha). \quad (2.47)$$

Afirmamos que as equações em 2.45 são equivalentes à

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 f_j^2 = 1; \quad \sum_{j=1}^3 g_j^2 = 1; \quad \sum_{j=1}^3 f_j g_j = 0; \quad \sum_{j=1}^3 f'_j g_j = 0; \\ \sum_{j=1}^3 H_j = \sum_{j=1}^3 (f'_j)^2 + (g'_j)^2 = D^2(v). \end{aligned} \quad (2.48)$$

De fato, como  $\langle F_u, \bar{\xi} \rangle = 0$ , segue que

$$(F_1)_u(F_1) + (F_2)_u(F_2) + (F_3)_u(F_3) = 0,$$

ou seja,

$$\sum_j (-f_j \text{sen}(u \cos \alpha) \cos \alpha + g_j \cos(u \cos \alpha) \cos \alpha)(f_j \cos(u \cos \alpha) + g_j \text{sen}(u \cos \alpha)) = 0.$$

Daí, chega-se à equação

$$\sum_j \left( (g_j^2 - f_j^2) \frac{\text{sen}(2u \cos \alpha)}{2} + f_j g_j \cos(2u \cos \alpha) \right) \cos \alpha = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^3 \left( (g_j^2 - f_j^2) \frac{\text{sen}(2u \cos \alpha)}{2} + f_j g_j \cos(2u \cos \alpha) \right) = 0,$$

uma vez que  $\cos \alpha \neq 0$ . Logo, como esta equação deve ser satisfeita para todo  $u$  pertencente ao domínio, obtemos que

$$\sum_{j=1}^3 (g_j^2 - f_j^2) = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^3 f_j g_j = 0.$$

Além disso, como  $\langle \bar{\xi}, \bar{\xi} \rangle = 1$ , temos

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 1,$$



de onde segue que

$$\cos^2(u \cos \alpha) \sum_j f_j^2 + 2 \cos(u \cos \alpha) \sin(u \cos \alpha) \sum_j f_j g_j + \sin^2(u \cos \alpha) \sum_j g_j^2 = 1.$$

Assim, como esta equação também deve ser satisfeita para todo  $u$  pertencente ao domínio, segue finalmente que

$$\sum_{j=1}^3 g_j^2 = 1 = \sum_j f_j^2.$$

Agora, como  $\langle F_v, \bar{\xi} \rangle = 0$ , segue que

$$\sum_{i=1}^3 (F_v)_j F_v = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^3 ((f_j)' \cos(u \cos \alpha) + (g_j)' \sin(u \cos \alpha))(f_j \cos(u \cos \alpha) + g_j \sin(u \cos \alpha)) = 0,$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 ((f_j)' f_j \cos^2(u \cos \alpha) + (g_j)' g_j \sin^2(u \cos \alpha) \\ & + ((f_j)' g_j + f_j (g_j)') (\sin(u \cos \alpha) + \cos(u \cos \alpha)) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Assim, usando novamente o fato de as equações serem válidas para todo  $u$  pertencente ao domínio, obtemos

$$\sum_{j=1}^3 (f_j)' f_j = 0; \quad \sum_{j=1}^3 (g_j)' g_j = 0; \quad \sum_{j=1}^3 ((f_j)' g_j + f_j (g_j)') = 0.$$

Agora, usando  $\langle F_v, \xi \rangle = 0$  e a equação 2.38, temos

$$\sum_{j=1}^3 (F_v)_j (F_j)_u = 0,$$

o que nos dá

$$\sum_{j=1}^3 ((f_j)' \cos(u \cos \alpha) + (g_j)' \sin(u \cos \alpha))(-f_j \sin(u \cos \alpha) + g_j \cos(u \cos \alpha) \cos \alpha) = 0,$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 ((-f_j)'f_j + (g_j)'g_j) \cos(u \cos \alpha) \operatorname{sen}(u \cos \alpha) \\ & + (f_j)'g_j \cos^2(u \cos \alpha) - f_j(g_j)' \operatorname{sen}^2(u \cos \alpha) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Portanto, como esta equação deve ser satisfeita para todo  $u$  do domínio, segue que

$$\sum_{j=1}^3 (f_j)'g_j = 0.$$

Por fim, como

$$\begin{aligned} f_j'(v) &= \cos(C(v))H_j(v); \\ g_j'(v) &= -\operatorname{sen}(C(v))H_j(v), \end{aligned}$$

segue que

$$\sum_{j=1}^3 (f_j')^2 + (g_j')^2 = \sum_{j=1}^3 H_j^2.$$

Além disso, como  $\langle F_v, F_v \rangle = \beta^2(u, v) = D^2(v) \cos^2(u \cos \alpha + C(v))$ , temos

$$\begin{aligned} & \cos^2(u \cos \alpha) \left( \sum_{j=1}^3 (f_j')^2 + \operatorname{sen}^2(u \cos \alpha) \sum_{j=1}^3 (g_j')^2 \right) \\ & + 2 \operatorname{sen}(u \cos \alpha) \cos(u \cos \alpha) \sum_{j=1}^3 f_j'g_j' \\ & = D^2(v) \cos^2(u \cos \alpha + C(v)), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \cos^2(u \cos \alpha) \sum_{j=1}^3 \cos^2(C(v))H_j^2 + \operatorname{sen}^2(u \cos \alpha) \sum_{j=1}^3 \operatorname{sen}^2(C(v))H_j^2(v) \\ & - 2 \operatorname{sen}(u \cos \alpha) \cos(u \cos \alpha) \sum_{j=1}^3 \cos(C(v)) \operatorname{sen}(C(v))H_j^2 \\ & = D^2 \cos^2(u \cos \alpha + C(v)). \end{aligned}$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} & (\cos^2(u \cos \alpha) \cos^2(C(v)) + \operatorname{sen}^2(u \cos \alpha) \operatorname{sen}^2(C(v))) \\ & - 2 \operatorname{sen}(u \cos \alpha) \cos(u \cos \alpha) \cos(C(v)) \operatorname{sen}(C(v)) H_j^2 \\ & = D^2 \cos^2(u \cos \alpha + C(v)), \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\cos^2(u \cos \alpha + C(v)) \sum_{j=1}^3 H_j^2 = D^2 \cos^2(u \cos \alpha + C(v)),$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^3 H_j^2 = \sum_{j=1}^3 (f'_j)^2 + (g'_j)^2 = D^2(v).$$

Logo, as equações em 2.45 implicam em 2.48. Através de cálculos diretos, obtemos também que as equações em 2.48 implicam nas equações em 2.45, provando, assim, a afirmação.

Observe agora que, por 2.48,  $f = (f_1(v), f_2(v), f_3(v))$  e  $g = (g_1(v), g_2(v), g_3(v))$  são curvas em  $\mathbb{S}^2$ . Observe ainda que se tomarmos a coordenada  $v$  de forma que  $f$  esteja parametrizada por comprimento de arco, temos

$$\sum_{j=1}^3 \cos^2(C(v)) H_j^2 = 1,$$

ou seja,

$$D^2(v) = \sum_{j=1}^3 H_j^2 = \sec^2(C(v)).$$

Finalmente, de 2.48, temos que  $g$  é unitário ortogonal à  $f$  e à  $f'$  e, desta forma,  $g = \pm f \times f'$ . Assumindo  $g = f \times f'$ , segue que a imersão  $F$  é dada por

$$F(u, v) = (\cos(u \cos \alpha) f(v) + \sin(u \cos \alpha) f(v) \times f'(v), u \sin \alpha)$$

e o teorema está provado. □

Faremos agora algumas considerações finais à respeito deste capítulo. Primeiramente, observe que a Equação 2.41 é sempre válida. Afirmamos que esta equação implica que  $f_j^2 + g_j^2 + \left(\frac{H_j}{D}\right)^2$  deve ser constante, para cada  $j$ . De fato, para  $H_j \neq 0$ , temos que

$$\begin{aligned} f_j^2 + g_j^2 + \left(\frac{H_j}{D}\right)^2 &= \text{constante} \\ \Leftrightarrow \left(f_j^2 + g_j^2 + \left(\frac{H_j}{D}\right)^2\right)' &= 0 \\ \Leftrightarrow D^2(f_j \cos \alpha - g_j \sin \alpha) + H_j' - H_j \frac{D'}{D} &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, obtendo separadamente cada parcela da Equação 2.41, temos

$$\begin{aligned}
(F_j)_{vv} &= -\operatorname{sen}(u \cos \alpha + C)C' H_j + \cos(u \cos \alpha + C)H_j', \\
\beta \beta_u(F_j)_u &= -D^2 \cos(u \cos \alpha + C) \operatorname{sen}(u \cos \alpha + C) \cos^2 \alpha (-f_j \operatorname{sen}(u \cos \alpha) + g_j \cos(u \cos \alpha)), \\
\frac{\beta_v}{\beta}(F_j)_v &= \frac{D}{D'} \cos(u \cos \alpha + C)H_j - \operatorname{sen}(u \cos \alpha + C)C' H_j, \\
\lambda \beta^2 \tan \alpha (F_j)_u &= -D^2 \operatorname{sen}(u \cos \alpha + C) \cos(u \cos \alpha + C) \operatorname{sen}^2 \alpha (-f_j \operatorname{sen}(u \cos \alpha) + g_j \cos(u \cos \alpha)), \\
\beta^2 F_j &= D^2 \cos^2(u \cos \alpha + C)(f_j \cos(u \cos \alpha) + g_j \operatorname{sen}(u \cos \alpha)).
\end{aligned}$$

Logo, através de um cálculo direto, considerando  $\cos(u \cos \alpha + C) \neq 0$ , temos que

$$\begin{aligned}
(F_j)_{vv} &= -\beta \beta_u(F_j)_u + \frac{\beta_v}{\beta}(F_j)_v - \lambda \beta^2 \operatorname{tg} \alpha (F_j)_u - \beta^2 F_j \\
&\Leftrightarrow D^2(f_j \cos \alpha - g_j \operatorname{sen} \alpha) + H_j' - H_j \frac{D'}{D} = 0 \\
&\Leftrightarrow f_j^2 + g_j^2 + \left(\frac{H_j}{D}\right)^2 = \text{constante},
\end{aligned} \tag{2.49}$$

como queríamos demonstrar. Realmente,  $\frac{1}{D}(H_1, H_2, H_3)$  é um vetor unitário na direção de  $f'$  e, assim,  $f, g$  e  $\frac{1}{D}(H_1, H_2, H_3)$  formam uma base ortonormal. Observe também que a fórmula de Weingarten é satisfeita.

Relembre agora que dois casos triviais de superfícies de ângulo constante em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  ocorrem quando  $\alpha = 0$  e  $\alpha = \pi/2$ . Se  $\alpha = 0$ , obtemos de 2.22 que a superfície é da forma

$$F(u, v) = (\cos(u)f(v) + \operatorname{sen}(u)f(v) \times f'(v), 0) \tag{2.50}$$

ou seja, é  $\mathbb{S}^2 \times \{0\}$ . Já no caso  $\alpha = \pi/2$ , a Equação 2.22 nos dá que a superfície é

$$F(u, v) = (f(v), u) \tag{2.51}$$

ou seja, é o produto cartesiano entre uma curva em  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{R}$ .

A partir da Equação 2.22, nós podemos construir vários casos não-triviais de superfícies de ângulo constante. Um caso especial explícito é quando a imersão  $F : M \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^4$  é da forma

$$F(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u, u \operatorname{tg} \alpha) \tag{2.52}$$

com  $\alpha \in (0, \pi/2)$  constante. Esta é a parametrização de 2.22 no caso em que a função  $f$  é um grande círculo. Geometricamente, se tomarmos  $v = 0$ , obtemos uma curva em  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ , que representa uma hélice cujo vetor tangente forma um ângulo constante com  $\partial_t$ . O caso geral 2.52 é obtido por uma rotação desta curva.

