

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO TECNOLÓGICO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**JOÃO PAULO BARBOSA**

**DINÂMICA EM MEIOS SETORIALMENTE HOMOGÊNEOS  
COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO  
USANDO AS TÉCNICAS DE INTERPOLAÇÃO DIRETA E DE  
SUPERPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS**

**VITÓRIA  
2019**

**JOÃO PAULO BARBOSA**

**DINÂMICA EM MEIOS SETORIALMENTE HOMOGÊNEOS  
COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO  
USANDO AS TÉCNICAS DE INTERPOLAÇÃO DIRETA E DE  
SUPERPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica na área de concentração Ciências Mecânicas na linha de pesquisa de Métodos Matemáticos e Computacionais Aplicados a Ciência e Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto.

Coorientador: Prof. Dr. José Antônio Fontes Santiago.

**VITÓRIA  
2019**

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

B238d      Barbosa, João Paulo, 1981-  
Dinâmica em meios setorialmente homogêneos com o Método dos Elementos de Contorno usando as Técnicas de Interpolação Direta e de Superposição de Domínios / João Paulo Barbosa. - 2019.  
174 f. : il.

Orientador: Carlos Friedrich Loeffler Neto.  
Coorientador: José Antônio Fontes Santiago.  
Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Método dos Elementos de Contorno. 2. Problemas de Helmholtz não Homogêneos Tridimensionais. 3. Interpolação Direta com Funções Radiais. 4. Técnica de Superposição de Domínios. I. Loeffler Neto, Carlos Friedrich. II. Santiago, José Antônio Fontes. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. IV. Título.

CDU: 621

---

**JOÃO PAULO BARBOSA**

**DINÂMICA EM MEIOS SETORIALMENTE HOMOGÊNEOS  
COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTO  
USANDO AS TÉCNICAS DE INTERPOLAÇÃO DIRETA E DE  
SUPERPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica na área de concentração Ciências Mecânicas na linha de pesquisa de Métodos Matemáticos e Computacionais Aplicados a Ciência e Engenharia.

Aprovado em 12 de dezembro de 2019.

**COMISSÃO EXAMINADORA:**

---

**Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto**  
**UFES/PPGEM (Orientador)**

---

**Prof. Dr. José Antônio Fontes Santiago**  
**UFRJ/COPPE (Coorientador)**

---

**Prof. Dr. André Bulcão**  
**Petrobras/CENPES**

---

**Prof. Dr. Flavio Cezario**  
**CEFET/RJ**

---

**Prof. Dr. José Claudio de Faria Telles**  
**UFRJ/COPPE**

---

**Prof. Dr. Webe João Mansur**  
**UFRJ/COPPE**

---

**Prof. Dr. Luciano de Oliveira Castro Lara**  
**UFES/PPGEM**



## DEDICATÓRIAS

Dedico este trabalho:

**aos meus pais, Amado e Madalena**, que dignamente me apresentaram à importância da família e ao caminho da honestidade e persistência;

**à mulher da minha vida, Carol**, pelo apoio incondicional em todos os momentos, principalmente nos de incerteza, muito comuns para quem tenta trilhar novos caminhos.  
Sem você, nenhuma conquista valeria a pena.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, que iluminou o meu caminho durante esta caminhada.

Ao Prof. Loeffler, o meu reconhecimento pela oportunidade de realizar este trabalho ao lado de alguém que transpira sabedoria. Meu respeito e admiração pela sua serenidade e pelo seu Dom no ensino da Ciência, inibindo sempre a vaidade em prol da simplicidade e eficiência.

Ao Programa de Pós-Graduação da Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, pela oportunidade de frequentar o curso.

Aos Professores e Colegas de doutorado do Programa de Pós-Graduação da Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, pelo empenho, companheirismo e diálogos.

Ao Instituto Federal do Espírito Santo, Campus São Mateus, pela oportunidade de realizar esta capacitação.

Ao Renato Siqueira, pelo apoio e incentivo incondicional neste período, mas, acima de tudo, por nossa amizade de tantos anos.

À minha família, pelo incessante estímulo ao prosseguimento dos meus estudos, viabilizando a conclusão deste trabalho em todos os sentidos.

À Carol, pessoa com quem amo partilhar a vida. Obrigado pelo carinho, pela paciência e por sua capacidade de me trazer paz na correria do dia a dia.

## RESUMO

A Técnica de Superposição de Domínio (TSD) é uma nova alternativa do Método de Elementos de Contorno (MEC) para resolver problemas setorialmente homogêneos em que o domínio completo é dividido em um domínio homogêneo circundante e outros subdomínios complementares, com diferentes propriedades constitutivas. Neste trabalho, a TSD é acoplada ao procedimento de interpolação direta com funções radiais (MECID) para resolver problemas governados pela Equação de Helmholtz, através da adequada transformação da integral de domínio relativa à inércia do sistema, transformando-a numa integral de contorno. Dessa forma, gera-se um modelo dinâmico capaz de calcular o espectro de frequências naturais em domínios setorialmente homogêneos com fronteiras não regulares e inclusões internas, tanto para casos bidimensionais quanto tridimensionais.

No tratamento dos problemas bidimensionais, usam-se os elementos isoparamétricos lineares, enquanto nos casos tridimensionais a discretização é feita através de elementos isoparamétricos triangulares planos, de variação linear, com nós múltiplos nas arestas. Para avaliar a consistência numérica do modelo mais geral, foram examinados previamente problemas mais simples, como os problemas homogêneos tridimensionais governados pelas Equações de Laplace e Helmholtz. Também foram resolvidos casos tridimensionais setorialmente homogêneos governados pela Equação de Laplace, em que a TSD também foi aplicada, incluindo exemplos com irregularidades geométricas no contorno.

A metodologia aqui proposta fornece um modelo novo, baseado numa formulação do MEC mais simples e rápida do que as formulações afins precedentes, com precisão satisfatória e convergência assegurada com o refinamento de malha. O trabalho também se justifica considerando o aproveitamento das bem conhecidas vantagens do MEC, como sua maior flexibilidade na redefinição da malha, sua natural extensão aos casos de domínios abertos e adequabilidade aos problemas de fratura e contato, desde que o custo computacional nestas aplicações não seja proibitivo.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno, Problemas de Helmholtz não Homogêneos Tridimensionais, Interpolação Direta com Funções Radiais, Técnica de Superposição de Domínios.

## **ABSTRACT**

The Domain Superposition Technique (DST) is a new alternative to the Boundary Element Method (BEM) for solving piecewise homogeneous problems where the complete domain is divided into a surrounding homogeneous domain and other complementary subdomains with different constitutive properties. In this work, the DST is coupled to the direct interpolation technique with radial basis functions (DIBEM) to solve problems governed by the Helmholtz equation, by properly transforming the domain integral, relative to the inertia of the system, into a boundary integral. Thus, we generate a dynamic model capable of calculating the natural frequency spectrum in piecewise homogeneous domains with non-regular boundaries and internal inclusions, for both two-dimensional and three-dimensional cases.

In the treatment of two-dimensional problems, linear isoparametric elements are used, while in three-dimensional cases the discretization is done by flat triangular isoparametric elements, of linear variation, with multiple nodes at the edges. To assess the numerical consistency of the more general model, simpler problems such as the three-dimensional homogeneous problems governed by the Laplace and Helmholtz equations were previously examined. Piecewise homogeneous three-dimensional cases governed by the Laplace Equation were solved as well, in which the DST was also applied, including examples with geometric irregularities in the contour.

The methodology proposed here provides a new model based on a BEM formulation simpler and faster than the previous related formulations, with satisfactory accuracy and convergence ensured with the mesh refinement. The work is also justified considering the use of the well-known advantages of BEM, such as its greater flexibility in mesh redefinition, its natural extension to open domain cases and suitability to fracture and contact problems, provided that the computational cost in these applications is not prohibitive.

Key-words: Boundary Element Method, Three-dimensional Non-homogeneous Helmholtz Problems, Direct Interpolation Technique with Radial Basis Functions, Domain Superposition Technique.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Superfície plana dividida em pequenas partes. ....	32
Figura 2: Elemento triangular; i) Espaço real $(x_1, x_2, x_3)$ ; ii) Espaço paramétrico $(\gamma_1, \gamma_2)$ . ....	33
Figura 3: Posição do ponto de colocação $P$ em relação ao elemento triangular. ....	34
Figura 4: Representação dos vetores $r$ e $n$ . ....	36
Figura 5: Representação dos vetores $a$ e $b$ . ....	37
Figura 6: Pontos do elemento triangular para integração analítica. ....	38
Figura 7: Geometria e condições de contorno para o exemplo tridimensional homogêneo da Eq. de Laplace. ....	41
Figura 8: Erro médio do potencial do exemplo tridimensional homogêneo da Eq. de Laplace, para escala padrão e escala logarítmica. ....	41
Figura 9: Erro médio da derivada do potencial do exemplo tridimensional homogêneo da Eq. de Laplace, para escala padrão e escala logarítmica. ....	42
Figura 10: Nomenclatura dos pontos nodais da geometria homogêneo para Eq. de Helmholtz. ....	49
Figura 11: Geometria e condições de contorno para o exemplo tridimensional do cubo homogêneo da Eq. de Helmholtz. ....	57
Figura 12: Disposição interna de 216 pontos base de interpolação. ....	57
Figura 13: Resultados das frequências naturais para vibração livre em um cubo utilizando todas as funções de base radial da malha 1. ....	58
Figura 14: Resultados das frequências naturais para vibração livre em um cubo utilizando todas as funções de base radial da malha 2. ....	58
Figura 15: Resultados das frequências naturais para vibração livre em um cubo utilizando todas as funções de base radial da malha 3. ....	59
Figura 16: Frequências naturais da malha 3 com variação do número de pontos base para o exemplo de um cubo homogêneo utilizando função radial de placa fina para problemas da Eq. de Helmholtz. ....	60
Figura 17: Curva percentual de erro para frequências naturais calculadas usando as funções de base radial clássica para a malha 1. ....	62
Figura 18: Curva percentual de erro para frequências naturais calculadas usando as funções de base radial clássica para a malha 2. ....	62

Figura 19: Curva percentual de erro para frequências naturais calculadas usando as funções de base radial clássica para a malha 3. ....	62
Figura 20: Curva percentual de erro para frequências naturais calculadas usando a função de base radial de placa fina ( $F^j = r^2 \ln(r)$ ), tomando-se como referência a solução MEF.....	63
Figura 21: Curva percentual de erro para frequências naturais calculadas usando a função de base radial simples ( $F^j = r$ ), tomando-se como referência a solução MEF.....	64
Figura 22: Curva percentual de erro para frequências naturais calculadas usando a função de base radial cúbica ( $F^j = r^3$ ), tomando-se como referência a solução MEF.....	64
Figura 23: Curva percentual de erro para frequências naturais calculadas usando a função de base radial ( $F^j = 1+r$ ), tomando-se como referência a solução MEF.....	65
Figura 24: Curva percentual de erro para frequências naturais calculadas usando a função de base radial ( $F^j = 1+r^3$ ), tomando-se como referência a solução MEF. ...	65
Figura 25: Diferença relativa dos autovalores para malha com diferentes quantidades de pontos base do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Helmholtz usando a função de base radial de placa fina ( $F^j = r^2 \ln(r)$ ).....	66
Figura 26: Diferença relativa dos autovalores para malha com diferentes quantidades de pontos no contorno do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Helmholtz usando a função de base radial de placa fina ( $F^j = r^2 \ln(r)$ ). ...	66
Figura 27: As frequências naturais 8 e 9 obtidas pelo ANSYS como referência para o problema tridimensional de um cubo homogêneo. ....	67
Figura 28: Primeiras 5 frequências axiais do ANSYS do exemplo tridimensional do cubo homogêneo para Eq. de Helmholtz.....	68
Figura 29: Curva percentual de erro para frequências naturais axiais usando a função de base radial simples e de placa fina, tomando-se como referência a solução MEF.....	69
Figura 30: Geometria e condições de contorno para o exemplo tridimensional da haste cônica homogêneo da Eq. de Helmholtz. ....	70
Figura 31: Geometria tridimensional homogêneo para geração de malhas. ....	71
Figura 32: Projeções ortogonais das superfícies geradas pelo Gmsh para um problema tridimensional, da barra de seção variável com $\theta=15^\circ$ . ....	72

Figura 33: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial simples ( $F^j = r$ ), usando a malha 1 e tendo os valores analíticos como referência. ....	73
Figura 34: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial simples ( $F^j = r$ ), usando a malha 2 e tendo os valores analíticos como referência. ....	73
Figura 35: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial simples ( $F^j = r$ ), usando a malha 3 e tendo os valores analíticos como referência. ....	74
Figura 36: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial de placa fina ( $F^j = r^2 \ln(r)$ ), usando a malha 1 e tendo os valores analíticos como referência.....	74
Figura 37: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial de placa fina ( $F^j = r^2 \ln(r)$ ), usando a malha 2 e tendo os valores analíticos como referência.....	75
Figura 38: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial de placa fina ( $F^j = r^2 \ln(r)$ ), usando a malha 3 e tendo os valores analíticos como referência.....	75
Figura 39: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial cúbica ( $F^j = r^3$ ), usando a malha 1 e tendo os valores analíticos como referência. ....	76
Figura 40: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial cúbica ( $F^j = r^3$ ), usando a malha 2 e tendo os valores analíticos como referência. ....	76
Figura 41: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial cúbica ( $F^j = r^3$ ), usando a malha 3 e tendo os valores analíticos como referência. ....	76
Figura 42: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial ( $F^j = 1+r$ ), usando a malha 1 e tendo os valores analíticos como referência.....	77
Figura 43: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial ( $F^j = 1+r$ ), usando a malha 2 e tendo os valores analíticos como referência.....	77

Figura 44: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial ( $F^j = 1+r$ ), usando a malha 3 e tendo os valores analíticos como referência.....	78
Figura 45: Domínios completos e setoriais bidimensionais com propriedades homogêneas para Eq. de Laplace.....	81
Figura 46: Domínios completos e setoriais tridimensionais com propriedades homogêneas para Eq. de Laplace.....	83
Figura 47: Contorno $\Gamma^i(X)$ : a) Não coincide com o $\Gamma(X)$ ; b) Coincide com o $\Gamma(X)$ ....	84
Figura 48: Características geométricas e condições de contorno do exemplo 1 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD. ....	86
Figura 49: Resultados dos potenciais em A do exemplo 1 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD. ....	86
Figura 50: Resultados das derivadas do potencial em B do exemplo 1 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD.....	87
Figura 51: Diferença relativa do potencial e derivada do potencial do exemplo 1 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD. ....	87
Figura 52: Características geométricas e condições de contorno do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD. ....	88
Figura 53: Resultados dos potenciais em parte do contorno A do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD.....	89
Figura 54: Resultados das derivadas do potencial em B do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD.....	89
Figura 55: Diferença relativa do potencial e derivada do potencial do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD. ....	89
Figura 56: Características geométricas e condições de contorno do exemplo 3 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD. ....	90
Figura 57: Resultados dos potenciais em A do exemplo 3 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD. ....	91
Figura 58: Resultados das derivadas do potencial em B do exemplo 3 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD.....	91
Figura 59: Diferença relativa do potencial e derivada do potencial do exemplo 3 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD. ....	92
Figura 60: Características geométricas e condições de contorno do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD. ....	93



Figura 61: Malha do exemplo 1 da geometria tridimensional do MEC para Eq. de Laplace com TSD. ....	93
Figura 62: Indicação dos resultados do potencial e sua derivada no exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD. ....	94
Figura 63: Resultados do potencial e derivada do potencial do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD, onde $k_2=2$ . ....	94
Figura 64: Resultados do potencial e derivada do potencial do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD, onde $k_2=5$ . ....	95
Figura 65: Resultados do potencial e derivada do potencial do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD, onde $k_2=10$ . ....	95
Figura 66: Diferença relativa do potencial e derivada do potencial do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD. ....	96
Figura 67: Características geométricas e condições de contorno do exemplo 2 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD. ....	97
Figura 68: Indicação dos resultados do potencial e sua derivada no exemplo 2 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD. ....	97
Figura 69: Malha do exemplo 2 da geometria tridimensional do MEC para Eq. de Laplace com TSD. ....	98
Figura 70: Resultados do potencial e derivada do potencial do exemplo 2 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD, onde $k_2=2$ . ....	98
Figura 71: Resultados do potencial e derivada do potencial do exemplo 2 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD, onde $k_2=5$ . ....	98
Figura 72: Resultados do potencial e derivada do potencial do exemplo 2 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD, onde $k_2=10$ . ....	99
Figura 73: Diferença relativa do potencial e derivada do potencial do exemplo 2 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD. ....	99
Figura 74: Domínios completos e setoriais com propriedades homogêneas $K$ e $\rho$ para Eq. de Helmholtz. ....	102
Figura 75: Nomenclatura dos pontos nodais para montagem das matrizes referentes à Eq. de Helmholtz para TSD. ....	107
Figura 76: Características geométricas e condições de contorno do exemplo 1 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD. ....	110

Figura 77: Diferença relativa dos autovalores para malha com diferentes quantidades de pontos base do exemplo 1 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.....	111
Figura 78: Diferença relativa dos autovalores para malhas com diferentes quantidades de pontos nos contornos do exemplo 1 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.....	112
Figura 79: Diferença relativa dos autovalores para malhas com diferentes propriedades do exemplo 1 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.....	112
Figura 80: Características geométricas e condições de contorno do exemplo 2 para o problema bidimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.....	113
Figura 81: Diferença relativa dos autovalores para malhas com diferentes quantidades de pontos base do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.....	114
Figura 82: Diferença relativa dos autovalores para malhas com diferentes quantidades de pontos nos contornos do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.....	115
Figura 83: Diferença relativa dos autovalores para diferentes propriedades do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.....	115
Figura 84: Características geométricas e condições de contorno do exemplo 3 para o problema bidimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.....	116
Figura 85: Diferença relativa dos autovalores para malhas com diferentes quantidades de pontos base do exemplo 3 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.....	117
Figura 86: Diferença relativa dos autovalores para malhas com diferentes quantidades de pontos nos contornos exemplo 3 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD. ....	118
Figura 87: Diferença relativa dos autovalores para diferentes propriedades do exemplo 3 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.....	118
Figura 88: Características geométricas e condições de contorno impostas no exemplo 1 para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.....	119
Figura 89: Diferença relativa dos autovalores para malha com diferentes quantidades de pontos base do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.....	120

Figura 90: Diferença relativa dos autovalores para malhas com diferentes quantidades de pontos nos contornos do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.....	121
Figura 91: As frequências naturais 5, 10 e 13 obtidas pelo ANSYS como referência para o 1° exemplo do problema tridimensional com superposição.....	121
Figura 92: Diferença relativa dos autovalores para malhas com diferentes propriedades do exemplo 1 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.....	122
Figura 93: Características geométricas e condições de contorno impostas no exemplo 2 para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.....	123
Figura 94: Diferença relativa dos autovalores para malhas com diferentes quantidades de pontos base do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.....	124
Figura 95: Diferença relativa dos autovalores para malhas com diferentes quantidades de pontos nos contornos do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.....	125
Figura 96: As frequências naturais 8, 9 e 10 obtidas pelo ANSYS como referência para o 2° exemplo do problema tridimensional com superposição.....	125
Figura 97: Diferença relativa dos autovalores para diferentes propriedades do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.....	126
Figura 98: Transformação de domínio para radial e angular.....	155
Figura 99: $R_r$ e vetores unitários.....	156
Figura 100: Integração ao longo da direção R.....	157
Figura 101: Geometria e condições de contorno para o exemplo de uma barra engastada bidimensional homogêneo.....	160
Figura 102: Resultado das frequências naturais das diferentes funções radiais para a malha 1 do exemplo de uma barra engastada bidimensional homogêneo.....	161
Figura 103: Resultado das frequências naturais das diferentes funções radiais para a malha 2 do exemplo de uma barra engastada bidimensional homogêneo.....	162
Figura 104: Geometria e condições de contorno para o exemplo de membrana fixa bidimensional homogêneo.....	162
Figura 105: Resultado das frequências naturais das diferentes funções radiais para a malha 1 do exemplo de uma membrana fixa bidimensional homogêneo.....	164

Figura 106: Resultado das frequências naturais das diferentes funções radiais para a malha 1 do exemplo de uma membrana fixa bidimensional homogêneo. ....	164
Figura 107: Conceito de nó múltiplo para elementos triangulares lineares .....	166
Figura 108: Aresta que possui os nós múltiplos nas geometrias tridimensionais. .	166
Figura 109: indicação do centroide do elemento que contém um nó duplo.....	167
Figura 110: Deslocamento do nó duplo em direção ao centroide do elemento. ....	167
Figura 111: Deslocamento de vários nós duplos em direção ao centroide do elemento e a permanência dos demais na sua posição de origem. ....	167
Figura 112: Geometria e condições de contorno para o exemplo tridimensional do cubo homogêneo da Eq. de Helmholtz.....	168
Figura 113: Diferença relativa dos autovalores para malha 1 com diferentes distâncias do deslocamento dos nós múltiplos para o problema tridimensional homogêneo da Eq. de Helmholtz.....	169
Figura 114: Diferença relativa dos autovalores para malha 2 com diferentes distâncias do deslocamento dos nós múltiplos para o problema tridimensional homogêneo da Eq. de Helmholtz.....	169
Figura 115: Diferença relativa dos autovalores para malha 3 com diferentes distâncias do deslocamento dos nós múltiplos para o problema tridimensional homogêneo da Eq. de Helmholtz.....	170
Figura 116: Características geométricas e condições de contorno impostas no exemplo para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD. ....	170
Figura 117: Diferença relativa dos autovalores para malha 3 com diferentes distâncias do deslocamento dos nós múltiplos para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD com propriedade interna $k^2=2$ e $\rho^2=0,5$ .....	171
Figura 118: Diferença relativa dos autovalores para malha 3 com diferentes distâncias do deslocamento dos nós múltiplos para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD com propriedade interna $k^2=5$ e $\rho^2=0,2$ .....	171
Figura 119: Diferença relativa dos autovalores para malha 3 com diferentes distâncias do deslocamento dos nós múltiplos para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD com propriedade interna $k^2=10$ e $\rho^2=0,1$ .....	172

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Quantidade de pontos nodais e elementos em cada malha para o exemplo tridimensional homogêneo da Eq. de Laplace. ....	41
Tabela 2: Funções de base radial clássica.....	54
Tabela 3: Funções de Wendland de suporte compacto.....	55
Tabela 4: Funções de Wu de suporte compacto. ....	55
Tabela 5: Quantidade de pontos nodais e elementos em cada malha do exemplo tridimensional homogêneo da Eq. de Helmholtz. ....	56
Tabela 6: Quantidade de pontos da malha 3 com variação do número de pontos base interno do exemplo tridimensional homogêneo da Eq. de Helmholtz. ....	60
Tabela 7: Resultados da malha 3 (v) usando a função de base radial de placa fina ( $F^j = r^2 \ln(r)$ ) e valores analíticos para modos axiais. ....	68
Tabela 8: Resultados da malha 3 (v) usando a função de base radial simples ( $F^j = r$ ) e valores analíticos para modos axiais. ....	69
Tabela 9: Quantidade de pontos nodais e elementos em cada malha do exemplo tridimensional da haste cônica homogêneo da Eq. de Helmholtz. ....	72
Tabela 10: Quantidade de nós nas malhas do exemplo 1 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD. ....	86
Tabela 11: Quantidade de nós nas malhas do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD. ....	88
Tabela 12: Quantidade de nós nas malhas do exemplo 3 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD. ....	90
Tabela 13: Número de pontos nas malhas do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD. ....	94
Tabela 14: Diferença relativa média entre os métodos do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD. ....	96
Tabela 15: Número de pontos nas malhas para o exemplo 2 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD. ....	97
Tabela 16: Diferença relativa média entre os métodos do exemplo 2 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD. ....	99
Tabela 17: Quantidade de pontos nodais em cada malha do 1° teste no exemplo 1 para o problema bidimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.....	110

Tabela 18: Quantidade de pontos nodais em cada malha do 2° teste no exemplo 1 para o problema bidimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.....	111
Tabela 19: Quantidade de pontos nodais em cada malha do 1° teste no exemplo 2 para o problema bidimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.....	113
Tabela 20: Quantidade de pontos nodais em cada malha do 2° teste no exemplo 2 para o problema bidimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.....	114
Tabela 21: Quantidade de pontos nodais em cada malha do 1° teste no exemplo 3 para o problema bidimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.....	116
Tabela 22: Quantidade de pontos nodais em cada malha do 2° teste no exemplo 3 para o problema bidimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.....	117
Tabela 23: Quantidade de pontos nodais em cada malha do 1° teste no exemplo 1 para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD. ....	120
Tabela 24: Quantidade de pontos nodais em cada malha do 2° teste no exemplo 1 para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD. ....	121
Tabela 25: Quantidade de pontos nodais em cada malha do 1° teste no exemplo 2 para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD. ....	123
Tabela 26: Quantidade de pontos nodais em cada malha do 2° teste no exemplo 2 para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD. ....	124
Tabela 27: Resultado analítico das frequências naturais para o exemplo de uma barra engastada bidimensional homogêneo.....	160
Tabela 28: Quantidade de pontos nodais e elementos em cada malha para o exemplo de uma barra engastada bidimensional homogêneo. ....	161
Tabela 29: Resultado analítico das frequências naturais para o exemplo de membrana fixa bidimensional homogêneo. ....	163
Tabela 30: Quantidade de pontos nodais e elementos em cada malha para o exemplo de membrana fixa bidimensional homogêneo.....	163
Tabela 31: Quantidade de pontos nodais e elementos em cada malha do exemplo tridimensional homogêneo da Eq. de Helmholtz. ....	169
Tabela 32: Quantidade de pontos nodais e elementos para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD. ....	171

## LISTA DE SÍMBOLOS

$u$  – Potencial

$q$  – Derivada normal do Potencial

$X$  – Ponto geométrico genérico

$\xi$  – ponto fonte

$u^*(\xi; X)$  – Solução fundamental

$q^*(\xi; X)$  – Derivada normal da solução fundamental

$c(\xi)$  – Coeficiente da posição do ponto  $\xi$

$\Omega$  – Domínio físico

$\Gamma$  – Contorno do domínio físico

$H$  – Matriz de energia

$G$  – Matriz de fluxo

$M$  – Matriz de inércia

$K$  – Propriedade difusiva ou rigidez

$\rho$  – Propriedade de inércia

$U(X, t)$  – Potencial com conteúdo temporal

$r(\xi; X)$  - Distância euclidiana

$F^j$  – Função radial de interpolação

$X^j$  – Pontos base

$\psi^j$  – Função primitiva

$\xi^{\alpha^j}$  – Valores correspondentes à função de interpolação

$\xi^{\Lambda^i}$  – Matriz diagonal

$\omega$  – Frequência

$\omega_n$  – Frequência natural

$\nabla$  – Operador laplaciano

$\gamma$  – Peso de Gauss

$\delta$  – Suporte compacto

$\phi_i$  – Função de forma ou de interpolação

$J$  – Jacobiano

Dist – Porcentagem da distância do nó múltiplo até o centroide do elemento

## LISTA DE SIGLAS

MEC – Método de Elementos de Contorno.

MEF – Método de Elementos Finitos.

MVF – Método de Volumes Finitos.

TSD – Técnica da Superposição de Domínio.

TSR – Técnica da Sub-Região.

MECID – Método de Elementos de Contorno com Interpolação Direta.

MECDR – Método de Elementos de Contorno da Dupla Reciprocidade.

MIRD – Método de Integração Radial Direta.

FBR - Função de Base Radial.

FBRSC – Função de Base Radial de Suporte Compacto.

WL – Função Radial de Wendland.

Wu – Função Radial Wu.

BEM – Boundary Element Method.

DIBEM – Direct Interpolation Boundary Element Method.

DST – Domain Superposition Technique.



# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>23</b>
1.1	Objetivos e Metodologias da Tese .....	27
1.2	Estrutura da Tese.....	28
<b>2</b>	<b>MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO EM PROBLEMAS</b>	
	<b>HOMOGÊNEOS PARA EQUAÇÃO DE LAPLACE</b> .....	<b>30</b>
2.1	Aproximação do MEC para Equação de Laplace .....	30
2.2	Metodologia de Discretização nos problemas de Laplace Tridimensional ....	31
2.2.1	Interpolação do Campo e da Geometria.....	31
2.2.2	Integração Numérica .....	34
2.2.3	Integração Analítica .....	38
2.3	Exemplo de Aplicação do MEC Tridimensional na Equação de Laplace .....	40
2.4	Conclusões Parciais.....	42
<b>3</b>	<b>O MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO EM PROBLEMAS</b>	
	<b>HOMOGÊNEOS PARA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ</b> .....	<b>43</b>
3.1	Equação Integral do MEC para Equação de Helmholtz.....	43
3.2	Aproximação do MECID na Integral de Domínio .....	45
3.3	Procedimento de Regularização .....	46
3.4	Procedimento de Discretização .....	47
3.5	Formulação do Problema de Autovalor.....	50
3.6	Tipos de Funções de Base Radial .....	51
3.6.1	Funções de Base Radial Clássicas .....	53
3.6.2	Funções de Base Radial com Suporte Compacto .....	54
3.7	Geração de malha tridimensional.....	56
3.8	Exemplo 1 – Vibração livre em um cubo.....	56
3.9	Exemplo 2 – Vibração livre em uma barra em seção variável .....	70
3.10	Conclusões Parciais.....	78
<b>4</b>	<b>TÉCNICA DE SUPERPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS PARA PROBLEMAS DE</b>	
	<b>LAPLACE</b> .....	<b>81</b>
4.1	Técnica de Superposição de Domínios Aplicada a Equação de Laplace .....	81
4.2	Discretização e Aspectos Matriciais da TSD no problema de Laplace .....	84
4.3	Aplicação da TSD Bidimensional na Equação de Laplace.....	85

4.3.1 Exemplo 1.....	85
4.3.2 Exemplo 2.....	88
4.3.3 Exemplo 3.....	90
4.4 Aplicação da TSD tridimensional na Equação de Laplace.....	92
4.4.1 Exemplo 1.....	92
4.4.2 Exemplo 2.....	96
4.5 Conclusões Parciais.....	100
<b>5    TÉCNICA DE SUPERPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS PARA PROBLEMAS DE HELMHOLTZ .....</b>	<b>102</b>
5.1 Técnica de Superposição de Domínios Aplicada à Equação de Helmholtz	102
5.2 Aproximação do MECID para a integração de domínio utilizando a Técnica de Superposição de Domínios .....	103
5.3 Procedimento de Discretização utilizando a Técnica de Superposição de Domínio.....	105
5.4 Aplicações da TSD Bidimensional na Equação de Helmholtz .....	109
5.4.1 Exemplo 1.....	110
5.4.2 Exemplo 2.....	113
5.4.3 Exemplo 3.....	116
5.5 Aplicações da TSD tridimensional na Equação de Helmholtz.....	119
5.5.1 Exemplo 1.....	119
5.5.2 Exemplo 2.....	122
5.6 Conclusões Parciais.....	126
<b>6    CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>128</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>131</b>
<b>APÊNDICE A - Função de interpolação primitiva da função de placa fina para problemas bidimensionais .....</b>	<b>138</b>
<b>APÊNDICE B - Função de interpolação primitiva para problemas tridimensionais .....</b>	<b>140</b>
<b>APÊNDICE C - Tensor de Galerkin para o problema bidimensional .....</b>	<b>152</b>
<b>APÊNDICE D - Tensor de Galerkin para o problema tridimensional.....</b>	<b>154</b>
<b>APÊNDICE E - Método da Integração Radial Direto para problemas bidimensionais da Equação de Helmholtz .....</b>	<b>155</b>
<b>APÊNDICE F - Simulações do Método da Integração Radial Direto para problemas bidimensionais da Equação de Helmholtz .....</b>	<b>160</b>

<b>APÊNDICE G - Afastamento de nós múltiplos para elementos lineares em problemas tridimensionais .....</b>	<b>165</b>
<b>APÊNDICE H - Simulações do afastamento de nós múltiplos para elementos lineares em problemas tridimensionais. ....</b>	<b>168</b>
<b>ANEXO A - Pontos de Gauss bidimensional.....</b>	<b>173</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os grandes avanços da engenharia resultam em modelos numéricos cada vez mais sofisticados, que requerem o auxílio de ferramentas matemáticas adicionais, mesmo considerando as mais poderosas técnicas discretas atualmente disponíveis, como o Método dos Elementos Finitos (MEF) (BECKER et al., 1981; HUGHES, 1987; REDDY, 2005), Método dos Volumes Finitos (MVF) (LEVEQUE, 2002) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC) (BREBBIA, 1978). Pode-se citar o uso de funções de base radial (BUHMANN, 2003), as Técnicas de Wavelets (AZIZ et al., 2013; AZIZ; SIRAJ, 2017) e a Modelagem Multiescala (GEERS et al., 2010) como exemplos dessas abordagens auxiliares. Os dois primeiros são eficazes principalmente na implementação de procedimentos adaptativos (KITA; KAMIYA, 2001; PESSOLANI, 2002), e o terceiro é adequado para descrever o comportamento de materiais altamente heterogêneos (FEYEL, 2003).

Particularmente no que tange às funções de base radial, estas também são usadas com sucesso para modelar forças de corpo, fontes, efeitos advectivos e inerciais dentro do contexto das modernas técnicas do MEC, como a Dupla Reciprocidade (PARTRIDGE et al., 1992) e a Interpolação Direta (LOEFFLER et al., 2015b; LOEFFLER; MANSUR, 2017). Essas técnicas também são capazes de simular materiais suavemente heterogêneos (BARCELOS, 2019). No entanto, certos problemas permanecem desafiadores para o MEC, como a solução ágil de problemas heterogêneos por setores ou por partes.

A solução numérica de problemas com homogeneidade setorial é preferencialmente realizada por métodos que discretizam o domínio, como o mencionado MEF e o MVF, uma vez que diferentes valores das propriedades são facilmente introduzidos dentro de cada setor ou subdomínio. Usando o MEC, o cálculo das homogeneidades setoriais não é imediato e, durante muitos anos, a Técnica da Sub-Região (TSR) foi a abordagem mais eficiente para resolver esse tipo de problema (BREBBIA; WALKER, 1980; BREBBIA et al., 1984; WROBEL; ALIABADI, 2002).

Não foram numerosas as melhorias propostas na metodologia clássica da Técnica das Sub-Regiões (TSR). Alguns trabalhos examinaram a extensão da TSR visando aplicações em problemas de perfis estreitos ou longos, uma vez que o domínio pode ser particionado e a interação entre pontos de origem e pontos de campo localizados

distantes uns dos outros é evitada. Por exemplo, o Método da Dupla Reciprocidade (PARTRIDGE et al., 1992) em multidomínios subdivide o domínio em sub-regiões, impedindo um maior esforço computacional e produzindo melhor convergência e aproximação nas variáveis físicas envolvidas, como no caso das velocidades variáveis em problemas difusivos-advectivos (PORTAPILA; POWER, 2005). Kita e Kamiya (1994) propuseram uma melhoria na técnica das sub-regiões na qual uma matriz global é construída e melhores resultados são alcançados. No entanto, as equações do MEC devem ser transformadas em equações de forma semelhante às equações relacionadas à rigidez no MEF. Usando essa ideia, mas examinando problemas de rachaduras elásticas multicamadas, Lu e Wu (2005) apresentaram uma técnica de paralelização para montar matrizes de sub-regiões do MEC que focam na redução do custo computacional.

Por outro lado, algumas técnicas similares foram propostas, baseadas na conexão de diferentes regiões e usando pontos internos. Problemas com interação entre solo e estrutura, empregando o MEF e o MEC juntos (SOARES et al., 2004), bem como casos de sistemas integrados de colunas de feixe de placas (PAIVA; VENTURINI, 1993; REIS et al., 2011), empregam a ideia de conexão entre diferentes regiões usando pontos nodais comuns. Recentemente, Wagdy e Rashed (2014) também propuseram uma formulação alternativa na qual a ideia da ligação por pontos internos é melhorada.

No caso da abordagem dinâmica, a Equação de Helmholtz (BUTKOV, 1973) surge naturalmente em muitas áreas da engenharia e da ciência. Tal equação é um caso particular da Equação de Campo Escalar Generalizada (LOEFFLER, 1992), que engloba uma série de aplicações importantes na engenharia, como os problemas difusivo-advectivos, os problemas de Poisson e de ondas acústicas, além dos problemas estacionários, governados pela Equação de Laplace. Esta última tem particular importância no estudo do MEC, pois muitas formulações voltadas para solução de outros problemas empregam uma solução fundamental relacionada a este caso. O operador Laplaciano, fisicamente relacionado à condução ou difusão de energia, também está presente nos casos mais elaborados, como os que são governados pela Equação de Helmholtz.

No caso específico da Equação de Helmholtz, esta é frequentemente usada para analisar problemas de eletromagnetismo, vibração em estruturas e acústica,

envolvendo propagação, reflexão e dispersão de ondas. Sua solução numérica é um tema que ainda está sendo pesquisado na literatura especializada utilizando-se diferentes métodos (LOULA; FERNANDES, 2009; PLUYMERS et al., 2007). Ao contrário dos outros problemas de simulação numérica, não há uma técnica dominante neste campo.

Em particular, o MEC é considerado uma das técnicas numéricas mais eficazes na solução desses problemas, pois permite uma avaliação precisa do campo de pressão acústica difratada por barreiras (SEZNEC, 1980), uma situação prática muito importante. Vários modelos recentes usando equações integrais de contorno podem ser encontrados na literatura (JIANG et al., 2013; LIU et al., 2017; WANG; ZHENG, 2014).

No que diz respeito às metodologias do MEC para resolver problemas de Helmholtz, a formulação clássica, que usa a solução fundamental dependente da frequência (BREBBIA; WALKER, 1980; DOMINGUEZ, 1993; RANGOGNI, 1984; WROBEL; ALIABADI, 2002) tem restrições. Apesar de sua elegância matemática, no caso do cálculo das frequências naturais, a solução fundamental depende da frequência, o que impede a formação de uma matriz de inércia distinta das matrizes clássicas  $H$  e  $G$ , que representam as propriedades constitutivas. Assim, a solução de um problema de autovalor não pode ser feita diretamente, pela maneira tradicional.

Problemas dinâmicos envolvendo meios não homogêneos estão incluídos em uma série de conteúdos de engenharia que são difíceis de modelar através do MEC, de modo que as técnicas de domínio, como o MEF e o Método das Diferenças Finitas, são comumente escolhidas para resolvê-los. Em particular, conforme já mencionado, a técnica da sub-região foi a ferramenta do MEC mais adequada para a abordagem de domínios homogêneos por partes durante muitos anos. Loeffler e Mansur (1986b) empregaram-na com o Método da Dupla Reciprocidade – MECDR (NARDINI; BREBBIA, 1983) para resolver problemas de autovalor e problemas de calor transiente não homogêneos (LOEFFLER; MANSUR, 1986a), obtendo apenas resultados com razoável precisão, devido às limitações de ambas as técnicas. De fato, algumas dificuldades numéricas em aplicações de sub-regiões são relatadas na literatura especializada para aplicações mais elaboradas (XIAOPING; WEI-LIANG, 2005) de forma que apenas problemas governados pela Equação de Laplace foram mais frequentemente resolvidos por ela. Já as limitações da Dupla Reciprocidade em

dinâmica são bem conhecidas do público especializado, devido à impossibilidade de gerar soluções estáveis que não sejam fortemente amortecidas artificialmente (LOEFFLER; MANSUR, 1987; LOEFFLER et al., 2017a).

Modelos alternativos do MEC para problemas de Helmholtz com homogeneidade setorial não são numerosos. Uma vez que a metodologia do MEC clássica se baseia em soluções fundamentais correlatas, Shaw (1994) apresenta uma coleção de Funções de Green com meio heterogêneo para problemas escalares estacionários e Shaw e Manolis (2000) para problemas de Helmholtz (SHAW; MANOLIS, 2000). Modelos híbridos do MEC usando procedimentos sem malha e soluções fundamentais homogêneas também têm sido propostos como um procedimento alternativo para eliminar integrações de domínio relacionadas a campos de correção de velocidade necessários para levar em consideração problemas potenciais em meios heterogêneos (LUIZ et al., 2010). Com base no uso conjunto do MEC e do Método de Colocação de Função de Base Radial (também conhecido como Método de Kansa), Godinho e Tadeu (2012) resolveram sistemas acústicos contendo uma porção heterogênea.

Para resolver problemas setorialmente homogêneos para Equação de Helmholtz, utilizam-se neste trabalho duas técnicas diferentes e recentes: a Interpolação Direta com Funções de Base Radial, aqui chamada MECID (LOEFFLER et al., 2015a), e a Técnica de Superposição de Domínio (TSD) (LOEFFLER; MANSUR, 2016; LOEFFLER et al., 2018a; BARBOSA; LOEFFLER, 2019).

Modelando a Equação de Helmholtz, o MECID aproxima o núcleo não autoadjunto da integral relacionado ao termo de inércia por uma sequência de funções de bases radiais adequadas. Esse procedimento permite a transformação da integral do domínio em uma integral de contorno usando o Teorema da Divergência (LOEFFLER; MANSUR, 2017; BARBOSA et al., 2019). Cabe ressaltar que, diferentemente da Técnica de Dupla Reciprocidade, o MECID aproxima diretamente todo o núcleo da integral de domínio. A solução fundamental utilizada no MECID refere-se ao problema de Laplace, pelo que se reserva uma seção no presente trabalho para examinar as particularidades do MEC na solução de tal equação.

## 1.1 Objetivos e Metodologias da Tese

O objetivo da Tese é formular matematicamente e implementar numericamente um modelo baseado no Método dos Elementos de Contorno para solução de problemas dinâmicos tridimensionais com homogeneidade setorial, governados pela Equação de Helmholtz.

Para chegar a esse objetivo, inicialmente, procedeu-se à modelagem de problemas estáticos e dinâmicos tridimensionais homogêneos e, posteriormente, empreendeu-se o mesmo procedimento examinando problemas estáticos e dinâmicos bidimensionais com homogeneidade setorial, também apresentados resumidamente neste trabalho.

Conforme exposto, a modelagem dos setores heterogêneos é feita por uma abordagem do MEC alternativa e recente, denominada Técnica da Superposição de Domínio (TSD). Para a modelagem e transformação das integrais de domínio referentes à inércia do problema, emprega-se a igualmente recente Técnica de Interpolação Direta com Funções Radiais (MECID).

O emprego destas duas técnicas auxiliares do MEC em problemas tridimensionais heterogêneos por setores constitui uma pesquisa inédita e, conseqüentemente, uma contribuição original ao estado da arte, relativamente ao desenvolvimento de métodos numéricos aplicados a problemas de engenharia.

A TSD é uma alternativa à técnica das sub-regiões (BREBBIA, 1978), mas utiliza uma proposta completamente distinta. Usando a TSD, o problema completo é modelado como uma superposição de um domínio homogêneo circundante e um conjunto de subdomínios internos complementares com propriedades diferentes. A energia de cada subdomínio é computada para o sistema como um todo por superposição, semelhante ao que é feito com fontes ou ações do corpo para resolver os problemas de Poisson (KYTHE, 1995; PARTRIDGE et al., 1992). Todos os setores são matematicamente conectados por meio dos coeficientes de influência, que no procedimento padrão do MEC são gerados por integrações realizadas no contorno dos subdomínios, com os pontos de origem localizados em cada ponto nodal gerado pela discretização, tanto externa quanto internamente. Ressalta-se, contudo, a enorme simplicidade de implementação da TSD comparativamente à técnica das sub-regiões. Cria-se apenas uma matriz  $H$ ,



relacionada aos setores internos que contêm a energia potencial, e essa matriz é adicionada ao sistema clássico do MEC.

Com relação ao MECID, o núcleo completo da integral do domínio referente à energia cinética é interpolado diretamente usando funções de base radial. Desta forma, a integral de domínio é transformada em uma única integral de contorno. Um procedimento de regularização evita a singularidade provocada pela coincidência entre as posições dos pontos fonte e campo (LOEFFLER; MANSUR, 2017).

Neste trabalho, os resultados de referências adotados são as soluções analíticas para os casos mais simples. Diante da ausência dessas soluções, a comparação de desempenho em cada caso do MEC é realizada considerando os resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos (BECKER et al., 1981; HUGHES, 1987) com malhas muito refinadas.

## 1.2 Estrutura da Tese

Além deste capítulo introdutório, esta tese contém:

- O Capítulo 2, que apresenta o Método de Elementos de Contorno, abordando a Equação de Laplace e mostrando a metodologia de discretização da equação integral de contorno, considerando geometrias tridimensionais;
- O Capítulo 3, que contém o modelo de aproximação do MEC para equação de Helmholtz usando a MECID;
- No Capítulo 4, apresenta-se a Técnica de Superposição de Domínios aplicada à Equação de Laplace para os casos bidimensionais e tridimensionais;
- No Capítulo 5, a Técnica de Superposição de Domínios atuando em conjunto com a MECID para solução da Equação de Helmholtz em duas e três dimensões;
- O Capítulo 6 traz as considerações finais sobre a tese.

A Tese contará ainda com oito *apêndices* e um *anexo*, que abordam temas e conceitos relacionados ao trabalho desenvolvido. A seguir uma breve descrição:

- Apêndice A – Apresenta a função primitiva da função de interpolação placa fina para problemas bidimensionais;
- Apêndice B – Apresenta a função primitiva de interpolação primitiva para cada função de base radial testada para os problemas tridimensionais;

- Apêndice C – Apresenta o tensor de Galerkin para o problema bidimensional;
- Apêndice D – Apresenta o tensor de Galerkin para o problema tridimensional;
- Apêndice E – Apresenta o Método da Integração Direta com funções Radiais para problemas bidimensionais da equação de Helmholtz;
- Apêndice F – Simulações do Método da Integração Direta com funções Radiais para problemas bidimensionais da equação de Helmholtz;
- Apêndice G – Apresenta o afastamento de nós múltiplos para elementos lineares em problemas tridimensionais;
- Apêndice H – Simulações do afastamento de nós múltiplos para elementos lineares em problemas tridimensionais;
- Anexo A – Apresenta os pontos de Gauss para integração de superfícies.

## 2 MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO EM PROBLEMAS HOMOGÊNEOS PARA EQUAÇÃO DE LAPLACE

### 2.1 Aproximação do MEC para Equação de Laplace

Na Física Matemática, o operador Laplaciano é obtido quando se combinam os princípios de conservação de energia com uma lei de formação típica do problema que se quer resolver, como a lei de Fourier (transmissão de calor), a lei de Fick (concentração de substâncias), a lei de Darcy (percolação), entre outros. Por essa razão, está presente nas modalidades mais elaboradas da Equação de Campo Escalar. Nesse item, a equação diferencial associada a Equação de Laplace governa processos estacionários, sem fontes externas, sorvedouros ou ações de domínio externo que contribuam diretamente para o campo (CUROTTO, 1981).

Assim, a variável básica  $u(X)$  pode ser interpretada como um potencial escalar em um dado ponto  $X = X(x_1, x_2, x_3)$  de um domínio  $\Omega(X)$  e  $q(X)$  é sua derivada normal. O domínio  $\Omega(X)$  é limitado por uma superfície de contorno  $\Gamma(X)$ , com condições de contorno essenciais  $u = \bar{u}$ , no contorno  $\Gamma_1$  e naturais  $\partial u / \partial n = \bar{q}$  no contorno  $\Gamma_2$ , onde  $\bar{u}$  e  $\bar{q}$  são valores conhecidos de  $u$  e  $q$  e sendo  $K$  a propriedade de difusividade ou rigidez. A equação diferencial associada a esse problema é a Equação de Laplace, conforme a Equação (2.1):

$$Ku_{,ii} = 0 \quad (2.1)$$

Através dos princípios da Teoria das Equações Integrais, chega-se à seguinte equação integral inversa do MEC, bem conhecida na literatura especializada (BREBBIA; WALKER, 1980):

$$K \left[ \int_{\Gamma} q(X) u^*(\xi; X) d\Gamma - \int_{\Gamma} u(X) q^*(\xi; X) d\Gamma + \int_{\Omega} u(X) u_{,ii}^*(\xi; X) d\Omega \right] = 0 \quad (2.2)$$

Na Equação (2.2), a função auxiliar  $u^*(\xi; X)$  é a solução fundamental e sua derivada normal é expressa por  $q^*(\xi; X)$ . São obtidas pela solução de um problema correlato em meio infinito, em que a Função Delta de Dirac é aplicada num ponto particular  $\xi$ , dito ponto fonte. Tais funções dependem da distância euclidiana  $r(\xi; X)$  entre dois pontos: um deles, o já mencionado ponto de geração das equações, ou ponto fonte

$\xi$ ; o outro, um ponto do domínio espacial  $X$ . Utilizando-se as propriedades dessa função, pode-se gerar a seguinte equação integral de contorno:

$$K \left[ \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma + c(\xi)u(\xi) \right] = 0 \quad (2.3)$$

O coeficiente  $c(\xi)$  depende da posição do ponto  $\xi$  em relação ao domínio físico  $\Omega(X) + \Gamma(X)$ . Se localizado no contorno  $\Gamma(X)$ ,  $c(\xi)$  também depende da suavidade deste (KYTHE, 1995).

Nesse ponto, a equação integral é exata e nenhuma aproximação foi realizada. O modelo apresentado até aqui vale para os casos uni, bi e tridimensionais, ou seja, a generalização do modelo bidimensional para o tridimensional não inclui basicamente nenhum conceito ou conteúdo matemático adicional. Contudo, em termos de aspectos relacionados à abordagem numérica e à discretização, as alterações são relevantes. Por essa razão, neste item, diversas particularidades referentes ao modelo numérico são apresentadas com detalhes.

Assim, a partir desse ponto, considera-se o domínio  $\Omega(X)$  como um domínio tridimensional que, conforme já exposto, pode representar um campo térmico ou mecânico no estado estacionário com propriedades homogêneas e isotrópicas.

