

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

CARLOS FELIPE DOS SANTOS PEREIRA

**ESPALHAMENTO DE SÓLITONS TOPOLÓGICOS E
O MÉTODO DE COORDENADAS COLETIVAS.**

**VITÓRIA
2019**

CARLOS FELIPE DOS SANTOS PEREIRA

**ESPALHAMENTO DE SÓLITONS TOPOLÓGICOS E
O MÉTODO DE COORDENADAS COLETIVAS.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física, na área de concentração de Física Teórica

ORIENTADOR: DR. CLISTHENIS PONCE CONSTANTINIDIS

Vitória

16 de dezembro de 2019

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

P436e Pereira, Carlos Felipe dos Santos, 1994-
Espalhamento de sólitons topológicos e o método de coordenadas coletivas. / Carlos Felipe dos Santos Pereira. - 2019. 112 f. : il.

Orientador: Clisthenis Ponce Constantinidis.

Coorientador: Gabriel Luchini Martins.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Sólitons. 2. Espalhamento de sólitons. 3. Coordenadas coletivas. I. Constantinidis, Clisthenis Ponce. II. Martins, Gabriel Luchini. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 53



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

" Espalhamento de Sólitos Topológicos e o Método de Coordenadas Coletivas "

Carlos Felipe dos Santos Pereira

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada por:

Prof. Dr. José Francisco Gomes
(IFT/UNESP)

Prof. Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis
(Orientador/PPGFis)

Prof. Dr. Flávio Gimenes Alvarenga
(PPGEnFis/UFES)

Prof. Dr. Gabriel Luchini Martins
(Coorientador/PPGFis)

Vitória-ES, 16 de dezembro de 2019.

Dedico a minha mãe Delizete Santos, meu pai Luiz Carlos e a minha avó Aldenize Santos Motta.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por me permitir chegar até aqui.

Aos meus pais, Delizete Santos e Luiz Carlos, por sempre terem proporcionado o ambiente adequado, para que tanto eu quanto os meus irmãos pudéssemos nos dedicar aos estudos.

Aos meus queridos irmãos, Jean Carlos, Geiza Santos, Jeferson Luiz e Eberty André, minhas cunhadas Cíntia Rosa, Regiane Almeida e cunhado Romério, pelo apoio incondicional e pelos finais de semanas de descontração.

Um agradecimento especial aos meus queridos e amados sobrinhos, João Gabriel, Helena e Maria Luiza.

Aos colegas da pós Nathália, Luciano Fiorini, Jenifer Geribola, Daniel Coura, Breno Barreto, Sara Caroline, Felipe Santos, Isaac Torres, Ingrid, Igor Badke, Olesya Galkina, Deivid Wilson, Felipe Maia, Lucas Carvalho, Erik Fissicaro, Flaviana, Alef e Joycel.

Aos parceiros Yago (o méstre), Eddy Chirinos, Érico Leite (chefinho), Ricardo Vitória, Pedro Otávio (Pedrinho), Ébano Vitor (cuquinha), Cássio Cecato (mãozinha), Mateus Bergami (o danoninho), Bernardo Amorim e Etevaldo(nossa raposa) pela amizade sincera e inúmeros cafezinhos.

Ao amigo Tadeu Miguel pela parceria e cooperação que foi estabelecida nesses últimos anos e muitos cafezinhos com física.

Ao professor Ulysses Camara pela ajuda na integrais elípticas.

Aos meus orientadores Clisthenis Ponce e Gabriel Luchini pela parceria estabelecida e por me aceitarem no grupo.

Ao professor José Francisco Gomes por aceita participar da banca de defesa.

Ao secretario da Pós J. Carlos Coutinho, por nos salvar sempre que precisamos e pelas conversas agradáveis.

Finalmente, agradeço à FAPES pelo auxílio financeiro.

“Em ciência, o crédito vai para o homem que convence o mundo de uma ideia, não para aquele que a teve primeiro.”

(William Osler)

Resumo

Nesta dissertação, além de uma pequena revisão de soluções do tipo sólitons em teorias de campo em $(1 + 1)$ dimensões, faremos um estudo detalhado do espalhamento de sólitons para os modelos sine-Gordon, ϕ^4 e ϕ^6 utilizando o método das coordenadas coletivas. Propomos algumas considerações que visam explicar efeitos que surgem durante o espalhamento e que, apesar da intensa atividade nessa área na busca de explicar esses efeitos, ainda não haviam sido feitas.

Palavras-chave: Sólitons, Espalhamento de Sólitons e Coordenadas Coletivas.

Abstract

In this dissertation, besides a brief review on soliton type solutions in (1+1) dimensional field theories, we will provide a detailed study of solitons scattering for sine-Gordon, ϕ^4 and ϕ^6 models making use of collective coordinates. We propose some considerations that aim to explain effects which arise during the scattering and, despite the intense activity in this area in order to explain these effects, had not yet been taken into consideration.

Keywords: Soliton, scattering of soliton and collective coordinates.

Lista de Figuras

3.1	O kink curva azul e antikink curva vermelha.	12
3.2	Densidade de energia.	13
3.3	Solução KK	17
3.4	Solução de sóliton/anti-sóliton, perfil 3D.	19
3.5	Na figura da esquerda observamos o configuração depois da colisão, já na direita antes da colisão.	19
3.6	Na figura da esquerda temos o respirador em 3D para uma dada frequência, já na direita uma projeção da mesma para certos instantes de tempo.	20
3.7	Vácuos do potencial.	21
3.8	O kink curva azul e antikink curva vermelha, a velocidade usada foi $v = 0.6$	23
3.9	Separação entre centro de massa do kink e anti-kink.	25
3.10	Configurações de campo.	27
4.1	Comportamento do termo cinético e potencial para o espalhamento sóliton/sóliton.	30
4.2	Comparação entre a solução exata e aproximada.	32
4.3	Comparação entre a solução exata e coordenadas coletivas KK.	33
4.4	Comportamento do termo cinético e potencial para o espalhamento de Sóliton/Anti-Sóliton.	34
4.5	Comparação entre a solução exata e coordenadas coletivas KAK.	35
5.1	Funções $g(a)$ e $V(a)$ com $\lambda = 2$ e $m = \sqrt{2}$ (e portanto $\eta = 1$ e $\sigma = 1$).	42
5.2	O movimento do <i>kink</i> é definido pela função $a(t)$. A coordenada $\xi(t)$ leva à mudanças na velocidade de translação desse objeto.	44
5.3	A dinâmica dos sólitons via coordenadas coletivas encontrada em [1]. A velocidade relativa inicial é $v = 0.251$	47
5.4	A dinâmica dos sólitons via coordenadas coletivas encontrada em [1]. A velocidade relativa inicial é $v = 0.8$ que mostraria um espalhamento , não é possível observar nesse modelo.	47

5.5	Para valores acima da velocidade crítica, o método de coordenadas coletivas prevê corretamente a natureza elástica das colisões. Observe que para a velocidade de $v = 0.8$ a velocidade final dos sólitons está razoavelmente de acordo com a simulação numérica.	49
5.6	Para valores acima da velocidade crítica, o método de coordenadas coletivas prevê corretamente a natureza elástica das colisões, porém, em alguns casos como este no qual $v = 0.4$, a velocidade final dos sólitons está em bastante desacordo com o resultado observado na simulação numérica.	49
5.7	Espalhamento dos sólitons com velocidades iniciais $v = 0.36$. Aqui o movimento previsto pela coordenada coletiva indica uma possível janela de ressonância que não é observada na simulação, mas o comportamento mais geral do espalhamento está de acordo, com algum erro na velocidade final dos sólitons.	50
5.8	Espalhamento dos sólitons com velocidades próxima à velocidade crítica, $v = 0.25727$. O padrão de comportamento apresentado pela coordenada coletiva $a(t)$, no que se refere à posição relativa dos sólitons, coincide em boa aproximação com aquele observado na simulação numérica.	50
5.9	Espalhamento de sólitons com velocidades abaixo da velocidade, $v = 0.25727$. O comportamento apresentado pelas coordenadas coletivas funciona bem quando comparado com a simulação numérica.	51
5.10	Espalhamento de sólitons com abaixo da velocidade, $v = 0.25727$. Aqui temos que as coordenadas coletivas funciona em um primeiro instante mas não é capaz de prever o estado armadilhado como mostra a simulação.	51
6.1	Comportamento da métrica $g(a)$ do espaço dos parâmetros e do potencial efetivo $V(a)$. Essas funções definem a lagrangiana de uma partícula cuja posição é dada por $a(t)$	54
6.2	Dinâmica do processo de colisão <i>kink/kink</i> . Quanto maior a velocidade relativa, mais os sólitons conseguem se aproximar, mas sempre aparece uma força de repulsão mútua. A posição inicial nos três experimentos numéricos foi tomada como $a = 5$, e as velocidades como $v = 0.3$, $v = 0.5$ e $v = 0.7$	55
6.3	Comportamento da dinâmica <i>kink/kink</i> para várias velocidade, em que se observa que quando ocorre o aumento na velocidade inicial do espalhamento o tempo de colisão diminui.	56
6.4	Os dois cenários possíveis de espalhamento de sóliton/anti-sóliton do modelo ϕ^6 não são simétricos quanto ao potencial relativo às perturbações.	57

6.5	Dados sobre o espalhamento <i>kink/anti-kink</i> . Neste processo os sólitons têm velocidade inicial $v = 0.2$	58
6.6	Dados sobre o espalhamento <i>kink/anti-kink</i> aonde os sólitons têm velocidade inicial $v = 0.5$	59
6.7	Dados sobre o espalhamento <i>anti-kink/kink</i> aonde os sólitons têm velocidade inicial $v = 0.046$ e acontece o fenômeno conhecido como ressonância.	60
6.8	Dados do espalhamento de <i>anti-kink/kink</i> em que os sólitons possuem velocidade inicial de $v = 0.2$	61
6.9	Dados do espalhamento de <i>anti-kink/kink</i> em que os sólitons possuem velocidade inicial de $v = 0.043$. Para essa velocidade os sólitons permanecem presos por um longo tempo e então observamos seu desacoplamento.	62
6.10	As funções $g(a)$ e $V(a)$ são apresentadas aqui e calculadas analiticamente no apêndice G. O comportamento do potencial indica uma força de atração entre os sólitons quando estes estão suficientemente próximos.	62
6.11	Solução obtida para a coordenada coletiva $a(t)$ para diferentes velocidades relativas.	63
E.1	Caminho de integração.	84

Lista de Tabelas

Sumário

Agradecimentos	vi
Resumo	viii
Abstract	ix
Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiii
1 INTRODUÇÃO	1
2 Teoria de Campos Escalares	4
2.1 Formulação Lagrangiana	4
2.2 Equação de Bogomolnyi-Prasad-Sommerfield (BPS)	6
3 Sólitons topológicos em (1 + 1) dimensões	9
3.1 Modelo de sine-Gordon	10
3.2 Soluções de multi-sólitons	14
3.3 O modelo ϕ^4	20
3.3.1 $\mu^2 \geq 0$	20
3.3.2 $\mu^2 < 0$	21
3.4 Interação entre Sólitons no modelo ϕ^4	23
3.5 O modelo ϕ^6	26
4 O método das coordenadas coletivas para o estudo do espalhamento dos sólitons de sine-Gordon	28
4.1 Espalhamento Sóliton/Sóliton	30
4.2 Espalhamento Sóliton/Anti-Sóliton	33

5	O método de Coordenadas coletivas para o estudo de espalhamento de sólitons no modelo ϕ^4	37
5.1	O método de coordenadas coletivas para a descrição do movimento da solução de <i>kink</i>	38
5.2	Espalhamento de <i>kink</i> e <i>anti-kink</i> no modelo ϕ^4	39
5.3	A inclusão de um modo de vibração interno	43
5.4	O estudo do espalhamento incluindo os modos internos de vibração	45
6	O método de coordenadas coletivas para o estudo de espalhamento de sólitons no modelo ϕ^6	52
6.1	Estudo do espalhamento <i>kink/kink</i> pelo método de coordenadas coletivas	53
6.2	Estudo do espalhamento entre sóliton e anti-sóliton no modelo ϕ^6 . .	55
7	Considerações finais	64
	Referências Bibliográficas	66
	Apêndice A Cálculo das integrais relativas ao método de coordenadas coletivas para o espalhamento de sólitons do modelo de sine-Gordon	70
A.1	Integrais necessárias para o cálculo do espalhamento Sóliton/AntiSóliton utilizando coordenadas coletivas	71
	Apêndice B Perturbações da solução de sóliton no modelo ϕ^4	73
B.1	Autofunções dos estados ligados	76
	Apêndice C Perturbações dos sólitons no modelo ϕ^6	77
C.1	Perturbações da solução de <i>kink</i>	77
C.2	Perturbações da solução de <i>anti-kink</i>	80
	Apêndice D Perturbações do sóliton do modelo de sine-Gordon	82
	Apêndice E Integrais necessárias para o espalhamento discutido na seção (5.2)	83
	Apêndice F Cálculo dos coeficientes da lagrangiana apresentada na seção (5.4)	86
F.1	Método de cálculo de alguns tipos de integrais	88
F.2	Coeficientes integrados	89
	Apêndice G Integrais necessárias para o estudo do espalhamento do modelo ϕ^6	91

G.1	Sobre a convergência	93
G.2	Termo cinético e potencial efetivo do espalhamento <i>kink/kink</i> seção (6.1)	94
G.3	Termo cinético e potencial efetivo para o espalhamento de <i>anti-kink/kink</i> seção (6.2.0.2)	95

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A palavra sóliton permeia todo nosso estudo, e na perspectiva da física teórica, seja da matéria condensada ou altas energias, ela indica uma classe de soluções ondulatórias que podem apresentar comportamento de partículas. Do ponto de vista de teorias de campo, tais soluções surgem de equações clássicas não lineares em contextos bem específicos. Por exemplo, uma característica importante dessas soluções é que elas são localizadas, ou seja, possuem energia finita numa região (finita) do espaço, e sua densidade de energia não se dispersa. Propagam-se com velocidade constante e sua forma não muda.

Uma classificação mais precisa diferencia as soluções denominadas sólitons das chamadas ondas solitárias [2]. Grosso modo a distinção se dá pelo fato de sólitons estarem associados a sistemas integráveis, onde infinitas cargas conservadas podem ser construídas e são elas responsáveis por sua estabilidade, o que não é o caso do modelo ϕ^4 bidimensional mas aplica-se ao modelo de sine-Gordon. Feita essa distinção adotaremos nesta dissertação a palavra sóliton mesmo para o caso não integrável, o que comumente é feito na literatura.

Pelo fato de considerarmos teorias invariantes por transformações de Lorentz, o que se faz usualmente é construir soluções estáticas e a partir destas, soluções dinâmicas são obtidas por meio de boosts. Mostraremos, no caso bidimensional como obter tais soluções por quadraturas, e em seguida como obter soluções de multisólitons através das transformações de Bäcklund.

A possibilidade de construção de soluções solitônicas pode ser avaliada, através de argumentos de escala, pelo teorema de Derrick. Considerando primeiramente somente a presença de campos escalares através de um multipletto simbolizado por ϕ , a energia de um sistema em d dimensões espaciais é dada por

$$E = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \mathcal{U}(\phi) \right] \equiv V_1 + V_2. \quad (1.1)$$

Ao realizarmos uma transformação de escala $\vec{x} \rightarrow \lambda \vec{x}$ nota-se que a energia se escala da forma

$$E(\lambda) = \lambda^{(2-d)} V_1 + \lambda^{(-d)} V_2, \quad (1.2)$$

e através do princípio variacional, ela deve ser estacionária em $\lambda = 1$, o que implica

$$(d-2)V_1 + dV_2 = 0. \quad (1.3)$$

Nota-se que para $d > 2$ devemos ter $V_1 = 0 = V_2$. Para $d = 2$ devemos ter $V_2 = 0$, e neste caso soluções não triviais só existem se $\mathcal{U}(\phi)$ se anula em todos os pontos, onde se incluem o modelo sigma e modelos que incluam termos na lagrangiana que envolvam derivadas de ordens mais altas, como os modelos de Skyrmons e Baby Skyrmons, que não serão abordados neste trabalho. Em $d = 1$ somos conduzidos ao teorema do virial, e nenhum tipo de solução é previamente descartado, sendo o capítulo 2 dedicado a modelos desse tipo.

Ao considerarmos o acoplamento de um campo de calibre a campos escalares, a energia passa ter a forma

$$E(\lambda) = \lambda^{4-d} G + \lambda^{(2-d)} V_1 + \lambda^{(-d)} V_2, \quad (1.4)$$

e a condição de extremo do funcional neste caso é dada por

$$(d-4)G + (d-2)V_1 + dV_2 = 0, \quad (1.5)$$

onde o novo termo G vem da contribuição do termo cinético do tensor de campo. Observa-se que agora soluções não triviais são permitidas tanto em $d = 2$ quanto em $d = 3$. No primeiro caso encontram-se as soluções de vórtices e no segundo caso encontram-se os monopolos magnéticos. Nenhum desses casos será incluído em nosso estudo.

A partir do capítulo 3 partimos para o estudo das propriedades dinâmicas dos sólitons, e fazemos isso utilizando métodos de coordenadas coletivas. No problema de espalhamento de kinks, ou kink-antikink, a introdução das coordenadas coletivas tem como objetivo principal a simplificação do problema da resolução das equações diferenciais parciais para os campos, que são dependente das coordenadas espaciais e temporais. Normalmente, nesses casos, o problema se reduz a resolver

equações diferenciais ordinárias acopladas para um número limitado de funções dependentes do tempo. Além disso, tais coordenadas podem fornecer informações a respeito dos modos internos do sistema. Por exemplo, no caso do modelo ϕ^4 existe um modo de vibração, denominado “modo interno” que é uma excitação do estado fundamental, associado a pequenas perturbações ao redor da solução de kink/antikink. Tal modo é o responsável pela formação das soluções do tipo ricochete (ou bouncing) que aparecem nas interações de kink/antikink, pois ele absorve energia cinética do sistema e impede o afastamento dos objetos incidentes após a colisão. Já no caso do modelo ϕ^6 foi mostrado analiticamente que um modo análogo não existe (ver apêndice C), porém soluções de ricochete são encontradas. O argumento físico utilizado para explicá-las no modelo ϕ^4 não se adequa a este caso, e os detalhes dessas configurações de estados ligados e bem como a argumentação de sua existência serão feitas no capítulo 6.

Capítulo 2

Teoria de Campos Escalares

O formalismo lagrangiano para sistemas contínuos é construído de forma natural no processo de transição do discreto para o contínuo, quando consideramos uma rede infinita de osciladores clássicos e tomamos o espessamento entre o posterior e o anterior indo a zero. Obtém-se, desta maneira, o que denominamos uma teoria clássica de campos, onde infinitos graus de liberdade são agora considerados [3].

O formalismo hamiltoniano é também naturalmente obtido, seguindo o mesmo procedimento aplicado à mecânica de partículas, ou seja, definindo-se os momentos conjugados e em seguida realizando uma transformação de Legendre para a obtenção da hamiltoniana. Este é o caminho natural para a obtenção de uma teoria quântica de campos, conhecida como quantização canônica.

Neste capítulo tratamos o formalismo clássico de um campo escalar em (1+1) dimensões, utilizado para descrever partículas sem spin, como o caso do boson de Higgs [4], obtida na quebra de simetria do potencial ϕ^4 . Apresentamos algumas definições básicas do formalismo bem como um método para tratarmos as equações de movimento, adequado a algumas situações em que se pretende construir soluções do tipo sólitons em teorias não lineares. Em todo este trabalho só consideramos sistemas em (1+1) dimensões.

2.1 Formulação Lagrangiana

Considere a ação dada pela densidade lagrangiana de um campo escalar em (1+1) dimensões

$$S = \int d^2x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (2.1)$$

em que $\mu = 0, 1$ e estamos usando a seguinte notação para a métrica $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$.

Na busca por uma equação de movimento que minimize a ação (2.1) precisamos garantir que a variação do campo escalar em suas bordas sejam nulas, ou seja:

$$\delta S = \int d^2x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \right) \delta \phi + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta (\partial_\mu \phi) \right] = 0. \quad (2.2)$$

Considerando $\delta (\partial_\mu \phi) = \partial_\mu (\delta \phi)$ obtemos um termo de superfície e um outro proporcional a $\delta \phi$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta (\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi \right] - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi. \quad (2.3)$$

Substituindo a equação (2.3) em (2.2), reescrevemos a variação da ação como sendo

$$\delta S = \int d^2x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta \phi = 0, \quad (2.4)$$

de onde obtemos a equação de movimento

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0. \quad (2.5)$$

Como já foi introduzido no início da seção a notação para a métrica $g_{\mu\nu} = (1, -1)$, então a equação de movimento (2.5) se escreve

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{d\mathcal{U}}{d\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \frac{d\mathcal{U}}{d\phi} = 0. \quad (2.6)$$

Para uma translação na coordenada interna do campo $\phi(x'^\mu) = \phi(x^\mu + \epsilon^\mu)$ a equação de movimento (2.6) associada a densidade lagrangiana (2.1) se mantém invariante. Então, substituindo $\delta \mathcal{L} = \epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L}$ na variação da ação (2.4), temos que

$$\delta S = \int d^2x \left\{ \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \right] \right\} \delta \phi = 0. \quad (2.7)$$

E de acordo com o Teorema de Noether essa invariância deve nos garantir a existência de uma carga conservada [3], [5] associada a essa simetria. Neste caso trata-se como o Tensor energia-momento;

$$T_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.8)$$

onde temos $\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0$.

Os elementos da diagonal principal são reconhecidos como sendo a densidade de energia $\mathcal{E} = T_{00}$ e pressão $p = T_{11}$, dadas por

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \mathcal{U}(\phi) \quad (2.9)$$

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \mathcal{U}(\phi), \quad (2.10)$$

Pelas definições feitas acima, ainda podemos definir a energia e o momento associado, como estamos trabalhando somente em (1+1) dimensões, então

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} T_{00} dx \quad P_1 = - \int_{-\infty}^{\infty} T_{01} dx. \quad (2.11)$$

Neste presente trabalho tais quantidades serão de suma importância uma vez que a principal característica dos sólitons é densidade de energia localizada e momento bem definido.

2.2 Equação de Bogomolnyi-Prasad-Sommerfield (BPS)

Uma forma alternativa de obter soluções do tipo sólitons topológicos foi desenvolvido por E. B. Bogomolnyi em 1976 [6]. O método consiste em completar

quadrado na expressão da energia estática, de tal forma que aparecem dois termos, sendo que o primeiro consiste em uma equação diferencial de primeira ordem e o outro é denominado a carga topológica.

No caso da equação de primeira ordem, é encontrado uma classe de soluções que minimizam a energia do sistema, essas soluções são etiquetadas como estados BPS [7]. As soluções correspondentes a eses estados BPS também são solução da equação diferencial de segunda mas a recíproca não é válida.

Assim tomamos como ponto de partida, a energia associada a densidade T_{00} apresentada em (2.11)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx T_{00} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \mathcal{U}(\phi) \right], \quad (2.12)$$

e completando quadrado nos últimos termos de (2.12) podemos reorganizá-los de forma a obter

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \pm \sqrt{2\mathcal{U}(\phi)} \right)^2 \right] \mp \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(\infty)} 2\sqrt{2\mathcal{U}(\phi)} d\phi. \quad (2.13)$$

Durante a construção assumimos que nossos campos estão fixos na borda por um simples motivo: caso haja variação na borda então não estamos realmente no fim do espaço e sim em alguma fronteira. Agora com as condições de contorno bem estabelecidas, garantimos que o último termo de (2.13) seja finito.

Observe que para fazer valer as condições de borda (garantir que elas estão fixas) é necessário mostrar que o termo de potencial dentro da raiz seja positivo definido, e para isso usamos a definição do superpotencial

$$\mathcal{U}(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 \geq 0. \quad (2.14)$$

Podemos, assim, reescrever substituindo (2.14) em (2.13) de maneira que a energia se escreve como

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \pm \frac{dW}{d\phi} \right)^2 \right] \mp [W(\phi_+) - W(\phi_-)]. \quad (2.15)$$

Nesta expressão, o primeiro termo é positivo e portanto o limite de saturação é

dado pela diferença entre os valores assintóticos do superpotencial, chamado limite BPS quando

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{dW}{d\phi} = \pm \sqrt{2\mathcal{U}}, \quad (2.16)$$

assim

$$E_{min} = E_{BPS} = \pm [W(\phi_+) - W(\phi_-)]. \quad (2.17)$$

Uma observação importante é que não se faz necessário conhecer primariamente $\phi(x)$, bastando conhecer os valores assintóticos do superpotencial, que no caso de teorias topológicas são relacionados às cargas topológicas do objeto.

Capítulo 3

Sólitons topológicos em $(1 + 1)$ dimensões

Introdução

Nas teorias físicas como por exemplo, eletromagnética e Mecânica Quântica, sistemas lineares possuem soluções do tipo ondas planas ou uma superposição delas, que são denominados pacotes Gaussianos. No entanto, é esperado que esses pacotes passarão pelo processo de dispersão de energia a medida em que se propagam no espaço e/ou espaço-tempo. Contudo, para teorias não-lineares é possível obter soluções que se comportam como pacotes, porém não passam por dispersão a medida que o tempo evolui, essas configurações são denominadas sólitons.

Os sólitons podem ser divididos em duas classes, os topológicos e não-topológicos. O primeiro logra dessa nomenclatura por possuir uma estrutura interna chamada carga topológica, que tem como propriedade não se modificar conforme o sistema evolui dinamicamente, pelo fato das condições de contorno terem sido previamente fixadas afim de manter o sistema com energia finita.

No segundo caso, as quantidades conservadas são frutos de algum grupo de simetria, sendo obtidos via o teorema de Noether. O exemplo mais comum são as Q-balls $(1 + 1)$ que possuem simetria do grupo $U(1)$ global [8].

Como já foi mencionado anteriormente para teorias em $(1+1)$ dimensões, os sólitons verdadeiros são associados a sistemas integráveis. Estes possuem infinitas quantidades conservadas e são elas responsáveis pela estabilidade das soluções (os mais conhecidos são a equação de KdV e sine-Gordon) [9].

Neste capítulo, apresentaremos uma introdução a soluções analíticas e métodos algébricos para obtenção de sólitons topológicos em $(1+1)$ dimensões, e quando pos-

sível obter de forma explícita resultados importantes na literatura que caracterizam esses objetos, tais como, densidade de energia localizada, interação de curto alcance (comportamento da força) e carga topológica.

3.1 Modelo de sine-Gordon

No início dos anos 1970, Julio Rubinstein introduziu modificações no termo de massa da equação de Klein-Gordon, cujo objetivo era introduzir um termo periódico que para pequenas oscilações fosse possível recuperar a equação original de Klein-Gordon [10]. Foi introduzida uma função seno, ficando conhecida mais tarde como a equação de sine-Gordon. No entanto, a equação sine-Gordon original surge no estudo de geometria riemanniana de superfícies de curvatura escalar constantes [11], [12], [13].

A densidade lagrangiana que usaremos para descrever esse modelo será seguindo Manton e Sutcliffe [9],

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mathcal{U}(\phi), \quad (3.1)$$

onde o potencial é definido como $\mathcal{U}(\phi) = \frac{1}{4}(1 - \cos(\phi))$ e possui um número infinito de vácuos $\phi = 2\pi n$ em que $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e também o chamado setor não perturbativo do modelo que inclui soluções que interpolam os mínimos, conhecidas como soluções solitônicas.