# Superfícies de ângulo constante em um produto warped

## 3.1 Introdução

Sejam  $B$  e  $F$  variedades diferenciáveis com métricas, respectivamente,  $g_B$  e  $g_F$ , e considere  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $I$  aberto, uma função estritamente positiva. Definimos o produto warped de  $B$  e  $F$  com função  $f$  como sendo

$$(\overline{M}, \overline{g}) = B \times_f F = (B \times F, g_B + f^2 g_F)$$

ou seja, é a variedade produto  $B \times F$  munida da métrica  $\overline{g} = g_B + f^2 g_F$ . Neste capítulo, mostraremos os resultados obtidos em [10] sobre a classificação de superfícies de ângulo constante no produto warped  $I \times_f \mathbb{E}^2$ , para uma função qualquer  $f$  estritamente positiva. O resultado principal é o Teorema 3.7, que classifica as superfícies de ângulo constante com relação ao campo  $\partial_t$ , tangente à componente  $I$  do produto  $I \times_f \mathbb{E}^2$ . Considerando  $i : M \rightarrow I \times_f \mathbb{E}^2$  uma imersão isométrica,

$M \subset I \times_f \mathbb{E}^2$ , o teorema afirma que  $i$  é de ângulo constante  $\alpha \in [0, \pi/2]$  se, e somente se, ocorre um dos três casos abaixo:

1) existem coordenadas locais  $(u, v) \in M$  onde  $i$  é dada por

$$i(u, v) = \left( u \operatorname{sen} \alpha, \cotg \alpha \left( \int^{u \operatorname{sen} \alpha} \frac{d\tau}{f(\tau)} \right) \cos v - \int^v \gamma(\tau) \operatorname{sen} \tau d\tau, \right. \\ \left. \cotg \alpha \left( \int^{u \operatorname{sen} \alpha} \frac{d\tau}{f(\tau)} \right) \operatorname{sen} v + \int^v \gamma(\tau) \cos \tau d\tau \right),$$

para alguma função suave  $\gamma$ ,

2)  $i(M)$  é um subconjunto aberto do cilindro

$$x - \cotg \alpha \int^t \frac{d\tau}{\tau} = 0,$$

3)  $i(M)$  é um subconjunto aberto da superfície  $t = t_0$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha = 0$ .

Novamente, temos dois casos triviais quando  $\alpha = 0$  e  $\alpha = \pi/2$ , o que nos dá, respectivamente, uma superfície do tipo (3) do teorema e um subconjunto aberto de um cilindro com eixo principal paralelo à  $\partial_t$ . Por fim, classificaremos as superfícies de rotação, flats e mínimas com ângulo constante com relação ao campo  $\partial_t$  em  $I \times_f \mathbb{E}^2$ .

## 3.2 Superfícies de ângulo constante em $I \times_f \mathbb{E}^2$

Como já foi mencionado, neste capítulo buscaremos classificar as superfícies de ângulo constante no produto warped  $I \times_f \mathbb{E}^2$ , onde  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo aberto,  $\mathbb{E}^2$  é o plano euclidiano e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável estritamente positiva. Especificamente,

$$(\overline{M}, \overline{g}) = I \times_f \mathbb{E}^2 = (I \times \mathbb{R}^2, dt^2 + f^2(t)(dx^2 + dy^2)),$$

onde  $\overline{g}$  é a métrica em  $\overline{M}$ ,  $t$  é coordenada em  $I$  e  $x, y$  são coordenadas em  $\mathbb{E}^2$ . Denotaremos ainda por  $\overline{\nabla}$  e  $\overline{R}$ , respectivamente, a conexão de Levi-Civita e o tensor curvatura em  $I \times_f \mathbb{E}^2$  e por  $D$  a derivada covariante em  $\mathbb{E}^2$ .

No Lema A.2, obtivemos expressões pra a conexão de Levi-Civita de um produto warped em geral. No caso de  $I \times_f \mathbb{E}^2$ , assumindo que  $\partial_t$  seja um campo unitário na direção da componente  $I$  e denotando por  $U, V, W$  campos de vetores tangentes em  $\mathbb{E}^2$ , tais expressões resultam em

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_U V &= D_U V - \frac{f'}{f} \bar{g}(U, V) \partial_t; \\ \bar{\nabla}_U \partial_t &= \bar{\nabla}_{\partial_t} U = \frac{f'}{f} U; \\ \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t &= 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Além disso, no Lema A.3 obtivemos as expressões para o tensor curvatura de um produto warped no caso geral. Em  $I \times_f \mathbb{E}^2$ , estas expressões são

$$\begin{aligned}\bar{R}(U, \partial_t) V &= \frac{f''}{f} \bar{g}(U, V) \partial_t; \\ \bar{R}(U, V) \partial_t &= 0; \\ \bar{R}(U, \partial_t) \partial_t &= -\frac{f''}{f} U; \\ \bar{R}(U, V) W &= -\frac{(f')^2}{f^2} (\bar{g}(V, W) U - \bar{g}(U, W) V).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Considere agora  $M \subset I \times_f \mathbb{E}^2$  e  $i : M \rightarrow I \times_f \mathbb{E}^2$  uma imersão isométrica. Como nosso estudo será feito localmente, podemos considerar  $M$  orientável. Desta forma, considere  $\xi$  campo de vetores normal unitário de  $M$ , e seja  $g$  a métrica de  $M$  induzida pela imersão  $i$ . Usaremos as notações  $R, \nabla, \nabla^\perp, h$  e  $A$  para denotar, respectivamente, o tensor curvatura, a conexão de Levi-Civita, a conexão normal, a segunda forma fundamental e o operador de forma de  $M$ . Com estas notações, recordemos que são válidas as fórmulas de Gauss e Weingarten

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (\text{Gauss})$$

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A(X); \quad (\text{Weingarten})$$

e além disso,  $h$  e  $A$  se relacionam de acordo com a equação

$$\bar{g}(h(X, Y), \xi) = \bar{g}(X, A(Y)).$$

Assim como no Capítulo 2, podemos decompor  $\partial_t$  como soma de sua componente normal e sua componente tangente, ou seja,

$$\partial_t = T + \cos \alpha \xi,\tag{3.3}$$

onde  $T$  é a projeção de  $\partial_t$  no espaço tangente de  $M$ ,  $\alpha \in [0, \pi)$  é o ângulo entre  $\partial_t$  e  $\xi$ , ou seja,  $\alpha$  satisfaz

$$\cos \alpha = \bar{g}(\partial_t, \xi), \quad (3.4)$$

e  $|T|$  é dado por

$$|T| = |\partial_t - \cos \alpha \xi| = \text{sen } \alpha.$$

Considerando a notação dada pela Equação 2.5 para a derivada covariante da segunda forma fundamental, o próximo teorema estabelecerá uma reescrita para as equações de Gauss e de Codazzi em  $I \times_f \mathbb{E}^2$ :

**Teorema 3.1.** *Com as definições acima, a equação de Gauss*

$$\bar{g}(R(X, Y)Z, W) = \bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, W) - \bar{g}(h(Y, W), h(X, Z)) + \bar{g}(h(X, W), h(Y, Z)) \quad (3.5)$$

e a de Codazzi

$$\bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, \xi) = (\bar{\nabla}_X h)(Y, Z, \xi) - (\bar{\nabla}_Y h)(X, Z, \xi) \quad (3.6)$$

se escrevem, respectivamente, como

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= g(AY, Z)AX - g(AX, Z)AY \\ &\quad - ((\log f)' \circ i)^2(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \\ &\quad - ((\log f)'' \circ i)(g(Y, T)g(Z, T)X - g(X, T)g(Z, T)Y \\ &\quad - g(Y, T)g(X, Z)T + g(X, T)g(Y, Z)T) \end{aligned} \quad (3.7)$$

e

$$\nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X, Y] = \cos \alpha ((\log f)'' \circ i)(g(Y, T)X - g(X, T)Y), \quad (3.8)$$

onde  $X, Y$  e  $Z$  são tangentes à  $M$ .

*Demonstração.* A Equação de Gauss 3.5 nos dá que

$$\begin{aligned} \bar{g}(R(X, Y)Z, W) &= \bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, W) - \bar{g}(h(Y, W), h(X, Z)) + \bar{g}(h(X, W), h(Y, Z)) \\ &= \bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, W) - \bar{g}(A(Y), W)\bar{g}(A(X), Z) + \bar{g}(A(X), W)\bar{g}(A(Y), Z). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Analisaremos  $\bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, W)$  separadamente. Para isto, utilizando as decomposições de  $X, Y, Z$  e  $W$  em suas partes verticais e horizontais, ou seja,

$$X = X_t \partial_t + X_n, \quad Y = Y_t \partial_t + Y_n, \quad Z = Z_t \partial_t + Z_n \quad \text{e} \quad W = W_t \partial_t + Z_n,$$



temos

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, W) &= \bar{g}(\bar{R}(X_t \partial_t + X_n, Y_t \partial_t + Y_n)(Z_t \partial_t + Z_n), W_t \partial_t + W_n) \\
&= \bar{g}(X_t Z_t \bar{R}(\partial_t, Y_n) \partial_t + X_t \bar{R}(\partial_t, Y_n) Z_n \\
&\quad + Y_t Z_t \bar{R}(X_n, \partial_t) \partial_t + Y_t \bar{R}(X_n, \partial_t) Z_n + \bar{R}(X_n, Y_n) Z_n, W_t \partial_t + W_n).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Observe agora que, como  $X$  é tangente à  $M$ , vale

$$X_t = \bar{g}(X, \partial_t) = \bar{g}(X, T)$$

e, da mesma forma,

$$Y_t = \bar{g}(Y, T), \quad Z_t = \bar{g}(Z, T) \quad \text{e} \quad W_t = \bar{g}(W, T).$$

Observe ainda que

$$\bar{g}(X_n, Y_n) = \bar{g}(X, Y) - X_t Y_t.$$

Analogamente,

$$\bar{g}(X_n, Z_n) = \bar{g}(X, Z) - X_t Z_t, \quad \text{e} \quad \bar{g}(Y_n, Z_n) = \bar{g}(Y, Z) - Y_t Z_t.$$

Logo, utilizando estes fatos e 3.2, obtemos que a Equação 3.10 se resume a

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, W) &= \bar{g}(-((\log f)' \circ i)^2(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \\
&\quad - ((\log f)'' \circ i)(g(Y, T)g(Z, T)X - g(X, T)g(Z, T)Y \\
&\quad - g(Y, T)g(X, Z)T + g(X, T)g(Y, Z)T), W).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Portanto, substituindo esta expressão para  $\bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, W)$  em 3.9, obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{g}(R(X, Y)Z, W) &= \bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, W) - \bar{g}(A(Y), W)\bar{g}(A(X), Z) + \bar{g}(A(X), W)\bar{g}(A(Y), Z) \\
&= \bar{g}(-((\log f)' \circ i)^2(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \\
&\quad - ((\log f)'' \circ i)(g(Y, T)g(Z, T)X - g(X, T)g(Z, T)Y \\
&\quad - g(Y, T)g(X, Z)T + g(X, T)g(Y, Z)T), W) \\
&\quad - \bar{g}(A(Y), W)\bar{g}(A(X), Z) + \bar{g}(A(X), W)\bar{g}(A(Y), Z)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= g(AY, Z)AX - g(AX, Z)AY \\
&\quad - ((\log f)' \circ i)^2(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \\
&\quad - ((\log f)'' \circ i)(g(Y, T)g(Z, T)X - g(X, T)g(Z, T)Y \\
&\quad - g(Y, T)g(X, Z)T + g(X, T)g(Y, Z)T),
\end{aligned}$$

que é a Equação 3.8, como queríamos demonstrar.

