

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

LAÍS DE BORTOLI LECCHI

**COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS APROXIMADOS PARA ANÁLISE
NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DAS NORMAS DE ESTRUTURAS DE
AÇO E DE CONCRETO ARMADO**

VITÓRIA

2020

LAÍS DE BORTOLI LECCHI

**COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS APROXIMADOS PARA ANÁLISE
NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DAS NORMAS DE ESTRUTURAS DE
AÇO E DE CONCRETO ARMADO**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Civil - área de concentração Estruturas, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Walnório Graça Ferreira

VITÓRIA

2020

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

L457c Lecchi, Laís De Bortoli, 1993-
Comparação entre métodos aproximados para análise não linear geométrica das normas de estruturas de aço e de concreto armado / Laís De Bortoli Lecchi. - 2020.
126 f. : il.

Orientador: Walnório Graça Ferreira.
Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Estabilidade estrutural. 2. Análise estrutural (Engenharia). 3. Pórticos estruturais. I. Ferreira, Walnório Graça. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. III. Título.

CDU: 624

LAÍS DE BORTOLI LECCHI

**COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS APROXIMADOS PARA ANÁLISE NÃO
LINEAR GEOMÉTRICA DAS NORMAS DE ESTRUTURAS DE AÇO E DE
CONCRETO ARMADO**

Aprovada em 20 de fevereiro de 2020, por:

Prof. Dr. Walnório Graça Ferreira

Orientador - Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Macksuel Soares de Azevedo

Examinador interno - Universidade Federal do Espírito Santo

**Prof. Dr. Paulo Manuel Mendes Pinheiro
da Providência e Costa**

Examinador externo - Universidade de Coimbra

Prof. Dr. Rodrigo Silveira Camargo

Examinador externo - Universidade Federal do Espírito Santo

VITÓRIA

2020

*Em memória da mulher mais forte que já conheci:
minha avó, Irlanda Joana Baioco Lecchi.*

“Não há nada, a não ser HaShem”

AGRADECIMENTOS

Ao único Deus eterno (Devarim 6:4), criador de todas as coisas, pelo dom da vida, saúde e inteligência.

À minha amada família, que possibilitou minha chegada até aqui.

Ao meu orientador, Professor Walnório, mestre no sentido completo da palavra, por toda dedicação, oportunidades e amizade, desde 2012.

Aos meus amigos Elaine e Jaime, pelo apoio e amizade.

À Prof^a. Dr^a. Renata Gomes Lanna da Silva, pela gentil contribuição no trabalho.

Ao Prof. Dr. José Milton de Araújo, pelos valiosos esclarecimentos.

Ao M. Sc. Maurício Araújo de Seixas Leal, pela contribuição e atenção.

RESUMO

Atualmente, para o contexto da engenharia estrutural, tem-se requerido dos profissionais da área cada vez mais conhecimento e domínio de temas relacionados à estabilidade de estruturas. Apesar desse fato, a análise estrutural de segunda ordem, seja por meio de métodos aproximados, ou por análise rigorosa, ainda não é um tema amplamente difundido na academia. A proposta desta dissertação é comparar os métodos aproximados de análise não linear geométrica de estruturas de aço e concreto armado, com análise rigorosa de segunda ordem no programa Ansys 14.0. Esses métodos aproximados estão contidos nas normas de projeto de estruturas de aço (ABNT NBR 8800:2008 e ABNT NBR 8800:1986), de concreto armado (ABNT NBR 6118:2014) e na norma europeia EN 1993-1-1:2005. Os procedimentos apresentados neste trabalho são: o Método da Amplificação dos Esforços Solicitantes da NBR 8800:2008; o Parâmetro de Instabilidade α e o Coeficiente γ_z , da NBR 6118:2014; o método P-Delta iterativo, da NBR 8800:1986, e o método da norma europeia. A dissertação é composta de uma revisão bibliográfica a respeito dos tipos de análise estrutural e a importância da consideração dos efeitos de segunda ordem, para o cálculo e dimensionamento de estruturas, bem como, trata dos aspectos dos dois principais tipos de não linearidade de estruturas: a geométrica e a física. Além disso, apresentam-se cada um dos métodos supracitados, descrevendo suas formulações e seus limites de aplicação. No capítulo 4, são realizados exemplos numéricos, de onde são extraídas as informações para a comparação entre os métodos. Por fim, no capítulo 5, tem-se as conclusões da pesquisa.

Palavras-chave: Estabilidade global. Análise não linear. Método da Amplificação dos Esforços Solicitantes. Coeficiente γ_z . Método P- Δ iterativo. Coeficiente α_{cr} .

ABSTRACT

Currently, in the structural engineering context, it is more and more necessary that professionals in the area have knowledge and mastery of structural stability topics. Despite this fact, second-order structural analysis, whether by means of approximate methods, or by rigorous analysis, it is still not a widespread topic in the academia. The purpose of this work is to compare the approximate methods of geometric nonlinear analysis of steel and reinforced concrete structures, with rigorous second order analysis by Ansys 14.0 program. These methods are contained in the standards for design of steel structures (ABNT NBR 8800:2008 and ABNT NBR 8800:1986), reinforced concrete (ABNT NBR 6118:2014) and the European standard EN 1993-1-1:2005. The procedures presented in this work are: the $B_1 - B_2$ method, from NBR 8800:2008; the Instability Parameter α and the γ_z Coefficient, from NBR 6118:2014; the Equivalent Lateral Force Method, from NBR 8800:1986, and the European Standard Method. The dissertation is composed of a bibliographic review about the types of structural analysis and the importance of considering the effects of second order, for the calculation and design of structures, as well as the treatment with aspects of the two main types of non-linearity of structures: geometric and material. In addition, each of the aforementioned methods are presented, describing their formulations and their application limits. In chapter 4, numerical examples are made, from which the information for comparing the methods is extracted. Finally, in chapter 5, there are the conclusions of the research.

Keywords: Global stability. Nonlinear analysis. $B_1 - B_2$ method. γ_z coefficient. P- Δ iterative method. α_{cr} coefficient.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Momentos $P - \Delta$ e $P - \delta$ gerados por efeito de segunda ordem (global e local).	23
Figura 2 - Tipos de Análise Estrutural	25
Figura 3 - Estrutura original decomposta em dois modelos.....	29
Figura 4 - Coluna com imperfeições: (a) sem carga; (b) com carga.....	33
Figura 5 - Estudo do equilíbrio de uma barra submetida a esforços combinados	36
Figura 6 - Consideração do desaprumo inicial da estrutura	41
Figura 7 - Modelo do pilar equivalente	43
Figura 8 - Deslocamentos e forças fictícias em edifícios de múltiplos andares.....	49
Figura 9 - Deslocamentos horizontais entre pavimentos.....	50
Figura 10 - Esquemas de forças verticais (a) e horizontais (b)	51
Figura 11 - Deslocamento lateral da estrutura	57
Figura 12 - Estrutura com imperfeição lateral.....	58
Figura 13 - (a) Consideração do desaprumo pelo deslocamento dos nós; (b) Consideração do desaprumo pela inserção de uma força lateral equivalente	59
Figura 14 - Substituição da imperfeição local por uma carga distribuída	61
Figura 15 - Pórtico de um pavimento e um vão: dimensões e numeração.....	62
Figura 16 - Ações de cálculo na estrutura	62
Figura 17 - Diagramas de: (a) momento fletor [kNm], (b) esforço normal [kN] e (c) esforço cortante [kN]	63
Figura 18 - Diagramas de momento fletor: (a) da estrutura nt [kNm] e (b) da estrutura lt [kNm]	64
Figura 19 - Diagramas de esforço normal: (a) da estrutura nt [kN] e (b) da estrutura lt [kN].....	64
Figura 20 - Diagramas de: (a) momento fletor [kNm], (b) esforço normal [kN] e (c) esforço cortante [kN]	67
Figura 21 - Diagramas de: (a) momento fletor [kNm], (b) esforço normal [kN] e (c) esforço cortante [kN]	68
Figura 22 - Modelo 1 com cargas verticais e contido lateralmente.....	70
Figura 23 - Modelo 2 com ações horizontais e reação R	71

Figura 24 - Diagramas de: (a) momento fletor modelo 1 [kNm], (b) momento fletor modelo 2 [kNm]	72
Figura 25 - Diagramas de: (a) esforço normal modelo 1 [kN], (b) esforço normal modelo 2 [kN]	72
Figura 26 - Diagramas de: (a) esforço cortante modelo 1 [kN], (b) esforço cortante modelo 2 [kN]	72
Figura 27 - Diagramas de: (a) momento fletor [kNm], (b) esforço normal [kN] e (c) esforço cortante [kN]	73
Figura 28 - Pórtico de dois pavimentos e um vão: dimensões e numeração	76
Figura 29 - Ações de cálculo na estrutura	77
Figura 30 - Diagramas de: (a) momento fletor [kNm], (b) esforço normal [kN] e (c) esforço cortante [kN]	78
Figura 31 - Diagramas de momento fletor: (a) da estrutura nt [kNm] e (b) da estrutura lt [kNm]	79
Figura 32 - Diagramas de esforço normal: (a) da estrutura nt [kN] e (b) da estrutura lt [kN]	79
Figura 33 - Diagramas de: (a) momento fletor [kNm], (b) esforço normal [kN] e (c) esforço cortante [kN]	84
Figura 34 - Diagramas de: (a) momento fletor [kNm], (b) esforço normal [kN] e (c) esforço cortante [kN]	85
Figura 35 - Novas ações horizontais aplicadas ao pórtico	88
Figura 36 - Diagramas de: (a) momento fletor [kNm], (b) esforço normal [kN] e (c) esforço cortante [kN]	89
Figura 37 - Diagramas de: (a) momento fletor [kNm], (b) esforço normal [kN] e (c) esforço cortante [kN]	91
Figura 38 - Dimensões e numeração	96
Figura 39 - Ações de cálculo na estrutura	97
Figura 40 - Deslocamento horizontal no 3º pavimento (nó 11)	100
Figura 41 - Deslocamento horizontal no topo do pórtico (nó 14)	101
Figura 42 - Deslocamento horizontal no 3º pavimento (nó 11), com rigidez reduzida para os métodos P-Delta iterativo e Europeu	102
Figura 43 - Deslocamento horizontal no topo (nó 14), com rigidez reduzida para os métodos P-Delta iterativo e Europeu	102
Figura 44 - Curvas parâmetro de carga x momento fletor no pilar 9	104

Figura 45 - Curvas parâmetro de carga x momento fletor no pilar 12	104
Figura 46 - Curvas parâmetro de carga x esforço normal no pilar 9	105
Figura 47 - Curvas parâmetro de carga x esforço normal no pilar 12.....	105
Figura 48 - Curvas parâmetro de carga x esforço cortante no pilar 9	106
Figura 49 - Curvas parâmetro de carga x esforço cortante no pilar 12.....	106
Figura 50 - Pórtico de onze pavimentos e dois vãos: dimensões e numeração.....	108
Figura 51 - Ações de cálculo na estrutura: a) ações horizontais e b) ações verticais	110
Figura 52 - Deslocamento horizontal no topo do pórtico (nó 36).....	113
Figura 53 - Curvas parâmetro de carga x momento fletor no pilar 27	114
Figura 54 - Curvas parâmetro de carga x momento fletor no pilar 33	114
Figura 55 - Curvas parâmetro de carga x esforço normal no pilar 27.....	115
Figura 56 - Curvas parâmetro de carga x esforço normal no pilar 33.....	115
Figura 57 - Curvas parâmetro de carga x esforço cortante no pilar 27.....	116
Figura 58 - Curvas parâmetro de carga x esforço cortante no pilar 33.....	116

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Classificação das estruturas de acordo com o coeficiente B_2	31
Tabela 2 - Convenção de sinal para M_1 e M_2	35
Tabela 3 - Valores limites para α em função do tipo de contraventamento	46
Tabela 4 - Relação entre β e α_{cr}	56
Tabela 5 - Valores de cálculo da imperfeição local em arco e_0/L	60
Tabela 6 - Resultados obtidos pelo método P-Delta	68
Tabela 7 - Resumo de resultados	75
Tabela 8 - Coeficientes de majoração	75
Tabela 9 - Resultados obtidos pelo método P-Delta	85
Tabela 10 - Resumo de resultados	94
Tabela 11 - Coeficientes de majoração	94
Tabela 12 - Coeficiente de majoração B_2 para classificação	98
Tabela 13 - Coeficiente de majoração B_2 final	98
Tabela 14 - Coeficientes de majoração $B_1, \gamma_Z, \alpha_{cr}$ e β	99
Tabela 15 - Razão entre os deslocamentos inicial e final (Δ_2/Δ_1) no método P-Delta	99
Tabela 16 - Razão entre os deslocamentos inicial e final (Δ_2/Δ_1) no Ansys	99
Tabela 17 - Perfis adotados para os pilares e as vigas (dimensões em mm)	109
Tabela 18 - Coeficiente de majoração B_2 para classificação	111
Tabela 19 - Coeficiente de majoração B_2 final	111
Tabela 20 - Coeficientes de majoração $B_1, \gamma_Z, \alpha_{cr}$ e β	112
Tabela 21 - Razão entre os deslocamentos inicial e final (Δ_2/Δ_1) no método P-Delta	112
Tabela 22 - Razão entre os deslocamentos inicial e final (Δ_2/Δ_1) no Ansys	112

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	15
1.1. Considerações iniciais.....	15
1.2. Objetivos	18
1.2.1. Objetivo Geral	18
1.2.1. Objetivos Específicos.....	18
1.3. Organização do Texto	19
2. REFERENCIAIS TEÓRICOS	20
2.1. Introdução	20
2.2. Não Linearidades das Estruturas	21
2.2.1. Não Linearidade Física	21
2.2.2. Não Linearidade Geométrica	21
2.3. Tipos de Análises	24
2.4. Métodos Aproximados para Análise de Segunda Ordem.....	26
3. MÉTODOS APROXIMADOS PARA ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA	28
3.1. O MÉTODO DA AMPLIFICAÇÃO DOS ESFORÇOS SOLICITANTES (MAES) 28	
3.1.1. Introdução	28
3.1.1.1. Imperfeições de Material.....	30
3.1.1.2. Imperfeições Geométricas	30
3.1.2. Classificação da Estrutura	31
3.1.3. Metodologia do Anexo D da Norma Brasileira	32
3.1.3.1. O Coeficiente B_1	33
3.1.3.2. O Coeficiente B_2	36
3.2. O PARÂMETRO DE INSTABILIDADE α E O COEFICIENTE γ_z	39
3.2.1. Introdução	39
3.2.2. Imperfeições de Material na NBR 6118:2014.....	40
3.2.3. Imperfeições Geométricas na NBR 6118:2014.....	41
3.2.4. O Parâmetro de Instabilidade α	43
3.2.5. O Coeficiente γ_z	47

3.3. O MÉTODO DA FORÇA LATERAL EQUIVALENTE OU MÉTODO P-Δ ITERATIVO.....	49
3.4. METODOLOGIA DA NORMA EUROPEIA EN 1993-1-1:2005.....	53
3.4.1. Considerações iniciais	53
3.4.2. Primeira abordagem: EC3-1.....	54
3.4.3. Segunda abordagem: EC3-2a.....	54
3.4.4. Terceira abordagem: EC3-2b.....	55
3.4.5. Quarta abordagem: EC3-3.....	57
3.4.6. Imperfeições Geométricas	58
3.4.6.1. Imperfeição Geométrica Global	58
3.4.6.2. Imperfeição Geométrica Local	59
3.4.7. Imperfeição de Material.....	61
4. APLICAÇÕES NUMÉRICAS	62
4.1. Aplicação 1: Pórtico de Um Pavimento e Um Vão	62
4.1.1. Análise Elástica de Primeira Ordem.....	63
4.1.2. Método $B_1 - B_2$	64
4.1.3. Método da NBR 6118:2014: Coeficiente γ_z	66
4.1.4. Método P-Delta Iterativo	68
4.1.5. Método Europeu.....	69
4.1.6. Análise não linear geométrica no Ansys 14.0	73
4.1.7. Comparação dos resultados	75
4.2. Aplicação 2: Pórtico de Dois Pavimentos e Um Vão	76
4.2.1. Análise Elástica de Primeira Ordem.....	78
4.2.2. Método $B_1 - B_2$	79
4.2.3. Método da NBR 6118:2014: Coeficiente γ_z	82
4.2.4. Método P-Delta Iterativo	85
4.2.5. Método Europeu.....	86
4.2.6. Análise não linear geométrica no Ansys 14.0	91
4.2.7. Comparação dos resultados	94
4.3. Aplicação 3: Pórtico de Seis Pavimentos e Um Vão	96
4.4. Aplicação 4: Pórtico de Onze Pavimentos e Dois Vãos	108

5. CONCLUSÃO	118
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	121

1. INTRODUÇÃO

1.1. Considerações iniciais

Nos últimos anos, a engenharia de projetos e a construção civil passaram por grandes avanços tecnológicos. Todo esse desenvolvimento promoveu a otimização tanto do peso, quanto da forma dos sistemas estruturais, tornando possível a construção de edifícios de alturas que até então eram inimagináveis. Desse modo, tornou-se também necessária a criação de métodos e softwares para a análise da estabilidade de tais edifícios.

As normas de engenharia, em geral, preveem as análises estruturais de primeira e de segunda ordem. A análise de primeira ordem, ou também conhecida como análise linear elástica, consiste no equacionamento do equilíbrio na condição indeformada da estrutura. Para este tipo de análise, assume-se a hipótese de pequenos deslocamentos e que os mesmos não afetam o equilíbrio da estrutura.

Já para a análise geométrica de segunda ordem (ou não linear), é feito o equacionamento na configuração deformada da estrutura, gerando um sistema não linear de equações. Essa análise é necessária quando os efeitos de segunda ordem são significativos, ou seja, “quando a interação entre as forças aplicadas e os deslocamentos provocados promove o aparecimento de esforços adicionais” (OLIVEIRA, 2007). Entretanto, a análise não linear pode ser realizada tanto em regime de pequenos quanto de grandes deslocamentos.

Para a avaliação dos efeitos de segunda ordem, é necessário considerar as fontes de não linearidades na estrutura. Dentre as diversas existentes, destacam-se a não linearidade geométrica e a não linearidade física, ambas tratadas com mais detalhes no Capítulo 2. Em resumo, esses efeitos provocam o aumento das deformações e, conseqüentemente, das tensões nos elementos estruturais, causando a redução de suas resistências. Quando considerados conjuntamente, eliminam a necessidade de processar a análise estrutural e o projeto em fases distintas (CHEN e TOMA, 1994).

Desde a década de 1970, uma considerável quantidade de pesquisas sobre os efeitos de segunda ordem tem sido realizada. Porém, o assunto ainda desperta o interesse dos profissionais da área, considerando sua relevância, principalmente, para estruturas de esbeltez e altura elevadas.

A resolução de um sistema não linear de equações é, na grande maioria das vezes, uma tarefa trabalhosa. Em decorrência disso, pode-se recorrer aos métodos aproximados para o cálculo dos esforços de segunda ordem ou, alternativamente, ao uso de programas computacionais sofisticados que se baseiam no método dos elementos finitos. Dentro desse contexto, os métodos aproximados se destacam por sua facilidade de entendimento e aplicação. Além do mais, os softwares sofisticados constituem em investimentos elevados para o projetista, nem sempre estando ao seu alcance.

As publicações de Horne (1975), Wood e outros (1976) e Le Messurier (1976, 1977) foram fundamentais para o dimensionamento prático de estruturas de múltiplos andares, ao introduzirem uma maneira aproximada de se quantificar o efeito da não linearidade geométrica global (efeito $P - \Delta$).

No Brasil, os trabalhos de Franco (1985, 1991) e Vasconcelos (1985) para o estudo dos efeitos de segunda ordem, em edifícios de concreto armado, culminaram na metodologia simplificada que pode ser encontrada na atual ABNT NBR 6118:2014, para projeto de estruturas em concreto armado.

Muitos pesquisadores têm investigado o comportamento de estruturas quando submetidas às diversas fontes de não linearidades, conduzindo as análises para um nível mais rigoroso de sofisticação. Nesse sentido, destacam-se os trabalhos de Chen e outros (1996), que analisam a estabilidade de pórticos com ligações semirrígidas; Lu e outros (2009), que fazem a análise de segunda ordem inelástica de pórticos de estruturas mistas, baseado no método da rótula plástica refinada; Silva (2009), que apresenta um programa computacional (CS-ASA) capaz de realizar análise rigorosa de segunda ordem e Landesmann (2010), que realiza análise inelástica de pórticos por meio do método da rótula plástica.

No âmbito da análise de segunda ordem via métodos aproximados, destacam-se os trabalhos de Oliveira (2007), que estuda a eficácia dos resultados coeficiente γ_z quando comparado ao programa Ansys; Moncayo (2011) que relaciona diversos parâmetros de métodos aproximados com o programa TQS, para a análise de segunda ordem em edifícios de concreto armado; Suruceanu (2015), que compara a metodologia do Eurocódigo 3, para a análise de estabilidade de pórticos, com os resultados obtidos em simulações numéricas no programa ADINA e, Leal (2016), que compara os esforços totais obtidos em pórticos 3D, por meio da aplicação dos coeficientes γ_z e B_2 , com simulações numéricas, via programa Ansys.

Neste trabalho são abordados quatro métodos aproximados para o cálculo dos esforços totais das estruturas, a saber:

- o Método da Amplificação dos Esforços Solicitantes (MAES), apresentado originalmente na norma americana ANSI/AISC (1986) e, posteriormente, adotado pela norma brasileira ABNT NBR 8800:2008 para projeto de estruturas em aço, que se utiliza dos coeficientes de amplificação de esforços B_1 (para efeito local) e B_2 (para efeito global);
- o método da norma brasileira ABNT NBR 6118: 2014 para projeto em concreto armado, que consiste no Parâmetro de instabilidade α , que determina se uma estrutura é de nós fixos ou de nós móveis, e no Coeficiente γ_z , utilizado tanto para a classificação da estrutura, quanto na majoração das ações horizontais e, conseqüentemente dos esforços solicitantes finais;
- o método da Força Lateral Equivalente ($P-\Delta$ iterativo), adotado na NBR 8800:1986 (versão anterior à 2008), que combina as ações horizontais atuantes na estrutura com forças laterais fictícias (criadas para a consideração do efeito de segunda ordem), em um processo de iterações até a convergência do resultado;
- o método da norma europeia EN 1993-1-1:2005, que por meio do coeficiente α_{cr} , determina se uma estrutura é de nós fixos ou móveis. Os efeitos de segunda ordem nesta norma, quando significativos, podem ser levados em consideração de duas maneiras: ou amplificando-se os esforços de primeira ordem, ou as ações horizontais.

Vale ressaltar que, apesar dos métodos aproximados serem adotados pelas normas de engenharia e, em muitos casos, apresentarem boa correlação com programas computacionais sofisticados, como o Ansys, os mesmos apresentam limitações de utilização, o que será elucidado ao longo do texto.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo Geral

A presente pesquisa tem por objetivo principal a comparação entre os métodos aproximados apresentados nas normas brasileiras e europeia, para análise geometricamente não linear de estruturas de múltiplos andares e diversas configurações de carregamentos.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Introduzir os conceitos e terminologias pertinentes ao entendimento dos métodos aproximados de análise elástica de segunda ordem;
- Apresentar e comparar as metodologias e parâmetros de análise de segunda ordem das normas brasileiras e europeia;
- Realizar exemplos numéricos de pórticos submetidos a carregamentos gravitacionais e desestabilizantes diversos;
- Comparar os resultados entre os métodos aproximados e, também, com simulação numérica no programa Ansys 14.0;
- Obtenção das devidas conclusões.

1.3. Organização do Texto

A dissertação de mestrado é dividida nos seguintes capítulos, conforme se segue:

Capítulo 1: introdução do trabalho contendo o estado do conhecimento e as justificativas, além da apresentação dos objetivos geral e específico.

Capítulo 2: referenciais teóricos do tema em questão. São consideradas as não linearidades das estruturas, além da apresentação dos conceitos da análise estrutural e o uso dos métodos aproximados.

Capítulo 3: descrição detalhada das metodologias aproximadas para análise não linear geométrica.

Capítulo 4: aplicações numéricas; avaliação dos efeitos de segunda ordem em modelos estruturais por meio dos métodos: MAES, Coeficiente γ_z , P-Delta iterativo e o Método da Norma Europeia.

Capítulo 5: Apresenta as conclusões e considerações finais acerca da pesquisa, como também, sugestões para trabalhos futuros.

Referências bibliográficas.

2. REFERENCIAIS TEÓRICOS

2.1. Introdução

A análise linear elástica, em que a estrutura é considerada perfeita, ainda é bastante utilizada dentro do contexto de projetos. Suas equações de equilíbrio são obtidas baseando-se na configuração inicial indeformada da estrutura. Outra simplificação inerente à análise, é quanto às deformações, que são tomadas pequenas, ou seja, com efeitos insignificantes para o equilíbrio e resposta do sistema estrutural. O problema da análise de primeira ordem reside na incapacidade de descrever o comportamento real de estruturas sob condições de carregamento limite.

Em razão do exposto, a maioria das normas que se baseiam no modelo de estado limite último (ELU) disponibiliza procedimentos simplificados, como também, maneiras geometricamente exatas, para a aproximação da análise ao comportamento real das estruturas. Assim, a finalidade principal da análise de segunda ordem, em que a estrutura é tomada com suas não linearidades de natureza geométrica (efeitos $P - \Delta$ global e $P - \delta$ local) e do material, é obter uma resposta mais realística do comportamento estrutural.

Em geral, as normas prescrevem que os efeitos de segunda ordem devem ser tomados em conta quando são significativos, isto é, quando a interação entre as ações aplicadas e os deslocamentos provocados promove o surgimento de esforços adicionais, que afetam o comportamento e resposta da estrutura. Uma medida comum entre as normas de engenharia para a dispensa da análise de segunda ordem, é que esses esforços adicionais sejam iguais ou inferiores a 10% dos esforços obtidos em análise linear elástica.

2.2. Não Linearidades das Estruturas

2.2.1. Não Linearidade Física

A não linearidade física se caracteriza pelas relações não lineares entre tensão e deformação de um material (a conhecida Lei de Hooke não é obedecida). A partir de certo valor de carga aplicada, os elementos estruturais perdem sua capacidade de recuperar sua forma inicial quando descarregados, ou seja, acumulam deformações permanentes chamadas deformações plásticas. Nesse caso, os efeitos não lineares são descritos por equações constitutivas mais complexas (SILVA, 2009).

As fontes dessas não linearidades são de naturezas diversas, como por exemplo: fluência e fissuração, principalmente em estruturas de concreto armado, flexibilidade das ligações semirrígidas, a influência de tensões residuais, para o caso de estruturas de aço ou, ainda, outros tipos mais complexos de comportamento do material (FERREIRA et al., 2016).

Dada a complexidade inerente aos fatores acima relatados, as normas brasileiras NBR 8800:2008 e NBR 6118:2014, assim como a americana ANSI/AISC 360-16, permitem tratar a não linearidade física de maneira aproximada, por meio de uma redução nos módulos de rigidez axial e à flexão, para cada elemento estrutural. Já o Eurocódigo 3 (EC3), não efetua essa redução da rigidez, porém é mais conservador na consideração da não linearidade geométrica.

2.2.2. Não Linearidade Geométrica

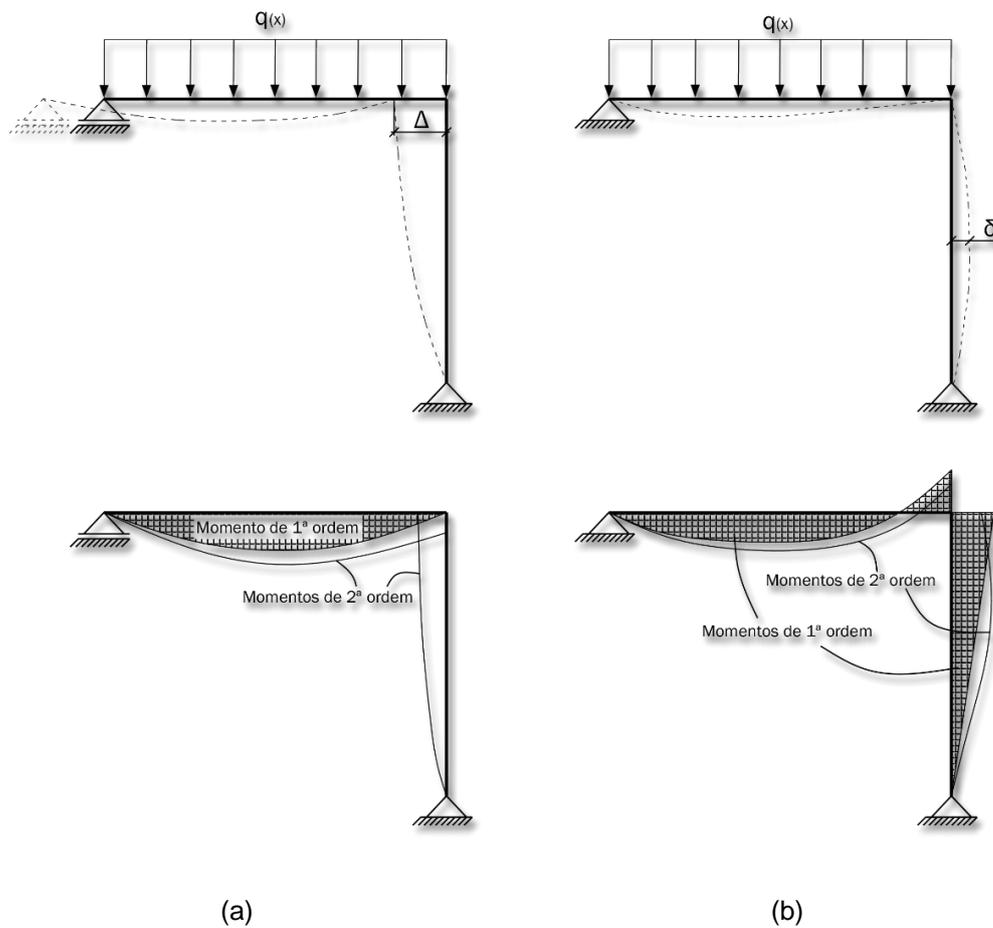
Mesmo obedecendo a lei de Hooke, uma estrutura ainda pode apresentar o comportamento não linear. A deflexão lateral de um membro pode ocasionar o aparecimento de esforços adicionais, em consequência da interação entre as forças verticais aplicadas com essa deflexão (OLIVEIRA, 2007).

A esse tipo de comportamento, chama-se não linearidade geométrica e se refere à falta de proporcionalidade entre os esforços aplicados e os deslocamentos provocados na estrutura (SILVA, 2004), pois existem desvios de ordem global, como o desaprumo (efeito $P - \Delta$), e de ordem local, como a curvatura inicial das barras (efeito $P - \delta$). Assim, a análise é geometricamente linear quando feita em teoria de primeira ordem e, geometricamente não linear, quando em teoria de segunda ordem.

As normas de engenharia apresentam meios simplificados para simular a não linearidade geométrica. A NBR 8800:2008, por exemplo, estabelece que para combinações de ações com somente forças verticais, pode-se inserir o efeito $P - \Delta$ a partir de forças nocionais, da ordem 0,3% do valor das cargas gravitacionais. Já o ANSI/AISC 360-16, também faz uso de forças nocionais, porém da ordem de 0,2%, para o método da análise direta, e de 0,42% para análise de primeira ordem. Para a norma brasileira de concreto armado, não há inserção de forças nocionais, entretanto, para o caso do coeficiente $\gamma_z > 1,1$, faz-se uma amplificação das ações horizontais por $0,95\gamma_z$. O Eurocódigo 3, além de inserir forças laterais fictícias, mesmo em combinações com ações horizontais, para o caso em que estas são inferiores a 15% das cargas gravitacionais, também realiza a amplificação do conjunto de ações horizontais finais (para $3 < \alpha_{cr} < 10$).

A fim de exemplificar os efeitos $P - \delta$ e $P - \Delta$, seja o pórtico da Figura 1 - (a), deslocável lateralmente. Pela análise linear, tem-se momento fletor ao longo da barra horizontal e momento nulo na barra vertical. Se o equilíbrio é formulado na condição deformada do pórtico, aparecerão momentos maiores para a barra horizontal. A barra vertical, que antes possuía momento fletor nulo, passa a apresentar momento fletor não nulo. Esses momentos adicionais são causados principalmente pelo efeito $P - \Delta$, em que Δ é o deslocamento lateral do pórtico e P representa a carga vertical $q(x)$ aplicada ao longo da barra.

