UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Cosmologia Quântica em Teorias Escalar-Tensoriais com Interpretação de Bohm-de Broglie

Tese apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física

Orientador: Prof. Dr. Oliver Fabio Piattella
Coorientador: Prof. Dr. Júlio César Fabris

Isaac Torres Sales
Vitória
2020

Dedico à minha Família:
Maria José Torres Mercês, minha mãe,
Cristiano Torres Mercês e
David Torres Mercês, meus irmãos, e
Sávio Francisco do Carmo Torres, meu sobrinho.

Dois problemas se misturam:
a verdade do Universo e
a prestação que vai vencer.

Raul Seixas & Paulo Coelho

No céu nada se faz por acaso.

Aristóteles

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Em primeiro lugar, quero agradecer à minha noiva Ingrid Ferreira da Costa, que foi quem me apresentou o PPGFis e me convenceu a não desistir de fazer doutorado em Física, além de ter prestado um inestimável auxílio profissional e emocional durante todo o doutorado. Sua companhia e sua paixão persistente pela cosmologia me motivaram a prosseguir em muitos momentos. Também a agradeço pelo imenso auxílio na revisão de inúmeros textos e na preparação de apresentações. A ela, minha eterna gratidão, com amor.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFES, como um todo, ao professor Davi Cabral Rodrigues, ex-coordenador, pelos inúmeros auxílios prestados e ao secretário José Carlos Coutinho, que foi sempre muito generoso, atencioso e que merece ser reconhecido pela sua imensa dedicação ao programa e a seus(suas) alunos(as) e professores(as). Agradeço ao professor Jorge Luis Gonzalez Alfonso pelas aulas inspiradoras de Física Estatística, pela dedicação ao trabalho de docente e pela paixão com que consegue transmitir com clareza e simplicidade conceitos tão complicados. Agradeço aos professores Fernando Néspoli Nassar Pansini e Humberto Belich Junior, pela supervisão nos estágios docentes.

Agradeço ao professor Oliver Fabio Piattella pela orientação, pela paciência, pela enorme generosidade, pelo companheirismo e por ter me dado uma imensa liberdade na realização deste trabalho. Este agradecimento se estende ao professor Júlio César Fabris, a quem também agradeço pelo (quase inesgotável) número de ideias que foi capaz de sugerir para resolver problemas, por ter me posto em contato com especialistas quando necessário foi e por ter se dedicado além do seu limite a mim e muitos outros colegas, sempre tentando ver o lado positivo das situações, com muito bom humor, mas também muita seriedade. Agradeço em particular à sua sensibilidade na hora de fazer críticas, que muitas vezes soam como perguntas inocentes, e que me fizeram pensar muito.

Agredeço especialmente aos amigos Tays Miranda de Andrade e Felipe de Melo Santos, por terem me recebido em Vitória no dia 9 de março de 2016, com muita generosidade e com um bolo de aniversário. Essa gentileza ajudou a aliviar a ansiedade pela mudança. A ambos, minha gratidão. Agradeço em particular ao amigo Felipe de Melo Santos pelas inúmeras ajudas prestadas em matéria pessoal e profissional, que foram decisivas em muitos momentos. Agradeço em especial pela parceria num artigo que consta como parte importante deste trabalho. Agradeço à colega matemática e física Carla Rodrigues Almeida, que me inspirou, com a sua criatividade e coragem, a estudar cosmologia quântica e a trilhar meu próprio caminho. Agradeço a amizade e o apoio de David Camarena Torres, Sara Caroline Carrera de Aviz Santos e dos demais colegas do PPGFis e do PPGCosmo.

No Pará, gostaria de agradecer à minha família, a quem este trabalho é dedicado. Mais do que uma importância emocional, seu apoio verdadeiro durante toda a minha vida é a única explicação para eu ter conseguido estudar, apesar de minha família ser pobre e não ter tido o mesmo acesso à educação que eu tive. Seu sacrifício durante muitos e muitos anos foi o que me permitiu a realização deste trabalho. Agradeço aos mestres Van Sérgio da Silva Alves, Marcelo Costa de Lima e Augusto César dos Reis Costa, da UFPA, e Glauber Tadaiesky Marques e Bráulio Vasconcelos Maia, da UFRA. Ao professor Van Sérgio, devo agradecer pelas dicas sobre pós-graduação de 2012/2013 me acompanharam em muitos momentos e a sua visão sobre a relação entre Física e Matemática que, por muito que eu discordasse na época, se mostrou a visão mais adequada na prática, o que me ajudou muito ao longo deste doutorado. A todos, meus mais sinceros agradecimentos pelas inúmeras lições.

Agradeço aos professores Felipe Tovar Falciano, Giuseppe Dito, Hideki Maeda, Jorge Zanelli, Joseph Buchbinder, Nelson Pinto Neto e Sergey Sushkov por importantes discussões envolvendo este trabalho, que foram cruciais para evitar erros, resolver problemas e inspirar novas ideias. Um agradecimento especial ao professor Antônio Brasil Batista, que aceitou colaborar em um trabalho, compartilhando sua experiência, lucidez e rigor num momento decisivo para a conclusão deste trabalho.

Agradeço ao povo brasileiro, nosso verdadeiro patrão e financiador, que tem demonstrado seu apoio ao desenvolvimento da Ciência brasileira, apesar da sua majoritária pobreza e apesar do discurso covarde e estúpido que tem atacado nossa jovem cultura científica. A todos e todas que contribuíram direta ou indiretamente para a realização destre trabalho, mas que porventura não tenham sido mencionados, meus mais sinceros agradecimentos.

Resumo

Neste trabalho, revisamos e aplicamos o formalismo da interpretação de Bohm-de Broglie da mecânica quântica ao estudo de duas teorias gravitacionais cosmológicas, que modificam a relatividade geral de Einstein pela introdução de um campo escalar: o acoplamento mínimo e o acoplamento não-mínimo derivativo. Abordamos algumas questões relacionadas ao processo de quantização nessas teorias, a saber, a ambiguidade do ordenamento e o problema da quantização de Hamiltonianas com potências não-inteiras nos momentos, caso no qual aplicamos a técnica das derivadas fracionárias. Discutimos como a interpretação de Bohm-de Broglie fornece critérios físicos para que se possa analisar os resultados obtidos, especialmente no que diz respeito à busca por soluções não-singulares. Com ajuda desses critérios, discutimos como as técnicas aplicadas são capazes de fornecer respostas ao problema da singularidade, através de bounces e universos cíclicos.

Palavras-chave: Cosmologia, Universo Primordial, Quantização, Interpretação de Bohm-de Broglie, Bounce, Universos Cíclicos, Derivadas Fracionárias, Problema do Ordenamento.

Abstract

In this work, we both review and apply the formalism of Bohm-de Broglie interpretation of quantum mechanics to study two cosmological theories which modify Einstein's general relativity through the introduction of a scalar field: the minimal and the non-minimal derivative couplings. We address some issues related to the quantization process in those theories, namely the ordering ambiguity and the problem of the quantization of Hamiltonians with non-integer powers in the momenta, in which case we apply a fractional derivative technique. We discuss how the Bohm-de Broglie interpretation provides us physical criteria to analyse the obtained results, specially with respect to the search for nonsingular solutions. With the help of those criteria, we discuss how the applied techniques are able to provide answers to the singularity problem, through bounces and cyclic universes.

Keywords: Cosmology, Primordial Universe, Quantization, Bohm-de Broglie Interpretation, Cyclic Universes, Fractional Derivatives, Ordering Problem.

Sumário

Capítulo 1

Introdução e Objetivos

Neste Capítulo, vamos contextualizar o assunto abordado nos próximos Capítulos, indo do mais geral ao mais específico. Na Seção 1.1, apenas apresentamos algumas abreviações que serão usadas ao longo do trabalho. Na Seção 1.2, introduzimos algumas notações referentes a teorias de gravitação relativística, que são comuns tanto à Relatividade Geral como a muitas teorias de gravitação modificada baseadas na ideia de que a gravidade está intimamente ligada à geometria do espaço-tempo, que é uma variedade diferenciável Lorentziana em 4 dimensões. Aliás, discutiremos apenas teorias em 4 dimensões aqui, muito embora existam teorias gravitacionais com mais dimensões.

Na Seção 1.3, apresentamos um brevíssimo resumo sobre o atual modelo padrão da Cosmologia, o que serve de justificativa para o estudo de muitas alternativas. Dentre elas, nos interessa neste trabalho discutir as teorias escalar-tensoriais. Duas teorias desse tipo foram abordadas neste trabalho, a do acoplamento mínimo, que é apresentada na Seção 1.4 e a do acoplamento não-mínimo, apresentada na Seção 1.6. Como ambas são casos particulares da teoria de Horndeski, esta é apresentada brevemente na Seção 1.5.

Após esse percurso voltado a formalismos clássicos, apresentamos o problema da singularidade, na Seção 1.7. Este é um dos problemas que as teorias de cosmologia quântica tentam resolver. Apresentamos muito brevemente a cosmologia quântica, na Seção 1.8, e alguns de seus problemas, na Seção 1.9. Esses problemas motivam uma discussão, na Seção 1.10, sobre a interpretação da mecânica quântica, que é um tema bastante profundo, tanto fisicamente quanto filosoficamente, como se discute, por exemplo, em [1–3]. Justamente por causa da sua complexidade e do fato de não ser o objetivo deste trabalho apresentar uma solução a essa questão, apenas a situamos, com o objetivo de motivar a escolha que foi feita aqui, de se aplicar a chamada *interpretação causal*, também chamada de interpretação de *Bohm-de Broglie* (BdB), ou, ainda, interpretação *Bohmiana*.

Com isso, acreditamos ter situado as bases do presente trabalho, que são a cosmologia quântica, a interpretação de BdB e as teorias escalar-tensoriais. Na Seção 1.11, reunimos essas ideias para finalmente descrever quais são os objetivos deste trabalho e como eles serão explorados nos Capítulos seguintes. O(A) leitor(a) familiarizado(a) com os conceitos discutidos nas Seções de revisão 1.3 a 1.10 pode prosseguir diretamente para a Seção 1.11.

1.1 Lista de Abreviações

HJ	Hamilton-Jacobi
WDW	Wheeler-DeWitt
BdB	Bohm-de Broglie
DFC	Derivada Fracionária Conforme
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
c.c.	condições de contorno
c.i.	condições iniciais

1.2 Notações e Fórmulas

Na Cosmologia moderna, compreende-se que o universo é aproximadamente homogêneo e isotrópico em largas escalas, o que constitui o chamado princípio cosmológico [4]. Sabe-se também que ele está em expansão acelerada [5,6]. A métrica mais geral capaz de descrever um universo homogênio e isotrópico em expansão é a métrica FLRW [4,7]:

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\phi^2\right), \tag{1.1}$$

onde: $N(t)$ é a chamada *função lapso*, que descreve uma redefinição genérica do tempo; $a(t)$ é o *fator de escala*, que descreve a expansão do universo; r,θ,ϕ são as coordenadas esféricas usuais. Por sua vez, a variável $k = 0, \pm 1$ define o tipo de geometria espacial: para $k = 0$, uma geometria plana; para $k = 1$, uma geometria esférica; para $k = -1$, uma geometria hiperbólica. Então, em particular, a métrica de FLRW plana pode ser escrita como:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + a^2 \delta_{ij} dx^i dx^j . \tag{1.2}$$

O princípio cosmológico deve ser compreendido como verdadeiro no sentido de que ele admite desvios, mas estes são pequenos, como sabemos por várias observações, como descrito, por exemplo, na Referência [8]. Para considerar inomogeneidades e anisotropias, é necessário considerar, portanto, uma métrica perturbada. As perturbações são também usadas (não apenas em cosmologia) para descrever ondas gravitacionais. Entretanto, neste trabalho, iremos nos restringir à primeira aproximação (1.2), que corresponde ao princípio cosmológico num universo espacialmente plano. Apenas comentaremos na Seção 1.5 algumas restrições impostas recentemente pela observação das ondas gravitacionais e como isso influencia o estudo aqui desenvolvido. Sobre a escolha de $k = 0$, as observações atuais mostram que o universo é aproximadamente plano, de acordo com os dados mais recentes do Planck 2018 [9], pois o parâmetro de densidade da curvatura espacial observado foi de $\Omega_k = 0.0007 \pm 0.0019$. Vamos supor então $k = 0$ ao longo de todo o trabalho.

Portanto, tendo em vista a discussão acima, vamos listar abaixo algumas quantidades geométricas básicas calculadas a partir da métrica FLRW plana (1.2). No que segue, índices gregos variam de 0 a 3 e índices latinos variam de 1 a 3. Considerando o espaço-tempo como uma variedade Lorentziana em quatro dimensões, cujas propriedades geométricas são descritas por uma métrica $g_{\mu\nu}$, como é o padrão estabelecido pela Relatividade Geral (ver, por exemplo, [10]), considerando a derivada covariante usual, para a qual $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$, a conexão é dada por:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) . \tag{1.3}$$

Logo, para (1.2), encontramos:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{\dot{N}}{N} , \qquad \Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a} \delta^i_j , \qquad \Gamma^0_{ij} = \frac{a\dot{a}}{N^2} \delta_{ij} , \tag{1.4a}$$

$$\Gamma^0_{0i} = \Gamma^i_{00} = \Gamma^i_{jk} = 0 . \tag{1.4b}$$

Daí, para o tensor de Ricci

$$R_{\mu\rho} = \partial_\nu \Gamma^\nu_{\mu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\nu_{\nu\rho} + \Gamma^\alpha_{\mu\rho}\Gamma^\nu_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\rho}\Gamma^\nu_{\alpha\mu} \,, \tag{1.5}$$

encontramos

$$R_{00} = 3\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{N}}{N} - 3\frac{\ddot{a}}{a} \,, \qquad R_{0i} = 0 \,, \qquad R_{ij} = \delta_{ij}\frac{a^2}{N^2}\left(2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{N}}{N}\right) . \tag{1.6}$$

Contraindo $R_{\mu\rho}$, obtemos o escalar de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = -\frac{6}{N^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{N}}{N} - \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) . \tag{1.7}$$

Em seguida, sendo o tensor de Einstein dado por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \,, \tag{1.8}$$

encontramos suas componentes covariantes

$$G_{00} = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} \,, \qquad G_{0i} = 0 \,, \qquad G_{ij} = \delta_{ij}\frac{a^2}{N^2}\left(2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{\ddot{a}}{a}\right) \tag{1.9}$$

e contravariantes

$$G^{00} = \frac{3}{N^4}\frac{\dot{a}^2}{a^2} \,, \qquad G^{0i} = 0 \,, \qquad G^{ij} = \frac{\delta^{ij}}{a^2N^2}\left(2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{\ddot{a}}{a}\right) . \tag{1.10}$$

Sobre a questão da assinatura da métrica, é possível verificar, pelas equações acima, que uma mudança de assinatura de uma métrica genérica $g_{\mu\nu}$ mantém inalteradas as quantidades $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$, $R_{\mu\nu}$, $G_{\mu\nu}$ e $G^{\mu\nu}$ e troca o sinal das quantidades $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ e R. Para notações adicionais, mais "matemáticas", ver o início do Apêndice B. Além disso, vamos usar o ponto como separação entre a parte inteira e a parte fracionária de um número. Exemplo: $1/2 = 0.5$ em vez de 0,5. Sobre convenções de unidades, vamos usar unidades naturais, nas quais (numericamente) $\hbar = G = c = 1$, ou variações disso, dependendo da convenção usada na referência que motivou o estudo, sendo que $\hbar$ é a constante de Planck normalizada, G é a constante gravitacional de

Newton e c é a velocidade da luz no vácuo.

1.3 Modelo ΛCDM

Nesta seção, vamos supor a validade da teoria geral da relatividade, como apresentada em livros-texto [10–12]. Partimos da métrica FLRW (1.1), para escrever as equações de Einstein

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \,, \tag{1.11}$$

onde Λ é a constante cosmológica e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento que descreve um fluido perfeito:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} \,, \tag{1.12}$$

onde u_ν é o quadrivetor velocidade do fluido, ρ é a densidade e P é a pressão. Nessas condições, as equações de Einstein tomam a forma das chamadas *equações de Friedmann*:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{k\,c^2}{a^2} \,, \tag{1.13a}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \,. \tag{1.13b}$$

As equações acima caracterizam uma descrição do universo em largas escalas, homogêneo e isotrópico, modelado como um fluido perfeito que respeita as equações de Einstein, na presença de uma constante cosmológica Λ. A quantidade $H = \dot{a}/a$ é o chamado *fator de Hubble*, que mede a expansão do universo. A equação (1.13a) é um vínculo, por ser de primeira ordem, enquanto que (1.13b) é a equação da aceleração.

O conteúdo de matéria e energia caracteriza um particular modelo cosmológico. Como sabemos [13], o modelo cosmológico mais bem-sucedido é o chamado ΛCDM, para o qual a equação de vínculo (1.13a) é:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_\Lambda + \frac{\Omega_{c0}}{a^3} + \frac{\Omega_{b0}}{a^3} + \frac{\Omega_{r0}}{a^4} + \frac{\Omega_{k0}}{a^2} \,, \tag{1.14}$$

onde as quantidades Ω_i representam os valores atuais dos parâmetros de densidade (iguais a $\rho_i/\rho_{\text{crítico}}$, medidos hoje, onde $\rho_{\text{crítico}} \equiv 3H^2/8\pi G$) de cada uma das componentes do modelo, que são: Ω_Λ, constante cosmológica Λ; Ω_{c0}, matéria escura fria (CDM, abreviação em inglês); Ω_{b0}, bárions; Ω_{r0}, radiação, que representa fótons e neutrinos; Ω_{k0}, curvatura k.

Há certamente muito mais o que falar sobre o modelo ΛCDM, mas eu gostaria apenas de pontuar que esse modelo, como descrito acima, é incompleto, pois enfrentaria dificuldades como o problema do horizonte e o problema da planura. Estas e outras questões são resolvidas pela introdução da inflação, que é caracterizada no livro [14] como simplesmente qualquer período em que o universo está se expandindo aceleradamente: $\ddot{a} > 0$. Um conceito mais preciso, no entanto, caracteriza a inflação como um período de expansão acelerada antes das fases de radiação e matéria, com uma duração muito curta, da ordem de 61 e-folds, seguida por um processo de reaquecimento [13]. Como observado em [14], apesar de ter sido motivada historicamente pela necessidade de encontrar soluções para os problemas já mencionados, pode-se dizer que a propriedade mais importante da inflação não é a solução desses problemas, mas sim a sua capacidade de gerar irregularidades que levaram à formação de estruturas. Então, para a discussão que interessa aqui, vale a pena mencionar que a inflação introduz o inflaton, um campo escalar que parece ser muito importante para o universo primordial. Mesmo em modelos inflacionários sem campo escalar, como o modelo de Starobinsky [15], é possível mostrar que existe uma equivalência com um modelo de campo escalar canônico [16, 17].

1.4 Teorias Escalar-Tensoriais: o Acoplamento Mínimo

Existem muitas justificativas para se estudar modificações da gravidade através da introdução de um campo escalar, como comentado em [18]. Primeiro, campos escalares são mais simples do que vetoriais ou tensoriais, portanto há uma motivação pragmática, no sentido de buscar inicialmente a modificação mais simples, o que também pode servir de base para modificações mais complicadas. Outra motivação é a de modelar a variação de constantes fundamentais, como é o caso da teoria de Brans-Dicke [19]. Além disso, o campo escalar também é usado, por exemplo, para se construir modelos de inflação [14] e de energia escura [20]. Um campo escalar gravitacional também é uma característica essencial de supergravidade, supercordas e teorias-M, como observado em [21]. Teorias nas quais um campo escalar está acoplado à gravidade são chamadas de *escalar-tensoriais*.

A teoria escalar-tensorial mais simples é chamada de *acoplamento mínimo* e é representada pela ação

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\right] , \tag{1.15}$$

que corresponde a um acoplamento entre a gravitação, representada pela ação de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \int d^4x\sqrt{-g}\frac{R}{2\kappa} , \tag{1.16}$$

e um campo escalar canônico ϕ, representado pela ação de Klein-Gordon

$$S_{KG} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[- \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\right] . \tag{1.17}$$

Em modelos nos quais o campo escalar domina a dinâmica, como é o caso da inflação, pode-se desprezar os termos de matéria. É o que vamos fazer ao longo do presente trabalho, pois estudaremos algumas teorias de cosmologia quântica nas quais a dinâmica será determinada por um campo escalar.

Também é possível mostrar que muitas teorias gravitacionais são, de certo modo, equivalentes a (1.15). Essa equivalência se dá através de uma transformação conforme, que é uma transformação da forma

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} , \tag{1.18}$$

onde Ω é uma função que pode depender das coordenadas, mas também do campo escalar. Exemplos de teorias que admitem uma equivalência desse tipo com (1.15) são a teoria inflacionária de Starobinsky (ver seção 8.6.2 de [14] e as referências lá citadas) e a teoria de Brans-Dicke (ver capítulo 1 de [21]). É comum chamar a versão transformada de teoria no *frame de Einstein* e a antiga de teoria no *frame de Jordan*. Para uma introdução às transformações conformes, ver o Apêndice D de [10] e, para mais sobre teorias escalar-tensoriais, ver o livro já citado [21]. Para mais sobre inflação e a importância do campo escalar para descrevê-la, veja [22].

1.5 A Teoria de Horndeski

Na seção anterior, discutimos uma teoria que modifica a gravitação padrão da Relatividade Geral[1] pela introdução de um campo escalar canônico. Podemos dizer que a Relatividade Geral é a teoria representada pela ação [24]:

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + S_m(g_{\mu\nu},\xi) \ , \tag{1.19}$$

onde G é a constante Newtoniana, Λ é a constante cosmológica e S_m é a ação de matéria, onde ξ representa coletivamente todos os campos de matéria.

Ao modificar-se a gravidade sem introduzir outros graus de liberdade, o chamado Teorema de Lovelock garante que qualquer Lagrangeana escalar $\mathcal{L}$ que dependa exclusivamente da métrica $g_{\mu\nu}$, ou seja, $\mathcal{L} = \mathcal{L}[g_{\mu\nu}]$, em quatro dimensões, covariante, com equações de segunda ordem, conduzirá necessariamente às equações de Einstein, como demonstrado em [25, 26] e revisado em [24]. Isso significa que uma modificação da Relatividade Geral que seja covariante e leve a equações de segunda ordem em quatro dimensões somente é possível adicionando pelo menos um grau de liberdade. Esse é um dos motivos para se considerar a introdução de um campo escalar.

Numa visão mais ampla, existe a possibilidade de que a inflação tenha sido causada por um campo escalar canônico, citado acima, mas também é possível que um acoplamento mais complicado tenha sido responsável por isso, como é o caso da teoria apresentada em [18]. Este é um dos motivos para se buscar teorias de gravitação modificada que introduzam um grau de liberdade, o campo escalar, sem se restringir exclusivamente ao campo canônico, que possam fornecer descrições do universo primordial.

Isso conduz à Lagrangeana de Horndeski, pois ela é a generalização do Teorema de Lovelock para o caso em que há a gravidade, representada pela métrica $g_{\mu\nu}$, mais um campo escalar ϕ. Ou seja, a Lagrangeana de Horndeski representa a teoria gravitacional mais geral possível da forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}[g_{\mu\nu},\phi]$ capaz de fornecer equações de movimento de segunda ordem em quatro dimensões. Essa ação foi apresentada em 1974 em [27] e pode ser escrita, numa notação

[1] Sobre os fundamentos da Relatividade Geral, ver os livros clássicos, como [10, 23].

semelhante à de [24], como

$$S_H = \int d^4x\sqrt{-g}(\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5) \ , \tag{1.20}$$

onde

$$\mathcal{L}_2 = G_2(\phi,X) \ , \tag{1.21a}$$

$$\mathcal{L}_3 = -G_3(\phi,X)\Box\phi \ , \tag{1.21b}$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(\phi,X)R + G_{4,X}(\phi,X)[(\Box\phi)^2 - \nabla^\mu\nabla^\nu\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi] \ , \tag{1.21c}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_5 = {} & G_5(\phi,X)G^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - \tfrac{1}{6}G_{5,X}(\phi,X)[(\Box\phi)^3 \\ & - 3\Box\phi\nabla^\mu\nabla^\nu\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + 2\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\nabla_\lambda\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\nabla^\lambda\phi] \ .\end{aligned} \tag{1.21d}$$

As funções $G_i(\phi,X)$ são funções diferenciáveis genéricas do campo escalar ϕ e do chamado *termo cinético* $X \equiv -\nabla^\mu\phi\nabla_\mu\phi$. A notação $G_{i,X}$ representa a derivada de G_i em relação a X. O motivo para se restringir a equações de segunda ordem é para evitar a chamada *instabilidade de Ostrogradsky*, como é comentado de modo didático em [28].

As perturbações dessa teoria foram apresentadas em 2012, no trabalho [29]. Em 2014, no trabalho [30], essas perturbações foram usadas para definir parâmetros que permitem testar a teoria de Horndeski com base nos dados observacionais. Vou mencionar apenas a questão da velocidade das ondas gravitacionais, que é um tema que tem gerado muito interesse na comunidade graças à recente detecção através dos eventos GW170817 e GRB 170817 [31–33]. Esses eventos impuseram o seguinte vínculo, onde c_{GW} é a velocidade das perturbações tensoriais e c é a velocidade da luz no vácuo:

$$-3 \times 10^{-15} < c_{GW}/c - 1 \leqslant 7 \times 10^{-19} \ , \tag{1.22}$$

válido para redshifts $z \leqslant 0.009$.

Na teoria de Horndeski geral (1.20), a velocidade das perturbações tensoriais, que representam as ondas gravitacionais, é determinada de acordo com as funções G_i pela fórmula:

$$c_{GW}^2 = \frac{G_4 - X(\ddot{\phi} G_{5,X} + G_{5,\phi})}{G_4 - 2XG_{4,X} - X(H\dot{\phi} G_{5,X} - G_{5,\phi})} \,, \tag{1.23}$$

onde H é o fator de Hubble: $H = \dot{a}/a$. A relação entre o vínculo (1.22), imposto pelas observações, e a teoria de Horndeski foi discutida detalhadamente no trabalho [34], de 2019, onde se afirma que, para que não haja nenhum problema com esse vínculo, sem exigir qualquer ajuste das funções G_i, basta restringir a discussão para a subclasse seguinte de Horndeski:

$$\mathcal{L} = G_2(\phi,X) - G_3(\phi,X)\Box\phi + G_4(\phi)R \,. \tag{1.24}$$

Isso não significa que teorias contendo $G_{4,X}$ ou G_5 estejam excluídas, mas significa que essas funções devem ser ajustadas para que não contradigam o vínculo (1.22), o que deve ser feito através da equação (1.23). Além disso, como discutido em [35], há dois aspectos relacionados aos termos $G_{4,X}$ ou G_5 que precisam ser levados em consideração. Primeiro, que o vínculo estabelecido não se aplica ao universo primordial, devido ao redshift para o qual ele é válido. Como estamos interessados neste trabalho em modelos de cosmologia quântica, isso significa que os termos $G_{4,X}$ ou G_5 podem ser importantes para uma descrição quântica. O segundo aspecto, que reforça o primeiro, é o fato de que esses termos tendem a ser suavizados com a expansão do universo, o que pode fazer com que os outros termos dominem sobre eles, de modo que seu efeito fique pequeno o suficiente para que o desvio provocado por eles esteja dentro do vínculo nas escalas em que o vínculo torna-se válido. Mais detalhes sobre isso em [35, 36].

1.6 O Acoplamento não-mínimo derivativo

Uma teoria gravitacional que contenha o termo G_5 de Horndeski é conhecida na literatura como *acoplamento não-mínimo derivativo* ("nonminimal derivative coupling," no original, em inglês). Ela já foi estudada como termo adicional para outras teorias, em vários trabalhos de L. Amendola, S. Sushkov e outros [18, 37–40], onde se mostra que a contribuição de G_5 parece ser importante para o universo primordial, uma vez que ele é capaz de fornecer um mecanismo de inflação. Isso concorda com o que argumentamos acima em relação a essas teorias.

Termos dessa forma também são importantes na chamada teoria do Fab Four, que é descrita em [41–43]. Essa teoria é uma subclasse de Horndeski, onde se introduz a notação

$$V_J(\phi) = \frac{dG_5(\phi)}{d\phi} \ . \tag{1.25}$$

O subescrito J não é um índice, ele significa “John”, que é o nome dado ao termo que vem de G_5. Esse termo pode ser obtido diretamente de Horndeski supondo-se que $G_5 = G_5(\phi)$, ou seja, sem dependência em X, através de uma integração por partes, assim: expandimos a derivada covariante abaixo, usando a regra de Leibniz:

$$\nabla_\mu \left[G_5(\phi)G^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi\right] = [\nabla_\mu G_5(\phi)]G^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi + G_5(\phi)(\nabla_\mu G^{\mu\nu})\nabla_\nu\phi + \tag{1.26}$$

$$+ G_5(\phi)G^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi \ . \tag{1.27}$$

O termo do lado esquerdo da igualdade acima é uma divergência total e pode ser desprezada.[2] E o segundo termo do lado direito contém $\nabla_\mu G^{\mu\nu}$, que é zero, pela identidade de Bianchi. Restam então apenas dois termos, que levam à identidade:

$$\begin{aligned} G_5(\phi)G^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi &= -[\nabla_\mu G_5(\phi)]G^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi \\ &= -\frac{dG_5(\phi)}{d\phi}G^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi \\ &= -V_J G^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi \ . \end{aligned} \tag{1.28}$$

Devido à equação acima, em todos os casos deste trabalho que considerarmos G_5, vamos nos restringir ao caso $G_5 = G_5(\phi)$ e vamos usar a notação do Fab Four para $V_J = dG_5/d\phi$.

Outra aplicação para teorias que contém o termo G_5 é para buracos negros, como em [44]. Outra informação relevante sobre essa classe de teorias de Horndeski é que elas não admitem uma transformação conforme que as leve ao frame de Einstein, como provado em [37]. Isso significa que teorias assim possuem uma estrutura realmente diferente da Relatividade Geral.

[2] Esse argumento é válido porque, na verdade, temos que levar em conta que esse termo será integrado para formar a ação. Um argumento semelhante pode ser visto no Apêndice E de [10].

1.7 Soluções singulares e não-singulares

Um dos mais importantes problemas que a cosmologia quântica se propõe a resolver é o *problema da singularidade*. O modelo padrão da cosmologia possui uma singularidade inicial: no instante $t = 0$ (tempo cósmico), o fator de escala se anula, o que constitui uma singularidade na métrica (1.1). Ao contrário do que possa parecer, definir com precisão e rigor o que é uma singularidade num espaço-tempo, em geral, não é tarefa fácil, devido à estrutura geométrica do espaço-tempo. Uma tal construção foge ao escopo deste trabalho, pois requer um tratamento específico, como apresentado em [45]. Porém, intuitivamente, a singularidade mencionada do $a = 0$ é relativamente simples de entender: com um fator de escala nulo, a distância entre quaisquer pontos do universo seria zero, o que pode ser visto da fórmula usual de cálculo de distâncias em relatividade geral.

Como comentado em [46], uma singularidade é um problema importante, por três motivos principais:

1. Como a métrica dá a estrutura do espaço-tempo, uma singularidade na métrica implica que o espaço e o tempo ficam mal definidos. Seria uma "ilegalidade", como se comenta na pág. 65 de [45].

2. Ela impede que se formule corretamente o problema de valor inicial de Cauchy, o que cria um problema na evolução temporal das grandezas.

3. A singularidade também cria um problema relacionado com a entropia do universo, pois um limite sobre a entropia é violado quando há uma singularidade [47–49].

Exemplos de soluções singulares para o fator de escala são as soluções obtidas quando se considera o universo como fluido perfeito usual:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}} , \tag{1.29}$$

onde w é o parâmetro da equação de estado e t_0 é a idade do universo. A solução do tipo de Sitter, de uma expansão exponencial

$$a(t) = a_0 e^{\gamma t} , \tag{1.30}$$

onde γ é constante, em geral é considerada como uma solução que possui uma singularidade assintótica em $t \longrightarrow -\infty$, mas alguns autores discordam de que esse limite matemático, que de fato dá zero, implique numa singularidade física [50, 51].

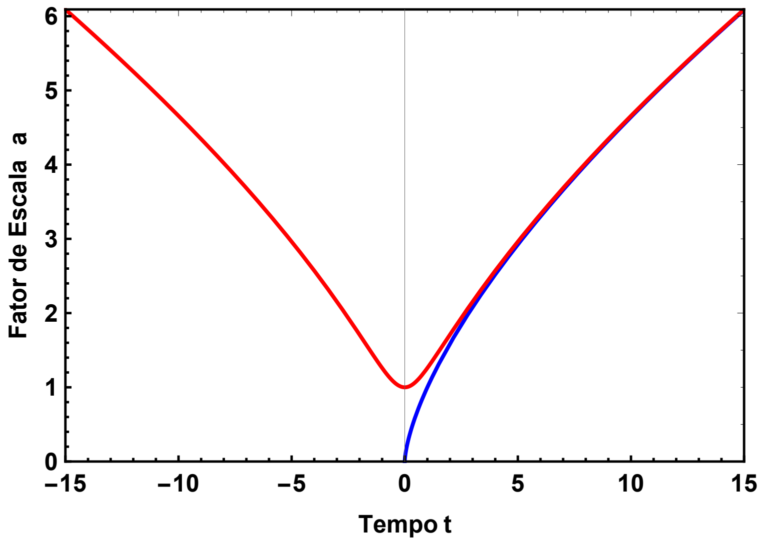

Figura 1.1: Esboço da solução (1.31), para $w = 0$ (poeira), e com $a_0 = 1$, representada pela curva vermelha, comparada com seu limite assintótico para $t \gg 0$, dado por (1.29) e representado pela curva azul.

Estudaremos nos capítulos seguintes diversos exemplos de como a quantização é capaz de partir de uma solução que classicamente é singular, e construir uma correção quântica que modifica o comportamento de a de tal modo que a singularidade seja evitada. Uma importante classe de soluções não-singulares são as chamadas soluções de *ricochete*. Apenas para ilustrar, um exemplo de solução de ricochete é

$$a(t) = \left[d^2 + \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3(1+w)}} , \tag{1.31}$$

onde $d^2 = a_0^{3(1+w)}$ é constante, sendo $a_0 = a(0) > 0$ o valor mínimo assumido pelo fator de escala. Nessa classe de soluções, não existe singularidade, o universo é eterno, sendo que vem de $t < 0$ contraindo-se, até que o ricochete ocorre, em $t = 0$, ponto no qual o mínimo de a é atingido, e depois evoluindo para uma expansão, com $t > 0$. Esse comportamento é ilustrado na Figura 1.1. Podemos dizer que a solução não-singular (1.31) é uma correção da solução singular (1.29), o que fica mais claro com a Figura 1.1.

O termo em inglês para ricochete é "bounce," em alusão ao aspecto visual da evolução temporal do fator de escala nessas soluções. Os primeiros trabalhos a considerar soluções para o fator de escala com ricochete foram [52], de M. Novello e J.M. Salim e [53], de V.N. Melnikov e S.V. Orlov, ambos de 1979. Para uma revisão sobre essas soluções e como elas podem estar presentes tanto em teorias clássicas como quânticas, veja [46]. Uma outra classe de soluções para $a(t)$ não-singulares que vale mencionar são as *soluções cíclicas*, nas quais o universo experimenta fases de expansão e contração intercaladas, onde o fator de escala é uma função periódica, mas sempre estritamente positiva, sem nunca, portanto, atingir a singularidade. Sobre cosmologia com soluções cíclicas, veja, por exemplo, [54].

1.8 A Cosmologia Quântica

A presente Seção não contém um delineamento histórico da cosmologia ou da gravitação quânticas. Para isso, ver o artigo de C. Rovelli, [55]. Vamos apenas pontuar alguns aspectos que contextualizem e embasem a discussão que será desenvolvida nos Capítulos seguintes. O conteúdo desta Seção foi baseado nas referências [7, 56].

O problema da singularidade mencionado na Seção anterior é uma das mais importantes justificativas para se abordar a cosmologia do universo primordial através de uma teoria quântica, que seria então chamada de *cosmologia quântica*. Além disso, há o fato de que as escalas de distância, tempo e massa-energia seriam, antes da inflação, escalas de Planck, que são dadas por:

$$
\begin{aligned}
l_{Pl} &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} && \text{— Comprimento de Planck,}\\
t_{Pl} &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} && \text{— Tempo de Planck,}\\
M_{Pl} &= \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} && \text{— Massa de Planck.}
\end{aligned}
$$

Em unidades naturais, tem-se (numericamente) $l_{Pl} = t_{Pl} = M_{Pl} = 1$. Reunindo as duas ideias anteriores, podemos pensar que, assim como a mecânica quântica propõe correções que resolvem inconsistências da mecânica clássica, devido justamente à diferença de escala entre as duas teorias, é razoável supor que uma versão quântica da cosmologia poderia fornecer correções à cosmologia clássica que poderiam aperfeiçoar a descrição do universo primordial.

Muito embora não exista um procedimento único para que se possa transformar essa ideia em prática, algumas abordagens se destacam pela seu embasamento nos formalismos mais bem fundamentados da Física, como a formulação Hamiltoniana da mecânica clássica e as regras básicas de quantização. Aliás, essas regras foram generalizadas para sistemas Hamiltonianos vinculados por P.A.M. Dirac em [57]. Como a quantização supõe uma Hamiltoniana, foi necessário primeiro fazer uma separação 3+1 do espaço-tempo para que então se pudesse obter uma formulação Hamiltoniana, para que, só então, se possam aplicar as regras de Dirac. Como curiosidade, em relação à importância de se considerar primeiro uma formulação Hamiltoniana, Dirac afirma em [58], referindo-se a abordagens da física de partículas e campos que não levam em conta o formalismo Hamiltoniano:

> "I feel that there will always be something missing from them which we can only get by working from a Hamiltonian, or maybe from some generalization of the concept of a Hamiltonian. So I take the point of view that the Hamiltonian is really very important for quantum theory."

Seguindo esse raciocínio, as primeiras construções de uma cosmologia quântica foram apresentadas como aplicações das regras de quantização de Dirac para a formulação Hamiltoniana da Relatividade, o que foi apresentado por J.A. Wheeler e B.S. DeWittt nos anos 60 em uma série de trabalhos [59–62]. Vejamos agora um resumo muito breve das ideias presentes na formulação inaugurada por eles.

Matematicamente, a separação 3 + 1, três dimensões espaciais e uma temporal, é uma folheação do espaço-tempo, que é uma variedade diferenciável $\mathcal{M}$, de quatro dimensões. Essa separação é formulada, no contexto presente, através da chamada *decomposição ADM*, em homenagem aos seus criadores R. Arnowitt, S. Deser e C.W. Misner [63]. A cada instante t corresponderá uma hipersuperfície de dimensão 3, representada por Σ_t, que representará o espaço num instante t. Para que haja generalidade na folheação, é necessário introduzir a função lapso $N(t,x^k)$, que mede a diferença entre o tempo coordenado t e o tempo próprio τ (onde $d\tau = N\,dt$) e o vetor deslocamento $N^i(t,x^k)$, que mede, grosso modo, o quanto as coordenadas espaciais se desviam de serem comóveis. Com isso, a métrica $(g_{\mu\nu})$ pode ser escrita como

$$
(g_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} -N^2 + N^k N_k & N_j \\ N^i & h_{ij} \end{bmatrix} ,
$$

onde h_{ij} é a chamada métrica intrínseca, que é a métrica induzida sobre as hipersuperfícies Σ_t pela métrica $g_{\mu\nu}$. Também se define a *curvatura extrínseca* K_{ij} por

$$
K_{ij} \equiv \frac{1}{2N} \left(\nabla_i N_j + \nabla_j N_i - \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \right) . \tag{1.32}
$$

Com esse formalismo, é possível mostrar que uma ação da forma

$$
S = \frac{1}{4\kappa^2} \left\{ \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[(R - 2\Lambda) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] + 2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{h}\, K \right\} , \tag{1.33}
$$

onde $\kappa^2 = 4\pi G$, $K \equiv K^i{}_i$ e $\partial\mathcal{M}$ é a fronteira de $\mathcal{M}$, se transforma em

$$
S = \int dt\, d^3x \left(\pi^0 \dot{N} + \pi^i \dot{N}_i - N\mathcal{H} - N_i \mathcal{H}^i \right) , \tag{1.34}
$$

sendo π^0 e π^i os momentos canônicos conjugados a N e N_i, respectivamente, e sendo

$$
\mathcal{H} = \frac{\sqrt{h}}{2\kappa^2} \left(G^0_0 - 2\kappa^2 T^0_0 \right) , \tag{1.35a}
$$

$$
\mathcal{H}^i = \frac{\sqrt{h}}{2\kappa^2} \left(G^{0i} - 2\kappa^2 T^{0i} \right) , \tag{1.35b}
$$

onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento.

Da ação (1.34), vemos que as funções N e N_i atuam agora como multiplicadores de Lagrange, de tal modo que a variação dessa ação em relação a N fornece o vínculo

$$
\mathcal{H} \approx 0 , \tag{1.36}
$$

enquanto a variação em relação a N_i fornece o vínculo

$$
\mathcal{H}^i \approx 0 . \tag{1.37}
$$

As equações acima são de fato igualdades. O símbolo $\approx$ foi introduzido por Dirac em [57] como uma maneira de deixar advertido que os vínculos $\mathcal{H} = 0$ e $\mathcal{H}^i = 0$ não podem ser inseridos nas equações de movimento antes que elas sejam encontradas. Ele chama isso de "igualdade fraca."

Então, com as relações acima, especialmente (1.36), o processo de quantização pode ser implementado ao se determinar o operador $\hat{\mathcal{H}}$ e aplicá-lo sobre a *função de onda do universo*, ψ, de tal modo que se obtenha a equação

$$\hat{\mathcal{H}}\psi = 0 \,, \tag{1.38}$$

ou, pelas expressões anteriores,

$$\left[-4\kappa^2 \mathcal{G}_{ijkl}\frac{\delta^2}{\delta h_{ij}\delta h_{kl}} + \frac{\sqrt{h}}{4\kappa^2}\left(-{}^3R + 2\Lambda + 4\kappa^2\hat{T}^{00}\right)\right]\psi = 0 \,, \tag{1.39}$$

onde

$$\hat{T}^{00} = -\frac{1}{2h}\frac{\delta^2}{\delta\phi^2} + \frac{1}{2}h^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi + V(\phi) \,, \tag{1.40a}$$

$$\mathcal{G}_{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{h}}(h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}) \,, \tag{1.40b}$$

onde os δ's representam as chamadas derivadas funcionais, já que as próprias variáveis são outras funções. A equação (1.39) é chamada *equação de Wheeler-DeWitt*, nome devido aos seus proponentes, como mencionamos antes. Esta equação é mais complicada do que parece, pois está definida no chamado *superespaço*, que pode ser definido assim: primeiro, consideramos o conjunto de todas as métricas tridimensionais Riemannianas e também todas as configurações de matéria, representadas por ϕ, sobre as hipersuperfícies espaciais Σ:

$$\mathrm{Riem}(\Sigma) = \{h_{ij}(x), \phi(x) \mid x \in \Sigma\} \,. \tag{1.41}$$

Então, passando ao espaço quociente obtido ao se identificar numa mesma classe de equivalência configurações que possam ser conectadas por um certo tipo de difeomorfismo,[3] obtém-se o

[3] ver, por exemplo, o Capítulo 10 de [64].

chamado *superespaço*:

$$\text{Superespaço} = \mathsf{Riem}(\Sigma)/\mathsf{Diff}(\Sigma)\ , \tag{1.42}$$

onde a "divisão" representa a passagem ao espaço quociente mencionada e $\mathsf{Diff}(\Sigma)$ indica a equivalência mencionada. Com isso, apresentamos a equação de Wheeler-DeWitt, como formulada no superespaço através de uma decomposição ADM do espaço-tempo. A nomenclatura "superespaço" não deve ser confundida com uma nomenclatura semelhante presente em supersimetria. Para mais sobre o que foi muito brevemente apresentado nessa seção, ver [56,65], por exemplo.

A equação de Wheeler-DeWitt apresentada acima é muito complexa, pois lida com as infinitas dimensões do superespaço. Por isso, um modo de simplificar essa equação é restringir-se a métricas homogêneas arbitrárias. Isso faz com que o superespaço seja reduzido para o chamado *minisuperespaço*, que tem necessariamente uma dimensão finita. Isso acontece porque as métricas homogêneas podem ser classificadas de acordo com os chamados *modelos de Bianchi*, que são nove, sendo que cada um possui apenas um número finito de graus de liberdade, como comentado na Referência [56] e explicado em detalhe no livro [66]. Essa ideia do minisuperespaço para se definir uma cosmologia quântica se deve a C.W. Misner, no artigo [67].

No caso da métrica homogênea e isotrópica (1.1) na presença de um campo escalar, essa dimensão se reduz a dois, de modo que a equação de Wheeler-DeWitt, que ainda pode ser obtida do vínculo $\mathcal{H} \approx 0$, se torna muito mais simples. Desse modo, a sua solução, que é a função de onda do universo, também fica mais simples, assumindo a forma $\psi = \psi(a,\phi)$. Devido ao nosso interesse em estudar apenas métricas homogêneas neste trabalho, vamos nos restringir daqui em diante ao minisuperespaço. Vamos estudar, no Capítulo seguinte, um exemplo concreto de cosmologia quântica no minisuperespaço. Por enquanto, vamos apenas discutir algumas questões conceituais que surgem do formalismo proposto acima.

1.9 Problemas Conceituais em Cosmologia Quântica

1.9.1 O problema das condições de contorno para a função de onda do universo

Uma questão que surge imediatamente após a postulação da equação $\hat{\mathcal{H}}\psi = 0$ é: quais são as condições de contorno (c.c.) que devem ser usadas para se determinar as soluções dessa equação? Do ponto de vista matemático, essa pergunta é de suma importância, já que usualmente a equação de WDW é uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem, com soluções de classe C^2, e existem teoremas de existência e unicidade que se aplicam a essa classe de equações [68], o que faz com que exista uma identificação entre as soluções e as condições de contorno. Podemos então ignorar essa ambiguidade se quisermos, propondo uma solução ψ, mas isso significa que implicitamente uma escolha de c.c. foi feita, devido à identificação entre uma coisa e outra.

Então, uma questão que surge é: dada essa ambiguidade, existe algum critério físico que seja capaz de fornecer uma escolha mais natural para as c.c.? Ou será que a dinâmica quântica do universo primordial é indiferente a essa escolha? Esse é o problema das condições de contorno na cosmologia quântica, que gerou um rico debate, como se discute didaticamente no artigo [69]. Como comentado em [56], propor uma solução a esse problema é um enorme desafio, já que qualquer proposta seria na verdade um postulado a mais.

Vale destacar duas propostas de resolver esse problema, como comentado em [56, 69, 70]. A primeira, devida a S.W. Hawking e J.B. Hartle e estudada em [71–73], apresenta a seguinte função de onda para o universo:

$$\psi[h_{ab},\phi,\Sigma] = \sum_{\mathcal{M}} \nu(\mathcal{M}) \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}g\, \mathcal{D}\phi\, e^{-S_E[g_{\mu\nu},\phi]} \,, \tag{1.43}$$

que é uma integral de caminho sobre todas as variedades quadridimensionais $\mathcal{M}$ com medida $\nu(\mathcal{M})$. A ideia dos autores é que essa ψ não precisa de condições de contorno, e levaria, portanto, a uma solução única, evitando a ambiguidade das c.c. para ψ. No entanto, percebeu-se depois que, além da solução não ser única, a integral só pode ser calculada em limites semiclássicos, o que torna difícil estabelecer se essa função de onda é capaz de evitar a singularidade no caso mais geral.