O fato de $\mathcal{U}(\phi)$ se anular nos vácuos faz com que o funcional de energia seja automaticamente minimizado quando o campo $\phi(x, t)$ tende a um valor constante nesses pontos. Mais do que isso, tais condições implicam que essa constante seja 0. Primeiramente buscamos construir soluções estáticas, e a partir delas, soluções dinâmicas podem ser obtidas aplicando-se um boost de Lorentz. Levando em conta essas considerações nos convencemos de que o problema apresenta as seguintes condições de contorno

$$|x| \rightarrow \infty : \quad \partial_x \phi = 0, \quad \mathcal{U}(\phi) = 0. \quad (3.2)$$

para a equação estática $\phi'' = \frac{d}{d\phi} \mathcal{U}(\phi)$. Multiplicando ambos os lados por ϕ' essa equação é facilmente integrada :

$$x(\phi) = \int \frac{d\phi}{\sqrt{2\mathcal{U}(\phi)}}, \quad (3.3)$$

ficamos com a seguinte integral para resolver

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{2(1 - \cos(\phi))}} = \pm \int_{x_0}^x dx = \pm (x - x_0) \quad (3.4)$$

$$\ln \left| \tan \left(\frac{\phi}{4} \right) \right| = \pm (x - x_0), \quad (3.5)$$

e assim, obtemos a solução estática de sólitoon (sinal positivo) e anti-sólitoon (sinal negativo) na figura (3.1)

$$\phi = 4 \arctan \left[e^{\pm(x-x_0)} \right]. \quad (3.6)$$

Colocamos a solução estática para se mover, realizando um boost de Lorentz, que consiste em obter a solução do corpo em referencial em que ele está parado e em seguida fazer uma troca de coordenadas entre referenciais inerciais, então a equação (3.6) que descreve o sólitoon/ anti-sólitoon estático é reescrita como uma parede relativística se deslocando (ver figura 3.1). Repare que o sólitoon desse modelo possui os seguintes limites $\phi(-\infty) \rightarrow 0$ e $\phi(\infty) \rightarrow 2\pi$ e o anti-sólitoon $\phi(\infty) \rightarrow 0$ e $\phi(-\infty) \rightarrow 2\pi$

$$\phi = 4 \arctan \left[e^{\pm \frac{(x - x_0 - vt)}{\sqrt{1 - v^2}}} \right]. \quad (3.7)$$

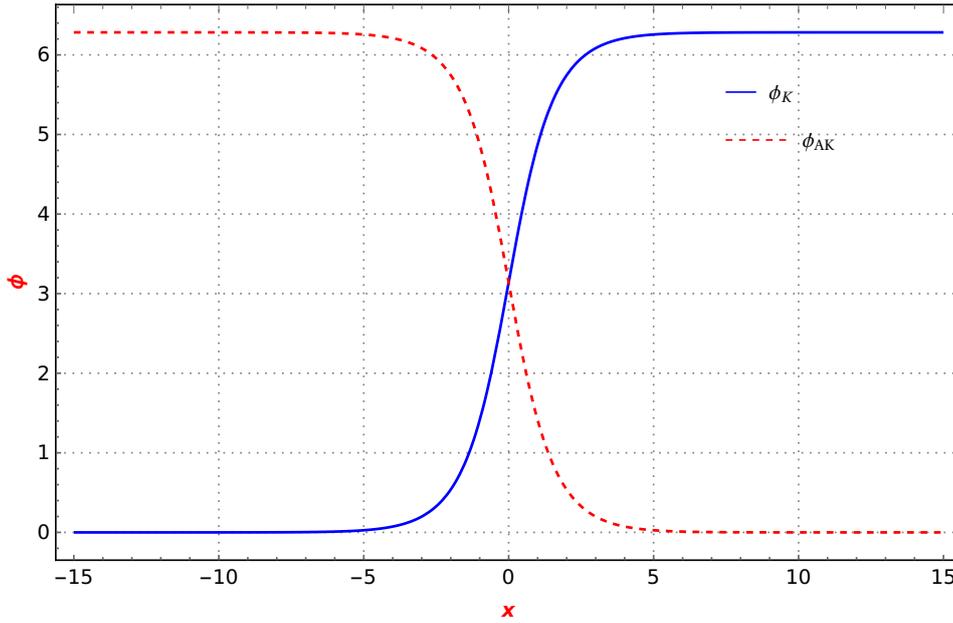


Figura 3.1. O kink curva azul e antikink curva vermelha.

A definição desses objetos como sendo topológicos é devido às suas cargas topológicas que são calculadas simplesmente pela diferença entre os valores que o campo assume nas bordas

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi' dx = \frac{1}{2\pi} (\phi(\infty) - \phi(-\infty)), \quad (3.8)$$

em que $N = 1$ caracteriza o kink e $N = -1$ o anti-kink.

Energia do soliton

Considerando o caso da solução estática (3.7) e fazendo o uso da Equação de Bogomolny (2.16) $\phi' = \pm \sqrt{2\mathcal{U}}$, obtemos a expressão para energia

$$E = \int dx T_{00} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + 2 \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) \right] \quad (3.9)$$

$$E = \int dx T_{00} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\partial_x \phi \mp 2 \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right)^2 \pm 2 \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \partial_x \phi \right]. \quad (3.10)$$

Repare que o primeiro termo de (3.10) como sendo positivo e definido, então podemos estipular o mínimo de energia

$$E \geq \int_{-\infty}^{\infty} 2dx \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \frac{d\phi}{dx} \quad (3.11)$$

$$E \geq \int_0^{2\pi N} 2 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi. \quad (3.12)$$

Para obtermos a de energia referente ao s3liton de movendo, basta utiliza a seguinte troca de vari3veis $\phi(x, t) = \phi(x - vt) = \phi(\tau)$ na equa33o de movimento de segunda ordem (2.5) em seguida usar a equa33o de Bogomolny na express3o da energia (3.9), ent3o

$$E \geq \frac{8M_0N}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (3.13)$$

onde M_0 3 a massa do s3liton est3tico e N 3 a carga topol3gica. No gr3fico da densidade de energia para o modelo fica claro que ele apresenta uma forma localizada, exatamente das principais caracter3sticas dos s3litons. E por isso, mesmo sendo comparados a movimentos ondulat3rio padr3o, s3o etiquetados como part3culas por possuirem uma estrutura interna. Segue abaixo o gr3fico da densidade de energia (ver figura 3.2)

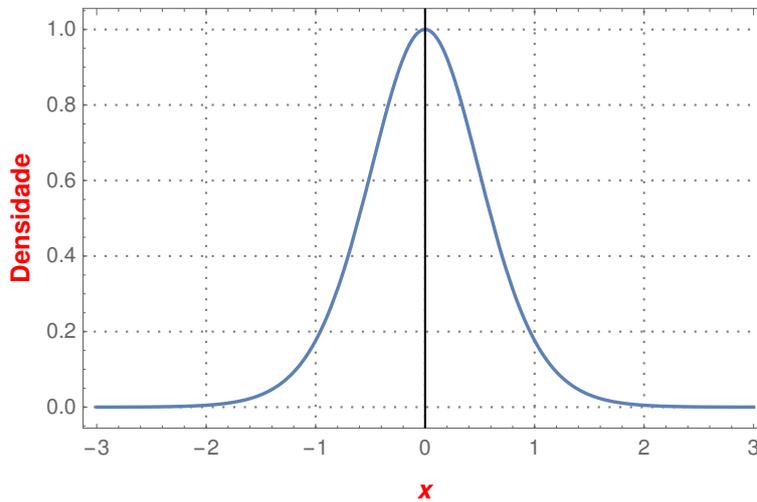


Figura 3.2. Densidade de energia.

3.2 Soluções de multi-sólitons

Para sistemas integráveis é possível a partir de soluções de vácuo e de um sóliton, obter-se soluções de multi-sólitons. Existem métodos para isso, um deles é o chamado método de Dressing [14], que explora a estrutura algébrica desses modelos, e é um método bastante útil na obtenção dessas soluções para os chamados modelos de Toda, que são generalizações do modelo de sine-Gordon para todas as álgebras de Lie.

Outro método consiste das chamadas transformações de Bäcklund [15], [16], [17], que aqui ilustraremos aplicando-o no modelo de sine-Gordon. O método baseia-se basicamente em transformar a equação de segunda ordem em duas equações de primeira ordem. Como a equação de movimento é não linear, o princípio de superposição não pode ser aplicado, mas o método é uma maneira de obter novas soluções a partir de soluções já conhecidas: uma espécie de superposição não linear. As transformações de Bäcklund também podem ser estudadas em sua forma supersimétrica como é feito para o sinh-Gordon e sine-Gordon em [18], [19].

Considere as coordenadas do cone de luz abaixo, juntamente com a forma pela qual as derivadas se transformam em relação as mesma, para que possamos escrever a equação de movimento de sine-Gordon em termos das coordenadas do cone de luz,

$$X_{\pm} = \frac{x \pm t}{2} \quad \partial_x = \frac{\partial_+ + \partial_-}{2} \quad \partial_t = \frac{\partial_+ - \partial_-}{2}, \quad (3.14)$$

assim

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi = -\partial_+ \partial_- \phi = -\frac{m^2}{\beta^2} \sin(\beta \phi), \quad (3.15)$$

fazendo $\phi \rightarrow \beta \phi$ em(3.15) então ficamos com a seguinte equação de sine-Gordon escrita em termos as coordenadas do cone de luz

$$\partial_+ \partial_- \phi = \frac{m_{\phi}^2}{\beta} \sin(\phi). \quad (3.16)$$

Agora considere o par de equações abaixo,

$$\partial_+ \psi = \partial_+ \phi - 2\lambda_1 \sin\left(\frac{\psi + \phi}{2}\right) \quad (3.17)$$

$$\partial_- \psi = -\partial_- \phi + \frac{2}{\lambda_1} \sin\left(\frac{\phi - \psi}{2}\right), \quad (3.18)$$

em que $\psi(X_+, X_-)$ e $\phi(X_+, X_-)$, são funções escritas nas coordenadas do cone de luz, enquanto que λ_1 é o parâmetro de transformação. Para nos convenceremos de que as equações estão corretas, então tomamos a derivada de (3.17) com relação a ∂_- e a derivada de (3.18) com em relação a ∂_+ ,

$$\partial_- \partial_+ \psi = \partial_- \partial_+ \phi - \lambda_1 \cos\left(\frac{\psi + \phi}{2}\right) (\partial_- \psi + \partial_- \phi) \quad (3.19)$$

$$\partial_+ \partial_- \psi = -\partial_+ \partial_- \phi + \frac{1}{\lambda_1} \cos\left(\frac{\phi - \psi}{2}\right) (\partial_+ \phi - \partial_+ \psi), \quad (3.20)$$

substituindo (3.18) em (3.21) e usando a idéia de que as derivadas nas coordenadas do cone de luz devem comutar $\partial_- \partial_+ \psi = \partial_+ \partial_- \psi$ obtemos então duas equações de sine-Gordon separadamente,

$$\partial_- \partial_+ \psi + \sin(\psi) = \partial_- \partial_+ \phi + \sin(\phi), \quad (3.21)$$

o que nos leva concluir que se tivermos uma configuração de vácuo para o campo inicial ϕ que satisfaça a equação de sine-Gordon (3.21) então ψ também deve ser solução, porém não necessariamente a mesma, fazendo assim, um mapeamento entre soluções novas com as antigas.

Como exemplo vamos começar com a equação (3.17) e considerar uma configuração de vácuo para o campo $\phi = 0$, e em seguida por um processo de integração simples, encontramos nossa primeira nova solução a partir do vácuo,

$$\psi_1^1(X_+, X_-) = 4 \arctan \left[e^{-\left(\lambda_1 X_+ + \frac{X_-}{\lambda_1} + \alpha_1\right)} \right]. \quad (3.22)$$

Desenvolvendo o mesmo processo de cálculo para a (3.18) com um novo parâmetro de transformação λ_2 , chegamos a segunda solução

$$\psi_1^2(X_+, X_-) = 4 \arctan \left[e^{-\left(\lambda_2 X_+ + \frac{X_-}{\lambda_2} + \alpha_2\right)} \right]. \quad (3.23)$$

De forma genérica podemos simplificar as novas soluções, escrevendo $\psi_1^j(X_+, X_-) = 4 \arctan(e^{\theta_j})$ em que $\theta_j = -\lambda_j X_+ - \frac{X_-}{\lambda_j} - \alpha_j$. Um passo importante é rescrever as constantes de transformação em relação as transformações de Lorentz,

$$-\lambda_1 X_+ - \frac{X_-}{\lambda_1} = -\left(\frac{1 + \lambda_1^2}{2\lambda_1}\right)x + \left(\frac{1 - \lambda_1^2}{2\lambda_1}\right)t = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (3.24)$$

assim encontramos a seguintes relações entre parâmetro de transformação e velocidade $v = \frac{1 - \lambda_1^2}{1 + \lambda_1^2}$ e $\lambda_1 = \pm \sqrt{\frac{1 - v}{1 + v}}$, lembrando que estamos considerando $\alpha_1 = 0$.

Uma observação importante aqui é que poderíamos substituir ψ_1^1 ou ψ_1^2 nas equações (3.17),(3.18) e então a partir de uma das soluções obter a outra, contudo o processo de integração pode ser extremamente trabalhoso. Uma forma alternativa de contorna essas dificuldade é introduzir um novo campo e estudar condições para as constantes de transformação no caso λ_1 e λ_2 possam manter a ordem de construção das funções inalterada.

Considere as transformações abaixo,

$$\phi \xrightarrow{\lambda_1} \psi_1^1 \xrightarrow{\lambda_2} \psi_2 \quad (3.25)$$

$$\phi \xrightarrow{\lambda_2} \psi_1^2 \xrightarrow{\lambda_1} \psi_2 \quad (3.26)$$

para uma transformação saindo do campo de vácuo ϕ e indo para a solução ψ_1^1 através do parâmetro λ_1 , nos leva ao primeiro par de equações. E usando de forma recursiva o procedimento de construção para as demais transformações, obtemos os sistemas de equações abaixo

$$\partial_+ \phi - \partial_+ \psi_1^1 = 2\lambda_1 \sin\left(\frac{\phi + \psi_1^1}{2}\right) \quad \partial_- \phi + \partial_- \psi_1^1 = \frac{2}{\lambda_1} \sin\left(\frac{\phi - \psi_1^1}{2}\right) \quad (3.27)$$

$$\partial_+ \phi - \partial_+ \psi_1^2 = 2\lambda_2 \sin\left(\frac{\phi + \psi_1^2}{2}\right) \quad \partial_- \phi + \partial_- \psi_1^2 = \frac{2}{\lambda_2} \sin\left(\frac{\phi - \psi_1^2}{2}\right) \quad (3.28)$$

$$\partial_+ \psi_1^1 - \partial_+ \psi_2 = 2\lambda_2 \sin\left(\frac{\psi_2 + \psi_1^1}{2}\right) \quad \partial_- \psi_1^1 + \partial_- \psi_2 = \frac{2}{\lambda_2} \sin\left(\frac{\psi_1^1 - \psi_2}{2}\right) \quad (3.29)$$

$$\partial_+ \psi_1^2 - \partial_+ \psi_2 = 2\lambda_1 \sin\left(\frac{\psi_2 + \psi_1^2}{2}\right) \quad \partial_- \psi_1^2 + \partial_- \psi_2 = \frac{2}{\lambda_1} \sin\left(\frac{\psi_1^2 - \psi_2}{2}\right), \quad (3.30)$$

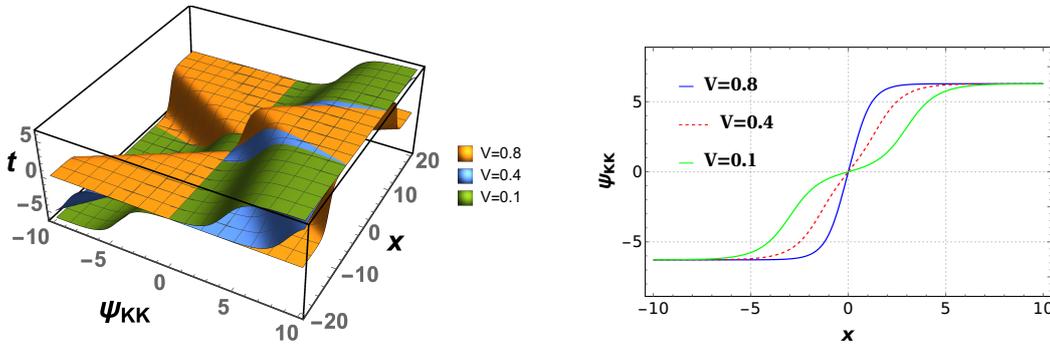
com um pouco de trabalho algébrico conseguimos eliminar as derivadas, seja trabalhando somente com equações com ∂_+ (somente lado esquerdo das equações acima) ou ∂_- (somente lado direito das equações acima). Assim, conseguimos a seguinte relação abaixo, que no fundo é uma soma não linear de soluções

$$\lambda_1 \sin \left[\frac{1}{4} (\phi + \psi_1^1 - \psi_1^2 - \psi_2) \right] = \lambda_2 \sin \left[\frac{1}{4} (\phi + \psi_1^2 - \psi_1^1 - \psi_2) \right] \quad (3.31)$$

$$\tan \left(\frac{\psi_2 - \phi}{4} \right) = \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \tan \left(\frac{\psi_1^2 - \psi_1^1}{4} \right). \quad (3.32)$$

Agora faremos o uso das equações (3.22) e (3.23) na expressão (3.32) para uma configuração de vácuo $\phi = 0$ e usando que os parâmetros de transformação se relacionam por $\lambda_2 = -\frac{1}{\lambda_1}$, assim os coeficientes das exponenciais segue a seguinte relação $\theta_2 = \frac{1+\lambda_1^2}{2\lambda_1}(x+vt) = \gamma(x+vt)$ e $\theta_1 = -\gamma(x-vt)$, sendo γ o fator de Lorentz. Por fim, encontramos a solução de 2-sólitons (ver figuras 3.3), lembrando que foi usado que $v_1 = v_2 = v$

$$\psi_2 = \psi_{KK} = 4 \arctan \left[v \frac{\sinh(\gamma x)}{\cosh(\gamma vt)} \right]. \quad (3.33)$$



(a) Solução de 2-sólitons, perfil 3D.

(b) Solução de 2-sólitons, perfil 2D.

Figura 3.3. Solução KK

É importante frisar, que toda a construção das novas soluções foi desenvolvida a partir do par de equações (3.17),(3.18), assim podemos tratá-los como dois sólitons separadamente com velocidades v_1 e v_2 de forma respectiva aos campos ψ_1^1 e ψ_1^2 . Portanto as quantidades físicas como, energia e momento linear, podem ser escritas como uma superposição,

$$E = \frac{8}{\sqrt{1-v_1^2}} + \frac{8}{\sqrt{1-v_2^2}} \quad (3.34)$$

$$P = \frac{8v_1}{\sqrt{1-v_1^2}} - \frac{8v_2}{\sqrt{1-v_2^2}}. \quad (3.35)$$

Quanto a sua carga topológica repare que podemos calcular facilmente fazendo análise assintótica do campo (3.33). Por fim, observe os limites do campo $\psi_{KK}(\pm\infty) = \pm 2\pi$, logo

$$Q = \frac{1}{2\pi} [\psi_{KK}(\infty) - \psi_{KK}(-\infty)] = 2. \quad (3.36)$$

Os dois próximos objetos a serem construídos, possuem cargas topológicas $Q = 0$, no entanto, veremos mais a frente que se analisarmos uma situação, na qual temos um processo de espalhamento de sóliton/anti-sóliton no sine-Gordon o processo resultante deveria ser emissão de radiação até que decaiam no vácuo trivial, porém, devido a integrabilidade do presente modelo não observamos esse tipo de fenômeno.

Faremos agora o caso de uma configuração de sóliton/anti-sóliton, para isso consideramos a seguinte relação entre os parâmetros de transformação $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ e também a expressão dos coeficientes das exponenciais $\theta_1 = -\gamma(x - v_1t)$ e $\theta_2 = -\gamma(x - v_2t)$. Se levarmos em conta que esses objetos estão se movendo com velocidade relativas $v_1 = -v_2 = v$, observamos que $\theta_2 = \theta_1 - 2\gamma vt$. Segue abaixo o comportamento da configuração do campo(ver figuras 3.4,3.5)

$$\tan\left(\frac{\psi_2}{4}\right) = \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) \left(\frac{e^{\theta_2} - e^{\theta_1}}{1 + e^{\theta_1 + \theta_2}}\right) = \frac{1 \sinh(\gamma vt)}{v \cosh(\gamma x)} \quad (3.37)$$

$$\psi_2 = \psi_{KAK} = 4 \arctan\left[\frac{1 \sinh(\gamma vt)}{v \cosh(\gamma x)}\right]. \quad (3.38)$$

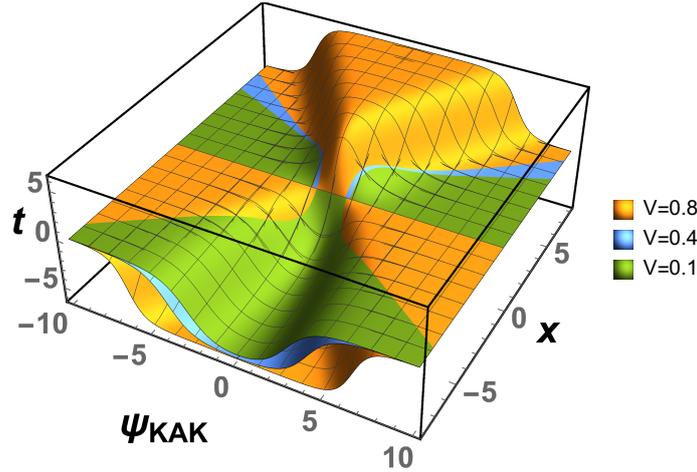
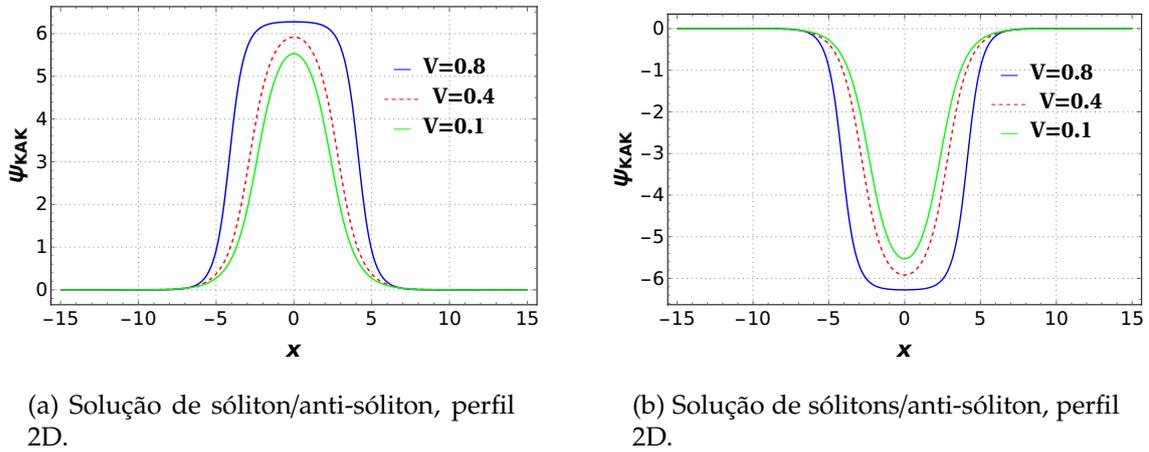


Figura 3.4. Solução de sóliton/anti-sóliton, perfil 3D.



(a) Solução de sóliton/anti-sóliton, perfil 2D.

(b) Solução de sólitons/anti-sóliton, perfil 2D.

Figura 3.5. Na figura da esquerda observamos o configuração depois da colisão, já na direita antes da colisão.

Vale a pena observar em (3.5) que a configuração de campo inicia em um vácuo e termina em outro. Isso ocorre para que a carga topológica do sistema seja mantida.

Ainda a partir de (3.37) podemos construir uma nova solução que comumente é conhecida como solução de Breather na literatura, basta realizar uma troca na solução anterior $v \rightarrow \frac{i\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}$, com isso encontramos uma configuração estacionária e oscilante (ver figura 3.6)

$$\psi_2 = \psi_\omega = 4 \arctan \left[\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega} \frac{\sin(\omega t)}{\cosh(x\sqrt{1-\omega^2})} \right] \quad (3.39)$$

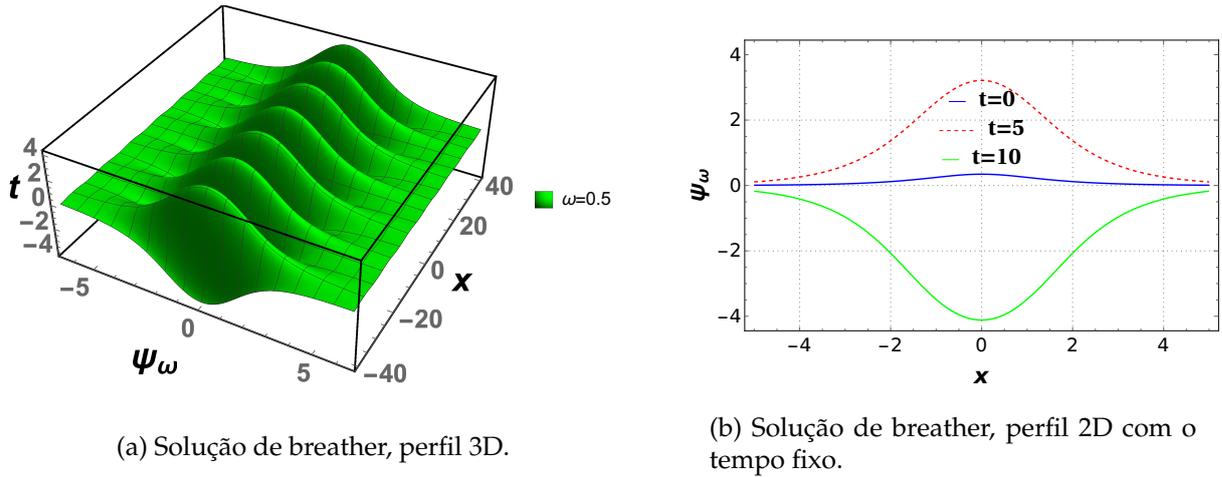


Figura 3.6. Na figura da esquerda temos o respirador em 3D para uma dada frequência, já na direita uma projeção da mesma para certos instantes de tempo.

3.3 O modelo ϕ^4

Este modelo possui importância pelo fato de ilustrar fenômenos em várias áreas de física, como física da matéria condensada, teoria de campos e gravitação. Antes de apresentarmos as soluções no contexto que estamos interessados, vale a pena fazermos uma rápida discussão acerca das simetrias envolvidas, pois o modelo em questão está essencialmente associado ao fenômeno de quebra espontânea de simetria.

Cosideremos a lagrangiana do campo escalar dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \mathcal{U}(\phi), \quad (3.40)$$

em que $\mathcal{U}(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\phi^4$. Esta teoria possui uma simetria discreta em $\phi \rightarrow -\phi$. Em teoria clássica, a realização desta simetria depende do sinal de μ^2 :

3.3.1 $\mu^2 \geq 0$

Neste caso o mínimo do potencial ocorre para $\phi = 0$ (figura (a) de (3.7)), e portanto $\phi(x) = 0$ é um vácuo clássico. Tal estado é invariante com $\phi \rightarrow -\phi$, e portanto dizemos que trata-se de uma simetria manifesta. Pequenas perturbações ao redor deste valor mínimo geram oscilações cuja frequência é determinada por μ .

3.3.2 $\mu^2 < 0$

Neste caso o potencial apresenta a forma $\mathcal{U}(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \phi_0^2)^2 + cte$ onde $\lambda\phi_0^2 = -\mu^2$, e possui dois vácuos distintos: $\phi(x) = \phi_0$ e $\phi(x) = -\phi_0$ (figura (b) de (3.7)), sendo que agora eles não são invariantes sob a simetria $\phi \rightarrow -\phi$, e neste caso, um vácuo é levado no outro sob a transformação. Dizemos então que a simetria foi espontaneamente quebrada. Se considerarmos pequenas flutuações ao redor do vácuo: $\phi = \phi_0 + \eta$ e substituimos este valor no potencial, teremos:

$$\mathcal{U}(\eta) = \lambda\phi_0^2\eta^2 + \lambda\phi_0\eta^3 + \frac{\lambda}{4}\eta^4, \quad (3.41)$$

onde obtemos o valor da frequência das pequenas oscilações: $m^2 = 2\lambda\phi_0^2 = -2\mu^2$.

Devemos observar que em $\mathcal{O}(\eta)$ é invariante por $\eta \rightarrow -\eta$ quando estudamos pequenas flutuações de η ao redor de ϕ_0 . A fim de enxergarmos a simetria devemos ter $\eta \rightarrow -\eta$ e $\phi_0 \rightarrow -\phi_0$. Mas a partir do momento em que o campo η é considerado, ϕ_0 é somente um parâmetro no potencial, e não um campo dinâmico. Dizemos que neste caso a simetria $\phi \rightarrow -\phi$ não é manifesta.

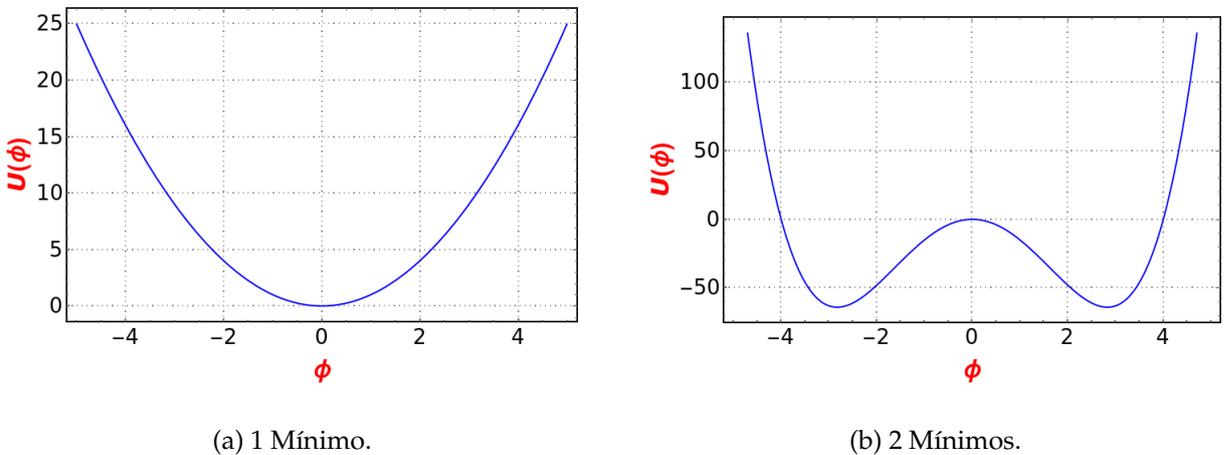


Figura 3.7. Vácuos do potencial.

