Universidade Federal Espírito Santo - UFES

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

Teorema de Pitágoras e Algumas Aplicações

Jarde Pereira

Vitória - Espírito Santo
Setembro de 2020

Teorema de Pitágoras e Algumas Aplicações

Jarde Pereira

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFES como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho.

Vitória - Espírito Santo
Setembro de 2020

Teorema de Pitágoras e Algumas Aplicações

Jarde Pereira

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFES como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 22 de setembro de 2020.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Moacir Rosado Filho (Orientador)
UFES

Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva
UFES

Prof. Dr. Fidelis Zanetti de Castro
IFES

Dedico este trabalho a minha esposa, minhas filhas e aos meus pais Valdinete Vicente Pereira e João Pereira, que acreditaram em mim desde o início, dando-me força e apoio nos momentos que precisei.

Agradecimentos

Ao meu bom Deus que me deu forças para continuar o mestrado.

A minha esposa querida, que tanto me ajudou nessa caminhada, cuidando de nossas filhas Isabeli e Ana clara, para proporcionar-me mais tempo de estudo.

Aos meus Pais amados que sofreram e torceram por mim a cada etapa vencida, principalmente a do ENQ.

A todos da minha família que me apoiaram com palavras de incentivo e determinação, em especial a minha tia Maura Vicente Helmer, que me cedeu seu apartamento para que eu pudesse fazer o curso de verão do Profmat.

Aos meus colegas de mestrado que tanto me ajudaram em momentos difíceis, em especial a Mariana Freitas Tacanho da Silva e Felipe Caliari pelo apoio, motivação e ajuda durante todo o mestrado.

Aos meus professores com quem tanto aprendi, em especial a Florêncio Guimarães que dedicou-se até mesmo aos sábados para nos ensinar.

Ao meu orientador Moacir Rosado que direcionou-me com dicas essenciais na minha dissertação.

À Capes pelo apoio financeiro, sem o qual dificultaria minhas atividades acadêmicas.

"A melhor maneira que o homem dispõe para se aperfeiçoar, é aproximar-se de Deus". (Pitágoras)

Resumo

O Teorema de Pitágoras possui relevância para a matemática, devido as inúmeras aplicações em situações cotidianas e na contribuição para formulação de novos conceitos matemáticos. Esta pesquisa tem como objetivo realizar um estudo aprofundado sobre o Teorema de Pitágoras e suas contribuições na resolução de problemas. Descreve-se um pouco da história de Pitágoras e seu Teorema, apresentam-se algumas demonstrações do Teorema, de sua recíproca e sua generalização. Procura-se também analisar diversas aplicações do Teorema de Pitágoras em outras áreas da matemática e na resolução de problemas diversos, destacando a sua presença nas principais provas nacionais e concursos realizados pelos alunos. Pretende-se ainda, com esta pesquisa, conscientizar os alunos sobre a importância deste Teorema e motivá-los a aprofundar seus conhecimentos matemáticos, apresentando o Teorema e suas consequências em todo seu rigor, porém de forma acessível a alunos de ensino fundamental.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras, Demonstração, Generalização, Resolução de Problemas.

Abstract

The Pythagorean Theorem has relevance for mathematics, due to the numerous applications in everyday situations and the contribution to the formulation of new mathematical concepts. This research aims to carry out an study on the Pythagorean theorem and its contributions in solving problems. It is described a little of the history of Pythagoras and his theorem, some demonstrations of the theorem, of its reciprocal and its generalization are presented. We also analyze several applications of the Pythagorean theorem in other areas of mathematics and in solving various problems, highlighting their presence in the main national tests and competitions carried out by the students. The aim of this research is to make students aware of the importance of this theorem and motivate them to deepen their mathematical knowledge, presenting the theorem and its consequences in all its rigor, but in a way accessible to elementary school students.

Keywords: Pythagorean Theorem, Demonstration, Generalization, Problem Solving.

Lista de Figuras

2.1 Pitágoras de Samos . . . 22
2.2 Impérios antigos do Oriente . . . 23
2.3 A Corda de 12 Nós . . . 24
2.4 Plimpton 322 . . . 24
2.5 Triângulo Retângulo . . . 25

3.1 Uma Representação Geométrica para o Teorema de Pitágoras . . . 28
3.2 Triângulos Congruentes . . . 30
3.3 Congruência de triângulos: caso LAL . . . 31
3.4 Congruência de triângulos: caso ALA . . . 31
3.5 Congruência de triângulos: caso LLL . . . 31
3.6 Polígonos congruentes . . . 32
3.7 Triângulos semelhantes . . . 32
3.8 Semelhança de triângulos: caso AA . . . 33
3.9 Semelhança de triângulos: caso LAL . . . 33
3.10 Semelhança de triângulos: caso LLL . . . 33
3.11 Área do retângulo . . . 34
3.12 Área do paralelogramo . . . 34
3.13 Área do triângulo . . . 35
3.14 Área do trapézio . . . 35
3.15 Possível demonstração de Pitágoras . . . 36
3.16 Demonstração por Semelhança de Triângulos . . . 37
3.17 Demonstração de Euclides . . . 38
3.18 Demonstração do Presidente . . . 39
3.19 Demonstração de Leonardo da Vinci . . . 40
3.20 Demonstração de Bhaskara . . . 41
3.21 Demonstração de Euclides . . . 43
3.22 Dois triângulos . . . 44
3.23 Triângulo 1 . . . 45
3.24 Triângulo 2 . . . 45

3.25 Área do triângulo equilátero 47
3.26 Extensão para Triângulos Equiláteros 48
3.27 Extensão para Hexágonos Regulares 49
3.28 Triângulos Semelhantes 49
3.29 Extensão para Triângulos Semelhantes 50
3.30 Extensão para Polígonos Regulares 51
3.31 Polígonos Semelhantes de n Lados 53
3.32 Extensão para Polígonos Semelhantes 54
3.33 Figuras Semelhantes 55
3.34 Figuras semelhantes sobre o lado do triângulo retângulo 56
3.35 Triângulo ABC e sua altura relativa a hipotenusa 57
3.36 Triângulos semelhantes ao triângulo retângulo ABC 57
3.37 Generalização de Pappus 58
3.38 Construção do terceiro paralelogramo 59
3.39 Construção do terceiro quadrado 60
3.40 Extensão Retilínea 1 61
3.41 Extensão Retilínea 2 62
3.42 Extensão Mista 3 63
3.43 Extensão Curvilínea 4 64
3.44 Exercício 1 de extensão 65
3.45 Exercício 2 de extensão 65
3.46 Exercício 3 de extensão 66
3.47 Exercício 4 de extensão 66

4.1 Altura do triângulo isósceles 68
4.2 Diagonal de um retângulo 68
4.3 Problema de Hipócrates 69
4.4 Solução do Problema de Hipócrates 69
4.5 Diagonal do Paralelepípedo 70
4.6 Cone de altura h 71
4.7 Pirâmide regular 71
4.8 Triângulo Retângulo de Catetos l e um ângulo interno de 45° 72
4.9 Triângulo equilátero de lado l e altura h 73
4.10 Triângulo retângulo com ângulo interno Θ 74
4.11 Construção Geométrica I 75
4.12 Construção Geométrica II 75
4.13 Construção Geométrica III 76
4.14 Construção Geométrica IV 77

4.15 Jardim . . . 78
4.16 Circunferência que passa por A e B e é tangente ao lado CD . . . 79
4.17 Triângulo ABC . . . 80
4.18 Quadrado - ENA 2017 . . . 80
4.19 Cubo 1 - ENA 2018 . . . 81
4.20 Cubo 2 - ENA 2018 . . . 82
4.21 Quadrados 1 - OBMEP 2016 . . . 83
4.22 Quadrados 2 - OBMEP . . . 83
4.23 Escada encostada no prédio - OBMEP . . . 84
4.24 Quadrados 3 - OBMEP . . . 84
4.25 Triângulos 1 - OBM . . . 85
4.26 Escada com 5 degraus . . . 86
4.27 Melão Esférico . . . 87
4.28 Escada para Plataforma de Saltos . . . 88
4.29 Pátio de Esportes . . . 89
4.30 Retângulo . . . 90
4.31 Figura Cesgranrio . . . 90
4.32 Figura Cesgranrio alterada . . . 91
4.33 Canteiros quadrados . . . 92
4.34 Estacas de madeira . . . 93
4.35 Retângulo inscrito na circunferência . . . 94
4.36 Tobogã . . . 94
4.37 Postes . . . 95
4.38 Encosto de espuma . . . 96

A.1 Exercício 1 de extensão . . . 102
A.2 Exercício 2 de extensão . . . 103
A.3 Exercício 3 de extensão . . . 104
A.4 Exercício 4 de extensão . . . 105

Lista de Abreviaturas e Siglas

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

IF - Instituto Federal

LDB - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

MEC - Ministério da Educação

OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática

PAEBES - Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo

PCN's - Parâmetros Curriculares Nacionais

PM - Polícia Militar

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Sumário

1 Introdução **15**
1.1 Justificativa . . . 15
1.2 Objetivos . . . 19
1.3 Organização do trabalho . . . 19

2 A História de Pitágoras e Seu Teorema **20**
2.1 Um Pouco da História de Pitágoras . . . 22

3 O Teorema de Pitágoras e Algumas Demonstrações **27**
3.1 O Teorema de Pitágoras . . . 27
3.2 A importância da Demonstração na Matemática . . . 28
3.3 Conceitos Preliminares . . . 29
3.4 Algumas Demonstrações do Teorema de Pitágoras . . . 35
3.4.1 A Possível Demonstração de Pitágoras . . . 36
3.4.2 A Demonstração por Semelhança de Triângulos . . . 37
3.4.3 Demonstração de Euclides . . . 37
3.4.4 Demonstração do Presidente Garfield . . . 39
3.4.5 Demonstração de Leonardo da Vinci . . . 40
3.4.6 Demonstração de Bhaskara . . . 41
3.5 A recíproca do Teorema de Pitágoras . . . 42
3.5.1 Primeira Demonstração . . . 42
3.5.2 Segunda Demonstração . . . 43
3.5.3 Duas Consequências do Teorema de Pitágoras . . . 44
3.6 Generalizações do teorema de Pitágoras . . . 46
3.6.1 Extensões do Teorema de Pitágoras . . . 47
3.6.1.1 Extensões Para Triângulos Equiláteros . . . 47
3.6.1.2 Extensões Para Triângulos Semelhantes . . . 49
3.6.1.3 Extensões Para Polígonos Regulares . . . 51
3.6.1.4 Extensões Para Polígonos Semelhantes . . . 52

3.6.2 Generalização de Polya 54
3.6.3 Generalização de Pappus 58
3.6.4 Exercícios sobre extensões do Teorema de Pitágoras 60

4 Aplicações do Teorema de Pitágoras 67

4.1 Aplicações em Conceitos Matemáticos 67
4.1.1 Aplicação em Geometria Plana 67
4.1.2 Aplicação em Geometria Espacial 70
4.1.3 Aplicação em Trigonometria 72
4.2 Aplicações em Construções Geométricas 74
4.3 Aplicações na Resolução de Problemas 77
4.3.1 Problemas Diversos 77
4.3.2 Exame Nacional de Acesso - Profmat 80
4.3.3 Problemas de Olimpíadas Brasileiras de Matemática 82
4.3.4 Problemas do ENEM e Institutos Federais 85
4.3.5 Problemas de Concursos Públicos 89
4.3.6 Problemas do PAEBES 93

5 Considerações finais 97

Referências Bibliográficas 99

A Solução das Extensões Propostas como Exercícios 102

Capítulo 1

Introdução

1.1 Justificativa

A matemática está presente em uma variedade de situações da vida humana e o acesso ao seu conhecimento deve ser oportunizado pela escola básica. A BNCC Ensino Fundamental (Brasil, 2018, p. 265) relata que todos os alunos da educação básica precisam do conhecimento matemático pelas diversas aplicações em suas vidas e por influenciar a formação de indivíduos críticos e conscientes. Além da contribuição da matemática para uma formação cidadã, Romanatto (2012, p. 310) destaca que o estudante precisa compreender que o conhecimento matemático oportuniza o desenvolvimento de habilidades importantes como raciocinar, obter formas de se expressar e imaginar.

No âmbito do ensino fundamental, o letramento matemático ganha importância, pois desde cedo auxilia o desenvolvimento de habilidades e competências que somente a matemática proporciona. É neste processo que o estudante consegue reconhecer a matemática no mundo onde vive e passa a utilizá-la para solucionar problemas de seu dia a dia em contextos variados (BRASIL, 2018, p. 266). Portanto, uma boa formação nos anos pertinentes ao ensino fundamental é essencial para construção cognitiva e responsável do aluno.

Para organizar o ensino e aprendizagem de matemática, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCN's) dividem os conceitos pertinentes aos ciclos do ensino fundamental em diferentes campos e a Geometria, responsável pelo estudo do espaço e das formas, se destaca por sua clara representação do mundo (BRASIL, 1998, p. 49). Segundo os PCN's de Ensino Fundamental (Brasil, 1998, p. 51), os conceitos geométricos são parte relevante do currículo, pois por meio deles, o aluno desenvolve pensamentos específicos que lhe permitem entender, retratar e representar situações vivenciadas por ele. Lorenzato (1995, p. 5) reforça este discurso, dizendo que a geometria exige um raciocínio diferenciado que nem a aritmética ou a álgebra são capazes de proporcionar. Ainda segundo este autor “sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas” (LORENZATO, 1995, p. 5)

É fácil perceber a geometria presente ao nosso redor nas formas de objetos, em elementos da natureza, nas trajetórias descritas por aves e insetos. Em outras situações do cotidiano, onde a geometria está presente, é preciso de algum conhecimento geométrico para conseguir identificá-la como quando ampliamos ou reduzimos imagens (homotetia), calculamos medidas diversas (área, comprimento ou volume) ou quando nos referimos a ruas paralelas ou perpendiculares (LORENZATO, 1995, p. 5). São tantos exemplos da presença frequente da geometria na vida humana que pensar na formação matemática de um aluno sem valorizar a importância da geometria é inadmissível. Clemente (2015, p. 2) ressalta que “o trabalho com as noções geométricas deve instigar os educandos a serem observadores, a perceberem semelhanças e diferenças e a identificarem regularidades”.

Verifica-se que durante um longo período, o ensino de geometria em um contexto mundial e, também no Brasil, foi negligenciado. Posto isto, Pavanello (1993) e Lorenzato (1995), em suas pesquisas, procuraram entender, na década de 90, as causas para essa tendência de abandono à geometria nas escolas brasileiras. Segundo Pavanello (1993, p. 7), ainda que o descaso com a geometria tenha ocorrido em todo o mundo, no Brasil, ela ocorreu mais intensamente nas escolas públicas, pois com a Lei 5692/71 as escolas passaram a ter liberdade na estruturação de seus programas de ensino e, por muitos professores não se sentirem seguros em relação a geometria, diversas escolas optaram por retirá-la de seu currículo. Lorenzato (1995, p. 3) complementa, citando duas causas principais para a omissão de seu ensino nas escolas: o conhecimento geométrico insuficiente de muitos professores para a realização das práticas pedagógicas que os leva a um dilema entre ensinar geometria sem conhecer ou não ensinar, e o uso excessivo do livro didático como ferramenta de apoio para as aulas, que, por sua vez, apresentam a geometria distanciada de aplicações práticas e da realidade do aluno. Além disso, geometria, em geral é apresentada no final dos livros didáticos, o que aumenta a chance de não ser trabalhada por falta de tempo letivo.

Percebe-se ainda em Pavanello (1993) e Lorenzato (1995) que a preocupação quanto a situação da geometria foi motivo de reflexão e preocupação de muitos pesquisadores em educação matemática pelo mundo nos anos 90 e esforços foram feitos para a mudança desta realidade, com capacitação de professores e pesquisas de novas metodologias, buscando melhoria na qualidade de ensino da matemática. Os PCN’s de Ensino Fundamental, publicados em 1998, identificavam o abandono do ensino de geometria e procuravam ressaltar a importância de seu ensino e, principalmente, as habilidades que seu conhecimento proporcionam ao aluno (BRASIL, 1998, p. 122).

Muitas mudanças ocorreram no ensino de matemática no Brasil desde a emissão da BNCC e dos PCN's. A homologação destas diretrizes, influenciadas por diversas pesquisas educacionais em âmbito nacional e internacional, bem como, mais recentemente, os exames nacionais como o ENEM, SAEB e Prova Brasil, entre outros, oportunizaram maior destaque para a geometria no ensino básico, influenciaram uma mudança nos livros didáticos e na forma como a geometria é trabalhada nas escolas. Percebe-se hoje uma melhora no ensino de geometria e o aumento de pesquisas nesta área do conhecimento. (CLEMENTE et. al, 2015, p. 2).

Muitas das dificuldades apresentadas hoje pelos alunos em relação a aprendizagem de geometria são ainda reflexo do descaso histórico com a mesma. Ainda vemos em escolas certa resistência quanto ao valor dos conhecimentos geométricos e uma preferência pelos conceitos algébricos e aritméticos, enquanto os primeiros ficam para segundo plano. Pereira et. al (2005, p. 3) apresenta diversos fatores que influenciam a negligência quanto ao ensino de geometria: formação ineficiente dos educadores, metodologias utilizadas, desinteresse de docentes e discentes, a falta de ferramentas pedagógicas diferenciadas e baixa remuneração dos professores. Os autores ainda destacam que, muitas vezes, os conceitos são trabalhados em sala sem a preocupação de relacioná-los com situações cotidianas.

Que a geometria possui vital importância na vida do ser humano é inegável e o conhecimento dos conceitos geométricos é necessário para a compreensão de muitas situações vivenciadas. Um conceito de destaque na geometria, seja pelo seu valor histórico ou por sua grande utilidade, é o Teorema de Pitágoras. Este Teorema possui muitas aplicações práticas na matemática, em situações cotidianas e em outras áreas de conhecimento, especialmente nas ciências da natureza. Sua aparência simples, que esconde uma teoria por trás, possibilita a assimilação dos alunos. Este Teorema e, especialmente Pitágoras, possui uma história instigante e misteriosa. Desta forma, falar sobre o Teorema de Pitágoras recorrendo a sua história pode ser uma proposta interessante para o ensino desta teoria.

A história da matemática é uma importante ferramenta de contextualização, pois ela situa no tempo e espaço os conceitos e o entendimento da relevância de uma teoria em determinada época faz o aluno valorizar o conhecimento que está adquirindo. Para a aprendizagem de determinado conceito, é necessário fornecer um contexto ao aluno, mesmo sem ser de seu cotidiano, mas também de momentos da história (BRASIL, 2018, p. 299). Desconsiderar a história faz com que muitos conceitos sejam ignorados, uma vez que nem sempre se obtém aplicação prática para todos os conteúdos de matemática na vida do estudante (BRASIL, 1998, p. 23). Afinal, a matemática de hoje, usada como produto pronto por muitos professores, é consequência de uma construção histórica que levou muito tempo para ser organizada (FERNANDES, 2011, p. 8).

Uma questão polêmica quando se trata do ensino da matemática nas escolas é o uso de demonstrações em sala de aula. Muitos professores ignoram as demonstrações e apresentam aos alunos algoritmos, definições e procedimentos sem demonstrar as suas validades. Ainda que algumas demonstrações não estejam ao alcance dos alunos, muitos conceitos possuem provas de fácil assimilação, mesmo para estudantes de níveis básicos. O Teorema de Pitágoras, por exemplo, possui inúmeras demonstrações, umas mais elaboradas, mas tantas outras de fácil compreensão. Os PCN's do Ensino Fundamental destacam a importância do Teorema de Pitágoras no ensino fundamental e sugerem para trabalho neste ciclo "verificações experimentais, aplicações e demonstração do Teorema de Pitágoras" (BRASIL, 1998, p. 87). Já neste ciclo, especialmente no 9º ano do ensino fundamental, conforme orientação da BNCC, deve-se trabalhar com os alunos a matemática formal, com demonstrações dos conceitos abordados. O trabalho com demonstrações já no ensino fundamental contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno, onde estes farão uso de axiomas e teoremas na elaboração de conjecturas (BRASIL, 1998, p. 49).

Ainda sobre o Teorema de Pitágoras, ele foi usado na antiguidade para solucionar problemas cotidianos e nos dias atuais ainda possui a mesma função. Pensar neste Teorema, imediatamente nos remete à resolução de problemas. Uma abordagem para inserir este conceito em sala de aula é partir de um problema e investigar os caminhos de solução, usando o Teorema. Os PCN's do Ensino Fundamental reforçam esta metodologia dizendo que "é fundamental superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos, indicando a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática a ser desenvolvida em sala de aula" (BRASIL, 1998, p. 59).

Neste contexto, esta pesquisa procura analisar o Teorema de Pitágoras com algumas demonstrações e aplicações. Partindo de uma ótica onde se busca contextualizar o Teorema, será apresentado um pouco da história de Pitágoras e seu principal Teorema, será analisada a importância do Teorema na atualidade e sua relevância na matemática. Serão discutidas demonstrações importantes do Teorema de Pitágoras e conceitos diversos utilizados nestas provas. Serão analisadas a recíproca do Teorema de Pitágoras e generalizações. Concluiremos com as aplicações do Teorema de Pitágoras na atualidade, apresentando diversos problemas matemáticos de utilidade prática que são resolvidos por ele.

1.2 Objetivos

O objetivo geral desta dissertação é realizar um estudo aprofundado do Teorema de Pitágoras aplicando-o à resolução de problemas.

Os objetivos específicos do trabalho são:

- Apresentar a história de Pitágoras e do seu Teorema;
- Analisar algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras e de sua recíproca;
- Apresentar generalizações do Teorema de Pitágoras;
- Resolver problemas diversos da matemática de utilidade prática, envolvendo o Teorema de Pitágoras.

1.3 Organização do trabalho

A presente pesquisa está dividida em cinco capítulos. No Capítulo 2, exibimos um estudo sobre a história de Pitágoras e seu Teorema, destacando sua importância histórica e relevância para a matemática.

No Capítulo 3, apresentamos o Teorema de Pitágoras e como ele é enunciado em diversos livros, exibimos conceitos preliminares com teoremas e definições sobre congruência, semelhança e área que serão utilizados posteriormente nesta pesquisa. Realizamos diversas demonstrações do Teorema de Pitágoras, algumas muito conhecidas, e outras de autores ilustres. Discutimos e provamos a recíproca do Teorema de Pitágoras e duas de suas consequências. Demonstramos e analisamos extensões do Teorema até sua generalização para figuras semelhantes, com resolução de exercícios envolvendo as extensões.

No Capítulo 4, analisamos diversas aplicações do Teorema de Pitágoras em outros conceitos matemáticos relacionados a geometria plana, espacial e trigonometria. Aplicamos o Teorema de Pitágoras na resolução de problemas presentes em provas realizadas pelos alunos como o ENEM, OBMEP, concurso para o IF, entre outros.

No Capítulo 5, expomos as considerações finais a respeito da dissertação e indicamos uma proposta para continuação de pesquisa na área.

Capítulo 2

A História de Pitágoras e Seu Teorema

Um dos teoremas mais fascinantes e importantes que se tem conhecimento é o Teorema de Pitágoras, considerado uma das principais descobertas da matemática e uma ferramenta para resolução de problemas contextualizados. O Teorema de Pitágoras é uma relação matemática entre os comprimentos dos lados de qualquer triângulo retângulo. Para Barbosa (1993, p. 2) o Teorema é descrito como: A área do quadrado construído com a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos com os catetos.

O aluno tem contato com este Teorema pela primeira vez no ensino fundamental no nono ano, pois a BNCC apresenta o Teorema de Pitágoras como conteúdo de matemática para esta série, propondo como objetivo a seguinte habilidade "Resolver e elaborar problemas de aplicação do Teorema de Pitágoras" (BRASIL, 2018, p. 319), e torna a estudá-lo no ensino médio. Porém, como é feito geralmente nas escolas com os conteúdos de geometria, o Teorema de Pitágoras é trabalhado através da apresentação de sua fórmula e alguns exemplos básicos, ensinados pelo professor de modo superficial e ineficaz, sem análise ou demonstração do Teorema e preocupação com a relevância de sua aplicação em questões cotidianas, tornando a aula pouco atrativa e não despertando o interesse do aluno para a importância deste conceito (PEREIRA et. al, 2005, p. 1). As aplicações desse Teorema são variadas e relevantes para outras áreas da matemática como geometria espacial, geometria analítica e trigonometria, o que torna este Teorema um instrumento a ser estudado na escola básica.

No ensino superior é possível um estudo mais profundo sobre o Teorema de Pitágoras e são apreciadas algumas de suas demonstrações, muitas dessas feitas ao longo dos anos, por pessoas que admiravam o próprio Teorema. Isso reforça a necessidade da compreensão de demonstrações do Teorema no ensino-aprendizagem do mesmo, desde o ensino fundamental ao ensino superior. O fato é que o Teorema de Pitágoras é considerado um dos mais famosos e úteis da geometria elementar e foi demonstrado por várias civilizações no decorrer da história. (GASPAR, 2003).