Outra proposta é a de A. Vilenkin, da função de onda tunelante [74], obtida por uma aproximação semiclássica:

$$\psi_T = e^{i\pi/4}[a^2V(\phi) - 1]^{-1/4} \exp\left\{ -\frac{1 + i[a^2V(\phi) - 1]^{3/2}}{3V(\phi)} \right\} . \tag{1.44}$$

O autor defende, entre outras coisas, a ideia de que haveria uma função de onda inicial, num universo fechado e no vácuo, e então haveria um tunelamento, processo no qual se daria uma probabilidade de tunelamento que favoreceria uma função de onda em detrimento de outra. No entanto, não existe um consenso de que essa seria de fato a solução para o problema das condições de contorno. Neste trabalho, assumimos uma posição talvez mais pragmática: a de selecionar algumas soluções, para cada teoria abordada, estudando a física gerada por cada uma. Temos alguns indícios interessantes, como veremos ao longo do trabalho. Ao que parece, funções de onda análogas a ondas planas costumam apenas devolver o comportamento clássico, o que é plausível na interpretação que estamos adotando, como ficará claro ao longo do trabalho. Além disso, as soluções do tipo pacotes de onda parecem desempenhar um importante papel, em analogia com a mecânica quântica simples de uma partícula não-relativística.

1.9.2 O problema do tempo

Existe uma diferença conceitual forte entre as noções de tempo da relatividade geral e da mecânica quântica. Enquanto que na primeira o tempo é uma coordenada do espaço-tempo, na segunda o tempo é o tempo absoluto da mecânica clássica. Essa diferença é a causa de se precisar fazer primeiro uma separação $3+1$ na teoria relativística para que só então se aplique a ela um método quântico, como mencionamos acima. Ocorre que a equação quântica obtida (WDW) é estacionária, bem diferente portanto da equação quântica que descreve uma partícula de massa m (a equação de Schrödinger), que possui um termo de derivada temporal, o que permite que se escreva a solução como produto de uma exponencial complexa, dependente do tempo, e uma função de onda estacionária. O problema do tempo seria então a ausência da variável temporal na equação de WDW, o que faz com que não seja claro como descrever a evolução temporal da função de onda e da dinâmica que deveria ser gerada por ela. Para uma revisão sobre esse problema, ver [75].

Um modo de resolver esse problema é reformular o vínculo que conduz à equação de WDW para que ele passe a ter um momento que apareça linearmente e não quadrático, o que levará, após a quantização, a uma equação semelhante à equação de Schrödinger, com uma derivada temporal [70]. Com isso, é possível descrever uma dinâmica novamente. Essa solução é bastante usada, especialmente em abordagens à cosmologia quântica feitas através da interpretação usual da mecânica quântica. No entanto, neste trabalho, vamos aplicar uma interpretação diferente da usual, e as características dessa interpretação fazem com que o problema do tempo deva ser tratado de uma outra forma. Isso ficará mais claro no Capítulo seguinte, Seção 2.10.

1.9.3 O problema do ordenamento

Outro problema encontrado na quantização de uma teoria gravitacional é o *problema* ou *ambiguidade do ordenamento*, que é uma consequência direta da quantização. Vale lembrar que a quantização é um processo de construção de uma teoria quântica a partir de uma teoria clássica no formalismo Hamiltoniano. Para compreender a natureza do problema do ordenamento, no entanto, não é necessário considerar uma teoria muito complicada. Basta considerarmos o caso abstrato, mas bem simples, da Hamiltoniana abaixo, que é unidimensional,

$$\mathsf{H}(\mathsf{q},\mathsf{p}) = \frac{1}{2}\mathsf{f}(\mathsf{q})\,\mathsf{p}^2 \ , \tag{1.45}$$

onde q é uma coordenada generalizada e p é o momento canônico conjugado a q. Intuitivamente, podemos pensar esta H como a energia de uma partícula livre se movendo em uma dimensão q, cuja massa é $1/\mathsf{f}(\mathsf{q})$, ou seja, uma massa dependente da coordenada. A regra de quantização para este caso diz que ambos q e p se tornam operadores (e, portanto, a própria H), que são representados por $\hat{q}$ e $\hat{p}$, e são definidos, respectivamente, por:[4]

$$\hat{q}\psi = q\psi \,, \tag{1.46a}$$

$$\hat{p}\psi = -i\hbar\frac{d\psi}{dq} \,. \tag{1.46b}$$

Estas regras, por sua vez, conduzem à regra de comutação, de importância fundamental para a teoria quântica:

$$[\hat{q}\,,\hat{p}] = i\hbar\hat{I} \,, \tag{1.47}$$

onde $\hat{I}$ é o operador identidade.

Considere então primeiro o caso $f(q) = 1/m =$ constante. Neste caso, não existe dúvida de que a regra de quantização acima leva ao operador

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dq^2} \,. \tag{1.48}$$

Aliás, aplicado sobre ψ, esse é o termo cinético da equação de Schrödinger unidimensional para uma partícula de massa m, caso no qual jamais discutimos qualquer problema relacionado a ordenamento de operadores. Porém, este problema surge caso se tenha $f(q) \neq$ constante, pois aí a Hamiltoniana terá um produto de termos que comutam enquanto escalares, mas não comutam enquanto operadores.

Considere o exemplo de $f(q) = 2q$. Então, escalarmente, ou seja, classicamente, q e p comutam. Em particular, vale:

$$H = q \cdot p^2 = p^2 \cdot q = p \cdot q \cdot p \,. \tag{1.49}$$

Porém, quanticamente, cada um desses modos diferentes de *ordenar* os fatores q e p dá origem a um operador $\hat{H}$ diferente e, portanto, a uma "versão" diferente da teoria quântica. Por exemplo, para os ordenamentos de (1.49), obtemos três operadores diferenciais que representam três modos diferentes de quantizar H. Não é, portanto, óbvio saber qual deveria ser a ordem correta.

[4]Um operador é definido pela sua ação sobre um elemento de um espaço vetorial. Neste caso, como o operador é diferencial, o espaço sobre o qual ele atua é o das funções diferenciáveis. A função ψ representa, portanto, de um ponto de vista estritamente matemático, apenas um elemento desse espaço, usado para definir a ação do operador sobre o espaço.

Mais do que isso, não existe uma maneira imediata de garantir sequer que uma tal ordem correta exista. Esta ambiguidade na quantização é o problema do ordenamento propriamente dito. É mais fácil entender o que acontece aplicando os operadores sobre uma função ψ:

$$\hat{H}_1\psi = \hat{q}\,\hat{p}^2\,\psi = -\hbar^2\, q\, \frac{d^2\psi}{dq^2} \ , \tag{1.50a}$$

$$\hat{H}_2\psi = \hat{p}^2\,\hat{q}\,\psi = -\hbar^2 \frac{d^2}{dq^2}(q\,\psi) \ , \tag{1.50b}$$

$$\hat{H}_3\psi = \hat{p}\,\hat{q}\,\hat{p}\,\psi = -\hbar^2 \frac{d}{dq}\left(q\,\frac{d\psi}{dq}\right) \ . \tag{1.50c}$$

Assim, cada um desses operadores dará origem a uma equação tipo Schrödinger diferente; logo, cada equação dará origem a um conjunto diferente de funções de onda ψ. Finalmente, podemos dizer que é possível que cada um destes ordenamentos leve a uma dinâmica diferente, pois cada dinâmica será construída a partir de soluções diferentes.

Os operadores acima têm a expressão que têm porque o produto de operadores é definido como a composição deles enquanto funções, vendo a função ψ como o elemento do espaço sobre o qual estas funções atuam. Ou seja, dados os operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$, o resultado de aplicar $\hat{A}\hat{B}$ sobre ψ é a composição:

$$\hat{A}\hat{B}\psi = \hat{A}\left(\hat{B}\psi\right) \ . \tag{1.51}$$

Também podemos entender o problema do ordenamento olhando para a relação de comutação (1.47), que diz que os operadores $\hat{q}$ e $\hat{p}$ não comutam. Como o seu comutador é da ordem de $\hbar$, é comum entender que essa não-comutatividade é da ordem de $\hbar$, ou seja, ao se considerar a recuperação da mecânica clássica, retornando a escalas nas quais $\hbar$ é desprezível[5], o comutador será também desprezível. Ou seja, $\hat{q}\,\hat{p} = \hat{p}\,\hat{q}$ quando $\hbar$ é desprezível. Em outras palavras, a própria construção da regra de quantização garante que o problema do ordenamento desaparece na passagem do quântico ao clássico. O problema do ordenamento é, portanto, intrinsecamente quântico.

Sobre a nomenclatura, não é uma convenção universal, mas é usual chamar o ordenamento (1.50a) de *ordenamento trivial*, obtido ao evitar a "mistura" entre q e p. Por exemplo, para a

[5] Essa ideia também é comumente expressa dizendo que se irá tomar o limite $\hbar \longrightarrow 0$.

Hamiltoniana (1.45), o ordenamento trivial se escreve

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2} f(q) \frac{d^2\psi}{dq^2} \, . \tag{1.52}$$

Adotaremos essa nomenclatura aqui.

O problema do ordenamento, como eu disse antes, não aparece na mecânica quântica básica da equação de Schrödinger para uma única partícula de massa m, mas é muito comum em cosmologia quântica. Essa diferença é bastante natural. A teoria clássica cuja versão quântica é representada pela equação de Schrödinger é a de uma partícula de massa m no espaço euclideano; teoria essa representada por uma ação da forma:

$$S = \int L(\mathbf{x}\,, \dot{\mathbf{x}}\,, t)\, dt = \int dt \left[\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x})\right] \, . \tag{1.53}$$

Por outro lado, uma teoria cosmológica clássica num espaço-tempo curvo com métrica $g_{\mu\nu}$ é geralmente descrita por uma ação da forma:

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L} \, , \tag{1.54}$$

onde $\mathcal{L}$ é uma *densidade Lagrangeana*, que é necessariamente proporcional ao termo $\sqrt{-g}$, que depende da métrica. Por exemplo, para o caso FLRW plana, equação (1.2), temos $\sqrt{-g} = Na^3$. Então, neste caso, a densidade $\mathcal{L}$ será proporcional a Na^3, o que não acontece com a ação mais simples (1.53). Esse termo é um dos motivos para o coeficiente dos termos cinéticos de $\mathcal{L}$ não ser, em geral, constante, fazendo com que as parcelas da Hamiltoniana tenham produtos entre as coordenadas e os momentos, no minisuperespaço. Isso ficará mais claro no Capítulo 3, onde iremos abordar esse problema na quantização do acoplamento mínimo.

Para uma Hamiltoniana em d dimensões $H(q{,}p{,}t)$, onde $q = q_1, \ldots, q_d$ são as coordenadas generalizadas e $p = p_1, \ldots, p_d$ são seus momentos conjugados, a regra de quantização (1.46) pode ser generalizada de maneira bastante natural, conduzindo a

$$\hat{q}_m\psi = q_m\psi \, , \tag{1.55a}$$

$$\hat{p}_n\psi = -i\hbar\frac{d\psi}{dq_n} \, , \tag{1.55b}$$

onde $m,n = 1,\ldots,d$. A regra de comutação se torna:

$$[\hat{q}_m,\hat{p}_n] = i\hbar\delta_{mn} \ , \tag{1.56}$$

onde δ_{mn} é a delta de Kronecker, que é definida como 1 se $m = n$ e 0 se $m \neq n$. Das equações acima, segue que o problema do ordenamento não existe para termos da forma $f(q_m) \cdot p_n$ se m e n forem diferentes, porque a regra de comutação acima diz que q_m e p_n comutam quando $m \neq n$.

1.10 A Interpretação da Mecânica Quântica

A discussão sobre a interpretação da mecânica quântica é muito profunda, antiga e complexa. Por isso, não é a pretensão deste trabalho, que é de cosmologia, propor uma solução a essa questão. Também não pretendemos apresentar uma visão completa do assunto. Para leituras em português sobre isso, ver os livros [76,77]. No entanto, devido às características particulares do assunto aqui tratado, que é a dinâmica do universo primordial, um breve debate sobre interpretação se faz necessário, já que a ideia de medida precisa ser confrontada com o fato de que o observador que faz a medida faz parte do próprio sistema medido — o universo.

Desde a sua criação, a teoria quântica tem suscitado muitos debates, não só na Física como também na Filosofia. O grande mistério do mundo microscópico levou os físicos do século passado a proporem um grande número de visões, teorias e interpretações diferentes sobre o que poderia explicar os fenômenos atômicos que vinham sendo descobertos. Com o tempo, apesar do grande número de ideias que circularam, podemos dizer que alguns métodos e maneiras de interpretar os comportamentos quânticos se consolidaram mais do que outros. Por isso, é possível dizer que, grosso modo, existe uma interpretação, que possui variações, é verdade, que pode ser considerada a visão usual ou padrão. Essa interpretação se baseia fortemente na ideia de que a função de onda normalizada fornece uma distribuição de probabilidade. Então o estado do sistema será o resultado do processo de medida, que supõe a existência de um meio clássico externo para efetuá-la.

Essas características da interpretação usual da mecânica quântica motivaram críticas. Dentre as mais marcantes está o famoso artigo EPR [78], de A. Einstein, B. Podolsky e N.

Rosen, publicado em 1935. Nesse trabalho, os autores argumentam que a mecânica quântica (usual) seria uma teoria incompleta, já que uma função de onda não seria capaz de descrever um sistema individual, não se encaixando, portanto, no conceito de teoria completa proposto no artigo. Sabemos que N. Bohr respondeu a essa crítica publicando um artigo com o mesmo nome do EPR, "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?" [79]. Na sua resposta, Bohr defende a ideia de complementaridade e a sua interpretação da mecânica quântica, considerando que a crítica do EPR não a torna incompleta.

Outra resposta dada ao artigo EPR foi proposta por L. E. Ballentine em 1970 [80]. Grosso modo, ele argumenta que a teoria quântica usual seria completa enquanto descrição estatística de sistemas de muitas partículas. Logo, a crítica do artigo EPR seria inadequada, já que não é a proposta da mecânica quântica, segundo Ballentine, descrever um sistema de uma só partícula.

Mas a crítica de A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen também suscitou o desenvolvimento de uma interpretação alternativa, que foi proposta por D. Bohm em 1952, em dois trabalhos consecutivos [81, 82]. A ideia de D. Bohm era responder à crítica propondo uma interpretação da mecânica quântica capaz de fornecer trajetórias determinísticas para as partículas a partir de sua função de onda, obtida da equação de Schrödinger. Com isso, a mecânica quântica seria completa pelo critério de Einstein, já que seria capaz de descrever um sistema individual. Ainda que seja possível calcular as probabilidades nessa interpretação, existem trajetórias, de modo que ela é causal em vez de probabilística. Ela recebe o nome de interpretação de Bohm-de Broglie (BdB), em homenagem ao fato de que Louis de Broglie introduziu ideias semelhantes muito antes, em 1930 [83]. Aliás, o autor D. Bohm reconhece isso nos trabalhos citados acima. Os aspectos matemáticos dessa interpretação são apresentados brevemente na Seção 2.4.

Alguns autores argumentam que esse debate merece uma atenção especial quando se fala de teorias quânticas da cosmologia, como mencionamos no início da Seção. Em [84], argumenta-se que a interpretação usual da mecânica quântica só é capaz de resolver o problema da medida introduzindo um domínio clássico, o que não faria sentido quando o sistema considerado é o universo inteiro. Por isso, para o autor, a interpretação usual não deveria ser aplicada para se construir uma teoria de cosmologia quântica. Ele propõe que se aplique a interpretação de

Bohm-de Broglie, como uma maneira de evitar esse problema. Apenas para pontuar o debate, vale mencionar que há autores que discordam, como é o caso de [85].

Em um outro trabalho [86], mostra-se como a interpretação de BdB propõe uma solução para o problema do tempo, e como ela pode ser capaz de resolver o problema da singularidade, o que tem sido reforçado por inúmeros trabalhos, como veremos no Capítulo seguinte. Por todos esses motivos, vamos adotar aqui a interpretação de Bohm-de Broglie da mecânica quântica na interpretação da quantização canônica no minisuperespaço de teorias cosmológicas.

1.11 Organização e Objetivos do Trabalho

Motivados pela discussão acima, apresentamos o que segue com o objetivo de estudar efeitos quânticos, através da interpretação causal, de algumas teorias escalar-tensoriais, quando aplicadas ao universo primordial. Estudaremos esses efeitos em duas teorias: o acoplamento mínimo e um acoplamento não-mínimo que contém o termo "John" do Fab Four, equivalente ao termo $G_5(\phi)$ de Horndeski. O efeito quântico fundamental buscado é a presença de soluções não-singulares para o fator de escala, o que resolve o problema da singularidade para a teoria em questão. O potencial quântico, característico da interpretação de BdB, fornece o critério para que se diga se um efeito é quântico ou não, já que a estrutura da interpretação garante isso.

Em relação ao acoplamento mínimo, vamos revisar como o formalismo da cosmologia quântica com interpretação de BdB se aplica a ele, no Capítulo 2. Nesse Capítulo, discutiremos como se pode entender o formalismo de BdB aplicado ao acoplamento mínimo como uma generalização do formalismo para a mecânica quântica básica da equação de Schrödinger. Essa revisão tem o objetivo de explicar o formalismo através de um importantíssimo exemplo, que vem sendo explorado e aprimorado há pelo menos duas décadas, e que já obteve importantes resultados. Há também uma solução cíclica nova, no fim do Capítulo.

No Capítulo 3, estudaremos uma abordagem ao problema do ordenamento no contexto da teoria revisada no Capítulo 2. Nosso objetivo foi investigar quais seriam as consequências para o formalismo da Cosmologia quântica com BdB se um ordenamento não-trivial fosse aplicado. Os resultados obtidos reforçam o que foi dito em [87], de que uma mudança de ordenamento não altera os aspectos essenciais da teoria, no sentido de que o problema do tempo permanece ausente, a estrutura da equação de HJ também não muda, entre outras coisas. Porém, veremos que as soluções mudam, sendo que novas soluções de ricochete e universos cíclicos estão presentes.

Nos Capítulos 4 e 5, estudamos a teoria com acoplamento não-mínimo do tipo G_5. O objetivo de um tal estudo é generalizar o formalismo da quantização em BdB para a teoria, para que se possa investigar mais a fundo o que alguns resultados (como o já citado [18]) indicavam: este termo deve ter um papel importante no universo primordial. De fato, muito já se investigou a esse respeito, mas devido à estrutura não usual da sua Lagrangeana, uma quantização canônica ainda não havia sido proposta. Abordamos esse problema dos dois pontos de vista que pareceram mais óbvios: através de mudanças de variável e derivadas fracionárias. Ambas as investigações se complementam para mostrar que há um grande número de possibilidades de soluções, mas a imposição dos critérios físicos da interpretação de BdB nos permite dizer que alguns cenários de solução de ricochete apresentam uma maior regularidade do que outras soluções.

No Capítulo 5, o formalismo construído a partir de uma derivada fracionária aborda uma discussão interessante sobre a quantização de teorias semelhantes e sobre a possibilidade de se aplicar técnicas do Cálculo fracionário em problemas de cosmologia e gravitação com interpretação de BdB. É verdade que muito ainda há o que investigar nesse sentido, mas acreditamos que a abordagem apresentada fornece um caminho que pode ser explorado no futuro de várias maneiras, o que pode conduzir eventualmente a novas compreensões sobre o acoplamento não-mínimo e outras teorias com uma estrutura semelhante.

Como a técnica de sistemas dinâmicos é utilizada ao longo de quase todo o trabalho, apresentamos um resumo, com as ideias que mais iremos utilizar, no Apêndice A. Além disso, como o cálculo fracionário não é tão comum em cosmologia, apresentamos também o Apêndice B, onde se discute brevemente o cálculo fracionário e, em especial, a derivada que utilizamos no Capítulo 5.

Capítulo 2

Quantização do Acoplamento Mínimo com interpretação de Bohm-de Broglie

2.1 Origem da Interpretação de Bohm-de Broglie em Cosmologia Quântica

O primeiro trabalho a aplicar a interpretação de Bohm-de Broglie, ou pelo menos suas ideias principais, para construir um modelo de cosmologia quântica foi [88], de J.K. Glikman e J.C. Vink, em 1990. Num trabalho subsequente, de 1996, após essas ideias terem sido mais exploradas pelos autores e seus colaboradores, chegou-se em [89], de A. Błaut e J.K. Glikman, onde os autores apresentam com mais clareza como se pode aplicar uma quantização numa teoria cosmológica e interpretá-la via Bohm-de Broglie.

Num segundo momento, J.A. de Barros e N. Pinto-Neto apresentaram em [90], de 1997, uma visão crítica ao formalismo citado acima, propondo um outro modo de aplicar a interpretação de Bohm-de Broglie em cosmologia. Essas ideias foram desenvolvidas pelos autores, em colaboração com M.A. Sagioro-Leal, R. Colistete Jr., J.C. Fabris e A.F. Velasco, nos trabalhos [86, 91–93], de 1998/1999. Em particular, em [86], discute-se em detalhe como é possível que essa proposta resolva o problema do tempo e remova as singularidades.

Neste Capítulo, vamos estudar a aplicação desse formalismo para a quantização do acoplamento mínimo entre a gravidade e o campo escalar (ver Seção 1.4), o que foi feito em vários trabalhos, mas cujas bases foram construídas em [92,94,95]. Este é um capítulo essencialmente de revisão, mas contém uma única solução nova, apresentada na Seção 2.8.

2.2 Acoplamento Mínimo sem Potencial e sua Singularidade

Em [92, 94, 95], o formalismo de Bohm-de Broglie da cosmologia quântica é aplicado na quantização de

$$H = N\mathcal{H} = \frac{\kappa^2 N}{12Ve^{3\alpha}}\left(-p_\alpha^2 + p_\phi^2\right), \tag{2.1}$$

onde H é a Hamiltoniana, V é o volume da hipersuperfície conforme, tomado como $V = 4\pi l_P^3/3$ para que $a = 1$ corresponda à ordem de grandeza do comprimento de Planck l_P, e $\kappa \equiv \sqrt{8\pi G_N}$, sendo G_N a constante gravitacional de Newton. A Hamiltoniana (2.1) é equivalente à Lagrangiana

$$L = \frac{3Ve^{3\alpha}}{\kappa^2 N}\left(-\dot{\alpha}^2 + \dot{\phi}^2\right), \tag{2.2}$$

que, por sua vez, corresponde ao acoplamento mínimo do campo escalar com a gravidade, sem potencial. O acoplamento mínimo foi brevemente apresentado na Seção 1.4. Na verdade, o potencial é apenas considerado efetivamente desprezível, ou seja, para o estudo da evolução do universo ao redor do ricochete que será estudado aqui, a energia cinética será dominante sobre o potencial. É preciso salientar que isto não exclui o potencial e as importantes soluções descritas por $V \neq 0$, como aquela que descreve a fase de um universo dominado por matéria. Desconsidera-se o potencial apenas efetivamente para os efeitos quânticos que estudaremos neste capítulo. Para uma modelagem mais completa, o potencial é necessário, após a dominação dos efeitos quânticos.

Estamos também considerando implicitamente uma redefinição do campo escalar por uma constante multiplicativa, o que não afeta a dinâmica. Por isso, visualmente pode parecer que existe uma diferença entre a notação para o acoplamento mínimo neste capítulo e aquela introduzida no Capítulo anterior, mas na verdade a dinâmica é a mesma. Com isso e também escolhendo adequadamente o volume da hipersuperfície conforme (a constante V em (2.3), que não deve ser confundida com o potencial) de tal modo que (2.1) se escreva simplesmente como:

$$H = \frac{1}{2} N e^{-3\alpha} (-p_\alpha^2 + p_\phi^2) \; . \tag{2.3}$$

Mais detalhes sobre todos os argumentos anteriores podem ser encontrados em [96], Seções II, III e IV.

Então, a equação de Hamilton

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} \tag{2.4}$$

fornece:

$$\dot{\alpha} = -N e^{-3\alpha} p_\alpha \; , \tag{2.5a}$$

$$\dot{\phi} = N e^{-3\alpha} p_\phi \; . \tag{2.5b}$$

Daí, tomando $N = 1$, derivando (2.5) em relação ao tempo e comparando com as outras equações de Hamilton, encontramos as equações de movimento para α e ϕ, respectivamente:

$$\ddot{\alpha} + 3\dot{\alpha}^2 = 0 \; , \tag{2.6a}$$

$$\ddot{\phi} + 3\dot{\alpha}\dot{\phi} = 0 \; , \tag{2.6b}$$

cujas soluções para $a = e^\alpha$ (retornando ao fator de escala) e ϕ são:

$$a(t) = (t/t_0)^{1/3} \; , \tag{2.7a}$$

$$\phi(t) = c_1 + c_2 \ln t \; , \tag{2.7b}$$

onde t_0,c_1,c_2 são constantes de integração. Desse modo, fica evidente que essas soluções, que são clássicas, levam à singularidade $a = 0$ quando $t = 0$ e à divergência de ϕ quando $t \to 0^+$ (para $-\infty$, se $c_2 > 0$, e para $+\infty$, se $c_2 < 0$). Esta singularidade está presente, mesmo no caso de um potencial exponencial não-desprezível, como comentado em [96], no fim da Seção II. Já abordamos o problema da singularidade brevemente na Seção 1.7. É esta singularidade que será evitada com a quantização, como descrevemos nas próximas seções.

Uma observação sobre a notação. Estamos usando a variável $\alpha = \ln a$ apenas para simplificar os cálculos. Note que a singularidade $a = 0$ corresponde ao limite assintótico $\alpha \longrightarrow -\infty$ e $a = 1$ corresponde a $\alpha = 0$. Como veremos nas próximas seções, para simplificar a discussão, o valor $a = 1$ (ou $\alpha = 0$) corresponderá não ao valor do fator de escala hoje, como se convenciona geralmente, mas à ordem de grandeza do comprimento de Planck. Com essa escolha de escala, estamos garantindo que efeitos próximos de $\alpha = 0$ são efeitos na escala de Planck. Isso, aliado ao que discutremos adiante sobre potencial quântico, é uma maneira de ter um critério que permita ver facilmente onde se dão os efeitos quânticos.

2.3 Quantização do Acoplamento Mínimo

Como descrito em [92, 94, 95], podemos partir da Hamiltoniana (2.1) e aplicar a regra de quantização canônica de Dirac para obter uma equação que governe a dinâmica quântica do sistema.

Antes, consideremos a situação mais geral de uma Hamiltoniana $H(q,p,t)$, onde $q = q_1, \ldots, q_d$ representa as coordenadas generalizadas e $p = p_1, \ldots, p_d$ representa os momentos canônicos conjugados, onde d é o número de graus de liberdade. A regra de quantização relativa a essa situação já foi discutida no fim da Seção 1.9.3. Como exemplo, a aplicação das regras de quantização à Hamiltoniana de uma partícula não-relativística de massa m em 3 dimensões sujeita a um potencial $V(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x}$ é a posição no espaço Euclideano),

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \ , \tag{2.8}$$

para a qual vale $H = E$ (onde E é a energia total da partícula) implica na equação de Schrödinger $\hat{H}\psi = E\psi$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(\mathbf{x})\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \ . \tag{2.9}$$

Voltando agora a (2.1), primeiro observamos que ela é da forma

$$H(\alpha,N,p_\alpha,p_\phi) = N\,\mathcal{H}(\alpha,p_\alpha,p_\phi) \ , \tag{2.10}$$

ou seja, a coordenada generalizada N aparece apenas como um fator global em H. Por causa disso, as equações relativas a N,

$$p_N = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}} \qquad \text{e} \qquad \dot{p}_N = -\frac{\partial H}{\partial N} \, , \tag{2.11}$$

fornecem o vínculo fundamental

$$\mathcal{H} \approx 0 \, , \tag{2.12}$$

onde o símbolo $\approx$ significa "igualdade fraca", ou seja, uma igualdade que é válida a menos de termos que se anulam em cada hipersuperfície de vínculo [64]. Na prática, isto significa que podemos escrever a equação

$$\hat{\mathcal{H}}\psi = 0 \, , \tag{2.13}$$

que é a equação de Wheeler-DeWitt do problema, em acordo com o que discutimos na Seção 1.8. Portanto, obtém-se de maneira bastante natural uma equação de Wheeler-DeWitt correspondente à quantização da Hamiltoniana (2.1):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = 0 \, . \tag{2.14}$$

Nessa quantização, ignoramos o problema do ordenamento, que será discutido no Capítulo 3.

Observe que tanto (2.9) quanto (2.14) são equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem, o que significa que elas satisfazem o princípio da superposição: se ψ_1 e ψ_2 são soluções de uma dessas equações, e c_1,c_2 são constantes, então qualquer combinação linear

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \tag{2.15}$$

será também solução da mesma equação. Essa propriedade de superposição (matematicamente, linearidade) é, portanto, uma importante semelhança entre (2.9) e (2.14). Porém, existem também duas diferenças importantes:

1. A equação de Schrödinger (2.9) é uma equação *parabólica*, no caso dependente do tempo (pois o operador diferencial de segunda ordem é o Laplaciano ∇^2, e falta o termo de derivada de segunda ordem no tempo) ou *elíptica*, no caso estacionário. Porém, a equação de Wheeler-DeWitt (2.14) é uma equação *hiperbólica*, já que o operador de segunda ordem

é o D'Alembertiano $\partial_\alpha^2 - \partial_\phi^2$, em 1+1 dimensões. Essa nomenclatura vem da classificação usual de equações diferenciais parciais de segunda ordem a partir dos coeficientes das derivadas de segunda ordem, como apresenta-se, por exemplo, em [68, 97]. Isso significa que são duas equações de tipos diferentes, logo não é óbvio que elas apresentem um comportamento físico semelhante. Fisicamente, a equação de Schrödinger tem a forma de uma equação da difusão, enquanto a equação de WDW acima tem a forma de uma equação de onda.[1]

2. Na equação de Schrödinger (2.9) há o termo de derivada temporal do lado direito da igualdade, o que está diretamente ligado à energia: $i\hbar\partial_t\psi = E\psi$. Porém, a equação de Wheeler-DeWitt (2.14) não possui esse termo. Por um lado, isso está ligado ao vínculo (2.12), que significa que a energia total correspondente à Hamiltoniana (2.1) é nula. Por outro lado, isso implica que a função de onda ψ em (2.14) é essencialmente estacionária. Isso está relacionado ao problema do tempo, específico da gravitação quântica, que não está presente no formalismo básico da mecânica quântica representado por (2.9). No entanto, veremos que a interpretação de Bohm-de Broglie resolve esse problema. Além disso, o caráter estacionário da função de onda permite estudar a evolução do universo quântico como um sistema dinâmico autônomo, como veremos, o que permite ter uma visualização bastante intuitiva através de esboços do espaço de fase. Sobre sistemas dinâmicos, ver Apêndice A.

Isso significa que, apesar das enormes semelhanças, as soluções das duas equações sempre terão uma diferença essencial, por isso precisamos ter cautela ao fazer analogias entre as duas situações.

2.4 Interpretação de Bohm-de Broglie em Mecânica Quântica

Antes de estudarmos as soluções da equação de Wheeler-DeWitt, precisamos deixar claro como as soluções devem ser tratadas de modo a se obter resultados físicos, de acordo com a interpretação de Bohm-de Broglie, como feito em [92, 94, 95]. Continuando a discussão da

[1] Sobre a diferença entre a equação de onda e a de Schrödinger, há um debate interessante no fórum *Stack Exchange*, neste link.

seção anterior, consideremos inicialmente a equação de Schrödinger como exemplo.

Partindo de (2.9) e escrevendo a função de onda complexa ψ na forma polar

$$\psi = R\, e^{iS/\hbar}, \tag{2.16}$$

onde R e S são funções reais, a equação de Schrödinger separa-se em suas partes imaginária e real, que são, respectivamente:

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{R^2 \nabla S}{m}\right) = 0\,, \tag{2.17a}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{|\nabla S|^2}{2m} + V(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{x},R) = 0\,, \tag{2.17b}$$

onde

$$Q(\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}\,. \tag{2.18}$$

É evidente que (2.17a) tem a forma de uma equação de continuidade. Então, a grandeza R^2 deve representar uma espécie de densidade e a grandeza $(\nabla S)/m$ um campo de velocidades. Também é evidente a semelhança entre (2.17b) e a equação de Hamilton-Jacobi relativa à Hamiltoniana (2.8). De fato, $R^2 = \psi^*\psi = |\psi|^2$ é a densidade de probabilidade na interpretação usual da mecânica quântica, supondo que ψ seja normalizável. Além disso, representando por $\mathrm{Im}\, z$ a parte imaginária da quantidade z, conclui-se de (2.16) que[2]

$$\frac{\nabla S}{m} = \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\nabla\psi}{\psi}\right) \tag{2.19a}$$

$$= \frac{\hbar}{2im|\psi|^2}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) \tag{2.19b}$$

$$= \frac{\mathbf{j}}{|\psi|^2}\,, \tag{2.19c}$$

onde $\mathbf{j}$ é a corrente de probabilidade. Portanto, (2.17a) é a equação da continuidade,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0\,, \tag{2.20}$$

[2]Basta calcular $\nabla\psi$ usando (2.16) e depois usar o fato de que, se z é qualquer número ou função complexa, vale $\mathrm{Im}\, z = (z - z^*)/2i$.

que dá a "conservação da probabilidade" [98].

Quanto a (2.17b), a menos do termo Q, trata-se da equação de Hamilton-Jacobi (HJ) da Hamiltoniana (2.8). Dada uma Hamiltoniana $H(q,p,t)$, a equação de HJ é obtida construindo-se uma transformação canônica de tal modo que, para a nova Hamiltoniana S (por enquanto, este S nada tem que ver com o S da fase da função de onda), os momentos sejam constantes e iguais às derivadas de S em relação às respectivas coordenadas, ou seja,

$$p_n = \frac{\partial S}{\partial q_n} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{p} = \nabla S \; . \tag{2.21}$$

Além disso, como consequência da própria transformação canônica que define a Hamiltoniana S, segue que esta deve obedecer à equação

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q\,, p = \frac{\partial S}{\partial q}\,, t\right) = 0 \; , \tag{2.22}$$

que é chamada *equação de Hamilton-Jacobi*. Isso torna mais simples de resolver vários problemas, pois as novas equações de movimento, para S, tornam-se em geral mais simples que as equações de movimento para H. A função S, nessa formulação da mecânica clássica, é chamada a *função principal de Hamilton*. Outro aspecto interessante do ponto de vista físico é que S difere da ação por uma constante. Para mais sobre o formalismo de Hamilton-Jacobi, veja, por exemplo, o Capítulo 9 de [99].

Em particular, para (2.8), a equação de HJ é

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{|\nabla S|^2}{2m} + V(\mathbf{x}) = 0 \; . \tag{2.23}$$

Comparando agora a equação clássica (2.23) com a equação quântica (2.17b), vemos que, a menos de Q, a fase da função de onda assume o papel da função principal de Hamilton, o que estabelece uma analogia entre os dois S's. Agora, como Q depende apenas das coordenadas, e não dos momentos, já que não há S em (2.18), e, além disso, Q possui dimensão de energia, então ele foi interpretado por David Bohm como uma espécie de potencial, proporcional a $\hbar^2$, que surge como uma contribuição quântica à equação clássica de HJ. Por isso, Q é chamado de *potencial quântico*.

A interpretação de D. Bohm é a de que essa semelhança representa uma conexão profunda, de tal modo que a equação $\mathbf{p} = \nabla S$ deve necessariamente ser estendida para a mecânica quântica, como uma conexão entre o momento $\mathbf{p}$ e a fase da função de onda S. Com essa interpretação, a equação $\mathbf{p} = \nabla S$ fornece um algoritmo para calcular trajetórias determinísticas para as partículas quânticas, do seguinte modo:

1. Resolve-se a equação de Schrödinger (2.9), obtendo-se uma função de onda $\psi(\mathbf{x}\,,t)$;

2. Usa-se a relação $\mathbf{p} = \nabla S$, onde ∇S é calculado a partir de ψ através da fórmula (2.19a), para se obter uma expressão para $\mathbf{p}$ como função das coordenadas;

3. Em seguida, aplica-se a relação entre as velocidades generalizadas e os momentos para obter uma equação diferencial de primeira ordem que determina as trajetórias. No caso geral, a relação entre $\dot{q}_n$ e p_n é
$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\;, \tag{2.24}$$
onde L é a Lagrangiana. No caso de uma partícula em 3 dimensões, essa relação geral fica simplesmente
$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{\nabla S}{m}\;. \tag{2.25}$$

Devido ao fato de que a função de onda junto com a relação $\mathbf{p} = \nabla S$ fornece um método para determinar trajetórias de partículas, a função de onda "guia" a solução de $\mathbf{x}(t)$. Por isso, é usual chamar a função de onda de "onda piloto" nessa interpretação, e a relação $\mathbf{p} = \nabla S$ é chamada "equação guia".

Considere, por exemplo, a solução de onda plana abaixo, obtida para uma partícula livre com energia E,
$$\psi(\mathbf{x}\,,t) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - iEt/\hbar}\;, \tag{2.26}$$

onde $\mathbf{k}$ é o vetor de onda, que pode ser obtido, por exemplo, resolvendo a equação de Schrödinger via separação de variáveis. Neste caso, a equação guia fornece $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, que é a relação de de Broglie. Esta equação guia pode ser escrita como (2.25), o que fornece simplesmente

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \frac{\hbar\mathbf{k}}{m}t\;, \tag{2.27}$$

o que corresponde à solução clássica de movimento uniforme para uma partícula livre. Note que, neste caso, por (2.18), o potencial quântico é nulo para a onda plana. Esse exemplo é, portanto, trivial. Porém, ele é, ao mesmo tempo, muito importante, pois ele mostra que a conexão entre o clássico e o quântico se dá de modo diferente na interpretação usual da mecânica quântica e na interpretação de Bohm-de Broglie: na primeira, recorremos ao princípio da correspondência e ao cálculo de valores esperados para obter resultados como o teorema de Ehrenfest. Por outro lado, na interpretação de Bohm-de Broglie, se uma onda piloto ψ fornece ∇S constante, então o momento também será constante. Logo, a equação de Hamilton-Jacobi clássica será recuperada exatamente. Ou seja, neste caso, obtém-se uma solução clássica como caso particular de solução quântica.

Complementando, é preciso observar que isto não esgota a conexão clássico-quântico da interpretação de Bohm-de Broglie, pois, como veremos ao longo deste trabalho, mesmo para uma solução não-trivial, apesar de o potencial quântico em geral oscilar ao redor de certos valores das coordenadas generalizadas (o que induz os efeitos quânticos), fora dessas regiões ele costuma se aproximar de zero. Então, à medida que Q tende a zero, da equação tipo HJ (2.17b) vemos que a equação HJ clássica é recuperada, o que implica, por sua vez, que as soluções devem se aproximar das soluções da equação HJ clássica.

Além da questão mais física da conexão clássico-quântico, a solução de onda plana (2.26) também permite discutir outra diferença (talvez mais "técnica") entre as duas interpretações. Na interpretação usual, como $|\psi|^2$ é a densidade de probabilidade, a função ψ deve ser normalizada. Para isso, é preciso tomar soluções normalizáveis. E, como é bem sabido, a onda plana (2.26) não é normalizável. Na interpretação usual, essa questão é resolvida introduzindo os pacotes de onda. Já em Bohm-de Broglie, apesar de ser perfeitamente possível construir o pacote de ondas para representar uma partícula, em geral a onda plana e o pacote dão resultados diferentes, como discutido, por exemplo, no Capítulo 4 de [100]. Além disso, como vimos acima, como a ideia de probabilidade sai do foco principal da teoria, o requerimento de que ψ seja normalizada também não é necessário em Bohm-de Broglie. Mais do que isso, veja que as equações fundamentais deste formalismo, que são (2.17b) e (2.21), não dependem de um fator global de ψ: trocando ψ por $\lambda\psi$, onde $\lambda = re^{is}$ é uma constante complexa qualquer, ambas as equações permanecem inalteradas. Ou seja, o formalismo de Bohm-de Broglie prescinde da normalização e é invariante por ela. E isso fica evidente, curiosamente, na solução trivial (2.26), que não é normalizável, o que gera um problema na interpretação usual, mas fornece um resultado em Bohm-de Broglie de maneira direta.

Nas seções seguintes, vamos discutir três soluções de (2.14) e como interpretá-las usando Bohm-de Broglie. A primeira solução retorna o sistema clássico, a segunda dá uma solução ao problema da singularidade citado antes e a terceira descreve universos cíclicos. Como discutido no fim da Seção 2.3, a analogia entre a equação de Schrödinger e a de Wheeler-DeWitt deve ser feita com cautela. Por isso, vamos descrever como adaptar as ideias desta seção para a equação (2.14).

2.5 Interpretação de Bohm-de Broglie do Acoplamento Mínimo

Antes de estudarmos diferentes soluções de (2.14), vamos estudar como fica a interpretação de Bohm-de Broglie para ela, no geral. Primeiro, escrevendo ψ na forma polar (2.16), as partes real e imaginária da equação de Wheeler-DeWitt (2.14) são, respectivamente:

$$\frac{e^{-3\alpha}}{2}\left[-\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2\right]+Q(\alpha,\phi)=0\,, \tag{2.28a}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha}\frac{\partial S}{\partial \alpha}-\frac{\partial R}{\partial \phi}\frac{\partial S}{\partial \phi}+\frac{R}{2}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2}\right)=0\,, \tag{2.28b}$$

onde

$$Q(\alpha,\phi)=\frac{\hbar^2 e^{-3\alpha}}{2R}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial^2 R}{\partial \phi^2}\right)\,. \tag{2.29}$$

A equação (2.28a), a menos de Q, é a equação de Hamilton-Jacobi associada à Hamiltoniana (2.3), considerando que a função S, fase da função de onda, assume o papel da função principal de Hamilton, que deve ser estacionária, já que não há o termo $\partial S/\partial t$. Além disso, de (2.29), vemos que Q não depende da função S, logo ele pode ser interpretado em BdB como o potencial quântico do problema. Essa interpretação de Q está intimamente ligada à interpretação das derivadas de S, exatamente como no caso discutido na seção anterior, da equação de Schrödinger:

dada a analogia com a equação de HJ, seguem as equações guias do problema:

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \hbar \,\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right) \qquad \text{e} \qquad p_\phi = \frac{\partial S}{\partial \phi} = \hbar \,\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\right), \tag{2.30}$$

de onde se conclui, em particular, que o termo restante Q, por não possuir os termos cinéticos p_α e p_ϕ, só pode representar uma espécie de potencial.

Com isso, o procedimento para se obter uma solução quântica com interpretação de BdB do acoplamento mínimo representado por (2.3) é inteiramente análogo ao caso da equação de Schrödinger:

1. Resolve-se a equação de WDW (2.14), obtendo-se uma onda piloto $\psi(\alpha,\phi)$.

2. A partir de ψ, obtém-se os valores quânticos de p_α e p_ϕ através das equações-guias (2.30).

3. Finalmente, com esses resultados, o sistema (2.5) transforma-se no seguinte sistema dinâmico autônomo:

$$\dot{\alpha} = -Ne^{-3\alpha}\hbar \,\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right), \tag{2.31a}$$

$$\dot{\phi} = Ne^{-3\alpha}\hbar \,\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\right). \tag{2.31b}$$

   As soluções desse sistema dão expressões determinísticas para a evolução temporal de $\alpha = \ln a$ e para ϕ.

4. Para obter informação adicional sobre o problema, podemos determinar o potencial quântico Q através de $R = \sqrt{\psi^*\psi}$ e de (2.29). As regiões do espaço de fase $\phi \times \alpha$ nas quais Q for mais importante podem ser consideradas as regiões onde ocorrem os efeitos quânticos mais importantes.

Uma observação sobre (2.28b), a parte imaginária da equação de WDW: devido à estrutura da equação (2.14), que é hiperbólica (em vez de elíptica, como a equação de Schrödinger), a equação (2.28b) não possui a forma de uma equação de continuidade. No entanto, ela ainda guarda uma informação complementar à (2.28a). Felizmente, não é necessário resolver as partes real e imaginária separadamente, já que, dada uma solução ψ da equação de WDW, automaticamente suas partes real e imaginária serão verificadas. A separação é feita apenas para evidenciar a estrutura tipo HJ intrínseca ao problema.

Com isso, podemos agora resolver a equação de WDW e estudar suas soluções, seguindo os passos acima. A equação (2.14) pode ser resolvida por separação de variáveis, escrevendo

$$\psi(\alpha,\phi) = A(\alpha)F(\phi) \ , \tag{2.32}$$

o que leva a

$$\frac{A''}{A} = \frac{F''}{F} = -\frac{k^2}{\hbar^2} \ , \tag{2.33}$$

onde a justificativa para introduzir a constante de separação é a usual: como A''/A só depende de α e F''/F só depende de ϕ, o único modo de essas quantidades serem sempre iguais é que ambas sejam constantes. A escolha de $-k^2$, onde $k \in \mathbb{R}$, como constante de separação é para garantir que vamos estudar soluções imaginárias para ψ, do tipo oscilador harmônico, já que soluções reais para ψ (que seriam obtidas escolhendo como constante de separação $+k^2$) dariam soluções triviais, em vista das equações guias (2.31). De (2.33), obtemos:

$$A(\alpha) = c_1 e^{ik\alpha} + c_2 e^{-ik\alpha} \ , \tag{2.34a}$$

$$F(\phi) = c_3 e^{ik\phi} + c_4 e^{-ik\phi} \ , \tag{2.34b}$$

onde c_i são constantes.

2.6 Soluções Singulares

As soluções mais simples são da forma:

$$\psi_k^{\pm} = e^{ik(\phi \pm \alpha)/\hbar} \ . \tag{2.35}$$

Seguindo os passos descritos acima, a função de onda $\psi_k^{\pm}$ leva a

$$\dot{\alpha} = \mp k e^{-3\alpha} \qquad \text{e} \qquad \dot{\phi} = k e^{-3\alpha} \ , \tag{2.36}$$

onde também escolhemos $N = 1$, o que corresponde a fixar o tempo como sendo o próprio tempo cósmico. Derivando as equações (2.36) em relação ao tempo, e usando-as novamente, obtemos o sistema clássico (2.6). Portanto, as soluções da forma $\psi_k^{\pm}$ resultam na recuperação das soluções clássicas, que são singulares. São análogas à solução (2.26) para a equação de Schrödinger. Também neste caso, como $R = 1$, segue que o potencial quântico (2.29) é nulo. Para obtermos uma solução não-trivial, ou seja, uma solução diferente da clássica, precisamos tomar uma função de onda diferente de $\psi_k^{\pm}$.

Devido à ausência de potencial, a equação de WDW (2.14) é uma equação de onda. Por isso, admite soluções muito mais gerais do que as discutidas acima. De tato, (2.14) admite qualquer solução da forma

$$\psi(\alpha,\phi) = F(\phi + \alpha) + G(\phi - \alpha) \ , \tag{2.37}$$

onde F e G são funções diferenciáveis. Ou seja, a equação (2.14) admite qualquer solução que dependa apenas de $\phi + \alpha$ e $\phi - \alpha$, desde que essa dependência seja através de uma função diferenciável. Apesar dessa enorme generalidade, as soluções de interesse para a discussão presente são apenas alguns casos particulares de (2.37): as soluções ψ_k, por trazerem uma intuição física importante, como discutido acima, e os pacotes de onda, que discutiremos a seguir, além de uma combinação de ondas, que fornece apenas soluções cíclicas.