Este modelo apresenta soluções do tipo solitônicas, e podem são obtidas via equação BPS (2.16), em que escolhemos o caso de $\mu^2 < 0$ (3.3.2)

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2\mathcal{U}} = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (\phi^2 - \phi_0^2), \quad (3.42)$$

em que $\phi_0 = \eta = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$. Assim, as configurações de campo, tomam sua forma

$$\phi(x, t) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left[\frac{m(x - x_0 - vt)}{\sqrt{2} \sqrt{1 - v^2}} \right], \quad (3.43)$$

em que λ e "m" são constantes de acoplamento.

Repare que obtemos duas configurações denotadas como kink (campo se deslocando da esquerda para direita) e o anti-kink (campo indo da direita para esquerda). Associado a cada um deles temos respectivamente uma carga topológica $Q_K = 1$ e $Q_{AK} = -1$.

Assim como o sine-Gordon, esse modelo apresenta energia finita e bem concentrada, e podemos computar o seu valor correspondente. Durante alguns processo do desenvolvimento explícito do cálculo, usaremos novamente a equação de Bogomolny (2.12). Determinamos primeiro a densidade de energia estática

$$T_{00} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \mathcal{U}(\phi) = 2\mathcal{U}(\phi) = \frac{\lambda}{2} \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \quad (3.44)$$

$$T_{00} = \frac{m^4}{2\lambda} \operatorname{sech}^4 \left(\frac{m(x - x_0)}{\sqrt{2}} \right), \quad (3.45)$$

repare que estamos usando a solução estática, mas não teria problema algum se fosse usado o caso com o boost. O que mudaria é apenas o fator de Lorentz multiplicando o caso estático (3.11), na qual estaremos nos referindo a uma partícula solitônica e relativística.

A energia de vácuo é então calculada como

$$E_0 = \int T_{00} dx = \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda} \quad (3.46)$$

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (3.47)$$

A densidade de energia (3.45), apresenta o mesmo comportamento do modelo de sine-Gordon (ver figura 3.2). As configurações do ϕ^4 são mostradas em (3.8).

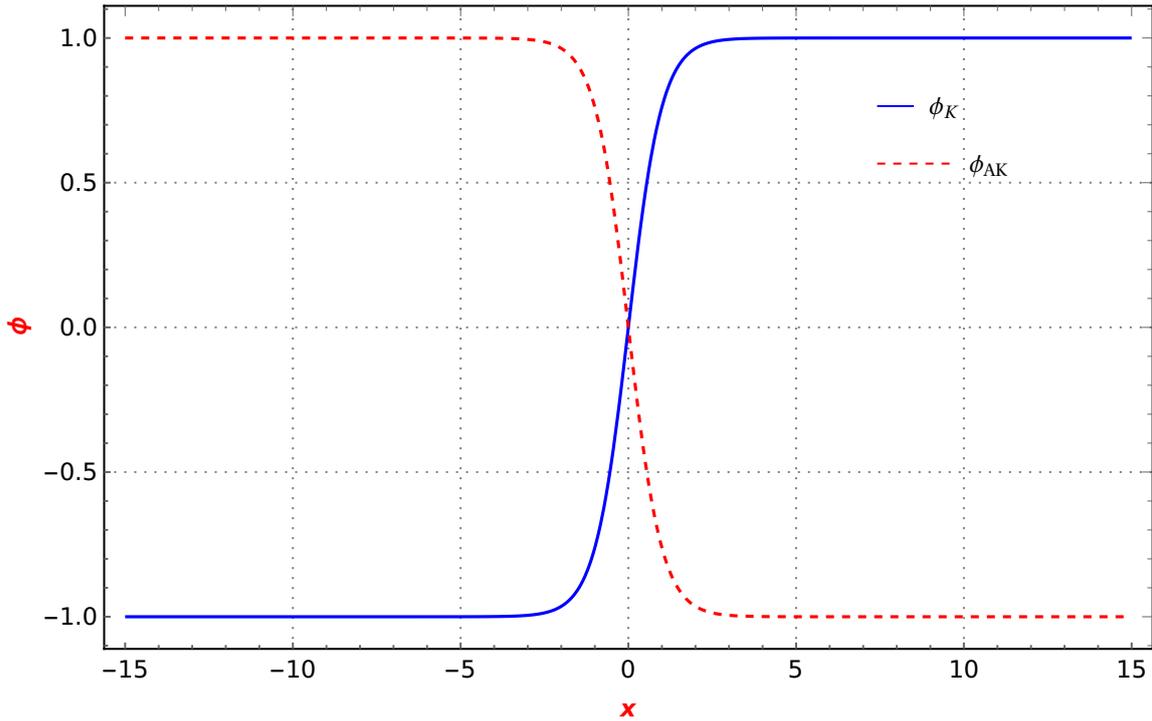


Figura 3.8. O kink curva azul e antikink curva vermelha.

3.4 Interação entre Sólitons no modelo ϕ^4

Na presente seção faremos um estudo do processo de interação entre sólitons no modelo ϕ^4 . Nosso interesse aqui consiste em desenvolver uma análise do comportamento da dinâmica desses objetos no regime assintótico e perto da origem [9], [20].

Iniciamos calculando o tensor energia momento para uma langriana que a princípio descreve um modelo genérico em (1+1) dimensional, sob a atuação de um potencial $\mathcal{U}(\phi)$. Seguindo a propriedade do tensor energia-momento $T^{0i} = -T_{0i} = \partial^0\phi\partial^i\phi$. Em seguida definimos a expressão de força a partir do momento linear,

$$F = \frac{dP}{dt} = -\frac{d}{dt} \left[\int dx \partial_0\phi\partial_x\phi \right] = - \int dx \left[\partial_t^2\phi\partial_x\phi + \partial_t\phi(\partial_t\partial_x\phi) \right], \quad (3.48)$$

usando a equação de movimento geral dentro do primeiro termo de (3.48)

$$I = \int dx (\partial_t^2\phi\partial_x\phi) = \int dx \left[\partial_x^2\phi - \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\phi} \right] \partial_x\phi = \int dx \left[\frac{\partial_x}{2} (\partial_x\phi)^2 - \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x} \right] = \left[\frac{\phi'^2}{2} - \mathcal{U}(\phi) \right]_{\Omega} \quad (3.49)$$

e ajustando o segundo termo de (3.48)

$$II = \int dx (\partial_t \phi \partial_t \partial_x \phi) = \int dx \frac{1}{2} \partial_x \dot{\phi}^2 = \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2} \right]_{\Omega}. \quad (3.50)$$

Sendo que Ω são os valores que o campo assume nas bordas. Assim, substituindo as equações (3.49),(3.50) em (3.48), ficamos com a expressão da força

$$F = \left[-\frac{\dot{\phi}^2}{2} - \frac{\phi'^2}{2} + \mathcal{U}(\phi) \right]_{\Omega}. \quad (3.51)$$

No caso do cálculo de força para o modelo ϕ^4 , consideramos a seguinte configuração de campo $\phi = \phi_K - \phi_{AK} - \phi_K(\infty) = \phi_K - \phi_{AK} - \eta$. Fazendo que a equação (3.51) seja reescrita da forma abaixo, lembrando que no processo será usado o equação de Bogomolny (2.16) $\phi'^2 = 2\mathcal{U}(\phi)$,

$$F = \left[-\frac{(\partial_x \phi_K)^2}{2} - \frac{(\partial_x \phi_{AK})^2}{2} - (\partial_x \phi_K)(\partial_x \phi_{AK}) + \mathcal{U}(\phi_K + \phi_{AK} - \eta) \right]_{\Omega} \quad (3.52)$$

$$F = \left[-\mathcal{U}(\phi_K) - \mathcal{U}(\phi_{AK}) - 2\sqrt{\mathcal{U}(\phi_K)\mathcal{U}(\phi_{AK})} + \mathcal{U}(\phi_K + \phi_{AK} - \eta) \right]_{\Omega}. \quad (3.53)$$

Realizando uma expansão em série de Taylor para o potencial acima (3.53) e sabendo que $\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \phi^2} = \mathcal{U}''(\phi_K) = \mathcal{U}''(\phi_{AK}) = m_{\psi}^2$

$$\mathcal{U}(\phi_K + \phi_{AK} - \eta) = \mathcal{U}(\eta) + (\phi_K + \phi_{AK} - \eta) \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\eta} + \frac{1}{2} (\phi_K + \phi_{AK} - \eta)^2 \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi=\eta} \quad (3.54)$$

fazemos o mesmo processo de expansão para os demais termos de (3.53) e organizando-os, encontramos a expressão para força em função da variação dos campos nos contornos. Uma observação importante é que desde de o início da presente seção o procedimento de cálculo vai seguir [20], mas que há uma outra forma de fazê-lo [21], [22].

Assim, de acordo com [20] (ver figura 3.9 tirada de [20]) estamos tomando como parâmetro a localização do centro de massa do kink $x = -a$, e descrevendo o anti-kink em função da mesma

$$F = \left[-\partial_x \phi_K \partial_x \phi_{AK} + m_\psi^2 \left(\Delta \phi_K \Delta \phi_{AK} - \frac{\eta^2}{2} \right) \right]_{-a-R}^{-a+R} \quad (3.55)$$

$$F = -\partial_x \phi_K^+ \partial_x \phi_{AK}^+ + \partial_x \phi_K^- \partial_x \phi_{AK}^- + m_\psi^2 \left(\Delta \phi_K^+ \Delta \phi_{AK}^+ - \Delta \phi_K^- \Delta \phi_{AK}^- \right). \quad (3.56)$$

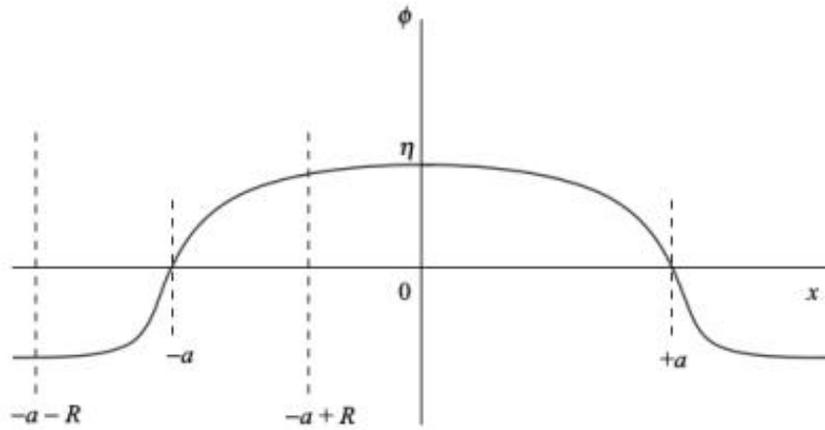


Figura 3.9. Separação entre centro de massa do kink e anti-kink.

A variação dos campos pela direita e pela esquerda tomando como referência o centro de massa do sóliton, é dada abaixo

$$\Delta \phi_K^+ = \phi_K(x_+) - \eta \quad \Delta \phi_K^- = \phi_K(x_-) + \eta \quad (3.57)$$

$$\Delta \phi_{AK}^+ = \phi_{AK}(x_+) - \eta \quad \Delta \phi_{AK}^- = \phi_{AK}(x_-) - \eta, \quad (3.58)$$

sendo que $x_+ = -a + R$ e $x_- = -a - R$. Sabendo que a solução de sóliton e anti-sóliton são dadas por $\phi_K = \eta \tanh(\sigma(x + a))$ e $\phi_{AK} = -\eta \tanh(\sigma(x - a))$, sendo que as constante se relacionam da seguinte forma $\eta = \frac{m_\psi}{\sqrt{2\lambda}}$, $\sigma = \frac{m_\psi}{2}$.

As funções trigonométricas intermediárias foram expandidas somente em torno do ponto " σR " e descartando termos lineares $\mathcal{O}(\sigma R)$, chegamos na expressão de forma abaixo

$$F = \frac{m_\psi^4}{\lambda} [1 - \tanh(2\sigma a)] = \frac{4m_\psi^4}{\lambda} \left[\frac{e^{-4\sigma a}}{1 + e^{-4\sigma a}} \right], \quad (3.59)$$

$$F = \frac{2m_\psi^4}{\lambda} e^{-m_\psi l}, \quad (3.60)$$

em que $l=2a$.

Uma observação importante é que no cálculo explícito da força o fator numérico encontrado foi metade do valor contido na referência [20], sendo que os termos de derivadas da equação intermediária (3.56) quando aplicado nos limites de integração e expandido, em primeira ordem não contribuem. Ficando o resultado final a cargo somente do termo que acompanha m_ψ^2 . Mas, isso não é um problema pois o que importa é o comportamento exponencial da mesma.

3.5 O modelo ϕ^6

Trata-se um modelo de campo escalar em (1+1) dimensões, foi considerada por M.A.Lohe [23]. Diferente do ϕ^4 possui um mínimo a mais, e assim, dois setores topológicos possíveis. Esse potencial possui grande importância para a descrição de moléculas diatômicas e também para o estudo de soluções do tipo Q-balls que diferente dos objetos de estudo de trabalho as mesmas não desfrutam de uma estrutura topológica.

Segue que da densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\phi^2}{2} (1 - \phi^2)^2, \quad (3.61)$$

as soluções de Kinks são obtidas a partir da equação BPS (2.16), que usando o método de frações parciais, ficam

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\phi(1-\phi^2)} = \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\phi} + \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{\phi d\phi}{1-\phi^2} = \pm \int_{x_0}^x dx = \pm (x - x_0) \quad (3.62)$$

$$\ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-\phi^2}{1-\phi_0^2}\right) = \pm (x - x_0), \quad (3.63)$$

e considerando a constante $\phi_0 = 0$, então

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{1}{2} [1 \pm \tanh(x - x_0)]}. \quad (3.64)$$

Convencionamos a seguinte notação $(0, 1), (1, 0), (0, -1)$ e $(-1, 0)$ para identificar a qual setor topológico estamos nos referindo. Sabendo que os vácuos são identificados como sendo $\phi_0^{(1)} = -1, \phi_0^{(2)} = 0$ e $\phi_0^{(3)} = 1$. Assim segue as configurações de campo

$$\phi_K(0, 1) = \sqrt{\frac{1}{2} [1 + \tanh(x - x_0)]} \quad (3.65)$$

$$\phi_{AK}(1, 0) = \sqrt{\frac{1}{2} [1 - \tanh(x - x_0)]} \quad (3.66)$$

$$\phi_K(-1, 0) = -\sqrt{\frac{1}{2} [1 - \tanh(x - x_0)]} \quad (3.67)$$

$$\phi_{AK}(0, -1) = -\sqrt{\frac{1}{2} [1 + \tanh(x - x_0)]}, \quad (3.68)$$

que são representados na figura (3.10) e cada um desses objetos possuem massa igual a $\frac{1}{4}$.

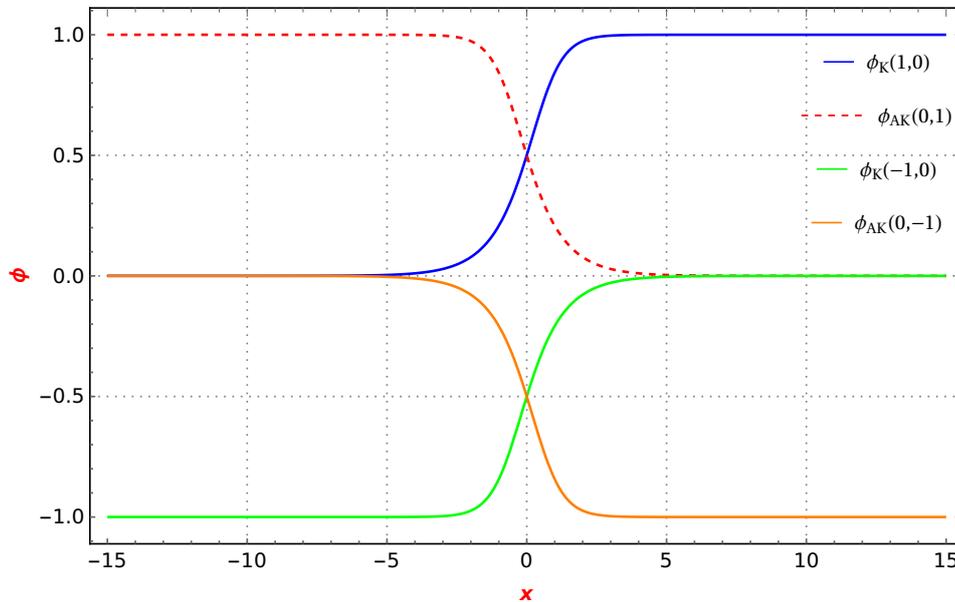


Figura 3.10. Configurações de campo.

Nosso objetivo é estudar a dinâmica dessas soluções através da colisão de Kinks, o que será feito no capítulo (6) utilizando o método das coordenadas coletivas.

Capítulo 4

O método das coordenadas coletivas para o estudo do espalhamento dos sólitons de sine-Gordon

Faremos aqui o espalhamento de sólitons usando o método de coordenadas coletivas, que consiste em transformar um problema de teoria de campos em um problema de mecânica. Em suma, o método consiste em integrar todos os graus de liberdade espaciais do modelo, levando a dinâmica do sistema a ser descrita apenas no espaço dos parâmetros. O nosso trabalho, em primeiro instante, consiste em estudar o artigo [24] e comparar a dinâmica do espalhamento obtido via método aproximativo com a solução exata calculada via transformações de Backlund em (3.2).

Estamos interessados em estudarmos o que acontece durante o processo de colisão de 2-sólitons, ou seja, duas paredes de energia se movendo com velocidades relativas. Para isso vamos combinar a solução estática de um sóliton (3.7) de tal forma que tenhamos uma expressão que configure dois sólitons

$$\tan\left(\frac{\varphi}{4}\right) = e^{(x-a(t))} - e^{-(x+a(t))} = 2e^{-a} \sinh(x) \quad (4.1)$$

em que " $a(t)$ " é a coordenada coletiva que está sendo definida, num espaço de parâmetros unidimensional. O primeiro termo de (4.1) representa um Kink localizado em $x = a$, que assume valores de 0 a 2π conforme x vai de $-\infty$ a ∞ . O segundo termo representa um Kink em $x = -a$, que cresce de -2π a 0 conforme x vai de $-\infty$ a ∞ . Quando $a(t)$ assume valores muito grandes a configuração (4.1) representa dois Kinks separados.

A idéia é escrever a lagrangiana efetiva no formato de uma métrica em (1+1) dimensão que descreva um objeto num espaço curvo, em função do potencial efetivo e do termo cinético:

$$L = \frac{1}{2}g(a)\dot{a}^2 - V(a), \quad (4.2)$$

onde $g(a)$ é a métrica no espaço dos parâmetros unidimensional, dada por

$$g(a) = 32e^{-2a} \int_0^\infty \frac{\sinh^2 x dx}{[1 + 4e^{-2a}\sinh^2 x]^2}, \quad (4.3)$$

e $V(a)$ é o potencial efetivo dado por

$$V(a) = 16e^{-2a} \int_0^\infty \frac{(\cosh^2 x + \sinh^2 x) dx}{[1 + 4e^{-2a}\sinh^2 x]^2}. \quad (4.4)$$

Explicitamente temos, portanto:

$$L = \int_{-\infty}^\infty dx \frac{1}{2} \left[\frac{16e^{-2a}\sinh^2 x}{[1 + 4e^{-2a}\sinh^2 x]^2} \right] \dot{a}^2 - \int_{-\infty}^\infty dx \left[\frac{8e^{-2a}(\cosh^2 x + \sinh^2 x)}{[1 + 4e^{-2a}\sinh^2 x]^2} \right]. \quad (4.5)$$

Uma observação importante aqui é que no artigo de P. Sutcliffe [24] essas integrais são tratadas numericamente, enquanto que neste trabalho, conseguimos encontra-las de forma analítica (ver apêndice A). Com isso podemos reescrever o termo cinético e potencial (4.2) em função do parâmetro de centro de massa $a(t)$:

$$g(a) = \frac{16e^{-2a}}{(4e^{-2a} - 1)^{\frac{3}{2}}} \left[\arctan(\sqrt{4e^{-2a} - 1}) - \frac{(4e^{-2a} - 1)^{\frac{1}{2}}}{4e^{-2a}} \right], \quad (4.6)$$

$$V(a) = \frac{8e^{-2a}}{\sqrt{4e^{-2a} - 1}} \left[\arctan(\sqrt{4e^{-2a} - 1}) + \frac{(4e^{-2a} - 1)^{\frac{1}{2}}}{4e^{-2a}} \right] + \frac{8e^{-2a}}{(4e^{-2a} - 1)^{\frac{3}{2}}} \left[\arctan(\sqrt{4e^{-2a} - 1}) - \frac{(4e^{-2a} - 1)^{\frac{1}{2}}}{4e^{-2a}} \right]. \quad (4.7)$$

Observe que no limite de $a \rightarrow \infty$ o potencial $V(a) \rightarrow 4$ e o termo cinético

$g(a) \rightarrow 4$. Como esperado que no limite assintótico o potencial tenda a 2 vezes a massa do kink, desde que cada um deles tenha massa igual a 2. Segue abaixo o gráfico do comportamento do termo cinético e o potencial (ver figura 4.1)

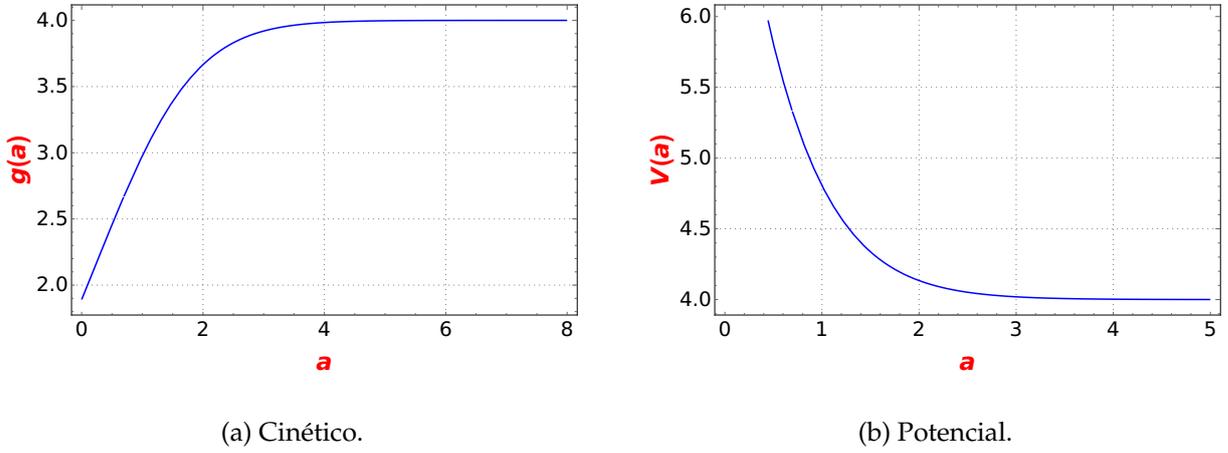


Figura 4.1. Comportamento do termo cinético e potencial para o espalhamento s3l3iton/s3l3iton.

4.1 Espalhamento S3l3iton/S3l3iton

A id3ea principal 3e comparar a solu33o de 2-s3l3itons (3.33) obtida via transforma33es de Backlund com o m3todo de coordenadas coletivas. Ent3o considere a solu33o de 2-S3l3itons

$$\psi(x, t) = 4 \arctan \left[\frac{v \sinh(\gamma x)}{\cosh(\gamma vt)} \right], \quad (4.8)$$

em que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ 3e o fator de Lorentz e v a velocidade do s3l3iton.

Comparando a configura33o aproximada (4.1) com a configura33o exata (4.8), temos

$$\tan \left(\frac{\psi}{4} \right) = \frac{v \sinh(\gamma x)}{\cosh(\gamma vt)} = 2e^{-\gamma a} \sinh(\gamma x) \quad (4.9)$$

$$a(t) = \frac{1}{\gamma} \log \left[\frac{2 \cosh(\gamma vt)}{v} \right]. \quad (4.10)$$

O limite n3o relativ3stico 3e obtido fazendo $\gamma \rightarrow 1$, de onde obtemos

$$a(t) = \log \left[\frac{2}{v} \cosh(vt) \right]. \quad (4.11)$$

De forma análoga ao que foi feito para calcular a lei de força nos limites assintóticos para o modelo ϕ^4 , aqui temos que para os sólitons de sine-Gordon também existe uma lei de força, que pode ser escrita em termos da energia de interação entre os objetos, que de acordo com [9] é dada por

$$E_{int} = -32e^{-R} \quad F = \frac{dE_{int}}{dR} = 32e^{-R} \quad (4.12)$$

de onde se conclui que a força entre os sólitons é repulsiva.

Se realizarmos a comparação entre a lei de força para 2-sólitons [9] e fixarmos a massa de cada um deles igual a 4:

$$F = m\ddot{a} = 8\ddot{a} = 32e^{-2a} \quad (4.13)$$

$$\ddot{a} = 4e^{-2a} \quad (4.14)$$

então repare que no limite assintótico, ou seja, no limite de $a \rightarrow \infty$ a velocidade fica constante e a força vai a zero. No entanto, como o interesse é estudar os efeitos da colisão, ou seja, quando os objetos estão muito próximos, em uma abordagem relativística, não faz sentido usarmos a mesma expressão que analisamos os limites assintóticos. Isso porque, quando foi realizado o cálculo da expressão da força, muitos outros termos foram negligenciados assumindo que eram pequenos, então na análise do processo de colisão, esses termos seriam importantes. De acordo com [9], para estudar a colisão perto da origem, é preciso usar a expressão (4.11).

Para nos convenceremos de que o método funciona para baixas velocidades vejamos o gráfico da equação exata (4.10) e a aproximada (4.11) (figura 4.2).

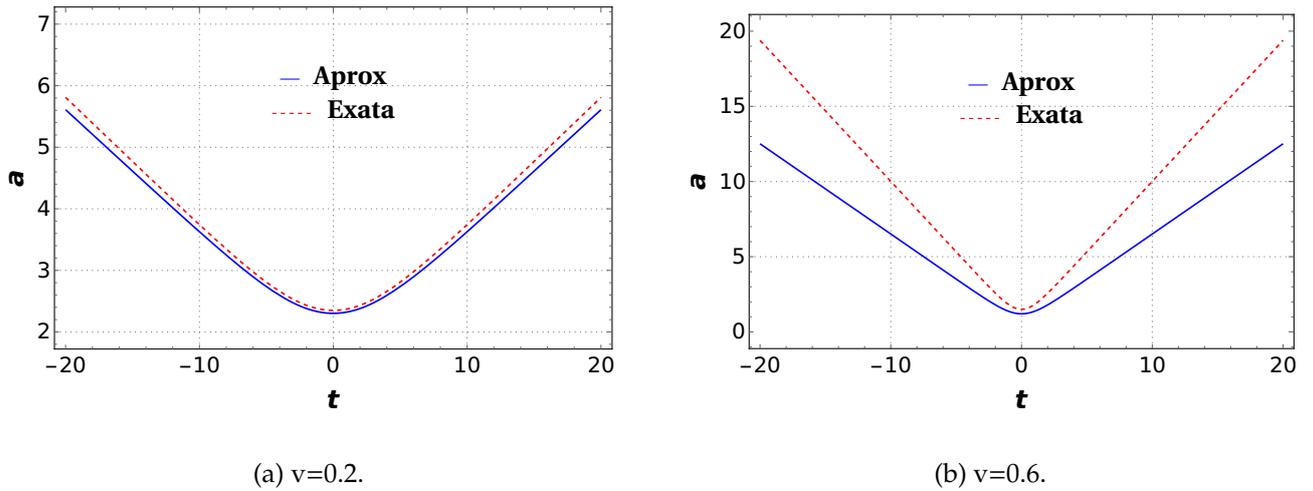


Figura 4.2. Comparação entre a solução exata e aproximada.

Por fim, vamos realizar a comparação entre a solução das coordenadas coletivas, obtida via equação de movimento da lagrangiana efetiva (4.5) e a solução exata (4.8). Vale observar que, estamos utilizando as seguintes condições de contorno $a(0) = 6$ e $\dot{a}(0) = -0.3$, e portanto precisamos introduzir a condição de contorno $a(0) = 6$ na solução exata a fim de realizarmos uma sobreposição das curvas. Assim, ao considerarmos a solução de 2-sólitons (4.8) colocamos a posição como sendo a coordenada do centro de massa $\psi_{KK}(x = a, t) = \pi$. Desta forma a expressão referente à solução exata será

$$a(t) = \frac{1}{\gamma} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\cosh(\gamma vt)}{v} \right), \quad (4.15)$$

em que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ é o fator de Lorentz.

