

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Rheymisson Prado Pereira

**Simetria Conforme e T-Dualidade no Modelo σ para
Cordas Fechadas**

VITÓRIA

2020

RHEYMISSON PRADO PEREIRA

**SIMETRIA CONFORME E T-DUALIDADE NO MODELO σ PARA
CORDAS FECHADAS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Orientador: Prof. Galen M. Sotkov

VITÓRIA

2020

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço a meu orientador, Galen Sotkov, pelas inúmeras lições profissionais e de vida que pude absorver nesses dois anos, por seu apoio, por sua competência e dedicação incansáveis que me são fonte constante de inspiração. Agradeço aos professores Ulysses Câmara, Oliver Piatella e Antônio Brasil por sua excelência nos cursos ministrados.

Quero agradecer também a meus amigos que me ajudaram de diversas formas nesses dois anos de mestrado: Lucas Carvalho, Frederico Strey, Flaviana Thebaldi, André Alves e Jebin Larosh.

Por fim, agradeço à minha família pelo constante apoio e incentivo.

Este trabalho foi realizado com financiamento da CNPq.

“Não existe nada fora de você que permita que você se torne melhor, mais forte, mais rico, mais rápido ou mais inteligente. Tudo vem de dentro. Tudo existe. Não procure nada fora de si mesmo.”

Miyamoto Musashi, O Livro dos Cinco Anéis

Resumo

Simetrias conformes determinam a forma específica da ação para cordas no caso em que o espaço-tempo auxiliar não é plano, bem como fixa sua dimensão D . Quando existem dimensões isométricas, a ação obtida apresenta o fenômeno de T-Dualidade, do qual pode-se obter backgrounds distintos que são equivalentes.

Essa dissertação estuda T-dualidade para o caso em que as isometrias são abelianas. É feita uma revisão sistemática da corda clássica fechada e sua quantização, tanto no calibre do cone de luz quanto no calibre conforme. A forma como cada calibre lida com fantasmas, fixa a dimensão do espaço-tempo e o espectro sem massa da teoria são deduzidas em detalhes. O modelo sigma é deduzido como ação efetiva resultante da inclusão do espectro sem massa no espaço plano. É mostrado que a imposição de simetria conforme implica em equações para os campos de background e, em particular, uma versão estendida das equações de Einstein em D dimensões. O fenômeno de T-Dualidade é demonstrado na ação de Polyakov. Para a ação mais geral do modelo sigma, é mostrado que a T-Dualidade abeliana ocorre e pode ser entendida como uma transformação canônica conectando dois sistemas distintos que descrevem a mesma física, neste processo são deduzidas as Transformações de Buscher. São apresentados 3 exemplos de interesse na pesquisa contemporânea, dois ilustram o uso de T-Dualidade na obtenção de backgrounds equivalentes e o último estende o método para dimensões não isométricas. Concluímos propondo utilizar os métodos descritos no texto para investigar a possibilidade da dedução das simetrias de inversão do fator de escala nas teorias gravitacionais assintoticamente AdS.

Abstract

Conformal symmetries determine the specific form of the curved space-time string action, as well as its dimension D . When there are isometric dimensions, the obtained action manifests the T-Duality phenomenon, from which distinct equivalent backgrounds can be obtained.

This dissertation studies said T-Duality in the case when the isometries are abelian. A review is made about the classical closed string and its quantization, both in the light cone and conformal gauge. The way each gauge deals with ghosts, fix the space-time dimension and the massless spectrum are derived in detail. The sigma model is derived as an effective action resulting from the inclusion of the massless spectrum in the flat space-time. It is shown that imposing conformal symmetry in the model implies equations of motion for the background fields and, in particular, an extended version of Einstein's equations in D dimensions. The T-Duality phenomenon is demonstrated in the Polyakov action. For the more general sigma model, it is shown that abelian T-Duality occurs and can be understood as a canonical transformation connecting two distinct systems which describe the same physics, in this process, the Buscher Rules are also derived. Three examples of interest in contemporary research are presented, two illustrating the use of T-Duality to obtain equivalent backgrounds and the last one extending the method for non-isometric dimensions. We conclude by proposing to use the methods described in the text to investigate the possibility of deriving symmetries of scale factor inversion in asymptotically AdS gravitational theories.

Sumário

1	Introdução	1
2	Corda Clássica Fechada	3
2.1	Ação de Nambu Goto	3
2.2	Ação de Polyakov	4
2.3	Simetrias do Espaço Auxiliar	5
2.4	Equações de Movimento e Vínculos	6
3	Quantização do Cone de Luz	8
3.1	D=26	11
3.2	Tachyon e Estados sem massa	12
4	Quantização no Calibre Conforme	14
4.1	Teorias de Campos Conformes	14
4.2	TCC Bidimensionais	16
4.2.1	Tensor Energia-Momento	18
4.2.2	Expansão de Produto de Operadores	21
4.2.3	Espaço de estados	27
5	Modelo Sigma e T-Dualidade Abeliana	34
5.1	Ação efetiva: Modelo Sigma	34
5.2	Impondo Simetria Conforme no modelo σ : Gravitação Estendida	36
5.3	T-Dualidade na Ação de Polyakov	39
5.4	T-Dualidade Abeliana no Modelo Sigma	42
5.5	Solução via Transformações de Buscher	47
6	Exemplos	48
6.1	$(S_1 \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_2$	48
6.2	$AdS_5 \times S_5$	49
6.3	Extensão do método para dimensões abertas em AdS_5	51
7	Conclusão	53
A	Teorema de Noether	54
B	Alguns cálculos	54
B.1	Modos zero da corda fechada	54
B.2	Relação entre osciladores e modos de Virasoro	54
B.3	EPOs (4.101) e (4.102)	56
B.4	Anomalia de Weyl	57
B.5	Derivada temporal total da Função Geratriz	58
C	Código utilizado no cálculo de 5.90	58
D	Cálculo completo da dimensão do espaço auxiliar	60
E	Método de Feddeev-Popov e Fantasmas	63
F	Função de Partição como Funcional Gerador de Funções de Correlação	67

G Espaços de Simetria Máxima - Dois Exemplos	68
G.1 Esfera	69
G.2 Anti-de Sitter	69
Referências	71
Lista de Figuras	73

1 Introdução

A descrição atual, até energias da ordem de $10^4 GeV$, do espaço-tempo e das quatro interações fundamentais (forte, eletro-fraca e gravitacional) entre partículas elementares inclui duas fundações bem sucedidas: a teoria quântica de campos conhecida como Modelo Padrão, e a teoria da Relatividade Geral que determina a geometria do espaço-tempo. Acredita-se que esta abordagem para a física de altas energias continue sendo válida até a escala de energia na ordem de $10^{16} GeV$, da “grande unificação” de três das quatro forças, a forte e a eletro-fraca (porém com eventuais modificações super-simétricas do Modelo Padrão) e da gravitação de Einstein. Mais além, um limite natural desta descrição “convencional” é determinado pela escala de Planck, da ordem de $10^{19} GeV$, correspondendo a distâncias de $10^{-33} cm$, onde o acoplamento (efetivo) gravitacional se torna compatível com os acoplamentos das outras forças. Essa observação é considerada uma indicação da eventual unificação das quatro forças, bem como da natureza quântica da gravitação e do próprio espaço-tempo nestas escalas. Neste contexto, uma física além da escala de Planck exige a elaboração de novos conceitos para espaço, tempo e matéria, em uma abordagem que reúna os fundamentos das teorias quânticas de campos com uma versão quântica da geometria do espaço-tempo.

A teoria de super cordas [1, 2] fornece uma realização deste “programa de unificação”, a partir da identificação de todas as partículas – gráviton, fóton, glúons (“gauge bósons”), quarks, leptons etc. – como estados quânticos de (super-)cordas fechadas e abertas, imersas em um espaço auxiliar externo de 26 (ou 10) dimensões. Nessa descrição, o espaço-tempo clássico, observado em escalas bem maiores que os $10^{-33} cm$ da escala de Planck, é um conceito emergente definido pelos valores médios dos campos quânticos de quatro das cordas “não-compactificadas”, i.e. de extensão infinita. As restantes 22 (ou 6) dimensões extras são descritas por cordas fechadas com raios muito pequenos e classicamente não-observáveis. Porém os estados quânticos destas cordas contribuem para a construção de novas partículas. Os modelos de (super-)cordas são definidos como certas teorias de campo bidimensionais envolvendo todos os 26 (ou 10) campos de corda. No caso mais simples, de cordas livres num espaço-tempo externo plano, cada um destes campos obedece a equação de onda bidimensional com certas condições de contorno. Uma propriedade essencial para a quantização destes modelos são as simetrias (super-)conformes bidimensionais [3, 4]. Vale ressaltar que a condição de invariância sob transformações conformes (junto com transformações de Weyl) é decisiva na determinação da forma específica da ação de (super-) cordas no caso mais geral, quando o espaço auxiliar não é plano. As representações unitárias da álgebra conforme providenciam a forma explícita dos operadores de todas as partículas, e também um método simples e eficiente para o cálculo de suas amplitudes de espalhamento.

A estrutura dessa dissertação é a seguinte. No capítulo 2 introduzimos a corda clássica, a ação de Nambu-Goto construída a partir da exigência de invariância por reparametrizações da worldsheet em analogia à worldline da partícula relativística. Estudamos a ação de Polyakov, que é equivalente à ação de Nambu-Goto, e nela identificamos suas simetrias, vínculos e soluções para a equação de movimento.

No capítulo 3 quantizamos a corda clássica tratada no capítulo anterior. Escolhemos um calibre específico para eliminar graus de liberdade redundantes. Isso é feito às custas da invariância de Lorentz da teoria, a qual, para ser recuperada, exige que a dimensão do espaço-tempo auxiliar tenha um valor específico: $D = 26$ para a corda bosônica ($D = 10$ para a super-corda).

No capítulo 4, ao quantizar sem eliminar todos os graus de liberdade redundantes, encontramos dois problemas: fantasmas e anomalia conforme. Fazemos uma importante digressão sobre Teorias de Campos Conformes, que são fundamentais para a compreensão de qualquer teoria de cordas.

Utilizando as ferramentas de teorias de campos conformes vemos que a contribuição dos fantasmas elimina a anomalia conforme da teoria e novamente fixa a dimensão do espaço-tempo auxiliar em $D = 26$.

Entramos no objetivo principal dessa dissertação no capítulo 5: o estudo de simetrias conformes no Modelo Sigma para cordas fechadas e a descrição do fenômeno de T-Dualidade nele. O modelo sigma é uma extensão da ação de Polyakov que descreve a dinâmica da corda bosônica levando em conta os campos associados aos estados quânticos sem massa: a *métrica* do espaço-tempo auxiliar D dimensional $G_{MN}(X)$, o campo antissimétrico de *Kalb-Ramond*, análogo ao campo eletromagnético, $B_{MN}(X)$, e o campo escalar do *Dilaton* $\Phi(X)$, são acoplados na ação do modelo de modo a preservar invariância de reparametrização, de Lorentz e de Weyl:

$$S_\sigma = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-g} \left\{ (G_{MN}(X) g^{\alpha\beta} + B_{MN}(X) \epsilon^{\alpha\beta}) \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N + \frac{\alpha'}{2} R^{(2)} \Phi \right\}$$

Mostramos que a T-Dualidade pode ser compreendida como uma transformação canônica associada a uma transformação nos termos de background da teoria, as transformações de Buscher [5, 6, 7]. Mostramos também que, como consequência das simetrias conformes do Modelo sigma, pode-se deduzir uma versão estendida da gravitação de Einstein em 26 dimensões, considerando o limite de baixas energias. Esta extensão da Relatividade Geral descreve a dinâmica dos campos de background: a métrica, o campo do Dilaton e as componentes do campo de Kalb-Ramond, chamadas *áxions* (um dos candidatos para explicar a matéria escura [8]). Como consequência da T-Dualidade, pode-se usar as transformações de Buscher para obter soluções extras para as equações de Einstein obtidas do modelo. [1, 2].

No capítulo 6 são apresentados exemplos do uso dos resultados no capítulo 5 em casos específicos para a métrica do espaço-tempo auxiliar, onde algumas dimensões são abertas e todas as outras são fechadas, como $(S_1 \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_2$ e $AdS_5 \otimes S_5$, bem como a extensão do uso de T-dualidade para espaços cujas dimensões são abertas. A relevância desses casos na pesquisa contemporânea é significativa: desde a descrição de universos do tipo de tubos de fluxo eletromagnético[9], o estudo da correspondência AdS/CFT[10, 11, 12], até o cálculo de amplitudes de espalhamento de gluons em $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills[13].

Concluimos o essa dissertação propondo um problema de pesquisa em aberto: utilizar os métodos descritos no texto para investigar a possibilidade da *dedução* das simetrias de inversão do fator de escala nas teorias gravitacionais assintoticamente AdS.

2 Corda Clássica Fechada

Concentramos nosso estudo na corda fechada, é nela que analisaremos a T-Dualidade. Ela é um pouco mais simples que a corda aberta, uma vez que não exige a introdução de outro objeto dinâmico, D-Branas, para sua consistência.

2.1 Ação de Nambu Goto

De modo geral, existem duas formas equivalentes de expressar a ação. Uma puramente geométrica, e outra mais dinâmica, no sentido de que a dinâmica dos campos é mais explícita do que a geometria. A ação “geométrica” é chamada ação de Nambu-Goto, a ação “dinâmica” é chamada ação de Polyakov. Ambas têm vantagens e desvantagens. Na ação de Polyakov aparecem simetrias extras para serem exploradas e é mais conveniente de ser quantizada via integrais de caminho, em contrapartida, a ação de Nambu-Goto é mais intuitiva uma vez que é uma extensão da ação da partícula relativística.

Por enquanto trabalharemos com a ação de Nambu-Goto.

A ação da corda relativística é construída em analogia à ação da partícula relativística: um funcional da trajetória do objeto que seja invariante por reparametrizações da trajetória, uma vez que a invariância por reparametrizações é condição necessária para que a ação seja física.

Sendo um objeto unidimensional, a trajetória de uma corda no espaço-tempo é uma superfície bidimensional, chamada worldsheet. Portanto, a ação deve ser um funcional da área da worldsheet da corda.

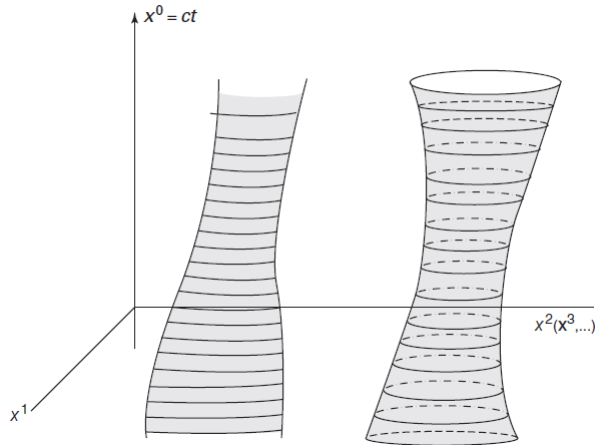


Figura 1: Superfície traçada pela corda ao se propagar no espaço-tempo[14].

Denotaremos por τ e σ os parâmetros da worldsheet, e $X^\mu(\tau, \sigma)$ a coordenada do espaço-tempo sobre a worldsheet. Por conveniência, tomaremos os parâmetros $\tau \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in [0, \sigma_1]$. Como estamos tratando de cordas fechadas, as coordenadas na worldsheet satisfazem

$$X^\mu(\tau, \sigma + \sigma_1) = X^\mu(\tau, \sigma) \quad (2.1)$$

A invariância da ação por reparametrizações se manifesta através da invariância da área da worldsheet.

A ação obtida do funcional de área é Ação de Nambu-Goto:

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-\gamma} \quad (2.2)$$

onde $\alpha' \equiv \frac{1}{2\pi T}$ é o parâmetro de inclinação e T é a tensão na corda, estamos considerando $c = 1$, $\sigma^\alpha \equiv (\tau, \sigma), d^2\sigma = d\tau d\sigma$,

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X} \cdot X' \\ \dot{X} \cdot X' & X'^2 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}$, $X'^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$, e $\gamma \equiv \det \gamma_{\alpha\beta}$, o produto interno é em relação ao espaço auxiliar, ou seja, usando a métrica $\eta_{\mu\nu}$ ¹.

Variando a ação, obtemos

$$\delta S_{NG} = - \int d^2\sigma \delta X^\mu \left(\frac{\partial \Pi_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \Pi_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) + \int d\sigma \delta X^\mu \Pi_\mu^\tau \Big|_{\tau_i}^{\tau_f} + \int d\tau \delta X^\mu \Pi_\mu^\sigma \Big|_0^{\sigma_1} = 0 \quad (2.4)$$

onde

$$\begin{aligned} \Pi_\mu^\tau &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}} \\ \Pi_\mu^\sigma &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (X')^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

de onde extraímos as equações de movimento

$$\frac{\partial \Pi_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \Pi_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0 \quad (2.6)$$

ou equivalentemente,

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\alpha X^\mu} \right) = 0 \quad (2.7)$$

2.2 Ação de Polyakov

Nesta seção introduzimos a ação de Polyakov, que é classicamente equivalente à ação de Nambu-Goto.

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

A presença de raiz quadrada dos campos na ação de Nambu-Goto é problemática pois dificulta a quantização via integrais de caminho. A ação de Polyakov não tem esse problema, se livra da raiz quadrada nos campos X às custas de introduzir um campo auxiliar $g^{\alpha\beta}$ com dinâmica própria, e a quantização dos campos via integrais de caminho é muito mais simples.

Não vamos tratar da quantização via integrais de caminho, mas é conveniente introduzir a ação de Polyakov pois o modelo σ , que é do interesse desse texto, é uma extensão da ação de Polyakov. A ação (2.8) tem também a vantagem formal de ter uma simetria extra explícita, a *invariância de Weyl* (ou simetria conforme):

$$g_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) \longmapsto \Omega^2(\tau, \sigma) g_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) \quad (2.9)$$

¹Nesse texto usamos a convenção $diag(\eta_{\mu\nu}) = (1, -1, -1, \dots, -1)$.

A equivalência entre (2.2) e (2.8) pode ser mostrada comparando as equações de movimento. Para a ação de Nambu-Goto, as equações de movimento para X^μ são²

$$\partial_\alpha (\sqrt{-\gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu) = 0 \quad (2.10)$$

analogamente, para a ação de Polyakov³

$$\partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu) = 0 \quad (2.11)$$

as duas ações são, portanto, equivalentes.

2.3 Simetrias do Espaço Auxiliar

Correntes conservadas decorrentes de simetrias no espaço auxiliar, além de interessantes por si só, no caso de cordas, servem como recurso para fixar calibres convenientes para resolver as equações de movimento (2.7). Veremos um calibre no qual a equação de movimento se reduz à equação de onda. Outra propriedade de interesse de correntes conservadas é que a exigência de sua consistência após a quantização, fixa a dimensão do espaço-tempo da teoria.

É fácil ver que a ação de Nambu-Goto (2.2) e Polyakov (2.8) são invariante sob translações no espaço-tempo

$$\begin{aligned} \sigma^\alpha &\longmapsto \bar{\sigma}^\alpha = \sigma^\alpha \\ X^\mu(\sigma^\alpha) &\longmapsto \bar{X}^\mu(\bar{\sigma}^\alpha) = X^\mu(\sigma^\alpha) + \Delta X^\mu \quad \Delta X^\mu(\sigma^\alpha) = \eta^{\mu\nu} \varepsilon_\nu \end{aligned} \quad (2.12)$$

Aplicando o Teorema de Noether obtemos a corrente conservada

$$J_\mu^\alpha = (\Pi_\mu^\tau, \Pi_\mu^\sigma) \quad (2.13)$$

e a carga conservada

$$p_\mu = \int_0^{\sigma_1} \Pi_\mu^\tau(\tau, \sigma) d\sigma \quad (2.14)$$

ou seja, $\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$, se conserva na worldsheet. Como tal, será útil para definir um calibre conveniente.

O mesmo raciocínio para rotações no espaço-tempo (transformações de Lorentz)

$$\begin{aligned} \sigma^\alpha &\longmapsto \bar{\sigma}^\alpha = \sigma^\alpha \\ X^\mu(\sigma^\alpha) &\longmapsto \bar{X}^\mu(\bar{\sigma}^\alpha) = \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\sigma^\alpha) \simeq X^\mu + \omega_{\mu\nu} X^\nu, \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \end{aligned} \quad (2.15)$$

mostra que a corrente e carga conservadas correspondentes a essa simetria são

$$M_{\mu\nu}^\alpha = X_\mu \Pi_\nu^\alpha - X_\nu \Pi_\mu^\alpha \quad M_{\mu\nu} = \int M_{\mu\nu}^\tau(\tau, \sigma) d\sigma \quad (2.16)$$

com $\frac{dM_{\mu\nu}}{d\tau} = 0$. Por cálculo direto, vê-se que a carga $M_{\mu\nu}$ obedece ao colchete de Poisson

$$\{M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}\}_{CP} = -\eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} M^{\rho\nu} + \eta^{\nu\sigma} M^{\rho\mu} \quad (2.17)$$

Ou seja, o espaço auxiliar D dimensional, no qual a worldsheet está embutida, tem como grupo de simetria o grupo de Poincaré.

Equação (2.17) é de particular importância, pois é condição necessária para a invariância de Lorentz da teoria, e será vital para fixar a dimensão do espaço-tempo após a quantização.

²Usando (2.7) e $\delta\sqrt{-\gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta}$ para variar a Lagrangeana.

³Pode ser mostrado que $g_{\alpha\beta} = 2f(\sigma^\xi)\gamma_{\alpha\beta}$ [15], de modo que $g^{\alpha\beta} = f^{-1}\gamma^{\alpha\beta}$ e o fator f se cancela em (2.11) e o resultado é a mesma equação (2.10).

2.4 Equações de Movimento e Vínculos

Agora vamos nos valer da propriedade de Invariância por reparametrizações da ação (2.8) para selecionar um calibre conveniente, que torne mais amigáveis as equações de movimento (2.7).

Existem vários calibres que tornam a análise das equações de movimento mais simples cada um com vantagens e desvantagens, duas se destacam: o *calibre conforme* e o *calibre do cone de luz*.

O calibre conforme não fixa todos os graus de liberdade, mas é o bastante para tornar a equação de movimento mais simples. Consiste em usar a invariância por reparametrizações e a invariância por transformações de Weyl para tomar⁴

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \quad (2.18)$$

Dessa forma, a ação de Polyakov se torna

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \quad (2.19)$$

de onde extraímos a equação de movimento

$$\partial_\alpha (\eta^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu) = 0 \quad (2.20)$$

que é a equação de onda livre! Essa equação não resolve toda a história, ainda precisamos determinar a dinâmica do campo auxiliar $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ que introduzimos. Para isso basta tomar $\frac{\delta S_P}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0$. É conveniente definir o tensor energia momento

$$T_{\alpha\beta} \equiv -\frac{4\pi\alpha'}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_P}{\delta g^{\alpha\beta}} \quad (2.21)$$

portanto, a dinâmica de $g_{\alpha\beta}$ é dada pelos vínculos

$$T_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.22)$$

que, usando (2.18), é equivalente a

$$\left(\dot{X} \pm X' \right)^2 = 0 \quad (2.23)$$

Com esses vínculos, os momentos Π_ν^α ficam muito mais simples

$$\Pi_\mu^\tau = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}_\mu \quad \Pi_\mu^\sigma = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'_\mu \quad (2.24)$$

A solução da equação de onda livre (2.20) é bem conhecida:

⁴Isso é feito da seguinte forma::

i- Da invariância com respeito à transformação de Weyl (2.9), a métrica pode ser reescrita na forma $g_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) \mapsto e^{2\phi} g_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$;

ii- O tensor de Riemann bidimensional é múltiplo do escalar de Ricci $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{R}{2} (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma})$;

iii- Sob uma transformação de Weyl $g_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) \mapsto e^{2\phi} g_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$, o escalar de Ricci se transforma como $R \mapsto R' = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g'}} \{R - 2(\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi)\}$.

Ou seja, ϕ pode ser sempre escolhido de modo que o escalar de Ricci e, conseqüentemente, o tensor de Riemann, se anule. Assim, a métrica bidimensional é sempre plana, a menos de uma transformação de Weyl.

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma) \quad (2.25)$$

onde $X_L^\mu(\tau + \sigma)$ representa uma onda movendo-se para a esquerda (*left movers*) e $X_R^\mu(\tau - \sigma)$ representa ondas movendo-se para a direita (*right movers*). Definindo $\tau + \sigma \equiv u$ e $\tau - \sigma \equiv v$, expansão em modos de Fourier, usando a condição (2.1), fornece

$$X_L^\mu(u) = \frac{x_{0L}^\mu}{2} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\alpha}_0^\mu u + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_n^\mu}{n} e^{-inu} \quad X_R^\mu(v) = \frac{x_{0R}^\mu}{2} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_0^\mu v + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-inv} \quad (2.26)$$

onde os α_n^μ e $\bar{\alpha}_n^\mu$ são a notação usual em teoria de cordas, se relacionam com os modos de Fourier tradicionais da forma

$$\alpha_n^\mu \equiv a_n^\mu \sqrt{n} \quad \bar{\alpha}_n^\mu \equiv \bar{a}_n^\mu \sqrt{n} \quad (2.27)$$

Vale também⁵

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu \quad \alpha_n^\mu = (\alpha_{-n}^\mu)^* \quad \bar{\alpha}_n^\mu = (\bar{\alpha}_{-n}^\mu)^* \quad \alpha_0^\mu = \bar{\alpha}_0^\mu \quad (2.28)$$

a terceira equação é consequência de exigir que a solução seja real.

Definindo $x_0^\mu \equiv \frac{x_{0L}^\mu}{2} + \frac{x_{0R}^\mu}{2}$, a forma final da solução é

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma}) \quad (2.29)$$

⁵Veja seção B.1 do Apêndice.

3 Quantização do Cone de Luz

Antes de quantizar, fixamos os graus de liberdade restantes usando o calibre do cone de luz⁶. Para isso, definimos

Definição (Coordenadas do Cone de Luz).

$$x^\mu = (x^+, x^-, x^I) \quad x^+ = \frac{x^0 + x^1}{\sqrt{2}} \quad x^- = \frac{x^0 - x^1}{\sqrt{2}} \quad x^+ = \frac{x^0 + x^1}{\sqrt{2}} \quad ds^2 = \tilde{\eta}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.1)$$

onde $I = 2, 3, \dots, D - 1$ são chamadas coordenadas transversais, e

$$\tilde{\eta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & 0 & \\ & & -1 & & \\ 0 & & & -1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Da equação (2.29), segue que

$$X^+(\tau, \sigma) = x_0^+ + \alpha' p^+ \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^+ e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^+ e^{-in\sigma}) \quad (3.3)$$

usando a invariância por reparametrizações, podemos trocar de parametrização $\sigma_\pm \mapsto \tilde{\sigma}_\pm(\sigma_\pm)$. Isso transforma $\tau = \frac{1}{2}(\sigma_+ + \sigma_-)$ e $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_+ - \sigma_-)$ em

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_+(\tau + \sigma) + \tilde{\sigma}_-(\tau - \sigma)) \\ \tilde{\sigma} &= \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_+(\tau + \sigma) - \tilde{\sigma}_-(\tau - \sigma)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

A primeira dessas equações é o mesmo que afirmar que $\tilde{\tau}$ é solução da equação de onda livre sem massa

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \tilde{\tau} = 0 \quad (3.5)$$

resolvendo essa equação, $\tilde{\sigma}$ fica completamente determinada. Note que (3.5) é a mesma equação (2.20) obedecida pelos $X^\mu(\tau, \sigma)$. Isso significa que, nos valendo da invariância de reparametrizações, podemos escolher $\tilde{\tau}$ igual a um dos $X^\mu(\tau, \sigma)$ a menos de uma constante multiplicativa para que a unidade esteja correta, e a menos de uma constante:

$$\tilde{\tau} = \kappa X^{\mu_0} + cte \quad (3.6)$$

A escolha mais conveniente leva ao

⁶É importante fazer isso pois, após a quantização, evita a aparição de *fantasmas*, que são estados com norma negativa. São interpretados como sendo estados não físicos, o espaço de estados sendo portanto um espaço “maior” que o necessário para descrever a física do sistema. Veremos essa abordagem no capítulo 4.

Impor o calibre de cone de luz antes da quantização fixa de uma vez as soluções físicas e nos livramos de fantasmas na quantização, mas isso não sai de graça. Perdemos a invariância de Lorentz explícita da teoria e, para recuperá-la para estados de massa qualquer, veremos que a dimensão do espaço auxiliar não pode mais ser arbitrária.

Definição (Calibre do Cone de Luz).

$$\tau = \frac{X^+}{\alpha' p^+} \implies X^+ = \alpha' p^+ \tau \implies p^+ = 2\pi \Pi^{\tau+} \quad \sigma \in [0, 2\pi] \quad (3.7)$$

A componente $X^+(\tau, \sigma)$ é fixada diretamente e (3.7) implica $x_0^+ = 0$. $X^-(\tau, \sigma)$ é escrito em termos de x_0^- e $X^I(\tau, \sigma)$ (e, conseqüentemente, de x_0^I , α_n^I e $\bar{\alpha}_n^I$)⁷. Ou seja, a dinâmica da corda fechada, no calibre do cone de luz, é completamente determinada pelos campos

$$\underbrace{x_0^I, \alpha_n^I, \bar{\alpha}_n^I}_{X^I(\tau, \sigma)}, \quad x_0^-, \quad p^+ \quad (3.8)$$

Serão eles os principais ingredientes na quantização.

Com um pouco de álgebra obtemos a relação entre os α_n^- e os α_n^I ⁸:

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{2}{p^+} L_n \quad \sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_n^- = \frac{2}{p^+} \bar{L}_n \quad (3.9)$$

onde

$$L_n \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p \cdot \alpha_{n-p} \quad \bar{L}_n \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_p \cdot \bar{\alpha}_{n-p} \quad L_0 = \bar{L}_0 \quad (3.10)$$

os produtos internos denotam soma sobre o índice I . Os L_n e \bar{L}_n são chamados *modos transversais de Virasoro*. É possível mostrar que os modos de Virasoro são os coeficiente de expansão do campo X^- . Veremos mais adiante que desempenham um papel chave na teoria. A última equação de (3.10) segue da última equação de (2.28).

Para comparação após a quantização, é interessante escrever a Hamiltoniana e a massa em termos dos graus de liberdade da teoria, em termos de X^I , ou equivalentemente, em termo dos α_n^I . Por substituição direta na definição obtemos

$$H = \int_0^{\sigma_1} \left(\Pi^\tau \cdot \dot{X} - \mathcal{L} \right) d\sigma = \int_0^{\sigma_1} \left(\dot{X}^2 + X'^2 \right) d\sigma$$

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\alpha_n \cdot \alpha_{-n} + \bar{\alpha}_n \cdot \bar{\alpha}_{-n}) = L_0 + \bar{L}_0 \quad (3.11)$$

e a massa da relação relativística

$$M^2 = -p^\mu p_\mu = 2p^+ p^- - p^I p_I$$

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cdot \alpha_{-n} + \bar{\alpha}_n \cdot \bar{\alpha}_{-n}) = \frac{2}{\alpha'} (L_0 + \bar{L}_0) - \frac{2}{\alpha'} \alpha_0 \cdot \alpha_0 \quad (3.12)$$

A Hamiltoniana e a massa vão mudar após a quantização, e darão origem a propriedades sem análogo clássico.

As grandezas relevantes da teoria obedecem os colchetes de Poisson:

$$\{X^I(\tau, \sigma), \Pi^{J\tau}(\tau, \sigma')\}_{CP} = \delta(\sigma - \sigma') \tilde{\eta}^{IJ} \quad \{x_0^-, p^+\}_{CP} = \tilde{\eta}^{-+} \quad (3.13)$$

$$\{\bar{\alpha}_m^I, \bar{\alpha}_n^J\}_{CP} = -im\delta_{m+n,0} \tilde{\eta}^{IJ} \quad \{\alpha_m^I, \alpha_n^J\}_{CP} = -im\delta_{m+n,0} \tilde{\eta}^{IJ} \quad \{\bar{\alpha}_m^I, \alpha_n^J\}_{CP} = 0 \quad (3.14)$$

⁷Veja página 188 de [1].

⁸Veja seção B.2 do Apêndice.

$$\{\bar{L}_m, \bar{L}_n\}_{CP} = i(m-n)\bar{L}_{m+n} \quad \{L_m, L_n\}_{CP} = i(m-n)L_{m+n} \quad \{\bar{L}_m, L_n\}_{CP} = 0 \quad (3.15)$$

A álgebra determinada por (3.15) é chamada Álgebra de Witt, ou Virasoro sem carga central. Veremos que essa álgebra vai se alterar como consequência da quantização.

