UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

CENTRO TECNOLÓGICO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

NATAN SIAN DAS NEVES

MODELO COMPUTACIONAL AVANÇADO PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS SOB AÇÃO DE GRADIENTES TÉRMICOS

VITÓRIA

2019

NATAN SIAN DAS NEVES

MODELO COMPUTACIONAL AVANÇADO PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS SOB AÇÃO DE GRADIENTES TÉRMICOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Civil - área de concentração Estruturas, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Macksuel Soares de Azevedo

Coorientador: Rodrigo Silveira Camargo

VITÓRIA

2019

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

N511
m

Neves, Natan Sian das, 1995-
Modelo computacional avançado para análise de estruturas sob ação de gradientes térmicos / Natan Sian das Neves. - 2019.
277 f. : il.

Orientador: Macksuel Soares de Azevedo.
Coorientador: Rodrigo Silveira Camargo.
Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Método dos elementos finitos. 2. Análise numérica. 3. Engenharia de incêndio. I. Azevedo, Macksuel Soares de. II. Camargo, Rodrigo Silveira. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. IV. Título.

CDU: 624

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

MODELO COMPUTACIONAL AVANÇADO PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS SOB AÇÃO DE GRADIENTES TÉRMICOS

NATAN SIAN DAS NEVES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Civil - área de concentração Estruturas, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Aprovada no dia **16 de dezembro de 2019** por:

Prof. Dr. Macksuel Soares de Azevedo
Doutor em Engenharia Civil
Orientador - UFES

Prof. Dr. Rodrigo Silveira Camargo
Doutor em Engenharia Civil
Coorientador - UFES

Prof. Dr. Élcio Cassimiro Alves
Doutor em Engenharia e Tecnologia Espaciais
Examinador Interno - UFES

Prof. Dr. Valdir Pignatta e Silva
Doutor em Engenharia Civil
Examinador Externo - USP - Videoconferência

“Às vezes parecia que, de tanto acreditar
Em tudo que achávamos tão certo
Teríamos o mundo inteiro e até um pouco mais
Faríamos floresta do deserto
E diamantes de pedaços de vidro"

(D. Villa-Lobos, M. Bonfá e R. Russo)

RESUMO

A modelagem de estruturas sob efeitos de origem térmica apresenta importantes aplicações práticas na engenharia, corroborando ao interesse contínuo de pesquisas científicas acadêmicas na área. Em particular, uma vez que os elementos estruturais estão sujeitos à ação de elevadas temperaturas, as propriedades dos materiais empregados nas estruturas se degradam com o aumento de temperatura, resultando em uma significativa redução da sua capacidade resistente e da sua rigidez. Nestas condições, as estruturas apresentam comportamentos complexos descritos por modelos matemáticos não lineares, exigindo análises avançadas de cálculo. Sendo assim, a vigente pesquisa visa realizar uma investigação preliminar acerca do desempenho das estruturas em condição de incêndio. Para tanto, realiza-se o desenvolvimento de um modelo computacional denominado NASEN (*Numerical Analysis System for Engineering*), divido em módulos específicos para diferentes áreas da engenharia. Para as características da pesquisa, destaca-se inicialmente, o módulo para análise térmica em estruturas, onde se estuda a condução de calor bidimensional transiente não linear. Em seguida, o módulo para análise termoestrutural, que tem como base a solução do acoplamento de processos numéricos sequenciais, ou seja, primeiramente, determina-se o campo de temperatura ao nível da seção transversal e, posteriormente, a resposta mecânica é obtida com base nas premissas do modelo de fibras e nos procedimentos estruturais não lineares. As experimentações numéricas realizadas no decorrer da pesquisa transitam de problemas de natureza térmica e estrutural, associado ao comportamento linear e não linear, onde foram testadas diferentes geometrias, condições de contorno e tipos de materiais. Em linhas gerais, os resultados obtidos com as simulações computacionais apresentam comportamentos satisfatórios diante das medições experimentais, soluções numéricas ou analíticas disponíveis na literatura.

Palavras-chave: Elementos Finitos. Modelo Computacional. Análise termoestrutural. Efeitos Térmicos. Incêndio.

ABSTRACT

Structural modeling of thermal effects has important practical applications in engineering, corroborating the continuing interest of academic scientific research in the field. In particular, since structural elements are subjected to high temperatures, the properties of the materials used in the structures deteriorate with increasing temperature, resulting in a considerable loss of strength and stiffness. Under these conditions, the structures present complex behaviors associated to nonlinear mathematical models, requiring advanced calculus analysis. Therefore, the current research aims to carry out a preliminary investigation about the performance of structures in fire conditions. Thus, a computational model called NASEN (Numerical Analysis System for Engineering) is developed, containing specific modules for physical engineering areas. For the characteristics of the research, it is firstly emphasized the module for thermal analysis in structures, where the nonlinear transient two-dimensional heat conduction is studied. Then, the module for thermo-structural analysis is based on the solution of a coupling of sequential numerical processes, that is, the temperature field at the cross-sectional level is first determined and, subsequently, the mechanical response is obtained based the fiber model and nonlinear structural procedures. The numerical experiments carried out during the research transited about problems of thermal and structural nature, associated to the linear and nonlinear behaviors, well were tested different geometries, boundary conditions and types of materials. The numerical experiments carried out during the research transited in problems of thermal and structural nature, associated to the linear and nonlinear behaviors, where were tested different geometries, boundary conditions and types of materials. In general, the results obtained with computer simulations show satisfactory behaviors when compared to experimental measurements, numerical or analytical solutions available in the literature.

Keywords: Finite elements. Computational model. Thermo-structural analysis. Thermal effects. Fire.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este capítulo visa, inicialmente, apresentar as contextualizações e motivações, bem como as justificativas e os objetivos gerais acerca do trabalho. Ao fim, exibe-se uma breve descrição dos conteúdos, análises e metodologias desenvolvidas no decorrer de cada capítulo desta pesquisa.

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E MOTIVAÇÕES

A simulação computacional é uma área que teve um crescimento pronunciado nas últimas décadas devido ao grande avanço tecnológico associado aos computadores com altas velocidades de processamento e armazenamento de dados. Por consequência dessa evolução constante e da disponibilidade de novos recursos computacionais, torna-se notório uma vasta movimentação de pesquisas que utilizam técnicas numéricas destinadas a solução de diferentes fenômenos físicos presentes na natureza. Esses fenômenos contemplam problemas em inúmeros campos da ciência, como nas áreas da mecânica dos sólidos, termofluidos, acústica, eletromagnetismo, biomédicas, dentre outras. Além disso, os aprimoramentos e as atualizações computacionais que surgem com o avanço temporal possibilitam ao meio científico e industrial o uso de métodos numéricos cada vez mais robustos e eficientes na solução de problemas (MALISKA, 2017).

As ferramentas de solução de problemas de engenharia podem ser divididas didaticamente em duas classes: os procedimentos teóricos e os experimentais. Os ensaios em laboratórios buscam descrever, em escala real ou reduzida, um problema encontrado na natureza, sendo que esse tipo de procedimento fornece resultados com maior grau de realismo para análise do comportamento do fenômeno físico. Contudo, a ciência experimental enfrenta obstáculos, como o elevado custo financeiro em relação à mão de obra e equipamentos, espaço físico de execução, dificuldades nas medições e problemas de escala (FORTUNA, 2000). Nesta linha, inúmeros estudos científicos são direcionados para utilização de modelos teóricos.

Os métodos analíticos e numéricos compõem, basicamente, a classe dos métodos teóricos. Inicialmente, um modelo matemático visa representar um fenômeno real da natureza, onde na sua construção são utilizados princípios conservativos, leis físicas, relações constitutivas, condições de contorno, dentre outros. Contudo, como os problemas físicos possuem inúmeras complexidades, diversas aplicações necessitam considerar hipóteses de engenharia, acarretando em modelos simplificados. Dependendo das aproximações adotadas, esses modelos podem fornecer resultados aceitáveis para predizer a realidade ou simplificações acerca do comportamento do problema, exigindo um aprimoramento dos parâmetros da construção do modelo (REDDY, 2007). Além disso, é comum encontrar soluções analíticas somente para problemas

específicos, com geometrias e processos físicos simplificados, onde são frequentemente usadas para calibragem de um programa computacional (LAPIDUS; PINDER, 2011).

A maioria dos problemas físicos de engenharia apresenta comportamento não trivial, por exemplo, características não lineares, geometrias irregulares, processos transientes, acoplamentos físicos e matemáticos. A dificuldade de encontrar soluções analíticas desses problemas direcionam para soluções aproximadas por meio de técnicas numéricas. Deste modo, o uso de métodos aproximados é uma excelente alternativa a solução de problemas com maior nível de complexidade, uma vez que os computadores estão com sua capacidade em crescente evolução. Neste contexto, dentre as técnicas aproximadas usuais na engenharia, como pioneiro, o método das diferenças finitas (MDF) destaca-se pela sua simplicidade e eficiência na solução (ÖZIŞIK et al., 2017). A seara computacional ganhou ferramentas robustas de solução por meio do surgimento, em diferentes períodos, do método dos elementos finitos (MEF) e o método dos volumes finitos (MVF), expandindo a solução de problemas em inúmeras áreas da engenharia, como na mecânica dos sólidos e dos fluidos (ZIENKIEWICZ et al., 2000; EYMARD; GALLOUËT; HERBIN, 2000). Com o avanço matemático e numérico desenvolveu-se otimizações e melhorias, corroborando para os surgimentos de novos métodos, como o método dos elementos de contorno (MEC) (BECKER, 1992; LOEFFLER; CRUZ; BULCÃO, 2015) e o método *meshless* (SHEN, 2002).

O comportamento dos elementos estruturais está associado às características do sistema, efeitos e comportamentos, tais como vibrações, grandes deslocamentos e/ou rotações, não linearidades, plasticidade e variações térmicas. Desta maneira, as simulações numéricas buscam representar aproximadamente um modelo físico real, contudo, existem limitações e dificuldades na criação de um modelo computacional com maior verossimilhança possível da realidade (SORIANO; LIMA, 2003). Atualmente, no cenário computacional da engenharia estrutural, tem-se programas computacionais comerciais que possuem aplicabilidade em inúmeras áreas de conhecimento, tais como ANSYS, ADINA e ABAQUS, caracterizados pelo investimento preliminar considerável, além de treinamentos e renovações de licenças. Em contrapartida, existem também os programas particulares que são direcionados a solução de problemas específicos, apresentando menor custo inicial. Todavia, eles não possuem uma vasta biblioteca de utilidades para solução de problemas em diferentes áreas físicas, por exemplo, para análises de estruturas sob ação de incêndio cita-se o programa SAFIR (NWOSU et al., 1999), para a análise estrutural reticulada tem-se o programa educacional FTool (MARTHA; NAKAO, 2000), para análise térmica bidimensional em regime transiente de estruturas em condições de incêndio cita-se o programa ATERM (PIERIN; SILVA; ROVERE, 2015) e em relação aos problemas da dinâmica de fluidos pode-se mencionar o programa EasyCFD (LOPES, 2010).

Em ambas as escolhas existem vantagens e desvantagens, sendo necessária uma análise do usuário em relação ao problema de interesse e a ferramenta computacional a ser utilizada. Dentro do contexto mencionando, observa-se que devido à demanda de aplicações de problemas

ao nível industrial, utilizam-se, rotineiramente, programas comerciais que estão consolidados no mercado, o que garante maior confiabilidade nos resultados. Contudo, não se pode tornar uma prática comum o uso de programas comerciais sem uma base sólida de modelagem matemática e formulação numérica, a fim de satisfazer o binômio simulação-segurança (RIGOBELLO, 2011).

A implementação computacional baseada na aplicação de técnicas numéricas, como o método dos elementos finitos, baseou-se por muito tempo na programação estruturada realizada em C ou Fortran. Contudo, novos recursos computacionais estão disponíveis, como a linguagem de alto nível, presentes no Matlab, Julia e Python, que fornecem, por exemplo, rotinas internas de cálculos pré-estabelecidos no sistema e interfaces gráficas iterativas (CUNHA, 2000). Sendo assim, as pesquisas dessa natureza buscam aproximar o campo acadêmico-científico com a área industrial, ou seja, os problemas práticos de interesse são encaminhados para centros de pesquisas ou universidades que visam realizar estudos numéricos, por meio de técnicas e princípios físicos, a fim de compreender o comportamento do elemento em análise. Contudo, em muitas situações, os programas comerciais não possuem pacotes e recursos suficientes para solucionar um problema específico, recorrendo-se ao desenvolvimento de códigos computacionais. Desta maneira, a implementação computacional, além do baixo custo de investimento, possibilita o controle das rotinas numéricas internas do código, sendo que usualmente tais recursos são indisponíveis em programas comerciais e ainda, a longo prazo, é possível a construção de um código computacional eficiente que permite a concatenação de diversas análises de problemas de engenharia.

1.2 JUSTIFICATIVA DO TEMA

A análise e verificação de estruturas em situação de incêndio inclui a redução substancial da capacidade resistente e da rigidez dos materiais quando expostas a elevadas temperaturas, contribuindo diretamente para a perda da capacidade portante e o possível colapso estrutural. Para avaliação da performance de estruturas aplicam-se os métodos de cálculos avançados com base em métodos numéricos, considerando as alterações das propriedades dos materiais em função do aumento da temperatura, a distribuição não uniforme de temperatura na seção transversal do elemento, as solicitações externas e os efeitos não lineares relacionados ao comportamento estrutural.

No Brasil, segundo Caldas (2008), Rigobello (2011), Barros (2016) e Maximiano (2018), as pesquisas experimentais no âmbito da análise de estruturas em situação de incêndio são modestas, devido às complexidades de implantação, custo-benefício e materiais. Sendo assim, existe um interesse recorrente na linha de pesquisa de desenvolvimento de modelos numéricos capazes de simular o desempenho das estruturas sob ação do incêndio.

No Programa de Pós-Graduação de Engenharia Civil (PPGEC) da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), Silva (2002) foi o trabalho precursor na área de desenvolvimento

computacional, onde realizou uma análise térmica via elementos finitos de estruturas metálicas e mistas de aço-concreto sob altas temperaturas. Recentemente, Gonçalves (2017) estudou, em uma de suas aplicações com método das diferenças finitas, a distribuição de temperatura em uma viga de concreto retangular sob ação de incêndio. Sendo assim, o presente trabalho abre uma linha de pesquisa na universidade com foco na implementação computacional para análise termomecânica de estruturas em situação de incêndio.

1.3 OBJETIVOS

O objetivo geral desta pesquisa consiste em desenvolver um programa computacional capaz de realizar adequadamente uma análise avançada do comportamento de estruturas sob elevados gradientes térmicos. Em específico, para atingir tal propósito, divide-se sequencialmente o estudo teórico e numérico em quatro partes, com o propósito de investigar e adquirir sensibilidade física acerca dos efeitos não lineares e provenientes da variação de temperatura na estrutura.

Inicialmente, as implementações computacionais são codificadas em Matlab com base nos procedimentos numéricos de elementos finitos. A primeira parte do trabalho objetiva realizar uma análise numérica do modelo diferencial de condução de calor. Em seguida, a segunda parte destina-se a analisar o comportamento de estruturas planas lineares sujeitas aos efeitos da variação de temperatura, incluindo as teorias de estruturas reticuladas, de placas e da elasticidade .

As formulações não lineares geométricas para elemento de pórtico plano caracterizam a terceira parte, onde verifica-se a trajetória de equilíbrio de estruturas típicas da engenharia. Por fim, a última parte da pesquisa é direcionada para a solução termomecânica de estruturas expostas às ações térmicas características de condições de incêndio, onde se realiza o acoplamento sequencial dos códigos térmicos e estruturais.

1.4 DESCRIÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A presente dissertação é organizada em oito capítulos, sendo expostos ordenadamente os principais fundamentos conceituais e matemáticos necessários para entendimento da pesquisa. No Capítulo 1 apresenta-se uma introdução acerca do assunto de interesse, realizando uma contextualização de fatores relevantes para o tema, evidenciando também, os objetivos gerais e uma exposição sucinta das aplicações que serão desenvolvidas ao longo da pesquisa.

Posteriormente, no Capítulo 2 é realizada uma apresentação das características do sistema computacional desenvolvido na pesquisa, que visa expor as potencialidades de solução do programa em relação aos problemas de engenharia e os procedimentos numéricos gerais adotados na implementação do código.

As noções de estruturas em condições de incêndio são apresentadas no Capítulo 3, que expõe as características do comportamento do fogo, os modelos de curvas de incêndio padrão e paramétricas, bem como a influência dos efeitos de altas temperaturas no processo de degradação das propriedades físicas e mecânicas dos materiais.

O Capítulo 4 aborda os problemas de natureza térmica. Inicialmente realiza-se uma breve revisão sobre conceitos de transferência de calor, apresentando a equação diferencial governante do problema e as condições de contorno. Posteriormente, busca-se apresentar as principais sentenças matemáticas da formulação do método de elementos finitos de Galerkin aplicado ao problema de difusão de calor. Finaliza-se apresentando os fluxogramas gerais da implementação dos problemas tratados e a exposição da experimentação numérica, contemplando os problemas unidimensionais transientes lineares e bidimensionais estacionários e transientes lineares ou não lineares.

Em seguida, no Capítulo 5, é exposta uma visão geral dos modelos matemáticos, bem como a formulação numérica dos problemas associados ao comportamento estrutural linear de elementos reticulados, de placas delgadas e da elasticidade plana sob efeitos de variação de temperatura. Os casos testes analisados visam avaliar o desempenho do código implementado em problemas estruturais com e sem efeitos térmicos.

No Capítulo 6 é abordado a teoria básica da análise estrutural não linear geométrica, com base nos procedimentos de elementos finitos e na metodologia geral da solução incremental-iterativa para problemas desta natureza. A validação e avaliação de desempenho do código computacional é realizada analisando estruturas reticuladas planas, como vigas, pilares, pórticos, quadros e arcos esbeltos.

O modelo implementado na pesquisa para avaliação termoestrutural de elementos sob ação de elevados gradientes térmicos é apresentado no Capítulo 7, que expõe inicialmente um breve revisão da literatura e as principais sentenças matemáticas adotadas para construção do modelo numérico. A experimentação numérica é direcionada pela avaliação de estruturas metálicas, vigas de concreto e mistas de aço e concreto. Por fim, no Capítulo 8 são apresentadas as conclusões e os comentários finais acerca da pesquisa desenvolvida, bem como sugestões e recomendações para trabalhos futuros.

2

ASPECTOS GERAIS DO SISTEMA COMPUTACIONAL

Neste capítulo são apresentadas as principais características da ferramenta computacional desenvolvida e os detalhes dos módulos específicos elaborados na pesquisa, bem como as aplicabilidades do sistema nas áreas físicas da engenharia e os procedimentos gerais dos métodos numéricos que baseiam as análises dos problemas.

2.1 GENERALIDADES

Os códigos computacionais desenvolvidos por toda extensão da pesquisa baseia-se na estratégia geral de métodos numéricos para a solução de problemas de engenharia. Usualmente um programa computacional percorre três etapas globais de processamento, conforme ilustra-se na Figura 1. A primeira etapa, denominada como pré-processamento do programa, é destinada a entrada de dados, montagem das geometrias do problema e/ou parâmetros que o usuário deve informar ao programa. Em suma, essa etapa é onde se define as informações iniciais do problema estudado, sendo importante a sua realização cuidadosa a fim de não comprometer as fases seguintes do processamento.

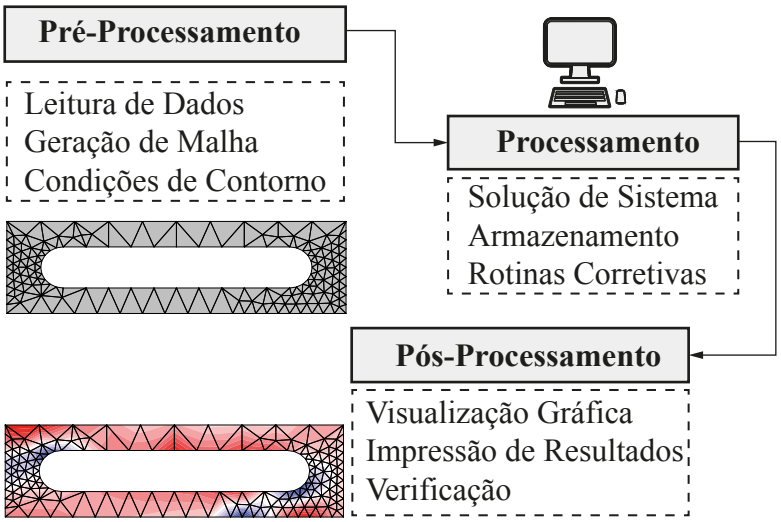

Figura 1 – Etapas de solução de problemas via métodos numéricos

Em seguida, a segunda etapa é chamada de processamento, onde se demanda maior esforço computacional associado ao processo de construção das matrizes, soluções iterativas, resolução de sistemas algébricos, entre outros processos. Por fim, chega-se à última etapa da solução do problema, conhecida como pós-processamento, onde os resultados são visualizados

graficamente e, verifica-se quando possível, a confiabilidade dos resultados por meio da comparação com dados experimentais, analíticos ou numéricos, das aplicações de métricas de erros, e dos tratamentos diversos com as amostragens de dados numéricos (MALISKA, 2017).

Sendo assim, o sistema computacional denominado NASEN (*Numerical Analysis System for Engineering*) é estruturado em módulos, capazes de realizar análises numéricas avançadas de inúmeros problemas clássicos de engenharia. Os módulos foram escritos inicialmente em Matlab por ser uma linguagem de programação de alto nível e boa produtividade, permitindo usar funções e rotinas avançadas predefinidas, como a solução de sistemas lineares, o cálculo simbólico, dentre outras funcionalidades. Convém enfatizar que tal ferramenta ainda proporciona uma facilidade na visualização dos resultados de problemas de diferentes áreas da engenharia devido aos recursos gráficos disponíveis, conforme pode ser visto em Gilat (2009) e Backes, Junior e Mesquita (2016).

2.2 MÓDULOS E APLICABILIDADE DO PROGRAMA

O sistema computacional enquadra-se na solução de problemas em áreas físicas específicas da engenharia, conforme mostra a Figura 2. Até o momento, o programa é dividido em quatro campos físicos de aplicação, sendo-os: área estrutural, térmica, termoestrutural e acústica. Além disso, a geração de malha do programa é auxiliada pelo *Gmsh* (GEUZAINE; REMACLE, 2009) e o pós-processamento é realizado com base nos recursos gráficos do Matlab. O primeiro módulo codificado do programa é destinado à parte térmica, denominado como NASEN/TA (*Thermal Analysis*), onde contempla-se análises em regime estacionário e transiente. Em particular, para análise em condições de incêndio utiliza-se o módulo NASEN/TA-FIRE (*Thermal Analysis - Fire*), que apresenta características como a variação das propriedades físicas em função da temperatura, o regime transiente e a imposição de fluxos de calor do tipo convecção e radiação para as faces expostas ao fogo.

A análise estrutural é dividida em relação ao comportamento linear e não linear, sendo ambas englobadas no módulo específico NASEN/SA (*Structural Analysis*). Em relação à análise estrutural linear, o programa possibilita a avaliação mecânica de estruturas planas com base na teoria reticular de barras, de placa e da elasticidade. A não linearidade adotada no modelo é do tipo geométrico, aplicado somente em modelos reticulados estruturais.

Na seara de problemas termoestruturais, tem-se novamente uma subdivisão em duas vertentes de aplicação. Primeiramente, em relação à característica linear, o módulo computacional responsável é chamado NASEN/TSA (*Thermal-Structural Analysis*), onde pode-se solucionar os mesmos problemas estruturais comentado anteriormente, entretanto, com a adição dos efeitos de variação de temperatura. No contexto de incêndio, é utilizado o programa NASEN/TSA-FIRE (*Thermal-Structural Analysis Fire*), onde considera-se a combinação dos processos numéricos associado à análise térmica e estrutural.

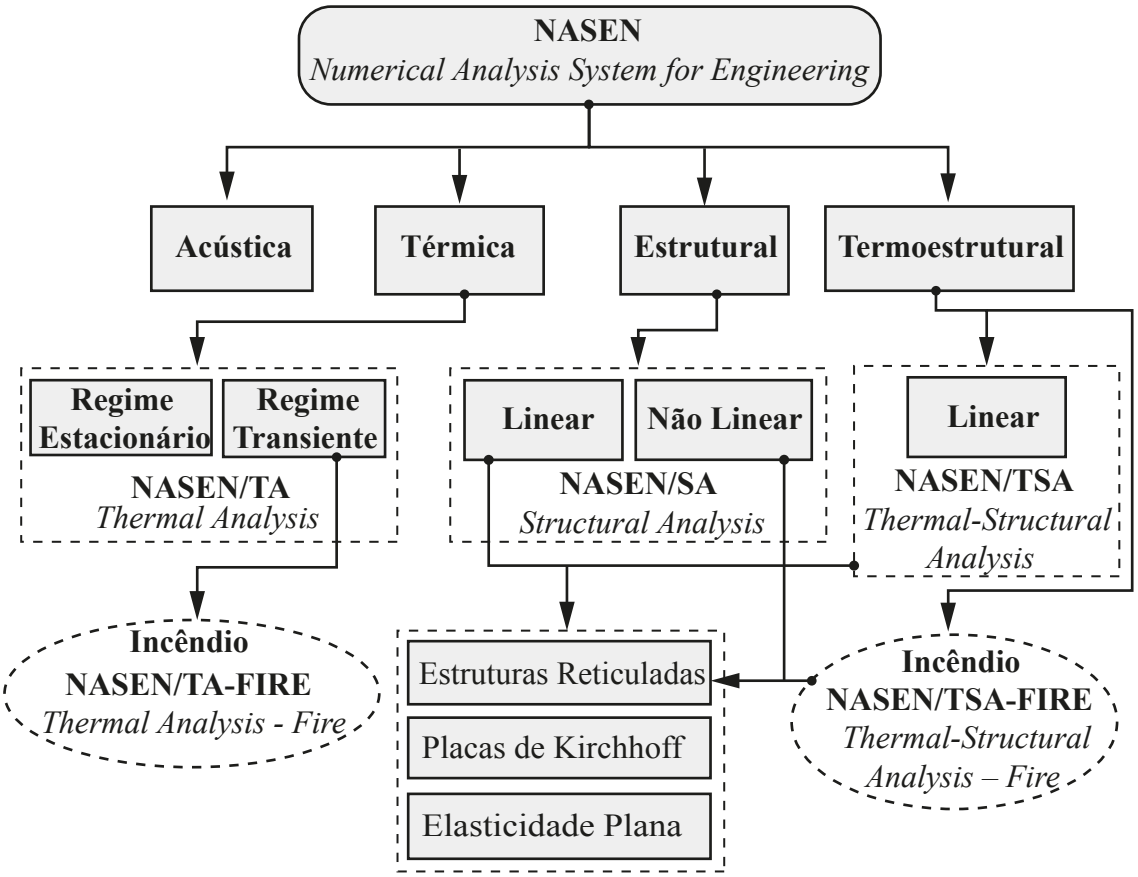

Figura 2 – Áreas físicas e características das análises realizadas pelo programa computacional

Em um segundo momento, cabe destacar algumas aplicações introdutórias acerca da área acústica. Este módulo foi desenvolvido devido ao processo de unificação da matemática, ou seja, um mesmo modelo matemático permite descrever sistemas físicos completamente diferentes. Essa ideia possibilita desenvolver códigos numéricos gerais, pois as matrizes podem ser reutilizadas naturalmente em outros fenômenos físicos. Sendo assim, neste módulo é possível solucionar problemas elementares bidimensionais governados pela equação da onda, onde implementa-se uma rotina temporal baseado no método de Newmark e a equação de Helmholtz. Em adicional, é realizado também a solução de problemas de autovalores.

2.3 PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS GERAIS

Os fenômenos físicos relacionados aos problemas de engenharia usualmente são governados por equações diferenciais, condições de contorno e iniciais. Porém, em uma visão geral, somente para casos simples é possível conhecer as soluções exatas, demandando o uso de métodos aproximados. Sendo assim, o programa computacional NASEN fundamenta os procedimentos de solução dos problemas, a priori, pelos métodos de diferenças finitas e elementos finitos. As ideias e os conceitos básicos de tais métodos são apresentados a seguir.

2.3.1 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

A ideia básica da técnica de diferenças finitas é aproximar as derivadas contidas nas equações diferenciais que regem os problemas físicos por expressões algébricas definidas em pontos discretos no domínio (ÖZIŞIK et al., 2017). As formas usuais para obter as aproximações de diferenças finitas são baseadas na interpolação polinomial ou, simplesmente, pela expansão em série de Taylor, conforme posto na Equação (2.1).

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{(h)}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_i + \frac{(h)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_i + \frac{(h)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\bigg|_i + \frac{(h)^4}{4!}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\bigg|_i + \cdots \tag{2.1}$$

Onde a expressão $h = x_{i+1} - x_i$ é o espaçamento entre os pontos, que frequentemente é considerado constante em toda a malha. Sendo assim, após algumas manipulações na fórmula de diferenças finitas progressiva de primeira ordem, chega-se a Equação (2.2).

$$\frac{df}{dx}\bigg|_{x_i} \approx \frac{1}{h}\left[f\left(x_{i+1}\right) - f\left(x_i\right)\right] \tag{2.2}$$

Por causa da utilização de um número finito de termos na série de Taylor, defini-se o erro de truncamento local (ETL), caracterizado pelo conjunto de termos de ordens elevadas, obtidos quando comparado a Equação (2.1) e a Equação (2.2). É possível demostrar facilmente que o ETL decai linearmente com a redução do espaçamento da malha h, ou seja, sinteticamente é escrito $O(h)$ (FORTUNA, 2000). Adicionalmente, ressalta-se que a aproximação apresentada na Equação (2.2) é usualmente aplicada na discretização temporal para problemas parabólicos.

De forma análoga ao procedimento anterior, pode-se encontrar as demais expressões para as aproximações de diferenças finitas considerando esquemas progressivos, centrais e regressivos. Nas Equações (2.3) e (2.4) têm-se, respectivamente, as aproximações de segunda e quarta ordem centrais.

$$\frac{d^2 f}{dx^2}\bigg|_{x_i} \approx \frac{1}{h^2}\left[f\left(x_{i+1}\right) - 2f\left(x_i\right) + f\left(x_{i-1}\right)\right] \tag{2.3}$$

$$\frac{d^4 f}{dx^4}\bigg|_{x_i} \approx \frac{1}{h^4}\left[f\left(x_{i-2}\right) - 4f\left(x_{i-1}\right) + 6f\left(x_i\right) - 4f\left(x_{i+1}\right) + 2f\left(x_{i+2}\right)\right] \tag{2.4}$$

Tais expressões estabelecem um erro em torno da ordem de $O(h^2)$, onde as mesmas podem ser usadas no processo de discretização de problemas de difusão de calor e na deflexão de vigas. Por fim, destaca-se que as fórmulas de diferenças finitas utilizadas na aproximação das derivadas das funções de uma variável podem ser expandidas para o cálculo das aproximações das derivadas parciais (ANDERSON; TANNEHILL; PLETCHER, 2016).

2.3.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

As técnicas de discretização de equações diferenciais de natureza diferencial tem como objetivo realizar aproximações localizadas da solução desejada. Contudo, em muitos problemas de engenharia é interessante dar enfoque global no esquema de solução, sendo assim, o uso do método de elementos finitos torna-se adequado. Esse método é uma extensão natural da técnica de resíduos ponderados, que busca encontrar uma solução aproximada direcionada pela minimização de um resíduo proveniente da equação diferencial (REDDY; GARTLING, 2010). A sentença básica do método é posta na Equação (2.5).

$$\int_{\Omega} W_i \Re_{\Omega} d\Omega = 0 \qquad i = 1, ..., n \tag{2.5}$$

Onde, W_i é denominado de função auxiliar (também chamada de função peso ou função teste) e o resíduo é dado por $\Re_{\Omega} = \wp(\hat{u})$, em que $\wp$ é um operador diferencial e $\hat{u}$ é a aproximação da função desconhecida do problema físico $\wp(u) = 0$.

$$u \cong \hat{u} = \sum_{j=1}^{n} N_j a_j = \mathbf{Na} \tag{2.6}$$

Em que a_j são os coeficientes a serem calculados e N_j são as funções de forma ou de interpolação. Para realizar o processo de minimização do resíduo, recorre-se a diferentes técnicas de ponderação. No contexto de elementos finitos, destaca-se o método de Galerkin, onde as funções auxiliares são iguais as funções de forma utilizadas na aproximação de u, dada pela Equação (2.6) (HUGHES, 2012). Desta forma, é possível reescrever a Equação (2.5), resultando na sentença matemática expressa pela Equação (2.7).

$$\int_{\Omega} N_i \Re_{\Omega} d\Omega = 0 \qquad i = 1, ..., n \tag{2.7}$$

A partir da Equação (2.7) realiza-se a redução da ordem das derivadas contidas no operador diferencial $\wp$, por meio da integração por partes. Tais procedimentos garantem menos restrições nas escolhas das funções aproximadas. Ao fim, denomina-se a sentença integral obtida como formulação fraca. Sendo assim, as premissas do método dos elementos finitos são aplicadas nesse nível do desenvolvimento matemático, considerando o domínio Ω dividido em subdomínios denominados por elementos Ω^e.

$$u \cong \hat{u}^e = \sum_{j=1}^{n} N_j u_j^e = \mathbf{Nu} \tag{2.8}$$

Neste contexto, a aproximação da função desconhecida é escrita de modo que a função de forma N_j seja unitária no nó j e zero nos demais. A escolha das funções de forma restringe-se de acordo com a natureza, a característica e a complexidade do problema estudado. As

funções de forma clássicas são estabelecidas na literatura básica, conforme pode ser consultado detalhadamente em Oden e Kross (1968) e Reddy e Gartling (2010).

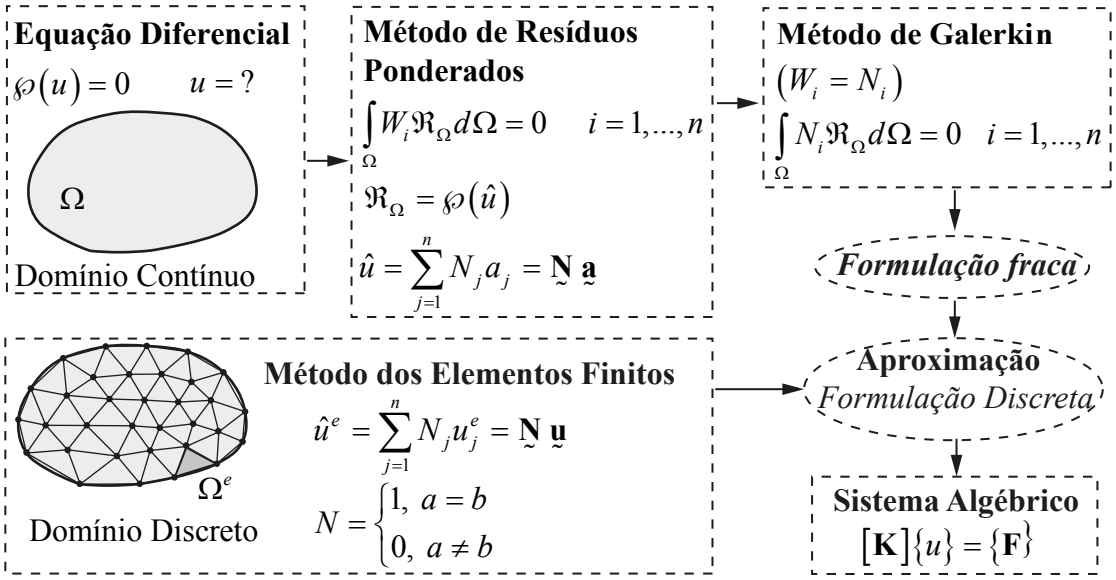

Figura 3 – Estrutura geral dos procedimentos de elementos finitos

Desta forma, respeitando as particularidades das funções de forma estabelecidas acima, garante-se que o coeficiente u_j^e corresponda ao valor da função u no nó j, ou seja, os coeficientes abstratos a_j assumem significado físico, como deslocamento ou temperatura. Ao fim, chega-se em um sistema algébrico, conforme a Equação (2.9).

$$[\mathbf{K}]\{u\} = \{\mathbf{F}\} \tag{2.9}$$

A matriz global de coeficientes **K** e o vetor de termos independentes **F** são definidos pelas contribuições de cada elemento local, conforme expresso na Equação (2.10). Devido as aplicações pioneiras do método de elementos finitos serem direcionadas para a área estrutural, frequentemente a matriz de coeficientes **K** é denominada como matriz de rigidez (ARGYRIS; KELSEY, 1960; TURNER, 1956).

$$[\mathbf{K}] = \sum_{e=1}^{N} k^e \qquad \{\mathbf{F}\} = \sum_{e=1}^{N} f^e \tag{2.10}$$

Convém frisar que devido as particularidades impostas pelo método dos elementos finitos, associada as definições das funções de forma, a matriz global de rigidez **K** é dita esparsa, ou seja, apresenta grande quantidade de termos nulos, proporcionando vantagens no armazenamento computacional (REDDY; GARTLING, 2010). Em síntese, a Figura 3 ilustra um fluxograma geral de aplicação do método de elementos finitos para solução de equações diferenciais.

3

FUNDAMENTOS DE ESTRUTURAS SOB AÇÃO DE INCÊNDIO

Neste capítulo são apresentados os conceitos teóricos gerais das estruturas em condições de incêndio, destacando as características dos incêndios, as curvas nominais e paramétricas para modelagem da temperatura dos gases quentes do ambiente e o comportamento das propriedades térmicas e mecânicas dos materiais usuais da engenharia sob elevadas temperaturas.

3.1 CARACTERÍSTICAS DOS INCÊNDIOS

Devido as diversas ocorrências de incêndio ao longo da história, associada ao avanço tecnológico, houve uma crescente demanda nas pesquisas científicas acerca da análise do comportamento de estruturas em situação de incêndio. Neste contexto, regulamentações, instruções técnicas (IT) e normas técnicas forma desenvolvidas. Dentre elas, destacam-se as normas brasileiras: ABNT NBR 14323:2013, ABNT NBR 14432:2001, ABNT NBR 15200:2012. Além disso, vale mencionar os códigos internacionais, dentre elas as inúmeras documentações disponíveis, como as normas europeias: EN 1992-1-2:2004, EN 1993-1-2:2005 e EN 1991-1-2:2002.

Em relação aos principais aspectos do comportamento de um incêndio, inicia-se pelos três elementos responsáveis pela sua existência, onde somente haverá fogo se existir simultaneamente material combustível, oxigênio (comburente) e calor. Destaca-se também que a ausência de algum dos três elementos acarreta na extinção do incêndio. Comumente na engenharia de segurança contra incêndio, descreve-se o comportamento do incêndio com modelos que interligam o aumento da temperatura dos gases quentes relacionado ao ambiente em chamas e o tempo de exposição ao fogo (BUCHANAN; ABU, 2017). Desta forma, a Figura 4 representa um exemplo típico de uma curva temperatura-tempo para um incêndio compartimentado.

Na curva de evolução do incêndio observa-se a fase inicial associada à ignição, onde se tem um volume de chamas pequenas e localizadas, podendo ter uma produção intensa de fumaça dependendo do material presente no compartimento, nos níveis de oxigênio e ventilação. Nesta fase, se o incêndio for identificado imediatamente e forem tomadas as medidas de prevenções de segurança, o incêndio pode ser controlado, produzindo riscos e prejuízos mínimos.

Sequencialmente, a fase de desenvolvimento é definida pelo decaimento da quantidade de oxigênio, rápida propagação de fumaça e combustão dos demais materiais, provocando um aumento substancial da temperatura no compartimento. Em certo momento, o incêndio atinge o ponto de inflamação generalizada, ou usualmente conhecido como *flashover* (GOUVÊIA, 2006).

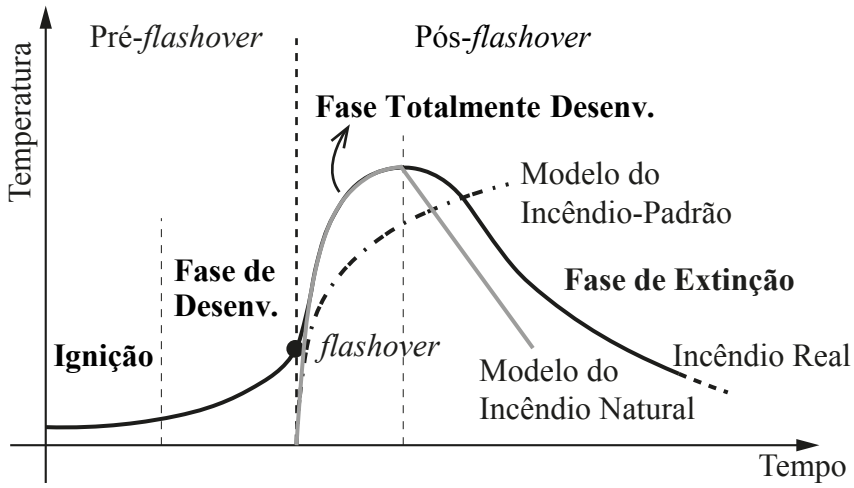

Figura 4 – Curva de desenvolvimento de incêndio em compartimento

A terceira fase está associada com o incêndio totalmente desenvolvido ou definida como pós-*flashover*. Essa fase é caracterizada pelo decréscimo dos níveis de oxigênio e um rápido crescimento das temperaturas até todo material combustível contido no compartimento cessar. Além disso, essa é a fase mais importante para a engenharia estrutural, devido a ocorrência dos maiores danos nos elementos estruturais. Por fim, a fase da extinção ou a fase de resfriamento é caracterizada pelo decaimento gradativo da temperatura dos gases no ambiente incendiado, devida a ausência de oxigênio ou material combustível.

3.2 MODELOS NORMATIVOS DE INCÊNDIO

A descrição do desenvolvimento de incêndios reais é um processo complexo que relaciona inúmeros parâmetros, como as propriedades físicas dos materiais de vedação do ambiente, características e quantidade dos materiais combustíveis, fator de ventilação e dimensão do compartimento em situação de incêndio. Sendo assim, busca-se definir modelos matemáticos capazes de simular adequadamente a temperatura dos gases quentes em um compartimento incendiado, originando as curvas de incêndio nominais e paramétricas. Tais curvas desprezam a fase de ignição e desenvolvimento do incêndio, levando em consideração somente a fase de pós-*flashover*, conforme esquematizado na Figura 4.

3.2.1 CURVAS PADRONIZADAS DE INCÊNDIO

A *International Organization for Standardization*, com base na norma ISO 834:1999 - *Fire resistance tests-elements of building construction*, prescreve em seu texto uma curva simplificada de incêndio-padrão para modelar a temperatura dos gases quentes do ambiente

incendiado, conforme expresso na Equação (3.1).

$$T_g = T_{amb} + 345\log(8t+1) \tag{3.1}$$

Onde, t é o tempo de exposição ao incêndio, em minutos, T_{amb} é a temperatura ambiente, em graus Célsius, que usualmente é adotada 20°C, e T_g é a temperatura do ambiente aquecido, em graus Célsius. Além disso, a *American Society Testing and Materials*, por meio da norma ASTM E119:2000 - *Standard test methods for fire tests of building construction and materials*, estabelece valores de temperatura-tempo em forma tabular, onde os quais possibilitam a construção da Equação (3.2).

$$T_g = T_{amb} + 750\left(1 - e^{-3.79533\sqrt{t_h}}\right) + 170.41\sqrt{t_h} \tag{3.2}$$

O termo t_h é o tempo de exposição, medido em horas. Existem outras curvas que buscam representar o comportamento do incêndio, considerando outros parâmetros, como pode ser visto detalhadamente em Kodur e Fike (2009) e Harmathy (1993). Em adicional, além da curva de incêndio-padrão ISO 834:1999, EN 1991-1-2:2002 estabelece outras curvas de incêndio padronizadas. Sendo assim, a curva representativa de um incêndio à base de materiais hidrocarbonetos é dada na Equação (3.3).

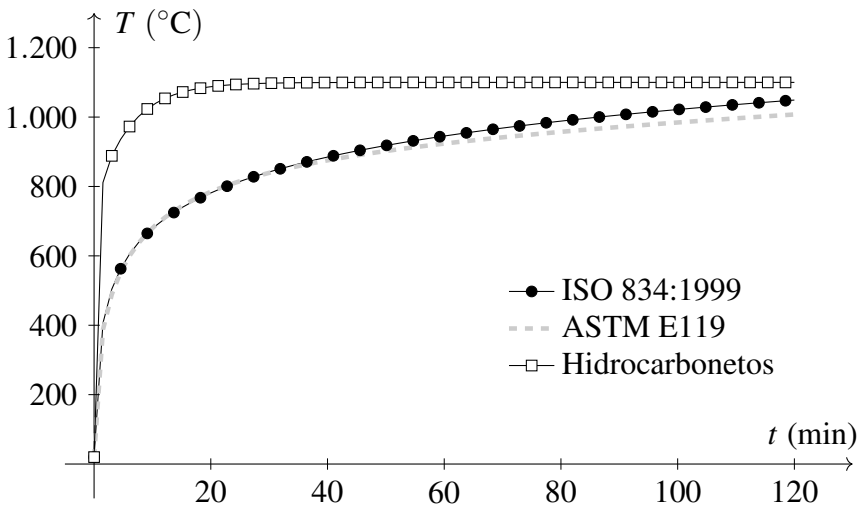

Figura 5 – Curvas temperatura-tempo de incêndio-padrão

A Equação (3.3) é ilustrada graficamente na Figura 5, onde nota-se que a curva após alguns minutos de aquecimento mantém-se com temperatura constante em torno de 1100 °C. Além disso, conforme as prescrições do EN 1991-1-2:2002, recomenda-se para essa curva um coeficiente de transferência de calor por convecção de 50 W/m^{2}K .

$$T_g = T_{amb} + 1080\left(1 - 0,325e^{-0,167t} - 0,675e^{-2,5t}\right) \tag{3.3}$$

É usual que códigos e normas permitam o emprego das curvas de incêndio-padrão. Essas curvas temperatura-tempo são simplificações de engenharia e não caracterizam uma curva de incêndio real. Conforme mostra a Figura 5, essas curvas matemáticas são crescentes e não interceptam um valor máximo, sendo assim é necessário preestabelecer um valor de tempo em que a curva de aquecimento dos gases pode ser interrompida. Esse tempo é denominado Tempo Requerido de Resistência ao Fogo (TRRF). De acordo com a ABNT NBR 14432:2001, o TRRF é defino como sendo: tempo mínimo de resistência ao fogo de um elemento construtivo quando sujeito ao incêndio-padrão. O TRRF não significa o tempo de desocupação da edificação, ou o tempo de duração do incêndio ou o tempo de ações do corpo de bombeiros.

3.2.2 CURVAS PARAMÉTRICAS

Devido ao comportamento caótico e complexo dos incêndios reais, busca-se por meio de resultados obtidos com base em ensaios de compartimentos em situação de incêndio, definir as curvas paramétricas em função de parâmetros como o fator de ventilação, carga de incêndio e as propriedades dos materiais de vedação.

Em linhas gerais, a principal diferença das curvas paramétricas e os modelos de incêndio estabelecidos pelas curvas de incêndio-padrão, é que após o trecho da curva de aquecimento, tem-se o resfriamento. Os modelos matemáticos e premissas adotadas são baseadas no texto do EN 1991-1-2:2002, ou também podem ser consultados em Vila Real (2003), Purkiss e Li (2013) e Franssen, Kodur e Zaharia (2009). Desta maneira, o ramo ascendente do incêndio da curva paramétrica é descrito pela Equação (3.4).

$$T_g = 20 + 1325\left(1 - 0,324e^{-0,2t^*} - 0,204e^{-1,7t^*} - 0,472e^{-19t^*}\right) \tag{3.4}$$

A Equação (3.4) é válida para compartimentos incendiados com área máxima de 500 m^2, pé-direito máximo de 4 m e sem aberturas no teto. Além disso, o tempo fictício (em horas) é dado por $t^* = t\Gamma$, onde t é o tempo real e Γ dependente do grau de ventilação ou fator de abertura O, e a inércia térmica $b = \sqrt{\rho ck}$, que relaciona as propriedades termofísicas dos materiais que constituem o contorno do compartimento, limitado no intervalo entre 100 e 2200 J/m^{2}s$^{1/2}$K, conforme posto na Equação (3.5).

$$\Gamma = \left(\frac{\mathrm{O}}{b}\right)^2 \left(\frac{1160}{0,04}\right)^2 \tag{3.5}$$

$$\mathrm{O} = A_v \frac{\sqrt{h_{eq}}}{A_t} \tag{3.6}$$

A Equação (3.6) é válida no intervalo de valores contido entre 0,02 e 0,2 m$^{1/2}$. Onde A_v é a área total das aberturas verticais em todas as paredes do compartimento (em m^2), h_{eq} é a

altura média das aberturas verticais em todas as paredes (em m) e A_t é a área total da superfície envolvente contabilizando paredes, teto e pavimento, incluindo aberturas.

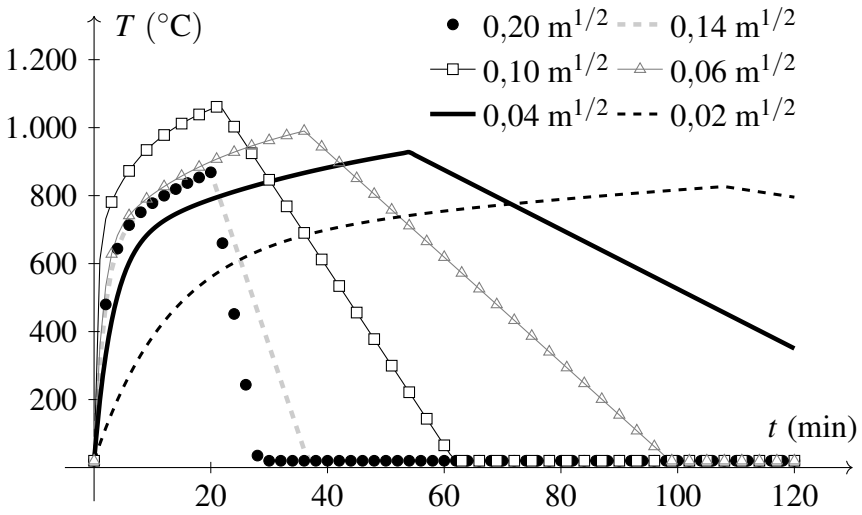

Figura 6 – Curvas paramétricas de incêndio em função do grau de ventilação

A fase de aquecimento dos gases quentes, dado pela Equação (3.4), é cessada quando é atingida a temperatura máxima $T_{g,max}$, associado ao tempo t_{max}, onde esse é determinado pela relação matemática exposta na Equação (3.7).

$$t_{\max} = \max\left[\left(0,2\cdot 10^{-3}\left[\frac{q_{t,d}}{\mathrm{O}}\right]\right);t_{\lim}\right] \tag{3.7}$$

Na Equação (3.7), $q_{t,d}$ representa o valor de cálculo da carga de incêndio específica relacionado à área total e $t_{\lim}$ é o tempo limite para a fase de aquecimento dos gases. Após o limite de aquecimento, inicia-se a fase de resfriamento do incêndio. Para tanto, a taxa de resfriamento é obtida conforme a seguir na Equação (3.8).

$$\frac{dT_g}{dt^*} = \begin{cases} -650 & \text{se } t^*_{\max} \leq 0,5 \\ -250\,(3 - t^*_{\max}) & \text{se } 0,5 < t^*_{\max} < 2 \\ -250 & \text{se } t^*_{\max} \geq 2 \end{cases} \tag{3.8}$$

Na região de resfriamento, nota-se na Equação (3.8), que a inclinação da curva é constante, indicando que o ramo descendente é modelado simplificadamente por uma variação linear, ou seja, por uma linha reta. O tempo fictício máximo utilizado na fase de resfriamento é igual a $t^*_{\max} = t_{\max}\cdot\Gamma$.

Na Figura 6, apresenta-se curvas paramétricas para diferentes valores de grau de abertura, empregando $q_{t,d} = 180$ MJ/m^2, $b = 1160$ J/m^{2}s$^{1/2}$K e o tempo limite é igual a 20 min. Observa-se que o aumento do grau de ventilação acarreta em incêndios com menor tempo de duração e a máxima temperatura dos gases quentes ocorrendo em torno do tempo limite.

3.3 PROPRIEDADES TERMOMECÂNICAS DOS MATERIAIS

A exposição dos elementos estruturais a elevadas variações de temperatura acarreta em alterações nas propriedades térmicas e mecânicas do material, gerando tensões, expansões e/ou deslocamentos térmicos. Desta forma, o correto conhecimento desses fatores pode garantir a segurança da estrutura em condição de incêndio. Em modo geral, as principais propriedades do material, que são influenciadas pela variação de temperatura, são o calor específico c, a condutividade térmica k, a massa específica ρ, o alongamento térmico ε_{th}, a rigidez e a capacidade resistente..

3.3.1 CONCRETO SOB ALTAS TEMPERATURAS

Inicialmente, as propriedades físico-térmicas do concreto tiveram como base o EN 1992-1-2:2004. Primeiro considera-se a massa específica do concreto, conforme o conjunto de expressões dada pela Equação (3.9). Observa-se que em cada intervalo a função é modelada por segmentos de retas e a massa específica em temperatura ambiente é considerada igual a 2400 kg/m^3.

$$\begin{aligned}
&\rho_c(T) = \rho_c(20^{\circ}\mathrm{C}) && \text{para } 20^{\circ}\mathrm{C} \leqslant T \leqslant 115^{\circ}\mathrm{C} \\
&\rho_c(T) = \rho_c(20^{\circ}\mathrm{C})(1 - 0,02(T - 115)/85) && \text{para } 115^{\circ}\mathrm{C} < T \leqslant 200^{\circ}\mathrm{C} \\
&\rho_c(T) = \rho_c(20^{\circ}\mathrm{C})(0,98 - 0,03(T - 200)/200) && \text{para } 200^{\circ}\mathrm{C} < T \leqslant 400^{\circ}\mathrm{C} \\
&\rho_c(T) = \rho_c(20^{\circ}\mathrm{C})(0,95 - 0,07(T - 400)/800) && \text{para } 400^{\circ}\mathrm{C} < T \leqslant 1200^{\circ}\mathrm{C}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

A Figura 7 representa graficamente a função exposta na Equação (3.9). É possível adotar um modelo simplificado, considerando tal propriedade como sendo constante. Entretanto, ressalva-se que essa simplificação para análise térmica de estruturas em condição de incêndio pode conduzir a resultados incoerentes fisicamente.

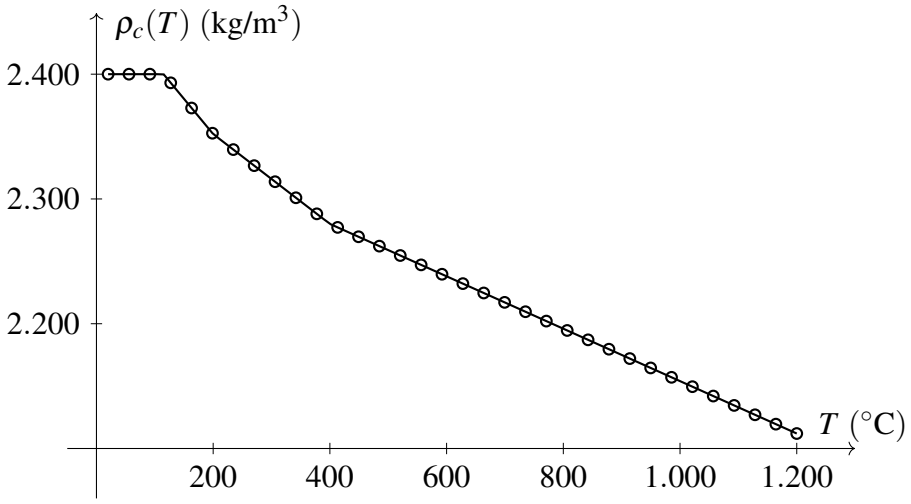

Figura 7 – Massa específica do concreto em função da temperatura

Em seguida, na Equação (3.10) é representado um conjunto de expressões para calor específico do concreto seco. O calor específico na temperatura ambiente de 20°C é igual a 900 J/kg°C e o valor constante simplificado que a norma possibilita é igual 1000 J/kg°C.

$$\begin{aligned}
c_c(T) &= 900 && \text{para } 20^{o}\text{C} \leqslant T \leqslant 100^{o}\text{C} \\
c_c(T) &= 900 + (T - 100) && \text{para } 100^{o}\text{C} < T \leqslant 200^{o}\text{C} \\
c_c(T) &= 1000 + (T - 200)/2 && \text{para } 200^{o}\text{C} < T \leqslant 400^{o}\text{C} \\
c_c(T) &= 1100 && \text{para } 400^{o}\text{C} < T \leqslant 1200^{o}\text{C}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Um fator importante na análise térmica de estruturas de concreto é o teor de umidade. A Figura 8 ilustra o comportamento do calor específico para teores de umidade de 0%, 1,5% e 3%, sendo associado, respectivamente aos valores de pico de 900, 1470 e 2020 J/kg°C. Vale destacar, que o valor de pico é contabilizado somente no intervalo de 100°C até 115°C, sendo que depois existe um decaimento linear entre 115°C até 200°C.

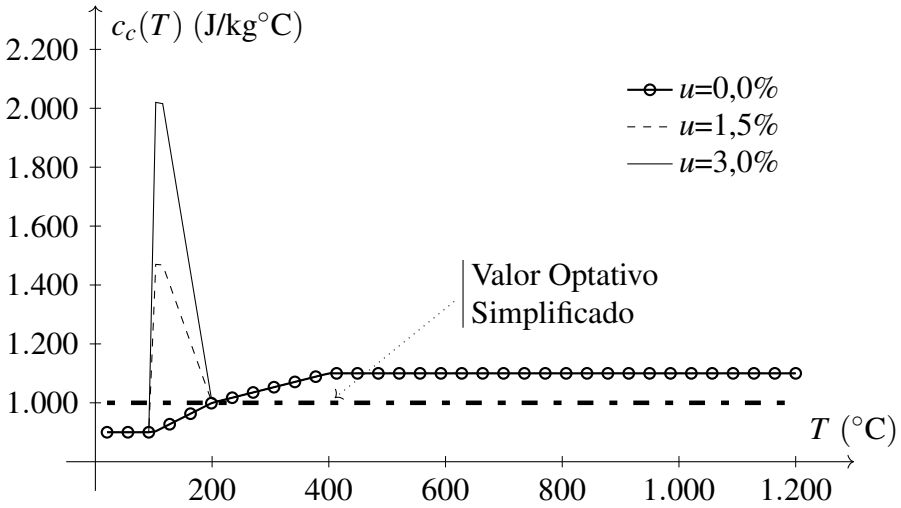

Figura 8 – Calor específico do concreto em função da temperatura

Por fim, a condutividade térmica do concreto pode ser considerada como um valor simplificado igual a 1,6 W/m°C. Além disso, existem duas possibilidades para descrever a função de condutividade térmica, respeitando o limite superior e inferior, conforme posto na Equação (3.12) e Equação (3.11), respectivamente.

$$k_c(T) = 2 - 0,2451(T/100) + 0,0107(T/100)^2 \text{ para } 20^{o}\text{C} \leq T \leq 1200^{o}\text{C} \tag{3.11}$$

$$k_c(T) = 1,36 - 0,136(T/100) + 0,0057(T/100)^2 \text{ para } 20^{o}\text{C} \leq T \leq 1200^{o}\text{C} \tag{3.12}$$

Na Figura 9 é ilustrada a variação da condutividade térmica com a temperatura, de 20°C até 1200°C. Observa-se que as curvas de condutividade variam parabolicamente.

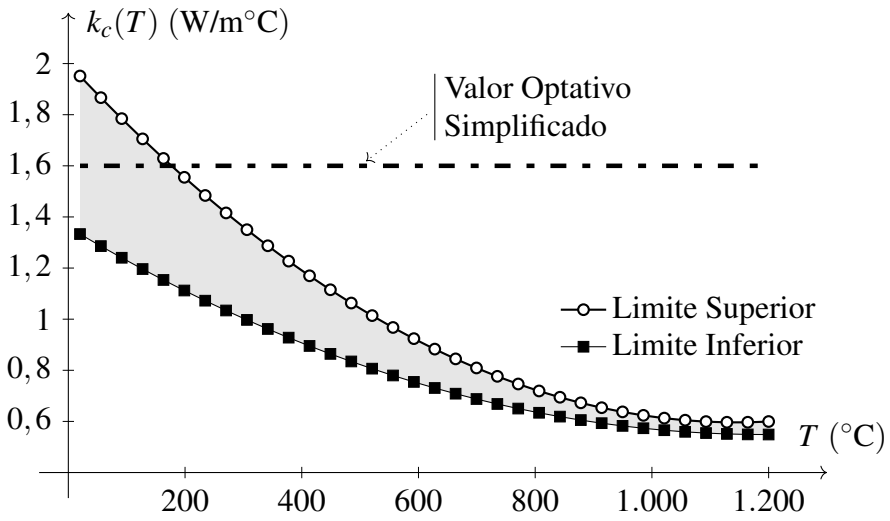

Figura 9 – Condutividade do concreto em função da temperatura

O alongamento do concreto é definido pela razão entre a expansão térmica da peça de concreto, provocada pela temperatura, e o comprimento da peça de concreto de densidade normal a 20°C. Sendo assim, para o concreto de densidade normal com agregado silicoso, o alongamento é definido conforme a Equação (3.13).

$$\begin{aligned} \varepsilon_{c,th} &= -1,8 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-6} T + 2,3 \cdot 10^{-11} T^3 && \text{para } 20\ ^{o}\text{C} \leq T \leq 700\ ^{o}\text{C} \\ \varepsilon_{c,th} &= 14 \cdot 10^{-4} && \text{para } 700\ ^{o}\text{C} < T \leq 1200\ ^{o}\text{C} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Considerando um concreto de densidade normal e agregado calcário, o modelo matemático apresenta um comportamento semelhante com valores ligeiramente menores, conforme posto na Equação (3.14).

$$\begin{aligned} \varepsilon_{c,th} &= -1,2 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-6} T + 1,4 \cdot 10^{-11} T^3 && \text{para } 20\ ^{o}\text{C} \leq T \leq 805\ ^{o}\text{C} \\ \varepsilon_{c,th} &= 12 \cdot 10^{-4} && \text{para } 805\ ^{o}\text{C} < T \leq 1200\ ^{o}\text{C} \end{aligned} \tag{3.14}$$

A Equação (3.15) apresenta a relação para concreto de baixa densidade, onde nota-se que a curva é aproximada por uma função linear ao longo da temperatura.

$$\varepsilon_{c,th} = 8 \cdot 10^{-6} (T - 20) \quad \text{para } 20\ ^{o}\text{C} \leq T \leq 1200\ ^{o}\text{C} \tag{3.15}$$

Conforme apresentado anteriormente nas sentenças matemáticas, o alongamento térmico do concreto depende de alguns parâmetros, como o tipo de agregado, a densidade e a temperatura.

$$\varepsilon_{c,th} = 18 \cdot 10^{-6} (T - 20) \quad \text{para } 20\ ^{o}\text{C} \leq T \leq 1200\ ^{o}\text{C} \tag{3.16}$$

Com base no texto do EN 1994-1-2:2005 ou ABNT NBR 15200:2012 pode-se considerar um modelo de cálculo simplificado, adotando uma única curva com inclinação constante, ou seja, uma função linear ao longo do aumento da temperatura no concreto, conforme posto na Equação (3.16). A Figura 10 mostra o comportamento do alongamento do concreto em função da temperatura para diferentes configurações.

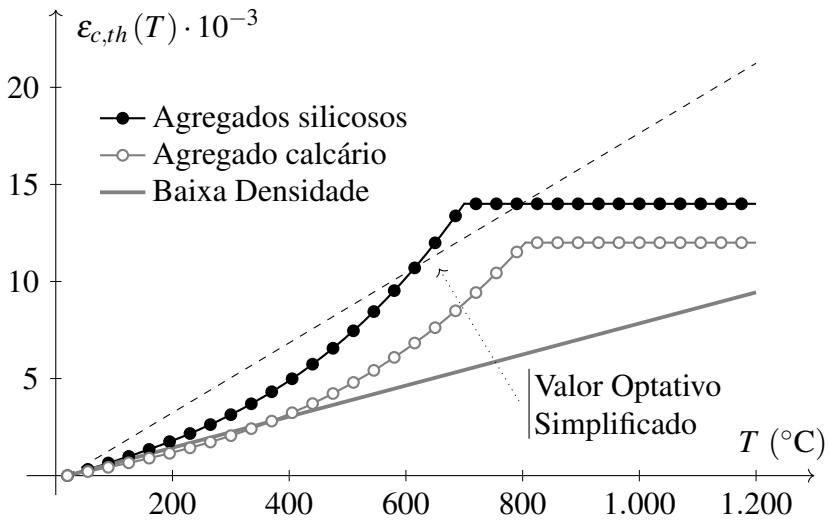

Figura 10 – Alongamento térmico do concreto em função da temperatura

Em relação às propriedades mecânicas do concreto devido as altas temperaturas, destacam-se, para análise estrutural, os parâmetros associados à resistência e à rigidez. De forma específica, a resistência está interligada com a resistência característica do concreto, e a rigidez relacionada com o módulo de elasticidade do concreto, conforme mostra a Equação (3.17).

$$k_{c,\theta} = \frac{f_{c,\theta}}{f_{c,20}} \qquad k^{c}_{E,\theta} = \frac{E_{c,\theta}}{E_{c,20}} \tag{3.17}$$

Em que $k_{c,\theta}$ é o fator de redução, relativo a 20°C, da resistência característica do concreto, $k^{c}_{E,\theta}$ é definido como sendo o fator de redução, relativo a 20°C, do módulo de elasticidade do concreto. Além disso, $f_{c,\theta}$ e $E_{c,\theta}$ são, respectivamente, a resistência característica e o módulo de elasticidade do concreto medido a uma determinada temperatura, $f_{c,20}$ e $E_{c,20}$ são, respectivamente, a resistência característica do concreto e o módulo de elasticidade a 20°C.

Os valores dos fatores de redução do concreto com agregados silicosos e calcários são postos na Tabela 1, conforme as recomendações do EN 1992-1-2:2004. Além disso, com base na ABNT NBR 15200:2012, permite-se estimar a capacidade resistente dos elementos estruturais de concreto em condição de incêndio, a partir da resistência característica de compressão do concreto. Adicionalmente, destaca-se alguns trabalhos de investigação das propriedades do concreto submetido a elevadas temperaturas, vide em Phan (1996), Kodur (2014) , Phan e Carino (2000), Tómasson (1998), Ma et al. (2015).

Tabela 1 – Fatores de redução da resistência do concreto, segundo EN 1992-1-2:2004

T (°C)	Agregado Silicoso $k_{c,\theta}$	Agregado Calcário $k_{c,\theta}$
20	1,000	1,000
100	1,000	1,000
200	0,950	0,970
300	0,850	0,910
400	0,750	0,850
500	0,600	0,740
600	0,450	0,600
700	0,300	0,430
800	0,150	0,270
900	0,080	0,150
1000	0,040	0,060
1100	0,010	0,020
1200	0,000	0,000

Na Figura 11 realiza-se uma comparação qualitativa entre alguns modelos obtidos na literatura acerca do comportamento do concreto sob elevadas temperaturas. As curvas da literatura são baseadas em DTU (1974, apud Costa, 2008), NZS3101.1:1995, Boutin (1983) e Diederichs, Jumppanen e Penttala (1989).

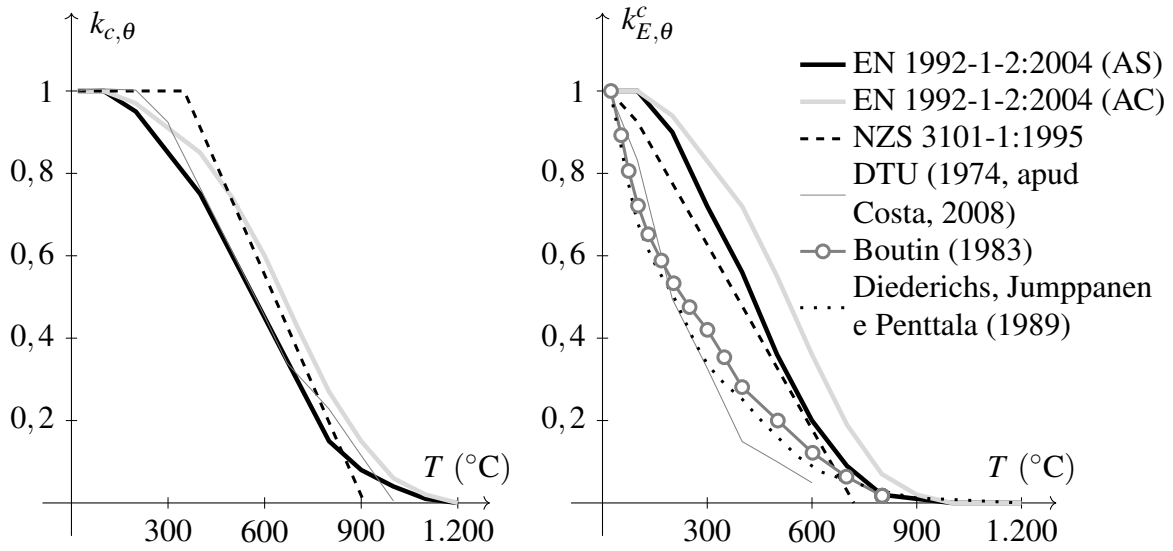

Figura 11 – Comparação entre as curvas de redução para resistência do concreto (esquerda) e o módulo de elasticidade (direita) em função da temperatura

O fator de redução do módulo de elasticidade do concreto em função da temperatura, baseado nos resultados experimentais obtidos por Hertz (1980) na Universidade Técnica da Dinamarca, é aproximadamente igual ao quadrado do fator de redução da resistência à compressão do concreto. Essa simplificação é uma característica particular de um procedimento de cálculo, descrito no EN 1992-1-2:2004, para estimar a capacidade resistente dos elementos estruturais em condição de incêndio, denominado de método das faixas (em inglês *zone method*).

3.3.2 AÇO SOB ALTAS TEMPERATURAS

As propriedades térmicas dos elementos de aço seguem as relações matemáticas fornecidas pelo EN 1993-1-2:2005. A primeira consideração que é bem aceita e não demostra influência nos resultados é considerar a massa específica do aço como sendo constante e igual a 7850 kg/m^3.

$$\begin{aligned}
c_s(T) &= 425 + \left(\frac{7,73}{10^1}\right)T - \left(\frac{1,69}{10^3}\right)T^2 + \left(\frac{2,22}{10^6}\right)T^3 && \text{para } 20^{\text{o}}\text{C} \leqslant T < 600^{\text{o}}\text{C} \\
c_s(T) &= 666 - \left(\frac{13002}{T-738}\right) && \text{para } 600^{\text{o}}\text{C} \leqslant T \leqslant 735^{\text{o}}\text{C} \\
c_s(T) &= 545 + \left(\frac{17820}{T-731}\right) && \text{para } 735^{\text{o}}\text{C} \leqslant T \leqslant 900^{\text{o}}\text{C} \\
c_s(T) &= 650 && \text{para } 900^{\text{o}}\text{C} \leqslant T \leqslant 1200^{\text{o}}\text{C}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

A curva do calor específico do aço em função da temperatura é posta no conjunto de expressões matemáticas conforme a Equação (3.18) e representado graficamente pela Figura 12. No modelo simplificado adota-se um valor constante e igual a 600 J/kg^{o}C.

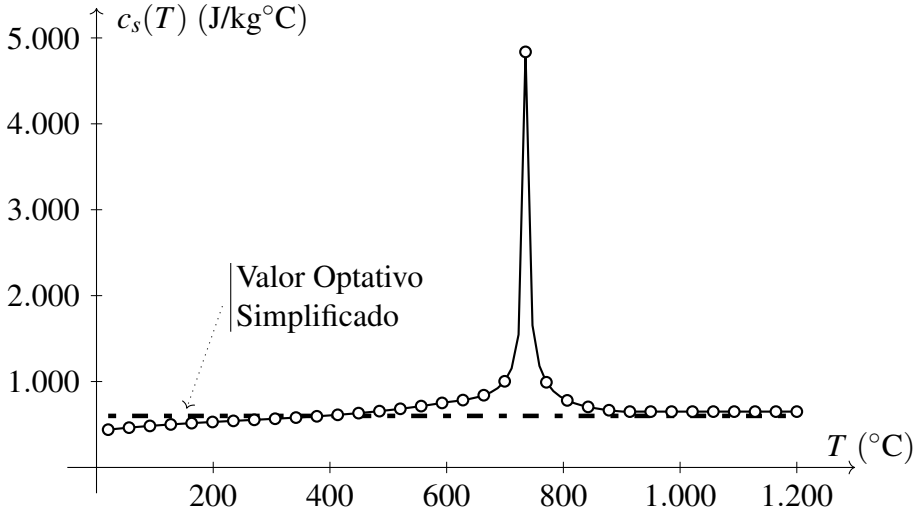

Figura 12 – Calor específico do aço em função da temperatura

A condutividade térmica do aço é representada por um modelo simples, caracterizado por um decaimento linear e em seguida assume um valor constante, conforme apresentado na Equação (3.19).

$$\begin{aligned}
k_s(T) &= 54 - 3,33 \cdot 10^{-2} \cdot T && \text{para } 20^{\text{o}}\text{C} \leqslant T \leqslant 800^{\text{o}}\text{C} \\
k_s(T) &= 27,3 && \text{para } 800\ ^{\text{o}}\text{C} \leqslant T \leqslant 1200^{\text{o}}\text{C}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Na Figura 13, apresenta-se o comportamento da condutividade térmica do aço em função da temperatura. Além disso, pode-se adotar um valor simplificado e constante igual a 45 W/m^{o}C.

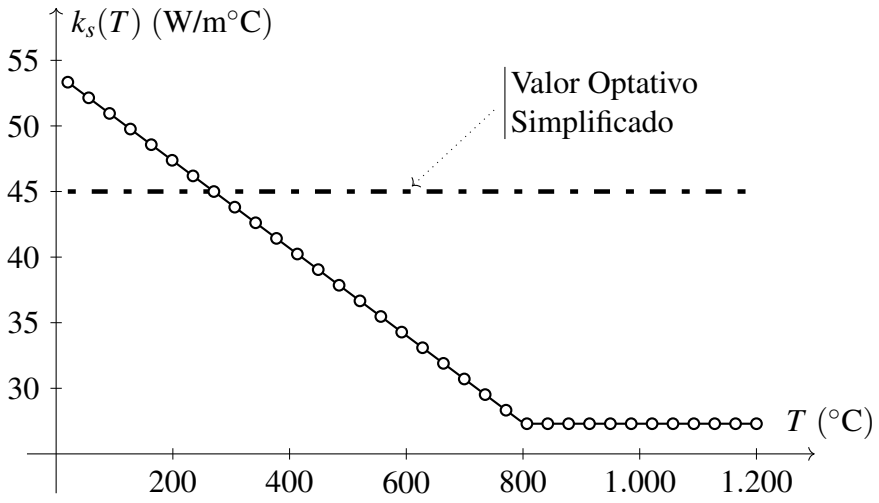

Figura 13 – Condutividade térmica do aço em função da temperatura

O alongamento térmico do aço é aproximado pela Equação (3.20), sendo que ele é uma grandeza adimensional constituído pela razão entre a expansão térmica da peça de aço, provocada pela temperatura, e o comprimento da peça de aço a 20°C.

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{s,th} = -2,416 \cdot 10^{-4} + 1,2 \cdot 10^{-5} T + 0,4 \cdot 10^{-8} T^2 && \text{para } 20\ ^{o}\text{C} \leq T < 750\ ^{o}\text{C} \\
&\varepsilon_{s,th} = 11 \cdot 10^{-3} && \text{para } 750\ ^{o}\text{C} \leq T \leq 860\ ^{o}\text{C} \\
&\varepsilon_{s,th} = -6,2 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-5} && \text{para } 860\ ^{o}\text{C} < T \leq 1200\ ^{o}\text{C}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Adotando modelos simplificados de cálculo, o EN 1994-1-2:2005 descreve em seu texto uma expressão optativa simplificada, onde aproxima o alongamento do aço por uma função linear ao longo do aumento da temperatura, conforme dado pela Equação (3.21).

$$\varepsilon_{s,th} = 14 \cdot 10^{-6} (T - 20) \quad \text{para } 20\ ^{o}\text{C} \leq T \leq 1200\ ^{o}\text{C} \tag{3.21}$$

Em adicional, o EN 1992-1-2:2004 apresenta uma relação para o cálculo do alongamento térmico de aço de armadura protendida. Em síntese, o comportamento dos modelos matemáticos representativos da expansão térmica do aço em função da temperatura são ilustrados na Figura 14.

A Tabela 2 apresenta os fatores de redução à temperatura elevada, relativos aos valores a 20°C, para a resistência ao escoamento, o limite de proporcionalidade e o módulo de elasticidade do aço, conforme representado a seguir na Equação (3.22).

$$k^s_{y,\theta} = \frac{f^s_{y,\theta}}{f^s_{y,20}} \qquad k^s_{u,\theta} = \frac{f^s_{u,\theta}}{f^s_{y,20}} \qquad k^s_{p,\theta} = \frac{f^s_{p,\theta}}{f^s_{y,20}} \qquad k^s_{E,\theta} = \frac{E_{s,\theta}}{E_{s,20}} \tag{3.22}$$

Onde $f^s_{y,\theta}$, $k^s_{u,\theta}$, $f^s_{p,\theta}$ e $E_{s,\theta}$ são, respectivamente, a resistência de escoamento, ruptura, limite de proporcionalidade e o módulo de elasticidade do aço em função da temperatura. De forma análoga, $f^s_{y,20}$ é chamado de resistência de escoamento medido na temperatura ambiente de 20°C, $k^s_{u,20}$ é a resistência de ruptura a 20°C e $f^s_{p,20}$ denominado como limite de proporcionalidade, bem como $E_{s,20}$ é o módulo de elasticidade do aço em temperatura ambiente .

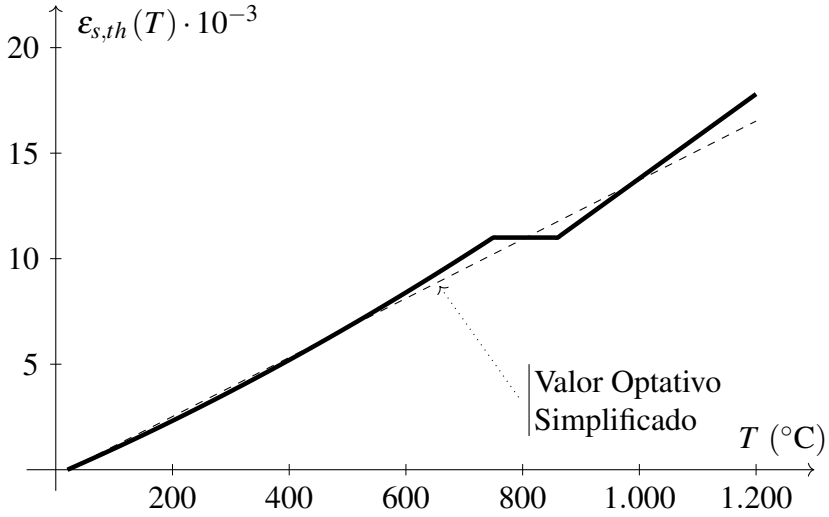

Figura 14 – Alongamento térmico do aço em função da temperatura

Para valores intermediários de temperatura, pode-se usar interpolação linear. Adicionalmente na Tabela 2 pode-se observar que os valores dos fatores de redução são iguais aos valores adotadas no texto da ABNT NBR 14323:2013 para os aços laminados. Além disso, atualmente inúmeras pesquisas experimentais são realizadas para investigar o comportamento do aço sob elevadas temperaturas, como pode ser visto em detalhes em Kodur, Dwaikat e Fike (2010), Jiang et al. (2006), Sakumoto, Nakazato e Matsuzaki (1996), Zhou et al. (2019), Li et al. (2006) e Wang et al. (2018).

Tabela 2 – Fatores de redução do aço, segundo EN 1993-1-2:2005

T (°C)	$k^s_{y,\theta}$	$k^s_{p,\theta}$	$k^s_{E,\theta}$
20	1,000	1,000	1,000
100	1,000	1,000	1,000
200	1,000	0,807	0,900
300	1,000	0,613	0,800
400	1,000	0,420	0,700
500	0,780	0,360	0,600
600	0,470	0,180	0,310
700	0,230	0,075	0,130
800	0,110	0,050	0,090
900	0,060	0,038	0,068
1000	0,040	0,025	0,045
1100	0,020	0,013	0,023
1200	0,000	0,000	0,000

Na Figura 15 apresenta-se uma comparação entre fatores de redução da tensão de escoamento e o módulo de elasticidade em relação ao aumento de temperatura no elemento de aço, obtidos no texto do EN 1993-1-2:2005, e os valores dos coeficientes relacionados aos modelos teóricos da literatura baseados nas premissas de Lie (1992), ECCS (1983) e BS5950 (1990).

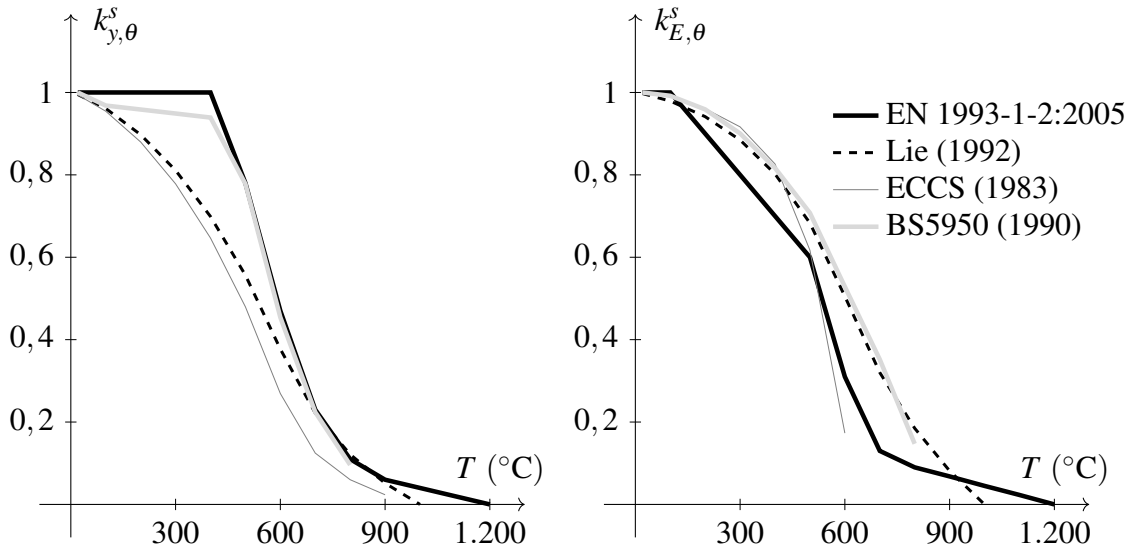

Figura 15 – Comparação entre os modelos de redução para tensão de escoamento (esquerda) e módulo de elasticidade (direita) do aço em função da temperatura

Em particular, o comportamento dos fatores de redução para tensão de escoamento do aço varia conforme cada modelo adotado. Todavia, pode-se observar que as curvas de Lie (1992) e BS5950 (1990) são semelhantes, apresentando níveis de redução abaixo das normas EN 1993-1-2:2005 e ECCS (1983). Em relação aos fatores de redução do módulo de elasticidade, destaca-se que o modelo proveniente da BS5950 (1990) limita-se até 800°C e o modelo oriundo do ECCS (1983) é definido até 600°C.

4

ANÁLISE TÉRMICA

Neste capítulo é apresentado uma breve revisão da literatura acerca das pesquisas de caráter numérico, destinada à análise térmica de estruturas sujeitas à ação de incêndio. Para tanto, busca-se, de forma sucinta, expor as principais definições e modelos matemáticos da condução de calor em meios sólidos. Em seguida, apresenta-se a formulação de elementos finitos, bem como a estrutura geral de implementação dos programas computacionais. Por fim, realiza-se a experimentação numérica por meio de casos testes.

4.1 REVISÃO DE LITERATURA

Foi realizado um levantamento bibliográfico das pesquisas científicas que aplicaram métodos computacionais para análise do comportamento térmico de elementos estruturais. Primeiramente, Lie e Harmathy (1972) apresentam uma pesquisa que tem como cerne estudar numericamente o comportamento de um pilar de aço com revestimento contra fogo. Para tanto, os autores usam um método aproximado de solução de equações diferenciais denotado como método das diferenças finitas. Dentre as hipóteses simplificadoras adotadas pelos autores, vale destacar que a resistência térmica entre o material de isolamento e o aço é negligenciada, a variação de temperatura por meio do isolamento é aproximadamente linear e o ar enclausurado é desprezado. Em relação aos testes numéricos foram avaliados três tipos de materiais de proteção: concreto de peso leve, tijolo isolante e um tijolo de argila. Adotou-se ainda que a temperatura dos gases ao redor do pilar segue a curva ASTM E119 e as quatro faces do contorno do elemento estão expostas ao incêndio. Foram utilizadas as informações e medições obtidas em ensaios experimentais para avaliar a fidelidade dos resultados. Para todos os testes numéricos realizados na pesquisa foram construídas curvas de temperatura-tempo. Desta maneira, mesmo sem considerar o ar enclausurado, os resultados estão próximos com as medições experimentais, ou seja, o método de cálculo adotado pode ser usado para predição simplificada do histórico de temperatura da estrutura. Os autores afirmaram que os efeitos da umidade podem ser negligenciados para a maioria dos materiais inorgânicos da construção civil, com exceção, do concreto que apresenta uma diferença significativa nos resultados para diferentes teores de umidade.

Em Wickström (1979a) foi realizado um procedimento para aproximar a troca de calor por radiação e convecção em um domínio bidimensional em estruturas com cavidades. Para o cálculo do fator de forma, utilizou-se a regra das cordas cruzadas de Hottel (ou *Hottel's crossed-string method*) (HOTTEL, 1954). O método dos elementos finitos foi usado para determinar a predição térmica dos problemas propostos, sendo que as rotinas computacionais

implementadas destinadas ao tratamento dos efeitos da transferência de calor no interior dos vazios foram acoplados com o programa desenvolvido em Fortran, denominado de FIRES-T, vide Becker, Bizri e Bresler (1974). Em todas as aplicações, a temperatura dos gases quentes em torno das estruturas é descrita pela curva de incêndio ASTM E119. Foram propostos três casos, primeiramente, analisou-se o mesmo problema estudado em Lie e Harmathy (1972), porém considerando a troca de calor na cavidade. O segundo caso é uma viga de aço isolada com uma placa de gesso em contato com uma laje de concreto na face superior, e o terceiro caso é uma laje de concreto com três orifícios circulares. Inicialmente, todos os casos apresentaram um ajuste satisfatório em relação aos resultados experimentais. Neste cenário, o autor afirmou que a presença do ar no modelo numérico tem uma influência significativa na predição de temperatura. O autor ressalta que o custo computacional devido à rotina adicional referente ao tratamento da cavidade é uma fração pequena em relação ao custo total do processamento.

No relatório de Wickström (1979b), são apresentadas as principais características de um programa computacional com base na formulação de elementos finitos de Galerkin para a solução da equação de calor não linear. O programa é escrito em Fortran V e denominado de TASEF-2 *(Temperature Analysis of Etructures Exposed to Fire - Two Dimensional Version)*. O autor estudou três casos, inicialmente, analisa-se um exemplo teórico clássico com solução exata conhecida, onde considerou uma chapa quadrada submetida a um fluxo de calor de convecção. Os resultados atingem baixos níveis de erro quando comparados com a solução exata. O próximo exemplo foi um perfil de aço com a alma incorporada na laje de concreto, atuando como uma vedação contra incêndio, onde os resultados são comparados com as medições de laboratório. Os valores obtidos para temperatura no perfil apresentam comportamentos semelhantes aos testes experimentais, todavia, dentro da laje de concreto os resultados apresentam diferenças. O autor afirmou que esse comportamento pode ter ocorrido devido à negligência da variação da umidade no interior do concreto. Por fim, o terceiro caso foi uma viga de caixa incorporada em uma laje de concreto, destacando que o calor transferido por convecção e radiação dentro do vazio da viga teve como base os procedimentos adotados em Wickström (1979a). Os resultados em algumas faixas de tempo de exposição apresentaram sutis diferenças em comparação com as medições em laboratório.

Com o propósito de modelar numericamente o comportamento térmico de elementos de concreto, a pesquisa de Lie e Irwin (1993) buscou analisar um pilar de concreto armado com seção retangular, avaliando o comportamento térmico e estrutural. Para tanto, tomou-se como base os procedimentos de diferenças finitas para discretização do problema. No modelo proposto, os autores consideram o efeito da umidade do concreto e aplicaram um esquema explícito para solução, necessitando atender um critério de estabilidade. Na construção da curva temperatura *versus* tempo de exposição, duas situações foram estudadas, variando somente as dimensões da seção, sendo os valores de 305x457 mm e 203x914 mm. Em linhas gerais, o comportamento mostrou-se paralelo em relação à solução obtida por medições experimentais, contudo, os autores ressaltam que a diferença que surge entre os modelos é devido ao tratamento do efeito da

evaporação no concreto. Adicionalmente, os resultados possuem uma boa aproximação na medição da temperatura quando relacionados à previsão da capacidade resistente do pilar em incêndio,

Na pesquisa de Lewis (2000), buscou-se, em linhas gerais, verificar as premissas e suposições das expressões fornecidas pelas normas NZS 3404:1997 e ECCS, com direcionamento de comparar os resultados obtidos via simulações computacionais. Os resultados de tais métodos são comparados com os ensaios experimentais realizados nos elementos. Os problemas propostos tiveram como base o estudo térmico de um perfil I de aço com e sem revestimento contra fogo. Uma vez que o presente trabalho não utiliza aspectos normativos, não se levou em conta as conclusões do autor para o histórico de temperatura via métodos simplificados dos códigos técnicos, direcionando então o foco para os resultados provenientes dos modelos numéricos e sua confiabilidade em relação aos ensaios e outras simulações computacionais. Em particular, o autor usou o programa de análise numérica denominado de SAFIR, que é baseado no método de elementos finitos. Tal programa contempla um vasto pacote de soluções de problemas de engenharia, como análise estrutural em temperatura ambiente ou sujeita a elevadas temperaturas, análises térmicas de seções transversais, dentre outras aplicações (NWOSU et al., 1999). Em todas as aplicações, os perfis estão expostos à curva de incêndio-padrão ISO 834:1999. No primeiro caso analisou-se um perfil sem proteção com três faces expostas ao incêndio e a face superior em contato com uma laje. Os resultados foram comparados com o programa FIRES-T2, apresentando uma boa concordância entre os modelos, onde verificou que a presença da laje diminuiu a temperatura na mesa superior do perfil. Em seguida considerou o revestimento contra fogo do tipo contorno, onde os resultados foram comparados com o programa Firecalc (CSIRO, 1993). Nessa configuração, o Firecalc ficou com valores inferiores aos obtidos com SAFIR, a diferença entre as curvas pode ser devido ao uso de propriedades físicas do concreto diferentes em cada modelo. A presença do revestimento provocou uma queda significativa na temperatura do perfil de aço. Por fim, os resultados das simulações numéricas foram comparados com um incêndio real (WAINMAN; KIRBY, 1988). Os valores obtidos foram próximos ao programa SAFIR, no caso do perfil sem revestimento sob ação do fogo nas três faces.

Em Figueiredo Junior (2002) foi realizado uma simulação numérica para determinar a distribuição de temperatura em elementos estruturais bidimensionais metálicos, de concreto e mistos, sem e com revestimento contra fogo. O programa desenvolvido ao longo da pesquisa é denotado como *Caltemi* e baseado nos procedimentos de elementos finitos. Como características, a codificação é feita em *Fortran* baseado no programa *Caltep* (Cálculo Transitório da Equação de Poisson), vide Zárate e Oñate (1993). O programa possibilita a utilização de elementos triangulares de 3 e 6 nós, e elementos quadrangulares de 4 e 8 nós. É construído uma interface gráfica desenvolvida em linguagem *DELPHI* para auxiliar no pós e pré-processamento. As propriedades do aço são especificadas de acordo com a ABNT NBR 14323:1999, enquanto que as propriedades do concreto seguem o EN 1994-1-2:2005. Em linhas gerais, em todos os problemas propostos pelo autor, a ferramenta computacional apresentou bons resultados quando

comparados com normas, ensaios e literatura. Deve-se ressaltar ainda que algumas simplificações foram adotadas nas propriedades do concreto, como a massa específica sendo constante e o teor de umidade é desprezado. Além disso, a troca de calor por convecção e radiação, devido ao ar enclausurado, não é considerada, assim como a resistência de contato entre os materiais.

De forma similar, Silva (2002) desenvolveu um programa computacional para análise térmica não linear bidimensional denotado pelo autor como PFEM_2D, sendo acrescentado dois novos fatores, a geração interna de calor no modelo diferencial de transferência de calor e aplicação do método simplificado de dimensionamento dos elementos estruturais prescrito na ABNT NBR 14323:1999, com base nos resultados térmicos obtidos pelo programa. A implementação computacional foi direcionada pela Programação Orientada a Objetos (POO) e foram implementados quatro tipos de elementos, os triangulares lineares de 3 nós e os elementos quadrangulares de 4, 8 e 9 nós. Para a avaliação das matrizes de elementos finitos utilizou-se a quadratura de Gauss e aplica-se o método dos gradientes conjugados para solução do sistema linear. O autor estudou alguns casos, dentre eles, o exemplo clássico de um problema de chapa quadrada em regime transiente com natureza linear, como detalhado em Reddy (1993), onde testou-se quatro tipos de elementos implementados, os resultados apresentados mostraram-se coerentes com a solução de referência. Em seguida, considerou-se um pilar de concreto quadrado, os resultados foram comparados com o programa FIRES-T vide Polivka e Wilson (1976). Novamente os resultados apresentaram uma boa concordância, destacando que não existe uma variação significativa de temperatura após uma hora de exposição em uma linha de 20 cm do centro do pilar até superfície. Foi analisado também um perfil metálico VS 650x114 por meio de simulação numérica e pela ABNT NBR 14323:1999, onde concluiu-se que a norma brasileira apresenta resultados conservadores. Vale destacar também que nos casos do pilar misto de seção quadrada e circular estudados em Lie e Irwin (1995) e Kodur e Lie (1996), respectivamente, o autor afirmou que as diferenças entre as curvas de temperatura ocorrem por ter sido desprezada a evaporação da água no concreto. Contudo, para o ponto de vista prático de aplicação na engenheira os resultados atendem satisfatoriamente.

Ribeiro (2004) elaborou um programa computacional para avaliação térmica de estruturas bidimensionais e tridimensionais de aço, de concreto e mistos baseado no método dos elementos finitos, denominado como *Thersys*, e comparou alguns resultados com a ABNT NBR 14323:2003. O código desenvolvido tem como base o programa *Caltemi*, vide Figueiredo Junior (2002). Dentre os problemas propostos, o perfil I com revestimento contra fogo do tipo contorno apresentou valores bem ajustados com o programa SAFIR, superior ao programa *Caltemi* e a norma brasileira forneceu resultados conservadores. O autor destacou que o perfil de aço com proteção tipo caixão não foi bem retratado pois não considerou a troca de calor contida no interior do elemento com vazio. Em relação aos elementos de concreto comparados com os resultados experimentais, o programa apresentou divergência nos resultados, devido ao concreto depender do tipo de agregado, cimento, cura e outros parâmetros, conforme justificado pelo autor. Nos casos tridimensionais, buscou-se avaliar sistemas estruturais interligando ligações, lajes, pilares

e vigas, onde apresentaram resultados diferentes nas ligações entre os elementos em relação à norma brasileira e em alguns casos os valores de temperatura no meio do vão apresentaram valores próximos à norma.

Com avanços computacionais e as demandas de mercado, foram elaboradas diversas pesquisas com programas computacionais comerciais, cita-se Regobello (2007), que buscou determinar o campo de temperatura para seções transversais de estruturas de aço e mistas. Além disso, a pesquisa obteve alguns resultados acerca da resposta estrutural em condições de elevadas temperaturas para vigas de aço. Considerando as premissas acerca da análise térmica da pesquisa, os primeiros casos estudados foram baseados na ABNT NBR 14323:1999, onde concluiu que os resultados da norma brasileira apresentam informações satisfatórias em relação ao modelo numérico, ressaltando que os valores se aproximam dos níveis máximos obtidos numericamente. Também foram analisados alguns casos de perfis de aço em contato com alvenaria, nesses casos o autor afirmou que há necessidade de uma modelagem avançada de cálculo ou métodos normativos adequados, pois houve uma diferença significativa de resultados entre os modelos.

Capua e Mari (2007) realizaram uma análise estrutural não linear de um elemento de concreto armado exposto a curva de incêndio-padrão ISO 834:1999. O caso estudado foi de uma viga de concreto com oito armaduras de diâmetro de 16 mm, onde os resultados foram comparados com as medições experimentais da pesquisa de Haksever e Anderberg (1982). O modelo matemático adotado no trabalho segue a equação clássica de difusão de calor acrescentada aos efeitos da contribuição da entalpia, onde é associada à função calor latente proveniente da evaporação da água. As propriedades do concreto tiveram como base o EN 1992-1-2:2004 e para solução do modelo empregou-se os procedimentos do método dos elementos finitos. Os autores realizaram duas análises a fim de verificar a influência da umidade na resposta do problema em comparação com os dados experimentais, considerou-se uma umidade de 0% e 6%, onde concluiu que o concreto seco não apresentou resultados satisfatórios. Considerando a umidade no modelo, as curvas de temperatura apresentam um melhor ajuste em relação aos testes, porém, a solução diverge para os pontos próximos do interior da viga. Os autores pressupõem que tal fato é por causa da consideração do valor uniforme de umidade na seção, uma vez que ocorreria maior concentração no centro do elemento.

Caldas (2008) realizou uma análise numérica para avaliar o comportamento em condição de incêndio de elementos de concreto, aço e mistos. Em linhas gerais, tanto o histórico de temperatura na seção transversal quanto as respostas estruturais, como curva de interação, ligações semirrígidas, modelagens de cascas e elementos estruturais tridimensionais são consideradas na obra. Inicialmente, considerou somente as contribuições da obra relativas à parte térmica. Para a solução da equação diferencial de calor, o autor aplicou o método das diferenças finitas e dos elementos finitos. Dentre os casos resolvidos, tendo como referência o trabalho de Ribeiro (2004), um perfil com proteção do tipo contorno e uma viga de concreto, são solucionados por meio dos dois métodos mencionados e ambas as técnicas apresentam bons resultados. Vale

destacar o caso do pilar misto circular preenchido por concreto, onde foi utilizado concreto com agregados calcários com 10% de umidade, o que forneceu bons resultados quando comparados com as medições experimentais de Lie (1994). Analogamente, o comportamento assertivo do programa confirma-se no estudo do pilar totalmente envolvido por concreto, como posto na obra de Huang, Tan e Phng (2007). O modelo desenvolvido pelo autor permite considerar a radiação em abertura, exemplificado no caso da proteção do tipo caixa, onde apresentou resultados bem ajustado com ABNT NBR 14323:1999.

O comportamento de pilares com seção transversal em formato de L, T, + e quadrado em situação de incêndio foram estudados por Xu e Wu (2009), onde analisaram experimentalmente e por meio de um programa computacional RCSSCF. A temperatura dos gases ao redor da estrutura é modelada pela curva ISO 834:1999, sendo as temperaturas no forno de ensaio calibradas em função dela. O modelo numérico tem como base o método dos elementos finitos e busca-se medir no trabalho a predição de temperatura na seção transversal, e a deformação axial. Os resultados são comparados com os testes experimentais. Após as simulações, o autor apresenta os resultados em forma de curvas de temperatura *versus* tempo. Em linhas gerais, os resultados numéricos exibem um bom comportamento em comparação com os testes experimentais. Contudo, os pontos com maior distanciamento da superfície mostram-se divergentes em relação aos resultados do ensaio. Esse comportamento pode ser devido à migração da umidade no concreto, pois o modelo numérico não leva em conta tal fator. Esse fenômeno já foi relatado em outras pesquisas, conforme por ser visto em Lie e Irwin (1993), Lie e Celikkol (1991) e Lie (1994).

No artigo de Pierin e Silva (2014), teve como objetivo determinar por meio de análise numérica, com auxílio do programa ATERM e STC (*Super TempCalc*), dimensões mínimas e parâmetros para projeto de lajes nervuradas preenchida com materiais específicos em condições de incêndio. Dentre os parâmetros adotados para as simulações, considera-se os elementos expostos à curva de incêndio-padrão ISO 834:1999, a temperatura ambiente igual a 20°C, a emissividade igual a 0,7 e o coeficiente de convecção para as faces expostas e não expostas iguais a 25 W/m^{2o}C e 9 W/m^{2o}C, respectivamente. Inicialmente, os autores fornecem resumidamente as propriedades físicas dos materiais, como lajotas cerâmicas, blocos de concreto celular e placa cimentícia, conforme prescrições de diversos fabricantes. Após testes e simulações com configurações diferentes, os autores realizaram inúmeras análises paramétricas para diferentes TRRF, estimando dimensões mínimas, temperatura máximas e médias. Adota-se nas análises o valor limite de temperatura da armadura igual a 500°C. Para garantir configurações com maior realismo deve-se recorrer aos testes experimentais, conforme relatado os autores.

Pierin e Silva (2014) abordaram, em seu artigo, a formulação matemática do método de elementos finitos para solução da equação do calor e apresentaram o potencial de solução do programa elaborado para análise térmica não linear de estruturas, denominado pelos autores como ATERM. O programa contém uma interface didática, possibilitando a definição de geometrias, condições de contorno, materiais e demais parâmetros. As respostas fornecidas pelos programas

STC e ANSYS são utilizados como um comparativo. Os autores analisam uma viga de concreto, uma laje em cima de viga de aço, um pilar de aço em contato com alvenaria e uma laje nervurada. Em linhas gerais, os resultados foram expostos em curvas temperatura *versus* tempo, onde apresentaram valores bem ajustados com as referências. Os autores destacam ainda que deve ser realizado um estudo prévio antes de uma análise térmica acerca do passo no tempo e em relação ao teste de malha. O programa ATERM apresentou um tempo de processamento menor em relação ao programa STC, e os resultados são melhores com o uso da matriz concentrada nas regiões mais frias. Seguindo nesta linha, Pierin, Silva e Rovere (2015) apresentaram uma pesquisa similar, destacando o estudo de uma laje com uma cavidade retangular apoiada numa placa cimentícia, onde ocorre o efeito de transferência de calor propiciado pelo ar encapsulado. Concluindo que a presença do ar na cavidade provoca um aquecimento na face superior da laje, caso contrário ela se mantém em temperatura ambiente.

Com o foco em desenvolvimento computacional por meio de métodos numéricos, Pires et al. (2015) apresentam a criação de um novo módulo do programa CS-ASA, onde buscou-se acrescentar uma análise térmica para seções transversais de estruturas em condições de incêndio, denominado pelos autores como CS-ASA/FA (*Computational System for Advanced Structural Analysis/Fire Analysis*). Vale mencionar que esse programa tem como base o método dos elementos finitos e possui aplicabilidade em outras áreas de interesse, como problemas estruturais não lineares estáticos e dinâmicos. Neste contexto, foram analisados três casos: uma chaminé industrial, perfil I laminado com e sem revestimento contra fogo e um perfil I com vedação de concreto celular na alma. Todos os casos são comparados com resultados obtidos na literatura ou pelo software SAFIR. O desenvolvimento do novo pacote mostrou-se eficiente e com bons resultados em relação aos modelos de comparação. Os autores ressaltam ainda que deve-se realizar aprofundamentos e testes acerca de parâmetros envolvidos no processo, por exemplo, a discretização da malha espacial e temporal, o tipo de elemento e o esquema de discretização.