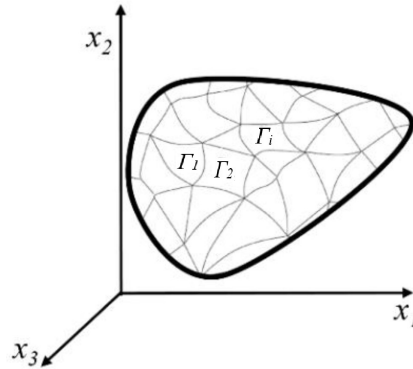
## 2.2 Metodologia de Discretização nos problemas de Laplace Tridimensional

### 2.2.1 Interpolação do Campo e da Geometria

A formulação do MEC em 3D não requer integrações tridimensionais, mas envolve integrações de funções singulares. Uma estratégia para o cálculo das integrais ao longo da superfície  $\Gamma$  é a divisão da superfície, conforme a Figura 1, em elementos  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_n$ , como mostra a Equação (2.4), na qual  $n$  é o número de elementos em que o contorno foi dividido.

$$\Gamma = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \quad (2.4)$$

Figura 1: Superfície plana dividida em pequenas partes.



Assim, a Equação (2.3) pode ser escrita como:

$$c(\xi)u(\xi) + \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma \quad (2.5)$$

Omitindo-se o argumento das funções, as variáveis  $u$  e  $q$  sobre cada elemento  $j$  são definidas em termos de valores nodais:

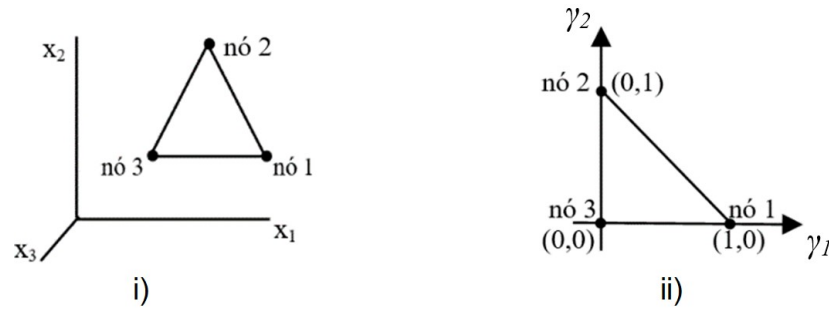
$$u = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n] \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

$$q = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n] \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \vdots \\ q^n \end{Bmatrix}$$

Na Equação (2.6), as funções de forma ou funções de interpolação são  $\phi_i$ , que são dadas em termos de coordenadas adimensionais  $\gamma(x)$  sobre cada elemento. É usual escrever-se tanto a variação do campo quanto a geometria do corpo através dessas funções (BREBBIA et al., 1984; REDDY, 2005). Logo, as coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  de um ponto qualquer do elemento são escritas em função das coordenadas dos  $N$  nós do elemento.

Embora as superfícies dos elementos possam ter uma forma qualquer, aqui são formadas por triângulos, o que introduz uma aproximação na superfície original, especialmente se esta não for plana. No entanto, os triângulos planos são mais fáceis de gerar e possuem Jacobiano constante ao longo do elemento.

Figura 2: Elemento triangular; i) Espaço real  $(x_1, x_2, x_3)$ ; ii) Espaço paramétrico  $(\gamma_1, \gamma_2)$ .



Uma vez que os pesos da integração de Gauss serão definidos no intervalo de 0 a 1, é coerente fazer o mapeamento do elemento  $\Gamma_j$  também no intervalo de 0 a 1. Desse modo, na Figura 2, observam-se o elemento real e o elemento de integração, em que se definem as seguintes relações:

$$\phi_1 = \gamma_1; \quad \phi_2 = \gamma_2; \quad \phi_3 = 1 - \gamma_1 - \gamma_2 \quad (2.7)$$

Os pontos nodais de integração são:

$$X_i = \sum_{n=1}^3 \phi^n X_i^n \quad (2.8)$$

Na Equação (2.8),  $X_i^n$  é a coordenada cartesiana do nó  $n$ . Em elementos triangulares, as funções  $u$  e  $q$  variam linearmente sobre tais elementos.

$$[\phi] = [\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3] \quad (2.9)$$

Dessa forma, pode-se escrever:

$$[\hat{H}]_{ij} = \int_{\Gamma_j} [\phi] q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3] q^* d\Gamma \quad (2.10)$$

$$[G]_{ij} = \int_{\Gamma_j} [\phi] u^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3] u^* d\Gamma \quad (2.11)$$

É necessário relacionar  $d\Gamma$ , representado no sistema de coordenadas globais  $X$ , com tal sistema de coordenadas através do Jacobiano “ $J$ ” da transformação de coordenadas, dado por:

$$d\Gamma = |J| d\gamma_1 d\gamma_2 \quad (2.12)$$

Souza e Aparecido (2007) demonstraram que o Jacobiano da transformação é dado por:

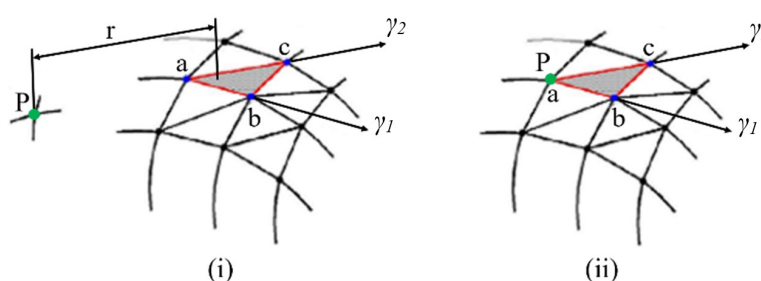
$$|J| = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \gamma_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \gamma_2} \end{pmatrix} \right| \quad (2.13)$$

Observa-se que as diferenciais representam as coordenadas dos vetores formados por dois lados adjacentes do triângulo, de modo que o Jacobiano é igual ao módulo do produto vetorial desses dois vetores e numericamente igual ao dobro da área do triângulo.

### 2.2.2 Integração Numérica

Nas Equações (2.10) e (2.11) os núcleos  $u^*$  e  $q^*$  são funções elaboradas, porém suaves, para os casos em que  $P$  e  $Q$  (ponto fonte ou de colocação e ponto campo ou integração, respectivamente) não coincidem ou não estão demasiadamente próximos. Caso o ponto de colocação não pertença ao elemento no qual a integral está sendo avaliada, nenhuma singularidade ocorre, conforme a situação mostrada na Figura 3 (i) a seguir. Por outro lado, se  $P$  pertence ao elemento que está sendo integrado, é possível que  $P$  e  $Q$  coincidam, o que significa singularidade no integrando, vide Figura 3 (ii). Uma observação importante consiste no fato de que o ponto pode pertencer a outro elemento, mas ser um nó duplo. Nessa situação, também pode ocorrer singularidade, caso o ponto fonte realize a integração sobre o elemento que contenha o seu nó duplo.

Figura 3: Posição do ponto de colocação  $P$  em relação ao elemento triangular.



Faz-se o cálculo numérico das integrais usando a Quadratura de Gauss quando o ponto fonte não se encontra no mesmo elemento em que se processa a integração. Reserva-se a integração analítica apenas para o cálculo dos coeficientes  $G_{jj}$ . Isso

porque os coeficientes  $H_{jj}$ , cujas integrais são mais fortemente singulares, podem ser calculados pela soma dos coeficientes das linhas correspondentes, segundo o procedimento da obediência à imposição de um campo potencial constante (BREBBIA; DOMÍNGUEZ, 1998). Quando um campo uniforme de potencial é aplicado a um domínio físico finito as derivadas do potencial devem ser totalmente nulas:

$$[H]\{u\} = \{0\} \quad (2.14)$$

Dessa forma, tanto a integral mais fortemente singular  $H_{jj}$  quanto o valor do coeficiente  $c(\xi)$  podem ser calculados indiretamente.

No MEC, para problemas tridimensionais, a fórmula apropriada da Quadratura de Gauss para triângulos (HUSSAIN et al., 2012) requer a avaliação da integral de um domínio triangular, onde  $\Delta$  é um triângulo arbitrário:

$$I_1 = \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy \quad (2.15)$$

Fazendo a transformação de coordenadas, tem-se:

$$I_2 = |J| \int_{\gamma_1=0}^1 \int_{\gamma_2=0}^{1-\gamma_1} f(x(\gamma), y(\gamma), z(\gamma)) d\gamma_2 d\gamma_1 \quad (2.16)$$

Na concepção da solução numérica para as integrais, devem-se estabelecer pontos distintamente posicionados sobre o elemento triangular, em que se possa determinar o valor da função (HAMMER et al., 1956). Assim, a solução de cada uma das integrais apresenta-se como:

$$\iint_{s_j} f(x) dS = \sum_{p=1}^{NG} w_p f(\xi_p) |J| \quad (2.17)$$

$NG$  é o número de pontos de integração,  $w_p$  são os pesos da quadratura de Gauss,  $\xi_p$  são pontos de integração de Gauss,  $J$  é o Jacobiano para a transformação de coordenadas e  $f(\xi_p)$  é o valor da função a ser integrada no ponto  $P$ . No Apêndice A, são apresentados os valores dos pesos e dos pontos de Gauss utilizados nos problemas tridimensionais do MEC.



Utilizando-se as Equações (2.10) e (2.11), os elementos das matrizes  $G$  e  $H$  podem ser escritos da seguinte forma:

$$[\hat{H}] = \int_{\Gamma_j} q^* u d\Gamma = \left[ \sum_{l=1}^{NG} [q^* \varphi]_l w_l |J| \right] u^n \quad (2.18)$$

$$[G] = \int_{\Gamma_j} u^* q d\Gamma = \left[ \sum_{l=1}^{NG} [u^* \varphi]_l w_l |J| \right] q^n \quad (2.19)$$

A solução fundamental tridimensional é dada por (PARTRIDGE et al., 1992):

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (2.20)$$

Na Equação (2.20),  $r$  é a distância do ponto de aplicação  $\zeta$  do potencial unitário a um ponto qualquer onde se deseja determinar o valor da função  $u^*$ . A solução fundamental do fluxo é dada por (PARTRIDGE et al., 1992):

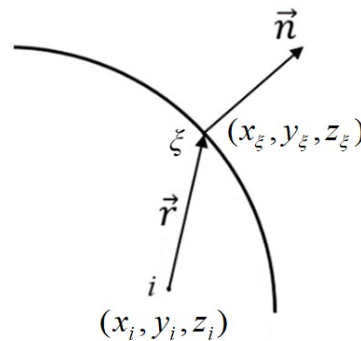
$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{-\cos(r, n)}{4\pi r^2} \quad (2.21)$$

Em que:

$$\cos(r, n) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\|\vec{r}\| \|\vec{n}\|} \quad (2.22)$$

O cosseno diretor  $\cos(r, n)$  dos vetores  $r$  e  $n$  é representado na Figura 4, assim como o vetor  $r$ , que é a diferença entre as coordenadas dos pontos  $i$  e  $\zeta$ .

Figura 4: Representação dos vetores  $r$  e  $n$ .

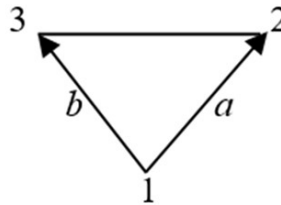


Os parâmetros  $r_1, r_2, r_3, n_1, n_2$  e  $n_3$ , que definem os vetores  $r$  e  $n$ , são facilmente determinados:

$$r_1 = x_\xi - x_i; r_2 = y_\xi - y_i; r_3 = z_\xi - z_i \quad (2.23)$$

Para determinar os valores do vetor  $n$ , supõe-se uma superfície do elemento triangular e convencionam-se uma numeração dos seus nós no sentido anti-horário, conforme Figura 4. Desse modo, a normal é ortogonal ao plano definido pelos três nós do elemento e pode ser definida como o produto vetorial entre dois vetores que pertençam ao plano do elemento.

Figura 5: Representação dos vetores  $a$  e  $b$ .



Considerando-se que os dois vetores sejam representados por quaisquer dois lados do elemento triangular, indicado pelos lados  $a$  e  $b$  (vide Figura 5), tem-se:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} \quad (2.24)$$

Para que a normal seja dirigida para fora do domínio, adota-se uma convenção para a numeração dos nós do elemento triangular no sentido anti-horário, conforme Figura 5. Dessa forma se assegura que, para todos os elementos, o sentido da normal  $n$  será o mesmo, isto é, para fora do domínio. Assim se escreve o vetor  $n$ :

$$\begin{aligned} n_1 &= (y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(y_3 - y_1) \\ n_2 &= (z_2 - z_1)(x_3 - x_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1) \\ n_3 &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Agora, pode-se reescrever as Equações (2.18) e (2.19):

$$[\hat{H}] = \left[ \sum_{l=1}^{NG} \left[ \frac{-(r_1 n_1 + r_2 n_2 + r_3 n_3)}{4\pi r^3 n} \varphi \right]_l w_l |J| \right] u^n \quad (2.26)$$

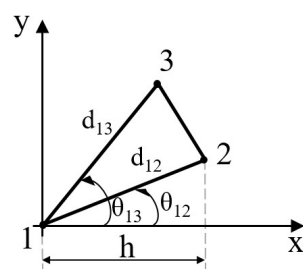
$$[G] = \left[ \sum_{l=1}^{NG} \left[ \frac{1}{4\pi r} \varphi \right]_l w_l |J| \right] q^n \quad (2.27)$$

### 2.2.3 Integração Analítica

O processo anterior de integração numérica se faz necessário na maioria dos casos, visto que a solução exata é de difícil concepção. Entretanto, esta pode ser facilmente determinada nos casos particulares em que: (a) os vetores  $r$  e  $n$  são ortogonais onde o integrando é nulo, pois o cosseno diretor das suas retas suporte é nulo; (b) o ponto fonte se encontra aplicado a um dos nós do elemento sobre o qual se efetua a integração.

Na suposição (b), de acordo com (SÁ, 1980), o ponto fonte está aplicado no ponto 1 do elemento triangular. Estabelece-se um sistema local de eixos cartesianos com origem nesse ponto e, com o eixo  $y$  paralelo ao lado 2-3, pode-se, baseado na Figura 6, escrever as seguintes relações para  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$ , onde  $h$  é a altura do elemento triangular relativa ao lado 2-3:

Figura 6: Pontos do elemento triangular para integração analítica.



- 1 (0,0)
- 2 ( $x_2, y_2$ ) ou ( $h, y_2$ )
- 3 ( $x_3, y_3$ ) ou ( $h, y_3$ )
- $d_{ij}$  – distância entre os nós  $i$  e  $j$
- $\theta_{ij}$  – ângulo entre o eixo X e o lado  $ij$

Fonte: Sá, 1980.

$$\gamma_1 = \frac{h-x}{h}; \quad \gamma_2 = \frac{\frac{y_3}{x_3}x - y}{y_3 - y_2}; \quad \gamma_3 = \frac{\frac{y_2}{x_2}x - y}{y_2 - y_3} \quad (2.28)$$

Expressando tais funções  $\gamma_k$  em coordenadas polares:

$$x = r \cos(\theta); \quad y = r \sin(\theta) \quad (2.29)$$

Considerando que:

$$\frac{y_2}{x_2} = \operatorname{tg}(\theta_{12}); \quad \frac{y_3}{x_3} = \operatorname{tg}(\theta_{13}); \quad y_3 - y_2 = d_{23} \quad (2.30)$$

As funções  $f_k = \gamma_k u^*$  são dadas por:

$$f_1 = \frac{h - r \cos \theta}{4 \pi r h} \quad (2.31)$$

$$f_2 = \frac{\operatorname{tg}(\theta_{13}) \cos \theta - \operatorname{sen} \theta}{4 \pi d_{23}} \quad (2.32)$$

$$f_3 = \frac{-(\operatorname{tg}(\theta_{12}) \cos \theta - \operatorname{sen} \theta)}{4 \pi d_{23}} \quad (2.33)$$

Tendo-se as funções  $f_k = \gamma_k u^*$ , o cálculo analítico dos coeficientes da matriz  $G$ , referente às integrações com pontos fontes localizados no próprio elemento em coordenadas polares, apresenta-se como:

$$[G] = I_k = \int_{S_j} f_k dx dy = \int_{\theta} \int_r f_k r dr d\theta \quad (2.34)$$

Visto que:

$$dx dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr d\theta = r dr d\theta \quad (2.35)$$

Assim, tem-se a 1ª integral:

$$I_1 = \frac{1}{4 \pi h} \int_{\theta} \int_r (h - r \cos \theta) dr d\theta \quad (2.36)$$

Por simples observação na Figura 6, verifica-se que  $r$  pode ser representado em função de  $\theta$ .

$$r = \frac{h}{\cos \theta} \quad (2.37)$$

Substituindo a Equação (2.37) na (2.36), chega-se a:

$$I_1 = \frac{h}{8\pi} \ln \left| \frac{\sec \theta_{13} + \operatorname{tg} \theta_{13}}{\sec \theta_{12} + \operatorname{tg} \theta_{12}} \right| \quad (2.38)$$

Fazendo o mesmo para as Equações (2.32) e (2.33):

$$I_2 = \frac{h^2}{8\pi d_{23}} \left( \operatorname{tg} \theta_{13} \ln \left| \frac{\sec \theta_{13} + \operatorname{tg} \theta_{13}}{\sec \theta_{12} + \operatorname{tg} \theta_{12}} \right| + (\sec \theta_{12} - \sec \theta_{13}) \right) \quad (2.39)$$

$$I_3 = \frac{-h^2}{8\pi d_{23}} \left( \operatorname{tg} \theta_{12} \ln \left| \frac{\sec \theta_{13} + \operatorname{tg} \theta_{13}}{\sec \theta_{12} + \operatorname{tg} \theta_{12}} \right| + (\sec \theta_{12} - \sec \theta_{13}) \right) \quad (2.40)$$

Com base mais uma vez na Figura 6, pode-se concluir que:

$$\cos \theta_{ij} = \frac{h}{d_{ij}}; \quad \operatorname{tg} \theta_{ij} = \frac{\sqrt{d_{ij}^2 - h^2}}{h}; \quad \sec \theta_{ij} = \frac{d_{ij}}{h} \quad (2.41)$$

Dessa forma, indicam-se as expressões de  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ :

$$I_1 = \frac{h}{8\pi} \ln \left| \frac{d_{13} + \sqrt{d_{13}^2 - h^2}}{d_{12} + \sqrt{d_{12}^2 - h^2}} \right| \quad (2.42)$$

$$I_2 = \frac{h}{8\pi d_{23}} \left( \sqrt{d_{13}^2 - h^2} \ln \left| \frac{d_{13} + \sqrt{d_{13}^2 - h^2}}{d_{12} + \sqrt{d_{12}^2 - h^2}} \right| + (d_{12} - d_{13}) \right) \quad (2.43)$$

$$I_3 = \frac{-h}{8\pi d_{23}} \left( \sqrt{d_{12}^2 - h^2} \ln \left| \frac{d_{13} + \sqrt{d_{13}^2 - h^2}}{d_{12} + \sqrt{d_{12}^2 - h^2}} \right| + (d_{12} - d_{13}) \right) \quad (2.44)$$

Para os casos em que o ponto fonte está aplicado a um dos nós do elemento triangular, a determinação dos termos de  $[G]_{ij}$  é através da integração analítica, onde são determinadas pelas Equações (2.42), (2.43) e (2.44).

### 2.3 Exemplo de Aplicação do MEC Tridimensional na Equação de Laplace

O exemplo proposto consiste em um cubo homogêneo engastado na extremidade da face  $y$ - $z$ , onde  $x=0$ . Está sujeito a uma deformação constante aplicada na direção  $x$  na face  $y$ - $z$ , onde  $x = l$ , conforme mostrado na Figura 7. Com a aplicação de condições naturais nulas nas faces dos planos  $x$ - $z$  e  $x$ - $y$ , o problema fica unidimensional. Para discretização, foram empregadas sete malhas diferentes com elementos triangulares, conforme mostrado na Tabela 1:

Figura 7: Geometria e condições de contorno para o exemplo tridimensional homogêneo da Eq. de Laplace.

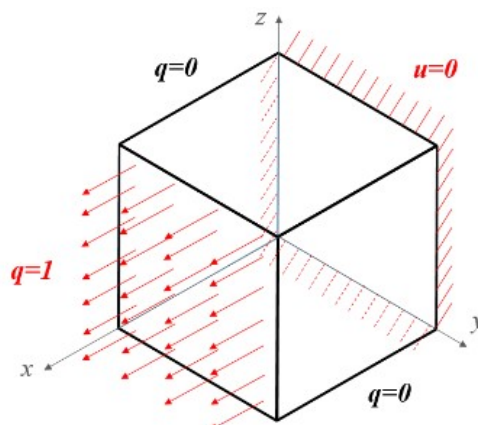
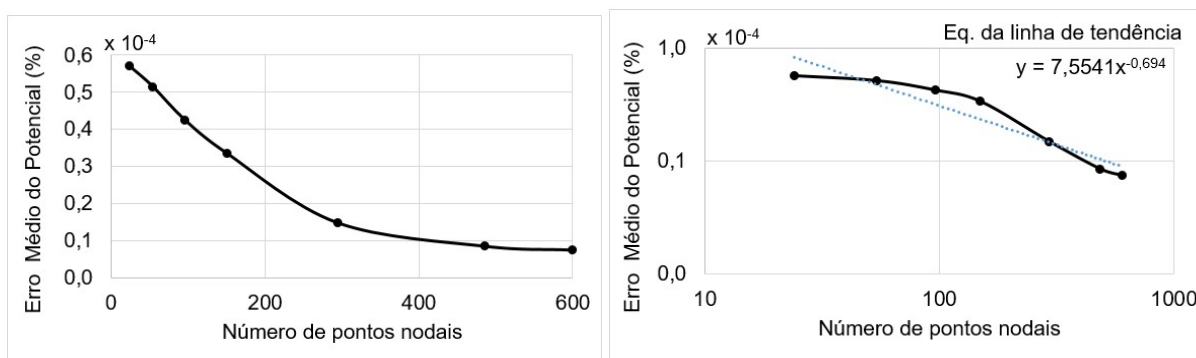


Tabela 1: Quantidade de pontos nodais e elementos em cada malha para o exemplo tridimensional homogêneo da Eq. de Laplace.

	Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5	Malha 6	Malha 7
Pontos	24	54	96	150	294	486	600
Elementos	12	48	108	192	432	768	972

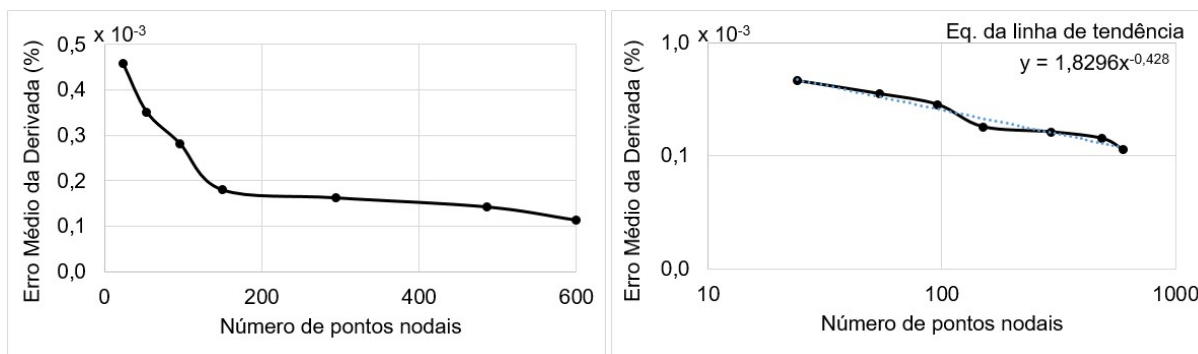
Na Figura 8, observa-se o erro médio relativo para o cálculo do potencial, onde o fluxo é prescrito. O erro foi menor que 0,00006% para malha com 12 elementos, ou seja, dois elementos triangulares por face do cubo.

Figura 8: Erro médio do potencial do exemplo tridimensional homogêneo da Eq. de Laplace, para escala padrão e escala logarítmica.



Já na Figura 9, o erro médio relativo para o cálculo da derivada do potencial é uma ordem de grandeza maior que o erro médio do potencial, mas continua sendo muito pequeno para todas as malhas.

Figura 9: Erro médio da derivada do potencial do exemplo tridimensional homogêneo da Eq. de Laplace, para escala padrão e escala logarítmica.



Tanto nos erros médios do potencial quanto da sua derivada normal, observa-se uma redução dos erros, de modo que houve convergência no comportamento dos resultados numéricos à medida que a malha foi sendo refinada.

## 2.4 Conclusões Parciais

Os resultados obtidos para os problemas homogêneos de Laplace tridimensionais mostraram um desempenho satisfatório da metodologia de integração aqui desenvolvida, indicando que o esquema numérico utilizado para tratamento dos elementos sem singularidades e a solução pelo método analítico para as integrações com singularidade podem ser usados com segurança, mesmo se utilizando uma quantidade de pontos nodais reduzida. O uso de elementos isoparamétricos lineares também foi satisfatório.

### 3 O MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO EM PROBLEMAS HOMOGÊNEOS PARA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

#### 3.1 Equação Integral do MEC para Equação de Helmholtz

Apesar de alguns modelos acústicos apresentarem a Equação da Onda Acústica para meios não homogêneos de modo diferente, considere a forma mostrada a seguir, em que a propriedade  $K(X)$  varia espacialmente:

$$[K(X)U(X,t)]_{,i} = \rho(X)\ddot{U}(X,t) \quad (3.1)$$

A função  $K(X)$  representa, respectivamente, a propriedade de difusividade ou rigidez, ao passo que  $\rho(X)$  pode significar inércia material ou térmica; o significado destes depende do problema físico associado, de forma que o potencial  $U(X,t)$  pode retratar pressão, campo elétrico, deslocamento, entre outros.

A Equação de Helmholtz pode ser interpretada como uma simplificação da Equação (3.1), quando se busca uma resposta produzida no sistema por uma excitação variável cuja frequência  $\omega$  é conhecida. Nessa condição, o potencial  $U(X,t)$  equivale a uma resposta periódica, composta de conteúdo temporal específico (BUTKOV, 1973):

$$U(X,t) = u(X)e^{-i\omega t} \quad (3.2)$$

Na Equação (3.2), “ $i$ ” é a unidade imaginária e  $u(X)$  é a amplitude espacial da resposta estacionária do sistema à excitação harmônica, de frequência  $\omega$ . Em meios setorialmente homogêneos, as propriedades físicas que se apresentam na Equação (3.1) podem ser consideradas constantes no interior de cada setor, resultando assim na seguinte expressão:

$$Ku(X)_{,ii} = -\rho \omega^2 u(X) \quad (3.3)$$

A Equação (3.3) pode ser desenvolvida para cada setor separadamente, no contexto do modelo matemático usual do MEC, expresso em termos de equações integrais clássicas. Utilizando-se uma função auxiliar  $u^*(\xi; X)$ , referente ao problema estacionário, e admitindo-se que o núcleo das integrais é composto por funções integráveis, pode-se escrever uma forma integral da seguinte maneira:



$$K \int_{\Omega} u(X)_{,ii} u^*(\xi; X) d\Omega = -\rho \omega^2 \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega \quad (3.4)$$

O lado esquerdo da Equação (3.4), que se refere ao Operador Laplaciano, é tratado pelo procedimento tradicional do MEC para a Equação de Laplace, ou seja, a solução fundamental utilizada nessa formulação é a correlata ao problema de Laplace, e não a solução referente à Equação de Helmholtz. Isso representa uma perda de precisão com relação à formulação clássica (BREBBIA; WALKER, 1980), pois o espaço gerado pela solução fundamental de Laplace não é tão eficaz para a minimização de resíduos numéricos sob a óptica do Método dos Resíduos Ponderados (BREBBIA, 1978) num problema de Helmholtz com a sua correspondente solução fundamental. Entretanto, o nível de aproximação adicional introduzido por essa simplificação é aceitável pelos padrões de engenharia, haja vista os resultados obtidos (PEREIRA, 2016; LOEFFLER et al., 2017b). Dessa forma, usa-se como função auxiliar uma solução fundamental  $u^*(\xi; X)$  correspondente ao problema de Laplace. O problema fundamental estacionário - qual seja a dimensão - é dado por:

$$u^*_{,ii} = -\Delta(\xi; X) \quad (3.5)$$

Sendo  $\Delta$  a função Delta de Dirac, no caso bidimensional, sua solução fornece:

$$u^* = -\frac{1}{2\pi} \ln[r(\xi; X)] \quad (3.6)$$

A derivada normal da solução fundamental  $q^*(\xi; X)$  é expressa por:

$$q^* = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r(\xi; X)}{\partial n(X)} \quad (3.7)$$

Nas Equações (3.6) e (3.7), o  $r(\xi; X)$  é a distância euclidiana entre o ponto fonte  $\xi$  e um ponto genérico  $X$  do domínio.

Assim, fazendo uso das transformações usuais no Operador Laplaciano e considerando as propriedades da função Delta de Dirac, obtém-se a forma inversa da Equação (3.4), a qual pode ser escrita da seguinte forma:

$$K \left[ c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma \right] = \rho\omega^2 \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega \quad (3.8)$$

Observando a equação anterior, vê-se que, diferentemente do termo difusivo (lado esquerdo da Equação (3.8)), a integral referente à energia cinética (ou inércia) é

expressa apenas em termos do potencial  $u(X)$ . Contudo, é preciso operacionalizar essa parcela no lado direito da Equação (3.8), de modo a escrevê-la em termos de integrais de contorno. Com essa finalidade, para evitar singularidades no núcleo destas integrais, emprega-se o procedimento MECID juntamente com um procedimento de regularização (PEREIRA, 2016).

O modelo matemático referente ao problema de Helmholtz em três dimensões segue o mesmo equacionamento, considerando-se apenas que o domínio  $\Omega(X)$  é um volume e que o contorno  $\Gamma(X)$  é uma superfície. Contudo, para problemas tridimensionais, a solução fundamental  $u^*(\xi; X)$  e a derivada normal da solução fundamental  $q^*(\xi; X)$  são as já apresentadas anteriormente, repetidas aqui por conveniência:

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (3.9)$$

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{-\cos(r, n)}{4\pi r^2} \quad (3.10)$$

Tal como no caso estacionário, as maiores dificuldades referentes à adaptação do problema bidimensional ao modelo tridimensional envolvem a discretização e outros aspectos numéricos do MEC.

### 3.2 Aproximação do MECID na Integral de Domínio

Usando o MECID, o núcleo completo da integral do domínio é interpolado diretamente por meio de funções de base radial. Isso é feito por uma combinação linear dada pela seguinte expressão (LOEFFLER et al., 2015b):

$$u(X)u^*(\xi; X) = \sum \alpha^j F^j(X^j; X) \quad (3.11)$$

Como as funções de interpolação usadas  $F^i$  pertencem à classe de funções radiais, seu argumento é composto pela distância euclidiana  $r(X^j; X)$ , que caracteriza as posições dos pontos base  $X^j$  em relação ao domínio genérico (pontos  $X$ ).

Nas simulações aqui realizadas, em razão do seu bom desempenho em diversas aplicações com o MEC, a função de base radial utilizada é a função de placa fina (LOEFFLER et al., 2018b) para os problemas bidimensionais, dada pela seguinte equação (cujo desenvolvimento consta do Apêndice A):

$$F^j(X^j; X) = r^2(X^j; X) \ln r(X^j; X) \quad (3.12)$$

Para os problemas tridimensionais, diversas funções de base radial foram utilizadas, o desenvolvimento da função de interpolação primitiva dessas funções para problemas tridimensionais consta do Apêndice B.

O MECID transforma a integral de domínio em uma única integral de contorno usando uma função de interpolação primitiva  $\psi^j$ . Assim, genericamente, uma integral cujo núcleo seja composto pelo lado direito da Equação (3.8) torna-se:

$$\int_{\Omega} \xi \alpha^j F^j(X^j; X) d\Omega = \int_{\Omega} (\xi \alpha^j \psi_{,ij}^j(X^j; X)) d\Omega = \int_{\Gamma} (\xi \alpha^j \psi_{,i}^j(X^j; X) n_i(X)) d\Gamma = \xi \alpha^j \int_{\Gamma} \eta^j(X^j; X) d\Gamma \quad (3.13)$$

Para cada ponto fonte  $\xi$ , a interpolação dada pela Equação (3.13) corresponde à varredura de todos os pontos  $X^j$  em relação aos pontos de domínio  $X$ , ponderados pelos coeficientes  $\xi \alpha^j$ .

Considerando a Equação (3.11) e a transformação proposta pela Equação (3.13), o lado direito da Equação (3.8) é reescrito na forma:

$$\omega^2 \rho \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega = \omega^2 \rho \left( \xi \alpha^j \int_{\Gamma} \eta^j d\Gamma \right) \quad (3.14)$$

### 3.3 Procedimento de Regularização

O procedimento de regularização evita, a singularidade provocada pela coincidência entre as posições dos pontos fonte e campo na Equação (3.11). É baseado no conceito apresentado por Hadamard, embora este seja aplicado em um contexto diferente (PESSOLANI, 2002). O procedimento é aplicado no lado direito da Equação (3.8), pela adição de duas integrais que se autocompensam, ou seja:

$$\omega^2 \rho \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega = \omega^2 \rho \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega + \left\{ \omega^2 \rho \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega - \omega^2 \rho \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega \right\} \quad (3.15)$$

Uma das parcelas adicionadas é interpolada juntamente com a integral original, retirando-se a singularidade:

$$\omega^2 \rho \left\{ \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega - \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega \right\} = \omega^2 \rho \left( \xi \alpha^j \int_{\Gamma} \eta^j d\Gamma \right) \quad (3.16)$$

A outra integral pode ser resolvida através do Tensor de Galerkin, ou seja:

$$\rho\omega^2 \int_{\Omega} u(\xi)u^*(\xi; X)d\Omega = \rho\omega^2 u(\xi) \int_{\Omega} u^*(\xi; X)d\Omega = \rho\omega^2 u(\xi) \int_{\Gamma} G_{,i}^* n_i d\Gamma \quad (3.17)$$

A derivação direcional de  $G^*(\xi; X)$  é mostrada a seguir para problemas bidimensionais e o desenvolvimento no Apêndice C.

$$G_{,i}^*(\xi; X)n_i(X) = P^X(\xi; X) = \frac{1}{4\pi} (0,5 - \ln[r(\xi; X)]) r_i n_i \quad (3.18)$$

Para problemas tridimensionais, a derivação direcional de  $G^*(\xi; X)$  é mostrada a seguir e o desenvolvimento nos Apêndice D.

$$G_{,i}^*(\xi; X)n_i(X) = P^X(\xi; X) = \frac{1}{4\pi r} r_i n_i \quad (3.19)$$

Nesse ponto, que antecede ao processo de discretização, a equação integral de contorno encontra-se na forma:

$$K \left[ c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} [u(X)q^*(\xi; X) - q(X)u^*(\xi; X)]d\Gamma \right] = \omega^2 \rho \left( \int_{\Gamma} \alpha^j \eta^j d\Gamma + u(\xi) \int_{\Gamma} G_{,i}^* n_i d\Gamma \right) \quad (3.20)$$

### 3.4 Procedimento de Discretização

Aplicam-se aqui os procedimentos típicos do MEC para discretização. Consideram-se elementos de contorno lineares isoparamétricos, com nós múltiplos nas arestas. Para cada ponto fonte se faz uma varredura em todos os elementos de contorno.

No caso dos problemas de Laplace, cujo operador Laplaciano também figura nos problemas de Helmholtz, chega-se a duas matrizes características, usualmente denominadas matrizes  $H$  e  $G$  (BREBBIA et al., 1984).

Já na discretização do termo reativo (lado direito da Equação (3.20)), considera-se o esquema de interpolação gerado pelo MECID, em que para cada ponto fonte  $\xi$  também é efetuada uma varredura de todos os pontos de interpolação  $X^i$  em relação aos pontos de domínio  $X$  (agora, após a discretização, estes são situados exclusivamente sobre os elementos de contorno  $\Gamma(X)$ ), ponderados pelos coeficientes  $\xi \alpha^j$ . Assim, os coeficientes de  $\xi \alpha^i$  são obtidos pela resolução de um sistema matricial na forma:

$$[\xi \alpha] = [F]^{-1} [\xi \Lambda] \quad [F] \alpha = [F]^{-1} [\xi \Lambda] [u] \quad (3.21)$$

Esse procedimento é apresentado com detalhe em trabalhos prévios (LOEFFLER et al., 2015a). Sua aplicação junto à Equação (3.16) ou à primeira parcela do lado direito da Equação (3.20) após a discretização resulta em:

$$\rho\omega^2 \begin{pmatrix} {}^1\alpha^1 & \cdots & {}^1\alpha^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^n\alpha^1 & \cdots & {}^n\alpha^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix} = \rho\omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Cada coeficiente  $A_\xi$  é explicitado a partir de:

$$A_\xi = (N_1 \quad N_2 \quad \cdots \quad N_n) \begin{pmatrix} {}^\xi\alpha_1 \\ \vdots \\ {}^\xi\alpha_n \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

O índice “ $n$ ” significa o número total de pontos nodais, incluindo pontos no contorno e pontos internos. Pode ser encontrada uma forma sucinta para o vetor  $A_\xi$ , dada por:

$$A_\xi = (N_1 \quad N_2 \quad \cdots \quad N_n) \begin{pmatrix} F^{11} & \cdots & F^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F^{n1} & \cdots & F^{nn} \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} {}^\xi\Lambda^1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & {}^\xi\Lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \right\} = \quad (3.24)$$

$$(S_1 \quad S_2 \quad \cdots \quad S_n) \left\{ \begin{pmatrix} {}^\xi\Lambda^1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & {}^\xi\Lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \right\}$$

Então:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-S_2^1\Lambda^2 - S_3^1\Lambda^3 \cdots - S_n^1\Lambda^n] & S_2^1\Lambda^2 & \cdots & S_n^1\Lambda^n \\ S_1^2\Lambda^1 & [-S_1^2\Lambda^1 - S_3^2\Lambda^3 \cdots - S_n^2\Lambda^n] & \cdots & S_n^2\Lambda^n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_1^n\Lambda^1 & S_2^n\Lambda^2 & \cdots & [-S_1^n\Lambda^1 - S_2^n\Lambda^3 \cdots - S_{n-1}^n\Lambda^{n-1}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Pode-se ressaltar que os termos  ${}^i\Lambda^i$ , que produzem singularidade devido à coincidência entre pontos de campo e fonte, não existem mais na matriz dada pela Equação (3.25). As matrizes referentes ao Tensor de Galerkin (segunda parcela do lado direito da Equação (3.20)) são mais simples e se reduzem ao seguinte vetor:

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\int_1^1 P^1 d\Gamma_1 + \int_2^1 P^2 d\Gamma_2 + \dots + \int_n^1 P^n d\Gamma_n] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [\int_1^2 P^1 d\Gamma_1 + \int_2^2 P^2 d\Gamma_2 + \dots + \int_n^2 P^n d\Gamma_n] & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [\int_1^n P^1 d\Gamma_1 + \int_2^n P^2 d\Gamma_2 + \dots + \int_n^n P^n d\Gamma_n] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Assim, as matrizes referentes à inércia podem ser construídas na forma:

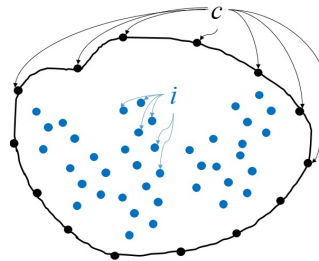
$$\rho\omega^2 \begin{pmatrix} (A_1 + Z_1) \\ \vdots \\ (A_n + Z_n) \end{pmatrix} = \rho\omega^2 \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Uma vez que a energia é representada exclusivamente por meio de valores potenciais nos pontos internos, esses pontos devem aparecer explicitamente no sistema matricial, ou seja, o potencial associado a eles é calculado simultaneamente com pontos nodais do contorno. Logo, o sistema matricial MECID após o procedimento de discretização é dado por:

$$K[H]\{u\} - K[G]\{q\} = \rho\omega^2 [M]\{u\} \quad (3.28)$$

Na Figura 10, descreve-se a convenção utilizada para expandir a forma matricial de modo a melhor compreendê-la. Assim, os subscritos  $c$  indicam os pontos no contorno e os subscritos  $i$  indicam os pontos base internos.

Figura 10: Nomenclatura dos pontos nodais da geometria homogêneo para Eq. de Helmholtz.



Com o propósito de facilitar o entendimento, foram analisadas as colunas de cada matriz referente à Equação (3.28). Para todas as matrizes, têm-se coeficientes de influência gerados pela ação dos pontos fonte que podem se posicionar no contorno envolvente e nos pontos de base situados no interior do domínio.

$$K \underbrace{\begin{bmatrix} H_{cc} & 0_{ci} \\ H_{ic} & H_{ii} \end{bmatrix}}_{\substack{A1 \\ A2}} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_i \end{Bmatrix} - K \underbrace{\begin{bmatrix} G_{cc} & 0_{ci} \\ G_{ic} & 0_{ii} \end{bmatrix}}_{\substack{B1 \\ B2}} \begin{Bmatrix} q_c \\ q_i \end{Bmatrix} = \rho\omega^2 \underbrace{\begin{bmatrix} M_{cc} & M_{ci} \\ M_{ic} & M_{ii} \end{bmatrix}}_{\substack{C1 \\ C2}} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_i \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

Para as matrizes da Equação (3.29), a coluna  $A1$  é gerada pela integração ao longo do contorno. Na coluna  $A2$ , a matriz  $H_{ii}$  é uma matriz diagonal. A coluna  $B1$  é gerada pela integração dos pontos fonte ao longo do contorno. Para a matriz de massa, os coeficientes de influência gerados pela ação dos pontos fonte por colunas são:  $C1$ , pela integração ao longo do contorno, e  $C2$ , pela relação com os pontos internos ao domínio.

### 3.5 Formulação do Problema de Autovalor

O problema do autovalor pode ser estabelecido, na forma usual, com formulações do MEC que geram matrizes relacionadas à inércia (conforme exposto previamente), incluindo-se as formulações MECID e a MECDR, que utilizam funções de base radial. Sobre a MECDR, os procedimentos matemáticos podem ser encontrados em muitas referências, tais como (NARDINI; BREBBIA, 1983) e (LOEFFLER; MANSUR, 1986b).

Os sistemas de equações mostrados tanto na Equação (3.28) quanto na Equação (3.30), que são similares, precisam ser adequadamente manipulados para formular o problema de autovalor. Nelas se destacam os valores nodais de  $\bar{u}$  e  $\bar{q}$  prescritos:

$$\begin{pmatrix} H_{u\bar{u}} & H_{u\bar{q}} \\ H_{q\bar{u}} & H_{q\bar{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_{u\bar{u}} & G_{u\bar{q}} \\ G_{q\bar{u}} & G_{q\bar{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \bar{q} \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} M_{u\bar{u}} & M_{u\bar{q}} \\ M_{q\bar{u}} & M_{q\bar{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ u \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Considerando que os valores nodais prescritos de  $\bar{u}(X)$  e  $\bar{q}(X)$  para este tipo de problema são nulos:

$$H_{u\bar{q}}u - G_{u\bar{u}}q = \omega^2 M_{u\bar{q}}u \quad (3.31)$$

$$H_{q\bar{u}}u - G_{q\bar{u}}q = \omega^2 M_{q\bar{u}}u \quad (3.32)$$

Eliminando-se a derivada do potencial  $q$  das Equações (3.31) e (3.32), encontra-se:

$$[\bar{H}]\{u\} = \omega^2 [\bar{M}]\{u\} \quad (3.33)$$

Onde:

$$\begin{aligned} [\bar{H}] &= [H_{qq}] - [G_{qu}][G_{uu}]^{-1}[H_{uq}] \\ [\bar{M}] &= [M_{qq}] - [G_{qu}][G_{uu}]^{-1}[M_{uq}] \end{aligned} \quad (3.34)$$

Cabe ressaltar que as matrizes não são simétricas e a matriz de inércia é construída com funções de base radial. Assim, uma sub-rotina em linguagem FORTRAN baseada na redução de Hessenberg foi usada para determinação dos autovalores (WILKINSON; 1965). Estes autovalores, contudo, podem ser negativos e complexos. Em trabalhos anteriores com a Dupla Reciprocidade (LOEFFLER; 1988) percebeu-se que a presença de autovalores não reais surgia nas posições mais elevadas do espectro de frequências, indicando a imprecisão do modelo numérico. Sabe-se que qualquer método numérico é incapaz de representar com exatidão os modos mais altos do espectro vibracional (BATHE; 1982); contudo, quando as matrizes são simétricas tais valores imprecisos são reais. Com o MEC as matrizes características não possuem simetria e os valores não reais são possíveis e retratam a imprecisão do modelo numérico no cálculo das frequências mais altas. Não se consegue eliminá-los completamente; o refinamento da discretização do MEC melhora a representação das frequências a eles associadas, mas novas frequências, mais elevadas, podem ser calculadas com valores negativos ou complexos.

### 3.6 Tipos de Funções de Base Radial

A técnica do MECID foi desenvolvida utilizando aproximações dadas pelas funções de base radial, que por sua vez foi aplicada inicialmente na MECDR, com o intuito de se contrapor à formulação clássica existente, a qual demandava uma aritmética complexa. Ao mesmo tempo, buscou-se gerar uma ferramenta de precisão aceitável, flexível e de fácil entendimento. De certo modo, a MECDR ofereceu a versatilidade desejada, mas seus resultados em dinâmica nunca foram animadores.

Com relação à robustez da aproximação por funções de base radial, alguns comentários são cabíveis, a começar por uma breve digressão histórica.

O uso de funções escalares que dependem da distância entre um ponto base arbitrário e outro ponto pertencente ao campo do domínio, como as Funções de



Base Radial (FBR), surgiu como uma ferramenta auxiliar poderosa no contexto das técnicas de solução numérica (BUHMANN, 2003; SCHABACK, 2007). Devido à sua eficácia, as FBR foram aplicadas também para a solução de equações diferenciais parciais. A demanda nesse campo exigiu que muitas classes de funções de base radial fossem geradas, testadas e aplicadas amplamente em formulações sem malha, que são abordagens alternativas para superar as dificuldades relacionadas ao Método dos Elementos Finitos (MEF) padrão para grandes problemas, os quais requerem rearranjo do processo de incidência nodal (ATLURI; ZHU, 2000).

Uma das maneiras mais eficazes de gerar os pontos de discretização e correlacionar as áreas de influência é através do uso de uma classe especial de funções radiais para aproximações locais; a função de base radial de suporte compacto (FBRSC) (WENDLAND, 1995; WU, 1995; FLOATER; ISKE, 1996). Como o intervalo de cada função associada a um ponto base é restrito, esse tipo de função é desejável para reduzir os cálculos necessários e resolver sistemas de equações no MEF, transformando uma matriz totalmente esparsa em uma matriz em faixas. Esse método também reduz o risco de condicionamento inadequado do problema, criando matrizes de interpolação dominantes na diagonal.

As principais FBRSC são geradas de acordo com regras matemáticas rigorosas, buscando-se algumas qualidades como positividade, simetria radial e a tendência de gerar matrizes esparsas nas quais a diagonal é dominante (FLOATER; ISKE, 1996).

Em relação ao Método dos Elementos de Contorno, desde que a ideia da Formulação de Dupla Reciprocidade (MECDR) foi apresentada (NARDINI; BREBBIA, 1983), FBR com suporte compacto são usados para interpolar a variável dependente ou outra função conhecida que aparece multiplicando uma solução fundamental a compor o núcleo de integração de domínios. Através da escolha adequada das funções primitivas das FBR, descritas por operadores auto-adjuntos, uma integral de limite aproximada é obtida usando o Teorema da Divergência. Conseqüentemente, uma maior variedade de aplicações pode ser resolvida pelo MEC, uma vez que uma solução fundamental mais simples pode ser assumida (PARTRIDGE et al., 1992) e as integrações de domínio são evitadas.

No MECID, o modelo matemático é mais semelhante a um procedimento de interpolação, uma vez que o núcleo completo da integral do domínio é aproximado. O MECID foi aplicado com sucesso em problemas escalares envolvendo a solução

da equação de Poisson (LOEFFLER et al., 2015b) e da equação de Helmholtz (LOEFFLER et al., 2015a), ambas usando as FBR clássicas. No entanto, ele ainda está sendo testado por meio de novas aplicações, como os problemas de difusão-advectação e os problemas de propagação de ondas.

Possuindo uma estrutura matemática mais simples, o MECID é uma técnica que tem se mostrado mais versátil e robusta que o MECDR ((LOEFFLER et al., 2016). Diferentemente do MECDR, um número maior de tipos de funções básicas radiais clássicas pode ser usado com menor chance de apresentar imprecisões numéricas ou instabilidades, uma vez que a transformação para eliminar o domínio integral é composta por uma única matriz.

As FBR com suporte pleno podem ser usadas para as formulações MECID e MECDR. No entanto, assumindo um valor de suporte compacto, a implementação das FBRSC no MECDR não é eficaz e promissora, pois ocorrem problemas de instabilidade que exigem a implementação de algumas técnicas auxiliares (CHEN et al., 1999). No que diz respeito ao MECID, testes usando valores de suporte compacto foram realizados para os problemas de Poisson, mas os resultados também não foram animadores (LOEFFLER et al., 2017c). O principal problema é a perda significativa de precisão produzida pela redução do suporte antes de atingir o valor ideal, que existe, mas é dependente de muitos fatores.

Dentre as funções que foram trabalhadas inicialmente, estão tanto as funções de base radial clássicas com suporte pleno (FBR) quanto as funções de base radial de suporte compacto (FBRSC), embora usando o suporte pleno. Sendo assim, algumas dessas funções serão testadas, para a equação de Helmholtz nos problemas tridimensionais, como funções de interpolação no MECID com regularização.