Seguindo a prescrição

$$\begin{aligned} \phi &\mapsto \hat{\phi} \\ \{, \}_{CP} &\mapsto -i[,] \end{aligned}$$

os campos são promovidos a operadores e os colchetes de Poisson a comutadores⁹

$$[X^I(\tau, \sigma), \Pi^{\tau J}(\tau, \sigma')] = -i\delta(\sigma - \sigma')\tilde{\eta}^{IJ} \quad [x_0^-, p^+] = -i \quad (3.16)$$

$$[\bar{\alpha}_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = -m\delta_{m+n,0}\tilde{\eta}^{IJ} \quad [\alpha_m^I, \alpha_n^J] = -m\delta_{m+n,0}\tilde{\eta}^{IJ} \quad [\bar{\alpha}_m^I, \alpha_n^J] = 0 \quad (3.17)$$

Da relação (2.27) segue que, para $m, n > 0$

$$[\bar{a}_m^I, \bar{a}_n^{\dagger J}] = -\delta_{m,n}\tilde{\eta}^{IJ} \quad [a_m^\mu, a_n^{\dagger\nu}] = -\delta_{m,n}\tilde{\eta}^{\mu\nu} \quad (3.18)$$

que são as relações de comutação conhecidas dos operadores de criação e aniquilação!

Definindo o espaço de Fock

$$\begin{aligned} \text{Vácuo} &\equiv |0; p\rangle \\ \hat{p}^I |0; p\rangle &= p^I |0; p\rangle \\ \alpha_n^I |0; p\rangle &= \bar{\alpha}_n^I |0; p\rangle = 0 \quad n > 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

e um estado arbitrário é dado por

$$|\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^D (\alpha_{-n}^I)^{\lambda_{n,I}} \right] \left[\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{J=2}^D (\bar{\alpha}_{-m}^J)^{\bar{\lambda}_{m,J}} \right] |0; p\rangle, \quad \lambda_{n,I}, \bar{\lambda}_{m,J} \geq 0 \quad (3.20)$$

ou seja, uma combinação arbitrária de operadores de criação e aniquilação agindo sobre o vácuo.

É explícito de (3.17) que a definição dos modos transversais de Virasoro, agora *operadores* transversais de Virasoro, é ambígua, uma vez que os α_n^I e $\bar{\alpha}_n^I$ não comutam quando $m \neq -n$. Logo, a definição de \bar{L}_0 e L_0 é problemática. Como é feito em Teoria Quântica de Campos, essa dificuldade é resolvida usando a convenção de ordenação normal. Em decorrência disso, surge uma constante:

$$L_0 = \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot \alpha_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p} \cdot \alpha_p + \frac{(D-2)}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \quad (3.21)$$

Usando a função Zeta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{Re}(s) > 1 \quad (3.22)$$

é um resultado clássico que, para $s = -1$, a função converge e é igual a

$$\zeta(-1) = \sum_{p=1}^{\infty} p = -\frac{1}{12} \quad (3.23)$$

⁹Omitiremos o chapéu “^”, a menos que não o fazer seja ambíguo. A partir de agora, nesse capítulo, todos os campos são todos operadores, a menos que seja mencionado o contrário.

portanto,

$$L_0 = \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot \alpha_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p} \cdot \alpha_p - \frac{(D-2)}{24} \quad (3.24)$$

Para facilitar a comparação com o caso clássico, vamos renomear o $L_n, n \in \mathbb{Z}$ quântico como \mathbf{L}_n e definir o operador normal ordenado

$$L_0 \equiv \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot \alpha_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p} \cdot \alpha_p \equiv \bar{L}_0 \quad (3.25)$$

note que $\mathbf{L}_n = L_n$ para $n \neq 0$, enquanto que $\mathbf{L}_0 = L_0 - \frac{(D-2)}{24}$.

É conveniente definir o operador número

$$N \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p} \cdot \alpha_p \quad \bar{N} \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{-p} \cdot \bar{\alpha}_p \quad (3.26)$$

Sua ação nos estados é a mesma que já conhecemos da Mecânica Quântica. Note que, de (3.10) e da definição (3.25) segue

$$N = \bar{N} \quad (3.27)$$

Essa condição, juntamente com (3.19) e (3.20) definem completamente o espaço de estados da teoria. A equação (3.27) nos diz que cada estado deve ter o mesmo número de operadores de criação *left movers* e *right movers* atuando sobre o vácuo. Essa condição é conhecida como *level matching*.

A alteração em \mathbf{L}_0 com relação ao caso clássico, devido à ordenação normal, muda a álgebra (3.15), que agora é

$$\begin{aligned} [\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m-n)\bar{L}_{m+n} + \frac{(D-2)}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \\ [L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{(D-2)}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \\ [L_m, \bar{L}_n] &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

O raciocínio para \bar{L}_m é idêntico. A expressão (3.28) é a Álgebra de Virasoro.

A mudança em \mathbf{L}_0 após a quantização tem como consequência, além da mudança da álgebra, a mudança da Hamiltoniana e do espectro de massa:

$$\begin{aligned} H &= L_0 + \bar{L}_0 - \frac{(D-2)}{12} \\ M^2 &= \frac{2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cdot \alpha_{-n} + \bar{\alpha}_n \cdot \bar{\alpha}_{-n} - \frac{(D-2)}{12} \right) = \frac{2}{\alpha'} \left(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{(D-2)}{12} \right) - \frac{2}{\alpha'} \alpha_0 \cdot \alpha_0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.1 D=26

Após a quantização, (2.17) se torna

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\tilde{\eta}^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - i\tilde{\eta}^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + i\tilde{\eta}^{\mu\sigma}M^{\rho\nu} - i\tilde{\eta}^{\nu\sigma}M^{\rho\mu} \quad (3.30)$$

Ou seja, essa relação de comutação deve ser obedecida para que a teoria seja Lorentz invariante. Tomando essa relação com $\mu = -, \nu = I, \rho = -$ e $\sigma = J$, deve ser

$$[M^{I-}, M^{I-}] = 0 \quad (3.31)$$

Usando (2.16) e depois de muita álgebra¹⁰, obtemos

$$[M^{I-}, M^{J-}] = \frac{2}{\alpha' (p^+)^2} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I \cdot \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \cdot \alpha_m^I) \left\{ m \left[1 - \frac{D-2}{24} \right] \right\} + (\alpha_n \rightarrow \bar{\alpha}_n) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (3.32)$$

A soma de osciladores em geral não é zero, resta então o termo entre colchetes. Igualando a zero segue imediatamente que

$$D = 26 \quad (3.33)$$

Existem outras formas de mostrar isso, porém essa forma é a mais simples de entender apesar de ser a que exige mais cálculos.

O interessante desse resultado é que as simetrias do espaço-tempo fixam sua dimensão! Um resultado impressionante, sem análogo em teoria de partículas convencional. Observe que, com esse resultado, não precisamos impor a dimensão do espaço-tempo como se faz usualmente em relatividade e mecânica quântica, a dimensão é dedutível de primeiros princípios. Isso representa um avanço na direção de uma teoria mais fundamental da natureza.

Veja que com $D = 26$ a Hamiltoniana e o espectro de massa tornam-se

$$\begin{aligned} H &= L_0 + \bar{L}_0 - 2 = \mathbf{L}_0 + \bar{\mathbf{L}}_0 \\ M^2 &= \frac{2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (N + \bar{N} - 2) \end{aligned} \quad (3.34)$$

surge a possibilidade de massa quadrada negativa! Esse é um dos problemas de teoria de cordas bosônicas que é corrigido introduzindo, entre outras coisas, fermions na teoria, resultando em teoria de Supercordas onde $D = 10$. A partícula cuja massa ao quadrado é negativa é chamada Tachyon. O espectro de massa também prevê partículas de massa nula: áxions, gravitons e o campo do dilaton. Além dessas partículas, teoria de cordas também prevê a existência de outras partículas, como fótons e matéria comum, porém elas vem do espectro de cordas abertas e D-Branas.

Finalizamos essa seção notando que, (3.19) caracteriza os estados em termos dos operadores de criação e aniquilação α_n^I e $\bar{\alpha}_n^I$, a segunda relação define o vácuo como auto-estado do momento transversal \hat{p}^I e, conseqüentemente, de α_0^I . No entanto, os estados da teoria podem ser também caracterizados em termos dos \bar{L}_n e L_n . De fato, (3.25), (2.28) e (3.19) implicam

$$\begin{aligned} \text{Vácuo} &\equiv |0; p\rangle \\ \mathbf{L}_0 |0; p\rangle &\propto p \cdot p |0; p\rangle \\ L_n |0; p\rangle &= \bar{L}_n |0; p\rangle = 0 \quad n > 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

e um estado arbitrário é obtido atuando os \bar{L}_{-n} e L_{-n} , com $n > 0$, sobre o vácuo

$$|\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \left[\prod_{n=1}^{\infty} (L_{-n})^{\lambda_n} \right] \left[\prod_{m=1}^{\infty} (\bar{L}_{-m})^{\bar{\lambda}_m} \right] |0; p\rangle, \quad n, m > 0 \quad \lambda_n, \bar{\lambda}_m \geq 0 \quad (3.36)$$

E (3.27) torna-se

$$L_0 = \bar{L}_0 \quad (3.37)$$

3.2 Tachyon e Estados sem massa

Usando (3.20) e respeitando a condição (3.27), o Tachyon é o vácuo, o estado obtido quando

$$\begin{aligned} N &= \bar{N} = 0 \\ |tachyon\rangle &= |0; p\rangle \end{aligned} \quad (3.38)$$

¹⁰Veja seção C do Apêndice.

de (3.34), sua massa quadrada é negativa

$$M^2 = -\frac{4}{\alpha'} \quad (3.39)$$

isto significa que o potencial é instável, o que por si só não é um problema. O problema é que o potencial decai infinitamente devido a qualquer perturbação, levando a uma energia negativa infinita.¹¹ Este é o estado de menor energia.

Os próximos estados de menor energia são os estados de massa nula

$$N = \bar{N} = 1 \Rightarrow M^2 = 0 \\ \alpha_{-1}^I \bar{\alpha}_{-1}^J |0; p\rangle \quad (3.40)$$

dos quais existem $(D-2)^2$. Estes podem ser decompostos em 3 tipos dependendo da combinação dos índices I e J : o traço, a parte simétrica ou a antissimétrica

$$\begin{aligned} \alpha_{-1} \cdot \bar{\alpha}_{-1} |0; p\rangle &\longrightarrow \textit{Dilaton} \\ \alpha_{-1}^{(I} \bar{\alpha}_{-1}^{J)} |0; p\rangle &\longrightarrow \textit{Graviton} \\ \alpha_{-1}^{[I} \bar{\alpha}_{-1}^{J]} |0; p\rangle &\longrightarrow \textit{Kalb - Ramond} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Correspondem a um campo escalar (Dilaton), a um campo tensorial simétrico (Graviton) e a um campo tensorial antissimétrico (Kalb-Ramond).

¹¹Veja seção 12.8 de [14] e seção 2.3.1 de [15]

4 Quantização no Calibre Conforme

Agora, diferente de como fizemos no capítulo anterior, vamos quantizar sem antes fixar todos os graus de liberdade da teoria. Veremos que isso vai dar origem a estados não físicos chamados *fantasmas*. A vantagem dessa abordagem é que não precisamos fixar a dimensão do espaço auxiliar para preservar a simetria de Lorentz. No calibre conforme a simetria de Lorentz permanece explícita, e a dimensão do espaço auxiliar é fixada exigindo que, após a quantização, a simetria de Weyl seja preservada.

Seguindo a prescrição

$$\begin{aligned} \phi &\mapsto \hat{\phi} \\ \{, \}_{CP} &\mapsto -i [,] \end{aligned}$$

quantizamos como de costume. Os campos são promovidos a operadores e os colchetes de Poisson a comutadores¹²

$$[X^\mu(\tau, \sigma), \Pi^{\tau\nu}(\tau, \sigma')] = -i\delta(\sigma - \sigma')\eta^{\mu\nu} \quad [x_0^\mu, p^\nu] = -i\eta^{\mu\nu} \quad (4.1)$$

$$[\bar{\alpha}_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu] = -m\delta_{m+n,0}\eta^{\mu\nu} \quad [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = -m\delta_{m+n,0}\eta^{\mu\nu} \quad [\bar{\alpha}_m^\mu, \alpha_n^\nu] = 0 \quad (4.2)$$

Note que, $\mu = \nu = 0$ implica

$$[\alpha_n^0, \alpha_{-n}^0] = -n \quad (4.3)$$

para $n > 0$, isso resulta na aparição de estados do tipo $\alpha_{-1}^0 |0; p\rangle$ cuja norma

$$\langle 0; p | \alpha_1^0 \alpha_{-1}^0 | 0; p \rangle = -\langle 0; p | 0; p \rangle < 0 \quad (4.4)$$

é negativa. Isso não pode representar estados físicos pois não tem interpretação probabilística.

Precisamos identificar quem são os estados não físicos e que condição é imposta a eles para preservarmos o máximo de simetrias que tínhamos no caso clássico. Para isso, faremos uma breve digressão sobre Teorias de Campos Conformes, onde serão introduzidas ferramentas gerais úteis para nosso estudo.

4.1 Teorias de Campos Conformes

Dado uma transformação de coordenadas, a métrica, sendo um tensor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, se transforma da seguinte maneira

$$\begin{aligned} x &\mapsto x' = f(x) \\ g_{\mu\nu}(x) &\mapsto g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Transformações conformes são definidas como o subgrupo de transformações de coordenadas que satisfaz

$$\begin{aligned} x &\mapsto x' = f(x) \\ g_{\mu\nu}(x) &\mapsto g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x) \end{aligned} \quad (4.6)$$

A função positiva $\Omega(x)$ é chamada *fator de escala*. Uma *Teoria Conforme* é definida como uma teoria invariante sob esse tipo de transformação.

¹²Novamente omitiremos o chapéu “ $\hat{}$ ”, a menos que não o fazer seja ambíguo. A partir de agora, nesse capítulo, todos os campos são todos operadores a menos que seja mencionado o contrário.

Como exemplo, considere o reescalamento

$$\begin{aligned} x^\alpha &\longmapsto x'^\alpha = \lambda x^\alpha \\ g_{\mu\nu}(x^\alpha) &\longmapsto g'_{\mu\nu}(x'^\alpha) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x) = \lambda^2 g_{\mu\nu}(x^\alpha) \end{aligned} \quad (4.7)$$

λ é chamado *fator de reescalamento*. O fator de escala é $\Omega^2(x) = \lambda^2$. Esse exemplo é importante, pois usaremos auto-funções de reescalamentos e rotações como campos da teoria¹³. Ou seja, sob um reescalamento os campos se transformam como

$$\begin{aligned} x^\alpha &\longmapsto x'^\alpha = \lambda x^\alpha \\ \Phi(x^\alpha) &\longmapsto D\Phi(x^\alpha) = \Phi(x'^\alpha) = \kappa \Phi(x^\alpha) \end{aligned} \quad (4.8)$$

como a exponencial tem \mathbb{R}^+ como imagem, podemos escrever $\kappa = \lambda^{-\Delta}$ para algum Δ

$$\begin{aligned} x^\alpha &\longmapsto x'^\alpha = \lambda x^\alpha \\ \Phi(x^\alpha) &\longmapsto \Phi'(x'^\alpha) = \lambda^{-\Delta} \Phi(x^\alpha) \end{aligned} \quad (4.9)$$

o número Δ é chamado *dimensão de reescalamento* do campo.

Para ser conforme invariante, a Lagrangeana da teoria não pode ser arbitrária, precisa ter dimensão de reescalamento específica e deve ser sem massa! Por exemplo, sob um reescalamento,

$$\begin{aligned} d^d x &\longmapsto d^d x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^d x = \lambda^d d^d x \\ \partial^\mu &\longmapsto \partial'^\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial^\nu = \lambda^{-1} \partial^\nu \end{aligned} \quad (4.10)$$

A massa introduz escala na teoria, uma vez que $m = \left| x_1^\alpha - x_2^\beta \right|^{-1}$ para determinados pontos x_1^α e x_2^β no espaço de coordenadas. Logo

$$m \longmapsto m' = \left| (x'_1)^\alpha - (x'_2)^\beta \right|^{-1} = \left| \lambda x_1^\alpha - \lambda x_2^\beta \right|^{-1} = |\lambda|^{-1} m \quad (4.11)$$

mas a massa é um parâmetro intrínscico da teoria, e deve ser preservada se a teoria for conforme invariante e, conseqüentemente, invariante por reescalamentos. Ou seja, a invariância implicaria

$$m = |\lambda|^{-1} m, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (4.12)$$

o que só é possível se $m = 0$ ou $m = \infty$ ¹⁴. Vamos evitar massas infinitas nesse texto, portanto, para nossos propósitos, teorias conforme invariantes devem ter massa nula.

Massa nula não é a única condição para que a Lagrangeana seja conforme invariante, note que

$$\begin{aligned} S = S' &\Leftrightarrow \int d^d x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) = \int d'^d x \mathcal{L}'(\Phi', \partial'_\mu \Phi') \\ &= \int d^d x \lambda^d \mathcal{L}'(\Phi', \partial'_\mu \Phi') \end{aligned} \quad (4.13)$$

¹³Assim como em Mecânica Quântica, em Teoria de Campos também trabalhamos com campos que são auto-funções dos operadores que vão compor o Conjunto Completo de Operadores que Comutam (CCOC). Assim, é possível descrever o espaço de estados de maneira sistemática e consistente. Não vamos entrar em tantos detalhes assim nesse texto, mas vale a pena mencionar o porque fazemos essa escolha e deixar claro que não é uma escolha arbitrária. Reescalamentos e rotações têm ligação direta com a energia, e como na Mecânica Quântica usamos auto-funções da Hamiltoniana no CCOC, faz sentido fazer algo parecido em Teoria de Campos Conformes, nesse caso, no lugar da Hamiltoniana usamos o operador de Reescalamento.

¹⁴Uma ressalva: existem teorias conformes consistentes com massa infinita [16, 17] e com massa variando em um espectro [18], mas tais teorias estão muito além do escopo desse texto.

é invariante apenas se a Lagrangeana se transforma como

$$\mathcal{L}'(\Phi', \partial'_\mu \Phi') = \lambda^{-d} \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) \quad (4.14)$$

Ou seja, deve ter dimensão de reescalamto d . A Lagrangeana é do tipo

$$\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi, m) = \frac{1}{2} \partial^\mu \Phi \partial_\mu \Phi + \sum_\xi A_\xi \Phi^\xi \quad (4.15)$$

Cada termo da Lagrangeana deve ter dimensão d para preservar a invariância por reescalamentos, logo os termo cinético e os termos sem massa impõem, respectivamente

$$\Delta = \frac{d-2}{2} \quad \Delta = \frac{d}{\xi} \quad \implies \quad \xi = \frac{2d}{d-2}, \quad d \neq 2 \quad (4.16)$$

Vejamso agora como determinar os geradores infinitesimais das transformações conformes. Considere uma transformação conforme infinitesimal

$$x^\alpha \longmapsto x'^\alpha = x^\alpha + \epsilon^\alpha(x^\sigma) \quad (4.17)$$

substituindo isso em

$$\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x) = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x) \quad (4.18)$$

obtemos

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} + \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu &= \Omega g_{\mu\nu} \\ \implies (\Omega - 1) g_{\mu\nu} &= \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu \end{aligned} \quad (4.19)$$

tomando o traço obtemos

$$(\Omega - 1) = \frac{2}{d} (\partial \cdot \epsilon) \quad (4.20)$$

substituindo em (4.19)

$$\frac{2}{d} (\partial \cdot \epsilon) g_{\mu\nu} = \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu \quad (4.21)$$

Os geradores infinitesimais do grupo conforme são as soluções de (4.21).

4.2 TCC Bidimensionais

Para o caso em que o espaço de coordenadas é bidimensional,

$$\begin{aligned} (\epsilon_1, \epsilon_2) : [0, \infty) &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ (\tau, \sigma) &\longmapsto (\epsilon_1(\tau, \sigma), \epsilon_2(\tau, \sigma)) \end{aligned} \quad (4.22)$$

(4.21) torna-se

$$(\partial \cdot \epsilon) g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \epsilon_\beta + \partial_\beta \epsilon_\alpha \quad (4.23)$$

Para $d = 2$ em E_2 a métrica é euclidiana $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta = 1, 2$

$$(\partial \cdot \epsilon) \delta_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \epsilon_\beta + \partial_\beta \epsilon_\alpha \quad (4.24)$$

Considere os casos em que $\mu = \nu$

$$\begin{aligned} \partial^1 \epsilon_1 + \partial^2 \epsilon_2 &= 2\partial_1 \epsilon_1 \\ \partial^1 \epsilon_1 + \partial^2 \epsilon_2 &= 2\partial_2 \epsilon_2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

para $\mu \neq \nu$

$$0 = \partial_1 \epsilon_2 + \partial_2 \epsilon_1 \quad (4.26)$$

portanto, transformações conformes infinitesimais em duas dimensões satisfazem

$$\partial_1 \epsilon_1 = \partial_2 \epsilon_2 \quad \partial_1 \epsilon_2 = -\partial_2 \epsilon_1 \quad (4.27)$$

Reconhecemos essas equações como as Equações de Cauchy-Riemann para uma função $f(\tau, \sigma) = \epsilon_1(\tau, \sigma) + i\epsilon_2(\tau, \sigma)$. Isso serve de motivação para fazermos um mapa entre E_2 e \mathbb{C}^2 :

$$\begin{aligned} E_2 &\longmapsto \mathbb{C}^2 \\ (\tau, \sigma) &\longmapsto (z, \bar{z}) = (\tau + i\sigma, \tau - i\sigma) \end{aligned} \quad (4.28)$$

a inversa é dada por

$$x^1 \equiv \tau = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad x^2 \equiv \sigma = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \quad (4.29)$$

Dessa forma

$$ds^2 = \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g'_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = dz d\bar{z}, \quad g'_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

vetores e derivadas ficam

$$\begin{aligned} V_z &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial z} V_\alpha = \frac{1}{2}(V_1 - iV_2) & V_{\bar{z}} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{z}} V_\alpha = \frac{1}{2}(V_1 + iV_2) \\ V^z &= g'^{z\beta} V_\beta = 2V_z & V^{\bar{z}} &= g'^{\bar{z}\beta} V_\beta = 2V_{\bar{z}} \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\partial \equiv \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \quad \bar{\partial} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2) \quad \partial_1 = \partial + \bar{\partial}, \quad \partial_2 = i(\partial - \bar{\partial}) \quad (4.32)$$

e finalmente, a transformação conforme infinitesimal fica

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon^1 + i\epsilon^2, & \bar{\epsilon} &= \epsilon^1 - i\epsilon^2 \\ \epsilon^1 &= \frac{1}{2}(\epsilon + \bar{\epsilon}), & \epsilon^2 &= \frac{1}{2i}(\epsilon - \bar{\epsilon}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Com essa notação, as equações de Cauchy-Riemann ficam muito mais simples

$$\partial \bar{\epsilon}(z, \bar{z}) = 0, \quad \bar{\partial} \epsilon(z, \bar{z}) = 0 \quad (4.34)$$

Ou seja, $\epsilon(z)$ deve ser uma função holomórfica e $\bar{\epsilon}(\bar{z})$ anti-holomórfica. Portanto, o grupo conforme em $d = 2$ é o conjunto de todas as funções holomórfica e anti-holomórficas em algum conjunto aberto

$$\begin{aligned} z &\longmapsto z + \epsilon(z) & \epsilon &: K \longmapsto \mathbb{C} \\ \bar{z} &\longmapsto \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}) & \bar{\epsilon} &: J \longmapsto \mathbb{C} \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde K e J são conjuntos abertos em \mathbb{C} . Só podemos estender seus domínios a \mathbb{C} se permitirmos que tenham polos isolados, isto é, se considerarmos que são funções meromórficas¹⁵. Alguns exemplos desse tipo de transformação são

- $z \longmapsto z + a, \quad a \in \mathbb{C}$: Translação;

¹⁵O teorema de Liouville afirma que uma função holomórfica (anti-holomórfica), limitada, em \mathbb{C} só pode ser constante. Estamos tratando de transformações infinitesimais, portanto limitadas. Logo, se exigirmos que sejam holomórficas (anti-holomórficas) em \mathbb{C} serão constantes. A única alternativa é permitir que tenham polos isolados.

- $z \mapsto \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}$: Reescalamento se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda \neq 1$, rotação se $|\lambda| = 1$.

Para uso futuro, vejamos a variação infinitesimal de um campo da teoria sob essas transformações conformes.

Para translações,

$$\begin{aligned} (z, \bar{z}) &\mapsto (z', \bar{z}') = (z + \epsilon, \bar{z} + \bar{\epsilon}), \quad \epsilon, \bar{\epsilon} \ll 1 \\ \mathcal{O}(z, \bar{z}) &\mapsto \mathcal{O}'(z', \bar{z}') = \mathcal{O}(z' - \epsilon, \bar{z}' - \bar{\epsilon}) \simeq \mathcal{O}(z', \bar{z}') - \epsilon \partial \mathcal{O}(z', \bar{z}') - \bar{\epsilon} \bar{\partial} \mathcal{O}(z', \bar{z}') \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\delta \mathcal{O}_T = -\epsilon \partial \mathcal{O} - \bar{\epsilon} \bar{\partial} \mathcal{O} \quad (4.37)$$

Como no caso em d arbitrária, trabalhamos com campos que são auto-funções de reescalamentos

$$\begin{aligned} (z, \bar{z}) &\mapsto (z', \bar{z}') = (\lambda z, \bar{\lambda} \bar{z}) \\ \mathcal{O}(z, \bar{z}) &\mapsto \mathcal{O}'(z', \bar{z}') = \lambda^{-h} \bar{\lambda}^{-\bar{h}} \mathcal{O}(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (4.38)$$

para um reescalamento ou rotação infinitesimal $\lambda = 1 + \epsilon$ e $\bar{\lambda} = 1 + \bar{\epsilon}$ com $|\epsilon|, |\bar{\epsilon}| \ll 1$, teremos, até a primeira ordem em $\epsilon, \bar{\epsilon}$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}'(z', \bar{z}') &= \lambda^{-h} \bar{\lambda}^{-\bar{h}} \mathcal{O}(z, \bar{z}) \simeq (1 + \epsilon)^{-h} (1 + \bar{\epsilon})^{-\bar{h}} \mathcal{O}(\lambda^{-1} z', \bar{\lambda}^{-1} \bar{z}') \\ &\simeq (1 + \epsilon)^{-h} (1 + \bar{\epsilon})^{-\bar{h}} \mathcal{O}((1 - \epsilon) z', (1 - \bar{\epsilon}) \bar{z}') \\ &\simeq (1 - \epsilon h) (1 - \bar{\epsilon} \bar{h}) (\mathcal{O}(z', \bar{z}') - \epsilon z' \partial \mathcal{O}(z', \bar{z}') - \bar{\epsilon} \bar{z}' \bar{\partial} \mathcal{O}(z', \bar{z}')) \\ &\simeq \mathcal{O}(z', \bar{z}') - \epsilon (h \mathcal{O}(z', \bar{z}') + z \partial \mathcal{O}(z', \bar{z}')) - \bar{\epsilon} (\bar{h} \mathcal{O}(z', \bar{z}') + \bar{z} \bar{\partial} \mathcal{O}(z', \bar{z}')) \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\delta \mathcal{O}_R = -\epsilon (h \mathcal{O} + z \partial \mathcal{O}) - \bar{\epsilon} (\bar{h} \mathcal{O} + \bar{z} \bar{\partial} \mathcal{O}) \quad (4.40)$$

Assim, \mathcal{O} é dito ter *peso conforme* (h, \bar{h}) . Note que, se $\lambda = \bar{\lambda}$, o peso conforme (h, \bar{h}) se relaciona com a *dimensão de reescalamento* como $\Delta = h + \bar{h}$.

4.2.1 Tensor Energia-Momento

O tensor energia-momento é central no estudo da quantização da corda bosônica. Vimos no capítulo 2 que os vínculos sobre a corda são expressos na forma de (2.22). Na quantização no calibre conforme seu papel é muito mais explícito: os estados da teoria são representações da álgebra dos modos de Laurent do tensor de energia-momento.

Da teoria clássica, sabemos que o tensor de energia-momento é a corrente conservada quando o sistema é simétrico com respeito a translações. Veremos também que, em teorias conformes, $T_{\alpha\beta}$ tem relação com a corrente conservada em transformações conformes arbitrárias.

Primeiro, provamos que a definição (2.21) de $T_{\alpha\beta}$ que estamos usando de fato é a corrente conservada correspondente à translações.

Promovendo o parâmetro infinitesimal da transformação de coordenadas a uma função das coordenadas $\delta\sigma^\alpha = \epsilon^\alpha(\sigma^\beta)$

$$\sigma^\alpha \mapsto \sigma'^\alpha \simeq \sigma'^\alpha + \epsilon^\alpha(\sigma^\beta) \quad (4.41)$$

a variação da ação é proporcional à derivada desse parâmetro [19, 20], e deve ser nula pois é uma simetria

$$\delta S = \int d^2\sigma J^\alpha \partial_\alpha \epsilon = 0 \quad (4.42)$$

teremos então que J^α é a corrente conservada correspondente, e vale $\partial_\alpha J^\alpha = 0$.

Vejamos quem é J^α para translações. Acoplando a teoria a uma métrica dinâmica $g_{\mu\nu}(\sigma^\alpha)$, a transformação $\delta\sigma^\alpha = \epsilon^\alpha(\sigma^\beta)$ é vista como um difeomorfismo, em relação ao qual a teoria é invariante desde que $\delta g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \epsilon_\beta + \partial_\beta \epsilon_\alpha$. Ou seja, se transformarmos as coordenadas e a métrica, teremos $\delta S = 0$. Isso implica que, transformando apenas as coordenadas, a variação da ação deve ser o oposto do que obteríamos variando apenas a métrica. Portanto, a variação da ação correspondente apenas a uma translação é

$$\delta S = - \int d^2\sigma \frac{\partial S}{\partial g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} \quad (4.43)$$

substituindo $\delta g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \epsilon_\beta + \partial_\beta \epsilon_\alpha$

$$\delta S = -2 \int d^2\sigma \frac{\partial S}{\partial g_{\alpha\beta}} \partial_\alpha \epsilon_\beta \quad (4.44)$$

Comparando com (4.41) obtemos que a corrente conservada é $T_{\alpha\beta}$ a menos de constantes de normalização. Sendo a corrente conservada, deve obedecer $\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$.

Sob uma transformação conforme arbitrária

$$\begin{aligned} \sigma^\alpha &\mapsto \sigma'^\alpha = f^\alpha(\sigma^\beta) \\ g_{\mu\nu}(\sigma^\alpha) &\mapsto g'_{\mu\nu}(\sigma'^\alpha) = \Omega(\sigma^\alpha) g_{\mu\nu}(\sigma^\alpha) = \kappa e^\phi g_{\mu\nu}(\sigma^\alpha) \simeq g_{\mu\nu}(\sigma^\alpha) + \kappa \phi g_{\mu\nu}(\sigma^\alpha) \\ \delta g_{\alpha\beta} &= \kappa \phi g_{\alpha\beta}(\sigma^\alpha) \end{aligned} \quad (4.45)$$

para algum campo ϕ e constante κ . A variação da ação correspondente à variação da métrica $g_{\alpha\beta}$ é

$$\delta S = \int d^2\sigma \frac{\partial S}{\partial g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma T^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} = -\frac{\kappa}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma T^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \phi = -\frac{\kappa}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma T^\alpha_\alpha \phi = 0 \quad (4.46)$$

A relação acima vale $\forall \phi$ uma vez que a transformação conforme é arbitrária. Implica então

$$T^\alpha_\alpha = 0 \quad (4.47)$$

essa é uma condição comum a todas as teorias conformes, o tensor energia-momento tem traço nulo.

Escrevendo o $T_{\alpha\beta}$ em coordenadas complexas. Efetuando (2.21) com a ação de Polyakov¹⁶

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\alpha'} \left(\partial_\alpha X \partial_\beta X - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (\partial X)^2 \right) \quad (4.48)$$

Usando a lei de transformação

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T_{\alpha\beta} \quad (4.49)$$

, onde as coordenadas ' são as coordenadas complexas, obtemos

$$\begin{aligned} T_{zz} &= \frac{1}{4} (T_{11} - 2iT_{21} - T_{22}) = T^{\bar{z}\bar{z}}, & T_{z\bar{z}} &= T_{\bar{z}z} = \frac{1}{4} (T_{11} + T_{22}) = T^{\bar{z}z} = T^{z\bar{z}} \\ T_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{1}{4} (T_{11} + 2iT_{21} - T_{22}) = T^{zz} \end{aligned} \quad (4.50)$$

A condição de traço nulo (4.47) implica

$$T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = T^{\bar{z}z} = T^{z\bar{z}} = 0 \quad (4.51)$$

¹⁶Para facilitar os cálculos, vamos trabalhar com $X(z, \bar{z})$ ao invés de $X^\mu(z, \bar{z})$. os resultados são facilmente generalizados para o caso em que o espaço auxiliar é D -dimensional.