Xiong, Wang e Liew (2016) buscaram estudar pilares tubulares de aço e concreto com seção transversal vazada e totalmente preenchida via método das diferenças finitas com modificações pertinentes à natureza não linear do modelo diferencial de calor. Dentre as premissas adotadas no modelo numérico, considerou-se o teor de umidade do concreto, a resistência de contato entre o aço e o concreto e as condições de convecção e radiação. A adequação do modelo proposto tem como base os resultados do programa comercial ABAQUS e as medições experimentais. Sendo assim, os resultados obtidos na comparação com o método dos elementos finitos são bem próximos. Quando comparado com os dados de laboratório, o modelo modificado apresentou melhora nos resultados quando comparado com o modelo proposto por Lie e Chabot (1990) para o perfil tubular totalmente preenchido de concreto. Os autores realizaram análises paramétricas detalhadas na determinação da temperatura com diferentes configurações de dimensões, os resultados ilustrados em curvas de temperatura-tempo mostraram-se coerentes com as medições. Os autores complementaram o estudo realizando

uma estimativa da capacidade resistente de pilares com base no método de cálculo do EN 1994-1-2:2005.

Lausova, Skotnicova e Michalcova (2016) estudaram a distribuição de temperatura na seção transversal de uma viga tubular de aço vazada em formato quadrado exposto em três faces ao incêndio, sendo a face superior da viga em contato com uma faixa constituída por três camadas de materiais: concreto, placa de fibra e uma chapa de gesso. Além disso, foram realizados alguns testes numéricos com dimensões diferentes para a viga. Desta forma, os resultados obtidos via ANSYS (usando elemento finito do tipo PLANE55) foram comparados com as medições experimentais realizadas em *VSB-Technical University of Ostrava*. Em conclusão, os autores afirmaram que a diferença de temperatura entre a face superior e inferior da viga apresentam diferenças significativas e que o comportamento térmico depende significativamente da largura e espessura adotada para o tubo de aço.

Gonçalves (2017) buscou, por meio da utilização do método das diferenças finitas, mostrar a aplicabilidade e formulação do método em problemas usuais de engenharia. Dentre esses casos, vale destacar inicialmente os problemas de natureza térmica em regime permanente definidos no domínio unidimensional e bidimensional. Os resultados são comparados com as soluções analíticas e apresentaram baixos níveis de erros. Em seguida, foi resolvido um problema de condução de calor em uma viga de concreto exposto ao fogo nas faces laterais e na face inferior. O problema apresenta natureza não linear, devido as propriedades dos materiais variarem com a temperatura. O programa é escrito em MatLab e a simulação numérica foi comparada com o EN 1992-1-2:2004. Os resultados foram apresentados em forma de isotermas de temperatura, mostrando-se semelhantes à norma, porém, no centro da viga os resultados obtidos apresentam valores ligeiramente diferentes. O autor levantou algumas hipóteses para tal comportamento, dentre elas, a utilização de métodos diferentes para obtenção dos resultados, refinamento de malha, passo de tempo ou discretização linear dos passos de tempos. É importante frisar a exposição detalhada do método em cada problema estudado, exibindo de forma didática e organizada cada sentença matemática relevante para compreensão da técnica.

O trabalho de Tiantongnukul e Lenwari (2017) teve como cerne apresentar uma análise térmica não linear transiente na seção transversal de uma viga de concreto armado. Para tanto utilizou-se a ferramenta computacional de simulação ANSYS, que se tem como base as premissas do método dos elementos finitos. Diferentes das análises usuais que utilizam as curvas de aquecimento padrão, a temperatura dos gases respeita o incêndio ASTM E119 até o aquecimento da estrutura e logo em seguida, inicia-se a faixa de resfriamento, assumindo um comportamento linear da curva. Os resultados obtidos via simulação são comparados com ensaios experimentais e apresentam uma boa aproximação. Os autores realizaram uma série de estudos paramétricos, dentre as conclusões, deve-se mencionar que o tipo de agregado (carbonato ou silicioso) não influencia na temperatura do aço para curtas faixas de exposição, porém, para longas faixas de exposição, o concreto carbonato pode sofrer alterações significativas.

Em uma pesquisa com base numérica e experimental, Song et al. (2018) realizaram uma investigação acerca do comportamento de um pilar tubular de aço preenchida com concreto, sendo considerado o concreto com e sem uma proteção de revestimento intumescente de fogo. O forno foi ajustado para modelar a curva ISO 834:1999 até 180 min de exposição. A simulação foi realizada pelo programa comercial ABAQUS, usando o elemento sólido de oito nós hexaédrico 3D. Para as conclusões relacionadas a análise térmica, em linhas globais, os dados de temperatura são viáveis para avaliar o comportamento e mostrou-se a eficiência do revestimento. Os autores afirmam que as temperaturas na superfície interna do tubo estão próximas aos valores de ensaio, contudo, para o ponto dentro do concreto, o histórico é satisfatório até 60 minutos de exposição, após isso, os resultados apresentam divergências. Esse comportamento é devido à migração e evaporação da umidade do concreto.

Pires et al. (2018) analisaram o modelo de calor não linear transiente para estruturas em condições de incêndio, adotando a curva de incêndio-padrão ISO 834:1999. Para a análise numérica utilizou-se o programa computacional desenvolvido denominado como CS-ASA/FA. Foram realizados testes acerca do refinamento de malha, incremento de tempo e do processo de solução do modelo (incremental simples, Incremental-iterativo de Picard e Newton-Raphson). O primeiro caso foi uma seção transversal de um tubo retangular preenchido de concreto, onde a solução para o aço apresentou-se um melhor ajuste, ao contrário, para os pontos no concreto, as curvas apresentam uma leve diferença. Os autores também realizaram um teste com incrementos de 1 s até 120 s e notou que para maiores incrementos a temperatura é maior nos minutos iniciais. O segundo caso foi uma viga mista de aço e concreto, onde os resultados apresentaram bom comportamento no aço, bem como para o concreto. Para ambos os casos foi utilizada as três estratégias de solução mencionada anteriormente, os resultados não apresentaram diferenças significativas entre eles. Os autores concluíram que o programa desenvolvido para qualquer escolha do método de solução é eficiente para análise térmica.

4.2 PRINCÍPIOS DA CONDUÇÃO DE CALOR

Os conceitos de transferência de calor possuem importantes aplicações em diversos ramos da engenharia, interligados aos problemas relacionados à termodinâmica, escoamentos de fluidos e estruturas sob condição de incêndio, visto em detalhes em Bergman et al. (2011), Fox, Pritchard e McDonald (2000) e Guo e Shi (2011). Adiante é exposto de forma sucinta algumas definições e as equações matemáticas básicas sobre condução de calor em meio sólidos.

4.2.1 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA DIFUSÃO TÉRMICA

Na análise da condução de calor um dos principais pontos é determinar o campo escalar de temperatura no meio, com as devidas condições externas impostas ao sistema. Deste modo, deve-se obter um modelo matemático capaz de descrever tal fenômeno. Para isso, aplica-se o princípio da conservação de energia em um elemento infinitesimal sólido e considerando a lei de

Fourier, obtém-se a equação da difusão de calor (BERGMAN et al., 2011), expressa na Equação (4.1).

$$\nabla^T \mathbf{D} \nabla T + \dot{Q} - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \tag{4.1}$$

Onde T é a temperatura, $\dot{Q}$ é a geração de energia interna, ρ é a massa específica, c é o calor específico, $\mathbf{D}$ é conhecida como matriz de condutividade térmica do material, para o caso de um material isotrópico, vale a Equação (4.2).

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = k\mathbf{I} \tag{4.2}$$

A equação diferencial parcial transiente que governa o problema de difusão de calor, expressa na Equação (4.2), pode ser reescrita considerando um domínio bidimensional, sem geração interna de energia e comportamento isotrópico, resultando na Equação (4.3).

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \rho(T)c(T)\frac{\partial T}{\partial t} \tag{4.3}$$

Nota-se que a Equação (4.3) não deve receber um tratamento puramente matemático, pois contém forte significado físico. Analisando as parcelas difusivas, com as derivadas na direção x e y, observa-se que tais sentenças representam o fluxo líquido de calor por condução para o volume de controle. Destaca-se ainda, a natureza não linear da equação do calor devido as propriedades físicas do material serem dependentes da temperatura (MALISKA, 2017; AMES, 1965).

4.2.2 CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO

A solução da equação da difusão térmica, apresentada na Equação (4.3), fornece a distribuição de temperatura em um meio sólido. Todavia, para a solução da equação diferencial deve-se impor ao sistema condições iniciais e de contorno apropriadas ao problema. Considerando um meio com um domínio genérico Ω associado a uma fronteira Γ, o contorno é composto por parcelas representativas das ações relacionadas à transferência de calor, como expresso na Equação (4.4).

$$\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_q + \Gamma_r + \Gamma_c \tag{4.4}$$

Onde Γ_u é a parcela que representa a temperatura prescrita, Γ_q é o fluxo prescrito, Γ_r e Γ_c são os contornos com fluxos de radiação e convecção, respectivamente. Usualmente as sentenças expressas na Equação (4.4) podem ser caracterizadas como uma condição essencial (ou Dirichlet), ou seja, um valor prescrito de temperatura ao longo da fronteira, ou uma condição

natural (ou Neumann), onde impõe-se uma prescrição de um gradiente no contorno, bem como a imposição de uma condição de contorno mista (ou Robin) (AZEVEDO, 1995).

$$T = \bar{T} \text{ em } \Gamma_u \tag{4.5}$$

$$q = \bar{q} \text{ em } \Gamma_q \tag{4.6}$$

$$q_r = \varepsilon\sigma(T^4 - T_\infty^4) \text{ em } \Gamma_r \tag{4.7}$$

$$q_c = \alpha_c(T - T_\infty) \text{ em } \Gamma_c \tag{4.8}$$

Pelo fato do modelo de condução de calor considerar somente o operador de primeira ordem para a derivada temporal, o problema necessita somente de uma condição inicial, ou seja, a prescrição de temperatura no instante inicial, conforme a Equação (4.9).

$$T(x,y)|_{t=0} = T_0 \tag{4.9}$$

Para descrever os fluxos térmicos na superfície do corpo, utiliza-se a lei de Fourier expressa na Equação (4.10). Para problemas de estruturas em situação de incêndio, os elementos estruturais estão sujeitos a um processo de transferência de calor combinado com convecção e radiação em torno da sua fronteira.

$$-k\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = q_n \tag{4.10}$$

Para as superfícies isoladas termicamente, considera-se que não há fluxo de calor na fronteira, ou seja, $q_n = 0$. Pelos modelos de transmissão de calor de convecção e radiação, pode-se escrever na forma linearizada a equação da taxa total de transferência de calor, expresso pela Equação (4.11).

$$q_n = \alpha(T - T_\infty) = \alpha_c(T - T_\infty) + \alpha_r(T - T_\infty) \tag{4.11}$$

Onde T_∞ é a temperatura do fluido em torno do contorno, α_c é o coeficiente de transferência de calor por convecção e α_r é o coeficiente de radiação, dado pela Equação (4.12).

$$\alpha_r = \varepsilon\sigma(T + T_\infty)(T^2 + {T_\infty}^2) \tag{4.12}$$

Em que σ é a constante de Stefan-Boltzmann, igual a $5,6697 \cdot 10^{-8}\text{W/m}^2\text{K}^4$, ε é a emissividade. Observa-se que o coeficiente de radiação apresenta maior influência da temperatura em relação ao coeficiente de convecção, ou seja, em situação de incêndio, após um certo tempo de exposição ao fogo a radiação torna-se predominante.

4.3 FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

Nesta seção busca-se apresentar os tratamentos numéricos baseados nas premissas do método dos elementos finitos aplicados a problemas de condução bidimensional de calor em regime transiente em meio sólido. Para tanto, os procedimentos são baseados na discretização parcial, onde inicialmente efetua-se o tratamento da parte espacial da equação de difusão e posteriormente realiza-se a discretização do tempo.

4.3.1 DISCRETIZAÇÃO DO ESPAÇO

A formulação de elementos finitos para análise térmica baseia-se na técnica de resíduos ponderados, onde se tem como objetivo realizar uma minimização de um resíduo gerado pela consideração da resposta do problema como uma função aproximada. Desta maneira, a formulação variacional inicia-se escrevendo a Equação (4.1) como uma sentença integral conjunta com uma função auxiliar ou peso w, conforme expresso na Equação (4.13).

$$\int_{\Omega} \left(\nabla^T \mathbf{D} \nabla T + \dot{Q} - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right) w d\Omega = 0 \tag{4.13}$$

Dentre as características da função peso é importante destacar que esta deve ser nula em todo contorno essencial (REDDY; GARTLING, 2010). Aplicando o teorema de Green na primeira parcela da Equação (4.13) e reorganizando os termos, chega-se na Equação (4.14).

$$\int_{\Gamma} w \left(\mathbf{D} \nabla T \right) \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla^T w (\mathbf{D} \nabla T) d\Omega + \int_{\Omega} \dot{Q} w d\Omega - \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} w d\Omega = 0 \tag{4.14}$$

Aplicando a relação constitutiva definida pela lei de Fourier e introduzindo a condição de contorno expressa na Equação (4.10), pode-se escrever a formulação fraca relativa à equação de calor, conforme expresso na Equação (4.15).

$$\int_{\Omega} \dot{Q} w d\Omega - \int_{\Gamma} w q_n d\Gamma - \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} w d\Omega = \int_{\Omega} \nabla^T w (\mathbf{D} \nabla T) d\Omega \tag{4.15}$$

Até o momento da formulação, o objetivo foi escrever a equação diferencial que governa o modelo de condução de calor transiente como uma sentença integral em termos de uma função auxiliar. Desta forma, todo procedimento matemático é exato e realizado em torno de um domínio contínuo Ω. Contudo, o princípio do MEF é dividir todo domínio em subdomínios finitos Ω_e. Desta maneira, escreve-se a função solução do problema por meio de uma aproximação com base nas funções de forma N, como descrito nas Equações (4.16) e (4.17).

$$T = \sum_{i=1}^{n} N_i T_i = \mathbf{N}\tilde{T} \tag{4.16}$$

$$w = \sum_{j=1}^{n} N_j w_j = \mathbf{N}^T \tilde{w} \tag{4.17}$$

Utiliza-se na formulação um método de ponderação conhecido como método de Galerkin, essa técnica consiste em adotar como funções de ponderação as próprias funções de forma. Sendo assim, as Equações (4.18) e (4.19) expõem, na forma matricial, o vetor associado as funções de forma e as temperaturas nodais.

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_n \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & \cdots & T_n \end{bmatrix}^T \tag{4.19}$$

A formulação variacional discreta é definida quando aplica-se as aproximações expressas nas Equações (4.16) e (4.17), na formulação fraca do problema, resultando na Equação (4.20).

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\tilde{T}\, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \rho c \mathbf{N} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \dot{Q}\, d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} q_n\, d\Gamma \tag{4.20}$$

Sendo que o vetor gradiente pode ser escrito em conjunto com a função de interpolação de elementos finitos $\nabla T = \nabla \mathbf{N}\tilde{T} = \mathbf{B}\tilde{T}$. Reorganizando os termos é possível escrever o sistema linear na forma compacta matricial, conforme a Equação (4.21).

$$\mathbf{C}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \mathbf{K}\tilde{T} = \mathbf{F} \tag{4.21}$$

A matriz de capacidade térmica, por analogia aos sistemas dinâmicos, denotada como matriz de amortecimento é composta pelo produto da massa e calor específico, associado com as funções de forma adotada na aproximação, como posto na Equação (4.22).

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho c \mathbf{N}\, d\Omega \tag{4.22}$$

Ressalta-se que na Equação (4.20) não há especificação de qual fluxo age no contorno natural. Desta forma, aplica-se os fluxos definidos pelas Equações (4.6), (4.7) e (4.8). Inserido na formulação com os coeficientes linearizados, chega-se nas matrizes resultantes, dadas pelas Equações (4.23) e (4.24).

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^e + \mathbf{H}^e + \mathbf{R}^e \tag{4.23}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\dot{Q}} + \mathbf{F}_{\bar{q}} + \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_c \tag{4.24}$$

A matriz de condução de calor é constituída por meio da matriz de derivadas das funções de forma **B** e a matriz de propriedade do material, conforme Equação (4.25).

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \tag{4.25}$$

Em relação ao vetor de ações térmicas, a contribuição devido à geração interna de calor e a parcela destinada ao fluxo prescrito é dada pelas Equações (4.26) e (4.27), respectivamente.

$$\mathbf{F}_{\dot{Q}} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \dot{Q} d\Omega \tag{4.26}$$

$$\mathbf{F}_{\bar{q}} = -\int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \bar{q} d\Gamma \tag{4.27}$$

Em modo geral, em problemas de estruturas em condições de incêndio, não se considera a geração interna de calor $\dot{Q}$, e existem somente os fluxos de calor por convecção e radiação. Sendo assim, as parcelas provenientes de tais contribuições são dadas pelas Equações (4.28) e (4.29).

$$\mathbf{H}^e = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \alpha_c d\Gamma \qquad \mathbf{F}_c = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \alpha_c T_\infty d\Gamma \tag{4.28}$$

$$\mathbf{R}^e = \int_{\Gamma} \mathrm{N}^T \mathrm{N} \alpha_r d\Gamma \qquad \mathbf{F}_r = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \alpha_r T_\infty d\Gamma \tag{4.29}$$

Todas as matrizes que compõem o sistema final são constituídas por integrais que dependem de parâmetros físicos e das funções de interpolação. Dependendo da escolha das funções de forma é possível obter as matrizes analiticamente, vide Camargo, Ferreira e Mansur (2015), contudo é usual em elementos finitos utilizar a integração numérica de Gauss.

4.3.2 DISCRETIZAÇÃO DO TEMPO

Para finalizar a modelagem numérica de elementos finitos em problemas térmicos, observa-se no sistema matricial, dado pela Equação (4.21), que existe uma dependência do tempo. Para solução do sistema de equações, pode-se recorrer aos métodos de integração direta, como a família dos métodos θ (REDDY, 1993; COOK; MALKUS; PLESHA, 2007). Uma característica importante é que o intervalo de tempo Δt é constante em toda discretização temporal, conforme ilustra a Figura 16.

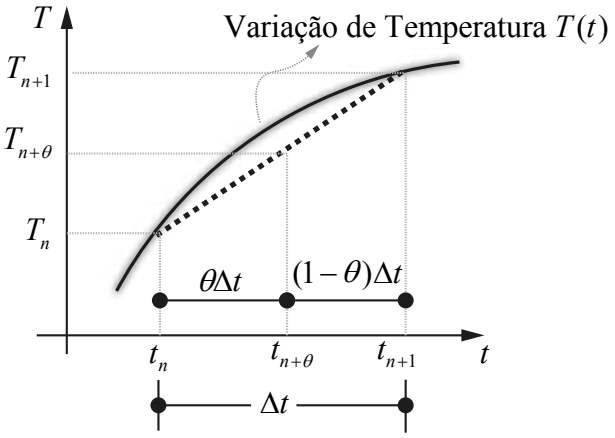

Figura 16 – Característica dos métodos θ com integração direta no tempo

O sistema linear deve ser satisfeito em cada passo de tempo, logo, escreve-se em relação ao passo $t_{n+\theta}$, conforme a Equação (4.30).

$$\mathbf{C}\left.\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}\right|_{n+\theta} + \mathbf{K}\tilde{T}_{n+\theta} = \mathbf{F}_{n+\theta} \tag{4.30}$$

A presença da derivada em relação ao tempo induz um tratamento matemático particular. Neste cenário, é conveniente usar o método das diferenças finitas (MDF) para esse propósito, uma vez que é uma técnica que busca aproximar o operador derivada por expressões algébricas correlacionadas com pontos vizinhos do domínio discreto. Logo, pode-se escrever a Equação (4.31).

$$\left.\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}\right|_{n+\theta} \approx \frac{\tilde{T}_{n+1} - \tilde{T}_n}{\Delta t} \tag{4.31}$$

A partir do método de integração direta, assumindo a variação linear ao longo do passo de tempo, pode-se escrever a temperatura no instante $t_{n+\theta}$, conforme dado pela Equação (4.32).

$$\tilde{T}_{n+\theta} = (1-\theta)\tilde{T}_n + \theta\tilde{T}_{n+1} \tag{4.32}$$

Analogamente à Equação (4.32), escreve-se uma expressão para o vetor de termos independentes, conforme posto na Equação (4.30). Desta forma, reorganizando os termos chega-se na Equação (4.33).

$$\left(\frac{\mathbf{C}}{\Delta t}+\theta\mathbf{K}\right)\tilde{T}_{n+1}=\left(\frac{\mathbf{C}}{\Delta t}-(1-\theta)\mathbf{K}\right)\tilde{T}_{n}+(1-\theta)\mathbf{F}_{n}+\theta\mathbf{F}_{n+1} \tag{4.33}$$

Realizando algumas manipulações algébricas pode-se escrever de forma compacta o sistema final que fornece a temperatura no tempo t_{n+1}, conforme apresentado na Equação (4.34).

$$\hat{\mathbf{A}}\tilde{T}_{n+1}=\hat{\mathbf{B}} \tag{4.34}$$

Onde $\hat{\mathbf{A}}$ é a matriz de coeficientes efetiva e $\hat{\mathbf{B}}$ é o vetor de termos independentes efetivo, onde ambos são expressos nas Equações (4.35) e (4.36), respectivamente. Sendo que a matriz e o vetor efetivo dependem da matriz de capacidade térmica, matriz de condução de calor e vetor de ações térmicas resultantes, vetor nodal de temperatura, bem como os parâmetros de entrada do processo temporal.

$$\hat{\mathbf{A}}=\left(\frac{\mathbf{C}}{\Delta t}+\theta\mathbf{K}\right) \tag{4.35}$$

$$\hat{\mathbf{B}}=\left(\frac{\mathbf{C}}{\Delta t}-(1-\theta)\mathbf{K}\right)\tilde{T}_{n}+(1-\theta)\mathbf{F}_{n}+\theta\mathbf{F}_{n+1} \tag{4.36}$$

O parâmetro θ é um termo que controla em qual instante de tempo a Equação (4.33) é satisfeita. Tal parâmetro pode assumir variações distintas, acarretando em esquemas de integração no tempo diferentes, conforme mostra a Tabela 3.

Tabela 3 – Valores usuais do parâmetro θ

θ	**Método**	**Estabilidade**
0	Euler Explícito	Condicionalmente Estável
1	Euler Implícito	Incondicionalmente Estável
1/2	Trapezoidal/ Crank-Nicolson	Incondicionalmente Estável
2/3	Galerkin	Incondicionalmente Estável

Ressalta-se que os valores ilustrados na Tabela 3 são os valores comuns adotados nas aplicações, contudo, pode-se assumir outros valores dependendo da aplicação de interesse. E nota-se ainda que cada método apresenta uma condição de estabilidade.

4.3.3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Para compreender os detalhes matemáticos e computacionais de problemas com maior exigência física e matemática, deve-se destacar o entendimento e noções iniciais acerca dos modelos matemáticos com algumas simplificações. Sendo assim, a Figura 17 apresenta um algoritmo que objetiva estruturar a implementação do método de elementos finitos, apresentando as principais ideias para a estruturação do programa para a análise de problemas térmicos bidimensionais estacionários. Esse é um problema clássico de engenharia, um modelo puramente difusivo, ou seja, um operador laplaciano bidimensional. Adicionalmente, leva-se em consideração a geração de calor interno dentro do domínio, do fluxo de calor prescrito e do fluxo de convecção na fronteira.

Observa-se que na linha 8 da Figura 17, onde são realizadas as construções das matrizes de elementos finitos, geralmente por simplicidade e automatização do código utiliza-se a integração numérica de Gauss para determinar as matrizes **K** e **F**. Contudo, se o elemento escolhido é constituído de uma formulação matemática simplista é possível realizar, sem esforço matemático, a integração analítica dessas matrizes, como é o caso do elemento triangular de três nós, vide Camargo, Ferreira e Mansur (2015).

Algoritmo 1: Estrutura Geral do Programa - Pseudocódigo

1 **Pré-Processamento**
2 ▷ Leitura de Dados
3 Coordenadas e Conectividade
4 Condutividade Térmica k
5 Condições de Contorno
6
7 **Processamento**
8 ▷ Construção das Matrizes
9 $\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\alpha_c\mathbf{N}d\Gamma$
10 $\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\dot{Q}d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\bar{q}d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\alpha_c T_{\infty}d\Gamma$
11 ▷ Solução do Sistema Linear
12 → Imposição das Condições de Contorno
13 $\mathbf{K}'\{T_i\} = \mathbf{F}'$
14 → Temperaturas nodais T_i
15
16 **Pós-Processamento**
17 ▷ Tratamento de Resultados
18 Campo Térmico $T(x,y)$
19 Verificação de dados
20

Figura 17 – Estrutura do código de calor bidimensional linear em regime estacionário

Nesses problemas estacionários, deve-se ter atenção nas condições de contorno, pois quando as bordas estiverem sujeitas a um potencial prescrito, é imposta tal condição no sistema matricial final. A solução do sistema algébrico linear pode ser executada por meio de métodos diretos, como a eliminação de Gauss e fatoração LU ou métodos iterativos, por exemplo, método de Jacobi, Gauss-Seidel, SOR e gradiente conjugado (CUNHA, 2000).

Em seguida, analisa-se um modelo matemático que busca descrever os problemas de calor bidimensionais transientes. Para melhor entendimento foi elaborado um fluxograma para efetuar a implementação computacional, conforme pode ser exemplificado no algoritmo ilustrado na Figura 18. Em adicional aos problemas estacionários, deve-se acrescentar uma rotina para cada passo no tempo. Observe que a leitura de dados requer a inserção de parâmetros, como o passo no tempo Δt, o tempo final de processamento t_f e o argumento θ.

Algoritmo 2: Estrutura Geral do Programa - Pseudocódigo

1 **Pré-Processamento**
2 ▷ Leitura de Dados
3 Coordenadas dos nós
4 Conectividade das barras
5 Condições de Contorno e Iniciais
6 Propriedades Físicas
7 Parâmetros Temporais $\theta, \Delta t, t_f$
8
9 **Processamento**
10 ▷ Construção das Matrizes
11 $\mathbf{C} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \rho c \mathbf{N} d\Omega$
12 $\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \alpha_c \mathbf{N} d\Gamma$
13 $\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} Q d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \bar{q} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \alpha_c T_{\infty} d\Gamma$
14 ▷ Rotina Temporal Global
15 **para** $t \leftarrow 0$ **até** $t = t_f$ **faça**
16 **se** *t=0* **então**
17 $T_t = T_{inicial}$
18 $T_{t+\Delta t} = T_{inicial}$
19 **senão**
20 ∘ Matrizes Resultantes
21 $\mathbf{K}r = \mathbf{C} + \theta \Delta t \mathbf{K}$
22 $\mathbf{F}_r = (\mathbf{C} - (1-\theta)\Delta t \mathbf{K}) T_t + \Delta t (\theta \mathbf{F}_{t+\Delta t} + (1-\theta)\mathbf{F}_t)$
23 ∘ Solução do Sistema Linear
24 **se** $\bar{T} = f(t,x,y)$ **então**
25 →Atualiza Cond. Essencial
26 **fim**
27 → Imposição CC
28 $\mathbf{K}'_r \{T_{t+\Delta t}\} = \mathbf{F}'_r$
29 → Atualiza variáveis
30 $T_t = T_{t+\Delta t}$ e $\mathbf{F}_t = \mathbf{F}_{t+\Delta t}$
31 **fim**
32 **fim**
33 **Pós-Processamento**
34 ▷ Tratamento de Resultados
35 Curva Temperatura *versus* tempo
36 Campo Térmico $T(x,y,t)$
37 Verificação dos dados
38

Figura 18 – Estrutura do código computacional de transferência de calor linear no domínio bidimensional em regime transiente.

Na linha 10 da Figura 18, mostra-se a construção das matrizes do sistema. É importante ressaltar que caso as propriedades físicas dos materiais variarem com a temperatura e/ou as

condições de contorno do tipo natural variarem com o tempo ou com a temperatura, tais matrizes devem ser realocadas dentro da rotina temporal global. Além disso, deve-se adicionar na construção das rotinas numéricas a matriz de capacidade térmica (ou de amortecimento) devido à presença da derivada de primeira ordem em relação ao tempo no modelo diferencial.

Na linha 14 da Figura 18, caracteriza-se como início do processo temporal, onde inicializa-se os vetores de temperatura no instante t e $t+\Delta t$, sendo igual a temperatura inicial do problema no instante $t=0$. Nos passos de tempo seguintes, calculam-se as matrizes resultantes. Para tanto, realiza-se uma aproximação por diferenças finitas e chega-se nas expressões resultantes da linha 21 e 22. Os detalhes são descritos no item 4.3 da presente pesquisa. Logo, por meio das matrizes $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$ e $\mathbf{F}$, podem-se determinar as matrizes resultantes, também conhecidas como matrizes efetivas.

Uma informação importante é inserida na linha 24 da Figura 18, onde é possível considerar a variação do potencial prescrito ao longo do tempo e posição, ou seja, o potencial não necessita ser constante em toda borda. Desta maneira, realiza-se a imposição das condições de contorno na linha 27 e chega-se ao sistema final. Após a solução do sistema linear, atualizam-se as variáveis e inicia-se outro passo no tempo, esse processo se repete até o tempo atingir o passo final. Por fim, os resultados são analisados comparando com soluções analíticas, computacionais e testes encontrados na literatura, se disponível. Caso a resposta não for satisfatória, deve-se investigar as causas, como a falta de refinamento da malha, o ajuste do incremento temporal, a alteração do argumento θ, a verificação da construção das matrizes elementares e a imposição das condições de contorno.

O algoritmo ilustrado na Figura 19 exemplifica a estrutura do código de transferência de calor bidimensional não linear transiente. Em particular, esse fluxograma é destinado aos problemas voltados para análise térmica de estruturas sob condição de incêndio. O pré-processamento é direcionado pela leitura do arquivo contendo as informações das faces sujeitas ao fogo, não expostas ou isoladas termicamente, e a leitura dos dados referentes à malha de elementos finitos e os parâmetros temporais. O processamento inicia-se na linha 7 do código da Figura 19, inicializando as matrizes elementares e considerando a temperatura de cálculo igual a temperatura ambiente no instante inicial, usualmente adota-se 20 ^{o}C. Inicia-se o processo incremental (*loop* externo) e em cada passo calcula-se a temperatura dos gases e o vetor de carga no instante $t+\Delta t$.

Nesse problema considera-se o comportamento não linear do material, ou seja, a condutividade, o calor e a massa específica que variam com a temperatura. Sendo assim, conforme essas características, acrescenta-se uma rotina iterativa (*loop* interno). Dentro dessa rotina, a solução deve atender um critério de convergência para avançar no passo temporal, conforme um valor de tolerância estabelecido pelo usuário. Vale destacar que, diferentemente dos algoritmos mostrados nas Figuras 17 e 18, não é necessário realizar imposições e tratamentos de condições de contorno essenciais, pois toda a fronteira está sujeita à condição do tipo natural (prescrição de derivada no contorno).

Algoritmo 3: Estrutura Geral do Programa - Pseudocódigo

1 **Pré-Processamento**
2 ▷ Leitura de Dados
3 Coordenadas dos nós e Conectividade das barras
4 Condições de Contorno e Iniciais
5 Parâmetros Temporais $\theta, \Delta t, t_f$
6
7 **Processamento**
8 ▷ Instante Inicial ($t = 0$)
9 → Inicialização das Matrizes
10 ▷ Rotina Temporal Global (Ciclo Incremental Iterativo)
11 **para** $t \leftarrow \Delta t$ **até** $t = t_f$ **faça**
12 ○ Temperatura dos Gases (T_b)
13 ○ Construção do Vetor de Ações Térmicas ($F_{t+\Delta t}$)
14
15 ▷ Rotina Corretiva Local (Ciclo Iterativo)
16 **para** $\varepsilon < tol$ **faça**
17 ○ Definição das Matrizes Resultantes
18 $\mathbf{K}r = \mathbf{C} + \theta \Delta t \mathbf{K}$
19 $\mathbf{F}_r = (\mathbf{C} - (1-\theta)\Delta t \mathbf{K})\, T_t + \Delta t\, (\theta \mathbf{F}_{t+\Delta t} + (1-\theta)\mathbf{F}_t)$
20 ○ Solução do Sistema Linear
21 $\mathbf{K}_r\{T_{t+\Delta t}\} = \mathbf{F}_r$
22 ○ Parâmetro de Convergência
23 $\varepsilon = \| T_t - T_{t+\Delta t} \| / \| T_{t+\Delta t} \|$
24 ○ Recalcular Parâmetros
25 $\rho(T),\ c(T),\ k(T)$
26 $\mathbf{C} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \rho c \mathbf{N} d\Omega$
27 $\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \alpha \mathbf{N} d\Gamma$
28 $\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} Q d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \alpha T_{\infty} d\Gamma$
29 **fim**
30 ○ Atualização de Variáveis
31 → Salva $T_t = T_{t+\Delta t}$ e $\mathbf{F}_t = \mathbf{F}_{t+\Delta t}$
32 **fim**
33
34 **Pós-Processamento**
35 ▷ Verificação e Tratamento de Resultados
36 Curva Temperatura *versus* tempo
37 Campo Térmico $T(x, y, t)$
38

Figura 19 – Estrutura do código computacional de transferência de calor bidimensional não linear em regime transiente aplicado em problemas de estruturas em condição de incêndio

4.4 EXEMPLOS DE VERIFICAÇÃO

A experimentação numérica acerca dos problemas de condução de calor em meios sólidos é dividida em quatro tipos de análise, visando validar e avaliar o comportamento dos módulos computacionais desenvolvidos para análise térmica. Sendo assim, estudam-se os problemas definidos em domínios unidimensionais e em regime transiente, bem como os problemas bidimensionais estacionários e transientes.

Ao fim, realiza-se uma série de testes numéricos associados aos problemas de natureza não linear, provenientes da variação das propriedades físicas dos materiais com a temperatura e a presença da condição de fluxo de radiação atuante no contorno das estruturas. Em cada caso teste os resultados numéricos obtidos são comparados com soluções analíticas, simulações computacionais ou dados experimentais.

4.4.1 PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS TRANSIENTES

Esta seção é destinada aos problemas unidimensionais transientes, considerando as propriedades físicas constantes e um modelo matemático linear. São realizados três experimentos, associado primeiramente ao estudo de uma haste com potenciais prescritos nos contornos, em um segundo momento, realiza-se a análise de uma barra com fluxos prescritos em ambas as bordas e por fim, finaliza-se considerando um problema com uma condição essencial variando com o tempo.

4.4.1.1 Haste com temperaturas prescritas nas bordas

Considere uma haste de comprimento unitário com condições de contorno prescritas iguais a $T(0,t) = 1$ e $T(1,t) = 0$, e condição inicial $T(x,0) = T_0 = 0$, conforme exemplificado na Figura 20. As propriedades físicas são consideradas unitárias. Adota-se para a simulação computacional uma malha unidimensional com 32 elementos lineares. Além disso, considera-se um passo de tempo de 0,005 e o tempo final de análise igual a 0,5. Esse problema também foi tratado via elementos finitos na obra de Kythe e Wei (2011), onde conjuntamente apresenta a solução analítica do problema.

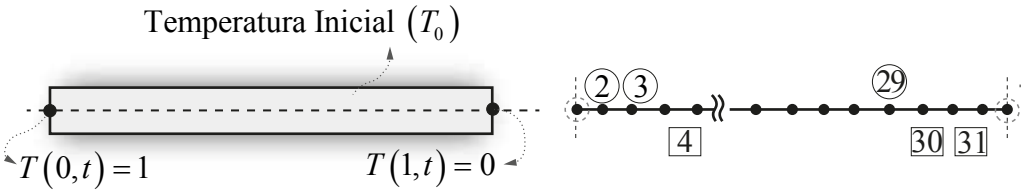

Figura 20 – Haste com temperaturas prescritas (esquerda) e malha unidimensional de elementos finitos (direita)

Na Figura 21 apresenta-se os resultados obtidos com o programa desenvolvido. Primeiramente, é possível observar a distribuição de temperatura ao longo do comprimento da haste para

diferentes níveis temporais até atinge o regime estacionário em torno de $t = 0,5$. Em seguida, realiza-se a validação dos resultados com base na solução exata do problema.

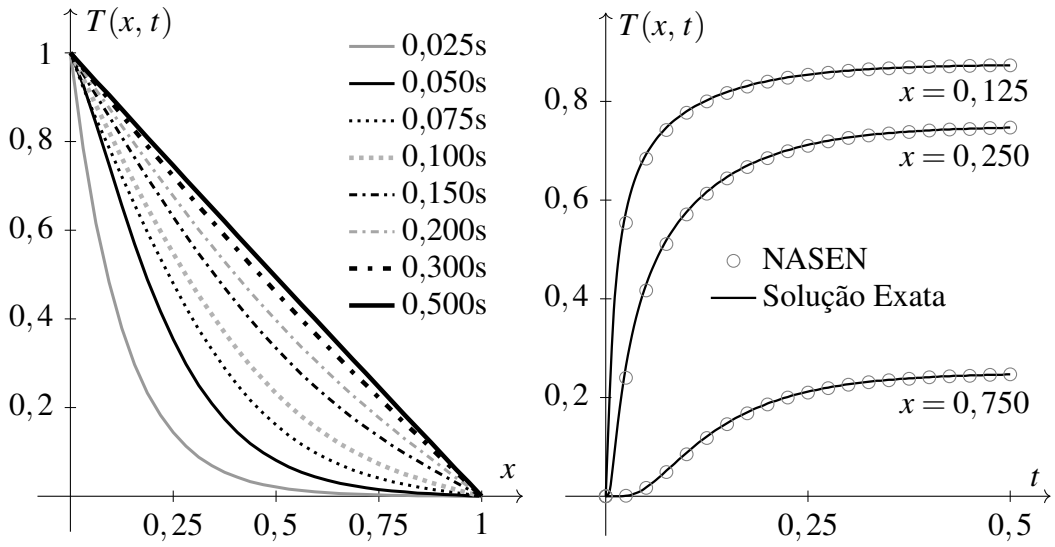

Figura 21 – Distribuição de temperatura ao longo do comprimento da barra (esquerda) e evolução de temperatura com tempo (direita)

Para tanto, mede-se a evolução da temperatura em função do tempo em três posições diferentes da haste, definidas em $x = 0,125$, 0,25 e 0,75 em relação à borda esquerda da peça. Nota-se uma boa aproximação dos resultados obtidos com o programa NASEN em comparação com a solução de referência do problema.

4.4.1.2 Barra com fluxos nas extremidades

Neste problema busca-se solucionar a equação diferencial de natureza parabólica unidimensional $u_t = u_{xx}$, sujeita a uma condição inicial $u(x,0) = 0$ e condições de contorno definidas como $u_x(0,t) = 0$ e $u_x(1,t) = 1$. A solução analítica do problema com tais configurações é conhecida e pode ser facilmente obtidas na literatura clássica, como em Kythe, Schäferkotter e Puri (2002).

As propriedades físicas são consideradas unitárias e adota-se um passo de tempo de 0,05. Inicialmente, comparam-se os resultados numéricos obtidos com os valores exatos do problema, conforme posto na Figura 22, onde verifica-se que as curvas de solução apresentam um comportamento parelho. Posteriormente, devido à natureza das condições de contorno caracterizada pelas prescrições de fluxos em ambas as extremidades, tem-se que a temperatura cresce continuamente nas fronteiras do domínio até atingir um tempo limite predefinido pelo usuário, assumindo uma distribuição de temperatura ao longo da barra semelhante em cada nível de tempo, conforme apresentado na Figura 22.

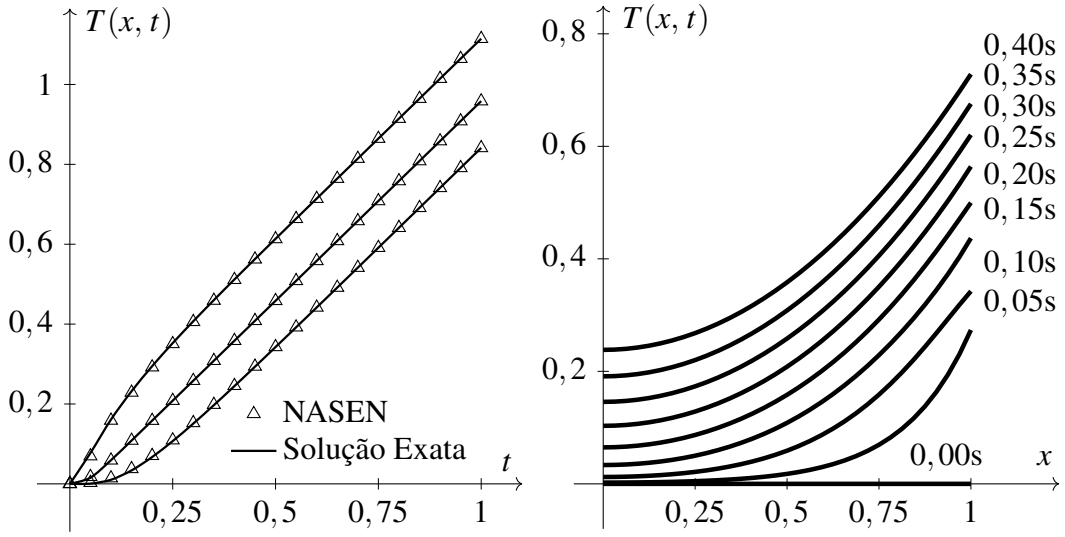

Figura 22 – Comparação de resultados e distribuição de temperatura para 0 até 0,4 segundos

4.4.1.3 *Exemplo de Benchmark*

Estuda-se uma chapa com comprimento de 10 cm mantida a uma temperatura inicial constante ao longo da barra e igual a 0°C, a extremidade esquerda é mantida a temperatura constante e igual a 0°C e na extremidade direita da barra, a temperatura varia com o tempo, respeitando uma função senoidal $100\sin(\pi t/40)$. Huang e Usmani (2012) analisam o mesmo problema com MEF, comparando os resultados numéricos com a solução analítica do problema, onde pode ser encontrada em detalhes em Carslaw e Jaeger (1959).

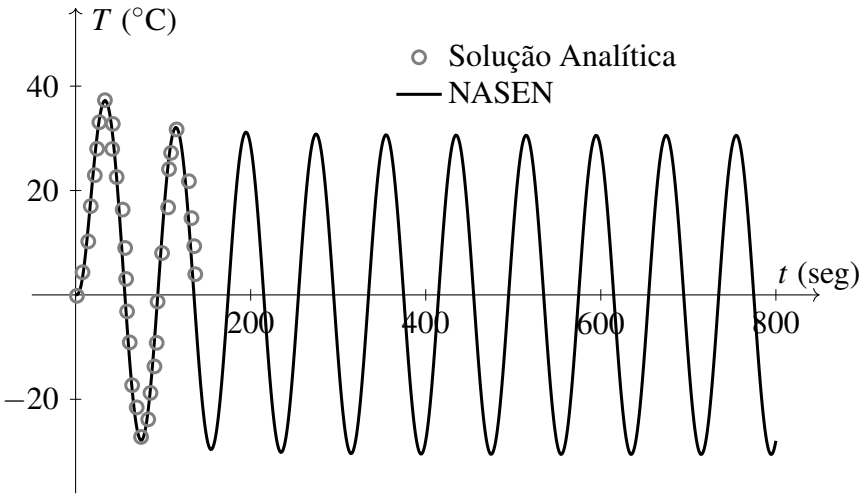

Figura 23 – Evolução de temperatura em $x = 0,8$ m em função do tempo

Em relação às propriedades físicas do meio, tem-se uma massa específica de 7200 $\mathrm{kg/m^3}$, calor específico igual a 440,5 J/kg K e condutividade térmica do material igual a 35,0 W/mK. Os resultados numéricos obtidos com o programa NASEN são medidos em 0,08 m e comparados com a solução exata do problema. Na Figura 23, apresenta-se a evolução da temperatura em função do tempo, onde nota-se um bom comportamento da solução numérica.

4.4.2 PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS ESTACIONÁRIOS

Inicialmente, destaca-se que os problemas em regime estacionário são importantes para construção de uma base conceitual e técnica acerca da aplicação do método dos elementos finitos e do comportamento físico acerca dos problemas de condução de calor em domínios bidimensionais. A implementação computacional desses problemas proporciona a criação de uma base geral para códigos bidimensionais, devido à expansão da estrutura de programação para outros problemas com maiores níveis de complexidades.

Desta forma, o estudo do comportamento térmico em regime estacionário em domínio bidimensional é realizado com dois exemplos, constituído primeiramente por uma chapa triangular com imposições de temperatura e fluxos prescritos nos contornos, em seguida, uma placa em formato de L sujeita ao longo das bordas a temperatura prescrita, fluxos prescritos e convectivos.

4.4.2.1 Chapa triangular com temperaturas e fluxos prescritos

Considere uma chapa com prescrição de dois fluxos de calor atuando na borda inferior e esquerda com valores iguais 4 e 3 respectivamente. Considere a altura h igual a 6 m e a base b igual a 8 m. A face superior da chapa está mantida a temperatura constante, conforme mostra-se na Figura 24. A propriedade física do meio é considerada unitária, ou seja, a condutividade térmica $k = 1$.

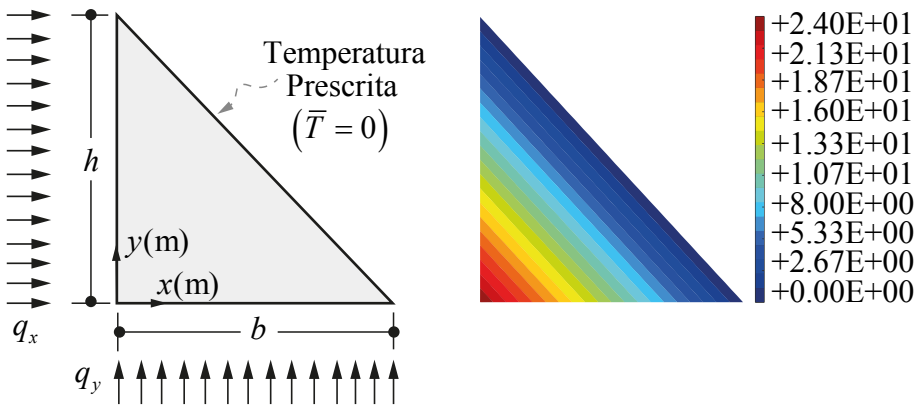

Figura 24 – Geometria e campo de temperatura estacionário (°C) para chapa triangular

A Figura 24 também apresenta a distribuição de temperatura no domínio, onde nota-se a temperatura na diagonal da chapa triangular mantida constante devido à imposição de potencial prescrito nulo na aresta. A temperatura é máxima no canto esquerdo com coordenada $x = y = 0$, de acordo com o sistema cartesiano adotado. Quantitativamente, os resultados das temperaturas, em graus Celsius, são apresentados na Tabela 4.

O problema analisado não apresenta dificuldades numéricas para o método dos elementos finitos, o que traduz os resultados idênticos com a referência adotada, vide Camargo, Ferreira e Mansur (2015). Observe que a solução por meio do modelo numérico atende à condição de

Tabela 4 – Comparação dos resultados obtidos em cada ponto nodal do domínio formado pela chapa triangular

x (m)	y (m)	NASEN	Camargo et al. (2015)
0	0	24	24
4	0	12	12
8	0	0	0
0	3	12	12
4	3	0	0
0	6	0	0

contorno do problema, isto é, todos os nós contidos na aresta diagonal da chapa mantém-se com valores nulos e iguais a condição imposta ao sistema.

4.4.2.2 Placa L sob ação de condições prescritas e de fluxos convectivos

Considere uma placa em formato de L, com altura H igual a 3 cm e a base B igual a 6 cm, submetida à ação de um fluxo de calor prescritos de 8000 W/m^2 no lado esquerdo da borda, e nas faces superiores tem-se um fluxo de convecção com coeficiente igual a 55 W/m^2°C. A borda direita está isolada termicamente e a face inferior é mantida a uma temperatura constante de 110°C, conforme ilustra a Figura 25.

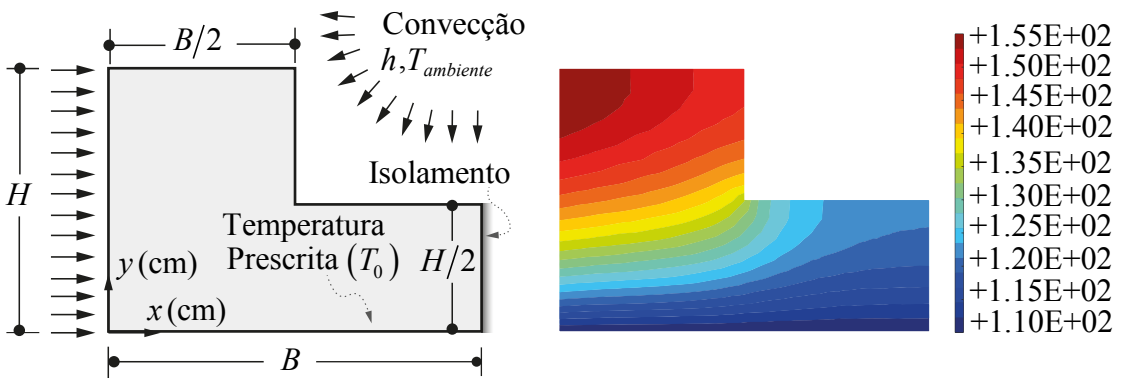

Figura 25 – Geometria e campo de temperatura estacionário (°C) para placa L

Além das condições de fronteira, o problema possui geração interna de calor considerada constante em todo domínio e igual a $5 \cdot 10^6$ W/m^3. O domínio possui uma condutividade de 45 W/m°C e são utilizados elementos triangulares lineares de três nós. Na Tabela 5, mostra-se os resultados obtidos em cada nó da estrutura previamente escolhido.

Os resultados obtidos pelo programa desenvolvido NASEN são comparados com os valores encontra Bhatti (2005) e pela simulação computacional via ANSYS, cujo resultados foram obtidos em Coelho (2012). Desta forma, os resultados da implementação apresentaram uma boa aderência com as referências adotadas, apresentando baixos níveis de erro percentual. Ressalta-se ainda que o erro percentual é medido em relação à solução via ANSYS.

Tabela 5 – Comparação de resultados para placa L

x (cm)	y (cm)	Bhatti (2005)	ANSYS^0	NASEN^1	$\Delta_0^1(\%)$
0,0	3,0	154,96	155,37	155,27	6,50E-02
1,5	3,0	151,23	152,39	152,35	2,76E-02
3,0	3,0	148,67	149,31	149,13	1,21E-01
0,0	1,5	145,43	145,62	145,51	7,76E-02
1,5	1,5	142,52	142,27	142,81	3,83E-01
3,0	1,5	134,87	135,19	135,16	2,51E-02
4,5	1,5	122,44	122,98	123,04	5,04E-02
6,0	1,5	121,09	121,57	121,61	3,54E-02
0,0	0,0	110,00	110,00	110,00	0,0E+00
1,5	0,0	110,00	110,00	110,00	0,0E+00
3,0	0,0	110,00	110,00	110,00	0,0E+00
4,5	0,0	110,00	110,00	110,00	0,0E+00
6,0	0,0	110,00	110,00	110,00	0,0E+00

4.4.3 PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS LINEARES TRANSIENTES

Os casos testes acerca da condução de calor em meios sólidos em regime transiente são realizados a seguir, com base em três exemplos. Inicialmente, busca-se avaliar um problema com condição inicial não convencional, para tanto, uma placa quadrada sujeita a um potencial nulo nas fronteiras com temperatura inicial variando com as coordenadas espaciais no domínio respeitando uma função trigonométrica. Em segundo momento, considera-se um aquecimento assimétrico radial de uma seção anular, e por fim, estuda-se numericamente um bloco quadrado com condições adiabáticas e temperaturas prescritas.

4.4.3.1 Placa quadrada sob condição de potencial nulo na fronteira

Considere uma placa quadrada com lados iguais a 2 m, sujeita a uma condição inicial e de contorno, conforme as Equações (4.37) e (4.38), respectivamente. No tempo $t = 0$ a temperatura da placa varia conforme uma função trigonométrica, que atende as condições na fronteira do domínio.

$$T(x,y,0) = \cos\left[\pi\left(\frac{x-y}{2}\right)\right] - \cos\left[\pi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right] \tag{4.37}$$

$$T(0,y,t) = T(x,0,t) = T(2,y,t) = T(x,2,t) = 0 \tag{4.38}$$

Os resultados são comparados com a solução analítica do problema, encontrada na literatura em Patil e Prasad (2014). Utilizam-se elementos triangulares e a comparação é realizada em cada nó da malha numérica, conforme é apresentado na Figura 26. Salienta-se que não foram inclusos os pontos contidos no contorno, devido a eles serem nulos.

A curva de pontos foi traçada para uma malha com 121 nós, totalizando 200 elementos finitos. Ressalta-se que nessa forma de visualização de resultados, o que importa é avaliar o quão

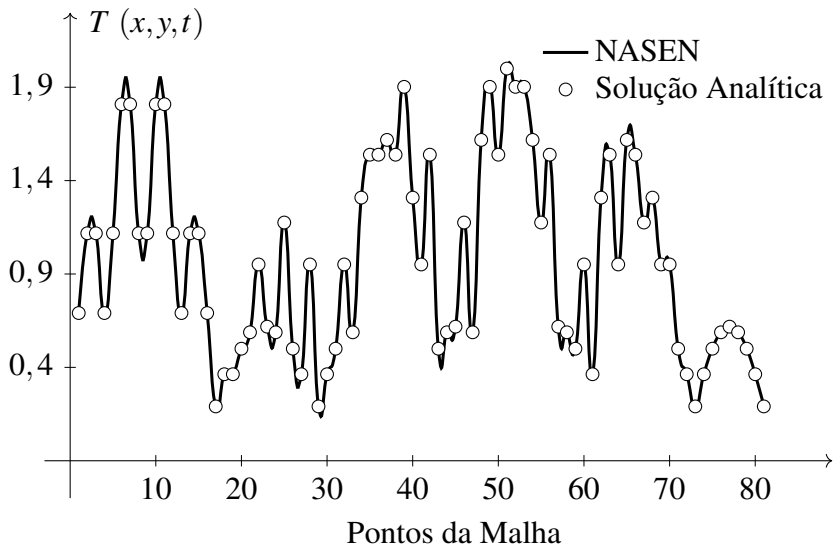

Figura 26 – Comparação entre as soluções numéricas e analíticas em $t = 10$ seg

próximo as soluções encontram-se uma das outras. Medindo o erro percentual médio em relação à solução de referência, chega-se em um valor de aproximadamente $1{,}85 \cdot 10^{-6}\%$.

4.4.3.2 Aquecimento assimétrico radial de uma seção anular

Analisa-se numericamente uma seção circular vazada (ou anular) delimitada pelo arco de 45º e 135º, com raio interno e externo iguais a 1 e 2, respectivamente. As propriedades físicas do material da peça são consideradas unitárias e não há geração interna de calor, conforme posto na Equação (4.39).

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T; \quad 1 < r < 2; \quad \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4};\ t > 0 \\
&T = T(r,\theta,t) \\
&T(1,\theta,t) = 25;\ T(2,\theta,t) = 100 \\
&\frac{\partial T(r,\pi/4,t)}{\partial \theta} = \frac{\partial T(r,3\pi/4,t)}{\partial \theta} = 0 \\
&T(r,\theta,0) = 0
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

As condições iniciais e de contorno são postas nas expressões matemáticas acima, conforme apresentado na Equação (4.39). Observe que não existe nenhum fluxo convectivo e as bordas laterais do domínio anular são mantidas isoladas termicamente. Para a análise do problema utiliza-se uma malha triangular regular com 121 nós e 200 elementos. Os perfis de temperatura são mostrados na Figura 27.

A solução exata do problema pode ser encontrada em Nance (2010). Por meio de uma rápida análise é possível verificar que os resultados indicam o bom desempenho da técnica numérica para cada simulação realizada em níveis temporais distintos.

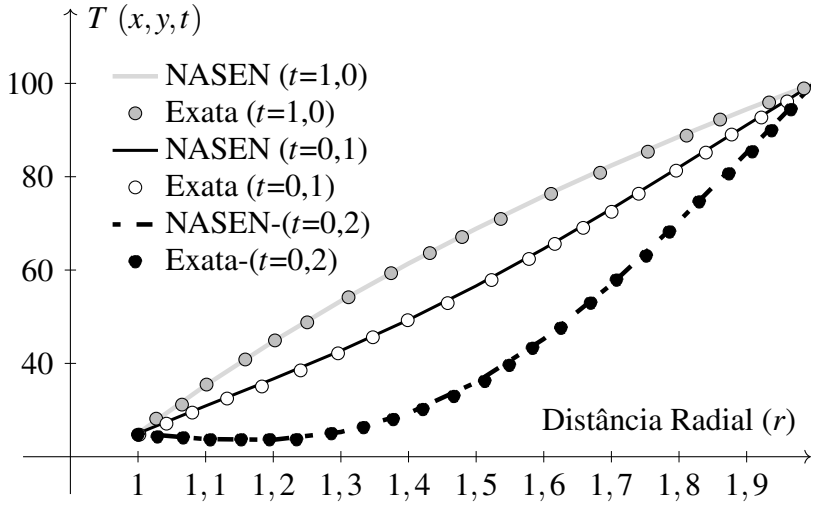

Figura 27 – Comportamento numérico em relação à solução exata para o perfil de temperatura radialmente no tubo para níveis de tempo de 1, 0,1 e 0,2 segundos

4.4.3.3 Bloco quadrado em condições adiabáticas e temperaturas prescritas

Considere um bloco com largura e comprimentos iguais, assumindo as dimensões unitárias. As propriedades físicas, como condutividade, massa e calor específico são também consideradas unitárias.

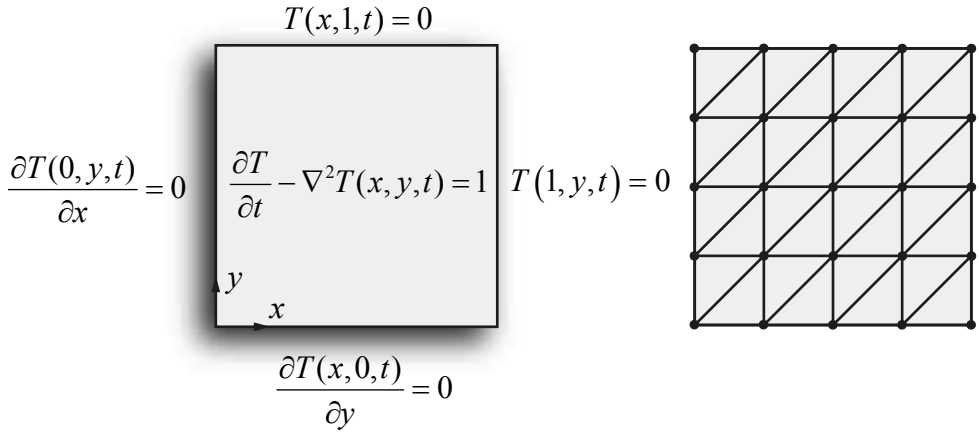

Figura 28 – Condições de contorno do problema (esquerda) e malha numérica constituída por elementos triangulares com 32 elementos e 25 nós (direita)

A borda inferior e a esquerda permanecem isoladas, ou seja, o fluxo é nulo em tais fronteiras, as faces direita e superior são mantidas à temperatura constante e igual a zero. Em tal problema considera-se uma geração interna unitária no domínio. Os resultados são mostrados na Tabela 6, assumindo um incremento temporal de 0,05 segundos em cada passo de tempo.

Considere a solução analítica obtida em Reddy (1993) como referência e comparação dos resultados numéricos. São realizadas duas simulações variando o parâmetro θ, considerando o esquema Crank-Nicolson e Galerkin. Em ambos os casos adota-se uma malha regular de 32

Tabela 6 – Comparação de resultados com a solução analítica

t (s)	Solução Exata	NASEN $\theta = 2/3$	NASEN $\theta = 1/2$
0,05	0,0500	0,0498	0,0500
0,10	0,1000	0,0976	0,0993
0,15	0,1400	0,1400	0,1443
0,20	0,1750	0,1746	0,1798
0,25	0,2050	0,2019	0,2067
0,30	0,2250	0,2234	0,2283
0,35	0,2420	0,2403	0,2445
0,40	0,2550	0,2535	0,2574
0,45	0,2670	0,2639	0,2672
0,50	0,2750	0,2720	0,2749
0,55	0,2810	0,2784	0,2808
0,60	0,2860	0,2833	0,2855
0,65	0,2880	0,2872	0,2890
0,70	0,2906	0,2903	0,2918
0,75	0,2910	0,2927	0,2939
0,80	0,2915	0,2945	0,2956
0,85	0,2920	0,2960	0,2969
0,90	0,2924	0,2972	0,2979
0,95	0,2930	0,2981	0,2987
1,00	0,2947	0,2988	0,2992

elementos. Os resultados apresentaram uma boa concordância com a solução exata, mesmo para uma malha pouca refinada.

4.4.4 PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS NÃO LINEARES TRANSIENTES

Nesta seção é apresentado inúmeros casos térmicos de natureza não linear e regime transiente. Considera-se que as propriedades físicas variem com a temperatura. Sendo assim, inicialmente, estudam-se dois casos testes, caraterizados por um muro infinito com fluxo prescrito e propriedades variando linearmente com a temperatura, e em seguida uma placa infinita com temperatura prescrita constante e variando com o tempo no contorno e a condutividade térmica do material varia em função da temperatura.

Posteriormente, no contexto de incêndio estuda-se uma série de exemplos destinados ao comportamento térmico de estruturas de aço, concreto e mistas de aço e concreto sujeita à ação do incêndio.

4.4.4.1 Muro infinito com fluxo prescrito

A Figura 29 representa um domínio retangular bidimensional em que todas as faces estão isoladas termicamente, exceto a face esquerda em $x = 0,0$ m, onde existe um fluxo prescrito

constante igual a $1,0$ W/m^2. Esse problema é caracterizado pelo comportamento não linear, devido as propriedades físicas variarem com a temperatura.

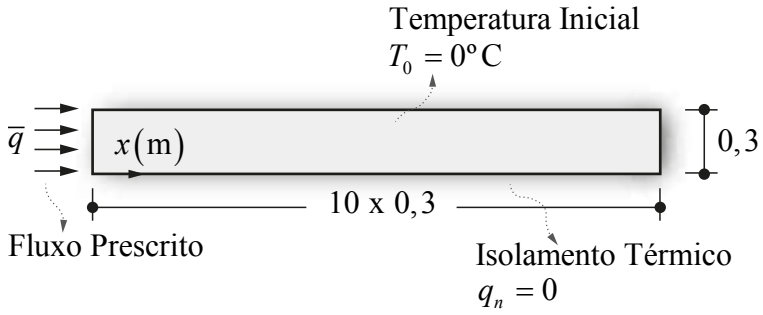

Figura 29 – Condições de contorno e dimensões do muro infinito sujeito a um fluxo prescrito

A condutividade térmica e a capacidade calorífica do material variam linearmente com a temperatura, respeitando a função $1+0,5T$. A temperatura inicial é considera constante ao longo de todo domínio e igual a 0°C. Esse problema também foi previamente estudado em Vila Real (1988) e Orivuori (1979), bem como a solução analítica do problema pode ser consultada em detalhes em Segal e Praagman (1986).

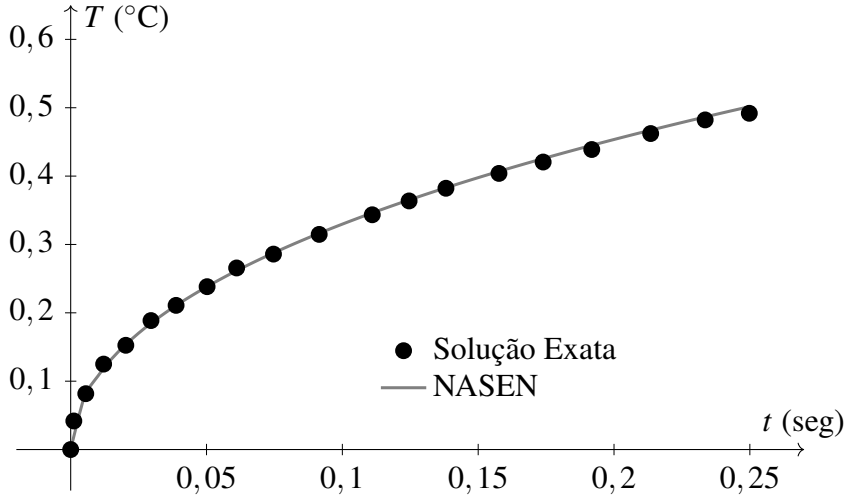

Figura 30 – Evolução da temperatura no ponto $x = 0{,}0$ m contido no muro infinito

Convém frisar que, devido as configurações das condições de contorno, esse problema apresenta um comportamento de condução de calor unidimensional por causa do isolamento lateral imposto ao domínio. Sendo assim, comparam-se os resultados com a solução analítica em relação à evolução da temperatura ao longo do tempo para um ponto medido na face esquerda do domínio, situado em $x = 0.0$ m. Na Figura 30, apresenta a curva numérica e a resposta exata do problema, onde observa uma boa proximidade entre as soluções.

4.4.4.2 Placa infinita mantida a temperatura prescrita na fronteira

Este exemplo trata-se de uma condução de calor em uma placa infinita com a condutividade térmica do material variando linearmente com a temperatura, respeitando a função

$k = 2 + 0,1T$, em W/m°C. A capacidade calorífica é mantida constante e igual a $\rho c = 8{,}0$, em Ws/m^3°C. Esse problema foi tratado também em Damjanic e Owen (1982), Owen e Damjanic (1981), Damjanic (1983) e Aguirre-Ramirez e Oden (1973). O domínio é simplificadamente representado por um retângulo associado com as condições de contorno do tipo essencial aplicadas nas fronteiras, conforme ilustrado na Figura 31.

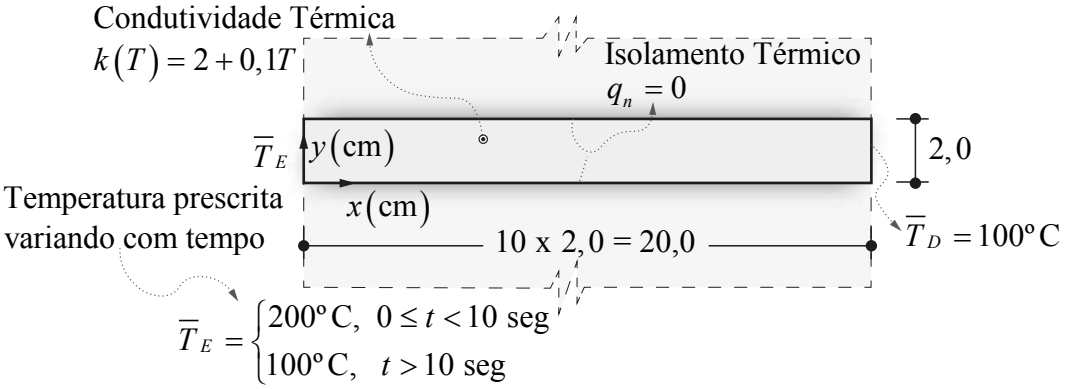

Figura 31 – Dimensões, características e condições de contorno da placa infinita

A face direita do domínio é mantida à temperatura constante e igual a 100°C, enquanto a temperatura prescrita na face esquerda varia com o tempo, assumindo um valor constante de 200°C até 10 s, quando nos instantes seguintes há uma mudança súbita de temperatura para 100°C. Em relação à condição inicial do problema considera-se uma temperatura inicial da placa igual a 100°C.

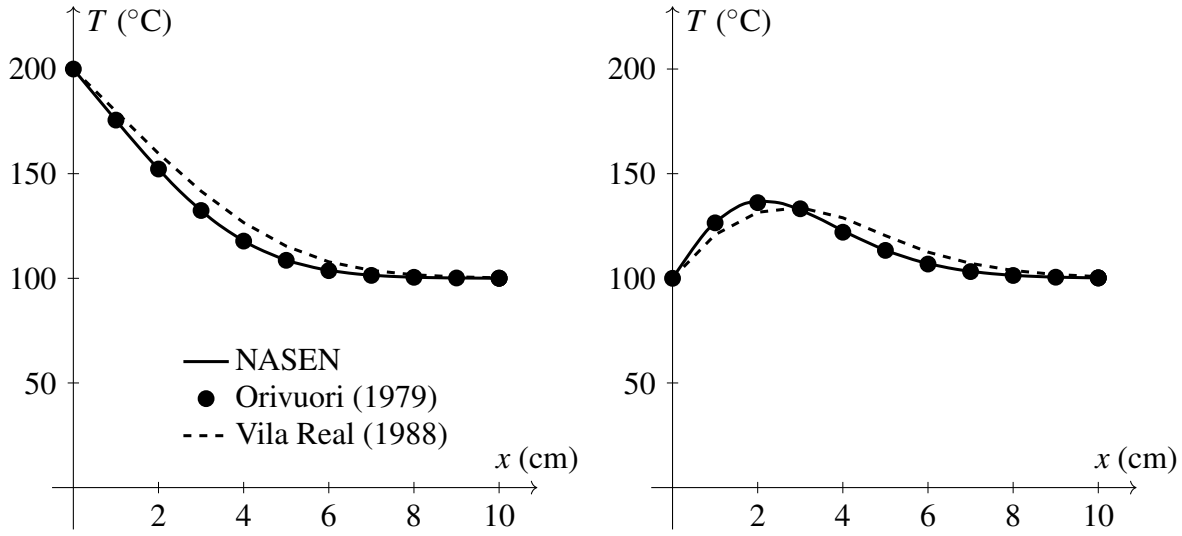

Figura 32 – Perfil de temperatura da placa infinita ao fim de 10 s (esquerda) e 13 s (direita)

Cabe ressaltar que esse problema apresenta duas características importantes e significava na reposta numérica. Primeiramente, a condutividade varia com a temperatura, tornando o problema não linear. Em um segundo momento, devido à presença de uma descontinuidade na condição de contorno, gerando dificuldades no tratamento numérico. Os resultados são

apresentados, em forma gráfica, com a distribuição de temperatura ao longo do eixo x da placa para um nível temporal de 10 s e 13 s, conforme mostrado na Figura 32. Observa-se que o programa desenvolvido NASEN apresenta resultados com uma boa concordância em relação à solução de Orivuori (1979), e ligeiramente diferente da solução de Vila Real (1988).

4.4.4.3 Viga retangular de concreto

O primeiro exemplo da análise térmica não linear de estruturas em situação de incêndio considere é o caso clássico de uma viga de concreto de altura H e largura L sujeita a um aquecimento na face inferior, direita e esquerda, conforme mostra a Figura 33. Verifica-se duas configurações distintas, em ambas, a temperatura dos gases ao redor da estrutura é modelada pela curva de incêndio padrão ISO 834:1999. Na primeira configuração, adota-se as dimensões genéricas de 600x300 mm e utiliza-se a simetria física e geométrica do problema, ou seja, analisa-se somente metade da viga. Além disso, a umidade no concreto é negligenciada.

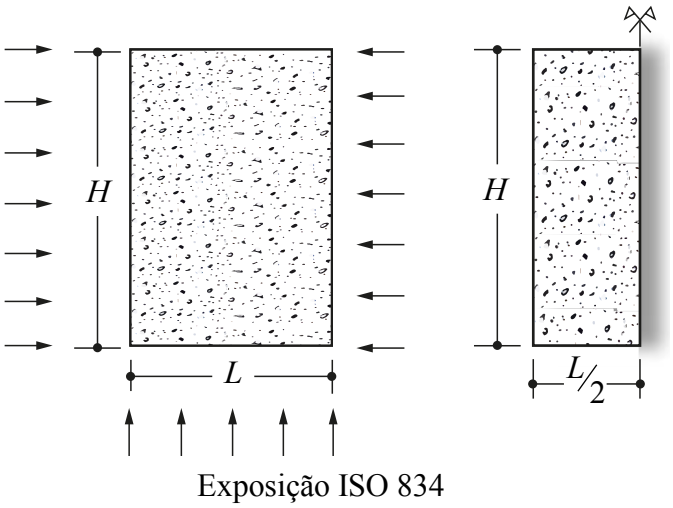

Figura 33 – Geometria e faces expostas da viga retangular de concreto

Os resultados do presente trabalho são comparados com o programa *Caltemi*, vide Figueiredo Júnior (2002). As propriedades físicas do concreto variam com a temperatura, logo, deve-se utilizar as expressões que descrevem tal comportamento, adotando as Equações (3.9), (3.10) e (3.12). A Figura 34 apresenta os perfis de temperatura obtidos nos seis pontos, localizados no meio da viga ($H/2$), com um espaçamento entre cada ponto de $L/10$.

Os resultados obtidos pelo programa NASEN apresentam boa concordância com o programa *Caltemi*. Nota-se que a temperatura cresce do centro até a superfície exposta, os pontos próximos à superfície externa apresentam maiores valores de temperatura. Sendo assim, a segunda configuração estudada é definida com as dimensões de 20x50 cm. Em relação aos parâmetros físicos, utiliza-se um concreto de 1,5% de teor de umidade e para as faces expostas à convecção e radiação, adota-se uma emissividade de 0,7 e um coeficiente de convecção de 25 W/m^{2}ºC. A temperatura ambiente da estrutura é igual a 20°C. Foram utilizadas duas malhas de elementos finitos, sendo que a simulação I é composta de uma malha grossa e a simulação II

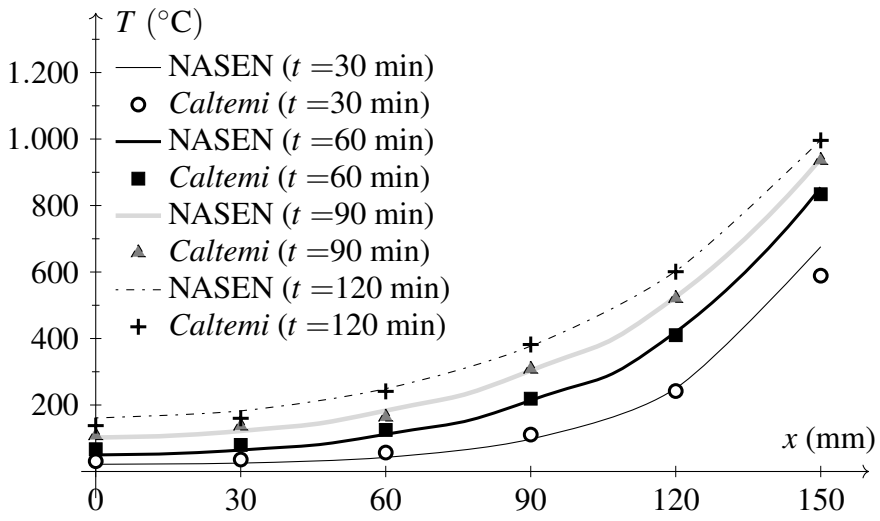

Figura 34 – Variação de temperatura em torno da linha central para níveis de tempos de exposição 30, 60, 90 e 120 min

possui uma malha refinada, sendo, respectivamente, malhas de 37 e 243 elementos. A Figura 35 mostra os resultados obtidos com cada malha proposta.

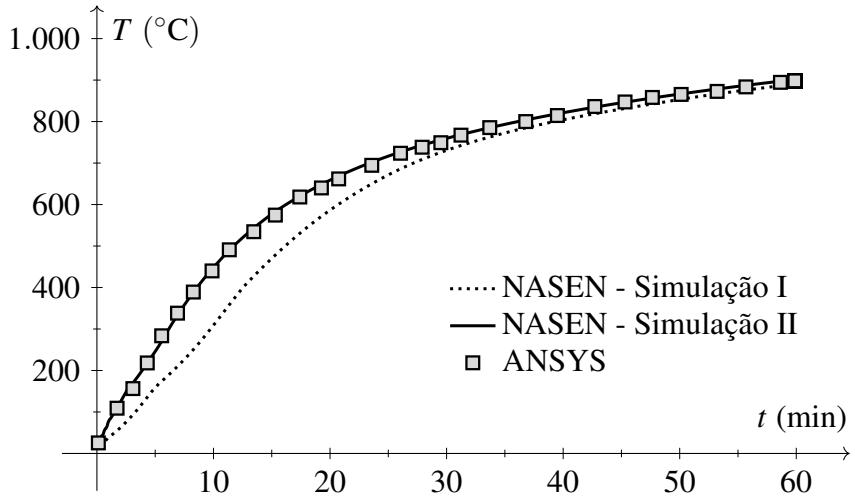

Figura 35 – Comparação entre as curvas de temperatura obtida via NASEN e ANSYS

Os resultados são comparados com o programa de simulação computacional ANSYS, sendo que os dados foram obtidos em Pierin, Silva e Rovere (2015). Nota-se na Figura 35 que, mesmo para a malha grossa os resultados, após aproximadamente 30 min, começa coincidir com os resultados de referência. A malha refinada apresenta resultados consistentes e bem próximos com programa ANSYS em toda evolução temporal.

4.4.4.4 Pilar quadrado de concreto

O próximo problema relacionado as estruturas de concreto é composto por um pilar quadrado de 30x30 cm e aquecido por todos os lados, conforme mostra a Figura 36. O teor de

umidade do concreto é igual a 1,5% de peso, a emissividade de 0,7 e o coeficiente de convecção igual a 25 W/m^{2}ºC.

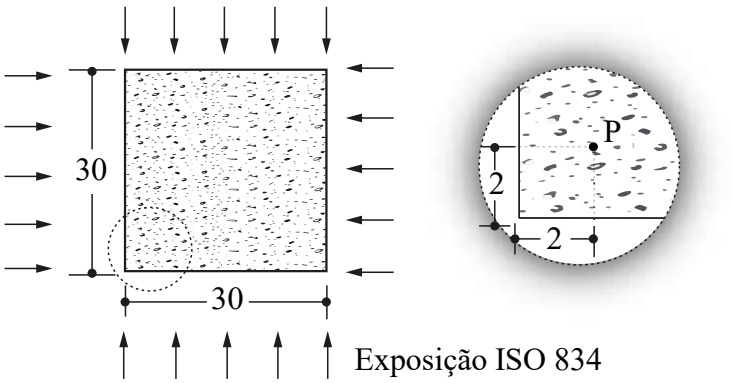

Figura 36 – Seção transversal de concreto exposta ao incêndio (em cm)

Os resultados são direcionados com base no ponto P, onde são realizadas as medições de temperatura ao longo do tempo de exposição ao fogo.

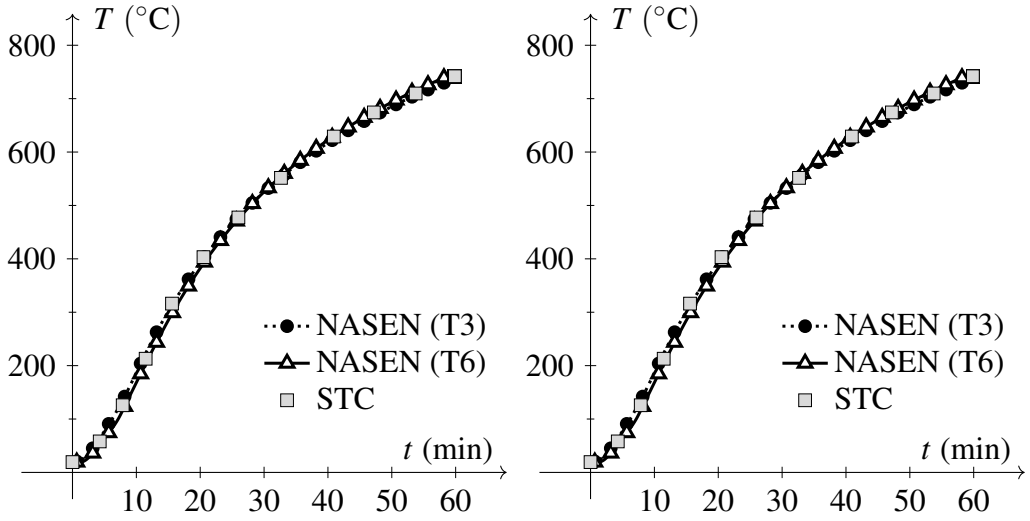

Figura 37 – Avaliação do comportamento dos elementos finitos dos tipos T3, T6, Q4 e Q9 em relação à variação da temperatura no ponto P do pilar de concreto

Na Figura 37 realiza-se testes com elementos triangulares de 3 e 6 nós, e elementos quadrados de 4 e 9 nós. Em todos os casos são comparados com o programa STC, vide Pierin (2011). Em relação aos resultados, as curvas possuem um comportamento bem direcionado em comparação com o modelo de referência, confirmando a boa aderência e implementação dos procedimentos de elementos finitos.

4.4.4.5 Laje maciça de concreto

Analisa-se numericamente uma laje maciça de espessura h_c, sendo um importante elemento estrutural na construção civil. Para análise térmica, considera-se a laje exposta ao fluxo combinado de radiação e convecção na face inferior. Adota-se que as laterais da laje estão

isoladas termicamente e tal consideração torna o problema unidimensional. Para esse problema foram analisados dois casos, utilizando duas espessuras para a laje. A primeira situação, estudada também em Figueiredo Júnior (2002), é uma laje com espessura igual a 100 mm.

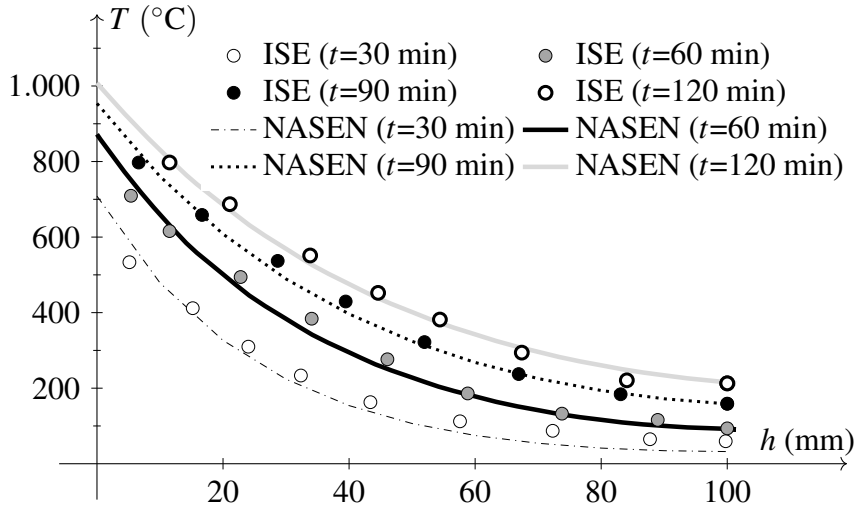

Figura 38 – Perfis de temperatura ao longo da espessura da laje de 100 mm para 30, 60, 90 e 120 minutos de exposição ao incêndio

Conforme pode ser visto na Figura 38, os resultados obtidos pelo programa de elementos finitos são comparados com a literatura, vide ISE (1978). O perfil de temperatura é determinado para os níveis temporais de 30, 60, 90 e 120 minutos e nota-se que os valores numéricos obtidos via MEF possui um bom ajuste com a literatura.

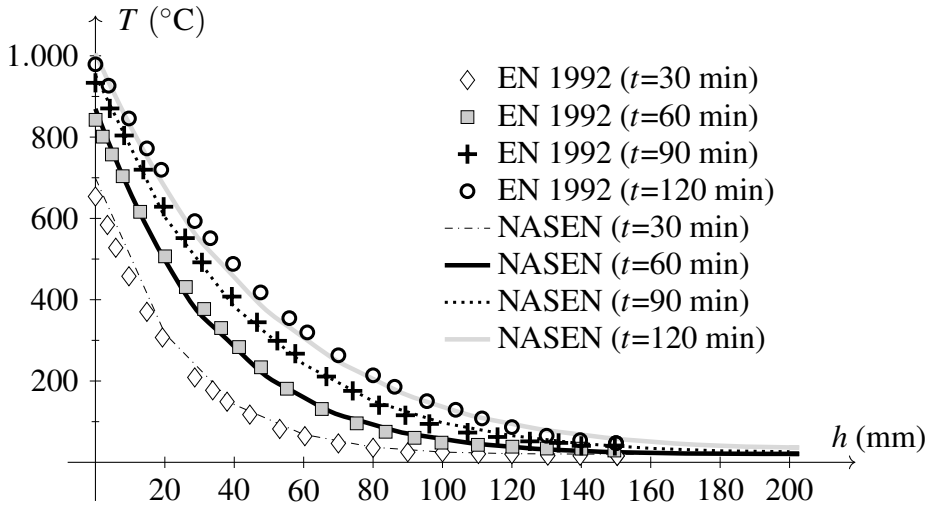

Figura 39 – Variação da temperatura ao longo da espessura da laje de 200 mm para 30, 60, 90 e 120 minutos de exposição ao fogo

Sendo assim, na segunda configuração, adota-se uma laje com espessura de 200 mm e utiliza-se os resultados obtidos em EN 1992-1-2:2004 para comparação. Na Figura 39 mostra-se os perfis de temperatura ao longo da altura da laje. Percebe-se também que, os resultados

numéricos possuem uma regularidade quando comparados com a solução de referência. Observa-se ainda que para tal espessura, em um ponto contido na superfície não exposta ao incêndio, todas as curvas apresentam valores próximos à temperatura ambiente, ou seja, a laje necessita de um tempo de exposição maior para que a face não exposta alcance valores significativos de temperatura.

4.4.4.6 Laje nervurada em T de concreto

No presente modelo numérico busca-se analisar uma laje nervurada de concreto em forma de T, considerando um concreto de 1,5% de teor de umidade. As dimensões, em centímetros, são ilustradas na Figura 40 e a laje está sujeita ao fluxo combinado de radiação e convecção somente nas faces inferiores, sendo que a face superior é mantida à temperatura ambiente.

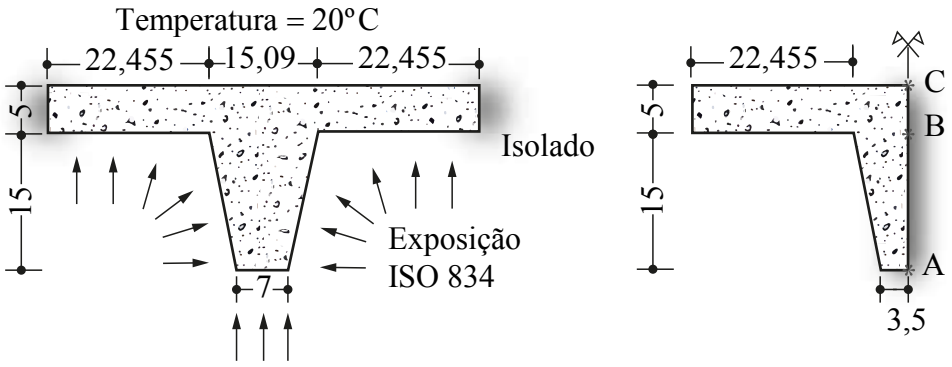

Figura 40 – Condições de contorno e dimensões da laje nervurada de concreto

Devido à simetria física e geométrica é possível modelar somente metade do domínio do problema, o que garante um menor custo computacional para execução da simulação. A evolução de temperatura é medida nos pontos A, B e C, contidos na linha de simetria.

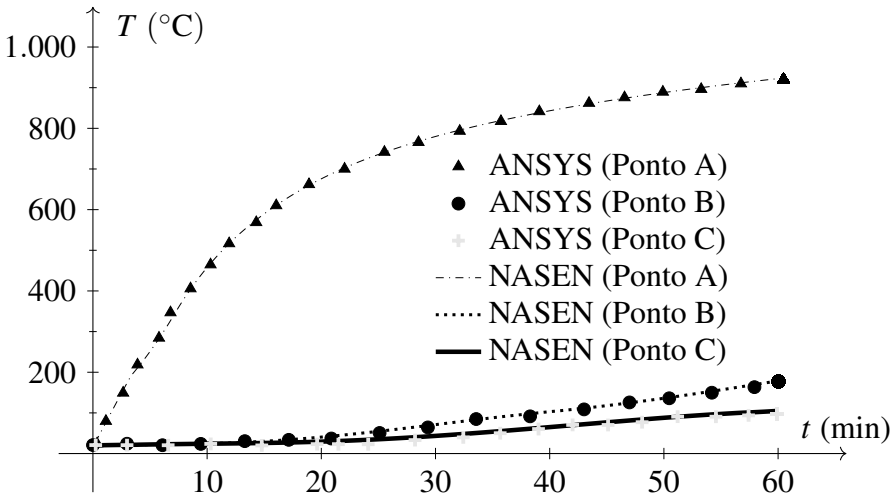

Figura 41 – Curva de temperatura relativo aos pontos A, B e C da laje nervurada

Nesse problema utiliza-se um elemento quadrilátero de 9 nós e para comparação toma-se os dados numéricos encontrados em Pierin, Silva e Rovere (2015). A Figura 41 apresenta a

variação da temperatura nos três pontos contidos na linha de simetria. Pode-se observar que os resultados apresentam uma boa semelhança com os dados numéricos de comparação.

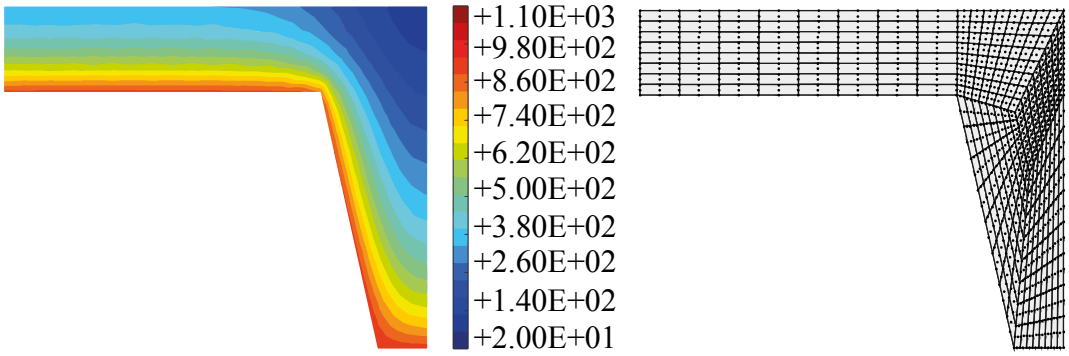

Figura 42 – Campo térmico em $t = 60$ min (em °C) e malha de elementos quadriláteros de 9 nós para laje de concreto nervurada em T

Para facilitar o entendimento e visualização dos resultados, é comum plotar o campo de temperatura para um dado passo temporal, a fim de verificar onde ocorrem os pontos e regiões de maior aquecimento na estrutura. Desta forma, a Figura 42 ilustra o campo térmico da metade da laje nervurada e a malha de elementos finitos. É possível visualizar que na face esquerda e direita o campo deve ser perpendicular à aresta, por causa da imposição de uma condição de isolamento. As faces inferiores da laje apresentam maiores valores de temperatura por conta do contato direto com o fogo.

4.4.4.7 Pilar de concreto armado

Estruturas de concreto são usualmente utilizadas na construção civil, contudo, o comportamento do concreto apresenta baixa capacidade de resistência à tração, não atendendo todos os requisitos de segurança. Desta forma, utiliza-se a inserção de armaduras de aço para melhorar o desempenho do elemento. Neste contexto, considera-se um pilar de concreto armado sujeito à ação de uma carga térmica de incêndio atuando em todas quatro faces do pilar.

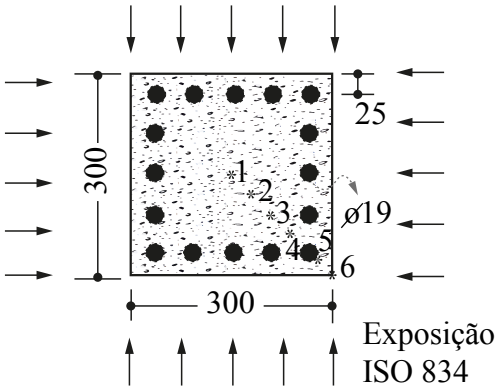

Figura 43 – Pilar de concreto armado quadrado sujeito a cargas térmicas nas quatro faces, dimensões em mm

A Figura 43 mostra as dimensões do pilar de 300x300 mm, as armaduras de diâmetro de 19 mm e o cobrimento 25 mm. Para avaliar o desempenho do programa desenvolvido na presente pesquisa foram utilizados os resultados do programa *Thersys*, obtidos em Ribeiro (2004).

A Figura 44a mostra os perfis de temperatura ao longo da linha diagonal composta pelos pontos 1 ao 6 para o intervalo de tempo de 30 min até 120 min de exposição ao incêndio padrão. A comparação entre os programas é realizada em cada ponto, onde os resultados numéricos possuem boa concordância. Os pontos 1 e 6 apresentam em relação a todos os níveis temporais um erro percentual médio de, aproximadamente, 1,5% e 0,5% em comparação com *Thersys*. Contudo, mesmo que os resultados apresentem um bom resultado, como apresenta a Figura 44a, deve-se atentar ao fato que nas simulações realizadas foram adotadas algumas simplificações para o concreto, como a massa específica constante e o teor de umidade desprezado.

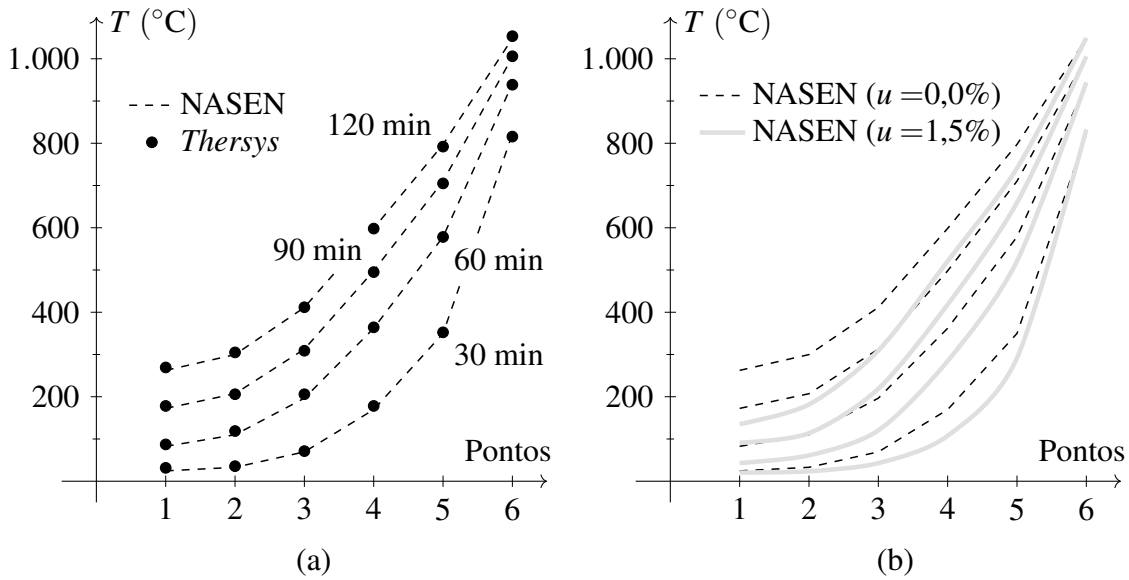

Figura 44 – Perfil de temperatura ao longo dos pontos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 contidos na diagonal do pilar de concreto armado e comparação entre modelos numéricos com e sem umidade

A Figura 44b apresenta uma comparação entre o modelo simplificado ($u = 0{,}0\%$) e o modelo numérico considerando um teor de umidade de 1,5% em peso e todas as propriedades variando com a temperatura. Nota-se que os valores apresentam uma divergência significativa entre os modelos, contudo, em todos os tempos de exposição, os valores no ponto 6 apresentam resultados semelhantes.

4.4.4.8 Viga de concreto armado

A viga de concreto com armaduras de aço é um elemento frequentemente utilizado na construção civil. Nesta linha, busca-se analisar dois casos com resultados experimentais a fim de obter maior proximidade com a resposta real do problema. A primeira configuração é uma viga quadrada de 200x200 mm com oito armaduras de diâmetro de 16 mm, sendo exposto ao

incêndio padrão modelado pela curva ISO 834:1999 em três lados da seção transversal, como é representado no lado esquerdo da Figura 45.

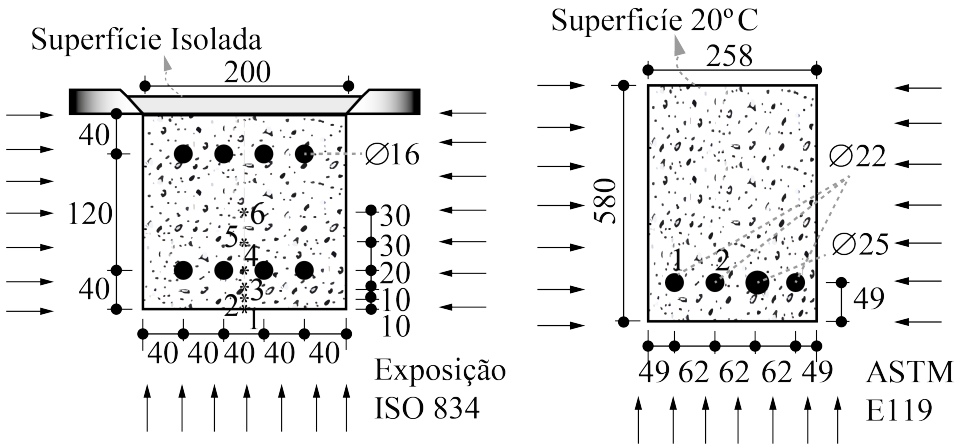

Figura 45 – Viga de concreto armado com oito armaduras (esquerdo) e com quatro armaduras na face inferior (direta), dimensões em mm

Os resultados são comparados com dados experimentais, fornecidos em Haksever e Anderberg (1982), e simulações numéricas obtidas no trabalho de Capua e Mari (2007). O estudo possui duas etapas, inicialmente, adota-se as propriedades para um concreto seco e, posteriormente, admite-se um concreto com umidade.

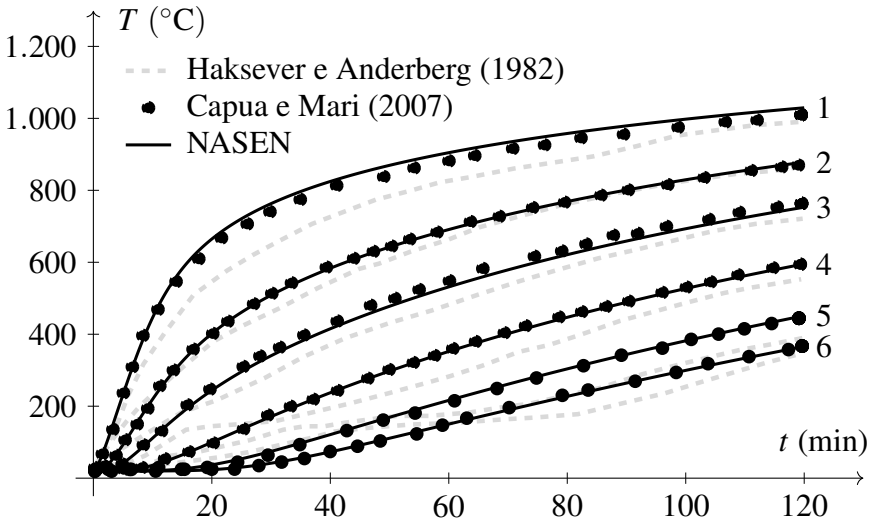

Figura 46 – Comparação entre os resultados, admitindo o concreto seco.

Os resultados apresentados na Figura 46 evidenciam a conformidade dos resultados obtidos quando comparados com os dados numéricos de referência. Em relação aos pontos analisados, os níveis de temperatura são maiores no ponto 1, pois este está localizado na superfície em contato direto com o fogo. Note que o modelo para concreto seco apresenta bons resultados iniciais quando comparados com os resultados experimentais. Nesta linha, realiza-se uma nova simulação considerando a umidade no concreto com um um teor de umidade de, aproximadamente, igual a 0,06.

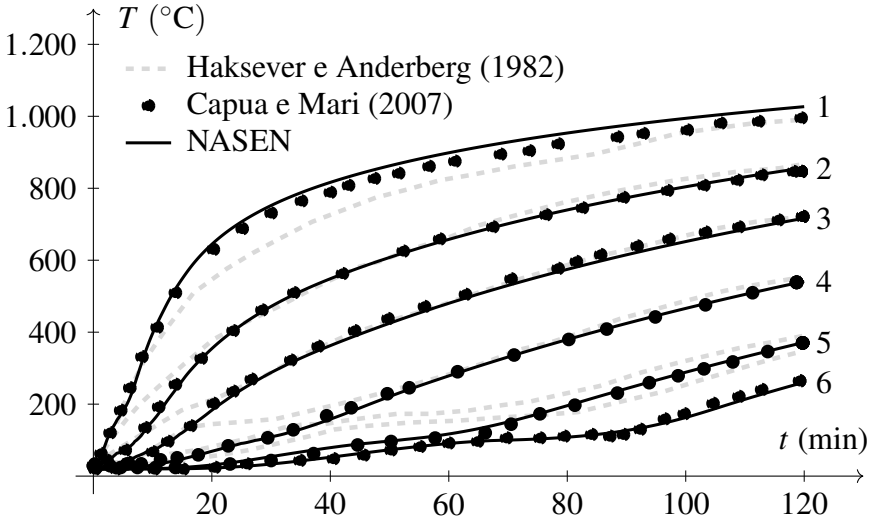

Figura 47 – Comparação entre os resultados obtidos no presente trabalho com dados experimentais e numéricos, admitindo o concreto com umidade.

Quando se considera o teor de umidade do concreto no modelo numérico, os resultados são próximos aos dados via simulação numérica, contudo, os pontos 1, 2, 3 e 4 apresentam melhores níveis de temperatura, caracterizando resultados mais próximos aos dados experimentais, conforme mostra a Figura 47. Veja que os pontos 5 e 6 apresentaram resultados com certa divergência na solução, esse comportamento pode ser pelo fato de não considerar a migração da umidade no interior do concreto.

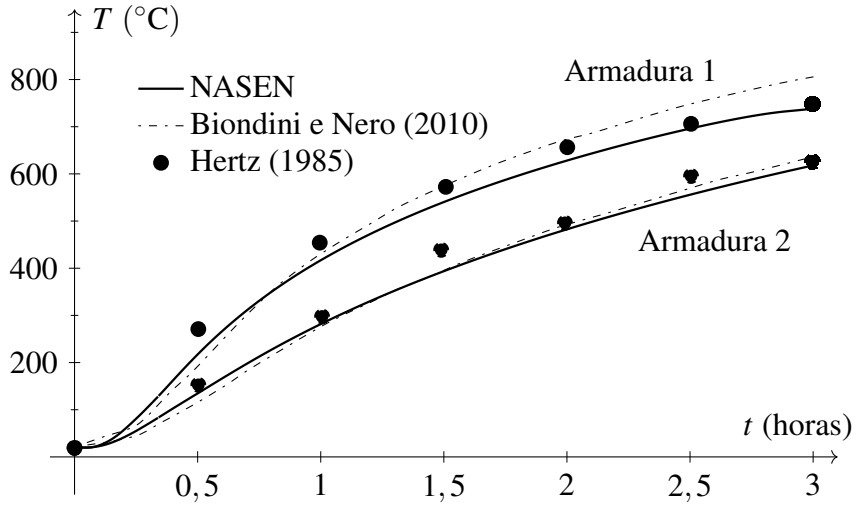

Figura 48 – Resultados da evolução de temperatura na barra de aço 1 e 2 da viga de concreto armado em condição de incêndio

A segunda configuração é destinada a uma viga retangular de 258x580 mm, com três barras de 22 mm e uma barra com 25 mm de diâmetro, localizadas na parte inferior da viga a uma distância de 49 mm da superfície externa. Nesse problema específico, os resultados experimentais foram ensaiados seguindo a curva de incêndio ASTM E119, conforme a Equação (3.2). As medições experimentais podem ser extraídas no trabalho de Hertz (1985).