2.7 Soluções com Ricochete

Uma maneira de obter uma solução não trivial é através de pacotes de onda, que são sobreposições contínuas de ondas simples, como as anteriores. Matematicamente, são transformadas:

$$\Psi(\alpha,\phi) = \int_{\Omega} \mathrm{Nuc}(k)\ \psi_k(\alpha,\phi)\ dk, \tag{2.38}$$

onde $\mathrm{Nuc}(k)$ é uma função que só depende do número de onda k, chamada *núcleo* da transformada, $\Omega \subset \mathbb{R}$ é a região de integração e $\psi_k(\alpha,\phi)$ é uma solução simples, como (2.35). Pode-se verificar sem dificuldade que, se ψ_k é solução de (2.14), então qualquer transformada da forma (2.38) será também solução, desde que a integral seja convergente, pois, neste caso, ela definirá uma função e esta função será diferenciável. Isso permite, por sua vez, aplicar a regra de Leibniz, segundo a qual a derivada parcial "entra" na integral, já que a derivação e a integração são feitas em variáveis distintas.

Quando o núcleo for uma distribuição Gaussiana,

$$\mathrm{Nuc}(k) = \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{\sigma^2}\right], \tag{2.39}$$

a função de onda (2.38) será, obviamente, chamada de *pacote Gaussiano*, sendo k_0 o ponto de máximo global da Gaussiana e sendo σ relacionado ao desvio padrão da distribuição, o "raio" da Gaussiana, grosso modo. Ambos devem ser constantes reais. Em (2.39), desprezamos a constante de normalização porque ela entraria como uma constante global em Ψ, o que não alteraria a dinâmica em BdB. Pode-se demonstrar que o pacote de ondas Gaussiano tem propriedades físicas interessantes. Por exemplo, ele minimiza a relação de incerteza de Heisenberg, além de ser uma representação de uma partícula quântica normalizável, diferente da onda simples [101,102]. Para a discussão presente, interessa apenas o fato de que ele dá uma solução não trivial, já que a normalização não comparece na dinâmica de BdB com grande importância.

Devido à linearidade da equação de WDW, podemos ainda tomar vários pacotes de onda e somá-los obtendo outras soluções. Isso é o que foi feito em [94,95], onde se estuda a dinâmica da sobreposição de dois pacotes de onda Gaussianos:

$$\Psi(\alpha,\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{\sigma^2}\right]\left[e^{ik(\phi+\alpha)} + e^{ik(\phi-\alpha)}\right]\, dk\,, \tag{2.40}$$

onde passamos a usar unidades nas quais $\hbar = 1$. A integral acima pode ser calculada analiticamente usando completamento de quadrados nos expoentes. Com isso, a função de onda (2.40) fica:

$$\Psi(\alpha,\phi) = \exp\left[-\frac{1}{4}\sigma^2(\alpha+\phi)^2 - ik_0(\alpha-\phi)\right]\left(e^{\alpha\sigma^2\phi} + e^{2i\alpha k_0}\right)\,. \tag{2.41}$$

Com isso, as equações guias (2.31), para $N = 1$, ficam:

$$\dot{\alpha} = e^{-3\alpha} \frac{\sigma^2 \phi \operatorname{sen}(2k_0\alpha) + 2k_0 \operatorname{senh}(\sigma^2 \alpha \phi)}{2[\cos(2k_0\alpha) + \cosh(\sigma^2 \alpha \phi)]} \,, \tag{2.42a}$$

$$\dot{\phi} = e^{-3\alpha} \left\{ k_0 - \frac{\sigma^2 \alpha \operatorname{sen}(2k_0\alpha)}{2[\cos(2k_0\alpha) + \cosh(\sigma^2 \alpha \phi)]} \right\} . \tag{2.42b}$$

As equações acima formam um sistema dinâmico autônomo. Não parece trivial de ser resolvido analiticamente, mas é possível esboçar suas soluções numericamente de maneira muito simples, o que conduz à Figura 2.1.

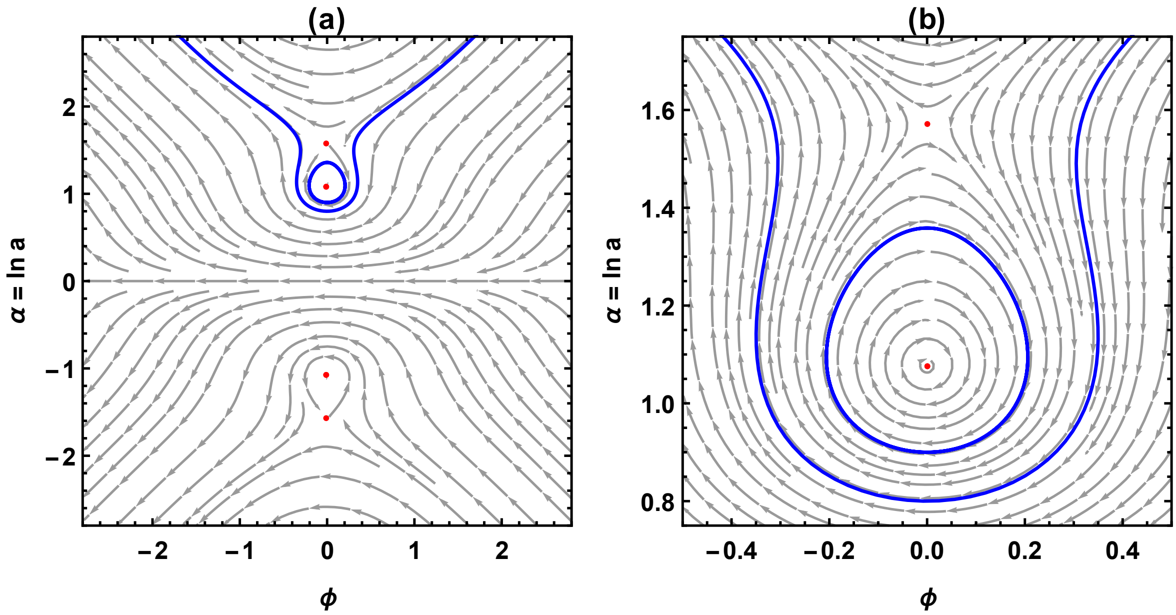

Figura 2.1: Esboço do gráfico do sistema dinâmico (2.42) para $k_0 = -1$ e $\sigma = 1$, que é o caso analisado em [94, 95]. As curvas cinzas representam algumas soluções, dentre as quais destacamos duas em azul. Os pontos vermelhos indicam pontos críticos do sistema dinâmico. Na Figura (a), temos uma visão mais ampla e, na Figura (b), uma visão mais detalhada do comportamento ao redor do ponto crítico de centro, onde é possível ver soluções cíclicas e ricochetes.

Os pontos críticos do sistema dinâmico, que podem ser determinados a partir de (2.42), como se pode ver em [87], são os pontos $(\phi_C\,, \alpha_C)$ tais que $\phi_C = 0$, divididos em dois conjuntos: (i) para os pontos de centro, $\alpha_C = \pi(2n+1)/2k_0$ e (ii) para os pontos de sela, os valores de α_C são as solucões da equação transcendente $\sigma^2 \alpha_C = 2k_0 \operatorname{cotg}(k_0 \alpha)$. Esses dois conjuntos são infinitos. Alguns dos pontos críticos estão na Figura 2.1. O aspecto qualitativo do sistema (2.42), que corresponde à Figura 2.1, não depende muito de k_0 e de σ, embora, evidentemente, as soluções numéricas específicas para $\alpha(t)$ e $\phi(t)$ dependam dos valores dessas constantes.

Vejamos como a Figura 2.1, que apresenta um esboço das soluções do sistema (2.42), deve ser interpretada. Em primeiro lugar, as curvas (também chamadas de trajetórias) são parametrizadas pelo tempo t, ou seja, cada curva é o gráfico combinado das equações paramétricas $\phi(t)$ e $\alpha(t)$, que são obtidas a partir de (2.42) e de um dado par de condições iniciais (c.i.) $(\phi(0)\,,\,\alpha(0))$. O sentido das setas indica o sentido da evolução temporal (o tempo cósmico t aumenta). Como exemplo, destacamos duas curvas em azul: uma cíclica, com c.i. $\phi(0) = 0$ e $\alpha(0) = 0.9$; e uma curva de ricochete, com c.i. $\phi(0) = 0$ e $\alpha(0) = 0.8$. Podemos dizer que a curva circular representa um universo cíclico porque os valores de α serão periódicos. A outra curva azul representa um universo com ricochete.

Chegamos a essa conclusão seguindo o fluxo das setas: a curva com c.i. $\phi(0) = 0$ e $\alpha(0) = 0.9$ "vem" da direita para a esquerda, e as coordenadas de α diminuem até chegar no mínimo $\alpha = 0.8$, quando $\phi = 0$. Até então, o universo representado por essa solução estava, portanto, em contração. A partir de $\phi = 0$, os valores de α da curva aumentam, o que significa que o universo se expande. Portanto, o universo se contrai até um valor mínimo não-nulo e depois se expande. Ou seja, uma solução de ricochete.

Continuando no exemplo das duas trajetórias acima, podemos estudar como o potencial quântico se comporta ao longo dessas curvas, o que está esboçado na Figura 2.2. Na Figura 2.2(a), vemos a evolução temporal da curva de ricochete cujas c.i. são $\phi(0) = 0$ e $\alpha(0) = 0.8$, é possível ver que o potencial quântico Q domina nas regiões em que o ricochete acontece e depois (bem como antes) decai, evidenciando que o ricochete em questão é um efeito quântico. Já para o ciclo, Figura 2.2(b), vemos que Q não decai, mas é periódico. Isso permite concluir que, para essas soluções, os efeitos quânticos são muito fortes e impedem que o universo saia do poço de potencial e se expanda, o que produz as soluções cíclicas.

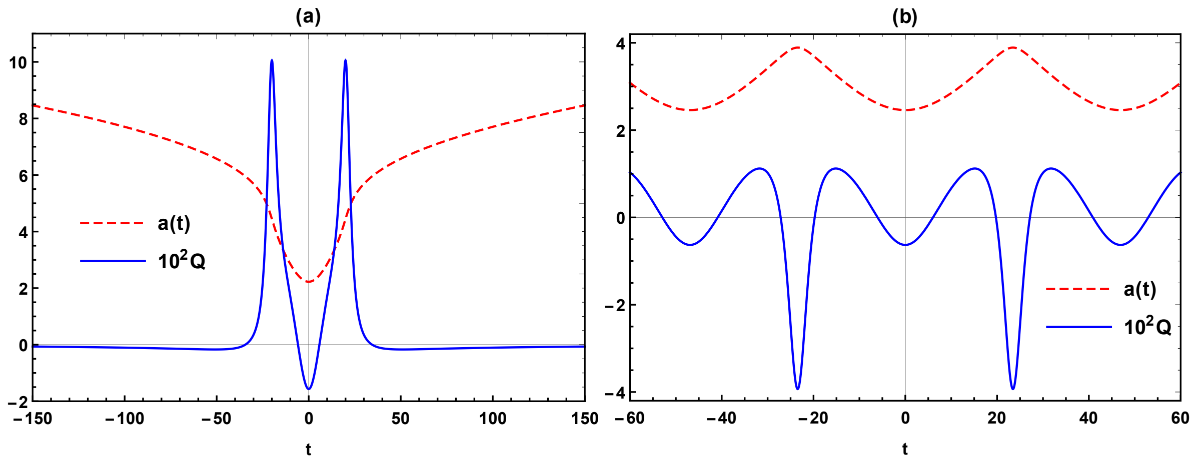

Figura 2.2: Detalhe da evolução temporal do fator de escala (linhas tracejadas) e do potencial quântico (linhas contínuas), para as duas curvas contínuas da Figura 2.1, sendo (a) para a curva de ricochete e (b) para a curva de universo cíclico. O potencial quântico é calculado sobre as trajetórias.

Em todas as figuras desta Seção, utiliza-se $k_0 = -1$. Em [96] (Seção II, figuras 3 e 4), mostra-se que o sinal de k_0 está relacionado com o modo como as soluções quânticas acima se "colam" às soluções clássicas, ou seja, o sinal de k_0 determina que sequência de fases de evolução clássica do universo pode seguir-se ao ricochete acima. Como observado em [96], se for $k_0 > 0$, a solução quântica será seguida por uma evolução clássica na qual não haverá expansão acelerada. Por isso, para que se tenha, após o ricochete, uma fase de expansão acelerada seguida de uma fase de matéria, é preciso tomar $k_0 < 0$. Isso é o que justifica a escolha $k_0 = -1$ na Figura 2.1, que apenas reproduz o resultado das referências citadas.

Para entender melhor como essa dinâmica é possível, é preciso observar o comportamento mais amplo do potencial quântico $Q(\alpha,\phi)$, que pode ser calculado analiticamente a partir da solução anterior, o que conduz às Figuras 2.3 e 2.4. Na Figura 2.3, vemos o comportamento geral do potencial quântico na mesma região da Figura 2.1(b), o que sugere que ele predomina numa pequena região, ao redor do ponto de sela ($\phi = 0, \alpha = \pi$), no qual diverge, mas decai muito rápido. Já a Figura 2.4 permite comparar os velores de Q com as soluções já apresentadas para o sistema dinâmico, na Figura 2.1(b).

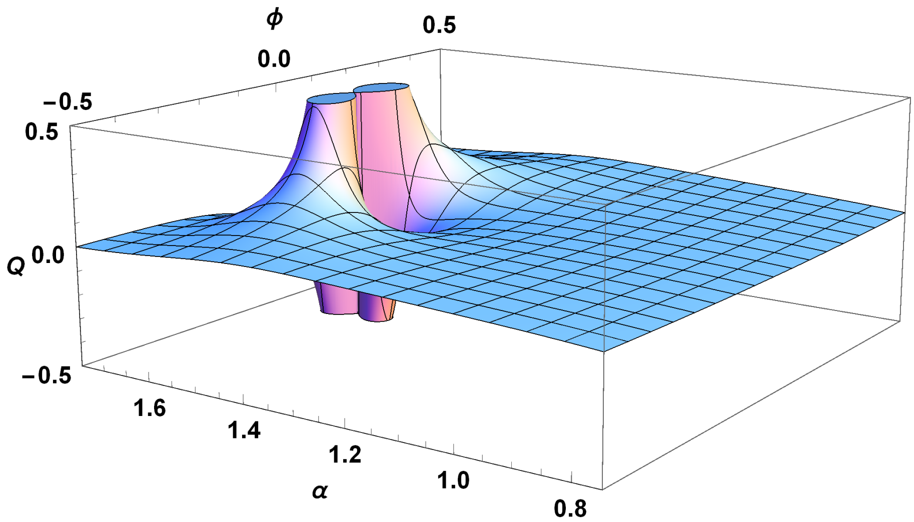

Figura 2.3: Esboço do gráfico tridimensional do potencial quântico $Q(\phi,\alpha)$ obtido pela expressão geral (2.29) aplicada à solução (2.40), para $k_0 = -1$ e $\sigma = 1$. Ele diverge no ponto de sela $(0,\pi/2)$ do sistema dinâmico, mas decai muito rapidamente (em módulo) à medida que o ponto (ϕ,α) (onde se calcula Q) se afasta de $(0,\pi/2)$.

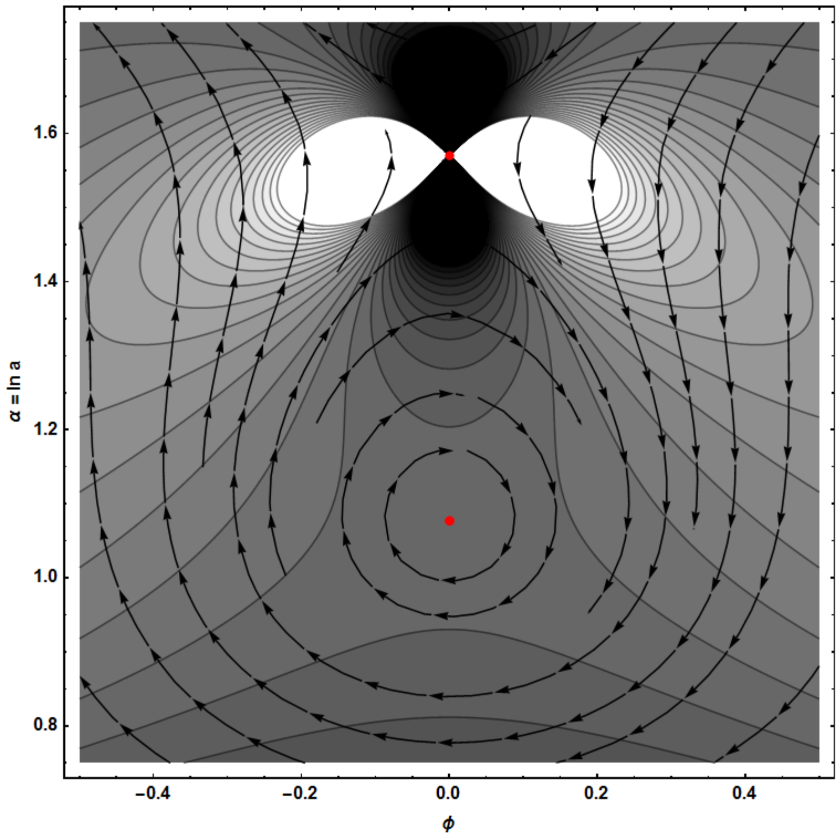

Figura 2.4: Aqui, vemos a comparação entre os valores de Q e as soluções do sistema dinâmico (2.42) no plano $\phi \times \alpha$. Ao fundo, vemos curvas de nível do potencial quântico Q: quanto mais claro, maiores os valores e, quanto mais escuro, menores os valores de Q. Uma região branca indica que deve haver uma divergência para $+\infty$ e uma região preta indica que deve haver uma divergência para $-\infty$. Esta mesma convenção se aplica a todos os outros gráficos desse tipo neste trabalho. Compare com a Figura 2.3. Fica claro que Q oscila fortemente na vizinhança do ponto de sela $(0,\pi/2)$, divergindo sobre ele.

2.8 Soluções Cíclicas

Na seção anterior, vimos como a função de onda (2.40) conduz a uma dinâmica que permite obter tanto soluções de universo cíclico como ricochetes, dependendo das condições iniciais de $\phi(t)$ e de $\alpha(t)$. Nesta seção, estudaremos a dinâmica de uma função de onda, solução da equação de WDW (2.14), que conduz exclusivamente a universos cíclicos. Como (2.14) admite soluções constantes e é linear, ela admite qualquer solução da forma:

$$\psi = 1 + \frac{1}{2}\left(\psi_k^+ + \psi_k^-\right) = 1 + e^{ik\phi}\cos(k\alpha)\ . \tag{2.43}$$

A escolha da função de onda constante $\psi_{\text{constante}} = 1$ é arbitrária; ela foi fixada do modo acima apenas por simplicidade. Esta solução foi apresentada em [103].

Para a solução (2.43), as equações guias (2.31) ficam:

$$\dot{\alpha} = \frac{2ke^{-3\alpha}\sin(k\alpha)\sin(k\phi)}{3+\cos(2k\alpha)+4\cos(k\alpha)\cos(k\phi)}\ , \tag{2.44a}$$

$$\dot{\phi} = \frac{2ke^{-3\alpha}\cos(k\alpha)\left[\cos(k\alpha)+\cos(k\phi)\right]}{3+\cos(2k\alpha)+4\cos(k\alpha)\cos(k\phi)}\ . \tag{2.44b}$$

Os pontos críticos deste sistema dinâmico podem ser determinados analiticamente e são formados por três sequências de pares ordenados (ϕ_C, α_C), dados por

$$\phi_C = \frac{2\pi m}{k}\ , \qquad \alpha_C = (2n-1)\frac{\pi}{k}\ ; \tag{2.45a}$$

$$\phi_C = (2m-1)\frac{\pi}{k}\ , \qquad \alpha_C = \frac{2\pi n}{k}\ ; \tag{2.45b}$$

$$\phi_C = \frac{\pi m}{k}\ , \qquad \alpha_C = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k}\ ; \tag{2.45c}$$

onde $m,n \in \mathbb{Z}$.

O esboço do gráfico das soluções do sistema dinâmico (2.44) pode ser visto na Figura 2.5. As soluções representam universos cíclicos porque o fator de escala oscila, ainda que, para muitas soluções, o mesmo não aconteça com o campo escalar. Por exemplo, na curva contínua na parte superior da Figura 2.5, tem-se uma solução em que ambos, $\alpha(t)$ e $\phi(t)$, são funções periódicas e, na curva inferior, o fator de escala é periódico, mas ϕ vai de $-\infty$ a $+\infty$.

Assim como na seção anterior, ver o comportamento do potencial quântico Q ajuda a "mapear" os efeitos quânticos. Porém, no caso presente, Q varia violentamente no intervalo do gráfico 2.5, além de decair com $e^{-3\alpha} = a^{-3}$, como se vê em (2.29). Por isso, neste caso, é mais informativo visualizar a grandeza a^3Q. Na Figura 2.6, vemos o comportamento de $a^3Q = e^{3\alpha}Q(\alpha,\phi)$ e, na Figura 2.7, vemos a comparação entre os valores de a^3Q e as soluções do sistema dinâmico (2.44). Informações complementares estão nas Figuras 2.8 e 2.9.

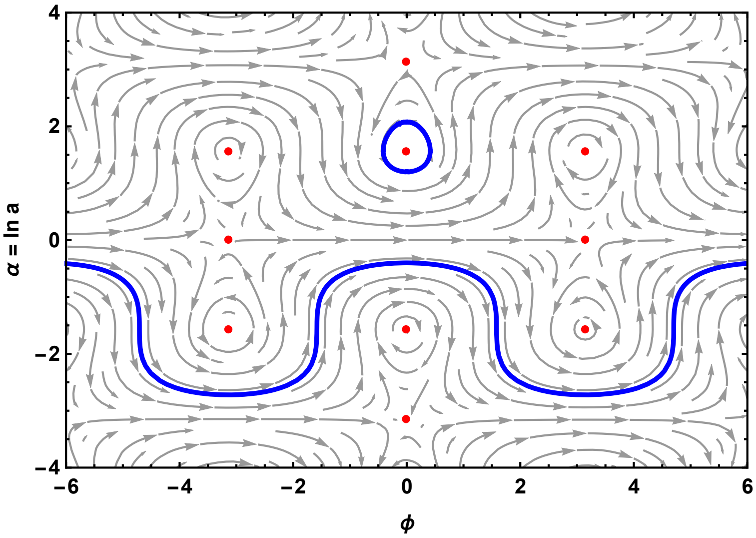

Figura 2.5: Algumas soluções do sistema dinâmico (2.44), dentre as quais destacamos duas com linhas contínuas, cujas c.i. são $(\phi(0),\alpha(0)) = (0,1.2)$ e $(\phi(0),\alpha(0)) = (0,-0.4)$. Os pontos em destaque representam os pontos críticos, dados por (2.45), sendo que (2.45a) e (2.45b) são os pontos de sela e (2.45c) são os pontos de centro.

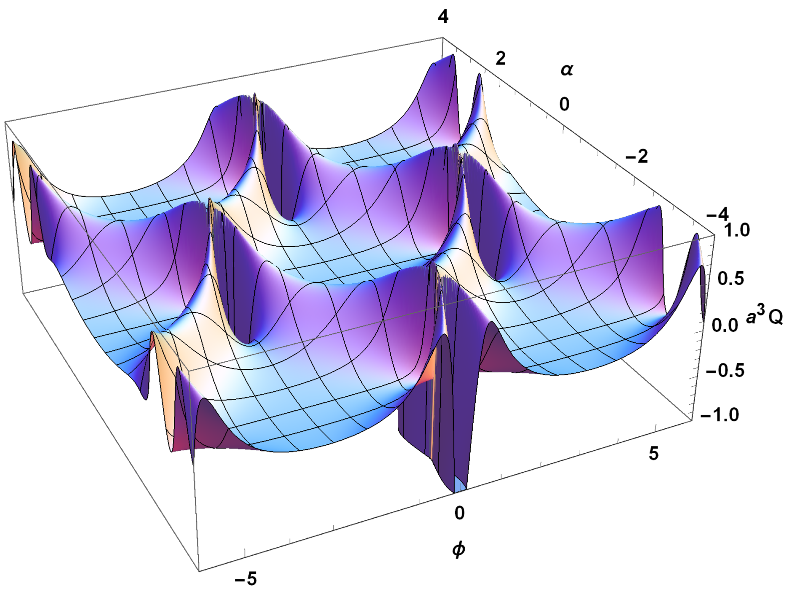

Figura 2.6: Esboço do gráfico de $a^3Q = e^{3\alpha}Q(\alpha,\phi)$. O potencial quântico equivale a "amortecer" esse gráfico com $e^{-3\alpha}$, no eixo α.

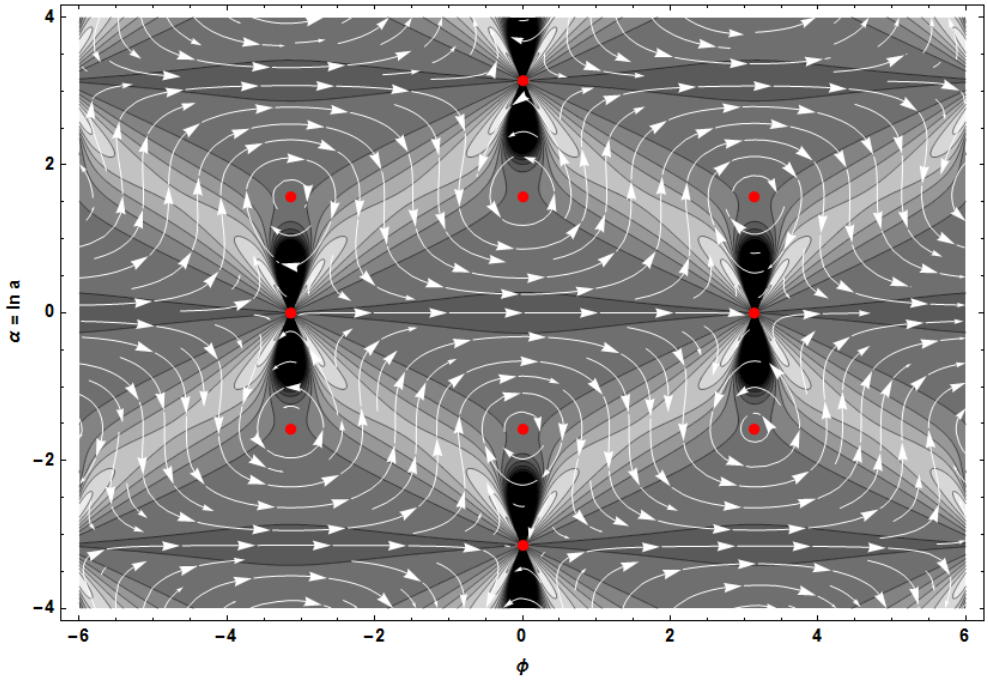

Figura 2.7: Combinação das soluções do sistema dinâmico (2.44) com os valores de a^3Q, para evidenciar a relação entre ambos no plano $\phi \times \alpha$.

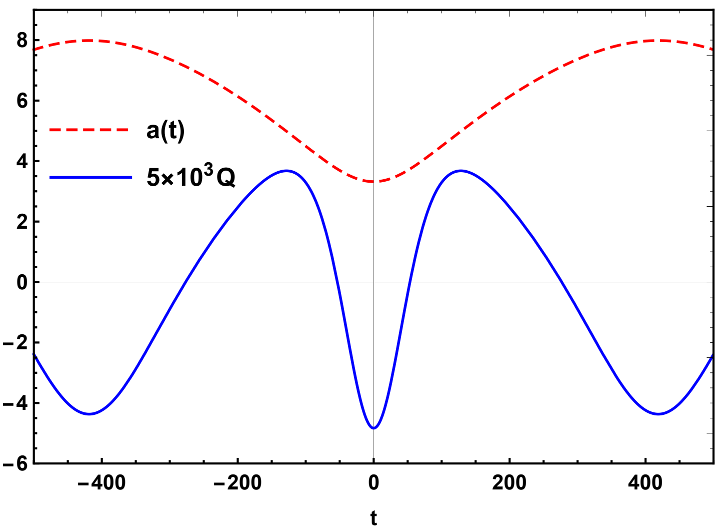

Figura 2.8: Evolução temporal do fator de escala e do potencial quântico para a trajetória na parte superior da Figura 2.5, com c.i. $(\phi(0),\alpha(0)) = (0{,}1.2)$.

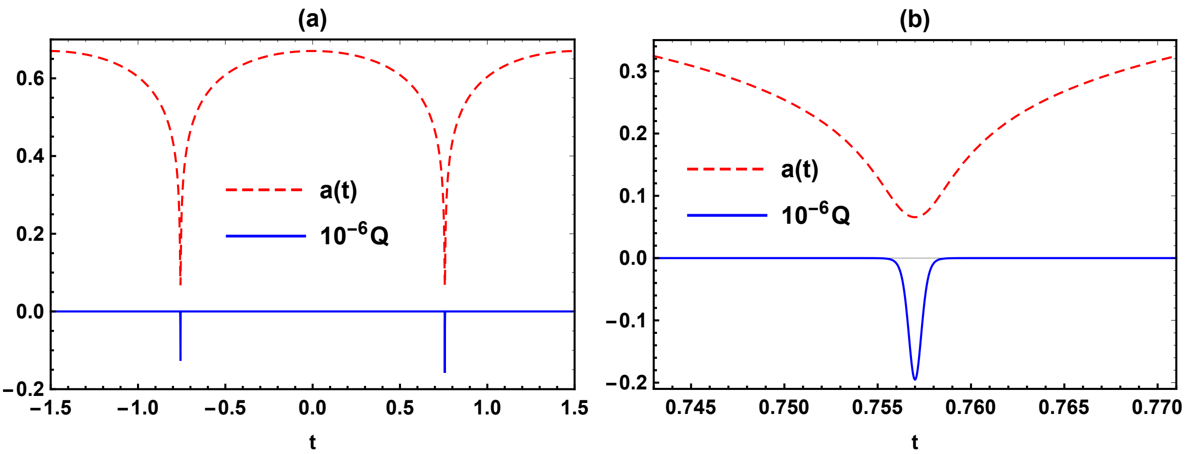

Figura 2.9: Na Figura (a), vemos a evolução temporal do fator de escala e do potencial quântico para a trajetória na parte inferior da Figura 2.5, com c.i. $(\phi(0), \alpha(0)) = (0, -0.4)$. Na Figura (b), vemos um detalhe de (a), que evidencia o comportamento de a e Q durante um dos ricochetes da Figura (a).

2.9 Desenvolvimentos posteriores

O que apresentamos até aqui neste Capítulo tem por objetivo exemplificar o método de BdB aplicado ao acoplamento mínimo sem potencial, uma teoria já construída há algumas décadas, por isso não tem a pretensão de ser uma revisão completa do tema. De fato, essa teoria gerou muitos desenvolvimentos, cabendo aqui apenas indicar alguns. Em [104], estudou-se como se pode analisar a evolução da densidade de energia para criação de partículas em vários cenários de ricochete, o que inclui os ricochetes da Seção 2.7. Nesse trabalho, explora-se com mais profundidade os efeitos quânticos ligados ao ricochete, mostrando que existe uma conexão entre ele e a criação de partículas. Com relação a perturbações primordiais, escalares e tensoriais, e sua relação com o ricochete da teoria aqui revisada, veja [96, 104–107].

2.10 Relação com os problemas do tempo e do ordenamento

Em relação ao problema do tempo, pode-se dizer que a cosmologia quântica com interpretação de BdB, devido à sua própria estrutura, evita esse problema, uma vez, é claro, que se assuma essa interpretação. Isso pode ser confirmado pelas equações guias (2.31): o tempo é recuperado pelos termos $\dot{\alpha}$ e $\dot{\phi}$. Mesmo sendo ψ estacionária e mesmo sendo a equação de WDW também estacionária, a dinâmica que importa para a cosmologia de fundo em questão aqui é a de

$\alpha(t)$ e $\phi(t)$, e esta dinâmica é assegurada pelas equações guias, que conectam as velocidades generalizadas com os resultados quânticos que vêm de ψ.

Mas esse não é o motivo mais forte para se dizer que o problema do tempo foi resolvido, já que esse problema não é apenas o "sumiço" da variável t (que ocorre na equação de Wheeler-DeWitt), mas principalmente a ambiguidade gerada por essa ausência. É desejável que uma reparametrização do tempo não altere a dinâmica, pois, se alterasse, então a dinâmica seria uma consequência de escolha de variáveis, e não uma característica física. Porém, olhando novamente para o papel desempenhado pela função lapso nas equações-guias (2.31), vemos que uma redefinição do tempo por, digamos, $d\tau \equiv N\, dt$, a dinâmica seria exatamente a mesma não importando a escolha de N, desde que, é claro, ele não se anule e seja diferenciável. Isso fica ainda mais evidente no plano $\phi \times \alpha$, como o da Figura 2.1, já que um sistema dinâmico autônomo (como é o caso) não altera sua dinâmica ao se redefinir o tempo.

Isso é o que justifica fazer a esolha mais simples possível, que é $N \equiv 1$. Este tempo t deve, então, corresponder ao mesmo tempo da teoria clássica, já que a conexão entre as velocidades generalizadas e os momentos conjugados, dada pelo sistema (2.5), é estritamente clássica; mais do que isso, é a conexão entre a Lagrangeana e a Hamiltoniana clássicas. Então, o tempo que aparecerá nas equações quânticas deve ser o mesmo das equações clássicas, que é o próprio tempo cósmico, nas variáveis que estamos considerando aqui. Isso é possível também porque a interpretação do tempo na mecânica de BdB é diferente daquela da interpretação usual da mecânica quântica.

Para mais sobre o modo como a cosmologia quântica com BdB lida com essas questões, ver [86]. Quanto ao problema do ordenamento, vamos discutir em mais detalhe no próximo Capítulo.

2.11 Generalização para modelos Homogêneos no Minisuperespaço

O caso analisado neste capítulo, representado pela Hamiltoniana (2.3), é apenas um exemplo. A teoria aqui resumida pode ser generalizada de maneira bastante natural para modelos homogêneos mais gerais no minisuperespaço, que podem ser representados por uma Hamiltoniana genérica da forma:

$$H_{RG} = N(t)\,\mathcal{H}\left(p^{\mu}(t), q_{\mu}(t)\right) \ , \tag{2.46}$$

onde o subescrito “RG” significa relatividade geral. Esta generalização encontra-se em [87]. A exigência de o modelo ser homogêneo é feita para simplificar a forma de H, de modo que valha a relação (2.46) acima. O vínculo $\mathcal{H} \approx 0$, que segue da forma de (2.46) e das equações de Hamilton, conduz à seguinte equação de Wheeler-DeWitt no minisuperespaço:

$$\hat{\mathcal{H}}\left(p^{\mu}(t), q_{\mu}(t)\right)\psi(q) = 0 \, . \tag{2.47}$$

Do mesmo modo como se faz para o caso particular (2.3), escrevendo a função de onda do universo ψ na forma polar (2.16), a parte real de (2.47) se torna:

$$\frac{1}{2} f_{\mu\nu}(q_{\lambda}) \frac{\partial S}{\partial q_{\mu}} \frac{\partial S}{\partial q_{\nu}} + U(q_{\lambda}) + Q(q_{\lambda}) = 0 \, , \tag{2.48}$$

onde

$$Q(q_{\lambda}) = -\frac{f_{\mu\nu}}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial q_{\mu} \partial q_{\nu}} \, . \tag{2.49}$$

A forma particular de $f_{\mu\nu}$ depende da forma particular de H. O importante é que a estrutura da equação (2.48) se mantém, o que permite interpretá-la como uma equação análoga à equação de Hamilton-Jacobi. Desse modo, obtém-se a equação guia

$$p^{\mu} = \frac{\partial S}{\partial q_{\mu}} \tag{2.50}$$

e interpreta-se (2.49) como o potencial quântico do universo, para H_{RG}.

Mais sobre a teoria revisada brevemente neste capítulo, sua interpretação, comparação com outras abordagens à cosmologia quântica, uma mais profunda abordagem à questão da interpretação da mecânica quântica e sua relação com a cosmologia etc, veja as referências [84, 87, 108–110].

Capítulo 3

Uma abordagem ao problema do ordenamento

O objetivo deste capítulo é apresentar uma quantização de (2.3), com interpretação de Bohm-de Broglie, mas com um ordenamento não-trivial. É, portanto, uma abordagem parcialmente alternativa à que foi descrita no Capítulo anterior. O problema do ordenamento já foi apresentado na Subseção 1.9.3, no Capítulo 1 e vamos agora retomar aquela discussão. O conteúdo do presente Capítulo foi apresentado em [103].

No artigo [87], mostra-se que a estrutura da equação do tipo Hamilton-Jacobi (2.14), que já vimos no Capítulo 2, não depende do ordenamento usado. Ou seja, independente do ordenamento, deve haver os termos da equação HJ clássica e um termo restante, que será definido como o potencial quântico. Os resultados do presente Capítulo não contradizem esse fato. Porém, veremos que, dependendo do ordenamento, a equação de Wheeler-DeWitt, e, como consequência, suas soluções ψ, além da expressão de Q, podem sim ser diferentes, o que pode gerar efeitos sobre a consequente dinâmica quântica do universo, descrita pelas soluções $a(t)$ e $\phi(t)$, que seguem da quantização. É nesse contexto que apresentamos os resultados obtidos para a, ϕ e Q através da quantização feita com um ordenamento não-trivial.

3.1 O Ordenamento Não-trivial Escolhido

A quantidade de ordenamentos diferentes que poderíamos aplicar é enorme. É possível encontrar muitos trabalhos na literatura que argumentam a favor de determinado ordenamento. Algumas vezes, apresenta-se uma forte motivação, mas, em outras, apenas aplica-se a mais conveniente. Na literatura, encontramos exemplos de ambos os casos, como em [74, 111–119].

Como discutimos na Subseção 1.9.3, essa diferença desaparece na passagem do quântico ao clássico, o que nos leva a concluir que as diferenças de ordenamento são intrinsecamente quânticas. Desse modo, o que podemos fazer para lidar com essa enorme ambiguidade é argumentar a favor de determinado ordenamento, como feito em [114], ou mostrar que os aspectos gerais da teoria em questão não dependerão do ordenamento, como feito em [87], e a seguir usar este argumento para restringir-se a um ordenamento simples e daí extrair resultados mais específicos. Em qualquer caso, é preciso escolher um ordenamento particular para obter soluções de fato para a equação quântica e, assim, ser capaz de estudar as suas consequências.

O ordenamento não-trivial que escolhemos para iniciar a investigação sobre que efeitos poderiam ser encontrados na teoria revisada no Capítulo anterior foi o apresentado em [114] por T. Christodoulakis e J. Zanelli em 1986. Vamos descrever agora sua motivação em uma dimensão e a generalização que propusemos em [103]. A generalização que propomos é diferente daquela proposta em [114], mas guarda sua ideia central, aplicada de outro modo.

3.1.1 Caso Unidimensional

Nesta Subseção, apenas revisamos uma construção que foi apresentado na Seção 2 de [114]. A ideia central é fazer uma mudança de variáveis conveniente de tal modo que se obtenha uma Hamiltoniana modificada que não apresente ambiguidade no ordenamento. Consideremos, como primeiro exemplo, a Hamiltoniana unidimensional (já apresentada na Subseção 1.9.3):

$$H(q,p) = \frac{1}{2} f(q)\, p^2 \,. \tag{1.45}$$

A transformação de Legendre $H = \dot{q}p - L$, que define a Hamiltoniana a partir da Lagrangeana, pode ser invertida através da equação de Hamilton

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = f(q)p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{f(q)}\dot{q} \, , \tag{3.1}$$

o que fornece a Lagrangeana equivalente a (1.45):

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2f(q)}\dot{q}^2 \, . \tag{3.2}$$

Com isso, podemos fazer a mudança de variável

$$Q = \int_{q_0}^{q} f^{-1/2}(\bar{q})\, d\bar{q} \, , \tag{3.3}$$

onde Q é a nova variável, $\bar{q}$ é a variável de integração e q_0 é um valor qualquer (constante) da variável q, que não influencia na dinâmica, mas é necessário para definir corretamente a integral. Para que a raiz $f^{-1/2}$ esteja bem definida, devemos supor $f(q) > 0$, o que, segundo [114], é uma hipótese que já se supõe para a validade do princípio da mínima ação, então é uma hipótese bastante razoável. Daí, pela regra da cadeia e pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{dQ}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\int_{q_0}^{q} f^{-1/2}(\bar{q})\, d\bar{q} \\ &= \left(\frac{d}{dq}\int_{q_0}^{q} f^{-1/2}(\bar{q})\, d\bar{q}\right)\frac{dq}{dt} \\ &= f^{-1/2}(q)\dot{q} \, . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Combinando agora (3.2) e (3.4), encontramos a expressão da Lagrangeana na variável Q:

$$L(Q,\dot{Q}) = \frac{1}{2}\dot{Q}^2 \, . \tag{3.5}$$

A partir de $L(Q,\dot{Q})$, encontramos P, o novo momento:

$$P = \frac{\partial L(Q,\dot{Q})}{\partial \dot{Q}} = \dot{Q} \, , \tag{3.6}$$

de onde encontramos a Hamiltoniana nas novas variáveis:

$$\begin{aligned} H(Q,P) &= \dot{Q}P - L(Q,\dot{Q}(Q,P)) \\ &= P^2 - \frac{1}{2}P^2 \\ &= \frac{1}{2}P^2 \ . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Portanto, graças à mudança de variável (3.3), a Hamiltoniana assumiu uma forma na qual não existe a ambiguidade do ordenamento. Observando agora que as relações anteriores conduzem a

$$P = f^{1/2}\, p \ , \tag{3.8}$$

surge naturalmente de (3.7) o ordenamento seguinte, nas variáveis q e p:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} f^{1/2}(q)\, \hat{p}\, f^{1/2}(q)\, \hat{p} \ . \tag{3.9}$$

Esta é a versão unidimensional do ordenamento não-trivial que iremos aplicar neste Capítulo. Aplicando esse operador sobre uma função ψ, tem-se:

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2} f^{1/2} \frac{\partial}{\partial q}\left(f^{1/2} \frac{\partial \psi}{\partial q} \right) \ , \tag{3.10}$$

em vista de (1.46) e (1.51).

Observe que o processo descrito acima é equivalente a uma transformação canônica, que pode ser obtida, por exemplo, da função geradora abaixo:[1]

$$F(q,P) = P \int_{q_0}^{q} f^{-1/2}(\bar{q})\, d\bar{q} \ , \tag{3.11}$$

como se pode verificar das equações que definem a transformação canônica gerada por F, que são:

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \ , \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial P} \qquad \text{e} \qquad H(q,p) = H(Q,P) \ , \tag{3.12}$$

já que, no caso presente, F não depende explicitamente do tempo.

[1] Na notação de [99], é a função F_2 da Seção 8.1.

3.1.2 Generalização Simples

É mais direto aplicar a ideia acima para o caso

$$H = \tfrac{1}{2} N e^{-3\alpha}(-p_\alpha^2 + p_\phi^2) \qquad (2.3)$$

através de uma transformação canônica muito semelhante à gerada por (3.11). Neste caso, tomando a função geradora abaixo, que é do mesmo tipo da anterior (3.11),

$$F(\alpha,\phi,N,P_1,P_2,P_3) = \frac{2}{3}e^{3\alpha/2}P_1 + \phi P_2 + NP_3 \ , \qquad (3.13)$$

obtemos uma transformação canônica, que é definida pelas relações:

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial q_j} \ , \qquad Q_j = \frac{\partial F}{\partial P_j} \qquad \text{e} \qquad H(q,p) = H(Q,P) \ , \qquad (3.14)$$

sendo $j = 1,2,3$, e $p_\alpha = p_1$, $p_\phi = p_2$, $p_N = p_3$, $q_1 = \alpha$, $q_2 = \phi$, $q_3 = N$. Além disso, Q_j e P_j são as novas coordenadas e momentos, respectivamente. As relações anteriores fornecem

$$p_\alpha = e^{3\alpha/2}P_1 \ , \qquad p_\phi = P_2 \ , \qquad p_N = P_3 \qquad (3.15)$$

e

$$Q_1 = \frac{2}{3}e^{3\alpha/2} \ , \qquad Q_2 = \phi \ , \qquad Q_3 = N \ . \qquad (3.16)$$

Então, de (3.14), (3.15) e (3.16), conclui-se que a Hamiltoniana nas novas variáveis escreve-se como:

$$H(Q,P) = Q_3\left(-\frac{1}{2}P_1^2 + \frac{4}{9Q_1^2}P_2^2\right) \ . \qquad (3.17)$$

Observe agora que a Hamiltoniana (3.17) não possui ambiguidade no seu ordenamento, exatamente como (3.7). De fato, sendo H da forma $N\mathcal{H}$, onde $\mathcal{H}$ não depende de N, as equações de Hamilton para N levam ao vínculo

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}P_1^2 + \frac{4}{9Q_1^2}P_2^2 \approx 0 \ . \qquad (3.18)$$

Este operador não possui o problema do ordenamento: para o primeiro termo, é evidente; quanto ao segundo termo, basta observar que $[\hat{Q}_1, \hat{P}_2] = 0$, de onde se conclui[2] que, qualquer que seja a função $\Phi(Q_1)$, tem-se:

$$[\Phi(\hat{Q}_1), \hat{P}_2] = 0 \; . \tag{3.19}$$

Então é evidente que, em particular, o segundo termo de (3.18) não terá ambiguidade no ordenamento.

De modo análogo ao caso anterior, unidimensional, a equação (3.15) fornece $P_1 = e^{-3\alpha/2} p_\alpha$. Então, pelo mesmo argumento do caso anterior, concluímos que a relação (3.18), na qual não existe ambiguidade de ordenamento, leva ao ordenamento

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2} e^{-3\alpha/2} \hat{p}_\alpha e^{-3\alpha/2} \hat{p}_\alpha + e^{-3\alpha} \hat{p}_\phi^2 \; , \tag{3.20}$$

retornando às variáveis originais. Esse é o ordenamento que iremos considerar neste Capítulo, que generaliza (3.9) para o caso de interesse aqui. Ele será chamado apenas de “não-trivial”.

3.2 Quantização com o Ordenamento não-trivial

Podemos agora estudar a quantização de (2.3) pelo ordenamento anterior, bastando aplicar o operador (3.20) sobre a função de onda ψ, o que conduz à seguinte equação de Wheeler-DeWitt:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} - \frac{3}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = 0 \; . \tag{3.21}$$

Para poder comparar os resultados entre os dois ordenamentos, o trivial e o não-trivial, é interessante introduzir um parâmetro que os conecte. Vamos chamá-lo de r. Para evitar ambiguidades futuras, vamos supor $r \geqslant 0$. Com isso, podemos alterar ligeiramente (3.20), do seguinte modo:

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2} (e^{-3\alpha})^{1-r} \hat{p}_\alpha (e^{-3\alpha})^r \hat{p}_\alpha + e^{-3\alpha} \hat{p}_\phi^2 \; . \tag{3.22}$$

Verifica-se que $r = 0$ corresponde ao ordenamento trivial e $r = 1/2$ corresponde ao caso

[2] Veja, por exemplo, o Capítulo 1 de [102].

não-trivial. Isso nos permite estudar quanticamente o caso mais geral $r \geqslant 0$, mas vamos fazer isso apenas para conectar os dois ordenamentos mencionados. Para o r geral, a equação de Wheeler-DeWitt obtida de (3.22) é:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2} - 3r\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} = 0\ . \tag{3.23}$$

Antes de resolver a equação, de acordo com a interpretação que adotamos, é necessário primeiro reescrevê-la usando a função de onda na forma polar. Substituindo $\psi = Re^{iS/\hbar}$ em (3.23), sua parte real é

$$\frac{e^{-3\alpha}}{2}\left[-\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2\right] + Q(\alpha,\phi) = 0\ , \tag{3.24}$$

onde

$$Q(\alpha,\phi) = \frac{\hbar^2 e^{-3\alpha}}{2R}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial\alpha^2} - 3r\frac{\partial R}{\partial\alpha} - \frac{\partial^2 R}{\partial\phi^2}\right)\ . \tag{3.25}$$

Então, a estrutura de (3.24) é a mesma para todo $r \geqslant 0$, havendo apenas um termo a mais em Q. Vemos que a interpretação de Bohm-de Broglie se mantém a mesma: se não houvesse o termo Q, a equação (3.24) seria a equação de HJ do problema. Isso faz com que as equações-guias (2.30) e, portanto, (2.31), continuem válidas, para todo $r \geqslant 0$. Então, o termo restante (3.25) é interpretado como o potencial quântico, no ordenamento (3.22). Mas é interessante observar que o que se manteve igual foi a estrutura do problema. Como a equação de Wheeler-DeWitt é diferente, a solução também será. Logo, as funções S e R serão também diferentes, muito embora assumam os mesmos papéis. De (3.25), vemos que, apesar da mudança de ordenamento, ainda tem-se $Q \sim \hbar^2$. Retomando a discussão do início do Capítulo, essas observações sobre interpretação não contradizem [87], onde se mostra que a estrutura geral da interpretação de Bohm-de Broglie não deve se alterar por uma mudança de ordenamento.