Vimos acima que a comparação entre a solução exata de 2-sólitons e a aproximada, funciona bem somente para baixas velocidades (ver figura 4.2). Geralmente quando realizamos espalhamento com método aproximativo de coordenadas coletivas essa distinção pode ser verificada, no entanto, especialmente no caso do espalhamento no sine-Gordon, verificamos que o método de coordenadas coletivas não só funciona para baixas velocidades, como também para velocidades um pouco mais altas (ver figura 4.3).

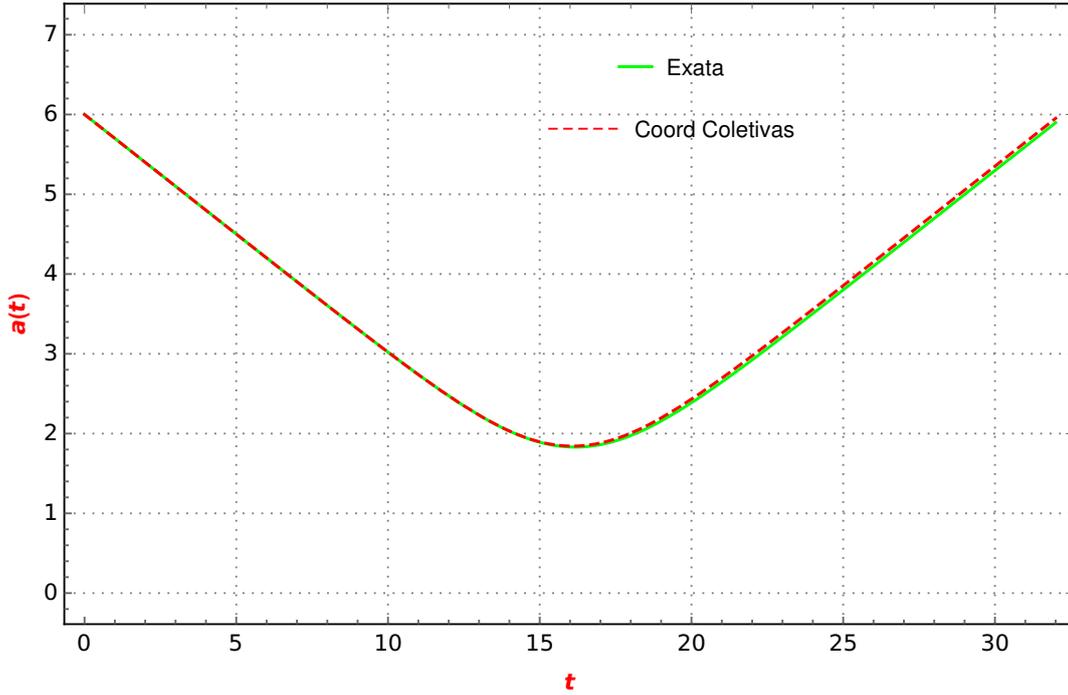


Figura 4.3. Comparação entre a solução exata e coordenadas coletivas KK para a velocidade inicial de $v = -0.3$.

4.2 Espalhamento Sóliton/Anti-Sóliton

Seguimos na busca por entender as propriedades do processo de espalhamento, nesse caso conseguimos realizar uma adaptação do modelo anterior que descreve de forma aproximada uma configuração de 2-sólitons e construímos uma, em que descrevemos o espalhamento aproximado de sóliton/anti-sóliton. Nosso interesse real, é poder mostrar que no processo de espalhamento de sóliton/anti-sóliton os objetos saem com uma diferença de fase, que está associada ao tempo de interação entre eles [25]. Essa observação de que eles passam um pelo outro está intimamente ligado a sua integrabilidade e a existência de somente modo de translação (ver apêndice D).

Partimos então de uma expressão que representa a configuração de sóliton/anti-sóliton, bem parecida com a que foi proposta por P. Sutcliffe em [24],

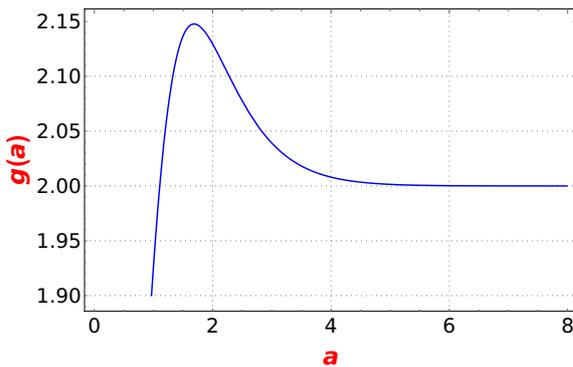
$$\tan\left(\frac{\phi}{4}\right) = -2e^{-a(t)} \cosh(x). \quad (4.16)$$

Aqui também podemos escrever a lagrangina efetiva no formato de uma métrica $L = \frac{1}{2}g(a)\dot{a}^2 - V(a)$ e representar o termo cinético e potencial em função de integrais que podem ser resolvidas analiticamente,

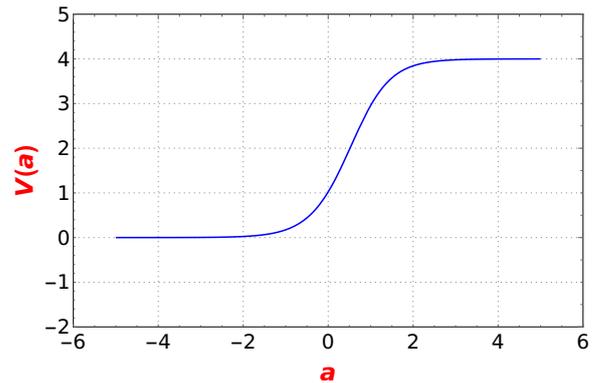
$$L = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} \left[\frac{16e^{-2a} \cosh^2(x)}{[1 + \alpha \cosh^2(x)]^2} \right] \dot{a}^2 - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{8e^{-2a} (\cosh^2(x) + \sinh^2(x))}{[1 + \alpha \cosh^2(x)]^2}, \quad (4.17)$$

em que $\alpha = 4e^{-2a}$.

Olhando para os gráficos referentes aos termos cinético e potencial (ver figura 4.4), podemos perceber que a velocidade relativa do sistema tende a uma constante nos limites assintóticos e à medida em que eles se aproximam, sua velocidade relativa aumenta, até o momento em que passam um pelo outro e saem para os limites assintóticos com velocidade menor. Quanto ao potencial efetivo (4.2), podemos interpretar como sendo puramente atrativo e eventualmente tende a uma constante no infinito, e como o caso anterior, pode ser interpretado como tendo duas vezes o valor a massa.



(a) Cinético.



(b) Potencial.

Figura 4.4. Comportamento do termo cinético e potencial para o espalhamento de Sóliton/Anti-Sóliton.

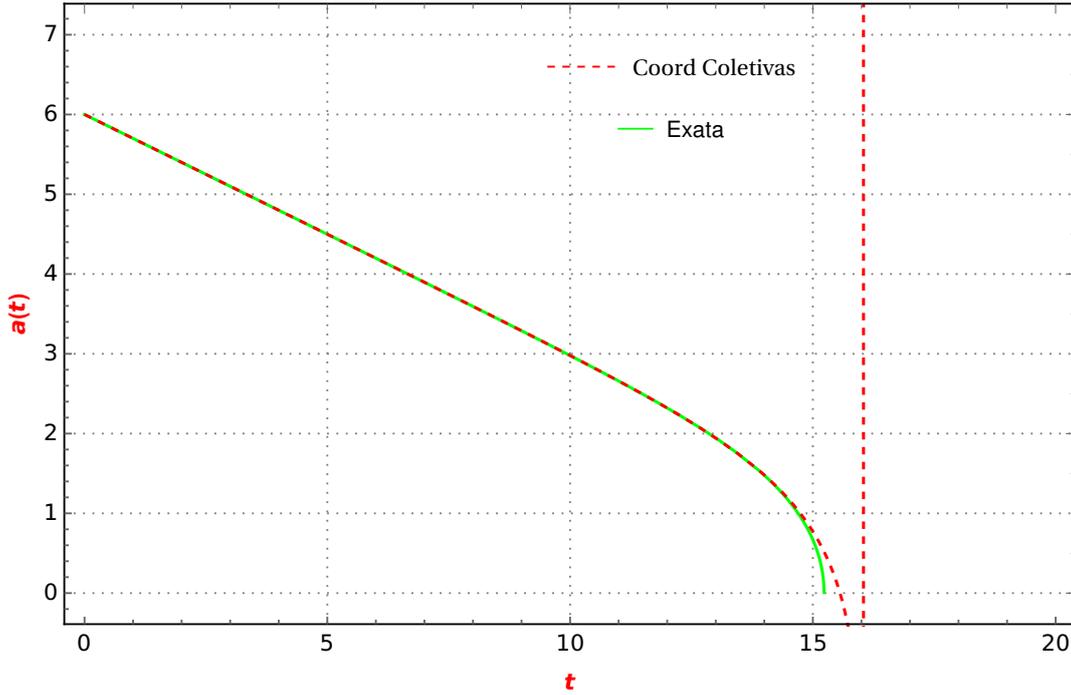


Figura 4.5. Comparação entre a solução exata e coordenadas coletivas KAK.

Assim como no caso do espalhamento entre 2-sólitons considerando as mesmas condições iniciais do caso anterior e usamos a solução de Kink/ AntiKink obtida via transformações de Bäcklund (3.38) com a seguinte condição $\psi_{KAK}(x = a, t) = -\pi$ que conecta a coordenada do centro de massa com a solução exata. Isso nos permite comparar a solução exata (3.2) com a solução encontrada via coordenadas coletivas da lagrangiana (4.17)

$$a(t) = \frac{1}{\gamma} \operatorname{arccosh} \left(-\frac{1}{v} \sinh(\gamma vt) \right). \quad (4.18)$$

Observe que as curvas de soluções plotadas no gráfico (4.5) estão praticamente sobrepostas e portanto as coordenadas coletivas também funcionam muito bem para esse caso. Esse resultado independe da velocidade considerada, mas quando as soluções se aproximam e devem ser superpostas, não é mais possível interpretar o que está ocorrendo.

Uma forma de tentar quantificar alguma informação acerca do que acontece durante o espalhamento é através do cálculo da sua diferença de fase. Detalhando o procedimento que é feito em [25], tomamos a configuração de sóliton/anti-sóliton dada por (3.38)

$$\phi_{kak} = 4\text{arctg} \left[\frac{\sinh(\gamma vt)}{v \cosh(\gamma x)} \right] = 4\text{arctg} \left[\frac{e^{\gamma \left(x+v \left(t + \frac{\ln(\frac{1}{v})}{\gamma v} \right) \right)} - e^{\gamma \left(x-v \left(t - \frac{\ln(\frac{1}{v})}{\gamma v} \right) \right)}}{1 + e^{2\gamma x}} \right], \quad (4.19)$$

em que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ é o fator de Lorentz. Através da identidade trigonométrica inversa $\text{arctg}(a) - \text{arctg}(b) = \text{arctg}\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$ ajustamos os valores dos argumentos da função exponencial em (4.19) definindo uma fase $\Delta = \frac{\ln(v)}{\gamma v}$. Desta forma identificamos:

$$a = e^{\gamma(x+v(t+\frac{\Delta}{2}))} \quad (4.20)$$

$$b = e^{\gamma(x-v(t+\frac{\Delta}{2}))}. \quad (4.21)$$

Portanto a configuração de 2-sólitons (4.19) é escrita no limite assintótico temporal como sendo dois objetos separados, mas à medida em que esses objetos começam o processo de interação é inevitável que em $t = 0$ os mesmos se aniquilem. Porém em um tempo futuro positivo essas estruturas (4.23) resurgem e não apresentam nenhuma perda de informação das configurações iniciais, sendo assim diferenciadas apenas por uma de fase temporal Δ ,

$$\begin{aligned} \phi_{kak} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} &= 4\text{arctg} \left[e^{\gamma(x+v(t+\frac{\Delta}{2}))} \right] - 4\text{arctg} \left[e^{\gamma(x-v(t+\frac{\Delta}{2}))} \right] = \\ &= \phi_k \left(e^{\gamma(x+v(t+\frac{\Delta}{2}))} \right) + \phi_{ak} \left(e^{\gamma(x-v(t+\frac{\Delta}{2}))} \right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \phi_{kak} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} &= 4\text{arctg} \left[e^{\gamma(x+v(t-\frac{\Delta}{2}))} \right] - 4\text{arctg} \left[e^{\gamma(x-v(t-\frac{\Delta}{2}))} \right] = \\ &= \phi_k \left(e^{\gamma(x+v(t-\frac{\Delta}{2}))} \right) + \phi_{ak} \left(e^{\gamma(x-v(t-\frac{\Delta}{2}))} \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Capítulo 5

O método de Coordenadas coletivas para o estudo de espalhamento de sólitons no modelo ϕ^4

Neste capítulo aplicaremos o método de coordenadas coletivas para o estudo do processo de colisão entre kink e anti-kink no modelo ϕ^4 . Um efeito importante neste espalhamento é a existência das chamadas "janelas de ressonância", nas quais os sólitons permanecem temporariamente em um estado ligado que em seguida é desfeito, permitindo que esses objetos sigam livres. Esse tipo de comportamento é altamente dependente da velocidade relativa inicial entre os sólitons. Há uma velocidade crítica, acima da qual todos os espalhamentos passam a ser elásticos.

O estudo desses processos é de caráter numérico. O método de coordenadas coletivas permite aproximar essas situações de modo que possamos ter alguma ideia sobre a dinâmica dos sólitons a partir da redução dos graus de liberdade envolvidos. Essa aproximação naturalmente falha em muitos aspectos, dada a complexidade envolvida na interação desses objetos, porém nos permite observar razoavelmente como agem os chamados modos internos de vibração dos sólitons, i.e., percebemos que quando tomamos em conta a interpretação do sóliton como um objeto estendido, e portanto, com graus de liberdade internos e os consideramos no método aproximativo, os resultados melhoram quando comparados com o que se obtém da simulação numérica.

Os trabalhos mais recentes [1,26] sobre o tema são, a partir de certo ponto, insatisfatórios no sentido que, recorrem a aproximações ad-hoc na tentativa de ajustar os resultados observados ao que se espera a partir da simulação numérica. Aqui devemos ver que esse esforço se faz desnecessário se certas considerações são feitas.

5.1 O método de coordenadas coletivas para a descrição do movimento da solução de *kink*

O modelo em questão é descrito pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mathcal{U} \quad (5.1)$$

com $\mathcal{U} = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \eta^2)^2$, sendo $\eta = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$.

A solução de *kink* do modelo ϕ^4 (analogamente para a solução de *anti-kink*) pode ser interpretada como uma partícula relativística (não pontual) que move-se com velocidade constante v sem perder a sua forma. A expressão do campo para o *kink* é dada por

$$\phi(x, t) = \eta \tanh \left[\frac{m(x - x_0 - vt)}{\sqrt{2} \sqrt{1 - v^2}} \right]. \quad (5.2)$$

Para pequenas velocidades, $v \ll 1$, essa configuração pode ser descrita aproximadamente por

$$\phi \approx \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh(x - x_0 - vt)$$

o que nos permite propor a seguinte ideia que, apesar de neste contexto ser trivial, será importante para o que pretendemos fazer mais adiante. O que nos interessa aqui é a dinâmica da solução e portanto, por se tratar de um objeto localizado, podemos descrevê-lo, nesse regime de pequenas velocidades por

$$\phi \approx \eta \tanh(\sigma(x - a(t))) \quad (5.3)$$

aonde $\sigma \equiv \frac{m}{\sqrt{2}}$ e a função $a(t)$, a chamada coordenada coletiva, define a posição do *kink* em cada instante de tempo. Assumimos que o perfil da configuração é conhecido mas não a sua dinâmica, que portanto, será descrita por $a(t)$.

Uma vez que essa configuração é solução das equações de movimento, então a ação a ela associada deve ser estacionária e portanto, $a(t)$ deve ser tal que isso seja possível. Com efeito, uma vez que para (5.3) temos¹

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\dot{a} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (5.4)$$

¹ $\dot{a} \equiv \frac{da}{dt}$.

a densidade de lagrangiana fica

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{a}^2}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \mathcal{U} \quad (5.5)$$

com $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \eta \sigma \operatorname{sech}^2(\sigma(x - a(t)))$.

Essa expressão pode ser facilmente integrada em x para todo espaço, de modo que obtemos daí a lagrangiana $L(a(t), \dot{a}(t))$:

$$L = \frac{2\eta^2 \sigma \dot{a}^2}{3} - \frac{2\eta^2 \sigma}{3} - \frac{\lambda \eta^4}{3\sigma}, \quad (5.6)$$

com a qual o princípio de estacionaridade da ação resulta em uma equação dinâmica para $a(t)$

$$\ddot{a} = 0, \quad (5.7)$$

de onde segue a solução:

$$a(t) = x_0 + vt, \quad (5.8)$$

sendo as constantes de integração fixadas convenientemente como x_0 e v .

Como dissemos, este exemplo, apesar de bastante simples, demonstra claramente a ideia do método aproximativo: a escolha de coordenadas coletivas como parâmetros dependentes do tempo com os quais os graus de liberdade do campo, relativos à sua dinâmica, podem ser descritos. Naturalmente, para esse caso do movimento de um *kink* livre, a introdução de um único parâmetro, $a(t)$, foi suficiente para descrever corretamente o seu movimento, como uma partícula livre. Nem sempre este é o caso, como no estudo de espalhamento de sólitons, aonde a introdução de mais coordenadas coletivas se faz necessária.

5.2 Espalhamento de *kink* e *anti-kink* no modelo ϕ^4

O modelo ϕ^4 não admite soluções de multi-sólitons, como por exemplo, as obtidas no modelo de *sine-Gordon*. Isso não impede, porém, que possamos promover espalhamentos de soluções dessa teoria. Naturalmente, por ser a equação dinâmica não linear, não é possível simplesmente superpor configurações de (*anti*-)*kink* $\phi_i = \phi(x - a_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, localizadas em pontos a_i do espaço, porém, pode-se distribuí-las de modo que a condição

$$\phi_i(-\infty) = \phi_{i+1}(+\infty) \quad (5.9)$$

seja respeitada para $|a_{i+1} - a_i|$ suficientemente grande.

Assim, podemos construir uma configuração que consiste em um *kink* e um *anti-kink* suficientemente distantes um do outro, separados por $2a$, sendo a agora um parâmetro que depende do tempo - a coordenada coletiva:

$$\varphi = \varphi_K(x + a) + \varphi_{AK}(x - a) - \eta, \quad (5.10)$$

com

$$\phi_K(x) = \eta \tanh(\sigma x) \quad \phi_{AK}(x) = -\eta \tanh(\sigma x) \quad (5.11)$$

Com isso, a densidade de lagrangiana fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_K}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{AK}}{\partial t} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \varphi_K}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \varphi_{AK}}{\partial t} \right) \right] \\ & - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_K}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{AK}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \varphi_K}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \varphi_{AK}}{\partial x} \right) \right] \\ & - \frac{\lambda}{4} \left[\varphi_K^4 + \varphi_{AK}^4 + 8\varphi_K^3 \varphi_{AK} + 6\varphi_{AK}^2 \varphi_K^2 + 8\eta^2 \varphi_K^2 \right] \\ & - \frac{\lambda}{4} \left[8\eta^2 \varphi_K \varphi_{AK} - 4\eta (\varphi_{AK}^3 + \varphi_K^3) \right] \\ & + \frac{\lambda}{4} 12\eta \left[\varphi_K \varphi_{AK}^2 + \varphi_{AK} \varphi_K^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Aqui, novamente, os termos de derivada dos campos no tempo são proporcionais aos termos de derivada espacial, sendo a proporcionalidade dada pela derivada da coordenada coletiva a no tempo. Com isso, pode-se integrar essa densidade de lagrangiana no espaço de modo que

$$L(a, \dot{a}) = \int dx \mathcal{L} = \frac{1}{2} g(a) \dot{a}^2 - V(a), \quad (5.13)$$

com

$$\begin{aligned} g(a) = & \eta^2 \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\operatorname{sech}^4(\sigma(x+a)) + \operatorname{sech}^4(\sigma(x-a)) \right] \\ & + \eta^2 \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[2\operatorname{sech}^2(\sigma(x+a)) \operatorname{sech}^2(\sigma(x-a)) \right] \end{aligned} \quad (5.14)$$

e

$$\begin{aligned}
 V(a) &= \frac{\eta^2 \sigma^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\operatorname{sech}^4(\sigma(x+a)) + \operatorname{sech}^4(\sigma(x-a)) - 2\operatorname{sech}^2(\sigma(x+a))\operatorname{sech}^2(\sigma(x-a)) \right] \\
 &+ \lambda \eta^4 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{\alpha^4}{4} \operatorname{sech}^4(\sigma(x+a)) \operatorname{sech}^4(\sigma(x-a)) \right] \\
 &+ \lambda \eta^4 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\alpha^2 \operatorname{sech}^2(\sigma(x+a)) \operatorname{sech}^2(\sigma(x-a)) \right] \\
 &- \lambda \eta^4 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\alpha^3 \operatorname{sech}^3(\sigma(x+a)) \operatorname{sech}^3(\sigma(x-a)) \right]. \tag{5.15}
 \end{aligned}$$

aonde a identidade

$$\tanh(\sigma(x+a)) - \tanh(\sigma(x-a)) = \alpha \operatorname{sech}(\sigma(x+a)) \operatorname{sech}(\sigma(x-a))$$

com $\alpha = \frac{\tanh(2\sigma a)}{\operatorname{sech}(2\sigma a)}$ foi utilizada para reescrevermos o termo envolvendo $(\varphi^2 - \eta^2)^2$ que aparece no potencial $V(a)$.

Essas integrais podem ser resolvidas analiticamente (o método é discutido nos apêndices) e ficamos com

$$g(a) = \eta^2 \sigma^2 \left[\frac{8}{3\sigma} - \frac{8}{\sigma} \operatorname{csch}^2(2\sigma a) + 16a \operatorname{coth}(2\sigma a) \operatorname{csch}^2(2\sigma a) \right], \tag{5.16}$$

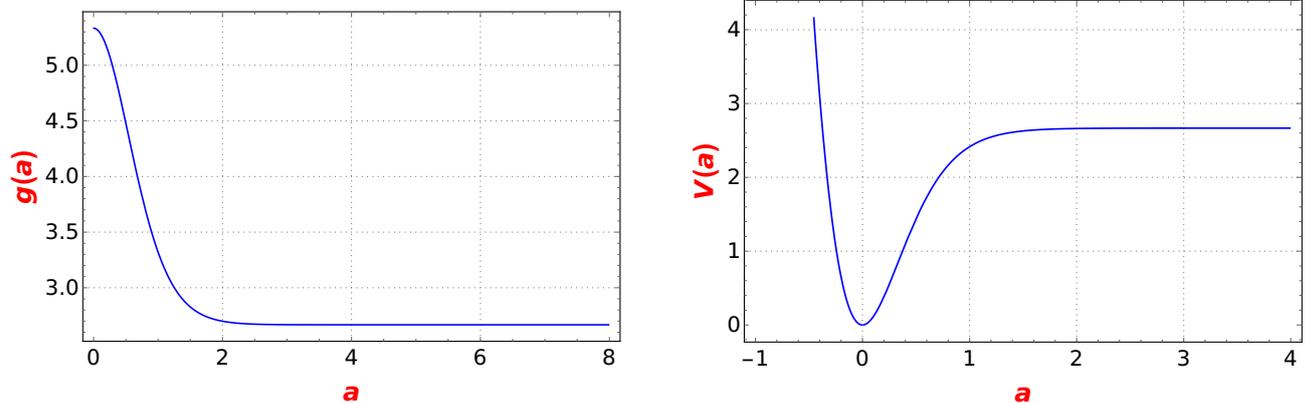
$$\begin{aligned}
 V(a) &= \frac{m^4}{\lambda} \left[\frac{2}{3\sigma} + \frac{2}{\sigma} \operatorname{csch}^2(2\sigma a) - 4a \operatorname{coth}(2\sigma a) \operatorname{csch}^2(2\sigma a) \right] \\
 &+ \frac{m^4}{\lambda} \left[\frac{8}{3\sigma} - 12a \operatorname{coth}(2\sigma a) - \frac{10}{\sigma} \operatorname{coth}^2(2\sigma a) + 20a \operatorname{coth}^3(2\sigma a) + 8a \right] \\
 &+ \frac{m^4}{\lambda} \left[\frac{12}{\sigma} \operatorname{coth}(2\sigma a) - \frac{4}{\sigma} + 8a \operatorname{coth}(2\sigma a) - 24a \operatorname{coth}^2(2\sigma a) \right]. \tag{5.17}
 \end{aligned}$$

Podemos ainda utilizar algumas identidades trigonométricas para simplificar essa última expressão que se lê

$$\begin{aligned}
 V(a) &= \frac{4\sqrt{2}m^3}{\lambda} \left[-\frac{2}{3} + \sqrt{2}ma + \frac{3}{\tanh(\sqrt{2}ma)} \right] \\
 &+ \frac{4\sqrt{2}m^3}{\lambda} \left[-\frac{(2+3\sqrt{2}ma)}{\tanh^2(\sqrt{2}ma)} + \frac{2\sqrt{2}ma}{\tanh^3(\sqrt{2}ma)} \right], \tag{5.18}
 \end{aligned}$$

e pode ser comparada - concordando - com os resultados já existentes na literatura [27,28].

Na figura (5.1) são apresentados os gráficos das funções $g(a)$ e $V(a)$ dadas acima, com uma escolha particular de valores para as constantes de acoplamento do modelo.



(a) A função $g(a)$ se torna constante quando *kink* e *anti-kink* estão bem separados um do outro.

(b) A função potencial indica a possibilidade de estados ligados bem como prevê colisões elásticas no caso de espalhamentos.

Figura 5.1. Funções $g(a)$ e $V(a)$ com $\lambda = 2$ e $m = \sqrt{2}$ (e portanto $\eta = 1$ e $\sigma = 1$).

Podemos interpretar a lagrangiana (5.13) como descrevendo a dinâmica de uma partícula cuja posição é dada por $a(t)$ em um espaço unidimensional com métrica $g(a)$, sob um potencial $V(a)$. Nessa interpretação, a colisão do *kink* com o *anti-kink* acontece quando essa partícula está em $a = 0$, enquanto em valores grandes de a esses objetos estão separados. O potencial dessa partícula indica que, quando afastados (quando $a > 3$, nessa escolha de valores para os parâmetros) o potencial é constante e portanto a partícula não sente qualquer força (os sólitons estão livres). A partir de $a = 3$ na direção negativa do eixo, o potencial fica menor e portanto a partícula acelera, o que é interpretado como uma atração entre os sólitons. Vemos ainda que o potencial cresce indefinidamente para valores de $a < 0$, indicando que, caso a partícula venha a partir de $a > 3$ nessa direção, ela deveria acelerar, em seguida, desacelerar e voltar, ou seja, a colisão é sempre elástica. Nesse sentido vemos que essa aproximação não é suficiente para explicar o fenômeno que chamamos de “janelas de ressonância”. Uma última observação é que, na situação aqui apresentada, se a partícula começa em uma posição $0 \leq a \leq 1$, então ela deve ficar apresentar um movimento periódico, como em um estado ligado. Efetivamente, pode-se observar em uma simulação numérica que quando os sólitons estão muito próximos em uma condição inicial, é

mesmo isso que acontece. Entretanto, a aproximação de coordenadas coletivas como feita aqui falha ao não prever a emissão de radiação dos sólitons nesse processo e seu eventual desaparecimento como sistema de duas partículas.

5.3 A inclusão de um modo de vibração interno

Uma maneira de se entender a existência das janelas de ressonância é levando em conta a existência de uma estrutura interna para os sólitons, tal que certos graus de liberdade associados a ela possam ser excitados no processo de interação. Isso permitiria com que a energia, via as não linearidades do modelo, pudesse ser redistribuída entre os sólitons por novos canais ocasionando, eventualmente, o fenômeno de ressonância.

A solução de (*anti*-)kink do modelo ϕ^4 apresenta um estado excitado (calculado no apêndice B, dado na expressão (B.18)), dado por

$$\chi_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{sech}(\sigma x) \tanh(\sigma x).$$

Então, admitindo que é esse modo de vibração que deve ser ativado no processo de interação entre os sólitons, escrevemos o perfil do campo como²

$$\varphi = \varphi_K + \xi(t) \chi_1(x + a(t)), \quad (5.19)$$

com ξ uma nova coordenada coletiva. Assim, até ordem quadrática nessa coordenada a densidade de lagrangiana fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_K}{\partial t} \right)^2 + (\dot{\xi} \chi_1 + \xi \dot{\chi}_1)^2 + 2 \left(\frac{\partial \varphi_K}{\partial t} \right) (\dot{\xi} \chi_1 + \xi \dot{\chi}_1) \right] \\ & - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_K}{\partial x} \right)^2 + \xi^2 \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x} \right)^2 + 2 \xi \left(\frac{\partial \varphi_K}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x} \right) \right] \\ & - \frac{1}{2} \left[\operatorname{sech}^4(x + a) + 4\varphi_K^2 \xi^2 \chi_1^2 - 2\xi^2 \chi_1^2 \operatorname{sech}^2(x + a) \right] \\ & - \frac{1}{2} \left[-4\varphi_K \xi \chi_1 \operatorname{sech}^2(x + a) + \cancel{\xi^4 \chi_1^4} + \cancel{4\varphi_K \xi^3 \chi_1^3} \right], \quad (5.20) \end{aligned}$$

que integrada no espaço nos dá a lagrangiana

²Fixando as constantes de acoplamento como $\sigma = \eta = 1$, i.e., $m = \sqrt{2}$ e $\lambda = 2$.

$$L = -M + \frac{M}{2}\dot{a}^2 + \frac{1}{2}\dot{\xi}^2 + \frac{7}{10}\xi^2\dot{a}^2 + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\xi\dot{a}^2 - \frac{\omega^2}{2}\xi^2 \quad (5.21)$$

com $M = \frac{4}{3}$ e tomamos $\omega^2 = 3$, referente à frequência do primeiro modo excitado.