No caso da equação de Codazzi, como a codimensão da imersão é 1, segue que  $\nabla_X^\perp \xi = 0$ . Assim, de forma análoga ao que foi feito na demonstração do Teorema 2.1, obtemos

$$\bar{\nabla}_X h(Y, Z, \xi) = \bar{g}(\nabla_X A(Y), Z) - \bar{g}(A(\nabla_X Y), Z)$$

e

$$\bar{\nabla}_Y h(X, Z, \xi) = \bar{g}(\nabla_Y A(X), Z) - \bar{g}(A(\nabla_Y X), Z).$$

Logo, a Equação de Codazzi 3.6 se resume a

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, \xi) &= \bar{g}(\nabla_X A(Y) - A(\nabla_X Y) - \nabla_Y A(X) + A(\nabla_Y X), Z) \\ &= \bar{g}(\nabla_X A(Y) - \nabla_Y A(X) - A[X, Y], Z). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Resta-nos, então, desenvolver o termo  $\bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, \xi)$ . Utilizando a decomposição

$$X = X_t \partial_t + X_n, \quad Y = Y_t \partial_t + Y_n, \quad \text{e} \quad Z = Z_t \partial_t + Z_n,$$

temos

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, \xi) &= \bar{g}(\bar{R}(X_t \partial_t + X_n, Y_t \partial_t + Y_n)(Z_t \partial_t + Z_n), \xi) \\ &= \bar{g}(X_t Z_t \bar{R}(\partial_t, Y_n) \partial_t + X_t \bar{R}(\partial_t, Y_n) Z_n \\ &\quad + Y_t Z_t \bar{R}(X_n, \partial_t) \partial_t + Y_t \bar{R}(X_n, \partial_t) Z_n + \bar{R}(X_n, Y_n) Z_n, \xi). \end{aligned}$$

Agora, utilizando as equações de 3.2 e lembrando que  $\bar{g}(\partial_t, \xi) = \cos \alpha$ , obtemos

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, \xi) &= X_t Z_t ((\log f)'' \circ i) \bar{g}(Y_n, \xi) - \cos \alpha ((\log f)'' \circ i) X_t \bar{g}(Y_n, Z_n) \\ &\quad - ((\log f)'' \circ i) Y_t Z_t \bar{g}(X_n, \xi) + \cos \alpha ((\log f)'' \circ i) Y_t \bar{g}(X_n, Z_n) \\ &\quad - ((\log f)' \circ i)^2 \bar{g}(\bar{g}(Y_n, Z_n) X_n - \bar{g}(X_n, Z_n) Y_n, \xi). \end{aligned}$$

Lembrando ainda que

$$X_t = \bar{g}(X, T), \quad Y_t = \bar{g}(Y, T) \quad \text{e} \quad Z_t = \bar{g}(Z, T)$$

e

$$\bar{g}(X_n, Z_n) = \bar{g}(X, Z) - X_t Z_t, \quad \text{e} \quad \bar{g}(Y_n, Z_n) = \bar{g}(Y, Z) - Y_t Z_t,$$

temos

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, \xi) &= \cos \alpha ((\log f)'' \circ i) \bar{g}(\bar{g}(Y, T) X_n - \bar{g}(X, T) Y_n, Z_n) \\ &= \cos \alpha ((\log f)'' \circ i) \bar{g}(\bar{g}(Y, T) X - \bar{g}(X, T) Y, Z). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Finalmente, comparando 3.13 e 3.14, segue que

$$\nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X, Y] = \cos \alpha ((\log f)'' \circ i)(g(Y, T)X - g(X, T)Y),$$

que é a Equação 3.8, como queríamos demonstrar.  $\square$

A proposição abaixo também será útil no decorrer deste trabalho:

**Proposição 3.2.** *Seja  $X$  um campo de vetores tangente à  $M$ . Então*

$$\nabla_X T = \cos \alpha A(X) + ((\log f)' \circ i)(X - g(X, T)T); \quad (3.15)$$

$$X(\cos \alpha) = -g(X, A(T)) - \cos \alpha ((\log f)' \circ i)g(X, T). \quad (3.16)$$

*Demonstração.* Como  $\partial_t = T + \cos \alpha \xi$ , temos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X T &= \bar{\nabla}_X (\partial_t - \cos \alpha \xi) \\ &= \bar{\nabla}_X \partial_t - \bar{\nabla}_X \cos \alpha \xi \\ &= \bar{\nabla}_X \partial_t - \cos \alpha \bar{\nabla}_X \xi - X(\cos \alpha) \xi. \end{aligned}$$

Logo, usando as fórmulas de Gauss e Weingarten, segue que

$$\bar{\nabla}_X \partial_t = \nabla_X T + h(X, T) + X(\cos \alpha) \xi - \cos \alpha A(X). \quad (3.17)$$

Por outro lado, uma vez que, em particular,  $X \in I \times_f \mathbb{E}^2$ , podemos decompô-lo como soma de suas partes vertical e horizontal, isto é,  $X = X_t \partial_t + X_n$ . Desta forma, utilizando as equações 3.1, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \partial_t &= \bar{\nabla}_{(X_t \partial_t + X_n)} \partial_t \\ &= X_t \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t + \bar{\nabla}_{X_n} \partial_t \\ &= \bar{\nabla}_{X_n} \partial_t \\ &= \frac{f'}{f} X_n \\ &= \frac{f'}{f} (X - X_t \partial_t) \\ &= \frac{f'}{f} (X - g(X, T) \partial_t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Por fim, o resultado seguirá comparando as partes tangentes e normais destas duas expressões que encontramos para  $\bar{\nabla}_X \partial_t$ , nas equações 3.17 e 3.18.  $\square$

Como nosso objetivo é estudar superfícies de ângulo constante em  $I \times_f \mathbb{E}^2$ , de agora em diante assumiremos que  $\alpha$  é constante. Desta forma, como consequência direta da Equação 3.16, obtemos o seguinte resultado:

**Proposição 3.3.** *Se  $\alpha$  for um ângulo constante, então  $T$  será uma direção principal de  $A$  com autovalor associado  $-\cos \alpha((\log f)' \circ i)$ .*

Considere  $\alpha \in [0, \pi/2]$ . Se  $\alpha = 0$ , então  $\partial_t$  é normal e  $i(M) \subseteq \{t_0\} \times \mathbb{E}^2$ . Suponha, então,  $\alpha \neq 0$ . Neste caso, temos  $T \neq 0$  e consideraremos  $e_1 = (T/|T|) = (T/\sin \alpha)$  e  $e_2$  um vetor unitário ortogonal à  $e_1$ , de forma que  $\{e_1, e_2\}$  seja uma base compatível com a orientação de  $M$ . Combinando estas afirmações com a Equação 3.15, veremos na proposição abaixo, entre outras coisas, que existe uma função  $\lambda \in C^\infty$  satisfazendo  $A(e_2) = \lambda e_2$  e, portanto,  $e_2$  é também uma direção principal de  $A$ .

**Proposição 3.4.** *Seja  $M \subset \overline{M}$  uma superfície de ângulo constante  $\alpha \neq 0$ . Então, o operador de forma  $A$  com respeito à base  $\{e_1, e_2\}$  é dado por*

$$A = \begin{pmatrix} -\cos \alpha((\log f)' \circ i) & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

para alguma função  $\lambda \in C^\infty(M)$ , e a conexão de Levi-Civita é dada por

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= 0, & \nabla_{e_2} e_1 &= \frac{1}{\sin \alpha} (\lambda \cos \alpha + ((\log f)' \circ i)) e_2, \\ \nabla_{e_1} e_2 &= 0, & \nabla_{e_2} e_2 &= -\frac{1}{\sin \alpha} (\lambda \cos \alpha + ((\log f)' \circ i)) e_1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

*Demonstração.* Observe que, sendo  $\alpha$  constante,  $X(\cos \alpha) = 0$ . Assim, pela Equação 3.16, temos

$$\begin{aligned} g(e_1, A(e_1)) &= \frac{1}{|T|} g(e_1, A(T)) \\ &= -\frac{1}{|T|} \cos \alpha((\log f)' \circ i) g(e_1, T) \\ &= -\cos \alpha((\log f)' \circ i) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(e_2, A(e_1)) &= \frac{1}{|T|} g(e_2, A(T)) \\ &= -\frac{1}{|T|} \cos \alpha((\log f)' \circ i) g(e_2, T) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$A(e_1) = -\cos \alpha((\log f)' \circ i)e_1 + 0e_2.$$

Observe também que

$$g(e_1, A(e_2)) = g(A(e_1), e_2) = 0,$$

e definindo  $\lambda$  como

$$\lambda = g(e_2, A(e_2)) = g(e_2, \lambda e_2),$$

obtemos

$$A(e_2) = 0e_1 + \lambda e_2.$$

Portanto,  $A$  pode ser escrito como

$$A = \begin{pmatrix} -\cos \alpha((\log f)' \circ i) & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Observe agora que, utilizando a Equação 3.15,

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= \nabla_{e_1} \left( \frac{T}{|T|} \right) \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \nabla_{e_1} T \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} (\cos \alpha A(e_1) + ((\log f)' \circ i)(T - g(T, T)T)) \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} ((\log f)' \circ i)(T - T) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned} \nabla_{e_2} e_1 &= \nabla_{e_2} \left( \frac{T}{|T|} \right) \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \nabla_{e_2} T \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} (\lambda \cos \alpha + ((\log f)' \circ i)(e_2 - g(e_2, T)T)) \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} (\lambda \cos \alpha + ((\log f)' \circ i)e_2). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Agora, derivando ambos os lados das equações  $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$  e  $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$  com relação à  $e_2$ , obtemos

$$\langle \nabla_{e_2} e_1, e_2 \rangle + \langle e_1, \nabla_{e_2} e_2 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \nabla_{e_2} e_2, e_2 \rangle = 0,$$

e usando a Equação 3.22, segue que

$$\langle e_1, \nabla_{e_2} e_2 \rangle = -\frac{1}{\text{sen } \alpha} (\lambda \cos \alpha + ((\log f)' \circ i))$$

e

$$\nabla_{e_2} e_2 = -\frac{1}{\text{sen } \alpha} (\lambda \cos \alpha + ((\log f)' \circ i)) e_1.$$

Da mesma forma, derivando  $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$  e  $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$  com relação à  $e_1$  e utilizando a Equação 3.21, segue que

$$\langle e_1, \nabla_{e_1} e_2 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle e_2, \nabla_{e_1} e_2 \rangle = 0,$$

e portanto

$$\nabla_{e_1} e_2 = 0,$$

finalizando a demonstração. □

### 3.3 Classificação de superfícies de ângulo constante no produto warped $I \times_f \mathbb{E}^2$

Nesta seção, classificaremos as superfícies de ângulo constante em  $(\overline{M}, \overline{g}) = I \times_f \mathbb{E}^2$ . Para isso, consideraremos  $\partial_t = (1, 0, 0)$ . Uma forma de abordar tal problema seria um método semelhante ao do Capítulo 1: supor que tal superfície fosse gráfico de uma função  $t$ , ou seja, que ela fosse parametrizada por  $X = (t(x, y), x, y) \in \mathbb{E}^2$ . Neste caso, como  $X_x = (t_x, 1, 0)$  e  $X_y = (t_y, 0, 1)$ , utilizando a Definição A.4 de produto vetorial teríamos

$$X_x \times_f X_y = (f^2, -t_x, -t_y),$$

ou seja,

$$\xi = \frac{X_x \times_f X_y}{|X_x \times_f X_y|} = \frac{(f^2, -t_x, -t_y)}{f \sqrt{f^2 + t_x^2 + t_y^2}}.$$

Assim, se a superfície possuísse ângulo constante  $\alpha \neq 0$ , ou seja, se  $\overline{g}(\xi, \partial_t) = \cos \alpha \neq 0$ , obteríamos

$$\begin{aligned} \frac{f^2}{f \sqrt{f^2 + t_x^2 + t_y^2}} &= \cos \alpha \Rightarrow f = \cos \alpha \sqrt{f^2 + t_x^2 + t_y^2} \\ &\Rightarrow f^2 = \cos^2 \alpha (f^2 + t_x^2 + t_y^2) \\ &\Rightarrow \frac{(1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} f^2 = t_x^2 + t_y^2 \\ &\Rightarrow t_x^2 + t_y^2 = f^2 \tan^2 \alpha, \end{aligned}$$

que é a equação Eikonal. Porém, de acordo com [10], este método não nos dá equações explícitas. Sendo assim, neste trabalho, seguindo o que foi feito em [10], utilizaremos outro método para classificar as superfícies de ângulo constante em  $I \times_f \mathbb{E}^2$ .