Figura 1 - Momentos $P - \Delta$ e $P - \delta$ gerados por efeito de segunda ordem (global e local).



Fonte: Adaptado de Ziemian (2010).

Para o pórtico da Figura 1 - (b), contido lateralmente, os momentos de segunda ordem são gerados na viga e no pilar decorrentes da deflexão δ , devida à compressão do pilar. Esse momento adicional no pilar vale a carga vertical vezes a deflexão δ , de onde surge a nomenclatura $P - \delta$. LeMessurier (1977) apresenta um exemplo similar a este, demonstrando os efeitos de segunda ordem para um pórtico de dimensões reais.

Ziemian (2010) faz algumas observações relevantes a respeito da análise de segunda ordem e seus efeitos nas estruturas:

- ❖ O comportamento de segunda ordem afeta os momentos nas vigas, nas ligações e nos pilares. Em estruturas como na Figura 1 - (a), em que não há restrição de deslocamento lateral, as mudanças nos esforços axiais e cortante aumentam de maneira menos substancial que o aumento de momento fletor;

- ❖ Os momentos de segunda ordem nem sempre têm a mesma distribuição ao longo de toda a estrutura e, a rigor, o momento total atuante não pode ser considerado simplesmente como uma amplificação dos momentos de primeira ordem. Entretanto, sob determinadas condições, é válido o uso dos métodos aproximados para o cálculo dos esforços de segunda ordem;
- ❖ Todas as estruturas, contraventadas ou não, sofrem os efeitos $P - \Delta$ e $P - \delta$. Embora na Figura 1 cada caso seja dominado por um dos efeitos, ambos estão presentes em cada membro em variadas magnitudes.

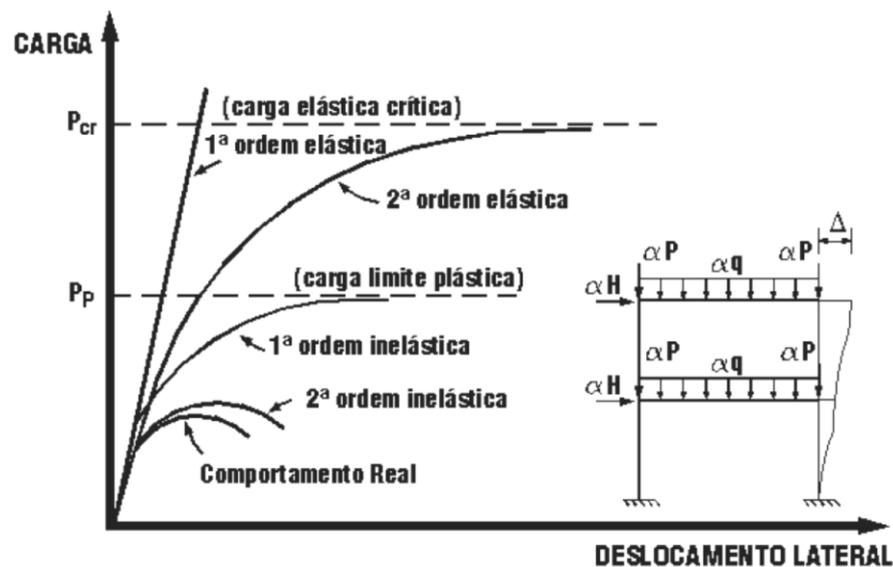
2.3. Tipos de Análises

A finalidade da análise estrutural consiste em se determinar as solicitações de momento fletor (M), esforço normal (N) e esforço cortante (V) para o estado limite último (ELU), como também, os deslocamentos para o estado limite de serviço (ELS), sob determinadas condições de contorno e de carregamento. Identificam-se por meio dos diagramas dos esforços M, N e V as seções transversais mais solicitadas (MUZEAU, 2014).

Existem duas considerações básicas ao se analisar uma estrutura, que são: se o equilíbrio é estudado estando a estrutura na sua posição indeformada ou em sua posição deformada (SILVA, 2004).

Quando uma estrutura é analisada em teoria de primeira ordem, assume-se que o equilíbrio é formulado considerando-a na sua posição indeformada. Dessa forma, os deslocamentos são considerados pequenos e não influenciam no equilíbrio da estrutura. Já para a análise em teoria de segunda ordem, a característica principal é que o equilíbrio é formulado para a estrutura na posição deslocada. Nesse caso, os deslocamentos gerados afetam o equilíbrio, não importando se estes são pequenos ou grandes. O estudo da estabilidade de uma estrutura só pode ser feito em teoria de segunda ordem. De acordo com Carvalho e outros (2014), entre os tipos de análise estrutural, destacam-se os que estão representados na Figura 2.

Figura 2 - Tipos de Análise Estrutural.



Fonte: Silva (2004).

- ❖ **Análise elástica de primeira ordem:** é o método primário para análise de estruturas, no qual o material é modelado como sendo linear-elástico e o equilíbrio é formulado na condição indeformada da estrutura. O resultado dessa análise são as reações e deformações, dentro da hipótese de pequenos deslocamentos, valendo assim, o princípio da superposição de efeitos. Contudo, esse método não é capaz de fornecer qualquer medida da estabilidade da estrutura;
- ❖ **Análise elástica de segunda ordem:** o material é modelado como linear-elástico, porém o equilíbrio é formulado na geometria deformada da estrutura (não linearidade geométrica). A curva carga-deslocamento obtida numa análise de segunda ordem se aproxima assintoticamente do carregamento limite de estabilidade elástica da estrutura. Vale ressaltar que esse limite de estabilidade é similar, porém, distinto da carga crítica elástica P_{cr} , calculada pela estabilidade clássica, ou problema de análise de autovalores.
- ❖ **Análise inelástica de primeira ordem:** para este tipo, o equilíbrio é verificado considerando a geometria indesejada da estrutura e é considerada a não linearidade física do material. A resposta se aproxima assintoticamente do limite plástico do material.

- ❖ **Análise inelástica de segunda ordem:** nesta análise, levam-se em conta os dois tipos de não linearidades: física e geométrica. A carga limite obtida pela análise inelástica de segunda ordem é a que mais se aproxima da resistência real, sendo, portanto, a análise que melhor representa o verdadeiro comportamento da estrutura.

2.4. Métodos Aproximados para Análise de Segunda Ordem

A análise inelástica de segunda ordem é a que melhor se aproxima do comportamento real de uma estrutura, como mostrado no gráfico da Figura 2, pois se torna possível determinar os limites de estabilidade, considerando efeitos de deformações e plastificação dos materiais (ZIEMIAN, 2010). Entretanto, um fator complicador para a utilização da análise refinada é que sua formulação é bastante complexa e, mesmo com recursos computacionais avançados, por vezes não se chega a resultados confiáveis sem um estudo minucioso dos diversos parâmetros a serem considerados, tais como: a inserção de imperfeições iniciais geométricas e de material, a variação não linear da tensão versus deformação e o estudo do equilíbrio da estrutura deformada.

Assim sendo, é possível recorrer a procedimentos mais simples para análise de segunda ordem, para o caso de pórticos com pequenas deformações. Métodos computacionais de análise $P - \Delta$ têm surgido desde a década de 1980, como o de Rutenberg (1981). Wilson e Habibullah (1987) também apresentaram um método computacional aproximado, para a obtenção dos esforços de segunda ordem de pórticos submetidos a ações horizontais.

LeMessurier (1977) apresenta uma formulação interessante para análise não linear aproximada, por meio de fatores de amplificação de esforços de primeira ordem, que inclusive serviu de base para outros métodos, como por exemplo o MAES ($B_1 - B_2$), objeto de estudo da presente pesquisa.

De acordo com Ziemian (2010), deve-se ter cautela no uso de métodos aproximados, pois os mesmos não são adequados na amplificação dos momentos fletores em regiões de conexão entre viga e pilar. Vale ressaltar que essas metodologias se aplicam apenas para estruturas reticuladas, regulares e com distribuição de carregamentos uniformes.

Além disso, metodologias aproximadas que amplificam as ações horizontais podem conduzir a análise para o aumento exacerbado do esforço cortante, algo que não se verifica na prática, como é o caso da NBR 6118:2014 e do EC3.

Existe uma diferença entre as normas de projeto de estruturas, no que tange à sua classificação. A NBR 6118:2014, assim como o EC 3, divide as estruturas em dois tipos: de nós fixos ou de nós móveis. Já a NBR 8800:2008, separa as estruturas em pequenas, médias ou grandes deslocabilidades. Essas classificações são baseadas nos valores obtidos no cálculo dos coeficientes utilizados na amplificação dos esforços de primeira ordem.

3. MÉTODOS APROXIMADOS PARA ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

3.1. O MÉTODO DA AMPLIFICAÇÃO DOS ESFORÇOS SOLICITANTES (MAES)

3.1.1. Introdução

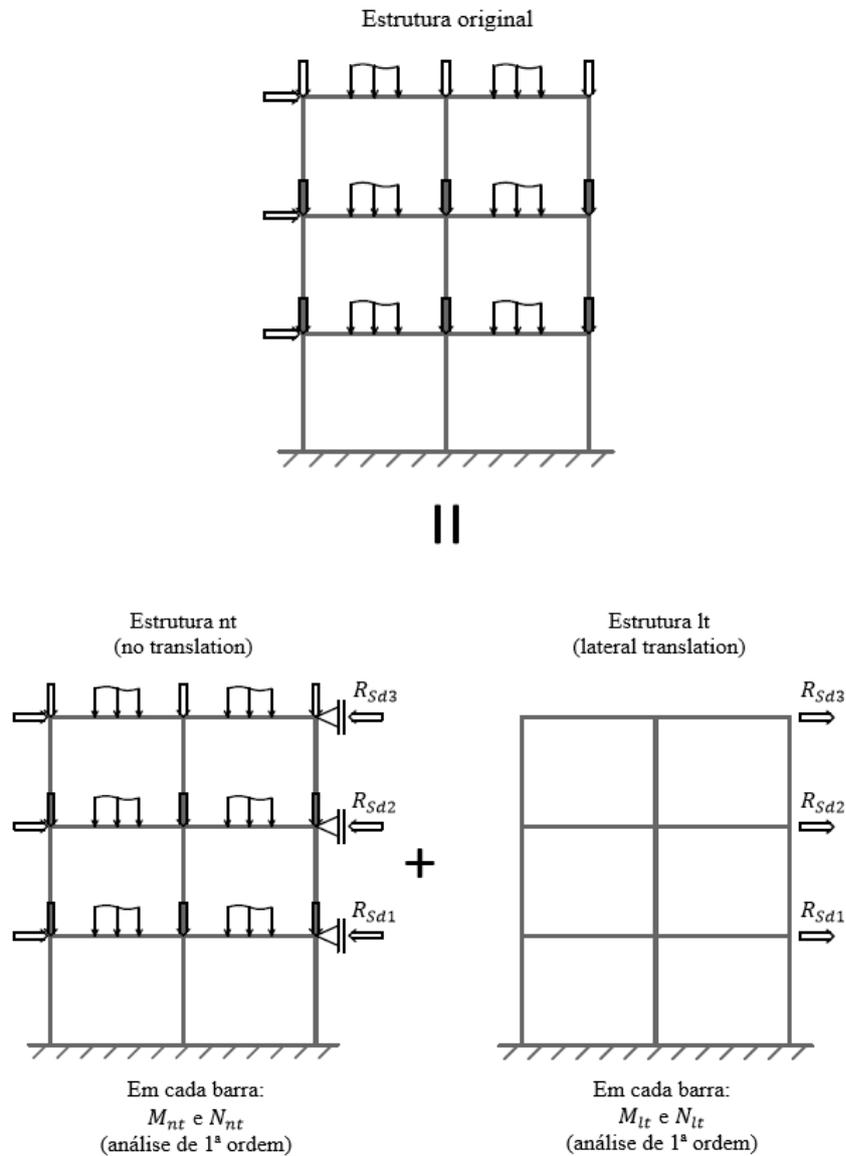
A metodologia dos coeficientes B_1 e B_2 foi primeiramente proposta pelo SSRC (Structural Stability Research Council) e adotada pela norma americana AISC, em 1986 (CARTER, 2013). Pode ser utilizada para estruturas reticuladas, com elementos estruturais uniformes geometricamente e em suas rigidezes, até o limite de $B_2 \leq 1,4$ (WHITE et al., 2006).

A norma brasileira NBR 8800:2008 incorporou essa metodologia, com algumas modificações, denominando-a de *Método da Amplificação dos Esforços Solicitantes*, para análise não linear elástica aproximada. O coeficiente B_1 amplifica os esforços para a consideração da influência da não linearidade geométrica local (efeito $P - \delta$) e, o coeficiente B_2 , para a consideração da não linearidade geométrica global (efeito $P - \Delta$) (LEAL, 2016).

É importante mencionar que, por ser um método aproximado, pode não cobrir a real extensão dos efeitos de segunda ordem. Os coeficientes B_1 e B_2 foram idealizados para estruturas bidimensionais, com condições de carregamento limitadas, não sendo adequados para pórticos com efeitos $P - \delta$ e $P - \Delta$ interdependentes, nem para estruturas irregulares ou tridimensionais. O coeficiente B_2 , por exemplo, é calculado por pavimento, o que torna complicado sua utilização em estruturas com patamares diferentes (ZIEMIAN, 2010).

Para analisar uma estrutura pelo método $B_1 - B_2$ é necessário transformá-la em dois modelos, como mostrado na Figura 3. Na figura, observa-se que a estrutura original, com todos os devidos carregamentos e restrições, é decomposta na soma de outras duas, uma denominada *nt* do inglês "*no translation*" (sem translação) e a segunda, denominada *lt*, também do inglês "*lateral translation*" (translação lateral).

Figura 3 - Estrutura original decomposta em dois modelos.



Fonte: BADKE-NETO e FERREIRA (2016).

A estrutura *nt* tem todas as ações atuantes, porém tem seus nós impedidos de se deslocarem lateralmente, pois são inseridas contenções horizontais fictícias em cada pavimento. Esse modelo estrutural serve para se obter o efeito de segunda ordem local ($P - \delta$), decorrente da curvatura das barras, sem considerar os deslocamentos laterais dos nós (FAKURY et al., 2016), segundo a obtenção do coeficiente B_1 .

A estrutura lt se caracteriza pelo estudo do impacto global ($P - \Delta$) no pórtico, segundo a obtenção do coeficiente B_2 . Essa estrutura contém as mesmas restrições da original, porém as cargas aplicadas são iguais, em módulo, às reações obtidas como resultado da análise linear realizada na estrutura nt com sentido contrário.

3.1.1.1. Imperfeições de Material

A NBR 8800:2008 determina que, para estruturas suscetíveis aos efeitos de segunda ordem, ou seja, em que os esforços de segunda ordem são superiores a 10% dos esforços de primeira ordem, deve-se diminuir a rigidez à flexão e axial para $0,8EI$ e $0,8EA$.

Essa redução ocorre para que de alguma maneira leve-se em conta fatores complexos do comportamento do aço, como por exemplo, o escoamento parcial das seções, devido a elevados níveis de tensões, ainda acentuadas pela existência de tensões residuais (BERNUZZI e CORDOVA, 2016). O AISC também adiciona outro fator de redução τ_b , na rigidez à flexão de membros pertencentes à subestrutura de contraventamento e determina que o uso da rigidez reduzida, é para se obter os limites de resistência e estabilidade. Dessa forma, não se aplica às análises de deslocamentos, deflexão e determinação de período de vibração.

3.1.1.2. Imperfeições Geométricas

A NBR 8800:2008 determina que para consideração das imperfeições geométricas globais, deve-se adicionar um desaprumo interpavimento de $h/333$ (em que h é a altura do pavimento), ou pela aplicação de forças nocionais iguais a 0,3% das cargas gravitacionais no andar considerado, em combinações que não possuem ações laterais. O propósito da força nocional é proporcionar um efeito $P - \Delta$ mínimo à estrutura (MACPHEDRAN e GRONDIN, 2007).

3.1.2. Classificação da Estrutura

A NBR 8800:2008 classifica as estruturas segundo sua deslocabilidade. Se o deslocamento obtido em análise de segunda ordem Δ_2 dividido pelo deslocamento obtido em análise de primeira ordem Δ_1 for menor ou igual a 1,1, diz-se que a estrutura é de pequena deslocabilidade. Se $1,1 < \Delta_2/\Delta_1 \leq 1,4$, diz-se que a estrutura é de média deslocabilidade. Se $\Delta_2/\Delta_1 > 1,4$, a estrutura é de grande deslocabilidade.

O coeficiente B_2 é tomado como uma aproximação aceitável da razão Δ_2/Δ_1 , para $\Delta_2/\Delta_1 \leq 1,4$ e, também, pode ser utilizado para classificar a estrutura quanto à sua deslocabilidade, como se verifica na Tabela 1. Vale ressaltar que o ANSI/AISC 360-16 não realiza essa classificação quanto à deslocabilidade, entretanto estabelece os limites de utilização do coeficiente B_2 .

Tabela 1 - Classificação das estruturas de acordo com o coeficiente B_2 .

Condição	Deslocabilidade
$B_2 \leq 1,1$	Pequena
$1,1 < B_2 \leq 1,4$	Média
$B_2 > 1,4$	Grande

Fonte: NBR 8800:2008.

A NBR 8800:2008 adota os seguintes critérios para a análise de estruturas conforme sua deslocabilidade:

- ❖ Na verificação de estados limites últimos, em cada uma das combinações, pode-se desconsiderar os efeitos globais de segunda ordem em estruturas de pequena deslocabilidade, desde que as forças axiais solicitantes de cálculo de todas as barras que contribuem para a estabilidade lateral da estrutura não sejam superiores a 50% da força axial correspondente ao escoamento da seção transversal. Além disso, devem ser adicionadas imperfeições geométricas;

- ❖ Pode ser efetuada análise de segunda ordem aproximada para estruturas de média deslocabilidade, sendo necessário levar-se em conta o efeito da não linearidade física (diminuição das rigidezes) e da não linearidade geométrica, nos casos em que se aplica;
- ❖ Em estruturas de grande deslocabilidade, preferencialmente, deve-se efetuar análise estrutural rigorosa. No entanto, a critério do responsável técnico do projeto, pode ser utilizado o procedimento descrito no parágrafo acima, referente às estruturas de média deslocabilidade, desde que os efeitos das imperfeições geométricas iniciais sejam adicionados às combinações últimas de ações em que atuem ações variáveis devidas ao vento.

3.1.3. Metodologia do Anexo D da Norma Brasileira

Para a combinação apropriada de ações, em cada andar da estrutura analisada, o momento fletor e a força axial solicitantes de cálculo, M_{sd} e N_{sd} , respectivamente, deverão ser determinados pelas Equações 1 e 2.

$$M_{sd} = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt} \quad (1)$$

$$N_{sd} = N_{nt} + B_2 N_{lt} \quad (2)$$

em que:

- ❖ M_{nt} e N_{nt} são o momento fletor e a força axial solicitantes de cálculo, respectivamente, obtidos por análise elástica de primeira ordem da estrutura nt da Figura 3;
- ❖ M_{lt} e N_{lt} são o momento fletor e a força axial solicitantes de cálculo, respectivamente, obtidos por análise elástica de primeira ordem da estrutura lt da Figura 3.

A força cortante pode ser tomada igual à obtida em análise linear elástica, ou seja, igual à da estrutura original, dada por:

$$V_{sd} = V_{nt} + V_{lt} \quad (3)$$

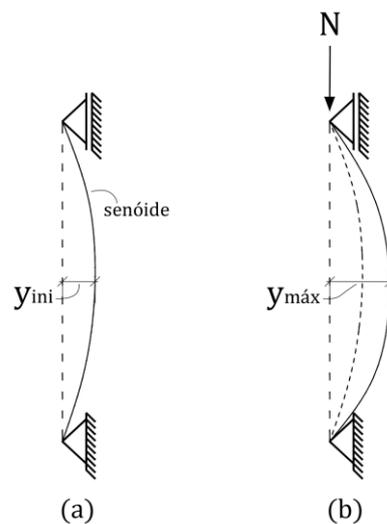
onde:

- ❖ V_{nt} e V_{lt} são as forças cortantes de cálculo na estrutura nt e na estrutura lt , respectivamente.

3.1.3.1. O Coeficiente B_1

Por meio de uma breve exposição de ideias, mostra-se como chegar à expressão que deu origem ao coeficiente B_1 (baseado em BADKE-NETO e FERREIRA, 2016). A dedução completa e passo a passo pode ser obtida em Souza e outros (2018). Seja o pilar da Figura 4 (a), com imperfeição inicial y_{ini} , com uma forma inicial de uma meia onda senoidal. Com a aplicação da força N , o pilar passa à configuração da Figura 4 (b).

Figura 4 - Coluna com imperfeições: (a) sem carga; (b) com carga.



Fonte: adaptado de Souza e outros (2018).

Resolvendo-se a equação diferencial de equilíbrio para o pilar carregado da figura 4 (b), encontra-se a seguinte flecha máxima:

$$y_{m\acute{a}x} = y_{ini} \left(\frac{1}{1 - \frac{N}{N_e}} \right) \quad (4)$$

em que N_e é a força axial que provoca a flambagem elástica por flexão da barra no plano em que atua o momento fletor. É calculada com o comprimento real da barra.

$$N_e = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad (5)$$

onde:

- ❖ E é o módulo de elasticidade do material;
- ❖ I é o momento de inércia da área da seção transversal;
- ❖ L_e é o comprimento real da barra.

O momento máximo do pilar da figura 4 (b) vale:

$$M_{m\acute{a}x} = Ny_{m\acute{a}x} = Ny_{ini} \left(\frac{1}{1 - \frac{N}{N_e}} \right) \quad (6)$$

O produto Ny_{ini} é o momento de primeira ordem. O fator $\left(\frac{1}{1 - \frac{N}{N_e}} \right)$ é o coeficiente de amplificação para a consideração dos efeitos $P - \delta$.

A NBR 8800:2008 define o coeficiente B_1 por:

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - \frac{|N_{sd1}|}{N_e}} \geq 1,0 \quad (7)$$

O coeficiente de equivalência de momentos C_m é obtido conforme as seguintes condições:

- ❖ Se não houver forças transversais entre as extremidades da barra no plano de flexão, C_m será dado por:

$$C_m = 0,60 - 0,40 \frac{M_1}{M_2} \quad (8)$$

sendo $\frac{M_1}{M_2}$ a relação entre o menor e o maior dos momentos fletores solicitantes de cálculo na estrutura *nt* no plano de flexão, nas extremidades apoiadas da barra, tomada como positiva quando os momentos provocarem curvatura reversa e negativa quando provocarem curvatura simples (Tabela 2). É importante ressaltar que essa relação deve ser sempre menor que um, em módulo.

Tabela 2 - Convenção de sinal para M_1 e M_2 .

$\frac{M_1}{M_2} > 0$	Positiva	M_1 e M_2 provocam curvatura reversa
$\frac{M_1}{M_2} < 0$	Negativa	M_1 e M_2 provocam curvatura simples

Fonte: BADKE-NETO e FERREIRA (2016).

Havendo forças transversais entre as extremidades da barra no plano de flexão, o valor de C_m deve ser determinado por análise racional ou ser tomado, de forma conservadora, igual a 1,0.

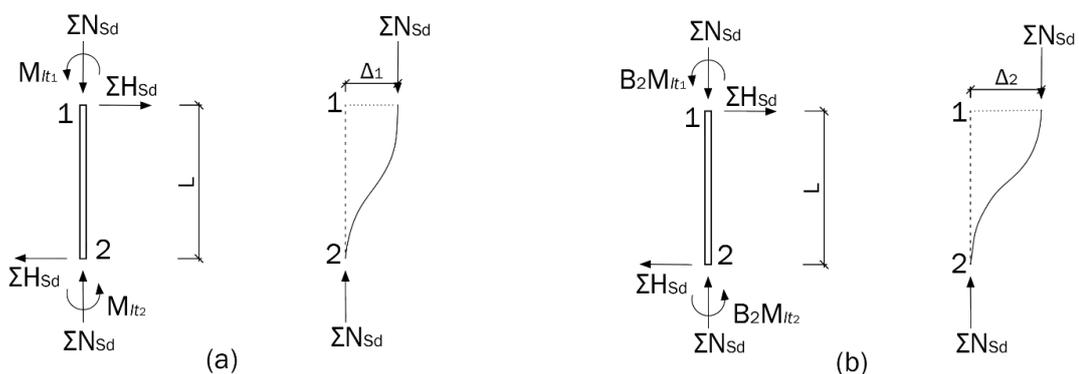
N_{Sd1} é definida como a força axial de compressão solicitante de cálculo, na barra considerada e em análise de primeira ordem.

$$N_{Sd1} = N_{nt} + N_{lt} \quad (9)$$

3.1.3.2. O Coeficiente B_2

Para a avaliação do comportamento global da estrutura utiliza-se o coeficiente B_2 . A dedução completa da expressão deste coeficiente pode ser encontrada em Souza e outros (2018). A partir dos procedimentos de Salmon e outros (2009), faz-se uma breve exposição de ideias para mostrar a origem desse coeficiente. A Figura 5 (a) apresenta uma barra submetida a diversos carregamentos.

Figura 5 - Estudo do equilíbrio de uma barra submetida a esforços combinados.



Fonte: Souza e outros (2018).

O equilíbrio da barra Figura 5 (a) é estabelecido se a seguinte condição é atendida:

$$M_{lt1} + M_{lt2} = \Sigma H_{sd}L \quad (10)$$

A interação entre a carga vertical ΣN_{sd} com o deslocamento Δ_1 provocará um momento adicional $\Sigma N_{sd}\Delta_1$ (efeito $P - \Delta$), que culminará na condição da Figura 5 (b), onde há um acréscimo dos momentos nas extremidades e do deslocamento, que passa a ser Δ_2 . Adotando-se B_2 como fator de amplificação e estabelecendo-se o equilíbrio na condição final, tem-se:

$$B_2(M_{lt1} + M_{lt2}) = \Sigma H_{sd}L + \Sigma N_{sd}\Delta_2 \quad (11)$$

$$B_2 = \frac{\Sigma H_{sd}L + \Sigma N_{sd}\Delta_2}{\Sigma H_{sd}L} \quad (12)$$

Pela análise de primeira ordem, sabe-se que os deslocamentos Δ_1 e Δ_2 são proporcionais às ações horizontais aplicadas.

$$\Delta_1 = \alpha \Sigma H_{sd} \quad (13)$$

$$\Delta_2 = \alpha \left(\Sigma H_{sd} + \frac{\Sigma N_{sd}\Delta_2}{L} \right) \quad (14)$$

em que α é um fator de proporcionalidade.

Assim, por meio de manipulação algébrica simples, chega-se ao valor de B_2 :

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{\Delta_1}{L} \frac{\Sigma N_{sd}}{\Sigma H_{sd}}} \quad (15)$$

A NBR 8800:2008 define B_2 como:

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{R_S} \frac{\Delta_h}{h} \frac{\sum N_{sd}}{\sum H_{sd}}} \quad (16)$$

em que:

- ❖ $\sum N_{sd}$ é a carga gravitacional total que atua no andar considerado;
- ❖ $\sum H_{sd}$ é a força cortante no andar, produzida pelas forças horizontais de cálculo atuantes, usadas para determinar Δ_h e obtida na estrutura original ou na estrutura *lt* (Figura 3);
- ❖ Δ_h é o deslocamento horizontal relativo entre os níveis superior e inferior, ou também chamado deslocamento interpavimento, obtido por meio de uma análise de primeira ordem na estrutura original ou na estrutura *lt*. Caso Δ_h possua valores diferentes em um mesmo andar, deve ser tomado um valor ponderado, de acordo com as cargas gravitacionais atuantes ou, de maneira conservadora, o maior valor;
- ❖ h é a altura do andar;
- ❖ R_S é um coeficiente para ajuste, igual a 0,85 nas estruturas onde o sistema resistente a ações horizontais é constituído por pórticos e igual a 1,0 para todas as outras estruturas.

3.2. O PARÂMETRO DE INSTABILIDADE α E O COEFICIENTE γ_z

3.2.1. Introdução

A NBR 6118:2014 classifica as estruturas em dois tipos: nós fixos ou nós móveis. Quando os efeitos de segunda ordem superam em 10% os esforços de primeira ordem, diz-se que a estrutura é de nós móveis. Do contrário, considera-se de nós fixos.

Afim de possibilitar a análise não linear e essa classificação das estruturas de forma simplificada, a norma de concreto estabelece que processos aproximados podem ser utilizados na verificação da dispensa da consideração dos esforços globais de segunda ordem, sem que haja necessidade de cálculo rigoroso. Este processo se trata da obtenção de dois critérios: o parâmetro de instabilidade α e o coeficiente de amplificação de esforços γ_z .

O parâmetro de instabilidade α fornece a informação a respeito da deslocabilidade da estrutura, sendo utilizado para classifica-la. Já o coeficiente γ_z apresenta dupla utilidade: classificação da estrutura e amplificação das ações horizontais, para a obtenção dos esforços de segunda ordem. Por questão de praticidade, nas aplicações numéricas do Capítulo 4, é utilizado somente o coeficiente γ_z .

De acordo com Araújo (2010), a utilização desses critérios para estruturas aporticadas, a rigor, requer que seja feita uma análise do pórtico espacial de todo o edifício. De forma alternativa, podem-se analisar os diversos pórticos planos da subestrutura de contraventamento, nas direções na planta do edifício, para simplificação.

3.2.2. Imperfeições de Material na NBR 6118:2014

As imperfeições de material, presentes nas estruturas de concreto e, também, responsável pelos efeitos de segunda ordem, devem ser obrigatoriamente consideradas (FERREIRA et al., 2013). Conforme o item 15.7.3 da norma, para estruturas reticuladas de no mínimo quatro andares, a não linearidade física pode ser considerada pela redução dos valores de rigidez para cada elemento estrutural, como se segue:

- ❖ Lajes: $(EI)_{eq} = 0,3E_cI_c$;
- ❖ Vigas: $(EI)_{eq} = 0,4E_cI_c$ para $A_s' \neq A_s$;
 $(EI)_{eq} = 0,5E_cI_c$ para $A_s' = A_s$;
- ❖ Pilares: $(EI)_{eq} = 0,8E_cI_c$;

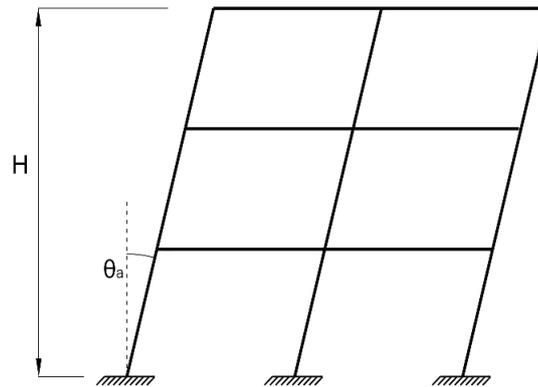
em que:

- A_s' é a área da seção transversal da armadura longitudinal de compressão;
- A_s é a área da seção transversal da armadura longitudinal de tração;
- E_c é o valor representativo do módulo de deformação do concreto (E_{cs} majorado em 10%);
- E_{cs} é o módulo de elasticidade secante.
- I_c é momento de inércia calculado com a seção bruta do pilar equivalente;

3.2.3. Imperfeições Geométricas Globais na NBR 6118:2014

As imperfeições geométricas são tratadas na análise global como um desaprumo das barras verticais, como mostra a Figura 6:

Figura 6 - Consideração do desaprumo inicial da estrutura.



Fonte: Adaptado da NBR 6118:2014.

com:

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{H}} \quad (17)$$

$$\theta_a = \theta_1 \sqrt{\frac{1 + 1/n}{2}} \quad (18)$$

em que:

- $\theta_{1,mín} = 1/300$;
- $\theta_{1,máx} = 1/200$;
- H é a altura total da edificação, em metros;
- n é o número de filas de pilares no pórtico plano.

O desaprumo em forma angular (θ_a) pode ser convertido em uma força equivalente H_i , como na Equação 19, abaixo:

$$H_i = \theta_a F_{vi} \quad (19)$$

em que F_{vi} é a carga no andar considerado.

A NBR 6118:2014 ressalta as seguintes observações a respeito das ações do desaprumo e do vento:

- Quando 30% do momento de tombamento provocado pela ação do vento for maior que o momento de tombamento causado pelo desaprumo, leva-se em conta somente a ação do vento;
- Quando o momento de tombamento provocado pela ação do vento for menor que 30% do momento causado pelo desaprumo, leva-se em conta somente a ação do desaprumo;
- Nos demais casos, faz-se uma combinação das ações de vento e desaprumo, ambas no mesmo sentido, não necessitando respeitar a condição de $\theta_{1,mín}$.