Definindo $T \equiv T_{zz}$ e $\bar{T} \equiv T_{\bar{z}\bar{z}}$, de (4.48)

$$T = -\frac{1}{\alpha'} \partial X \partial X \quad \bar{T} = -\frac{1}{\alpha'} \bar{\partial} X \bar{\partial} X \quad (4.52)$$

A lei de conservação $\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$ torna-se

$$\bar{\partial} T(z, \bar{z}) = 0 \quad \partial \bar{T}(z, \bar{z}) = 0 \quad (4.53)$$

Ou seja, T é uma função holomórfica e \bar{T} anti-holomórfica.

Podemos então expandir T e \bar{T} em série de Laurent

$$\begin{aligned} T(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\mathbf{L}_n}{z^{n+2}}, & \mathbf{L}_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C T(z) z^{n+1} dz \\ \bar{T}(\bar{z}) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\bar{\mathbf{L}}_n}{\bar{z}^{n+2}}, & \bar{\mathbf{L}}_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\bar{C}} \bar{T}(\bar{z}) \bar{z}^{n+1} d\bar{z} \end{aligned} \quad (4.54)$$

C (\bar{C}) é um caminho fechado contido em um anel em torno de $z = 0$ ($\bar{z} = 0$), anel no qual T (\bar{T}) é holomórfica (anti-holomórfica)¹⁷. Nos resta deduzir a álgebra dos \mathbf{L}_n e $\bar{\mathbf{L}}_n$, e, após promovê-los a operadores, construir o espaço de estados como representações destes. Para isso, vamos precisar escrever o produto de operadores de maneira mais conveniente, a chamada *Expansão de Produto de Operadores*. Veremos isso nas próximas seções.

No capítulo 2 obtivemos a equação de movimento para X , uma equação de onda. Em coordenadas complexas é

$$\partial \bar{\partial} X(z, \bar{z}) = 0 \quad (4.55)$$

sua solução é do tipo

$$X(z, \bar{z}) = X(z) + \bar{X}(\bar{z}) \quad (4.56)$$

com $X(z)$ holomórfica e $\bar{X}(\bar{z})$ anti-holomórfica. Esse resultado simplifica nosso estudo, vamos nos concentrar em deduzir resultados para a parte holomórfica, resultados análogos valem para a parte anti-holomórfica.

Vejamos agora, em coordenadas complexas, a relação do tensor energia-momento com as correntes correspondentes a transformações conformes arbitrárias em uma teoria conforme. Considerando a transformação infinitesimal

$$z \mapsto z' = z + \epsilon(z) \quad \bar{z} \mapsto \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}) \quad (4.57)$$

usando o mesmo método acima, promovemos $\epsilon(z)$, $\bar{\epsilon}(\bar{z})$ a funções das coordenadas, $\epsilon(z)$, $\bar{\epsilon}(\bar{z}) \rightarrow \epsilon(z, \bar{z})$, $\bar{\epsilon}(z, \bar{z})$. A variação da métrica é $\delta g^{\alpha\beta} = \partial^\alpha \delta \sigma^\beta + \partial^\beta \delta \sigma^\alpha$ e a variação da ação é

$$\delta S = - \int d^2 \sigma \frac{\partial S}{\partial g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \int d^2 \sigma T_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi} \int d^2 \sigma T_{\alpha\beta} \partial^\alpha \delta \sigma^\beta \quad (4.58)$$

usando as leis de transformação (4.29) e (4.49), é fácil ver que, em coordenadas complexas,

$$\delta S = \frac{1}{2\pi} \int d^2 z (T(z) \bar{\partial} \epsilon(z, \bar{z}) + \bar{T}(\bar{z}) \partial \bar{\epsilon}(z, \bar{z})) = 0 \quad (4.59)$$

¹⁷Note que podemos chamar os coeficientes da expansão de Laurent de T e \bar{T} de \mathbf{L}_n e $\bar{\mathbf{L}}_n$ sem contradição com sua definição anterior em (3.10). De fato, lá os \mathbf{L}_n e $\bar{\mathbf{L}}_n$ são coeficientes de expansão em série dos vínculos $(\partial_\pm X)^2$ (veja o apêndice B.2), onde $\partial_\pm = \partial_\tau \pm \partial_\sigma$, mas $T \propto \partial X \partial X$ com $\partial = \partial_\tau - i\partial_\sigma$, analogamente para \bar{T} , logo, carregam a mesma informação física a menos de constantes.

Tratando z e \bar{z} como variáveis independentes, considere uma o caso em que $\delta z = \epsilon(z)$ e $\delta\bar{z} = 0$. Promovendo $\epsilon(z) \rightarrow \epsilon(z)\bar{f}(\bar{z})$, a variação da ação fica

$$\delta S = \frac{1}{2\pi} \int d^2z T(z) \epsilon(z) \bar{\partial} f(\bar{z}) = 0 \quad (4.60)$$

comparando com (4.42), a corrente conservada é

$$J^{\bar{z}} = T(z) \epsilon(z) = J_z, \quad J^z = J_{\bar{z}} = 0 \quad (4.61)$$

Analogamente, $\delta z = 0$ e $\delta\bar{z} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$, fazendo $\bar{\epsilon}(\bar{z}) \rightarrow \bar{\epsilon}(\bar{z}) f(z)$, a corrente

$$\bar{J}^z = \bar{T}(\bar{z}) \bar{\epsilon}(\bar{z}) = \bar{J}_{\bar{z}}, \quad \bar{J}^{\bar{z}} = \bar{J}_z = 0 \quad (4.62)$$

se conserva. Devido ao holomorfismo (anti-holomorfismo) de $T(z)$ e $\epsilon(z)$ ($\bar{T}(\bar{z})$ e $\bar{\epsilon}(\bar{z})$), J^z ($\bar{J}^{\bar{z}}$) é também holomórfica (anti-holomórfica).

Como exemplo, considere o caso em que $\delta z = z$. A corrente correspondente é $J^z = T(z) \epsilon(z)$. De (4.54), segue que

$$\mathbf{L}_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z T(z) dz \quad (4.63)$$

mas a integral da corrente conservada nada mais é que a carga associada à corrente. Ou seja, a carga conservada é dada por \mathbf{L}_0 ! Analogamente para $\delta\bar{z} = \bar{z}$ e $\bar{\mathbf{L}}_0$. Portanto, na teoria quântica, o operador responsável por rotações e reescalamentos é

$$D = \mathbf{L}_0 + \bar{\mathbf{L}}_0 \quad (4.64)$$

mas essa é exatamente a Hamiltoniana que obtivemos na quantização do cone de luz em (3.34)!¹⁸ Seus auto-valores, assim como os da Hamiltoniana, têm a interpretação de energia.

4.2.2 Expansão de Produto de Operadores

Expansão de Produto de Operadores (EPO), em Teorias de Campos, é, assim como o Teorema de Wick, uma forma conveniente de escrever produtos de operadores. Facilitam cálculos de funções de correlação, entre outros. A ideia é expressar o produto de dois operadores em pontos próximos como uma série de operadores calculados em um dos dois pontos.

$$\lim_{(z,\bar{z}) \rightarrow (\omega,\bar{\omega})} \mathcal{O}_i(z,\bar{z}) \mathcal{O}_j(\omega,\bar{\omega}) = \sum_k C_{ij}^k(z-\omega, \bar{z}-\bar{\omega}) \mathcal{O}_k(\omega,\bar{\omega}) \quad (4.65)$$

onde as funções C_{ij}^k dependem da diferença das coordenadas para preservar invariância por translações. Essa expansão deve ser entendida como algo a ser usado apenas dentro de funções de correlação¹⁹, portanto sempre será assumido a ordenação temporal. Também omitiremos o limite para que a notação fique mais limpa.

¹⁸Esse resultado justifica nossa escolha inicial em (4.9), de trabalhar com campos que são auto-funções de reescalamentos e rotações.

¹⁹É por isso que as funções C_{ij}^k só podem depender da diferença de coordenadas. A física do sistema é descrita por funções de correlação, e sendo a teoria conforme invariante, as funções de correlação também não podem mudar sob uma transformação conforme, em particular sob translações.

Note que, em coordenadas complexas, existe um método de expandir funções dessa forma: a série de Laurent. De fato, em TCC bidimensionais, levando em conta apenas a parte holomórfica (ou apenas anti-holomórfica), a EPO é a série de Laurent do produto, por exemplo

$$\mathcal{O}_i(z) \mathcal{O}_j(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\mathcal{O}(z') \mathcal{O}_j(\omega)}{(z' - \omega)^{n+1}} dz' \right) (z - \omega)^n \quad (4.66)$$

Nosso principal objetivo nessa seção é obter a álgebra dos \mathbf{L}_n e $\bar{\mathbf{L}}_n$. Nos interessa então EPOs envolvendo o tensor energia-momento, que por sua vez, segundo (4.61) e (4.62), é relacionado à simetrias conformes. Vejamos o que podemos extrair da função de correlação quando o sistema tem simetria conforme. Considere a correlação

$$\langle \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \mathcal{O}_n(\sigma_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \mathcal{O}_n(\sigma_n) \quad (4.67)$$

onde $Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}$ é a função de partição. Sobre uma simetria

$$\sigma^\alpha \mapsto \sigma'^\alpha = \sigma^\alpha + \epsilon^\alpha (\sigma^\beta) \quad (4.68)$$

se $\epsilon^\alpha (\sigma^\beta) \neq 0$ numa região B , tal que $\sigma_1 \in B$, então o operador $\mathcal{O}_1(\sigma_1)$ vai variar sob a mudança (4.68)

$$\mathcal{O}_1 \mapsto \tilde{\mathcal{O}}_1 = \mathcal{O}_1 + \epsilon \delta \mathcal{O}_1 \quad (4.69)$$

Sendo uma simetria, (4.68) deixa invariante a função de correlação $\langle \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \mathcal{O}_n(\sigma_n) \rangle$, a medida de integração $\mathcal{D}\phi$, e a variação da ação é dada por $\delta S = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma J^\alpha \partial_\alpha \epsilon^{20}$. Portanto, a correlação fica

$$\langle \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \mathcal{O}_n(\sigma_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi e^{(-S[\phi] - \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} J^\alpha \partial_\alpha \epsilon)} (\mathcal{O}_1 + \epsilon \delta \mathcal{O}_1) \dots \mathcal{O}_n(\sigma_n) \quad (4.70)$$

Expandindo e mantendo apenas a primeira ordem em ϵ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \mathcal{O}_n(\sigma_n) \rangle &= \langle \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \mathcal{O}_n(\sigma_n) \rangle + \epsilon \langle \delta \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \mathcal{O}_n(\sigma_n) \rangle \\ &+ \frac{\epsilon}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} \partial_\alpha \langle J^\alpha(\sigma) \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \mathcal{O}_n(\sigma_n) \rangle \end{aligned} \quad (4.71)$$

obtemos a igualdade

$$-\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \partial_\alpha \langle J^\alpha(\sigma) \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \mathcal{O}_n(\sigma_n) \rangle = \langle \delta \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \mathcal{O}_n(\sigma_n) \rangle \quad (4.72)$$

que é conhecida como *Identidade de Ward*. É fácil ver que ela expressa a versão quântica do Teorema de Noether. De fato, se não há inserção de operadores na igualdade, segue imediatamente que

$$\langle \partial_\alpha J^\alpha(\sigma) \rangle = 0 \quad (4.73)$$

Vejamos agora o que a identidade de Ward nos diz no caso em que (4.68) é uma transformação conforme.

Observe que, usando o teorema do divergente em duas dimensões

$$\int_B \partial_\alpha J^\alpha d^2\sigma = \oint_{\partial B} J_\alpha n^\alpha ds \quad (4.74)$$

²⁰O fator é inserido por convenção, para tornar o resultado final mais conveniente

onde ∂B é a borda da região B , n^α o vetor unitário normal à borda, e ds é o elemento de comprimento ao longo da borda. Se o vetor na direção da borda é $d\vec{l} = \frac{1}{ds} \begin{pmatrix} d\sigma^1 \\ d\sigma^2 \end{pmatrix}$, então $\vec{n} = \frac{1}{ds} \begin{pmatrix} d\sigma^2 \\ -d\sigma^1 \end{pmatrix}$, de fato $\vec{n} \cdot d\vec{l} = 0$. Portanto

$$\int_B \partial_\alpha J^\alpha d^2\sigma = \oint_{\partial B} J_\alpha n^\alpha ds = \oint_{\partial B} (J_1 d\sigma^2 - J_2 d\sigma^1) = -i \oint_{\partial B} (J_z dz - \bar{J}_z d\bar{z}) \quad (4.75)$$

na última igualdade usamos (4.31) para transformar a corrente. Logo, a identidade de Ward em coordenadas complexas é

$$\frac{i}{2\pi} \oint_{\partial B} dz \langle J_z(z, \bar{z}) \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \rangle - \frac{i}{2\pi} \oint_{\partial B} dz \langle \bar{J}_z(z, \bar{z}) \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \rangle = \langle \delta \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \rangle \quad (4.76)$$

Quando se trata de uma transformação conforme onde $\delta z = \epsilon(z)$ e $\delta \bar{z} = 0$, vimos que $J_z = T(z)\epsilon(z)$ é holomórfica e $\bar{J}_z = 0$. Substituindo em (4.76)

$$\frac{i}{2\pi} \oint_{\partial B} dz \langle \epsilon(z) T(z) \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \rangle = \langle \delta \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \rangle \quad (4.77)$$

comparando os dois lados obtemos

$$\delta \mathcal{O}_1(\sigma_1) = \frac{i}{2\pi} \oint_{\partial B} \epsilon(z) T(z) \mathcal{O}_1(\sigma_1) dz \quad (4.78)$$

Analogamente, se $\delta z = \epsilon(z)$ e $\delta \bar{z} = 0$, $\bar{J}_z = \bar{T}(\bar{z})\bar{\epsilon}(\bar{z})$ é anti-holomórfica e $J_z = 0$, o que implica

$$\delta \mathcal{O}_1(\sigma_1) = -\frac{i}{2\pi} \oint_{\partial B} \bar{\epsilon}(\bar{z}) \bar{T}(\bar{z}) \mathcal{O}_1(\sigma_1) d\bar{z} \quad (4.79)$$

Sendo $J_z(z)$ holomórfica, $J_z(z) \mathcal{O}_1(\omega, \bar{\omega})$ também é holomórfica em z , portanto podemos expandir em série de Laurent

$$J_z(z) \mathcal{O}_1(\omega, \bar{\omega}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{a}_n (z - \omega)^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\epsilon(z') T(z') \mathcal{O}_1(\omega, \bar{\omega})}{(z' - \omega)^{n+1}} dz' \right) (z - \omega)^n \quad (4.80)$$

mas de (4.78), o coeficiente \mathbf{a}_{-1} é justamente $-\delta \mathcal{O}_1(\sigma_1)$ que obtivemos. Ou seja,

$$\epsilon(z) T(z) \mathcal{O}_1(\omega, \bar{\omega}) = \dots + \frac{-\delta \mathcal{O}_1(\omega, \bar{\omega})}{(z - \omega)} + \dots \quad (4.81)$$

se dividirmos tudo por $\epsilon(z)$ obtemos um dos termos da EPO com T . Assim, se a transformação conforme é uma translação, de (4.37), a EPO com T fica

$$T(z) \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega}) = \dots + \frac{\partial \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega})}{z - \omega} + \dots \quad (4.82)$$

analogamente, com \bar{T}

$$\bar{T}(\bar{z}) \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega}) = \dots + \frac{\bar{\partial} \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega})}{\bar{z} - \bar{\omega}} + \dots \quad (4.83)$$

Para rotações e reescalamentos, (4.40) implica

$$\epsilon z T(z) \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega}) = \dots + \frac{\epsilon h \mathcal{O} + \epsilon z \partial \mathcal{O}}{z - \omega} + \dots \quad (4.84)$$

uma translação do tipo $\epsilon' = \epsilon \omega$ nos dá

$$\epsilon \omega T(z) \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega}) = \dots + \frac{\epsilon h \mathcal{O} + \epsilon \omega \partial \mathcal{O}}{z - \omega} + \dots \quad (4.85)$$

subtraindo (4.84)-(4.85) e dividindo tudo por $\epsilon(z - \omega)$, obtemos

$$T(z) \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega}) = \dots + h \frac{\mathcal{O}(\omega, \bar{\omega})}{(z - \omega)^2} + \frac{\partial \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega})}{z - \omega} + \dots \quad (4.86)$$

analogamente, com \bar{T}

$$\bar{T}(\bar{z}) \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega}) = \dots + \bar{h} \frac{\mathcal{O}(\omega, \bar{\omega})}{(\bar{z} - \bar{\omega})^2} + \frac{\bar{\partial} \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega})}{\bar{z} - \bar{\omega}} + \dots \quad (4.87)$$

essas são as EPO com T e \bar{T} de operadores com peso conforme (h, \bar{h}) . Esse resultado serve de motivação para definirmos uma classe especial de operadores:

Definição (Operadores Primários). São definidos como operadores cuja EPO com T e \bar{T} tem singularidade de maior grau igual a 2. Ou seja \mathcal{O} é primário se

$$\begin{aligned} T(z) \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega}) &= h \frac{\mathcal{O}(\omega, \bar{\omega})}{(z - \omega)^2} + \frac{\partial \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega})}{z - \omega} + \text{termos não singulares} \\ \bar{T}(\bar{z}) \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega}) &= \bar{h} \frac{\mathcal{O}(\omega, \bar{\omega})}{(\bar{z} - \bar{\omega})^2} + \frac{\bar{\partial} \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega})}{\bar{z} - \bar{\omega}} + \text{termos não singulares} \end{aligned} \quad (4.88)$$

Vimos antes que $\delta \mathcal{O}_1(\omega, \bar{\omega}) = -\mathbf{a}_{-1}$ na série de Laurent de $\epsilon(z) T(z) \mathcal{O}_1(\omega, \bar{\omega})$. Sabendo disso, podemos determinar como um operador primário se transforma sob uma transformação conforme arbitrária usando (4.88). Multiplicando a primeira EPO de (4.88) por $\epsilon(z)$ obtemos

$$\epsilon(z) T(z) \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega}) = h \frac{\epsilon(z) \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega})}{(z - \omega)^2} + \frac{\epsilon(z) \partial \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega})}{z - \omega} + \text{termos não singulares} \quad (4.89)$$

expandindo $\epsilon(z)$ em torno de ω^{21} , teremos $\epsilon(z) = \epsilon(\omega) + \partial_\omega \epsilon(\omega)(z - \omega) + \dots$. Substituindo acima e mantendo apenas a primeira ordem em $\epsilon(\omega)$, obtemos

$$\epsilon(z) T(z) \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega}) = h \frac{\epsilon(\omega) \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega})}{(z - \omega)^2} + \frac{[\epsilon(\omega) \partial \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega}) + h \partial_\omega \epsilon(\omega) \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega})]}{z - \omega} + \text{termos não singulares} \quad (4.90)$$

Portanto

$$\delta \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega}) = -\epsilon(\omega) \partial \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega}) - h \partial_\omega \epsilon(\omega) \mathcal{O}(\omega, \bar{\omega}) \quad (4.91)$$

É fácil ver que essa é a variação infinitesimal correspondente à transformação finita

$$\begin{aligned} z &\longmapsto z'(z) \\ \bar{z} &\longmapsto \bar{z}'(\bar{z}) \\ \mathcal{O}(z, \bar{z}) &\longmapsto \tilde{\mathcal{O}}(z', \bar{z}') = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^{-h} \left(\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}\right)^{-\bar{h}} \mathcal{O}(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (4.92)$$

²¹Podemos fazer isso pois $\epsilon(z)$ não possui singularidade em alguma região aberta em torno de ω . De fato, a EPO é válida no limite $z \rightarrow \omega$, (4.34) diz que $\epsilon(z)$ é holomórfica, e holomorfismo, assim como continuidade, garante que não há singularidade numa vizinhança suficientemente pequena em torno de z .

Trabalhando com a ação de Polyakov, nosso último passo antes de calcular EPOs de interesse é demonstrar que alguns operadores são primários.

A integral de caminho de uma derivada total é nula, portanto a seguinte integral de caminho é nula

$$0 = \int \mathcal{D}X \frac{\delta}{\delta X} [e^{-S} X(\sigma')] = \int \mathcal{D}X e^{-S} \left[\frac{1}{2\pi\alpha'} \partial^2 X(\sigma) X(\sigma') + \delta^2(\sigma - \sigma') \right] \quad (4.93)$$

o que implica

$$\langle \partial^2 X(\sigma) X(\sigma') \rangle = -2\pi\alpha' \delta^2(\sigma - \sigma') \quad (4.94)$$

usando o resultado clássico $\partial^2 \ln(\sigma_\alpha - \sigma'_\alpha)(\sigma^\alpha - \sigma'^\alpha) = 4\pi\delta^2(\sigma - \sigma')$ podemos resolver (4.94) para o propagador de X

$$\langle X(\sigma) X(\sigma') \rangle = -\frac{\alpha'}{2} \ln(\sigma - \sigma')^2 \quad (4.95)$$

Em coordenadas complexas

$$\langle X(z, \bar{z}) X(\omega, \bar{\omega}) \rangle = -\frac{\alpha'}{2} \ln(z - \omega) - \frac{\alpha'}{2} \ln(\bar{z} - \bar{\omega}) \quad (4.96)$$

o resultado (4.56) nos permite considerar a parte holomórfica e anti-holomórfica separadamente. A parte holomórfica fica

$$\langle X(z) X(\omega) \rangle = -\frac{\alpha'}{2} \ln(z - \omega) \quad (4.97)$$

Derivando em σ e σ' obtemos

$$\langle \partial X(z) \partial X(\omega) \rangle = -\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{(z - \omega)^2} \quad (4.98)$$

A ordenação normal é definida como

$$: A(z) B(\omega) : := \lim_{z \rightarrow \omega} (A(z) B(\omega) - \langle A(z) B(\omega) \rangle) \quad (4.99)$$

É fácil ver que é equivalente à definição em termos de operadores de criação e aniquilação, uma vez que ambas são definidas para que $\langle : A(z) B(\omega) : \rangle = 0$. Com essa definição, para evitar problemas com o tensor energia-momento, será escrito daqui em diante como

$$T(z) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X(z) \partial X(z) : \quad \bar{T}(\bar{z}) = -\frac{1}{\alpha'} : \bar{\partial} X(\bar{z}) \bar{\partial} X(\bar{z}) : \quad (4.100)$$

Com essas definições e (4.98), é simples mostrar que ∂X , e $: e^{ikX} :$ são primários. Basta usar o teorema de Wick para escrever o produto temporal ordenado com o tensor energia momento. Os resultados são suas EPOs com T , e seus respectivos pesos conformes, são

$$\begin{aligned} T(z) \partial X(\omega) &= \frac{\partial X(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial^2 X(\omega)}{z-\omega} + \text{termos não singulares} & (h, \bar{h}) &= (1, 0) \\ T(z) : e^{ikX(\omega)} : &:= \frac{\partial X(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial_\omega : e^{ikX(\omega)} :}{z-\omega} + \text{termos não singulares} & (h, \bar{h}) &= \left(\frac{\alpha' k^2}{2}, 0 \right) \end{aligned} \quad (4.101)$$

Usando novamente o teorema de Wick e (4.98), mostra-se que²²

$$T(z) T(\omega) = \frac{1/2}{(z-\omega)^4} + \frac{2T(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial T(\omega)}{z-\omega} + \text{termos não singulares} \quad (4.102)$$

²²Veja o apêndice B.3.

De acordo com a definição (4.88), T não é um operador primário, pois tem singularidade de ordem maior que 2. O Coeficiente do termo $\propto \frac{1}{2} (z - \omega)^{-4}$ é chamado *carga central* e denotando por c . Nesse caso em que estamos trabalhando com apenas uma das D componentes de X^μ , $c = 1$. É fácil ver que se repetirmos todos os cálculos com X^μ obteríamos

$$c = D \quad (4.103)$$

De fato,

$$T(z) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X^\mu(z) \partial X_\mu(z) := -\frac{1}{\alpha'} [: \partial X^0(z) \partial X_0(z) : + \dots + : \partial X^{D-1}(z) \partial X_{D-1}(z) :] \quad (4.104)$$

cada termo da soma contribuiria com 1 para a carga central. Dessa forma, a carga central expressa o número de graus de liberdade da teoria. Assim, em geral, vale

$$\begin{aligned} T(z) T(\omega) &= \frac{c/2}{(z-\omega)^4} + \frac{2T(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial T(\omega)}{z-\omega} + \text{termos não singulares} \\ \bar{T}(\bar{z}) \bar{T}(\bar{\omega}) &= \frac{\bar{c}/2}{(\bar{z}-\bar{\omega})^4} + \frac{2\bar{T}(\bar{\omega})}{(\bar{z}-\bar{\omega})^2} + \frac{\partial \bar{T}(\bar{\omega})}{\bar{z}-\bar{\omega}} + \text{termos não singulares} \end{aligned} \quad (4.105)$$

Podemos finalmente calcular a álgebra dos \mathbf{L}_n e $\bar{\mathbf{L}}_n$. Usando a EPO (4.105) e a definição dos \mathbf{L}_n e $\bar{\mathbf{L}}_n$ como integrais de caminho em (4.54), a álgebra é apenas um cálculo de análise complexa. O comutador de \mathbf{L}_m e \mathbf{L}_n é

$$[\mathbf{L}_m, \mathbf{L}_n] = \mathbf{L}_m \mathbf{L}_n - \mathbf{L}_n \mathbf{L}_m = \left(\oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{d\omega}{2\pi i} - \oint_{C_3} \frac{d\omega}{2\pi i} \oint_{C_4} \frac{dz}{2\pi i} \right) z^{m+1} \omega^{n+1} T(z) T(\omega) \quad (4.106)$$

entende-se que os operadores estão ordenados temporalmente. No plano complexo, a ordenação temporal é o mesmo que ordenação radial. De fato, segundo (4.28), se $z = \tau_1 + i\sigma_1$ e $\omega = \tau_2 + i\sigma_2$ com $\tau_1 > \tau_2$, podemos mapeá-los em $\tilde{z} = e^{\tau_1} e^{i\sigma_1}$ e $\tilde{\omega} = e^{\tau_2} e^{i\sigma_2}$, logo $\tau_1 > \tau_2 \Rightarrow e^{\tau_1} > e^{\tau_2}$. Ou seja, a ordenação temporal de (4.106) implica que a curva C_2 deve estar no interior de C_1 na primeira integral, e na segunda integral a curva C_4 deve estar no interior da curva C_3 .

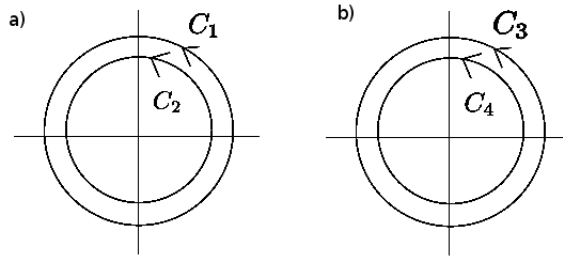


Figura 2: Integrais de caminho temporalmente ordenadas. a) Representa a primeira integral dupla em (4.106); b) Representa a segunda integral dupla em (4.106).

Usando (4.105)

$$[\mathbf{L}_m, \mathbf{L}_n] = \left(\oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{d\omega}{2\pi i} - \oint_{C_3} \frac{d\omega}{2\pi i} \oint_{C_4} \frac{dz}{2\pi i} \right) z^{m+1} \omega^{n+1} \left(\frac{c/2}{(z-\omega)^4} + \frac{2T(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial T(\omega)}{z-\omega} + \text{termos não singulares} \right) \quad (4.107)$$

Mantendo ω constante e integrando em z , do teorema integral de Cauchy, a segunda integral dupla não tem singularidade no interior da curva, portanto é nula. Expandindo z^{m+1} em torno de ω , obtemos

$$[\mathbf{L}_m, \mathbf{L}_n] = \oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{d\omega}{2\pi i} \omega^{n+1} \left[\omega^{m+1} + (m+1)\omega^m(z-\omega) + \frac{1}{2}m(m+1)\omega^{m-1}(z-\omega)^2 + \frac{1}{6}m(m^2-1)\omega^{m-2}(z-\omega)^3 + \dots \right] \left(\frac{c/2}{(z-\omega)^4} + \frac{2T(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial T(\omega)}{z-\omega} + \text{termos não singulares} \right) \quad (4.108)$$

desse produto, os termos não singulares não contribuem para a integração em z devido ao teorema integral de Cauchy²³, e os termos com denominador $(z-\omega)^k$, $k > 1$ também não contribuem para a integração devido à fórmula integral de Cauchy²⁴. Logo, sobrevivem apenas os termos

$$[\mathbf{L}_m, \mathbf{L}_n] = \oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{d\omega}{2\pi i} \omega^{n+1} \left[\frac{\omega^{m+1}\partial T(\omega)}{z-\omega} + \frac{2(m+1)\omega^m T(\omega)}{z-\omega} + \frac{c}{12} \frac{m(m^2-1)\omega^{m-2}}{z-\omega} \right] \quad (4.109)$$

integrando com a fórmula integral de Cauchy, obtemos

$$[\mathbf{L}_m, \mathbf{L}_n] = \oint_{C_2} \frac{d\omega}{2\pi i} \left(\omega^{n+m+2}\partial T(\omega) + 2(m+1)\omega^{n+m+1}T(\omega) + \frac{c}{12}m(m^2-1)\omega^{n+m-1} \right) \quad (4.110)$$

integrando o primeiro termo por partes

$$[\mathbf{L}_m, \mathbf{L}_n] = \oint_{C_2} \frac{d\omega}{2\pi i} \left((m-n)\omega^{m+n+1}T(\omega) + \frac{c}{12}m(m^2-1)\omega^{m-2} \right) \quad (4.111)$$

o primeiro termo nada mais é que $(m-n)\mathbf{L}_{m+n}$. O segundo termo é nulo se $m+n \neq 0$. De fato, se $m+n = 0$, a integral é igual a $\frac{c}{12}m(m^2-1)$ pela fórmula integral de Cauchy, se $m+n > 1$ o integrando não tem singularidade e a integral se anula pelo teorema integral de Cauchy, se $m+n < 1$ a integral também se anula pela fórmula integral de Cauchy. Portanto,

$$[\mathbf{L}_m, \mathbf{L}_n] = (m-n)\mathbf{L}_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \quad (4.112)$$

vale relação análoga para os $\bar{\mathbf{L}}_n$.

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}_m, \mathbf{L}_n] &= (m-n)\mathbf{L}_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \\ [\bar{\mathbf{L}}_m, \bar{\mathbf{L}}_n] &= (m-n)\bar{\mathbf{L}}_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \\ [\mathbf{L}_m, \bar{\mathbf{L}}_n] &= 0 \end{aligned} \quad (4.113)$$

Essas são duas cópias da álgebra de Virasoro, o mesmo que deduzimos na quantização do cone de luz.

4.2.3 Espaço de estados

Os estados da teoria são definidos como autoestados do operador D em (4.64), que corresponde à Hamiltoniana da teoria. Assim, os estados da teoria são auto-estados de \mathbf{L}_0 e $\bar{\mathbf{L}}_0$. Denotando por κ e $\bar{\kappa}$ os autovalores, os estados são

$$\mathbf{L}_0 |\psi\rangle = \kappa |\psi\rangle \quad \bar{\mathbf{L}}_0 |\psi\rangle = \bar{\kappa} |\psi\rangle \quad (4.114)$$

²³ f holomórfica (sem singularidades) em D e em sua borda $\iff \oint_{\partial D} f(z) dz = 0$.