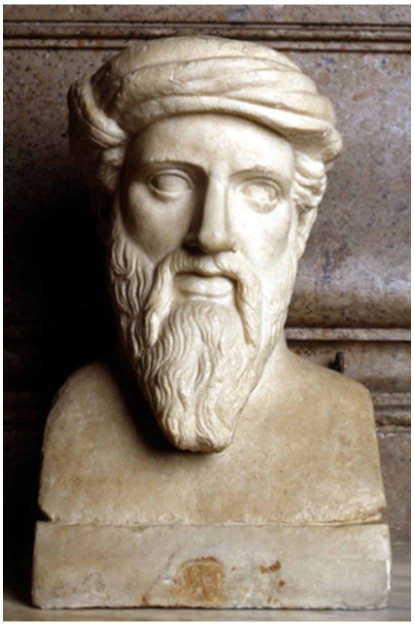
Observa-se o Teorema de Pitágoras como uma ferramenta bastante útil na história e nos dias atuais, e que esse conceito matemático tem se apresentado em diversas avaliações como OBMEP, OBM, PAEBES, ENEM, exame de acesso ao PROFMAT e provas de concurso públicos. A falta de um aprofundamento tanto na história como na resolução de problemas envolvendo o Teorema de Pitágoras, juntamente com a falta de suas demonstrações em sala de aula, contribuem para uma deficiência dos alunos na hora em que precisam aplicar este Teorema para resolver questões, sejam do cotidiano ou das avaliações citadas acima.

Pitágoras e seu Teorema possuem um contexto histórico interessante que pode ser explorado pelo professor em sala de aula para despertar a curiosidade e o interesse dos alunos na construção deste conhecimento. O uso da história da matemática em sala de aula pode auxiliar a compreensão de conceitos que o aluno está construindo, principalmente por dar resposta a muitas indagações dos alunos quanto às aplicações práticas de determinado conceito (BRASIL, 1998, p. 43). "A História da Matemática é um instrumento de investigação, das origens e descobertas, métodos e notações matemáticas que foram desenvolvidas ao longo do tempo, desde as antigas civilizações até os dias de hoje" (OLIVEIRA, 2014, p. 459). Apresentando a matemática como uma criação da humanidade, desenvolvida pelas necessidades de diferentes culturas e civilizações, e estabelecendo relações entre a matemática atual e a do passado, desperta no aluno o interesse pelo conhecimento e uma mudança de postura frente as aulas (BRASIL, 1998, p. 42).

Com esse entendimento, torna-se necessária a apresentação da história de Pitágoras e seu Teorema, com objetivo de situar historicamente este conceito e evidenciar a sua importância ao longo do tempo.

2.1 Um Pouco da História de Pitágoras

Figura 2.1: Pitágoras de Samos



Fonte: Página do Museu Capitolini em Roma, Itália.[1]

Pitágoras foi um dos mais importantes matemáticos da história. “A geometria possui dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de uma linha em extrema e média razão. O primeiro, podemos comparar a uma medida de ouro; ao segundo, podemos chamar de jóia preciosa.” (KEPLER, 1571 – 1630). Nada se tem de autoria própria ou biografias da época sobre a vida de Pitágoras. Porém as histórias sobre este personagem são cobertas de mitos e lendas. Mesmo assim, sua história, ou o pouco que sabe dela, é intrigante e ao mesmo tempo misteriosa. Para compreender o Teorema de Pitágoras, faz-se necessário conhecer um pouco da história deste matemático, e esta será apresentada a seguir. Para isso, utilizou-se como referência principal o livro “Pitágoras e Seu Teorema em 90 minutos” de Paul Strathern (1998).

Possivelmente, Pitágoras foi o primeiro gênio da cultura do ocidente e também primeiro matemático e filósofo (termos criados por ele). Sabe-se pouca coisa concreta sobre ele e tudo que lhe é atribuído pode ter sido obra de um de seus seguidores. Os primeiros escritos sobre sua vida datam de 150 e 250 anos após sua morte, transmitidos oralmente e de diversas formas. O maior exemplo de sua genialidade foi a prova do teorema que leva seu nome, pois, com isso, inseriu o conceito de prova na matemática e o raciocínio dedutivo. A matemática que até então baseava-se em diversos conhecimentos

[1]Disponível em: <http://www.museicapitolini.org/en/collezioni/percorsi_per_sale/palazzo_nuovo/sala_dei_filosofi/erma_di_pitagora>. Acesso em: 15 mar. 2019.

empíricos, tornou-se uma estrutura lógica bela e poderosa (STRATHERN, 1998, p. 7-11).

Pitágoras nasceu em torno de 565 a.c. na ilha grega de Samos, sendo seu pai Mnesarcos, rico mercador local, e sua mãe Pythais, e viveu nesta ilha os primeiros anos de sua vida. Era bem instruído e teve como professores Ferécides de siros, Tales de Mileto, o mais conhecido, e Anaximandro, criador do relógio do sol, e quem calculou que o sol seria vinte e oito vezes maior que a Terra, um feito para a época. Além disso, Pitágoras conquistou muitos conhecimentos em viagens que realizou ao Egito, Babilônia, Pérsia e Índia (STRATHERN, 1998, p. 11-19).

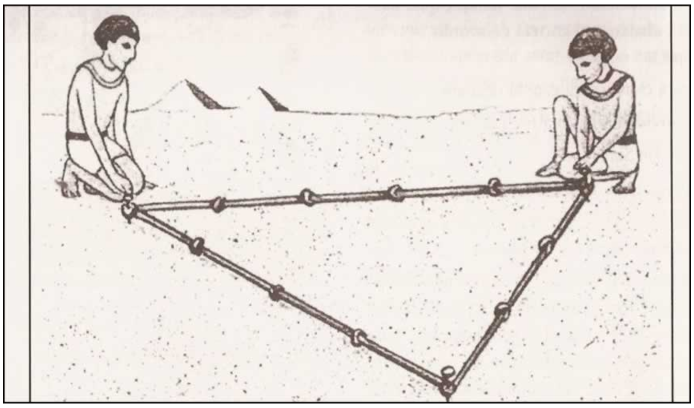
Figura 2.2: Impérios antigos do Oriente

Fonte: Ratner (2009)[2]

O conhecimento matemático mais avançado foi adquirido no Egito, pois os egípcios já detinham o conhecimento do sistema decimal, conheciam algumas frações, aritmética e foram inventores da geometria. É importante destacar que os egípcios sabiam que um triângulo de lados medindo 3, 4 e 5 era retângulo e utilizavam este conhecimento nas marcações de terra que realizavam todos os anos após as enchentes do rio Nilo e na construção das pirâmides. Comprovações históricas, indicam que no Egito também se conhecia propriedades trigonométricas deste triângulo (STRATHERN, 1998, p. 19-20).

[2]Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1057/jt.2009.16>. Acesso em: 23 set. 2020.

Figura 2.3: A Corda de 12 Nós



Fonte: Toledo(1997, p. 19).

Após passar um período no Egito, Pitágoras foi para a Babilônia. Os babilônios detinham conhecimentos de astronomia, resolviam equações de primeiro e segundo graus, obtinham um método para cálculo de raiz quadrada, apesar de desconhecer os números irracionais, e conheciam a relação entre os lados do triângulo retângulo e sua hipotenusa que tornou Pitágoras famoso, o Teorema de Pitágoras, mas não haviam encontrado um método simples de expressá-la. Em uma plaqueta de argila, chamada Plimpton 322, de origem babilônica, verifica-se uma lista de 15 termos numéricos diferentes que representam os lados de triângulos retângulos (STRATHERN, 1998, p. 20).

Figura 2.4: Plimpton 322

Fonte: Joyce (1995)[3]

Por volta de 529 a.c., Pitágoras deixou Samos e fixou-se em Crotona, na Magna Grécia. Fundou uma escola filosófica: a *Escola Pitagórica*, considerada a primeira univer-

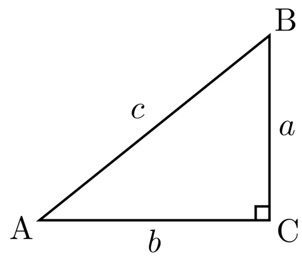
[3]Disponível em: <https://mathcs.clarku.edu/ djoyce/ma105/plimpnote.html>. Acesso em: 15 mar. 2019.

sidade do mundo, definiu-se como filósofo e passou a atuar como professor de matemática. A escola que fundou ganhou prestígio e atraiu grupos numerosos de seguidores que compreenderam suas qualidades excepcionais. Esta Sociedade Pitagórica prosperou por anos após sua morte e foi expandida para além de Crotona (STRATHERN, 1998, p. 27-28).

Possivelmente, foram nos primeiros anos da Escola Pitagórica que Pitágoras realizou sua obra matemática, inclusive a descoberta do seu Teorema. Não se sabe, se a descoberta foi obra sua ou de algum seguidor, pois os integrantes da Escola Pitagórica tinham o hábito de atribuir ao mestre todos os feitos que realizavam (STRATHERN, 1998, p. 29). Mas, provavelmente foi Pitágoras quem descobriu a fórmula para um triângulo retângulo:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Figura 2.5: Triângulo Retângulo



Fonte: O próprio autor.

A Fórmula descoberta por Pitágoras foi revolucionária por vários motivos e demonstra a contribuição grega na matemática, motivo pelo qual os gregos são considerados fundadores desta disciplina. Enquanto os babilônios e egípcios conheciam os processos, mas de modo empírico, os gregos fizeram uma matemática teórica com processos passíveis de aplicações diversas, que eram confirmados através da *prova*. (STRATHERN, 1998, p. 30). "Abstração, prova e raciocínio dedutivo, três elementos básicos da Matemática, foram todos introduzidos pelos gregos antigos e há uma forte probabilidade de que o tenham sido pelo próprio Pitágoras" (STRATHERN, 1998, p. 30).

Em relação a prova do Teorema de Pitágoras, como não há nada escrito, não se tem registros de como ele provou este Teorema, mas acredita-se que a chamada *prova clássica* foi a realizada por Pitágoras. Euclides, em seu livro *Os Elementos* apresentou diversas provas do Teorema e pelo menos uma dessas provas tem origem pitagórica. A questão é que se sabe tão pouco a respeito da vida de Pitágoras que fica impossível distinguir suas ideias das de seus seguidores (discípulos), logo só podemos nos basear nas obras pitagóricas e críticos posteriores (STRATHERN, 1998, p. 30-31).

A descoberta do Teorema possibilitou diversas descobertas importantes sobre triângulos retângulos com medidas de lados inteiras, chamados de triângulos pitagóricos. Outra grande descoberta proveniente do Teorema de Pitágoras foram os números irracionais, pois um triângulo retângulo de lados 1 e 1, possui como hipotenusa a medida $\sqrt{2}$, impossível de ser calculada como um número racional (STRATHERN, 1998, p. 31-33).

Somente após a análise da história que se sabe sobre Pitágoras, é possível perceber sua importância para a Matemática e os motivos pelos quais é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Pitágoras, apesar de suas excentricidades, batalhou e conseguiu fornecer grandes contribuições para esta ciência.

Capítulo 3

O Teorema de Pitágoras e Algumas Demonstrações

3.1 O Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é uma relação matemática entre os catetos e a hipotenusa de qualquer triângulo retângulo. Este Teorema é apresentado de formas distintas em diversos livros.

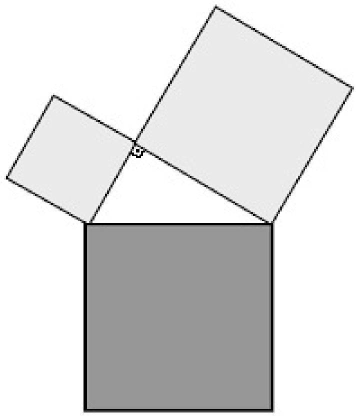
No livro *Teorema de Pitágoras e Áreas* de Eduardo Wagner (2015, p. 4), ele enuncia o Teorema de Pitágoras como: "Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos".

No famoso livro de Elisha Scott Loomis denominado *The Pythagorean Proposition* (1940, p. 23), que traduzindo seria "A Proposição Pitagórica", o qual apresenta 370 demonstrações distintas para o Teorema de Pitágoras, ele é apresentado da seguinte forma: "O quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados".

Elon Lages Lima em seu livro *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias* (1991, p. 52) descreve o Teorema desta maneira: "A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos". O autor ainda apresenta uma versão tridimensional para o Teorema de Pitágoras: "O quadrado da área de um polígono plano qualquer, situado no espaço, é igual à soma dos quadrados das áreas de suas projeções sobre três planos mutuamente ortogonais".

Além das formas acima de enunciados para o Teorema de Pitágoras, este pode ser representado de forma geométrica conforme segue:

Figura 3.1: Uma Representação Geométrica para o Teorema de Pitágoras



Fonte: O próprio autor.

Os diferentes enunciados apresentados acima diferem apenas quanto à forma escrita, mas não modificam o entendimento do Teorema de Pitágoras. Já a representação geométrica nos proporciona uma apreciação visual da relação de Pitágoras. A seguir serão apresentadas demonstrações para o Teorema de Pitágoras.

3.2 A importância da Demonstração na Matemática

Conforme visto anteriormente, foi o próprio Pitágoras que inseriu na matemática a necessidade de legitimar as proposições através da prova (STRATHERN, 1998, p. 7-11). A partir de então, as demonstrações ganharam espaço de grande destaque na matemática e o empirismo passou a ser um método de apoio para a construção dos conceitos que posteriormente deveriam ser provados pelo uso da lógica e proposições já conhecidas. Em geral, a demonstração é considerada como um processo de validação intrínseco à Matemática e a diferencia das demais ciências experimentais (ALMOULOUD, 2007, p. 2).

Estudar matemática, analisando e entendendo as demonstrações, é importante não apenas em níveis escolares mais avançados, mas também na escola básica, desde o ensino fundamental. O aluno desde cedo precisa entender a necessidade de provas formais para validar hipóteses, pois mesmo que se possa apresentar diversos exemplos para os quais um conceito é válido, pode haver um caso para o qual o conceito não é válido e, uma vez provada a validade para um caso geral, tem-se a garantia de que o conceito é aplicável em qualquer situação.

Em relação a geometria, os PCN's de Ensino Fundamental (1998, p. 126) destacam que muitas atividades são convenientes para o professor construir hipóteses por meio de experiências concretas e orientar os alunos quanto a necessidade de uma prova para validar as suposições. Os PCN's de Ensino Fundamental ainda observam que deve-se tomar cuidado já que as descobertas feitas pelos alunos em investigações com materiais concretos não caracterizam uma *prova* matemática, mas estas devem sim ser utilizadas como motivação para o desenvolvimento de processos que justifiquem formalmente as afirmações (BRASIL, 1998, p. 126).

Pensando nas ponderações dos PCN's de Ensino Fundamental, é importante refletir sobre como as demonstrações são utilizadas em sala de aula. Como muitos professores se apoiam em livros didáticos para elaboração das práticas docentes, é interessante verificar como a demonstração está apresentada em livros didáticos de matemática. Segundo a pesquisa de Rachel Martins e Mônica Mandarino (2014), que analisaram coleções de livros didáticos dos anos finais de ensino fundamental, observando como eram apresentados argumentação, prova e demonstrações de conceitos geométricos, as demonstrações presentes nos livros didáticos são de fácil compreensão pelos alunos, na faixa etária que se encontram, e consideram ser uma boa oportunidade para apresentar aos alunos a verdadeira matemática. E mesmo alguns livros não apresentando demonstrações para certos conceitos, orientam o professor a realizá-las em suas aulas para os alunos, tomando o cuidado de que sejam compreensíveis e que os estudantes percebam o seu sentido (MARTINS, R. B; MANDARINO, M. C. F., 2014, p. 112).

3.3 Conceitos Preliminares

Nesta seção, serão apresentadas definições, teoremas, axiomas e proposições necessários para a compreensão das demonstrações do Teorema de Pitágoras e exercícios que serão trabalhados ao longo desta pesquisa. As provas dos teoremas e proposições não serão fornecidas nesta pesquisa, ficando como sugestão a leitura complementar dos livros *Geometria Euclidiana Plana* de João Lucas Marques Barbosa, *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 2: Geometria Euclidiana Plana* de Antonio Caminha Muniz Neto e *Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança* de Elon Lages Lima.

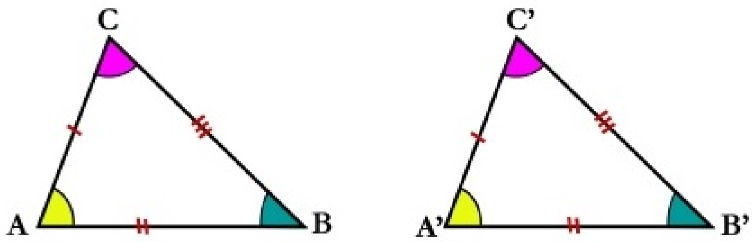
I) Congruência:

Considere o segmento de reta de extremos A e B denotado por AB e sua medida denotada por $\overline{AB}$.

Definição 1: Dois segmentos AB e CD são *congruentes* quando $\overline{AB} = \overline{CD}$ e dois ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são *congruentes* se eles têm a mesma medida, ou seja, quando $\widehat{A} \equiv \widehat{B}$. Para simplificar a notação, será utilizado o símbolo = para significar que as medidas de dois segmentos são *congruentes* e o símbolo $\equiv$ para significar que dois ângulos são *congruentes*. Logo, $\overline{AB} = \overline{CD}$ é lido como AB é congruente a CD e $\widehat{A} \equiv \widehat{B}$ é lido como $\widehat{A}$ é congruente a $\widehat{B}$.

Definição 2: Dois triângulos são *congruentes* se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Figura 3.2: Triângulos Congruentes



Fonte: O próprio autor

Se ABC e $A'B'C'$ são dois triângulos congruentes e se

$$
\begin{gathered}
A \leftrightarrow A' \\
B \leftrightarrow B' \\
C \leftrightarrow C'
\end{gathered}
$$

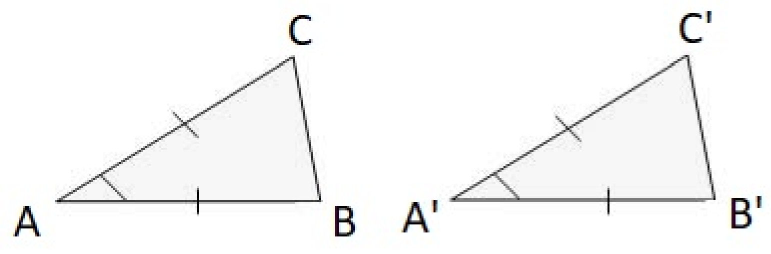
é a correspondência biunívoca que define a congruência, então valem, simultaneamente, as seis relações seguintes:

$$
\begin{array}{ccc}
\overline{AB} = \overline{A'B'} & \overline{BC} = \overline{B'C'} & \overline{AC} = \overline{A'C'} \\
\widehat{A} \equiv \widehat{A'} & \widehat{B} \equiv \widehat{B'} & \widehat{C} \equiv \widehat{C'}
\end{array}
$$

Existem três casos de congruência de triângulos. O primeiro pode ser tomado como um axioma e este é utilizado para provar os outros dois casos.

Axioma 1: Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ e $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ então $ABC \equiv A'B'C'$. Este axioma é conhecido como o *primeiro caso de congruência de triângulos* ou caso LAL.

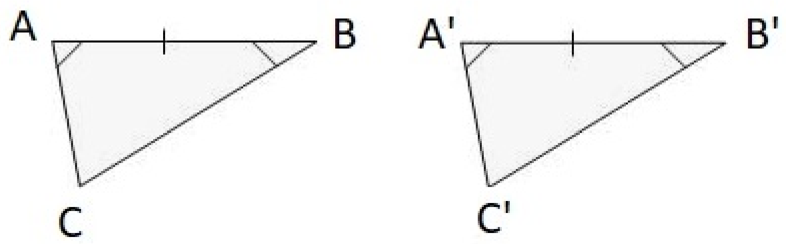
Figura 3.3: Congruência de triângulos: caso LAL



Fonte: O próprio autor

Teorema 1: Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$, então ABC e $A'B'C'$ são congruentes. Este teorema é conhecido como *segundo caso de congruência de triângulos* ou caso ALA.

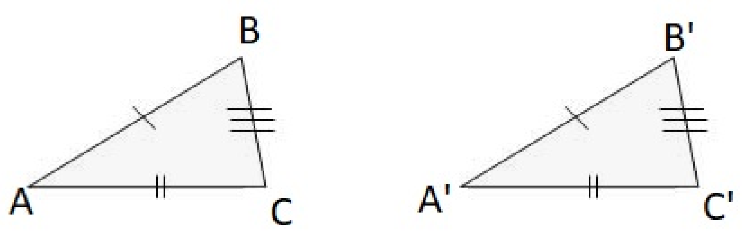
Figura 3.4: Congruência de triângulos: caso ALA



Fonte: O próprio autor

Teorema 2: Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se possuem três lados correspondentes congruentes, então ABC e $A'B'C'$ são congruentes. Este teorema é conhecido como *terceiro caso de congruência de triângulos* ou caso LLL.

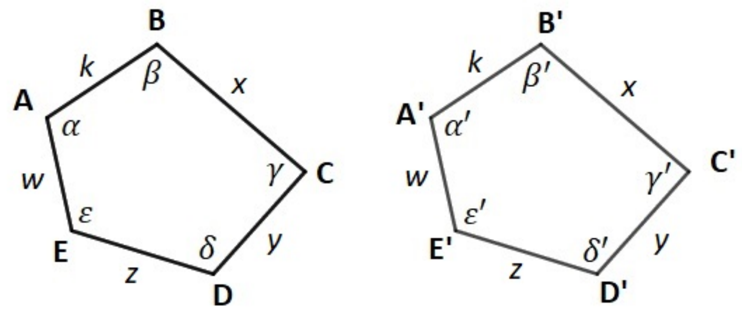
Figura 3.5: Congruência de triângulos: caso LLL



Fonte: O próprio autor

A definição de congruência de triângulos pode ser estendida para polígonos. De forma análoga, dois polígonos são *congruentes* se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes (homólogos) sejam congruentes.

Figura 3.6: Polígonos congruentes



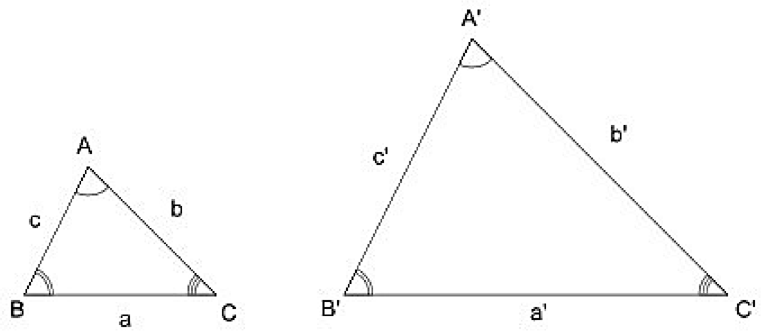
Fonte: O próprio autor

II) Semelhança:

Definição 3: Dois triângulos são *semelhantes* se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais.

O símbolo $\sim$ será utilizado para significar *semelhante*. Logo $ABC \sim A'B'C'$ é lido como ABC é semelhante a $A'B'C'$.

Figura 3.7: Triângulos semelhantes



Fonte: O próprio autor

Se ABC e $A'B'C'$ são dois triângulos semelhantes e se $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$ é a correspondência que estabelece a semelhança, então valem simultaneamente as seguintes igualdades:

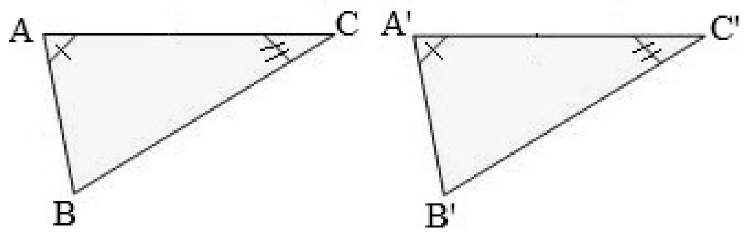
$$\widehat{A} \equiv \widehat{A'} \quad \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \quad \widehat{C} \equiv \widehat{C'} \text{ e } \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k.$$

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de *razão de semelhança* entre os dois triângulos.

Existem três casos de semelhança de triângulos.

Teorema 3: Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ e $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$, então $ABC \sim A'B'C'$. Este teorema é conhecido como *primeiro caso de semelhança de triângulos* ou caso AA.

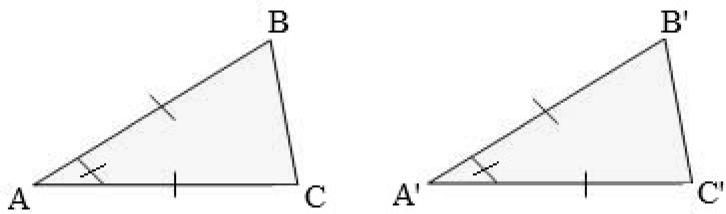
Figura 3.8: Semelhança de triângulos: caso AA



Fonte: O próprio autor

Teorema 4: Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$, então $ABC \sim A'B'C'$. Este teorema é conhecido como *segundo caso de semelhança de triângulos* ou caso LAL.

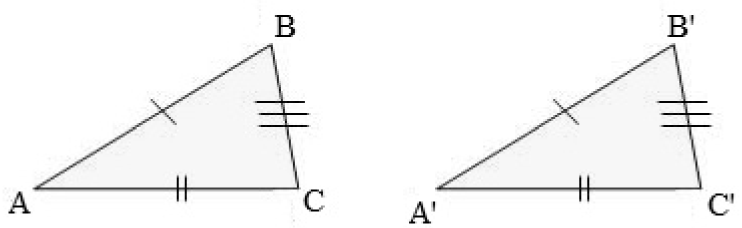
Figura 3.9: Semelhança de triângulos: caso LAL



Fonte: O próprio autor

Teorema 5: Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$, então $ABC \sim A'B'C'$. Este teorema é conhecido como *terceiro caso de semelhança de triângulos* ou caso LLL.