### 3.6.1 Funções de Base Radial Clássicas

A mais antiga e bem conhecida função clássica é a radial simples  $F^j=r$ . No entanto, também foram testadas outras funções clássicas, conforme exposto na Tabela 2, onde tem-se as cinco funções clássicas de base radial e suas respectivas primitivas.

Tabela 2: Funções de base radial clássica.

	<b>Funções de Base Radial</b>	<b>Primitivas</b>
r	$F^j = r$	$\Psi_{,i}^j = \left(\frac{r^2}{4}\right)r_{,i}$
$r^3$	$F^j = r^3$	$\Psi_{,i}^j = \left(\frac{r^4}{6}\right)r_{,i}$
$r^2 \ln r$	$F^j = r^2 \ln r$	$\Psi_{,i}^j = \left(\frac{r^3}{25}(5 \ln r - 1)\right)r_{,i}$
$1+r$	$F^j = 1+r$	$\Psi_{,i}^j = \left(\frac{r}{3} + \frac{r^2}{4}\right)r_{,i}$
$1+r^3$	$F^j = 1+r^3$	$\Psi_{,i}^j = \left(\frac{r}{3} + \frac{r^4}{6}\right)r_{,i}$

### 3.6.2 Funções de Base Radial com Suporte Compacto

As FBRSC foram introduzidas por Wu (1995) e expandidas por Wendland (1995). Elas são utilizadas para aumentar a eficiência computacional, fazendo com que as matrizes possuam vários elementos nulos. Assim, reduz-se o risco de mau condicionamento do problema e facilita-se a solução do sistema linear (BERTOLANI, 2010).

A FBRSC também é definida a partir da distância euclidiana entre um ponto base e um ponto de campo. Sua principal distinção com relação às funções radiais clássicas é que os seus valores não nulos ocorrem apenas para valores de  $r$  menores do que uma distância denominada suporte ( $\delta$ ). Neste trabalho, uma vez que se deseja usar o suporte pleno, o valor adotado de  $\delta$  nas FBRSC é um valor maior que a distância entre os dois pontos mais extremos (SOUZA, 2013).

Devido aos resultados apresentados para os problemas bidimensionais (LOEFFLER et al., 2018b), as quatro funções de Wendland de Suporte Compacto utilizadas neste trabalho e suas primitivas são mostradas na Tabela 3.

Tabela 3: Funções de Wendland de suporte compacto.

	<b>Funções de Base Radial</b>	<b>Primitivas</b>
wl 1	$\Phi_{1,0} = \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+$	$\Psi_{,i}^j = \left[\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4\delta}\right] r_{,i}$
wl 2	$\Phi_{2,0} = \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^2$	$\Psi_{,i}^j = \left[\frac{r}{3} - \frac{r^2}{2\delta} + \frac{r^3}{5\delta^2}\right] r_{,i}$
wl 3	$\Phi_{3,0} = \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^3$	$\Psi_{,i}^j = \left[\frac{r}{3} - \frac{3r^2}{4\delta} + \frac{3r^3}{5\delta^2} - \frac{r^4}{6\delta^3}\right] r_{,i}$
wl 4	$\Phi_{3,1} = \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[1 + \frac{4r}{\delta}\right]$	$\Psi_{,i}^j = \left[\frac{r}{3} - \frac{2r^3}{\delta^2} + \frac{10r^4}{3\delta^3} - \frac{15r^5}{7\delta^4} + \frac{r^6}{2\delta^5}\right] r_{,i}$

As duas funções de Wu de Suporte Compacto utilizadas neste trabalho e suas primitivas são mostradas na Tabela 4. Tais funções foram escolhidas devido aos seus resultados na interpolação de superfícies bidimensionais (LOEFFLER et al., 2017c) e outros testes em problemas de potencial escalar (LOEFFLER et al., 2018b).

Tabela 4: Funções de Wu de suporte compacto.

	<b>Funções de Base Radial</b>	<b>Primitivas</b>
wu	$\Phi_{3,3} = \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16 + \frac{29r}{\delta} + \frac{20r^2}{\delta^2} + \frac{5r^3}{\delta^3}\right]$	$\Psi_{,i}^j = \left(\frac{16r}{3} - \frac{35r^2}{4\delta} + \frac{35r^4}{6\delta^3} - \frac{21r^6}{8\delta^5} + \frac{r^8}{2\delta^7}\right) r_{,i}$
wuc	$\Phi_{2,3} = \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^5 \left[8 + \frac{40r}{\delta} + \frac{48r^2}{\delta^2} + \frac{25r^3}{\delta^3} + \frac{5r^4}{\delta^4}\right]$	$\Psi_{,i}^j = \left(\frac{8r}{3} - \frac{72r^3}{5\delta^2} + \frac{35r^4}{2\delta^3} - \frac{63r^6}{8\delta^5} + \frac{27r^8}{10\delta^7} - \frac{5r^{10}}{12\delta^9}\right) r_{,i}$

Dessa forma, as onze funções de base radial citadas foram agora testadas na simulação de problemas tridimensionais homogêneos governados pela Equação de Helmholtz. As funções primitivas correlatas em três dimensões são desenvolvidas no Apêndice B. Os próximos dois itens são exemplos para verificação da melhor função radial e validação do código para o problema tridimensional dado pela Equação de Helmholtz.

### 3.7 Geração de malha tridimensional

As malhas tridimensionais para o MEC são geradas com o auxílio do gerador de malha Gmsh version 2.16.0-svn. O Gmsh é um gerador de malha de elementos finitos, que se baseia na definição de pontos através de suas coordenadas; com a definição de linhas a partir dos pontos, definem-se também as superfícies a partir das linhas, as quais, por sua vez, definem o volume a partir das superfícies. Entretanto, neste trabalho, o Método de Elementos de Contorno vale-se de nós múltiplos nas arestas da geometria, conforme mostrado no Apêndice G. Dessa forma, para gerar as malhas tridimensionais do MEC, utiliza-se o Gmsh para traçar cada superfície da geometria e ter os nós múltiplos em todas as arestas do sólido. O fator de deslocamento do nó referente ao ponto fonte, para evitar singularidade na matriz de interpolação, foi de 5%, conforme mostrado no Apêndice H.

### 3.8 Exemplo 1 – Vibração livre em um cubo

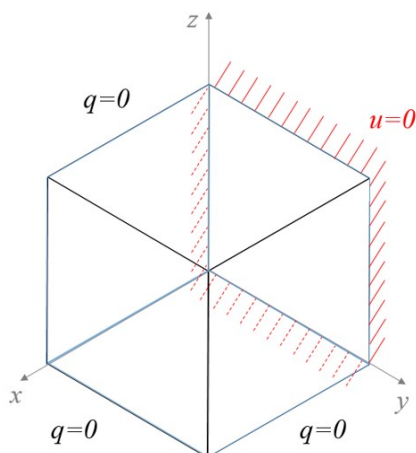
No primeiro problema teste foi escolhido um cubo homogêneo para ilustrar a validação do modelo matemático e seu bom desempenho numérico, assim como verificar qual a melhor função radial para os problemas tridimensionais dados pela Equação de Helmholtz.

O exemplo consiste em um cubo homogêneo engastado no plano  $y-z$  em  $x=0$  e com a aplicação de condições naturais nulas nas outras faces (Figura 11). Para discretização, foram empregadas três malhas com elementos triangulares que possuem diferentes refinamentos no contorno, conforme mostrado na Tabela 5:

Tabela 5: Quantidade de pontos nodais e elementos em cada malha do exemplo tridimensional homogêneo da Eq. de Helmholtz.

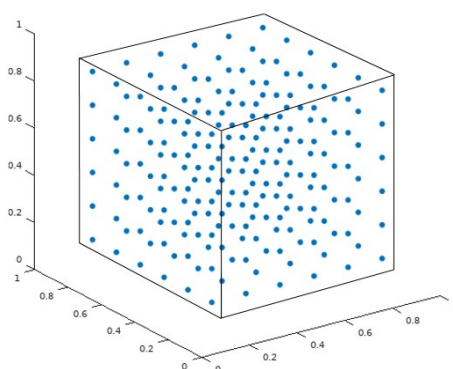
<b>Malhas</b>	<b>Elementos</b>	<b>Pontos no Contorno</b>	<b>Pontos base internos</b>
Malha 1	432	294	728
Malha 2	768	486	728
Malha 3	2352	1350	728

Figura 11: Geometria e condições de contorno para o exemplo tridimensional do cubo homogêneo da Eq. de Helmholtz.



Para dar uma idéia do arranjo interno dos pontos base de interpolação, a Figura 12 apresenta uma disposição esparsa, isto é, considerando-se apenas 216 pontos esparsos por conveniência.

Figura 12: Disposição interna de 216 pontos base de interpolação.



Nas Figuras 13, 14 e 15, observam-se as 80 primeiras frequências naturais obtidas, testando-se todas as funções de base radiais mostradas nas Tabelas 2, 3 e 4. Cada figura é referente a uma malha, conforme a Tabela 5, e com 728 pontos base situados internamente.

Nestas primeiras simulações, procura-se apenas identificar a similaridade de comportamento das frequências, obtidas com diferentes funções de interpolação na construção da matriz de inércia.

Figura 13: Resultados das frequências naturais para vibração livre em um cubo utilizando todas as funções de base radial da malha 1.

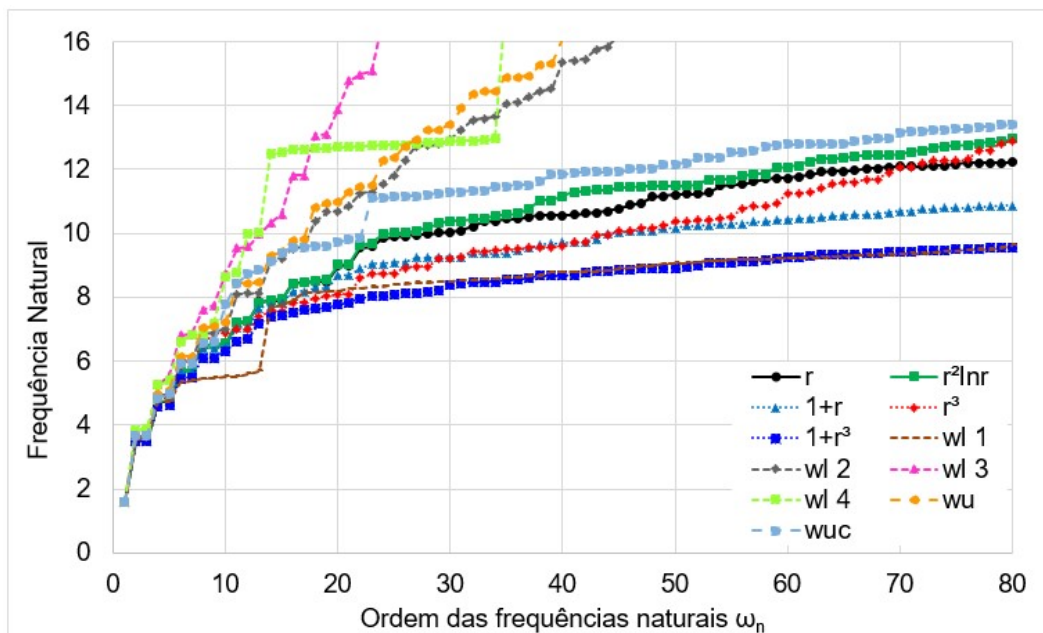


Figura 14: Resultados das frequências naturais para vibração livre em um cubo utilizando todas as funções de base radial da malha 2.

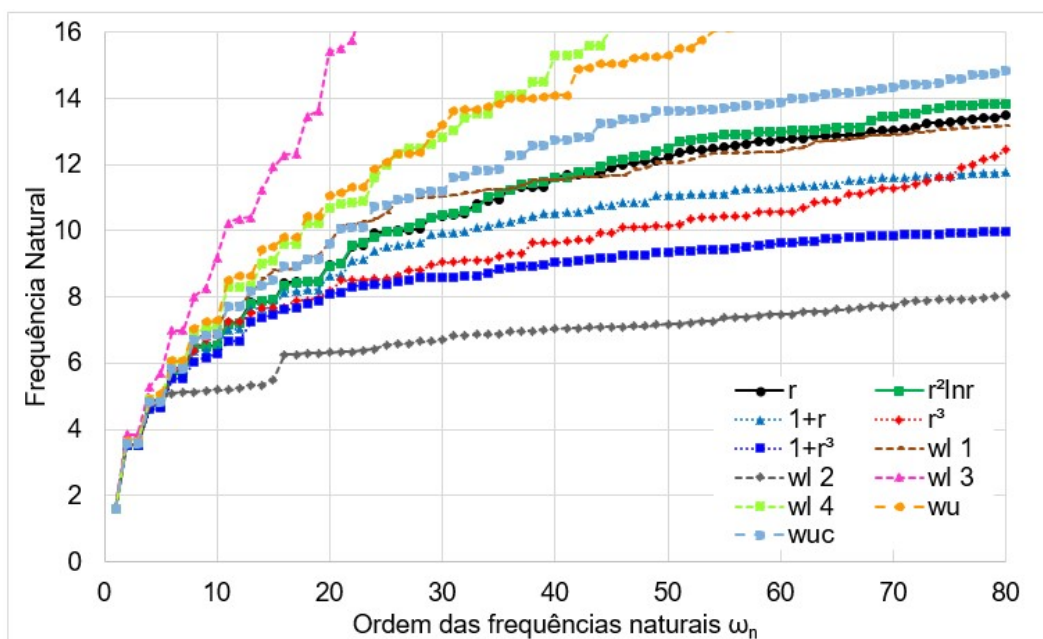
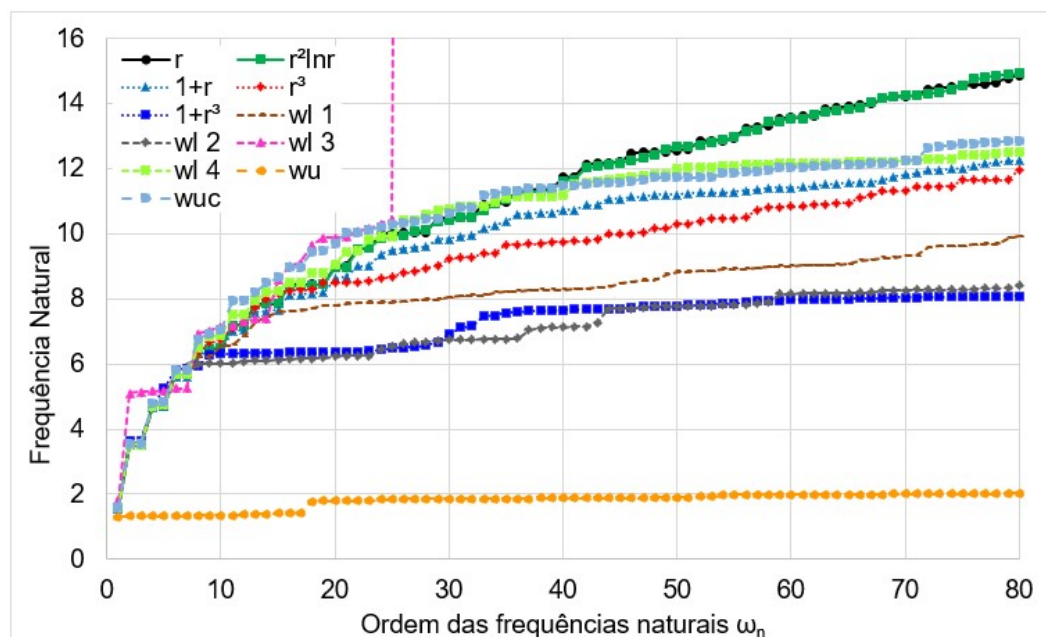


Figura 15: Resultados das frequências naturais para vibração livre em um cubo utilizando todas as funções de base radial da malha 3.



Percebe-se que muitas delas apresentaram um desempenho muito ruim. Particularmente, as funções de Wendland e Wu não funcionaram bem. Tal conclusão se baseia no fato de que as frequências naturais sempre crescem; podendo ocorrer repetição nos seus valores, mas os seguintes são sempre maiores, situando-se numa escala crescente. Pode-se observar claramente que muitas funções retornam resultados praticamente constantes, em desacordo com a expectativa física.

Inicialmente, pensou-se que a possível razão desse comportamento insatisfatório estivesse no uso das primitivas dessas funções. Todavia, testes recentes em duas dimensões, com o procedimento do Método de Integração Radial Direta (MIRD) (GAO, 2002) associado ao MECID, apresentaram o mesmo resultado, conforme mostram os Apêndice E e F.

Também com base nas figuras apresentadas, percebe-se que a função radial simples e a função radial de placa fina, das mais tradicionais FBR clássicas, tiveram um comportamento bastante próximo.

No teste seguinte, varia-se a quantidade de pontos interpolantes no interior do domínio, mantendo-se a quantidade de pontos nodais no contorno. Apenas a função radial de placa fina é testada.



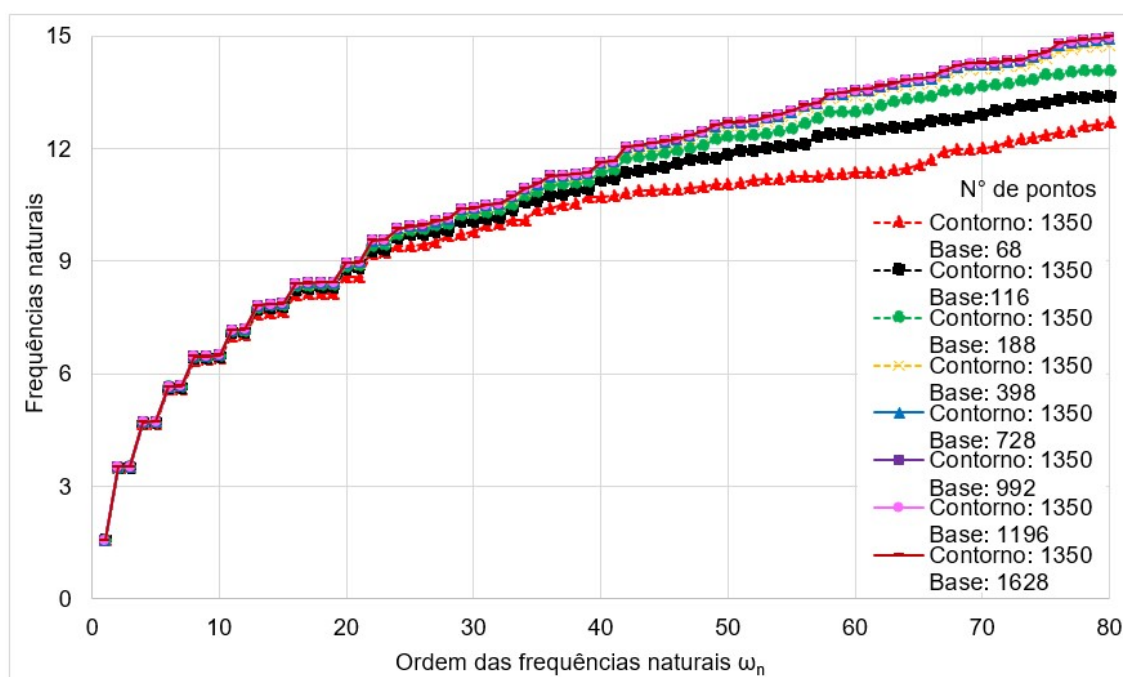
Na Figura 16, pode-se observar as frequências naturais para a malha 3, com variação do número de pontos base, conforme mostra a Tabela 6.

Tabela 6: Quantidade de pontos da malha 3 com variação do número de pontos base interno do exemplo tridimensional homogêneo da Eq. de Helmholtz.

Malhas	Elementos	Pontos no Contorno	Pontos base internos	Total de Pontos
Malha 3 (i)	2352	1350	68	1418
Malha 3 (ii)	2352	1350	116	1466
Malha 3 (iii)	2352	1350	188	1538
Malha 3 (iv)	2352	1350	398	1758
Malha 3 (v)	2352	1350	728	2078
Malha 3 (vi)	2352	1350	992	2342
Malha 3 (vii)	2352	1350	1196	2546
Malha 3 (viii)	2352	1350	1628	2978

Na Figura 16, fica claro que apenas os valores das frequências mais altas se mostraram mais sensíveis à quantidade de pontos interpolantes. A partir de 728 pontos base, no espectro de oitenta frequências analisado, a demanda de pontos internos interpolantes praticamente se estabiliza, de modo que, nos próximos testes, utiliza-se este número de pontos base com variação do número de pontos no contorno, conforme Tabela 5.

Figura 16: Frequências naturais da malha 3 com variação do número de pontos base para o exemplo de um cubo homogêneo utilizando função radial de placa fina para problemas da Eq. de Helmholtz.



A partir de agora, calculam-se os erros e, desse modo, os resultados de referência, foram obtidos com o Método dos Elementos Finitos, utilizando-se o software ANSYS 16.0. Considerou-se, portanto, uma malha bastante refinada composta por 21.952 elementos e 95.033 pontos nodais. Foram calculadas as diferenças relativas das quinze primeiras frequências naturais.

O problema governado pela Equação de Helmholtz é um problema de potencial escalar, enquanto a solução de referência obtida pelo ANSYS diz respeito a um problema de elasticidade (não há na versão disponível deste programa uma solução de autovalor para o problema escalar). Dessa forma, o ANSYS gera um número maior de resultados referentes às frequências naturais, como modos de distorção e rotação, não previstos pelo modelo escalar, são capturados no modelo elástico e estão associados a uma dada frequência.

Considerando que as condições geométricas do problema são relativamente simples, poder-se-ia usar uma solução analítica, dada pelo uso do Método de Separação de Variáveis (KREYSZIG, 2009). Contudo, tal solução não capta os importantes modos torcionais, que se apresentam no modelo numérico associados a frequências relativamente baixas. Assim, como nos próximos exemplos desta tese não há soluções analíticas disponíveis, optou-se por trabalhar com os resultados do ANSYS em correlação com uma análise de certas frequências obtidas analiticamente. Ressalta-se que, dada a simetria existente no problema examinado, muitos modos não axiais aparecem aos pares, diferentemente dos modos torcionais e axiais, associados sempre a uma única frequência.

Os resultados para cinco funções de base radial clássica são mostrados nas Figuras 17, 18 e 19 para cada refinamento de malha.

Figura 17: Curva percentual de erro para frequências naturais calculadas usando as funções de base radial clássica para a malha 1.

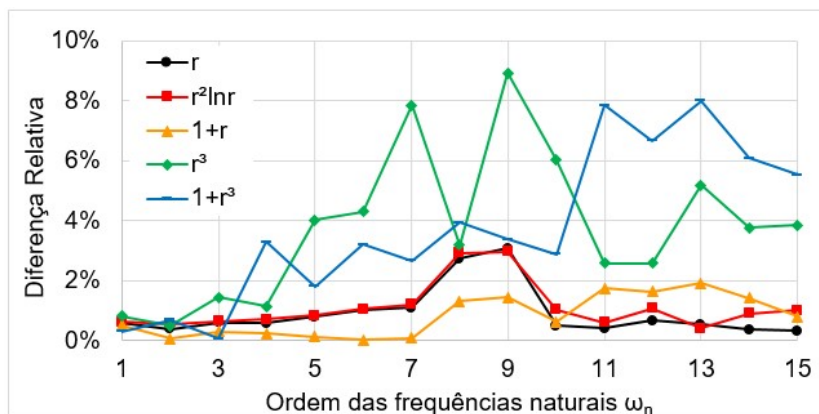


Figura 18: Curva percentual de erro para frequências naturais calculadas usando as funções de base radial clássica para a malha 2.

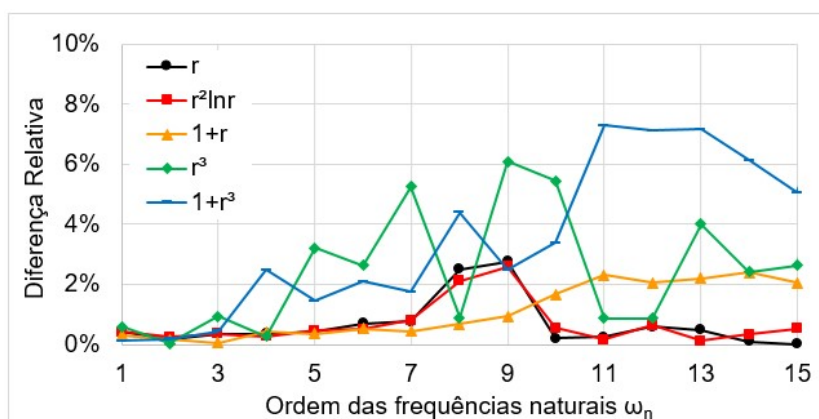
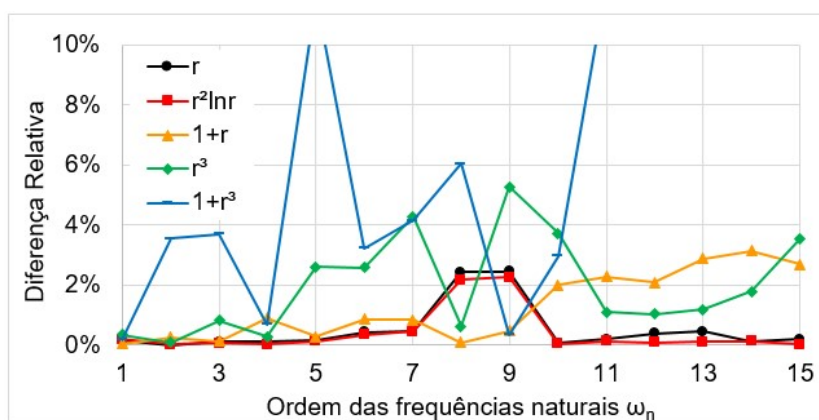


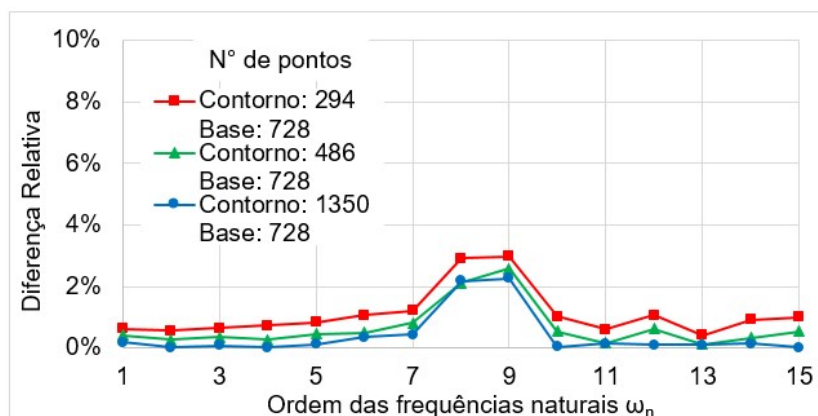
Figura 19: Curva percentual de erro para frequências naturais calculadas usando as funções de base radial clássica para a malha 3.



Na Figura 19, observa-se que o uso da função radial ( $F^j = 1 + r^3$ ) retorna valores de frequência com diferença relativa ao MEF acima de 10%. Também se pode constatar que as funções radiais ( $F^j = r^3$ ) e ( $F^j = 1 + r$ ) têm um desempenho irregular para os três tipos de malhas, sem denotar convergência. Já a função ( $F^j = 1 + r^3$ ) teve o pior desempenho quando se considerou a malha mais refinada (malha 3). As funções com o melhor desempenho foram a função radial simples ( $F^j = r$ ) e a função radial de placa fina ( $F^j = r^2 \ln(r)$ ), sendo esta a com melhor resultado para a malha mais refinada.

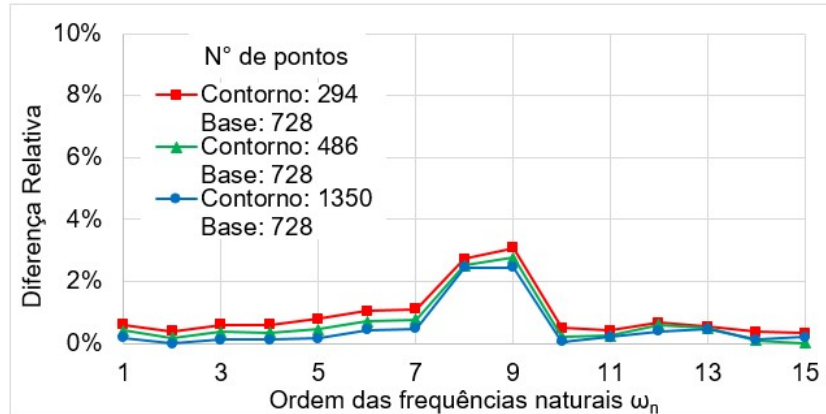
Os resultados apresentados na Figura 20 foram obtidos usando a função de base radial de placa fina ( $F^j = r^2 \ln(r)$ ), em que se pode notar uma melhoria sucessiva nos resultados com o refinamento da malha.

Figura 20: Curva percentual de erro para frequências naturais calculadas usando a função de base radial de placa fina ( $F^j = r^2 \ln(r)$ ), tomando-se como referência a solução MEF.



A função de base radial simples ( $F^j = r$ ) apresenta um desempenho semelhante a função radial de placa fina, tendo uma perda de precisão para as cinco últimas frequências na malha mais refinada, como mostra a Figura 21.

Figura 21: Curva percentual de erro para frequências naturais calculadas usando a função de base radial simples ( $F^j = r$ ), tomando-se como referência a solução MEF.



Na Figura 22 são mostrados resultados para o radial cúbico ( $F^j = r^3$ ), enquanto os resultados referentes à função ( $F^j = 1+r$ ) são apresentados na Figura 23. Com relação a essas funções, os resultados das funções de base radial cúbica tornam-se instáveis para todas as malhas, e a função ( $F^j = 1+r$ ) tem desempenho razoável apenas para o intervalo das primeiras frequências.

Figura 22: Curva percentual de erro para frequências naturais calculadas usando a função de base radial cúbica ( $F^j = r^3$ ), tomando-se como referência a solução MEF.

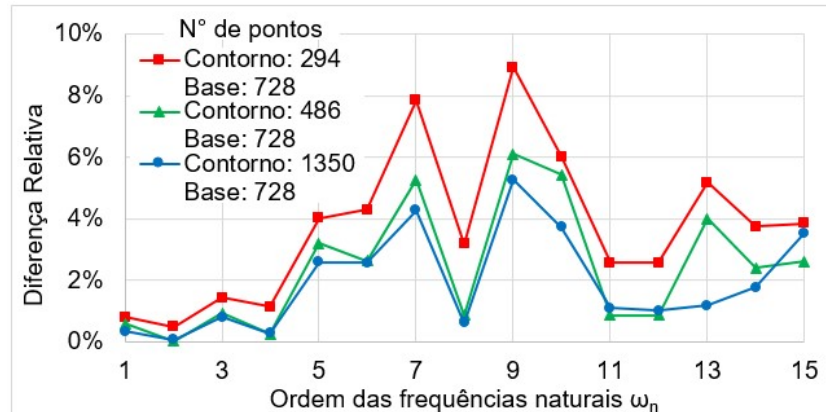
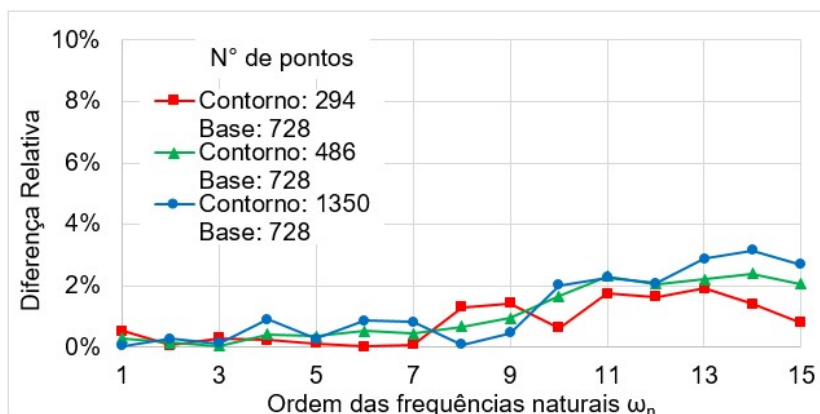
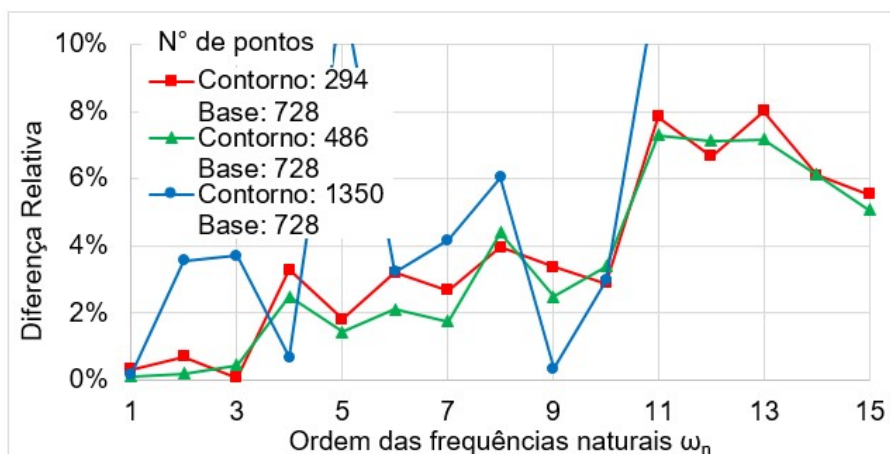


Figura 23: Curva percentual de erro para frequências naturais calculadas usando a função de base radial ( $F^j = 1+r$ ), tomando-se como referência a solução MEF.



Resultados para a função ( $F^j = 1+r^3$ ), que apresentaram um relativo sucesso no modelo tridimensional usado por Bueno e Partridge (2011 e 2013) com a Dupla Reciprocidade, são mostrados na Figura 24. Tal função produziu os piores resultados em geral. Todas essas últimas funções têm desempenho inferior ao das duas funções - radial simples e radial de placa fina - analisadas anteriormente.

Figura 24: Curva percentual de erro para frequências naturais calculadas usando a função de base radial ( $F^j = 1+r^3$ ), tomando-se como referência a solução MEF.

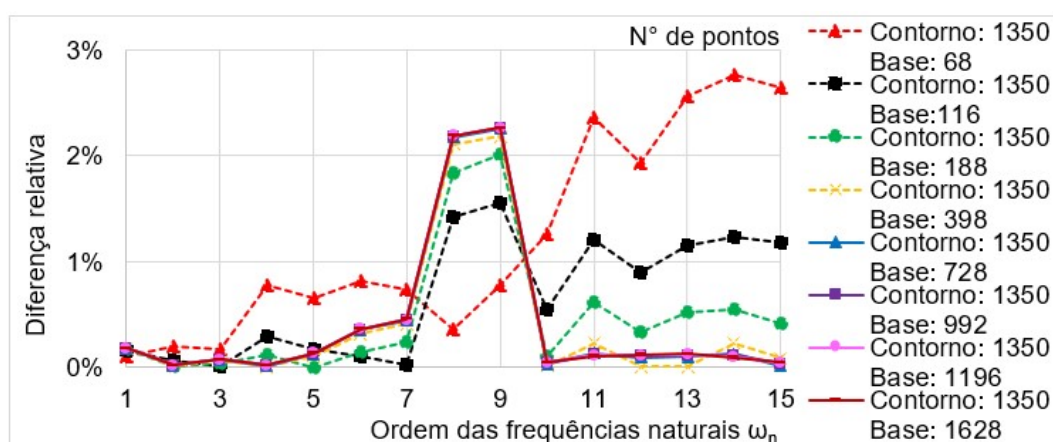


Logo, pelo observado, embora mais robusta (nos testes implementados por Bueno e Partridge, já mencionados, apenas a função ( $F^j = 1+r^3$ ) funcionou razoavelmente), a formulação MECID também é bastante sensível ao tipo de função radial utilizada, ou seja, algumas funções têm desempenho insatisfatório.

Devido ao melhor desempenho nos resultados apresentados, a função radial de placa fina será utilizada para uma análise mais detalhada com relação ao aumento da quantidade de pontos base internos e dos pontos de contorno.

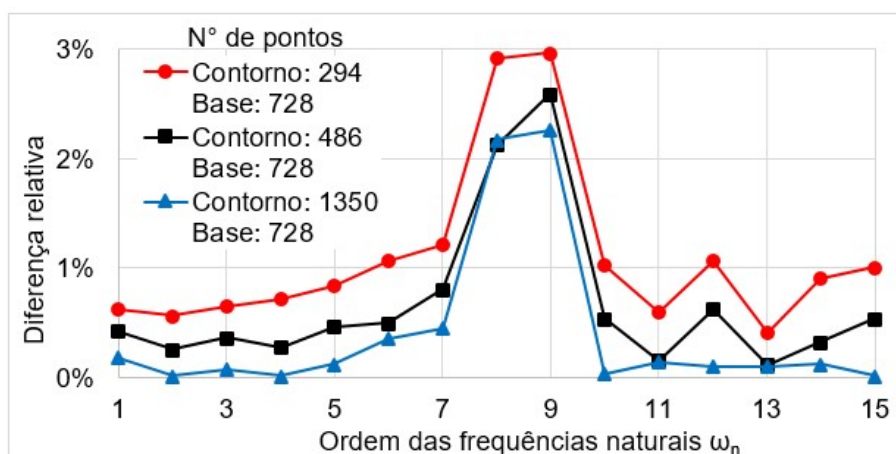
A Figura 25 mostra a diferença relativa das frequências naturais da Figura 16, com base nas malhas da Tabela 6, onde a diferença é menor que 0,5% para as malhas com mais de 728 pontos base no seu interior, exceto nas frequências 8 e 9.

Figura 25: Diferença relativa dos autovalores para malha com diferentes quantidades de pontos base do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Helmholtz usando a função de base radial de placa fina ( $F^j = r^2 \ln(r)$ ).



Na Figura 26, pode-se observar a convergência de resultados devido ao refinamento da malha de pontos interpolantes no contorno, conforme Tabela 5.

Figura 26: Diferença relativa dos autovalores para malha com diferentes quantidades de pontos no contorno do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Helmholtz usando a função de base radial de placa fina ( $F^j = r^2 \ln(r)$ ).





Pode-se observar que o refinamento da malha diminui a magnitude da curva de erro relativo do MECID em praticamente toda a faixa de frequência examinada. Em geral, os resultados aqui alcançados podem ser considerados satisfatórios, exceto para as frequências 8 e 9. No entanto, deve-se destacar que a solução de referência também é fornecida por um método numérico, que está sujeito a imprecisões no cálculo de frequências mais altas.

Na Figura 26, observa-se que, mesmo para a malha mais refinada, as frequências 8 e 9 não tem um bom desempenho como as demais frequências, sua diferença relativa fica próxima a de 2%. Isso pode estar ocorrendo porque os modos associados a esta frequência apresentam configurações nas quais as quinas mostram ângulos retos, ou seja, configurações em que certas partes da seção têm movimento restrito, conforme se pode observar na Figura 27, obtida pela solução de referência (ANSYS).

Figura 27: As frequências naturais 8 e 9 obtidas pelo ANSYS como referência para o problema tridimensional de um cubo homogêneo.



É comum que o modelo numérico não possa representar adequadamente alguns modos de vibração, especialmente os modos superiores. No entanto, usando-se o MECID, a disposição dos pontos de interpolação interna em cada malha altera os resultados e não pode ser apropriada para descrever com precisão determinados modos. Assim, devido a este comportamento do MECID, algumas oscilações na curva de erro são sempre esperadas quando a posição dos pontos de interpolação é alterada.

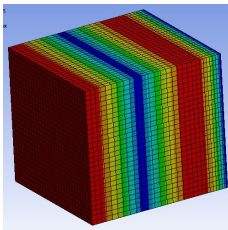
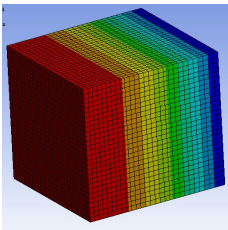
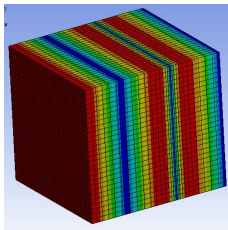
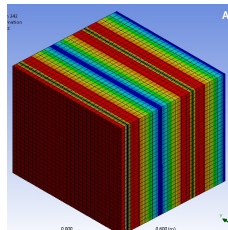
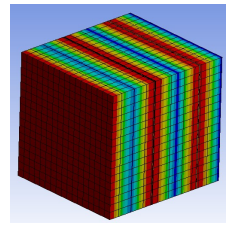
Como mencionado, os problemas acústicos tridimensionais de vibração livre captam frequências associadas aos modos axiais, modos de torção, modos laterais e de distorção. Além disso, a identificação de uma determinada frequência mais alta por inspeção no modo correlacionado é difícil, especialmente no que diz respeito aos



modos não axiais. Ao contrário, os modos axiais são fáceis de identificar por inspeção visual da configuração modal.

Na Figura 28, observam-se as cinco primeiras frequências naturais na direção axial geradas pelo modelo de referência.

Figura 28: Primeiras 5 frequências axiais do ANSYS do exemplo tridimensional do cubo homogêneo para Eq. de Helmholtz.

<b>Freq. 4</b>	<b>Freq. 32</b>	<b>Freq. 103</b>	<b>Freq. 242</b>	<b>Freq. 470</b>
1,570796	4,712389	7,853982	10,995574	14,14157
				

Assim, a qualidade da solução numérica no MECID para frequências axiais pode ser verificada facilmente usando-se valores analíticos, como mostrado na Tabela 7 e na Tabela 8.

Para o problema proposto, podem-se calcular as frequências naturais analiticamente para um problema bidimensional de uma barra quadrada com tamanho unitário engastada em uma de suas laterais, conforme o Exemplo 1 do Apêndice F. Dessa forma, têm-se os resultados analíticos das frequências axiais para o problema do cubo.

Tabela 7: Resultados da malha 3 (v) usando a função de base radial de placa fina ( $F^j = r^2 \ln(r)$ ) e valores analíticos para modos axiais.

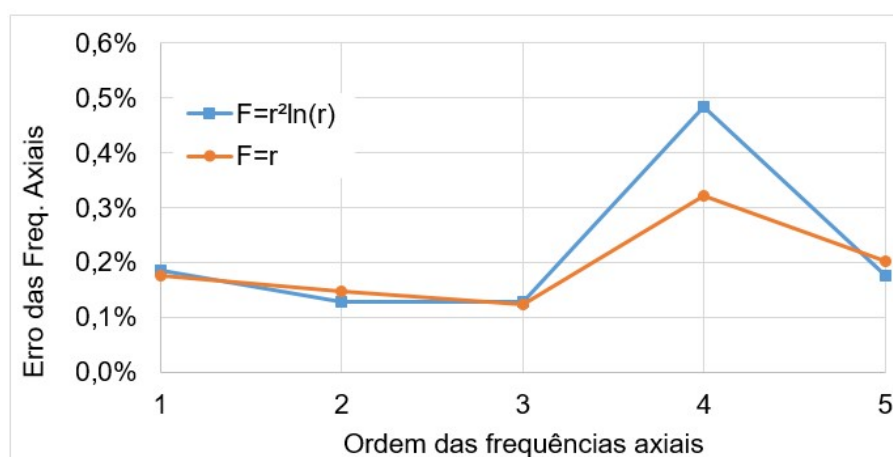
<b>O número da frequência axial</b>	<b>A posição da frequência axial em um intervalo</b>	<b>Resultados do MECID <math>F^j = r^2 \ln(r)</math></b>	<b>Resultados Analíticos</b>	<b>Erro (%) <math>F^j = r^2 \ln(r)</math></b>
1	1	1,57371	1,570796	0,1851%
2	4	4,71849	4,712389	0,1293%
3	14	7,84378	7,853982	0,1301%
4	35	11,04886	10,995574	0,4823%
5	68	14,16200	14,137167	0,1753%

Tabela 8: Resultados da malha 3 (v) usando a função de base radial simples ( $F^j = r$ ) e valores analíticos para modos axiais.

O número da frequência axial	A posição da frequência axial em um intervalo	Resultados do MECID $F^j=r$	Resultados Analíticos	Erro (%) $F^j=r$
1	1	1,57357	1,570796	0,1763%
2	4	4,71935	4,712389	0,1475%
3	14	7,84427	7,853982	0,1238%
4	35	10,96012	10,995574	0,3235%
5	68	14,16574	14,137167	0,2017%

Para melhor visualização, na Figura 29, observa-se o erro das frequências axiais para as funções de base radial simples e de placa fina.

Figura 29: Curva percentual de erro para frequências naturais axiais usando a função de base radial simples e de placa fina, tomando-se como referência a solução MEF.



Como esperado, a precisão da aproximação das frequências axiais é superior àquela apresentada nas curvas de erro (Figuras 20 e 21), uma vez que os modos axiais não são tão fortemente dependentes da disposição interna dos pontos de interpolação.

Os erros não foram tão pequenos quando comparados com os resultados bidimensionais (LOEFFLER et al., 2018b). No caso de um problema tridimensional, os elementos triangulares utilizados pelo MEC são compostos por superfícies. Dessa forma, um cubo requer seis faces para discretizar, pedindo um refinamento maior, ou

seja, uma quantidade bem mais elevada de pontos comparativamente aos casos modelados em duas dimensões.

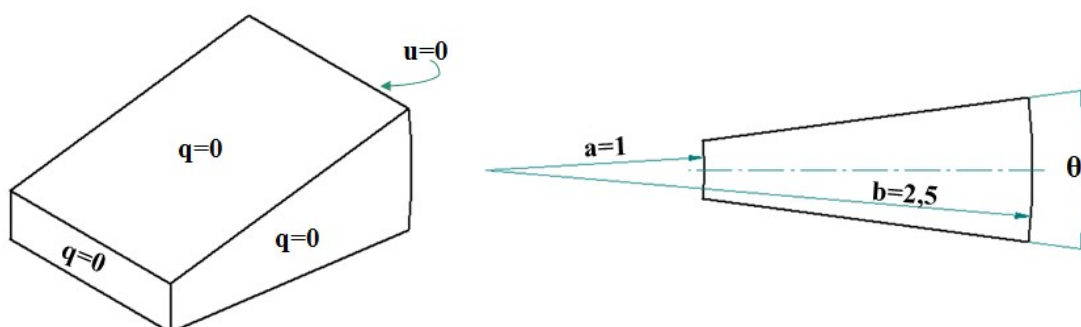
### 3.9 Exemplo 2 – Vibração livre em uma barra em seção variável

Neste exemplo, as frequências axiais naturais em uma barra com espessura variável são calculadas numericamente. A Figura 30 mostra o recurso geométrico desse problema e as condições de contorno aplicadas.

A equação diferencial para este problema, assumindo-se que há uma variação gradual da seção na direção  $x$ , é dada por Graff (1975):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\omega^2}{k^2} u \quad (3.35)$$

Figura 30: Geometria e condições de contorno para o exemplo tridimensional da haste cônica homogêneo da Eq. de Helmholtz.



Pode-se observar que a Equação (3.35) é semelhante ao problema de transferência de calor por condução com simetria circunferencial em um tubo cilíndrico (SNEDDON, 1957), substituindo a direção  $x$  pela direção radial. Condições nulas de derivadas normais devem ser aplicadas em superfícies laterais e internas para garantir a simetria circunferencial. Assim, o problema da barra física pode ser tratado numericamente como se fosse uma fatia curva de um tubo. No entanto, além dos modos de vibração axial relacionados a uma barra, existem também modos de torção, laterais e distorção.

Nesse caso, é muito difícil fazer uma comparação de resultados levando-se em conta somente os valores obtidos por outros métodos numéricos, mesmo se for utilizada uma malha MEF refinada, pois existem frequências com valores muito

próximos entre si. Muitos modos intrincados laterais de distorção e torção estão presentes. Verificou-se que os resultados numéricos do MEF e do MEC podem estar muito próximos, mas relacionados a diferentes modos de vibração, devido aos erros de discretização. No entanto, as frequências axiais podem ser facilmente detectadas por inspeção visual de modos correlacionados.

Assim, aqui são comparados apenas os valores referentes às frequências axiais naturais, pois os valores analíticos podem ser determinados, embora com alguma aproximação. Tais aproximações englobam o comportamento modal do sistema, que na realidade é influenciado por diversos fatores. No caso de ângulos maiores, os valores das frequências naturais axiais são deslocados da faixa mais baixa do espectro devido à presença maciça de modos influenciados pela variação angular (modos de membrana). Se o ângulo é pequeno, o problema consiste na preponderância de frequências laterais de valor mais baixo, pois a estrutura fica esbelta. Este último fator, contudo, foi o menos crítico e as frequências associadas aos modos axiais puderam ser mais bem avaliados. Os valores aqui foram calculados para uma relação escolhida  $b/a = 2,5$ . Diante da relativa complexidade da geometria de uma barra em seção variável em comparação com o cubo, na Figura 31 se observa um detalhamento do procedimento de geração de malha para um melhor entendimento da geração deste exemplo para a malha do MEC, em que, para se chegar os dados de entrada da geometria da Figura 31, geram-se as seis superfícies de contorno mostradas na Figura 32.

Figura 31: Geometria tridimensional homogêneo para geração de malhas.