²⁴ $\frac{\partial_z^{(k)} [f]|_{z=\omega}}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-\omega)^{k+1}} dz$.

onde κ e $\bar{\kappa}$ tem interpretação de energia. É fácil ver que a álgebra de Virasoro (4.113) implica

$$\mathbf{L}_0 (\mathbf{L}_n |\psi\rangle) = (\kappa - n) (\mathbf{L}_n |\psi\rangle) \quad (4.115)$$

ou seja, os \mathbf{L}_n tem a interpretação de operadores de criação e aniquilação: \mathbf{L}_n aumenta a energia do estado se $n < 0$ e a diminui se $n > 0$. Disso podemos inferir que $(\mathbf{L}_n)^{-1} = \mathbf{L}_{-n}$. Para que o espaço de estados não tenha nenhum estado não físico cuja energia é infinitamente negativa, supomos a existência de estados tais que

$$\mathbf{L}_n |\psi\rangle = 0, \quad \forall n > 0 \quad (4.116)$$

esses estados serão chamados *primários* e denotados por $|\kappa; \bar{\kappa}\rangle$. Estes são os estados de mais baixa energia, e todos os outros estados podem ser obtidos deles atuando com \mathbf{L}_{-n} com $n > 0$. Assim se constroem representações da álgebra de Virasoro. Para cada estado primário, ou seja, para cada valor de auto estados κ e $\bar{\kappa}$, obtemos uma escada infinita de estados chamada *Módulo de Verma*.

O vácuo da teoria é o estado cuja energia é a mais baixa entre os estados primários, com $\kappa = \bar{\kappa} = 0$. Assim, vale

$$\begin{aligned} \text{Vácuo} &\equiv |0; 0\rangle \\ \mathbf{L}_n |0; 0\rangle &= 0, \quad \forall n \geq 0 \\ \bar{\mathbf{L}}_n |0; 0\rangle &= 0, \quad \forall n \geq 0 \end{aligned} \quad (4.117)$$

Para que as probabilidades sejam preservadas, os observáveis devem ser todos Hermitianos, sendo os observáveis de interesse todos compostos por combinações lineares de \mathbf{L}_n e $\bar{\mathbf{L}}_n$, basta exigir que sejam unitários para preservar probabilidades. De fato,

$$\langle \psi | \mathbf{L}_n^\dagger \mathbf{L}_n | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle \Leftrightarrow \mathbf{L}_n^\dagger \mathbf{L}_n = \mathbb{1} \Leftrightarrow \mathbf{L}_n = (\mathbf{L}_n^\dagger)^{-1} = \mathbf{L}_{-n}^\dagger \quad (4.118)$$

por sua vez, isso implica que os autovalores $\kappa \geq 0$ e que a carga central $c > 0$ em teorias não triviais:

$$\begin{aligned} |\mathbf{L}_{-1} |\kappa; \bar{\kappa}\rangle|^2 &= \langle \kappa; \bar{\kappa} | \mathbf{L}_{-1}^\dagger \mathbf{L}_{-1} |\kappa; \bar{\kappa}\rangle = \langle \kappa; \bar{\kappa} | \mathbf{L}_1^\dagger \mathbf{L}_{-1} |\kappa; \bar{\kappa}\rangle \\ &= \langle \kappa; \bar{\kappa} | 2\mathbf{L}_0 |\kappa; \bar{\kappa}\rangle = 2\kappa \langle \kappa; \bar{\kappa} | \kappa; \bar{\kappa}\rangle \end{aligned} \quad (4.119)$$

exigindo que a norma dos estados sejam não negativa, (4.119) implica $\kappa \geq 0$.

$$|\mathbf{L}_{-n} |0; 0\rangle|^2 = \langle 0; 0 | \mathbf{L}_{-n}^\dagger \mathbf{L}_{-n} |0; 0\rangle = \frac{c}{12} n (n^2 - 1) \geq 0 \quad (4.120)$$

o que implica $c \geq 0$. Note que, se $c = 0$, o módulo de Verma construído a partir do vácuo tem apenas o próprio vácuo como elemento, uma vez que (4.120) implica que $\mathbf{L}_{-n} |0; 0\rangle$ com $n > 0$ não produz novos estados. Portanto, teorias de campo conformes não triviais devem ter $c > 0$.

Nosso espaço de estados será então composto por estados primários e os módulos de Verma construídos deles, onde vale

$$\begin{aligned} \text{Vácuo} &\equiv |0; 0\rangle \\ \mathbf{L}_n |0; 0\rangle &= 0, \quad \bar{\mathbf{L}}_n |0; 0\rangle = 0 \quad \forall n \geq 0 \\ \mathbf{L}_n |\kappa; \bar{\kappa}\rangle &= 0, \quad \bar{\mathbf{L}}_n |\kappa; \bar{\kappa}\rangle = 0 \quad \forall n > 0 \end{aligned} \quad (4.121)$$

Note que essa descrição do espaço de estados é equivalente à (3.35). A obtivemos contando apenas com o fato da teoria ser conforme.

Fantasma

Poderíamos encerrar por aqui a descrição do espaço de estados, uma vez que já limitamos os estados físicos como sendo aqueles com norma positiva. Porém, é instrutivo investigar um pouco mais a fundo, pois esse estudo explica questões cujas respostas descobrimos no estudo do calibre do cone de luz, como a dimensão do espaço auxiliar. Vamos determinar D sem ter que sacrificar a simetria de Lorentz. Outro bônus desse estudo é a remoção de uma anomalia, tornando a teoria quântica mais simétrica.

A anomalia em questão é a seguinte:

Vimos que, no caso clássico, a simetria de Weyl implica

$$T_\alpha^\alpha = 0 \quad (4.122)$$

Após a quantização, no entanto, essa relação não vale. Acontece que²⁵

$$\langle T_\alpha^\alpha \rangle = -\frac{c}{12}R \quad (4.123)$$

onde R é o escalar de Ricci da worldsheet bidimensional. Esse resultado chama-se *Anomalia de Weyl*. É chamado de anomalia pois é resultado de uma simetria, a qual não se preserva após a quantização. Para que a simetria de Weyl continue valendo na teoria quântica, deveríamos ter

$$\langle T_\alpha^\alpha \rangle = 0 \quad (4.124)$$

Note que a simetria não pode ser restaurada exigindo que $c = 0$, pois, como mostramos à pouco, a unitariedade dos operadores de Virasoro implica $c > 0$ para teorias conformes não triviais.

Acontece que o Tensor Energia Momento que obtivemos não é a história completa. Ao fixar o calibre conforme, outro tensor energia momento $T_?$ vai aparecer, tal que $T_{total} = T_{corda} + T_?$ com $\langle (T_{total})_\alpha^\alpha \rangle = 0$.

Em (2.18) utilizamos a invariância de Weyl e de reparametrização para fixar um calibre conforme específico, o qual facilitou nossos cálculos ao tomar $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. Agora vamos estudar as consequências de fixar um calibre conforme mais geral.

A função de partição que descreve o sistema é dada por

$$Z = \frac{1}{Vol} \int \mathcal{D}g \mathcal{D}X e^{-S_{Polyakov}[X,g]} \quad (4.125)$$

onde a divisão por “Vol” cancela a contribuição na integral dos estados físicos não distintos, correspondentes à reparametrizações e a transformações de Weyl. Sob uma reparametrização e uma transformação de Weyl arbitrárias, a métrica se transforma como

$$g_{\alpha\beta} \mapsto \hat{g}_{\alpha\beta} = e^{2\omega(\sigma)} \frac{\partial\sigma^\gamma}{\partial\sigma'^\alpha} \frac{\partial\sigma^\delta}{\partial\sigma'^\beta} g_{\gamma\delta} \quad (4.126)$$

A reparametrização e a transformação de Weyl, na função de partição, correspondem a uma mudança de coordenadas. Como em toda integral, uma mudança de coordenadas é feita às custas de um Jacobiano. Com alguma manipulação²⁶, pode-se mostrar que a função de partição resultante é

$$Z = \int \mathcal{D}X \mathcal{D}b \mathcal{D}c \exp(-S_{Polyakov}[X, \hat{g}] - S_{fantasma}[b, c, \hat{g}]) \quad (4.127)$$

²⁵Veja o apêndice B.4. Lá também é mostrado que $c = \bar{c}$.

²⁶Veja o apêndice E

onde

$$S_{fantasma} = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} b_{\alpha\beta} \nabla^\alpha c^\beta \quad (4.128)$$

os campos b e c anticomutam, são chamados campos fantasmas. Ou seja, fixar o calibre dessa forma, dá origem a dois campos extras cuja dinâmica é descrita por $S_{fantasma}$. Esses campos tem a função de cancelar os graus de liberdade não físicos do sistema, sobrando apenas os $D - 2$ modos transversos X^μ que obtivemos na quantização do cone de luz.

Em coordenadas complexas

$$S_{fantasma} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b\bar{\partial}c + \bar{b}\partial\bar{c}) \quad (4.129)$$

onde

$$\begin{aligned} b &\equiv b_{zz} & \bar{b} &\equiv b_{\bar{z}\bar{z}} \\ c &\equiv c_{z\bar{z}} & \bar{c} &= c_{\bar{z}z} \end{aligned} \quad (4.130)$$

as equações de movimento e tensor energia momento são, respectivamente,

$$\bar{\partial}b = \partial\bar{b} = \bar{\partial}c = \partial\bar{c} = 0 \quad (4.131)$$

$$T_f = 2(\partial c)b + c\partial b \quad \bar{T}_f = 2(\bar{\partial}\bar{c})\bar{b} + \bar{c}\bar{\partial}\bar{b} \quad (4.132)$$

T é holomórfica e \bar{T} anti-holomórfica. O resultado interessante é a EPO

$$T_f(z)T_f(\omega) = \frac{-13}{(z-\omega)^4} + \frac{2T(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial T(\omega)}{z-\omega} + \text{termos não singulares} \quad (4.133)$$

Note que tem o mesmo formato que (4.105), com $c_f = -26$. Mostramos então que fixando o calibre conforme resulta na aparição dos campos fantasmas b e c , os quais contribuem no tensor energia momento T_f e carga central c_f . Portanto

$$\begin{aligned} T_{total} &= T_{cordas} + T_f \\ c_{total} &= c_{cordas} + c_f \end{aligned} \quad (4.134)$$

Lembrando que a simetria de Weyl é anômala a menos que $c = 0$, $c_f = -26$ implica $c_{corda} = 26$, assim eliminamos a anomalia. Mas $c_{corda} = D$, a dimensão do espaço auxiliar. Concluimos finalmente que invariância de reparametrização juntamente com a simetria de Weyl fixam a dimensão do espaço auxiliar em²⁷

$$D = 26 \quad (4.135)$$

Mapa Estado-Operador e Vértices

Finalizamos esse capítulo mencionando outra forma de representar os estados físicos da teoria. Essa nova representação é essencial ao derivar o modelo sigma, objeto de estudo dos próximos capítulos.

O mapa estado-operador é um isomorfismo que vem do fato de que um funcional dos campos da teoria é a representação de Schrödinger dos estados. Analogamente à mecânica quântica, em

²⁷Note que $c = D = 26$ apenas no caso da corda livre descrita pela ação de Polyakov. Para outras teorias conformes, embora deve valer $c = 26$ para que não haja anomalia de Weyl, esse número não necessariamente vai corresponder à dimensão do espaço auxiliar.

teoria de campos no cilindro (coordenadas τ e σ), se o estado inicial é $\Psi_i[\phi_i(\sigma), \tau_i]$ o estado no tempo τ_f é dado por

$$\Psi_f[\phi_f(\sigma), \tau_f] = \int \mathcal{D}\phi_i \left(\int_{\phi(\tau_i)=\phi_i}^{\phi(\tau_f)=\phi_f} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \right) \Psi_i[\phi_i(\sigma), \tau_i] \quad (4.136)$$

Mapeando o cilindro no plano complexo da forma

$$(\tau, \sigma) \mapsto z = e^\tau e^{i\sigma} \equiv r e^{i\sigma} \quad (4.137)$$

o estado acima fica

$$\Psi_f[\phi_f(\sigma), r_f] = \int \mathcal{D}\phi_i \left(\int_{\phi(r_i)=\phi_i}^{\phi(r_f)=\phi_f} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \right) \Psi_i[\phi_i(\sigma), r_i] \quad (4.138)$$

dessa forma, a integral é tomada nos campos avaliados no anel $r_f \leq |z| \leq r_i$. Se $\tau_i = -\infty$, $r_i = 0$, e a integral de caminho fora de parêntesis é tomada sobre todas as configurações possíveis de ϕ da origem até ϕ_f .

$$\Psi_f[\phi_f(\sigma), r] = \int^{\phi(r)=\phi_f} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \left(\int \mathcal{D}\phi_i \Psi_i[\phi_i(\sigma), 0] \right) \quad (4.139)$$

Note que a integral em parêntesis em (4.139) é um operador que existe sobre toda uma seção temporal/radial do plano complexo, ou seja, corresponde a um operador local. De forma geral, podemos escrever

$$\Psi_f[\phi_f(\sigma), r] = \int^{\phi(r)=\phi_f} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \mathcal{O}(z=0) \quad (4.140)$$

onde \mathcal{O} é um operador local qualquer. Isto significa então que, um operador local avaliado na origem do plano complexo, via o mapa (4.137), corresponde a um estado da teoria. Este é o mapa estado-operador.

Note que a integral de caminho em (4.140) nada mais é que a correlação $\langle \mathcal{O}(z=0) \rangle$. Sabendo disso, e considerando que equações de operadores só tem sentido quando dentro de funções de correlação, podemos omitir a integral de caminho e escrever apenas

$$|\mathcal{O}\rangle = \mathcal{O}(z=0) \quad (4.141)$$

Agora estamos em condição de relacionar *operadores primários* com os estados primários definidos em (4.117). Acontece que um operador primário corresponde a um estado primário, e que o autovalor κ é igual ao peso conforme h . De fato, se \mathcal{O} é um operador primário

$$\mathbf{L}_n |\mathcal{O}\rangle = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z) \mathcal{O}(z=0) = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} \left(h \frac{\mathcal{O}}{z^2} + \frac{\partial \mathcal{O}}{z} + \dots \right) \quad (4.142)$$

Assim, usando a fórmula integral de Cauchy, é fácil ver que

$$\mathbf{L}_{-1} |\mathcal{O}\rangle = |\partial \mathcal{O}\rangle \quad \mathbf{L}_0 |\mathcal{O}\rangle = h |\mathcal{O}\rangle \quad \mathbf{L}_n |\mathcal{O}\rangle = 0, \quad \forall n > 0 \quad (4.143)$$

a segunda expressão mostra que o peso conforme $h = \kappa$, a terceira prova que operadores primários correspondem a estados primários.

Vamos utilizar esse mapa para representar os estados sem massa da teoria usando operadores. Para isso, precisamos expressar os estados em termos dos osciladores α_n e $\bar{\alpha}_n$ como fizemos na

quantização do cone de luz. Poderíamos expandir (2.29) em série de Fourier e mudar para coordenadas complexas e reobter os α_n e $\bar{\alpha}_n$ obedecendo a mesma álgebra (3.17). Uma forma mais simples de obter isso é usar (4.56), X holomórfica implica ∂X holomórfica, podemos expandir em série de Laurent

$$\partial X(z) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha_n}{z^{n+1}} \quad (4.144)$$

invertendo,

$$\alpha_n = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n \partial X(z) \quad (4.145)$$

onde $\alpha_0 = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}p$. Analogamente para os $\bar{\alpha}_n$. Isso é para cada componente X , portanto para X^μ obtemos os α_n^μ . Usando (4.98) é fácil mostrar que esses osciladores obedecem (4.2). Portanto α_n^μ é operador de criação para $n < 0$ e aniquilação para $n > 0$. Usando a relação entre os \mathbf{L}_n e os α_n^μ em (B.7), podemos descrever o espaço de estados novamente como (3.19) e (3.20).

O vácuo é representado pela integral

$$|0; p\rangle \sim \int \mathcal{D}X e^{-S[X]} : e^{ipX[z=0]} : \quad (4.146)$$

de fato, basta mostrar que todos os α_m com $m > 0$ aniquilam essa integral e que $\alpha_0 |0; p\rangle \sim p |0; p\rangle$ ²⁸.

$$\alpha_n |0; p\rangle \sim i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \int \mathcal{D}X \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n e^{-S[X]} : e^{ipX[z=0]} : \partial X(z) = 0, \quad \forall n > 0 \quad (4.147)$$

isto é verdade pois só contribuem para a integral as configurações que não possuem singularidade no interior da curva sobre a qual a integral de caminho é calculada, do contrário a ação diverge. Avaliando $\alpha_0 |0; p\rangle$

$$\begin{aligned} \alpha_0 |0; p\rangle &\sim i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \int \mathcal{D}X \oint \frac{dz}{2\pi i} e^{-S[X]} : e^{ipX[z=0]} : \partial X(z) \\ &\sim i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \int \mathcal{D}X \oint \frac{dz}{2\pi i} e^{-S[X]} \left(-\frac{i\alpha' p}{2} \frac{e^{ipX}}{z} + \text{termos não singulares} \right) \\ &\sim p |0; p\rangle \end{aligned} \quad (4.148)$$

onde usamos (B.18) para a EPO entre $: e^{ipX} :$ e ∂X .

O Tachyon é justamente o estado $|0; p\rangle$. Com o entendimento de que todos os operadores só tem sentido dentro de funções de correlação, podemos expressá-lo como $: e^{ip \cdot X[z=0]} :$. Acontece que, sendo um operador avaliado na origem, não é invariante por reparametrizações. Corrigimos isso integrando sobre toda a worldsheet $\int d^2z$, mas d^2z tem peso conforme (-1,-1), portanto a invariância de Weyl só é garantida se exigirmos que o integrando tenha peso conforme (+1,+1). O Tachyon é então representado pelo operador

$$V_T(X^\mu) \sim \int d^2z : e^{ip \cdot X} : \quad (4.149)$$

Vimos que $: e^{ip \cdot X} :$ é um operador primário, e que seu peso conforme é o autovalor de \mathbf{L}_0 associado ao estado correspondente $h = \frac{\alpha' p^2}{4}$. Vimos também que os autovalores de \mathbf{L}_0 tem interpretação de

²⁸Vamos omitir o índice superior para que os cálculos sejam mais simples, o caso geral para todas as componentes é facilmente obtido.

energia, portanto, de massa ao quadrado. Combinando isso à invariância de Weyl que exige $h = 1$, obtemos

$$\frac{\alpha' p^2}{4} = 1 \implies M^2 = -p^2 = -\frac{4}{\alpha'} \quad (4.150)$$

isso é exatamente o que obtemos para a massa do Tachyon na quantização do cone de luz. Raciocínio análogo mostra que os seguintes estados têm massa zero

$$V^{\mu\nu}(p_\gamma) = \alpha_{-1}^\mu \bar{\alpha}_{-1}^\nu |0; p\rangle \sim \int d^2z : e^{ip_\mu X^\mu} \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu : \quad (4.151)$$

estes podem ser decompostos em

$$\begin{aligned} V_G^{\mu\nu}(p_\gamma) &\equiv |\text{graviton}\rangle^{\mu\nu} = \alpha_{-1}^{(\mu} \bar{\alpha}_{-1}^{\nu)} |0; p\rangle \sim \int d^2z : e^{ip_\mu X^\mu} \partial X^{(\mu} \bar{\partial} X^{\nu)} : \\ V_{KR}^{\mu\nu}(p_\gamma) &\equiv |KR\rangle^{\mu\nu} = \alpha_{-1}^{[\mu} \bar{\alpha}_{-1}^{\nu]} |0; p\rangle \sim \int d^2z : e^{ip_\mu X^\mu} \partial X^{[\mu} \bar{\partial} X^{\nu]} : \\ V_D(p_\gamma) &\equiv |\text{Dilaton}\rangle = \alpha_{-1} \cdot \bar{\alpha}_{-1} |0; p\rangle \sim \int d^2z : e^{ip_\mu X^\mu} \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu : \end{aligned} \quad (4.152)$$

Basta notar que o operador

$$: e^{ip_\mu X^\mu} \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu : \quad (4.153)$$

tem peso conforme $(h, \bar{h}) = \left(1 + \frac{\alpha' p^2}{4}, 1 + \frac{\alpha' p^2}{4}\right)$. Mas deve ser $(h, \bar{h}) = (1, 1)$ para que a integral seja Weyl invariante, logo $p^2 = 0 \implies M^2 = 0$.

Os operadores associados a esses estados são chamados *Vértices*.

5 Modelo Sigma e T-Dualidade Abeliana

O Modelo Sigma é o primeiro passo que damos em direção a uma teoria de cordas interagente. É o mais simples modelo que ainda preserva a invariância conforme. Sua importância conceitual é imensa, pois exemplifica o poder de teorias de cordas de explicar o universo a partir de primeiros princípios. Veremos como deduzir esse modelo.

Veremos também nesse capítulo um interessante fenômeno que ocorre no modelo sigma, a T-Dualidade. Dualidade refere-se à descrição de sistemas diferentes cuja física é indistinguível. O “T” em T-Dualidade significa Toroidal. É chamado assim pois aparece devido à compactificação de algumas das dimensões do espaço-tempo, as quais formam um toro.

5.1 Ação efetiva: Modelo Sigma

A derivação do modelo é baseada no fato de que a função de partição de um sistema, sob a influência de uma fonte externa J , é o funcional gerador de todas as correlações²⁹. Ou seja, se a função de partição de tal sistema é dada por

$$Z[J] = \int \mathcal{D}X \exp \left\{ -S_{Polyakov}[X^\mu] - \int d^{26}x J(x^\mu) X(x^\mu) \right\} \quad (5.1)$$

as correlações da teoria interagente (sob o efeito da fonte J) são dadas por³⁰

$$\frac{1}{Z[0]} \left. \frac{\delta^n Z}{\delta J(x_1^\rho) \dots \delta J(x_n^\rho)} \right|_{J=0} = \langle \Omega | \mathcal{O}_1(x_1^\rho) \dots \mathcal{O}_1(x_n^\rho) | \Omega \rangle \quad (5.2)$$

onde $|\Omega\rangle$ é o vácuo da teoria interagente. Todas as correlações entre os estados sem massa³¹ da teoria são então dadas por um funcional gerador do tipo

$$Z[h_{\mu\nu}] = \int \mathcal{D}X \exp \left\{ -S_{Polyakov}[X^\mu] - \int d^{26}x h_{\mu\nu}(x^\rho) V^{\mu\nu}(x^\rho) \right\} \quad (5.3)$$

$V^{\mu\nu}(x^\rho)$ é o vértice no espaço de posições

$$V^{\mu\nu}(x_\gamma) = \int d^{26}p V(p_\gamma) e^{ixp^\mu x_\mu} \quad (5.4)$$

onde redefinimos o vértice $V^{\mu\nu}(p_\gamma)$ para incluir também o Dilaton

$$V^{\mu\nu}(p_\gamma) \sim \int d^2z : e^{ip_\mu X^\mu} (\partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu + \Theta(X)) \quad (5.5)$$

²⁹Veja o apêndice F.

³⁰Como sempre, operadores dentro de funções de correlações são temporalmente ordenados.

³¹Note que esses representam todos os estados da teoria se queremos que esta não quebre a invariância conforme.

sendo o campo $\Theta(X) \equiv \partial X^\mu \bar{\partial} \bar{X}_\mu$ é um escalar. Substituindo na integral

$$\begin{aligned}
Z[h_{\mu\nu}] &= \int \mathcal{D}X \exp \left\{ -S_{Polyakov}[X^\mu] - \int d^{26}x h_{\mu\nu}(x^\rho) \left(\int d^{26}p \int d^2z e^{ip_\mu X^\mu} \partial X^\mu \bar{\partial} \bar{X}^\nu e^{ixp^\mu x_\mu} \right) - \int d^{26}x H(x^\rho) \int d^{26}p \int d^2z e^{ip_\mu X^\mu} \Theta(X^\rho) e^{ixp^\mu x_\mu} \right\} \\
&= \int \mathcal{D}X \exp \left\{ -S_{Polyakov}[X^\mu] - \int d^2z \int d^{26}x h_{\mu\nu}(x^\rho) \left(\int d^{26}p e^{ip_\mu(X^\mu - x^\mu)} \right) \partial X^\mu \bar{\partial} \bar{X}^\nu - \int d^2z \int d^{26}x H(x^\rho) \left(\int d^{26}p e^{ip_\mu(X^\mu - x^\mu)} \right) \Theta(X^\rho) \right\} \\
&= \int \mathcal{D}X \exp \left\{ -S_{Polyakov}[X^\mu] - \int d^2z \int d^{26}x h_{\mu\nu}(x^\rho) \delta^{26}(X^\mu - x^\mu) \partial X^\mu \bar{\partial} \bar{X}^\nu - \int d^2z \int d^{26}x H(x^\rho) \delta^{26}(X^\mu - x^\mu) \Theta(X^\rho) \right\} \\
&= \int \mathcal{D}X \exp \left\{ -S_{Polyakov}[X^\mu] - \int d^2z h_{\mu\nu}(X^\rho) \partial X^\mu \bar{\partial} \bar{X}^\nu - \int d^2z H(X^\rho) \Theta(X^\rho) \right\}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

que é equivalente a um sistema descrito pela ação efetiva

$$S_{efetiva}[X] \sim \int d^2z E_{\mu\nu}(X) \partial X^\mu(z, \bar{z}) \bar{\partial} X^\nu(z, \bar{z}) + H(X^\rho) \Theta(X^\rho) \tag{5.7}$$

com $E_{\mu\nu}(X) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(X)$ e $H(X^\rho) \Theta(X^\rho)$ sendo um campo escalar invariante por reparametrizações se transformações de Weyl. Podemos decompor $E_{\mu\nu}(X) = G_{\mu\nu}(X) + B_{\mu\nu}(X)$ em suas partes simétrica e antissimétrica, correspondentes respectivamente aos campos do Graviton e Kalb-Ramond.

$$G_{\mu\nu}(X) = \eta_{\mu\nu} + h_{(\mu\nu)}(X) \quad B_{\mu\nu}(X) = h_{[\mu\nu]}(X) \tag{5.8}$$

Das propriedades de simetria do campo $H(X^\rho) \Theta(X^\rho)$, sem perda de generalidade, podemos reescrevê-lo como

$$H(X^\rho) \Theta(X^\rho) \equiv \frac{\alpha'}{2} \Phi(X^\rho) R^{(2)} \tag{5.9}$$

onde $R^{(2)}$ é o escalar de Ricci da worldsheet e $\Phi(X^\rho)$ é um campo escalar. Dessa forma, fica mais explícita a dimensão e a invariância por reparametrizações.

Com esse raciocínio, fica demonstrado que, partindo da corda livre, ao gerar os estados, estes têm o efeito de alterar a geometria do espaço auxiliar! Esta é a dedução do modelo sigma.

Teremos então que o espectro de estados sem massa da teoria, o qual se transforma em representações do grupo $SO(24)$, se decompõem em três representações irreduzíveis

$$\text{simétrico traço nulo} \oplus \text{anti simétrico} \oplus \text{singleto} \tag{5.10}$$

e a cada uma dessas associamos um campo sem massa

$$G_{MN}(X), \quad B_{MN}(X), \quad \Phi(X) \tag{5.11}$$

tal que a oscilação da corda é associada com um quanta desses campos. O campo $G_{MN}(X)$ é interpretado como a métrica do espaço-tempo, o campo antissimétrico de Kalb-Ramond $B_{MN}(X)$ é análogo para cordas ao campo eletromagnético $A_M(X)$, e o campo escalar $\Phi(X)$ corresponde ao Dilaton. O modelo σ bidimensional é portanto uma extensão da ação de Polyakov, que descreve a dinâmica da corda bosônica levando em conta o efeito dos estados da teoria livre na geometria do espaço auxiliar, os novos campos são acoplados de modo a preservar as simetrias locais de reparametrização e de Weyl, e a simetria global do grupo de Poincaré. Em coordenadas euclidianas, o modelo é

$$S_\sigma = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left\{ (G_{MN}(X) \eta^{\alpha\beta} + B_{MN}(X) \epsilon^{\alpha\beta}) \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N + \frac{\alpha'}{2} R^{(2)} \Phi \right\} \tag{5.12}$$

onde $M, N = 0, 1, \dots, D - 1$, $\alpha, \beta = 0, 1$, $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$ é a sua métrica, e

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Ou ainda, em coordenadas complexas

$$S_\sigma[X] = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \left\{ E_{MN}(X) \partial X^M(z, \bar{z}) \bar{\partial} X^N(z, \bar{z}) + \frac{\alpha'}{2} R^{(2)} \Phi \right\} \quad (5.14)$$

com $E_{MN}(X) \equiv G_{MN}(X) + B_{MN}(X)$.

5.2 Impondo Simetria Conforme no modelo σ : Gravitação Estendida

Já mostramos que cordas livres vibrando no espaço-tempo não apenas geram partículas quânticas, como também interagem com o próprio espaço-tempo curvando-o. Veremos agora que, como consequência da invariância conforme, surge uma extensão das equações de Einstein.

No caso clássico, o modelo sigma é conforme invariante, mas isso não é necessariamente verdade após a quantização. Veremos o que acontece se impormos invariância conforme no caso quântico.

Considerando apenas a parte da ação que envolve $G_{\mu\nu}(X)$:

$$S_\sigma = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \{ G_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu \} \quad (5.15)$$

Expandindo o campo X^μ em torno da solução clássica \bar{x}^μ

$$X^\mu(\sigma) = \bar{x}^\mu + \sqrt{\alpha'} Y^\mu(\sigma) \quad (5.16)$$

com $Y^\mu \ll 1$ adimensional. A ação se torna

$$S_\sigma = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \left[G_{\mu\nu}(\bar{x}^\mu) + \sqrt{\alpha'} G_{\mu\nu,\omega}(\bar{x}^\mu) Y^\omega + \frac{\alpha'}{2} G_{\mu\nu,\omega\rho}(\bar{x}^\mu) Y^\omega Y^\rho + \dots \right] \partial_\alpha Y^\mu \partial^\alpha Y^\nu \quad (5.17)$$

os $G_{\mu\nu,\dots}(\bar{x}^\mu)$ atuam como constantes de acoplamento para as interações dos Y^μ . Estamos interessados no limite de *baixas energias*. Isso se traduz, em termos das constantes de acoplamento, da seguinte forma: se r_c é o raio de curvatura característico do espaço descrito pela métrica $G_{\mu\nu}$, então

$$\frac{\partial G}{\partial X} \sim \frac{1}{r_c} \quad (5.18)$$

portanto, baixa energia corresponde a grande raio de curvatura que, por sua vez, requer que as constantes de acoplamento sejam pequenas. A constante de acoplamento efetiva adimensional é portanto

$$\frac{\sqrt{\alpha'}}{r_c} \quad (5.19)$$

assim, podemos usar teoria de perturbação em (5.17) com os métodos já conhecidos de teorias de perturbação em teorias quânticas de campos. Como em qualquer teoria de perturbação, teremos que fazer um corte UV para regular divergências e renormalização. Tipicamente, as quantidades físicas vão depender da escala ξ do processo após a renormalização, isso vai quebrar a invariância conforme.

O objeto que caracteriza a dependência das constantes de acoplamento com a escala ξ é chamada função β e é dada por

$$\beta_{\mu\nu}(G) \sim \xi \frac{\partial G_{\mu\nu}(X; \xi)}{\partial \xi} \quad (5.20)$$

assim, invariância conforme na teoria quântica está garantida se $\beta_{\mu\nu}(G) = 0$.

Para determinar como as constantes de acoplamento dependem da escala ξ do processo, vamos eliminar a divergência UV.