Podemos agora resolver (3.23). No que segue, voltaremos à convenção de unidades $\hbar = 1$. Note que (3.23) é uma equação diferencial parcial de segunda ordem, hiperbólica, linear, separável e de coeficientes constantes. Portanto, podemos resolvê-la via separação de variáveis. Escrevendo $\psi(\alpha,\phi) = A(\alpha)F(\phi)$ (esta F nada tem que ver com a função geradora da seção anterior), substituindo em (3.23) e dividindo o resultado por ψ, obtemos

$$\frac{A''(\alpha)}{A(\alpha)} - 3r\frac{A'(\alpha)}{A(\alpha)} = \frac{F''(\phi)}{F(\phi)} \equiv \pm k^2 \; , \tag{3.26}$$

onde k é a constante de separação, que é real. O sinal $\pm$ e o valor de k determinarão os tipos de soluções. A seguir, vamos catalogar várias soluções elementares de (3.26) para, nas Seções seguintes, estudarmos algumas combinações relevantes delas e seus efeitos físicos. As constantes de integração serão denotadas por c_j, com $j = 1,2,3,4$. Todas as equações que seguem de (3.26), que estudaremos abaixo, são equações diferenciais ordinárias de segunda ordem lineares homogêneas e com coeficientes constantes. Sobre como resolver essas equações, ver, por exemplo, a Seção 3.1.1.1 de [120].

3.2.1 Soluções para $k = 0$

Para $k = 0$, (3.26) implica em

$$A''(\alpha) - 3rA'(\alpha) = 0 \; , \tag{3.27a}$$

$$F''(\phi) = 0 \; , \tag{3.27b}$$

cujas soluções gerais são:

$$A(\alpha) = c_1 + c_2 e^{3r\alpha} \; , \tag{3.28a}$$

$$F(\phi) = c_3 + c_4\phi \; . \tag{3.28b}$$

3.2.2 Soluções para $+k^2$

Se a constante de separação é da forma $+k^2$, com $k \neq 0$, a (3.26) conduz a

$$A''(\alpha) - 3rA'(\alpha) - k^2A(\alpha) = 0 \; , \tag{3.29a}$$

$$F''(\phi) - k^2F(\phi) = 0 \; , \tag{3.29b}$$

cujas soluções gerais são:

$$A_k(\alpha) = e^{3r\alpha/2}\left(c_1 e^{\sqrt{k^2+(3r/2)^2}\alpha} + c_2 e^{-\sqrt{k^2+(3r/2)^2}\alpha}\right) \ , \tag{3.30a}$$

$$F_k(\phi) = c_3 e^{k\phi} + c_4 e^{-k\phi} \ . \tag{3.30b}$$

Portanto, neste caso, obtemos apenas exponenciais reais.

3.2.3 Soluções para $-k^2$

Se a constante de separação é da forma $+k^2$, com $k \neq 0$, a (3.26) conduz a

$$A''(\alpha) - 3rA'(\alpha) + k^2 A(\alpha) = 0 \ , \tag{3.31a}$$

$$F''(\phi) + k^2 F(\phi) = 0 \ . \tag{3.31b}$$

Neste caso, a forma das soluções para F não dependerá do valor de k (desde que seja $k \neq 0$), mas as soluções para A dependerão, de modo que precisamos analisar três casos: $|k| > 3r/2$, $0 < |k| < 3r/2$ e $k = 3r/2$. Pode-se chegar a essa conclusão analisando o determinante da equação característica de (3.31a). Para $|k| > 3r/2$, as equações (3.31) tem como solução geral:

$$A_k(\alpha) = e^{3r\alpha/2}\left(c_1 e^{i\omega\alpha} + c_2 e^{-i\omega\alpha}\right) \ , \tag{3.32a}$$

$$F_k(\phi) = c_3 e^{ik\phi} + c_4 e^{-ik\phi} \ , \tag{3.32b}$$

onde

$$\omega \equiv \sqrt{k^2 - (3r/2)^2} > 0 \ . \tag{3.33}$$

Então, neste caso, obtemos soluções oscilatórias.

Para $0 < |k'| < 3r/2$ (denotaremos por k' para evitar confundir este caso com o anterior, que era $|k| > 3r/2$), as soluções de (3.31) são:

$$A_{k'}(\alpha) = e^{3\alpha/4}(c_1 e^{\omega'\alpha} + c_2 e^{-\omega'\alpha}) \ , \tag{3.34a}$$

$$F_{k'}(\phi) = c_3 e^{ik'\phi} + c_4 e^{-ik'\phi} \ , \tag{3.34b}$$

onde

$$\omega' \equiv \sqrt{(3r/2)^2 - k'^2} > 0\ . \tag{3.35}$$

Finalmente, se $k = 3r/2$, as soluções de (3.31) são (páginas 33 e 34 de [120]):

$$A(\alpha) = e^{3r\alpha/2}\left(c_1 + c_2\alpha\right)\ , \tag{3.36a}$$

$$F(\phi) = c_3 e^{3ir\phi/2} + c_4 e^{-3ir\phi/2}\ . \tag{3.36b}$$

Com isso, completamos o catálogo de soluções elementares da equação de Wheeler-DeWitt (3.23). Vamos agora estudar cinco soluções construídas a partir das elementares, apresentando suas respectivas interpretações físicas.

Primeiro, na Seção 3.3 estudaremos uma solução análoga a 2.35, que permite recuperar as soluções clássicas. Na Seção 3.4, estudaremos a nova solução de ricochete, obtida a partir do ordenamento não-trivial, e que seria impossível de obter para o trivial. Na seção 3.5, veremos um caso parecido, mas para uma solução cíclica, que existe para o caso não-trivial e inexiste para o trivial.

Na Seção 3.6, veremos como a solução mais estudada do ricochete que estudamos no Capítulo anterior, admite uma versão bem parecida para o novo ordenamento. Isso também acontece com a solução cíclica do Capítulo anterior, que admite uma versão muito semelhante para o novo ordenamento, solução estudada na Seção 3.7. É nesse sentido que podemos dizer que a mudança de ordenamento proposta aqui permite obter soluções novas, mas sem perder as anteriores.

3.3 Recuperando as Soluções Clássicas

A análoga da solução básica (2.35) do Capítulo anterior é obtida de (3.32), e é denotada ψ_S:

$$\psi_S = e^{(i\omega + 3r/2)\alpha + ik\phi}\ , \tag{3.37}$$

onde o subescrito S significa "singular", pelo que veremos agora. As equações guias (2.31) para ψ_S, qualquer que seja $r > 0$, se tornam apenas:

$$\dot{\alpha} = -\omega e^{-3\alpha} \,, \tag{3.38a}$$

$$\dot{\phi} = k e^{-3\alpha} \,. \tag{3.38b}$$

Exatamente como no caso análogo do Capítulo anterior, podemos derivar essas equações em relação ao tempo e substituí-las novamente, obtendo assim as equações clássicas (2.6). Então a única diferença de ψ_S em relação à solução singular do ordenamento trivial é o termo ω em (3.38a), que não influencia de fato na dinâmica, já que leva às mesmas equações.

Isso mostra que a mudança de ordenamento que propomos aqui mantém o mesmo acordo com o clássico que já havia antes. Quanto à conexão entre os dois casos através do parâmetro r, note que, na verdade, tomar $r = 0$ em (3.37) conduz à solução do ordenamento trivial. Além disso, qualquer que seja r, vemos que $R = \sqrt{\psi^*\psi} = 1$, logo o potencial quântico (3.25) se anula, em acordo com o fato de que as soluções clássicas são recuperadas. Ou seja, para esta solução não há efeito quântico.

3.4 Novas soluções de Ricochete

Agora, vamos estudar a solução abaixo,

$$\psi_{BI} = 1 + e^{3r\alpha} + e^{(i\omega + 3r/2)\alpha + ik\phi} \,, \tag{3.39}$$

que é uma combinação linear de (3.28), para $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ e $c_4 = 0$ com (3.37). A linearidade de (3.23) garante que ψ_{BI} é, de fato, solução. Vamos nos restringir ao caso $r = 1/2$, do ordenamento não-trivial. Neste caso, as equações guias (2.31) formam o sistema dinâmico:

$$\dot{\alpha} = \frac{e^{-9\alpha/4}\left[3(e^{3\alpha/2} - 1)\mathrm{sen}\theta - 4\omega e^{3\alpha/4} + 4\omega(1 + e^{3\alpha/2})\cos\theta\right]}{4\left[1 + 3e^{3\alpha/2} + e^{3\alpha} + 2e^{3\alpha/4}(1 + e^{3\alpha/2})\cos\theta\right]} \,, \tag{3.40a}$$

$$\dot{\phi} = \frac{k e^{-9\alpha/4}\left[e^{3\alpha/4} + (1 + e^{3\alpha/2})\cos\theta\right]}{1 + 3e^{3\alpha/2} + e^{3\alpha} + 2e^{3\alpha/4}(1 + e^{3\alpha/2})\cos\theta} \,, \tag{3.40b}$$

onde $\theta \equiv k\phi + \omega\alpha$. Os pontos críticos do sistema acima são (ϕ_C,α_C), sendo

$$\alpha_C = 0 \; , \tag{3.41a}$$

$$\phi_C = \frac{2\pi}{3k}(3n \pm 1) \; , \tag{3.41b}$$

para $n \in \mathbb{Z}$. Então, na verdade, os pontos críticos formam uma sequência infinita.

Na Figura 3.1, vemos o esboço das soluções do sistema dinâmico (3.40), onde destacamos os quatro tipos de soluções, sendo um tipo o ricochete (curva contínua azul) e sendo os outros três tipos, soluções singulares. A curva pontilhada azul representa um universo que vem da singularidade ($\alpha = -\infty$) com uma expansão, atinge um máximo $\alpha_{max} < 0$, depois retorna à singularidade. A curva pontilhada roxa representa um cenário onde só existe contração. Finalmente, a curva contínua roxa representa um cenário de um universo que vem da singularidade e está em expansão. Os pontos vermelhos representam os pontos críticos, dados por (3.41). Note que o ricochete pode ocorrer apenas para $\alpha > 0$. Esta condição é necessária, porém não é suficiente, já que existem soluções que assumem valores $\alpha > 0$ e que não são de ricochete.

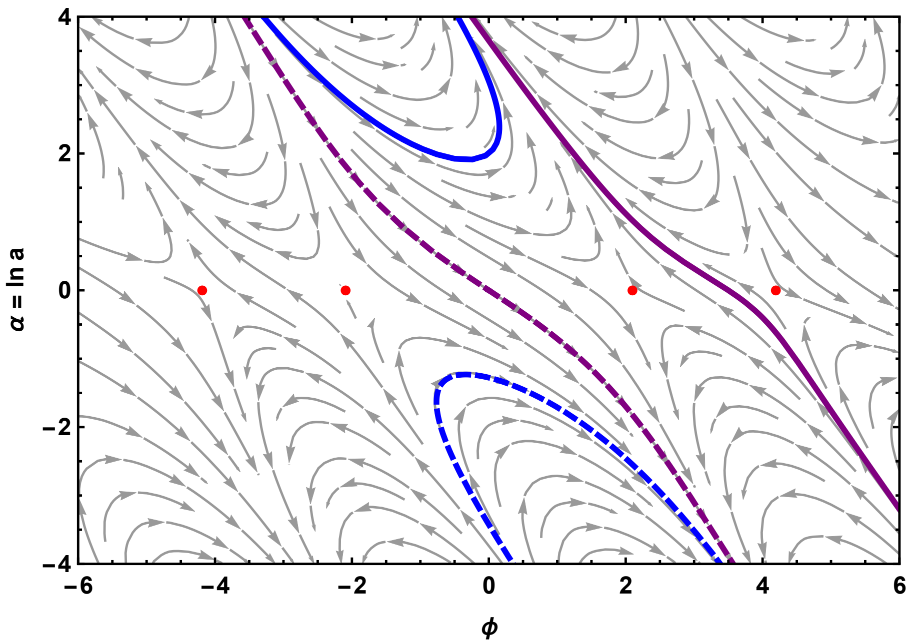

Figura 3.1: Gráfico do sistema dinâmico (3.40), com $k = 1$, válido para $r = 1/2$, mostrando algumas de suas soluções, dentre as quais destacamos quatro. As condições iniciais das curvas são as seguintes: curva azul contínua: $\alpha(0) = 2$ e $\phi(0) = 0$; curva azul pontilhada: $\alpha(0) = -1.5$ e $\phi(0) = -0.75$; curva roxa pontilhada: $\alpha(0) = 0$ e $\phi(0) = 0$; curva roxa contínua: $\alpha(0) = 3.5$ e $\phi(0) = 0$.

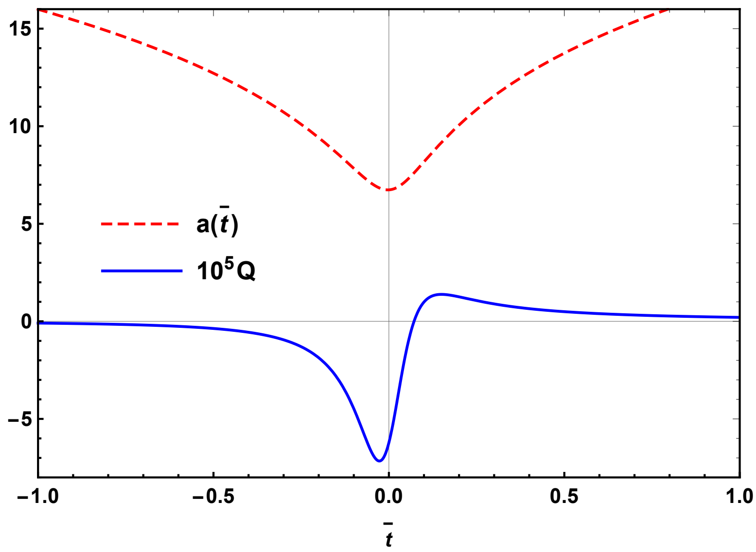

Figura 3.2: Comportamento qualitativo do fator de escala $a = e^{\alpha}$ e do potencial quântico para a curva de ricochete da Figura 3.1, obtida para o ordenamento não-trivial. Para simplificar, o tempo foi reescalado definindo-se $\bar{t} = (t + 900)/15000$.

Já na Figura 3.2, exibimos o comportamento do fator de escala, calculado numericamente, junto com o potencial quântico, ambos calculados para a solução da curva azul contínua da Figura 3.1. Nota-se que o potencial quântico oscila próximo de $\bar{t} = 0$, o mesmo intervalo de tempo no qual ocorre o ricochete. Isso indica que o ricochete é um efeito quântico, o que é evidente tendo em vista que a solução clássica é singular. Porém, é importante assim mesmo ver essa Figura, pois ela mostra que o potencial quântico decai (em módulo) rapidamente para $|\bar{t}| > 0$, o que mostra que a solução clássica deve ser recuperada. Esse comportamento qualitativo é bastante semelhante à solução de ricochete já estudada na Figura 2.2.

Para entender o potencial quântico nesta solução de um modo mais geral, na Figura 3.3 esboçamos o seu comportamento em função de ϕ e α, nos mesmos intervalos da Figura 3.1. É possível perceber que ele oscila próximo de $\alpha = 0$, mas decai (em módulo) para $\alpha \gtrsim 0$. Outra característica é que ele não diverge em nenhum ponto, diferentemente do que acontece no caso estudado no Capítulo anterior (ver Figura 2.3).

Finalmente, na Figura 3.4, vemos algumas soluções sobrepostas às curvas de nível do potencial quântico, mostrando a conexão entre as duas informações. A transição do mais escuro para o mais claro indica o crescimento de Q, sendo que nas regiões mais claras ele é positivo e, nas mais escuras, negativo. Nas regiões intermediárias, Q é nulo ou próximo de zero. É possível ver que as regiões do plano $\phi \times \alpha$ onde Q mais oscila são as regiões onde as soluções mais alteram seu comportamento, uma evidência de que Q é dominante nessas regiões.

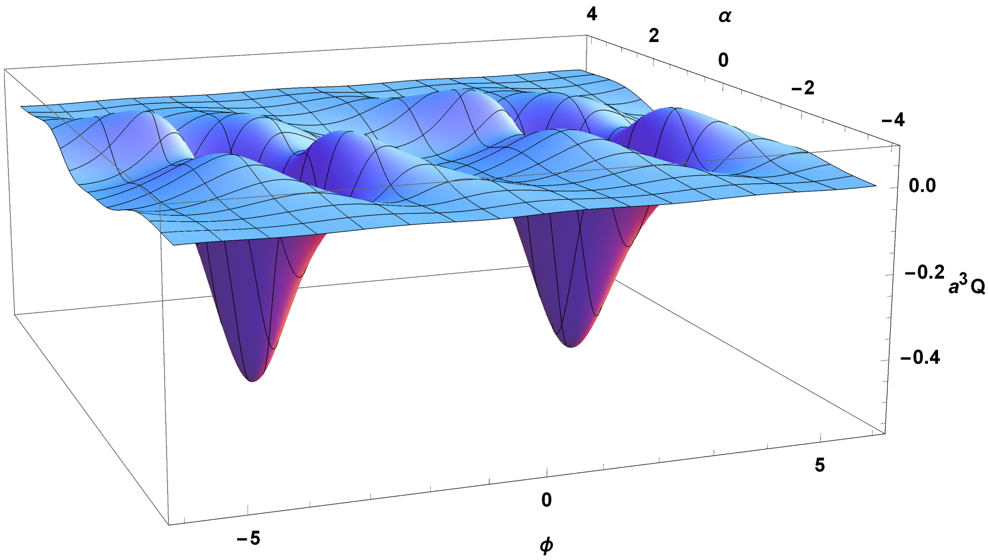

Figura 3.3: Esboço do gráfico tridimensional do potencial quântico para a solução de ricochete ψ_{BI}, para $r = 1/2$.

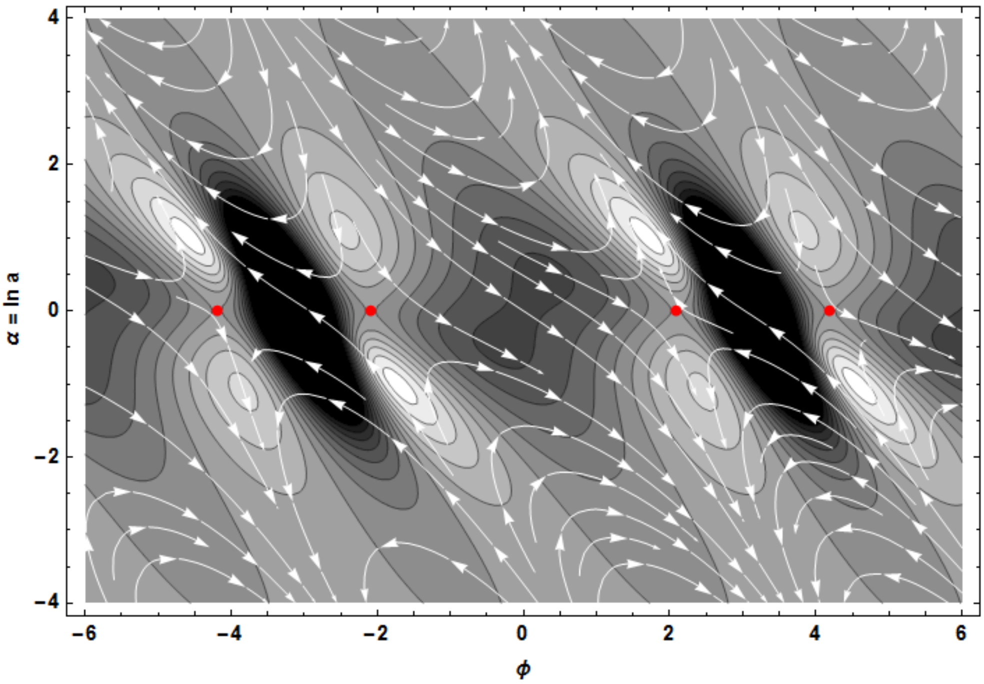

Figura 3.4: Nesta figura, o fundo sombreado representa algumas curvas de nível do potencial quântico referente a ψ_{BI}, para $r = 1/2$, e o gráfico de curvas brancas orientadas representa algumas soluções do sistema dinâmico (3.40). Esta figura evidencia a influência de Q sobre as soluções.

Agora, podemos comparar os resultados acima com o seu análogo para o ordenamento trivial. Se $r = 0$, ψ_{BI} se torna:

$$\psi_{BI(r=0)} = 2 + e^{ik(\alpha+\phi)} , \tag{3.42}$$

o que leva às equações-guias:

$$\dot{\alpha} = -ke^{-3\alpha}\frac{1 + 2\cos[k(\alpha + \phi)]}{5 + 4\cos[k(\alpha + \phi)]} , \tag{3.43a}$$

$$\dot{\phi} = ke^{-3\alpha}\frac{1 + 2\cos[k(\alpha + \phi)]}{5 + 4\cos[k(\alpha + \phi)]} . \tag{3.43b}$$

Dividindo (3.43a) por (3.43b), vemos que $d\alpha/d\phi = -1$. Portanto, no plano $\phi \times \alpha$ onde podemos representar o sistema dinâmico (3.43), todas as curvas $\alpha(\phi)$ serão retas de inclinação -1. Logo, não é necessário esboçar as soluções para $\alpha(t)$ para concluir que todas elas tendem a $-\infty$ com $\phi \longrightarrow +\infty$. Ou seja, para $r = 0$, todas as soluções obtidas a partir de ψ_{BI} serão singulares.

Como observação final, é importante dizer que a solução ψ_{BI} pode ser ligeiramente generalizada ao considerarmos

$$\tilde{\psi}_{BI} = c_1 + c_2e^{3\alpha/2} + c_3e^{(\pm i\omega+3r/2)\alpha\pm ik\phi} , \tag{3.44}$$

e ainda assim os aspectos gerais apresentados acima continuariam válidos, desde que se tenha $|k| > 3/4$ e desde que $c_i \neq 0$. Isso pode ser verificado repetindo os processos anteriores, mas para $\tilde{\psi}_{BI}$.

3.5 Novas soluções Cíclicas

A partir das soluções elementares para ψ apresentadas na Seção 3.2, para $r = 1/2$, podemos construir a função de onda:

$$\psi_{CI} = e^{(i\omega+3/4)\alpha+ik\phi} + \tfrac{1}{2}e^{(i\omega'+3/4)\alpha+k'\phi} + \tfrac{1}{2}e^{(-i\omega'+3/4)\alpha+k'\phi} , \tag{3.45a}$$

$$= e^{(i\omega+3/4)\alpha+ik\phi} + e^{ik'\phi+3\alpha/4}\cosh(\omega'\alpha) , \tag{3.45b}$$

uma combinação de (3.32) com duas soluções do tipo (3.34), onde $|k| > 3/4$ e $0 < |k'| < 3/4$. A linearidade de (3.23) garante que ψ_{CI} é, de fato, solução. Observe que, para $r = 0$, não existe função de onda análoga a ψ_{CI}, pois não há soluções da forma (3.34), já que isto exigiria $0 < |k| < 3r/2 = 0$, o que é impossível. Portanto, esta solução é possível apenas devido à mudança no ordenamento.

Para ψ_{CI}, as equações guias (2.31) se tornam:

$$\dot{\alpha} = -e^{-3\alpha}\frac{\omega + \omega\cosh(\omega'\alpha)\cos\beta - \omega'\mathrm{senh}(\omega'\alpha)\mathrm{sen}\beta}{1 + 2\cosh(\omega'\alpha)\cos\beta + \cosh^2(\omega'\alpha)}\ , \tag{3.46a}$$

$$\dot{\phi} = e^{-3\alpha}\frac{k + k'\cosh^2(\omega'\alpha) + (k + k')\cosh(\omega'\alpha)\cos\beta}{1 + 2\cosh(\omega'\alpha)\cos\beta + \cosh^2(\omega'\alpha)}\ , \tag{3.46b}$$

onde $\beta \equiv (k - k')\phi + \omega\alpha$.

Os pontos críticos dividem-se em três classes. A primeira classe é formada pelos pontos (ϕ_C,α_C) tais que:

$$\alpha_C = 0\ , \tag{3.47a}$$

$$\phi_C = \frac{(2n+1)\pi}{k - k'}\ , \tag{3.47b}$$

onde $n \in \mathbb{Z}$. As outras duas são formadas pelos pontos da forma (α_C^-,ϕ_C^+) e (α_C^+,ϕ_C^-), onde

$$\alpha_C^\pm = \pm\frac{1}{\omega'}\cosh^{-1}(\sqrt{y})\ , \tag{3.48a}$$

$$\phi_C^\pm = \pm\frac{\omega}{k - k'}\alpha_C \pm \cos^{-1}\left[-\frac{k + k'y}{(k + k')\sqrt{y}}\right] + 2m\pi\ , \tag{3.48b}$$

sendo $m \in \mathbb{Z}$ e

$$y = \frac{1 + \frac{k^2}{k'^2} + \frac{\omega^2}{\omega'^2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{k^2}{k'^2} + \frac{\omega^2}{\omega'^2}\right)^2 - 4\frac{k^2}{k'^2}\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega'^2}\right)}}{2(1 + \omega^2/\omega'^2)}\ . \tag{3.49}$$

Devido a (3.49), é preciso escolher k e k' de tal modo que y seja real. Um caso possível é $k = 1$ e $k' = 0.1$, que é o caso que será usado como exemplo para a construção dos gráficos.

Na Figura 3.5, vemos algumas soluções do sistema dinâmico (3.46), que são todas cíclicas, com destaque para duas, em azul. As soluções não são todas periódicas, porém são todas cíclicas, porque apresentam uma alternância entre expansão e contração. A Figura 3.6 detalha o comportamento de $a(t)$ e de $Q(t)$ para a solução cujas condições iniciais são $\alpha(0) = \phi(0) = 2$.

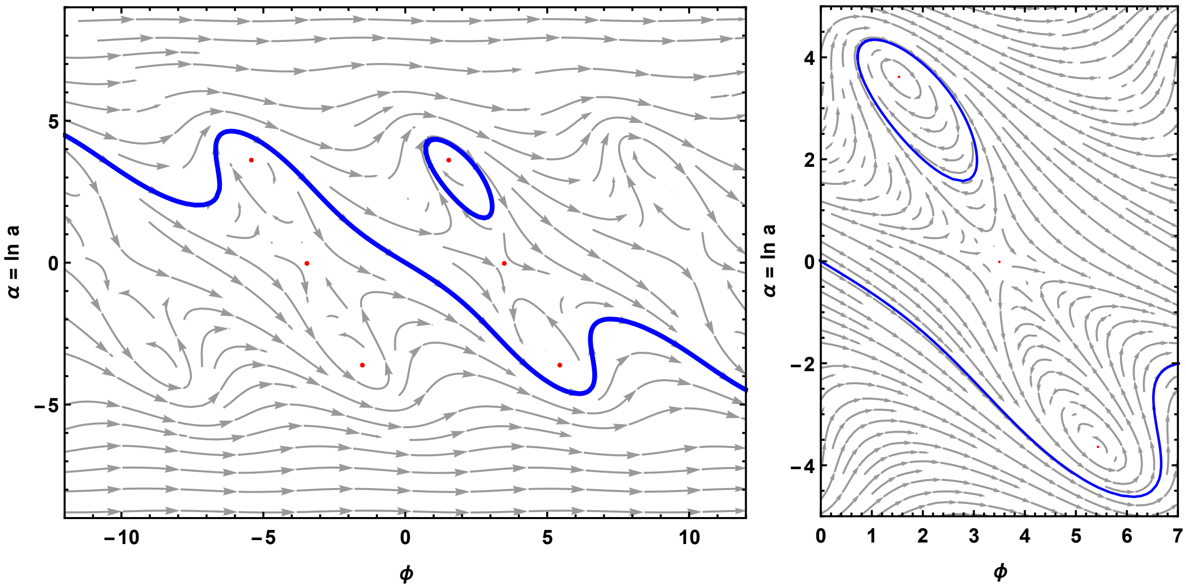

Figura 3.5: Esboço das soluções do sistema dinâmico (3.46), obtido a partir de ψ_{CI}, para o ordenamento não-trivial, com $k = 1$ e $k' = 0.1$. O gráfico à direita é um detalhe do gráfico à esquerda para que se veja melhor os ciclos. Destacamos duas soluções, cujas condições iniciais são: $\alpha(0) = \phi(0) = 0$, para a curva inferior e $\alpha(0) = \phi(0) = 2$, para a curva superior. Os pontos vermelhos são os pontos críticos, dados por (3.47) e (3.48).

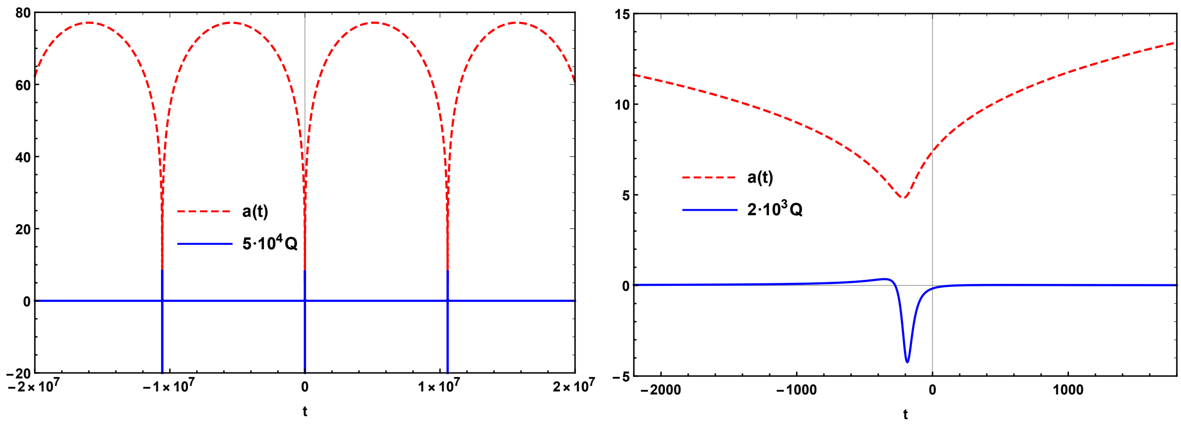

Figura 3.6: Detalhe da evolução temporal da solução da parte superior da Figura 3.5, comparado com o comportamento qualitativo do potencial quântico Q, calculado sobre aquela solução. O gráfico à direita apenas detalha o gráfico à esquerda, mostrando que Q domina sobre a fase de ricochete. Note a diferença de escala para Q entre os gráficos.

Na Figura 3.7, vemos o gráfico de $a^3 Q$, com $k = 1$ e $k' = 0.1$. O fator a^3 facilita a visualização, mas deve-se ter em mente que o potencial quântico mesmo é Q, e seu comportamento é o da Figura 3.7, mas multiplicado por $a^3 = e^{3\alpha}$ para facilitar a visualização. A Figura

3.8 complementa as informações sobre o sistema, reunindo o comportamento das soluções paramétricas de α e ϕ com a^3Q ao fundo.

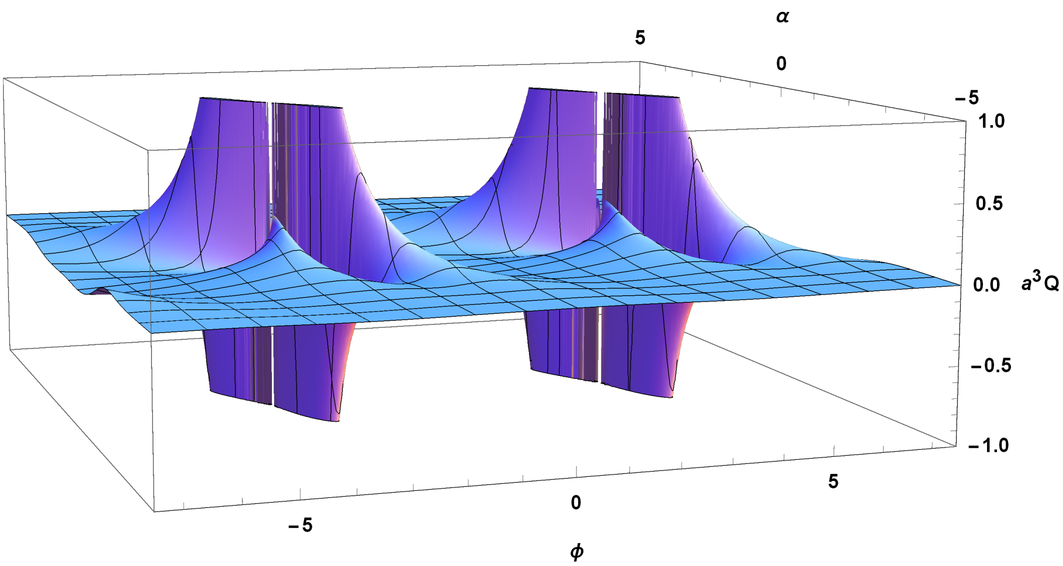

Figura 3.7: Gráfico de a^3Q, para a solução ψ_{CI} mostrando sua predominância próximo a $\alpha = 0$ e seu decaimento para as outras regiões.

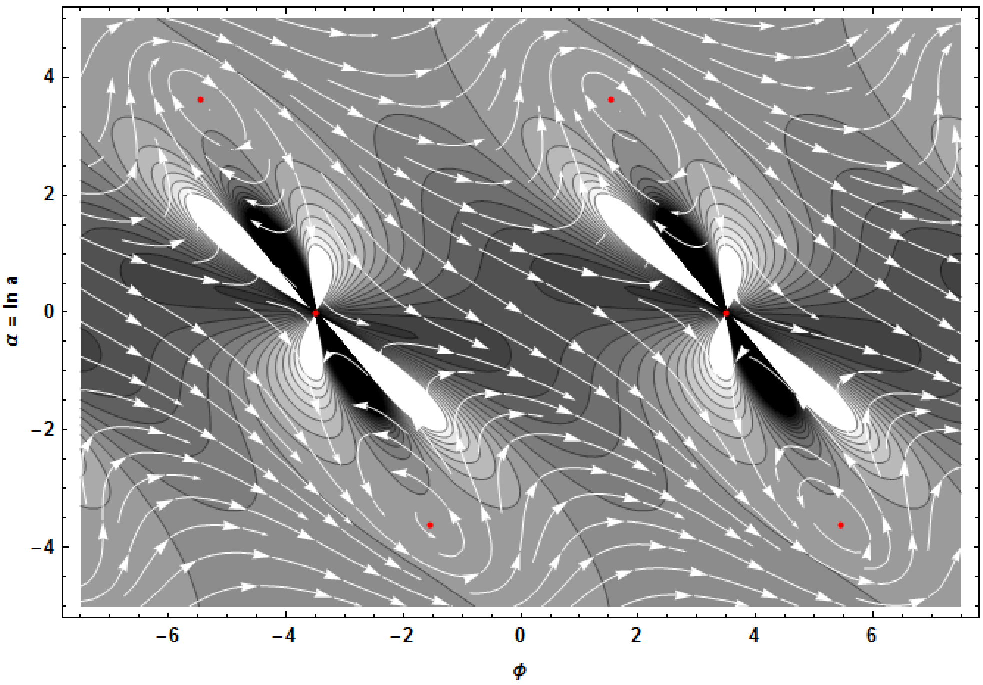

Figura 3.8: Este gráfico reúne as informações dos anteriores para que se possa comparar os efeitos de a^3Q sobre as soluções do sistema dinâmico (3.46), obtido da solução ψ_{CI}.

De tudo que discutimos nesta seção, incluindo as Figuras acima, fica evidente que a existência dessas soluções cíclicas está relacionada ao papel desempenhado pelo potencial quântico associado à solução ψ_{CI}. Por sua vez, este potencial é resultado da quantização de Bohm-de Broglie feita através da mudança de ordenamento.

3.6 Soluções de Ricochete Análogas às do Ordenamento Trivial

A generalização natural do pacote de ondas (2.40), responsável pela solução de ricochete revisada no Capítulo anterior, é:

$$\psi_{BII} = \int_{k_1}^{k_2} dk\, e^{-\frac{(k-k_0)^2}{\sigma^2}} \left(e^{ik\phi + (i\omega + 3r/2)\alpha} + e^{ik\phi(-i\omega+3r/2)\alpha} \right) , \tag{3.50}$$

que é uma solução da equação de Wheeler-DeWitt (3.23). Apesar de ser a generalização do caso anterior, a relação de dispersão modificada $\omega \equiv \sqrt{k^2 - (3r/2)^2}$ impõe algumas restrições, que não existem para o caso do ordenamento trivial, quando $\omega = k$.

Primeiro, a integral (3.50) torna-se muito complicada. Por isso, vamos resolvê-la numericamente. Além disso, a relação de dispersão também impõe $|k| > 3r/2$ (lembrando que $r > 0$), o que, aliado à discussão da página 46, impõe $k_0 < -3r/2$. Isso limita o domínio da integral (3.50) para, no máximo, o intervalo $(-\infty, -3/4]$, no nosso caso, pois $r = 1/2$. Por sua vez, isso impõe uma limitação sobre a escolha de k_0, o centro da Gaussiana, se quisermos que ψ_{BII} seja mesmo a solução análoga a (2.40).

Veja a Figura 3.9, onde fica mais evidente o porquê dessa limitação. A Gaussiana funciona como um "filtro", que dá mais "peso" aos valores de k mais próximos do seu centro k_0. Então, escolher o mesmo valor $k_0 = -1$ (curva azul/vermelha) do caso bem estudado (2.40) implicaria uma perda de informação. A região que seria perdida é representada pela região vermelha da Figura 3.9. Isso pode então ser evitado escolhendo, por exemplo, $k_0 = -5$. Isso garante que a perda de informação será muito pequena. Então, para que a comparação entre os resultados seja adequada, é preciso escolher o mesmo valor $k_0 = -5$ também para o pacote de ondas que dá o ricochete no caso do ordenamento trivial, que é (2.40).

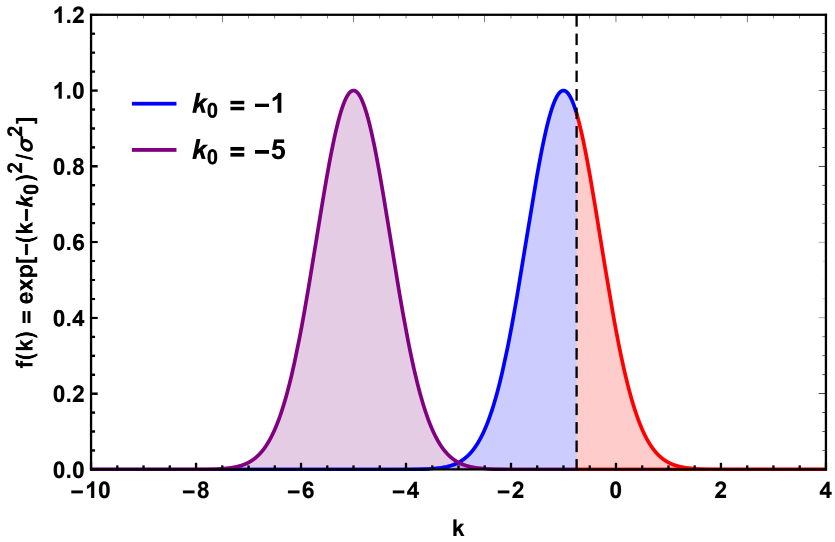

Figura 3.9: Esboço do gráfico de duas curvas Gaussianas, ambas para $\sigma = 1$. A curva roxa é $f(k) = e^{-(k+5)^2}$ e a curva azul/vermelha é $f(k) = e^{-(k+1)^2}$. A linha pontilhada marca o valor $k = -3/4$, uma separação entre tipos de solução para o caso do ordenamento não-trivial, como visto na Seção 3.2.

Dito isso, calculamos numericamente a integral (3.50), com $r = 1/2$, $\sigma = 1$ e $k_0 = -5$, para o intervalo $[k_1, k_2] = [-10, -3/4]$, o que já é bastante para o nível de precisão dos resultados que vamos apresentar, pois a Gaussiana $e^{-(k+5)^2}$ torna-se $\lesssim 10^{-8}$ nesses limites de integração. Com isso, podemos encontrar as equações guias (2.31) numéricas e resolvê-las enquanto sistema dinâmico, obtendo a Figura 3.10. O sentido dos vetores cinzas indica a evolução temporal das soluções. É evidente a semelhança estrutural entre as soluções deste caso, para o ordenamento não-trivial, e as soluções para o ordenamento trivial revisadas antes. Para uma comparação, veja a Figura 3.11, onde se apresentam as soluções do sistema dinâmico (2.42) (ordenamento $r = 0$), também para $\sigma = 1$ e $k_0 = -5$.

Destacamos três soluções, sendo duas de ricochete e uma solução cíclica, na Figura 3.10. Comparando o caso $r = 1/2$ (Figura 3.10) com o caso $r = 0$ (Figura 3.11), vemos que a semelhança é muito grande, e o caso $r = 0$ já foi revisado no Capítulo anterior, então não há muito o que comentar a respeito disso. Para confirmar, compare o potencial quântico nos dois casos, observando as Figuras (3.12) ($r = 1/2$) e (3.13) ($r = 0$), que mostram o comportamento do potencial quântico para ambos os casos. Reunindo as informações sobre o sistema dinâmico e o potencial quântico, temos as Figuras (3.14) ($r = 1/2$) e (3.15) ($r = 0$).

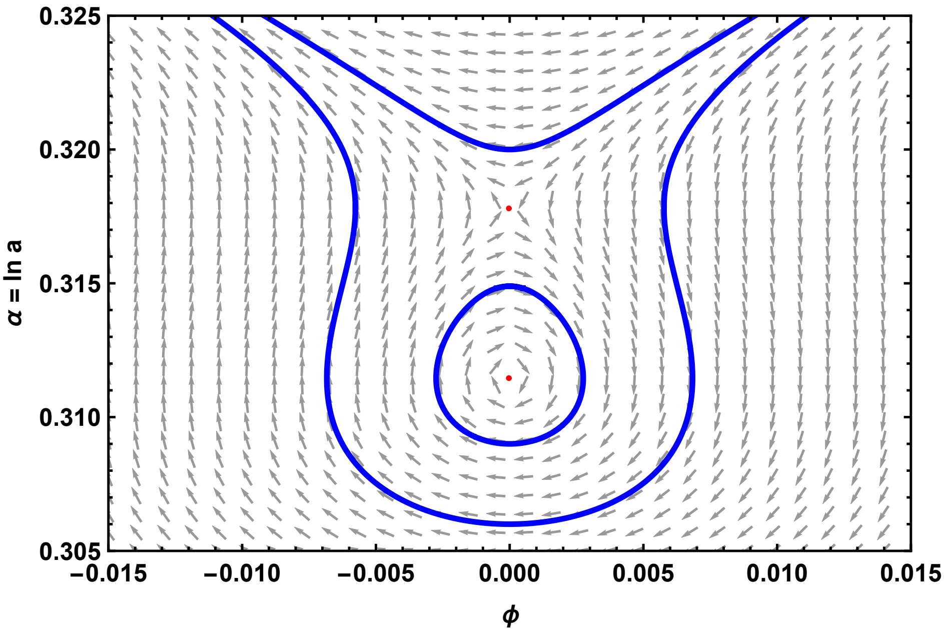

Figura 3.10: Esboço das soluções obtidas numericamente a partir de ψ_{BII} para o ordenamento não-trivial obtido de $r = 1/2$, com $\sigma = 1$ e $k_0 = -5$. Destacamos três soluções, cujas c.i. são $\phi(0) = 0$ para todas e: $\alpha(0) = 0.309$, para a curva fechada, que representa um ciclo; $\alpha(0) = 0.306$, para a curva inferior, que representa um ricochete; $\alpha(0) = 0.320$, para a curva superior, que também é de ricochete. os pontos vermelhos são pontos críticos determinados numericamente, cujas coordenadas aproximadas são $(0, 0.31783)$ (ponto de centro) e (0,0.31145) (ponto de sela).

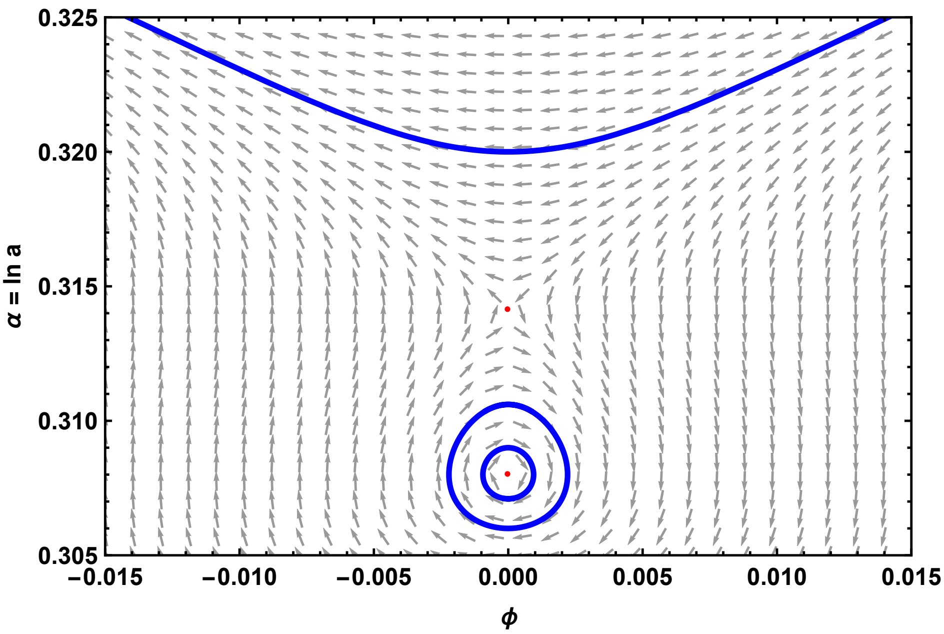

Figura 3.11: Esboço indicando o comportamento das soluções de ψ_{BII} para $r = 0$, $\sigma = 1$, $k_0 = -5$, $k_1 = -\infty$ e $k_2 = +\infty$, o que está em acordo exato com (2.40). Esta solução é a mesma que foi revisada no Capítulo anterior e pode ser obtida a partir de (2.42), apenas trocando $k_0 = -1$ por $k_0 = -5$. Note a semelhança com (2.1) e (3.10). Os pontos críticos são calculados pelas expressões da página 44. As c.i. das curvas acima são as mesmas da Figura 3.10.