Então observamos que o acoplamento desse modo de vibração à solução de vácuo leva a correções não lineares na equação de movimento. A estacionariada da ação para esse perfil de campo dá as equações dinâmicas de $a(t)$ e $\xi(t)$, esta última, em particular, aparece como coordenada cíclica de modo que há a ela associada uma lei de conservação. A solução dessas equações é obtida numericamente e apresentada na figura (5.2) abaixo.

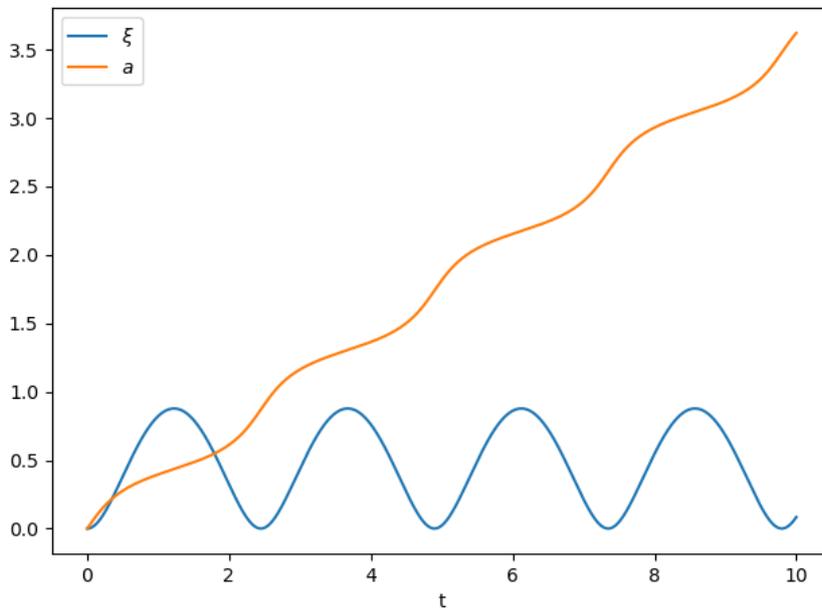


Figura 5.2. O movimento do *kink* é definido pela função $a(t)$. A coordenada $\xi(t)$ leva à mudanças na velocidade de translação desse objeto.

A coordenada coletiva $\xi(t)$ tem o papel de permitir a excitação do primeiro modo de vibração do *kink*. Naturalmente que a modificação do movimento livre apresentado na figura 5.2 não deve ser interpretada neste contexto como um fenômeno físico pois aqui estamos assumindo de início que o modo é excitado, o que não ocorre se não houver interação. Como fica evidente dos acoplamentos na lagrangiana (5.21), o papel do modo excitado é o de modificar a inércia do sóliton, introduzindo uma dependência temporal em sua massa. De outra maneira, podemos também apreciar este problema a partir da interpretação de que (ξ, a) definem coordenadas em um espaço 2-dimensional com métrica $g_{ij} = \text{diag}(\frac{1}{2}, \frac{M}{2} + \frac{7}{10}\xi^2 + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\xi)$ e potencial

5.4 O estudo do espalhamento incluindo os modos internos de vibração

Existem diversos trabalhos [28–33] dedicados ao estudo do espalhamento de *kink* e *anti-kink* do modelo ϕ^4 , a partir do método de coordenadas coletivas. Como podemos apreciar, um grande problema neste método é a solução, seja ela analítica ou numérica, das integrais dos termos não lineares que aparecem na definição da lagrangiana efetiva, i.e. a lagrangiana das coordenadas coletivas. Possivelmente, por conta dessas dificuldades, muitos autores se propõem a eliminar alguns desses termos que eventualmente julgam desnecessários aos resultados.

Entretanto, no presente estudo descobrimos que muitos desses termos, ao serem eliminados, promovem erros que depois tentam ser corrigidos pela introdução *ad-hoc* de outras funções à lagrangiana, tendo como base o conhecimento do comportamento desejado, observado em simulações numéricas. Essa é exatamente a abordagem de alguns trabalhos recentes [1, 26] que conseguem boas aproximações mas que certamente não levam o método das coordenadas coletivas ao máximo de sua potencialidade.

Apresentaremos aqui uma perspectiva com inclinação geométrica aonde a justificativa para a eliminação de alguns termos se dá a partir da interpretação da dinâmica da partícula no espaço dos parâmetros. Mais ainda, as dificuldades no que concerne às integrações foram aqui superadas com base no método usado em [34] e certamente este ponto é crucial na obtenção dos resultados que seguem.

Consideramos então, novamente, as coordenadas coletivas $a(t)$ e $\xi(t)$; enquanto a primeira define a posição relativa dos sólitons, a outra está relacionada às excitações. Seguindo [28, 31], basta, para a nossa análise, a introdução de uma mesma função amplitude para ambos os modos normais, referentes a cada uma das configurações, de *kink* e de *anti-kink*, de modo que o campo ϕ fica dado por

$$\varphi = \varphi_K(x+a) + \varphi_{AK}(x-a) - 1 + \xi(t) [\chi_1(x+a) - \chi_2(x-a)], \quad (5.22)$$

novamente com as expressões para ϕ_K e ϕ_{AK} definidas em (5.11). O resultado da substituição de ϕ acima na densidade de lagrangiana do modelo resulta em uma

lagrangiana que, até ordem quadrática em ξ é dada por

$$L = [M_0 + I(a)]\dot{a}^2 - V(a) + \xi^2 + \xi^2 Q(a) + \xi \dot{a} C(a) - \xi^2 W(a) + \xi F(a) + \xi^2 \dot{a}^2 K(a) + \xi \dot{a}^2 J(a) + \xi \xi \dot{a} N(a), \quad (5.23)$$

com³

$$M_0 = \frac{4}{3} \quad (5.24)$$

$$I(a) = 8a \coth(2a) \operatorname{csch}^2(2a) - 4 \operatorname{csch}^2(2a) \quad (5.25)$$

$$V(a) = 8 \left[-\frac{2}{3} + 2a + \frac{3}{\tanh(2a)} - \frac{2(1+3a)}{\tanh^2(2a)} + \frac{4a}{\tanh^3(2a)} \right] \quad (5.26)$$

$$Q(a) = 6a \operatorname{csch}(2a) + 12a \operatorname{csch}^3(2a) - 6 \coth(2a) \operatorname{csch}(2a) \quad (5.27)$$

$$C(a) = \pi \sqrt{\frac{3}{2}} \tanh(a) \operatorname{sech}^2(a) \quad (5.28)$$

$$F(a) = -6\pi \sqrt{\frac{3}{2}} \tanh^2(a) [-1 + \tanh(a)]^2 \quad (5.29)$$

$$J(a) = \sqrt{\frac{3}{2}} \pi \left[\frac{1}{2} + \operatorname{sech}^4(a) - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^4(a) \cosh(2a) \right] \quad (5.30)$$

$$N(a) = \frac{3}{2} \left[15 \operatorname{csch}^3(2a) + 9 \operatorname{csch}(2a) \coth^2(2a) + 3 \operatorname{csch}(2a) \right] + \frac{3}{2} \left[-6a \operatorname{csch}(2a) \coth(2a) - 46a \coth(2a) \operatorname{csch}^3(2a) - 2a \coth^3(2a) \operatorname{csch}(2a) \right] \quad (5.31)$$

$$K(a) = \frac{3}{4} \left[\frac{28}{15} + 160a \operatorname{csch}^3(2a) + 8a \operatorname{csch}(2a) + 192a \operatorname{csch}^5(2a) \right] + \frac{3}{4} \left[-96 \coth(2a) \operatorname{csch}^3(2a) - 16 \coth(2a) \operatorname{csch}(2a) \right] \quad (5.32)$$

e finalmente

$$W(a) = -\frac{3}{16} \operatorname{csch}^5(2a) (-1588a - 2(48a+97) \sinh(2a) + 12(80a+49) \sinh(4a) - (96a+119) \sinh(6a) + 6(16a+19) \sinh(8a) - 5 \sinh(10a) + 40(24a-1) \cosh(2a) - 16(98a+12) \cosh(4a) + 12(16a+3) \cosh(6a) - 6(18a+16) \cosh(8a) + 4 \cosh(10a) + 288). \quad (5.33)$$

³As integrações necessárias à obtenção destes resultados estão dadas no apêndice F e o método de integração no apêndice E.

Os resultados apresentados em [26, 30, 33] podem ser recuperados na nossa análise quando tomamos (aqui, feito de maneira bastante arbitrária) $C(a) = Q(a) = K(a) = J(a) = N(a) = 0$ e quando usamos $W(a) = 3$, i.e., fixamos o valor dessa função como sendo igual ao que assume no limite $a \rightarrow \infty$. Quando este não é o caso, efetivamente verifica-se uma maior discordância com os resultados obtidos da simulação numérica.

O comportamento de $a(t)$ para uma certa velocidade inicial é dado na figura 5.3 abaixo.

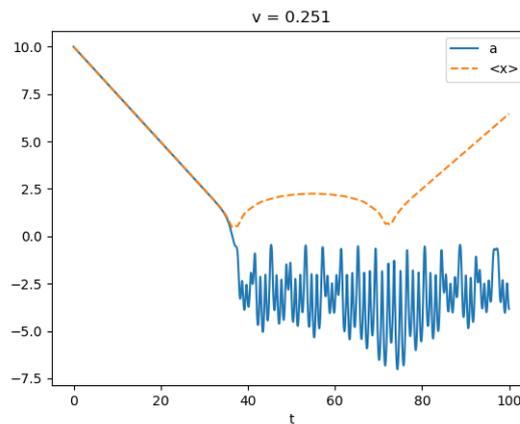


Figura 5.3. A dinâmica dos sólitons via coordenadas coletivas encontrada em [1]. A velocidade relativa inicial é $v = 0.251$.

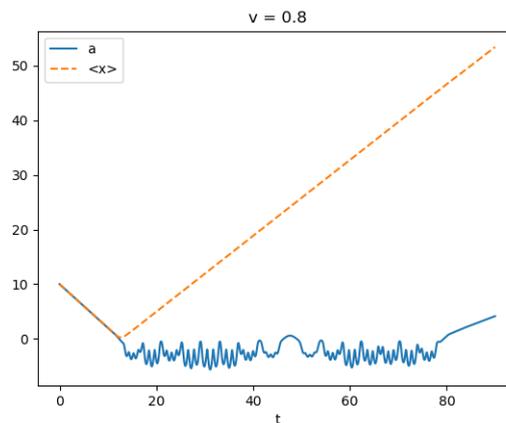


Figura 5.4. A dinâmica dos sólitons via coordenadas coletivas encontrada em [1]. A velocidade relativa inicial é $v = 0.8$ que mostraria um espalhamento, não é possível observar nesse modelo.

Este cenário apresenta um problema claro: após a colisão os sólitons permanecem (conforme a interpretação da coordenada $a(t)$) em um aparente estado ligado

na região $0 \leq x \leq -7$. A interpretação deste resultado não parece coerente com o que se observa a partir da solução numérica do problema. Mais ainda, mesmo para altas velocidades (por exemplo, com $v = 0.8$), o método feito dessa forma não prevê adequadamente situações aonde ocorrem colisões elásticas. Efetivamente, só observamos colisões elásticas em velocidades maiores que $v = 0.9$.

Em nossa abordagem, olhamos para o movimento geodésico da partícula em um espaço 2-dimensional cuja dinâmica se descreve pela lagrangiana (5.23), e cujas coordenadas são (ξ, a) . Vamos considerar o espaço como sendo isotrópico, de modo que a métrica seja diagonal, o que significa tomar $N(a) = C(a) = 0$, e quanto ao potencial externo, mantemos a escolha $W(a) = 3$. Assim, reescrevemos a lagrangiana como

$$L = \frac{1}{2}g_{\xi\xi}\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}g_{aa}\dot{a}^2 - (V + \xi^2W - \xi F) \quad (5.34)$$

com

$$g_{\xi\xi} = 2(M_0 + I + \xi^2K + \xi J) \quad g_{aa} = 2(1 + Q). \quad (5.35)$$

Para compararmos com os resultados da simulação numérica, definimos o centro de massa do *kink* ou equivalentemente, do *anti-kink* como

$$\langle x \rangle = \frac{\int_0^\infty x \mathcal{E}(x, t) dx}{\int_0^\infty dx \mathcal{E}(x, t)}, \quad (5.36)$$

em que $\mathcal{E}(x, t)$ é a função densidade de energia

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \mathcal{U}. \quad (5.37)$$

Nas figuras abaixo são mostradas algumas soluções para diferentes valores de velocidade inicial das configurações.

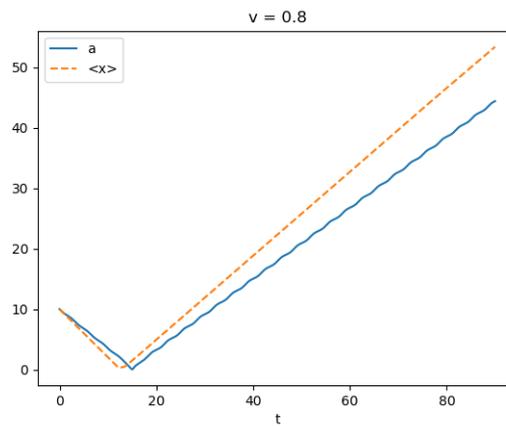


Figura 5.5. Para valores acima da velocidade crítica, o método de coordenadas coletivas prevê corretamente a natureza elástica das colisões. Observe que para a velocidade de $v = 0.8$ a velocidade final dos sólitons está razoavelmente de acordo com a simulação numérica.

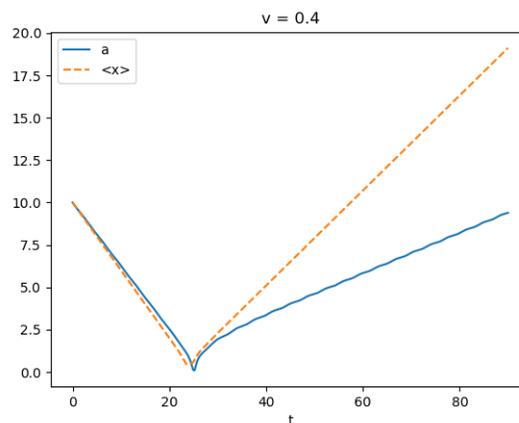


Figura 5.6. Para valores acima da velocidade crítica, o método de coordenadas coletivas prevê corretamente a natureza elástica das colisões, porém, em alguns casos como este no qual $v = 0.4$, a velocidade final dos sólitons está em bastante desacordo com o resultado observado na simulação numérica.

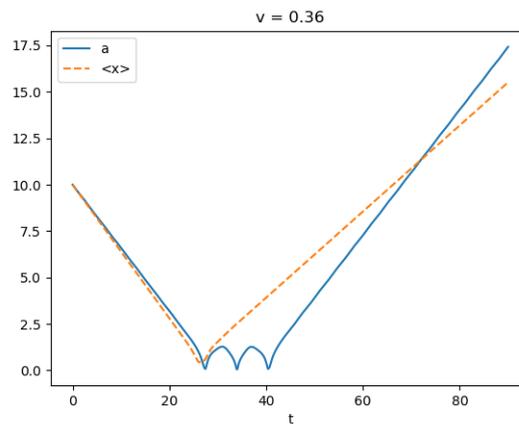


Figura 5.7. Espalhamento dos sítions com velocidades iniciais $v = 0.36$. Aqui o movimento previsto pela coordenada coletiva indica uma possível janela de ressonância que não é observada na simulação, mas o comportamento mais geral do espalhamento está de acordo, com algum erro na velocidade final dos sítions.

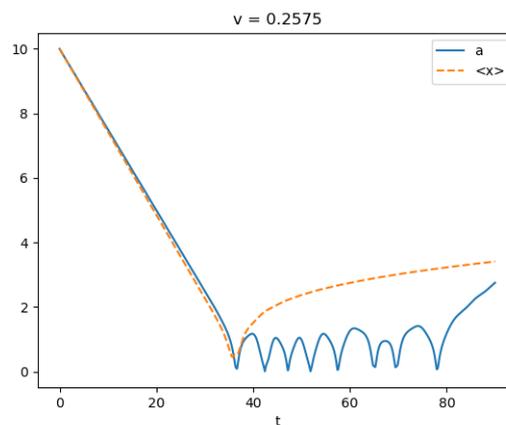


Figura 5.8. Espalhamento dos sítions com velocidades próxima à velocidade crítica, $v = 0.25727$. O padrão de comportamento apresentado pela coordenada coletiva $a(t)$, no que se refere à posição relativa dos sítions, coincide em boa aproximação com aquele observado na simulação numérica.

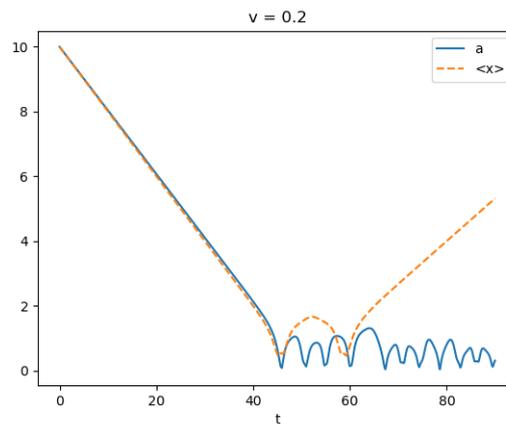


Figura 5.9. Espalhamento de sólitons com velocidades abaixo da velocidade, $v = 0.25727$. O comportamento apresentado pelas coordenadas coletivas funciona bem quando comparado com a simulação nemérica.

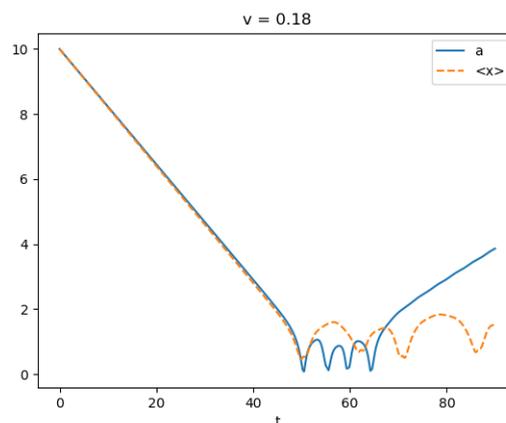


Figura 5.10. Espalhamento de sólitons com abaixo da velocidade, $v = 0.25727$. Aqui temos que as coordenadas coletivas funciona em um primeiro instante mas não é capaz de prever o estado armadilhado como mostra a simulação.

Um ponto a se destacar como possível fonte de problemas neste método é que não há um mecanismo para “ligar” a excitação dos sólitons no momento da colisão no sentido que, ao introduzirmos a coordenada ξ como feito, os sólitons, mesmo enquanto distantes, não se movem como partículas livres, mas sim como mostrado no resultado apresentado na figura 5.2. Talvez, a presença de um tal mecanismo, que permitisse ao modo normal um acoplamento dependente da posição relativa entre os objetos, ou talvez, baseado no aumento da energia da configuração inicial (que indicaria o início do processo de interação) pudesse causar alguma diferença nos resultados aqui apresentados.

Capítulo 6

O método de coordenadas coletivas para o estudo de espalhamento de sólitons no modelo ϕ^6

Neste capítulo estamos interessados em repetir a análise que foi feita no capítulo anterior, mas agora para um modelo com mais vácuos, definido pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mathcal{U} \quad (6.1)$$

com o potencial

$$\mathcal{U} = \frac{\phi^2}{2} (1 - \phi^2)^2. \quad (6.2)$$

Essa teoria possui uma estrutura de vácuo que permite as seguintes soluções BPS (2.16), conforme apresentadas no capítulo 3:

$$\phi_K(0, 1) = \sqrt{\frac{1}{2} (1 + \tanh(x - x_0))} \quad (6.3)$$

$$\phi_{AK}(1, 0) = \sqrt{\frac{1}{2} (1 - \tanh(x - x_0))} \quad (6.4)$$

$$\phi_K(-1, 0) = -\sqrt{\frac{1}{2} (1 - \tanh(x - x_0))} \quad (6.5)$$

$$\phi_{AK}(0, -1) = -\sqrt{\frac{1}{2} (1 + \tanh(x - x_0))}. \quad (6.6)$$

Construiremos então a seguir, configurações que permitam estudar o comportamento desses objetos em interação.

6.1 Estudo do espalhamento *kink/kink* pelo método de coordenadas coletivas

Consideramos uma configuração que interpola os vácuos $\phi = -1$ e $\phi = 1$, passando por $\phi = 0$, dada por

$$\phi(-1, 0, 1) = \phi_K(-1, 0)(x + a) + \phi_K(0, 1)(x - a), \quad (6.7)$$

aonde $a(t)$ define a posição desses objetos que são separados pela distância $2a(t)$.

Seguindo os passos já anteriormente discutidos no capítulo anterior, substituímos essa expressão na densidade de lagrangiana do modelo e a integramos em todo o espaço, de modo que possamos obter a lagrangiana associada como funcional de $a(t)$ e $\dot{a}(t)$, da forma

$$L = \frac{1}{2}g(a)\dot{a}^2 - V(a), \quad (6.8)$$

aonde

$$g(a) = \frac{1}{2} - 18e^{4a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + \alpha e^{2x})^{\frac{3}{2}}(1 + \alpha e^{-2x})^{\frac{3}{2}}}, \quad (6.9)$$

com $\alpha = 3e^{2a}$ e

$$V(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} \left[V_1^2 + V_2^2 (1 - V_2^2)^2 \right], \quad (6.10)$$

sendo as funções V_1 e V_2 dadas por

$$V_1 = \frac{3e^{-2(x-a)}}{(1 + 3e^{-2(x-a)})^{\frac{3}{2}}} + \frac{3e^{2(x+a)}}{(1 + 3e^{2(x+a)})^{\frac{3}{2}}} \quad (6.11)$$

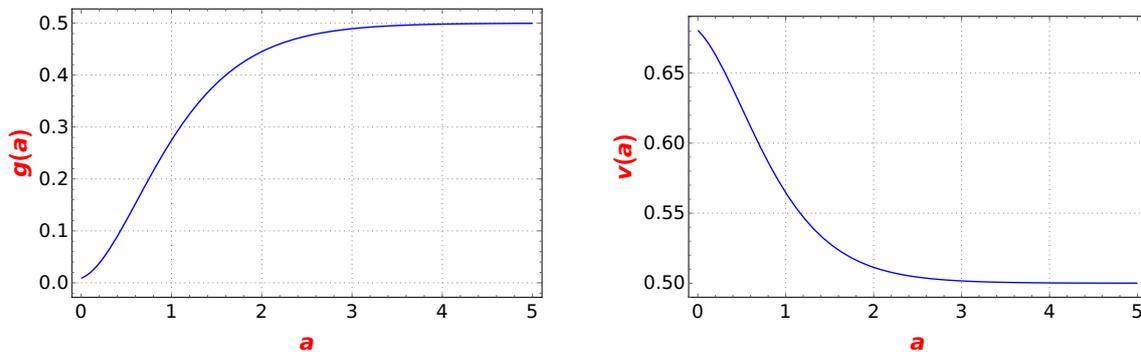
$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + 3e^{-2(x-a)}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + 3e^{2(x+a)}}}. \quad (6.12)$$

As integrações para se obter as expressões de $g(a)$ e de $V(a)$ são complicadas mas podem ser feitas analiticamente, aqui são apresentadas no apêndice G.

O comportamento das funções $g(a)$ e $V(a)$ são apresentados¹ na figura (6.1). Como esperado, quando os sólitons estão bastante afastados, $g(a)$ assume um valor constante, bem como $V(a)$, de modo que esses objetos encontram-se livres. A medida que os sólitons se aproximam, o potencial efetivo $V(a)$ cresce, indicando o aparecimento de uma força repulsiva entre eles. Nota-se ainda que a função $g(a)$ tende a valores muito pequenos quando os sólitons se aproximam.

¹Os resultados aqui obtidos estão em acordo com aqueles apresentados em [35], bem como - com alguma correção, os apresentados em [36].

As equações de Euler-Lagrange obtidas a partir de (6.8) podem ser integradas numericamente, e algumas das soluções para $a(t)$ são apresentadas na figura (6.2). Os resultados evidenciam a repulsão mútua entre os sólitons e indicam que para baixas velocidades relativas essa a colisão “acontece muito antes”, quando comparado com o caso de velocidades mais altas.



(a) A métrica do espaço dos parâmetros unidimensional, $g(a)$, como função do parâmetro a .

(b) O potencial efetivo $V(a)$ que define a interação entre os sólitons. Quando muito distantes, esses objetos encontram-se livres.

Figura 6.1. Comportamento da métrica $g(a)$ do espaço dos parâmetros e do potencial efetivo $V(a)$. Essas funções definem a lagrangiana de uma partícula cuja posição é dada por $a(t)$.

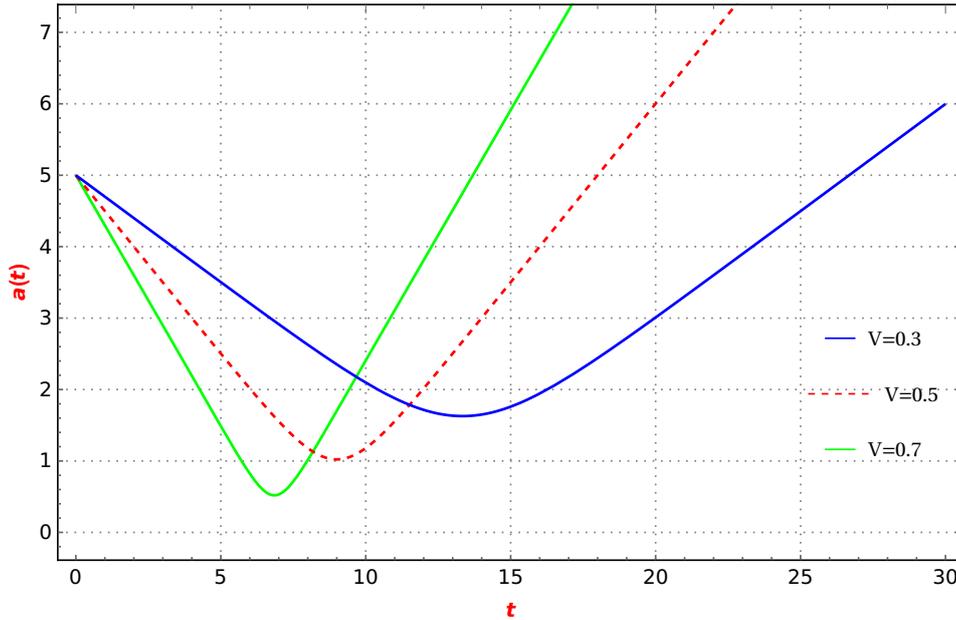


Figura 6.2. Dinâmica do processo de colisão *kink/kink*. Quanto maior a velocidade relativa, mais os sólitons conseguem se aproximar, mas sempre aparece uma força de repulsão mútua. A posição inicial nos três experimentos numéricos foi tomada como $a = 5$, e as velocidades como $v = 0.3$, $v = 0.5$ e $v = 0.7$.

Configuração inicial para descrever o espalhamento de *kink/kink* através da simulação numérica

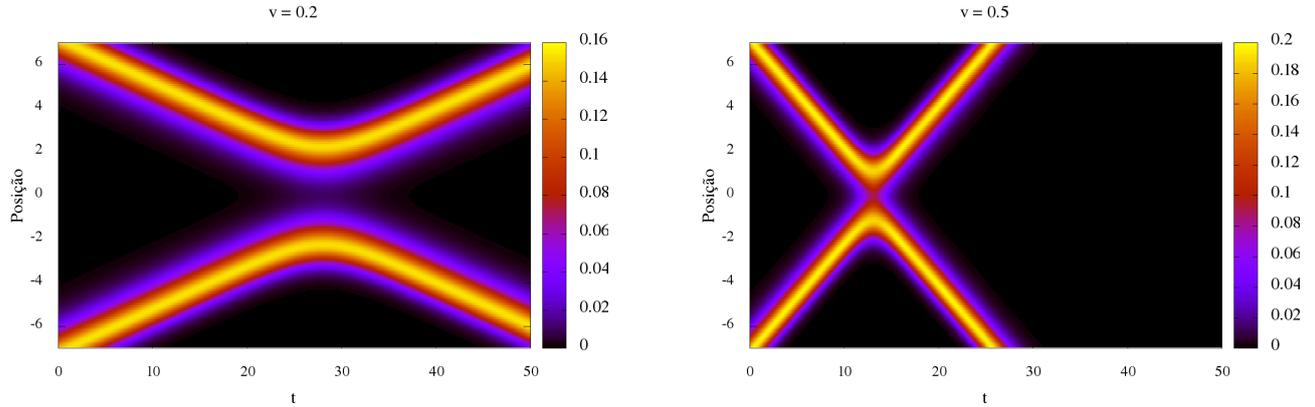
$$\phi_{(KK)} = \phi(-1, 0)(x + a) + \phi(0, 1)(x - a). \quad (6.13)$$

A aproximação de coordenadas coletivas para o estudo deste processo de espalhamento está em excelente acordo com o que é observado na simulação numérica 6.3.