Escolhendo coordenadas normais de Riemann em torno de \bar{x}^μ , teremos

$$G_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu} - \frac{\alpha'}{3} R_{\mu\rho\nu\gamma}^{(26)}(\bar{x}) Y^\rho Y^\gamma + O(Y^3) \quad (5.21)$$

substituindo na ação, até ordem dois nas flutuações Y ,

$$S_\sigma = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \left[\partial_\alpha Y^\mu \partial^\alpha Y^\nu \delta_{\mu\nu} - \frac{\alpha'}{3} R_{\mu\rho\nu\gamma}^{(26)}(\bar{x}) Y^\rho Y^\gamma \partial_\alpha Y^\mu \partial^\alpha Y^\nu \right] \quad (5.22)$$

Tratando como uma teoria de campos interagentes bidimensional, a interação quadrática dá o vértice associado a $R_{\mu\rho\nu\gamma}^{(26)}(k^\mu \cdot k^\nu)$ via regra de Feynman, onde k_α^μ é o momento bidimensional da worldsheet para a flutuação Y^μ . A divergência da teoria vem do diagrama de um loop. De fato, o propagador da flutuação é, em espaço de posições,

$$\langle Y^\rho(\sigma) Y^\gamma(\sigma') \rangle = -\frac{1}{2} \delta^{\rho\gamma} \ln |\sigma - \sigma'|^2 \quad (5.23)$$

o qual, ao percorrer o loop, diverge quando $\sigma \rightarrow \sigma'$. Podemos isolar essa divergência usando o método de *regularização dimensional*, tomando $d = 2 + \epsilon$. Assim, o propagar se torna

$$\langle Y^\rho(\sigma) Y^\gamma(\sigma') \rangle = 2\pi \delta^{\rho\gamma} \int \frac{d^{2+\epsilon}k}{(2\pi)^{2+\epsilon}} \frac{e^{ik \cdot (\sigma - \sigma')}}{k^2} \quad (5.24)$$

o que implica

$$\lim_{\sigma \rightarrow \sigma'} \langle Y^\rho(\sigma) Y^\gamma(\sigma') \rangle = \frac{\delta^{\rho\gamma}}{\epsilon} \quad (5.25)$$

a divergência UV é eliminada subtraindo um contratermo na ação que cancele a divergência. Fazemos isso subtraindo $R_{\mu\rho\nu\gamma}^{(26)} Y^\rho Y^\gamma \partial_\alpha Y^\mu \partial^\alpha Y^\nu$ porém com $\langle Y^\rho Y^\gamma \rangle$ no lugar de $Y^\rho Y^\gamma$. Ou seja, substituímos na ação

$$R_{\mu\rho\nu\gamma}^{(26)} Y^\rho Y^\gamma \partial_\alpha Y^\mu \partial^\alpha Y^\nu \longrightarrow R_{\mu\rho\nu\gamma}^{(26)} Y^\rho Y^\gamma \partial_\alpha Y^\mu \partial^\alpha Y^\nu - \frac{1}{\epsilon} R_{\mu\nu}^{(26)} \partial_\alpha Y^\mu \partial^\alpha Y^\nu \quad (5.26)$$

$$S_\sigma = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \left[\partial_\alpha Y^\mu \partial^\alpha Y^\nu \delta_{\mu\nu} - \frac{\alpha'}{3} R_{\mu\rho\nu\gamma}^{(26)}(\bar{x}) Y^\rho Y^\gamma \partial_\alpha Y^\mu \partial^\alpha Y^\nu - \frac{1}{\epsilon} R_{\mu\nu}^{(26)} \partial_\alpha Y^\mu \partial^\alpha Y^\nu \right] \quad (5.27)$$

é possível mostrar que o contratermo pode ser absorvido com a renormalização

$$\begin{aligned} Y^\mu &\longrightarrow Y^\mu + \frac{\alpha'}{6\epsilon} R_\nu^{(26)\mu} Y^\nu \\ G_{\mu\nu} &\longrightarrow G_{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{\epsilon} R_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Obtemos então que a função beta é

$$\beta_{\mu\nu}(G) = \alpha' R_{\mu\nu} \quad (5.29)$$

e a exigência de invariância conforme é

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (5.30)$$

mas essas são exatamente as equações de Einstein no Vácuo! Esse exemplo é importante pois ilustra o procedimento utilizado no modelo sigma completo, onde obtemos resultado parecido.

Usando a ação do modelo sigma com todos os campos sem massa,

$$S_\sigma = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left\{ (G_{\mu\nu}(X) \eta^{\alpha\beta} + B_{\mu\nu}(X) \epsilon^{\alpha\beta}) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu + \frac{\alpha'}{2} R^{(2)} \Phi \right\} \quad (5.31)$$

segundo procedimento análogo de regularização dimensional para eliminar divergências, até primeira ordem em α' , leva a

$$\begin{aligned} \beta_{\mu\nu}(G) &= \alpha' R_{\mu\nu}^{(26)} - \frac{\alpha'}{4} H_{\mu\nu}^2 + 2\alpha' \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi \\ \beta_{\mu\nu}(B) &= \frac{\alpha'}{2} \nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu} - \alpha' \nabla^\lambda \Phi H_{\lambda\mu\nu} \\ \beta(\Phi) &= \frac{\alpha'}{24} H^2 + 2\alpha' (\nabla\Phi)^2 - 2\alpha' \nabla^2 \Phi \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde

$$\begin{aligned} H_{\lambda\mu\nu} &\equiv \nabla_\lambda B_{\mu\nu} + \nabla_\mu B_{\nu\lambda} + \nabla_\nu B_{\lambda\mu} \\ H_{\mu\nu}^2 &\equiv H_{\lambda\kappa\mu} H^{\lambda\kappa\nu} \\ H^2 &\equiv H_{\lambda\mu\nu} H^{\lambda\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.33)$$

a invariância de Weyl está garantida se

$$\beta_{\mu\nu}(G) = \beta_{\mu\nu}(B) = \beta(\Phi) = 0 \quad (5.34)$$

com algumas manipulações obtemos as equações de forma mais sugestiva

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(26)} - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} R^{(26)} &= \frac{1}{4} [H_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{6} G_{\mu\nu} H^2] - 2\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi + 2G_{\mu\nu} \nabla^2 \Phi \\ \nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu} &= 2\nabla^\lambda \Phi H_{\lambda\mu\nu} \\ \nabla^2 \Phi - 2(\nabla\Phi)^2 &= -\frac{1}{2} H^2 \end{aligned} \quad (5.35)$$

O mesmo resultado pode ser obtido calculando a anomalia de Weyl. As funções β aparecem como coeficientes em $\langle T_\alpha^\alpha \rangle$, os quais devem ser nulos para que a invariância de Weyl seja preservada na teoria quântica³².

Note que o lado esquerdo da primeira equação em (5.35) é o tensor de Einstein, o qual se conserva como consequência da identidade de Bianchi. Se definirmos o tensor energia momento do espaço-tempo como

$$\mathbf{T}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4} \left[H_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{6} G_{\mu\nu} H^2 \right] - 2\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi + 2G_{\mu\nu} \nabla^2 \Phi \quad (5.36)$$

segue que ele é simétrico e que também se conserva

$$\nabla^\mu \mathbf{T}_{\mu\nu} = 0 \quad (5.37)$$

Podemos reescrever a primeira equação em (5.35) como

$$R_{\mu\nu}^{(26)} - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} R^{(26)} = \mathbf{T}_{\mu\nu} \quad (5.38)$$

³²Veja seção 7.2.3 de [15] e seções 3.3 à 3.5 de [21].

que nada mais é que as equações de Einstein!

Obtemos então resultado análogo a (5.30), porém mais geral: a invariância conforme é equivalente às Equações de Einstein cuja fonte é covariantemente conservada.

A ação que cujas equações de movimento são (5.35) é

$$S = \int d^{26} X \sqrt{G} e^{-2\Phi} \left[R^{(26)} + 4 (\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{12} H^2 \right] \quad (5.39)$$

sob a seguinte transformação de Weyl na métrica

$$G_{\mu\nu} \mapsto \tilde{G}_{\mu\nu} = e^{\frac{1}{6}\Phi} G_{\mu\nu} \quad (5.40)$$

obtemos essa ação de forma mais sugestiva

$$S = \int d^{26} X \sqrt{\tilde{G}} \left[\tilde{R}^{(26)} - \frac{1}{6} (\widetilde{\nabla\Phi})^2 - \frac{1}{12} e^{\frac{\Phi}{3}} \tilde{H}^2 \right] \quad (5.41)$$

o “ \sim ” indica que as contrações foram tomadas usando a nova métrica. Essa ação é chamada *Ação Efetiva de Baixa Energia*, a reconhecemos como a ação de Einstein com termo cinético para o Dilaton e um termo cinético do tipo Maxwell para o tensor antissimétrico. Ela é importante pois atua como funcional gerador da matriz S das interações em cordas bosônicas[22].

Toda essa análise vale para baixas energias, ou seja, até primeira ordem em α' . Isto não é problema, pelo menos não do ponto de vista de relatividade, pois as ordens mais elevadas em α' introduzem correções nas equações de Einstein apenas para pequenas distâncias, na escala de Planck.

Vimos então que, mesmo no caso simples de cordas bosônicas, deduzimos uma extensão da relatividade de Einstein (em baixas energias) partindo de primeiros princípios. Com a equação em mãos, temos uma previsão testável de teoria de cordas que podemos comparar com as equações de Einstein padrão em experimentos.

Vale a pena mencionar que (5.35), além das equações de Einstein estendidas, descreve também a dinâmica das componentes do campo de Kalb-Ramond, chamados *áxions*. Estes são fortes candidatos para explicar a matéria escura [8].

5.3 T-Dualidade na Ação de Polyakov

Trataremos de dualidade *abeliana*, onde a transformação de dualidade pertence a um grupo abeliano. Dualidade abeliana, em especial T-Dualidade, é interessante por sua simplicidade e pela possibilidade de entendê-la em termos de transformações canônicas. Dualidades não abelianas não são tão simples e não são muito bem compreendidas em uma abordagem de transformações canônicas[5, 6].

O aspecto mais impressionante de T-Dualidade abeliana em corda fechada é que, conforme mostraremos, a física quando raio da dimensão compacta é R é indistinguível da física quando o raio é $\frac{1}{R}$. Isto sugere, por exemplo, que podemos compreender a física na escala de Plank (R pequeno) fazendo observações em uma escala muito mais acessível ($\frac{1}{R}$ grande).

No caso que vamos tratar, uma das dimensões é compactificada e torna-se um toro unidimensional, ou seja, um círculo.

Assumindo que uma das dimensões, $x^{25} \equiv x$, é compactificada em um círculo de raio R

$$x = x + 2\pi R \quad (5.42)$$

juntamente com o parâmetro $\sigma \in [0, 2\pi]$ e o fato da corda ser fechada, a worldsheet vive na superfície de um cilindro.

A corda pode dar diversas voltas em torno da dimensão compacta antes de se fechar, de modo que a condição de periodicidade da corda fechada(2.1) agora é

$$X(\tau, \sigma + 2\pi) = X(\tau, \sigma) + m2\pi R \quad (5.43)$$

onde $X(\tau, \sigma) \equiv X^{25}(\tau, \sigma)$ e $X^I = (X^i, X)$ com $i = 2, 3, \dots, 24$, e m é chamado *número de winding* e representa quantas voltas a corda dá em torno da dimensão compacta antes de se fechar, que pode ser positivo ou negativo. É conveniente definir

$$\omega \equiv \frac{mR}{\alpha'}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (5.44)$$

chamado *winding*, pois, como veremos, é uma grandeza dual ao momento.

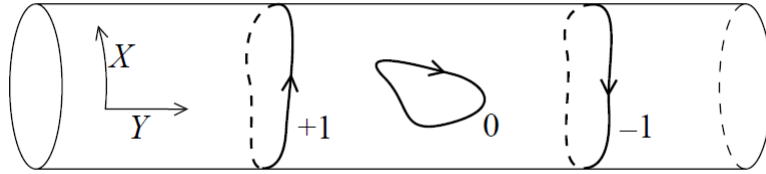


Figura 3: Cordas fechadas orientadas com números de winding $\omega = +1$, $\omega = 0$ e $\omega = -1$ [23].

Ao resolver as equações de movimento, precisamos considerar apenas a componente $X^{25} \equiv X$, as outras componentes permanecem inalteradas. Resolvendo a equação de onda, obtemos

$$X(\tau, \sigma) = X_L(\tau + \sigma) + X_R(\tau - \sigma) = X_L(u) + X_R(v) \quad (5.45)$$

que agora tem a condição extra

$$X_L(u + 2\pi) + X_R(v - 2\pi) = X_L(u) + X_R(v) + 2\pi\alpha'\omega \quad (5.46)$$

A solução é a mesma para os *left movers* e *right movers* (2.26), porém, $\alpha_0^\mu = \bar{\alpha}_0^\mu$ em (2.28) não é mais válida para a componente 25. Substituindo (2.26), para $\mu = 25$, em (5.46) obtemos a nova relação³³

$$\bar{\alpha}_0 - \alpha_0 = \sqrt{2\alpha'}\omega \quad (5.47)$$

Calculando a componente do momento na direção compacta

$$p^{25} \equiv p = \int_0^{2\pi} \Pi^\tau(\tau, \sigma) d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} (\dot{X}_L + \dot{X}_R) d\sigma$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} (\bar{\alpha}_0 + \alpha_0) \quad (5.48)$$

³³ $\alpha_0^{25} \equiv \alpha_0$ e $\bar{\alpha}_0^{25} \equiv \bar{\alpha}_0$

segue de (5.47) que

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} (\bar{\alpha}_0 - \alpha_0) \quad (5.49)$$

resolvendo para $\bar{\alpha}_0$ e α_0

$$\bar{\alpha}_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} (p + \omega) \quad \alpha_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} (p - \omega) \quad (5.50)$$

substituindo em (5.45) obtemos

$$X(\tau, \sigma) = x_0 + \alpha' p \tau + \alpha' \omega \sigma + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma}) \quad (5.51)$$

onde $x_0 \equiv \frac{x_{0L}}{2} + \frac{x_{0R}}{2}$.

O procedimento de quantização é o mesmo feito anteriormente e as relações de comutação são as mesmas, com a diferença que agora há mais uma grandeza elevada ao status de operador, o *winding* ω .

Sabemos que o operador de momento é o gerador de translações, portanto

$$U(a) = \exp(-iap) \quad (5.52)$$

faz uma translação de a na direção compacta. Como a dimensão é compacta (nesse caso um círculo), uma translação de um comprimento do círculo deve ser a operação identidade, ou seja

$$\begin{aligned} U(2\pi R) &= \exp(-ip2\pi R) = \mathbb{1} \\ \Rightarrow p2\pi R &= 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ p &= \frac{n}{R}, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (5.53)$$

O momento é quantizado, o que já um resultado bem conhecido da mecânica quântica. Por definição, o *winding* ω é também quantizado

$$\omega = \frac{mR}{\alpha'}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (5.54)$$

Em termos de p e ω a Hamiltoniana e a massa ao quadrado são³⁴

$$\begin{aligned} H &= \frac{\alpha'}{2} \left(p^i p_i + \frac{n^2}{R^2} + \frac{m^2 R^2}{\alpha'^2} \right) + \sum_{p=1}^{\infty} (\bar{\alpha}_p \cdot \bar{\alpha}_{-p} + \alpha_p \cdot \alpha_{-p}) - 2 \\ M^2 &= \frac{n^2}{R^2} + \frac{m^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} (\bar{\alpha}_p \cdot \bar{\alpha}_{-p} + \alpha_p \cdot \alpha_{-p}) - 2 \right\}, \quad n, m \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (5.55)$$

Note que a transformação

$$\begin{aligned} R &\longmapsto \tilde{R} = \frac{\alpha'}{R} \\ n &\longmapsto m \\ m &\longmapsto n \end{aligned} \quad (5.56)$$

é uma transformação de dualidade. De fato, é fácil ver que

$$H(R, n, m) = H(\tilde{R}, m, n) \quad (5.57)$$

³⁴A massa é do ponto de vista de um observador no espaço de Minkowski 25-dimensional que não inclui a dimensão compacta. Assim, na relação relativística $M^2 = -p^\mu p_\mu$, $p^\mu p_\mu = 2p^+ p^- - p^i p_i$.

A transformação (5.56) nada mais é que uma transformação canônica que troca $p \leftrightarrow \omega$. Essa é a dualidade que aparece ao compactificar uma das dimensões em um toro (nesse caso, um círculo), chamada T-Dualidade.

Do raciocínio acima, fica claro que (5.56) é uma simetria da Hamiltoniana, mas é mais que isso. Pode ser demonstrado que é uma simetria quântica completa, que mostra a equivalência física de sistemas distintos. Ou seja, existe um mapa bijetivo entre uma teoria de raio R e uma de raio $\frac{\alpha'}{R}$, ambas com a mesma Hamiltoniana, equações de movimento e relações de comutação equivalentes³⁵. Este fenômeno é indicativo de que teoria de cordas enxerga a geometria do espaço-tempo de maneira muito diferente do que estamos acostumados.

5.4 T-Dualidade Abeliana no Modelo Sigma

Vimos que compactificar uma das dimensões, usando a ação de Nambu-Goto em $M_{25,1}$, faz aparecer a dualidade (5.56), que pode ser entendida como uma transformação canônica composta com uma transformação no background da teoria³⁶.

Mostraremos nessa seção um resultado análogo, agora para um espaço-tempo curvo $R_{25,1}$ de métrica $G_{MN}(X)$. Ao compactificar várias direções do espaço-tempo existe uma dualidade entre teorias com backgrounds distintos, relacionados pelas Transformações de Buscher³⁷. A T-Dualidade consiste de uma transformação canônica composta com transformações de Buscher.

Trabalharemos com a ação

$$S_\sigma[X] = \frac{K}{2} \int d^2z \left\{ E_{MN}(X) \partial X^M(z, \bar{z}) \bar{\partial} X^N(z, \bar{z}) + \frac{\alpha'}{2} R^{(2)} \Phi \right\} \quad (5.58)$$

onde $K \equiv \frac{1}{\pi\alpha'}$ e $E_{MN}(X) \equiv G_{MN}(X) + B_{MN}(X)$.

Considerando $d \leq D$ direções isométricas, denotando

$$X^M = (X^\mu, X^m), \quad \mu = 0, 1, \dots, d \quad m = d+1, \dots, D \quad (5.59)$$

a Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{K}{2} \left(E_{MN}(X) \partial X^M(z, \bar{z}) \bar{\partial} X^N(z, \bar{z}) + \frac{\alpha'}{2} R^{(2)} \Phi \right) \quad (5.60)$$

com $\frac{\partial E_{MN}(X)}{\partial X^\alpha} = 0$

$$X^\mu \mapsto X^\mu + cte \implies \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}' = \mathcal{L} \quad (5.61)$$

$$\frac{\partial E_{MN}(X)}{\partial X^\alpha} = 0$$

Com d dimensões isométricas, vale condição análoga a (5.43)

$$X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) = X^\mu(\tau, \sigma) + 2\pi\alpha'\omega^\mu \quad (5.62)$$

Note que a compactificação de uma dimensão espacial (5.42), que resultou na aparição da T-Dualidade (5.56), é um caso particular de (5.61).

Começaremos analisando o caso mais simples onde há apenas uma direção isométrica:

$$X^M = (\theta, X^m), \quad m = 1, \dots, D \quad (5.63)$$

³⁵Para uma demonstração detalhada, veja seção 17.8 de [1].

³⁶Nesse caso, o raio da dimensão compacta: $R \mapsto \tilde{R} = \frac{\alpha'}{R}$

³⁷Também conhecidas como Regras de Buscher [7].

$$\theta \mapsto \theta + cte \implies \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}' = \mathcal{L} \quad (5.64)$$

$$\frac{\partial E_{MN}(X)}{\partial \theta} = 0$$

a Lagrangeana pode ser escrita como³⁸

$$\mathcal{L} = \frac{K}{2} G_{00} (\dot{\theta}^2 - \theta'^2) + \frac{K}{2} E_{0m} (\dot{\theta} + \theta') (\dot{X}^m - X'^m) + \frac{K}{2} E_{m0} (\dot{X}^m + X'^m) (\dot{\theta} - \theta') \quad (5.65)$$

$$+ \frac{K}{2} E_{mn} (\dot{X}^m + X'^m) (\dot{X}^n - X'^n)$$

do momento conjugado $\Pi_0^r \equiv \Pi_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}$, obtemos $\dot{\theta}$ em termos do momento

$$\dot{\theta} = \frac{\Pi_\theta}{KG_{00}} - \frac{G_{0m}}{G_{00}} \dot{X}^m + \frac{B_{0m}}{G_{00}} X'^m \quad (5.66)$$

a isometria contínua em (5.64) nos permite definir a função geratriz

$$F = \frac{K}{2} \int (\theta' \tilde{\theta} - \theta \tilde{\theta}') d\sigma \quad (5.67)$$

que leva à transformação canônica

$$(\theta, \Pi_\theta) \mapsto (\tilde{\theta}, \tilde{\Pi}_\theta) \quad (5.68)$$

$$\Pi_\theta = -K\tilde{\theta}'$$

$$\tilde{\Pi}_\theta = -K\theta'$$

que não afeta as componentes X^m e seus respectivos momentos conjugados. Usando (5.68) reescrevemos $\dot{\theta}$ em termos de $\tilde{\theta}$

$$\dot{\theta} = -\frac{\tilde{\theta}'}{G_{00}} - \frac{G_{0m}}{G_{00}} \dot{X}^m + \frac{B_{0m}}{G_{00}} X'^m \quad (5.69)$$

usando a equação de Euler-Lagrange podemos relacionar $\dot{\tilde{\theta}}$ com θ'

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \partial_1 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'} \right)$$

$$-\dot{\Pi}_\theta = \left[-KG_{00}\theta' + KB_{0m}\dot{X}^m - KG_{0m}X'^m \right]' = K\dot{\tilde{\theta}}$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -G_{00}\theta' + B_{0m}\dot{X}^m - G_{0m}X'^m \quad (5.70)$$

Substituindo (5.69) e (5.70) na Lagrangeana (5.65), com um pouco de manipulação, obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{K}{2} \frac{1}{G_{00}} (\dot{\tilde{\theta}}^2 - \tilde{\theta}'^2) - \frac{K}{2} \frac{E_{0m}}{G_{00}} (\dot{\tilde{\theta}} + \tilde{\theta}') (\dot{X}^m - X'^m) + \frac{K}{2} \frac{E_{m0}}{G_{00}} (\dot{X}^m + X'^m) (\dot{\tilde{\theta}} - \tilde{\theta}') \quad (5.71)$$

$$+ \frac{K}{2} \left(E_{mn} - \frac{E_{m0}E_{0n}}{G_{00}} \right) (\dot{X}^m + X'^m) (\dot{X}^n - X'^n) + K (\theta' \tilde{\theta} - \tilde{\theta}' \theta)$$

³⁸Vamos omitir o termo com o campo do Dilaton. A transformação do campo de Dilaton $\tilde{\Phi}$ é obtida de forma mais sutil do que o descrito para E_{MN} . Sua transformação surge da exigência que a ação permaneça conforme invariante [7, 24, 25].

definindo

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{00} &= (G^{-1})_{00} & \tilde{E}_{mn} &= E_{mn} - E_{m0} (G^{-1})^{00} E_{0n} \\ \tilde{E}_{0m} &= -(G^{-1})_0^0 E_{0m} & \tilde{E}_{m0} &= (G^{-1})_0^0 E_{m0} & \tilde{\Phi} &= \Phi - \ln(\det G_{00}) \end{aligned} \quad (5.72)$$

teremos³⁹

$$\mathcal{L}(\theta, \Pi_\theta, \Phi) = \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\theta}, \tilde{\Pi}_\theta, \tilde{\Phi}) + \partial_\sigma \frac{dF}{d\tau} \quad (5.73)$$

Uma característica interessante é que a simetria de dualidade tem a propriedade de mapear correntes de Noether em correntes topológicas, e vice-versa. De fato, a invariância sob a transformação

$$\begin{aligned} (\tau, \sigma) &\longmapsto (\tau, \sigma) \\ \theta &\longmapsto \theta + cte \end{aligned} \quad (5.74)$$

segundo o Teorema de Noether, gera a corrente conservada

$$\begin{aligned} J_0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \Pi_\theta = -K\tilde{\theta}' = K\epsilon_{0\beta} \partial^\beta \tilde{\theta} \\ J_1 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'} = -KG_{00}\theta' + KB_{0m}\dot{X}^m - KG_{0m}X'^m = -K\dot{\tilde{\theta}} = K\epsilon_{1\beta} \partial^\beta \tilde{\theta} \end{aligned} \quad (5.75)$$

$$J_\alpha = K\epsilon_{\alpha\beta} \partial^\beta \tilde{\theta} = \tilde{J}_\alpha^{top} \quad (5.76)$$

Raciocínio análogo para a Lagrangeana $\tilde{\mathcal{L}}$ mostra que

$$\tilde{J}_\alpha^\mu = K\epsilon_{\alpha\beta} \partial^\beta X^\mu = J_\alpha^{top} \quad (5.77)$$

Calculando as cargas correspondentes a essas correntes obtemos

$$p = \int_0^{2\pi} J_0(\tau, \sigma) d\sigma = \int_0^{2\pi} \epsilon_{0\beta} \partial^\beta \tilde{\theta} d\sigma = 2\pi\alpha'\tilde{\omega} \quad (5.78)$$

$$\tilde{p} = \int_0^{2\pi} \tilde{J}_0(\tau, \sigma) d\sigma = \int_0^{2\pi} \epsilon_{0\beta} \partial^\beta \theta d\sigma = 2\pi\alpha'\omega \quad (5.79)$$

recuperamos o mapeamento $p \leftrightarrow \omega$ que obtivemos em (5.56) no estudo de T-Dualidade na ação de Nambu-Goto.

Antes de analisarmos o caso geral, vejamos como o mesmo resultado pode ser obtido para o caso em 3 dimensões, das quais duas são fechadas e uma é aberta⁴⁰:

$$X^M = (\theta, \varphi, X) \quad (5.80)$$

$$\begin{aligned} \theta &\longmapsto \theta + cte \\ \varphi &\longmapsto \varphi + cte \end{aligned} \implies \mathcal{L} \longmapsto \mathcal{L}' = \mathcal{L} \quad (5.81)$$

$$\frac{\partial E_{MN}(X)}{\partial \theta} = \frac{\partial E_{MN}(X)}{\partial \varphi} = 0$$

a Lagrangeana pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}AG_{00} \left(\dot{\theta} + \theta' \right) \left(\dot{\theta} - \theta' \right) + \frac{1}{2}AE_{01} \left(\theta' + \dot{\theta} \right) \left(\dot{\varphi} - \varphi' \right) + \frac{1}{2}AE_{10} \left(\dot{\varphi} + \varphi' \right) \left(\dot{\theta} - \theta' \right) + \frac{1}{2}AG_{11} \left(\dot{\varphi} - \varphi' \right) \left(\varphi' + \dot{\varphi} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}AE_{20} \left(\dot{x} + x' \right) \left(\dot{\theta} - \theta' \right) + \frac{1}{2}AE_{02} \left(\dot{\theta} + \theta' \right) \left(\dot{x} - x' \right) + \frac{1}{2}AE_{21} \left(x' + \dot{x} \right) \left(\dot{\varphi} - \varphi' \right) + \frac{1}{2}AE_{12} \left(\varphi' + \dot{\varphi} \right) \left(\dot{x} - x' \right) + \\ &\quad \frac{1}{2}AG_{22} \left(\dot{x} - x' \right) \left(x' + \dot{x} \right) \end{aligned} \quad (5.82)$$

³⁹Veja o apêndice A.

⁴⁰Vamos nos limitar em descrever o procedimento sem exibir as expressões explicitamente, pois tornam-se muito grandes até mesmo nesse caso simples em 3 dimensões com duas isométricas. O cálculo foi feito com software Mathematica, o código está no apêndice ??.

dos momentos conjugados $\Pi_0^\tau \equiv \Pi_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}$, $\Pi_1^\tau \equiv \Pi_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$ e $\Pi_2^\tau \equiv \Pi_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$, obtemos

$$\begin{aligned}\Pi_\theta &= -AB_{01}\varphi' - AB_{02}x' + AG_{00}\dot{\theta} + AG_{01}\dot{\varphi} + AG_{02}\dot{x} \\ \Pi_\varphi &= -AB_{01}\theta' - AB_{12}x' + AG_{01}\dot{\theta} + AG_{11}\dot{\varphi} + AG_{12}\dot{x} \\ \Pi_x &= AB_{02}\theta' + AB_{12}\varphi' + AG_{02}\dot{\theta} + AG_{12}\dot{\varphi} + AG_{22}\dot{x}\end{aligned}\quad (5.83)$$

de onde podemos obter $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ e \dot{x} em termos dos momentos. Com isso, podemos realizar a transformação de Legendre

$$\mathcal{H}(\theta, \varphi, \Pi_\theta, \Pi_\varphi) = \dot{\theta}\Pi_\theta + \dot{\varphi}\Pi_\varphi + \dot{x}\Pi_x - \mathcal{L} \quad (5.84)$$

A isometria contínua em (5.81) nos permite definir a função geratriz

$$F = \frac{K}{2} \int \left(\theta' \tilde{\theta} + \varphi' \tilde{\varphi} - \theta \tilde{\theta}' - \varphi \tilde{\varphi}' \right) d\sigma \quad (5.85)$$

que leva à transformação canônica

$$\begin{aligned}(\theta, \varphi, \Pi_\theta, \Pi_\varphi) &\longmapsto (\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}, \tilde{\Pi}_\theta, \tilde{\Pi}_\varphi) \\ \Pi_\theta &= -K\tilde{\theta}' \\ \tilde{\Pi}_\theta &= -K\theta' \\ \Pi_\varphi &= -K\tilde{\varphi}' \\ \tilde{\Pi}_\varphi &= -K\varphi'\end{aligned}\quad (5.86)$$

que não afeta a componentes X e seu momento conjugado. Substituindo na Hamiltoniana obtemos $\tilde{\mathcal{H}}(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}, \tilde{\Pi}_\theta, \tilde{\Pi}_\varphi)$. Das equações de Hamilton obtemos a relação entre $\dot{\tilde{\theta}}$ e $\dot{\tilde{\varphi}}$ e os momentos,

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\theta}} &= \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}}{\delta \tilde{\Pi}_\theta} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{\Pi}_\theta} - \partial_0 \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \left(\frac{\partial \tilde{\Pi}_\theta}{\partial \sigma^0} \right)} - \partial_1 \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \left(\frac{\partial \tilde{\Pi}_\theta}{\partial \sigma^1} \right)} \\ \dot{\tilde{\varphi}} &= \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}}{\delta \tilde{\Pi}_\varphi} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{\Pi}_\varphi} - \partial_0 \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \left(\frac{\partial \tilde{\Pi}_\varphi}{\partial \sigma^0} \right)} - \partial_1 \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \left(\frac{\partial \tilde{\Pi}_\varphi}{\partial \sigma^1} \right)}\end{aligned}\quad (5.87)$$

Realizando a transformação de Legendre inversa e usando (5.87), obtemos a Lagrangeana $\tilde{\mathcal{L}}$

$$\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}, \dot{\tilde{\theta}}, \dot{\tilde{\varphi}}) = \dot{\tilde{\theta}}\tilde{\Pi}_\theta + \dot{\tilde{\varphi}}\tilde{\Pi}_\varphi + \dot{x}\Pi_x - \tilde{\mathcal{H}} \quad (5.88)$$

colocando em evidência os campos $\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}, \dot{\tilde{\theta}}, \dot{\tilde{\varphi}}, \dot{x}$ em $\tilde{\mathcal{L}}$ da forma como $\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{x}$ aparecem em \mathcal{L} , obtemos finalmente

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}} &= \frac{1}{2}A\tilde{G}_{00}(\dot{\tilde{\theta}} + \tilde{\theta}')(\dot{\tilde{\theta}} - \tilde{\theta}') + \frac{1}{2}A\tilde{E}_{01}(\tilde{\theta}' + \dot{\tilde{\theta}})(\dot{\tilde{\varphi}} - \tilde{\varphi}') + \frac{1}{2}A\tilde{E}_{10}(\dot{\tilde{\varphi}} + \tilde{\varphi}')(\dot{\tilde{\theta}} - \tilde{\theta}') + \frac{1}{2}A\tilde{G}_{11}(\tilde{\varphi}' + \dot{\tilde{\varphi}})(\dot{\tilde{\varphi}} - \tilde{\varphi}') \\ &\quad \frac{1}{2}A\tilde{E}_{20}(\dot{x} + x')(\dot{\tilde{\theta}} - \tilde{\theta}') + \frac{1}{2}A\tilde{E}_{02}(\tilde{\theta}' + \dot{\tilde{\theta}})(\dot{x} - x') + \frac{1}{2}A\tilde{E}_{21}(x' + \dot{x})(\dot{\tilde{\varphi}} - \tilde{\varphi}') + \frac{1}{2}A\tilde{E}_{12}(\tilde{\varphi}' + \dot{\tilde{\varphi}})(\dot{x} - x') \\ &\quad \frac{1}{2}A\tilde{G}_{22}(x' + \dot{x})(\dot{x} - x') + \partial_\sigma \frac{dF}{d\tau}\end{aligned}\quad (5.89)$$

onde

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{\alpha\beta} &= (E^{-1})_{\alpha\beta} & \tilde{E}_{22} &= E_{22} - E_{2\alpha}(E^{-1})^{\alpha\beta}E_{\beta 2} \\ \tilde{E}_{\alpha 2} &= -(E^{-1})_\alpha^\beta E_{\beta 2} & \tilde{E}_{2\alpha} &= (E^{-1})_\alpha^\beta E_{2\beta} & \tilde{\Phi} &= \Phi - \ln(\det E_{\alpha\beta})\end{aligned}\quad \alpha, \beta = 0, 1 \quad (5.90)$$

O mapeamento entre correntes e cargas de Noether em correntes e cargas topológicas também ocorre nesse caso, o raciocínio é análogo ao caso acima de apenas uma direção isométrica.