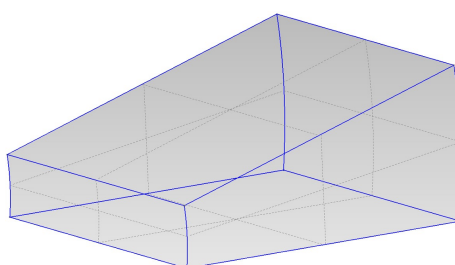
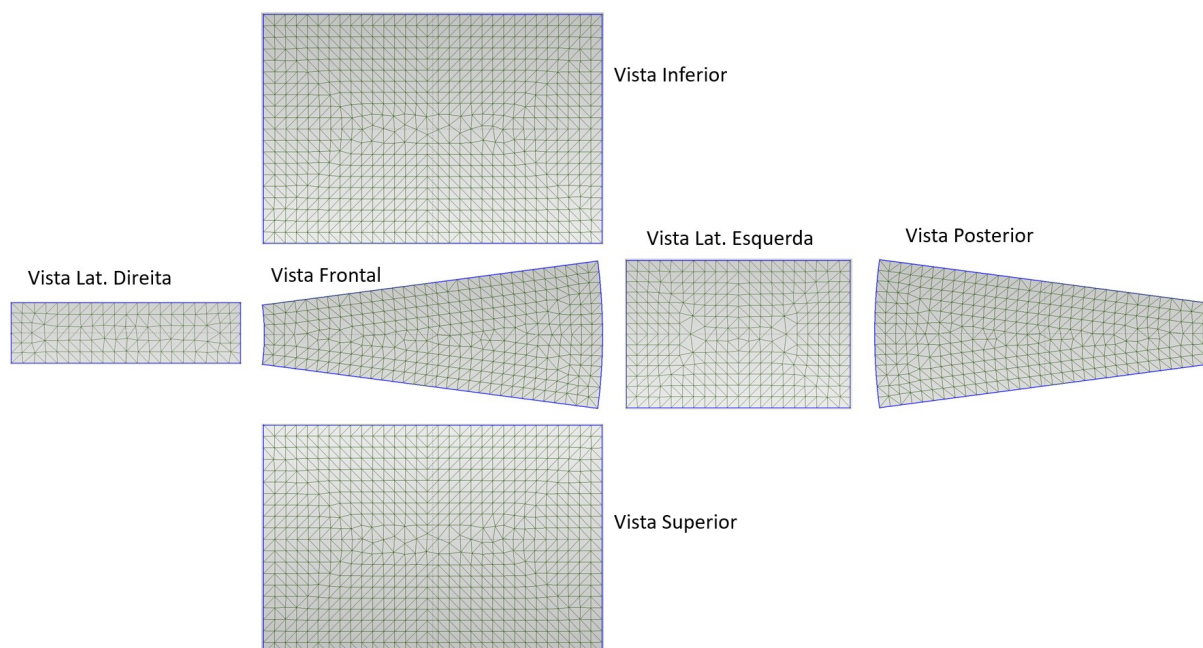


Figura 32: Projeções ortogonais das superfícies geradas pelo Gmsh para um problema tridimensional, da barra de seção variável com  $\theta=15^\circ$ .



Na Tabela 9, consta a quantidade de elementos e pontos que cada malha possui. Foram geradas 3 malhas com um refinamento de pontos para cada ângulo  $\theta$  da geometria proposta.

Tabela 9: Quantidade de pontos nodais e elementos em cada malha do exemplo tridimensional da haste cônica homogêneo da Eq. de Helmholtz.

Malhas	Elementos	Pontos no Contorno	Pontos base internos	Total de Pontos
Malha 1: $\theta = 6^\circ$	1740	1036	621	1657
Malha 2: $\theta = 6^\circ$	2212	1294	1031	2325
Malha 3: $\theta = 6^\circ$	3122	1785	1492	3277
Malha 1: $\theta = 10^\circ$	2013	1180	661	1841
Malha 2: $\theta = 10^\circ$	2576	1484	1067	2551
Malha 3: $\theta = 10^\circ$	3654	2059	1439	3498
Malha 1: $\theta = 15^\circ$	1756	1038	686	1724
Malha 2: $\theta = 15^\circ$	2322	1343	1079	2422
Malha 3: $\theta = 15^\circ$	3112	1766	1453	3219

As figuras a seguir mostram o desempenho de cada função separadamente para cada malha. Os números no gráfico indicam a posição no intervalo de frequências calculado numericamente. Como foi discutido anteriormente, a variação angular interfere diretamente na ordem das frequências que são calculadas, fazendo com

que a posição de uma frequência na faixa examinada varie. No entanto, essa ordem também é alterada devido a uma posição diferente de pontos de interpolação dentro de cada malha relacionada ao ângulo  $\theta$ .

Nas Figuras 33, 34 e 35, pode-se observar que a função de base radial simples ( $F^j = r$ ) tem um bom desempenho, principalmente para a malha mais refinada.

Figura 33: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial simples ( $F^j = r$ ), usando a malha 1 e tendo os valores analíticos como referência.

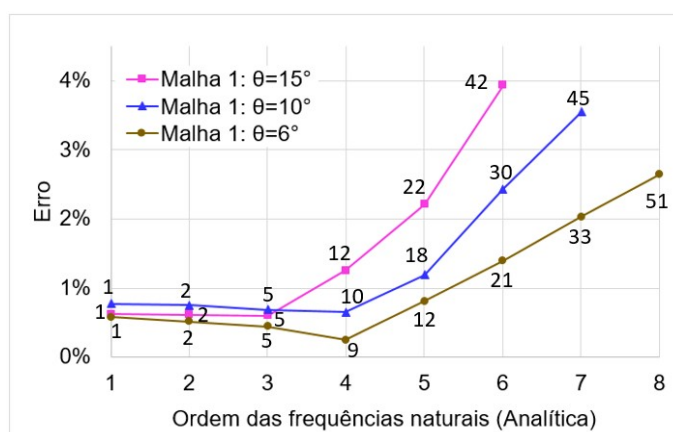


Figura 34: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial simples ( $F^j = r$ ), usando a malha 2 e tendo os valores analíticos como referência.

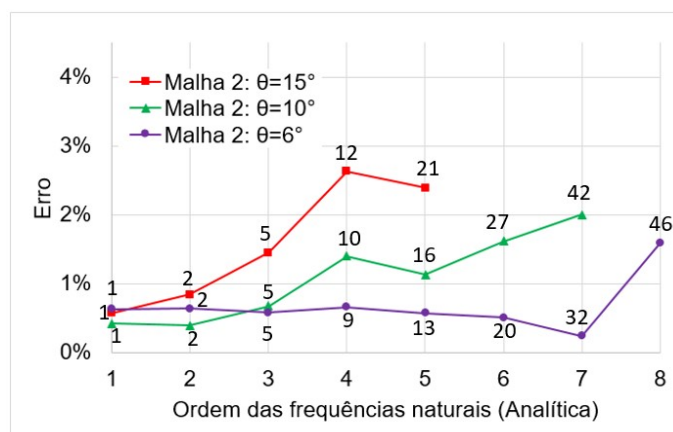
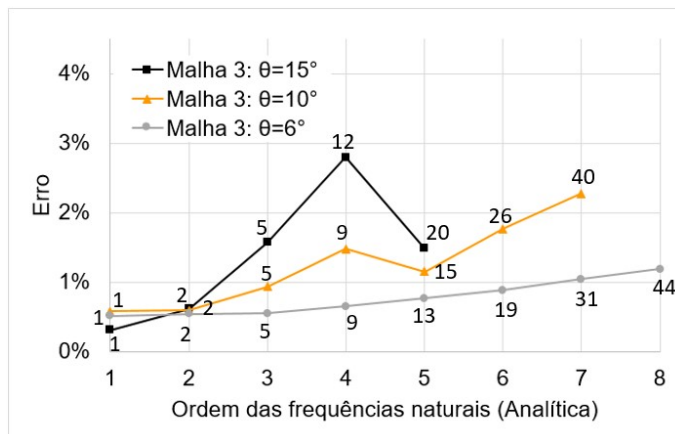


Figura 35: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial simples ( $F^j = r$ ), usando a malha 3 e tendo os valores analíticos como referência.



A função de base radial de placa fina ( $F^j = r^2 \ln(r)$ ) tem um desempenho mais próximo da função radial simples, como mostram as Figuras 36, 37 e 38.

Figura 36: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial de placa fina ( $F^j = r^2 \ln(r)$ ), usando a malha 1 e tendo os valores analíticos como referência.

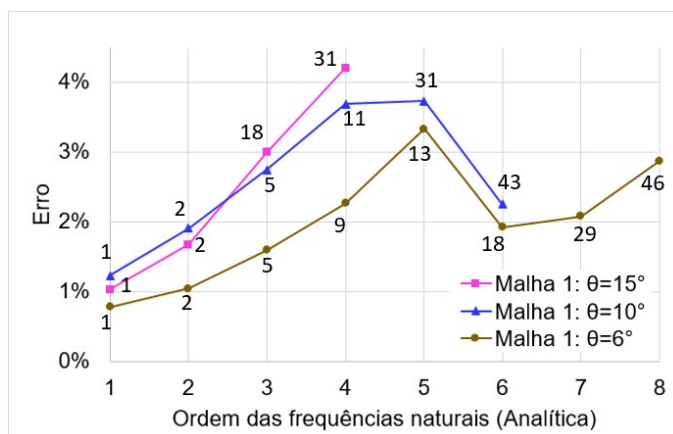




Figura 37: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial de placa fina ( $F^j = r^2 \ln(r)$ ), usando a malha 2 e tendo os valores analíticos como referência.

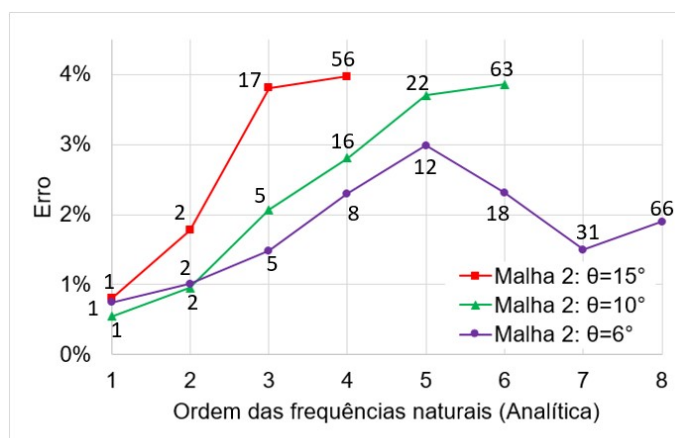
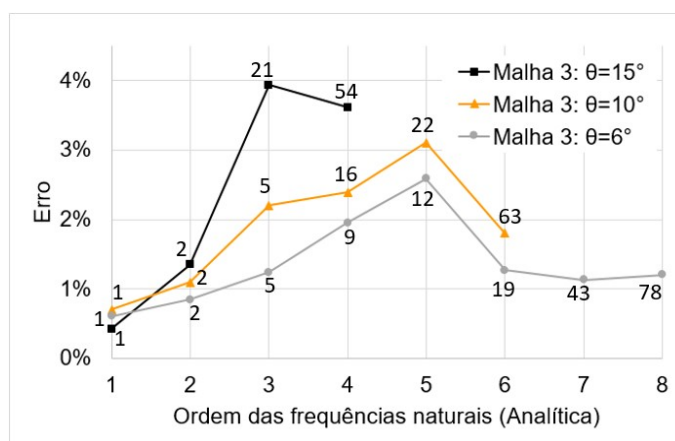


Figura 38: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial de placa fina ( $F^j = r^2 \ln(r)$ ), usando a malha 3 e tendo os valores analíticos como referência.



Nas Figuras 39, 40 e 41, observa-se que a função de base radial cúbica ( $F^j = r^3$ ) não tem um bom desempenho, gerando poucas frequências para o caso proposto, ou seja, as frequências obtidas estão associadas à outros modos de vibração que não aos axiais.



Figura 39: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial cúbica ( $F^j = r^3$ ), usando a malha 1 e tendo os valores analíticos como referência.

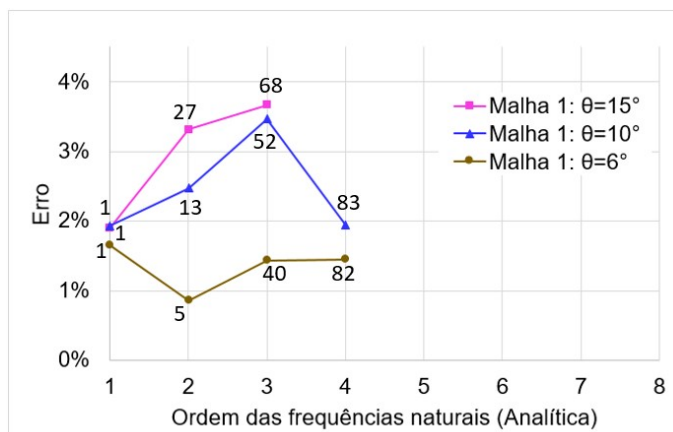


Figura 40: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial cúbica ( $F^j = r^3$ ), usando a malha 2 e tendo os valores analíticos como referência.

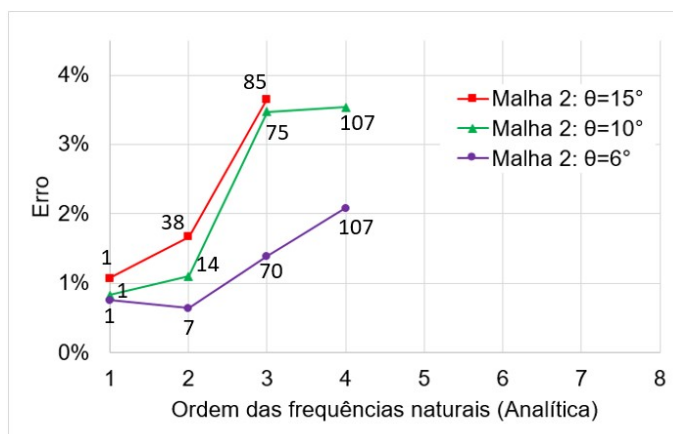
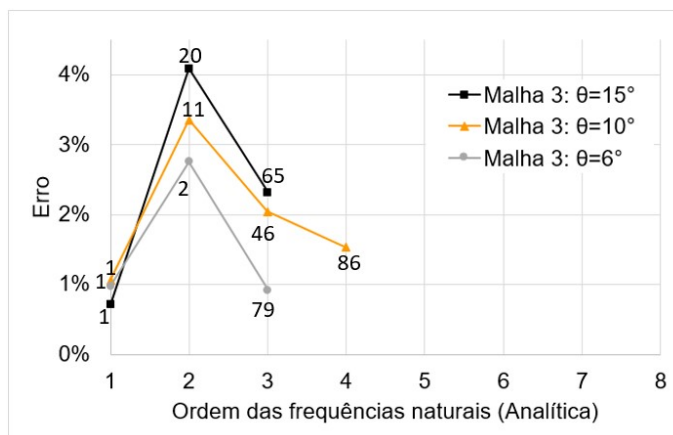


Figura 41: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial cúbica ( $F^j = r^3$ ), usando a malha 3 e tendo os valores analíticos como referência.



Diferente da função radial cúbica, a função de base radial ( $F^j = I+r$ ) tem um desempenho mais próximo da função radial simples e de placa fina, como mostram as Figuras 42, 43 e 44.

Figura 42: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial ( $F^j = I+r$ ), usando a malha 1 e tendo os valores analíticos como referência.

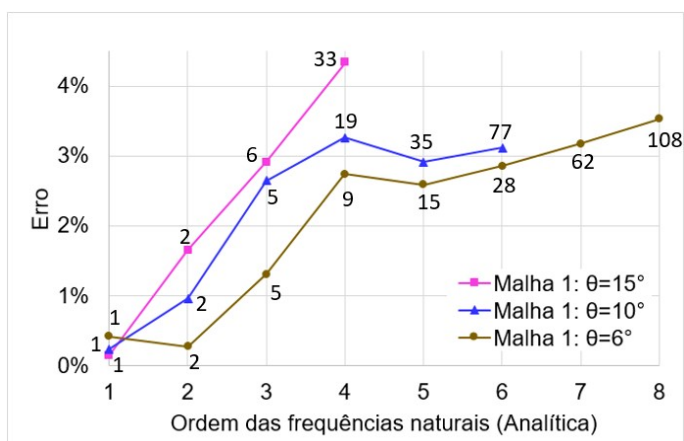


Figura 43: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial ( $F^j = I+r$ ), usando a malha 2 e tendo os valores analíticos como referência.

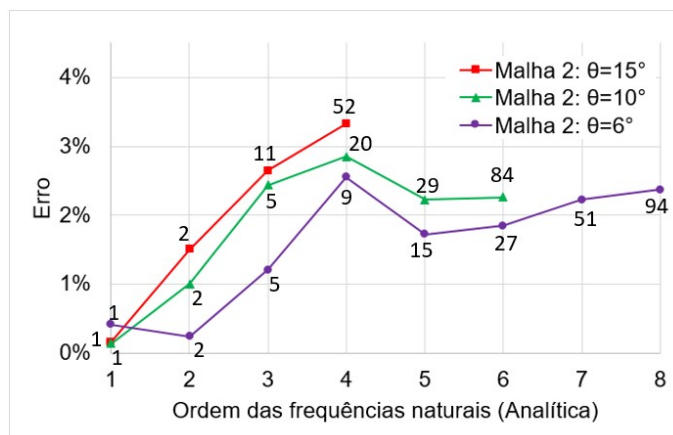
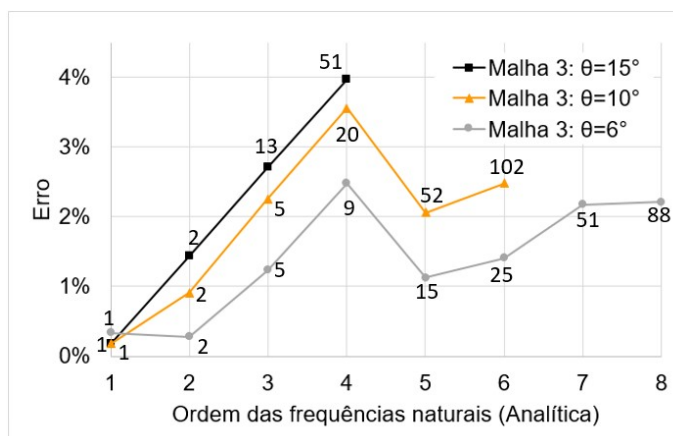


Figura 44: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas por meio da função de base radial ( $F^j = 1+r$ ), usando a malha 3 e tendo os valores analíticos como referência.



Assim como no exemplo anterior, os melhores resultados foram apresentados pelas funções de base radial simples e de placa fina.

De fato, o desempenho do modelo MECID foi comparativamente pior nesse segundo exemplo, uma vez que os valores de erro percentual médio foram maiores. No entanto, a discretização das superfícies laterais curvas implica dois problemas numéricos adicionais: primeiro, os diferentes tamanhos de elementos de contorno que devem ser usados para cada superfície; segundo, há também o erro cometido na representação da geometria curva, uma vez que os elementos de contornos usados são planos.

O comportamento da função de base radial foi melhor apenas para o menor valor do ângulo  $\theta$ . Para valores maiores de ângulo  $\theta$ , o desempenho foi inferior e os autovalores não podem ser calculados para as frequências maiores, provavelmente devido a problemas de condicionamento.

### 3.10 Conclusões Parciais

Embora a geometria dos exemplos resolvidos fosse simples, as simulações tridimensionais não apenas exigem um esforço computacional significativo em comparação com as bidimensionais, mas muitas particularidades numéricas aparecem requerendo estratégias operacionais adequadas, algoritmos computacionais efetivos e consistência no modelo numérico. Tais dificuldades são amplificadas especialmente quando a análise dinâmica é realizada.

Assim como outros modelos similares, o desempenho do MECID depende especialmente da qualidade da aproximação da função da base radial.

Embora mais robusta, a formulação MECID também é sensível ao tipo de função de base radial usada na interpolação. Resolvendo o primeiro exemplo, as simulações demonstram que tanto as funções radiais simples como as de base radial de placa fina foram bem sucedidas. O refinamento das malhas MECID que usam essas duas funções produziu uma diminuição da curva de erro relativo em praticamente toda a faixa de frequência analisada. No entanto, as outras funções radiais ( $F^{j=r^3}$ ) e ( $F^{j=1+r}$ ) executam razoavelmente apenas para a faixa das primeiras frequências, excluindo a função ( $F^{j=1+r^3}$ ), cujos resultados não foram satisfatórios em geral.

Para o segundo exemplo, a precisão do MECID foi pior como um todo, pois esse problema é numericamente mais difícil. Se um ângulo maior  $\theta$  for usado, o comportamento axial em uma barra se tornará menos prevalente e as frequências associadas a outras formas modais ocuparão as posições mais baixas da escala. Outras características devem ser consideradas: o erro cometido na representação da geometria curva, pois os elementos de contorno usados são planos; e os diferentes tamanhos de elementos de contorno usados para cada aresta, considerando-se a geometria específica do problema. Os problemas, devido ao mau condicionamento da matriz, também produzem dificuldades numéricas para o algoritmo usado para a solução de autovalor.

De fato, trabalhos anteriores usando o MECID indicaram que o desempenho de um determinado tipo de função de base radial em problemas bidimensionais pode ser completamente diferente se o domínio for tridimensional (BUENO; PARTRIDGE, 2011, BUENO; PARTRIDGE, 2013 e LI et al., 2010). Os resultados obtidos neste trabalho mostram que o comportamento das funções da base radial no modelo MECID é relativamente semelhante em duas e três dimensões, apesar de ser necessário implementar muitos outros testes com problemas diferentes para uma melhor avaliação de sua robustez.

É sabido que o modelo numérico não pode representar adequadamente os modos de vibração superiores. Usando o MECID, a disposição dos pontos de interpolação interna em cada malha altera os resultados e não pode ser apropriado para descrever com precisão certos modos, de maneira que sempre são esperadas algumas oscilações na curva de diferença relativa quando a posição dos pontos de

interpolação é alterada. A literatura também aponta que geralmente os modos inferiores convergem mais rapidamente, com maior precisão do que os modos superiores. No entanto há exceções, pois cada modo possui uma distribuição diferente da energia associada que é afetada pela discretização. No modelo MECID, a propriedade constitutiva relacionada à inércia é fortemente afetada pela aproximação das funções de base radial, que depende do arranjo interno dos pontos. Portanto, não se pode ter uma expectativa segura sobre a convergência modal na mesma taxa.

No entanto, os resultados obtidos com o MECID para resolver o problema homogêneo de autovalor em três dimensões podem ser considerados satisfatórios. A metodologia é nova e, naturalmente, está sujeita a muitas melhorias futuras, tais como o uso de elementos quadráticos e o Método da Integração Radial Direta.

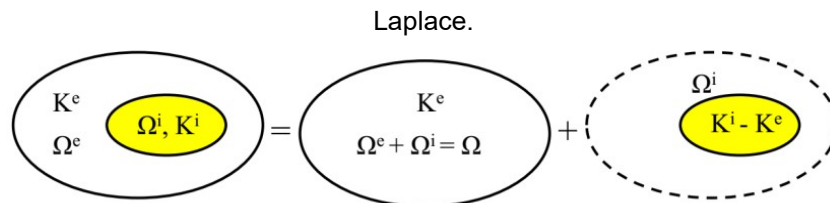
## 4 TÉCNICA DE SUPERPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS PARA PROBLEMAS DE LAPLACE

### 4.1 Técnica de Superposição de Domínios Aplicada a Equação de Laplace

Visando à maior clareza, a Técnica de Superposição de Domínios (TSD) é apresentada inicialmente em casos de homogeneidade setorial estacionários. No desenvolvimento inicial deste trabalho, diversas simulações foram feitas com a TSD, visando a examinar a qualidade dos resultados em casos estacionários, comparando seus resultados com outros métodos numéricos, sobretudo o Método dos Elementos Finitos.

Considere um domínio bidimensional constituído por duas regiões com diferentes propriedades físicas, conforme Figura 45, onde o domínio completo  $\Omega$  é composto pela soma dos domínios  $\Omega^e$  e  $\Omega^i$ , sendo  $K^e$  e  $K^i$  as propriedades físicas constantes, sendo o sobrescrito “e” externo e o sobrescrito “i” interno.

Figura 45: Domínios completos e setoriais bidimensionais com propriedades homogêneas para Eq. de



Admite-se que o núcleo das integrais é composto por funções integráveis e que, dentro de cada subdomínio as propriedades são constantes. Supondo-se que  $K^s$  é a propriedade da superposição logo,  $K^s = K^i - K^e$ , a equação integral do MEC para problemas de Laplace é:

$$\int_{\Omega} K(X) u(X)_{,ii} u^*(\xi; X) d\Omega(X) = K^e \int_{\Omega} u(X)_{,ii} u^*(\xi; X) d\Omega(X) + K^s \int_{\Omega^i} u^i(X)_{,ii} u^*(\xi; X) d\Omega^i(X) = 0 \quad (4.1)$$

Agora, a propriedade  $K^e$  compreende todo o domínio. Reescrevendo a Equação (4.1):

$$K^e \int_{\Omega} u(X)_{,ii} u^*(\xi; X) d\Omega(X) = (K^e - K^i) \int_{\Omega^i} u^i(X)_{,ii} u^*(\xi; X) d\Omega^i(X) \quad (4.2)$$

No MEC, a equação integral está relacionada com o equilíbrio de energia no sistema, no caso, entre a energia difusiva e o trabalho dos fluxos. No método

proposto é necessária apenas a avaliação da quantidade de energia difusiva presente no subdomínio, como é feito na aplicação do trabalho devido a uma fonte ou ação externa.

Ressalta-se que o desenvolvimento apresentado é similar ao que seria feito para um problema homogêneo. Tal abordagem somente é possível porque a heterogeneidade ocorre em setores homogêneos. Em cada setor, o procedimento matemático mostrado pode ser aplicado. Bastante diferente é a abordagem nos casos em que a heterogeneidade ocorre ponto a ponto, como nos casos de materiais funcionais e outros (BARCELOS; LOEFFLER, 2019).

Reescrevendo-se o lado direito da Equação (4.2) na forma integral de contorno e considerando-se os pontos nodais localizados no domínio  $\Omega^i(X)$  por simplicidade:

$$(K^e - K^i) \int_{\Omega^i} u^i(X)_{,ii} u^*(\xi; X) d\Omega^i(X) = (K^e - K^i) \left[ \int_{\Gamma^i} q^i(X) u^*(\xi; X) d\Gamma^i(X) - \int_{\Gamma^i} u^i(X) q^*(\xi; X) d\Gamma^i(X) \right] - c(\xi) u^i(\xi) (K^e - K^i)(\xi) \quad (4.3)$$

O valor de  $c(\xi)$  na Equação (4.3) é dependente da posição do ponto fonte com relação ao contorno e, no caso de localizar-se sobre este, da sua geometria (BREBBIA; WALKER, 1980; KYTHE, 1995).

Fisicamente, a equação integral do MEC para o problema de Laplace está relacionada ao balanço de energia no sistema, considerando-se o equilíbrio entre a energia difusiva e o fluxo de trabalho. Em um caso homogêneo, essas energias são calculadas respectivamente por potenciais e derivadas de potenciais no contorno. Considerando a estratégia do TSD, as homogeneidades setoriais têm uma energia intrínseca que também deve ser computada na energia total do sistema. Assim, a primeira integral de contorno no lado direito da Equação (4.3) representa o trabalho de fluxo  $q^i(X)$ , enquanto os outros termos representam a energia difusiva, a qual é expressa como uma função dos potenciais internos.

O objetivo do método proposto é considerar apenas a avaliação da quantidade de energia difusiva presente nos subdomínios internos, como é feito nos problemas de Poisson que computam o trabalho devido a uma fonte ou ação externa (BREBBIA; DOMÍNGUEZ, 1998). A energia difusiva é muito mais fácil de ser computada, uma vez que é dada em função dos potenciais nos pontos internos  $u^i(X)$ . Assim a equação integral fica:

$$K^e \left[ \int_{\Gamma} u(X) q^*(\xi; X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} q(X) u^*(\xi; X) d\Gamma(X) + c(\xi) u(\xi) \right] = \quad (4.4)$$

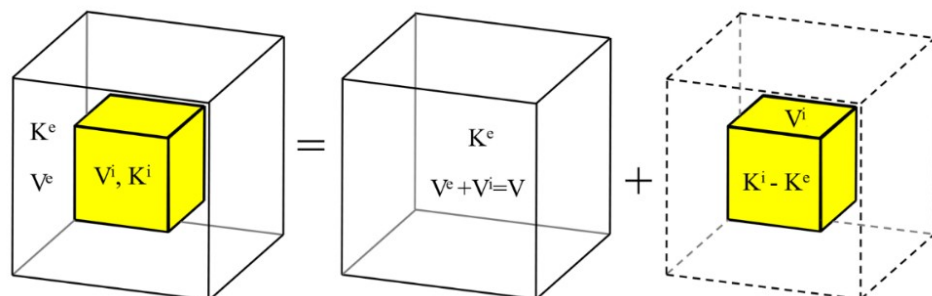
$$(K^i - K^e) \left[ c(\xi) u^i(\xi) + \int_{\Gamma^i} u^i(X) q^*(\xi; X) d\Gamma^i(X) \right]$$

Como mencionado, o lado direito da Equação (4.4) tem o mesmo significado de uma integral de domínio que calcula o trabalho devido a uma fonte aplicada a um setor para os problemas de Poisson. Entretanto, aqui, esta energia é dada diretamente por uma integral de contorno e os potenciais internos nesta região são desconhecidos.

Destaca-se que o trabalho dos fluxos no domínio interno não é zero. Entretanto, é suficiente calcular a energia difusiva total do subdomínio no balanço de energia (LOEFFLER; ANDRADE, 2016). Todo o lado esquerdo da Equação (4.4) é afetado pela energia difusiva completa introduzida. Assim, o sistema responde como um todo, isto é, a derivada normal do potencial é calculada pelo sistema final de equações, que leva em conta o efeito de todos os subdomínios e também do domínio circundante. Havendo a necessidade de se determinar as derivadas dos potenciais nas interfaces, após a solução do sistema onde se determinação os potenciais na interface, pode-se determinar as suas derivadas dos potenciais na interface, visto que a mesma não é nula.

O equacionamento da TSD mostrado até aqui não depende da dimensão do problema. Assim, tomando-se um domínio constituído por duas regiões de um sólido com diferentes propriedades físicas, conforme Figura 46, onde o domínio completo do sólido  $V$  é composto pela soma dos sólidos  $V^e$  e  $V^i$ , sendo  $K^e$  e  $K^i$  as propriedades físicas constantes, os mesmos princípios são aplicados.

Figura 46: Domínios completos e setoriais tridimensionais com propriedades homogêneas para Eq. de Laplace.





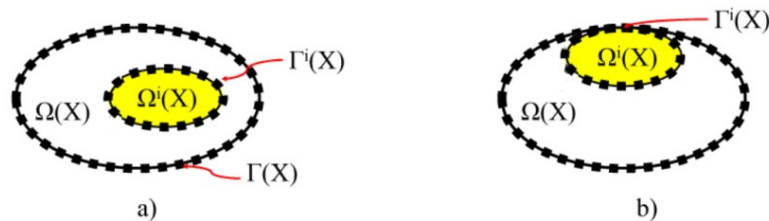
Da mesma forma, considera-se que o núcleo das integrais é composto por funções integráveis e que, dentro de cada subdomínio, as propriedades são constantes como no caso bidimensional, em que  $K^S = K^i - K^e$ . A equação integral também está relacionada com o equilíbrio de energia no sistema, no caso, entre a energia difusiva e o trabalho dos fluxos. Nos problemas tridimensionais também é necessária a avaliação somente da quantidade de energia difusiva presente no subdomínio quando se aplica a TSD, de modo que vigora a mesma equação integral dada pela Equação (4.4).

## 4.2 Discretização e Aspectos Matriciais da TSD no problema de Laplace

Inicialmente, considerando que o  $\Gamma^i(X)$  e  $\Gamma(X)$  não tenham interseção, os pontos fontes  $\zeta$  estão localizados exclusivamente no  $\Gamma(X)$  e as integrações são realizadas em  $\Omega^i(X)$ . Os pontos internos agora devem ser entendidos como nós de contorno da superposição, como mostrado na Figura 47, em que o potencial tem valores desconhecidos  $u^i$ , os quais são destacados no sistema matricial do MEC conforme a equação seguinte:

$$K^e[H]\{u\} + K^s[H^i]\{u^i\} = K^e[G]\{q\} \quad (4.5)$$

Figura 47: Contorno  $\Gamma^i(X)$ : a) Não coincide com o  $\Gamma(X)$ ; b) Coincide com o  $\Gamma(X)$ .



Os potenciais internos devem ser explicitados, de modo que a matriz  $H$  fica:

$$\begin{bmatrix} H_{cc} & H_{ci} \\ H_{ic} & H_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{cc} & 0_{ci} \\ G_{ic} & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_c \\ q_i \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

As coordenadas dos pontos fonte internos  $u_i$  definem os contornos  $\Gamma^i(X)$  e  $u_c$  e  $q_c$  são valores das grandezas nos pontos nodais do contorno  $\Gamma(X)$ . A submatriz  $H_{ci}$  representa coeficientes gerados por integração no contorno interno  $\Gamma^i(X)$  com os pontos fonte situados em  $\Gamma(X)$ .

### 4.3 Aplicação da TSD Bidimensional na Equação de Laplace

Alguns problemas com geometrias irregulares foram escolhidos para apresentar o desempenho da Técnica de Superposição de Domínios do MEC, comparativamente ao MEF.

Para essas comparações, foram utilizados dois critérios de erro ou diferença relativa: a diferença relativa ponderada pelo máximo valor do MEF no problema e a diferença relativa média.

No critério da diferença relativa ponderada, a diferença absoluta entre o valor do MEC e MEF é dividida pelo módulo máximo do valor obtido pelo MEF com relação à variável de interesse encontrada em todo o domínio do problema, ou seja:

$$\text{Diferença Relativa} = \frac{|u_{MEF} - u_{MEC}|}{|u_{\max.MEF}|} \quad (4.7)$$

Na Equação (4.7),  $u_{MEC}$  é o valor da variável de interesse encontrado através do MEC para um determinado ponto,  $u_{MEF}$  é o valor do MEF para o correspondente ponto e  $u_{\max.MEF}$ , o máximo valor do MEF. A diferença relativa média foi, então, a média aritmética da diferença relativa para cada ponto amostral. Tanto no MEC quanto no MEF, os elementos têm interpolação linear.

#### 4.3.1 Exemplo 1

O primeiro exemplo considera uma geometria trapezoidal com a propriedade física  $k_1$ , na qual existe um círculo com propriedade distinta dentro dela. A Figura 48 mostra a geometria e as condições de contorno do problema. Três malhas foram usadas para simulação de cada método, e suas características são mostradas na Tabela 10.

Figura 48: Características geométricas e condições de contorno do exemplo 1 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD.

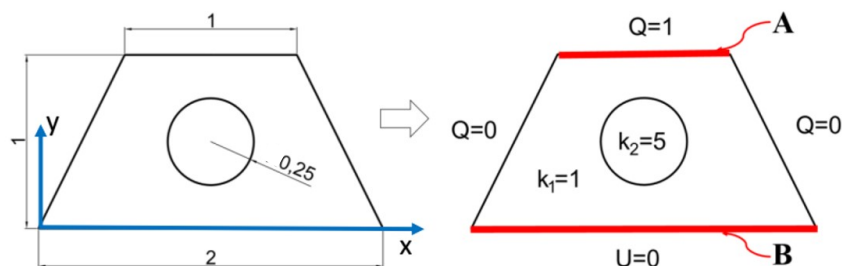


Tabela 10: Quantidade de nós nas malhas do exemplo 1 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD.

	Elementos	Total de pontos	Contorno externo	Contorno interno	Pontos em A	Pontos em B
<b>MEF</b>	9742	5003	262	4741	51	100
	12640	6468	294	6174	57	112
	38594	19560	524	19036	101	200
<b>MEC</b>	70	74	50	24	11	21
	136	140	100	40	21	41
	266	270	200	70	41	81

A Figura 49 e a Figura 50 mostram os resultados dos potenciais e das derivadas dos potenciais obtidos pelos métodos MEF e MEC, conforme indicado, no lado direito da Figura 48, pelas letras A e B.

Figura 49: Resultados dos potenciais em A do exemplo 1 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD.

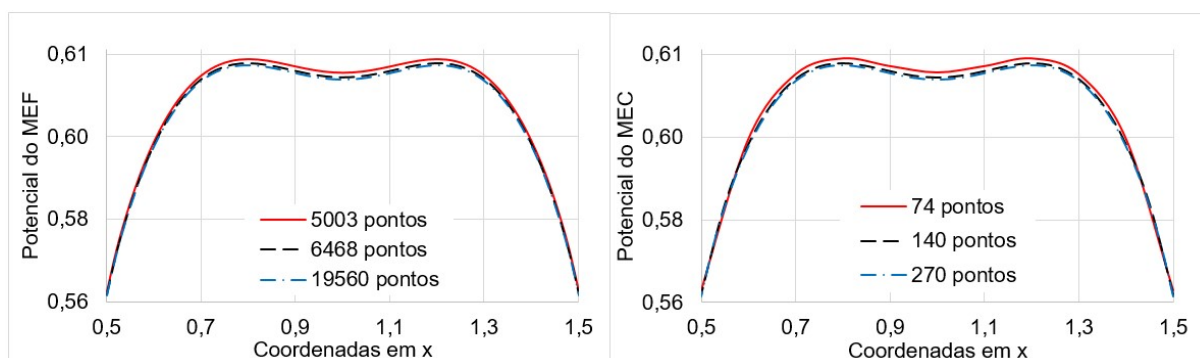
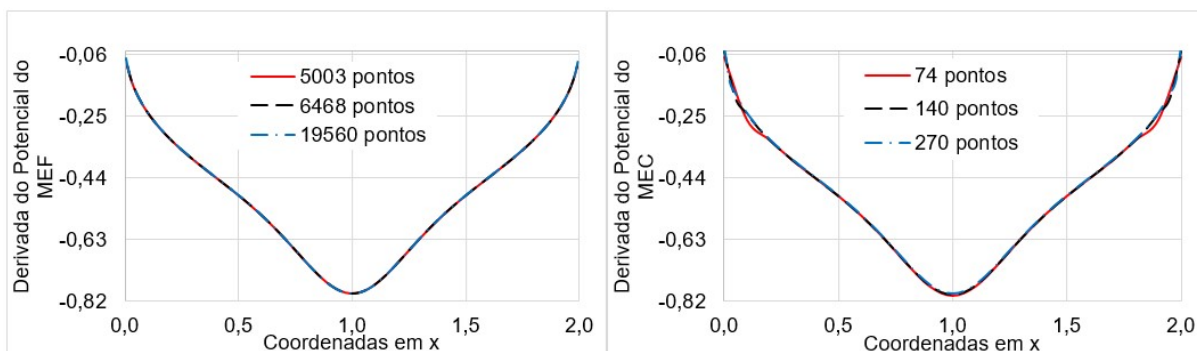
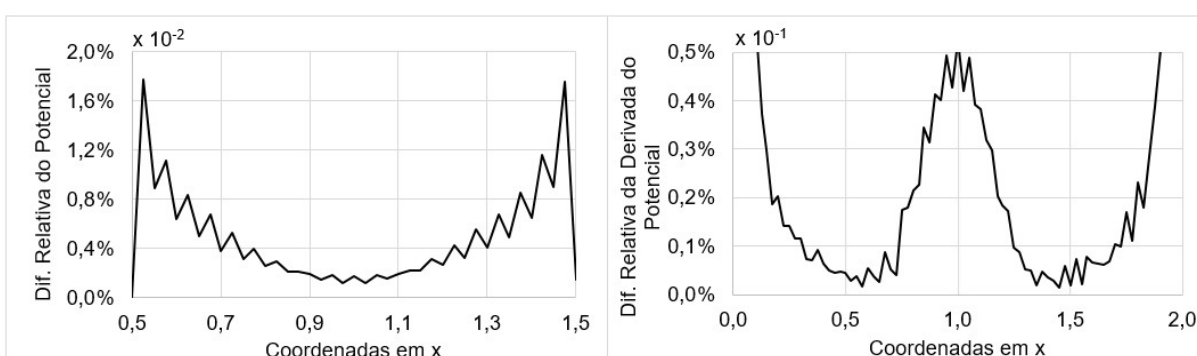


Figura 50: Resultados das derivadas do potencial em B do exemplo 1 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD.



Considerando as malhas mais refinadas de cada método, a Figura 51 mostra a diferença relativa dos potenciais e das derivadas dos potenciais do MEC em relação ao MEF. A diferença relativa média nos valores calculados do potencial entre os dois métodos é 0,0049%; a diferença em relação aos valores das derivadas dos potenciais é de 0,0841%. A diferença relativa na derivada do potencial é maior, devido aos efeitos de canto e também pela maior sensibilidade desta variável em relação ao potencial em simulações numéricas. Deve-se destacar que as diferenças relativas de resultados para ambos os métodos são muito pequenas, mesmo com o MEC tendo um número de pontos nodais aproximadamente 72 vezes menor que o MEF.

Figura 51: Diferença relativa do potencial e derivada do potencial do exemplo 1 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD.



Na Figura 51 a diferença relativa da derivada do potencial não está com uma perfeita simetria, uma vez que o código do MEF só calcula os resultados do potencial. Dessa forma, a derivada do potencial é gerada posteriormente. Outra situação que contribui para essa assimetria é que o gráfico de diferença relativa

necessita dos pontos em coincidência. Assim, para isso, foi utilizada uma aproximação linear dos pontos do MEF, para que eles coincidisse com os pontos do MEC no contorno analisado. O mesmo ocorre para os próximos exemplos. Vale ressaltar que, mesmo gerando um acúmulo de erro com o cálculo de derivada e no ajuste dos pontos, pode-se concluir que a diferença relativa é pequena.

### 4.3.2 Exemplo 2

No segundo exemplo, resolve-se uma geometria com várias quinas. Além disso, existem três triângulos na base com propriedades diferentes e pontos nodais coincidentes do contorno externo, como ilustrado na Figura 52, em que as condições de contorno também são destacadas. Similarmente ao exemplo anterior, três malhas diferentes para ambos os métodos são utilizadas, conforme apresentado na Tabela 11.

Figura 52: Características geométricas e condições de contorno do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD.

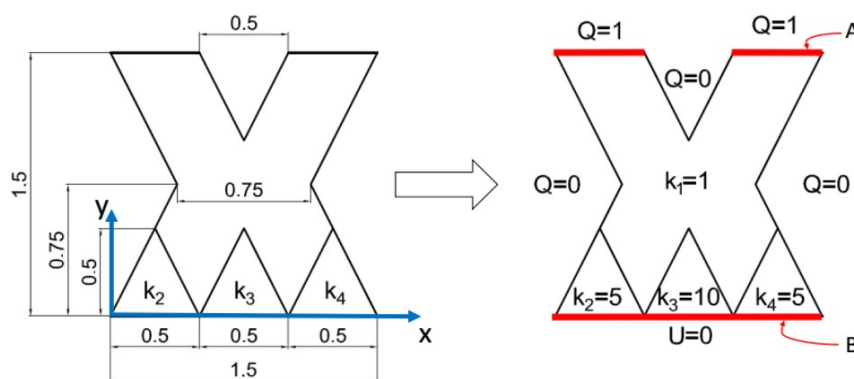


Tabela 11: Quantidade de nós nas malhas do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD.

	Elementos	Total de pontos	Contorno externo	Contorno interno	Pontos em A	Pontos em B
<b>MEF</b>	11782	6089	394	5695	58	84
	22385	11466	545	10921	80	117
	74626	37814	1000	36814	146	216
<b>MEC</b>	158	167	130	37	22	31
	328	337	260	77	42	61
	668	677	520	157	82	121

Na Figura 53 e na Figura 54, os resultados dos potenciais e das derivadas dos potenciais dos métodos MEF e MEC foram respectivamente analisados. Como mostra a Figura 52, as derivadas foram calculadas nas bordas indicadas pela letra B; os potenciais, pela letra A.

Figura 53: Resultados dos potenciais em parte do contorno A do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD.

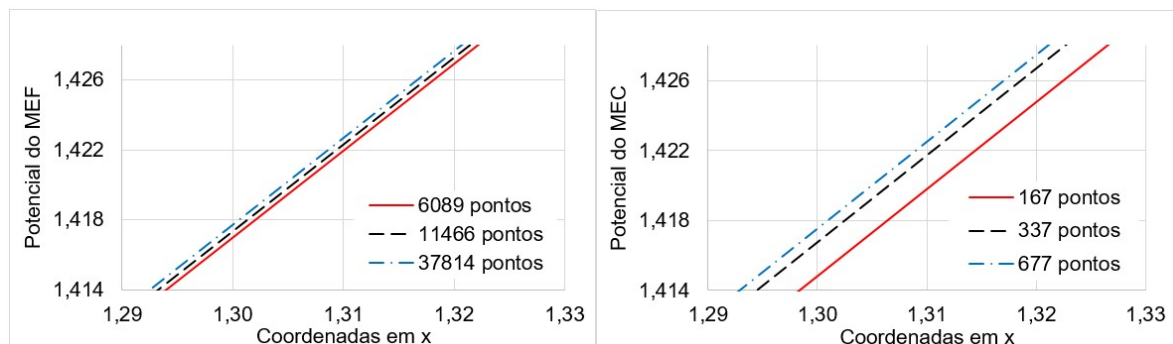


Figura 54: Resultados das derivadas do potencial em B do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD.

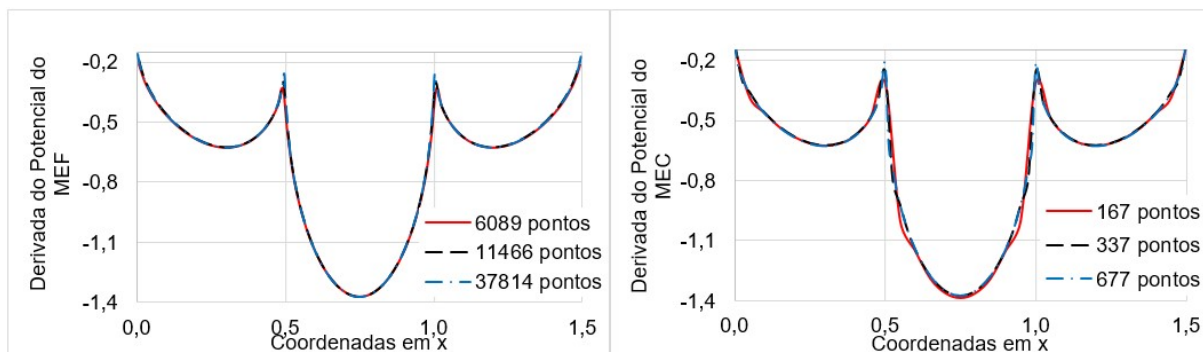
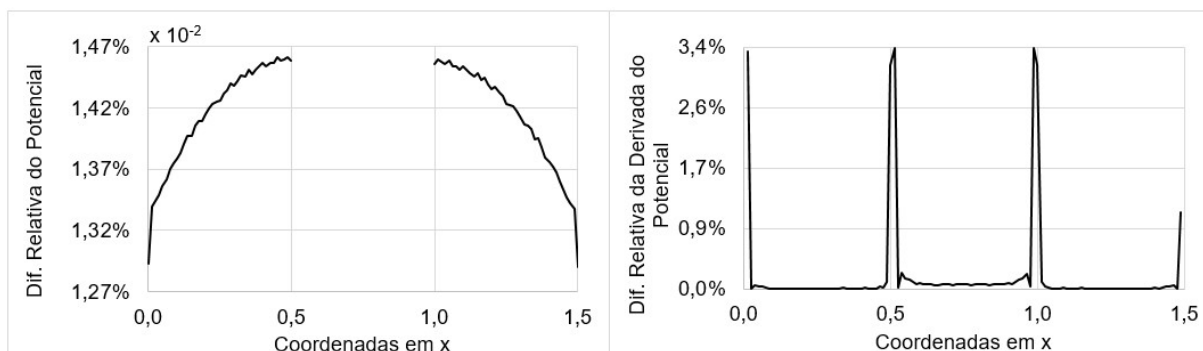


Figura 55: Diferença relativa do potencial e derivada do potencial do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD.



Considerando as malhas mais refinadas para ambos os métodos, a Figura 55 mostra a diferença relativa dos potenciais e das derivadas dos potenciais do MEC em relação ao MEF. A diferença relativa média para o potencial foi de 0,0142%, e a diferença relativa das derivadas do potencial foi de 0,0865%. Deve-se ressaltar que essas diferenças são mínimas, apesar de o número de pontos nodais do MEC ser aproximadamente 55 vezes menor do que o do MEF.

### 4.3.3 Exemplo 3

No terceiro exemplo, um domínio com ranhuras e inclusões internas com propriedades diferentes é resolvido, como mostrado na Figura 56, onde as condições de contorno também são destacadas. Elementos lineares são usados para os métodos MEC e MEF. Portanto, pequenos erros podem ocorrer para representar a geometria circunferencial das ranhuras. Para cada método, foram usadas três malhas diferentes, com dados de discretização apresentados na Tabela 12.

Figura 56: Características geométricas e condições de contorno do exemplo 3 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD.

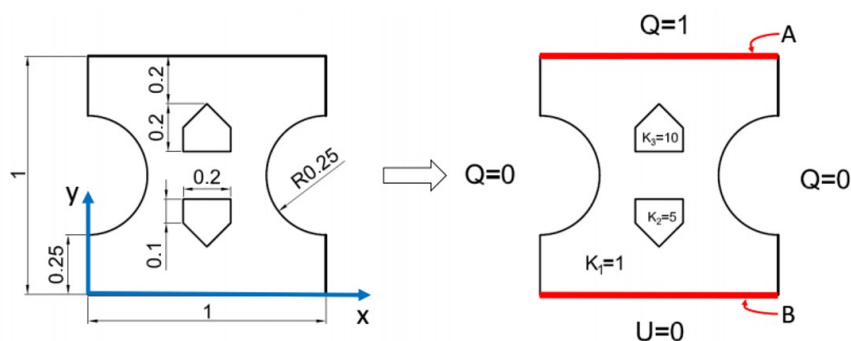


Tabela 12: Quantidade de nós nas malhas do exemplo 3 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD.