O desenvolvimento computacional via elementos finitos também foi comparado com resultados numéricos para avaliação de performance, vide Biondini e Nero (2010). A Figura 48 ilustra as curvas de temperatura em função do tempo de exposição ao fogo para valores medidos nos pontos 1 e 2. Os resultados apresentam uma boa aderência com as medições em laboratório, onde se tem um erro médio percentual da barra 1 e 2 em comparação ao experimento em torno de 4,6% e 3,5%, enquanto para o modelo da literatura chega-se a valores próximos de 7,8% e 8,2%, representando que a solução do presente trabalho é mais eficiente.

4.4.4.9 Laje nervurada com preenchimento de bloco de concreto celular

Neste exemplo, considera-se uma laje de concreto nervurada, com bloco de concreto celular com a base da nervura apoiada em uma chapa de aço com espessura igual 1,95 mm. A laje tem somente um lado em contato com os fluxos de convecção e radiação, como exposto na Figura 49.

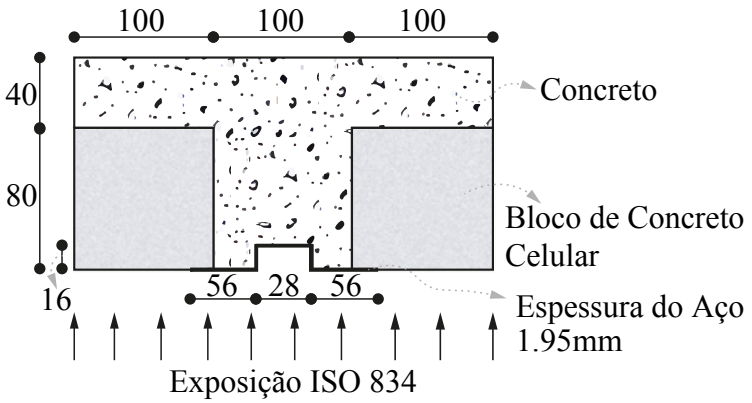

Figura 49 – Esquema e condições para laje nervurada, medidas em mm.

As propriedades do concreto e aço já são conhecidas e adota-se um concreto com um teor de umidade de 1,5% em peso. As propriedades do bloco celular são consideradas constantes, ou seja, não variam com a temperatura. Assumindo os valores conforme apresentado em Pierin e Silva (2014), a massa e o calor específico são iguais a 300 kg/m^3 e 850 J/kg^{o}C, respectivamente, e a condutividade térmica de 0,3 W/m^o C. A Tabela 7 mostra os resultados das temperaturas máximas e médias na face superior da laje para diferentes valores de tempo de exposição.

Esses valores são comparados com os dados do programa *Super TempCalc*, extraídos no trabalho de Pierin e Silva (2014). Observa-se que a maior diferença de temperatura entre os modelos é em torno de 3,472°C, mostrando uma boa aproximação para o problema. O perfil de temperatura ao longo da aresta pode ser visto na Figura 50.

Observa-se que para 30 min de exposição, a temperatura fica próxima do ambiente (20°C) e mantém-se aproximadamente constante. Com o avanço do tempo, nota-se que as maiores temperaturas se formam na região da nervura. Esse comportamento é por conta da presença do bloco de concreto celular na região fora da nervura, atuando como uma proteção.

Tabela 7 – Valores de temperatura na face superior da laje

Valores de Temperatura (°C)	**Tempo de Exposição ao Incêndio (min)**					
	30	60	90	120	150	180
$T_{\text{num}}^{máx}$	29,18	70,40	113,14	161,41	206,89	242,97
$T_{\text{ref}}^{máx}$	28,90	69,50	115,20	159,90	204,10	239,50
$\lvert\Delta T\rvert$ (°C)	0,280	0,898	2,060	1,514	2,785	3,472
$T_{\text{num}}^{méd}$	27,54	64,89	101,36	135,63	173,35	208,02
$T_{\text{ref}}^{méd}$	27,20	64,20	104,70	137,50	174,00	207,60
$\lvert\Delta T\rvert$ (°C)	0,341	0,687	3,337	1,871	0,653	0,424
$T_{\text{num\_nerv}}^{méd}$	26,81	68,43	109,53	154,50	198,77	234,68
$T_{\text{ref\_nerv}}^{méd}$	26,30	67,80	112,70	154,40	197,30	232,50
$\lvert\Delta T\rvert$ (°C)	0,510	0,635	3,166	0,103	1,467	2,177

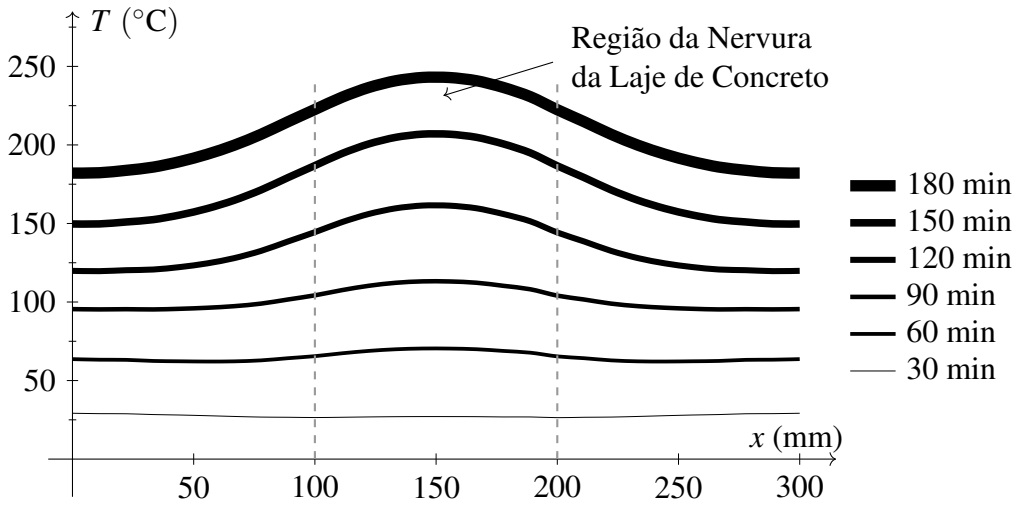

Figura 50 – Isotermas ao longo do comprimento da laje nervurada

4.4.4.10 Perfil I de aço com e sem proteção térmica do tipo contorno

Para estruturas de aço sob condição de elevadas temperaturas, inicialmente analisa-se um perfil de aço I laminado sem e com revestimento contra fogo do tipo contorno. Dentre as pesquisas realizadas, o problema foi abordado em Rigobello (2011) e recentemente em Barros (2016). Considere um perfil I sujeito ao fluxo combinado de convecção e radiação em todas as faces da seção. As dimensões da peça são ilustradas na Figura 51.

Vale ressaltar que tal problema tem uma importância visível na engenharia, pelo fato do aço ser um material amplamente utilizado na construção civil e também por ser um elemento esbelto, caracterizado por apresentar um comportamento crítico quando em contato com elevados gradientes térmicos. Desta forma, o emprego de revestimento contra fogo é essencial em elementos estruturais de aço. Existem diversas pesquisas que se baseiam em métodos simplificados que visam calcular a temperatura em perfis de aço exposto ao fogo, direcionando a notórios

resultados para projetos e dimensionamento, conforme pode ser visto nas obras de Silva (2005), Ferreira, Claret e Santolin (2007) e Silva e Melão (2018).

Utiliza-se um revestimento do tipo contorno, em específico uma argamassa projetada *Blaze Shield II* com espessura de 12 mm e com propriedades físicas consideradas constantes, a massa específica é igual 240 kg/m^3, a condutividade igual a $0,043$ W/m^{o}C e o calor específico igual a 2093 J/kg^o C. Para os dados referentes as condições de contorno, tem-se um coeficiente de convecção de 25 W/m^{2o}C e a emissividade adotada é igual a 0,7. Em relação aos parâmetros do processo transitório, utiliza-se um $\theta = 2/3$, um incremento de $\Delta t = 10$ s e o tempo inicial do problema é $t = 0$ s, onde a estrutura encontra-se em temperatura ambiente igual a 20 ^{o}C.

Nos pontos analisados busca-se verificar a variação de temperatura ao longo de cada região do perfil. Sendo assim, considere quatro pontos, sendo-os denominados de A, B, C e D, válidos para simulação do perfil sem ou com revestimento contra fogo. Para avaliação de resultados, é realizada uma comparação com os dados retirados do programa SAFIR (FRANSSEN, 2005), obtidos em Barros (2016).

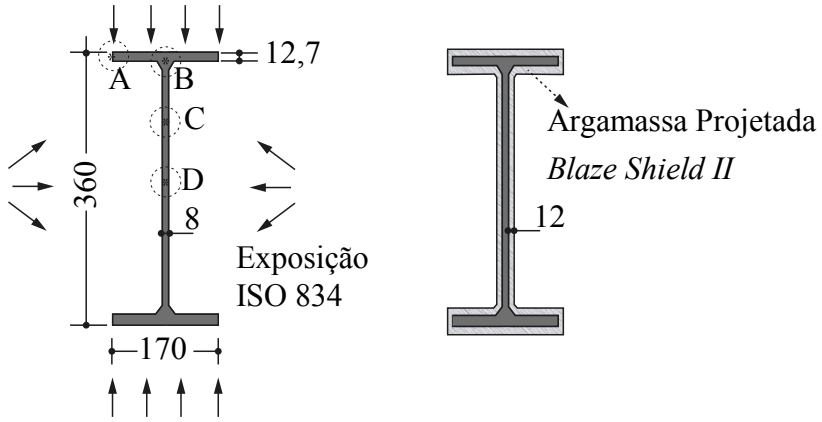

Figura 51 – Perfil de aço exposto ao fogo sem e com revestimento contra fogo (em mm)

Inicialmente, estuda-se o perfil I laminado sem revestimento contra fogo, ou seja, a peça de aço está em contato direto com aquecimento. Os resultados da curva de temperatura em relação ao tempo são ilustrados nas Figuras 52 e 53.

Observa-se que o perfil atinge valores altos de temperatura, o que pode acarretar em grandes dificuldades estruturais para satisfazer as condições de segurança e uso. Outro ponto é que o aço possui alta condutividade térmica, acarretando em uma distribuição quase uniforme no perfil, sendo tal fato confirmado nos resultados obtidos. Observe que não há grandes diferenças entre as curvas de temperaturas referentes aos pontos A, B, C e D em cada nível de tempo, ou seja, corroborando ao fato de que a temperatura do perfil em muitas aplicações pode ser constante. Em relação ao comportamento do método de elementos finitos implementado nesse problema, foi utilizado nessa aplicação uma malha de elementos triangulares de 3 nós. Pode-se notar que os resultados apresentam boa concordância com o programa SAFIR em todos os pontos de análise.

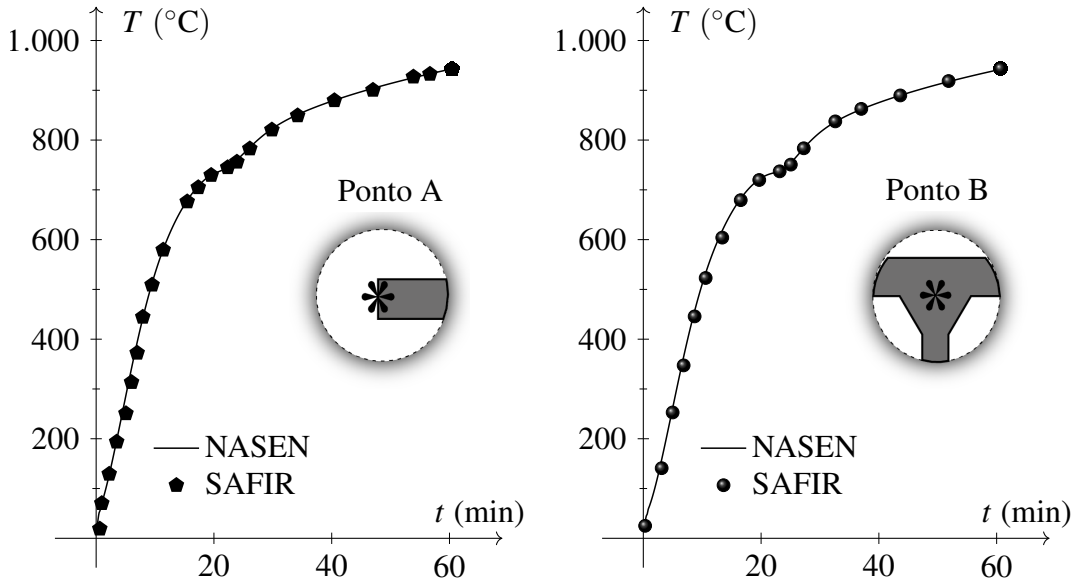

Figura 52 – Variação de temperatura ao longo do tempo nos pontos A e B do perfil sem revestimento contra fogo

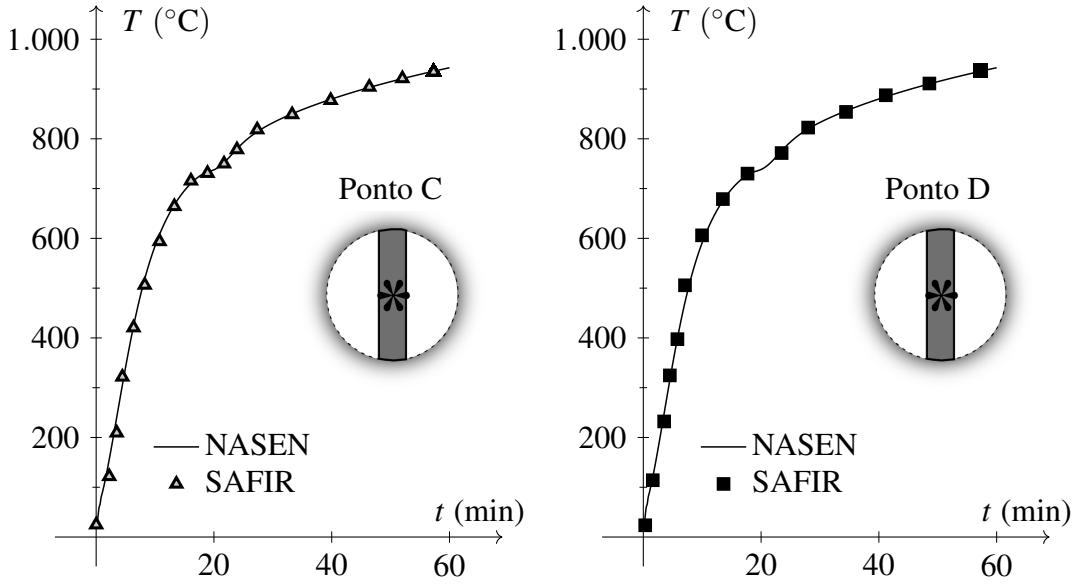

Figura 53 – Variação de temperatura ao longo do tempo nos pontos C e D do perfil sem revestimento contra fogo

Considere o perfil I laminado com um revestimento contra fogo do tipo contorno, como já mencionado anteriormente. Os resultados da evolução de temperatura para os pontos A, B, C e D podem ser visualizados nas Figuras 54 e 55.

A variação de temperatura ao longo do tempo nos pontos A, B, C e D do perfil com revestimento contra fogo foi menor em relação ao modelo sem revestimento. Analogamente, ao perfil sem revestimento, os resultados tornam-se semelhantes entre si, confirmando que em cada nível de tempo pode-se assumir uma temperatura constante no perfil. É interessante realizar uma comparação sistêmica entre os resultados obtidos nos dois casos. Para tanto, considere a Figura

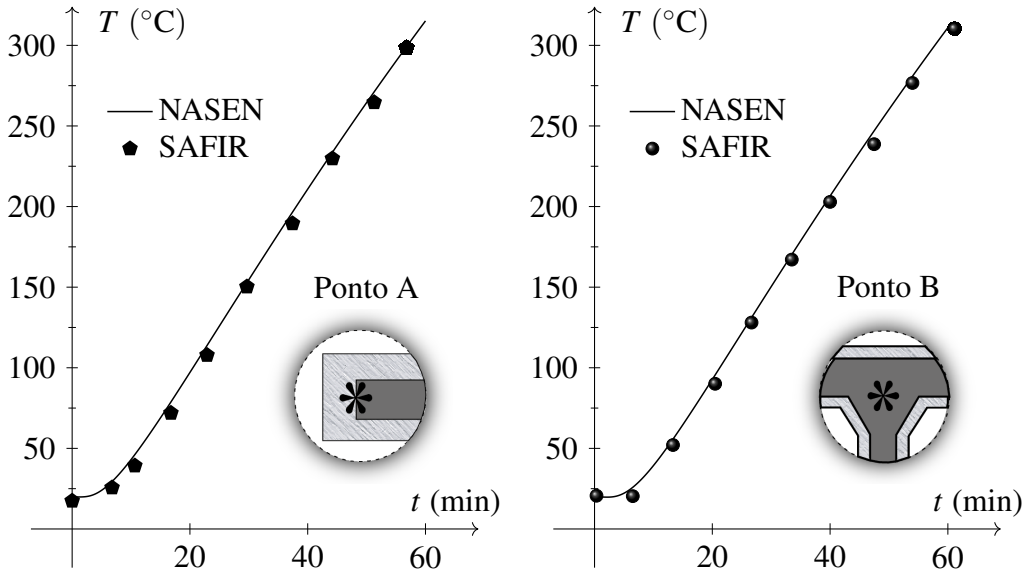

Figura 54 – Variação de temperatura ao longo do tempo nos pontos A e B do perfil com revestimento contra fogo

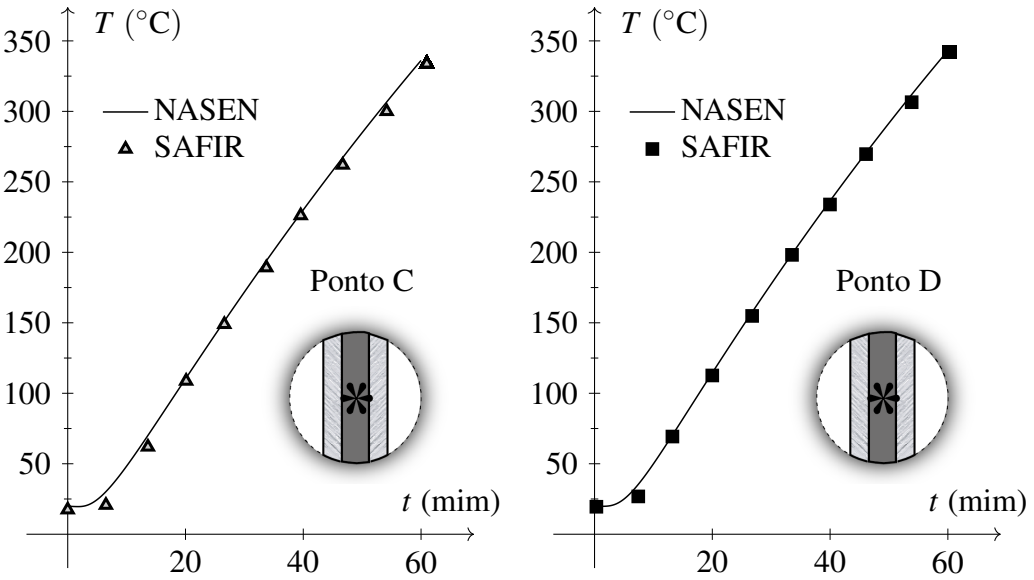

Figura 55 – Variação de temperatura ao longo do tempo nos pontos C e D do perfil com revestimento contra fogo

56, onde se faz uma comparação no ponto D entre os resultados obtidos para perfil com e sem revestimento contra fogo.

Em uma análise quantitativa desses dados, pode verificar que a diferença entre magnitudes é significativa para o problema. Em 15 min tem-se uma variação de aproximadamente $\Delta_{15min} \approx$ 617 ^{o}C, em seguida para 30 min obtém-se uma variação de $\Delta_{30min} \approx 655$ ^{o}C e por fim, em 60 min tem-se uma diferença de temperatura de $\Delta_{60min} \approx 600$ ^{o}C. Vale destacar também que a espessura da camada do material do revestimento contra fogo influencia diretamente na evolução térmica do perfil, em outras palavras, quando mais espessa é a camada de revestimento, menores

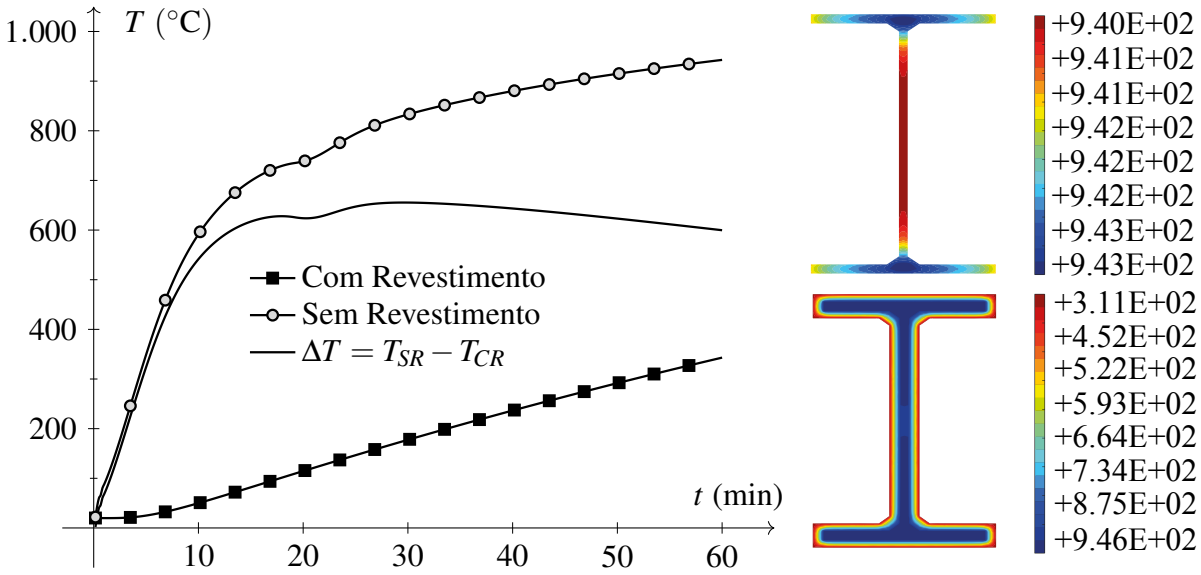

Figura 56 – Comparação entre os modelos com e sem proteção térmica

são as ordens de grandeza das temperaturas no interior do perfil de aço, conforme pode ser visto no campo de temperatura apresentado na Figura 56.

4.4.4.11 Perfil de aço com alvenaria

O presente problema busca modelar um perfil I de aço em contato com alvenaria revestida (SILVA; CORREIA; RODRIGUES, 2008; CORREIA; RODRIGUES; SILVAC, 2009). Considere a ação do incêndio somente em um lado da alvenaria, atuando em um comprimento de 940 mm, conforme ilustra a Figura 57.

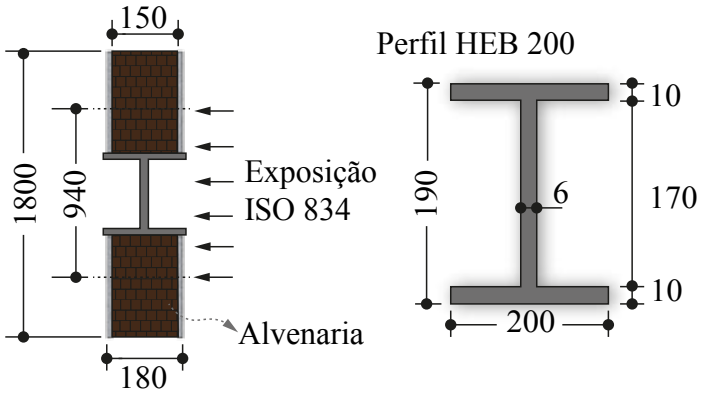

Figura 57 – Modelo estrutural e dimensões (em mm) do perfil I

Como condição de contorno adota-se, simplificadamente, que a face não exposta ao fogo é considerada isolada termicamente. A alvenaria tem uma largura de 150 mm e possui um revestimento de largura igual a 15 mm. A análise via elementos finitos é direcionada pelo teste de dois tipos de elementos, sendo elementos triangulares lineares de 3 nós e quadriláteros de 4 nós. Os resultados do programa STC são utilizados para comparação, obtidos em Pierin (2011).

Em relação à variação das propriedades físicas dos materiais com a temperatura, tem-se que o aço e concreto são modelados pelas expressões previamente apresentadas e postas no item 3 do presente trabalho. Em específico, para a alvenaria, as propriedades são consideradas constantes, sendo a condutividade igual a 0,7 W/m^{o}C, o calor específico igual a 840 J/Kg^{o}C e a massa específica assume o valor de 1600 Kg/m^3.

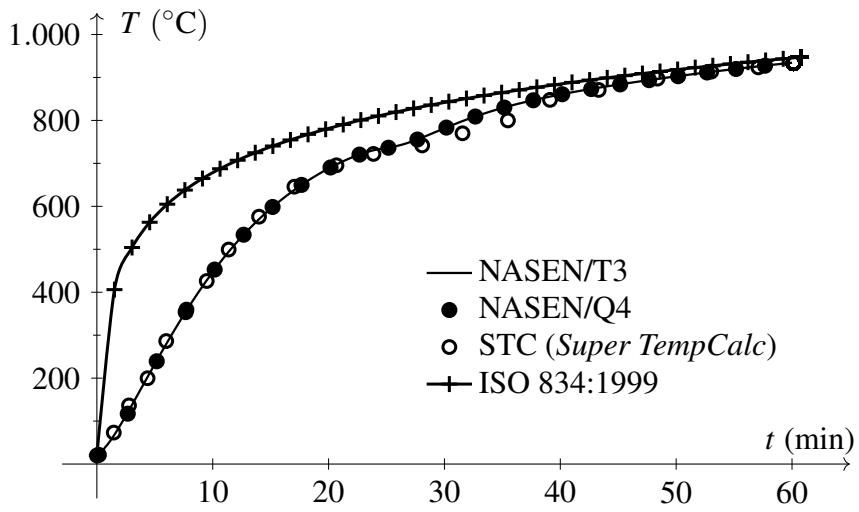

Figura 58 – Curva de temperatura referente ao ponto central da alma do perfil

Em relação aos parâmetros temporais, inicialmente considera-se o esquema de discretização de Galerkin. Utilizou-se um incremento de 10 segundos para cada passo de tempo, o tempo final de simulação é 3600 segundos e o processo inicia-se no tempo zero com temperatura ambiente igual a 20°C. Para as malhas numéricas utilizadas nas simulações computacionais, referentes aos dois tipos de elementos testados, foram utilizados para os elementos triangulares 932 nós e 1582 elementos, e para os elementos quadriláteros 3180 nós e 2877 elementos.

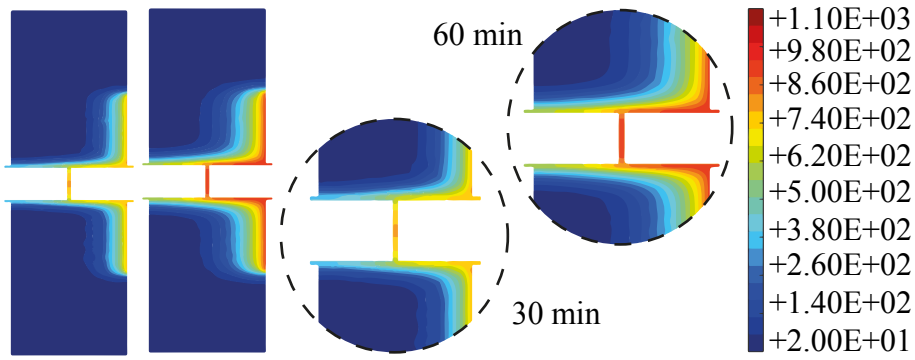

Figura 59 – Campo térmico para 30 e 60 minutos de exposição ao incêndio (em °C)

A Figura 58 ilustra a variação de temperatura *versus* tempo, onde é possível visualizar que em relação aos tipos de elementos finitos testados, os resultados apresentam boa concordância. Em relação à comparação com o programa STC, o programa desenvolvido na presente pesquisa apresenta uma boa performance, destacando que por volta de 30 min existe uma leve

separação entre as curvas, onde a solução via MEF apresenta uma diferença percentual de, aproximadamente, 3% em comparação ao programa STC nesta região. A Figura 59 apresenta a distribuição de temperatura ao longo do perfil I de aço em contato com a alvenaria para 30 e 60 min de exposição ao fogo.

4.4.4.12 Perfil H com vedação

O presente exemplo caracteriza-se por um perfil H sem proteção em seu contorno com uma faixa de concreto celular de 150 mm de espessura em contato com a alma. As bordas superiores da estrutura estão expostas aos fluxos de calor de convecção-radiação característicos de um incêndio, sendo que a faixa de concreto celular autoclavado trabalha como uma vedação contra ao fogo, conforme exemplificado na Figura 60.

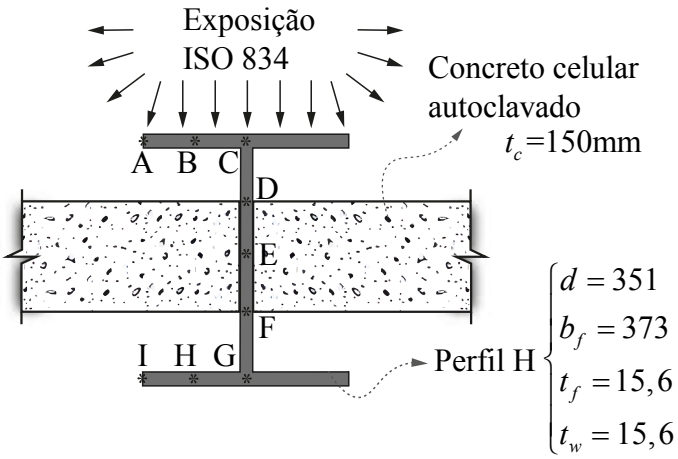

Figura 60 – Pilar de aço em contato com concreto (dimensões em mm) e exposto a curva padrão de incêndio

Esse exemplo também foi estudado em Pires et al. (2015), usando o programa CSASA/FA e os resultados obtidos pelos autores são usados como forma de comparação da implementação do código de elementos finitos da presente pesquisa. As propriedades físicas do concreto celular autoclavado utilizados na faixa de vedação são consideradas constantes, ou seja, não variam com a temperatura. Os valores adotados na simulação são: massa específica igual a 430 kg/m^3, condutividade térmica igual a $0,13$ W/m^{o}C e o calor específico igual a 1008 J/kg^o C.

Esse problema possui uma simetria em relação ao eixo vertical, em contrapartida, por causa da imposição do fluxo, somente na face superior, tal problema não possui simetria em relação ao eixo horizontal. Desta maneira, analisam-se os pontos contidos dentro da alma e mesa superior e inferior do perfil. Os pontos localizados no perfil escolhidos para avaliação do desempenho numérico são representados na Figura 60 pelos pontos A até I.

Os resultados de cada ponto são postos na Figura 61 e pode-se notar uma boa aproximação com o programa CS-ASA/FA. Perceba que devido à vedação de concreto, as magnitudes de temperatura na mesa inferior e superior possuem uma diferença significativa.

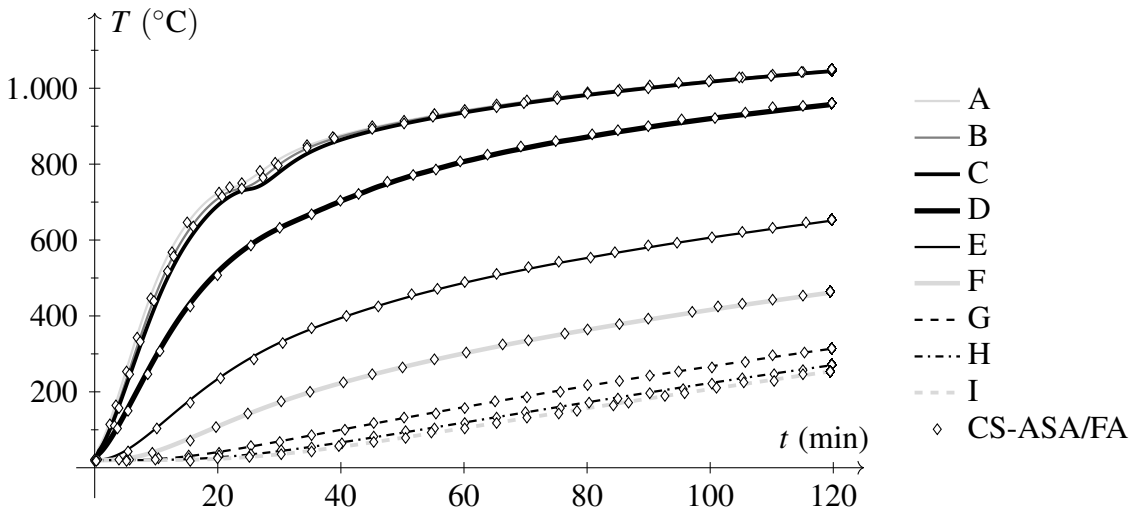

Figura 61 – Valores de temperatura nos pontos A até I

4.4.4.13 *Pilar misto de concreto e aço*

Considere um perfil constituído por duas peças de aço em formato C preenchido em seu interior com concreto, formando um pilar misto de aço e concreto. Adota-se a largura e altura do pilar sendo iguais e com valor de 20 cm, a espessura do perfil é de 0,3 cm. As condições de contorno do problema são direcionadas pelo fluxo combinado de convecção-radiação nas quatro faces do pilar, conforme pode ser visto na Figura 62.

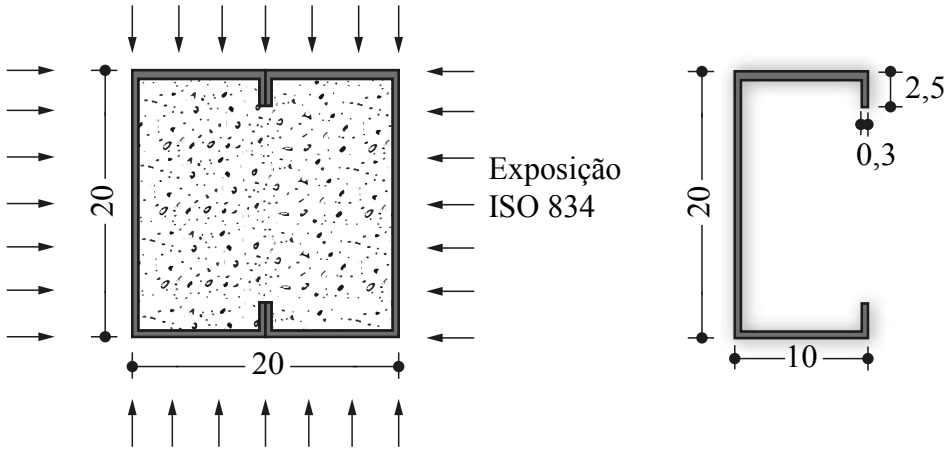

Figura 62 – Pilar de seção quadrada constituída de dois perfis C enrijecidos preenchidos com concreto (em cm)

As propriedades físicas do aço e do concreto já foram apresentadas no Capítulo 3. Considera-se no instante inicial, a estrutura mantida em temperatura ambiente igual a 20 ^{o}C, a emissividade e o coeficiente de convecção admitidas são, respectivamente, iguais 0,7 e 25 W/m^{2} ^{o}C. A simulação realizada via elementos finitos é avaliada em relação aos resultados obtidos em Pierin (2011), utilizando o programa ATERM. Para as medições dos resultados, adotam-se dois pontos no pilar, um nó no ponto médio da alma do perfil e outro nó no centro do

pilar preenchido de concreto.

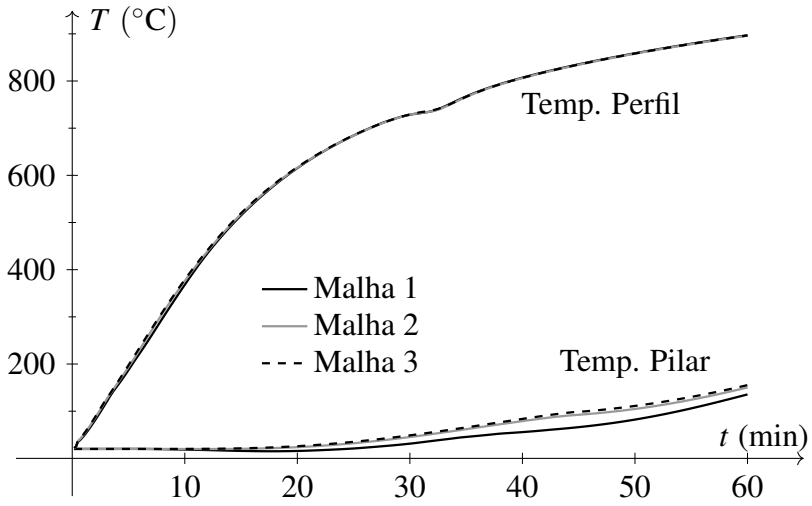

Figura 63 – Teste de malha para pilar misto de concreto e aço

Inicialmente, realiza-se uma análise de convergência de resultados por meio de um teste de malha. São realizadas três simulações com níveis de refinamentos distintos com 312, 1256 e 5344 elementos, sendo, respectivamente, denominada de malha 1, 2 e 3. A Figura 63 ilustra o comportamento para cada simulação.

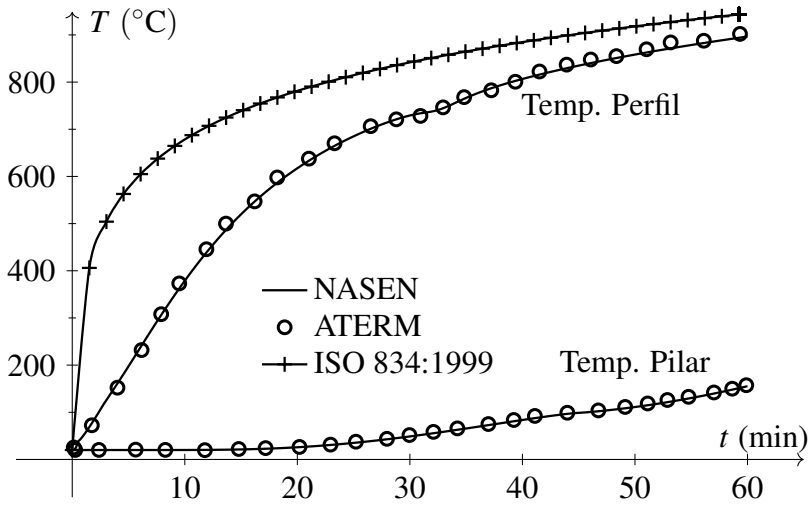

Figura 64 – Histórico de temperatura para os pontos localizados no centro da alma e do pilar

Pode-se notar que a temperatura no perfil não possui uma alteração considerável para as simulações realizadas. Contudo, para o nó central do pilar, o comportamento da solução possui uma variação significativa com o refinamento da malha. Quantitativamente, o erro percentual em relação à malha 3 (maior refinamento), referente aos dados no centro do pilar, é de aproximadamente 36,5% e 0,37% em comparação com a malha 1 e 2. Desta forma, os resultados da malha 3 não apresentaram variações significativas, sendo assim, define-se como convergida.

A Figura 64 ilustra a comparação de resultados, onde é possível perceber a boa semelhança com o programa ATERM. Como análise adicional, comparam-se os níveis de temperatura em cada elemento em relação à temperatura dos gases ao redor da estrutura, onde observa-se que o perfil atinge valores altos de temperatura enquanto no centro do pilar a temperatura é mantida em uma faixa inferior a 200°C.

4.4.4.14 Viga mista de concreto e aço

Em sequência aos exemplos numéricos, adota-se um problema comum na engenharia civil, uma viga mista de aço e concreto, ou seja, um perfil I de aço trabalhando em conjunto com uma laje de concreto. Nesse problema estudado, não são considerados os conectores de cisalhamento localizados usualmente na mesa superior do perfil. Em específico, o perfil VS 650x114 mm e uma laje maciça com largura efetiva de 1000 mm e espessura igual 100 mm. A laje está exposta à ação da curva padrão de incêndio na parte inferior, sendo que as bordas laterais da laje são consideradas adiabáticas, conforme ilustra a Figura 65.

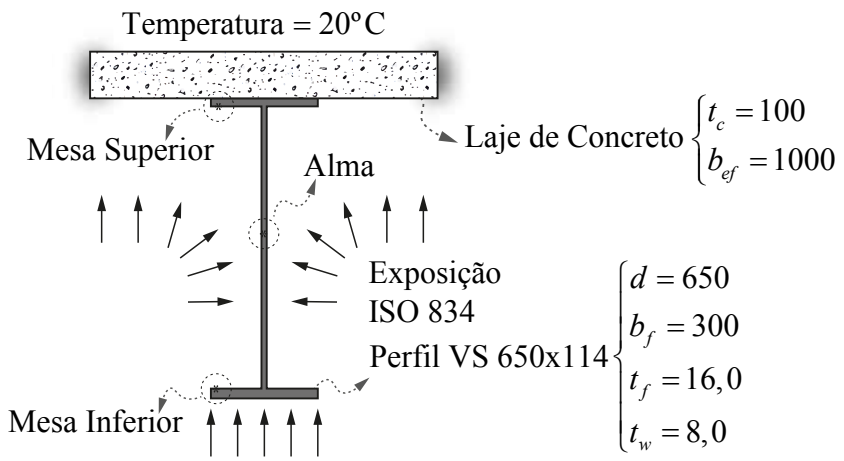

Figura 65 – Viga mista de aço e concreto sob ação da curva padrão de incêndio (em mm)

Nas faces expostas, considera-se um coeficiente de convecção e uma emissividade resultante de 25 W/m^{2}ºC e 0,522, respectivamente. No instante inicial, a viga mista é mantida à temperatura ambiente de 20°C. Utilizam-se elementos triangulares lineares de três nós para a simulação desse problema e os resultados obtidos são comparados com os dados obtidos pelo programa ANSYS e PFEM2D, vide Regobello (2007).

Os resultados do ponto contido na alma do perfil são mostrados na Figura 66, onde observa-se que os resultados obtidos com o programa NASEN apresentam uma resposta com um melhor ajuste aos resultados via ANSYS, evidenciando o bom desempenho do código da presente pesquisa.

Em sequência considere o ponto contido na mesa inferior, conforme ilustra a Figura 65. Os resultados da Figura 67 indicam uma boa performance do código em comparação com os resultados de referência. Diferentemente dos resultados obtidos da alma, conforme Figura 66,

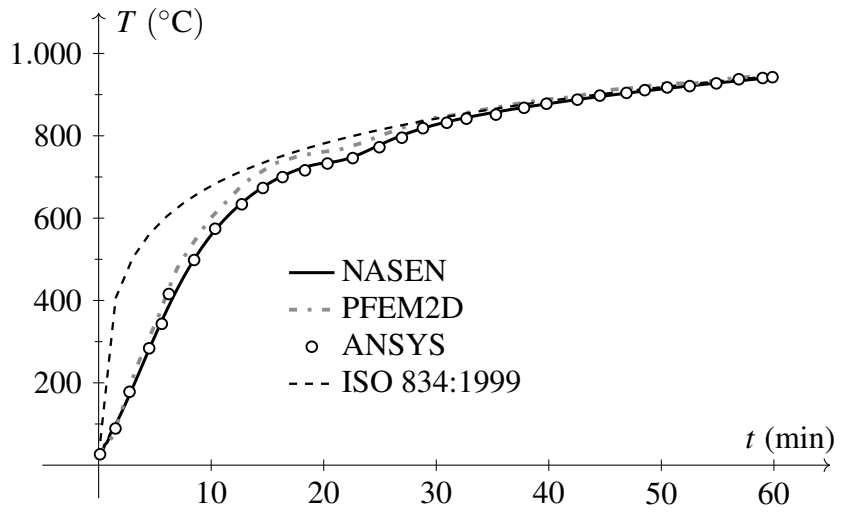

Figura 66 – Curva de temperatura referente ao ponto no centro da alma do perfil I de aço da viga mista de aço-concreto

os resultados para o ponto na mesa inferior apresentam um bom ajuste para os resultados via NASEN, ANSYS e PFEM2D, não apresentando diferença significativa.

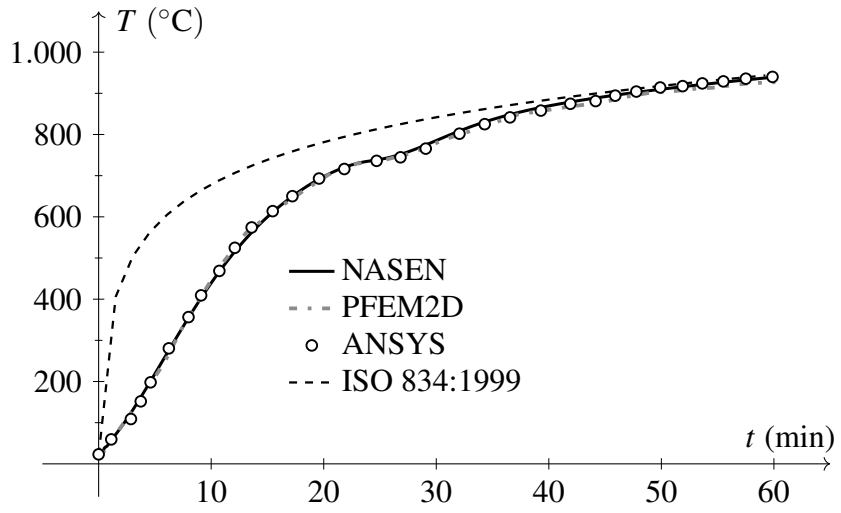

Figura 67 – Curva de temperatura referente ao ponto da mesa inferior do perfil I de aço da viga mista de aço-concreto

Por fim, foi analisado um ponto contido na mesa superior do perfil presente na aba esquerda. A curva de temperatura *versus* tempo para esse ponto é ilustrada na Figura 68. Inicialmente, os valores de temperatura em relação à mesa inferior diminuíram pelo fato de estarem em contado com a laje de concreto. Observa-se que os resultados encontrados com programa NASEN e os valores obtidos com o programa PFEM2D, apresentam uma semelhança em referência os dados obtidos via ANSYS.

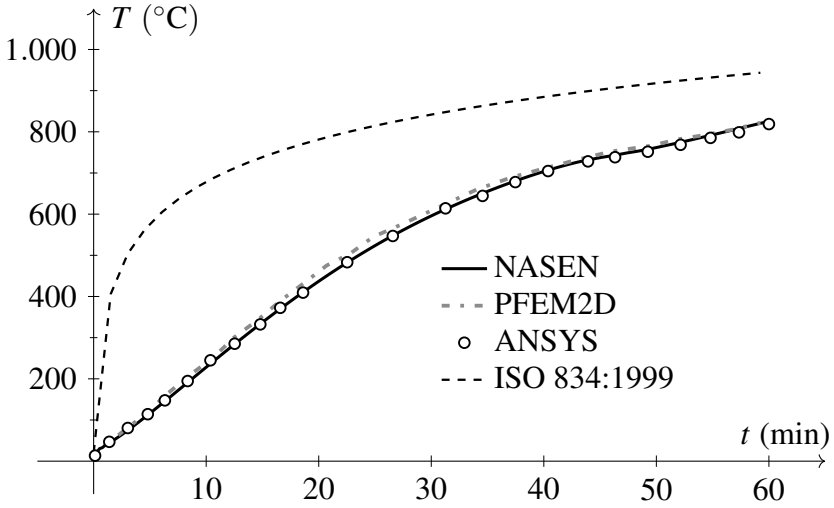

Figura 68 – Curva de temperatura referente ao ponto da mesa superior do perfil I de aço da viga mista de aço-concreto

4.4.4.15 Tubo de aço preenchido de concreto

O exemplo seguinte é um tubo de aço preenchido internamente com concreto em condição de incêndio. São analisadas duas configurações, um tubo quadrado e um circular. Em ambos os casos, todo contorno do domínio sujeito à curva de incêndio padrão ISO 834:1999. Por causa da simetria física e geométrica do problema, é possível analisar somente um quarto do problema, como exemplificam as Figuras 69 e 71.

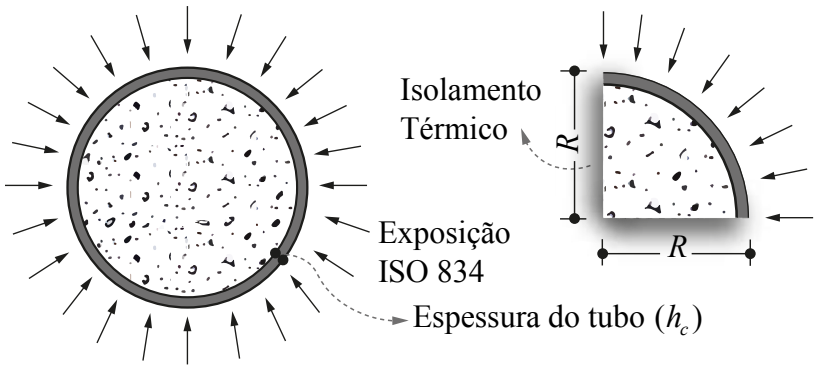

Figura 69 – Condições térmicas e características do tubo de aço circular preenchido de concreto em situação de incêndio

Inicialmente, considera-se o tubo circular com diâmetro de 500 mm e a espessura do tubo igual a $h_c = 20$ mm. Nas faces expostas ao incêndio adota-se um coeficiente de convecção e uma emissividade resultante de 25 W/m^2°C e 0,7, respectivamente. Os resultados via elementos finitos são comparados com os dados extraídos de Yin, Zha e Li (2006). A Figura 70 ilustra o perfil radial de temperatura. Com uma rápida análise é possível perceber o bom ajuste entre as curvas, confirmando o bom desempenho do código.

O segundo exemplo é um tubo de aço quadrado preenchido de concreto. As dimensões

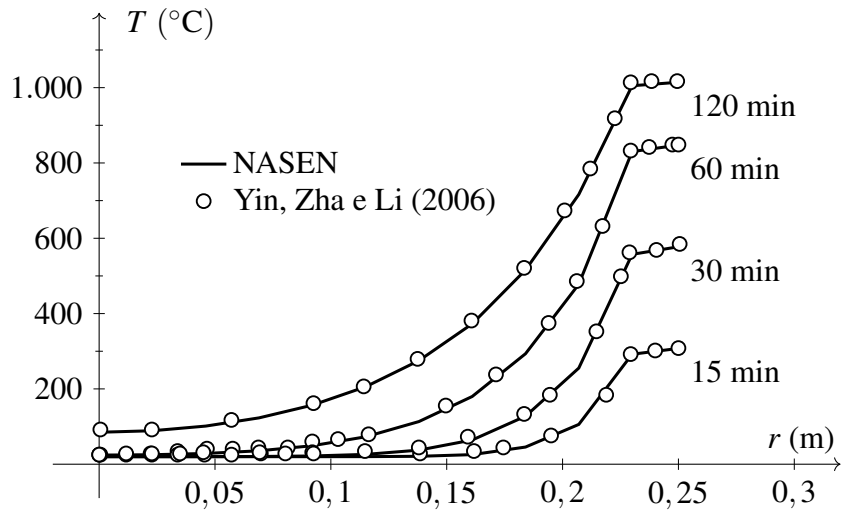

Figura 70 – Perfil radial de temperatura do tubo de aço circular preenchido de concreto para 15, 60, 60 e 120 min de exposição ao fogo

de largura e altura da seção transversal são iguais e tomadas como $2a = \sqrt{\pi}R$, onde R é o raio do tubo circular do exemplo anterior, e a espessura do tubo é dada pela expressão $h_s = 0,5\sqrt{\pi}h_c$, sendo que h_c é a espessura do tubo circular.

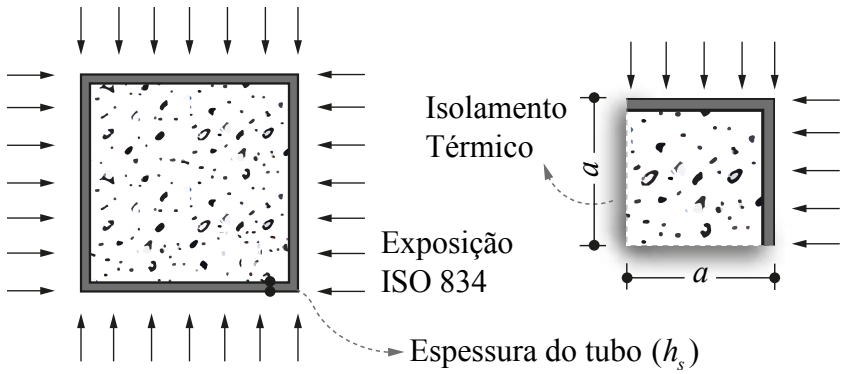

Figura 71 – Condições térmicas e características do tubo quadrado preenchido de concreto em situação de incêndio

Os parâmetros adotados no exemplo da Figura 69, são mantidos na simulação do tubo quadrado e os resultados são mostrados na Figura 72. Analisa-se o perfil de temperatura ao longo do comprimento da aresta da seção, onde se pode verificar que o código apresentou novamente uma boa concordância com os resultados de referência.

Além disso, por conta da alta condutividade térmica do aço, as temperaturas no tubo de aço não apresentam variações significativas, acarretando em pouca variação nos níveis de temperatura. Em contrapartida, o perfil de temperatura no concreto aumenta à medida que se aproxima da borda do tubo, sendo que essa região encontra-se próximo ao incêndio.

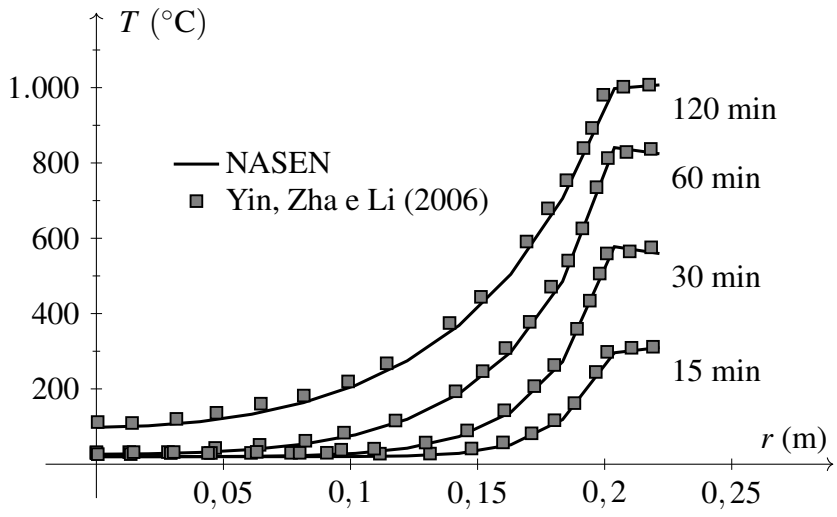

Figura 72 – Perfil de temperatura ao longo da linha central do tubo de aço quadrado para 15, 60, 60 e 120 min de exposição ao fogo

4.4.4.16 Pilar misto totalmente preenchido de concreto

Considere um perfil H totalmente preenchido de concreto, atuando como uma proteção para o perfil. O perfil H de seção UC 152×152×37 mm, envolvido por concreto, cujos lados são iguais e com valor de 300 mm, totalizando uma área da seção transversal de 300×300 mm^2. Tal estrutura é exposta ao incêndio por todas as quatro faces do elemento, considera-se ainda um concreto com um teor de umidade de 8%, valor adotado na simulação numérica de Huang, Tan e Phng (2007) e também usados em Caldas (2008).

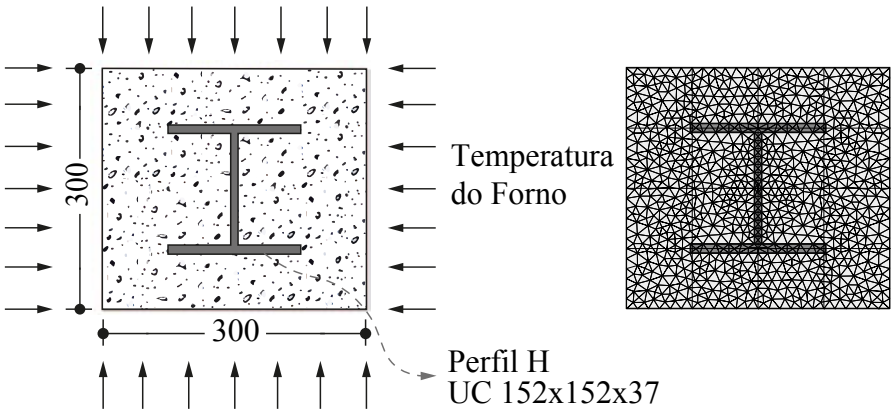

Figura 73 – Pilar misto totalmente preenchido (em mm) e malha numérica

A Figura 73 ilustra o modelo estrutural com as dimensões e condições de contorno, e representa também a malha de elementos triangulares lineares com 3 nós utilizada na simulação computacional, onde tem-se uma malha de 817 nós com 1728 elementos. Os resultados são comparados com resultados numéricos e experimentais, ambos são extraídos do trabalho de Huang, Tan e Phng (2007).

Adota-se para a construção da curva temperatura-tempo dos gases quentes as medições do ensaio experimental do elemento estrutural, tais dados são apresentados na Tabela 8. No código computacional realiza-se uma interpolação linear entre os valores obtidos no ensaio e assim possibilita a formação de uma curva de temperatura ao longo do tempo de exposição. Em adicional, os testes foram realizados até o tempo de 420 min de exposição ao fogo.

Tabela 8 – Valores de temperatura extraídos do forno

t **(min)**	0	20	35	120	160	195	300	420
Temperatura (°C)	20	120	200	200	500	700	750	800

Inicialmente, deve-se mencionar que foram realizados três testes com propriedades físicas diferentes para o concreto, a fim de avaliar a importância dos parâmetros e como os resultados se comportam em cada configuração. Sendo na simulação I, II e III caracterizada, respectivamente, por um concreto seco, com um teor de 4% e 8%. Além dos resultados experimentais obtidos via ensaios experimentais, comparam-se também os resultados da presente pesquisa com dados numéricos por meio do programa SAFIR.

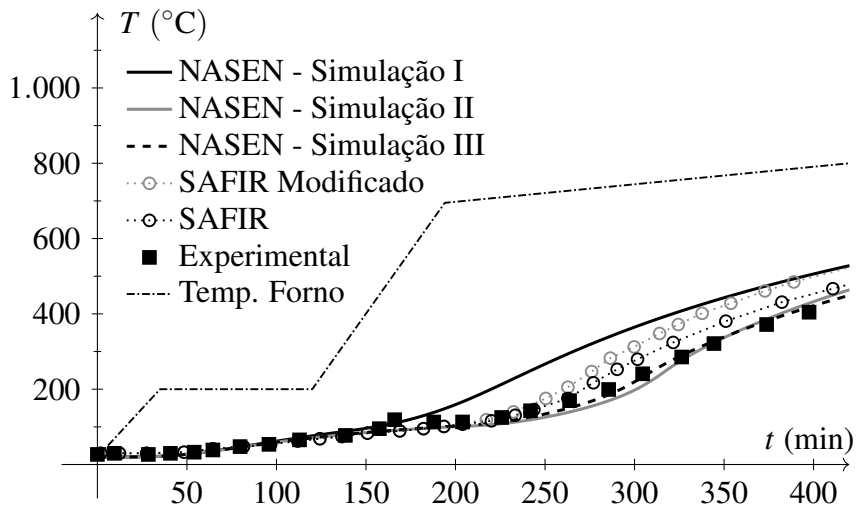

Figura 74 – Temperatura dos gases, resultados da presente pesquisa, e temperatura por meio de simulação numérica via SAFIR e experimental por Huang, Tan e Phng (2007) em um nó localizado no centro do perfil

A Figura 74 ilustra os resultados obtidos pelo programa NASEN. Observa-se que a simulação I não fornece resultados satisfatórios, em contrapartida, quando se considera a umidade, a simulação II fornece melhores resultados e com um comportamento coerente com os dados experimentais. Porém, considerando um teor de umidade de 4% existe um ligeiro desvio ainda na solução, adotando um teor de umidade de 8%, a simulação III fornece os melhores resultados quando comparados com os resultados experimentais. Além dos resultados experimentais, quando comparados com o programa SAFIR, as simulações II e III apresentam um melhor comportamento. Pode-se notar que para problemas não lineares as funções que descrevem o comportamento das propriedades físicas possuem uma influência significativa nos resultados.

5

ANÁLISE LINEAR DE ESTRUTURAS COM EFEITOS TÉRMICOS

A análise estrutural busca, por meio de modelos matemáticos idealizados, estudar o comportamento de sistemas estruturais sujeitos à ação de carregamentos diversos. O presente capítulo visa realizar uma exposição matemática geral acerca dos problemas estruturais lineares com influência de carregamentos térmicos, apresentando um breve desenvolvimento dos procedimentos de elementos finitos relativos aos modelos estruturais de barras, de placas delgadas e da elasticidade plana. Ao fim, realiza-se uma investigação numérica com base em casos testes da literatura.

5.1 REFERENCIAL TEÓRICO

O comportamento termomecânico elástico-linear das estruturas apresenta inúmeras aplicações práticas na engenharia e áreas afins, sendo um objeto de intenso estudo ao longo dos tempos por diversos pesquisadores. Sendo assim, destaca-se, inicialmente, uma obra pioneira na área, o artigo sobre termoelasticidade elaborado por J.M.C. Duhamel e lido na *French Academy of Sciences* em Paris em 23 de fevereiro de 1835, e publicado no *Journal de l'Ecole Polytechnique* em 1837. O trabalho de Duhamel (1837) apresentou uma formulação de problemas de valor de contorno e também a derivação das equações para o acoplamento do campo de temperatura e a deformação do corpo. Sequencialmente, inúmeros trabalhos foram produzidos associada à formulação matemática acerca tais problemas, como Almansi (1897) e Tedone (1907). Além do desenvolvimento teórico, vários problemas específicos foram resolvidos visando, por exemplo, avaliar as tensões térmicas em uma esfera (HOPKINSON, 1879), em um cilindro oco (LEON, 1904), e em filamentos bi-metálicos (TIMOSHENKO, 1925).

Boley (1966) apresentou que a tensão térmica em uma viga ou placa não pode exceder o valor $k\alpha E\Delta T$, em que k é um coeficiente dependente da forma da seção transversal. Uma fórmula geral simples é definida para estimar k e são apresentados resultados para vários casos especiais de interesse prático. Ao fim, destaca-se que para as vigas retangulares (orientadas adequadamente) e para as chapas, tem-se $k = 4/3$. Para qualquer seção com o momento térmico nulo, tem-se $k = 1$. Além disso, a deflexão máxima não pode exceder o valor $k_\delta k_\delta^{'} \alpha LT$, onde k_δ e $k_\delta^{'}$ são coeficientes dependentes, respectivamente, da forma da seção transversal e da vinculação do elemento. Por exemplo, para seções transversais retangulares, $k_\delta = 3/4$, e para uma viga simplesmente apoiada, $k_\delta^{'} = 1/8$. Posteriormente, Boley (1972) realizou uma comparação entre a teoria elementar e exata, visando determinar as tensões térmicas axiais nas vigas. Estima-se a

diferença entre as duas teorias para vários casos especiais importantes, incluindo a análise de vigas de paredes finas. Ao fim, verifica-se que o erro gerado pela teoria elementar é bastante significativo em certos casos, por exemplo, em uma seção circular com temperatura axissimétrica.

Em relação aos problemas de natureza dinâmica, pode-se, inicialmente, mencionar o trabalho de Oden e Kross (1968), onde apresentaram um desenvolvimento de formulações de modelos discretos de elementos finitos para problemas dinâmicos gerais da termoelasticidade acoplada. Marakala, Kuttan e Kadoli (2010) desenvolveram uma formulação de elementos finitos para uma viga dinâmica de Euler-Bernoulli sem amortecimento sob ação de carregamento térmico. A distribuição de temperatura na espessura da viga, em cada passo de tempo, é obtida por meio dos procedimentos numéricos de elementos finitos unidimensionais. Utilizando os dados do perfil de temperatura, são calculados o momento térmico e os deslocamentos quase estático e dinâmico. A formulação foi validada com os resultados disponíveis na literatura.

Gu, Qin e Chu (2015) realizaram um tratamento analítico acerca do comportamento dinâmico de vigas de Timoshenko com efeitos térmicos e amortecimento. A análise térmica transiente é desenvolvida ao nível da seção transversal e os efeitos térmicos são incorporados ao modelo dinâmico por meio do módulo de elasticidade, dependente da temperatura e da força térmica induzida pelo gradiente de temperatura.

O trabalho de Guirnaldos (1977) consiste em determinar uma solução aproximada das equações diferenciais governantes acerca dos problemas da termoelasticidade acoplada. Para tanto, os resultados numéricos são obtidos com base nas aplicações dos princípios variacionais nas equações que regem o problema físico e com auxílio do método dos elementos finitos. Nas simulações computacionais, utiliza-se o elemento finito quadrilátero de 8 nós. Os casos são direcionados com problemas axissimétricos e bidimensionais, onde se verifica que o método de Galerkin apresentou bons resultados em comparação as soluções de referência.

Vila Real (1988) realizou uma análise numérica do comportamento térmico e termo-elástico de sólidos sob ação de efeitos térmicos via método dos elementos finitos. Primeiramente, o programa computacional desenvolvido, destinado ao problema térmico, permite realizar análises de problemas em regime permanente e transiente, planos e axissimétricos, bem como os problemas de natureza linear e não linear. Pode-se utilizar elementos de 4, 8 e 12 nós, e funções de forma hierárquicas de grau sucessivamente crescente. Para o problema termo-elástico, o programa realiza os cálculos de tensões e deformações térmicas para os problemas planos e axissimétricos. O autor apresenta algumas conclusões acerca do trabalho, destacando, inicialmente, o fato da instabilidade e a falta de precisão nos resultados da análise térmica transiente, provenientes das oscilações temporais e espaciais. Em relação à integração numérica, o autor concluiu que, para a análise térmica, deve-se utilizar a integração completa no cálculo da matriz de amortecimento, enquanto, para a análise estrutural, a utilização da integração reduzida fornece bons resultados na estimativa das tensões térmicas. Além disso, nas regiões de elevados gradientes térmicos, a utilização das funções de aproximação adicionais de grau sucessivamente

crescente conduziram a bons resultados numéricos.

Ribeiro (1991) aplicou o método dos elementos de contorno (MEC) em problemas da termoelasticidade, visando calcular o nível das tensões em um corpo sob estado-plano, originadas pela ação de carregamentos térmicos em regime estacionário. Desta forma, para transformar as integrais de domínio para integrais de contorno, utiliza-se duas formulações distintas: Galerkin e dupla reciprocidade. A implementação computacional das técnicas é realizada em FORTRAN-77. Os casos são constituídos por uma chapa quadrada delgada sob variação de temperatura com diferentes configurações de vinculação, e por um cilindro longo com orifício circular. Ao fim, o autor constata que, para os casos testados, a formulação de Galerkin conduziu aos melhores resultados numéricos. Além disso, ressalta-se que a formulação do MEC-Galerkin apresenta restrições, pois permite somente avaliar problemas em regime estacionário, pois o gradiente térmico respeitar a equação de Laplace.

Macedo (2014) estuda as solicitações térmicas axiais e circunferenciais originadas por gradientes de temperatura em cascas cilíndricas finas e longas. Durante uma análise estrutural é importante considerar as tensões térmicas provocadas pelas restrições nas estruturas e devido aos gradientes térmicos. A metodologia aplicada no trabalho tem como base modelar numericamente o problema das tensões térmicas em tanques cilíndricos de concreto via programa de elementos finitos ANSYS, onde se analisa os casos com produtos armazenados a quente e em temperatura ambiente. Essas tensões podem causar danos ao sistema estrutural, como fissuras axiais e circunferenciais. Além disso, os resultados são avaliados com base nas soluções analíticas dos casos com condições de vinculação do tipo apoiada e engastada. Em linhas gerais, após realizar as simulações computacionais e as devidas comparações com os dados de referência, verifica-se que os resultados numéricas apresentam uma precisão considerável.

Botelho, Pitangueira e Fonseca (2015) apresentaram as novas funcionalidades do sistema computacional livre INSANE - *Interactive Structural Analysis Environment*, contemplando as soluções numéricas de problemas de transferência de calor e termo-estruturais. A análise numérica dos problemas é direcionado pelo emprego do método dos elementos finitos. O código fonte é escrito na linguagem JAVA. Em específico, a estratégia utilizada no programa para contabilizar a contribuição térmica na reposta estrutural tem como base a definição do carregamento nodal equivalente devido à variação de temperatura. Os casos transitam de problemas unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais. A avaliação de desempenho do programa é realizada com base nas soluções analíticas dos problemas estudados. Os resultados obtidos são parelhos com as soluções exatas, indicando a validação dos novos módulos computacionais.

Nascimento, Oliveira e Cunha (2016) estudaram numericamente o processo de deformação térmica de um sólido em duas dimensões. Para a solução das equações diferencias provenientes do equilíbrio mecânico para tensões em um volume de controle, utiliza-se o método de volumes de controle baseado em elementos. A implementação computacional é realizada em Matlab e validada com dois casos testes, associado à análise de tensões concentradas em um furo

e ao comportamento de uma viga sob ação de carregamentos térmicos. Os resultados obtidos, em cada exemplo, direcionam a boa performance do programa desenvolvido, atingindo valores condizentes com os dados disponíveis na literatura.

Coelho et al. (2016) realizaram um estudo analítico-numérico acerca da determinação de tensões térmicas em vigas e placas, onde a análise numérica é direcionada pelos procedimentos de solução com base no método de elementos finitos. A fundamentação teórica é fundamentada em torno da equação de difusão de calor e o modelo de placa de Kirchhoff. Por fim, por meio da comparação dos efeitos termomecânicos nos casos estudados, variando as condições de contorno em elementos simples de vigas e mais complexos, como as placas, os autores afirmam que os modelos computacionais e as expressões analíticas apresentaram uma boa concordância nos resultados. Concluindo que a tendência de altas tensões é maximizada quando a variação entre as temperaturas é grande, e pode ser potencializada pelo o grau de restrições sujeita as movimentações dos corpos.

Coelho et al. (2018) desenvolveram um código computacional, em Fortran, baseado no método dos elementos finitos, visando simular o comportamento termoestrutural de uma barragem de contraforte da usina hidrelétrica de ITAIPU. A análise é dividida em dois estágios, inicialmente, realiza-se uma análise térmica estacionária e, posteriormente, uma análise estrutural. A metodologia baseia-se em utilizar o campo de temperatura como condição do contorno nodal por meio da deformação térmica inicial. O tipo de elemento finito utilizado consiste no elemento triangular linear. Os autores concluíram que o código desenvolvido e os resultados obtidos com ANSYS apresentam boa concordância, contudo, ressaltam que existe a necessidade de realizar uma expansão do código para análise térmica transiente, e realizar aprimoramentos no algoritmo para resolução de estruturas de concreto.

Silva (2019) apresentou uma formulação do método dos elementos de contorno para análise de elementos do tipo placa espessa com base na teoria de Reissner, e do tipo chapa em estado plano de tensão, considerando a variação de temperatura, as forças de superfície e os apoios elásticos do tipo Winkler. Os efeitos provenientes do campo de temperatura são contabilizados na formulação de tensões e deformações iniciais (SILVA; TELLES; SANTIAGO, 2018). Além disso, as reações dos apoios elásticos foram adicionadas de forma que os deslocamentos transversais dos pontos internos estejam presentes no sistema linear de equações em conjunto das variáveis de contorno. Os casos analisados são constituídos por quatro exemplos testes: uma chapa com variação de temperatura uniforme, uma chapa com fluxo de calor uniforme, uma placa com gradiente térmico e, por fim, uma placa apoiada em molas. Após os resultados numéricos obtidos com o código computacional desenvolvido, o autor conclui que a formulação utilizada apresentou boa aproximação nos cálculos dos deslocamentos, das reações e dos esforços.

Rangel e Martha (2019) desenvolveram um programa computacional, em MATLAB, com base no paradigma da Programação Orientada a Objetos (POO) para a análise linear-elástica de modelos de elementos unidimensionais, utilizando um procedimento convencional baseado

em deslocamento. O programa, denominado de LESM (*Linear Elements Structure Model*), analisa diferentes tipos de modelos, como pórticos e treliças 2D/3D, e grelhas. Além disso, o comportamento à flexão dos elementos de viga são modelados pelas teorias de Euler-Bernoulli ou Timoshenko. Além disso, o programa permite considerar os efeitos de origem térmica devido à variação de temperatura, adotando uma variação linear ao longo da seção.

5.2 MODELOS ESTRUTURAIS RETICULADOS PLANOS

O estudo de estruturas está fundamentado na construção de modelos matemáticos capazes de descrever adequadamente o problema físico real de interesse da engenharia. Em inúmeras circunstâncias, utiliza-se uma idealização estrutural que apresenta uma grande aplicabilidade para engenharia, denominada comumente na literatura, como modelos estruturais reticulados ou unifilares (WEST, 1989).

Na construção dos modelos estruturais, adotam-se algumas hipóteses em relação ao comportamento físico do problema. Dentre as simplificações, destaca-se, primeiramente, que o modelo real tridimensional é representado simplificadamente pelo eixo central da peça, ou seja, considera-se, por meio de uma análise de ordem de grandeza, que a dimensão do eixo da barra é predominante em relação às outras dimensões, conforme observado na Figura 75. Admite-se que as seções transversais da barra permanecem planas após a deformação (GERE; TIMOSHENKO, 1997; TIMOSHENKO, 1969).

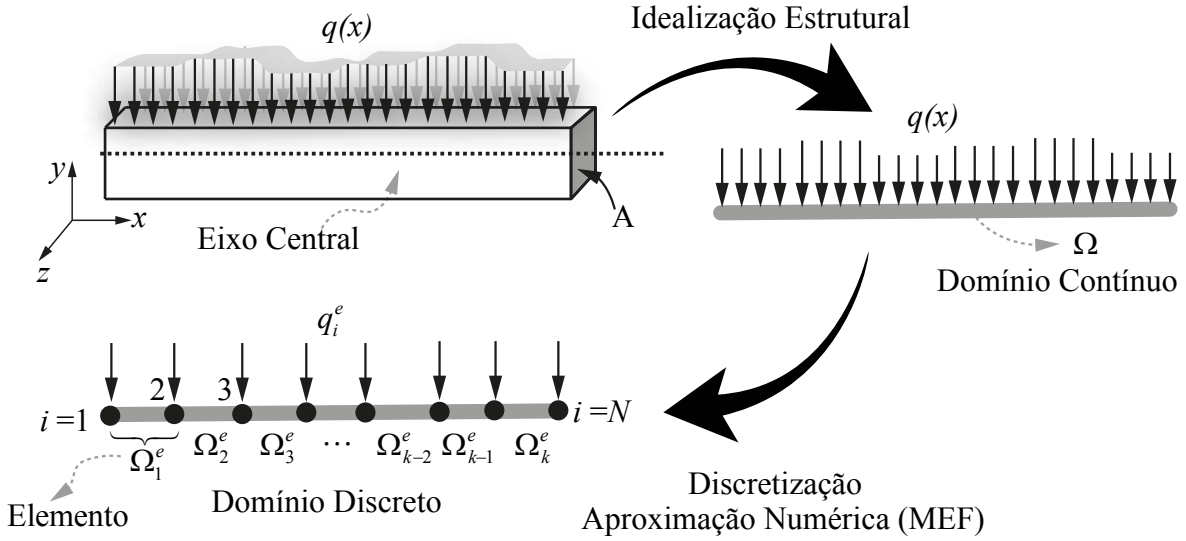

Figura 75 – Esquema simplificado para análise estrutural reticulada

Além disso, são considerados os efeitos de primeira ordem nas estruturas, os deslocamentos em um ponto arbitrário da barra são pequenos quando comparados às suas dimensões geométricas. Adotando essa hipótese, é possível estabelecer condições de equilíbrio em relação à configuração original, indeformado, da estrutura, e por consequência, provoca o desacoplamento

dos efeitos axiais e transversais, ou seja, esses são independentes e superpostos (FÉODOSIEV; ASRYANTS, 1977).

Visando praticidade e generalizada de solução, a metodologia de cálculo utilizada na análise estrutural tem como base métodos discretos. Tais métodos possibilitam a substituição do modelo contínuo por um modelo discreto associado a um conjunto de elementos e nós, onde as informações do problema são computadas e analisadas (MOREIRA, 1977), conforme ilustra a Figura 75. Vale mencionar que para estruturas planas, governadas por modelos bidimensionais, as cargas externas atuam nas direções do próprio plano.

Sendo assim, os procedimentos numéricos avançados de cálculo exigem, previamente, o conhecimento das equações diferenciais governantes dos comportamentos físicos dos elementos relativos aos efeitos axiais e de flexão. Essas equações são baseadas e traduzidas matematicamente em três fundamentos básicos da mecânica dos sólidos: as relações de equilíbrio entre forças e tensões, compatibilidade entre deslocamentos e deformações, e as leis constitutivas dos materiais.

5.2.1 FORMULAÇÃO PARA O COMPORTAMENTO AXIAL DE BARRA

O modelo unidimensional de barra para efeitos axiais, usualmente, descreve o comportamento idealizado de estruturas treliçadas, caracterizadas por apresentam somente esforços normais nas barras do sistema estrutural. A equação diferencial do problema físico é deduzida a partir de um elemento infinitesimal sujeito ao esforço normal N e uma força de corpo por unidade de comprimento $f(x)$, conforme apresenta a Figura 76a.

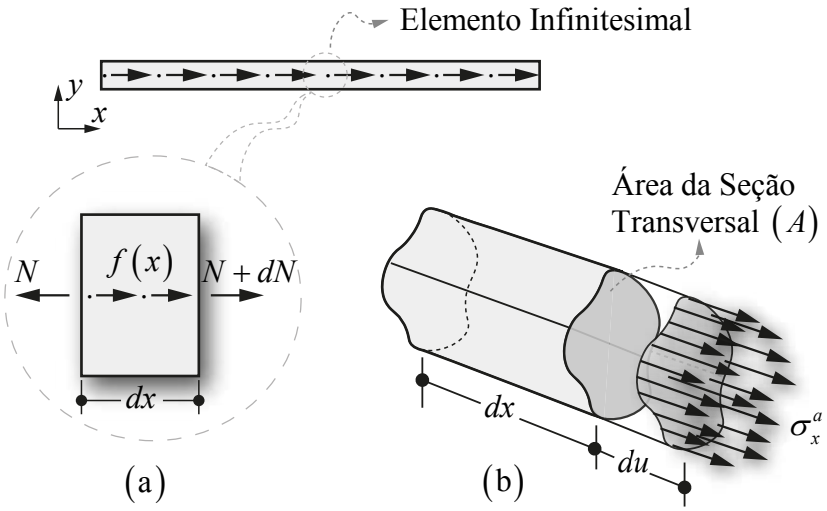

Figura 76 – (a) Elemento infinitesimal de barra sob esforço axial; (b) relação de esforço normal e deformação axial

A partir disso, fundamentado na segunda lei de Newton, pode-se escrever a equação de equilíbrio do sistema, desprezando as forças inerciais, chega-se na Equação (5.1).

$$\frac{dN}{dx} + f(x) = 0 \tag{5.1}$$

O esforço interno N pode ser escrito em função da deformação axial, conforme apresenta o esquema da Figura 76b, aplicando a lei de Hooke com as contribuições das deformações de origem térmica, tem-se que $N = \sigma_x^a A = EA\left(\varepsilon_x^a - \varepsilon_{th}\right)$ (BARRON; BARRON, 2011). Sendo que ε_x^a é a deformação normal longitudinal, dada pela razão adimensional entre o infinitesimal de deslocamento axial e comprimento. Rescrevendo a Equação (5.1), tem-se a expressão a seguir:

$$\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right] + f(x) - P_T(x) = 0 \tag{5.2}$$

A Equação (5.2) representa o modelo matemático diferencial do comportamento axial de barras sob variação de temperatura. Onde P_T é a força térmica, dada pela Equação (5.3).

$$P_T = \frac{d}{dx}\left[EA\varepsilon_{th}\right] \tag{5.3}$$

Onde $\varepsilon_{th} = \alpha\Delta T_{CG}$ é a deformação axial inicial devido à variação de temperatura e α é o coeficiente de dilação térmica do material. A partir da exposição das principais equações governantes, inicia-se a formulação de elementos finitos do problema físico, a partir do procedimento de minimização de resíduo com base na função auxiliar w.

$$\int_0^L EA\frac{d^2u}{dx^2}wdx = \int_0^L EA\varepsilon_{th}\frac{dw}{dx}dx - \int_0^L f(x)wdx \tag{5.4}$$

Por meio de algumas manipulações matemáticas realizadas na Equação (5.4), utilizando a integração por partes e aplicando os procedimentos do cálculo diferencial-integral, pode-se chegar na formulação variacional fraca do problema, conforme posto na Equação (5.5).

$$EA\int_0^L \frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}dx = \int_0^L EA\varepsilon_{th}\frac{dw}{dx}dx + \int_0^L f(x)wdx + P_2w(L) + P_1w(0) \tag{5.5}$$

Onde P_1 e P_2 são as forças nodais de extremidade da barra. Sendo assim, aproximando o campo de deslocamento longitudinal da barra com auxílio das funções de interpolação **N**.

$$u = \mathbf{Nu} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

Aplicando as aproximações, apresentada na Equação (5.6), na forma fraca do problema (Equação (5.5)), chega-se no sistema algébrico final de solução, que estabelece os deslocamentos nodais em cada direção cartesiana.

$$\mathbf{K} = \int_0^L \mathbf{B}^T EA\mathbf{B} dx \tag{5.7}$$

$$\mathbf{F} = \int_0^L \varepsilon_{th} EA\mathbf{B}^T dx + \int_0^L f(x)\mathbf{N}^T dx + \bar{P} \tag{5.8}$$

Em que **B** é a matriz que contém as derivadas das funções de interpolação e o termo EA é usualmente denominado como rigidez axial. Note que a carga distribuída é definida como uma função genérica, contudo, frequentemente, adota-se essa como sendo constante ou variando linearmente ao longo do comprimento.

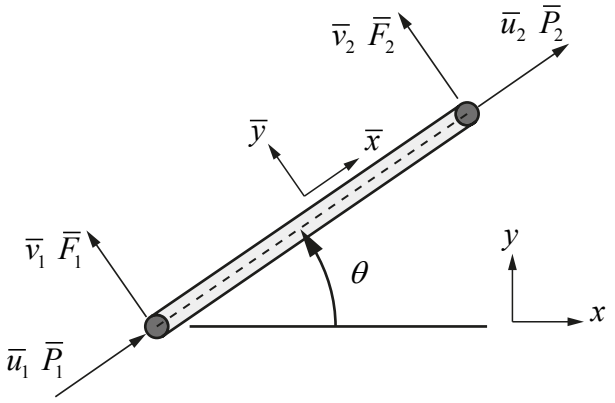

Figura 77 – Transformação dos deslocamentos e forças nodais entre o sistema local e o sistema global para treliça plana

A formulação apresentada tem como base um referencial local, no enquanto, rotineiramente, os elementos de barras sob efeitos axiais constituem sistemas estruturais treliçados com configurações geométricas aleatório, acarretando em um conjunto de barras com inclinações diferentes. Desta maneira, para contornar o problema de referencial, utiliza-se a matriz de rotação $\mathfrak{R}_a$, escrita em função do ângulo de inclinação de um elemento de treliça plano genérico (ver Figura 77), conforme expresso pela Equação (5.9).

$$[\mathfrak{R}_a] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

Onde θ é o ângulo medido do eixo horizontal do sistema global até o sistema local. Ressalta-se que a matriz de rigidez e o vetor de força são afetados pela matriz de rotação.

5.2.2 FORMULAÇÃO PARA O COMPORTAMENTO DE VIGA

Os elementos de vigas são estruturas amplamente utilizadas na prática da engenharia e com importantes aplicações numéricas e experimentais em pesquisas acadêmicas. Em inúmeros problemas, utiliza-se, simplificadamente, um modelo unidimensional para descrever o comportamento de vigas. A aplicação do modelo matemático unidimensional transita por algumas hipóteses simplificadoras gerais, por exemplo, as seções transversais permanecem planas (hipótese de Bernoulli), o material apresenta um comportamento elástico-linear, ou seja, respeita o limite de proporcionalidade entre tensão e deformação, e os deslocamentos são pequenos em comparação ao nível da seção transversal (TIMOSHENKO, 1979).

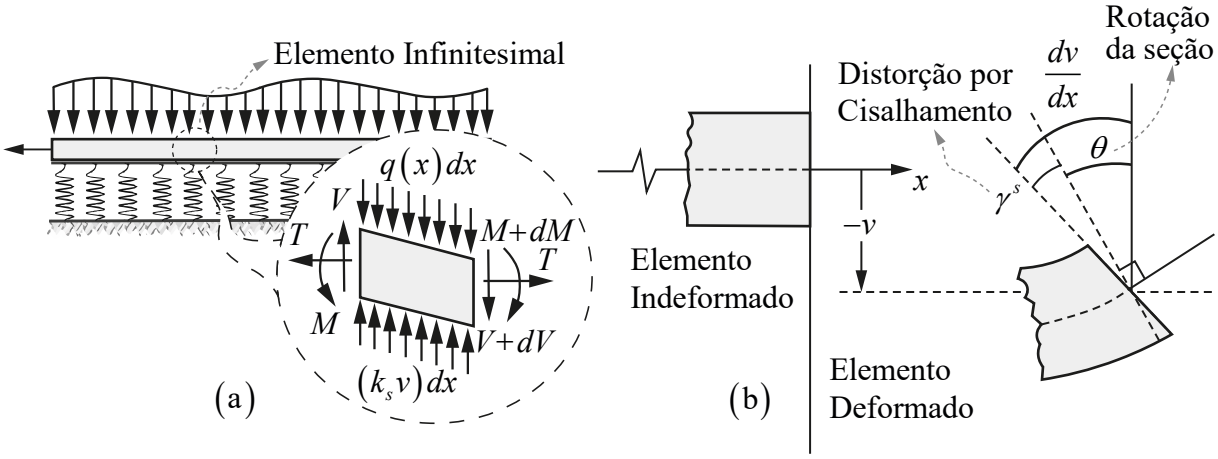

Figura 78 – (a) Elemento infinitesimal de viga sob ação do esforço cortante, momento fletor, tração, carga transversal e da reação da base elástica; (b) considerações entre as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko

Com base nas configurações adotadas, apresentadas na Figura 78a, pode-se escrever as expressões matemáticas das equações de equilíbrio de força e de momento, conforme posto na Equação (5.10) e na Equação (5.11), respectivamente. Essas expressões são válidas independente da teoria de viga adotada. Ressalta-se que o modelo matemático empregado para descrever a base elástica respeita a hipótese de Winkler (WINKLER, 1867), ou seja, a reação é proporcional ao deslocamento, permitindo considerar um sistema de molas lineares independentes (WANG; THAM; CHEUNG, 2005; HACHICH et al., 2012).

$$\frac{\partial V}{\partial x} + q - k_s v = 0 \tag{5.10}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - T\frac{\partial v}{\partial x} + V = 0 \tag{5.11}$$

A principal diferença entre as teorias de vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko é caracterizada na rotação da seção transversal, conforme ilustra a Figura 78b. Em outras palavras, na teoria de Navier (Euler-Bernoulli) despreza-se o efeito de deformação devido ao cisalhamento,

as seções transversais planas permanecem perpendiculares ao eixo da barra. Em contrapartida, na teoria de Timoshenko, considera-se aproximadamente as deformações por cisalhamento e despreza-se o empenamento da seção, sendo que as seções transversais planas não estão obrigatoriamente normais ao eixo da viga (LABUSCHAGNE; RENSBURG; MERWE, 2009; CARRER et al., 2012).

5.2.2.1 Teoria de Euler-Bernoulli

A equação diferencial de governo do comportamento de vigas com variação de temperatura e sem os efeitos de cisalhamento é obtida com base nas equações de equilíbrio, conforme posto nas Equações (5.10) e (5.11). Desta maneira, o momento fletor resultante $M(x)$ é constituído pelas parcelas de origem mecânica e térmica, conforme podem ser visto detalhadamente em Boley e Weiner (1985) e Martha (2018).

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right)-\frac{d}{dx}\left(T\frac{dv}{dx}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\int_A E\alpha\Delta T y dA\right)+k_s v=q(x) \tag{5.12}$$

Os termos presentes na Equação (5.12) representam, respectivamente, as parcelas relacionadas aos efeitos da rigidez flexional, da influência da força de tração, da contribuição térmica na seção transversal e do termo reativo da base elástica. Sendo assim, tendo apresentado a formulação forte do problema, por meio das premissas básicas do método de resíduos ponderados e aplicando as técnicas do cálculo diferencial-integral, chega-se na sentença integral a seguir:

$$EI\int_0^L \frac{d^2N_i}{dx^2}\frac{d^2v}{dx^2}dx+T\int_0^L \frac{dN_i}{dx}\frac{dv}{dx}dx+\int_0^L k_s N_i v dx=\int_0^L qN_i dx+V_i^e+M_i^e-\int_0^L \frac{d^2N_i}{dx^2}M_T dx \tag{5.13}$$

A Equação (5.13) é denominada de formulação variacional fraca do problema físico, válida em um domínio contínuo. Os procedimentos discretos são direcionados pela construção da solução aproximada do campo de deslocamento com base na combinação linear entre os coeficientes $\bar{v}_j$ e as funções de interpolação N_j (SORIANO; LIMA, 2003), conforme apresenta a Equação (5.14).

$$v=\sum_{j=1}^{4} N_j\bar{v}_j = N_1\bar{v}_1+N_2\bar{v}_2+N_3\bar{v}_3+N_4\bar{v}_4 \tag{5.14}$$

Após aplicar a Equação (5.14) na Equação (5.13), tem-se a formulação variacional discreta do problema, resultando em um sistema algébrico, definido pela matriz de rigidez e o vetor de termos independentes, conforme apresentado nas Equações (5.15) e (5.16), respectivamente.

$$K_{ij} = \int_0^L \frac{d^2N_i}{dx^2} EI \frac{d^2N_j}{dx^2} dx + T \int_0^L \frac{dN_i}{dx}\frac{dN_j}{dx} dx + \int_0^L k_s N_i N_j dx \tag{5.15}$$

$$F_i = Q_i^e + \int_0^L qN_i dx - \int_0^L \frac{d^2N_i}{dx^2} M_T dx \tag{5.16}$$

Diferentemente da modelagem dos elementos de treliça associado ao comportamento axial de barras, deve-se propor funções de interpolação com classe de diferenciabilidade C^2, a fim de garantir a existência das integrais. Sendo assim, utiliza-se a família de polinômios cúbicos de Hermite (REDDY, 1993), conforme apresenta a Figura 79.

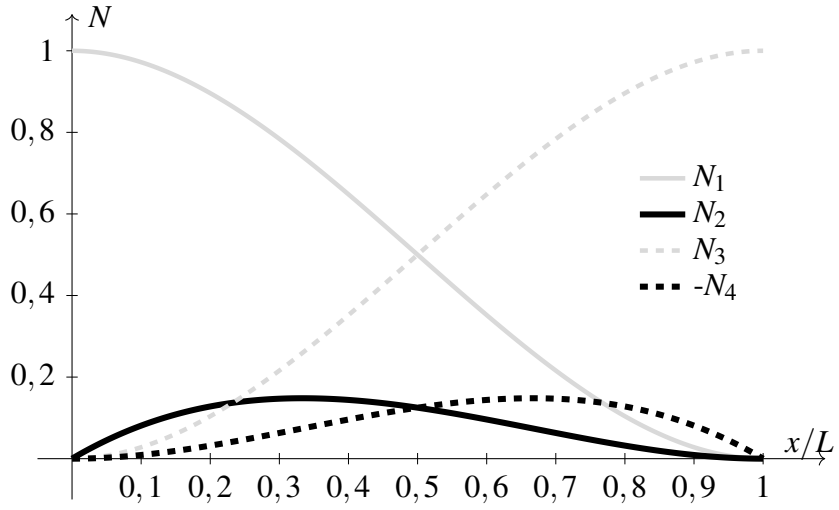

Figura 79 – Polinômios de cúbicos de Hermite

O tratamento matemático específico do termo relacionado ao efeito da variação de temperatura ao nível da seção transversal deve ser computado com base na distribuição de temperatura ao longo da altura da viga. Desta forma, na Figura 80 apresenta um esquema didático da discretização unidimensional da seção transversal, as bordas superiores e inferiores são restringidas por condições de contorno (CC) de natureza térmica.

O perfil de temperatura ao longo da seção é obtido pelo modelo de transferência de calor unidimensional, como discutido no Capítulo 4 deste trabalho. Para resolver a integral, representativa do momento de origem térmica, utiliza-se a regra do trapézio. Desta forma, pode-se escrever a sentença matemática exposta na Equação (5.17).

$$M_T \approx E\alpha b \left[\frac{\Delta h_y}{2} \left\{ T_1 y_1 + (2T_2 y_2 + 2T_3 y_3 + ... + 2T_{n-1} y_{n-1}) + T_n y_n \right\} \right] \tag{5.17}$$

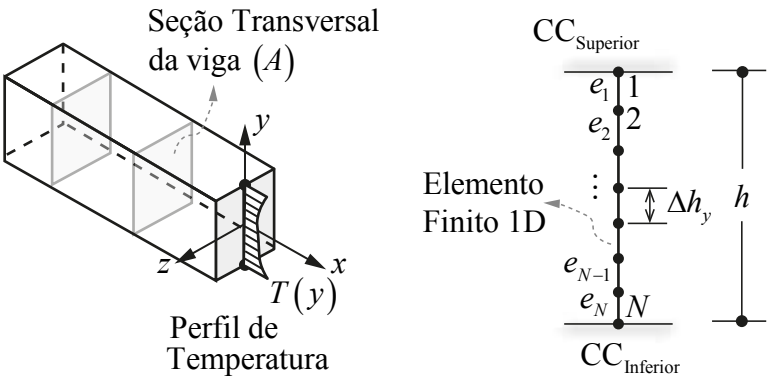

Figura 80 – Perfil de temperatura e discretização da seção transversal

Em que Δh_y é o comprimento de cada elemento finito unidimensional do processo de discretização ao nível da seção transversal. Adota-se também que o momento térmico não varia longitudinalmente na viga.

5.2.2.2 Teoria de Timoshenko

A equação diferencial de governo do comportamento de vigas, considerando os efeitos da variação de temperatura e da deformação por cisalhamento, origina-se pelo equilíbrio de um elemento diferencial de viga, conforme posto nas Equações (5.10) e (5.11), desprezando o efeito axial de tração. No entanto, diferente da teoria de Navier, o esforço cortante é medido como $V = GA_s\gamma^s$, onde γ^s é denominado como sendo a distorção por efeito cortante e igual a $\gamma^s = dv/dx - \theta$ (DAVIS; HENSHELL; WARBURTON, 1972; TIMOSHENKO, 1921). Nesse caso, o momento fletor é construído pela parcela do gradiente de rotação por flexão e a contribuição por conta da variação de temperatura.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[GA_s\left(\frac{dv}{dx}-\theta\right)\right]-k_s v=-q \tag{5.18}$$

$$GA_s\left(\frac{dv}{dx}-\theta\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[EI\frac{d\theta}{dx}+\int_A E\alpha\Delta T y dA\right]=0 \tag{5.19}$$

Onde G é o módulo de cisalhamento do material, A_s é a área da seção transversal efetiva, podendo ser modelado simplificadamente como $A_s = \kappa A$, onde κ é um fator de correção que dependendo do tipo da seção transversal (WHITE; GERGELY; SEXSMITH, 1976). Aplicando os processos de minimização de resíduos, chega-se na Equação (5.20).

$$\int_0^L \left(\frac{dw_2}{dx}\right) EI \left(\frac{d\theta}{dx}\right) dx + \int_0^L \left(\frac{dw_1}{dx} - w_2\right) G\kappa A \left(\frac{dv}{dx} - \theta\right) dx + \int_0^L w_1 k_s v dx =$$
$$Q_i^e - \int_0^L \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right) M_T dx + \int_0^L w_1 q dx \tag{5.20}$$

A construção da resposta discreta é direcionada pelas funções polinomiais cúbicas (ψ^e) e quadráticas (φ^e). Tais funções de interpolação auxiliam na aproximação do campo de deslocamento e de rotação, respectivamente, conforme posto na Equação (5.21).

$$v = \sum_{j=1}^{4} \psi_j^e \Delta_j^e \qquad \theta = \sum_{j=1}^{4} \varphi_j^e \Delta_j^e \qquad w_1 = \sum_{i=1}^{4} \psi_i^e \chi_i^e \qquad w_2 = \sum_{i=1}^{4} \varphi_i^e \chi_i^e \tag{5.21}$$

As funções de forma são similares aos polinômios de Hermite empregados na teoria de Navier (ver Figura 79), todavia, utiliza-se um parâmetro adimensional adicional, definido como $\Omega = EI/GA_sL^2$. Essas funções podem ser obtidas facilmente na literatura clássica de elementos finitos (REDDY, 1993; SORIANO; LIMA, 2003) e são ilustradas na Figura 81.

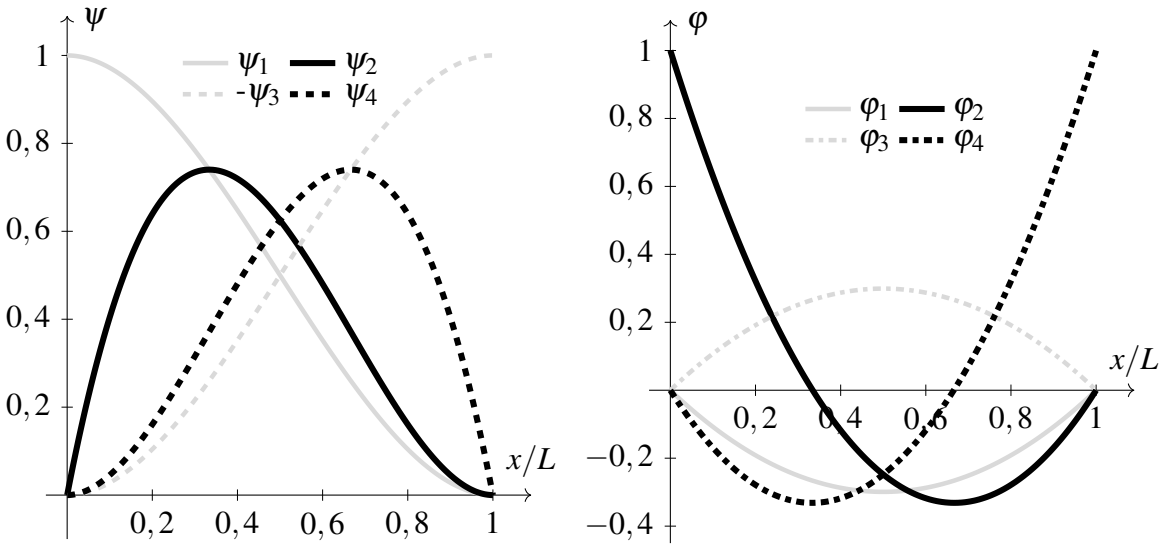

Figura 81 – Polinômios de interpolação cúbicos e quadráticos

Aplicando as aproximações na formulação variacional fraca (Equação (5.20)), chega-se no sistema linear efetivo do problema físico, sendo que a matriz de rigidez e o vetor de forças são definidos, respectivamente, na Equação (5.22) e na Equação (5.23).

$$K_{ij} = \int_0^L \left(\frac{d\varphi_j^e}{dx}\right) EI \left(\frac{d\varphi_i^e}{dx}\right) dx + \int_0^L \left(\frac{d\psi_j^e}{dx} - \varphi_j^e\right) G\kappa A \left(\frac{d\psi_i^e}{dx} - \varphi_i^e\right) dx + \int_0^L \psi_j^e k_s \psi_i^e \, dx \tag{5.22}$$

$$F_i = Q_i^e - \int_0^L \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial x} M_T dx + \int_0^L \psi_i^e q \, dx \tag{5.23}$$

Como pode-se observar, o sistema resultante apresenta grau de diferenciabilidade de primeira ordem, implicando que nesse problema é possível empregar funções de interpolação lineares. Entretanto, por conta do problema apresentar dois graus de liberdade, não é recomendado usar uma aproximação de mesma ordem para descrever o campo de deslocamento e de rotação (MUKHERJEE; PRATHAP, 2001; VEIGA; LOVADINA; REALI, 2012).

5.2.3 FORMULAÇÃO PARA O COMPORTAMENTO DE PÓRTICO

A análise do elemento de pórtico plano é constituído pela superposição entre o comportamento axial de barras e o comportamento à flexão de vigas, ou seja, o esforço normal N, o esforço cortante V e o momento fletor M estão presentes internamente no sistema estrutural. Esse tipo de estrutura apresenta três graus de liberdade por nó (3GL), sendo, respectivamente, o deslocamento longitudinal u, transversal v e a rotação θ.

Diferentemente das formulações, com base nas premissas clássicas do método de resíduos ponderados, apresentadas para o comportamento de barras e vigas. Para a formulação de pórtico plano, busca-se empregar um desenvolvimento fundamentado na ótica direcionada pelo princípio da mínima energia potencial total (PMEPT). Destaca-se que ambos os métodos mencionados anteriormente são equivalentes entre si, contudo, em um contexto de aplicação diferente (POPOV, 1978). Sendo assim, a energia de deformação interna virtual de um pórtico plano é dado a seguir pela Equação (5.24).

$$\delta U_{\text{int}} = \int \left(\delta \varepsilon_x^a N + \delta \gamma^s V + \delta \kappa^f M\right) dx \tag{5.24}$$

Onde $\delta \varepsilon_x^a$, $\delta \gamma^s$ e $\delta \kappa^f$ correspondem, respectivamente, as deformações axiais virtuais, as distorções por cisalhamento virtuais e os gradientes de rotação por flexão virtuais. Considerando a teoria de Euler-Bernoulli e a variação de temperatura, a energia interna é dada a seguir:

$$\delta U_{\text{int}} = \int \left(\frac{d\delta u}{dx} EA \left(\frac{du}{dx} - \varepsilon_{th}\right) + \frac{d^2 \delta v}{dx^2} EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{M_T}{EI}\right)\right) dx \tag{5.25}$$

Como pode ser visto na Equação (5.25), a parcela relacionada ao esforço cortante é nulo devido desprezar o efeito de cisalhamento. Em contrapartida, quando considera-se a teoria de Timoshenko, a energia de deformação interna é dada pela Equação (5.26).

$$\delta U_{\text{int}} = \int \left(\frac{d\delta u}{dx} EA \left(\frac{du}{dx} - \varepsilon_{th} \right) + \left(\frac{d\delta v}{dx} - \delta\theta \right) GA_s \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) + \frac{d\delta\theta}{dx} EI \left(\frac{d\theta}{dx} + \frac{M_T}{EI} \right) \right) dx \tag{5.26}$$

A energia potencial total do sistema estrutural (Π_p) é definida pela soma duas contribuições: a energia de deformação interna total e o potencial das forças externas (MARTHA, 2018). Sendo assim, realiza-se a minimização da energia potencial total a fim de encontrar um estado de equilíbrio estável, impõem-se ao sistema $\delta\Pi_p = 0$, conforme posto na Equação (5.27).

$$\delta\Pi_p = \delta U_{\text{int}} + \delta V_{\text{ext}} = 0 \tag{5.27}$$

Sendo que δV_{ext} contém as ações das cargas externas do sistema estrutural. Após as adequadas manipulações matemáticas, é possível chegar em um sistema algébrico efetivo que fornece os deslocamentos nodais da estrutura.