Figura 3.10: Semelhança de triângulos: caso LLL



Fonte: O próprio autor

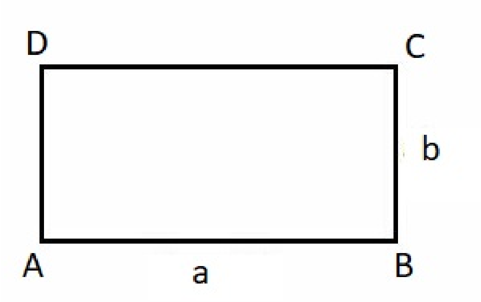
III) Área de Figuras Planas:

Abaixo serão apresentadas proposições relativas às áreas de algumas figuras planas. As provas das fórmulas de cálculo das áreas podem ser encontradas nos livros *Geometria Euclidiana Plana* de João Lucas Marques Barbosa e *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 2: Geometria Euclidiana Plana* de Antonio Caminha Muniz Neto.

Proposição 1: Área do Retângulo

Um retângulo $ABCD$ de lados a e b tem área dada por $S(ABCD) = a \cdot b$.

Figura 3.11: Área do retângulo

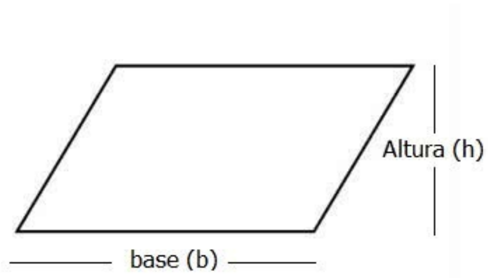


Fonte: O próprio autor

Proposição 2: Área do Paralelogramo

Um paralelogramo $ABCD$ de base b e altura h tem área dada por $S(ABCD) = b{\cdot}h$.

Figura 3.12: Área do paralelogramo

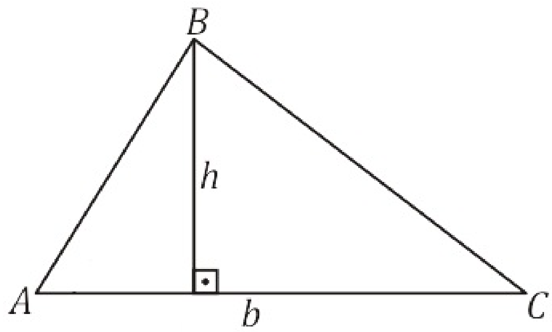


Fonte: O próprio autor

Proposição 3: Área do Triângulo

Um triângulo ABC de base b e altura h tem área dada por $S(ABC) = \frac{b \cdot h}{2}$.

Figura 3.13: Área do triângulo

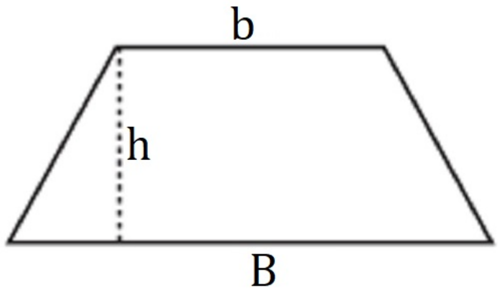


Fonte: O próprio autor

Proposição 4: Área do Trapézio

Um trapézio $ABCD$ de bases $AB = b$, $CD = B$ e altura h tem área dada por $S(ABCD) = \frac{(b+B)\cdot h}{2}$.

Figura 3.14: Área do trapézio



Fonte: O próprio autor

3.4 Algumas Demonstrações do Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras, por sua importância, despertou o interesse de matemáticos e estudiosos ao longo dos séculos. Este Teorema possui centenas de provas, com autoria que vai desde matemáticos de grande prestígio, como Euclides, a amadores, matemáticos ou não (BARBOSA, 1993, p. 5). Algumas demonstrações possuem autorias interessantes como o célebre pintor Leonardo da Vinci, Bhaskara e do ex-presidente americano James Garfield.

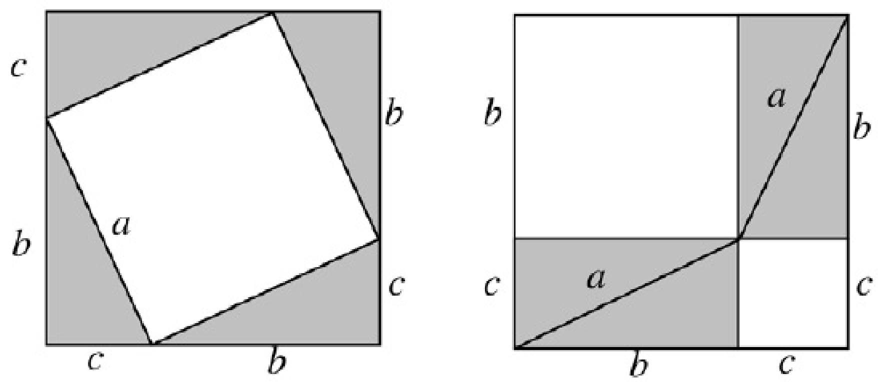
O professor de matemática americano Elisha Scott Loomis reuniu demonstrações do Teorema de Pitágoras e, em 1927 publicou a primeira edição do livro *The Phytagorean Proposition* que apresentava 230 demonstrações para o Teorema. A segunda edição do livro, publicada em 1940, apresentava 370 demonstrações.

O professor deve conhecer algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras, que estejam compatíveis com o nível de conhecimento dos alunos, para utilizar em sala de aula e favorecer a compreensão do processo de “fazer matemática”pelos estudantes (BARBOSA, 1993, p. 5). Com este entendimento, apresentamos algumas demonstrações, presentes no livro de Loomis a fim de proporcionar a compreensão das demonstrações e, consequentemente, a validade do Teorema de Pitágoras por professores e alunos.

3.4.1 A Possível Demonstração de Pitágoras

Ninguém sabe ao certo qual foi a demonstração de Pitágoras para seu teorema, pois não deixou trabalhos escritos. Historiadores acreditam que a demonstração realizada por Pitágoras, envolvia comparação de áreas, e era parecida com a que se encontra a seguir (LIMA, 2012, p. 53). Esta demonstração encontra-se no livro *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias* de Elon Lages Lima (2012, p.53-54). Segundo o autor, esta é a mais bela demonstração do Teorema de Pitágoras, porém no livro de Loomis, aparece sem destaque algum (LIMA, 2012, p.53-54)

Figura 3.15: Possível demonstração de Pitágoras



Fonte: ARAUJO (2011, p. 3)

Demonstração: Analisando as figuras acima, temos dois quadrados de lado medindo $b+c$. Se retirarmos, do quadrado da esquerda, quatro triângulos retângulos iguais, de catetos medindo b e c, restará um quadrado de lado a. Do mesmo modo, se retirarmos, do quadrado da direita, os mesmos quatro triângulos retângulos de catetos b e c, restarão dois quadrados, um de lado b e outro de lado c.

Desta forma, a área do quadrado de lado a é a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem b e c. Assim, obtemos:

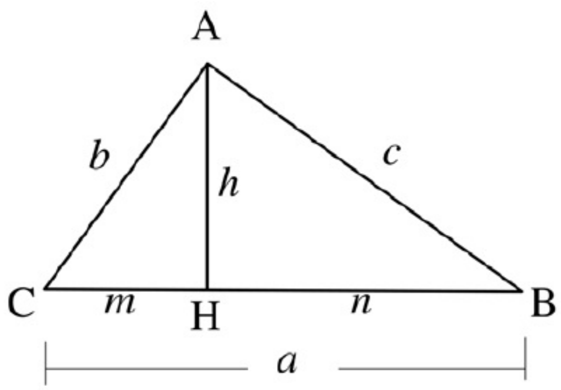
$$a^2 = b^2 + c^2$$

provando a validade do Teorema de Pitágoras.

3.4.2 A Demonstração por Semelhança de Triângulos

Esta demonstração é a mais utilizada e a mais encontrada nos livros didáticos, pois além de demonstrar o Teorema de Pitágoras, fornece importantes relações métricas do triângulo retângulo. Esta demonstração encontra-se no livro *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias* de Elon Lages Lima (2012, p. 54)

Figura 3.16: Demonstração por Semelhança de Triângulos



Fonte: ARAUJO (2011, p. 3)

Demonstração: Dado o triângulo retângulo ABC de hipotenusa BC, trace a altura h referente ao lado BC. Temos, $A\widehat{C}B + A\widehat{B}C = 90^\circ$. Assim, $A\widehat{C}B \equiv H\widehat{A}B$ e $C\widehat{A}H \equiv A\widehat{B}H$. Pelo caso de semelhança AA, temos que $\triangle HAC \sim \triangle HBA \sim \triangle ABC$. Temos então as seguintes proporções:

$$\tfrac{b}{a} = \tfrac{m}{b}, \tfrac{c}{a} = \tfrac{n}{c}.$$

De onde obtemos $b^2 = a \cdot m$ e $c^2 = a \cdot n$, enquanto $m + n = a$. Assim:

$$m + n = \tfrac{b^2+c^2}{a} = a \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

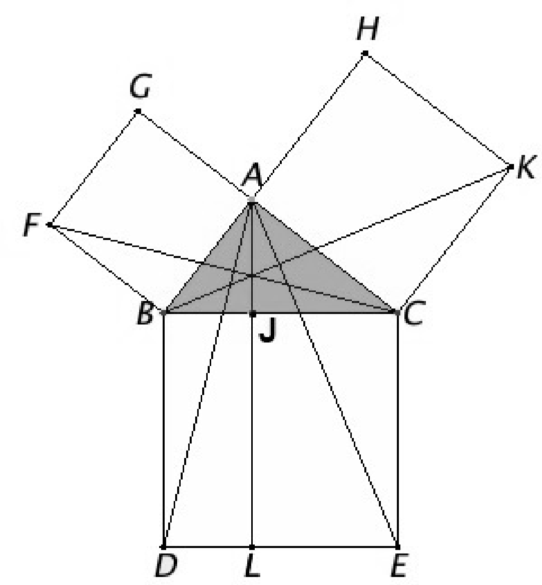
3.4.3 Demonstração de Euclides

Euclides de Alexandria, em sua principal obra *Os Elementos*, composta por 13 livros, enunciou e apresentou uma demonstração para o Teorema de Pitágoras. Esta demonstração consta na Proposição 47 do Livro I desta obra. Para realizar esta demonstração, utilizou-se como referência o livro de Boyer *História da Matemática* (1974, p. 78).

A Proposição 47 do Livro I de Euclides diz: “Em triângulos retângulos, o quadrado no lado oposto ao ângulo reto é igual à soma dos quadrados nos lados que contêm o ângulo reto” (JOYCE, 1996).

Demonstração: Sobre cada um dos lados do triângulo ABC, constrói-se quadrados exteriores ao triângulo. Sendo assim, tem-se o quadrado $ABFG$ sobre o lado AB, o quadrado $ACKH$ sobre o lado AC e o quadrado $BCED$ sobre o lado BC. Trace os segmentos CF, BK, AD, AE e o segmento AL perpendicular a DE no ponto L. Seja J o ponto de interseção de AL com o segmento BC. Veja figura abaixo:

Figura 3.17: Demonstração de Euclides



Fonte: JOYCE (1996)

Perceba que:

$$F\widehat{B}C = F\widehat{B}A + A\widehat{B}C = 90^\circ + A\widehat{B}C = A\widehat{B}C + C\widehat{B}D = A\widehat{B}D.$$

Temos ainda que $\overline{BC} = \overline{BD}, F\widehat{B}C \equiv A\widehat{B}D$ e $\overline{BF} = \overline{AB}$. Portanto, pelo caso de congruência de triângulos LAL, $\triangle CBF \equiv \triangle ABD$.

A área do triângulo CBF em relação a base BF e a área do triângulo ABD em relação a base BD são, respectivamente:

$$S(CBF) = \tfrac{1}{2}\left(\overline{BF} \cdot \overline{BF}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\overline{BF}\right)^2 \text{ e } S(ABD) = \tfrac{1}{2}\left(\overline{BD} \cdot \overline{DL}\right)$$

e a área do retângulo $BDLJ$ é $S(BDLJ) = \overline{BD} \cdot \overline{DL}$.

Como os triângulos CBF e ABD são congruentes, eles possuem mesma área. Assim, obtemos:

$$S(BDLJ) = \overline{BD} \cdot \overline{DL} = 2 \cdot S(ABD) = 2 \cdot S(CBF) = (\overline{BF})^2 = (\overline{AB})^2.$$

De modo análogo, temos que os triângulos CAE e CKB são congruentes, pelo caso LAL, então:

$$S(CJLE) = \overline{CE} \cdot \overline{LE} = 2 \cdot S(CAE) = 2 \cdot S(CKB) = (\overline{CK})^2 = (\overline{AC})^2.$$

Agora, como:

$$S(CBDE) = S(BDLJ) + S(CJLE).$$

Temos:

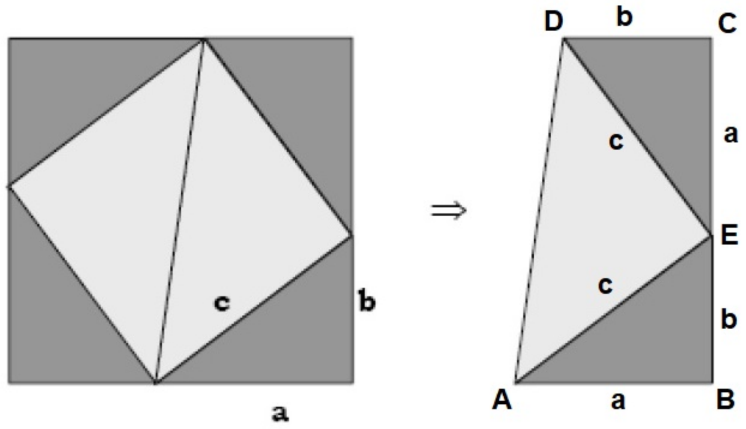
$$\left(\overline{BC}\right)^2 = \left(\overline{BF}\right)^2 + \left(\overline{CK}\right)^2 \Rightarrow \left(\overline{BC}\right)^2 = \left(\overline{AB}\right)^2 + \left(\overline{AC}\right)^2,$$

provando assim a validade do Teorema de Pitágoras.

3.4.4 Demonstração do Presidente Garfield

James Abram Garfield foi presidente dos Estados Unidos por quatro meses, pois foi assassinado. Era general e admirador da matemática (LIMA, 2012, p. 54). Ele apresentou uma prova para o Teorema de Pitágoras baseada na figura abaixo:

Figura 3.18: Demonstração do Presidente



Fonte: ARAUJO (2011, p. 4)

Garfield, iniciou sua prova a partir de um trapézio retângulo, dividido em três triângulos retângulos. Esta demonstração encontra-se no livro *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias* de Elon Lages Lima (2012, p. 54)

Demonstração: Nesta figura, temos que $A\widehat{E}D$, $D\widehat{C}E$ e $A\widehat{B}E$ são retos. Desta forma, podemos calcular a área do trapézio $ABCD$ como a soma das áreas dos três triângulos retângulos. Temos então:

$$\tfrac{1}{2}\,(a+b)\,(a+b) = \tfrac{1}{2}\,(ab) + \tfrac{1}{2}\,(ab) + \tfrac{1}{2}\,(c^2).$$

Simplificando a equação, temos:

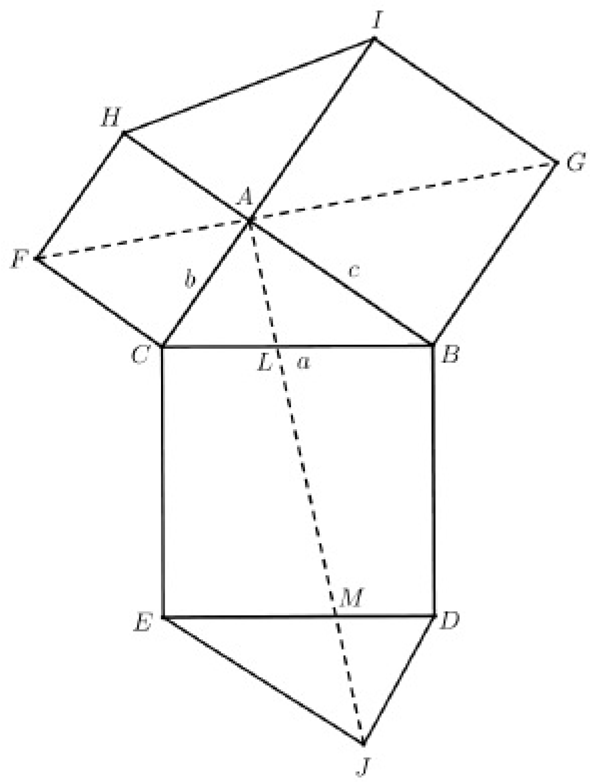
$$(a+b)^2 = 2\,(ab) + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

3.4.5 Demonstração de Leonardo da Vinci

O célebre pintor Leonardo da Vinci, criador da Mona Lisa, também desenvolveu uma demonstração para o Teorema de Pitágoras. Além de pintor, da Vinci era engenheiro de onde obteve o gosto pela matemática. Esta demonstração encontra-se no livro *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias* de Elon Lages Lima (2012, p. 55).

Demonstração: Dado um triângulo retângulo ABC de hipotenusa BC, construa sobre o lado AB o quadrado $ABGI$, sobre o lado AC o quadrado $ACFH$ e sobre o lado BC o quadrado $BCED$. Sobre o segmento DE, construa um triângulo retângulo EDJ congruente a ABC, obtido pela rotação de $180\,°$. Trace o segmento HI. Analisando os triângulos ABC e AHI, temos que $H\widehat{A}I \equiv B\widehat{A}C$, $\overline{AC} = \overline{AH}$ e $\overline{AB} = \overline{AI}$, logo, pelo caso de congruência LAL, temos que os triângulos $AHI \equiv ABC$. Trace os segmentos FG e AJ.

Figura 3.19: Demonstração de Leonardo da Vinci



Fonte: LIMA (2012, p. 55)

Como $\overline{FH} = \overline{FC} = \overline{AC} = \overline{DJ}$, $\overline{HI} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CE}$ e $\overline{IG} = \overline{BG} = \overline{AB} = \overline{EJ}$, $F\widehat{C}B \equiv A\widehat{C}E$ e $C\widehat{B}G \equiv C\widehat{E}J$ temos que os quadriláteros $FHIG$, $FCBG$, $JDBA$ e $ACEJ$ são congruentes entre si. Pois, girando o quadrilátero ACEJ, no vértice C, no sentido anti-horário, o sobrepomos sobre o quadrilátero FCBG. Logo, os hexágonos

$BCFHIG$ e $ABDJEC$ possuem a mesma área. Portanto, escrevemos as áreas $S(BCFHIG)$ e $S(ABDJEC)$ como:

$$S(BCFHIG) = S(ACFH) + S(AHI) + S(ABGI) + S(ABC) \text{ e}$$
$$S(ABDJEC) = S(ABC) + S(BCED) + S(DEJ).$$

E igualando as áreas dos hexágonos, sabendo que $S(AHI) = S(ABC) = S(DEJ)$, temos:

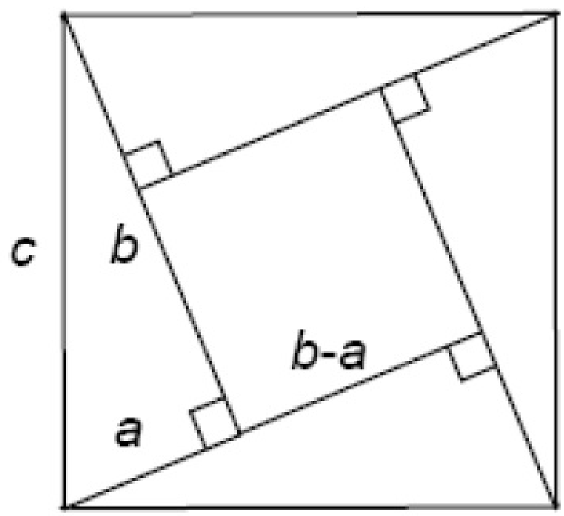
$$S(ACFH) + S(ABGI) = S(BCED),$$

provando assim o Teorema.

3.4.6 Demonstração de Bhaskara

Outro conhecido matemático realizou uma construção que prova o Teorema de Pitágoras. "Bhaskara, matemático hindu do Século XII teria apenas desenhado a figura e escrito "Veja!", sem dar maiores explicações" (ARAUJO, 2011, p. 4) Sua prova baseia-se na decomposição de um quadrado conforme figura abaixo:

Figura 3.20: Demonstração de Bhaskara



Fonte: ARAUJO (2011, p. 4)

Demonstração: Sendo a e b catetos e c hipotenusa do triângulo retângulo, é fácil perceber que os quatro triângulos retângulos da figura 3.20 são congruentes pelo caso ALA.

A área do maior quadrado será dada pela área dos quatro triângulos congruentes e do quadrado menor. Sendo assim:

$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (b-a)^2 = a^2 + b^2,$$

provando assim o Teorema de Pitágoras.

3.5 A recíproca do Teorema de Pitágoras

Como já foi citado anteriormente, os egípcios utilizavam uma corda de 12 nós para medir as terras localizadas próximas ao rio Nilo. Essa corda permitia que fosse criado um ângulo reto pela formação de um triângulo de lados compostos por 5, 4 e 3 nós. Além disso, os hindus, provavelmente pelas mesmas necessidades, utilizavam triângulos de lados medindo 3, 4 e 5; 5, 12, 13; entre outros. Porém nenhuma destas civilizações se questionaram sobre o motivo de obterem ângulos retos com essas medidas (BARBOSA, 1993, p. 21).

Na verdade, ainda que desconhecessem, eles estavam empregando a recíproca do Teorema de Pitágoras, que diz que em um triângulo de lados a, b e c onde vale $a^2 = b^2 + c^2$, este triângulo é retângulo e sua hipotenusa é o lado que mede a.

Apresentaremos a seguir duas demonstrações para a recíproca do Teorema de Pitágoras: a demonstração de Euclides do livro *Os Elementos* e a demonstração de João Barbosa do livro *Geometria Euclidiana Plana*.

3.5.1 Primeira Demonstração

Euclides de Alexandria, em sua obra *Os Elementos*, no livro I, apresenta e demonstra a proposição 48 que se refere a Recíproca do Teorema de Pitágoras.

A Proposição 48 do Livro I de Euclides diz: "Se em um triângulo o quadrado sobre um dos lados é igual à soma dos quadrados sobre os dois lados restantes do triângulo, então o ângulo formado pelos dois lados restantes do triângulo é reto" (JOYCE, 1996).

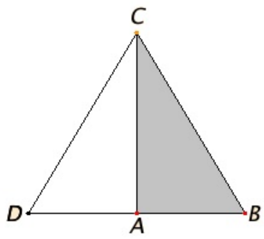
Para realizar esta demonstração, utilizou-se como referência David Joyce (1996)[3].

Demonstração: No triângulo ABC considere que o quadrado do lado BC igual à soma dos quadrados dos lados BA e AC, ou seja, $\left(\overline{BC}\right)^2 = \left(\overline{BA}\right)^2 + \left(\overline{AC}\right)^2$. Afirmamos que o ângulo $B\widehat{A}C$ é reto. Vamos provar!

Trace o segmento DA tal que $C\widehat{A}D$ seja reto e $\overline{DA} = \overline{BA}$. Trace CD.

[3]Disponível em: < *https : //mathcs.clarku.edu/ djoyce/java/elements/bookI/propI48.html* >. Acesso em: 16 mar. 2019.

Figura 3.21: Demonstração de Euclides



Como $\overline{DA}$ é igual a $\overline{AB}$, tem-se que $\left(\overline{DA}\right)^2 = \left(\overline{AB}\right)^2$. Adicione o quadrado de $\overline{AC}$ para cada um. Então teremos:

$$\left(\overline{DA}\right)^2 + \left(\overline{AC}\right)^2 = \left(\overline{BA}\right)^2 + \left(\overline{AC}\right)^2.$$

Como o ângulo $D\widehat{A}C$ é reto, pelo Teorema de Pitágoras:

$$\left(\overline{DC}\right)^2 = \left(\overline{DA}\right)^2 + \left(\overline{AC}\right)^2.$$

Por hipótese, $\left(\overline{BC}\right)^2 = \left(\overline{BA}\right)^2 + \left(\overline{AC}\right)^2$. Portanto, $\left(\overline{DC}\right)^2 = \left(\overline{BC}\right)^2$, de modo que o lado $\overline{DC}$ também é igual a $\overline{BC}$.

Como $\overline{DA} = \overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é comum, os dois lados $\overline{DA}$ e $\overline{AC}$ são iguais aos dois lados $\overline{BA}$ e $\overline{AC}$ respectivamente, e $\overline{DC} = \overline{BC}$, pelo caso de congruência de triângulos LLL, $C\widehat{A}D \equiv B\widehat{A}C = 90\,^\circ$.

Portanto, se em um triângulo o quadrado em um dos lados é igual à soma dos quadrados nos dois lados restantes do triângulo, então o ângulo formado pelos dois lados restantes do triângulo será reto, provando-se assim a Recíproca do Teorema de Pitágoras.

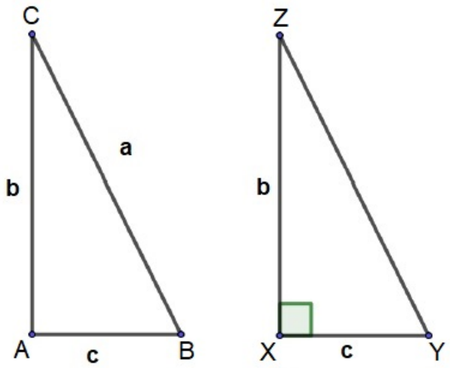
3.5.2 Segunda Demonstração

Para realizar esta demonstração, utilizou-se como referência o livro *Geometria Euclidiana Plana* de João Barbosa (2012, p. 99).