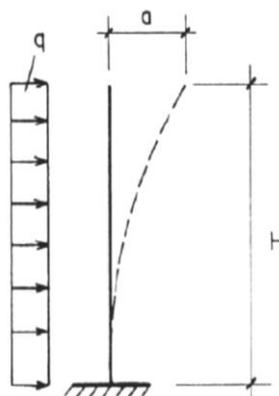
As imperfeições geométricas locais, para estruturas de concreto armado, são consideradas na fase de dimensionamento, em cada lance de pilar, por meio do método do pilar padrão com curvatura aproximada ou pelo método do pilar padrão com rigidez aproximada.

3.2.4. O Parâmetro de Instabilidade α

O parâmetro de instabilidade α surgiu com base nos estudos de Beck e König, em 1967 (apud VASCONCELOS, 1997), que idealizaram modelos estruturais para o tratamento dos efeitos de segunda ordem em pórticos espaciais. O parâmetro α é utilizado como critério de análise de sensibilidade das estruturas quanto aos efeitos provocados pela não linearidade geométrica (LEAL, 2016), classificando-as como de nós fixos ou nós móveis.

O modelo proposto por Beck e König consistia em representar um edifício de diversos pavimentos, a partir de um único pilar engastado em uma extremidade e livre na outra e sob a ação de uma carga horizontal uniformemente distribuída ao longo de sua altura total (Figura 7). Isto foi um artifício para poder tratar a estrutura com uma única equação diferencial.

Figura 7 – Modelo do pilar equivalente.



Fonte: LEAL (2016).

No modelo, partiu-se do princípio que a resistência do edifício para ações laterais se concentrava em poucos pilares rigidamente ligados entre si, de maneira a poderem ser considerados equivalentes a um único pilar.

Estabelecida a condição de equilíbrio de uma barra, é imposta a igualdade entre os momentos externo e interno, de onde surge a equação diferencial na variável y (deslocamento da barra):

$$y(x)'' + y(x) \frac{N_k}{(EI)_k} = 0 \quad (20)$$

onde:

- ❖ $y(x)$ representa o deslocamento do eixo da barra, medido perpendicularmente à ela, sendo o eixo x o eixo da barra;
- ❖ N_k é o somatório de todas as cargas verticais atuantes na estrutura, com seu valor característico;
- ❖ $(EI)_k$ representa o somatório dos valores de rigidez de todos os pilares na direção considerada.

Tornando-se a abscissa x adimensional, pela mudança de variável $\xi = x/L$ e aplicando-se a regra da cadeia, do cálculo clássico, tem-se:

$$y(\xi)'' + y(\xi) \frac{N_k H_{tot}^2}{(EI)_k} = 0 \quad (21)$$

onde H_{tot} é a altura total da estrutura.

Chama-se $\alpha^2 = \frac{N_k H_{tot}^2}{(EI)_k}$ e é um fator adimensional, relacionado com a flambagem da barra (VASCONCELOS, 1997). Dessa forma, α é igual a:

$$\alpha = H_{tot} \sqrt{\frac{N_k}{(EI)_k}} \quad (22)$$

Na norma de concreto armado, a rigidez $(EI)_k$ é substituída por $E_{cs}I_c$, em que E_{cs} é o módulo de elasticidade secante e I_c é momento de inércia calculado com a seção bruta do pilar equivalente. Desse modo, pela NBR 6118:2014, α é dado por:

$$\alpha = H_{tot} \sqrt{\frac{N_k}{E_{cs}I_c}} \quad (23)$$

A condição para que uma estrutura seja considerada de nós fixos, é que α seja menor que α_1 , onde α_1 é dado por:

$$\alpha_1 = 0,2 + 0,1n \quad \text{se } n \leq 3 \quad (24)$$

ou

$$\alpha_1 = 0,6 \quad \text{se } n \geq 4 \quad (25)$$

em que:

- ❖ n é o número de níveis de barras horizontais (pavimentos) acima da fundação ou de um nível pouco deslocável do subsolo;

Mais tarde, em 1985, Franco aperfeiçoou o conceito de pilar equivalente estendendo-o a estruturas contraventadas por sistemas mistos, como ocorre em pilares-paredes + pórticos; associações de pilares-paredes e em sistemas apórticados. Para tanto, é necessário obter-se o deslocamento do topo do edifício sob a ação da carga lateral característica e igualá-lo ao de um pilar equivalente em balanço, de produto $(EI)_k$ constante, sob ação da mesma carga. Assim, a rigidez equivalente valerá:

$$(EI)_{k,equiv.} = \frac{q_k H^4}{8f_k} \quad (26)$$

em que:

- ❖ q_k é a carga lateral característica uniformemente distribuída adotada para o cálculo de f_k ;
- ❖ f_k é o deslocamento do topo do edifício sob a ação da carga lateral característica;
- ❖ H é a altura total do edifício.

Além da restrição em função do número de pavimentos n , Franco (1985) ainda estabelece alguns valores limites para α , para que uma estrutura possa ser considerada de nós fixos, em função dos tipos de contraventamento, como se pode conferir na Tabela 3.

Tabela 3 - Valores limites para α em função do tipo de contraventamento.

Contraventamento	α_{lim}
Pilar-Parede	0,7
Pilar-Parede + Pórtico	0,6
Pórtico	0,5

Fonte: Franco (1985).

3.2.5. O Coeficiente γ_z

Em 1990, o CEB (Comité Européen du Béton) deixou de utilizar o parâmetro de instabilidade α . No ano seguinte, 1991, no Colloquium do CEB na cidade do Rio de Janeiro, Franco e Vasconcelos apresentaram pela primeira vez o coeficiente de amplificação de momentos γ_z , no trabalho intitulado "Practical Assessment of Second Order Effects in Tall Buildings" (FRANCO e VASCONCELOS, 1991).

A dedução completa do coeficiente γ_z pode ser encontrada em Souza e outros (2018). O γ_z é calculado uma única vez, ou seja, possui o mesmo valor para a estrutura inteira, para cada combinação de ações. A Equação 27 mostra formulação de γ_z apresentada na NBR 6118:2014:

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,tot,d}}} \quad (27)$$

onde:

- ❖ $M_{1,tot,d}$ é o momento de tombamento, ou seja, a soma dos momentos de todas as forças horizontais da combinação considerada, com seus valores de cálculo, em relação à base da estrutura;
- ❖ $\Delta M_{tot,d}$ é a soma dos produtos de todas as forças verticais atuantes na estrutura, na combinação considerada, com seus valores de cálculo, pelos deslocamentos horizontais de seus respectivos pontos de aplicação, obtidos da análise de primeira ordem.

Essencialmente, observa-se que o coeficiente γ_z difere do coeficiente B_2 somente pelo fator $1/R_s$, presente na formulação de B_2 , e relativo ao tipo de contraventamento existente na estrutura.

O coeficiente γ_z possui dupla utilidade: a classificação da estrutura e a majoração dos esforços de primeira ordem. Se $\gamma_z \leq 1,1$, a estrutura é considerada de nós fixos e pode-se desprezar os efeitos de segunda ordem. Se $\gamma_z > 1,1$, segundo o item 15.7.2 da NBR 6118:2014, as ações horizontais devem ser majoradas pelo fator $0,95\gamma_z$, sendo este processo válido somente para o limite $\gamma_z \leq 1,3$.

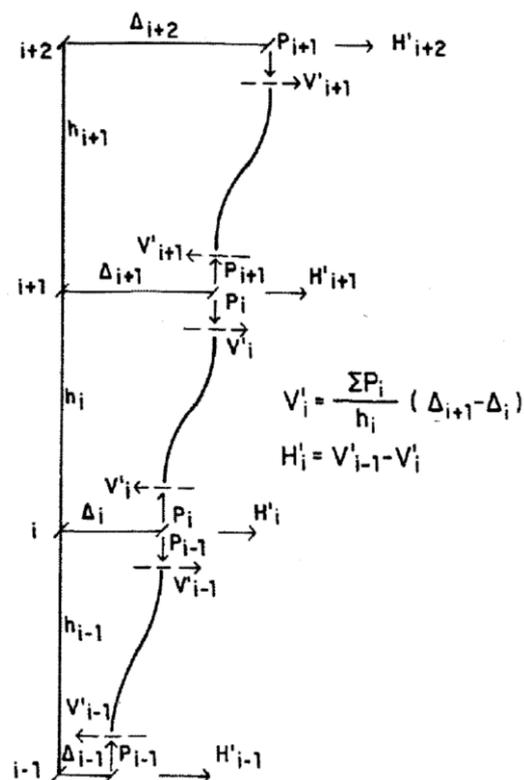
O fato do coeficiente γ_z possuir um único valor para toda a estrutura constitui uma facilidade interessante, principalmente, quando comparado a outros métodos, como o MAES. Entretanto, de acordo com Oliveira (2002), essa facilidade se torna em um ponto negativo, quando é levada em conta a influência da não linearidade geométrica ao longo da altura de um pórtico, conduzindo a análise pelo coeficiente γ_z para um resultado distante do comportamento real.

Avakian (2007) constatou em sua pesquisa que o coeficiente γ_z não resulta em valores satisfatórios, para análise de pórticos com ligações não rígidas. Silva (2004) verificou que a metodologia do γ_z não conduz a bons resultados, para estruturas de pórticos contraventados.

3.3. O MÉTODO DA FORÇA LATERAL EQUIVALENTE OU MÉTODO P-Δ ITERATIVO

A norma NBR 8800:1986, anterior a versão de 2008, apresenta em seu Anexo L um método aproximado para análise elástica de segunda ordem. Trata-se do método P-Delta iterativo (Figura 8). Essa metodologia, que também era adotada no AISC e na norma canadense CSA-S16.1 (1994), consiste em adicionar às ações horizontais atuantes na estrutura, forças laterais fictícias, que são obtidas em um processo de iterações. Ao final do processo, obtém-se os esforços totais atuantes na estrutura (1ª ordem + 2ª ordem) e os deslocamentos finais.

Figura 8 – Deslocamentos e forças fictícias em edifícios de múltiplos andares.



Fonte: NBR 8800:1986.

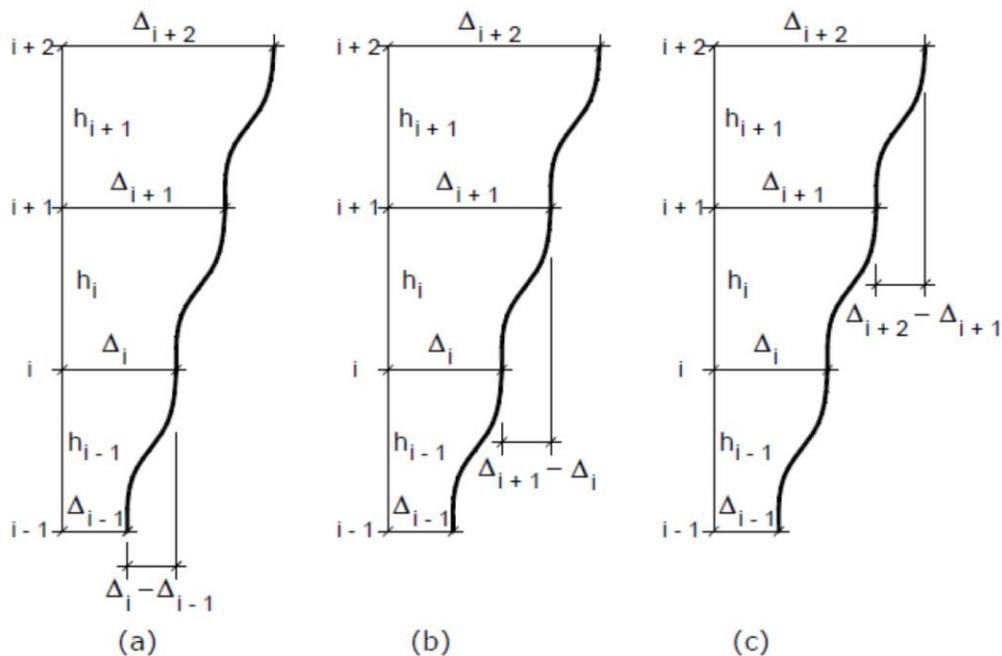
O processo começa a partir de uma análise elástica linear. O objetivo, primeiramente, é obter os deslocamentos horizontais em cada andar (Figura 9). Em seguida, é necessário calcular as forças cortantes fictícias em cada pavimento i pela Equação 28:

$$V'_i = \frac{\sum P_i}{h_i} (\Delta_{i+1} - \Delta_i) \quad (28)$$

onde:

- ❖ V'_i é a força cortante fictícia no andar i ;
- ❖ $\sum P_i$ é o somatório das forças normais nos pilares do andar i , inclusive nos pilares que não pertencem ao sistema resistente a cargas horizontais;
- ❖ h_i é a altura do andar analisado;
- ❖ Δ_{i+1} , Δ_i são os deslocamentos horizontais nos níveis $i+1$ e i , respectivamente.

Figura 9 – Deslocamentos horizontais entre pavimentos.

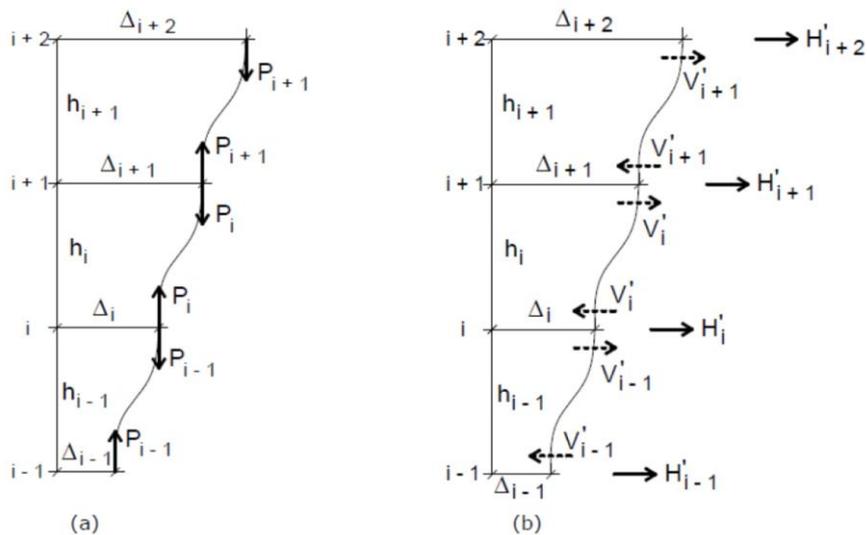


Fonte: Silva; Pinto (2015).

A consideração de forças horizontais fictícias é devida ao momento secundário provocado pelas cargas verticais multiplicadas pelos deslocamentos laterais induzidos. Como os deslocamentos variam entre os pavimentos, ocorrerá um desequilíbrio entre as forças cortantes V'_i . Este desequilíbrio dá origem à força lateral fictícia H'_i , calculada pela Equação 29, como mostrado na Figura 10.

$$H'_i = V'_{i-1} - V'_i \quad (29)$$

Figura 10 – Esquemas de forças verticais (a) e horizontais (b).



Fonte: Silva; Pinto (2015).

Deve-se aplicar o carregamento inicial novamente na estrutura, incluindo também as forças H'_i obtidas. Com isso, novos (e maiores) deslocamentos serão obtidos em uma nova análise de primeira ordem. Consequentemente, uma nova força lateral H'_i deverá ser adicionada ao carregamento inicial. Repete-se este procedimento até que as diferenças entre os deslocamentos de dois passos subsequentes estejam abaixo de um critério de convergência previamente estabelecido.

Bernuzzi e Cordova (2016) salientam que, quando a convergência é demorada, ou seja, sendo atingida após 6 ou 7 iterações, indica que a condição de carregamento é consideravelmente próxima ao limite elástico ou que a estrutura é excessivamente flexível. Isso significa que aplicação do método está fora de escopo, sendo requerida uma abordagem mais refinada para executar a análise de segunda ordem.

MacGregor e Hage (1977, apud, SILVA, 2004) afirmam que o processo pode ser interrompido quando o fator de convergência for igual a 5%. Neste trabalho, foi adotado um critério de convergência de 0,5%. Além disso, recomenda-se utilizar o método P-Delta quando a razão entre o deslocamento obtido na última iteração Δ_2 , com o deslocamento obtido na primeira análise da estrutura Δ_1 (sem as forças horizontais fictícias H'_i) não exceda a 1,4 ($\Delta_2/\Delta_1 \leq 1,4$).

A NBR 8800:1986 não menciona a diminuição da rigidez à flexão e axial, para a consideração da não linearidade física. O anexo L da NBR 8800:1986 fornece o procedimento para o método P-Delta em seis etapas, como mostrado abaixo:

- 1ª: Aplicar à estrutura a combinação apropriada de ações de cálculo;
- 2ª: Fazer análise elástica de primeira ordem e determinar os deslocamentos horizontais em cada andar;
- 3ª: Calcular as forças cortantes fictícias V'_i ;
- 4ª: Calcular as forças horizontais fictícias H'_i ;
- 5ª: Aplicar novamente o carregamento inicial à estrutura como na 1ª etapa, dessa vez incluindo as cargas H'_i ;
- 6ª: Repetir as etapas 2ª a 5ª, até que os resultados sejam convergentes.

3.4. METODOLOGIA DA NORMA EUROPEIA EN 1993-1-1:2005

3.4.1. Considerações iniciais

O método europeu para estimar os esforços de segunda ordem teve sua origem nos trabalhos de Horne (“An approximate method for calculating the elastic critical loads of multi-storey plane frames”, 1975), que inicialmente propôs uma formulação com o objetivo de calcular a carga crítica de flambagem elástica de pórticos de múltiplos andares. Posteriormente, o método se estendeu para a análise de estabilidade global.

A análise de primeira ordem pode ser efetuada, desde que o aumento dos esforços internos ou qualquer outra mudança do comportamento estrutural causado por deformações possam ser desprezáveis. Essa condição é assumida como satisfeita, se o seguinte critério for atendido:

$$\alpha_{cr} = \frac{F_{cr}}{F_{ed}} \geq 10 \rightarrow \text{para análise elástica} \quad (30)$$

$$\alpha_{cr} = \frac{F_{cr}}{F_{ed}} \geq 15 \rightarrow \text{para análise plástica} \quad (31)$$

onde:

- α_{cr} é o coeficiente de afastamento, que multiplicado pela carga de projeto atinge a carga de instabilidade elástica no modo global;
- F_{ed} é a carga vertical de projeto na estrutura;
- F_{cr} é a carga crítica de flambagem elástica para o modo de instabilidade global com base nas rigidezes elásticas iniciais.

O fator $\alpha_{cr} \geq 10$ significa que a estrutura pode então ser classificada como rígida. Caso contrário, é necessário realizar uma análise de segunda ordem e a estrutura é classificada como deslocável.

Caso as Equações 30 e 31 não sejam atendidas, o Eurocódigo EN 1993-1-1:2005, seção 5.2.2 (cláusulas (3) e (7)), determina quatro maneiras de se efetuar a análise estrutural, para levar-se em conta os efeitos de segunda ordem (BERNUZZI e CORDOVA, 2016):

- EC3-1: análise de segunda ordem rigorosa, com imperfeições globais e locais;
- EC3-2a: análise de segunda ordem rigorosa, com imperfeições globais;
- EC3-2b: análise de segunda ordem aproximada, com imperfeições globais;
- EC3-3: análise de primeira ordem.

3.4.2. Primeira abordagem: EC3-1

Para efetuar a análise não linear rigorosa, deve-se considerar as imperfeições devidas ao desaprumo (globais) e à curvatura das barras (locais), para todo o sistema estrutural. Ambas podem ser inseridas na modelagem do pórtico, em programa computacional apropriado ou, como na NBR 8800:2008, por meio de forças horizontais equivalentes (consultar item 3.4.6).

Se adotada essa primeira maneira de análise, não serão necessárias verificações de estabilidade extras membro a membro, podendo-se proceder às verificações de resistência das seções mais solicitadas.

3.4.3. Segunda abordagem: EC3-2a

Para esta abordagem, a análise rigorosa é realizada considerando as imperfeições globais, somente. Para dispensar a inclusão das imperfeições locais, deve-se atentar que o esforço normal N_{ed} atenda a seguinte condição, em relação à força crítica de flambagem elástica F_{cr} :

$$N_{ed} < \frac{F_{cr}}{4} \quad (32)$$

Vale ressaltar que, para esta abordagem, deve ser efetuada a verificação da estabilidade membro a membro, de acordo com os critérios da seção 6.3 do EC3.

3.4.4. Terceira abordagem: EC3-2b

A abordagem aproximada para análise de segunda ordem considera somente as imperfeições de ordem global. O método é aplicável se atender a seguinte condição:

$$3 < \alpha_{cr} < 10 \quad (33)$$

É importante ressaltar que para se aplicar este método, a estrutura apertada em análise necessita ter uma distribuição regular de carregamentos gravitacionais e desestabilizantes, assim como, deve haver uma uniformidade dos elementos estruturais. Como o método é baseado na análise linear, os efeitos de segunda ordem são obtidos por meio da amplificação dos esforços ou das ações horizontais, da análise linear. Essa amplificação é feita pela aplicação de um coeficiente β (Equação 34) e é função do coeficiente de afastamento α_{cr} .

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha_{cr}}} \quad (34)$$

Pode-se observar que o valor de β estará entre 1,11 e 1,50, por causa dos limites estabelecidos para α_{cr} , na Equação 33. A Tabela 4 contém os valores de β para cada valor de α_{cr} , respectivamente.

Tabela 4 - Relação entre β e α_{cr} .

α_{cr}	β
3	1,50
4	1,33
5	1,25
6	1,20
7	1,17
8	1,14
9	1,13
10	1,11

Fonte: Bernuzzi e Cordova (2016).

Uma alternativa ao cálculo de α_{cr} pela análise de flambagem elástica (equações 30 e 31), é a Equação 35, baseada no método de Horne, para sistemas de pórticos regulares (Figura 11). Vale lembrar que esta relação de proporcionalidade é válida em regime de pequenos deslocamentos. Deve ser calculada por andar, mas, ao final da análise, escolhe-se o menor valor de α_{cr} , para o caso de estruturas de múltiplos andares.

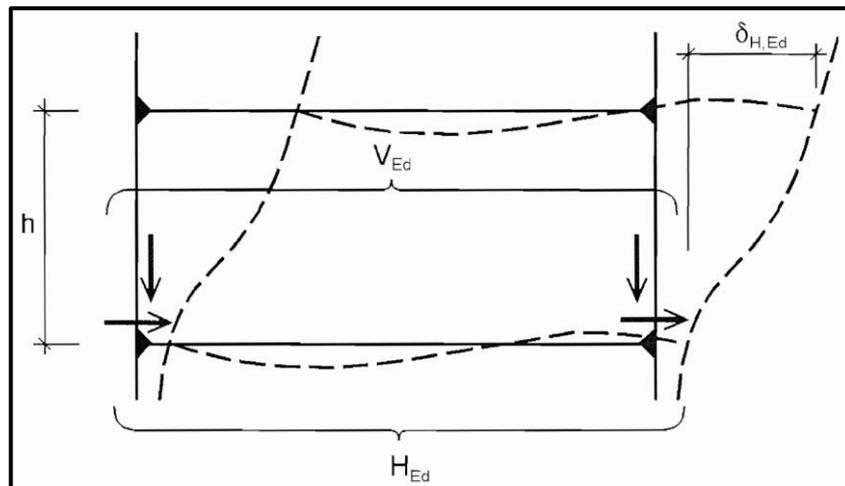
$$\alpha_{cr} = \left(\frac{H_{ed}}{V_{ed}} \right) \left(\frac{h}{\delta_{H,ed}} \right) \quad (35)$$

em que:

- H_{ed} : é a força horizontal total, ou seja, a de projeto somada à força fictícia que simula a imperfeição global, aplicada no topo do andar;
- V_{ed} : é a carga vertical total no piso do andar considerado;
- h : é a altura do andar;
- $\delta_{H,ed}$: é o deslocamento no topo do andar. É calculado unicamente sob a ação das cargas horizontais H_{ed} , sem levar em conta as cargas verticais V_{ed} .

É possível observar uma similaridade entre os coeficientes β , γ_z e B_2 . O coeficiente β , assim como o γ_z , não apresenta o fator $1/R_s$. Basicamente, as diferenças no cálculo desses coeficientes residem na maneira como cada método considera as imperfeições geométricas e de material.

Figura 11 - Deslocamento lateral da estrutura.



Fonte: EN 1993-1-1 (2005).

Após a análise estrutural e amplificação dos esforços, a estabilidade das barras deve ser efetuada, conforme a seção 6.3 do EC3.

3.4.5. Quarta abordagem: EC3-3

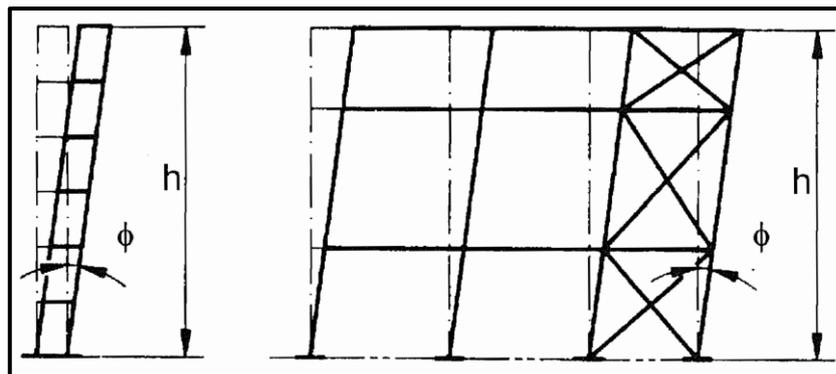
Para a análise de primeira ordem não há qualquer consideração de imperfeições. A estabilidade dos membros é verificada de acordo com a seção 6.3 do EC3. Deve-se calcular o comprimento de flambagem efetivo para tal. Além disso, a norma não fornece mais detalhes sobre uma metodologia mais conveniente para a obtenção dos comprimentos de flambagem.

3.4.6. Imperfeições Geométricas

3.4.6.1. Imperfeição Geométrica Global

A imperfeição geométrica global é considerada aplicando-se um desaprumo φ na estrutura, como pode ser visto na Figura 12. Dessa forma, a análise de segunda ordem elástica será efetuada deslocando-se todos os nós da estrutura de acordo com o desaprumo calculado como se mostra a seguir.

Figura 12 - Estrutura com imperfeição lateral.



Fonte: EN 1993-1-1 (2005).

No Eurocódigo 3, o desaprumo φ é determinado pela relação: $\varphi = \varphi_0 \alpha_h \alpha_m$, onde:

- φ_0 é o valor de base ($\varphi_0 = \frac{1}{200}$);
- α_h é um coeficiente de redução relativo à altura h da estrutura $\alpha_h = \frac{2}{\sqrt{h}}$, com a restrição: $\frac{2}{3} \leq \alpha_h \leq 1$;
- α_m é um coeficiente de redução relativo ao número de pilares numa fila, $\alpha_m = \sqrt{0,5 \left(1 + \frac{1}{m}\right)}$;
- m é o número de pilares numa fila que suportam uma carga vertical $N_{ed} \geq 50\%$, do valor médio $N_{ed,médio}$ calculado para o conjunto de pilares contados na fila.

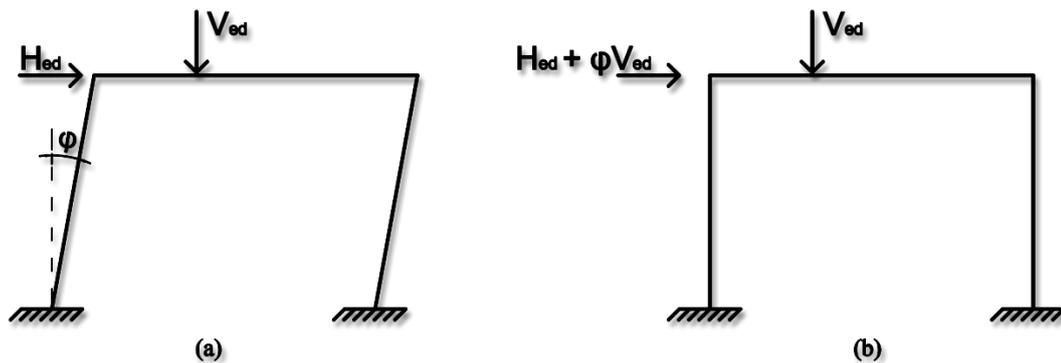
O desaprumo pode ser desprezado se $H_{ed} \geq 0,15V_{ed}$.

Alternativamente, ao invés de se deslocar todos os nós da estrutura para a efetuação da análise de segunda ordem, pode-se transformar o desaprumo em uma força lateral equivalente (MUZEAU, 2014), dada por:

$$F' = \varphi V_{ed} \quad (36)$$

A figura a seguir mostra as duas formas aceitas pelo Eurocódigo 3 para a consideração da imperfeição devida ao desaprumo:

Figura 13 - (a) Consideração do desaprumo pelo deslocamento dos nós; (b) Consideração do desaprumo pela inserção de uma força lateral equivalente.



Fonte: Adaptado de Muzeau (2014).

3.4.6.2. Imperfeição Geométrica Local

A imperfeição local, denominada e_0 (EN 1993 1-1, 5.3.2 b), é relativa à curvatura da barra e também induz o efeito de segunda ordem. O Eurocódigo indica que as imperfeições locais podem ser desprezadas na análise global, em casos de estruturas rígidas. Entretanto, para estruturas deslocáveis, é necessário introduzir a imperfeição local em cada barra comprimida para os casos abaixo:

- Se há transmissão de momentos entre as barras, por meio das ligações;
- Se $N_{ed} > \frac{F_{cr}}{4}$.

Se as duas condições acima não são satisfeitas, pode-se desprezar a deformada inicial e_0 , nas barras comprimidas. A norma fornece os valores recomendados para e_0 , como mostra a Tabela 5.

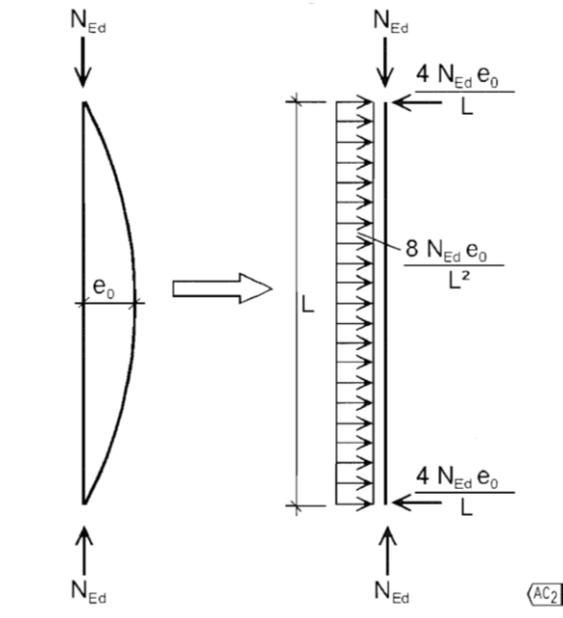
Tabela 5 - Valores de cálculo da imperfeição local em arco $\frac{e_0}{L}$.

Curva de flambagem	Análise elástica	Análise plástica
	e_0/L	e_0/L
a₀	1/350	1/300
a	1/300	1/250
b	1/250	1/200
c	1/200	1/150
d	1/150	1/100

Fonte: EN 1993-1-1 (2005).

As imperfeições locais também podem ser substituídas por um carregamento equivalente, ou seja, por uma carga uniformemente distribuída (Figura 14). As deformações iniciais (globais e locais) devem estar orientadas para o sentido mais desfavorável à estrutura, a favor da segurança.

Figura 14 - Substituição da imperfeição local por uma carga distribuída.



Fonte: EN 1993-1-1 (2005).

3.4.7. Imperfeição de Material

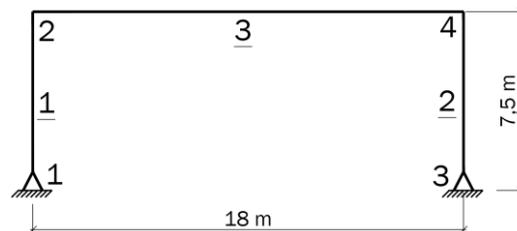
Basicamente, o Eurocódigo 3 trata esse tipo de não linearidade assumindo que a curva tensão-deformação do material é linear, para qualquer valor de tensão que a estrutura esteja submetida. Em outras palavras, não há a redução do módulo de elasticidade E , como nas normas brasileiras.

4. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

4.1. Aplicação 1: Pórtico de Um Pavimento e Um Vão

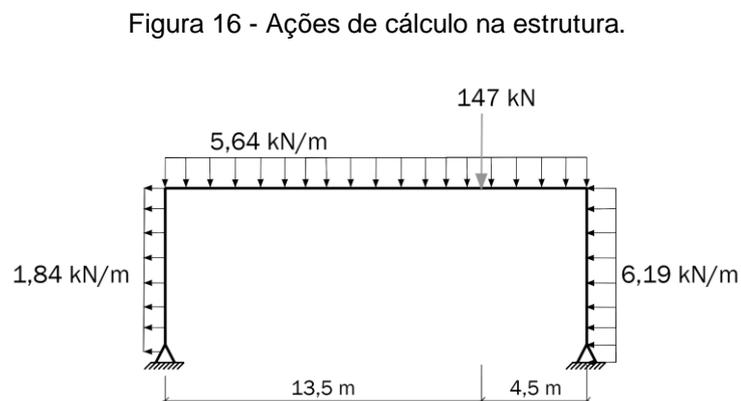
A Figura 15 mostra um pórtico de um pavimento e um vão (adaptado de MUZEAU [2014]), onde estão indicadas as cotas, números dos nós e números das barras (sublinhados). Os pilares são de perfis HEA280 e a viga de perfil IPE500. O módulo de elasticidade do aço é $E = 200 \text{ GPa}$.

Figura 15 - Pórtico de um pavimento e um vão: dimensões e numeração.



Fonte: Autora (2020).

A Figura 16 a seguir mostra as ações aplicadas à estrutura. Os valores mostrados já representam a combinação de ações mais desfavorável.



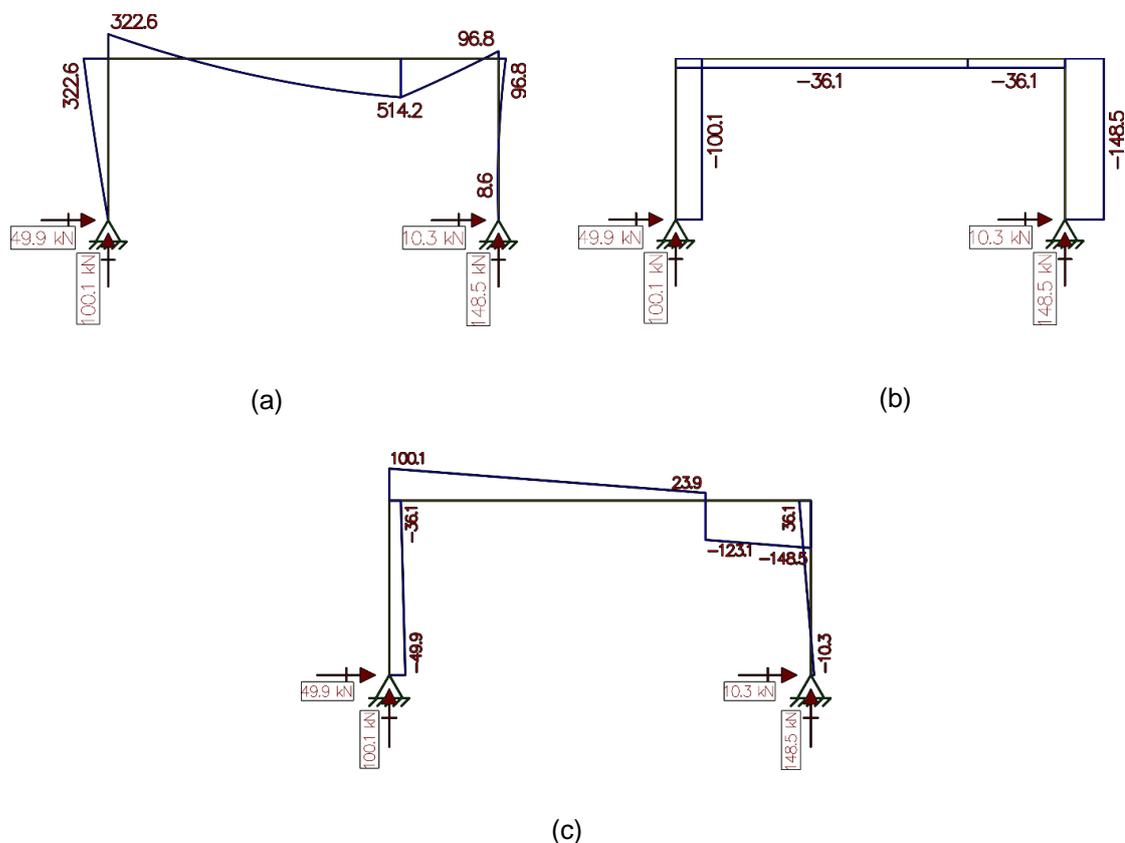
Fonte: Autora (2020).

A estrutura foi modelada no programa Ftool, de onde foram obtidos os esforços e deslocamentos de primeira ordem. Em seguida, remodelou-se a estrutura no programa Ansys 14.0, com elementos de barra BEAM188 e 40 subdivisões por barra, para que fosse efetuada a análise não linear geométrica. Como já haviam ações horizontais, não foram adicionadas forças nocionais, afim de simular as imperfeições geométricas. Adicionou-se a imperfeição de material, pela redução da rigidez ($0,8E$). As subseções a seguir mostram os resultados para cada análise.

4.1.1. Análise Elástica de Primeira Ordem

- **Diagramas de momento fletor, esforço normal e esforço cortante:**

Figura 17 - Diagramas de: (a) momento fletor [kNm], (b) esforço normal [kN] e (c) esforço cortante [kN].



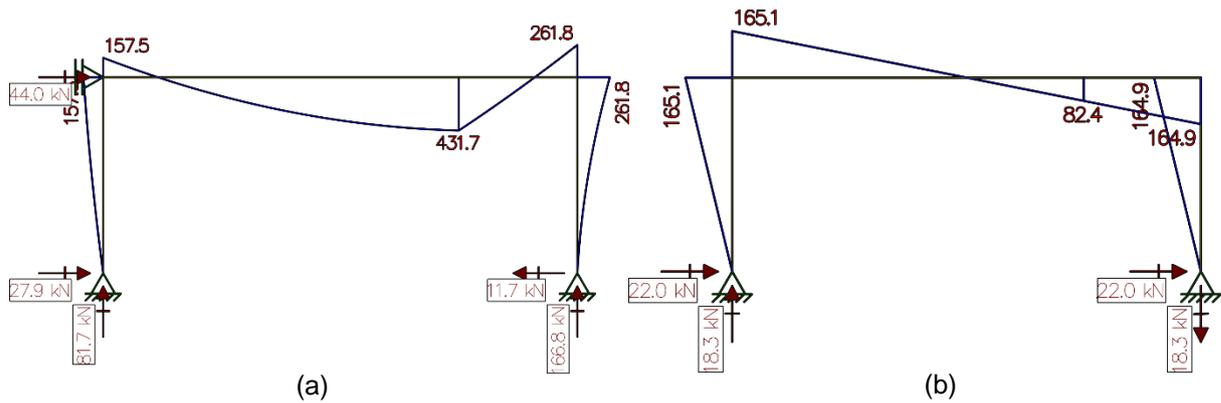
Fonte: Autora (2020).

- **Deslocamento máximo:** Nó 4: $\Delta_4 = 15,22 \text{ cm}$;

4.1.2. Método $B_1 - B_2$

- Diagramas de momento fletor do pórtico *nt* e do pórtico *lt*:

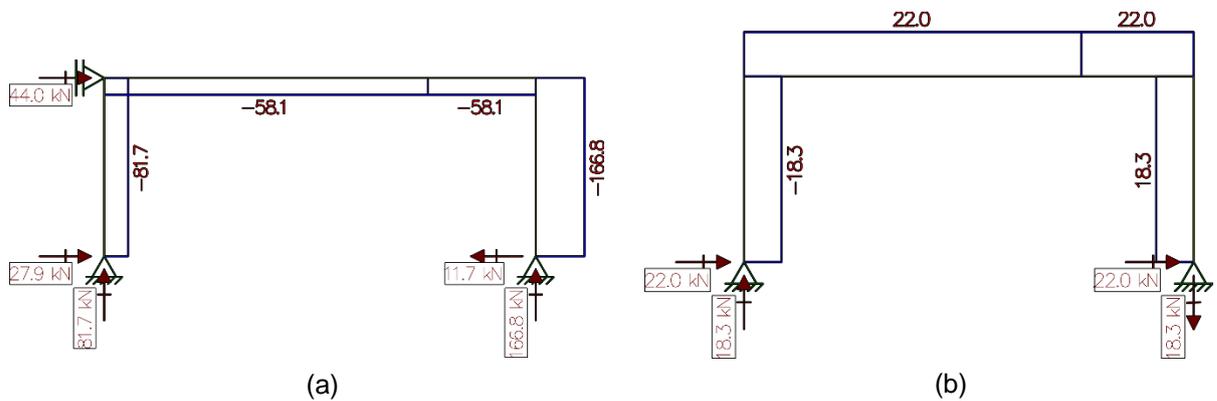
Figura 18 - Diagramas de momento fletor: (a) da estrutura *nt* [kNm] e (b) da estrutura *lt* [kNm].



Fonte: Autora (2020).

- Diagramas de esforço normal do pórtico *nt* e do pórtico *lt*:

Figura 19 - Diagramas de esforço normal: (a) da estrutura *nt* [kN] e (b) da estrutura *lt* [kN].



Fonte: Autora (2020).

- Deslocamento do nó 4 da estrutura *lt*: $\Delta_{h,4} = 15,17 \text{ cm}$;

- **Classificação da estrutura:**

Calcula-se o coeficiente B_2 para determinar se a estrutura é de pequena, média ou grande deslocabilidade:

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{R_s} \frac{\Delta_{h,4}}{h} \frac{\sum N_{sd1}}{\sum H_{sd}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{0,85} \left(\frac{15,16}{750} \right) \left(\frac{|-81,7 - 166,8|}{|-44|} \right)} = 1,16$$

Assim, o pórtico é de média deslocabilidade.

- **Novos deslocamento e coeficiente B_2 :**

Já que a estrutura é de média deslocabilidade, há necessidade de amplificar os esforços de primeira ordem. Deve-se também diminuir 20% da rigidez. Dessa forma, o deslocamento do nó 4 passa a valer: $\Delta'_{h,4} = 18,96 \text{ cm}$; Novo $B'_2 = 1,20$.

- **Cálculo do coeficiente B_1 para o pilar 2:**

Como o coeficiente B_1 é calculado por barra, é escolhido o pilar 2 para o cálculo:

$$C_{m1} = 0,60 - 0,40 \frac{M_1}{M_2} = 0,60 - 0,40(0) = 0,60$$

$$N_e = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 16000(13670)}{750^2} = 3837,7 \text{ kN}$$

$$B_{1-1} = \frac{C_m}{1 - \frac{|N_{sd1}|}{N_e}} = \frac{0,60}{1 - \frac{|-166,8|}{3837,7}} = 0,63 \rightarrow B_1 = 1,0$$

- **Cálculo do momento fletor total para o pilar 2:**

$$M_{sd,2} = B_1 M_{nt} + B'_2 M_{lt} = 1,0(261,8) + 1,20(-164,9)$$

$$M_{sd,2} = 63,9 \text{ kNm}$$

- **Cálculo do esforço normal total para o pilar 2:**

$$N_{sd,2} = N_{nt} + B'_2 N_{lt} = -166,8 + 1,20(18,3)$$

$$N_{sd,2} = -144,8 \text{ kN}$$

Vale ressaltar que, pelo método $B_1 - B_2$, não há amplificação do esforço cortante. Por isso, os valores são os mesmos obtidos em análise elástica de primeira ordem.

4.1.3. Método da NBR 6118:2014: Coeficiente γ_z

- **Classificação da estrutura:**

Calcula-se o coeficiente γ_z para determinar se a estrutura é de nós fixos ou móveis. Utiliza-se o deslocamento obtido na análise de primeira ordem (Δ_4).

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,tot,d}}}$$

$$\Delta M_{tot,d} = \Sigma F_{V1} \Delta_4$$

$$\Delta M_{tot,d} = [(5,64)(18) + 147]0,1522 = 37,83 \text{ kNm}$$

em que ΣF_{V1} é a carga vertical total aplicada no pavimento 1.

$$M_{1,tot,d} = F_{H1} z_1 = \frac{[(6,19 + 1,84)7,5]7,5}{2} = 225,84 \text{ kNm}$$

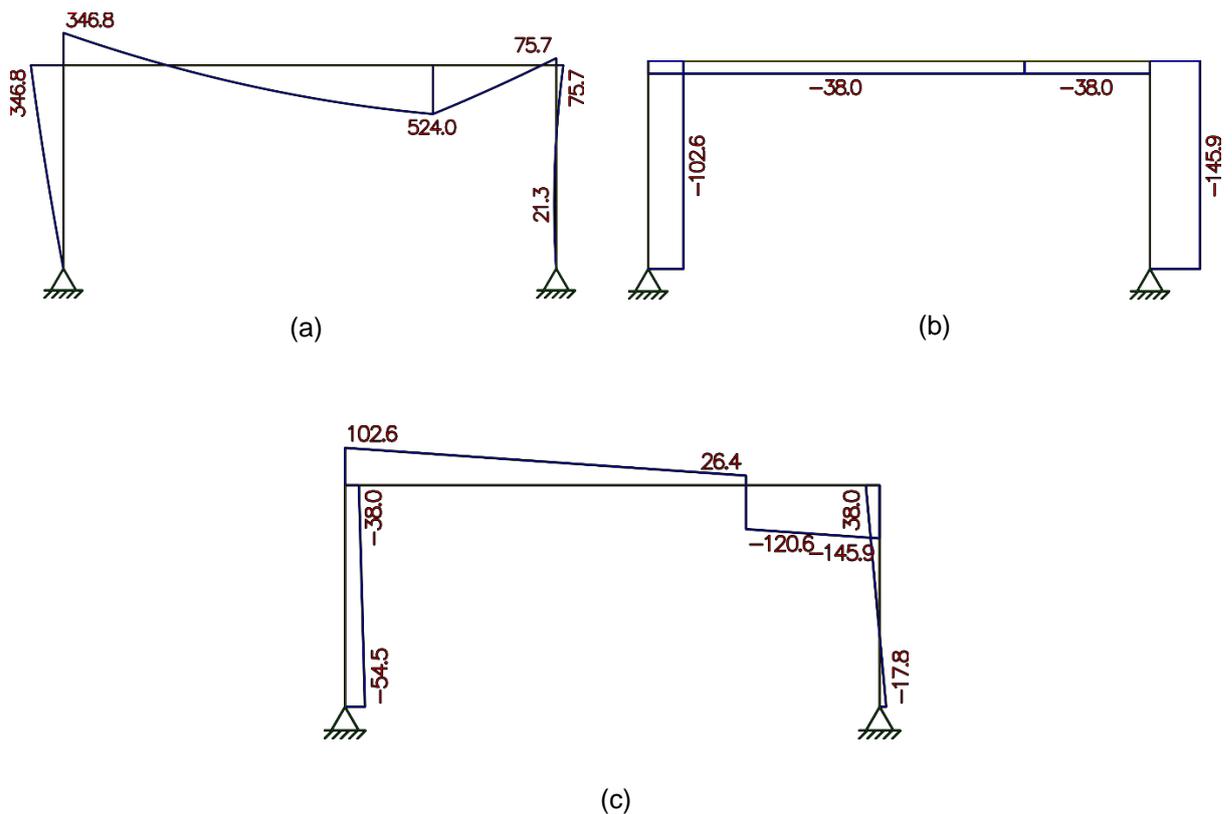
em que F_{H1} é a força horizontal total aplicada no pavimento 1.

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{37,83}{225,84}} = 1,20 \rightarrow \text{estrutura de nós móveis}$$

Como o valor do coeficiente γ_Z confirma que a estrutura é deslocável, deve-se tomar $0,95\gamma_Z$ e multiplicar pelas ações horizontais atuantes no pórtico, além de diminuir a rigidez em 20% ($0,8EI; 0,8EA$). Dessa forma, é possível obter o deslocamento amplificado, os diagramas de momento fletor, esforço normal e cortante, como se segue.

- **Deslocamento no nó 4:** $\Delta'_4 = 22,11 \text{ cm}$;
- **Diagramas de momento fletor, esforço normal e esforço cortante:**

Figura 20 - Diagramas de: (a) momento fletor [kNm], (b) esforço normal [kN] e (c) esforço cortante [kN].



Fonte: Autora (2020).

- **Resultados para o pilar 2:**

$$M_{sd,2} = 75,7 \text{ kNm}$$

$$N_{sd,2} = -145,9 \text{ kN}$$

$$V_{sd,2,m\acute{a}x} = 38,0 \text{ kN}$$

4.1.4. Método P-Delta Iterativo

Para o método P-Delta iterativo foram necessárias três iterações para se atingir o critério de convergência de 0,5%, neste problema. A Tabela 6, abaixo, apresenta os deslocamentos do nó 4 ao longo das iterações (Δ_4), a força fictícia calculada (H'_1) e a convergência do deslocamento (C_1) em %.

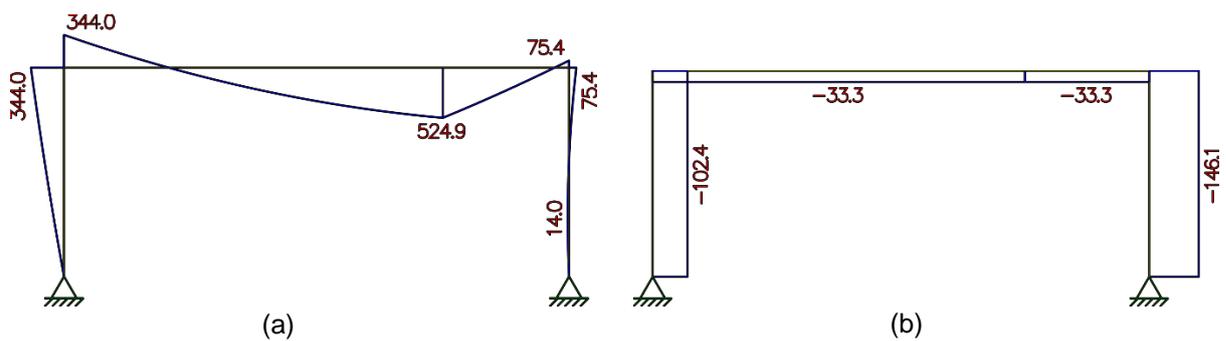
Tabela 6 - Resultados obtidos pelo método P-Delta.

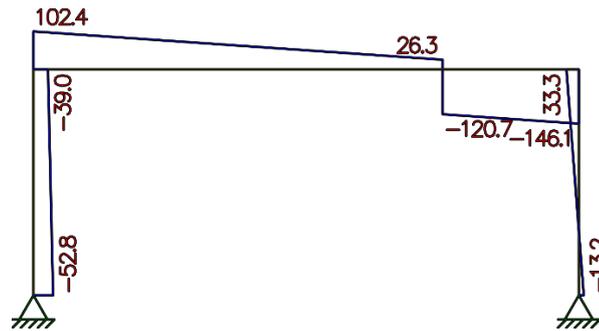
	1ª Iteração	2ª Iteração	3ª Iteração
Δ_4 [cm]	15,22	16,94	17,15
H'_1 [kN]	5,04	5,61	5,68
Novo Δ_1 [cm]	16,94	17,15	17,18
C_1 [%]	11,30	1,24	0,17

Fonte: Autora (2020).

- **Diagramas de momento fletor, esforço normal e esforço cortante:**

Figura 21 - Diagramas de: (a) momento fletor [kNm], (b) esforço normal [kN] e (c) esforço cortante [kN].





(c)

Fonte: Autora (2020).

- **Resultados para o pilar 2:**

$$M_{sd,2} = 75,4 \text{ kNm}$$

$$N_{sd,2} = -146,1 \text{ kN}$$

$$V_{sd,2,m\acute{a}x} = 33,3 \text{ kN}$$

4.1.5. Método Europeu

A metodologia de cálculo dos esforços de segunda ordem aqui efetuada é a terceira abordagem do item 3.4.4: EC3-2b - análise de segunda ordem aproximada, com imperfeições globais.

- **Cálculo das imperfeições geométricas globais:**

$$\varphi = \varphi_0 \alpha_h \alpha_m$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{200} \text{ rad}$$

$$\alpha_h = \frac{2}{\sqrt{h}} = \frac{2}{\sqrt{7,5}} = 0,730$$

$$\alpha_m = \sqrt{0,5 \left(1 + \frac{1}{m}\right)} = \sqrt{0,5 \left(1 + \frac{1}{2}\right)} = 0,866$$

$$\varphi = \frac{1}{200} (0,730)(0,866) = 0,0032 \text{ rad}$$

- Carga vertical de projeto: $\Sigma F_{V1} = [(5,64)(18) + 147] = 248,52 \text{ kN}$
- Força lateral equivalente: $F_{h,ed,1} = \varphi \Sigma F_{V1} = (0,0032)(248,52) = 0,79 \text{ kN}$

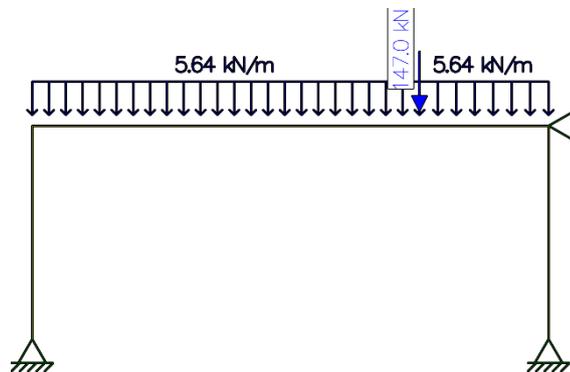
Assim, $F_{h,ed,1}$ é adicionada às ações horizontais da estrutura.

- **Influência do carregamento assimétrico:**

Para a metodologia de cálculo do EC3, havendo cargas assimétricas na estrutura, deve-se analisá-la separadamente, em dois modelos (MUZEAU, 2014):

- Modelo 1: com apoio lateral fictício, próximo à carga assimétrica. Insere-se somente as cargas verticais.

Figura 22 - Modelo 1 com cargas verticais e contido lateralmente.

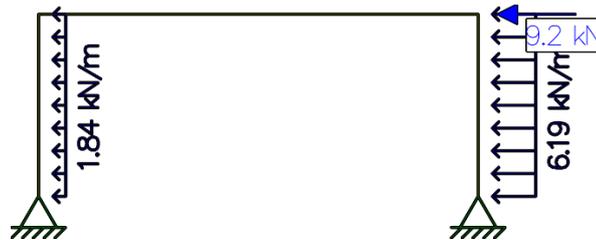


Fonte: Autora (2020).

Obtém-se uma reação $R = 8,4 \text{ kN}$ no apoio fictício, que será a influência da carga assimétrica a ser adicionada ao segundo modelo.

- Modelo 2: retira-se o apoio lateral fictício. São inseridas as ações horizontais (às quais se soma $F_{h,ed,1} = 0,79 \text{ kN}$) e a força $R = 8,4 \text{ kN}$.

Figura 23 - Modelo 2 com ações horizontais e reação R .



Fonte: Autora (2020).

- **Cálculo do coeficiente α_{cr} :**

$$\alpha_{cr} = \left(\frac{H_{ed}}{V_{ed}} \right) \left(\frac{h}{\delta_{H,ed}} \right)$$

O deslocamento lateral $\delta_{H,ed}$ é igual a 3,45 cm, para uma força concentrada de 10 kN aplicada no nó 4. Assim, calcula-se α_{cr} :

$$\alpha_{cr} = \left(\frac{10}{248,52} \right) \left(\frac{750}{3,45} \right) = 8,75$$

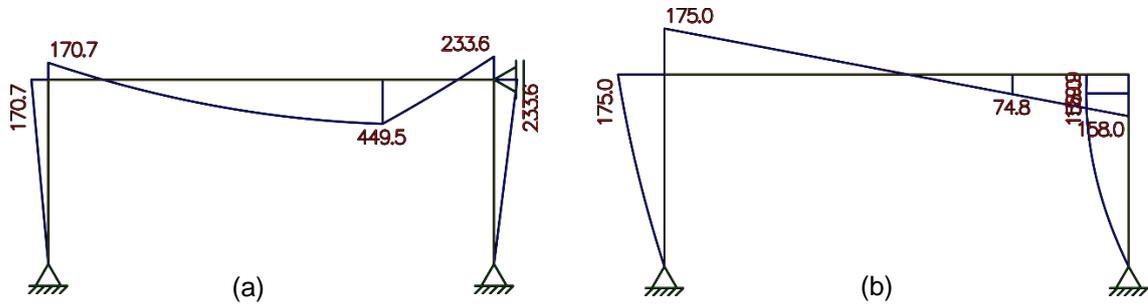
- **Cálculo do coeficiente β :**

Como o valor de α_{cr} é inferior a 10, há necessidade de se amplificar as ações horizontais atuantes no modelo 2 pelo coeficiente β , calculado a seguir:

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha_{cr}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{8,75}} = 1,129$$

- **Diagramas de momento fletor dos modelos 1 e 2:**

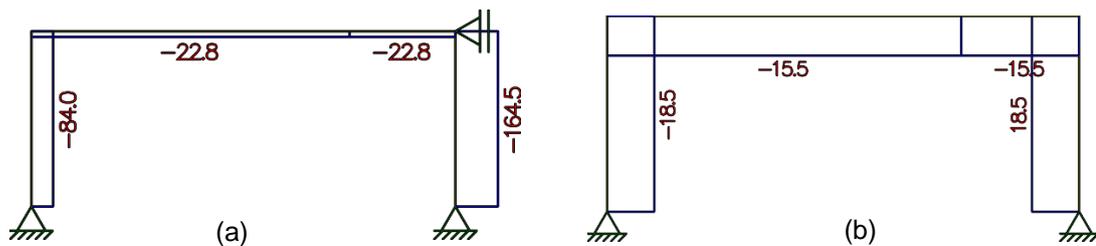
Figura 24 - Diagramas de: (a) momento fletor modelo 1 [kNm], (b) momento fletor modelo 2 [kNm].



Fonte: Autora (2020).

- **Diagramas de esforço normal dos modelos 1 e 2:**

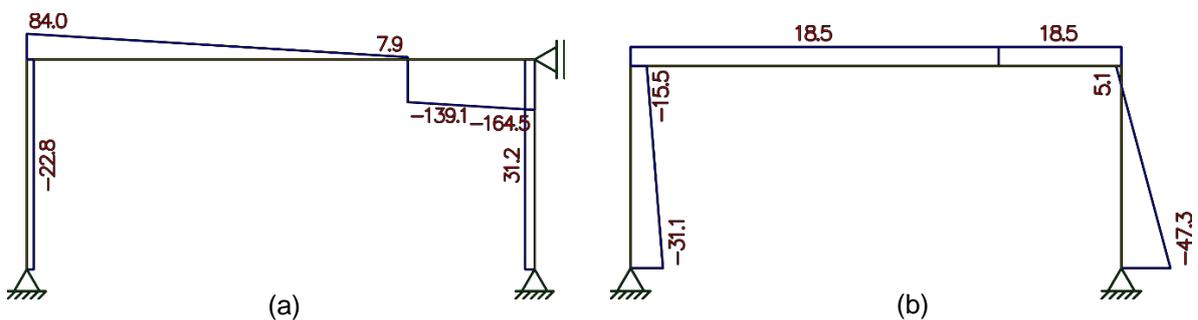
Figura 25 - Diagramas de: (a) esforço normal modelo 1 [kN], (b) esforço normal modelo 2 [kN].



Fonte: Autora (2020).

- **Diagramas de esforço cortante dos modelos 1 e 2:**

Figura 26 - Diagramas de: (a) esforço cortante modelo 1 [kN], (b) esforço cortante modelo 2 [kN].



Fonte: Autora (2020).

- **Resultados para o pilar 2:**

$$M_{sd,2} = 75,6 \text{ kNm}$$

$$N_{sd,2} = -146,0 \text{ kN}$$

$$V_{sd,2,m\acute{a}x} = 36,3 \text{ kN}$$

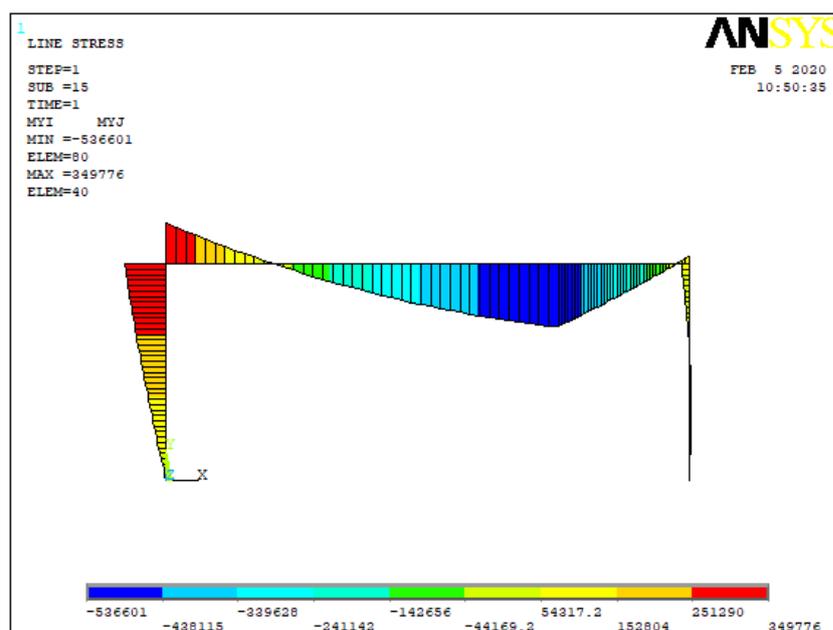
- **Deslocamento final no nó 4: $\Delta'_4 = 20,40 \text{ cm}$;**

4.1.6. Análise não linear geométrica no Ansys 14.0

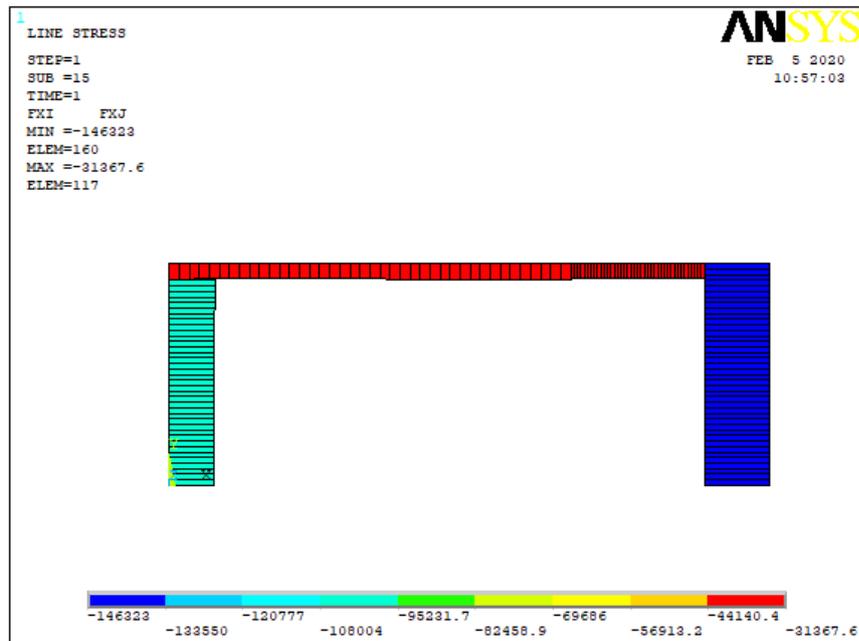
Remodelou-se o pórtico no programa Ansys 14.0 para que fosse efetuada a análise não linear geométrica. Utilizou-se elementos de barra BEAM188 e 40 subdivisões por barra. Não foram adicionadas forças nocionais. Adicionou-se a imperfeição de material, pela redução da rigidez ($0,8E$). O método iterativo interno do programa é o algoritmo de Newton-Raphson.