6.2 Estudo do espalhamento entre sóliton e anti-sóliton no modelo ϕ^6

Estamos agora interessados em uma configuração que apresenta um *kink* e um *anti-kink* separados por uma distância $2a(t)$ em cada instante de tempo. Como veremos, a escolha da configuração inicial como *kink/anti-kink* ou *anti-kink/kink*, neste caso, ao contrário do que ocorre para o processo de espalhamento *kink/kink*, tem influência sobre o resultado. Essas configurações são definidas como

$$\phi_{KAK} = \phi_K(0, 1)(x \pm a(t)) + \phi_{AK}(1, 0)(x \mp a(t)) - \phi_0, \quad (6.14)$$



(a) Dinâmica de *kink/kink* para $v = 0.2$.

(b) Dinâmica de *kink/kink* para $v = 0.5$.

Figura 6.3. Comportamento da dinâmica *kink/kink* para várias velocidade, em que se observa que quando ocorre o aumento na velocidade inicial do espalhamento o tempo de colisão diminui.

com $\phi_0 = 1$ no caso de *kink/anti-kink* e $\phi_0 = 0$ para o caso *anti-kink/kink*. Em um primeiro momento, para o estudo do espalhamento por meio de métodos numéricos, a coordenada coletiva $a(t)$ não terá nenhum papel, sendo essa variável uma constante que define a posição inicial dos sólitons.

Observa-se por meio de simulações numéricas do processo de espalhamento entre *kink* e *anti-kink*, a ocorrência do fenômeno de ressonância. Se por um lado, esse fenômeno é atribuído à redistribuição da energia nos modos internos de vibração dos sólitons no modelo ϕ^4 , como mostrado no capítulo anterior, por outro, aqui essa não parece ser, em princípio, a razão.

A demonstração de existência ou não de modos internos de vibração no modelo ϕ^6 não é um problema simples. Em [37] os autores indicam a existência desses modos enquanto que em [38] é mostrado que não são esses modos os responsáveis pela ressonância. No presente trabalho, mostramos explicitamente no apêndice C que os modos internos das soluções individuais de *kink* e *anti-kink* são unicamente os de translação, que não alteram a energia e/ou o momento linear do campo.

Há ainda que se observar uma particularidade interessante do modelo ϕ^6 no que diz respeito a existência do fenômeno de ressonância: os cenários de espalhamento *kink/anti-kink* e *anti-kink/kink* não são simétricos no sentido que, enquanto no primeiro caso não se observa a ressonância, no segundo, ela acontece.

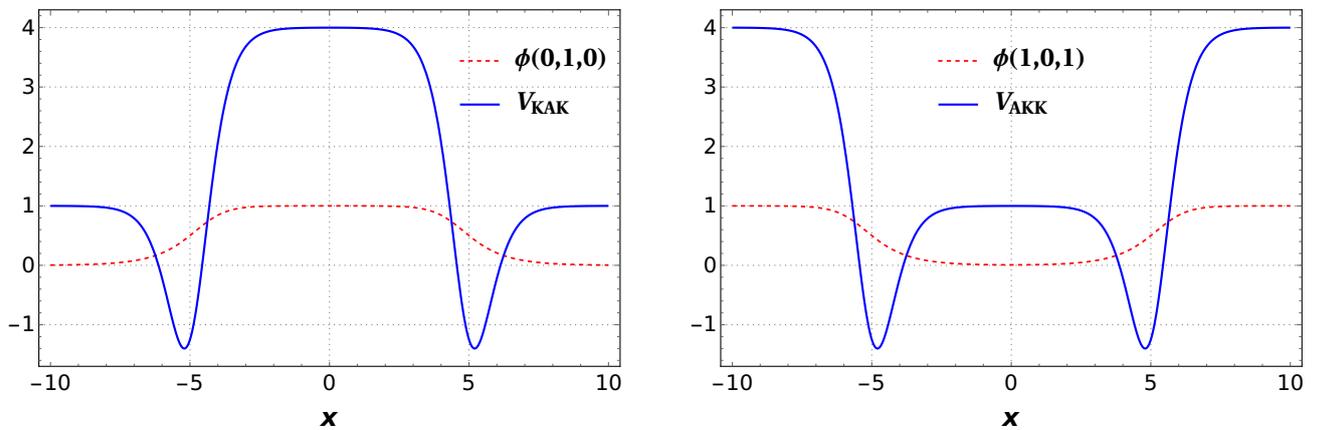
Uma tentativa para se entender esta situação é levar em conta o potencial relativo às perturbações do campo, que assumimos serem produzidas durante o

processo de espalhamento. No apêndice C essas perturbações são obtidas como resultado de uma equação do tipo Schödinger com potenciais, para o *kink* e para o *anti-kink*, respectivamente dados por

$$U_K = \frac{5}{2} - \frac{15}{4} \operatorname{sech}^2(x) + \frac{3}{2} \tanh(x), \quad (6.15)$$

$$U_{AK} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \tanh(x) - \frac{15}{4} \operatorname{sech}^2(x) \quad (6.16)$$

e mostrados na figura 6.4 abaixo.



(a) Potencial das perturbações na configuração *kink/anti-kink*.

(b) Potencial das perturbações na configuração *anti-kink/kink*.

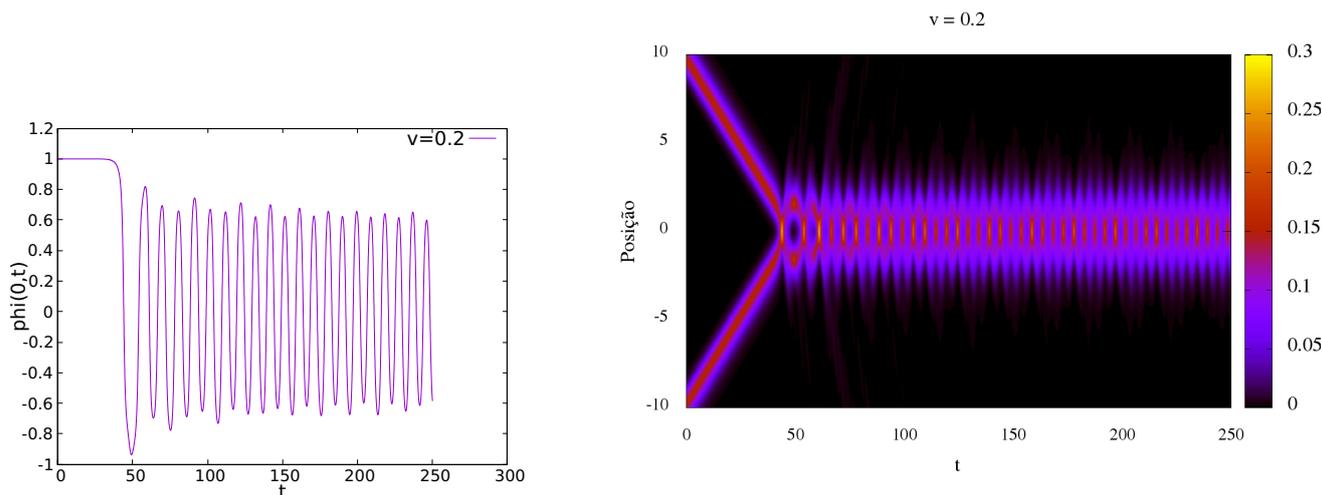
Figura 6.4. Os dois cenários possíveis de espalhamento de sóliton/anti-sóliton do modelo ϕ^6 não são simétricos quanto ao potencial relativo às perturbações.

Daqui percebe-se que efetivamente as duas situações de espalhamento não são simétricas. Para o potencial relativo às perturbações no caso *kink/anti-kink* observamos duas possibilidades: as perturbações definem estados armadilhados nos poços de potencial, ou aparecem como estados livres. A condição que define cada uma dessas possibilidades é a velocidade relativa do espalhamento.

6.2.0.1 Espalhamento *kink/anti-kink*

Na figura 6.5 é mostrado o primeiro caso citado acima: o *kink*, vindo da esquerda, colide com um *anti-kink*, vindo da direita, ambos com velocidade $v = 0.2$. Para essa velocidade, observa-se que a configuração permanece em um estado armadilhado perdendo energia para as perturbações. Isso fica claro no gráfico da densidade de energia mostrado na figura (b) de 6.5. Na figura (a) de 6.5 está mostrado o

comportamento do valor de ϕ na posição $x = 0$, aonde “ os s3litons se encontram”, como fun33o do tempo. Quando os s3litons est3o separados, inicialmente, este valor permanece constante em $\phi = 1$. Vemos no gr3fico que no momento da colis3o a configura3o passa de *kink/anti-kink* para *anti-kink/kink*. Este processo 3 ent3o revertido e assim sucessivamente, com continua perda de energia da configura3o.



(a) Comportamento do valor do campo em $x = 0$ com o tempo

(b) Densidade de energia durante o processo de espalhamento dos s3litons.

Figura 6.5. Dados sobre o espalhamento *kink/anti-kink*. Neste processo os s3litons t3m velocidade inicial $v = 0.2$.

O outro cen3rio poss3vel 3 apresentado na figura 6.6. Aqui, a velocidade inicial dos s3litons 3 $v = 0.5$ e o que se v3 3 uma colis3o el3stica, ou seja: os s3litons colidem sem produzir estados ligados e com perda pouco significativa de energia. Observa-se tamb3m aqui que a configura3o inicial *kink/anti-kink* passa a ser, ap3s a colis3o, *anti-kink/kink*.

Pode-se determinar atrav3s de experimentos num3ricos uma velocidade c3tica nestes processos de espalhamento acima da qual todas as colis3es ser3o el3sticas. No presente caso, esse valor ficou estabelecido como $v_{cr} = 0.289$.

O tratamento do problema com coordenadas coletivas ser3 reservado ao pr3ximo ponto a ser discutido uma vez que nosso interesse maior consiste no entendimento do fen3meno de resson3ncia, que n3o ocorre no caso do espalhamento que acabamos de discutir.

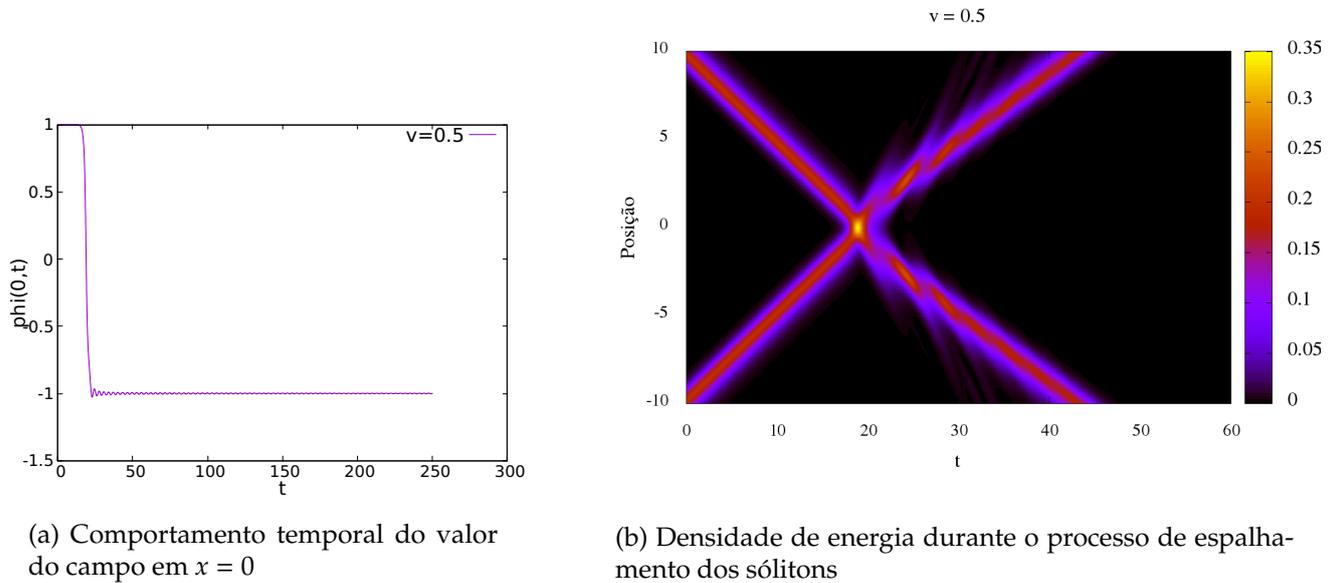


Figura 6.6. Dados sobre o espalhamento *kink/anti-kink* aonde os sólitons têm velocidade inicial $v = 0.5$.

6.2.0.2 Espalhamento *anti-kink/kink*

Na figura 6.7 apresentamos o processo de colisão *anti-kink/kink* para o caso em que os sólitons têm velocidade inicial $v = 0.046$. Neste espalhamento observamos o chamado fenômeno de ressonância, no qual os sólitons permanecem em um estado ligado por algum tempo e em seguida tornam-se livres novamente. Na figura (a) de 6.7 vemos que não há, como nos casos apresentados anteriormente, qualquer mudança no valor do campo em $x = 0$ a não ser pelas oscilações pontuais localizadas referentes ao acréscimo de energia. Isso nos parece indicar que neste tipo de colisão não devemos interpretar os sólitons como “passando um pelo outro” mas sim que eles de fato ricocheteiam. O processo pode então ser entendido como elástico, com a ressonância sendo um processo intermediário entre os estados assintóticos.

Além da ressonância, podemos ainda observar dois outros cenários: um aonde os sólitons colidem elasticamente, e outro aonde acontece o armadilhamento. Esses cenários são apresentados nas figuras 6.8 e 6.9 abaixo.

Para tentarmos compreender melhor o fenômeno de ressonância, passamos na próxima seção ao seu estudo por meio do método de coordenadas coletivas.

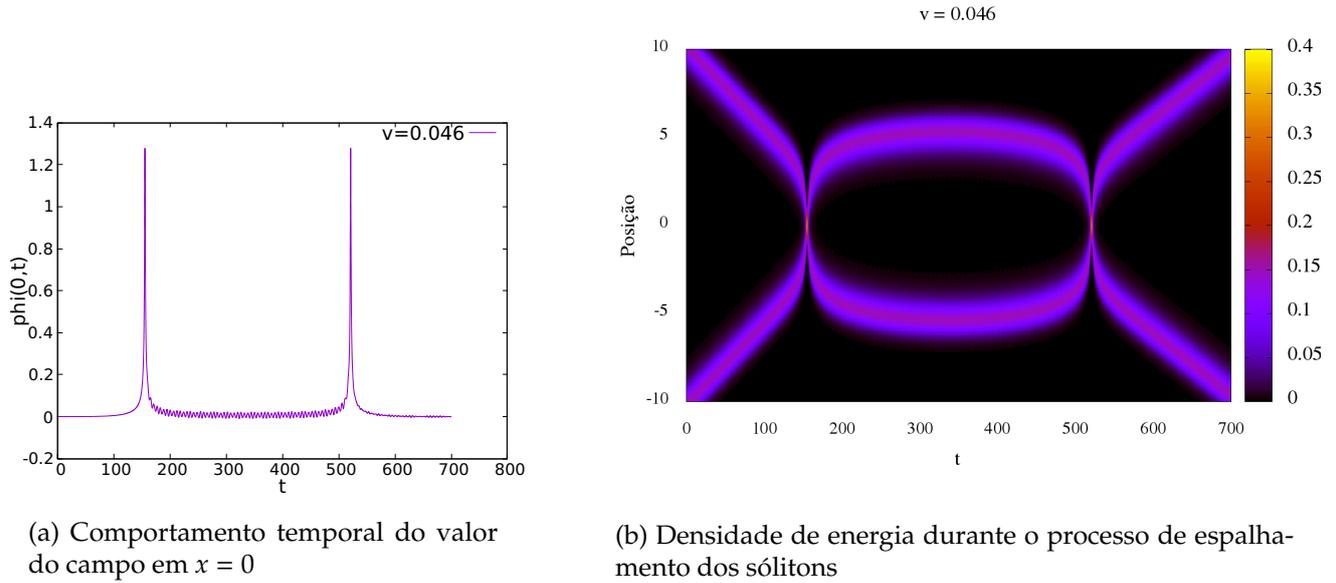


Figura 6.7. Dados sobre o espalhamento *anti-kink/kink* aonde os sólitons têm velocidade inicial $v = 0.046$ e acontece o fenômeno conhecido como ressonância.

6.2.0.3 Estudo do espalhamento *anti-kink/kink* por meio do método de coordenadas coletivas

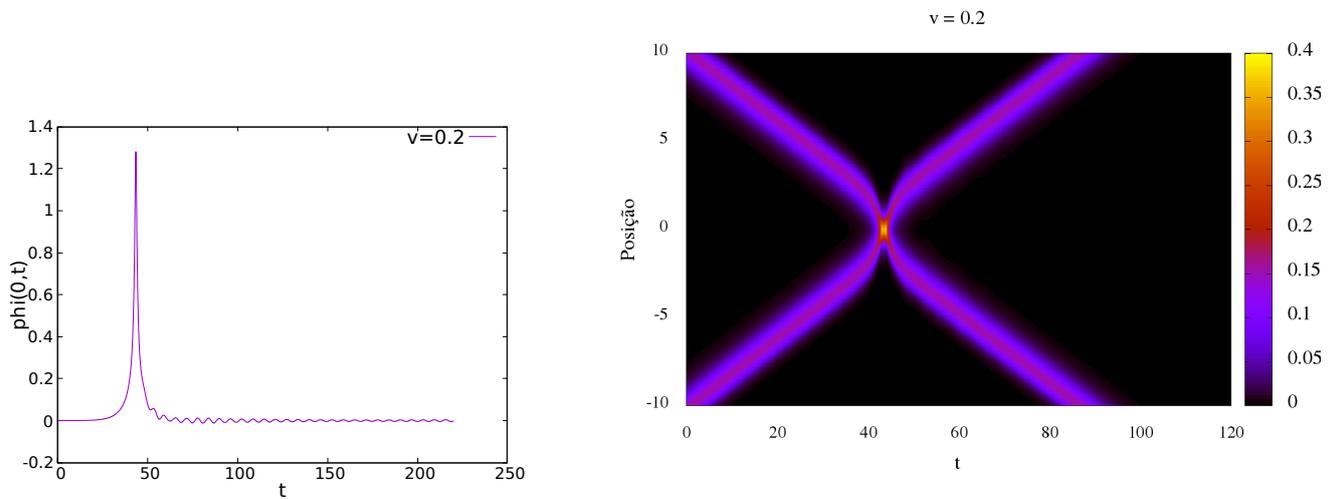
Seguindo os procedimentos já discutidos anteriormente, a lagrangiana associada a esses espalhamento, obtida da densidade de lagrangiana para o modelo, após a integração nas coordenadas espaciais, fica da forma

$$L = \frac{1}{2}g(a)\dot{a}^2 - V(a),$$

com $g(a)$ e $V(a)$ calculadas e dadas no apêndice G. Na figura 6.10 apresentamos o gráfico dessas funções.

Com essas funções podemos então calcular numericamente a evolução da coordenada coletiva $a(t)$, apresentada nas figuras abaixo para diferentes valores de velocidade.

O que podemos observar a partir dos resultados para $a(t)$ é que efetivamente a aproximação em termos da coordenada coletiva descreve de maneira satisfatória a dinâmica dos sólitons para velocidades acima da velocidade crítica; mostra, inclusive, a aceleração resultante da atração entre *kink* e *anti-kink*. Entretanto, notamos que a coordenada coletiva $a(t)$ assume, nessa aproximação, valores negativos. Isso certamente indica que a aproximação não é boa. Além disso, para velocidades abaixo da velocidade crítica, não conseguimos visualizar nenhum padrão que permita o

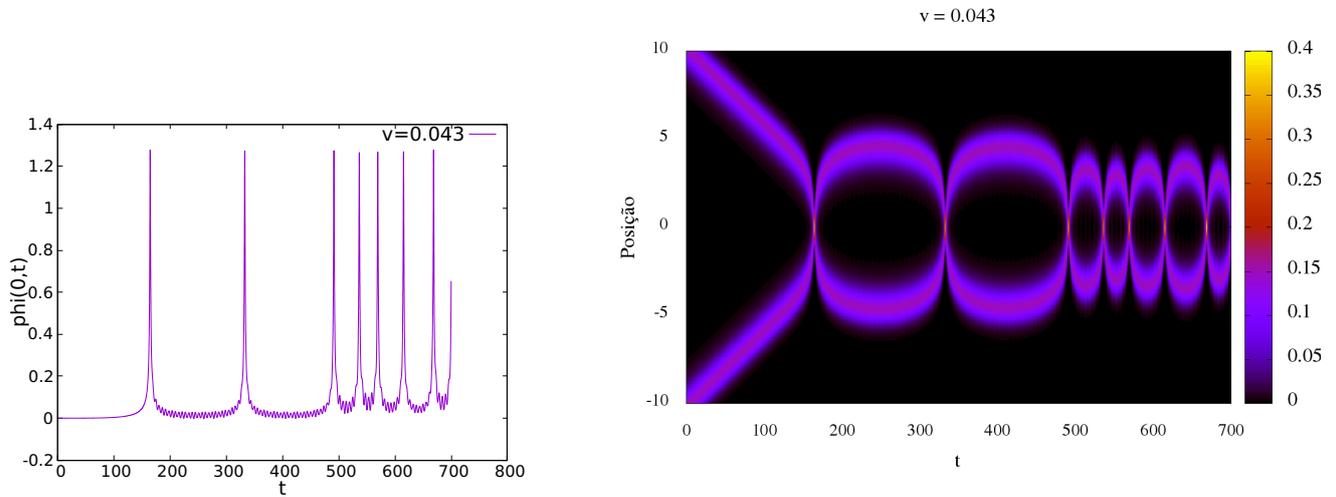


(a) Evolução temporal da configuração *anti-kink/kink* em $x = 0$.

(b) Densidade de energia durante o espalhamento.

Figura 6.8. Dados do espalhamento de *anti-kink/kink* em que os sólitons possuem velocidade inicial de $v = 0.2$.

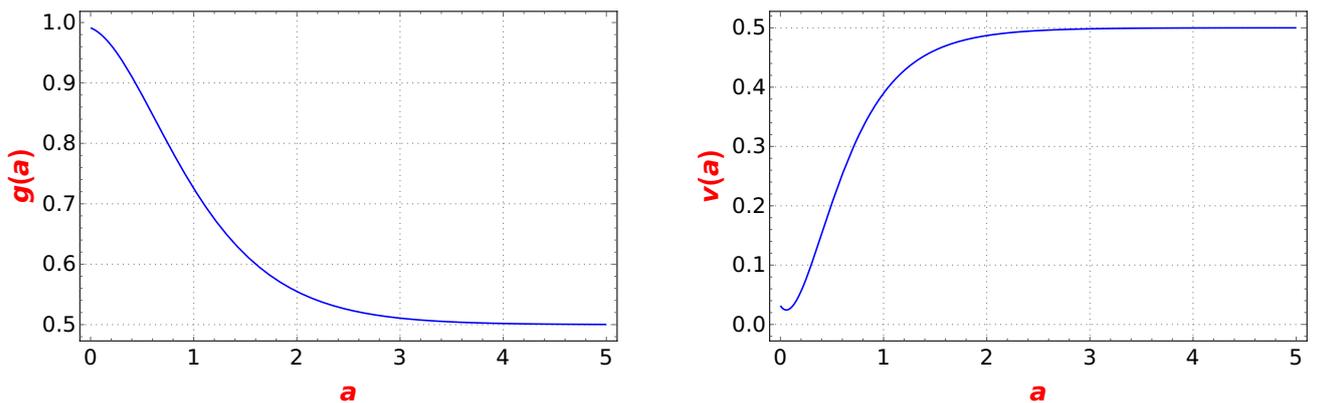
aparecimento do fenômeno de ressonância. Isso é na verdade esperado uma vez que por não possuírem modos de vibração além do modo de translação, não foi adicionado à aproximação nenhum mecanismo que permita a redistribuição de energia e consequentemente a formação de estados ligados ou de ressonância.



(a) Evolução temporal da configuração *anti-kink/kink* em $x = 0$.

(b) Densidade de energia durante o espalhamento.

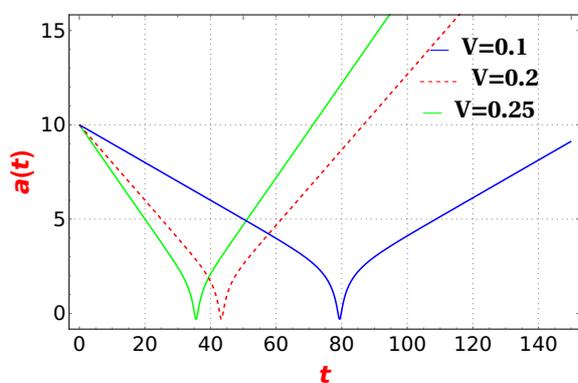
Figura 6.9. Dados do espalhamento de *anti-kink/kink* em que os sólitons possuem velocidade inicial de $v = 0.043$. Para essa velocidade os sólitons permanecem presos por um longo tempo e então observamos seu desacoplamento.



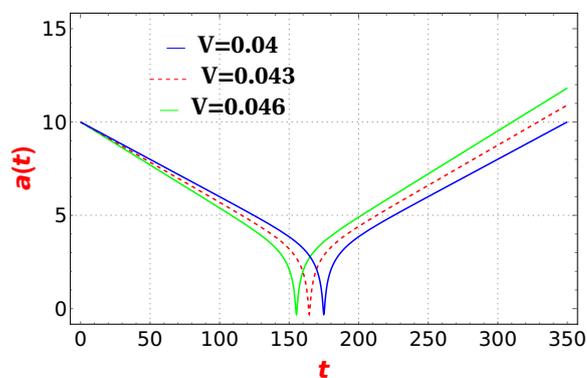
(a) Comportamento da função $g(a)$.

(b) Comportamento do potencial efetivo $V(a)$.

Figura 6.10. As funções $g(a)$ e $V(a)$ são apresentadas aqui e calculadas analiticamente no apêndice G. O comportamento do potencial indica uma força de atração entre os sólitons quando estes estão suficientemente próximos.



(a) Solução para $a(t)$ com velocidades acima da velocidade crítica.



(b) Solução para $a(t)$ com velocidades abaixo da velocidade crítica.

Figura 6.11. Solução obtida para a coordenada coletiva $a(t)$ para diferentes velocidades relativas.

Capítulo 7

Considerações finais

Para o modelo de sine-Gordon no capítulo (4) realizamos a construção via coordenadas coletivas para descrever o espalhamento de 2-sólitons. Seguindo o artigo de P. Sutcliffe [24] conseguimos resolver o modelo de forma analítica e comparamos a solução exata com a aproximada, e concluímos que a aproximação funciona para velocidades iniciais razoavelmente altas.

Ainda nesse mesmo capítulo, propusemos um *ansatz* para as coordenadas coletivas, agora com o intuito de descrevermos o espalhamento de sóliton/anti-sóliton e em seguida mostramos que no pós espalhamento os objetos saem com uma diferença de fase temporal que é fruto da interação. Aqui, vale observar que usando o método aproximativo não é possível prever informações que surgiram durante o espalhamento, exatamente onde a solução diverge (ver figura 4.5).

No capítulo (5), referente ao modelo ϕ^4 , construímos as coordenadas coletivas para 1-sóliton e obtivemos pela equação de movimento um comportamento linear. Em seguida, ao incluirmos à configuração de sóliton seu modo de vibração associado, pudemos observar que sua trajetória é modificada (ver figura 5.2). Para o espalhamento completo, composto pela configuração de sóliton e anti-sóliton com seus respectivos modos de vibração (5.4), consideramos uma lagrangiana efetiva mantendo todos os termos de até segunda ordem nas flutuações e no fim concluímos que não se faz necessário realizar o descarte de termos como sempre foi realizado em diversos artigos na literatura, assim o próprio método de coordenadas coletivas é o suficiente para descrever o espalhamento em baixas velocidades sem a necessidade de introdução de termos extras. Este talvez seja nosso resultado mais importante e nossa contribuição para a pesquisa nesse tema. Certamente, um estudo do espaço dos parâmetros em maior profundidade deve ser interessante, para tentar identificar algum motivo mais fundamental para o descarte dos termos não diagonais da métrica, como foi feito.