Seguindo procedimento análogo, mostra-se que vale no caso geral com d direções isométricas. A isometria contínua⁴¹ em (5.61) nos permite definir a função geratriz

$$F = \frac{K}{2} \int \left(X'^\mu \tilde{X}_\mu - X^\mu \tilde{X}'_\mu \right) d\sigma \quad (5.91)$$

Esta função gera a transformação canônica

$$\begin{aligned} (X^\mu, \Pi_\mu^\tau) &\longmapsto (\tilde{X}^\mu, \tilde{\Pi}_\mu^\tau) \\ \Pi_\mu^\tau &= -K \tilde{X}'_\mu \\ \tilde{\Pi}_\mu^\tau &= -K X'_\mu \end{aligned} \quad (5.92)$$

Substituindo na Lagrangeana (5.60), por construção, o resultado deve ser a lagrangeana mais uma derivada total de F ⁴²

$$L(X^\mu, \Pi_\mu^\tau, \Phi) = \tilde{L}(\tilde{X}^\mu, \tilde{\Pi}_\mu^\tau, \tilde{\Phi}) + \frac{dF}{d\tau} \quad (5.93)$$

Observando o termo que multiplica $\partial_+ X^M \partial_- X^N$ em $\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{X}^\mu, \tilde{\Pi}_\mu^\tau)$ obtemos a lei de transformação dos termos de background

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\mu\nu} &= (E^{-1})_{\mu\nu} & \tilde{E}_{mn} &= E_{mn} - E_{m\mu} (E^{-1})^{\mu\nu} E_{\nu n} \\ \tilde{E}_{\mu m} &= -(E^{-1})_\mu^\nu E_{\nu m} & \tilde{E}_{m\mu} &= (E^{-1})_\mu^\nu E_{m\nu} & \tilde{\Phi} &= \Phi - \ln(\det E_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (5.94)$$

Assim como no caso de uma isometria, a T-Dualidade mapeia correntes de Noether em correntes topológicas, e vice-versa.

$$\begin{aligned} (\tau, \sigma) &\longmapsto (\tau, \sigma) \\ X^\mu &\longmapsto X^\mu + cte \end{aligned} \quad (5.95)$$

segundo o Teorema de Noether, gera a corrente conservada[6]

$$J_\alpha^\mu = K E^{\mu\nu} \partial_\alpha X_\nu + K E^{\mu m} \partial_\alpha X_m = K \epsilon_{\alpha\beta} \partial^\beta \tilde{X}^\mu = \tilde{J}_\alpha^{\mu \text{ top}} \quad (5.96)$$

Raciocínio análogo para a Lagrangeana $\tilde{\mathcal{L}}$ mostra que

$$\tilde{J}_\alpha^\mu = K \tilde{E}^{\mu\nu} \partial_\alpha \tilde{X}_\nu + K E^{\mu m} \partial_\alpha \tilde{X}_m = K \epsilon_{\alpha\beta} \partial^\beta X^\mu = J_\alpha^{\mu \text{ top}} \quad (5.97)$$

As cargas correspondentes são

$$p^\mu = \int_0^{2\pi} J_0^\mu(\tau, \sigma) d\sigma = \int_0^{2\pi} \epsilon_{0\beta} \partial^\beta \tilde{X}^\mu d\sigma = 2\pi \alpha' \tilde{\omega}^\mu \quad (5.98)$$

$$\tilde{p}^\mu = \int_0^{2\pi} \tilde{J}_0^\mu(\tau, \sigma) d\sigma = \int_0^{2\pi} \epsilon_{0\beta} \partial^\beta X^\mu d\sigma = 2\pi \alpha' \omega^\mu \quad (5.99)$$

recuperamos o mapeamento $p \leftrightarrow \omega$.

Esta propriedade revela a profunda conexão de cordas com a geometria.

⁴¹Assim como na seção 3.1, o que leva à T-Dualidade foi a existência de uma isometria contínua. Naquele caso, apenas a compactificação de uma dimensão, nesse caso d direções isométricas. Se a isometria não fosse contínua, a Hamiltoniana não seria local[5].

⁴²Lembre-se que $L = \int \mathcal{L} d\sigma$, portanto (5.93) implica $\mathcal{L}(X^\mu, \Pi_\mu^\tau, \Phi) = \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{X}^\mu, \tilde{\Pi}_\mu^\tau, \tilde{\Phi}) + \partial_\sigma \frac{dF}{d\tau}$

5.5 Solução via Transformações de Buscher

Finalizamos esse capítulo enunciando como teorema o resultado mais importante desse texto.

Vimos que a invariância conforme da ação do modelo sigma impõe que $G_{MN}(X)$, $B_{MN}(X)$ e o campo escalar $\Phi(X)$ sejam soluções de

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(26)} - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}R^{(26)} &= \mathbf{T}_{\mu\nu} \\ \nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu} &= 2\nabla^\lambda\Phi H_{\lambda\mu\nu} \\ \nabla^2\Phi - 2(\nabla\Phi)^2 &= -\frac{1}{2}H^2 \end{aligned} \tag{5.100}$$

As transformações de Buscher nos levam a uma ação dual que, por construção, descreve a mesma física, pois tratam-se de transformações canônicas. Assim, os campos $\tilde{G}_{MN}(X)$, $\tilde{B}_{MN}(X)$ e $\tilde{\Phi}(X)$ da ação dual devem também, por construção, ser soluções de (5.100)! Esse raciocínio prova o teorema:

Teorema 1. Dada uma solução de (5.100), as transformações de Buscher no modelo Sigma bidimensional fornecem uma solução distinta para os campos de background da teoria. Em particular, as transformações de Buscher são uma ferramenta que, a partir de soluções conhecidas, nos permite obter soluções distintas das equações de Einstein estendidas (5.38).

6 Exemplos

Entender as consequências de dimensões compactas em uma teoria de cordas vai além de uma conveniente ferramenta para se obter soluções distintas para os campos de background, e em particular para as equações de Einstein estendidas. Os modelos de universo baseados em teorias de cordas descrevem 4 dimensões abertas e 22 compactas (ou 6 para super-cordas) e o estudo de T-Dualidade é vital para entendermos as consequências que essas dimensões compactas têm na física que observamos nas outras 4, bem como para relacionar espaços completamente diferentes, evidenciando relações entre sistemas distintos que dificilmente seriam notadas de outra forma.

Neste capítulo veremos alguns exemplos onde o uso do Teorema 1 gera outra solução das equações de movimento dos campos de background da teoria, e a importância destes na pesquisa contemporânea.

6.1 $(S_1 \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_2$

Começamos analisando o produto direto de um cilindro com o plano Euclidiano no caso em que o campo de Kalb-Ramond é nulo e o campo dilatônico é constante. Apenas uma direção é compacta, existe portanto uma teoria dual.

Denotando as coordenadas desse espaço como

$$X^M = (y, t, X_1, X_2) \quad (6.1)$$

onde y é periódico com período $2\pi R$ e R é o raio de S_1 . O modelo sigma com $B_{MN} = 0$ e $\Phi = \phi_0$ é

$$S_\sigma = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left\{ G_{\mu\nu}(X) \partial^\alpha X^\mu \partial_\alpha X^\nu + \frac{\alpha'}{2} R^{(2)} \phi_0 \right\} \quad (6.2)$$

onde $R^{(2)}$ é o escalar de Ricci do cilindro $S_1 \times \mathbb{R}$.

A métrica é facilmente obtida utilizando a técnica de definição de métrica induzida, discutida no Apêndice G. Parametrizando o plano euclidiano como

$$X_1 = \rho \cos \varphi \quad X_2 = \rho \sin \varphi \quad (6.3)$$

onde $\rho \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$, e utilizando coordenadas do cone de luz

$$u \equiv y - t \quad v \equiv y + t, \quad y \in [0, 2\pi R] \quad (6.4)$$

obtemos que a ação do modelo sigma é

$$S_\sigma = \frac{1}{\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left\{ \partial_+ u \partial_- v + \partial_+ \rho \partial_- \rho + \rho^{-2} \partial_+ \varphi \partial_- \varphi + \mathcal{R} \left(\phi_0 - \frac{1}{2} \ln \rho^2 \right) \right\} \quad (6.5)$$

com $\mathcal{R} \equiv \frac{\alpha'}{4} R^{(2)}$. Podemos tornar esse modelo mais geral introduzindo translação nas coordenadas e somando um tensor antissimétrico

$$S_\sigma = \frac{1}{\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left\{ (\partial_+ u + \alpha \partial_+ \varphi) (\partial_- v + \beta \partial_- \varphi) + \partial_+ \rho \partial_- \rho + \rho^{-2} \partial_+ \varphi \partial_- \varphi \right. \\ \left. + q_1 (\partial_+ u \partial_- \varphi - \partial_- u \partial_+ \varphi) + q_2 (\partial_+ v \partial_- \varphi - \partial_- v \partial_+ \varphi) + \mathcal{R} \left(\phi_0 - \frac{1}{2} \ln \rho^2 \right) \right\} \quad (6.6)$$

α, β, q_1, q_2 são parâmetros constantes. Note que agora temos duas direções compactas, uma vez que $\varphi \in [0, 2\pi]$. Podemos portanto realizar transformações de Buscher tanto na direção y quanto

na direção φ . Fazendo a transformação de dualidade na direção φ obtemos⁴³

$$S_{\sigma}^{\varphi-dual} = \frac{1}{\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left\{ F(\rho) \rho^2 (\partial_+ \tilde{\varphi} + c_+ \partial_+ y + c_- \partial_+ t) (\partial_- \tilde{\varphi} + a_+ \partial_- y + a_- \partial_- t) \right. \\ \left. - \partial_+ t \partial_- t + \partial_+ y \partial_- y + \partial_+ \rho \partial_- \rho + \mathcal{R} \left(\phi_0 - \frac{1}{2} \ln F \right) \right\}, \quad F(\rho) \equiv (1 + \alpha\beta\rho^2)^{-1} \quad (6.7)$$

onde

$$a_+ \equiv q_+ - \alpha, \quad c_+ \equiv q_+ + \beta, \quad a_- \equiv -q_- - \alpha, \quad c_- \equiv -q_- - \beta, \quad q_{\pm} \equiv q_1 \pm q_2 \\ \tilde{\varphi} \in [0, 2\pi\alpha'] \quad (6.8)$$

Realizando agora a transformação de dualidade na direção y em (6.7) obtemos⁴⁴

$$S_{\sigma}^{\varphi,y-dual} = \frac{1}{\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left\{ \tilde{F}(\rho) \rho^2 (\partial_+ \tilde{\varphi} + c_+ \partial_+ \tilde{y} + c_- \partial_+ t) (\partial_- \tilde{\varphi} - a_+ \partial_- \tilde{y} + a_- \partial_- t) \right. \\ \left. - \partial_+ t \partial_- t + \partial_+ \tilde{y} \partial_- \tilde{y} + \partial_+ \rho \partial_- \rho + \mathcal{R} \left(\phi_0 - \frac{1}{2} \ln \tilde{F} \right) \right\}, \quad \tilde{F}(\rho) \equiv F^{-1}(\rho) [1 + a_+ c_+ F(\rho) \rho^2] \quad (6.9)$$

Por construção, as ações (6.6), (6.7) e (6.9) descrevem a mesma física, portanto representam soluções distintas para os campos de background da teoria. Note ainda que o período da dimensão \tilde{y} agora é $2\pi\alpha'/R$, diferente de y cujo período é $2\pi R$. As transformações de dualidade então mapearam uma teoria com raio R numa teoria com raio α'/R .

Este exemplo engloba uma ampla classe de modelos ao variarmos os parâmetros, pode ainda ser generalizado de diversas maneiras. Modelos desse tipo descrevem, de modo geral, universos do tipo de tubos de fluxo eletromagnético, axialmente simétricos, estacionários e giratórios. É possível obter soluções exatas não triviais, as quais são solúveis devido à sua relação com uma teoria mais simples através de transformações de dualidade[9].

6.2 $AdS_5 \times S_5$

Nesse exemplo realizamos uma transformação de T-Dualidade seguida de uma reparametrização e de outra transformação de T-Dualidade. Esse procedimento é conhecido na literatura como *Transformação TsT* (*T-duality-shift-Tduality*).

Vamos considerar o caso em que o campo do dilaton $\Phi = 0$ e o campo de Kalb-Ramond $b_{MN} = 0$.

A transformação TsT envolve apenas coordenadas da esfera S_5 , portanto é o suficiente considerarmos apenas a parte da ação correspondente à esfera, a qual pode ser escrita como⁴⁵

$$S_{\sigma} = -\frac{R^2}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left\{ \gamma^{\alpha\beta} (\partial_{\alpha} r_i \partial_{\beta} r_i + r_i^2 \partial_{\alpha} \phi_i \partial_{\beta} \phi_i) + \Lambda (r_i^2 - 1) \right\} \quad (6.10)$$

onde R é o raio de S_5 , Λ é um multiplicador de Lagrange, $i = 1, 2, 3$ e $\gamma^{\alpha\beta} \equiv \sqrt{-\eta}\eta^{\alpha\beta}$ é a métrica da worldsheet com assinatura de Minkowski, e os ângulos $\phi_i \in [0, 2\pi]$. Reparametrizando os três ângulos ϕ_i como funções de novos ângulos φ_i

$$\phi_i \longmapsto \phi_i(\varphi_j) \\ \phi_1 = \varphi_3 - \varphi_2 \quad \phi_2 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \quad \phi_3 = \varphi_3 - \varphi_1 \quad (6.11)$$

nessas novas coordenadas a ação é

$$S_{\sigma} = -\frac{R^2}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left\{ \gamma^{\alpha\beta} (\partial_{\alpha} r_i \partial_{\beta} r_i + g_{ij} \partial_{\alpha} \varphi_i \partial_{\beta} \varphi_j) + \Lambda (r_i^2 - 1) \right\} \quad (6.12)$$

⁴³Veja equação (2.5) de [9].

⁴⁴Veja equação (2.10) de [9].

⁴⁵Veja equação (2.1) de [10].

com

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} r_2^2 + r_3^2 & r_2^2 & r_2^2 - r_3^2 \\ r_2^2 & r_1^2 + r_2^2 & r_2^2 - r_1^2 \\ r_2^2 - r_3^2 & r_2^2 - r_1^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

Fazendo uma transformação de T-Dualidade na dimensão compacta parametrizada por φ_1 , obtemos a ação dual

$$S_\sigma^{\varphi_1\text{-dual}} = -\frac{R^2}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left\{ \gamma^{\alpha\beta} (\partial_\alpha r_i \partial_\beta r_i + \tilde{g}_{ij} \partial_\alpha \tilde{\varphi}_i \partial_\beta \tilde{\varphi}_j) - \epsilon^{\alpha\beta} \tilde{b}_{ij} \partial_\alpha \tilde{\varphi}_i \partial_\beta \tilde{\varphi}_j + \Lambda (r_i^2 - 1) \right\} \quad (6.14)$$

onde $\epsilon^{01} = 1 = -\epsilon^{10}$. A métrica e Kalb-Ramond duais são

$$\tilde{g}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_2^2 + r_3^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_1^2 r_2^2 + r_1^2 r_3^2 + r_2^2 r_3^2}{r_2^2 + r_3^2} & \frac{2r_2^2 r_3^2 - r_1^2 r_2^2 - r_1^2 r_3^2}{r_2^2 + r_3^2} \\ 0 & \frac{2r_2^2 r_3^2 - r_1^2 r_2^2 - r_1^2 r_3^2}{r_2^2 + r_3^2} & 1 - \frac{(r_2^2 - r_3^2)^2}{r_2^2 + r_3^2} \end{pmatrix} \quad \tilde{b}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{r_2^2}{r_2^2 + r_3^2} & \frac{r_2^2 - r_3^2}{r_2^2 + r_3^2} \\ -\frac{r_2^2}{r_2^2 + r_3^2} & 0 & 0 \\ -\frac{r_2^2 - r_3^2}{r_2^2 + r_3^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

e os ângulos duais $\tilde{\varphi}_i$ se relacionam com os φ_1 como

$$\partial_\alpha \varphi_1 = \gamma_{\alpha\beta} \epsilon^{\beta\rho} \partial_\rho \tilde{\varphi}_1 \tilde{g}_{11} - \partial_\alpha \tilde{\varphi}_i \tilde{b}_{1i} \quad \varphi_2 = \tilde{\varphi}_2 \quad \varphi_3 = \tilde{\varphi}_3 \quad (6.16)$$

Fazendo agora uma reparametrização em termos de uma constante real arbitrária $\hat{\gamma}$

$$\tilde{\varphi}_2 \longmapsto \tilde{\varphi}_2 + \hat{\gamma} \tilde{\varphi}_1 \quad (6.17)$$

Assim, a métrica toma a forma

$$\tilde{G}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{G^{-1}}{r_2^2 + r_3^2} & \hat{\gamma} \tilde{g}_{12} & \hat{\gamma} \tilde{g}_{13} \\ \hat{\gamma} \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{22} & \tilde{g}_{23} \\ \hat{\gamma} \tilde{g}_{13} & \tilde{g}_{23} & \tilde{g}_{33} \end{pmatrix} \quad G^{-1} \equiv 1 + \hat{\gamma}^2 (r_1^2 r_2^2 + r_1^2 r_3^2 + r_2^2 r_3^2) \quad (6.18)$$

e vale

$$\partial_\alpha \varphi_1 = \gamma_{\alpha\beta} \epsilon^{\beta\rho} \partial_\rho \tilde{\varphi}_1 \tilde{g}_{11} - \partial_\alpha \tilde{\varphi}_i \tilde{b}_{1i} - \hat{\gamma} \partial_\alpha \tilde{\varphi}_1 \tilde{b}_{12} \quad (6.19)$$

Finalizamos a transformação TsT realizando uma transformação de T-Dualidade na dimensão compacta parametrizada pelo ângulo $\tilde{\varphi}_1$. Obtemos a ação

$$S_\sigma^{\gamma\text{-deformado}} = -\frac{R^2}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left\{ \gamma^{\alpha\beta} (\partial_\alpha r_i \partial_\beta r_i + G_{ij} \partial_\alpha \psi_i \partial_\beta \psi_j) - \epsilon^{\alpha\beta} B_{ij} \partial_\alpha \psi_i \partial_\beta \psi_j + \Lambda (r_i^2 - 1) \right\} \quad (6.20)$$

ψ_i, G_{ij}, B_{ij} são duais a $\tilde{\varphi}_i, \tilde{G}_{ij}, \tilde{b}_{ij}$. A relação entre as variáveis ψ_i e $\tilde{\varphi}_i$ é

$$\partial_\alpha \tilde{\varphi}_1 = \gamma_{\alpha\beta} \epsilon^{\beta\rho} \partial_\rho \psi_i G_{1i} - \partial_\alpha \psi_i B_{1i} \quad \tilde{\varphi}_2 = \psi_2 \quad \tilde{\varphi}_3 = \psi_3 \quad (6.21)$$

Esse novo background é chamado γ -deformado. Podemos ainda relacionar as variáveis ψ_i com as variáveis φ_i que utilizamos antes da transformação TsT:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \varphi_1 &= \left(\tilde{g}_{11} G_{1i} + \hat{\gamma} \tilde{b}_{12} B_{1i} - \tilde{b}_{1i} \right) \partial_\alpha \psi_i - \left(\hat{\gamma} \tilde{b}_{12} G_{1i} + \tilde{g}_{11} B_{1i} \right) \gamma_{\alpha\beta} \epsilon^{\beta\rho} \partial_\rho \psi_i \\ \partial_\alpha \varphi_2 &= \partial_\alpha \psi_2 - \hat{\gamma} B_{1i} \partial_\alpha \psi_i + \hat{\gamma} G_{1i} \gamma_{\alpha\beta} \epsilon^{\beta\rho} \partial_\rho \psi_i \\ \partial_\alpha \varphi_3 &= \partial_\alpha \psi_3 \end{aligned} \quad (6.22)$$

de onde podemos finalmente escrever a métrica γ -deformado em termos da métrica inicial (6.13)

$$G_{ij} = Gg_{ij}, \quad i = j \neq 3 \quad G_{33} = Gg_{33} + 9\hat{\gamma}^2 Gr_1^2 r_2^2 r_3^2 \quad (6.23)$$

Portanto, conhecendo uma solução para os campos de background g_{ij} , b_{ij} e Φ

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} r_2^2 + r_3^2 & r_2^2 & r_2^2 - r_3^2 \\ r_2^2 & r_1^2 + r_2^2 & r_2^2 - r_1^2 \\ r_2^2 - r_3^2 & r_2^2 - r_1^2 & 1 \end{pmatrix} \quad b_{ij} = 0 \quad \Phi = 0 \quad (6.24)$$

obtivemos via transformações de T-dualidade a solução distinta

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} G(r_2^2 + r_3^2) & Gr_2^2 & G(r_2^2 - r_3^2) \\ Gr_2^2 & G(r_1^2 + r_2^2) & G(r_2^2 - r_1^2) \\ G(r_2^2 - r_3^2) & G(r_2^2 - r_1^2) & G + 9\hat{\gamma}^2 Gr_1^2 r_2^2 r_3^2 \end{pmatrix} \quad B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{r_2^2}{r_2^2 + r_3^2} & \frac{r_2^2 - r_3^2}{r_2^2 + r_3^2} \\ -\frac{r_2^2}{r_2^2 + r_3^2} & 0 & 0 \\ -\frac{r_2^2 - r_3^2}{r_2^2 + r_3^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Phi = 0 \quad (6.25)$$

Este exemplo é de muito interesse na pesquisa contemporânea, pois é útil para entender o mapa entre $AdS_5 \times S_5$ e $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills [10], que, por sua vez, é conjecturado ser dual a um background de supergravidade[11]. Essa conjectura é uma ferramenta útil no estudo da correspondência AdS/CFT[12].

6.3 Extensão do método para dimensões abertas em AdS_5

O método que deduzimos e exemplificamos nas seções anteriores depende de que existam dimensões compactas no espaço-tempo estudado. A existência de dimensões compactas gera o fenômeno de T-dualidade, onde podemos utilizar as transformações de Buscher para obter campos de background duais. No entanto, é possível estender esse método para quando não temos dimensões compactas no espaço estudado.

Considere a métrica de AdS_5 em coordenadas de Poincaré

$$ds^2 = L^2 \left[\frac{dz^2 + dx_\mu dx^\mu}{z^2} \right] \quad (6.26)$$

O método consiste em definir uma reparametrização cujas condições de contorno simulam uma dimensão compacta. Definimos novas coordenadas y^μ satisfazendo a equação

$$\partial_\alpha y^\mu = i \frac{R^2}{z^2} \epsilon_{\alpha\beta} \partial^\beta x^\mu \quad (6.27)$$

dessa forma, as condições de contorno para x^μ , que dizem que essas direções carregam momento p^μ , em termos da nova variável y^μ ficam

$$\Delta y^\mu = 2\pi p^\mu \quad (6.28)$$

Com a reparametrização definida por (6.27), obtemos então uma nova variável compacta com winding p^μ ! Podemos agora aplicar uma transformação de T-dualidade nessa nova direção compacta e obter a métrica dual

$$ds_{dual}^2 = L^2 \left[\frac{dr^2 + dy_\mu dy^\mu}{r^2} \right], \quad r \equiv \frac{L^2}{z} \quad (6.29)$$

que também corresponde a um espaço AdS_5 ⁴⁶.

O método pode ser generalizado para espaços cuja métrica são do tipo

$$ds^2 = \omega^2(z) [dx_\mu dx^\mu + \dots] \quad (6.30)$$

e a reparametrização é

$$\partial_\alpha y^\mu = i\omega^2(z) \epsilon_{\alpha\beta} \partial^\beta x^\mu \quad (6.31)$$

$\omega^2(z)$ é chamado fator de deformação, os y^μ são reais e a métrica da worldsheet é euclidiana.

Essa extensão é muito importante pois aumenta ainda mais as ferramentas à nossa disposição para analisar backgrounds não triviais obtendo backgrounds equivalentes e, em particular, novas soluções das equações de Einstein estendidas.

Um exemplo da utilidade desse método é dado em [26], onde é utilizado método similar para simplificar a ação de super-cordas em $AdS_5 \times S_5$. Outro exemplo encontra-se em [13], onde novamente usa-se esse método para simplificar a ação para encontrar soluções clássicas, e utilizar essas soluções no cálculo de amplitudes de espalhamento de gluons em $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills.

⁴⁶A ação dual completa é calculada em [26].

7 Conclusão

O que obtivemos é notável, vamos recaptular. Partindo de cordas vibrando em um espaço-tempo plano $M_{1,D-1}$ de D dimensões, a exigência de que o máximo possível de simetrias se preservem após a quantização- simetria bidimensional de reparametrizações, simetria de Poincaré e de Weyl- fixa $D = 26$. Impondo condições de contorno periódicas do tipo (5.43), surge uma T-Dualidade no espectro, nos permitindo mapear física de pequenas escalas (raio R) uma física de grande escala (raio $1/R$). O espectro sem massa da corda- gravitons, áxions e dilaton- curva o espaço-tempo $M_{1,D-1}$ na qual está inserida, dando origem a um espaço-tempo de geometria pseudo-riemanniana estendida, cuja dinâmica é descrita pela ação do modelo sigma. Impondo que a corda quantizada, agora descrita em primeira ordem pelo modelo sigma, novamente preserve todas as simetrias que tinha no caso clássico- simetria conforme, ou seja, ausência de anomalias conformes- leva a um resultado impressionante: as equações de Einstein! E mais, o mesmo raciocínio aplicado à cordas abertas nos levaria às equações do Modelo Padrão, com todas as interações e diferentes partículas! Vimos que nesse modelo também ocorre o fenômeno de T-Dualidade, em forma de transformações canônicas, mapeando correntes de Noether em correntes topológicas. As transformações de T-Dualidade então, dada uma solução conhecida das equações estendidas de Einstein, nos geram outra solução distintas- em escala diferente, uma vez que mapeia $R \mapsto 1/R$. Tudo isso obtido de princípios gerais de simetria, sem a necessidade de postulados! Isso justifica o porque de teorias de cordas serem fortes candidatas à teorias de unificação.

Vimos no capítulo 6 que o estudo de T-Dualidade abeliana e sua extensão para dimensões abertas são importantes, pois são úteis em diversas áreas de pesquisa. Finalizamos esse texto propondo um problema de pesquisa novo que faz uso dessas ferramentas.

O problema é: investigar a possibilidade da *dedução* das simetrias de inversão do fator de escala (*SFD, Scale Factor Duality*) nas teorias gravitacionais assintoticamente AdS.

Esse tipo de simetria foi abordado na literatura de diferentes formas. Uma implementação vem da observação de Veneziano[27]de que a SFD é uma simetria da ação efetiva dilatônica para espaços dinâmicos dependentes do tempo, o que levou ao cenário pré-big-bang da teoria de cordas. Uma transformação não-equivalente que relaciona soluções no chamado *quadro de Einstein* foi apresentada em [28] e usada para a construção de uma classe diferente de modelos pré-big-bang em[29]. No quadro de Einstein, a ação efetiva é a ação de Einstein-Hilbert, obtida por uma transformação de Weyl que coloca o dilaton como um campo canônico. Recentemente, em [30], esta dualidade foi implementada para relacionar limites singulares de soluções do tipo parede de domínio dilatônica a geometrias assintoticamente AdS.

O que pretendemos abordar, como uma continuação do trabalho feito nessa dissertação, é o problema de deduzir essas transformações de SFD diretamente de algum modelo sigma generalizado, via transformações de T-Dualidade, utilizando a extensão do método para dimensões abertas. Deduzir essas simetrias explicitamente pode revelar aspectos formais que de outra forma são difíceis de perceber, com o potencial de, além de aprofundar nossa compreensão dos casos já estudados, abrir novos caminhos para a investigação de novos problemas.

A Teorema de Noether

É conveniente ter o teorema de Noether enunciado aqui pois as fórmulas para carga e corrente conservadas foram usadas para obter (2.13), (2.14) e (2.16).

Teorema de Noether. *Para toda simetria diferenciável da ação, existe uma corrente e carga correspondentes que são conservadas. Ou seja, para toda transformação*

$$\begin{aligned} x^\mu &\longmapsto \bar{x}^\mu \simeq x^\mu + \Delta x^\mu, \quad \Delta x^\mu = \chi^{\mu(r)} \varepsilon_{(r)} \\ \phi_\alpha &\longmapsto \bar{\phi}_\alpha \simeq \phi_\alpha + \Delta \phi_\alpha, \quad \Delta \phi_\alpha = \Psi_\alpha^{(r)} \varepsilon_{(r)} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

tal que $\Delta S = 0$, $\exists \theta^{\mu(r)}$ e $\exists C^{(r)}$ tais que $\partial \theta^{\mu(r)} = 0$ e $\frac{dC^{(r)}}{dt} = 0$, onde

$$\begin{aligned} \theta^{\mu(r)} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \left[\Psi_\alpha^{(r)} - \phi_{\alpha,\nu} \chi^{\nu(r)} \right] - \mathcal{L} \chi^{\mu(r)} \\ C^{(r)} &= \int \theta^{0(r)} d^{d-1}x \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

B Alguns cálculos

B.1 Modos zero da corda fechada

Da condição (2.1) da corda fechada, segue que

$$\begin{aligned} X_L^\mu(u + 2\pi) + X_R^\mu(v - 2\pi) &= X_L^\mu(u) + X_R^\mu(v) \\ \implies X_L^\mu(u + 2\pi) - X_L^\mu(u) &= X_R^\mu(v) - X_R^\mu(v - 2\pi) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

substituindo (2.26) nessa relação, obtemos

$$\alpha_0^\mu = \bar{\alpha}_0^\mu \quad (\text{B.2})$$

Substituindo (2.24) em (2.14) e calculando a integral, obtemos

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu \quad (\text{B.3})$$

B.2 Relação entre osciladores e modos de Virasoro

Sem especificar o calibre, os vínculos são

$$(\partial_\pm X)^2 = 0 \quad (\text{B.4})$$

onde $\partial_\pm X^\mu \equiv (\partial_\tau \pm \partial_\sigma) X^\mu$. Da solução (2.29) segue

$$\partial_- X^\mu = \frac{\alpha'}{2} p^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \quad (\text{B.5})$$

substituindo no vínculo, obtemos

$$\begin{aligned} (\partial_- X)^2 &= \frac{\alpha'}{2} \sum_{m,p \in \mathbb{Z}} \alpha_m^\mu (\alpha_p)_\mu e^{-i(m+p)(\tau-\sigma)} \\ &= \frac{\alpha'}{2} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \alpha_m^\mu (\alpha_{n-m})_\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \\ &\equiv \frac{\alpha'}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n e^{-in(\tau-\sigma)} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

onde

$$L_n \equiv \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m^\mu (\alpha_{n-m})_\mu \quad (\text{B.7})$$

é o coeficiente da expansão dos vínculos em série de Fourier. Analogamente

$$(\partial_+ X)^2 = \frac{\alpha'}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{L}_n e^{-in(\tau-\sigma)} \quad \bar{L}_n \equiv \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_m^\mu (\bar{\alpha}_{n-m})_\mu \quad (\text{B.8})$$

Para obter a relação (3.9) devemos ir para o Calibre do Cone de Luz:

$$(\partial_\pm X)^2 = (\dot{X} \pm X')^2 = 2(\dot{X}^+ \pm X'^+) (\dot{X}^- \pm X'^-) - (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 = 0 \quad (\text{B.9})$$

de (3.7) segue que $X'^+ = 0$ e $\dot{X}^+ = \alpha' p^+$, portanto

$$(\dot{X}^- \pm X'^-) = \frac{1}{2\alpha' p^+} (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 \quad (\text{B.10})$$

A solução (2.29) para coordenadas transversais é

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^I e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^I e^{-in\sigma}) \quad (\text{B.11})$$

o que implica

$$(\dot{X}^I + X'^I)^2 = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_p \cdot \bar{\alpha}_{n-p} \right) e^{-in(\tau+\sigma)} = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{L}_n e^{-in(\tau+\sigma)} \quad (\text{B.12})$$

onde usamos a definição (3.10). Analogamente

$$(\dot{X}^I - X'^I)^2 = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p \cdot \alpha_{n-p} \right) e^{-in(\tau-\sigma)} = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n e^{-in(\tau-\sigma)} \quad (\text{B.13})$$

De (2.29) obtemos

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^- e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^- e^{-in\sigma}) \quad (\text{B.14})$$

por derivação direta obtemos as relações

$$\begin{aligned} \dot{X}^- + X'^- &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^- e^{-in(\tau+\sigma)} \\ \dot{X}^- - X'^- &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau-\sigma)} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

comparando com as relações anteriores obtemos

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{2}{p^+} L_n \quad \sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_n^- = \frac{2}{p^+} \bar{L}_n \quad (\text{B.16})$$

Note que os modos de Virasoro não são iguais no caso geral e no calibre do cone de luz. No último, o produto interno dos osciladores é apenas sobre as dimensões transversais $I = 2, \dots, D$ enquanto que no primeiro, o produto interno é sobre $\mu = 0, \dots, D$. Essa distinção é irrelevante para os propósitos desse texto, não haverá confusão, portanto não nos preocupamos em usar notação diferente para ambos. No final, o que interessa mesmo desses modos/operadores é sua álgebra e sua atuação no vácuo após a quantização. o segundo termo se anula devido à condição de periodicidade da corda fechada.