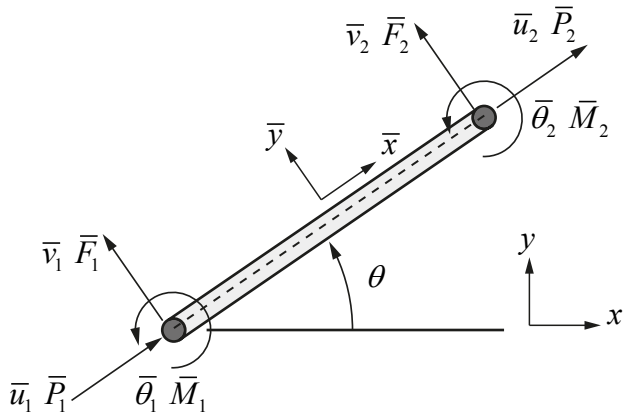

Figura 82 – Transformação dos deslocamentos e forças nodais entre o sistema local e o sistema global para pórtico plano

Na Figura 82, apresenta-se um esquema de um elemento finito de pórtico plano arbitrário, sendo que os deslocamentos nodais, no sistema local, podem ser escritos em termos dos deslocamentos globais. Matematicamente, tem-se $\{\bar{u}\} = [\mathfrak{R}_p]\{u\}$, onde $\mathfrak{R}_p$ é a matriz de rotação para pórtico plano, conforme expressa na Equação (5.28).

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{5.28}$$

De forma análoga à formulação dos elementos de treliça, a matriz de rigidez local e o vetor de força local são escritos em relação ao sistema global com auxílio da matriz de rotação, conforme apresentado a seguir na Equação (5.29).

$$[K^e] = [\Re_p]^T [\bar{K}^e] [\Re_p] \qquad \{F^e\} = [\Re_p]^T \{\bar{F}^e\} \tag{5.29}$$

O vetor de força $\bar{F}^e$ considera a contribuição das forças e dos momentos concentrados aplicados nos nós da estrutura, das cargas distribuídas ao longo de cada elemento e das forças de engastamento perfeito devido à variação de temperatura.

5.3 MODELO DE PLACA DE KIRCHHOFF

Após o tratamento numérico dos modelos estruturais reticulados de treliça, viga e pórtico, nesta seção são apresentados as principais equações e as premissas gerais acerca da teoria de placas. Novamente, nota-se que essa não é uma teoria que fornece todas as informações acerca do comportamento do problema. Isso significa que a teoria de placas é uma aproximação de engenharia que reduz o problema tridimensional original a um problema bidimensional mais simples.

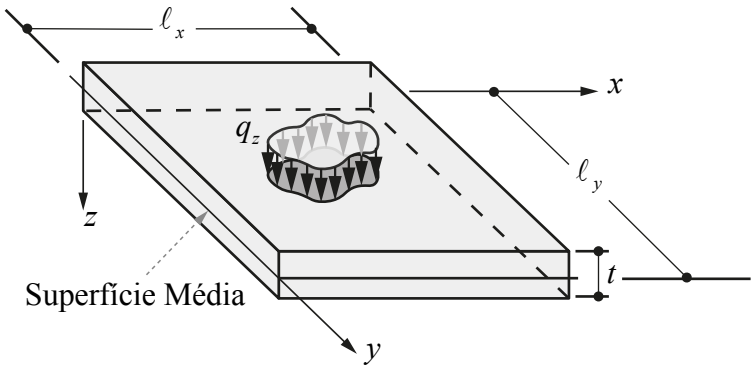

Figura 83 – Superfície (ou plano) média da placa

Para muitas aplicações de engenharia, limitada ao caso de placas delgadas, felizmente, essa teoria fornece soluções satisfatórias que traduzem adequadamente o comportamento físico

das estruturas. A análise de placas é desenvolvida em torno de uma superfície média e o carregamento é normal ao plano, conforme esquematizado na Figura 83. Assume-se que as placas delgadas (ou finas) são caracterizadas por terem sua espessura $t \ll a$, sendo a uma dimensão típica da placa, ou seja, a espessura da placa é pequena em relação às outras dimensões (SZILARD, 2004).

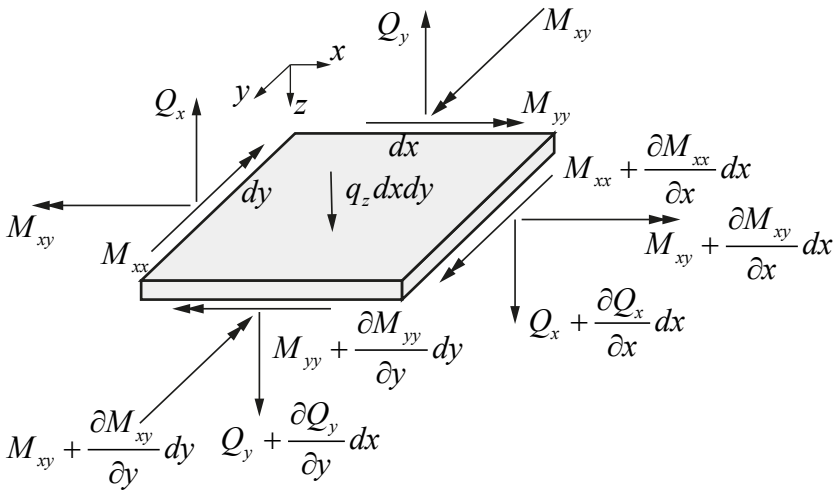

Figura 84 – Forças verticais de cisalhamento e momentos atuando em um elemento infinitesimal de placa sujeito à ação de uma força distribuída na superfície

Antes de apresentar as equações básicas da teoria, é importante estabelecer as principais hipóteses de cálculo, onde adota-se que as placas são constituídos de material homogêneo, elástico, isotrópico, linear fisicamente e que os deslocamentos são pequenos. Além disso, a superfície média não deforma-se durante a flexão, as seções transversais permanecem normais à superfície plana (hipótese de Bernoulli) e desprezam-se os efeitos de cisalhamento (TIMOSHENKO; WOINOWSKY-KRIEGER, 1959).

Desta forma, fundamentado nas equações de equilíbrio das forças e dos momentos, pode-se escrever as seguintes expressões diferenciais, envolvendo os esforços atuantes em um pequeno elemento infinitesimal de placa, conforme ilustra a Figura 84.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_z = 0 \\
&\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \\
&\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x = 0
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Combinando o conjunto de relações diferenciais, apresentadas na Equação (5.30), após algumas manipulações matemáticas, chega-se na Equação (5.31).

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q_z = 0 \tag{5.31}$$

Na presença dos efeitos provenientes da variação de temperatura, os momentos M_{xx}, M_{yy} e M_{xy} podem ser escritos em função dos deslocamentos verticais w e dos momentos térmicos (BARRON; BARRON, 2011). Sendo assim, a equação diferencial de governo, com base na teoria de placa de Kirchhoff, é escrita a seguir:

$$\nabla^2 \left(\nabla^2 D w\right) = q_z\left(x,y\right) - \nabla^2 \left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\int_z \Delta T z dz\right) \tag{5.32}$$

Onde D é conhecido como rigidez de flexão da placa e igual a $Et^3/12\left(1-\nu^2\right)$. Observa-se que a Equação (5.32) guarda uma semelhança direta com a equação de viga de Euler-Bernoulli, apresentada na Equação (5.12). A formulação forte do problema de placa é posta na expressão anterior, sendo assim, realiza-se os procedimentos matemáticos com base no método de resíduos ponderados. Após alguns desenvolvimentos algébricos, chega-se na formulação fraca resultante do problema físico, conforme posto na Equação (5.33).

$$\int_A \left(\hat{\nabla} W\right)^T \mathbf{D}_{\mathrm{r}} \left(\hat{\nabla} w\right) dA = \oint_\Gamma \left(-\frac{dW}{d\mathrm{n}} M_{nn} + W V_n\right) d\Gamma + \int_A q_z W dA - \int_A \left(\hat{\nabla} W\right)^T M_T dA \tag{5.33}$$

A Equação (5.33) é válida em um domínio contínuo. Desta maneira, utilizando as premissas de elementos finitos, pode-se escrever a resposta aproximada, conforme mostra a Equação (5.34), onde W é a função auxiliar do problema.

$$w = \sum_{j=1}^{N} N_j \Delta_j = \mathbf{Nu} \qquad W = \sum_{i=1}^{N} N_i \bar{W}_i = \mathbf{Nc} \tag{5.34}$$

Aplicando, na formulação fraca, as propostas apresentadas na Equação (5.34), tendo em vista que a função auxiliar deve ser nula nos contornos essenciais. Para satisfazer as condições no contorno natural, deve-se garantir que $\mathrm{c}^T \{R\} = 0$. Sendo assim, chega-se no sistema linear resultante $[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\}$. A matriz de rigidez e o vetor de forças efetivo do sistema é apresentado a seguir:

$$[\mathbf{K}] = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{\mathrm{r}} \mathbf{B} dA \tag{5.35}$$

$$\{\mathbf{F}\} = \oint_\Gamma \left(-(\nabla \mathbf{N})^T \mathbf{n} M_{nn} + \mathrm{N}^T V_n\right) d\Gamma + \int_A \mathbf{N}^T q_z dA - \int_A \mathbf{B}^T \mathrm{M}_T dA \tag{5.36}$$

Onde a matriz $\mathbf{D}_{\mathrm{r}} = t^3\hat{\mathbf{D}}/12$, sendo que $\hat{\mathbf{D}}$ é a matriz constitutiva para estado plano de tensão e a matriz $\mathbf{B} = \hat{\nabla}\mathbf{N}$ contém as derivadas de segunda ordem. Em adicional, Batoz e Tahar (1982), Bathe (1982) e Hansteen (1966) apresentam algumas formulações matemáticas destinadas ao tratamento dos elementos finitos específicos para comportamento de placas.

5.4 TEORIA DA TERMOELASTICIDADE BIDIMENSIONAL

Em inúmeros casos práticos da engenharia, utilizam-se métodos e fórmulas elementares provenientes da resistência dos materiais que proporcionam soluções aceitáveis e seguras. No entanto, é sabido que esses enfoques simplificados não direcionam respostas satisfatórias para avaliação de estruturas com maior nível de complexidade ou configurações físicas não usuais, sendo necessário recorrer aos modelos mais sofisticados da teoria da elasticidade.

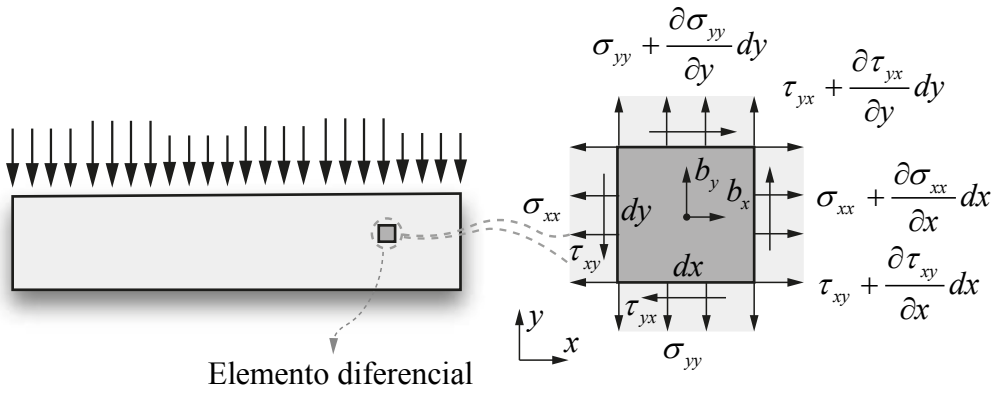

Figura 85 – Elemento diferencial plano sob ação das tensões cartesianas

Em particular, existem classes de problemas estruturais da engenharia que respeitam certas configurações geométricas e de carregamentos que possibilitam ser analisados em um espaço bidimensional, ou seja, grandezas físicas como tensão, deformação e deslocamento dependem somente de duas variáveis espaciais. Neste cenário, tais classes são conhecidas como estado plano de tensão ou deformação. Vale mencionar que os problemas são desenvolvidos considerando o comportamento do material elástico-linear e a hipótese de pequenos deslocamentos (DEN HARTOG, 1901). Sendo assim, considere o elemento infinitesimal com os lados dx e dy, submetido às tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} atuando nas direções x e y, respectivamente, sendo as mesmas perpendiculares as facetas do elemento. A tensão de cisalhamento τ_{xy} atua paralela em cada faceta do elemento, conforme exposto na Figura 85.

As condições de equilíbrio aplicadas no elemento diferencial de um corpo sólido, conforme mostra a Figura 85, exigem que as componentes do tensor das tensões, nas direções x e y, respeitem as sentenças matemáticas apresentadas na Equação (5.37) e na Equação (5.38), ditas como equações de equilíbrio.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + b_x = 0 \tag{5.37}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + b_y = 0 \tag{5.38}$$

Designa-se por b_x e b_y as componentes da força de campo nas respectivas direções cartesianas. Na forma matricial, pode-se escrever a Equação (5.39).

$$\nabla_s^T \underset{\sim}{\sigma} + \underset{\sim}{b} = 0 \tag{5.39}$$

Além disso, têm-se as equações diferenciais cinemáticas ou usualmente conhecidas como as relações de deformação-deslocamento. A partir de um elemento diferencial mostra-se o estado indeformado e deformado do corpo sólido, conforme apresentado na Figura 86.

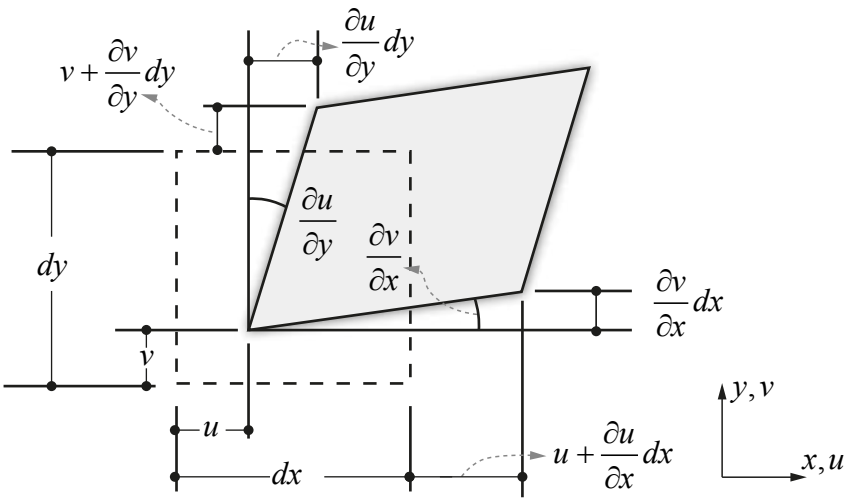

Figura 86 – Elemento diferencial antes e depois da deformação

Com base nas configurações puramente geométricas e respeitando a hipótese de pequenas deformações, podem-se escrever as seguintes relações matemáticas para as três componentes de deformação do estado plano, conforme posto nas Equações (5.40), (5.41) e (5.42).

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{5.40}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{5.41}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{5.42}$$

Onde as componentes ε_{xx} e ε_{yy} representam as deformações específicas (ou alongamentos unitários) nas direções x e y, respectivamente, e γ_{xy} é designado como a deformação angular (ou

por cisalhamento). As expressões matemáticas associadas as equações cinemáticas podem ser sintetizadas matricialmente, conforme apresentado na Equação (5.43).

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \nabla_s \underset{\sim}{u} \tag{5.43}$$

Quando um corpo sofre deformação devido a um carregamento externo aplicado existe uma relação entre tensão-deformação. Desta forma, assume-se a hipótese que o corpo sofre uma excitação inicial devido uma tensão σ_0 e admite-se também a existência de deformações de origem térmica (BOLEY; WEINER, 1985). Sendo assim, pode-se escrever a seguinte sentença matemática:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}_L + \underset{\sim}{\sigma}_0 - \underset{\sim}{\sigma}_T \tag{5.44}$$

Realizando uma investigação acerca da interpretação física dos termos presentes na Equação (5.44), a primeira parcela está relacionada com as tensões associadas à lei de Hooke, a segundo parcela representa as tensões iniciais e, por fim, a terceira parcela é relacionada as tensões térmicas, originadas, por exemplo, pela variação de temperatura não uniforme no elemento, uma restrição ao corpo de se expandir livremente ou por uma combinação desses dois efeitos (RIBEIRO, 1991).

Por fim, os corpos estão sujeitos a certas condições de restrições de movimento ao longo da sua fronteira. Basicamente, são definidas as condições de contorno essenciais e naturais, válidas em Γ_u e Γ_t, respectivamente, conforme posto nas Equações (5.45) e (5.46).

$$\mathbf{u} = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_u \tag{5.45}$$

$$\mathbf{t} = \underset{\sim}{\tau}\mathbf{n} \quad \text{em } \Gamma_t \tag{5.46}$$

Sendo que $\mathbf{t}$ é o vetor de tração no contorno, $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário e $\bar{u}$ é definido como deslocamento prescrito. Com base no conhecimento prévio das equações de equilíbrio, cinemáticas e constitutivas no contexto da teoria da elasticidade bidimensional, podem-se aplicar os procedimentos numéricos de elementos finitos. Sendo importante destacar que é possível, alternativamente, realizar o tratamento numérico com base na equação de Navier para sólidos que apresenta os deslocamentos como variável primal (TIMOSHENKO; GOODIER, 1980).

Sendo assim, a partir das premissas do método de resíduos ponderados, após algumas manipulações matemáticas e aplicações dos teoremas do cálculo diferencial-integral, chega-se na formulação variacional fraca para o problema de elasticidade (REDDY, 1993), conforme apresentado na Equação (5.47).

$$\int_{\Omega} (\nabla_s w)^T \underset{\sim}{\sigma} d\Omega = \int_{\Gamma} (w)^T \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} (w)^T \underset{\sim}{b} d\Omega \tag{5.47}$$

Onde w é a função auxiliar (ou peso). Sendo assim, o próximo passo do desenvolvimento dos procedimentos de elementos finitos é substituir o vetor de tensão, com base na lei constitutiva do material, e, em seguida, introduz a solução aproximada, escrita com base nas funções de interpolação, na formulação fraca do problema. No Anexo B, apresentam-se as funções de interpolação dos elementos finitos bidimensionais.

A partir das premissas de elementos finitos, pode-se aproximar o campo de deslocamento e a função auxiliar com base na combinação linear entre os coeficientes (u_j e w_i) e as funções de interpolação ($\tilde{\mathbf{N}}$), conforme mostrado nas Equações (5.48) e (5.49). Além disso, ressalta-se que as funções de interpolação devem ser unitárias nos pontos de análise e nulo nos demais.

$$\underset{\sim}{u} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\mathbf{N}}_{\mathrm{j}}\, u_j \tag{5.48}$$

$$w = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mathbf{N}}_i w_i \tag{5.49}$$

Onde $\underset{\sim}{u}$ e w são, respectivamente, os vetores que guardam as componentes, nas direções cartesianas, do deslocamento e da função auxiliar, e a matriz quadrada $\tilde{\mathbf{N}}$ contém as funções de forma. Sendo assim, a partir da Equação (5.47) e das Equações (5.48) e (5.49), realizando algumas operações matemáticas, é possível definir o sistema linear resultante, sendo Δ o vetor de deslocamentos nodais discretos nas direções cartesianas.

$$[\mathbf{K}]\{\Delta\} = \{\mathbf{F}_c\} + \{\mathbf{F}_t\} + \{\mathbf{F}_B\} + \{\mathbf{F}_{th}\} + \{\mathbf{F}_{\sigma_0}\} \tag{5.50}$$

Ressalta-se que o termo $\mathbf{F}_c$ representa o vetor de forças nodais concentradas da estrutura. Além disso, o vetor de forças nodais térmicas é obtido com base na distribuição bidimensional de temperatura do corpo (VILA REAL, 1988).

5.5 TESTES NUMÉRICOS

A validação e análise dos casos, acerca do comportamento linear de estruturas com efeitos da variação de temperatura, transitam por três classes de problemas físicos. Primeiramente, são apresentados os problemas descritos pelos modelos estruturais unifilares, em seguida, os problemas governados pelo modelo de placa delgada e, por fim, são estudados os problemas modelados pela teoria da elasticidade bidimensional. Para tanto, são utilizados os módulos computacionais específicos, NASEN/SA e NASEN/TSA, destinados ao comportamento linear estrutural e termoestrutural, respectivamente.

5.5.1 PROBLEMAS DE ESTRUTURAS RETICULADAS

A investigação do comportamento estrutural por meio dos modelos reticulados é realizado por testes numéricos em estruturas com dois e três graus de liberdade, caracterizados pelos elementos de treliça, viga e pórtico. Para tanto, inicialmente, realiza-se uma análise simples em uma treliça submetida à variação de temperatura. Em seguida, realiza-se uma série de testes acerca do comportamento de vigas para diferentes configurações físicas. Ao fim, estuda-se um pórtico de três andares, visando verificar a influência dos efeitos térmicos no sistema estrutural.

5.5.1.1 Treliça sob ação da variação de temperatura

O primeiro exemplo teste, contido na seara de problemas associados ao comportamento de estruturas unifilares, consiste em um sistema estrutural treliçado de comprimento igual a $4H$, sendo que a altura da estrutural é igual a 4 m. As barras da treliça estão com suas extremidades articuladas e a estrutura está sujeita a uma combinação de cargas horizontais e verticais, cujos módulos são escritos em função $P = 10$ kN e $F = 50$ kN, respectivamente.

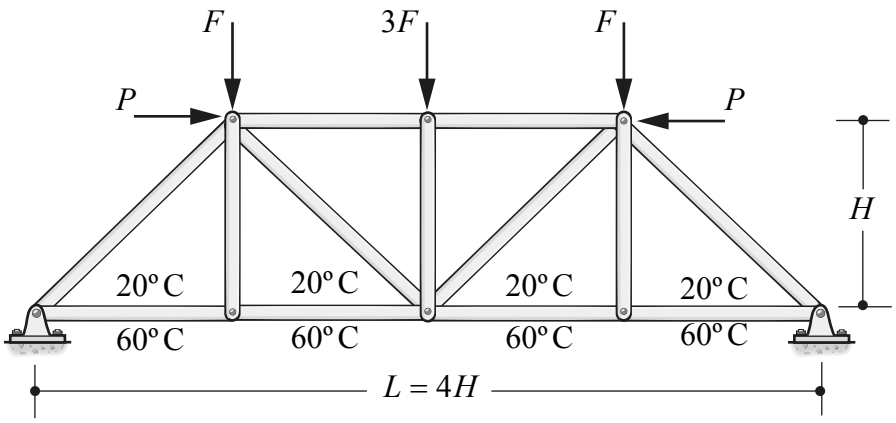

Figura 87 – Esquema das condições de contorno e dos carregamentos na treliça

Além disso, existem cargas térmicas atuantes nas barras inferiores do sistema, conforme apresenta a Figura 87. As temperaturas na face superior e inferior da seção transversal são iguais,

respectivamente, 60°C e 20°C. Adota-se neste problema o modelo estacionário de transferência de calor e uma variação linear de temperatura ao longo da altura das barras.

Em relação às propriedades físicas e geométricas, considera-se um módulo de elasticidade igual a 100 GPa, um coeficiente de expansão térmica de 0,00001°C^{-1} e uma área da seção transversal igual a 0,0375 m^2. No tocante da simulação computacional, define-se o sistema estrutural com 13 elementos e interligados por 8 nós.

Tabela 9 – Deslocamentos nodais da treliça, em m

x (m)	y (m)	NASEN		Solução Analítica	
		u	v	u	v
0,0	0,0	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
4,0	0,0	1,2258E-20	-6,0112E-04	5,0680E-20	-6,0110E-04
8,0	0,0	2,4517E-20	-1,0514E-03	1,0130E-19	-1,0510E-03
12,0	0,0	1,1524E-20	-6,0112E-04	4,4050E-20	-6,0110E-04
16,0	0,0	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
4,0	4,0	2,2400E-04	-6,0112E-04	2,2400E-04	-6,0110E-04
8,0	4,0	-2,4734E-20	-1,2114E-03	8,1320E-20	-1,2110E-03
12,0	4,0	-2,2400E-04	-6,0112E-04	-2,2400E-04	-6,0110E-04

Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 9, onde busca-se avaliar os deslocamentos horizontais e verticais em cada nó do sistema estrutural. Para validação dos resultados numéricos obtidos pelo programa NASEN, utiliza-se os métodos analíticos, com base na análise matricial de estruturas, que podem ser consultados facilmente nas literaturas clássicas da área, vide em Moreira (1977) e McGuire, Gallagher e Saunders (1982). Como pode ser visto, a implementação computacional desenvolvida do presente trabalho apresenta valores semelhantes com a solução de referência, direcionando para a boa performance do programa.

5.5.1.2 Viga sob base elástica submetida à ação de carregamentos externos

A presente seção visa investigar e validar o modelo de viga sob ação da influência de uma base elástica. Sendo assim, estudam-se duas configurações físicas, variando os tipos de carregamentos e as vinculações da viga, conforme mostra a Figura 88. Em ambos os casos, adota-se um módulo de elasticidade igual a 15 GPa e uma seção transversal retangular de base e altura iguais a 200 e 150 mm, respectivamente.

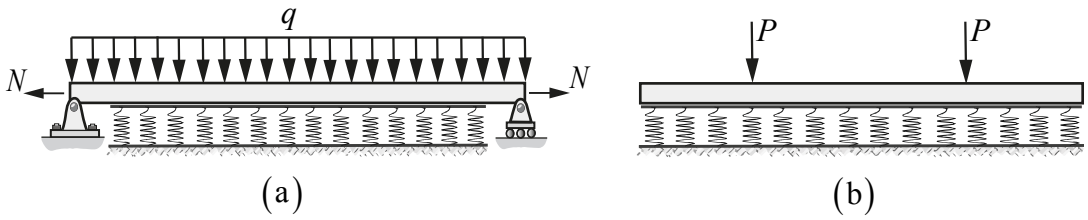

Figura 88 – Viga de fundação (a) biapoiada sujeita a uma carga distribuída e uma força axial de tração, e (b) livre nas extremidades com uma força concentrada simétrica

O primeiro caso é definido por uma viga biapoiada de comprimento igual a 8 m sob ação de uma carga distribuída de 100 kN/m e uma solicitação axial de tração de 1000 kN. Para esse caso, busca-se extrair as informações do problema com relação ao campo de deslocamento transversal e de inclinação da viga em função do comprimento longitudinal.

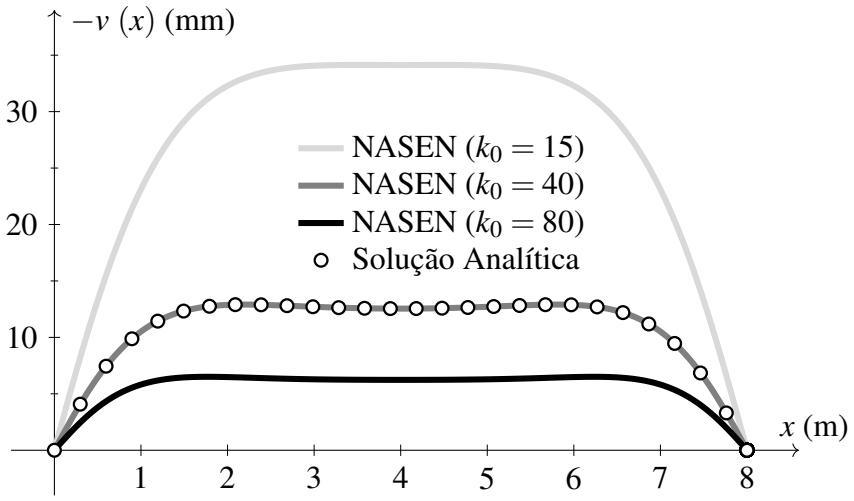

Figura 89 – Campo de deslocamento da viga biapoiada sob ação de carregamentos externos

A resposta numérica obtida para o campo de deslocamento da viga é comparada com a solução analítica do problema, encontrada na literatura clássica da área, vide Coduto (2015) e Melerski (2006). Na Figura 89, pode-se notar que os resultados obtidos com base na solução numérica e na solução exata apresentam boa concordância, quantitativamente, o erro médio percentual calculado entre as soluções fornece um valor de aproximadamente $4{,}01 \cdot 10^{-8}$.

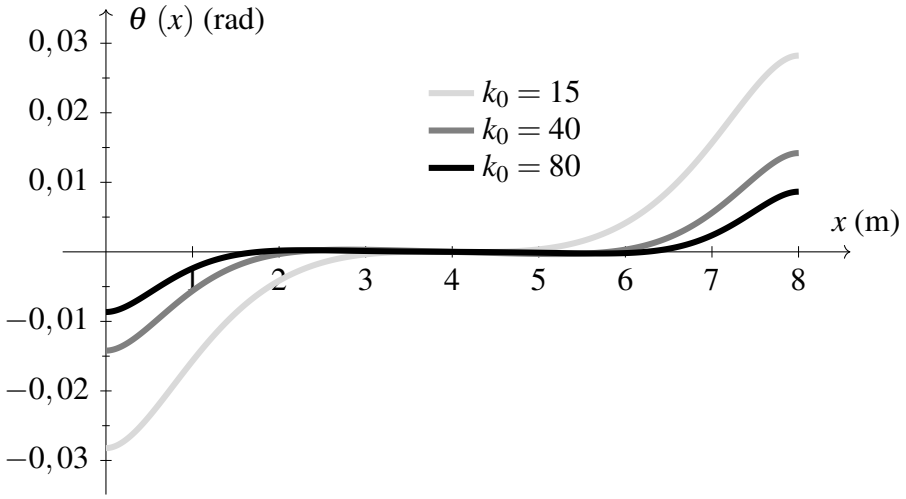

Figura 90 – Campo de rotação da viga biapoiada sob ação de carregamentos externos

Na Figura 90, apresenta-se o campo de inclinação (ou rotação) ao longo do comprimento da viga, considerando diferentes valores de coeficientes de proporcionalidade da base elástica, sendo possível verificar que quanto maior a rigidez da base elástica menores são as rotações da viga. O segundo caso consiste em uma viga com suas extremidades livres, ou seja, não existe

nenhuma restrição de movimento nesses pontos, permitindo o deslocamento vertical, horizontal e a rotação. O comprimento da viga é igual a 10 m e a magnitude da carga concentrada vertical é 125 kN. Adota-se também um coeficiente de proporcionalidade da base elástica igual a 100 kN/m^2/mm.

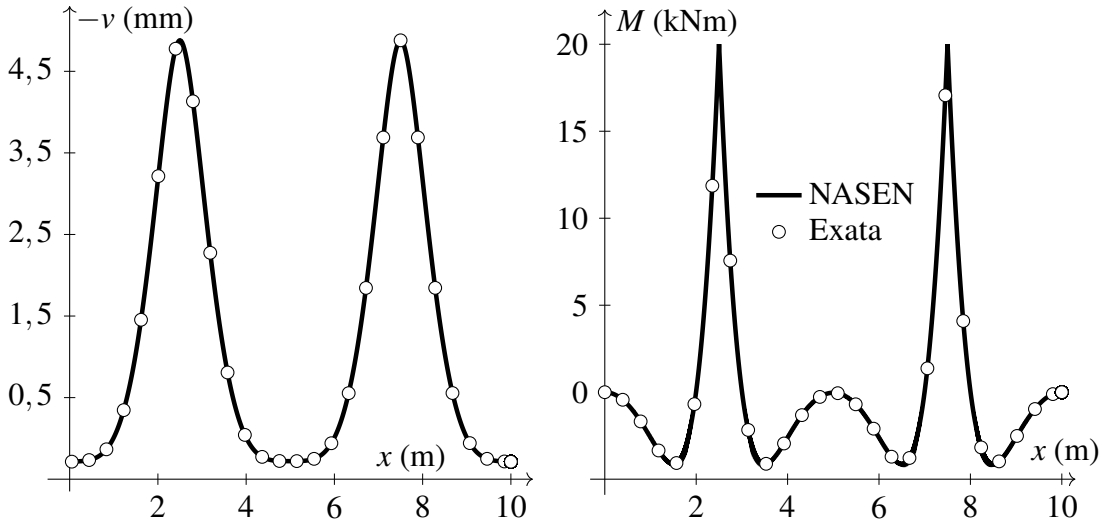

Figura 91 – Deslocamento e momento fletor da viga com extremidades livres submetida ao carregamento concentrado simétrico

Na segunda configuração, são extraídas as informações relacionadas ao campo de deslocamento vertical e ao momento fletor, conforme apresenta a Figura 91. Os resultados são comparados com a solução exata do problema, sendo possível verificar a boa semelhança nos resultados numéricos obtidos com o programa NASEN.

Tabela 10 – Comparação dos resultados obtidos via método dos elementos finitos e diferenças finitas para deslocamento e momento fletor, em $x = 2,5$ m

N°Nós	**Deslocamento (mm)**				**Momento Fletor (kNm)**			
	MEF^1	**MDF**^{2}	Δ_0^1 **(%)**	Δ_0^2 **(%)**	**MEF**^{1}	**MDF**^{2}	Δ_0^1 **(%)**	Δ_0^2 **(%)**
7	4,1324	3,6520	1,53E+01	2,52E+01	13,3106	5,4450	3,35E+01	7,28E+01
13	4,7519	5,4688	2,62E+00	1,21E+01	17,2869	10,4196	1,36E+01	4,79E+01
19	4,8505	5,4891	6,03E-01	1,25E+01	18,6763	15,6109	6,68E+00	2,20E+01
31	4,8760	5,1735	8,13E-02	6,02E+00	19,5133	18,5505	2,50E+00	7,31E+00
43	4,8789	5,0393	2,13E-02	3,27E+00	19,7557	19,2964	1,28E+00	3,58E+00
61	4,8797	4,9601	5,13E-03	1,64E+00	19,8862	19,6668	6,32E-01	1,73E+00
91	4,8799	4,9162	1,02E-03	7,44E-01	19,9563	19,8640	2,82E-01	7,43E-01
247	4,8799	4,8848	1,82E-05	1,00E-01	20,0052	19,9937	3,78E-02	9,50E-02
Exata^0	**4,8799**				**20,0127**			

Com objetivo de verificar o desempenho numérico, apresenta-se, na Tabela 10, os resultados do programa NASEN, utilizando o método dos elementos finitos e das diferenças finitas para diferentes níveis de refinamento da malha. Os valores numéricos são medidos em $x = 2,5$ m, em relação à extremidade esquerda da viga, onde se tem uma carga concentrada

aplicada. Nota-se que ambos os métodos apresentam bons resultados, contudo, para a análise do deslocamento, a convergência do MEF é rápida em comparação ao MDF, apresentando baixos níveis de erro para malhas pouco refinadas. Em contrapartida, quando se avalia o momento fletor, mesmo que os erros percentuais, obtidos com MEF, são menores em relação ao MDF, ambos os métodos apresentam um comportamento parelho em níveis de ordem de grandeza, atingindo, no fim, o valor físico esperado.

5.5.1.3 Viga engastada-apoiada com carregamento distribuído uniforme

Neste caso visa-se validar as rotinas computacionais relacionadas às premissas da teoria de Timoshenko de viga, onde se considera o efeito de cisalhamento. Para tanto, analisa-se uma viga hiperestática, com suas extremidades engastada-apoiada, sujeita a uma carga uniforme distribuída ao longo do comprimento, conforme ilustra a Figura 92.

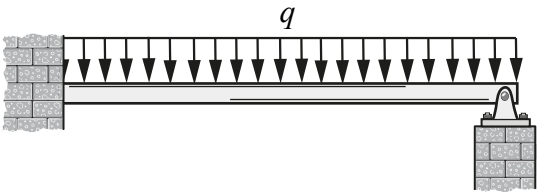

Figura 92 – Viga hiperestática com as extremidades engastada-apoiada sujeita a uma carga distribuída uniformemente

Neste caso, adota-se uma seção transversal retangular com fator de cisalhamento de 5/6 e uma área de 0,12 m^2, um momento de inércia é igual a 0,0036 m^4 e um módulo de elasticidade longitudinal igual a 50 GPa. O comprimento e a carga são iguais a 4,00 m e 100 kN/m, respectivamente. A viga é discretizada em 16 elementos finitos unidimensionais com 17 nós.

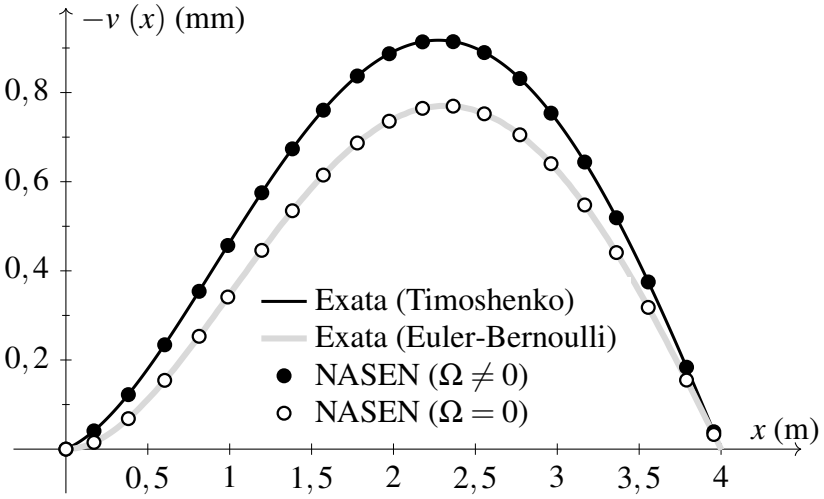

Figura 93 – Comparação entre as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko em relação ao campo de deslocamento transversal da viga

A avaliação dos resultados é direcionada pela comparação com a solução analítica do problema estudado, sendo essa obtida em Carrer et al. (2013) e Fleischfresser (2012). A primeira análise está associada ao processo de comparação entre as duas teorias de viga, Euler-Bernoulli e Timoshenko, conforme apresentado na Figura 93. O programa desenvolvido, NASEN, permite realizar a análise limítrofe entre as teorias de viga, com base no parâmetro adimensional Ω, onde nota-se que as curvas assemelham-se com as respectivas soluções analíticas. Ressalta-se que os deslocamentos obtidos, por meio da teoria de Euler-Bernoulli, apresentam um comportamento inferior aos resultados obtidos pela teoria de Timoshenko. Além disso, independente da teoria de viga utilizada, o modelo de elementos finitos assume dois graus de liberdade por nó (translação vertical e rotação). Sendo assim, compara-se também a curva de giro (rotação) da seção transversal da viga em função da posição, conforme exposto na Figura 94.

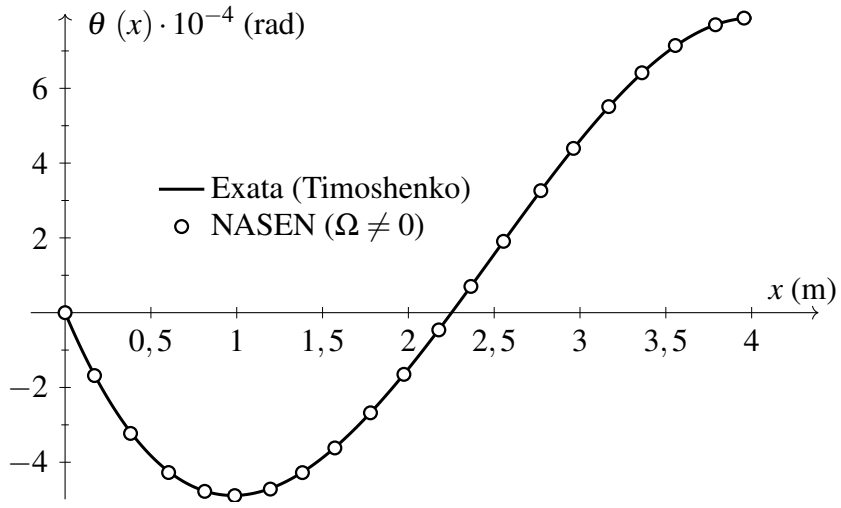

Figura 94 – Campo de rotação em função do comprimento do elemento estrutural utilizando a teoria de vigas de Timoshenko

Observa-se que a função inclinação da viga atende as condições de restrições de movimento nos apoios, ou seja, na extremidade engastada, tem-se uma rotação nula e, na extremidade apoiada, a rotação é livre. Em relação ao comportamento dos resultados, nota-se novamente um bom ajuste entre as curvas obtidas numericamente e analiticamente.

5.5.1.4 Viga apoiada com balanço sujeita a um carregamento térmico transiente

Análise, numericamente, uma viga isostática com um balanço, na extremidade direita, sob ação de uma carga uniformemente distribuída e de um carregamento de origem térmica, ambas atuando em todo o comprimento da viga, conforme apresenta-se na Figura 95.

Em termos de dados de entrada da simulação computacional, adota-se um módulo de elasticidade longitudinal de 200 GPa, um coeficiente de dilatação térmica igual a 0,000010°C^{-1}, uma área e um momento de inércia da seção transversal iguais 100,00 cm^2 e 833,33 cm^4, respectivamente, e o módulo da carga distribuída uniformemente é 560 kN/m. Nesse problema, emprega-se o módulo térmico de condução de calor transiente, visando determinar o perfil de

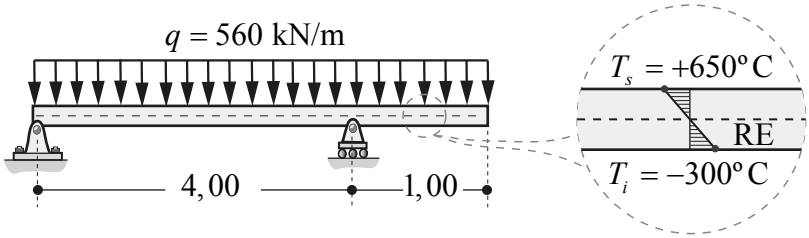

Figura 95 – Dimensões e características da viga biapoiada sujeita ao carregamento distribuído e ao efeito da carga térmica variando ao longo do tempo

temperatura ao longo da altura da viga. Sendo assim, na simulação, adota-se a massa específica igual a 7200 kg/m^3, a condutividade térmica de 35,0 W/m°C e o calor específico de 440,5 J/kg°C. Em termos de condições de contorno, nas extremidades do domínio, são prescritos potenciais, ou seja, na borda inferior e superior da viga, adotam-se, respectivamente, os valores de temperatura iguais a 650°C e -300°C.

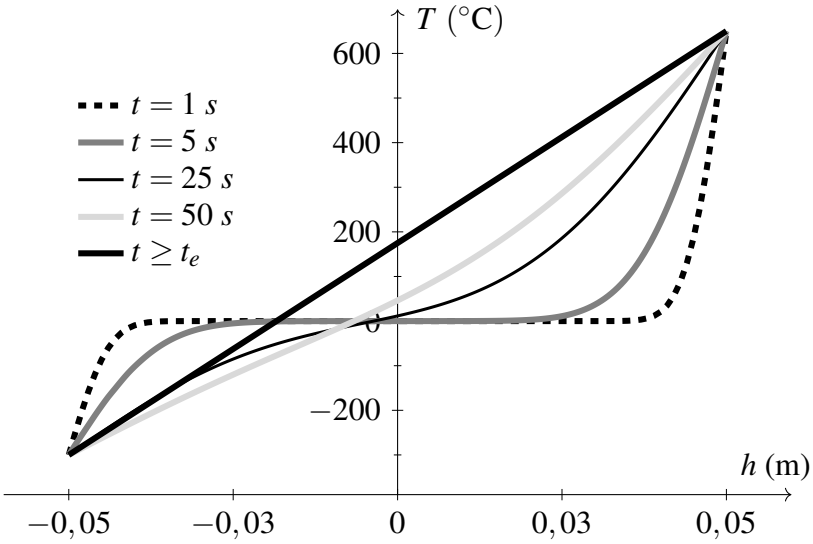

Figura 96 – Evolução do campo térmico da viga biapoiada, com extremidade em balanço, para o intervalo de tempo $t \in [1, t_e]$

Inicialmente, determina-se o campo térmico em função do tempo decorrido, conforme apresenta a Figura 96. A solução numérica inicia de um incremento temporal inicial até atingir um tempo característico t_e, responsável pelo equilíbrio térmico, ou seja, a solução em regime estacionário (RE). Como pode ser visto, quando a solução atinge o regime estacionário, tem-se uma variação linear entre a temperatura da face inferior e a face superior da viga. Para cada instante de tempo t, associado a uma distribuição de temperatura, existe uma resposta estrutural, conforme apresenta a Figura 97.

A solução analítica utilizada para avaliar o comportamento mecânico da viga, em regime estacionário, é fundamentada nos métodos clássicos da análise estrutural (MARTHA, 2010). Desta forma, a Figura 97 visa realizar uma análise limítrofe em relação ao campo de deslocamento da viga. A partir disso, pode-se observar que, a medida que ocorre a evolução dos níveis de

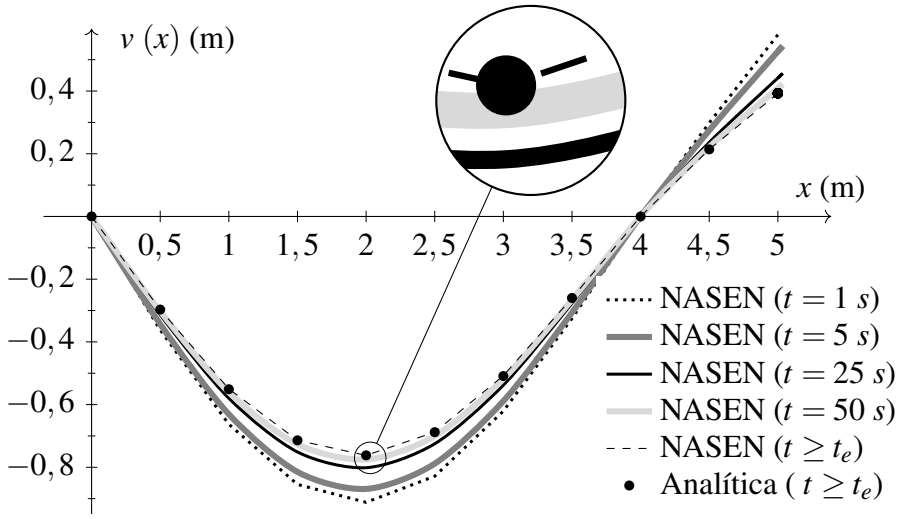

Figura 97 – Deslocamento transversal da viga biapoiada para níveis temporais diferentes

temporais, o campo de deslocamento transversal da viga tende para a solução analítica em regime estacionário.

5.5.1.5 Viga de fundação sob variação linear de temperatura

Estuda-se, por meio de uma avaliação numérica com base nos procedimentos de elementos finitos, o comportamento de uma viga de fundação isostática engastada-livre ausente de carregamentos externos, e submetida ao carregamento de origem térmica por conta da variação de temperatura ao longo da altura da seção transversal da viga, conforme apresenta a Figura 98. Considera-se a variação linear de temperatura, a borda superior e inferior da viga são mantidas a uma temperatura prescrita de 369°C e 23°C, respectivamente.

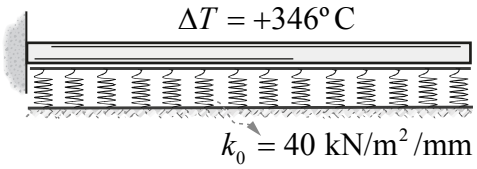

Figura 98 – Características da viga de fundação sob ação da variação de temperatura

Em relação aos parâmetros iniciais, adota-se o módulo de elasticidade igual a 200 GPa, o coeficiente de recalque do solo igual a 40 kN/m^2/mm, a seção transversal da viga retangular com dimensões iguais a 100×100 mm, o comprimento total da viga de 6 m e o coeficiente de dilatação igual a 10^{-5}°C^{-1}. Para este caso, buscam-se avaliar o campo de deslocamento vertical e de rotação, bem como os esforços internos em cada ponto discreto da viga.

Como todos os elementos da viga estão influenciados pelo mesmo efeito térmico, tem-se que o momento térmico, atuante ao longo da viga, é constante e igual para todos os elementos finitos. Sendo assim, os primeiros resultados são mostrados na Figura 99, onde apresenta-se o campo de deslocamento transversal e de rotação, obtidos numericamente, por meio do programa

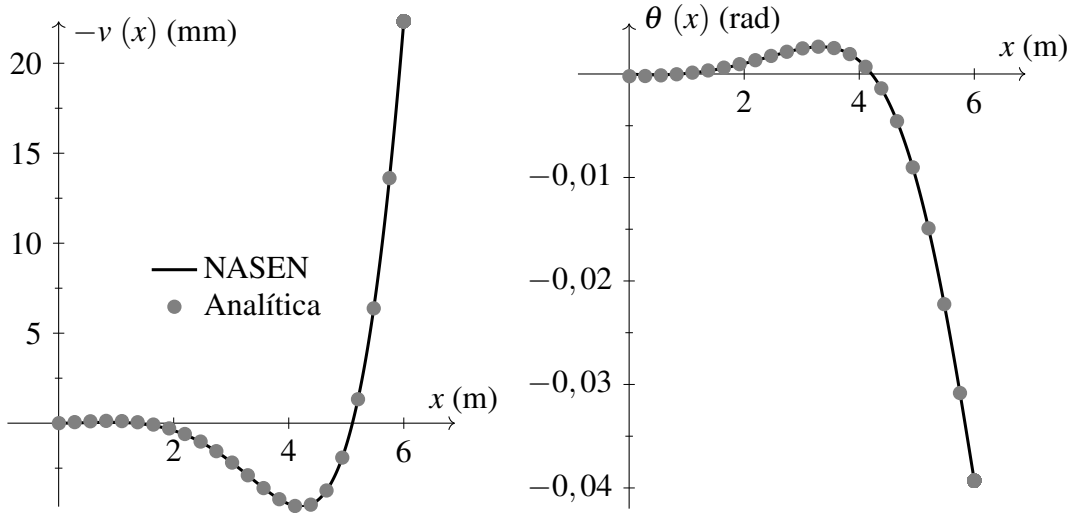

Figura 99 – Função deslocamento $v(x)$ e rotação $\theta(x)$ para viga de fundação

NASEN, e com base nas soluções analíticas, sendo possível verificar um ajuste assertivo e satisfatório entre as curvas.

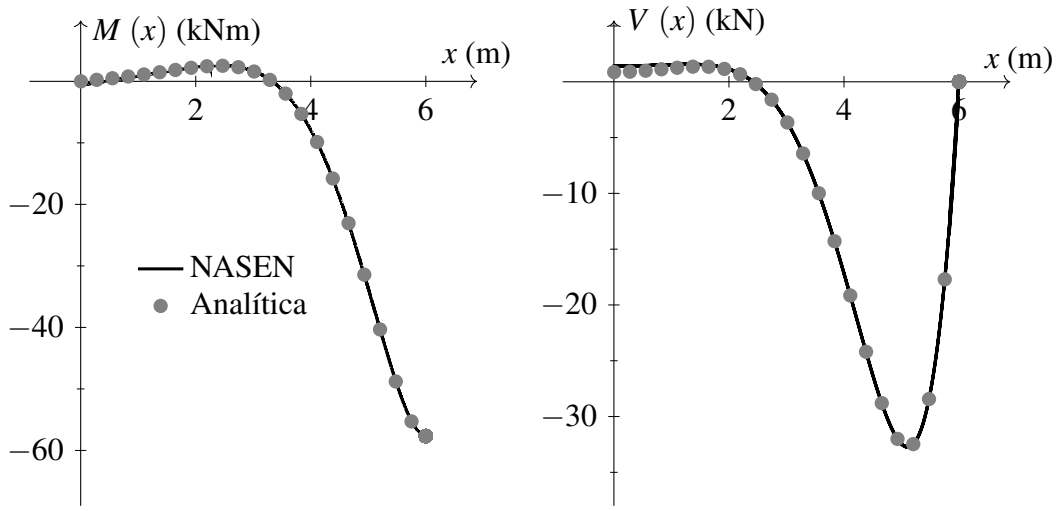

Figura 100 – Função momento fletor $M(x)$ e esforço cortante $V(x)$

Em relação aos esforços internos, momento fletor e força de cisalhamento, apresenta-se, na Figura 100, os resultados numéricos obtidos. Como pode-se observar, as curvas provenientes do programa NASEN e da solução analítica apresentam, novamente, um comportamento semelhante entre si, demonstrando o bom desempenho do programa computacional desenvolvido.

5.5.1.6 Viga sujeita ao carregamento térmico e degradação do material

Verifica-se nesta seção, por meio do modelo estrutural linear reticulado, o comportamento de uma viga com solicitações externas e cargas térmicas. Nesse caso, busca-se verificar a influência dos efeitos da degradação do material com a evolução da temperatura e os efeitos térmicos de expansão e curvatura da estrutura.

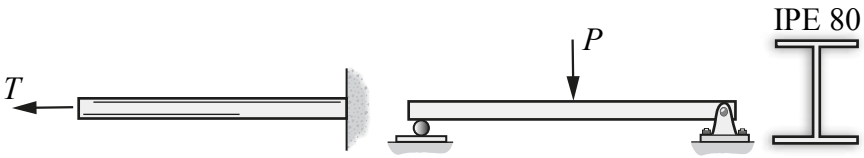

Figura 101 – Modelo estrutural da viga com seção transversal formada por um perfil IPE 80 sujeita à força de tração (esquerda) e à força concentrada vertical (direita)

Esta seção é divida em dois casos, conforme apresenta-se na Figura 101, onde as condições de vinculação, carregamentos e variação de temperatura são fatores que variam em cada caso estudado. Para ambos os casos, adota-se uma viga de comprimento unitário com seção transversal constituída pelo perfil de aço IPE 80 com um módulo de elasticidade igual 210 kN/mm^2. Sendo assim, o primeiro teste apresenta uma viga de aço engastada-livre sob ação de uma força de tração igual a 50 kN e um aquecimento uniforme da seção transversal.

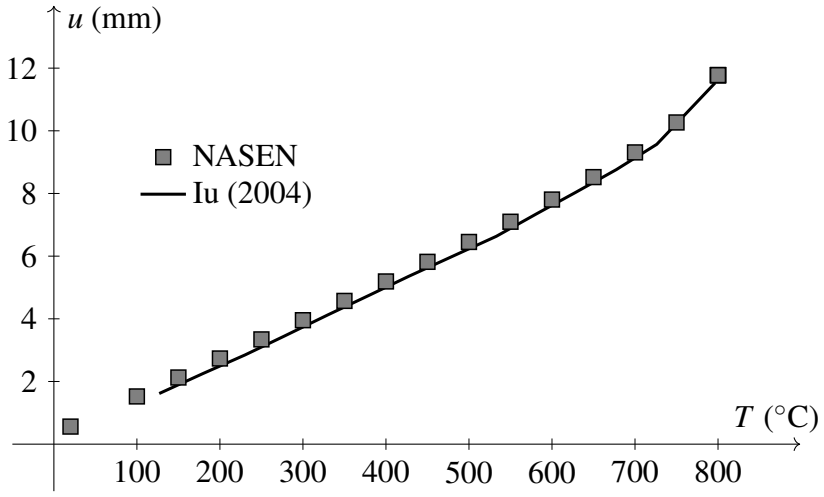

Figura 102 – Deslocamento horizontal da viga tracionada aquecida uniformemente

A solução de referência tem como base os resultados numéricos obtidos na obra de Iu (2004). Na Figura 102, apresenta-se os valores obtidos para os deslocamentos horizontais medidos na extremidade em balanço da viga, onde se pode verificar que os resultados obtidos, por meio programa NASEN, estão próximos da solução de referência. Em relação ao segundo caso teste, considera-se uma viga biapoiada com carga vertical de 10 kN e as demais propriedades são iguais ao caso anterior. Os efeitos térmicos de extremidade do modelo estrutural são condensados nos parâmetros físicos associados aos efeitos de expansão e de curvatura térmica. Neste contexto, busca-se investigar a influência desses efeitos térmicos no campo de deslocamento da estrutura. Sendo assim, realiza-se duas simulações, considerando o aquecimento uniforme e linear.

Na Figura 103, apresenta-se o deslocamento vertical, medido no meio vão da viga biapoiada. Pode-se observar um ajuste satisfatório entre as curvas obtidas com o programa NASEN e os resultados de Iu (2004). Veja também que existe uma divergência considerável entre o modelo com aquecimento da seção transversal constante e linear, sendo $\Delta v_{\max} = 5,8$ mm,

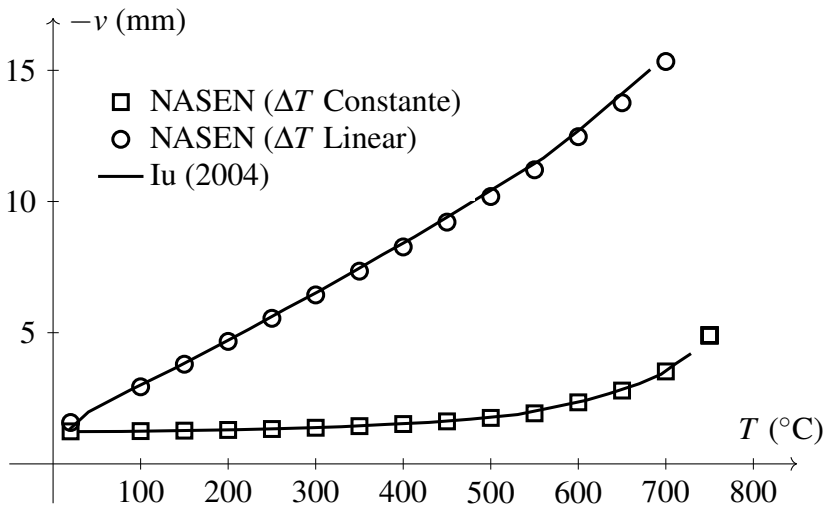

Figura 103 – Deslocamento vertical da viga biapoiada com aquecimento uniforme e linear

a máxima diferença entre os modelos, situada em aproximadamente 700°C. Logo, nota-se que o efeito de curvatura térmica apresenta uma grande interferência no comportamento mecânico do elemento estrutural. Desta maneira, visando apresentar, quantitativamente, os dados obtidos com as simulações computacionais, na Tabela 11 exibe-se os valores numéricos da primeira e segunda configuração estudado.

Tabela 11 – Valores dos deslocamentos em função da temperatura para caso I e II

T (°C)	**Caso I**	**Caso II**	
	u **(mm)**	v **(mm)** ΔT **Constante**	v **(mm)** ΔT **Linear**
20	0,561	1,240	1,578
100	1,523	1,250	2,938
150	2,128	1,267	3,799
200	2,734	1,293	4,668
250	3,344	1,329	5,548
300	3,956	1,377	6,440
350	4,572	1,439	7,345
400	5,192	1,518	8,268
450	5,819	1,621	9,214
500	6,453	1,753	10,190
550	7,098	1,928	11,209
600	7,806	2,346	12,471
650	8,522	2,795	13,764
700	9,311	3,524	15,337
750	10,266	4,900	17,556
800	11,777	–	–

5.5.1.7 *Edifício de 3 pavimentos*

Para finalizar os problemas estruturais com base nos modelos lineares reticulares, estuda-se o comportamento de um edifício de três pavimentos sujeito a solicitações externas diversas, como as forças concentradas horizontais e verticais, as cargas uniformemente distribuídas e as ações provenientes da variação de temperatura, conforme ilustra a Figura 104.

No modelo estrutural computacional, considera-se os seguintes parâmetros físicos e geométricos do edifício: a largura e a altura são iguais, respectivamente, a 5,0 m e 9,0 m, sendo cada pavimento com uma altura de 3,0 m; a seção transversal é um perfil de aço com dimensões iguais a $500\times300\times16\times8{,}0$ mm, associado a uma área e um momento de inércia igual a 125,44 cm^2 e $4{,}4168\cdot10^4$ cm^4, respectivamente; o material escolhido apresenta um módulo de elasticidade longitudinal de $210\cdot10^3$ MPa e um coeficiente de dilatação linear igual a 10^{-5}/°C.

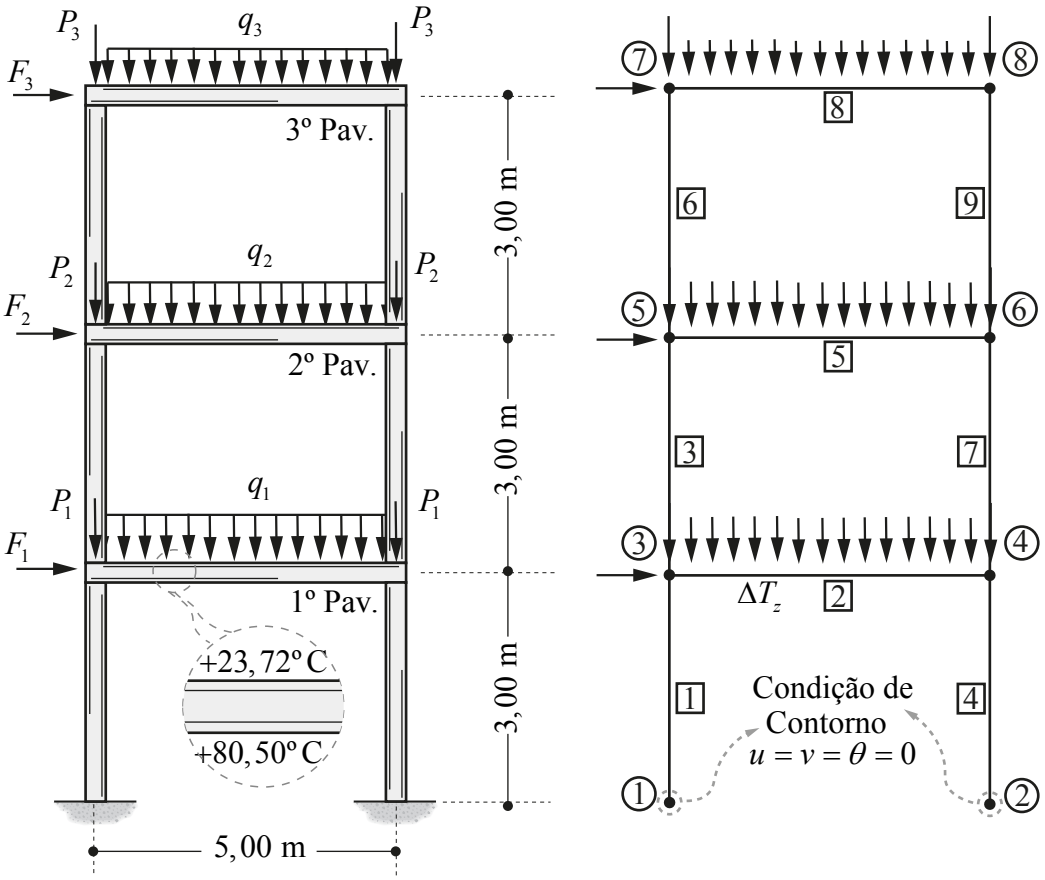

Figura 104 – Dimensões e características do modelo estrutural representativo de um edifício de 3 pavimentos

Em relação aos carregamentos aplicados na estrutura, assume-se que as forças horizontais F_1, F_2 e F_3 são iguais a 4,04, 3,19 e 2,33 kN, respectivamente. As cargas verticais concentradas e distribuídas aplicadas, no primeiro e no segundo pavimento, são iguais a $P_1 = P_2 =$25 kN e a $q_1 = q_2 =$13,8 kN/m e, no terceiro pavimento, aplica-se duas forças concentradas verticais iguais a $P_3 =$1,36 kN e uma carga distribuída igual a $q_3 =$4,52 kN/m. A carga térmica atua na viga do primeiro pavimento, ou seja, somente o membro 2 do modelo discreto sofre a ação dos efeitos

da variação de temperatura, sendo que a face superior do elemento está mantida a temperatura prescrita de 23,72°C, enquanto, na face inferior, a temperatura do elemento é igual a 80,50°C, conforme apresenta a Figura 104.

Tabela 12 – Comparação dos resultados obtidos com os programas computacionais para as medições dos deslocamentos nodais horizontais, verticais e rotacionais do edifício

Nós da	**NASEN**			**LESM**		
Estrutura	u **(mm)**	v **(mm)**	θ (°)	u **(mm)**	v **(mm)**	θ (°)
1	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
2	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
3	-9,8953E-01	-1,4183E-01	-2,7637E-02	-9,90E-01	-1,42E-01	-2,76E-02
4	1,4564E+00	-1,5806E-01	1,8663E-02	1,46E+00	-1,58E-01	1,87E-02
5	4,9083E-01	-2,1970E-01	-2,0180E-02	4,91E-01	-2,20E-01	-2,02E-02
6	5,2805E-01	-2,4454E-01	1,3183E-02	5,28E-01	-2,45E-01	1,32E-02
7	7,0630E-01	-2,3265E-01	3,4786E-04	7,06E-01	-2,33E-01	3,48E-04
8	6,7648E-01	-2,6043E-01	-4,2949E-03	6,77E-01	-2,60E-01	-4,29E-03

Nesta configuração, o programa NASEN deve ser capaz de identificar o membro que está sujeito ao efeito térmico e adicionar as respectivas parcelas do vetor de engastamento térmico do elemento ao vetor global de ações da estrutura. Além disso, o edifício de aço é modelado computacionalmente por um modelo unifilar de três graus de liberdade por nó, ou seja, adota-se o elemento de pórtico plano. A estrutura é discretizada em 9 elementos de barra com 8 nós de ligação (ver Figura 104).

Desta maneira, tendo posto todos os dados preliminares, a solução de referência é direcionada com base nos resultados obtidos pelo programa de análise estrutural, denominado LESM (*Linear Elements Structure Model*), sendo que nas obras de Rangel e Martha (2019) e Martha, Rangel e Lopes (2018) apresentam os conceitos físicos e as formulações gerais utilizadas no desenvolvimento do programa.

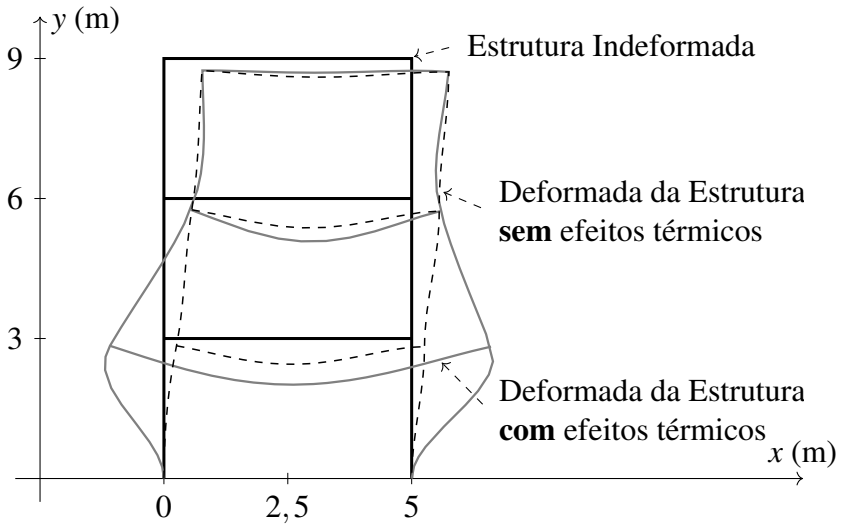

Figura 105 – Edifício de aço plano de 3 pavimentos deformado sem e com carregamento térmico

A Tabela 12 apresenta os resultados obtidos, por meio do programa NASEN e LESM, associados aos valores de deslocamento axial, transversal e da inclinação em cada nó do sistema estrutural, onde pode-se observar a boa concordância nos resultados numéricos atingidos. Nota-se que o modelo numérico apresenta um comportamento coerente em relação às condições de vinculação, ou seja, os nós localizados nos pontos de engastamento apresentam deslocamento e rotação nulos. A Figura 105 apresenta a deformação global da estrutura para duas configurações: o edifício sem e com variação de temperatura no membro 2 do modelo estrutural. Para melhor visualização do comportamento da estrutura deformada, admite-se que os deslocamentos são superestimados por um fator de escala de 1100.

Nota-se que as barras próximas ao elemento sujeito à ação térmica apresentam um aumento da magnitude dos deslocamentos, enquanto, para as barras localizadas em torno do terceiro pavimento, exibem um comportamento semelhante ao modelo sem carga térmica. Desta forma, observa-se uma significativa alteração no comportamento da estrutura quando se considera a variação de temperatura, evidenciando a importância desse efeito na análise de estruturas.

5.5.2 PROBLEMAS DE PLACAS DELGADAS

Aplica-se o modelo de placa delgada de Kirchhoff, com base nos procedimentos numéricos de elementos finitos, em dois exemplos de aplicação. Primeiramente, um caso teste de uma placa totalmente engastada sujeita a um carregamento distribuído. Em seguida, considera-se a variação de temperatura ao longo da espessura de uma placa retangular. A verificação da performance do programa desenvolvido é direcionada pela comparação dos resultados com soluções analíticas e simulações numéricas obtidas na literatura.

5.5.2.1 Placa delgada sujeita a uma carga distribuída uniforme

A experimentação numérica acerca dos problemas de placas delgadas inicia com a validação de um caso teste sem efeitos térmicos. Sendo assim, a Figura 106 apresenta uma placa fina retangular sujeita a uma carga distribuída uniforme q_z. Em termos de condições de contorno, todas as bordas da placa são engastadas, ou seja, os movimentos de rotação e deslocamento são restringidos.

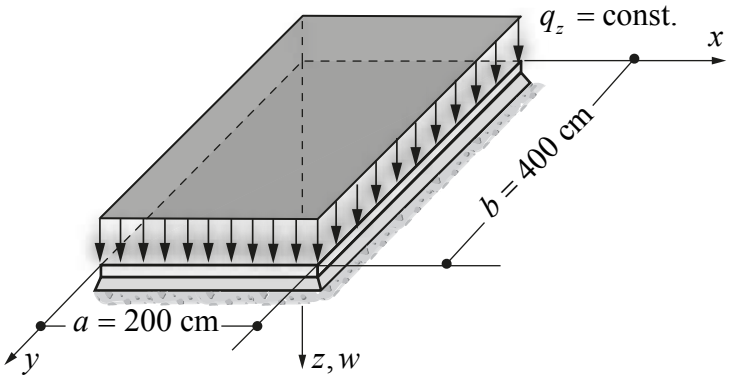

Figura 106 – Placa delgada retangular totalmente engastada sujeita ao carregamento distribuído uniforme

Para este problema, define-se alguns parâmetros físicos e geométricos: as dimensões da placa são iguais a 200×400 cm e a espessura é igual a 3,0 cm, o módulo de elasticidade é igual a 21000 kN/cm^2 e a intensidade da carga distribuída aplicada é igual a $2 \cdot 10^{-4}$ kN/cm^2. Em relação ao modelo computacional, utiliza-se o elemento finito regular de quatro nós para o processo de discretização do domínio, as arestas da placa são subdivididas em 32 intervalos, totalizando 1024 elementos finitos.

Na Tabela 13, exibe-se os valores de deslocamento e dos momentos no meio vão da placa. Os resultados são divididos em duas configurações. Primeiramente, emprega-se o coeficiente de Poisson igual a 0,2 e adota-se como referência as tabelas de cálculo de Bares (1972) e Czerny (1976), e os resultados numéricos, com base no método de elementos finitos, fornecidos no trabalho Leal (2015). Quando se compara os dados utilizando o programa NASEN, observa-se uma semelhança nos valores encontrados. Em relação às diferenças percentuais dos resultados

Tabela 13 – Comparação dos valores obtidos de deslocamento e dos momentos no meio do vão da placa em relação aos resultados da literatura

		w (mm)	M_{xx} (kNm)	M_{yy} (kNm)
	NASEN[0]	-1,649E-02	3,263E-01	9,438E-02
	Leal (2015)[1]	-1,648E-02	3,269E-01	9,444E-02
	$\lvert\Delta_0^1\rvert$ **(%)**	5,295E-02	1,763E-01	6,860E-02
$\nu = 0,2$	**Bares**[2]	-	3,256E-01	9,280E-02
	$\lvert\Delta_0^2\rvert$ **(%)**	-	2,173E-01	1,698E+00
	Czérny[3]	-1,645E-02	3,333E-01	1,401E-01
	$\lvert\Delta_0^3\rvert$ **(%)**	2,332E-01	2,108E+00	3,264E+01
	NASEN[0]	-1,562E-02	3,293E-01	1,264E-01
$\nu = 0,3$	**Timoshenko**[1]	-1,565E-02	3,296E-01	1,264E-01
	$\lvert\Delta_0^1\rvert$ **(%)**	2,179E-01	9,517E-02	2,962E-02

aparentes provenientes dos autores clássicos, deve-se ao fato que os eles utilizam métodos e aproximações diferentes na construção das respectivas tabelas de cálculo.

Na segunda configuração, as simulações computacionais são direcionadas com um coeficiente de Poisson igual a 0,3 e a solução de referência utilizada para comparação é obtida na obra clássica de Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959). Nesse cenário, os valores encontrados com o program NASEN, para o deslocamento e os momentos, exibem um bom ajuste, com erros percentuais abaixo de 0,5%.

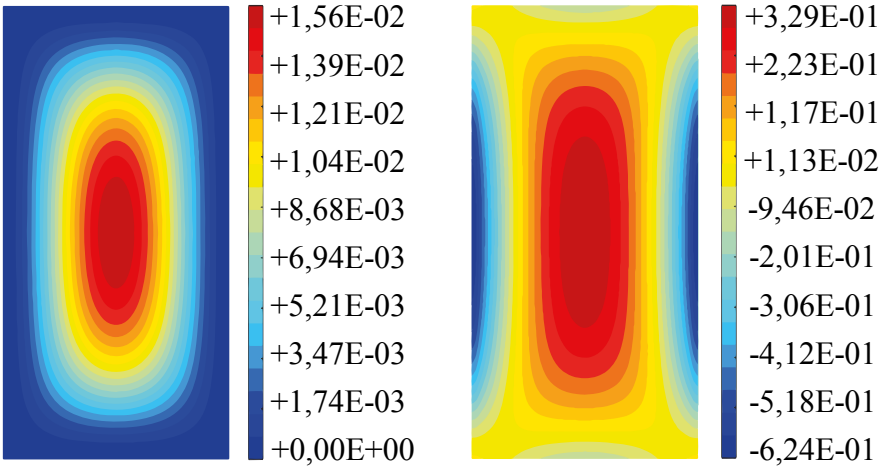

Figura 107 – Distribuição bidimensional de deslocamento $w(x,y)$ e de momento fletor $M_{xx}(x,y)$ na placa engastada

Em problemas bidimensionais, a visualização dos resultados é um fator importante ao longo do processo de verificação do comportamento físico da solução numérica obtida em cada ponto do domínio discreto. Desta maneira, a Figura 107 apresenta o campo de deslocamento vertical e do momento fletor, na direção x, da placa, onde pode-se notar que a flecha é nula nas bordas por conta do engastamento e é máxima no centro da placa. Como pode ser visto, ao longo da linha horizontal central, nas extremidades e no centro da placa, existe a presença de

momentos negativos e positivos.

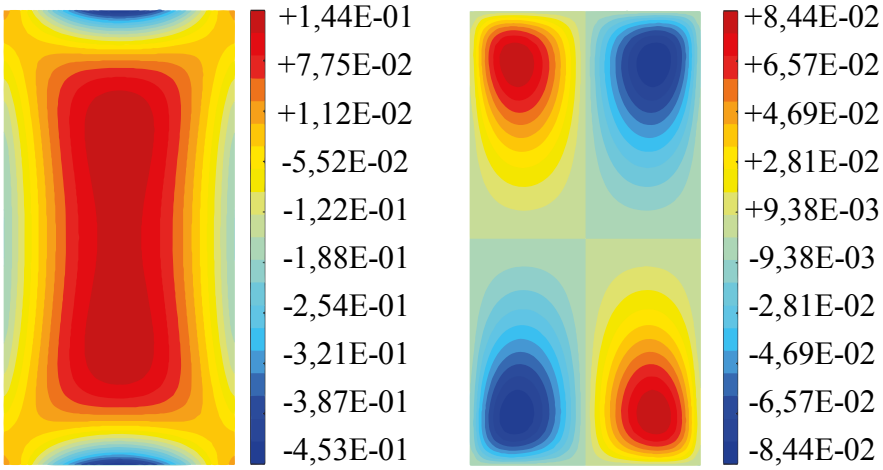

Figura 108 – Distribuição bidimensional do momento fletor $M_{yy}(x,y)$ e torsor $M_{xy}(x,y)$ na placa engastada

Complementando a exposição gráfica dos resultados, apresenta-se a distribuição do momento fletor, na direção y, e do momento torsor, conforme mostra a Figura 108. Em relação ao eixo y, nota-se um comportamento inverso ao momento fletor na direção x, sendo que os momentos negativos estão localizados na borda superior e inferior da placa. Além disso, ressalta-se que os cálculos dos momentos são baseados nas variáveis primais do problema, ou seja, os momentos são computadas no pós-processamento. Esse fato acarreta que os momentos são afetados diretamente pela qualidade dos resultados obtidos nos cálculos dos deslocamentos em cada nó da placa.

5.5.2.2 Placa retangular sob efeito da variação de temperatura

Neste exemplo de aplicação, estuda-se o caso de uma placa retangular delgada sujeita ao carregamento de origem térmica por conta da variação de temperatura ao longo da espessura da placa, conforme ilustra-se na Figura 109. A placa encontra-se ausente de solicitações externas, como carregamentos distribuídos, forças ou momentos concentrados atuantes na superfície.

Em relação às condições de contorno do problema, considera-se que todas as fronteiras da placa são simplesmente apoiadas. Sobre as propriedades físicas e geométricas, assume-se que o módulo de elasticidade é igual a $1 \cdot 10^8$ kPa, o coeficiente de Poisson é igual a 0,3, o coeficiente de dilatação térmica é $1 \cdot 10^{-5}/°$C, as dimensões da placa são consideradas unitárias e a espessura é igual 0,1 m. Adota-se uma variação de temperatura ΔT_z, entre a borda superior e inferir, igual a 20°C. Admite-se que o perfil de temperatura varia em função do eixo z e respeita uma lei de potência, definida a seguir na Equação (5.51).

$$\Upsilon = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{t}\right)^n \tag{5.51}$$

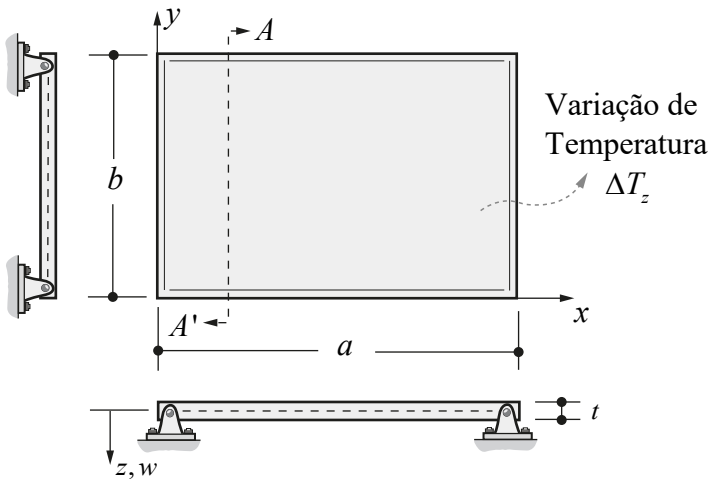

Figura 109 – Placa retangular simplesmente apoiada sob variação de temperatura

Onde t é a espessura da placa, z é a coordenada medida a partir da superfície média da placa, em $-t/2 \leq z \leq t/2$, e n é o índice da lei de potência, que deve ser maior ou igual a zero (BURLAYENKO; SADOWSKI, 2019). A avaliação dos resultados é direcionada pela determinação do perfil de deslocamento transversal ao longo do corte A-A', localizado no ponto de análise $\bar{x}$, assumindo o valor de 0,0625 m. Além disso, o desempenho do programa NASEN é avaliado com base na solução analítica do problema físico (TIMOSHENKO; WOINOWSKY-KRIEGER, 1959).

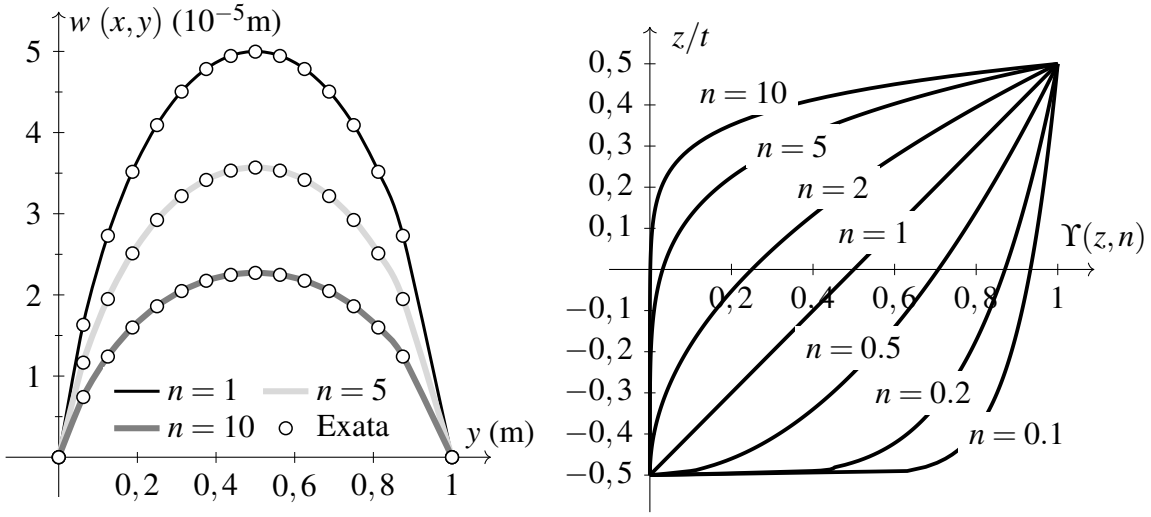

Figura 110 – Perfil de deslocamento $w(\bar{x}, y)$ e variação do índice da lei de potência

A Figura 110 apresenta as curvas dos deslocamentos, considerando os índices da lei de potencial iguais a 1, 5 e 10. Como pode ser visto, os valores obtidos, por meio do programa NASEN, apresentam uma boa similaridade com a solução analítica do problema, atingindo um erro percentual máximo e mínimo de aproximadamente 0,74% e 0,09%, respectivamente.

5.5.3 PROBLEMAS TERMOELÁSTICOS LINEARES

Os exemplos numéricos, aplicando o modelo da elasticidade plana, são direcionados, inicialmente, para a avaliação de casos estruturais sem efeitos térmicos, visando validar as tensões e o campo de deslocamento. Posteriormente, são simulados alguns casos de estruturas com efeitos térmicos, por exemplo, chapas com restrições de movimento sob ação da variação de temperatura no domínio, um disco circular com aquecimento local, bem como a análise de um cilindro longo com orifício circular concêntrico sob variação radial e linear de temperatura.

5.5.3.1 Viga engasta-livre sujeita a uma carga concentrada

No contexto da seara de problemas de estado plano de tensão, estuda-se uma viga isostática engastada-livre de comprimento L, altura h e espessura t, sujeita a uma carga vertical concentrada aplicada na extremidade livre, conforme ilustra-se na Figura 111.

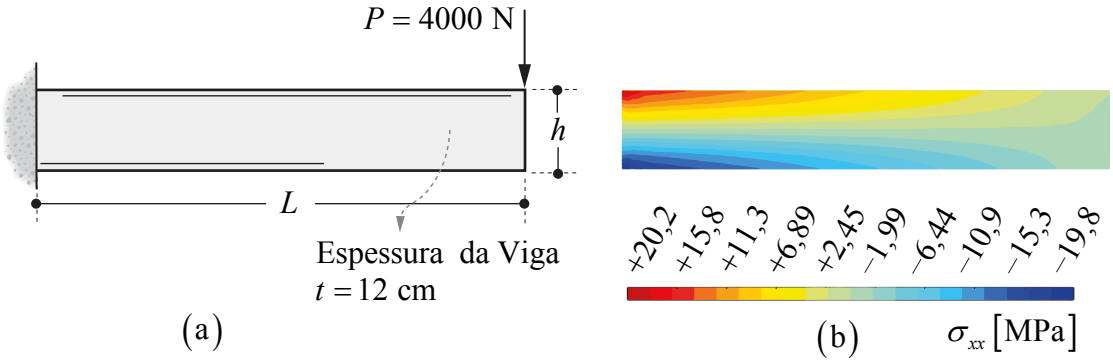

Figura 111 – (a) Modelo estrutural da viga engastada livre sujeita a uma carga concentrada e (b) distribuição de tensão normal na direção x

Admite-se os seguintes dados e propriedades: a carga concentrada tem módulo igual a 4000 N, o momento de inércia da seção transversal é $1 \cdot 10^{-5}$ m^4, as dimensões da viga são $100 \times 10 \times 12$ cm e o módulo de elasticidade do material é igual a 200 GPa. Analisa-se nesse problema, o deslocamento da extremidade em balanço e a tensão na viga. Os resultados obtidos, por meio do programa NASEN, são comparados com a solução analítica fundamentada na teoria clássica de vigas, baseada nos princípios elementares da resistência dos materiais, conforme visto em detalhadamente nas literaturas clássicas, como Hibbeler (2010) e Timoshenko (1979).

A Tabela 14 apresenta os valores encontrados em função do tipo de elemento finito utilizado na simulação, do refinamento da malha e do número de graus de liberdade do sistema. Observa-se que o elemento triangular linear de três nós (T3), exibe os maiores níveis de erros em comparação aos demais tipos de elementos, contudo, com o refinamento da malha, a solução se aproxima do resultado previsto. Ressalta-se também que esse tipo de elemento é muito útil para modelar geométricas complexas não regulares. Além disso, a integração numérica pode ser realizada por apenas um ponto de Gauss, acelerando o processamento de assemblamento das matrizes e da solução do problema.

Tabela 14 – Comparação dos resultados obtidos, para deslocamento e tensão, utilizando diferentes tipos de elementos finitos bidimensionais

Tipo de Elemento	**Malha**	**N° Graus de Liberdade**	v **(m)**[1]	$\lvert\Delta_0^1\rvert$ **(%)**	σ **(MPa)**[2]	$\lvert\Delta_0^2\rvert$ **(%)**
T3	364	446	-5,42E-04	1,86E+01	15,64	2,18E+01
	1002	1164	-6,34E-04	4,86E+00	20,45	2,27E+00
Q4	40	126	-5,97E-04	1,05E+01	18,62	6,90E+00
	250	612	-6,58E-04	1,30E+00	21,37	6,84E+00
Q8	25	192	-6,71E-04	6,45E-01	19,70	1,51E+00
	40	330	-6,71E-04	5,70E-01	19,87	6,50E-01
Q9	10	126	-6,77E-04	1,49E+00	19,00	5,00E+00
	36	338	-6,72E-04	7,20E-01	19,73	1,34E+00
Teoria Clássica de Viga[0]			**-6,67E-04**		**20,00**	

O elemento de quatro nós (Q4) apresenta um bom comportamento, apresentando, com níveis de refinamento relativamente baixos, resultados aceitáveis de engenharia, associado a um bom desempenho computacional. Os elementos quadriláteros de oito (Q8) e nove (Q9) nós apresentam baixos níveis de erro, contudo, revelam também um rápido crescimento no número de graus de liberdade do sistema, demandando um maior custo computacional.

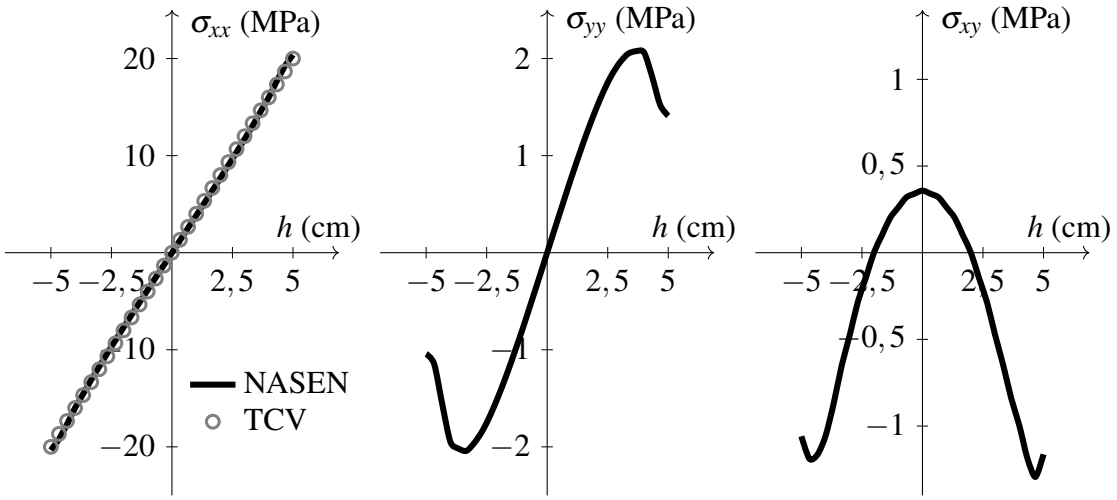

Figura 112 – Perfil de tensão normal (a) na direção x e (b) na direção y, e (c) de tensão cisalhante

Na Figura 112, mostra-se o perfil de tensão normal e de tensão cisalhante na extremidade fixa, medido ao longo da altura da viga. Essas distribuições são importantes para avaliar os pontos limites, utilizados, usualmente, em projeto e dimensionamento dos elementos estruturais. Nota-se que a tensão normal, na direção x, obtida numericamente, com base no modelo da elasticidade plana, apresenta boa aderência quando comparada com a fórmula proveniente da teoria clássica de viga (TCV), variando linearmente em relação à altura da viga.

5.5.3.2 *Chapa tracionada com orifício circular*

O próximo estudo de caso é constituído por uma chapa sob ação de uma tração uniforme, conforme mostra a Figura 113. Esse problema busca avaliar o desempenho do programa NASEN na determinação do campo de tensão efetiva (ou ruptura). Considera-se o critério de ruptura com base na teoria da energia de distorção máxima ou , usualmente, conhecido como critério de falha de von Mises, para maiores detalhes e aprofundamentos sobre os critérios de falhas dos materiais, vide Popov (1978) e Timoshenko (1979).

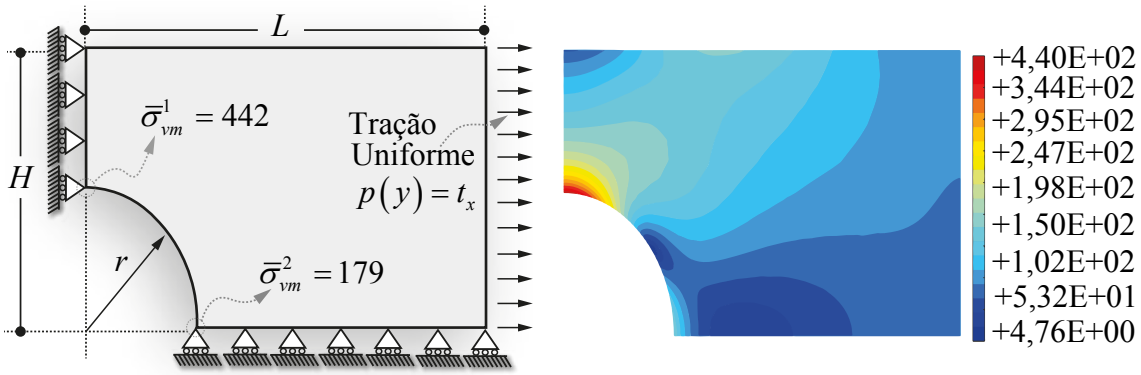

Figura 113 – Geometria e condições de contorno da chapa sob tração uniforme (esquerda) e distribuição bidimensional de tensão efetiva (direita)

Assume-se que o comprimento da chapa é igual a $L = 18$, a altura é $H = 10$, o raio da cavidade circular é igual a $r = 5$ e a espessura é considerada unitária. A carga aplicada, na borda direita da chapa, é igual a $p = 100$, o módulo de elasticidade é adotado igual a $72 \cdot 10^9$ e o coeficiente de Poisson é nulo. A respeito da simulação numérica, a Figura 114 apresenta o domínio discretizado do problema em função de cada tipo de elemento finito.

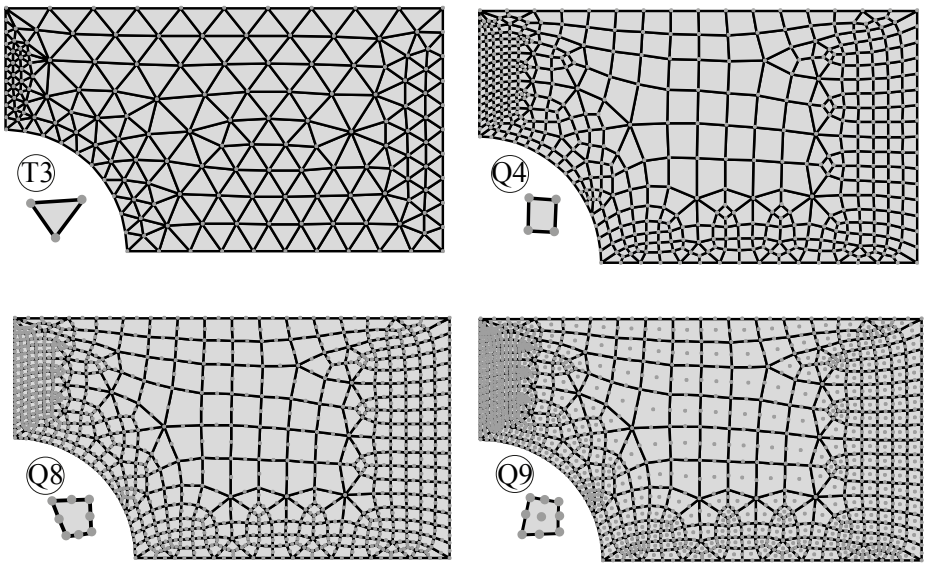

Figura 114 – Malhas de elementos finitos do tipo triangular de três nós (T3), quadrilátero de quatro nós (Q4), oito nós (Q8) e nove nós (Q9)

Os resultados numéricos são comparados com a solução exata do problema, onde essa pode ser obtida em Payen e Bathe (2011). São avaliados os valores de tensão de von Mises nos pontos 1 e 2 da chapa, representando, respectivamente, o canto superior e direito do orifício circular (ver Figura 113). Para cada tipo de elemento finito são realizados três simulações com um fator de refinamento em cada aresta da chapa de 5, 10 e 15 divisões.

Tabela 15 – Tensão von Mises e erro percentual no ponto 1 e 2 da chapa com orifício

Tipo de Elemento	**Malha**	σ_{vm}^1	$\lvert\Delta_0^1\rvert$ **(%)**	σ_{vm}^2	$\lvert\Delta_0^2\rvert$ **(%)**
	280	3,18E+02	2,81E+01	8,43E+01	5,29E+01
T3	413	3,83E+02	1,30E+01	1,58E+02	1,17E+01
	1330	4,27E+02	3,40E+00	1,69E+02	5,59E+00
	103	3,64E+02	1,76E+01	1,10E+02	3,85E+01
Q4	442	4,26E+02	3,61E+00	1,63E+02	8,94E+00
	1065	4,36E+02	1,35E+00	1,72E+02	3,91E+00
	103	4,20E+02	4,98E+00	1,72E+02	3,91E+00
Q8	442	4,37E+02	1,13E+00	1,67E+02	6,70E+00
	1065	4,41E+02	2,26E-01	1,75E+02	2,23E+00
	103	4,22E+02	4,52E+00	1,74E+02	2,79E+00
Q9	442	4,38E+02	1,02E+00	1,75E+02	2,23E+00
	1065	4,41E+02	1,81E-01	1,76E+02	1,79E+00
Solução Exata^0		**4,42E+02**		**1,79E+02**	

A Tabela 15 apresenta os valores obtidos nas simulações computacionais associados a cada tipo de elemento finito. Primeiramente, deve-se frisar que o cálculo da tensão de von Mises carrega, ao longo do processamento de cálculo, inúmeras aproximações que dependem das tensões planas e do campo de deslocamento nodal da estrutural. Em síntese, todos os elementos apresentaram bons resultados quando comparados com a solução de referência. Os elementos do tipo quadráticos de oito e nove nós exibem melhores resultados, uma vez que esses apresentam uma eficiência satisfatória no processo de suavização da tensão, em contrapartida, tais tipos de elementos apresentam um número maior de graus de liberdade do sistema, exigindo um maior custo computacional.

5.5.3.3 Chapa quadrada delgada sob variação de temperatura

O primeiro exemplo relacionando o campo da termoelasticidade linear é um caso simples, caracterizado por uma chapa quadrada delgada ausente de solicitações externas e submetida aos efeitos da variação de temperatura. Nesse problema, são estudados duas configurações físicas, variando a vinculação e o carregamento térmico da chapa, conforme mostra a Figura 115.

Em ambos os casos, considera-se as mesmas propriedades físicas do sistema, sendo o módulo de elasticidade igual a 10.000 N/cm^2, o coeficiente de Poisson e o coeficiente de dilação térmica iguais a 0,3 e 0,001 /°C, respectivamente, e os lados da chapa são considerados unitários. Esse mesmo problema foi estudado na obra de Ribeiro (1991), utilizando o método

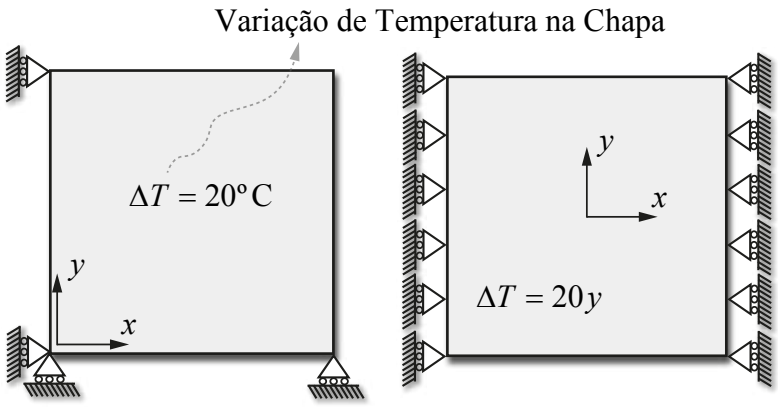

Figura 115 – Condições de contorno da chapa com extremidades livres com ΔT constante (esquerda) e impedidas com ΔT linear (direita).

dos elementos de contorno (MEC). A primeira configuração representa o caso da chapa livre com variação de temperatura constante, onde emprega-se ao sistema condições prescritas, a fim de impedir o movimento do corpo. Esse exemplo visa realizar as primeiras investigações acerca da influência dos efeitos de origem térmica no comportamento mecânico dos elementos estruturais descritos pela teoria da elasticidade bidimensional.

Desta forma, a Tabela 16 apresenta os deslocamentos ao longo do eixo y, por conta da simplicidade do problema, os resultados obtidos apontam grande precisão quando comparados com a solução analítica do problema.

Tabela 16 – Valores dos deslocamentos da chapa com extremidades livres, em cm

x (cm)	y (cm)	NASEN	Analítica	Erro (%)
0,0	1,0	0,020	0,020	1,509E-12
0,0	0,9	0,018	0,018	1,658E-12
0,0	0,8	0,016	0,016	1,887E-12
0,0	0,7	0,014	0,014	2,144E-12
0,0	0,6	0,012	0,012	1,662E-12
0,0	0,5	0,010	0,010	2,203E-12
0,0	0,4	0,008	0,008	2,385E-12
0,0	0,3	0,006	0,006	2,833E-12
0,0	0,2	0,004	0,004	3,253E-12
0,0	0,1	0,002	0,002	4,012E-12

Em relação ao segundo caso teste, adota-se uma chapa com extremidades restringidas com variação de temperatura linear ao longo do eixo y (ver Figura 115). Nessas configurações, a placa está submetida a uma flexão, onde a tensão normal varia linearmente.

Os resultados obtidos pelo pacote computacional desenvolvido no presente trabalho, denominado de NASEN, são apresentados em forma de gráfica, conforme mostra-se na Figura 116, onde é computado o perfil de tensão normal ao longo do eixo y. Como pode-se notar, as curvas obtidas, numericamente e a analiticamente, apresentam uma boa concordância entre

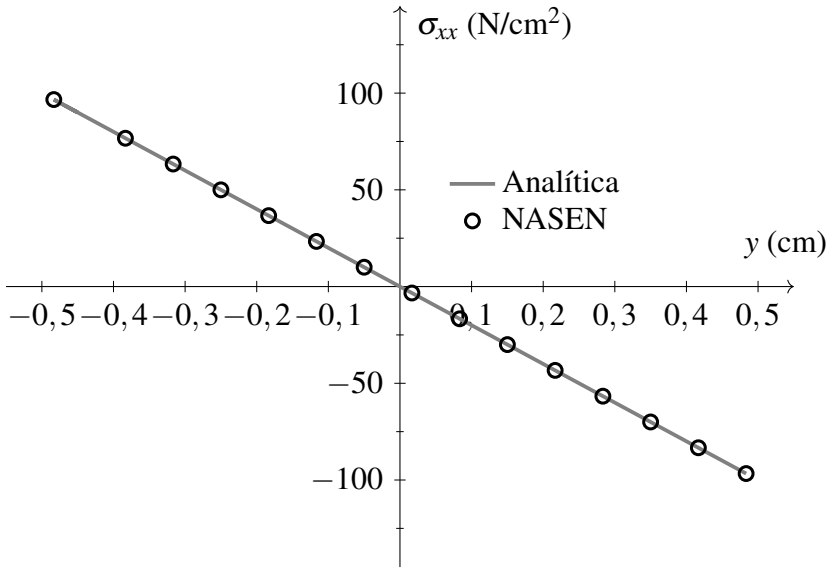

Figura 116 – Comparação entre a solução numérica e analítica para determinação do perfil de tensão normal, na direção y, da chapa com extremidades impedidas

si. Para quantificar a precisão dos resultados numéricos, estima-se o erro percentual médio da amostragem de dados utilizados na construção do perfil de tensão normal da chapa unitária sob variação de temperatura, fornecendo um valor de aproximadamente 0,03%, indicando a boa precisão dos resultados e o baixo nível de erro percentual.

5.5.3.4 Chapa fina confinada sob fluxo de calor constante

Analisa-se, por meio de um modelo numérico de elementos finitos, uma chapa quadrada ausente de forças no contorno e sob ação de uma variação linear de temperatura. Em relação às condições de contorno, restringem-se os movimentos nas três extremidades da chapa, conforme exemplificado na Figura 117.