No livro Geometria Euclidiana Plana, João Barbosa enuncia a recíproca do Teorema de Pitágoras da seguinte forma: "Um triângulo possui lados medindo a, b e c. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é retângulo e sua hipotenusa é o lado que mede a"(BARBOSA, 2012, p. 99).

Demonstração: Seja ABC um triângulo de lados a, b e c tal que $a^2 = b^2 + c^2$.

Figura 3.22: Dois triângulos



Fonte: Próprio autor

Construa um novo triângulo retângulo XYZ de catetos $\overline{XY} = \overline{AB} = c$ e $\overline{XZ} = \overline{AC} = b$. Neste novo triângulo, de acordo com o Teorema de Pitágoras, a hipotenusa mede $\sqrt{b^2 + c^2} = a$. Portanto, este novo triângulo (que é retângulo) tem lados medindo a, b e c.

Pelo caso de congruência LLL, o novo triângulo XYZ será congruente ao original ABC. Portanto, o triângulo ABC é retângulo e sua hipotenusa mede a, provando assim, a Recíproca do Teorema de Pitágoras.

3.5.3 Duas Consequências do Teorema de Pitágoras

Agora que o Teorema de Pitágoras foi enunciado e provado, assim como sua recíproca, vamos analisar duas consequências importantes desse teorema e verificar a validade também da recíproca destas consequências. Essa consequência é na verdade uma extensão para triângulos não retângulos.

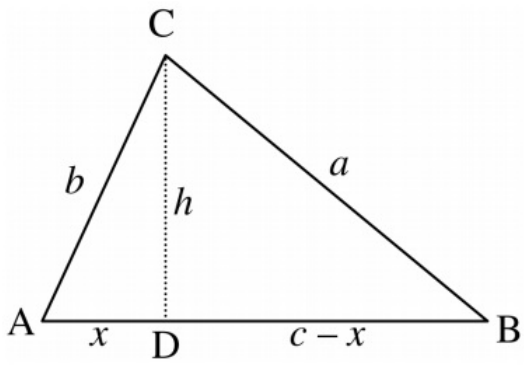
O Teorema de Pitágoras parte da hipótese que o triângulo possui um ângulo reto e por consequência tem-se a relação $a^2 = b^2 + c^2$. Deve-se esperar que quando o ângulo não é reto, a relação entre as medidas dos lados do triângulo será $a^2 = b^2 + c^2 \pm$ um valor. De fato, esta afirmação é verdadeira e será provada abaixo.

As demonstrações descritas abaixo tiveram como referência Eduardo Wagner em sua apostila para a OBMEP *Teorema de Pitágoras e Áreas* (2015, p. 9-10).

1º Caso: $\widehat{A} < 90^\circ$

Seja um triângulo ABC onde o ângulo $\widehat{A}$ é agudo, ou seja, $\widehat{A} < 90^\circ$, $\overline{AD} = x$ e $\overline{CD} = h$.

Figura 3.23: Triângulo 1



Fonte: WAGNER (2015, p. 9)

Como os triângulos ADC e BDC são retângulos, pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$b^2 = h^2 + x^2 \text{ e } a^2 = h^2 + (c - x)^2.$$

Isolando h^2 e igualando as expressões:

$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2.$$

Assim, obtém-se:

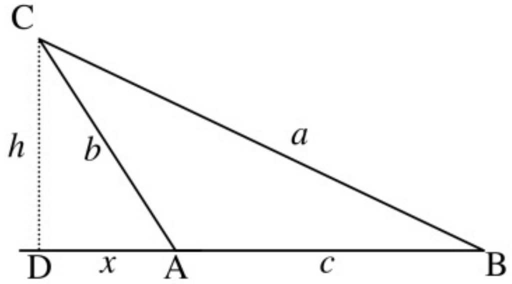
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$$

Logo, conclui-se que se $\widehat{A} < 90^\circ$ então $a^2 < b^2 + c^2$.

2º Caso: $\widehat{A} > 90^\circ$

Seja um triângulo ABC onde o ângulo A é obtuso, ou seja, $\widehat{A} > 90^\circ$, $\overline{AD} = x$ e $\overline{CD} = h$.

Figura 3.24: Triângulo 2



Fonte: WAGNER (2015, p. 9)

Como os triângulos ADC e BDC são retângulos, pelo Teorema de Pitágoras, de forma análoga ao caso 1, obtém-se:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx.$$

Logo, conclui-se que se $\widehat{A} > 90^\circ$ então $a^2 > b^2 + c^2$.

Resumindo os resultados acima, temos:

- Se $\widehat{A}$ é reto, então $a^2 = b^2 + c^2$;
- Se $\widehat{A}$ é agudo, então $a^2 < b^2 + c^2$;
- Se $\widehat{A}$ é obtuso, então $a^2 > b^2 + c^2$;

Das três relações acima, sabemos que vale a recíproca do primeiro item que é o Teorema de Pitágoras. Será que valem os recíprocos dos outros dois? A resposta é sim e será provado por absurdo abaixo.

Demonstração: Suponha que em um triângulo de lados medindo a, b e c, temos $a^2 < b^2 + c^2$ e que $\widehat{A}$ não é agudo. Temos dois casos:

1º Caso: $\widehat{A}$ é reto.
Se $\widehat{A}$ é reto, pelo primeiro item, deve-se ter $a^2 = b^2 + c^2$ o que é um absurdo.

2º Caso: $\widehat{A}$ é obtuso.
Do mesmo modo, se $\widehat{A}$ é obtuso, pelo terceiro item, deve-se ter $a^2 > b^2 + c^2$ o que é um absurdo.
Logo, o ângulo $\widehat{A}$ só pode ser agudo.

A demonstração do recíproco do terceiro item ocorre de modo análogo ao do segundo. Esta demonstração também poderia ser utilizada para provar a recíproca do Teorema de Pitágoras.

3.6 Generalizações do teorema de Pitágoras

Refletindo sobre o Teorema de Pitágoras, é conveniente perguntar se o padrão encontrado para as áreas oferecido pelo teorema também possui validade para outras figuras além do quadrado.

Nesta seção, serão apresentadas e demonstradas extensões do Teorema de Pitágoras, mostrando que a relação entre as áreas de figuras planas construídas sobre os lados de um triângulo retângulo não é exclusiva para quadrados. Além disso, serão apresentadas as generalizações propostas por Polya e Pappus. Para isso, utilizou como referência principal o livro *Descobrindo Padrões Pitagóricos* de Ruy Madsen Barbosa (1993, p. 27-46) e o artigo *Teorema de Pitágoras: extensões e generalizações* de João Silva, Ermínia Fanti e Hermes Pedroso (2016).

3.6.1 Extensões do Teorema de Pitágoras

Será apresentada a seguir uma sequência didática sobre extensões do Teorema de Pitágoras aplicadas a triângulos equiláteros, triângulos semelhantes, polígonos regulares e polígonos semelhantes.

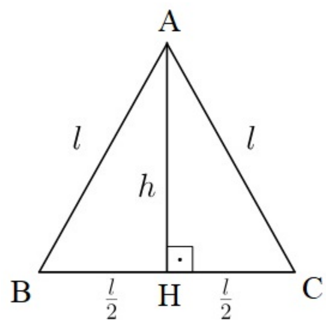
3.6.1.1 Extensões Para Triângulos Equiláteros

Neste item, será analisada a validade da relação entre áreas sobre os lados de um triângulo retângulo para triângulos equiláteros construídos sobre os lados. Para a demonstração desta relação será utilizado o seguinte Lema:

Lema 1: Um triângulo equilátero ABC de lado l tem área dada por

$$S(ABC) = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

Figura 3.25: Área do triângulo equilátero



Fonte: O próprio autor

Demonstração: O triângulo AHC é retângulo em H e, como $\overline{HC} = \frac{l}{2}$, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

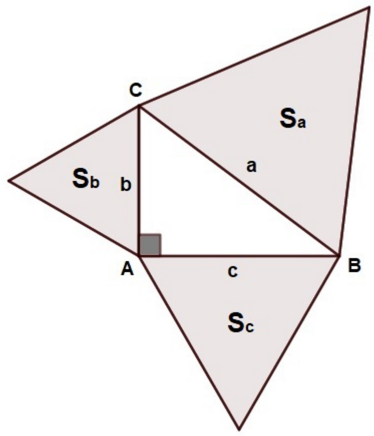
$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Como apresentado na seção *Conceitos Preliminares* desta pesquisa, a área de um triângulo ABC qualquer é dada por $S(ABC) = \frac{base \cdot altura}{2}$. Portanto, a área do triângulo equilátero ABC será

$$S(ABC) = \frac{l \cdot h}{2} = \frac{l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

Proposição 1: A área do triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma das áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos deste triângulo.

Figura 3.26: Extensão para Triângulos Equiláteros



Fonte: O próprio autor

Demonstração: Seja o triângulo retângulo ABC onde $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$. Considere ainda a construção de triângulos equiláteros sobre cada um dos lados do triângulo retângulo. Temos que as áreas dos triângulos equiláteros sobre os lados a, b e c são S_a, S_b e S_c respectivamente.

Segundo *Lema 1*, a área de um triângulo equilátero de lado x é dada por $S_x = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Logo, os triângulos equiláteros construídos sobre os lados a, b e c terão suas áreas dadas por:

$$S_a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},\ S_b = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \text{ e } S_c = \frac{c^2\sqrt{3}}{4},$$

respectivamente.

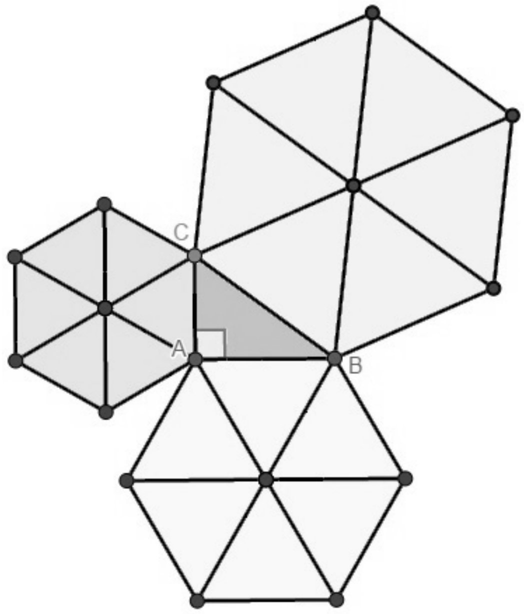
Somando S_b e S_c, temos:

$$S_b + S_c = \frac{\left(b^2+c^2\right)\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = S_a.$$

Pois, pelo Teorema de Pitágoras, $b^2 + c^2 = a^2$. Portanto, o padrão pitagórico das áreas é válido para triângulos equiláteros.

Observação: No caso de hexágonos regulares, o padrão pitagórico é consequência do provado para triângulos equiláteros, pois cada hexágono regular é composto de seis triângulos equiláteros congruentes.

Figura 3.27: Extensão para Hexágonos Regulares



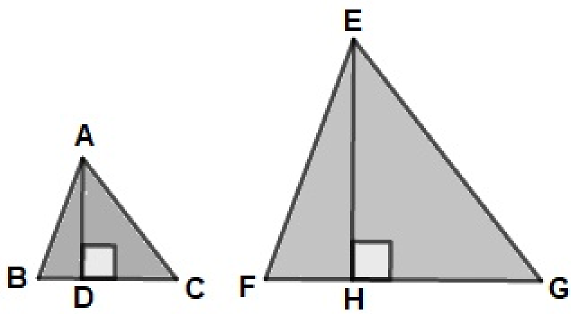
Fonte: O próprio autor

3.6.1.2 Extensões Para Triângulos Semelhantes

Para provarmos a extensão do Teorema de Pitágoras para triângulos semelhantes, necessitamos provar um *Lema* antes.

Lema 1: A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles.

Figura 3.28: Triângulos Semelhantes



Fonte: O próprio autor

Demonstração: Sejam os triângulos semelhantes ABC e EFG. Considere as alturas AD e EH relativas aos lados homólogos BC e FG respectivamente.

Sendo os triângulos semelhantes, as medidas das alturas são proporcionais às medidas dos lados homólogos:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{EH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}}. \tag{3.1}$$

Por outro lado, as áreas S e S' dos triângulos ABC e EFG respectivamente são dadas por:

$$S = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}{2} \text{ e } S' = \frac{\overline{FG} \cdot \overline{EH}}{2}.$$

Dividindo S por S':

$$\frac{S}{S'} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}{\overline{FG} \cdot \overline{EH}} \overset{(3.1)}{=} \frac{\left(\overline{BC}\right)^2}{\left(\overline{FG}\right)^2}.$$

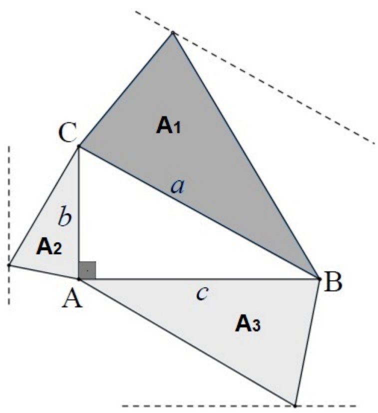
De maneira análoga, mostramos que a proporção é válida para os lados correspondentes AB e EF e também para os correspondentes AC e EG. Logo

$$\frac{S}{S'} = \frac{\left(\overline{BC}\right)^2}{\left(\overline{FG}\right)^2} = \frac{\left(\overline{AB}\right)^2}{\left(\overline{EF}\right)^2} = \frac{\left(\overline{AC}\right)^2}{\left(\overline{EG}\right)^2}.$$

Utilizando este lema, iremos provar a extensão do Teorema de Pitágoras para triângulos semelhantes.

Proposição 2: Se construirmos triângulos semelhantes sobre os lados de um triângulo retângulo e se os lados do triângulo retângulo são lados homólogos (correspondentes) aos lados dos triângulos semelhantes que os contém, então a área do triângulo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos.

Figura 3.29: Extensão para Triângulos Semelhantes



Fonte: SILVA et. al (2016, p. 7)

Demonstração: Considere no triângulo ABC, retângulo em A, três triângulos semelhantes construídos sobre seus lados.

Pelo Lema 1, temos a seguinte relação entre as suas áreas:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{b^2}{a^2} \text{ e } \frac{A_3}{A_1} = \frac{c^2}{a^2}.$$

Portanto,

$$A_2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot A_1 \text{ e } A_3 = \frac{c^2}{a^2} \cdot A_1.$$

Somando as duas equações obtemos:

$$A_2 + A_3 = \frac{\left(b^2+c^2\right) \cdot A_1}{a^2}.$$

E como, pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, obtemos $A_2 + A_3 = A_1$.

Desta forma, provou-se que o padrão pitagórico também se estende à triângulos semelhantes.

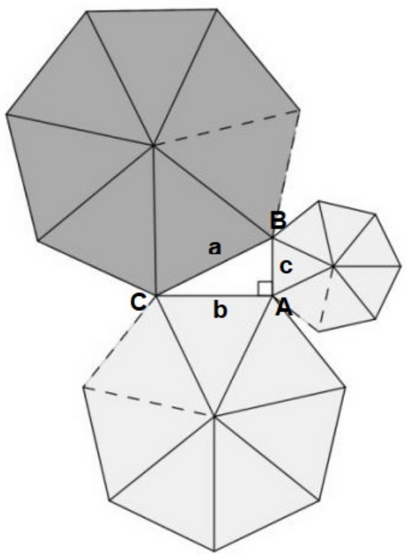
Observação: A validade da extensão provada para triângulo equiláteros ocorre, pois todos os triângulos equiláteros são semelhantes.

3.6.1.3 Extensões Para Polígonos Regulares

A seguir, será analisado o caso de polígonos regulares construídos sobre os lados de um triângulo retângulo. Um polígono diz-se regular se tiver todos os seus lados e ângulos congruentes.

Proposição 3: A área do polígono regular de n lados construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos polígonos regulares de n lados construídos sobre seus catetos.

Figura 3.30: Extensão para Polígonos Regulares



Fonte: SILVA et. al (2016, p. 8)

Demonstração: Considere um triângulo retângulo ABC de catetos medindo b e c e hipotenusa a, onde em cada um dos seus lados foram construídos polígonos regulares de n lados. Iremos decompor cada polígono, em n triângulos isósceles congruentes conforme Figura 3.30.

Sejam S_a, S_b e S_c as áreas dos polígonos construídos sobre os lados BC, AC e AB do triângulo retângulo, respectivamente e T_a, T_b e T_c as áreas de cada triângulo isósceles em que foi decomposto o polígono regular, construído sobre a hipotenusa de medida a e catetos de medidas b e c. Temos então:

$$S_a = nT_a,\ S_b = nT_b \text{ e } S_c = nT_c.$$

Somando as equações, temos:

$$S_b + S_c = n \cdot (T_b + T_c).$$

Mas como os triângulos isósceles sobre os lados do triângulo retângulo são semelhantes pelo caso AA, pela Proposição 2 temos que $T_a = T_b + T_c$, logo

$$S_b + S_c = n \cdot (T_b + T_c) = nT_a = S_a.$$

Portanto, o padrão pitagórico se estende à polígonos regulares.

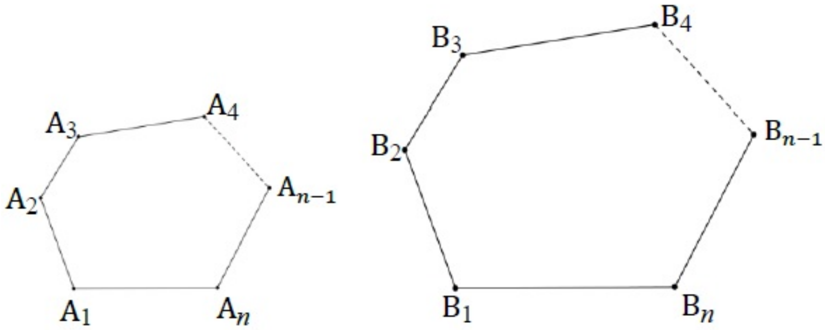
3.6.1.4 Extensões Para Polígonos Semelhantes

A seguir, iremos provar o padrão pitagórico para polígonos semelhantes. Para isso, devemos lembrar que dois polígonos $A_1A_2...A_n$ e $B_1B_2...B_n$ são *semelhantes*, quando seus ângulos correspondentes são congruentes e seus lados correspondentes, denominados homólogos, são proporcionais.

Para realizar a demonstração da proposição, é necessário provar um novo Lema.

Lema 2: A razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes $A_1A_2...A_n$ e $B_1B_2...B_n$ é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles.

Figura 3.31: Polígonos Semelhantes de n Lados



Fonte: SILVA et. al (2016, p. 9)

Demonstração: Sejam dois polígonos $A_1A_2...A_n$ e $B_1B_2...B_n$ semelhantes conforme figura 3.31. Com as diagonais partindo de dois vértices correspondentes, decompomos os polígonos em triângulos, onde cada triângulo formado no polígono $A_1A_2...A_n$, possui um triângulo semelhante no polígono $B_1B_2...B_n$ formado pelos lados homólogos aos do triângulo semelhante do primeiro polígono, logo:

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{B_2B_3}} = ... = \frac{\overline{A_{n-1}A_n}}{\overline{B_{n-1}B_n}} = \frac{\overline{A_nA_1}}{\overline{B_nB_1}} = k.$$

Portanto, seus quadrados também são proporcionais:

$$\frac{(\overline{A_1A_2})^2}{(\overline{B_1B_2})^2} = \frac{(\overline{A_2A_3})^2}{(\overline{B_2B_3})^2} = ... = \frac{(\overline{A_{n-1}A_n})^2}{(\overline{B_{n-1}B_n})^2} = \frac{(\overline{A_nA_1})^2}{(\overline{B_nB_1})^2} = k^2.$$

Sejam $T_1, T_2, ..., T_{n-2}$ as áreas de cada triângulo semelhante em que foi decomposto o polígono $A_1A_2...A_n$ e $T'_1, T'_2, ..., T'_{n-2}$ as áreas de cada triângulo semelhante em que foi decomposto o polígono $B_1B_2...B_n$.

Pelo Lema 1, temos $\frac{T_1}{T'_1} = \frac{T_2}{T'_2} = \cdots = \frac{T_{n-2}}{T'_{n-2}} = k^2$.

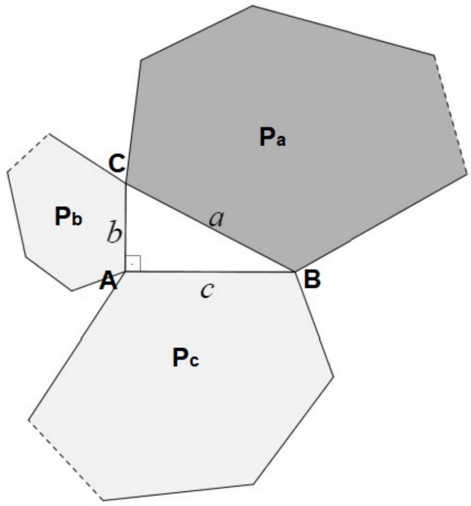
Usando a propriedade das proporções, podemos escrever:

$$\frac{T_1+T_2+\cdots+T_{n-2}}{T'_1+T'_2+\cdots+T'_{n-2}} = k^2 = \frac{P}{P'}.$$

onde P é a área do polígono $A_1A_2\cdots A_n$ e P' é a área do polígono $B_1B_2\cdots B_n$.

Proposição 4: A área do polígono qualquer de n lados construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos polígonos de n lados semelhantes a ele construídos sobre os catetos, onde os lados do triângulo retângulo são lados homólogos dos três polígonos semelhantes.

Figura 3.32: Extensão para Polígonos Semelhantes



Fonte: SILVA et. al (2016, p. 10)

Demonstração: Considere o triângulo retângulo ABC de hipotenusa a e catetos b e c e três polígonos semelhantes construídos sobre os lados do triângulo de áreas P_a, P_b e P_c. Pelo Lema 2, temos:

$$\frac{P_b}{P_a} = \frac{b^2}{a^2} \text{ e } \frac{P_c}{P_a} = \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow P_b = \frac{b^2}{a^2}P_a \text{ e } P_c = \frac{c^2}{a^2}P_a.$$

Somando as equações temos:

$$P_b + P_c = \frac{b^2+c^2}{a^2}P_a.$$

Mas como, pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, temos $P_b + P_c = P_a$.

Portanto, o padrão pitagórico é válido para polígonos semelhantes.

Observação: A validade da extensão provada para polígonos regulares de n lados, com $n \in \mathbb{N}$, ocorre, pois todos os polígonos regulares de n lados são semelhantes.

3.6.2 Generalização de Polya

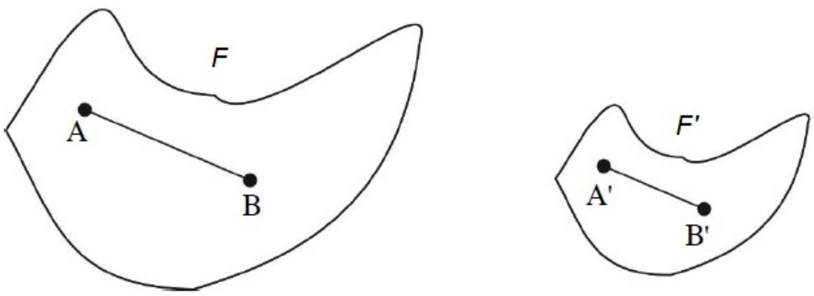
George Polya (1887-1985), matemático húngaro, apresentou uma das provas mais brilhantes do Teorema de Pitágoras que generaliza o Teorema para formas geométricas semelhantes. Esta prova encontra-se no livro *Induction and Analogy in Mathematics* de autoria de George Polya (1954, p. 33).

A generalização proposta por Polya diz: *Se três figuras semelhantes são descritas em três lados de um triângulo retângulo, a descrita sobre a hipotenusa é igual, em área, à soma das áreas dos outros dois* (POLYA, 1954, p. 34).

Para realizar a demonstração proposta por Polya, precisamos ampliar a definição de polígonos semelhantes para figuras semelhantes. Veja definição abaixo.

Definição: Duas figuras geométricas F e F' são *semelhantes* se a cada ponto A de F é possível fazer uma correspondência a um e só um ponto A' de F', chamado homólogo do ponto A, de tal forma que se A e B são pontos quaisquer de F e A' e B' são seus pontos homólogos em F', então a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ é constante, e é denominada razão ou coeficiente de semelhança da figura F para a figura F'. De modo similar ao caso de polígonos semelhantes, dizemos que AB e $A'B'$ são segmentos homólogos.

Figura 3.33: Figuras Semelhantes



Fonte: SILVA et. al (2016, p. 18)

Além desta definição, será utilizada uma generalização do *Lema 2* para figuras semelhantes que diz: *As áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança.* A demonstração desta generalização encontra-se em (LIMA, 1991, p. 49).

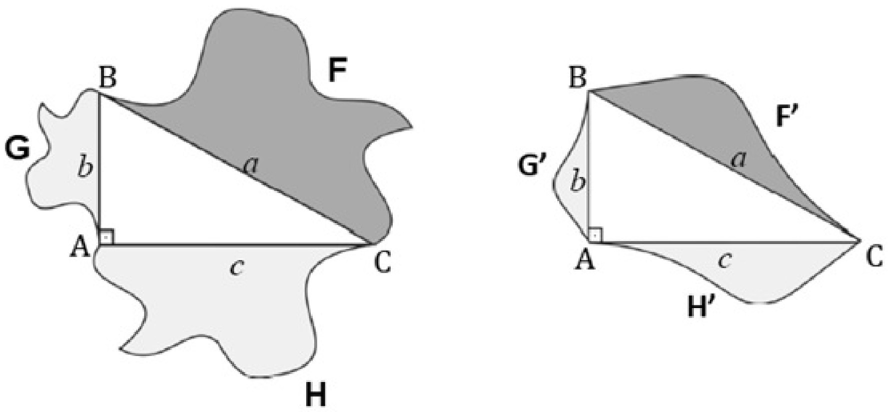
A proposição a seguir foi enunciada e provada por Polya.