Considere  $\alpha \neq 0$  e  $\{e_1, e_2\}$  base dada anteriormente. Usando as Equações 3.20, temos

$$[e_1, e_2] = \nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{e_2} e_1 = \frac{1}{\sin \alpha} (\lambda \cos \alpha + ((\log f)' \circ i)) e_2,$$

ou seja,  $[e_1, e_2]$  é proporcional à  $e_2$ . Assim, como no capítulo 2, podemos escolher coordenadas  $(u, v)$  tais que  $\partial_u = e_1$  e  $\partial_v = \beta e_2$ , para alguma função  $\beta$ . Com relação à este sistema de coordenadas,  $g$  tem a forma

$$g = du^2 + \beta^2(u, v) dv^2. \quad (3.23)$$

Já a conexão de Levi-Civita fica caracterizada pela proposição abaixo:

**Proposição 3.5.** *De acordo com as notações anteriores, a conexão de Levi-Civita é dada por*

$$\nabla_{\partial_u} \partial_u = 0, \quad \nabla_{\partial_u} \partial_v = \nabla_{\partial_v} \partial_u = \frac{\beta_u}{\beta} \partial_v, \quad \nabla_{\partial_v} \partial_v = -\beta \beta_u \partial_u + \frac{\beta_v}{\beta} \partial_v. \quad (3.24)$$

*Demonstração.* Observe primeiramente que, sendo  $(u, v)$  um sistema de coordenadas, vale

$$\nabla_{\partial_u} \partial_v - \nabla_{\partial_v} \partial_u = [\partial_u, \partial_v] = 0,$$

de onde segue que  $\nabla_{\partial_u} \partial_v = \nabla_{\partial_v} \partial_u$ . Para a primeira equação, temos

$$\nabla_{\partial_u} \partial_u = \nabla_{e_1} e_1 = 0$$

e para as demais, temos

$$\begin{array}{l|l} \nabla_{\partial_u} \partial_v = \nabla_{e_1} \beta e_2 & \nabla_{\partial_v} \partial_v = \nabla_{\beta e_2} \beta e_2 \\ = \beta \nabla_{e_1} e_2 + e_1(\beta) e_2 & = \beta (\nabla_{e_2} \beta e_2) \\ = e_1(\beta) e_2 & = \beta (\beta \nabla_{e_2} e_2) + e_2(\beta) e_2 \\ = e_1(\beta) \frac{\partial v}{\beta} & = \frac{-\beta^2}{\sin \alpha} \left( \lambda \cos \alpha + (\log f)' \circ i \right) e_1 + \frac{\beta_v}{\beta} \partial_v \\ = \frac{\beta_u}{\beta} \partial_v; & = -\beta \beta_u \partial_u + \frac{\beta_v}{\beta} \partial_v. \end{array}$$

donde segue o resultado. □

Agora, observe que podemos escrever

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_v} \partial_u &= \nabla_{\beta e_2} e_1 \\
&= \beta (\nabla_{e_2} \beta e_1) \\
&= \beta \left( \frac{1}{\text{sen } \alpha} (\lambda \cos \alpha + ((\log f)' \circ i) e_2) \right) \\
&= \frac{1}{\text{sen } \alpha} (\lambda \cos \alpha + ((\log f)' \circ i) \partial_v.
\end{aligned}$$

Desta forma, utilizando a igualdade  $\nabla_{\partial_u} \partial_v = \nabla_{\partial_v} \partial_u$  e as expressões obtidas acima, segue que  $\beta$  satisfaz

$$\beta_u = \frac{\beta}{\text{sen } \alpha} (\lambda \cos \alpha + (\log f)' \circ i). \quad (3.25)$$

A fim de descrever a imersão  $i$ , consideremos a seguinte expressão para a mesma:

$$i(u, v) = (t(u, v), x(u, v), y(u, v)).$$

Desta forma, temos

$$\begin{array}{l|l}
t_u = \bar{g}(i_u, \partial_t) & t_v = \bar{g}(i_v, \partial_t) \\
= \bar{g}(e_1, \partial_t) & = \bar{g}(\beta e_2, \partial_t) \\
= \bar{g}(T/\text{sen } \alpha, T + \cos \alpha \xi) & = \bar{g}(\beta e_2, T + \cos \alpha \xi) \\
= \text{sen } \alpha & = 0.
\end{array}$$

Logo, a menos de translações, podemos escrever

$$t(u, v) = u \text{sen } \alpha. \quad (3.26)$$

**Lema 3.6.** *Seja  $\alpha \in (0, \pi/2)$ . Definindo*

$$\sigma(u) = \log f(u \text{sen } \alpha) = ((\log f) \circ i)(u, v), \quad (3.27)$$

*a imersão  $i$  satisfaz as equações*

$$\begin{aligned}
i_{uu} + \sigma' i_u - \text{sen } \alpha \sigma' \partial_t &= 0, \\
i_{uv} + \left( \sigma' - \frac{\beta_u}{\beta} \right) i_v &= 0, \\
i_{vv} + (\beta \beta_u + \text{tg } \alpha \lambda \beta^2) i_u - \frac{\beta_u}{\beta} i_v - \beta^2 \left( \frac{\sigma'}{\text{sen } \alpha} + \frac{\lambda}{\cos \alpha} \right) \partial_t &= 0.
\end{aligned} \quad (3.28)$$



*Demonstração.* Pela Equação 3.26, podemos escrever

$$i(u, v) = (u \operatorname{sen} \alpha, x(u, v), y(u, v)).$$

Logo, usando 3.23, temos

$$\bar{g}(i_u, i_u) = 1 \Rightarrow f^2(u \operatorname{sen} \alpha)(x_u^2 + y_u^2) = \cos^2 \alpha; \quad (3.29)$$

$$\bar{g}(i_u, i_v) = 0 \Rightarrow x_u x_v + y_u y_v = 0; \quad (3.30)$$

$$\bar{g}(i_v, i_v) = \beta^2 \Rightarrow f^2(u \operatorname{sen} \alpha)(x_v^2 + y_v^2) = \beta^2. \quad (3.31)$$

Além disso, observe que

$$\sigma'(u) = \operatorname{sen} \alpha \frac{f'(u \operatorname{sen} \alpha)}{f(u \operatorname{sen} \alpha)}.$$

Nosso objetivo agora é calcular as expressões de  $\bar{\nabla}_{i_u} i_u$ ,  $\bar{\nabla}_{i_u} i_v$ ,  $\bar{\nabla}_{i_v} i_v$  de duas maneiras distintas, para que possamos comparar os resultados.

Escrevendo  $i_u = \operatorname{sen} \alpha \partial_t + V$ , onde  $V = (0, x_u, y_u)$  é considerado, aqui, como um levantamento de vetores de  $\mathbb{E}^2$ , e denotando por  $\bar{D}$  a derivada usual do  $\mathbb{R}^3$ , obtemos  $\bar{D}_t V = 0$ . Assim, usando 3.1, 3.29 e 3.27, segue que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{i_u} i_u &= \bar{\nabla}_{(\operatorname{sen} \alpha \partial_t + V)}(\operatorname{sen} \alpha \partial_t + V) \\ &= \operatorname{sen}^2 \alpha \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t + \operatorname{sen} \alpha (\bar{\nabla}_{\partial_t} V + \bar{\nabla}_V \partial_t) + \bar{\nabla}_V V \\ &= 2 \operatorname{sen} \alpha \frac{f'(u \operatorname{sen} \alpha)}{f(u \operatorname{sen} \alpha)} V + D_V V - \frac{f'(u \operatorname{sen} \alpha)}{f(u \operatorname{sen} \alpha)} \bar{g}(V, V) \partial_t \\ &= 2 \operatorname{sen} \alpha \frac{f'(u \operatorname{sen} \alpha)}{f(u \operatorname{sen} \alpha)} i_u - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha \frac{f'(u \operatorname{sen} \alpha)}{f(u \operatorname{sen} \alpha)} \partial_t + i_{uu} - \operatorname{sen} \alpha \bar{D}_t V - \frac{f'(u \operatorname{sen} \alpha)}{f(u \operatorname{sen} \alpha)} \bar{g}(V, V) \partial_t \\ &= i_{uu} + 2\sigma' i_u - \operatorname{sen}^2 \alpha \frac{f'(u \operatorname{sen} \alpha)}{f(u \operatorname{sen} \alpha)} \partial_t - \frac{f'(u \operatorname{sen} \alpha)}{f(u \operatorname{sen} \alpha)} \partial_t \\ &= i_{uu} + 2\sigma' i_u - \left( \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \right) \sigma' \partial_t. \end{aligned}$$

Para a segunda equação, temos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{i_u} i_v &= \bar{\nabla}_{(\operatorname{sen} \alpha \partial_t + V)} i_v \\ &= \operatorname{sen} \alpha \bar{\nabla}_{\partial_t} i_v + \bar{\nabla}_V i_v \\ &= \operatorname{sen} \alpha \frac{f'(u \operatorname{sen} \alpha)}{f(u \operatorname{sen} \alpha)} i_v + D_V i_v - \frac{f'(u \operatorname{sen} \alpha)}{f(u \operatorname{sen} \alpha)} \bar{g}(i_v, V) \partial_t \\ &= \sigma' i_v + D_V i_v - \frac{f'(u \operatorname{sen} \alpha)}{f(u \operatorname{sen} \alpha)} \bar{g}(i_v, V) \partial_t, \end{aligned}$$

e como

$$0 = \bar{g}(i_v, i_u) = \bar{g}(i_v, \text{sen } \alpha \partial_t) + \bar{g}(i_v, V) = \bar{g}(i_v, V),$$

segue que

$$\bar{\nabla}_{i_u} i_v = i_{vu} + \sigma' i_v - \text{sen } \alpha \bar{D}_t i_v.$$

Se  $i_v$  também for estendido para um aberto de  $I \times_f \mathbb{E}^2$  por um levantamento, obtemos  $\bar{D}_t i_v = 0$ , de onde segue finalmente que

$$\bar{\nabla}_{i_u} i_v = i_{vu} + \sigma' i_v.$$

Por fim, da mesma forma, temos que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{i_v} i_v &= D_{i_v} i_v - \frac{f'(u \text{ sen } \alpha)}{f(u \text{ sen } \alpha)} \bar{g}(i_v, i_v) \partial_t \\ &= D_{i_v} i_v - \frac{1}{\text{sen } \alpha} \beta^2 \sigma' \partial_t \\ &= i_{vv} - \frac{1}{\text{sen } \alpha} \beta^2 \sigma' \partial_t. \end{aligned}$$

Agora, por outro lado, usando a fórmula de Gauss, 3.3, 3.19, 3.24 e 3.27, temos que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{i_u} i_u &= \bar{\nabla}_{\partial_u} \partial_u \\ &= h(\partial_u, \partial_u) \\ &= -\cos \alpha ((\log f)' \circ i) \xi \\ &= \frac{-\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} \sigma' \left( \frac{\partial_t - T}{\cos \alpha} \right) \\ &= \frac{-\sigma'}{\text{sen } \alpha} \partial_t + \sigma' i_u. \end{aligned}$$

Do mesmo modo, obtemos também

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{i_u} i_v &= \bar{\nabla}_{\partial_u} \partial_v \\ &= \nabla_{\partial_u} \partial_v \\ &= \frac{\beta_u}{\beta} i_v \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{i_v} i_v &= \bar{\nabla}_{\partial_v} \partial_v \\ &= h(\partial_v, \partial_v) + \nabla_{\partial_v} \partial_v \\ &= (-\beta \beta_u + \lambda \beta^2 \text{tg } \alpha) i_u + \frac{\beta_v}{\beta} i_v + \frac{1}{\cos \alpha} \lambda \beta^2 \partial_t. \end{aligned}$$

Resumindo, temos as seguintes expressões:

$$\begin{array}{l} \bar{\nabla}_{i_u} i_u = i_{uu} + 2\sigma' i_u - \left( \text{sen } \alpha + \frac{1}{\text{sen } \alpha} \right) \sigma' \partial_t; \\ \bar{\nabla}_{i_u} i_v = i_{vu} + \sigma' i_v; \\ \bar{\nabla}_{i_v} i_v = i_{vv} - \frac{1}{\text{sen } \alpha} \beta^2 \sigma' \partial_t. \end{array} \left| \begin{array}{l} \bar{\nabla}_{i_u} i_u = \frac{-\sigma'}{\text{sen } \alpha} \partial_t + \sigma' i_u; \\ \bar{\nabla}_{i_u} i_v = \frac{\beta_u}{\beta} i_v; \\ \bar{\nabla}_{i_v} i_v = (-\beta \beta_u + \lambda \beta^2 \text{tg } \alpha) i_u + \frac{\beta_v}{\beta} i_v + \frac{\lambda \beta^2}{\cos \alpha} \partial_t \end{array} \right.$$

Assim, comparando as expressões obtidas para  $\bar{\nabla}_{i_u} i_u$ , obtemos

$$\begin{aligned} i_{uu} + 2\sigma' i_u - \left( \text{sen } \alpha + \frac{1}{\text{sen } \alpha} - D_t V \right) \sigma' \partial_t &= \frac{-\sigma'}{\text{sen } \alpha} \partial_t + \sigma' i_u \\ \Rightarrow i_{uu} + \sigma' i_u - \text{sen } \alpha \sigma' \partial_t &= 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Analogamente, comparando as expressões obtidas para  $\bar{\nabla}_{i_u} i_v$ , segue que

$$\begin{aligned} i_{uv} + \sigma' i_v &= \frac{\beta_u}{\beta} i_v \\ \Rightarrow i_{uv} + \left( \sigma' - \frac{\beta_u}{\beta} \right) i_v &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

e, por fim, comparando as expressões obtidas para  $\bar{\nabla}_{i_v} i_v$ , obtemos

$$\begin{aligned} i_{vv} - \frac{1}{\text{sen } \alpha} \beta^2 \sigma' \partial_t &= -(\beta \beta_u + \text{tg } \alpha \lambda \beta^2) i_u + \frac{\beta_v}{\beta} i_v + \frac{1}{\cos \alpha} \lambda \beta^2 \partial_t \\ \Rightarrow i_{vv} + (\beta \beta_u + \text{tg } \alpha \lambda \beta^2) i_u - \frac{\beta_u}{\beta} i_v - \beta^2 \left( \frac{\sigma'}{\text{sen } \alpha} + \frac{\lambda}{\cos \alpha} \right) \partial_t &= 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

e o Lema está provado.  $\square$

Apresentaremos, agora, o teorema que classifica completamente as superfícies de ângulo constante no produto warped  $I \times_f \mathbb{E}^2$ .