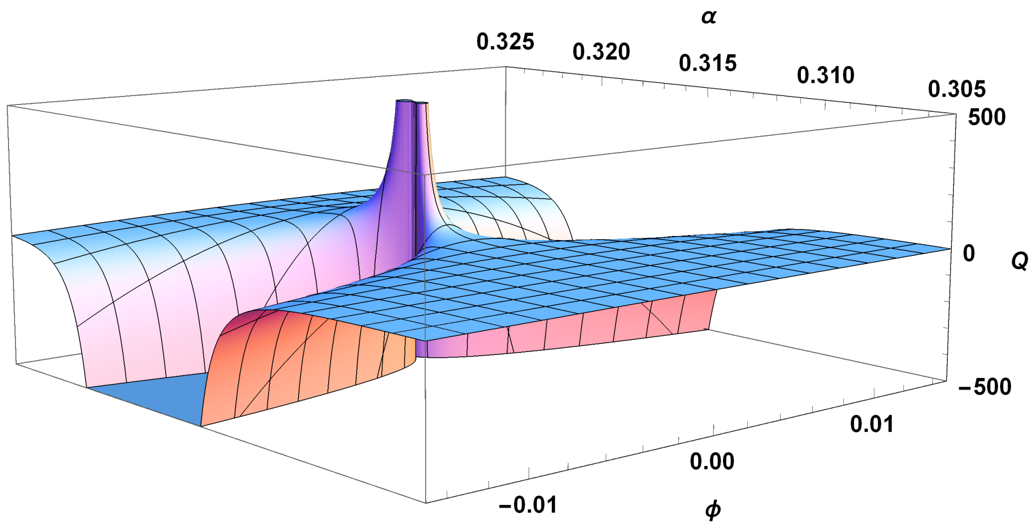

Figura 3.12: Gráfico tridimensional do potencial quântico $Q(\alpha,\phi)$ obtido numericamente a partir de ψ_{BII} para $r = 1/2$, $\sigma = 1$ e $k_0 = -5$.

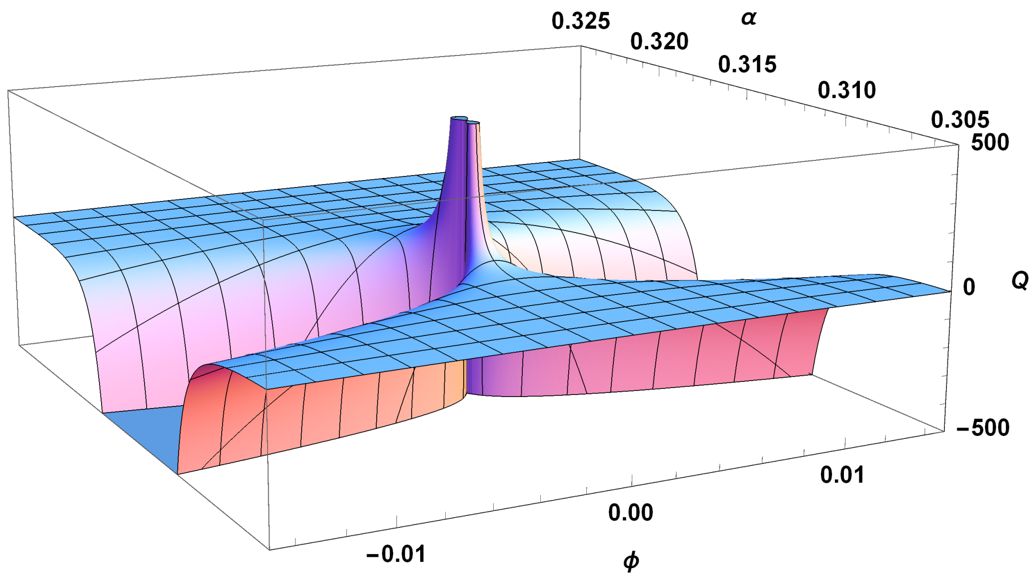

Figura 3.13: Gráfico tridimensional do potencial quântico $Q(\alpha,\phi)$ dado por (2.29), válido para $r = 0$, para a solução (2.40), sendo agora $\sigma = 1$ e $k_0 = -5$.

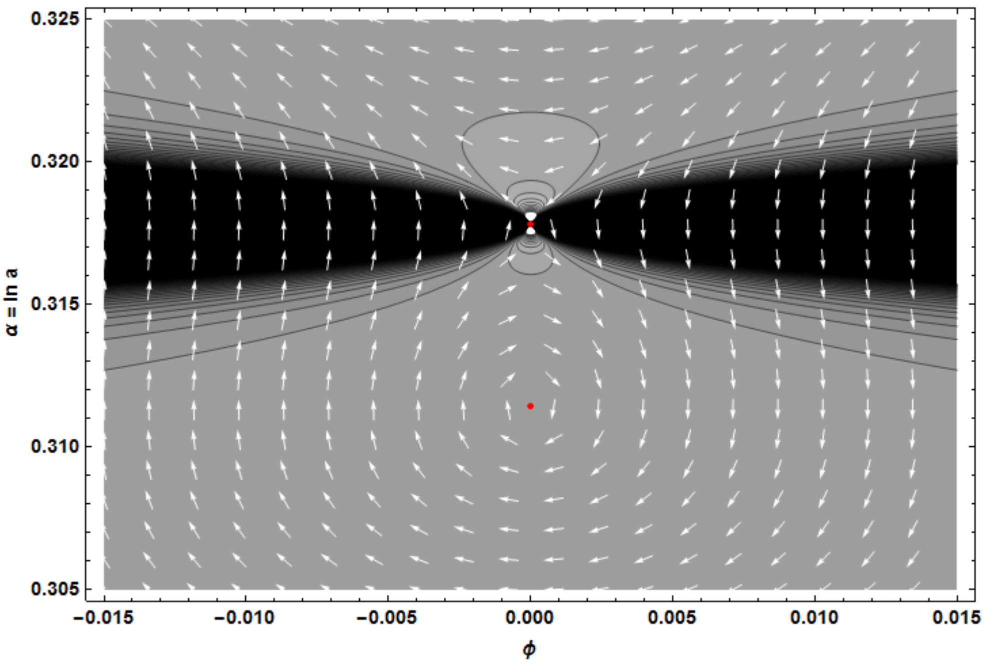

Figura 3.14: Comparação entre a^3Q e as soluções das equações guias para o caso $r = 1/2$.

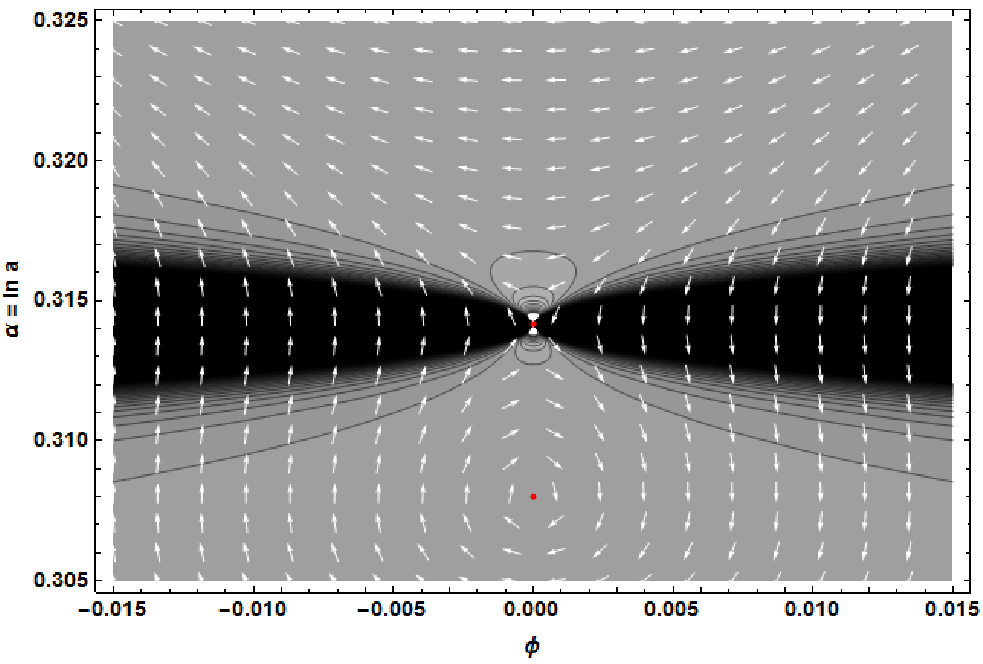

Figura 3.15: Comparação entre a^3Q e as soluções das equações guias para o caso $r = 0$.

Essas semelhanças requerem uma explicação. Além disso, existe uma pequena diferença entre os dois casos que também precisa ser justificada: olhando novamente para as duplas de gráficos acima, parece que o caso não-trivial está deslocado no eixo α em relação ao caso $r = 0$, sendo que a estrutura geral parece ser a mesma para ambos. Devido à dificuldade em resolver a integral ψ_{BII} exatamente, podemos entender essas semelhanças e diferenças através de uma aproximação que nos permita comparar as integrais nos dois casos. A fonte dessa dificuldade é a mudança da relação de dispersão de $\omega = k$ para $\omega = \sqrt{k^2 - (3r/2)^2}$, uma consequência da mudança de ordenamento.

Então, reconsiderando temporariamente r e k_0 genéricos, podemos expandir a relação de dispersão $\omega(k) = \sqrt{k^2 - (3r/2)^2}$ em torno de k_0, até a segunda ordem em k, obtendo:

$$\omega \simeq \omega_0 + \omega_1(k - k_0) - \tfrac{1}{2}\omega_2(k - k_0)^2 \; , \tag{3.51}$$

onde

$$\omega_0 \equiv [k_0^2 - (3r/2)^2]^{1/2} \; , \tag{3.52a}$$

$$\omega_1 \equiv k_0[k_0^2 - (3r/2)^2]^{-1/2} \; , \tag{3.52b}$$

$$\omega_2 \equiv (3r/2)^2[k_0^2 - (3r/2)^2]^{-3/2} \; . \tag{3.52c}$$

Essa expansão dá uma aproximação razoável devido à presença da Gaussiana $\exp[-(k - k_0)^2/\sigma^2]$, que dá mais peso para os valores de k próximos de k_0; logo, a aproximação (3.51), que é válida justamente para k próximo de k_0, faz sentido. Para $r = 0$, já sabemos que a integral (2.40) é recuperada exatamente. Agora, para $r = 1/2$ e $k_0 = -5$, tem-se $\omega_2 \sim 10^{-3}$, enquanto que $\omega_1 \sim 10^0$, então basta aproximar até a ordem $\mathcal{O}(k^1)$. Agora, reescalando α por $\omega_1\alpha$, vemos que a integral de ψ_{BII} assume uma forma muito semelhante a (2.40). Então, essa aproximação nos permite dizer que, grosso modo, as duas soluções são aproximadas, sendo que há um deslocamento em α, explicando assim o comportamento observado acima.

3.7 Soluções Cíclicas Análogas às do Ordenamento Trivial

Analogamente ao caso anterior, podemos definir uma solução que generaliza a solução cíclica estudada na Seção 2.8 para o ordenamento não-trivial. De fato, combinando a solução (3.28), para $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ e $c_4 = 0$, com a solução (3.32), para $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ e $c_4 = 0$, obtemos, da linearidade da equação de Wheeler-DeWitt,

$$\psi_{CII} = 1 + e^{3r\alpha} + 2e^{ik\phi + 3r\alpha/2}\cos(\omega\alpha) \; . \tag{3.53}$$

Observe que, para $r = 0$, esta solução recupera (2.43). Já para $r = 1/2$, o sistema dinâmico obtido das equações guias (2.31) para ψ_{CII} é:

$$\dot{\alpha} = \frac{\frac{1}{2}e^{-9\alpha/4}\mathrm{sen}(k\phi)\left[3(e^{3\alpha/2}-1)\cos(\omega\alpha) + 4\omega(e^{3\alpha/2}+1)\mathrm{sen}(\omega\alpha)\right]}{1 + e^{3\alpha} + 2e^{3\alpha/2}\left[2+\cos(2\omega\alpha)\right] + 4(1+e^{3\alpha/2})\cos(k\phi)\cos(\omega\alpha)} \; , \tag{3.54a}$$

$$\dot{\phi} = \frac{2ke^{-9\alpha/4}\cos(\omega\alpha)\left[(e^{3\alpha/2}+1)\cos(k\phi) + 2e^{3\alpha/4}\cos(\omega\alpha)\right]}{1 + e^{3\alpha} + 2e^{3\alpha/2}\left[2+\cos(2\omega\alpha)\right] + 4(1+e^{3\alpha/2})\cos(k\phi)\cos(\omega\alpha)} \; . \tag{3.54b}$$

Os pontos críticos desse sistema dividem-se em três famílias de pontos (ϕ_C, α_C). A primeira tem coordenadas:

$$\alpha_C = (2n+1)\frac{\pi}{2\omega} \; , \tag{3.55a}$$

$$\phi_C = \frac{m\pi}{k} \; , \tag{3.55b}$$

onde $m, n \in \mathbb{Z}$. Estes pontos são pontos de centro. A segunda é dada por

$$\alpha_C = 0 \; , \tag{3.56a}$$

$$\phi_C = (2m+1)\frac{\pi}{k} \; , \tag{3.56b}$$

para $m \in \mathbb{Z}$. Estes são pontos de sela. Para a terceira família de pontos críticos, α_C é a solução da equação transcendente

$$\omega\tan(\omega\alpha_C) + \tfrac{3}{4}\tanh\left(\tfrac{3}{4}\alpha_C\right) = 0 \; , \tag{3.57}$$

e ϕ_C é dado por

$$\phi_C = \pm\frac{1}{k}\cos^{-1}\left[-\frac{\cos(\omega\alpha_C)}{\cosh(3\alpha_C/4)}\right] + \frac{2n\pi}{k} \; , \tag{3.58}$$

sendo $n \in \mathbb{Z}$. Estes pontos também são de sela.

Como curiosidade, observe que a equação (3.57) possui uma sequência infinita de soluções, que podem ser obtidas numericamente e correspondem aos pontos de cruzamento entre os gráficos das funções $\alpha \longmapsto -\omega\tan(\omega\alpha)$ e $\alpha \longmapsto \frac{3}{4}\tanh\left(\frac{3}{4}\alpha\right)$, como ilustra a Figura 3.16. Então esta família de pontos é também uma sequência com dois índices, como as outras.

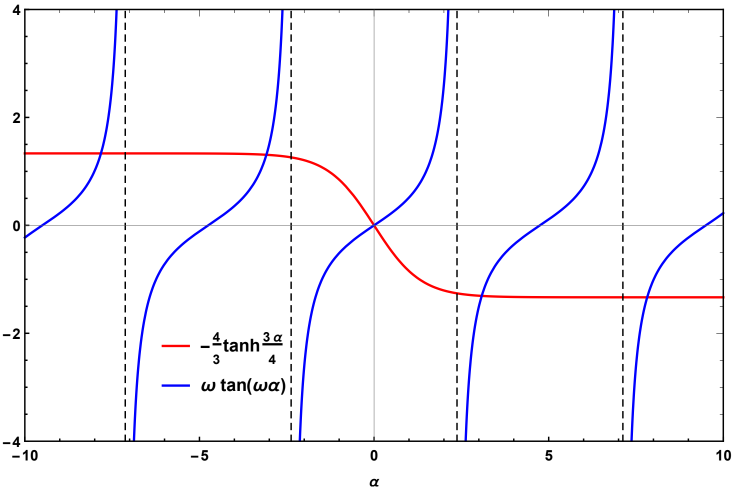

Figura 3.16: Gráfico com as soluções da equação transcendente (3.57), que são os valores de α para os quais as curvas azuis e a vermelha se cruzam, para $k = 1$.

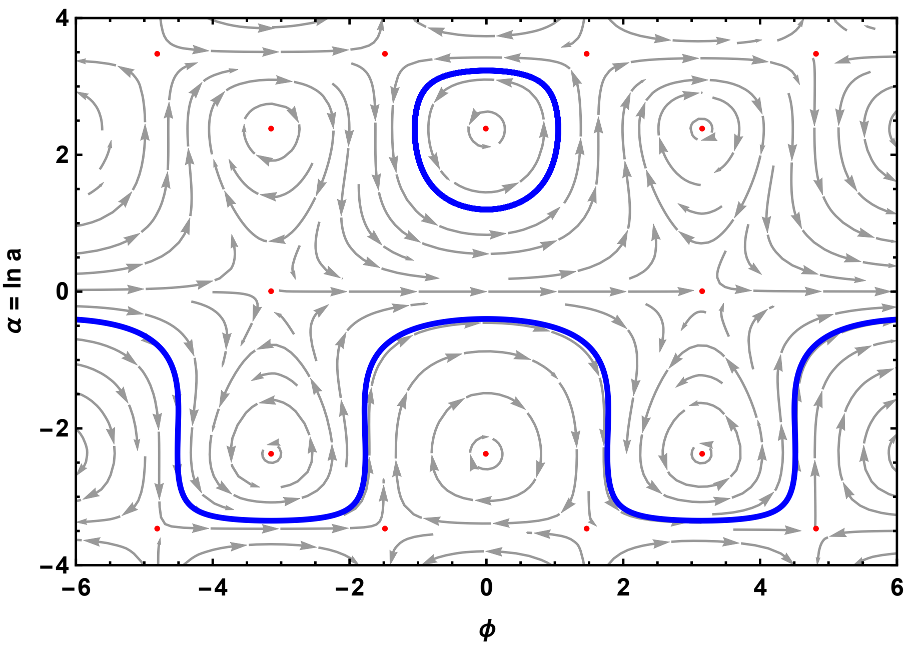

Figura 3.17: Esboço do sistema dinâmico (3.54). Os pontos vermelhos representam os pontos críticos, dados por (3.55), (3.56), (3.57) e (3.58). A curva em destaque inferior tem c.i. $\phi(0) = 0$ e $\alpha(0) = -0.4$ e a superior tem c.i. $\phi(0) = 0$ e $\alpha(0) = 1.2$.

Na Figura 3.17, vemos o esboço das soluções do sistema dinâmico (3.54), ilustrando duas soluções cíclicas. Na Figura 3.18, vemos o gráfico de a^3Q, que é diferente do caso $r = 0$, esboçado na Figura 2.5. Para ver a relação entre as regiões em que Q domina e as trajetórias no plano $\phi \times \alpha$, veja a Figura 3.19. Vemos que a solução para $r = 1/2$ possui uma assimetria entre os valores $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$, diferentemente do que ocorre para o caso $r = 0$. Repete-se, portanto, o que aconteceu no caso da Seção anterior: é possível obter soluções que recuperam de certa maneira as soluções que já havia para o ordenamento trivial, mas há diferenças.

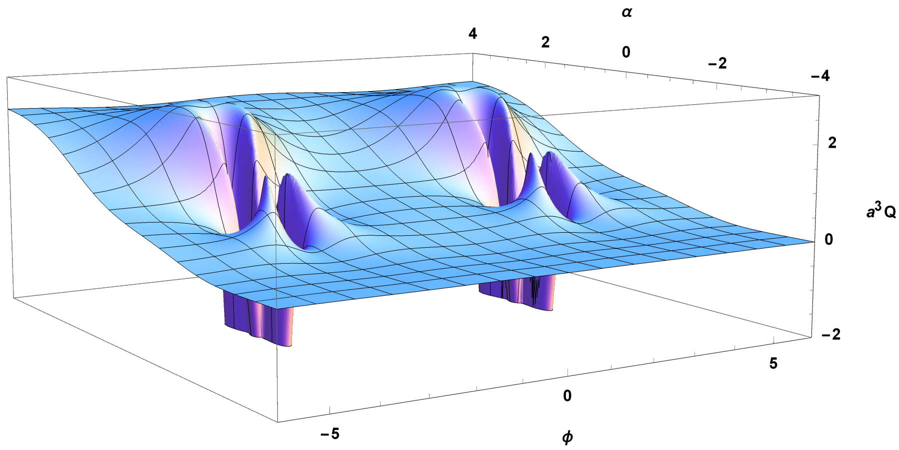

Figura 3.18: Gráfico de a^3Q obtido de ψ_{CII}. Compare com (2.5), que é a mesma solução mas para $r = 0$.

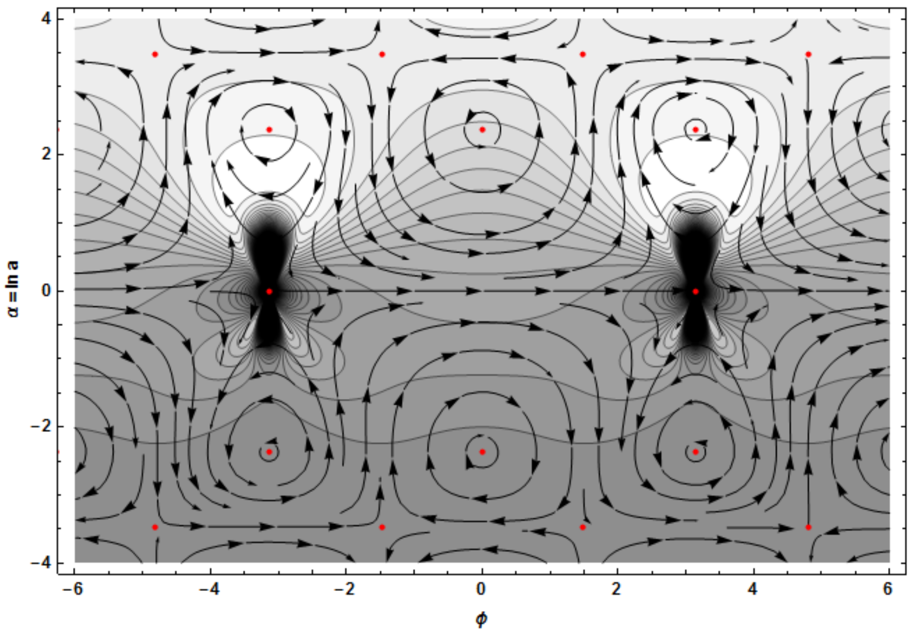

Figura 3.19: Comparação entre a^3Q e as soluções para α e ϕ obtidas de ψ_{CII}.

Podemos ver o efeito da mudança de ordenamento para uma solução com c.i. dadas. Na Figura 3.20, vemos a evolução temporal de a e de Q para a solução na parte inferior da Figura

3.17. Como as c.i. são as mesmas do caso análogo já estudado na Seção 2.8, podemos comparar a evolução temporal do fator de escala e a sua relação com o potencial quântico para uma mesma condição inicial em cada caso. Desse modo, comparando com a solução da Figura 2.9, vemos que as duas situações são bem semelhantes, mas o potencial quântico no caso presente é menor em módulo, durante o ricochete, do que o do caso $r = 0$.

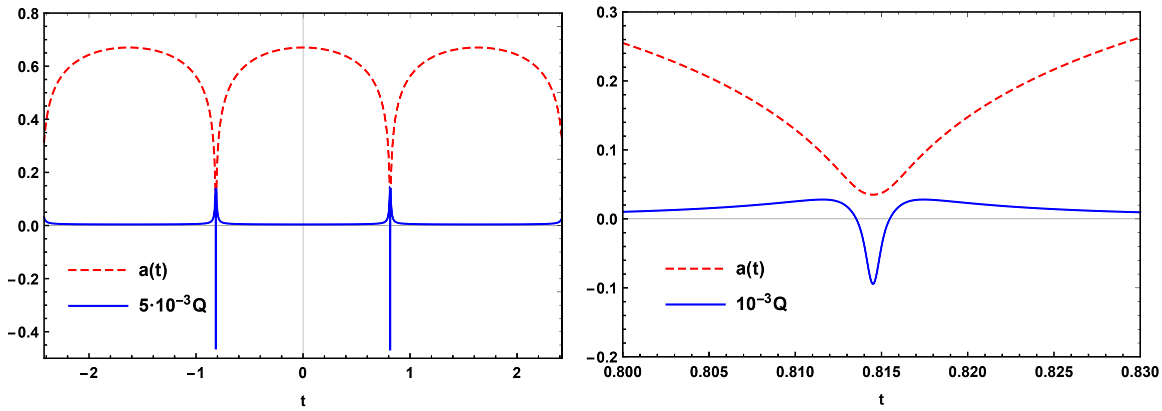

Figura 3.20: Comparação entre o potencial quântico e a evolução temporal do fator de escala para a solução cujas c.i. são $\phi(0) = 0$ e $\alpha(0) = -0.4$ (curva inferior da Figura 3.17).

3.8 Comentários

Concluindo, vimos que a mudança de ordenamento proposta mantém o acordo com as soluções clássicas, através de ψ_S, o que generaliza o caso $r = 0$; apresenta soluções novas de ricochetes e universos cíclicos, através de ψ_{BI} e ψ_{CI}, respectivamente; também apresenta soluções bastante semelhantes às soluções de ricochetes e universos cíclicos que já havia no caso $r = 0$, que são obtidas de ψ_{BII} e ψ_{CII}, respectivamente. Observe que ψ_{BI} e ψ_{CI} são novas soluções porque elas seriam impossíveis se fosse $r = 0$.

Quanto ao último grupo de soluções, que recuperam parcialmente os resultados do ordenamento $r = 0$, existem algumas diferenças em relação ao ordenamento trivial, que estão ligadas a uma assimetria em α. Por sua vez, essa assimetria é o resultado de termos alterado justamente a quantização em relação a esta mesma variável α, devido ao ordenamento não-trivial definido na equação (3.20). À parte isso, as soluções de ricochete ψ_{BI} e ψ_{BII} mostraram-se bem ajustadas em relação ao que se espera, no sentido de que o potencial quântico é dominante próximo ao ricochete e depois tende a zero rapidamente, conforme o universo se expande.

Capítulo 4

A Teoria Fab Four John

4.1 O Problema de Quantizar o Acoplamento Não-Mínimo Derivativo

Em [18], estuda-se a teoria gravitacional representada pela ação

$$S = \int d^4x \left[\frac{R}{8\pi} - \nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - \kappa G^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi \right] \ , \tag{4.1}$$

onde se mostra que essa teoria é capaz de fornecer um mecanismo de inflação, desde que se ajuste o valor da constante de acoplamento κ. Isso motiva o estudo de uma versão quântica dessa teoria, que poderia revelar efeitos adicionais que complementassem a descrição de [18]. No entanto, para que se possa aplicar a quantização, é necessário determinar a formulação Hamiltoniana de (4.1), o que leva a uma limitação de natureza algébrica, como veremos abaixo.

No minisuperespaço (usando as expressões da Seção 1.2, restringindo-se à métrica de FLRW plana), a Lagrangeana de (4.1) se torna, após definir $\alpha = \ln a$:

$$L = e^{3\alpha}\left(-\frac{3\dot{\alpha}^2}{4\pi N} + \frac{\dot{\phi}^2}{N} - \frac{3\kappa\dot{\alpha}^2\dot{\phi}^2}{N^3} \right) \ . \tag{4.2}$$

Para determinar a Hamiltoniana H, é preciso determinar os momentos, dados por

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \alpha} = -e^{3\alpha}\dot{\alpha}\left(\frac{3}{2\pi N} + \frac{6\kappa}{N^3}\dot{\phi}^2\right) , \tag{4.3a}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \phi} = e^{3\alpha}\dot{\phi}\left(\frac{2}{N} - \frac{6\kappa}{N^3}\dot{\alpha}^2\right) , \tag{4.3b}$$

$$p_N = \frac{\partial L}{\partial N} = 0 , \tag{4.3c}$$

para, em seguida, expressar as velocidades generalizadas $\dot{q} = \dot{\alpha},\dot{\phi},\dot{N}$ como funções dos momentos canônicos $p = p_\alpha,p_\phi,p_N$ e das coordenadas $q = \alpha,\phi,N$, pois $H = H(q,p,t)$. O passo seguinte seria aplicar a transformação de Legendre usual $H = \sum p_i q_i - L$, mas não é possível ir tão longe, pois resolver as equações acima para determinar $\dot{q}(q,p)$ leva a duas equações algébricas de grau 5, que não possuem uma fórmula fechada, para o caso mais geral, em termos de operações elementares, como sabemos pelo Teorema de Abel-Ruffini [121].

Dada essa impossibilidade, é preciso encarar esse problema de modos alternativos. Mas antes, vamos considerar um coeficiente mais geral no termo $G^{\mu\nu}$, que é $V_J(\phi)$ e vamos também considerar um potencial $V(\phi)$. É possível considerar essa extensão no contexto presente devido ao fato de essa Lagrangeana ser uma subclasse de Horndeski, e continua a ser após a extensão:

$$S = \int d^4x \left[\frac{R}{8\pi} - \nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - V_J(\phi)G^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - V(\phi)\right] . \tag{4.4}$$

Então, há casos limites, dentre os quais eu destaco dois, para os quais o problema das equações de grau 5 não existe: (i) quando V e V_J dominam, de modo que os outros termos podem ser desprezados; (ii) quando V_J é muito pequeno, de modo que podemos tratar $V_J(\phi)G^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi$ como uma espécie de perturbação ao acoplamento mínimo. Neste Capítulo, vamos explorar (i), ou seja, vamos nos restringir à Lagrangiana

$$L = \sqrt{-g}\left[-V_j(\phi)G^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - V(\phi)\right] , \tag{4.5}$$

teoria que vamos chamar de Fab Four John. Todos os resultados deste Capítulo foram apresentados em [122]. Esta teoria deve ser estudada com cautela, pois ela é problemática em relação à propagação das ondas gravitacionais, como discutimos na Seção 1.5. Ela servirá mais como um caso limite extremo. Mas ainda assim é interessante estudá-la como modelo de teste para, por exemplo, quantização através de derivadas fracionárias, o que será discutido no Capítulo seguinte.

Na Seção 4.2, veremos a dinâmica clássica dessa teoria. Na Seção 4.3, discutiremos brevemente a questão das potências fracionárias que aparecem da formulação Hamiltoniana de (4.5) no minisuperespaço, o que gera uma rica discussão sobre como se poderia quantizar uma teoria como essa. Finalmente, na Seção 4.4 abordamos a quantização via transformações canônicas de (4.5) para alguns casos.

4.2 Soluções Clássicas

No minisuperespaço, a Lagrangeana (4.5) se escreve como

$$L = -3aV_j(\phi)\frac{\dot{a}^2\dot{\phi}^2}{N^3} - Na^3V(\phi)\ . \tag{4.6}$$

Ou, em termos de $\alpha \equiv \ln a$ e ϕ,

$$L = e^{-3\alpha}\left[-3V_j(\phi)\frac{\dot{\alpha}^2\dot{\phi}^2}{N^3} - NV(\phi)\right]\ . \tag{4.7}$$

As equações de Euler-Lagrange referentes à Lagrangeana (4.7) fornecem, para $N = 1$:

$$\dot{\alpha}^2\dot{\phi}^2 - V/9V_j = 0, \tag{4.8a}$$

$$\ddot{\alpha} + 3\dot{\alpha}^2 - \dot{\alpha}(\ln V)^{\cdot} = 0, \tag{4.8b}$$

$$\ddot{\phi} - 3\dot{\alpha}\dot{\phi} + \tfrac{1}{2}\dot{\phi}[\ln(V_jV)]^{\cdot} = 0. \tag{4.8c}$$

Para obter essas equações, é preciso primeiro determinar a equação relativa a N, depois substituí-la nas demais. Somente após a simplificação pode-se fixar $N = 1$. A equação (4.8a) é a relação de vínculo clássica, que implica, em particular, que V e V_j devem ter simultaneamente o mesmo sinal; (4.8b) é a equação de aceleração, a equação que dá a dinâmica do fator de escala $a = e^{\alpha}$; (4.8c) é a equação dinâmica do campo escalar. Note que ela tem uma forma semelhante à da equação de Klein-Gordon para o campo escalar canônico, mas possui uma diferença de sinal no segundo termo, com uma espécie de potencial efetivo no terceiro termo, que depende de V e V_J.

Esse sistema pode ficar ainda mais simples dividindo (4.8b) por $\dot{\alpha}$ e dividindo (4.8c) por $\dot{\phi}$, depois integrando ambas, separadamente, o que permite reescrevê-lo como:

$$\dot{\alpha} = c_1 \cdot e^{-3\alpha} V(\phi) \ , \tag{4.9a}$$

$$\dot{\phi} = c_2 \cdot e^{3\alpha} [V(\phi) V_j(\phi)]^{-1/2} \ . \tag{4.9b}$$

Daí, substituindo estas duas equações no vínculo (4.8a), encontramos $(c_1 c_2)^2 = 1/9$. Então, por simplicidade, basta fixar $c_1 = 1$ e $c_2 = 1/3$. Com essa escolha, o sistema acima automaticamente satisfaz o vínculo. Então, finalmente, podemos dizer que a dinâmica da teoria em questão, no minisuperespaço, é regida pelas equações:

$$\dot{\alpha} = e^{-3\alpha} V(\phi) \ , \tag{4.10a}$$

$$\dot{\phi} = \tfrac{1}{3} e^{3\alpha} [V(\phi) V_j(\phi)]^{-1/2} \ . \tag{4.10b}$$

Para uso posterior, podemos expressar esse sistema de equações em termos de $a = e^{\alpha}$ e ϕ como

$$\dot{a} = a^{-2} V(\phi) \ , \tag{4.11a}$$

$$\dot{\phi} = \tfrac{1}{3} a^{3} [V(\phi) V_j(\phi)]^{-1/2} \ . \tag{4.11b}$$

A estrutura das equações acima implica que o campo escalar pode ser compreendido como uma escala de tempo. De fato, o conceito de mudança de variável corresponde ao de difeomorfismo: uma função real de uma variável real $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é um difeomorfismo quando é uma função diferenciável, inversível e cuja inversa é também diferenciável. Então, olhando para (4.10b), vemos que a única maneira de $\dot{\phi}$ estar bem definida é que $VV_J > 0$. Daí, o segundo membro de (4.10b) é uma função positiva, ou seja, $\dot{\phi} > 0$ sempre. Por sua vez, isto implica que ϕ é uma função monótona estritamente crescente. Como ϕ já é duas vezes diferenciável, por hipótese (senão a equação (4.8c) não faria sentido), segue de um teorema conhecido de análise real[1] que ϕ é um difeomorfismo. Em outras palavras, ele é uma escala de tempo, já que o tempo é a sua variável.

Devido a isso, não se faz necessário procurar uma solução muito complicada para ϕ, de modo que podemos supor $\phi = t$, o caso mais simples possível nas condições dadas. Então, para $\phi = t$, podemos obter várias soluções singulares, de ricochete e cíclicas, dependendo do potencial V e da função V_J. As possibilidades para (4.10) são infinitas, por isso vamos apenas fornecer alguns exemplos importantes de soluções para o fator de escala. O campo escalar representará o tempo, para todas elas.

4.2.1 Soluções Singulares

Escolhendo

$$V(\phi) = V_0 \phi^{\frac{1-w}{1+w}} \ , \tag{4.12a}$$

$$V_j(\phi) = \frac{V_0}{4}(1+w)^2 \phi^{\frac{3+w}{1+w}} \ , \tag{4.12b}$$

onde V_0 e w são constantes positivas, encontramos:

$$a(t) = (t/t_0)^{\frac{2}{3(1+w)}} \ , \tag{4.13}$$

que é uma solução do tipo lei de potência, escrita de maneira análoga às soluções do tipo fluido perfeito da cosmologia padrão, sendo w o análogo do parâmetro da equação de estado. A constante em (4.13) é $t_0 = [2/3V_0(1+w)]^{\frac{1+w}{2}}$. Para $w = 1$, o universo é dominado por matéria rígida; para $w = 1/3$, dominado por radiação; para $w = 0$, dominado por poeira. Estas soluções são todas singulares, em $t = 0$.

Escolhendo agora

$$V(\phi) = V_0 e^{3\gamma\phi} \ , \tag{4.14a}$$

$$V_j(\phi) = \frac{V_0}{9\gamma^2} e^{3\gamma\phi} \ , \tag{4.14b}$$

[1] Ver, por exemplo, o Corolário 6 do Teorema 7 do Capítulo VII de [123].

podemos obter uma solução do tipo de Sitter:

$$a(t) = a_0 e^{\gamma t} \ , \tag{4.15}$$

onde γ e V_0 são constantes positivas, sendo $a_0 = (V_0/\gamma)^{1/3}$.

4.2.2 Universos com Ricochete

As soluções anteriores possuem versões “corrigidas” por um ricochete que também podem ser obtidas de (4.10). Por exemplo, para

$$V(\phi) = V_0\phi(\phi_0^2 + \phi^2)^{\frac{-w}{1+w}} \ , \tag{4.16a}$$

$$V_j(\phi) = \frac{V_0}{4\phi}(1+w)^2(\phi_0^2 + \phi^2)^{\frac{2+w}{1+w}} \ , \tag{4.16b}$$

obtemos

$$a(t) = a_0 \left[1 + (t/t_0)^2\right]^{\frac{1}{3(1+w)}} \ . \tag{4.17}$$

As quantidades V_0 e $\phi_0 = t_0$ são constantes positivas e $a_0 = [3V_0(1+w)\phi_0^{2/(1+w)}/2]^{1/3}$. Já discutimos a relação entre as soluções (4.13) e (4.17) na Seção 1.7. Na Figura 1.1, fica claro que (4.13) é singular e (4.17) representa um universo com ricochete que tende a (4.13) para o limite assintótico $t \gg t_0$. Esse limite também é consistente com a relação entre os potenciais (4.12) e (4.16). Uma solução desse tipo seria uma maneira de remover a singularidade em um cenário em que o fator de escala se comporta como uma lei de potências após o Big Bang. Neste caso, o Big Bang seria substituído pelo ricochete.

Como discutimos na Seção 1.7, não é consenso que a solução de de Sitter seja singular. Mesmo assim, também podemos apresentar uma versão “corrigida” dela, no mesmo sentido da anterior. Fixando agora

$$V(\phi) = V_0 \mathrm{senh}(\gamma\phi)\cosh^2(\gamma\phi) \ , \tag{4.18a}$$

$$V_j(\phi) = \frac{V_0 \cosh^4(\gamma\phi)}{9\gamma^2 \mathrm{senh}(\gamma\phi)} \ , \tag{4.18b}$$

encontramos a solução de ricochete

$$a(t) = a_0 \cosh(\gamma t) \ , \tag{4.19}$$

onde V_0,γ são constantes positivas e $a_0 = (V_0/\gamma)^{1/3}$. Para $t \gg t_0$, o fator de escala de ricochete (4.19) tende a de Sitter, da forma (4.17). Assim como no caso anterior, isso também está de acordo com os limites assintóticos dos potenciais (4.18), que tendem a (4.14). Uma solução como (4.19) é um modo de remover a singularidade em um cenário em que, após o Big Bang, o universo experimenta uma aceleração que se aproxime de de Sitter.

4.2.3 Universos Cíclicos

Para complementar, podemos apresentar um exemplo de universo cíclico que pode ser obtido das equações clássicas do Fab Four John. Escolhendo

$$V(\phi) = V_0 \mathrm{sen}(\omega\phi) \left\{ a_m + \frac{V_0}{\omega}[1 - \cos(\omega\phi)] \right\}^2 \ , \tag{4.20}$$

$$V_j(\phi) = \frac{\left\{ a_m + \frac{V_0}{\omega}[1 - \cos(\omega\phi)] \right\}^4}{9V_0 \mathrm{sen}(\omega\phi)} \ , \tag{4.21}$$

obtemos o fator de escala oscilante abaixo, que é não-singular:

$$a(t) = a_m + A[1 - \cos(\omega t)] \ , \tag{4.22}$$

onde $V_0 > 0$, $A = V_0/\omega$ é a amplitude da oscilação, ω é a sua frequência e a_m é o valor mínimo do fator de escala $a(t)$.

Tabela 4.1: Resumo das soluções obtidas nesta Seção. Em todas, mantivemos a interpretação do campo escalar como sendo o próprio tempo.

	$V_J(\phi)$	$V(\phi)$	$a(t)$
(i)	$\frac{V_0}{4}(1+w)^2\phi^{\frac{3+w}{1+w}}$	$V_0\phi^{\frac{1-w}{1+w}}$	$(t/t_0)^{\frac{2}{3(1+w)}}$
(ii)	$\frac{V_0}{9\gamma^2}e^{3\gamma\phi}$	$V_0 e^{3\gamma\phi}$	$a_0 e^{\gamma t}$
(iii)	$\frac{V_0}{4\phi}(1+w)^2(\phi_0^2+\phi^2)^{\frac{2+w}{1+w}}$	$V_0\phi(\phi_0^2+\phi^2)^{\frac{-w}{1+w}}$	$a_0[1+(t/\phi_0)^2]^{\frac{1}{3(1+w)}}$
(iv)	$\frac{V_0\cosh^4(\gamma\phi)}{9\gamma^2\sinh(\gamma\phi)}$	$V_0\sinh(\gamma\phi)\cosh^2(\gamma\phi)$	$a_0\cosh(\gamma t)$
(v)	$\frac{f^4(\phi)}{9V_0\sin(\omega\phi)}$	$V_0\sin(\omega\phi)f^2(\phi)$	$a(t) = a_m + \frac{V_0}{\omega}[1-\cos(\omega t)]$

Um resumo de todas as soluções discutidas nessa seção encontra-se na Tabela 4.1. Concluindo, podemos dizer que fica claro que essa teoria seria capaz de fornecer os mais variados cenários, pelo menos sem levar em conta as perturbações. É curioso que existam soluções clássicas de ricochete. Se o ricochete ocorre num mínimo $a_0 > 0$, e se supormos válida a inflação, por exemplo, este efeito de ricochete se daria em escalas de Planck. Isso deixa então uma questão: será que essa soluções possuem uma motivação quântica? Talvez seja necessário justificá-las quanticamente, de alguma forma. Essa é uma motivação para se estudar o comportamento quântico dessa teoria. Ocorre que, apesar de menos limitado que o caso do início do Capítulo (Lagrangeana (4.1)), quantizar essa teoria é um problema em si, como veremos na Seção seguinte.

4.3 Hamiltoniana e as Potências Fracionárias

Nesta seção, vamos comentar a estrutura peculiar da formulação Hamiltoniana da teoria Fab Four John, no que concerne à quantização. Os cálculos serão feitos usando o fator de escala a em vez de α.

Partindo da Lagrangiana (4.6), como sabemos, os momentos canônicos são definidos por $p = \partial L/\partial \dot{q}$, o que resulta:

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial a} = -6aV_J\frac{\dot{a}\dot{\phi}^2}{N^3} \ , \tag{4.23a}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \phi} = -6aV_J\frac{\dot{a}^2\dot{\phi}}{N^3} \ , \tag{4.23b}$$

$$p_N = \frac{\partial L}{\partial N} = 0 \ . \tag{4.23c}$$

Invertendo as duas primeiras equações, determinamos $\dot{a}$ e $\dot{\phi}$ em função de p_a e p_ϕ:

$$\dot{a} = -N(6aV_j)^{-1/3}p_a^{-1/3}p_\phi^{2/3}, \tag{4.24a}$$

$$\dot{\phi} = -N(6aV_j)^{-1/3}p_a^{2/3}p_\phi^{-1/3}. \tag{4.24b}$$

Com isso, a transformação de Legendre usual

$$H(q,p) = \dot{a}(q,p)p_a + \dot{\phi}(q,p)p_\phi - L(q,p) \tag{4.25}$$

fornece, após alguns cálculos,

$$H = N\left[\frac{-3p_a^{2/3}p_\phi^{2/3}}{2\sqrt[3]{6aV_j(\phi)}} + a^3V(\phi)\right] \equiv N\mathcal{H}\ , \tag{4.26}$$

onde $\mathcal{H}$ não depende de N. Isso mostra que analisar a teoria (4.4) no caso limite em que V e V_J dominam realmente fornece uma teoria em que a Hamiltoniana pode ser determinada usando as operações básicas, sem enfrentar, portanto, aquela limitação algébrica. Em termos físicos, isso significa que podemos estudar, em princípio, o comportamento quântico desse caso limite, o que pode revelar os efeitos quânticos relacionados a esses termos específicos.

As equações (4.24) são da forma $\dot{q}(q,p)$. Lembrando dos Capítulos anteriores, as equações da forma $\dot{q}(q,p)$ são as que permitem transformar as equações guias $p_j = \partial_j S$ em um sistema dinâmico. Devido a isso, essas equações são muito importantes para a quantização. Porém, do modo como estão escritas em (4.24), forneceriam um sistema muito complicado. Então, antes mesmo de discutir a quantização, vamos escrevê-las de um modo muito mais simples, através da relação de vínculo da Hamiltoniana. O vínculo é obtido das equações de Hamilton: de (4.23c), $p_N = 0$, logo

$$0 = \dot{p}_N = -\frac{\partial H}{\partial N}\ . \tag{4.27}$$

Calculando $\partial H/\partial N$, encontramos o vínculo:

$$p_a^{2/3}p_\phi^{2/3} = \frac{2}{3}a^3V[6aV_j(\phi)]^{1/3}\ . \tag{4.28}$$

Finalmente, substituindo esta expressão em (4.24) de modo conveniente, obtém-se:

$$\dot{a} = -\frac{2Na^3V}{3p_a}\ , \tag{4.29a}$$

$$\dot{\phi} = -\frac{2Na^3V}{3p_\phi}\ . \tag{4.29b}$$

Aqui surge o problema de quantizar a Hamiltoniana (4.26). Já discutimos brevemente a quantização canônica na Seção 1.9.3. Para potências inteiras positivas, a quantização de p^n é feita através das derivadas sucessivas (também chamadas de derivadas de ordem superior):

$$p^n \text{ (escalar)} \xrightarrow{\text{quantização}} \hat{p}^n \text{ (operador)} = \left(-i\hbar\frac{d}{dq}\right)^n , \tag{4.30}$$

onde

$$\left(-i\hbar\frac{d}{dq}\right)^n = (-i\hbar)^n \underbrace{\frac{d}{dq}\cdots\frac{d}{dq}}_{n \text{ vezes}} . \tag{4.31}$$

Mas, no caso (4.26), ambos os momentos aparecem com a potência não-inteira 2/3. Logo, é impossível usar a regra acima diretamente, como uma aplicação sucessiva de derivadas ordinárias. Há basicamente duas possibilidades: ou generaliza-se a regra de quantização canônica para potências não-inteiras, ou aplica-se uma mudança de variável na Hamiltoniana para tentar reescrevê-la de um modo tal que ela não apresente esse problema. No primeiro caso, deve-se usar uma *derivada de ordem fracionária*, o que não é uma ideia nova, como se pode ver, por exemplo, no Capítulo 9 de [124]. No segundo caso, as mudanças de variáveis adequadas ao formalismo Hamiltoniano são as *transformações canônicas*, por serem transformações que mantém automaticamente válidas as equações de Hamilton. Neste Capítulo, vamos explorar a segunda opção e, no Capítulo seguinte, a primeira.

4.4 Transformação Canônica

Uma maneira simples de construir uma transformação canônica é através das chamadas *funções geradoras*, como descrito no Capítulo 8 de [99]. Representemos as coordenadas antigas por $q = a,\phi,N$ e as novas por $Q = x,y,z$; os momentos antigos por $p = p_a,p_\phi,p_N$ e os novos por $P = P_x,P_y,P_z$. Vamos explorar a transformação canônica obtida a partir de uma função geradora[2] da forma $F(q,P,t)$, dada por:

$$F(q,P,t) = -\rho a^l P_x^m - \phi^r P_y^n + N P_z , \tag{4.32}$$

[2] Do tipo F_2, na notação de [99].

onde as potências r,l,m e n podem assumir qualquer valor real, em princípio, exceto 0 e 1, pois 0 levaria a uma transformação incompleta (algumas variáveis estariam faltando) e 1 levaria a uma transformação trivial, ou seja, uma transformação que não removeria as potências fracionárias. A constante ρ deve ser positiva. Os valores de r,l,m,n e ρ serão fixados depois, para garantirmos que estamos aplicando a transformação que melhor se ajusta ao problema.