Proposição 5: Sejam F, G e H três figuras semelhantes, construídas sobre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo respectivamente. Se os lados do triângulo retângulo são lados homólogos aos lados das figuras semelhantes que os contém, então as áreas S_F, S_G e S_H satisfazem a relação $S_G + S_H = S_F$.

Demonstração: A demonstração será realizada em duas etapas. Na primeira será mostrado que se a relação entre as áreas das figuras sobre os lados do triângulo retângulo for válida para uma terna particular de figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, então ela será válida para qualquer terna de figuras semelhantes construídas sobre os lados deste triângulo retângulo. Na segunda etapa, apresentaremos um caso particular de polígonos semelhantes construídos com os lados de um triângulo retângulo congruente ao da primeira parte, que são semelhantes e satisfazem o padrão pitagórico da relação de áreas, completando assim a prova.

Parte 1: Seja um triângulo retângulo ABC de hipotenusa medindo a e catetos medindo b e c. Sejam ainda três figuras semelhantes F, G e H construídas sobre a hipotenusa e os catetos do triângulo ABC respectivamente. Suponha que para as figuras F, G e H vale a relação entre as áreas $S_G + S_H = S_F$.

Figura 3.34: Figuras semelhantes sobre o lado do triângulo retângulo



Fonte: SILVA et. al (2016, p. 20)

Se F', G' e H' são outras três figuras semelhantes construídas sobre a hipotenusa e catetos do triângulo ABC respectivamente, na mesma ordem que as anteriores, como a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre elas, obtemos:

$$\frac{S_{F'}}{S_{G'}} = \frac{S_F}{S_G} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \text{ e } \frac{S_{F'}}{S_{H'}} = \frac{S_F}{S_H} = \left(\frac{a}{c}\right)^2.$$

Logo, podemos concluir que:

$$\frac{S_{F'}}{S_F} = \frac{S_{G'}}{S_G} = \frac{S_{H'}}{S_H} = k.$$

Portanto, $S_{F'} = k \cdot S_F$, $S_{G'} = k \cdot S_G$ e $S_{H'} = k \cdot S_H$.
Assim,

$$S_{G'} + S_{H'} = k \cdot S_G + k \cdot S_H = k(S_G + S_H).$$

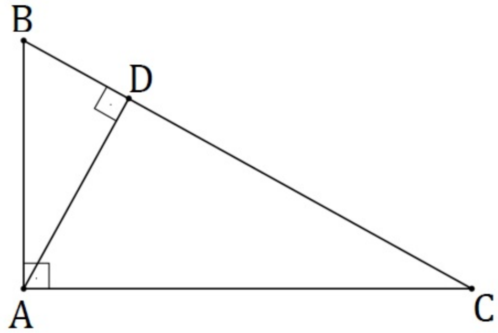
Mas como por hipótese, $S_G + S_H = S_F$, então:

$$S_{G'} + S_{H'} = k \cdot S_F = S_{F'}.$$

Parte 2: Pretende-se mostrar que é possível construir figuras semelhantes F, G e H sobre os lados do triângulo retângulo ABC que satisfaçam a relação entre as áreas, hipótese da proposição.

Uma construção conveniente pode ser obtida no próprio triângulo retângulo ABC. Traçando o segmento AD que é a altura em relação ao lado BC do triângulo retângulo, obtemos três triângulos retângulos semelhantes, o próprio ABC e os triângulos DBA e DAC. Termos então, uma terna de figuras semelhantes que satisfazem a relação de área $S(ABC) = S(DBA) + S(DAC)$.

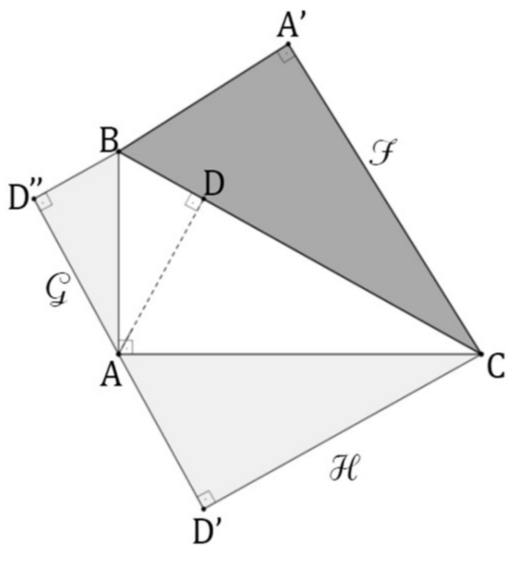
Figura 3.35: Triângulo ABC e sua altura relativa a hipotenusa



Fonte: SILVA et. al (2016, p. 27)

Para melhorar a visualização, construiu-se na Figura 3.36 os os triângulos congruentes aos triângulos ABC, DBA e DAC no exterior do triângulo ABC. Para isso, seja A' o simétrico do ponto A em relação ao segmento BC, D' o simétrico de D em relação ao segmento AC e D'' o simétrico de D em relação ao segmento AB.

Figura 3.36: Triângulos semelhantes ao triângulo retângulo ABC



Fonte: SILVA et. al (2016, p. 27)

Observa-se que se D fosse um ponto qualquer da hipotenusa BC ainda seria válida a propriedade da soma das áreas, mas os ângulos dos triângulos seriam diferentes e não se obteria triângulos semelhantes. Desta forma, a única posição conveniente para D é o *pé da perpendicular*.

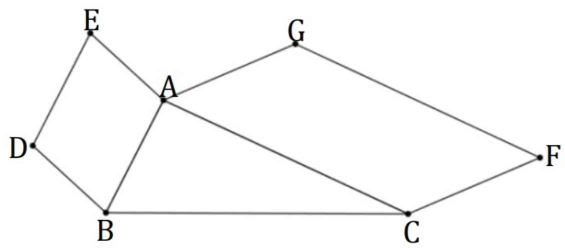
Temos ainda que a relação entre áreas de triângulos semelhantes, provada na Proposição 2, utilizou como ferramenta o Teorema de Pitágoras e, na demonstração acima, proposta por Polya, a relação entre as áreas foi verificada sem o uso do Teorema. Desta forma, o Teorema de Pitágoras pode ser obtido como uma consequência da demonstração de Polya (Proposição 5).

3.6.3 Generalização de Pappus

Pappus de Alexandria (290 – 350) foi um dos últimos grandes matemáticos gregos da antiguidade. Parte de suas pesquisas baseavam-se em novas provas e consequências de proposições de cientistas da antiga civilização grega como Euclides, Arquimedes e Apolônio. Dentre elas, destaca-se uma proposição que pode ser considerada uma generalização para o Teorema de Pitágoras, já que o Teorema de Pitágoras pode ser obtido como um caso particular dele. O interessante na construção de Pappus é que o triângulo, onde são feitas as construções não precisa ser necessariamente retângulo.

Proposição 6: Seja ABC um triângulo qualquer e sobre dois de seus lados constrói-se dois paralelogramos quaisquer, $ABDE$ e $ACFG$, como na Figura 3.37. É possível construir sobre o outro lado desse triângulo, um terceiro paralelogramo, $BCHI$, cuja área seja igual à soma das áreas dos outros dois já construídos.

Figura 3.37: Generalização de Pappus



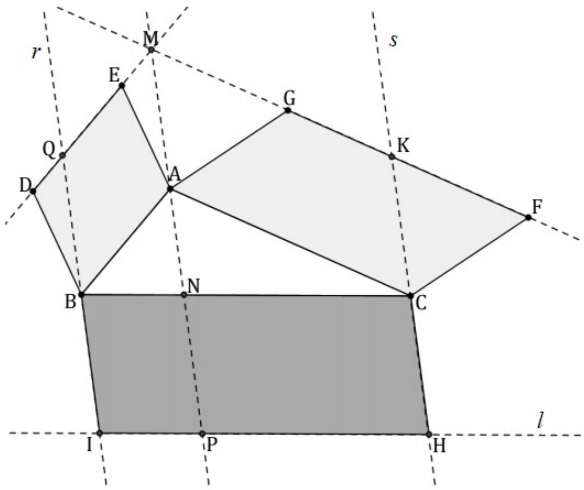
Fonte: SILVA et. al (2016, p. 27)

Demonstração: Vamos iniciar com a construção do terceiro paralelogramo, conforme orientação de Pappus, para depois provar a validade da relação entre as áreas.

Construção: Prolongue os segmentos DE e FG. Seja M o ponto de interseção destes prolongamentos. Trace a reta MA e seja N a interseção de MA com o lado BC

do triângulo. Seja P pertencente à MA tal que $\overline{MA} = \overline{NP}$. Trace a reta l que passa por P paralela à BC e as retas r e s que passam por B e C respectivamente e são paralelas à MA. Sejam ainda I e H as interseções das retas r e s com a reta l respectivamente. O quadrilátero $BCHI$ é o paralelogramo, construído por Pappus, cuja área é igual à soma dos outros dois paralelogramos construídos sobre os lados AB e AC do triângulo. Resta apenas provar essa última afirmação.

Figura 3.38: Construção do terceiro paralelogramo



Fonte: O próprio autor

Prova da relação de áreas: Seja Q o ponto de interseção da reta r e o segmento DE e K o ponto de interseção da reta s e o segmento FG.

Repare que os paralelogramos $BNPI$ e $ABQM$ tem a mesma medida de base $\overline{MA} = \overline{NP}$ e mesma altura, logo possuem mesma área. Tem-se também que os triângulos BDQ e AEM são congruentes pelo caso ALA, pois $Q\widehat{B}D \equiv M\widehat{A}E$, $\overline{AE} = \overline{BD}$ e $B\widehat{D}Q \equiv A\widehat{E}M$. Portanto, $S\,(ABDE) = S\,(ABQM) = S\,(BNPI)$.

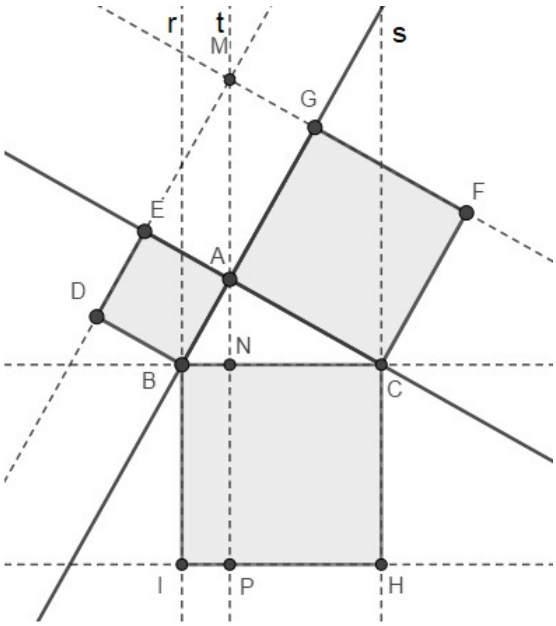
De modo análogo provamos que $S\,(ACFG) = S\,(CNPH)$.

Portanto, $S\,(ABDE) + S\,(ACFG) = S\,(BCHI)$.

Provamos assim que a área do terceiro paralelogramo $BCHI$ é igual à soma das áreas dos outros dois paralelogramos construídos sobre os lados do triângulo.

Observação: É possível perceber que o Teorema de Pitágoras é um caso particular da generalização provada por Pappus. A construção proposta por Pappus realizada com quadrados está a seguir.

Figura 3.39: Construção do terceiro quadrado



Fonte: O próprio autor

Temos que $M\widehat{E}A \equiv D\widehat{E}A \equiv E\widehat{A}B \equiv B\widehat{A}C \equiv 90°$.

Como $\overline{EM} = \overline{AG} = \overline{AC}$ e $\overline{EA} = \overline{AB}$, pelo caso de congruência LAL, obtemos que $\triangle AEM \equiv \triangle BAC$. Assim, $E\widehat{M}A \equiv A\widehat{C}B$ e $M\widehat{A}E \equiv A\widehat{B}C$.

Como $M\widehat{A}E$ e $C\widehat{A}N$ são opostos pelo vértice, $M\widehat{A}E \equiv C\widehat{A}N \equiv A\widehat{B}C$.

Temos ainda que $A\widehat{C}B + A\widehat{B}C = 90°$ e como $C\widehat{A}N \equiv A\widehat{B}C$ e $A\widehat{C}N \equiv A\widehat{C}B$, então $C\widehat{A}N + A\widehat{C}N = 90°$. Portanto, $A\widehat{N}C \equiv 90°$.

Como r, t e s são retas paralelas, então $C\widehat{B}I \equiv B\widehat{I}H \equiv I\widehat{H}C \equiv H\widehat{C}B \equiv 90°$.

Por outro lado, como $\overline{BI} = \overline{NP} = \overline{AM} = \overline{BC}$, então $BCHI$ é um quadrado de lado $\overline{BC}$.

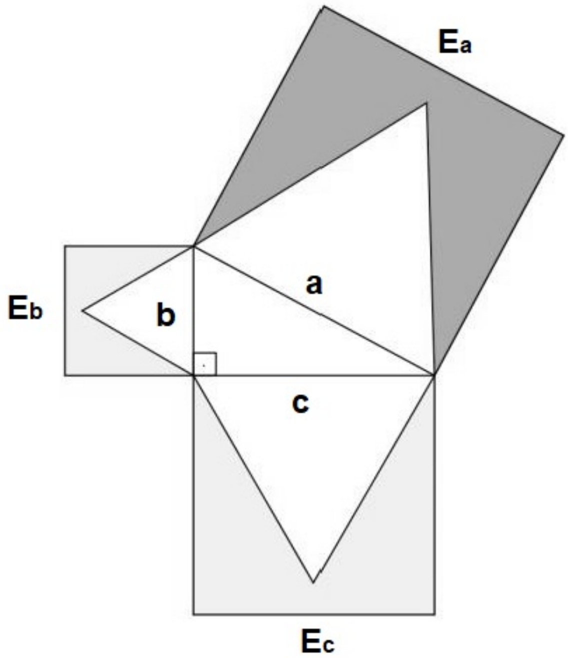
A prova da relação de áreas para o caso dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo é análoga à realizada para os paralelogramos.

3.6.4 Exercícios sobre extensões do Teorema de Pitágoras

A seguir serão provadas, como exercício, algumas extensões do Teorema de Pitágoras. Serão apresentadas construções retilíneas e não retilíneas de figuras que possuem ou não um lado apoiado sobre os lados do triângulo retângulo. Serão provadas 4 extensões e serão apresentadas outras quatro extensões que ficarão como sugestão de exercícios complementares ao estudo.

Extensão 1: Provar a extensão do Teorema de Pitágoras para as regiões complementares dos triângulos equiláteros construídos no interior dos quadrados e tendo como base os lados do triângulo retângulo.

Figura 3.40: Extensão Retilínea 1



Fonte: O próprio autor

Demonstração: Sejam E_a, E_b e E_c, as áreas das regiões complementares dos triângulos equiláteros construídos no interior dos quadrados, Q_a, Q_b e Q_c as áreas dos quadrados e T_a, T_b e T_c as áreas dos triângulos que têm como base os lados a, b e c respectivamente. Temos:

$$E_b = Q_b - T_b \text{ e } E_c = Q_c - T_c.$$

Somando as duas equações:

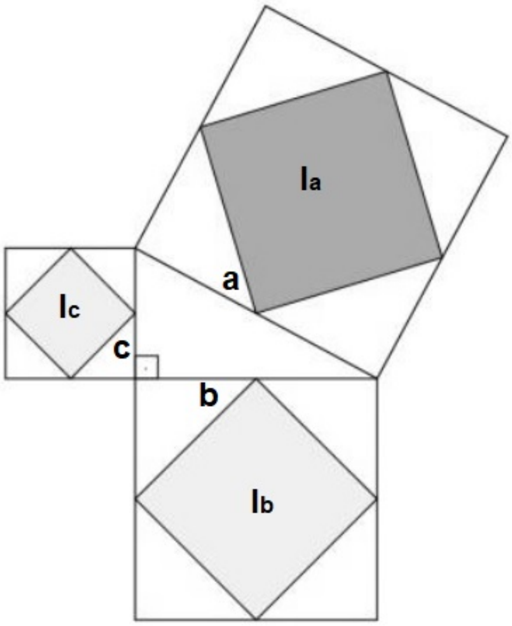
$$E_b + E_c = (Q_b + Q_c) - (T_b + T_c).$$

Usando a relação das áreas para quadrados e triângulos equiláteros, temos:

$$E_b + E_c = (Q_a - T_a) = E_a.$$

Extensão 2: Provar a extensão do Teorema de Pitágoras para os quadrados inscritos tomando os pontos médios dos quadrados dos lados do triângulo retângulo.

Figura 3.41: Extensão Retilínea 2



Fonte: O próprio autor

Os quadrados de área I_a, I_b e I_c são inscritos nos pontos médios dos quadrados dos lados do triângulo retângulo.

A área do quadrado inscrito no quadrado de lado a é dada por:

$$I_a = a^2 - \frac{4\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = \frac{a^2}{2} = \frac{Q_a}{2}.$$

De modo análogo, as áreas $I_b = \frac{Q_b}{2}$ e $I_c = \frac{Q_c}{2}$, onde Q_a, Q_b e Q_c são as áreas dos quadrados de lados a, b e c.

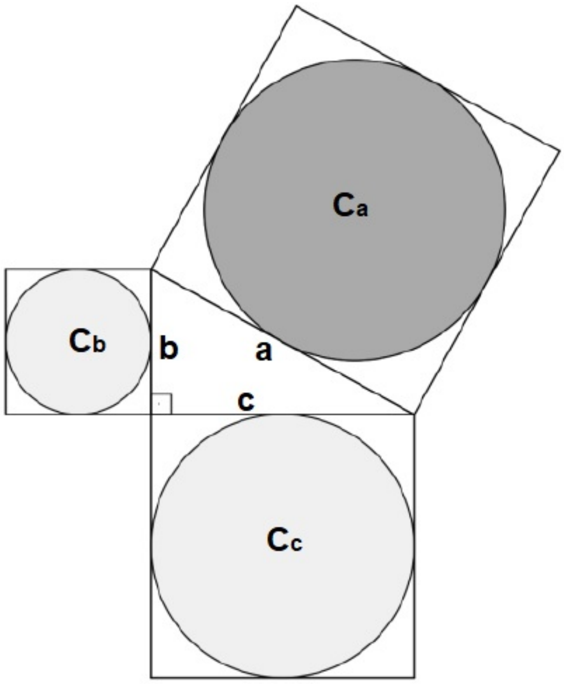
Somando as duas últimas equações, temos:

$$I_b + I_c = \frac{(Q_b + Q_c)}{2}.$$

Utilizando a proposição de Pitágoras para áreas de quadrados formados sobre os lados do triângulo retângulo, temos $I_b + I_c = \frac{Q_a}{2} = I_a$.

Extensão 3: Provar a extensão do Teorema de Pitágoras para círculos inscritos em quadrados.

Figura 3.42: Extensão Mista 3



Fonte: O próprio autor

Demonstração: Na figura, temos círculos inscritos em quadrados formados sobre os lados do triângulo retângulo.

Sejam C_a, C_b e C_c as áreas dos círculos inscritos nos quadrados de lados a, b e c respectivamente. Logo

$$C_a = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4},\ C_b = \pi \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi b^2}{4} \text{ e } C_c = \pi \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{\pi c^2}{4}.$$

Somando as duas últimas equações, temos:

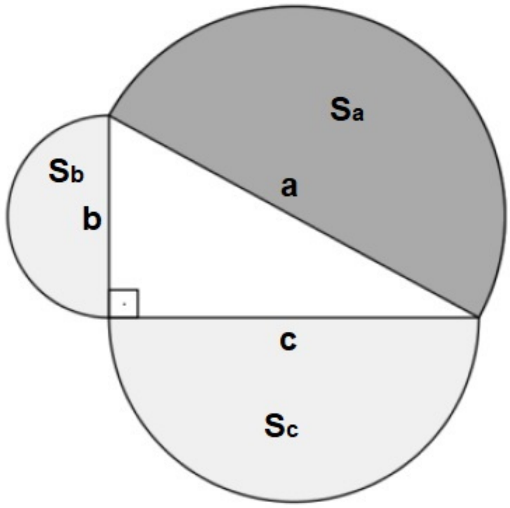
$$C_b + C_c = \frac{\pi\left(b^2+c^2\right)}{4}.$$

Como, pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$:

$$C_b + C_c = \frac{\pi a^2}{4} = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = C_a.$$

Extensão 4: Provar a extensão do Teorema de Pitágoras para semicírculos com diâmetro sobre os lados do triângulo.

Figura 3.43: Extensão Curvilínea 4



Fonte: O próprio autor

Demonstração: Seja um triângulo retângulo com três semicírculos de diâmetros sobre seus lados.

Sejam S_a, S_b e S_c as áreas dos semicírculos de diâmetros a, b e c respectivamente. Logo

$$S_b + S_c = \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi c^2}{8} = \frac{\pi\left(b^2+c^2\right)}{8}.$$

Mas como, pelo Teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$:

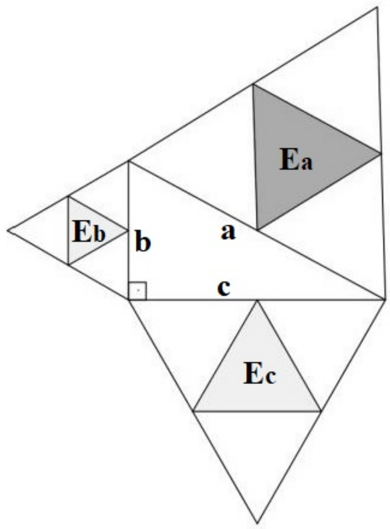
$$S_b + S_c = \frac{\pi a^2}{8} = S_a.$$

Extensões propostas como exercícios:

Abaixo, apresentamos como exercícios mais quatro extensões do Teorema de Pitágoras para serem provadas. Existem inúmeras extensões com provas muito interessantes. Para saber mais, consultar BARBOSA (1993).

1) Triângulos equiláteros inscritos considerando os pontos médios dos triângulos equiláteros que têm como base os lados do triângulo retângulo.

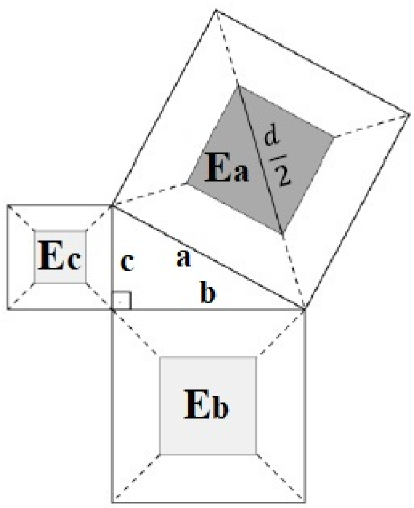
Figura 3.44: Exercício 1 de extensão



Fonte: SILVA et. al (p. 12)

2) Quadrados cujos centros coincidem com os centros dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo e suas diagonais têm como medida $\frac{d}{2}$, onde d indica a medida da diagonal do quadrado básico.

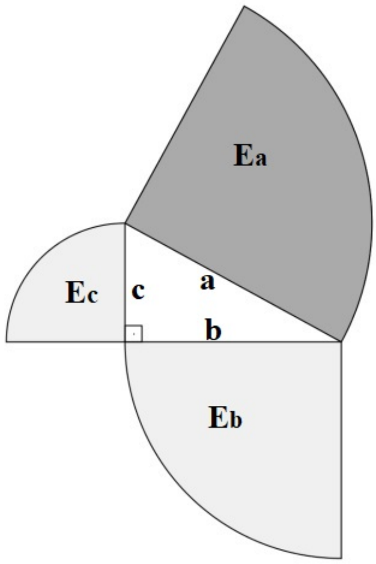
Figura 3.45: Exercício 2 de extensão



Fonte: SILVA et. al (p. 12)

3) Quadrantes sobre os lados do triângulo retângulo.

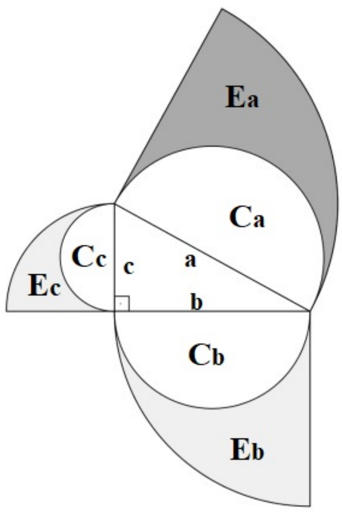
Figura 3.46: Exercício 3 de extensão



Fonte: SILVA et. al (p. 14)

4) Regiões exteriores aos semicírculos e interiores aos quadrantes de círculos.

Figura 3.47: Exercício 4 de extensão



Fonte: SILVA et. al (p. 14)

Capítulo 4

Aplicações do Teorema de Pitágoras

Nas seções anteriores foi realizado um estudo aprofundado sobre o Teorema de Pitágoras. Este Teorema possui um grande valor histórico, mas além disso, possui inúmeras aplicações em conceitos matemáticos e em situações cotidianas. Este capítulo evidencia a aplicação deste Teorema e propõe a resolução de problemas por sua aplicação. Os problemas apresentados são desafiadores e não exploram apenas a aplicação direta do Teorema. "O conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução" (BRASIL, 1998, p. 39).