- **Diagramas de momento fletor, esforço normal e esforço cortante:**

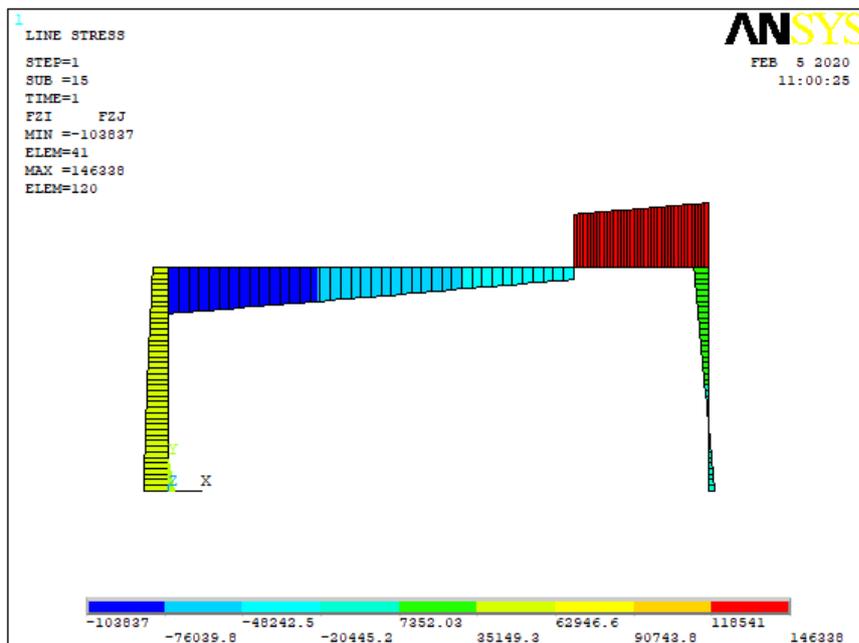
Figura 27 - Diagramas de: (a) momento fletor [kNm], (b) esforço normal [kN] e (c) esforço cortante [kN].



(a)



(b)



(c)

Fonte: Autora (2020).

- **Resultados para o pilar 2:**

$$M_{sd,2} = 64,2 \text{ kNm}$$

$$N_{sd,2} = -146,3 \text{ kN}$$

$$V_{sd,2,m\acute{a}x} = 31,4 \text{ kN}$$

- **Deslocamento final no nó 4: $\Delta'_4 = 24,3 \text{ cm}$.**

4.1.7. Comparação dos resultados

A Tabela 7 a seguir resume todos os resultados obtidos por cada um dos métodos:

Tabela 7 - Resumo de resultados.

	Análise Elástica Primeira Ordem	Método $B_1 - B_2$	Coeficiente γ_Z	Método P-Delta	Método Europeu	Ansys
Δ_4 nó 4 [cm]	15,22	18,96	22,11	17,18	20,40	24,3
Momento Fletor pilar 2 [kNm]	96,8	63,9	75,7	75,4	75,6	64,2
Esforço Normal pilar 2 [kN]	-148,5	-144,8	-145,9	-146,1	-146,0	-146,3
Esforço Cortante pilar 2 [kN]	36,1	36,1	38,0	33,3	36,3	31,4

Fonte: Autora (2020).

A Tabela 8 apresenta os valores dos coeficientes de majoração para cada um dos métodos:

Tabela 8 - Coeficientes de majoração.

	B_1	B_2 (clas.)	B_2 (final)	γ_Z	P-Delta Δ_2/Δ_1	α_{cr}	β	Ansys Δ_2/Δ_1
1º Pavimento	1,00	1,16	1,20	1,20	1,13	8,75	1,129	1,21

Fonte: Autora (2020).

Para a análise dos deslocamentos, percebe-se que a análise rigorosa no Ansys foi a mais conservadora de todas, seguida pelo coeficiente γ_Z e o método europeu, conhecidos por amplificarem as ações horizontais. Entretanto, de acordo com o AISC (2016), os deslocamentos amplificados obtidos não devem ser tomados como parâmetros reais, sendo feita aqui somente uma análise qualitativa dos resultados.

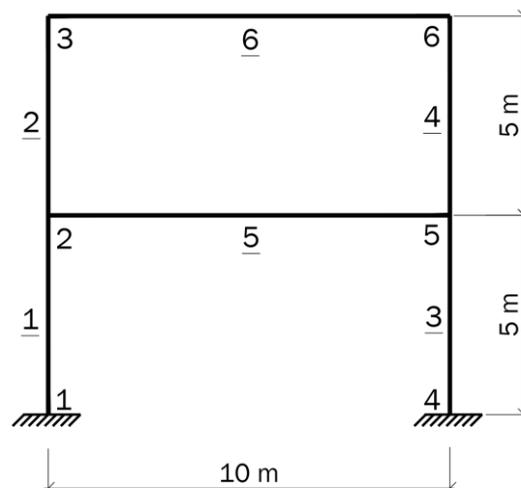
Para o momento fletor, tem-se que o método $B_1 - B_2$ é o que mais se aproxima da análise rigorosa de segunda ordem. Os demais métodos se encontram muito próximos entre si, diferindo em torno de 17,5% da análise no Ansys.

Para o esforço normal, todos os métodos possuem boa correlação entre si, diferindo em no máximo 1%. Isto atesta a informação de que os esforços normais são pouco afetados pelo efeito de segunda ordem. Já para o esforço cortante, observam-se diferenças mais significativas em relação à análise rigorosa e as outras metodologias. A análise no Ansys resulta menos conservadora que todas as outras, sendo a do coeficiente γ_z , a que apresenta o maior esforço cortante máximo.

4.2. Aplicação 2: Pórtico de Dois Pavimentos e Um Vão

A Figura 28 mostra um pórtico de dois pavimentos e um vão (adaptado de SILVA et al. [2016]), onde estão indicadas as cotas, números dos nós e números das barras (sublinhados). Os pilares são de perfis HEA260 e as vigas de perfis IPE400. O módulo de elasticidade do aço é $E = 200 \text{ GPa}$.

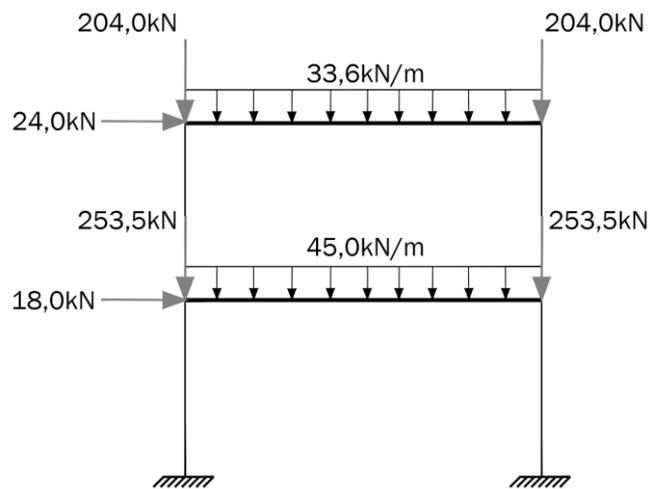
Figura 28 - Pórtico de dois pavimentos e um vão: dimensões e numeração.



Fonte: Autora (2020).

A Figura 29 a seguir mostra as ações aplicadas à estrutura. Os valores mostrados já representam a combinação de ações mais desfavorável.

Figura 29 - Ações de cálculo na estrutura.



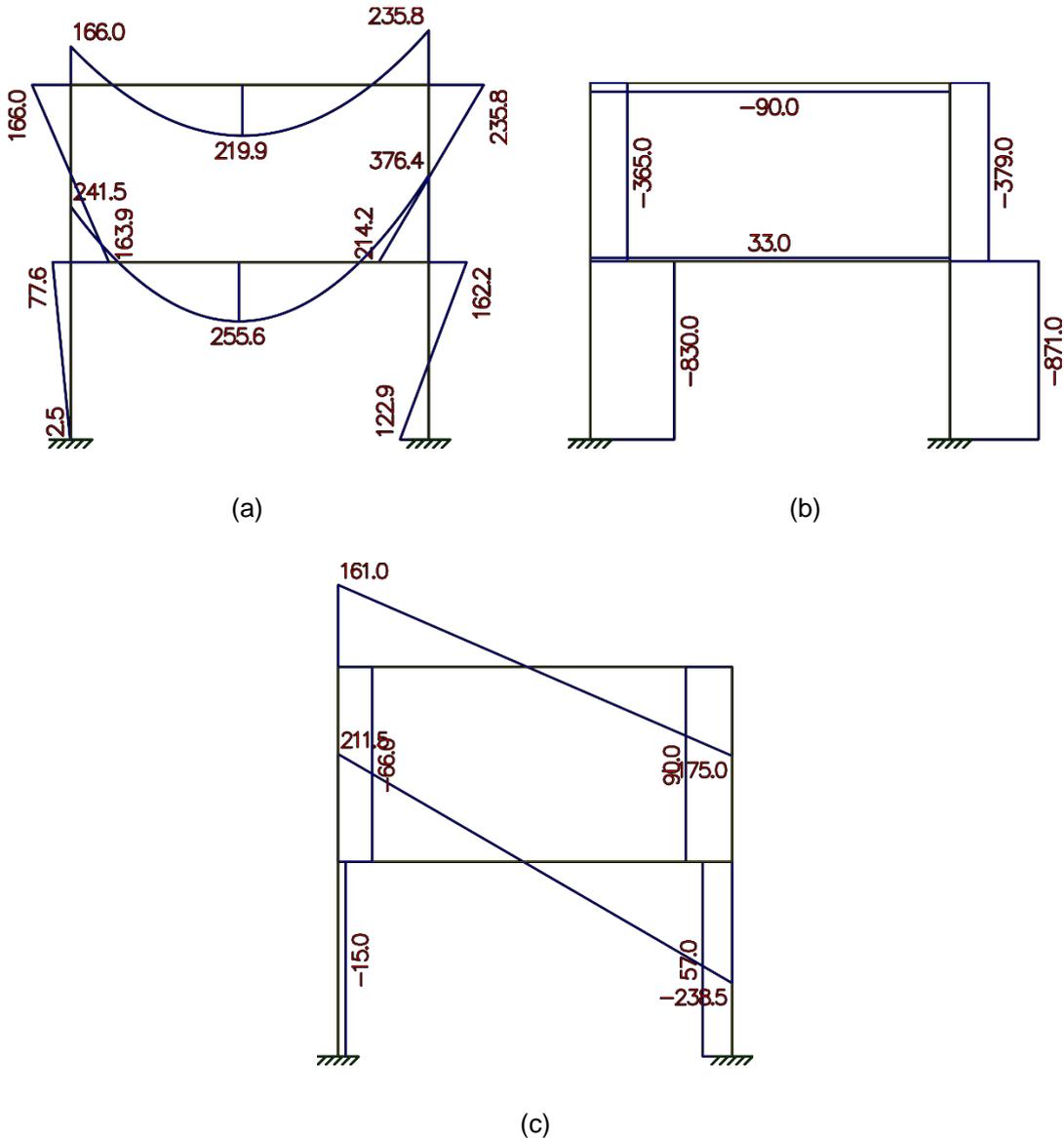
Fonte: Autora (2020).

A estrutura foi modelada no programa Ftool, de onde foram obtidos os esforços e deslocamentos de primeira ordem. Em seguida, remodelou-se a estrutura no programa Ansys 14.0, com elementos de barra BEAM188 e 40 subdivisões por barra, para que fosse efetuada a análise não linear geométrica. Como já haviam ações horizontais, não foram adicionadas forças nocionais, afim de simular as imperfeições geométricas. Adicionou-se a imperfeição de material, pela redução da rigidez ($0,8E$). As subseções a seguir mostram os resultados para cada análise.

4.2.1. Análise Elástica de Primeira Ordem

- Diagramas de momento fletor, esforço normal e esforço cortante:

Figura 30 - Diagramas de: (a) momento fletor [kNm], (b) esforço normal [kN] e (c) esforço cortante [kN].



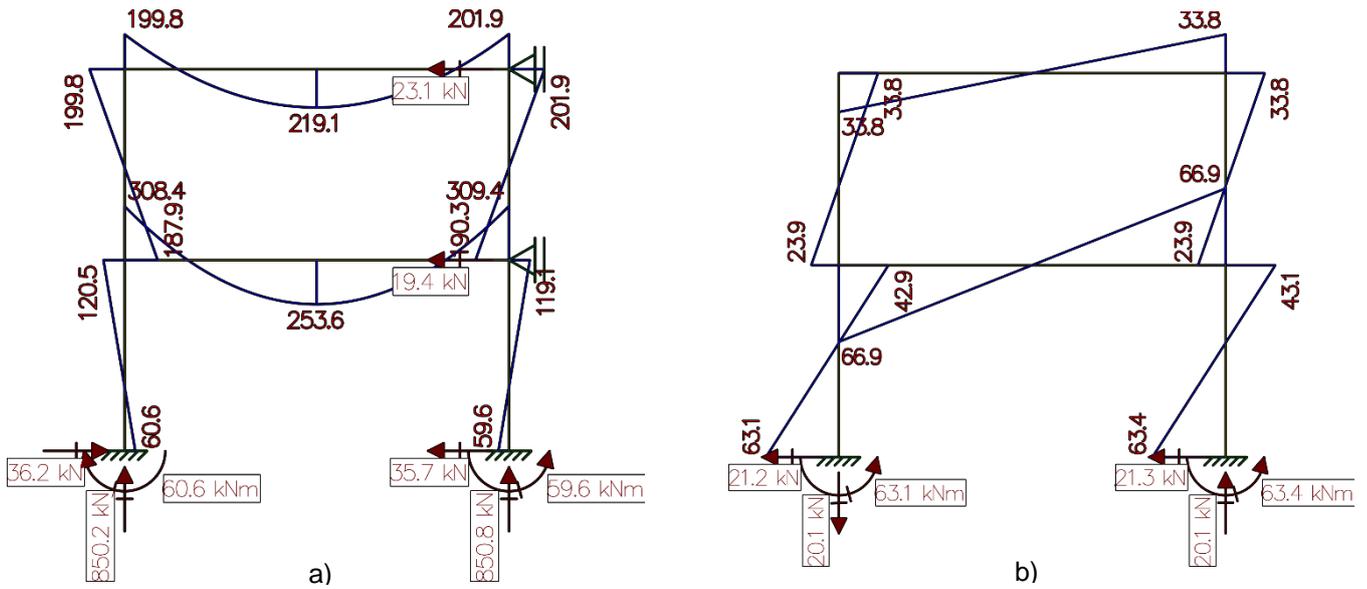
Fonte: Autora (2020).

- Deslocamentos máximos:
 - 1º pavimento (nó 5): $\Delta_1 = 1,67 \text{ cm}$;
 - 2º pavimento (nó 6): $\Delta_2 = 3,16 \text{ cm}$;

4.2.2. Método $B_1 - B_2$

- Diagramas de momento fletor do pórtico *nt* e do pórtico *lt*:

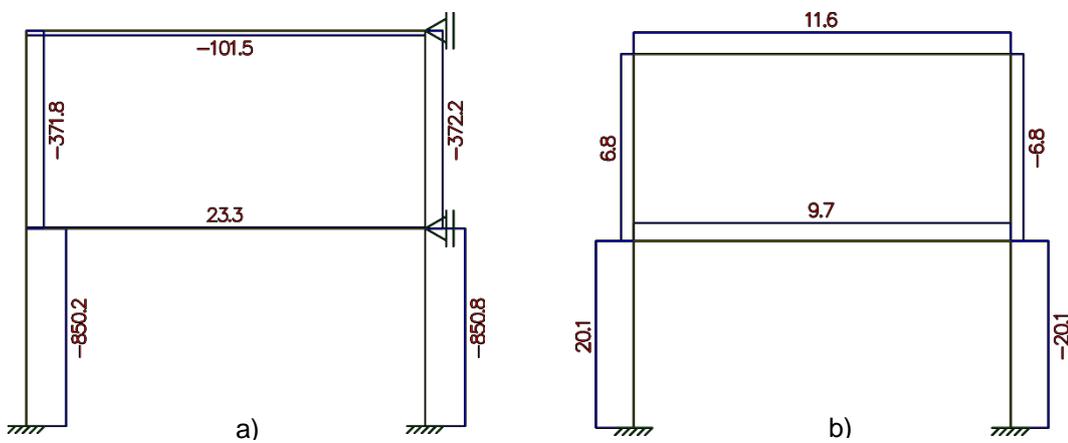
Figura 31 - Diagramas de momento fletor: (a) da estrutura *nt* [kNm] e (b) da estrutura *lt* [kNm].



Fonte: Autora (2020).

- Diagramas de esforço normal do pórtico *nt* e do pórtico *lt*:

Figura 32 - Diagramas de esforço normal: (a) da estrutura *nt* [kN] e (b) da estrutura *lt* [kN].



Fonte: Autora (2020).

- **Deslocamentos interpavimentos dos nós 5 e 6 da estrutura It:**

- 1º pavimento (nó 5): $\Delta_{h,1} = 1,67 \text{ cm}$;

- 2º pavimento (nó 6): $\Delta_{h,2} = 1,49 \text{ cm}$;

- **Classificação da estrutura:**

Calcula-se o coeficiente B_2 para determinar se a estrutura é de pequena, média ou grande deslocabilidade:

- 1º pavimento:

$$B_{2,1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{R_S} \frac{\Delta_{h,1}}{h_1} \frac{\sum N_{sd1}}{\sum H_{sd1}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{0,85} \left(\frac{1,67}{500}\right) \left(\frac{1701}{42}\right)} = 1,19 \rightarrow \text{média deslocabilidade}$$

- 2º pavimento:

$$B_{2,2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{R_S} \frac{\Delta_{h,2}}{h_2} \frac{\sum N_{sd2}}{\sum H_{sd2}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{0,85} \left(\frac{1,49}{500}\right) \left(\frac{744}{24}\right)} = 1,12 \rightarrow \text{média deslocabilidade}$$

- **Novos deslocamentos e coeficientes B_2 :**

Já que a estrutura é de média deslocabilidade, em ambos os pavimentos, há necessidade de amplificar os esforços de primeira ordem. Deve-se também diminuir 20% da rigidez. Dessa forma, os deslocamentos interpavimentos dos nós 5 e 6 passarão a valer:

- 1º pavimento (nó 5): $\Delta'_{h,1} = 2,09 \text{ cm}$;

- 2º pavimento (nó 6): $\Delta'_{h,2} = 1,86 \text{ cm}$;

e os novos coeficientes B_2 valerão:

- 1º pavimento: $B'_{2,1} = 1,25$;

- 2º pavimento: $B'_{2,2} = 1,16$;

- **Cálculo dos coeficientes B_1 para os pilares 3 e 4:**

Como o coeficiente B_1 é calculado por barra, são escolhidos os pilares 3 e 4 para o cálculo:

- 1º pavimento (pilar 3):

$$C_{m,1} = 0,60 - 0,40 \frac{M_1}{M_2} = 0,60 - 0,40 \left(\frac{59,6}{119,1} \right) = 0,40$$

$$N_e = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 16000(10450)}{500^2} = 6600,8 \text{ kN}$$

$$B_{1,1} = \frac{C_m}{1 - \frac{|N_{sd1}|}{N_e}} = \frac{0,40}{1 - \frac{|871|}{6600,8}} = 0,46 \rightarrow B_{1,1} = 1,0$$

- 2º pavimento (pilar 4):

$$C_{m,2} = 0,60 - 0,40 \frac{M_1}{M_2} = 0,60 - 0,40 \left(\frac{190,3}{201,9} \right) = 0,22$$

$$B_{1,2} = \frac{C_m}{1 - \frac{|N_{sd1}|}{N_e}} = \frac{0,22}{1 - \frac{|379|}{6600,8}} = 0,23 \rightarrow B_{1,2} = 1,0$$

- **Cálculo do momento fletor total para os pilares 3 e 4:**

- 1º pavimento (pilar 3):

$$M_{sd,1,m\acute{a}x} = B_{1,1}M_{nt} + B'_{2,1}M_{lt} = 1,0(119,1) + 1,25(43,1)$$

$$M_{sd,1,m\acute{a}x} = 173,0 \text{ kNm}$$

- 2º pavimento (pilar 4):

$$M_{sd,2,m\acute{a}x} = B_{1,2}M_{nt} + B'_{2,2}M_{lt} = 1,0(201,9) + 1,16(33,8)$$

$$M_{sd,2,m\acute{a}x} = 241,1 \text{ kNm}$$

- **Cálculo do esforço normal total para os pilares 3 e 4:**

- 1º pavimento (pilar 3):

$$N_{sd,1} = N_{nt} + B'_{2,1}N_{lt} = -850,8 + 1,25(-20,1)$$

$$N_{sd,1} = -875,9 \text{ kN}$$

- 2º pavimento (pilar 4):

$$N_{sd,2} = N_{nt} + B'_{2,2}N_{lt} = -372,2 + 1,16(-6,8)$$

$$N_{sd,2} = -380,1 \text{ kN}$$

Vale ressaltar que, pelo método $B_1 - B_2$, não há amplificação do esforço cortante. Por isso, os valores são os mesmos obtidos em análise elástica de primeira ordem.

4.2.3. Método da NBR 6118:2014: Coeficiente γ_z

- **Classificação da estrutura:**

Calcula-se o coeficiente γ_z para determinar se a estrutura é de nós fixos ou móveis. Utilizam-se os deslocamentos obtidos na análise de primeira ordem.

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,tot,d}}}$$

$$\Delta M_{tot,d} = \Sigma F_{V2} \Delta_2 + \Sigma F_{V1} \Delta_1$$

$$\Delta M_{tot,d} = [(33,6)(10) + (2)(204,0)]3,16 + [(45,0)(10) + (2)(253,5)]1,67$$

$$\Delta M_{tot,d} = 4261,5 \text{ kNcm}$$

em que ΣF_{V1} e ΣF_{V2} são as cargas verticais totais aplicadas no pavimento 1 e 2, respectivamente.

$$M_{1,tot,d} = F_{H2}z_2 + F_{H1}z_1 = (24)(1000) + (18)(500)$$

$$M_{1,tot,d} = 33000 \text{ kNcm}$$

em que F_{H1} e F_{H2} são as forças horizontais aplicadas no pavimento 1 e 2, respectivamente.

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{4261,5}{33000}} = 1,15 \rightarrow \text{estrutura de nós móveis}$$

Como o valor do coeficiente γ_z confirma que a estrutura é deslocável, deve-se tomar $0,95\gamma_z$ e multiplicar pelas ações horizontais atuantes no pórtico, além de diminuir a rigidez em 20% ($0,8EI; 0,8EA$). Dessa forma, é possível obter os deslocamentos amplificados, os diagramas de momento fletor, esforço normal e cortante, como se segue.

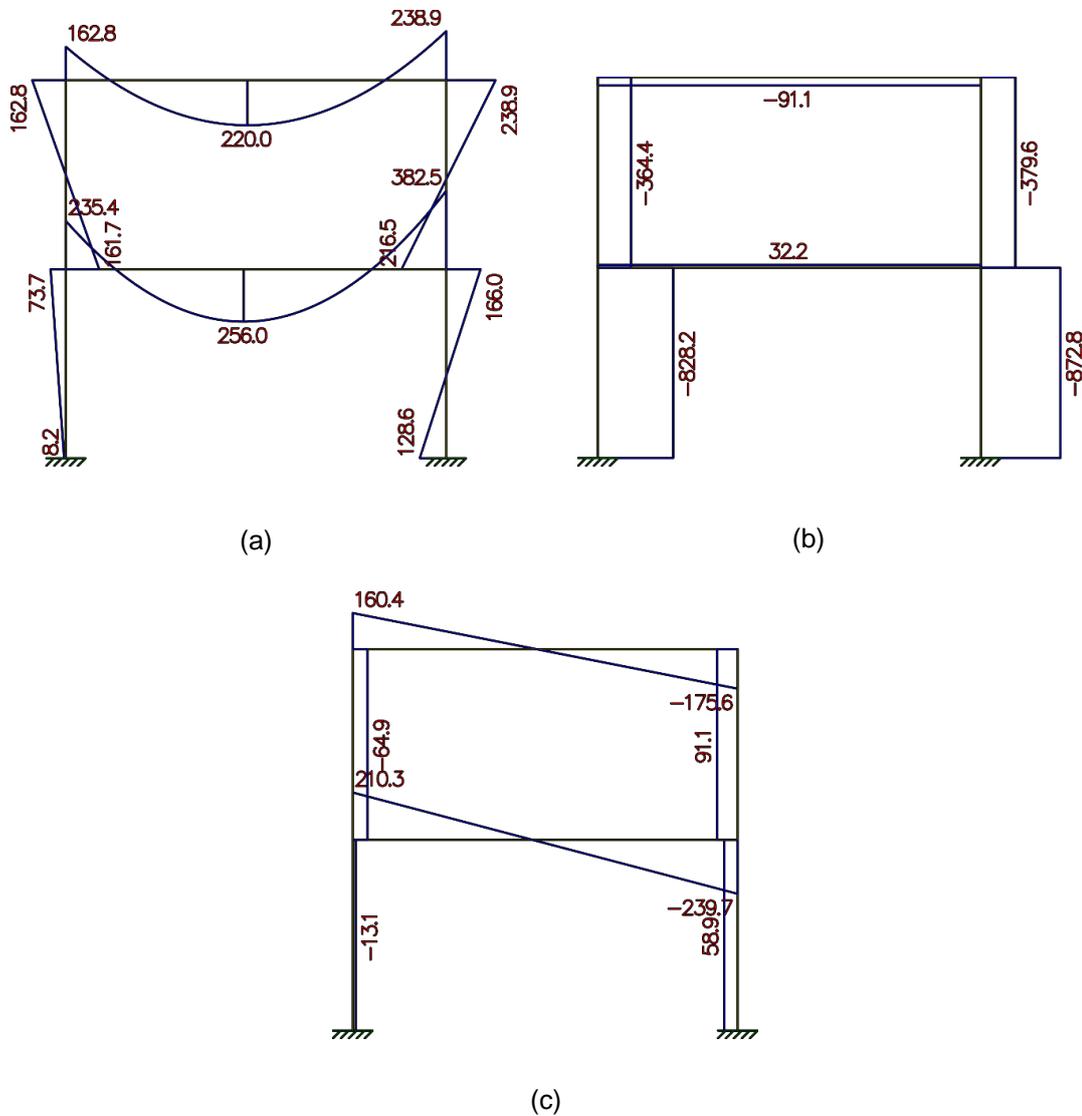
- **Deslocamentos máximos:**

- 1º pavimento (nó 5): $\Delta_1 = 2,27 \text{ cm}$;

- 2º pavimento (nó 6): $\Delta_2 = 4,31 \text{ cm}$;

- Diagramas de momento fletor, esforço normal e esforço cortante:

Figura 33 - Diagramas de: (a) momento fletor [kNm], (b) esforço normal [kN] e (c) esforço cortante [kN].



Fonte: Autora (2020).

- Resultados para os pilares 3 e 4:

- 1º pavimento (pilar 3):

$$M_{sd,1,m\acute{a}x} = 166,0 \text{ kNm}$$

$$N_{sd,1} = -872,8 \text{ kN}$$

$$V_{sd,1} = 58,9 \text{ kN}$$

- 2º pavimento (pilar 4):

$$M_{sd,2,m\acute{a}x} = 238,9 \text{ kNm}$$

$$N_{sd,2} = -379,6 \text{ kN}$$

$$V_{sd,2} = 91,1 \text{ kN}$$

4.2.4. Método P-Delta Iterativo

Para o método P-Delta iterativo foram necessárias três iterações para se atingir o critério de convergência de 0,5%, neste problema. A Tabela 9, abaixo, apresenta os deslocamentos iniciais e finais por pavimento (Δ_1 e Δ_2), as forças fictícias calculadas, também para cada pavimento (H'_1 e H'_2) e a convergência do deslocamento em %.

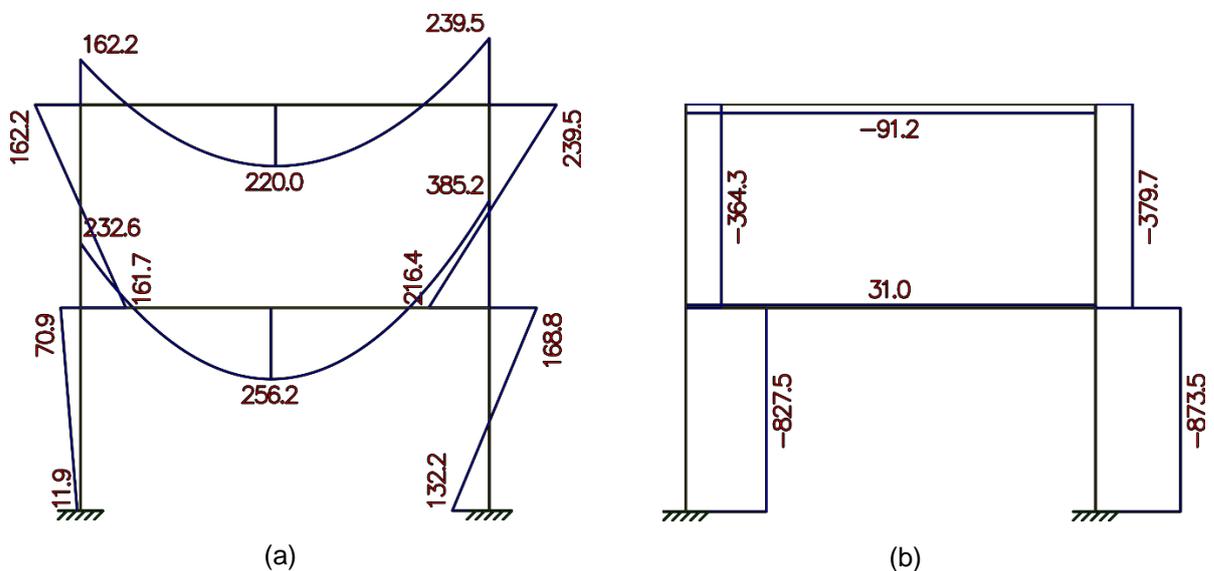
Tabela 9 - Resultados obtidos pelo método P-Delta.

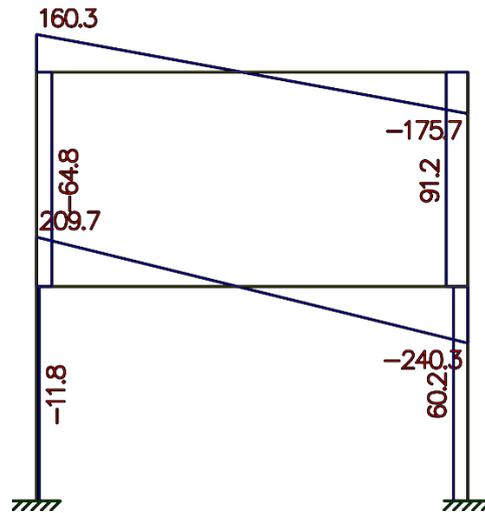
	1ª Iteração	2ª Iteração	3ª Iteração
Δ_2 [cm]	3,16	3,48	3,52
Δ_1 [cm]	1,67	1,86	1,89
H'_2 [kN]	2,22	2,40	2,43
H'_1 [kN]	3,45	3,94	4,00
Novo Δ_2 [cm]	3,48	3,52	3,524
C_2 [%]	10,20	1,15	0,14
Novo Δ_1 [cm]	1,86	1,89	1,892
C_1 [%]	11,82	1,34	0,16

Fonte: Autora (2020).

- **Diagramas de momento fletor, esforço normal e esforço cortante:**

Figura 34 - Diagramas de: (a) momento fletor [kNm], (b) esforço normal [kN] e (c) esforço cortante [kN].





(c)

Fonte: Autora (2020).

- **Resultados para os pilares 3 e 4:**

- 1º pavimento (pilar 3):

$$M_{sd,1,m\acute{a}x} = 168,8 \text{ kNm} \quad N_{sd,1} = -873,5 \text{ kN} \quad V_{sd,1} = 60,2 \text{ kN}$$

- 2º pavimento (pilar 4):

$$M_{sd,2,m\acute{a}x} = 239,5 \text{ kNm} \quad N_{sd,2} = -379,7 \text{ kN} \quad V_{sd,2} = 91,2 \text{ kN}$$

4.2.5. Método Europeu

A metodologia de cálculo dos esforços de segunda ordem aqui efetuada é a terceira abordagem do item 3.4.4: EC3-2b - análise de segunda ordem aproximada, com imperfeições globais.