A transformação canônica é gerada por F através das regras:

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \, , \tag{4.33a}$$

$$Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i} \, , \tag{4.33b}$$

$$\tilde{H}(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial F}{\partial t} \, , \tag{4.33c}$$

onde $\tilde{H}$ é a nova Hamiltoniana. Na prática, (4.33a) leva a

$$p_a = -l\rho a^{l-1} P_x^m \, , \tag{4.34a}$$

$$p_\phi = -r\phi^{r-1} P_y^n \, , \tag{4.34b}$$

$$p_N = P_z \, , \tag{4.34c}$$

enquanto que (4.33b) leva a

$$x = -m\rho a^l P_x^{m-1} \, , \tag{4.35a}$$

$$y = -n\phi^r P_y^{n-1} \, , \tag{4.35b}$$

$$z = N \, . \tag{4.35c}$$

Como podemos ver, a transformação acima “mistura” momentos e coordenadas anteriores, o que faz com que a utilidade da transformação para resolver o problema seja fortemente dependente da expressão de V e V_J. Dependendo da particular expressão dessas funções, como o ϕ antigo conterá termos dos novos momentos, pode ser que o problema dos momentos com potências fracionárias fique ainda pior, com uma forte não-linearidade. Por exemplo, imagine $V \sim \cos\phi$. Este ϕ será agora transformado numa função $\phi(Q,P)$. Então, como quantizar, por exemplo, o termo $\cos(P_x)$? Por isso, é possível que uma transformação canônica permita estudar determinada classe de problemas, para isso introduzindo certas variáveis, de modo que outra classe necessitará de outra transformação.

Em princípio, é possível propor as mais variadas transformações canônicas para evitar potências fracionárias para as mais variadas formas que V e V_J podem assumir. No entanto, não existe um procedimento que garanta como de fato encontrar isso, na prática, de modo que essa imensa generalidade seja coberta por uma transformação igualmente geral. Por isso, vamos nos restringir ao caso em que ambas V e V_J são definidas por leis de potência, da forma

$$V(\phi) = V_0\phi^{\varepsilon}, \qquad V_j(\phi) = V_{J0}\phi^{\delta} \, . \tag{4.36}$$

Com essa restrição, segue de (4.33c), (4.34) e (4.35) que

$$\tilde{H} = z\left[-f \cdot P_x^{\frac{2}{3}+\frac{m-1}{l}} P_y^{\frac{2}{3}+\frac{2+\delta}{3}\cdot\frac{n-1}{r}} + g \cdot P_x^{\frac{3}{l}(1-m)} P_y^{\frac{\varepsilon}{r}(1-n)} \right] \equiv z\tilde{\mathcal{H}} \, , \tag{4.37}$$

onde $\tilde{\mathcal{H}}$ não depende de z (pois $N = z$) e definimos

$$f(x,y) \equiv \frac{3}{2}\left[\frac{(\rho l r)^2}{6V_{J0}}\right]^{1/3} \left(\frac{-x}{\rho m}\right)^{\frac{2}{3}-\frac{1}{l}} \left(\frac{-y}{n}\right)^{\frac{2}{3}-\frac{2+\delta}{3r}} \, , \tag{4.38}$$

$$g(x,y) \equiv V_0\left(\frac{-x}{\rho m}\right)^{\frac{3}{l}} \left(\frac{-y}{n}\right)^{\frac{\varepsilon}{r}} \, . \tag{4.39}$$

Agora a transformação está completa. Vejamos como eliminar as potências fracionárias em $\tilde{H}$. Por (4.34c), $0 = p_N = p_z$. Logo, pela equação de Hamilton para P_z, tem-se $0 = \dot{P}_z = -\partial\tilde{H}/\partial z$, de onde encontramos finalmente o vínculo de $\tilde{H}$:

$$P_x^{\frac{2}{3}+4\frac{m-1}{l}} P_y^{\frac{2}{3}+\frac{2+\delta+3\varepsilon}{3}\cdot\frac{n-1}{r}} = \frac{g}{f} \equiv \lambda. \tag{4.40}$$

por simplicidade, podemos escolher

$$l = 6 \qquad \text{e} \qquad r = \tfrac{1}{2}(2+\delta+3\varepsilon) \, , \tag{4.41}$$

de tal modo que λ seja a constante positiva abaixo:

$$\lambda = \frac{2V_0}{3}\left[\frac{V_{J0}}{6(r\rho)^2}\right]^{1/3} . \tag{4.42}$$

Com isso, o vínculo (4.40) se torna:

$$P_x^{2m/3}P_y^{2n/3} = \lambda . \tag{4.43}$$

Restam então livres m e n. Para que essa equação seja de segunda ordem, o que manterá a intuição física de uma equação de movimento, existem apenas três possibilidades: (i) $m = 2$ e $n = 0$; (ii) $m = 0$ e $n = 2$; (iii) $m = n = 3/2$. Porém, como $m = 0$ ou $n = 0$ dariam uma transformação incompleta (ver (4.32)), a escolha (iii) parece ser a mais adequada. Com isso, obtemos finalmente o vínculo abaixo:

$$P_x P_y = \lambda . \tag{4.44}$$

Observe que esse vínculo não depende das escolhas de δ e ε, as potências de V e V_j, que foram "absorvidas" na escolha da constante r em (4.41). Portanto, a equação de vínculo (4.44) apresenta apenas potências inteiras positivas. Resumindo, o problema das potências fracionárias foi resolvido para a Hamiltoniana (4.25) para o caso em que ambas V e V_J são definidas por leis de potência, graças à transformação canônica definida por (4.32) e (4.33), sendo $l = 6$, $r = \frac{1}{2}(2 + \delta + 3\varepsilon)$ e $m = n = 3/2$. Resta fixar apenas ρ, mas isto será feito por uma condição que surge da quantização.

4.5 Quantização com Interpretação de Bohm-de Broglie

Aplicando agora a regra de quantização canônica, obtemos a equação de Wheeler-DeWitt abaixo:

$$\hbar^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} = -\lambda\psi, \tag{4.45}$$

onde $\psi(x,y)$ é a função de onda do universo para esta teoria. A sua solução básica é

$$\psi_k(x,y) = e^{i(kx+\omega y)/\hbar}, \tag{4.46}$$

onde $k \neq 0$ é uma constante real, que pode ser obtida, por exemplo, através de uma separação de variáveis em (4.45), e $\omega \equiv \lambda/k$ é uma relação de dispersão.

Para aplicar a interpretação de Bohm-de Broglie, como usual, escrevemos uma solução genérica ψ (não necessariamente (4.46)) na forma polar

$$\psi(x,y) = R(x,y)e^{iS(x,y)/\hbar} \ . \tag{4.47}$$

Substituindo essa expansão de ψ em (4.45), as partes imaginária e real dessa equação fornecem, respectivamente,

$$R\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial S}{\partial x} = 0 \ , \tag{4.48a}$$

$$-\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial y} + \lambda + \frac{\hbar^2}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} = 0 \ , \tag{4.48b}$$

Multiplicando (4.48b) por $f \cdot (\partial S/\partial x)^{-\frac{3}{l}(m-1)}(\partial S/\partial x)^{-\frac{\varepsilon}{r}(n-1)}$, encontramos:

$$-f \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^{\frac{2}{3}+\frac{m-1}{l}} \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{\frac{2}{3}+\frac{2+\delta}{3}\cdot\frac{n-1}{r}} + g \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^{\frac{3}{l}(1-m)} \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{\frac{\varepsilon}{r}(1-n)} + Q(x,y) = 0 \ , \tag{4.49}$$

onde

$$Q = \frac{\hbar^2 f}{R}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^{\frac{-\varepsilon}{2r}}\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} \ . \tag{4.50}$$

Então, comparando (4.49) com (4.37), vemos que, a menos do termo Q, (4.49) é a equação de Hamilton-Jacobi (estacionária) referente à Hamiltoniana (4.37). Isso mostra, de acordo com a interpretação de Bohm-de Broglie, que as equações guias são

$$P_x = \frac{\partial S}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad P_y = \frac{\partial S}{\partial y} \tag{4.51}$$

e que o potencial quântico é Q, dado por (4.50). As equações guias e o potencial quântico nos dão ferramentas para estudar o comportamento quântico do problema, dada uma solução ψ

da equação (4.45).

Porém, vamos nos restringir a mostrar um resultado bem simples, qual seja, que o formalismo quântico acima descrito é capaz de recuperar as soluções clássicas quando $Q = 0$, o que significa que de fato as equações clássicas são recuperadas sem a presença do potencial quântico. Para isso, consideramos a solução do tipo onda plana, (4.46). Para esta solução, temos $R = 1$ e $S = kx + \omega y$, o que implica $Q = 0$. Então, as equações guias (4.51) fornecem $P_x = k$ e $P_y = \lambda/k$. Comparando isso com (4.34a) e (4.34b), encontramos os momentos nas variáveis originais:

$$p_a = -6\rho k^{3/2} a^5 \,, \tag{4.52}$$

$$p_\phi = -r(\lambda/k)^{3/2}\phi^{r-1} \,. \tag{4.53}$$

Finalmente, podemos substituir esses momentos obtidos quanticamente no sistema (4.29), obtendo (lembrando também de (4.36)):

$$\dot{a} = \frac{V_0}{9\rho k^{3/2}}\frac{\phi^{\varepsilon}}{a^2} \,, \tag{4.54a}$$

$$\dot{\phi} = \frac{2V_0}{3r}\left(\frac{k}{\lambda}\right)^{3/2} a^3 \phi^{-\frac{1}{2}(\delta+\varepsilon)} \,. \tag{4.54b}$$

Portanto, fixando $\rho = 1/9k^{3/2}$, o sistema acima se torna exatamente igual ao sistema clássico (4.11), quando V e V_J tem a forma (4.36), e essa equivalência não depende dos valores das potências δ e ε. Em particular, isso é válido para os potenciais (4.12), responsáveis pela descrição de um fator de escala análogo ao de um fluido perfeito.

Se redefinirmos o campo escalar como $\varphi \equiv e^{\phi}$, podemos estudar os potenciais (4.14) como um caso particular do caso descrito acima. Então, o que se pode concluir dessa seção é que, através de uma transformação canônica adequada, podemos construir um formalismo quântico para a teoria Fab Four John, pelo menos em dois casos: ambos V e V_J são dados por leis de potência, caso no qual o fator de escala clássico é semelhante ao de um modelo de fluido perfeito; quando ambos V e V_J são exponenciais $\sim e^{u\phi}$ (com u constante), caso no qual o fator de escala clássico descreve um universo de de Sitter. Em particular, isso é verdade para os potenciais (4.14).

Com esse formalismo, é possível estudar soluções mais complicadas do que a onda plana (4.46). Porém, o nosso objetivo aqui era apenas iniciar essa versão quântica da teoria, mostrando que o limite clássico é recuperado de uma maneira adequada, sob o ponto de vista da interpretação de Bohm-de Broglie, que adotamos ao longo de todo este trabalho. Resumindo fisicamente, quando o universo é dominado classicamente nessa teoria por matéria, radiação, matéria rígida, ou quando ele se expande exponencialmente, é possível aplicar o formalismo da interpretação causal. Porém, analisar soluções que possam revelar efeitos quânticos sobre esses cenários de expansão do universo requerem que se analise outras soluções da equação de Wheeler-DeWitt, e isso é matéria para desenvolvimentos futuros.

Capítulo 5

A Teoria Fab Four John via Derivada Fracionária Conforme

5.1 Introdução

No Capítulo anterior, estudamos a teoria Fab Four John, que representa um acoplamento não-mínimo entre a gravidade e o campo escalar, representada de modo covariante pela Lagrangeana (4.5). Vimos que a sua quantização apresenta uma estrutura incomum, devido à presença de momentos com potências fracionárias. Vimos também que há dois modos de abordar esse problema, pelo menos no contexto presente: as transformações canônicas, que estudamos no Capítulo anterior, e as derivadas fracionárias. Neste Capítulo, vamos descrever como é possível quantizar essa teoria no minisuperespaço através da chamada *Derivada Fracionária Conforme* (DFC).

Sobre as derivadas fracionárias e sobre a DFC em particular, ver o Apêndice B, onde comentamos também algumas motivações para se usar a DFC e algumas de suas aplicações. Em poucas palavras, para o caso de interesse aqui, é suficiente dizer que essa derivada pode ser definida do seguinte modo: a derivada fracionária de ordem β, onde $0 < \beta \leqslant 1$, da função ψ em relação à coordenada q_j é:

$$\frac{\partial^\beta \psi}{\partial q_j^\beta} = q_j^{1-\beta}\frac{\partial \psi}{\partial q_j} . \tag{5.1}$$

Essa propriedade é equivalente a modificar o limite usual que define as derivadas. Note que, dependendo do valor de β, o domínio (conjunto de valores possíveis para as coordenadas q_j) pode sofrer uma restrição. Este não é o caso para o valor que nos interessa, $\beta = 2/3$, já que qualquer número real pode ser elevado a $1 - \beta = 1/3$ e resultar ainda num número real. Na prática, então, podemos apenas aplicar (5.1).

Essa derivada foi escolhida pela sua simplicidade, com o objetivo de fornecer uma primeira abordagem à quantização de teorias cosmológicas no minisuperespaço que apresentem momentos com potências fracionárias. É o caso, por exemplo, da teoria de k-essência estudada em [125]. Não existe uma resposta definitiva sobre qual seria a definição "correta" para uma derivada de ordem fracionária. O máximo que se pode fazer é escolher uma de acordo com diferentes critérios. Para mais informações sobre essa derivada, suas aplicações e sobre as outras derivadas fracionárias, ver o referido Apêndice e as referências nele citadas. Vamos agora nos restringir mais diretamente à construção da interpretação de Bohm-de Broglie da teoria em questão quando a quantização é feita usando a DFC. O conteúdo deste Capítulo foi apresentado em [126].

5.2 Quantização da Teoria Fab Four John com a DFC

A derivada fracionária (5.1) permite generalizar a regra de quantização canônica (4.30) para potências não-inteiras $\beta \in (0,1]$:

$$p_j^\beta \ (\text{escalar}) \xrightarrow{\text{quantização}} \hat{p}_j^\beta \ (\text{operador}) = \left(-i\hbar \frac{d}{dq_j}\right)^\beta \ , \tag{5.2}$$

onde o resultado da aplicação desse operador sobre ψ é (pela definição da DFC):

$$\left(-i\hbar \frac{d}{dq_j}\right)^\beta \psi = (-i\hbar)^\beta q_j^{1-\beta} \frac{\partial \psi}{\partial q_j} \ . \tag{5.3}$$

Aplicando então essa regra à Hamiltoniana (4.26), encontramos

$$\hat{p}_\phi^{2/3} \psi = (-i\hbar)^{2/3} \phi^{1/3} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \ . \tag{5.4}$$

Aplicando novamente a regra, encontramos

$$\hat{p}_a^{2/3}\hat{p}_\phi^{2/3}\psi = (-i\hbar)^{2/3}a^{1/3}\frac{\partial}{\partial a}\left[(-i\hbar)^{2/3}\phi^{1/3}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right] = \hbar^{4/3}(a\phi)^{1/3}\frac{\partial^2\psi}{\partial a\partial\phi} \, . \tag{5.5}$$

Então, podemos aplicar essa regra para obter uma equação de Wheeler-DeWitt $\hat{\mathcal{H}}\psi = 0$. Por (4.26) e (5.5), essa equação é

$$\hbar^{4/3}\frac{\partial^2\psi}{\partial a\partial\phi} = a^3 u(\phi)\psi, \qquad \text{onde} \qquad u(\phi) \equiv V(\phi)\left[\frac{16V_J(\phi)}{9\phi}\right]^{1/3} \, . \tag{5.6}$$

Antes de resolver essa equação, precisamos ver como fica a interpretação de Bohm-de Broglie para ela, para poder saber como as soluções devem ser tratadas.

5.3 Interpretação de Bohm-de Broglie

Em geral, fazemos a expansão $\psi = Re^{iS/\hbar}$. Mas, no caso em questão, é mais conveniente escrever ψ na seguinte forma polar, com R e S funções reais:

$$\psi = R\,\exp\left(\frac{iS}{\hbar^{2/3}}\right) \, . \tag{5.7}$$

De fato, substituindo (5.7) em (5.6), a parte real pode ser reescrita do seguinte modo:

$$-\frac{3/2a^3}{[6aV_J(\phi)]^{1/3}}\left(\frac{\partial S}{\partial a}\cdot\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^{2/3} + V(\phi) + Q(a,\phi) = 0 \, , \tag{5.8}$$

onde

$$Q(a,\phi) = -V(\phi) + \frac{3/2a^3}{[6aV_J(\phi)]^{1/3}}\left[\frac{\hbar^{4/3}}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial a\partial\phi} - a^3 u(\phi)\right]^{2/3} \, . \tag{5.9}$$

A equação de Hamilton-Jacobi (clássica e estacionária) referente à mesma Hamiltoniana (4.26), para $N = 1$, é igual a (5.8), a menos do termo Q, que contém $\hbar^{4/3}$. Então, de acordo com a interpretação de Bohm-de Broglie, concluímos que Q pode ser interpretado como o potencial quântico da teoria e as equações guias tem a forma usual:

$$p_a = \frac{\partial S}{\partial a} \qquad \text{e} \qquad p_\phi = \frac{\partial S}{\partial\phi} \, . \tag{5.10}$$

Em termos das velocidades generalizadas, dadas por (4.29), as equações guias se escrevem:

$$\dot{a} = -\frac{2}{3}Na^3V\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)^{-1} \qquad \text{e} \qquad \dot{\phi} = -\frac{2}{3}Na^3V\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^{-1} . \tag{5.11}$$

Isso completa a descrição geral via Bohm-de Broglie da teoria do Fab Four John quântica com DFC. Agora, para estudar uma solução para $a(t)$, devemos resolver a equação de Wheeler-DeWitt para obter uma função de onda particular para que, a partir dela, possamos aplicar esse formalismo, obtendo um sistema dinâmico com (5.11). Então, vamos obter uma solução e discutir, a partir dela, a dinâmica de $a(t)$ e sua relação com Q, que é o que interessa fisicamente na discussão presente.

A equação de Wheeler-DeWitt (5.6) tem uma peculiaridade: ela pode ser resolvida quaisquer que sejam V e V_J. De fato, por separação de variáveis, encontramos a solução abaixo, que lembra, de certo modo, uma onda plana:

$$\psi(a,\phi) = \exp\left[\frac{i}{\hbar^{2/3}}\left(-\frac{k}{4}a^4 + \frac{1}{k}\int^{\phi} u(\bar{\phi})d\bar{\phi}\right)\right] , \tag{5.12}$$

onde $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ é a constante de separação e $\int^{\phi} u(\bar{\phi})d\bar{\phi}$ denota a primitiva de $u(\phi)$ para a qual a constante de integração é nula. Comparando (5.12) com a forma polar geral (5.7), vemos que, para (5.12), tem-se $R = 1$ e $S = -\frac{k}{4}a^4 + \frac{1}{k}\int^{\phi} u(\bar{\phi})d\bar{\phi}$. Portanto, para (5.12), o potencial quântico se torna

$$Q(a,\phi) = -V(\phi) + \left[\frac{9V^6(\phi)}{16a^{12}V_J(\phi)\phi^2}\right]^{1/9} , \tag{5.13}$$

enquanto as equações guias se tornam

$$\dot{a} = \frac{2}{3k}V(\phi) , \tag{5.14a}$$

$$\dot{\phi} = -\frac{2ka^3}{3}\left[\frac{9\phi}{16V_J(\phi)}\right]^{1/3} . \tag{5.14b}$$

As equações guias acima formam um sistema dinâmico autônomo, muito similar ao clássico (4.11). A diferença entre eles é uma consequência direta da quantização. Para que fique mais claro esse efeito, devemos fixar V e V_J, que determinarão a dinâmica de a e ϕ, e depois devemos calcular o potencial quântico correspondente, usando (5.13). Com as soluções determinísticas para $Q(t)$ e $a(t)$ assim obtidas, podemos investigar o seu significado físico através da relação entre essas quantidades. Isso será feito do mesmo modo como fizemos nos Capítulos anteriores, que é o procedimento padrão em Bohm-de Broglie: os intervalos de tempo nos quais Q domina devem ser os períodos nos quais os efeitos quânticos (gerados pela quantização acima, obtida da DFC) são predominantes. Esse será, portanto, nosso critério para investigar se uma expansão, contração ou mesmo um ricochete é resultado de um efeito quântico. No entanto, como as soluções possíveis são infinitas, devido à liberdade imensa sobre V e V_J, vamos estudar somente alguns casos que podem ser mais interessantes.

Nas duas Seções a seguir, vamos estudar as soluções da Tabela 4.1, de dois modos complementares. Primeiro, para explorar as diferenças intrínsecas entre os sistemas clássico (4.11) e quântico (5.14), vamos estudar cada uma das cinco combinações de V e V_J da Tabela 4.1. Desse modo, nós veremos que a predominância de Q é muito forte, em todos os cinco cenários, o que faz com que as soluções sejam muito diferentes das soluções clássicas, sem que haja, no entanto, uma solução para qualquer singularidade. Essa abordagem será descrita na Seção 5.4.

O segundo modo de estudar as soluções da Tabela 4.1 assemelha-se mais à abordagem adotada na Seção 4.2: fixar V e V_J de modo que cada uma das soluções para $a(t)$ da Tabela 4.1 sejam obtidas. Por simplicidade, vamos supor que o campo escalar é o próprio tempo, como fizemos na análise clássica. Essas duas diferentes análises do mesmo sistema não o esgotam, certamente, mas nos servirão como importante indicativo sobre o funcionamento desse formalismo e suas implicações para a dinâmica do universo primordial. Além disso, podem servir como um novo método que pode ser aplicado em outras teorias, além de fornecer uma rota para possíveis abordagens com outras derivadas fracionárias.

5.4 Soluções Quânticas I

5.4.1 Solução (i)

As funções V e V_J da solução (i) da Tabela 4.1 fornecem as seguintes equações, para o sistema dinâmico (5.14):

$$\dot{a} = \frac{2V_0}{3k}\phi^{\frac{1-w}{1+w}} , \tag{5.15a}$$

$$\dot{\phi} = -\frac{2ka^3}{3}\left[\frac{9}{4V_0(1+w)^2}\right]^{1/3}\phi^{\frac{-2}{3(1+w)}} . \tag{5.15b}$$

Então, o potencial quântico (5.13) se torna:

$$Q(a,\phi) = -V_0\phi^{\frac{1-w}{1+w}} + \left[\frac{9V_0^5}{4(1+w)^2}\right]^{1/9}\phi^{\frac{1-9w}{9(1+w)}}a^{-4/3} . \tag{5.16}$$

As equações (5.15) formam um sistema dinâmico. Para $w = 0$, o esboço de suas soluções é apresentado na Figura 5.1, onde podemos ver que as suas soluções são todas singulares: o universo começa com uma expansão, a partir da singularidade $a = 0$; então, em algum instante ele atinge o máximo de a; após isso, ele se contrai para a singularidade novamente. Também na Figura 5.1, podemos ver a evolução do potencial quântico para uma solução particular, indicando que Q domina quando a está próximo do valor singular $a = 0$. Comparando agora as soluções quânticas com as clássicas, podemos concluir que as funções V e V_J que fornecem a solução clássica $a(t)$ da linha (i) da Tabela 4.1, que é $a \sim t^{2/3}$, não descrevem um universo em expansão quando aplicadas ao formalismo quântico obtido a partir da DFC. Portanto, o sistema é singular e o potencial quântico domina próximo à singularidade $a = 0$, o que significa que o efeito quântico, para este caso em particular, é fazer o universo voltar à singularidade. Todos esses comentários permanecem válidos para os casos $w = 1$ e $w = 1/3$.

A predominância de Q para a próximo de 0 fica mais evidente no gráfico tridimensional 5.2, onde vemos que Q diverge em $a = 0$, decaindo (em módulo) à medida que a aumenta. Podemos interpretar fisicamente esse resultado do seguinte modo: para esta solução, há uma predominância da dinâmica quântica, governada por Q, sendo que esse efeito é tão forte que impede o universo de se expandir. Para ver simultaneamente o comportamenteo de Q e das soluções do sistema dinâmico (5.15), veja a Figura 5.3.

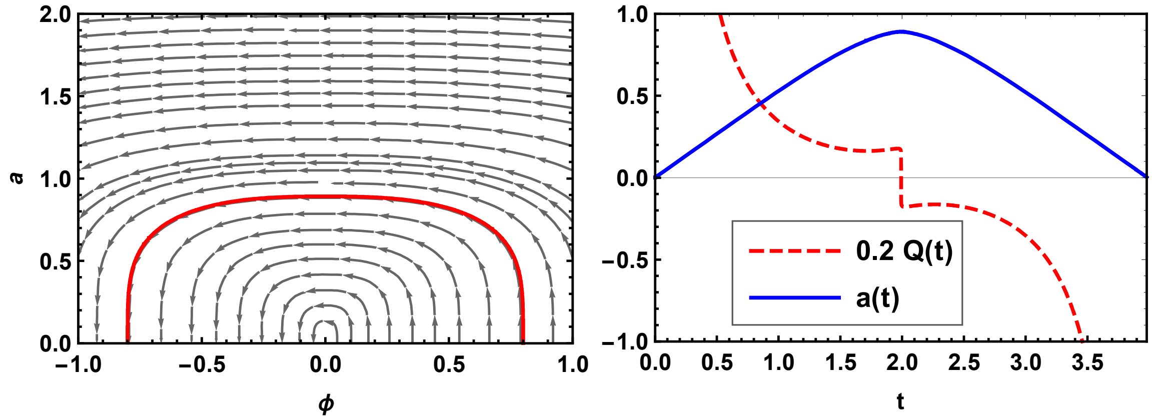

Figura 5.1: Do lado esquerdo, vemos o gráfico das soluções do sistema (5.15), para o caso de "poeira" ($w = 0$), com $V_0 = k = 1$, sendo que a linha vermelha representa a solução cujas c.i. são $\phi(0) = 0.8$ e $a(0) = 0.001$, como um exemplo. Do lado direito, vemos o comportamento do fator de escala (linha contínua) e do potencial quântico (5.16) (linha tracejada), para a solução em destaque do lado esquerdo.

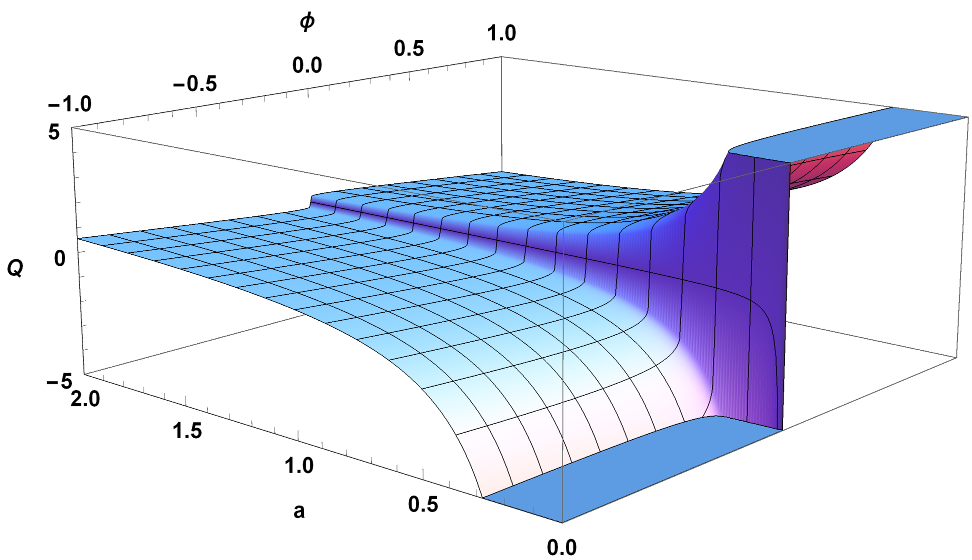

Figura 5.2: Gráfico tridimensional do potencial quântico (5.16), para os mesmos valores de constantes da Figura anterior.

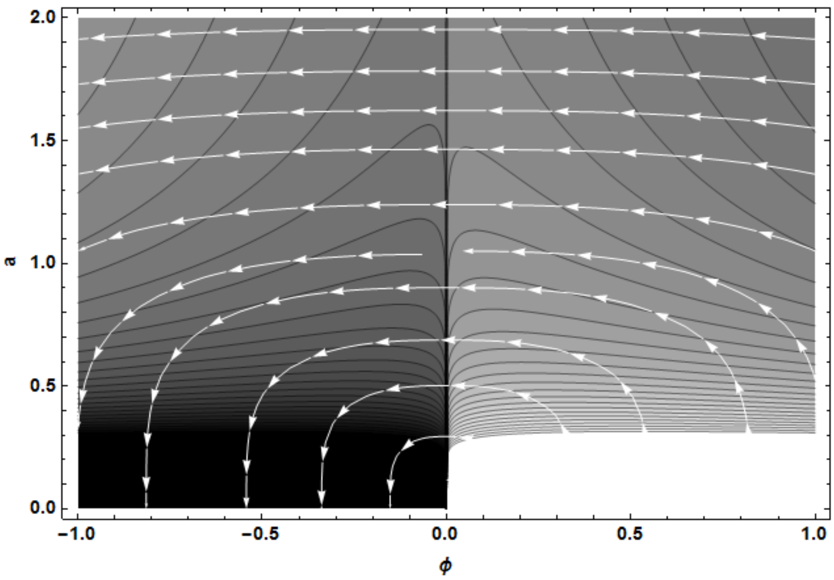

Figura 5.3: Comparação entre o potencial quântico (5.16) e as soluções do sistema dinâmico (5.15). Quanto mais claro, maior o valor de Q. Uma região branca indica que deve haver uma divergência para $+\infty$ e uma região preta indica que deve haver uma divergência para $-\infty$. Esta mesma convenção se aplica a todos os outros gráficos desse tipo neste trabalho.

5.4.2 Solução (ii)

Agora, para os V e V_J da solução (ii) da Tabela 4.1, as equações guias são:

$$\dot{a} = \frac{2V_0}{3k} e^{3\gamma\phi} \,, \tag{5.17a}$$

$$\dot{\phi} = -k \left[\frac{3\gamma^2\phi}{2V_0}\right]^{1/3} a^3 e^{-\gamma\phi} \,. \tag{5.17b}$$

E o potencial quântico é:

$$Q(a,\phi) = -V_0 e^{3\gamma\phi} + \left(\frac{81\gamma^2 V_0^5}{16\phi^2 a^{12}}\right)^{1/9} e^{5\gamma\phi/3} \,. \tag{5.18}$$

Na Figura 5.4, podemos ver as soluções do sistema dinâmico (5.17) e a sua comparação com o potencial quântico, para uma solução particular. Podemos ver que, também neste caso, todas as soluções são singulares. Apesar de as soluções serem de expansão, elas evoluem para o valor $\phi = 0$, que, muito embora não seja uma singularidade na métrica, é um valor singular do sistema dinâmico (5.17). Então as soluções, neste caso, serão também muito diferentes das clássicas $a \sim e^{\gamma t}$, que se obtém para o mesmo par V, V_J (ver Tabela 4.1).

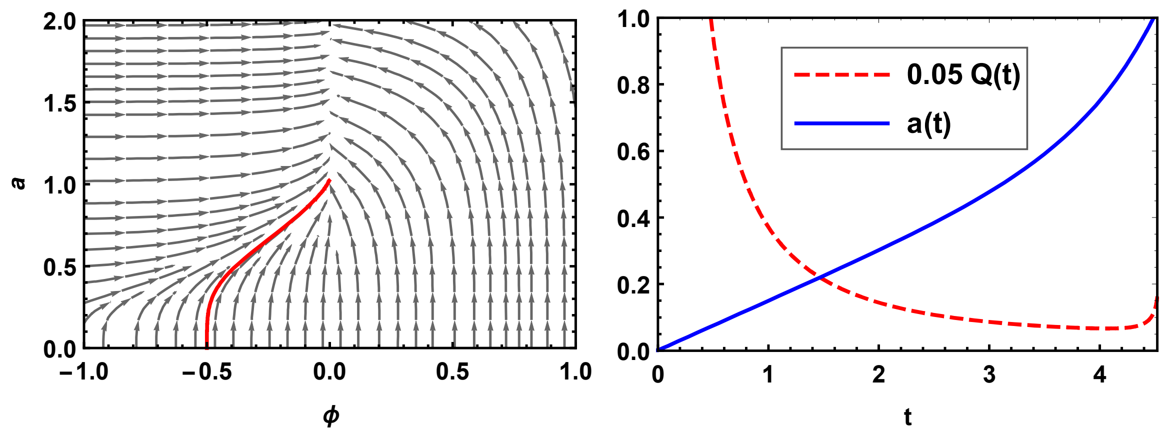

Figura 5.4: Do lado esquerdo, vemos as soluções do sistema dinâmico (5.17), com $V_0 = k = \gamma = 1$, com uma curva em destaque, cujas c.i. são $\phi(0) = -0.5$ e $a(0) = 0.001$. Do lado direito, vemos o comportamento de Q (linha pontilhada) e $a(t)$ (curva contínua) para esta solução em particular.

O comportamento do potencial quântico é parecido com o do caso anterior, mas há diferenças, como se pode ver na Figura 5.5, que apresenta o comportamento tridimensional de Q, e na Figura 5.6, que compara os valores de Q e as soluções do sistema dinâmico (5.17). Vemos que, além de divergir para $a = 0$, Q também diverge para $\phi \longrightarrow +\infty$, em acordo com (5.18). Na Figura 5.6, também fica evidente a divergência de Q para $\phi = 0$, o que está de acordo com 5.18.

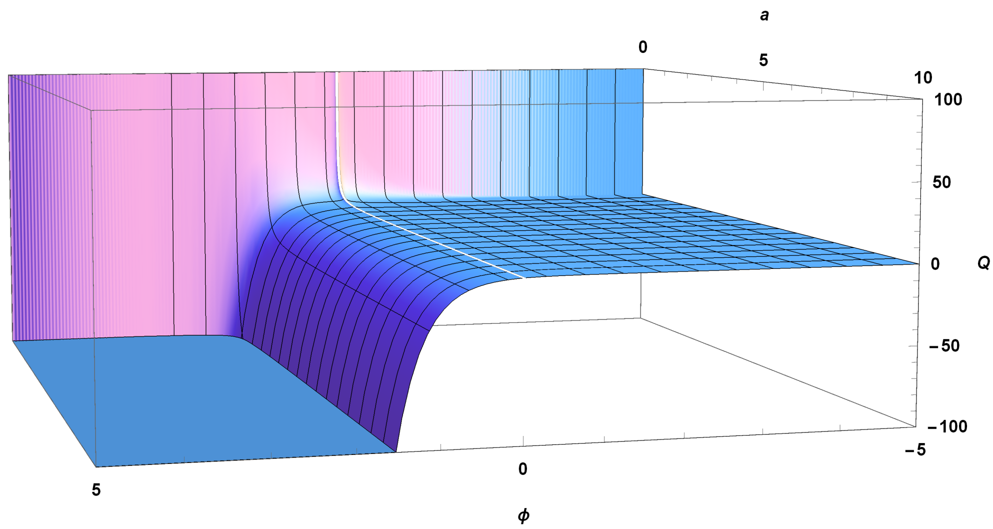

Figura 5.5: Gráfico tridimensional do potencial quântico (5.18), para os mesmos valores de constantes da Figura anterior. Note que Q não está definido em $\phi = 0$.

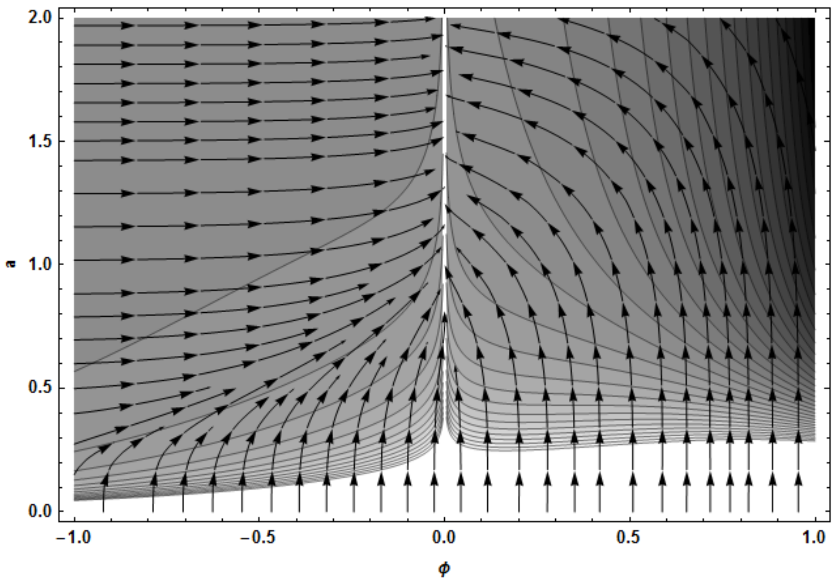

Figura 5.6: Comparação entre o potencial quântico (5.18) e as soluções do sistema dinâmico (5.17).

5.4.3 Solução (iii)

Para V e V_J da solução (iii) da Tabela 4.1, o sistema dinâmico quântico se torna:

$$\dot{a} = \frac{2V_0}{3k}\phi(\phi_0^2+\phi^2)^{\frac{-w}{1+w}} \,, \tag{5.19a}$$

$$\dot{\phi} = -\frac{2ka^3}{3}\left[\frac{9\phi^2}{4V_0(1+w)^2}\right]^{1/3}(\phi_0^2+\phi^2)^{-\frac{2+w}{3(1+w)}} \,. \tag{5.19b}$$

E o potencial quântico se torna:

$$Q(a,\phi) = -V_0\phi(\phi_0^2+\phi^2)^{\frac{-w}{1+w}} + \left[\frac{9V_0^5\phi^5}{4(1+w)^2a^{12}}\right]^{1/9}(\phi_0^2+\phi^2)^{-\frac{2+7w}{9(1+w)}} \,. \tag{5.20}$$

Para o caso clássico, linha (iii) da Tabela 4.1, o fator de escala apresenta um ricochete, que é seguido por uma expansão. Da Figura 5.7, podemos ver que este não é o caso para as soluções quânticas de (5.19) para $w = 0$, já que todas as soluções serão singulares: elas começam na singularidade $a = 0$, atingem um máximo em $\phi = t = 0$ e então segue-se uma fase de contração que culmina na singularidade $a = 0$. Esses comentários permanecem válidos para os casos $w = 1$ e $w = 1/3$, como se pode verificar das expressões acima.

O potencial quântico pode ser interpretado de um modo muito semelhante à da solução (i), estudada acima. De fato, note a semelhança entre as Figuras 5.8 e 5.2, que mostram o gráfico de Q como função de a e ϕ. Ao compararmos as soluções do sistema dinâmico (5.19) com o potencial quântico (5.20), na Figura 5.9, percebemos a enorme semelhança com o caso (i) ao olhar a Figura 5.3.

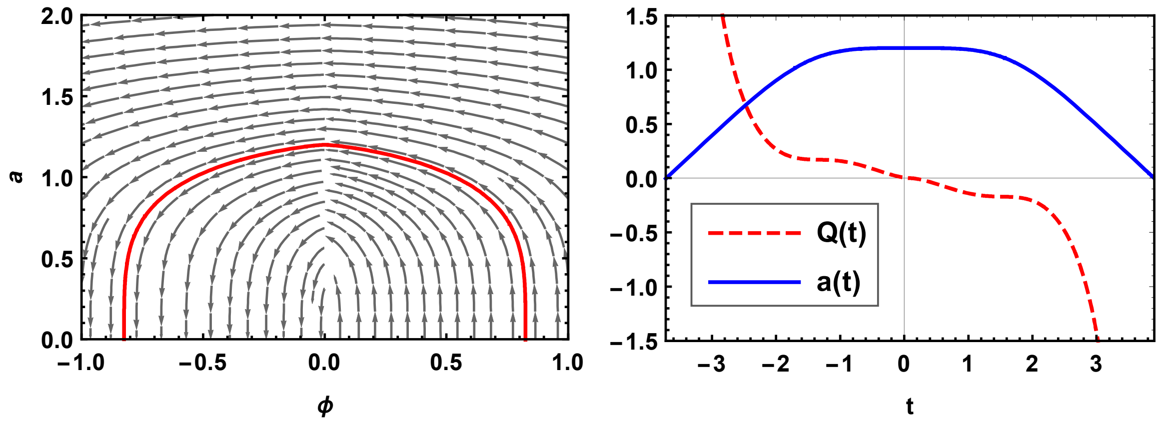

Figura 5.7: À esquerda, as soluções de (5.19), para $w = 0$, $V_0 = \phi_0 = k = 1$, sendo que a curva destacada representa a solução cujas c.i. são $\phi(0) = 0.0001$ e $a(0) = 1.2$. À direita, vemos o comportamento de $a(t)$ (linha contínua) e $Q(t)$ (linha tracejada) para esta mesma solução.

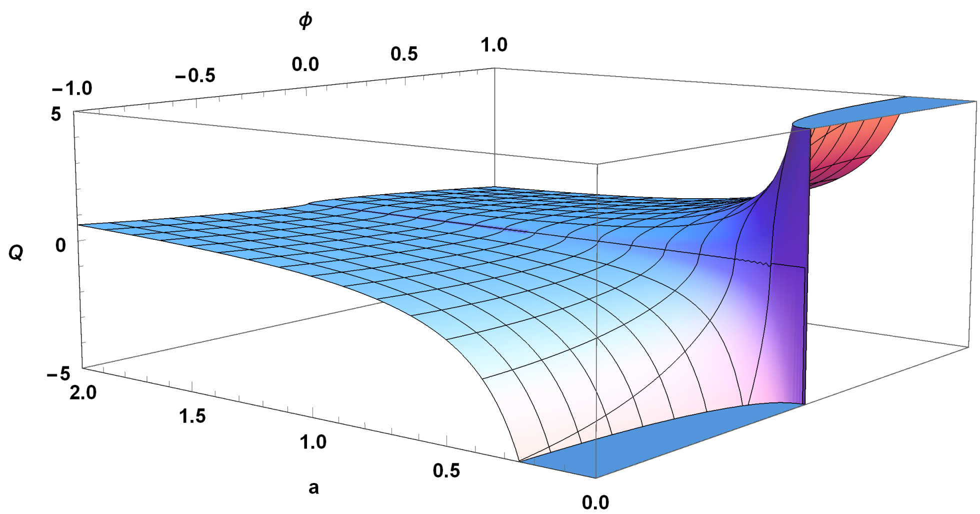

Figura 5.8: Gráfico tridimensional do potencial quântico (5.20), para os mesmos valores de constantes da Figura anterior.

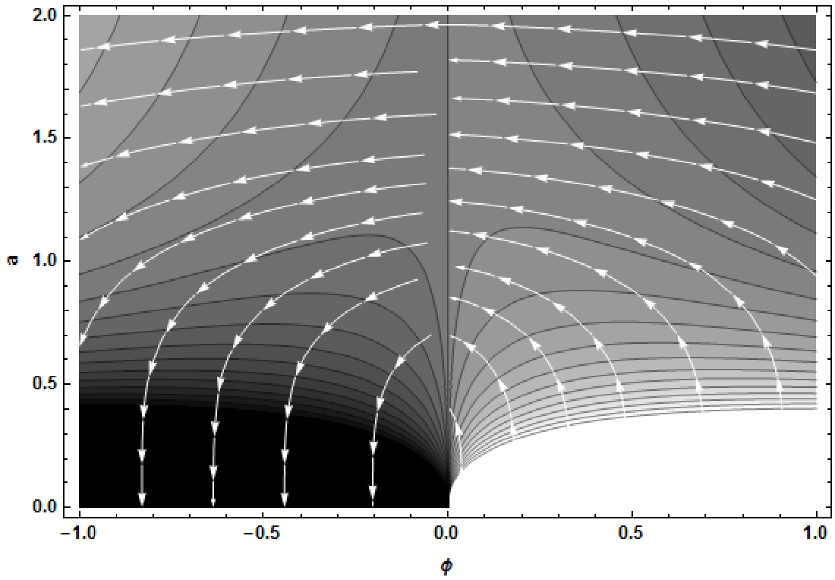

Figura 5.9: Comparação entre o potencial quântico (5.20) e as soluções do sistema dinâmico (5.19).

5.4.4 Solução (iv)

Para as escolhas de V e V_J da linha (iv) da Tabela 4.1, as equações guias ficam:

$$\dot{a} = \frac{2V_0}{3k}\sinh(\gamma\phi)\ \cosh^2(\gamma\phi)\ , \tag{5.21a}$$

$$\dot{\phi} = -ka^3\left[\frac{3\gamma^2\phi\sinh(\gamma\phi)}{2V_0\cosh^4(\gamma\phi)}\right]^{1/3} . \tag{5.21b}$$

E o potencial quântico correspondente é:

$$Q(a,\phi) = -V_0\sinh(\gamma\phi)\cosh^2(\gamma\phi) + \left[\frac{81\gamma^2V_0^5\sinh^7(\gamma\phi)\cosh^8(\gamma\phi)}{16\phi^2a^{12}}\right]^{1/9} . \tag{5.22}$$

Vemos as soluções de (5.21) na Figura 5.10, onde fica evidente que todas as soluções são singulares. Podemos ver também na Figura 5.10 que o potencial quântico tem um comportamento semelhante aos casos anteriores, o que fica mais claro na Figura 5.11. Então, também neste caso, existe uma enorme diferença entre as soluções clássicas e as quânticas, para a mesma escolha de V e V_J. Isso é explicado com a ajuda do potencial quântico, na Figura 5.12: devido à sua predominância, já que ele é muito intenso (mais que isso, ele diverge em $t = 0$ e também para $\phi \longrightarrow \pm\infty$), as soluções são predominanatemente quânticas, o que implica que elas são muito diferentes das clássicas.

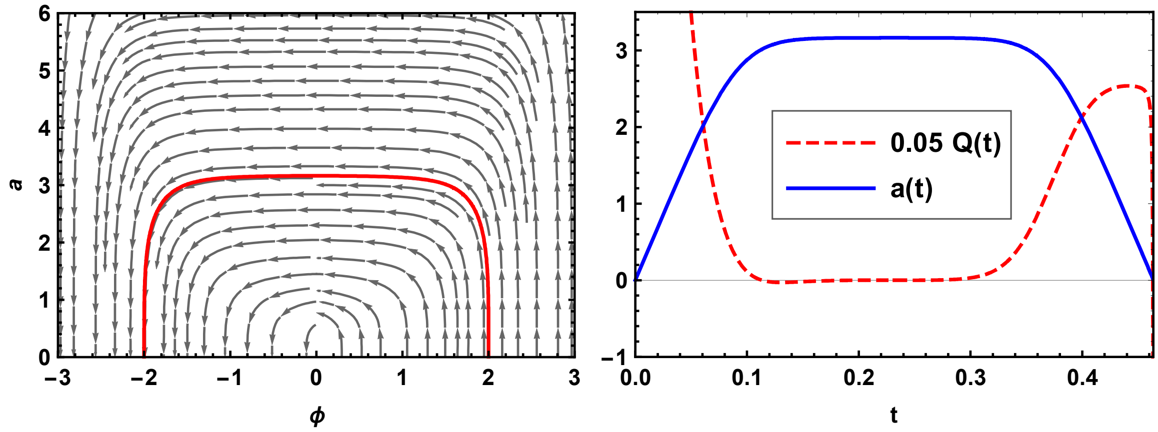

Figura 5.10: Soluções do sistema (5.21), do lado esquerdo, para $V_0 = \gamma = k = 1$. A curva em destaque é a solução desse sistema para as c.i. $\phi(0) = 2$ e $a(0) = 0.001$, apenas como um exemplo. Do lado direito, uma comparação entre o potencial quântico e a evolução do fator de escala, ambos calculados para essa solução destacada.