As aplicações do Teorema estão divididas de acordo com suas características. Iniciamos com a aplicação do Teorema em conceitos matemáticos e na construção geométrica de segmentos. Resolveremos em seguida, diversos problemas de aplicação do Teorema, problemas do Exame Nacional de Acesso para o Profmat, da OBMEP e OBM, do ENEM e Institutos Federais (IF), de concursos públicos e do PAEBES.

4.1 Aplicações em Conceitos Matemáticos

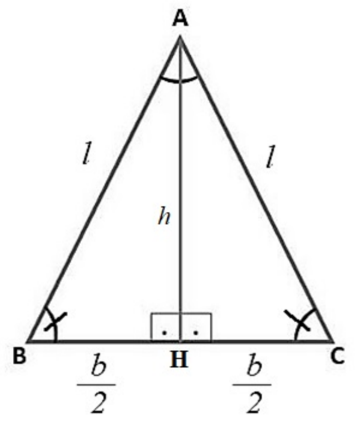
Nesta seção, serão apresentadas diversas aplicações do Teorema de Pitágoras na construção de conceitos matemáticos e em um problema relacionado às áreas das lúnulas de Hipócrates.

4.1.1 Aplicação em Geometria Plana

I) Altura de um triângulo isósceles:

Seja um triângulo isósceles ABC de lado l e AH a altura relativa ao vértice A de comprimento h. Iremos calcular a altura do triângulo isósceles em função das medidas l e b dos lados e base do triângulo respectivamente.

Figura 4.1: Altura do triângulo isósceles



Fonte: O próprio autor

Solução: O triângulo AHC é retângulo em H e, como $\overline{HC} = \frac{b}{2}$, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

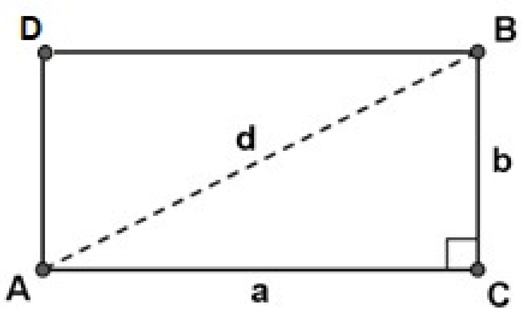
$$h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = l^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{b^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{4l^2-b^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{4l^2-b^2}}{2}.$$

Portanto, basta conhecer as medidas l e b dos lados do triângulo para calcular a medida h de sua altura.

II) Diagonal de um retângulo:

Seja um retângulo $ACBD$ de comprimento a, altura b e diagonal d. Iremos calcular a diagonal do triângulo retângulo em função dos lados a e b.

Figura 4.2: Diagonal de um retângulo



Fonte: O próprio autor

Solução: Como o triângulo ABC é retângulo, para obter a medida da diagonal d, aplicamos o Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

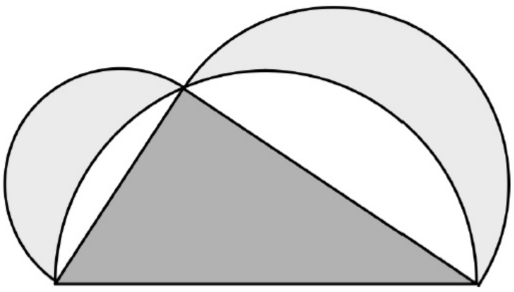
Portanto, basta conhecer as medidas dos lados do retângulo para obter o comprimento de sua diagonal. Esta aplicação se estende ao quadrado que por sua vez, sendo l a medida de seu lado, têm diagonal medindo $d = \sqrt{2 \cdot l^2} = l\sqrt{2}$.

III) O problema de Hipócrates:

Hipócrates de Quios (cerca de 470 – 410 a.C) foi um dos pitagóricos. Ele utilizou a generalização do Teorema de Pitágoras para provar o problema a seguir.

A Figura 4.3 mostra um triângulo retângulo e três semicircunferências tendo os lados como diâmetros. Devemos mostrar que a soma das áreas das duas "lúnulas" sombreadas é igual a área do triângulo.

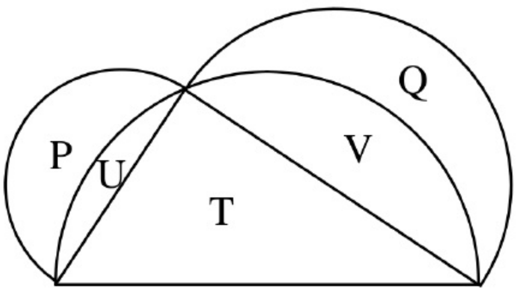
Figura 4.3: Problema de Hipócrates



Fonte: O próprio autor

Solução: Sejam T a área do triângulo retângulo, P e Q as áreas das lúnulas e U e V as áreas das demais regiões, conforme Figura 4.4.

Figura 4.4: Solução do Problema de Hipócrates



Fonte: O próprio autor

O semicírculo construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo, que não contém esse triângulo em seu interior, possui área igual a soma das áreas $U + T + V$ e, pela generalização do Teorema de Pitágoras para figuras semelhantes, temos:

$$U + T + V = P + U + V + Q \Rightarrow T = P + Q.$$

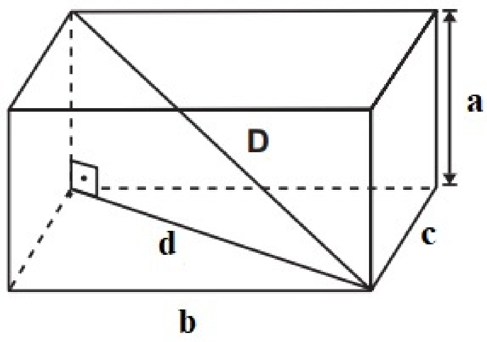
Portanto, a soma das áreas das lúnulas sombreadas é igual a área do triângulo.

4.1.2 Aplicação em Geometria Espacial

I) Diagonal de um Paralelepípedo:

Seja um paralelepípedo de dimensões a, b e c, diagonal da base d e diagonal do paralelepípedo D, conforme Figura 4.5. Calcularemos D em função de a, b e c.

Figura 4.5: Diagonal do Paralelepípedo



Fonte: O próprio autor

Solução: Conforme foi provado anteriormente, a diagonal de um retângulo de lados b e c é dada por $d = \sqrt{b^2 + c^2}$. Para obter a medida da diagonal D do paralelepípedo, devemos aplicar o Teorema de Pitágoras, logo:

$$D^2 = d^2 + a^2 \Rightarrow D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

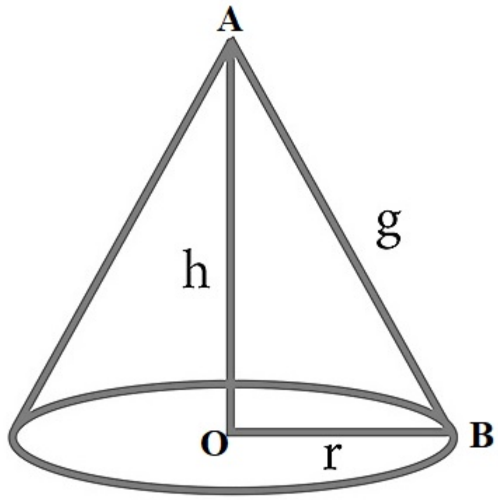
A diagonal do cubo é um caso particular do demonstrado acima.

II) Altura de um Cone Reto:

Um cone é reto quando a projeção ortogonal do seu vértice sobre a base coincide com o centro da base, ou seja, coincide com o centro da circunferência da base.

Seja um cone reto de raio da base r, altura h e geratriz g. Iremos calcular h em função de g e r.

Figura 4.6: Cone de altura h



Fonte: O próprio autor

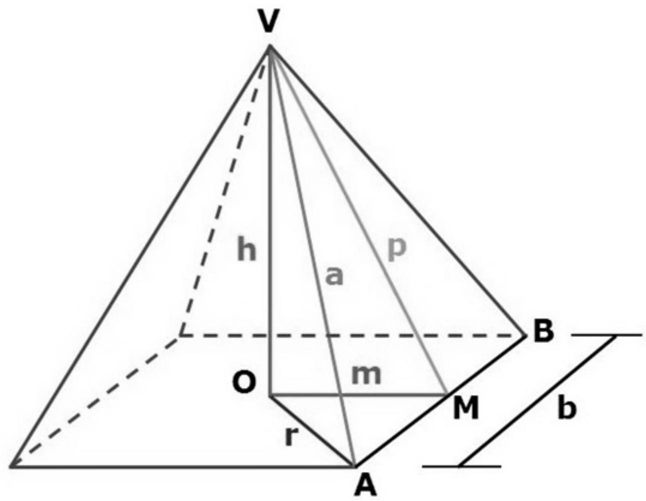
Solução: Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo, temos:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow h = \sqrt{g^2 - r^2}.$$

III) Relações entre as medidas de uma Pirâmide Regular:

Uma pirâmide é regular quando o polígono de sua base é regular e quando a projeção ortogonal de seu vértice sobre a base coincide com o centro da base.

Figura 4.7: Pirâmide regular



Fonte: O próprio autor

Seja uma pirâmide regular de base quadrada, onde:

- $AB = b$ é a aresta da base;
- $OV = h$ é a altura da pirâmide;
- $VA = a$ é a aresta da pirâmide;
- $VM = p$ é a apótema da pirâmide;
- $OM = m$ é a apótema da base;
- $OA = r$ é o raio da circunferência circunscrita à base da pirâmide.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, aos triângulos retângulos VOM, VMA, VOA e OMA, encontramos as seguintes relações entre os comprimentos dos elementos da pirâmide:

$$h^2 + m^2 = p^2,$$
$$p^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2,$$
$$h^2 + r^2 = a^2,$$
$$m^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = r^2.$$

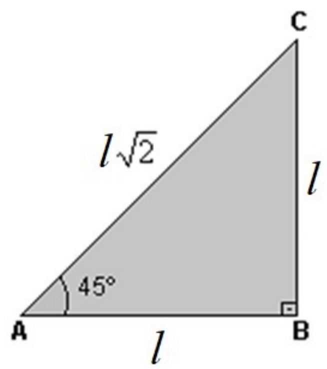
As relações obtidas acima são válidas para toda pirâmide regular independente do polígono regular de sua base.

4.1.3 Aplicação em Trigonometria

I) Seno, Cosseno e Tangente de Ângulos Notáveis:

Solução: No triângulo retângulo ABC de catetos medindo l, é possível obter os valores das razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) de $45\,°$.

Figura 4.8: Triângulo Retângulo de Catetos l e um ângulo interno de $45\,°$



Fonte: O próprio autor

Para isso, utiliza-se um resultado proveniente da aplicação do Teorema de Pitágoras onde obtém-se que a medida $\overline{AC} = l\sqrt{2}$. Portanto, temos:

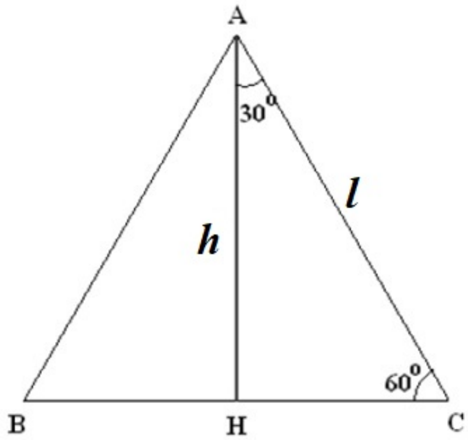
$sen45\,° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$cos45\,° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$tg45\,° = \frac{l}{l} = 1$.

De forma análoga, obtêm-se valores de seno, cosseno e tangente de $30\,°$ e $60\,°$, tomando-se, agora, um triângulo equilátero de lado l.

Figura 4.9: Triângulo equilátero de lado l e altura h



Fonte: O próprio autor

Pela definição de seno, cosseno e tangente, verifica-se a relação que diz que se a e b são dois ângulos complementares, ou seja, $a+b = 90\,°$, então $sen\,a = cos\,b$ e $sen\,b = cos\,a$. Sendo assim:

$$sen\,30\,° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} = cos\,60\,°.$$

Do mesmo modo e aplicando o Teorema de Pitágoras para obter h em função do l:

$$sen\,60\,° = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} = cos\,30\,°.$$

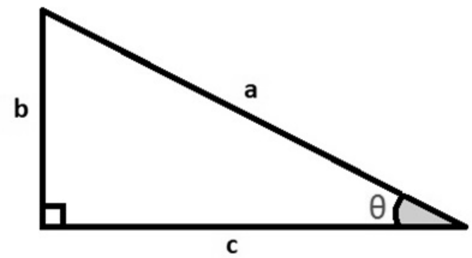
Ainda em relação aos ângulos complementares a e b, $tg\,a = \frac{1}{tg\,b}$. Logo:

$$tg\,30\,° = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow tg\,60\,° = \sqrt{3}.$$

II) Relação fundamental da trigonometria:

Solução: Considere o triângulo retângulo de hipotenusa medindo a e catetos medindo b e c. Seja θ um ângulo interno ao triângulo.

Figura 4.10: Triângulo retângulo com ângulo interno Θ



Fonte: O próprio autor

Como $sen\,\theta = \frac{b}{a}$ e $cos\,\theta = \frac{c}{a}$, temos:

$$(sen\,\theta)^2 + (cos\,\theta)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2+c^2}{a^2}.$$

Como, pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$:

$$(sen\,\theta)^2 + (cos\,\theta)^2 = 1.$$

A relação acima é muito importante para a trigonometria e é apenas uma entre outras relações trigonométricas que podem ser provadas mediante aplicação do Teorema de Pitágoras.

As aplicações acima, são alguns exemplos das várias aplicações do Teorema de Pitágoras em conceitos matemáticos. Desta forma, torna-se evidente a importância deste Teorema para a Matemática e sua utilidade não se restringe a resolução de problemas práticos, mas também serve de base para a formulação de novos conceitos, propriedades e teorias matemáticas.

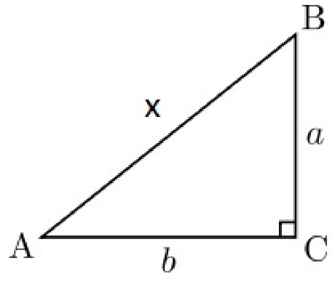
4.2 Aplicações em Construções Geométricas

A seguir são propostos problemas com construção geométrica de segmentos utilizando o Teorema de Pitágoras.

Construção I: Sejam a e b segmentos dados, construa o segmento $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Solução: Se devemos ter $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, então $x^2 = a^2 + b^2$. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, basta construir um triângulo retângulo de catetos medindo a e b que a hipotenusa terá o comprimento x desejado.

Figura 4.11: Construção Geométrica I

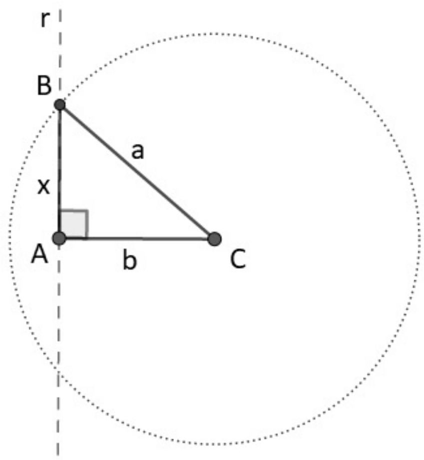


Fonte: O próprio autor

Construção II: Sejam a e b segmentos dados, construa o segmento $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Solução: Se devemos ter $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, suponha que $a > b$ para que o problema tenha solução. Temos, então $a^2 = x^2 + b^2$. Para isso, trace o segmento AC de comprimento b. Trace um círculo de centro C e raio a. Trace uma reta r perpendicular à AC sobre A e seja B um dos pontos de interseção do círculo com a reta r. Temos então um triângulo retângulo ABC de hipotenusa a e catetos b e x. Aplicando o Teorema de Pitágoras, $a^2 = x^2 + b^2 \Rightarrow x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Figura 4.12: Construção Geométrica II



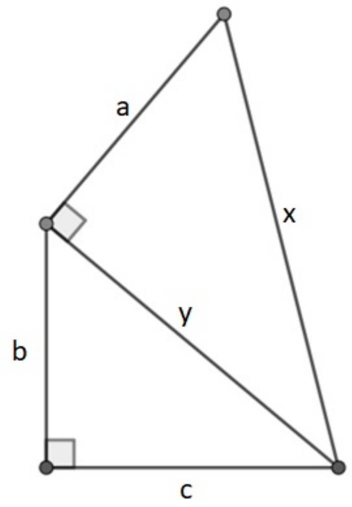
Fonte: O próprio autor

Construção III: Sejam a, b e c segmentos dados, construa o segmento $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Solução: Se devemos ter $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, então é válido $x^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Para realizar a construção desejada, devemos construir um triângulo retângulo de catetos b e c. A hipotenusa deste triângulo será $y = \sqrt{b^2 + c^2}$. Depois, construir sobre a hipotenusa de comprimento y, um novo triângulo retângulo de catetos y e a. A hipotenusa deste novo triângulo retângulo será o segmento x solicitado, pois:

$$x^2 = a^2 + y^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Figura 4.13: Construção Geométrica III



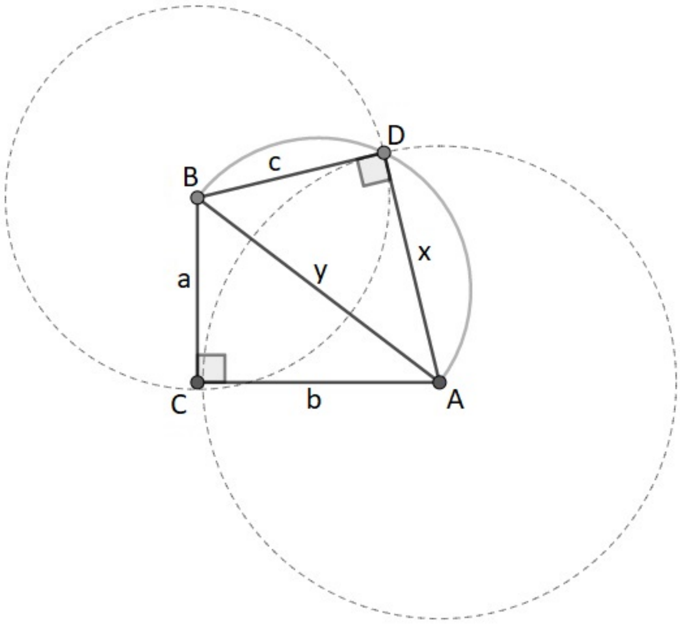
Fonte: O próprio autor

Construção IV: Sejam a, b e c segmentos dados, construa o segmento $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.

Solução: Suponha que $c < \sqrt{a^2 + b^2}$ para que o problema tenha solução. Para realizar a construção desejada, devemos construir um triângulo retângulo ABC de catetos $BC = a$ e $AC = b$. A hipotenusa deste triângulo será $AB = y = \sqrt{a^2 + b^2}$. Depois, traçar um semicírculo de diâmetro AB. Traçar um círculo de centro em B e raio c. Seja D a interseção deste círculo com o semicírculo traçado anteriormente. Temos que a medida $AD = x$ é o segmento desejado, pois:

$$y^2 = x^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = x^2 + c^2 \Rightarrow x^2 = a^2 + b^2 - c^2 \Rightarrow x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}.$$

Figura 4.14: Construção Geométrica IV



Fonte: O próprio autor

4.3 Aplicações na Resolução de Problemas

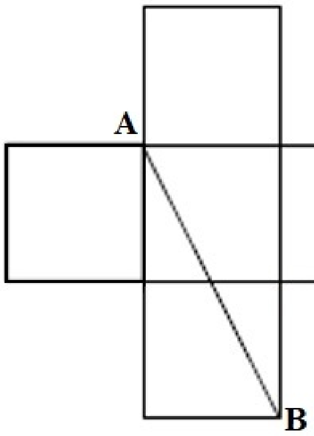
O Teorema de Pitágoras é um conceito importante da geometria e uma ferramenta para a resolução de problemas. Sua aplicação está presente na formação acadêmica dos alunos e em importantes provas realizadas por eles: ENEM, PAEBES, OBMEP e OBM. Além de ser cobrado em concursos públicos e exames de acesso a institutos federais, o Teorema de Pitágoras é um dos itens exigidos no Exame Nacional de Acesso do programa de mestrado profissional em matemática PROFMAT. Pensando nisso, propomos uma sequência de exercícios contextualizados contemporâneos para evidenciar a presença e a relevância do Teorema de Pitágoras.

4.3.1 Problemas Diversos

Nesta seção, serão apresentados e resolvidos problemas diversos de aplicação do Teorema de Pitágoras.

Problema 1: O jardim de Maria é formado por cinco quadrados de igual área e tem a forma da figura abaixo. Se $\overline{AB} = 10$ m, qual será a área do jardim, em metros quadrados?

Figura 4.15: Jardim



Fonte: O próprio autor

Solução: Como a área de um quadrado de lado l é $A = l^2$ e os cinco quadrados possuem mesma área, então os quadrados que compõem o jardim são congruentes.

Seja l o comprimento do lado de cada um dos cinco quadrados. Considere o triângulo retângulo de hipotenusa AB e catetos medindo l e $2l$. Pelo Teorema de Pitágoras

$$(\overline{AB})^2 = l^2 + (2l)^2 \Rightarrow 5l^2 = 100 \Rightarrow l^2 = 20.$$

Como a área de cada quadrado é $A = l^2$ e o jardim é composto por 5 quadrados

$$A_t = 5 \cdot l^2 = 5 \cdot 20 = 100\ m^2.$$

Portanto, a área do jardim é 100 m^2.

Problema 2: Se a, b e c são inteiros positivos com $b < c < a$, dizemos que (b, c, a) é um terno pitagórico se $a^2 = b^2+c^2$. Sabendo que $b = 2k+1$, $c = 2k^2+2k$ e $a = 2k^2+2k+1$, onde k é um inteiro positivo, mostre que (b, c, a) é um terno pitagórico.

Solução:

$$a^2 = \left(2k^2 + 2k + 1\right)^2 = 4k^4 + 8k^3 + 4k^2 + 4k^2 + 4k + 1$$
$$a^2 = \left(2k^2 + 2k\right)^2 + \left(2k + 1\right)^2 = c^2 + b^2.$$

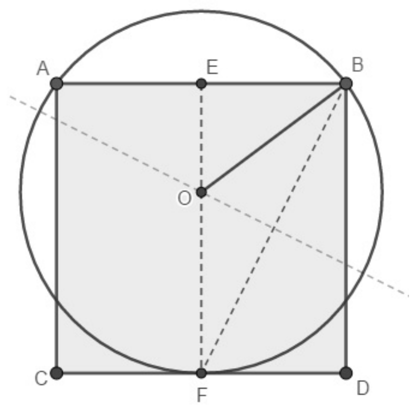
Logo, $a^2 = b^2 + c^2$ e (b, c, a) é um terno pitagórico.

Problema 3: É dado um quadrado $ABCD$ de lado a. Determine o raio da circunferência que contém os vértices A e B e é tangente ao lado CD.

Solução: Inicialmente, vamos realizar a construção pedida. Para isso, seja *mediatriz* de um segmento o lugar geométrico dos pontos equidistantes aos extremos do segmento.

Dado o quadrado $ABCD$ de lado com comprimento a, sejam E e F os pontos médios dos lados AB e CD respectivamente. Trace os segmentos EF e BF. Como a circunferência deve passar por A e B e ser tangente ao lado CD, o centro O da circunferência deve ser equidistante dos pontos A, B e F. Logo, deve pertencer ao segmento EF (mediatriz do segmento AB) e também à mediatriz do segmento BF. Trace a mediatriz do segmento BF e seja O a sua interseção com o segmento EF. E, por fim, trace a circunferência de centro O e raio OA.

Figura 4.16: Circunferência que passa por A e B e é tangente ao lado CD



Fonte: O próprio autor

Analisando a construção, no triângulo retângulo OEB, sendo r o raio da circunferência, $\overline{OB} = r$, $\overline{OE} = a - r$ e $\overline{EB} = \frac{a}{2}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo:

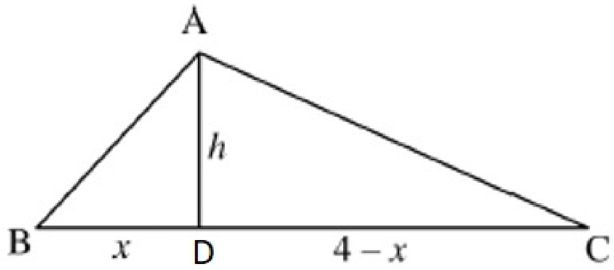
$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a - r)^2,$$

encontrando $r = \frac{5a}{8}$.

Problema 4: O triângulo ABC tem lados $\overline{AB} = \sqrt{12}$, $\overline{BC} = 4$ e $\overline{CA} = \sqrt{20}$. Calcule a área de ABC.

Solução: Considere o triângulo ABC na figura abaixo, onde o segmento AD de comprimento h é a altura relativa ao lado BC.