No último capítulo a idéia inicial foi construir uma expressão analítica para a lagrangiana das coordenadas coletivas no estudo do espalhamento de 2-sólitons no modelo [36] ϕ^6 . Além disso, conseguimos demonstrar de forma analítica a não existência de modos normais de vibração para as perturbações das soluções solitônicas do modelo. Por fim, nos concentramos em desenvolver as coordenadas coletivas e simulação completa para o espalhamento de sóliton e anti-sólitons e mostramos que a forma com que se dá o espalhamento importa, ou seja, se a configuração é do tipo *kink/anti-kink* ou *anti-kink/kink*.

Conseguimos resolver de forma bem elegante as integrais elípticas que aparecem nesses processos de espalhamento e reproduzimos os resultados conhecidos na literatura [35] [38]. Nesse caso, pode-se verificar que o método de coordenadas coletivas não nos fornece informações confiáveis acerca das interações, pois o caráter oscilatório não é verificado. Isso se dá pelo fato de não termos incluído os modos internos de translação no método aproximativo.

Referências Bibliográficas

- [1] Takyi, I. & Weigel, H. Collective coordinates in one-dimensional soliton models revisited. *Physical Review D* **94**, 085008 (2016).
- [2] Zabusky, N. J. & Kruskal, M. D. Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical review letters* **15**, 240 (1965).
- [3] Lemos, N. A. *Mecânica analítica* (Editora Livraria da Física, 2007).
- [4] Higgs, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Physical Review Letters* **13**, 508 (1964).
- [5] Rubakov, V. *Classical theory of gauge fields* (Princeton University Press, 2009).
- [6] Bogomol'nyi, E. The stability of classical solutions. *Sov. J. Nucl. Phys.(Engl. Transl.);(United States)* **24** (1976).
- [7] Adam, C., Ferreira, L., Da Hora, E., Wereszczynski, A. & Zakrzewski, W. Some aspects of self-duality and generalised bps theories. *Journal of High Energy Physics* **2013**, 62 (2013).
- [8] Coleman, S. Q-balls. *Nuclear Physics B* **262**, 263–283 (1985).
- [9] Manton, N. & Sutcliffe, P. *Topological solitons* (Cambridge University Press, 2004).
- [10] Rubinstein, J. Sine-gordon equation. *Journal of Mathematical Physics* **11**, 258–266 (1970).
- [11] Tenenblat, K. *Transformations of manifolds and applications to differential equations*, vol. 93 (Chapman & Hall/CRC, 1998).
- [12] Willmore, T. J. *An introduction to differential geometry* (Courier Corporation, 2013).

- [13] Castillo, G. S. C. *Aspectos algébricos e geométricos dos modelos de toda*. Master's thesis, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro (2000).
- [14] Ferreira, L. A. & Zakrzewski, W. J. A simple formula for the conserved charges of soliton theories. *Journal of High Energy Physics* **2007**, 015 (2007).
- [15] Shnir, Y. M. *Topological and Non-Topological Solitons in Scalar Field Theories* (Cambridge University Press, 2018).
- [16] Rogers, C. & Shadwick, W. F. *Bäcklund transformations and their applications* (Academic press, 1982).
- [17] Bowcock, P., Corrigan, E. & Zambon, C. Classically integrable field theories with defects. *International Journal of Modern Physics A* **19**, 82–91 (2004).
- [18] Gomes, J., Ymai, L. & Zimerman, A. H. Permutability of bäcklund transformation for $n=1$ supersymmetric sinh-gordon. *Physics Letters A* **373**, 1401–1404 (2009).
- [19] Gomes, J., Ymai, L. & Zimerman, A. H. Permutability of bäcklund transformations for $n=2$ supersymmetric sine-gordon. *Journal of Mathematical Physics* **51**, 033501 (2010).
- [20] Vachaspati, T. *Kinks and domain walls: An introduction to classical and quantum solitons* (Cambridge University Press, 2006).
- [21] Manton, N. An effective lagrangian for solitons. *Nuclear Physics B* **150**, 397–412 (1979).
- [22] Manton, N. Force between kinks with long-range tails. *arXiv preprint arXiv:1810.00788* (2018).
- [23] Lohe, M. Soliton structures in $p(\varphi)$ 2. *Physical Review D* **20**, 3120 (1979).
- [24] Sutcliffe, P. M. Classical and quantum kink scattering. *Nuclear Physics B* **393**, 211–224 (1993).
- [25] Rajaraman, R. *Solitons and instantons* (Elsevier Science, 1982).
- [26] Takyi, I. *Collective coordinate description of kink-antikink interaction*. Ph.D. thesis, Stellenbosch: Stellenbosch University (2015).
- [27] Kudryavtsev, A. Solitonlike solutions for a higgs scalar field. *JETP Letters. American Institute of Physics, Springer Verlag* (1975).

- [28] Sugiyama, T. Kink-antikink collisions in the two-dimensional ϕ^4 model. *Progress of Theoretical Physics*, Vol. 61, No. 5, May 1979 (1978).
- [29] David K. Campbell, C. A. W., Jonathan F. Schonfeld. Resonance structure in kink-antikink interactions in ϕ^4 theory. *Physica 9D* (1983) 1-32, North-Holland Publishing Company (1982).
- [30] Weigel, H. Kink-antikink scattering in ϕ^4 and ϕ^6 models. In *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 482, 012045 (IOP Publishing, 2014).
- [31] Belova, T. & Kudryavtsev, A. E. Quasi-periodic orbits in the scalar classical $\lambda\phi^4$ field theory. *Physica D: Nonlinear Phenomena* **32**, 18–26 (1988).
- [32] Goodman, R. H. & Haberman, R. Kink-antikink collisions in the ϕ^4 equation: The n-bounce resonance and the separatrix map. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* **4**, 1195–1228 (2005).
- [33] Takyi, I. & Weigel, H. Collective coordinates in one-dimensional soliton models revisited. *Physical Review D* **94**, 085008 (2016).
- [34] H. E. Baron, G. L. & Zakrzewski, W. J. Collective coordinate approximation to the scattering of solitons in the (1+1) dimensional nls model. *J.Phys* 265201 (2015).
- [35] Gani, V. A., Kudryavtsev, A. E. & Lizunova, M. A. Kink interactions in the (1+1)-dimensional ϕ^6 model. *Physical Review D* **89**, 125009 (2014).
- [36] Goatham, S. W. ϕ^6 kink scattering. *arXiv preprint arXiv:1209.3055* (2012).
- [37] Hoseinmardy, S. & Riazi, N. Inelastic collision of kinks and antikinks in the ϕ^6 system. *International Journal of Modern Physics A* **25**, 3261–3270 (2010).
- [38] Dorey, P., Mersh, K., Romanczukiewicz, T. & Shnir, Y. Kink-antikink collisions in the ϕ^6 model. *Physical review letters* **107**, 091602 (2011).
- [39] Landau, L. D. & Lifshitz, E. *Course of Theoretical Physics Vol 3 Quantum Mechanics* (Pergamon Press, 1958).
- [40] Rosen, N. & Morse, P. M. On the vibrations of polyatomic molecules. *Physical Review* **42**, 210 (1932).
- [41] F.Ferreira. *Soluções Analíticas para a Equação de Schrödinger Radial com o Termo Centrífugo Sujeita a um Potencial Arbitrário*. Ph.D. thesis, Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia (2014).

- [42] Sotkov, G. & da Silva, U. C. Notas (2017).

Apêndice A

Cálculo das integrais relativas ao método de coordenadas coletivas para o espalhamento de sólitons do modelo de sine-Gordon

Faremos aqui a resolução das integrais que aparecem na equação (4.5). A primeira delas aparece na expressão para a função $g(a)$:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sinh^2(x)dx}{[1 + 4e^{-2a}\sinh^2(x)]^2}. \quad (\text{A.1})$$

Definimos, $4e^{-2a} = \alpha$ e multiplicamos e dividimos o integrando por $\text{sech}^4(x)$, obtendo

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\tanh^2(x)\text{sech}^2(x)dx}{[\text{sech}^2(x) + \alpha\tanh^2(x)]^2} = \int_0^{\infty} \frac{\tanh^2(x)\text{sech}^2(x)dx}{[1 + (\alpha - 1)\tanh^2(x)]^2}. \quad (\text{A.2})$$

Escrevendo $\lambda = \alpha - 1$ e usando a substituição $u = \sqrt{\lambda}\tanh(x)$, temos que

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\tanh^2(x)\text{sech}^2(x)dx}{[1 + \lambda\tanh^2(x)]^2} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\sqrt{\lambda}} \left[\frac{u^2 du}{(1 + u^2)^2} \right] \quad (\text{A.3})$$

que é facilmente integrada, resultando em

$$I = \left(\frac{1}{4e^{-2a}-1} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \left[\arctan \left(\sqrt{4e^{-2a}-1} \right) - \frac{\sqrt{4e^{-2a}-1}}{4e^{-2a}} \right].$$

A segunda integral, que aparece na função $V(a)$ em (4.5) é

$$II = \int_0^{\infty} \frac{\cosh^2(x)dx}{\left[1 + 4e^{-2a}\sinh^2(x) \right]^2}, \quad (\text{A.4})$$

e de maneira análoga ao caso anterior vamos tomar, $4e^{-2a} = \alpha$ e multiplicar e dividir o integrando por $\text{sech}^4(x)$, obtendo

$$II = \int_0^{\infty} \frac{\text{sech}^2(x)dx}{\left[\text{sech}^2(x) + \alpha \tanh^2(x) \right]^2} = \int_0^{\infty} \frac{\text{sech}^2(x)dx}{\left[1 + (\alpha - 1) \tanh^2(x) \right]^2}. \quad (\text{A.5})$$

Escrevemos $\lambda = \alpha - 1$ e consideramos a substituição $u = \sqrt{\lambda} \tanh(x)$, de modo que

$$II = \int_0^{\infty} \frac{\text{sech}^2(x)dx}{\left[1 + \lambda \tanh^2(x) \right]^2} = \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\sqrt{\lambda}} \left[\frac{du}{(1+u^2)^2} \right] \quad (\text{A.6})$$

que pode ser facilmente integrada resultando em

$$II = \left(\frac{1}{4e^{-2a}-1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left[\arctan \left(\sqrt{4e^{-2a}-1} \right) + \frac{\sqrt{4e^{-2a}-1}}{4e^{-2a}} \right].$$

A.1 Integrais necessárias para o cálculo do espalhamento Sóliton/AntiSóliton utilizando coordenadas coletivas

Trataremos aqui da integral que aparece na equação (4.17):

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cosh^2(x)}{\left[1 + \alpha \cosh^2(x) \right]^2} = 2 \int_0^{\infty} dx \frac{\cosh^2(x)}{\left[1 + \alpha \cosh^2(x) \right]^2}. \quad (\text{A.7})$$

Colocando o fator $\text{sech}^4(x)$ em evidência, podemos reescrever essa integral

como

$$I = 2 \int_0^{\infty} dx \frac{\operatorname{sech}^2(x)}{[\lambda - \tanh^2(x)]^2} = \frac{2}{\lambda^2} \int_0^{\infty} dx \frac{\operatorname{sech}^2(x)}{[1 - \frac{1}{\lambda} \tanh^2(x)]^2}, \quad (\text{A.8})$$

com $\lambda = 1 + \alpha$. Fazendo a seguinte troca de variáveis $u = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \tanh(x)$, obtemos

$$I = \frac{2}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \frac{du}{(1 - u^2)^2}, \quad (\text{A.9})$$

que pode ser integrada resultando em

$$I = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}} \left[\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}\right) + \operatorname{arccoth}(\sqrt{\lambda}) \right].$$

De forma análoga ao procedimento de integração usado anteriormente, obtemos a segunda integral de (4.17)

$$II = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}\right) - \operatorname{arccoth}(\sqrt{\lambda}) \right].$$

Com isso, as funções $g(a)$ e $V(a)$ são finalmente escritas como:

$$g(a) = \frac{16e^{-2a}}{(1 + 4e^{-2a})^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\sqrt{1 + 4e^{-2a}}}{4e^{-2a}} + \operatorname{arccoth}(\sqrt{1 + 4e^{-2a}}) \right] \quad (\text{A.10})$$

$$V(a) = \frac{8e^{-2a}}{(1 + 4e^{-2a})^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\sqrt{1 + 4e^{-2a}}}{4e^{-2a}} + \operatorname{arccoth}(\sqrt{1 + 4e^{-2a}}) \right] + \frac{8e^{-2a}}{\sqrt{1 + 4e^{-2a}}} \left[\frac{\sqrt{1 + 4e^{-2a}}}{4e^{-2a}} - \operatorname{arccoth}(\sqrt{1 + 4e^{-2a}}) \right]. \quad (\text{A.11})$$

Apêndice B

Perturbações da solução de sóliton no modelo ϕ^4

Nosso interesse aqui é estudar as possíveis excitações da configuração BPS (de energia mínima) do modelo ϕ^4 . Os resultados aqui apresentados detalham e concordam com aqueles discutidos em [15,25,28–33].

Representamos por ϕ_0 a solução BPS do modelo. Consideramos uma excitação

$$\phi(x, t) = \phi_0(x) + \epsilon(x, t) \quad (\text{B.1})$$

na equação de movimento, de onde temos

$$\ddot{\epsilon} + \epsilon'' + \lambda\eta^2\epsilon - 3\lambda\epsilon\phi_0^2(x) + \phi_0''(x) - \lambda\phi_0(\phi_0^2 - \eta^2) = 0. \quad (\text{B.2})$$

Levando em conta termos lineares em ϵ , e usando a equação de movimento para ϕ_0 , bem como a sua expressão explícita, obtemos uma equação para o campo de perturbação dada por

$$\boxed{-\ddot{\epsilon} + \epsilon'' - \lambda\epsilon\eta^2 [3 \tanh^2(\sigma x) - 1] = 0}. \quad (\text{B.3})$$

Tomando o *ansatz* $\epsilon(x, t) = \chi(x) e^{i\omega t}$ nesta equação ficamos com

$$\chi'' + \lambda\eta^2\chi - 3\lambda\eta \tanh^2(\sigma x)\chi = -\omega^2\chi,$$

que pode ser reescrita da forma de uma equação de autovalores

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right] \chi(x) = \omega^2\chi(x) \quad (\text{B.4})$$

com

$$U(x) = 3\lambda\eta^2 \tanh^2(\sigma x) - \lambda\eta^2 = 2m^2 - \frac{3m^2}{\cosh^2(\sigma x)}, \quad (\text{B.5})$$

sendo $\eta = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ e $\sigma = \frac{m}{\sqrt{2}}$.

Podemos ainda reescrever novamente a equação de autovalores (B.4) de modo que fique da forma mais conhecida como uma equação de Schrödinger:

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} + \left[E + \frac{U_0}{\cosh^2(\sigma x)} \right] \chi(x) = 0, \quad (\text{B.6})$$

usando $E = \omega^2 - 2m^2$ e $U_0 = 3m^2$.

Consideramos a seguinte troca de variáveis [39], $y = \frac{1}{2} [1 - \tanh(\sigma x)]$, motivados pelo comportamento assintótico bem definido de y ,

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \infty, y \rightarrow 0 \\ x &\rightarrow -\infty, y \rightarrow 1 \\ x &\rightarrow 0, y \rightarrow \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

temos a equação

$$y(1-y) \frac{d^2\chi}{dy^2} + (1-2y) \frac{d\chi}{dy} + \left[\frac{E}{4\sigma^2} \frac{1}{y(1-y)} + \frac{U_0}{\sigma^2} \right] \chi = 0, \quad (\text{B.8})$$

onde definindo $\frac{E}{\sigma^2} = -\varepsilon^2$ e $\frac{U_0}{\sigma^2} = s(s+1)$, ficamos com

$$y(1-y) \frac{d^2\chi}{dy^2} + (1-2y) \frac{d\chi}{dy} + \left[s(s+1) - \frac{\varepsilon^2}{4y(1-y)} \right] \chi = 0. \quad (\text{B.9})$$

Observando o comportamento dado em (B.7), a equação (B.9) fica bem definida para $y \rightarrow 0$ uma vez que

$$y^2\chi'' + y\chi' - \frac{\varepsilon^2}{4}\chi = 0, \quad (\text{B.10})$$

de modo que nesse limite, $\chi \sim y^\alpha$, e portanto a solução para (B.10) é dada como

$$\chi = C_1 y^{\frac{\varepsilon}{2}} + C_2 y^{-\frac{\varepsilon}{2}}, \quad (\text{B.11})$$

e o termo C_2 é desprezado em virtude do bom comportamento na origem:

$$\chi \approx C_1 y^{\frac{\varepsilon}{2}} \quad (\text{B.12})$$

Por fim, consideramos uma nova troca de variáveis

$$\chi = [y(1-y)]^{\frac{\varepsilon}{2}} W(y), \quad (\text{B.13})$$

de modo a obtermos a equação hipergeométrica

$$y(1-y)W'' + (\varepsilon+1)(1-2y)W' - [(\varepsilon-s)(s+\varepsilon+1)]W = 0, \quad (\text{B.14})$$

cuja solução é conhecida. Podemos então escrever a solução de (B.14) da seguinte forma

$$\chi(y) = [y(1-y)]^{\frac{\varepsilon}{2}} {}_2F_1[\varepsilon-s, s+\varepsilon+1, 1+\varepsilon, y]. \quad (\text{B.15})$$

A condição para que (B.15) tenha soluções polinomiais é que $\varepsilon-s = -n$, ou seja, $y \rightarrow 0$ ou $x \rightarrow \infty$. O espectro de energia desta equação é:

$$E_n = -\frac{m^2}{2}(2-n)^2. \quad (\text{B.16})$$

Aparentemente, como $E < 0 \forall n$, poderíamos assumir que temos estados ligados para qualquer n . Entretanto, o termo $\varepsilon^2 = -\frac{E}{\sigma^2}$, que aparece na equação, fica, com este resultado encontrado, $\varepsilon = 2-n$, e como temos a condição de que ε deve ser positivo para um número finito de níveis de energia, então os valores permitidos para n são somente $n = 0, 1$.

B.1 Autofunções dos estados ligados

Reintroduzindo as variáveis originais em (B.15) e usando que $\varepsilon = 2 - n$, temos então que

$$\chi_0 = \frac{1}{4} \operatorname{sech}^2(\sigma x), \quad (\text{B.17})$$

para frequência nula - chamado "modo zero" ou "modo de translação" - e

$$\chi_1 = \frac{1}{2} \operatorname{sech}(\sigma x) \tanh(\sigma x) \quad (\text{B.18})$$

para frequência $\omega = \sqrt{\frac{3}{2}}m$, o primeiro (e único) modo excitado.

Apêndice C

Perturbações dos sólitons no modelo

ϕ^6

Consideramos aqui o cálculo [40,41] das perturbações das soluções solitônicas obtidas para o modelo ϕ^6 , cujo potencial é

$$u(\phi) = \frac{\phi^2}{2} (1 - \phi^2)^2.$$

Este modelo apresenta uma distinção quanto às soluções de *kink* e *anti-kink*, de modo que faremos o cálculo das perturbações em torno de cada uma delas separadamente.

C.1 Perturbações da solução de *kink*

Tomemos como ϕ_0 a solução de *kink* dada em (3.65). Consideramos então uma perturbação $\zeta(x, t)$ dessa solução, de modo que temos a configuração $\phi = \phi_0 + \zeta(x, t)$.

Substituindo a perturbação na equação dinâmica do modelo e considerando somente termos de primeira ordem na perturbação ficamos com

$$\ddot{\zeta} - \zeta'' + \left[-\phi_0'' + \phi_0 - 4\phi_0^3 + 3\phi_0^5 \right] + \zeta (1 - 12\phi_0^2 + 15\phi_0^4) = 0. \quad (\text{C.1})$$

aonde o segundo termo de (C.1) se anula uma vez que ϕ_0 é exatamente solução da equação estática

$$\phi'' - \phi (1 - \phi^2)^2 + 2\phi^3 (1 - \phi^2) = 0. \quad (\text{C.2})$$

Definimos então $\zeta(x, t) = e^{i\omega t} \Omega(x)$ de modo que a equação de movimento para as perturbações resulta em uma equação do tipo Schrödinger estacionária para as funções $\Omega(x)$,

$$\Omega'' + \left[\omega^2 - \frac{5}{2} + \frac{15}{4} \operatorname{sech}^2(x) - \frac{3}{2} \tanh(x) \right] \Omega = 0 \quad (\text{C.3})$$

em que o potencial é dado por

$$U_K = \frac{5}{2} - \frac{15}{4} \operatorname{sech}^2(x) + \frac{3}{2} \tanh(x).$$

Usando $E = \omega^2 - \frac{5}{2} \equiv -\epsilon^2$, reescrevemos essa equação como

$$\Omega'' + \left[E + \frac{15}{4} \operatorname{sech}^2(x) - \frac{3}{2} \tanh(x) \right] \Omega = 0, \quad (\text{C.4})$$

de modo que ficamos com

$$\Omega'' + \left[-\epsilon^2 + \alpha \operatorname{sech}^2(x) - \beta \tanh(x) \right] \Omega = 0, \quad (\text{C.5})$$

aonde $\alpha = \frac{15}{4}$ e $\beta = \frac{3}{2}$.

Tomamos agora o *ansatz* $\Omega(x) = e^{ax} \cosh^{-b}(x) F(x)$ para a solução desta equação. Isso se motiva pelo simples fato de que o potencial pode ser escrito em termos de potências da função $\cosh(x)$. Então, derivando e agrupando os termos, ficamos com a expressão

$$F'' + 2F' [a - b \tanh(x)] + F [\alpha - b(b+1)] \operatorname{sech}^2(x) + F [a^2 + b^2 - \epsilon^2] - (2ab + \beta) \tanh(x) F = 0. \quad (\text{C.6})$$

Para que tenhamos uma forma fechada no formato de uma função hipergeométrica, se faz necessário fixar $a^2 + b^2 = \epsilon^2$ e $\beta = -2ab$, i.e.,

$$a = -\frac{1}{2} \left[(\epsilon^2 + \beta)^{\frac{1}{2}} - (\epsilon^2 - \beta)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{C.7})$$

$$b = \frac{1}{2} \left[(\epsilon^2 + \beta)^{\frac{1}{2}} + (\epsilon^2 - \beta)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (\text{C.8})$$

o que nos dá a expressão

$$F'' + 2F' [a - b \tanh(x)] + F [\alpha - b(b+1)] \operatorname{sech}^2(x) = 0. \quad (\text{C.9})$$

Consideramos então uma segunda troca de variáveis, $y = \frac{1}{2}(1 + \tanh(x))$, de modo a aproveitarmos do bom comportamento dessa função nos limites $x \rightarrow \pm\infty$ e $x \rightarrow 0$, ficamos com a equação

$$y(1-y)F'' + F'[a+b+1-2(1+b)y] + F[\alpha-b(b+1)] = 0. \quad (\text{C.10})$$

Podemos comparar essa expressão com a forma geral de uma equação hipergeométrica,

$$y(1-y)F'' + F'[C-(A+B+1)y] - ABF = 0, \quad (\text{C.11})$$

e os coeficientes são relacionados por

$$C = a + b + 1 \quad (\text{C.12})$$

$$A + B + 1 = 2(b + 1) \quad (\text{C.13})$$

$$AB = b(b + 1) - \alpha \quad (\text{C.14})$$

e a função fica identificada como sendo:

$${}_2F_1(a, b, c, y) = {}_2F_1\left[\frac{1}{2} + b - \sqrt{\frac{1}{4} + \alpha}, \frac{1}{2} + b + \sqrt{\frac{1}{4} + \alpha}, a + b + 1, y\right]. \quad (\text{C.15})$$

Para que essa função tenha representações em termos de funções polinomiais, i.e., para garantir que $y \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow -\infty$, o primeiro coeficiente que aparece, deve ser um número inteiro $-n$, de modo que $\Omega(x)$ se escreve como

$$\Omega_n(x) = N_n e^{ax} \cosh^{-b}(x) {}_2F_1\left[-n, \sqrt{1+4\alpha} - n, a + b + 1, \frac{1}{2}(1 + \tanh(x))\right]. \quad (\text{C.16})$$

Usando as relações (C.7) e (C.8) e dada a relação $a^2 + b^2 = \epsilon^2 = -E_n$, então o espectro geral fica, sabendo que $\alpha = \frac{15}{4}$ e $\beta = \frac{3}{2}$,

$$E_n = -\left[\left(\frac{3-2n}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2(2n-3)}\right)^2\right]. \quad (\text{C.17})$$

Para que a perturbação seja estável é necessário que $\omega \geq 0$. Uma vez que $E = \omega^2 - \frac{5}{2}$, o único valor possível para n é $n = 0$ e portanto a energia e frequência

associadas são dadas por

$$E_0 = -\frac{5}{2} \quad \text{e} \quad \omega^2 = 0.$$

Os valores de a e b dependem de n , portanto, para este único estado (fundamental), a função $\Omega(x)$ fica dada por

$$\Omega_0^{\text{kink}}(x) = N_0 e^{-\frac{x}{2}} \cosh^{-\frac{3}{2}}(x). \quad (\text{C.18})$$

C.2 Perturbações da solução de *anti-kink*

Consideramos agora a solução de *anti-kink* dada em (3.66). O cálculo é completamente análogo àquele apresentado na seção anterior e a equação de Schrödinger correspondente à perturbação é definida pelo potencial

$$U_{AK} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \tanh(x) - \frac{15}{4} \text{sech}^2(x),$$

sendo escrita

$$\Omega'' + \left[-\epsilon^2 + \alpha \text{sech}^2(x) + \beta \tanh(x) \right] \Omega = 0, \quad (\text{C.19})$$

com $\alpha = \frac{15}{4}$, $\beta = \frac{3}{2}$ e $E = -\epsilon^2$.

Seguindo os mesmos passos que no caso anterior, com o *ansatz* $\Omega(x) = e^{ax} \cosh^b(x) F(x)$, obtemos a equação

$$\begin{aligned} & F'' + 2F' [a - b \tanh(x)] + F [\alpha - b(b+1)] \text{sech}^2(x) + F [a^2 + b^2 - \epsilon^2] + \\ & + (\beta - 2ab) \tanh(x) F = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

e considerando agora a relação $a^2 + b^2 = \epsilon^2$ e $\beta = 2ab$, que define uma solução do tipo hipergeométrica dessa equação, ficamos com

$$F'' + 2F' [a - b \tanh(x)] + F [\alpha - b(b+1)] \text{sech}^2(x) = 0. \quad (\text{C.21})$$

Essa equação é idêntica à anterior, exceto pelo fato de que agora $\beta = 2ab$, enquanto antes tínhamos $\beta = -2ab$.

Agora, com as relações

$$a = \frac{1}{2} \left[(\epsilon^2 + \beta)^{\frac{1}{2}} - (\epsilon^2 - \beta)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{C.22})$$

$$b = \frac{1}{2} \left[(\epsilon^2 + \beta)^{\frac{1}{2}} + (\epsilon^2 - \beta)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (\text{C.23})$$

fazemos como anteriormente, encontrando os coeficientes genéricos A , B e C que definem a função hipergeométrica em termos de ϵ e β e requerendo o comportamento polinomial da função, aqui novamente devemos ter que o primeiro coeficiente seja igual a um número inteiro $-n$, de modo que

$$\Omega_n(x) = N_n e^{ax} \cosh^{-b}(x) {}_2F_1 \left[-n, \sqrt{1 + 4\alpha} - n, a + b + 1, \frac{1}{2} (1 + \tanh(x)) \right]. \quad (\text{C.24})$$

Portanto, temos para o *anti-kink*, as perturbações apresentam o mesmo espectro que para o caso do *kink*; o que muda é somente a auto-função associada ao sóliton:

$$\Omega_0^{\text{anti-kink}}(x) = N_0 e^{\frac{x}{2}} \cosh^{-\frac{3}{2}}(x). \quad (\text{C.25})$$

Para que o modo zero seja igual à função derivada do campo (e isso vale tanto para o caso do *kink* quanto para o presente, do *anti-kink*), devemos definir a constante de normalização N_0 das autofunções como sendo $N_0 = \frac{1}{\sqrt{8}}$.

Apêndice D

Perturbações do sóliton do modelo de sine-Gordon

O modelo de sine-Gordon apresenta somente o chamado “modo de translação”, quando consideramos perturbações de sua solução estática. Seguindo os mesmos precedimentos discutidos para as perturbações em soluções dos modelos ϕ^4 e ϕ^6 , encontramos a elas associadas equações do tipo Schrödinger

$$\zeta'' + \left[E + \frac{U_0}{\cosh^2(x)} \right] \zeta = 0 \quad (\text{D.1})$$

com $E = \omega^2 - 1$ e $U_0 = 2$. O espectro de energia (e frequência) é então dado por

$$E_n = -(1 - n)^2 \quad (\text{D.2})$$

$$\omega^2 = n(2 - n). \quad (\text{D.3})$$

e como no casos anteriores, a estabilidade dessas perturbações implica na restrição $n < 2$. Portanto, temos duas frequências possíveis $\omega_0 = 0$ e $\omega_1 = 1$, no entanto as energias associadas essas frequências são respectivamente $E_0 = -1$ e $E_1 = 0$. Assim temos somente o modo de translação

$$\zeta_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{\cosh(x)}. \quad (\text{D.4})$$

Apêndice E

Integrais necessárias para o espalhamento discutido na seção (5.2)

Neste trabalho mostramos que podemos ir além do que já está apresentado na literatura sobre o espalhamento de sólitons no modelo ϕ^4 se levarmos em conta alguns termos que em geral são ignorados quando da obtenção da lagrangiana das coordenadas coletivas.