- **Cálculo das imperfeições geométricas globais:**

$$\varphi = \varphi_0 \alpha_h \alpha_m$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{200} \text{ rad}$$

$$\alpha_h = \frac{2}{\sqrt{h}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = 0,632 \rightarrow \alpha_h = \frac{2}{3} \text{ (valor mínimo)}$$

$$\alpha_m = \sqrt{0,5 \left(1 + \frac{1}{m}\right)} = \sqrt{0,5 \left(1 + \frac{1}{2}\right)} = 0,866$$

$$\varphi = \frac{1}{200} \frac{2}{3} 0,866 = 0,0029 \text{ rad}$$

- Carga vertical de projeto aplicada no 1º pavimento:

$$\Sigma F_{V1} = (45,0)(10) + (2)(253,5) = 957 \text{ kN}$$

- Carga vertical de projeto aplicada no 2º pavimento:

$$\Sigma F_{V2} = (33,6)(10) + (2)(204,0) = 744 \text{ kN}$$

- Força lateral equivalente no 1º pavimento:

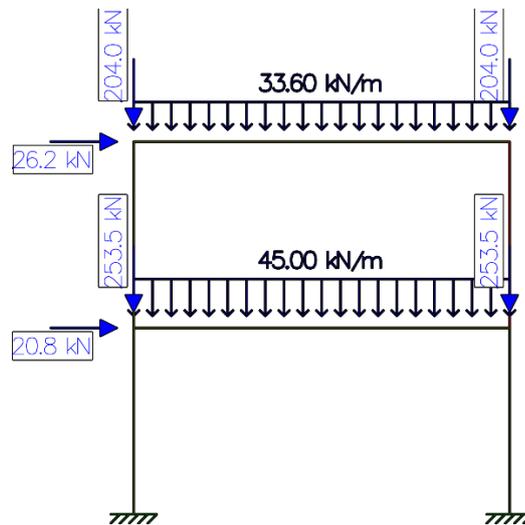
$$F_{h,ed,1} = \varphi \Sigma F_{V1} = (0,0029)(957) = 2,8 \text{ kN}$$

- Força lateral equivalente no 2º pavimento:

$$F_{h,ed,2} = \varphi \Sigma F_{V2} = (0,0029)(744) = 2,2 \text{ kN}$$

Assim, $F_{h,ed,1}$ e $F_{h,ed,2}$ são adicionadas às ações horizontais da estrutura, que passa a ter a seguinte configuração de carregamentos:

Figura 35 - Novas ações horizontais aplicadas ao pórtico.



Fonte: Autora (2020).

- **Cálculo do coeficiente α_{cr} :**

$$\alpha_{cr} = \left(\frac{H_{ed}}{V_{ed}} \right) \left(\frac{h}{\delta_{H,ed}} \right)$$

O deslocamento lateral interpavimentos $\delta_{H,ed}$ é calculado com a estrutura submetida unicamente às ações horizontais e vale:

- 1º pavimento (nó 5): $\delta_{H,ed,1} = 1,86 \text{ cm}$;
- 2º pavimento (nó 6): $\delta_{H,ed,2} = 1,69 \text{ cm}$.

Assim, calcula-se α_{cr} :

- 1º pavimento: $\alpha_{cr,1} = \left(\frac{47}{1701} \right) \left(\frac{500}{1,86} \right) = 7,42$;
- 2º pavimento: $\alpha_{cr,2} = \left(\frac{26,2}{744} \right) \left(\frac{500}{1,69} \right) = 10,43$.

De acordo com o EC3, deve-se calcular o α_{cr} em todos os andares, mas escolher o menor valor como coeficiente global. Logo, $\alpha_{cr} = 7,42$.

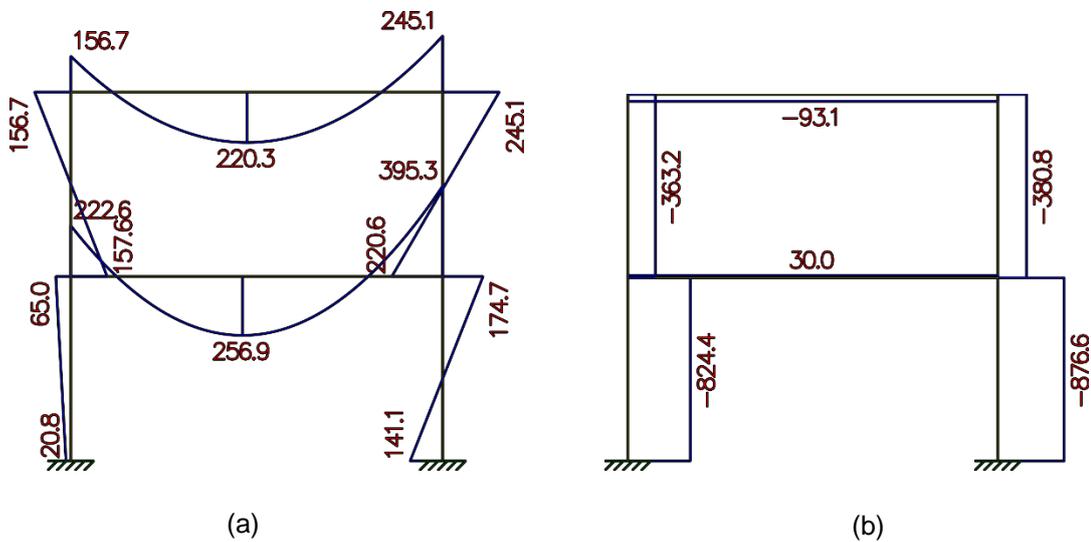
- **Cálculo do coeficiente β :**

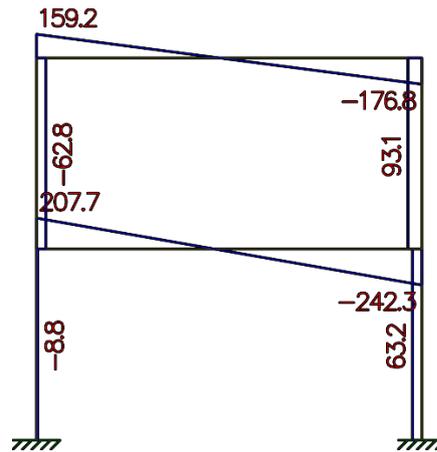
Como o valor de α_{cr} é inferior a 10, há necessidade de se amplificar as ações horizontais atuantes pelo coeficiente β , calculado a seguir:

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha_{cr}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{7,42}} = 1,156$$

- **Diagramas de momento fletor, esforço normal e esforço cortante:**

Figura 36 - Diagramas de: (a) momento fletor [kNm], (b) esforço normal [kN] e (c) esforço cortante [kN].





(c)

Fonte: Autora (2020).

- **Resultados para os pilares 3 e 4:**

- 1º pavimento (pilar 3):

$$M_{sd,1,máx} = 174,7 \text{ kNm}$$

$$N_{sd,1} = -876,6 \text{ kN}$$

$$V_{sd,1} = 63,2 \text{ kN}$$

- 2º pavimento (pilar 4):

$$M_{sd,2,máx} = 245,1 \text{ kNm}$$

$$N_{sd,2} = -380,8 \text{ kN}$$

$$V_{sd,2} = 93,1 \text{ kN}$$

- **Deslocamentos totais finais:**

- 1º pavimento (nó 5): $\Delta_1 = 2,15 \text{ cm}$;

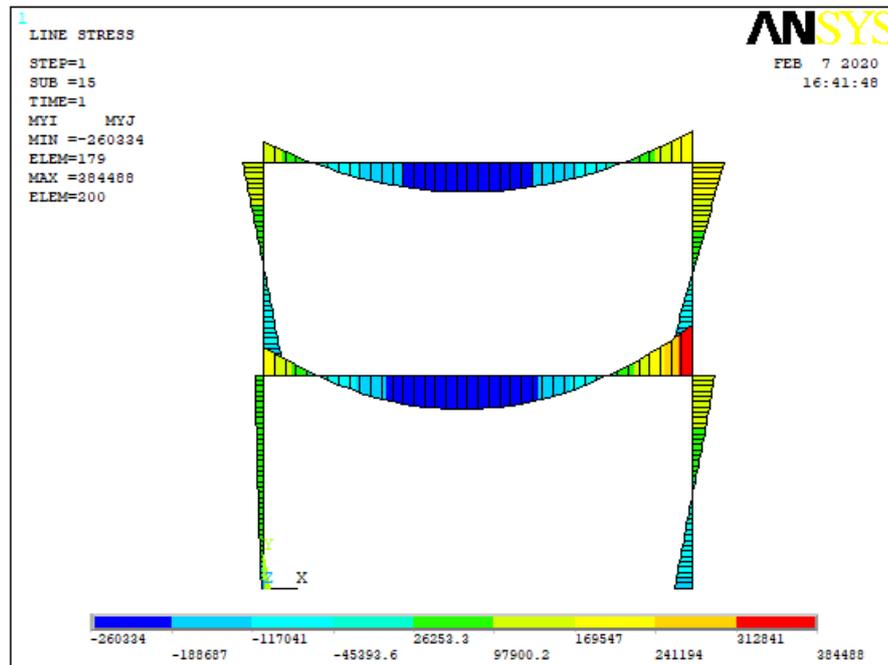
- 2º pavimento (nó 6): $\Delta_2 = 4,05 \text{ cm}$.

4.2.6. Análise não linear geométrica no Ansys 14.0

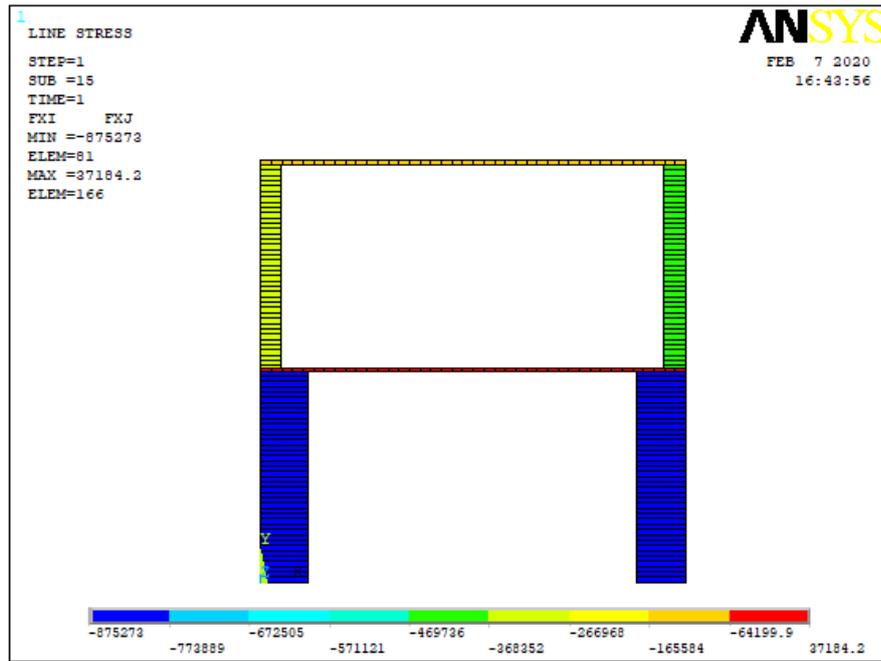
Remodelou-se o pórtico no programa Ansys 14.0 para que fosse efetuada a análise não linear geométrica. Como já haviam ações horizontais, não foram adicionadas forças nocionais. Reduziu-se a rigidez dos elementos em 20% ($0,8E$).

- **Diagramas de momento fletor, esforço normal e esforço cortante:**

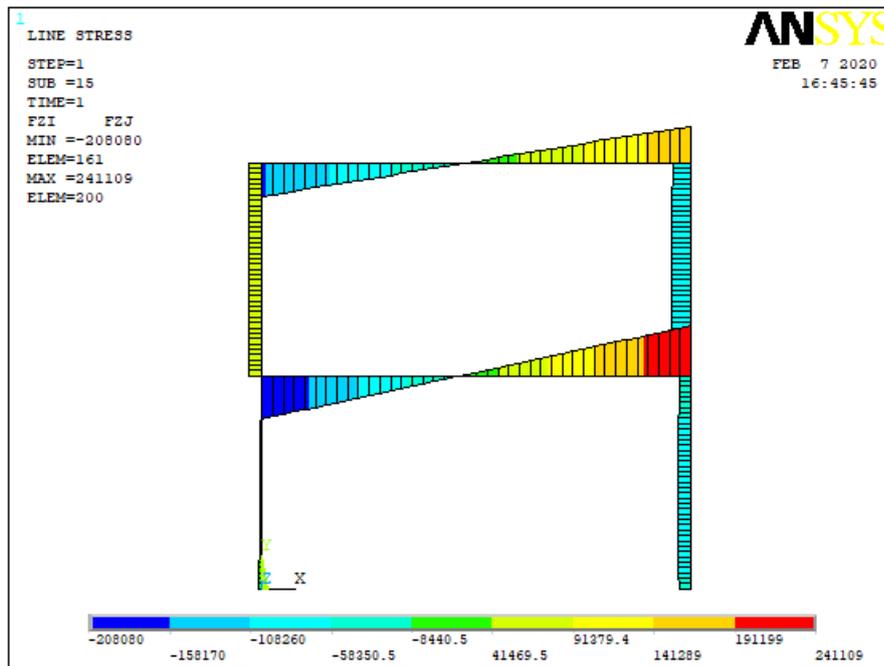
Figura 37 - Diagramas de: (a) momento fletor [kNm], (b) esforço normal [kN] e (c) esforço cortante [kN].



(a)



(b)



(c)

Fonte: Autora (2020).

- **Resultados para os pilares 3 e 4:**

- 1º pavimento (pilar 3):

$$M_{sd,1,máx} = 168,7 \text{ kNm} \quad N_{sd,1} = -875,3 \text{ kN} \quad V_{sd,1} = 50,7 \text{ kN}$$

- 2º pavimento (pilar 4):

$$M_{sd,2,máx} = 239,3 \text{ kNm} \quad N_{sd,2} = -380,8 \text{ kN} \quad V_{sd,2} = 85,7 \text{ kN}$$

- **Deslocamentos totais finais:**

- 1º pavimento (nó 5): $\Delta_1 = 2,83 \text{ cm}$;

- 2º pavimento (nó 6): $\Delta_2 = 5,38 \text{ cm}$.

4.2.7. Comparação dos resultados

A Tabela 10 a seguir resume todos os resultados obtidos por cada um dos métodos:

Tabela 10 - Resumo de resultados.

	Análise Elástica Primeira Ordem	Método $B_1 - B_2$	Coeficiente γ_z	Método P-Delta	Método Europeu	Ansys
Δ_1 nó 5 [cm]	1,67	2,09	2,27	1,89	2,15	2,83
Δ_2 nó 6 [cm]	3,16	3,95	4,31	3,52	4,05	5,38
Momento Fletor pilar 3 [kNm]	162,2	173,0	166,0	168,8	174,7	168,7
Momento Fletor pilar 4 [kNm]	235,8	241,1	238,9	239,5	245,1	239,3
Esforço Normal pilar 3 [kN]	-871,0	-875,9	-872,8	-873,5	-876,6	-875,3
Esforço Normal pilar 4 [kN]	-379,0	-380,1	-379,6	-379,7	-380,8	-380,8
Esforço Cortante pilar 3 [kN]	57,0	57,0	58,9	60,2	63,2	50,7
Esforço Cortante pilar 4 [kN]	90,0	90,0	91,1	91,2	93,1	85,7

Fonte: Autora (2020).

A Tabela 11 apresenta os valores dos coeficientes de majoração para cada um dos métodos:

Tabela 11 - Coeficientes de majoração.

	B_1	B_2 (clas.)	B_2 (final)	γ_z	P-Delta Δ_2/Δ_1	α_{cr}	β	Ansys Δ_2/Δ_1
1º Pavimento	1,00	1,19	1,25	1,15	1,13	7,42	1,156	1,22
2º Pavimento	1,00	1,12	1,16		1,12	10,43		1,20

Fonte: Autora (2020).

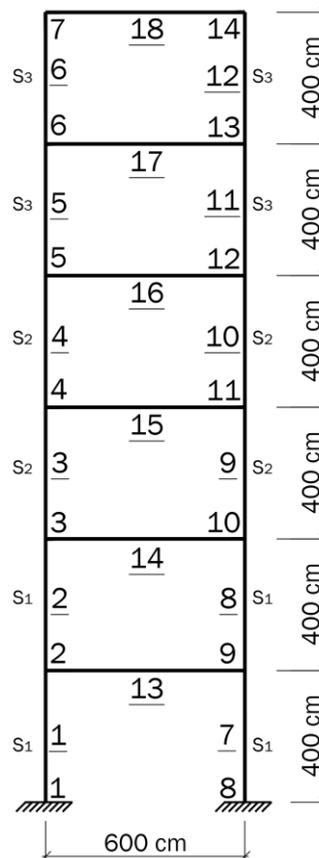
Para a análise dos deslocamentos, percebe-se que a análise rigorosa no Ansys foi a mais conservadora de todas, seguida pelo coeficiente γ_z e o método europeu, conhecidos por amplificarem as ações horizontais.

Os métodos de análise de segunda ordem apresentaram boa correlação entre si, para o momento fletor, divergindo no máximo em torno de 3,6% da análise rigorosa no Ansys. Para o esforço normal, todos os métodos possuem boa correlação entre si, diferindo em no máximo 0,3%. Já para o esforço cortante, observam-se diferenças mais significativas em relação à análise rigorosa e as outras metodologias. A análise no Ansys resulta menos conservadora que todas as outras, sendo a do método europeu, a que apresenta o maior esforço cortante máximo.

4.3. Aplicação 3: Pórtico de Seis Pavimentos e Um Vão

A Figura 38 mostra um pórtico em concreto armado de seis pavimentos e um vão, onde estão indicadas as cotas, números dos nós e números das barras (sublinhados). A estrutura possui resistência característica à compressão $f_{ck} = 25$ MPa, módulo de deformação secante $E_{cs} = 24$ GPa. Os pilares são compostos por 3 tipos de seções retangulares: S_1 (25×40 cm), S_2 (25×35 cm) e S_3 (25×25 cm), como indicado na figura. As vigas possuem seção retangular com dimensão 20×60 cm e comprimento $L_{viga} = 6$ m.

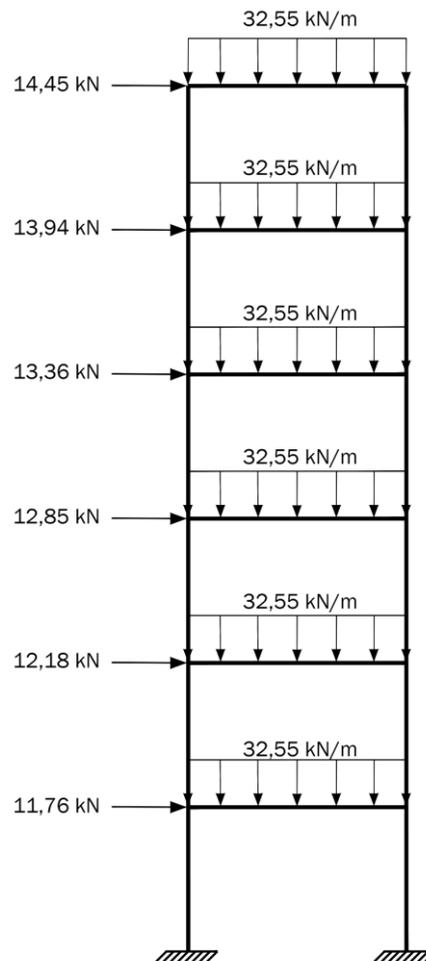
Figura 38 - Dimensões e numeração.



Fonte: Autora (2020).

A Figura 39 mostra as ações aplicadas à estrutura, para a combinação mais desfavorável. Chama-se esse conjunto de ações mostrado na Figura 39 de Q_R (ações de referência).

Figura 39 - Ações de cálculo na estrutura.



Fonte: Autora (2020).

A estrutura foi modelada no programa Ftool, de onde foram obtidos os esforços e deslocamentos de primeira ordem. Em seguida, remodelou-se a estrutura no programa Ansys 14.0, com elementos de BEAM188 e 40 subdivisões por barra, para que fosse efetuada a análise não linear geométrica. Para os casos em que o deslocamento de segunda ordem Δ_2 foi superior a 10% do deslocamento de primeira ordem Δ_1 , houve redução da rigidez das vigas ($0,4EI$; $0,4EA$) e dos pilares

(0,8EI; 0,8EA). Como já havia um carregamento horizontal, não foram adicionadas forças nocionais, afim de simular as imperfeições.

Foram realizadas cinco simulações com aumento gradativo do carregamento de referência Q_R , por um fator de multiplicação n ($Q_R; 2Q_R; 3Q_R; 4Q_R; 5Q_R$, com $n \rightarrow 1, 2, 3, 4$ e 5). As Tabelas 12, 13, 14, 15 e 16 apresentam os valores calculados do coeficiente B_2 para classificação da estrutura e final - para amplificação dos esforços; do coeficiente B_1 ; do coeficiente γ_Z ; dos coeficientes α_{cr} e β (para amplificação de ações no método europeu); a razão entre os deslocamentos inicial e final (Δ_2/Δ_1) no método P-Delta e, por fim, a razão entre os deslocamentos inicial e final (Δ_2/Δ_1) no Ansys, para cada simulação.

Tabela 12 - Coeficiente de majoração B_2 para classificação.

n	Coeficiente B_2 - Classificação					
	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar	6º andar
1	1,04	1,05	1,05	1,04	1,05	1,03
2	1,08	1,10	1,10	1,08	1,10	1,05
3	1,12	1,15	1,16	1,12	1,16	1,08
4	1,17	1,21	1,22	1,16	1,23	1,11
5	1,22	1,28	1,29	1,21	1,30	1,14

Fonte: Autora (2020).

Tabela 13 - Coeficiente de majoração B_2 final.

n	Coeficiente B_2 - Final					
	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar	6º andar
1	1,04	1,05	1,05	1,04	1,05	1,03
2	1,08	1,10	1,10	1,08	1,10	1,05
3	1,21	1,31	1,31	1,22	1,26	1,12
4	1,30	1,46	1,46	1,32	1,38	1,17
5	1,41	1,65	1,65	1,44	1,53	1,22

Fonte: Autora (2020).

Tabela 14 - Coeficientes de majoração B_1 , γ_Z , α_{cr} e β .

n	B_1	γ_Z	α_{cr}	β
1	1,0	1,04	25,62	1,04
2	1,0	1,07	12,75	1,09
3	1,0	1,11	8,54	1,13
4	1,0	1,16	6,38	1,19
5	1,0	1,21	5,11	1,24

Fonte: Autora (2020).

Tabela 15 - Razão entre os deslocamentos inicial e final (Δ_2/Δ_1) no método P-Delta.

n	(Δ_2/Δ_1) - Método P-Delta					
	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar	6º andar
1	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04
2	1,07	1,08	1,07	1,08	1,08	1,07
3	1,11	1,12	1,12	1,12	1,11	1,10
4	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,15
5	1,20	1,21	1,20	1,21	1,20	1,19

Fonte: Autora (2020).

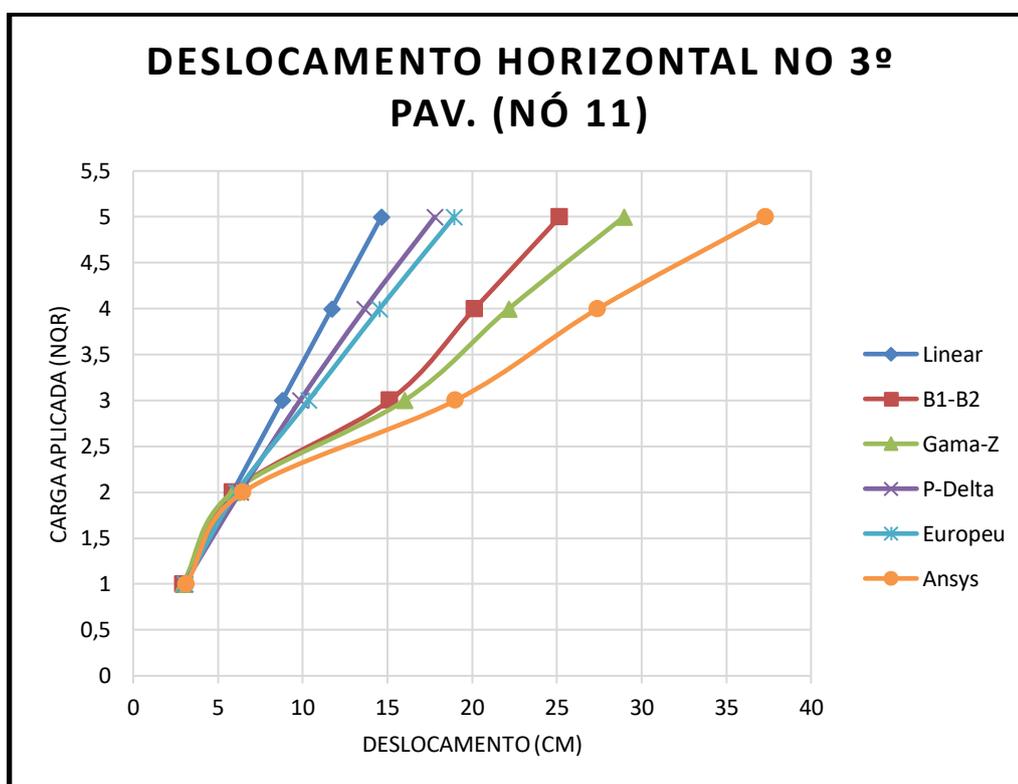
Tabela 16 - Razão entre os deslocamentos inicial e final (Δ_2/Δ_1) no Ansys.

n	(Δ_2/Δ_1) - Ansys					
	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar	6º andar
1	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,04
2	1,07	1,06	1,08	1,07	1,08	1,07
3	1,20	1,22	1,23	1,22	1,22	1,21
4	1,29	1,32	1,33	1,32	1,32	1,30
5	1,39	1,43	1,45	1,43	1,43	1,41

Fonte: Autora (2020).

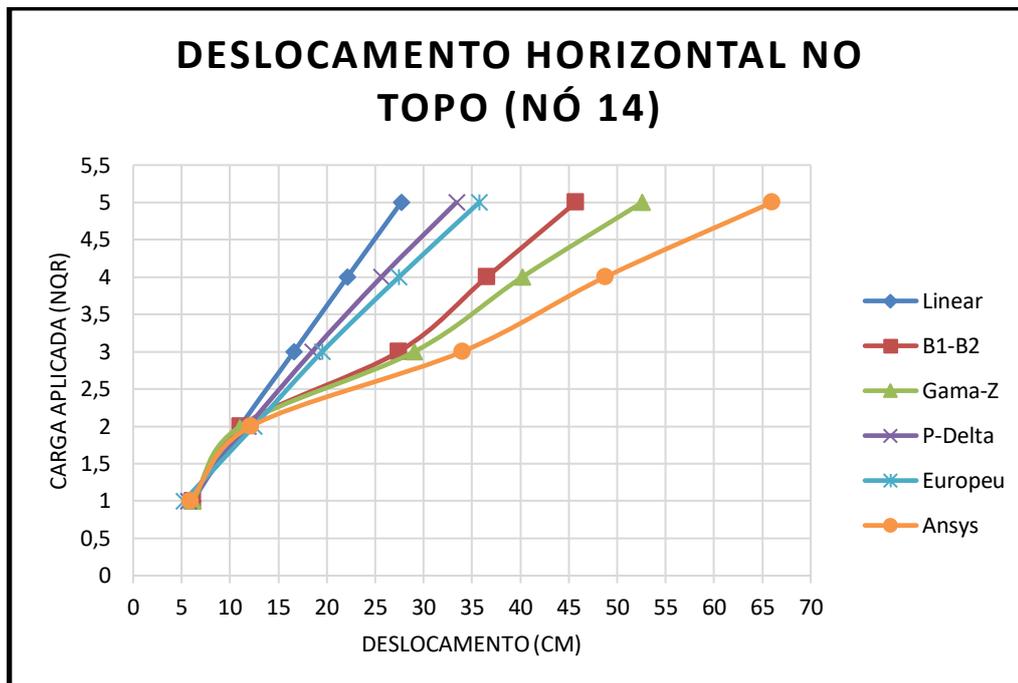
Os resultados do deslocamento horizontal no 3º pavimento (nó 11) e no topo do pórtico (nó 14), para todos os tipos de análises tratadas, são apresentados nos gráficos das Figuras 40 e 41. Percebe-se claramente o efeito da não linearidade física que, para métodos onde há redução da rigidez, são obtidos maiores valores de deslocamento, sendo a análise rigorosa no Ansys a que apresenta os maiores deslocamentos. Vale ressaltar que, para $n = 1$ e $n = 2$ (fator de carga aplicada), não foi necessário incluir a imperfeição de material, pois os efeitos de segunda ordem, até então, eram inferiores a 10% dos de primeira ordem.

Figura 40 - Deslocamento horizontal no 3º pavimento (nó 11).



Fonte: Autora (2020).

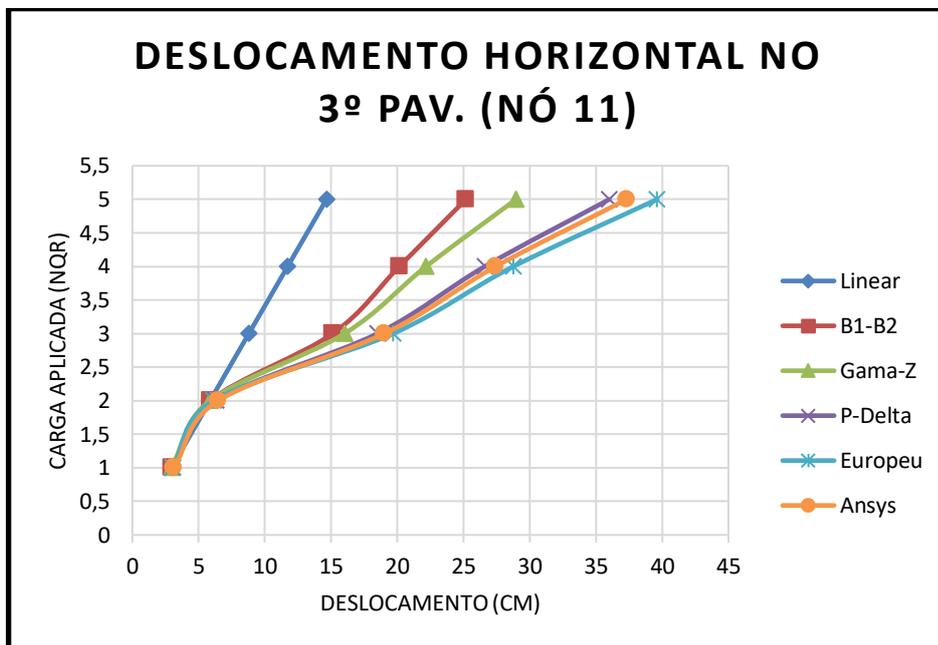
Figura 41 - Deslocamento horizontal no topo do pórtico (nó 14).



Fonte: Autora (2020).

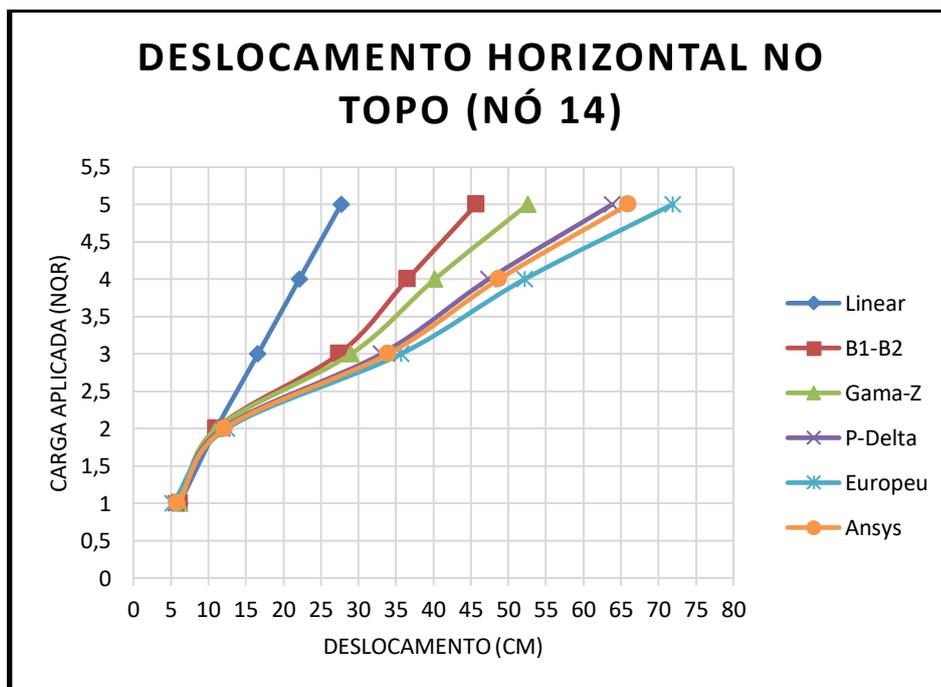
Visivelmente, os métodos P-Delta iterativo e europeu não seguem o mesmo padrão comportamental dos demais, apresentando valores inferiores de deslocamento, a partir de $n = 3$. A fim de estudar o comportamento desses métodos, faz-se a redução da rigidez das vigas ($0,4EI$; $0,4EA$) e dos pilares ($0,8EI$; $0,8EA$) e analisam-se os deslocamentos novamente:

Figura 42 - Deslocamento horizontal no 3º pavimento (nó 11), com rigidez reduzida para os métodos P-Delta iterativo e Europeu.