Figura 4.17: Triângulo ABC



Fonte: O próprio autor

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos ABD e ADC:

$$x^2 + h^2 = 12 \text{ e } (4-x)^2 + h^2 = 20.$$

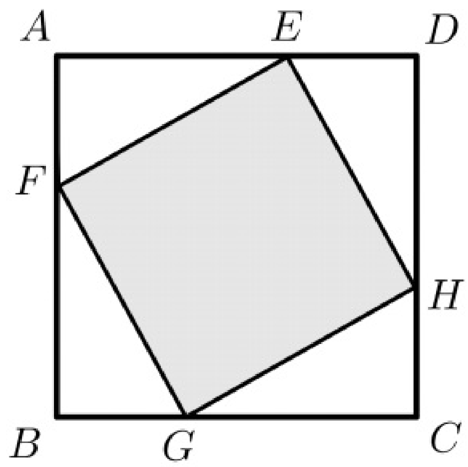
Logo, substituindo a primeira equação na segunda, $16 - 8x + x^2 + 12 - x^2 = 20$, o que resulta em $x = 1$. Assim, a altura do triângulo $h = \sqrt{11}$ e a área do triângulo será $S = \frac{4\sqrt{11}}{2}$.

4.3.2 Exame Nacional de Acesso - Profmat

Abaixo serão apresentados problemas presentes no *Exame Nacional de Acesso* ao Profmat que são resolvidos mediante a aplicação do Teorema de Pitágoras.

Problema 1: (ENA 2017) Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado de lado 1 e $\overline{AF} = \overline{BG} = \overline{CH} = \overline{DE} = x$. Qual o valor de x para que o quadrado $EFGH$ tenha a menor área possível?

Figura 4.18: Quadrado - ENA 2017



Fonte: PROFMAT (2017)

Solução: Seja l o comprimento do lado do quadrado $EFGH$. Como $\overline{AF} = \overline{BG} = x$ e $\overline{AB} = 1$, então $\overline{FB} = 1 - x$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo BFG, temos que $l^2 = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$. Temos que l será mínimo quando o valor da função $2x^2 - 2x + 1$ for mínimo, ou seja, quando for $\frac{1}{2}$. O mínimo ocorre quando $x = \frac{1}{2}$. Portanto, o menor valor para l^2 ocorre quando $x = \frac{1}{2}$.

Problema 2: (ENA 2019) Denomina-se terno pitagórico um trio (a, b, c) de números inteiros positivos tais que satisfazem a expressão $a^2 + b^2 = c^2$. Se $(x+2, 2x, 5\sqrt{x})$ é um terno pitagórico, então qual será o valor de x?

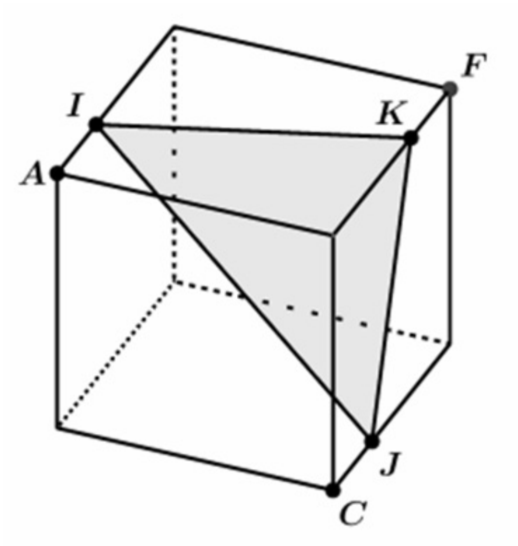
Solução: Como $(x + 2, 2x, 5\sqrt{x})$ é um terno pitagórico, aplicando o Teorema de Pitágoras temos:

$$\begin{gathered}(x+2)^2 + (2x)^2 = (5\sqrt{x})^2 \\ x^2 + 4x + 4 + 4x^2 = 25x \\ 5x^2 - 21x + 4 = 0.\end{gathered}$$

De onde resulta $x = 4$ ou $x = \frac{1}{5}$. Como $x = \frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$, $x = 4$ e o terno pitagórico $(x + 2, 2x, 5\sqrt{x}) = (6, 8, 10)$.

Problema 3: (ENA 2018) O cubo da figura abaixo tem aresta de medida 3. Se $\overline{AI} = \overline{CJ} = \overline{FK} = 1$, qual será o perímetro do triangulo IJK?

Figura 4.19: Cubo 1 - ENA 2018



Fonte: PROFMAT (2018)

Solução: Como $\overline{AI} = \overline{FK} = 1$, marque o ponto L tal que $\overline{KL} = 1$. Trace os segmentos IL e LJ, ambos de comprimento 3, conforme Figura 4.20.

Os triângulos LIK e LJK são congruentes. Além disso, os triângulos LIK e LIJ são retângulos. Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos, temos:

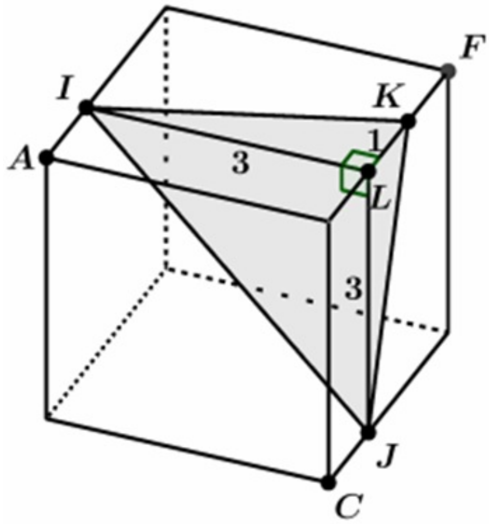
$$\overline{IK}^2 = \overline{IL}^2 + \overline{LK}^2 = 3^2 + 1^2 = 10,$$
$$\overline{IJ}^2 = \overline{IL}^2 + \overline{LJ}^2 = 3^2 + 3^2 = 18.$$

Logo,

$$\overline{IK} = \overline{JK} = \sqrt{10} \text{ e } \overline{IJ} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Portanto, o perímetro do triângulo $\overline{IK} + \overline{JK} + \overline{IJ} = \sqrt{10} + \sqrt{10} + 3\sqrt{2} = 2\sqrt{10} + 3\sqrt{2}$.

Figura 4.20: Cubo 2 - ENA 2018



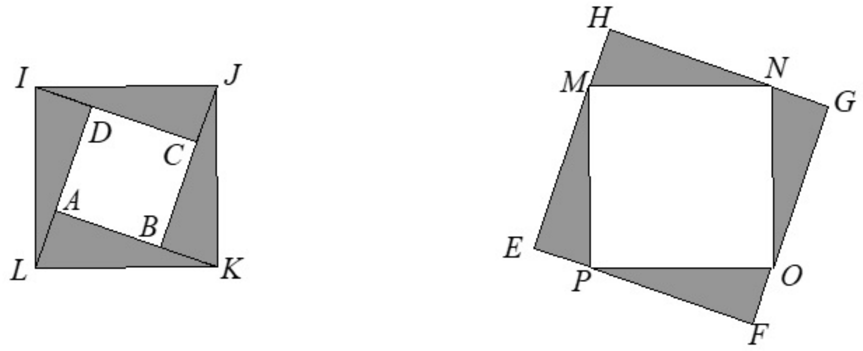
Fonte: PROFMAT (2018)

4.3.3 Problemas de Olimpíadas Brasileiras de Matemática

Abaixo, serão apresentados problemas envolvendo o Teorema de Pitágoras presentes nas provas de olimpíadas brasileiras de matemática, OBMEP e OBM.

Problema 1: (OBMEP 2016) Quatro peças iguais, em forma de triângulo retângulo, foram dispostas de dois modos diferentes, como mostram as figuras abaixo.

Figura 4.21: Quadrados 1 - OBMEP 2016

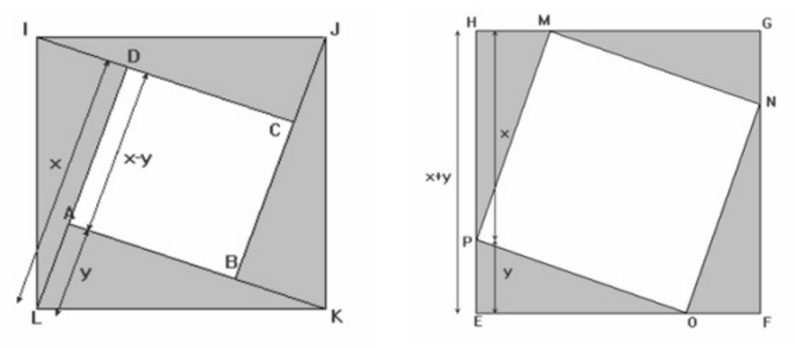


Fonte: OBMEP (2016)

Os quadrados $ABCD$ e $EFGH$ têm lados respectivamente iguais a 3 cm e 9 cm. Determine a medida do lado do quadrado $IJKL$.

Solução: Sejam x e y o maior e o menor catetos do triângulo retângulo respectivamente. Como o lado do quadrado $ABCD$ mede 3 cm, temos que $x - y = 3$. Do mesmo modo, como o lado do quadrado $EFGH$ mede 9 cm , temos $x + y = 9$.

Figura 4.22: Quadrados 2 - OBMEP

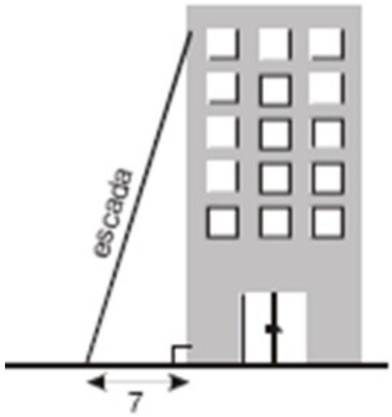


Fonte: OBMEP (2016)

Resolvendo o sistema, encontramos $x = 6$ e $y = 3$. Assim, o lado do quadrado $IJKL$, que é a hipotenusa do triângulo retângulo, mede, pelo Teorema de Pitágoras, $\sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Problema 2: (OBMEP 2005) O topo de uma escada de 25 m de comprimento está encostado na parede vertical de um edifício. O pé da escada está a 7 m de distância da base do edifício, como na figura. Se o topo da escada escorregar 4 m para baixo ao longo da parede, qual será o deslocamento do pé da escada?

Figura 4.23: Escada encostada no prédio - OBMEP



Fonte: OBMEP (2005)

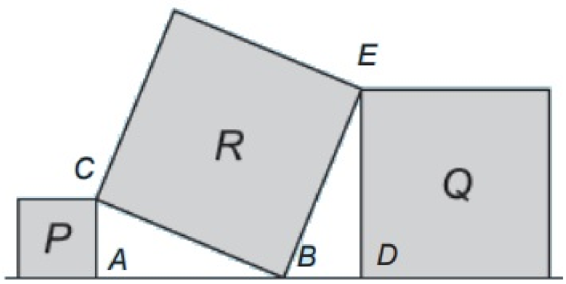
Solução: Como a escada possui 25 m de comprimento, vamos aplicar o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo e obtemos $25^2 = 7^2 + x^2$, então $x = 24\ m$.

O topo da escada, escorregando 4 m para baixo, passará a estar a uma altura de 20 m do chão, logo, aplicando o Teorema de Pitágoras ao novo triângulo retângulo, temos $25^2 = 20^2 + z^2$, obtendo $z = 15\ m$.

Portanto, o deslocamento do pé da escada foi de $15 - 7 = 8\ m$.

Problema 3: (OBMEP 2016) Na figura , as áreas dos quadrados P e R são iguais a 24 cm^2 e 168 cm^2, respectivamente. Qual é a área do quadrado Q?

Figura 4.24: Quadrados 3 - OBMEP



Fonte: OBMEP (2016)

Solução: Perceba que pelo caso de congruência ALA, os triângulos ABC e DEB são congruentes. Como a área do quadrado P é igual a 24 cm^2, então $\overline{AC} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ e como a área do quadrado R é igual a 168 cm^2, então $\overline{BC} = \sqrt{168} = 2\sqrt{42}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABC, temos $\overline{AB}^2 = 168 - 24 = 144$, logo $\overline{AB} = 12$.

Como $\overline{AB} = \overline{ED}$, a área do quadrado D será $\overline{ED}^2 = 144$.

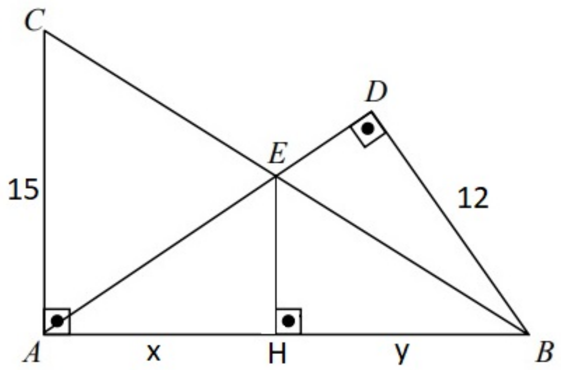
Segunda Solução: Note que os triângulos ABC e DEB são congruentes, pelo caso ALA. Então $\overline{AB} = \overline{DE}$ e daí, pelo Teorema de Pitágoras,

$$S_R = S_P + S_Q$$

Portanto, $S_Q = S_R - S_P = 168 - 24 = 144\ cm^2$.

Problema 4: (OBM 2011) Na figura seguinte, os triângulos ABC e ABD são retângulos em A e D, respectivamente. Sabendo que $\overline{AC} = 15\ cm$, $\overline{AD} = 16\ cm$ e $\overline{BD} = 12\ cm$, determine em cm^2, a área do triângulo ABE.

Figura 4.25: Triângulos 1 - OBM



Fonte: OBM (2011)

Solução: Iniciamos aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABD, logo $\overline{AB}^2 = 12^2 + 16^2$, logo $\overline{AB} = 20\ cm$.

Como os triângulos ABD e AEH são semelhantes e tomando $h = \overline{EH}$, então

$$\frac{h}{12} = \frac{x}{16} \Rightarrow x = \frac{4h}{3}$$

e como os triângulos EHB e CAB são semelhantes, então $\frac{h}{15} = \frac{y}{20} \Rightarrow y = \frac{4h}{3}$.

Temos $x + y = 20$, logo, podemos escrever $\frac{4h}{3} + \frac{4h}{3} = 20 \Rightarrow h = 7,5\ cm$.

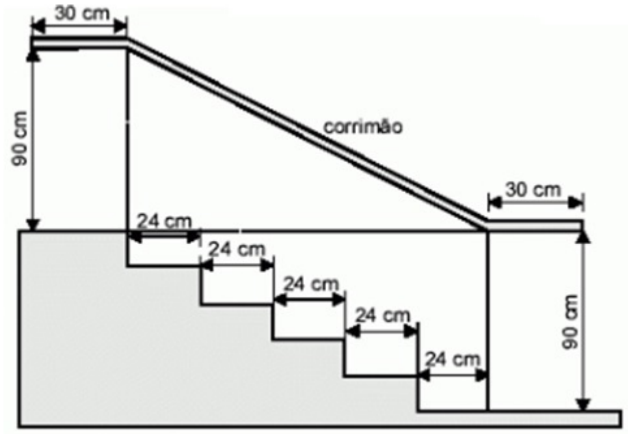
Portanto, a área do triângulo ABE será dada por $S(ABE) = \frac{20 \cdot 7,5}{2} = 75\ cm^2$.

4.3.4 Problemas do ENEM e Institutos Federais

Nesta seção serão apresentados problemas diversos envolvendo o Teorema de Pitágoras presentes nas provas do ENEM e exames de acesso de Institutos Federais.

Problema 1: (ENEM 2006) Na figura abaixo, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, qual é o comprimento total do corrimão?

Figura 4.26: Escada com 5 degraus



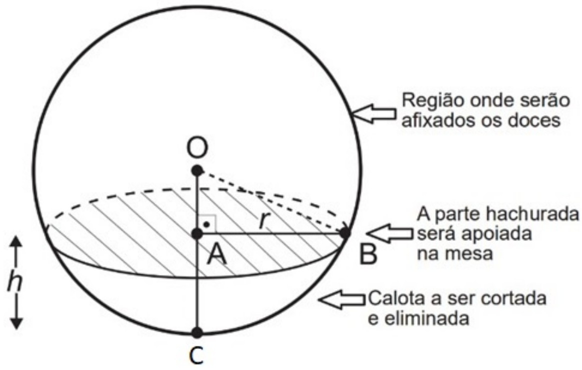
Fonte: ENEM (2006)

Solução: Analisando o triângulo retângulo que possui o corrimão de medida x como hipotenusa, um dos catetos mede 90 cm e o outro cateto é igual à soma das medidas dos pisos dos 5 degraus $5 \cdot 24 = 120$ cm.

Aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo, $x^2 = 90^2 + 120^2$, logo $x = 150$ cm. Como existem mais duas partes horizontais de 30 cm, o comprimento total será igual a $150 + 30 + 30 = 210$ cm.

Problema 2: (ENEM 2017) Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10 cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio r da seção circular de corte seja de pelo menos 3 cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão fixados os doces.

Figura 4.27: Melão Esférico



Fonte: ENEM (2017)

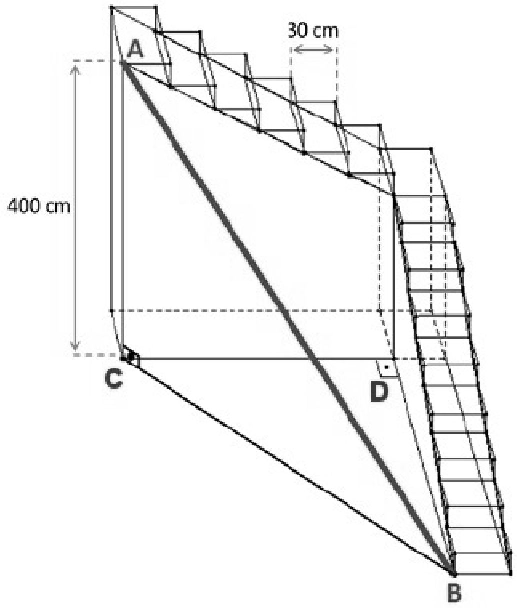
Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão em qual altura h, em centímetros?

Solução: Na figura, seja $h = \overline{AC}$. Como deseja-se recortar a calota de forma a obter a maior área possível para disposição dos doces, então o raio r da seção circular deve ser $r = 3\ cm$. Como o diâmetro do melão mede 10 cm, seu raio será $R = 5\ cm$, portanto $\overline{OB} = 5\ cm$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo AOB, temos que $5^2 = 3^2 + (\overline{OA})^2$, o que resulta em $\overline{OA} = 4\ cm$.

Portanto, $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = 5 - 4 = 1\ cm$.

Problema 3: (IFSC 2015) Para acessar o topo de uma plataforma de saltos a $400cm$ de altura, um atleta deve subir uma escadaria que possui 8 degraus no primeiro lance e 6 degraus no segundo lance de escada, conforme mostra a figura ao lado. Sabendo que cada degrau possui 30 cm de profundidade, qual é o comprimento, em cm, da haste metálica AB utilizada para dar sustentação à plataforma é?

Figura 4.28: Escada para Plataforma de Saltos



Fonte: IFSC (2015)

Solução: Para calcular o comprimento da barra AB, é necessário descobrir primeiro o comprimento da barra BC.

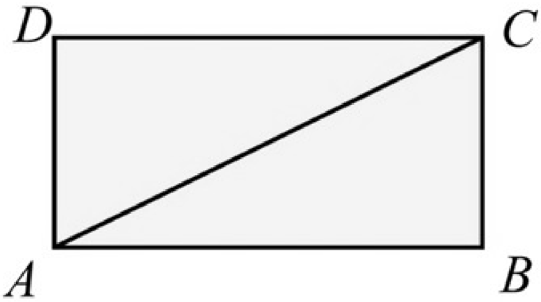
Para descobrir o comprimento da barra BC, utilizaremos o Teorema de Pitágoras no triângulo BCD. Note que os catetos BD e CD medem, respectivamente, $8 \cdot 30$ e $6 \cdot 30$, isto é, 240 cm e 180 cm. Logo

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= 240^2 + 180^2 \\ \overline{BC}^2 &= 57600 + 32400 \\ \overline{BC}^2 &= 90000 \\ \overline{BC} &= 300. \end{aligned}$$

Considerando o triângulo ABC, cujos catetos, agora conhecidos, medem 400 cm e 300 cm, poderemos utilizar o Teorema de Pitágoras para calcular o comprimento da haste AB. Logo, $\overline{AB}^2 = 300^2 + 400^2$, o que resulta em $\overline{AB} = 500$ cm.

Problema 4: (IFRJ 2013) O pátio de esportes do Campus Arrozal de um Instituto Federal é retangular, com 100 m de comprimento e 50 m de largura, representado pelo retângulo $ABCD$ desta figura.

Figura 4.29: Pátio de Esportes



Fonte: IFRJ (2013)

Alberto e Bruno são dois alunos, que estão praticando esportes no pátio. Alberto caminha do ponto A ao ponto C pela diagonal do retângulo e volta ao ponto de partida pelo mesmo caminho. Bruno parte do ponto B, dá uma volta completa no pátio, andando pelas linhas laterais, e volta ao ponto de partida. Assim, considerando $\sqrt{5} = 2,24$, qual distância Bruno andou a mais que Alberto?

Solução: Como $\overline{AB} = 100$ e $\overline{BC} = 50$, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABC, $\overline{AC}^2 = 100^2 + 50^2$, de onde conclui-se que $\overline{AC} = 50\sqrt{5} = 112\ m$.

Alberto percorreu $2 \cdot 112 = 224m$, enquanto Bruno andou $2 \cdot 100 + 2 \cdot 50 = 300\ m$. Logo, Bruno andou $76\ m$ a mais que Alberto.

4.3.5 Problemas de Concursos Públicos

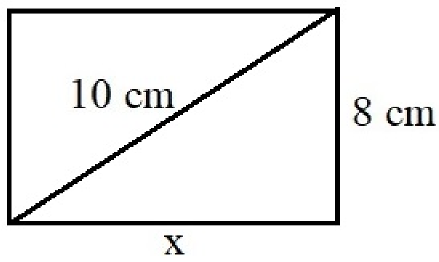
Nesta seção serão apresentados problemas envolvendo o Teorema de Pitágoras presentes em concursos públicos.

Problema 1: (PM-ES 2013). A diagonal de um retângulo mede 10 cm, e um de seus lados mede 8 cm. A superfície desse retângulo mede:

a) 40 cm^2
b) 48 cm^2
c) 60 cm^2
d) 70 cm^2
e) 80 cm^2

Solução: Seja um retângulo de diagonal medindo 10 cm e um dos lados medindo 8 cm.

Figura 4.30: Retângulo



Fonte: O próprio autor

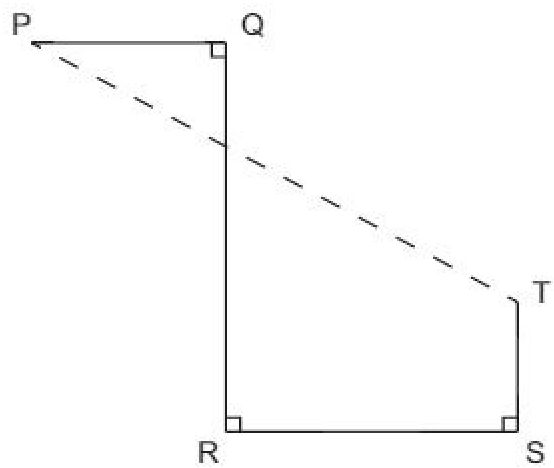
Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$10^2 = 8^2 + x^2 \Rightarrow x = 6\ cm.$$

Logo, a superfície do retângulo medirá $6 \cdot 8 = 48\ cm^2$.

Problema 2: (IBGE 2016 – Cesgranrio) Na figura a seguir, PQ mede 6 cm, QR mede 12 cm, RS mede 9 cm, e ST mede 4 cm.

Figura 4.31: Figura Cesgranrio



Fonte: Cesgranrio (2016)

A distância entre os pontos P e T, em cm, mede:

a) 17

b) 21

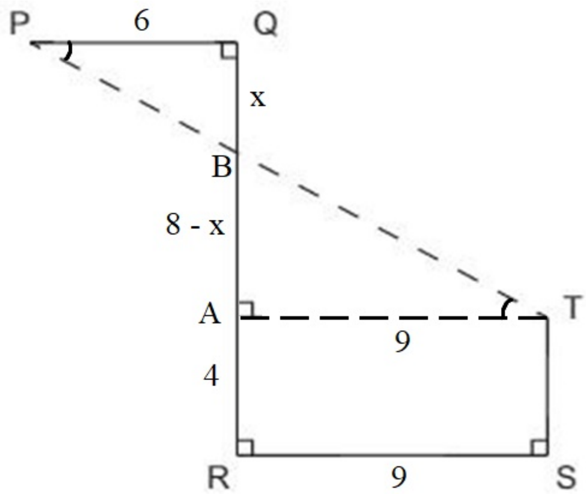
c) 18

d) 20

e) 19

Solução: Na figura apresentada, trace um segmento paralelo à RS passando por T. Seja A o ponto de interseção deste segmento com QR. Seja ainda, B o ponto de interseção dos segmentos PT e QR. Chamando de x o comprimento de QB, obtemos a seguinte figura.