	Elementos	Total de pontos	Contorno externo	Contorno interno	Pontos em A	Pontos em B
<b>MEF</b>	2364	1265	164	1101	34	34
	9094	4709	322	4387	67	67
	31306	15963	618	15345	125	125
<b>MEC</b>	100	108	84	24	21	21
	224	232	184	48	41	41
	456	464	368	96	81	81

Nas Figuras 57 e 58, são apresentados os resultados dos potenciais e das derivadas dos potenciais obtidos com os métodos do MEF e MEC, conforme indicado, no lado direito da Figura 56, pelas letras A e B.

Figura 57: Resultados dos potenciais em A do exemplo 3 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD.

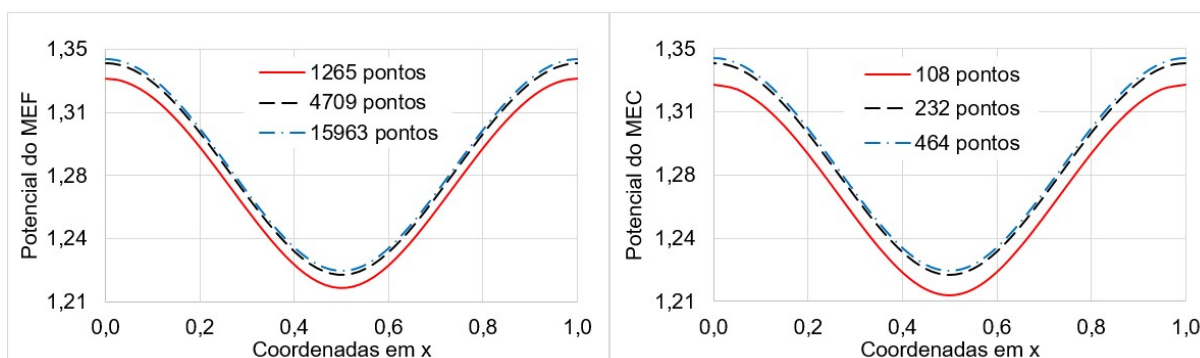
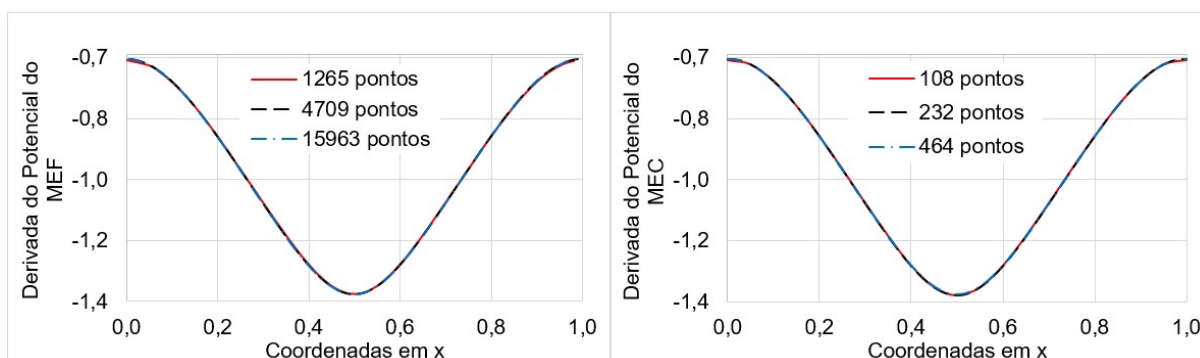


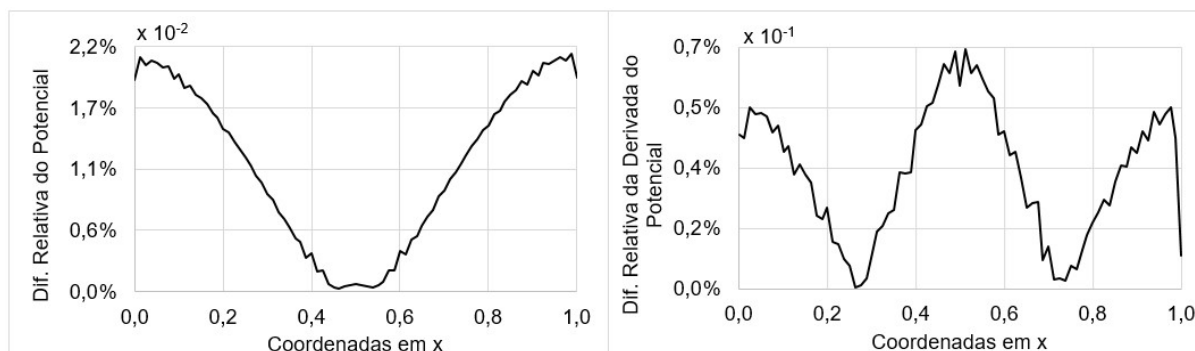
Figura 58: Resultados das derivadas do potencial em B do exemplo 3 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD.



Na Figura 59 é apresentada a diferença relativa do MEC em relação ao MEF dos potenciais e das derivadas dos potenciais, considerando-se as malhas mais refinadas de cada método.



Figura 59: Diferença relativa do potencial e derivada do potencial do exemplo 3 para problemas bidimensionais da Eq. de Laplace com TSD.



Os resultados obtidos com a solução do exemplo confirmam novamente o desempenho da Técnica de Superposição de Domínio no MEC, considerando-se o MEF como referência. Os valores dos erros percentuais relativos para o potencial foi de 0,0114% e da derivada do potencial foi de 0,0339%. Apesar de o número de pontos nodais utilizados no MEC ser aproximadamente 34 vezes menor que no MEF.

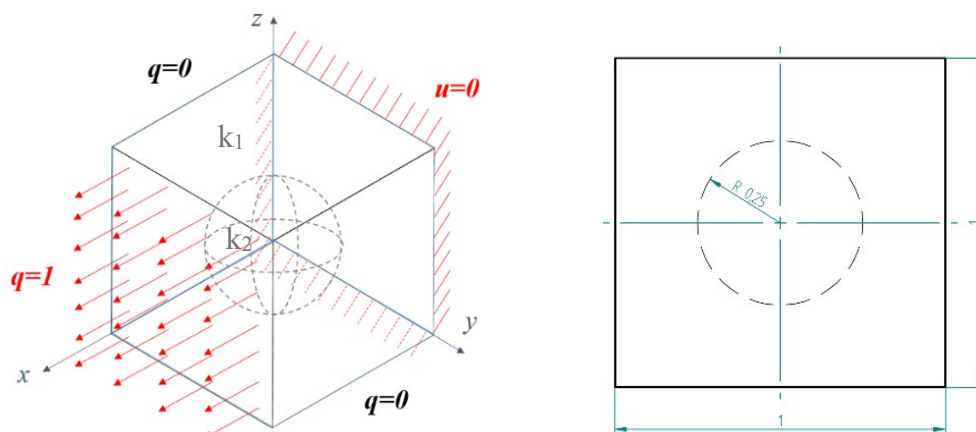
#### 4.4 Aplicação da TSD tridimensional na Equação de Laplace

Inicialmente foi resolvido um problema estacionário tridimensional com homogeneidade localizada e superfícies esféricas. Em seguida outro problema onde a geometria possui quinas. Os resultados de referências foram obtidos pelo ANSYS.

##### 4.4.1 Exemplo 1

Considera-se uma geometria cúbica com aresta unitária de propriedade  $k_1=1$ , contendo uma esfera centralizada no seu interior de raio 0,25 e onde as propriedades  $k_2$  variam de (2, 5 e 10). O cubo é solicitado axialmente, conforme mostrado na Figura 60, que também apresenta as condições de contorno do problema.

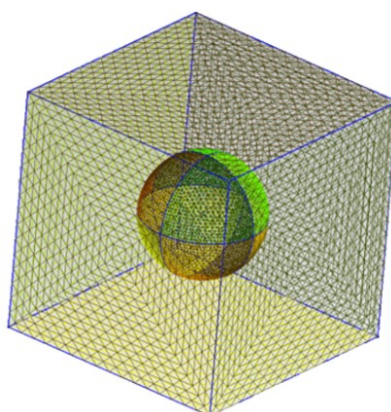
Figura 60: Características geométricas e condições de contorno do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD.



A presença da descontinuidade esférica faz com que o problema não possa ser comparado aos casos bidimensionais correlatos. Assim, para a comparação dos resultados foram tomados resultados numéricos obtidos com o Método dos Elementos Finitos, usando-se uma malha bastante refinada, com 62.797 elementos e 89.653 pontos nodais.

Utiliza-se o programa Gmsh versão 2.16.0-svn para geração das malhas, onde cada plano do contorno externo possui nós múltiplos em todas as arestas. Já o contorno da superposição de domínio não tem nós múltiplos.

Figura 61: Malha do exemplo 1 da geometria tridimensional do MEC para Eq. de Laplace com TSD.



Como se trata de uma simulação tridimensional, na Figura 61 apresenta-se um modelo ilustrativo de malha do MEC, onde se observa o contorno da superfície externa e o contorno da superfície do subdomínio. Foram testadas três malhas com

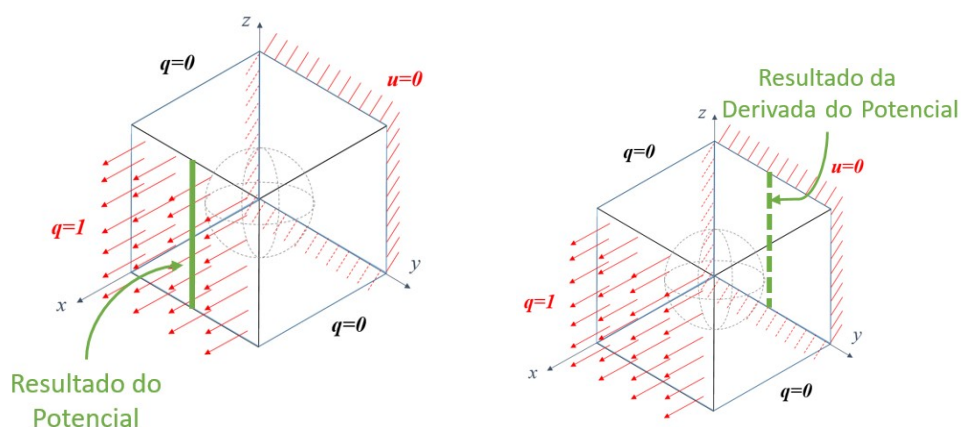
diferentes graus de refinamento para melhor observação da convergência dos resultados. A Tabela 13 apresenta os dados destas discretizações.

Tabela 13: Número de pontos nas malhas do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD.

	Elementos no contorno externo	Elementos no contorno interno	Pontos no contorno externo	Pontos no contorno interno	Total de pontos
<b>Malha 1</b>	432	610	294	307	601
<b>Malha 2</b>	768	984	486	494	980
<b>Malha 3</b>	2352	2542	1350	1273	2623

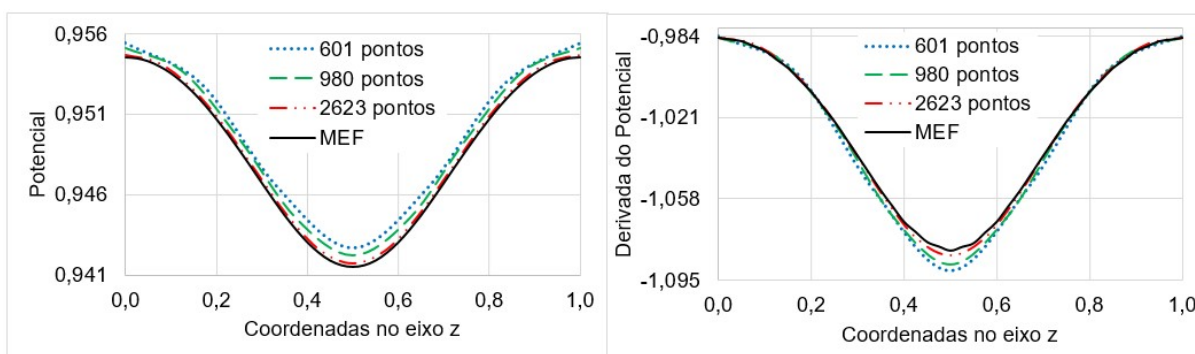
Na Figura 62, há um esquema onde se indicam as linhas dos resultados do potencial e da derivada normal do potencial para cada problema proposto.

Figura 62: Indicação dos resultados do potencial e sua derivada no exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD.



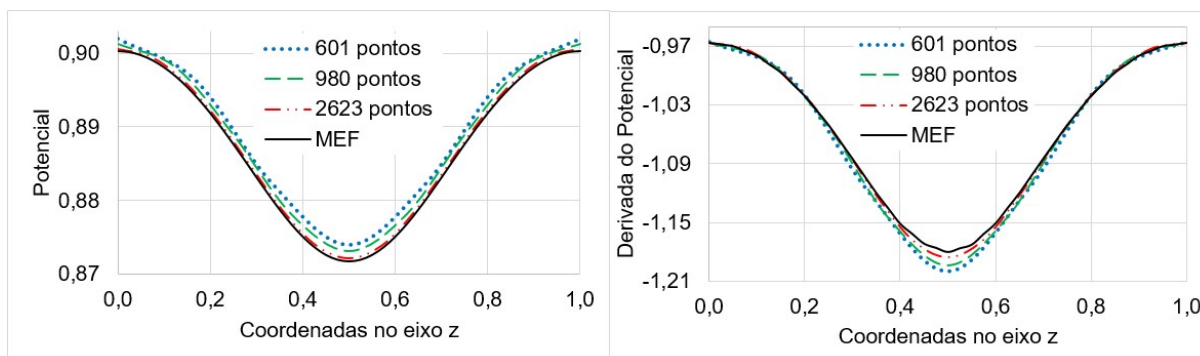
Primeiramente, colhem-se os resultados para o potencial e a derivada normal do potencial para a esfera com propriedade  $k_2=2$ , conforme se observa na Figura 63.

Figura 63: Resultados do potencial e derivada do potencial do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD, onde  $k_2=2$ .



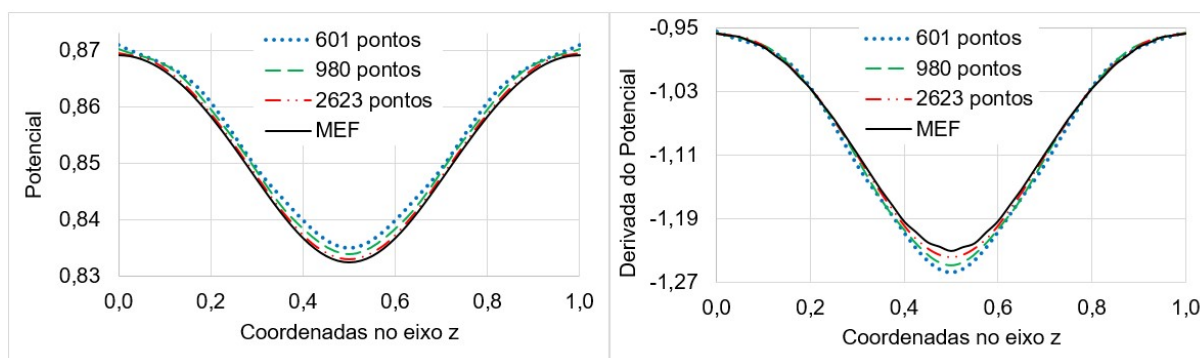
Na Figura 64, têm-se os resultados do potencial e da derivada do potencial onde a esfera possui propriedade  $k_2 = 5$ .

Figura 64: Resultados do potencial e derivada do potencial do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD, onde  $k_2=5$ .



Por último, os resultados do problema onde a esfera possui propriedade  $k_2 = 10$  são mostrados na Figura 65.

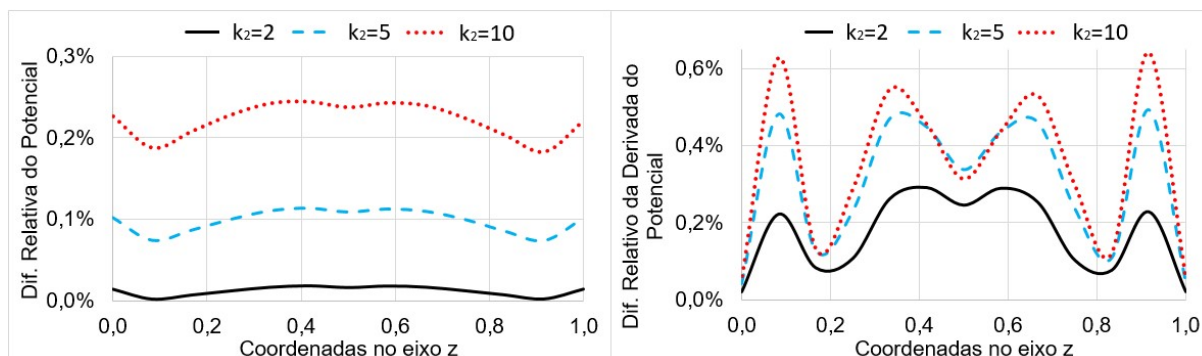
Figura 65: Resultados do potencial e derivada do potencial do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD, onde  $k_2=10$ .



Pode-se observar um comportamento monotônico com o refinamento das malhas tanto para os potenciais quanto para as derivadas dos potenciais. Esse comportamento não se alterou mesmo com a variação da propriedade  $k_2$  na geometria esférica da superposição.

Considerando a malha mais refinada do MEC, a Figura 66 mostra a diferença relativa dos potenciais e das derivadas normais do potencial obtidas pelos métodos para cada propriedade interna da superposição.

Figura 66: Diferença relativa do potencial e derivada do potencial do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD.



Considerando a malha mais refinada do MEC, a diferença relativa média do potencial e da derivada do potencial entre os métodos consta da Tabela 14.

Tabela 14: Diferença relativa média entre os métodos do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD.

	Potencial	Derivada do Potencial
$K_2=2$	0,014%	0,222%
$K_2=5$	0,101%	0,338%
$K_2=10$	0,227%	0,314%

Os resultados do potencial e das derivadas normais do potencial são bons para todos os casos com  $k_2$ , com base na concordância entre os resultados obtidos com o MEF, cuja malha possui 33 vezes mais pontos nodais do que a malha mais refinada do MEC.

#### 4.4.2 Exemplo 2

Na segunda simulação, resolve-se uma geometria com quinas mais acentuadas, internamente constituída de uma pirâmide com base quadrada e com diferentes propriedades  $k_2$ . Também foram utilizadas 3 malhas conforme a Tabela 15. As dimensões e condições de contorno do exemplo 2 são indicadas na Figura 67.

Figura 67: Características geométricas e condições de contorno do exemplo 2 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD.

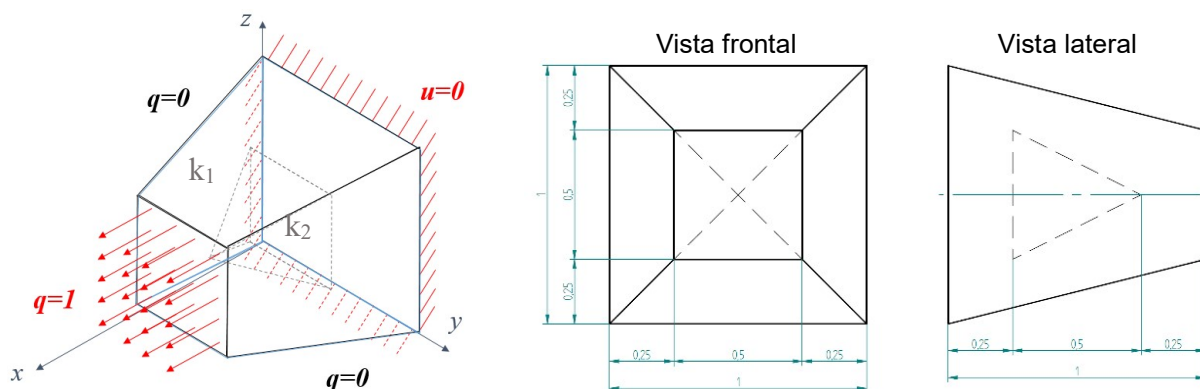
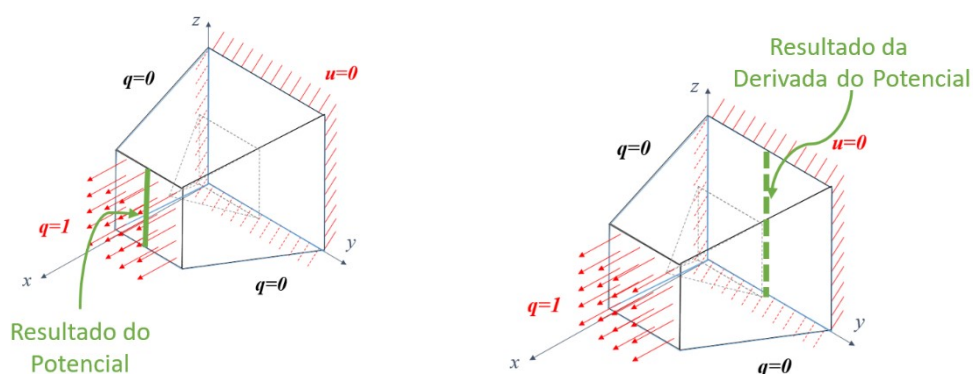


Tabela 15: Número de pontos nas malhas para o exemplo 2 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD.

	Elementos no contorno externo	Elementos no contorno interno	Pontos no contorno externo	Pontos no contorno interno	Total de pontos
<b>Malha 1</b>	538	310	355	157	512
<b>Malha 2</b>	932	830	578	417	995
<b>Malha 3</b>	2240	2146	1290	1075	2365

Para este exemplo, assim como para o anterior, compararam-se seus resultados com os do MEF, usando uma malha com 80.686 elementos e 115.288 pontos nodais. As linhas dos resultados do potencial e sua derivada são indicadas na Figura 68.

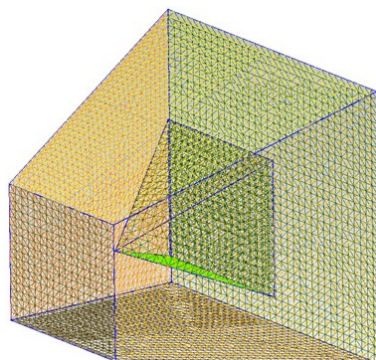
Figura 68: Indicação dos resultados do potencial e sua derivada no exemplo 2 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD.



Na Figura 69, tem-se um modelo ilustrativo da malha tridimensional do MEC nesse exemplo 2.

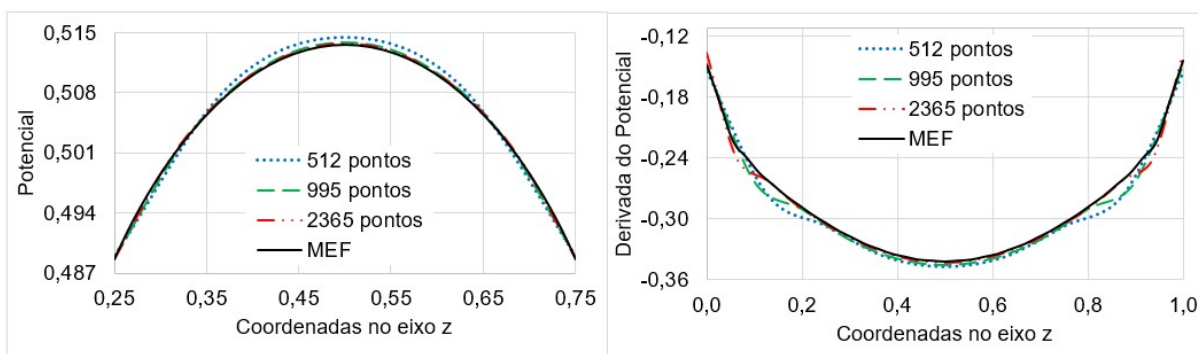


Figura 69: Malha do exemplo 2 da geometria tridimensional do MEC para Eq. de Laplace com TSD.



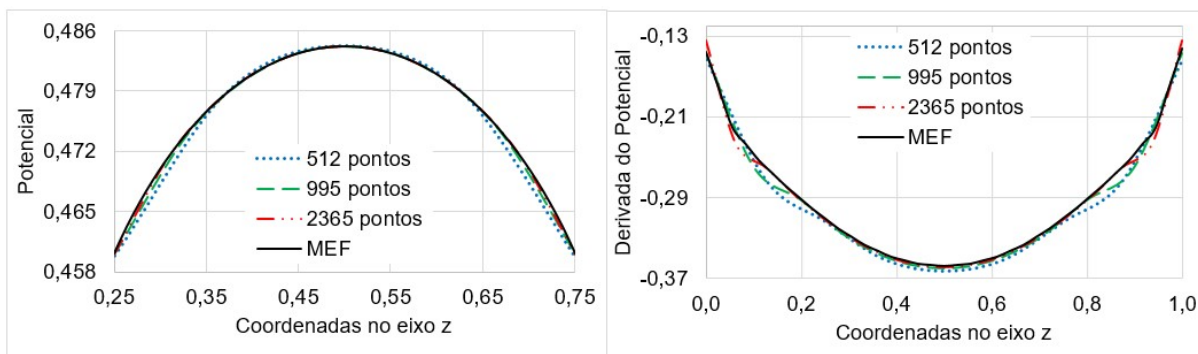
Assim como no primeiro exemplo, foram feitos três testes modificando a propriedade da geometria interna  $k_2$  e mantendo a propriedade  $k_1 = 1$ . Na Figura 70, observam-se os resultados do potencial e da derivada do potencial para a propriedade  $k_2 = 2$ .

Figura 70: Resultados do potencial e derivada do potencial do exemplo 2 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD, onde  $k_2=2$ .



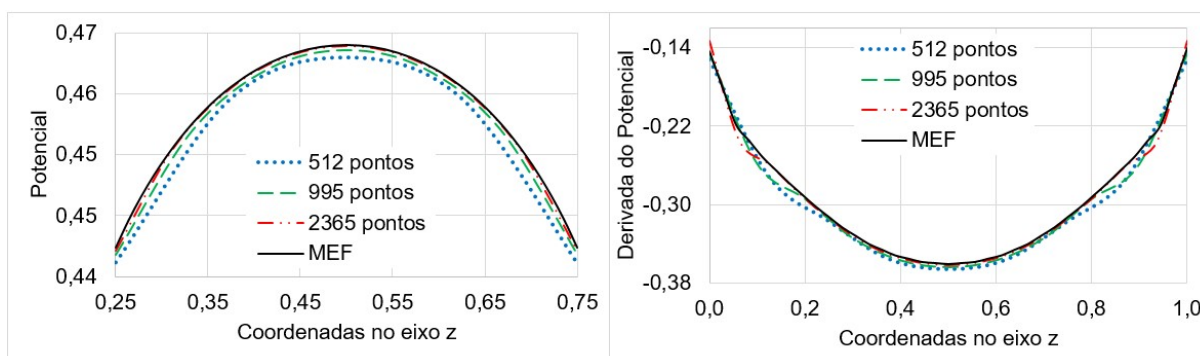
No segundo teste, colhem-se os resultados dos potenciais e derivadas dos potenciais para a propriedade  $k_2 = 5$ , como mostra a Figura 71.

Figura 71: Resultados do potencial e derivada do potencial do exemplo 2 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD, onde  $k_2=5$ .



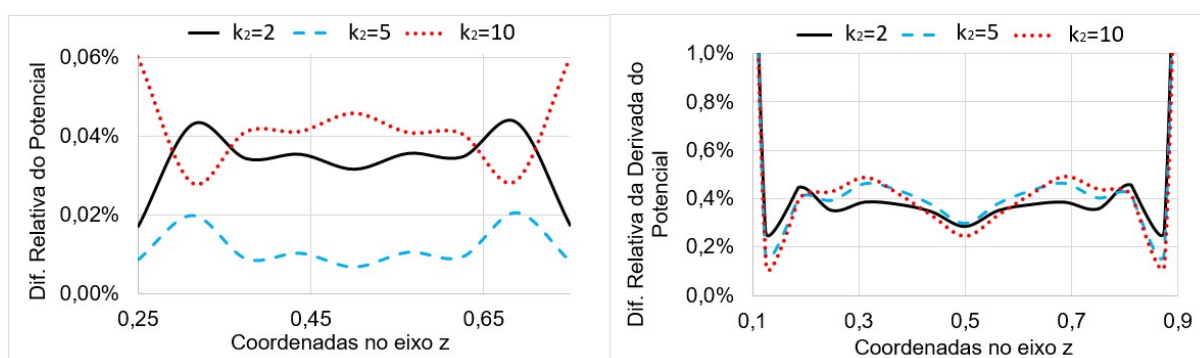
Na Figura 72, apresentam-se os resultados dos potenciais e derivadas dos potenciais da propriedade  $k_2 = 10$ .

Figura 72: Resultados do potencial e derivada do potencial do exemplo 2 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD, onde  $k_2=10$ .



Por fim, apresentam-se, na Figura 73, as diferenças relativas dos potenciais e das derivadas dos potenciais entre MEC e o MEF, considerando-se a malha mais refinada do MEC.

Figura 73: Diferença relativa do potencial e derivada do potencial do exemplo 2 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD.



Na Tabela 16, observamos a diferença relativa média do potencial e da derivada do potencial entre os métodos considerando-se a malha mais refinada do MEC.

Tabela 16: Diferença relativa média entre os métodos do exemplo 2 para problemas tridimensionais da Eq. de Laplace com TSD.

	Potencial	Derivada do Potencial
$K_2=2$	0,0348%	0,3763%
$K_2=5$	0,0093%	0,4153%
$K_2=10$	0,0411%	0,4215%



Os resultados são bons para os potenciais, com base na concordância com os resultados obtidos com o MEF, cuja malha possui quarenta e oito vezes mais pontos nodais do que a malha mais refinada do MEC. Apesar de resultados favoráveis, observa-se que a convergência do refinamento das malhas do MEC seguiu um comportamento diferente para os valores do potencial com a variação da propriedade  $k_2$ , pois, ao se aumentar a rigidez do domínio interno, a convergência dos valores do potencial se inverteu, ou seja, os valores do MEC se aproximaram de modo diferente junto à curva do MEF, conforme se pode observar nas Figuras 70, 71 e 72.

Os resultados não foram tão precisos para os valores da derivada normal do potencial. Houve uma pequena inconsistência nos pontos próximos das arestas em que o vértice da superfície externa tem um ângulo agudo e na região onde a base do domínio interno tem o mesmo tipo de aresta que influencia a derivada do potencial. Isso ocorre devido à baixa quantidade de pontos nodais ao longo dessa linha para o modelo do MEC. Essa diferença diminuiu à medida que se refinou a malha de contorno.

#### **4.5 Conclusões Parciais**

Os resultados gerados com a TSD na simulação de problemas bidimensionais de Laplace com domínios mais irregulares mostraram um excelente desempenho. Esses problemas apresentam sulcos, cantos e outras irregularidades geométricas que não perturbaram o desempenho do método proposto, diferentemente do que ocorre ocasionalmente na Técnica da Sub-Região (LARA et al., 2018). Usando-se esta última técnica, as inclusões internas produzem efeitos numéricos prejudiciais conhecidos, devido à presença de funções de interpolação ao longo das interfaces internas.

Os resultados obtidos com o TSD na simulação de problemas de Laplace tridimensionais com homogeneidade setorial mostraram um desempenho satisfatório. Ressalta-se que as simulações apresentadas abordaram problemas com conformação esférica, cantos e outras particularidades geométricas que não perturbaram seu desempenho.

Ressalta-se que a TSD também mostra uma vantagem significativa em termos de simplicidade na programação e entrada de dados. Para implementar o modelo proposto, é necessário apenas gerar um novo tipo de matriz  $H$ , que contenha a energia potencial relacionada aos setores internos, e adicioná-la ao sistema clássico do MEC. A boa precisão da TSD pode ser atribuída a dois motivos: (1) ao efeito de aproximação devido os contornos internos serem suavizados em comparação com a técnica de sub-região, já que o modelo é dado por uma superposição de domínios discretos, em que o domínio circundante é completamente homogêneo, ou seja, não há interfaces dentro deste; (2) todos os pontos de origem têm interatividade entre si. Esses pontos pertencem ao contorno envolvente e também aos contornos internos.

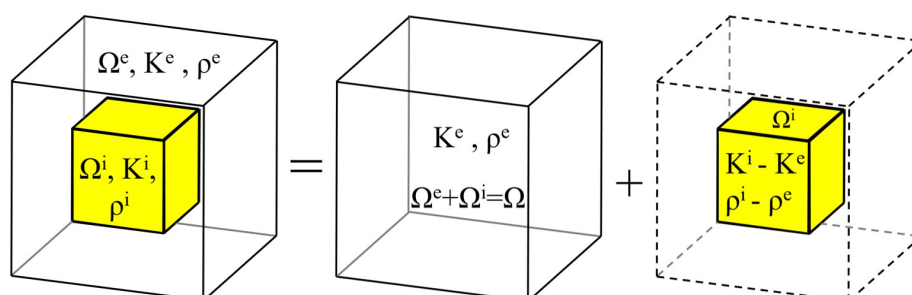
## 5 TÉCNICA DE SUPERPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS PARA PROBLEMAS DE HELMHOLTZ

### 5.1 Técnica de Superposição de Domínios Aplicada à Equação de Helmholtz

Sem perda de generalidade, da mesma forma que foi feito para a Equação de Laplace, considera-se um domínio constituído por duas regiões com diferentes propriedades físicas, conforme mostrado no lado esquerdo da Figura 74, onde o domínio completo  $\Omega(X)$  é composto pela soma dos domínios  $\Omega^e$  e  $\Omega^i$ .

Agora, a decomposição dada pela TSD vai considerar também as propriedades físicas típicas para os problemas de Helmholtz, tomadas como constantes no interior dos domínios  $\Omega^e$  e  $\Omega^i$ :  $K^e$ ,  $K^i$ ,  $\rho^e$  e  $\rho^i$ . Tal estratégia é ilustrada na Figura 74, no que diz respeito às propriedades  $K$  e  $\rho$ :

Figura 74: Domínios completos e setoriais com propriedades homogêneas  $K$  e  $\rho$  para Eq. de Helmholtz.



Utilizando-se uma função auxiliar  $u^*(\xi; X)$ , admitindo-se que o núcleo das integrais é composto por funções integráveis e considerando ainda que  $K^s = K^i - K^e$  e  $\rho^s = \rho^i - \rho^e$ , pode-se escrever uma forma integral forte associada à Equação (3.4), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & K^e \int_{\Omega} u(X)_{,ii} u^*(\xi; X) d\Omega + K^s \int_{\Omega^i} u^i(X)_{,ii} u^*(\xi; X) d\Omega^i = \\
 & -\rho^e \omega^2 \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega - \rho^s \omega^2 \int_{\Omega^i} u^i(X) u^*(\xi; X) d\Omega^i
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Na Equação (5.1),  $K^e$  e  $\rho^e$  representam respectivamente as propriedades de rigidez ou difusividade e a inércia do domínio envolvente, enquanto  $K^i$  e  $\rho^i$  correspondem a propriedades similares no domínio interno. Tais propriedades são consideradas

constantes em cada subdomínio, de acordo com o modelo de homogeneidade setorial.

No MECID, o lado esquerdo da Equação (5.1), que se refere ao operador Laplaciano, é tratado pelo procedimento tradicional do MEC para problemas de Laplace, e a solução fundamental utilizada nessa formulação é a de problemas de Laplace, e não a referente à Equação de Helmholtz. Já foi comentado que isso representa uma perda de precisão, mas o nível de aproximação adicional introduzido por essa simplificação é aceitável pelos padrões de engenharia (PEREIRA, 2016).

O termo relacionado à difusividade ou rigidez, que é o lado esquerdo da Equação (5.1), é desenvolvido aplicando-se a Técnica da Superposição de Domínio para a Equação de Laplace, conforme foi demonstrado no item 4.1. Logo, reescreve-se a Equação (5.1) da seguinte forma:

$$-K^e \left[ c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} [u(X)q^*(\xi; X) - q(X)u^*(\xi; X)]d\Gamma \right] - K^s \left[ c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma^i} u^i(X)q^*(\xi; X)d\Gamma^i \right] = \quad (5.2)$$

$$-\rho^e \omega^2 \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega - \rho^s \omega^2 \int_{\Omega^i} u^i(X)u^*(\xi; X)d\Omega^i$$

Diferentemente do termo difusivo, as integrais referentes à energia cinética são expressas apenas em termos dos potenciais  $u(X)$ . Contudo, é preciso operacionalizá-las de modo a escrevê-las em termos de integrais de contorno. Com essa finalidade, emprega-se o procedimento MECID, juntamente com um procedimento de regularização, para evitar singularidades no núcleo dessas integrais.

## 5.2 Aproximação do MECID para a integração de domínio utilizando a Técnica de Superposição de Domínios

Da mesma forma como foi demonstrado no item 3.2, o núcleo completo da integral de domínio é interpolado diretamente usando-se funções de base radial conforme Equação (3.11). Dessa forma, o lado direito da Equação (5.2), após a transformação proposta pela Equação (3.13), é reescrita na forma:

$$\omega^2 \rho^e \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega + \omega^2 \rho^s \int_{\Omega^i} u^i(X)u^*(\xi; X)d\Omega^i = \omega^2 \rho^e \left( \int_{\Gamma} \alpha^j \eta^j d\Gamma \right) + \omega^2 \rho^s \left( \int_{\Gamma^i} \alpha^j \eta^j d\Gamma^i \right) \quad (5.3)$$

De forma similar ao que foi feito no item 3.3, é preciso aplicar um procedimento de regularização, para evitar a singularidade provocada pela coincidência entre as posições dos pontos fonte e campo na Equação (3.11). O procedimento é aplicado no lado direito da Equação (5.2), pela adição de duas integrais que se autocompensam tanto para o domínio circundante quanto para o subsetor, ou seja:

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho^e \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega + \omega^2 \rho^s \int_{\Omega^i} u^i(X) u^*(\xi; X) d\Omega^i = \\ \omega^2 \rho^e \left\{ \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega - \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega \right\} + \omega^2 \rho^e \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega + \\ \omega^2 \rho^s \left\{ \int_{\Omega^i} u^i(X) u^*(\xi; X) d\Omega - \int_{\Omega^i} u^i(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega \right\} + \omega^2 \rho^s \int_{\Omega^i} u^i(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega \end{aligned} \quad (5.4)$$

Uma das parcelas adicionadas a cada domínio é interpolada juntamente com a integral original, retirando-se a singularidade:

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho^e \left\{ \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega - \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega \right\} \cong \omega^2 \rho^e \left( \int_{\Gamma} \alpha^j \eta^j d\Gamma \right) \\ \omega^2 \rho^s \left\{ \int_{\Omega^i} u^i(X) u^*(\xi; X) d\Omega - \int_{\Omega^i} u^i(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega \right\} \cong \omega^2 \rho^s \left( \int_{\Gamma^i} \alpha^j \eta^j d\Gamma^i \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

As outras parcelas podem ser resolvidas através do Tensor de Galerkin, ou seja:

$$\begin{aligned} \rho^e \omega^2 \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega = \rho^e \omega^2 u(\xi) \int_{\Gamma} G_{,i}^* n_i d\Gamma \\ \rho^s \omega^2 \int_{\Omega^i} u^i(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega = \rho^s \omega^2 u^i(\xi) \int_{\Gamma^i} G_{,i}^* n_i d\Gamma^i \end{aligned} \quad (5.6)$$

A Equação (3.18) e a Equação (3.19) mostram a expressão da derivação direcional de  $G^*(\xi; X)$  para problemas bidimensional e tridimensional.

A equação integral de contorno que antecede ao processo de discretização encontra-se na forma:

$$\begin{aligned} K^e \left[ c(\xi) u(\xi) + \int_{\Gamma} [u(X) q^*(\xi; X) - q(X) u^*(\xi; X)] d\Gamma \right] + K^s \left[ c(\xi) u(\xi) + \int_{\Gamma^i} u^i(X) q^*(\xi; X) d\Gamma^i \right] = \\ \omega^2 \rho^e \left( \int_{\Gamma} \alpha^j \eta^j d\Gamma + u(\xi) \int_{\Gamma} G_{,i}^* n_i d\Gamma \right) + \omega^2 \rho^s \left( \int_{\Gamma^i} \alpha^j \eta^j d\Gamma^i + u^i(\xi) \int_{\Gamma^i} G_{,i}^* n_i d\Gamma^i \right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

### 5.3 Procedimento de Discretização utilizando a Técnica de Superposição de Domínio

Da mesma forma que o item 3.4, os procedimentos típicos do MEC para discretização são aplicados aqui, considerando-se elementos de contorno lineares isoparamétricos, com nós duplos nos cantos para problemas bidimensionais e nós múltiplos nas arestas para tridimensionais. Para cada ponto fonte se faz uma varredura em todos os elementos de contorno externo e do contorno dos possíveis subdomínios. Na interpolação gerada pelo MECID, para cada ponto fonte também é efetuada uma varredura de todos os pontos de interpolação  $X^j$  em relação aos pontos de domínio  $X$ , ponderados pelos coeficientes  ${}^\xi\alpha^j$ . Dessa forma, os coeficientes de  ${}^\xi\alpha^j$  são obtidos pela resolução de um sistema matricial da Equação (3.21).

Para um melhor entendimento da discretização para a Técnica de Superposição de Domínio, o índice “ $n$ ” significa o número total de pontos nodais, incluindo pontos no contorno externos e todos os pontos internos a ele. Os pontos fonte que delimitam os subdomínios são equivalentes aos pontos internos. Neste caso, para análise do domínio da superposição, o índice utilizado é o “ $m$ ”. Esse índice caracteriza os pontos nodais do contorno do subdomínio e também os pontos interpolantes, situados no seu interior.

Dessa forma, a Equação (5.5), seguida da discretização no domínio externo e de superposição, resulta em:

$$\rho^e \omega^2 \begin{pmatrix} {}^1\alpha^1 & \dots & {}^1\alpha^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^n\alpha^1 & \dots & {}^n\alpha^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix} = \rho^e \omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}; \quad \rho^s \omega^2 \begin{pmatrix} {}^1\alpha^1 & \dots & {}^1\alpha^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^n\alpha^1 & \dots & {}^n\alpha^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_m \end{pmatrix} = \rho^s \omega^2 \begin{pmatrix} A'_1 \\ \vdots \\ A'_n \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Cada coeficiente  $A_\xi$  é explicitado a partir de:

$$A_\xi = (N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n) \begin{pmatrix} {}^\xi\alpha_1 \\ \vdots \\ {}^\xi\alpha_n \end{pmatrix}; \quad A'_\xi = (N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_m) \begin{pmatrix} {}^\xi\alpha_1 \\ \vdots \\ {}^\xi\alpha_m \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Uma forma sintética para o vetor  $A_\xi$  pode ser dada pela Equação (5.10), para o domínio externo e pela Equação (5.11), para o domínio da superposição.

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-S_2^1 \Lambda^2 - S_3^1 \Lambda^3 \dots - S_n^1 \Lambda^n] & S_2^1 \Lambda^2 & \dots & S_n^1 \Lambda^n \\ S_1^2 \Lambda^1 & [-S_1^2 \Lambda^1 - S_3^2 \Lambda^3 \dots - S_n^2 \Lambda^n] & \dots & S_n^2 \Lambda^n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_1^n \Lambda^1 & S_2^n \Lambda^2 & \dots & [-S_1^n \Lambda^1 - S_2^n \Lambda^3 \dots - S_{n-1}^n \Lambda^{n-1}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

$$\begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ \vdots \\ A'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-S'_2{}^1 \Lambda^2 - S'_3{}^1 \Lambda^3 \dots - S'_m{}^1 \Lambda^m] & S'_2{}^1 \Lambda^2 & \dots & S'_m{}^1 \Lambda^m \\ S'_1{}^2 \Lambda^1 & [-S'_1{}^2 \Lambda^1 - S'_3{}^2 \Lambda^3 \dots - S'_m{}^2 \Lambda^m] & \dots & S'_m{}^2 \Lambda^m \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S'_1{}^n \Lambda^1 & S'_2{}^n \Lambda^2 & \dots & [-S'_1{}^n \Lambda^1 - S'_2{}^n \Lambda^3 \dots - S'_{m-1}{}^n \Lambda^{m-1}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Pode-se ressaltar que os termos  $\Lambda^i$ , que produziram singularidade devido à coincidência entre pontos de campo e fonte, não mais existem nas matrizes dadas pelas Equações (5.10) e (5.11). As matrizes referentes ao Tensor de Galerkin são mais simples e se reduzem aos seguintes vetores:

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\int_1^1 P^1 d\Gamma_1 + \int_2^1 P^2 d\Gamma_2 + \dots + \int_n^1 P^n d\Gamma_n] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [\int_1^2 P^1 d\Gamma_1 + \int_2^2 P^2 d\Gamma_2 + \dots + \int_n^2 P^n d\Gamma_n] & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & [\int_1^n P^1 d\Gamma_1 + \int_2^n P^2 d\Gamma_2 + \dots + \int_n^n P^n d\Gamma_n] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

$$\begin{pmatrix} Z'_1 \\ Z'_2 \\ \vdots \\ Z'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ [\int_1^1 P^1 d\Gamma_1 + \int_2^1 P^2 d\Gamma_2 + \dots + \int_m^1 P^m d\Gamma_m] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [\int_1^2 P^1 d\Gamma_1 + \int_2^2 P^2 d\Gamma_2 + \dots + \int_m^2 P^m d\Gamma_m] & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & [\int_1^m P^1 d\Gamma_1 + \int_2^m P^2 d\Gamma_2 + \dots + \int_m^m P^m d\Gamma_m] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Assim, as matrizes referentes à inércia podem ser construídas na forma:

$$\rho^e \omega^2 \begin{pmatrix} (A_1 + Z_1) \\ \vdots \\ (A_n + Z_n) \end{pmatrix} = \rho^e \omega^2 \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

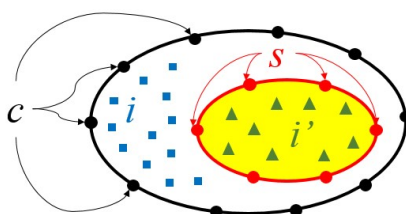
$$\rho^s \omega^2 \begin{pmatrix} (A'_1 + Z'_1) \\ \vdots \\ (A'_n + Z'_n) \end{pmatrix} = \rho^s \omega^2 \begin{pmatrix} M'_{11} & \dots & M'_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M'_{n1} & \dots & M'_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

Uma vez que a energia de cada partição é representada exclusivamente por meio de valores potenciais nos pontos internos, esses pontos devem aparecer explicitamente no sistema matricial, ou seja, o potencial associado a eles é calculado simultaneamente com pontos nodais do contorno. Assim, o sistema matricial MECID, após o procedimento de discretização, é dado por:

$$[H]\{u\} + [H^s]\{u^s\} - [G]\{q\} = \omega^2[M]\{u\} + \omega^2[M^s]\{u^s\} \quad (5.15)$$

Na Figura 75, descreve-se a convenção utilizada para expandir a forma matricial de modo a melhor compreendê-la. Dessa forma, os subscritos  $c$  indicam os pontos no contorno externo, os subscritos  $i$  indicam os pontos base externo ao subdomínio, os subscritos  $i'$  indicam os pontos base internos ao subdomínio e os subscritos  $s$  indicam os pontos no contorno do subdomínio.

Figura 75: Nomenclatura dos pontos nodais para montagem das matrizes referentes à Eq. de Helmholtz para TSD.



Para maior clareza, examinam-se as colunas de cada matriz referente à Equação (5.15). Para todas as matrizes, têm-se coeficientes de influência gerados pela ação dos pontos fonte, que podem se posicionar no contorno envolvente, nos contornos dos setores internos e nos pontos base situados tanto no interior dos setores quanto fora dele.