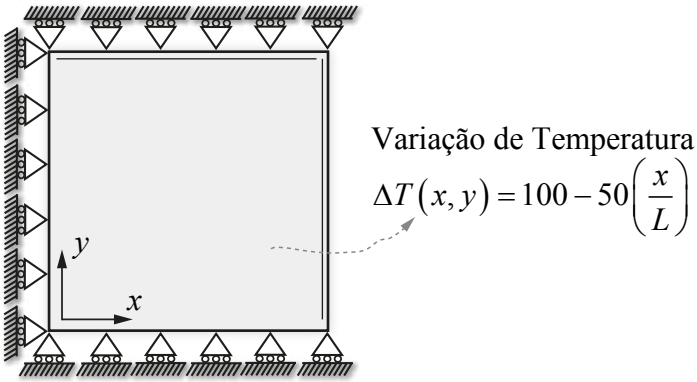

Figura 117 – Condições de contorno e variação de temperatura da chapa com três extremidades restringidas

A solução analítica do problema pode ser facilmente obtida pelas teorias clássicas, conforme pode ser consultados em detalhes em Boley e Weiner (1985). Recentemente, Silva,

Telles e Santiago (2018) apresentam a solução analítica e numérica desse problema, sendo utilizado o método dos elementos contorno. Para a construção da malha computacional, utiliza-se o elemento triangular linear de três nós, sendo realizadas 45 divisões por aresta da chapa, totalizando 5690 elementos finitos e 2936 nós.

São admitidos os seguintes valores hipotéticos para as propriedades físicas e geométricas, onde considera-se um módulo de elasticidade de $2{,}00 \cdot 10^8$ kPa, um coeficiente de expansão térmica igual a $0{,}001°C^{-1}$, um coeficiente de Poisson de 0,3 e uma chapa com dimensões consideradas unitárias. Os valores de tensão normal e de deslocamento da chapa dependem da distribuição de temperatura em torno do domínio da placa. Nas configurações adotadas para o problema, tem-se uma evolução unidimensional de temperatura, variando exclusivamente na direção x da chapa.

Tabela 17 – Comparação dos resultados numéricos obtidos para tensão normal e deslocamento na chapa com extremidades restringidas

x (m)	ΔT (°C)	Tensão Normal (kN/m^2)			Deslocamento (m)		
		Exata	NASEN	$\lvert\Delta\rvert$ (%)	Exata	NASEN	$\lvert\Delta\rvert$ (%)
0,00	1,00E+02	2,00E+07	1,99E+07	3,11E-01	0,00E+00	0,00E+00	–
0,11	9,44E+01	1,89E+07	1,89E+07	2,21E-03	1,40E-02	1,40E-02	2,23E-03
0,20	9,00E+01	1,80E+07	1,80E+07	1,39E-03	2,47E-02	2,47E-02	8,21E-04
0,31	8,44E+01	1,69E+07	1,69E+07	1,13E-03	3,73E-02	3,73E-02	4,07E-04
0,40	8,00E+01	1,60E+07	1,60E+07	7,71E-04	4,68E-02	4,68E-02	2,41E-04
0,51	7,44E+01	1,49E+07	1,49E+07	9,74E-05	5,80E-02	5,80E-02	1,34E-04
0,60	7,00E+01	1,40E+07	1,40E+07	4,78E-04	6,63E-02	6,63E-02	9,21E-05
0,71	6,44E+01	1,29E+07	1,29E+07	1,06E-03	7,60E-02	7,60E-02	4,21E-05
0,80	6,00E+01	1,20E+07	1,20E+07	2,61E-03	8,32E-02	8,32E-02	8,95E-06
0,91	5,44E+01	1,09E+07	1,09E+07	1,68E-02	9,15E-02	9,15E-02	4,83E-05
1,00	5,00E+01	1,00E+07	1,01E+07	6,48E-01	9,75E-02	9,75E-02	4,00E-03

Os resultados numéricos são avaliados ao longo do eixo horizontal da chapa, como posto na Tabela 17. Como pode-se verificar, os deslocamentos apresentam baixos níveis de erros percentuais. Quando se analisa as tensões na chapa, observa-se que os valores apresentam também boa semelhança com a solução exata, tendo os maiores níveis de erro nas extremidades da chapa devido ao processo de suavização média de tensão.

5.5.3.5 Disco circular com aquecimento local

Estuda-se numericamente um caso de uma aplicação da análise de tensão de origem térmica. Sendo assim, considera-se um disco fino de raio a com uma região circular concêntrica aquecida com raio igual b, ausente de carregamentos externos aplicados no contorno ou forças de campo, conforme ilustra-se a seguir na Figura 118. Além disso, as distribuições de temperatura e as tensões são unidimensionais, ou seja, essas são funções das coordenadas radiais do disco.

No que se refere às propriedades do material da peça estrutural, utiliza-se um módulo de elasticidade igual a $2{\cdot}10^8$ kN/m^2, um coeficiente de dilatação térmica de 0,001°C^{-1}, um coeficiente de Poisson igual a 0,25. Considera-se uma razão entre o raio da região circular aquecida e raio do disco igual a 1/4, adotando o raio do disco igual a 1 m.

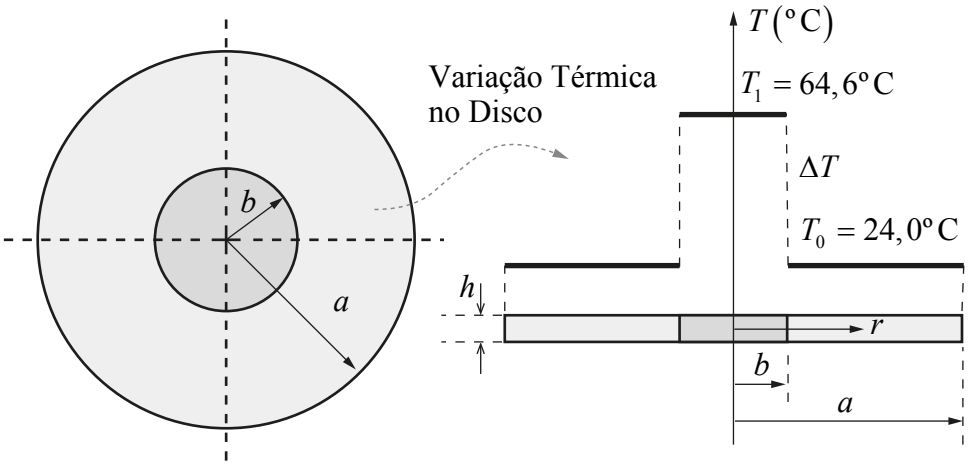

Figura 118 – Disco circular de raio a com região centrada aquecida limitada com raio b e a função radial de temperatura atuando na peça

A distribuição de temperatura está variando como uma função degrau (ver Figura 118), fornecendo uma complexidade adicional ao problema por conta da descontinuidade do campo térmico na fronteira da região circular centrada aquecida, localizado em $r = b$. A temperatura de referência do disco é mantida constante e igual a 24°C e a temperatura do ponto quente local permanece fixada em 64,6°C, resultando em uma variação térmica de 40,6°C.

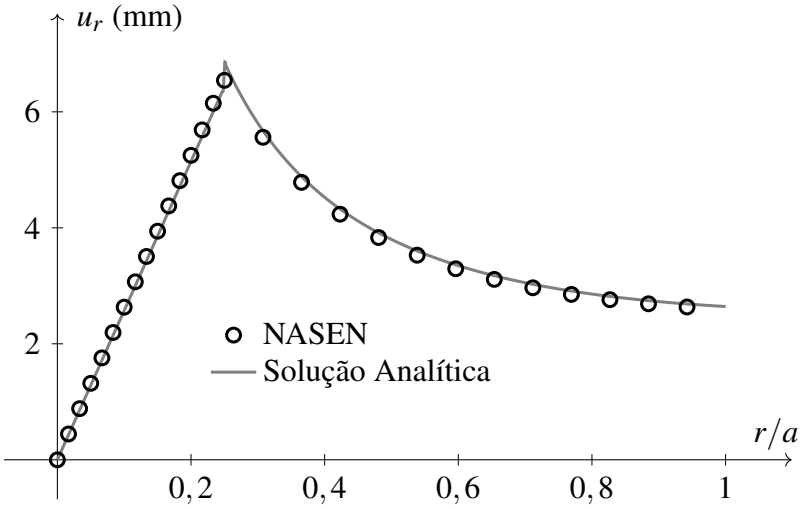

Figura 119 – Comparação entre a solução analítica e numérica para deslocamento radial do disco

A primeira análise dos resultados é destinada ao campo radial de deslocamento, conforme apresenta a Figura 119, onde pode-se verificar que os valores obtidos, numericamente por meio do método dos elementos finitos, apresentam boa concordância em relação aos resultados encontrados com a solução analítica.

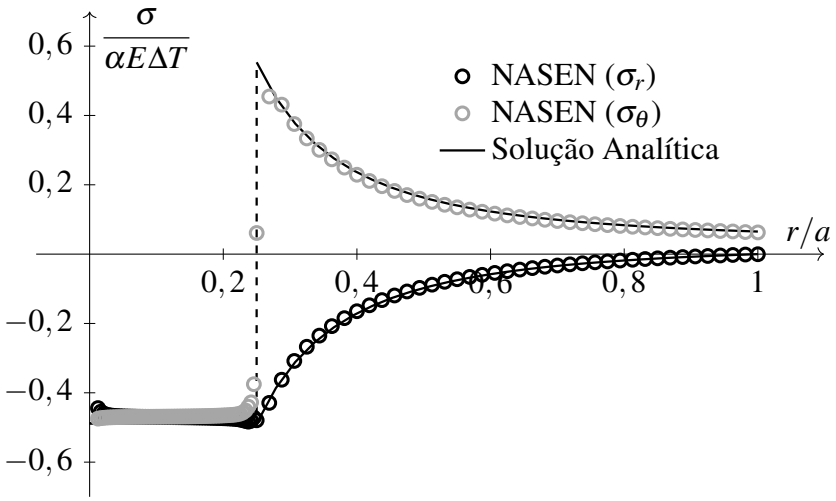

Figura 120 – Tensão radial e circunferencial do disco para uma razão entre o raio do ponto quente e o raio do disco de 1/4

Em seguida, são analisados os valores relacionados ao cálculo da tensão radial e circunferencial atuante no disco, conforme posto na Figura 120. Deve-se salientar que pelo fato da presença do ponto de descontinuidade no campo térmico do disco, a solução numérica de elementos finitos encontra dificuldades próxima a fronteira da região do aquecimento local. Em linhas gerais, o método numérico implementado apresenta um comportamento aceitável de engenharia.

5.5.3.6 Cilindro longo com orifício circular concêntrico

Analisa-se um cilindro extenso com orifício circular concêntrico sujeito a um gradiente térmico e ausente de solicitações externa no contorno, caracterizado pelo estado plano de deformação. Por conta da simetria da estrutura, o problema é reduzido a um quarto da seção transversal do cilindro, conforme ilustra-se na Figura 121.

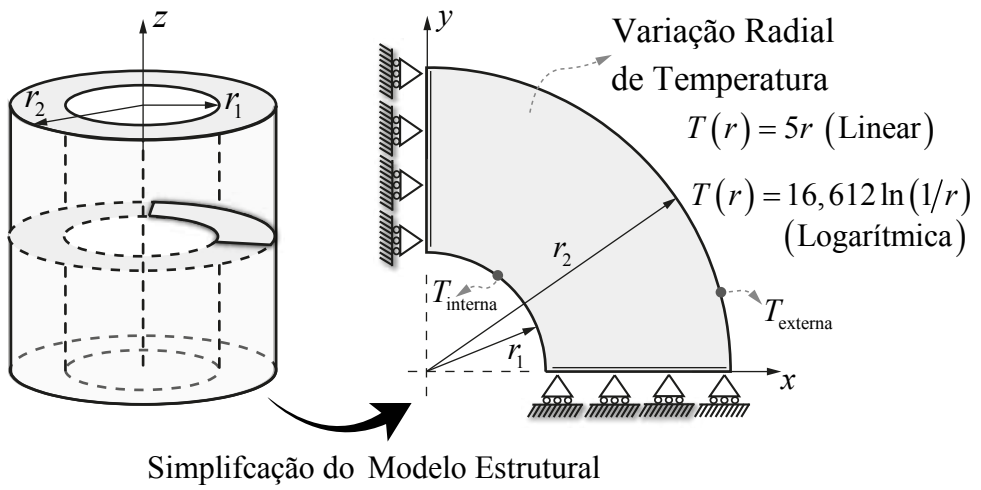

Figura 121 – Condições de contorno e perfil radial de temperatura da seção transversal do cilindro longo com orifício circular concêntrico

Nesse problema, são estudados duas configurações associado à variação de temperatura. Para ambos os casos, adota-se o módulo de elasticidade igual a 10.000 N/cm^2, o coeficiente de Poisson e de dilatação térmica são iguais a 0,30 e $10{\cdot}10^{-3}$ /°C, respectivamente.

No primeiro caso, admite-se um gradiente térmico logarítmico, assumindo que as temperaturas na borda interna e externa do cilindro são mantidas constantes e iguais 20°C e 0°C, respectivamente. A validação dos resultados numéricos obtidos, por meio do programa NASEN, é realizada pela comparação com a solução analítica do problema e com o método dos elementos de contorno (MEC), ambos encontrados em Ribeiro (1991).

Tabela 18 – Valores de tensão radial, em N/cm^2

r (cm)	Analítica^0	NASEN^1	Δ_0^1 (cm)	MEC^2	Δ_0^2 (cm)
0,30	0,00	-0,94	0,94	-40,98	40,98
0,35	-23,36	-22,88	-0,48	-24,77	1,41
0,40	-34,55	-34,45	-0,10	-37,46	2,91
0,50	-39,86	-39,81	-0,05	-38,33	-1,53
0,60	-35,49	-35,28	-0,21	-34,72	-0,77
0,70	-27,62	-27,44	-0,18	-27,01	-0,61
0,80	-18,53	-18,40	-0,13	-17,71	-0,82
0,90	-9,19	-9,20	0,01	-8,55	-0,64
0,95	-4,56	-4,71	0,15	-1,69	-2,87
1,00	0,00	-0,07	0,07	-0,30	0,30

A Tabela 18 apresenta os valores da tensão radial no cilindro e o erro de previsão calculado para os resultados obtidos, com base no programa NASEN e no MEC, em relação aos dados numéricos analíticos. Pode-se notar que o programa NASEN apresenta boa concordância entre os resultados, apresentando baixas diferenças entre os valores numéricos e analíticos, tendo a maior divergência na extremidade do raio interno. Em relação aos resultados do MEC, o programa NASEN apresenta menores níveis diferenças absolutas em comparação ao MEC, verificando a maior divergência dos resultados em $r = 0,3$.

Tabela 19 – Valores de tensão circunferencial, em N/cm^2

r (cm)	Analítica^0	NASEN^1	Δ_0^1 (cm)	MEC^2	Δ_0^2 (cm)
0,30	-195,32	-192,03	-3,29	-205,32	10,00
0,35	-135,38	-135,29	-0,09	-130,43	-4,95
0,40	-92,50	-92,56	0,06	-87,67	-4,83
0,50	-34,23	-33,91	-0,32	-32,58	-1,65
0,60	4,67	4,73	-0,06	5,91	-1,24
0,70	33,37	33,46	-0,09	34,17	-0,80
0,80	55,97	56,08	-0,11	56,71	-0,74
0,90	74,58	74,61	-0,03	74,53	0,05
0,95	82,78	82,49	0,29	83,91	-1,13
1,00	90,40	89,41	0,99	82,93	7,47

A tensão circunferencial, mostrada na Tabela 19, exibe a maior diferença próxima ao raio interno em ambos os modelos de cálculo (NASEN e MEC), contudo, em modo geral, pode-se observar um comportamento consistente do programa NASEN, com valores tangenciais aos resultados obtidos com a solução analítica.

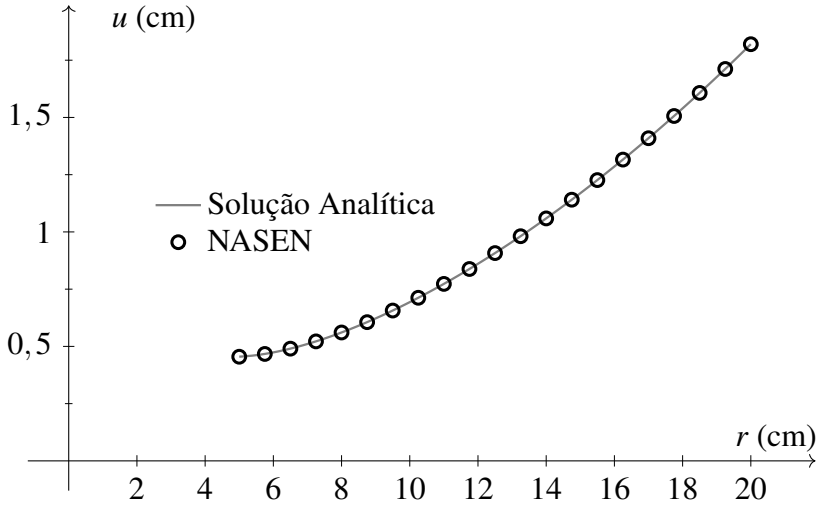

Figura 122 – Curva do deslocamento radial do cilindro

Na segunda configuração, a distribuição de temperatura é caracterizada por uma variação radial linear, adotando o raio interno e externo do cilindro iguais a 5,0 cm e 20,0 cm, respectivamente. Esse caso também foi estudado em Hinton e Owen (1977), por meio de uma análise 2D, e em Vila Real (1988), mediante a uma análise bidimensional e assimétrica.

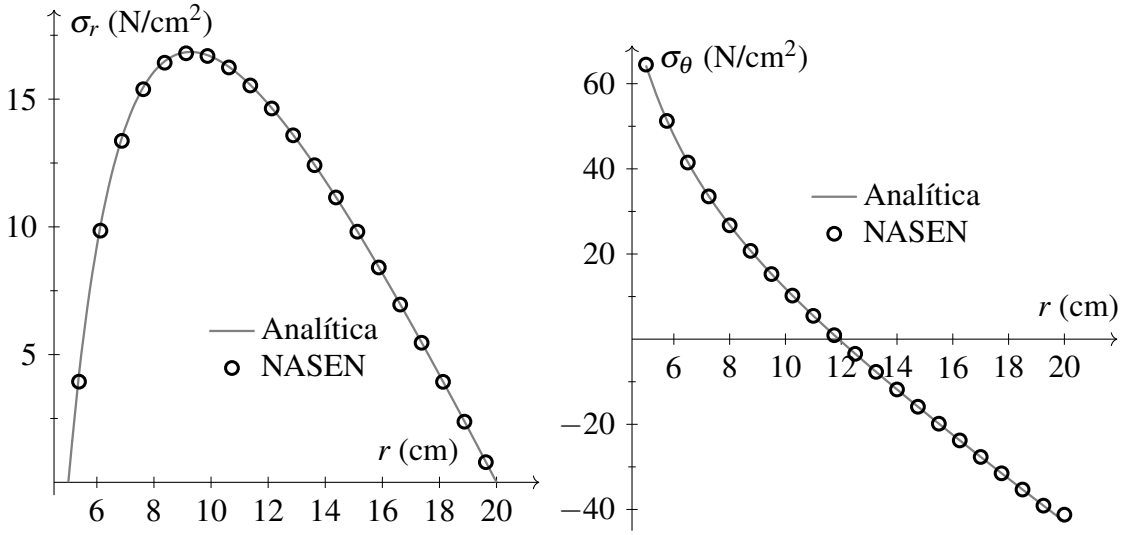

Figura 123 – Distribuição de tensão radial e circunferencial no cilindro

Para comparação dos resultados, utiliza-se a solução analítica do problema, encontra em detalhes na obra de Boley e Weiner (1985). Desta maneira, a Figura 122 apresenta o campo de deslocamento radial do cilindro, nota-se a boa semelhança entre a curva numérica e a solução analítica. A medição quantitativa da amostragem de dados obtidos é direcionada pelo

erro percentual médio, fornecendo um valor de aproximadamente 0,01%. Em adicional, pode observar que os maiores deslocamentos ocorrem na extremidade do cilindro, onde o campo de temperatura atinge o valor máximo.

Na Figura 123, apresenta-se o campo de tensão radial e circunferencial, respectivamente. Em ambos os gráficos, a distribuição de tensão obtida, por meio do programa NASEN, exibe um comportamento parelho com a solução analítica do problema físico. Analogamente ao procedimento aplicado na verificação do desempenho da solução do deslocamento, realiza-se a estimativa do erro percentual médio para cada amostragem de dados, associada aos valores da tensão radial e circunferencial, onde chega-se nos resultados em torno de 0,6% e 0,31%, respetivamente, indicando níveis percentuais aceitáveis.

Pode-se observar que a tensão radial σ_r apresenta um rápido crescimento próximo ao orifício interno de raio r_1, posteriormente, essa tensão inicia um processo de decaimento ao longo do raio do cilindro, atingindo valor nulo na extremidade externa de raio r_2. Em contrapartida, a tensão circunferencial σ_θ apresenta valores absolutos altos na extremidade interna e externa, sendo que essa tensão é nula próxima ao raio de 12 cm.

6

TEORIA BÁSICA DA ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR

O presente capítulo visa apresentar uma breve exposição das pesquisas científicas desenvolvidas correlacionadas com o comportamento não linear geométrico de estruturas. Posteriormente, realiza-se uma discussão sucinta acerca da modelagem matemática-numérica, expondo as equações básicas governantes e a formulação aproximada de elementos finitos. As estratégias de solução dos problemas estruturais não lineares são baseadas em técnicas de incremento de carga e em procedimentos numéricos iterativos. Ao fim, realiza-se a avaliação de performance com base em exemplos de aplicação clássicos da literatura.

6.1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No decorrer das últimas décadas, a análise não linear de estruturas tornou-se um objeto importante e recorrente na área científica-acadêmica devido os desafios matemáticos e numéricos característicos das aplicações práticas da engenharia. Desta forma, apresenta-se a seguir um breve levantamento bibliográfico das pesquisas científicas acerca do desenvolvimento computacional, das estratégias e técnicas numéricas de solução do comportamento não linear estrutural.

Neste contexto, como obras pioneiros nessa área, Tuner, Drill e Melosh (1960) e Argyris (1964) apresentam uma estratégia de solução não linear com base em um método puramente incremental. Em busca de minimizar os possíveis erros provenientes das técnicas incrementais, Oden (1967) e Mallett e Marcal (1968) utilizaram iterações do tipo Newton-Raphson na solução. Nos trabalhos de Brebbia e Connor (1969) e Murray e Wilson (1969), apresentam uma combinação entre os métodos incrementais e iterativos, considerando, inicialmente, no ciclo iterativo, a carga sendo constante. Sendo assim, foi introduzida ao meio científico a estratégia de solução incremental-iterativa. As estratégias de solução baseiam, frequentemente, nas premissas do método de Newton-Raphson padrão (MNRP), onde se deve realizar a atualização contínua da matriz de rigidez, contudo, Zienkiewicz (1971) e Crisfield (1981) apresentaram o método de Newton-Raphson modificado (MNRM), onde a matriz de rigidez é atualizada em cada passo incremental.

Os problemas não lineares geométricos buscam computar as trajetórias de equilíbrio, ou seja, estimar as relações entre os níveis de carga e os deslocamentos da estrutura. Todavia, dependendo da natureza e das configurações físicas do sistema, a estrutura pode apresentar inúmeros pontos críticos de carga e de deslocamento, gerando dificuldades no tratamento

numérico e na previsão do comportamento físico do elemento estrutural. Sendo assim, estudos iniciais, acerca dos problemas dessa natureza, foram realizados em Sharifi e Popov (1971) e Sabir e Lock (1972). Posteriormente, diversos métodos alternativos foram desenvolvidos visando contornar os problemas e dificuldades numéricas, por exemplo, o método de comprimento de arco (RIKS, 1972; WEMPNER, 1971), o método de controle de deslocamento (BATOZ; DHATT, 1979), o método de controle de energia (POWELL; SIMONS, 1981), o método do fluxo normal (WATSON; BILLUPS; MORGAN, 1987), o método do controle de deslocamento generalizado (YANG; SHIEH, 1990), dentre outros. Meek e Tan (1984), Rezaiee-Pajand, Ghalishooyan e Salehi-Ahmadabad (2013) e Bergan e Søreide (1973) apresentaram investigações acerca de algumas dessas estratégias numéricas de solução dos problemas não linear.

Em diversos problemas físicos não lineares estruturais, torna-se interessante a utilização de estratégias eficientes fundamentadas em incrementos automáticos de carga, ou seja, computar o tamanho e o sinal correto do incremento automaticamente, a fim de investigar os pontos limites do sistema. Sendo assim, Bergan et al. (1978) e Bergan (1980) definiram o parâmetro de rigidez corrente (*Current Stiffness Parameter* - CSP), destinado ao controle do tamanho do incremento inicial do parâmetro de carga, influenciado diretamente pelo grau de não linearidade do sistema estrutural. Em Crisfield (1991), são apresentados as técnicas de controle do tamanho do comprimento de arco e do tamanho do incremento inicial do parâmetro de carga, onde necessitam de informações, como a quantidade de iterações desejadas e a quantidade de iterações realizadas no passo de carga anterior. Neste contexto, no trabalho de Yang e Kuo (1994), apresenta uma estratégia de solução com base no GSP (*General Stiffness Parameter*), representando um parâmetro de rigidez generalizado do sistema.

Pacoste e Eriksson (1997) realizou um tratamento acerca da formulação de elementos de viga para a análise numérica dos fenômenos de instabilidade das estruturas, onde comparou as descrições lagrangianas total e co-rotacional, aplicadas aos problemas bidimensionais e tridimensionais. Posteriormente, Pacoste (1998) realizou investigações numéricas acerca da instabilidade de cascas, utilizando elementos finitos triangulares de três nós e seis graus de liberdade em cada nó.

No Brasil, dentre as inúmeras pesquisas relacionadas à análise não linear de estruturas, cita-se o trabalho de Galvão (2004), onde realizou um desenvolvimento de um programa computacional para a análise não linear estática e dinâmica de pórticos planos com ligações flexíveis. Neste contexto, Silva (2009) desenvolveu uma ferramenta computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas reticuladas com base no método dos elementos finitos, onde considerou a não linearidade geométrica, os efeitos da deslocabilidade da estrutura e a não linearidade física, caracterizada pela inelasticidade do aço, e as ligações semirrígidas entre os membros estruturais. Paraski (2012) realizou um desenvolvimento de um código para análise estática de estruturas reticuladas planas com não linearidade geométrica, a implementação computacional foi realizada em Matlab, por conta da simplicidade, compactação e disponibilidade

de recursos gráficos de pós-processamento.

No trabalho de Maximiano (2012), apresentou um desenvolvimento alternativo eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal. Para tanto, a condição de perpendicularidade deve ser satisfeita ao longo do processo iterativo de solução a fim de contornar as dificuldades em ultrapassar todos os pontos limites que surgem ao longo da trajetória de equilíbrio da estrutura. Os problemas estudados baseiam-se na análise de arcos com comportamento geometricamente não linear. Silva (2016) visa desenvolver formulações para estruturas reticuladas bidimensionais com comportamento não linear geométrico fundamentado no método dos elementos finitos e no do referencial corrotacional. A metodologia de solução tem como base o método de Newton-Raphson acoplado às estratégias de incremento de carga e de iteração. As implementações foram realizadas no programa computacional CS-ASA.

Oliveira (2016) descreve a formulação corrotacional de um elemento de viga unificado, com base nas teorias de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko, utilizado para a análise dos problemas físicos fortemente não-lineares e que não apresentam bloqueio por cisalhamento. Aplica-se o método de comprimento de arco, onde possibilita a investigação detalhada dos caminhos de equilíbrio com diversos pontos limites. Ribeiro (2016) apresenta um estudo do comportamento não linear geométrico dos sistemas estruturais aporticados planos. Para tanto, utiliza-se a estratégia incremental-iterativa de Newton-Raphson com controle de carga com atualização da matriz de rigidez e a abordagem corrotacional. Além disso, o programa computacional permite a consideração de elementos com seções transversais arbitrárias e variando ao longo do elemento. As aplicações foram destinadas ao contexto de projeto de estruturas em concreto armado e aço, e na análise de estabilidade global de estruturas.

6.2 MODELAGEM DO PROBLEMA NÃO LINEAR ESTRUTURAL

A análise estrutural visa estudar o comportamento de sistemas estruturais sujeitos aos diferentes tipos de ações, como as cargas permanentes, acidentais, térmicas, estáticas, dinâmicas e variáveis, a fim de obter parâmetros e dados importantes para o dimensionamento e concepção do projeto, por exemplo, os deslocamentos, as tensões e as deformações. Frequentemente, aplica-se a análise linear estrutural em inúmeros problemas práticos da engenharia, tendo sua modelagem fundamentada na configuração original indeformada do elemento estrutural. Todavia, a análise elástica-linear não representa o comportamento real das estruturas em certas condições não convencionais de carregamentos ou até mesmo para obter os carregamentos limites.

Desta forma, a construção de estruturas mais esbeltas e com alto desempenho foi encaminhada pelo avanço recorrente de técnicas construtivas e pesquisas científicas, além do emprego de novos materiais de construção. Tais aspectos direcionam para a utilização da análise não linear estrutural, que permite uma maior verossimilhança entre o modelo de engenharia e o comportamento real dos sistemas estruturais.

Em problemas não lineares de natureza estrutural, usualmente, consideram-se duas fontes de não linearidade que ocorrem nas estruturas e são significativas na prática da engenharia, descrevendo importantes fenômenos físicos que acontecem nas estruturas quando expostas a certos efeitos físicos e solicitações externas (CHEN, 2018). Sendo assim, primeiramente, cita-se a não linearidade física que provém do fato que o material não apresenta uma proporcionalidade na relação tensão-deformação, ou seja, a lei de Hooke não é válida.

Em sequência, a segunda fonte é a não linearidade geométrica, objeto de estudo deste capítulo. Neste campo, as estruturas são caracterizadas por grandes deslocamentos e/ou rotações, as equações de equilíbrio são definidas no estado deformado da estrutura ou também ocorre uma alteração na relação deformação-deslocamento, ou seja, nas equações cinemáticas (ALVES FILHO, 2012). Ressalta-se que uma estrutura pode apresentar um comportamento não linear mesmo que o material seja elástico-linear.

6.2.1 REFERENCIAL LAGRANGIANO

A formulação lagrangiana é frequentemente utilizada para descrever o movimento de corpos sólidos, sendo que os referenciais lagrangianos podem ser subdividido em duas classes. Sendo assim, a primeira classe é o referencial lagrangiano total (RLT) que busca medir os deslocamentos em relação ao estado original indeformado da estrutural. Em contrapartida, a segunda classe é o referencial Lagrangiano atualizado (RLA) que visa determinar os deslocamentos em relação à configuração deformada atual (ALVES, 1995), conforme ilustrado no esquema da Figura 124.

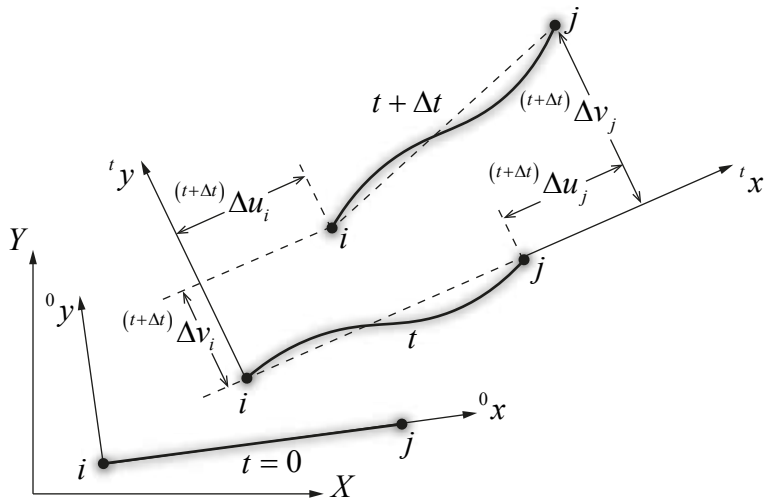

Figura 124 – Referencial lagrangiano atualizado

Observa-se, na Figura 124, que o sistema global é definido pelas variáveis X e Y, onde define-se a estrutura. Na configuração C_0, apresenta-se o estado inicial ($t = 0$) contendo os eixos x_0 e y_0, utiliza-se esse como referência para a próxima configuração C_1, e essa é utilizada como referencial para a configuração C_2. Nota-se ainda que os deslocamentos axiais e transversais, nas

extremidades do elemento, são determinados em cada configuração, tendo sempre os referenciais em relação aos níveis anteriores como referência.

6.2.2 EQUAÇÕES GERAIS

A formulação de pórtico plano não linear tem como base o referencial Lagrangiano atualizado. Na configuração C_1, definem-se as componentes planas de tensão provenientes do tensor de Cauchy, como ${}^t\tau_{xx}$ e ${}^t\tau_{xy}$, e as deformações incrementais de Green ${}^t\varepsilon_{xx}$ e ${}^t\varepsilon_{xy}$. Com base no princípio dos deslocamentos virtuais, pode-se escrever a equação de equilíbrio incremental do trabalho virtual (YANG; KUO, 1994), conforme dado pela Equação (6.1).

$$\int_V \left(Ee_{xx}\delta e_{xx} + 4Ge_{xy}\delta e_{xy}\right) dV + \int_V \left({}^t\tau_{xx}\delta\eta_{xx} + 2{}^t\tau_{xy}\delta\eta_{xy}\right) dV = {}^{t+\Delta t}R - {}^tR \tag{6.1}$$

Sendo que os coeficientes 4 e 2 foram adicionados por conta da simétrica das componentes de tensão cisalhante e deformação. Além disso, o termo ${}^{t+\Delta t}R - {}^tR$ representa o trabalho virtual das forças externas. Como a relação deformação-deslocamento é fundamentada pelo tensor de Green-Lagrange, considerando as deformações axiais e cisalhantes (REDDY, 2015), pode-se escrever as relações diferenciais a seguir:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{du_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du_y}{dx}\right)^2\right] \tag{6.2}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{du_x}{dy} + \frac{du_y}{dx}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{du_x}{dy}\frac{du_x}{dx} + \frac{du_y}{dy}\frac{du_y}{dx}\right) \tag{6.3}$$

Nas expressões matemáticas das deformações, conforme apresenta a Equação (6.2) e a Equação (6.3), os primeiros termos representam as parcelas lineares e os demais termos correspondem às parcelas não lineares. Adota-se a hipótese de Euler-Bernoulli, onde as seções transversais planas permanecem normais ao eixo da barra na flexão.

Desta maneira, os deslocamentos u_x e u_y, em um ponto genérico, podem ser associados aos deslocamentos u e v da viga. Logo, pode-se escrever que os deslocamentos são $u_x = u - yv'$ e $u_y = v$, conforme ilustrado na Figura 125. Avaliando as parcelas lineares do campo de deformação, chega-se na Equação (6.4) e na Equação (6.5).

$$e_{xx} = \frac{du}{dx} - y\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) \tag{6.4}$$

$$e_{xy} = 0 \tag{6.5}$$

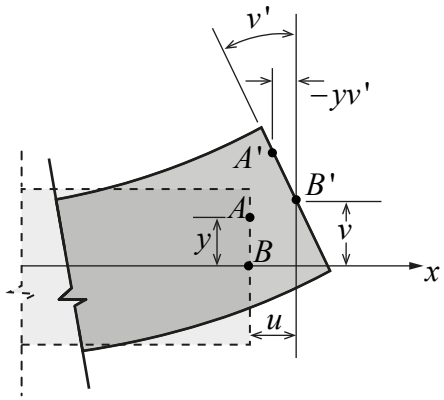

Figura 125 – Comportamento da seção transversal

Analogamente, as parcelas não lineares do campo de deformação podem ser escritas conforme apresentado na Equação (6.6) e na Equação (6.7).

$$\eta_{xx} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - 2y\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + y^2\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right] \tag{6.6}$$

$$\eta_{xy} = \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) + y\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)\right] \tag{6.7}$$

As forças iniciais são consideradas ao nível da seção transversal de cada elemento, tal procedimento é feito com base nas integrações das tensões de Cauchy, conforme mostra a Equação (6.8).

$$^tF_x = \int_A {}^t\tau_{xx} dA \qquad {}^tF_y = \int_A {}^t\tau_{xy} dA \qquad {}^tM_z = \int_A {}^t\tau_{xx} y dA \tag{6.8}$$

Sendo que ^tF_x, ^tF_y e ^tM_z representam, respectivamente, a força axial, de cisalhamento transversal e o momento fletor. Após algumas manipulações, a sentença integral, dada pela Equação (6.1), pode ser reescrita, conforme posto a seguir:

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \left[EA\frac{du}{dx}\frac{d\delta u}{dx} + EI_z\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2\delta v}{dx^2}\right)\right]dx + \cdots \\
&+\frac{1}{2}\int_0^L \left[{}^tF_x\delta\left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right) + {}^tF_x\frac{I_z}{A}\delta\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2\right]dx + \cdots \\
&+\int_0^L \left[{}^tM_z\delta\left(\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)\right) - {}^tF_y\delta\left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\right)\right]dx = \{\delta u\}^T\left\{{}^{t+\Delta t}R - {}^tR\right\}
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Para convencionar as discussões posteriores no presente texto, considera-se que a Equação (6.9) é referida como teoria geral. Essa consideração é interessante, uma vez que é possível realiza-se uma formulação generalista que permita atender as teorias simplificadas, como desprezar os termos de alta ordem nas relações cinemáticas.

6.2.3 DISCRETIZAÇÃO DO SISTEMA ESTRUTURAL

Os procedimentos de elementos finitos buscam aproximar o campo de deslocamento axial e vertical por meio de uma combinação linear entre coeficientes e funções de interpolação, conforme posto nas Equações (6.10) e (6.11).

$$u = N_1\bar{u}_1 + N_2\bar{u}_2 = \left\{\tilde{\mathbf{N}}_1\right\}\{\bar{u}\} \tag{6.10}$$

$$v = N_3\bar{v}_1 + N_4\bar{\theta}_1 + N_5\bar{v}_2 + N_6\bar{\theta}_2 = \left\{\tilde{\mathbf{N}}_3\right\}\{\bar{v}\} \tag{6.11}$$

Os termos $\left\{\tilde{\mathbf{N}}_1\right\}$ e $\left\{\tilde{\mathbf{N}}_3\right\}$ representam, respectivamente, o vetor de interpolação linear do deslocamento axial e o vetor de interpolação cúbico do deslocamento transversal. As funções de interpolação utilizadas nas aproximações são discutidas em detalhes no Capítulo 5 da presente pesquisa.

As aproximações, apresentadas nas Equações (6.10) e (6.11), são aplicadas na formulação integral do problema, conforme mostrado na Equação (6.9). Sabendo que os deslocamentos virtuais são arbitrário na fronteira natural, consequentemente, chega-se no sistema algébrico final, conforme apresenta a Equação (6.12).

$$\left([\mathbf{K}_e] + [\mathbf{K}_g]\right)\{\mathbf{u}\} = \left\{{}^{t+\Delta t}\mathbf{f}\right\} - \left\{{}^{t}\mathbf{f}\right\} \tag{6.12}$$

A matriz de rigidez elástica $\mathbf{K}_e$ é obtida pela avaliação numérica das primeiras parcelas da Equação (6.9), conforme apresenta na Equação (6.13).

$$\mathbf{K}_e = \int_0^L EA\left\{\tilde{\mathbf{N}}_1^{'}\right\}\left\{\tilde{\mathbf{N}}_1^{'}\right\}^T dx + \int_0^L EI_z\left\{\tilde{\mathbf{N}}_3^{''}\right\}\left\{\tilde{\mathbf{N}}_3^{''}\right\}^T dx \tag{6.13}$$

Com objetivo de auxiliar na construção da matriz geométrica, define-se, primeiramente, a matriz $\mathbf{K}_0$, que representa as parcelas interligadas com a força axial, conforme dado pela Equação (6.14).

$$\mathbf{K}_0 = \int_0^L {}^tF_x\left\{\tilde{\mathbf{N}}_1^{'}\right\}\left\{\tilde{\mathbf{N}}_1^{'}\right\}^T dx + \int_0^L {}^tF_x\left\{\tilde{\mathbf{N}}_3^{'}\right\}\left\{\tilde{\mathbf{N}}_3^{'}\right\}^T dx + \int_0^L {}^tF_x\frac{I_z}{A}\left\{\tilde{\mathbf{N}}_3^{''}\right\}\left\{\tilde{\mathbf{N}}_3^{''}\right\}^T dx \tag{6.14}$$

Na matriz $\mathbf{K}_1$, considera-se a contribuição do momento fletor e da força cisalhante, sendo que Φ é definido como a soma dos momentos nas extremidades do elemento.

$$\mathbf{K}_1 = \int_0^L \left[{}^tM_1 + \Phi\frac{x}{L}\right] \left\{\tilde{\mathbf{N}}_3''\right\} \left\{\tilde{\mathbf{N}}_1'\right\}^T dx + \int_0^L \left[{}^tM_1 + \Phi\frac{x}{L}\right] \left\{\tilde{\mathbf{N}}_1'\right\} \left\{\tilde{\mathbf{N}}_3''\right\}^T dx + \cdots \tag{6.15}$$
$$+ \int_0^L \left[\Phi\frac{1}{L}\right] \left\{\tilde{\mathbf{N}}_3'\right\} \left\{\tilde{\mathbf{N}}_1'\right\}^T dx + \int_0^L \left[\Phi\frac{1}{L}\right] \left\{\tilde{\mathbf{N}}_1'\right\} \left\{\tilde{\mathbf{N}}_3'\right\}^T dx$$

Desta maneira, a matriz de rigidez geométrica $\mathbf{K}_g$ é constituída pelas contribuições das matrizes $\mathbf{K}_0$ e $\mathbf{K}_1$. Definidas as matrizes elementares elásticas e geométricas para cada barra do sistema estrutural, essas devem ser rotacionadas para o sistema global, por meio da matriz de rotação, conforme já discutido no Capítulo 5. Por fim, a matriz de rigidez global é construída pelo assemblamento das matrizes locais de cada elemento do sistema estrutural.

6.2.4 ESFORÇOS INTERNOS

A metodologia de cálculo do vetor de forças internas baseia-se no conhecimento prévio da matriz de rigidez e no vetor de deslocamentos naturais incrementais $\{u_n\}$, posto na Equação (6.16).

$$\{u_n\}^T = \left\{0 \quad 0 \quad \Theta_a \quad 0 \quad \mathrm{U}_b \quad \Theta_b\right\} \tag{6.16}$$

Onde Θ_a e Θ_b são denominadas de rotações naturais nas extremidades do elemento. Essas variáveis são expressas, respectivamente, nas Equações (6.17) e (6.18).

$$\Theta_a = \theta_a - \theta_r \tag{6.17}$$
$$\Theta_b = \theta_b - \theta_r \tag{6.18}$$

Em que θ_a e θ_b são definidas como as rotações incrementais e θ_r é a rotação do corpo rígido, calculada pela a Equação (6.19).

$$\theta_r = \tan^{-1}\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right) \tag{6.19}$$

Sendo que $\bar{x}$ e $\bar{y}$ representam as projeções do comprimento do elemento na configuração deformada, conforme pode ser facilmente verificado na Figura 126. Após determinar o vetor de deslocamentos naturais incrementais, tendo, previamente, calculada a matriz de rigidez (parcela

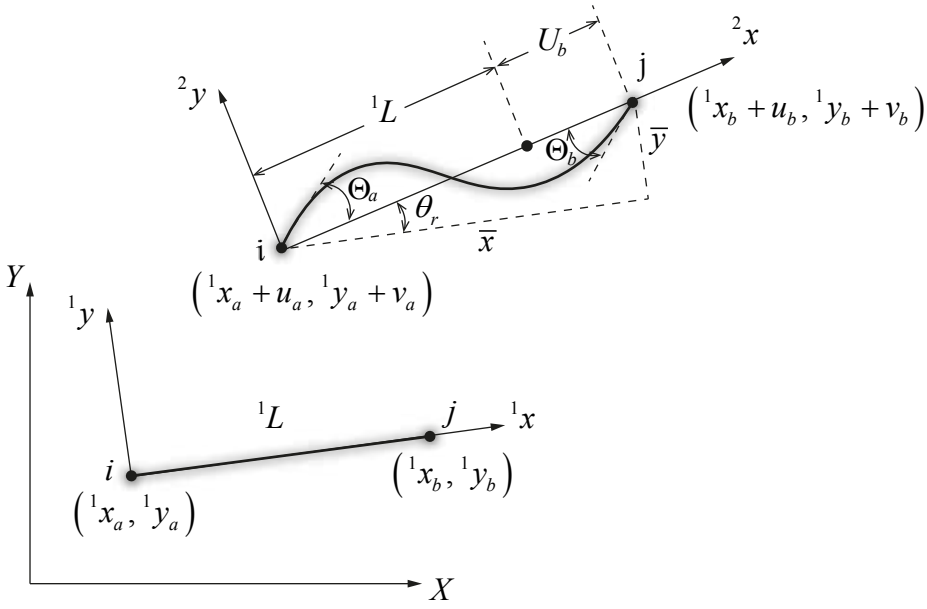

Figura 126 – Deformação natural da viga

elástica linear e geométrica não linear), define-se o vetor de forças internas para cada elemento do sistema estrutural, conforme apresenta a Equação (6.20).

$$\{f_i^e\} = ([\mathrm{K}_e] + [\mathrm{K}_g])\{u_n\} \tag{6.20}$$

Salienta-se que o vetor de forças internas f_i^e é um parâmetro importante dentro do processo de solução não linear, devido esse ser necessário para a atualização das matrizes do sistema e para a construção do vetor residual utilizado no processo incremental-iterativo.

6.3 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

Na análise do comportamento não linear geométrica de estruturas, a todo instante é necessário realizar a atualização da matriz de rigidez, a fim de garantir a configuração de equilíbrio do sistema por conta das mudanças em sua geometria. Neste contexto, como foi visto no item anterior do trabalho, na matriz de rigidez **K**, são considerados os efeitos provenientes do comportamento estrutural não linear do problema, que pode ser condensada conceitualmente como:

$$\mathbf{K} = f(\mathbf{U}, \mathbf{S}) \tag{6.21}$$

Note que a Equação (6.21) indica que a matriz de rigidez é função do vetor de deslocamentos nodais **U** e dos esforços internos **S**. A sistemática de solução de um problema não linear, com base nos procedimentos discretos de elementos finitos, percorre pela avaliação numérica de

um sistema de equações não lineares, direcionado pela aplicação de uma metodologia fundamentada na combinação de estratégias incrementais e iterativas. Em linhas gerais, o processo é constituído pela premissa de equilíbrio das forças externas e internas, conforme é expresso matematicamente pela Equação (6.22).

$$\mathbf{F}_e - \mathbf{F}_i(\mathbf{U},\mathbf{S}) \cong 0 \tag{6.22}$$

Em que $\mathbf{F}_i$ é o vetor de forças internas e $\mathbf{F}_e$ é conhecido como vetor de forças externas, dado pelo produto entre o fator de carga e o vetor de referência, que contêm as direções das forças aplicadas na estrutura.

6.3.1 SOLUÇÃO INCREMENTAL PREDITA

Considerando que todas as informações e variáveis sejam conhecidas na última configuração de equilíbrio da estrutura, a solução incremental predita (ou solução incremental inicial tangente) inicia pela construção prévia da matriz de rigidez e, posteriormente, o cálculo do vetor de deslocamentos nodais $\delta \mathrm{U}_r$, conforme a sentença matemática posta a seguir:

$$\delta \mathbf{U}_r = [\mathbf{K}]^{-1}\{\mathbf{F}_r\} \tag{6.23}$$

Sendo assim, deve-se estabelecer o incremento do carga $\Delta\lambda$, destacando que, no passo inicial, esse é predefinido pelo usuário no arquivo de entrada. Um método incremental eficiente deve ser capaz de identificar e escolher automaticamente o incremento de carga, visto que em problemas não lineares estruturais existem a necessidade do conhecimento dos inúmeros pontos críticos contidos ao longo da trajetória de equilíbrio da estrutura.

Existem diversos trabalhos desenvolvidos que abordam diferentes tipos de estratégias de incremento de carga, como pode ser visto em detalhes nas obras de Silva (2009), Yang e Kuo (1994), Galvão (2004), dentre outras. Na presente pesquisa, adota-se a técnica incremental proposta por Crisfield (1991), denominada de comprimento de arco, definida pela Equação (6.24).

$$\Delta\ell = {}^t\Delta\ell\sqrt{\frac{I_d}{{}^tI}} \tag{6.24}$$

Em que $\Delta\ell$ e ${}^t\Delta\ell$ são os comprimentos de arco incrementais no passo de carga corrente e anterior, respectivamente. Além disso, I_d é o número de iterações desejadas, definido pelo usuário, e ${}^tI$ é o número de iterações, no passo de carga anterior, até a convergência da solução. Desta forma, o incremento de carregamento é expresso a seguir:

$$\Delta\lambda = \pm\frac{\Delta\ell}{\sqrt{\delta\mathbf{U}_r^T\,\delta\mathbf{U}_r}} \tag{6.25}$$

O sinal do incremento de carga, apresentado na Equação (6.25), é determinado com base no parâmetro GSP (*Generalized Stiffness Parameter*), sendo esse função do vetor dos deslocamentos nodais, no primeiro passo de carga e no passo de carga anterior e corrente, conforme posto na Equação (6.26).

$$\mathbf{GSP} = \frac{{}^{1}\delta\mathbf{U}_r^T\,{}^{1}\delta\mathbf{U}_r}{{}^{t}\delta\mathbf{U}_r^T\,\delta\mathbf{U}_r} \tag{6.26}$$

O parâmetro de rigidez generalizado, apresentado na Equação (6.26), é negativo para os passos de carga situados próximos aos pontos limites da trajetória de equilíbrio da estrutura. Para os demais pontos, esse é sempre positivo (YANG; KUO, 1994).

6.3.2 CICLO DE ITERAÇÕES

De acordo com Crisfield (1991), grande parte das técnicas de solução dos problemas estruturais com comportamento não linear, fundamenta-se no método de Newton-Raphson. A Equação (6.22) é utilizada como base ao longo do processo iterativo e deve-se garantir a condição expressa na Equação (6.27).

$$\mathbf{g} = \lambda\mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{U},\mathbf{S}) \cong 0 \tag{6.27}$$

Onde **g** representa o vetor de forças desbalanceados ou residual. O processo iterativo busca minimizar a condição estabelecida na Equação (6.27), quando a tolerância requerida é atingida, afirma-se que a estrutura encontrou uma configuração de equilíbrio.

No esquema padrão do método de Newton-Raphson, o parâmetro de carga λ é mantido constante ao longo de todo processo iterativo, possibilitando que a resposta seja obtida até o ponto limite e/ou bifurcação. Quando o parâmetro de carga é variável no decorrer do processo iterativo é possível determinar todo o caminho de equilíbrio (BATOZ; DHATT, 1979; LEMES, 2018). Sendo assim, permitindo a variação do parâmetro de carga, os deslocamentos nodais iterativos podem ser representados pela seguinte equação de equilíbrio:

$$[\mathbf{K}]^{(k-1)}\{\delta\mathbf{U}\}^k = \mathbf{g}\left(\mathbf{U}^{(k-1)},\lambda^k\right) \tag{6.28}$$

O índice $k \geq 1$ é o contador de iterações. Desta forma, como o parâmetro de carga é variável, deve-se calcular esse em cada iteração, conforme a Equação (6.29).

$$\lambda^k = \lambda^{k-1} + \delta\lambda^k \tag{6.29}$$

Onde $\delta\lambda^k$ é denominado como sendo a correção do fator de carga. Considerando o método convencional de Newton-Raphson, tem-se a solução trivial com $\delta\lambda^k = 0$ e é denominado como iteração a carga constante. Por outro lado, aplicando a estratégia proposto por Chan (1988), com base no deslocamento generalizado, a iteração pode ser escrita pela seguinte expressão:

$$\delta\lambda^k = -\frac{\left(\delta\mathbf{U}_r^k\right)^T \delta\mathbf{U}_g^k}{\left(\delta\mathbf{U}_r^k\right)^T \delta\mathbf{U}_r^k} \tag{6.30}$$

Sendo assim, a partir das Equações (6.28) e (6.30), pode-se apresentar o vetor de deslocamentos nodais iterativos, conforme posto na Equação (6.31).

$$\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \tag{6.31}$$

O vetor de forças desequilibradas e o vetor de referência são calculados pelas expressões a seguir:

$$\delta\mathbf{U}_g^k = \left[\mathbf{K}^{(k-1)}\right]^{-1} \mathbf{g}^{(k-1)} \tag{6.32}$$

$$\delta\mathbf{U}_r^k = \left[\mathbf{K}^{(k-1)}\right]^{-1} \mathbf{F}_r \tag{6.33}$$

Neste contexto, como mencionado anteriormente, deve-se impor um valor aceitável de tolerância ζ ao sistema, predefinido pelo usuário antes da simulação. Dentre os critérios de convergência utilizados na literatura, considera-se a norma com base no equilíbrio de forças, conforme posto na Equação (6.34).

$$\varepsilon = \frac{\left\|\mathbf{g}^{(k-1)}\right\|}{\left\|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\right\|} \leq \zeta \tag{6.34}$$

Sendo ε constituído pela razão entre as normas Euclidianas do vetor residual e da força externa. Após a convergência ser alcançada, pode-se afirmar que a estrutura estabeleceu uma configuração de equilíbrio e, consecutivamente, as variáveis dos próximos incrementos são atualizadas. Em síntese, as etapas e os processos de implementação dos problemas não lineares estruturais podem ser visualizados na Figura 127.

Algoritmo 4: Pseudocódigo - Visão Geral

1 **Pré-Processamento**
2 ▷ Entrada de Dados
3 ▷ Cálculos Iniciais
4 | Construção do vetor de referência, $\mathbf{F}_r$
5 | Condição Inicial: $\mathbf{F}_i = 0$
6 | Análise Simplificada (Estrutura Indeformada)
7
8 **Processamento**
9 ▷ Ciclo Incremental
10 **para** $i \leftarrow 1$ **até** $i = I_{max}$ **faça**
11 | ○ Construção da matriz de rigidez, $\mathbf{K}$
12 | ○ Calcular: $\delta \mathbf{U}_r = [\mathbf{K}]^{-1} \{\mathbf{F}_r\}$
13 | ○ Definir: Incremento de carga, $\Delta\lambda$
14 | ○ Vetor de Forças Externas, $\mathbf{F}_e$
15 | ○ Solução: $\Delta \mathbf{U}^0$
16 | ▷ Ciclo Iterativo
17 | **para** $\varepsilon \leqslant \zeta$ **faça**
18 | | ○ Construção do vetor de forças internas, $\mathbf{F}_i$
19 | | ○ Calcular o vetor de forças residuais, $\mathbf{g} = \mathbf{F}_e - \mathbf{F}_i$
20 | | ○ Critério de convergência:
21 | | $\varepsilon = \left\| \mathrm{g}^{(k-1)} \right\| \div \left\| \Delta\lambda^{(k-1)} \mathrm{F}_r \right\|$
22 | | ○ Correção do parâmetro de carga, $\delta\lambda^k$
23 | | ○ Correção dos deslocamentos nodais
24 | | $\delta \mathbf{U}^k = \delta \mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k$
25 | | ○ Atualização: $\Delta \mathbf{U}^k$, $\Delta\lambda^k$
26 | **fim**
27 | → Atualização de Variáveis
28 | → Armazenamento de Dados
29 **fim**
30
31 **Pós-Processamento**
32 ▷ Tratamento de Resultados
33 | Caminho de Equilíbrio: $\mathbf{P} \times \mathbf{u}$
34 | Avaliação de Dados
35

Figura 127 – Estratégia computacional para análise de problemas não lineares estruturais

6.4 VALIDAÇÃO E ESTUDO DE CASO

A experimentação numérica dos problemas não lineares geométricos de estruturas planas reticuladas são divididas em três classes de exemplos de aplicação. Primeiramente, são estudados os elementos isolados de viga e de coluna. Em segundo momento, apresentam-se alguns casos

envolvendo o comportamento de pórticos e quadros planos, e por fim, realiza-se uma breve análise de arcos esbeltos planos.

6.4.1 VIGAS E PILARES ISOLADOS

Esta seção é destinada à análise não linear geométrica de estruturas reticuladas do tipo viga e coluna, sendo os casos caracterizados pela condição de vinculação do tipo engastada-livre e as solicitações externas transitam da aplicação de momentos, cargas verticais e horizontais concentrados no elemento estrutural.

6.4.1.1 Viga com carga concentrada na borda livre

O primeiro caso é um exemplo clássico, frequentemente utilizado na validação de modelos numéricos de engenharia. Sendo assim, estuda-se uma viga engastada livre de comprimento unitário sujeita a uma carga concentrada vertical aplicada na borda livre, conforme ilustrado na Figura 128.

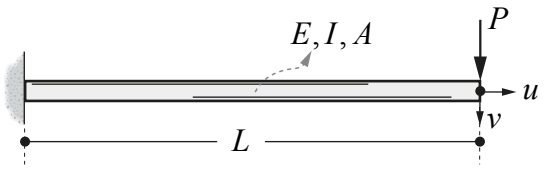

Figura 128 – Viga engastada-livre sob ação da carga pontual vertical

Em relação às propriedades físicas e geométricas da viga, o módulo de elasticidade é igual a 10^7 kN/m^2, a área da seção transversal e o momento de inércia são iguais a 10^{-2} m^2 e 10^{-5} m^4, respectivamente. Em relação aos parâmetros associados ao processo incremental-iterativo, adota-se uma tolerância de 10^{-4} e um fator de carga inicial igual a 0,02.

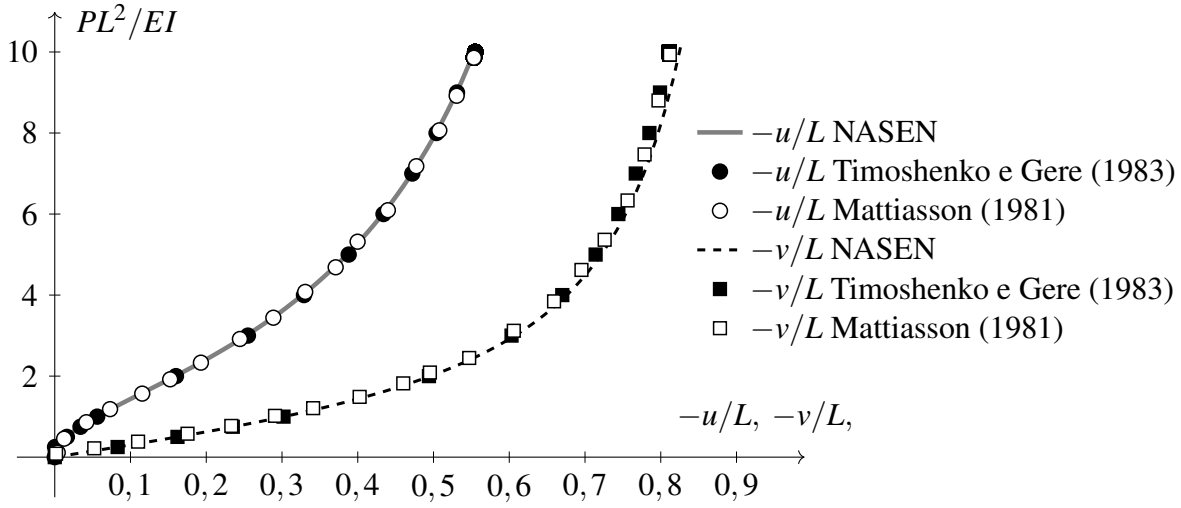

Figura 129 – Deslocamento horizontal e vertical da viga engastada-livre com carga concentrada

Os resultados são comparados com as soluções obtidas nas obras de Mattiasson (1981) e Timoshenko e Gere (1983). A Figura 129 apresenta os valores numéricos obtidos em relação ao deslocamento horizontal e vertical, localizados na extremidade livre da viga (ver Figura 128). Como pode-se observar, os resultados obtidos, por meio do programa NASEN, apresentam uma boa concordância com a literatura de referência.

6.4.1.2 Viga com momento concentrado na extremidade livre

Uma viga engasta-livre sob ação de um momento concentrado, aplicado na extremidade em balanço, é um exemplo característico em análises não lineares estruturais, sendo que diversos autores já estudaram esse caso, conforme pode ser visto em detalhes nas obras de Bathe e Bolourchi (1979), Fumio (1983), Crisfield (1990) e Oliveira (2016).

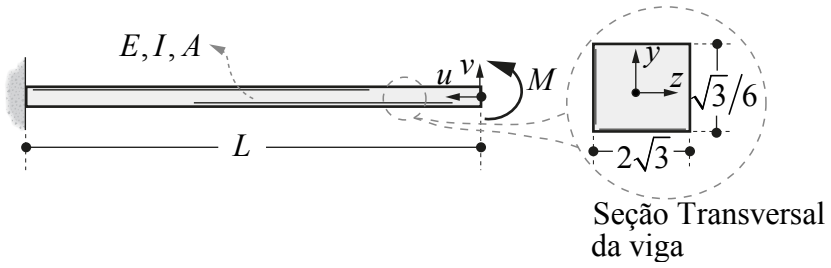

Figura 130 – Viga engastada sob ação de um momento concentrado aplicado na borda livre

Adota-se o comprimento da viga igual a $L = 1000$, o módulo de elasticidade é tomado como sendo igual a 1000, a área da seção transversal e o momento de inércia são considerados unitários. Em relação às condições de restrições, a viga apresenta um apoio de terceiro gênero na extremidade esquerda e é livre na borda direita, conforme apresenta-se na Figura 130.

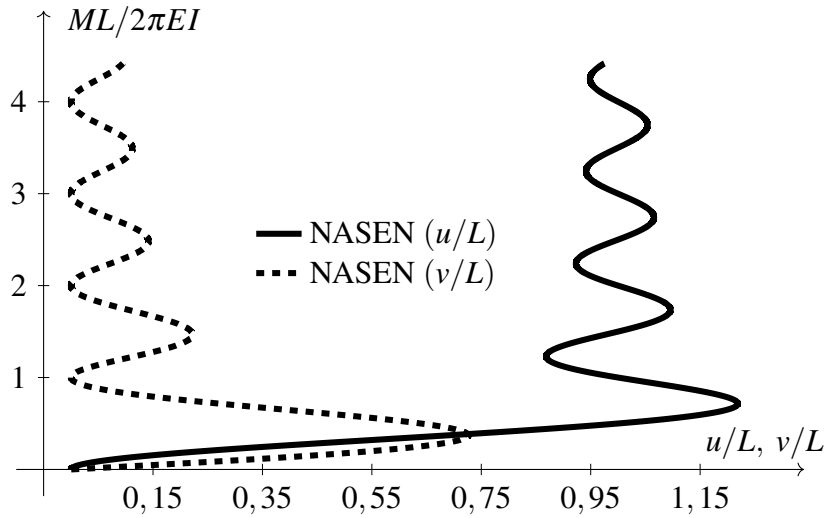

Figura 131 – Evolução do deslocamento horizontal e vertical para diferentes níveis de cargas

Para a solução do problema, adota-se uma tolerância de 10^{-5} e um incremento de carga inicial de $1 \cdot 10^{-2}$. A Figura 131 ilustra o comportamento do deslocamento horizontal e vertical

na extremidade livre da viga. Além disso, a Figura 132 apresenta a configuração deformada da viga para diferentes níveis de carregamento, onde é possível observar que a viga engasta livre sob ação do momento concentrado na extremidade livre sofre um comportamento deformacional acentuado para altos incrementos de carga. Essa ideia fornece uma noção preliminar acerca do comportamento não linear estrutural, fornecendo uma expansão dos conceitos previamente conhecidos sobre estruturas lineares adquiridos nos cursos básicos de engenharia.

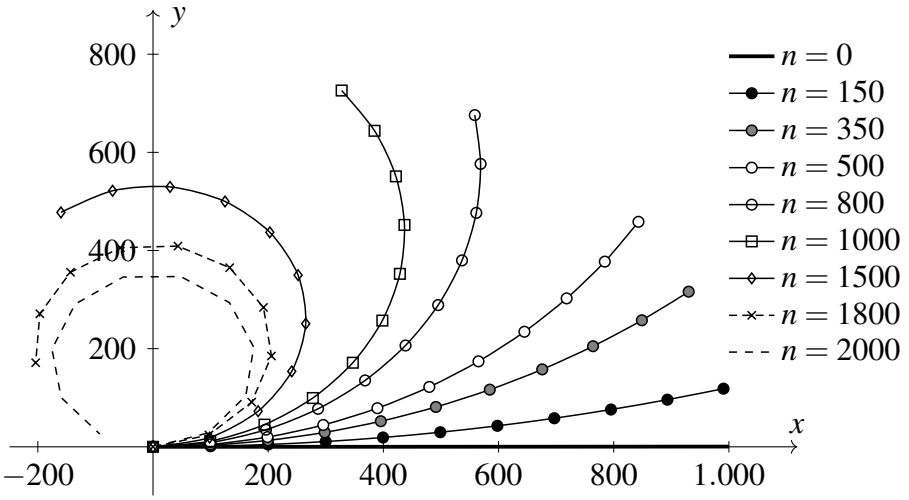

Figura 132 – Configuração deformada de uma viga com momento aplicado na extremidade livre para diferentes níveis de incrementos de carga

Em linhas gerais, a Figura 133 apresenta a análise de desempenho do programa NASEN, onde se pode verificar que os resultados do presente trabalho mostram-se satisfatórios quando comparados com a resposta exata do problema, apresentando resultados mais próximos em relação aos valores obtidos com a solução de Bathe e Bolourchi (1979).

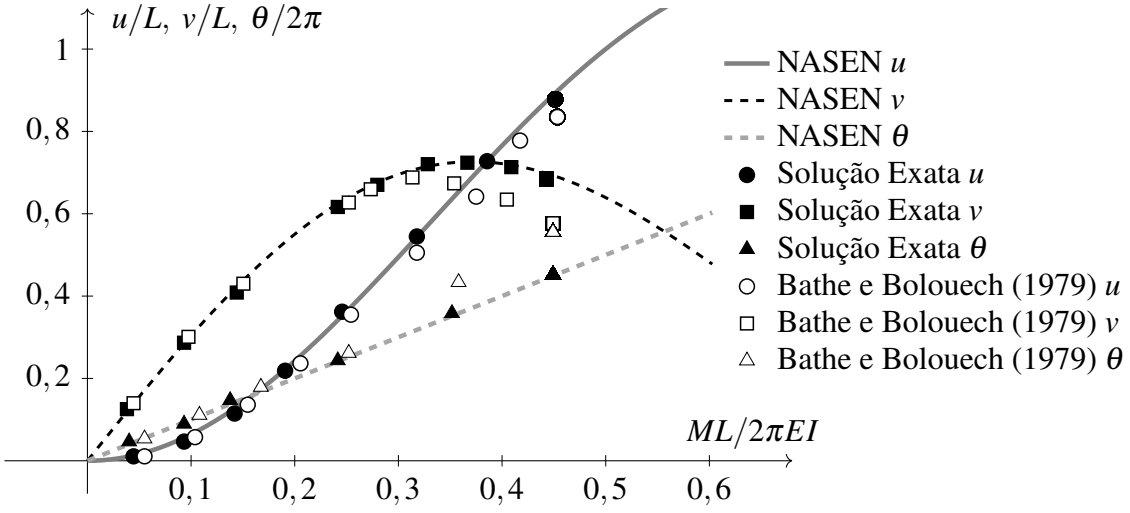

Figura 133 – Comparação de resultados com a literatura para o deslocamento horizontal, vertical e a rotação na extremidade livre da viga

6.4.1.3 Pilar sob ação de carga vertical

Este caso trata-se de um pilar fixada de comprimento unitário sujeita a uma carga de compressão na extremidade livre. A Figura 134 apresenta o esquema do problema proposto, onde busca-se avaliar a resposta em relação ao deslocamento horizontal medido na borda livre. As caraterísticas da seção transversal e as propriedades do material são adotados as mesmas do problema de viga engastada-livre com momento aplicado, visto no item 6.4.1.1 do trabalho. Para evitar dificuldades numéricas devido ao ponto de bifurcação, uma imperfeição do tipo momento é introduzida na extremidade livre da coluna.

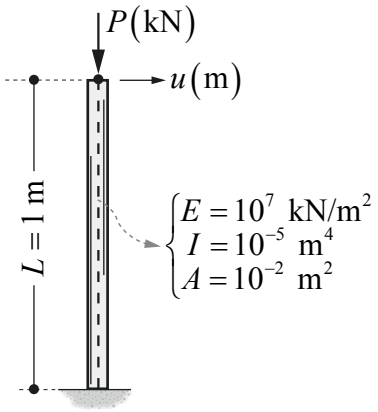

Figura 134 – Pilar engastado-livre sob ação de força de compressão

Para esse problema, adota-se uma tolerância de 10^{-5} e um incremento de carga inicial igual a $1 \cdot 10^{-5}$. Na simulação computacional, utiliza-se 50 incrementos e 5 iterações desejadas. A solução de referência é extraída na obra de Southwell (1941). Na Figura 135, apresenta-se os resultados obtidos com base no programa NASEN, onde-se pode verificar a boa similaridade em relação aos resultados previstos na literatura.

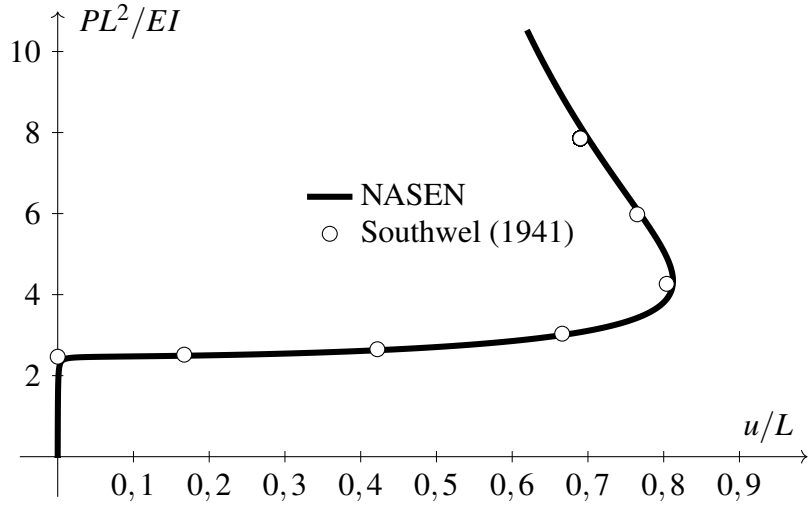

Figura 135 – Curva carga *versus* deslocamento para pilar sujeita a uma carga de compressão

Nota-se que a solução numérica apresenta um ponto de bifurcação, onde ocorre uma mudança brusca na trajetória de equilíbrio da estrutura. Esse fato pode ser visualizado na Figura 135, onde a solução apresenta uma pequena variação de deslocamento até atingir o ponto crítico e, a partir desse limite, a solução apresenta grandes deslocamentos associados a pequenos incrementos de cargas. Perceba-se que existe um ponto de limite de deslocamento em u/L igual a 0,8.

Adicionalmente, a análise do comportamento de um pilar sob ação de força de compressão é um problema de grande interesse prático e que demanda uma sofisticada modelagem física-matemática. Sendo assim, quando se aplica as teorias clássicas da mecânica dos sólidos, busca-se calcular as cargas críticas de flambagem de Euler. Esse tipo de análise é amplamente utilizado em diversas aplicações, contudo, essa não fornece uma solução detalhada acerca do fenômeno físico. Esse problema apresenta uma natureza não linear e necessita de um tratamento matemático específico, conforme pode ser observado anteriormente.

6.4.1.4 Pilar sob ação da carga vertical e da força axial

O exemplo a seguir consiste um pilar fixado na base inferior com a seção transversal retangular de altura 1,27 cm, área igual a 1,6129 cm^2, comprimento igual a 254 cm e o módulo de elasticidade de 207 GPa. Na Figura 136, apresenta-se o croqui e a malha numérica utilizada no problema físico.

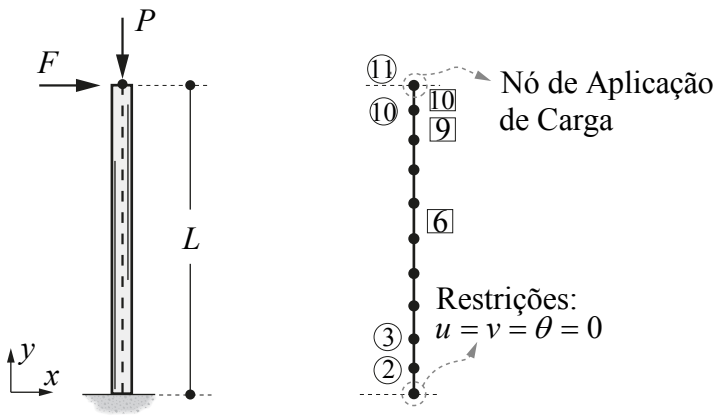

Figura 136 – Esquema do pilar com carga axial e vertical e modelo discreto de elementos finitos

Em relação aos resultados usados como referência, utilizam-se a solução exata do problema, encontrado facilmente em Timoshenko e Gere (1961), e os resultados numéricos, obtidos em Cunha (2017), por meio de uma implementação computacional via métodos dos elementos finitos. Esse problema também foi estudado com base em métodos numéricos em Carvalho (2010). Para as simulações computacionais, busca-se avaliar o comportamento do problema para diferentes razões de P/P_{cr}, visando extrair os resultados de rotação, deslocamento horizontal e vertical na extremidade livre do pilar. Inicialmente, avaliam-se os resultados obtidos para a rotação na fronteira livre da coluna.

A Tabela 20 apresenta a comparação dos resultados para os valores encontrados de rotação, bem como as medições de erro percentual em relação à solução analítica. Nota-se que as soluções numéricas apresentam semelhanças com as repostas exatas.

Tabela 20 – Valores de rotação medido na extremidade do pilar para diferentes níveis de cargas aplicadas no elemento estrutural

P/P_{cr}	**Timoshenko e Gere (1963)**^{0}	**NASEN**^{1} θ (°)	Δ_1^0 (%)	**Cunha (2017)**^{2}	Δ_2^0 (%)
1	0	0,000	–	0,000	–
1,015	20	20,026	1,30E-01	19,402	2,99E+00
1,063	40	40,105	2,62E-01	39,643	8,90E-01
1,152	60	60,017	2,75E-02	59,959	7,00E-02
1,293	80	79,808	2,40E-01	79,844	2,00E-01
1,518	100	99,896	1,04E-01	99,943	6,00E-02
1,884	120	119,873	1,06E-01	120,05	4,00E-02

A Tabela 21 visa comparar os valores de deslocamento horizontal medido a partir da base fixada. Nota-se que utilizando um parâmetro de carga inicial igual a $1 \cdot 10^{-4}$ e 50 incrementos, têm-se resultados numéricos semelhantes com Timoshenko e Gere (1961).

Tabela 21 – Valores para deslocamento horizontal medido na extremidade do pilar para diferentes níveis de cargas aplicadas no elemento estrutural

P/P_{cr}	**Timoshenko e Gere (1963)**^{0}	**NASEN**^{1} (x/L)	Δ_1^0 (%)	**Cunha (2017)**^{2}	Δ_2^0 (%)
1	1,000	1,000	5,14E-04	1,000	0,00E+00
1,015	0,970	0,970	3,04E-02	0,961	8,30E-01
1,063	0,881	0,881	2,17E-02	0,867	1,48E+00
1,152	0,741	0,741	5,04E-02	0,74	4,00E-02
1,293	0,560	0,562	3,84E-01	0,557	1,43E+00
1,518	0,349	0,351	6,97E-01	0,348	2,30E-01
1,884	0,123	0,124	1,21E+00	0,123	5,20E-01

Tabela 22 – Valores para deslocamento vertical medido na extremidade do pilar para níveis de cargas diferentes aplicadas no elemento estrutural

P/P_{cr}	**Timoshenko e Gere (1963)**^{0}	**NASEN**^{1} (y/L)	Δ_1^0 (%)	**Cunha (2017)**^{2}	Δ_2^0 (%)
1	0,000	0,000	–	0,00000	–
1,015	0,220	0,220	1,26E-01	0,23239	5,63E+00
1,063	0,422	0,423	3,21E-01	0,4434	5,07E+00
1,152	0,593	0,594	9,73E-02	0,59368	1,10E-01
1,293	0,719	0,719	5,66E-04	0,72058	2,20E-01
1,518	0,792	0,792	2,11E-02	0,79218	2,00E-02
1,884	0,803	0,803	1,11E-01	0,80325	3,00E-02

A Tabela 22 apresenta os resultados do comportamento da solução numérica para o deslocamento vertical medido a partir da base engastada do pilar. Desta maneira, os valores

obtidos pelo programa NASEN mostram-se parelhos em relação à solução analítica, apresentando baixos níveis de erro.

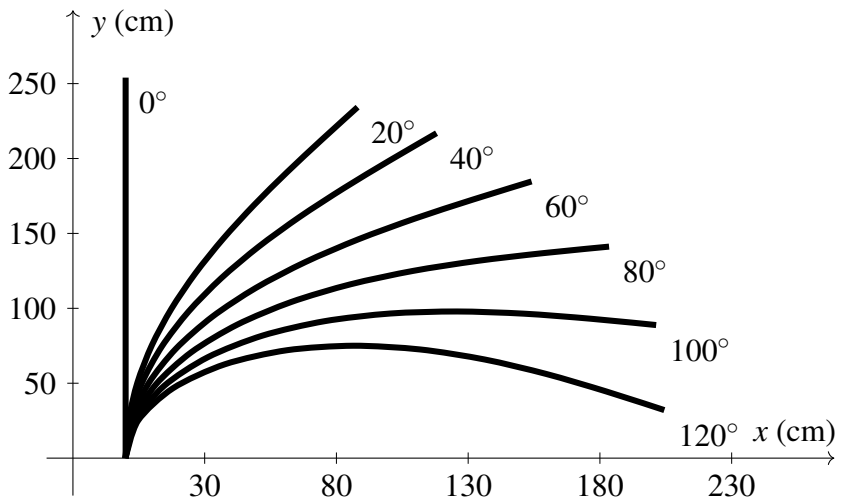

Figura 137 – Deformada do pilar para diferentes ângulos de rotação

Na Figura 137, busca-se verificar, de forma qualitativa, o comportamento deformacional do pilar para diferentes ângulos de rotação, nota-se que quão maior a carga aplicada na estrutura, maior rotação da estrutura e mais acentuada é a configuração deformada.

6.4.2 PÓRTICOS E QUADROS

Nesta seção são estudados os problemas relacionados ao comportamento não linear geométrico de pórticos e quadros planos sujeitos aos diferentes tipos de restrições de movimento e carregamentos externos aplicados. Em particular, têm-se dois exemplos de pórticos planos, em formato de L, e dois casos de quadros, em formato de losango e quadrado.

6.4.2.1 Pórtico de Lee

Dentre os problemas associados ao comportamento não linear pórticos planos, este caso é frequentemente utilizado na validação de modelos numéricos, denominado, comumente na seara científica, como Pórtico de Lee, devido o trabalho pioneiro de Lee, Manuel e Rossow (1968), que estudou e obteve solução analítica do problema. Posteriormente, outros autores realizaram análises numéricas com base nesse exemplo, como nos trabalhos de Coulter e Miller (1988), Galvão (2004), Pacoste e Eriksson (1997) e Silva (2009).

Sendo assim, o problema consiste em um pórtico plano, em formato de L, sujeito a uma carga concentrada vertical P com suas extremidades apoiadas, conforme ilustra-se na Figura 138. Adota-se uma seção transversal retangular com área igual a 6 cm^2, um momento de inércia de 2 cm^4 e um módulo de elasticidade igual a 720 kN/cm^2. Além disso, o pórtico tem comprimento igual a 120 cm e a carga é aplicada a uma distância de 96 cm do apoio superior. Em relação aos

parâmetros relacionados ao processo de solução, utilizam-se uma tolerância de 10^{-4}, um fator de carga inicial de 0,5 e um total de 600 incrementos.

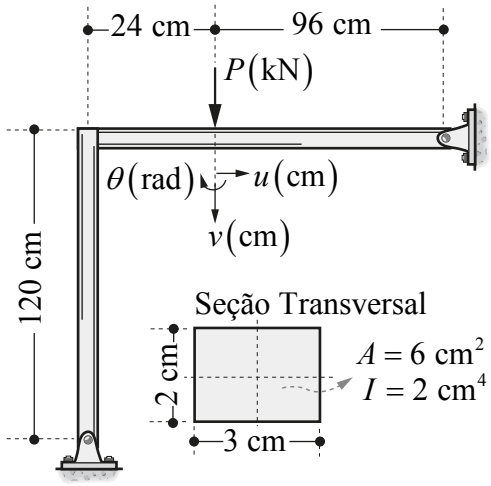

Figura 138 – Configuração e carregamentos para pórtico de Lee

Para a avaliação de desempenho do programa desenvolvido no presente trabalho, consideram-se as soluções obtidas em Schweizerhof e Wriggers (1986) e Galvão (2000). A partir disto, a Figura 139 apresenta a trajetória de equilíbrio em relação ao deslocamento horizontal, medido no ponto de aplicação da carga concentrada.

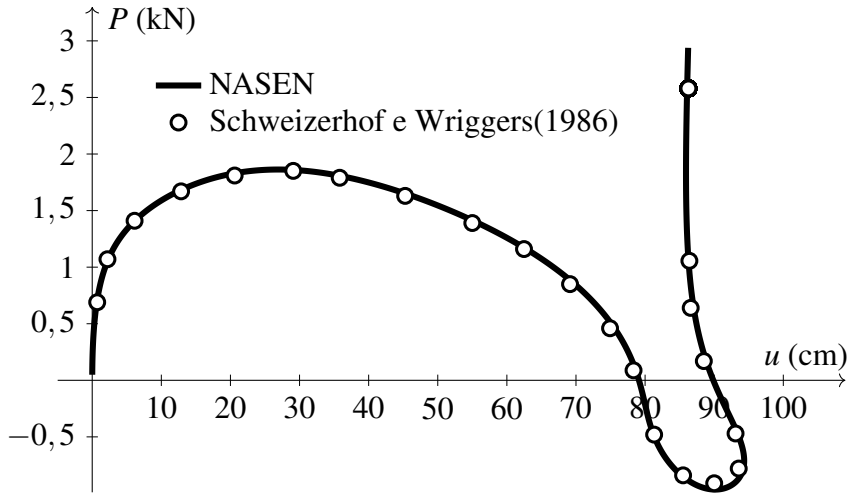

Figura 139 – Trajetória de equilíbrio para pórtico de Lee associada ao deslocamento u

A Figura 140 apresenta a avaliação do comportamento do caminho de equilíbrio para o deslocamento vertical em comparação com as medições numéricos obtidos em Schweizerhof e Wriggers (1986) e Galvão (2000). Os resultados obtidos, por meio do programa NASEN, apresentam uma verossimilhança com os resultados de Schweizerhof e Wriggers (1986).

Para realizar uma avaliação quantitativa dos pontos críticos contidos no caminho de equilíbrio do deslocamento vertical, a Tabela 23 apresenta os pontos críticos comparados com os valores numéricos obtidos no trabalho Galvão (2000). Sendo que os pontos A e D representam

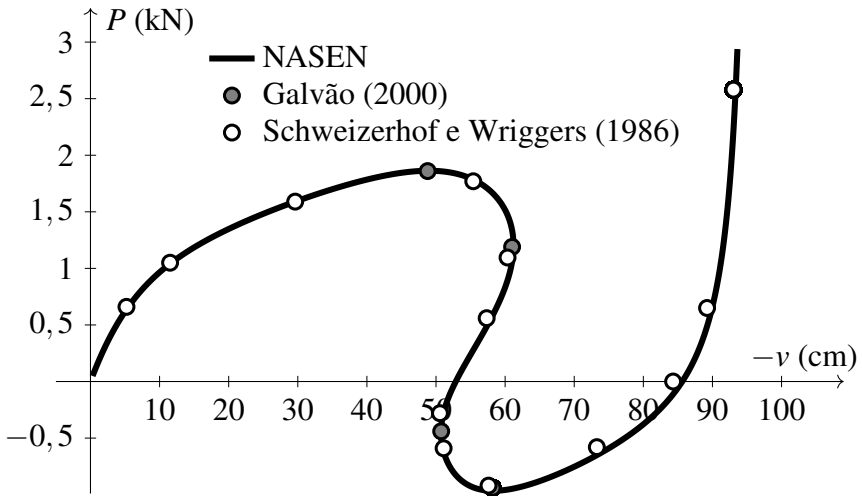

Figura 140 – Trajetória de equilíbrio para pórtico de Lee associada ao deslocamento v

os pontos limites de carga e os pontos B e C são os pontos limites de deslocamento. É possível verificar a boa semelhança entre os valores numéricos obtidos com o programa NASEN.

Tabela 23 – Valores limites de carga e deslocamento vertical

Pontos Limites	**Curva Carga-Deslocamento**			
	Galvão (2000)		NASEN	
A	1,86	48,79	1,8629	48,8514
B	1,19	61,01	1,1945	61,2081
C	-0,44	50,75	-0,4531	50,7307
D	-0,94	58,19	-0,9656	58,2071

Por fim, analisa-se comportamento da rotação, também medido no ponto de aplicação da carga. A curva carga-rotação, ilustrada na Figura 141, mostra a boa concordância dos resultados obtidos pelo programa NASEN quando comparados com dados extraídos em Galvão (2000).

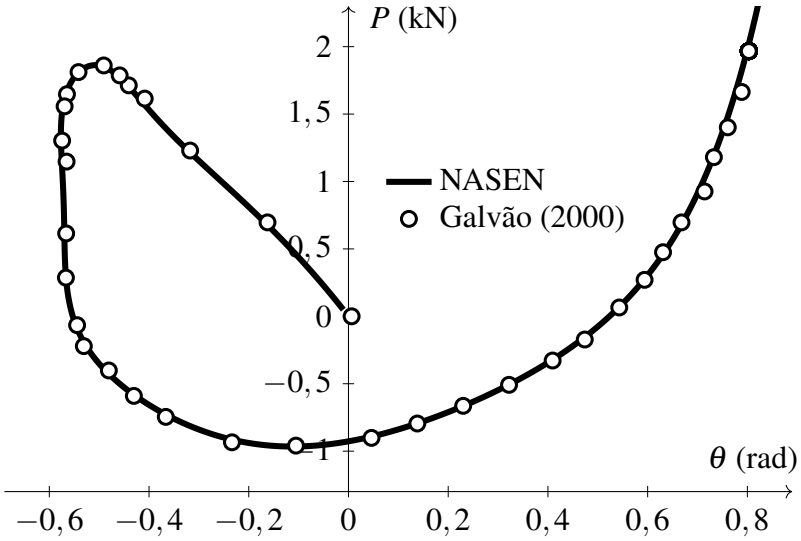

Figura 141 – Trajetória de equilíbrio para pórtico de Lee para a rotação θ

A partir dos resultados apresentados nas Figuras 139-141, pode-se observar, primeiramente, o comportamento numérico coerente do programa NASEN em relação aos resultados previstos na literatura. Além disso, por conta da forte não linearidade do problema, existem diversos pontos limites de carga e deslocamento ao longo da trajetória de equilíbrio do pórtico de Lee.

6.4.2.2 Pórtico de Roorda adaptado

Análise, numericamente, por meio dos procedimentos de elementos finitos, o pórtico Roorda adaptado, inicialmente estudado por Roorda (1965). O exemplo é apresentado por Fujii, Choong e Gong (1992), onde foi feito uma adaptação do pórtico de Roorda, realizando alterações nas condições de contorno e nos carregamentos externos, conforme ilustrado na Figura 142. Em relação às condições de contorno, adiciona-se um apoio de primeiro gênero na extremidade superior direita e, na extremidade inferir, considera-se um apoio de segundo gênero. Em relação ao carregamento do pórtico, aplica-se uma pequena perturbação localizada no apoio da barra horizontal com valor em torno de 10% da carga P.

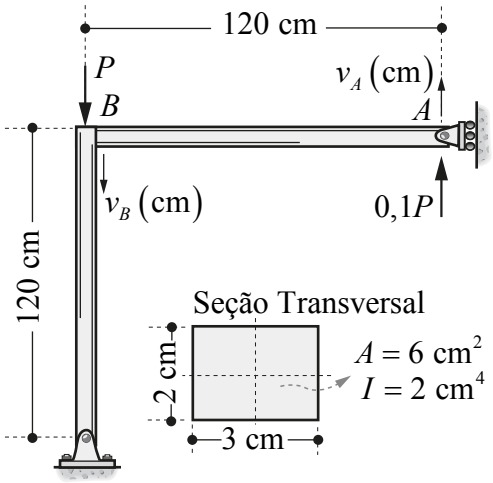

Figura 142 – Pórtico de Roorda adaptado

Em termos das propriedades físicas e geométricas, adota-se um momento de inércia de 2 cm^4, um módulo de elasticidade com valor de 720 kN/cm^2 e uma seção transversal retangular com área igual a 6 cm^2. As barras que constituem o pórtico plano apresentam dimensões iguais a 120 cm. Em relação aos parâmetros de entrada para execução do processo incremental-iterativo, utilizam-se uma tolerância igual a 10^{-5}, um fator de carga inicial de 0,01 e 5 iterações desejadas. Os pontos de avaliação dos resultados são as extremidades A e B da estrutura, visando extrair os deslocamentos verticais em cada ponto.

Na Figura 143, apresenta-se o caminho de equilíbrio do ponto A e a comparação entre os resultados do programa NASEN e os dados numéricos obtidos em Oliveira (2016), podendo observar um bom ajuste entre as soluções numéricas.

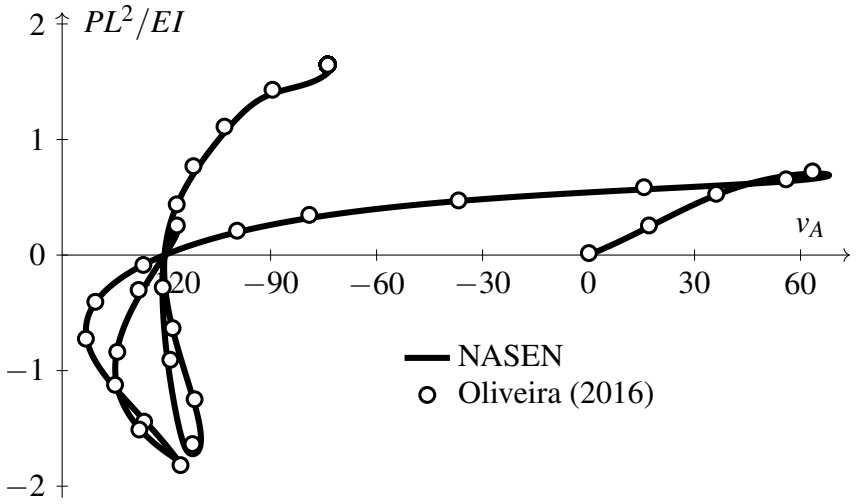

Figura 143 – Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical v_A medido na extremidade direita da viga do pórtico de Roorda adaptado

Na Figura 144, apresenta-se os resultados da extremidade B do pórtico, onde está localizada a carga concentrada P. Novamente, os resultados são comparados com os dados numéricos encontrados no trabalho de Oliveira (2016), onde é possível verificar um comportamento semelhante entre as curvas. Vale ressaltar que os caminhos de equilíbrio, mostrados anteriores, apresentam inúmeros pontos limites de deslocamento e carga, evidenciando a forte natureza não linear do problema.

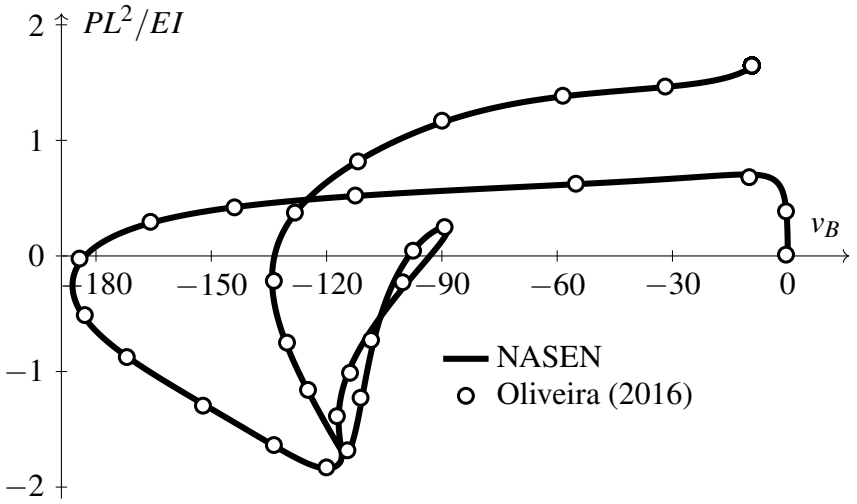

Figura 144 – Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical v_B medido na extremidade esquerda da viga do pórtico de Roorda adaptado

A partir dos resultados e das investigações realizadas visando analisar o comportamento não linear do pórtico de Roorda adaptado e do pórtico de Lee, apresentado no item 6.4.2.1, é possível avaliar o quão sensível são os problemas não lineares, uma vez que com poucas alterações em uma sistema estrutural, tem-se uma mudança expressiva na trajetória de equilíbrio das estruturas.

6.4.2.3 *Quadro em losango quadrado fixada por pinos*

Um quadro, em formato de losango, com todas as suas arestas iguais e de comprimento L, é analisada numericamente com o módulo específico para análise não linear de estruturas do programa NASEN. O sistema está submetida a uma força concentrada vertical localizada no vértice superior e inferior da peça. O problema proposto apresenta duas configurações físicas relacionadas à natureza das cargas aplicadas na estrutura, conforme apresenta a Figura 145.

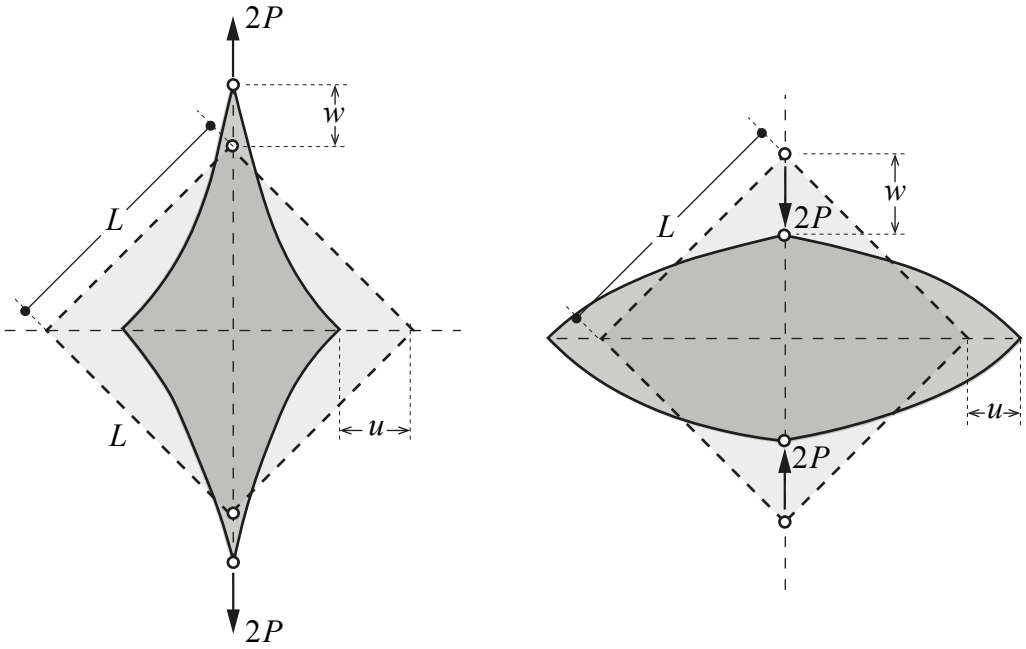

Figura 145 – Quadro, em formato de losango quadrado, sob força de tração e de compressão

As dimensões da seção transversal retangular são iguais a $1\times0{,}1$ m, o comprimento das arestas do losango é igual a 10 m e o módulo de elasticidade é de $1{,}2\cdot10^5$ kPa. Além disso, a tolerância é igual a 10^{-5}, o fator de carga inicial é de 0,01 e utilizam-se 5 iterações desejadas.

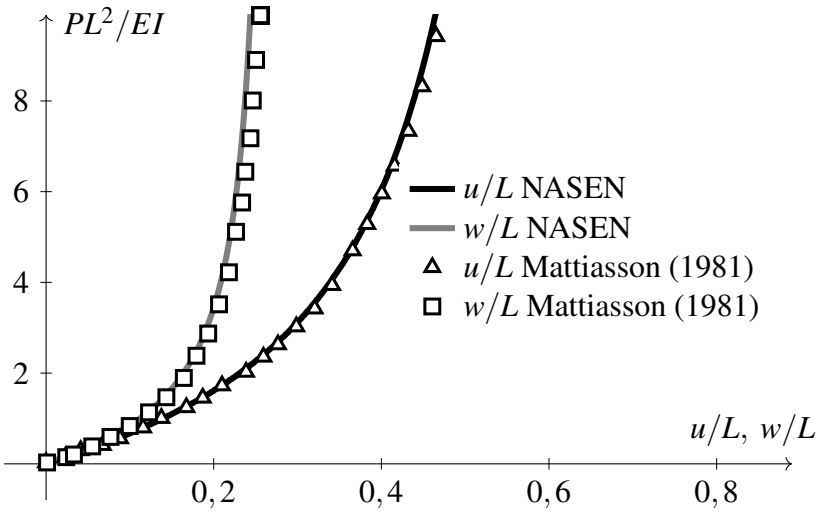

Figura 146 – Curva carga×deslocamento para quadro, em forma de losango, sob força de tração

Em ambos os casos, buscam-se avaliar os deslocamentos w e u presentes na estrutura (ver Figura 145) e a solução de referência empregada é obtida em Mattiasson (1981). Na Figura 146, apresenta-se as curvas dos deslocamentos adimensionais para a configuração da estrutura sob ação da força de tração. É possível observar a boa concordância entre os resultados obtidos pelo programa desenvolvido no presente trabalho e a literatura. Veja também que para essa configuração simulada, a solução não apresenta pontos críticos.

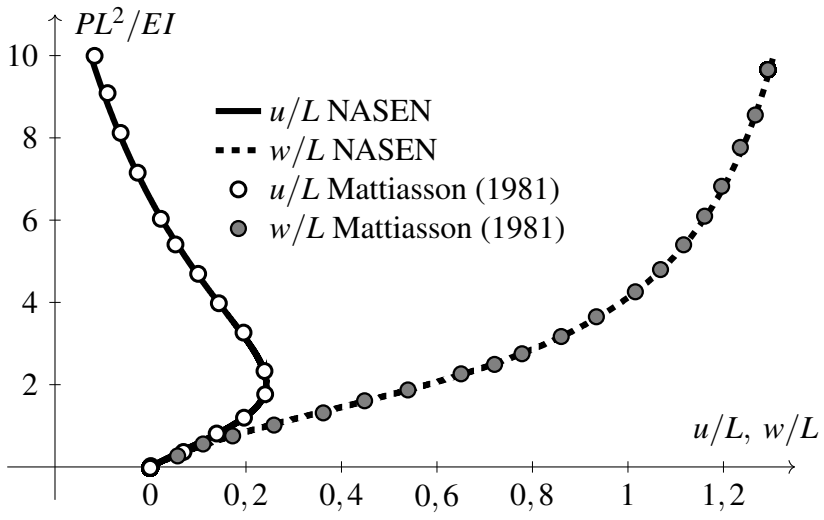

Figura 147 – Curva carga×deslocamento para quadro, em forma de losango, sob força de compressão

Em contrapartida, quando avalia-se o caso do quadro, em forma de losango, sujeito a uma força de compressão, conforme mostrado na Figura 147, surge um ponto limite de deslocamento próximo ao valor de 0,2 associado ao deslocamento horizontal. Quando analisa-se o desempenho do programa NASEN, nota-se, novamente, uma boa aderência em relação aos resultados obtidos com a solução de referência.

6.4.2.4 Quadro com articulação rígida quadrado

Este caso teste é constituído por um quadro quadrado submetido a uma força vertical aplicada na linha média da borda superior e inferior. Analogamente ao exemplo anterior, estuda-se duas configurações do problema físico relativas à natureza das cargas externas aplicadas: (i) força de tração e (ii) força de compressão, ambas iguais a $2P$, conforme exemplificado no esquema da Figura 148.

Os parâmetros físicos e geométricos iniciais utilizados nas simulações computacionais são mantidos iguais ao caso do quadro em formato de losango, conforme apresentado no item 6.4.2.3. Para validação dos resultados obtidos com o programa NASEN, em ambos os casos, utilizam-se, novamente, os dados obtidos na obra de Mattiasson (1981).

A primeira configuração trata-se de um quadro quadrado tracionado, por causa da simetria do problema físico, pode-se utilizar um modelo estrutural simplificado, garantido as corretas

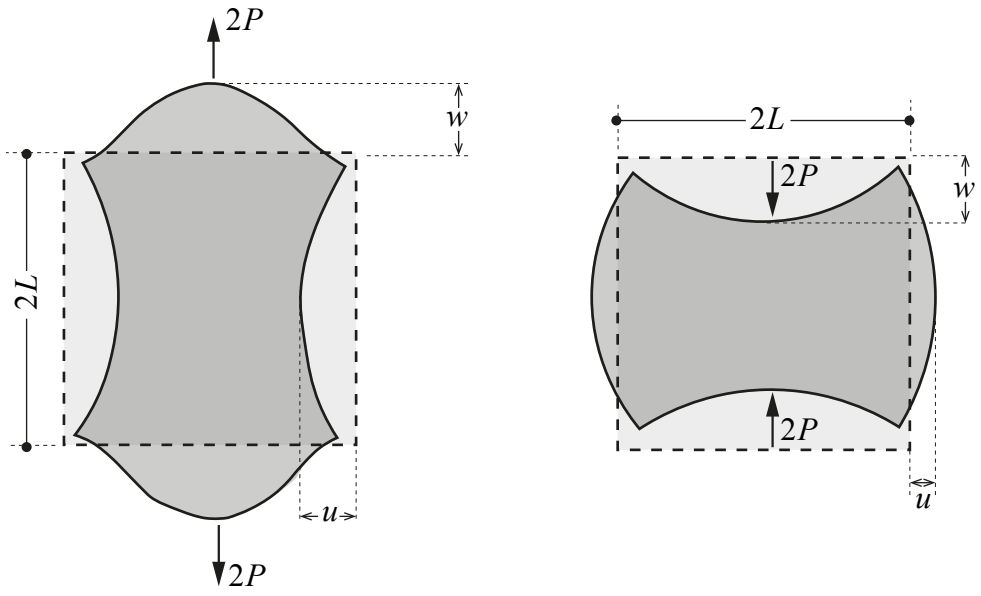

Figura 148 – Esquema e característica do quadro, em forma de quadrado, sujeito a uma força de tração e de compressão

imposições das condições de contorno. A Figura 149 apresenta os valores numéricos obtidos para os deslocamentos u e w, onde pode facilmente verificar o comportamento parelho com a solução de referência.

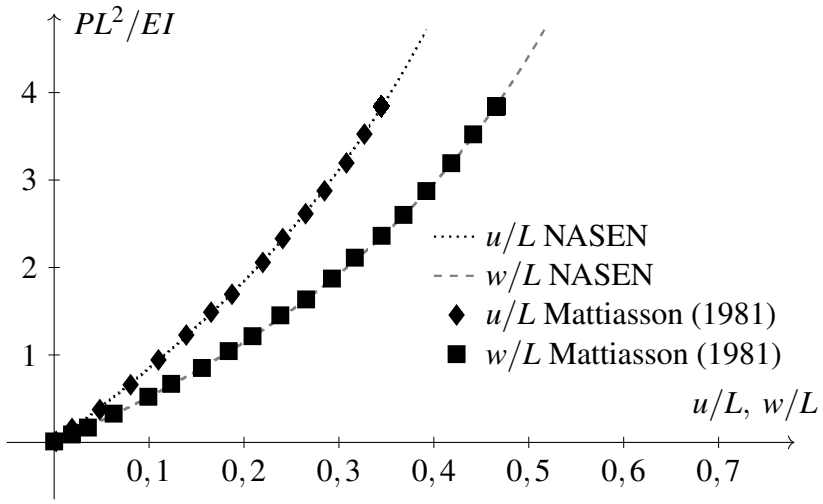

Figura 149 – Curva carga×deslocamento para quadro, em forma de quadrado, sujeito a uma força de tração na aresta média superior e inferior

Na segunda configuração, o quadro, em formato quadrado, está submetido a uma força de compressão aplicada ao longo da linha média da extremidade superior e inferior. Os resultados são apresentados na Figura 150, onde pode-se verificar a semelhança entre os valores obtidos pelo programa computacional NASEN e a solução de referência.