B.3 EPOs (4.101) e (4.102)

Essas EPOs são calculadas utilizando o Teorema de Wick.

$$\begin{aligned}
T(z) \partial X(\omega) &= : \partial X(z) \partial X(z) : \partial X(\omega) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X(z) \partial X(z) \partial X(\omega) : - \frac{2}{\alpha'} \partial X(z) \langle \partial X(z) \partial X(\omega) \rangle + \dots \\
&= -\frac{2}{\alpha'} \partial X(z) \left(-\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{(z-\omega)^2} \right) + \text{termos não singulares} \\
&= \frac{\partial X(z)}{(z-\omega)^2} + \text{termos não singulares} \\
&= \frac{(\partial X(\omega) + \partial^2 X(\omega)(z-\omega) + \dots)}{(z-\omega)^2} + \text{termos não singulares} \\
&= \frac{\partial X(\omega)}{(z-\omega)^2} \frac{\partial^2 X(\omega)}{z-\omega} + \text{termos não singulares}
\end{aligned} \tag{B.17}$$

o que implica que $\partial X(z)$ é um campo primário de peso conforme $(h, \bar{h}) = (1, 0)$. Calculando a EPO entre $: e^{ikX} :$ e ∂X :

$$\begin{aligned}
\partial X(z) : e^{ikX(\omega)} : &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \partial X(z) : X^n(\omega) : \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{(n-1)!} : X^{n-1}(\omega) : \left(-\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{z-\omega} \right) + \dots \\
&= -\frac{i\alpha' k : e^{ikX(\omega)} :}{2(z-\omega)} + \dots
\end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
T(z) : e^{ikX(\omega)} : &= -\frac{1}{\alpha'} : \partial X(z) \partial X(z) : : e^{ikX(\omega)} := -\frac{1}{\alpha'} : \partial X(z) \partial X(z) : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} : X^n(\omega) : \\
&= -\frac{1}{\alpha'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} : \partial X(z) \partial X(z) X^n(\omega) : - \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} 2n \langle \partial X(z) X(\omega) \rangle : \partial X(z) X^{n-1}(\omega) : \\
&\quad - \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} n(n-1) \langle \partial X(z) X(\omega) \rangle \langle \partial X(z) X(\omega) \rangle : X^{n-2}(\omega) : \\
&= -\frac{1}{\alpha'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} 2n \partial \langle X(z) X(\omega) \rangle : \partial X(z) X^{n-1}(\omega) : \\
&\quad - \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} n(n-1) \partial \langle X(z) X(\omega) \rangle \partial \langle X(z) X(\omega) \rangle : X^{n-2}(\omega) : + \dots
\end{aligned} \tag{B.19}$$

substituindo (4.97)

$$\begin{aligned}
T(z) : e^{ikX(\omega)} : &= ik \frac{1}{z-\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^{n-1}}{(n-1)!} : \partial X(z) X^{n-1}(\omega) : \\
&\quad - \frac{\alpha'}{4} \frac{(ik)^2}{(z-\omega)^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(ik)^{n-2}}{(n-2)!} : X^{n-2}(\omega) : + \dots \\
&= ik \frac{: \partial X(z) e^{ikX(\omega)} :}{z-\omega} + \frac{\alpha' k^2 : e^{ikX(\omega)} :}{4(z-\omega)^2} + \dots \\
&= \frac{\alpha' k^2 : e^{ikX(\omega)} :}{4(z-\omega)^2} + ik \frac{:(\partial X(\omega) + \partial^2 X(\omega)(z-\omega) + \dots) e^{ikX(\omega)}:}{z-\omega} + \dots \\
&= \frac{\alpha' k^2 : e^{ikX(\omega)} :}{4(z-\omega)^2} + ik \frac{: \partial X(\omega) e^{ikX(\omega)} :}{z-\omega} + \dots \\
&= \frac{\alpha' k^2 : e^{ikX(\omega)} :}{4(z-\omega)^2} + \frac{\partial \omega : e^{ikX(\omega)} :}{z-\omega} + \text{termos não singulares}
\end{aligned} \tag{B.20}$$

portanto $: e^{ikX(z)} :$ é primário com peso conforme $(h, \bar{h}) = \left(\frac{\alpha' k^2}{2}, 0 \right)$.

$$\begin{aligned}
T(z) T(\omega) &= \frac{1}{\alpha'^2} : \partial X(z) \partial X(z) : : \partial X(\omega) \partial X(\omega) : \\
&= \frac{1}{\alpha'^2} : \partial X(z) \partial X(z) \partial X(\omega) \partial X(\omega) : + \frac{4}{\alpha'^2} \langle \partial X(z) \partial X(\omega) \rangle : \partial X(z) \partial X(\omega) : \\
&\quad + \frac{2}{\alpha'^2} \langle \partial X(z) \partial X(\omega) \rangle \langle \partial X(z) \partial X(\omega) \rangle + \dots \\
&= + \frac{4}{\alpha'^2} \left(-\frac{\alpha'}{2} \frac{: \partial X(z) \partial X(\omega) :}{(z-\omega)^2} \right) + \frac{2}{\alpha'^2} \left(-\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{(z-\omega)^2} \right)^2 + \dots \\
&= \frac{1/2}{(z-\omega)^4} - \frac{1}{\alpha'} \frac{:(\partial X(\omega) + \partial^2 X(\omega)(z-\omega) + \dots) \partial X(\omega):}{(z-\omega)^2} + \dots \\
&= \frac{1/2}{(z-\omega)^4} + \frac{2T(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial T(\omega)}{z-\omega} + \text{termos não singulares}
\end{aligned} \tag{B.21}$$

B.4 Anomalia de Weyl

Mostraremos aqui que, diferente de (4.47), após a quantização vale

$$\langle T^\alpha{}_\alpha \rangle = -\frac{c}{12}R \quad (\text{B.22})$$

esse resultado é chamado anomalia de Weyl.

Equação (4.51) e a equação de conservação que obtemos em (4.53) são válidas no caso clássico. Sem assumir $T_{z\bar{z}} = 0$, a conservação de energia, em coordenadas complexas, é

$$\begin{aligned} (\partial T_{z\bar{z}} + \bar{\partial} T_{zz}) + (\bar{\partial} T_{z\bar{z}} + \partial T_{zz}) &= 0 \\ (+\partial T_{z\bar{z}} + \bar{\partial} T_{zz}) + (-\bar{\partial} T_{z\bar{z}} - \partial T_{zz}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

somando a primeira com a segunda equação, obtemos

$$\partial T_{z\bar{z}} = -\bar{\partial} T_{zz} \quad (\text{B.24})$$

usando essa relação, teremos a EPO

$$\begin{aligned} \partial_z \partial_\omega [T_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) T_{\omega\bar{\omega}}(\omega, \bar{\omega})] &= \partial_z T_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) \partial_\omega T_{\omega\bar{\omega}}(\omega, \bar{\omega}) = \bar{\partial}_{\bar{z}} T_{zz}(z, \bar{z}) \bar{\partial}_{\bar{\omega}} T_{\omega\omega}(\omega, \bar{\omega}) \\ &= \bar{\partial}_{\bar{z}} \bar{\partial}_{\bar{\omega}} [T_{zz}(z, \bar{z}) T_{\omega\omega}(\omega, \bar{\omega})] = \bar{\partial}_{\bar{\omega}} \bar{\partial}_{\bar{z}} \left[\frac{c/2}{(z-\omega)^4} + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

substituindo o resultado

$$\bar{\partial}_{\bar{z}} \bar{\partial}_{\bar{\omega}} \frac{1}{(z-\omega)^4} = \frac{1}{6} \bar{\partial}_{\bar{z}} \bar{\partial}_{\bar{\omega}} \left(\partial_z^2 \partial_\omega \frac{1}{z-\omega} \right) = \frac{\pi}{3} \partial_z^2 \partial_\omega \bar{\partial}_{\bar{\omega}} \delta(z-\omega, \bar{z}-\bar{\omega}) \quad (\text{B.26})$$

em (B.25) obtemos

$$\partial_z \partial_\omega [T_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) T_{\omega\bar{\omega}}(\omega, \bar{\omega})] = \frac{c\pi}{6} \partial_z^2 \partial_\omega \bar{\partial}_{\bar{\omega}} \delta(z-\omega, \bar{z}-\bar{\omega}) \quad (\text{B.27})$$

o que implica a EPO

$$T_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) T_{\omega\bar{\omega}}(\omega, \bar{\omega}) = \frac{c\pi}{6} \partial_z \bar{\partial}_{\bar{\omega}} \delta(z-\omega, \bar{z}-\bar{\omega}) \quad (\text{B.28})$$

que em coordenadas cartesianas fica

$$T^\alpha{}_\alpha(\sigma) T^\beta{}_\beta(\sigma') = -\frac{c\pi}{3} \partial^2 \delta(\sigma - \sigma') \quad (\text{B.29})$$

Assumindo $\langle T^\alpha{}_\alpha \rangle = 0$ no espaço plano, vejamos como fica essa relação perto do espaço plano, ou seja, ao variarmos a métrica $\delta g_{\alpha\beta}$.

$$\delta \langle T^\alpha{}_\alpha \rangle = \delta \int \mathcal{D}\phi e^{-S} T^\alpha{}_\alpha(\sigma) = \frac{1}{4\pi} \int \mathcal{D}\phi e^{-S} \left(T^\alpha{}_\alpha(\sigma) \int d^2\sigma' \sqrt{g} \delta g^{\beta\gamma} T_{\beta\gamma}(\sigma') \right) \quad (\text{B.30})$$

Restringindo a variação às transformações de Weyl, então $\delta g_{\alpha\beta} = 2\omega \delta_{\alpha\beta}$ e $\delta g^{\alpha\beta} = -2\omega \delta^{\alpha\beta}$

$$\delta \langle T^\alpha{}_\alpha \rangle = -\frac{1}{4\pi} \int \mathcal{D}\phi e^{-S} \left(T^\alpha{}_\alpha(\sigma) \int d^2\sigma' \omega(\sigma') T^\beta{}_\beta(\sigma') \right) \quad (\text{B.31})$$

substituindo (B.29) obtemos

$$\delta \langle T^\alpha{}_\alpha \rangle = \frac{c}{6} \partial^2 \omega \quad (\text{B.32})$$

o que implica

$$\langle T^\alpha{}_\alpha \rangle = -\frac{c}{12}R \quad (\text{B.33})$$

Para mais detalhes, veja a dedução na seção 4.4.2 em [15] e o apêndice 5.A de [3].

Se em(B.23) subtrairmos a segunda equação da primeira, obtemos

$$\bar{\partial}T_{z\bar{z}} = -\bar{\partial}T_{\bar{z}z} \quad (\text{B.34})$$

fazendo cálculos análogos, obteríamos

$$\langle T^\alpha{}_\alpha \rangle = -\frac{\bar{c}}{12}R \quad (\text{B.35})$$

Portanto, para que a teoria seja consistente, deve ser $c = \bar{c}$.

B.5 Derivada temporal total da Função Geratriz

$$\frac{dF}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial \tau} \quad (\text{B.36})$$

devido à invariância por reparametrizações, podemos tomar $\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\tau} &= \int d\sigma \frac{K}{2} \left(\theta' \dot{\tilde{\theta}} - \tilde{\theta}' \dot{\theta} \right) + \int d\sigma \frac{K}{2} \left(\tilde{\theta} \dot{\theta}' - \theta \dot{\tilde{\theta}}' \right) \\ &= \int d\sigma K \left(\theta' \dot{\tilde{\theta}} - \tilde{\theta}' \dot{\theta} \right) + \int d\sigma \frac{K}{2} \left(\tilde{\theta} \dot{\theta} - \theta \dot{\tilde{\theta}} \right)' \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

C Código utilizado no cálculo de 5.90

Obtivemos 5.90 com o auxílio do software Wolfram Mathematica, versão 12. Segue abaixo os códigos⁴⁷:

Definindo a Lagrangeana

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}A(b_1 + g_1) \left(\theta' + \dot{\theta} \right) (\dot{\varphi} - \varphi') + \frac{1}{2}A(g_1 - b_1) \left(\dot{\theta} - \theta' \right) (\varphi' + \dot{\varphi}) + \frac{1}{2}A(g_2 - b_2) \left(\dot{\theta} - \theta' \right) (x' + \dot{x}) + \\ &\frac{1}{2}A(b_2 + g_2) \left(\theta' + \dot{\theta} \right) (\dot{x} - x') + \frac{1}{2}A(g_{12} - b_{12}) (\dot{\varphi} - \varphi') (x' + \dot{x}) + \frac{1}{2}A(b_{12} + g_{12}) (\varphi' + \dot{\varphi}) (\dot{x} - x') \\ &+ \frac{1}{2}Ag_0 \left(\dot{\theta} - \theta' \right) \left(\theta' + \dot{\theta} \right) + \frac{1}{2}Ag_{11} (\dot{\varphi} - \varphi') (\varphi' + \dot{\varphi}) + \frac{1}{2}Ag_{22} (\dot{x} - x') (x' + \dot{x}); \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Definindo os momentos conjugados, os quais foram calculados a mão:

$$\begin{aligned} \Pi_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -AB_{01}\varphi' - AB_{02}x' + AG_{00}\dot{\theta} + AG_{01}\dot{\varphi} + AG_{02}\dot{x}; \\ \Pi_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = -AB_{01}\theta' - AB_{12}x' + AG_{01}\dot{\theta} + AG_{11}\dot{\varphi} + AG_{12}\dot{x}; \\ \Pi_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = AB_{02}\theta' + AB_{12}\varphi' + AG_{02}\dot{\theta} + AG_{12}\dot{\varphi} + AG_{22}\dot{x}; \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

resolvendo para $\dot{\theta}$ e $\dot{\varphi}$

$$\begin{aligned} \text{Solve} \left[\left[\frac{\Pi_\theta}{A} = -b_1\varphi' - b_2x' + g_0\dot{\theta} + g_1\dot{\varphi} + g_2\dot{x}, \frac{\Pi_\varphi}{A} = -b_1\theta' - b_{12}x' + g_1\dot{\theta} + g_{11}\dot{\varphi} + g_{12}\dot{x}, \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\Pi_x}{A} = b_2\theta' + b_{12}\varphi' + g_2\dot{\theta} + g_{12}\dot{\varphi} + g_{22}\dot{x}, \left\{ \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{x} \right\} \right] \right]; \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

⁴⁷O output dos comandos será omitido, pois tomaria muito espaço.

para poupar espaço, vamos nos referir ao output de C.3 por $\{\dot{\theta}(\Pi_\theta, \Pi_\varphi, \Pi_x), \dot{\varphi}(\Pi_\theta, \Pi_\varphi, \Pi_x), \dot{x}(\Pi_\theta, \Pi_\varphi, \Pi_x)\}$
 Fazendo aparecer $\dot{\theta}\Pi_\theta + \dot{\varphi}\Pi_\varphi + \dot{x}\Pi_x$ na Lagrangeana para facilitar o cálculo da Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} \{q, L0\} = \text{PolynomialReduce} \left[L, \left\{ \dot{\varphi} \left(-Ab_1\theta' - Ab_{12}x' + Ag_1\dot{\theta} + Ag_{11}\dot{\varphi} + Ag_{12}\dot{x} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \dot{\theta} \left(-Ab_1\varphi' - Ab_2x' + Ag_0\dot{\theta} + Ag_1\dot{\varphi} + Ag_2\dot{x} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \dot{x} \left(Ab_2\theta' + Ab_{12}\varphi' + Ag_2\dot{\theta} + Ag_{12}\dot{\varphi} + Ag_{22}\dot{x} \right), \left\{ \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \theta', \varphi' \right\} \right]; \end{aligned} \quad (C.4)$$

subtraindo $\dot{\theta}\Pi_\theta + \dot{\varphi}\Pi_\varphi + \dot{x}\Pi_x$ do output obtemos a Hamiltoniana. Eliminando $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ e \dot{x} ,

$$H = L0//. \left\{ \dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta}(\Pi_\theta, \Pi_\varphi, \Pi_x), \dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi}(\Pi_\theta, \Pi_\varphi, \Pi_x), \dot{x} \rightarrow \dot{x}(\Pi_\theta, \Pi_\varphi, \Pi_x) \right\}; \quad (C.5)$$

Efetuada a transformação canônica para obter a Hamiltoniana dual

$$\tilde{H} = H1//. \left\{ \Pi_\theta \rightarrow -A\tilde{\theta}', \theta' \rightarrow -\frac{\tilde{\Pi}_\theta}{A}, \Pi_\varphi \rightarrow -A\tilde{\varphi}', \varphi' \rightarrow -\frac{\tilde{\Pi}_\varphi}{A} \right\}; \quad (C.6)$$

Agora fazemos a transformada de Legendre inversa para obter a Lagrangeana dual. Para isso, precisamos de $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ e \dot{x} em termos dos momentos, os quais são obtidos das equações de Hamilton,

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\Pi}_\theta}; \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\Pi}_\varphi}; \\ \dot{x} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\Pi}_x}; \end{aligned} \quad (C.7)$$

novamente denotando o output de cada uma dessas derivações como $\dot{\theta}(\tilde{\Pi}_\theta, \tilde{\Pi}_\varphi, \Pi_x)$, $\dot{\varphi}(\tilde{\Pi}_\theta, \tilde{\Pi}_\varphi, \Pi_x)$ e $\dot{x}(\tilde{\Pi}_\theta, \tilde{\Pi}_\varphi, \Pi_x)$, respectivamente. Invertendo

$$\text{Solve} \left[\left\{ \dot{\theta} == \dot{\theta}(\tilde{\Pi}_\theta, \tilde{\Pi}_\varphi, \Pi_x), \dot{\varphi} == \dot{\varphi}(\tilde{\Pi}_\theta, \tilde{\Pi}_\varphi, \Pi_x), \dot{x} == \dot{x}(\tilde{\Pi}_\theta, \tilde{\Pi}_\varphi, \Pi_x) \right\}, \left\{ \tilde{\Pi}_\theta, \tilde{\Pi}_\varphi, \Pi_x \right\} \right]; \quad (C.8)$$

obtemos $\tilde{\Pi}_\theta(\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{x})$, $\tilde{\Pi}_\varphi(\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{x})$ e $\Pi_x(\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{x})$. Substituindo na Lagrangeana

$$LL = \dot{\theta}\tilde{\Pi}_\theta + \dot{\varphi}\tilde{\Pi}_\varphi + \dot{x}\Pi_x - \tilde{H}; \quad (C.9)$$

$$\tilde{L} = LL//. \left\{ \tilde{\Pi}_\theta \rightarrow \tilde{\Pi}_\theta(\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{x}), \tilde{\Pi}_\varphi \rightarrow \tilde{\Pi}_\varphi(\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{x}), \Pi_x \rightarrow \Pi_x(\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{x}) \right\}; \quad (C.10)$$

Nos resta reorganizar os termos da Lagrangeana dual para ver quem são os coeficientes de background transformados. Fazemos isso termo a termo com *PolynomialReduce* dividindo a lagrangeana pelas combinações dos campos:

$$\{\tilde{E}_{00}, r00\} = \text{PolynomialReduce} \left[\tilde{L}, \left\{ \left(\dot{\theta} + \tilde{\theta}' \right) \left(\dot{\theta} - \tilde{\theta}' \right), \left\{ \dot{\theta}, \tilde{\theta}' \right\} \right\}; \quad (C.11)$$

que retorna o coeficiente $\tilde{E}_{00} = (G^{-1})_{00}$, e $r00$ é o resto. Repetindo o procedimento

$$\{\tilde{E}_{01}, r01\} = \text{PolynomialReduce} \left[r00, \left\{ \left(\dot{\theta} + \tilde{\theta}' \right) \left(\dot{\varphi} - \tilde{\varphi}' \right), \left\{ \dot{\theta}, \tilde{\theta}', \dot{\varphi}, \tilde{\varphi}' \right\} \right\}; \quad (C.12)$$

que retorna $\tilde{E}_{01} = (E^{-1})_{01}$ e $r01$. Repetindo o mesmo procedimento para as combinações de campos que aparecem na lagrangeana original (porém agora com “ \sim ”) obtemos 5.90.

Verificamos que a derivada temporal da função geratriz aparece, após extraírmos todos os coeficientes \tilde{E}_{MN} , fazendo

$$\{cDF, rDF\} = \text{PolynomialReduce} \left[r22, \left\{ \partial_\sigma \frac{dF}{d\tau} \right\}, \left\{ \tilde{\theta}, \tilde{\varphi}, \dot{\tilde{\theta}}, \dot{\tilde{\varphi}}, \tilde{\theta}', \tilde{\varphi}', \theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \theta', \varphi' \right\} \right]; \quad (\text{C.13})$$

e constatando que $cDF = 1$ e $rDF = 0$.

D Cálculo completo da dimensão do espaço auxiliar

Aqui seguimos o raciocínio em [31]. Outras deduções em geral exigem o *Teorema No Ghost* e uma análise mais completa do espaço de estados da teoria. A dedução que apresentaremos exige apenas a manipulação de comutadores.

Em teoria quântica queremos realizar uma representação unitária do grupo de Poincaré e portanto, impomos que os geradores de Lorentz sejam hermitianos

$$(M^{\mu\nu})^\dagger = M^{\mu\nu} \quad (\text{D.1})$$

além disso, os geradores de Lorentz devem ser normal ordenados para que sua ação no vácuo seja bem definida.

Começamos com a forma explícita normal ordenada de M^{-I}

$$M^{I-} = \underbrace{\frac{1}{2} (x_0^I p^- + p^- x_0^I)}_{l^{I-}} - \underbrace{x_0^- p^I - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^I \alpha_n^- - \alpha_{-n}^- \alpha_{-n}^I)}_{S^{I-}} - \underbrace{i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\bar{\alpha}_{-n}^I \bar{\alpha}_n^- - \bar{\alpha}_{-n}^- \bar{\alpha}_{-n}^I)}_{\bar{S}^{I-}} \quad (\text{D.2})$$

calculando primeiro o comutador dos l^{I-} , obtemos

$$[l^{I-}, l^{J-}] = \frac{i}{4} [p^I, x^J] \frac{p^-}{p^+} + \frac{i p^-}{4 p^+} [p^I, x^J] + \frac{i}{2} [x^-, p^-] \delta^{IJ} = 0 \quad (\text{D.3})$$

calculando a soma dos comutadores de l^{I-} e S^{I-}

$$[l^{I-}, S^{J-}] + [S^{I-}, l^{J-}] = -2 \frac{p^-}{p^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-n}^I \alpha_n^J + \frac{1}{p^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [- (\alpha_{-n}^J \alpha_n^- - \alpha_{-n}^- \alpha_{-n}^J) p^I + (\alpha_{-n}^I \alpha_n^- - \alpha_{-n}^- \alpha_{-n}^I) p^J] \quad (\text{D.4})$$

onde $\alpha_{-n}^I \alpha_n^J \equiv \alpha_{-n}^I \alpha_n^J - \alpha_{-n}^I \alpha_{-n}^J$. Para calcular o comutador mais complicado $[S^{I-}, S^{J-}]$ primeiro calculamos ($m > 0$)

$$[S^{I-}, \alpha_m^-] = -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\underbrace{-\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{n}{p^+} \alpha_{m-n}^I \alpha_n^- + \alpha_{-n}^I [\alpha_n^-, \alpha_m^-] - [\alpha_{-n}^-, \alpha_m^-] \alpha_n^I - \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{n}{p^+} \alpha_{-n}^- \alpha_{n+m}^I}_{A} \right) \quad (\text{D.5})$$

Usando (3.9) e (3.28) obtemos

$$[\alpha_n^-, \alpha_m^-] = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{(m-n)}{p^+} \alpha_{m+n}^- + \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{(p^+)^2} \frac{D-2}{12} m(m^2-1) \delta_{m+n,0} \quad (\text{D.6})$$

A constante que aparece devido à ordenação normal afeta o operador α_n^- como

$$\alpha_n^- \longrightarrow \alpha_n^- - \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \frac{1}{p^+} a \delta_{n,0} \quad (\text{D.7})$$

onde $a \equiv \frac{D-2}{24}$, conseqüentemente, a ordenação normal implica

$$[\alpha_n^-, \alpha_m^-] = \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \frac{(m-n)}{p^+} \alpha_{m+n}^- + \sqrt{\frac{2}{\alpha' (p^+)^2}} \left(\frac{D-2}{12} m^3 + 2am - \frac{D-2}{12} m \right) \delta_{m+n,0} \quad (\text{D.8})$$

portanto

$$[S^{I-}, \alpha_m^-] = -i \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \frac{1}{p^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-\alpha_{m-n}^I \alpha_n^- + \alpha_{-n}^I (n-m) \alpha_{m+n}^- + (n+m) \alpha_{m-n}^- \alpha_n^I - n \alpha_{-n}^- \alpha_{n+m}^I) - i \frac{f(m)}{m} \alpha_m^I \quad (\text{D.9})$$

que implica

$$[S^{I-}, \alpha_m^-] = -i \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \frac{1}{p^+} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_{-n}^I \alpha_{m+n}^- - \underbrace{\alpha_{m-n}^I \alpha_n^-}_A + \underbrace{\alpha_{m-n}^- \alpha_n^I}_B - \alpha_{-n}^- \alpha_{n+m}^I \right) + i \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \frac{1}{p^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n} (\alpha_{-n}^I \alpha_{m+n}^- - \alpha_{m-n}^- \alpha_n^I) - i \frac{f(m)}{m} \alpha_m^I \quad (\text{D.10})$$

os termos da primeira linha podem ser parcialmente cancelados via uma mudança de índices de soma e obtemos

$$[S^{I-}, \alpha_m^-] = -i \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \frac{1}{p^+} \sum_{n=1}^m \left(-\underbrace{\alpha_{m-n}^I \alpha_n^-}_A + \underbrace{\alpha_{m-n}^- \alpha_n^I}_B \right) + i \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \frac{1}{p^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n} (\alpha_{-n}^I \alpha_{m+n}^- - \alpha_{m-n}^- \alpha_n^I) - i \frac{f(m)}{m} \alpha_m^I \quad (\text{D.11})$$

Uma vez que

$$\sum_{n=1}^m \alpha_{m-n}^- \alpha_n^I = \sum_{k=m-1}^0 \alpha_k^- \alpha_{m-k}^I \equiv \sum_{n=0}^{m-1} \alpha_n^- \alpha_{m-n}^I \quad (\text{D.12})$$

vemos

$$\sum_{n=1}^m (-\alpha_{m-n}^I \alpha_n^- + \alpha_{m-n}^- \alpha_n^I) = -\sum_{n=1}^m \alpha_{m-n}^I \alpha_n^- + \sum_{n=0}^{m-1} \alpha_n^- \alpha_{m-n}^I = \alpha_0^- \alpha_m^I - \alpha_0^I \alpha_m^- + \sum_{n=1}^{m-1} [\alpha_n^-, \alpha_{m-n}^I] \quad (\text{D.13})$$

usando $\sum_{n=1}^{m-1} (m-n) = \frac{1}{2} m(m-1)$ obtemos

$$[S^{I-}, \alpha_m^-] = i \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \frac{1}{p^+} (\alpha_0^I \alpha_m^- - \alpha_0^- \alpha_m^I) + i \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \frac{1}{p^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n} (\alpha_{-n}^I \alpha_{m+n}^- - \alpha_{m-n}^- \alpha_n^I) + i \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha' (p^+)^2}} \frac{m(m-1)}{2} - \frac{f(m)}{m} \right) \alpha_m^I \quad (\text{D.14})$$

Analogamente, para $m > 0$

$$[S^{I-}, \alpha_{-m}^-] = i \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \frac{1}{p^+} (\alpha_{-m}^- \alpha_0^I - \alpha_{-m}^I \alpha_0^-) - i \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \frac{1}{p^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n} (\alpha_{-n}^I \alpha_{n-m}^- - \alpha_{-m-n}^- \alpha_n^I) + i \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha' (p^+)^2}} \frac{m(m-1)}{2} - \frac{f(m)}{m} \right) \alpha_{-m}^I \quad (\text{D.15})$$

Calculando agora $[S^{I-}, \alpha_{-m}^J]$

$$[S^{I-}, \alpha_{-m}^J] = -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\alpha_{-n}^I [\alpha_n^-, \alpha_{-m}^J] - [\alpha_{-n}^-, \alpha_{-m}^J] \alpha_n^I - \underbrace{\alpha_n^- \delta^{IJ} \delta_{n-m,0}}_{=0, I \neq J} \right) - i \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n} (\alpha_{-n}^I \alpha_{n-m}^J - \alpha_{-n-m}^J \alpha_n^I) \quad (D.16)$$

Analogamente, calculando o comutador $[S^{I-}, \alpha_m^J]$

$$[S^{I-}, \alpha_m^J] = i \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n} (\alpha_{-n}^I \alpha_{m+n}^J - \alpha_{m-n}^J \alpha_n^I) \quad (D.17)$$

Substituindo tudo no comutador $[S^{I-}, S^{J-}]$

$$[S^{I-}, S^{J-}] = \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-\alpha_{-n}^J \alpha_0^- \alpha_n^I + \alpha_{-n}^J \alpha_0^I \alpha_n^- + \alpha_{-n}^I \alpha_0^- \alpha_n^J - \alpha_{-n}^- \alpha_0^I \alpha_n^J) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha'^{(p^+)2}} (n-1) - \frac{f(n)}{n^2} \right) \alpha_{-n}^I \alpha_n^J + \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-m}^J (\alpha_{-n}^I \alpha_{m+n}^- - \alpha_{m-n}^- \alpha_n^I) - (\alpha_{-n}^I \alpha_{n-m}^J - \alpha_{-m-n}^J \alpha_n^I) \alpha_m^- + (\alpha_{-n}^I \alpha_{n-m}^- - \alpha_{-n-m}^- \alpha_n^I) \alpha_m^J - \alpha_{-m}^- (\alpha_{-n}^I \alpha_{m+n}^J - \alpha_{m-n}^J \alpha_n^I)) \quad (D.18)$$

Analisando primeiro as duas última linhas

$$(i)^{IJ} = \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\underbrace{\alpha_{-m}^J \alpha_{-n}^I \alpha_{m+n}^-}_A - \left(\underbrace{\alpha_{-n}^I \alpha_{n-m}^J - \alpha_{-m-n}^J \alpha_n^I}_A \right) \alpha_m^- \right) + \alpha_{-n}^I \alpha_{n-m}^- \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_{m-n}^- \alpha_n^I - \underbrace{\alpha_{-n-m}^- \alpha_n^I \alpha_m^J}_B - \alpha_{-m}^- \left(\underbrace{\alpha_{-n}^I \alpha_{m+n}^J - \alpha_{m-n}^J \alpha_n^I}_B \right) \quad (D.19)$$

Mudando índices de soma os termos A são parcialmente cancelados, o mesmo vale para os termos B . Obtemos então

$$(i)^{IJ} = \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-n}^I \alpha_{n-m}^J \alpha_m^- + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-m}^- \alpha_{m-n}^J \alpha_n^I \right) + \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-m-n}^J \alpha_n^I \alpha_m^- + \alpha_{-n}^I \alpha_{n-m}^- \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_{m-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-m}^- \alpha_{-n}^I \alpha_{m+n}^J) \quad (D.20)$$

vê-se que na segunda linha, o primeiro e último termos não são normal ordenados. Vamos reescrever a primeira soma de forma normal ordenada

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-m-n}^J \alpha_n^I \alpha_m^- &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-m-n}^J \alpha_m^- \alpha_n^I + \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-m-n}^J [\alpha_n^I, \alpha_m^-] \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-m-n}^J \alpha_m^- \alpha_n^I + \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{-m-n}^J \alpha_{n+m}^I \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-m-n}^J \alpha_m^- \alpha_n^I + \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \alpha_{-k}^J \alpha_k^I \end{aligned} \quad (D.21)$$

onde na última soma substituímos $k = m + n$ e então somamos sobre m, n com a condição de que $m + n = k$ mantenha-se fixo; isso resultou em um fator $k - 1$. Analogamente, estabelecemos ordenação normal na segunda soma

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-m}^- \alpha_{-n}^I \alpha_{m+n}^J = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-n}^I \alpha_{-m}^- \alpha_{m+n}^J + \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \alpha_{-k}^I \alpha_k^J \quad (D.22)$$

Assim, $(i)^{IJ}$ toma a forma

$$(i)^{IJ} = \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-n}^I \alpha_{n-m}^J \alpha_m^- + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-m}^- \alpha_{m-n}^J \alpha_n^I \right) + \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\underbrace{\alpha_{-m-n}^J \alpha_m^- \alpha_n^I}_A + \underbrace{\alpha_{-n}^I \alpha_{n-m}^- \alpha_m^J}_B - \underbrace{\alpha_{-m}^J \alpha_{m-n}^- \alpha_n^I}_A - \underbrace{\alpha_{-n}^I \alpha_{-m}^- \alpha_{m+n}^J}_B \right) - \frac{2}{\alpha'(p^+)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \alpha_{-n}^{[I} \alpha_n^{J]} \quad (D.23)$$

novamente, após mudança de índices, vemos que os termos A e B se cancelam parcialmente, e obtemos

$$(i)^{IJ} = \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{1}{n} \left(-\alpha_{-n}^I \alpha_{n-m}^J \alpha_m^- + \alpha_{-m}^- \alpha_{m-n}^J \alpha_n^I \right) + \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left(-\alpha_{m-n}^J \alpha_{-m}^- \alpha_n^I + \alpha_{-n}^I \alpha_m^- \alpha_{n-m}^J \right) - \frac{2}{\alpha'(p^+)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \alpha_{-n}^{[I} \alpha_n^{J]} \quad (D.24)$$

que implica

$$(i)^{IJ} = \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{1}{n} \left(-\alpha_{-n}^I \alpha_0^J \alpha_n^- + \alpha_{-n}^- \alpha_0^J \alpha_n^I + \alpha_{-n}^I \alpha_0^- \alpha_n^J \right) - \frac{2}{\alpha'(p^+)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\sum_{m=1}^{n-1} \frac{n-m}{n}}_{=\frac{n-1}{2}} \right) \alpha_{-n}^{[I} \alpha_n^{J]} - \frac{2}{\alpha'(p^+)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \alpha_{-n}^{[I} \alpha_n^{J]} \quad (D.25)$$

Portanto, o comutador $[S^{I-}, S^{J-}]$, agora normal ordenado, é

$$[S^{I-}, S^{J-}] = \sqrt{\frac{2}{\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-\alpha_{-n}^J \alpha_0^- \alpha_n^I + \alpha_{-n}^J \alpha_0^I \alpha_n^- + \alpha_{-n}^I \alpha_0^- \alpha_n^J - \alpha_{-n}^- \alpha_0^I \alpha_n^J \right. \\ \left. - \alpha_{-n}^I \alpha_0^J \alpha_n^- + \alpha_{-n}^- \alpha_0^J \alpha_n^I - \alpha_{-n}^J \alpha_0^- \alpha_n^I + \alpha_{-n}^I \alpha_0^- \alpha_n^J \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\alpha'(p^+)^2} (n-1) - \frac{f(n)}{n^2} \right) \alpha_{-n}^{[I} \alpha_n^{J]} \quad (D.26)$$

O último passo consiste em comutar o fato α_0^- na esquerda

$$[S^{I-}, S^{J-}] = \frac{4}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \alpha_0^- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-n}^{[I} \alpha_n^{J]} + \frac{1}{p^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[(\alpha_{-n}^J \alpha_n^I - \alpha_{-n}^- \alpha_n^J) p^I - (\alpha_{-n}^I \alpha_n^- - \alpha_{-n}^- \alpha_n^I) p^J \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{\alpha'(p^+)^2} - \frac{f(n)}{n^2} \right) \alpha_{-n}^{[I} \alpha_n^{J]} \quad (D.27)$$

Finalmente, agora podemos substituir tudo em $[M^{I-}, M^{J-}]$

$$[M^{I-}, M^{J-}] = \frac{2}{p^+} \left(p^- - \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^- \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-n}^{[I} \alpha_n^{J]} + \frac{2}{\alpha'(p^+)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left[\frac{D-2}{12} - 2 \right] m + \frac{1}{m} \left[2a - \frac{D-2}{12} \right] \right) \alpha_{-m}^{[I} \alpha_m^{J]} + (\alpha_n \rightarrow \bar{\alpha}_n) \quad (D.28)$$

o primeiro termo é nulo devido a (2.28). Igualando a zero obtemos finalmente $D = 26$.