Para a matriz  $H$  da Equação (5.16), a coluna  $A1$  é gerada pela integração ao longo do contorno externo. As matrizes  $\hat{H}_{ii}$ ,  $\hat{H}_{i'i'}$  e  $\hat{H}_{ss}$  são matrizes diagonais.

$$[H]\{u\} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{H}_{cc} \\ \hat{H}_{ic} \\ \hat{H}_{i'c} \\ \hat{H}_{sc} \end{bmatrix}}_{A1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{ci} \\ \hat{H}_{ii} \\ 0_{i'i} \\ 0_{si} \end{bmatrix}}_{A2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{ci'} \\ 0_{ii'} \\ \hat{H}_{i'i'} \\ 0_{si'} \end{bmatrix}}_{A3} \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{cs} \\ 0_{is} \\ 0_{i's} \\ \hat{H}_{ss} \end{bmatrix}}_{A4} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_i \\ u_{i'} \\ u_s \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$



Para a matriz  $H^s$  da Equação (5.17), os coeficientes de influência formados pela ação dos pontos fontes geram a coluna  $A5$ , que é composta de uma única submatriz diagonal, e também por  $A6$ , que é relacionada à integração ao longo dos contornos dos subdomínios.

$$[H^s]\{u^s\} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{ci'} & \bar{H}_{cs} \\ \mathbf{0}_{ii'} & \bar{H}_{is} \\ \bar{H}_{i'i'} & \bar{H}_{i's} \\ \mathbf{0}_{si'} & \bar{H}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i'} \\ u_s \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{A5} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{A6}$

Para a matriz  $G$  da Equação (5.18), a coluna  $B1$  é gerada pela integração dos pontos fonte ao longo do contorno externo.

$$[G]\{q\} = \begin{bmatrix} G_{cc} & \mathbf{0}_{ci} \\ G_{ic} & \mathbf{0}_{ii} \\ G_{i'c} & \mathbf{0}_{i'i} \\ G_{sc} & \mathbf{0}_{si} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_c \\ q_i \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{B1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{B2}$

Para a matriz  $M$  da Equação (5.19), os coeficientes de influência gerados pela ação dos pontos fonte por colunas são:  $C1$ , pela integração ao longo do contorno externo;  $C2$ , pela relação com os pontos internos do domínio externo;  $C3$ , pela relação com os pontos internos do domínio interno;  $C4$ , pela relação com os pontos no contorno dos subdomínios.

$$[M]\{u\} = \begin{bmatrix} \hat{M}_{cc} & \hat{M}_{ci} & \hat{M}_{ci'} & \hat{M}_{cs} \\ \hat{M}_{ic} & \hat{M}_{ii} & \hat{M}_{ii'} & \hat{M}_{is} \\ \hat{M}_{i'c} & \hat{M}_{i'i} & \hat{M}_{i'i'} & \hat{M}_{i's} \\ \hat{M}_{sc} & \hat{M}_{si} & \hat{M}_{si'} & \hat{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_i \\ u_{i'} \\ u_s \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{C1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{C2} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{C3} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{C4}$

Por fim, para a matriz  $M^s$  da Equação (5.20), os coeficientes de influência por colunas são:  $D1$ , pela relação com os pontos internos dos subdomínios;  $D2$ , pela integração ao longo dos contornos dos subdomínios.

$$[M^s] \{u^s\} = \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{M}_{ci'} & \overline{M}_{cs} \\ \overline{M}_{ii'} & \overline{M}_{is} \\ \overline{M}_{i'i'} & \overline{M}_{i's} \\ \overline{M}_{si'} & \overline{M}_{ss} \end{bmatrix}}_{D1 \quad D2} \begin{Bmatrix} u_{i'} \\ u_s \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

A forma expandida das matrizes do MEC, conforme a Equação (5.15) mostra que muitas submatrizes de  $G$  são nulas, o mesmo acontecendo com algumas submatrizes de  $H$ .

$$\begin{bmatrix} H_{cc} & 0_{ci} & 0_{ci'} & H_{cs} \\ H_{ic} & H_{ii} & 0_{ii'} & H_{is} \\ H_{i'c} & 0_{i'i} & H_{i'i'} & H_{i's} \\ H_{sc} & 0_{si} & 0_{si'} & H_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_i \\ u_{i'} \\ u_s \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{cc} & 0_{ci} & 0_{ci'} & 0_{cs} \\ G_{ic} & 0_{ii} & 0_{ii'} & 0_{is} \\ G_{i'c} & 0_{i'i} & 0_{i'i'} & 0_{i's} \\ G_{sc} & 0_{si} & 0_{si'} & 0_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_c \\ q_i \\ q_{i'} \\ q_s \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M_{cc} & M_{ci} & M_{ci'} & M_{cs} \\ M_{ic} & M_{ii} & M_{ii'} & M_{is} \\ M_{i'c} & M_{i'i} & M_{i'i'} & M_{i's} \\ M_{sc} & M_{si} & M_{si'} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_i \\ u_{i'} \\ u_s \end{Bmatrix} \quad (5.21)$$

Na Equação (5.21), a matriz  $H$  é a soma das Equações (5.16) e (5.17) e a matriz  $M$  é a soma das matrizes dadas pelas Equações (5.19) e (5.20).

#### 5.4 Aplicações da TSD Bidimensional na Equação de Helmholtz

Três problemas testes com homogeneidade setorial foram escolhidos para ilustrar a consistência do modelo matemático e seu bom desempenho numérico. Para uma melhor comparação, foram tomados resultados obtidos com o Método dos Elementos Finitos (MEF).

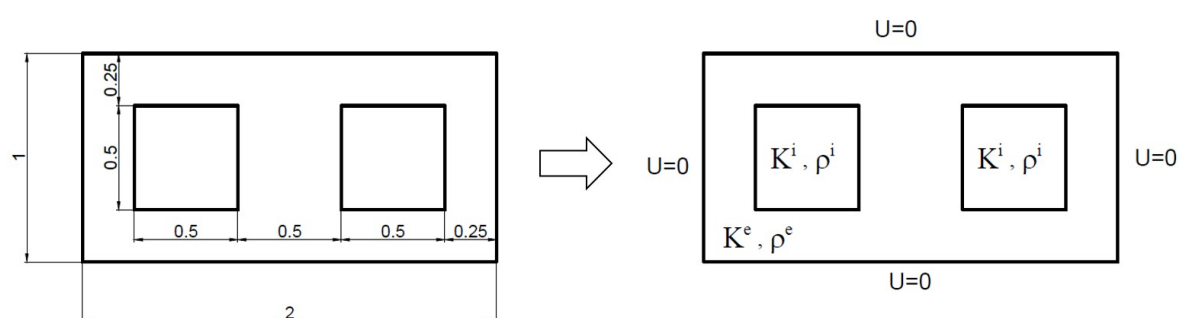
No estabelecimento da medida da diferença relativa, no denominador foi tomado o módulo do valor obtido com a malha refinada do MEF; já no numerador foi inserido o módulo da diferença entre os valores do MEF e do MEC.

$$\text{Diferença Relativa} = \frac{|\omega_{n(MEF)} - \omega_{n(MEC)}|}{|\omega_{n(MEF)}|} \quad (5.22)$$

### 5.4.1 Exemplo 1

Neste primeiro exemplo, uma membrana retangular completamente presa apresenta duas inclusões quadradas com propriedades distintas ao domínio externo, como mostrado na Figura 76.

Figura 76: Características geométricas e condições de contorno do exemplo 1 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.



Nessas primeiras simulações os valores das propriedades físicas foram:  $K^e=1$ ,  $\rho^e=1$ ,  $k^i=2$  e  $\rho^i=0,5$ . Três malhas com o mesmo número de pontos nodais no contorno foram consideradas, mas com diferentes quantidades de pontos de base no interior, a fim de avaliar sua importância na melhoria dos resultados. O número de pontos nodais e pontos de base é mostrado na Tabela 17:

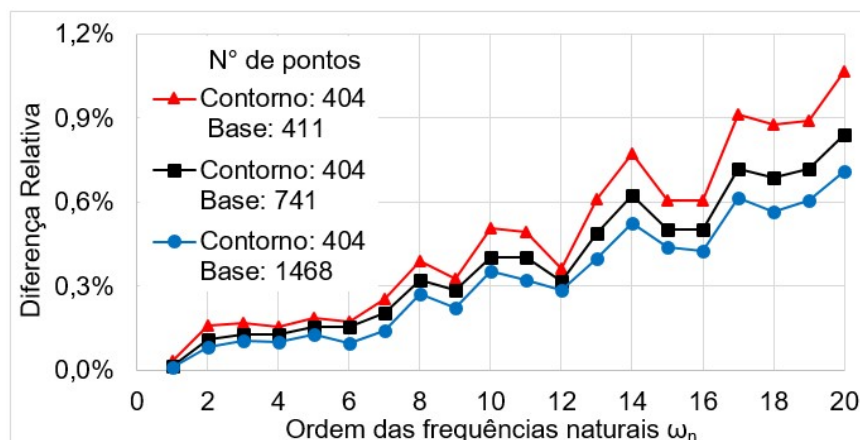
Tabela 17: Quantidade de pontos nodais em cada malha do 1º teste no exemplo 1 para o problema bidimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.

	<b>Pontos no Contorno externo</b>	<b>Pontos no Contorno interno</b>	<b>Pontos base externos ao subdomínio</b>	<b>Pontos base internos ao subdomínio</b>	<b>Total</b>
Malha 1 (i)	244	160	249	162	815
Malha 1 (ii)	244	160	499	242	1145
Malha 1 (iii)	244	160	784	684	1872

Nesse exemplo, a malha de referência do MEF é uma malha bastante refinada composta por 36.864 elementos isoparamétricos lineares e 18.625 pontos nodais.

As frequências naturais são calculadas e as diferenças relativas são mostradas na Figura 77. Pode-se observar que a inserção de pontos de base internos faz com que a diferença relativa diminua ao longo de quase toda a faixa de frequência examinada.

Figura 77: Diferença relativa dos autovalores para malha com diferentes quantidades de pontos base do exemplo 1 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.



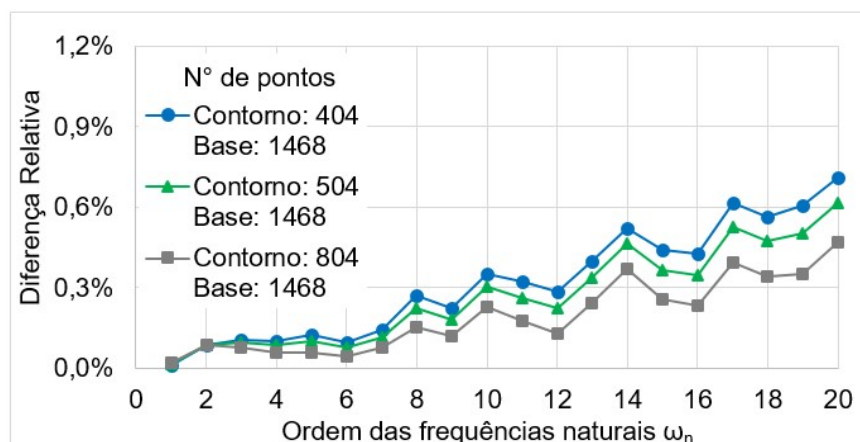
Certas oscilações na curva de diferença relativa, com frequência crescente, são aceitáveis, pois em cada conjunto de malha a posição dos pontos de interpolação é alterada. Além disso, sabe-se que certos modos vibracionais são mais difíceis de serem representados por certo arranjo de pontos do que outros modos superiores. No próximo teste, o número de pontos nodais nos contornos externo e interno é aumentado, considerando-se o arranjo de pontos base mais numerosos, conforme mostrado na Tabela 18:

Tabela 18: Quantidade de pontos nodais em cada malha do 2º teste no exemplo 1 para o problema bidimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.

	<b>Pontos no Contorno externo</b>	<b>Pontos no Contorno interno</b>	<b>Pontos base externos ao subdomínio</b>	<b>Pontos base internos ao subdomínio</b>	<b>Total</b>
Malha 1 (iii)	244	160	784	684	1872
Malha 2 (iii)	304	200	784	684	1972
Malha 3 (iii)	484	320	784	684	2272

As diferenças relativas de erro foram bastante pequenas, como pode ser visto nas ordenadas da Figura 78. O efeito de inserir um maior número de pontos no contorno foi mais efetivo, especialmente para o maior intervalo de frequência.

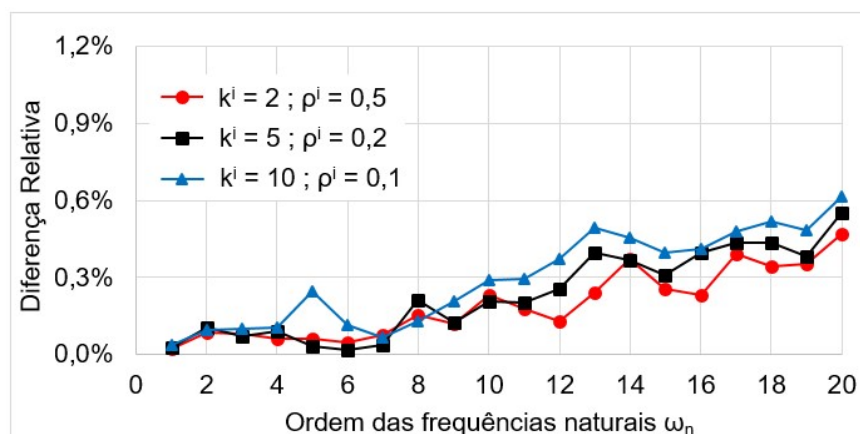
Figura 78: Diferença relativa dos autovalores para malhas com diferentes quantidades de pontos nos contornos do exemplo 1 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.



Considerando-se que, neste problema, os contornos externos da membrana também foram completamente fixados, observou-se que quanto à precisão, a importância dos pontos internos é mais pronunciada do que os pontos de contorno. O aumento desses pontos não introduz um acréscimo na quantidade de graus de liberdade do problema, característica esta fundamental para uma boa representação do comportamento dinâmico.

No último teste, a malha mais refinada, malha 3 (iii) da Tabela 18, foi tomada para avaliar o impacto numérico de uma mudança no valor das propriedades físicas. Além dos resultados já obtidos com  $k^i / \rho^i = 4$ , outros casos foram simulados com  $k^i / \rho^i = 25$  e  $k^i / \rho^i = 100$ . O resultado das diferenças relativas é mostrado na Figura 79.

Figura 79: Diferença relativa dos autovalores para malhas com diferentes propriedades do exemplo 1 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.

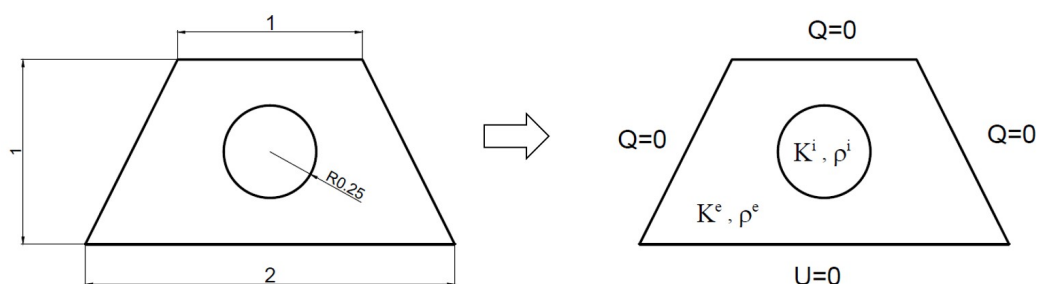


Percebe-se que os resultados foram bastante razoáveis, já que a maior diferença relativa foi feita no cálculo da vigésima frequência em todos os casos, com uma diferença relativa de aproximadamente 0,60% para as relações  $k^i / \rho^i = 25$  e  $k^i / \rho^i = 100$ . Apesar da mudança das propriedades  $k$  e  $\rho$ , não foi observada, dentro do intervalo examinado nesses testes, uma redução global na precisão do modelo com o aumento da diferença de valores de propriedade, o que é bastante positivo.

#### 5.4.2 Exemplo 2

Neste segundo exemplo, considera-se uma geometria trapezoidal com um círculo centralizado no interior com propriedades distintas, como mostra a Figura 80. As frequências naturais são calculadas para as condições de contorno indicadas.

Figura 80: Características geométricas e condições de contorno do exemplo 2 para o problema bidimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.



Da mesma forma que no primeiro exemplo, os valores das propriedades físicas para a primeira simulação foram:  $K^e=1$ ,  $\rho^e=1$ ,  $K^i=2$  e  $\rho^i=0,5$ . Três malhas com o mesmo número de pontos nodais no contorno são consideradas, mas com diferentes quantidades de pontos base no interior, a fim de avaliar sua importância na melhoria dos resultados. A Tabela 19 mostra o número de pontos nodais e pontos base.

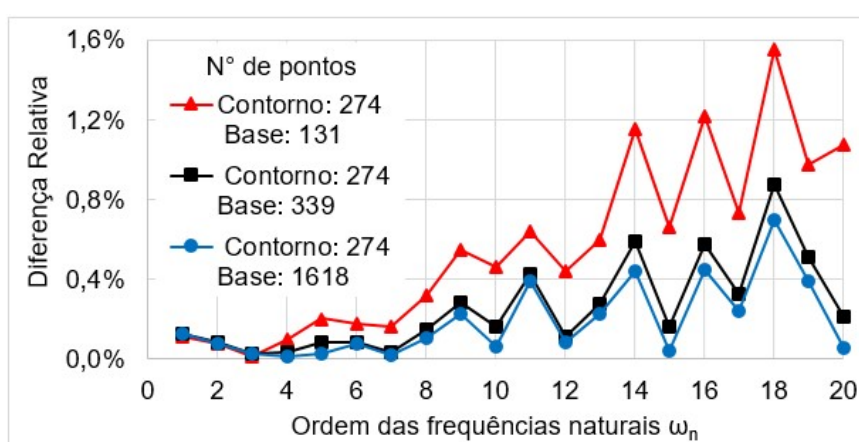
Tabela 19: Quantidade de pontos nodais em cada malha do 1º teste no exemplo 2 para o problema bidimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.

	Pontos no Contorno externo	Pontos no Contorno interno	Pontos base externos ao subdomínio	Pontos base internos ao subdomínio	Total
Malha 1 (i)	204	70	110	21	405
Malha 1 (ii)	204	70	294	45	613
Malha 1 (iii)	204	70	1304	314	1892

Neste exemplo, a solução de referência é uma malha do MEF com 49.516 elementos isoparamétricos lineares e com 25.053 pontos nodais.

As frequências naturais são calculadas e os erros relativos são mostrados na Figura 81. Pode-se observar que a inserção de pontos base internos não faz com que o erro relativo diminua significativamente para as frequências mais baixas. Contudo, para as mais altas frequências, a melhor aproximação da inércia do sistema pelos pontos interpolantes se mostra claramente no gráfico.

Figura 81: Diferença relativa dos autovalores para malhas com diferentes quantidades de pontos base do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.



No próximo teste, o número de pontos nodais no contorno externo e interno é aumentado, considerando-se o número de pontos de base interna o mais numeroso, conforme a Tabela 20.

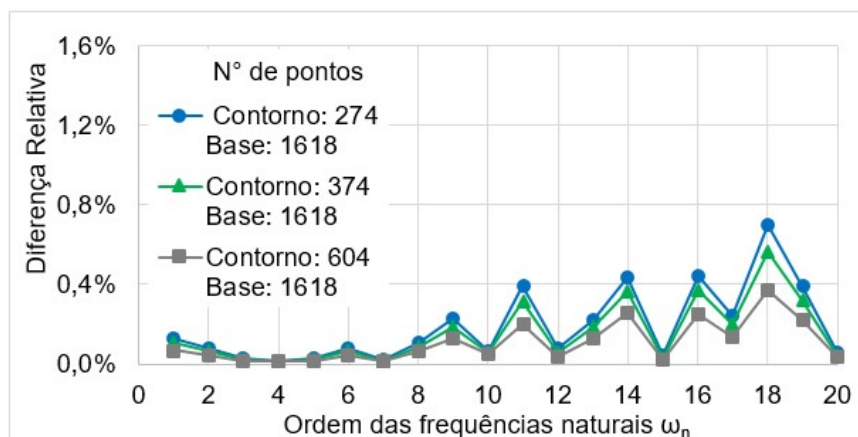
Tabela 20: Quantidade de pontos nodais em cada malha do 2º teste no exemplo 2 para o problema bidimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.

	Pontos no Contorno externo	Pontos no Contorno interno	Pontos base externos ao subdomínio	Pontos base internos ao subdomínio	Total
Malha 1 (iii)	204	70	1304	314	1892
Malha 2 (iii)	254	120	1304	314	1992
Malha 3 (iii)	404	200	1304	314	2222

A inserção de pontos nodais nos contornos foi muito eficaz para reduzir o erro relativo ao longo de todo o intervalo de frequências calculadas. No entanto, a

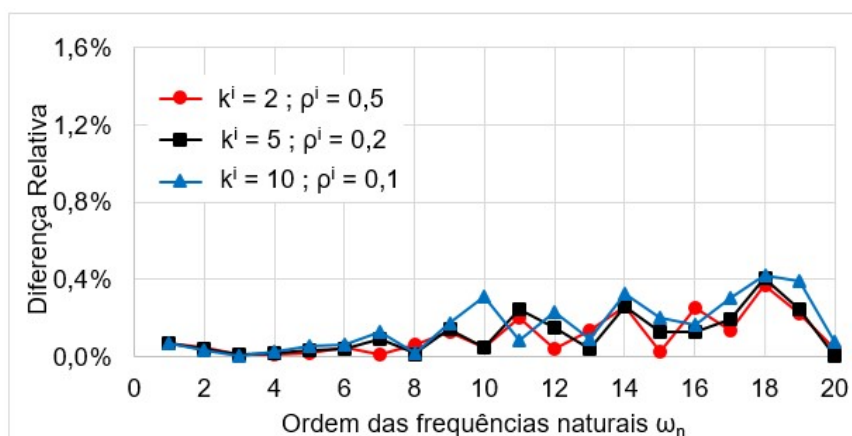
melhoria na precisão das frequências altas foi claramente mais pronunciada, como mostrado na Figura 82.

Figura 82: Diferença relativa dos autovalores para malhas com diferentes quantidades de pontos nos contornos do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.



No último teste, foi tomada a malha 3 (iii), a mais refinada da Tabela 20, para avaliar o impacto numérico de uma mudança no valor das propriedades físicas. Além dos resultados já obtidos com  $k^i/\rho^i=4$ , as situações foram simuladas com  $k^i/\rho^i=25$  e  $k^i/\rho^i=100$ . Os gráficos das diferenças relativas são mostrados na Figura 83.

Figura 83: Diferença relativa dos autovalores para diferentes propriedades do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.



Pode-se observar que os resultados foram bastante razoáveis, uma vez que a maior diferença relativa ocorre no cálculo da 18ª frequência, que é de aproximadamente 0,40%. Com o aumento nas diferenças de valores de propriedade, dentro da faixa examinada nesses testes, nenhuma redução na precisão do modelo foi observada.



### 5.4.3 Exemplo 3

Um domínio com ranhuras e inclusões internas com propriedades diferentes foi resolvido neste terceiro exemplo, como mostrado na Figura 84. As frequências naturais foram calculadas para as condições de contorno indicadas. Como feito nos dois exemplos anteriores, os valores das propriedades físicas para as primeiras simulações foram os seguintes:  $k^e = 1$ ,  $\rho^e = 1$ ,  $k^i = 2$  e  $\rho^i = 0,5$ . Da mesma forma, três malhas com o mesmo número de pontos nodais no contorno foram consideradas, mas com diferentes quantidades de pontos de interpolação no interior, a fim de avaliar sua importância na melhoria dos resultados. O número de pontos nos contornos e pontos base internos são mostrados na Tabela 21.

Figura 84: Características geométricas e condições de contorno do exemplo 3 para o problema bidimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.

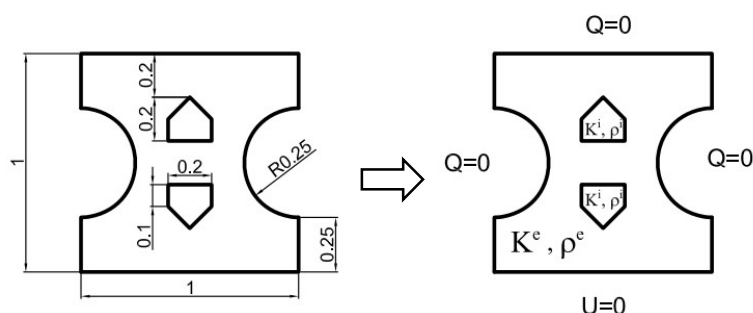


Tabela 21: Quantidade de pontos nodais em cada malha do 1° teste no exemplo 3 para o problema bidimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.

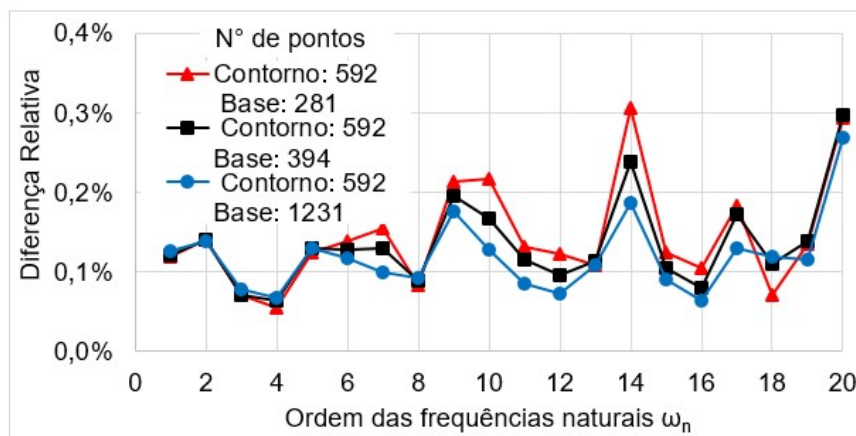
	<b>Pontos no Contorno externo</b>	<b>Pontos no Contorno interno</b>	<b>Pontos base externos ao subdomínio</b>	<b>Pontos base internos ao subdomínio</b>	<b>Total</b>
Malha 1 (i)	376	216	241	40	873
Malha 1 (ii)	376	216	338	56	986
Malha 1 (iii)	376	216	1079	152	1823

A malha de referência do MEF é uma malha bastante refinada, com 50.150 elementos isoparamétricos lineares e 25.423 pontos nodais.

Os resultados são mostrados no gráfico da Figura 85. Verificou-se que a inserção crescente de pontos internos não fez a diferença relativa diminuir tão significativamente como no Exemplo 1, embora tenha ocorrido uma ligeira melhora em toda a gama de frequências examinada. Essa variação se deve às

irregularidades da geometria; as regiões internas possuem várias arestas e o contorno externo possui semicírculos.

Figura 85: Diferença relativa dos autovalores para malhas com diferentes quantidades de pontos base do exemplo 3 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.



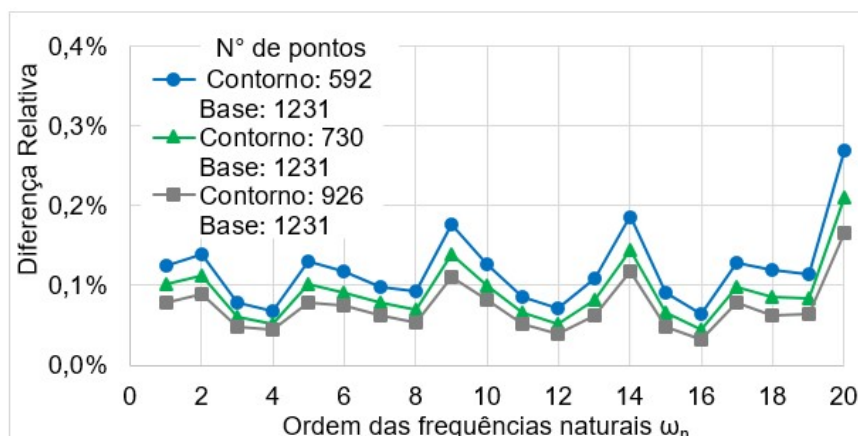
No próximo teste, o número de pontos nodais no contorno externo e interno é aumentado, de acordo com a Tabela 22, sendo a quantidade de pontos base a com maior refinamento do teste anterior.

Tabela 22: Quantidade de pontos nodais em cada malha do 2° teste no exemplo 3 para o problema bidimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.

	<b>Pontos no Contorno externo</b>	<b>Pontos no Contorno interno</b>	<b>Pontos base externos ao subdomínio</b>	<b>Pontos base internos ao subdomínio</b>	<b>Total</b>
Malha 1 (iii)	376	216	1079	152	1823
Malha 2 (iii)	458	272	1079	152	1961
Malha 3 (iii)	574	352	1079	152	2157

Com a inserção de pontos nodais no contorno, as diferenças relativas foram reduzidas e apresentaram um comportamento monotônico, como pode ser visto na Figura 86. O efeito dessa inserção foi mais eficaz, especialmente na faixa de frequência mais alta.

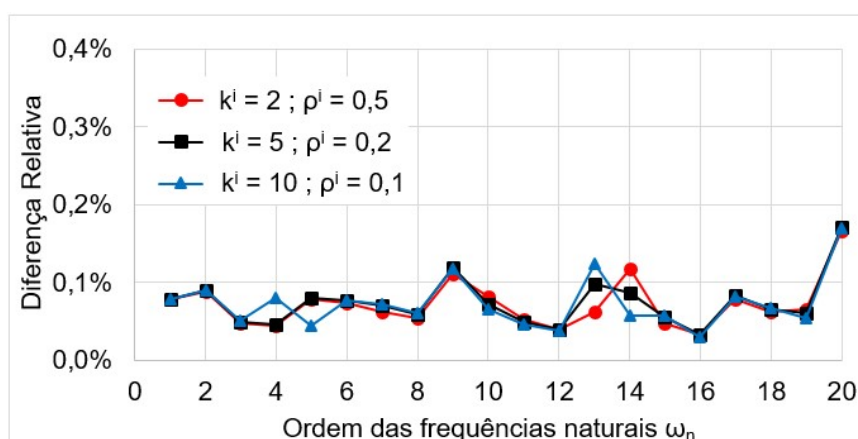
Figura 86: Diferença relativa dos autovalores para malhas com diferentes quantidades de pontos nos contornos exemplo 3 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.



Ao contrário do exemplo 1, onde o contorno externo da membrana foi completamente fixado, neste exemplo, apenas um lado da geometria é prescrito. Assim, no que diz respeito à precisão dos resultados, a importância dos pontos de contorno tornou-se mais pronunciada do que os pontos base internos deste exemplo. No entanto, é sensato que o MECID exija um grande número de pontos no interior, devido à transformação realizada para escrever o termo de inércia em integrais de contorno.

No último teste, a malha 3 (iii), apresentada na Tabela 22, foi tomada para avaliar o impacto numérico de uma mudança no valor das propriedades físicas. Além dos resultados já obtidos para esta malha com as propriedades do teste anterior  $k^i/\rho^i = 4$  (Figura 86), outros casos foram simulados com  $k^i/\rho^i = 25$  e  $k^i/\rho^i = 100$  (Figura 87).

Figura 87: Diferença relativa dos autovalores para diferentes propriedades do exemplo 3 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.



Pode-se observar que os resultados foram bastante razoáveis, uma vez que a maior diferença relativa foi de 0,17%. Da mesma forma que no exemplo anterior, uma queda na precisão não foi detectada com o aumento na diferença de valores de propriedade, dentro do intervalo examinado nesses testes.

### 5.5 Aplicações da TSD tridimensional na Equação de Helmholtz

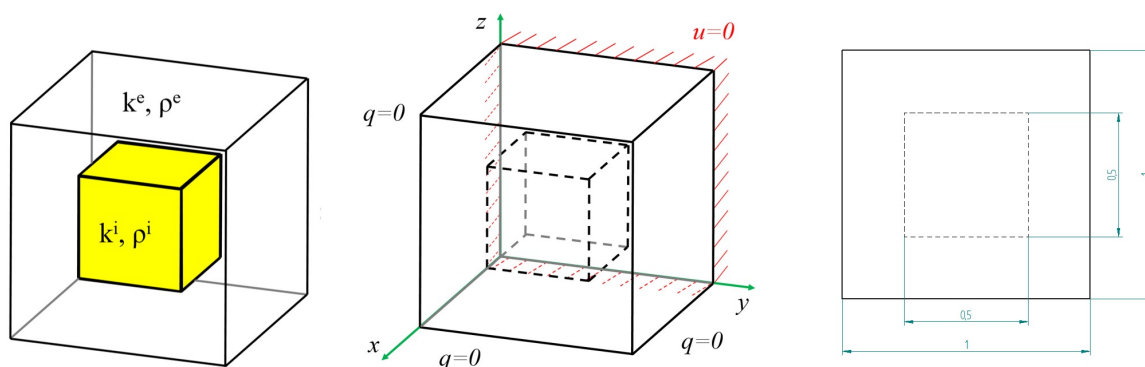
Dois problemas testes com homogeneidade setorial foram escolhidos para ilustrar a consistência do modelo matemático e seu bom desempenho numérico. Para uma melhor comparação, foram tomados resultados obtidos com o Método dos Elementos Finitos (MEF).

A medida da diferença relativa é determinada da mesma forma que no caso bidimensional, usando o ANSYS como resultados de referência.

#### 5.5.1 Exemplo 1

Um bloco quadrado que apresenta uma inclusão quadrada é resolvido. Excluindo o plano fixado  $y-z$ , onde  $x=0$ , os demais planos estão com as condições de Neumann nulas (Figura 88). Inicialmente as propriedades físicas são: módulo de elasticidade externo  $K^e = 1$  e interno  $K^i = 2$ ; massa específica do setor circundante  $\rho^e = 1$  e interna  $\rho^i = 0,5$ . Consideraram-se três malhas com a mesma quantidade de pontos nodais no contorno externos e interno e com diferentes quantidades de pontos de interpolação no interior, a fim de avaliar a importância dessa variação nos resultados. Os dados citados são mostrados na Tabela 23.

Figura 88: Características geométricas e condições de contorno impostas no exemplo 1 para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.



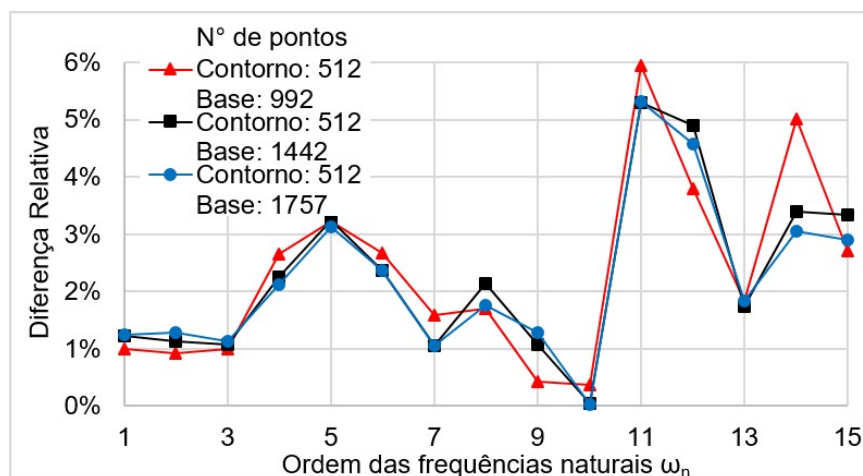
Nesse exemplo a solução de referência é uma malha do MEF com 45.884 elementos isoparamétricos lineares e com 69.384 pontos nodais.

Tabela 23: Quantidade de pontos nodais em cada malha do 1° teste no exemplo 1 para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.

Malha	Elementos		Pontos		Pontos Base		Total de Pontos
	Contorno externo	Contorno interno	Contorno externo	Contorno interno	Externo ao subdomínio	Interno ao subdomínio	
1 (i)	432	432	294	218	448	544	1504
1 (ii)	432	432	294	218	706	736	1954
1 (iii)	432	432	294	218	898	859	2269

As diferenças relativas das frequências naturais calculadas no 1° teste são mostrados na Figura 89. Pode-se observar que a inserção de pontos de base internos não influenciou muito os resultados mostrados ao longo de quase toda a faixa de frequência examinada; ocorreram apenas algumas variações, decorrentes do arranjo dos pontos base.

Figura 89: Diferença relativa dos autovalores para malha com diferentes quantidades de pontos base do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.



No teste seguinte, o número de pontos nodais no contorno externo e interno são refinados; já a quantidade de pontos bases, não sofrem variação, mantendo-se o maior número de pontos base do teste anterior.

Tabela 24: Quantidade de pontos nodais em cada malha do 2° teste no exemplo 1 para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.

Malha	Elementos		Pontos		Pontos Base		Total de Pontos
	Contorno externo	Contorno interno	Contorno externo	Contorno interno	Externo ao subdomínio	Interno ao subdomínio	
1 (iii)	432	432	294	218	898	859	2269
2 (iii)	1200	1200	726	602	898	859	3085
3 (iii)	1728	1728	1014	866	898	859	3637

Figura 90: Diferença relativa dos autovalores para malhas com diferentes quantidades de pontos nos contornos do exemplo 1 para problemas tridimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.

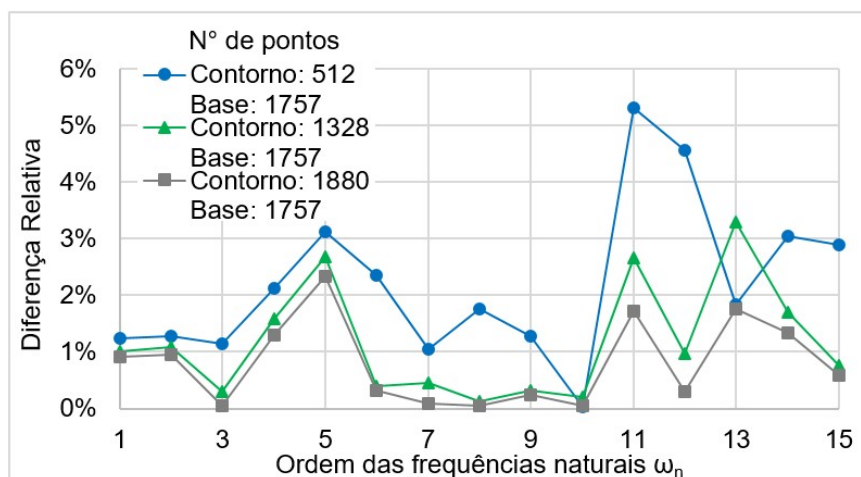
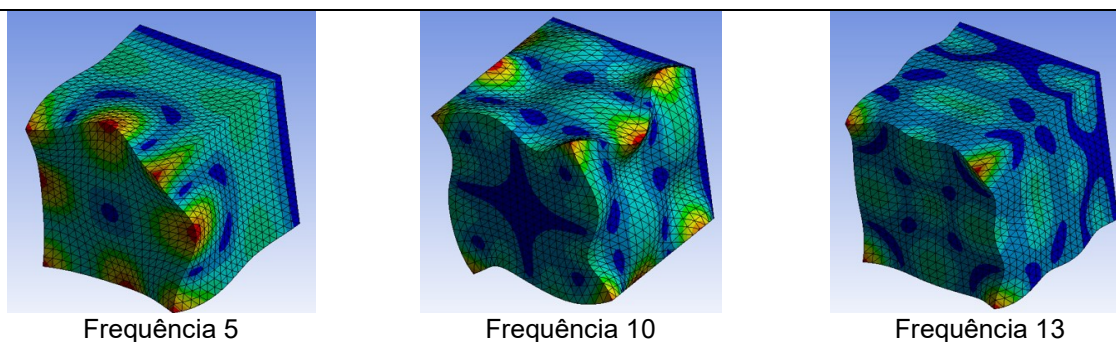


Figura 91: As frequências naturais 5, 10 e 13 obtidas pelo ANSYS como referência para o 1° exemplo do problema tridimensional com superposição.

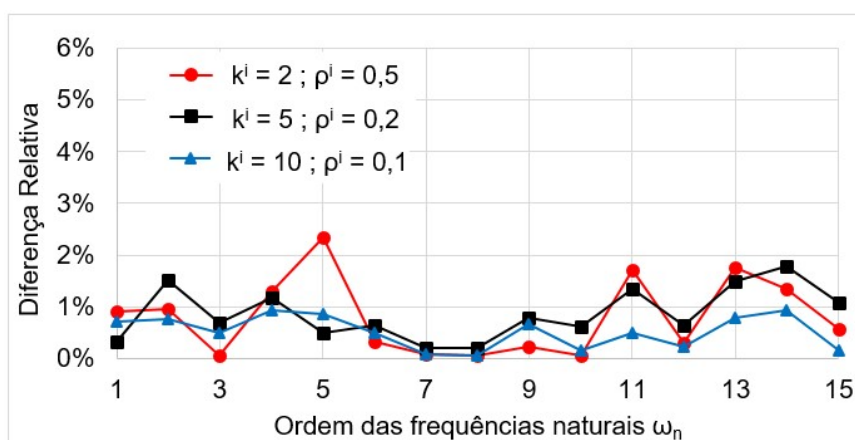


Assim, como acontece nos problemas homogêneos da Equação de Helmholtz (Capítulo 3), algumas frequências têm a diferença relativa elevada em relação às demais, ou até mesmo muito próxima de zero para todas as malhas, como mostra a Figura 90 nas frequências 5, 10 e 13. Na Figura 91, onde a configuração modal foi obtida pelo ANSYS, observa-se que essas frequências têm ângulos retos pronunciados, o que pode se a causa desses. Também deve-se ressaltar que a

interpolação com funções radiais também apresenta erros maiores associados aos vértices das configurações geométricas dos problemas estudados.

No último teste, a malha mais refinada, malha 3 (iii) da Tabela 24, foi tomada para avaliar o impacto numérico de uma mudança no valor das propriedades físicas. Além dos resultados já obtidos com  $k^i / \rho^i = 4$ , outros casos foram simulados com  $k^i / \rho^i = 25$  e  $k^i / \rho^i = 100$ . O resultado das diferenças relativas é mostrado na Figura 92.

Figura 92: Diferença relativa dos autovalores para malhas com diferentes propriedades do exemplo 1 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.

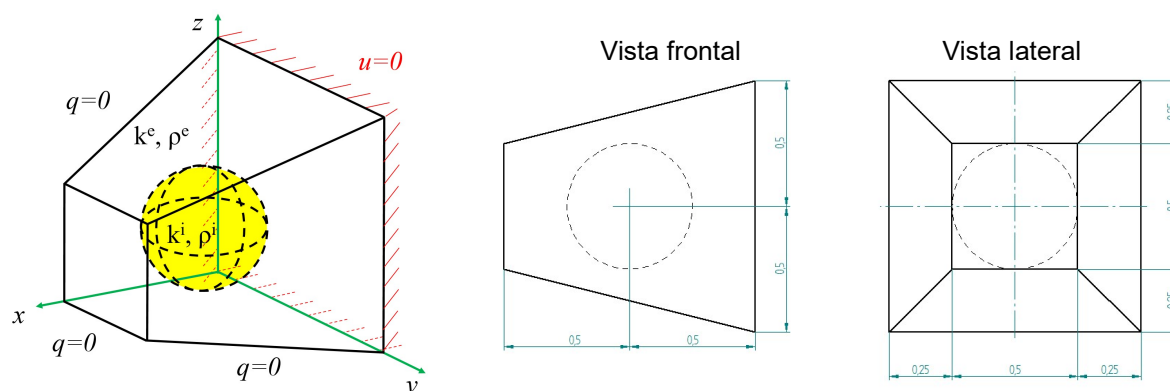


Percebe-se que os resultados foram bastante razoáveis, já que o comportamento do erro relativo foi similar para todas as simulações com diferentes propriedades; houve maior discrepância apenas na quinta frequência, para a relação  $k^i/\rho^i = 4$ . Apesar da mudança das propriedades  $k$  e  $\rho$ , não foi observada uma redução global significativa na precisão do modelo com o aumento da diferença de valores de propriedade, dentro do intervalo examinado nestes testes, o que é bastante positivo.

### 5.5.2 Exemplo 2

Neste segundo exemplo, considera-se a geometria de um tronco de uma pirâmide de base quadrada com uma esfera localizada no interior com propriedades distintas. Na Figura 93, observam-se a geometria, suas dimensões e as condições de contorno para o qual as frequências naturais são calculadas.

Figura 93: Características geométricas e condições de contorno impostas no exemplo 2 para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.



Assim como no exemplo anterior, os valores das propriedades físicas para a simulação foram:  $K^e=1$ ,  $\rho^e=1$ ,  $K^i=2$  e  $\rho^i=0,5$ . Três malhas distintas são consideradas, onde a quantidade de pontos nodais no contorno externo e interno é mantida e a quantidade de pontos base no interior sofre variação, a fim de avaliar sua importância na melhora dos resultados, como mostra a Tabela 25. Vale ressaltar que, devido ao fato de que a região interna é uma esfera, utilizou-se a malha 3, que é a mais refinada.

Para este exemplo, a solução de referência é uma malha do MEF com 48.260 elementos isoparamétricos lineares e com 69.373 pontos nodais.

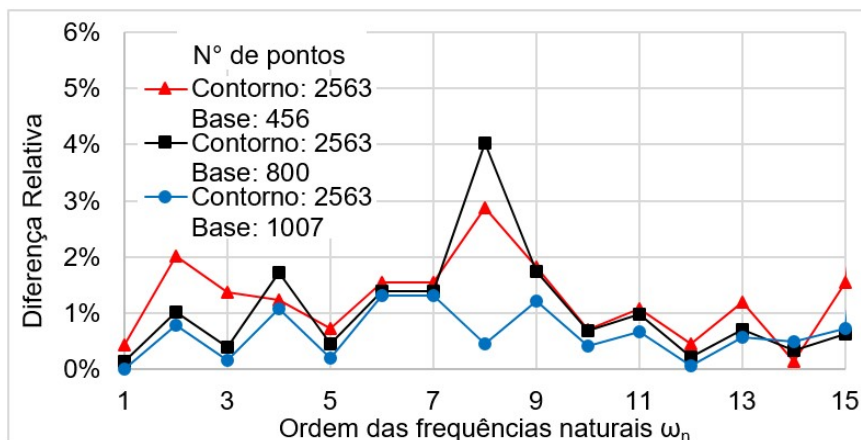
Tabela 25: Quantidade de pontos nodais em cada malha do 1° teste no exemplo 2 para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.

Malha	Elementos		Pontos		Pontos Base		Total de Pontos
	Contorno externo	Contorno interno	Contorno externo	Contorno interno	Externo ao subdomínio	Interno ao subdomínio	
3 (i)	2240	2542	1290	1273	254	202	3019
3 (ii)	2240	2542	1290	1273	429	371	3363
3 (iii)	2240	2542	1290	1273	565	442	3570

As frequências naturais são calculadas e os erros relativos são mostrados na Figura 94. Diferente do exemplo anterior, a inserção de pontos de base internos influenciou um pouco a diferença relativa.



Figura 94: Diferença relativa dos autovalores para malhas com diferentes quantidades de pontos base do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.



No próximo teste, o número de pontos nodais no contorno externo e interno é aumentado, considerando o número de pontos de base interna o mais numeroso, conforme a Tabela 26.

Tabela 26: Quantidade de pontos nodais em cada malha do 2° teste no exemplo 2 para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.

Malha	Elementos		Pontos		Pontos Base		Total de Pontos
	Contorno externo	Contorno interno	Contorno externo	Contorno interno	Externo ao subdomínio	Interno ao subdomínio	
1 (iii)	932	984	578	494	565	442	2079
2 (iii)	1948	1922	1134	963	565	442	3104
3 (iii)	2240	2542	1290	1273	565	442	3570

Assim como no exemplo anterior, a inserção de pontos nodais nos contornos foi eficaz para reduzir o erro relativo ao longo de todo o intervalo de frequências calculadas, como mostrado na Figura 95.

Figura 95: Diferença relativa dos autovalores para malhas com diferentes quantidades de pontos nos contornos do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.

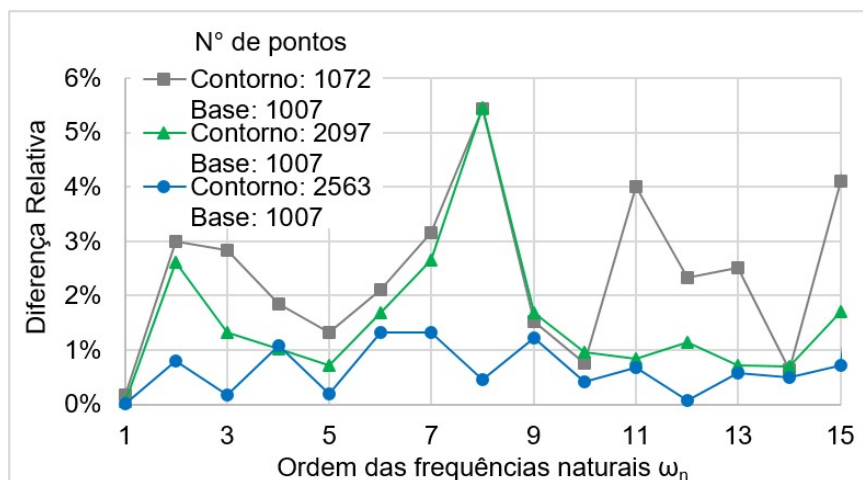
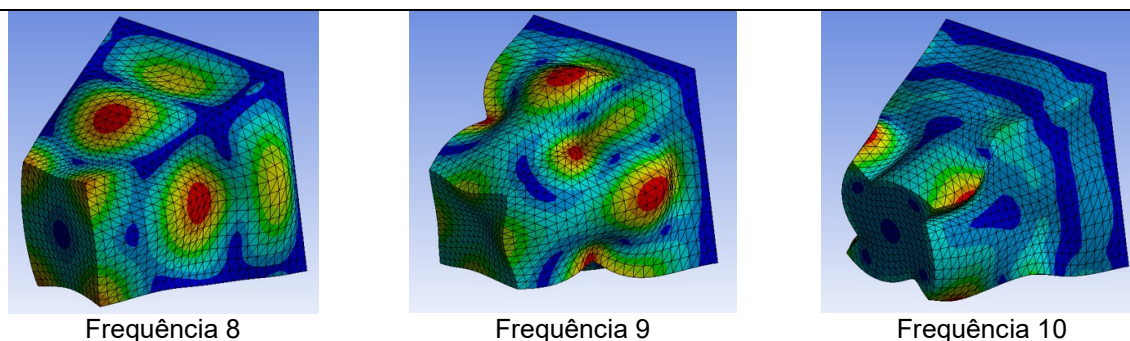


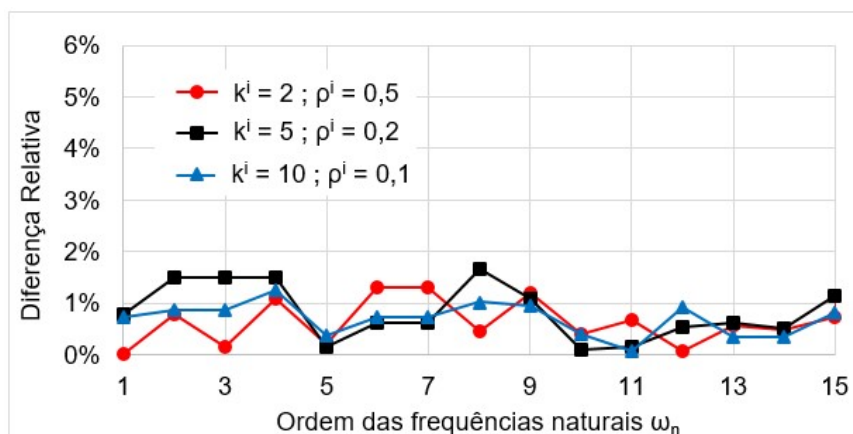
Figura 96: As frequências naturais 8, 9 e 10 obtidas pelo ANSYS como referência para o 2º exemplo do problema tridimensional com superposição.