**Teorema 3.7.** *Considere uma imersão isométrica  $i : M \rightarrow I \times_f \mathbb{E}^2$ . Então,  $i$  define uma superfície de ângulo constante  $\alpha \in [0, \pi/2]$  se, e somente se, ocorre um dos casos abaixo:*

1) *existem coordenadas locais  $(u, v) \in M$  com respeito as quais  $i$  é dada por*

$$\begin{aligned} i(u, v) &= \left( u \text{sen } \alpha, \text{cotg } \alpha \left( \int^u \frac{1}{f(\tau)} d\tau \right) \cos v - \int^v \gamma(\tau) \text{sen } \tau d\tau, \right. \\ &\quad \left. \text{cotg } \alpha \left( \int^u \frac{1}{f(\tau)} d\tau \right) \text{sen } v + \int^v \gamma(\tau) \cos \tau d\tau \right), \end{aligned}$$

*para alguma função suave  $\gamma$ .*

2)  $i(M)$  é um subconjunto aberto do cilindro

$$x - \cotg \alpha \int^t \frac{d\tau}{\tau} = 0.$$

Esta superfície é totalmente umbílica e sua curvatura média é

$$H = \frac{-\cos \alpha f'(u \operatorname{sen} \alpha)}{f(u \operatorname{sen} \alpha)}.$$

3)  $i(M)$  é um subconjunto aberto da superfície  $t = t_0$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha = 0$ .

*Demonstração.* Vamos verificar, primeiramente, que os três casos representam superfícies de ângulo constante.

No primeiro caso, temos que uma base para o espaço tangente da superfície é

$$i_u = \left( \operatorname{sen} \alpha, \frac{\cos \alpha \cos v}{f(u \operatorname{sen} \alpha)}, \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} v}{f(u \operatorname{sen} \alpha)} \right);$$

$$i_v = \left( \cot \alpha \left( \int^{u \operatorname{sen} \alpha} \frac{d\tau}{f(\tau)} \right) + \gamma(v) \right) (0, -\operatorname{sen} v, \cos v).$$

Observe agora que, utilizando a Definição A.4 de produto vetorial, temos

$$\xi = \frac{i_u \times_f i_v}{|i_u \times_f i_v|} = \left( \cos \alpha, \frac{-\operatorname{sen} \alpha \cos v}{f(u \operatorname{sen} \alpha)}, \frac{-\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} v}{f(u \operatorname{sen} \alpha)} \right),$$

e assim, como  $\partial_t = (1, 0, 0)$ , segue que  $\bar{g}(\xi, \partial_t) = \cos \alpha$  e a superfície é de ângulo constante  $\alpha$ .

Para o segundo caso, podemos parametrizar  $i$  como

$$i(u, v) = \left( u, \cotg \alpha \int_u \frac{d\tau}{f(\tau)}, v \right),$$

e temos que

$$\xi = \frac{i_u \times_f i_v}{|i_u \times_f i_v|} = \left( \cos \alpha, \frac{-\operatorname{sen} \alpha}{f(u)}, 0 \right).$$

Logo, como  $\partial_t = (1, 0, 0)$ , segue que  $\bar{g}(\xi, \partial_t) = \cos \alpha$  e a superfície é de ângulo constante  $\alpha$ . O terceiro caso claramente representa uma superfície de ângulo constante  $\alpha = 0$ , uma vez que, neste caso,  $t = t_0$  é constante.

Reciprocamente, seja  $i : M \longrightarrow I \times_f E^2$  uma superfície de ângulo constante  $\alpha \in [0, \pi/2]$ . Se  $\alpha = 0$ ,  $i(M)$  é uma superfície do tipo (3) do teorema. Se  $\alpha = \pi/2$ , então  $\partial_t$  é sempre tangente à

$i(M)$  e assim,  $i(M)$  é um subconjunto aberto de um cilindro com eixo principal paralelo à  $\partial_t$ . Em outras palavras, existem coordenadas locais  $(u, v)$  em  $M$  de forma que  $i(u, v) = (u, \gamma_1(v), \gamma_2(v))$ , onde  $\gamma_1, \gamma_2$  são funções suaves. Se  $i$  parametriza um plano, a superfície é do tipo (2), com  $\alpha = \pi/2$ . Do contrário, a superfície é do tipo (1), com  $\alpha = \pi/2$ .

Suponha  $\alpha \in (0, \pi/2)$ . Como a Equação 3.32 deve ser satisfeita para todas as coordenadas da imersão  $i$ , segue que

$$x_{uu} + \sigma' x_u = 0 \quad \text{e} \quad y_{uu} + \sigma' y_u = 0.$$

Resolvendo estas edo's, obtemos

$$x_u(u, v) = e^{-\sigma(u)} c_1(v) \quad \text{e} \quad y_u(u, v) = e^{-\sigma(u)} c_2(v),$$

para certas funções suaves  $c_1, c_2$ . Assim, pela Equação 3.29, segue que

$$\begin{aligned} f^2(u \operatorname{sen} \alpha) e^{-2\sigma(u)} (c_1^2(v) + c_2^2(v)) &= \cos^2 \alpha \\ \Rightarrow c_1^2(v) + c_2^2(v) &= \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

Se nós chamarmos

$$p_1(v) = \frac{c_1(v)}{\cos \alpha}, \quad p_2(v) = \frac{c_2(v)}{\cos \alpha},$$

temos que  $p_1^2(v) + p_2^2(v) = 1$  e  $c_1 = p_1 \cos \alpha$ ,  $c_2 = p_2 \cos \alpha$ . Daí, temos

$$i_u(u, v) = (\operatorname{sen} \alpha, \cos \alpha e^{-\sigma(u)} p_1(v), \cos \alpha e^{-\sigma(u)} p_2(v)). \quad (3.35)$$

Analogamente, como a Equação 3.33 é satisfeita em todas as coordenadas da imersão  $i$ , segue que

$$x_{uv} + \left( \sigma' - \frac{\beta_u}{\beta} \right) x_v = 0 \quad \text{e} \quad y_{uv} + \left( \sigma' - \frac{\beta_u}{\beta} \right) y_v = 0,$$

de onde segue que

$$x_v = e^{-\sigma} e^{\int \frac{\beta_u}{\beta}} d_1(v) \quad \text{e} \quad y_v = e^{-\sigma} e^{\int \frac{\beta_u}{\beta}} d_2(v),$$

para certas funções suaves  $d_1, d_2$ .

Agora, pela Equação 3.31, obtemos

$$\begin{aligned} f^2(u \operatorname{sen} \alpha) e^{-2\sigma(u)} e^{2 \int \frac{\beta_u}{\beta}} (d_1^2(v) + d_2^2(v)) &= \beta^2 \\ \Rightarrow d_1^2(v) + d_2^2(v) &= \frac{\beta^2}{e^{2 \int \frac{\beta_u}{\beta}}}. \end{aligned}$$

Logo, fazendo

$$q_1(v) = \frac{d_1(v)e^{\int \frac{\beta_u}{\beta}}}{\beta} \quad \text{e} \quad q_2(v) = \frac{d_2(v)e^{\int \frac{\beta_u}{\beta}}}{\beta},$$

obtemos  $q_1^2(v) + q_2^2(v) = 1$ . Podemos, então, escrever

$$i_v(u, v) = e^{-\sigma(u)}\beta(u, v)(0, q_1(v), q_2(v)). \quad (3.36)$$

Observe agora que, derivando a Equação 3.35 com relação à  $v$ , temos

$$p_1(v) = \frac{x_u}{\cos \alpha e^{-\sigma}} \Rightarrow p'_1(v) = \frac{x_{uv}}{\cos \alpha e^{-\sigma}}$$

e

$$p_2(v) = \frac{y_u}{\cos \alpha e^{-\sigma}} \Rightarrow p'_2(v) = \frac{y_{uv}}{\cos \alpha e^{-\sigma}}.$$

Assim, substituindo o resultado na Equação 3.33, chegamos à

$$\begin{aligned} p'_1 &= \frac{1}{\cos \alpha e^{-\sigma}} \left( -\sigma + \frac{\beta_u}{\beta} \right) x_v \\ &= \frac{1}{\cos \alpha e^{-\sigma}} \left( -\sigma + \frac{\beta_u}{\beta} \right) e^{-\sigma} \beta q_1 \\ &= \frac{1}{\cos \alpha} (\beta_u - \sigma \beta) q_1. \end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$p'_2 = \frac{1}{\cos \alpha} (\beta_u - \sigma' \beta) q_2$$

e daí temos

$$(p'_1, p'_2) = \frac{1}{\cos \alpha} (\beta_u - \sigma' \beta) (q_1, q_2). \quad (3.37)$$

Agora, substituindo 3.35 e 3.36 em 3.34, obtemos

$$\begin{aligned} &e^{-\sigma(u)}(0, \beta_v q_1 + \beta q'_1, \beta_v q_2 + \beta q'_2) \\ &+ (\beta \beta_u + \text{tg } \alpha \lambda \beta^2)(\text{sen } \alpha, \cos \alpha e^{-\sigma(u)} p_1(v), \cos \alpha e^{-\sigma(u)} p_2(v)) \\ &- \frac{\beta_v}{\beta}(e^{-\sigma(u)}\beta(u, v)(0, q_1, q_2)) - \beta^2 \left( \frac{\sigma'}{\text{sen } \alpha} + \frac{\lambda}{\cos \alpha} \right) \partial_t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &(0, e^{-\sigma(u)}\beta_v q_1 + e^{-\sigma(u)}\beta q'_1, e^{-\sigma(u)}\beta_v q_2 + e^{-\sigma(u)}\beta q'_2) \\ &+ ((\beta \beta_u + \text{tg } \alpha \lambda \beta^2) \text{sen } \alpha, (\beta \beta_u + \text{tg } \alpha \lambda \beta^2) \cos \alpha e^{-\sigma(u)} p_1(v), (\beta \beta_u + \text{tg } \alpha \lambda \beta^2) \cos \alpha e^{-\sigma(u)} p_2(v)) \\ &- (0, e^{-\sigma(u)}\beta_v q_1, e^{-\sigma(u)}\beta_v q_2) - \beta^2 \left( \frac{\sigma'}{\text{sen } \alpha} + \frac{\lambda}{\cos \alpha} \right) \partial_t \\ &= 0, \end{aligned}$$

e daí

$$\begin{aligned} & (0, e^{-\sigma(u)}\beta q'_1, e^{-\sigma(u)}\beta q'_2) + (\beta\beta_u + \operatorname{tg} \alpha \lambda \beta^2)(\operatorname{sen} \alpha, \cos \alpha e^{-\sigma(u)}p_1(v), \cos \alpha e^{-\sigma(u)}p_2(v)) \\ & - \left( \beta^2 \left( \frac{\sigma'}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{\lambda}{\cos \alpha} \right) \partial_t \right) \\ & = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (0, q'_1, q'_2) &= -(\beta_u + \operatorname{tg} \alpha \lambda \beta)(\operatorname{sen} \alpha e^{-\sigma(u)}, \cos \alpha p_1(v), \cos \alpha p_2(v)) \\ &+ \left( \beta \left( \frac{\sigma'}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{\lambda}{\cos \alpha} \right) e^{\sigma(u)}, 0, 0 \right), \end{aligned}$$

de onde segue finalmente que

$$(q'_1, q'_2) = -(\beta_u \cos \alpha + \lambda \beta \operatorname{sen} \alpha)(p_1, p_2). \quad (3.38)$$

A partir de agora, separaremos o estudo em dois casos:  $(p_1(v), p_2(v))$  constante e  $(p_1(v), p_2(v))$  não constante.