Estes termos envolvem integrações que são bastante complicadas e possivelmente, por isso são desprezados. Detalharemos aqui o cálculo de algumas dessas integrais necessárias à obtenção da expressão (5.13).

Começamos por discutir a integral

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4(\sigma(x + a(t))) dx. \quad (\text{E.1})$$

Tomando $\omega = \sigma(x + a(t))$, I_1 se escreve como

$$I_1 = \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4(\omega) d\omega \quad (\text{E.2})$$

Para resolver essa integral real, fazemos uma extensão ao plano complexo considerando a integração da função $f(z) = z \operatorname{sech}^4(z)$, com $z = \omega + i\phi \in \mathbb{C}$ ao longo do caminho β (ver figura do plano (E.1)).

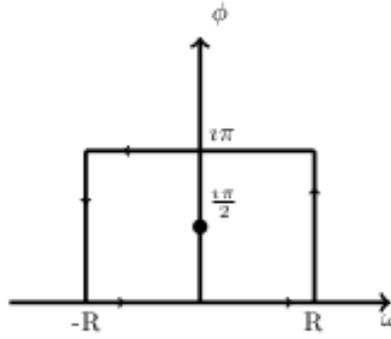


Figura E.1. Caminho de integração.

Então, temos a integral

$$\oint_{\beta} f(z) dz = \oint_{\beta} \frac{z}{\cosh^4(z)} dz. \quad (\text{E.3})$$

Verifica-se que as integrais ao longo dos caminhos $\omega = R = \text{constante}$ se anulam no limite em que $R \rightarrow \infty$. Agora quanto às integrais horizontais, utilizaremos o teorema dos resíduos para computá-las. Observando que essa integral possui pólo em $z_1 = \frac{i\pi}{2}$, temos

$$\oint_{\beta} f(z) = -I_1 i\pi = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f_k, z_k), \quad (\text{E.4})$$

aonde o cálculo do resíduo é feito da seguinte forma:

$$\text{Res}f(z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d^3}{dz^3} (z - z_1)^4 f(z) = -\frac{2}{3}. \quad (\text{E.5})$$

Assim, obtemos o resultado

$$I_1 = -\frac{2}{\sigma} \text{Res}f(z_1) = \frac{4}{3\sigma}. \quad (\text{E.6})$$

As demais integrais que surgem são similares e podem ser igualmente tratadas. Vamos fazer aqui, um próximo exemplo em algum detalhe e para os demais casos, vamos simplesmente dar os resultados.

Consideramos a integral

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(\sigma(x+a(t))) \operatorname{sech}^2(\sigma(x-a(t))) dx. \quad (\text{E.7})$$

Fazemo $\omega_1 = \sigma(x+a(t))$ e $\omega_2 = \omega_1 - 2a\sigma$, podemos escrevê-la como

$$I_2 = \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(\omega_1) \operatorname{sech}^2(\omega_1 - 2a\sigma) d\omega_1, \quad (\text{E.8})$$

e sua extensão ao plano complexo fica

$$\oint_{\beta} f(z) dz = -i\pi I_2 = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} f(z_k) = 2\pi i [\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2)], \quad (\text{E.9})$$

com β sendo o mesmo caminho considerado anteriormente uma vez que seus pólos encontram-se em $z_1 = \frac{i\pi}{2}$ e $z_2 = \frac{i\pi}{2} + 2a\sigma$. Usando o teorema de resíduos temos

$$I_2 = 8a \operatorname{coth}(2a\sigma) \operatorname{csch}^2(2a\sigma) - \frac{4}{\sigma} \operatorname{csch}^2(2a\sigma).$$

Seguindo essa receita, as demais integrais, cujos pólos são sempre os mesmos anteriores, podem ser resolvidas e os resultados são:

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^3(\sigma(x+a(t))) \operatorname{sech}^3(\sigma(x-a(t))) dx, \quad (\text{E.10})$$

$$I_3 = -\frac{2}{\sigma} \left[4\sigma a \operatorname{csch}^3(2\sigma a) + 6 \operatorname{csch}^3(2\sigma a) \operatorname{coth}(2\sigma a) - 12\sigma a \operatorname{csch}^3(2\sigma a) \operatorname{coth}^2(2\sigma a) \right].$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4(\sigma(x+a(t))) \operatorname{sech}^4(\sigma(x-a(t))) dx, \quad (\text{E.11})$$

$$I_4 = -\left(\frac{8 \operatorname{csch}^4(2\sigma a)}{3\sigma} \right) \left[-4 + 18\sigma a \operatorname{coth}(2\sigma a) + 15 \operatorname{coth}^2(2\sigma a) - 30\sigma a \operatorname{coth}^3(2\sigma a) \right].$$

Apêndice F

Cálculo dos coeficientes da lagrangiana apresentada na seção (5.4)

Inicialmente vamos explicitar cada coeficiente definido e usado na lagrangiana efetiva (5.23) em termos das integrais que posteriormente serão resolvidas. Temos então

$$Q(a) = -\frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx [\tanh(x+a) \operatorname{sech}(x+a) \tanh(x-a) \operatorname{sech}(x-a)]. \quad (\text{F.1})$$

$$C(a) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx [\tanh(x+a) \operatorname{sech}(x+a) - \tanh(x-a) \operatorname{sech}(x-a)] \\ [\operatorname{sech}^2(x+a) + \operatorname{sech}^2(x-a)]. \quad (\text{F.2})$$

$$K(a) = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx [\operatorname{sech}^6(x+a) + \tanh^4(x+a) \operatorname{sech}^2(x+a) - 2\operatorname{sech}^4(x+a) \tanh^2(x+a)] \\ + \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx [\operatorname{sech}^3(x+a) \operatorname{sech}^3(x-a) - \operatorname{sech}^3(x-a) \tanh^2(x+a) \operatorname{sech}(x+a)] \\ + \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx [-\operatorname{sech}^3(x+a) \tanh^2(x-a) \operatorname{sech}(x-a)] \\ + \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx [\tanh^2(x+a) \tanh^2(x-a) \operatorname{sech}(x+a) \operatorname{sech}(x-a)]. \quad (\text{F.3})$$

$$N(a) = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx [\tanh(x+a) \operatorname{sech}(x+a) - \tanh(x-a) \operatorname{sech}(x-a)] \\ [\operatorname{sech}^3(x+a) + \operatorname{sech}^3(x-a) - \tanh^2(x+a) \operatorname{sech}(x+a) - \tanh^2(x-a) \operatorname{sech}(x-a)] \quad (\text{F.4})$$

$$J(a) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\operatorname{sech}^2(x+a) + \operatorname{sech}^2(x-a) \right] \\ \left[\operatorname{sech}^3(x+a) + \operatorname{sech}^3(x-a) - \tanh^2(x+a) \operatorname{sech}(x+a) - \tanh^2(x-a) \operatorname{sech}(x-a) \right] \quad (\text{F.5})$$

$$F(a) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[2\operatorname{sech}^5(x+a) - 2\tanh^2(x+a) \operatorname{sech}^3(x+a) \right] \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[-\operatorname{sech}^2(x+a) \operatorname{sech}^3(x-a) - \operatorname{sech}^2(x-a) \operatorname{sech}^3(x+a) \right] \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\operatorname{sech}^2(x+a) \operatorname{sech}(x-a) \tanh^2(x-a) \right] \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\operatorname{sech}^2(x-a) \operatorname{sech}(x+a) \tanh^2(x+a) \right] \\ +6\alpha^2 \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\operatorname{sech}^2(x+a) \operatorname{sech}^2(x-a) \right] \\ \left[\tanh(x+a) \operatorname{sech}(x+a) - \tanh(x-a) \operatorname{sech}(x-a) \right] \\ -4\alpha \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\operatorname{sech}(x+a) \operatorname{sech}(x-a) \right] \\ \left[\tanh(x+a) \operatorname{sech}(x+a) - \tanh(x-a) \operatorname{sech}(x-a) \right] \\ -2\alpha^3 \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\operatorname{sech}^3(x+a) \operatorname{sech}^3(x-a) \right] \\ \left[\tanh(x+a) \operatorname{sech}(x+a) - \tanh(x-a) \operatorname{sech}(x-a) \right]. \quad (\text{F.6})$$

$$\begin{aligned}
W(a) &= \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\operatorname{sech}^6(x+a) + \tanh^4(x+a) \operatorname{sech}^2(x+a) \right] \\
&+ \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[-2 \tanh^2(x+a) \operatorname{sech}^4(x+a) - \operatorname{sech}^3(x+a) \operatorname{sech}^3(x-a) \right] \\
&\quad + \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\tanh^2(x-a) \operatorname{sech}^3(x+a) \operatorname{sech}(x-a) \right] \\
&\quad + \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\tanh^2(x+a) \operatorname{sech}^3(x-a) \operatorname{sech}(x+a) \right] \\
&- \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\tanh^2(x+a) \tanh^2(x-a) \operatorname{sech}(x-a) \operatorname{sech}(x+a) \right] \\
&+ 3 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\tanh(x+a) \operatorname{sech}(x+a) - \tanh(x-a) \operatorname{sech}(x-a) \right]^2 \\
&- 9\alpha \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\tanh(x+a) \operatorname{sech}(x+a) - \tanh(x-a) \operatorname{sech}(x-a) \right]^2 \\
&\quad \left[\operatorname{sech}(x+a) \operatorname{sech}(x-a) \right] \\
&- \frac{9}{2} \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\tanh(x+a) \operatorname{sech}(x+a) - \tanh(x-a) \operatorname{sech}(x-a) \right]^2 \\
&\quad \left[\operatorname{sech}^2(x+a) \operatorname{sech}^2(x-a) \right], \quad (F.7)
\end{aligned}$$

em que $\alpha = \frac{\tanh(2a)}{\operatorname{sech}(2a)}$.

Para o cálculo dessas integrais, utilizamos o método de resíduos apresentado no apêndice (E). Entretanto, algumas delas requerem novas considerações que serão discutidas a seguir.

F.1 Método de cálculo de alguns tipos de integrais

Consideramos a integral dada abaixo, como um exemplo de integrais que necessitam de outra abordagem:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \tanh(x) \operatorname{sech}(x) \operatorname{sech}^2(x)$$

Diferentemente da extensão complexa que foi feita anteriormente, agora tomamos a função a ser integrada como $f(z) = \tanh(z) \operatorname{sech}(z) \operatorname{sech}^2(z)$. O caminho de integração β é o mesmo considerado nos casos já analisados. Verifica-se que a integração

dessa função em $\omega = \pm R = \text{constante}$ com $R \rightarrow \infty$ é nula portanto, ficamos com

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dz \tanh(z) \operatorname{sech}(z) \operatorname{sech}^2(z) - \int_{-\infty}^{\infty} dz \tanh(z + i\pi) \operatorname{sech}(z + i\pi) \operatorname{sech}^2(z + i\pi), \quad (\text{F.8})$$

que pode ser resolvida pelo teorema de resíduos, resultando em

$$I = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(f_k, z_k) \quad (\text{F.9})$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dz \tanh(z) \operatorname{sech}(z) \operatorname{sech}^2(z) = \pi i \sum_k \operatorname{Res}(f_k, z_k). \quad (\text{F.10})$$

Esse tipo de extensão complexa, que não envolve a introdução de um produto com a função z , deve ser utilizado para integrandos cujas funções não satisfaçam o critério $f(z + i\pi) = f(z)$.

F.2 Coeficientes integrados

Apresentamos aqui uma lista com os coeficientes da lagrangiana para as coordenadas coletivas. Os três primeiros termos já foram obtidos na construção da lagrangiana (5.13), aonde demos a M_0 a interpretação de uma massa de repouso do sóliton, $I(a)$ aparecia juntamente com M_0 definindo a função $g(a)$ (5.16) e $V(a)$ como sendo o potencial efetivo (5.17).

$$M_0 = \frac{4}{3} \quad (\text{F.11})$$

$$I(a) = 8a \operatorname{coth}(2a) \operatorname{csch}^2(2a) - 4 \operatorname{csch}^2(2a) \quad (\text{F.12})$$

$$V(a) = 8 \left[-\frac{2}{3} + 2a + \frac{3}{\tanh(2a)} - \frac{2(1+3a)}{\tanh^2(2a)} + \frac{4a}{\tanh^3(2a)} \right] \quad (\text{F.13})$$

$$Q(a) = 6a \operatorname{csch}(2a) + 12a \operatorname{csch}^3(2a) - 6 \operatorname{coth}(2a) \operatorname{csch}(2a) \quad (\text{F.14})$$

$$C(a) = \pi \sqrt{\frac{3}{2}} \tanh(a) \operatorname{sech}^2(a) \quad (\text{F.15})$$

$$F(a) = -6\pi \sqrt{\frac{3}{2}} \tanh^2(a) [-1 + \tanh(a)]^2 \quad (\text{F.16})$$

$$J(a) = \sqrt{\frac{3}{2}} \pi \left[\frac{1}{2} + \operatorname{sech}^4(a) - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^4(a) \cosh(2a) \right] \quad (\text{F.17})$$

$$N(a) = \frac{3}{2} \left[15 \operatorname{csch}^3(2a) + 9 \operatorname{csch}(2a) \operatorname{coth}^2(2a) + 3 \operatorname{csch}(2a) \right] \\ + \frac{3}{2} \left[-6a \operatorname{csch}(2a) \operatorname{coth}(2a) - 46a \operatorname{coth}(2a) \operatorname{csch}^3(2a) - 2a \operatorname{coth}^3(2a) \operatorname{csch}(2a) \right] \quad (\text{F.18})$$

$$K(a) = \frac{3}{4} \left[\frac{28}{15} + 160a \operatorname{csch}^3(2a) + 8a \operatorname{csch}(2a) + 192a \operatorname{csch}^5(2a) \right] \\ + \frac{3}{4} \left[-96 \operatorname{coth}(2a) \operatorname{csch}^3(2a) - 16 \operatorname{coth}(2a) \operatorname{csch}(2a) \right]. \quad (\text{F.19})$$

$$W(a) = -\frac{3}{16} \operatorname{csch}^5(2a) (-1588a - 2(48a + 97) \sinh(2a) + 12(80a + 49) \sinh(4a) - (96a + 119) \sinh(6a) \\ + 6(16a + 19) \sinh(8a) - 5 \sinh(10a) + 40(24a - 1) \cosh(2a) - 16(98a + 12) \cosh(4a) \\ + 12(16a + 3) \cosh(6a) - 6(18a + 16) \cosh(8a) + 4 \cosh(10a) + 288) \quad (\text{F.20})$$

Apêndice G

Integrais necessárias para o estudo do espalhamento do modelo ϕ^6

Este apêndice será reservado para o desenvolvimento dos métodos algébricos [42] usados para resolver as integrais elípticas que surgem na construção das coordenadas coletivas para o modelo ϕ^6 .

Vamos começar resolvendo a integral que é necessária para obter a função $g(a)$ (6.9), que pode ser reescrita da seguinte forma

$$I_1(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + ae^{2x})^{\frac{3}{2}}(1 + ae^{-2x})^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\alpha^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-3x} dx}{(1 + ae^{-2x})^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{e^{-2x}}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{G.1})$$

Seguindo [42], podemos expandir uma função hipergeométrica genérica, da seguinte forma

$$\frac{1}{(1+z)^p} = {}_2F_1(p, b, c, -z) = \frac{1}{\Gamma(p)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+n)}{n!} (-z)^n. \quad (\text{G.2})$$

Então podemos reescrever (G.1), como sendo

$$\begin{aligned} I_1(a) &= \frac{2}{\alpha^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(\Gamma(3/2))^2} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2+n_1) \Gamma(3/2+n_2)}{n_1! n_2!} \frac{(-\alpha)^{n_1}}{(-\alpha)^{n_2}} \int_0^{\infty} dx e^{-(3+2n_1+2n_2)x} \\ &= \frac{8}{\pi} \frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2+n_1) \Gamma(3/2+n_2)}{n_1! n_2!} \frac{(-\alpha)^{n_1}}{(-\alpha)^{n_2}} \frac{1}{3+2(n_1+n_2)}. \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

Podemos reescrever (G.3) usando

$$\frac{1}{3 + 2(n_1 + n_2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3/2 + (n_1 + n_2)} \right] = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(3/2 + n_1 + n_2)}{\Gamma(3/2 + n_1 + n_2 + 1)}, \quad (\text{G.4})$$

de modo que (G.3) fica dada por

$$I_1(a) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2 + n_1) \Gamma(3/2 + n_2)}{n_1! n_2!} \frac{(-\alpha)^{n_1}}{(-\alpha)^{n_2}} \frac{\Gamma(3/2 + n_1 + n_2)}{\Gamma(3/2 + n_1 + n_2 + 1)}. \quad (\text{G.5})$$

As próximas integrais podem ser feitas de maneira análoga:

$$\begin{aligned} I_2(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + \alpha e^{2x})^{\frac{1}{2}} (1 + \alpha e^{-2x})^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{(1 + \alpha e^{-2x})^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{e^{-2x}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{G.6}) \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{\alpha}} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2 + n_1) \Gamma(1/2 + n_2)}{n_1! n_2!} \frac{(-\alpha)^{n_1}}{(-\alpha)^{n_2}} \frac{\Gamma(1/2 + n_1 + n_2)}{\Gamma(1/2 + n_1 + n_2 + 1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + \alpha e^{-2x})^{\frac{1}{2}} (1 + \alpha e^{2x})^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\alpha^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-3x} dx}{(1 + \alpha e^{-2x})^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{e^{-2x}}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{G.7}) \\ &= \frac{2}{\pi \alpha^{\frac{3}{2}}} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2 + n_1) \Gamma(3/2 + n_2)}{n_1! n_2!} \frac{(-\alpha)^{n_1}}{(-\alpha)^{n_2}} \frac{\Gamma(3/2 + n_1 + n_2)}{\Gamma(3/2 + n_1 + n_2 + 1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + \alpha e^{-2x})^{\frac{5}{2}} (1 + \alpha e^{2x})^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{(1 + \alpha e^{-2x})^{\frac{5}{2}} \left(1 + \frac{e^{-2x}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{G.8}) \\ &= \frac{4}{3\pi \sqrt{\alpha}} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma(5/2 + n_1) \Gamma(1/2 + n_2)}{n_1! n_2!} \frac{(-\alpha)^{n_1}}{(-\alpha)^{n_2}} \frac{\Gamma(1/2 + n_1 + n_2)}{\Gamma(1/2 + n_1 + n_2 + 1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_5(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + \alpha e^{-2x})^{\frac{3}{2}} (1 + \alpha e^{2x})^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{(1 + \alpha e^{-2x})^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{e^{-2x}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{G.9}) \\ &= \frac{2}{\pi \sqrt{\alpha}} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2 + n_1) \Gamma(1/2 + n_2)}{n_1! n_2!} \frac{(-\alpha)^{n_1}}{(-\alpha)^{n_2}} \frac{\Gamma(1/2 + n_1 + n_2)}{\Gamma(1/2 + n_1 + n_2 + 1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_6(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + \alpha e^{-2x})^{\frac{1}{2}} (1 + \alpha e^{2x})^{\frac{5}{2}}} = \frac{2}{\alpha^{\frac{5}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-5x} dx}{(1 + \alpha e^{-2x})^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{e^{-2x}}{\alpha}\right)^{\frac{5}{2}}}, \quad (\text{G.10}) \\
&= \frac{4}{3\pi\alpha^{\frac{5}{2}}} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2 + n_1) \Gamma(5/2 + n_2) (-\alpha)^{n_1}}{n_1! n_2!} \frac{\Gamma(5/2 + n_1 + n_2)}{(-\alpha)^{n_2} \Gamma(5/2 + n_1 + n_2 + 1)}.
\end{aligned}$$

G.1 Sobre a convergência

Os resultados mostrados acima devem ainda ser analisados no que diz respeito ao seu domínio de convergência. Todas elas têm esse domínio em $0 < \alpha \leq 1$ ou $\alpha \geq 1$. Como exemplo, vamos considerar o caso da série dada em (G.1).

- Caso I: tomamos $0 < \alpha \leq 1$.

Neste caso, a soma deve ser realizada em n_2 para que a convergência seja garantida. Isso nos dá

$$\begin{aligned}
I_1(a) &= \frac{4}{\pi\alpha^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(3/2 + n)}{n!} (-\alpha)^n \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2 + n_2) \Gamma(3/2 + n + n_2)}{\Gamma(3/2 + n + n_2 + 1)} \frac{1}{n_2!} \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{n_2} \right], \quad (\text{G.11}) \\
&= \frac{4}{\pi\alpha^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(3/2 + n)}{n!} (-\alpha)^n \frac{\Gamma(3/2) \Gamma(3/2 + n)}{\Gamma(3/2 + n + 1)} {}_2F_1(3/2, 3/2 + n, 3/2 + n + 1, -1/\alpha) \right], \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}\alpha^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(3/2 + n)}{3/2 + n} {}_2F_1(3/2, 3/2 + n, 3/2 + n + 1, -1/\alpha) \frac{(-\alpha)^n}{n!} \right].
\end{aligned}$$

- Caso II: tomamos $\alpha \geq 1$.

Neste caso a soma na equação (G.5) é realizada em n_1 para garantir a convergência, o que resulta em:

$$\begin{aligned}
I_1(a) &= \frac{4}{\pi\alpha^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2 + n)}{n!} \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2 + n_1)}{n_1!} \frac{\Gamma(3/2 + n + n_1)}{\Gamma(3/2 + n + n_1 + 1)} (-\alpha)^{n_1}, \quad (\text{G.12}) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}\alpha^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2 + n)}{n!} \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n \frac{\Gamma(3/2 + n)}{\Gamma(3/2 + n + 1)} {}_2F_1(3/2, 3/2 + n, 3/2 + n + 1, -\alpha), \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}\alpha^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2 + n)}{3/2 + n} \frac{(-\frac{1}{\alpha})^n}{n!} {}_2F_1(3/2, 3/2 + n, 3/2 + n + 1, -\alpha).
\end{aligned}$$

Com este procedimento de análise, as demais séries podem ser consideradas no caso $\alpha \geq 1$, uma vez que $\alpha = 3e^{2a}$ e $a \geq 0$.

$$I_1(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\alpha^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2+n)}{3/2+n} \frac{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n}{n!} {}_2F_1(3/2, 3/2+n, 3/2+n+1, -\alpha), \quad (\text{G.13})$$

$$I_2(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2+n)}{1/2+n} \frac{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n}{n!} {}_2F_1(1/2, 1/2+n, 1/2+n+1, -\alpha), \quad (\text{G.14})$$

$$I_3(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2+n)}{3/2+n} \frac{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n}{n!} {}_2F_1(1/2, 3/2+n, 3/2+n+1, -\alpha), \quad (\text{G.15})$$

$$I_4(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2+n)}{1/2+n} \frac{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n}{n!} {}_2F_1(5/2, 1/2+n, 1/2+n+1, -\alpha), \quad (\text{G.16})$$

$$I_5(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2+n)}{1/2+n} \frac{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n}{n!} {}_2F_1(3/2, 1/2+n, 1/2+n+1, -\alpha), \quad (\text{G.17})$$

$$I_6(a) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{\alpha^{\frac{5}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(5/2+n)}{5/2+n} \frac{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n}{n!} {}_2F_1(1/2, 5/2+n, 5/2+n+1, -\alpha). \quad (\text{G.18})$$

G.2 Termo cinético e potencial efetivo do espalhamento *kink/kink* seção (6.1)

Apresentamos aqui o cálculo para a obtenção do termo cinético e do potencial efetivo (6.10) utilizando os resultados das integrais elípticas (G.13) feitas acima.

O potencial se escreve como:

$$\begin{aligned} V(a) &= \frac{1}{2} - \frac{6 \log(\alpha)}{\alpha^2 - 1} + \frac{15}{2} \left[\frac{\alpha^2 - 1 - 2 \log(\alpha)}{(\alpha^2 - 1)^2} \right] \quad (\text{G.19}) \\ &- (10 + 9e^{4a}) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{dx}{(1 + \alpha e^{-2x})^{\frac{3}{2}} (1 + \alpha e^{2x})^{\frac{3}{2}}} \right] - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{dx}{(1 + \alpha e^{-2x})^{\frac{1}{2}} (1 + \alpha e^{2x})^{\frac{1}{2}}} \right] \\ &+ 4 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{(1 + \alpha e^{-2x})^{\frac{3}{2}} (1 + \alpha e^{2x})^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(1 + \alpha e^{-2x})^{\frac{1}{2}} (1 + \alpha e^{2x})^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &- 3 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{(1 + \alpha e^{-2x})^{\frac{5}{2}} (1 + \alpha e^{2x})^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(1 + \alpha e^{-2x})^{\frac{1}{2}} (1 + \alpha e^{2x})^{\frac{5}{2}}} \right]. \end{aligned}$$

Daqui temos, com os resultados anteriores,

$$\begin{aligned}
V(a) = & \frac{1}{2} - \frac{6 \log(\alpha)}{\alpha^2 - 1} + \frac{15}{2} \left[\frac{\alpha^2 - 1 - 2 \log(\alpha)}{(\alpha^2 - 1)^2} \right] \\
& - (10 + 9e^{4a}) \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}\alpha^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2 + n)}{3/2 + n} \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n}{n!} {}_2F_1(3/2, 3/2 + n, 3/2 + n + 1, -\alpha) \right] \\
& - \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2 + n)}{1/2 + n} \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n}{n!} {}_2F_1(1/2, 1/2 + n, 1/2 + n + 1, -\alpha) \right] \\
& + 4 \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}\alpha^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2 + n)}{3/2 + n} \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n}{n!} {}_2F_1(1/2, 3/2 + n, 3/2 + n + 1, -\alpha) \right] \\
& + 4 \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2 + n)}{1/2 + n} \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n}{n!} {}_2F_1(3/2, 1/2 + n, 1/2 + n + 1, -\alpha) \right] \\
& - 3 \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2 + n)}{1/2 + n} \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n}{n!} {}_2F_1(5/2, 1/2 + n, 1/2 + n + 1, -\alpha) \right] \\
& - 3 \left[\frac{4}{3\sqrt{\pi}\alpha^{5/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(5/2 + n)}{5/2 + n} \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n}{n!} {}_2F_1(1/2, 5/2 + n, 5/2 + n + 1, -\alpha) \right].
\end{aligned} \tag{G.20}$$

De mesma forma, obtemos a expressão explícita para o termo cinético (6.9)

$$g(a) = \frac{1}{2} - \frac{36e^{4a}}{\sqrt{\pi}\alpha^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2 + n)}{3/2 + n} \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n}{n!} {}_2F_1(3/2, 3/2 + n, 3/2 + n + 1, -\alpha). \tag{G.21}$$

G.3 Termo cinético e potencial efetivo para o espalhamento de *anti-kink/kink* seção (6.2.0.2)

O potencial efetivo é dado por

$$V(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_{AKK}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} (\phi_{AKK})^2 (1 - \phi_{AKK}^2)^2 \right], \tag{G.22}$$

e fazendo uso dos resultados das integrais elípticas calculadas acima, podemos reescrever essa expressão como

$$\begin{aligned}
V(a) = & \frac{1}{2} - \frac{6 \log(\alpha)}{\alpha^2 - 1} + \frac{15}{2} \left[\frac{\alpha^2 - 1 - 2 \log(\alpha)}{(\alpha^2 - 1)^2} \right] \tag{G.23} \\
& + (10 - 9e^{4a}) \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}\alpha^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2 + n)}{3/2 + n} \frac{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n}{n!} {}_2F_1(3/2, 3/2 + n, 3/2 + n + 1, -\alpha) \right] \\
& + \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2 + n)}{1/2 + n} \frac{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n}{n!} {}_2F_1(1/2, 1/2 + n, 1/2 + n + 1, -\alpha) \\
& + 3 \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2 + n)}{1/2 + n} \frac{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n}{n!} {}_2F_1(5/2, 1/2 + n, 1/2 + n + 1, -\alpha) \right] \\
& + 3 \left[\frac{4}{3\sqrt{\pi}\alpha^{5/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(5/2 + n)}{5/2 + n} \frac{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n}{n!} {}_2F_1(1/2, 5/2 + n, 5/2 + n + 1, -\alpha) \right] \\
& - 4 \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}\alpha^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2 + n)}{3/2 + n} \frac{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n}{n!} {}_2F_1(1/2, 3/2 + n, 3/2 + n + 1, -\alpha) \right] \\
& - 4 \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2 + n)}{1/2 + n} \frac{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n}{n!} {}_2F_1(3/2, 1/2 + n, 1/2 + n + 1, -\alpha) \right].
\end{aligned}$$

De mesma forma, obtemos a expressão explícita para o termo cinético

$$g(a) = \frac{1}{2} + \frac{36e^{4a}}{\sqrt{\pi}\alpha^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2 + n)}{3/2 + n} \frac{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n}{n!} {}_2F_1(3/2, 3/2 + n, 3/2 + n + 1, -\alpha). \tag{G.24}$$