E Método de Feddeev-Popov e Fantasmas

Nesta seção estão, em mais detalhes, os cálculos relacionados a fantasmas da seção 4.2.3.

Queremos deduzir qual o Jacobiano que aparece na integral de caminho

$$Z = \frac{1}{Vol} \int \mathcal{D}g \mathcal{D}X e^{-S_{Polyakov}[X,g]} \quad (\text{E.1})$$

ao fazermos uma reparametrização composta de uma transformação de Weyl

$$g_{\alpha\beta} \mapsto g_{\alpha\beta}^{\zeta} = e^{2\omega(\sigma)} \frac{\partial\sigma^{\gamma}}{\partial\sigma'^{\alpha}} \frac{\partial\sigma^{\delta}}{\partial\sigma'^{\beta}} g_{\gamma\delta} \quad (\text{E.2})$$

onde ζ denota uma composição arbitrária de reparametrização e Weyl. Essa derivação é conhecida como *Método de Feddeev-Popov*. Aqui seguiremos a dedução como apresentada em [15].

Escolhendo a transformação ζ convenientemente, podemos deixar a métrica da forma que quisermos. Denotaremos uma escolha particular da métrica como \hat{g} . Esta escolha de métrica representa nossa escolha de calibre específico.

Ao integrar sobre todas as configurações que correspondem a diferentes transformações ζ , em algum momento uma dessas vai coincidir com nossa escolha particular que levou a \hat{g} . Portanto a escolha explícita do calibre dentro da integral (E.1) pode ser substituída pela inclusão de

$$\int \mathcal{D}\zeta \delta(g - \hat{g}^{\zeta}) \quad (\text{E.3})$$

multiplicada pelo Jacobiano Δ_{FP} da transformação, chamado *determinante de Feddeev-Popov*. Note ainda que,

$$\Delta_{FP}(g) \int \mathcal{D}\zeta \delta(g - \hat{g}^{\zeta}) = 1 \quad (\text{E.4})$$

de fato, assim como toda função delta de Dirac, a integral sobre todos os valores possíveis é 1, porém o determinante aparece pois cada transformação ζ corresponde a uma mudança de coordenadas. Assim,

$$\begin{aligned} Z[\hat{g}] &= \frac{1}{Vol} \int \mathcal{D}\zeta \mathcal{D}g \mathcal{D}X \Delta_{FP}(g) \delta(g - \hat{g}^{\zeta}) e^{-S_{Polyakov}[X,g]} \\ &= \frac{1}{Vol} \int \mathcal{D}\zeta \mathcal{D}X \Delta_{FP}(\hat{g}^{\zeta}) e^{-S_{Polyakov}[X,\hat{g}^{\zeta}]} \\ &= \frac{1}{Vol} \int \mathcal{D}\zeta \mathcal{D}X \Delta_{FP}(\hat{g}^{\zeta}) e^{-S_{Polyakov}[X,\hat{g}]} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

a última linha resulta da ação ser invariante quanto à transformações ζ . Para efetuarmos a integral em ζ precisamos mostrar que Δ_{FP} é invariante sob transformações ζ .

$$\Delta_{FP}(g) \int \mathcal{D}\zeta \delta(g - \hat{g}^{\zeta}) = 1 \implies \begin{aligned} [\Delta_{FP}(g^{\zeta})]^{-1} &= \int \mathcal{D}\zeta' \delta(g^{\zeta} - \hat{g}^{\zeta'}) \\ &= \int \mathcal{D}\zeta' \delta(g - \hat{g}^{\zeta^{-1}\zeta'}) \\ &= \int \mathcal{D}\zeta'' \delta(g - \hat{g}^{\zeta''}) = [\Delta_{FP}(g)]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Teremos então

$$Z[\hat{g}] = \frac{1}{Vol} \int \mathcal{D}\zeta \mathcal{D}X \Delta_{FP}(\hat{g}) e^{-S_{Polyakov}[X,\hat{g}]} \quad (\text{E.7})$$

Nada no integrando depende da transformação ζ . Lembrando que os estados correspondentes a transformações ζ são não físicos, e lembrando que a divisão por “Vol” está lá justamente para cancelar a contribuição desses estados, podemos cancelar então a integral nas transformações ζ com o denominador “Vol”. Ao fixar o calibre, a função de partição é portanto

$$Z[\hat{g}] = \int \mathcal{D}X \Delta_{FP}(\hat{g}) e^{-S_{Polyakov}[X,\hat{g}]} \quad (\text{E.8})$$

onde leva-se em conta apenas os estados fisicamente distintos.

Nos resta agora determinar a forma explícita de Δ_{FP} . Partindo de

$$[\Delta_{FP}(\hat{g})]^{-1} = \int \mathcal{D}\zeta \delta(g - \hat{g}^\zeta) \quad (\text{E.9})$$

para uma reparametrização $\delta\sigma^\alpha = v^\alpha(\sigma)$ e uma transformação de Weyl, de (E.2), a variação infinitesimal na métrica é

$$\delta\hat{g}_{\alpha\beta} = 2\omega\hat{g}_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha \quad (\text{E.10})$$

portanto

$$[\Delta_{FP}(\hat{g})]^{-1} = \int \mathcal{D}\omega \mathcal{D}v \delta(2\omega\hat{g}_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha) \quad (\text{E.11})$$

escrevendo o funcional de Dirac explicitamente

$$[\Delta_{FP}(\hat{g})]^{-1} = \int \mathcal{D}\omega \mathcal{D}v \mathcal{D}\beta \exp\left(2\pi i \int d^2\sigma \sqrt{\hat{g}} \beta^{\alpha\beta} [2\omega\hat{g}_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha]\right) \quad (\text{E.12})$$

onde $\beta^{\alpha\beta}$ é um tensor simétrico na worldsheet. A integral em ω não tem nenhuma derivada no integrando, portanto atua como um multiplicador de Lagrange, impondo $\beta^{\alpha\beta}\hat{g}_{\alpha\beta} = 0$ o que implica que $\beta^{\alpha\beta}$ tem traço nulo. Teremos então

$$\begin{aligned} [\Delta_{FP}(\hat{g})]^{-1} &= \int \mathcal{D}v \mathcal{D}\beta \exp\left(2\pi i \int d^2\sigma \sqrt{\hat{g}} \beta^{\alpha\beta} [\nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha]\right) \\ &= \int \mathcal{D}v \mathcal{D}\beta \exp\left(4\pi i \int d^2\sigma \sqrt{\hat{g}} \beta^{\alpha\beta} \nabla_\alpha v_\beta\right) \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

invertemos essa expressão para obter $\Delta_{FP}(\hat{g})$. Fazemos isso substituindo variáveis de integração, $\beta_{\alpha\beta}$ e v^α , que comutam por campos $b_{\alpha\beta}$ e c^α que anti-comutam.

$$\begin{aligned} [\Delta_{FP}(\hat{g})]^{-1} &= \int \mathcal{D}b \mathcal{D}c \exp\left(4\pi i \int d^2\sigma \sqrt{\hat{g}} b^{\alpha\beta} \nabla_\alpha c_\beta\right) \\ &= \int \mathcal{D}b \mathcal{D}c \exp[iS_{fantasma}] \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

com b e c renormalizados de modo que

$$S_{fantasma}[b, c, g] = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} b^{\alpha\beta} \nabla_\alpha c_\beta \quad (\text{E.15})$$

voltando ao espaço euclidiano, o fator i some e a função de partição fica

$$Z[\hat{g}] = \int \mathcal{D}X \mathcal{D}b \mathcal{D}c \exp[-S_{Polyakov}[X, \hat{g}] - S_{fantasma}[b, c, \hat{g}]] \quad (\text{E.16})$$

A ação fantasma fica muito mais simples se escolhermos o calibre conforme de modo que $\hat{g}_{\alpha\beta} = e^{2\omega}\delta_{\alpha\beta}$, o determinante é $\sqrt{\hat{g}} = e^{2\omega}$. Indo para coordenadas complexas:

$$d^2\sigma = \frac{1}{2}d^2z \quad \nabla^z = g^{z\bar{z}}\nabla_{\bar{z}} = 2e^{-2\omega}\nabla_{\bar{z}} \quad (\text{E.17})$$

obtemos

$$S_{fantasma} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b_{zz}\nabla_{\bar{z}}c^z + b_{\bar{z}\bar{z}}\nabla_z c^{\bar{z}}) \quad (\text{E.18})$$

por cálculo direto vê-se que o símbolo de Christoffel se anula, portanto as derivadas covariantes são derivadas comuns. Assim,

$$S_{fantasma} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b_{zz}\bar{\partial}c^z + b_{\bar{z}\bar{z}}\partial c^{\bar{z}}) \quad (\text{E.19})$$

Utilizando a notação (4.130), teremos

$$S_{fantasma} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b\bar{\partial}c + \bar{b}\partial\bar{c}) \quad (\text{E.20})$$

Fazendo cálculos tediosos obtemos

$$\bar{\partial}b = \partial\bar{b} = \bar{\partial}c = \partial\bar{c} = 0 \quad (\text{E.21})$$

$$T_f = 2(\partial c)b + c\partial b \quad \bar{T}_f = 2(\bar{\partial}\bar{c})\bar{b} + \bar{c}\bar{\partial}\bar{b} \quad T_{z\bar{z}}^f = 0 \quad (\text{E.22})$$

Para deduzir as EPOs seguimos raciocínio análogo ao da seção 4.2.2. Começamos usando o fato de que a integral de caminho de uma derivada funcional é zero, para deduzir

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}b\mathcal{D}c \frac{\delta}{\delta b(z)} [e^{-S_{fantasma}} b(\omega)] = \int \mathcal{D}b\mathcal{D}c e^{-S_{fantasma}} \left[-\frac{1}{2\pi}\bar{\partial}c(z)b(\omega) + \delta(z-\omega)\right] \\ &\implies \langle \bar{\partial}c(z)b(\omega) \rangle = 2\pi\delta(z-\omega) \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

usando a identidade $2\pi\delta(z-\omega) = \bar{\partial}\left(\frac{1}{z-\omega}\right)$, obtemos

$$\langle c(z)b(\omega) \rangle = \frac{1}{z-\omega} \quad (\text{E.24})$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}b\mathcal{D}c \frac{\delta}{\delta c(z)} [e^{-S_{fantasma}} c(\omega)] = \int \mathcal{D}b\mathcal{D}c e^{-S_{fantasma}} \left[-\frac{1}{2\pi}\bar{\partial}b(z)c(\omega) + \delta(z-\omega)\right] \\ &\implies \langle \bar{\partial}c(z)b(\omega) \rangle = 2\pi\delta(z-\omega) \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

integrando,

$$\langle b(z)c(\omega) \rangle = \frac{1}{z-\omega} \quad (\text{E.26})$$

O tensor energia momento, na teoria quântica, é

$$T_f(z) = 2 : \partial c(z)b(z) : + : c(z)\partial b(z) : \quad (\text{E.27})$$

usando o teorema de Wick, é fácil mostrar que

$$\begin{aligned} T_f(z)b(\omega) &= 2\frac{b(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial b(\omega)}{z-\omega} + \text{termos não singulares} \\ T_f(z)c(\omega) &= -\frac{c(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial c(\omega)}{z-\omega} + \text{termos não singulares} \end{aligned} \quad (\text{E.28})$$

b e c são operadores primários com pesos conformes $h = 2$ e $h = -1$, respectivamente. Agora podemos calcular a EPO de $T_f(z)T_f(\omega)$

$$\begin{aligned} T_f(z)T_f(\omega) &= 4 : \partial c(z)b(z) :: \partial c(\omega)b(\omega) : + 2 : \partial c(z)b(z) :: c(\omega)\partial b(\omega) : \\ &\quad + 2 : c(z)\partial b(z) :: \partial c(\omega)b(\omega) : + : c(z)\partial b(z) :: c(\omega)\partial b(\omega) : \end{aligned} \quad (\text{E.29})$$

usando o teorema de Wick mais (E.24) e (E.26), é fácil ver que

$$T_f(z)T_f(\omega) = \frac{-13}{(z-\omega)^4} - \frac{2T(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial T(\omega)}{z-\omega} + \text{termos não singulares} \quad (\text{E.30})$$

Sabemos que o termo que multiplica $\frac{1}{(z-\omega)^4}$ é $\frac{c_f}{2}$. Segue portanto que $c_f = -26$.

F Função de Partição como Funcional Gerador de Funções de Correlação

Esse resultado nada mais é que uma generalização para teorias de campos do mesmo resultado em teoria de probabilidades:

A uma variável aleatória ϕ podemos associar uma distribuição de probabilidade $P(\phi)$, de modo que o valor esperado de uma função $A(\phi)$ é

$$\langle A \rangle = \int P(\phi) A(\phi) d\phi \quad (\text{F.1})$$

onde assumimos a normalização

$$\int P(\phi) d\phi = 1 \quad (\text{F.2})$$

Considerando a função de partição

$$Z(J) = \int P(\phi) e^{\phi J} d\phi \quad (\text{F.3})$$

Dessa definição, segue que o n -ésimo momento da distribuição de probabilidade $P(\phi)$ é

$$g_n = \langle \phi^n \rangle = \int P(\phi) \phi^n d\phi = \left. \frac{\partial^n Z(J)}{\partial J^n} \right|_{J=0} \quad (\text{F.4})$$

e portanto, ao expandir $Z(J)$ em série de Taylor em torno de $J = 0$, obtemos

$$Z(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^n}{n!} \int P(\phi) \phi^n d\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^n}{n!} g_n \quad (\text{F.5})$$

Assim, $Z(J)$ age como gerador da sequência de infinitos momentos $g_n = \langle \phi^n \rangle$ da distribuição de probabilidades $P(\phi)$.

Supondo agora que estamos lidando com um campo quântico X em $D = 26$ dimensões. A função de partição sob o efeito da fonte externa J é

$$Z[J] = \int \mathcal{D}X \exp \left\{ -S[X] - \int d^{26}x J(x^\mu) X(x^\mu) \right\} \quad (\text{F.6})$$

a função de partição sem a influência da fonte J é $Z[J = 0]$. Aqui, o análogo da distribuição de probabilidades $P(\phi)$ é o fator $e^{-S[X]}$. Segundo (4.67),

$$\langle \Omega | \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n | \Omega \rangle_J = \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \quad (\text{F.7})$$

Expandindo $Z[J]$ em série de Taylor, obtemos

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_n \left\{ \int \mathcal{D}X e^{-S[X]} \mathcal{O}_1(x_1^\rho) \dots \mathcal{O}_1(x_n^\rho) \right\} J(x_1^\rho) \dots J(x_n^\rho) \quad (\text{F.8})$$

onde

$$\int \mathcal{D}X e^{-S[X]} \mathcal{O}_1(x_1^\rho) \dots \mathcal{O}_1(x_n^\rho) = \left. \frac{\delta^n Z}{\delta J(x_1^\rho) \dots \delta J(x_n^\rho)} \right|_{J=0} \quad (\text{F.9})$$

Comparando com (F.7), obtemos finalmente

$$\frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^n Z}{\delta J(x_1^\rho) \dots \delta J(x_n^\rho)} \Big|_{J=0} = \langle \Omega | \mathcal{O}_1(x_1^\rho) \dots \mathcal{O}_1(x_n^\rho) | \Omega \rangle \quad (\text{F.10})$$

então, de fato, $Z[J]$ é o funcional gerador das funções de correlações da teoria sob o efeito da fonte externa J .

G Espaços de Simetria Máxima - Dois Exemplos

Seja uma variedade diferenciável \mathcal{M}_d com métrica $g_{\mu\nu}(x)$, $x \in \mathcal{M}_d$. Uma simetria é uma transformação $\mathcal{T} : \mathcal{M}_d \rightarrow \mathcal{M}_d$ que não altera a geometria. Em geral, isso significa que

$$\mathcal{T}g_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x) \quad (\text{G.1})$$

ou seja, transformações que não alteram a geometria de \mathcal{M}_d são, em geral, simetrias da métrica, as quais chamamos de *Isometrias*.

Uma ferramenta útil para caracterizar simetrias em espaços curvos são *vetores de Killing*. Esses vetores generalizam a noção de “grandeza conservada no tempo” para “grandeza conservada ao longo de uma *trajetória geodésica*”. A cada vetor de Killing está associada uma simetria contínua da métrica de \mathcal{M}_d em correspondência bijetiva. São definidos da seguinte forma: K^μ é um vetor de Killing se satisfaz

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0 \quad (\text{G.2})$$

e isso implica na conservação

$$p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) = 0 \quad (\text{G.3})$$

onde p^μ é o momento associado à simetria correspondente ao vetor de Killing K^μ . É possível mostrar que esses vetores, de certa forma, descrevem a geometria do espaço, nos dizem que a geometria não muda ao longo de sua direção

$$K^\lambda \nabla_\lambda R^{(d)} = 0 \quad (\text{G.4})$$

Dizemos que \mathcal{M}_d tem simetria máxima se o número de isometrias na métrica é o mesmo que o de um espaço euclidiano E_d de mesma dimensão. Ou seja, dizemos que um espaço de dimensão d tem simetria máxima se possui $d(d+1)/2$ vetores de Killing linearmente independentes.

É fácil ver porque espaços de simetria máxima são interessantes, basta notar que sua curvatura é invariante sob rotações e translações, são portanto *homogêneos* e *isotrópicos*, logo sua importância em Cosmologia e Gravitação. Outra característica interessante desses espaços é que neles o tensor de curvatura de Riemann se torna muito simples⁴⁸:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu}^{(d)} = \frac{R^{(d)}}{d(d-1)} [g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}] \quad (\text{G.5})$$

essa condição é necessária e suficiente para que um espaço tenha simetria máxima. Esse é um dos motivos pelos quais, dentre as soluções das equações de Einstein, é conveniente trabalharmos com soluções que correspondem a espaços de simetria máxima.

Vejamos alguns exemplos.

⁴⁸Veja seção 3.9 de [32].

G.1 Esfera

A métrica da esfera \mathcal{S}_d pode ser obtida da seguinte forma: considere uma esfera d dimensional imersa em um espaço euclidiano $d + 1$ dimensional, a equação que a define é

$$X^0 + X^1 + \dots + X^{d-1} + X^d = L^2 \quad (\text{G.6})$$

o elemento de distância nesse espaço é

$$ds^2 = (dX^0)^2 + (dX^1)^2 + \dots + (dX^{d-1})^2 + (dX^d)^2 \quad (\text{G.7})$$

usando (G.6) para eliminar a coordenada X^d obtemos a métrica induzida

$$ds^2 = (dX^0)^2 + (dX^1)^2 + \dots + (dX^{d-1})^2 + \frac{(X^0 dX^0 + X^1 dX^1 + \dots + X^{d-1} dX^{d-1})^2}{L^2 - X^0 - X^1 - \dots - X^{d-1}} \quad (\text{G.8})$$

Para provarmos que esse se trata de um espaço com simetria máxima basta analisarmos o grupo de simetrias da métrica. É evidente de (G.6) que o grupo de simetria é $SO(d + 1)$, portanto tem $d(d + 1)/2$ simetrias, logo é um espaço de simetria máxima.

O tensor de curvatura é facilmente calculado se fizermos uso do fato de espaços de simetria máxima serem homogêneos e isotrópicos. Podemos calcular a métrica apenas numa vizinhança infinitesimal de um ponto qualquer e usá-la para calcular $R_{\rho\sigma\mu\nu}^{(d)}$ o resultado deve valer para todo o espaço. Para a esfera vale

$$R_{\rho\sigma\mu\nu}^{(d)} = \frac{1}{L^2} [g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}] \quad (\text{G.9})$$

Esse procedimento de obtenção de métrica induzida pode ser generalizado. Considere um espaço \mathcal{G}_{d+1} com assinatura Euclidiana ou Minkowskiana, uma superfície pode ser definida nele pela equação

$$\frac{X^0}{k_0} + X^1 + \dots + X^{d-1} + \frac{X^d}{k_d} = \frac{L^2}{k} \quad (\text{G.10})$$

$$ds^2 = k_0 (dX^0)^2 + (dX^1)^2 + \dots + (dX^{d-1})^2 + k_d (dX^d)^2$$

assim, dependendo dos valores das constantes k_0 , k_d e k obteremos superfícies diferentes em espaços com assinaturas diferentes. $k_0 = 1$ corresponde à assinatura Euclidiana, $k_0 = -1$ à assinatura Minkowskiana.

G.2 Anti-de Sitter

A métrica de AdS_d é obtida de (G.10) com $k_0 = k_d = k - 1$,

$$-X^0 + X^1 + \dots + X^{d-1} - X^d = -L^2$$

$$ds^2 = k_0 (dX^0)^2 + (dX^1)^2 + \dots + (dX^{d-1})^2 - (dX^d)^2 \quad (\text{G.11})$$

Seu grupo de simetria é $SO(d - 1, 2)$ portanto tem $d(d + 1)/2$ simetrias, logo é um espaço de simetria máxima. Seu tensor de curvatura, Ricci e escalar de Ricci são facilmente obtidos.

$$\begin{aligned} R_{\rho\sigma\mu\nu}^{(d)} &= -\frac{1}{L^2} [g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}] \\ R_{\mu\nu}^{(d)} &= -\frac{(d-1)}{L^2} g_{\mu\nu} \\ R^{(d)} &= -\frac{d(d-1)}{L^2} \end{aligned} \quad (\text{G.12})$$

Esse é o espaço de maior interesse nesse texto. Vejamos uma forma útil de parametrizá-lo.

Coordenadas Globais

Sejam os parâmetros $t \in \mathbb{R}$ e $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. Parametrizamos as coordenadas como

$$\begin{aligned}
 X^0 &= L \cosh \rho \sin t \\
 X^i &= L \omega^i \sinh \rho \\
 X^d &= L \cosh \rho \cos t \\
 ds^2 &= L^2 \left[-(\cosh \rho)^2 dt^2 + d\rho^2 + (\sinh \rho)^2 d\Omega_{(d-2)}^2 \right]
 \end{aligned} \tag{G.13}$$

onde

$$\sum_i (\omega^i)^2 = 1 \tag{G.14}$$

Coordenadas de Poincaré

Sejam os parâmetros $t, z, x^i \in \mathbb{R}$. Parametrizamos as coordenadas como

$$\begin{aligned}
 X^0 &= \frac{L}{2} e^{-z} \left[1 + e^{2z} \left(1 + (x^i)^2 - t^2 \right) \right] \\
 X^i &= L e^z x^i \\
 X^{d-1} &= \frac{L}{2} e^{-z} \left[1 - e^{2z} \left(1 - (x^i)^2 + t^2 \right) \right] \\
 X^d &= L e^z t \\
 ds^2 &= L^2 \left[dz^2 + e^{2z} \left((dx^i)^2 - dt^2 \right) \right]
 \end{aligned} \tag{G.15}$$

Essa parametrização cobre apenas metade de AdS_d .

Fazendo a mudança de variáveis $u = e^{-z} > 0$, obtemos a métrica

$$ds^2 = \frac{L^2}{u^2} \left[du^2 + (dx^i)^2 - dt^2 \right] \tag{G.16}$$

Referências

- [1] Barton Zwiebach. *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, second edition edition, 2009. ISBN-13 978-0-521-88032-9.
- [2] Clifford V. Johnson. *D-Branes*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2002.
- [3] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal. *Conformal Field Theory*. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [4] Juan Maldacena. *International Journal of Theoretical Physics*, 38(4):1113–1133, 1999.
- [5] Enrique Álvarez, Luis Álvarez Gaumé, and Yolanda Lozano. A canonical approach to duality transformations. *Physics Letters B*, 336(2):183–189, Sep 1994.
- [6] J F Gomes, G M Sotkov, and A H Zimerman. T-duality in 2d integrable models. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(16):4629–4640, Apr 2004.
- [7] T. H. Buscher. A Symmetry of the String Background Field Equations. *Phys. Lett.*, B194:51, 1987.
- [8] Elias C. Vagenas. Can an axion be the dark energy particle ?, 2017.
- [9] J.G. Russo and A.A. Tseytlin. Exactly solvable string models of curved space-time backgrounds. *Nuclear Physics B*, 449(1-2):91–145, Aug 1995.
- [10] Sergey Frolov. Lax pair for strings in lunin-maldacena background. *Journal of High Energy Physics*, 2005(05):069–069, May 2005.
- [11] Oleg Lunin and Juan Maldacena. Deforming field theories with $u(1) \times u(1)$ global symmetry and their gravity duals. *Journal of High Energy Physics*, 2005(05):033–033, May 2005.
- [12] Juan Maldacena. *International Journal of Theoretical Physics*, 38(4):1113–1133, 1999.
- [13] Luis F Alday and Juan Maldacena. Gluon scattering amplitudes at strong coupling. *Journal of High Energy Physics*, 2007(06):064–064, Jun 2007.
- [14] Barton Zwiebach. *A First Course in String Theory, Figura 6.1*. Cambridge University Press, second edition edition, 2009. ISBN-13 978-0-521-88032-9.
- [15] David Tong. *String Theory, University of Cambridge Part III Mathematical Tripos*. 2009. Lecture Notes.
- [16] Takeyuki Hida. *Brownian Motion, Applications of Mathematics*, volume 11. Springer-Verlag, 1980. ISBN 13: 9780387904399.
- [17] Takeyuki Hida, Izumi Kubo, Hisao Nomoto, and Hisaaki Yoshizawa. On projective invariance of brownian motion. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. Ser. A*, 4(3):595–609, 1969.
- [18] K. Pohlmeyer. The jost-schroer theorem for zero-mass fields. *Comm. Math. Phys.*, 12(3):204–211, 1969.
- [19] Michael B. Green, John H. Schwarz, and Edward Witten. *Superstring Theory: 25th Anniversary Edition*, volume 1. Cambridge University Press, 2012.
- [20] Steven Weinberg. *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*. Cambridge University Press, 2005.
- [21] C. Callan and L. Thorlacius. Sigma Models and String Theory. In A. Jevicki and C.-I. Tan, editors, *Particles, Strings and Supernovae, Volumes I and II*, page 795, 1989.
- [22] Ram Brustein, Dennis Nemeschansky, and Shimon Yankielowicz. Beta functions and s-matrix in string theory. *Nuclear Physics B*, 301(2):224 – 246, 1988.

- [23] Joseph Polchinski. *String Theory Volume 1: An introduction to the Bosonic String, Figura 8.1*. Cambridge University Press, 2001. ISBN-13 978-0-521-63303-1.
- [24] T. H. Buscher. Path Integral Derivation of Quantum Duality in Nonlinear Sigma Models. *Phys. Lett.*, B201:466, 1988.
- [25] Enrique Alvarez and M. A. R. Osorio. Duality Is an Exact Symmetry of String Perturbation Theory. *Phys. Rev.*, D40:1150, 1989.
- [26] Renata Kallosh and Arkady A Tseytlin. Simplifying superstring action on $ads_5 \times S^5$. *Journal of High Energy Physics*, 1998(10):016–016, Oct 1998.
- [27] G. Veneziano. Scale factor duality for classical and quantum strings. *Phys. Lett.*, B265:287–294, 1991.
- [28] U. Camara da Silva, A. A. Lima, and G. M. Sotkov. Scale factor self-dual cosmological models. *Journal of High Energy Physics*, 2015(7), Jul 2015.
- [29] U. Camara da Silva, A. L. Alves Lima, and G. M. Sotkov. Scale factor duality for conformal cyclic cosmologies. *Journal of High Energy Physics*, 2016(11), Nov 2016.
- [30] A. L. A. Lima, U. Camara da Silva, and G. M. Sotkov. Scale factor duality for domain walls holography, arxiv:1911.08392 [hep-th].
- [31] Gleb Arutyunov. *Lectures on String Theory*. 2019. Lecture Notes.
- [32] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019.
- [33] Joseph Polchinski. *String Theory Volume 1: An introduction to the Bosonic String*. Cambridge University Press, 2001. ISBN-13 978-0-521-63303-1.
- [34] B. Sathia p palan. Duality in statistical mechanics and string theory. *Phys. Rev. Lett.*, 58:1597–1599, Apr 1987.
- [35] Mark Srednicki. *Quantum Field Theory*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.
- [36] Curtis G. Callan, Jr. and Larus Thorlacius. SIGMA MODELS AND STRING THEORY. In *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: Particles, Strings and Supernovae (TASI 88) Providence, Rhode Island, June 5-July 1, 1988*, pages 795–878, 1989.
- [37] E. Verdaguer. Soliton solutions in space-times with two space - like Killing fields. *Phys. Rept.*, 229:1–80, 1993.
- [38] Kerstin E. Kunze. T-duality and penrose limits of spatially homogeneous and inhomogeneous cosmologies. *Physical Review D*, 68(6), Sep 2003.

Lista de Figuras

1	Superfície traçada pela corda ao se propagar no espaço-tempo[14].	3
2	Integrais de caminho temporalmente ordenadas. a) Representa a primeira integral dupla em (4.106); b) Representa a segunda integral dupla em (4.106).	26
3	Cordas fechadas orientadas com números de winding $\omega = +1$, $\omega = 0$ e $\omega = -1$ [23].	40