Fonte: Autora (2020).

Figura 43 - Deslocamento horizontal no topo (nó 14), com rigidez reduzida para os métodos P-Delta iterativo e Europeu.

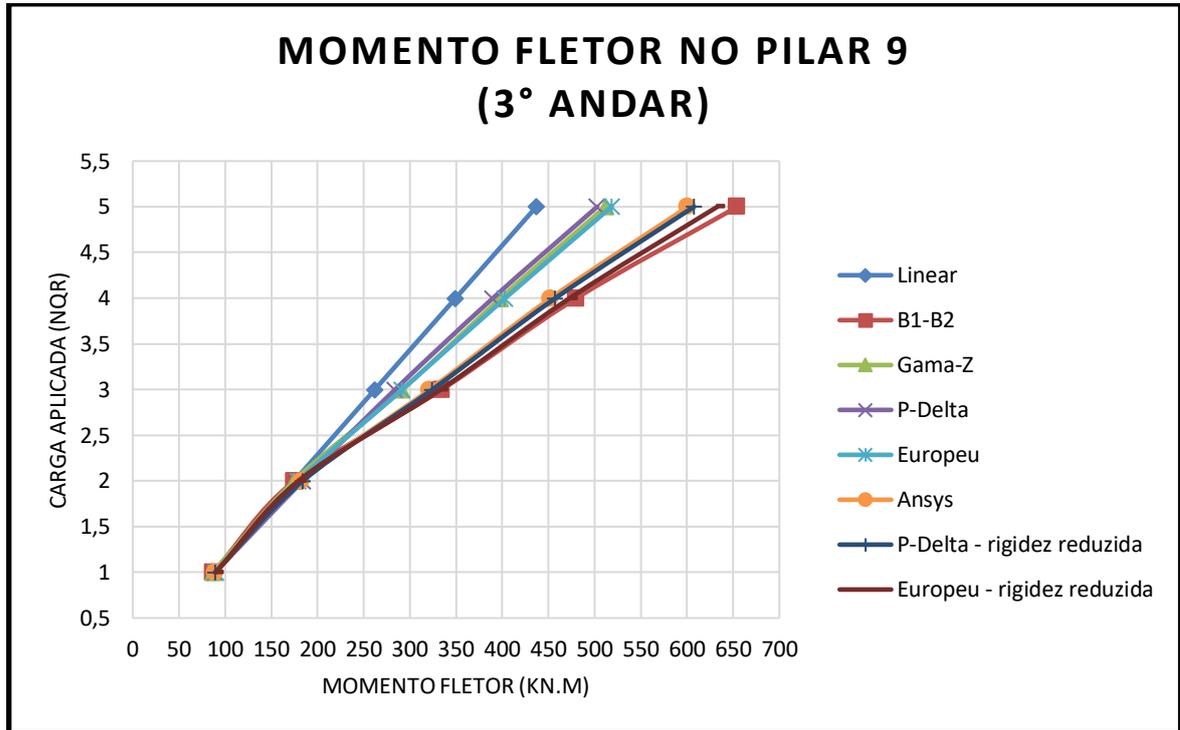


Fonte: Autora (2020).

Observa-se, a partir das Figuras 42 e 43 que após a redução da rigidez, os métodos P-Delta iterativo e o Europeu estão mais condizentes com o comportamento dos demais métodos, estando, inclusive, mais próximos da análise rigorosa.

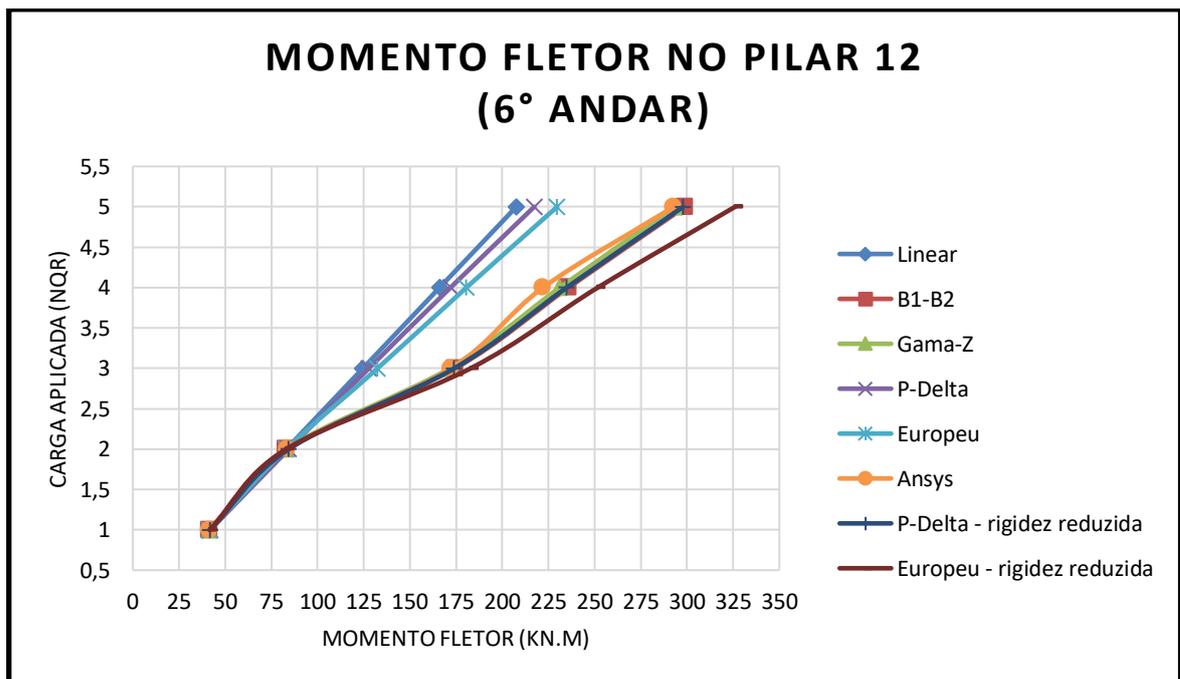
Escolheram-se os pilares 9 (3º andar) e 12 (6º andar) para analisar os esforços de momento fletor, força normal e força cortante, para cada uma das metodologias apresentadas. As figuras a seguir mostram cada um dos gráficos. Chama-se atenção novamente para os métodos P-Delta iterativo e o Europeu, em que são apresentados com e sem a redução da rigidez.

Figura 44 - Curvas parâmetro de carga x momento fletor no pilar 9.



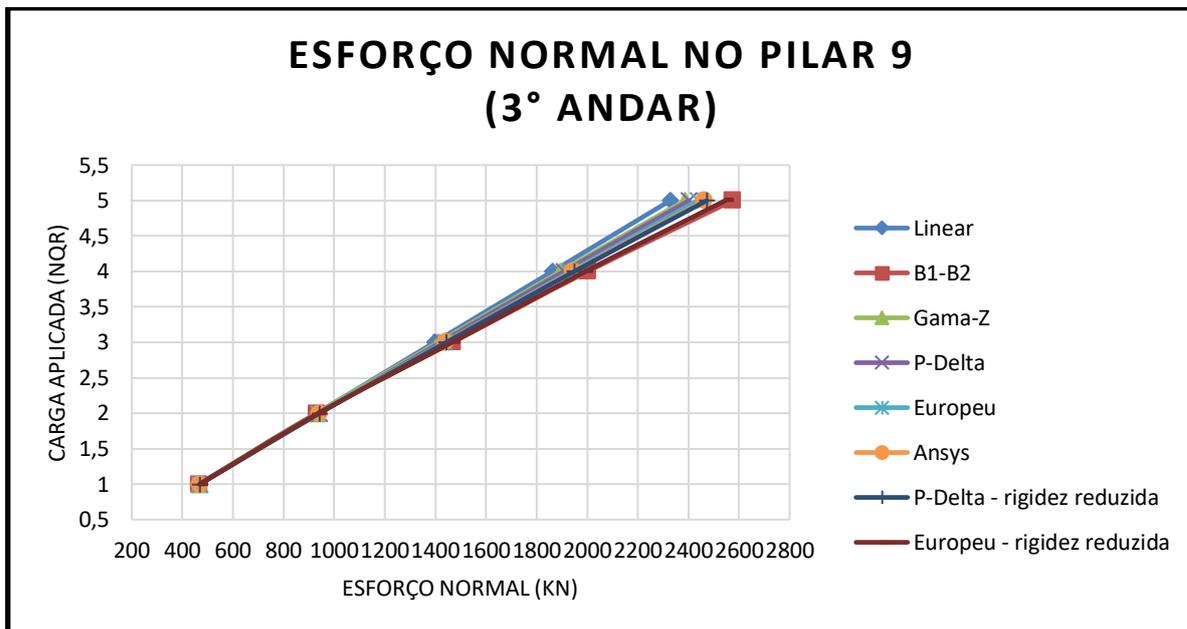
Fonte: Autora (2020).

Figura 45 - Curvas parâmetro de carga x momento fletor no pilar 12.



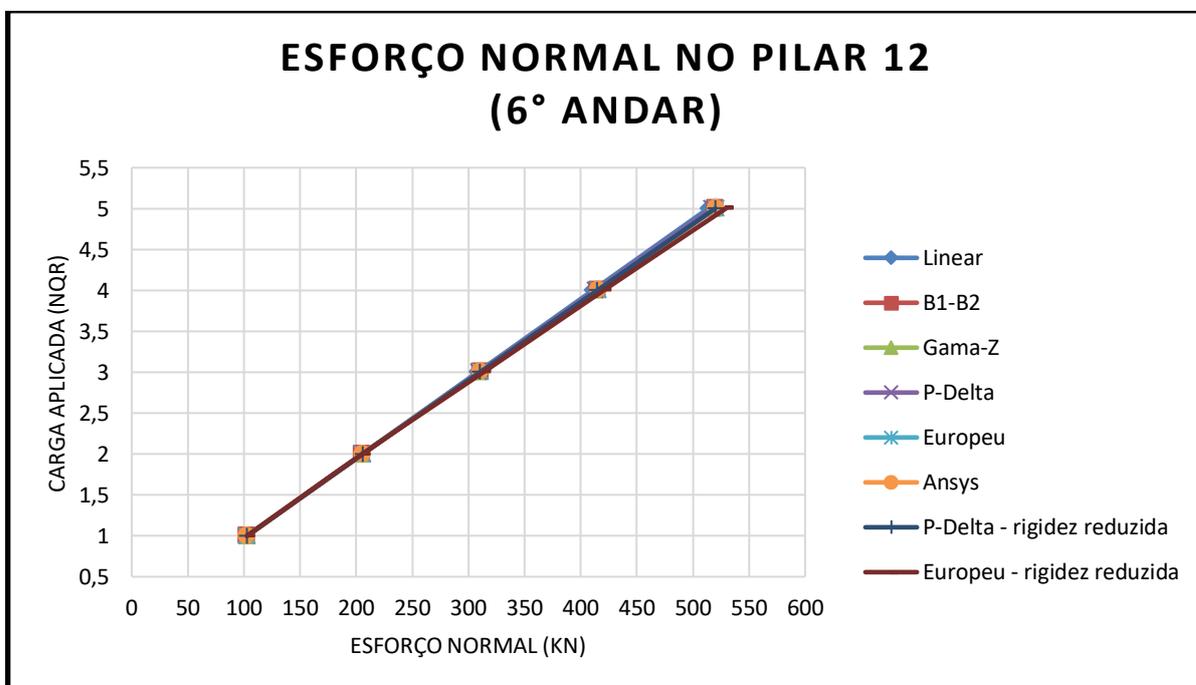
Fonte: Autora (2020).

Figura 46 - Curvas parâmetro de carga x esforço normal no pilar 9.



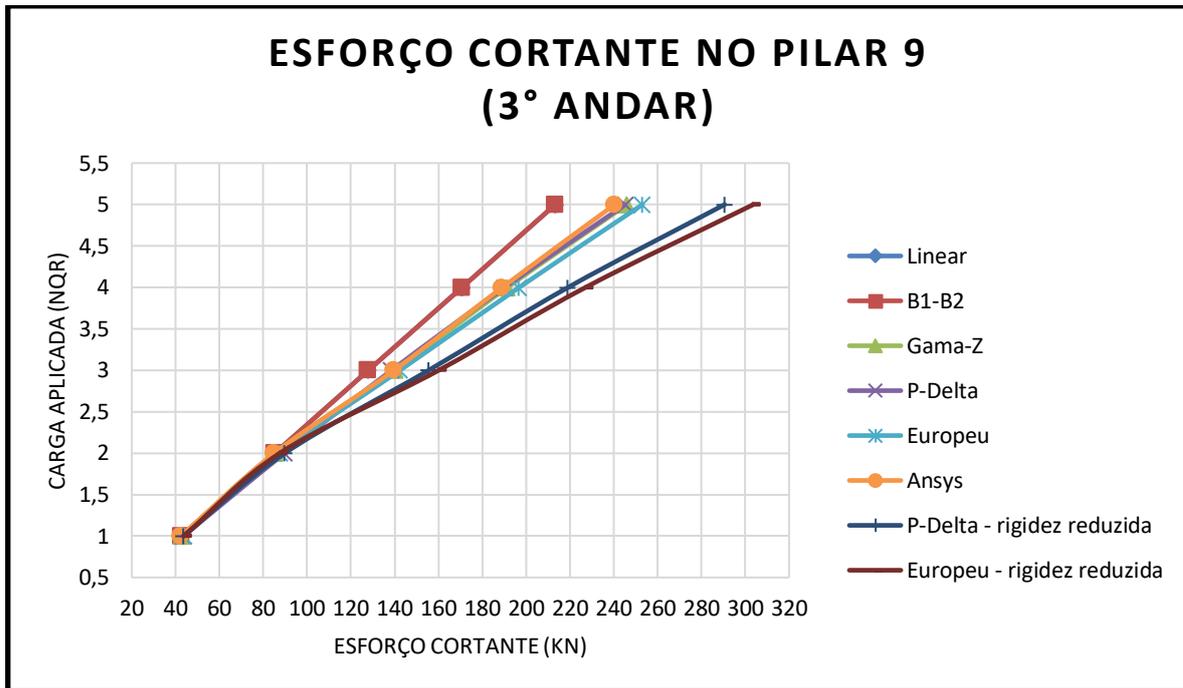
Fonte: Autora (2020).

Figura 47 - Curvas parâmetro de carga x esforço normal no pilar 12.



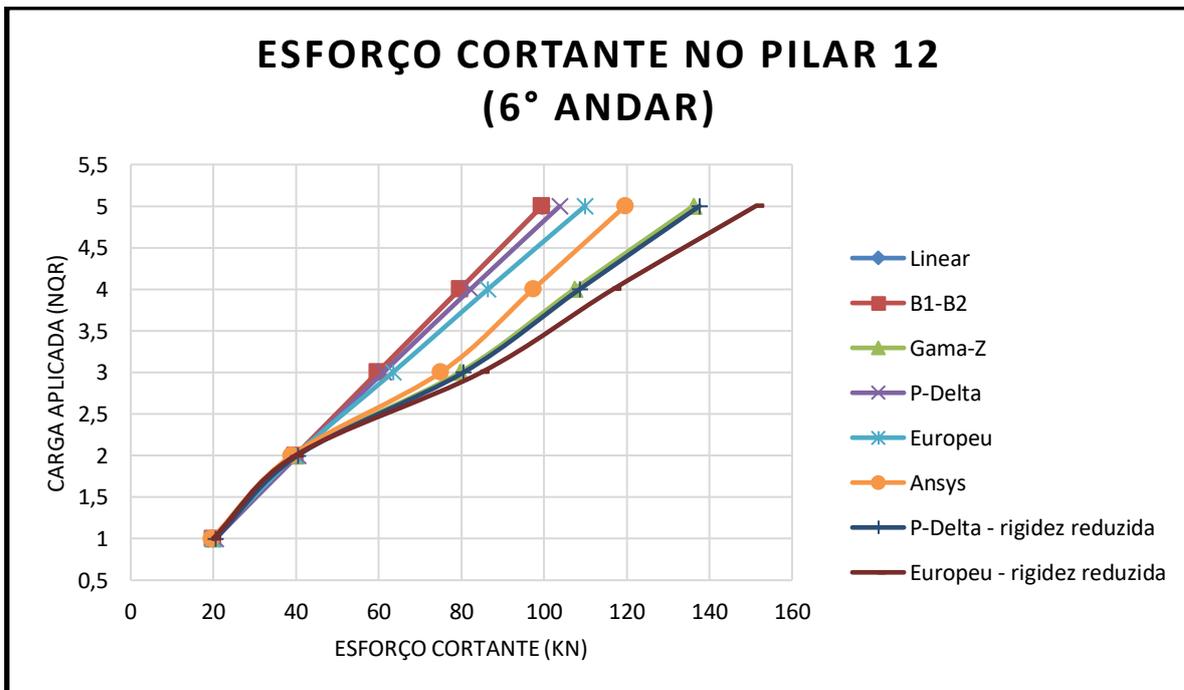
Fonte: Autora (2020).

Figura 48 - Curvas parâmetro de carga x esforço cortante no pilar 9.



Fonte: Autora (2020).

Figura 49 - Curvas parâmetro de carga x esforço cortante no pilar 12.



Fonte: Autora (2020).

A partir do gráfico de momento fletor para o pilar 9 (Figura 44), é possível observar que os métodos aproximados e a análise rigorosa possuem boa correlação até o fator de multiplicação $n = 2$, onde ainda não ocorreu a diminuição da rigidez dos elementos. A partir de $n = 3$, o resultado para o coeficiente γ_z começa a se distanciar da análise rigorosa, assim como, os métodos P-Delta e europeu, que por não considerarem a não linearidade física aproximada, ficam com valores inferiores aos outros métodos.

Diminuindo-se a rigidez dos elementos para os métodos P-Delta e europeu, é possível obter boa correlação para o momento fletor até o limite de $n = 4$. A partir daí, os coeficientes de sensibilidade obtido pelo Ansys (Δ_2/Δ_1) e B_2 começam a ultrapassar o limite de 1,4, indicando que a aplicação de métodos aproximados não é mais adequada.

O pilar 12, por apresentar coeficientes de sensibilidade (Δ_2/Δ_1) e majoração menores (consultar Tabelas 12 a 16), tem boa correlação de momento fletor para os coeficientes B_2 , γ_z , método P-Delta com rigidez reduzida e análise rigorosa.

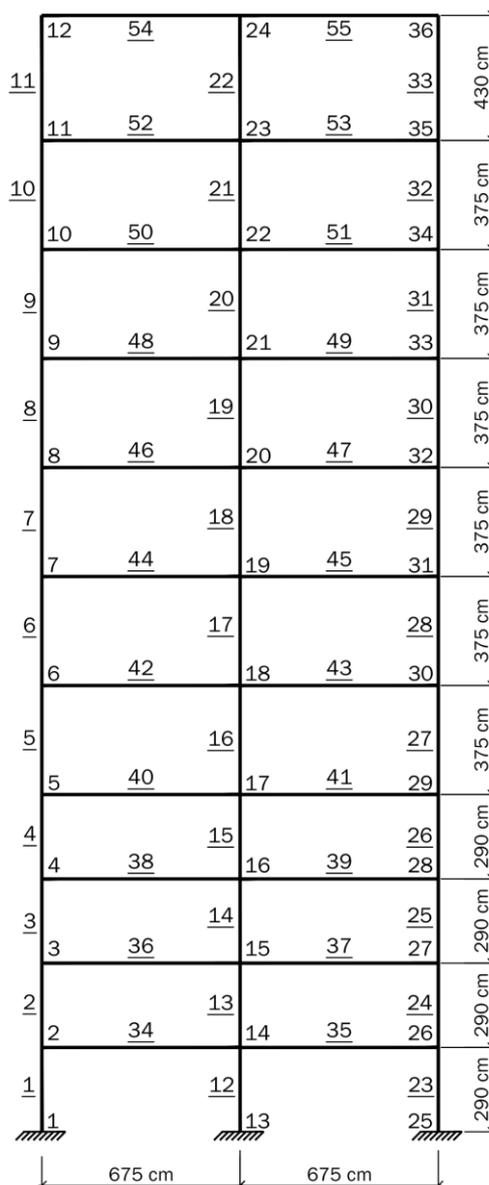
Os gráficos para análise do esforço normal nos pilares 9 e 12 mostram que todos os métodos estão muito próximos e, portanto, são satisfatórios.

Para o esforço cortante no pilar 9, há boa correlação entre todos os métodos até o limite de $n = 2$. A partir desse valor de fator de carga, a análise rigorosa se aproxima dos resultados do coeficiente γ_z , dos métodos P-Delta e europeu (sem redução da rigidez). Para o esforço cortante no pilar 12, as análises pelos métodos do coeficiente γ_z , P-Delta e europeu (com redução da rigidez) se mostram mais conservadoras.

4.4. Aplicação 4: Pórtico de Onze Pavimentos e Dois Vãos

A Figura 50 mostra um pórtico em estrutura de aço de onze pavimentos e dois vãos (adaptado de SILVA [2004]), onde estão indicadas as cotas, números dos nós e números das barras (sublinhados). Os pilares são de perfis soldados ($f_y = 350 \text{ MPa}$) e as vigas de perfil laminado ($f_y = 345 \text{ MPa}$), como se observa na Tabela 17. O módulo de elasticidade do aço é $E = 200 \text{ GPa}$.

Figura 50 - Pórtico de onze pavimentos e dois vãos: dimensões e numeração.



Fonte: Autora (2020).

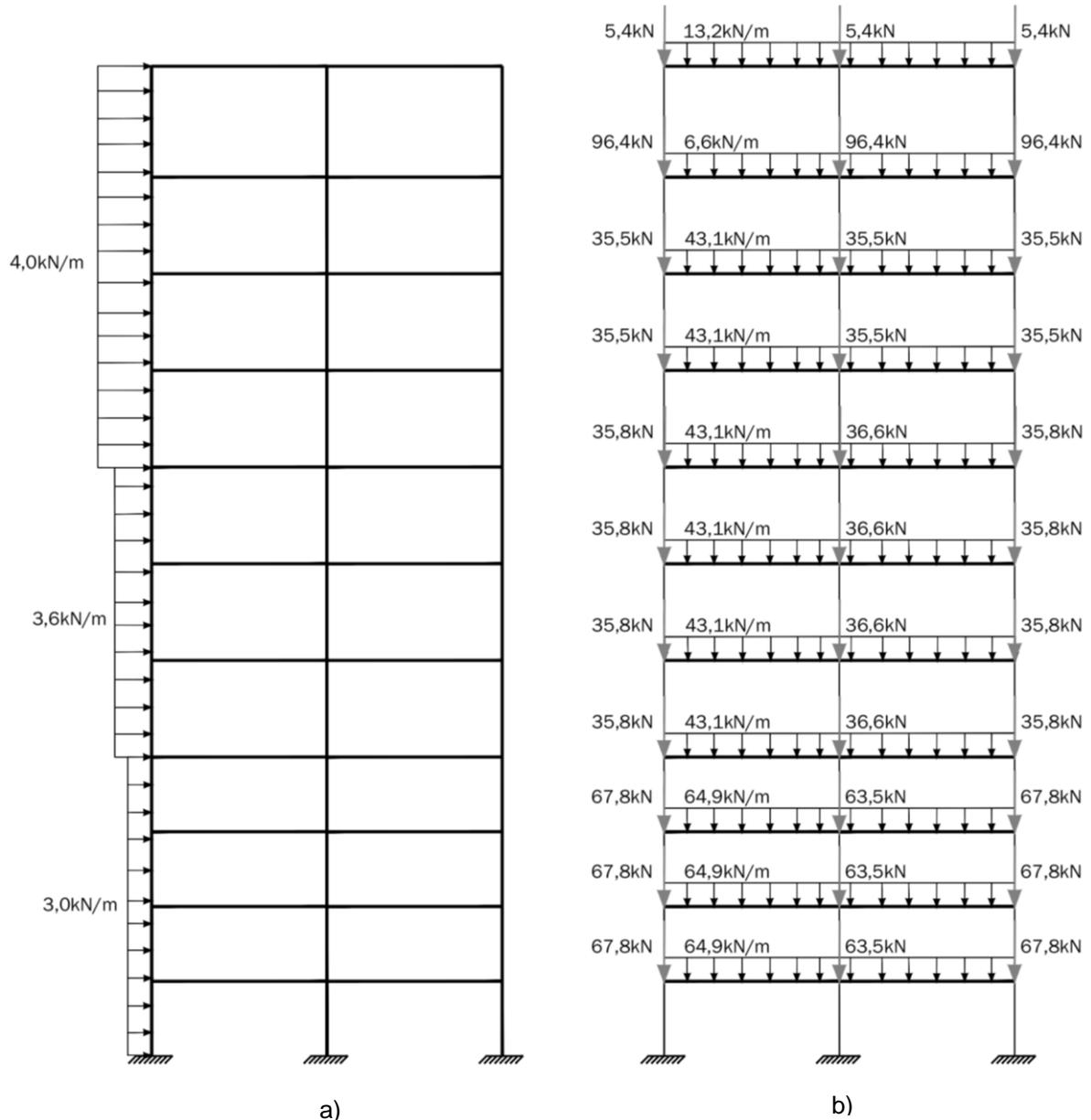
Tabela 17 - Perfis adotados para os pilares e as vigas (dimensões em milímetros).

Barras	Perfil
1 - 4; 23 - 26	PS 500 x 300 x 16 x 8
12 - 15	PS 500 x 300 x 19 x 9,5
5 - 7; 16 - 18; 27 - 29	PS 500 x 300 x 12,5 x 8
8 - 11; 19 - 22; 30 - 33	PS 500 x 300 x 9,5 x 6,5
34 - 55	W 530 x 66

Fonte: Autora (2020).

A Figura 51 (a e b) mostra o carregamento horizontal e vertical de cálculo, respectivamente, com cargas concentradas nos pilares e uniformemente distribuída nas vigas. Os valores mostrados já representam a combinação de ações mais desfavorável à estrutura. Chama-se esse conjunto de ações mostrado na Figura 51 de Q_R (conjunto de ações de referência).

Figura 51 - Ações de cálculo na estrutura: a) ações horizontais e b) ações verticais.



Fonte: Autora (2020).

A estrutura foi modelada no programa Ftool, de onde foram obtidos os esforços e deslocamentos de primeira ordem. Em seguida, remodelou-se a estrutura no programa Ansys 14.0, com elementos de barra BEAM188 e 20 subdivisões por barra, para que fosse efetuada a análise não linear geométrica. Como já havia um carregamento horizontal, não foram adicionadas forças nocionais, nem desvios nas barras, afim de simular as imperfeições. A imperfeição de material foi levada em consideração pela redução da rigidez dos elementos ($0,8EI$; $0,8EA$).

Foram realizadas cinco simulações com aumento gradativo do carregamento de referência Q_R , por um fator de multiplicação n ($Q_R; 2Q_R; 3Q_R; 4Q_R; 5Q_R$, com $n \rightarrow 1, 2, 3, 4$ e 5). As Tabelas 18, 19, 20, 21 e 22 apresentam os valores calculados do coeficiente B_2 para classificação da estrutura e final - para amplificação dos esforços, do coeficiente B_1 , do coeficiente γ_Z , dos coeficientes α_{cr} e β (para amplificação de ações no método europeu), a razão entre os deslocamentos inicial e final (Δ_2/Δ_1) no método P-Delta e, por fim, a razão entre os deslocamentos inicial e final (Δ_2/Δ_1) no Ansys, para cada simulação.

Tabela 18 - Coeficiente de majoração B_2 para classificação.

n	Coeficiente B_2 - Classificação										
	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar	6º andar	7º andar	8º andar	9º andar	10º andar	11º andar
1	1,06	1,10	1,10	1,09	1,10	1,09	1,07	1,05	1,03	1,02	1,01
2	1,13	1,22	1,22	1,20	1,22	1,19	1,15	1,12	1,08	1,04	1,02
3	1,21	1,37	1,38	1,33	1,37	1,32	1,25	1,19	1,12	1,06	1,03
4	1,29	1,57	1,57	1,49	1,58	1,47	1,36	1,27	1,16	1,08	1,05
5	1,39	1,83	1,85	1,69	1,84	1,67	1,49	1,36	1,21	1,10	1,06

Fonte: Autora (2020).

Tabela 19 - Coeficiente de majoração B_2 final.

n	Coeficiente B_2 - Final										
	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar	6º andar	7º andar	8º andar	9º andar	10º andar	11º andar
1	1,06	1,10	1,10	1,09	1,10	1,09	1,07	1,05	1,03	1,02	1,01
2	1,16	1,30	1,30	1,26	1,30	1,25	1,20	1,15	1,10	1,05	1,03
3	1,27	1,52	1,52	1,44	1,52	1,43	1,33	1,25	1,15	1,08	1,04
4	1,40	1,83	1,84	1,70	1,84	1,67	1,49	1,36	1,21	1,10	1,06
5	1,55	2,31	2,34	2,04	2,33	2,00	1,70	1,50	1,28	1,13	1,07

Fonte: Autora (2020).

Tabela 20 - Coeficientes de majoração γ_Z , α_{cr} e β .

n	B_1	γ_Z	α_{cr}	β
1	1,0	1,08	12,68	1,09
2	1,0	1,18	6,19	1,19
3	1,0	1,29	4,23	1,31
4	1,0	1,43	3,17	1,46
5	1,0	1,61	2,54	1,65

Fonte: Autora (2020).

Tabela 21 - Razão entre os deslocamentos inicial e final (Δ_2/Δ_1) no método P-Delta.

n	(Δ_2/Δ_1) - Método P-Delta.										
	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar	6º andar	7º andar	8º andar	9º andar	10º andar	11º andar
1	1,10	1,12	1,13	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18	1,20	1,22
2	1,20	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18	1,17	1,17	1,17
3	1,27	1,29	1,29	1,29	1,28	1,27	1,27	1,25	1,24	1,23	1,23
4	1,41	1,43	1,42	1,42	1,41	1,40	1,38	1,36	1,35	1,34	1,33
5	1,56	1,59	1,59	1,59	1,57	1,55	1,53	1,51	1,49	1,47	1,46

Fonte: Autora (2020).

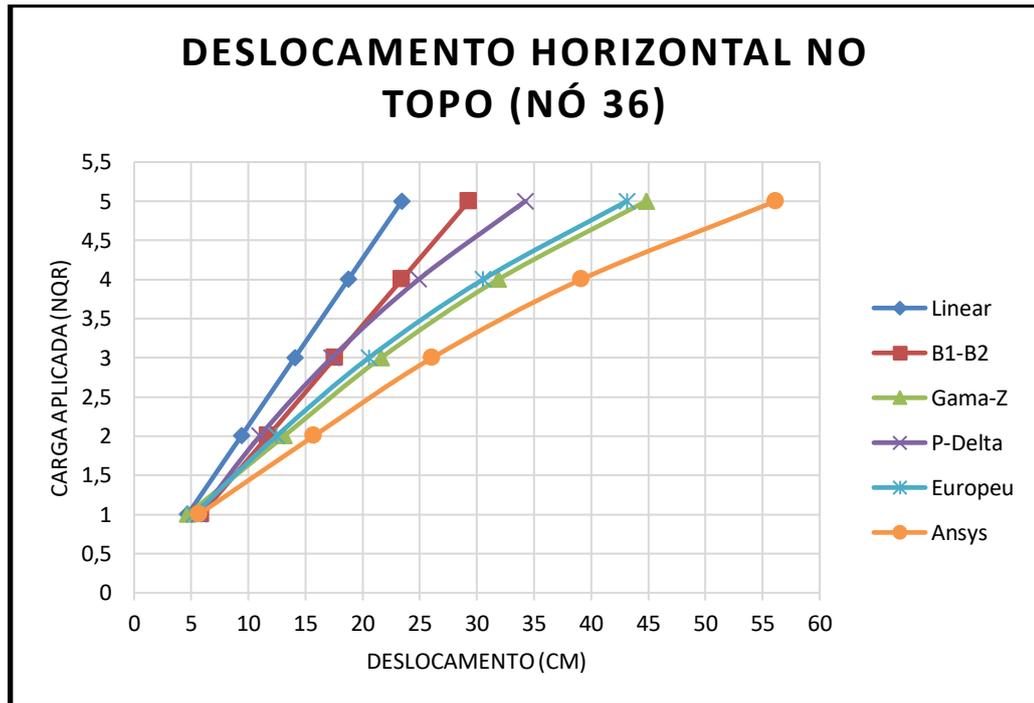
Tabela 22 - Razão entre os deslocamentos inicial e final (Δ_2/Δ_1) no Ansys.

n	(Δ_2/Δ_1) - Ansys.										
	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar	6º andar	7º andar	8º andar	9º andar	10º andar	11º andar
1	1,07	1,08	1,08	1,08	1,08	1,08	1,08	1,07	1,07	1,07	1,07
2	1,15	1,17	1,18	1,18	1,18	1,17	1,17	1,16	1,15	1,15	1,14
3	1,27	1,28	1,29	1,29	1,29	1,28	1,27	1,26	1,25	1,24	1,23
4	1,39	1,42	1,43	1,43	1,43	1,42	1,40	1,38	1,36	1,35	1,39
5	1,54	1,58	1,60	1,60	1,60	1,59	1,56	1,53	1,51	1,49	1,48

Fonte: Autora (2020).