Já neste exemplo, as frequências 8, 9 e 10 tiveram um comportamento diferente do esperado, como mostra a Figura 95: a frequência 8 teve uma diferença acima de 5% para as malhas 1 e 2, e as frequências 9 e 10 tiveram a diferença relativa da malha 1 melhor que a da malha 2. Neste caso, também se observa (Figura 96) que os módulos dessas frequências têm uma certa acentuação nas extremidades.

No último teste, a malha 3 (iii), a mais refinada da Tabela 26, foi tomada para avaliar o impacto numérico de uma mudança no valor das propriedades físicas. Além dos resultados já obtidos com  $k^i/\rho^i=4$ , as situações foram simuladas com  $k^i/\rho^i=25$  e  $k^i/\rho^i=100$ . Os gráficos das diferenças relativas são mostrados na Figura 97.

Figura 97: Diferença relativa dos autovalores para diferentes propriedades do exemplo 2 para problemas bidimensionais da Eq. de Helmholtz com TSD.



Pode-se observar que os resultados foram bastante razoáveis, uma vez que a maior diferença relativa foi de aproximadamente 1,5%, ocorrendo em frequências diferentes para cada propriedade. Nenhuma redução na precisão do modelo foi observada com o aumento nas diferenças de valores de propriedade, dentro da faixa examinada nestes testes.

Assim como no exemplo anterior, para o intervalo de frequências examinado, o desempenho foi praticamente o mesmo para todas as malhas empregadas.

Este exemplo confirma que a modelagem proposta atende aos problemas tridimensionais da Equação de Helmholtz com homogeneidade setorial. Nele, apesar de a geometria conter arestas agudas e obtusas, além da geometria interna esférica que dificulta a modelagem, os resultados apresentados mostraram-se razoáveis, com tendência à convergência com os resultados do MEF, se aumentado o número de pontos nodais.

## 5.6 Conclusões Parciais

Como ocorre em todo problema dinâmico tridimensional, o modelo proposto requer numerosos pontos de interpolação internos, especialmente se as condições de contorno envolverem a prescrição do potencial, o que elimina graus de liberdade no sistema, fundamentais no estudo vibracional. No entanto, mostrou-se convergente tanto para o aumento dos pontos interpolantes, quanto para o aumento do número de pontos nodais no contorno, sem tendência à instabilidade.

Ressalta-se que a solução do problema de autovalor permite uma precisa identificação da qualidade do modelo numérico proposto pela comparação direta das frequências com os valores dados por outros métodos. Assim, de acordo com os resultados apresentados, o acoplamento da TSD com o MECID foi bem-sucedido, envolvendo problemas setorialmente homogêneos tridimensionais.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Inicialmente, vale destacar que a metodologia de integração desenvolvida para solução de problemas de Laplace tridimensionais mostrou um desempenho satisfatório. A verificação da consistência desse modelo estacionário é primordial, pois tal modelo foi aqui enriquecido com as contribuições via MECID para transformação da integral de domínio relativa à inércia do sistema e na caracterização de setores homogêneos com diferentes propriedades, através da TSD, resolvendo-se assim os problemas de Helmholtz não homogêneos. Essa consistência na solução dos casos estacionários desassocia das bases fundamentais do MEC qualquer problema numérico encontrado nos casos dinâmicos.

Os resultados numéricos obtidos para os problemas de Helmholtz homogêneos tridimensionais também credenciam o modelo descrito, baseado na MECID, a técnica de interpolação direta com funções radiais do MEC. Somente tal teste já denota uma importante contribuição, pois há muito pouca informação sobre o comportamento das funções radiais em problema tridimensionais, particularmente quando empregadas no ambiente da MECDR.

Experimentos numéricos com MECID em duas dimensões mostraram que muitos tipos de funções de base radial podem ser implementados com sucesso; algumas, como a função radial simples, sempre apresentaram bom desempenho, mas a função de base radial de placa fina foi superior na maioria das aplicações (LOEFFLER et al. 2017c e LOEFFLER et al., 2018b).

Cabe ressaltar que o comportamento das funções radiais no MECID em três dimensões se modificou comparativamente aos casos bidimensionais. A função radial de placa fina continuou fornecendo os melhores resultados, seguido da função radial simples. Contudo, outras funções radiais, como a função radial cúbica, não apresentaram bons resultados, enquanto outras que haviam funcionado razoavelmente bem em duas dimensões não produziram sequer resultados.

Os testes aqui empreendidos também ratificaram que o modelo MECID requer numerosos pontos de base internos, especialmente se as condições de contorno envolvem prescrição do potencial, pois são eliminados graus de liberdade no sistema. No entanto, os modelos aqui examinados mostraram-se convergentes tanto

para o aumento dos pontos base quanto para o aumento do número de pontos nodais no contorno, sem qualquer tendência à instabilidade. Naturalmente, a precisão diminui à medida que aumenta a faixa de frequência calculada. Entretanto, dentro do espectro de frequências analisadas neste trabalho, a precisão foi bastante satisfatória, uma vez que a diferença relativa nos exemplos resolvidos pelo MEC e pelo MEF mostrou-se, em geral, muito pequena.

Ressalta-se que a solução do problema do autovalor para problemas bidimensionais e tridimensionais de Helmholtz permite uma clara e precisa identificação da precisão do modelo numérico proposto, uma vez que os valores obtidos no cálculo das frequências naturais indicam, inequivocamente, se a constituição das matrizes relacionadas à rigidez e inércia do sistema é satisfatória. Assim, de acordo com os resultados apresentados, o acoplamento da técnica de superposição de domínios e da técnica de interpolação direta com funções radiais do MEC foi bem-sucedido nesses testes, envolvendo problemas setorialmente homogêneos.

Examinando casos bidimensionais da Equação de Laplace, o nível de precisão da Técnica de Superposição de Domínio do MEC foi superior ao do método MEF, uma vez que um número muito menor de pontos nodais foi necessário para atingir os mesmos valores de potenciais e derivadas dos potenciais. O desempenho também foi satisfatório para os casos tridimensionais, a TSD pode ser utilizada em outros problemas regidos por equações diferenciais mais complexas, nas quais as propriedades físicas variam por setores.

A construção de uma matriz  $H$  do elemento de contorno completo da Técnica de Superposição de Domínio, possui o tamanho reduzido em comparação com a técnica clássica de sub-regiões, uma vez que as derivadas dos potenciais nas interfaces não figuram como valores desconhecidos no sistema final de equações.

A precisão dos modelos homogêneos por setores do MEC aqui empregados foi equivalente à do MEF, mesmo se utilizando de um número muito menor de pontos nodais. Isso pode ser justificado pelo fato de que, na TSD, todos os pontos nodais, tanto do contorno externo quanto da superposição, interagem entre si.

Pela comparação dos resultados com o MEF, o acoplamento da TSD com a MECID nos problemas de Helmholtz tridimensionais homogêneos por partes também foi bastante satisfatório, considerando as dificuldades numéricas existentes na simulação desses problemas.

Não houve perda significativa de precisão quando se ampliou a relação entre as propriedades do meio por partes e o ambiente circundante, mostrando robustez pelo modelo proposto, que acoplou duas novas técnicas do MEC. A falta de monotonicidade nas curvas de erro com frequência crescente é justificada pela realocação da posição dos pontos de base internos para cada nova malha, que pode ser mais ou menos sensível a uma certa configuração modal. O desempenho mostrado no acoplamento destas duas novas técnicas do MEC credita o modelo proposto a ser utilizado em problemas nos quais se deseja determinar a resposta dinâmica do tempo, como ocorre na análise de ondas acústicas.

Tais resultados favoráveis da TSD credenciam a técnica para uso futuro em problemas onde as propriedades físicas dos subdomínios variam internamente e avalizam sua aplicação a problemas governados por equações mais elaboradas, atuando em associação com a MECID. Uma sugestão interessante para posteriores trabalhos consiste na aplicação da formulação para problemas de vibração em meio infinito e semi-infinito, problemas de propagação de ondas acústicas e, em termos numéricos a implementação de elementos isoparamétricos de ordem superior para melhor representação do campo e da geometria dos problemas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ATLURI, S. N., ZHU, T. L. New Concepts in Meshless Methods. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 47, p. 537-556, 2000.

AZIZ, I.; SIRAJ-UL-ISLAM; SARLER, B. Wavelet collocation methods for the numerical solution of elliptic BV problems. **Applied Mathematical Modelling**, v. 37, Issue 3, p. 676-694, 2013.

AZIZ, I.; SIRAJ-UL-ISLAM. An Efficient Modified Haar Wavelet Collocation Method for Numerical Solution of Two-Dimensional Elliptic PDEs. **Differential Equations and Dynamical Systems**, v. 25, Issue 2, p. 347-360, 2017.

BARBOSA, J. P.; LOEFFLER, C. F. Application of Boundary Element Method superposition technique for solving natural frequencies in piecewise homogeneous domains, **Computers and Mathematics with Applications**, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.08.026>.

BARBOSA, J. P.; LOEFFLER, C. F.; LARA, L. O. C. The direct interpolation boundary element technique applied to three-dimensional scalar free vibration problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 108, p. 295–300, 2019.

BARCELOS, H. M.; LOEFFLER, C. F. The Direct Interpolation Boundary Element Method Applied to Smoothly Inhomogeneous Laplace's Problems, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 105, p. 155–164, 2019.

BARCELOS, H. M. **O Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta Aplicado à Solução de Problemas Escalares Funcionais em Duas dimensões**. 2019. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

BATHE, K. J.; **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**, Prentice Hall, 1982.

BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite Elements: An Introduction**, Volume 1. Prentice Hall, 1981.

BERTOLANI, M. N. **Funções de Base Radial de Suporte Global e Compacto na Aproximação de Superfícies**. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

BREBBIA, C. A. **The Boundary Element Method for Engineers**. London: Pentech Press, 1978.

BREBBIA, C. A.; DOMÍNGUEZ, J. **The Boundary Element Method – An Introductory**. Course. WIT Press, 1998.



BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering**. Berlin: Springer – Verlag, 1984.

BREBBIA, C. A.; WALKER, S. **Boundary Element Techniques in Engineering**. Boston, Massachusetts: Newnes-Butterworth, 1980.

BUENO, F. R.; PARTRIDGE, P. W. A Study Of Dual Reciprocity for Three Dimensional Models Applied to the Solution of Pennes Bioheat Equation, **In: Proceedings of XII BETEQ, Albuquerque and Aliabadi Edit.**, p. 182-189, 2011.

BUENO, F. R.; PARTRIDGE, P. W. An Inverse Model for Locating Skin Tumours in 3D Using The Genetic Algorithm with the Dual Reciprocity Boundary Element Method. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 10, p. 1061-1079, 2013.

BUHMANN, M. D. **Radial Basis Function: Theory and Implementations**. Cambridge University Press, 2003.

BUTKOV, E. **Mathematical Physics**. Addison-Wesley, 1973.

CHEN, C. S., BREBBIA, C. A., POWER, H. Dual Reciprocity Method using Compactly Supported Radial Basis Functions. **Commun. Numer. Meth. Engng**, v. 15, p.137-150, 1999.

CUROTTO, C. L. **Método dos elementos de contorno para elasticidade tridimensional**. 1981. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements in Dynamics**. Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, 1993

FEYEL, F. A multilevel finite element method (FE2) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua. **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, p. 3233–3244, 2003.

FLOATER, M., ISKE, A. Multistep Scattered Data Interpolation Using Compactly Supported Radial Basis Functions. **J. Comput. and Applied Mathematics**, v.73, p. 65–78, 1996.

GAO, X. W. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.26, p. 905–916, 2002.

GEERS, M. G. D. KOUZNETSOVA, V. G.; BREKELMANS, W. A. M. Multi-scale computational homogenization: Trends and challenges. **J. Comput. App. Math.**, v. 234, p. 2175–2182, 2010.

GODINHO, L.; TADEU, A. Acoustic analysis of heterogeneous domains coupling the BEM with Kansa's method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 36, p. 1014-1026, 2016.

GRAFF, K. F. **Wave Motion in Elastic Solids**. Reprint of the Oxford: The Clarendon Press, 1975.

HAMMER, P. C.; MARLOWE, O. J.; STROUD, A. H. Numerical Integration over Simplexes and Cones. **Math. Tables and other Aids to Comp**, v. 10, p. 130-137, 1956.

HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method**. Prentice-Hall, 1987.

HUSSAIN, F.; KARIM, M. S.; AHAMAD, R. Appropriate Gaussian quadrature formulae for triangles. **International Journal of Applied Mathematics and Computation**, v. 4(1), p. 24-38, 2012.

JIANG, X.; CHEN, W.; CHEN, C. S. Fast multipole accelerated boundary knot method for inhomogeneous Helmholtz problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.37, p. 1239-1243, 2013.

KITA, E.; KAMIYA, N. Subregion Boundary Element Method. **Mechanical Engineering Journal**, v. 37, p. 366-372, 1994.

KITA, E.; KAMIYA, N. Error estimation and adaptive mesh refinement in boundary element method, an overview. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 25, p. 479-495, 2001.

KREYSZIG, E. **Matemática Superior para Engenharia**. 9<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

KYTHER, O. J. **An Introduction to Boundary Element Methods**. Boca Raton: CRC Press, 1995.

LARA, L. O. C.; LOEFFLER, C. F.; BARBOSA, J. P.; MANSUR, W. J. The technique of domain superposition to solve piecewise homogeneous elastic problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 94, p. 1-9, 2018.

LEVEQUE, R. J. **Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems**. Cambridge University Press, 2002.

LI, K.; HUANG, Q. B.; MIAO, Y. Dual reciprocity hybrid boundary node method for acoustic eigenvalue problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 34, p. 359–368, 2010.

LIU, C.; CHEN L.; ZHAO, W.; CHEN, H. Shape optimization of sound barrier using an isogeometric fast multipole boundary element method in two dimensions. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 85, p. 142–157, 2017.

LOEFFLER, C. F.; MANSUR, W. J. Aplicação do Método dos Elementos de Contorno em Problemas de Calor Transiente com Sub-regiões Utilizando Soluções Fundamentais Independentes do Tempo. In: **VII Congresso Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia**, 1986, São Carlos. v. II. p. 1022-1048, 1986a

LOEFFLER, C. F.; MANSUR, W. J. Free Vibration in Bars and Membranes modeled by Boundary Element Method (in portuguese). **Revista Brasileira de Engenharia, Caderno de Engenharia Civil**, v. 4, n.2, p. 5-23, 1986b

LOEFFLER, C. F.; MANSUR, W. J. Analysis of Time Integration Schemes for Boundary Element Applications to Transient Wave Propagation Problems. **Boundary Element Techniques: Applications in Stress Analysis and Heat Transfer**, Editado por Computational Mechanics Pub., p. 105-124, 1987.

LOEFFLER, C. F. **Uma Formulação Alternativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicada a Problemas de Campo Escalar**. 1988. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

LOEFFLER, C. F. Modelos Mecânicos Derivados da Equação de Campo Escalar Generalizada. **Revista Militar de Ciência e Tecnologia**, v. 4, n° 1, p. 24-38, 1992.

LOEFFLER, C. F.; BARCELOS, H. M.; MANSUR, W.J.; BULCÃO A. Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method Using Direct Radial Basis Function Interpolation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 61, p. 218-225, 2015a.

LOEFFLER, C. F.; CRUZ, A. L.; BULCÃO, A. A Direct Use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 50, p. 97-108, 2015b.

LOEFFLER, C. F.; ANDRADE, A. J. C. Comparison Between the classical Sub Regions Technique and a new Approach with Domain Superposition to solve Sectorial Inhomogeneous Laplace's Problems. In: **XXXVII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering – Revista Interdisciplinar de pesquisa em Engenharia**, v. 1, p. 1-14, 2016.

LOEFFLER, C. F.; FROSSARD, A. L. C.; LARA, L. O. C.; BULCÃO, A. Comparação entre o MECDR e o MECID na Solução de Problemas de Autovalor. In: **XXXVII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - Revista Interdisciplinar De Pesquisa Em Engenharia**, V. 2(7), p. 46-62, 2016.

LOEFFLER, C. F.; MANSUR, W. J. Sub-regions without subdomain partition with boundary elements. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 71, p. 169-173, 2016.

LOEFFLER, C. F.; MANSUR, W. J. A Regularization Scheme Applied to the Direct Interpolation Boundary Element Technique with Radial Basis Functions for Solving Eigenvalue Problem. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 74, p. 14-18, 2017.

LOEFFLER, C. F.; LARA, L. O. C.; FROSSARD, A. L. C. Comparison between DIBEM and DRBEM for solving eigenvalue problems (in portuguese), **Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia (RIPE), Brasilia University**, v. 2, n. 7, p. 46-62, 2017a.

LOEFFLER, C. F.; PEREIRA, P. V. M.; LARA, L. O. C.; MANSUR, W. J. Comparison between the formulation of the boundary element method that uses fundamental solution dependent of frequency and the direct radial basis boundary element formulation for solution of Helmholtz problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 79, p. 81-87, 2017b.

LOEFFLER, C. F.; ZAMPROGNO, L.; MANSUR, W. J.; BULCÃO, A. Performance of Compact Radial Basis Functions in the Direct Interpolation Boundary Element Method for Solving Potential Problems. **Computational Modeling in Engineering and Sciences**, v. 113, n. 3, p. 367-387, 2017c.

LOEFFLER, C. F.; BARBOSA, J. P.; BARCELOS, H. M. Performance of BEM superposition technique for solving sectorially heterogeneous Laplace's problems with non-regular geometry. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 93, p.105-111, 2018a.

LOEFFLER, C. F.; FROSSARD, A. L. C.; LARA, L. O. C. Testing complete and compact radial basis functions for solution of eigenvalue problems using the boundary element method with direct integration. **International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics**, v. 19:2, P.117-128, 2018b.

LOULA, A. F. D.; FERNANDES, D. T. A quasi optimal Petrov–Galerkin method for Helmholtz problem. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, V. 38(3), p. 371-397, 2009.

LU, X.; WU, W. A new subregion boundary element technique based on the domain decomposition method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 29, p. 944–952, 2005.

LUIZ, T. F.; MIERS, L. S.; TELLES, J. C. F. An application of the OMLS method to domain integrals of potential problems in heterogeneous media. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 34, p. 920-926, 2010.

NARDINI, D.; BREBBIA, C. A. Transient Dynamic Analysis by the Boundary Element Method. in **C.A. Brebbia ed, Proceedings of BEM V**, p. 719-730, 1983.

PARTRIDGE, P. W.; BREBBIA, C. A.; WROBEL, L. C. **The Dual Reciprocity, Boundary Element Method**. U.K., Boston: Computational Mechanics Publications and Elsevier, 1992.

PAIVA, J. B.; VENTURINI, W.S. Alternative boundary element approach to compute efforts along zoned domain interfaces. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 12, p. 143-148, 1993.

PEREIRA, P. V. M. **Comparação entre duas formulações do Método dos Elementos de Contorno: a que faz Integração Direta e a que usa Solução Fundamental Dependente da Frequência em Problemas Bidimensionais Governados pela Equação de Helmholtz**. 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

PESSOLANI, R. V. An hp-adaptive hierarchical formulation for the boundary element method applied to elasticity in two dimensions. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences**, v. 24, n.1, p. 23-45, 2002.

PLUYMERS, B.; VAN HAL, B.; VANDEPITTE, D.; DESMET W. Trefftz-based methods for time-harmonic acoustics. **Arch Comput Methods Eng**, v. 14, n.4, p. 343-381, 2007.

PORTAPILA, M. I.; POWER, H. Iterative schemes for the solution of system of equations arising from the DRM in multi domain approach, and a comparative analysis of the performance of two different radial basis functions used in the interpolation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 29, Issue 2, p. 107-125, 2005.

RANGOGNI, R. The solution of the non-homogeneous Helmholtz equation by means of the boundary element method. **Applied Mathematical Modelling**, v. 8, p. 442-444, 1984.

REIS, A.; ALBUQUERQUE, E. L.; TORSANI L.; PALERMO JR. L.; SOLLERO P. Computation of moments and stresses in laminated composite plates by the Boundary Element Method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 35, p. 105-113, 2011.

REDDY, J. **An Introduction to the Finite Element Method**. 3<sup>rd</sup> edition. New York: McGraw-Hill, 2005.

SÁ, P. A. C. de. **Aplicação do Método dos elementos de contorno a problemas de campo**. 1980. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

SCHABACK, R. **A Practical Guide to Radial Basis Functions**, 2007. Disponível em: <<https://num.math.uni-goettingen.de/schaback/teaching/sc.pdf>>. acesso em: 25/10/2019.

SEZNEC, R. Diffraction of sound around barriers: Use of the boundary elements technique. **Journal of Sound and Vibration**, v. 73, p. 195-209, 1980.

SHAW, R. P. Green's functions for heterogeneous media potential problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, V. 13, p. 219-221, 1994.

SHAW, R. P. MANOLIS, G. D. A generalized Helmholtz equation fundamental solution using a conformal mapping and dependent variable transformation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 24, p. 177-188, 2000.

SNEDDON, I. N. **Elements of Partial Differential Equations**. Singapore: McGraw-Hill, 1957.

SOARES, D.; VON ESTORFF, O.; MANSUR W. J. Iterative coupling of BEM and FEM for nonlinear dynamic analyses. **Computational Mechanics**, v. 1, p. 67-73, 2004.

SOUZA, L. H. G.; APARECIDO, J. B. Numerical integration by Gauss-Legendre quadrature over triangular domains. **The International Congresso of Mechanical Engineering – COBEM**, ID 1614, 2007.

SOUZA, L. Z. **Utilização de Funções de Base Radial de Suporte Compacto na Modelagem Direta de Integrais de Domínio Com o Método dos Elementos de Contorno**. 2013. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

XIAOPING L.; WEI-LIANG W. A new sub-region Boundary Element Technique based on the Domain Decomposition Method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 29, p. 944–952, 2005.

WAGDY, M.; RASHED, Y. F. Boundary Element analysis of multi-thickness shear-deformable slabs without sub-regions. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 43, p. 86–94, 2014.

WANG, F. Z.; ZHENG, K. H. Analysis of the Boundary Knot Method for 3D Helmholtz-Type Equation. **Mathematical Problems in Engineering**, article ID 853252, 9 pages, 2014.

WENDLAND, H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. **Advances in Computational Mathematics**, v. 4, p. 389-396, 1995.

WILKINSON, J. H. **The Algebraic Eigenvalue Problem**. Clarendon Press: Oxford, 1965.

WROBEL, L. C.; ALIABADI, M. H. **The Boundary Element Method**. Chichester: Wiley, 2002.

WU, Z. Compactly supported positive definite radial functions. **Advances in Computational Mathematics**, v.4, p. 283-292, 1995.

## APÊNDICE A - Função de interpolação primitiva da função de placa fina para problemas bidimensionais

Apresenta-se a demonstração da função primitiva  $\psi(X^i; X)$ , obtida a partir da função radial  $F(X^i; X)$  para problemas bidimensionais.

As funções  $\psi(X^i; X)$  e  $F(X^i; X)$  possuem as seguintes relações:

$$F(X^i; X) = \nabla^2 \psi(X^i; X) \quad (\text{A.1})$$

Para a função radial é necessário definir o laplaciano para coordenadas polares:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (\text{A.2})$$

Considera-se que a função trabalhada não possui variação em  $\theta$ :

$$\frac{\partial^2 \psi(X^i; X)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi(X^i; X)}{\partial r} = F(X^i; X) \quad (\text{A.3})$$

Para utilização do MECID é necessário utilizar  $\eta(X^i; X)$ , que pode ser como:

$$\eta(X^i; X) = \frac{\partial \psi(X^i; X)}{\partial x_i} n_i \quad (\text{A.4})$$

Onde  $\eta(X^i; X)$  é o produto entre a normal ao elemento  $n_i$  e  $d\psi(X^i; X)/dx_i$ . Aplicando-se a regra da cadeia, a Equação (A.4) pode ser expressa por:

$$\eta(X^i; X) = \frac{\partial \psi(X^i; X)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} n_i \quad (\text{A.5})$$

Onde:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = r_{,i} = \frac{r_i}{r} \quad (\text{A.6})$$

Sendo a função radial utilizada para os problemas bidimensionais a função de placa fina:

$$F(X^i; X) = r^2 \ln r \quad (\text{A.7})$$

Utilizando-se a Equação (A.3) para a função radial, tem-se:

$$\frac{d^2 \psi(X^i; X)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi(X^i; X)}{dr} = r^2 \ln r \quad (\text{A.8})$$

Logo:

$$\frac{1}{dr} \left( r \frac{d\psi(X^i; X)}{dr} \right) = r^3 \ln r \quad (\text{A.9})$$

Integrando os dois lados da igualdade, tem-se:

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dr} = \frac{r^4}{16r} (4 \ln r - 1) + \frac{C_1}{r} \quad (\text{A.10})$$

Adotando-se  $C_1=0$  - pois  $\psi$  pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades - e integrando novamente a Equação (A.10), encontra-se:

$$\psi(X^i; X) = -\frac{r^4}{32} + \frac{r^4 \ln r}{16} \quad (\text{A.11})$$

Logo:

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dx_i} = \left( \frac{-4r^3}{32} + \frac{4r^3 \ln r}{16} + \frac{r^4}{16r} \right) \frac{r_i}{r} \quad (\text{A.12})$$

Pode-se escrever:

$$\frac{d\psi(X^i; X)}{dx_i} = \left( \frac{-1}{4} + \ln r \right) \frac{r^2}{4} r_i \quad (\text{A.13})$$

Consequentemente:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{-1}{4} + \ln r \right) \frac{r^2}{4} r_i n_i \quad (\text{A.14})$$



## APÊNDICE B - Função de interpolação primitiva para problemas tridimensionais

Apresenta-se a demonstração da função primitiva  $\psi(X^i; X)$ , obtida a partir da função radial  $F(X^i; X)$  para problemas tridimensionais.

As funções  $\psi(X^i; X)$  e  $F(X^i; X)$  possuem as seguintes relações:

$$F(X^i; X) = \nabla^2 \psi(X^i; X) \quad (\text{B.1})$$

Para a função radial em problemas tridimensionais, é necessário definir o laplaciano para coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \quad (\text{B.2})$$

Considera-se que a função trabalhada não possui variação em  $\theta$  e  $\phi$ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = F(X^i; X) \quad (\text{B.3})$$

Para utilização do MECID é necessário utilizar  $\eta(X^i; X)$ , que pode ser como:

$$\eta(X^i; X) = \frac{\partial \psi(X^i; X)}{\partial x_i} n_i \quad (\text{B.4})$$

Onde  $\eta(X^i; X)$  é o produto entre a normal ao elemento  $n_i$  e  $d\psi(X^i; X)/dx_i$ . Aplicando-se a regra da cadeia, a Equação (B.4) pode ser expressa por:

$$\eta(X^i; X) = \frac{\partial \psi(X^i; X)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} n_i \quad (\text{B.5})$$

Onde:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = r_{,i} n_i = \text{Cos}(r, n) \quad (\text{B.6})$$

Logo:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{\partial \psi(X^i; X)}{\partial r} \right) \text{Cos}(r, n) \quad (\text{B.7})$$

Dessa forma se determina  $\eta(X^i; X)$  para as funções radiais.

Funções Radiais Clássicas:

No caso da função radial de placa fina para os problemas tridimensionais:

$$F(X^i; X) = r^2 \ln r \quad (\text{B.8})$$

Aplicando-se a Equação (B.8) na Equação (B.3), tem-se:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = r^2 \ln r \quad (\text{B.9})$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = r^4 \ln r \quad (\text{B.10})$$

Integrando os dois lados da igualdade, tem-se:

$$r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{r^5}{25} (5 \ln r - 1) + C_1 \quad (\text{B.11})$$

Adotando-se  $C_1 = 0$ , pois  $\psi$  pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades, a equação pode ser expressa por:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{r^3}{25} (5 \ln r - 1) \quad (\text{B.12})$$

Logo:

$$\frac{d\psi}{dx_i} = \frac{d\psi}{dr} \cdot \frac{dr}{dx_i} = \left( \frac{r^3}{25} (5 \ln r - 1) \right) r_{,i} \quad (\text{B.13})$$

Substituindo-se a Equação (B.13) na Equação (B.4), chega-se a:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{r^3}{25} (5 \ln r - 1) \right) r_{,i} n_i \quad (\text{B.14})$$

Consequentemente:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{r^3}{25} (5 \ln r - 1) \right) \text{Cos}(r, n) \quad (\text{B.15})$$

No caso da função radial simples para os problemas tridimensionais:

$$F(X^i; X) = r \quad (\text{B.16})$$

Aplicando-se a Equação (B.16) na Equação (B.3), tem-se:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = r \quad (\text{B.17})$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = r^3 \quad (\text{B.18})$$

Integrando os dois lados da igualdade, tem-se:

$$r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{r^4}{4} + C_1 \quad (\text{B.19})$$

Adotando-se  $C_1=0$ , pois  $\psi$  pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades, a equação pode ser expressa por:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{r^2}{4} \quad (\text{B.20})$$

Logo:

$$\frac{d\psi}{dx_i} = \frac{d\psi}{dr} \cdot \frac{dr}{dx_i} = \left( \frac{r^2}{4} \right) r_{,i} \quad (\text{B.21})$$

Substituindo-se a Equação (B.21) na Equação (B.4), chega-se a:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{r^2}{4} \right) r_{,i} n_i \quad (\text{B.22})$$

Consequentemente:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{r^2}{4} \right) \text{Cos}(r, n) \quad (\text{B.23})$$

No caso da função radial cubico para os problemas tridimensionais:

$$F(X^i; X) = r^3 \quad (\text{B.24})$$

Aplicando-se a Equação (B.24) na Equação (B.3), tem-se:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = r^3 \quad (\text{B.25})$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = r^5 \quad (\text{B.26})$$

Integrando os dois lados da igualdade, tem-se:

$$r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{r^6}{6} + C_1 \quad (\text{B.27})$$

Adotando-se  $C_1=0$ , pois  $\psi$  pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades, a equação pode ser expressa por:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{r^4}{6} \quad (\text{B.28})$$

Logo:

$$\frac{d\psi}{dx_i} = \frac{d\psi}{dr} \cdot \frac{dr}{dx_i} = \left( \frac{r^4}{6} \right) r_{,i} \quad (\text{B.29})$$

Substituindo-se a Equação (B.29) na Equação (B.4), chega-se a:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{r^4}{6} \right) r_{,i} n_i \quad (\text{B.30})$$

Consequentemente:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{r^4}{6} \right) \text{Cos}(r, n) \quad (\text{B.31})$$

No caso da função radial ( $1+r$ ) para os problemas tridimensionais:

$$F(X^i; X) = 1 + r \quad (\text{B.32})$$

Aplicando-se a Equação (B.32) na Equação (B.3), tem-se:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 1 + r \quad (\text{B.33})$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = r^2 + r^3 \quad (\text{B.34})$$

Integrando os dois lados da igualdade, tem-se:

$$r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{r^3}{3} + \frac{r^4}{4} + C_1 \quad (\text{B.35})$$

Adotando-se  $C_1 = 0$ , pois  $\psi$  pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades, a equação pode ser expressa por:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{r}{3} + \frac{r^2}{4} \quad (\text{B.36})$$

Logo:

$$\frac{d\psi}{dx_i} = \frac{d\psi}{dr} \cdot \frac{dr}{dx_i} = \left( \frac{r}{3} + \frac{r^2}{4} \right) r_{,i} \quad (\text{B.37})$$

Substituindo-se a Equação (B.37) na Equação (B.4), chega-se a:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{r}{3} + \frac{r^2}{4} \right) r_{,i} n_i \quad (\text{B.38})$$

Consequentemente:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{r}{3} + \frac{r^2}{4} \right) \text{Cos}(r, n) \quad (\text{B.39})$$

No caso da função radial ( $1+r^3$ ) para os problemas tridimensionais:

$$F(X^i; X) = 1 + r^3 \quad (\text{B.40})$$

Aplicando-se a Equação (B.40) na Equação (B.3), tem-se:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 1 + r^3 \quad (\text{B.41})$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = r^2 + r^5 \quad (\text{B.42})$$

Integrando os dois lados da igualdade, tem-se:

$$r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{r^3}{3} + \frac{r^6}{6} + C_1 \quad (\text{B.43})$$

Adotando-se  $C_1=0$ , pois  $\psi$  pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades, a equação pode ser expressa por:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{r}{3} + \frac{r^4}{6} \quad (\text{B.44})$$

Logo:

$$\frac{d\psi}{dx_i} = \frac{d\psi}{dr} \cdot \frac{dr}{dx_i} = \left( \frac{r}{3} + \frac{r^4}{6} \right) r_{,i} \quad (\text{B.45})$$

Substituindo-se a Equação (B.45) na Equação (B.4), chega-se a:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{r}{3} + \frac{r^4}{6} \right) r_{,i} n_i \quad (\text{B.46})$$

Consequentemente:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{r}{3} + \frac{r^4}{6} \right) \text{Cos}(r, n) \quad (\text{B.47})$$

Funções Radiais de Wendland com Suporte Compacto:

No caso da função radial de Wendland (WL1) com suporte compacto para os problemas tridimensionais:

$$\Phi_{1,0} = \left[ 1 - \frac{r}{\delta} \right]_+^1 \quad (\text{B.48})$$

Onde a equação expandida é:

$$\Phi_{1,0} = 1 - \frac{r}{\delta} \quad (\text{B.49})$$

Aplicando-se a Equação (B.49) na Equação (B.3), tem-se:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 1 - \frac{r}{\delta} \quad (\text{B.50})$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = r^2 - \frac{r^3}{\delta} \quad (\text{B.51})$$

Integrando os dois lados da igualdade, tem-se:

$$r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4\delta} + C_1 \quad (\text{B.52})$$

Adotando-se  $C_1=0$ , pois  $\psi$  pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades, a equação pode ser expressa por:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{r}{3} - \frac{r^2}{4\delta} \quad (\text{B.53})$$

Logo:

$$\frac{d\psi}{dx_i} = \frac{d\psi}{dr} \cdot \frac{dr}{dx_i} = \left( \frac{r}{3} - \frac{r^2}{4\delta} \right) r_{,i} \quad (\text{B.54})$$

Substituindo-se a Equação (B.54) na Equação (B.4), chega-se a:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{r}{3} - \frac{r^2}{4\delta} \right) r_{,i} n_i \quad (\text{B.55})$$

Consequentemente:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{r}{3} - \frac{r^2}{4\delta} \right) \text{Cos}(r, n) \quad (\text{B.56})$$

No caso da função radial de Wendland (WL2) com suporte compacto para os problemas tridimensionais:

$$\Phi_{2,0} = \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^2 \quad (\text{B.57})$$

Onde a equação expandida é:

$$\Phi_{2,0} = 1 - \frac{2r}{\delta} + \frac{r^2}{\delta^2} \quad (\text{B.58})$$

Aplicando-se a Equação (B.58) na Equação (B.3), tem-se:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 1 - \frac{2r}{\delta} + \frac{r^2}{\delta^2} \quad (\text{B.59})$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = r^2 - \frac{2r^3}{\delta} + \frac{r^4}{\delta^2} \quad (\text{B.60})$$

Integrando os dois lados da igualdade, tem-se:

$$r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{2\delta} + \frac{r^5}{5\delta^2} + C_1 \quad (\text{B.61})$$

Adotando-se  $C_1=0$ , pois  $\psi$  pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades, a equação pode ser expressa por:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{r}{3} - \frac{r^2}{2\delta} + \frac{r^3}{5\delta^2} \quad (\text{B.62})$$

Logo:

$$\frac{d\psi}{dx_i} = \frac{d\psi}{dr} \cdot \frac{dr}{dx_i} = \left( \frac{r}{3} - \frac{r^2}{2\delta} + \frac{r^3}{5\delta^2} \right) r_{,i} \quad (\text{B.63})$$

Substituindo-se a Equação (B.63) na Equação (B.4), chega-se a:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{r}{3} - \frac{r^2}{2\delta} + \frac{r^3}{5\delta^2} \right) r_{,i} n_i \quad (\text{B.64})$$

Consequentemente:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{r}{3} - \frac{r^2}{2\delta} + \frac{r^3}{5\delta^2} \right) \text{Cos}(r, n) \quad (\text{B.65})$$



No caso da função radial de Wendland (WL3) com suporte compacto para os problemas tridimensionais:

$$\Phi_{3,0} = \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^3 \quad (\text{B.66})$$

Onde a equação expandida é:

$$\Phi_{3,0} = 1 - \frac{3r}{\delta} + \frac{3r^2}{\delta^2} - \frac{r^3}{\delta^3} \quad (\text{B.67})$$

Aplicando-se a Equação (B.67) na Equação (B.3), tem-se:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 1 - \frac{3r}{\delta} + \frac{3r^2}{\delta^2} - \frac{r^3}{\delta^3} \quad (\text{B.68})$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = r^2 - \frac{3r^3}{\delta} + \frac{3r^4}{\delta^2} - \frac{r^5}{\delta^3} \quad (\text{B.69})$$

Integrando os dois lados da igualdade, tem-se:

$$r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{r^3}{3} - \frac{3r^4}{4\delta} + \frac{3r^5}{5\delta^2} - \frac{r^6}{6\delta^3} + C_1 \quad (\text{B.70})$$

Adotando-se  $C_1=0$ , pois  $\psi$  pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades, a equação pode ser expressa por:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{r}{3} - \frac{3r^2}{4\delta} + \frac{3r^3}{5\delta^2} - \frac{r^4}{6\delta^3} \quad (\text{B.71})$$

Logo:

$$\frac{d\psi}{dx_i} = \frac{d\psi}{dr} \cdot \frac{dr}{dx_i} = \left( \frac{r}{3} - \frac{3r^2}{4\delta} + \frac{3r^3}{5\delta^2} - \frac{r^4}{6\delta^3} \right) r_{,i} \quad (\text{B.72})$$

Substituindo-se a Equação (B.72) na Equação (B.4), chega-se a:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{r}{3} - \frac{3r^2}{4\delta} + \frac{3r^3}{5\delta^2} - \frac{r^4}{6\delta^3} \right) r_{,i} n_i \quad (\text{B.73})$$

Consequentemente:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{r}{3} - \frac{3r^2}{4\delta} + \frac{3r^3}{5\delta^2} - \frac{r^4}{6\delta^3} \right) \text{Cos}(r, n) \quad (\text{B.74})$$

No caso da função radial de Wendland (WL4) com suporte compacto para os problemas tridimensionais:

$$\Phi_{3,1} = \left[ 1 - \frac{r}{\delta} \right]_+^4 \left[ 1 + \frac{4r}{\delta} \right] \quad (\text{B.75})$$

Onde a equação expandida é:

$$\Phi_{3,1} = 1 - \frac{10r^2}{\delta^2} + \frac{20r^3}{\delta^3} - \frac{15r^4}{\delta^4} + \frac{4r^5}{\delta^5} \quad (\text{B.76})$$

Aplicando-se a Equação (B.76) na Equação (B.3), tem-se:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 1 - \frac{10r^2}{\delta^2} + \frac{20r^3}{\delta^3} - \frac{15r^4}{\delta^4} + \frac{4r^5}{\delta^5} \quad (\text{B.77})$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = r^2 - \frac{10r^4}{\delta^2} + \frac{20r^5}{\delta^3} - \frac{15r^6}{\delta^4} + \frac{4r^7}{\delta^5} \quad (\text{B.78})$$

Integrando os dois lados da igualdade, tem-se:

$$r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{r^3}{3} - \frac{2r^5}{\delta^2} + \frac{10r^6}{3\delta^3} - \frac{15r^7}{7\delta^4} + \frac{r^8}{2\delta^5} + C_1 \quad (\text{B.79})$$

Adotando-se  $C_1=0$ , pois  $\psi$  pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades, a equação pode ser expressa por:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{r}{3} - \frac{2r^3}{\delta^2} + \frac{10r^4}{3\delta^3} - \frac{15r^5}{7\delta^4} + \frac{r^6}{2\delta^5} \quad (\text{B.80})$$

Logo:

$$\frac{d\psi}{dx_i} = \frac{d\psi}{dr} \cdot \frac{dr}{dx_i} = \left( \frac{r}{3} - \frac{2r^3}{\delta^2} + \frac{10r^4}{3\delta^3} - \frac{15r^5}{7\delta^4} + \frac{r^6}{2\delta^5} \right) r_{,i} \quad (\text{B.81})$$

Substituindo-se a Equação (B.81) na Equação (B.4), chega-se a:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{r}{3} - \frac{2r^3}{\delta^2} + \frac{10r^4}{3\delta^3} - \frac{15r^5}{7\delta^4} + \frac{r^6}{2\delta^5} \right) r_{,i} n_i \quad (\text{B.82})$$

Dessa forma temos:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{r}{3} - \frac{2r^3}{\delta^2} + \frac{10r^4}{3\delta^3} - \frac{15r^5}{7\delta^4} + \frac{r^6}{2\delta^5} \right) \text{Cos}(r, n) \quad (\text{B.83})$$

Funções Radiais de Wu com Suporte Compacto:

No caso da função radial de Wu (Wu) com suporte compacto para os problemas tridimensionais:

$$\Phi_{3,3} = \left[ 1 - \frac{r}{\delta} \right]_+^4 \left[ 16 + \frac{29r}{\delta} + \frac{20r^2}{\delta^2} + \frac{5r^3}{\delta^3} \right] \quad (\text{B.84})$$

Onde a equação expandida é:

$$\Phi_{3,3} = 16 - \frac{35r}{\delta} + \frac{35r^3}{\delta^3} - \frac{21r^5}{\delta^5} + \frac{5r^7}{\delta^7} \quad (\text{B.85})$$

Aplicando-se a Equação (B.85) na Equação (B.3), tem-se:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 16 - \frac{35r}{\delta} + \frac{35r^3}{\delta^3} - \frac{21r^5}{\delta^5} + \frac{5r^7}{\delta^7} \quad (\text{B.86})$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 16r^2 - \frac{35r^3}{\delta} + \frac{35r^5}{\delta^3} - \frac{21r^7}{\delta^5} + \frac{5r^9}{\delta^7} \quad (\text{B.87})$$

Integrando os dois lados da igualdade, tem-se:

$$r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{16r^3}{3} - \frac{35r^4}{4\delta} + \frac{35r^6}{6\delta^3} - \frac{21r^8}{8\delta^5} + \frac{r^{10}}{2\delta^7} + C_1 \quad (\text{B.88})$$

Adotando-se  $C_1=0$ , pois  $\psi$  pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades, a equação pode ser expressa por:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{16r}{3} - \frac{35r^2}{4\delta} + \frac{35r^4}{6\delta^3} - \frac{21r^6}{8\delta^5} + \frac{r^8}{2\delta^7} \quad (\text{B.89})$$

Logo:

$$\frac{d\psi}{dx_i} = \frac{d\psi}{dr} \cdot \frac{dr}{dx_i} = \left( \frac{16r}{3} - \frac{35r^2}{4\delta} + \frac{35r^4}{6\delta^3} - \frac{21r^6}{8\delta^5} + \frac{r^8}{2\delta^7} \right) r_{,i} \quad (\text{B.90})$$

Substituindo-se a Equação (B.90) na Equação (B.4), chega-se a:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{16r}{3} - \frac{35r^2}{4\delta} + \frac{35r^4}{6\delta^3} - \frac{21r^6}{8\delta^5} + \frac{r^8}{2\delta^7} \right) r_{,i} n_i \quad (\text{B.91})$$

Consequentemente:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{16r}{3} - \frac{35r^2}{4\delta} + \frac{35r^4}{6\delta^3} - \frac{21r^6}{8\delta^5} + \frac{r^8}{2\delta^7} \right) \text{Cos}(r, n) \quad (\text{B.92})$$

No caso da função radial de Wu (Wuc) com suporte compacto para os problemas tridimensionais:

$$\Phi_{2,3} = \left[ 1 - \frac{r}{\delta} \right]_+^5 \left[ 8 + \frac{40r}{\delta} + \frac{48r^2}{\delta^2} + \frac{25r^3}{\delta^3} + \frac{5r^4}{\delta^4} \right] \quad (\text{B.93})$$

Onde a equação expandida é:

$$\Phi_{2,3} = 8 - \frac{72r^2}{\delta^2} + \frac{105r^3}{\delta^3} - \frac{63r^5}{\delta^5} + \frac{27r^7}{\delta^7} - \frac{5r^9}{\delta^9} \quad (\text{B.94})$$

Aplicando-se a Equação (B.94) na Equação (B.3), tem-se:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 8 - \frac{72r^2}{\delta^2} + \frac{105r^3}{\delta^3} - \frac{63r^5}{\delta^5} + \frac{27r^7}{\delta^7} - \frac{5r^9}{\delta^9} \quad (\text{B.95})$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 8r^2 - \frac{72r^4}{\delta^2} + \frac{105r^5}{\delta^3} - \frac{63r^7}{\delta^5} + \frac{27r^9}{\delta^7} - \frac{5r^{11}}{\delta^9} \quad (\text{B.96})$$

Integrando os dois lados da igualdade, tem-se:

$$r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{8r^3}{3} - \frac{72r^5}{5\delta^2} + \frac{35r^6}{2\delta^3} - \frac{63r^8}{8\delta^5} + \frac{27r^{10}}{10\delta^7} - \frac{5r^{12}}{12\delta^9} + C_1 \quad (\text{B.97})$$

Adotando-se  $C_1=0$ , pois  $\psi$  pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades, a equação pode ser expressa por:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{8r}{3} - \frac{72r^3}{5\delta^2} + \frac{35r^4}{2\delta^3} - \frac{63r^6}{8\delta^5} + \frac{27r^8}{10\delta^7} - \frac{5r^{10}}{12\delta^9} \quad (\text{B.98})$$

Logo:

$$\frac{d\psi}{dx_i} = \frac{d\psi}{dr} \cdot \frac{dr}{dx_i} = \left( \frac{8r}{3} - \frac{72r^3}{5\delta^2} + \frac{35r^4}{2\delta^3} - \frac{63r^6}{8\delta^5} + \frac{27r^8}{10\delta^7} - \frac{5r^{10}}{12\delta^9} \right) r_{,i} \quad (\text{B.99})$$

Substituindo-se a Equação (B.99) na Equação (B.4), chega-se a:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{8r}{3} - \frac{72r^3}{5\delta^2} + \frac{35r^4}{2\delta^3} - \frac{63r^6}{8\delta^5} + \frac{27r^8}{10\delta^7} - \frac{5r^{10}}{12\delta^9} \right) r_{,i} n_i \quad (\text{B.100})$$

Consequentemente:

$$\eta(X^i; X) = \left( \frac{8r}{3} - \frac{72r^3}{5\delta^2} + \frac{35r^4}{2\delta^3} - \frac{63r^6}{8\delta^5} + \frac{27r^8}{10\delta^7} - \frac{5r^{10}}{12\delta^9} \right) \text{Cos}(r, n) \quad (\text{B.101})$$

## APÊNDICE C - Tensor de Galerkin para o problema bidimensional

Apresenta-se a demonstração do tensor de Galerkin para a solução fundamental de problemas da Equação de Laplace Bidimensionais.

$$u^*(\xi; X) = G_{,ii}^*(\xi; X) = -\frac{\ln r(\xi; X)}{2\pi} \quad (\text{C.1})$$

Da mesma forma que no Apêndice A, é necessário definir o laplaciano para coordenadas polares, considerando-se na função apenas a variação de  $r$ :

$$\frac{d^2 G^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG^*}{dr} = -\frac{1}{2\pi} \ln r \quad (\text{C.2})$$

Pode-se escrever:

$$\frac{1}{r} \frac{1}{dr} \left( r \frac{dG^*}{dr} \right) = -\frac{1}{2\pi} \ln r \quad (\text{C.3})$$

Logo:

$$\frac{1}{dr} \left( r \frac{dG^*}{dr} \right) = -\frac{r}{2\pi} \ln r \quad (\text{C.4})$$

Integrando os dois lados da igualdade, tem-se:

$$\frac{dG^*}{dr} = \frac{r}{8\pi} (1 - 2 \ln r) + C_1 \quad (\text{C.5})$$

Adotando-se  $C_1=0$  - pois  $G^*$  pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades - e integrando a Equação (C.5) chega-se a:

$$G^* = \frac{r^2}{8\pi} (1 - \ln r) + C_2 \quad (\text{C.6})$$

Adotando-se  $C_2=0$ , tem-se:

$$G^* = \frac{r^2}{8\pi} (1 - \ln r) \quad (\text{C.7})$$

Dessa forma, tem-se a derivada a primeira de  $G^*$ :

$$\frac{dG^*}{dx_i} = \left( \frac{r}{2\pi} (1 - 2 \ln r) \right) \frac{r_i}{r} \quad (\text{C.8})$$

Logo:

$$G_{,i}^* = \frac{dG^*}{dx_i} = \left( \frac{1}{4\pi} (0,5 - \ln r) \right) r_i \quad (\text{C.9})$$

Consequentemente:

$$G_{,i}^* n_i = \frac{1}{4\pi} (0,5 - \ln r) r_i n_i \quad (\text{C.10})$$

## APÊNDICE D - Tensor de Galerkin para o problema tridimensional

Apresenta-se a demonstração do tensor de Galerkin para a solução fundamental de problemas da Equação de Laplace Tridimensionais.

$$u^*(\xi; X) = G_{,ii}^*(\xi; X) = \frac{1}{4\pi r(\xi; X)} \quad (\text{D.1})$$

Da mesma forma que no Apêndice B, é necessário definir o laplaciano para coordenadas esféricas, considerando-se na função apenas a variação de  $r$ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{4\pi r} \quad (\text{D.2})$$

Pode-se escrever:

$$\frac{1}{dr} \left( r^2 \frac{dG^*}{dr} \right) = \frac{r}{4\pi} \quad (\text{D.3})$$

Integrando os dois lados da igualdade, tem-se:

$$\frac{dG^*}{dr} = \frac{1}{8\pi} + C_1 \quad (\text{D.4})$$

Adotando-se  $C_1=0$  - pois  $G^*$  pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades - e integrando a Equação (D.4) chega-se a:

$$G^* = \frac{r}{8\pi} + C_2 \quad (\text{D.5})$$

Adotando-se  $C_2=0$ , tem-se:

$$G^* = \frac{r}{8\pi} \quad (\text{D.6})$$

Dessa forma, tem-se a derivada a primeira de  $G^*$ :

$$G_{,i}^* = \frac{dG^*}{dx_i} = \left( \frac{1}{8\pi} \right) r_{,i} \quad (\text{D.7})$$

Consequentemente:

$$G_{,i}^* n_i = \frac{1}{8\pi} r_{,i} n_i \quad (\text{D.8})$$

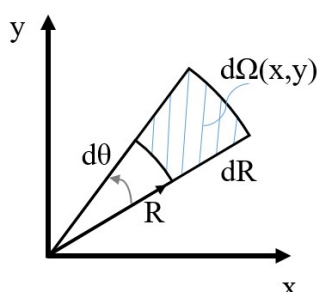
## APÊNDICE E - Método da Integração Radial Direto para problemas bidimensionais da Equação de Helmholtz

O método proposto neste Apêndice é uma abordagem alternativa à formulação do MECID com regularização, onde a parcela que retira a singularidade utiliza o Método da Integração Radial Direta (MIRD). Dessa forma, evita-se a utilização da função de base radial primitiva, conforme mostrado no Capítulo 3.