**Caso 1:** Se  $(p_1(v), p_2(v))$  for constante, segue da Equação 3.37 que  $\beta_u = \sigma' \beta$ . Logo, obtemos

$$\beta(u, v) = e^{\sigma(u)}\psi(v) = f(u \operatorname{sen} \alpha)\psi(v),$$

para alguma função suave  $\psi$ . Como  $\psi$  depende apenas de  $v$ , por uma mudança de coordenadas podemos admitir  $\psi(v) = 1$ . Assim,

$$\beta(u, v) = f(u \operatorname{sen} \alpha). \quad (3.39)$$

Pela Equação 3.25, segue que

$$\begin{aligned} f'(u \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} \alpha &= \frac{f(u \operatorname{sen} \alpha)}{\operatorname{sen} \alpha} (\lambda \cos \alpha + ((\log f)' \circ i)) \\ \Rightarrow \frac{f'(u \operatorname{sen} \alpha)}{f(u \operatorname{sen} \alpha)} \operatorname{sen}^2 \alpha &= \lambda \cos \alpha + ((\log f)' \circ i), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\cos \alpha} ((\log f)' \circ i) (\operatorname{sen}^2 \alpha - 1) \\ &= -\cos \alpha ((\log f)' \circ i). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Logo, por 3.19, segue que as curvaturas principais de  $M$  são iguais e, portanto,  $M$  é totalmente umbílica.

Substituindo 3.39 e 3.40 em 3.38, segue que

$$\begin{aligned}(q'_1, q'_2) &= -(\beta_u \cos \alpha + \lambda \beta \operatorname{sen} \alpha)(p_1, p_2) \\ &= -(\beta_u \cos \alpha - \cos \alpha((\log f)' \circ i)f(u \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} \alpha)(p_1, p_2) \\ &= 0,\end{aligned}$$

e portanto  $(q_1, q_2)$  é constante.

Agora, integrando a Equação 3.35 com relação à  $u$  e usando 3.36, temos

$$i(u, v) = \left( u \operatorname{sen} \alpha, p_1 \cos \alpha \left( \int^\mu e^{-\sigma(\mu)} d\mu \right) + q_1 v + a_1, p_2 \cos \alpha \left( \int^\mu e^{-\sigma(\mu)} d\mu \right) + q_2 v + a_2 \right)$$

onde  $a_1, a_2$  são constantes que, a menos de translação, podem ser tomadas nulas. Além disso, como  $\bar{g}(i_u, i_v) = 0$ , segue que

$$\begin{aligned}\cos \alpha e^{-\sigma(u)} e^{-\sigma(u)} \beta p_1 q_1 + \cos \alpha e^{-\sigma(u)} e^{-\sigma(u)} \beta p_2 q_2 &= 0 \\ \implies p_1 q_1 + p_2 q_2 &= 0.\end{aligned}$$

Logo, uma vez que rotações ao redor do eixo  $t$  são isometrias de  $I \times_f \mathbb{E}^2$ , podemos tomar

$$(p_1, p_2) = (1, 0) \quad \text{e} \quad (q_1, q_2) = (0, 1).$$

Assim, fazendo também a substituição  $\tau = \mu \operatorname{sen} \alpha$ , segue finalmente que a imersão  $i$  é

$$\left( u \operatorname{sen} \alpha, \cotg \alpha \int^{u \operatorname{sen} \alpha} \frac{d\tau}{f(\tau)}, v \right),$$

que corresponde ao segundo caso do teorema.

**Caso 2:** Suponha agora que  $(p_1, p_2)$  não seja constante. Como  $p_1^2 + p_2^2 = 1$ , podemos assumir, após uma mudança de coordenadas, que

$$(p_1(v), p_2(v)) = (\cos v, \operatorname{sen} v). \tag{3.41}$$

Assim, usando 3.37 e 3.41 segue que

$$\frac{1}{\cos \alpha} (\beta_u - \sigma' \beta) = 1,$$

ou seja,

$$\beta_u - \sigma' \beta = \pm \cos \alpha. \tag{3.42}$$



A menos de uma reparametrização com relação à coordenada  $u$ , podemos assumir que  $\beta_u - \sigma' \beta = \cos \alpha$ . Desta forma, resulta que

$$\beta(u, v) = \frac{1}{e^{-\sigma(u)}} \int^u e^{-\sigma(\mu)} \cos \alpha \, d\mu + \gamma(v),$$

ou seja,

$$\beta(u, v) e^{-\sigma(u)} - \cos \alpha \int^u e^{-\sigma(\mu)} \, d\mu = \gamma(v) \quad (3.43)$$

para alguma função suave  $\gamma(v)$ . Utilizando novamente a Equação 3.37, obtemos

$$(q_1(v), q_2(v)) = (-\operatorname{sen} v, \operatorname{cos} v).$$

Assim, as equações 3.35 e 3.36 podem ser reescritas como

$$i_u(u, v) = (\operatorname{sen} \alpha, \operatorname{cos} \alpha e^{-\sigma(u)} \operatorname{cos} v, \operatorname{cos} \alpha e^{-\sigma(u)} \operatorname{sen} v) \quad (3.44)$$

e

$$i_v(u, v) = e^{-\sigma(u)} \beta(u, v) (0, -\operatorname{sen} v, \operatorname{cos} v). \quad (3.45)$$

Logo, integrando 3.44, segue que

$$i(u, v) = \left( u \operatorname{sen} \alpha, \operatorname{cos} \alpha \left( \int^u e^{-\sigma(\mu)} \, d\mu \right) \operatorname{cos} v + \vartheta_1(v), \right. \\ \left. \operatorname{cos} \alpha \left( \int^u e^{-\sigma(\mu)} \, d\mu \right) \operatorname{sen} v + \vartheta_2(v) \right), \quad (3.46)$$

para certas funções  $\vartheta_1(v), \vartheta_2(v)$ . Finalmente, se nós derivarmos a Equação 3.46 com relação à  $v$  e compararmos com 3.45, temos

$$-\operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} v \int^u e^{-\sigma(\mu)} \, d\mu + \vartheta_1'(v) = -e^{-\sigma(u)} \beta \operatorname{sen} v$$

ou seja,

$$\vartheta_1'(v) = \left( \beta(u, v) e^{-\sigma(u)} - \operatorname{cos} \alpha \int^u e^{-\sigma(\mu)} \, d\mu \right) (-\operatorname{sen} v) \\ = \gamma(v) (-\operatorname{sen} v).$$

Analogamente,

$$\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} v \int^u e^{-\sigma(\mu)} \, d\mu + \vartheta_2'(v) = -e^{-\sigma(u)} \beta \operatorname{cos} v$$

ou seja,

$$\vartheta_2'(v) = \left( \beta(u, v) e^{-\sigma(u)} - \operatorname{cos} \alpha \int^u e^{-\sigma(\mu)} \, d\mu \right) (\operatorname{cos} v) \\ = \gamma(v) (\operatorname{cos} v).$$

Assim,

$$(\vartheta'_1(v), \vartheta'_2(v)) = \gamma(v)(-\operatorname{sen} v, \cos v).$$

Finalmente, fazendo  $\tau = u \operatorname{sen} \alpha$  e integrando  $(\vartheta'_1(v), \vartheta'_2(v))$ , segue que

$$i(u, v) = \left( u \operatorname{sen} \alpha, \cot \alpha \left( \int^{u \operatorname{sen} \alpha} \frac{d\tau}{f(\tau)} \right) \cos v - \int^v \gamma(\tau) \operatorname{sen} \tau d\tau, \right. \\ \left. \cot \alpha \left( \int^{u \operatorname{sen} \alpha} \frac{d\tau}{f(\tau)} \right) \operatorname{sen} v + \int^v \gamma(\tau) \cos \tau d\tau \right),$$

que corresponde ao primeiro caso do teorema.

□

**Observação 3.1.** Quando  $\alpha = \pi/2$ , o caso (1) do teorema nos dá

$$i(u, v) = \left( u, - \int^v \gamma(\tau) \operatorname{sen} \tau d\tau, \int^v \gamma(\tau) \cos \tau d\tau \right),$$

ou seja, existem coordenadas locais  $(u, v)$  em  $M$  para as quais  $i(u, v) = (u, \beta_1(v), \beta_2(v))$ , onde  $\beta(v) = (\beta_1(v), \beta_2(v))$  representa uma curva em  $\mathbb{E}^2$ . Do mesmo modo, o caso (2) do teorema nos dá que  $i(M)$  é um subconjunto aberto de

$$x = 0,$$

ou seja,  $i$  parametriza um plano.

**Observação 3.2.** : No primeiro caso do teorema, considerando  $(q_1, q_2)$  não constantes, a função  $\lambda$  é dada por

$$\lambda(u, v) = \frac{1}{\beta(u, v)} \operatorname{sen} \alpha - \frac{f'(u \operatorname{sen} \alpha)}{f(u \operatorname{sen} \alpha)} \cos \alpha. \quad (3.47)$$

De fato, pela Equação 3.38, obtemos

$$(-\cos v, -\operatorname{sen} v) = -(\beta_u \cos \alpha + \lambda \beta \operatorname{sen} \alpha)(\cos v, \operatorname{sen} v).$$

Assim,

$$-\cos v = -(\beta_u \cos \alpha + \lambda \beta \operatorname{sen} \alpha) \cos v \quad (3.48)$$

e substituindo 3.25 em 3.48, temos

$$\lambda \beta \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} + \beta \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \frac{f'(u \operatorname{sen} \alpha)}{f(u \operatorname{sen} \alpha)} \cos \alpha + \lambda \beta \operatorname{sen} \alpha = 1,$$

o que nos dá

$$\lambda(u, v) = \frac{1}{\beta(u, v)} \operatorname{sen} \alpha - \frac{f'(u \operatorname{sen} \alpha)}{f(u \operatorname{sen} \alpha)} \cos \alpha,$$

como queríamos demonstrar.

### 3.4 Superfícies de rotação com ângulo constante

Nesta seção, classificaremos as superfícies de ângulo constante em  $I \times_f \mathbb{E}^2$ , que são invariantes com relação às rotações em torno do eixo  $t$ .

Relembremos primeiro que toda rotação

$$R_\phi : I \times_f \mathbb{E}^2 \longrightarrow I \times_f \mathbb{E}^2 : (t, x, y) \longmapsto (t, x \cos \phi - y \operatorname{sen} \phi, x \operatorname{sen} \phi + y \cos \phi)$$

é uma isometria. De fato, dados  $U, V \in T_p(I \times_f \mathbb{E}^2)$ , temos  $dR_\phi V = R_\phi V$  e  $dR_\phi U = R_\phi U$ , uma vez que  $R_\phi$  é uma transformação linear. Desta forma, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{g}(dR_\phi V, dR_\phi U) &= v_1 u_1 + f^2 \left( (v_2 \cos \phi - v_3 \operatorname{sen} \phi)(u_2 \cos \phi - u_3 \operatorname{sen} \phi) \right. \\ &\quad \left. + (v_2 \operatorname{sen} \phi + v_3 \cos \phi)(u_2 \operatorname{sen} \phi + u_3 \cos \phi) \right) \\ &= v_1 u_1 + f^2(v_2 u_2 + v_3 u_3) \\ &= \bar{g}(V, U) \end{aligned}$$

de onde segue que  $R_\phi$  é, de fato, uma isometria. Considerando  $\gamma$  uma curva no plano  $tx$  e assumindo que  $\gamma(u) = (a(u), b(u), 0)$  é uma parametrização de  $\gamma$  por comprimento de arco, temos

$$(a'(u))^2 + f^2(a(u))(b'(u))^2 = 1. \tag{3.49}$$

Nosso objetivo é estudar quando a superfície

$$i(u, v) = (a(u), b(u) \cos v, b(u) \operatorname{sen} v)$$

é uma superfície de ângulo constante em  $I \times_f \mathbb{E}^2$ .