A partir dos resultados apresentados acerca do comportamento não linear das estruturas, conforme mostrados nas Figuras 149 e 150, pode-se observar a sensibilidade do quadro, em

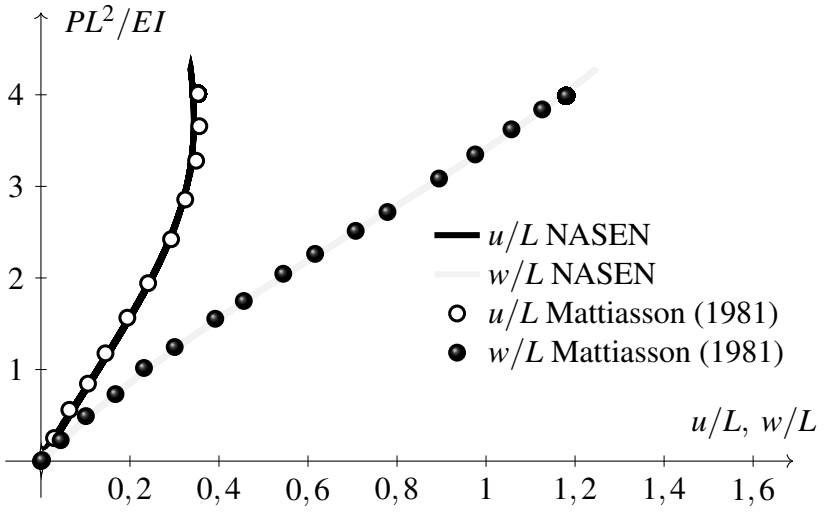

Figura 150 – Curva carga×deslocamento para quadro, em forma de quadrado, sob força de compressão na aresta média superior e inferior

formato quadrado, para cada configuração de carregamento (tração e compressão). Além disso, em linhas gerais, o programa computacional desenvolvido NASEN apresentou resultados satisfatórios, prevendo adequadamente o comportamento físico de cada problema estudado.

6.4.3 ARCOS ESBELTOS PLANOS

Esta seção é direcionada para a análise numérica de dois exemplos de aplicação associados aos comportamentos não lineares geométricos de arcos esbeltos planos, visando investigar, em específico, um arco abatido e um semicircular, ambos submetidos a uma condição de carregamento simétrico.

6.4.3.1 Arco raso com carga centrada

Estuda-se um exemplo de aplicação representativo de um arco circular raso (ou abatido) rotulado em ambas as extremidades sujeito a um carregamento concentrado aplicado no centro da estrutura, conforme ilustrado na Figura 151. Problemas com essas características são frequentemente objetos de análises em pesquisas científicas, como visto detalhadamente nas obras de Yang e Kuo (1994), Maximiano (2012) e Silva (2016).

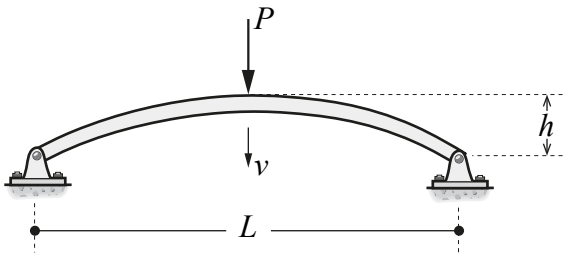

Figura 151 – Características da geometria e das condições de contorno do arco raso com carga centrada

A estrutura foi discretizada com 14 elementos unidimensionais, totalizando 15 nós. Além disso, o primeiro incremento de carga é igual a 0,5. Em relação aos parâmetros iniciais físicos e geométricos do modelo computacional, a tolerância é 10^{-5}, a seção transversal e o momento de inércia são unitários, o comprimento é igual a 100 cm e a altura é tomada igual a 10% do valor do comprimento do arco.

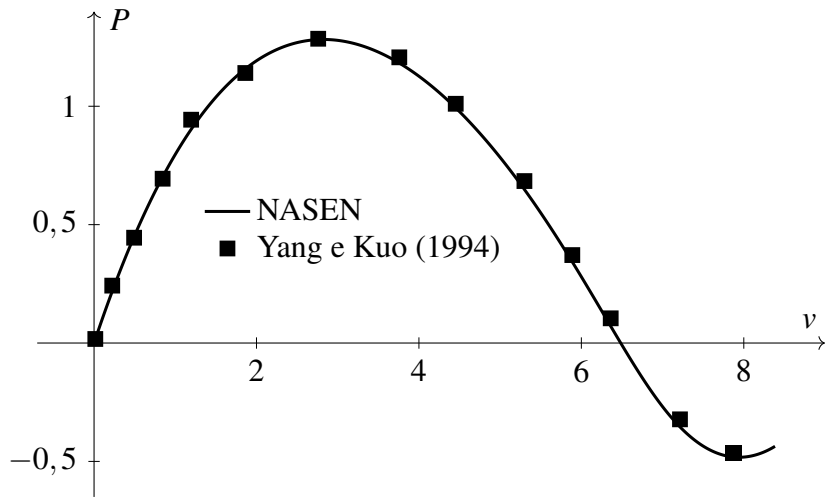

Figura 152 – Trajetórias de equilíbrio para arco raso com carga centrada

O ponto de análise é localizado no centro do arco, onde se busca avaliar a evolução do deslocamento vertical em função do aumento de carga. Na Figura 152, apresenta-se um trecho da trajetória de equilíbrio da estrutura, sendo possível verificar facilmente os pontos limites de carga. Nota-se que a solução numérica obtida pelo programa NASEN apresenta um comportamento satisfatório em relação os dados numéricos obtidos em Yang e Kuo (1994). Para verificar o comportamento do arco abatido submetido aos diferentes níveis de carga, a Figura 153 apresenta a deformada do arco em função do aumento dos incrementos de carga.

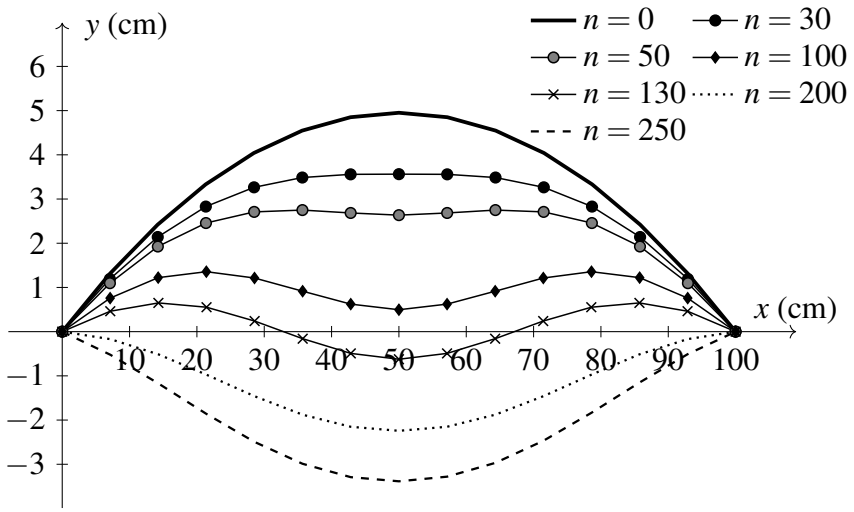

Figura 153 – Configuração deformada do arco raso com carga centrada

6.4.3.2 *Arco semicircular com carga simétrica*

O exemplo estudado consiste em um arco circular sujeito a uma carga centrada, ou seja, nessas configurações trata-se de um sistema estrutural perfeito, conforme ilustrado na Figura 154. Os elementos estruturais do tipo arco são estruturas que apresentam fortes não linearidades e comportamentos complexos que despertam grande interesse da comunidade científica, por exemplo, o fenômeno do *looping*. Sendo assim, podem-se destacar alguns trabalhos acerca do tema, como Yang e Kuo (1994), Paraski (2012), Maximiano, Silva e Silveira (2014) e Oliveira (2016).

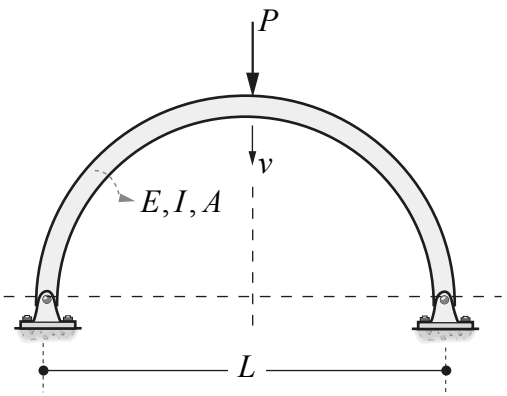

Figura 154 – Arco semicircular circular com carga centrada

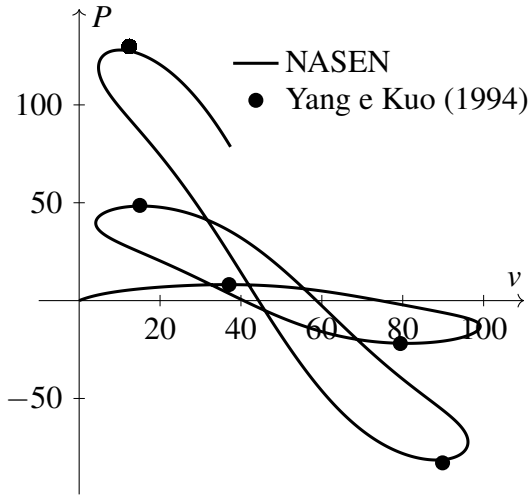

Figura 155 – Curva carga×deslocamento vertical para arco semicircular sujeita a uma carga centrada

As propriedades físicas e geométricas utilizadas na simulação computacional do caso teste são, primeiramente, o diâmetro do semicírculo igual a 100 cm, o momento de inércia é unitário, a seção transversal com área igual a 10 cm^2, a base e altura iguais a $\sqrt{30}/60$ e $2\sqrt{20}$, e por fim, o módulo de elasticidade é tomado igual a 2000 kN/cm^2. Utiliza-se a simetria do arco semicircular, impondo as adequadas condições de suporte no modelo simplificado. A malha computacional utilizada no modelo numérico é constituída por 25 elementos unidimensionais de três graus de liberdade por nó.

Em relação aos parâmetros preliminares de entrada do processo incremental-iterativo, adota-se uma tolerância de 10^{-5} e um incremento de carga inicial de $5{\cdot}10^{-3}$. Em relação às condições de vinculação, utiliza-se, em cada extremidade do arco semicircular, um suporte do segundo gênero, ou seja, são restringidos os deslocamentos axiais e verticais, permitindo somente a rotação nesses pontos.

A Figura 155 apresenta o caminho de equilíbrio da estrutura e os pontos limites de carga obtidos na literatura, vide Yang e Kuo (1994). Note que os resultados numéricos obtidos pelo programa NASEN quando comparados com a solução de referência, exibem um comportamento assertivo. Como pode-se observar, o caminho de equilíbrio do arco semicircular apresenta

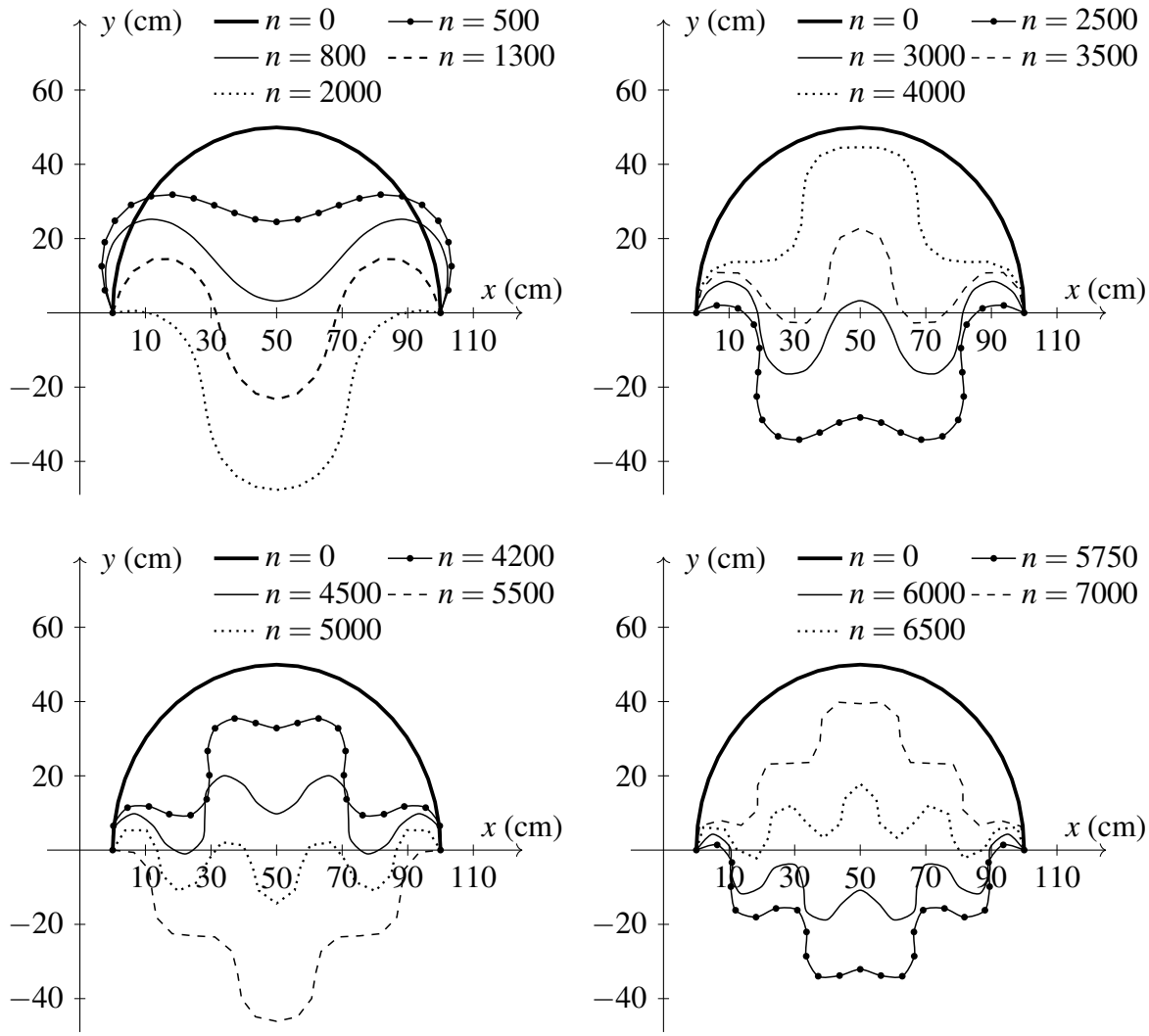

Figura 156 – Configuração deformada do arco semicircular com carga simétrica para diferentes incrementos de carga

inúmeros pontos limites de deslocamento e carga, comprovando a forte natureza não linear desse problema físico. Adicionalmente, a Figura 156 mostra inúmeras configurações deformadas para diferentes níveis de incremento de carga.

7

MODELO TERMOESTRUTURAL SIMPLIFICADO

Neste capítulo, inicialmente, apresenta-se uma contextualização e uma breve revisão de bibliográfica acerca das pesquisas produzidas relacionadas com o desenvolvimento computacional de programas para avaliação do comportamento de estruturas sob elevadas temperaturas. Posteriormente, exibem-se os fundamentos gerais da análise termomecânica, incluindo a formulação de elementos finitos para pórtico plano e o tratamento dos efeitos de engastamento por conta da variação de temperatura. Realiza-se, no fim, experimentações numéricas direcionadas pelos exemplos testes de aplicação relacionados aos elementos estruturais de aço e/ou concreto.

7.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A análise computacional de estruturas sob ação de elevadas temperaturas é uma área de pesquisa que apresenta uma modelagem física-matemática complexa e desafiadora, exigindo um conhecimento avançado dos fundamentos teóricos da dinâmica de fluidos, da transferência de calor, da mecânica dos sólidos e de métodos numéricos.

Dentre as aplicações práticas na engenharia associadas aos problemas dessa natureza, o estudo de estruturas de aço, concreto, mistas e madeira, em condições de incêndio, destaca-se em razão da vasta utilização desses materiais no decorrer da concepção de projetos na construção civil e áreas afins. Sendo assim, o conhecimento assertivo da resposta térmica e estrutural sob ação do fogo é essencial para satisfazer os critérios mínimo de resistência e segurança da estrutura.

Em modo geral, a análise estrutural em situação de incêndio visa verificar o comportamento físico de um sistema estrutural submetido aos diferentes tipos de solicitações externas e ações de origem térmica. A resposta do sistema é construída com base na obtenção das tensões, deformações e deslocamentos em frente a presença dos efeitos de dilatação térmica e da degradação das propriedades térmicas e mecânicas dos materiais em consequência ao aumento de temperatura nos elementos estruturais devido à exposição ao fogo.

Neste cenário, a análise do problema termomecânico em incêndio é simulada computacionalmente pelo módulo específico do programa desenvolvido na presente pesquisa, denominado como NASEN/TSA-FIRE (*Numerical Analysis System for Engineering/Thermal-Structural Analysis-Fire*). As hipóteses simplificadoras e as principais sentenças da formulação física-

matemática utilizada na construção do modelo computacional são apresentadas em detalhes nas seções seguintes.

7.2 REVISÃO DE LITERATURA

Constantemente, no meio científico, são desenvolvidos modelos analíticos, numéricos e experimentais, que possibilitam realizar investigações acerca do comportamento físico do sistema estrutural e dos materiais submetidos às altas temperaturas. Sendo assim, dentre as pesquisas pioneiras nessa área, Culver (1972) realizou estudos analíticos a respeito da flamblagem de pilares de aço sujeitos aos carregamentos axiais em condições de elevadas temperaturas. As cargas de flambagem são determinadas através da resolução da equação diferencial governante utilizando a técnica de diferenças finitas. São considerados diferentes casos de temperatura não uniforme ao longo do comprimento do membro e assume-se que a temperatura era considerada constante ao nível da seção transversal dos perfis metálicos. Em adicional, para computar a rigidez flexional de cada ponto de integração, as curvas bilineares de tensão-deformação propostas por Brockenbrough (1970) foram adotadas no decorrer do processo de solução do problema.

Ossenbruggen, Aggarwal e Culver (1973) apresentaram um estudo analítico do comportamento de colunas de aço carregadas axialmente sujeitas aos gradientes térmicos na seção transversal do membro. A influência da tensão residual, da tensão de origem térmica e da alteração nas propriedades do material a temperatura elevada foram consideradas. As relações momento-carga-curvatura-temperatura e um método de integração numérica são usados para determinar a deflexão da coluna. Ao fim, os resultados indicam que a curvatura produzida pelos gradientes térmicos tem um efeito significativo na resistência final da barra.

Cheng e Mak (1975) desenvolveram um programa computacional visando investigar os efeitos da fluência do aço no comportamento de estruturas planas em situação de incêndio. Com base em um conjunto de curvas de temperatura-tempo adotadas para os membros estruturais e na relação empírica de tensão-deformação disponível do aço estrutural sob elevadas temperaturas, o problema não linear é resolvido numericamente pelo método de elementos finitos. Além disso, a temperatura na seção transversal permanece constante. As soluções numéricas de uma série de estruturas são comparadas com os resultados dos testes experimentais de incêndio disponíveis. Posteriormente, Cheng (1983) expandiu a pesquisa de Cheng e Mak (1975), incluindo os efeitos de endurecimento isotrópico do aço, onde foram concluídos importantes aspectos acerca da presença significativa dos efeitos da fluência e premissas acerca do desenvolvimento de fórmulas simplificadas para a segurança de estruturas em condição de incêndio.

Furumura e Shinohara (1978) elaboraram um modelo inelástico com base no método de elementos finitos para estudar o comportamento de vigas e pórticos expostos à ação do incêndio, levando em consideração os efeitos da fluência do aço, a relação elasto-plástica e as

mudanças das propriedades térmicas e mecânicas em função da temperatura. Um procedimento de análise térmica foi utilizado para determinar a distribuição de temperatura na seção transversal constituída por perfis metálicos com proteção térmica. Os resultados enfatizam a importância da deformação por fluência em estruturas de aço e a necessidade da consideração da fase de resfriamento no modelo numérico.

Na pesquisa de Jain e Rao (1983), uma técnica numérica foi desenvolvida utilizando um esquema implícito de marcha no tempo para estudar o histórico de deformações das estruturas de aço em situação de incêndio, considerando a mudança nas propriedades do material devido o aumento da temperatura, os efeitos de fluência do aço e de grandes deformações. Um programa de computador foi desenvolvido para a análise de pórticos planos com base em um algoritmo utilizando os procedimentos incrementais e iterativos. Com base em tal estudo, foi possível prever o período de tempo pelo qual a estrutura pode desempenhar sua função sem falha local ou geral.

Dotreppe e Franssen (1985) e Franssen (1987) desenvolveram um modelo computacional fundamentado no método de elementos finitos para a análise de pórticos planos mistos de aço e concreto sob condições de elevadas temperaturas. O programa denominado CEFICOOS (*Computer Engineering of the Fire design of Composite and Steel Structures*) é a ferramenta computacional pioneira na análise de estruturas em condição de incêndio nas pesquisas desenvolvidas na Universidade de Liège, Bélgica. O código foi utilizado em inúmeros trabalhos, por exemplo, em Franssen, Cooke e Latham (1995), Franssen e Dotreppe (1992), Schleich, Dotreppe e Franssen (1986) e Huber e Aste (2005). Posteriormente, Franssen (1997) realizou uma expansão e aperfeiçoamento dos procedimentos de análise, originando o programa SAFIR, onde foram implementados diferentes tipos de elementos finitos, modelos constitutivos, elementos tridimensionais, dentre outros aspectos (FRANSSEN; GERNAY, 2017; FRANSSEN, 2005). Tal ferramenta foi utilizada em diversas pesquisas acerca do comportamento de estruturas em condição de incêndio e na calibragem dos resultados provenientes de análises numéricas, como pode ser visto em detalhes em Vassart et al. (2004), Lim et al. (2004) Caldas, Fakury e Sousa Jr. (2014), Landesmann (2012) e Ni e Birely (2018).

Em Najjar (1994) apresentou uma revisão de literatura consistente acerca das pesquisas bibliográficas, com caráter numérico, sobre o comportamento de vigas, colunas e pórticos de aço. Neste trabalho foi desenvolvido o programa 3DFIRE para análise de estruturas aporticadas em situação de incêndio (NAJJAR; BURGESS, 1996). O programa apresenta um elemento de viga formado por dois nós com oito graus de liberdade por nó, sendo utilizadas as funções cubicas de interpolação. A solução de elementos finitos do problema foi obtida usando um procedimento incremental-iterativo com base no método de Newton-Raphson adaptado, levando em consideração os efeitos de elevadas temperaturas. Na formulação de elementos finitos são adotadas as tensões residuais e a não linearidade geométrica e física. A deformação devido ao cisalhamento não é considerada no modelo.

Wang e Moore (1995) desenvolveram um programa de computador de elementos finitos que estuda o comportamento mecânico de estruturas de aço e concreto em situação de incêndio. A distribuição de temperatura uniforme e não uniforme podem ser incluídas no programa. Em relação às características do programa, são consideradas as ligações semirrígidas, os efeitos de segunda ordem, as tensões residuais e as deflexões iniciais. As relações de tensão-deformação do material são baseadas nos trabalhos de Wainmai e Kirby (1982), Saab e Nethercot (1991), Anderberg (1976) e nas normas europeias. São fornecidos exemplos para validar as suposições feitas no programa e também para descrever o comportamento de vários membros estruturais, em particular estruturas de aço em temperaturas elevadas.

Liu e Morris (1994) e Liu (1996) desenvolveram um sistema computacional avançado destinado ao estudo de ligações em condição de incêndio. Em relação às características do programa, destaca-se, a biblioteca contendo elementos de viga, casca, sólido e contato. Os elementos de viga são lineares e elásticos, enquanto, os elementos sólidos permitem considerar a não linearidade física do aço e do concreto. Além disso, o usuário tem a opção de escolher uma série de combinações acerca das estratégias de solução do problema. Alguns trabalhos utilizam tal programa para realizar as simulações numéricas, como pode ser visto em Leston-Jones (1997) e Al-Jabri et al. (1998).

Souza Júnior (1998) desenvolveu um programa para análise de pórticos planos com base em uma formulação fundamentada no método dos elementos finitos. O modelo computacional leva em consideração a não linearidade geométrica e física, os grandes deslocamentos, as pequenas deformações elásticas, as rotações moderadas e a distribuição de temperatura é uniforme ao nível da seção transversal e ao longo do comprimento do elemento. Posteriormente, Souza Junior (2004) apresenta um modelo numérico para a análise tridimensional de estruturas de aço em condição de incêndio. O modelo apresenta, como principais características, o conceito de rótula plástica generalizada, o módulo tangente, a degradação progressiva da rigidez e o aquecimento uniforme na seção transversal. O autor concluiu que o procedimento proposto pode ser aplicado alternativamente na análise tridimensional de estruturas sob ação do incêndio, associado ao baixo custo computacional e boa precisão dos resultados.

No trabalho desenvolvido no Imperial College, Londres, Izzuddin (1990) iniciou o desenvolvimento do programa ADAPTIC, destinado ao comportamento não linear dinâmico de estruturas de aço em temperatura ambiente. A partir das pesquisas de Song et al. (2000) e Izzuddin et al. (2000), foram considerados os efeitos térmicos provenientes da exposição ao fogo, propondo um novo método para a análise não linear de estruturas de aço em condição de carga de incêndio e de explosão. O método proposto inclui a análise não linear convencional, na medida em que pode ser aplicado aos dois casos de carga de incêndio e de explosão isoladamente, e mais significativamente dentro da mesma análise. A abordagem integrada resultante pode, portanto, ser utilizada para estudar o comportamento de membros e estruturas de aço sujeitas ao cenário de carga de explosão seguido por um incêndio, permitindo efetivamente avaliar a influência da

explosão na resistência ao fogo.

Landesmann (2003) desenvolveu o programa computacional PNL-F (Pórtico Não-Linear sob Fogo) para análise não linear elastoplástica de estruturas planas aporticadas de aço sob ação de incêndio. Primeiramente, a análise térmica é conduzida por um modelo térmico unidimensional transiente com base no método de elementos finitos, visando realizar a predição de temperatura em perfis metálicos do tipo I ou H. A análise estrutural é fundamentada nos conceitos do método de plasticidade concentrada, tendo como base o modelo refinado de rótulas plásticas, módulos tangentes, funções de estabilidade e superfícies inelásticas de redução de resistência, possibilitando realizar estimativas do tempo crítico de resistência ao fogo associado à formação de mecanismos de colapso estrutural. Os casos estudados são constituídos por elementos de viga e coluna isolados, bem como a análise de pórticos e edifícios em condição de incêndio. Landesmann, Batista e Alves (2005) revisou o programa desenvolvido, denominando como SAAFE (*System for Advanced Analysis for Fire Engineering*). Em Landesmann e Batista (2005) e Landesmann e Mouço (2007) apresentam aplicações e investigações do comportamento de estruturas de aço expostas ao fogo com base do modelo computacional desenvolvido no trabalho de Landesmann (2003).

Iu (2004) e Iu e Chan (2004) desenvolveram uma formulação para a análise de estruturas de aço em situação de incêndio via elementos finitos, tendo como base os princípios do método da rótula plástica (MRP) ou usualmente denominado como método de análise com plasticidade concentrada. O método de Newton-Raphson foi empregado para a solução das equações não lineares. Nas análises, os efeitos da não linearidade geométrica e física, e o encruamento do aço são considerados. A degradação da resistência do material com o aumento da temperatura é simulada por um conjunto de curvas temperatura-tensão-deformação de acordo com ECCS e BS 5950:1990. São considerados os efeitos da distribuição de temperatura uniforme ou não uniforme na seção do membro de aço estrutural. Em adicional, esse programa possibilita a análise na fase de resfriamento da estrutura. Posteriormente, Iu, Chan e Zha (2007) desenvolveu um modelo que possibilita, na formulação do material, a interação entre os efeitos axiais e de flexão sob altas temperaturas, fundamentado no método das rótulas plásticas. Para permitir o efeito da ação da catenária, a expansão térmica axial é considerada nas equações de restrição axial. Os autores afirmam que a inserção do elemento de mola no modelo computacional é importante na incorporação da resistência residual.

Na pesquisa de Mouço (2008), buscou elaborar uma ferramenta computacional avançada para a análise inelástica de estruturas aporticadas planas de aço e mistas de aço e concreto em condição de incêndio. A análise térmica, realizada pelo programa TERMO2D, é direcionada com base no método dos elementos finitos, onde possibilita estimar o campo de temperatura não uniforme ao nível da seção transversal dos elementos estruturais. Em modo geral, a análise estrutural apresenta características semelhantes às premissas empregadas no trabalho de Landesmann (2003). Sendo assim, o comportamento estrutural inelástico é simulado até

o colapso por um modelo com formulação co-rotacional e grandes deslocamentos, baseado no método das funções de estabilidade e nos princípios de plasticidade concentrada. Para modelagem da redução da rigidez flexional, considera-se o módulo de elasticidade tangente e o método das rótulas plásticas refinadas.

Caldas (2008) realizou uma implementação de modelos numéricos não lineares associados ao comportamento térmico e mecânico de estruturas de aço, concreto e mistas de aço e concreto em condição de incêndio. Em relação à análise térmica, determina-se a distribuição de temperatura bidimensional com base nos métodos das diferenças finitas e dos elementos finitos. Além disso, ao nível da seção transversal, aplica-se um novo procedimento para obtenção de diagramas de interação de esforços. Em relação à análise estrutural, desenvolveu vários modelos mecânicos para simulação o comportamento de estruturas em situação de incêndio. Sendo assim, foram implementados e testados um elemento de viga tridimensional, um elemento de casca composto por camadas, com um modelo constitutivo de dano, e por fim, um elemento de mola para ligações semirrígidas foi desenvolvido e acoplado aos elementos de viga. Ao fim, os resultados obtidos com os modelos mostram-se satisfatórios diante as previsões da literatura.

Liew (2008) apresentou um modelo numérico para analisar estruturas de aço sujeitas aos danos localizados causados por carga de explosão e, subsequentemente, investigar sua capacidade de resistência sob ação de incêndio. O método numérico proposto segue uma abordagem de elementos mistos para modelar estruturas em grande escala e provou ser suficientemente preciso para capturar o comportamento detalhado da instabilidade de membros e das estruturas associadas aos efeitos das altas taxas de deformação e temperatura de incêndio. Para tanto, os diagramas de interação fogo-explosão são gerados para determinar a resistência ao fogo das colunas, considerando o dano inicial causado pelas cargas de explosão. Uma estrutura de aço de vários andares foi analisada para que os efeitos complexos de interação da explosão e do incêndio possam ser entendidos e quantificados.

Ribeiro (2009) desenvolveu um sistema computacional para predição do comportamento de elementos estruturais aço e mistas de aço e concreto em condição de incêndio, com base na análise termomecânica tridimensional não linear, em regime transiente, por meio dos procedimentos de elementos finitos. O programa denominado THERSYS 2.0 utiliza os elementos bidimensionais triangulares de três e seis nós, e os elementos quadrilaterais de quatro, oito e nove nós, enquanto, para os elementos tridimensionais, foi implementado elementos tetraédricos de quatro e dez nós, e hexaédricos de oito e vinte nós. Na biblioteca de solução do programa para sistemas lineares, estão disponíveis os métodos de Gauss-Seidel, fatoração de Cholesky e dos gradientes conjugados pré-condicionado. Em adicional, são implementados no sistema três modelos de materiais: o modelo de Hencky, o modelo de von Mises e o modelo de Drucker-Prager. Os resultados numéricos foram comparados com os valores obtidos com os procedimentos normativos e com os modelos computacionais da literatura.

No trabalho de Kassimali e Garcilazo (2010) apresenta-se um procedimento para a

análise de grandes deslocamentos e da estabilidade de estruturas planas elásticas sujeitas ao aumento de temperatura. O método de análise é baseado em uma formulação euleriana, sendo incluídos os efeitos térmicos. As relações de força-deformação do elemento local são derivadas usando a teoria de viga-coluna, levando em consideração o efeito da curvatura devido ao gradiente de temperatura na seção transversal do elemento. São consideradas as mudanças nos comprimentos dos elementos por conta da deformação axial térmica e da curvatura devido ao gradiente de temperatura. A variação de temperatura é adotada linear ao longo da altura da seção. O modelo estrutural de viga-coluna, utilizando as funções de estabilidade e curvatura, requer significativamente menos quantidade de elementos para a análise de uma estrutura em comparação aos modelos de elementos finitos. A técnica de solução de Newton-Raphson é desenvolvida para determinar as respostas não lineares das estruturas. Os testes numéricos são direcionados para os casos com soluções exatas e com previsões experimentais, onde se constata os bons resultados obtidos com os procedimentos adotados.

Rocha (2011) estudou a resistência da ligação na interface entre o aço e o concreto na região de introdução de carga em pilares mistos parcialmente revestidos com concreto sob altas temperaturas. Foram identificados, por meio de um estudo teórico-experimental, realizado com os modelos de pilares mistos à compressão centrada mediantes aos testes do tipo *push-out* em temperatura ambiente e em altas temperaturas, os efeitos da aderência química entre os materiais estudados, da aderência mecânica e por atrito dos conectores de cisalhamento soldados na alma do perfil metálico, e da resistência adicional por atrito proporcionada pelo impedimento da expansão dos blocos de concreto pelas mesas do perfil na resistência da ligação. Sendo assim, foram apresentados os principais mecanismos de colapso, os padrões de fissuração dos modelos, bem como a resistência do conector e a tensão de aderência na interface entre o aço e o concreto.

Rigobello (2011) elaborou um código computacional, com base no método dos elementos finitos, para a análise termomecânica de estruturas aporticadas de aço em situação de incêndio. A formulação posicional utilizada apresenta como graus de liberdade as posições dos nós ao invés dos deslocamentos, resultando em uma descrição intrinsecamente não linear do comportamento geométrico das estruturas. O código computacional desenvolvido permite que sejam realizadas análises térmicas transientes, com base no método dos elementos finitos, visando estimar os campos de temperatura nas seções transversais dos elementos estruturais sujeitos ao fogo. Adota-se uma lei constitutiva tridimensional completa e a cinemática de Reissner, de modo que o modelo de plasticidade leva a contribuição do efeito combinado das tensões normais e cisalhantes para verificação do critério 3-D de plasticidade. A validação do programa é direcionada por casos testes da literatura, onde é possível comprovar a precisão do código computacional desenvolvido e da formulação posicional.

Em Landesmann (2011) foi realizado uma aplicação do sistema computacional SAAFE, visando realizar um análise inelástica de estruturas planas mistas de aço-concreto com ligações semirrígidas expostas ao fogo. O método adotado de solução é semelhante ao método da

rótula plástica, contudo, diverge na metodologia de implementação numérica e na precisão dos resultados. Dentre as principais características, considera-se a formulação de plasticidade concentrada refinada com superfícies de interação, o modelo de módulo tangente que inclui a perda gradual inelástica de rigidez e resistência final dos membros da coluna, a formulação de segunda ordem de grandes deslocamentos com base no conceito das funções de estabilidade, a distribuição de temperatura não homogênea na seção transversal e o modelo semirrígido de conexão. O modelo numérico proposto no trabalho permitiu uma descrição precisa da resposta não linear estrutural, apresentando um esforço computacional menor quando comparado com os resultados via MEF. Posteriormente, Landesmann (2012) aplicou novamente o programa desenvolvido para analisar elementos isolados aço e mistos, e edifícios de múltiplos andares em situação de incêndio.

Sun, Huang e Burgess (2012) realizou um procedimento estático-dinâmico robusto para ampliar a capacidade do programa VULCAN de modelar o comportamento dinâmico e estático de edifícios de aço durante o colapso progressivo local e global das estruturas em condições de incêndio. O método de integração explícito foi adotado no procedimento dinâmico. O procedimento foi validado com vários casos práticos. Também são apresentados alguns estudos preliminares dos mecanismos de colapso da estruturas de aço devido à falha das colunas expostas ao fogo.

Ahn, Lee e Park (2013) desenvolveram uma fórmula que pode ser utilizada para prever o tempo de resistência ao fogo de vigas de aço sob condição padrão de incêndio. Para tanto, os principais parâmetros relevantes para a resistência ao fogo das vigas de aço foram extraídos, primeiro, por considerações termomecânicas e, depois, classificadas como estruturais ou térmicos. A influência de cada parâmetro na resistência ao fogo foi investigada por meio de análises numéricas termomecânicas totalmente acopladas até a ocorrência da deflexão de fuga. A análise de regressão linear múltipla foi realizada para obter a fórmula de previsão para o tempo de resistência ao fogo de vigas de aço submetida a diferentes condições de projeto. A análise estatística mostrou que a fórmula proposta é robusta. A aplicação da fórmula ao projeto prático de incêndio e as vantagens alcançáveis com a fórmula proposta são destacadas.

Caldas, Fakury e Sousa Jr. (2014) apresentaram uma formulação de elementos finitos para a análise numérica de pórticos tridimensionais em aço, concreto ou misto aço-concreto em condição de incêndio. Os autores visam estender o procedimento de análise estático convencional previamente desenvolvido para a análise térmica e estrutural de pórticos sob ação do fogo. A não linearidade física e a degradação das propriedades do material, adotando a distribuição de temperatura, são levadas em consideração ao nível da seção transversal, discretizada em elementos finitos quadrilaterais ou triangulares. As deformações térmicas são consideradas por meio do conceito de deformação efetiva e o sistema não linear resultante é resolvido pelo esquema de Newton-Raphson.

Rigobello, Coda e Neto (2014) desenvolveram uma formulação de elementos finitos

baseado em posições visando estudar o comportamento de estruturas de aço em condições de altas temperaturas. A análise térmica não linear foi estabelecida ao nível da seção transversal, utilizando elementos planos bidimensionais. A análise estrutural é realizada com base nos elementos estruturais tridimensionais, onde foram modelados considerando os efeitos das não linearidades física e geométrica por elementos sólidos de qualquer ordem. O elemento proposto apresentou uma descrição geometricamente exata para grandes deslocamentos e rotações. A relação constitutiva termo-elastoplástica tridimensional adotada foi baseada na superfície de escoamento de von Mises, para a qual a dependência da temperatura foi estabelecida e uma regra de fluxo alternativa foi desenvolvida. Vários exemplos são apresentados para validar a formulação, onde foi possível mostrar os bons resultados obtidos com o modelo numérico desenvolvido.

Bajc et al. (2015) apresentaram um novo procedimento semi-analítico para a determinação da flambagem da coluna de concreto armado exposta ao fogo. A análise de incêndio é realizada em três etapas separadas, o desenvolvimento do tempo das temperaturas no compartimento de incêndio é realizado primeiro, seguido pela análise da transferência de calor e umidade acoplada e, finalmente, pela análise mecânica. Para tanto, realiza-se um estudo paramétrico visando verificar a influência de diferentes parâmetros geométricos utilizados para avaliar a capacidade de carga de flambagem das colunas de concreto armado. Os resultados desse estudo mostram que a capacidade de carga da coluna reduz significativamente com o aumento do tempo de exposição ao fogo e a esbeltez da coluna. Além disso, a carga mecânica inicial tem um efeito pequeno, embora, não desprezível na capacidade de carga de flambagem.

No trabalho de Barros (2016) foi implementado dois novos módulos ao programa CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*), destinado à obtenção da distribuição de temperatura ao nível de seção transversal de elementos em aço e para a análise numérica de segunda ordem inelástica de estruturas de aço sujeitas à temperaturas elevadas. A discretização da seção e do sistema termoestrutural são direcionados, respectivamente, pelo modelo de fibras e pelo elemento finito geometricamente não linear. Em adicional, os princípios adotados para o comportamento inelástico dos elementos estruturais são baseados no método da rótula plástica refinado (MRPR) acoplado ao método da compatibilidade de deformações (MCD). O estudo de caso é baseado na análise térmica, curvas de interação e análises termomecânicas de elementos isolados de viga e coluna, e pórtico plano. Os resultados mostram a boa concordância perante aos dados obtidos na literatura. Posteriormente, Maximiano (2018) e Barros et al. (2019) expandiram as funcionalidades do programa visando analisar o comportamento de vigas, colunas e pórticos de aço e de concreto armado, e estruturas mistas de aço-concreto em situação de incêndio.

Srivastava e Prakash (2017) apresentaram um novo modelo estrutural computacional para a análise de concreto armado e estruturas planas de aço sujeitas à ação do fogo, desenvolvido com base em acoplamento de três vias entre transferência de calor, deformações mecânicas e

aumento da pressão de poros. Os elementos estruturais são discretizados no espaço utilizando um esquema de dois níveis, sendo que para a análise mecânica são utilizados os elementos unidimensionais, e as soluções térmicas e de pressão dos poros trabalham com malhas de elementos finitos planos. Essa estratégia permite considerar os efeitos de grandes deformações, da degradação das propriedades dos materiais em função da temperatura e de fragmentação. A abordagem adotada permite a modelagem dos três principais processos físicos que ocorrem nos membros do concreto armado durante o incêndio, sem a necessidade de considerar um modelo de elementos finitos 3D. Vários exemplos numéricos são apresentados para demonstrar a precisão e a aplicabilidade do programa desenvolvido na análise de incêndio de estruturas de aço e concreto armado.

Rocha e Silva (2017) analisaram numericamente o comportamento de vigas de concreto armado de seção retangular T e de vigas mistas de aço e concreto submetidas a altas temperaturas. Para a avaliação dos resultados numéricos, foi utilizado o modelo de fibras, visando determinar as relações de momento-curvatura para diferentes temperaturas, bem como os valores máximos atingidos para os momentos fletores. As relações constitutivas dos materiais são baseadas no EN 1992:1-2:2004 e na ABNT NBR 15200:2012. Sendo assim, após os resultados obtidos, os autores acrescentam que é possível identificar a resistência residual da estrutura à medida que o tempo de exposição ao fogo aumenta e também demonstrar a redução efetiva de sua rigidez.

Padre (2017) desenvolveu um algoritmo computacional capaz de verificar a resistência de um pilar com seção qualquer de concreto armado quando submetido à flexão composta oblíqua em situação de incêndio. Para isso, foi implementado um algoritmo integrador de tensões em situação de incêndio com o gerador de malhas *EasyMesh* e com o algoritmo de análise térmica do *Thersys* (PADRE et al., 2019). O programa desenvolvido, denominado Pisafo, apresentou resultados satisfatórios em relação aos dados de referência.

O concreto de alto desempenho é vulnerável à fragmentação sob condições de altas temperaturas e a taxa de aquecimento pode exercer um efeito significativo na fragmentação do material. Sendo assim, Zhao et al. (2017) apresentam uma análise numérica do efeito da taxa de aquecimento na fragmentação do concreto de alto desempenho. Com um modelo termo-químico-hidro-mecânico de alto nível, a tensão térmica induzida pelo gradiente de temperatura e o efeito mecânico da pressão de vapor acumulada são investigados. Em linhas gerais, os resultados mostraram que, em diferentes taxas de aquecimento, os mecanismos de fragmentação são diferentes.

Walls, Viljoen e Clercq (2018) apresentam um elemento finito de viga personalizado e uma formulação de análise para estruturas em condições de incêndio, onde os elementos são modeladas como estruturas esqueléticas, mesmo para estruturas mistas. Isso fornece uma abordagem simples e rápida, adequada para análises em escritórios de projeto, visando tornar o projeto de incêndio estrutural mais acessível para os engenheiros. A metodologia proposta possui uma formulação genérica, sendo adequada para estruturas de concreto, aço ou mistas.

As rigidezes são calculadas sobre as posições atualizadas dos eixos neutros, que podem mudar durante as análises. Os efeitos térmicos são aplicados usando as pseudo-forças resultantes. Três estudos de caso são investigados com deflexões previstas e experimentais mostrando boa correlação. O primeiro caso apresenta uma laje de concreto sujeita a um incêndio padrão, enquanto, no segundo caso, duas vigas mistas são consideradas e, por fim, no terceiro caso é investigada uma laje de piso mista completa sujeita a um incêndio real.

Prakash e Srivastava (2018) apresentaram uma estratégia de solução para análise termomecânica não linear de estruturas de concreto armado sob ação do fogo com base no método de rigidez direta. A formulação baseia-se na teoria de viga de Euler-Bernoulli e são utilizadas as funções de estabilidade e curvatura. A deformação total é decomposta em quatro componentes: térmica, mecânica, transitória e de fluência. Para análise térmica, as seções transversais dos elementos estruturais são discretizadas com malhas bidimensionais, enquanto, para análise estrutural, utilizam-se os elementos de barra unidimensionais. A validação é direcionada por casos testes, onde os resultados obtidos são comparados com as repostas numéricas ou experimentais encontradas na literatura. Ao fim, verifica-se que o código desenvolvido pode prever bem a resposta das estruturas de concreto armado. Posteriormente, Prakash e Srivastava (2019) desenvolve uma formulação hidro-termo-mecânica totalmente acoplada, com base no método de rigidez direta, para a análise de estruturas espaciais de aço e concreto armado. Os efeitos das propriedades do material em função da temperatura, os danos causados pelo fogo, a pressão dos poros, os gradientes térmicos não lineares e as grandes deformações dos membros estruturais são consideradas e diretamente integrados às funções de estabilidade e curvatura no decorrer da construção da matriz de rigidez do membro. Essa estratégia alivia a necessidade de executar a quadratura numérica ao nível do elemento, normalmente exigida nas abordagens em elementos finitos. Os casos estudados são constituídos pelos elementos isolados de viga e coluna de concreto armado, por um pórtico tridimensional de aço com dois andares e pelo modelo de edifício espacial de dois andares. Os resultados demonstram a precisão e a eficácia da formulação desenvolvida.

7.3 FUNDAMENTOS DA ANÁLISE TERMOMECÂNICA

A análise termomecânica em situação de incêndio transita, previamente, na investigação e estudo dos problemas térmicos, estruturais lineares e não lineares, conforme apresentado nos Capítulos 4, 5 e 6, com objetivo de construir uma base sólida dos conceitos elementares e dos comportamentos físicos dos fenômenos envolvidos nos problemas. Sendo assim, nas próximas seções, são apresentadas discussões e um breve detalhamento acerca do desenvolvimento e considerações sobre o programa computacional.

7.3.1 ESTRATÉGIA GERAL DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA

No contexto de incêndio, o problema termomecânico apresenta a característica de um fenômeno físico acoplado, onde existe uma forte dependência entre as variáveis relacionadas ao comportamento térmico e estrutural, como a influência da temperatura nas propriedades mecânicas dos materiais e nas deformações térmicas, que por sua vez, interferem na densidade, que afeta diretamente a distribuição de temperatura no elemento estrutural. Contudo, segundo Vila Real (1993), uma vez que se analisa esse problema com base no procedimento incremental-iterativo, os incrementos adotados são geralmente pequenos, garantindo que a variação da densidade no intervalo em que se define o incremento seja pequena. Consequentemente, a resposta estrutural associada a uma configuração térmica, definida no início do intervalo, não apresenta erros significativos que ocasionam perturbações prejudiciais ao problema.

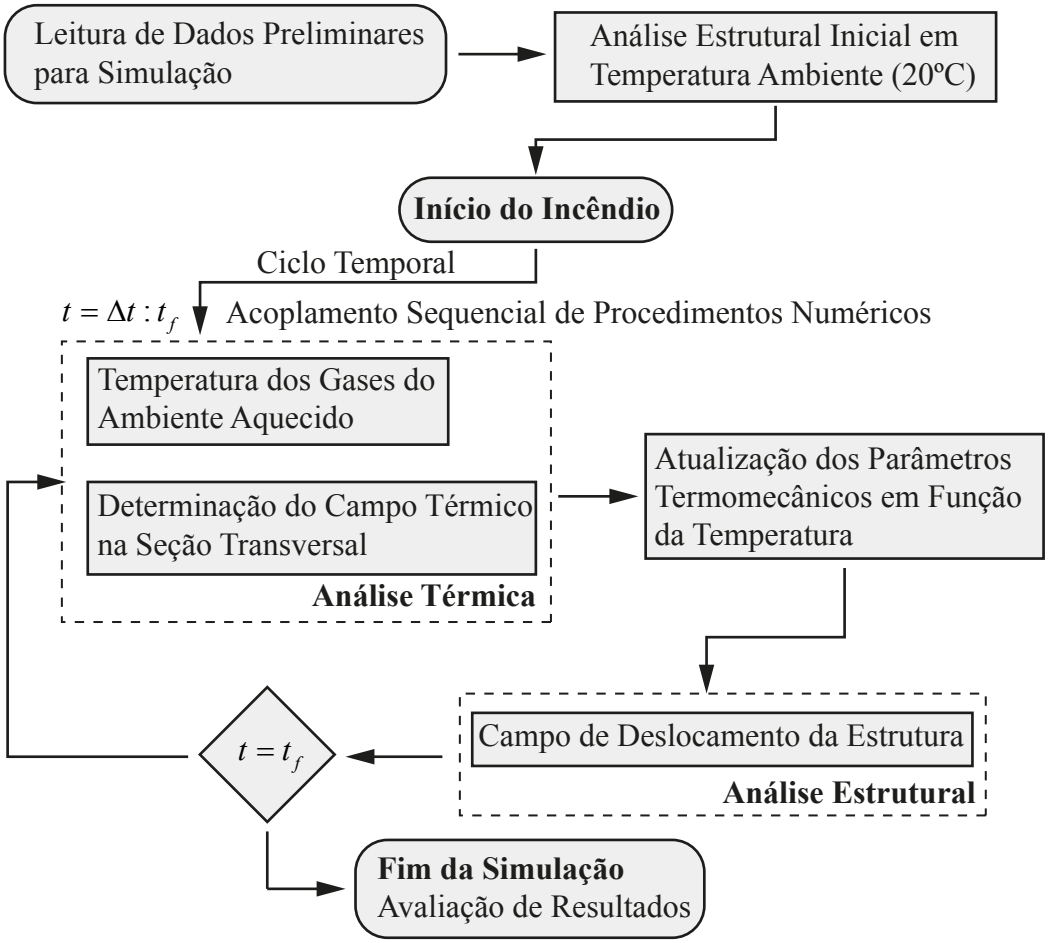

Figura 157 – Processo geral de solução do problema termoestrutural em situação de incêndio

Neste âmbito, a simulação e modelagem do comportamento de elementos estruturais em situação de incêndio, recebem, usualmente, um tratamento matemático desacoplado, ou seja, realiza-se o cálculo prévio da evolução da distribuição de temperatura, desprezando qualquer tipo de acoplamento entre problema térmico e mecânico, e posteriormente, realiza-se a análise mecânica, incluindo corretamente as contribuições térmicas no modelo estrutural.

A metodologia adotada é aplicada por vários pesquisadores, conforme visto nas obras de Landesmann (2003), Caldas (2008), Ribeiro (2009) e Maximiano (2018), onde considera-se a solução sucessiva de dois sistemas de equações em relação a cada intervalo associada ao tempo de exposição ao incêndio, sendo um sistema proveniente da análise térmica e outro resultante da análise estrutural, relacionando as equações incrementais de equilíbrio. Para exemplificar, ilustra-se na Figura 157 o esquema global do processo de solução do problema termomecânico de estruturas em condição de incêndio utilizado na concepção do modelo computacional.

De forma geral, nos procedimentos numéricos adotados, nota-se que o programa inicia a partir de uma análise não linear preliminar em relação à estrutura indeformada sujeita apenas as solicitações externas, em temperatura ambiente. Na ocorrência do incêndio, para cada intervalo de tempo, determina-se o campo de temperatura ao nível da seção transversal, obtido por meio dos métodos avançados de cálculo, as propriedades equivalentes de rigidez, de resistência e térmicas em função da variação de temperatura e, por fim, realiza-se a execução da análise mecânica, obtendo o campo de deslocamento do sistema estrutural.

7.3.2 FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

Na construção do modelo estrutural discreto com base nos procedimentos numéricos de elementos finitos, considera-se o elemento de pórtico plano, ou usualmente chamada elemento de viga-coluna, formado por dois nós com três graus de liberdades (GL) por nó, totalizando um elemento de 6GL. Em cada nó do elemento, têm-se duas translações e uma rotação, associadas à ação de uma força horizontal, vertical e do momento fletor, conforme posto na Figura 158.

Na metodologia adotada para a presente análise, os elementos do sistema estrutural que não estão expostos ao incêndio são modelados pelo elemento de viga-coluna convencional, enquanto, os elementos afetados pelo fogo são modelados utilizando um elemento de fibra, visando capturar a resposta da degradação progressiva do material devido o aumento de temperatura. Deve-se salientar que as seções transversais permanecem planas após a deformação (hipótese de Bernoulli) e os efeitos de cisalhamento são desprezados. Desta forma, considerando o referencial lagrangiano atualizado, a equação de rigidez incremental de um elemento de viga-coluna pode ser expressa pela Equação (7.1).

$$\{\Delta\mathbf{f}\} = [K_e]\,\{\Delta\mathbf{u}\} \tag{7.1}$$

Onde $\Delta\mathbf{u}$ e $\Delta\mathbf{f}$ são, respectivamente, os vetores de deslocamento e de força incremental, K_e é a matriz de rigidez do elemento no sistema local, constituída pela soma das matrizes associadas ao comportamento linear e não linear, conforme posto na Equação (7.2).

$$[K_e] = [T]^T\,[k_l]\,[T] + [k_g] \tag{7.2}$$

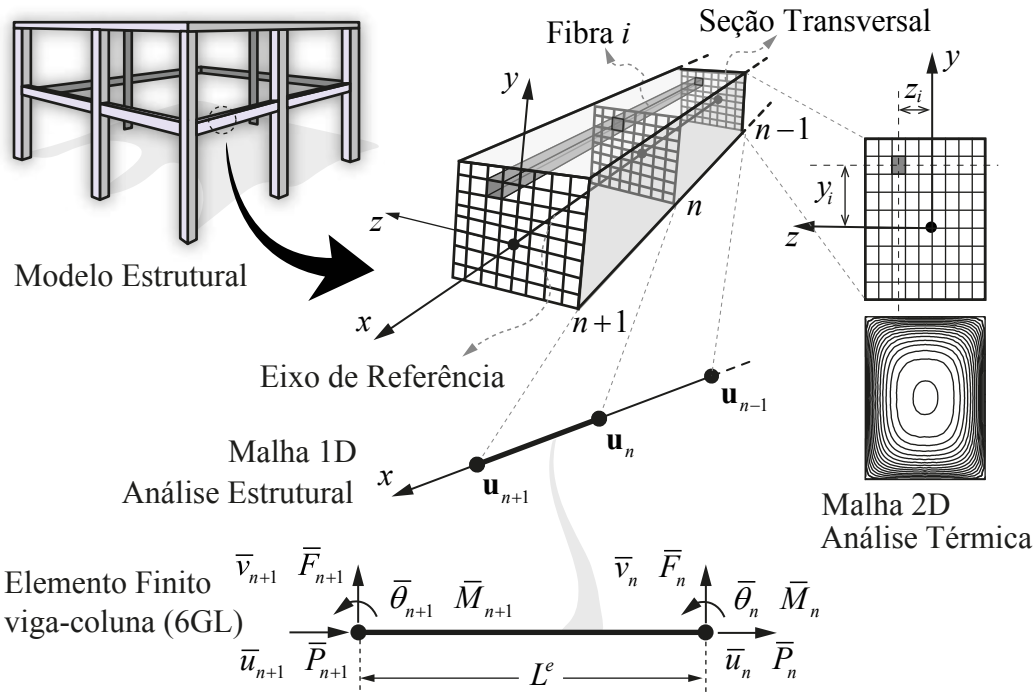

Figura 158 – Níveis de discretização do membro estrutural

A matriz k_g é responsável pela parcela não linear do problema estrutural. Nesta pesquisa, a matriz geométrica segue as premissas mencionadas no Capítulo 6, sendo desprezado o efeito acoplado entre a ação de flexão e axial (PORTER; POWELL, 1971; YANG; KUO, 1994). Ressalta-se que a matriz geométrica, frequentemente, é modelada por meio das funções de estabilidade, conforme pode ser visto em Oran (1973), Kassimali (1983), Kassimali e Garcilazo (2010) e Silva (2009). Além disso, a matriz de rigidez elástica linear é representada na Equação (7.3).

$$k_l = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{k}}^f & 0 \\ 0 & \mathbf{k}^a \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

Em que $\mathbf{k}^a$ representa um escalar associado ao comportamento axial e $\underset{\sim}{\mathbf{k}}^f$ é a matriz referente ao comportamento da flexão, definida pelos polinômios de interpolação cúbicos de Hermite, onde os coeficientes associados a essa matriz são apresentados na Equação (7.4) (MCGUIRE; GALLAGHER; SAUNDERS, 1982).

$$\underset{\sim}{\mathbf{k}}^f = \int_0^L \left[\phi_z^i\right] \overline{EI} \left[\phi_z^j\right] dx \qquad i,j = 1,2 \tag{7.4}$$

Sendo que ϕ_z representa as derivadas de segunda ordem contidas na expressão da curvatura causada ao longo da flexão, associados aos graus de liberdade de rotação (LEMES, 2018).

$$\mathbf{k}^a = \int_0^L \left[e_x^1\right] \overline{EA} \left[e_x^1\right] dx \tag{7.5}$$

Na Equação (7.5), tem-se que e_x representa as derivadas contidas no campo de deformação axial, onde se utiliza as funções lineares de interpolação. Na matriz de rigidez elástica linear, existe a presença da rigidez axial equivalente e da rigidez flexional equivalente, onde ambas são dadas pelas Equações (7.6) e (7.7), respectivamente.

$$\overline{EA} = \int_A E_t dA \tag{7.6}$$

$$\overline{EI} = \int_A E_t y^2 dA \tag{7.7}$$

Como pode-se observar, as rigidezes equivalentes são avaliadas ao nível da seção transversal da estrutura, onde cada fibra da seção depende da resposta térmica. Além disso, a matriz de transformação, apresentada na Equação (7.2), é definida em função do comprimento de cada elemento, conforme mostra a Equação (7.8).

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1/L & 1 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

Para cada elemento de barra unidimensional do sistema estrutural é necessário realizar a rotação do sistema local para o sistema global, ou seja, utiliza-se a matriz de rotação de pórtico plano $[\mathfrak{R}]$, apresentada na Equação (5.28). Sendo assim, a construção da matriz de rigidez global do sistema é realizada pelo assemblamento de cada matriz elementar local.

7.3.3 EFEITO DE RESTRIÇÃO TÉRMICA

No decorrer da análise do comportamento termomecânico de estruturas em situação de incêndio, por conta do aumento de temperatura nos elementos estruturais, as propriedades térmicas e mecânicas, caracterizadas ao nível da seção transversal, sofrem alterações em função do tempo de exposição da estrutural ao fogo. Sendo assim, os efeitos provenientes dos elevados gradientes de temperatura provocam o surgimento de deformações térmicas e, consecutivamente, esforços internos, que devem ser considerados no modelo estrutural computacional.

Os procedimentos numéricos adotados para o tratamento dos efeitos térmicos nos elementos estruturais, parte do princípio que o elemento de viga-coluna seja totalmente restringido

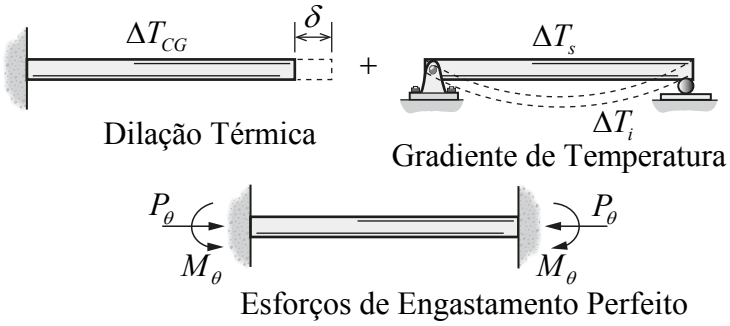

Figura 159 – Forças de engastamento perfeito de origem térmica

em ambas as extremidades, obtendo assim, as forças nodais equivalentes atuantes nos nós do elemento (GATEWOOD, 1957; USMANI et al., 2001), conforme ilustrado na Figura 159. O vetor de engastamento perfeito $\mathbf{f}_{th}$, expresso na Equação (7.9), é composto pelas contribuições resultantes dos efeitos da expansão térmica e de curvatura devido ao gradiente de temperatura da seção transversal (MOUÇO, 2008).

$$\mathbf{f}_{th} = \begin{Bmatrix} P_\theta \\ 0 \\ M_\theta \end{Bmatrix} \tag{7.9}$$

No contexto de estruturas sob ação de incêndio, as componentes do vetor de carregamento térmico em razão da variação de temperatura, P_θ e M_θ, são calculadas ao nível da seção transversal pelas integrais definidas nas Equações (7.10) e (7.11), respectivamente.

$$P_\theta = \int_A \varepsilon_{th} E_\theta dA \tag{7.10}$$

$$M_\theta = \int_A \varepsilon_{th} E_\theta y dA \tag{7.11}$$

Onde ε_{th} representa o alongamento térmico do material em função da temperatura, sendo determinado conforme as recomendações do EN 1991-1-2:2004. Ao fim, o referido vetor térmico é adicionado ao vetor de forças do sistema estrutural.

7.4 EXPERIMENTAÇÃO NUMÉRICA

Os exemplos de aplicação e a validação do módulo computacional desenvolvido para análise termoestrutural em condição de incêndio são divididos pela natureza do material da estrutura, ou seja, os elementos construídos de aço e/ou concreto. Em todos os casos, a fim de avaliar a performance do código implementado, os resultados numéricos obtidos, com base

no programa NASEN, são comparados com os dados encontrados na literatura por meio de simulações computacionais e/ou ensaios experimentais.

7.4.1 EXEMPLOS DE ESTRUTURAS DE AÇO

Nesta seção são apresentados os exemplos de estruturas aço sob ação do incêndio, onde são realizados uma série de testes para diferentes configurações físicas e geométricas, transitando da análise de estruturas isoladas, como os elementos de viga ou pilares, bem como análises em sistemas aporticados planos de aço.

7.4.1.1 Viga com aquecimento uniforme

O primeiro exemplo consiste em uma viga de aço estudado por Burgess, El-Rimawi e Plank (1988), onde a temperatura é mantida uniforme e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído de 405 kN/m. Em relação às dimensões geométricas da estrutura, a seção transversal é formada pelo perfil UB 686×254×170 mm e o comprimento da viga igual a 4 m.

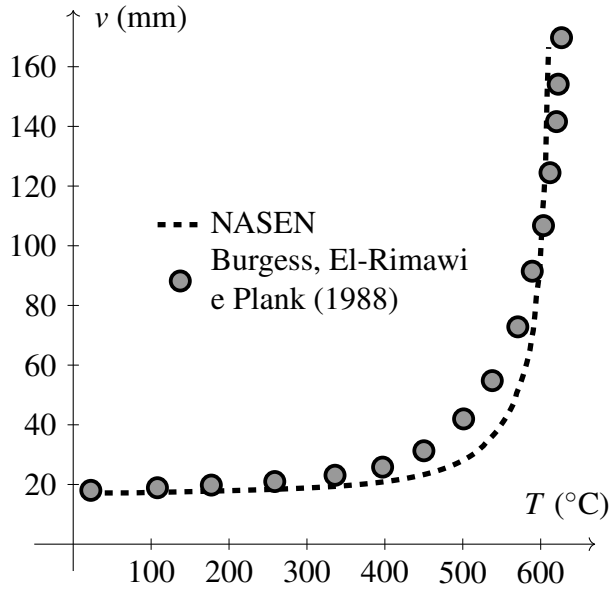

Figura 160 – Deslocamento vertical da viga em função da temperatura

Os resultados de referência são obtidos em Burgess, El-Rimawi e Plank (1988) e caracterizados pela natureza numérica. Em linhas gerais, observa-se, na Figura 160, que a curva de solução numérica obtida pelo programa desenvolvido na pesquisa apresenta um comportamento satisfatório em relação ao comportamento da solução de referência. Vale ressaltar que as maiores diferenças nos resultados ocorrem em torno do intervalo de aproximadamente 400°C a 540°C, onde o programa NASEN apresenta níveis de deslocamentos menores quando aferidos com os dados numéricos de referência.

7.4.1.2 Viga biapoiada em escala reduzida

Analisa-se, numericamente, uma viga de aço em escala reduzida simplesmente apoiada com carregamento aplicado no meio vão, conforme ilustra a Figura 161. Inicialmente, Rubert e Schaumann (1986) realizaram testes experimentais acerca do comportamento desse elemento estrutural em situação de incêndio para diferentes níveis de carregamento. Em relação às características geométricas e físicas, considera-se a viga constituído pelo perfil IPE 80 com um comprimento de 114 cm e o módulo de elasticidade do aço igual a 210 GPa.

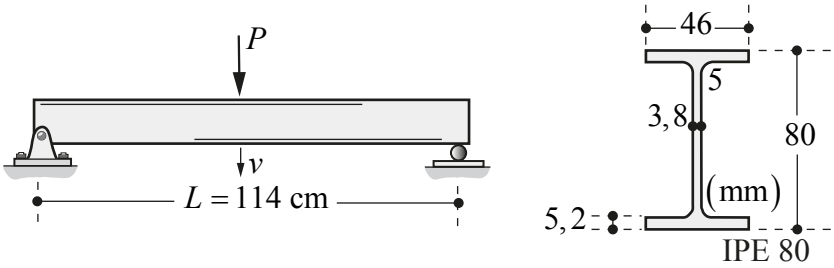

Figura 161 – Viga de aço biapoiada com carga concentrada (esquerda) e seção transversal do tipo IPE 80 (direita)

Esse exemplo é frequentemente utilizado para calibração de programas computacionais, como pode ser visto nas obras de Liew e Chen (2004),Barros (2016), Rigobello (2011), Song et al. (2000) e Iu (2004). Em relação aos dados de entrada, adota-se um passo de tempo de 10 s, a seção transversal é discretizada por 230 elementos triangulares e a malha estrutural é constituída por 7 elementos de barra unidimensionais.

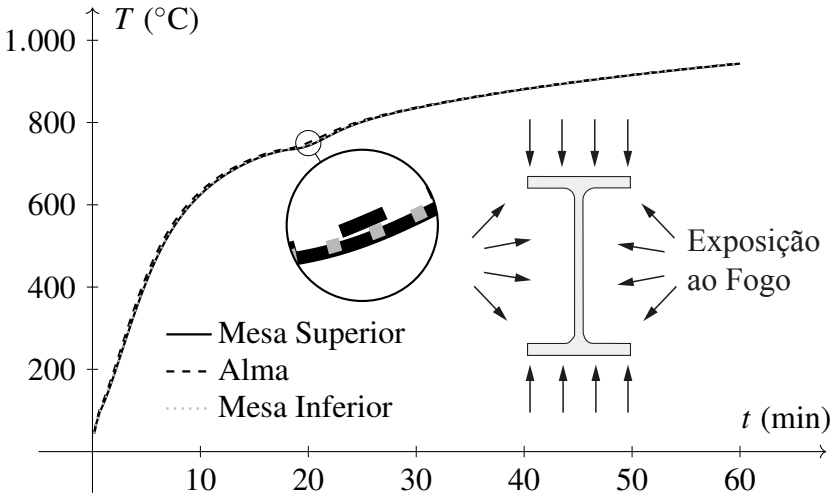

Figura 162 – Curva de temperatura *versus* tempo para seção transversal da viga formada pelo perfil IPE 80 com quatro faces expostas ao incêndio

Primeiramente, realiza-se a análise térmica ao nível da seção transversal da estrutura, onde são consideradas as quatro faces do perfil expostas ao incêndio. A evolução de temperatura é medida na alma, na mesa inferior e na mesa superior do perfil de aço, conforme apresenta

a Figura 162. Pelo fato das dimensões da seção transversal adotadas, associado a imposição da condição de contorno térmica simétrica e da boa condutividade térmica do aço, as curvas de temperatura ao longo do tempo de exposição ao fogo são bem próximas umas das outras, evidenciando o aquecimento praticamente uniforme da seção de aço.

Para análise estrutural, considera-se o carregamento aplicado com base no fator de carga (P/P_y), assumindo os valores de 0,2 e 0,5. Para avaliar a performance do módulo NASEN/TSA-FIRE, além dos resultados experimentais, utiliza-se os dados numéricos obtidos na literatura, conforme pode ser visto na Figura 163.

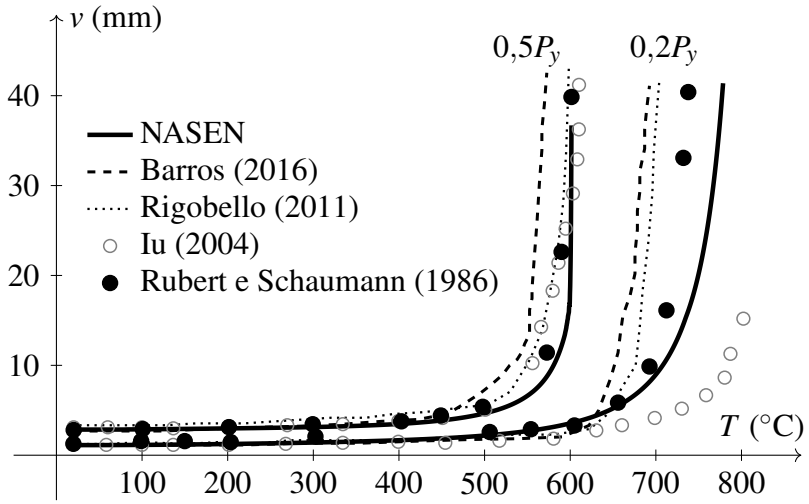

Figura 163 – Deflexão no meio do vão da viga biapoiada em função da evolução de temperatura para fatores de carga iguais a 0,2 e 0,5

Com base nos resultados apresentados na Figura 163, pode-se analisar que os valores obtidos apresentam um comportamento semelhante com os dados numéricos e os testes experimentais encontrados na literatura. Deve-se salientar também que os problemas dessa natureza englobam inúmeras variáveis importantes no decorrer do processo de solução, sendo que dependendo da metodologia de solução adotada, têm-se comportamentos diferentes. Esse fato pode ser observado nas curvas de temperatura-deslocamento obtidas para cada modelo computacional da literatura.

7.4.1.3 Viga isolada com momentos nas extremidades

Analisa-se uma viga de aço constituída pelo perfil metálico IPE 360 sob ação do incêndio padrão ISO 834:1999 e com momentos aplicados em ambas as extremidades em função do momento de plastificação do perfil (M_p), conforme exposto na Figura 164. Considera-se que o incêndio está atuando somente em três faces do perfil, ou seja, supõe-se que existe uma laje apoiada na mesa superior do perfil atuando como anteparo adiabático, sendo uma configuração usual em edificações.

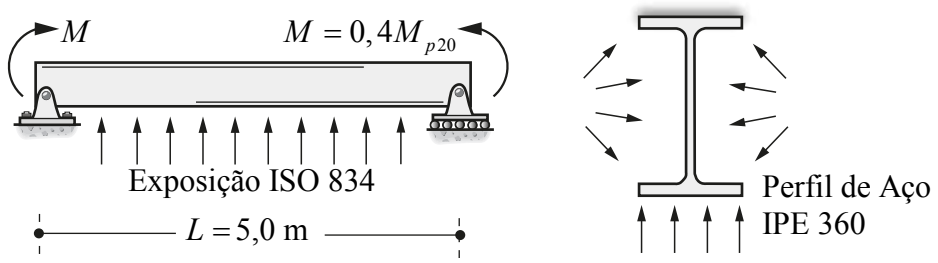

Figura 164 – Características do modelo estrutural e da seção transversal da viga de aço

A viga apresenta 5 m de vão e um módulo de elasticidade de 20500 kN/cm^2. Em relação às condições de contorno, a viga é simplesmente apoiada, sendo que na extremidade direita da estrutura não apresenta restrição de movimento na direção longitudinal. Para discretização do modelo térmico e estrutural, considera-se, para malha da seção transversal, 161 nós e 230 elementos triangulares lineares e 10 elementos unidimensionais de barra. Além disso, os momentos concentrados aplicados nos apoios apresentam um módulo igual a 40% do momento de plastificação do perfil. Para comparação dos resultados estruturais, utilizam-se os dados provenientes de simulações numéricas, encontrados nos trabalhos de Landesmann (2003), aplicando o programa PNL-F (Pórtico Não-Linear sob Fogo), de Ribeiro (2009), com o programa *Thersys*, de Caldas, Fakury e Sousa Jr. (2014) e com o programa SAFIR.

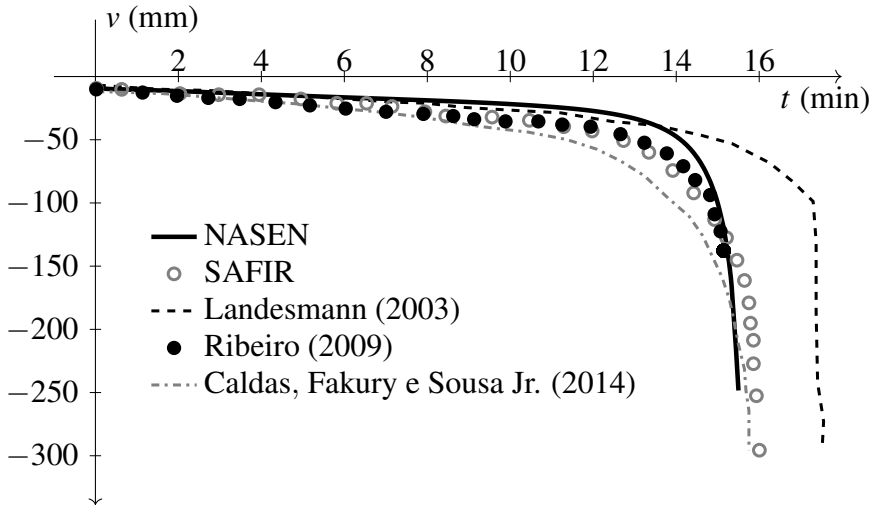

Figura 165 – Comparação dos resultados obtidos para deslocamento vertical no meio do vão da viga com momentos aplicados na extremidade em condição de incêndio

Desta maneira, os deslocamentos verticais máximos, medidos no meio vão da viga, em função do tempo de exposição ao incêndio, obtidos pelo programa NASEN, e comparados com os resultados da literatura são mostrados na Figura 165. Em síntese, pode-se notar que o comportamento do programa NASEN mostra-se próximo aos dados de referência, em exceção da solução obtido por Landesmann (2003), que após aproximadamente 14 min, os resultados apresentam uma ligeira diferença entre os modelos.

7.4.1.4 Pilares de aço isolados

Uma análise termomecânica simulada por meio do programa NASEN/TSA-FIRE é realizada com base em um pilar isolado biapoiado com 4 m de vão submetido a diferentes condições térmicas. O pilar é formado por um perfil de aço IPE 360 e submetido, em ambas as extremidades, por um momento concentrado com módulo igual a 20% do momento fletor de plastificação. No apoio superior atua uma força de compressão de 30% da força axial de plastificação, conforme pode ser visto na Figura 166.

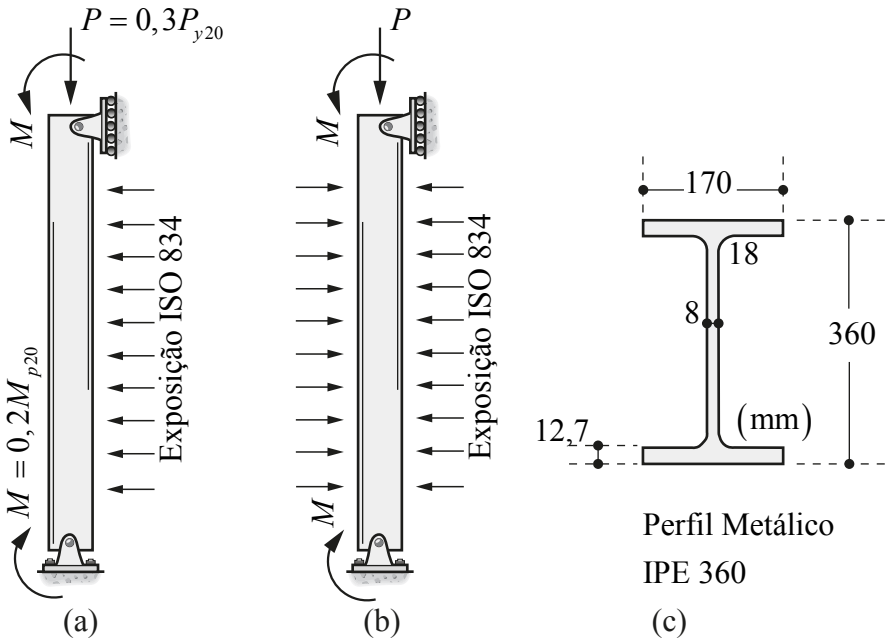

Figura 166 – Esquema estrutural e cargas aplicadas nos pilares isolados com (a) 3 faces e (b) 4 faces expostas ao incêndio, e (c) dimensões do perfil metálico IPE 360 dos pilares, em mm

Na primeira configuração, considera-se que o fluxo de calor devido ao incêndio normalizado atua somente em três faces do perfil, sendo que essa situação pode simular um pilar protegido parcialmente por elementos de vedação da ação do fogo. Na segunda configuração, assume-se que os fluxos de convecção e radiação envolvem todas as faces do perfil, sendo na prática uma situação comum e representativa de um pilar no interior de uma edificação.

Esse exemplo também foi estudado por outros pesquisadores, tais como Caldas (2008), Rigobello (2011), Barros (2016) e Maximiano (2018). Inicialmente, realiza-se a análise térmica para as duas condições de contorno aplicadas no perfil, para ambas as configurações, utiliza-se uma malha triangular com 230 elementos finitos e um passo de tempo igual a 10 s.

A Figura 167 mostra as curvas numéricas de temperatura-tempo para as condições térmicas de três e quatro faces expostas ao incêndio. As curvas são medidas nos pontos situados nas mesas e na alma do perfil IPE 360. Pode-se notar que para todas as faces expostas ao incêndio, devido à condição térmica simétrica, as temperaturas nas mesas são praticamente iguais e com valores inferiores as temperaturas medidas na alma. Em contrapartida, observa-se

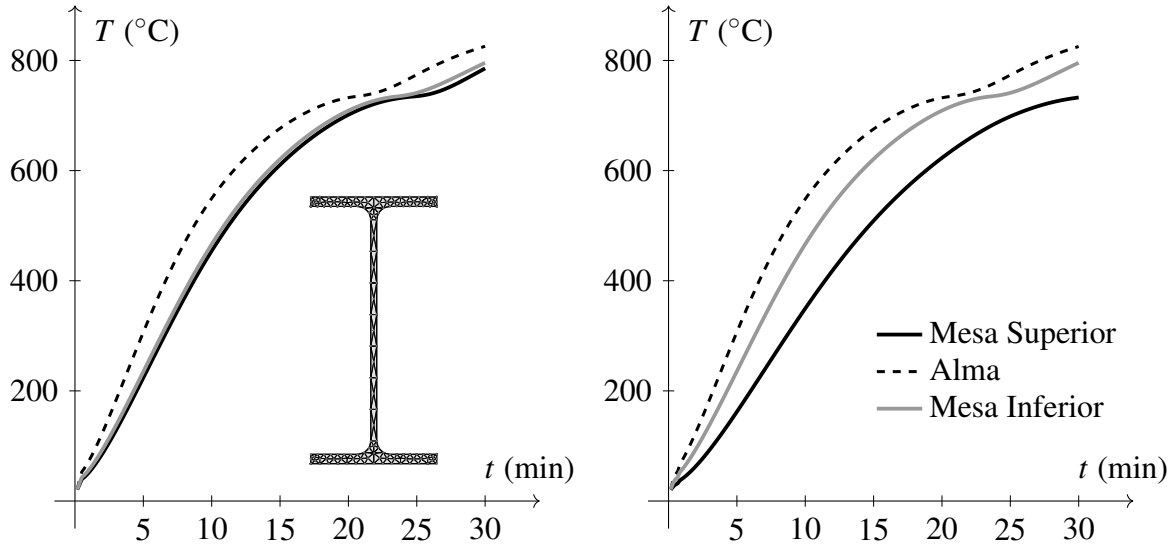

Figura 167 – Evolução de temperatura na seção transversal do pilar formada por um perfil IPE 360 para 4 faces (esquerda) e 3 faces (direita) expostas ao fogo

uma diferença significativa entre os níveis de temperatura quando se considera somente três faces expostas ao incêndio. Nessa situação, nota-se um decaimento da temperatura na mesa superior, entretanto, ainda assim as temperaturas atingem maiores valores na alma em razão da menor dimensão dessa chapa em comparação aos outros elementos.

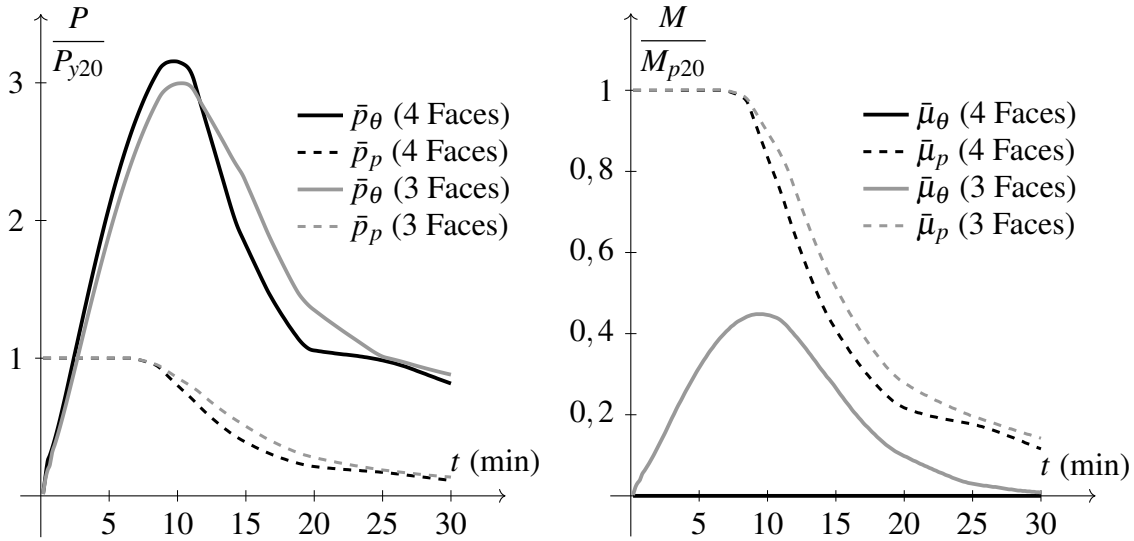

Figura 168 – Esforço de engastamento perfeito devido ao gradiente térmico (esquerda) e resistência plástica normalizada (direita) relacionada à rigidez axial e flexional em função do tempo para o perfil IPE 360 com 3 e 4 faces de exposição ao fogo

Por conta do aumento de temperatura em cada fibra da seção transversal do pilar isolado exposto ao fogo, são calculados os esforços de engastamento perfeito e os limites de resistência de plastificação. Desta forma, na Figura 168, mostra-se essas variáveis normalizadas em relação aos limites de plasticidade em temperatura ambiente ao longo de cada instante de tempo. A normalização do esforço de restrição térmica e a resistência plástica associada à rigidez

axial são representadas por $\bar{p}_\theta$ e $\bar{p}_p$, respectivamente, enquanto, associada à rigidez flexional são representadas por $\bar{\mu}_\theta$ e $\bar{\mu}_p$, respectivamente. Na Figura 168, a condição de aquecimento simétrico na seção transversal de aço apresenta um maior decaimento no valor da resistência em comparação à configuração térmica com três faces expostas ao incêndio.

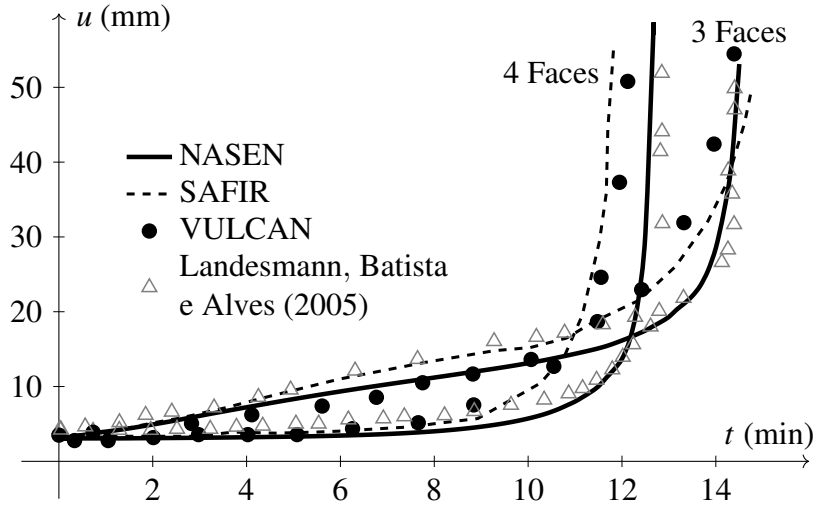

Figura 169 – Deslocamentos horizontais *versus* tempo de exposição de incêndio para pilar isolado com seção transversal formada pelo perfil W-360

Em relação às componentes do vetor de engastamento perfeito por causa da variação de temperatura, para condição térmica assimétrica, observa-se, na Figura 168, que o valor máximo da reação axial e de flexão acontece em aproximadamente 10 min. Para o aquecimento térmico simétrico, a reação axial apresenta um comportamento semelhante ao caso assimétrico, em contrapartida, a reação de flexão é nula.

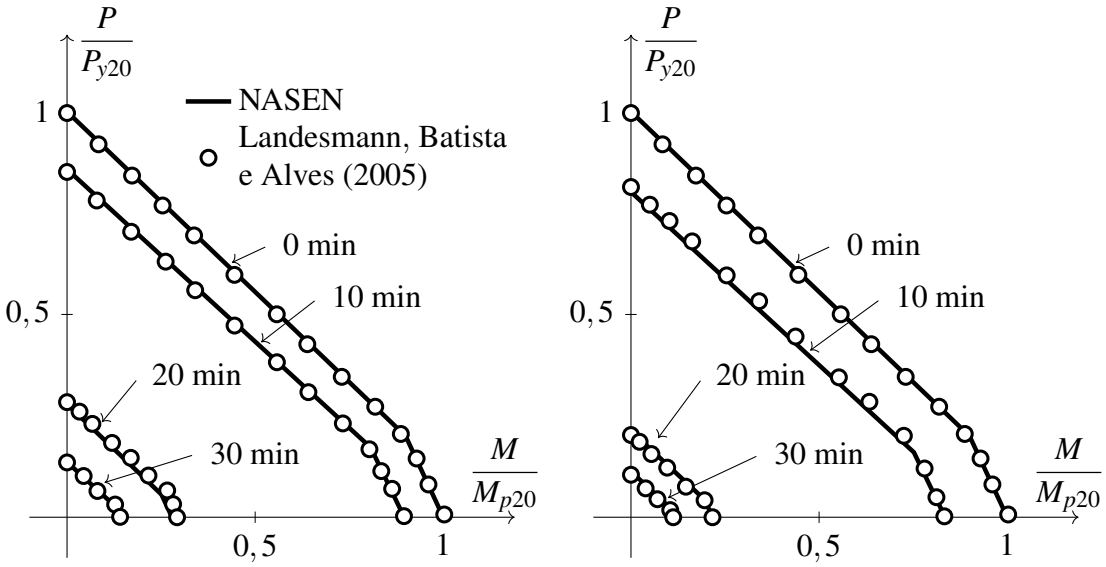

Figura 170 – Curvas de interação obtidas pela programa NASEN e Landesmann (2005) da seção transversal do perfil IPE 360 exposta ao fogo em 3 faces (esquerda) e 4 faces (direita)

Os resultados numéricos do programa NASEN, associados ao comportamento mecânico, são comparadas com o modelo de Landesmann, Batista e Alves (2005) e com os programas especialistas SAFIR e VULCAN, sendo que os dados numéricos dos programas são extraídos do trabalho de Caldas (2008). A malha estrutural é discretizada em 8 elementos de barra e a deflexão horizontal máxima no pilar é contabilizada no meio do vão da estrutura.

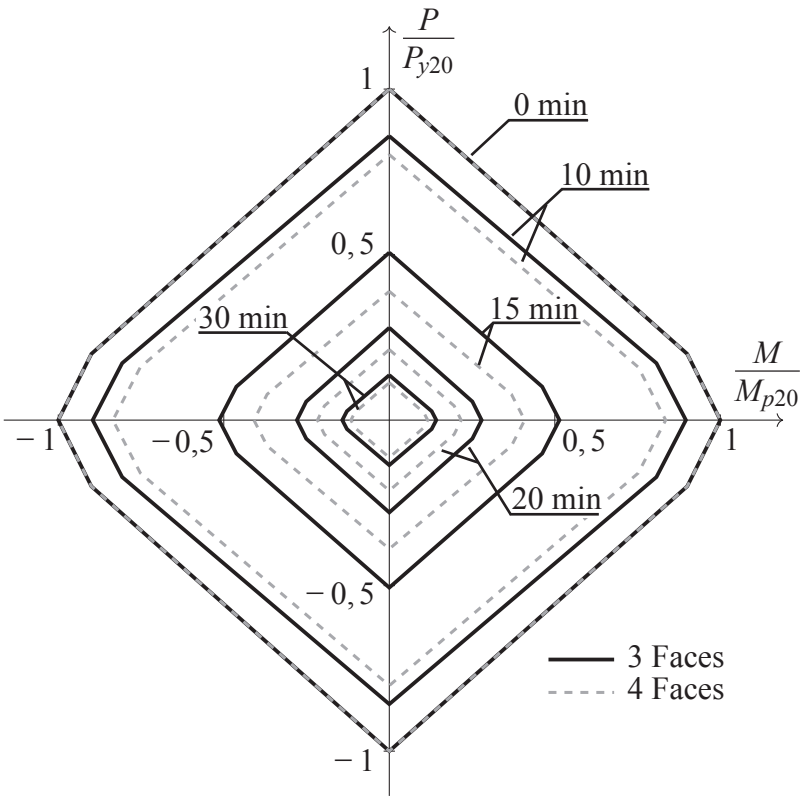

Figura 171 – Comparação entre as curvas de interação N-M da seção transversal formada pelo perfil IPE 360 com 3 e 4 faces expostas ao fogo para 0, 10, 15, 20 e 30 min

Na Figura 169, apresenta-se as curvas de tempo-deslocamento para as condições térmicas estudadas, onde se verifica um comportamento semelhante em cada configuração térmica da estrutura diante dos resultados de referência obtidos na literatura. Nota-se para condição térmica assimétrica (3 faces expostas ao incêndio), a estrutura apresenta uma maior capacidade de resposta ao incêndio, como pode ser comprovado em relação aos níveis de deslocamento atingido em função do tempo.

No contexto de projeto e dimensionamento de estruturas, as curvas de interação apresentam características importantes relacionadas aos limites de plasticidade da seção. Sendo assim, com base nos procedimentos e nas recomendações prescritas no AISC (1999), a Figura 170 apresenta as curvas de interação N-M normalizadas para a seção transversal do pilar constituída pelo perfil IPE 360, definida somente no primeiro quadrante e comparadas com os resultados de Landesmann, Batista e Alves (2005). É possível perceber, qualitativamente, um bom ajuste entre os valores obtidos pelo programa NASEN e os dados de referência para cada instante de tempo analisado e para cada configuração térmica. Para verificar a influência da distribuição de

temperatura, a Figura 171 mostra uma comparação dos limites da capacidade resistente plástica para 3 e 4 faces expostas ao incêndio.

Com a evolução do tempo de exposição ao fogo, os limites da capacidade resistente plástica da seção decaem progressivamente, onde se pode notar que a condição de 4 faces sob ação do incêndio apresenta o nível de redução ligeiramente maior em comparação com a condição térmica assimétrica. A explicação desse fato é baseada na premissa que a resistência plástica é função do campo bidimensional de temperatura, ou seja, quanto mais acentuado o aquecimento da seção, mais acelerada é a degradação das propriedades do material, ocasionando na diminuição da capacidade resistente do elemento.

7.4.1.5 Pórticos de aço em escala reduzida

Avalia-se nesta seção, por meio de uma análise numérica, o comportamento termomecânico acerca de uma série de testes experimentais para pórticos de aço em situação de incêndio, realizados por Rubert e Schaumann (1986). Os autores estudaram três configurações de pórtico, denominados por EHR (pórtico L), EGR (pórtico simples) e ZSR (pórtico duplo), conforme esquematizado na Figura 172.

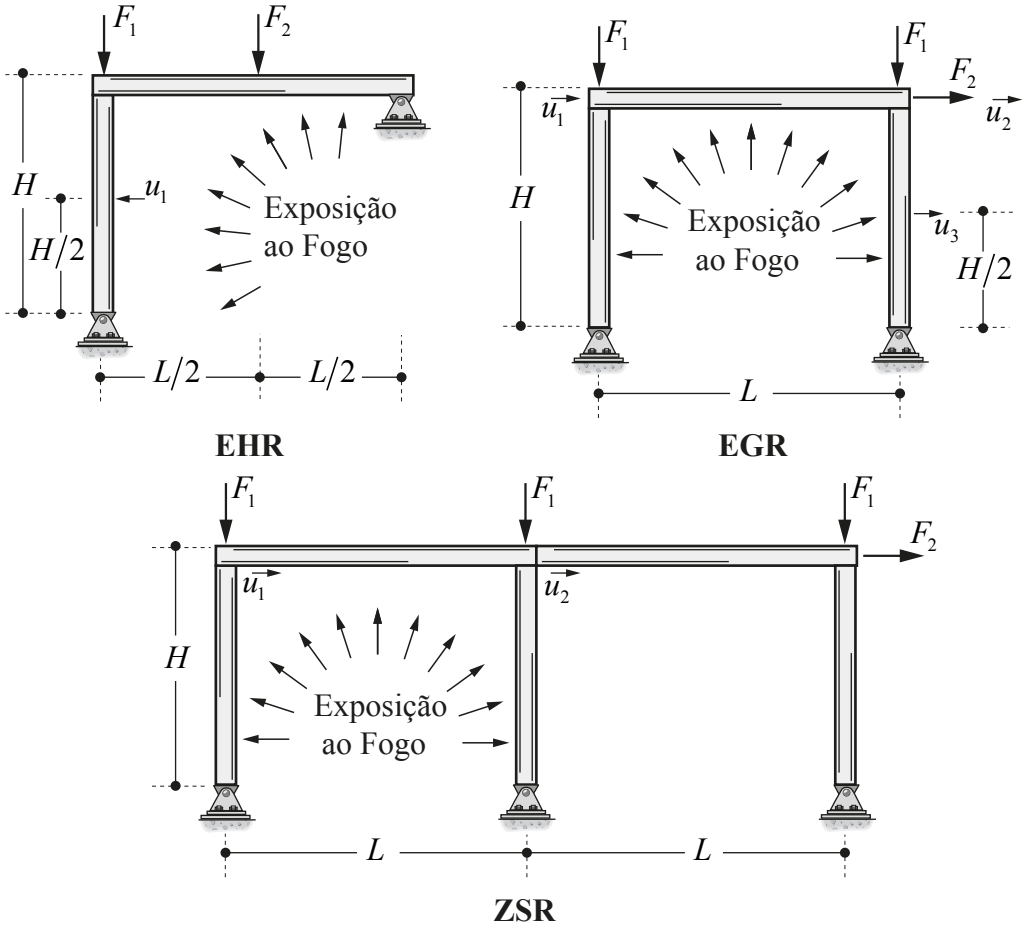

Figura 172 – Configurações geométricas e solicitações externas referentes aos pórticos de aço em situação de incêndio

Dentre a série de testes, a Tabela 24 mostra as configurações específicas acerca de cada sistema estrutural, denominados por EHR3, EGR1 e ZSR1. Tais parâmetros são utilizados nos modelos computacionais e f_y é a resistência de escoamento do aço em temperatura ambiente. Esses problemas foram estudados numericamente por diversos autores, como Saab e Nethercot (1991), Souza Junior e Creus 2007, Iu (2004), Izzuddin et al. (2000) e Tan, Ting e Huang (2002). Na presente pesquisa, a avaliação de performance dos resultados é realizada em comparação aos dados experimentais de Rubert e Schaumann (1986), bem como os resultados numéricos apresentados em Rigobello (2011) e Maximiano (2018), onde aplicaram os programas computacionais SYSAF e CS-ASA/FSA, respectivamente.

Tabela 24 – Parâmetros adotados para as simulações dos pórticos

Configuração	**L (cm)**	**H (cm)**	f_y **(kN/cm^2)**	F_1 **(kN)**	F_2 **(kN)**
Pórtico L (EHR3)	124	117	38,2	112	28
Pórtico Simples (EGR1)	122	117	38,2	65	2,5
Pórtico Duplo (ZSR1)	120	118	35,5	74	2,85

As seções transversais das barras dos pórticos de aço são iguais e formadas pelo perfil de aço IPE 80, e o módulo de elasticidade do aço adotado é igual a 210 GPa. Os pórticos foram previamente carregados e depois submetidos a um aquecimento à taxa constante até o colapso. Ressalta-se que todos os elementos estruturais da configuração EHR e EGR são aquecidos uniformemente, em contrapartida, somente o compartimento esquerdo da configuração ZSR é aquecido, enquanto, o outro é mantido em temperatura ambiente (ver Figura 172).

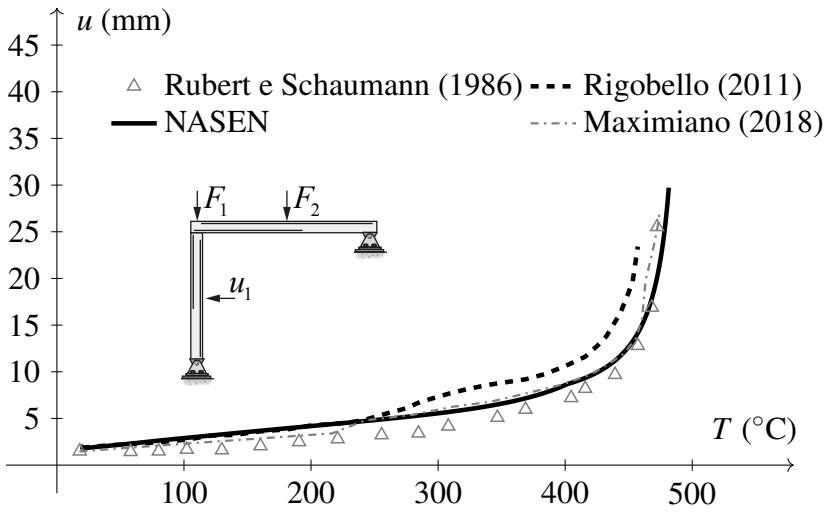

Figura 173 – Deslocamento horizontal u_1 medido no meio vão do pilar contido no pórtico L em situação de incêndio

Em relação às malhas computacionais, a seção transversal é discretizada em 242 elementos do tipo triangular linear de três nós, enquanto, o modelo estrutural é particionado em 12, 17 e 5 elementos para o pórtico em L, simples e duplo, respectivamente.

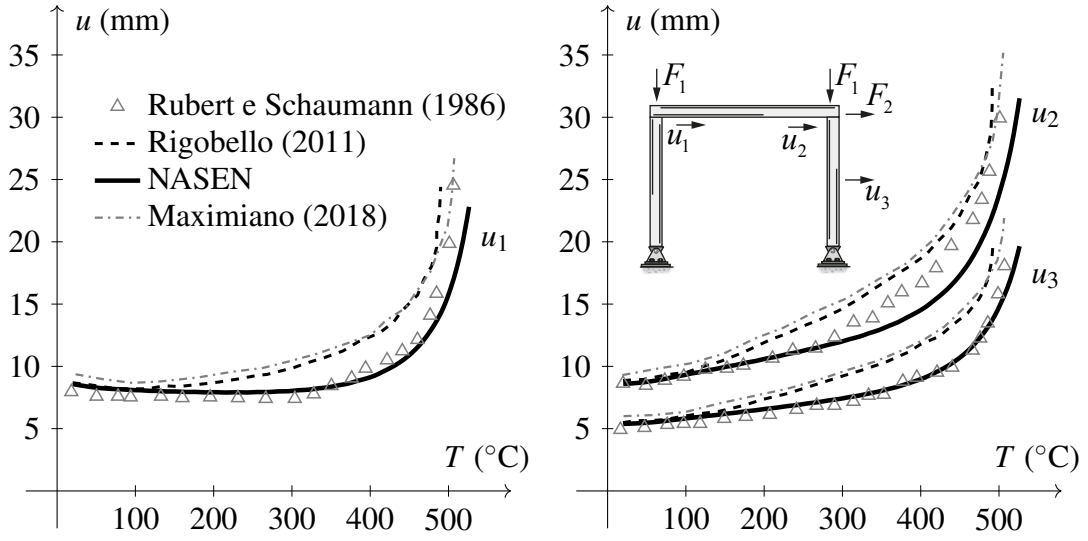

Figura 174 – Deslocamentos horizontais u_1, u_2 e u_3 medidos no pórtico simples exposto ao fogo

A Figura 173 apresenta a evolução do deslocamento horizontal medido no meio vão do pilar contido no pórtico L, denominado u_1. Os resultados obtidos mostram-se coerentes com os dados experimentais, atingido os valores limites antes de 500°C. Além disso, o programa NASEN apresenta um comportamento semelhante aos resultados de Maximiano (2018), contudo, em comparação com os dados do trabalho de Rigobello (2011), existe um ligeiro descolamento entre as curvas após aquecimento da estrutura atingir aproximadamente 250°C.

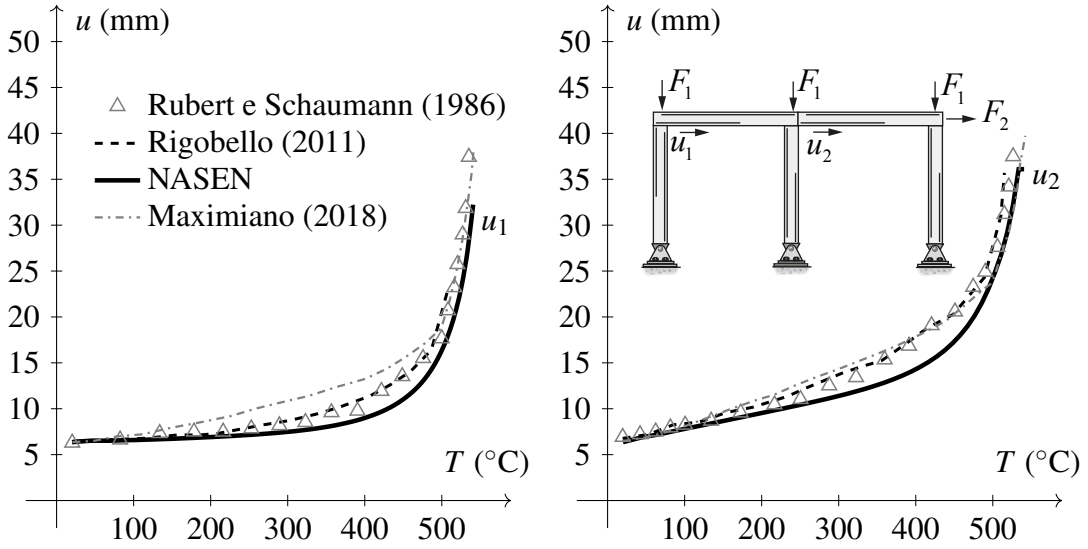

Figura 175 – Deslocamentos horizontais u_1 e u_2 no pórtico duplo *versus* temperatura na seção transversal do perfil IPE 80 sob ação do incêndio

Em seguida, na Figura 174, exibe-se os deslocamentos horizontais do pórtico simples, formado por dois pilares e uma viga, medidos nas extremidades da viga e no meio vão do pilar direito, denominados como u_1, u_2 e u_3. Os resultados da configuração EGR1 mostram-se, novamente, satisfatórios em relação aos resultados das previsões experimentais, sendo possível observar que os pontos críticos apresentam temperaturas próximas de 500°C.