Os resultados do deslocamento horizontal no topo do pórtico (nó 36) para todos os tipos de análises tratadas são apresentados na Figura 52. Percebe-se que a análise rigorosa no Ansys é a que apresenta os maiores deslocamentos, seguida do coeficiente γ_z , método europeu, método P-Delta e MAES.

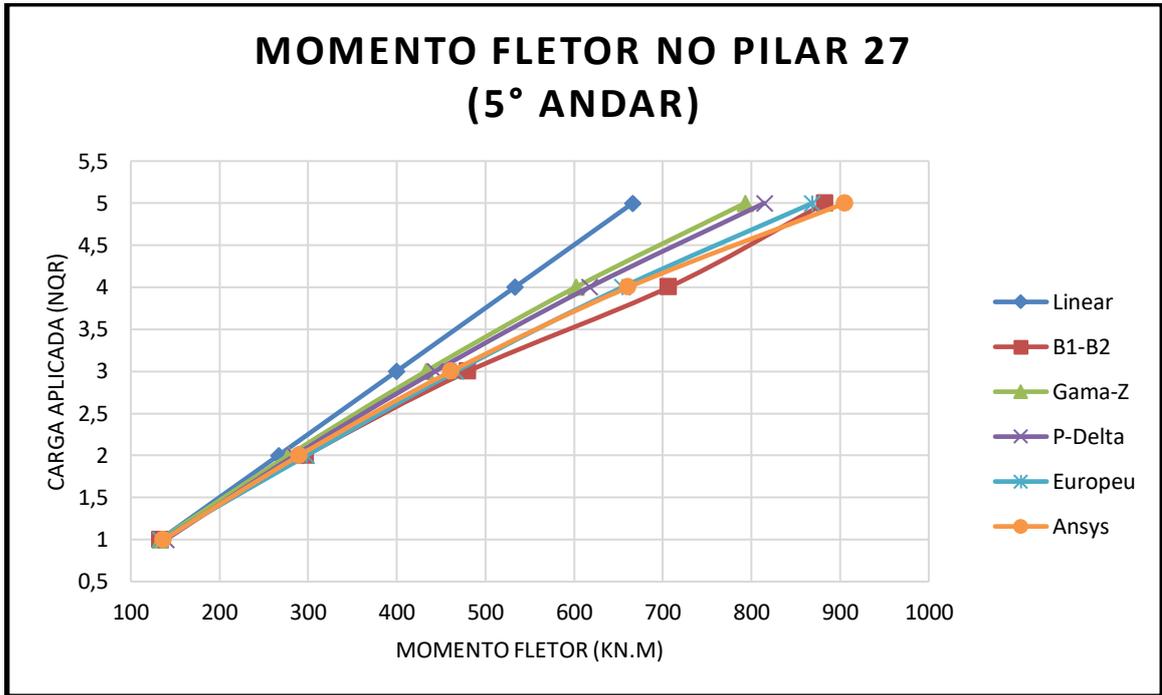
Figura 52 - Deslocamento horizontal no topo do pórtico (nó 36).



Fonte: Autora (2020).

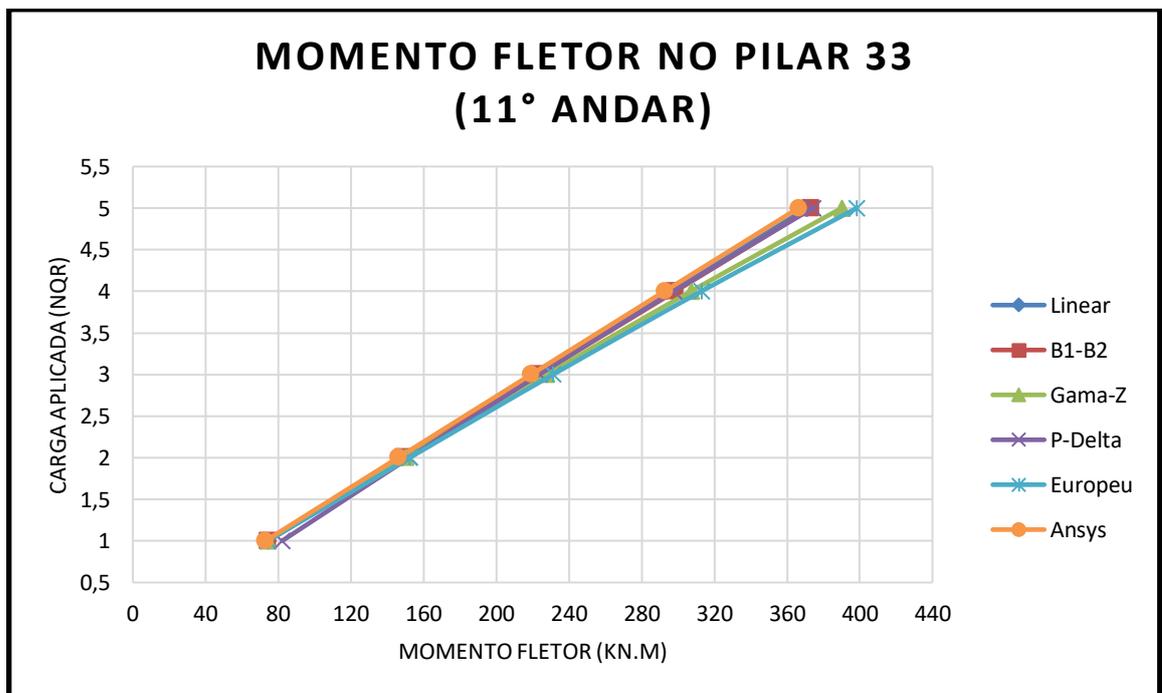
Escolheram-se os pilares 27 (5º andar) e 33 (11º andar) para analisar os esforços de momento fletor, força normal e força cortante, para cada uma das metodologias apresentadas. As Figuras 53, 54, 55, 56, 57 e 58 mostram cada um dos gráficos.

Figura 53 - Curvas parâmetro de carga x momento fletor no pilar 27.



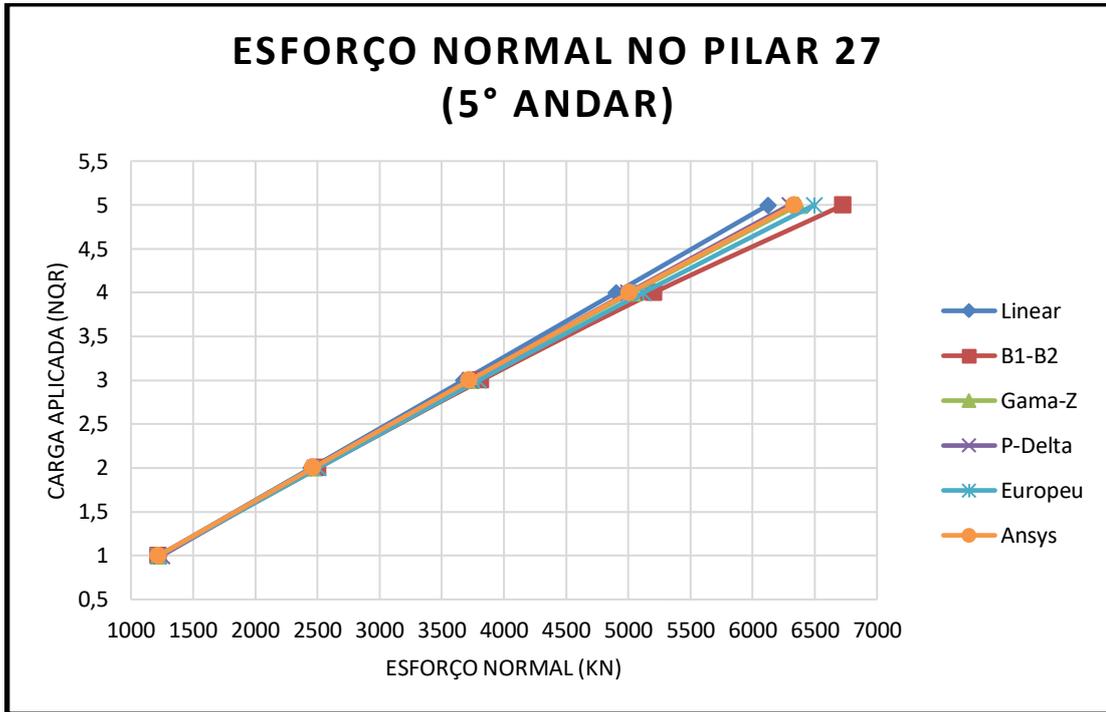
Fonte: Autora (2020).

Figura 54 - Curvas parâmetro de carga x momento fletor no pilar 33.



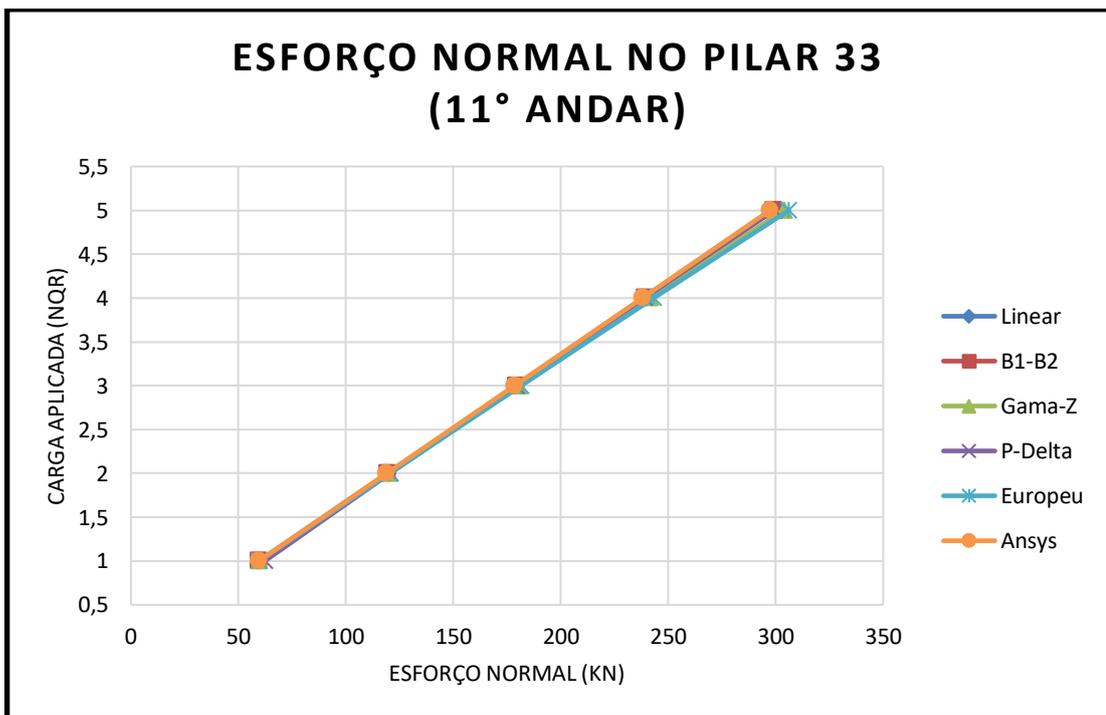
Fonte: Autora (2020).

Figura 55 - Curvas parâmetro de carga x esforço normal no pilar 27.



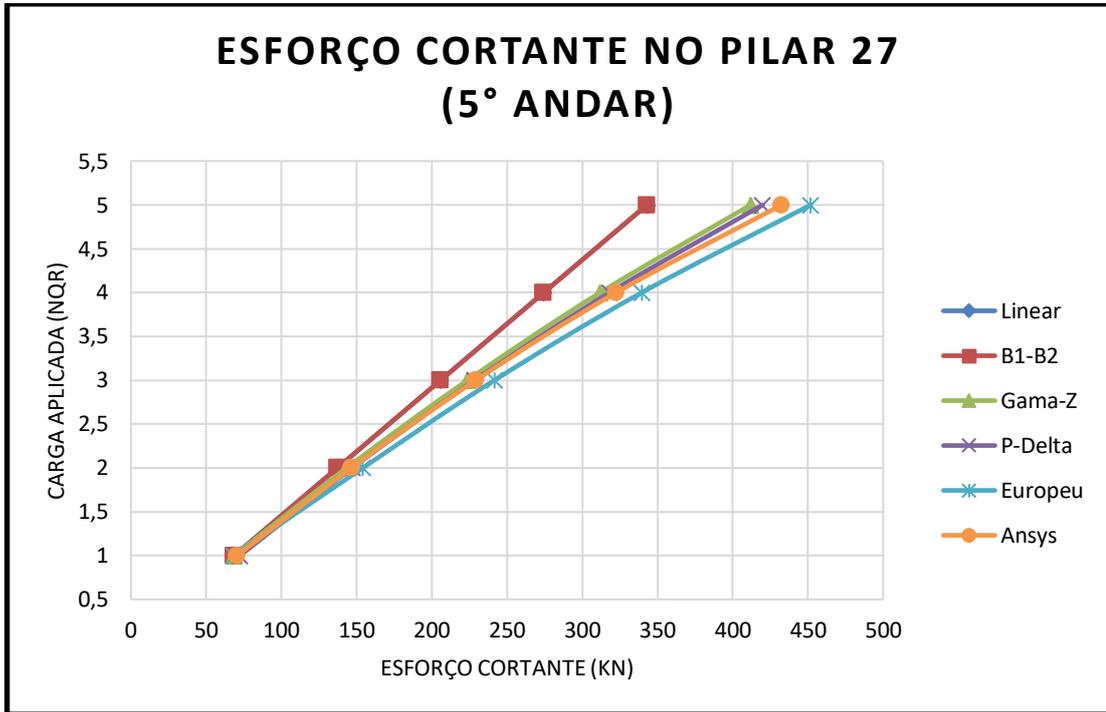
Fonte: Autora (2020).

Figura 56 - Curvas parâmetro de carga x esforço normal no pilar 33.



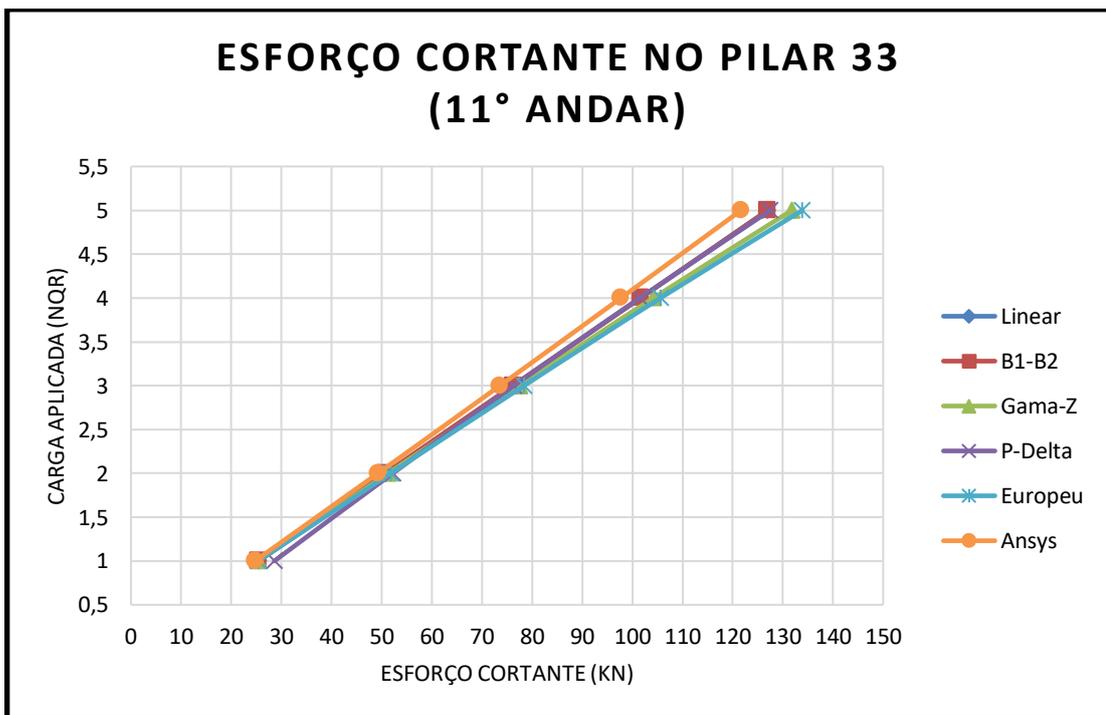
Fonte: Autora (2020).

Figura 57 - Curvas parâmetro de carga x esforço cortante no pilar 27.



Fonte: Autora (2020).

Figura 58 - Curvas parâmetro de carga x esforço cortante no pilar 33.



Fonte: Autora (2020).

O gráfico do momento fletor no pilar 27 (Figura 54) mostra que os métodos aproximados possuem boa correlação entre si, até $n = 3$. Após esse valor, os métodos P-delta e do coeficiente γ_z ficam próximos e menos conservadores que os demais métodos. Vale ressaltar que para $n = 3$, o método do coeficiente γ_z já praticamente atinge seu limite de utilização recomendado pela norma ($\gamma_z \leq 1,3$).

Para o pilar 33 (Figura 55), os métodos apresentaram resultados bastante próximos entre si, até $n = 4$. Para $n = 5$, o coeficiente γ_z e o método europeu são mais elevados, tendo em vista que os valores desses coeficientes também são mais altos que os demais, além de possuírem valor único para toda a estrutura.

O gráfico para análise do esforço normal no pilar 27 apresenta maiores diferenças entre os métodos a partir de $n = 4$. Já para o pilar 33, todos os métodos estão muito próximos e, portanto, são satisfatórios.

Para o esforço cortante, no pilar 27, a metodologia do MAES se distancia dos demais métodos, a partir de $n = 2$. Isto ocorre, porque no MAES não há amplificação da força cortante. Já para o pilar 33, todos os métodos se encontram suficientemente próximos.

5. CONCLUSÃO

O propósito dessa dissertação foi verificar a aplicabilidade das metodologias aproximadas, para análise não linear geométrica de estruturas de aço e de concreto armado, comparando-as com análise elástica rigorosa no programa Ansys 14.0. Foram apresentados conceitos e terminologias inerentes à análise estrutural de segunda ordem.

No capítulo 3, foram mostrados quatro métodos aproximados para análise não linear global: o Método da Amplificação dos Esforços Solicitantes (MAES); o método da norma brasileira NBR 6118: 2014 para projeto em concreto armado (coeficiente γ_z); o método da Força Lateral Equivalente ($P-\Delta$ iterativo) e o método da norma europeia EN 1993-1-1:2005.

O tema aqui apresentado tem sido pesquisado desde a década de 1970 e, considerando sua relevância, principalmente para o projeto estruturas de esbeltez e altura elevadas, ainda não é tratado com devida clareza na academia. Dessa forma, buscou-se apresentar de maneira completa e simples boa parte da bibliografia fundamental sobre o assunto.

A aplicação numérica 4.1 traz um pórtico em aço de um andar e submetido a ações diversas. Nessa aplicação, é possível observar que para os deslocamentos, a análise rigorosa no Ansys foi a mais conservadora de todas, seguida pelo coeficiente γ_z e o método europeu, conhecidos por amplificarem as ações horizontais. Entretanto, de acordo com o AISC (2016), os deslocamentos amplificados obtidos não devem ser tomados como parâmetros reais.

No geral os métodos aproximados possuem boa correlação, principalmente para os esforços normal e cortante. Observou-se uma diferença positiva máxima de 17,5% no momento fletor, obtido pelos métodos do coeficiente γ_z , P-Delta e europeu, em relação a análise no Ansys. O método que mais esteve condizente com a análise rigorosa, para o momento fletor, foi o MAES.

A aplicação numérica 4.2 mostra um pórtico em aço de dois andares e submetido a ações diversas. De maneira geral, os métodos de análise de segunda ordem apresentaram boa correlação entre si, divergindo pouco para o momento fletor e esforço normal. Para o esforço cortante, como na primeira aplicação, nota-se que há uma diminuição de valor na análise rigorosa via Ansys, em relação aos outros métodos. Por esse motivo é que não há necessidade em se amplificar o cortante.

As aplicações numéricas 4.3 e 4.4 trazem a análise de tendência dos métodos, para os deslocamentos e esforços solicitantes, a partir do aumento gradual das ações aplicadas, por meio de um fator de amplificação n .

A aplicação 4.3 apresenta um pórtico em concreto armado, de 6 pavimentos e submetido a ações diversas. A particularidade desse material, em relação ao aço, é o rigor na consideração da não linearidade física, em que ocorre a diminuição de 20% da rigidez dos pilares e de 60% da rigidez das vigas. Sendo assim, pôde-se inferir a partir dos gráficos, que os métodos aproximados tiveram boa correlação para valores limitados do carregamento aplicado.

Para o momento fletor, houve boa correlação até o limite de $n = 2$, no pilar 9. No pilar 12, em que os esforços são relativamente menores, consegue-se boa aproximação para todos as metodologias. Para a força normal, como era de se esperar, todos os métodos se encontram próximos entre si, sendo satisfatórios. Já para a força cortante, observa-se que métodos que adicionam forças laterais ou amplificam ações horizontais tendem a apresentar maiores valores.

A aplicação 4.4 apresenta um pórtico em aço, com 11 pavimentos e dois vãos, submetido a ações diversas. Para o momento fletor no pilar 27, observou-se que os métodos possuem boa correlação até $n = 3$. Já para o pilar 33, que possui esforços solicitantes relativamente menores, consegue-se boa correlação até $n = 4$.

Em resumo, o que se infere dessa pesquisa, é que os métodos aproximados para análise elástica de segunda ordem apresentam boa correlação entre si quando possuem valores inferiores aos limites estabelecidos nas normas. Observou-se, também, que métodos onde ocorre a amplificação de ações horizontais, ou a adição de forças laterais fictícias, tendem a acentuar o esforço cortante, condição que não

condiz com a realidade, dentro dos limites aplicáveis prescritos nas normas de engenharia.

Dos quatro métodos apresentados, o mais rápido de se calcular e aplicar é o do coeficiente γ_z , pois possui valor único para toda a estrutura. Como desvantagem, é que, possuindo valor único, pode conduzir a valores reduzidos para o momento fletor, como se observou a partir dos exemplos 4.3 e 4.4, nos pavimentos intermediários.

O MAES, apesar de trabalhoso, pois para cada pavimento há a necessidade de calcular os coeficientes $B_1 - B_2$, é um dos que melhor se aproxima da análise elástica rigorosa.

O método P-Delta iterativo se mostrou efetivo, principalmente para o uso em estruturas de aço. Em estruturas de concreto, pela consideração da imperfeição de material ser mais rigorosa, houve necessidade em reduzir a rigidez dos elementos para, então, utilizar o método. Em consequência, conseguiu-se boa correlação para os esforços de momento fletor e normal, não acontecendo, porém, para o esforço cortante. É o método mais trabalhoso de se aplicar.

A metodologia da norma europeia apresentou boa correlação para o momento fletor e força normal, em estruturas de aço. Em estruturas de concreto, após a redução da rigidez dos elementos, o método tende a se distanciar dos demais, sendo mais conservador. A força cortante é a que mais aumenta.

Como sugestão para trabalhos futuros propõe-se:

- Primeiramente, a extensão dessa pesquisa, com a adição de outros modelos estruturais, que porventura possam lançar um outro olhar a respeito da aplicabilidade desses métodos;
- Pode-se, também, inserir o estudo de outras metodologias aproximadas;
- A análise de estruturas de pórticos tridimensionais;
- A realização da análise de segunda ordem avançada, considerando a não linearidade física de maneira exata;

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. **AISC**: Manual of steel construction-load and resistance factor design specification for structural steel buildings. Chicago, IL, 2016.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800**: projeto de estruturas de aço e estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800**: projeto de estruturas de aço e estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 1986.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto, procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ARAÚJO, José Milton. Avaliação do parâmetro de instabilidade para os edifícios altos. **Teoria e prática na Engenharia Civil**. n15. Abril, 2010.

AVAKIAN, Amália Camilo. **Estruturas aporricadas mistas aço-concreto: avaliação de metodologias de análise**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2007.

BADKE-NETO, Augusto; FERREIRA, Walnório Graça. **Dimensionamento de elementos de perfis de aço laminados e soldados : com exemplos numéricos**. 3. ed. Vitória, ES : GSS, 2016.

BERNUZZI, Claudio; CORDOVA, Benedetto. **Structural Steel Design to Eurocode 3 and AISC Specifications**. Oxford: John Wiley & Sons, 2016.

CARTER, Charles. **The Evolution of Stability Provisions in the AISC Specification**. Steel Day Eve, New York, 2013.

CARVALHO, Paulo Roberto Marcondes de; GRIGOLETTI, Gladimir; BARBOSA, Giovana Daltrozo. **Curso básico de perfis de aço formados a frio**. 3 ed. Porto Alegre: [s.n.], 2014.

CHEN, Wai Fah; TOMA, Shouji. **Advanced Analysis of Steel Frames**. CRC Press, Boca Raton, Flórida, 1994.

CHEN, Wai Fah; GOTO, Yoshiaki; RICHARD, Jean Robert. **Stability Design of Semi-Rigid Frames**. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1995.

CANADA STANDARDS ASSOCIATION: Limits States Design of Steel Structures, **CAN/CSA-S16.1-M94**, Canadian Standards Association, Rexdale, Ontario, 1994.

EUROPEAN STANDARD. **Eurocode 3**: Design of steel structures - Part 1-1. General rules and rules for buildings. 2005 (english version).

FAKURY, Ricardo Hallal; SILVA, Ana Lydia R. Castro e; CALDAS, Rodrigo B. **Dimensionamento básico de elementos estruturais de aço e mistos de aço e concreto**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.

FERREIRA, Walnório Graça; SOUZA, Yargo Pezzin; FERREIRA, Lucas Depollo; GONÇALVES, Vitor Follador; CAMARGO, Rodrigo Silveira; BADKE-NETO, Augusto. **Introdução à teoria da estabilidade elástica**. Vitória, ES: LBF, 2016.

FERREIRA, Wagner Badke; LUCHI, Lorenzo Augusto Ruschi e; FERREIRA, Walnório Graça. Estabilidade de estruturas projetadas com lajes planas protendidas. **New Developments in Structural Engineering and Construction Yazdani, S. and Singh, A. ISEC-7**, 2013.

FRANCO, Mario. **Problemas de estabilidade nos edifícios de concreto armado**. Instituto de Engenharia: publicação técnica. São Paulo, 1985.

FRANCO, Mario. VASCONCELOS, Augusto Carlos de. **Avaliação prática dos efeitos de 2º ordem em edifícios altos**. Instituto de Engenharia : publicação técnica. São Paulo, 1991.

HORNE, Michael Rex. An approximate method for calculating the elastic critical loads of multi-storey plane frames. **The Structural Engineer Journal**/ June 1975/ N° 6/ Volume 53.

IU, C.K.; BRADFORD, Mark; CHEN, Wai Fah. Second order inelastic analysis of composite framed structures based on the refined plastic hinge method. **Engineering Structures**, v. 31, p. 799-813, 2009.

LANDESMANN, Alexandre. plastic-hinge approach for inelastic analysis of steel-concrete framed structures. **Journal of Construction Steel Research**, v. 66, p. 323-334, 2010.

LEAL, Maurício Araújo de Seixas. **Verificação de utilização Coeficiente B_2 para a avaliação dos efeitos da não linearidade geométrica de estruturas em concreto armado**. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade Federal da Bahia, 2016.

LEMESSURIER, William James. A practical method of second order analysis Part 1 – Pin Jointed Systems. **Engineering Journal /AISC**, Second Quarter, 89-96, 1976.

LEMESSURIER, William James. A practical method of second order analysis Part 2 – Rigid Frames. **Engineering Journal /AISC**, Second Quarter, 49-67, 1977.

MACPHEDRAN, Ian; GRONDIN, Gilbert. A Brief History of Beam-Column Design. **CSCE Annual General Meeting & Conference**. Yellowknife, 2007.

MONCAYO, Winston Junior Zumaeta. **Análise de segunda ordem global em edifícios com estrutura de concreto armado**. Dissertação (Mestrado). Universidade de São Paulo, 2011.

MUZEAU, Jean-Pierre. **La construction métallique avec les Eurocodes**. Afnor et Groupe Eyrolles, Saint-Denis, 2014.

OLIVEIRA, Danielle Meireles de. **Parâmetros de instabilidade global das estruturas de concreto armado segundo a nova NBR 6118**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Minas Gerais, 2002.

OLIVEIRA, Danielle Meireles de. **Estudo dos processos aproximados utilizados para a consideração das não-linearidades física e geométrica na análise global das estruturas de concreto armado**. Tese (Doutorado). Universidade Federal de Minas Gerais, 2007.

PINTO, Samuel; Silva, Valdir Pignatta. Determinação dos esforços solicitantes em barras de pórtico plano, considerando-se a não linearidade geométrica por meio de um método simplificado. **Revista da estrutura de aço**. V.4, n.2. Agosto, 2015.

RUTENBERG, Avigdor. A Direct P-Delta Analysis Using Standard Plane Frame Computer Programs. **Computers & Structures**, V. 14, p. 97-102. Fevereiro, 1981.

SALMON, Charles. G.; JOHNSON, John. E.; MALHAS, Faris. A. **Steel Structures, Design and Behavior: Emphasizing Load and Resistance Factor Design**. 5^o ed. USA: Pearson Education International, 2009.

SILVA, Andréa Regina Dias da. **Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas**. Tese (Doutorado). Universidade Federal de Ouro Preto, 2009.

SILVA, Luís Simões da; SIMÕES, Rui; GERVÁSIO, Helena; VELLASCO, Pedro; LIMA, Luciano. **Dimensionamento de Estruturas de Aço: Comparação entre o Eurocódigo 3 e a Norma Brasileira NBR 8800**. Rio de Janeiro: Editora da Universidade Estadual do Rio de Janeiro, 2016.

SILVA, Renata Lanna Gomes da. **Avaliação dos efeitos de 2^o ordem em edifícios de aço utilizando métodos aproximados e análise rigorosa**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Minas Gerais, 2004.

SOUZA, Yargo Pezzin; FERREIRA, Walnório Graça; FERREIRA, Lucas Depollo; GONÇALVES, Vitor Folador; CAMARGO, Rodrigo Silveira; BADKE-NETO, Augusto; LECCHI, Laís De Bortoli. **Introdução à teoria da estabilidade elástica - Conceitos, implementações computacionais e aspectos normativos**. Vitória, ES: LBF, 2018.

SURUCEANU, Iulia. **Métodos de Análise em Estruturas Metálicas**. Dissertação (Mestrado). Universidade do Algarve, 2015.

VASCONCELOS, Augusto Carlos. **Critérios para Dispensa de Consideração do Efeito de 2^a Ordem**. In. Reunião Anual do IBRACON: Colóquio sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado. São Paulo, 1985.

VASCONCELOS, Augusto Carlos. **Origem dos parâmetros de estabilidade α e γ_z** . Publicação Técnica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.

WHITE, Donald W.; SUROVEK, Andrea E.; ALEMDAR, Bulent N.; CHANG, Ching-Jen; KIM, Yoon Duk; KUCHENBECKER, Garret H. Stability Analysis and Design of Steel Building Frames Using the 2005 AISC Specification. **Steel Structures**, V.6, p. 71-91, 2006.

WILSON, Edward; HABIBULLAH, Ashraf. Static and dynamic analysis of multi-story buildings including P-Delta effects. **Earthquake Spectra**, V. 3, n. 2, p. 289-298, Maio, 1987.

WOOD, Brian R.; ADAMS, Peter F.; BEAULIEU, Denis. Column Design by P Delta Method. **ASCE Journal of the Structural Division**. V. 102, n. ST2, p. 411-427, Fevereiro, 1976.

ZIEMIAN, Ronald D. **Guide to Stability design criteria for metal structures**. Wiley, 2010.