Observe que, neste caso, usando a Equação 3.49, o vetor normal unitário  $\xi$  é dado por

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{i_u \times_f i_v}{|i_u \times_f i_v|} \\ &= \frac{(f^2(t)b'(u)b(u), -a'(u)b(u) \cos v, -a'(u)b(u) \operatorname{sen} v)}{|(f^2(t)b'(u)b(u), -a'(u)b(u) \cos v, -a'(u)b(u) \operatorname{sen} v)|} \\ &= \frac{(f^2(t)b'(u)b(u), -a'(u)b(u) \cos v, -a'(u)b(u) \operatorname{sen} v)}{f(a(u))b(u)} \\ &= \left( f(a(u))b'(u), \frac{-a'(u) \cos v}{f(a(u))}, \frac{-a'(u) \operatorname{sen} v}{f(a(u))} \right).\end{aligned}$$

A imersão será de ângulo constante se, e somente se,  $\bar{g}(\xi, \partial_t) = \cos \alpha$ , ou seja, se, e somente se,

$$b'(u)f(a(u)) = \cos \alpha. \quad (3.50)$$

Assim, substituindo 3.50 em 3.49, segue que

$$(a'(u))^2 = \operatorname{sen}^2 \alpha. \quad (3.51)$$

Se  $\operatorname{sen} \alpha = 0$ , então  $a'(u) = 0$ , de onde segue que  $a(u) = t_0$ , com  $t_0$  constante. Isto corresponde ao terceiro caso do Teorema 3.7.

Se  $\operatorname{sen} \alpha \neq 0$ , então  $a(u) = \pm u \operatorname{sen} \alpha + c$ , sendo  $c$  uma constante. Através de uma translação e de uma mudança de coordenadas, podemos considerar

$$a(u) = u \operatorname{sen} \alpha. \quad (3.52)$$

Se  $\alpha = \pi/2$ , então temos  $a(u) = u$  e, por 3.49, segue que  $f^2(u)(b'(u))^2 = 0$ , ou seja,  $b = b_0$ ,  $b_0$  constante. Portanto, temos o cilindro circular

$$i(u, v) = (u, b_0 \cos \alpha, b_0 \operatorname{sen} \alpha).$$

Se  $\alpha \in (0, \pi/2)$ , então, de 3.50, segue que

$$b(u) = \int^u \frac{\cos \alpha}{f(\mu \operatorname{sen} \alpha)} d\mu = \cotg \alpha \int^{u \operatorname{sen} \alpha} \frac{d\tau}{f(\tau)},$$

e assim temos

$$i(u, v) = \left( u \operatorname{sen} \alpha, \left( \cotg \alpha \int^{u \operatorname{sen} \alpha} \frac{d\tau}{f(\tau)} \right) \cos v, \left( \cotg \alpha \int^{u \operatorname{sen} \alpha} \frac{d\tau}{f(\tau)} \right) \operatorname{sen} v \right) \quad (3.53)$$

que corresponde à uma translação no eixo  $x$  do primeiro caso do Teorema 3.7, com  $\alpha(v) = 0$ .

## 3.5 Exemplos

### 3.5.1 Superfície flat de ângulo constante

Lembremos que uma superfície é chamada de flat quando sua curvatura Gaussiana é nula. Desta forma, observe que uma superfície do tipo (3) do Teorema 3.7 é uma superfície flat de ângulo constante  $\alpha = 0$ . Para obtermos exemplo de uma superfície flat com ângulo constante  $\alpha \neq 0$ , consideremos uma superfície do tipo (2) do Teorema 3.7. Usando a Equação de Gauss e 3.19, temos

$$K = \det A - ((\log f)' \circ i)^2 - ((\log f)'' \circ i) \operatorname{sen}^2 \alpha = - \left( \frac{f''}{f} \circ i \right) \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

Logo, a superfície será flat se, e somente se,  $f'' = 0$ , ou seja,  $f(t) = a(t + b)$ , para constantes  $a \neq 0$  e  $b$ . Utilizando esta expressão para  $f$ , a matriz  $A$ , as expressões obtidas para  $\nabla$  e a fórmula de Weingarten, obtemos a curvatura geodésica da curva geratriz do cilindro, visto como curva de  $I \times_f \mathbb{E}^2$ .

### 3.5.2 Superfícies mínimas de ângulo constante

Primeiramente, considere uma superfície de ângulo constante do tipo (3) do Teorema 3.7. Neste caso,  $\partial_t$  é um vetor normal unitário e de 3.1 segue que a superfície é totalmente umbílica, com

$$A = \begin{pmatrix} \frac{f'(t_0)}{f(t_0)} & 0 \\ 0 & \frac{f'(t_0)}{f(t_0)} \end{pmatrix}.$$

Logo, a superfície é mínima se, e somente se,  $f'(t_0) = 0$ , caso em que ela será também totalmente geodésica.

Considere agora uma superfície de ângulo constante do tipo (2) do Teorema 3.7. Como

$$H = -\cos \alpha \frac{f'(u \operatorname{sen} \alpha)}{f(u \operatorname{sen} \alpha)},$$

segue que a superfície é mínima se, e somente se,  $\cos \alpha = 0$  ou  $f'(u \operatorname{sen} \alpha) = 0$ . Uma vez que  $\alpha \in [0, \pi/2]$ , o caso  $\cos \alpha = 0$  nos dá que  $\alpha = \pi/2$ , ou seja, a superfície é o produto warped entre

um intervalo e uma reta em  $\mathbb{E}^2$ . Já no caso  $f'(u \operatorname{sen} \alpha) = 0$ , o espaço ambiente será o produto direto, e a superfície será um plano.

Por fim, assuma que a superfície é do tipo (1) do Teorema 3.7. Usando 3.19 e a Equação 3.47, obtemos que a superfície é mínima se, e somente se,

$$2 \cos \alpha \beta \sigma' = \operatorname{sen}^2 \alpha. \quad (3.54)$$

Observe que, neste caso,  $\beta$  depende apenas de  $u$ . Desta forma, derivando a Equação 3.54 e utilizando 3.42, obtemos

$$\left(\frac{1}{\sigma'}\right)' = \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha}. \quad (3.55)$$

Logo, integrando 3.55 e utilizando 3.27, obtemos que  $f$  tem a forma

$$f(t) = b(t + c)^{\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}}.$$

Assumindo, sem perda de generalidade, que  $c = 0$  e denotando

$$m = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha},$$

segue que

$$f(t) = bt^m, \quad m \in (0, 1),$$

e utilizando a Equação 3.55 segue também que

$$\sigma' = \frac{m}{u}. \quad (3.56)$$

Desta forma, substituindo estas expressões na Equação 3.47, segue que

$$\lambda = \frac{m \operatorname{cotg} \alpha}{u}. \quad (3.57)$$

Além disso, usando a Equação 3.25, obtemos que

$$\beta = \frac{u \cos \alpha}{1 - m}, \quad (3.58)$$

de onde segue, pela Equação 3.43, que  $\gamma = 0$ . Logo, de acordo com o Teorema 3.7, a superfície é dada por

$$i(u, v) = \left( u \operatorname{sen} \alpha, \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{b(1 - m)} (u \operatorname{sen} \alpha)^{1-m} \cos v, \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{b(1 - m)} (u \operatorname{sen} \alpha)^{1-m} \operatorname{sen} v \right),$$

que representa uma superfície mínima de ângulo constante com

$$\alpha = \arccos \sqrt{(1 - m)/(1 + m)}.$$

---

# Resultados básicos sobre produto warped

---

---

O objetivo deste apêndice é expor alguns resultados e definições básicas sobre produto warped, utilizadas ao longo desta dissertação. Mais detalhes sobre este assunto podem ser encontrados em [3] e [5].

Começemos, pois, pela definição de produto warped:

**Definição A.1.** *Sejam  $B$  e  $F$  variedades diferenciáveis, com métricas, respectivamente,  $g_B$  e  $g_F$ , e considere  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $I$  intervalo aberto, uma função estritamente positiva. Definimos o produto warped de  $B$  e  $F$  com função  $f$  como sendo*

$$(\overline{M}, \overline{g}) = B \times_f F = (B \times F, g_B + f^2 g_F)$$

*ou seja, é a variedade produto  $B \times F$  munida da métrica  $\overline{g} = g_B + f^2 g_F$ .*

Observe que, no caso em que a função  $f$  é constante igual à 1, o produto warped  $B \times_f F$  é simplesmente uma variedade produto no sentido clássico,  $B \times F$ .

Dado um campo de vetores  $A \in B \times_f F$ , podemos decompô-lo em parte horizontal e vertical. Sua parte horizontal, que será denotada por  $\mathcal{H}A$ , será aquela ortogonal às fibras. Já sua componente vertical, denotada por  $\mathcal{V}A$ , será aquela tangente às fibras. Um campo de vetores em  $B$  será chamado **horizontal** e um campo de vetores em  $F$  será chamado **vertical**. Dados  $U, V \in F$ , a métrica  $\bar{g}$  de  $\bar{M}$  é, neste caso, dada por

$$\bar{g}(U, V) = f^2 g_F(U, V).$$

Seja  $\bar{\nabla}$  a derivada covariante de  $\bar{M}$  e  $D$  a derivada covariante de  $F$ . Então, dados  $A, B \in \bar{M}$ , temos o operador

$$T_A B = \mathcal{H}\bar{\nabla}_{\mathcal{V}A}(\mathcal{V}B) + \mathcal{V}\bar{\nabla}_{\mathcal{V}A}(\mathcal{H}B), \quad (\text{A.1})$$

e recordemos também que é válida a **fórmula de Koszul**

$$\begin{aligned} 2\bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, Z) &= \partial_X(\bar{g}(Y, Z)) + \partial_Y(\bar{g}(X, Z)) - \partial_Z(\bar{g}(X, Y)) \\ &\quad + \bar{g}([X, Y], Z) - \bar{g}([X, Z], Y) - \bar{g}([Y, Z], X), \end{aligned}$$

onde  $X, Y, Z \in \bar{M}$ .

Apresentamos abaixo o lema que caracteriza a derivada covariante em um produto warped  $B \times_f F$ :

**Lema A.2.** *Dados  $X, Y \in B$ ,  $V, W \in F$  e sendo  $G$  o gradiente da função  $f$ , temos*

$$\begin{aligned} (1) \quad &\nabla_X Y \text{ é igual em } B \text{ e } M; \\ (2) \quad &\bar{\nabla}_X V = \bar{\nabla}_V X = T_V X = (Xf/f)V; \\ (3) \quad &\mathcal{H}(\bar{\nabla}_V W) = T_v W = -fg_F(V, W)G = -(\bar{g}(V, W)/f)G; \\ (4) \quad &\mathcal{V}(\bar{\nabla}_V W) = D_V W. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

*Demonstração.* (1) vem do fato de que, uma vez que  $X, Y$  são levantamentos de campos de vetores em  $B$ , são constantes em cada fibra do tipo  $x_0 \times F$ , com  $x_0 \in B$ . Logo,  $\nabla_X Y$  é igual em  $B$  e  $M$ .