Por fim, na Figura 175, apresenta-se os valores dos deslocamentos horizontais para o pórtico duplo. Na configuração ZSR1, os deslocamentos são medidos na extremidade superior do pilar esquerdo e central do sistema estrutural de aço, denominados simbolicamente como u_1 e u_2. Nesse caso, nota-se que os valores obtidos pelo programa computacional NASEN permaneceram ligeiramente inferiores aos dados experimentais e aos resultados numéricos da literatura, contudo, em linhas gerais, a solução numérica atingiu um comportamento satisfatório ao nível de engenharia.

7.4.1.6 Pórtico Vogel em incêndio

O problema tratado nesta seção, esquematizado na Figura 176, refere-se a um pórtico do tipo portal biengastado. Esse caso é um exemplo clássico para calibragem e avaliações numéricos acerca do comportamento de estruturas de aço, sendo estudado originalmente por Vogel (1985) e, subsequentemente, analisado por diversos pesquisadores, como pode ser visto em detalhes em Ziemian (1993), Clarke et al. (1993), Chen, Goto e Liew (1995) e Silva (2009). Posteriormente, alguns autores analisaram esse pórtico em situação de incêndio, vide Landesmann (2003),Barros et al. (2018), Rigobello (2011) e Maximiano (2018).

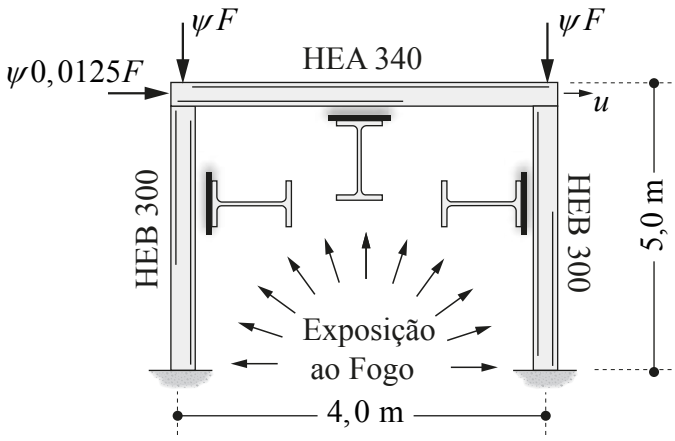

Figura 176 – Modelo estrutural e carregamentos aplicados no pórtico Vogel sob ação do incêndio

Considera-se o pórtico Vogel constituído por dois pilares, formados pelo perfil HEB 300, e a viga superior, formada pelo perfil de aço HEA 340, ambos os perfis estão sujeitos ao incêndio padrão ISO 834:1999 em 3 faces (ver Figura 176). Em relação às malhas numéricas, a seção transversal foi discretizada em 226 elementos triangulares de três nós e o sistema estrutural de aço é divida em 14 elementos unidimensionais de barra. As solicitações externas do pórtico Vogel estão escritas em função do fator de carga ψ, sendo adotado para a simulação computacional, o valor de 2/10.

Na Figura 177, apresenta-se a evolução do deslocamento horizontal em função do tempo de exposição ao fogo, medido na extremidade superior do pilar direito do pórtico. Além disso, as curvas de temperatura-tempo são mensuradas nos pontos (1), (2) e (3) da seção transversal

de aço, representando, respectivamente, a mesa superior, a alma e a mesa inferior dos perfis adotados.

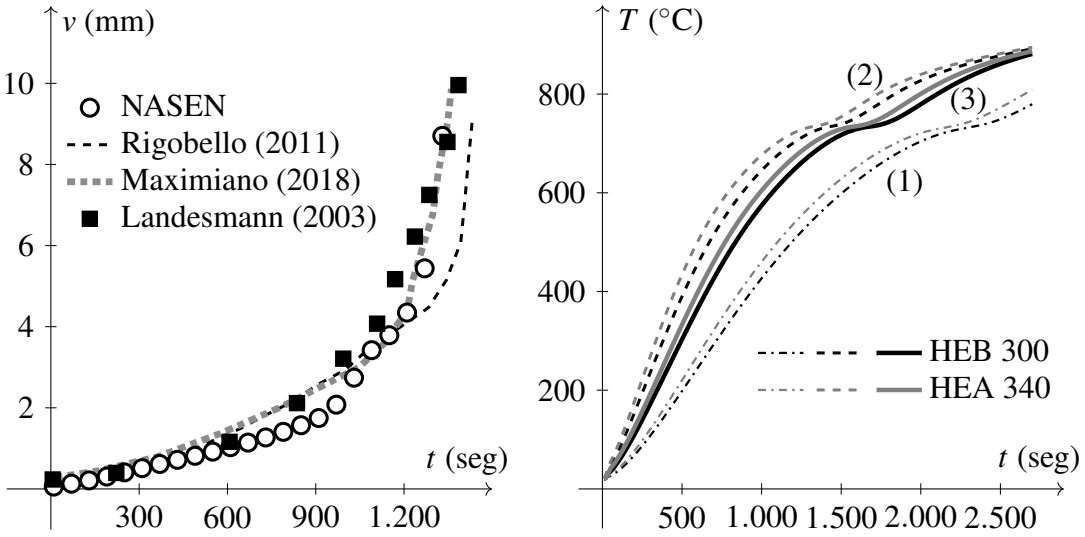

Figura 177 – Curva de deslocamento horizontal do pórtico Vogel em relação ao tempo de exposição ao fogo e evolução de temperatura nos perfis HEB 300 e HEA 340

Como pode-se observar, por conta da condição térmica assimétrica imposta (3 faces expostas ao fogo), a temperatura na mesa superior atinge menores valores em comparação aos outros componentes do perfil. Em relação aos resultados mecânicos, os deslocamentos obtidos com o programa NASEN apresentam um comportamento satisfatório quando comparados com os resultados dos modelos numéricos da literatura.

7.4.1.7 Pórtico de aço de 3 andares

Verifica-se, com base no modelo computacional NASEN, o comportamento termoestrutural de um pórtico metálico com três andares com uma imperfeição inicial sujeito aos carregamentos horizontais e verticais, conforme esquematizado na Figura 178. Esse exemplo foi estudado primeiramente por McNamee e Lu (1972). Em Souza Júnior e Creus (2007), esse problema é apresentado sob ação de um incêndio localizado no segundo andar.

Em relação aos parâmetros adotados, utiliza-se uma força P com módulo igual a 30 kN e o módulo de elasticidade do aço é 200 GPa. As vigas são constituídas por um perfil W150×100×24 mm, enquanto, os pilares são formados pelo perfil W100×100×19,3 mm. Os fatores de redução e o alongamento do aço, em função da temperatura, tem como base as recomendações do EN 1993-1-2:2005. Além disso, para a simulação computacional, considera-se o sistema estrutural discretizado em 15 elementos finitos unidimensionais.

A Figura 179 apresenta o deslocamento horizontal medido na extremidade direita do pórtico em função do aumento de temperatura. Os valores obtidos, relativos ao deslocamento horizontal no pórtico, exibem resultados razoavelmente satisfatórios, apresentando um comportamento ligeiramente mais conservador após o aquecimento exceder 300°C.

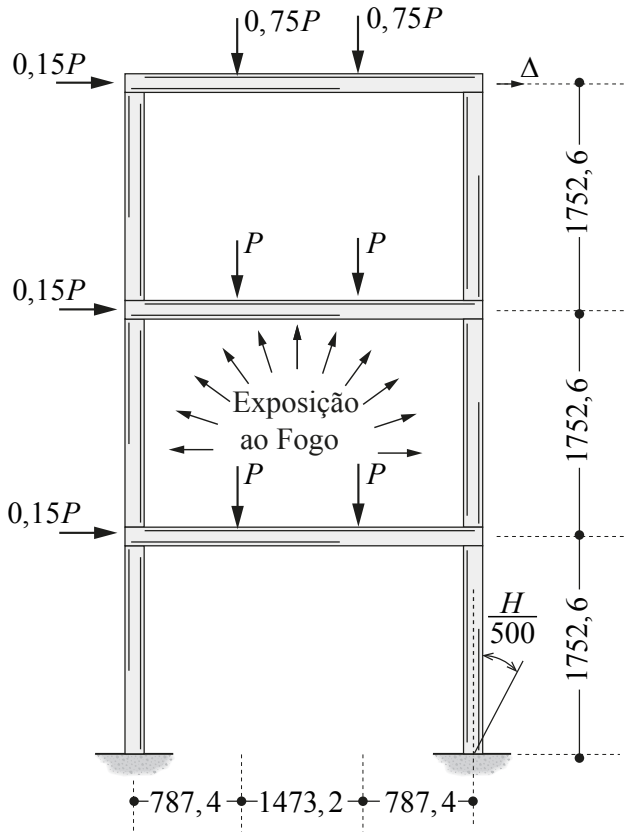

Figura 178 – Esquema e características do pórtico de aço de 3 andares com imperfeição inicial exposto ao fogo, dimensões em mm

Adicionalmente, como pode-se observar na Figura 179, o ponto crítico de temperatura obtido pelo programa computacional NASEN é um pouco menor em relação aos resultados obtidos com as soluções de referência encontradas na literatura. Todavia, em modo geral, o programa desenvolvido foi capaz de simular adequadamente o comportamento do pórtico.

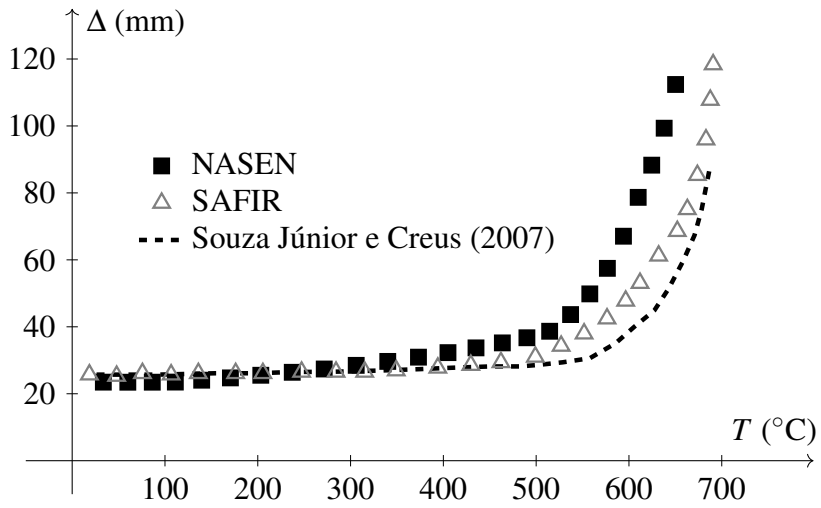

Figura 179 – Evolução do deslocamento horizontal Δ avaliado na extremidade direita do pórtico de 3 andares em função da temperatura

7.4.2 EXEMPLOS DE ESTRUTURAS DE CONCRETO

Os casos testes destinados ao comportamento de estruturas envolvendo concreto são constituídos por elementos isolados de vigas e pilares de concreto armado, bem como um pórtico simples de concreto em condição de incêndio. Para avaliação de perfomance do programa NASEN, em todas as simulações computacionais, são utilizados os dados de ensaios experimentais e resultados numéricos disponíveis na literatura.

7.4.2.1 Viga de concreto armado com carga simétrica sob ação de incêndio

Dotreppe e Franssen (1985) estudaram o comportamento termomecânico de uma viga de concreto armado biapoiada em situação de incêndio. O aquecimento da estrutura segue o modelo de incêndio padrão ISO 834, tendo somente três faces expostas ao fogo. A viga é solicitada por um carregamento simétrico constituído por duas forças concentradas com módulos iguais a 32,5 kN, localizadas a uma distância de 1,625 m das extremidades da estrutura, conforme ilustrado na Figura 180.

Em relação às propriedades físicas adotadas no caso, considera-se uma tensão de escoamento das armaduras e o módulo de elasticidade do aço iguais a 300 MPa e 210 GPa, respectivamente. A resistência característica do concreto à compressão foi tomado igual a 15 MPa e adota-se também o concreto contendo agregado silicoso. Em relação aos parâmetros utilizados na simulação computacional, emprega-se um passo de tempo de 10 segundos, a seção transversal é discretizada em 530 elementos triangulares lineares e a viga é particionada em 10 elementos finitos unidimensionais.

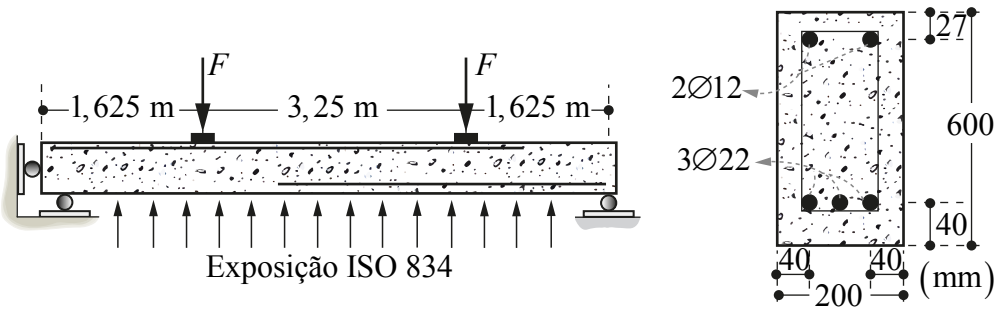

Figura 180 – Viga biapoiada de concreto armado com carregamento externo simétrico e detalhamento da seção transversal submetida ao incêndio em três faces

Na Figura 181, apresenta-se o aumento de temperatura na barra de aço em função do tempo de exposição ao fogo, onde se observa a boa concordância com os dados experimentais e com os resultados numéricos da literatura, conforme visto em Dotreppe e Franssen (1985) e Prakash e Srivastava (2018).

Após verificar o desempenho satisfatório do programa NASEN na predição do campo de temperatura ao nível da seção transversal, busca-se verificar o comportamento mecânico da viga em condição de altas temperaturas. Além das referências utilizadas anteriormente na análise

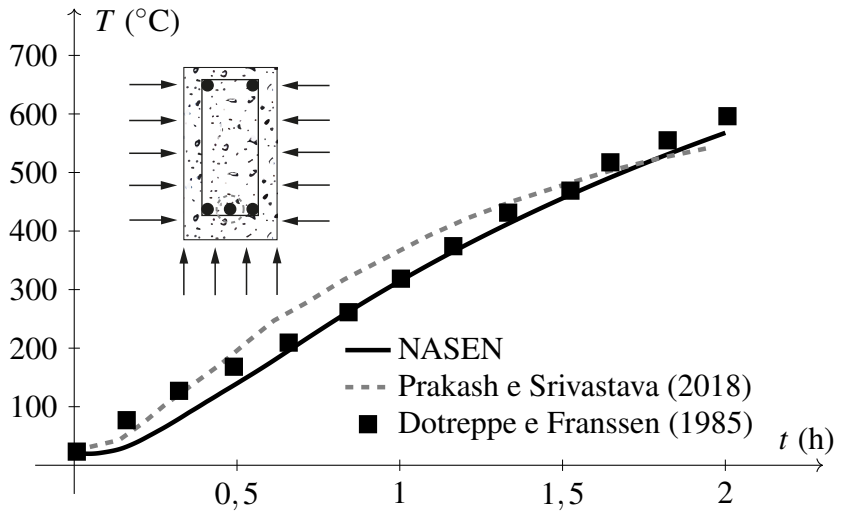

Figura 181 – Comparação de resultados para evolução de temperatura na armadura de aço da seção transversal de concreto armado

térmica, utilizam-se os resultados do programa SAFIR, sendo que os dados do programa são extraídos no trabalho de Prakash e Srivastava (2018). O comportamento mecânico é direcionado pela análise da deflexão no meio vão da viga de concreto armado. Sendo assim, a Figura 182 apresenta o histórico de deslocamento ao longo do tempo de exposição ao incêndio.

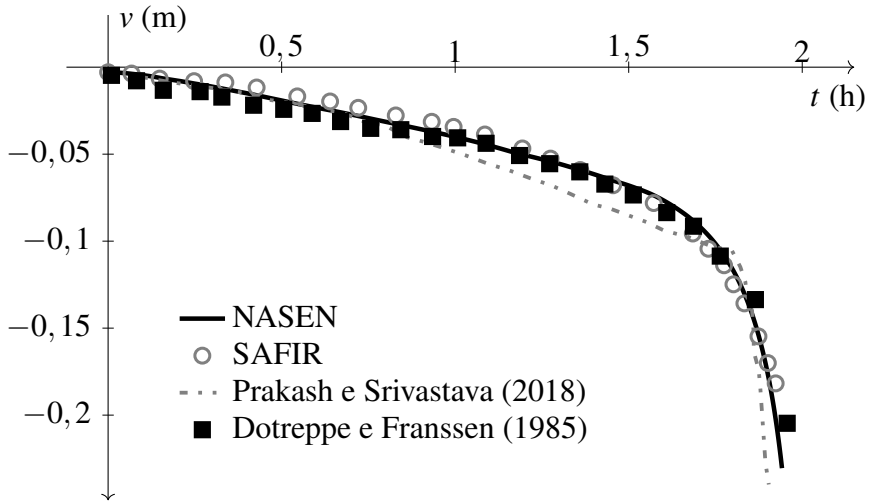

Figura 182 – Curva de deslocamento vertical no centro da viga simplesmente apoiada de concreto armado em função do tempo de exposição ao fogo

Os resultados obtidos, em relação ao deslocamento vertical, com o programa desenvolvido na presente pesquisa mostram um comportamento parelho em relação ao ensaio experimental. Em comparação aos resultados numéricos, o programa NASEN apresenta um comportamento similar com o programa SAFIR. Nota-se também que a estrutura foi exposta ao fogo por aproximadamente 2 horas, atingindo um deslocamento máximo em torno de 23 cm.

7.4.2.2 Viga biapoiada de concreto com balanço e cargas concentradas

Nesta seção, analisa-se numericamente o comportamento termomecânico de uma viga de concreto armado biapoiada com balanço na extremidade direita em situação de incêndio. A estrutura é submetida a um incêndio descrito pela curva ASTM E119, onde considera-se somente três faces da seção transversal de concreto armado expostas ao fogo. Esse exemplo faz parte da série de testes experimentais realizados no Laboratório de Tecnologia de Construção da Associação de Cimento de Portland por Ellingwood e Lin (1991). A viga é construída com um balanço de 1830 mm e uma extensão entre os apoios de 6100 mm.

O incêndio atua somente no vão central entre os apoios, enquanto, o balanço é mantido em temperatura ambiente. O detalhamento da seção transversal de concreto e demais dimensões são ilustradas na Figura 183. As cargas concentradas aplicadas ao longo do comprimento, entre os apoios da viga, são iguais e com módulo de 44,48 kN. Na parte em balanço da viga, a força aplicada é igual 111,2 kN.

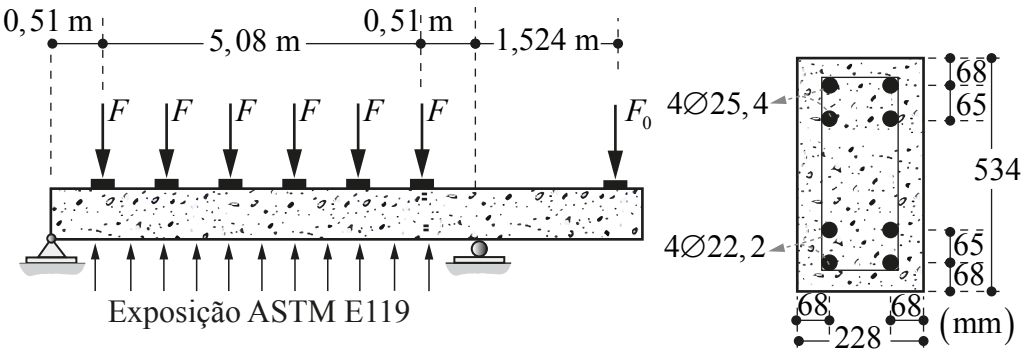

Figura 183 – Esquema do modelo estrutural e detalhamento da seção transversal da viga concreto armado em condição de incêndio

Além disso, a tensão de escoamento das barras de aço e a tensão de compressão do concreto são iguais a 509,54 MPa e 29,65 MPa, respectivamente. Esse exemplo, além dos testes experimentais, também foi estudado numericamente por diversos autores, como pode ser visto em Liao e Huang (2015), Caldas (2008), Cai, Burgess e Plank (2003) e Maximiano (2018).

A primeira análise do problema é destinada ao processo de validação do aumento de temperatura nas barras de aço da seção, tais resultados são apresentados na Figura 184. Nota-se que a evolução de temperatura nas armaduras inferiores e superiores da seção de concreto armado apresentam resultados coerentes com valores próximos aos dados experimentais e numéricos da literatura.

Observa-se que as armaduras superiores apresentam níveis de temperaturas ligeiramente menores que as armaduras inferiores de aço, uma vez que a face superior da seção de concreto não está exposta ao incêndio. As curvas de temperatura-tempo são parâmetros importantes para avaliar a performance do modelo numérico, contudo, outra forma de visualizar a resposta térmica é por meio do campo bidimensional de temperatura da seção transversal, onde é possível verificar

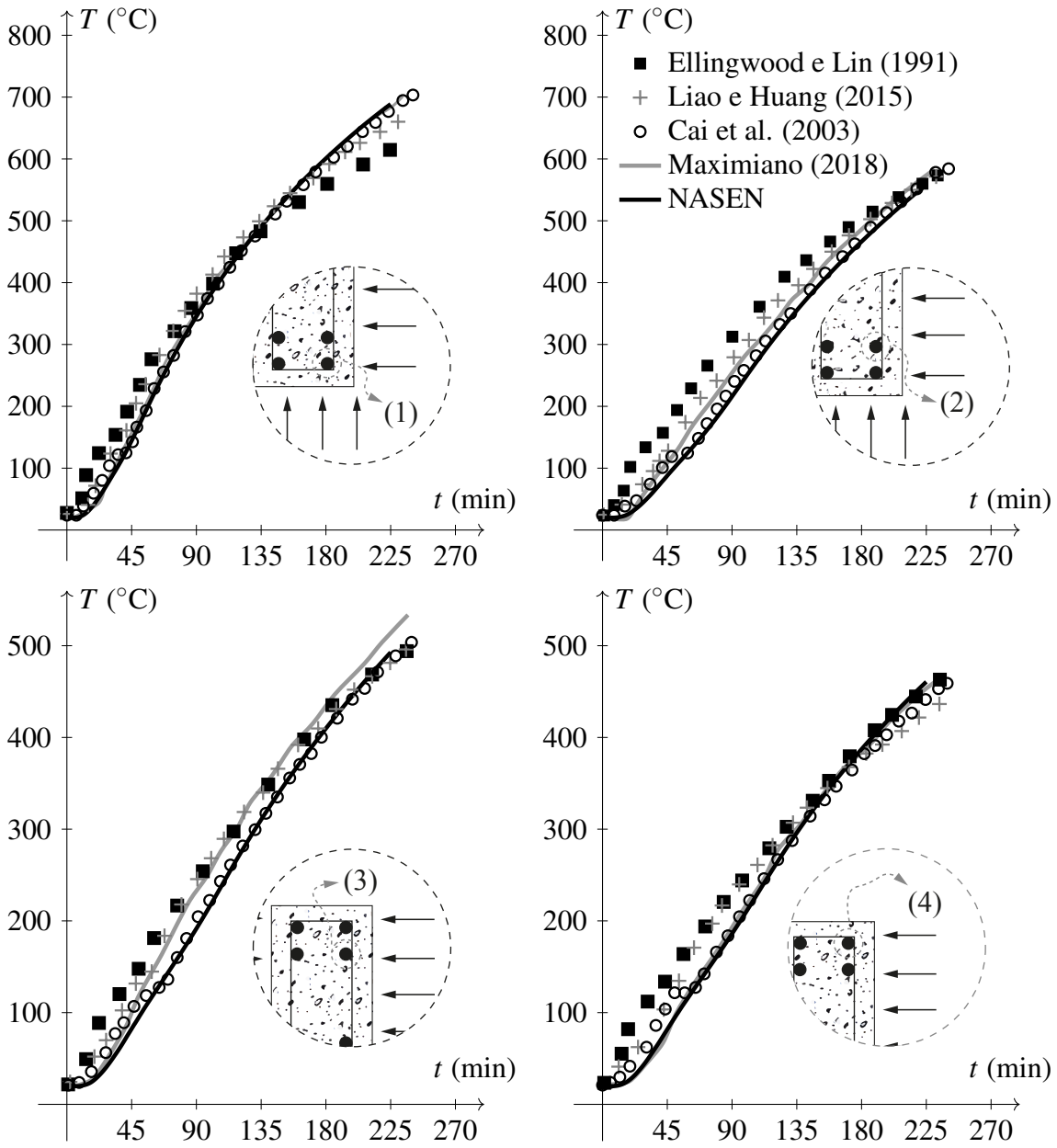

Figura 184 – Evolução de temperatura nas barras de aço inferiores (1) e (2), e superiores (3) e (4) contidas na seção transversal da viga de concreto armado

as regiões críticas e estimar qualitativa o comportamento da variação de temperatura no domínio. Sendo assim, a Figura 185 apresenta a distribuição de temperatura na seção de concreto armado para 30, 90 e 180 min de exposição ao fogo.

Por fim, o comportamento estrutural em condição de incêndio é direcionado pela evolução do deslocamento vertical medido no meio vão entre os apoios da viga. A avaliação de desempenho é realizada com base nos dados experimentais e nos resultados numéricos encontrados na literatura, conforme os trabalhos citados anteriormente. Os resultados obtidos em relação ao deslocamento vertical, por meio da simulação computacional com o programa NASEN, apresentam valores razoavelmente aceitáveis, como mostrado na Figura 186. Nota-se que os

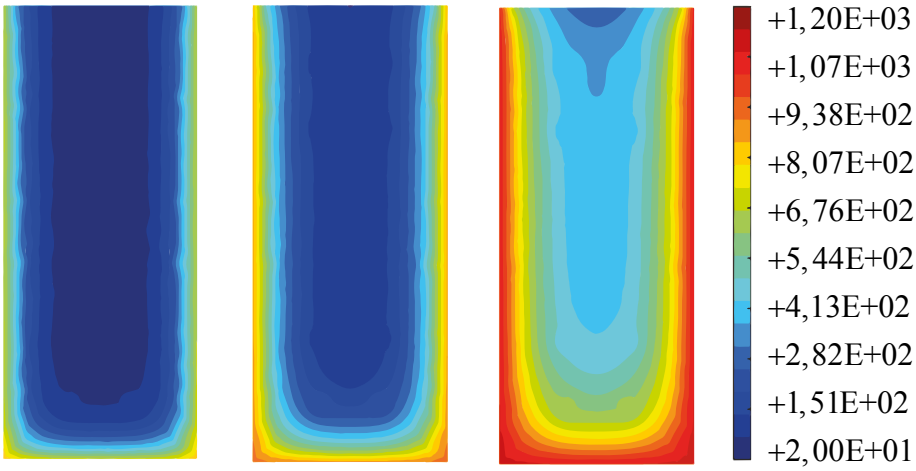

Figura 185 – Distribuição de temperatura (°C) na seção transversal de concreto armado para 30, 90 e 180 min de exposição ao fogo

resultados exibem as melhores concordâncias com os testes experimentais no intervalo de tempo entre 45 e 200 min.

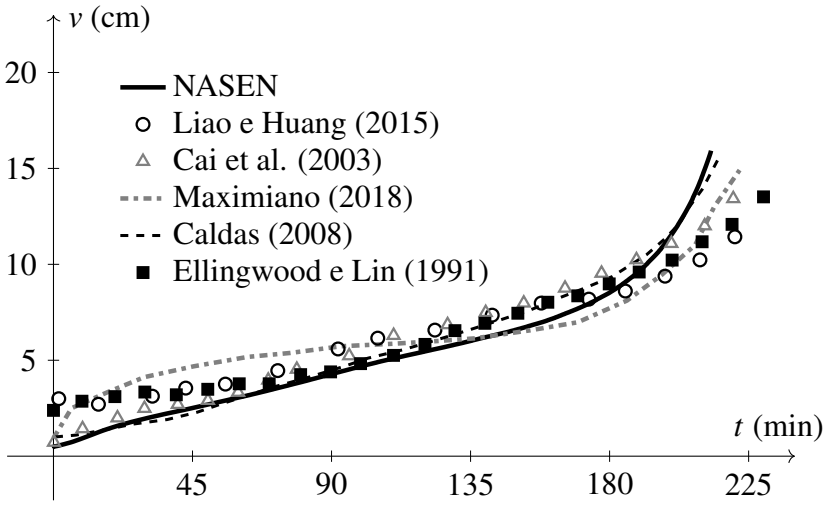

Figura 186 – Curva de deslocamento vertical avaliado no centro da viga simplesmente apoiada de concreto armado com balanço

Após uma analisada qualitativa do comportamento da curva de tempo-deslocamento, mostrado na Figura 186, fora do intervalo de tempo mencionado anteriormente, o modelo numérico apresenta valores ligeiramente diferentes aos resultados experimentais. Todavia, o desempenho da solução obtida pelo programa NASEN assemelha-se com o comportamento numérico do modelo numérico desenvolvido por Caldas (2008).

7.4.2.3 Viga de concreto armado com carga distribuída uniforme

Dentre a série de testes experimentais realizados por Wu et al. (1993) no *Tianjin Fire Research Institute* (TFRI), estuda-se no presente trabalho a viga simplesmente apoiada de concreto armado sujeita a um carregamento uniformemente distribuído, representativo da combinação

entre a carga aplicada e o peso próprio da laje. A seção transversal é considerada retangular com dimensões iguais a 200×400 mm com armaduras de diâmetro de 10, 12 e 14 mm. O modelo estrutural e a disposição das barras de aço da seção da viga são apresentadas na Figura 187.

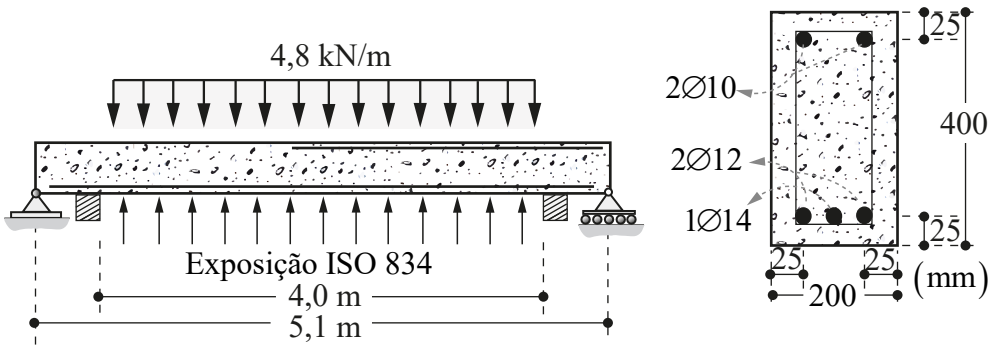

Figura 187 – Condições de contorno do modelo estrutural e disposições geométricas das barras de aço da seção transversal de concreto armado

Em relação aos parâmetros físicos do aço e do concreto, a resistência característica à compressão do concreto é igual a 23,1 MPa, o módulo de elasticidade e a tensão de escoamento das armaduras de aço são iguais a 210 GPa e 240 MPa, respectivamente. A viga é submetida a um incêndio descrito pela curva ISO 834:1999, atuando na face inferior e nas laterais da seção transversal de concreto armado.

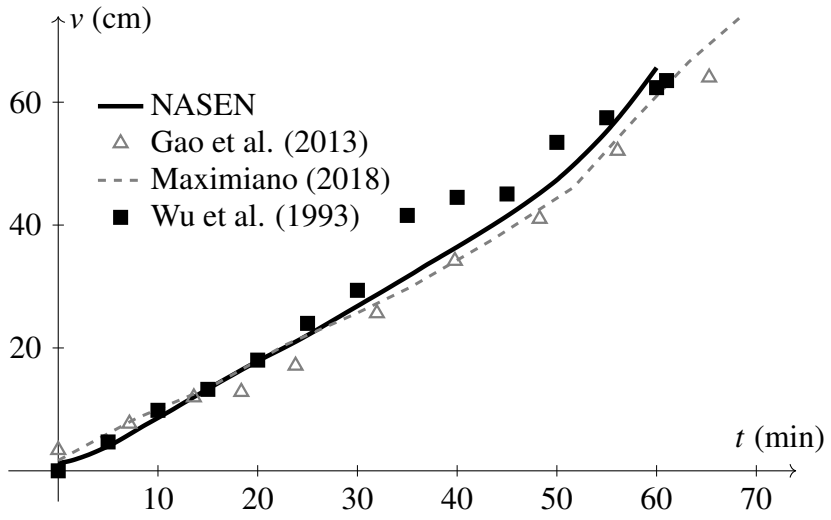

Figura 188 – Deslocamento vertical na posição $x = L/2$ da viga de concreto armado em função do tempo de exposição ao incêndio

Em relação aos dados de entrada da simulação computacional, adota-se um passo de tempo de 10 s, uma malha bidimensional composta por 526 elementos finitos triangulares lineares e o modelo estrutural discretizado em 10 elementos unidimensionais de barra. A comparação de resultados é feita com base nos dados dos testes experimentais obtidos em Wu et al. (1993) e nos resultados provenientes de simulações computacionais extraídos das pesquisas de Gao et al. (2013) e de Maximiano (2018).

Avalia-se a resposta mecânica da viga para um tempo de aproximadamente 60 min de exposição ao fogo, conforme pode-se observar na Figura 188. A curva de deslocamento vertical máximo em função do tempo de exposição ao fogo apresenta uma boa aderência com as soluções numéricas da literatura e com as previsões experimentais.

7.4.2.4 Coluna de concreto armado sob ação de uma carga excêntrica

Na *Technical Univesity of Braunschweig*, Hass (1986) realizou uma série de testes experimentais em escala real de colunas de concreto armado expostas ao fogo. Dentre os testes realizados, três desses casos são estudados numericamente em Bamonte e Monte (2015). Para as presentes análises numéricas, os casos são denominados como Hass 1, Hass 16 e Hass 21, caracterizados por uma coluna de concreto armado com seção quadrada submetida ao aquecimento da curva ISO 834:1999, conforme mostra a Figura 189. Em todos os testes numéricos realizados, considera-se que a coluna de concreto é discretizada em 7 elementos unidimensionais de viga-coluna e a malha da seção transversal é formada por 618 elementos finitos planos do tipo triangular linear. Além disso, o módulo de elasticidade das barras de aço é igual a 210 GPa.

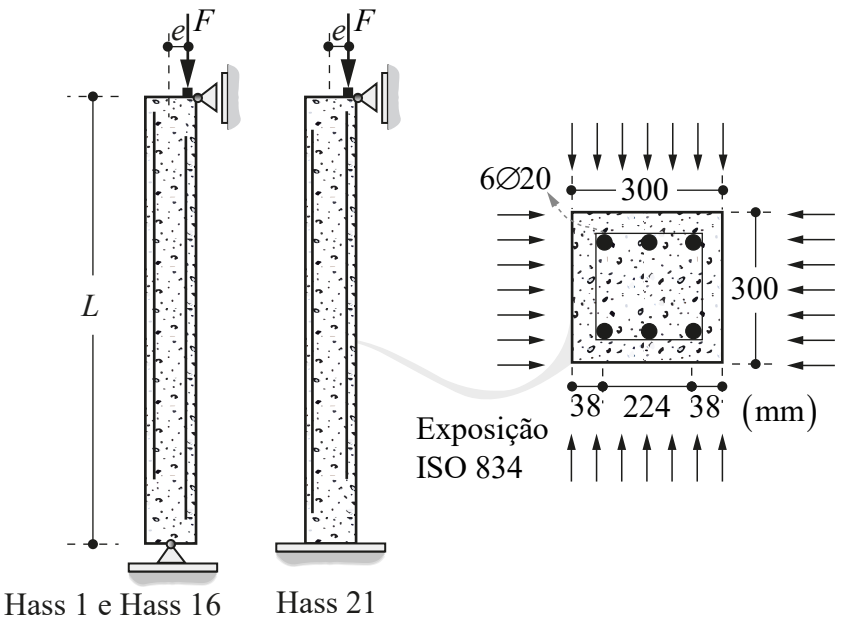

Figura 189 – Esquema das vinculações das colunas submetidas à ação de uma carga excêntrica e detalhamento da seção transversal de concreto armado

Na primeira configuração, adota-se um comprimento igual a 3,76 m, uma força axial de 710 kN, uma excentricidade igual a 3 cm, um módulo de elasticidade e a tensão de escoamento do aço iguais a 210 GPa e 487 MPa, respectivamente, enquanto, a tensão característica de compressão do concreto é igual a 24,1 MPa. Os resultados são baseados na análise da evolução do deslocamento axial medido na metade da coluna de concreto armado, conforme apresenta a Figura 190.

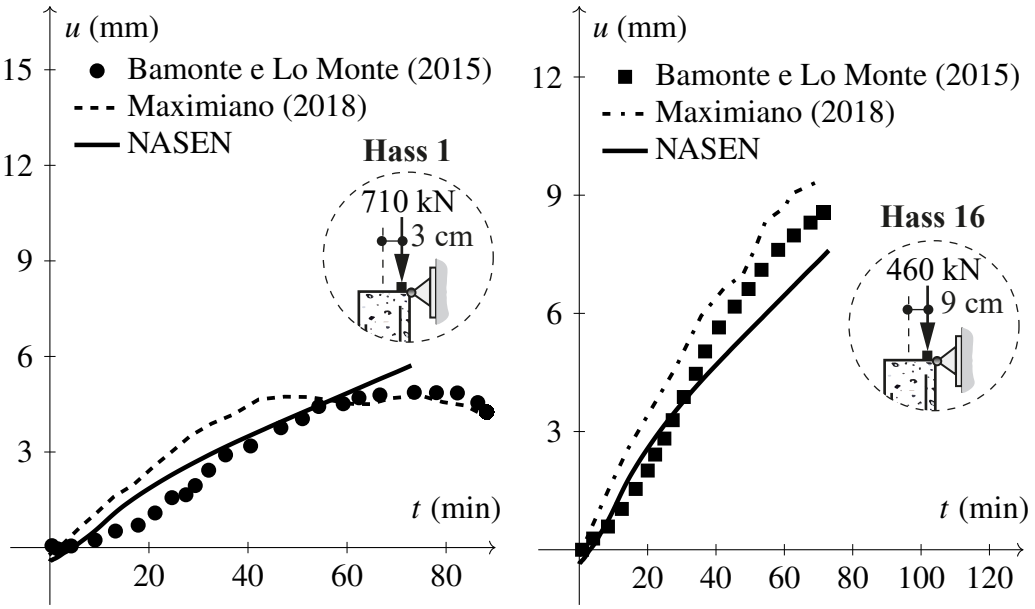

Figura 190 – Variação do deslocamento horizontal em função do tempo de exposição ao fogo para as colunas Hass 1 e Hass 16

As soluções numéricas obtidas no trabalho de Maximiano (2018) e Bamonte e Monte (2015) são utilizadas para a calibração da performance do programa NASEN. Os resultados mostram-se com uma boa concordância em relação aos dados da literatura, contudo, observa-se que os valores obtidos com programa desenvolvido indicam um tempo de falha menor que as previsões da literatura, apresentando uma característica conservadora.

No segunda configuração, considera-se um comprimento igual a 4,76 m, uma força axial de 460 kN, uma excentricidade de 9 cm, a tensão de escoamento do aço é 462 MPa e a tensão característica de compressão do concreto é igual a 30,7 MPa. Nessa configuração, a solução obtida apresenta uma melhor concordância, atingindo um tempo de falha de aproximadamente 75 min, conforme pode ser visto na Figura 190.

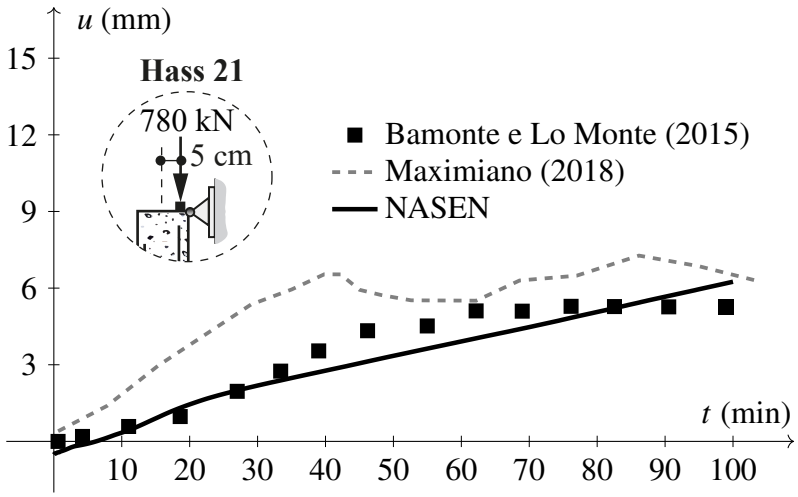

Figura 191 – Variação do deslocamento horizontal em função do tempo de exposição ao fogo para a coluna Hass 21

Na terceira configuração, o comprimento da coluna é igual a 3,8 m, a carga axial é de 780 kN, a excentricidade é igual a 5 cm, a tensão de escoamento do aço é 418 MPa e a tensão característica de compressão do concreto é igual a 33,2 MPa. Na Figura 191, apresenta-se a comparação dos comportamentos entre as curvas obtidas pelo programa NASEN e numéricas da literatura. Nota-se, novamente, que os resultados são aceitáveis, destacando que comportamento do código computacional desenvolvido apresenta uma evolução do deslocamento sem muitas oscilações repentinas em cada passo de tempo de exposição ao fogo.

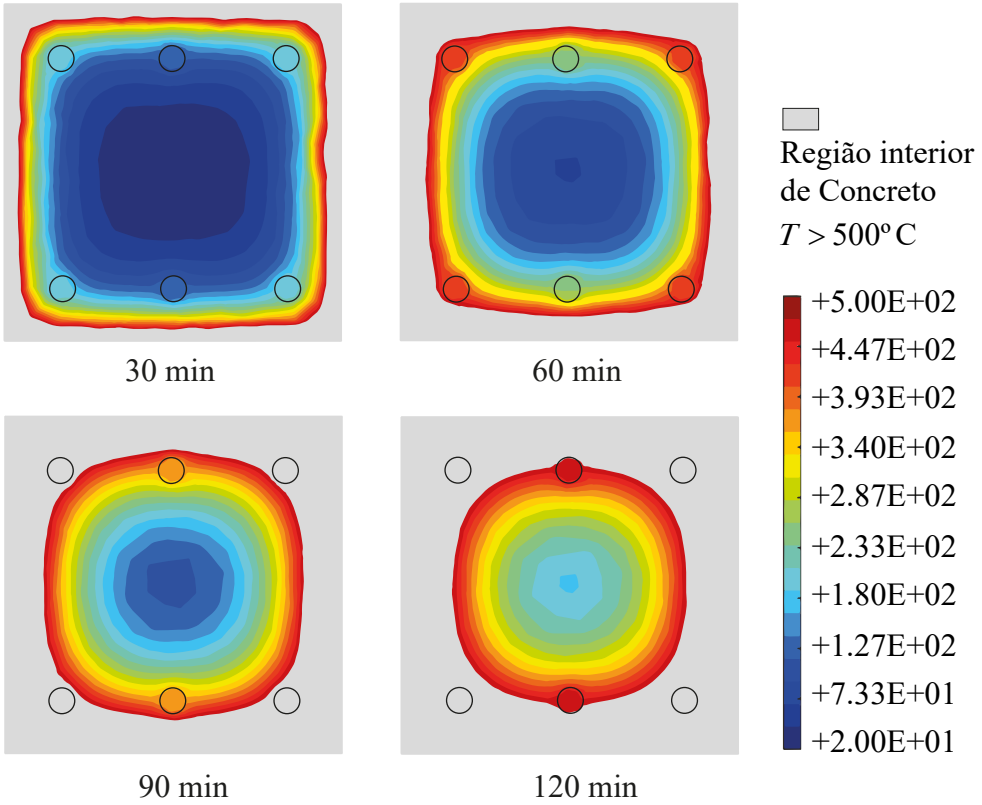

Figura 192 – Representação da região interna de concreto inferior a isoterma de 500°C

Adicionalmente, em projeto e dimensionamento de estruturas, usualmente, aplicam-se os métodos simplificados de cálculo, por exemplo, o método da isoterma de 500°C para estruturas de concreto em situação de incêndio, conforme descrito no EN 1992-1-2:2004. Utilizando as características da coluna Hass 16, a Figura 192 mostra a seção efetiva representativa de uma região de concreto da seção transversal no interior da isoterma de 500°C para 30, 60, 90 e 120 min de exposição ao fogo, assumindo que o concreto com temperatura superior a 500°C é completamente negligenciado. De maneira simplificada, o concreto contido na região interior não é afetada pelo fogo, considerando as propriedades do material em temperatura ambiente (SUAZNABAR; SILVA, 2018). Além disso, realiza-se uma análise adicional simples acerca da investigação da influência do cobrimento da coluna de concreto armado exposto ao fogo. Na Tabela 25, apresenta-se o valor de temperatura, para um cobrimento de 10, 25, 38 e 45 mm, medido na armadura de aço superior, sendo a região mais aquecido pelo fogo e desfavorável para a segurança.

Para fins de comparação e discussão dos resultados obtidos com o programa computacional NASEN, adota-se o valor simplificado de 550°C como temperatura de referência da armadura de aço da seção de concreto. Esse valor não está prescrito em normas e é utilizado apenas como um valor de referência para o presente estudo, uma vez que para temperaturas acima desse valor, o aço apresenta uma redução significativa na sua rigidez e na sua resistência.

Tabela 25 – Temperatura na armadura de aço (°C) em relação aos valores de cobrimento da coluna de concreto e o tempo de exposição ao incêndio.

Tempo	**Cobrimento (mm)**			
(min)	10	25	38	45
30	545,17	330,71	202,96	152,46
60	737,82	556,04	414,72	348,89
90	867,69	685,41	547,91	479,99
120	942,66	760,40	644,35	577,53

Como pode ser observado na Tabela 25, as armaduras de aço do pilar de concreto ficam expostas a altas temperaturas quando os valores do cobrimento são menores, o que pode trazer graves riscos à segurança da estrutura. Em contrapartida, com maiores valores de cobrimento do pilar de concreto, os níveis de temperatura diminuem. No entanto, deve-se verificar a adequação do detalhamento das armaduras e as exigências na elaboração do projeto estrutural, a fim de atender os requisitos de resistência e segurança contra incêndio.

7.4.2.5 Pórtico simples de concreto

Analisa-se, numericamente, um pórtico simples de concreto armado sob elevadas temperaturas. Esse exemplo foi apresentado no FIB FIB (2008) e estudado também por Xavier (2009) e Maximiano (2018). Na Figura 193, apresenta-se as características, os carregamentos externos e as condições de contorno do problema físico.

O aquecimento do pórtico de concreto segue a curva de incêndio-padrão ISO 834:1999 e as colunas em cima da viga são mantidas em temperatura ambiente. A partir disso, o programa computacional NASEN deve identificar os elementos de barra que estão expostos ao fogo, visando construir o vetor de engastamento térmico para cada elemento nessa condição. Além disso, utiliza-se um concreto com agregado silicoso, a resistência característica de compressão é igual a 30 MPa e as armaduras de aço possuem um diâmetro de 20 mm com módulo de elasticidade e tensão de escoamento de aço iguais a 200 GPa e 500 MPa, respectivamente.

No trabalho de Maximiano (2018), onde foi desenvolvido e aplicado o sistema computacional avançado CS-ASA, pode-se encontrar o detalhamento e as demais informações acerca do problema físico estudado. Além disso, por causa da simetria da geometria do sistema e dos carregamentos externos aplicados na estrutura, pode-se analisar somente metade do pórtico de concreto exposto ao fogo, diminuindo o custo computacional durante a simulação do problema,

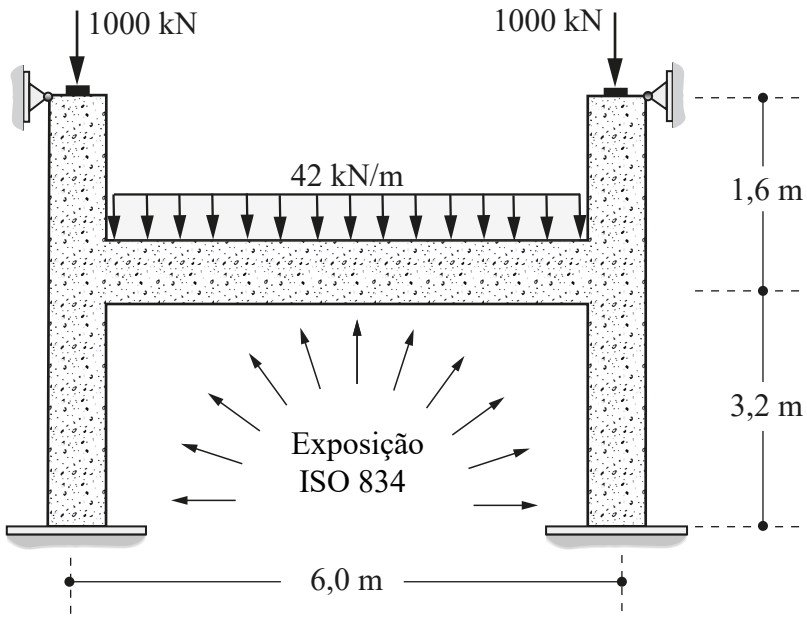

Figura 193 – Geometria, condições de suporte e carregamentos do pórtico simples de concreto em condição de incêndio

no enquanto, deve-se assegurar a correta imposição da condição de contorno no modelo estrutural simplificado, a fim de garantir a natureza simétrica do problema físico.

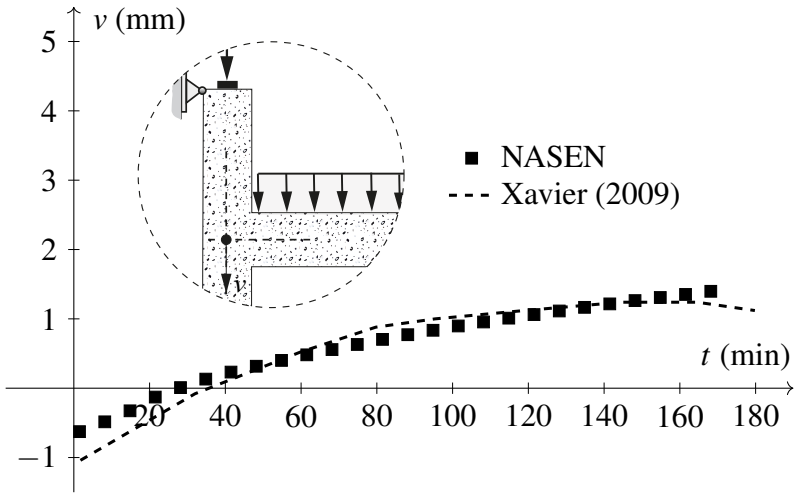

Figura 194 – Deslocamento vertical do pórtico simples de concreto em função do tempo de exposição ao incêndio

A avaliação de desempenho do programa NASEN é realizado com base na análise do deslocamento medido na ligação entre viga e coluna. Na Figura 194, mostra-se os resultados obtidos pelo modelo numérico desenvolvido em comparação com os dados numéricos obtidos no trabalho de Xavier (2009), onde nota-se uma boa concordância entre as curvas numéricas.

7.4.3 EXEMPLOS DE ESTRUTURAS MISTAS

A investigação inicial de caráter puramente numérico acerca do comportamento de estruturas mistas de aço e concreto é realizada por meio da análise de vigas mistas em situação de incêndio. São estudadas duas aplicações usuais na engenharia, o primeiro exemplo é uma viga mista constituída por um perfil I de aço sem proteção térmica, com sua mesa superior em contado com uma laje de concreto. O segundo exemplo é uma viga mista com o perfil de aço parcialmente envolvido por concreto.

7.4.3.1 Viga mista de concreto e aço sob elevadas temperaturas

Investiga-se, numericamente, o comportamento térmico e mecânico de uma viga mista de aço e concreto submetida a quatro cargas concentradas iguais P com intensidade de 62,36 kN e exposta ao incêndio-padrão ISO 834:1999 na face inferior da viga. Sendo assim, as dimensões e detalhes acerca da estrutura são apresentados na Figura 195. O sistema de vinculação adotado no modelo estrutural possibilita, na extremidade esquerda, a rotação, enquanto, no apoio direito, o deslocamento horizontal e a rotação são livres. O exemplo analisado nessa seção é reportado, inicialmente, aos ensaios realizados por Wainman e Kirby (1987) e, posteriormente, estudado numericamente por Huang, Burgess e Plank (1999).

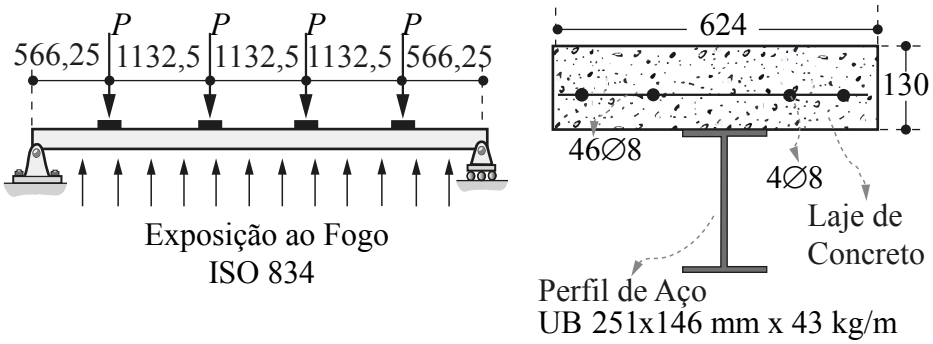

Figura 195 – Esquema do modelo estrutural em situação de incêndio e detalhamento da seção transversal da viga mista (dimensões em mm)

A seção transversal do problema é constituída por uma laje de concreto com armaduras transversais e longitudinais apoiada em um perfil de aço UB $254\times146\times43$ mm. As malhas numéricas adotadas para a discretização da seção transversal e do sistema estrutural são, respectivamente, iguais a 413 elementos planos triangulares lineares e 6 elementos finitos unidimensionais.

A Figura 196 apresenta a distribuição de temperatura ao nível da seção transversal para 30, 60 e 120 min de exposição ao fogo, bem como a malha da discretização 2D utilizada na simulação computacional do problema. Como pode-se observar, os níveis de temperatura no perfil de aço são praticamente constantes, enquanto, na laje de concreto, pode-se notar a presença de gradientes térmicos.

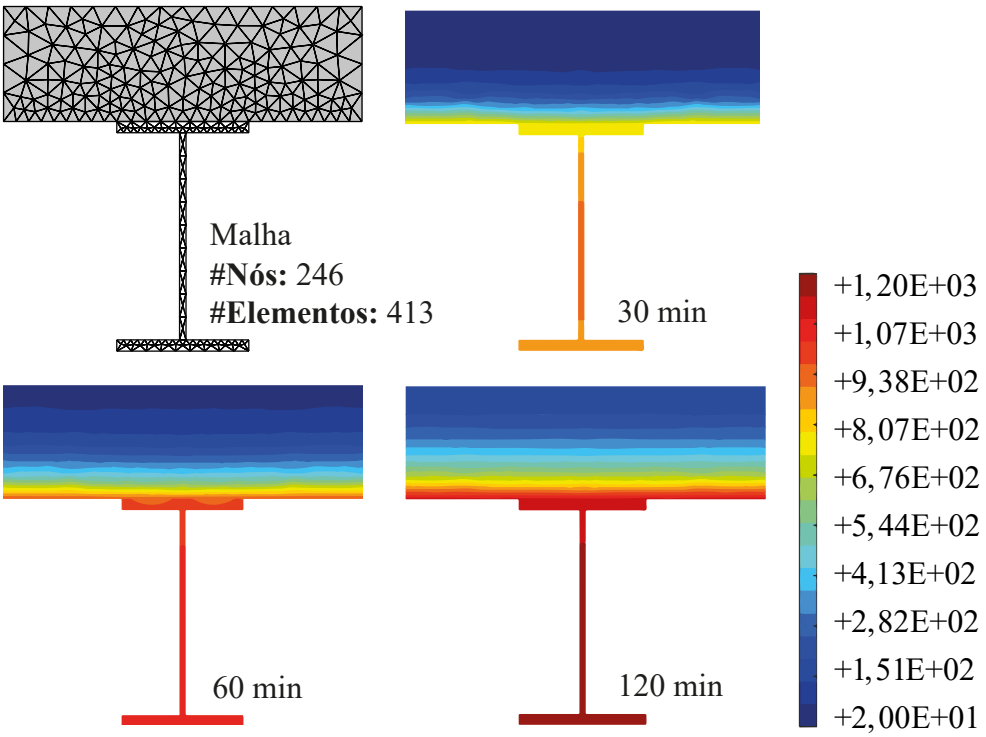

Figura 196 – Malha de elementos finitos e campo térmico bidimensional da viga mistas para 30, 60 e 120 min de exposição ao incêndio padrão

Na Figura 197, mostra-se a deflexão vertical máxima na viga em função do aumento de temperatura na mesa inferior do perfil de aço. Os resultados numéricos, obtidos com o programa NASEN, apresentam uma boa similaridade em comparação aos testes experimentais e em relação ao modelo numérico da literatura. Nota-se que a solução numérica baseada no programa desenvolvido apresenta, ao longo do aumento de temperatura na estrutura, um comportamento mais conservador em comparação aos resultados experimentais.

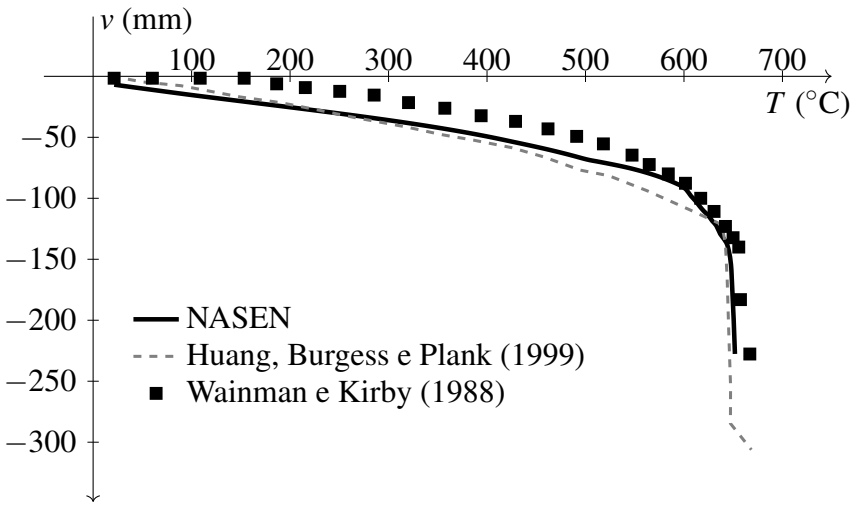

Figura 197 – Deslocamento vertical no meio do vão da viga mista em função da temperatura

7.4.3.2 *Viga mista simplesmente apoiada com seção parcialmente revestida*

Nesta seção, busca-se verificar o comportamento termomecânico de uma viga mista de aço e concreto sujeita a um carregamento simétrico sob ação de elevadas temperaturas. A seção transversal do elemento estrutural é constituída por uma laje apoiada em um perfil parcialmente revestido de concreto exposto ao incêndio padrão ISO 834:1999, conforme mostra a Figura 198.

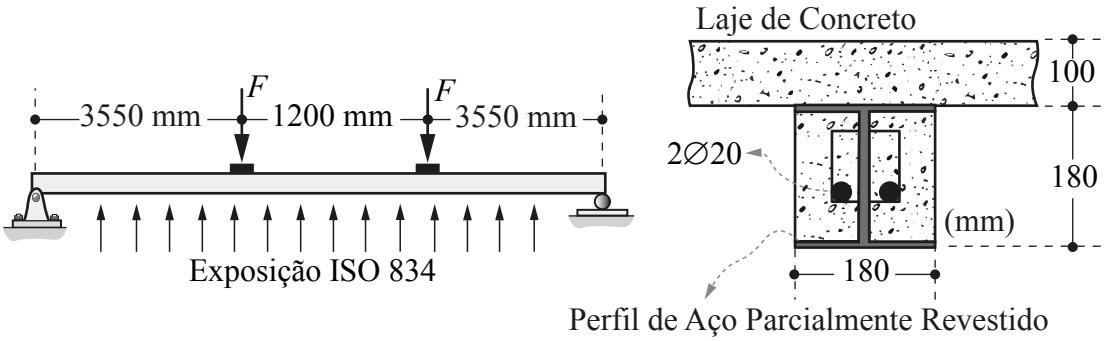

Figura 198 – Características da viga mista e detalhes da seção transversal

Dotreppe, Franssen e Schleich (1984) apresentam resultados numéricos e previsões experimentais, realizadas em *Technical University of Braunschweig*. Adota-se, para discretização da seção transversal e do modelo reticular estrutural, uma malha de 781 elementos triangulares lineares e 6 elementos de barra, respectivamente. A Figura 199 apresenta a validação dos resultados para a curva de temperatura e a deflexão da viga. Observa-se que os resultados obtidos com programa NASEN apresentam uma concordância razoável com os dados experimentais.

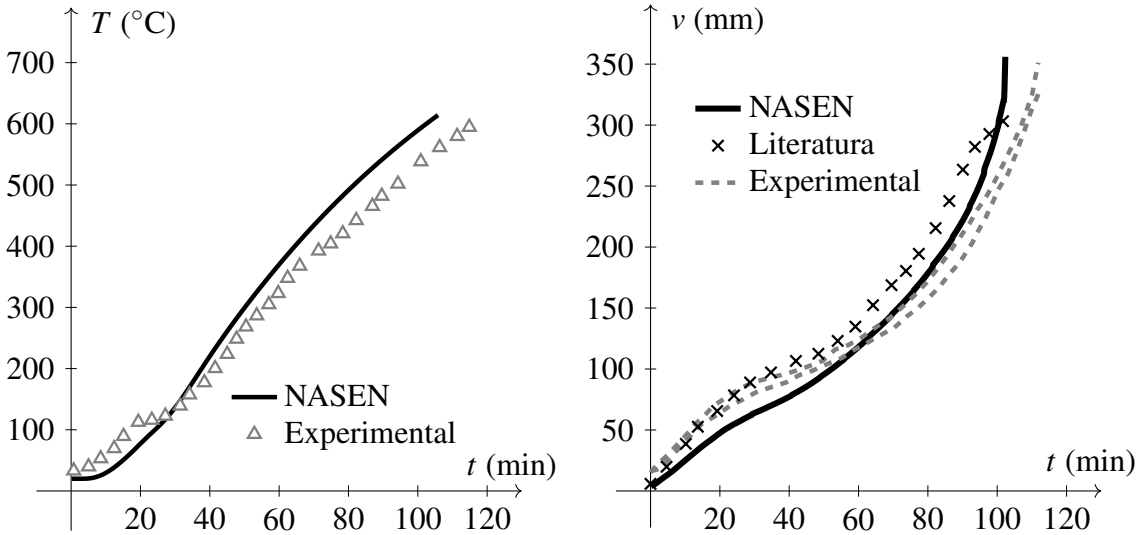

Figura 199 – Evolução da temperatura e a deflexão no meio do vão da viga mista

Adicionalmente, a Figura 200 exibe a malha bidimensional com 477 nós e 879 elementos do tipo triangular linear de três nós empregada na discretização da seção transversal e a distribuição de temperatura para 105 min de exposição ao fogo.

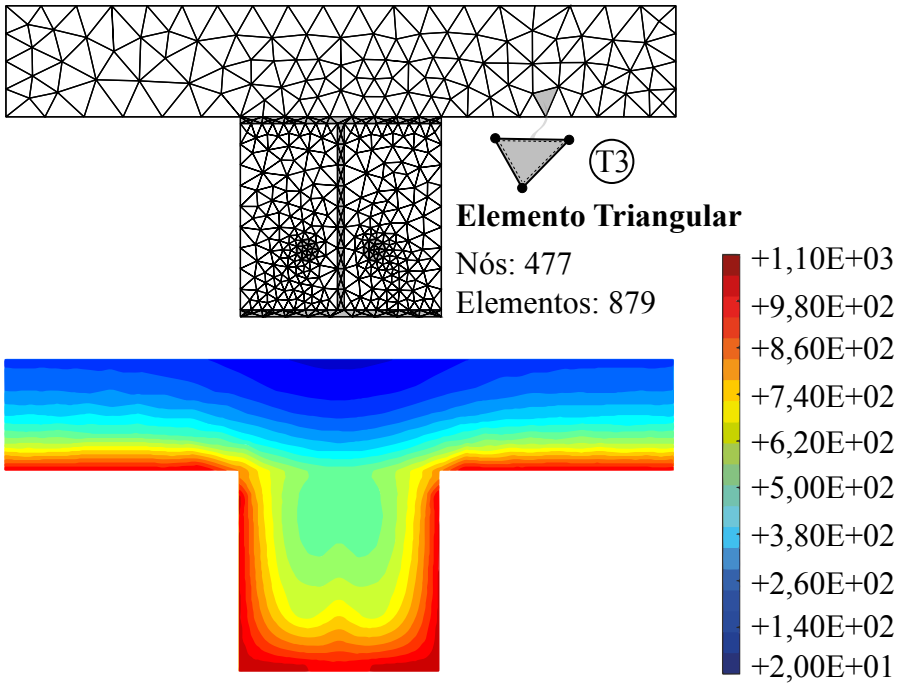

Figura 200 – Malha numérica e campo térmica (°C) para 105 min de exposição ao fogo

No campo térmico da seção transversal da viga mista constituída pelo perfil I de aço parcialmente envolvido por concreto em contato com a laje de concreto, as bordas inferiores da seção mista de aço-concreto são as regiões de maiores aquecimentos, uma vez que essas estão em contato direito com o incêndio.

8

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo apresenta-se um breve resumo das propostas, conclusões e dos problemas resolvidos no decorrer da presente pesquisa, bem como a avaliação geral acerca do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

8.1 SÍNTESE DA PESQUISA

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo computacional denominado de NASEN (*Numerical Analysis System for Engineering*) com base nos procedimentos numéricos de elementos finitos visando realizar análises de estruturas submetidas a elevados gradientes térmicos. Para tanto, primeiramente, o estudo é direcionado à análise da condução de calor em meio sólidos, tendo como objetivo principal determinar o campo de temperatura não uniforme nas seções transversais dos elementos estruturais sob ação do incêndio em suas fronteiras. Esse problema físico é descrito por um modelo matemático de natureza não linear e em regime transiente. São estudados, inicialmente, modelos simplificados associados as análises lineares unidimensionais e bidimensionais, e em regime estacionário e transiente. Para os problemas de natureza bidimensionais foram implementados quatro tipos de elementos finitos planos: os elementos triangulares de 3 e 6 nós, e quadrilaterais de 4 e 9 nós. Em adicional, a integração no tempo tem como base as premissas aproximativas da técnica de diferenças finitas e as propriedades físicas dos materiais, em função da temperatura, são descritas pelas expressões matemáticas recomendadas por normas técnicas vigentes.

Posteriormente, foi realizado uma análise preliminar acerca do comportamento dos modelos estruturais lineares clássicos da engenharia sob a ação dos efeitos por conta da variação de temperatura, fundamentados na teoria de estruturas unifilares, de placas delgadas e da elasticidade plana. Em um segundo momento, as avaliações foram direcionadas para a análise não linear geométrica de estruturas reticuladas planas e estáticas, onde foi implementado estratégias específicas de solução com base em processos incrementais-iterativos. Essas análises intermediárias são importantes para adquirir experiência de implementação e sensibilidade física acerca do comportamento e das características dos elementos estruturais.

Ao fim, a análise termomecânica é estabelecida no contexto de estruturas em condição de incêndio, visando acoplar as rotinas computacionais desenvolvidas para a análise térmica e estrutural. Neste cenário, as estruturas analisadas são constituídas de aço e/ou concreto, levando em conta a degradação das propriedades físicas e mecânicas com o aumento de temperatura. Os efeitos de origem térmica são considerados no modelo estrutural por meio dos esforços de engastamento perfeito. Em adicional, ao longo do incêndio, o carregamento externo aplicado na

estrutura é mantido constante e, em cada passo de tempo, existe um processo de convergência numérica associado ao vetor de temperaturas, ao nível da seção transversal, e ao vetor de deslocamentos nodais do sistema estrutural.

Em suma, em cada problema físico analisado com os programas computacional desenvolvidos, foram comparados e validados os resultados obtidos com base em soluções analíticas, numéricas ou medições experimentais disponíveis na literatura. Em seguida, são apresentadas as conclusões gerais acerca do trabalho.

8.2 CONCLUSÕES

No decorrer das experimentações e desenvolvimentos computacionais da pesquisa, as naturezas dos problemas estudados oscilam em aplicações didáticas-teóricas de engenharia e no contexto de incêndio, acarretando no surgimento dos módulos computacionais específicos de incêndio. Inicialmente, na análise térmica têm-se os testes acerca dos problemas clássicos com solução analítica conhecida de natureza linear e não linear, visando realizar uma validação e verificação preliminar dos códigos computacionais. Quando se avalia os problemas no contexto de incêndio, busca-se realizar inúmeros testes com problemas variando, por exemplo, as faces expostas ao fogo, o tipo de material, a curva dos gases e o tipo de revestimento contra fogo. Por conta da maior complexidade desses problemas, utilizam-se os resultados de testes experimentais, de métodos normativos simplificados ou de simulações computacionais disponíveis na literatura a fim de verificar o desempenho do programa. As respostas alcançadas em todas as classes de problemas propostos apresentam resultados precisos e bem próximos das soluções de referência. Além disso, pode-se concluir que as propriedades físicas dos materiais em situação de incêndio devem variar com a temperatura. Em relação ao concreto, o teor de umidade é uma variável que apresenta significativa influência na reposta térmica.

Para os casos destinados à análise linear de estruturas sob ação da variação de temperatura, os resultados mostram-se satisfatórios e bem ajustados com as soluções encontradas na literatura. Mesmo que os modelos estruturais adotados tenham suas simplificações é possível verificar a influência significativa dos efeitos térmicos no comportamento estrutural. Além disso, observa-se, no item 5.5.3.5, mesmo que a resposta tenha atingido uma boa aproximação, deve-se ressaltar a dificuldade numérica acerca do tratamento da descontinuidade contida no problema. Outro ponto importante é a aproximação das variáveis secundárias, como momento fletor, esforço cortante e tensão. Essas grandezas são determinadas no pós-processamento, carregando erros devido o decaimento da ordem das funções de interpolação utilizadas no método dos elementos finitos. Além disso, em problemas bidimensionais, as tensões ou momentos nodais são cálculos com base em um processo de suavização média de valores, ou seja, os pontos de vértices ou de contorno no domínio podem apresentar maiores níveis de erros.

O modelo estrutural não linear geométrica para os elementos de barra com seis graus de

liberdade apresenta comportamentos assertivos diante a construção da trajetória de equilíbrio em comparação com as soluções numéricas de referência. Nos exemplos, foi tratado numericamente casos testes com configurações e carregamentos diferentes, transiente de viga, pilares, pórticos, arcos e quadros. Salienta-se que para análise de problemas com maior complexidade e comportamento fortemente não linear é recomendado usar formulações e estratégias numéricas mais sofisticadas, a fim de obter uma melhor solução.

Para a análise termomecânica de estruturas em situação de incêndio, utiliza-se uma estratégia de solução com base no acoplamento sequencial de processos numéricos, onde para cada instante de tempo considera-se, primeiramente, a predição do campo de temperatura na seção transversal dos elementos submetida à ação do fogo e, posteriormente, realiza-se a análise estrutural, considerando as contribuições dos efeitos térmicos. Os casos analisados são guiados pelos testes em estruturas aporticadas simples de aço e elementos isolados de viga ou coluna de aço, concreto e mistas de aço-concreto, levando em conta, em cada caso estudado, configurações diferentes de carregamentos externos, geometrias, restrições de movimento e condições térmicas. Em modo geral, os resultados obtidos nos exemplos, em comparação com os dados de referência, mostram-se com uma boa concordância, concluindo que a metodologia e hipóteses adotadas na construção do modelo numérico possibilitam uma análise preliminar aceitável acerca dos problemas estudados. Em específico, pode-se concluir que o comportamento assertivo da análise térmica é imprescindível para uma correta solução estrutural. Além disso, os efeitos dos gradientes térmicos na seção transversal, a não linearidade geométrica e do material, apresentam influências significativas na reposta mecânica.

Portanto, os modelos numéricos desenvolvidos na presente pesquisa revelaram-se satisfatórios em comparação aos resultados extraídos da literatura. Sendo assim, em síntese, perfaz-se que as implementações computacionais destinadas as ramificações dos módulos específicos do programa NASEN foram bem sucedidas, apresentando modelos capazes de prever assertivamente os comportamentos térmicos, estruturais e termomecânicos.

8.3 RECOMENDAÇÕES E SUGESTÕES

Ao longo do desenvolvido da pesquisa foram realizadas inúmeras soluções iniciais de problemas físicos com base em análises numéricas, necessitando de sucessivos aprofundamentos e generalizações. Sendo assim, são apresentadas algumas sugestões de pesquisas futuras.

- ▷ Implementação de estratégias de soluções alternativas para a análise térmica;
- ▷ Aprimorar os métodos de solução para análise estrutural não linear;
- ▷ Aplicação do método dos elementos de contorno ou *meshless* em modelos diferenciais térmicos e/ou estruturais da engenharia;
- ▷ Expandir o modelo de análise termomecânico de estruturas em situação de incêndio;

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIRRE-RAMIREZ, G.; ODEN, J. Finite element technique applied to heat conduction in solids with temperature dependent thermal conductivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 7, n. 3, p. 345–355, 1973.

AHN, J.-K.; LEE, C.-H.; PARK, H.-N. Prediction of fire resistance of steel beams with considering structural and thermal parameters. *Fire safety journal*, Elsevier, v. 56, p. 65–73, 2013.

AISC. Steel construction manual - load and resistance factor design specification for structural steel buildings. *American Institute of Steel Construction, Inc.*, Chicago, 1999.

AL-JABRI, K. S.; LENNON, T.; BURGESS, I. W.; PLANK, R. J. Behaviour of steel and composite beam-column connections in fire. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier BV, v. 46, n. 1-3, p. 308–309, 4 1998.

ALMANSI, E. Use of the stress function in thermoelasticity. *Mem. Reale Accad. Sci. Torino, Series*, v. 2, 1897.

ALVES FILHO, A. *Elementos Finitos: a base da tecnologia CAE: análise não linear*. 1. ed. São Paulo: Érica, 2012.

ALVES, R. V. *Instabilidade não-linear elástica de estruturas reticuladas espaciais*. 257 p. Tese (Doutorado) — PEC-COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1995.

AMES, W. F. *Nonlinear partial differential equations in engineering*. New York: Academic press, 1965. v. 18.

ANDERBERG, Y. *Fire-exposed Hyperstatic Concrete Structures - An Experimental and Theoretical Study*. Sweden: Lund Institute of Technology, 1976. Bulletin 55. (Bulletin of Division of Structural Mechanics and Concrete Construction, Bulletin 55). Published under former department name Division of Structural Mechanics and Concrete Construction.

ANDERSON, D.; TANNEHILL, J. C.; PLETCHER, R. H. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. New York: CRC Press, 2016.

ARGYRIS, J. H. Recent advances in matrix methods of structural analysis(matrix theory of structures for small and large deflections, using high speed digital computers). *MACMILLAN CO., OXFORD, PERGAMON PRESS, LTD., 1964. 187 P*, New York, 1964.

ARGYRIS, J. H.; KELSEY, S. *Energy theorems and structural analysis*. Boston: Springer, 1960. v. 60.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 14323: Dimensionamento de estruturas de aço de edifícios em situação de incêndio. Rio de Janeiro, 1999.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 14432: Exigências de resistência ao fogo de elementos construtivos de edificações. Rio de Janeiro, 2001.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 14323: Dimensionamento de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço-concreto de edificios em situação de incêndio. Rio de Janeiro, v. 14323, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 15200: Projeto de estruturas de concreto em situação de incêndio. *Rio de Janeiro*, 2012.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 14323: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios em situação de incêndio. Rio de Janeiro, 2013.

ASTM E119. Standard test methods for fire tests of building construction and materials. 49 CFR 238. American Society for Testing and Materials, 2000.

AZEVEDO, J. P. S. de. Análise de problemas não-lineares de condução térmica pelo método dos elementos de contorno. *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, v. 11, n. 4, p. 645–656, 1995.

BACKES, A. R.; JUNIOR, S.; MESQUITA, J. J. de. *Introdução à visão computacional usando Matlab*. Rio de Janeiro: Alta Books Editora, 2016.

BAJC, U.; SAJE, M.; PLANINC, I.; BRATINA, S. Semi-analytical buckling analysis of reinforced concrete columns exposed to fire. *Fire Safety Journal*, Elsevier, v. 71, p. 110–122, 2015.

BAMONTE, P.; MONTE, F. L. Reinforced concrete columns exposed to standard fire: Comparison among different constitutive models for concrete at high temperature. *Fire safety journal*, Elsevier, v. 71, p. 310–323, 2015.

BARES, R. *Tablas para el calculo de placas y vigas pared*. Barcelona: Editorial Gustavo Gili, 1972.

BARRON, R. F.; BARRON, B. R. *Design for thermal stresses*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2011.

BARROS, R. C. *Avaliação numérica avançada do desempenho de estruturas de aço sob temperaturas elevadas*. 150 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP, Minas Gerais, 2016.

BARROS, R. C.; PIRES, D.; LEMES, Í. J.; SILVEIRA, R. A. Numerical study of steel-concrete composite structures under fire situation. In: XL CILAMCE - Proceedings of the XL Ibero Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, ***Anais ...*** Natal,RN, Brasil, 2019.

BARROS, R. C.; PIRES, D.; SILVEIRA, R. A.; LEMES, Í. J.; ROCHA, P. A. Advanced inelastic analysis of steel structures at elevated temperatures by scm/rphm coupling. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, v. 145, p. 368–385, 2018.

BATHE, K.; BOLOURCHI, S. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures. *International journal for numerical methods in engineering*, v. 14, n. 7, p. 961–986, 1979.

BATHE, K. J. *Finite element procedures in engineering analysis*. New Jersey: Prentice-Hall, 1982.

BATOZ, J.-L.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 14, n. 8, p. 1262–1267, 1979.

BATOZ, J.-L.; TAHAR, M. B. Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 18, n. 11, p. 1655–1677, 1982.

BECKER, A. A. *The boundary element method in engineering: a complete course*. London: McGraw-Hill, 1992. v. 19.

BECKER, J.; BIZRI, H.; BRESLER, B. *FIRES-T: A Computer Program for the Fire Response of Structures-Thermal*. Berkeley: University of California, 1974.

BERGAN, P.; HORRIGMOE, G.; BRÅKELAND, B.; SØREIDE, T. Solution techniques for nonlinear finite element problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 12, n. 11, p. 1677–1696, 1978.

BERGAN, P.; SØREIDE, T. A comparative study of different numerical solution techniques as applied to a nonlinear structural problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 2, n. 2, p. 185–201, 1973.

BERGAN, P. G. Solution algorithms for nonlinear structural problems. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 12, n. 4, p. 497–509, 1980.

BERGMAN, T. L.; LAVINE, A. S.; INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P. *Fundamentals of heat and mass transfer*. New York: John Wiley & Sons, 2011.

BHATTI, M. A. *Fundamental finite element analysis and applications: with Mathematica and Matlab computations*. New Jersey: John Wiley Hoboken, NJ, 2005.

BIONDINI, F.; NERO, A. Cellular finite beam element for nonlinear analysis of concrete structures under fire. *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 137, n. 5, p. 543–558, 2010.

BOLEY, B. A. Bounds on the maximum thermoelastic stress and deflection in a beam and plate. *Journal of Applied Mechanics*, v. 33, p. 881, 1966.

BOLEY, B. A. On thermal stresses in beams: some limitations of the elementary theory. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, v. 8, n. 4, p. 571–579, 1972.

BOLEY, B. A.; WEINER, J. H. *Theory of thermal stresses*. Mineola, New York: Dover Edition, Inc., 1985. (Dover Civil and Mechanical Engineering).

BOTELHO, G. G.; PITANGUEIRA, R. L. d. S.; FONSECA, F. T. Sistema computacional orientado a objetos para análises acopladas termo-estruturais pelo método dos elementos finitos. CILAMCE 2015 - XXXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Rio de Janeiro, 2015.

BOUTIN, J. P. *Pratique du calcul de la résistance au feu des structures en béton*. Paris: Les dossiers de la construction. Structures. Eyrolles, 1983.

BREBBIA, C.; CONNOR, J. Geometrically nonlinear finite-element analysis. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v. 95, n. 2, p. 463–486, 1969.

BROCKENBROUGH, R. L. Theoretical stresses and strains from heat curving. *Journal of the Structural Division*, 1970.

BS 5950. Structural use of steelwork in building - Part 8: Code of practice for fire resistant design. British Standards Association, 1990.

BUCHANAN, A. H.; ABU, A. K. *Structural design for fire safety*. Chichester, West Sussex, United Kingdom: John Wiley & Sons Inc., 2017.

BURGESS, I.; EL-RIMAWI, J.; PLANK, R. A secant stiffness approach to the fire analysis of steel beams. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, v. 11, n. 2, p. 105–120, 1988.

BURLAYENKO, V. N.; SADOWSKI, T. Free vibrations and static analysis of functionally graded sandwich plates with three-dimensional finite elements. *Meccanica*, Springer, p. 1–18, 2019.

CAI, J.; BURGESS, I.; PLANK, R. A generalised steel/reinforced concrete beam-column element model for fire conditions. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 25, n. 6, p. 817–833, 2003.

CALDAS, R. B. *Análise numérica de estruturas de aço, concreto e mistas em situação de incêndio*. 226 p. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, Belo Horizonte, 2008.

CALDAS, R. B.; FAKURY, R. H.; SOUSA JR, J. B. M. Finite element implementation for the analysis of 3d steel and composite frames subjected to fire. *Latin American Journal of Solids and Structures*, SciELO Brasil, v. 11, n. 1, p. 1–18, 2014.

CAMARGO, R. S.; FERREIRA, W. G.; MANSUR, W. J. *Aplicações práticos de problemas de calor como introdução ao método de elementos finitos*. Vitória: Grafer Editora Ltda, 2015.

CAPUA, D. D.; MARI, A. R. Nonlinear analysis of reinforced concrete cross-sections exposed to fire. *Fire Safety Journal*, Elsevier, v. 42, n. 2, p. 139–149, 2007.

CARRER, J.; MANSUR, W.; SCUCIATO, R.; FLEISCHFRESSER, S. Analysis of euler-bernoulli and timoshenko beams by the boundary element method. *Blucher Mechanical Engineering Proceedings*, v. 1, n. 1, p. 2333–2349, 2012.

CARRER, J. A. M.; FLEISCHFRESSER, S. A.; GARCIA, L. F. T.; MANSUR, W. J. Dynamic analysis of Timoshenko beams by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 37, n. 12, p. 1602–1616, 2013.

CARSLAW, H. S.; JAEGER, J. C. *Conduction of heat in solids*. London: 2 ed. Oxford, Clarendon Press, 1959.

CARVALHO, M. *Formulação corrotacional para análise de vigas com elementos finitos*. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial , Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2010.

CHAN, S. L. Geometric and material non-linear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 26, n. 12, p. 2657–2669, 1988.

CHEN, W.-F. *Advanced analysis of steel frames: theory, software, and applications*. 1. ed. Boca Raton: CRC press, 2018.

CHEN, W.-F.; GOTO, Y.; LIEW, J. R. *Stability design of semi-rigid frames*. New York: John Wiley & Sons, 1995.

CHENG, W.-C. Theory and application on the behavior of steel structures at elevated temperatures. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 16, n. 1-4, p. 27–35, 1983.

CHENG, W.-C.; MAK, C. K. Computer analysis of steel frame in fire. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v. 101, n. 4, p. 854–866, 1975.

CLARKE, M.; BRIDGE, R.; HANCOCK, G.; TRAHAIR, N. Australian trends in the plastic analysis and design of steel building frames. *plastic hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames: An assessment of the state-of-the-art, DW White and WF Chen, Eds., Structural Stability Research Council, Lehigh University, Bethlehem, PA*, p. 65–93, 1993.

CODUTO, D. P. *Foundation design: principles and practices*. 3. ed. New Jersey: Pearson, 2015.

COELHO, D.; PEDRY, G.; ARACAYO, L.; JUNIOR, E. J. d. S.; KZAM, A. 2d thermo-mechanical analysis of itaipu buttress dam using the finite element method in fortran. *Third International Dam World Conference*, Foz do Iguaçu - PR, p. 1–10, 2018.

COELHO, N.; GOMES, F.; PEDROSO, L.; SILVA, D. Um estudo comparativo analítico-numérico de tensões térmicas em casos clássicos de vigas e placas. In: . Brasília: XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2016.

COELHO, N. d. A. Um estudo numérico do efeito térmico em concreto massa. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Universidade de Brasília UnB. Brasília, p. 152, 2012.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. *Concepts and applications of finite element analysis*. New York: John wiley & Sons, 2007.

CORREIA, A. J. M.; RODRIGUES, J. P. C.; SILVAC, V. P. e. Influence of brick walls on the temperature distribution in steel columns in fire. *Acta Polytechnica*, v. 49, n. 1, 2009.

COSTA, C. N. *Dimensionamento de elementos de concreto armado em situação de incêndio. 2008*. Tese de Doutorado — Escola Politécnica da USP, São Paulo, 2008.

COULTER, B. A.; MILLER, R. E. Numerical analysis of a generalized plane elasticawith non-linear material behaviour. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 26, n. 3, p. 617–630, 1988.

CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. *Computational Methods in Nonlinear Structural and Solid Mechanics*, Elsevier, p. 55–62, 1981.

CRISFIELD, M. A. A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 81, n. 2, p. 131–150, 1990.

CRISFIELD, M. A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Chichester, UK: UK.: Essential, John Wiley & Sons, 1991. v. 1.

CSIRO. Firecalc: Computer software for the fire engineering professional: user's manual. Division of Building Construction and Engineering. North Ryde, NSW, Australia, 1993.

CULVER, C. G. Steel column buckling under thermal gradients. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v. 92, n. 8, p. 1853–1865, 1972.

CUNHA, M. C. C. *Métodos numéricos*. São Paulo: Editora da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, 2000.

CUNHA, P. *Rotinas computacionais para análise não linear geométrica de estruturas reticuladas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Recife, 2017.

CZERNY, C. *Beton-kalender*. [S.l.]: W. Ernst & Sohn, 1976.

DAMJANIC, F.; OWEN, D. Practical considerations for thermal transient finite element analysis using isoparametric elements. *Nuclear Engineering and Design*, Elsevier, v. 69, n. 1, p. 109–126, 1982.

DAMJANIC, F. B. *Reinforced concrete failure prediction under both static and transient conditions*. Tese (Doutorado) — University College of Swansea, 1983.

DAVIS, R.; HENSHELL, R.; WARBURTON, G. A timoshenko beam element. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 22, n. 4, p. 475–487, 1972.

DEN HARTOG, J. *Advanced strength of materials*. New York: Dover Publications, Inc., 1901.

DIEDERICHS, U.; JUMPPANEN, U.-M.; PENTTALA, V. Behavior of high strength concrete at high temperatures. *Helsinki University of Technology, Department of Structural Engineering*, Report No. 92,76 p., 1989.

DOCUMENT TECHNIQUE UNIFIE (DTU). Méthode de prévision par le calcul du comportement au feu des structures em béton. *CSTB*, Paris, p. 47, 1974.

DOTREPPE, J.-C.; FRANSSEN, J.-M. The use of numerical models for the fire analysis of reinforced concrete and composite structures. *Engineering analysis*, Elsevier, v. 2, n. 2, p. 67–74, 1985.

DOTREPPE, J.-C.; FRANSSEN, J.-M.; SCHLEICH, J.-B. Computer aided fire resistance for steel and composite structures. *Acier*, v. 3, p. 105–112, 1984.

DUHAMEL, J. M. Second memoire sur les phenomenes thermo-mecaniques. *Journal de lEcole Polytechnique*, v. 15, n. 25, p. 1–57, 1837.

ECCS. European recommendations for the fire safety of steel structures: calculation of the fire resistance of load bearing elements and structural assemblies exposed to the standard fire. *European Convention for Constructional Steelwork*, Elsevier Science & Technology, Technical Committee 3, Fire Safety of Steel Structures, v. 3, 1983.

ELLINGWOOD, B.; LIN, T. Flexure and shear behavior of concrete beams during fires. *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 117, n. 2, p. 440–458, 1991.

EN 1991-1-2. Eurocode 1: Actions on structures - part 1-2: General actions - actions on structures exposed to fire. *European Standards, London*, CEN, Brussels, Belgium, 2002.

EN 1992-1-2. Eurocode 2: Design of concrete structures-part 1-2: General rules-structural fire design. *European Standards, London*, CEN, Brussels, Belgium, 2004.

EN 1993-1-2. Eurocode 3: Design of steel structures - part 1-2: General rules - structural fire design. *European Standards, London*, CEN, Brussels, Belgium, 2005.

EN 1994-1-2. Eurocode 4: Design of composite steel and concrete structures part 1-2: General rules - structural fire design. *European Standards, London*, CEN, Brussels, Belgium, 2005.

EYMARD, R.; GALLOUËT, T.; HERBIN, R. Finite volume methods. *Handbook of numerical analysis*, Elsevier, v. 7, p. 713–1018, 2000.

FÉODOSIEV, V.; ASRYANTS, K. *Resistência dos materiais*. Porto: Lopes da Silva, 1977.

FERREIRA, F. A.; CLARET, A. M.; SANTOLIN, A. Determinação da distribuição de temperatura em perfis de aço parcialmente protegidos: método simplificado. *Rem: Revista Escola de Minas*, SciELO Brasil, v. 60, n. 4, p. 645–655, 2007.

FIB. *Bulletin 46 - Fire design of concrete structures–structural behaviour and assessment*. 2008.

FIGUEIREDO JUNIOR, F. P. Simulação via método dos elementos finitos da distribuição de temperatura em estruturas metálicas e mistas no caso de incêndio. Dissertação. Universidade Federal de Minas Gerais, p. 128, 2002.

FLEISCHFRESSER, S. A. *Uma formulação do método dos elementos de contorno para a análise de vigas de Timoshenko*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

FORTUNA, A. O. *Técnicas computacionais para dinâminca dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*. Sção Paulo: Editora da Universidade de Sção Paulo - Edusp, 2000.

FOX, R. W.; PRITCHARD, P. J.; MCDONALD, A. T. *Introdução À Mecânica dos Fluidos* . Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2000.

FRANSSEN, J.-M. *Etude du comportement au feu des structures mixtes acier-béton*. Doctoral thesis — Université de Liège, Liège, Belgium, 1987.

FRANSSEN, J. M. Contributions à la modélisation des incendies et de leurs effets sur les bâtiments. *Post doctoral thesis, Agrégation de lenseignement supérieur. Université de Liège, Belgique*, Citeseer, 1997.

FRANSSEN, J.-M. Safir: A thermal/structural program for modeling structures under fire. *Engineering Journal-American Institute of Steel Construction Inc*, Amer Inst Steel Construction, v. 42, n. 3, p. 143–158, 2005.

FRANSSEN, J.-M.; COOKE, G.; LATHAM, D. Numerical simulation of a full scale fire test on a loaded steel framework. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, v. 35, n. 3, p. 377–408, 1995.

FRANSSEN, J.-M.; DOTREPPE, J.-C. Fire resistance of columns in steel frames. *Fire safety journal*, Elsevier, v. 19, n. 2-3, p. 159–175, 1992.

FRANSSEN, J.-M.; GERNAY, T. Modeling structures in fire with safir®: Theoretical background and capabilities. *Journal of Structural Fire Engineering*, Emerald Publishing Limited, v. 8, n. 3, p. 300–323, 2017.

FRANSSEN, J. M.; KODUR, V.; ZAHARIA, R. *Designing steel structures for fire safety*. New York: CRC Press, 2009.

FUJII, F.; CHOONG, K. K.; GONG, S.-X. Variable displacement control to overcome turning points of nonlinear elastic frames. *Computers & structures*, v. 44, n. 1-2, p. 133–136, 1992.

FUMIO, F. A simple mixed formulation for elastica problems. *Computers & Structures*, v. 17, n. 1, p. 79–88, 1983.

FURUMURA, F.; SHINOHARA, Y. Inelastic behavior of protected steel beams and frames in fire. *Rep. Res. Lab. Eng. Mater. Tokyo Inst. Technol.*, n. 3, p. 1, 1978.

GALVÃO, A. *Formulações geometricamente não lineares de elementos finitos para análise de sistemas estruturais metálicos reticulados planos*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Minas. Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2000.

GALVÃO, A. *Instabilidade estática e dinâmica de pórticos planos com ligações semi-rígidas*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2004.

GAO, W.; DAI, J.-G.; TENG, J.; CHEN, G. Finite element modeling of reinforced concrete beams exposed to fire. *Engineering structures*, Elsevier, v. 52, p. 488–501, 2013.

GATEWOOD, B. *Thermal Stresses*. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1957.

GERE, J. M.; TIMOSHENKO, S. P. *Mechanics of Materials*. 4. ed. Boston: Boston PWS Pub, 1997.

GEUZAINE, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 79, n. 11, p. 1309–1331, 2009.

GILAT, A. *MatLab com aplicações em engenharia*. Porto Alegre: Bookman Editora, 2009.

GONÇALVES, V. F. *Soluções Numéricas via MDF de problemas de engenharia*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2017.

GOUVÊIA, A. M. C. *Análise de risco de incêndio em sítios históricos*. Brasília: Caderno Técnico N°5. Programa Monumenta, Ministério da Cultura, Governo do Brasil, 2006. 104 p.

GU, L.; QIN, Z.; CHU, F. Analytical analysis of the thermal effect on vibrations of a damped timoshenko beam. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 60, p. 619–643, 2015.

GUIRNALDOS, C. G. Métodos variacionais em problemas de termoelasticidade acoplada. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1977.

GUO, Z.; SHI, X. *Experiment and calculation of reinforced concrete at elevated temperatures*. Waltham: Elsevier, 2011.

HACHICH, W. C.; FALCONI, F. F.; SAES, J.; FROTA, R. G.; CARVALHO, C. S.; NIYAMA, S. et al. *Fundações: teoria e prática*. São Paulo: PINI. ABMS/ABEF. 2Ed, 2012.

HAKSEVER, A.; ANDERBERG, Y. Comparison between measured and computed structural response of some reinforced concrete colums in fire. *LUTVDG/TVBB–3007–SE*, Division of Building Fire Safety and Technology, Lund Institute of Technology, v. 3007, 1982.

HANSTEEN, H. Finite element displacement analysis of plate bending based on rectangular elements. *International Simposium, The Use of Electronics Dgital Computers in Structural Engineering, University of Newcastle upon Tyne*, p. 13–20, 1966.

HARMATHY, T. Z. *Fire safety design and concrete*. Essex, UK: Longman Scientific & Technical, 1993.

HASS, R. Practical rules for the design of reinforced concrete and composite columns submitted to fire. *Technical rep*, v. 69, 1986.

HERTZ, K. *Analysis of prestressing concrete structures exposed to fire*. Dissertação (Mestrado) — Technical Univ. of Denmark, Lyngby, Denmark, 1985.

HERTZ, K. D. *Betonkonstruktioners brandtekniske egenskaber*. Kgs. Lyngby, Denmark — Technical University of Denmark (DTU), BYG Rapport; Nr. R-141, 1980.

HIBBELER, R. C. *Resistência dos Materiais*. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

HINTON, E.; OWEN, D. P. Finite element programming. 1977.

HOPKINSON, J. Thermal stresses in a sphere, whose temperature is a function of r only. *Messenger of Math*, v. 8, p. 168, 1879.

HOTTEL, H. C. Radiant heat transmission. *WH McAdams. Heat Transmission*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.

HUANG, H.-C.; USMANI, A. S. *Finite element analysis for heat transfer: theory and software*. New York: Springer Science & Business Media, 2012.

HUANG, Z.; BURGESS, I. W.; PLANK, R. J. The influence of shear connectors on the behaviour of composite steel-framed buildings in fire. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, v. 51, n. 3, p. 219–237, 1999.

HUANG, Z.-F.; TAN, K.-H.; PHNG, G.-H. Axial restraint effects on the fire resistance of composite columns encasing i-section steel. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, v. 63, n. 4, p. 437–447, 2007.

HUBER, G.; ASTE, C. Natural fire design at the underground car parking of tirol therme laengenfeld-autria. *4th European Conference on Steel and Composite Structures*, Eurosteel, 2005.

HUGHES, T. J. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. New York: Courier Corporation, 2012.

ISE. Design and detailing of concrete structures for fire resistance. *Journal of Constructional Steel Research*, London: Institution of Structural Engineers, 1978.

ISO 834. Fire resistance tests-elements of building construction. *International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland*, Revision of frst edition ISO 834:1975, 1999.

IU, C. K.; CHAN, S. L. A simulation-based large deflection and inelastic analysis of steel frames under fire. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, v. 60, n. 10, p. 1495–1524, 2004.

IU, C. K.; CHAN, S. L.; ZHA, X. X. Material yielding by both axial and bending spring stiffness at elevated temperature. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, v. 63, n. 5, p. 677–685, 2007.

IU, C. K. J. *Numerical simulation for structural steel member or framed structure at elevated temperature*. 267 p. Ph.D Thesis — Civil and Structural Engineering Department, Hong Kong Polytechnic University, China, 2004.

IZZUDDIN, B.; SONG, L.; ELNASHAI, A. S.; DOWLING, P. An integrated adaptive environment for fire and explosion analysis of steel framespart ii: verification and application. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, v. 53, n. 1, p. 87–111, 2000.

IZZUDDIN, B. A. *Nonlinear dynamic analysis of framed structures*. Thesis (Ph.D.) — Imperial College London - University of London, London, 1990.

JAIN, P.; RAO, M. Analysis of steel frames under fire environment. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 19, n. 10, p. 1467–1478, 1983.

JIANG, S.; LU, L.; LI, G.; SHEN, J.; WU, B.; WU, J. Experimental study on high-temperature properties of fire-resistant steel made by masteel. *Tumu Gongcheng Xuebao(China Civil Engineering Journal)*, v. 39, n. 8, p. 72–75, 2006.

KASSIMALI, A. Large deformation analysis of elasticplastic frames. *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 109, n. 8, p. 1869–1886, 1983.

KASSIMALI, A.; GARCILAZO, J. J. Geometrically nonlinear analysis of plane frames subjected to temperature changes. *Journal of structural engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 136, n. 11, p. 1342–1349, 2010.

KODUR, V. Properties of concrete at elevated temperatures. *ISRN Civil engineering*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2014, 2014.

KODUR, V.; DWAIKAT, M.; FIKE, R. High-temperature properties of steel for fire resistance modeling of structures. *Journal of Materials in Civil Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 22, n. 5, p. 423–434, 2010.

KODUR, V.; FIKE, R. Guidelines for improving the standard fire resistance test specifications. *Journal of ASTM International*, ASTM International, v. 6, n. 7, p. 1–16, 2009.

KODUR, V.; LIE, T. Fire resistance of circular steel columns filled with fiber-reinforced concrete. *Journal of structural engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 122, n. 7, p. 776–782, 1996.

KYTHE, P.; WEI, D. *An introduction to linear and nonlinear finite element analysis: a computational approach*. New York: Springer Science & Business Media, 2011.

KYTHE, P. K.; SCHÄFERKOTTER, M. R.; PURI, P. *Partial differential equations and Mathematica*. New York: 2nd ed. Chapman and Hall/CRC, 2002.

LABUSCHAGNE, A.; RENSBURG, N. J. van; MERWE, A. Van der. Comparison of linear beam theories. *Mathematical and Computer Modelling*, Elsevier, v. 49, n. 1-2, p. 20–30, 2009.

LANDESMANN, A. *Modelo não-linear inelástico para análise de estruturas metálicas aporticadas em condições de incêndio*. Tese de Doutorado — Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2003.

LANDESMANN, A. Inelastic analysis of semi-rigid composite structures under fire conditions. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, SciELO Brasil, v. 33, n. 4, p. 483–491, 2011.

LANDESMANN, A. Refined plastic-hinge model for analysis of steel-concrete structures exposed to fire. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, v. 71, p. 202–209, 2012.

LANDESMANN, A.; BATISTA, E. d. M. Análise de pórticos planos em situação de incêncio pelo método das rótulas plásticas. *Rem: Revista Escola de Minas*, SciELO Brasil, v. 58, n. 2, p. 147–153, 2005.

LANDESMANN, A.; BATISTA, E. d. M.; ALVES, J. L. D. Implementation of advanced analysis method for steel-framed structures under fire conditions. *Fire safety journal*, Elsevier, v. 40, n. 4, p. 339–366, 2005.

LANDESMANN, A.; MOUÇO, D. L. Análise estrutural de um edifício de aço sob condições de incêndio. *Rem: Revista Escola de Minas*, Universidade Federal de Ouro Preto, v. 60, n. 2, p. 285–294, 2007.

LAPIDUS, L.; PINDER, G. F. *Numerical solution of partial differential equations in science and engineering*. New York: John Wiley & Sons, 2011.

LAUSOVA, L.; SKOTNICOVA, I.; MICHALCOVA, V. Thermal transient analysis of steel hollow sections exposed to fire. *Perspectives in Science*, Elsevier, v. 7, p. 247–252, 2016.

LEAL, C. E. F. *Formulação do método dos elementos finitos para a análise elástica linear de placas delgadas*. Trabalho de Conclusão de Curso — Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Campo Mourão, 2015.

LEE, S.-L.; MANUEL, F. S.; ROSSOW, E. C. Large deflections and stability of elastic frame. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, v. 94, n. 2, p. 521–548, 1968.

LEMES, g. J. M. *Estudo numérico avançado de estruturas de aço, concreto e mistas.* Tese de Doutorado — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto - MG, 2018.

LEON, A. On thermal stresses. *Der Bautechniker*, v. 2, n. 6, p. 968, 1904.

LESTON-JONES, L. C. *The influence of semi-rigid connections on the performance of steel framed structures in fire*. PhD thesis — University of Sheffield, 1997.

LEWIS, K. R. Fire design of steel members. Fire Engineering Research Report. University of Canterbury Civil Engineering, New Zealand, 2000.

LI, G.; LU, L.; JIANG, S.; SHEN, J.; WU, B.; WU, J. Fire-resistant experiments and theoretical calculations of fire-resistant steel columns. *Progress in Steel Building Structures*, n. 4, p. 2, 2006.

LIAO, F.; HUANG, Z. An extended finite element model for modelling localised fracture of reinforced concrete beams in fire. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 152, p. 11–26, 2015.

LIE, T. *Structural Fire Protection*. New York: American Society of Civil Engineers. Committee on Fire Protection, 1992. (ASCE manuals and reports on engineering practice).