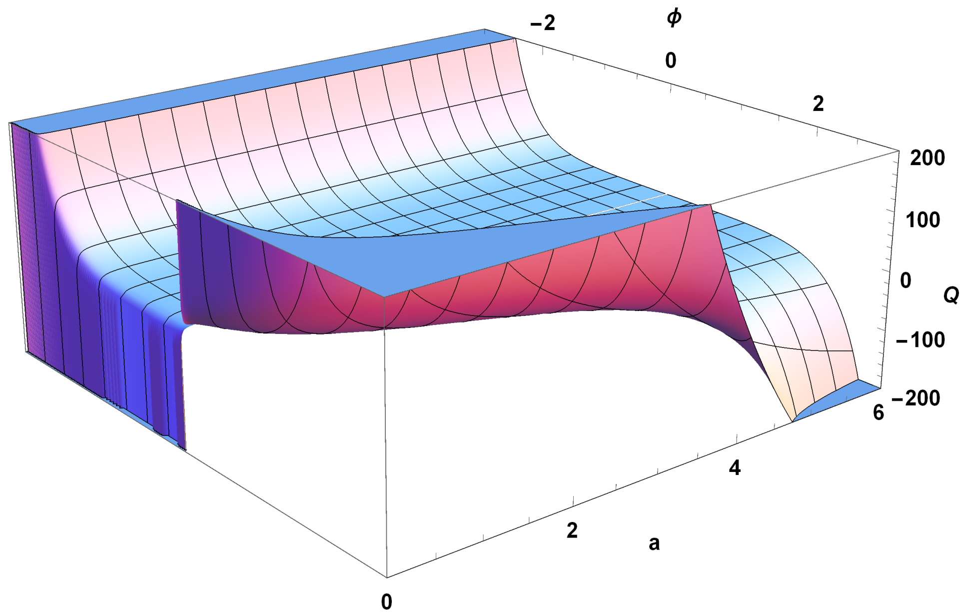

Figura 5.11: Gráfico tridimensional do potencial quântico (5.22), para os mesmos valores de constantes da Figura anterior. Note que Q não está definido para $\phi = 0$.

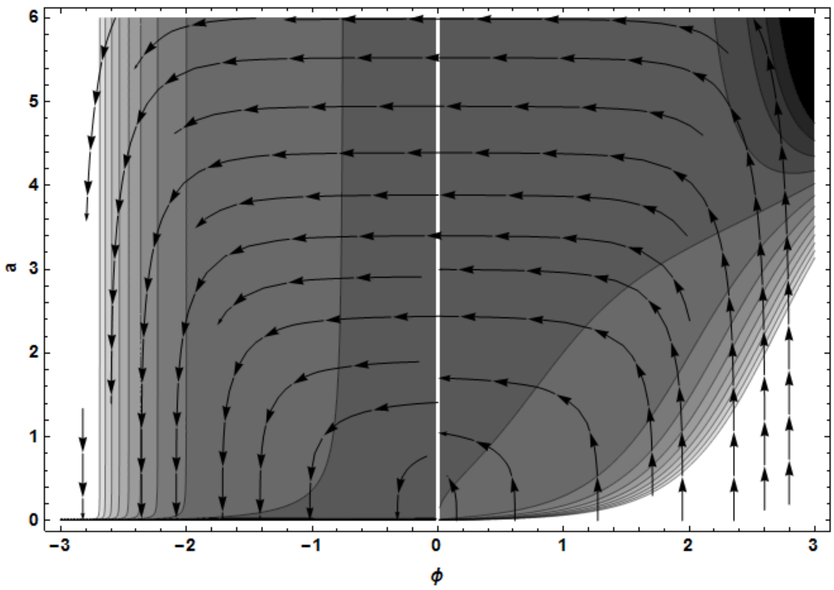

Figura 5.12: Comparação entre o potencial quântico (5.22) e as soluções do sistema dinâmico (5.21).

5.4.5 Solução (v)

Finalmente, para os V e V_J da solução (v) da Tabela 4.1, encontramos as seguintes equações guias:

$$\dot{a} = \frac{2V_0}{3k}\sin(\omega\phi)f^2(\phi)\ , \tag{5.23a}$$

$$\dot{\phi} = -ka^3\left[\frac{3V_0\phi\sin(\omega\phi)}{2f^4(\phi)}\right]^{1/3}\ , \tag{5.23b}$$

onde $f(\phi) = a_m + \frac{V_0}{\omega}[1-\cos(\omega\phi)]$. O potencial quântico é dado por:

$$Q(a,\phi) = -V_0\sin(\omega\phi)f^2(\phi) + \left[\frac{81V_0^7\sin^7(\omega\phi)f^8(\phi)}{16a^{12}\phi^2}\right]^{1/9}\ . \tag{5.24}$$

Na Figura 5.13, vemos algumas soluções do sistema dinâmico (5.23) e o comportamento do potencial quântico para uma solução particular. Novamente, todas as soluções são singulares. Quanto ao potencial quântico, vemos na Figura 5.14 que ele é oscilatório para $a \neq 0$, divergindo para $a = 0$ e $\phi = 0$. Na Figura 5.15, vemos a comparação entre as soluções do sistema dinâmico e Q, mostrando que as soluções são atraídas para a singularidade $a = 0$ nas regiões onde o potencial quântico é um poço, comportamento esse muito presente nas outras soluções estudadas acima.

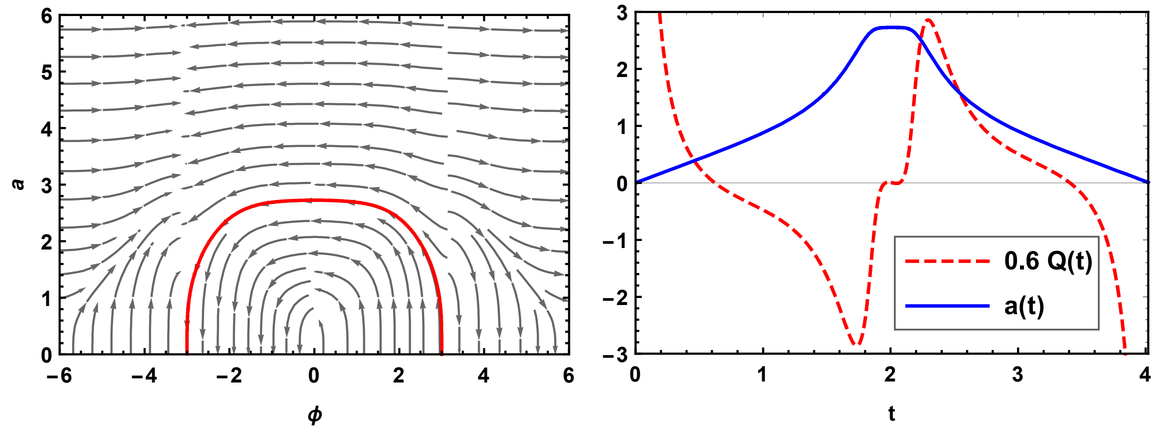

Figura 5.13: O gráfico com as soluções do sistema dinâmico (5.23), do lado esquerdo, foi obtido com $V_0 = \omega = k = 1$, e a linha em destaque representa a solução com c.i. $\phi(0) = 3$ e $a(0) = 0.001$, apenas como exemplo. Do lado direito, vemos o comportamento do fator de escala (linha contínua) e do potencial quântico (5.24) (linha tracejada), sendo ambos calculados para a curva em destaque no gráfico da esquerda.

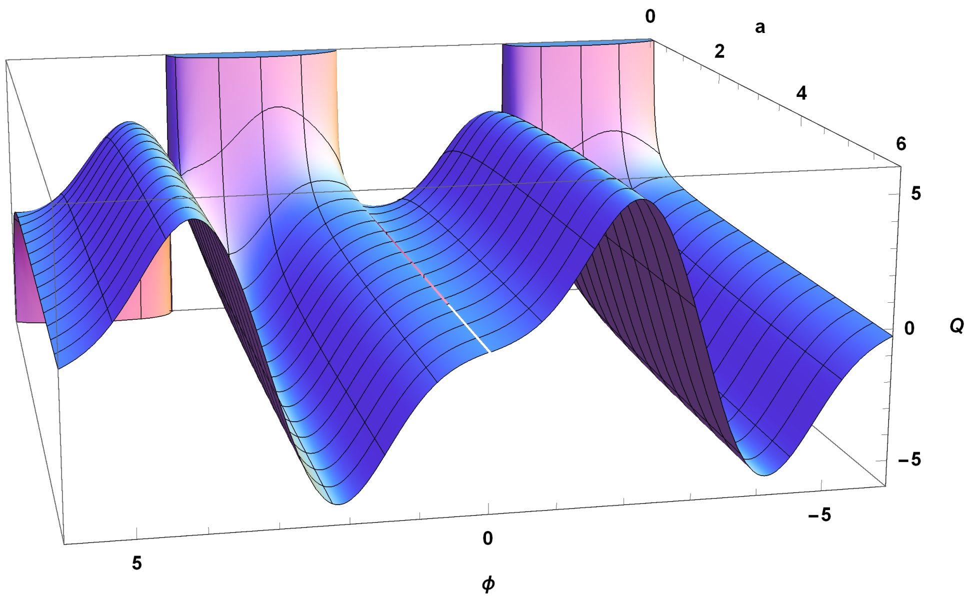

Figura 5.14: Gráfico tridimensional do potencial quântico (5.24), para os mesmos valores de constantes da Figura anterior. Note que Q não está definido para $\phi = 0$.

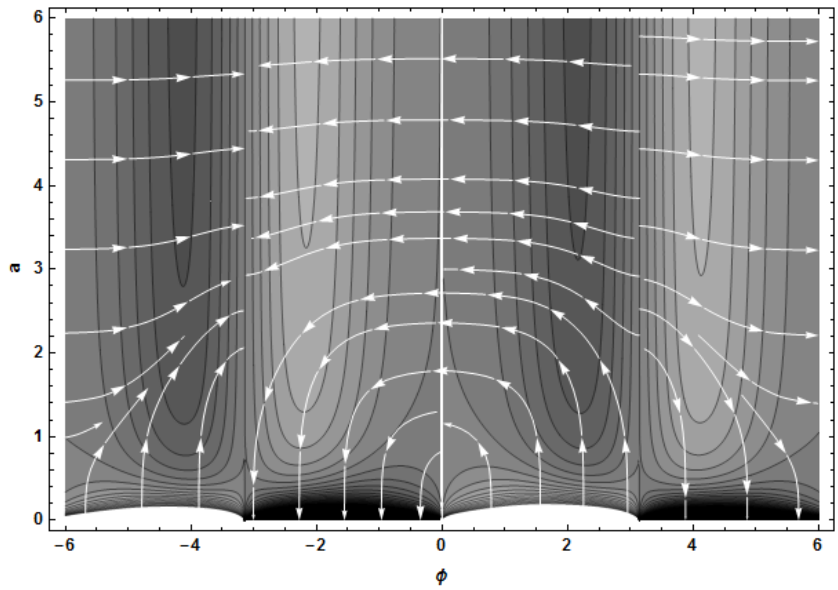

Figura 5.15: Comparação entre o potencial quântico (5.24) e as soluções do sistema dinâmico (5.23).

De todas as soluções estudadas nesta Seção, podemos dizer que as mesmas escolhas para V e V_J feitas na teoria clássica fornecem apenas soluções singulares, não sendo, portanto, capazes de evitá-la. Isto é uma consequência das diferenças intrínsecas entre os sistemas clássico (4.10) e quântico (5.14). Isto é confirmado pelo comportamento de $a(t)$ e $Q(t)$ nos vários casos estudados acima, já que o potencial quântico é muito importante naqueles casos. Então, podemos dizer que a dinâmica quântica não é trivial, no sentido de que ela não reproduz simplesmente o comportamento clássico. Porém, todas as soluções obtidas acima são singulares e não são capazes de descrever um universo em expansão.

Por causa disso, devemos então ir além e investigar um modo de obter soluções não singulares do sistema quântico (5.14) que possam fornecer não apenas efeitos quânticos fortes, como foi o caso nesta Seção, mas efeitos quânticos que sejam capazes de evitar a singularidade, com uma justificativa física forte, baseada na análise da relação entre o potencial quântico e o fator de escala.

5.5 Soluções Quânticas II

Vamos agora analisar o problema sob outro ponto de vista: como os sistemas de equações (4.10) e (5.14) são diferentes, podemos nos perguntar quais seriam as escolhas de V e V_J que levariam às soluções para $a(t)$ apresentadas na quarta coluna da Tabela 4.1 quando é o sistema quântico (5.14) que governa a dinâmica, em vez do clássico, que é (4.10).

É possível que se diga que esse procedimento leva a um ajuste fino, o que poderia ser um problema. Mas este não é o caso, e podemos chegar a essa conclusão olhando mais atentamente para o sistema (5.14): considerando de novo, temporariamente, um ϕ geral (não necessariamente igual ao tempo), e supondo que uma expressão para o fator de escala desejado $a(t)$ é dada, a equação (5.14a) não determina $V(\phi)$, mas apenas $V(\phi(t))$, o que é, na verdade, uma informação bem diferente, já que $V(\phi(t))$ dependerá da solução para $\phi(t)$. Ocorre que $\phi(t)$ dependerá de ambos a and V_J, em vista de (5.14b), sendo que V_J continua livre. Portanto, não existe ajuste fino sobre V e V_J. Podemos agora retornar a interpretar o campo escalar como o tempo, o que será feito em todas os cinco casos a seguir, para simplificar os cálculos.

5.5.1 Solução (i)

Escolhendo

$$V_J(\phi) = -V_{J0}\phi^{\frac{7+w}{1+w}} , \tag{5.25a}$$

$$V(\phi) = V_0\phi^{-\frac{1+3w}{3(1+w)}} , \tag{5.25b}$$

obtém-se a solução análoga a de um fluido perfeito: $a(t) = (t/t_0)^{\frac{2}{3(1+w)}}$, para $V_{J0} = \frac{1}{6}k^3 t_0^{\frac{-6}{1+w}}$ e $V_0 = k\, t_0^{\frac{-2}{3(1+w)}}/(1+w)$. O potencial quântico (5.13) para este caso será:

$$Q(a,\phi) = -V_0\phi^{-\frac{1+3w}{3(1+w)}} - \left(\frac{9V_0^6}{16V_{J0}}\right)^{1/9} a^{-4/3}\phi^{-\frac{11+9w}{9(1+w)}} . \tag{5.26}$$

Na Figura 5.16, podemos ver a evolução temporal do fator de escala e do potencial quântico, para $a \sim t^{2/3}$, o que é obtido com $w = 0$. Como podemos ver, o potencial quântico diverge para $-\infty$ em $a = 0$ e tende a zero quando $t \longrightarrow +\infty$. Esse comportamento não depende muito da solução particular, como vemos na Figura 5.17, se interpretada corretamente.

A Figura 5.17 mostra que Q diverge para $-\infty$ quando $a \longrightarrow 0$ ou $\phi \longrightarrow 0$ e Q tende a zero quando ambos a e ϕ tendem a $+\infty$. Como as soluções do fator de escala são de expansão, e como $\phi = t$, então o potencial quântico tende a zero com a expansão, no caso geral. Fisicamente, isso significa que a dinâmica dessa solução é predominantemente governada pelo potencial quântico, quando a expansão começa, e depois o universo se expande classicamente, devido à diminuição (em módulo) do potencial quântico.

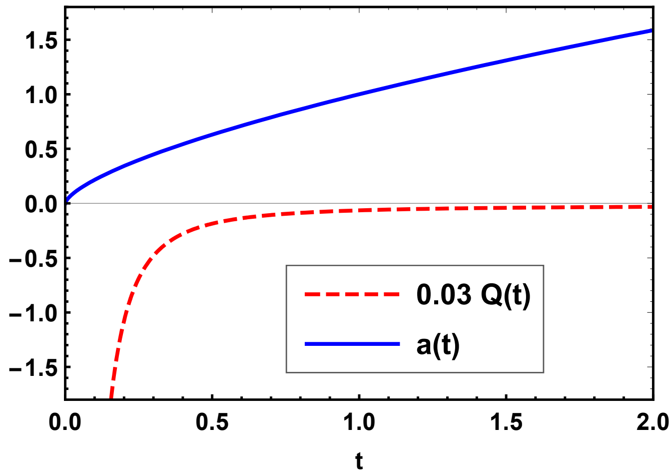

Figura 5.16: Evolução do fator de escala (linha contínua) e do potencial quântico (5.26) (linha tracejada) para (5.25), com $k = t_0 = 1$ e $w = 0$. Essa solução é análoga à de fluido perfeito em um universo dominado por poeira. Para os outros casos relevantes, $w = 0$ e $w = 1/3$, os comportamento de Q e sua relação com a expansão é muito semelhante, como se pode concluir de (5.26).

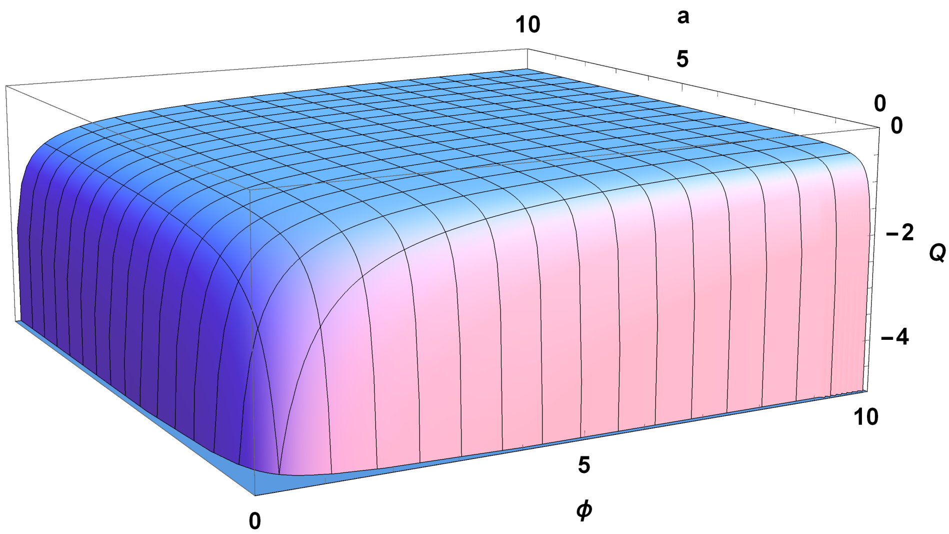

Figura 5.17: Gráfico tridimensional do potencial quântico (5.26), para os mesmos valores de constantes da Figura anterior.

5.5.2 Solução (ii)

Escolhendo agora

$$V_J(\phi) = -V_{J0}\phi\, e^{9\gamma\phi} \ , \tag{5.27a}$$

$$V(\phi) = V_0 e^{\gamma\phi} \ , \tag{5.27b}$$

então o fator de escala representará um universo de de Sitter $a(t) = a_0 e^{\gamma t}$, com $V_{J0} = k^3 a_0^9/6$ e $V_0 = 3k a_0 \gamma/2$. Neste caso, o potencial quântico (5.13) é escrito como:

$$Q(a,\phi) = -V_0 e^{\gamma\phi} - \left(\frac{9V_0^6}{16V_{J0}}\right)^{1/9} a^{-4/3}\phi^{-1/3}e^{-\gamma\phi/3} \ . \tag{5.28}$$

Na Figura 5.18, vê-se a evolução de Q, dado por (5.28), e do fator de escala $a(t)$. Vê-se que Q diverge em $\phi = t = 0$ (que corresponde a $a = a_0$), mas também para $t \longrightarrow \pm\infty$, e é suave para $t \neq 0$. Esse comportamento pode ser compreendido de maneira mais ampla na Figura 5.19, onde podemos ver que Q de fato diverge para $a = 0$ e $\phi = 0$, o que está de acordo com a expressão (5.28) acima.

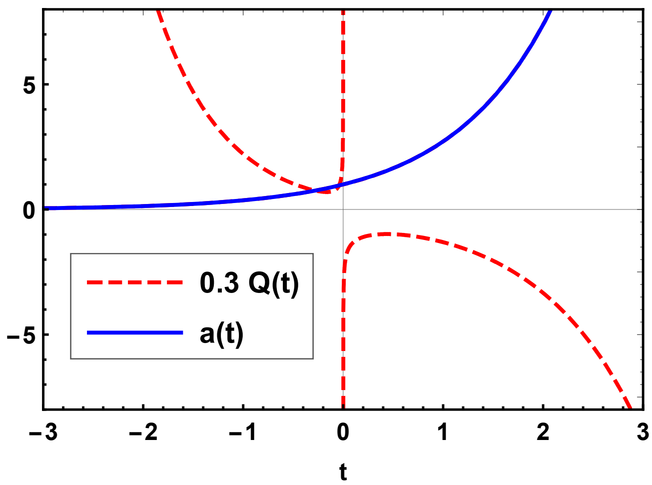

Figura 5.18: Evolução do fator de escala (linha contínua) e do potencial quântico (5.28) (linha tracejada) para a solução tipo de Sitter, para $k = a_0 = \gamma = 1$.

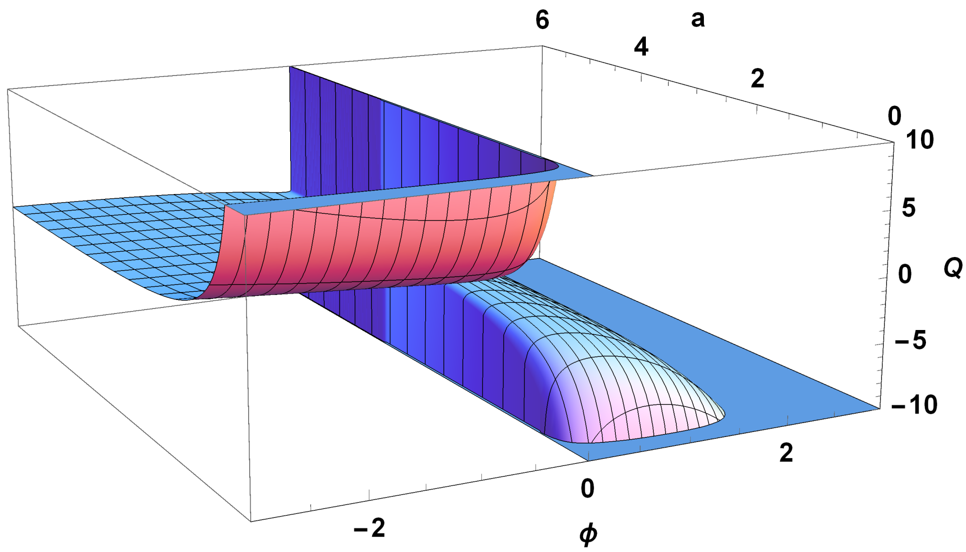

Figura 5.19: Gráfico tridimensional do potencial quântico (5.28), para os mesmos valores de constantes da Figura anterior.

5.5.3 Solução (iii)

Também podemos obter a solução (iii) da Tabela 4.1, que é $a(t) = a_0[1 + (t/\phi_0)^2]^{\frac{1}{3(1+w)}}$, escolhendo

$$V_J(\phi) = -V_{J0}\phi[1 + (\phi/\phi_0)^2]^{\frac{3}{1+w}} \,, \tag{5.29a}$$

$$V(\phi) = V_0\phi[1 + (\phi/\phi_0)^2]^{-\frac{2+3w}{3(1+w)}} \,, \tag{5.29b}$$

onde $V_{J0} = k^3 a_0^9/6$ e $V_0 = k\, a_0/[\phi_0^2(1+w)]$. Com isso, o potencial quântico (5.13) é o seguinte:

$$Q(a,\phi) = -V_0\phi\left[1 + \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2\right]^{-\frac{2+3w}{3(1+w)}} - \left(\frac{9V_0^6\phi^3}{16V_{J0}a^{12}}\right)^{1/9}\left[1 + \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2\right]^{-\frac{7+6w}{9(1+w)}} . \tag{5.30}$$

Podemos ver na Figura 5.20 que o potencial quântico (5.30), para o caso $w = 0$ (análogo à de um universo de fluido perfeito dominado por poeira) é bem definido para todo t, na solução plotada, é dominante durante o ricochete e decresce (em módulo) para $|t| \gg 0$. Para os casos $w = 1/3$ (universo dominado por radiação) e $w = 1$ (universo dominado por matéria rígida), o potencial quântico apresenta exatamente o mesmo comportamento qualitativo, como pode-se concluir de (5.30).

Vemos na Figura 5.21 que o potencial quântico desta solução diverge em $a = 0$, sendo que ele decresce (em módulo) tendendo a zero para $t, a \gg 0$. Este mesmo Q é dominante, oscilando um pouco para $\phi = t = 0$. Portanto, as propriedades da curva do exemplo são realmente características do potencial quântico (5.30), do cenário em questão.

Matematicamente, mesmo sendo $Q \sim a^{-4/3}$, como a solução para $a(t)$ não é singular, Q não diverge para a solução dada, pois o valor $a = 0$ que poderia fazer ele divergir não é, de fato alcançado. Logo, a divergência da Figura 5.21 em $a = 0$ não é de fato atingida para soluções de ricochete da forma $a(t) = a_0[1 + (t/\phi_0)^2]^{\frac{1}{3(1+w)}}$. Em termos físicos, a predominância de Q durante o ricochete e seu decrescimento (em módulo) após o ricochete mostram que o ricochete é um efeito quântico, gerado pelo potencial Q, que é o termo de correção da equação de Hamilton-Jacobi. Após o ricochete, a influência de Q diminui, de acordo com a expansão que se segue.

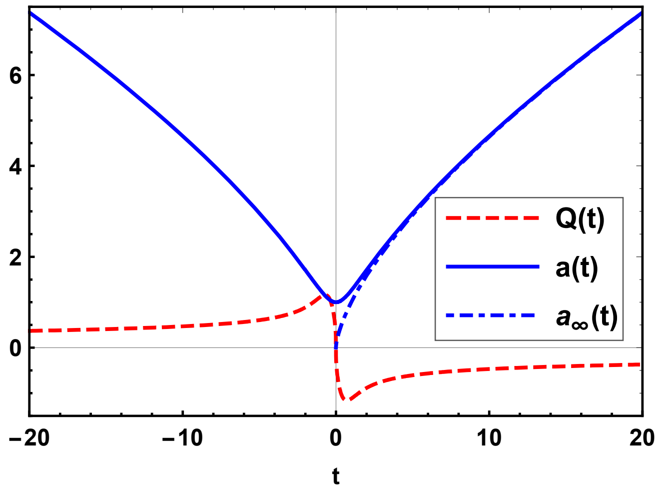

Figura 5.20: Evolução de $a(t) = a_0[1 + (t/\phi_0)^2]^{\frac{1}{3(1+w)}}$ (linha contínua) e o seu potencial quântico correspondente (5.32) (linha tracejada), para o caso de poeira, com $k = a_0 = t_0 = \phi_0 = 1$. A notação $a_\infty(t)$ representa a forma assintótica de a, que é $a_\infty(t) = (t/t_0)^{\frac{2}{3(1+w)}}$ (linha com pontos e traços), que é a própria solução (i).

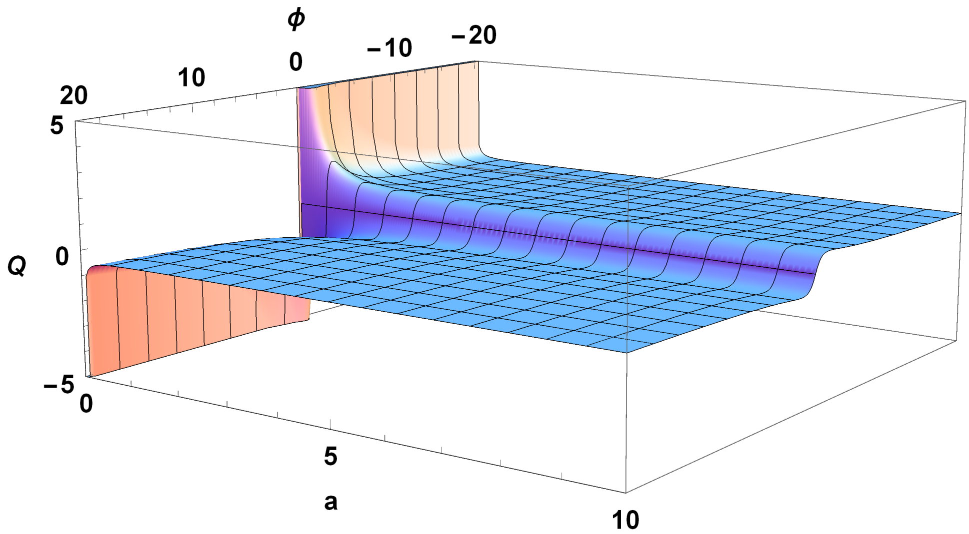

Figura 5.21: Gráfico tridimensional do potencial quântico (5.30), para os mesmos valores de constantes da Figura anterior.

5.5.4 Solução (iv)

Em analogia com o caso anterior, se escolhermos

$$V_J(\phi) = -V_{J0}\phi\cosh^9(\gamma\phi)\ , \tag{5.31a}$$

$$V(\phi) = V_0\sinh(\gamma\phi)\ , \tag{5.31b}$$

obtemos um ricochete descrito pelo fator de escala $a(t) = a_0\cosh(\gamma t)$, onde $V_{J0} = k^3 a_0^9/6$ e $V_0 = 3ka_0\gamma/2$. Neste caso, o potencial quântico (5.13) se torna:

$$Q(a,\phi) = -V_0\sinh(\gamma\phi) - \left[\frac{9V_0^6\sinh^6(\gamma\phi)}{16V_{J0}a^{12}\phi^3\cosh^9(\gamma\phi)}\right]^{1/9}. \tag{5.32}$$

Esse potencial quântico não está bem definido para $\phi = t = 0$. Apesar disso, ele poderia se tornar uma função contínua redefinindo $Q(0) = 0$, como se pode ver calculando o limite de (5.32) quando $t \longrightarrow 0$. Mas isso seria apenas um artifício, sem justificativa física. Na Figura 5.22, vemos a evolução de (5.32) comparada com o fator de escala. Podemos ver que, para a solução plotada, Q diverge para $t \longrightarrow \pm\infty$. portanto, para esta solução de ricochete, ambas as fases de contração e expansão são determinadas pelo potencial quântico Q, bem diferente do caso anterior.

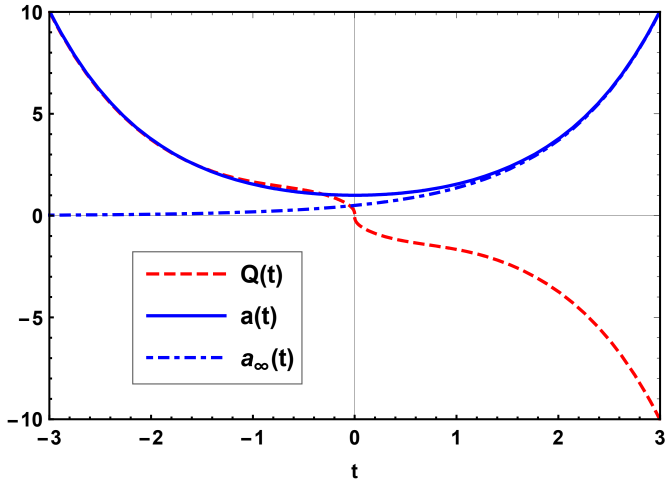

Figura 5.22: Evolução de $a(t) = \cosh(\gamma t)$ (linha contínua) e seu potencial quântico correspondente (5.32) (linha tracejada), para $k = a_0 = \gamma = 1$. A notação $a_\infty(t)$ representa a forma assintótica de a, que é $a_\infty(t) = \frac{1}{2}e^{\gamma t}$ (linha de pontos e traços), a solução de de Sitter (ii).

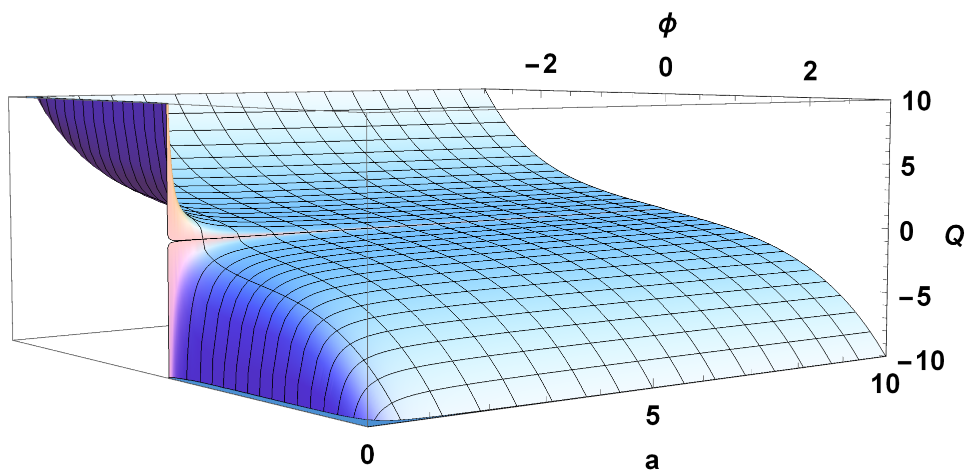

Figura 5.23: Gráfico tridimensional do potencial quântico (5.32), para os mesmos valores de constantes da Figura anterior. Note que Q não está definido para $\phi = 0$.

5.5.5 Solução (v)

Finalmente, um universo cíclico cujo fator de escala é $a(t) = a_m + A[1 - \cos(\omega t)]$, é obtido ao se fixar:

$$V_J(\phi) = -V_{J0}\phi\{a_m + A[1 - \cos(\omega\phi)]\}^9 \ , \tag{5.33a}$$

$$V(\phi) = V_0 \sin(\omega\phi) \ , \tag{5.33b}$$

onde $V_{J0} = k^3/6$ e $V_0 = 3kA\omega/2$. Neste caso, o potencial quântico (5.13) é dado por:

$$Q(a,\phi) = -V_0 \sin(\omega\phi) - \frac{[9V_0^6 \sin^6(\omega\phi)/(16V_{J0}a^{12}\phi^3)]^{1/9}}{a_m + A[1-\cos(\omega\phi)]} \, . \tag{5.34}$$

Na Figura 5.24, vemos a evolução de (5.34) com o fator de escala oscilatório. Este Q não está bem definido para $t = 0$, mas ele pode ser redefinido $Q(0) = 0$ para se tornar suave, como poderia ser feito para a solução anterior. Mas isso também seria um mero artifício. Quando $t \neq 0$, vemos que Q oscila junto, um indicativo de que ele é o responsável pela oscilação.

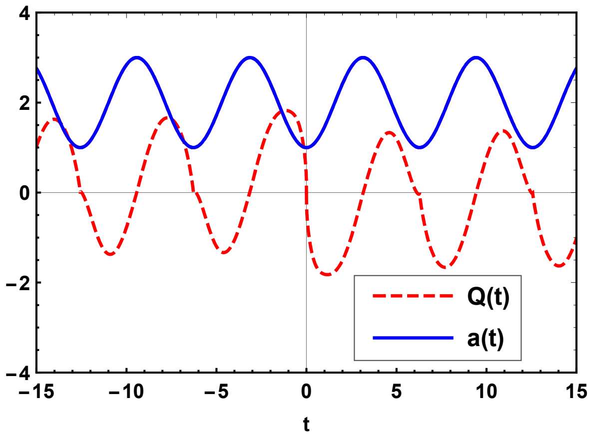

Figura 5.24: Evolução temporal da solução de universo cíclico correspondente ao fator de escala (v) da Tabela 4.1 e o seu potencial quântico correspondente, dado por (5.33), com $k = A = \omega = a_m = 1$.

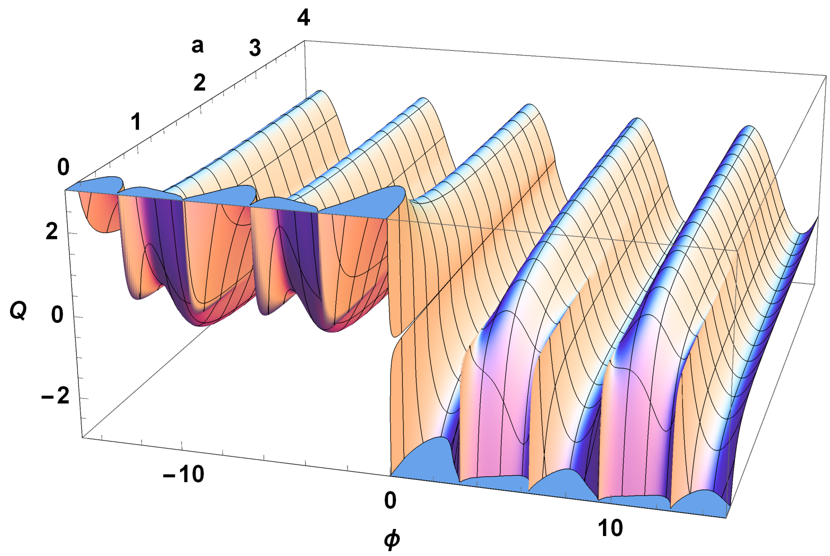

Figura 5.25: Gráfico tridimensional do potencial quântico (5.34), para os mesmos valores de constantes da Figura anterior. Note que Q não está definido para $\phi = 0$.

5.6 Conclusão

Nas duas seções anteriores, investigamos dez diferentes formas de se estudar as equações guias quânticas (5.14). Vamos agora analisar os resultados. Como o termo que governa a dinâmica é o potencial quântico (5.13), vamos focar na relação entre Q e o fator de escala, o que fornece um critério para interpretar e classificar as soluções anteriores, que podem ser organizadas em três classes.

A primeira classe inclui todas as soluções da Seção 5.4 e também as das Subseções 5.5.1 e 5.5.2. Para todos esses casos, o potencial quântico é suave quase sempre, mas diverge para $\pm\infty$ em algum momento. A divergência de Q em algum ponto não é exatamente um problema, já que isso ocorre, por exemplo, para o caso canônico revisado no Capítulo 2 (ver Figura 2.3) e também para o estado fundamental do átomo de hidrogênio na interpretação de Bohm-de Broglie da equação de Schrödinger, teoria que está de acordo com os resultados da mecânica quântica usual [100]. Então essa divergência pode ser interpretada como um efeito realmente muito forte.

A solução da Subseção 5.5.1 está na primeira classe, mas merece uma atenção específica, já que, mesmo o potencial quântico divergindo na singularidade $a = 0$, ele tende a zero conforme o universo se expande. Isso é um indicativo de que a dinâmica clássica deve ser recuperada de alguma forma com a expansão do universo.

Para as soluções nas quais o universo se expande e Q continua crescendo (em módulo), sem tender a zero, podemos interpretar que, nessas soluções, a expansão é causada por efeitos quânticos representados pela grandeza Q. Resumindo, podemos dizer que as soluções da primeira classe apresentam um comportamento não-usual para o potencial quântico, comportamento esse que não é proibido no contexto da interpretação de Bohm-de Broglie.

Então, em termos da viabilidade do método de quantização usando derivadas fracionárias e interpretando causalmente as soluções, o resultado é positivo. Porém, em termos cosmológicos, podemos dizer que as cinco soluções da Seção 5.4 não são de interesse físico, por não apresentarem expansão, servindo apenas para demonstrar que é necessário estudar o problema sob outro ponto de vista, como o da Seção 5.5.

A segunda classe de soluções é formada pelas Subseções 5.5.4 and 5.5.5 (e outras da Seção

5.4, que já discutimos). Para essas soluções, o potencial quântico não é bem definido em $\phi = t = 0$. Isso parece ser um problema, já que essa descontinuidade parece não ter nenhum efeito sobre o comportamento do fator de escala, que é suave. Essas soluções precisam ser investigadas em trabalhos futuros para elucidar essa questão.

Finalmente, a solução da Subseção 5.5.3 constitui a terceira e última classe de soluções. O potencial quântico (5.30) é suave, bem definido para todo t e tende a zero com a expansão do universo, como vimos, experimentando apenas uma pequena oscilação ao redor do instante do ricochete, $t = 0$. Na interpretação que estamos adotando, isso significa que Q é mais relevante próximo ao ricochete e torna-se menos importante tanto na fase de contração (antes do ricochete) como na fase de expansão. Isso é o que nos permite concluir que, neste caso, o ricochete é um efeito quântico e as soluções clássicas devem ser recuperadas, já que $Q \longrightarrow 0$ implica em recuperar-se a equação de Hamilton-Jacobi clássica. Isso de certa forma complementa o formalismo quântico do Capítulo anterior, da transformação canônica, pois fornece uma explicação quântica para soluções de ricochete do tipo $a(t) = a_0[1 + (t/\phi_0)^2]^{\frac{1}{3(1+w)}}$.

Disso e de tudo mais que foi discutido neste Capítulo, podemos concluir dizendo que o formalismo desenvolvido usando uma derivada fracionária mostrou ser uma importante ferramenta para se analisar quanticamente uma teoria cosmológica, no sentido de que ele forneceu um mecanismo para estudar vários cenários cosmológicos. Não obstante, existem algumas soluções e questões que requerem um estudo mais específico e são matérias para trabalhos futuros. Além disso, as equações guias (5.14) permitem que se estude infinitos casos além dos dez exemplos que estudamos aqui.

Uma possibilidade é aplicar esse formalismo para a Hamiltoniana do tipo k-essência, que está presente em [125], e apresenta também potências fracionárias nos momentos. Nesse trabalho, estuda-se quanticamente apenas um caso limite, deixando em aberto a possibilidade de estudar os casos que conduzem a potências fracionárias e ainda assim tem relevância física. Outra extensão natural do método desenvolvido aqui é aplicá-lo usando outra derivada fracionária. A simplicidade da derivada fracionária conforme permitiu que pudéssemos analisar um grande número de situações, mas ela não esgota todas as possibilidades, de modo que é possível, em princípio, criar um método semelhante ao desenvolvido neste Capítulo, mas com outras derivadas fracionárias, que podem revelar efeitos quânticos igualmente interessantes.

Apêndice A

Sistemas Dinâmicos

Os sistemas dinâmicos (SD) são fundamentais para vários problemas de Física. Mais que isso, eles nasceram inspirados por problemas clássicos da física, como o problema dos três corpos. Em particular, os SD tem desempenhado um papel importante em Cosmologia. As referências [127–129] são revisões interessantes de como aplicar a técnica de SD em Cosmologia. Também gostaria de mencionar o texto introdutório [130], que apresenta os SD usando o software *Wolfram Mathematica* ®.

Através dos sistemas dinâmicos, é possível saber se estados da expansão do universo são mais ou menos prováveis, por exemplo. Isso é possível porque os SD fornecem um modo de se analisar qualitativamente um sistema de equações diferenciais sem que se precise resolvê-lo analiticamente para uma dada condição inicial. Este Apêndice não tem a pretensão de ser muito rigoroso matematicamente, servindo apenas de uma introdução didática para os conceitos mais elementares que são usados muitas vezes ao longo do trabalho. Para uma introdução mais "matemática", ver, por exemplo, [131].

Para os propósitos do presente trabalho, um *sistema dinâmico* é um conjunto de n equações de primeira ordem da forma

$$\dot{x}_1 = g_1(t, x_1, \dots, x_n)\ , \tag{A.1a}$$

$$\dots$$

$$\dot{x}_n = g_n(t, x_1, \dots, x_n)\ , \tag{A.1b}$$

onde n é um número inteiro positivo. Um caso particular muito importante é o dos sistemas dinâmicos *autônomos*, que são aqueles em que as funções g_i do lado direito nao dependem explicitamente do parâmetro t.

Para que fique mais claro, todos os sistemas dinâmicos que consideramos neste trabalho são autônomos e podem ser escritos na forma

$$\dot{\alpha} = g_1(\alpha,\phi) \; , \tag{A.2a}$$

$$\dot{\phi} = g_2(\alpha,\phi) \; , \tag{A.2b}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $\alpha(t)$ e $\phi(t)$. Mas, interpretando o sistema qualitativamente, que é a ideia dos SD, não olhamos primeiro para *uma* solução em particular para $\alpha(t)$ e $\phi(t)$, que dependerão de c.i., mas sim para um conjunto de soluções dessa forma, vistas como equações paramétricas no plano $\phi \times \alpha$ de curvas da forma $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde γ é definida por $t \mapsto \gamma(t) \equiv (\phi(t),\alpha(t))$, sendo I um intervalo, que representa o conjunto de valores de tempo possíveis, que pode ser inclusive o conjunto inteiro $\mathbb{R}$. Foi assim que obtivemos os inúmeros gráficos analisados ao longo do trabalho. Como todos esses exemplos são autônomos, o teorema da existência e unicidade das equações diferenciais ordinárias garante que cada condição inicial dá origem a uma única curva. Isso significa que, considerando todas as c.i. possíveis em determinada faixa de valores, obtemos um conjunto de infinitas curvas que não se intersectam, a não ser possivelmente em alguns pontos, onde as curvas "acabam" ou "começam". Isso é o que permite obter gráficos intuitivos no plano $\phi \times \alpha$, com curvas que não se cruzam, cada uma representando uma solução distinta para o sistema.

Outra propriedade interessante dos gráficos bidimensionais no plano $\phi \times \alpha$ para SD autônomos é que eles não mudam o seu aspecto se o tempo for reparametrizado. Intuitivamente, imagine que definimos um novo tempo $\tau(t)$, genérico, difeomorfo a t. Então, denotando $df/d\tau \equiv f'$, a regra da cadeia diz que

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \alpha' \, \frac{d\tau}{dt} \; , \tag{A.3a}$$

$$\dot{\phi} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\phi}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \phi' \, \frac{d\tau}{dt} \; . \tag{A.3b}$$

Daí,

$$\frac{\alpha'}{\phi'} = \frac{d\alpha/d\tau}{d\phi/d\tau} = \frac{d\alpha}{d\phi} = \frac{d\alpha/dt}{d\phi/dt} = \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\phi}} = \frac{g_1(\alpha,\phi)}{g_2(\alpha,\phi)} \;, \tag{A.4}$$

o que mostra que a relação entre α e ϕ não depende da reparametrização do tempo. Como o gráfico do sistema dinâmico no plano depende só da relação entre α e ϕ, o seu aspecto qualitativo não será alterado.

Um exemplo de como os sistemas dinâmicos podem ser aplicados na Física é o oscilador harmônico simples, descrito pela equação

$$\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = 0 \;. \tag{A.5}$$

Apesar de ser uma equação de segunda ordem, podemos definir $y \equiv \dot{x}$, e considerar x e $\dot{x}$ como variáveis independentes, de modo que a equação acima vira o sistema dinâmico autônomo abaixo:

$$\dot{x} = y \;, \tag{A.6a}$$

$$\dot{y} = -k^2 x \;. \tag{A.6b}$$

Então, usando o comando abaixo no Mathematica:

```
k = 1;
SP = StreamPlot[{y, -k^2 x}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1},
FrameLabel -> {"x", "y"}, FrameStyle -> Black ,
StreamStyle -> {Line, GrayLevel[0.6]},
PlotRange -> {{-1, 1}, {-1, 1}}, AspectRatio -> 1,
PlotTheme -> "BoldLabels",
PlotLabel -> Style["Soluções para k = m = 1", Black]];
PC = ListPlot[{{0, 0}}, PlotStyle -> {Red, PointSize[0.012]}];
Show[SP, PC]
```

obtemos a Figura A.1. Nessa Figura, é possível ver o aspecto qualitativo das soluções. Observe que, na formulação Lagrangeana, x e $y = \dot{x}$ são as variáveis que determinam a configuração do sistema. Alternativamente, no formalismo Hamiltoniano, se a massa do oscilador é $m = 1$, então o momento da partícula é $p = y = \dot{x}$, logo cada estado físico da partícula é caracterizado um ponto na Figura A.1, pois ela representa o espaço de fase, no exemplo dado. Daí, o gráfico permite concluir que as soluções são todas periódicas, por serem todas curvas fechadas (círculos) no espaço de fase.