Sendo assim, a estrutura proposta entre MIRD e MECID é realizada pela solução de problemas de Helmholtz. Considera-se a resposta de frequência natural e também o problema de autovalor. As soluções de referência são fornecidas por soluções analíticas.

Em duas dimensões, o Método Integração Radial Direto (GAO, 2002), transforma a integração do domínio em duas operações parciais: uma varredura na direção radial e outra no sentido angular, conforme Figura 98. A última é expressa como uma integral de contorno após a mudança adequada das variáveis.

Figura 98: Transformação de domínio para radial e angular.



Na Equação (E.1), a forma integral de domínio típico do MEC pode ser escrito em coordenadas polares, onde  $R_\Gamma$  é o valor de  $R$  num ponto que pertença a  $\Gamma(x)$ .

$$\int_{\Omega} u(x)u^*(\xi; x)d\Omega = \int_{\Omega} \int_0^{R_\Gamma} u(R, \theta)u^*(\xi; R, \theta)RdRd\theta \quad (\text{E.1})$$

Considerando-se apenas a parcela de integração radial da equação acima, temos:

$$\int_0^{R_\Gamma} u(R, \theta)u^*(\xi; R, \theta)RdR = \int_0^{R_\Gamma} \xi p^\Gamma(R, \theta)dR = H^\Gamma(\theta) \quad (\text{E.2})$$

Se tal integral puder ser calculada, chega-se a:



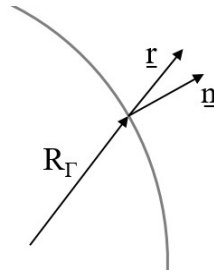
$$\int_{\Omega} u(x)u^*(\xi;x)d\Omega = \int_{\theta}^{\xi} H^{\Gamma}(\theta)d\theta \quad (E.3)$$

É possível escrever  $d\theta$  em função de  $d\Gamma(x)$ , de acordo com o procedimento MIRD:

$$d\theta = \frac{\underline{n} \cdot \underline{r}}{R_{\Gamma}} d\Gamma(x) \quad (E.4)$$

Onde  $\underline{n}$  e  $\underline{r}$  são vetores unitários, conforme e mostrado na Figura 99.

Figura 99:  $R_{\Gamma}$  e vetores unitários.



A combinação efetiva do MECID com o MIRD, aqui proposta, consiste em implementar a transformação de domínio integral em uma equação de contorno através da seguinte aproximação:

$${}^{\xi}H^{\Gamma}(\theta) = \int_0^{R_{\Gamma}} [u(R, \theta) - u(\xi; R, \theta)]u^*(\xi; R, \theta)RdR = {}^{\xi}\alpha^j \int_0^{R_{\Gamma}} F^j(x^j, x)RdR \quad (E.5)$$

Sendo:

$$u(R, \theta)u^*(\xi; R, \theta) = u(x)u^*(\xi; x) = {}^{\xi}\alpha^j F^j(x^j; x) \quad (E.6)$$

Pela expressão anterior, nota-se que, em princípio, o procedimento MECID é o mesmo implementado no Capítulo 3. Logo:

$$\underline{F}^j(x^j; x) {}^{\xi}\underline{\alpha}^j = \underline{\Lambda}(\xi; x)\underline{u}(x) \quad (E.7)$$

A Equação (E.8) é a forma matricial da Equação (E.7):

$$\begin{bmatrix} F(x^1; x^1) & F(x^2; x^1) & \cdots & F(x^n; x^1) \\ F(x^1; x^2) & F(x^2; x^2) & & F(x^n; x^2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ F(x^1; x^n) & F(x^2; x^n) & \cdots & F(x^n; x^n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{\xi}\alpha^1 \\ {}^{\xi}\alpha^2 \\ \vdots \\ {}^{\xi}\alpha^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(\xi; x^1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u(\xi; x^2) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u(\xi; x^n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x^1) \\ u(x^2) \\ \vdots \\ u(x^n) \end{bmatrix} \quad (E.8)$$

Sendo assim, podem-se determinar os coeficientes  ${}^{\xi}\alpha$ :

$${}^{\xi}\underline{\alpha} = \underline{F}^{-1} \underline{\Lambda} \underline{u} \quad (E.9)$$

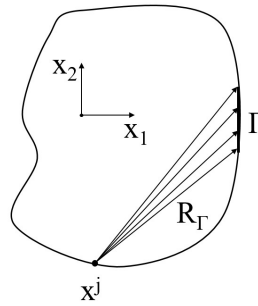
A matriz  $F$  depende somente de  $x^j$  e  $x$ . Uma vez definidos os pontos fontes e os pontos base de interpolação, define-se a matriz  $F$ .

A Equação (E.5) é feita a partir da adequada da caracterização de  $R$  em termos de  $r^j$ , que é a distância entre os pontos base de interpolação e os pontos nodais do contorno.

$$r^j(x^j; x) = \|x^j, x\| \quad (\text{E.10})$$

Variáveis potenciais são aproximadas por função de base radial. A integração ao longo da direção  $R$  pode ser feita facilmente, uma vez que a origem  $P$  ( $R$ ) é escolhida arbitrariamente. Assim, os pontos base  $x^j$  são tomados estrategicamente para realizar a integração dada pela Equação (E.5).

Figura 100: Integração ao longo da direção  $R$ .



Usando-se a função de base radial de placa fina, tem-se:

$$\begin{aligned} \xi H^\Gamma(\theta) &= \xi \alpha^j \int_0^{R_\Gamma} F^j(r^j) R dR = \xi \alpha^j \int_0^{R_\Gamma} F^j(R; \theta) R dR = \\ \xi \alpha^j \int_0^{R_\Gamma} (R^2 \ln R) R dR &= \xi \alpha^j \left\{ \frac{R_\Gamma^4}{16} (4 \ln R_\Gamma - 1) \right\} = \xi \alpha^j \{ N_{x_j}^\Gamma \} \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Assim, considerando-se um ponto de fonte geral, a seguinte equação integral pode ser escrita:

$$\begin{aligned} H_{\xi_1} u_1 + H_{\xi_2} u_2 + \dots + H_{\xi_n} u_n - G_{\xi_1} q_1 - G_{\xi_2} q_2 - \dots - G_{\xi_n} q_n = \\ \dots \int_{\Gamma_1} \xi H^{\Gamma_1}(\theta) \frac{r_1 \cdot n_1}{r_1} d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \xi H^{\Gamma_2}(\theta) \frac{r_2 \cdot n_2}{r_2} d\Gamma_2 + \dots + \int_{\Gamma_n} \xi H^{\Gamma_n}(\theta) \frac{r_n \cdot n_n}{r_n} d\Gamma_n = \\ \dots \int_{\Gamma_1} \left[ \xi \alpha^j \int_0^{R_{\Gamma_1}} (F^j) R dR \right] \frac{r_1 \cdot n_1}{r_1} d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \left[ \xi \alpha^j \int_0^{R_{\Gamma_2}} (F^j) R dR \right] \frac{r_2 \cdot n_2}{r_2} d\Gamma_2 + \\ \dots + \int_{\Gamma_n} \left[ \xi \alpha^j \int_0^{R_{\Gamma_n}} (F^j) R dR \right] \frac{r_n \cdot n_n}{r_n} d\Gamma_n = \xi \alpha^1 N_1 + \xi \alpha^2 N_2 + \dots + \xi \alpha^n N_n \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Para o MIRD bidimensional, utilizaram-se diversas funções de base radial, da mesma forma que no MECID tridimensional.

### Funções Clássicas de Base Radial:

No caso da função radial, a de placa fina, ( $F^j = R^2 \ln R$ ):

$$\int (R^2 \ln R) R dR = \frac{R^4}{16} ((4 \ln R) - 1) \quad (\text{E.13})$$

Para o caso da função radial simples ( $F^j = R$ ):

$$\int (R) R dR = \frac{R^3}{3} \quad (\text{E.14})$$

Para o caso da função radial cúbica ( $F^j = R^3$ ):

$$\int (R^3) R dR = \frac{R^5}{5} \quad (\text{E.15})$$

Para o caso da função radial ( $F^j = 1 + R$ ):

$$\int (1 + R) R dR = \frac{R^2}{2} + \frac{R^3}{3} \quad (\text{E.16})$$

### Funções Radiais de Wendland com Suporte Compacto:

No caso da função radial de Wendland (WL1) com suporte compacto:

$$\Phi_{1,0} = \left[ 1 - \frac{r}{\delta} \right]_+ \quad (\text{E.17})$$

$$\int \left( 1 - \frac{R}{\delta} \right) R dR = \frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3\delta} \quad (\text{E.18})$$

No caso da função radial de Wendland (WL2) com suporte compacto:

$$\Phi_{2,0} = \left[ 1 - \frac{r}{\delta} \right]_+^2 \quad (\text{E.19})$$

$$\int \left( 1 - \frac{2R}{\delta} + \frac{R^2}{\delta^2} \right) R dR = \frac{R^2}{2} - \frac{2R^3}{3\delta} + \frac{R^4}{4\delta^2} \quad (\text{E.20})$$

No caso da função radial de Wendland (WL3) com suporte compacto:

$$\Phi_{3,0} = \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^3 \quad (\text{E.21})$$

$$\int \left(1 - \frac{3R}{\delta} + \frac{3R^2}{\delta^2} - \frac{R^3}{\delta^3}\right) R dR = \frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{\delta} + \frac{3R^4}{4\delta^2} - \frac{R^5}{5\delta^3} \quad (\text{E.22})$$

No caso da função radial de Wendland (WL4) com suporte compacto:

$$\Phi_{3,1} = \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[1 + \frac{4r}{\delta}\right] \quad (\text{E.23})$$

$$\int \left(1 - \frac{10R^2}{\delta^2} + \frac{20R^3}{\delta^3} - \frac{15R^4}{\delta^4} + \frac{4R^5}{\delta^5}\right) R dR = \frac{R^2}{2} - \frac{5R^4}{2\delta^2} + \frac{4R^5}{\delta^3} - \frac{5R^6}{2\delta^4} + \frac{4R^7}{\delta^5} \quad (\text{E.24})$$

#### Funções Radiais de Wu com Suporte Compacto:

No caso da função radial de Wu (Wu) com suporte compacto:

$$\Phi_{3,3} = \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16 + \frac{29r}{\delta} + \frac{20r^2}{\delta^2} + \frac{5r^3}{\delta^3}\right] \quad (\text{E.25})$$

$$\int \left(16 - \frac{35R}{\delta} + \frac{35R^3}{\delta^3} - \frac{21R^5}{\delta^5} + \frac{5R^7}{\delta^7}\right) R dR = \left(8R^2 - \frac{35R^3}{3\delta} + \frac{35R^5}{5\delta^3} - \frac{21R^7}{7\delta^5} + \frac{5R^9}{9\delta^7}\right) \quad (\text{E.26})$$

No caso da função radial de Wu (Wuc) com suporte compacto:

$$\Phi_{2,3} = \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^5 \left[8 + \frac{40r}{\delta} + \frac{48r^2}{\delta^2} + \frac{25r^3}{\delta^3} + \frac{5r^4}{\delta^4}\right] \quad (\text{E.27})$$

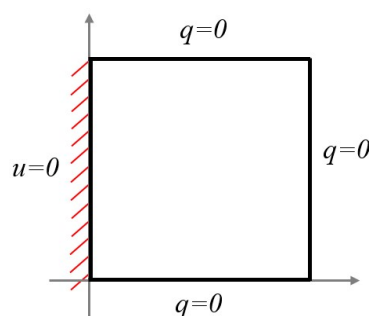
$$\int \left(8 - \frac{72R^2}{\delta^2} + \frac{105R^3}{\delta^3} - \frac{63R^5}{\delta^5} + \frac{27R^7}{\delta^7} - \frac{5R^9}{\delta^9}\right) R dR = 4R^2 - \frac{72R^4}{4\delta^2} + \frac{105R^5}{5\delta^3} - \frac{63R^7}{7\delta^5} + \frac{27R^9}{9\delta^7} - \frac{5R^{11}}{11\delta^9} \quad (\text{E.28})$$

## APÊNDICE F - Simulações do Método da Integração Radial Direto para problemas bidimensionais da Equação de Helmholtz

### Exemplo 1: Barra Engastada

No primeiro exemplo, calculam-se as frequências naturais de uma barra quadrada com tamanho unitário engastada em uma de suas laterais, conforme mostra a Figura 101.

Figura 101: Geometria e condições de contorno para o exemplo de uma barra engastada bidimensional homogêneo.



Para simplificar o problema, a velocidade de propagação da onda foi considerada unitária. Os valores analíticos das frequências naturais são dados pela seguinte equação:

$$\omega_{mn} = \frac{\pi}{2} \sqrt{4m^2 + 4n^2 - 4n + 1} \quad (\text{F.1})$$

Dessa forma, na Tabela 27, têm-se as 15 primeiras frequências naturais calculadas analiticamente para o problema.

Tabela 27: Resultado analítico das frequências naturais para o exemplo de uma barra engastada bidimensional homogêneo.

	<b>Analítico</b>		<b>Analítico</b>		<b>Analítico</b>
1	1,570796	6	7,853982	11	10,53722
2	3,512407	7	7,853982	12	10,99557
3	4,712389	8	8,458997	13	11,43557
4	5,663587	9	9,554781	14	12,26831
5	6,476559	10	10,05800	15	12,66416

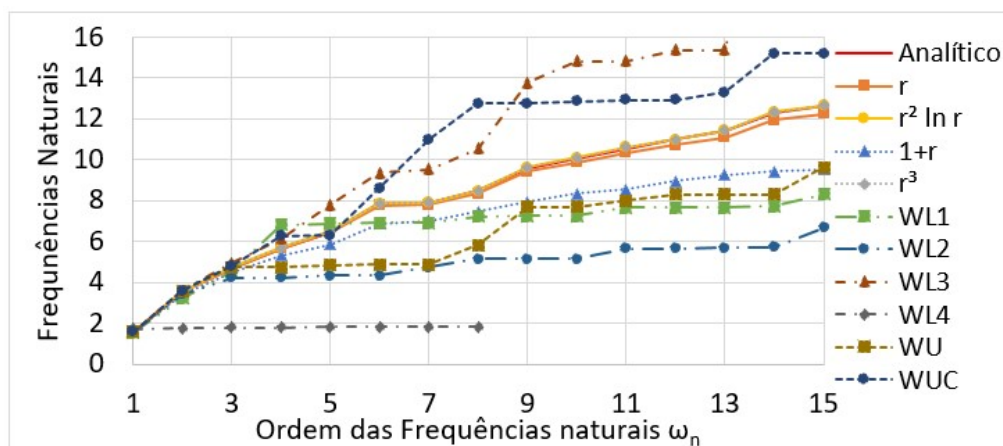
Neste trabalho, utilizam-se duas malhas com diferentes quantidades de pontos de contorno e pontos de interpolação, como mostra a Tabela 28.

Tabela 28: Quantidade de pontos nodais e elementos em cada malha para o exemplo de uma barra engastada bidimensional homogêneo.

	<b>Malha 1</b>	<b>Malha 2</b>
Elementos	80	160
Pontos no contorno	84	164
Pontos internos	81	144
<b>Total pontos</b>	<b>165</b>	<b>308</b>

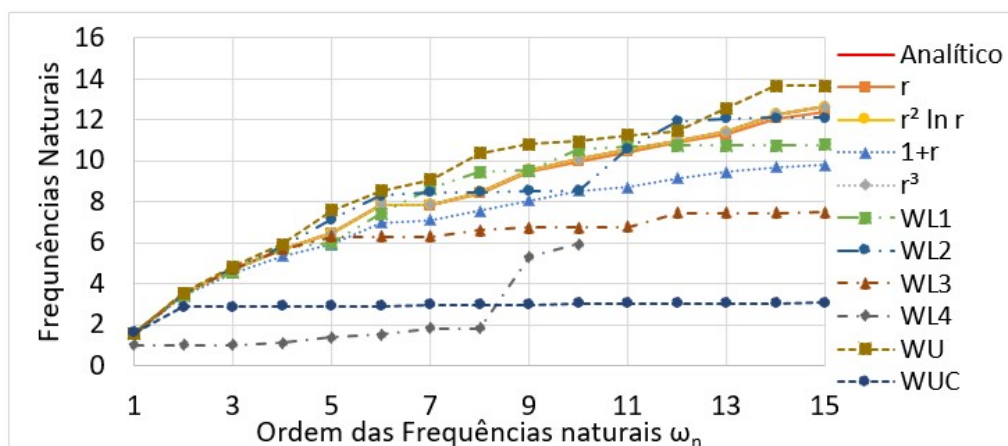
São apresentadas, na Figura 102, as 15 primeiras frequências naturais da malha 1 para cada função de base radial.

Figura 102: Resultado das frequências naturais das diferentes funções radiais para a malha 1 do exemplo de uma barra engastada bidimensional homogêneo.



Já na Figura 103, as frequências naturais apresentadas referem-se à malha 2, também para cada função de base radial.

Figura 103: Resultado das frequências naturais das diferentes funções radiais para a malha 2 do exemplo de uma barra engastada bidimensional homogêneo.

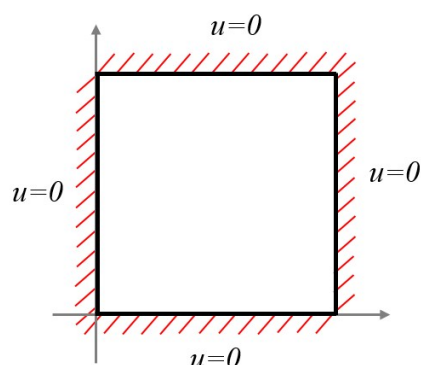


Observa-se, nas Figuras 102 e 103, que a função radial clássica ( $1+r$ ) e as funções de base radial compacta não têm um bom desempenho para o problema proposto. Mesmo com o refinamento da malha, os valores das frequências naturais não ficam próximos ao analítico.

## Exemplo 2: Membrana Fixa

As frequências naturais calculadas para o segundo exemplo são as de uma membrana quadrada fixa com tamanho unitário, conforme Figura 104.

Figura 104: Geometria e condições de contorno para o exemplo de membrana fixa bidimensional homogêneo.



Da mesma forma que no exemplo anterior, a velocidade de propagação da onda é considerada unitária. Para o exemplo proposto, os valores das frequências naturais são dados pela seguinte equação, onde o comprimento de cada lateral é um:

$$\omega_{mn} = \frac{\pi\sqrt{m^2 + n^2}}{L}, \quad L = 1 \quad (\text{F.2})$$

Dessa forma, o valor das 15 primeiras frequências é mostrado na Tabela 29.

Tabela 29: Resultado analítico das frequências naturais para o exemplo de membrana fixa bidimensional homogêneo.

	<b>Analítico</b>		<b>Analítico</b>		<b>Analítico</b>
1	4,442883	6	9,934588	11	13,32865
2	7,024815	7	11,32717	12	14,04963
3	7,024815	8	11,32717	13	14,04963
4	8,885766	9	12,95312	14	15,70796
5	9,934588	10	12,95312	15	15,70796

Como a geometria é a mesma do exemplo anterior, mudando-se apenas as condições de contorno dos problemas, as duas malhas testadas neste exemplo são a mesma do exemplo anterior, conforme mostrado na Tabela 30.

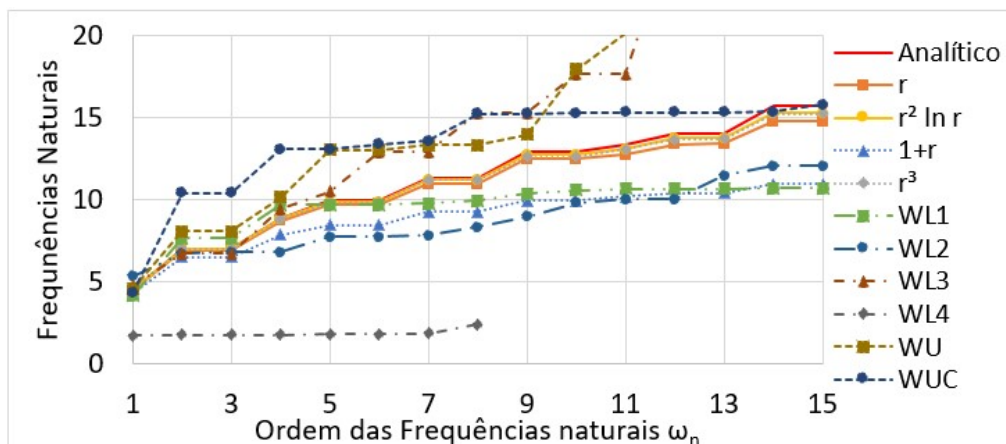
Tabela 30: Quantidade de pontos nodais e elementos em cada malha para o exemplo de membrana fixa bidimensional homogêneo.

	<b>Malha 1</b>	<b>Malha 2</b>
Elementos	80	160
Pontos no contorno	84	164
Pontos internos	81	144
<b>Total pontos</b>	<b>165</b>	<b>308</b>

Na Figura 105, observam-se as 15 primeiras frequências naturais da malha 1 para cada função de base radial.

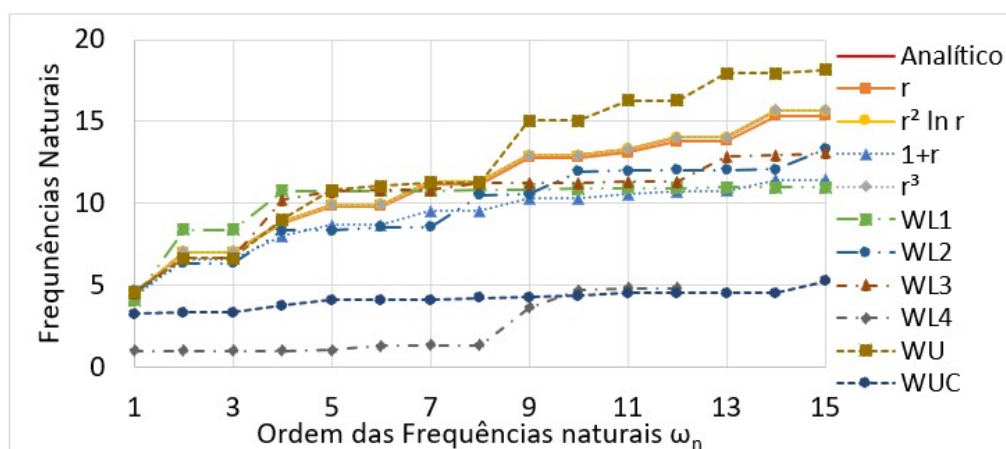


Figura 105: Resultado das frequências naturais das diferentes funções radiais para a malha 1 do exemplo de uma membrana fixa bidimensional homogêneo.



Na malha 2, os resultados das frequências naturais para cada função de base radial são mostrados na Figura 106.

Figura 106: Resultado das frequências naturais das diferentes funções radiais para a malha 1 do exemplo de uma membrana fixa bidimensional homogêneo.



Da mesma forma que no exemplo anterior, para o MECID com o método de integração radial direto, apenas as funções de base radial clássica simples, cúbica e de placa fina têm o mesmo comportamento do resultado analítico, conforme mostrado nas Figuras 105 e 106.

## APÊNDICE G - Afastamento de nós múltiplos para elementos lineares em problemas tridimensionais

Nas arestas do contorno externo das geometrias tridimensionais, pode-se notar que os termos integrais são os mesmos da integração singular para o elemento do outro plano, diferenciando-se em relação ao nó referente.

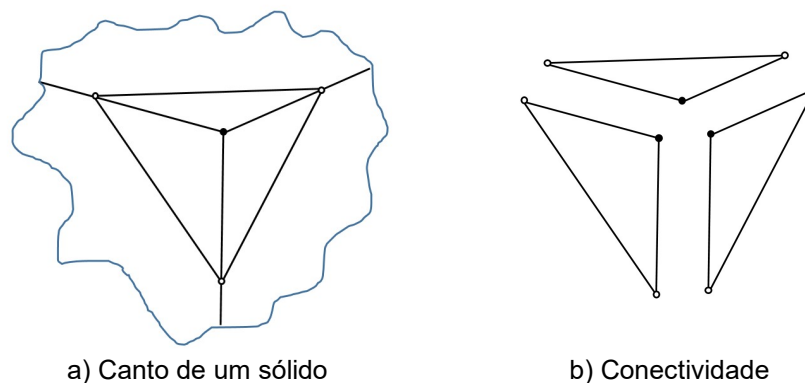
Os elementos com interpolação linear apresentam dificuldades funcionais que não se apresentam nos elementos de extrapolação constante. Conforme já mencionado, pelo fato de os nós funcionais se localizarem nas extremidades, o mesmo nó funcional pertenceria a dois ou mais elementos adjacentes. Naturalmente, se esses elementos apresentassem condições de contorno diferentes, o mesmo nó precisaria ter duas ou mais condições diferentes prescritas e o uso do chamado nó múltiplo seria indispensável, ou seja, seria necessário o uso de mais de um nó nas posições onde há mudança de condições de contorno: um nó para cada condição de contorno em cada elemento, ambos com a mesma posição geométrica.

O uso dos nós múltiplos soluciona o problema de condições de contorno diferentes para elementos adjacentes, mas pode introduzir outro problema, a singularidade do sistema linear da solução. Quando ambos os nós múltiplos têm condições de contorno do tipo potencial prescrito (condição de contorno essencial), as linhas do sistema linear originadas por esses nós são iguais, pelo fato de eles terem a mesma posição geométrica e a solução fundamental ser de base radial. Assim, a matriz  $G$  teria duas linhas iguais, enquanto o vetor dos termos independentes seria diferente para essas duas linhas, devido aos valores introduzidos pelo  $c(\xi)$  na matriz  $H$ , e tornaria a solução do sistema impossível. Esse fenômeno não ocorre para condições de contorno de tipos diferentes, pois as linhas não serão iguais, ou ambas de fluxo prescrito (condição de contorno natural), pois a matriz  $H$  é alterada para cada linha pelo  $c(\xi)$ .

Uma solução para a singularidade criada pelo uso dos nós múltiplos é o afastamento desses nós. Ambos os nós são distanciados de sua posição original, de modo a não possuírem mais as mesmas coordenadas. Distanciamentos muito pequenos podem persistir com a singularidade, e deslocamentos muito grandes podem

descaracterizar o problema. Deve-se, portanto, buscar um distanciamento ideal através de testes.

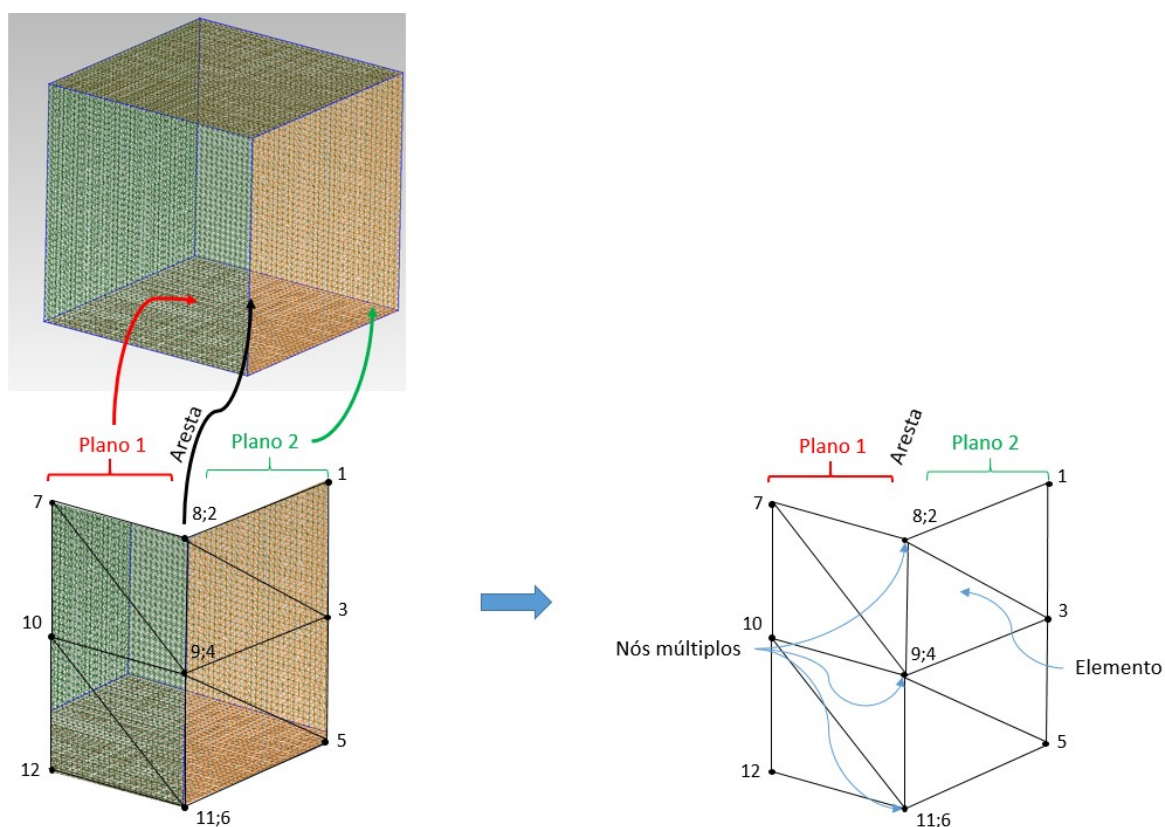
Figura 107: Conceito de nó múltiplo para elementos triangulares lineares



O nó múltiplo consiste em ter vários nós do contorno com exatamente as mesmas coordenadas, como mostra a Figura 107 (a). No entanto, cada ponto do nó múltiplo só pertence a um determinado elemento conforme Figura 107 (b).

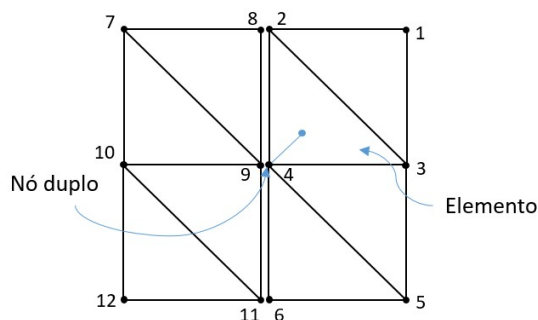
Nos problemas tridimensionais, as geometrias possuem os nós múltiplos nas arestas dos contornos, onde os planos se encontram (para o caso de dois planos que têm nós múltiplos), conforme se observa na Figura 108.

Figura 108: Aresta que possui os nós múltiplos nas geometrias tridimensionais.



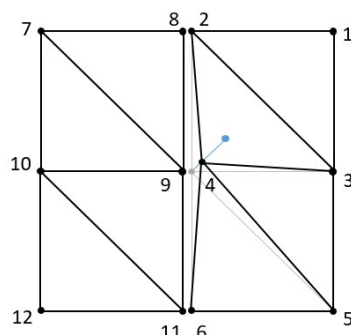
A fim de uma melhor visualização, a Figura 109 representa os nós múltiplos de uma aresta. Sendo um elemento que possui um nó múltiplo, inicialmente se determina o centroide desse elemento.

Figura 109: indicação do centroide do elemento que contém um nó duplo.



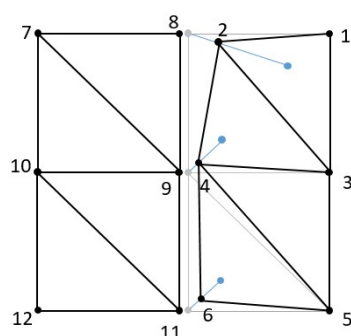
O nó múltiplo se deslocado a uma porcentagem da distância do seu ponto original até o centroide, conforme Figura 110.

Figura 110: Deslocamento do nó duplo em direção ao centroide do elemento.



Os procedimentos são realizados até que todos os nós múltiplos não coincidam mais com nenhum outro nó. Observa-se que não é necessário deslocar todos os pontos, pois, após o deslocamento de um ponto coincidente, o outro deve permanecer na sua posição original, já que os demais pontos foram deslocados, conforme Figura 111.

Figura 111: Deslocamento de vários nós duplos em direção ao centroide do elemento e a permanência dos demais na sua posição de origem.



## APÊNDICE H - Simulações do afastamento de nós múltiplos para elementos lineares em problemas tridimensionais.

As simulações propostas neste apêndice têm a finalidade de verificar qual a melhor distância de afastamento dos nós múltiplos. Utilizam-se dois exemplos para cálculo das frequências naturais de problemas de Helmholtz: um homogêneo e o outro com homogeneidade setorial. Em ambos os casos, a função radial utilizada foi a de placa fina.

Para se determinar o melhor afastamento dos nós múltiplos, quatro situações de “Dist” (Porcentagem da distância do ponto deslocado até o centroide do elemento ao qual ele faz parte): 10%, 5%, 1% e 0,5%.

### Exemplo 1: Cubo Homogêneo

No primeiro caso foi utilizado o exemplo 1 do problema tridimensional homogêneo da Equação de Helmholtz do Capítulo 3 conforme Figura 112, utilizando-se as malhas 1, 2 e 3 com mesmo número de pontos base interno, conforme Tabela 31.

Figura 112: Geometria e condições de contorno para o exemplo tridimensional do cubo homogêneo da Eq. de Helmholtz.

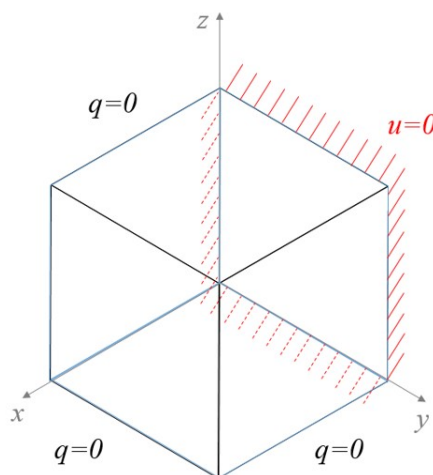


Tabela 31: Quantidade de pontos nodais e elementos em cada malha do exemplo tridimensional homogêneo da Eq. de Helmholtz.

Malhas	Elementos	Pontos no Contorno	Pontos base interno	Total de Pontos
Malha 1	432	294	728	1022
Malha 2	768	486	728	1214
Malha 3	2352	1350	728	2078

Nas Figuras 113, 114 e 115, temos os gráficos das diferenças relativas dos autovalores para as 3 malhas.

Figura 113: Diferença relativa dos autovalores para malha 1 com diferentes distâncias do deslocamento dos nós múltiplos para o problema tridimensional homogêneo da Eq. de Helmholtz.

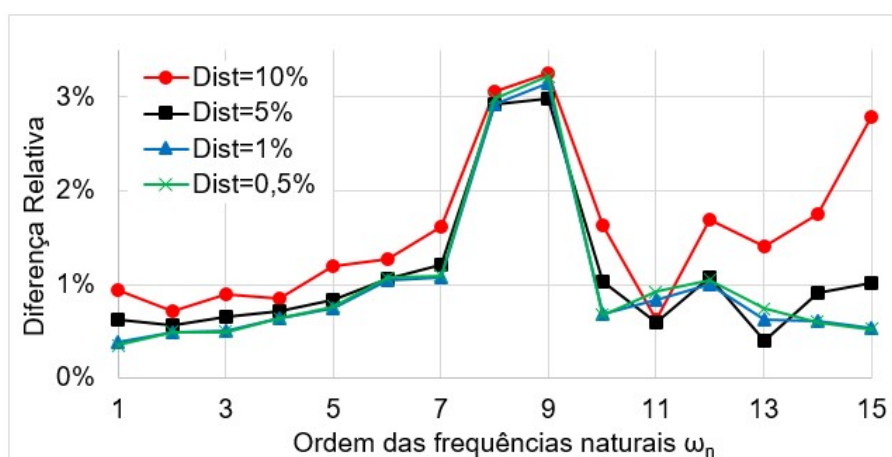


Figura 114: Diferença relativa dos autovalores para malha 2 com diferentes distâncias do deslocamento dos nós múltiplos para o problema tridimensional homogêneo da Eq. de Helmholtz.

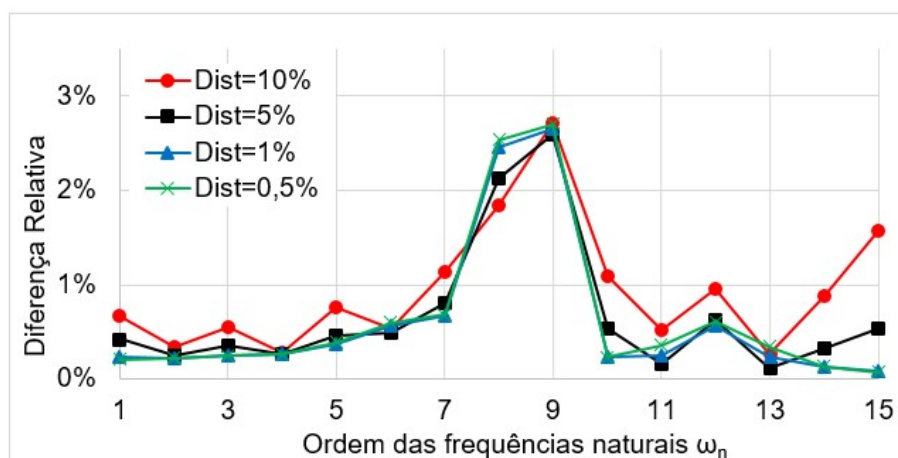
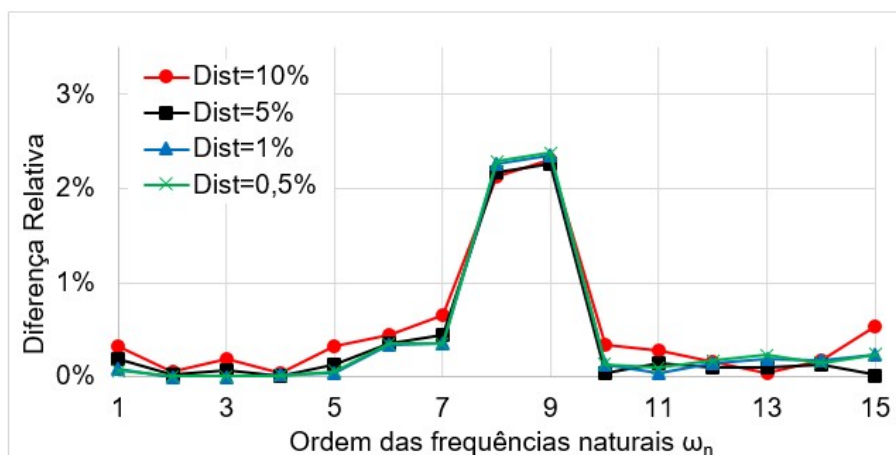


Figura 115: Diferença relativa dos autovalores para malha 3 com diferentes distâncias do deslocamento dos nós múltiplos para o problema tridimensional homogêneo da Eq. de Helmholtz.



Conforme se observa nas Figuras 113, 114 e 115, na maioria das frequências os resultados são melhores para os Dist=1% e Dist=0,5 %, até a sétima frequência, havendo instabilidade entre os Dist para as demais frequências.

### Exemplo 2: Cubo com inserção de um cubo interno com propriedades diferentes.

Já no segundo exemplo, é utilizada a malha 3(iii), a mais refinada do exemplo 1, onde é aplicada a TSD tridimensional na Equação de Helmholtz do Capítulo 5, como mostram a Figura 116 e a Tabela 32.

Figura 116: Características geométricas e condições de contorno impostas no exemplo para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.

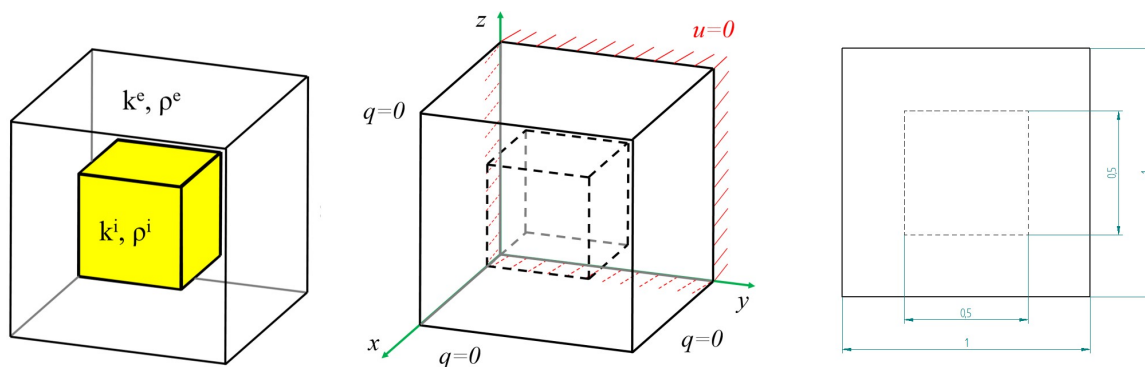


Tabela 32: Quantidade de pontos nodais e elementos para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD.

Malha	Elementos	Pontos no contorno externo	Pontos no contorno interno	Pontos base externos ao subdomínio	Pontos base internos ao subdomínio	Total
Malha 3	2240	1240	1273	565	442	3520

Nesse caso, analisa-se a variação das propriedades da região interna da geometria. Nas Figuras 117, 118 e 119, observa-se a diferença relativa dos autovalores para os diferentes valores Dist.

Figura 117: Diferença relativa dos autovalores para malha 3 com diferentes distâncias do deslocamento dos nós múltiplos para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD com propriedade interna  $k^2=2$  e  $\rho^2=0,5$ .

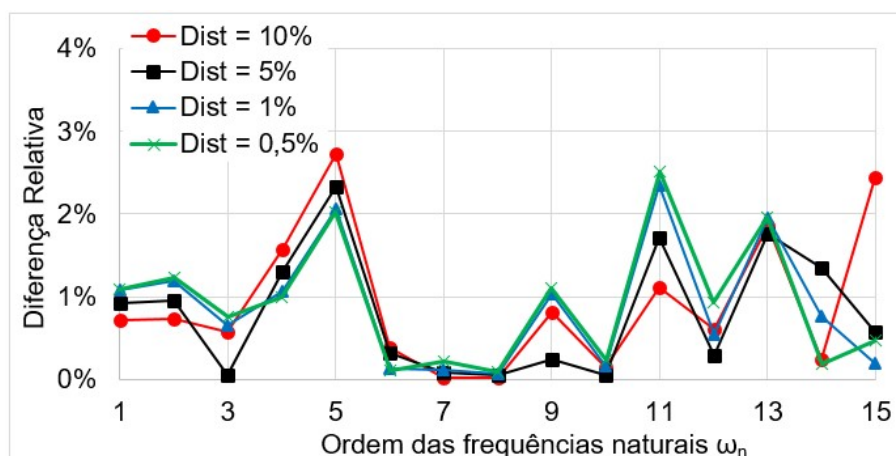


Figura 118: Diferença relativa dos autovalores para malha 3 com diferentes distâncias do deslocamento dos nós múltiplos para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD com propriedade interna  $k^2=5$  e  $\rho^2=0,2$ .

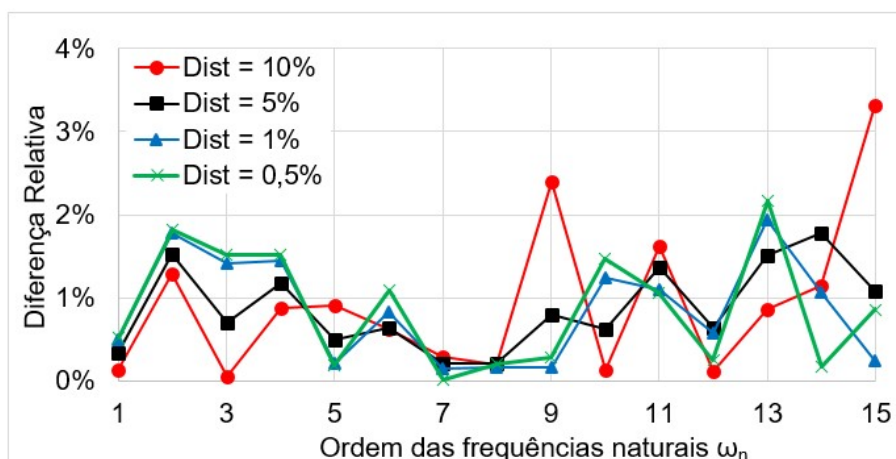
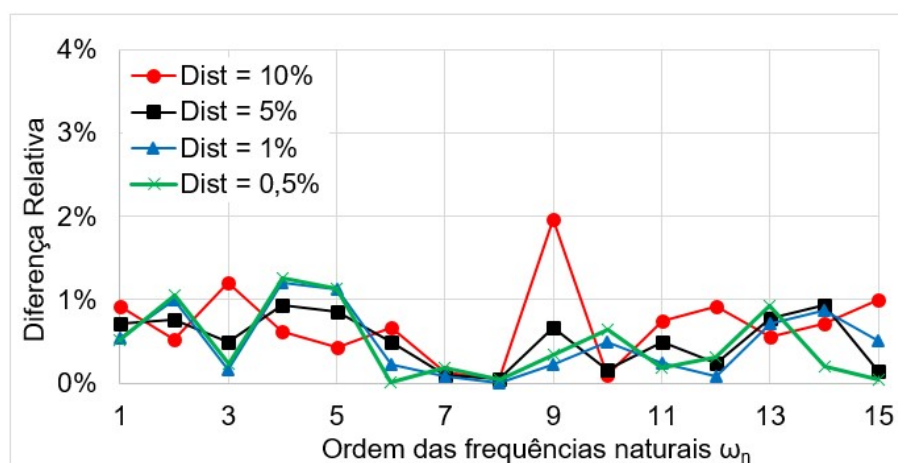




Figura 119: Diferença relativa dos autovalores para malha 3 com diferentes distâncias do deslocamento dos nós múltiplos para o problema tridimensional da Eq. de Helmholtz com TSD com propriedade interna  $k^2=10$  e  $\rho^2=0,1$ .



A influência do “Dist” para os casos onde se aplica a Técnica de Superposição de Domínio é mais irregular do que no caso homogêneo. O Dist=5% é o que obteve um melhor desempenho médio, considerando-se os problemas homogêneos e setorialmente homogêneos. Dessa forma, nas simulações realizadas neste trabalho, utiliza-se o Dist=5% nos exemplos tridimensionais do capítulo 3 e 5.

## Anexo A - Pontos de Gauss bidimensional

Tabela com os 25 pesos e pontos de Gauss, usados para integração numérica dos problemas tridimensional do MEC, nos quais se utilizam coordenadas triangulares. Os pesos e pontos de Gauss foram gerados pelo MATLAB, valendo-se do código livre simplexquad.

### Coordenadas triangulares e pesos dos pontos de integração.

	$w_l$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
1	0,001865552166878	0,093912797333780	0,901464914201174
2	0,008755499182164	0,290249932250793	0,695464273353636
3	0,017341506431366	0,535660544808143	0,437974810247386
4	0,019804083132047	0,764365329781281	0,198013417873608
5	0,011465080351592	0,915147549378727	0,039809857051469
6	0,003768701695328	0,075796602735062	0,901464914201174
7	0,017687452110483	0,234259434638082	0,695464273353636
8	0,035032504503372	0,432329252970360	0,437974810247386
9	0,040007287386160	0,616915871859003	0,198013417873608
10	0,023161221929498	0,738611533396152	0,039809857051469
11	0,004479406797281	0,049267542899413	0,901464914201174
12	0,021022967487322	0,152267863323182	0,695464273353636
13	0,041638965215195	0,281012594876307	0,437974810247386
14	0,047551897057954	0,400993291063196	0,198013417873608
15	0,027528985664470	0,480095071474266	0,039809857051469
16	0,003768701695328	0,022738483063764	0,901464914201174
17	0,017687452110483	0,070276292008282	0,695464273353636
18	0,035032504503372	0,129695936782254	0,437974810247386
19	0,040007287386160	0,185070710267390	0,198013417873608
20	0,023161221929498	0,221578609552379	0,039809857051469
21	0,001865552166878	0,004622288465046	0,901464914201174
22	0,008755499182164	0,014285794395571	0,695464273353636
23	0,017341506431366	0,026364644944471	0,437974810247386
24	0,019804083132047	0,037621252345111	0,198013417873608
25	0,011465080351592	0,045042593569804	0,039809857051469