Figura 4.32: Figura Cesgranrio alterada



Fonte: O próprio autor

Os triângulo PQB e TAB são semelhantes pelo caso AA, logo

$$\frac{x}{6} = \frac{8-x}{9} \Rightarrow 9x = 48 - 6x \Rightarrow x = \frac{16}{5}.$$

Portanto, $8 - x = 8 - \frac{16}{5} = \frac{24}{5}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos PQB e TAB

$$\overline{PB}^2 = x^2 + 6^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + 6^2 \Rightarrow \overline{PB}^2 = \frac{1156}{25} \Rightarrow \overline{PB} = \frac{34}{5} = 6,8.$$

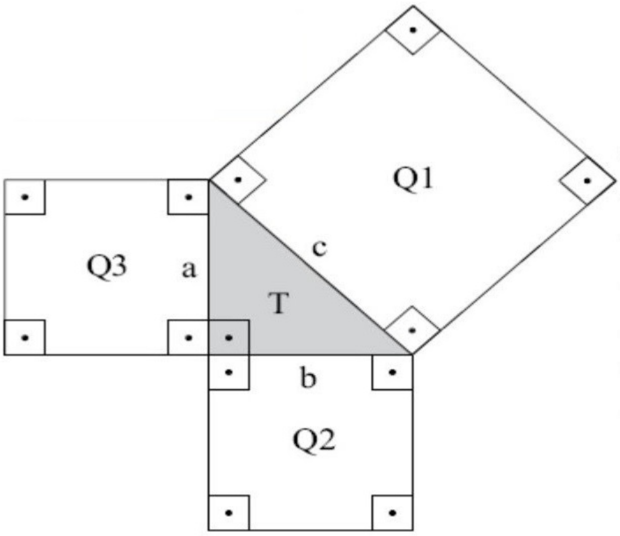
E

$$\overline{BT}^2 = (8-x)^2 + 9^2 = \left(\frac{24}{5}\right)^2 + 9^2 \Rightarrow \overline{BT}^2 = \frac{2601}{25} \Rightarrow \overline{BT} = \frac{51}{5} = 10,2.$$

Logo, $\overline{PT} = \overline{PB} + \overline{BT} = 6,8 + 10,2 = 17$.

Problema 3: (Prefeitura Ribeirão Preto 2013) Em um jardim, 3 canteiros quadrados Q_1, Q_2 e Q_3, de lados c, b e a, respectivamente, foram construídos em torno de uma região gramada T, de formato triangular, conforme mostra a figura.

Figura 4.33: Canteiros quadrados



Fonte: Vunesp (2013)

Sabe-se que a soma das áreas dos três canteiros quadrados é igual a 200 m^2. Desse modo, é correto afirmar que a medida indicada por c na figura é, em metros, igual a

(a)6

(b)8

(c)10

(d)12

(e)14

Solução: No triângulo retângulo de área T, aplicamos o Teorema de Pitágoras

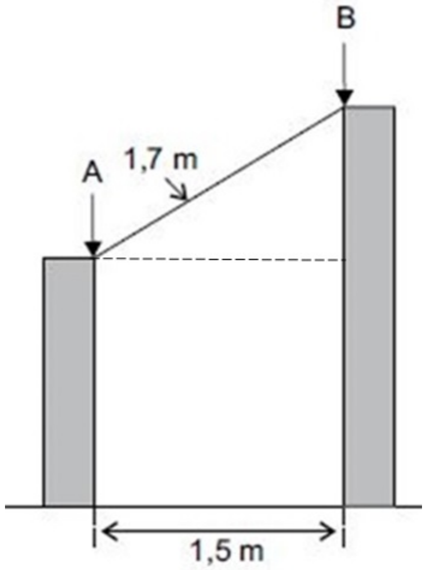
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Por outro lado, a soma das áreas Q_1, Q_2 e Q_3 é 200 m^2, onde $Q_1 = c^2$, $Q_2 = b^2$ e $Q_3 = a^2$. Logo

$$a^2 + b^2 + c^2 = 200 \Rightarrow 200 - c^2 = a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 2c^2 = 200$$
$$\Rightarrow c = 10 \text{ m}.$$

Problema 4: (PM SP 2014 – Vunesp). Duas estacas de madeira, perpendiculares ao solo e de alturas diferentes, estão distantes uma da outra, 1, 5 m. Será colocada entre, elas uma outra estaca de 1, 7 m de comprimento, que ficará apoiada nos pontos A e B, conforme mostra a figura.

Figura 4.34: Estacas de madeira



Fonte: Vunesp (2014)

A diferença entre a altura da maior estaca e a altura da menor estaca, nessa ordem, em cm, é:

a) 95.

b) 75.

c) 85.

d) 80.

e) 90

Solução: Sendo x e y as alturas da menor e da maior estaca respectivamente, temos um triângulo retângulo de hipotenusa medindo $1,7$ e catetos medindo $1,5$ e $y-x$. Aplicando o Teorema de Pitágoras:

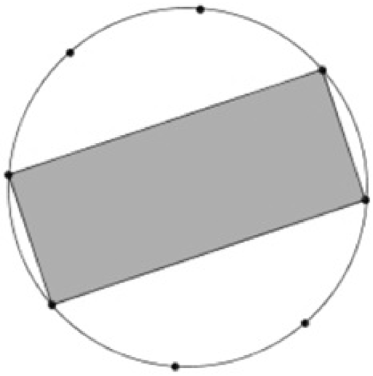
$$(1,7)^2 = (y-x)^2 + (1,5)^2 \Rightarrow (y-x)^2 = 2,89 - 2,25 \Rightarrow y - x = 0,8\ m = 80\ cm.$$

4.3.6 Problemas do PAEBES

O PAEBES é o programa de avaliação da educação básica do Espírito Santo. Trata-se de uma avaliação aplicada em todas as escolas da rede estadual de ensino do Espírito Santo onde uma das disciplinas contempladas é a matemática. Nesta seção serão apresentados problemas envolvendo o Teorema de Pitágoras presentes nas avaliações do PAEBES.

Problema 1: (PAEBES 2015) Um retângulo de dimensões 12 cm e 5 cm está inscrito em uma circunferência, conforme indicado na figura abaixo.

Figura 4.35: Retângulo inscrito na circunferência



Fonte: PAEBES (2015)

A medida do raio dessa circunferência, em centímetros, é:

a) 3,5

b) 6

c) 6,5

d) 7

e) 8,5

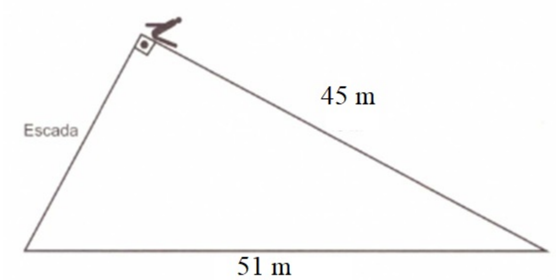
Solução: Como o retângulo está inscrito na circunferência, sua diagonal será diâmetro da circunferência. Logo, aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos

$$x^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow x^2 = 169 \Rightarrow x = 13\ cm.$$

Portanto, o raio da circunferência será $6,5\ cm$.

Problema 2: (PAEBES – 2016) Sofia trabalha na criação de projetos de brinquedos para um parque de diversão. Foi pedido a Sofia o projeto de um tobogã com 45 metros de descida. Para esse projeto será necessária uma escada, como mostrado no esquema abaixo.

Figura 4.36: Tobogã



Fonte: PAEBES (2016)

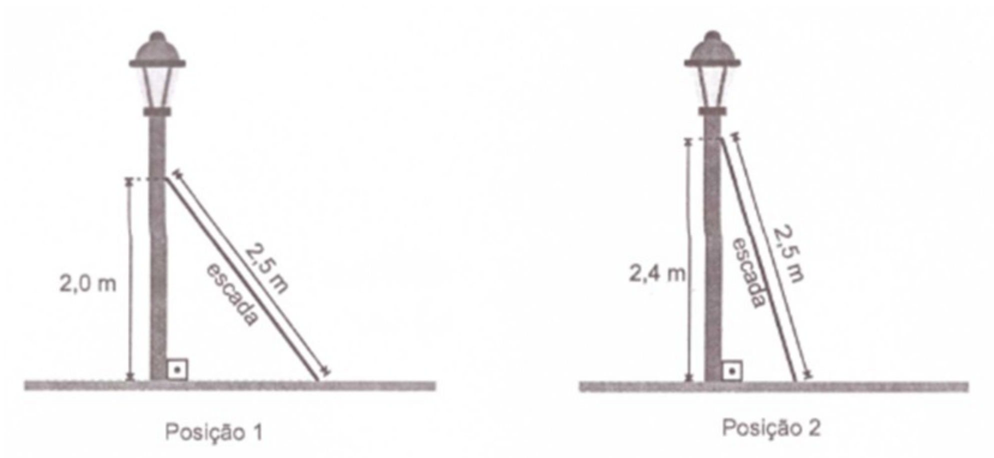
A medida, em metros, dessa escada será de:
a) 6
b) 24
c) 36
d) 48
e) 68

Solução: Seja x o comprimento da escada. Aplicando o Teorema de Pitágoras

$$x^2 + 45^2 = 51^2 \Rightarrow x^2 = 576 \Rightarrow x = 24\ m.$$

Problema 3: (PAEBES – 2017) Jonas foi contratado para trocar a lâmpada de um poste em um jardim. Ao chegar ao local, encontrou uma escada com $2,5$ m de comprimento apoiada no poste, conforme a posição 1 ilustrada na figura abaixo.

Figura 4.37: Postes



Fonte: PAEBES (2017)

Como não alcançou a altura necessária para trocar a lâmpada, Jonas precisou empurrar a escada, sem erguê-la do solo e mantendo a extremidade superior encostada no poste, até que atingisse $2,4$ m de altura, conforme ilustra a posição 2 na figura. Nesse processo de deslocamento da posição 1 para a 2, quantos metros o pé da escada foi transposto?
a) 0,21
b) 0,40
c) 0,70
d) 0,80
e) 1,50

Solução: Calculando a distância do pé da escada à base do poste na Posição 1

$$2,5^2 = 2^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 2,25 \Rightarrow x = 1,5\ m.$$

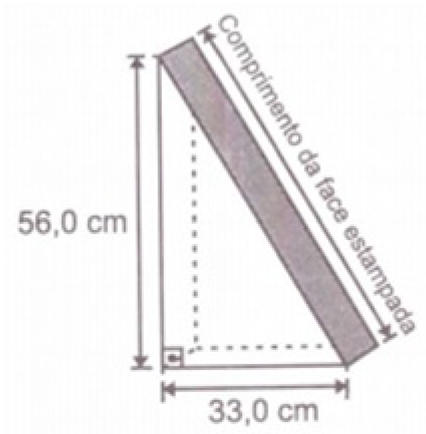
Calculando a distância do pé da escada à base do poste na Posição 2

$$2,5^2 = 2,4^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 0,49 \Rightarrow y = 0,7\ m.$$

Logo, o pé da escada foi transposto $0,80\ m$.

Problema 4: (PAEBES – 2018) Joana comprou um encosto de espuma que tem o formato de um prisma triangular reto. Ela vai confeccionar uma capa para esse encosto de forma que, em uma das faces, o tecido seja estampado e, nas demais, liso. O desenho abaixo representa o encosto comprado por Joana e algumas de suas medidas. A face do encosto que será revestida de tecido estampado está destacada de cinza.

Figura 4.38: Encosto de espuma



Fonte: PAEBES (2018)

Joana precisa saber qual é a medida do comprimento da face desse encosto para comprar o tecido estampado que a revestirá. Qual é a medida do comprimento da face que receberá o tecido estampado?

a) 44,5 cm

b) 45,2 cm

c) 65,0 cm

d) 89,0 cm

e) 95,0 cm

Solução: Seja x o comprimento da face estampada. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo

$$x^2 = 56^2 + 33^2 \Rightarrow x^2 = 4225 \Rightarrow x = 65\ cm.$$

Capítulo 5

Considerações finais

Ao longo desta pesquisa, procurou-se aprofundar os estudos sobre o Teorema de Pitágoras e foi possível perceber que este Teorema possui uma beleza singular que nos encanta. É, possivelmente, o teorema com mais demonstrações da história da matemática e que continua a despertar interesse pela busca de novas demonstrações, e, ainda assim, é de fácil compreensão e acessível aos alunos de ensino fundamental. Além disso, as muitas aplicações deste Teorema na construção de outros conceitos matemáticos e na resolução de problemas diversos, o coloca em posição de destaque nesta ciência.

A história de Pitágoras, cheia de mistérios, relaciona-se com a origem da matemática e sua contribuição para esta ciência é surpreendente. Percebe-se como a compreensão da história da matemática nos ajuda a entender os conceitos e suas contribuições ao longo do tempo de sua existência desde a descoberta.

O estudo das extensões e generalizações do Teorema de Pitágoras, geralmente não abordado na escola básica, oferece interessantes aplicações, onde pode-se demonstrar, pela aplicação da generalização para figuras semelhantes, que a relação entre as áreas de figuras construídas sobre os lados de um triângulo retângulo se mantém mesmo variando as figuras construídas, podendo ser retilíneas, curvilíneas ou mistas.

Apresentamos ainda, nesta pesquisa, o Teorema de Pitágoras como uma importante ferramenta para a resolução de problemas diversos. Nos preocupamos em selecionar problemas interessantes, que estimulam o raciocínio e a criatividade do aluno, mas que estão compatíveis com alunos do nono ano do ensino fundamental e alunos de ensino médio. Buscou-se, durante toda a pesquisa, despertar o interesse dos alunos para o aprofundamento de seus estudos da matemática. Mesmo abordando a matemática com rigor, trabalhou-se com uma linguagem compatível com alunos da escola básica.

Como o objetivo da pesquisa era estudar o Teorema de Pitágoras, foram apresentados conceitos importantes de geometria como congruência, semelhança e área de figuras planas, apenas como definição destes conceitos, que foram utilizados ao longo das demonstrações do Teorema e na resolução de exercícios. Porém, tratando-se de importantes teoremas da geometria plana, orientamos o leitor a complementar seus estudos pelas referências bibliográficas listada ao final da pesquisa.

Além de estimular os alunos, pretende-se orientar professores quanto a importância da contextualização histórica do Teorema de Pitágoras e da necessidade de estimular um estudo mais aprofundado deste conceito pelos alunos. Portanto, esperamos que esta pesquisa tenha cumprido seu objetivo que é realizar um estudo aprofundado do Teorema de Pitágoras de forma acessível aos alunos de nível fundamental e médio.

Como proposta de continuidade da pesquisa, pretende-se elaborar uma sequência didática abrangendo todo o conteúdo aqui abordado que deverá ser aplicada a alunos do nono ano do ensino fundamental. Após a aplicação, será feito o levantamento dos dados e sistematização dos resultados para verificar a eficácia da abordagem do Teorema proposta por esta pesquisa.

Referências Bibliográficas

ALMOULOUD, S. *Prova e demonstração em matemática*: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. Grupo de Educação Matemática GT 19, 2007

ARAUJO, F. *Teorema de Pitágoras*: mais que uma relação entre áreas. In 5º ENCONTRO DA RPM, Salvador, 2011

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro: Coleção Professor de Matemática, SBM, 2012

BARBOSA, R. M. *Descobrindo padrões pitagóricos*: geométricos e numéricos. São Paulo: Atual, 1993

BICUDO, I. *Demonstração em Matemática.* BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, Ano 15, nº 18, p.79-90. Rio Claro: UNESP, 2002

BOYER, C. B. *História da Matemática.* São Paulo: Edgard Blucher, 1974

BRASIL, Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: terceiro e quarto ciclos: Matemática. Brasília. SEF/MEC, 1998

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*: Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018

CLEMENTE, J. C. et. al. *Ensino e aprendizagem da Geometria*: Um estudo a Partir dos periódicos em Educação Matemática. Juiz de Fora: UFJF, 2015

EUCLIDES. *Os elementos.* Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009. 600 p.

FERNANDES, S. S. *A Contextualização no Ensino de Matemática*: Um Estudo com Alunos e Professores do Ensino Fundamental da Rede Particular de Ensino do Distrito Federal. UCB, 2011. 16 p. Disponível em: < http:// http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22006/SusanadaSilvaFernandes.pdf>. Acesso em: 11 mar. 2019

GASPAR, M. T. J. *Aspectos do desenvolvimento Geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores.* Rio Claro: Unesp, 2003. 307 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003

JOYCE, D. E. *Euclid's Elements* – Book I: Proposition 47. Disponível em: < *https : //mathcs.clarku.edu/ djoyce/java/elements/bookI/propI48.html* >. Acesso em: 16 mar. 2019

LIMA, E. L. *Medida e forma em geometria: comprimento, área, volume e semelhança.* Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1991

LIMA, E. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias.* 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012

LOOMIS, E. S. *The Pythagorian Proposition.* 2 ed. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1940

LORENZATO, S. *Por que não ensinar Geometria.* In: Educação Matemática em Revista. Blumenau, v. 3, n. 4, p. 3-13, 1995

MARTINS, R. B; MANDARINO, M. C. F. *Argumentação, prova e demonstração em geometria*: análise de coleções de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental. Boletim Gepem, Rio de Janeiro, n. 62, p. 101-115, jan./jun. 2014

NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* 2 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013

OLIVEIRA, V. C. *A História da Matemática e o Processo de Ensino Aprendizagem.* In: XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul, Bagé: UNIPAMPA, p. 459 – 462, 2014

ONUCHIC, L. R. *A Resolução de Problemas na Educação Matemática*: Onde Estamos e Para Onde Iremos?. In: IV JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Passo Fundo, 2012

ONUCHIC, L. R.; JUNIOR, L. C. L. *Ensino e Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas Como Prática Sociointeracionista.* Bolema, Rio Claro (SP), v. 29, n. 53, p. 955-978, 2015

PAVANELLO, R. M. *O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil*: Causas e Consequências. In: Revista Zetetiké. Campinas, v. 1, n. 1, 1993

PEREIRA, D. C. et. al, *As Lacunas Existentes no Ensino de Geometria Plana.* In: Revista Perquirere, Patos de Minas, n. 2, 2005

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas.* Rio de janeiro: Interciência, 1995

POLYA, G. *Induction And Analogy In Mathematics.* New Jersey: Princeton University Press, 1954

ROMANATTO, M. C. *Resolução de Problemas nas Aulas de Matemática.* Revista Eletrônica de Educação, v. 6, nº1, p. 299-311. São Carlos: UFSCar, 2012

SILVA, J. E. H. et al. *Teorema de Pitágoras*: extensões e generalizações. C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 6, p. 21-47, jul. 2016

STRATHERN, P. *Pitágoras e seu Teorema em 90 minutos*; tradução Marcus Penchel - Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998.

TOLEDO, M. *Didática de matemática*: como dois e dois: a construção da Matemática. São Paulo: FTD, 1997

WAGNER, E. *Teorema de Pitágoras e áreas.* Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 86 p. Disponível em: $<$ *http://www.obmep.org.br/docs/apostila3.pdf* $>$. Acesso em: 16 mar. 2019

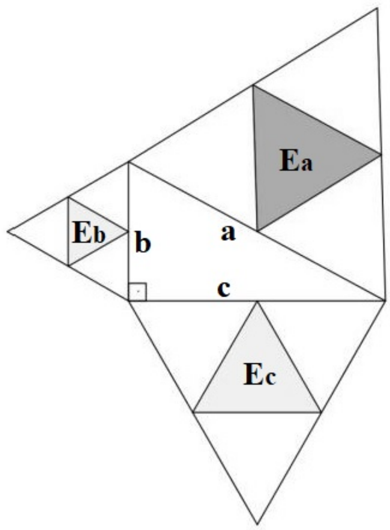
Apêndice A

Solução das Extensões Propostas como Exercícios

Na seção 3.6 do *Capítulo 3*, propomos a demonstração de quatro extensões para o Teorema de Pitágoras como exercício ao leitor. A seguir, apresentamos a resolução destes exercícios.

Extensão 1: Provar a extensão do Teorema de Pitágoras para triângulos equiláteros inscritos considerando os pontos médios dos triângulos equiláteros que têm como base os lados do triângulo retângulo.

Figura A.1: Exercício 1 de extensão



Fonte: SILVA et. al (p. 12)

Solução: Sejam E_a, E_b e E_c as áreas dos triângulos equiláteros inscritos considerando os pontos médios dos triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo. Sejam ainda T_a, T_b e T_c as áreas dos triângulos equiláteros que têm como base os lados a, b e c do triângulo retângulo respectivamente.

Analisando os triângulos de áreas E_a e T_a, como o lado do triângulo de área E_a é base média do triângulo de área T_a, este lado mede $\frac{a}{2}$. Logo, o triângulo de área T_a está dividido em quatro triângulos congruentes. Logo, $T_a = 4E_a$.

De forma análoga, $T_b = 4E_b$ e $T_c = 4E_c$.

Utilizando a proporção das áreas de triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo

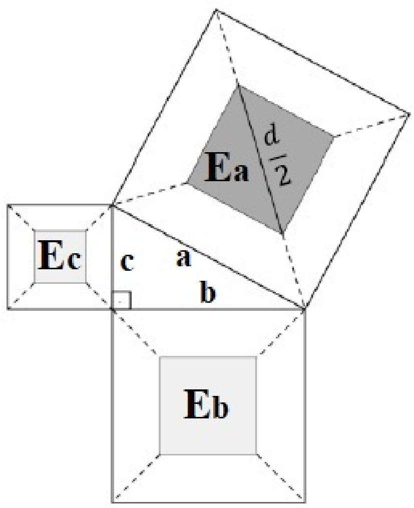
$$T_a = T_b + T_c \Rightarrow 4E_a = 4E_b + 4E_c.$$

Portanto,

$$E_a = E_b + E_c.$$

Extensão 2: Provar a extensão do Teorema de Pitágoras para quadrados cujos centros coincidem com os centros dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo e suas diagonais têm como medida $\frac{d}{2}$, onde d indica a medida da diagonal do quadrado básico.

Figura A.2: Exercício 2 de extensão



Fonte: SILVA et. al (p. 12)

Solução: Sejam E_a, E_b e E_c as áreas dos quadrados cujos centros coincidem com os centros dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo. Sejam ainda as áreas Q_a, Q_b e Q_c dos quadrados de lados a, b e c respectivamente.

Como o lado do quadrado de área Q_a mede a, pelo Teorema de Pitágoras

$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}. \tag{A.1}$$

Como a diagonal do quadrado de área E_a mede $\frac{d}{2}$, sendo l a medida de seu lado, e pelo Teorema de Pitágoras

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow d^2 = 8l^2 \Rightarrow d = 2l\sqrt{2}. \tag{A.2}$$

De $(A.1)$ e $(A.2)$

$$d = a\sqrt{2} = 2l\sqrt{2} \Rightarrow l = \tfrac{a}{2}.$$

Como

$$Q_a = a^2 \text{ e } E_a = l^2 = \tfrac{a^2}{4},$$

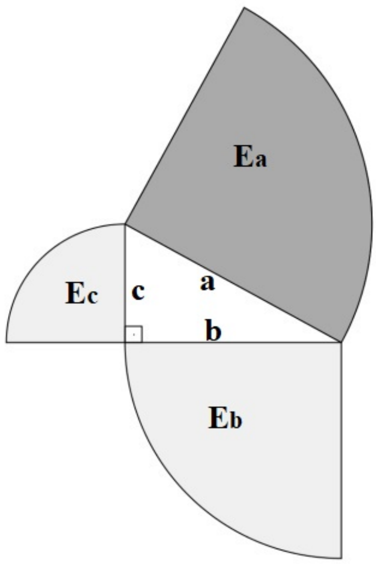
então $Q_a = 4E_a$. De modo análogo, $Q_b = 4E_b$ e $Q_c = 4E_c$.

Pelo Teorema de Pitágoras $Q_a = Q_b + Q_c$. Logo,

$$4E_a = 4E_b + 4E_c \Rightarrow E_a = E_b + E_c.$$

Extensão 3: Provar a extensão do Teorema de Pitágoras para quadrantes sobre os lados do triângulo retângulo.

Figura A.3: Exercício 3 de extensão



Fonte: SILVA et. al (p. 14)

Solução: Sejam E_a, E_b e E_c as áreas dos quadrantes construídos sobre os lados do triângulo retângulo de raios medindo a, b e c respectivamente.

Sabe-se que E_a é $\frac{1}{4}$ da área de um círculo de raio a, logo

$$E_a = \frac{\pi a^2}{4}.$$

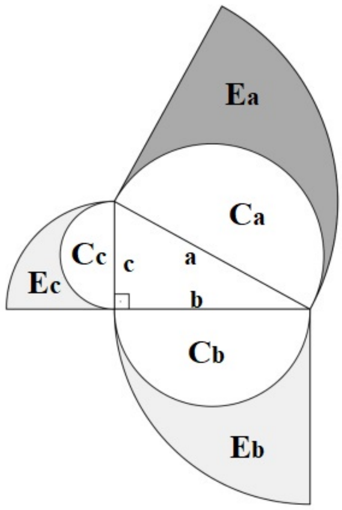
De modo análogo, $E_b = \frac{\pi b^2}{4}$ e $E_c = \frac{\pi c^2}{4}$.

Como, pelo Teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$

$$E_b + E_c = \frac{\pi}{4}(b^2 + c^2) = \frac{\pi a^2}{4} = E_a \Rightarrow E_a = E_b + E_c.$$

Extensão 4: Provar a extensão do Teorema de Pitágoras para regiões exteriores aos semicírculos e interiores aos quadrantes de círculos.

Figura A.4: Exercício 4 de extensão



Fonte: SILVA et. al (p. 14)

Solução: Sejam E_a, E_b e E_c as áreas das regiões exteriores aos semicírculos e interiores aos quadrantes dos círculos. Sejam C_a, C_b e C_c as áreas dos semicírculos construídos sobre os lados a, b e c do triângulo retângulo respectivamente. Sejam ainda S_a, S_b e S_c as áreas dos quadrantes construídos sobre os lados a, b e c do triângulo retângulo respectivamente.

Conforme provado anteriormente

$$S_a = S_b + S_c \text{ e } C_a = C_b + C_c.$$

Como $E_a = S_a - C_a$, $E_b = S_b - C_b$ e $E_c = S_c - C_c$,

$$E_b + E_c = S_b - C_b + S_c - C_c = S_a - C_a = E_a \Rightarrow E_a = E_b + E_c.$$