(2) Para a segunda equação, uma vez que  $[X, V] = 0$ , segue que  $\bar{\nabla}_X V = \bar{\nabla}_V X$ . Como  $\bar{g}(X, Y)$  é constante em cada fibra, segue também que  $V\bar{g}(X, Y) = 0$ , e pela fórmula de Koszul temos

$$\begin{aligned} 2\bar{g}(\bar{\nabla}_V X, Y) &= V\bar{g}(X, Y) + X\bar{g}(V, Y) - Y\bar{g}(V, X) \\ &\quad + \bar{g}([V, X], Y) - \bar{g}([V, Y], X) - \bar{g}([X, Y], V) \\ &= 0, \end{aligned}$$



pois todos estes termos são nulos. Logo, como  $Y$  é horizontal, segue que  $\bar{\nabla}_V X$  é vertical. Assim,

$$\bar{\nabla}_V X = \mathcal{V}\bar{\nabla}_V X = T_V X.$$

Agora, novamente pela fórmula de Koszul, temos

$$\begin{aligned} 2\bar{g}(\bar{\nabla}_X V, W) &= X\bar{g}(V, W) + V\bar{g}(X, W) - W\bar{g}(X, V) \\ &\quad + \bar{g}([X, V], W) - \bar{g}([X, W], V) - \bar{g}([V, W], X) \\ &= X\bar{g}(V, W), \end{aligned}$$

pois é o único termo não nulo. Além disso, observe que

$$X\bar{g}(V, W) = Xf^2 g_F(V, W) = 2fXfg_F(V, W) = 2(Xf/f)f^2 g_F(V, W),$$

e como  $\bar{\nabla}_X V = \bar{\nabla}_V X = T_V X$ , segue que

$$2\bar{g}(\bar{\nabla}_X V, W) = 2(Xf/f)f^2 g_F(V, W),$$

ou seja,

$$\bar{\nabla}_X V = (Xf/f)V.$$

(3) Para a terceira equação, observe que

$$\mathcal{H}\bar{\nabla}_V W = T_V W,$$

e como  $X$  é horizontal,

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{\nabla}_V W, X) &= \bar{g}(T_V W, X) \\ &= -f^2 g_F(W, T_V X) \\ &= -f^2 g_F(W, V)Xf/f \\ &= -fg_F(W, V)\bar{g}(G, X), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{H}\bar{\nabla}_V W = T_V W = -fg_F(W, V)G.$$

Por fim, (4) vem do fato de que a derivada covariante induzida das fibras é dada por  $\mathcal{V}\bar{\nabla}_V W$  (ver [3]).

□

A partir do lema anterior, podemos caracterizar também o tensor curvatura  $\bar{R}$  de  $\bar{M}$ , que definiremos por

$$\bar{R}(U, V) = [\bar{\nabla}_U, \bar{\nabla}_V] - \bar{\nabla}_{[U, V]}.$$

Isto será feito no seguinte lema:

**Lema A.3.** *Sejam  $\bar{R}$  o tensor curvatura em  $\bar{M}$ ,  $S$  o tensor curvatura em  $F$ ,  $X, Y, Z \in B$  e  $U, V, W \in F$ . Então*

$$\begin{aligned} (1) \quad & \bar{R}(U, V)W = S(U, V)W + |G|^2[g_F(U, W)V - g_F(V, W)U]; \\ (2) \quad & \bar{R}(X, V)Y = (1/f)\langle Y, \bar{\nabla}_X G \rangle V; \\ (3) \quad & \bar{R}(X, Y)V = \bar{R}(V, W)X = 0; \\ (4) \quad & \bar{R}(X, V)W = \bar{R}(X, W)V = -fg_F(V, W)\bar{\nabla}_X G; \\ (5) \quad & \bar{R}(X, Y)Z \text{ é o mesmo em } B \text{ e } M. \end{aligned} \tag{A.3}$$

*Demonstração.* (1) Para a primeira equação, observe primeiramente que, pela equação de Gauss,

$$\begin{aligned} \bar{g}(S(U, V)W, Z) &= \bar{g}(\bar{R}(U, V)W, Z) - \bar{g}(h(V, Z), h(U, W)) + \bar{g}(h(U, Z), h(V, W)) \\ &= \bar{g}(\bar{R}(U, V)W, Z) - \bar{g}(\mathcal{H}(\bar{\nabla}_V Z), \mathcal{H}(\bar{\nabla}_U W)) + \bar{g}(\mathcal{H}(\bar{\nabla}_U Z), \mathcal{H}(\bar{\nabla}_V W)) \\ &= \bar{g}(\bar{R}(U, V)W, Z) - \bar{g}(-(1/f)\bar{g}(V, Z)G, -(1/f)\bar{g}(U, W)G) \\ &\quad + \bar{g}(-(1/f)\bar{g}(U, Z)G, -(1/f)\bar{g}(V, W)G) \\ &= \bar{g}(\bar{R}(U, V)W, Z) + \frac{|G|^2}{f^2}[\bar{g}(U, Z)\bar{g}(V, W)] - \frac{|G|^2}{f^2}[\bar{g}(V, Z)\bar{g}(U, W)] \\ &= \bar{g}(\bar{R}(U, V)W + \frac{|G|^2}{f^2}[-\bar{g}(U, W)V + \bar{g}(V, W)U], Z) \\ &= \bar{g}(\bar{R}(U, V)W + |G|^2[-g_F(U, W)V + g_F(V, W)U], Z). \end{aligned}$$

Logo, basta mostrar que  $\bar{R}(U, V)W$  é vertical. Para isso, é suficiente verificar que  $\bar{R}(U, V)X = 0$  pois daí teremos

$$0 = -\bar{g}(\bar{R}(U, V)X, W) = \bar{g}(\bar{R}(U, V)W, X),$$

e o resultado seguirá uma vez que  $X$  é um campo de vetores horizontal. Suponha, então, que  $[U, V] = 0$ . Assim, utilizando o Lema A.2, temos

$$\begin{aligned} \bar{R}(U, V)X &= \bar{\nabla}_U \bar{\nabla}_V X - \bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_U X \\ &= \bar{\nabla}_U((Xf/f)V) - \bar{\nabla}_V((Xf/f)U). \end{aligned}$$

Como o domínio de  $f$  é o conjunto  $B$  e  $U, V \in F$ ,  $Xf/f$  é constante nas direções de  $U$  e de  $V$ . Assim,

$$\bar{R}(U, V)X = (Xf/f)(\bar{\nabla}_U V - \bar{\nabla}_V U) = (Xf/f)[U, V] = 0,$$

e a primeira equação está provada.

(2) Para a segunda equação, lembrando que  $[X, V] = 0$  e utilizando o Lema A.2, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, V)Y &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_V Y - \bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_X Y \\ &= \bar{\nabla}_X \left( \left( \frac{Yf}{f} \right) V \right) - \bar{\nabla}_V \left( \bar{\nabla}_X Y \right) \\ &= \left( X \left( \frac{Yf}{f} \right) + \left( \frac{Yf}{f} \frac{Xf}{f} \right) - \left( \frac{\bar{\nabla}_X Y f}{f} \right) \right) V \\ &= \left( X \left( \frac{\bar{g}(Y, G)}{f} \right) + \frac{\bar{g}(Y, G) \bar{g}(X, G)}{f} - \frac{\bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, G)}{f} \right) V \\ &= \left( X \left( \frac{1}{f} \right) \bar{g}(Y, G) + \frac{\bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, G) + \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X G)}{f} - \frac{\bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, G)}{f} + \frac{\bar{g}(Y, G) \bar{g}(X, G)}{f^2} \right) V \\ &= \left( - \frac{\bar{g}(G, X) \bar{g}(Y, G)}{f^2} + \frac{\bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X G)}{f} + \frac{\bar{g}(G, X) \bar{g}(Y, G)}{f^2} \right) V \\ &= \frac{\bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X G)}{f} V. \end{aligned}$$

(3) No caso da terceira equação, utilizando o Lema A.2, temos

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)V &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y V - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X V - \bar{\nabla}_{[X, Y]} V \\ &= \bar{\nabla}_X \frac{Yf}{f} V - \bar{\nabla}_Y \frac{Xf}{f} V - ([X, Y]f/f)V \\ &= \frac{XYf}{f} V - \frac{YXf}{f} V - \frac{[X, Y]f}{f} V \\ &= \frac{[X, Y]f}{f} V - \frac{[X, Y]f}{f} V \\ &= 0. \end{aligned}$$

(4) Utilizando a equação (2) deste Lema, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{R}(X, V)W, Y) &= -\bar{g}(\bar{R}(X, V)Y, W) \\ &= -(1/f)\bar{g}(\bar{\nabla}_X G, Y)\bar{g}(V, W) \\ &= -f g_F(V, W)\bar{g}(\bar{\nabla}_X G, Y). \end{aligned}$$

logo, segue que

$$\bar{R}(X, V)W = -f g_F(V, W)\bar{\nabla}_X G.$$

(5) Semelhantemente ao caso (1) do Lema A.2, a afirmação (5) segue do fato de  $X$  e  $Y$  serem constantes em cada fibra do tipo  $x_0 \times F$ ,  $x_0 \in B$ .  $\square$

Por fim, definimos abaixo o produto vetorial em um produto warped:

**Definição A.4.** *Dados  $a = (a_1, a_2, a_3)$  e  $b = (b_1, b_2, b_3)$  em  $T_{(x_1, x_2, x_3)}(I \times_f \mathbb{E}^2)$ , definimos o produto vetorial entre os vetores  $a$  e  $b$  como*

$$a \times_f b = (f^2(t)(a_2b_3 - a_3b_2), a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1). \quad (\text{A.4})$$

---

## Referências Bibliográficas

---

---

- [1] B. Daniel. *Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds*. Comment. Math. Helv. 82, (2007), 87–131.
- [2] Biscari. P, Calderer. M.C, Terentjev. E. M. *Landau-de-Gennes theory of isotropic nematic smectic liquid crystal transitions*. Physical Review E, 2007.
- [3] Bishop. R. L, O’Neill. B. *Manifolds of Negative Curvature*. American Mathematical Society, Vol 145 (Nov, 1969), pp. 1-49.
- [4] Cermelli. P, Di Scala. A. J. *Constant-angle surfaces in liquid crystals*. Phil. Mag. 87 (2007), 1871–1888.
- [5] CHEN. Bang-Yen. *Differential Geometry of Warped Product Manifolds and submanifolds*. World Scientific, 2017.
- [6] CHEN. Daguang, CHEN. Gangyi, CHEN. Hang, F. Dillen. *Constant angle surfaces in  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$* . Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin, VOL 19. 2012.
- [7] de Gennes. P.G, Prost. *The Physics of Liquid Crystals*, 2nd edn. Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [8] Dillen. F, Fastenakels. J, Van der Veken. J, Vrancken. L. *Constant angle surfaces in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$* . Monatsh. Math. 152 (2007), 89–96.

- [9] Dillen. F, Munteanu. M. I. *Constant angle surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* . Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 40 (2009), 85–97.
- [10] Dillen. F, M.I. Marian, Van Der Veken. J, Vrancken. L. *Classification of constant angle surfaces in a warped product*. 2010.
- [11] DO CARMO. Manfredo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 1976.
- [12] Eells. J, Sampson. J. H. Harmonic mappings of Riemannian manifolds. Amer. J. math. 86 (1964), 109-160.
- [13] EVANS. C. Lawrence. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, VOL. 19, 1997.
- [14] Fastenakels. J, Munteanu. M. I, Van Der Veken. J. *Constant angle surfaces in the Heisenberg group*. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 27 (2011), 747–756.
- [15] FU. Yu, N. I. Ana. *Constant Angle Property and Canonical Principal Directions for Surfaces in  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$* . Mediter. J. Math. 10 (2013), 1035-1049.
- [16] G. Ruiz-Hernández. *Minimal helix surfaces in  $N^n \times \mathbb{R}$* . Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 81 (2011), 55–67.
- [17] L. Rafael, M. I. Marian. *Constant Angle Surfaces in Minkowski Space*. 2009.
- [18] López. R, Munteanu. M. I. *On the geometry of constant angle surfaces in  $Sol_3$* . Kyushu J. Math. 65 (2011), 237–249.
- [19] ONNIS. I. Irene, P. P. Apoena, P. Paola. *Constant Angle Surfaces in Lorentzian Berger Spheres*. Journal of Geometric Analysis, 2019.
- [20] P.Yehuda, R. Jacobi. *An introduction to partial differential equations*. Cambridge University Press, 2005.
- [21] S. I. Andréia. *Estudo de um Fluido Complexo visando uma Aplicação Cosmológica*. Dissertação em Física. Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.
- [22] V. I. Arnold. *Ordinary Differential Equations*. MIT Press, 1978.

[23] YANG. Deng-Ke, WU. Shin-Tson. *Fundamentals of Liquid Crystal Devices*. John Wiley & Sons, Ltd, 2006.