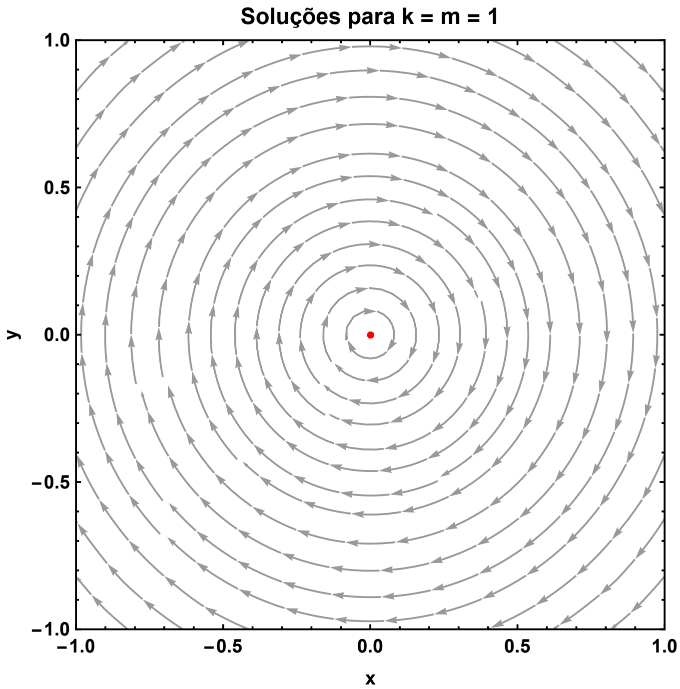

Figura A.1: Soluções do sistema dinâmico (A.6), que representa o espaço de fase de um oscilador harmônico simples unidimensional com massa $m = 1$, para $k = 1$.

Em outras palavras, mesmo sem saber a solução para $x(t)$, já sabemos que essa função deve ser oscilatória, bem como a velocidade $\dot{x}(t)$, já que elas são parametrizações de círculos.

Uma característica importante de se estudar nos SD são os pontos críticos. Um *ponto crítico* (também chamado *ponto fixo*, *ponto de equilíbrio* ou *ponto estacionário*) do sistema (A.1) é um ponto $(x_1, \ldots, x_n)$ tal que $g_1 = \ldots = g_n = 0$. No exemplo do oscilador harmônico, segue de (A.6) que há um único ponto crítico, que é (0,0), representado por uma bolinha vermelha na Figura A.1. Existem muitos tipos de pontos críticos, que são classificados de acordo com o comportamento do sistema próximo a ele. Uma análise rigorosa da classificação dos pontos críticos exige uma análise mais detalhada do sistema, como descrito, por exemplo, no Capítulo 2 de [130], ou nas outras referências já citadas. Vou apenas apresentar uma classificação intuitiva baseada na análise de gráficos semelhantes à Figura A.1.

O ponto crítico do exemplo do oscilador acima é um *ponto de centro*, pois as soluções próximas a ele são todas curvas fechadas que contém o ponto (0,0) no interior da região delimitada por elas.[1] Outros tipos importantes de pontos críticos são ilustrados na Figura A.2, que mostra três exemplos de sistemas dinâmicos cujo único ponto crítico é (0,0). Da esquerda para a direita, os pontos críticos são chamados de: *repulsor* (ou *nodo instável*), para o sistema $\dot{x} = x$, $\dot{y} = 2y$, pois as soluções partem do ponto crítico; *atrator* (ou *nodo estável*), para o sistema $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = -2y$, pois as soluções convergem para o ponto crítico; *ponto de sela*, para o sistema $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = 2y$, pois as soluções não passam pelo ponto crítico, mas se aproximam e se desviam dele.

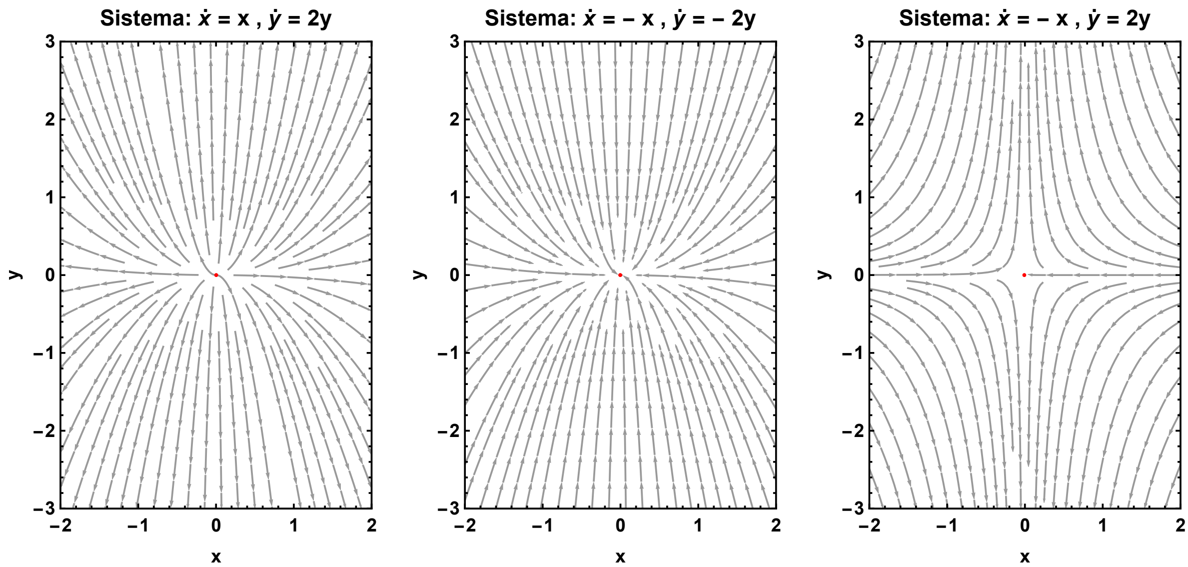

Figura A.2: Três exemplos de sistemas dinâmicos simples, ilustrando três tipos de pontos críticos, da esquerda para a direita, todos em (0,0): repulsor; atrator; ponto de sela.

Analisando os gráficos de soluções de sistemas dinâmicos deste trabalho, vemos que os pontos críticos mais comuns são os pontos de centro e os pontos de sela, o que é bem diferente dos sistemas dinâmicos geralmente empregados em cosmologia. Há uma razão para isso. É que os sistemas analisados aqui possuem como variáveis $\alpha = \ln a$ e ϕ, enquanto que os sistemas dinâmicos mais comuns em cosmologia geralmente possuem como variáveis $H = \dot{\alpha}$, $\dot{\phi}$ e ϕ,

[1] Por "interior", quero dizer a região delimitada pela curva fechada, excluindo a sua fronteira, que é a curva. É o conceito topológico de interior de um conjunto , não devendo ser confundido com a ideia de que a curva "passa" por (0,0).

ou combinações dessas grandezas. Por exemplo, digamos que encontramos um atrator numa análise de sistemas dinâmicos como se faz comumente em cosmologia, e esse atrator equivale a $H =$ constante. Então, o universo experimentará eternamente (pois não é possível "sair" do atrator) uma expansão do tipo de Sitter. Por outro lado, um atrator nos sistemas analisados aqui significaria um valor $\alpha =$ constante, o que significaria uma solução de universo estático, que permanece estático eternamente.

O comando no Mathematica para fazer a Figura A.2 é:

```
SP2 = StreamPlot[{x, 2 y}, {x, -2, 2}, {y, -3, 3},
FrameLabel -> {"x", "y"}, FrameStyle -> Black ,
StreamStyle -> {Line, GrayLevel[0.6]},
PlotRange -> {{-2, 2}, {-3, 3}}, AspectRatio -> 3/2,
PlotTheme -> "BoldLabels",
PlotLabel ->
Style["Sistema: \!\(\*OverscriptBox[\(x\), \(.\)]\) = x , \
\!\(\*OverscriptBox[\(y\), \(.\)]\) = 2y", Black]];
SP2A = Show[SP2, PC];
SP3 = StreamPlot[{-x, -2 y}, {x, -2, 2}, {y, -3, 3},
FrameLabel -> {"x", "y"}, FrameStyle -> Black ,
StreamStyle -> {Line, GrayLevel[0.6]},
PlotRange -> {{-2, 2}, {-3, 3}}, AspectRatio -> 3/2,
PlotTheme -> "BoldLabels",
PlotLabel ->
Style["Sistema: \!\(\*OverscriptBox[\(x\), \(.\)]\) = - x , \
\!\(\*OverscriptBox[\(y\), \(.\)]\) = - 2y", Black]];
SP3A = Show[SP3, PC];
SP4 = StreamPlot[{-x, 2 y}, {x, -2, 2}, {y, -3, 3},
FrameLabel -> {"x", "y"}, FrameStyle -> Black ,
StreamStyle -> {Line, GrayLevel[0.6]},
PlotRange -> {{-2, 2}, {-3, 3}}, AspectRatio -> 3/2,
```

```
PlotTheme -> "BoldLabels",
PlotLabel ->
Style["Sistema: \!\(\*OverscriptBox[\(x\), \(.\)]\) = - x , \
\!\(\*OverscriptBox[\(y\), \(.\)]\) = 2y", Black]];
SP4A = Show[SP4, PC];
GraphicsGrid[{{SP2A, SP3A, SP4A}}]
```

Apêndice B

Derivada Fracionária Conforme

B.1 Notações

A seguir, listamos algumas notações que serão usadas neste Apêndice e em outras partes do trabalho. São notações comuns em Análise [123, 132, 133], área da Matemática que contém o estudo das derivadas fracionárias.

- $a \equiv b$: a quantidade a é definida como sendo igual a b
- $\dot{u} \equiv \frac{du}{dt}$: derivada total em relação ao tempo cósmico t.
- $\mathcal{O}(x^n)$: termos restantes de uma aproximação por série de potências de ordem $\geqslant n$.
- $x \in A$: o elemento x pertence ao conjunto A.
- $A \subset B$: o conjunto A está contido no conjunto B, o que é definido pela implicação $x \in A \Rightarrow x \in B$. Diz-se também que "$A$ é subconjunto de B."
- $f : A \longrightarrow B$: a função f cujo domínio é A e cujo contradomínio é B.
- $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$: conjunto dos números naturais.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$: conjunto dos números inteiros.
- $\mathbb{R}$: conjunto dos números reais.
- Os intervalos, subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leqslant x \leqslant b\}, & (-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ x \leqslant b\},\\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leqslant b\}, & (-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ x < b\},\\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leqslant x < b\}, & [a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leqslant x\},\\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}, & (a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}.
\end{aligned}
$$

- Produto cartesiano entre os conjuntos A e B:

$$A \times B = \{(a,b);\ a \in A \ \text{ e } \ b \in B\}.$$

- $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$ (n vezes).

- C^n: classes de diferenciabilidade. C^0 representa o conjunto das funções contínuas; C^n é o conjunto das funções n vezes diferenciáveis; C^∞ é o conjunto das funções que são de classe C^n para todo $n \in \mathbb{N}$.

B.2 Derivadas de Ordem Fracionária

No cálculo usual, a derivada de uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ num ponto $x \in X \subset \mathbb{R}$ é definida através do seguinte limite

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{B.1}$$

quando esse limite existe e é finito [123]. Segue imediatamente daí a definição das *derivadas de ordem superior*, derivando a derivada iterativamente:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{df}{dx}, \qquad \frac{d^3 f}{dx^3} = \frac{d}{dx}\frac{d^2 f}{dx^2}, \qquad \ldots \tag{B.2}$$

Isso atribui um significado à derivada $d^n f/dx^n$ para $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, derivadas de ordem *inteira positiva*. Apenas para unificar a notação, diz-se que a derivada de ordem zero da função f é a própria f. Essas ideias generalizam-se de modo bastante natural para aplicações $f : E \longrightarrow F$, onde E e F são espaços vetoriais normados, em particular para o $\mathbb{R}^n$ [132].

Essas ideias deixam aberta a questão de se é possível definir derivadas de ordens não-inteiras. Quem primeiro se perguntou isso foi Leibniz em 1695 [134] em uma carta a L'Hospital, carta na qual Leibniz pergunta se seria possível definir uma derivada de ordem 1/2 e que significados e implicações essa definição teria. Uma breve história do Cálculo Fracionário pode ser encontrada no artigo [135]. Modernamente, várias definições foram propostas para as chamadas *derivadas fracionárias*, como ficaram conhecidas as derivadas de ordem não-inteira. Como exemplo [136], a *derivada fracionária de Riemann-Liouville à esquerda* de ordem r, onde $0 < r < 1$, de uma função $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ no ponto x, que é denotada por ${}_aD_x^r[f](x)$, é definida como sendo

$$ {}_aD_x^r[f](x) = \frac{d}{dx}({}_aI_t^{1-r}[f](x)), \tag{B.3} $$

onde

$$ {}_aI_t^r[f](x) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_a^x \frac{f(y)dy}{(x-y)^{1-r}}, \qquad x \in (a,b]. \tag{B.4} $$

As expressões acima dizem como calcular uma derivada de uma ordem qualquer $r \in (0,1)$, de modo que elas se reduzam a derivadas usuais quando r é inteiro. Ou seja, as derivadas de ordem inteira são casos particulares desta. Existem inúmeras variações da derivada fracionária de Riemann-Liouville, todas definidas através de integrais, sendo que cada uma se adequa melhor à solução de determinados problemas específicos [136]. Ao longo do tempo, descobriu-se que as derivadas fracionárias possuem inúmeras aplicações na Física, que incluem oscilações, ondas, mecânica quântica, por exemplo [124].

No entanto, estas derivadas definidas por integrais possuem vários problemas. Primeiro, sendo definidas por integrais, o cálculo efetivo dessas derivadas fracionárias pode conduzir, para funções relativamente simples, a problemas muito mais complicados. Segundo, algumas definições não são capazes sequer de respeitar a regra do produto ou de que a derivada da constante é zero. Terceiro, como as definições são feitas através de integrais, uma equação a derivadas fracionárias com essas definições integrais passa a ser, na verdade, uma equação integral. Mais sobre derivadas fracionárias definidas por integrais e suas aplicações pode ser encontrado nas referências [124, 136–138].

B.3 Derivada Fracionária Conforme em $\mathbb{R}$

Para solucionar os problemas propostos acima, Khalil et al. propuseram uma definição nova no trabalho [139], em 2014. Diferentemente das definições citadas acima, a *derivada fracionária* *conforme* (DFC, daqui em diante), como eles a chamaram, é estabelecida modificando a definição de derivada usual através de um limite, como segue.

Definição B.1. Sejam $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $r \in (0,1]$. Definimos a *derivada fracionária conforme de* f *de ordem* r *no ponto* x como

$$T_r(f)(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + hx^{1-r}) - f(x)}{h}, \tag{B.5}$$

para $x > 0$, caso este limite exista e seja finito. Neste caso, dizemos que f *é* r*-diferenciável em* x. Para o caso de esta derivada existir numa vizinhança à direita de 0, definimos a *derivada fracionária conforme de ordem* r *de* f *em* 0 como

$$T_r(f)(0) = \lim_{x\to 0^+} T_r(f)(x),$$

caso este limite exista e seja finito. Neste caso, dizemos que f *é* r*-diferenciável em* 0. Também denotamos a derivada acima por

$$T_r(f)(x) = f^{(r)}(x) = \frac{d^r f}{dx^r}(x).$$

As duas propriedades fundamentais da DFC, que seguem diretamente da definição acima, são as seguintes:

1. Ela se reduz à derivada ordinária (B.1) quando $r = 1$;

2. Se a função f é diferenciálvel no ponto $x > 0$, então

$$\frac{d^r f}{dx^r}(x) = x^{1-r}\frac{df}{dx}(x). \tag{B.6}$$

A primeira propriedade é óbvia, bastanto escolher $r = 1$ na definição (B.5). Já para demonstrar a segunda, basta fazer uma mudança de variável no limite (B.5) para o reduzir a (B.1), o que permite ver que uma função é diferenciável se, e somente se, é r-diferenciável. A equação (B.6) é a propriedade fundamental da DFC, que transforma qualquer equação a derivadas fracionárias com ordem $0 < r \leqslant 1$ em uma equação diferencial ordinária, desde que o domínio na função esteja no intervalo $[0,+\infty)$, para estar de acordo com a definição dada acima. As propriedades 1 e 2 caracterizam esta derivada e permitem provar que ela possui uma série de propriedades operatórias desejáveis, listadas a seguir [139], para $r \in (0,1]$:

3. Linearidade:
$$\frac{d^r}{dx^r}(f+g) = \frac{d^r f}{dx^r} + \frac{d^r g}{dx^r};$$

4. Regra de Leibniz:
$$\frac{d^r}{dx^r}(f \cdot g) = \frac{d^r f}{dx^r} \cdot g + f \cdot \frac{d^r g}{dx^r};$$

5. Se c é uma função constante,
$$\frac{d^r c}{dx^r} = 0.$$

As propriedades 3 a 5 acima podem ser facilmente demonstradas usando a propriedade 2. As propriedades 1 a 5 confirmam o que dissemos no início, ou seja, que a DFC é muito mais simples e intuitiva que as derivadas fracionárias definidas por integrais. Nesse sentido, nos parece muito mais lógico aplicá-la em problemas de Física. Propriedades adicionais interessantes podem ser encontradas no trabalho original [139].

B.4 Generalizações

Uma deficiência da DFC é que ela, como formulada em (B.5), aplica-se somente a funções reais definidas em um subconjunto do intervalo $[0,+\infty)$. Portanto, do modo como foi formulada inicialmente, aplica-se a uma classe muito restrita de funções. Vamos apresentar agora algumas generalizações que foram propostas nos últimos anos e que nos permitem aplicar a DFC a problemas de quantização canônica.

B.4.1 Mudança no domínio

Mantendo a ordem da derivada como sendo $0 < r \leqslant 1$, é possível generalizar a definição (B.5) de modo muito simples para que ela se aplique a funções reais definidas em (subconjuntos de) intervalos das formas $[a,+\infty)$ e $(-\infty,b]$, onde a e b são números reais quaisquer. Isso foi apresentado por T. Abdeljawad em [140], como segue.

Dada $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, a sua *DFC à esquerda começando em* a é definida por:

$$(T_r^a f)(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h(x-a)^{1-r}) - f(x)}{h}.$$

Quando $a = 0$, escrevemos

$$T_r^a f = T_r f = \frac{d^r f}{dx^r},$$

ou seja, se reduz a (B.5). Por outro lado, dada $f : (-\infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, a sua *DFC à direita terminando em* b é definida por:

$$({}_r^b T f)(x) = -\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h(b-x)^{1-r}) - f(x)}{h}.$$

Para estas derivadas, a propriedade 1 continua valendo, já a propriedade 2 muda para a seguinte, para funções diferenciáveis:

$$(T_r^a f)(x) = (x-a)^{1-r} \frac{df}{dx} \qquad \text{e} \qquad ({}_r^b T f)(x) = -(b-x)^{1-r} \frac{df}{dx}.$$

Usando a equação acima, é possível provar facilmente que as propriedades 3 a 5 anteriores continuam valendo para as derivadas fracionárias conformes à direita e à esquerda.

B.4.2 Funções de várias variáveis

Em 2018, G.N. Yazıcı e G. Uğur publicaram o trabalho [141], no qual generalizam a DFC (B.5) para funções $f : [0, +\infty)^n \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $[0, +\infty)^n = [0, +\infty) \times \ldots \times [0, +\infty) \subset \mathbb{R}^n$, ou seja, para funções reais de n variáveis, sendo que suas variáveis x_i são todas $\geqslant 0$. Neste trabalho, eles mostram que a definição mais natural de derivada parcial fracionária conforme é a seguinte. A derivada parcial fracionária conforme de ordem $r \in (0,1]$ da função f em relação à i-ésima variável x_i no ponto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ é definida por

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_i^r} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h x_i^{1-r}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}.$$

Em particular, podemos generalizar para a derivada à esquerda de uma função $f:[a_1,+\infty)\times\ldots\times[a_n,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ através de

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_i^r}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\ldots,x_i+h(x_i-a_i)^{1-r},\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_n)}{h},$$

o que conduz à relação

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_i^r}=(x_i-a_i)^{1-r}\frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{B.7}$$

No mesmo trabalho [141], os autores mostram como essas ideias se aplicam a campos vetorias $f:[0,+\infty)^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ e demonstram muitos outros resultados.

B.4.3 Derivadas de ordem $r>1$

Em [139], encontramos a generalização natural da definição (B.5) para ordens $r>1$. Como para r inteiro já possuimos a derivada usual, basta nos restringirmos a ordens entre dois números inteiros consecutivos, n e $n+1$. Seja então $r\in(n,n+1]$ e seja $f:[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função $n+1$ vezes diferenciável (de classe C^{n+1}). A derivada de ordem r é definida por

$$\frac{d^r f}{dx^r}=\frac{d^{r-n}}{dx^{r-n}}\frac{d^n f}{dx^n},$$

onde a derivada d^{r-n} é a DFC (B.5), uma vez que $r\in(n,n+1]$ equivale a $0<r-n\leqslant 1$. Em outras palavras, a fórmula acima diz que, se $r\in(n,n+1]$ e $f\in C^{n+1}$, então a DFC de ordem r de f é a derivada fracionária de ordem $r-n$, calculada como na seção B.3, da derivada de ordem n de f.

Podemos incorporar as generalizações anteriores para definir, para uma função real de várias variáveis $f:[a_1,+\infty)\times\ldots\times[a_n,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, a sua DFC à esquerda de ordem $r\in(n,n+1]$ em relação à variável x_i como

$$\frac{\partial^r f}{\partial x^r}=\frac{\partial^{r-n}}{\partial x^{r-n}}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}=(x_i-a_i)^{n+1-r}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x_i^{n+1}}. \tag{B.8}$$

B.4.4 Funções complexas de variável real

Uma generalização bastante natural é para funções do tipo $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, onde X é um intervalo da forma $[a, +\infty)$ ou$(-\infty, b]$. Basta definirmos, para cada $x \in X$, e sendo $r \in (0,1]$,

$$\frac{d^r f}{dx^r} = \frac{d^r}{dx^r} \operatorname{Re} f + i \frac{d^r}{dx^r} \operatorname{Im} f, \tag{B.9}$$

onde subtende-se que d^r/dx^r representa a DFC à esquerda se X é da forma $[a, +\infty)$ e representa a DFC à direita se X é da forma $(-\infty, b]$. A generalização para funções definidas em subconjuntos do $\mathbb{R}^n$, sejam funções reais ou complexas, é feita, por (B.9), apenas trocando d^r por ∂^r, como na subseção B.4.2. Este é o caso de maior importância para o presente trabalho, pois a função de onda é uma função complexa de duas variáveis reais. Portanto, para deixar claro, se $f : [a_1, +\infty) \times \ldots \times [a_n, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função, respectivamente, de classe C^1 e C^{n+1}, então as relações (B.7) e (B.8) continuam válidas. As generalizações para a derivada parcial conforme à direita são inteiramente análogas.

B.5 Aplicações da DFC em Física

A DFC é relativamente recente, por isso ainda não possui um grande número de aplicações. Ela foi usada para criar a versão DFC da chamada mecânica fracionária, uma generalização da mecânica Lagrangeana na qual o cálculo fracionário é substituído pelo cálculo das variações fracionário. Grosso modo, é uma modelagem para oscilações forçadas e com atrito, que já existia, mas que foi reformulada usando a DFC em [142], de 2015. Um dos apelos para se aplicar essas ferramentas para descrever o atrito é o fato de que a resistência do ar pode ser modelada como uma força proporcional a uma potência fracionária r da velocidade, ou seja, $|\vec{F}| \sim v^r$, o que dá uma precisão maior no ajuste fino das potências de v, em vez de considerar apenas os casos $|\vec{F}| \sim v^1$ e $|\vec{F}| \sim v^2$. Isso cria um range maior de modelos de atrito, que, segundo [142] e outros (ver Capítulo 6 de [124], por exemplo), fica muito mais natural em termos do cálculo fracionário, o que corresponde a reformular as próprias leis da mecânica, dando origem à chamada mecânica fracionária. Vale ressaltar que esta é apenas uma motivação intuitiva, pois a mecânica fracionária também está relacionada a muitas outras questões, como dimensões fractais [143].

Além da mecânica clássica, existe também a mecânica quântica fracionária, e a DFC foi aplicada para resolver um sistema de equações de Schrödinger fracionárias acopladas em [144], de 2016. Este trabalho tem um enfoque mais matemático, mas desperta interesse na medida em que se aplica a um sistema que pode, em princípio, servir como método para descrever possíveis modelos físicos em que há duas partículas interagindo através de equações não-lineares. Ele situa-se no contexto maior de estudar equações diferenciais não-lineares para descrever sistemas físicos e pretende resolver um problema que havia sido proposto anteriormente em [145] e resolvido numericamente. A simplicidade da DFC permitiu que se obtivesse em [144] uma solução analítica para o mesmo problema.

Outra aplicação da DFC é em ótica. Em [146], de 2016, a DFC foi aplicada a sólitons, um tópico de ótica não-linear. Mas este resultado é preliminar e precisa de aprimoramento. De tudo que discutimos neste apêndice e também no Capítulo 5, é importante deixar claro que, embora o cálculo fracionário não seja uma das ferramentas mais canônicas da física matemática, ele é tão velho quanto o cálculo diferencial, e tem muitas aplicações. Isso, aliado ao fato de que não há um formalismo definitivo sobre as derivadas fracionárias, nos permite concluir que esse é um tema que desperta ainda muitas questões interessantes, tanto matematicamente quanto fisicamente, que podem ser exploradas de várias formas, que certamente não se esgotam nesta breve discussão.

Referências Bibliográficas

[1] W. Heisenberg. *A parte e o todo: encontros e conversas sobre física, filosofia, religião e política.* Contraponto, 1996.

[2] H. Reichenbach. *Philosophic Foundations of Quantum Mechanics.* Dover Books on Physics. Dover Publications, 2012.

[3] D. Bohm. *Causalidade E Acaso Na Fisica Moderna.* CONTRAPONTO EDITORA.

[4] S. Weinberg. *Cosmology.* Cosmology. OUP Oxford, 2008.

[5] A.G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, 116:1009–1038, 1998.

[6] S. Perlmutter et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high redshift supernovae. *Astrophys. J.*, 517:565–586, 1999.

[7] M. Bojowald. *Quantum Cosmology: A Fundamental Description of the Universe.* Lecture Notes in Physics. Springer New York, 2011.

[8] Matthew et al. Colless. The 2dF Galaxy Redshift Survey: spectra and redshifts. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 328(4):1039–1063, Dec 2001.

[9] N. Aghanim et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. 2018.

[10] R.M. Wald. *General relativity.* Chicago Univ. Press, Chicago, IL, 1984.

[11] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Relativity.* Wiley India Pvt. Limited, 2008.

[12] R. D'Inverno and L.F.M.S.R. D'Inverno. *Introducing Einstein's Relativity.* Comparative Pathobiology - Studies in the Postmodern Theory of Education. Clarendon Press, 1992.

[13] O. Piattella. *Lecture Notes in Cosmology.* UNITEXT for Physics. Springer International Publishing, 2018.

[14] A.R. Liddle and D.H. Lyth. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure.* Cosmological Inflation and Large-scale Structure. Cambridge University Press, 2000.

[15] Alexei A. Starobinsky. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. *Phys. Lett.*, 91B:99–102, 1980. [Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.3,130(1987); ,771(1980)].

[16] K. S. Stelle. Classical Gravity with Higher Derivatives. *Gen. Rel. Grav.*, 9:353–371, 1978.

[17] Brian Whitt. Fourth-order gravity as general relativity plus matter. *Physics Letters B*, 145(3):176 – 178, 1984.

[18] S.V. Sushkov. Exact Cosmological Solutions with Nonminimal Derivative Coupling. *Phys. Rev. D*, 80:103505, Nov 2009.

[19] Brans, C. and Dicke, R. H. Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. *Phys. Rev.*, 124:925–935, Nov 1961.

[20] S. Chervon, I. Fomin, V. Yurov, and A. Yurov. *Scalar Field Cosmology.* WORLD SCIENTIFIC, 2019.

[21] V. Faraoni. *Cosmology in scalar tensor gravity*, volume 139. 2004.

[22] A.D. Linde. *Inflation and quantum cosmology. Boston, USA: Academic.* 1990.

[23] C.W. Misner, C.W.M.K.S.T. John Archibald Wheeler, U.C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, W.H. Freeman, and Company. *Gravitation.* Number pt. 3 in Gravitation. W. H. Freeman, 1973.

[24] E. Papantonopoulos. *Modifications of Einstein's Theory of Gravity at Large Distances*, volume 892 of *Lect. Notes Phys.* Springer, 2015.

[25] David Lovelock. The einstein tensor and its generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, 12(3):498–501, 1971.

[26] David Lovelock. The four-dimensionality of space and the einstein tensor. *Journal of Mathematical Physics*, 13(6):874–876, 1972.

[27] G.W. Horndeski. Second-Order Scalar-Tensor Field Equations in a Four-Dimensional Space. *Int. J. Theor. Phys.*, 10:363–384, 1974.

[28] T. Kobayashi. Horndeski theory and beyond: a review. *Reports on Progress in Physics*, 82(8):086901, jul 2019.

[29] A. De Felice, S. Tsujikawa. Conditions for the cosmological viability of the most general scalar-tensor theories and their applications to extended galileon dark energy models. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(02):007–007, feb 2012.

[30] E. Bellini, I. Sawicki. Maximal freedom at minimum cost: linear large-scale structure in general modifications of gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014(07):050–050, jul 2014.

[31] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration. (B.P. Abbott *et al.*). GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, 119:161101, Oct 2017.

[32] A. Goldstein *et al.* An Ordinary Short Gamma-Ray Burst with Extraordinary Implications: Fermi-GBM Detection of GRB 170817A. *The Astrophysical Journal*, 848(2):L14, oct 2017.

[33] B. P. Abbott *et al.* Gravitational Waves and Gamma-Rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A. *The Astrophysical Journal*, 848(2):L13, oct 2017.

[34] R. Kase, S. Tsujikawa. Dark energy in Horndeski theories after GW170817: A review. *Int. J. Mod. Phys.*, D28(05):1942005, 2019.

[35] J. Kennedy, L. Lombriser, A. Taylor. Reconstructing Horndeski theories from phenomenological modified gravity and dark energy models on cosmological scales. *Phys. Rev. D*, 98:044051, Aug 2018.

[36] Y. Gong, E. Papantonopoulos, Z. Yi. Constraints on scalar–tensor theory of gravity by the recent observational results on gravitational waves. *The European Physical Journal C*, 78(9):738, Sep 2018.

[37] Luca Amendola. Cosmology with nonminimal derivative couplings. *Physics Letters B*, 301(2):175 – 182, 1993.

[38] E.N. Saridakis and S.V. Sushkov. Quintessence and phantom cosmology with nonminimal derivative coupling. *Physical Review D*, 81:083510, Apr 2010.

[39] S.V. Sushkov. Realistic Cosmological Scenario with Nonminimal Kinetic Coupling. *Phys. Rev. D*, 85:123520, Jun 2012.

[40] M.A. Skugoreva, S.V. Sushkov, A.V. Toporensky. Cosmology with Nonminimal Kinetic Coupling and a Power-Law Potential. *Phys. Rev. D*, 88:083539, Oct 2013.

[41] C. Charmousis, E.J. Copeland, A. Padilla, P.M. Saffin. General Second-Order Scalar-Tensor Theory and Self-tuning. *Phys. Rev. Lett.*, 108:051101, Jan 2012.

[42] C. Charmousis, E.J. Copeland, A. Padilla, P.M. Saffin. Self-Tuning and the Derivation of a Class of Scalar-Tensor Theories. *Phys. Rev. D*, 85:104040, May 2012.

[43] E.J. Copeland, A. Padilla, P.M. Saffin. The Cosmology of the Fab-Four. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(12):026, 2012.

[44] C. Charmousis E. Babichev. Dressing a Black Hole with a Time-Dependent Galileon. *Journal of High Energy Physics*, 2014(8):106, Aug 2014.

[45] J. Earman. *Bangs, Crunches, Whimpers, and Shrieks: Singularities and Acausalities in Relativistic Spacetimes.* Oxford University Press, 1995.

[46] M. Novello, S.E.P. Bergliaffa. Bouncing cosmologies. *Physics Reports*, 463(4):127 – 213, 2008.

[47] Jacob D. Bekenstein. Energy cost of information transfer. *Phys. Rev. Lett.*, 46:623–626, Mar 1981.

[48] Jacob D. Bekenstein. Is the cosmological singularity thermodynamically possible? *International Journal of Theoretical Physics*, 28(9):967–981, Sep 1989.

[49] M. Schiffer. Does thermodynamics rule out the existence of cosmological singularities? *International Journal of Theoretical Physics*, 30(4):419–436, 1991.

[50] C. Wetterich. The great emptiness at the beginning of the Universe. 2019.

[51] A. Anabalón, S.F. Bramberger, and J.L. Lehners. Kerr-NUT-de Sitter as an inhomogeneous non-singular bouncing cosmology. *JHEP*, 2019(9):96, Sep 2019.

[52] M. Novello and J. M. Salim. Nonlinear photons in the universe. *Phys. Rev. D*, 20:377–383, Jul 1979.

[53] V.N. Melnikov and S.V. Orlov. Nonsingular cosmology as a quantum vacuum effect. *Physics Letters A*, 70(4):263 – 265, 1979.

[54] P.J. Steinhardt and N. Turok. Cosmic evolution in a cyclic universe. *Phys. Rev. D*, 65:126003, May 2002.

[55] Carlo Rovelli. Notes for a brief history of quantum gravity. In *Recent developments in theoretical and experimental general relativity, gravitation and relativistic field theories. Proceedings, 9th Marcel Grossmann Meeting, MG'9, Rome, Italy, July 2-8, 2000. Pts. A-C*, pages 742–768, 2000.

[56] David L. Wiltshire. An Introduction to quantum cosmology. In *Cosmology: The Physics of the Universe. Proceedings, 8th Physics Summer School, Canberra, Australia, Jan 16-Feb 3, 1995*, pages 473–531, 1995.

[57] Paul Adrien Maurice Dirac. Generalized hamiltonian dynamics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 246(1246):326–332, 1958.

[58] P.A.M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics.* Dover Books on Physics. Dover Publications, 2013.

[59] C. DeWitt and B.S. DeWitt. *Relativity, Groups and Topology, 1963.* Grenoble, Universite, Ecole d'ete de physique theorique: Publications. Gordon & Breach, 1963.

[60] Bryce S. DeWitt. Quantum theory of gravity. i. the canonical theory. *Phys. Rev.*, 160:1113–1148, Aug 1967.

[61] Bryce S. DeWitt. Quantum theory of gravity. ii. the manifestly covariant theory. *Phys. Rev.*, 162:1195–1239, Oct 1967.

[62] Bryce S. DeWitt. Quantum theory of gravity. iii. applications of the covariant theory. *Phys. Rev.*, 162:1239–1256, Oct 1967.

[63] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Dynamical structure and definition of energy in general relativity. *Phys. Rev.*, 116:1322–1330, Dec 1959.

[64] G. Calcagni. *Classical and Quantum Cosmology.* Graduate Texts in Physics. Springer, 2017.

[65] Eric Gourgoulhon. *3+1 Formalism in General Relativity*, volume 846. 2012.

[66] M. Bojowald. *Canonical Gravity and Applications: Cosmology, Black Holes, and Quantum Gravity.* Cambridge University Press, 2010.

[67] Charles W. Misner. Quantum cosmology. 1. *Phys. Rev.*, 186:1319–1327, 1969.

[68] L.C. Evans. *Partial Differential Equations.* Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2010.

[69] Alexander Vilenkin. The Quantum cosmology debate. *AIP Conf. Proc.*, 478(1):23–29, 1999.

[70] Claus Kiefer. Conceptual Problems in Quantum Gravity and Quantum Cosmology. *ISRN Math. Phys.*, 2013:509316, 2013.

[71] S. W. Hawking. The boundary conditions of the universe. In *Astrophysical Cosmology Proceedings*, pages 563–572, Jan 1982.

[72] J. B. Hartle and S. W. Hawking. Wave function of the universe. *Phys. Rev. D*, 28:2960–2975, Dec 1983.

[73] S.W. Hawking. The quantum state of the universe. *Nuclear Physics B*, 239(1):257 – 276, 1984.

[74] Alexander Vilenkin. Quantum cosmology and the initial state of the universe. *Phys. Rev. D*, 37:888–897, Feb 1988.

[75] E. Anderson. Problem of time in quantum gravity. *Annalen der Physik*, 524(12):757–786, 2012.

[76] N.P. Neto. *Teorias e interpretações da mecânica quântica*. Editora Livraria da Física, 2010.

[77] O. Freire, O. Pessoa, and J.L. Bromberg. *Teoria quântica: estudos históricos e implicações culturais*. SciELO - EDUEPB, 2011.

[78] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935.

[79] N. Bohr. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete? *Phys. Rev.*, 48:696–702, Oct 1935.

[80] L.E. Ballentine. The Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 42:358–381, Oct 1970.

[81] D. Bohm. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of “Hidden” Variables. I. *Phys. Rev.*, 85:166–179, Jan 1952.

[82] D. Bohm. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of “Hidden"Variables. II. *Phys. Rev.*, 85:180–193, Jan 1952.

[83] L. de Broglie and H.T. Flint. *An Introduction to the Study of Wave Mechanics*. Methuen & Co. ltd., 1930.

[84] N. Pinto-Neto. The Bohm Interpretation of Quantum Cosmology. *Found. Phys.*, 35:577–603, 2005.

[85] T. P. Shestakova. Is the Copenhagen interpretation inapplicable to Quantum Cosmology? 2018.

[86] J.A. de Barros, N. Pinto-Neto. The causal interpretation of quantum mechanics and the singularity problem and time issue in quantum cosmology. *International Journal of Modern Physics D*, 07(02):201–213, 1998.

[87] N. Pinto-Neto. Quantum Cosmology: How to Interpret and Obtain Results. *Brazilian Journal of Physics*, 30:330 – 345, 06 2000.

[88] J. Kowalski-Glikman and J.C. Vink. Gravity-matter mini-superspace: quantum regime, classical regime and in between. *Classical and Quantum Gravity*, 7(5):901–918, may 1990.

[89] A. Błaut and J.K. Glikman. Quantum potential approach to a class of quantum cosmological models. *Classical and Quantum Gravity*, 13(1):39–49, jan 1996.

[90] J Acacio de Barros and N Pinto-Neto. Comments on the quantum potential approach to a class of quantum cosmological models. *Classical and Quantum Gravity*, 14(7):1993–1995, jul 1997.

[91] J.A. de Barros, N. Pinto-Neto, M.A. Sagioro-Leal. The Causal Interpretation of Dust and Radiation Fluid Non-Singular Quantum Cosmologies. *Physics Letters A*, 241(4):229 – 239, 1998.

[92] R. Colistete Jr., J.C. Fabris, N. Pinto-Neto. Singularities and the classical limit in quantum cosmology with scalar fields. *Phys. Rev. D*, 57:4707–4717, Apr 1998.

[93] Júlio C Fabris, Nelson Pinto-Neto, and A F Velasco. Quantum cosmology in scalar-tensor theories with non-minimal coupling. *Classical and Quantum Gravity*, 16(12):3807–3822, oct 1999.

[94] N. Pinto-Neto, A.F. Velasco, R. Colistete. Quantum Isotropization of the Universe. *Physics Letters A*, 277(4):194 – 204, 2000.

[95] R. Colistete Jr., J.C. Fabris, N. Pinto-Neto. Gaussian superpositions in scalar tensor quantum cosmological models. *Phys. Rev. D*, 62:083507, 2000.

[96] A.P. Bacalhau, N. Pinto-Neto, S.D.P. Vitenti. Consistent Scalar and Tensor Perturbation Power Spectra in Single Fluid Matter Bounce with Dark Energy Era. *Phys. Rev. D*, 97:083517, Apr 2018.

[97] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*. Number v. 2 in Methods of Mathematical Physics. Interscience Publishers, 1962.

[98] J.L. Lopes. *A estrutura quântica da matéria: do átomo pré-socrático às partículas elementares*. Ed. da UFRJ, 2005.

[99] N.A. Lemos. *Mecânica Analítica*. Livraria da Física, 2007.

[100] P.R. Holland. *The Quantum Theory of Motion: An Account of the de Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 1993.

[101] D.J. Griffiths. *Mecânica quântica*. Prentice Hall Brasil, 2011.

[102] J.J. Sakurai, J. Napolitano, and S.R. Dahmen. *Mecânica quântica moderna*. Bookman, 2013.

[103] I. Torres, J.C. Fabris, and O.F. Piattella. Bouncing and Cyclic Quantum Primordial Universes and the Ordering Problem, 2019.

[104] D.C.F. Celani, N. Pinto-Neto, S.D.P. Vitenti. Particle creation in bouncing cosmologies. *Phys. Rev. D*, 95:023523, Jan 2017.

[105] Patrick Peter and Nelson Pinto-Neto. Primordial perturbations in a non singular bouncing universe model. *Phys. Rev.*, D66:063509, 2002.

[106] Patrick Peter, Emanuel Pinho, and Nelson Pinto-Neto. Tensor perturbations in quantum cosmological backgrounds. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2005(07):014–014, jul 2005.

[107] N. Pinto-Neto, A. Scardua. Detectability of Primordial Gravitational Waves Produced in Bouncing Models. *Phys. Rev. D*, 95:123522, Jun 2017.

[108] N. Pinto-Neto and E. Sergio Santini. On the Consistency of quantum geometrodynamics and quantum field theories in the Bohm-de Broglie interpretation. *Gen. Rel. Grav.*, 34:505–532, 2002.

[109] N. Pinto-Neto, F. T. Falciano, Roberto Pereira, and E. Sergio Santini. The Wheeler-DeWitt Quantization Can Solve the Singularity Problem. *Phys. Rev.*, D86:063504, 2012.

[110] N. Pinto-Neto, J.C. Fabris. Quantum Cosmology from the Bohm-de Broglie Perspective. *Classical and Quantum Gravity*, 30(14):143001, 2013.

[111] J.L. Anderson. Factor Sequences in Quantized General Relativity. *Phys. Rev.*, 114:1182–1184, May 1959.

[112] A. Komar. Consistent factor ordering of general-relativistic constraints. *Phys. Rev. D*, 20:830–833, Aug 1979.

[113] T. Christodoulakis, J. Zanelli. Quantization of Robertson-Walker geometry coupled to fermionic matter. *Phys. Rev. D*, 29:2738–2745, Jun 1984.

[114] T. Christodoulakis, J. Zanelli. Operator ordering in quantum mechanics and quantum gravity. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, 93(1):1–21, May 1986.

[115] S.T. Ali, H.-D. Doebner. Ordering problem in quantum mechanics: Prime quantization and a physical interpretation. *Phys. Rev. A*, 41:1199–1210, Feb 1990.

[116] N. Kontoleon, D.L. Wiltshire. Operator ordering and consistency of the wave function of the universe. *Phys. Rev. D*, 59:063513, Feb 1999.

[117] F. Amemiya, T. Koike. Gauge-invariant construction of quantum cosmology. *Phys. Rev. D*, 80:103507, Nov 2009.

[118] T. Demaerel, W. Struyve. Elimination of cosmological singularities in quantum cosmology by suitable operator orderings. *Phys. Rev. D*, 100:046008, Aug 2019.

[119] R. Šteigl, F. Hinterleitner. Factor ordering in standard quantum cosmology. *Class. Quant. Grav.*, 23:3879–3894, 2006.

[120] J.M.F. Bassalo and M.S.D. Cattani. *Elementos De Física Matemática.* Number v. 1. Livraria da Física.

[121] S. Lang. *Algebra.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2005.

[122] I. Torres, J.C. Fabris, and O.F. Piattella. Classical and quantum cosmology of Fab Four John theories. *Physics Letters B*, 798:135003, 2019.

[123] E.L. Lima. *Curso de Análise vol. 1.* 12.ed. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2010.

[124] R. Herrmann. *Fractional calculus: An introduction for physicists.* World Scientific, 2011.

[125] C. R. Almeida, J. C. Fabris, F. Sbisá, and Y. Tavakoli. Quantum cosmology with k-Essence theory. In *Physical and Mathematical Aspects of Symmetries: Proceedings of the 31st International Colloquium in Group Theoretical Methods in Physics*, pages 171–176, 2017.

[126] I. Torres, J.C. Fabris, O.F. Piattella, and A.B. Batista. Quantum Cosmology of Fab Four John Theory with Conformable Fractional Derivative, 2020.

[127] Christian G. Böhmer and Nyein Chan. Dynamical systems in cosmology. *Dynamical and Complex Systems*, page 121–156, Dec 2016.

[128] Sebastian Bahamonde and Christian G. B˙Dynamical systems applied to cosmology: Dark energy and modified gravity. *Physics Reports*, 775-777:1 − 122, 2018. Dynamical systems applied to cosmology: Dark energy and modified gravity.

[129] A.A. Coley. *Dynamical Systems and Cosmology.* Astrophysics and Space Science Library. Springer Netherlands, 2003.

[130] S. Lynch. *Dynamical Systems with Applications using Mathematica®.* Birkhäuser Boston, 2007.

[131] M. Brin and G. Stuck. *Introduction to Dynamical Systems.* Cambridge core. Cambridge University Press, 2002.

[132] E.L. Lima. *Análise no Espaço* $\mathbb{R}^n$. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2002.

[133] W. Rudin, W.A. RUDIN, and Tata McGraw-Hill Publishing Company. *Real and Complex Analysis.* Higher Mathematics Series. McGraw-Hill Education, 1987.

[134] U.N. Katugampola. A New Approach to Generalized Fractional Derivatives. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 6:1–15, 2014.

[135] S.A. David, J.L. Linares e E.M.J.A. Pallone. Fractional order calculus: historical apologia, basic concepts and some applications. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 33(4):4302, 2011.

[136] A.B. Malinowska, T. Odzijewicz, D.F.M. Torres. *Advanced Methods in the Fractional Calculus of Variations.* Springer Publishing Company, Incorporated, 2015.

[137] A.M.F. de Andrade, E.G. de Lima, C.A. Dartora. Uma introdução ao cálculo fracionário e suas aplicações em circuitos elétricos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 40, 2018.

[138] S.W. Wheatcraft, M.M. Meerschaert. Fractional conservation of mass. *Advances in Water Resources*, 31(10):1377 – 1381, 2008.

[139] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264:65 – 70, 2014.

[140] T. Abdeljawad. On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279:57 – 66, 2015.

[141] G.N. Yazıcı, G. Uğur. Multi-variable conformable fractional calculus. *Filomat*, 32:45 – 53, 2018.

[142] Won Chung. Fractional newton mechanics with conformable fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 290:150–158, 12 2015.

[143] Nick Laskin. *Fractional Quantum Mechanics.* WORLD SCIENTIFIC, 2018.

[144] M. Eslami. Exact traveling wave solutions to the fractional coupled nonlinear schrodinger equations. *Applied Mathematics and Computation*, 285:141 – 148, 2016.

[145] N.H. Sweilam and R.F. Al-Bar. Variational iteration method for coupled nonlinear schrödinger equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 54(7):993 – 999, 2007. Variational Iteration Method for Nonlinear Problems.

[146] M. Ekici, M. Mirzazadeh, Q. Zhou, S.P. Moshokoa, A. Biswas, and M. Belic. Solitons in optical metamaterials with fractional temporal evolution. *Optik*, 127(22):10879 – 10897, 2016.