LIE, T. Fire resistance of circular steel columns filled with bar-reinforced concrete. *Journal of structural engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 120, n. 5, p. 1489–1509, 1994.

LIE, T.; CELIKKOL, B. Method to calculate the fire resistance of circular reinforced concrete columns. *Materials Journal*, v. 88, n. 1, p. 84–91, 1991.

LIE, T.; CHABOT, M. Experimental studies on the fire resistance of hollow steel columns filled with plain concrete. Internal Report no. 611, National Research Council Canada, 1990.

LIE, T.; HARMATHY, T. *A Numerical Procedure to Calculate the Temperature of Protected Steel Columns Exposed to Fire, Fire Study No. 28, NRCC 12535*. Canada: Ottawa: National Research Council of Canada, Division of Building Research, 1972.

LIE, T.; IRWIN, R. Method to calculate the fire resistance of reinforced concrete columns with rectangular cross section. *ACI Structural Journal*, American Concrete Institute, v. 90, n. 1, p. 52–60, 1993.

LIE, T.; IRWIN, R. Fire resistance of rectangular steel columns filled with bar-reinforced concrete. *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 121, n. 5, p. 797–805, 1995.

LIEW, J. R. Survivability of steel frame structures subject to blast and fire. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, v. 64, n. 7-8, p. 854–866, 2008.

LIEW, J. R.; CHEN, H. Explosion and fire analysis of steel frames using fiber element approach. *Journal of structural engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 130, n. 7, p. 991–1000, 2004.

LIM, L.; BUCHANAN, A.; MOSS, P.; FRANSSEN, J.-M. Numerical modelling of two-way reinforced concrete slabs in fire. *Engineering structures*, Elsevier, v. 26, n. 8, p. 1081–1091, 2004.

LIU, T. Finite element modelling of behaviours of steel beams and connections in fire. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, v. 36, n. 3, p. 181–199, 1996.

LIU, T.; MORRIS, L. Theoretical modeling of steel bolted connection under fire exposure. In: . Hong Kong: Proceedings of International Conference on Computational Methods in Structural and Geotechinical Engineering Mechanics, 1994.

LOEFFLER, C. F.; CRUZ, Á. L.; BULCÃO, A. Direct use of radial basis interpolation functions for modelling source terms with the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 50, p. 97–108, 2015.

LOPES, A. A versatile software tool for the numerical simulation of fluid flow and heat transfer in simple geometries. *Computer Applications in Engineering Education*, Wiley Online Library, v. 18, n. 1, p. 14–27, 2010.

MA, Q.; GUO, R.; ZHAO, Z.; LIN, Z.; HE, K. Mechanical properties of concrete at high temperaturea review. *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 93, p. 371–383, 2015.

MACEDO, F. C. *Estudo analítico e numérico dos esforços térmicos em cascas cilíndricas axissimétricas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília - UnB, Brasília, 2014.

MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional* . Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2017.

MALLETT, R. H.; MARCAL, P. V. Finite element analysis of nonlinear structures. *Journal of the structural division*, ASCE, v. 94, n. 9, p. 2081–2106, 1968.

MARAKALA, N.; KUTTAN, K. A.; KADOLI, R. Thermally induced vibration of a simply supported beam using finite element method. *International journal of engineering science and technology*, v. 2, n. 12, p. 7874–7879, 2010.

MARTHA, L. *Análise de estruturas: Conceitos e Métodos Básicos*. Rio de Janeiro: Elsevier Editora, 2010.

MARTHA, L. F. *Análise matricial de estruturas com orientação a objetos*. Rio de Janeiro: Elsevier: PUC-Rio, 2018.

MARTHA, L. F.; NAKAO, O. S. Manual do ftool: two-dimensional frame analysis tool. 2000.

MARTHA, L. F.; RANGEL, R. L.; LOPES, P. C. *LESM - Linear Elements Structure Model*. Rio de Janeiro: Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro - PUC-Rio, 2018. Disponível em: <http://www.tecgraf.puc-rio.br/lesm>.

MATTIASSON, K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. *International journal for numerical methods in engineering*, v. 17, n. 1, p. 145–153, 1981.

MAXIMIANO, D. P. *Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas.* Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil. Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais (MG), 2012.

MAXIMIANO, D. P. *Análise numérica avançada de estruturas de aço e de concreto armado em situação de incêndio.* Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP, Minas Gerais, 2018.

MAXIMIANO, D. P.; SILVA, A. R. D. d.; SILVEIRA, R. A. d. M. Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches. *Rem: Revista Escola de Minas*, SciELO Brasil, v. 67, n. 2, p. 143–150, 2014.

MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; SAUNDERS, H. *Matrix structural analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1982.

MCNAMEE, B. M.; LU, L.-W. Inelastic multistory frame buckling. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v. 98, n. 7, p. 1613–1631, 1972.

MEEK, J.; TAN, H. S. Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 47, n. 3, p. 261–282, 1984.

MELERSKI, E. S. *Design analysis of beams, circular plates and cylindrical tanks on elastic foundations*. 2. ed. London: Taylor & Francis, 2006.

MOREIRA, D. F. *Análise Matricial das Estruturas*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1977.

MOUÇO, D. L. *Modelo inelástico para análise avançada de estruturas mistas aço-concreto em situação de incêndio*. Dissertação de Mestrado — Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro-RJ-Brazil, 2008.

MUKHERJEE, S.; PRATHAP, G. Analysis of shear locking in timoshenko beam elements using the function space approach. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 17, n. 6, p. 385–393, 2001.

MURRAY, D.; WILSON, E. Geometrically non-linear finite element analysis. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, v. 95, p. 143–165, 1969.

NAJJAR, S.; BURGESS, I. A nonlinear analysis for three-dimensional steel frames in fire conditions. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 18, n. 1, p. 77–89, 1996.

NAJJAR, S. R. *Three-dimensional analysis of steel frames and subframes in fire*. Thesis — University of Sheffield, Depatment of Civil and Structural Engineering, Sheffield, 1994.

NANCE, D. V. *Finite volume algorithms for heat conduction*. Airforce Research Laboratory Munitions Directorate AFRL/RWPC, 2010.

NASCIMENTO, C. J.; OLIVEIRA, I.; CUNHA, F. Modelagem e simulação numérica bidimensional da deformação térmica de um sólido. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia*, v. 2, n. 24, p. 197–216, 2016.

NI, S.; BIRELY, A. C. Simulation procedure for the post-fire seismic analysis of reinforced concrete structural walls. *Fire safety journal*, Elsevier, v. 95, p. 101–112, 2018.

NWOSU, D. I.; KODUR, V.; FRANSSEN, J.-M.; HUM, J. User manual for safir: A computer program for analysis of structures at elevated temperature conditions. *Institute for Research in Construction, National Research Council of Canada*, Canada, 1999.

NZS3101.1. Concrete structures standard part 1-the design of concrete structures. *Standard New Zealand*, Wellington, 1995.

ODEN, J.; KROSS, D. Analysis of general coupled thermoelasticity problems by the finite element method. In: . (2nd) Held At Wright Patterson Air Force Base, Ohio: Proceedings of the Second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics (AFFDL-TR-68-150), 1968. p. 1091–1120.

ODEN, J. T. Numerical formulations of nonlinear elasticity problems. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v. 93, n. 3, p. 235–356, 1967.

OLIVEIRA, G. C. *Aplicaçao do elemento de viga unificado Bernoulli-Timoshenko e da formulaçao co-rotacional na análise não-linear de pórticos e arcos*. Tese (Dissertação (Mestrado)) — Dissertaçao de Mestrado, Universidade Federal de Brasılia, Brasılia, DF, Brasil, 2016.

ORAN, C. Tangent stiffness in plane frames. *Journal of the structural Division*, ASCE, v. 99, n. 6, p. 973–985, 1973.

ORIVUORI, S. Efficient method for solution of nonlinear heat conduction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 14, n. 10, p. 1461–1476, 1979.

OSSENBRUGGEN, P. J.; AGGARWAL, V.; CULVER, C. G. Steel column failure under thermal gradients. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v. 99, n. 4, p. 727–739, 1973.

OWEN, D.; DAMJANIC, F. The stability of numerical time integration techniques for transient thermal problems with special reference to reduced integration effects. In: PINERIDGE PRESS. *Numerical methods in thermal problems. International Conference.* Venice, 1981. p. 487–505.

ÖZIŞIK, M. N.; ORLANDE, H. R.; COLAÇO, M. J.; COTTA, R. M. *Finite difference methods in heat transfer*. Boca Raton, 2nd Edition: CRC press, 2017.

PACOSTE, C. Co-rotational flat facet triangular elements for shell instability analyses. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 156, n. 1-4, p. 75–110, 1998.

PACOSTE, C.; ERIKSSON, A. Beam elements in instability problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 144, n. 1-2, p. 163–197, 1997.

PADRE, E. P. G. *Desenvolvimento de um Algoritmo Computacional para Verificação de Seções de Concreto Armado Submetidas à Flexão Composta Oblíqua em Situação de Incêndio*. Dissertação de Mestrado — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais, 2017.

PADRE, E. P. G.; RIBEIRO, J. C. L.; ALVARENGA, R.; SILVA, R. Computational algorithm for the verification of reinforced concrete sections in fire situation. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, SciELO Brasil, v. 12, n. 4, p. 932–955, 2019.

PARASKI, N. *Análise estática nao linear de pórticos planos via matlab*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, Volta Redonda, 2012.

PATIL, P. V.; PRASAD, J. K. The unsteady state finite volume numerical grid technique for multidimensional problems. *International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, Directory of Open Access Journals, v. 2, n. 2, p. 78–87, 2014.

PAYEN, D. J.; BATHE, K.-J. The use of nodal point forces to improve element stresses. *Computers & Structures*, v. 89, n. 5-6, p. 485–495, 2011.

PHAN, L. T. *Fire performance of high-strength concrete: A report of the state-of-the art*. Gaithersburg, Maryland: Building and Fire Research Laboratory. National Institute of Standards and Technology, 1996.

PHAN, L. T.; CARINO, N. J. Fire performance of high strength concrete: research needs. In: . Philadelphia, Pennsylvania, United States: Advanced Technology in Structural Engineering, 2000. p. 1–8.

PIERIN, I. *A instabilidade de perfis formados a frio em situação de incêndio*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2011.

PIERIN, I.; SILVA, V. Análise térmica de estruturas bidimensionais em situação de incêndio por meio do método dos elementos finitos. *Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural*, Montevidéu, Uruguai, 2014.

PIERIN, I.; SILVA, V.; ROVERE, H. L. Thermal analysis of two-dimensional structures in fire. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, SciELO Brasil, v. 8, n. 1, p. 25–36, 2015.

PIERIN, I.; SILVA, V. P. Fire design of composite ribbed slabs. *RIEM-IBRACON Structures and Materials Journal*, v. 7, n. 2, 2014.

PIRES, D.; BARROS, R. C.; LEMES, I. J. M.; SILVEIRA, R. A. d. M.; ROCHA, P. A. S. Análise térmica de seções transversais via método dos elementos fnitos. In: CILAMCE, 36. ***Anais ...*** Rio de Janeiro, RJ, Brasil, v.1 , p. 1-19, 2015.

PIRES, D.; BARROS, R. C.; ROCHA, P. A. S.; SILVEIRA, R. A. d. M. Thermal analysis of steel-concrete composite cross sections via CS-ASA/FA. *REM-International Engineering Journal*, SciELO Brasil, v. 71, n. 2, p. 149–157, 2018.

POLIVKA, R.; WILSON, E. *Finite Element analysis of nonlinear heat transfer problems: Structural Engineering and Structural Mechanics*. Berkeley, 1976.

POPOV, E. P. *Introdução à mecânica dos sólidos*. São Paulo: Editora Blucher, 1978.

PORTER, F. L.; POWELL, G. H. *Static and dynamic analysis of inelastic frame structures*. California, Berkeley: University of California, College of Engineering, Earthquake Engineering, 1971.

POWELL, G.; SIMONS, J. Improved iteration strategy for nonlinear structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 17, n. 10, p. 1455–1467, 1981.

PRAKASH, P. R.; SRIVASTAVA, G. Nonlinear analysis of reinforced concrete plane frames exposed to fire using direct stiffness method. *Advances in Structural Engineering*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 21, n. 7, p. 1036–1050, 2018.

PRAKASH, P. R.; SRIVASTAVA, G. Fully coupled multi-physics nonlinear analysis of structural space frames subjected to fire using the direct stiffness method. *Advances in Structural Engineering*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 22, n. 6, p. 1266–1283, 2019.

PURKISS, J. A.; LI, L.-Y. *Fire safety engineering design of structures*. New York: CRC Press, 2013.

RANGEL, R. L.; MARTHA, L. F. Lesman object-oriented matlab program for structural analysis of linear element models. *Computer Applications in Engineering Education*, Wiley Online Library, v. 27, n. 3, p. 553–571, 2019.

REDDY, J. N. *An introduction to the finite element method*. New York: McGraw-hill, 1993. v. 2.

REDDY, J. N. *An introduction to continuum mechanics*. New York: Cambridge University Press, 2007.

REDDY, J. N. *An introduction to nonlinear finite element analysis: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics*. 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 2015.

REDDY, J. N.; GARTLING, D. K. *The finite element method in heat transfer and fluid dynamics*. New York: CRC press, 2010.

REGOBELLO, R. *Análise numérica de seções transversais e de elementos estruturais de aço e mistos de aço e concreto em situação de incêndio*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, São Paulo, 2007.

REZAIEE-PAJAND, M.; GHALISHOOYAN, M.; SALEHI-AHMADABAD, M. Comprehensive evaluation of structural geometrical nonlinear solution techniques part i: Formulation and characteristics of the methods. *Structural Engineering and Mechanics*, Techno-Press, v. 48, n. 6, p. 849–878, 2013.

RIBEIRO, H. L. *Análise de estruturas com carregamento térmico utilizando o método dos elementos de contorno*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Militar de Engenhara - IME, Rio de Janeiro, 1991.

RIBEIRO, I. S. *Análise não–linear geométrica de sistemas aporticados planos com elementos de rigidez variável: aplicações em estruturas de aço e de concreto armado.* Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil. Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais (MG), 2016.

RIBEIRO, J. C. L. Simulação via método dos elementos finitos da distribuição tridimensinal de temperatura em estruturas em situação de incêndio. Dissertação (Mestrado). UFMG. Minas Gerais, p. 195, 2004.

RIBEIRO, J. C. L. *Desenvolvimento e aplicação de um sistema computacional para simulação via Método dos Elementos Finitos do comportamento de estruturas de aço e mistas em situação de incêndio*. Tese de Doutorado — Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, UFMG, Belo Horizonte, MG,Brasil, 2009.

RIGOBELLO, R. *Desenvolvimento e aplicação de código computacional para análise de estruturas de aço aporticadas em situação de incêndio*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

RIGOBELLO, R.; CODA, H. B.; NETO, J. M. A 3d solid-like frame finite element applied to steel structures under high temperatures. *Finite Elements in Analysis and Design*, Elsevier, v. 91, p. 68–83, 2014.

RIKS, E. The application of newtons method to the problem of elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, American Society of Mechanical Engineers, v. 39, n. 4, p. 1060–1065, 1972.

ROCHA, P. A. S. *Resistência da ligação aço–concreto em pilares mistos parcialmente revestidos sob altas temperaturas. 2011. 89p*. Tese (Doutorado) — Tese (Doutorado em Engenharia Civil)–COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

ROCHA, P. A. S.; SILVA, K. da. Estudo do desempenho de vigas em situação de incêndio a partir do modelo de fibras. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Elsevier, v. 33, n. 1-2, p. 65–71, 2017.

ROORDA, J. Stability of structures with small imperfections. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, v. 91, n. 1, p. 87–106, 1965.

RUBERT, A.; SCHAUMANN, P. Structural steel and plane frame assemblies under fire action. *Fire Safety Journal*, Elsevier, v. 10, n. 3, p. 173–184, 1986.

SAAB, H.; NETHERCOT, D. Modelling steel frame behaviour under fire conditions. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 13, n. 4, p. 371–382, 1991.

SABIR, A.; LOCK, A. The applications of finite elements to large deflection geometrically nonlinear behaviour of cylindrical shells. *Variational methods in engineering: proceedings on an international conference held at the University of Southampton,25th September, 1972*, Southampton University Press, 1972.

SAKUMOTO, Y.; NAKAZATO, T.; MATSUZAKI, A. High-temperature properties of stainless steel for building structures. *Journal of structural engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 122, n. 4, p. 399–406, 1996.

SCHLEICH, J.-B.; DOTREPPE, J.-C.; FRANSSEN, J.-M. *Computer assisted analysis of the fire resistance of steel and composite concrete-steel structures*. Belgium, Brussels, 1986.

SCHWEIZERHOF, K. H.; WRIGGERS, P. Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 59, n. 3, p. 261–279, 1986.

SEGAL, A.; PRAAGMAN, N. A fast implementation of explicit time-stepping algorithms with the finite element method for a class of nonlinear evolution problems. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 23, n. 1, p. 155–168, 1986.

SHARIFI, P.; POPOV, E. P. Nonlinear buckling analysis of sandwich arches. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v. 97, n. 5, p. 1397–1412, 1971.

SHEN, S. N. A. S. The meshless local petrov-galerkin (mlpg) method: a simple & less-costly alternative to the finite element and boundary element methods. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, v. 3, n. 1, p. 11–51, 2002.

SILVA, A. L. A. *Análise termoelástica de placas de Reissner via método dos elementos de contorno*. Dissertçãoo (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2019.

SILVA, A. L. A.; TELLES, J. C. F.; SANTIAGO, J. A. F. Análise termoelástica de placas de reissner via método dos elementos de contorno. In: . Vitória - ES: Simpósio de Mecânica Computaciona - SIMMEC, 2018. p. 15.

SILVA, A. R. D. *Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil. Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais, 2009.

SILVA, C. Comportamento de estruturas metálicas e mistas em situação de incêndio–modelagem e aplicações. Aracaju. Dissertação (Mestrado)–Universidade Federal do Espírito Santo, p. 128, 2002.

SILVA, J. L. *Formulações corrotacionais 2D para análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas.* Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil. Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais (MG), 2016.

SILVA, V.; CORREIA, A.; RODRIGUES, J. Simulação do comportamento ao fogo de pilares de aço em contato com alvenaria. *XXXIII Jornadas Sudamericana de Ingenieria Estructural, Santiago*, 2008.

SILVA, V. P. Determination of the steel fire protection material thickness by an analytical processa simple derivation. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 27, n. 14, p. 2036–2043, 2005.

SILVA, V. P.; MELÃO, A. R. Temperatura crítica de perfis i de aço em situação de incêndio. *Ambiente Construído*, SciELO Brasil, v. 18, n. 2, p. 325–342, 2018.

SONG, L.; IZZUDDIN, B.; ELNASHAI, A.; DOWLING, P. An integrated adaptive environment for fire and explosion analysis of steel frames-part i: Analytical models. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier BV, v. 53, n. 1, p. 63–85, 2000.

SONG, Q.-Y.; HAN, L.-H.; ZHOU, K.; FENG, Y. Fire resistance of circular concrete-filled steel tubular (CFST) column protected by intumescent coating. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, v. 147, p. 154–170, 2018.

SORIANO, H. L.; LIMA, S. D. S. *Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas Vol. 48*. Sção Paulo: EdUSP, 2003.

SOUTHWELL, R. V. *An Introduction to the Theory of Elasticity for Engineers and Physicists*. Oxford: Oxford University Press, 1941.

SOUZA JÚNIOR, V. Análise de pórticos de aço sob altas temperaturas. *MSc, PROPEC/UFOP, Ouro Preto-MG-Brazil*, 1998.

SOUZA JÚNIOR, V. *Simulação computacional do comportamento de estruturas de aço sob incêndio*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, Rio Grande do Sul, 2004.

SOUZA JÚNIOR, V.; CREUS, G. Simplified elastoplastic analysis of general frames on fire. *Engineering structures*, Elsevier, v. 29, n. 4, p. 511–518, 2007.

SRIVASTAVA, G.; PRAKASH, P. R. An integrated framework for nonlinear analysis of plane frames exposed to fire using the direct stiffness method. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 190, p. 173–185, 2017.

SUAZNABAR, J.; SILVA, V. Combined axial and flexural loads in short reinforced concrete columns in fire: ultimate limit state curves using 500 c isotherm method. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, SciELO Brasil, v. 11, n. 1, p. 163–182, 2018.

SUN, R.; HUANG, Z.; BURGESS, I. W. Progressive collapse analysis of steel structures under fire conditions. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 34, p. 400–413, 2012.

SZILARD, R. *Theories and applications of plate analysis*. New Jersey: John Willey & Sons, 2004.

TAN, K.; TING, S.; HUANG, Z. Visco-elasto-plastic analysis of steel frames in fire. *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 128, n. 1, p. 105–114, 2002.

TEDONE, O. 1. allgemeine theoreme der mathematischen elastizitätslehre. *Encykl. Math. Wiss*, p. 1907–1914, 1907.

TIANTONGNUKUL, S.; LENWARI, A. Thermal analysis for peak temperature distribution in reinforced concrete beams after exposure to astm e119 standard fire. *Engineering Journal*, v. 21, n. 4, p. 243–258, 2017.

TIMOSHENKO, S. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 41, n. 245, p. 744–746, 1921.

TIMOSHENKO, S. Bending and buckling of bi-metallic strips. *J. Opt. Soc. of Am.*, v. 11, p. 233, 1925.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. *Teoria da elasticidade*. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980.

TIMOSHENKO, S. P. *Resistência dos materiais*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos - Editora S.A., 1969. v. 1.

TIMOSHENKO, S. P. *Resistência dos materiais*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos - Editora S.A., 1979. v. 2.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. *Mecânica dos Sólidos, Vol. I*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1983.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. *Theory of elastic stability.* New York: McGraw-Hill, 1961.

TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. *Theory of plates and shells*. New York: McGraw-hill, 1959.

TÓMASSON, B. High performance concrete design guide lines, report 5008, department of fire safety engineering, lund institute of technology. *Lund University, Box*, v. 118, 1998.

TUNER, M.; DRILL, E.; MELOSH, H. M. R. Large deflection of structures subject to heating and external load, j. *Areo Sci*, v. 27, p. 97–106, 1960.

TURNER, M. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *journal of the Aeronautical Sciences*, v. 23, n. 9, p. 805–823, 1956.

USMANI, A.; ROTTER, J.; LAMONT, S.; SANAD, A.; GILLIE, M. Fundamental principles of structural behaviour under thermal effects. *Fire Safety Journal*, Elsevier, v. 36, n. 8, p. 721–744, 2001.

VASSART, O.; CAJOT, L.-G.; O'CONNOR, M.; SHENKAI, Y.; FRAUD, C.; ZHAO, B.; QUINTANA, J. De la; ARAGON, J. Martinez de; FRANSSEN, J.-M.; GENS, F. 3d simulation of industrial hall in case of fire. benchmark between abaqus, ansys and safir. In: INTERSCIENCE COMMUNICATIONS. *Interflam Proceedings. Fire Sciences and Engineering Conference*. Edinburgh, 2004. p. 1315–1324.

VEIGA, L. B.; LOVADINA, C.; REALI, A. Avoiding shear locking for the timoshenko beam problem via isogeometric collocation methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 241, p. 38–51, 2012.

VILA REAL, P. *Incêndio em estruturas metálicas: cálculo estrutural*. Mafra: Editora ORION, 2003.

VILA REAL, P. M. M. *Modelação por elementos finitos do comportamento térmico e termo-elástico de sólidos sujeitos a elevados gradientes térmicos*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto - FEUP, Porto - Portugal, 1988.

VILA REAL, P. M. M. *Modelação por elementos finitos da solidificação e comportamento termo-mecânico de peças vazadas em moldações metálicas*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto - FEUP, Porto - Portugal, 1993.

VOGEL, U. Calibration frames. Stahlbau. 10: 295-301, 1985.

WAINMAI, D.; KIRBY, B. Compendium of uk standard fire test data - unprotected structural steel. *Swindon Laboratorie*, British Steel Corporation, Vol. 1 Ref. No. RS/RSC/S10328/1/87/B and Vol. 2 Ref. No. RS/R/S1199/88/B, 1982.

WAINMAN, D.; KIRBY, B. *Compendium of UK standard fire test data, unprotected structural steel–1. Ref. No*. British Steel Corporation, 1987.

WAINMAN, D.; KIRBY, B. *Compendium of UK standard fire test data: Unprotected structural steel*. Rotherham: British Steel Corporation, Swinden Laboratories, 1988.

WALLS, R. S.; VILJOEN, C.; CLERCQ, H. de. Analysis of structures in fire as simplified skeletal frames using a customised beam finite element. *Fire technology*, Springer, v. 54, n. 6, p. 1655–1682, 2018.

WANG, W.; WANG, K.; KODUR, V.; WANG, B. Mechanical properties of high-strength q690 steel at elevated temperature. *Journal of Materials in Civil Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 30, n. 5, p. 04018062, 2018.

WANG, Y.; MOORE, D. Steel frames in fire: analysis. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 17, n. 6, p. 462–472, 1995.

WANG, Y.; THAM, L.; CHEUNG, Y. Beams and plates on elastic foundations: a review. *Progress in Structural Engineering and Materials*, Wiley Online Library, v. 7, n. 4, p. 174–182, 2005.

WATSON, L. T.; BILLUPS, S. C.; MORGAN, A. P. Algorithm 652: Hompack: A suite of codes for globally convergent homotopy algorithms. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, ACM, v. 13, n. 3, p. 281–310, 1987.

WEMPNER, G. A. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, v. 7, n. 11, p. 1581–1599, 1971.

WEST, H. H. *Analysis of structures, an integration of classical and modern methods*. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1989.

WHITE, R.; GERGELY, P.; SEXSMITH, R. *Structural Engineering Combined Edition vol. 1: Introduction to Design Concepts and Analysis - vol. 2: Indeterminate Structures*. New York: John Wiley & Sons, 1976.

WICKSTRÖM, U. *A numerical procedure for calculating temperature in hollow structures exposed to fire*. Sweden: Lund Institute of Technology, Department of Structural Mechanics Lund, 1979.

WICKSTRÖM, U. *TASEF-2: A Computer Program for Temperature Analysis of Structures Exposed to Fire*. Sweden: Lund Institute of Technology, Department of Structural Mechanics, 1979.

WINKLER, E. Die lehre von der elasticitaet und festigkeit. *Dominicus*, Prag, 1867.

WU, H.; LIE, T. T.; HU, J. et al. Fire resistance of beam slab specimens: experimental studies. *Internal report/National Research Council of Canada, Institute for Research in Construction; no. 641*, NRCC, Ottawa, ON, CA, 1993.

XAVIER, H. F. B. *Analysis of reinforced concrete frames exposed to fire: based on advanced calculation methods*. Masters in Civil Engineering — Universidade do Porto, Porto, 2009.

XIONG, M.-X.; WANG, Y.; LIEW, J. R. Evaluation on thermal behavior of concrete-filled steel tubular columns based on modified finite difference method. *Advances in Structural Engineering*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 19, n. 5, p. 746–761, 2016.

XU, Y.-y.; WU, B. Fire resistance of reinforced concrete columns with l-, t-, and+-shaped cross-sections. *Fire Safety Journal*, Elsevier, v. 44, n. 6, p. 869–880, 2009.

YANG, Y. B.; KUO, S. R. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. New York: Prentice Hall, 1994.

YANG, Y.-B.; SHIEH, M.-S. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. *AIAA journal*, v. 28, n. 12, p. 2110–2116, 1990.

YIN, J.; ZHA, X.-x.; LI, L.-y. Fire resistance of axially loaded concrete filled steel tube columns. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, v. 62, n. 7, p. 723–729, 2006.

ZÁRATE, F.; OÑATE, E. Caltep: Programa para el cálculo transitorio de la ecuación de poisson. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 1993.

ZHAO, J.; ZHENG, J.-J.; PENG, G.-F.; BREUGEL, K. van. Numerical analysis of heating rate effect on spalling of high-performance concrete under high temperature conditions. *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 152, p. 456–466, 2017.

ZHOU, H.; WANG, W.; WANG, K.; XU, L. Mechanical properties deterioration of high strength steels after high temperature exposure. *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 199, p. 664–675, 2019.

ZIEMIAN, R. D. Examples of frame studies used to verify advanced methods of inelastic analysis. *Plastic hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames*, Structural Stability Research Council, 1993.

ZIENKIEWICZ, O. The finite element in engineering science. *McGrau Hill, London*, 1971.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; TAYLOR, R. L.; TAYLOR, R. *The finite element method: solid mechanics*. Oxford, UK: Butterworth-heinemann, 2000. v. 2.

Apêndice A

CAMPO TÉRMICO DAS ESTRUTURAS EXPOSTAS AO INCÊNDIO

Neste apêndice são mostrados os resultados adicionais aos casos analisados no decorrer do Capítulo 4, visando apresentar os campos de temperatura ao nível da seção transversal das estruturas aço, concreto e mitas em situação de incêndio. Esses resultados complementam o entendimento físico dos problemas de engenharia estudados na vigente pesquisa e auxiliam na avaliar do desempenho numérico do módulo computacional específico desenvolvido para análise térmica.

A.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A análise numérica avançada de estruturas em condição de incêndio possibilita a investigação detalhada da evolução térmica na seção transversal dos elementos estruturais. Esses estudos englobam inúmeros parâmetros, como o conhecimento das ações térmicas provenientes dos fluxos de calor combinado de convecção-radiação, a modelagem dos gases quentes em torno da estrutura, o comportamento das propriedades físicas dos materiais em função do aumento de temperatura, o tratamento matemático-numérico dos procedimentos de solução das equações não lineares, dentre outros. Conforme foi apresentado no decorrer da presente pesquisa, esses fatores mencionados anteriormente são sintetizados nas premissas e na implementação do método dos elementos finitos aplicado ao problema de condução de calor em meios sólidos bidimensionais, conforme apresentado em detalhes no Capítulo 4. Neste apêndice apresenta-se um complemento aos resultados apresentados no capítulo de análise térmica de estruturas expostas ao fogo.

A.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

Na seção 4.4 são avaliados inúmeros testes numéricos acerca do comportamento térmico de elementos estruturais, transitando de casos lineares e não lineares, bem como os problemas definidos em domínios unidimensionais e bidimensionais. Sendo assim, os próximos itens do presente apêndice visam apresentar um complemento para análise térmica na seção transversal de elementos estruturais de aço e/ou concreto expostos à ação de elevadas temperaturas. Em todos os exemplos de aplicação estudados, no contexto de incêndio, são acrescentadas informações acerca da distribuição de temperatura na seção para diferentes níveis temporais e os valores quantitativos das temperaturas nodais ao longo do domínio bidimensional.

A.2.1 VIGA DE CONCRETO

Distribuição bidimensional de temperatura na seção transversal da viga retangular de concreto em situação de incêndio para 30, 60, 90 e 120 min de exposição ao fogo. Os dados numéricos tabulares são medidos ao longo da seção transversal da viga de concreto.

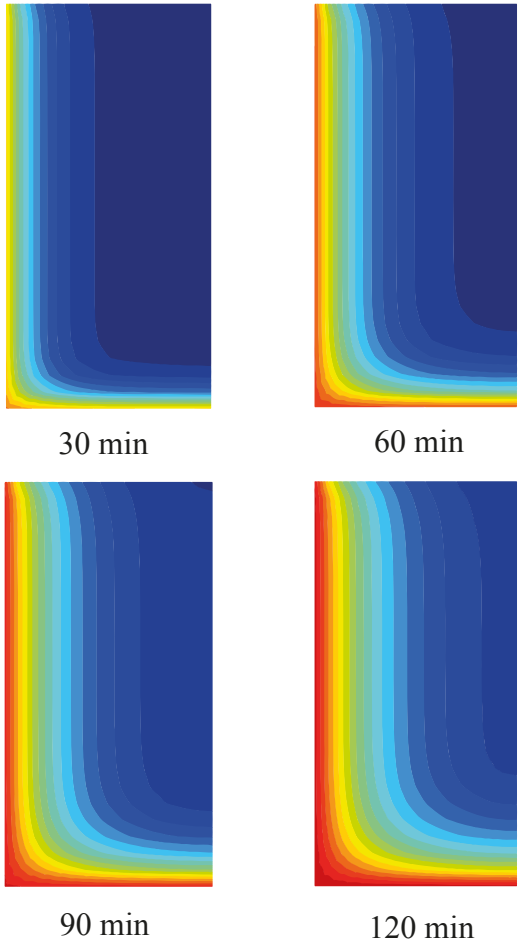

Figura A.1 – Campo de temperatura da viga de concreto retangular exposta ao fogo

Tabela A.1 - Dados do campo de temperatura da viga de concreto retangular exposta ao fogo

x (m)	*y* (m)	Tempo de Exposição ao Incêndio (min)			
		30	60	90	120
0,000	0,000	845,912	950,011	1009,555	1051,860
0,150	0,000	741,735	893,796	970,311	1021,753
0,150	0,600	21,198	40,009	70,509	94,565
0,000	0,600	714,809	860,438	935,002	985,335
0,075	0,000	736,035	895,370	973,393	1025,014
0,150	0,050	102,967	240,838	349,325	439,907
0,060	0,550	74,180	159,530	234,260	292,420
0,140	0,520	22,220	46,910	84,830	111,000
0,110	0,500	29,290	68,340	109,900	153,040
0,060	0,450	75,070	164,410	245,290	310,090
0,040	0,400	144,770	285,930	378,800	449,220
0,050	0,300	101,060	217,490	304,890	373,030
0,100	0,100	42,330	111,620	204,630	292,300
0,060	0,080	90,540	247,020	371,360	466,780
0,120	0,120	27,280	74,380	125,090	198,740
0,020	0,150	323,300	495,640	601,110	679,770
0,070	0,200	56,720	125,830	199,730	265,780
0,150	0,425	21,904	46,489	85,893	111,511
0,129	0,275	23,422	51,874	92,008	122,122

A.2.2 PILAR DE CONCRETO

Campo bidimensional de temperatura na seção transversal do pilar quadrado de concreto em situação de incêndio. Os campos térmicos são referentes aos tempos de 30, 60, 90 e 120 min. Os valores numéricos são medidos na seção do pilar com origem no canto inferior esquerdo.

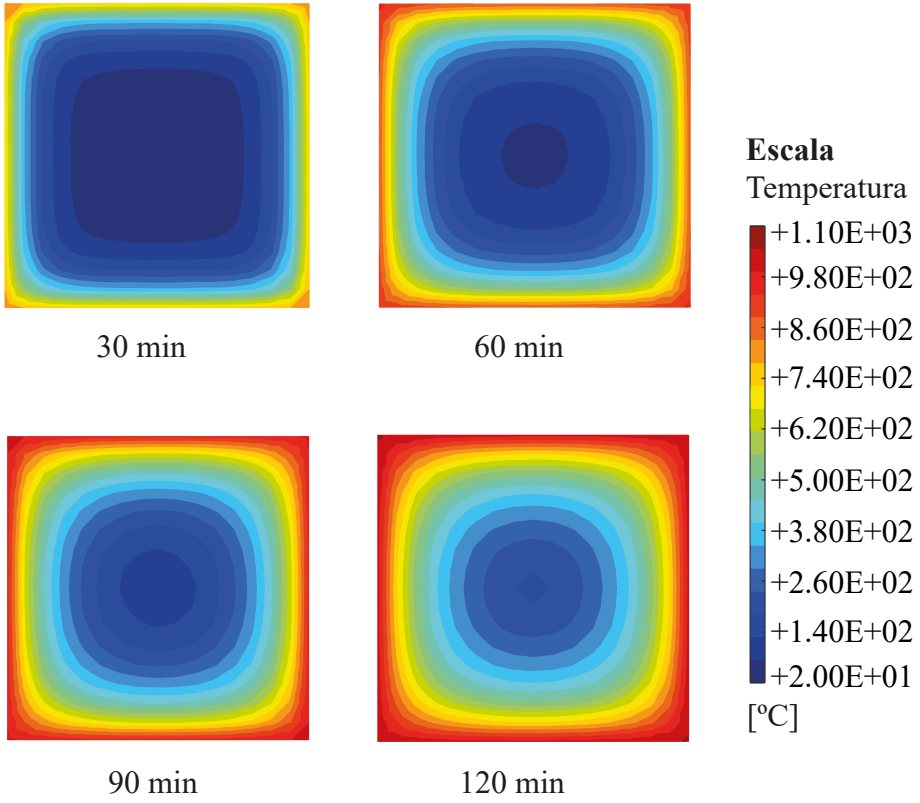

Figura A.2 - Campo de temperatura do pilar de concreto em situação de incêndio

Tabela A.2 - Valores de temperatura do pilar de concreto em situação de incêndio

x (m)	*y* (m)	Tempo de Exposição ao Incêndio (min)			
		30	60	90	120
0,000	0,000	844,425	949,337	1009,125	1051,544
0,300	0,000	850,857	951,240	1010,117	1052,182
0,300	0,300	844,425	949,337	1009,125	1051,544
0,000	0,300	850,857	951,240	1010,117	1052,182
0,094	0,000	735,177	891,790	970,277	1022,438
0,300	0,075	736,399	894,907	973,193	1024,946
0,075	0,300	736,399	894,907	973,193	1024,946
0,000	0,244	742,557	900,600	977,610	1028,473
0,000	0,056	744,012	900,800	977,635	1028,450
0,150	0,150	22,457	63,497	103,072	173,520
0,038	0,188	174,960	341,723	459,206	551,848
0,225	0,263	193,228	392,938	522,308	618,270
0,225	0,038	189,980	388,701	518,560	615,243
0,263	0,038	295,321	525,716	660,172	753,773
0,056	0,038	228,309	445,844	579,305	675,296
0,094	0,131	36,917	96,342	172,185	261,692
0,150	0,131	23,431	66,662	107,976	183,543
0,150	0,056	89,252	209,070	314,686	405,307
0,225	0,131	54,937	134,629	232,377	322,862

A.2.3 LAJE DE CONCRETO

Campo bidimensional de temperatura para os tempos de 30, 60, 90 e 120 min associado ao comportamento da laje de concreto exposta à ação de altas temperaturas provocadas pelo incêndio. A laje é isolada termicamente nas laterais e os dados numéricos são medidos no domínio do problema.

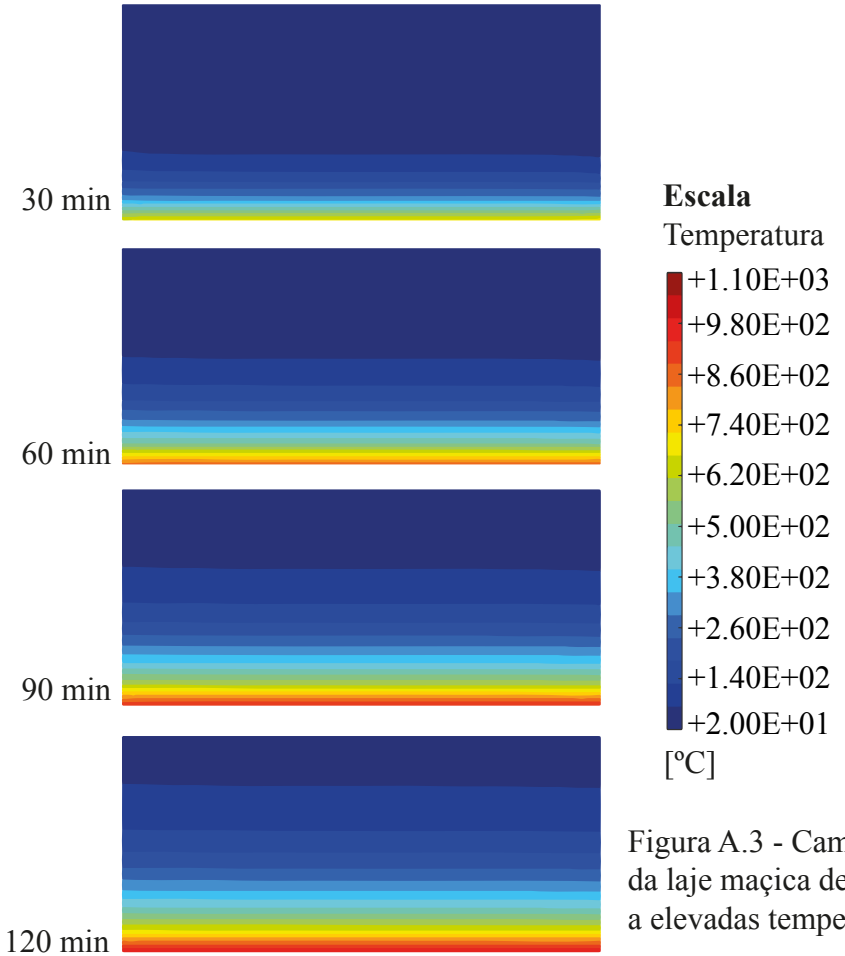

Figura A.3 - Campo de temperatura da laje maçica de concreto sujeita a elevadas temperaturas

Tabela A.3 - Valores de temperatura da laje maçica de concreto sujeita a elevadas temperaturas

x (m)	*y* (m)	Tempo de Exposição ao Incêndio (min)			
		30	60	90	120
0,000	0,200	20,044	23,860	36,391	53,885
0,000	0,000	669,757	856,872	943,988	1000,375
0,500	0,000	703,929	872,754	954,034	1007,493
0,500	0,200	19,974	22,497	33,696	50,425
0,000	0,180	20,105	25,116	39,609	59,154
0,000	0,160	20,418	29,099	47,667	70,155
0,158	0,000	686,610	864,700	948,943	1003,898
0,184	0,000	686,610	864,698	948,938	1003,891
0,500	0,040	139,209	287,278	383,827	454,990
0,500	0,140	20,531	34,436	58,230	83,785
0,237	0,200	20,005	23,160	35,029	52,145
0,184	0,180	20,039	24,471	38,471	57,735
0,158	0,160	20,232	28,263	46,428	68,693
0,053	0,140	21,061	36,162	60,725	86,417
0,079	0,120	23,420	48,971	81,128	111,813
0,158	0,100	29,731	70,145	112,121	155,306
0,053	0,080	45,157	106,236	169,051	225,260
0,053	0,060	76,125	174,269	258,129	322,114
0,079	0,040	146,694	294,123	390,035	460,504

A.2.4 LAJE NERVURADA DE CONCRETO

Distribuição de temperatura na seção transversal da laje nervurada de concreto exposta à ação dos altos gradientes térmicos. São apresentados os campos térmicos para os tempos de 30, 60, 90 e 120 min de exposição ao fogo.

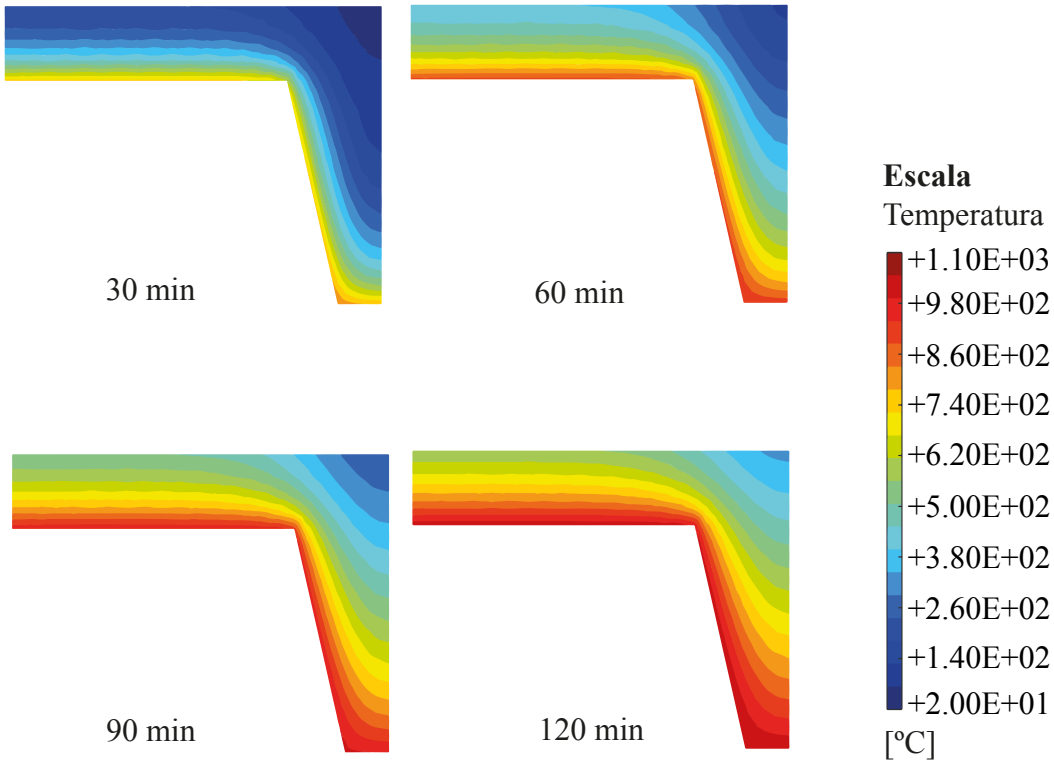

Figura A.4 - Distribuição bidimensional de temperatura na laje nervurada de concreto exposta ao fogo

Tabela A.4 - Dados numéricos acerca dos valores de temperatura na laje nervurada de concreto exposta ao fogo

x (m)	*y* (m)	Tempo de Exposição ao Incêndio (min)			
		30	60	90	120
0,00	0,15	743,77	901,45	977,81	1027,43
0,00	0,20	187,38	402,58	510,07	571,38
0,30	0,20	54,19	117,50	242,99	325,98
0,22	0,15	614,38	808,57	909,76	974,95
0,27	0,00	827,73	941,69	1004,35	1048,12
0,30	0,00	766,38	918,17	991,41	1039,72
0,29	0,00	774,16	920,62	992,58	1040,43
0,30	0,01	557,24	785,87	900,67	972,88
0,15	0,20	179,60	392,14	498,28	559,39
0,00	0,17	343,31	573,35	696,85	770,87
0,04	0,15	737,75	899,19	976,69	1026,75
0,17	0,15	736,30	897,24	974,78	1025,07
0,24	0,08	736,51	896,82	976,58	1028,80
0,26	0,16	141,73	293,78	425,29	526,54
0,28	0,17	80,92	187,36	322,52	422,17
0,08	0,17	311,00	544,65	669,81	744,44
0,01	0,19	232,47	463,75	585,89	657,70
0,09	0,17	415,53	642,14	761,95	834,05
0,27	0,00	783,92	921,08	991,63	1039,23

A.2.5 PILAR DE CONCRETO ARMADO

Distribuição de temperatura ao longo da seção transversal constituída por um pilar de concreto armado em condição de incêndio associado ao tempo de 30, 60, 90 e 120 min. A estrutura está exposta ao incêndio nas quatro arestas do domínio.

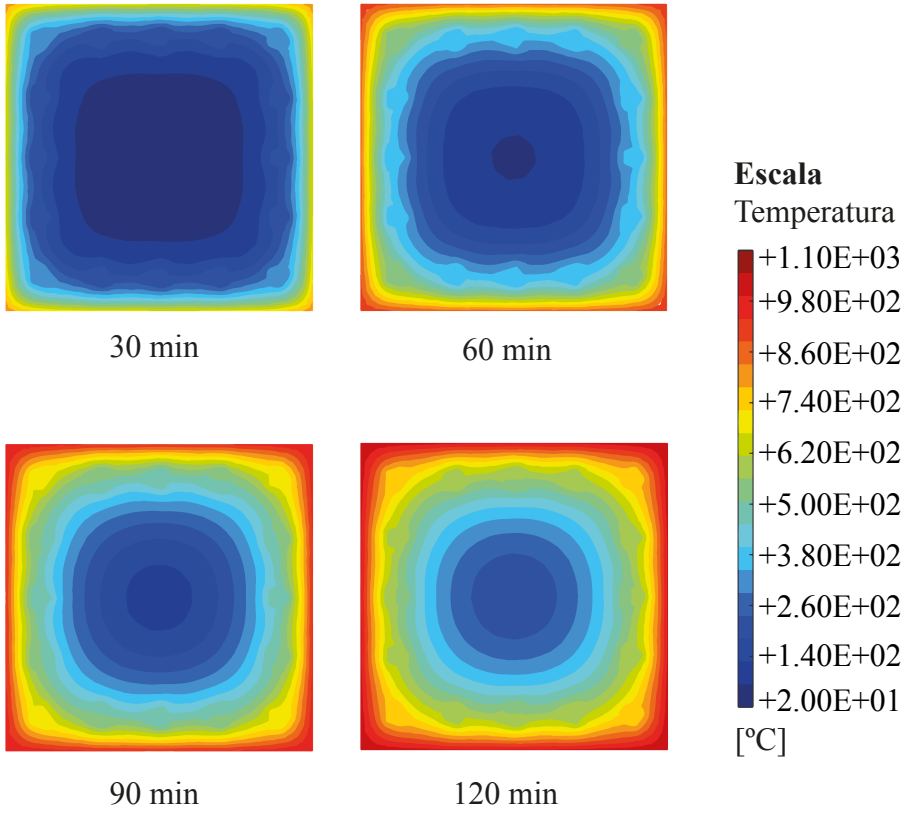

Figura A.5 - Distribuição bidimensional de temperatura pilar de concreto armado em condição de incêndio

Tabela A.5 - Valores de temperatura para pilar de concreto armado em condição de incêndio

x (m)	*y* (m)	Tempo de Exposição ao Incêndio (min)			
		30	60	90	120
0,000	0,000	829,456	943,456	1005,628	1049,136
0,300	0,000	829,367	943,497	1005,696	1049,213
0,300	0,300	829,367	943,497	1005,696	1049,213
0,000	0,300	829,456	943,456	1005,628	1049,136
0,044	0,092	188,336	373,483	501,300	597,503
0,275	0,092	198,920	384,538	511,681	607,228
0,160	0,035	185,600	351,061	468,148	560,875
0,025	0,000	738,374	901,214	978,876	1029,144
0,175	0,000	684,156	862,771	950,136	1007,183
0,300	0,063	700,481	879,707	964,055	1018,243
0,300	0,263	716,066	889,724	971,211	1023,175
0,263	0,300	710,888	887,170	969,678	1022,158
0,038	0,300	717,326	890,151	971,398	1023,293
0,000	0,175	684,320	862,880	950,161	1007,175
0,000	0,050	706,753	884,514	967,669	1020,828
0,037	0,159	183,324	348,401	465,560	558,432
0,268	0,101	194,283	379,665	506,999	602,803
0,258	0,144	181,803	346,375	463,457	556,397
0,095	0,025	199,250	384,944	512,054	607,587

A.2.6 VIGA DE CONCRETO ARMADO

Campo térmico bidimensional na seção transversal da viga de concreto armado sob ação do incêndio. Os gráficos destinados aos campos térmicos são referidos aos tempos de 30, 60, 90 e 120 min. A seção da viga é exposta ao fogo nas faces laterais e inferior.

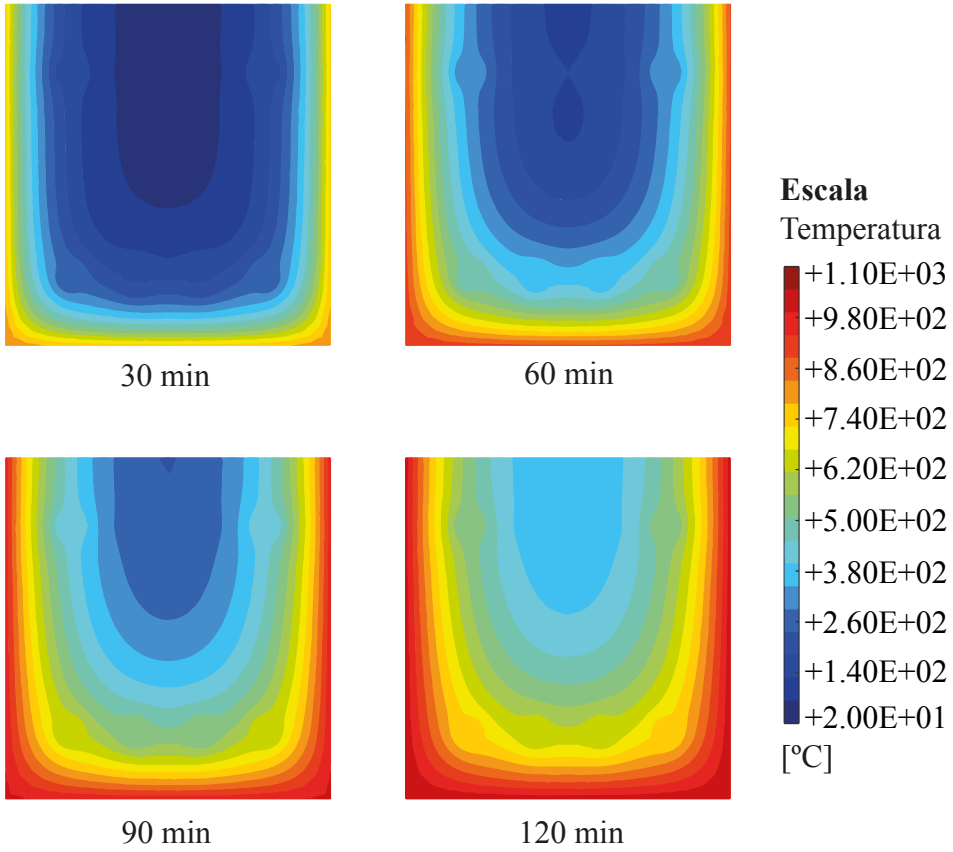

Figura A.6 - Campo térmico bidimensional da viga de concreto exposta em três faces ao incêndio

Tabela A.6 - Dados numéricos referentes aos níveis de temperatura na viga de concreto exposta em três faces ao incêndio

x (m)	*y* (m)	Tempo de Exposição ao Incêndio (min)			
		30	60	90	120
0,000	0,000	837,840	944,878	1005,989	1049,155
0,100	0,000	745,279	899,256	977,059	1028,597
0,200	0,000	837,840	944,878	1005,989	1049,155
0,200	0,200	745,774	895,908	972,032	1023,823
0,000	0,200	745,772	895,909	972,033	1023,823
0,100	0,040	172,963	373,194	516,235	624,751
0,048	0,160	159,481	311,588	424,487	524,703
0,042	0,048	270,976	494,355	631,942	725,928
0,112	0,160	58,815	142,810	260,961	369,812
0,056	0,000	755,282	906,449	981,862	1032,024
0,200	0,021	786,140	922,539	992,222	1039,439
0,200	0,179	748,969	896,907	972,471	1024,015
0,074	0,200	64,166	152,005	267,770	375,269
0,000	0,063	755,959	906,585	981,622	1031,735
0,136	0,073	104,470	279,155	422,019	534,401
0,140	0,055	151,640	358,767	502,076	610,879
0,140	0,157	94,213	211,537	327,210	432,866
0,120	0,136	59,001	142,888	272,537	383,018
0,160	0,040	273,948	497,159	634,446	728,025
0,080	0,044	179,314	380,464	522,769	630,172

A.2.7 LAJE NERVURADA PREENCHIDA COM BLOCO DE CONCRETO CELULAR

Campo de temperatura bidimensional da seção transversal da laje nervurada preenchida com bloco de concreto celular para o tempo de 30, 60, 90 e 120 min. As faces laterais da seção são mantidas ao fluxo de calor nulo, ou seja, isoladas termicamente.

Tabela A.7 - Valores de temperatura na laje nervurada preenchida com bloco de concreto celular em situação de incêndio

x (m)	*y* (m)	Tempo de Exposição ao Incêndio (min)			
		30	60	90	120
0,000	0,000	828,960	937,472	1000,007	1044,039
0,100	0,000	786,487	920,253	988,481	1035,159
0,200	0,000	786,501	920,269	988,495	1035,170
0,300	0,000	828,981	937,479	1000,011	1044,041
0,300	0,120	20,374	30,148	52,917	78,854
0,200	0,120	28,746	65,756	99,477	133,356
0,100	0,120	28,802	65,840	99,604	133,522
0,000	0,120	20,373	30,141	52,907	78,843
0,000	0,080	21,575	37,154	65,824	96,929
0,100	0,080	50,542	111,673	167,907	215,716
0,200	0,080	50,571	111,728	167,961	215,780
0,300	0,080	21,576	37,163	65,837	96,942
0,080	0,000	810,986	932,301	997,172	1042,183
0,134	0,018	703,839	868,772	948,911	1001,983
0,166	0,018	703,434	868,456	948,659	1001,766
0,166	0,004	751,899	904,795	977,907	1027,018
0,100	0,017	450,669	635,771	734,166	800,109
0,071	0,080	26,496	59,058	97,299	128,445
0,156	0,120	34,815	83,474	120,987	169,443

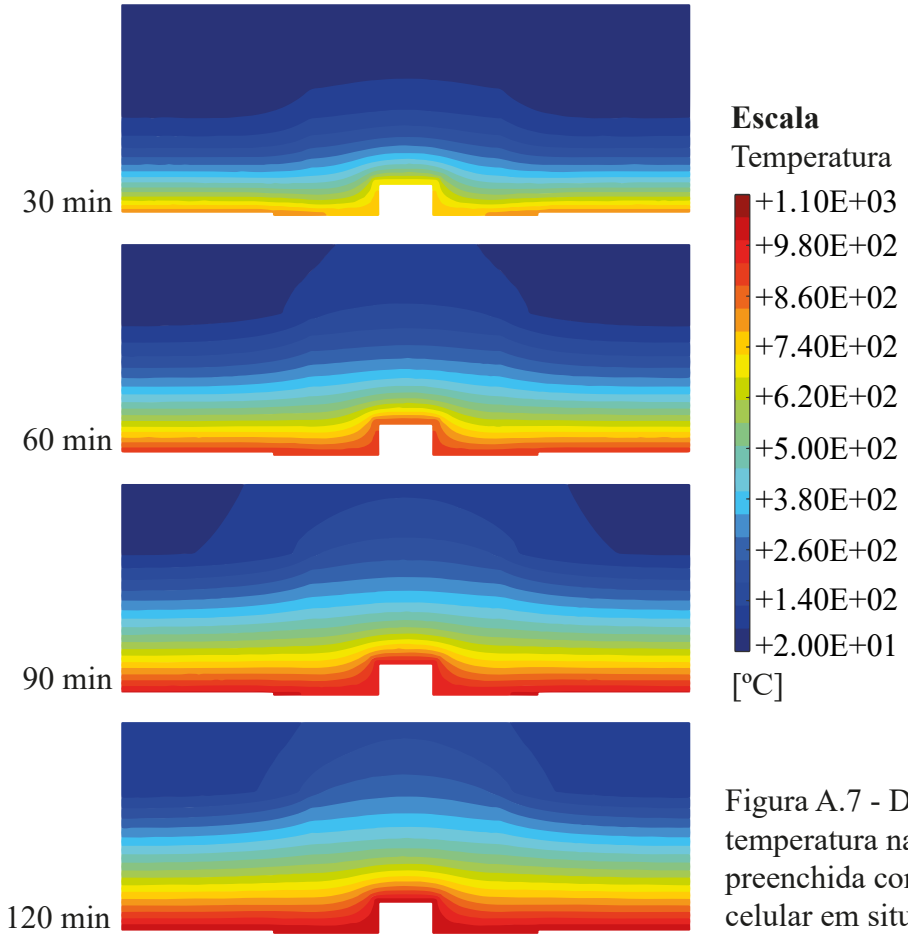

Figura A.7 - Distribuição de temperatura na laje nervurada preenchida com bloco de concreto celular em situação de incêndio

A.2.8 PERFIL DE AÇO SEM E COM REVESTIMENTO CONTRA FOGO

Comparação entre os resultados térmicos para o perfil I de aço sem e com revestimento contra fogo. Os campos térmicos são apresentados para os tempos de 30, 60, 90 e 120 min. Os dados numéricos são mensurados nos pontos A, B, C e D contidos ao longo do perfil de aço.

Figura A.8 - Distribuição de temperatura para perfil sem e com revestimento contra fogo em condição de incêndio

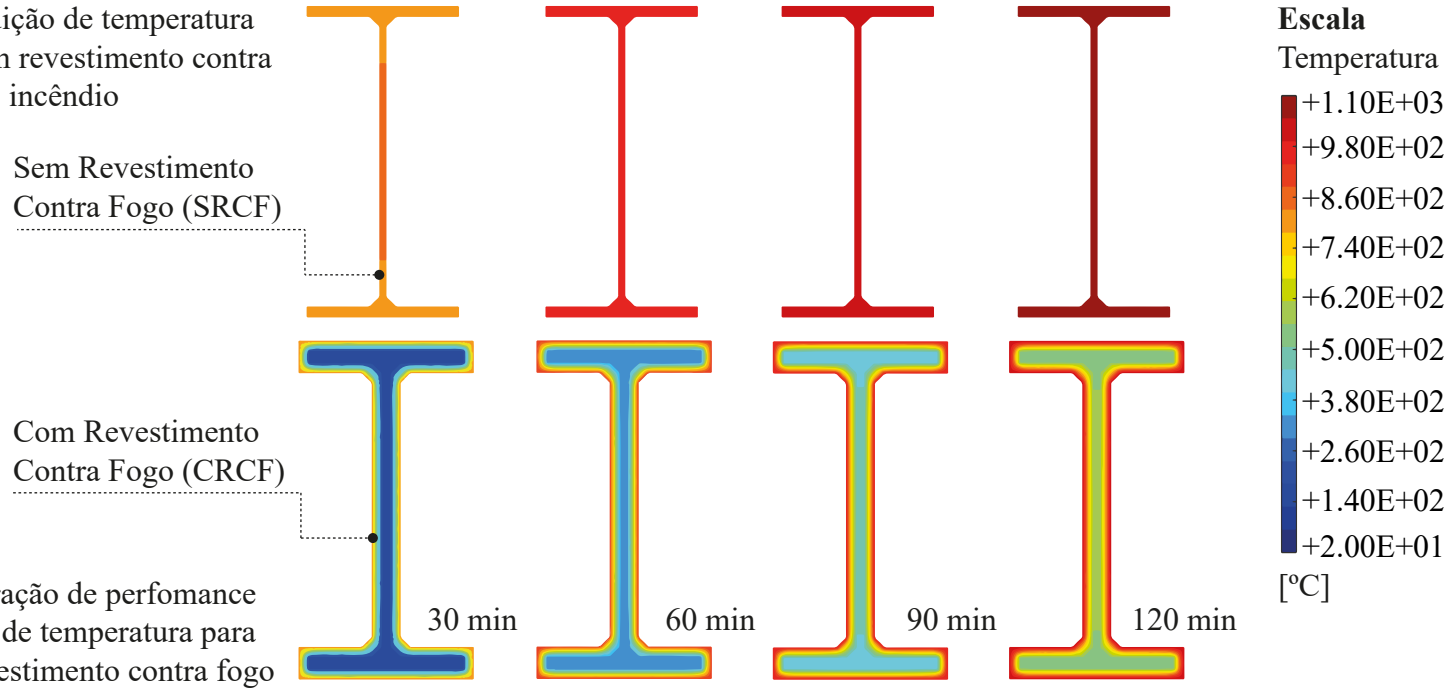

Tabela A.8 - Comparação de perfomance referentes aos níveis de temperatura para perfil sem e com revestimento contra fogo

Pontos	***x* (m)**	***y* (m)**	**Tempo de Exposição ao Incêndio (min)**							
			30		60		90		120	
			SRCF	CRCF	SRCF	CRCF	SRCF	CRCF	SRCF	CRCF
A	0,000	0,354	823,919	157,207	941,969	320,473	1004,118	455,219	1047,800	562,419
B	0,085	0,347	815,674	152,735	940,396	316,045	1003,139	450,844	1047,097	558,100
C	0,085	0,258	832,122	173,180	942,741	339,843	1004,522	474,541	1048,057	580,955
D	0,085	0,180	832,967	178,313	942,799	346,055	1004,552	480,726	1048,077	586,877

A.2.9 PERFIL I COM ALVENARIA

Campo de temperatura do perfil I de aço com alvenaria em situação de incêndio. Os campos são plotados para os tempos de 30, 60, 90 e 120 min de exposição ao fogo. Os dados numéricos são medidos ao longo do domínio bidimensional do problema físico.

Tabela A.9 - Dados numéricos referentes ao comportamento térmico do perfil I de aço com alvenaria exposto a elevadas temperaturas

x (m)	y (m)	Tempo de Exposição ao Incêndio (min)			
		30	60	90	120
0,000	0,000	368,802	589,341	705,266	795,084
0,200	0,010	769,142	929,212	997,305	1043,268
0,097	0,180	610,834	809,877	910,627	974,170
0,200	0,180	769,361	929,379	997,419	1043,355
0,010	0,190	369,098	589,572	705,425	795,525
0,183	0,000	746,573	920,564	991,791	1039,170
0,186	0,000	753,320	923,314	993,557	1040,488
0,103	0,034	715,110	896,460	975,213	1026,533
0,131	0,180	682,540	874,815	960,813	1015,441
0,121	0,190	658,052	854,647	945,769	1003,229
0,097	0,144	736,913	913,082	986,532	1035,197
0,069	0,010	479,817	687,025	801,546	883,570
0,010	0,224	96,843	250,626	375,253	471,228
0,010	0,899	20,000	20,000	20,000	20,000
0,190	0,440	769,490	908,544	979,497	1027,689
0,190	0,362	770,249	908,815	979,846	1028,239
0,018	0,409	20,046	20,553	33,800	64,416
0,183	0,510	628,338	787,698	867,949	922,146
0,100	0,089	780,085	933,779	999,838	1045,015
0,073	0,004	491,489	697,423	812,125	892,286

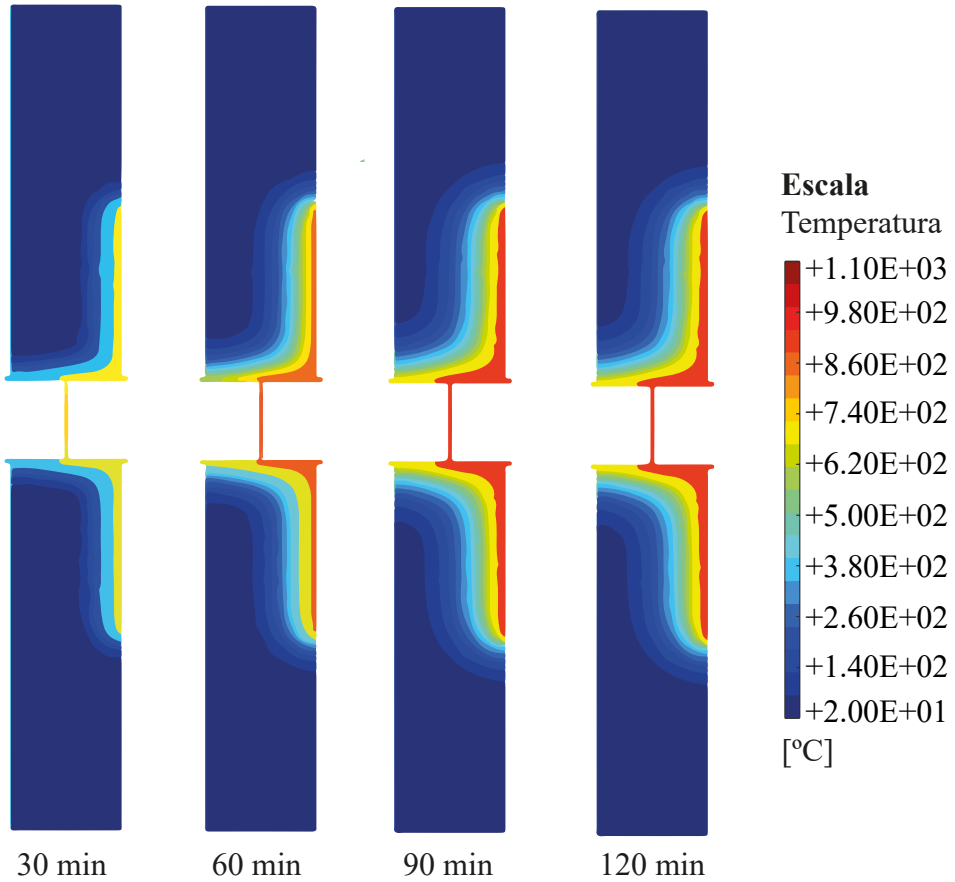

Figura A.9 - Distribuição de temperatura do perfil I de aço com alvenaria exposto a elevadas temperaturas

A.2.10 PERFIL DE AÇO COM VEDAÇÃO

Campo de temperatura bidimensional associado ao perfil I de aço com vedação em situação de incêndio. Os campos são plotados para os tempos de 30, 60, 90 e 120 min de exposição ao fogo. As medições numéricas são realizadas nos pontos A até I, situados ao longo do perfil de aço.

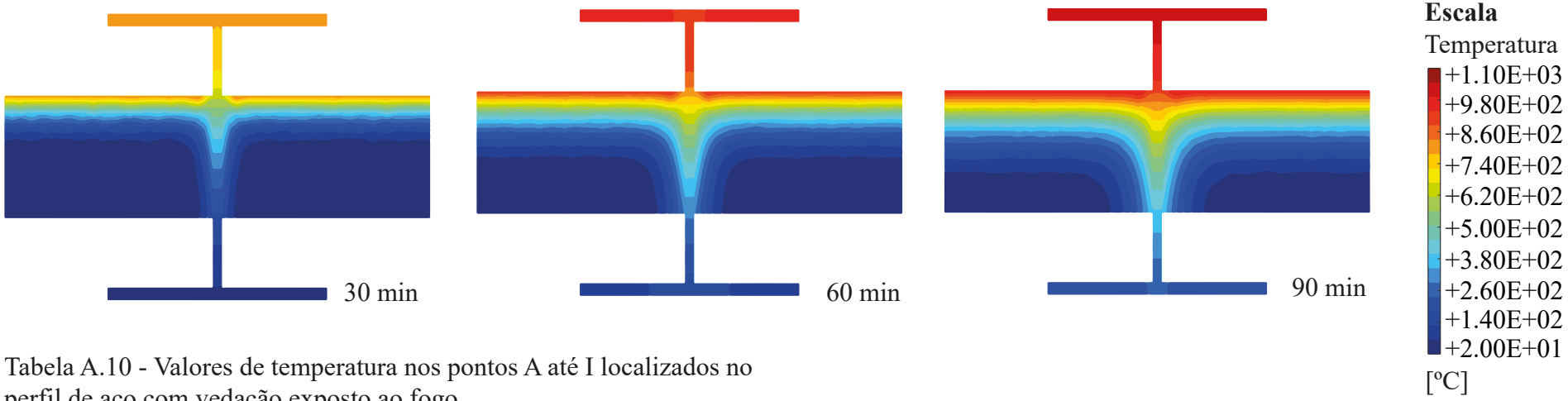

Tabela A.10 - Valores de temperatura nos pontos A até I localizados no perfil de aço com vedação exposto ao fogo

Pontos	x (m)	y (m)	Tempo de Exposição ao Incêndio (min)			
			30	60	90	120
A	0,0000	0,3432	813,077	941,198	1003,693	1047,516
B	0,0933	0,3432	798,914	939,689	1002,811	1046,904
C	0,1865	0,3432	778,857	935,847	1000,526	1045,301
D	0,1865	0,2505	631,336	806,767	897,439	957,631
E	0,1865	0,1755	329,203	487,050	580,651	651,727
F	0,1865	0,1005	172,351	301,405	390,405	462,326
G	0,1865	0,0078	69,511	159,675	241,687	314,275
H	0,0933	0,0078	43,746	119,031	198,125	270,726
I	0,0000	0,0078	35,414	104,474	182,274	254,811

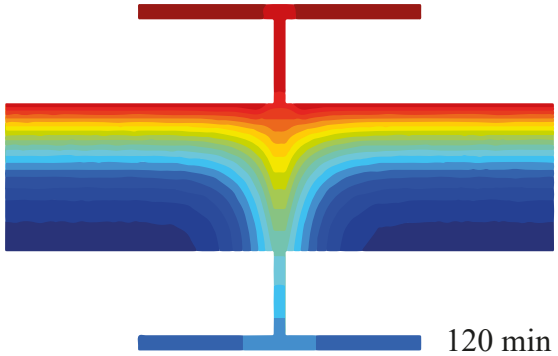

Figura A.10 - Campo de temperatura 2D para perfil de aço exposto ao fogo com vedação

A.2.11 PILAR MISTO DE CONCRETO E AÇO

Distribuição de temperatura na seção transversal do pilar misto de aço-concreto em situação de incêndio. Os campos térmicos são plotados para os tempos de 30, 60, 90 e 120 min de exposição ao fogo. Os dados numéricos são medidos em relação aos pontos contidos no domínio bidimensional.

Tabela A.11 - Dados quantitativos em relação ao campo térmico bidimensional do pilar misto de concreto-aço em situação de incêndio

x (m)	*y* (m)	Tempo de Exposição ao Incêndio (min)			
		30	60	90	120
0,000	0,000	776,042	929,825	997,961	1044,039
0,100	0,000	655,155	859,909	955,318	1014,429
0,200	0,200	776,049	929,825	997,960	1044,038
0,103	0,003	652,726	857,556	953,559	1013,068
0,100	0,100	70,449	209,026	388,249	524,056
0,002	0,100	716,098	892,380	974,238	1027,566
0,097	0,014	604,117	817,700	925,629	992,079
0,003	0,078	717,985	894,956	975,868	1028,677
0,050	0,197	722,611	903,264	981,929	1033,081
0,000	0,175	750,882	916,917	989,893	1038,461
0,115	0,197	682,705	878,748	967,636	1023,389
0,150	0,003	722,611	903,264	981,929	1033,081
0,200	0,150	727,059	903,728	981,628	1032,750
0,122	0,019	432,439	667,218	803,734	894,593
0,085	0,035	278,069	504,851	662,369	774,940
0,021	0,145	395,609	630,584	769,113	865,044
0,111	0,021	471,253	700,333	832,229	917,881
0,039	0,148	251,331	491,188	648,414	762,596
0,107	0,023	497,476	723,080	851,466	933,558
0,066	0,150	164,556	391,862	557,890	682,184

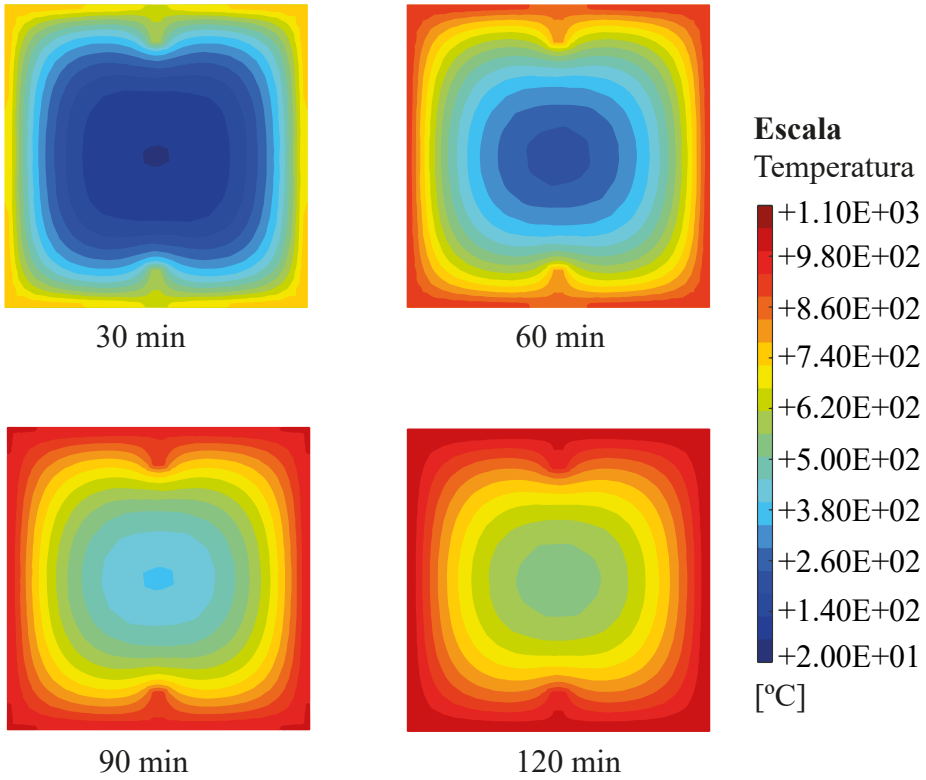

Figura A.11 - Distribuição de temperatura para pilar misto de concreto-aço em situação de incêndio

A.2.12 VIGA MISTA AÇO-CONCRETO

Campo térmico bidimensional na seção transversal da viga mista de concreto e aço em condição de incêndio. Os campos são apresentados para 30, 60, 90 e 120 min de exposição ao fogo. Os dados numéricos extraídos no problema são medidos ao longo do perfil de aço e na laje de concreto.

Tabela A.12 - Valores de temperatura referentes ao domínio bidimensional representativo de uma viga mista em situação de incêndio

x (m)	*y* (m)	Tempo de Exposição ao Incêndio (min)			
		30	60	90	120
0,300	0,016	787,981	939,651	1002,852	1046,959
0,146	0,634	616,584	833,419	949,678	1008,836
0,000	0,634	603,180	832,087	949,077	1008,891
0,000	0,016	788,216	939,685	1002,873	1046,975
0,100	0,000	772,693	938,201	1001,978	1046,341
0,154	0,049	813,647	941,355	1003,793	1047,588
0,154	0,439	827,358	941,945	1004,068	1047,750
0,220	0,650	553,617	781,214	922,123	987,859
0,060	0,650	553,244	782,718	922,797	988,443
0,146	0,244	827,640	941,951	1004,069	1047,750
0,442	0,750	24,293	113,545	215,186	296,592
0,557	0,650	664,792	851,900	941,980	1000,727
0,112	0,672	259,932	461,313	596,762	686,184
0,130	0,667	321,490	528,538	662,465	747,426
0,150	0,162	827,084	941,868	1004,015	1047,710
0,051	0,642	561,968	792,351	928,970	993,413
0,072	0,642	559,420	788,202	927,251	992,131
0,208	0,008	770,636	937,940	1001,810	1046,217
0,200	0,650	559,233	785,295	923,581	988,881

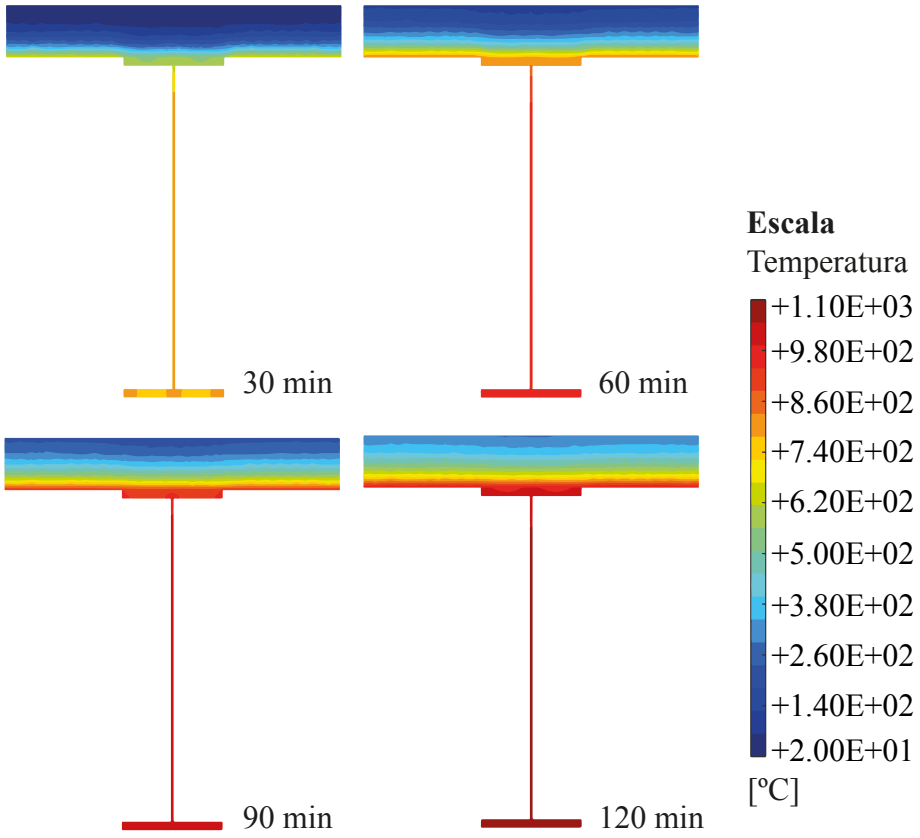

Figura A.12 - Campo de temperatura bidibimensioanl referente à viga mista em situação de incêndio

A.2.13 TUBO DE AÇO PREENCHIDO DE CONCRETO

Campo térmico bidimensional para tubo de aço circular e quadrado preenchido de concreto para 30, 60, 90 e 120 min de exposição ao fogo.

Tubo de Aço	Linha Central	Tempo de Exposição ao Incêndio (min)			
	r (m)	30	60	90	120
Circular	0,000	20,014	23,295	39,644	66,514
	0,115	25,070	59,034	100,779	149,501
	0,250	575,281	832,575	959,089	1016,421
Quadrado	0,000	20,042	25,118	45,636	75,567
	0,102	27,212	63,406	105,344	153,595
	0,222	575,847	827,827	951,886	1009,974

Tabela A.13 - Valores de temperatura na linha central do tubo de aço quadrado e circular preenchido de concreto em condição de incêndio

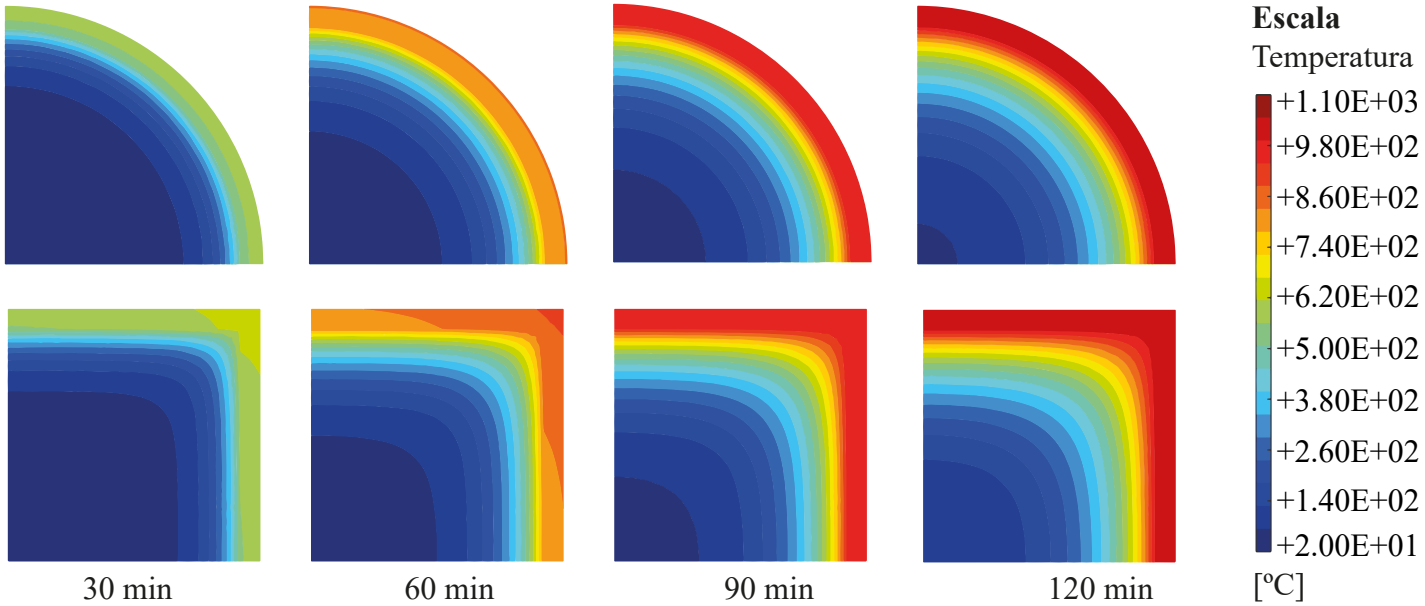

Figura A.13 - Campo de temperatura bidimensional para tubo de aço quadrado e circular preenchido de concreto submetido à ação dos efeitos térmicos provenientes da exposição ao fogo

A.2.14 PILAR MISTO TOTALMENTE PREENCHIDO DE CONCRETO

Campo de temperatura bidimensional na seção transversal do pilar misto totalmente preenchido de concreto em situação de incêndio. Os campos térmicos são relacionados aos tempos de 100, 200, 300 e 400 min de exposição ao fogo.

Tabela A.14 - Dados do campo térmico bidimensional referente ao perfil I de aço envolvido de concreto em situação de incêndio

x (m)	*y* (m)	Tempo de Exposição ao Incêndio (min)			
		30	60	90	120
0,000	0,000	73,45	167,58	382,69	520,44
0,081	0,012	68,13	147,78	361,12	503,68
0,154	0,162	73,44	167,57	382,69	520,44
0,000	0,150	73,06	165,80	381,20	519,33
0,110	0,012	70,00	154,46	368,82	509,69
0,081	0,031	64,98	135,99	348,23	493,70
0,081	0,130	64,98	135,98	348,22	493,69
0,110	0,162	70,19	155,31	369,54	510,24
0,059	0,150	69,11	151,32	365,19	506,85
0,073	0,081	61,35	123,37	333,58	482,37
0,227	0,006	137,39	600,85	712,48	769,72
0,227	0,206	155,05	641,84	732,24	781,18
0,076	0,076	61,43	123,65	333,91	482,62
0,077	0,116	63,20	129,66	341,01	488,12
0,050	0,006	69,70	153,47	367,54	508,68
0,038	0,006	70,53	156,46	370,95	511,34
0,072	0,196	92,55	278,88	485,86	603,26
0,109	0,081	58,32	110,93	319,02	470,57
0,146	0,098	66,12	134,25	353,00	498,71

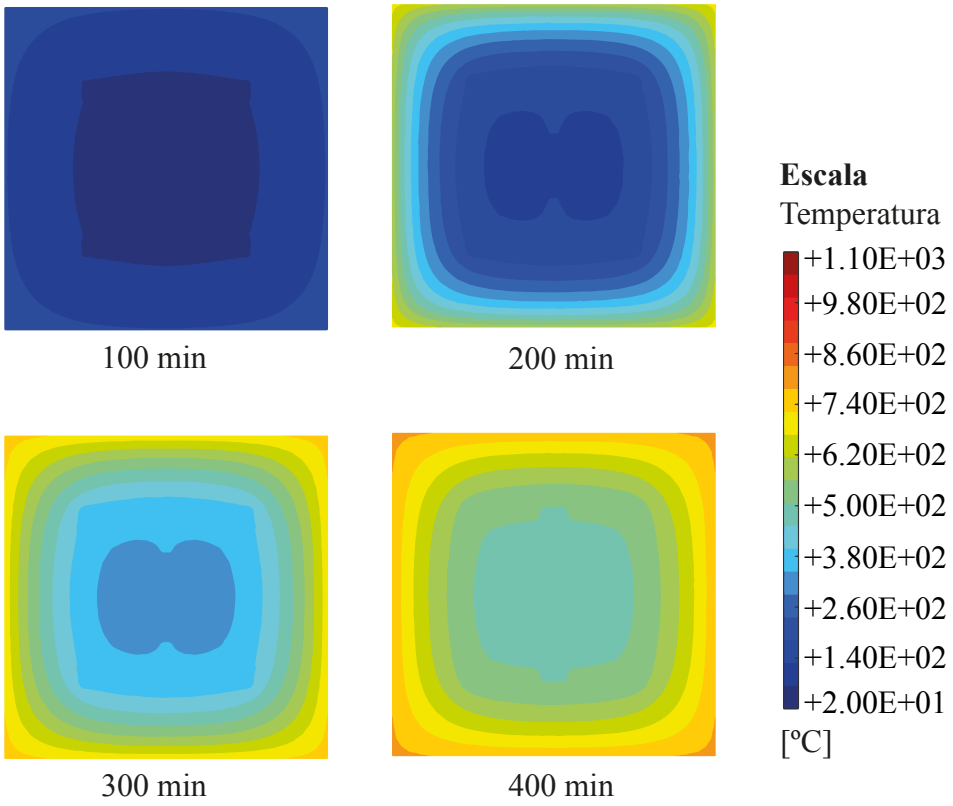

Figura A.14 - Distribuição de temperatura do perfil I de aço envolvido de concreto em situação de incêndio

Apêndice B

INTRODUÇÃO AOS ELEMENTOS FINITOS BIDIMENSIONAIS

Neste apêndice visa-se apresentar uma introdução aos elementos finitos planos e as respectivas funções de forma das famílias dos elementos triangulares e quadriláteros. Esses elementos são utilizadas na discretização dos problemas físicos de engenharia definidos em domínios bidimensionais.

B.1 GENERALIDADES

Uma gama de problemas físicos de engenharia podem ser avaliados com base em uma formulação numérica de elementos finitos bidimensionais (ou planos). Correntemente, análise térmica ao nível da seção transversal de estruturas em condição de incêndio ou estruturas caracterizadas por carregamentos que acarretam estado plano de tensão ou deformação, são exemplos que enquadram-se no emprego de elementos finitos planos para soluções dos problemas.

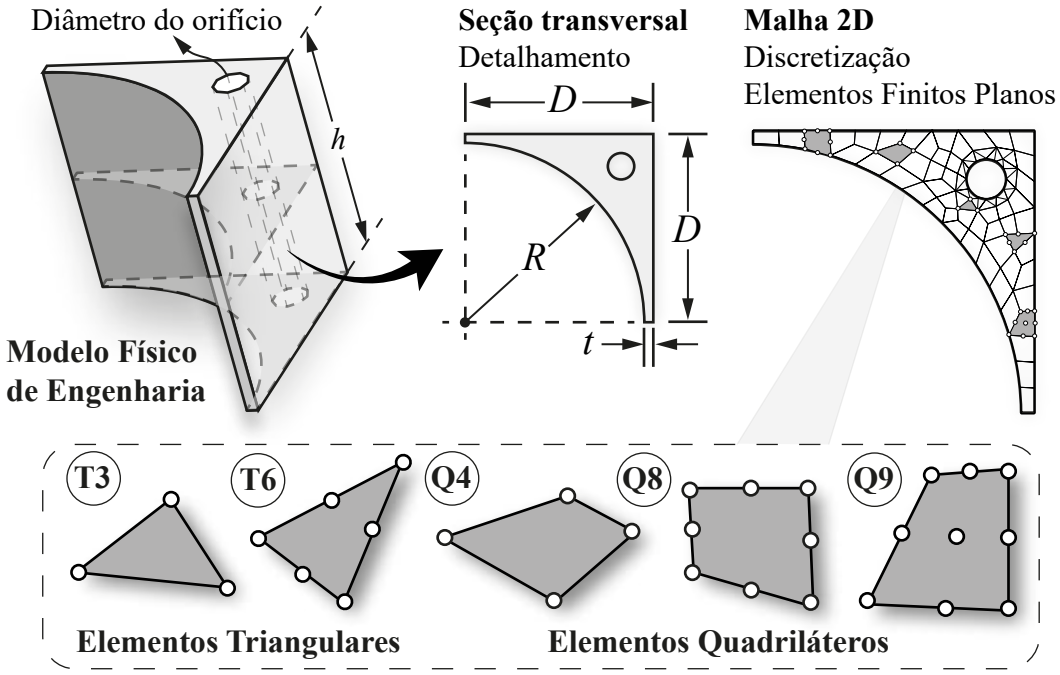

Figura B.1 – Representação didática geral de engenharia dos elementos finitos planos

A Figura B.1 apresenta um esquema simplificado acerca do processo de modelagem e de discretização do domínio bidimensional de um modelo físico de engenharia, apresentando os elementos finitos triangulares de 3 e 6 nós, e os elementos quadriláteros de 4, 8 e 9 nós.

B.2 ELEMENTOS FINITOS TRIANGULARES

A família dos elementos finitos planos triangulares é caracterizada pela versatilidade no processo de discretização do domínio dos problemas físicos de engenharia, e apresentando uma formulação numérica-matemática simples. Na Equação (B.1), apresenta-se as funções de interpolação (ou forma) para elementos triangulares de 3 e 6 nós.

$$\mathbf{N}^e(\xi,\eta) = \begin{Bmatrix} 1-\xi-\eta \\ \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{N}^e(\xi,\eta) = \begin{Bmatrix} 1-3(\xi+\eta)+2(\xi+\eta)^2 \\ 4\xi(1-\xi-\eta) \\ \xi(2\xi-1) \\ 4(\xi\eta) \\ \eta(2\eta-1) \\ 4\eta(1-\xi-\eta) \end{Bmatrix} \tag{B.1}$$

As funções de interpolação dos elementos triangulares são escritas em função de variáveis naturais ξ e η, definidas adequadamente em um sistema local de referência. Além disso, conforme apresentado em Cook, Malkus e Plesha (2007), essas funções podem ser escritas em termo de coordenadas de áreas, onde são definidas as subáreas A_i nos elementos triangulares.

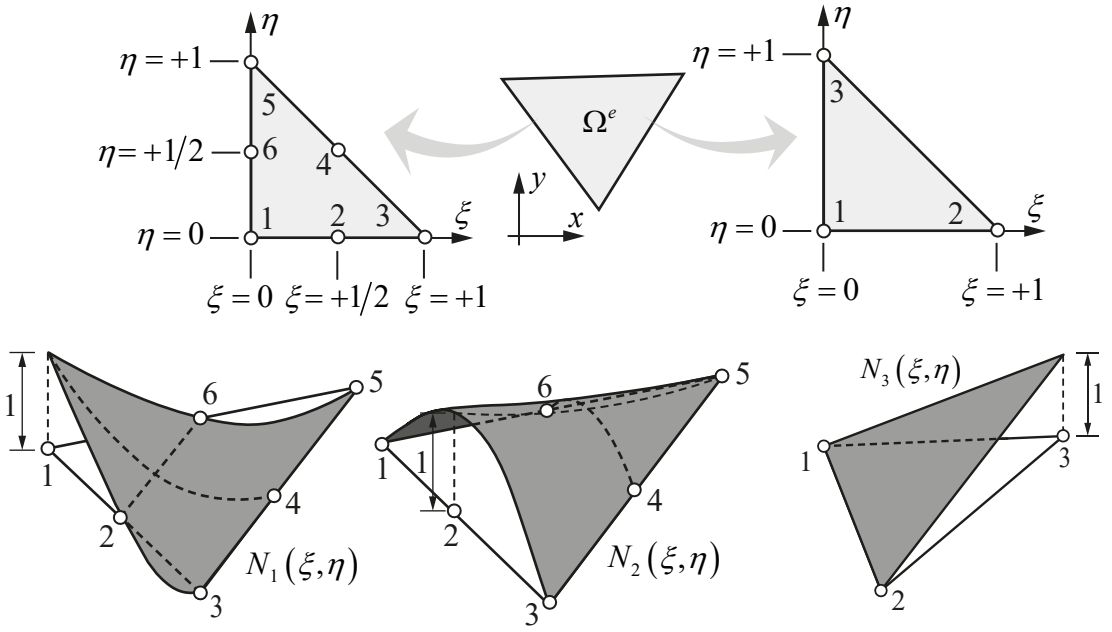

Figura B.2 – Elementos finitos triangulares quadráticos (6 nós) e lineares (3 nós)

A Figura B.2 apresenta a disposição e a ordem dos nós em cada tipo de elemento finito triangular, bem como a exposição do comportamento das funções de interpolação estabelecidas no domínio local.

B.3 ELEMENTOS FINITOS QUADRILÁTEROS

A família de elementos finitos quadriláteros é amplamente utilizado em aplicações de engenharia. As funções de interpolação para os elementos dessa categoria baseiam-se nos polinômios de Lagrange, definidos em um sistema local com coordenadas naturais ξ e η. Primeiramente, apresenta-se as funções de interpolação do elemento finito quadrilateral de 4 nós, conforme mostra a Equação (B.2).

$$\mathbf{N}^e(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\begin{Bmatrix} (1-\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1+\eta) \\ (1-\xi)(1+\eta) \end{Bmatrix} \tag{B.2}$$

Destaca-se também que o conjunto de funções de interpolação, apresentadas na Equação (B.2), podem ser obtidos pela combinação das funções de forma unidimensionais. Adicionalmente, a Figura B.3 apresenta uma representação didática do mapeamento de elementos finitos e o comportamento das funções de forma para o elemento finito de 4 nós.

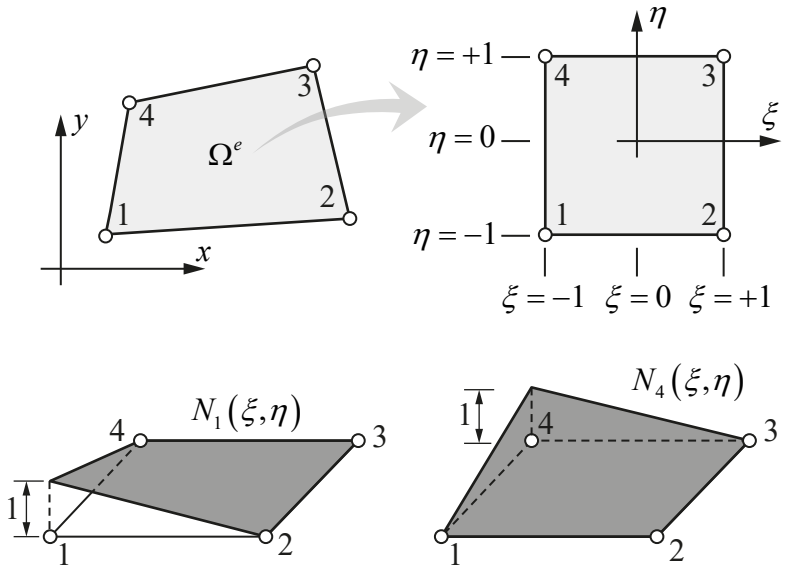

Figura B.3 – Características do elemento finito quadrilátero linear de 4 nós

Frequentemente, em problemas físicos de interesse de engenharia, utiliza-se os elementos finitos de alta ordem. Sendo assim, na Equação (B.3), apresenta-se as funções de forma do elemento finito quadrilátero de 8 nós.

$$\mathbf{N}^e(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\left\{\begin{array}{c} (1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \\ (1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\ (1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\ (1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \\ 2\left(1-\xi^2\right)(1-\eta) \\ 2(1+\xi)\left(1-\eta^2\right) \\ 2\left(1-\xi^2\right)(1+\eta) \\ 2(1-\xi)\left(1-\eta^2\right) \end{array}\right\} \tag{B.3}$$

O comportamento das funções de forma do elemento Q8, apresentadas na Equação (B.3), são ilustradas na Figura B.4, onde exibe-se também o sistema de coordenadas naturais $O\xi\eta$, adotado na construção das funções. Observa-se, em modo geral, o processo de mapeamento que ocorre pelo fato da transição do domínio global, definido no sistema de coordenadas Oxy, para domínio local, definido no sistema de coordenadas naturais.

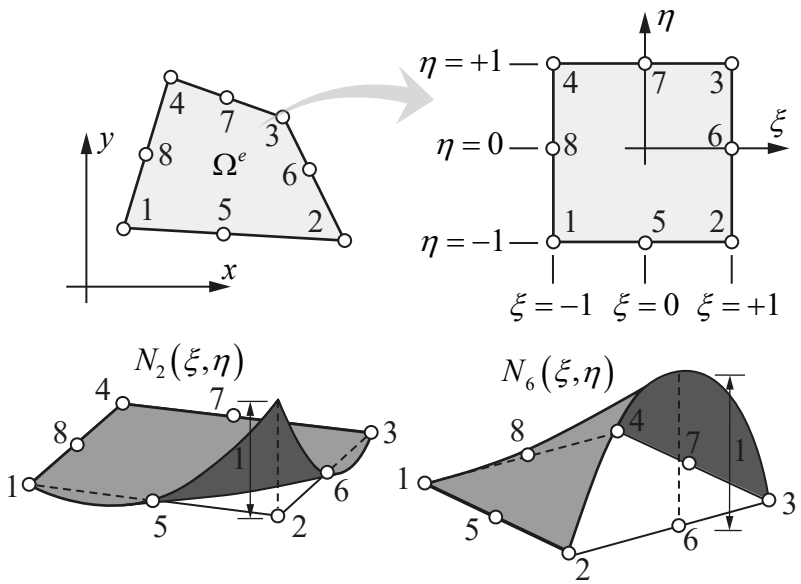

Figura B.4 – Características do elemento finito quadrilátero de 8 nós

Por fim, apresenta-se um elemento finito similar ao elemento Q8, tanto na disposição dos nós do domínio como na construção das funções de interpolação, contudo, com adição de um nó localizado no meio do elemento. Na Equação (B.4), apresenta-se as funções de interpolação do elemento finito quadrilátero de 9 nós, definidas no sistema de coordenadas naturais.

$$\mathbf{N}^e(\xi,\eta)=\frac{1}{4}\left\{\begin{array}{c}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)+\left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)\\(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)+\left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)\\(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)+\left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)\\(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)+\left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)\\2\left[\left(1-\xi^2\right)(1-\eta)-\left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)\right]\\2\left[(1+\xi)\left(1-\eta^2\right)-\left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)\right]\\2\left[\left(1-\xi^2\right)(1+\eta)-\left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)\right]\\2\left[(1-\xi)\left(1-\eta^2\right)-\left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)\right]\\4\left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)\end{array}\right\} \tag{B.4}$$

O detalhamento e a ordenação dos nós no elemento finito quadrilátero de 9 nós é apresentada na Figura B.5. Observa-se que as superfícies das funções de interpolação não são planos, como ocorre no caso do elemento finito de 4 nós (ver Figura B.3). Além disso, pode-se notar que as funções de interpolação são unitárias no ponto de análise.

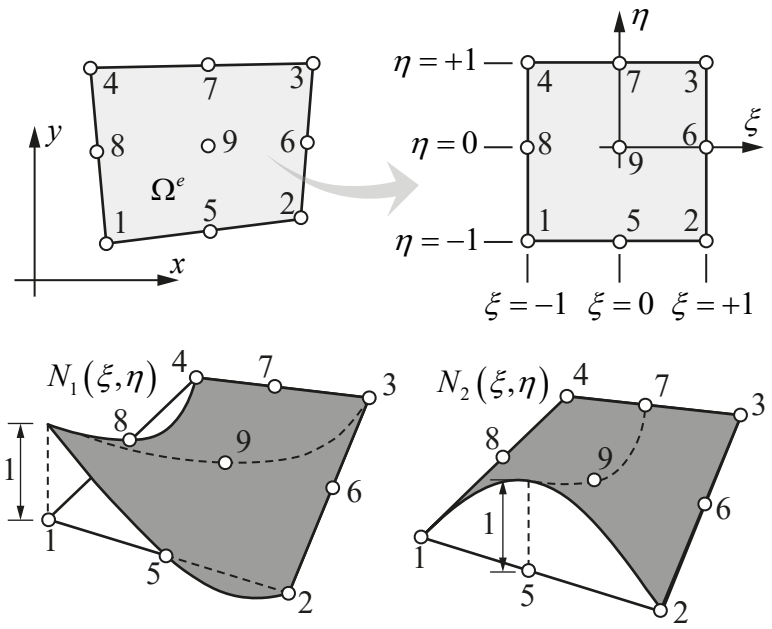

Figura B.5 – Características do elemento finito quadrilátero de 9 nós

Os elementos finitos de alta ordem, usualmente, apresentam uma convergência acelerada dos resultados em comparação aos elementos lineares, contudo, as matrizes e vetores do sistema apresentam menos termos nulos, acarretando em um maior custo computacional na solução do sistema algébrico. Além disso, essa categoria de elementos finitos apresenta melhores aproximações no decorrer do processo de estimativa das variáveis secundárias em problemas físicos de engenharia, como no cálculo das tensões e dos fluxos de calor.